

Konstruktion und Analyse
einer funktionalen
Renormierungsgruppengleichung
für Gravitation im
Einstein-Cartan-Zugang

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Jan-Eric Daum
geb. in Hadamar
Mainz, den 25. Oktober 2010

Tag der mündlichen Prüfung: 11.03.2011

Kurzfassung

Während das Standardmodell der Elementarteilchenphysik eine konsistente, renormierbare Quantenfeldtheorie dreier der vier bekannten Wechselwirkungen darstellt, bleibt die Quantisierung der Gravitation ein bislang ungelöstes Problem. In den letzten Jahren haben sich jedoch Hinweise ergeben, nach denen metrische Gravitation *asymptotisch sicher* ist. Das bedeutet, daß sich auch für diese Wechselwirkung eine Quantenfeldtheorie konstruieren läßt. Diese ist dann in einem verallgemeinerten Sinne renormierbar, der nicht mehr explizit Bezug auf die Störungstheorie nimmt. Zudem sagt dieser Zugang, der auf der Wilsonschen Renormierungsgruppe beruht, die korrekte mikroskopische Wirkung der Theorie voraus. Klassisch ist metrische Gravitation auf dem Niveau der Vakuumfeldgleichungen äquivalent zur Einstein-Cartan-Theorie, die das Vielbein e und den Spinzusammenhang ω als fundamentale Variablen verwendet. Diese Theorie besitzt allerdings mehr Freiheitsgrade, eine größere Eichgruppe, und die zugrundeliegende Wirkung ist von erster Ordnung. Alle diese Eigenschaften erschweren eine zur metrischen Gravitation analoge Behandlung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine dreidimensionale Trunkierung von der Art einer verallgemeinerten Hilbert-Palatini-Wirkung untersucht, die neben dem Laufen der Newton-Konstante G_k und der kosmologischen Konstante Λ_k auch die Renormierung des Immirzi-Parameters γ_k erfaßt. Trotz der angedeuteten Schwierigkeiten war es möglich, das Spektrum des freien Hilbert-Palatini-Propagators analytisch zu berechnen. Auf dessen Grundlage wird eine Flußgleichung vom Propertime-Typ konstruiert. Zudem werden geeignete Eichbedingungen gewählt und detailliert analysiert. Dabei macht die Struktur der Eichgruppe eine Kovariantisierung der Eichtransformationen erforderlich. Der resultierende Fluß wird für verschiedene Regularisierungsschemata und Eichparameter untersucht. Dies liefert auch im (e, ω) -Zugang überzeugende Hinweise auf *asymptotische Sicherheit* und damit auf die mögliche Existenz einer mathematisch konsistenten und prädiktiven fundamentalen Quantentheorie der Gravitation. Insbesondere findet man ein Paar *nicht-Gaußscher Fixpunkte*, das *Anti-Screening* aufweist. An diesen sind G_k und Λ_k jeweils *relevante* Kopplungen, wohingegen γ_k an einem Fixpunkt *irrelevant* und an dem anderen *relevant* ist. Zudem ist die Beta-Funktion des Immirzi-Parameters von bemerkenswert einfacher Form. Die Resultate sind robust gegenüber Variationen des Regularisierungsschemas. Allerdings sollten zukünftige Untersuchungen die bestehenden Eichabhängigkeiten reduzieren.

Abstract

Whereas the Standard Model of elementary particle physics represents a consistent, renormalizable quantum field theory of three of the four known interactions, the quantization of gravity still remains an unsolved problem. However, in recent years evidence for the *asymptotic safety* of gravity was provided. That means that also for gravity a quantum field theory can be constructed that is renormalizable in a generalized way which does not explicitly refer to perturbation theory. In addition, this approach, that is based on the Wilsonian renormalization group, predicts the correct microscopic action of the theory. In the classical framework, metric gravity is equivalent to the Einstein-Cartan theory on the level of the vacuum field equations. The latter uses the tetrad e and the spin connection ω as fundamental variables. However, this theory possesses more degrees of freedom, a larger gauge group, and its associated action is of first order. All these features make a treatment analogue to metric gravity much more difficult.

In this thesis a three-dimensional truncation of the form of a generalized Hilbert-Palatini action is analyzed. Besides the running of Newton's constant G_k and the cosmological constant Λ_k , it also captures the renormalization of the Immirzi parameter γ_k . In spite of the mentioned difficulties, the spectrum of the free Hilbert-Palatini propagator can be computed analytically. On its basis, a propertime-like flow equation is constructed. Furthermore, appropriate gauge conditions are chosen and analyzed in detail. This demands a covariantization of the gauge transformations. The resulting flow is analyzed for different regularization schemes and gauge parameters. The results provide convincing evidence for *asymptotic safety* within the (e, ω) -approach as well and therefore for the possible existence of a mathematically consistent and predictive fundamental quantum theory of gravity. In particular, one finds a pair of *non-Gaussian fixed points* that displays *anti-screening*. At these, G_k and Λ_k are *relevant* couplings, whereas γ_k is *irrelevant* at one fixed point and *relevant* at the other one. In addition, the beta function of the Immirzi parameter is remarkably simple. The results are robust with respect to variations of the regularization scheme. However, future analyses should reduce their gauge dependencies.

Inhaltsverzeichnis

Prolog	1
1 Renormierungsgruppengleichungen, asymptotische Sicherheit und Quanten-Einstein-Gravitation	7
1.1 Grenzen der Allgemeinen Relativitätstheorie	7
1.1.1 Die Allgemeine Relativitätstheorie als effektive Theorie	10
1.2 Die Idee der effektiven Mittelwertwirkung $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$	11
1.3 Theorienraum und Trunkierung	18
1.4 Nicht-störungstheoretische Renormierbarkeit	20
1.5 Quanten-Einstein-Gravitation: Resultate und Eigenschaften	24
1.6 Coarse Graining, laufende Kopplungen und effektive Theorien in anderen Bereichen der Physik	27
2 Die klassische Theorie: Die Holst-Wirkung und ihre Bewegungsgleichungen	31
2.1 Die Holst-Wirkung und ihre Bewegungsgleichungen	31
2.2 Zur Struktur des Immirzi-Terms	38

3	Eine effektive Mittelwertwirkung für First-Order-Gravitation	45
3.1	Die Konstruktion von Γ_k	45
3.2	Zur Konstruktion eines Cutoff-Operators \mathcal{R}_k für Gravitation im First-Order-Formalismus	56
3.3	Die Propertime-Gleichung	58
3.4	Die Beziehung zwischen der Wetterich-Gleichung und der Propertime-Gleichung	63
3.5	QECG und QEG	65
4	Eichfixierung und Geistwirkung	71
4.1	Hintergrundinvariante Geistwirkungen	71
4.1.1	Die Algebra der Eichtransformationen auf dem Niveau der Quanten- felder	71
4.1.2	Ward-Operatoren und deren Algebra	79
4.1.3	Kovariantisierung der Eichtransformationen	83
4.1.4	Die Algebra der Ward-Operatoren für Hintergrund- und wahre Eichtransformationen in der ursprünglichen Parametrisierung	90
4.1.5	Hintergrundkovariante Diffeomorphismen und deren Ward-Algebra	93
4.1.6	Hintergrundeichinvariante Eichfixierungsterme	98
4.2	Die Konstruktion der hintergrundinvarianten Geistwirkung	112
4.2.1	Die Nullmoden des freien Faddeev-Popov-Operators	118
4.3	Exkurs: Die Kopplung von Yang-Mills-Theorie an Gravitation	120

5	Trunkierung, Projektionsmethode und Flußgleichung	121
5.1	Die Trunkierung	121
5.2	Der (anti-)selbstduale Hintergrund $\bar{\omega}^{(\pm)}$	123
5.3	Die konkrete Form der Flußgleichung	125
6	Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$	127
6.1	Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich der unzerlegten Felder	127
6.2	Die Zerlegung der Fluktuationen und Geister	131
6.2.1	Parametrisierung der Fluktuationfelder $\bar{\varepsilon}_\mu^a$ und $\bar{\tau}_\mu^{ab}$	132
6.3	Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich der Komponentenfelder	137
6.3.1	Der freie Anteil	140
6.3.2	Der Wechselwirkungsanteil	143
7	Die Auswertung der Flußgleichung	149
7.1	Eine Propertime-Gleichung für Gravitation im First-Order-Zugang	149
7.2	Die Blockstruktur von H_0	154
7.2.1	Impulseigenbasen	157
7.2.2	Die Eigenwerte und Eigenvektoren des Matrixanteils von H_0	159
7.2.3	Die transversalen Projektoren und deren Eigenvektoren	161
7.3	Verallgemeinerte Orts- und Impulsdarstellung	165
7.4	Die Berechnung der Spur	171
7.4.1	Die freien H_0 -Logarithmen	171
7.4.2	Die Wechselwirkungsbeiträge	174
7.5	Die Berechnung von $\frac{1}{2}\text{Tr} \ln \left\{ \mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right\}$	188
7.5.1	Zu den algebraischen Eigenschaften der Matrix \mathcal{M}	189

7.5.2	Die Berechnung von $\text{Tr}_{\text{alg}} \ln \left\{ \mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right\}$	193
7.6	Die Regularisierung der Spuren	194
7.6.1	Die $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Erweiterung	197
7.6.2	Die Propertime-Regularisierung	199
7.6.3	Die explizite Regularisierung der Spuren	206
7.6.4	Die explizite Flußgleichung für Γ_k	217
7.6.5	Die Beta-Funktionen für g_k , γ_k und λ_k	220
8	Analyse des Renormierungsgruppenflusses	223
8.1	Das (λ, g) -System	224
8.2	Die Identifikation des μ -Parameters mit der laufenden Planck-Masse	231
8.3	Das (γ, g) -System	232
8.3.1	Die Pseudofixpunkte \mathbf{NGFP}'_{\pm}	233
8.3.2	Die physikalischen Fixpunkte \mathbf{NGFP}'_0 und \mathbf{NGFP}'_{∞}	237
8.3.3	Das Wesen der Pseudofixpunkte \mathbf{NGFP}'_{\pm}	242
8.3.4	Der explizite Fluß des (γ, g) -Systems	245
8.3.5	Eine Hypothese hinsichtlich der exakten Beta-Funktionen des (γ, g) - Systems	250
8.3.6	Test der Hypothese bezüglich der exakten Form von β_g und β_{γ}	254
8.3.7	Zur Eichparameterabhängigkeit	255
8.4	Das (λ, γ, g) -System	259
8.4.1	Die Geometrie des (λ, γ, g) -Flusses	259
8.4.2	Die physikalischen Fixpunkte \mathbf{NGFP}_0 und \mathbf{NGFP}_{∞}	264

8.4.3	Der explizite Fluß des (λ, γ, g) -Systems	271
9	Diskussion und Ausblick	279
9.1	Zusammenfassung	279
9.2	Methodische Entwicklungen	281
9.3	Strukturelle Eigenschaften des RG-Flusses	282
9.4	Stabilitätseigenschaften des RG-Flusses	283
9.5	Ausblick	285
A	Eine kurze Einführung in die Einstein-Cartan-Gravitation	287
A.1	Vielbein, Spinzusammenhang und Torsion	287
A.2	Die Beziehung zum metrischen Formalismus	305
B	(Anti-)Selbstduale euklidische Zusammenhänge und Feldstärken	319
C	Die Hintergrundfeld-Methode	325
D	Die Berechnung der Ward-Algebren	341
D.1	Die Algebra der Ward-Operatoren \mathcal{W}_D und \mathcal{W}_L	341
D.2	Die Algebra der modifizierten Operatoren $\widetilde{\mathcal{W}}_D$ und \mathcal{W}_L	348
D.3	Eine Bemerkung zur Algebra der Ward-Operatoren \mathcal{W}_D^G und \mathcal{W}_L^G in der ursprünglichen Parametrisierung	354
E	Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$	355
E.1	Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$ in den unzerlegten Feldern	355
E.2	Zur Hermitizität von $\Gamma_k^{(2)}$	362

F	Berechnung des freien Anteils $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}}$	365
F.1	Berechnung des freien Anteils $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}$ im Gravitonsektor	366
F.1.1	Der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(0)}$	366
F.1.2	Berechnung des Eichfixierungsbeitrags $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(0)}$	371
F.1.3	Der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$	373
F.1.4	Der $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$	380
F.1.5	Der $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(0)}$	387
F.2	Der freie Anteil $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ im Gravitonsektor	397
F.3	Berechnung des freien Anteils $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gh}}^{\text{quad}(0)}$ im Geistsektor	398
G	Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren des algebraischen Anteils von H_0	401
G.1	Die Eigenwerte von H_0	402
G.2	Die allgemeinen Lösungsformeln für Polynome dritten und vierten Grades .	405
G.3	Die Eigenvektoren von H_0	406
H	Berechnung des Beitrages erster Ordnung zu $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}}$	409
H.1	Der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(1)}$	410
H.1.1	Der skalare Sektor	411
H.1.2	Der Vektor-Sektor	413
H.1.3	Der Tensor-Sektor	416
H.2	Berechnung des Eichfixierungsbeitrags $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(1)}$	417
H.2.1	Der skalare Sektor	418
H.2.2	Der Vektor-Sektor	422
H.3	Der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$	424

H.3.1	Der skalare Sektor	425
H.3.2	Der Vektor-Sektor	428
H.3.3	Der Tensor-Sektor	445
H.4	Der $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$	446
H.4.1	Der skalare Sektor	447
H.4.2	Der Vektor-Sektor	451
H.4.3	Der Tensor-Sektor	469
H.5	Berechnung des Wechselwirkungsanteils $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gh}}^{\text{quad}(1)}$ im Geistsektor	470
I	Nachweis der Hermitizität von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$ auf dem Niveau der zerlegten Fluk- tuationen	473
I.1	Überprüfung der Hermitizität von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(1)}$ im $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Block	473
I.1.1	Der skalare Sektor	473
I.1.2	Der Vektor-Sektor	474
I.1.3	Der Tensor-Sektor	474
I.2	Überprüfung der Hermitizität des Eichfixierungsbeitrags $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(1)}$	475
I.2.1	Der skalare Sektor	475
I.2.2	Der Vektor-Sektor	476
I.2.3	Überprüfung der Hermitizität von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$ im $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ - bzw. im $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Block	477
I.2.4	Der skalare Sektor	477
I.2.5	Der Vektor-Sektor	479
I.2.6	Der Tensor-Sektor	489
J	Die Kontraktion von \tilde{V} mit den Projektoren	491

J.1	Der skalare Sektor	492
J.1.1	Beiträge aus der $\bar{\epsilon}$ - $\bar{\epsilon}$ -Komponente	492
J.1.2	Beiträge aus der Eichfixierung	493
J.1.3	Beiträge aus der $\bar{\epsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Komponente	494
J.1.4	Beiträge aus der $\bar{\tau}$ - $\bar{\epsilon}$ -Komponente	495
J.1.5	Beiträge aus dem Geistsektor	496
J.2	Der Vektor-Sektor	497
J.2.1	Beiträge aus der $\bar{\epsilon}$ - $\bar{\epsilon}$ -Komponente	498
J.2.2	Beiträge aus der Eichfixierung	501
J.2.3	Beiträge aus der $\bar{\epsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Komponente	502
J.2.4	Beiträge aus der $\bar{\tau}$ - $\bar{\epsilon}$ -Komponente	508
J.2.5	Beiträge aus dem Geistsektor	514
J.3	Der Tensor-Sektor	515
J.3.1	Beiträge aus der $\bar{\epsilon}$ - $\bar{\epsilon}$ -Komponente	515
J.3.2	Beiträge aus der $\bar{\epsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Komponente	516
J.3.3	Beiträge aus der $\bar{\tau}$ - $\bar{\epsilon}$ -Komponente	517
K	Die Identifikation des μ-Parameters mit der laufenden Planck-Masse	519
	Literaturverzeichnis	521

Prolog

Der reduktionistische Zugang ist in der Physik im vergangenen Jahrhundert ausgesprochen erfolgreich gewesen. Er hat vier Grundkräfte identifiziert, auf die sich alle physikalischen Phänomene vermutlich zumindest prinzipiell zurückführen lassen. Drei dieser vier Kräfte (die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung) lassen sich auf klassischem Niveau als Yang-Mills-Theorien formulieren und besitzen damit eine wohlverstandene geometrische Struktur. Die zugehörigen Quantenfeldtheorien können als Störungstheorien definiert werden, denen eine flache Minkowski-Raumzeit zugrunde liegt. Sie bilden das Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Dieses ist *renormierbar*, wobei dieser zentrale Begriff hier explizit im Sinne der Störungstheorie verstanden wird.

Die vertrauteste dieser vier Wechselwirkungen, die Gravitation, entzieht sich bislang einem Verständnis auf Quantenniveau. Im klassischen Regime ist die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) bei der Beschreibung gravitativer Phänomene ausgesprochen erfolgreich. Eine Anwendung des störungstheoretischen Programms auf die ART würde drei Eigenschaften postulieren:

- Bei dem zu quantisierenden Trägerfeld der Freiheitsgrade der Gravitation handelt es sich um die Metrik $g_{\mu\nu}(x)$. Die zugrundeliegende Wirkung ist somit ein (diffeomorphismusinvariantes) Funktional der Metrik.
- Die mikroskopische Wirkung, die es zu quantisieren gilt, ist durch die Wirkung der klassischen Theorie, die *Einstein-Hilbert-Wirkung*, gegeben. Sie ist daher von der Form

$$S_{\text{E-H}}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1)$$

mit der Newton-Konstante G , dem Krümmungsskalar R und $g := \det(g_{\mu\nu})$.

- Die Quantentheorie läßt sich definieren als eine Störungstheorie um die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ oder eine andere feste Hintergrund-Metrik, d. h.

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (2)$$

und $h_{\mu\nu}(x)$ ist „klein“: $h_{\mu\nu}(x) \ll 1$.

Es stellt sich heraus, daß die Vorhersagekraft einer solchen Theorie vermutlich sehr begrenzt wäre, da in ihr der Begriff der „Renormierbarkeit“ zu eng gefaßt ist. Die Tatsache, daß die Raumzeit nun selbst einer Dynamik unterworfen ist, legt zudem intuitiv nahe, konzeptionell über die Idee einer Störungsentwicklung um eine feste Metrik und die Annahme einer starren Hintergrund-Raumzeit hinauszugehen.

Die populärsten Zugänge zur Quantengravitation in Form der Stringtheorie und der Loop-Quantengravitation (LQG) ziehen aus diesem Befund die Konsequenz, daß das Konzept einer lokalen Quantenfeldtheorie zu eingeschränkt ist, um die Quantisierung der Gravitation zu erlauben. Demgegenüber verläßt der der Arbeit zugrundeliegende Zugang der *asymptotischen Sicherheit* den Quantenfeldtheorie-Rahmen nicht. Vielmehr basiert er auf Ideen der *Wilsonschen Renormierungsgruppe* (RG), die einen weit allgemeineren Begriff von „Renormierbarkeit“ als die Störungstheorie nahelegen. Das zentrale Objekt dieses Zugangs ist durch das Funktional Γ_k gegeben, das eine skalenabhängige Verallgemeinerung der Wirkung darstellt; der Parameter k bezeichnet dabei eine Impulsskala. Da Γ_k im allgemeinen unendlich viele Monome enthält, muß für dieses Funktional ein Ansatz gemacht werden, der nur endlich viele dieser Terme berücksichtigt. Solche Ansätze bezeichnet man als *Trunkierungen*.

Die drei angesprochenen Zugänge unterscheiden sich somit hinsichtlich der Frage, welche weitere Struktur des perturbativen Zugangs aufgegeben werden muß, um Gravitation zu quantisieren. Dabei verwendet die Stringtheorie andere Feldfreiheitsgrade, und auch die fundamentale Wirkung ist bislang unbekannt. Demgegenüber ändert zwar die LQG die Freiheitsgrade in sogenannte Holonomien ab, die den Wilson-Loops aus der QCD verwandt sind, doch sie beruht nach wie vor auf (1) als der korrekten mikroskopischen Wirkung.

Das Programm der asymptotischen Sicherheit geht davon aus, daß sich Gravitation als

eine Quantenfeldtheorie mit der Metrik $g_{\mu\nu}$ als Freiheitsgrad definieren läßt, doch sind dazu vollkommen nicht-störungstheoretische Methoden und eine Verallgemeinerung der Renormierung erforderlich. Die korrekte mikroskopische Wirkung $S[g_{\mu\nu}]$, die im wesentlichen durch $\Gamma_{k=\infty}$ gegeben ist, stellt einen *nicht-Gaußschen Fixpunkt* des zugehörigen RG-Flusses dar. Sie ist somit eine Vorhersage der Theorie und keine Annahme, die in ihre Konstruktion eingeht. Eine Quantisierung der Gravitation wäre in diesem Rahmen äquivalent dazu, einem zunächst rein formalen Pfadintegral der Form

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D} g_{\mu\nu} e^{-S[g_{\mu\nu}]} \quad (3)$$

einen mathematischen Sinn zu geben und insbesondere den Limes eines unendlichen Ultraviolett-Cutoffs in wohldefinierter Weise auszuführen. Dies wird detailliert in Kapitel 1 erläutert.

Den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet die Anwendung der RG auf Gravitation im sogenannten *First-Order-Zugang*. Wir verstehen darunter eine Theorie der Gravitation, deren fundamentale Felder nicht die Metrik $g_{\mu\nu}$, sondern das *Vielbein* e^a_μ und der *Spinzusammenhang* ω^{ab}_μ sind. Die entsprechende klassische Theorie wird als *Einstein-Cartan-Theorie* (ECT) bezeichnet, und wir geben in Anhang A eine kurze Einführung in diesen Zugang, um mit den grundlegenden Eigenschaften der Felder e^a_μ und ω^{ab}_μ vertraut zu machen.

Die ECT unterscheidet sich von der metrischen Gravitation, der die Metrik $g_{\mu\nu}$ als dynamischer Freiheitsgrad zugrunde liegt, im wesentlichen in drei Punkten:

- Die ECT besitzt mehr Freiheitsgrade, da die Felder $(e^a_\mu, \omega^{ab}_\mu)$ insgesamt 40 unabhängige Komponenten besitzen, der symmetrische Tensor $g_{\mu\nu}$ hingegen nur 10. Dies drückt sich darin aus, daß die ECT im Gegensatz zur metrischen Theorie nicht-verschwindende *Torsion* erlaubt. Das hat die Existenz eines weiteren Terms in der Wirkung zur Folge, der mit dem sogenannten *Immirzi-Parameter* γ assoziiert ist und der in der metrischen Theorie nicht auftritt.
- In der ECT werden die Diffeomorphismen $\text{Diff}(\mathcal{M})$ auf der Raumzeit \mathcal{M} als Eichtransformationen der metrischen Theorie ersetzt durch die größere Gruppe $\text{Diff}(\mathcal{M}) \times \text{O}(4)_{\text{loc}}$, die zusätzlich die *lokalen Lorentz-Rotationen* $\text{O}(4)_{\text{loc}}$ enthält.

- Die Wirkung, die der klassischen ECT zugrunde liegt, ist von *erster Ordnung*, d. h. sie enthält keinen kinetischen Operator in der Standardform des d'Alembert-Operators.

Diese drei Eigenschaften tragen in unterschiedlichem Maße dazu bei, daß Berechnungen im Rahmen der ECT im allgemeinen aufwändiger und konzeptionell schwieriger sind als ihre Analoga im metrischen Fall. Dabei stellt hinsichtlich der grundsätzlichen Implementierung der RG-Methode der letztgenannte Punkt das größte Problem dar.

Im Rahmen der metrischen Theorie hat der RG-Zugang Hinweise geliefert, die darauf hindeuten, daß diese tatsächlich asymptotisch sicher ist und daß sie sich im konventionellen Quantenfeldtheorie-Rahmen quantisieren läßt. Die resultierende Theorie wird als *Quanten-Einstein-Gravitation* (QEG) bezeichnet.

Im Einführungskapitel 1 erläutern wir die Grundzüge der RG-Methode und geben im Zuge dessen die wichtigsten Eigenschaften und Resultate der QEG an. In Kapitel 2 wenden wir uns der klassischen Einstein-Cartan-Theorie zu und diskutieren die Bewegungsgleichungen der *Holst-Wirkung*, da die von uns betrachtete Trunkierung von dieser Form sein wird. Darüber hinaus geben wir in diesem Kapitel die wichtigsten Eigenschaften des *Immirzi-Terms* an. In Kapitel 3 stellen wir die allgemeine Konstruktion des Funktionals Γ_k vor und weisen auf die Probleme hin, mit denen diese im Vergleich zur metrischen Theorie behaftet ist. Dies motiviert die Verwendung der *Propertime-Gleichung*, die ebenfalls in diesem Kapitel diskutiert wird.

Um im Zuge der Eichfixierung gemäß der üblichen Faddeev-Popov-Methode eine invariante Geistwirkung zu erhalten, ist eine kovariante Parametrisierung der Gruppe aller Eichtransformationen $\text{Diff}(\mathcal{M}) \times \text{O}(4)_{\text{loc}}$ erforderlich. Diese konstruieren wir in Kapitel 4 und berechnen anschließend die zugehörige Geistwirkung.

Den Kern dieser Arbeit bildet die Ableitung und Analyse der Beta-Funktionen der Newton-Konstante G_k , der kosmologischen Konstante Λ_k und des Immirzi-Parameters γ_k . Diese Funktionen erfassen die Renormierung der drei angegebenen Kopplungen, die nun skalenabhängig sind. In Kapitel 5 werden schematisch die Grundzüge der Rechnung skizziert, bevor diese in den Kapiteln 6 und 7 ausgeführt wird. Dabei sind die resultierenden Beta-Funktionen zu kompliziert, um sie explizit angeben zu können. Schließlich werden in Kapitel 8 die Ergebnisse unserer Rechnung dargestellt und analysiert. Kapitel 9 faßt die wesentlichen verwandten Methoden sowie die erhaltenen Resultate zusammen. Zudem

geben wir dort einige Fragestellungen an, die für zukünftige Untersuchungen von Interesse sein könnten.

In den Anhängen A, B und C befinden sich die angesprochene Einführung in die klassische ECT sowie eine Darstellung der Hintergrundfeldmethode, die für unseren Zugang von großer Bedeutung ist. Den Gegenstand des Anhangs D bilden Rechnungen, auf die in Kapitel 4 zurückgegriffen wird. Die für die Kapitel 6 und 7 erforderlichen Rechnungen sind in den Anhängen E, F, G, H, I und J enthalten. Abschließend stellen wir einen speziellen Aspekt der Analyse aus Kapitel 8 separat im Anhang K dar.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen erste Schritte unternommen werden, um hinsichtlich der quantisierten First-Order-Gravitation zu dem Grad von Verständnis zu gelangen, den mittlerweile die QEG für sich beanspruchen kann. Insbesondere wird nach ersten Hinweisen hinsichtlich ihrer asymptotischen Sicherheit gesucht.

Wie im „Ausblick“ in Kapitel 9 dargelegt sind dabei nicht nur die erhaltenen Ergebnisse von Interesse. Vielmehr ist zu erwarten, daß künftige weiterführende Untersuchungen auch auf hier neu entwickelte Methoden und Konzepte sowie auf Teilergebnisse der verschiedenen Rechnungen zurückgreifen werden. Dementsprechend ist die Schilderung in dieser Arbeit nicht im Stile einer Forschungsarbeit gehalten, sondern sie ist weitaus ausführlicher und bemüht, jeden einzelnen Schritt zu erklären und zu motivieren.

Kapitel 1

Renormierungsgruppengleichungen, asymptotische Sicherheit und Quanten-Einstein-Gravitation

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die wesentlichen Ideen darstellen, die der Anwendung der Renormierungsgruppe auf Gravitation zugrunde liegen. Im Zuge dieser Diskussion sollen die zentralen Resultate für Gravitation im Metrik-Formalismus sowie das sich daraus ergebende Bild von asymptotisch sicherer Gravitation erläutert werden.

1.1 Grenzen der Allgemeinen Relativitätstheorie

In der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) ist die fundamentale Feldvariable durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ gegeben. Ihre Dynamik im Vakuum wird bestimmt durch die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}R(g)g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.1)$$

worin $R_{\mu\nu}(g)$ den Ricci-Tensor und $R(g)$ den Krümmungsskalar bezeichnen. Dies sind Tensoren der Stufe $(0, 2)$ bzw. $(0, 0)$, die von den ersten und zweiten Ableitungen der Metrik und ihrem Inversen abhängen und deren explizite Struktur für uns hier nicht von Interesse

ist. Sie ist in Anhang A zur Einstein-Cartan-Gravitation angegeben. Ferner ist Λ die kosmologische Konstante. Diese Bewegungsgleichungen sind die Euler-Lagrange-Gleichungen der *Einstein-Hilbert-Wirkung*

$$S_{\text{E-H}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (-R(g) + 2\Lambda) \quad (1.2)$$

mit $g := \det(g_{\mu\nu})$ und der Newton-Konstante G . Durch den gewählten Vorfaktor wird dieses Funktional dimensionslos, und in ihm wird über die gesamte zugrundeliegende Raumzeit-Mannigfaltigkeit \mathcal{M} integriert. Es weist zudem eine Eichinvarianz unter Diffeomorphismen, also glatten Reparametrisierungen der Koordinaten auf \mathcal{M} , auf.

Diese Theorie hat gegenüber ihrer Vorgängertheorie, der Newtonschen Gravitation, einige historische Tests bestanden. Beispielsweise konnte sie die Lichtablenkung im Schwerfeld eines massiven Sterns, die Periheldrehung des Merkurs sowie die Annäherung der beiden Partner in einem Doppelsternsystem durch Abstrahlung von Gravitationswellen erklären. Vom Submillimeterbereich bis zu Längenskalen im Bereich des Sonnensystem-Durchmessers liefert sie im Rahmen der Meßgenauigkeit eine hervorragende Beschreibung der durch die gravitative Wechselwirkung hervorgerufenen Phänomene. Der Status der Pioneer-Anomalie muß in diesem Zusammenhang als bislang noch ungeklärt betrachtet werden. Allerdings stößt die Theorie sowohl bei größeren als auch bei kleineren Längenskalen an ihre Grenzen. In ersterem Fall ist dieser Befund experimenteller Natur: Die beobachtete Abflachung der Rotationskurven von Galaxien kann im Rahmen der ART ohne zusätzliche Annahmen nicht verstanden werden, wobei die populärste unter diesen die Existenz von Dunkler Materie postuliert.

Bei kleineren Längenskalen ist die zu erwartende Modifikation der ART konzeptionell begründet, da es bislang insbesondere keinerlei experimentelle Befunde zur Gravitation im Quantenregime gibt [1]. Die drei maßgeblichen Naturkonstanten G , \hbar und c definieren über die Planck-Länge $l_{\text{Pl}} := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 1.6 \times 10^{-35}$ m eine Längenskala, bei der im heuristischen Sinne das Auftreten von gravitativen Quanteneffekten zu erwarten ist. Dies ist die Compton-Wellenlänge $\lambda_{\text{C}} := \frac{\hbar}{mc}$ der Planck-Masse $m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 2 \times 10^{-5}$ g $\sim 10^{19}$ GeV. Bereits die klassische Theorie sagt den Zusammenbruch der Punktteilchenidealisation vorher: Komprimiert man eine Masse $M > m$ in einem Bereich, der sich innerhalb der Kugel mit dem zu m gehörigen Schwarzschildradius $r_{\text{S}} := \frac{Gm}{c^2}$ befindet, so wird sich ein Schwar-

zes Loch bilden. Dessen Verhalten kann im nichtstationären Zustand in der Regel nicht mehr durch endlich viele Freiheitsgrade beschrieben werden: Es wird oszillieren und vibrieren und dabei Energie und Drehimpuls in Form von Gravitationswellen abstrahlen. Die Planck-Masse ist nun gerade diejenige Masse, für die die Compton-Wellenlänge $\lambda_C \propto m^{-1}$ und der Schwarzschild-Radius $r_S \propto m$ gleich sind.

Eine Theorie der Quantengravitation sollte in der Lage sein, bestimmte Phänomene zu beschreiben, die außerhalb des Anwendungsbereichs der ART liegen. Letztere sagt nach Theoremen von S. Hawking und R. Penrose unter sehr allgemeinen Bedingungen vorher, daß das Auftreten von Raumzeit-Singularitäten im klassischen Rahmen nahezu unvermeidlich ist [2]. Somit ist die ART selbst in der Lage, eine inhärente Vorhersage ihres eigenen Zusammenbruchs zu treffen. Aus physikalischer Sicht sind insbesondere zwei Realisierungen dieser Singularitäten interessant: Bei der einen handelt es sich um die Anfangssingularität zu Beginn des Universums, die vor allem durch die Existenz des kosmischen Mikrowellenhintergrundes nahegelegt wird, die anderen Singularitäten sind vom Typ der Schwarzen Löcher. Im ersten Fall treten in der klassischen Kosmologie typische Probleme wie das Horizont- oder das Flachheitsproblem auf, zu deren Lösung in vielen populären Modellen der Feldgehalt der Theorie um einen Skalar, das sogenannte „Inflaton“, erweitert wird. Die Dynamik dieses Quantenfeldes führt in der anfänglichen Entwicklung des Universums auf eine Phase exponentieller Inflation, welche die angedeuteten Schwierigkeiten behebt. Eine semiklassische Betrachtung der Schwarzen Löcher führte zum Befund, daß diese eine Strahlung abgeben, deren Temperatur proportional zu \hbar ist [3, 4]. Dabei ist davon auszugehen, daß dieser Effekt zumindest in führender Ordnung auch in einer vollen Quantengravitationstheorie auftreten sollte. Im Zuge dieser Abstrahlung nimmt die durch den Ereignishorizont berandete Fläche des Schwarzen Lochs ab, so daß es schrumpft. Das Ende des Prozesses läßt sich jedoch auf semiklassischem Niveau nicht verstehen. Insbesondere ist unklar, ob Quanteneffekte von dem Moment an, in welchem die Masse des Schwarzen Lochs von der Größenordnung der Planck-Masse ist, den qualitativen Verlauf dieses Vorgangs abändern, oder ob das Schwarze Loch letztlich vollständig verdampft. Da einem Schwarzen Loch in Analogie zur Thermodynamik auch eine Entropie zugeordnet werden kann, ist diese Frage auch im Hinblick auf die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes von großem Interesse. Schließlich ist das Schicksal der Information, die in Form der

Entropie der in das Schwarze Loch gefallenen Körper in dessen Inneres gelangt ist, völlig ungeklärt. Diese zwei Aspekte der beiden Arten von Singularitäten sind auch im Rahmen des Renormierungsgruppen-Zugangs, den wir im folgenden erläutern möchten, untersucht worden. Für das frühe Universum findet man auch hier Hinweise auf eine exponentielle Ausdehnung, die jedoch alleine auf den metrischen Freiheitsgraden basiert und somit keinen Zusatzmechanismus benötigt [5, 6]. Die Anwendung auf Schwarze Löcher legt zudem nahe, daß der Verdampfungsprozeß endet, sobald die Planck-Masse erreicht wird und dann als Überrest ein Schwarzes Loch dieser Masse verbleibt [7].

Letztlich sollte eine Quantentheorie der Gravitation aber auch im Hinblick auf die Einbettung dieser Wechselwirkung in den übrigen Rahmen existieren. Schließlich lassen sich die drei nicht-gravitativen Wechselwirkungen ebenfalls als Quantentheorien (sogar als Quantenfeldtheorien) formulieren, und Gravitation ist universell in dem Sinne, daß sie an *alle* Formen von Energie koppelt. In diesem Zusammenhang ist insbesondere auch die Idee anzuführen, daß Gravitation als ein universeller Regulator bezüglich der in diesen Theorien auftretenden Divergenzen dienen könnte, indem sie beispielsweise auf eine diskrete Mikrostruktur der Raumzeit führt, die bei kurzen Abständen eine entsprechende Regularisierung impliziert [8, 9]. Alle Versuche, eine fundamentale Theorie zu konstruieren, indem man ein klassisches Gravitationsfeld an Quantenfelder koppelt, haben bislang zu Inkonsistenzen geführt; solche Theorien existieren offenbar bloß in einem approximativen Sinn.

1.1.1 Die Allgemeine Relativitätstheorie als effektive Theorie

Die obigen Ausführungen legen nahe, die ART bloß als eine *effektive Theorie* zu betrachten, deren Gültigkeit auf den angesprochenen Längenbereich begrenzt ist. Präziser gesprochen ersetzen wir die Einstein-Hilbert-Wirkung $S_{\text{E-H}}[g_{\mu\nu}]$ aus (1.2) in diesem Zusammenhang durch ein effektives Wirkungsfunktional $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$, wobei der Parameter k die Dimension eines Impulses besitzt und eine entsprechende Skala festlegt. Seine Bedeutung läßt sich intuitiv am besten anhand der ursprünglichen Verwendung dieser Methode in der Hochenergiephysik erfassen: Das Funktional Γ_k definiert genau dann eine effektive Theorie bei der Skala k , wenn es Streuprozesse zweier Teilchen, in denen der Impulsübertrag gerade durch k gegeben ist, bereits auf Baumgraphenniveau exakt beschreiben kann; es müssen dazu also keine Feynman-Diagramme mit Schleifen betrachtet werden. Heuristisch gespro-

chen kann man einen derartigen Streuprozeß als ein Mikroskop auffassen, das bekanntlich gerade noch Strukturen von der Größenordnung der Wellenlänge λ der einfallenden Strahlung auflösen kann. Nach der De-Broglie-Beziehung gilt $\lambda = \frac{\hbar}{k}$, so daß hohe Impulsskalen mit dem Verhalten bei kleinen räumlichen Abständen in Beziehung stehen. Diese vereinfachte Darstellung liegt im Prinzip der Idee von Teilchenbeschleunigern zugrunde. Zwar besitzt k als Impulsskala die Dimension einer inversen Länge, doch im allgemeinen existiert keine Abbildung, die den unterschiedlichen Impulsskalen entsprechende Längenskalen im Ortsraum zuordnet. Dies ist nur im Sinne einer Heuristik für symmetriereduzierte Systeme mit nur einem dimensionsbehafteten Freiheitsgrad wie z. B. die Schwarzschild- oder die Friedmann-Robertson-Walker-Raumzeit der Fall. Zum intuitiven Verständnis nehmen wir nun aber an, für die Impulsskala k existiere eine eindeutige Übersetzung in Ortsraumskalen. Dann sagen die zuvor angesprochenen experimentellen Bestätigungen der ART aus, daß $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ für die Impulsskalen k , die Abständen vom Submillimeter-Bereich bis zur Größenordnung des Durchmessers des Sonnensystems zugeordnet werden, im wesentlichen von der Form der Einstein-Hilbert-Wirkung ist.

1.2 Die Idee der effektiven Mittelwertwirkung $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$

Nachdem bereits die Notwendigkeit einer Quantentheorie der Gravitation erläutert wurde, interessiert vor allem die Frage, was denn über $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ für sehr große Impulsskalen ausgesagt werden kann. Auch wenn dazu die Verwendung des quantenfeldtheoretischen Formalismus unerlässlich ist, möchten wir an dieser Stelle darauf verzichten, die Argumente des Funktionals um die notwendigen Geister und Hintergrundfelder zu erweitern. Dies erfolgt in Kapitel 3.

Wie konstruiert man nun ein solches Objekt Γ_k ? Im Sinne der Mikroskop-Analogie sollte man dabei offenbar das skalenabhängige Auflösungsvermögen berücksichtigen, und zwar derart, daß bei Absenken der Skala k eine entsprechende Vergrößerung, ein sogenanntes „Coarse Graining“, einsetzt. Die Quantenfeldtheorie kennt zwei Wirkungsfunktionale, die gewissermaßen die beiden Endpunkte dieses Flusses entlang der Skala verkörpern: Zum einen gibt es die mikroskopische Wirkung $S[\hat{g}_{\mu\nu}]$, die das Hochenergieverhalten der Theorie, d. h. deren Dynamik bei einem Ultraviolett-Cutoff Λ_{UV} , der das Pfadintegral-Maß regularisiert, erfaßt. Für den Grenzwert $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$ spricht man auch von der nackten oder

klassischen Wirkung. Der Einfachheit wegen soll von nun an $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$ betrachtet werden, was für die nachfolgenden Überlegungen keinerlei Einschränkung darstellt. Das Argument der nackten Wirkung ist das Quantenfeld $\hat{g}_{\mu\nu}$, und dieses Funktional berücksichtigt noch keinerlei Renormierungseffekte, d. h. keinerlei Wechselwirkung mit dem Vakuum der Theorie. Darüber hinaus existiert in Form der *effektiven Wirkung* $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ aber auch ein Funktional des Vakuumerwartungswertes g des Feldes \hat{g} , also $g_{\mu\nu} := \langle 0|\hat{g}_{\mu\nu}|0\rangle$, und aus der Stationaritätsbedingung für Γ folgt eine Bewegungsgleichung für g ; hierin bezeichnet $|0\rangle$ den Grundzustand der Theorie. Bleiben die Eichfixierung und die zugehörige Geistwirkung unberücksichtigt, so wird $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ aus $S[\hat{g}_{\mu\nu}]$ formal wie folgt konstruiert: Wir koppeln zunächst $\hat{g}_{\mu\nu}$ an eine externe Quelle $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, die man sich als Analogon eines äußeren \vec{B} -Feldes vorstellen kann. Unter Berücksichtigung des Maßfaktors $\sqrt{-g}$ in der Wirkung führt dies auf den Quellterm

$$S_{\text{source}} = - \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \mathcal{J}^{\mu\nu}(x) \hat{g}_{\mu\nu}(x). \quad (1.3)$$

Nun bestimmt man das Funktional $\mathcal{Z}[\mathcal{J}^{\mu\nu}]$ der Quellen, indem man die klassische Wirkung um den Quellterm ergänzt, dieses Objekt exponentiert und dann das Pfadintegral bezüglich $\hat{g}_{\mu\nu}$ berechnet:

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}^{\mu\nu}] := \int \mathcal{D}\hat{g}_{\mu\nu} \exp\left\{ - S[\hat{g}_{\mu\nu}] - S_{\text{source}} \right\}. \quad (1.4)$$

Dieses Funktional stellt das Gegenstück zur Zustandssumme der statistischen Physik dar. Es handelt sich um ein erzeugendes Funktional in dem Sinne, daß die Auswertung der n -fachen Funktionalableitung bezüglich \mathcal{J} bei verschwindenden Quellen die entsprechenden n -Punkt-Greensfunktionen der Theorie liefert. In diagrammatischer Terminologie erzeugt es alle unverbundenen Graphen. Diese haben die Eigenschaft, daß sie sich als Summe von Produkten verbundener Graphen schreiben lassen, die ihrerseits nicht faktorisiert sind. Für diese können wir ebenfalls ein erzeugendes Funktional angeben, und dabei handelt es sich gerade um den Logarithmus von \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}^{\mu\nu}] =: e^{W[\mathcal{J}^{\mu\nu}]}. \quad (1.5)$$

Der Vakuumerwartungswert des Feldes $\hat{g}_{\mu\nu}$ ist definiert als die Ableitung dieses Funktionals

bezüglich der Quellen

$$g_{\mu\nu}(x) := \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}(x)}. \quad (1.6)$$

Dabei ist die Funktionalableitung so zu definieren, daß sie mit dem nichttrivialen Integrationsmaß verträglich ist, was in dieser Einführung bereits implizit in dem Symbol $\frac{\delta}{\delta \dots}$ realisiert sein soll. Wir werden dies in Kapitel 3 explizit berücksichtigen. Die Gleichung (1.6) kann genau dann nach den Quellen aufgelöst werden, wenn die Hesse-Matrix $\frac{\delta^2 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}^{\rho\sigma}(y) \delta \mathcal{J}^{\mu\nu}(y)}$ regulär ist. Daraufhin bildet man die aus der klassischen Mechanik und der Thermodynamik bekannte Legendre-Transformation von W bezüglich der Quellen, was schließlich die effektive Wirkung $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ definiert:

$$\Gamma[g_{\mu\nu}] := \int d^4x \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}(x)} \mathcal{J}^{\mu\nu}(x) - W[\mathcal{J}_{\mu\nu}]. \quad (1.7)$$

Darin haben wir die Quellen $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ durch die Vakuumerwartungswerte $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt. Das Funktional (1.7) hat ebenfalls eine diagrammatische Bedeutung, denn es erzeugt die einteilchenirreduziblen, amputierten n -Punkt-Greensfunktionen, die keine äußeren Propagatoren mehr besitzen und vermöge derer sich wiederum alle verbundenen Graphen darstellen lassen. Seine Entsprechung in der statistischen Physik ist durch die freie Energie gegeben. Der Kontakt zwischen der nackten und der effektiven Wirkung wird in der Regel über die Störungstheorie in Form der Schleifen-Entwicklung, bei der es sich um eine Störungsreihe bezüglich Potenzen von \hbar handelt, hergestellt. Die nullte und erste Ordnung sind mit $S^{(2)}[g_{\mu\nu}] = \left. \frac{\delta S[\hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta \hat{g}_{\lambda\tau}(y) \delta \hat{g}_{\rho\sigma}(x)} \right|_{\hat{g}=g}$ gegeben durch

$$\Gamma[g_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \{ S^{(2)}[g_{\mu\nu}] \}. \quad (1.8)$$

Entwickelt man das Quantenfeld $\hat{g}_{\mu\nu}$ in (1.4) in Form einer Fourier-Reihe nach Moden im Impulsraum, so werden alle diese Moden im Pfadintegral mit der klassischen Wirkung und dem Quellterm als Boltzmann-Gewicht ausintegriert; die effektive Wirkung erfaßt bloß die Dynamik der Feldfreiheitsgrade, die verbleiben, nachdem das Feld bereits in seinen Erwartungswert im Grundzustand $|0\rangle$ relaxiert ist. Die Dynamik höherfrequenter Moden (oder kürzerer Zeitskalen) wurde herausgemittelt und läßt sich nicht mehr rekonstruieren. Unser Ziel ist es, dieses Vorgehen nun derart zu modifizieren, daß wir ein Funktional Γ_k erhalten,

bei dem die Mittelung bei unendlich hohen Frequenzen beginnt, dann aber bei Frequenzen der Größenordnung k stoppt, so daß die Dynamik aller langwelligeren Strukturen immer noch durch Γ_k erfaßt wird.

Dies wird erreicht, indem man einen Cutoff-Operator \mathcal{R}_k einführt und einen entsprechenden Term

$$\Delta_k S[\hat{g}_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \hat{g}_{\mu\nu} \mathcal{R}_k^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{g}_{\rho\sigma} \quad (1.9)$$

zu der Wirkung im Pfadintegral hinzufügt. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß \mathcal{R}_k eine Matrix im Feldraum ist. Wir unterdrücken jedoch im folgenden aus Gründen der Übersicht häufig die Indizes; schließlich ließen sich diese Überlegungen ebenso auf den Fall eines Skalarfeldes übertragen. In der Form (1.9) ist der Ausdruck aufgrund des Maßfaktors nicht quadratisch in den Feldern, was jedoch hier der vereinfachten Darstellung geschuldet ist: In der rigorosen Konstruktion ist dies der Fall. Dort spalten wir von dem vollen Quantenfeld eine Hintergrundkomponente ab und verwenden das durch diese induzierte Maß. Des weiteren ist zu beachten, daß auf gekrümmten Raumzeiten keine Fourier-Transformation im üblichen Sinne existiert. Die Impulsmoden p^2 sind dann als Eigenwerte einer geeigneten kovarianten Verallgemeinerung des d'Alembert-Operators $-\square$ zu verstehen, in dessen Konstruktion ebenfalls eine Metrik eingeht. Auch hier ist dies die besagte Hintergrundkomponente. An dieser Stelle ist jedoch zu bemerken, daß unser Zugang konzeptionell nicht auf einer Störungstheorie um diese Hintergrundkonfiguration beruht. Vielmehr wird sie vorrangig dazu benötigt, um die kurzwelligen von den langwelligen Moden des Feldes $\hat{g}_{\mu\nu}$ zu unterscheiden.

Im Bewußtsein dieser beiden Umstände können wir also sagen, daß der Cutoff-Term die Struktur eines k -abhängigen Massenterms aufweist. Zudem schreiben wir $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_k(p^2)$, wobei p^2 die übliche intuitive Interpretation besitzt. Der oben dargelegte erwünschte Effekt dieser Modifikation impliziert Forderungen an die Eigenschaften von \mathcal{R}_k in den beiden Impulsregimen relativ zu k . Wir geben diese an und erläutern sie im Anschluß:

$$p^2 \gg k^2 \quad : \quad \mathcal{R}_k(p^2) \approx 0, \quad (1.10)$$

$$p^2 \ll k^2 \quad : \quad \mathcal{R}_k(p^2) \approx k^2. \quad (1.11)$$

Die erste Gleichung besagt, daß für Moden mit Frequenz weit oberhalb der Cutoff-Skala

überhaupt keine Modifikation erfolgen soll: Sie sollen nach wie vor ausintegriert werden. Die zweite Eigenschaft legt fest, wie die Infrarot-Moden unterdrückt werden. Dies geschieht offenbar derart, daß ihnen allen eine konstante Masse k zugewiesen wird, was auf eine sehr weiche Unterdrückung bei der Impulsintegration führt. Diese Unterdrückung könnte auch anders implementiert werden. Insbesondere könnte man die niederfrequenten Moden vollständig unterdrücken, indem man einen Cutoff wählt, der in diesem Impulsbereich divergiert. Dieses singuläre Verhalten ist aber aus technischen Gründen problematisch [10], so daß man allgemein fordert, daß für $p^2 \ll k^2$ der Cutoff $\mathcal{R}_k(p^2)$ durch eine positive Funktion von k^2 der Massendimension 2 gegeben sein soll. Üblicherweise stellt man $\mathcal{R}_k(p^2)$ in der Form

$$\mathcal{R}_k(p^2) = Z_k k^2 R^{(0)}\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \quad (1.12)$$

dar, wobei die dimensionslose Funktion $R^{(0)}(y)$ auf glatte Art zwischen $R^{(0)}(0) = 1$ und $\lim_{y \rightarrow \infty} R^{(0)}(y) = 0$ interpoliert. Die Matrix Z_k erfaßt die Tensorstruktur des Cutoffs \mathcal{R}_k im Feldraum, auf die wir weiter unten eingehen.

Das skalenabhängige Pendant zur effektiven Mittelwertwirkung wird nun genauso konstruiert wie diese zuvor. Der Exponent im Pfadintegral wird lediglich um den Cutoff-Term $\Delta S_k[\hat{g}_{\mu\nu}]$ ergänzt, so daß alle Objekte nun eine explizite Skalenabhängigkeit aufweisen. Wir definieren die jetzt k -abhängigen Funktionale \mathcal{Z}_k und W_k gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k[\mathcal{J}^{\mu\nu}] &:= \int \mathcal{D}\hat{g}_{\mu\nu} \exp\left\{-S[\hat{g}_{\mu\nu}] - S_{\text{source}} - \Delta_k S[\hat{g}_{\mu\nu}]\right\} \\ &\equiv \exp\left\{W_k[\mathcal{J}^{\mu\nu}]\right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

und die Funktionalableitung bezüglich der Quelle liefert den ebenfalls k -abhängigen Felderwartungswert

$$g_{\mu\nu}(x) := \frac{\delta W_k[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}(x)}, \quad (1.14)$$

bei dem nun alle kurzwelligen Moden ausintegriert sind, so daß er derjenigen Feldkonfiguration entspricht, die man bei der Coarse-Graining-Skala k „sieht“. Das Auflösen dieser Gleichung nach den Quellen erlaubt wieder die Berechnung der Legendre-Transformierten

von $W_k[\mathcal{J}^{\mu\nu}]$. Subtrahieren wir von ihr anschließend noch die Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$, nachdem wir in dieser das Quantenfeld $\hat{g}_{\mu\nu}$ durch seinen Erwartungswert $g_{\mu\nu}$ ersetzt haben, so erhalten wir schließlich die *effektive Mittelwertwirkung* $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$:

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}] := \int d^4x \frac{\delta W_k[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}(x)} \mathcal{J}^{\mu\nu}(x) - W_k[\mathcal{J}_{\mu\nu}] - \Delta_k S[g_{\mu\nu}]. \quad (1.15)$$

Für dieses Objekt kann nun eine exakte Flußgleichung abgeleitet werden, die sagt, wie sich das „Mikroskop“ Γ_k bei einer infinitesimalen Änderung der Skala ändert. Mit $t := \ln k \Rightarrow \partial_t = k \partial_k$ ist diese sogenannte *Wetterich-Gleichung* schematisch von der Form

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k \right\}, \quad (1.16)$$

worin

$$\Gamma_k^{(2)} = \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_k[g]}{\delta g_{\rho\sigma}(y) \delta g_{\mu\nu}(x)} \right\} \quad (1.17)$$

bis auf ein Vorzeichen den inversen effektiven Propagator der Theorie bei der Skala k bezeichnet [11]. Die Spur auf der rechten Seite von (1.16) beinhaltet dabei neben der Kontraktion der Tensorindizes der beteiligten Felder aufgrund der zweifachen Funktionalableitung auch eine Ortsraumintegration. Wir wollen diese Gleichung hier nicht ableiten, da unseren Untersuchungen eine andere Flußgleichung zugrunde liegen wird.

Die interessanteste Eigenschaft dieser Gleichung zeigt sich darin, daß sie von der Wirkung $S[\hat{g}_{\mu\nu}]$ überhaupt nicht mehr abhängt. Dabei nehmen wir an, daß wir den Grenzwert $\Lambda_{\text{UV}} \rightarrow \infty$ bereits gebildet haben, so daß es sich bei S wirklich um die nackte Wirkung handelt. Die Eigenschaft (1.11) des Cutoff-Operators \mathcal{R}_k hat dann zur Folge, daß sich der Cutoff-Term $\Delta_k S$ im Pfadintegral im wesentlichen auf eine funktionale Delta-Distribution reduziert, die die Quantenfelder mit ihren Felderwartungswerten identifiziert, so daß also die explizite Gestalt von $S[\hat{g}_{\mu\nu}]$ den Status einer Anfangsbedingung besitzt, die für $k \rightarrow \infty$ vorgegeben werden muß. (Beim Übergang von Γ_∞ zu S handelt es sich im exakten Formalismus um einen nichttrivialen Schritt, der jedoch gemäß eines in Ref. [12] konstruierten Verfahrens durchgeführt werden kann.) Zudem garantiert die Forderung (1.10), daß Γ_k für $k \rightarrow 0$ in die übliche effektive Wirkung $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ übergeht, da in diesem Fall der Cutoff verschwindet und somit keinerlei Modifikation bewirkt.

Im folgenden soll kurz auf die allgemeine Struktur des Cutoffs eingegangen werden. Besitzt Γ_k einen kinetischen Term der üblichen Art und Weise, so enthält $\Gamma_k^{(2)}$ einen Operator der Form $-\square$ bzw. eine entsprechende kovariante Verallgemeinerung, deren Eigenwerte wir mit p^2 bezeichnen wollen. Die Eigenwerte λ_i von $\Gamma_k^{(2)}$ sind dann ebenfalls Funktionen von p^2 . Diagonalisieren wir diesen Operator mittels einer unitären Transformation U , so gilt

$$\check{\Gamma}_k^{(2)}(p^2) \equiv \text{diag}\{\lambda_i(p^2)\} := U^\dagger(p^2) \Gamma_k^{(2)}(p^2) U(p^2).$$

Idealerweise sollte der Cutoff nun derart beschaffen sein, daß er in diesen Eigenwerten die Ersetzung $\lambda_i(p^2) \rightarrow \lambda_i(p^2 + k^2 R^{(0)}(\frac{p^2}{k^2}))$ bewirkt. Eine Rücktransformation ergibt dann die Gestalt des Cutoffs in der Basis der Felder zu

$$\mathcal{R}_k(p^2) = U(p^2) \left[\check{\Gamma}_k^{(2)}\left(p^2 + k^2 R^{(0)}\left(\frac{p^2}{k^2}\right)\right) - \check{\Gamma}_k^{(2)}(p^2) \right] U^\dagger(p^2),$$

so daß die Tensorstruktur Z_k eindeutig festgelegt wäre und bloß noch die Profilmfunktion $R^{(0)}$ variiert werden könnte. Es stellt sich aber heraus, daß der erwünschte physikalische Effekt der erläuterten Modenunterdrückung bereits durch Cutoff-Operatoren erreicht werden kann, die in weitaus geringerem Maße der Struktur des inversen Propagators angepaßt sind. Beispielsweise könnte man das Coarse Graining auch mittels eines ausgesprochen groben Cutoffs der Form $\mathcal{R}_k(p^2) = k^2 R^{(0)}(\frac{p^2}{k^2}) \mathbb{1}$ implementieren, worin $\mathbb{1}$ die Identität auf dem Feldraum bezeichnet. Alle denkbaren Realisierungen des Cutoffs besitzen jedenfalls die Eigenschaft, daß der Träger der Ableitung $\partial_t \mathcal{R}_k(p^2)$ durch einen sehr kleinen Bereich um $p^2 \approx k^2$ gegeben ist, so daß dieser Operator in der Flußgleichung (1.16) nur eine sehr schmale Impulsschale um die Skala k^2 ausschneidet.

Bevor wir das allgemeine Vorgehen zur Lösung von (1.16) skizzieren, möchten wir diesen Abschnitt mit einer Bemerkung zum logischen Status dieser Gleichung beschließen. Das eigentliche Ziel der Bemühungen um eine Quantenfeldtheorie der Gravitation wäre die Berechnung eines Pfadintegrals vom Typ (1.4) mit der „richtigen“ nackten Wirkung $S[\hat{g}_{\mu\nu}]$: Daraus könnte man alle n -Punkt-Funktionen der Theorie erzeugen, und man hätte die Flußgleichung (1.16) *global* mit der korrekten Anfangsbedingung gelöst. Diese Gleichung wurde zwar unter der Voraussetzung hergeleitet, daß eine Pfadintegraldarstellung für das erzeugende Funktional existiert, doch sollte man diese Herleitung nur in einem heuristischen Sinn auffassen. Als partielle Differentialgleichung besitzt sie einen *lokalen* Charakter,

so daß sie insbesondere im Ultravioletten und im Infraroten (bei jeweils geeigneten Näherungen) Erklärungswert besitzt. Nicht zuletzt kann dieser Gleichung auch eine Bedeutung zukommen, wenn für die fundamentale Theorie gar keine Pfadintegraldarstellung existiert. Sie wäre gewissermaßen besser als ihre Herleitung, und wir werden sie in diesem Sinne als Definition der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k auffassen. Die ihr eigentlich zugrundeliegende intuitive Idee besteht in der Vorstellung, durch sukzessives Ausintegrieren irrelevanter Moden physikalische Prozesse bei immer größer werdender Auflösung zu beschreiben.

1.3 Theorienraum und Trunkierung

Um etwas über das Hoch- oder Niederenergieverhalten der Theorie zu lernen, wählen wir (1.16) als Ausgangspunkt und gehen folgendermaßen vor: Wir fordern zunächst, daß dieses Funktional die Eichinvarianzen der klassischen Theorie aufweist, im Falle der Gravitation also Diffeomorphismusinvarianz. Auf den ersten Blick mag dies nicht mit der erforderlichen Eichfixierung in Einklang stehen, doch anhand der expliziten Konstruktion wird ersichtlich werden, wie man die Eichung fixieren und dabei gleichzeitig eine bestimmte Variante der Eichinvarianz erhalten kann; auch hier liegt der Schlüssel in dem bereits angesprochenen Hintergrundfeld. Wir entwickeln dann Γ_k nach allen (im allgemeinen unendlich vielen) Funktionalen $I_\alpha[g_{\mu\nu}]$, die mit der geforderten Eichinvarianz verträglich sind. Als Koeffizienten treten die Kopplungen \bar{u}_α auf, die nun die Skalenabhängigkeit tragen, da wir diese jetzt als k -abhängig annehmen:

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}] = \sum_{\alpha} \bar{u}_\alpha(k) I_\alpha[g_{\mu\nu}]. \quad (1.18)$$

Man kann diese Invarianten als Basisfunktionale auffassen, die einen unendlich-dimensionalen Raum aufspannen, den *Theorienraum* \mathcal{T} , auf dem die Kopplungen $\bar{u}_\alpha(k)$ als Koordinaten fungieren; jeder Punkt in diesem Raum entspricht einer effektiven Theorie Γ_k . Die schwierige Aufgabe in derartigen Rechnungen besteht darin, auch die Spur auf der rechten Seite von (1.16) nach dieser Basis zu entwickeln und die entsprechenden Koeffizienten, die im allgemeinen Funktionen aller übrigen Kopplungen sein können, abzulesen. Danach können wir (1.16) komponentenweise auswerten. Es ist üblich, den Renormierungsgruppenfluß bezüglich der dimensionslosen Kopplungen u_α darzustellen, die über $u_\alpha(k) := k^{d_\alpha} \bar{u}_\alpha(k)$

definiert sind, worin d_α die Massendimension der assoziierten Invariante I_α bezeichnet; das Funktional Γ_k ist in natürlichen Einheiten dimensionslos. Damit erhalten wir die Wetterich-Gleichung in der Form

$$\partial_t u_\alpha = \beta_\alpha(u_1, u_2, \dots) \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad , \quad (1.19)$$

in der das skalenabhängige Laufen einer jeden dimensionslosen Kopplung durch die zugehörige *Beta-Funktion* ausgedrückt wird. Diese Gleichung beschreibt den Fluß, der durch das Vektorfeld

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

bezüglich des Parameters t auf dem Theorienraum erzeugt wird; man kann den Begriff der Flußgleichung also auch im geometrischen Sinne auffassen. Das Vektorfeld $\vec{\beta}$ hängt dabei nicht explizit von t ab.

Nun stellt (1.19) ein unendlich-dimensionales, gekoppeltes partielles Differentialgleichungssystem dar, das als solches nicht in voller Allgemeinheit zu lösen ist, sondern nur im Rahmen einer geeigneten Näherung. Dazu betrachtet man in der Regel *Trunkierungen* der vollen Theorie. Eine Trunkierung ist ein Ansatz für Γ_k , der von vornherein nur endlich viele Invarianten I_α berücksichtigt; sie entspricht somit einer Projektion des vollen Flusses auf den durch den betrachteten Satz von Invarianten aufgespannten, endlich-dimensionalen Unterraum. Man projiziert dann die rechte Seite von (1.16) ebenfalls auf diesen Unterraum, indem man dort die in der Trunkierung auftretenden Invarianten sucht und erhält somit endlich viele Beta-Funktionen als Funktionen endlich vieler Kopplungen.

Zwar erhält diese Art der Näherung die nicht-störungstheoretische Natur von (1.16), doch muß die Qualität einzelner Trunkierungen anhand bestimmter Gütekriterien bewertet werden. Eine besondere Rolle spielen dabei die sogenannten *universellen Größen*. Das sind Ausdrücke, die in der Regel von mehreren Kopplungen abhängen und die per definitionem in der vollen Theorie unabhängig von der expliziten Form des gewählten Regulators sind: Die Schemaabhängigkeiten der einzelnen Kopplungen kompensieren sich gerade gegenseitig. Die Observablen bilden eine Teilmenge dieser Größen. Auch die Existenz eines

Fixpunkts ist eine universelle Eigenschaft des betreffenden Systems. Diese Universalität wird nun durch die Trunkierung verletzt. Dabei kann das Ausmaß dieser Diskrepanz zur Beurteilung der jeweiligen Trunkierung herangezogen werden; insbesondere sollte für eine gute Trunkierung die Schemaabhängigkeit der universellen Größen bei Variation des Regulators weitaus geringer sein als diejenige der in sie eingehenden Kopplungen. Eine weitere Möglichkeit, die Gültigkeit der mittels einer bestimmten Trunkierung erhaltenen Resultate zu beurteilen, besteht darin, diese Trunkierung durch Hinzunahme einer oder mehrerer Invarianten zu erweitern und nachzuweisen, daß diese Modifikationen nur geringen Einfluß auf die zuvor gewonnenen Ergebnisse haben. Ist aber bereits die Analyse der ursprünglichen Trunkierung hinreichend komplex, so ist ein solcher Test sicher nicht praktikabel. Abschließend bleibt noch anzumerken, daß Γ_k zusätzlich zu der angesprochenen Eichinvarianz auch die übliche BRST-Invarianz aufweist, so daß sich entsprechende Ward-Identitäten ableiten lassen, die allerdings aufgrund der Anwesenheit des Cutoff-Terms $\Delta_k S$ ebenfalls Modifikationen erfahren [13]. Auch diese exakten Identitäten der vollen Theorie werden nun durch die Trunkierung verletzt, was entsprechend quantifiziert ebenfalls zur Bewertung der Näherung herangezogen werden könnte. Diese Option hat in der Praxis bislang noch keine Anwendung gefunden.

1.4 Nicht-störungstheoretische Renormierbarkeit

Auf der Suche nach einer konsistenten Quantisierung der Gravitation wird eine Eigenschaft, die man einer solchen Theorie zuschreibt, in der Regel durch die Feststellung, sie sei „nicht renormierbar“, zum Ausdruck gebracht. Diese Aussage bezieht sich auf ein inzwischen klassisches Resultat, dem eine Rechnung von Goroff und Sagnotti [14, 15] bzw. von van de Ven [16] zugrundeliegt. Sie haben im Sinne einer Loop-Entwicklung der Form (1.8) herausgefunden, daß der Wirkung auf Zwei-Schleifen-Niveau ein divergenter Term hinzugefügt werden müßte, um eine endliche S-Matrix für Gravitation zu erhalten. Diese Divergenz kann durch einen entsprechenden Term dritter Ordnung absorbiert werden, der seinerseits ebenfalls divergiert. Dieses Verhalten setzt sich ordnungsweise fort. Mit wachsender Ordnung nimmt die Zahl der zu renormierenden Parameter dabei immer weiter zu, so daß ein derartiger störungstheoretischer Zugang zur Quantengravitation keine Vorhersagekraft besitzen dürfte. Dieser Analyse liegt aber ein recht eingeschränkter Begriff von

Renormierung zugrunde, der explizit auf die Methode der Störungstheorie Bezug nimmt. Dabei wird das metrische Feld um den flachen bzw. um einen beliebigen festen Hintergrund entwickelt, und die Fluktuationen werden als klein angenommen.

Um im Rahmen der Renormierungsgruppen-Methode Erkenntnisse bezüglich der Quantennatur der Gravitation zu gewinnen, ist für uns das Verhalten der Flußgleichung (1.16) bzw. (1.19) für große Werte des Flußparameters k von besonderem Interesse. Wir nehmen nun an, daß für $k \rightarrow \infty$ eine Untermenge der Flußtrajektorien auf dem Theorienraum der vollen Theorie in einen Fixpunkt mit Koordinaten (u_1^*, u_2^*, \dots) fließe, so daß für diese also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_\alpha(k) \rightarrow u_\alpha^* \quad \forall \alpha \quad (1.21)$$

gilt. Das gerade angesprochene störungstheoretische Verständnis von Renormierbarkeit basiert dabei immer auf einem sogenannten *Gaußschen Fixpunkt*, der im Ursprung des Theorienraums lokalisiert ist, so daß dort alle u_α^* verschwinden. Das Verhältnis zur Störungstheorie kann auch in impliziter Weise durch einen Gaußschen Fixpunkt gegeben sein in dem Sinne, daß die Trajektorien für $k \rightarrow \infty$ nicht in diesen hinein-, sondern bloß in wohldefinierter Weise von ihm wegfließen, wie es z. B. in der QED geschieht. Im generischen Fall nicht-verschwindender Fixpunkt-Koordinaten liegt hingegen ein *nicht-Gaußscher Fixpunkt* vor. Das zentrale geometrische Objekt zur Erweiterung des störungstheoretischen Renormierbarkeitsbegriffes ist die *UV-kritische Hyperfläche* \mathcal{S}_{UV} . Sie ist definiert als die Menge aller Trajektorien, die für $k \rightarrow \infty$ in den Fixpunkt laufen. Wir linearisieren nun den Fluß (1.19) um den Fixpunkt. Unter Verwendung der Jacobi-Matrix $B = \{B_{\rho\sigma}\}$ mit

$$B_{\rho\sigma} := \left. \frac{\partial \beta_\rho}{\partial u_\sigma} \right|_{\{u_\alpha = u_\alpha^*\}}, \quad (1.22)$$

die auch als *Stabilitätsmatrix* bezeichnet wird, gilt dann

$$k \partial_k u_\alpha(k) = \sum_\rho B_{\alpha\rho} (u_\rho(k) - u_\rho^*), \quad (1.23)$$

da am Fixpunkt gerade die Beta-Funktionen verschwinden:

$$\beta_\alpha(u_1^*, u_2^*, \dots) = 0 \quad \forall \alpha. \quad (1.24)$$

Bei Kenntnis der Eigenwerte $-\Theta_A$ und Eigenvektoren V_α^A der Stabilitätsmatrix, also $B_{\alpha\rho}V_\rho^A = -\Theta_A V_\alpha^A$, lassen sich diese Gleichungen allgemein lösen gemäß

$$u_\alpha(k) = u_\alpha^* + \sum_A C_A V_\alpha^A \left(\frac{k_0}{k} \right)^{\Theta_A}, \quad (1.25)$$

worin k_0 eine feste Referenzskala und C_A die zugehörigen Integrationskonstanten bezeichnen. Da die Matrix B im allgemeinen nicht symmetrisch ist, sind ihre Eigenwerte nicht notwendigerweise reell. Man bezeichnet die negativen Eigenwerte Θ_A als die *kritischen Exponenten*. Soll nun die Kopplung $u_\alpha(k)$ für $k \rightarrow \infty$ ihren Fixpunktwert u_α^* annehmen, so muß offenbar $C_A = 0$ für alle A mit $\text{Re } \Theta_A < 0$ gelten; in allen übrigen Richtungen erfolgt das Laufen in den Fixpunkt im UV-Limes hingegen automatisch. Somit ist also im Umkehrschluß die Dimension Δ_{UV} der kritischen Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} gegeben durch die Anzahl der kritischen Exponenten Θ_A mit positivem Realteil.

Soll nun für $k \rightarrow \infty$ der Fixpunkt erreicht werden, so verbleibt die Aufgabe, eine Trajektorie aus \mathcal{S}_{UV} auszuwählen, entlang derer der Kontinuumsliches realisiert wird. Dazu ist bei einer endlichen Skala k die Form von Γ_k auf dieser Untermannigfaltigkeit zu bestimmen, d. h. es sind Δ_{UV} Parameter experimentell zu ermitteln, was aber für $\Delta_{UV} < \infty$ prinzipiell möglich ist. Entlang der Eigenrichtungen, die nicht in \mathcal{S}_{UV} liegen, besitzt die Theorie hingegen keinerlei Freiheit mehr, um in den Fixpunkt zu laufen, so daß hier den Kopplungen die durch die Fixpunktbedingung bestimmten Fixpunktwerte zugewiesen werden müssen. Eine solche Theorie, die als eine Renormierungsgruppen-Trajektorie in einer endlich-dimensionalen UV-kritischen Hyperfläche definiert ist, besitzt demnach sehr wohl eine Vorhersagekraft: Bei einer bestimmten Skala müssen bloß die Werte einer endlichen Anzahl *relevanter* Kopplungen dem Experiment entnommen werden, um dem System die korrekte Trajektorie auf \mathcal{S}_{UV} zuzuordnen; die Werte der übrigen *irrelevanten* Kopplungen hingegen werden von der Theorie vorhergesagt. Theorien, deren UV-Verhalten in dieser Weise von einem nicht-Gaußschen Fixpunkt bestimmt wird, heißen *nicht-störungstheoretisch renormierbar* oder *asymptotisch sicher*; sie sind in diesem Sinne ebenso renormierbar wie störungstheoretisch renormierbare Theorien.

Des weiteren ist die Fixpunkt-Wirkung Γ_∞ über das bereits erwähnte Verfahren der in Ref. [12] dargelegten Art mit der klassischen Wirkung S zu identifizieren, die somit durch den vollen Fluß vorhergesagt wird und a priori unbekannt war; dieses Funktional wäre in

einem der Theorie zugrundeliegenden Pfadintegral zu exponentieren. Darin unterscheidet sich dieser Zugang zur Quantisierung der Gravitation wesentlich von anderen, insbesondere kanonischen Ansätzen wie der Loop-Quantengravitation, welche davon ausgehen, daß die fundamentale Wirkung, die es zu quantisieren gilt, von der Art der Einstein-Hilbert-Wirkung (1.2) ist.

Es stellt sich jedoch die Frage, inwiefern sich ein nicht-Gaußscher Fixpunkt grundlegend von einem Gaußschen unterscheidet. Schließlich könnte man alle Kopplungen gemäß $\tilde{u}_\alpha(k) := u_\alpha^* - u_\alpha(k)$ umdefinieren. Der gemäß

$$\partial_t \tilde{u}_\alpha = \tilde{\beta}_\alpha(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots) \equiv -\beta_\alpha(u_1^* - \tilde{u}_1, u_2^* - \tilde{u}_2, \dots), \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

definierte Fluß würde dann im UV-Limes einen Gaußschen Fixpunkt aufweisen. Die Frage nach der „richtigen“ Definition der Kopplungen ist eine physikalische Frage, deren Antwort man nur an den Observablen der Theorie ablesen kann: Physikalische Kopplungen sind solche, die auf natürliche Art und Weise in deren Definition eingehen [17].

Eine andere Definition, die den Bezug auf observable Größen vermeidet, definiert einen Gaußschen Fixpunkt als einen Fixpunkt, an dem eine Wahl der Feldvariablen existiert, in der die Fixpunkt-Wirkung quadratisch und das Funktionalmaß Gaußsch ist. Dann besteht zwischen den Eigenrichtungen V_α^A in (1.25) und den Kopplungen u_α eine eindeutige Beziehung, da erstere jeweils in Richtung einer Kopplung u_α zeigen. Der kritische Exponent Θ_A ist mit $-d_\alpha$ identisch, wobei d_α die kanonische Massendimension der mit u_α assoziierten Invariante bezeichnet. Ein nicht-Gaußscher Fixpunkt ist dementsprechend ein Fixpunkt, an dem keine Wahl der Feldvariablen gefunden werden kann, in der das Funktionalmaß Gaußsch ist.

Wir wollen abschließend erörtern, welcher Art die im Rahmen dieses Zugangs denkbaren Observablen überhaupt sind. Die Kenntnis einer Lösung $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ einer Trunkierung der Wetterich-Gleichung würde es uns beispielsweise erlauben, Elemente der S-Matrix $\Gamma_k^{(4)}$, also vierfache Funktionalableitungen der Form

$$\frac{\delta^4 \Gamma_k[g]}{\delta g_{\lambda\tau}(v) \delta g_{\alpha\beta}(u) \delta g_{\rho\sigma}(y) \delta g_{\mu\nu}(x)},$$

zu berechnen. Diese würden für eine feste Hintergrundmetrik, die der bereits angespro-

chenen Zerlegung entstammt und die ihrerseits in Kapitel 3 erläutert wird, ausgewertet. Für reine Gravitation ohne Materieankopplung würde dieses Objekt Graviton-Graviton-Streuprozesse beschreiben, wobei es die Invarianzen der entsprechenden Hintergrund-Raumzeit aufweist, also beispielsweise Poincaré-Invarianz im Falle eines flachen Minkowski-Hintergrundes. Trotz der hinlänglich bekannten Schwierigkeit, mögliche Observablen einer vollständig diffeomorphismusinvarianten Theorie zu benennen, hätten wir damit potentielle Kandidaten gefunden.

1.5 Quanten-Einstein-Gravitation: Resultate und Eigenschaften

Die Quantenfeldtheorie der Gravitation, die sich vermöge dieses Programms konstruieren läßt, wird als *Quanten-Einstein-Gravitation* (QEG) bezeichnet. (Eine wirkliche Definition dieses Begriffes erfolgt in Kapitel 3.) Den bisherigen Analysen lagen dabei Metriken $g_{\mu\nu}$ mit euklidischer Signatur zugrunde. Dieser Fall ist zum einen technisch einfacher zu handhaben, und zudem beruhen viele der gegenwärtigen numerischen Untersuchungen ebenfalls auf euklidischer Signatur [18]. Um somit die Resultate der vorliegenden Arbeit mit denen der QEG vergleichen zu können, betrachten auch wir ausschließlich euklidische Metriken.

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die wesentlichen Aspekte des Bildes zusammentragen, auf das die bislang im Rahmen der QEG getätigten Forschungsarbeiten geführt haben.

Dabei ist es naheliegend, als Trunkierung zunächst einen Ansatz von der Form der Einstein-Hilbert-Wirkung (1.2) zu wählen, wobei die Newton-Konstante G sowie die kosmologische Konstante Λ durch ihre skalenabhängigen Gegenstücke G_k und Λ_k zu ersetzen sind und der Maßfaktor auf die euklidische Signatur umgeschrieben werden muß [13]. Wir erhalten dann

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_k} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} (-R(g) + 2\Lambda_k), \quad (1.26)$$

wobei wir im Rahmen dieser vereinfachten Darstellung wie üblich die notwendigen Eichfixierungsterme sowie die zugehörige Geistwirkung unberücksichtigt lassen. Da G und Λ

in d Raumzeit-Dimensionen die Massendimensionen $2 - d$ bzw. 2 besitzen, sind die entsprechenden dimensionslosen Kopplungen für $d = 4$ durch $g_k := k^2 G_k$ bzw. $\lambda_k := k^{-2} \Lambda_k$ gegeben. Setzt man diesen Ansatz in die Wetterich-Gleichung (1.16) ein und projiziert aus der rechten Seite die beiden Invarianten $\int d^4x \sqrt{g} R(g)$ und $\int d^4x \sqrt{g}$ heraus, so erhält man ein zweidimensionales gekoppeltes Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned}\partial_t g_k &= \beta_g(g_k, \lambda_k), \\ \partial_t \lambda_k &= \beta_\lambda(g_k, \lambda_k).\end{aligned}\tag{1.27}$$

Der Fluß dieses Systems ist ausgiebig analysiert worden und in Abbildung 1.1 graphisch dargestellt.

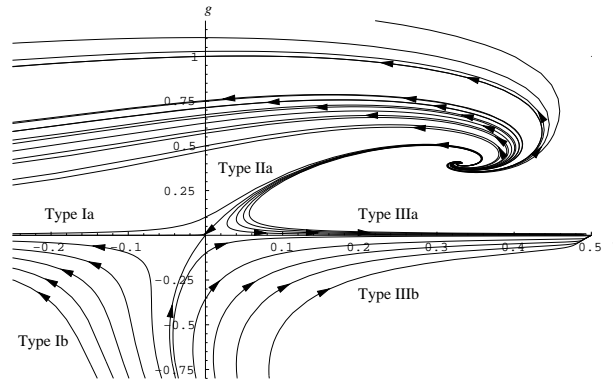


Abbildung 1.1: Der Renormierungsgruppen-Fluß der metrischen Gravitation um den nicht-Gaußschen Fixpunkt in der Einstein-Hilbert-Trunkierung.

Für alle betrachteten Profildfunktionen $R^{(0)}$ des Cutoffs findet man einen nicht-Gaußschen Fixpunkt bei (g^*, λ^*) mit $g^* > 0$ und $\lambda^* > 0$. Während die genauen Koordinaten des Fixpunktes schemaabhängig sind, definiert deren Produkt $g^* \lambda^*$ eine universelle Größe, die sich in der Tat bei Variation von $R^{(0)}$ nur sehr geringfügig ändert. Dies gilt auch für die kritischen Exponenten, die ebenfalls universelle Größen darstellen und in diesem Fall beide einen positiven Realteil besitzen. Die zugehörigen Eigenrichtungen liegen also beide in \mathcal{S}_{UV} und sind jeweils UV-attraktiv.

Die Tatsache, daß die dimensionslose Newton-Konstante g_k einen konstanten Fixpunktwert g^* annimmt, bewirkt, daß die dimensionsbehaftete Newton-Konstante im Fixpunktregime, $G(k) \approx g^* k^{-2}$, für $k \rightarrow \infty$ gegen Null geht: Sie wird *asymptotisch sicher*. (Dem-

gegenüber bezieht sich der Begriff der asymptotischen Freiheit auf das Verschwinden der dimensionslosen Kopplung.) Die kosmologische Konstante wird hingegen in diesem Bereich nach $\Lambda^k \approx \lambda_* k^2$ sehr groß, was eine sehr starke Ausdehnung des frühen Universums zur Folge hätte, denn dessen Dynamik würde ja durch die Fixpunkt-Wirkung beschrieben. Aufgrund dieser Beobachtung ist es im wesentlichen möglich, die gewünschte exponentielle Ausdehnung allein durch metrische Freiheitsgrade zu realisieren.

Ein Kriterium, um eine Trajektorie aus dieser zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit auszuwählen, besteht darin, ein möglichst langes klassisches Regime mit konstanten dimensionsvollen Kopplungen zu fordern. Dies stünde im Einklang mit der Tatsache, daß die ART über einen weiten Skalenbereich eine sehr gute effektive Theorie darstellt. Derartige Trajektorien befinden sich typischerweise in dem in Abbildung 1.1 mit „Typ IIIa“ bezeichneten Bereich. Sie führen bei diesen Skalen nicht nur auf eine positive Newton-Konstante \bar{G} , sondern auch auf eine kleine positive kosmologische Konstante $\bar{\Lambda}$, wie sie derzeit durch Beobachtungen nahegelegt wird [19].

Weiterhin stellt sich die Frage, inwiefern die oben angeführten Eigenschaften und insbesondere die Existenz des Fixpunktes in der gewählten Trunkierung begründet sind. Dazu wurde die obige Trunkierung um eine Invariante der Form $\int d^4x \sqrt{g} R(g)^2$ erweitert und deren Einfluß auf das Verhalten des Flusses untersucht [20, 21, 22, 23]. Man findet, daß die assoziierte Kopplung ebenfalls relevant ist, doch erst weit unterhalb des Fixpunktregimes bei $k \approx m_{\text{Pl}}$ den Renormierungsgruppenfluß maßgeblich beeinflusst. Um den nicht-Gaußschen Fixpunkt hingegen ist der Fluß nahezu vollständig auf die durch die Einstein-Hilbert-Trunkierung (1.26) definierte Ebene beschränkt, so daß diese Projektion die dreidimensionale Situation sehr gut erfaßt. Zudem kann man sowohl in dieser Trunkierung als auch in der Einstein-Hilbert-Trunkierung den nicht-Gaußschen Fixpunkt bereits sehr präzise durch eine geeignete Entwicklung in den dimensionslosen Kopplungen um den Gaußschen Fixpunkt lokalisieren [24]. Im Anschluß an diese Untersuchung wurden weitere Invarianten der Form $\int d^4x \sqrt{g} R(g)^n$ bis hin zu $n = 8$ hinzugefügt, die jedoch allesamt irrelevanten Richtungen im Theorienraum entsprechen und somit nicht zu der Dimension von \mathcal{S}_{UV} beitragen [25]. Weder in diesem Fall noch bei der Ankopplung von Materie [26] mußten die aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung gezogenen Schlüsse bezüglich des Fixpunktes und seiner qualitativen Eigenschaften revidiert werden. Die Resultate legen mithin den Schluß nahe, daß sich metrische Gravitation in Form einer Quantenfeldtheorie, die bis zu beliebig hohen

Energien bzw. bis zu beliebig kurzen Abständen Gültigkeit besäße, in konsistenter Weise quantisieren läßt.

Abschließend sei noch bemerkt, daß in diesem Rahmen auch der Eichparameter α der Diffeomorphismus-Eichbedingung einem Renormierungsgruppenlaufen unterworfen wäre. Dies wurde in all diesen Berechnungen vernachlässigt. Es ist zu erwarten, daß $\alpha = 0$ einen Fixpunktwert darstellt [27], die obigen Berechnungen wurden jedoch aus technischen Gründen jeweils für einen konstanten, endlichen Eichparameter durchgeführt.

1.6 Coarse Graining, laufende Kopplungen und effektive Theorien in anderen Bereichen der Physik

Die Idee des Ausintegrierens von Freiheitsgraden geht im wesentlichen auf Arbeiten von L. Kadanoff in der statistischen Physik zurück [28]. Dort kann die Renormierungsgruppe dazu verwandt werden, das Verhalten bestimmter Systeme, beispielsweise das des Ising-Modells, an einem kritischen Punkt zu beschreiben. Betrachtet man z.B. ein 4×4 -Gitter, in dem jeder der 16 Zellen mit Kantenlänge a eine Spinorientierung zugewiesen wird, so ordnet die Coarse-Graining-Vorschrift der Blockspin-Transformation jedem der vier 2×2 -Teilquadrate jeweils einen effektiven Spin zu, der sich z.B. vermöge der Majoritätsregel aus den vier Konstituentenspins ergibt. Jeder dieser vier verbleibenden Spins definiert nun einen effektiven Spin bezüglich der Längenskala $2a$. Diese Spins kann man ihrerseits wieder entsprechend mitteln, so daß letztendlich ein effektiver Spin bezüglich der Längenskala $4a$, der Kantenlänge des ursprünglichen Gitters, verbleibt. Bei dieser Umsetzung des Coarse Grainings im Konfigurationsraum ist offensichtlich, daß nur noch die Eigenschaften des Systems, die von der Größenordnung der Coarse-Graining-Skala sind, berücksichtigt werden; über alle kleineren Längenskalen wird gemittelt. Läßt man nun das System aus einem kritischen Punkt herauslaufen, so wird in dessen Umgebung das Verhalten des entsprechenden Ordnungsparameters oder der Korrelationslänge durch Potenzgesetze beschrieben, deren Exponenten die bereits eingeführten kritischen Exponenten sind. Am kritischen Punkt selbst weist das System eine charakteristische Skaleninvarianz auf: Es sieht auf allen Skalen gleich aus. Diese universellen Eigenschaften sind unabhängig von der expliziten Realisierung des Coarse Grainings. Die Übertragung dieser Ideen auf

Feldtheorien erfolgte durch K. Wilson [29]. Auch hier sollten die Systeme am Fixpunkt eine Skaleninvarianz aufweisen, so daß man dementsprechend erwartet, daß sie dort durch konforme Feldtheorien beschrieben werden.

Das Paradigma asymptotisch sicherer Gravitation führt auf eine Quantenfeldtheorie, die sehr viel mit den quantisierten Eichtheorien, insbesondere der QCD, gemeinsam hat. Die Vorstellung einer skalenabhängigen Kopplung ist in diesen Theorien ganz natürlich. Sie kommt im wesentlichen durch die nichttriviale Struktur des Vakuums zustande. Bringen wir beispielsweise im Rahmen der Quantenelektrodynamik eine Ladung in das Vakuum ein, so werden sich in diesem virtuelle Elektron-Positron-Paare bilden und sich in Form von Dipolen um die eingebrachte Ladung herum anlagern. Dieser Prozeß der Vakuumpolarisation setzt sich nach außen hin sukzessive fort. Dies führt zu einer Abschirmung, dem sogenannten *Screening* der ursprünglich eingebrachten nackten Ladung. Im Abstand r mißt man die bei der Skala $k = \frac{1}{r}$ renormierte Ladung. (Aufgrund der Radialsymmetrie kann hier k mit dem inversen Abstand identifiziert werden.) Die eigentliche Kopplung ist in Form der Feinstrukturkonstanten durch das Quadrat der Ladung gegeben. Den üblichen Wert von $\alpha \approx \frac{1}{137}$ erhält man, indem man k gleich der inversen Compton-Wellenlänge des Elektrons setzt.

Etwas anders stellt sich die Situation in der QCD, der Quantentheorie der starken Wechselwirkung, dar. Anstelle der elektrischen Ladung betrachten wir hier die $SU(3)$ -Farbladung. Bringen wir ein entsprechendes „farbiges“ Teilchen, z. B. ein Quark, in das Vakuum ein, so werden sich auch hier virtuelle Quark-Antiquark-Paare bilden und zu einem Screening der eingebrachten Farbladung bzw. der Yang-Mills-Kopplung g_{YM} führen. Im Unterschied zur QED sind hier aber die Eichbosonen, die die Wechselwirkung vermitteln, dieser selbst unterworfen: Gluonen tragen Farbladung, wohingegen Photonen elektrisch neutral sind. Virtuelle Gluon-Antigluon-Paare tragen also ebenfalls zur Renormierung von g_{YM} bei. Dabei ist deren Effekt nicht nur dem des Materie-Sektors entgegengesetzt, sondern er überwiegt auch, so daß die Yang-Mills-Kopplung g_{YM} mit wachsendem Abstand r bzw. sinkendem k größer wird. Man spricht daher von *Anti-Screening*. Für $k \rightarrow \infty$ geht g_{YM} hingegen gegen Null. Da diese Kopplung in $d = 4$ als Vorfaktor des Monoms $-\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ dimensionslos ist, ist QCD im Ultravioletten wirklich *asymptotisch frei*.

Betrachtet man auf diesem bildlichen Niveau die analoge Situation für Gravitation, so wäre hier ein Teilchen mit gravitativer Ladung (beispielsweise ein massives Teilchen) in das

Vakuum einzubringen. Um dieses herum bilden sich dann virtuelle Graviton-Antigraviton-Paare, die ihrerseits zwar masselos sind, aber über ihre Energie ebenfalls an das Gravitationsfeld koppeln. Dadurch erhöhen sie nach außen sukzessive die gravitative Ladung der nackten Masse. In Übereinstimmung mit der im Fixpunkt-Regime vorliegenden asymptotischen Sicherheit würde man somit ebenfalls ein Anti-Screening erwarten.

Aus dieser Eigenschaft der QCD bzw. der QEG ergibt sich als Konsequenz, daß beide Theorien im Ultravioletten viel einfacher zu untersuchen sind als im Infraroten. Der Hochenergiebereich der QCD wird sehr gut durch die klassische Yang-Mills-Wirkung beschrieben und ist der Störungstheorie zugänglich, da hier die Kopplung klein ist. Die Phänomene wie Confinement oder chirale Symmetriebrechung, die im Niederenergiebereich auftreten, lassen sich mit diesen Methoden jedoch nicht mehr behandeln. Zu deren Verständnis wäre es unter anderem erforderlich, einen sogenannten Wilson-Loop entlang eines (relativ zu Λ_{QCD} , dem QCD-Analogon der Planck-Masse) großen Bereichs in der Raumzeit zu berechnen, d. h. hier ist nichtlokale Information erforderlich, so daß eine geeignete Trunkierung ebenfalls nichtlokale Terme enthalten sollte. Die Ordnungsparameter, die in der QCD den Übergang in die Confinement- bzw. in die chiral gebrochene Phase anzeigen, sind durch den Erwartungswert des Polyakov-Loops bzw. den Erwartungswert $\langle 0|q\bar{q}|0\rangle$ des Quark-Antiquark-Kondensats gegeben.

Allerdings gibt es weder in der QCD noch in der QEG ein leitendes Prinzip, das angibt, wie eine entsprechende Trunkierung zu konstruieren ist; diese könnte ihre Gültigkeit erst a posteriori rechtfertigen. Die klassische Wirkung ist in beiden Fällen jedenfalls kein geeigneter Ansatz mehr. In diesem Sinne ist der Infrarot-Bereich, d. h. der Bereich niedriger Energien und großer Abstände, derjenige, in dem die wirklich starken Renormierungseffekte zu erwarten sind. Der UV-Bereich läßt sich vergleichsweise einfach behandeln. Im Rahmen der QEG ist das angesprochene Problem des Abflachens der Kepler-Kurven rotierender Galaxien ein typisches Phänomen, das dem Infrarot-Regime der Theorie zuzuordnen ist, da die charakteristische Längenskala von der Größenordnung typischer Galaxien-Durchmesser und damit astronomischer Natur ist. Entsprechend kann das in [30, 31, 32, 33] geschilderte Szenario zur Erklärung dieses Phänomens nicht den gleichen Grad an Rigorosität beanspruchen, der den oben erläuterten Ultraviolet-Untersuchungen eigen ist. Um wirklich verlässliche Aussagen treffen zu können, wäre die Berechnung von Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen der Form $\langle 0|R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)R_{\alpha\beta\lambda\tau}(y)|0\rangle$ für „weit“ auseinander liegende

Punkte x und y , d.h. für Abstände $|x - y|$ von der Größenordnung der Infrarotskala, erforderlich.

Zudem sei abschließend daran erinnert, daß auch das Konzept einer effektiven Theorie aus der QCD vertraut ist. Hier ist beispielsweise die chirale Störungstheorie (CPT) sehr erfolgreich, der der Grenzwert verschwindender Pion-Masse, $m_\pi \rightarrow 0$, zugrundeliegt. Zwar werden auch hier im Sinne einer Störungstheorie Schleifen-Prozesse betrachtet. Dies liegt aber daran, daß man den Gültigkeitsbereich dieser Theorie gewissermaßen „über Gebühr“ ausdehnt. Auch das Nambu-Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) ist ein Beispiel für eine effektive Theorie, die qualitative Aspekte der QCD im chiralen Grenzfall, in dem die drei leichten Quark-Massen verschwinden und die Massen der drei schweren Quarks als unendlich angenommen werden, gut erfaßt [34, 35]. Beiden Modellen liegen als dynamische Freiheitsgrade jedoch nicht die Quarks zugrunde, sondern die aus diesen gebildeten Hadronen. Dabei wird das Auftreten dieser Bindungszustände durch Pole, die bei der Hadron-Skala von ca. 10^{-15} m in den QCD- n -Punkt-Funktionen entstehen, angezeigt. Im Rahmen der QEG haben sich hingegen bislang keinerlei Hinweise auf eine entsprechende Änderung der Freiheitsgrade im Verlaufe des Flusses ergeben.

Kapitel 2

Die klassische Theorie: Die Holst-Wirkung und ihre Bewegungsgleichungen

2.1 Die Holst-Wirkung und ihre Bewegungsgleichungen

Zu Beginn dieser Arbeit möchten wir kurz die wichtigsten Eigenschaften der sogenannten *Holst-Wirkung* [36] für euklidische Signatur diskutieren, da die von uns im weiteren Verlauf betrachtete Trunkierung zur Analyse des Proptime-Flusses genau von dieser Form sein wird. Sie ist gegeben durch

$$S_{\text{Ho}}[e, \omega] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4 x e \left[e_a^\mu e_b^\nu \left(F^{ab}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{\gamma} \star F^{ab}{}_{\mu\nu} \right) - 2\Lambda \right] \quad (2.1)$$

mit der Newton-Konstante G , der kosmologischen Konstante Λ , dem *Immirzi-Parameter* γ sowie dem auf Lorentz-Indizes wirkenden Dualitätsoperator

$$\star F^{ab}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} F^{cd}{}_{\mu\nu} ,$$

der Gegenstand von Anhang B ist. Diese Wirkung unterscheidet sich von der gängigen *Hilbert-Palatini-Wirkung*

$$S_{\text{H-P}}[e, \omega] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x e (e_a^\mu e_b^\nu F^{ab}{}_{\mu\nu} - 2\Lambda) \quad (2.2)$$

zur Beschreibung von Gravitation im Vielbein-Formalismus durch einen Zusatzterm, der proportional zum inversen Immirzi-Parameter ist und den dualen Krümmungstensor enthält. Die wichtigsten Eigenschaften dieses sogenannten *Immirzi-Terms* werden in Abschnitt 2.2 diskutiert.

In Anhang B wird gezeigt, daß sich ein allgemeiner $O(4)$ -Tensor zweiter Stufe in eindeutiger Weise als Summe einer selbstdualen und einer anti-selbstdualen Komponente schreiben läßt, so daß insbesondere für jeden Spinzusammenhang die Darstellung $\omega = \omega^{(+)} + \omega^{(-)}$ mit $\star\omega^{(+)} = \omega^{(+)}$ und $\star\omega^{(-)} = -\omega^{(-)}$ gilt. Des weiteren beweisen wir, daß sich diese Eigenschaft auf die zugehörige Feldstärke überträgt: Es gilt $F(\omega^{(\pm)}) = F^{(\pm)}(\omega)$, worin $F^{(+)}$ und $F^{(-)}$ die selbstduale bzw. anti-selbstduale Komponente des Tensors $F(\omega)$ bezeichnet. Die Holst-Wirkung läßt sich somit auch in der Form

$$S_{\text{Ho}}[e, \omega^{(+)}, \omega^{(-)}] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x e \left\{ e_a^\mu e_b^\nu \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) F^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega^+) + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) F^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega^-) - 2\Lambda \right] \right\}$$

schreiben, in der die selbstdualen und die anti-selbstdualen Anteile vollständig separiert sind. Insbesondere wird für $\gamma = \mp 1$ jeweils nur eine dieser beiden Chiralitäten aus dem Konfigurationsraum herausprojiziert.

Variation bezüglich des Spinzusammenhangs. Das Vielbein $e^a{}_\mu$ und der Spinzusammenhang $\omega^{ab}{}_\mu$ sind für beliebiges γ die unabhängigen dynamischen Variablen dieser Theorie, und die Variation der Wirkung bezüglich dieser beiden Größen liefert dann die gesuchten Bewegungsgleichungen. Zunächst variieren wir (2.1) bezüglich des Spinzusammenhangs, was unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \delta F^{ab}{}_{\mu\nu} &= 2(\partial_{[\mu} \delta \omega^{ab}{}_{\nu]} + \delta \omega^a{}_{c[\mu} \omega^{cb}{}_{\nu]} + \omega^a{}_{c[\mu} \delta \omega^{cb}{}_{\nu]}) \\ &= 2(\partial_{[\mu} \delta \omega^{ab}{}_{\nu]} + \omega^a{}_{c[\mu} \delta \omega^{cb}{}_{\nu]} + \omega^b{}_{c[\mu} \delta \omega^{ac}{}_{\nu]}) \\ &= 2\nabla_{[\mu} \delta \omega^{ab}{}_{\nu]} \end{aligned}$$

auf

$$\begin{aligned}\delta^\omega S_{\text{Ho}} &= -\frac{1}{8\pi G} \int d^4x e e_a{}^\mu e_b{}^\nu \left(\nabla_{[\mu} \delta\omega^{ab}{}_{\nu]} - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \nabla_{[\mu} \delta\omega^{cd}{}_{\nu]} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \int d^4x e e_a{}^\mu e_b{}^\nu \left(\nabla_\mu \delta\omega^{ab}{}_\nu - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \nabla_\mu \delta\omega^{cd}{}_\nu \right)\end{aligned}\quad (2.3)$$

führt. Man kann nun zeigen, daß die Anwesenheit des Immirzi-Terms in (2.1) die resultierenden Bewegungsgleichungen im Vergleich zu denen der Hilbert-Palatini-Wirkung (2.2) überhaupt nicht beeinflusst.

Sei dazu zunächst $\gamma = \mp 1$. Dann entspricht (2.1) der üblichen Hilbert-Palatini-Wirkung, in der jedoch der Spinzusammenhang durch seine (anti-)selbstduale Projektion ersetzt wird. Diese Wirkung, die dem Ashtekar-Programm der kanonischen Quantengravitation zugrunde liegt, wird in der Literatur gemeinhin als *Barbero-Wirkung* bezeichnet [37, 38]. Die Bewegungsgleichungen sind dann von der gleichen Form wie diejenigen der Hilbert-Palatini-Wirkung. Anstelle des vollen Spinzusammenhangs ω tritt allerdings die entsprechende Chiralität auf.

Für $\gamma \neq \mp 1$ definieren wir die Variation

$$\zeta^{ab}{}_\mu := \frac{1}{2} \left(\delta\omega^{ab}{}_\mu - \frac{1}{\gamma} \star \delta\omega^{ab}{}_\mu \right) = W^{(\gamma)ab}{}_{cd} \delta\omega^{cd}{}_\mu \quad (2.4)$$

mit

$$W^{(\gamma)ab}{}_{cd} := \frac{1}{2} \left(\eta^a{}_c \eta^b{}_d - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \right).$$

Für $\gamma \neq \mp 1$ ist die lineare Abbildung $W^{(\gamma)} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \frac{1}{\gamma}\star)$ keine Projektion, so daß sie invertiert und (2.4) nach $\delta\omega = \delta\omega(\zeta)$ aufgelöst werden kann gemäß

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ab}{}_{cd} \zeta^{cd}{}_\mu &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{ab}{}_{cd} \delta\omega^{cd}{}_\mu - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \varepsilon^{cd}{}_{ef} \delta\omega^{ef}{}_\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{ab}{}_{cd} \delta\omega^{cd}{}_\mu - \frac{1}{\gamma} (\eta^a{}_e \eta^b{}_f - \eta^a{}_f \eta^b{}_e) \delta\omega^{ef}{}_\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{ab}{}_{cd} \delta\omega^{cd}{}_\mu - \frac{2}{\gamma} \delta\omega^{ab}{}_\mu \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \zeta^{cd}{}_\mu &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\gamma^2} \delta\omega^{ab}{}_\mu + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \delta\omega^{cd}{}_\mu \right)\end{aligned}\quad (2.5)$$

unter Verwendung von (A.48). Die Addition von (2.4) und (2.5) liefert schließlich

$$\begin{aligned}\zeta^{ab}{}_{\mu} + \frac{1}{2\gamma}\varepsilon^{ab}{}_{cd}\zeta^{cd}{}_{\mu} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\delta\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2}\delta\omega^{ab}{}_{\mu} \\ \Rightarrow \delta\omega^{ab}{}_{\mu} &= \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 - 1}\left(\zeta^{ab}{}_{\mu} + \frac{1}{2\gamma}\varepsilon^{ab}{}_{cd}\zeta^{cd}{}_{\mu}\right).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Somit kann einer Variation $\delta\omega$ in eindeutiger Weise eine Variation ζ aus (2.4) zugeordnet werden; insbesondere überträgt sich die Annahme einer beliebigen Variation $\delta\omega$ in äquivalenter Weise auf ζ . Nach (2.3) ist die Stationarität des Funktionals (2.1) bezüglich ζ gleichbedeutend mit der Stationarität von (2.2) bezüglich einer Variation $\delta\omega$ des Spinzusammenhangs. Für einen beliebigen Immirzi-Parameter $\gamma \neq \mp 1$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\delta^\omega S_{\text{Ho}} &= -\frac{1}{8\pi G} \int d^4x e e_a{}^\mu e_b{}^\nu \nabla_\mu \zeta^{ab}{}_\nu \\ &= -\frac{1}{32\pi G} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \nabla_\mu \zeta^{ab}{}_\nu \\ &= +\frac{1}{32\pi G} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} (\nabla_\mu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma) \zeta^{ab}{}_\nu \\ &= +\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^c{}_\rho (\nabla_\mu e^d{}_\sigma) \zeta^{ab}{}_\nu\end{aligned}$$

unter Verwendung von (A.54), (A.59) sowie mittels partieller Integration und anschließender Anwendung der Produktregel für die kovariante Ableitung. Dabei verschwindet die $O(4)$ -kovariante Ableitung des flachen Levi-Civita-Tensors, da in $\omega^a{}_{e\mu} \varepsilon^{abcd}$ in allen nicht-verschwindenden Termen im zweiten Faktor der Index e von b , c und d verschieden und somit gleich a sein muß; in diesem Fall verschwindet jedoch der antisymmetrische Spinzusammenhang. Wir erhalten mithin die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^c{}_\rho \nabla_\nu e^d{}_\sigma = 0 \quad \forall \mu, a, b.} \quad (2.7)$$

In ihnen tritt kein inverses Vielbein auf. Insbesondere werden sie durch die entartete Konfiguration $e^a{}_\mu = 0$ für beliebiges $\omega^{ab}{}_\mu$ gelöst; wir werden auf diesen Punkt noch einmal zurückkommen, nachdem wir die Bewegungsgleichungen, die aus der Variation des Vielbeins folgen, abgeleitet haben. Kontraktion dieser Gleichungen mit $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ und ε^{abef} führt

unter Verwendung der euklidischen Identitäten (A.47) und (A.48) auf

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{abef}\varepsilon_{abcd}e^c{}_\rho\nabla_\nu e^d{}_\sigma \\
&= 2(\delta_\alpha{}^\nu\delta_\beta{}^\rho\delta_\gamma{}^\sigma + \delta_\alpha{}^\rho\delta_\beta{}^\sigma\delta_\gamma{}^\nu + \delta_\alpha{}^\sigma\delta_\beta{}^\nu\delta_\gamma{}^\rho - \delta_\alpha{}^\nu\delta_\beta{}^\sigma\delta_\gamma{}^\rho \\
&\quad - \delta_\alpha{}^\rho\delta_\beta{}^\nu\delta_\gamma{}^\sigma - \delta_\alpha{}^\sigma\delta_\beta{}^\rho\delta_\gamma{}^\nu)(\delta^e{}_c\delta^f{}_d - \delta^e{}_d\delta^f{}_c)e^c{}_\rho\nabla_\nu e^d{}_\sigma \\
&= 2[(e^{[e}{}_\beta\nabla_\alpha e^{f]}{}_\gamma - e^{[e}{}_\gamma\nabla_\alpha e^{f]}{}_\beta) + (e^{[e}{}_\alpha\nabla_\gamma e^{f]}{}_\beta - e^{[e}{}_\alpha\nabla_\beta e^{f]}{}_\gamma) + (e^{[e}{}_\gamma\nabla_\beta e^{f]}{}_\alpha - e^{[e}{}_\beta\nabla_\gamma e^{f]}{}_\alpha)] \\
&= -2 \cdot 3! \cdot e^{[e}{}_{[\alpha}\nabla_\beta e^{f]}{}_{\gamma]}.
\end{aligned}$$

Eine weitere Kontraktion mit dem inversen Vielbein $e_f{}^\beta$ liefert dann

$$\begin{aligned}
& -2 \cdot 3! \cdot e_f{}^\beta e^{[e}{}_{[\alpha}\nabla_\beta e^{f]}{}_{\gamma]} \\
&= \delta^e{}_f\nabla_\alpha e^f{}_\gamma - \delta^f{}_f\nabla_\alpha e^e{}_\gamma - e^e{}_\gamma e_f{}^\beta\nabla_\alpha e^f{}_\beta + \delta_\gamma{}^\beta\nabla_\alpha e^e{}_\beta \\
&\quad + e^e{}_\alpha e_f{}^\beta\nabla_\gamma e^f{}_\beta - \delta_\alpha{}^\beta\nabla_\gamma e^e{}_\beta - e^e{}_\alpha e_f{}^\beta\nabla_\beta e^f{}_\gamma + \delta_\alpha{}^\beta\nabla_\beta e^e{}_\gamma \\
&\quad + e^e{}_\gamma e_f{}^\beta\nabla_\beta e^f{}_\alpha - \delta_\gamma{}^\beta\nabla_\beta e^e{}_\alpha - \delta^e{}_f\nabla_\gamma e^f{}_\alpha + \delta^f{}_f\nabla_\gamma e^e{}_\alpha \\
&= 2(\nabla_{[\gamma} e^e{}_{\alpha]} + e^e{}_\alpha e_f{}^\beta\nabla_{[\gamma} e^f{}_{\beta]} + e^e{}_\gamma e_f{}^\beta\nabla_{[\beta} e^f{}_{\alpha]}). \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Kontrahiert man schließlich diese Gleichung mit $e_e{}^\alpha$, so erhält man

$$\begin{aligned}
& 2(e_e{}^\alpha\nabla_{[\gamma} e^e{}_{\alpha]} + 4e_f{}^\beta\nabla_{[\gamma} e^f{}_{\beta]} + e_f{}^\beta\nabla_{[\beta} e^f{}_{\gamma]}) \\
&= 8e_e{}^\alpha\nabla_{[\gamma} e^e{}_{\alpha]} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dies impliziert aber das Verschwinden der letzten beiden Terme in der letzten Zeile von (2.8), so daß sich die 24 Gleichungen

$$\boxed{\nabla_{[\mu} e^a{}_{\nu]} = \frac{1}{2}e^a{}_\lambda T_{\mu\nu}{}^\lambda = 0 \quad \forall \mu, \nu, a} \tag{2.9}$$

mit dem Torsionstensor $T_{\mu\nu}{}^\lambda$ aus (A.26) ergeben. Im Zuge dieser Umformungen haben wir ein reguläres Vielbein vorausgesetzt. Für ein solches folgt also, daß „on-shell“ die Torsion verschwindet. Nach den Überlegungen aus Anhang A können wir die Bewegungsgleichungen (2.9) nach den 24 Komponenten des Spinzusammenhangs auflösen, was gerade auf $\omega = \omega(e)$ aus (A.36) für einen torsionsfreien Zusammenhang führt. Die Bewegungsgleichung (2.9)

wird also gelöst durch

$$\omega^{ab}{}_{\mu}(e) = e^{a\lambda}\partial_{[\mu}e^b{}_{\lambda]} + e^{b\nu}\partial_{[\nu}e^a{}_{\mu]} - e^{a\lambda}e^{b\nu}(\partial_{[\lambda}e^c{}_{\nu]})e_{c\mu}. \quad (2.10)$$

Analog erhalten wir für $\gamma = \mp 1$, daß die selbstduale bzw. die anti-selbstduale Komponente des Spinzusammenhangs torsionsfrei ist.

Variation bezüglich des Vielbeins. Wir drücken nun der Übersichtlichkeit wegen die Holst-Wirkung für beliebige Werte des Immirzi-Parameters durch $W^{(\gamma)ab}{}_{cd}$ aus und variieren diese dann bezüglich des Vielbeins $e^a{}_{\mu}$. Unter Verwendung von (A.56) und (A.57) ergibt sich

$$\delta^e S_{\text{Ho}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x e [(e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu}e_c{}^{\lambda} - e_a{}^{\lambda}e_c{}^{\mu}e_b{}^{\nu} - e_a{}^{\mu}e_b{}^{\lambda}e_c{}^{\nu})W^{(\gamma)ab}{}_{de}F^{de}{}_{\mu\nu} - 2\Lambda e_c{}^{\lambda}] \delta e^c{}_{\lambda}.$$

Setzen wir auch hier ein invertierbares Vielbein voraus, so erhält man mit den Definitionen

$$\star F^a{}_{\mu} := e_b{}^{\nu} \star F^{ab}{}_{\mu\nu} \equiv e_b{}^{\nu} \star F^{ba}{}_{\nu\mu} \quad \text{sowie} \quad \star F := e_a{}^{\mu} \star F^a{}_{\mu}$$

für die dualisierten Gegenstücke zu den Objekten

$$F^a{}_{\mu} := e_b{}^{\nu} F^{ab}{}_{\mu\nu} \equiv e_b{}^{\nu} F^{ba}{}_{\nu\mu} \quad \text{und} \quad F := e_a{}^{\mu} F^a{}_{\mu}$$

aus Anhang A die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\boxed{\left(F - \frac{1}{\gamma} \star F\right) e_c{}^{\lambda} - 2\left(F^a{}_{\mu} - \frac{1}{\gamma} \star F^a{}_{\mu}\right) e_a{}^{\lambda} e_c{}^{\mu} - 2\Lambda e_c{}^{\lambda} = 0 \quad \forall \lambda, c.} \quad (2.11)$$

Für den torsionsfreien Spinzusammenhang (2.10) als Lösung der Bewegungsgleichung (2.9) besteht nach (A.38) zwischen dem Feldstärketensor $F^{ab}{}_{\mu\nu}(e)$ und dem Riemannschen Krümmungstensor $R_{\text{LC}\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{\rho}(g)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} F^{ab}{}_{\mu\nu}(e) &= e^a{}_{\lambda} e^{b\rho} R_{\text{LC}\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{\rho}(g) \\ \Rightarrow F^a{}_{\mu}(e) &= e^a{}_{\lambda} R_{\text{LC}\mu\nu}{}^{\lambda\nu}(g) \equiv e^a{}_{\lambda} R_{\text{LC}\mu\lambda}(g) \\ \Rightarrow F(e) &= R_{\text{LC}}(g) \end{aligned}$$

mit dem Ricci-Tensor $R_{LC\mu\nu}$ und dem Krümmungsskalar R_{LC} . (Das Subskript „LC“ verweist hier auf den dem Metrik-Formalismus zugrundeliegenden Levi-Civita-Zusammenhang.) Für die dualisierten Pendantes gilt bei verschwindender Torsion mit der Definition (A.51) aufgrund der aus der Ricci-Identität folgenden Gleichung (A.31)

$$\begin{aligned}
\star F^a{}_{\mu}(e) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} F^{cd}{}_{\mu\nu}(e) e_b{}^{\nu} \\
&= \frac{1}{2} e^{-1} \varepsilon^{\lambda\nu\rho\sigma} e^a{}_{\lambda} e_{c\rho} e_{d\sigma} F^{cd}{}_{\mu\nu}(e) \\
&= \frac{1}{2} e^{-1} \varepsilon^{\lambda\nu\rho\sigma} R_{LC\mu\nu\rho\sigma}(g) e^a{}_{\lambda} \\
&= 0 \\
\Rightarrow \star F &= e_a{}^{\mu} \star F^a{}_{\mu} = 0.
\end{aligned}$$

Multipliziert man nun (2.11) mit $-\frac{1}{2} e^c{}_{\nu} g_{\lambda\tau}$, so erhält man nach Umbenennung der Indizes die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\boxed{R_{LC\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{LC} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu, \nu,}$$

was gerade die Einstein-Gleichungen (A.34) des Metrik-Formalismus im Vakuum sind.

Schreiben wir abschließend auch hier die Holst-Wirkung unter Verwendung der Relationen (A.54) und (A.55) um gemäß

$$S_{\text{Ho}} = -\frac{1}{64\pi G} \int d^4 x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} \left[\left(F^{ab}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{\gamma} \star F^{ab}{}_{\mu\nu} \right) - \frac{\Lambda}{3} e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} \right] e^c{}_{\rho} e^d{}_{\sigma}, \quad (2.12)$$

so erhalten wir durch Variation des Vielbeins die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung von $\delta^e \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ nach (A.58) in der Form

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} \left[\left(F^{ab}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{\gamma} \star F^{ab}{}_{\mu\nu} \right) - \frac{2}{3} \Lambda e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} \right] e^c{}_{\rho} = 0 \quad \forall \sigma, d.} \quad (2.13)$$

Aus dieser ist ersichtlich, daß diese Bewegungsgleichungen ebenfalls durch $e^a{}_{\mu} = 0$ und eine beliebige Spinzusammenhangskonfiguration $\omega^{ab}{}_{\mu}$ gelöst werden. Dieser Umstand stellt einen weiteren Unterschied zur ART dar, in der beispielsweise schon die Definition des Krümmungstensors die Existenz einer inversen Metrik erfordert; er könnte auch auf dem Niveau der entsprechenden Quantentheorien relevant sein. Wir werden auf diesen Punkt

im Zuge der Quantisierung zurückkommen.

Wir beenden diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß sich im Rahmen des ADM-Formalismus zeigen läßt, daß der Unterschied zwischen (2.1) und (2.2) auf Niveau einer (3+1)-Foliation der Raumzeit bloß durch eine kanonische Transformation gegeben ist [36], d. h. die Abbildung $W^{(\gamma)}$ stellt einen Symplektomorphismus auf dem Phasenraum des Systems dar.

2.2 Zur Struktur des Immirzi-Terms

Zum besseren Verständnis des Immirzi-Terms ist es sinnvoll, diesen unter Verwendung von Differentialformen umzuschreiben. Dazu definieren wir die Raumzeit-Einsformen

$$e^a := e^a{}_{\mu} dx^{\mu} \quad \text{und} \quad \omega^{ab} := \omega^{ab}{}_{\mu} dx^{\mu} .$$

Mit dem äußeren Produkt

$$\theta \wedge \eta := \theta_{[\mu} \eta_{\nu]} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \frac{1}{2!} (\theta_{\mu} \eta_{\nu} - \theta_{\nu} \eta_{\mu}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

und der äußeren Ableitung

$$d\theta := \partial_{[\mu} \theta_{\nu]} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \frac{1}{2!} (\partial_{\mu} \theta_{\nu} - \partial_{\nu} \theta_{\mu}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

für zwei Einsformen $\theta = \theta_{\mu} dx^{\mu}$ und $\eta = \eta_{\mu} dx^{\mu}$ läßt sich die Definition (A.11) des Krümmungstensors $F^{ab}{}_{\mu\nu}$ mit der Komponentendarstellung der Zweiform

$$\begin{aligned} d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} &= \frac{1}{2!} (\partial_{\mu} \omega^{ab}{}_{\nu} - \partial_{\nu} \omega^{ab}{}_{\mu} + \omega^a{}_{c\mu} \omega^{cb}{}_{\nu} - \omega^a{}_{c\nu} \omega^{cb}{}_{\mu}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \\ &= \frac{1}{2!} F^{ab}{}_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \\ &=: F^{ab} \end{aligned} \tag{2.14}$$

identifizieren. Diese bezeichnet man als *Krümmungsform*. In analoger Weise definieren wir mit (A.26) und

$$T_{\mu\nu}^a := e^a{}_\lambda T_{\mu\nu}^\lambda = 2\nabla_{[\mu} e^a{}_{\nu]}$$

die *Torsionsform* T^a gemäß

$$\begin{aligned} de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b &= \frac{1}{2!} (\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \omega^a{}_{b\nu} e^b{}_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2!} T_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &=: T^a. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Unter Verwendung der Beziehung (A.52) läßt sich dann der Immirzi-Term auf die Form

$$\begin{aligned} S_{\text{Im}} &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{2\gamma} \int d^4x e \varepsilon^{ab}{}_{cd} F^{cd}{}_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{2\gamma} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{ab}{}_{\mu\nu} e_{a\rho} e_{b\sigma} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{2\gamma} \int dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{ab}{}_{\mu\nu} e_{a\rho} e_{b\sigma} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{2\gamma} \int F^{ab}{}_{\mu\nu} e_{a\rho} e_{b\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\gamma} \int F^{ab} \wedge e_a \wedge e_b \end{aligned}$$

bringen. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß der Immirzi-Term nur in vier Dimensionen existiert, denn nur für $d = 4$ liefert die $O(4)$ -Kontraktion der beiden Lorentz-Indizes der Krümmungszweiform mit Vielbein-Einsformen $e_a = \eta_{ab} e^b$ eine Raumzeit- d -Form.

Unter Verwendung von

$$\eta \wedge \theta = (-1)^{pq} \theta \wedge \eta$$

sowie der Produktregel

$$d(\eta \wedge \theta) = (d\eta) \wedge \theta + (-1)^p \eta \wedge d\theta$$

für die äußere Ableitung, worin η eine p -Form und θ eine q -Form bezeichnet, gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
F^{ab} \wedge e_a \wedge e_b &= (d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{bc}) \wedge e_a \wedge e_b \\
&= d\omega^{ab} \wedge e_a \wedge e_b + \omega^a_c \wedge \omega^{bc} \wedge e_a \wedge e_b \\
&= d(\omega^{ab} \wedge e_a \wedge e_b) + \omega^{ab} \wedge de_a \wedge e_b - \omega^{ab} \wedge e_a \wedge de_b \\
&\quad + \omega^a_c \wedge \omega^{bc} \wedge e_a \wedge e_b
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
T^a \wedge T_a &= d_\omega e^a \wedge d_\omega e_a \\
&= (de^a + \omega^a_b \wedge e^b) \wedge (de_a + \omega_a^c \wedge e_c) \\
&= de^a \wedge de_a + \omega^a_b \wedge e^b \wedge de_a + de^a \wedge \omega_a^c \wedge e_c + \omega^a_b \wedge e^b \wedge \omega_a^c \wedge e_c \\
&= d(e^a \wedge de_a) + e^a \wedge d^2 e_a + \omega^{ab} \wedge de_a \wedge e_b \\
&\quad - \omega^{ca} \wedge e_c \wedge de_a + \omega^b_a \wedge \omega^{ac} \wedge e_b \wedge e_c \\
&= F^{ab} \wedge e_a \wedge e_b + d(e^a \wedge de_a - \omega^{ab} \wedge e_a \wedge e_b) \\
&= F^{ab} \wedge e_a \wedge e_b + d(e^a \wedge T_a) .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identität $d^2 \equiv 0$ bei Anwendung auf Differentialformen beliebigen Grades verwandt. Mit dem Satz von Stokes folgt

$$S_{\text{Im}} = \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\gamma} \left(\int_{\mathcal{M}} T^a \wedge T_a - \int_{\partial\mathcal{M}} e^a \wedge T_a \right) , \quad (2.16)$$

so daß der Immirzi-Term also bis auf einen Randterm durch das Integral des Quadrates der Torsionsform gegeben ist. Für „on-shell“-Konfigurationen der Holst-Wirkung, d. h. für Lösungen der Bewegungsgleichungen, verschwindet die Torsion. Aufgrund dieser Tatsache wird der Immirzi-Term mitunter als „on-shell-topologisch“ bezeichnet. Zudem wird häufig die Ansicht vertreten, der Immirzi-Term sei mit dem CP-verletzenden Theta-Term der starken Wechselwirkung verwandt, der allerdings im Unterschied zum Immirzi-Term rein topologischer Natur ist.

Außerdem läßt sich an der Form (2.16) ablesen, daß der Immirzi-Term kein invertierbares Vielbein voraussetzt. Bei der vorangegangenen Diskussion haben wir dies nur fordern müs-

sen, um den $O(4)$ -Index der Torsionsform (2.15) in einen Raumzeit-Index zu überführen und so Kontakt zum metrischen Formalismus herzustellen. Diesem liegt die Annahme einer invertierbaren Metrik zugrunde, was sich z. B. bereits in der Definition des Riemannschen Krümmungstensors (A.27) äußert.

Des weiteren ist durch

$$\int_{\mathcal{M}} (T^a \wedge T_a - e_a \wedge e_b \wedge F^{ab}) = \int_{\partial\mathcal{M}} e^a \wedge T_a$$

eine topologische Invariante gegeben, die in der Literatur als *Nieh-Yan-Invariante* bezeichnet wird und die als solche eine der Euler-Zahl analoge Rolle spielt [39].

Das Verschwinden des Immirzi-Terms für torsionsfreie Zusammenhänge läßt sich auch auf andere Art einsehen. Aus Anhang A wissen wir, daß sich in diesem Fall der Spinzusammenhang und damit der Feldstärketensor allein durch das Vielbein ausdrücken lassen. Letzterer ist nach (A.38) im wesentlichen äquivalent zum Riemannschen Krümmungstensor. Werten wir den Immirzi-Term auf diesem Unterraum des (e, ω) -Konfigurationsraums aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S_{\text{Im}} &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\gamma} \int F^{ab}(e) \wedge e_a \wedge e_b \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\gamma} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{ab}{}_{\mu\nu}(e) e_{a\rho} e_{b\sigma} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\gamma} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\text{LC}\rho\sigma\mu\nu}(g) \\ &= 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Ricci-Identität (A.31). Eine P- oder T-Transformation $\{\Lambda_{\text{P}\nu}{}^\mu\} := \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ bzw. $\{\Lambda_{\text{T}\nu}{}^\mu\} := \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ wirkt auf diesen Term, indem sich der Tensor $R_{\text{LC}\mu\nu\rho\sigma}$ gemäß der ihn definierenden Transformationseigenschaft transformiert:

$$R_{\text{LC}\rho\sigma\mu\nu} \rightarrow \Lambda_{\text{P}\rho}{}^\alpha \Lambda_{\text{P}\sigma}{}^\beta \Lambda_{\text{P}\mu}{}^\lambda \Lambda_{\text{P}\nu}{}^\tau R_{\text{LC}\alpha\beta\lambda\tau}$$

und analog für Λ_{T} . Da in allen nicht-verschwindenden Beiträgen dieses Terms alle Indizes von $R_{\text{LC}\rho\sigma\mu\nu}$ verschieden sind, ändert der Term unter einer solchen Transformation sein Vorzeichen, so daß er die P- und die T-Invarianz verletzt. Bei $\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\text{LC}\rho\sigma\mu\nu}$ handelt

es sich somit um einen *Pseudoskalar*.

Physikalisch relevant ist nicht-verschwindende Torsion vor allem bei der Ankopplung von Fermionen. In diesem Fall induziert der Immirzi-Term eine CP-verletzende 4-Fermion-Wechselwirkung, sofern die Fermionen nicht-minimal angekoppelt werden [40]. Allerdings ist diese Wechselwirkung um die Planck-Masse unterdrückt. Prinzipiell sollten sich solche Verletzungen der CP-Invarianz in Form von Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien, beispielsweise bei der e^+e^- -Streuung, beobachten lassen [41, 42].

Wie bereits dargelegt beeinflusst der Wert des Immirzi-Parameters γ nicht die klassische Dynamik der Theorie. Er parametrisiert jedoch analog zum Theta-Parameter Θ_{QCD} , dem Vorfaktor des Theta-Terms, nicht-unitär-äquivalente Quantisierungen derselben und stellt somit eine Quantisierungsambiguität dar [43, 44]. Insbesondere sollten sich für verschiedene Werte des Immirzi-Parameters die resultierenden Quantentheorien hinsichtlich ihrer Grundzustände unterscheiden, so daß analog zu den aus der Yang-Mills-Theorie bekannten Θ -Vakua hier eine Familie von γ -Vakua zu erwarten ist.

Eine besonders wichtige Rolle spielt der Immirzi-Parameter in der *Loop-Quantengravitation*. Dabei handelt es sich um einen Zugang, der im wesentlichen auf einer kanonischen Quantisierung der (3+1)-zerlegten Einstein-Hilbert-Wirkung beruht und der aus dem sogenannten *Ashtekar-Programm* hervorgegangen ist. Diesem lag die Feststellung zugrunde, daß für $\gamma = \pm i$ - was gerade (anti-)selbstdualen Konfigurationen in der Lorentzischen Formulierung der Theorie entspricht - der Hamilton-Constraint in der entsprechenden Raumzeit-Foliation bloß polynomial von den kanonisch konjugierten Variablen abhängt und sich somit erheblich vereinfacht.

Da für komplexe Werte von γ der Phasenraum der Theorie allerdings komplexifiziert werden muß, sind zusätzliche Realitätsbedingungen erforderlich, so daß sich reelle Anfangsbedingungen unter Wirkung des Hamilton-Constraints für alle Zeiten in reelle Konfigurationen entwickeln. Diese sind jedoch ihrerseits wiederum nicht-polynomial. Zudem ist in der Quantentheorie nicht klar, wie diese Realitätsbedingungen auf entsprechende Operatoren und Zustände zu übertragen sind [45, 46]. Inzwischen ist es aber möglich, die volle Theorie auch für reelle Werte des Immirzi-Parameters vermöge der Ashtekar-Variablen, die insbesondere eine enge Verwandtschaft zur Yang-Mills-Theorie offenbaren, zu formulieren. Allerdings führt dies abermals auf einen nicht-polynomialen Hamilton-Constraint.

Nach einem Übergang von der Ashtekar-Formulierung zu sogenannten Loop- und Fluß-Variablen hat sich daraus die Loop-Quantengravitation entwickelt. In dieser lassen sich auf den raumartigen Hyperflächen einer (3+1)-Foliation der Raumzeit Flächen- und Volumen-Operatoren definieren. Die Quantisierung raumartiger Flächen und Volumina wird durch deren diskrete Spektren beschrieben, wobei diese vom Wert der Quantisierungsambiguität γ abhängen: Die Eigenwerte sind proportional zu $l_{\text{P}}^2\gamma$ bzw. zu $(l_{\text{P}}^2\gamma)^{\frac{3}{2}}$ mit der Planck-Länge $l_{\text{P}} := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35}$ m. Eine derartige Flächenquantisierung hat darüber hinaus zur Folge, daß die Entropie Schwarzer Löcher nun ebenfalls vom Immirzi-Parameter abhängt, so daß die Reproduktion der semiklassischen Bekenstein-Hawking-Formel

$$\mathcal{S}_{\text{B-H}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{A}{l_{\text{P}}^2} \quad (2.17)$$

in führender Ordnung als Möglichkeit zur Fixierung der γ -Ambiguität erwogen wurde. Hierbei bezeichnet A die Fläche, die den Ereignishorizont des Schwarzen Loches berandet. Unterschiedliche Vorgehensweisen beim Abzählen der relevanten Mikrozustände haben auf verschiedene Referenzwerte geführt; derjenige, der momentan als der präziseste erachtet wird, ist durch $\gamma_{\text{LQG}} = 0,2375 \dots$ gegeben [1]. Zudem erhält man in diesem Rahmen noch logarithmische Korrekturen der Form $\sim \ln\left(\frac{A}{l_{\text{P}}^2}\right)$ zur semiklassischen Bekenstein-Hawking-Formel, deren Vorfaktor vermutlich negativ ist [47, 48, 49].

Wir wollen nun noch die Grenzfälle $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$ der Holst-Wirkung (2.1) betrachten. Im ersten Fall wird diese singular. Da man den Immirzi-Term jedoch bis auf einen Oberflächenterm als Quadrat der Torsionsform ausdrücken kann, führt dieser Grenzfall auf die Darstellung einer Delta-Distribution der Form $\delta(T^a \wedge T_a)$. Deren Argument verschwindet nicht nur für Konfigurationen, deren Torsion verschwindet. Nun läßt sich gemäß der in Anhang A bewiesenen Relation (A.42),

$$\omega^a{}_{\mu}{}^{ab} = \omega^a{}_{\mu}(e) + \frac{1}{2} e^{b\nu} (T_{\mu\nu}^a - e^{a\rho} e_{c\mu} T_{\nu\rho}^c + e^{a\rho} e_{c\nu} T_{\rho\mu}^c), \quad (2.18)$$

der Spinzusammenhang durch die Torsion ausdrücken. Integriert man diese in einem Pfadintegral unter Berücksichtigung der zugehörigen Jacobi-Determinante aus, so unterdrückt der Immirzi-Term in der exponentierten Holst-Wirkung für $\gamma \rightarrow 0$ Komponenten der Torsion. Dieser Grenzfall stellt somit *nicht* die ART dar, doch er kommt ihr so nahe wie möglich. Für $\gamma \rightarrow \infty$ erfolgt keinerlei Unterdrückung in Form eines Gauß-Integrals, so daß

„off-shell“ die Torsion frei und gleichförmig fluktuiert; man erhält die sogenannte Cartan-Weyl-Formulierung der Gravitation [41]. Diese Darstellung ermöglicht auch ein intuitives Verständnis der endlichen γ -Werte, die zwischen den beiden Extremfällen liegen. Hingegen haben die Werte $\gamma = \pm 1$ bekanntlich eine Projektion auf die selbstduale bzw. anti-selbstduale Chiralität zur Folge.

Abschließend drücken wir auch die beiden anderen Terme der Holst-Wirkung durch Formen aus gemäß

$$\begin{aligned} \int d^4x e F_{\mu\nu}^{ab} e_a^\mu e_b^\nu &= \frac{1}{4} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^{ab} \varepsilon_{abcd} e^c_\rho e^d_\sigma \\ &= \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^{ab} e^c_\rho e^d_\sigma \varepsilon_{abcd} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int d^4x e &= \frac{1}{24} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho e^d_\sigma \varepsilon_{abcd} \\ &= \frac{1}{24} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende Darstellung der Holst-Wirkung in Formenschreibweise

$$S_{\text{Ho}}[e, \omega] = -\frac{1}{16\pi G} \left(\frac{1}{2} \int \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{\gamma} \int F^{ab} \wedge e_a \wedge e_b - \frac{\Lambda}{12} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right),$$

aus der erneut ersichtlich ist, daß die klassische Theorie nicht a priori die Existenz eines inversen Vielbeins postuliert.

Kapitel 3

Eine effektive Mittelwertwirkung für First-Order-Gravitation

Nachdem wir uns mit den klassischen Eigenschaften der Einstein-Cartan-Theorie im Rahmen der Holst-Wirkung vertraut gemacht haben, möchten wir die in der Einführung erläuterte Methode der Renormierungsgruppe auf deren euklidische Formulierung anwenden und diese so quantisieren. Dazu ist es notwendig, das Funktional Γ_k anzugeben, das einer geeigneten Flußgleichung unterliegt.

3.1 Die Konstruktion von Γ_k

Unter Berücksichtigung der Eichfixierungs- und Geistbeiträge ist der Ausgangspunkt der Konstruktion von Γ_k durch das erzeugende Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[s_a^\mu, t_{ab}^\mu, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu, \rho^{ab}, \bar{\rho}_{ab}] &= \int \mathcal{D}\hat{e} \mathcal{D}\hat{\omega} \mathcal{D}\mathcal{C}\mathcal{D}\bar{\mathcal{C}} \mathcal{D}\Sigma \mathcal{D}\bar{\Sigma} \\ &\exp\left\{ -S[\hat{e}, \hat{\omega}] - S_{\text{gf}}[\hat{e}, \hat{\omega}] - S_{\text{gh}}[\hat{e}, \hat{\omega}, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}] - S_{\text{source}} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

gegeben. Darin stellen \hat{e}_μ^a und $\hat{\omega}_\mu^{ab}$ das Quantenvielbein und den Quantenspinzusammenhang dar. Die Notation soll andeuten, daß dies jene Felder sind, denen im Rahmen einer kanonischen Quantisierung Feldoperatoren zugeordnet würden. Wir bezeichnen sie auch als *volle* Quantenfelder, um sie von den Hintergrundfeldern und Fluktuationen zu unter-

scheiden. Ferner sind \mathcal{C}^μ und $\bar{\mathcal{C}}_\mu$ sowie Σ^{ab} und $\bar{\Sigma}_{ab}$ die mit den Diffeomorphismen bzw. $O(4)$ -Transformationen assoziierten Geister und Antigeister. Sie stellen die Argumente der Geistwirkung S_{gh} dar, deren Exponential nach dem Ausintegrieren dieser Felder gemäß der üblichen Prozedur eine Darstellung der Faddeev-Popov-Determinante liefert. Dabei wird S_{gh} im allgemeinen ebenfalls von den Feldern \hat{e}^a_μ und $\hat{\omega}^{ab}_\mu$ abhängen. Des weiteren ist S für den Fall $\Lambda_{\text{UV}} \rightarrow \infty$ die übliche nackte Wirkung, und S_{gf} bezeichnet den Eichfixierungsterm. Im Quellterm S_{source} werden alle Felder an externe Quellen gekoppelt gemäß

$$S_{\text{source}} = - \int d^4x \hat{e} \{ s_a^\mu \hat{e}^a_\mu + t_{ab}^\mu \hat{\omega}^{ab}_\mu + \bar{\sigma}_\mu \mathcal{C}^\mu + \sigma^\mu \bar{\mathcal{C}}_\mu + \bar{\rho}_{ab} \Sigma^{ab} + \rho^{ab} \bar{\Sigma}_{ab} \} \quad (3.2)$$

mit der Vielbein-Determinante $\hat{e} := \det(\hat{e}^a_\mu)$ als Maßfaktor. Die klassische Wirkung S ist sowohl invariant unter Diffeomorphismen der Form

$$\begin{aligned} \delta_{\text{D}}(w) \hat{e}^a_\mu &= \mathcal{L}_w \hat{e}^a_\mu, \\ \delta_{\text{D}}(w) \hat{\omega}^{ab}_\mu &= \mathcal{L}_w \hat{\omega}^{ab}_\mu \end{aligned} \quad (3.3)$$

als auch unter der Wirkung lokaler Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned} \delta_{\text{L}}(\lambda) \hat{e}^a_\mu &= \lambda^a_b \hat{e}^b_\mu, \\ \delta_{\text{L}}(\lambda) \hat{\omega}^{ab}_\mu &= -\partial_\mu \lambda^{ab} + \lambda^a_c \hat{\omega}^{cb}_\mu + \lambda^b_c \hat{\omega}^{ac}_\mu \equiv -\hat{\nabla}_\mu \lambda^{ab}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

worin $\hat{\nabla}$ die aus $\hat{\omega}^{ab}_\mu$ gebildete kovariante $O(4)$ -Ableitung bezeichnet.

Entlang der üblichen Prozedur (vgl. Kapitel 1) würde man aus dem erzeugenden Funktional (3.1) über eine Legendre-Transformation die effektive Wirkung konstruieren. Diese ist aber nach der Eichfixierung nicht mehr invariant unter den entsprechenden Transformationen ihrer Argumente, den Vakuum Erwartungswerten der Felder. Allerdings ist nur so die Existenz eines wohldefinierten Propagators gewährleistet. Zudem bricht auch der Quellterm für eine tensorielle Spinzusammenhangsquelle t_{ab}^μ diese Invarianz, da sich $\hat{\omega}^{ab}_\mu$ unter δ_{L} wie ein Zusammenhang und somit inhomogen transformiert.

Wie in Kapitel 1 vorweggenommen, soll aber das modifizierte Funktional Γ_k eine Invarianz aufweisen, die seine allgemeine Struktur einschränkt. Zu diesem Zweck führen wir die bereits angedeutete Hintergrundstruktur ein, indem wir die dynamischen Felder ($\hat{e}, \hat{\omega}$) in

Hintergrundkomponenten $(\bar{e}, \bar{\omega})$ und Fluktuationen (ε, τ) zerlegen gemäß

$$\begin{aligned}\hat{e}^a{}_{\mu} &= \bar{e}^a{}_{\mu} + \varepsilon^a{}_{\mu}, \\ \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} &= \bar{\omega}^{ab}{}_{\mu} + \tau^{ab}{}_{\mu}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Die Geister werden nicht zerlegt. Diese Aufspaltung setzen wir in die klassische Wirkung S ein. Die Eichbedingungen wählen wir derart, daß in ihnen vermöge der Hintergrundgrößen konstruierte Objekte wie z. B. kovariante Ableitungen auf die Fluktuationen wirken und sie in letzteren linear sind. Der Eichfixierungsterm $S_{\text{gf}}[\varepsilon, \tau; \bar{e}, \bar{\omega}]$ hängt dann nur parametrisch von den Hintergründen ab. Entsprechend wird die Geistwirkung, die aus diesen Eichbedingungen konstruiert wird, ebenfalls parametrisch von $\bar{e}^a{}_{\mu}$ und $\bar{\omega}^{ab}{}_{\mu}$ abhängen. Darüber hinaus treten in ihr aber auch die Fluktuationen auf, so daß wir $S_{\text{gh}}[\varepsilon, \tau, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}; \bar{e}, \bar{\omega}]$ schreiben. (Später wird es ausreichend sein, die Geistwirkung für verschwindende Fluktuationen zu betrachten.) Abschließend ändern wir den Quellterm derart ab, daß lediglich die Fluktuationen an die Quellen gekoppelt werden gemäß

$$S_{\text{source}}^{\text{back}} = - \int d^4x \bar{e} \left\{ s_a{}^{\mu} \varepsilon^a{}_{\mu} + t_{ab}{}^{\mu} \tau^{ab}{}_{\mu} + \bar{\sigma}_{\mu} \mathcal{C}^{\mu} + \sigma^{\mu} \bar{\mathcal{C}}_{\mu} + \bar{\rho}_{ab} \Sigma^{ab} + \rho^{ab} \bar{\Sigma}_{ab} \right\}.\tag{3.6}$$

Der zugehörige Maßfaktor wird hier wie auch in S_{gf} und S_{gh} unter Verwendung des Hintergrund-Vielbeins gebildet. Wir fordern somit, daß die Hintergrund-Komponente $\bar{e}^a{}_{\mu}$ invertierbar sei, was für das volle Vielbein $\hat{e}^a{}_{\mu}$ jedoch nicht gelten muß. Unter der Voraussetzung eines translationsinvarianten Maßes ersetzen dann die Fluktuationen die unzerlegten Quantenfelder als Integrationsvariablen im Funktionalintegral. Wir erhalten in Analogie zu (3.1) ein Funktional, das von den Quellen und darüber hinaus parametrisch von den Hintergründen abhängt:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[s_a{}^{\mu}, t_{ab}{}^{\mu}, \sigma^{\mu}, \bar{\sigma}_{\mu}, \rho^{ab}, \bar{\rho}_{ab}; \bar{e}^a{}_{\mu}, \bar{\omega}^{ab}{}_{\mu}] &= \int \mathcal{D}\varepsilon \mathcal{D}\tau \mathcal{D}\mathcal{C} \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}} \mathcal{D}\Sigma \mathcal{D}\bar{\Sigma} \\ &\exp \left\{ -S[\bar{e} + \varepsilon, \bar{\omega} + \tau] - S_{\text{gf}}[\varepsilon, \tau; \bar{e}, \bar{\omega}] \right. \\ &\quad \left. - S_{\text{gh}}[\varepsilon, \tau, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}; \bar{e}^a{}_{\mu}, \bar{\omega}^{ab}{}_{\mu}] - S_{\text{source}}^{\text{back}} \right\}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Die Eichtransformationen (3.3) und (3.4) können auf dem Niveau der aufgespaltenen Felder auf zwei Arten realisiert werden. Diese Tatsache liegt dem sogenannten *Hintergrundformalismus* zugrunde, den wir hier anwenden und in Anhang C näher erläutern.

Zum einen kann man die Hintergrund-Konfigurationen als klassische Felder betrachten, die überhaupt nicht den Eichtransformationen unterworfen sind. Dies führt auf die *wahren Eichtransformationen* δ^G , bei denen die gesamte Feldtransformation von den Fluktuationsanteilen getragen wird. Wahre Diffeomorphismen sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\delta_D^G(w)\bar{e}_\mu^a &= 0, \\
\delta_D^G(w)\varepsilon_\mu^a &= \mathcal{L}_w(\bar{e}_\mu^a + \varepsilon_\mu^a), \\
\delta_D^G(w)\bar{\omega}_\mu^{ab} &= 0, \\
\delta_D^G(w)\tau_\mu^{ab} &= \mathcal{L}_w(\bar{\omega}_\mu^{ab} + \tau_\mu^{ab}),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

und deren $O(4)$ -Pendants sind von der Form

$$\begin{aligned}
\delta_L^G(\lambda)\bar{e}_\mu^a &= 0, \\
\delta_L^G(\lambda)\varepsilon_\mu^a &= \lambda^a_b(\bar{e}_\mu^b + \varepsilon_\mu^b), \\
\delta_L^G(\lambda)\bar{\omega}_\mu^{ab} &= 0, \\
\delta_L^G(\lambda)\tau_\mu^{ab} &= -\partial_\mu\lambda^{ab} + \lambda^a_c(\bar{\omega}_\mu^{cb} + \tau_\mu^{cb}) + \lambda^b_c(\bar{\omega}_\mu^{ac} + \tau_\mu^{ac}).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Andererseits kann man auch fordern, daß sich alle Fluktuationen homogen als Tensoren gemäß ihrer Indexstruktur transformieren, was eine entsprechende Transformation der Hintergründe impliziert. Insbesondere verhält sich die Spinzusammenhangsfluktuation τ_μ^{ab} unter diesen *Hintergrund-Transformationen* δ^B im $O(4)$ -Sektor tensoriell, wohingegen sich die Hintergrund-Komponente $\bar{\omega}_\mu^{ab}$ jetzt inhomogen transformiert. Wir erhalten demnach für die Hintergrund-Diffeomorphismen

$$\begin{aligned}
\delta_D^B(w)\bar{e}_\mu^a &= \mathcal{L}_w\bar{e}_\mu^a, \\
\delta_D^B(w)\varepsilon_\mu^a &= \mathcal{L}_w\varepsilon_\mu^a, \\
\delta_D^B(w)\bar{\omega}_\mu^{ab} &= \mathcal{L}_w\bar{\omega}_\mu^{ab}, \\
\delta_D^B(w)\tau_\mu^{ab} &= \mathcal{L}_w\tau_\mu^{ab}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

und für die Hintergrund-Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned}
 \delta_L^B(\lambda)\bar{e}^a{}_\mu &= \lambda^a{}_b\bar{e}^b{}_\mu, \\
 \delta_L^B(\lambda)\varepsilon^a{}_\mu &= \lambda^a{}_b\varepsilon^b{}_\mu, \\
 \delta_L^B(\lambda)\bar{\omega}^{ab}{}_\mu &= -\partial_\mu\lambda^{ab} + \lambda^a{}_c\bar{\omega}^{cb}{}_\mu + \lambda^b{}_c\bar{\omega}^{ac}{}_\mu \equiv -\bar{\nabla}_\mu\lambda^{ab}, \\
 \delta_L^B(\lambda)\tau^{ab}{}_\mu &= \lambda^a{}_c\tau^{cb}{}_\mu + \lambda^b{}_c\tau^{ac}{}_\mu.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hierin bezeichnet $\bar{\nabla}$ die unter Verwendung des Hintergrund-Spinzusammenhangs $\bar{\omega}^{ab}{}_\mu$ gebildete kovariante $O(4)$ -Ableitung.

Beide Transformationsklassen (3.8), (3.9) und (3.10), (3.11) reproduzieren für die vollen Quantenfelder wie gefordert die ursprünglichen Transformationen (3.3), (3.4). Die entscheidende Idee besteht nun darin, Eichbedingungen zu wählen, die zwar die wahren Eichtransformationen δ^G , aber *nicht* die Hintergrundinvarianz brechen, so daß der resultierende Eichfixierungsbeitrag S_{gf} unter δ^B invariant ist.

Die assoziierte Geistwirkung ist dann im allgemeinen ebenfalls hintergrundinvariant, auch wenn in unserem Fall eine geeignete Umparametrisierung der Eichtransformationen erforderlich ist, um dies zu erreichen.

Da die klassische Wirkung jeweils nur von der Summe aus Hintergrundkomponente und Fluktuation abhängt, ist sie sowohl δ^G - als auch δ^B -invariant. Fordert man abschließend, daß sich die Quellen in (3.6) ebenfalls tensoriell bezüglich der Hintergrund-Transformationen verhalten, so folgt die δ^B -Invarianz der exponentierten Wirkung in (3.15). Diese überträgt sich auf die effektive Wirkung bzw. die effektive Mittelwertwirkung, wobei die Felderwartungswerte analog zu transformieren sind.

Da wir die Geistfelder nicht zerlegen, stimmen für diese die wahren Eichtransformationen mit den Hintergrund-Transformationen überein, und wir fordern jeweils ein ihrer Indexstruktur entsprechendes, tensorielles Transformationsverhalten. Dies liefert für die

Diffeomorphismen

$$\begin{aligned}
\delta_D^G(w)\mathcal{C}^\mu &= \delta_D^B(w)\mathcal{C}^\mu = \mathcal{L}_w\mathcal{C}^\mu, \\
\delta_D^G(w)\bar{\mathcal{C}}_\mu &= \delta_D^B(w)\bar{\mathcal{C}}_\mu = \mathcal{L}_w\bar{\mathcal{C}}_\mu, \\
\delta_D^G(w)\Sigma^{ab} &= \delta_D^B(w)\Sigma^{ab} = \mathcal{L}_w\Sigma^{ab}, \\
\delta_D^G(w)\bar{\Sigma}_{ab} &= \delta_D^B(w)\bar{\Sigma}_{ab} = \mathcal{L}_w\bar{\Sigma}_{ab}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

und für die Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned}
\delta_L^G(\lambda)\mathcal{C}^\mu &= \delta_L^B(\lambda)\mathcal{C}^\mu = 0, \\
\delta_L^G(\lambda)\bar{\mathcal{C}}_\mu &= \delta_L^B(\lambda)\bar{\mathcal{C}}_\mu = 0, \\
\delta_L^G(\lambda)\Sigma^{ab} &= \delta_L^B(\lambda)\Sigma^{ab} = \lambda^a{}_c\Sigma^{cb} + \lambda^b{}_c\Sigma^{ac}, \\
\delta_L^G(\lambda)\bar{\Sigma}_{ab} &= \delta_L^B(\lambda)\bar{\Sigma}_{ab} = \lambda_a{}^c\bar{\Sigma}_{cb} + \lambda_b{}^c\bar{\Sigma}_{ac}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Insbesondere übertragen sich alle Eigenschaften der vollen Felder bezüglich δ_D und δ_L auf die δ_D^B - und δ_L^B -Eigenschaften der Hintergrundfelder; $\varepsilon^a{}_\mu$ und $\tau^{ab}{}_\mu$ kann man als δ^B -Tensoren auffassen, die der Theorie einfach hinzugefügt werden. Beispielsweise wird durch $\bar{g}_{\mu\nu} := \bar{e}^a{}_\mu\bar{e}^b{}_\nu\eta_{ab}$ bezüglich δ^B eine Metrik definiert, deren Inverses durch $\bar{g}^{\mu\nu} = \bar{e}_a{}^\mu\bar{e}_b{}^\nu\eta^{ab}$ gegeben ist. Ferner ist $\bar{D} = \partial + \bar{\omega} + \bar{\Gamma}$ eine δ^B -kovariante Ableitung, und $\bar{D}^\mu := \bar{g}^{\mu\nu}\bar{D}_\nu \equiv \bar{D}_\nu\bar{g}^{\mu\nu}$ ist wohldefiniert.

Die Möglichkeit, ausschließlich die wahren Eichinvarianzen zu fixieren und dabei weiterhin auf eine Hintergrund-Invarianz des Funktionals zu bestehen, ist in dem Umstand begründet, daß bloß die Invarianz unter wahren Eichtransformationen auf generische Nullmoden des inversen Propagators führt. Demgegenüber ist die Hintergrund-Eichinvarianz in diesem Sinne ungefährlich (vgl. Abschnitt 4.1.6).

Der entscheidende Schritt besteht nun darin, zu dem Exponenten in (3.7) einen Term $\Delta_k S$ hinzuzufügen, der das sukzessive Ausintegrieren der Moden implementiert. Er ist

allgemein von der Form

$$\begin{aligned}
& \Delta_k S[\varepsilon, \tau, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}; \bar{e}, \bar{\omega}] \\
&= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \bar{e} \left\{ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varepsilon^c \\ \tau^{cd} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{grav}}{}^{\nu\mu}{}_c{}^a & R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{grav}}{}^{\nu\mu}{}_c{}^{ab} \\ R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{grav}}{}^{\nu\mu}{}_{cd}{}^a & R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{grav}}{}^{\nu\mu}{}_{cd}{}^{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^a \\ \tau^{ab} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{C}}_\nu \\ \bar{\Sigma}_{cd} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{gh}}{}^\nu{}_\mu & R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{gh}}{}^\nu{}_{ab} \\ R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{gh}}{}^{cd}{}_\mu & R[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{gh}}{}^{cd}{}_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{C}^\mu \\ \Sigma^{ab} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \\
&\equiv \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \bar{e} \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \tau \end{pmatrix}^T \mathcal{R}_k^{\text{grav}}[-\bar{D}] \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{C}} \\ \bar{\Sigma} \end{pmatrix}^T \mathcal{R}_k^{\text{gh}}[-\bar{D}] \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \Sigma \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Der Cutoff \mathcal{R}_k zerfällt in zwei Blöcke, $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$ und $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$, die per Konstruktion für jede Skala k die gewünschten Moden im Graviton- und im Geistsektor separat unterdrücken. Dabei bezeichnet $\bar{D} \equiv \partial + \bar{\omega} + \bar{\Gamma}$ die aus dem Hintergrund gebildete Raumzeit- und $O(4)$ -kovariante Ableitung. Man beachte, daß in die Konstruktion des Cutoffs nur die Hintergrundkonfigurationen und *nicht* die Fluktuationen eingehen. Das Maß wird ebenfalls aus dem Hintergrund gebildet, so daß $\Delta_k S$ in der Tat quadratisch in den Fluktuationen bzw. in den Grassmann-wertigen Geistfeldern ist. Darüber hinaus ist der Cutoff per Konstruktion ebenfalls δ^{B} -kovariant.

In der den Cutoff definierenden Ersetzungsvorschrift $p^2 \rightarrow p^2 + k^2 R^{(0)}$ sollte sich p^2 auf das Spektrum einer hintergrundkovarianten Verallgemeinerung des Laplace-Operators beziehen. Daher sollte man die Ersetzung hier bezüglich der vollen hintergrundkovarianten Ableitung \bar{D}_μ durchführen, also $p^2 \in \text{spec}\{-\bar{D}^2 \equiv -\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu\}$ mit $\bar{g}^{\mu\nu} = \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\nu \eta^{ab}$ unter Voraussetzung eines regulären Hintergrundvielbeins. Allerdings ist die Einstein-Cartan-Theorie eine Theorie erster Ordnung, in deren inversem Propagator kein kinetischer Term in der üblichen Form eines d'Alembert-Operators auftritt. Vielmehr ist dieser von der Form eines inversen Dirac-Propagators für Fermionen, in welchem Ableitungen erster Ordnung in den (ε, τ) -Nebendiagonalblöcken auftreten. Dies kann man unmittelbar an der expliziten Form von $\Gamma_k^{(2)}$ bestätigen, die in Anhang E berechnet wird. Im Fall fermionischer Propagatoren wendet man daher die obige Regularisierungsvorschrift meist auf das Quadrat von

$\Gamma_k^{(2)}$ an [50], was sich jedoch nicht unmittelbar auf die Einstein-Cartan-Theorie übertragen läßt. Wir werden in der vorliegenden Arbeit darauf verzichten, einen derartigen Operator zu konstruieren; dies wird weiter unten ausführlich begründet. Die Form der Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$ mit un spezifiziertem $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$ und $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$ ist symbolisch zu verstehen und soll uns an das grundsätzliche Vorgehen zur Ableitung einer exakten Renormierungsgruppengleichung für das Funktional Γ_k erinnern: Konstruiert werden sollte ein Cutoff, der der First-Order-Natur der Einstein-Cartan-Theorie Rechnung trägt und dessen Unterdrückungseigenschaft sich auf das Spektrum von \bar{D} oder eines aus dieser Ableitung gebildeten Operators bezieht.

Wir fügen nun einen derartigen Cutoff zu (3.7) hinzu und erhalten als Ausgangspunkt zur Konstruktion der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k das jetzt k -abhängige Funktional:

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}_k[s_a^\mu, t_{ab}^\mu, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu, \rho^{ab}, \bar{\rho}_{ab}; \bar{e}_\mu^a, \bar{\omega}^{ab}_\mu] \\ = & \int \mathcal{D}\varepsilon \mathcal{D}\tau \mathcal{D}\mathcal{C} \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}} \mathcal{D}\Sigma \mathcal{D}\bar{\Sigma} \\ & \exp \left\{ -S[\bar{e} + \varepsilon, \bar{\omega} + \tau] - S_{\text{gf}}[\varepsilon, \tau; \bar{e}, \bar{\omega}] - S_{\text{gh}}[\varepsilon, \tau, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}; \bar{e}_\mu^a, \bar{\omega}^{ab}_\mu] \right. \\ & \left. - \Delta_k S[\varepsilon, \tau, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}; \bar{e}, \bar{\omega}] - S_{\text{source}}^{\text{back}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nun definieren wir

$$W_k[s_a^\mu, t_{ab}^\mu, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu, \rho^{ab}, \bar{\rho}_{ab}; \bar{e}_\mu^a, \bar{\omega}^{ab}_\mu] := \ln(\mathcal{Z}_k[s_a^\mu, t_{ab}^\mu, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu, \rho^{ab}, \bar{\rho}_{ab}; \bar{e}_\mu^a, \bar{\omega}^{ab}_\mu]) \quad (3.16)$$

und bilden daraus durch funktionale Ableitung bezüglich der Quellen die k - und hintergrundabhängigen Erwartungswerte der Fluktuationen. Wir erhalten für das Vielbein und den Spinzusammenhang

$$\begin{aligned} \bar{e}_\mu^a(x) & := \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta W_k[s, t, \sigma, \bar{\sigma}, \rho, \bar{\rho}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta s_a^\mu(x)}, \\ \bar{\tau}_\mu^{ab}(x) & := \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta W_k[s, t, \sigma, \bar{\sigma}, \rho, \bar{\rho}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta t_{ab}^\mu(x)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

für die Diffeomorphismus-Geister

$$\begin{aligned}\xi^\mu(x) &:= \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta W_k[s, t, \sigma, \bar{\sigma}, \rho, \bar{\rho}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \bar{\sigma}_\mu(x)}, \\ \bar{\xi}_\mu(x) &:= \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta W_k[s, t, \sigma, \bar{\sigma}, \rho, \bar{\rho}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \sigma^\mu(x)}\end{aligned}\quad (3.18)$$

und schließlich für die Lorentz-Geister

$$\begin{aligned}\Upsilon^{ab}(x) &:= \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta W_k[s, t, \sigma, \bar{\sigma}, \rho, \bar{\rho}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \bar{\rho}_{ab}(x)}, \\ \bar{\Upsilon}_{ab}(x) &:= \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta W_k[s, t, \sigma, \bar{\sigma}, \rho, \bar{\rho}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \rho^{ab}(x)}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Dabei haben wir die gewöhnlichen Funktionalableitungen mit einer inversen Determinante des Hintergrundvielbeins als Vorfaktor versehen. Diese wurden in Kapitel 1 als Funktionalableitungen bezeichnet, die „mit dem Maß verträglich sind“. Die Definition hat nämlich zur Folge, daß Funktionalableitungen bezüglich Tensoren von Raumzeitintegralen von Tensoren wiederum Tensoren sind. Sei z. B. I ein Funktional, das durch Integration eines Diffeomorphismus-Skalars F entsteht, und F möge seinerseits aus der Kontraktion des Vielbeins mit einem Tensor $v_a^\mu(x)$ hervorgehen: $F(x) = e_a^\mu(x)v_a^\mu(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{e(x)} \frac{\delta I}{\delta e_a^\mu(x)} &= \frac{1}{e(x)} \frac{\delta}{\delta e_a^\mu(x)} \int d^4y e(y) F(y) \\ &= \frac{1}{e(x)} \int d^4y e(y) \left(e_a^\mu(y) \delta^{(4)}(x-y) F(y) + \frac{\delta F(y)}{\delta e_a^\mu(x)} \right) \\ &= e_a^\mu(x) F(x) + v_a^\mu(x),\end{aligned}$$

was wie gewünscht einen Tensor darstellt. Insbesondere leiten wir in den obigen Fällen nie nach dem Hintergrundvielbein ab, bezüglich dessen wir das Maß im Quellterm bilden. Der erste Summand tritt somit dort nicht auf.

Unter der Voraussetzung, daß die Matrix der zweiten Ableitungen von W_k bezüglich der Quellen regulär ist, können wir die Definitionen der Erwartungswerte nach den Quellen auflösen. Dann wird durch die Legendre-Transformierte von W_k bezüglich der Quellen ein Funktional der Erwartungswerte definiert, das parametrisch von den Hintergründen

abhängt:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_k[\bar{\varepsilon}^a{}_\mu, \bar{\tau}^{ab}{}_\mu, \xi^\mu, \bar{\xi}_\mu, \Upsilon^{ab}, \bar{\Upsilon}_{ab}; \bar{e}^a{}_\mu, \bar{\omega}^{ab}{}_\mu] \\
&= \int d^4x \bar{e} \left\{ s_a{}^\mu \bar{\varepsilon}^a{}_\mu + t_{ab}{}^\mu \bar{\tau}^{ab}{}_\mu + \bar{\sigma}_\mu \xi^\mu + \sigma^\mu \bar{\xi}_\mu + \bar{\rho}_{ab} \Upsilon^{ab} + \rho^{ab} \bar{\Upsilon}_{ab} \right\} \\
&\quad - W_k[s_a{}^\mu, t_{ab}{}^\mu, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu, \rho^{ab}, \bar{\rho}_{ab}; \bar{e}^a{}_\mu, \bar{\omega}^{ab}{}_\mu] \\
&\quad - \Delta_k S[\bar{\varepsilon}^a{}_\mu, \bar{\tau}^{ab}{}_\mu, \xi^\mu, \bar{\xi}_\mu, \Upsilon^{ab}, \bar{\Upsilon}_{ab}; \bar{e}^a{}_\mu, \bar{\omega}^{ab}{}_\mu]. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Auch hier haben wir das Hintergrund-Maß verwandt. Darüber hinaus haben wir die Cutoff-Wirkung subtrahiert, nachdem wir in dieser die Felder durch ihre Erwartungswerte ersetzt hatten. Analog zum metrischen Fall sollte für dieses Funktional eine Flußgleichung von der Art der Wetterich-Gleichung (1.16) abgeleitet werden können, deren Form jedoch explizit von der gewählten Cutoff-Implementierung abhinge. In ihr träte als zentrales Objekt der effektive inverse Propagator $\Gamma_k^{(2)}$ der Theorie auf. Dieser ist definiert als Matrix der zweiten Funktionalableitungen von Γ_k bezüglich der Fluktuationen, ausgewertet bei verschwindenden Fluktuationen und verschwindenden Geist- und Antigeistfeldern. Da die Geistwirkung per Konstruktion bilinear in den Geistern und Antigeistern ist, entkoppelt hier der Geistsektor völlig vom Feldsektor. Das wurde bereits implizit bei der Konstruktion der Cutoff-Wirkung (3.14) berücksichtigt. Daher können wir schon vor dem Bilden der Funktionalableitung in der Geistwirkung die Fluktuationen $\bar{\varepsilon}^a{}_\mu$ und $\bar{\tau}^{ab}{}_\mu$ gleich null setzen: Im Zuge der Funktionalableitung treten zwar auch Beiträge im gemischten Geist-Graviton-Sektor auf, doch enthalten diese noch ein Geist- oder Antigeist-Feld. Da wir alle Geist- und Antigeist-Felder anschließend gleich null setzen, verschwinden auch alle derartigen Beiträge. Man kann dies als Näherung einer korrekten bimetrischen Behandlung auffassen, bei der die Wetterich-Gleichung (1.16) für nicht-verschwindende Fluktuationen und nicht-verschwindende Geister betrachtet wird. Sie wurde erst kürzlich im QEG-Kontext durchgeführt [51, 52, 53].

Es gilt nun für den Gravitonsektor

$$\Gamma_k^{(2)}[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{grav}} := \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{1}{\bar{e}(x)} \left(\begin{array}{cc} \frac{\delta \Gamma_k[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \bar{\varepsilon}^c{}_\nu(y) \delta \bar{\varepsilon}^a{}_\mu(x)} & \frac{\delta \Gamma_k[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \bar{\varepsilon}^c{}_\nu(y) \delta \bar{\tau}^{ab}{}_\mu(x)} \\ \frac{\delta \Gamma_k[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \bar{\tau}^{cd}{}_\nu(y) \delta \bar{\varepsilon}^a{}_\mu(x)} & \frac{\delta \Gamma_k[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \bar{\tau}^{cd}{}_\nu(y) \delta \bar{\tau}^{ab}{}_\mu(x)} \end{array} \right) \Bigg|_{\bar{\varepsilon}=0, \bar{\tau}=0, \xi=0, \bar{\xi}=0, \Upsilon=0, \bar{\Upsilon}=0} \tag{3.21}$$

und für den Geistsektor

$$\Gamma_k^{(2)}[\bar{e}, \bar{\omega}]^{\text{gh}} := \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{1}{\bar{e}(x)} \left(\begin{array}{cc} \frac{\delta \Gamma_k[\bar{e}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \xi^\nu(y) \delta \xi_\mu(x)} & \frac{\delta \Gamma_k[\bar{e}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \xi^\nu(y) \delta \Upsilon_{ab}(x)} \\ \frac{\delta \Gamma_k[\bar{e}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \Upsilon^{cd}(y) \delta \xi_\mu(x)} & \frac{\delta \Gamma_k[\bar{e}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \Upsilon^{cd}(y) \delta \Upsilon_{ab}(x)} \end{array} \right) \Big|_{\bar{e}=0, \bar{\tau}=0, \xi=0, \bar{\xi}=0, \Upsilon=0, \bar{\Upsilon}=0} . \quad (3.22)$$

Mitunter ist es üblich, die effektive Mittelwertwirkung als Funktional der vollen Felderwartungswerte zu schreiben gemäß

$$\begin{aligned} & \Gamma_k[e^a{}_\mu, \omega^{ab}{}_\mu, \bar{e}^a{}_\mu, \bar{\omega}^{ab}{}_\mu, \xi^\mu, \bar{\xi}_\mu, \Upsilon^{ab}, \bar{\Upsilon}_{ab}] \\ := & \Gamma_k[e^a{}_\mu - \bar{e}^a{}_\mu, \omega^{ab}{}_\mu - \bar{\omega}^{ab}{}_\mu, \xi^\mu, \bar{\xi}_\mu, \Upsilon^{ab}, \bar{\Upsilon}_{ab}; \bar{e}^a{}_\mu, \bar{\omega}^{ab}{}_\mu] . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Bezüglich dieser Darstellung wäre der obige inverse Propagator als Matrix der zweiten Ableitungen bezüglich der vollen Felder gegeben, wobei man letztere nach der Ableitung mit den Hintergrundkonfigurationen identifiziert.

In diesem Sinne ist es also die Propagation der Fluktuationen bzw. ihrer Erwartungswerte, die für uns von Interesse ist. Wir möchten an dieser Stelle noch einmal betonen, daß wir diese nicht als Störungen um einen vorgegebenen Hintergrund auffassen. Wir nehmen insbesondere nicht an, daß sie in irgendeinem Sinne „klein“ seien. Die Bedeutung des Hintergrundes beruht vielmehr auf zwei anderen Aspekten: Sie besteht zum einen darin, eine Metrik bereitzustellen, bezüglich der man hoch- und niederfrequente Moden überhaupt klassifizieren kann. Daher bezieht sich auch der Cutoff auf das Spektrum eines reinen Hintergrund-Operators. Der Hintergrund ist dabei fest, aber beliebig. Er muß insbesondere keine Lösung der aus Γ_k folgenden Bewegungsgleichungen sein. Zum anderen eröffnet die Hintergrundmethode die Möglichkeit, ein effektives Wirkungsfunktional zu konstruieren, das einen wohldefinierten Propagator besitzt und dabei gleichzeitig eine Invarianzeigenschaft aufweist, die seine Struktur einschränkt und ein systematisches Trunkieren erlaubt.

Im folgenden Abschnitt möchten wir kurz begründen, warum auf die Konstruktion eines Cutoff-Operators verzichtet wurde. Im Anschluß geben wir die Flußgleichung an, die anstelle einer exakten Renormierungsgruppengleichung analysiert wird und erläutern ihre grundlegenden Eigenschaften.

3.2 Zur Konstruktion eines Cutoff-Operators \mathcal{R}_k für Gravitation im First-Order-Formalismus

Der Cutoff \mathcal{R}_k muß dem Funktional Γ_k und damit in realistischen Situationen einer gewählten Trunkierung angepaßt werden. In unserem Fall ist diese durch die euklidische Holst-Wirkung gegeben. Diesen Teil der Trunkierung, die noch um die Eichfixierungsbeiträge und die daraus resultierende Geistwirkung ergänzt wird, bezeichnen wir mit

$$\Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}] = -\frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x e \left\{ \left(F^{\mu\nu ab} - \frac{1}{2\gamma_k} \varepsilon^{ab cd} F^{\mu\nu cd} \right) - 2\Lambda_k \right\}. \quad (3.24)$$

Sie hängt nur von den unzerlegten Feldern ab. Zudem treten in ihr die laufenden Kopplungen G_k , Λ_k und γ_k auf, wobei letztere den skalenabhängigen Immirzi-Parameter bezeichnet, der eine dimensionslose Zahl ist. Derartige Trunkierungen von der Form der klassischen Wirkung erfassen im allgemeinen sehr gut das UV-Verhalten einer Theorie [21, 22, 54]. Mit dem Auftreten von wirklich starken Renormierungseffekten ist erst im Infraroten zu rechnen (vgl. Abschnitt 1.6).

Berechnen wir ausschließlich für den Anteil (3.24) den bereits definierten inversen Propagator gemäß

$$\Gamma_{k \text{ Ho}}^{(2)}[\bar{e}, \bar{\omega}] := \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{1}{\bar{e}(x)} \left(\begin{array}{cc} \frac{\delta \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta e^m_\beta(y) \delta e^k_\alpha(x)} & \frac{\delta \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta e^m_\beta(y) \delta \omega^{kl}_\alpha(x)} \\ \frac{\delta \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \omega^{mn}_\beta(y) \delta e^k_\alpha(x)} & \frac{\delta \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}]}{\delta \omega^{mn}_\beta(y) \delta \omega^{kl}_\alpha(x)} \end{array} \right) \Bigg|_{e=\bar{e}, \omega=\bar{\omega}},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \Gamma_{k \text{ Ho}}^{(2)}[\bar{e}, \bar{\omega}] \\ &= -\frac{1}{16\pi G_k} \frac{1}{\bar{e}(x)} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \times \\ & \times \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} (K_{abmk}^{(\gamma_k)} \bar{F}^{\mu\nu ab}(x) - 2\Lambda_k \varepsilon_{abmk} \bar{e}^a_\mu(x) \bar{e}^b_\nu(x)) & K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu(x) \bar{\nabla}_\mu^{ab}{}_{kl} \\ K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{\nabla}_\mu^{x ab} \bar{e}^c_\nu(x) & K_{nkab}^{(\gamma_k)} \bar{e}^a_\mu(x) \bar{e}^b_\nu(x) \eta_{ml} \end{array} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}(x)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit

$$K_{abcd}^{(\gamma_k)} := \varepsilon_{abcd} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc}) ;$$

dies wird in Anhang E explizit ausgeführt. Querstriche kennzeichnen die Auswertung des entsprechenden Objekts auf den Hintergrundkonfigurationen.

Dieser Operator läßt unmittelbar die bereits angesprochene „fermionische“ Struktur erkennen. Um die übliche Cutoff-Vorschrift bezüglich p^2 zu implementieren, wendet man diese im allgemeinen auf das Quadrat eines inversen Propagators dieses Typs an; p^2 wäre dann der Eigenwert von $-\bar{D}^2$. Allerdings lassen sich nach dem Quadrieren nicht alle Ableitungen zu kovarianten Ableitungen vom Typ \bar{D}_μ zusammenfassen. Stattdessen treten in dem endgültigen Ausdruck auch kovariante Ableitungen $\bar{\nabla}_\mu$ vom $O(4)$ -Typ und einzelne partielle Ableitungen ∂_μ auf. Bei analogen Berechnungen in fermionischen Theorien greift man darüber hinaus oft auf die dort vorliegenden algebraischen Strukturen wie beispielsweise die γ_5 -Involution zurück. Bislang ist nicht bekannt, ob entsprechende Analoga in der (e, ω) -Gravitation existieren. Diesbezügliche Erkenntnisse könnten auch hier im Hinblick auf die Konstruktion des Cutoffs hilfreich sein.

Ließe sich der Operator $(\Gamma_k^{(2)})^2$ ausschließlich durch $-\bar{D}^2$ auszudrücken, so bliebe die Schwierigkeit, dessen Spektrum als Funktion von p^2 zu bestimmen, um den Cutoff optimal anpassen zu können. Wir werden später die Felderwartungswerte auf irreduzible Art und Weise zerlegen und damit eine entsprechende Darstellung für $\Gamma_k^{(2)}$ erhalten. Selbst für den freien Fall, d. h. für $\bar{\omega} = 0$, ist der größte verbleibende Unterblock eine 7×7 -Matrix, deren Spektrum somit nicht analytisch bestimmt werden kann. Erst wenn wir zusätzlich den Fall $\gamma_k \rightarrow \infty$ betrachten, wird dieser Operator in einen 3×3 - und einen 4×4 -Block zerfallen, so daß eine explizite Berechnung der Eigenwerte möglich ist. Auf dieser Beobachtung, die einen darstellungstheoretischen Hintergrund besitzt [55, 56], beruht unsere Rechnung. Bei der Konstruktion eines expliziten Cutoffs müßte man daher auch auf dessen optimale Anpassung verzichten und stattdessen einen Brute-Force-Cutoff verwenden, der beispielsweise durch das Produkt aus einer Profilfunktion $R^{(0)}(\frac{p^2}{k^2}) k^2$ und dem Einheitsoperator auf dem Feldraum gegeben sein könnte.

Wir entscheiden uns hier für eine andere Methode zur Untersuchung des Renormierungsverhaltens der drei angegebenen Kopplungen. Sie ist insofern eleganter, als sie auf

die gerade angesprochene Art und Weise explizite Eigenschaften des Spektrums von $\Gamma_k^{(2)}$ berücksichtigt. Sie beruht auf der sogenannten *Propertime-Gleichung*, die wir im nächsten Abschnitt erläutern.

3.3 Die Propertime-Gleichung

Den Ausgangspunkt der Propertime-Gleichung stellt die mathematische Identität

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-sa} - e^{-sb})$$

dar. Diese beweist man, indem man beispielsweise ihre linke und ihre rechte Seite als Funktionen von a auffaßt und zeigt, daß beide der gleichen Differentialgleichung erster Ordnung $f'(a) = \frac{1}{a}$ mit der gleichen Anfangsbedingung $f(a=b) = 0$ mit Parameter b genügen; auf der rechten Seite greift man dabei auf die Laplace-Transformierte der Funktion $\frac{1}{x}$ zurück. Die *Propertime-* oder *Eigenzeit-Darstellung* des Logarithmus auf dem Niveau von Operatoren erhält man dann, indem man in der Gleichung die C-Zahlen a und b formal durch Operatoren A und B ersetzt. Für die typischerweise zu berechnenden Spuren gilt dann zunächst in formalem Sinne

$$\mathrm{Tr} \ln\left(\frac{A}{B}\right) = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \mathrm{Tr} \left\{ e^{-sA} - e^{-sB} \right\}.$$

Dabei ist es erlaubt, die beiden Exponentiale auch dann in Form zweier separater Summanden darzustellen, falls die beiden Operatoren A und B nicht kommutieren; dies wird in Abschnitt 7.1 gezeigt. Die Propertime-Darstellung eines inversen Operators ergibt sich auf die gleiche Art als das Analogon der Laplace-Transformation

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty ds e^{-sA}.$$

(Dabei kann diesen Darstellungen anstatt der Laplace-Transformation auch die Fourier-Transformation zugrunde gelegt werden.) Man nennt s die *Eigenzeit*, wobei dieser hier der Status eines Parameters zukommt. Diese Darstellungen besitzen den Vorteil, daß sie sich beispielsweise im Falle von A^{-1} auch auf singuläre Operatoren fortsetzen lassen, indem das Propertime-Integral durch eine Schmierfunktion $f(s)$ geeignet regularisiert wird. Dabei

lassen sich unterschiedliche divergente Aspekte eines Operators in dieser Darstellung sehr gut isoliert behandeln, so daß sie in der Quantenfeldtheorie, in der derartige Divergenzen allenthalben auftreten, eine breite Anwendung findet.

Die Propertime-Darstellung läßt sich unmittelbar auf die Ein-Schleifen-Approximation (1.8) an die effektive Wirkung anwenden. Diese lautet dann schematisch

$$\Gamma = S - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} \{ e^{-s S^{(2)}} \} + \text{const.} \quad (3.26)$$

Typischerweise ist der darin auftretende inverse Propagator von der Form $S^{(2)} = -D^2 + V$, worin D^2 die dem jeweiligen Kontext entsprechende kovariante Verallgemeinerung des d'Alembert-Operators bezeichnet, die einem kinetischen Term entstammt. Mittels der Spektraldarstellung ergibt sich dann der Ein-Schleifen-Beitrag zu

$$\text{Tr} e^{-s S^{(2)}} = \text{Tr} e^{-s(-D^2+V)} = \sum_\lambda e^{-s\lambda}$$

mit $\lambda \in \text{spec}(-D^2 + V)$. Für kleine Eigenzeiten s tragen vorwiegend große Eigenwerte λ des inversen Propagators, d. h. große Impulse zu dieser Summe bei. Dies entspricht somit dem UV-Regime der durch das Funktional S definierten Theorie. Im Extremfall großer Eigenzeiten dominieren kleine Eigenwerte λ , die das IR-Verhalten der Theorie widerspiegeln.

Die Berechnung des vollen Spektrums von $S^{(2)}$ in geschlossener Form ist im allgemeinen nicht möglich. Von der Spur auf der rechten Seite der Ein-Schleifen-Gleichung werden jedoch in der Regel nur bestimmte Monome und mithin nur bestimmte Potenzen der Felder benötigt, so daß es für die meisten praktischen Zwecke ausreichend ist, den Wechselwirkungsanteil in den Feldern zu entwickeln. Der Operator $e^{-s(-D^2+V)}$ nimmt in dieser Näherung dann die Form $P(sV) e^{sD^2}$ mit einem entsprechenden Polynom $P(sV)$ an. Auch im Rahmen unserer Rechnung werden wir so verfahren und die benötigten $\bar{\omega}$ -Beiträge aus dem Exponenten unter der Spur „herunterentwickeln“. Obige Überlegungen hinsichtlich der Beziehung zwischen s und dem Spektrum $\{\lambda\}$ übertragen sich dann auf diesen freien Fall, so daß s ganz im Sinne der Heisenbergschen Unschärferelation die zum Spektrum von $-D^2$ komplementäre Variable darstellt.

Man kann diesen Sachverhalt auch im Sinne einer feldtheoretischen Verallgemeinerung der analogen Situation des freien quantenmechanischen Punktteilchens verstehen. In der

euklidischen Formulierung ist die Schrödinger-Gleichung gegeben durch

$$\hat{H}\Psi = -\partial_t \Psi$$

mit $\hat{H} = -\Delta$. Die Übergangsamplitude $K(y, t; x, 0)$, deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeit angibt, das Teilchen zur Zeit t am Ort y vorzufinden, sofern es zur Zeit 0 am Ort x war, ist gegeben durch

$$K(y, t; x, 0) = \langle y | e^{-t\hat{H}} | x \rangle = \langle y | e^{t\Delta} | x \rangle .$$

In diesem einfachen Fall ist die Schrödinger-Gleichung mit der Wärmeleitungsgleichung identisch, und die Zeitvariable t stellt das Pendant zur Eigenzeit s dar. Für große Zeiten t diffundiert das Punktteilchen über große räumliche Abstände, so daß es sensitiv auf die IR-Eigenschaften des Systems ist; entsprechend sind kurze Zeiten mit dem UV-Verhalten verknüpft. Diese Analogie ist auch der Grund für das Auftreten der Heat-Kernel-Entwicklung in feldtheoretischen Rechnungen dieser Art, sofern in der Wirkung ein kinetischer Term in Standardform und mithin ein assoziierter Operator zweiter Ordnung vorliegt.

Um wohldefiniert zu sein, bedarf die Spur auf der rechten Seite der Ein-Schleifen-Approximation im allgemeinen noch einer UV- und einer IR-Regularisierung. Aufgrund der erläuterten reziproken Beziehung zwischen Eigenzeit und Impulsskala ist die einfachste Implementierung eines entsprechenden UV- bzw. IR-Cutoffs von der Form

$$\Gamma = S - \frac{1}{2} \int_{\Lambda_{\text{UV}}^{-2}}^{k^{-2}} \frac{ds}{s} \text{Tr} \{ e^{-s S^{(2)}} \} ,$$

wobei wir diese Regularisierung als den *scharfen Propertime-Cutoff* bezeichnen [57, 58]. Darin ist Λ_{UV} die UV-Cutoff-Skala und k ihr IR-Gegenstück. Nach einer Entwicklung $e^{-s(-D^2+V)} \rightarrow P(sV)e^{sD^2}$ der oben erläuterten Art stellt dann k^2 einen IR-Cutoff bezüglich des Spektrums von $-D^2$ dar.

Kann keine exakte Flußgleichung in Form der Wetterich-Gleichung mit zugehörigem Cutoff-Operator \mathcal{R}_k konstruiert werden, so besteht eine Alternative zur Berücksichtigung von Renormierungseffekten in einer sogenannten *Renormierungsgruppen-Verbesserung* der klassischen Theorie. Darunter versteht man allgemein die Ersetzung nackter, unrenormierter Objekte durch ihre renormierten, skalenabhängigen Pendants. Dies kann beispielsweise

auf dem Niveau eines Wirkungsfunktional, auf dem Niveau von Bewegungsgleichungen oder auf dem Niveau von Lösungen erfolgen. Dabei ist die Verbesserung in der Regel umso glaubwürdiger, je früher sie im Verlauf dieser Aufzählung erfolgt. Man wird dementsprechend erst dann eine Ersetzung auf einem Niveau vornehmen, sofern sich eine Verbesserung auf dem vorhergehenden Niveau nicht umsetzen läßt.

Die Propertime-Gleichung entsteht nun dadurch, daß man in (3.26) in dem Korrekturterm zur klassischen Wirkung den inversen Propagator der klassischen Wirkung durch $\Gamma_k^{(2)}$ ersetzt. Fordert man zusätzlich, daß die Skalenableitung bloß auf die scharfe IR-Regularisierung in Form der oberen Integrationsgrenze und nicht auf die explizite k -Abhängigkeit von $\Gamma_k^{(2)}$ wirken soll, so erhält man für diesen Cutoff die Propertime-Gleichung in der Form

$$\partial_t \Gamma_k = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\Gamma_k^{(2)}}{k^2}} \right\}. \quad (3.27)$$

Man kann den Korrekturterm auf der rechten Seite auch regularisieren, indem man in dem Eigenzeit-Integral eine weiche Cutoff-Funktion $f_k^{\Lambda_{UV}}(s)$ einführt, die das Analogon zur Profildfunktion $R^{(0)}$ darstellt. Analog zum scharfen Cutoff soll auch sie eine IR- und UV-Regularisierung implementieren. Fordert man hier ebenfalls, daß die Skalenableitung lediglich auf die Regulatorfunktion $f_k^{\Lambda_{UV}}(s)$ wirkt, so ergibt sich für ein derartiges glattes Abschneiden die *Propertime-Gleichung* zu

$$\partial_t \Gamma_k = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} (\partial_t f_k^{\Lambda_{UV}}(s)) \text{Tr} \left\{ e^{-s \Gamma_k^{(2)}} \right\}. \quad (3.28)$$

Damit die Funktion $f_k^{\Lambda_{UV}}(s)$ bezüglich der Skala k einen Infrarot-Regulator darstellt, muß nun $f_k^{\Lambda_{UV}}(s) \approx 0$ für $s \gg k^{-2}$ gelten. Hingegen soll das Ultraviolett-Regime bezüglich der Skala k durch sie nicht beeinträchtigt werden, so daß wir hier $f_k^{\Lambda_{UV}}(s) \approx 1$ für $s \ll k^{-2}$ fordern. In diesem Bereich wird das Integral durch den UV-Cutoff Λ_{UV} regularisiert, so daß sich hier die Regulatoreigenschaften gerade umgekehrt verhalten, d. h. $f_k^{\Lambda_{UV}}(s) \approx 0$ für $s \ll \Lambda_{UV}^{-2}$ und $f_k^{\Lambda_{UV}}(s) \approx 1$ für $s \gg \Lambda_{UV}^{-2}$. Zwischen diesen Grenzfällen soll die Funktion auf glatte Weise interpolieren. Doch da wir an einer Flußgleichung bezüglich des Infrarot-Cutoffs k interessiert sind, ist der UV-Cutoff Λ_{UV} hier nicht von Wichtigkeit. Die mittels

der glatten Regularisierungen erhaltenen Flußgleichungen sind von der Gestalt

$$\partial_t \Gamma_k = \left(\frac{k^2}{\Gamma_k^{(2)} + k^2} \right)^{m+1}$$

oder

$$\partial_t \Gamma_k = \left(\frac{m k^2}{\Gamma_k^{(2)} + m k^2} \right)^{m+1},$$

worin $m \geq 0$ einen Abschneideparameter bezeichnet, der frei gewählt werden kann. Wir werden das s -Integral später auf drei Arten regularisieren, wobei eine einem scharfen Abschneiden entspricht. Im Zuge dessen werden wir auch die konkrete Form der Regulatorfunktionen $f_k^{\Lambda_{UV}}$ angeben und erläutern, daß der scharfe Cutoff als Grenzfall in der $f_k^{\Lambda_{UV}}$ -Regularisierung enthalten ist. Daher beziehen wir uns von nun an mit dem Begriff „Propertime-Gleichung“ auf die Gleichung (3.28).

Diese Gleichung definiert das Funktional Γ_k im gleichen Sinne, in dem die Wetterich-Gleichung die effektive Mittelwertwirkung definiert (vgl. Kapitel 1). Bei dem von uns betrachteten Objekt Γ_k handelt es sich somit *nicht* um die effektive Mittelwertwirkung; diese könnte insbesondere unter Kenntnis der nackten Wirkung S durch Hinzufügen eines Cutoff-Terms $\Delta_k S$ als globale Lösung der Wetterich-Gleichung konstruiert werden.

Auch wir machen für $\Gamma_k[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}]$ einen Ansatz in Form einer hintergrundinvarianten Trunkierung und werten $\Gamma_k^{(2)}$ sowie die linke Seite von (3.28) für $e = \bar{e}$ und $\omega = \bar{\omega}$ aus. Durch die rechte Seite von (3.28) wird somit ein hintergrundinvarianter Fluß definiert. Dieser beruht auf einer renormierungsgruppenverbesserten Ein-Schleifen-Determinante, d. h. auf dem Korrekturterm erster Ordnung in \hbar zur effektiven Wirkung. Durch

$$\text{Tr} e^{-s\Gamma_k^{(2)}} \equiv \text{Tr} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} (\Gamma_k^{(2)})^n \right\}$$

werden aber bereits beliebig hohe Potenzen des inversen Propagators kontrahiert, so daß schon auf diesem Niveau beliebig hohe Ordnungen in den Kopplungen aufsummiert werden.

Zu dem Symbol „Tr“, das in all diesen Flußgleichungen und insbesondere in der Propertime-

Gleichung (3.28) auftritt, ist noch folgendes zu bemerken: Das Null-Setzen der Fluktuationen und der Geister im Anschluß an die zweifache Funktionalableitung von Γ_k führt dazu, daß $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich des Graviton- und Geistsektors zerfällt. Die Ein-Schleifen-Näherung wird üblicherweise hergeleitet, indem man in der Pfadintegraldarstellung von \mathcal{Z} die Summe aus klassischer Wirkung und Quellterm bis zur ersten Ordnung entwickelt. Die Ausführung des Pfadintegrals über die bosonischen Felder (das sind in unserem Fall die Gravitonen) führt dann über ein funktionales Gauß-Integral auf $\det(S_{\text{grav}}^{(2)})^{-\frac{1}{2}}$ und somit auf die bekannte Korrektur $\frac{1}{2}\ln \det S_{\text{grav}}^{(2)} \equiv \frac{1}{2}\text{Tr} \ln S_{\text{grav}}^{(2)}$. Führt man hingegen das analoge Gauß-Integral über die Grassmannwertigen Geister aus, so liefert dies eine exakte Darstellung der Determinante des Geist-Propagators, also $\det(S_{\text{gh}}^{(2)})$. Dies hat bezüglich der Logarithmen einen relativen Vorfaktor von -2 zur Folge, der durch eine entsprechende Definition der Spur berücksichtigt wird. Die Propertime-Gleichung (3.28) lautet somit sektorweise ausgeschrieben

$$\partial_t \Gamma_k = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} (\partial_t f_k^{\Lambda\text{UV}}(s)) \left\{ \text{Tr}(e^{-s\Gamma_k^{\text{grav}}(2)}) - 2 \text{Tr}(e^{-s\Gamma_k^{\text{gh}}(2)}) \right\}.$$

3.4 Die Beziehung zwischen der Wetterich-Gleichung und der Propertime-Gleichung

Um das Verhältnis von Wetterich- und Propertime-Gleichung zu untersuchen, schreiben wir erstere mit (1.16) zunächst in der Form

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k(-\bar{D}^2))^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k(-\bar{D}^2) \right\} =: \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \text{Tr} \ln [\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k(-\bar{D}^2)], \quad (3.29)$$

gemäß der man die Wetterich-Gleichung als eine modifizierte 1-Schleifen-Gleichung verstehen kann. Die darin auftretende Skalenableitung $\frac{D}{Dt}$ ist so definiert, daß sie nur auf die k -Abhängigkeit des Operators \mathcal{R}_k und *nicht* auf die k -Abhängigkeit von $\Gamma_k^{(2)}$ wirkt. Der Operator, der das Argument von \mathcal{R}_k darstellt, ist zudem k -unabhängig.

Wir nehmen in der Wetterich-Gleichung nun die Ersetzung $-\bar{D}^2 \rightarrow \Gamma_k^{(2)}$ vor. Dann besteht die Propertime-Näherung darin, die im Zuge dieser Ersetzung auftretende Skalenabhängigkeit des Arguments von \mathcal{R}_k bei der Berechnung von $\partial_t \mathcal{R}_k$ zu vernachlässigen. Die Propertime-Näherung besteht also in der Vernachlässigung der Skalenabhängigkeit des

jenigen Operators, bezüglich dessen Spektrum k^2 als IR-Cutoff wirkt. Deuten wir diese Approximation durch das Symbol \approx an, so gilt

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_k &\approx \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k(\Gamma_k^{(2)}) \right)^{-1} (\partial_t \mathcal{R}_k)(\Gamma_k^{(2)}) \right\} \\ &=: \frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty ds F_k(s) e^{-s \Gamma_k^{(2)}}.\end{aligned}$$

Der Operator \mathcal{R}_k nimmt dann bezüglich des Spektrums $\{\lambda_i\}$ von $\Gamma_k^{(2)}$ die Ersetzung $\lambda_i \rightarrow \lambda_i + k^2 R^{(0)}\left(\frac{\lambda_i}{k^2}\right)$ vor. Ausgewertet in der Eigenbasis von $\Gamma_k^{(2)}$, besteht zwischen der Profilkfunktionen $R^{(0)}$ und der Laplace-Transformierten der Funktion $F_k(s)$ die Beziehung

$$\frac{(\partial_t R^{(0)})\left(\frac{\lambda_i}{k^2}\right)}{\lambda_i + R^{(0)}\left(\frac{\lambda_i}{k^2}\right)} \equiv \int_0^\infty ds F_k(s) e^{-s \lambda_i}.$$

Man beachte, daß mit $\lambda_i \rightarrow \lambda_i + k^2 R^{(0)}\left(\frac{\lambda_i}{k^2}\right)$ und (1.18) der Cutoff von der Form

$$\mathcal{R}_k = \mathbb{1} k^2 R^{(0)}\left(\frac{\lambda_i}{k^2}\right)$$

ist, so daß \mathcal{R}_k und $\partial_t \mathcal{R}_k$ mit $\Gamma_k^{(2)}$ vertauschen.

Die Strategie besteht nun darin, aus den geforderten Eigenschaften von $R^{(0)}$ die entsprechenden Forderungen an $F_k(s)$ abzuleiten und dann direkt die Funktion $F_k(s)$ anstatt der Profilkfunktion $R^{(0)}$ vorzugeben. Damit ergibt sich die Propertime-Gleichung zu

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds F_k(s) \text{Tr} \left[e^{-s \Gamma_k^{(2)}} \right],$$

und für $F_k(s) \equiv -\frac{\partial_t f_k^{\text{UV}}(s)}{s}$ erhält man die Propertime-Gleichung (3.28) in Form einer renormierungsgruppenverbesserten 1-Schleifen-Determinante.

Das Verhältnis von Propertime-Gleichung (3.28) und Wetterich-Gleichung (1.16) ist strukturell auch in Ref. [59, 60] untersucht worden. Dort wird festgestellt, daß der durch die Wetterich-Gleichung definierte Fluß exakt ist, also linear vom vollen regularisierten Propagator $(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}$ abhängt. Dies trifft auf die Propertime-Gleichung nicht zu. Zudem ist der Wetterich-Fluß per Konstruktion vollständig: Seine Integration führt auf eine Trajektorie, die die klassische Wirkung S der Theorie mit ihrer effektiven Wirkung Γ ver-

bindet. Auch diese globale Eigenschaft weist der Propertime-Fluß nicht auf. Er kann nur lokale Gültigkeit beanspruchen. Ist die gewählte Trunkierung von der Form der klassischen Wirkung, so sollte er beispielsweise die Ultraviolett-Eigenschaften der Theorie zumindest qualitativ erfassen können.

In Ref. [59] wird eine Konstruktion vorgestellt, mit der in erster Ordnung einer Ableitungsentwicklung jeder Profil-Funktion $R^{(0)}$ eines Cutoffs vom Wetterich-Typ eine Regulatorfunktion $f_k^{\Lambda_{UV}}(s)$ zugeordnet werden kann, so daß der resultierende Propertime-Fluß den exakten Wetterich-Fluß reproduziert. Eine Umkehrabbildung der gleichen Art existiert jedoch nicht. In Ref. [60] wurde ein verallgemeinerter Propertime-Fluß angegeben, in dem der inverse Propagator $\Gamma_k^{(2)}$ den kovarianten Laplace-Operator $-\bar{D}^2$ als Argument von \mathcal{R}_k ersetzt. Dieser Fluß ist vollständig und erfüllt eine Wetterich-Gleichung vom Typ (1.16). Um dies zu erreichen, muß jedoch die Funktion $f_k^{\Lambda_{UV}}(s)$ ebenfalls von $\Gamma_k^{(2)}$ abhängen. Solche verallgemeinerten Propertime-Flüsse lassen sich also auf exakte Wetterich-Flüsse abbilden.

Trotz dieser Einschränkungen werden wir einen konventionellen Propertime-Fluß für Gravitation im Einstein-Cartan-Zugang analysieren. Die Annahme, daß dies zu aussagekräftigen Resultaten führen wird, stützt sich im wesentlichen auf die Tatsache, daß das durch eine exakten Flußgleichung abgeleitete UV-Verhalten der QEG im Rahmen einer Propertime-Analyse sowohl qualitativ als auch quantitativ bestätigt werden konnte [61]. Zusätzlich zu der stabilen Existenz eines nicht-Gaußschen Fixpunkts wurden die Werte universeller Größen wie $g^*\lambda^*$ und der kritischen Exponenten von g und λ in guter Übereinstimmung reproduziert. Dies überrascht nicht, da sich unter Verwendung der Propertime-Gleichung die Werte kritischer Exponenten bereits in anderen Kontexten extrem präzise reproduzieren ließen [62]. Die Tatsache, daß auch diese Methode, die konzeptionell von der Methode der effektiven Mittelwertwirkung verschieden ist, das Bild der QEG bestätigt, liefert ein starkes Indiz für dessen Korrektheit.

3.5 QECG und QEG

Wir möchten abschließend fragen, wie sich die mittels der Renormierungsgruppe quantisierte (e, ω) -Gravitation zur Quanten-Einstein-Gravitation verhält. Nach den obigen technischen Ausführungen können wir nun letztere wirklich definieren: *Quanten-Einstein-Gravi-*

tation (QEG) ist definiert als der $k \rightarrow \infty$ -Limes an einem nicht-Gaußschen Fixpunkt im Theorienraum \mathcal{T}_{QEG} , wobei zu beweisen ist, daß die Existenz dieses Fixpunktes eine Eigenschaft der vollen Theorie darstellt. Der Theorienraum \mathcal{T}_{QEG} ist dabei definiert als die Menge aller $\delta_{\text{D}}^{\text{B}}$ -invarianten Funktionale A der Hintergrund-Metrik $\bar{g}_{\mu\nu}$, des Fluktuations-erwartungswertes $\bar{h}_{\mu\nu}$ sowie der Diffeomorphismus-Geist- und -Antigeist-Erwartungswerte ξ^μ und $\bar{\xi}_\mu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{QEG}} &:= \{A[\bar{h}, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}]\} \\ &\quad A[\bar{h} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{h}, \xi + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\xi, \bar{\xi} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{\xi}; \bar{g} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{g}] \\ &= A[\bar{h}, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}] \quad \forall w^\mu \}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Im metrischen Fall transformieren sich all diese Größen bezüglich $\delta_{\text{D}}^{\text{B}}$ tensoriell.

Analog kann *Quanten-Einstein-Cartan-Gravitation* (QECG) als Kontinuumsliches $k \rightarrow \infty$ an einem hypothetischen nicht-Gaußschen Fixpunkt im Theorienraum $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ definiert werden. Dabei wissen wir nun, daß $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{QECG}} &:= \{A[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]\} \\ &\quad A[\bar{\varepsilon} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{\varepsilon} + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\bar{\varepsilon}, \bar{\tau} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{\tau} + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\bar{\tau}, \xi + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\xi + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\xi \\ &\quad , \bar{\xi} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{\xi} + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\bar{\xi}, \Upsilon + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\Upsilon + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\Upsilon, \bar{\Upsilon} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{\Upsilon} + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\bar{\Upsilon}; \\ &\quad \bar{e} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{e} + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\bar{e}, \bar{\omega} + \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)\bar{\omega} + \delta_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda)\bar{\omega}] \\ &= A[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}] \quad \forall w^\mu, \lambda^{ab} \} \end{aligned} \quad (3.31)$$

gegeben ist. Die Transformationen sind dabei durch die Übertragungen von (3.10), (3.11), (3.12) und (3.13) auf die Erwartungswerte gegeben.

Das Hauptanliegen dieser Arbeit besteht darin, erste Schritte zu unternehmen, um auch in $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ die Existenz eines derartigen Fixpunktes zu etablieren.

Aus der statistischen Physik ist bekannt, daß Modelle, die ganz unterschiedliche physikalische Systeme beschreiben, mitunter die gleichen universellen Eigenschaften und insbesondere die gleiche Fixpunktstruktur aufweisen können. Man sagt dann, daß sie zu der gleichen *Universalitätsklasse* gehören. Das entscheidende Kriterium dabei ist, daß sie die

gleichen Symmetrien aufweisen und sich auf die gleiche Anzahl räumlicher Dimensionen beziehen. Dies überträgt sich im feldtheoretischen Rahmen auf die Frage, ob zwei Theorien auf dem gleichen Theorienraum definiert sind, der seinerseits durch zwei Eigenschaften definiert wird: den Feldgehalt und die postulierten Invarianzeigenschaften der ihn bildenden Funktionale. Im Falle der QEG und der QECG stimmen die zugrundeliegenden Theorienräume in keinem der beiden Punkte überein. Im Hinblick auf universelle Eigenschaften sind also keine Gemeinsamkeiten zu erwarten. Dabei ist an dieser Stelle anzumerken, daß die in der statistischen Physik auftretenden Fixpunkte im allgemeinen eine skaleninvariante *Makrophysik* beschreiben, die unter weiteren Iterationen der Renormierungsgruppenabbildung, d. h. unter weiterem „Coarse Graining“, invariant ist. Es handelt sich bei ihnen also um IR-Fixpunkte, an denen die Korrelationslänge in universeller Weise divergiert, so daß die typischen auftretenden Strukturen von der Größenordnung des Systems selbst sind. Im Unterschied dazu interessieren wir uns für Trajektorien, die im Limes $k \rightarrow \infty$ in einen solchen Fixpunkt hineinlaufen, so daß dieser für jene einen UV-Fixpunkt darstellt. Entlang solcher Trajektorien wird somit eine skaleninvariante *Mikrophysik* realisiert, die sich womöglich im Rahmen einer konformen Feldtheorie formulieren läßt.

Wenden wir uns nun wieder dem Verhältnis von QEG und QECG zu, so stellt letztere eine Verallgemeinerung der ersteren dar, indem sie Konfigurationen mit nicht-verschwindender Torsion erlaubt und den Zusammenhang als unabhängig von dem Vielbein, das die Metrik bestimmt, betrachtet. In der QEG induziert die Metrik selbst diesen Zusammenhang, und zwar so, daß die Torsion verschwindet. Auf dem Niveau der Holst-Wirkung S_{Ho} aus (2.1) weisen die off-shell-Konfigurationen der (e, ω) -Gravitation (also die Konfigurationen, die keine Lösungen der Bewegungsgleichungen sind) nicht-verschwindende Torsion auf. Der Bezeichnung „off-shell“ liegt aber bereits ein Vorurteil über die fundamentale Wirkung zugrunde. Daher ist ihre Verwendung im Rahmen von Flußgleichungen eher irreführend. Wir können sie bestenfalls mit Bezug auf unsere Trunkierung vom Holst-Typ verwenden. Der zusätzliche Freiheitsgrad der Torsion erlaubt uns jedoch, eine Beta-Funktion für den laufenden Immirzi-Parameter γ_k abzuleiten, für den die metrische Gravitation und damit die QEG gewissermaßen „blind“ ist. Erkenntnisse über sein Hochenergieverhalten sollten insbesondere für die kanonische Loop-Quantengravitation von Interesse sein. Zudem induziert er bei Ankopplung an Spinoren eine schon angesprochene CP-Verletzung, die für das frühe Universum von phänomenologischem Interesse sein könnte.

Durch die zusätzlichen Freiheitsgrade wäre der Feldraum der an dieser Stelle noch gänzlich hypothetischen QECG erheblich größer als der der QEG. Dort besitzt die Metrik als symmetrischer Tensor der Stufe (0,2) zehn unabhängige Freiheitsgrade, von denen vier Eichfreiheitsgrade sind, die auf die gleiche Anzahl von Geistfreiheitsgraden führen. In der (e, ω) -Theorie hingegen besitzt der Torsionstensor 24 unabhängige Komponenten, zu denen noch die sechs Eichfreiheitsgrade aus der zusätzlichen $O(4)$ -Invarianz hinzukommen: Dies liefert insgesamt vierzig Freiheitsgrade im Feldraum. Die größere Gruppe von Eichtransformationen hat zudem eine Erhöhung der Freiheitsgrade im Geistsektor von vier auf zehn zur Folge. Als Freiheitsgrade bezeichnen wir dabei lediglich unabhängige Felder; der Begriff beinhaltet keine Information hinsichtlich deren Propagation.

Daß die First-Order-Gravitation keinen kinetischen Term in Standardform besitzt, wurde bereits diskutiert. Dies ist im metrischen Formalismus ebenfalls anders, da dort der Krümmungstensor von den ersten Ableitungen des Christoffel-Symbols und damit nach (A.27) von den zweiten Ableitungen der Metrik abhängt. Zudem wurde bereits angesprochen, daß in der Einstein-Cartan-Theorie auch ein verschwindendes Vielbein, $e^a{}_\mu = 0$, eine Lösung der Bewegungsgleichungen für einen beliebigen Spinzusammenhang $\omega^{ab}{}_\mu$ darstellt.

Wir haben bislang nur gefordert, daß die Hintergrundkonfiguration $\bar{e}^a{}_\mu$ invertierbar sei. Auf dem Niveau der vollen Quantenfelder und ihrer Erwartungswerte möchten wir jedoch nach wie vor auch entartete Vielbeine zulassen und insbesondere auch solche Konfigurationen im Pfadintegral ausintegrieren. Lassen wir auf dem Niveau der vollen Felderwartungswerte, auf dem Hintergrund- und wahre Eichinvarianz äquivalent sind, auch entartete Vielbeine $e^a{}_\mu$ zu, so enthält die allgemeinste lokale Wirkung auf dem Theorienraum, der aus den Funktionalen $A[e, \omega, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}]$ besteht, die unter $\text{Diff} \times O(4)_{\text{loc}}$ invariant sind, bloß sechs Terme. Außer den drei Invarianten, die die Holst-Wirkung bilden, gibt es lediglich drei weitere, die sich ohne die Annahme eines nicht-entarteten Vielbeins bilden lassen. Diese sind jedoch alle topologischer Natur und somit Oberflächenterme, die dem Theta-Term der QCD entsprechen [63]: Ersetzt man in dem Gegenstück zur Yang-Mills-Wirkung den Hodge-Operator durch den $O(4)$ -Dualitätsoperator, so erhält man die Euler-Zahl von \mathcal{M} , $\int_{\mathcal{M}} F^{ab} \wedge \star F_{ab}$. Die Invariante $\int_{\mathcal{M}} F^{ab} \wedge F_{ab}$ liefert den Pontryagin-Index, und schließlich verbleibt der Term $\int_{\mathcal{M}} T^a \wedge T_a$, der sich gemäß Abschnitt 2.2 durch die Nieh-Yan-Invariante und den Immirzi-Term ausdrücken läßt. (Wir erinnern nochmals daran, daß auch in die Definition der Torsionsform T^a kein inverses Vielbein eingeht.) Die Eigenschaft des Propa-

gators, von erster Ordnung zu sein, gilt natürlich nur im Rahmen der klassischen Einstein-Cartan-Theorie bzw. der entsprechenden Trunkierung. Schränkt man sich auf dem Niveau der vollen Felder auf reguläre Vielbeine ein, so dürfen die lokalen Invarianten auch höhere Ableitungen enthalten.

Unsere Rechnung bezieht sich hingegen auf den Theorienraum $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ aller δ^{B} -invarianten Funktionale $A[\bar{e}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]$, deren Argumente durch die zerlegten Gravitonfelder und die Geister gegeben sind. Bei Forderung eines regulären Hintergrund-Vielbeins $\bar{e}^a{}_{\mu}$ lassen sich auf diesem unendlich viele lokale Invarianten angeben, ohne daß man Annahmen über die Invertierbarkeit des zusammengesetzten Feldes $e^a{}_{\mu} = \bar{e}^a{}_{\mu} + \bar{\varepsilon}^a{}_{\mu}$ machen müßte. Auch diese Invarianten werden im allgemeinen höhere Ableitungen enthalten.

Kapitel 4

Eichfixierung und Geistwirkung

4.1 Hintergrundinvariante Geistwirkungen

4.1.1 Die Algebra der Eichtransformationen auf dem Niveau der Quantenfelder

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit den Eichtransformationen der dynamischen Felder. In Analogie zur klassischen Wirkung S_{Ho} fordern wir, daß das Funktional $\Gamma_k[\bar{\epsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]$ unter deren Hintergrund-Gegenständen invariant sei. In der Struktur der Gruppe der Eichtransformationen liegt dabei ein Problem begründet, das auftritt, sobald wir uns der Geistwirkung zuwenden und diese in kanonischer Weise konstruieren. Daher bestimmen wir hier auch die zugehörige Algebra, wobei die Diskussion auf dem Niveau der vollen Quantenfelder ausgeführt wird.

Zunächst betrachten wir die Wirkung zweier hintereinandergeschalteter Diffeomorphismen mit Parametern w_2^μ und w_1^μ gemäß

$$\hat{e}_\mu^a \xrightarrow{w_2} \hat{e}_\mu^a + \delta_{\text{D}}(w_2)\hat{e}_\mu^a \xrightarrow{w_1} \hat{e}_\mu^a + \delta_{\text{D}}(w_2)\hat{e}_\mu^a + \delta_{\text{D}}(w_1)(\hat{e}_\mu^a + \delta_{\text{D}}(w_2)\hat{e}_\mu^a),$$

wobei diese explizit auf das Vielbein angewandt wurden. Subtrahieren wir die entsprechende Verkettung mit vertauschten Diffeomorphismen, so bleibt die infinitesimale Transfor-

mation

$$[\delta_D(w_1), \delta_D(w_2)]\hat{e}^a{}_\mu = [\mathcal{L}_{w_1}, \mathcal{L}_{w_2}]\hat{e}^a{}_\mu$$

übrig. Da alle anderen Felder ebenfalls Raumzeit-Tensoren entsprechenden Ranges sind und sich somit gemäß ihrer Lie-Ableitung transformieren, überträgt sich die Überlegung analog, so daß wir unter Verwendung der Identität

$$[\mathcal{L}_{w_1}, \mathcal{L}_{w_2}] = \mathcal{L}_{[w_1, w_2]}$$

für die Wirkung der Lie-Ableitung auf beliebige Tensoren schließlich die Relation

$$[\delta_D(w_1), \delta_D(w_2)]\Phi = \delta_D([w_1, w_2])\Phi \quad (4.1)$$

erhalten. Hier stellt Φ eines der dynamischen Felder dar,

$$\Phi \in \{\hat{e}^a{}_\mu, \hat{\omega}^{ab}{}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}\}.$$

Dabei bezeichnet

$$[w_1, w_2]^\mu = w_1^\nu \partial_\nu w_2^\mu - w_2^\nu \partial_\nu w_1^\mu$$

die Lie-Klammer von Vektorfeldern.

Nun betrachten wir die Lorentz-Transformationen, unter denen sich bis auf den Spinzusammenhang ebenfalls alle Felder als Tensoren transformieren. Sei nun $T^{a_1 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n}$ ein Lorentz-Tensor der Stufe (m, n) , so gilt zunächst

$$\begin{aligned} \delta_L(\lambda_2)T^{a_1 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n} &= \lambda_2{}^{a_1}{}_c T^{ca_2 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n} + \lambda_2{}^{a_2}{}_c T^{a_1 ca_3 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n} + \lambda_2{}^{a_3}{}_c T^{a_1 a_2 c \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n} \\ &+ \dots + \lambda_2{}^{a_m}{}_c T^{a_1 \dots a_{m-1} c}{}_{b_1 \dots b_n} + \lambda_2{}^{c}{}_{b_1} T^{a_1 \dots a_m}{}_{cb_2 \dots b_n} \\ &+ \lambda_2{}^{c}{}_{b_2} T^{a_1 \dots a_m}{}_{b_1 cb_3 \dots b_n} + \dots + \lambda_2{}^{c}{}_{b_n} T^{a_1 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_{n-1} c}. \end{aligned}$$

Wendet man darauf eine weitere Lorentz-Transformation mit Parameter λ_1 an, so erhält

man

$$\begin{aligned}
\delta_L(\lambda_1)\delta_L(\lambda_2)T^{a_1\dots a_m}_{b_1\dots b_n} &= \lambda_1^{a_1}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{ca_2\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \lambda_1^{a_2}{}_d\lambda_2^{a_1}{}_cT^{cda_3\dots a_m}_{b_1\dots b_n} \\
&+ \lambda_1^{a_3}{}_d\lambda_2^{a_1}{}_cT^{ca_2d\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \dots \\
&+ \lambda_1^{a_2}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1ca_3\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \lambda_1^{a_1}{}_d\lambda_2^{a_2}{}_cT^{dca_3\dots a_m}_{b_1\dots b_n} \\
&+ \lambda_1^{a_3}{}_d\lambda_2^{a_2}{}_cT^{a_1cd\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \dots \\
&+ \lambda_1^{a_3}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1a_2c\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \lambda_1^{a_1}{}_d\lambda_2^{a_3}{}_cT^{da_2c\dots a_m}_{b_1\dots b_n} \\
&+ \lambda_1^{a_2}{}_d\lambda_2^{a_3}{}_cT^{a_1dc\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \dots \\
&+ \lambda_1^{b_1}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1\dots a_m}_{cb_2\dots b_n} + \lambda_1^{b_2}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1\dots a_m}_{cdb_3\dots b_n} + \dots \\
&+ \lambda_1^{b_2}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1\dots a_m}_{b_1cb_3\dots b_n} + \lambda_1^{b_1}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1\dots a_m}_{dcb_3\dots b_n} + \dots
\end{aligned}$$

Dies führt nach einer Umordnung der Terme auf

$$\begin{aligned}
\delta_L(\lambda_1)\delta_L(\lambda_2)T^{a_1\dots a_m}_{b_1\dots b_n} &= \lambda_1^{a_1}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{ca_2\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \lambda_1^{a_2}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1ca_3\dots a_m}_{b_1\dots b_n} \\
&+ \lambda_1^{a_3}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1a_2c\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \dots \\
&+ \lambda_1^{b_1}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1\dots a_m}_{cb_2\dots b_n} + \lambda_1^{b_2}{}_d\lambda_2^d{}_cT^{a_1\dots a_m}_{b_1cb_3\dots b_n} + \dots \\
&+ (\lambda_1^{a_1}{}_c\lambda_2^{a_2}{}_d + \lambda_2^{a_1}{}_c\lambda_1^{a_2}{}_d)T^{cda_3\dots a_m}_{b_1\dots b_n} \\
&+ (\lambda_1^{a_1}{}_c\lambda_2^{a_3}{}_d + \lambda_2^{a_1}{}_c\lambda_1^{a_3}{}_d)T^{ca_2d\dots a_m}_{b_1\dots b_n} \\
&+ (\lambda_1^{a_2}{}_c\lambda_2^{a_3}{}_d + \lambda_2^{a_2}{}_c\lambda_1^{a_3}{}_d)T^{a_1cd\dots a_m}_{b_1\dots b_n} + \dots \\
&+ (\lambda_1^{b_1}{}_c\lambda_2^{b_2}{}_d + \lambda_2^{b_1}{}_c\lambda_1^{b_2}{}_d)T^{a_1\dots a_m}_{cdb_3\dots b_n} + \dots
\end{aligned}$$

Dabei ist die explizite Form der ausgelassenen Terme offensichtlich. Subtrahiert man das Resultat bei vertauschter Wirkung der Transformationen, so fallen die in λ_1 und λ_2 symmetrischen Beiträge der letzten vier Zeilen weg. Es verbleiben die Beiträge der ersten drei Zeilen, in denen stets die beiden tensorwertigen Transformationsparameter miteinander kontrahiert werden. Die Antisymmetrisierung in λ_1 und λ_2 liefert dann den $O(4)$ -Kommutator, woraus

$$[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]T^{a_1\dots a_m}_{b_1\dots b_n} = \delta_L([\lambda_1, \lambda_2])T^{a_1\dots a_m}_{b_1\dots b_n}$$

folgt. Darin bezeichnet $[\lambda_1, \lambda_2]$ den üblichen Matrixkommutator. Um die Vertauschungsrelation zweier lokaler Lorentz-Transformationen angewandt auf den Spinzusammenhang

abzuleiten, verwenden wir (A.10). Da der $O(4)$ -Eichparameter gerade durch einen antisymmetrischen Lorentz-Tensor gegeben ist, erhält man somit

$$\begin{aligned}
\delta_L(\lambda_1)\delta_L(\lambda_2)\hat{\omega}^a{}_{\mu}{}^b &= -\delta_L(\lambda_1)\hat{\nabla}_{\mu}\lambda_2^{ab} \\
&= -(\lambda_1^a{}_c\hat{\nabla}_{\mu}\lambda_2^{cb} + \lambda_1^b{}_c\hat{\nabla}_{\mu}\lambda_2^{ac}) \\
&= -\lambda_1^a{}_c(\partial_{\mu}\lambda_2^{cb} + \hat{\omega}^c{}_{d\mu}\lambda_2^{db} + \hat{\omega}^b{}_{d\mu}\lambda_2^{cd}) \\
&\quad -\lambda_1^b{}_c(\partial_{\mu}\lambda_2^{ac} + \hat{\omega}^a{}_{d\mu}\lambda_2^{dc} + \hat{\omega}^c{}_{d\mu}\lambda_2^{ad}) \\
&= -\lambda_1^a{}_c\partial_{\mu}\lambda_2^{cb} + (\partial_{\mu}\lambda_2^a{}_c)\lambda_1^{cb} + \lambda_1^a{}_c\lambda_2^c{}_d\hat{\omega}^{db}{}_{\mu} + \lambda_1^b{}_c\lambda_2^c{}_d\hat{\omega}^{ad}{}_{\mu} \\
&\quad + (\lambda_1^a{}_c\lambda_2^b{}_d + \lambda_2^a{}_c\lambda_1^b{}_d)\hat{\omega}^{cd}{}_{\mu}.
\end{aligned}$$

Beim Bilden des Kommutators verschwindet der letzte, in λ_1 und λ_2 symmetrische Term. Die übrigen Terme kombinieren zum Kommutator der beiden Erzeuger bzw. zu dessen Ableitung. Es folgt

$$\begin{aligned}
[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]\hat{\omega}^a{}_{\mu}{}^b &= -\partial_{\mu}[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]^{ab} + [\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]^a{}_c\hat{\omega}^{cb}{}_{\mu} + [\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]^b{}_c\hat{\omega}^{ac}{}_{\mu} \\
&= \delta_L([\lambda_1, \lambda_2])\hat{\omega}^a{}_{\mu}{}^b,
\end{aligned}$$

so daß damit

$$[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]\Phi = \delta_L([\lambda_1, \lambda_2])\Phi \quad (4.2)$$

für *alle* Felder Φ gezeigt ist.

Abschließend wenden wir uns dem gemischten Diffeomorphismus- $O(4)$ -Sektor der Algebra zu. Für das Vielbein gilt zunächst

$$(1 + \delta_L(\lambda))\hat{e}^a{}_{\mu} = \hat{e}^a{}_{\mu} + \lambda^a{}_b\hat{e}^b{}_{\mu}$$

und damit

$$\begin{aligned}
(1 + \delta_D(w))(1 + \delta_L(\lambda))\hat{e}^a{}_{\mu} &= (1 + \delta_D(w) + \delta_L(\lambda) + \delta_D(w)\delta_L(\lambda))\hat{e}^a{}_{\mu} \\
&= \hat{e}^a{}_{\mu} + \lambda^a{}_b\hat{e}^b{}_{\mu} + \mathcal{L}_w\hat{e}^a{}_{\mu} + \mathcal{L}_w(\lambda^a{}_b\hat{e}^b{}_{\mu}).
\end{aligned} \quad (4.3)$$

Bei vertauschter Reihenfolge der Transformationen erhält man hingegen

$$\begin{aligned} (1 + \delta_L(\lambda))(1 + \delta_D(w))\hat{e}^a{}_\mu &= (1 + \delta_L(\lambda) + \delta_D(w) + \delta_{L(\lambda)}\delta_D(w))\hat{e}^a{}_\mu \\ &= \hat{e}^a{}_\mu + \mathcal{L}_w\hat{e}^a{}_\mu + \lambda^a{}_b\hat{e}^b{}_\mu + \delta_L(\lambda)\mathcal{L}_w\hat{e}^a{}_\mu. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Um zu verstehen wie sich die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_w\hat{e}^a{}_\mu$ des Vielbeins unter einer Lorentz-Transformation $\delta_L(\lambda)$ verhält, erläutern wir an dieser Stelle noch einmal die grundlegende Idee. Dazu ist es nicht notwendig, den Raumzeit-Index des Vielbeins zu berücksichtigen, so daß wir stattdessen einen reinen Lorentz-Vektor $v^a(x)$ betrachten, der sich unter Diffeomorphismen also wie ein Skalar verhält. Ein von einem Vektorfeld w^μ erzeugter Diffeomorphismus entspricht einer Reparametrisierung der Koordinaten der Form

$$x^\mu \mapsto x'^\mu := x^\mu - w^\mu(x),$$

die bezüglich Skalaren (und entsprechend bezüglich Tensoren höherer Stufe) eine Abbildung der Form

$$v^a(x) \mapsto v'^a(x) = v^a(x) + \delta v^a(x)$$

induziert. Damit dieser Skalar ein von der Wahl lokaler Koordinaten unabhängiges Objekt definiert, muß

$$v'^a(x') = v^a(x)$$

gelten. Daraus bestimmt man das Diffeomorphismus-Transformationsverhalten des Lorentz-Vektors (und entsprechend dasjenige höherer Tensoren) gemäß

$$\begin{aligned} v'^a(x') &= v'^a(x - w(x)) \\ &= v'^a(x) - w^\mu(x)\partial_\mu v'^a(x) + \mathcal{O}(w^2) \\ &= v^a(x) + \delta v^a(x) - w^\mu(x)\partial_\mu v'^a(x) + \mathcal{O}(w^2) \\ &= v^a(x) + \delta v^a(x) - w^\mu(x)\partial_\mu(v^a(x) + \delta v^a(x)) + \mathcal{O}(w^2) \\ &= v^a(x) + \delta v^a(x) - w^\mu(x)\partial_\mu v^a(x) + \mathcal{O}(w^2) \\ &= v^a(x) \end{aligned}$$

zu

$$\delta v^a(x) = w^\mu(x) \partial_\mu v^a(x) + \mathcal{O}(w^2).$$

(Dieses Ergebnis ist konsistent mit der im Verlauf der Rechnung gemachten Annahme, daß $\delta v^a \sim \mathcal{O}(w)$ gilt.) Unter Diffeomorphismen wird der Lorentz-Vektor $v^a(x)$ also auf einen neuen Lorentz-Vektor mit Komponenten

$$\begin{aligned} v'^a(x) &= v^a(x) + w^\mu(x) \partial_\mu v^a(x) \\ &= v^a(x) + \mathcal{L}_w v^a(x) \end{aligned}$$

abgebildet, der sich seinerseits homogen unter Lorentz-Transformationen transformiert. Übertragen auf (4.4) erhalten wir somit

$$(1 + \delta_L(\lambda))(1 + \delta_D(w)) \hat{e}^a_\mu = \hat{e}^a_\mu + \mathcal{L}_w \hat{e}^a_\mu + \lambda^a_b \hat{e}^b_\mu + \lambda^a_b \mathcal{L}_w \hat{e}^b_\mu, \quad (4.5)$$

was von (4.3) subtrahiert unter Verwendung der Linearität der Lie-Ableitung schließlich den Kommutator

$$\begin{aligned} [\delta_D(w), \delta_L(\lambda)] \hat{e}^a_\mu &= \mathcal{L}_w(\lambda^a_b \hat{e}^b_\mu) - \lambda^a_b \mathcal{L}_w \hat{e}^b_\mu \\ &= (\mathcal{L}_w \lambda^a_b) \hat{e}^b_\mu \\ &= w^\rho (\partial_\rho \lambda^a_b) \hat{e}^b_\mu \end{aligned} \quad (4.6)$$

liefert. Ganz analog ist auch für die Lorentz-Geister und Lorentz-Antigeister als Lorentz-Tensoren zweiter Stufe der Unterschied zwischen den beiden Transformationsreihenfolgen durch die Vertauschung von Lie-Ableitung und homogener Lorentz-Transformation gegeben. Dies führt entsprechend auf

$$\begin{aligned} [\delta_D(w), \delta_L(\lambda)] \Sigma^{ab} &= \mathcal{L}_w(\lambda^a_c \Sigma^{cb} + \lambda^b_c \Sigma^{ac}) - (\lambda^a_c \mathcal{L}_w \Sigma^{cb} + \lambda^b_c \mathcal{L}_w \Sigma^{ac}) \\ &= (\mathcal{L}_w \lambda^a_c) \Sigma^{cb} + (\mathcal{L}_w \lambda^b_c) \Sigma^{ac} \\ &= w^\rho ((\partial_\rho \lambda^a_c) \Sigma^{cb} + (\partial_\rho \lambda^b_c) \Sigma^{ac}) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
[\delta_D(w), \delta_L(\lambda)]\bar{\Sigma}_{ab} &= \mathcal{L}_w(\lambda_a^c \bar{\Sigma}_{cb} + \lambda_b^c \bar{\Sigma}_{ac}) - (\lambda_a^c \mathcal{L}_w \bar{\Sigma}_{cb} + \lambda_b^c \mathcal{L}_w \bar{\Sigma}_{ac}) \\
&= (\mathcal{L}_w \lambda_a^c) \bar{\Sigma}_{cb} + (\mathcal{L}_w \lambda_b^c) \bar{\Sigma}_{ac} \\
&= w^\rho ((\partial_\rho \lambda_a^c) \bar{\Sigma}_{cb} + (\partial_\rho \lambda_b^c) \bar{\Sigma}_{ac}) .
\end{aligned}$$

Zudem bleiben auch nach Anwendung eines Diffeomorphismus die Diffeomorphismus-Geister und -Antigeister Lorentz-Skalare, so daß für diese

$$[\delta_D(w), \delta_L(\lambda)]\mathcal{C}^\mu = 0$$

und

$$[\delta_D(w), \delta_L(\lambda)]\bar{\mathcal{C}}_\mu = 0$$

gilt. Wenden wir uns abschließend dem Spinzusammenhang zu, so berechnen wir auch hier zunächst

$$(1 + \delta_D(w))(1 + \delta_L(\lambda))\hat{\omega}^{\mu ab} = \hat{\omega}^{\mu ab} + \delta_D(w)\hat{\omega}^{\mu ab} + \delta_L(\lambda)\hat{\omega}^{\mu ab} + \delta_D(w)\delta_L(\lambda)\hat{\omega}^{\mu ab} .$$

Durch

$$\begin{aligned}
\delta_L(\lambda)\hat{\omega}^{\mu ab} &= -\hat{\nabla}_\mu \lambda^{ab} \\
&= -\partial_\mu \lambda^{ab} + \lambda^a_c \hat{\omega}^{cb}_\mu + \lambda^b_c \hat{\omega}^{ac}_\mu
\end{aligned}$$

ist wiederum eine Einsform gegeben, da der inhomogene Transformationsterm $\partial_\mu \lambda^{ab}$ gerade die Koordinatendarstellung des Differential von λ^{ab} ist, also derjenigen Einsform, die durch Anwendung der äußeren Ableitung auf die skalare Funktion λ^{ab} entsteht:

$$d\lambda^{ab}(x) = (\partial_\mu \lambda^{ab}(x))dx^\mu . \quad (4.7)$$

Da ein Diffeomorphismus auf eine Einsform mittels der Lie-Ableitung wirkt, führt dies

auf

$$(1 + \delta_D(w))(1 + \delta_L(\lambda))\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} = \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} + \mathcal{L}_w\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} - \hat{\nabla}_{\mu}\lambda^{ab} - \mathcal{L}_w\hat{\nabla}_{\mu}\lambda^{ab}.$$

Bei umgekehrter Reihenfolge der Transformationen liefert die Anwendung eines Diffeomorphismus auf den Spinzusammenhang eine Einsform mit den Komponenten

$$\begin{aligned}\hat{\omega}'{}^{ab}{}_{\mu} &= (1 + \delta_D(w))\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} \\ &= \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} + \mathcal{L}_w\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu},\end{aligned}$$

die sich unter lokalen $O(4)$ -Transformationen wiederum wie ein Zusammenhang verhält:

$$\begin{aligned}(1 + \delta_L(\lambda))\hat{\omega}'{}^{ab}{}_{\mu} &= \hat{\omega}'{}^{ab}{}_{\mu} - \partial_{\mu}\lambda^{ab} + \lambda^a{}_c\hat{\omega}'{}^{cb}{}_{\mu} + \lambda^b{}_c\hat{\omega}'{}^{ac}{}_{\mu} \\ &= \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} + \mathcal{L}_w\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} - \partial_{\mu}\lambda^{ab} + \lambda^a{}_c(\hat{\omega}^{cb}{}_{\mu} + \mathcal{L}_w\hat{\omega}^{cb}{}_{\mu}) \\ &\quad + \lambda^b{}_c(\hat{\omega}^{ac}{}_{\mu} + \mathcal{L}_w\hat{\omega}^{ac}{}_{\mu}) \\ &= \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} + \mathcal{L}_w\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} - \hat{\nabla}_{\mu}\lambda^{ab} + \lambda^a{}_c\mathcal{L}_w\hat{\omega}^{cb}{}_{\mu} + \lambda^b{}_c\mathcal{L}_w\hat{\omega}^{ac}{}_{\mu}.\end{aligned}$$

Erneut liefert Differenzbildung den Kommutator

$$\begin{aligned}[\delta_D(w), \delta_L(\lambda)]\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} &= -\mathcal{L}_w\hat{\nabla}_{\mu}\lambda^{ab} - (\lambda^a{}_c\mathcal{L}_w\hat{\omega}^{cb}{}_{\mu} + \lambda^b{}_c\mathcal{L}_w\hat{\omega}^{ac}{}_{\mu}) \\ &= -\mathcal{L}_w\partial_{\mu}\lambda^{ab} + (\mathcal{L}_w\lambda^a{}_c)\hat{\omega}^{cb}{}_{\mu} + (\mathcal{L}_w\lambda^b{}_c)\hat{\omega}^{ac}{}_{\mu}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Mit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_w\partial_{\mu}\lambda^{ab} &= w^{\rho}\partial_{\rho}\partial_{\mu}\lambda^{ab} + (\partial_{\mu}w^{\rho})\partial_{\rho}\lambda^{ab} \\ &= \partial_{\mu}(w^{\rho}\partial_{\rho}\lambda^{ab}) \\ &= \partial_{\mu}\mathcal{L}_w\lambda^{ab}\end{aligned}\tag{4.9}$$

erhalten wir somit auch für den Spinzusammenhang

$$[\delta_D(w), \delta_L(\lambda)]\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu} = \delta_L(\mathcal{L}_w\lambda)\hat{\omega}^{ab}{}_{\mu},$$

so daß sich zusammenfassend die Algebrarelation für den gemischten Sektor zu

$$[\delta_D(w), \delta_L(\lambda)]\Phi = \delta_L(\mathcal{L}_w\lambda)\Phi \quad (4.10)$$

ergibt.

Insgesamt ist die Algebra der Eichtransformationen der Felder von der Form

$$\begin{array}{l} [\delta_D(w_1), \delta_D(w_2)]\Phi = \delta_D([w_1, w_2])\Phi \\ [\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]\Phi = \delta_L([\lambda_1, \lambda_2])\Phi \\ [\delta_D(w), \delta_L(\lambda)]\Phi = \delta_L(\mathcal{L}_w\lambda)\Phi \\ \forall \Phi \in \{\hat{e}^a_\mu, \hat{\omega}^{ab}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}\} \end{array} \quad (4.11)$$

Diese Relationen besagen, daß die gesamte Gruppe der Eichtransformationen, \mathbf{G} , die Struktur eines semidirekten Produktes aus Raumzeit-Diffeomorphismen, Diff , und der Gruppe der lokalen Lorentz-Transformationen, $O(4)_{\text{loc}}$, besitzt. Letztere bilden dabei die invariante Unteralgebra, da neben dem reinen $O(4)$ -Kommutator auch der gemischte Kommutator durch eine Lorentz-Transformation gegeben ist. Es gilt also $\mathbf{G} = \text{Diff} \ltimes O(4)_{\text{loc}}$. Für die weitere Diskussion wird es von Nutzen sein, diesen Sachverhalt von einem abstrakteren Standpunkt aus zu verstehen.

4.1.2 Ward-Operatoren und deren Algebra

Wir betrachten die Variation eines generischen Funktionals $A[\hat{e}, \hat{\omega}, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}]$, die durch die in Abschnitt 4.1.1 diskutierten Eichtransformationen seiner Feldargumente mit Parametern $w^\mu(x)$ und $\lambda^{ab}(x)$ hervorgerufen wird. Angewandt auf die infinitesimale Variation

$$\begin{aligned} & \delta(w, \lambda)A[\hat{e}^a_\mu, \hat{\omega}^{ab}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] \\ := & A[\hat{e}^a_\mu + \delta_D(w)\hat{e}^a_\mu + \delta_L(\lambda)\hat{e}^a_\mu, \hat{\omega}^{ab}_\mu + \delta_D(w)\hat{\omega}^{ab}_\mu + \delta_L(\lambda)\hat{\omega}^{ab}_\mu, \mathcal{C}^\mu + \delta_D(w)\mathcal{C}^\mu + \delta_L(\lambda)\mathcal{C}^\mu, \\ & \bar{\mathcal{C}}_\mu + \delta_D(w)\bar{\mathcal{C}}_\mu + \delta_L(\lambda)\bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab} + \delta_D(w)\Sigma^{ab} + \delta_L(\lambda)\Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab} + \delta_D(w)\bar{\Sigma}_{ab} + \delta_L(\lambda)\bar{\Sigma}_{ab}] \\ & - A[\hat{e}^a_\mu, \hat{\omega}^{ab}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] \end{aligned}$$

liefert eine funktionale Taylor- oder Volterra-Reihe

$$\begin{aligned}
& \delta(w, \lambda) A[\hat{e}^a{}_\mu, \hat{\omega}^{ab}{}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] \\
= & \int d^4x \left\{ (\delta_D(w) \hat{e}^c{}_\nu(x) + \delta_L(\lambda) \hat{e}^c{}_\nu(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(x)} \right. \\
& + (\delta_D(w) \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(x) + \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(x)} \\
& + (\delta_D(w) \mathcal{C}^\nu(x) + \delta_L(\lambda) \mathcal{C}^\nu(x)) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\nu(x)} \\
& + (\delta_D(w) \bar{\mathcal{C}}_\nu(x) + \delta_L(\lambda) \bar{\mathcal{C}}_\nu(x)) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\nu(x)} \\
& + (\delta_D(w) \Sigma^{cd}(x) + \delta_L(\lambda) \Sigma^{cd}(x)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(x)} A[\hat{e}^a{}_\mu, \hat{\omega}^{ab}{}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] \\
& \left. + (\delta_D(w) \bar{\Sigma}_{cd}(x) + \delta_L(\lambda) \bar{\Sigma}_{cd}(x)) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{cd}(x)} \right\} A[\hat{e}^a{}_\mu, \hat{\omega}^{ab}{}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] \\
& + \mathcal{O}(w^2, w\lambda, \lambda^2).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt die allgemeine Struktur

$$\begin{aligned}
& \delta(w, \lambda) A[\hat{e}^a{}_\mu, \hat{\omega}^{ab}{}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] \\
= & -\mathcal{W}_D(w) A[\hat{e}^a{}_\mu, \hat{\omega}^{ab}{}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] - \mathcal{W}_L(\lambda) A[\hat{e}^a{}_\mu, \hat{\omega}^{ab}{}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] \\
& + \mathcal{O}(w^2, w\lambda, \lambda^2).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die linearisierte Wirkung einer Eichtransformation der Felder mittels der *Ward-Operatoren*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_D(w) := & - \int d^4x \left(\delta_D(w) \hat{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_D(w) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \right. \\
& + \delta_D(w) \mathcal{C}^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\mu(x)} + \delta_D(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\mu(x)} \\
& \left. + \delta_D(w) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_D(w) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right) \quad (4.12)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_L(\lambda) &:= - \int d^4x \left(\delta_L(\lambda) \hat{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \right. \\
&\quad + \delta_L(\lambda) \mathcal{C}^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\mu(x)} + \delta_L(\lambda) \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\mu(x)} \\
&\quad \left. + \delta_L(\lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_L(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right) \\
&= - \int d^4x \left(\delta_L(\lambda) \hat{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \right. \\
&\quad \left. + \delta_L(\lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_L(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

mit Blick auf (3.13) ausgedrückt. Die dabei vernachlässigten Terme höherer Ordnung schließen auch partielle Ableitungen der Eichparameter ein. Zudem hebt sich in diesen Definitionen die inverse Determinante des Hintergrundvielbeins, die vor jeder Funktionalableitung auftritt, jeweils gegen den entsprechenden Faktor im Integrationsmaß weg, was wir direkt berücksichtigt haben.

Analog zur Diskussion der Feldtransformationen möchten wir nun ebenfalls die Algebra dieser Operatoren studieren. Die erforderlichen Rechnungen sind in Anhang D zusammengefaßt.

Dort betrachten wir die Anwendung eines Kommutators zweier Diffeomorphismen auf ein beliebiges Funktional und leiten für die zugehörigen Ward-Operatoren den Kommutator

$$[\mathcal{W}_D(w_1), \mathcal{W}_D(w_2)] = \mathcal{W}_D([w_1, w_2]) \quad (4.14)$$

ab. Für zwei Lorentz-Transformationen ergibt sich dieser zu

$$[\mathcal{W}_L(\lambda_1), \mathcal{W}_L(\lambda_2)] = \mathcal{W}_L([\lambda_1, \lambda_2]), \quad (4.15)$$

so daß (4.14) und (4.15) die beiden wohlbekannten Vertauschungsrelationen für Diffeomorphismen und nicht-abelsche Eichtransformationen reproduzieren.

Für den gemischten Teil der Ward-Algebra, der im weiteren Verlauf den eigentlichen Gegenstand unseres Interesses bildet, ergibt eine entsprechende Rechnung die Vertauschungs-

relation

$$[\mathcal{W}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] = \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_w \lambda), \quad (4.16)$$

so daß \mathcal{W}_D und \mathcal{W}_L die Algebra

$$\boxed{\begin{aligned} [\mathcal{W}_D(w_1), \mathcal{W}_D(w_2)] &= \mathcal{W}_D([w_1, w_2]) \\ [\mathcal{W}_L(\lambda_1), \mathcal{W}_L(\lambda_2)] &= \mathcal{W}_L([\lambda_1, \lambda_2]) \\ [\mathcal{W}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] &= \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_w \lambda) \end{aligned}} \quad (4.17)$$

bilden. Das negative Vorzeichen in (4.12) und (4.13) wurde dabei so gewählt, daß die Algebra der Ward-Operatoren (4.17) und die der Feldtransformationen (4.11) die gleiche Form besitzen. Fassen wir die Felder $\Phi(x)$ selbst als Evaluationsfunktionale auf, so liefert die Anwendung der Ward-Operatoren

$$\mathcal{W}_D(w)\Phi(x) = -\delta_D(w)\Phi(x) \quad \text{ sowie } \quad \mathcal{W}_L(\lambda)\Phi(x) = -\delta_L(\lambda)\Phi(x).$$

Unter diesen Eichtransformationen ist ein Funktional $A[\hat{e}, \hat{\omega}, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}]$ der vollen Quantenfelder also genau dann invariant, wenn es durch \mathcal{W}_D und \mathcal{W}_L vernichtet wird, d. h. wenn

$$\mathcal{W}_D(w)A[\hat{e}^a_\mu, \hat{\omega}^{ab}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] = 0 \quad \wedge \quad \mathcal{W}_L(\lambda)A[\hat{e}^a_\mu, \hat{\omega}^{ab}_\mu, \mathcal{C}^\mu, \bar{\mathcal{C}}_\mu, \Sigma^{ab}, \bar{\Sigma}_{ab}] = 0$$

gilt.

Man beachte, daß die hier gewählte Unterteilung der Eichtransformationen in Diffeomorphismen und Lorentz-Transformationen in gewissem Sinne willkürlich ist: Vielmehr existiert lediglich der Begriff *einer* Eichtransformation im Sinne eines Elementes der Gruppe von Eichtransformationen, das durch die Angabe von zehn Parametern spezifiziert wird. In der von uns gewählten Parametrisierung verteilen sich die zehn Parameter auf zwei separate Unteralgebren, die die gesamte Gruppe erzeugen, d. h. es gilt schematisch

$$\delta(w, \lambda) = \begin{pmatrix} \delta_D(w) \\ \delta_L(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung ist unvorteilhaft, da sie auf eine entsprechend der kanonischen Vorgehensweise konstruierte Geistwirkung führt, die für die in Hintergründe und Fluktuationen aufgespaltenen Felder nicht mehr invariant unter den Hintergrund-Pendants der Eichredundanzen ist. Der tiefere Grund dafür liegt im Nicht-Verschwinden des gemischten Kommutators (4.10) bzw. (4.16). Wir werden dies im nächsten Abschnitt erläutern und eine geeignete Umparametrisierung mit den gewünschten Eigenschaften angeben.

4.1.3 Kovariantisierung der Eichtransformationen

Motivation. An dieser Stelle müssen wir etwas vorgreifen: Wir betrachten hier bereits eine der vier Komponenten der Geistwirkung, die wir im Anschluß an die Diskussion der Eichinvarianzen und deren Fixierung berechnen. Da wir im Geistsektor jegliche Renormierungseffekte vernachlässigen, ist der entsprechende Beitrag zum Funktional Γ_k durch die klassische Geistwirkung S_{gh} gegeben, in welcher die Quantengeistfelder durch die entsprechenden Felderwartungswerte zu ersetzen sind, d.h. $(\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma})$ geht über in $(\xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon})$. Die Komponenten der Geistwirkung werden bestimmt, indem man jeweils eine der beiden Eichbedingungen bezüglich der Fluktuationen variiert. In unserem Fall werden die Eichbedingungen ausschließlich von der Vielbeinfluktuation abhängen. Die Eichbedingung wird mit dem zugehörigen Antigeist kontrahiert, und anschließend schaltet man eine der beiden wahren Eichtransformationen der Fluktuationen dahinter, wobei diese von dem entsprechenden Geistfeld erzeugt werden.

Der problematische Beitrag zur Geistwirkung ist durch die $\bar{\Upsilon}$ - ξ -Komponente gegeben, in der die $O(4)$ -Eichbedingung sowie ein vom Diffeomorphismus-Geist erzeugter Diffeomorphismus auftreten:

$$(S_{\text{gh}}[\xi, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}])_{\bar{\Upsilon}-\xi} = - \int d^4x \bar{e} \left(\bar{\Upsilon}_{ab} \frac{\partial \mathcal{G}^{ab}}{\partial \varepsilon^c{}_\nu} \delta_D^G(\xi) \varepsilon^c{}_\nu \right) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (4.18)$$

Nach dem Einsetzen der Hintergrundzerlegung der Quantenfelder hängt dieses Funktional parametrisch von den Hintergrundkonfigurationen ab. Darüber hinaus verwenden wir die Determinante des Hintergrundvielbeins, um das Integralmaß zu konstruieren.

Wir hatten bereits in Kapitel 3 erläutert, daß wir den inversen Propagator $\Gamma_k^{(2)}$ für verschwindende Fluktuationen und Geistfelder auswerten. Da die Geistwirkung bilinear ist,

erhält man keine gemischten Komponenten, und der Operator $\Gamma_k^{(2)}$ zerfällt sektorweise in einen Graviton- und einen Geistblock. Daher kann in (4.18) bereits vor der Ableitung bezüglich des Geist- bzw. Antigeistfeldes die Vielbeinfluktuation ε gleich Null gesetzt werden. Das Vorzeichen der Geistwirkung entspringt einer Konvention, und wir wählen hier die in der QEG gebräuchliche Form [13].

Wir verwenden im weiteren Verlauf für den Lorentz-Sektor eine Eichbedingung der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ab}(\varepsilon; \bar{e}) &= \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (\varepsilon^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu - \varepsilon^b{}_\mu \bar{e}^a{}_\nu) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{G}^{ab}}{\partial \varepsilon^c{}_\nu} &= \delta_c^{[a} \bar{e}^{b]\nu}, \end{aligned}$$

so daß sich mit

$$\delta_D^G(\xi) \varepsilon^c{}_\nu = \mathcal{L}_\xi(\bar{e} + \varepsilon)^c{}_\nu$$

der obige Ausdruck zu

$$(S_{\text{gh}}[\xi, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}])_{\bar{\Upsilon}-\xi} = - \int d^4x \bar{e} \bar{\Upsilon}_{ab} \delta_c^a \bar{e}^{b\nu} (\mathcal{L}_\xi \bar{e}^c{}_\nu)$$

ergibt; dabei haben wir die Antisymmetrie des Lorentz-Antigeistes berücksichtigt. Alle darin auftretenden Objekte verhalten sich bezüglich Hintergrundtransformationen wie Tensoren entsprechenden Ranges, so daß ein $O(4)$ -Tensor mit der gewöhnlichen Lie-Ableitung eines Lorentz-Vektors kontrahiert wird.

Die Lie-Ableitung eines $O(4)$ -Tensors definiert allerdings keinen $O(4)$ -Tensor. Vielmehr gilt nach (4.6)

$$\mathcal{L}_\xi(\lambda^a{}_b \bar{e}^b{}_\mu) \neq \lambda^a{}_b \mathcal{L}_\xi \bar{e}^b{}_\mu,$$

da sich der Eichparameter als Raumzeit-Skalar unter Diffeomorphismen ebenfalls nichttrivial transformiert. Dies ist auch die Aussage der beiden gemischten Kommutatoren (4.10) und (4.16): *Lokale $O(4)$ -Transformationen und Diffeomorphismen kommutieren nicht*. Benötigt wird vielmehr eine $O(4)$ -Kovariantisierung der gewöhnlichen Lie-Ableitung. Dies kann in der Tat durch eine geeignete Umparametrisierung der Eichtransformationen er-

reicht werden. Diese wollen wir im folgenden Abschnitt angeben, wobei die grundlegende Idee zunächst wieder anhand der vollen Felder dargestellt wird. Im Anschluß daran wird dieses Verfahren auf die Hintergrundzerlegung übertragen.

Modifizierte Diffeomorphismen. Wir definieren eine neue Parametrisierung der Diffeomorphismen über

$$\widetilde{\delta}_D(w) := \delta_D(w) + \delta_L(w \cdot \hat{\omega}) \quad (4.19)$$

mit $(w \cdot \hat{\omega})^{ab} \equiv w^\mu \hat{\omega}^a{}_\mu{}^b = -(w \cdot \hat{\omega})^{ba}$. Wir überführen also einen bestimmten $\hat{\omega}$ -abhängigen Anteil von $O(4)_{\text{loc}}$ in den Diffeomorphismus-Sektor, wohingegen die Lorentz-Transformationen unverändert bleiben. Dies kann als ein feldabhängiger Koordinatenwechsel auf dem Raum aller Eichparameter aufgefaßt werden gemäß

$$\delta'(w, \lambda) = \begin{pmatrix} \delta_D(w) + \delta_L(w \cdot \hat{\omega}) \\ \delta_L(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Diese Methode zur Kovariantisierung von Lie-Ableitungen geht im wesentlichen auf R. Jackiw zurück, der eine analoge Parametrisierung für konforme Transformationen und Yang-Mills-Transformationen angegeben hat [64, 65].

Die Wirkung von (4.19) auf diejenigen Quantenfelder, die sowohl Raumzeit- als auch Lorentz-Tensoren sind, ist dann von der Form

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_D(w) \hat{e}^a{}_\mu &= \delta_D(w) \hat{e}^a{}_\mu + \delta_L(w \cdot \hat{\omega}) \hat{e}^a{}_\mu \\ &= \mathcal{L}_w \hat{e}^a{}_\mu + w^\rho \hat{\omega}^a{}_{b\rho} \hat{e}^b{}_\mu \\ &= w^\rho (\partial_\rho \delta^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_{b\rho}) \hat{e}^b{}_\mu + (\partial_\mu w^\rho) \hat{e}^a{}_\rho \\ &= w^\rho \hat{\nabla}_\rho \hat{e}^a{}_\mu + (\hat{\nabla}_\mu w^\rho) \hat{e}^a{}_\rho, \\ \widetilde{\delta}_D(w) \mathcal{C}^\mu &\equiv \delta_D(w) \mathcal{C}^\mu \\ &= w^\rho \partial_\rho \mathcal{C}^\mu - (\partial_\rho w^\mu) \mathcal{C}^\rho \\ &= w^\rho \hat{\nabla}_\rho \mathcal{C}^\mu - (\hat{\nabla}_\rho w^\mu) \mathcal{C}^\rho, \\ \widetilde{\delta}_D(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu &\equiv \delta_D(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu \\ &= w^\rho \hat{\nabla}_\rho \bar{\mathcal{C}}_\mu + (\hat{\nabla}_\mu w^\rho) \bar{\mathcal{C}}_\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}_D(w)\Sigma^{ab} &= w^\rho \partial_\rho \Sigma^{ab} + w^\rho \hat{\omega}^a_{c\rho} \Sigma^{cb} + w^\rho \hat{\omega}^b_{c\rho} \Sigma^{ac} \\
&= w^\rho (\partial_\rho \delta^a_c \delta^b_d + \delta^b_d \hat{\omega}^a_{c\rho} + \delta^a_c \hat{\omega}^b_{d\rho}) \Sigma^{cd} \\
&= w^\rho \hat{\nabla}_\rho \Sigma^{ab}, \\
\widetilde{\delta}_D(w)\bar{\Sigma}_{ab} &= w^\rho \hat{\nabla}_\rho \bar{\Sigma}_{ab},
\end{aligned}$$

da die $O(4)$ -kovariante Ableitung $\hat{\nabla}$ auf Lorentz-Skalare wie ξ , \mathcal{C} und $\bar{\mathcal{C}}$ als partielle Ableitung ∂ wirkt. Die Wirkung dieser Umparametrisierung besteht somit darin, die Lie-Ableitung bezüglich des vollen $O(4)$ -Zusammenhangs $\hat{\omega}$ zu kovariantisieren. Auf den Spinzusammenhang selbst wirkt dieser modifizierte Diffeomorphismus gemäß

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}_D(w)\hat{\omega}^a_{\mu}{}^b &= \mathcal{L}_w \hat{\omega}^a_{\mu}{}^b - \hat{\nabla}_\mu (w^\rho \hat{\omega}^a_{\rho}{}^b) \\
&= w^\rho \partial_\rho \hat{\omega}^a_{\mu}{}^b + (\partial_\mu w^\rho) \hat{\omega}^a_{\rho}{}^b \\
&\quad - \partial_\mu (w^\rho \hat{\omega}^a_{\rho}{}^b) - \hat{\omega}^a_{c\mu} w^\rho \hat{\omega}^b_{\rho}{}^c - \hat{\omega}^b_{c\mu} w^\rho \hat{\omega}^a_{\rho}{}^c \\
&= w^\rho (\partial_\rho \hat{\omega}^a_{\mu}{}^b - \partial_\mu \hat{\omega}^a_{\rho}{}^b + \hat{\omega}^a_{c\rho} \hat{\omega}^b_{\mu}{}^c - \hat{\omega}^a_{c\mu} \hat{\omega}^b_{\rho}{}^c),
\end{aligned}$$

so daß sich also das Transformationsgesetz

$$\widetilde{\delta}_D(w)\hat{\omega}^a_{\mu}{}^b = -\hat{F}^{ab}{}_{\mu\rho} w^\rho \quad (4.20)$$

ergibt; hierin bezeichnet \hat{F} den zu $\hat{\omega}$ gehörigen Feldstärketensor.

Diese Umparametrisierung führt nun auf einen assoziierten Ward-Operator der Form

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{W}}_D(w) &:= - \int d^4x \left(\widetilde{\delta}_D(w) \hat{e}^a_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_{\mu}(x)} + \widetilde{\delta}_D(w) \hat{\omega}^a_{\mu}{}^b(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^a_{\mu}{}^b(x)} \right. \\
&\quad + \widetilde{\delta}_D(w) \mathcal{C}^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\mu(x)} + \widetilde{\delta}_D(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\mu(x)} \\
&\quad \left. + \widetilde{\delta}_D(w) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \widetilde{\delta}_D(w) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right), \quad (4.21)
\end{aligned}$$

wohingegen der Lorentz-Ward-Operator (4.13) keinerlei Modifikation erfährt. Bei der Bestimmung der zugehörigen Algebra ist zu beachten, daß sich diese nicht alleine aus der Linearität der Ward-Operatoren ableiten läßt, denn die Feldabhängigkeit des Lorentz-Parameters $w \cdot \hat{\omega}$ führt nun zu zusätzlichen Beiträgen bei funktionaler Ableitung bezüglich des Spinzusammenhangs. (Auf dem Niveau des Kommutators von Feldtransformationen

entspräche dies dem Sachverhalt, daß der Transformationsparameter selbst den betrachteten Transformationen unterliegt.) Diese Zusatzterme werden in Abschnitt D.2 berechnet, so daß wir anschließend unter Verwendung der bereits bekannten $(\mathcal{W}_D, \mathcal{W}_L)$ -Relationen die volle Algebra bestimmen können.

Mit der Notation

$$\begin{aligned} (w_1 w_2 \cdot \hat{F})^{ab} &\equiv w_1^\mu w_2^\nu \hat{F}_{\mu\nu}^{ab} \\ &= -(w_1 w_2 \cdot \hat{F})^{ba} \\ &= -(w_2 w_1 \cdot \hat{F})^{ab} \end{aligned}$$

ergibt sich in Anhang D.2 der durch die Feldabhängigkeit des Transformationsparameters bedingte Zusatzterm zu dem Kommutator

$$[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w_1), \widetilde{\mathcal{W}}_D(w_2)] \quad (4.22)$$

gerade zu $-2\mathcal{W}_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F})$.

Den Kommutator (4.22) können wir bestimmen, indem wir die Linearität der Ward-Operatoren ausnutzen und den Zusatzbeitrag ergänzen. Unter Verwendung von (4.14), (4.15) und (4.16) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} [\widetilde{\mathcal{W}}_D(w_1), \widetilde{\mathcal{W}}_D(w_2)] &= [\mathcal{W}_D(w_1) + \mathcal{W}_L(w_1 \cdot \hat{\omega}), \mathcal{W}_D(w_2) + \mathcal{W}_L(w_2 \cdot \hat{\omega})] \\ &= [\mathcal{W}_D(w_1), \mathcal{W}_D(w_2)] + [\mathcal{W}_D(w_1), \mathcal{W}_L(w_2 \cdot \hat{\omega})] + [\mathcal{W}_L(w_1 \cdot \hat{\omega}), \mathcal{W}_D(w_2)] \\ &\quad + [\mathcal{W}_L(w_1 \cdot \hat{\omega}), \mathcal{W}_L(w_2 \cdot \hat{\omega})] \\ &= \mathcal{W}_D([w_1, w_2]) + \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_{w_1}(w_2 \cdot \hat{\omega})) - \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_{w_2}(w_1 \cdot \hat{\omega})) \\ &\quad + \mathcal{W}_L([w_1 \cdot \hat{\omega}, w_2 \cdot \hat{\omega}]) - 2\mathcal{W}_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F}) \\ &= \mathcal{W}_D([w_1, w_2]) \\ &\quad + \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_{w_1}(w_2 \cdot \hat{\omega}) - \mathcal{L}_{w_2}(w_1 \cdot \hat{\omega}) + [w_1 \cdot \hat{\omega}, w_2 \cdot \hat{\omega}] - 2w_1 w_2 \cdot \hat{F}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Für den Parameter des Lorentz-Ward-Operators gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_{w_1}(w_2 \cdot \hat{\omega}) - \mathcal{L}_{w_2}(w_1 \cdot \hat{\omega}) + [w_1 \cdot \hat{\omega}, w_2 \cdot \hat{\omega}] - 2w_1 w_2 \cdot \hat{F})^{ab} \\
&= w_1^\nu \partial_\nu (w_2^\mu \hat{\omega}^{ab}{}_\mu) - w_2^\nu \partial_\nu (w_1^\mu \hat{\omega}^{ab}{}_\mu) + (w_1^\mu \hat{\omega}^a{}_{c\mu} w_2^\nu \hat{\omega}^{cb}{}_\nu - w_2^\mu \hat{\omega}^a{}_{c\mu} w_1^\nu \hat{\omega}^{cb}{}_\nu) - 2w_1^\mu w_2^\nu \hat{F}^{ab}{}_{\mu\nu} \\
&= (w_1^\nu \partial_\nu w_2^\mu - w_2^\nu \partial_\nu w_1^\mu) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu \\
&\quad + w_1^\mu w_2^\nu (\partial_\mu \hat{\omega}^{ab}{}_\nu - \partial_\nu \hat{\omega}^{ab}{}_\mu + \hat{\omega}^a{}_{c\mu} \hat{\omega}^{cb}{}_\nu - \hat{\omega}^a{}_{c\nu} \hat{\omega}^{cb}{}_\mu - 2\hat{F}^{ab}{}_{\mu\nu}) \\
&= [w_1, w_2]^\mu \hat{\omega}^{ab}{}_\mu - w_1^\mu w_2^\nu \hat{F}^{ab}{}_{\mu\nu}, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

so daß wir insgesamt die Relation

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w_1), \widetilde{\mathcal{W}}_D(w_2)] &= \mathcal{W}_D([w_1, w_2]) + \mathcal{W}_L([w_1, w_2] \cdot \hat{\omega} - w_1 w_2 \cdot \hat{F}) \\
&= \widetilde{\mathcal{W}}_D([w_1, w_2]) - \mathcal{W}_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F}) \tag{4.25}
\end{aligned}$$

erhalten.

Für den gemischten Teil der Algebra

$$[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)]$$

werden die auftretenden Zusatzterme ebenfalls in Anhang D.2 bestimmt. Sie lassen sich komponentenweise zu einem Beitrag der Form $-\mathcal{W}_L(w \cdot \hat{\nabla} \lambda)$ zusammenfassen. In Kombination mit denjenigen Beiträgen, die man auf die ursprünglichen $(\mathcal{W}_D, \mathcal{W}_L)$ -Kommutatoren zurückführen kann, ergibt sich

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] &= [\mathcal{W}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] + [\mathcal{W}_L(w \cdot \hat{\omega}), \mathcal{W}_L(\lambda)] \\
&= \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_w \lambda) + \mathcal{W}_L([w \cdot \hat{\omega}, \lambda]) - \mathcal{W}_L(w \cdot \hat{\nabla} \lambda) \\
&= \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_w \lambda + [w \cdot \hat{\omega}, \lambda] - w \cdot \hat{\nabla} \lambda). \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Das führt mit

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_w \lambda + [w \cdot \hat{\omega}, \lambda])^{ab} &= w^\rho \partial_\rho \lambda^{ab} + w^\rho \hat{\omega}^a{}_{c\rho} \lambda^{cb} - \lambda^a{}_{c\rho} w^\rho \hat{\omega}^{cb}{}_\rho \\
&= w^\rho (\partial_\rho \lambda^{ab} + \hat{\omega}^a{}_{c\rho} \lambda^{cb} + \hat{\omega}^b{}_{c\rho} \lambda^{ac}) \\
&= w^\rho \hat{\nabla}_\rho \lambda^{ab} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

auf

$$[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] = 0, \quad (4.28)$$

so daß die neuen Diffeomorphismen $\widetilde{\delta}_D$ wie gewünscht mit den lokalen Lorentz-Transformationen vertauschen; die Modifikation kompensiert offenbar gerade die Transformation

$$\delta_D(w)\lambda^{ab}(x) = \mathcal{L}_w\lambda^{ab}(x) = w^\rho\partial_\rho\lambda^{ab}(x)$$

des $O(4)$ -Eichparameters unter Diffeomorphismen.

Der reine Lorentz-Teil der Algebra bleibt natürlich unverändert, d. h. es gilt mit (4.15) nach wie vor

$$[\mathcal{W}_L(\lambda_1), \mathcal{W}_L(\lambda_2)] = \mathcal{W}_L([\lambda_1, \lambda_2]).$$

Dies führt insgesamt auf eine Algebra der Form

$\begin{aligned} [\widetilde{\mathcal{W}}_D(w_1), \widetilde{\mathcal{W}}_D(w_2)] &= \widetilde{\mathcal{W}}_D([w_1, w_2]) - \mathcal{W}_L(w_1w_2 \cdot \hat{F}) \\ [\mathcal{W}_L(\lambda_1), \mathcal{W}_L(\lambda_2)] &= \mathcal{W}_L([\lambda_1, \lambda_2]) \\ [\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] &= 0 \end{aligned}$	(4.29)
---	--------

Wir erhalten somit immer noch die Algebra eines semidirekten Produktes $\text{Diff} \ltimes \mathbf{O}(4)_{\text{loc}}$, in dem die Unter algebra $\mathfrak{o}(4)_{\text{loc}}$ nach wie vor schließt. Darüber hinaus verschwindet zwar jetzt der gemischte Teil der Algebra, dafür ist jedoch der Kommutator zweier modifizierter Diffeomorphismen nicht mehr durch einen modifizierten Diffeomorphismus gegeben. Dies stellt für uns allerdings keinerlei Beeinträchtigung dar. Der für uns maßgebliche Begriff eines invarianten Funktionals ist von der Parametrisierung der Gruppe der Eichtransformationen unabhängig: Sei $F[\hat{e}, \hat{\omega}, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \Sigma, \bar{\Sigma}]$ ein beliebiges Funktional der Quantenfelder, so sind die beiden Aussagen

$$\mathcal{W}_D(w)F = 0 \quad \wedge \quad \mathcal{W}_L(\lambda) = 0 \quad \forall w^\mu, \lambda^{ab}$$

und

$$\widetilde{\mathcal{W}}_D(w)F = 0 \quad \wedge \quad \mathcal{W}_L(\lambda) = 0 \quad \forall w^\mu, \lambda^{ab}$$

äquivalent, da der neue Satz von Ward-Operatoren eine Linearkombination des ursprünglichen bildet. Zudem ist in dieser Parametrisierung die gemäß der üblichen Faddeev-Popov-Prozedur konstruierte Geistwirkung invariant unter Hintergrundtransformationen. Bevor wir darauf zurückkommen, wollen wir obige Überlegungen auf den Hintergrundformalismus übertragen.

4.1.4 Die Algebra der Ward-Operatoren für Hintergrund- und wahre Eichtransformationen in der ursprünglichen Parametrisierung

Die Anwendung der Überlegungen aus Abschnitt 4.1.3 auf die in Hintergrundkonfigurationen und Fluktuationen aufgespaltenen Felder und damit auf die beiden Klassen δ^G und δ^B von Eichtransformationen führt auf zwei Sätze ($\mathcal{W}_D^B, \mathcal{W}_L^B$) und ($\mathcal{W}_D^G, \mathcal{W}_L^G$) von Ward-Operatoren für die Hintergrund- bzw. die wahren Eichtransformationen. In der ursprünglichen Parametrisierung sind diese gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_D^B(w) := & - \int d^4x \left(\delta_D^B(w) \bar{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_D^B(w) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} \right. \\ & + \delta_D^B(w) \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} + \delta_D^B(w) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \\ & + \delta_D^B(w) \mathcal{C}^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\mu(x)} + \delta_D^B(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\mu(x)} \\ & \left. + \delta_D^B(w) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_D^B(w) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right), \quad (4.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_L^B(\lambda) := & - \int d^4x \left(\delta_L^B(\lambda) \bar{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_L^B(\lambda) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} \right. \\
& + \delta_L^B(\lambda) \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} + \delta_L^B(\lambda) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \\
& \left. + \delta_L^B(\lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_L^B(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right) \quad (4.31)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_D^G(w) := & - \int d^4x \left(\delta_D^G(w) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} + \delta_D^G(w) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \right. \\
& + \delta_D^G(w) \mathcal{C}^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\mu(x)} + \delta_D^G(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\mu(x)} \\
& \left. + \delta_D^G(w) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_D^G(w) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right), \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_L^G(\lambda) := & - \int d^4x \left(\delta_L^G(\lambda) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} + \delta_L^G(\lambda) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \right. \\
& \left. + \delta_L^G(\lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_L^G(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right). \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß die δ^G -Ward-Operatoren keine Transformationen der Hintergrundfelder erzeugen. Da wir die Geist- und Antigeist-Felder nicht in Hintergründe und Fluktuationen zerlegen, sind für diese beide Transformationsarten identisch und durch die ursprüngliche Eichtransformation gegeben:

$$\begin{aligned}
\delta_D^B(w) \mathcal{C}^\mu &= \delta_D^G(w) \mathcal{C}^\mu = \mathcal{L}_w \mathcal{C}^\mu, & \delta_L^B(\lambda) \mathcal{C}^\mu &= \delta_L^G(\lambda) \mathcal{C}^\mu = 0, \\
\delta_D^B(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu &= \delta_D^G(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu = \mathcal{L}_w \bar{\mathcal{C}}_\mu, & \delta_L^B(\lambda) \bar{\mathcal{C}}_\mu &= \delta_L^G(\lambda) \bar{\mathcal{C}}_\mu = 0, \\
\delta_D^B(w) \Sigma^{ab} &= \delta_D^G(w) \Sigma^{ab} = \mathcal{L}_w \Sigma^{ab}, & \delta_L^B(\lambda) \Sigma^{ab} &= \delta_L^G(\lambda) \Sigma^{ab} = \lambda^a{}_c \Sigma^{cb} + \lambda^b{}_c \Sigma^{ac}, \\
\delta_D^B(w) \bar{\Sigma}_{ab} &= \delta_D^G(w) \bar{\Sigma}_{ab} = \mathcal{L}_w \bar{\Sigma}_{ab}, & \delta_L^B(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab} &= \delta_L^G(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab} = \lambda_a{}^c \bar{\Sigma}_{cb} + \lambda_b{}^c \bar{\Sigma}_{ac}.
\end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, erfüllen auch die Hintergrund-Ward-Operatoren die ursprüngliche Algebra (4.14), (4.16) und (4.15) mit $\bar{\omega}^{ab}{}_\mu$ nach (3.11) als $O(4)$ -Zusammenhang, da die Fluktuationen $\varepsilon^a{}_\mu$ und $\tau^{ab}{}_\mu$ als neue Felder aufgefaßt werden können, die sich jedoch beide tensoriell unter δ_D^B und δ_L^B transformieren. Somit können ihre Beiträge zu der Algebra auf

die Rechnungen für das unzerlegte Vielbein $e^a{}_\mu$ und den Lorentz-Geist Σ^{ab} zurückgeführt werden. Es gilt also

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_D^B(w_1), \mathcal{W}_D^B(w_2)] &= \mathcal{W}_D^B([w_1, w_2]) \\ [\mathcal{W}_L^B(\lambda_1), \mathcal{W}_L^B(\lambda_2)] &= \mathcal{W}_L^B([\lambda_1, \lambda_2]) \\ [\mathcal{W}_D^B(w), \mathcal{W}_L^B(\lambda)] &= \mathcal{W}_L^B(\mathcal{L}_w \lambda) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die δ^G -Ward-Operatoren besitzen für das Vielbein und den Spinzusammenhang bloß Beiträge der Fluktuationen. Diese transformieren sich unter wahren Eichtransformationen wie die vollen Quantenfelder vor der Aufspaltung, wobei in den homogenen Anteilen \hat{e} und $\hat{\omega}$ durch $\bar{e} + \varepsilon$ und $\bar{\omega} + \tau$ ersetzt werden. Im Kommutator liefert dann eine Funktionalableitung bezüglich der Fluktuationen, die auf die entsprechende wahre Eichtransformation wirkt, genau die gleiche Index- und Operatorstruktur wie im unaufgespaltenen Fall. Diese wird auch hier wieder auf die infinitesimale wahre Eichtransformation zu ihrer Linken angewandt. Insbesondere lassen sich beispielsweise die Rechnungen (D.1), (D.4) und (D.5) analog übertragen. Dies wird in Anhang D.3 noch einmal anhand der relevanten Formel- ausdrücke illustriert. Die Algebra der Ward-Operatoren der wahren Eichtransformationen ist somit ebenfalls von der ursprünglichen Form:

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_D^G(w_1), \mathcal{W}_D^G(w_2)] &= \mathcal{W}_D^G([w_1, w_2]) \\ [\mathcal{W}_L^G(\lambda_1), \mathcal{W}_L^G(\lambda_2)] &= \mathcal{W}_L^G([\lambda_1, \lambda_2]) \\ [\mathcal{W}_D^G(w), \mathcal{W}_L^G(\lambda)] &= \mathcal{W}_L^G(\mathcal{L}_w \lambda) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Auch diese Aufspaltung der Eichtransformationen soll modifiziert werden, um eine $O(4)$ -kovariante Darstellung zu erhalten. Da jedoch auch hier der Begriff eines δ^B -invarianten Funktionals unabhängig von der gewählten Darstellung ist, werden wir im Anschluß die ursprüngliche (δ_D^B, δ_L^B) -Darstellung der Hintergrundtransformationen verwenden, um die entsprechende Invarianz der Eichfixierungsterme nachzuweisen. Schließlich offenbart sich diese für den Diffeomorphismus- und den Lorentz-Sektor separat jeweils unmittelbar, da man direkt auf das intuitive Verständnis des entsprechenden Tensorcharakters zurückgreifen kann.

4.1.5 Hintergrundkovariante Diffeomorphismen und deren Ward-Algebra

Bevor wir die beiden Eichbedingungen analysieren, übertragen wir die Idee der modifizierten Diffeomorphismen ebenfalls auf den Hintergrundformalismus. Dabei stellt sich die Frage, ob man die volle Feldabhängigkeit des Transformationsparameters in (4.19) beibehält oder ob man darin $\hat{\omega} = \bar{\omega} + \tau$ durch den Hintergrund $\bar{\omega}$ ersetzen sollte.

Im ersten Fall würde die resultierende Geistwirkung auch von der Fluktuation τ abhängen, so daß in $\Gamma_k^{(2)}$ nach zweifacher funktionaler Ableitung bezüglich des Vielbeins und des Spinzusammenhangs sowie bezüglich der Geister und Antigeister gemischte Komponenten entstünden. Da dieses Objekt jedoch anschließend für verschwindende Fluktuationen sowie für verschwindende Geist- und Antigeist-Felder ausgewertet wird, verschwänden diese Komponenten, da sie immer noch ein Geist- oder Antigeist-Feld enthielten. Auch in diesem Fall bliebe also die Blockstruktur von $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich des Graviton- und Geistsektors erhalten.

Im Rahmen unserer Näherung verschwindender Fluktuationen und Geister auf dem Niveau der Flußgleichung besteht somit zwischen beiden Optionen kein Unterschied; aus dem gleichen Grund werten wir auch die Geistwirkung schon vor dem Ableiten für verschwindende Fluktuationen aus. Daher ist es an dieser Stelle einfacher und natürlicher, sich für die zweite Option zu entscheiden und nur den Hintergrundspinzusammenhang in die Definition der neuen Diffeomorphismen eingehen zu lassen.

Wir definieren also die modifizierten Hintergrund-Diffeomorphismen gemäß

$$\widetilde{\delta}_D^B(w) := \delta_D^B(w) + \delta_L^B(w \cdot \bar{\omega}). \quad (4.36)$$

Diese wirken in gewünschter Weise auf das Hintergrund-Vielbein

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_D^B(w) \bar{e}_\mu^a &= \delta_D^B(w) \bar{e}_\mu^a + \delta_L^B(w \cdot \bar{\omega}) \bar{e}_\mu^a \\ &= w^\rho \partial_\rho \bar{e}_\mu^a + (\partial_\mu w^\rho) \bar{e}_\rho^a + w^\rho \bar{\omega}_{b\rho}^a \bar{e}_\mu^b \\ &= w^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{e}_\mu^a + (\bar{\nabla}_\mu w^\rho) \bar{e}_\rho^a, \end{aligned}$$

auf die Vielbein-Fluktuation

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\varepsilon^a{}_\mu = w^\rho \bar{\nabla}_\rho \varepsilon^a{}_\mu + (\bar{\nabla}_\mu w^\rho)\varepsilon^a{}_\rho,$$

sowie auf den Hintergrund-Spinzusammenhang

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_D^B(w)\bar{\omega}^{ab}{}_\mu &= w^\rho \partial_\rho \bar{\omega}^{ab}{}_\mu + (\partial_\mu w^\rho)\bar{\omega}^{ab}{}_\rho \\ &\quad - \partial_\mu(w^\rho \bar{\omega}^{ab}{}_\rho) + w^\rho \bar{\omega}^a{}_{c\rho} \bar{\omega}^{cb}{}_\mu + w^\rho \bar{\omega}^b{}_{c\rho} \bar{\omega}^{ac}{}_\mu \\ &= w^\rho (\partial_\rho \bar{\omega}^{ab}{}_\mu - \partial_\mu \bar{\omega}^{ab}{}_\rho + \bar{\omega}^a{}_{c\rho} \bar{\omega}^{cb}{}_\mu - \bar{\omega}^a{}_{c\mu} \bar{\omega}^{cb}{}_\rho) \\ &= -\bar{F}^{ab}{}_{\mu\rho} w^\rho \end{aligned}$$

und dessen assoziierte Fluktuation

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_D^B(w)\tau^{ab}{}_\mu &= w^\rho \partial_\rho \tau^{ab}{}_\mu + (\partial_\mu w^\rho)\tau^{ab}{}_\rho \\ &\quad + w^\rho \bar{\omega}^a{}_{c\rho} \tau^{cb}{}_\mu + w^\rho \bar{\omega}^b{}_{c\rho} \tau^{ac}{}_\mu \\ &= w^\rho \bar{\nabla}_\rho \tau^{ab}{}_\mu + (\bar{\nabla}_\mu w^\rho)\tau^{ab}{}_\rho. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\bar{\nabla}_\mu$ die aus dem Hintergrundspinzusammenhang $\bar{\omega}$ gebildete $O(4)$ -kovariante Ableitung mit zugehörigem Feldstärketensor $\bar{F}^{ab}{}_{\mu\nu}$. Für die Tensorfelder wird also wie gewohnt die Lie-Ableitung kovariantisiert. Dies geschieht nun allerdings mittels des Hintergrundspinzusammenhangs, der sich seinerseits formal genau wie der volle Spinzusammenhang in (4.20) transformiert.

Da sich die Hintergründe unter den wahren Eichtransformationen nicht transformieren, erhält man das δ^G -Verhalten der Fluktuationen wie üblich als Summe der Hintergrundtransformationen der einzelnen Komponenten. Mit

$$\widetilde{\delta}_D^G(w) := \delta_D^G(w) + \delta_L^G(w \cdot \bar{\omega})$$

ergibt sich demnach für das Hintergrund-Vielbein

$$\widetilde{\delta}_D^G(w)\bar{e}^a{}_\mu = 0,$$

für die Fluktuation hingegen

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\varepsilon^a{}_\mu = w^\rho \bar{\nabla}_\rho(\bar{e}^a{}_\mu + \varepsilon^a{}_\mu) + (\bar{\nabla}_\mu w^\rho)(\bar{e}^a{}_\rho + \varepsilon^a{}_\rho)$$

sowie entsprechend für den Hintergrund-Spinzusammenhang

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\bar{\omega}^{ab}{}_\mu = 0$$

und die zugehörige Fluktuation

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\tau^{ab}{}_\mu = -\bar{F}^{ab}{}_{\mu\rho}w^\rho + w^\rho \bar{\nabla}_\rho \tau^{ab}{}_\mu + (\bar{\nabla}_\mu w^\rho)\tau^{ab}{}_\rho. \quad (4.37)$$

Da die Geister nicht aufgespalten werden, wirken auf diese auch $\widetilde{\delta}^B$ und $\widetilde{\delta}^G$ in identischer Weise: Wir erhalten für den Diffeomorphismus-Geist

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\mathcal{C}^\mu = \widetilde{\delta}_D^G(w)\mathcal{C}^\mu = \mathcal{L}_w \mathcal{C}^\mu \equiv w^\rho \bar{\nabla}_\rho \mathcal{C}^\mu - (\bar{\nabla}_\rho w^\mu)\mathcal{C}^\rho,$$

für den zugehörigen Antigeist

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\bar{\mathcal{C}}_\mu = \widetilde{\delta}_D^G(w)\bar{\mathcal{C}}_\mu = \mathcal{L}_w \bar{\mathcal{C}}_\mu \equiv w^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{\mathcal{C}}_\mu + (\bar{\nabla}_\mu w^\rho)\bar{\mathcal{C}}_\rho$$

sowie für den $O(4)$ -Geist

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\Sigma^{ab} = \widetilde{\delta}_D^G(w)\Sigma^{ab} = w^\rho \partial_\rho \Sigma^{ab} + w^\rho \bar{\omega}^a{}_{c\rho} \Sigma^{cb} + w^\rho \bar{\omega}^b{}_{c\rho} \Sigma^{ac} = w^\rho \bar{\nabla}_\rho \Sigma^{ab}$$

und den dualen Antigeist

$$\widetilde{\delta}_D^B(w)\bar{\Sigma}_{ab} = \widetilde{\delta}_D^G(w)\bar{\Sigma}_{ab} = w^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{\Sigma}_{ab}.$$

Erneut führen diese beiden Arten, die Eichtransformationen zu realisieren, auf zwei Klassen

von Ward-Operatoren für modifizierte Hintergrund-Diffeomorphismen

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{W}}_D^B(w) := & - \int d^4x \left(\widetilde{\delta}_D^B(w) \bar{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{e}^a{}_\mu(x)} + \widetilde{\delta}_D^B(w) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} \right. \\
& + \widetilde{\delta}_D^B(w) \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} + \widetilde{\delta}_D^B(w) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \\
& + \widetilde{\delta}_D^B(w) \mathcal{C}^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\mu(x)} + \widetilde{\delta}_D^B(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\mu(x)} \\
& \left. + \widetilde{\delta}_D^B(w) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \widetilde{\delta}_D^B(w) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right) \quad (4.38)
\end{aligned}$$

und die üblichen Hintergrund-Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_L^B(\lambda) := & - \int d^4x \left(\delta_L^B(\lambda) \bar{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_L^B(\lambda) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} \right. \\
& + \delta_L^B(\lambda) \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} + \delta_L^B(\lambda) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \\
& \left. + \delta_L^B(\lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_L^B(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right) \quad (4.39)
\end{aligned}$$

sowie für wahre Diffeomorphismen

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{W}}_D^G(w) := & - \int d^4x \left(\widetilde{\delta}_D^G(w) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} + \widetilde{\delta}_D^G(w) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \right. \\
& + \widetilde{\delta}_D^G(w) \mathcal{C}^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{C}^\mu(x)} + \widetilde{\delta}_D^G(w) \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{C}}_\mu(x)} \\
& \left. + \widetilde{\delta}_D^G(w) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \widetilde{\delta}_D^G(w) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right) \quad (4.40)
\end{aligned}$$

und wahre Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_L^G(\lambda) := & - \int d^4x \left(\delta_L^G(\lambda) \varepsilon^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} + \delta_L^G(\lambda) \tau^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \right. \\
& \left. + \delta_L^G(\lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} + \delta_L^G(\lambda) \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Sigma}_{ab}(x)} \right). \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Die Schreibweisen $\widetilde{\delta}_D^B$, $\widetilde{\delta}_D^G$, $\widetilde{\mathcal{W}}_D^B$ und $\widetilde{\mathcal{W}}_D^G$ bezeichnen die Pendanten der modifizierten Diffeomorphismen für die Hintergrund-Aufspaltung. In diesen geht ausschließlich der Hintergrund-Spinzusammenhang $\bar{\omega}$ in den modifizierten Transformationsparameter ein.

Um deren Algebra angeben zu können, betrachten wir zunächst die Hintergrundtransformationen. Hier wird im Vergleich zu den $(\widetilde{\mathcal{W}}_D, \mathcal{W}_L)$ -Relationen (4.28) in der modifizierten Transformation der volle Spinzusammenhang $\hat{\omega}$ durch seine Hintergrundkomponente $\bar{\omega}$ ersetzt, die bezüglich δ_L^B ebenfalls einen Zusammenhang definiert. Die neu auftretenden Fluktuationen ε und τ kann man als Erweiterung des Feldgehalts auffassen, da sich diese ebenfalls tensoriell bezüglich δ_D^B und δ_L^B transformieren, so daß sich die vorhergehenden Rechnungen allesamt übertragen lassen. Somit reproduzieren die Hintergrund-Ward-Operatoren gerade die unzerlegte Algebra (4.29), wobei auf der rechten Seite der volle Spinzusammenhang durch die Hintergrund-Komponente zu ersetzen ist. Somit gilt

$$\boxed{\begin{aligned} [\widetilde{\mathcal{W}}_D^B(w_1), \widetilde{\mathcal{W}}_D^B(w_2)] &= \widetilde{\mathcal{W}}_D^B([w_1, w_2]) - \mathcal{W}_L^B(w_1 w_2 \cdot \bar{F}) \\ [\mathcal{W}_L^B(\lambda_1), \mathcal{W}_L^B(\lambda_2)] &= \mathcal{W}_L^B([\lambda_1, \lambda_2]) \\ [\widetilde{\mathcal{W}}_D^B(w), \mathcal{W}_L^B(\lambda)] &= 0 \end{aligned}} \quad (4.42)$$

Die wahren Eichtransformationen betreffend, stellen wir fest, daß jetzt der Parameter $w \cdot \bar{\omega}$ der zum Diffeomorphismus hinzugefügten Lorentz-Transformation nicht mehr als feldabhängig zu betrachten ist, da sich der Hintergrundspinzusammenhang unter diesen überhaupt nicht transformiert: Die zugehörigen Ward-Operatoren erzeugen keine Transformationen in $\bar{\omega}$ -Richtung, so daß in ihnen auch keine entsprechende Funktionalableitung auftritt. Um die Algebra zu ermitteln, können wir also mit $\widetilde{\mathcal{W}}_D^G(w) = \mathcal{W}_D^G(w) + \mathcal{W}_L^G(w \cdot \bar{\omega})$ und (4.35) die Linearität der Ward-Operatoren verwenden, da keine Zusatzterme zu berücksichtigen sind. Zur Ermittlung der Parameter der resultierenden wahren Eichtransformationen auf der rechten Seite für den $\widetilde{\mathcal{W}}_D^G$ - $\widetilde{\mathcal{W}}_D^G$ - und den $\widetilde{\mathcal{W}}_D^G$ - \mathcal{W}_L^G -Kommutator können wir auf die Beziehungen (4.23) und (4.24) bzw. (4.26) und (4.27) zurückgreifen. Dabei ist zu beachten, daß die auf vollem Niveau aufgrund der Feldabhängigkeit des Parameters im Lorentz-Ward-Operator auftretenden Zusatzterme $-2w_1 w_2 \cdot \hat{F}$ und $-w \cdot \hat{\nabla} \lambda$ im ersten bzw. zweiten Fall nicht mehr vorliegen. Ersetzt man schließlich auf der rechten Seite das volle Feld $\hat{\omega}$ durch den Hintergrund $\bar{\omega}$, so erhält man die Algebra der modifizierten wahren Eichtransformationen zu

$$\begin{array}{l}
\widetilde{[\mathcal{W}_D^G(w_1), \mathcal{W}_D^G(w_2)]} = \widetilde{\mathcal{W}_D^G([w_1, w_2])} + \mathcal{W}_L^G(w_1 w_2 \cdot \bar{F}) \\
\widetilde{[\mathcal{W}_L^G(\lambda_1), \mathcal{W}_L^G(\lambda_2)]} = \mathcal{W}_L^G([\lambda_1, \lambda_2]) \\
\widetilde{[\mathcal{W}_D^G(w), \mathcal{W}_L^G(\lambda)]} = \mathcal{W}_L^G(w \cdot \bar{\nabla} \lambda)
\end{array} \tag{4.43}$$

Im Anschluß an die Diskussion der Eichfixierung werden wir bei der Konstruktion der Geistwirkung auf diese Darstellung der wahren Eichtransformationen zurückgreifen, die insbesondere $O(4)$ -hintergrundkovariantisierte Lie-Ableitungen erzeugen. Gemäß der obigen Argumentation können wir dann bereits *vor* dem Bilden der Funktionalableitung die Feldfluktuationen gleich Null setzen. Die resultierende Wirkung enthält zusätzlich zu den kovarianten Diffeomorphismen nur noch Objekte, die sich tensoriell bezüglich Hintergrund-Eichtransformationen verhalten, so daß sie wie gewünscht δ^B -invariant sein wird.

Auch auf dem Niveau der Hintergrundzerlegung gilt, daß die Eigenschaft der Hintergrundinvarianz durch diese Modifikation der Eichtransformationen unbeeinträchtigt bleibt. Die Elemente des Theorienraums, auf dem die Flußgleichung definiert ist, die wir betrachten wollen, sind Funktionale der Hintergrundfelder sowie der Erwartungswerte der Fluktuationen und der Geist- und Antigeist-Felder. Obige Überlegungen übertragen sich auf diese analog, so daß wir den Theorienraum $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ einer zunächst noch hypothetischen Quanten-Einstein-Cartan-Gravitation als den Raum aller hintergrundinvarianten Funktionale $F[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}] \equiv F[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}]$ definieren können:

$$\mathcal{T}_{\text{QECG}} := \{F | \widetilde{\mathcal{W}_D^B(w)} F = 0 \wedge \mathcal{W}_L^B(\lambda) F = 0 \forall w^\mu, \lambda^{ab}\}.$$

4.1.6 Hintergrundeichinvariante Eichfixierungsterme

Die Eichbedingungen. Da ein allgemeiner Diffeomorphismus durch ein vierkomponentiges glattes Vektorfeld w_μ erzeugt wird, wählen wir als entsprechende Eichbedingung

$$\mathcal{F}_\mu(\varepsilon; \bar{e}, \bar{\omega}) := \bar{e}_a{}^\nu (\bar{D}_\nu \varepsilon^a{}_\mu + \beta_D \bar{D}_\mu \varepsilon^a{}_\nu) \tag{4.44}$$

mit einem beliebigen reellen Parameter β_D ; sie wurde bereits in Ref. [66] verwendet.

Weiterhin wählen wir für die sechsdimensionale Gruppe von $O(4)$ -Rotationen als Eich-

bedingung

$$\mathcal{G}^{ab}(\varepsilon; \bar{e}) := \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} (\varepsilon^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu - \varepsilon^b{}_\mu \bar{e}^a{}_\nu) \quad (4.45)$$

mit $\mathcal{G}^{ab} = -\mathcal{G}^{ba}$. Beide Eichbedingungen sind linear in der Vielbeinfluktuation und unabhängig vom Fluktuationsanteil des Spinzusammenhangs. Zudem hängen sie parametrisch von den gewählten Hintergrundkonfigurationen ab.

An dieser Stelle ist es illustrativ, unter Verwendung des Hintergrundvielbeins bzw. seines Inversen auch die Lorentz-Indizes der Fluktuationen in Raumzeit-Indizes zu überführen. Die Objekte

$$\bar{e}_{a\mu} := \bar{g}_{\mu\nu} \bar{e}_a{}^\nu \equiv \eta_{ab} \bar{e}^b{}_\mu \quad (4.46)$$

und

$$\bar{e}^{a\mu} := \bar{g}^{\mu\nu} \bar{e}_\nu{}^a \equiv \eta^{ab} \bar{e}_b{}^\mu \quad (4.47)$$

genügen offensichtlich den Beziehungen

$$\begin{aligned} \bar{e}_{a\mu} \bar{e}^{a\nu} &= \delta_\mu{}^\nu, & \bar{e}_{a\mu} \bar{e}^{b\mu} &= \delta_a{}^b, \\ \bar{e}_{a\mu} \bar{e}^a{}_\nu &= \bar{g}_{\mu\nu}, & \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}^{a\nu} &= \bar{g}^{\mu\nu}, \\ \bar{e}_{a\mu} \bar{e}_b{}^\mu &= \eta_{ab}, & \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}^{b\mu} &= \eta^{ab}. \end{aligned}$$

Mit

$$\varepsilon^\mu{}_\nu := \bar{e}_a{}^\mu \varepsilon^a{}_\nu \quad \text{sowie} \quad \varepsilon_{\mu\nu} := \bar{e}_{a\mu} \varepsilon^a{}_\nu \equiv \bar{g}_{\mu\lambda} \varepsilon^\lambda{}_\nu \quad (4.48)$$

gilt dann für die $O(4)$ -Eichbedingung (4.45)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu} &:= \bar{e}_{a\mu} \bar{e}_{b\nu} \mathcal{G}^{ab} \\ &= \frac{1}{2} \bar{e}_{a\mu} \bar{e}_{b\nu} \bar{g}^{\rho\sigma} (\varepsilon^a{}_\rho \bar{e}^b{}_\sigma - \varepsilon^b{}_\rho \bar{e}^a{}_\sigma) \\ &= \varepsilon_{[\mu\nu]}. \end{aligned}$$

Die Eichbedingung fordert also das Verschwinden des antisymmetrischen Anteils der Viel-

beeinflusst. Es handelt sich somit um das Hintergrund-Pendant einer Eichbedingung, die unter anderem in Ref. [56] verwandt wurde.

Mit Blick auf die Yang-Mills-Natur des Lorentz-Sektors ist die Frage naheliegend, warum man zur Fixierung der $O(4)$ -Transformationen nicht analog zu (C.11) auf eine $\text{Diff} \times O(4)_{\text{loc}}$ -kovariante Hintergrundeichung der Form

$$\tilde{\mathcal{G}}^{ab}(\tau; \bar{e}, \bar{\omega}) := \bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \tau^a{}_\nu$$

zurückgreifen sollte. Diese hinge nur von der Spinzusammenhangsfluktuation ab, und der entsprechende Eichfixierungsterm in Γ_k würde somit nur Beiträge zum $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Block von $\Gamma_k^{(2)}$ liefern. Allerdings enthielte diese Eichbedingung auch drei in $\bar{\omega}$ lineare Beiträge. Um die für uns relevanten Terme zu finden, müssen wir in der Spur auf der rechten Seite der Flußgleichung den Operator $\Gamma_k^{(2)}$, in den die Eichbedingung quadratisch eingeht, gerade bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega})$ entwickeln, so daß die Hintergrundeichung hier ebenfalls maßgebliche Beiträge liefert. (Wie wir später sehen werden, wären dies die einzigen relevanten Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega})$ überhaupt im τ - τ -Block.) Demgegenüber besteht der große Vorzug der Eichbedingung (4.45) gerade darin, nur Beiträge zum freien Anteil von $\Gamma_k^{(2)}$ zu liefern, so daß wir uns für diese entscheiden.

Die Hintergrundinvarianz der Eichfixierungsterme. Im Sinne der Logik der Hintergrundfeld-Methode muß nachgeprüft werden, daß die Beiträge zur nackten Wirkung im Pfadintegral, die durch die Eichfixierungsterme gegeben sind, zwar δ^{B} -invariant sind, daß jedoch die wahre δ^{G} -Invarianz nach wie vor durch (4.44) und (4.45) gebrochen wird. Wir behandeln in diesem Abschnitt den ersten Punkt und wenden uns dem zweiten im nachfolgenden Unterkapitel zu.

Wir führen in diesem Kapitel die Diskussion auf dem Niveau der Quantenfelder durch. In dem Eichfixierungsterm, den wir der Trunkierung hinzufügen, werden dann die Quantenfluktuationen ε und τ durch ihre Erwartungswerte $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\tau}$ ersetzt. Der Eichfixierungsterm für die Diffeomorphismus-Invarianz ist somit gegeben durch

$$S_{\text{gf}}^{\text{D}} = \frac{1}{2\alpha_{\text{D}}} \cdot \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \bar{e} \bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\nu, \quad (4.49)$$

wobei \bar{e} die Determinante des Hintergrundvielbeins bezeichnet und der Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G}$

garantiert, daß dieser Ausdruck als Wirkung in natürlichen Einheiten mit $\hbar \equiv 1$ für dimensionsloses α_D ebenfalls dimensionslos ist. Da ω und Γ als Zusammenhänge die gleiche physikalische Dimension wie Derivationen besitzen, besitzt die Eichbedingung (4.44) die Dimension Länge^{-1} , was der Massendimension 1 entspricht. Dabei haben wir das Vielbein und somit die Metrik dimensionslos gewählt und stattdessen die physikalische Dimension „Länge“ auf die Koordinaten x^μ übertragen. Das Raumzeit-Integral des Quadrates der Eichbedingung besitzt dann die Massendimension $-4 + 2 \cdot 1 = -2$. Dies entspricht in vier Dimensionen der Massendimension der Gravitationskonstante, was z. B. aus der Definition der Planck-Masse $m_{\text{Pl}} := \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ ersichtlich ist, so daß (4.49) in der Tat dimensionslos ist.

Demgegenüber ist die Lorentz-Eichbedingung (4.45) dimensionslos. Dies gilt genau dann ebenfalls für den Eichfixierungsterm

$$S_{\text{gf}}^{\text{L}} = \frac{1}{2\alpha_{\text{L}}} \int_{\mathcal{M}} d^4x \bar{e} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab}, \quad (4.50)$$

falls der Eichfixierungsparameter α_{L} die Massendimension -4 besitzt. Auf diesen Punkt kommen wir später noch zurück.

Die gewünschte δ^{B} -Invarianz der beiden Funktionale bedeutet, daß bezüglich der unmodifizierten Darstellung

$$\mathcal{W}_{\text{D}}^{\text{B}} S_{\text{gf}}^{\text{D}} = \mathcal{W}_{\text{L}}^{\text{B}} S_{\text{gf}}^{\text{D}} = 0 \quad (4.51)$$

und

$$\mathcal{W}_{\text{D}}^{\text{B}} S_{\text{gf}}^{\text{L}} = \mathcal{W}_{\text{L}}^{\text{B}} S_{\text{gf}}^{\text{L}} = 0 \quad (4.52)$$

zu zeigen ist. Die explizite Anwendung der Ward-Operatoren auf ein Funktional der Felder erzeugt per Konstruktion in diesem linearisierte Eichtransformationen der Felder. Damit ergibt sich die δ^{B} -Invarianz der Eichfixierungsterme unmittelbar aus der Tensorstruktur der Eichbedingungen.

Eine generische zehnpametrische Hintergrund-Eichtransformation bewirkt dann eine Va-

riation von (4.49) der Form

$$\mathcal{W}^{\text{B}}(w, \lambda) S_{\text{gf}}^{\text{D}} = \mathcal{W}_{\text{D}}^{\text{B}}(w) S_{\text{gf}}^{\text{D}} + \mathcal{W}_{\text{L}}^{\text{B}}(\lambda) S_{\text{gf}}^{\text{D}}.$$

Mit Blick auf den ersten Beitrag beachten wir zunächst, daß alle in der Diffeomorphismus-Eichbedingung auftretenden Objekte bezüglich $\delta_{\text{D}}^{\text{B}}$ ihrer Indexstruktur entsprechende Tensoren sind. Die Diffeomorphismuseichbedingung \mathcal{F}_{μ} verhält sich somit unter Hintergrund-Diffeomorphismen wie eine Einsform. Zudem wird durch $\mathcal{F}^{\mu} := \bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\nu}$ bezüglich $\delta_{\text{D}}^{\text{B}}$ ein kontravariantes Vektorfeld definiert, so daß das Quadrat der Eichbedingung einen Skalar darstellt:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w)(\mathcal{F}^{\mu} \mathcal{F}_{\mu}) &= (\delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w) \mathcal{F}^{\mu}) \mathcal{F}_{\mu} + \mathcal{F}^{\mu} \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w) \mathcal{F}_{\mu} \\ &= (w^{\rho} \partial_{\rho} \mathcal{F}^{\mu} - (\partial_{\rho} w^{\mu}) \mathcal{F}^{\rho}) \mathcal{F}_{\mu} + \mathcal{F}^{\mu} (w^{\rho} \partial_{\rho} \mathcal{F}_{\mu} + (\partial_{\mu} w^{\rho}) \mathcal{F}_{\rho}) \\ &= w^{\rho} ((\partial_{\rho} \mathcal{F}^{\mu}) \mathcal{F}_{\mu} + \mathcal{F}^{\mu} \partial_{\rho} \mathcal{F}_{\mu}) \\ &= w^{\rho} \partial_{\rho} (\mathcal{F}^{\mu} \mathcal{F}_{\mu}). \end{aligned}$$

Die Determinante des Hintergrundvielbeins transformiert sich zudem mit (A.57) wie eine skalare Tensordichte gemäß

$$\begin{aligned} \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w) \bar{e} &= \bar{e} \bar{e}_a^{\mu} \delta_{\text{D}}^{\text{B}}(w) \bar{e}_{\mu}^a \\ &= \bar{e} \bar{e}_a^{\mu} (w^{\rho} \partial_{\rho} \bar{e}_{\mu}^a + (\partial_{\mu} w^{\rho}) \bar{e}_{\rho}^a) \\ &= w^{\rho} \partial_{\rho} \bar{e} + \bar{e} \partial_{\rho} w^{\rho} \\ &= \partial_{\rho} (\bar{e} w^{\rho}). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Insgesamt ergibt sich somit bei Anwendung eines Hintergrund-Diffeomorphismus auf den Eichfixierungsterm

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{D}}^{\text{B}}(w) S_{\text{gf}}^{\text{D}} &= \frac{1}{2\alpha_{\text{D}}} \cdot \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x (\partial_{\rho} (\bar{e} w^{\rho}) \mathcal{F}^{\mu} \mathcal{F}_{\mu} + \bar{e} w^{\rho} \partial_{\rho} (\mathcal{F}^{\mu} \mathcal{F}_{\mu})) \\ &= \frac{1}{2\alpha_{\text{D}}} \cdot \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_{\rho} (w^{\rho} \bar{e} \mathcal{F}^{\mu} \mathcal{F}_{\mu}), \end{aligned} \tag{4.54}$$

d. h. wir erhalten als Beitrag einen Oberflächenterm, der bekanntlich die Dynamik der

Theorie nicht beeinflusst, so daß (4.49) tatsächlich δ_D^B -invariant ist.

Des weiteren ist aufgrund der Tensorstruktur aller involvierten Felder die Diffeomorphismus-Eichbedingung mit (A.22) als Kontraktion eines kovarianten und eines kontravarianten Lorentz-Vektors bezüglich δ_L^B ein Skalar:

$$\begin{aligned}\delta_L^B(\lambda)\mathcal{F}_\mu &= \lambda_a{}^b \bar{e}_b{}^\nu (\bar{D}_\nu \varepsilon^a{}_\mu + \beta_D \bar{D}_\mu \varepsilon^a{}_\nu) + \bar{e}_a{}^\nu \lambda^a{}_b (\bar{D}_\nu \varepsilon^b{}_\mu + \beta_D \bar{D}_\mu \varepsilon^b{}_\nu) \\ &= -\bar{e}_b{}^\nu \lambda^b{}_a (\bar{D}_\nu \varepsilon^a{}_\mu + \beta_D \bar{D}_\mu \varepsilon^a{}_\nu) + \bar{e}_a{}^\nu \lambda^a{}_b (\bar{D}_\nu \varepsilon^b{}_\mu + \beta_D \bar{D}_\mu \varepsilon^b{}_\nu) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Das gilt auch für die inverse Hintergrundmetrik. Für die Determinante des Hintergrund-Vielbeins ergibt sich ebenfalls

$$\begin{aligned}\delta_L^B(\lambda)\bar{e} &= \bar{e} \bar{e}_a{}^\mu \delta_L^B(\lambda)\bar{e}_\mu^a \\ &= \bar{e} \bar{e}_a{}^\mu \lambda^a{}_b \bar{e}_\mu^b \\ &= \bar{e} \lambda^a{}_a \\ &= 0,\end{aligned}\tag{4.55}$$

so daß dies insgesamt auf

$$\mathcal{W}_L^B(\lambda)S_{\text{gf}}^D = 0\tag{4.56}$$

führt. Daraus folgt zusammen mit (4.54) die Hintergrundinvarianz des Diffeomorphismus-Eichfixierungsterms.

Betrachtet man die Wirkung einer Hintergrund-Transformation auf den Lorentz-Eichfixierungsterm gemäß

$$\mathcal{W}^B(w, \lambda)S_{\text{gf}}^L = \mathcal{W}_D^B(w)S_{\text{gf}}^L + \mathcal{W}_L^B(\lambda)S_{\text{gf}}^L,$$

so wird in der Eichfixierung (4.45) bezüglich δ_D^B ein kontravariantes Tensorfeld zweiter Stufe mit zwei kovarianten Vektorfeldern kontrahiert. Dies liefert einen Skalar, so daß

$$\delta_D^B(w)\mathcal{G}^{ab} = w^\rho \partial_\rho \mathcal{G}^{ab}$$

und damit

$$\delta_D^B(w)(\mathcal{G}^{ab}\mathcal{G}_{ab}) = w^\rho \partial_\rho(\mathcal{G}^{ab}\mathcal{G}_{ab})$$

gilt. Mit (4.53) führt dies wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_D^B(w)S_{\text{gf}}^L &= \frac{1}{2\alpha_L} \int_{\mathcal{M}} d^4x ((\delta_D^B(w)\bar{e})\mathcal{G}^{ab}\mathcal{G}_{ab} + \bar{e} \delta_D^B(w)(\mathcal{G}^{ab}\mathcal{G}_{ab})) \\ &= \frac{1}{2\alpha_L} \int_{\mathcal{M}} d^4x (\partial_\rho(\bar{e} w^\rho)\mathcal{G}^{ab}\mathcal{G}_{ab} + \bar{e} w^\rho \partial_\rho(\mathcal{G}^{ab}\mathcal{G}_{ab})) \\ &= \frac{1}{2\alpha_L} \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\rho(w^\rho \bar{e} \mathcal{G}^{ab}\mathcal{G}_{ab}) \end{aligned}$$

wiederum auf einen Oberflächenterm. Bezüglich δ_L^B sind sowohl $\bar{e}^a{}_\mu$ als auch $\varepsilon^a{}_\mu$ Vektoren, so daß die Lorentz-Eichbedingung ein Tensorfeld der Stufe $(2,0)$ darstellt:

$$\begin{aligned} \delta_L^B(\lambda)\mathcal{G}^{ab} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\nu}(\lambda^a{}_c(\varepsilon^c{}_\mu\bar{e}^b{}_\nu - \varepsilon^b{}_\mu\bar{e}^c{}_\nu) + \lambda^b{}_c(\varepsilon^a{}_\mu\bar{e}^c{}_\nu - \varepsilon^c{}_\mu\bar{e}^a{}_\nu)) \\ &= \lambda^a{}_c\mathcal{G}^{cb} + \lambda^b{}_c\mathcal{G}^{ac}. \end{aligned}$$

Mit (4.55) ergibt sich dann die δ_L^B -Variation des Lorentz-Eichfixierungsterms zu

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_L^B(\lambda)S_{\text{gf}}^L &= \frac{1}{2\alpha_L} \cdot 2 \int_{\mathcal{M}} d^4x \bar{e} \mathcal{G}_{ab}(\lambda^a{}_c\mathcal{G}^{cb} + \lambda^b{}_c\mathcal{G}^{ac}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn aufgrund der Antisymmetrie des Lorentz-Eichparameters gilt

$$\mathcal{G}_{ab}\lambda^a{}_c\mathcal{G}^{cb} = -\mathcal{G}_{ab}\lambda_c{}^a\mathcal{G}^{cb} = -\mathcal{G}^{ab}\lambda_c{}^a\mathcal{G}_{cb} = -\mathcal{G}_{bc}\lambda_c{}^a\mathcal{G}^{ba}.$$

Somit ist die Hintergrundinvarianz von S_{gf}^L ebenfalls gezeigt, d. h. es ist

$$\mathcal{W}_D^B(w)S_{\text{gf}} = 0$$

sowie

$$\mathcal{W}_L^B(\lambda)S_{\text{gf}} = 0 ,$$

so daß der Eichfixierungsbeitrag $S_{\text{gf}} = S_{\text{gf}}^D + S_{\text{gf}}^L$ in der Wirkung hinsichtlich der Hintergrund-Eichtransformationen δ_D^B und δ_L^B die gewünschte Invarianz aufweist.

Zur Brechung der wahren Eichinvarianz durch die Eichbedingungen. Die eigentliche Aufgabe der Eichfixierung besteht darin, die Existenz eines wohldefinierten Propagators in einer Eichtheorie zu garantieren. Diesen erhält man (bis auf ein Vorzeichen) durch Invertieren der Hesse-Matrix $\Gamma^{(2)}$ der zweiten Funktionalableitungen der effektiven Wirkung Γ bezüglich der dynamischen Felder. Eine ungebrochene Eichinvarianz der Theorie führt dazu, daß diese Hesse-Matrix generisch Nullmoden besitzt und mithin nicht invertiert werden kann. Betrachten wir beispielsweise reine Yang-Mills-Theorie ohne Materieankopplung sowie ohne Hintergrundzerlegung, so ist die nackte Wirkung invariant unter Eichtransformationen der Eichfelder

$$S[\mathcal{A}_\mu^a + \delta(\lambda)\mathcal{A}_\mu^a] = S[\mathcal{A}_\mu^a] \quad \text{mit} \quad \delta(\lambda)\mathcal{A}_\mu^a = \frac{1}{g}\mathcal{D}_\mu^{ab}\lambda^b .$$

Dabei bezeichnet \mathcal{A}_μ^a das Quanteneichfeld, und \mathcal{D} ist die aus \mathcal{A} gebildete kovariante Ableitung, die bei einer Eichtransformation auf einen Eichparameter λ^a wirkt. Wir haben uns hierbei für die Konvention entschieden, nach der man die Yang-Mills-Kopplung g in die kovariante Ableitung hineindefiniert, so daß sie nicht explizit als Koeffizient vor dem kinetischen Term des Eichfeldes in der Wirkung erscheint. Zudem unterscheidet sich dieses Transformationsgesetz von dem von uns für den Spinzusammenhang verwandten gerade um einen Vorzeichenwechsel des Eichparameters. Wir verwenden diese Konvention auch in Anhang C.

Die Eichinvarianz hat zur Folge, daß die zugehörige Hesse-Matrix $S^{(2)}$ im allgemeinen Nullmoden besitzt. Zur Illustration dieses Sachverhalts wiederholen wir hier kurz die analoge Überlegung aus Anhang C: Eine funktionale Taylor-Entwicklung liefert zunächst

$$\begin{aligned} S[\mathcal{A}] &= S[\mathcal{A} + \delta(\lambda)\mathcal{A}] \\ &= S[\mathcal{A}] + \int d^4x \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \delta(\lambda)\mathcal{A}_\mu^a(x) , \end{aligned}$$

was mit partieller Integration auf

$$\int d^4x \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \mathcal{D}_\mu^{ab} \lambda^b(x) = - \int d^4x \left(\mathcal{D}_\mu^{ba}(x) \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \right) \lambda^b(x) = 0$$

führt. Da dies für beliebige Eichparameter $\lambda^a(x)$ gilt, folgt unmittelbar

$$\mathcal{D}_\mu^{ba}(x) \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} = (\partial_\mu^x \eta^{ba} + g f^{bca} \mathcal{A}_\mu^c(x)) \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} = 0.$$

Leiten wir diese Gleichung funktional nach $\mathcal{A}_\nu^d(y)$ ab, so erhalten wir

$$0 = \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\nu^d(y)} \left(\mathcal{D}_\mu^{ba}(x) \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \right) = \mathcal{D}_\mu^{ba}(x) \frac{\delta^2 S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\nu^d(y) \delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} + g f^{bda} \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \delta^{(4)}(x-y). \quad (4.57)$$

Für Vakuumlösungen $\mathcal{A}_{0\mu}^a$ mit

$$\left. \frac{\delta S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \right|_{\mathcal{A}=\mathcal{A}_0} = 0$$

verschwindet der letzte Term in (4.57), so daß das Integral der Kontraktion von (4.57) mit einem beliebigen Eichparameter nach erneuter partieller Integration eine Nullmodengleichung der Form

$$\int d^4x \left. \frac{\delta^2 S[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\nu^b(y) \delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \right|_{\mathcal{A}=\mathcal{A}_0} \mathcal{D}_\mu^{ac} |_{\mathcal{A}=\mathcal{A}_0} \lambda^c(x) = 0$$

für die Matrix $S^{(2)}$, ausgewertet auf den Lösungen der Bewegungsgleichungen, liefert. Beim Übergang zur effektiven Wirkung Γ muß diese Eichinvarianz also gebrochen werden, um einen invertierbaren Operator $\Gamma^{(2)}$ zu erhalten, der auf einen wohldefinierten Propagator führt.

Bei einer Hintergrundaufspaltung gemäß $\mathcal{A} = \bar{A} + a$ besitzt das Funktional $S[a + \bar{A}] \equiv S[\mathcal{A}]$ bekanntlich zwei Arten δ^G und δ^B von Eichinvarianzen, und es gilt $S[a + \bar{A}] = S[a + \delta^G(\lambda)a + \bar{A}] = S[a + \delta^B(\lambda)a + \bar{A} + \delta^B(\lambda)\bar{A}]$.

Auf dem Niveau des vollen Feldes \mathcal{A} sind diese beiden Invarianzen mit der ursprünglichen Invarianz vor der Aufspaltung identisch. Dementsprechend führen sie auf die gleichen Nullmoden. Wir fügen daher der nackten Wirkung einen δ^B -invarianten Eichfixierungs-

terms $S_{\text{gf}}[a; \bar{A}] \equiv S_{\text{gf}}[\mathcal{A}, \bar{A}]$ hinzu, der lediglich die δ^{G} -Invarianz bricht. Dies führt auf das Funktional $\tilde{S}[\mathcal{A}, \bar{A}] := S[\mathcal{A}] + S_{\text{gf}}[\mathcal{A}, \bar{A}]$. Es stellt sich heraus, daß dann der Operator

$$\left. \frac{\delta^2 \tilde{S}[\mathcal{A}, \bar{A}]}{\delta \mathcal{A}_\nu^b(y) \delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} \right|_{\mathcal{A}=\bar{A}}$$

keine Nullmoden mehr aufweist und somit invertierbar ist. Die verbleibende δ^{B} -Invarianz von $\tilde{S}[\mathcal{A}, \bar{A}] \equiv \tilde{S}[a; \bar{A}]$ hat in der Praxis keine weiteren Nullmoden zur Folge. Entsprechend wird natürlich auch das übliche Faddeev-Popov-Verfahren nur bezüglich der wahren Eichtransformationen angewandt.

Nach der Legendre-Transformation überträgt sich dies auf den Operator

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma[A, \bar{A}]}{\delta A_\nu^b(y) \delta A_\mu^a(x)} \right|_{A=\bar{A}} \quad (4.58)$$

mit dem Felderwartungswert $A_\mu^a := \langle 0 | \mathcal{A}_\mu^a | 0 \rangle$ als Argument der effektiven Wirkung Γ . Sein Inverses liefert somit einen wohldefinierten Propagator. Auf der rechten Seite der Flußgleichung tritt das k -abhängige Gegenstück von (4.58) auf. Im Fall der Propertime-Gleichung (3.28) wird dieser Operator exponentiert, so daß auch hier verschwindende Eigenwerte auszuschließen sind.

Im nächsten Abschnitt wollen wir uns von der Güte der gewählten Eichbedingungen überzeugen, indem wir explizit nachweisen, daß sie die erforderliche Brechung der δ^{G} -Invarianz bewerkstelligen.

Zur Brechung der wahren Eichinvarianz durch die gewählten Eichbedingungen. In der Pfadintegraldarstellung des erzeugenden Funktionals \mathcal{Z} , das auf die effektive Wirkung Γ führt, ist die klassische Wirkung S um einen Eichfixierungsterm S_{gf} und eine zugehörige Geistwirkung S_{gh} zu ergänzen. Letztere liefert in Form des nicht-singulären Faddeev-Popov-Operators ebenfalls einen Beitrag zu $\Gamma^{(2)}$, da die Berechnung des Propagators nun auch funktionale Ableitungen nach den Geist- und Antigeist-Feldern erfordert. Dabei bricht S_{gf} die Invarianz des Funktionals Γ unter wahren Eichtransformationen δ^{G} , wohingegen dieses nach wie vor eine δ^{B} -Invarianz aufweist, die aber die Existenz eines wohldefinierten Propagators nicht gefährdet.

In unserem Fall wird sich später mit $\Gamma_k^{(2)} \equiv H + H_{\text{int}}$ der Propagator aus einem freien An-

teil sowie einem Wechselwirkungsbeitrag gemäß $-(\Gamma_k^{(2)})^{-1} = -(H + H_{\text{int}})^{-1}$ zusammensetzen. Dabei bezieht sich H auf die spezielle Hintergrundkonfiguration $\bar{e}^a{}_\mu(x) = \kappa \delta^a{}_\mu = \text{const}$ und $\bar{\omega}^{ab}{}_\mu(x) = 0$, wobei κ eine positive reelle Zahl ist. Hingegen enthält H_{int} die $\bar{\omega}$ -Beiträge.

Die grundlegende Idee der Rechnung besteht in einer Entwicklung

$$(H + H_{\text{int}})^{-1} = H^{-1} \left[\mathbb{1} + H_{\text{int}} H^{-1} \right]^{-1} = H^{-1} \left[\mathbb{1} - V H^{-1} + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2) \right] \quad (4.59)$$

mit $H_{\text{int}} =: V + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2)$.

Auch wenn dies in technischer Hinsicht eine Analogie zur üblichen Störungstheorie offenbaren mag, so sei darauf hingewiesen, daß unser Zugang konzeptionell vollkommen nicht-störungstheoretischer Natur ist. Die für uns relevanten Terme, die zum Laufen der jeweiligen Kopplungen beitragen, sind ausschließlich nullter oder erster Ordnung in $\bar{\omega}$.

Nach der Berechnung des Propagators wird in der Entwicklung (4.59) die Feldkonfiguration (e, ω) mit dem Hintergrund $(\bar{e}, \bar{\omega})$ identifiziert, so daß die Fluktuationen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\tau}$ gleich null gesetzt werden.

Der eigentliche inverse Propagator, bezüglich dessen Spektrum die Regularisierung implementiert wird, ist also der der freien Theorie, H . Bei der Analyse des Verhaltens der Eichfixierungen unter wahren Eichtransformationen reicht es somit aus, sich auf diese besondere Wahl des Hintergrundes und verschwindende Fluktuationen zu beschränken. Diese Analyse ist äquivalent zur Untersuchung des singulären Teils des Spektrums des Faddeev-Popov-Operators, die in Abschnitt 4.2.1 durchgeführt wird. Dementsprechend betrachten wir auch dort den Fall $\bar{e} = \text{const}$ und $\bar{\omega} = 0$. (Genaugenommen werden wir nicht das Spektrum von H , sondern das Spektrum desjenigen Operators, der sich aus H für $\gamma_k \rightarrow \infty$ ergibt, betrachten. Diesen Operator werden wir mit H_0 bezeichnen. Da jedoch die Eichbedingungen nicht vom Immirzi-Parameter abhängen, hat dies auf die folgenden Überlegungen keinen Einfluß.)

Schreiben wir der Übersichtlichkeit wegen alle Indizes wieder auf Raumzeit-Indizes um gemäß

$$\varepsilon_{\mu\nu} := \bar{e}_{a\mu} \varepsilon^a{}_\nu$$

sowie

$$\lambda^\mu{}_\nu := \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}^b{}_\nu \lambda^a{}_b = -\lambda_\nu{}^\mu, \quad \lambda_{\mu\nu} := \bar{g}_{\mu\rho} \lambda^\rho{}_\nu = -\lambda_{\nu\mu},$$

so liefert dies zur Fixierung der zehn Eichredundanzen für $\bar{e} = \text{const}$ und $\bar{\omega} = 0$ die Gleichungen

$$\mathcal{F}_\mu^0 := \partial_\nu \varepsilon^\nu{}_\mu + \beta_D \partial_\mu \varepsilon^\nu{}_\nu = 0, \quad (4.60)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^0 := \varepsilon_{[\mu\nu]} = 0, \quad (4.61)$$

da für diese Hintergrundkonfiguration der Hintergrund-Raumzeit-Zusammenhang $\bar{\Gamma}$ nach (A.16) verschwindet.

Nun sollen diese Eichfixierungen bei Anwendung einer allgemeinen wahren Eichtransformation

$$\delta^G(w, \lambda) = \begin{pmatrix} \delta_D^G(w) \\ \delta_L^G(\lambda) \end{pmatrix}$$

mit beliebigen Parametern $w^\mu(x)$ und $\lambda^{ab}(x) = -\lambda^{ba}(x)$ nicht invariant sein, so daß sie von allen übrigen Konfigurationen auf dem δ^G -Eichorbit nicht mehr erfüllt werden. Unter wahren Eichtransformationen verhalten sich die in den Eichbedingungen auftretenden Objekte $\varepsilon_{\mu\nu}$ gerade nicht wie Tensoren, was sich auch auf die Eichbedingungen selbst überträgt. Da die Fluktuationen unter δ^G den Transformationscharakter der vollen Felder tragen, liefern sie auch Beiträge, die die Hintergrundfelder enthalten. Dies hat gerade die gewünschte Brechung zur Folge.

Betrachten wir die Wirkung einer beliebigen wahren Eichtransformation $\delta^G(w, \lambda)$ auf

die beiden „freien“ Eichbedingungen (4.60) und (4.61), so erhält man mit

$$\begin{aligned}
\left(\delta_D^G(w)\varepsilon_{\mu\nu}\right)|_{\bar{e}=\text{const},\varepsilon=0} &= \left(\delta_D^G(w)(\bar{e}_{a\mu}\varepsilon^a{}_\nu)\right)|_{\bar{e}=\text{const},\varepsilon=0} \\
&= \left[\bar{e}_{a\mu}(w^\rho\partial_\rho(\bar{e}^a{}_\nu + \varepsilon^a{}_\nu) + (\partial_\nu w^\rho)(\bar{e}^a{}_\rho + \varepsilon^a{}_\rho))\right]|_{\bar{e}=\text{const},\varepsilon=0} \\
&= \bar{g}_{\mu\rho}\partial_\nu w^\rho \\
&= \partial_\nu w_\mu
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\delta_L^G(\lambda)\varepsilon_{\mu\nu}\right)|_{\bar{e}=\text{const},\varepsilon=0} &= \left(\delta_L^G(\lambda)(\bar{e}_{a\mu}\varepsilon^a{}_\nu)\right)|_{\bar{e}=\text{const},\varepsilon=0} \\
&= \left(\bar{e}_{a\mu}\lambda^a{}_b(\bar{e}^b{}_\nu + \varepsilon^b{}_\nu)\right)|_{\bar{e}=\text{const},\varepsilon=0} \\
&= \lambda_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

für die freie Diffeomorphismus-Eichbedingung die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\delta^G(w, \lambda)\mathcal{F}_\mu^0 &= \delta_D^G(w)\mathcal{F}_\mu^0 + \delta_L^G(\lambda)\mathcal{F}_\mu^0 \\
&= \partial_\nu\partial_\mu w^\nu + \beta_D\partial_\mu\partial_\nu w^\nu + \partial_\nu\lambda^\nu{}_\mu + \beta_D\partial_\mu\lambda^\nu{}_\nu \\
&= (1 + \beta_D)\partial_\mu\partial_\nu w^\nu + \partial_\nu\lambda^\nu{}_\mu
\end{aligned} \tag{4.62}$$

sowie für das $O(4)$ -Gegenstück die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned}
\delta^G(w, \lambda)\mathcal{G}_{\mu\nu}^0 &= \delta_D^G(w)\mathcal{G}_{\mu\nu}^0 + \delta_L^G(\lambda)\mathcal{G}_{\mu\nu}^0 \\
&= \partial_{[\nu}w_{\mu]} + \lambda_{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Damit die freie Eichfixierung

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_\mu^0 \\ \mathcal{G}_{\mu\nu}^0 \end{pmatrix}$$

stets genau einen Repräsentanten aus dem zehndimensionalen Raum aller δ^G -eichäquivalenten Felder auswählt, dürfen (4.62) und (4.63) nicht gleichzeitig verschwinden. Daher muß umgekehrt untersucht werden, von welcher Gestalt Eichtransformationen sein müßten, für die

dies der Fall wäre, d. h. wir suchen nach Lösungen \hat{w}^μ und $\hat{\lambda}^\mu_\nu$ der Gleichungen

$$(1 + \beta_D)\partial_\mu\partial_\nu\hat{w}^\nu + \partial_\nu\hat{\lambda}^\nu_\mu = 0, \quad (4.64)$$

$$\partial_{[\nu}\hat{w}_{\mu]} + \hat{\lambda}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.65)$$

Aus der Gültigkeit von (4.65) ergibt sich unmittelbar der Lorentz-Eichparameter als Rotation des den Diffeomorphismus erzeugenden Vektorfeldes. Damit gilt nach Divergenzbildung

$$\partial_\nu\hat{\lambda}^\nu_\mu = \frac{1}{2}(\square\hat{w}_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\hat{w}^\nu),$$

was eingesetzt in (4.64) auf

$$\left(\frac{1}{2} + \beta_D\right)\partial_\mu\partial_\nu\hat{w}^\nu + \frac{1}{2}\square\hat{w}_\mu = 0$$

führt. Wir zerlegen nun das Vektorfeld \hat{w}^μ in ein Gradientenfeld und eine transversale Komponente gemäß $\hat{w}^\mu = \partial^\mu\hat{\chi} + \hat{w}_{\text{T}}^\mu$ mit $\partial_\mu\hat{w}_{\text{T}}^\mu = 0$, so daß wir die Gleichung

$$(1 + \beta_D)\square\partial_\mu\hat{\chi} + \frac{1}{2}\square\hat{w}_{\text{T}\mu} = 0$$

erhalten, in der beide Summanden separat verschwinden müssen, d. h. es gilt

$$(1 + \beta_D)\square\partial_\mu\hat{\chi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\square\hat{w}_{\text{T}\mu} = 0.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, falls der Transversalanteil des Vektorfeldes eine harmonische Funktion mit $\square\hat{w}_{\text{T}}^\mu = 0$ ist und falls entweder $\beta_D = -1$ gilt oder $\hat{\chi}$ ebenfalls harmonisch ist.

Schließen wir somit den Wert $\beta_D = -1$ aus, so sind die verbleibenden nichtkonstanten Nullmoden harmonische Funktionen $\hat{\chi}$ und $\hat{w}_{\text{T}\mu}$. Der zugehörige Lorentz-Eichparameter ergibt sich nach (4.65) für jede gegebene Nullmode \hat{w}_ν zu

$$\hat{\lambda}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\hat{w}_{\nu]} = \partial_{[\mu}\hat{w}_{\text{T}\nu]}.$$

Derartige harmonische Nullmoden sind aber in der Quanten-Feldtheorie nahezu allgegenwärtig. Beispielsweise sind die „verbotenen“ Eichparameter der Elektrodynamik in der Lorentz-Eichung $\mathcal{G}_L = \partial^\mu A_\mu = 0$ von genau der gleichen Form. Hier wirkt nämlich eine Eichtransformation gemäß $\delta A_\mu = \partial_\mu \varphi \Rightarrow \delta \mathcal{G}_L = \partial^\mu \delta A_\mu = \square \varphi$, so daß auch in diesem Fall harmonische Funktionen auszuschließen sind.

Setzen wir somit $\beta_D \neq -1$ voraus und schließen wir zudem aus, daß das volle Vektorfeld w^μ harmonisch ist, so brechen die von uns gewählten Eichbedingungen wie gewünscht die Invarianz unter wahren Eichtransformationen.

Wir möchten diesen Abschnitt mit zwei Bemerkungen schließen. Zum einen ist die Analyse der Eichbedingungen auf dem konform-flachen Hintergrund $\bar{e} = \text{const}$, $\bar{\omega} = 0$ auch noch durch einen weiteren Umstand motiviert. Der Begriff der *Eichinvarianz* ist aufs engste mit dem Konzept der physikalischen Unterscheidbarkeit zweier Zustände und damit mit dem Begriff der *Observablen* verknüpft. Der Definition von Observablen, beispielsweise der S-Matrix, ist jedoch naturgemäß der störungstheoretische Rahmen, dem eine flache Minkowski-Raumzeit zugrunde liegt, am besten angepaßt.

Darüber hinaus ist es wichtig zu betonen, daß die hier dargelegten Ausführungen *lokaler* Natur sind. Die Aussage, daß die durch (4.60) und (4.61) gegebene Eichfixierung für den betrachteten Hintergrund aus dem Eichorbit eindeutig einen Repräsentanten auswählt, wird *global* im allgemeinen nicht mehr richtig sein. Es ist vielmehr anzunehmen, daß auch hier ein Analogon zu dem aus der Yang-Mills-Theorie bekannten topologischen *Gribov-Phänomen* auftreten wird [67]. Der Bereich, innerhalb dessen man das angeführte lokale Argument fortsetzen kann, wird dabei durch den sogenannten *Gribov-Horizont* berandet.

4.2 Die Konstruktion der hintergrundinvarianten Geistwirkung

Die Umparametrisierung der Eichtransformationen diene dem Zweck, mittels der kanonischen Faddeev-Popov-Methode eine Geistwirkung zu erhalten, die unter Hintergrund-Eichtransformationen invariant ist. Daher wenden wir hier das Faddeev-Popov-Verfahren bezüglich dieser kovarianten Parametrisierung der Algebra der Eichtransformationen an.

Fassen wir die wahren Eichtransformationen wieder von einem einheitlichen Standpunkt aus auf gemäß

$$\delta^{\text{G}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\delta}_{\text{D}}^{\text{G}}(w) \\ \delta_{\text{L}}^{\text{G}}(\lambda) \end{pmatrix},$$

so werden diese durch die zehnkomponentige Eichbedingung

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mu} \\ \mathcal{G}^{ab} \end{pmatrix}$$

gebrochen. Führen wir an dieser Stelle Indizes $I, J \in \{1, \dots, 10\}$ ein, so daß \mathcal{Q}^I für $I \in \{1, \dots, 4\}$ die Diffeomorphismus-Eichbedingung \mathcal{F}_{μ} und für $I \in \{5, \dots, 10\}$ die Lorentz-Eichbedingung \mathcal{G}^{ab} bezeichne, und fassen wir in gleicher Weise mit $\Lambda^I(x)$ die Transformationsparameter der Diffeomorphismen bzw. der lokalen Lorentz-Transformationen zusammen, so wird wie üblich durch das Grassmann-Integral über die Geister und Antigeister die Faddeev-Popov-Determinante

$$\det \left(\frac{\delta \mathcal{Q}^I(x)}{\delta \Lambda^J(y)} \right) \Big|_{\Lambda^I=0}$$

dargestellt. Aus diesem einheitlichen Blickwinkel ist offensichtlich, daß in der $(\widetilde{\delta}_{\text{D}}^{\text{G}}, \delta_{\text{L}}^{\text{G}})$ -Aufspaltung auch gemischte Komponenten des zugehörigen Faddeev-Popov-Operators zu berechnen sind.

Jetzt sind die Eichbedingungen bezüglich der Fluktuationen zu variieren, da nur diese den wahren Eichtransformationen unterworfen sind. Anschließend schaltet man eine von dem entsprechenden Geistfeld erzeugte wahre Eichtransformation dahinter, und die Eichbedingung wird ihrerseits mit dem zu ihr gehörenden Antigeist kontrahiert. Die Geist- und Antigeist-Felder

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}^{\mu} \\ \Sigma^{ab} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{C}}_{\mu} \\ \bar{\Sigma}_{ab} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

sind Lie-Algebra-wertig, so daß der Diffeomorphismusgeist \mathcal{C}^{μ} ein Vektorfeld, der zugehörige duale Antigeist $\bar{\mathcal{C}}_{\mu}$ hingegen eine Einsform definiert. Die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(4)_{\text{loc}}$ ist zu

ihrem Dualen isomorph, und mithin sind sowohl Σ^{ab} als auch $\bar{\Sigma}_{ab}$ antisymmetrische $O(4)$ -Tensoren. Die Geistwirkung besitzt dann die allgemeine Struktur

$$- \int d^4x \bar{e} \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{C}}_\mu \\ \bar{\Sigma}_{ab} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Omega^\mu{}_\nu & \Omega^\mu{}_{cd} \\ \Omega^{ab}{}_\nu & \Omega^{ab}{}_{cd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{C}^\nu \\ \Sigma^{cd} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

mit dem Faddeev-Popov-Operator Ω .

Wie bereits ausgeführt, können wir schon an dieser Stelle die Geistwirkung für verschwindende Fluktuationen auswerten. Da die Eichbedingungen ausschließlich von der Vielbein-Fluktuation abhängen, ist bloß bezüglich dieser zu variieren. Mit

$$\frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta \mathcal{F}_\mu(x)}{\delta \varepsilon^k{}_\alpha(y)} = \frac{1}{\bar{e}(y)} \bar{e}_a{}^\nu(x) (\bar{D}_\nu{}^a{}_{\mu k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\mu{}^a{}_{\nu k}{}^\alpha) \delta^{(4)}(x - y)$$

und

$$\frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta \mathcal{G}^{ab}(x)}{\delta \varepsilon^k{}_\alpha(y)} = \frac{1}{\bar{e}(y)} \delta_k^{[a} \bar{e}^{b]\alpha}(x) \delta^{(4)}(x - y)$$

berechnen wir die vier Komponenten des Faddeev-Popov-Operators. Für den Diffeomorphismus-Diffeomorphismus-Anteil erhalten wir nach partieller Integration, Auswertung der Delta-Distribution und erneuter partieller Integration

Komponente $\bar{\mathcal{C}} - \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu \Omega^\mu{}_\nu \mathcal{C}^\nu \\ := & - \int d^4x \bar{e}(x) \int d^4y \bar{e}(y) \left\{ \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \bar{g}^{\mu\rho}(x) \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta \mathcal{F}_\rho(x)}{\delta \varepsilon^k{}_\alpha(y)} \widetilde{\delta}_D^G(\mathcal{C}) \varepsilon^k{}_\alpha(y) \right\} \Big|_{\varepsilon, \partial\varepsilon=0} \\ = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{\mathcal{C}}_\mu \bar{g}^{\mu\rho} \bar{e}_a{}^\nu (\bar{D}_\nu{}^a{}_{\rho k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\rho{}^a{}_{\nu k}{}^\alpha) (\mathcal{C}^\sigma \bar{\nabla}_\sigma (\bar{e} + \varepsilon)^k{}_\alpha + (\bar{\nabla}_\alpha \mathcal{C}^\sigma) (\bar{e} + \varepsilon)^k{}_\sigma) \right\} \Big|_{\varepsilon, \partial\varepsilon=0} \\ = & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu \bar{g}^{\mu\rho} \bar{e}_a{}^\nu (\bar{D}_\nu{}^a{}_{\rho k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\rho{}^a{}_{\nu k}{}^\alpha) (\mathcal{C}^\sigma \bar{\nabla}_\sigma \bar{e}^k{}_\alpha + (\partial_\alpha \mathcal{C}^\sigma) \bar{e}^k{}_\sigma). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Um uns von der δ^B -Invarianz dieses Ausdrucks zu überzeugen, greifen wir auch hier auf die ursprüngliche (δ_D^B, δ_L^B) -Parametrisierung zurück und argumentieren direkt anhand des Diffeomorphismus- bzw. des Lorentz-Tensorcharakters der einzelnen Objekte. Das Hintergrundvielbein ist zunächst ein δ_L^B -Vektor. Diese Eigenschaft wird durch die kovariantisierte

Lie-Ableitung erhalten. Mit

$$\mathcal{C}^\sigma \bar{\nabla}_\sigma \bar{e}^k_\alpha + (\partial_\alpha \mathcal{C}^\sigma) \bar{e}^k_\sigma = \mathcal{L}_\mathcal{C} \bar{e}^k_\alpha + \mathcal{C}^\sigma \bar{\omega}^k_{l\sigma} \bar{e}^l_\alpha$$

definiert diese Lie-Ableitung aber auch eine Einsform bezüglich δ_D^B . Die Raumzeit-kovariante Hintergrund-Ableitung respektiert in beiden Fällen den jeweiligen Tensorcharakter. Der resultierende Tensor wird dann mit entsprechenden Hintergrund-Tensoren kontrahiert, was jeweils die gewünschte Invarianz zur Folge hat.

Im weiteren Verlauf der Rechnung werden wir zudem die Hesse-Matrix $\Gamma_k^{(2)}$ sowohl im Graviton- als auch im Geistsektor bis zur ersten Ordnung in $\bar{\omega}$ entwickeln. Daher bestimmen wir an dieser Stelle zusätzlich die relevanten Terme in der Geistwirkung. Dabei wird für den weiteren Verlauf die Wahl eines x -unabhängigen Hintergrundvielbeins ausreichend sein. Für eine solche Hintergrund-Konfiguration ergeben sich diese Terme in (4.68) zu

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu \bar{g}^{\mu\rho} \bar{e}_\alpha^\nu [\delta_k^\alpha (\delta_\rho^\alpha \partial_\nu + \beta_D \delta_\nu^\alpha \partial_\rho) ((\partial_\alpha \mathcal{C}^\sigma) \bar{e}^k_\sigma + \mathcal{C}^\sigma \bar{\omega}^k_{l\sigma} \bar{e}^l_\alpha) \\ & \quad + (\delta_\rho^\alpha \bar{\omega}^a_{k\nu} - \delta_k^\alpha \bar{\Gamma}_{\nu\rho}^\alpha + \beta_D \delta_\nu^\alpha \bar{\omega}^a_{k\rho} - \beta_D \delta_k^\alpha \bar{\Gamma}_{\rho\nu}^\alpha) (\bar{e}^k_\sigma \partial_\alpha \mathcal{C}^\sigma) \\ & \quad + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2)] \\ = & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu [(\bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\sigma + \beta_D \delta_\sigma^\alpha \partial^\mu) (\partial_\alpha \mathcal{C}^\sigma) + \bar{e}^{l\mu} ((\partial_k \bar{\omega}^k_{l\sigma}) + \bar{\omega}^k_{l\sigma} \partial_k) \mathcal{C}^\sigma \\ & \quad + \beta_D \delta_k^l ((\partial^\mu \bar{\omega}^k_{l\sigma}) + \bar{\omega}^k_{l\sigma} \partial^\mu) \mathcal{C}^\sigma \\ & \quad + (\bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\nu \partial^\mu - \bar{g}^{\mu\rho} \bar{\Gamma}_{\sigma\rho}^\alpha \partial_\alpha + \beta_D \bar{g}^{\mu\rho} \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu \partial_\nu - \beta_D \bar{g}^{\mu\rho} \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\alpha \partial_\alpha) \mathcal{C}^\sigma \\ & \quad + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2)] \\ = & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu [(\bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\sigma + \beta_D \delta_\sigma^\alpha \partial^\mu) (\partial_\alpha \mathcal{C}^\sigma) + \bar{e}^{l\mu} ((\partial_k \bar{\omega}^k_{l\sigma}) + \bar{\omega}^k_{l\sigma} \partial_k) \mathcal{C}^\sigma \\ & \quad + (\bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\nu \partial^\mu - \bar{g}^{\mu\rho} \bar{\Gamma}_{\sigma\rho}^\alpha \partial_\alpha) \mathcal{C}^\sigma + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2)] \\ = & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu [(\bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\sigma + \beta_D \delta_\sigma^\alpha \partial^\mu) (\partial_\alpha \mathcal{C}^\sigma) + \bar{e}^{l\mu} (\partial_k \bar{\omega}^k_{l\sigma}) \mathcal{C}^\sigma + \bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\nu \partial^\mu \mathcal{C}^\sigma + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2)] \end{aligned}$$

mit $\bar{\Gamma}_{\nu\rho}^\alpha = \bar{e}_\alpha^a \bar{\omega}^a_{b\nu} \bar{e}^b_\nu$ und somit $\bar{e}^{l\mu} \bar{\omega}^k_{l\sigma} \partial_k = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{\Gamma}_{\sigma\rho}^\alpha \partial_\alpha$.

Analog gehen wir bei den gemischten Anteilen vor: Der Diffeomorphismus- $O(4)$ -Beitrag ergibt sich zu

Komponente $\bar{\mathcal{C}} - \Sigma$:

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu \Omega^\mu{}_{cd} \Sigma^{cd} \\
 := & - \int d^4x \bar{e}(x) \int d^4y \bar{e}(y) \left\{ \bar{\mathcal{C}}_\mu(x) \bar{g}^{\mu\rho}(x) \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta \mathcal{F}_\rho(x)}{\delta \varepsilon^k{}_\alpha(y)} \delta_L^G(\Sigma) \varepsilon^k{}_\alpha(y) \right\} \Big|_{\varepsilon, \partial\varepsilon=0} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{\mathcal{C}}_\mu \bar{g}^{\mu\rho} \bar{e}_a{}^\nu (\bar{D}_\nu{}^a{}_{\rho k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\rho{}^a{}_{\nu k}{}^\alpha) \Sigma^k{}_l (\bar{e} + \varepsilon)^l{}_\alpha \right\} \Big|_{\varepsilon, \partial\varepsilon=0} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu \bar{g}^{\mu\rho} \bar{e}_a{}^\nu (\bar{D}_\nu \Sigma^a{}_\rho + \beta_D \bar{D}_\rho \Sigma^a{}_\nu) . \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir diesen abschließend in einer Form geschrieben, in welcher seine Invarianz offensichtlich ist, denn nach der Kontraktion des $O(4)$ -Tensors Σ mit dem Hintergrund-Vielbein gemäß $\Sigma^k{}_\alpha = \Sigma^k{}_l \bar{e}^l{}_\alpha$ übernimmt dieser die Transformationseigenschaften von letzterem. Der Term enthält nur Beiträge von nullter und erster Ordnung in $\bar{\omega}$, die wir auch hier explizit unter Berücksichtigung von $\partial\bar{e} = 0$ angeben wollen:

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu \bar{g}^{\mu\rho} \bar{e}_a{}^\nu [\delta^a{}_k (\bar{e}_{l\rho} \partial_\nu + \beta_D \bar{e}_{l\nu} \partial_\rho) + \bar{e}_{l\rho} \bar{\omega}^a{}_{k\nu} - \delta^a{}_k \bar{e}_{l\alpha} \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\rho} \\
 & \quad + \beta_D \bar{e}_{l\nu} \bar{\omega}^a{}_{k\rho} - \beta_D \delta^a{}_k \bar{e}_{l\alpha} \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\nu}] \Sigma^{kl} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu [\bar{e}_l{}^\mu \partial_k + \beta_D \eta_{kl} \partial^\mu + \bar{e}_l{}^\mu \bar{e}_a{}^\nu \bar{\omega}^a{}_{k\nu} - \bar{e}_k{}^\nu \bar{e}^{m\mu} \bar{\omega}_{lm\nu} \\
 & \quad + \beta_D \bar{\omega}_{lk}{}^\mu - \beta_D \bar{\omega}_{lk}{}^\mu] \Sigma^{kl} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \bar{\mathcal{C}}_\mu [\bar{e}_l{}^\mu \partial_k + \bar{e}_l{}^\mu \bar{e}_a{}^\nu \bar{\omega}^a{}_{k\nu} + \bar{e}_m{}^\mu \bar{e}_k{}^\nu \bar{\omega}^m{}_{l\nu}] \Sigma^{kl} .
 \end{aligned}$$

Jetzt soll diejenige Komponente untersucht werden, die bei einer Faddeev-Popov-Konstruktion unter Verwendung der ursprünglichen Parametrisierung keine δ^B -Kovarianz aufgewiesen hatte; diese Beobachtung bildete den Ausgangspunkt unserer Überlegungen zu den modifizierten Diffeomorphismen. Wir erhalten jetzt unter Berücksichtigung der Antisymmetrie des $O(4)$ -Antigeistes

Komponente $\bar{\Sigma} - \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
& - \int d^4x \bar{e} \bar{\Sigma}_{ab} \Omega^{ab}{}_{\nu} \mathcal{C}^{\nu} \\
:= & - \int d^4x \bar{e}(x) \int d^4y \bar{e}(y) \left\{ \bar{\Sigma}_{ab}(x) \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta \mathcal{G}^{ab}(x)}{\delta \varepsilon^k{}_{\alpha}(y)} \widetilde{\delta}_D^G(\mathcal{C}) \varepsilon^k{}_{\alpha}(y) \right\} \Big|_{\varepsilon, \partial\varepsilon=0} \\
= & - \int d^4x \bar{e} \bar{\Sigma}_{kb} \bar{e}^{b\alpha} (\mathcal{C}^{\sigma} \bar{\nabla}_{\sigma} \bar{e}^k{}_{\alpha} + (\partial_{\alpha} \mathcal{C}^{\sigma}) \bar{e}^k{}_{\sigma}) , \tag{4.70}
\end{aligned}$$

was nach obigen Bemerkungen zur modifizierten Lie-Ableitung ebenfalls δ^B -invariant ist. Explizit ausgeschrieben ist dies gleich

$$- \int d^4x \bar{e} \bar{\Sigma}_{ab} [\bar{e}^a{}_{\sigma} \partial^b + \bar{\omega}^{ab}{}_{\sigma}] \mathcal{C}^{\sigma} .$$

Abschließend liefert der $O(4)$ - $O(4)$ -Block nur Beiträge zum freien, d. h. $\bar{\omega}$ -unabhängigen Anteil:

Komponente $\bar{\Sigma} - \Sigma$:

$$\begin{aligned}
& - \int d^4x \bar{e} \bar{\Sigma}_{ab} \Omega^{ab}{}_{cd} \Sigma^{cd} \\
:= & - \int d^4x \bar{e}(x) \int d^4y \bar{e}(y) \left\{ \bar{\Sigma}_{ab} \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta \mathcal{G}^{ab}(x)}{\delta \varepsilon^k{}_{\alpha}(y)} \delta_L^G(\Sigma) \varepsilon^k{}_{\alpha} \right\} \Big|_{\varepsilon, \partial\varepsilon=0} \\
= & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{\Sigma}_{ab} \delta^a{}_k \bar{e}^{b\alpha} \Sigma^k{}_l (\bar{e} + \varepsilon)^l{}_{\alpha} \right\} \Big|_{\varepsilon, \partial\varepsilon=0} \\
= & - \int d^4x \bar{e} \bar{\Sigma}_{ab} \Sigma^{ab} , \tag{4.71}
\end{aligned}$$

was offensichtlich ebenfalls δ^B -invariant ist.

Das Minuszeichen, das als globaler Vorfaktor vor der Geistwirkung auftritt, entspringt einer Konvention, denn $-\mathcal{F}_{\mu}$ und $-\mathcal{G}^{ab}$ wären ebenso gute Eichbedingungen wie \mathcal{F}_{μ} und \mathcal{G}^{ab} . Maßgeblich hingegen ist der relative Vorfaktor -2 des Geistsektors gegenüber dem Feldsektor vor der in der Propertime-Gleichung auftretenden Spur.

Abschließend halten wir fest, daß die Forderung nach Hintergrund-Eichinvarianz der Geistwirkung über die $O(4)$ -Kovariantisierung der Lie-Ableitung auf zusätzliche Beiträge erster Ordnung bezüglich $\bar{\omega}$ führt, die im weiteren Verlauf der Rechnung berücksichtigt

werden müssen.

4.2.1 Die Nullmoden des freien Faddeev-Popov-Operators

Die konkrete Gestalt der Parameter von wahren Eichtransformationen, die wir ausschließen mußten, da die zugehörigen Transformationen nicht durch die von uns gewählten Eichbedingungen gebrochen wurden, läßt sich auch an dem gerade bestimmten Faddeev-Popov-Operator ablesen. Um dies zu verdeutlichen, bietet sich eine Analogie an: Im Sinne von Zwangsbedingungen kann man die Gleichungen $\delta^G \mathcal{F}_\mu^0 = 0$ und $\delta^G \mathcal{G}_{\mu\nu}^0 = 0$ als sogenannte „Secondary Constraints“ auffassen, die garantieren, daß Konfigurationen, die die Zwangsbedingungen („Primary Constraints“) $\mathcal{F}_\mu^0 = 0$ und $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0 = 0$ erfüllen, unter Wirkung der Transformationen wieder in solche überführt werden [68]. Die zweite Hälfte des Noether-Theorems besagt nun, daß zu einem solchen Constraint immer eine Eichinvarianz gehört, die sich als Nullrichtung der symplektischen Zweiform auf dem Phasenraum der Theorie äußert. Hier gilt nun eine analoge Aussage: Feldkonfigurationen, die die Ausdrücke (4.62) und (4.63) zum Verschwinden bringen, entsprechen gerade den Nullrichtungen oder Nullmoden des zugehörigen Faddeev-Popov-Operators.

Bezeichnet Ω^0 den auf dem Hintergrund $\bar{e} = \kappa \delta$, $\bar{\omega} = 0$ ausgewerteten Faddeev-Popov-Operator, also

$$\Omega^0 \equiv \left(\begin{array}{cc} \Omega_{\nu}^{0\mu} & \Omega_{cd}^{0\mu} \\ \Omega_{\nu}^{0ab} & \Omega_{cd}^{0ab} \end{array} \right) := \left(\begin{array}{cc} \Omega_{\nu}^{\mu} & \Omega_{cd}^{\mu} \\ \Omega_{\nu}^{ab} & \Omega_{cd}^{ab} \end{array} \right) \Big|_{\bar{e}=\text{const}, \bar{\omega}=0},$$

so können wir diesen direkt aus der Entwicklung der Geistwirkung bezüglich $\bar{\omega}$ als deren nullte Ordnung ablesen. Wie bereits erläutert, bezieht sich der eigentliche Propagator unserer Rechnung auf diesen Hintergrund, so daß das Spektrum von Ω^0 und vor allem dessen Nullmoden die für uns relevante Information verkörpern. Insbesondere hängt die Geistwirkung nicht vom Immirzi-Parameter γ_k ab, so daß sie für $\gamma_k \rightarrow \infty$ ihre Form nicht ändert. Da wir die freien $O(4)$ -Indizes explizit antisymmetrisieren müssen, wenn wir aus der quadratischen Form der Geistwirkung den Operator Ω^0 extrahieren, sind dessen Nullrichtungen

dann gegeben durch Vektoren

$$\hat{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \hat{v}^\mu \\ \hat{V}^{ab} \end{pmatrix}, \quad \hat{V}^{ab} = -\hat{V}^{ba}$$

mit

$$\Omega^0 \cdot \hat{\mathcal{V}} = 0.$$

Das führt komponentenweise ausgeschrieben auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} & \Omega^{0\mu}{}_\nu \hat{v}^\nu + \Omega^{0\mu}{}_{ab} \hat{V}^{ab} \\ &= (1 + \beta_D) \partial^\mu \partial_\nu \hat{v}^\nu + \bar{e}_a{}^\nu \bar{e}_b{}^\mu \partial_\nu \hat{V}^{ab} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \Omega^{0ab}{}_\mu \hat{v}^\mu + \Omega^{0ab}{}_{cd} \hat{V}^{cd} \\ &= \bar{e}^a{}_{[\mu} \bar{e}^b{}_{\nu]} \partial^\nu \hat{v}^\mu + \eta^a{}_{[c} \eta^b{}_{d]} \hat{V}^{cd} \\ &= \bar{e}^a{}_{[\mu} \bar{e}^b{}_{\nu]} \partial^\nu \hat{v}^\mu + \hat{V}^{ab} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Diese sind nun äquivalent zu (4.64) und (4.65), so daß wir deren Lösungen bereits kennen: Für $\beta_D = -1$ sind mit $\partial_\mu v_T^\mu = 0$ Vektoren der Form

$$\hat{\mathcal{V}}_1 = \begin{pmatrix} \partial^\mu \chi + v_T^\mu \\ \partial^{[a} v_T^{b]} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \square v_T^\mu = 0 \quad (4.72)$$

und somit insbesondere reine Gradienten Eigenvektoren des freien Faddeev-Popov-Operators zum Eigenwert Null. Für $\beta_D \neq -1$ hingegen sind entsprechend der vorhergehenden Analyse die Nullmoden des freien Faddeev-Popov-Operators von der Gestalt

$$\hat{\mathcal{V}}_2 = \begin{pmatrix} \partial^\mu \chi + v_T^\mu \\ \partial^{[a} v_T^{b]} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \square \chi = 0 \quad \text{und} \quad \square v_T^\mu = 0.$$

Die singulären Beiträge der Geistfelder zum Propagator sind somit durch die Nullmoden

des d'Alembert-Operators gegeben, wie sie beispielsweise auch im Falle eines freien reellen masselosen Skalarfeldes mit Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi) \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(-\square)\phi$$

aufzutreten. Die Berechnung des Propagators erfordert hier die Invertierung des d'Alembert-Operators, der bekanntlich durch eine Ersetzung der Form „ $\square \rightarrow \square + i\varepsilon$ “ regularisiert werden kann, was auf einen wohldefinierten Propagator führt. Die Fourier-Transformierte einer harmonischen Funktion ist bis auf ein Vorzeichen durch $\delta(p^2)$ gegeben, so daß ihr Träger im Impulsraum gerade der Unterraum $p^2 = 0$ ist, was im euklidischen Fall dem Ursprung und im Lorentzischen Fall dem dreidimensionalen Lichtkegel entspricht. In beiden Fällen handelt es sich also um Unterräume vom Maß Null, die aus dem Impulsraum herausgenommen werden müssen, um die Existenz des Propagators zu sichern. Daher werden wir uns im folgenden ebenfalls auf den Unterraum $p^2 \neq 0$ einschränken.

4.3 Exkurs: Die Kopplung von Yang-Mills-Theorie an Gravitation

Ersetzt man in der Gruppe $\mathbf{G} = \text{Diff} \times \text{O}(4)_{\text{loc}}$ der Eichtransformationen der QECG die Untergruppe $\text{O}(4)_{\text{loc}}$ durch $\text{SU}(N)_{\text{loc}}$, so liegt gerade die Invarianzgruppe einer an (metrische) Gravitation gekoppelten Yang-Mills-Theorie vor: $\mathbf{G} = \text{Diff} \times \text{SU}(N)_{\text{loc}}$. Dieses System ist für sich genommen von großem Interesse, nachdem Wilczek und Robinson 2006 ein diesbezügliches Ergebnis veröffentlicht hatten [69], das seinerseits in der Literatur einige Kontroversen ausgelöst hat [70, 71, 72, 73, 74].

Daher wurde in Ref. [75] unter Verwendung der in diesem Kapitel dargestellten Methode und mittels einer auf einem spektral angepaßten Cutoff basierenden Flußgleichung der Einfluß der quantisierten Gravitation auf die Beta-Funktion der Yang-Mills-Kopplung untersucht. Als Ergebnis erhält man einen nicht-verschwindenden gravitativen Beitrag zur Beta-Funktion der Yang-Mills-Eichkopplung, der das gleiche Vorzeichen wie der Beitrag der Eichbosonen aufweist. Dieses Resultat weist in Übereinstimmung mit Ref. [69] die Form einer modifizierten „Asymptotic Freedom“-Formel auf, seine Interpretation ist allerdings verschieden.

Kapitel 5

Trunkierung, Projektionsmethode und Flußgleichung

In diesem Kapitel wollen wir die Grundidee der Rechnung und ihre wesentlichen Bestandteile zusammenfassen; sie wird im Anschluß explizit ausgeführt. Dies soll dem Leser zum einen einen Überblick vermitteln, bevor wir uns den technischen Details zuwenden. Zudem soll dieser Abschnitt eine Grundlage liefern, um die in Kapitel 8 präsentierten Ergebnisse unserer Rechnung nachzuvollziehen, ohne mit all ihren technischen Einzelheiten vertraut zu sein.

5.1 Die Trunkierung

Als Ausgangspunkt wählen wir eine Trunkierung vom Typ der euklidischen Holst-Wirkung. Zudem werden die Eichredundanzen über die bereits diskutierten Eichbedingungen $\mathcal{F}_\mu(\bar{\varepsilon}; \bar{e}, \bar{\omega})$ und $\mathcal{G}^{ab}(\bar{\varepsilon}; \bar{e}, \bar{\omega})$ fixiert, die auf eine Geistwirkung $\Gamma_{k\text{ gh}}[\xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}]$ der berechneten Form führen. Dabei ist zu beachten, daß im Rahmen der Trunkierung die Fluktuationen und Geist- bzw. Antigeist-Felder durch ihre Erwartungswerte zu ersetzen sind. Um diese drei Anteile der Übersichtlichkeit wegen separat handhaben zu können, schreiben wir $\Gamma_k \equiv \Gamma_{k\text{ Ho}} + \Gamma_{k\text{ gf}} + \Gamma_{k\text{ gh}}$ und bezeichnen $\Gamma_{k\text{ grav}} \equiv \Gamma_{k\text{ Ho}} + \Gamma_{k\text{ gf}}$ als den Gravitonanteil, um ihn vom Geistanteil $\Gamma_{k\text{ gh}}$ zu unterscheiden.

Die von uns betrachtete Trunkierung ist also von der Form

$$\Gamma_k[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}] = \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega] + \Gamma_{k \text{ gf}}[e, \bar{e}, \bar{\omega}] + \Gamma_{k \text{ gh}}[\bar{e}, \bar{\omega}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}] \quad (5.1)$$

mit der „laufenden“ Holst-Wirkung

$$\Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega] = -\frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x e \left\{ \left(F^{ab}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2\gamma_k} \varepsilon^{ab}{}_{cd} F^{cd}{}_{\mu\nu} \right) e_a{}^\mu e_b{}^\nu - 2\Lambda_k \right\}, \quad (5.2)$$

dem Eichfixierungsanteil

$$\Gamma_{k \text{ gf}}[e, \bar{e}, \bar{\omega}] = \frac{1}{2\alpha_D} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\nu + \frac{1}{2\alpha_L} \int d^4x \bar{e} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab} \quad (5.3)$$

und den Geistbeiträgen

$$\begin{aligned} \Gamma_{k \text{ gh}}[\bar{e}, \bar{\omega}, \xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}] = & - \left\{ \int d^4x \bar{e} \bar{\xi}_\mu [(\bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\nu + \beta_D \delta_\nu^\alpha \partial^\mu) \partial_\alpha + \bar{e}^{l\mu} (\partial_k \bar{\omega}^k{}_{l\nu}) + \bar{\Gamma}^\sigma{}_{\sigma\nu} \partial^\mu + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2)] \xi^\nu \right. \\ & + \int d^4x \bar{e} \bar{\xi}_\mu [\bar{e}_d{}^\mu \partial_c + \bar{e}_d{}^\mu \bar{e}_a{}^\nu \bar{\omega}^a{}_{c\nu} + \bar{e}_m{}^\mu \bar{e}_c{}^\nu \bar{\omega}^m{}_{d\nu}] \Upsilon^{cd} \\ & + \int d^4x \bar{e} \bar{\Upsilon}_{ab} [\bar{e}_\nu{}^a \partial^b + \bar{\omega}^{ab}{}_\nu] \xi^\nu \\ & \left. + \int d^4x \bar{e} \bar{\Upsilon}_{ab} \Upsilon^{ab} \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dieser Ansatz enthält drei skalenabhängige Kopplungen, G_k , Λ_k und γ_k . Er hängt über die Eichfixierungs- und Geistterme parametrisch von den Hintergrundfeldern \bar{e} und $\bar{\omega}$ ab. Die darin auftretenden Eichbedingungen für die Diffeomorphismen

$$\mathcal{F}_\mu(e, \bar{e}, \bar{\omega}) := \bar{e}_a{}^\nu (\bar{D}_\nu (e^a{}_\mu - \bar{e}^a{}_\mu) + \beta_D \bar{D}_\mu (e^a{}_\nu - \bar{e}^a{}_\nu))$$

und die lokalen $O(4)$ -Rotationen

$$\mathcal{G}^{ab}(e, \bar{e}) := \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} (e^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu - e^b{}_\mu \bar{e}^a{}_\nu)$$

wurden im vorangegangenen Kapitel analysiert.

Wie bereits diskutiert, ist der Eichparameter α_D dimensionslos, wohingegen α_L die Mas-sendimension -4 besitzt. Wir werden den Lorentz-Eichparameter in Kürze geeignet umdefinieren, um vermöge einer dimensionslosen Zahl f die Implementierung der Eichbedingung

zu kontrollieren. Eine konsequente Umsetzung der Renormierungsgruppenidee würde erfordern, auch α_D und f als k -abhängig aufzufassen und entsprechende Beta-Funktionen für diese beiden Größen abzuleiten. Wir wollen hier jedoch als Näherung deren Renormierung vernachlässigen. Stattdessen werden wir später die Variation der beiden Eichparameter sowie des Parameters β_D in der Diffeomorphismus-Eichbedingung dazu verwenden, die Abhängigkeit unserer Ergebnisse von der expliziten Implementierung der Eichbedingung zu überprüfen. Zudem läßt sich allgemein für einen Eichparameter α begründen, daß $\alpha \rightarrow 0$ einen Fixpunktwert darstellt [27].

Darüber hinaus wohnt diesem Ansatz noch eine weitere Näherung inne, die in der Beibehaltung der rein klassischen Form des Geistsektors besteht. Insbesondere tritt hier keine skalenabhängige Kopplung als Vorfaktor auf, so daß wir wirklich bloß die Quantenfelder durch die Erwartungswerte ersetzen und jegliche Renormierungseffekte vernachlässigen. Im Zuge der Anwendung von Renormierungsgruppengleichungen auf Yang-Mills-Theorien hat sich dies als eine gute Näherung erwiesen [76].

5.2 Der (anti-)selbstduale Hintergrund $\bar{\omega}^{(\pm)}$

Wir müssen nun eine Hintergrundkonfiguration $(\bar{e}^a{}_\mu, \bar{\omega}^{ab}{}_\mu)$ wählen, die eine Unterscheidung der drei in der Trunkierung enthaltenen Invarianten auf der rechten Seite der Flußgleichung erlaubt. Wir wählen zum einen ein konstantes Vielbein der Form $\bar{e}^a{}_\mu = \text{const}$, dessen konkrete Form wir später auf $\bar{e}^a{}_\mu = \kappa \delta^a{}_\mu$ mit konstantem, reellen κ festlegen werden; diese Spezifikation ist allerdings nur an einer Stelle der Rechnung erforderlich. Das Kronecker-Symbol entspricht dabei dem Vielbein auf einem flachen Minkowski-Raum mit Metrik $\eta_{\mu\nu}$, so daß unsere Hintergrund-Raumzeit konform flach mit konstantem konformen Faktor κ^2 ist. Die Invariante $\int d^4x \bar{e}$, die zur kosmologischen Konstante gehört, ist nun die einzige lokale Invariante überhaupt, die unabhängig von $\bar{\omega}$ ist. Daher finden wir alle Terme auf der rechten Seite, die zu der zugehörigen Beta-Funktion beitragen, indem wir, zusammen mit $\bar{e}^a{}_\mu = \text{const}$, für den Spinzusammenhang $\bar{\omega} = 0$ setzen.

Um die beiden im Krümmungstensor $\bar{F}^{ab}{}_{\mu\nu}$ linearen Invarianten voneinander zu unterscheiden, nutzen wir aus, daß im Immirzi-Term der dualisierte Feldstärketensor auftritt und diese Invariante somit ihr Vorzeichen wechselt, sobald man eine selbstduale Feldstärke

durch eine anti-selbstduale ersetzt; das Vorzeichen der mit der laufenden Newton-Konstante assoziierten Invariante bleibt demgegenüber ungeändert. Nach dem im Anhang B bewiesenen Satz führen (anti-)selbstduale Spinzusammenhänge auf (anti-)selbstduale Feldstärken. Wir können also die beiden Invarianten voneinander unterscheiden, indem wir die beiden dazu erforderlichen Hintergrund-Spinzusammenhänge derart wählen, daß der eine, $\bar{\omega}^{(+)}$, selbstdual und der andere, $\bar{\omega}^{(-)}$, anti-selbstdual ist.

Konkret seien diese von der „quasi-abelschen“ Form

$$\bar{\omega}^{(\pm)ab}{}_{\mu}(x) = \frac{1}{2}n^{(\pm)ab}v_{\mu}(x), \quad (5.5)$$

wobei $n^{(\pm)ab}$ einen konstanten, antisymmetrischen, (anti-)selbstdualen $O(4)$ -Tensor bezeichnet, d. h. er genügt der euklidischen Eigenwertgleichung

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{cd}n^{(\pm)cd} = \pm n^{(\pm)ab}.$$

Das Vektorfeld $v_{\mu}(x)$ hingegen soll zunächst nicht näher spezifiziert werden; insbesondere wollen wir keine einschränkenden Annahmen bezüglich seiner x -Abhängigkeit machen. Der assoziierte Feldstärketensor ist dann quasi-abelsch und gegeben durch

$$\bar{F}^{(\pm)ab}{}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\left(\frac{1}{2}v_{\nu}n^{(\pm)ab}\right) - \partial_{\nu}\left(\frac{1}{2}v_{\mu}n^{(\pm)ab}\right) = \partial_{[\mu}v_{\nu]}n^{(\pm)ab}.$$

Die (Anti-)Selbstdualität der Feldstärke für einen entsprechenden Hintergrund ist im quasi-abelschen Fall offensichtlich.

Diese Feldstärke ist nun rein linear in $\bar{\omega}$, und daher müssen wir die Spur auf der rechten Seite bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(\partial\bar{\omega})$ entwickeln. Daher suchen wir alle von $\bar{\omega}$ unabhängigen Terme sowie die Beiträge erster Ordnung, in denen höchstens eine Ableitung auf v_{μ} wirkt. Bei letzteren unterscheiden wir schließlich diejenigen, deren Vorzeichen sich beim Wechsel von $\bar{\omega}^{(+)}$ zu $\bar{\omega}^{(-)}$ ändert, von jenen, für die das nicht der Fall ist. Alle höheren Ordnungen in $\bar{\omega}$ sowie alle höheren Ableitungen von $\bar{\omega}$ bzw. von v_{μ} können vernachlässigt werden, da sie nicht mehr zu der gesuchten Ordnung $\mathcal{O}(\bar{F})$ beitragen.

5.3 Die konkrete Form der Flußgleichung

Unterdrücken wir der Übersichtlichkeit wegen die Indexstruktur aller auftretenden Operatoren, so zerlegen wir den Operator $\Gamma_k^{(2)}$ im Graviton- und Geistsektor gemäß

$$\Gamma_k^{(2)} = H + V = H_0 + \frac{1}{\gamma_k} \bar{H} + V. \quad (5.6)$$

Darin wurde der freie Anteil H der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega}^0)$ in die Operatoren H_0 und \bar{H} aufgespalten. Ersterer ist unabhängig vom Immirzi-Parameter, während \bar{H} alle Beiträge enthält, die proportional zu $\frac{1}{\gamma_k}$ sind, weswegen wir diesen Faktor aus \bar{H} herausdefiniert haben. Da der Geistsektor unabhängig vom Immirzi-Parameter ist, verschwindet dort \bar{H} , d. h. $\bar{H}^{\text{gh}} \equiv 0$, wobei wir im folgenden mit „grav“ und „gh“ die Graviton- bzw. Geistkomponente des betreffenden Operators bezeichnen. Der Wechselwirkungsanteil V hingegen enthält alle Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega})$ und $\mathcal{O}(\partial\bar{\omega})$; insbesondere enthält er Matrixelemente der Ordnungen $(\frac{1}{\gamma_k})^0$ und $(\frac{1}{\gamma_k})^1$.

Gemäß der der Propertime-Gleichung zugrundeliegenden Darstellung des Funktionals Γ_k als renormierungsgruppenverbesserte 1-Schleifen-Determinante

$$\Gamma_k = S + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \Gamma_k^{(2)} \quad (5.7)$$

leiten wir für Γ_k in Abschnitt 7.1 eine Darstellung der Form

$$\Gamma_k - S = \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(H_0^{\text{grav}})^2 (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^{-2} \right] - 2 \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} (H_0^{\text{gh}})^{-2} \right) \right\} \quad (5.8)$$

mit $\mathcal{M} := (H_0)^{-1} \bar{H}$ ab. Der darin auftretende Parameter $\bar{\mu}$ bezeichnet einen Massenparameter, der im Zuge der Zerlegungen der Fluktuationen $\bar{\varepsilon}_\mu^a$ und $\bar{\tau}_\mu^{ab}$ eingeführt werden muß und den wir hier dazu verwenden, um die Argumente der Logarithmen dimensionslos zu machen.

Stellen wir nun die in diesen Spuren auftretenden Logarithmen und inversen Operatoren

mittels eines Eigenzeit-Integrals dar, so erhalten wir die Gleichung (5.8) in der Form

$$\begin{aligned}
\Gamma_k - S &= -\frac{1}{4} \not\int \frac{ds}{s} \left(\text{Tr} e^{-s(H_0^{\text{grav}})^2} - \text{Tr} e^{-s\bar{\mu}^6} \right) - \frac{1}{4} \not\int \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-s\mathcal{N}^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \not\int \frac{ds}{s} \text{Tr} \left((H_0^{\text{grav}})^2 (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} e^{-s(H_0^{\text{grav}})^2} \right) \\
&\quad - 2 \left\{ -\frac{1}{4} \not\int \frac{ds}{s} \left(\text{Tr} e^{-s(H_0^{\text{gh}})^2} - e^{-s\bar{\mu}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \not\int \frac{ds}{s} \text{Tr} \left((H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} e^{-s(H_0^{\text{gh}})^2} \right) \right\} \tag{5.9}
\end{aligned}$$

mit $\mathcal{N} := \mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}$.

Das Symbol $\not\int$ weist darauf hin, daß zur Definition der Spuren eine Regularisierung der Eigenzeit-Integrale erforderlich ist. Wie in Abschnitt 3.3 erläutert wird dies auf eine k -Abhängigkeit der rechten Seite führen. Eine k -Ableitung von (5.9) führt dann auf eine Flußgleichung für Γ_k , die den von uns betrachteten Fluß auf dem Theorienraum $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ definiert.

Es wird sich herausstellen, daß wir das Spektrum des Operators H_0 analytisch berechnen können. Somit besteht unser Ziel darin, die Spuren auf der rechten Seite bis auf den \mathcal{N} -Beitrag in der Eigenbasis von H_0 darzustellen. Da dieser Operator hermitesch ist, besitzt er reelle Eigenwerte. Sein Quadrat definiert mithin einen positiven Operator, so daß man jeweils eine gewünschte Dämpfung der Form $e^{-s\bar{\lambda}_0^2}$ mit $\bar{\lambda}_0 \in \text{spec}(H_0)$ erhält.

Die in Abschnitt 5.2 erläuterte Projektionsmethode erlaubt es anschließend, die rechte Seite nach den in der Trunkierung (5.2) auftretenden Invarianten zu entwickeln, so daß man die Beta-Funktionen der assoziierten Kopplungen erhält. Die Analyse des resultierenden Differentialgleichungssystems wird in Kapitel 8 durchgeführt.

Kapitel 6

Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$

6.1 Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich der unzerlegten Felder

Der Operator $\Gamma_{k \text{ grav}}^{(2)}$ im Gravitonsektor ausgewertet auf den Hintergrundkonfigurationen \bar{e} und $\bar{\omega}$ läßt sich am einfachsten bestimmen, indem man das Funktional $\Gamma_{k \text{ grav}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}]$ gemäß

$$\Gamma_{k \text{ grav}}[\bar{e} + \bar{\varepsilon}, \bar{\omega} + \bar{\tau}, \bar{e}, \bar{\omega}] = \Gamma_{k \text{ grav}}[\bar{e}, \bar{\omega}, \bar{e}, \bar{\omega}] + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}) + \Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}] + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}^3, \bar{\varepsilon}^2\bar{\tau}, \bar{\varepsilon}\bar{\tau}^2, \bar{\tau}^3)$$

um den Hintergrund in eine funktionale Taylor-Reihe entwickelt. Da diese zweimal bezüglich der Vakuumerwartungswerte der Fluktuationen abzuleiten ist, liefern die nullte und die erste Ordnung jeweils keinen Beitrag. Zudem wird das Ergebnis anschließend für $\bar{\varepsilon} = 0$ sowie $\bar{\tau} = 0$ ausgewertet, so daß die Beiträge aller höheren Ordnungen dann ebenfalls

verschwinden. Für den quadratischen Anteil erhalten wir

$$\begin{aligned} & \Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e}(x) \int d^4y \bar{e}(y) \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^m_\beta(x) \\ \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \left[\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta}{\delta e^m_\beta(x)} \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta}{\delta e^k_\alpha(y)} & \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta}{\delta e^m_\beta(x)} \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta}{\delta \omega^{kl}_\alpha(y)} \\ \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta}{\delta \omega^{mn}_\beta(x)} \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta}{\delta e^k_\alpha(y)} & \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta}{\delta \omega^{mn}_\beta(x)} \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta}{\delta \omega^{kl}_\alpha(y)} \end{array} \right) \Gamma_{k \text{ grav}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}] \right] \Big|_{e=\bar{e}, \omega=\bar{\omega}} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^k_\alpha(y) \\ \bar{\tau}^{kl}_\alpha(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da sich die Determinanten des Hintergrundvielbeins, die zum einen im Maß der Entwicklung auftreten und zum anderen Funktionalableitungen definieren, deren Anwendung auf Tensoren führt, wegheben, können wir direkt

$$\begin{aligned} & \Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^m_\beta(x) \\ \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \end{pmatrix}^T \left[\left(\begin{array}{cc} \frac{\delta}{\delta e^m_\beta(x)} \frac{\delta}{\delta e^k_\alpha(y)} & \frac{\delta}{\delta e^m_\beta(x)} \frac{\delta}{\delta \omega^{kl}_\alpha(y)} \\ \frac{\delta}{\delta \omega^{mn}_\beta(x)} \frac{\delta}{\delta e^k_\alpha(y)} & \frac{\delta}{\delta \omega^{mn}_\beta(x)} \frac{\delta}{\delta \omega^{kl}_\alpha(y)} \end{array} \right) \Gamma_{k \text{ grav}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}] \right] \Big|_{e=\bar{e}, \omega=\bar{\omega}} \\ & \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^k_\alpha(y) \\ \bar{\tau}^{kl}_\alpha(y) \end{pmatrix} \quad (6.1) \end{aligned}$$

schreiben. Diese Methode zur Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$ ist vorteilhaft, da nach dem Einsetzen einer bestimmten Zerlegung von $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\tau}$ sowie anschließenden Manipulationen die Form von $\Gamma_k^{(2)}$ in der so definierten Darstellung unmittelbar abgelesen werden kann. Zuvor überzeugen wir uns davon, daß dieser Operator in der Tat hermitesch ist.

Die quadratische Form (6.1) wird in Anhang E berechnet. Man erhält

$$\Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^m_\beta \\ \bar{\tau}^{mn}_\beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T_m^{\beta \alpha} & T_m^{\beta \alpha} \\ T_{mn}^{\beta \alpha} & T_{mn}^{\beta \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^k_\alpha \\ \bar{\tau}^{kl}_\alpha \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

mit den vier Blöcken

$$\begin{aligned} T_{m\ k}^{\beta\ \alpha} &= -\frac{1}{2}(K_{abmk}^{(\gamma_k)} \bar{F}_{\mu\nu}^{ab} - 2\Lambda_k \varepsilon_{abmk} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_D} (\bar{D}_{\sigma m}^{\beta b} + \beta_D \bar{D}_{\mu m}^{\beta b}) \bar{e}^{\mu\nu} \bar{e}_b^\sigma \bar{e}_a^\rho (\bar{D}_\rho^a{}_{\nu k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\nu^a{}_{\rho k}{}^\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha'_L} \frac{1}{2} \bar{e} (\eta_{mk} \bar{g}^{\beta\alpha} - \bar{e}_m^\alpha \bar{e}_k^\beta), \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$T_{m\ kl}^{\beta\ \alpha} = -K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \bar{\nabla}_\mu^{ab} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}, \quad (6.4)$$

$$T_{mn\ k}^{\beta\ \alpha} = -K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{\nabla}_\mu^{ab} \bar{e}_\nu^c \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}, \quad (6.5)$$

$$T_{mn\ kl}^{\beta\ \alpha} = -K_{nkab}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b \eta_{ml} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}. \quad (6.6)$$

Darin treten die Abkürzungen

$$K_{abcd}^{(\gamma_k)} := \varepsilon_{abcd} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc})$$

und

$$\alpha'_L := \frac{\alpha_L}{16\pi G_k}$$

auf; α'_L besitzt die Massendimension -2 . Der aus (6.3)-(6.6) gebildete Integralkern der quadratischen Form ist hermitesch, was ebenfalls in Anhang E gezeigt wird. Wir können somit den inversen Gravitonpropagator $\Gamma_{k\ \text{grav}}^{(2)}$ unmittelbar an der quadratischen Form ablesen und die beiden Operatoren bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$ miteinander identifizieren.

Der Geistsektor hingegen ist bereits per Konstruktion quadratisch in den Geistfeldern, die nicht in Hintergründe und Fluktuationen aufgespalten werden und ihrerseits den Status von Fluktuationen besitzen. Der Operator $\Gamma_{k\ \text{gh}}^{(2)}$ ist definiert über die Anwendung von

$$\frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}(y)} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}(y)} - \frac{1}{\bar{e}(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}(y)} \frac{1}{\bar{e}(x)} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \right) \quad (6.7)$$

mit $\varphi \in \{\xi^\mu, \Upsilon^{ab}\}$ und $\bar{\varphi} \in \{\bar{\xi}_\nu, \bar{\Upsilon}_{cd}\}$ auf den Geistanteil (5.4) der Trunkierung [13]. Daher ist $\Gamma_{k\ \text{gh}}^{(2)}$ bis auf zwei inverse Potenzen der konstanten Hintergrundvielbein-Determinante sowie eine Delta-Distribution durch den nach Abstreifen der Geistfelder verbleibenden

Integralkern im Geistsektor (5.4) gegeben.

An den Komponenten im Gravitonsektor fällt auf, daß sie keine einheitliche Massendimension besitzen: Die $\bar{\varepsilon}\text{-}\bar{\varepsilon}$ -Komponente (6.3) von $\Gamma_{k \text{ grav}}$ besitzt die Massendimension 2, die gemischten Beiträge (6.4) und (6.5) hingegen weisen die Massendimension 1 auf, und schließlich ist die $\bar{\tau}\text{-}\bar{\tau}$ -Komponente (6.6) dimensionslos. Dies ist natürlich darin begründet, daß das Vielbein dimensionslos ist, wohingegen der Spinzusammenhang die Massendimension 1 besitzt. Unser Ziel besteht nun darin, eine geeignete Variante der Propertime-Gleichung (3.28) auszuwerten. An deren Form ist bereits zu erkennen, daß $\Gamma_k^{(2)}$ exponentiert und somit im Sinne der definierenden Reihenentwicklung iteriert werden muß. Mit anderen Worten: $\Gamma_k^{(2)}$ muß eine *Abbildung*, d. h. einen *Operator* definieren, was die oben angegebene *quadratische Form* aber a priori nicht tut. Zudem wollen wir das Spektrum eines bestimmten Anteils dieses Operators bestimmen. In dieser Form sind seine Eigenwerte und seine Spur jedoch nicht wohldefiniert.

Dies kann man ändern, indem man den Fluktuationen eine einheitliche Dimension gibt. Dazu reskalieren wir die Vielbein- und die Spinzusammenhangsfluktuation gemäß

$$\bar{\varepsilon}_\mu^a \rightarrow \bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \bar{\varepsilon}_\mu^a \quad \text{bzw.} \quad \bar{\tau}_\mu^{ab} \rightarrow \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \bar{\tau}_\mu^{ab} \quad (6.8)$$

mit einem Parameter $\bar{\mu}$ von der Dimension einer Masse. An dieser Stelle wären auch unendlich viele andere Reskalierungen denkbar, z. B. $\bar{\varepsilon}_\mu^a \rightarrow \bar{\mu}^{\frac{3}{2}} \bar{\varepsilon}_\mu^a$ und $\bar{\tau}_\mu^{ab} \rightarrow \bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \bar{\tau}_\mu^{ab}$. Diese entsprechen verschiedenen Darstellungen des Operators $\Gamma_k^{(2)}$, und auf dem Niveau des Pfadintegralmaßes unterscheiden sie sich bloß um eine Jacobi-Determinante, die durch eine entsprechende Potenz von $\bar{\mu}$ gegeben wäre.

Wir erhalten mit der Reskalierung (6.8)

$$\begin{aligned} & \Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{\varepsilon}, \bar{\omega}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_\beta^m \\ \bar{\tau}_{\beta}^{mn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T_m^{\beta \alpha} & T_m^{\beta \quad \alpha} \\ T_{mn}^{\beta \alpha} & T_{mn}^{\beta \quad \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_\alpha^k \\ \bar{\tau}_{\alpha}^{kl} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \begin{pmatrix} \bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \bar{\varepsilon}_\beta^m \\ \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \bar{\tau}_{\beta}^{mn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{\mu}^{-1} T_m^{\beta \alpha} & T_m^{\beta \quad \alpha} \\ T_{mn}^{\beta \alpha} & \bar{\mu} T_{mn}^{\beta \quad \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \bar{\varepsilon}_\alpha^k \\ \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \bar{\tau}_{\alpha}^{kl} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Effekt dieser Reskalierung besteht auf Operatorniveau also darin, die Diagonalblöcke

jeweils mit einer Potenz des Massenparameters bzw. mit dem Inversen zu reskalieren, während die gemischten Komponenten unverändert bleiben. Alle vier Beiträge besitzen dann bis auf den globalen Vorfaktor wie im Falle des Dirac-Propagators die Dimension einer Masse.

Betrachtet man die Trunkierung (5.1), so stellt man fest, daß auch die vier Komponenten des inversen Geistpropagators $\Gamma_{k\text{ gh}}^{(2)}$ keine einheitliche Dimension besitzen. Daher definieren wir diese ebenfalls geeignet um: Die Diffeomorphismus-Geister reskalieren wir wie die Vielbein-Fluktuationen gemäß

$$\xi^\mu \rightarrow \bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \xi^\mu \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_\mu \rightarrow \bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \bar{\xi}_\mu, \quad (6.9)$$

wohingegen die Lorentz-Geister wie die Spinzusammenhangsfluktuationen reskaliert werden, also

$$\Upsilon^{ab} \rightarrow \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \Upsilon^{ab} \quad \text{und} \quad \bar{\Upsilon}_{ab} \rightarrow \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \bar{\Upsilon}_{ab}. \quad (6.10)$$

Dies hat analog zum Gravitonsektor den Effekt, daß hier ebenfalls die Diffeomorphismus-Diffeomorphismus-Komponente von $\Gamma_{k\text{ gh}}^{(2)}$ mit $\frac{1}{\bar{\mu}}$ reskaliert wird, die $O(4)$ - $O(4)$ -Komponente hingegen mit $\bar{\mu}$, während die gemischten Komponenten ungeändert bleiben. Auch dieser Beitrag zum inversen Propagator besitzt dann die Massendimension 1. Die reskalierten Geist- und Antigeist-Felderwartungswerte besitzen alle die Massendimension $\frac{3}{2}$. Wir sprechen allerdings auch im folgenden von der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ - oder der $\bar{\xi}$ - $\bar{\xi}$ -Komponente, auch wenn wir uns dann auf die reskalierten Fluktuationen bzw. Geistfelder beziehen.

Der Übergang von der quadratischen Form zu einem wohldefinierten Operator erfordert also die Einführung eines Massenparameters $\bar{\mu}$, dessen physikalische Bedeutung ebenso untersucht werden muß wie die Frage, auf welche Art die erhaltenen Ergebnisse von ihm abhängen werden.

6.2 Die Zerlegung der Fluktuationen und Geister

Um die Struktur der Operatoren $\Gamma_{k\text{ grav}}$ und $\Gamma_{k\text{ gh}}$ genauer untersuchen und insbesondere Aussagen über deren Spektrum treffen zu können, ist es erforderlich, die reskalierten Fluk-

tuationen und Geist- bzw. Antigeistfelder weiter auf irreduzible Art und Weise zu zerlegen [77] und den Operator $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich dieser Komponentenfelder auszudrücken.

6.2.1 Parametrisierung der Fluktuationfelder $\bar{\varepsilon}_\mu^a$ und $\bar{\tau}_\mu^{ab}$

Im Ortsraum stellen wir die reskalierten Vakuumerwartungswerte der Vielbein- und Spinzusammenhangsfluktuationen in der Form

$$\bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \bar{\varepsilon}_\mu^a(x) = \frac{\partial^a}{\sqrt{-\square}} \partial_\mu a(x) + \frac{\partial_\mu}{\sqrt{-\square}} b^a(x) + \frac{\partial^a}{\sqrt{-\square}} c_\mu(x) + d_\mu^a(x) \quad (6.11)$$

bzw.

$$\bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \bar{\tau}_\mu^{ab}(x) = \frac{\partial_\mu \partial^{[a}}{\sqrt{-\square}^2} A^{b]}(x) + \frac{\partial^{[a}}{\sqrt{-\square}} B^{b]}_\mu(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \frac{\partial_\mu \partial^c}{\sqrt{-\square}^2} C^d(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \frac{\partial^c}{\sqrt{-\square}} D_\mu^d(x) \quad (6.12)$$

dar. In der Zerlegung (6.12) des Spinzusammenhangs gehen dabei offensichtlich die letzten beiden Komponentenfelder durch $O(4)$ -Dualisierung aus den ersten beiden hervor. Die vektor- und tensorwertigen Komponentenfelder sollen jeweils divergenzfrei in jedem Index sein, d. h. sie unterliegen den Bedingungen

$$\partial_a b^a = 0 = \partial^\mu c_\mu, \quad \partial_a d_\mu^a = 0, \quad \partial^\mu d_\mu^a = 0 \quad (6.13)$$

sowie

$$\partial_a A^a = 0 = \partial_a C^a, \quad \partial_a B_\mu^a = 0 = \partial_a D_\mu^a, \quad \partial^\mu B_\mu^a = 0 = \partial^\mu D_\mu^a. \quad (6.14)$$

Wendet man nun auf diese Felder eine geeignete Verallgemeinerung der üblichen Fourier-Transformation

$$f(x) =: \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p \tilde{f}(p) e^{ipx}$$

an, die wir in Kürze angeben werden und die auf die Ersetzung $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow ip_\mu$ führt,

so besagen (6.13) und (6.14), daß jeder Tensorindex der Komponentenfelder nach drei Basisvektoren, die im Impulsraum den zu p_μ senkrechten Unterraum aufspannen, entwickelt werden kann. Daher besitzt in (6.11) und (6.12) ein einfach indiziertes Feld drei, ein zweifach indiziertes Feld hingegen neun unabhängige Komponenten. Durch Abzählen erhalten wir somit wie gewünscht $1+3+3+9 = 16$ sowie $3+9+3+9 = 24$ unabhängige Komponenten für die Fluktuationsvakuumerwartungswerte des Vielbeins bzw. des Spinzusammenhangs. Die vier Komponenten dieser beiden Zerlegungen sind untereinander jeweils orthogonal zueinander in dem Sinne, daß die (a, μ) -Kontraktion je zweier Komponenten der $\bar{\varepsilon}$ -Zerlegung bzw. die (a, b, μ) -Kontraktion je zweier Komponenten der $\bar{\tau}$ -Zerlegung verschwindet.

Die Tensorfelder zweiter Stufe d^a_μ , B^a_μ und D^a_μ zerlegen wir nun noch in einen Spuranteil sowie eine antisymmetrische und eine symmetrisch-spurlose Komponente [77]: Mit $\Phi \in \{d, B, D\}$ schreiben wir zunächst

$$\Phi^a_\mu = \overset{s}{\Phi}^a_\mu + \overset{a}{\Phi}^a_\mu + \overset{ss}{\Phi}^a_\mu, \quad (6.15)$$

wobei sich jetzt die Forderung nach Divergenzfreiheit auf jeden Anteil separat überträgt. Weiterhin stellen wir den Spuranteil über einen Skalar Φ sowie den antisymmetrischen Anteil über einen $O(4)$ -Vektor Φ^a dar gemäß

$$\overset{s}{\Phi}^a_\mu = \frac{(\bar{\varepsilon}^a_\mu \square - \partial^a \partial_\mu)}{\sqrt{-\square^2}} \Phi \quad (6.16)$$

sowie

$$\overset{a}{\Phi}^a_\mu = \varepsilon^a_{bcd} \bar{\varepsilon}^b_\mu \frac{\partial^c}{\sqrt{-\square}} \Phi^d. \quad (6.17)$$

Diese Zerlegung impliziert für den Spuranteil wegen

$$\partial_a \overset{s}{\Phi}^a_\mu = \partial_a \frac{(\bar{\varepsilon}^a_\mu \square - \partial^a \partial_\mu)}{\sqrt{-\square^2}} \Phi = \partial_\mu \frac{(\square - \square)}{\sqrt{-\square^2}} \Phi = 0$$

und analog

$$\partial^\mu \overset{s}{\Phi}^a_\mu = 0$$

zunächst die Divergenzfreiheit. Die vermöge des inversen Hintergrundvielbeins gebildete Spur von Φ^a_{μ} ist zudem durch

$$\text{Tr}(\overset{s}{\Phi}^a_{\mu}) := \bar{e}_a^{\mu} \overset{s}{\Phi}^a_{\mu} = \frac{(4\Box - \Box)}{-\Box} \Phi = -3\Phi \quad (6.18)$$

gegeben. Des weiteren wird durch (6.17) wegen

$$\begin{aligned} \overset{a}{\Phi}^a_{\mu} &= \varepsilon^a_{bcd} \bar{e}^b_{\mu} \frac{\partial^c}{\sqrt{-\Box}} \Phi^d \\ &= -\varepsilon^a_{bcd} \bar{e}^b_{\mu} \frac{\partial^c}{\sqrt{-\Box}} \Phi^d \\ &= -\bar{e}_{b\mu} \bar{e}^{a\nu} \varepsilon^b_{ecd} \bar{e}^e_{\nu} \frac{\partial^c}{\sqrt{-\Box}} \Phi^d \\ &= -\bar{e}_{b\mu} \bar{e}^{a\nu} \overset{a}{\Phi}^b_{\nu} \\ &=: -\overset{a}{\Phi}^a_{\mu} \end{aligned} \quad (6.19)$$

wie gewünscht ein antisymmetrischer Tensor definiert, woraus insbesondere dessen Spurfreiheit folgt. Wegen

$$\partial_a \overset{a}{\Phi}^a_{\mu} = \varepsilon^a_{bcd} \partial_a \bar{e}^b_{\mu} \frac{\partial^c}{\sqrt{-\Box}} \Phi^d = 0$$

sowie

$$\partial^{\mu} \overset{a}{\Phi}^a_{\mu} = \varepsilon^a_{bcd} \partial^b \frac{\partial^c}{\sqrt{-\Box}} \Phi^d = 0$$

respektiert dieser darüber hinaus die Transversalitätsbedingungen (6.13) und (6.14). Der verbleibende symmetrische Anteil soll nun nach Extraktion der Spur gemäß (6.18) bei Kontraktion mit dem inversen Vielbein verschwinden,

$$\bar{e}_a^{\mu} \overset{ss}{\Phi}^a_{\mu} = 0,$$

und abschließend fordern wir dessen Transversalität bezüglich beider Indizes:

$$\partial_a \overset{ss}{\Phi}^a_{\mu} = 0, \quad \partial^{\mu} \overset{ss}{\Phi}^a_{\mu} = 0.$$

Nachdem wir in den folgenden Rechnungen für die matrixwertigen Felder die Zerlegung (6.15) eingesetzt haben, verbleiben lediglich die symmetrischen, spurfreien Tensoren als zweifach indizierte Objekte, so daß diese nicht mehr durch eine zusätzliche Kennzeichnung vom ursprünglichen Feld unterschieden werden müssen. Zur Parametrisierung des Feldraumes ersetzen wir dann die Schreibweise $\{\overset{s}{\Phi}_\mu^a, \overset{a}{\Phi}_\mu^a, \overset{ss}{\Phi}_\mu^a\}$ entsprechend durch $\{\Phi, \Phi^a, \Phi_\mu^a\}$. Zusammen führen diese drei neuen Felder auf die erforderlichen $1+3+5=9$ unabhängigen Komponenten der ursprünglichen, unaufgespaltenen matrixwertigen Felder.

In (6.11) und (6.12) wurde jede Ableitung mit einer Potenz von $\sqrt{-\square}$ reskaliert. Damit soll verhindert werden, daß später in dem Objekt $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich der Komponentenfelder \square -Operatoren, die der Zerlegung entstammen, nicht fälschlicherweise für wahre kinetische Operatoren gehalten werden. Dabei ist hier offenbar die euklidische Signatur von Wichtigkeit, denn nur für diese definiert $-\square$ einen positiv-definiten Operator mit Eigenwert p^2 .

Die reskalierten Geist- und Antigeist-Felder entwickeln wir ebenfalls geeignet in Grassmannwertige Komponentenfelder: Diejenigen, die mit den Diffeomorphismen assoziiert sind, zerlegen wir gemäß

$$\bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \xi^\mu = \frac{\partial^\mu}{\sqrt{-\square}} f + g^\mu \quad \text{und} \quad \bar{\mu}^{\frac{1}{2}} \bar{\xi}_\mu = \frac{\partial_\mu}{\sqrt{-\square}} \bar{f} + \bar{g}_\mu \quad (6.20)$$

mit

$$\partial_\mu g^\mu = 0 \quad \text{und} \quad \partial^\mu \bar{g}_\mu = 0 \quad (6.21)$$

in einen Gradienten und eine transversale Komponente. Die $O(4)$ -Geister hingegen stellen wir in der Form

$$\bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \Upsilon^{ab} = \frac{\partial^{[a}}{\sqrt{-\square}} F^{b]} + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \frac{\partial^c}{\sqrt{-\square}} G^d \quad \text{sowie} \quad \bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \bar{\Upsilon}_{ab} = \frac{\partial_{[a}}{\sqrt{-\square}} \bar{F}_{b]} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^{cd} \frac{\partial_c}{\sqrt{-\square}} \bar{G}_d \quad (6.22)$$

dar. Da diese Zerlegungen invariant unter Addition eines beliebigen Gradienten zu einem der Komponentenfelder sind, können wir o. B. d. A. auch deren Divergenzfreiheit fordern,

so daß zudem

$$\partial_a F^a = \partial_a G^a = \partial^a \bar{F}_a = \partial^a \bar{G}_a = 0 \quad (6.23)$$

gilt. Analog zu den Fluktuationszerlegungen stellen auch die Geistzerlegungen Entwicklungen bezüglich zueinander orthogonaler Richtungen dar.

Die in (6.11), (6.12), (6.20) und (6.22) auftretenden Komponentfelder besitzen alle die Dimensionen der unzerlegten reskalierten Felder auf der linken Seite, d. h. die Massendimensionen $\frac{1}{2}$ im Graviton- und $\frac{3}{2}$ im Geistsektor. Dabei bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben $\{a, b, c, d, f, \bar{f}, g, \bar{g}\}$ die Komponenten der Vielbein- und der Diffeomorphismus-(Anti-)Geist-Zerlegung, wohingegen Großbuchstaben $\{A, B, C, D, F, \bar{F}, G, \bar{G}\}$ für die Spinzusammenhangs- und die $O(4)$ -(Anti-)Geist-Zerlegung verwandt werden. Alle Zerlegungen respektieren die Symmetrien der unzerlegten Felder.

Diese Parametrisierung der Fluktuationfelder entspricht ebenso wie die explizite Form der $\bar{\mu}$ -Reskalierung der Wahl einer Darstellung des Operators $\Gamma_k^{(2)}$ auf der rechten Seite der Propertime-Gleichung (3.28). Deren linke Seite hängt jedoch nicht von dieser Darstellung ab, denn sie wird für verschwindende Fluktuationen ausgewertet. Man erhält $\Gamma_k^{(2)}$, indem man die darstellungsunabhängige quadratische Form Γ_k^{quad} nach den Komponentefeldern der gewählten Fluktuations- und Geist-Parametrisierung ableitet. Auf dem Niveau des Pfadintegrals unterscheiden sich verschiedene Parametrisierungen der Fluktuations- und Geisterwartungswerte und damit verschiedene Darstellungen von $\Gamma_k^{(2)}$ um entsprechende Jacobi-Determinanten im Funktionalmaß. Man nimmt jedoch an, daß derartige Umparametrisierungen das qualitative Verhalten des Renormierungsgruppenflusses und insbesondere dessen universelle Eigenschaften nicht maßgeblich beeinflussen, so daß sie weitestgehend unabhängig von der gewählten Darstellung sind.

Ein zu $\bar{\mu}$ analoger dimensionsbehafteter Parameter wurde bereits bei Untersuchungen zur chiralen Anomalie auf Einstein-Cartan-Räumen mit Torsion eingeführt [78, 79].

Man könnte auch in der analogen Zerlegung des Metrik-Fluktuationserwartungswertes der QEG die einzelnen Komponenten unterschiedlich mit einem dimensionslosen, skalenabhängigen Analogon zum $\bar{\mu}$ -Parameter reskalieren. Damit erhielte man eine andere Parametrisierung der Fluktuationen und somit eine andere Darstellung von $\Gamma_k^{(2)}$. Im vorliegenden Fall *zwingen* uns allerdings Dimensionsgründe zu einer Reskalierung mit einem dimen-

sionsbehafteten Parameter. Auf eine mögliche k -Abhängigkeit von $\bar{\mu}$ werden wir später eingehen. Auch im Fall des gekoppelten Systems aus Yang-Mills-Eichfeld und Gravitation besitzen die beiden Felder unterschiedliche Massendimension. Allerdings war hier im Rahmen der bereits zitierten Untersuchung [75] keine entsprechende Reskalierung notwendig. Dies könnte jedoch bei der Analyse komplizierterer Invarianten in der Trunkierung erforderlich werden. Den entsprechenden störungstheoretischen Rechnungen liegt hingegen implizit immer eine vorgegebene Massenskala zugrunde.

6.3 Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$ bezüglich der Komponentfelder

Im folgenden soll $\Gamma_k^{(2)}$ in der durch die Zerlegungen (6.11), (6.12), (6.20) und (6.22) definierten Darstellung mit den nach (6.15), (6.16) und (6.17) aufgespaltenen Tensorfeldern berechnet werden.

Dazu schreiben wir zunächst die quadratische Form auf die Komponentfelder um, indem wir (6.11) und (6.12) in (6.1) einsetzen. Im Falle der Geister kann dies nach den obigen Ausführungen direkt auf dem Niveau von (5.4) erfolgen.

Dann setzen wir die Hintergrundkonfigurationen $\bar{e}^a{}_\mu = \kappa \delta^a{}_\mu = \text{const}$ und $\bar{\omega}^{(\pm)ab}{}_\mu$ aus (5.5) in die quadratische Form ein und entwickeln diese. Wir erhalten einen *freien Anteil* $\Gamma_k^{\text{quad}(0)}$ der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega}^0) \equiv \mathcal{O}(v^0)$ sowie einen Anteil $\Gamma_k^{\text{quad}(1)}$ erster Ordnung, der die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega}) \equiv \mathcal{O}(v)$ und $\mathcal{O}(\partial\bar{\omega}) \equiv \mathcal{O}(\partial v)$ enthält und den wir als *Wechselwirkungsanteil* bezeichnen.

Diese Berechnung wird jeweils für den Graviton- und den Geistsektor in den Anhängen F und H durchgeführt. Dabei sind die $\bar{\mu}$ - und die $\sqrt{-\square}$ -Reskalierungen im Anhang noch nicht enthalten, da sich letztere an einem späteren Punkt der Rechnung unmittelbar ausführen lassen.

Fassen wir die Skalare, die transversalen Vektoren sowie die transversalen, symmetrisch-spurlosen Tensoren aus dem Graviton- und dem Geistsektor zu mehrkomponentigen Feldern Φ , Φ^m und Φ^{mn} zusammen, indem wir vermöge des Hintergrundvielbeins alle Indizes

auf Lorentz-Indizes umschreiben, so möchten wir schematisch geschrieben in

$$\Gamma_k^{\text{quad}}[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^m_\beta \\ \bar{\tau}^{mn}_\beta \end{pmatrix}^T \Gamma_k^{(2)} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^k_\alpha \\ \bar{\tau}^{kl}_\alpha \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \Phi^{j_S} (\Gamma_k^{(2)})^S_{j_S i_S} \Phi^{i_S} + \Phi^{j_V m} (\Gamma_k^{(2)})^V_{j_V i_V m k} \Phi^{i_V k} + \Phi^{j_T m n} (\Gamma_k^{(2)})^T_{j_T i_T m n k l} \Phi^{i_T k l} \right\} \quad (6.25)$$

die Operatoren $(\Gamma_k^{(2)})^S_{j_S i_S}$, $(\Gamma_k^{(2)})^V_{j_V i_V m k}$ und $(\Gamma_k^{(2)})^T_{j_T i_T m n k l}$ in den Ordnungen $\mathcal{O}(\bar{\omega}^0)$, $\mathcal{O}(\bar{\omega})$ und $\mathcal{O}(\partial\bar{\omega}^0)$ bestimmen.

Die Indizes i_S , i_V und i_T numerieren dabei die einzelnen Felder der betreffenden Spezies. Des weiteren beinhalte die Definition eines Skalars vom Typ i_S auf dem Niveau von $\Gamma_k^{(2)}$ für die betreffende Zeile bzw. Spalte die Reskalierungen $\bar{\mu}^{a_S}$ und $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^{b_S}$; für Vektoren und Tensoren gelte Entsprechendes.

Dann läßt sich sektorweise ein *reduzierter Operator* $\tilde{\Gamma}_k^{(2)}$ für die Skalare

$$(\Gamma_k^{(2)})^S_{j_S i_S} =: \bar{\mu}^{a_S} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_S} (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})^S_{j_S i_S} \bar{\mu}^{a_S} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_S}, \quad (6.26)$$

die Vektoren

$$(\Gamma_k^{(2)})^V_{j_V i_V m k} =: \bar{\mu}^{a_V} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_V} (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})^V_{j_V i_V m k} \bar{\mu}^{a_V} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_V} \quad (6.27)$$

und die Tensoren

$$(\Gamma_k^{(2)})^T_{j_T i_T m n k l} =: \bar{\mu}^{a_T} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_T} (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})^T_{j_T i_T m n k l} \bar{\mu}^{a_T} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_T} \quad (6.28)$$

definieren, in dem die Reskalierungen noch nicht berücksichtigt sind. Insbesondere wirken die inversen $\sqrt{-\square}$ -Operatoren nach partieller Integration als selbstadjungierte Operatoren zwar nach rechts, doch sollen sie an dieser Stelle noch nicht explizit auf das x -abhängige v_μ in den Operatoren zu ihrer Rechten angewandt werden. Die erforderliche Reskalierung ist für jedes Matrixelement einzeln zu bestimmen: Sie hängt davon ab, welche beiden Felder miteinander gekoppelt werden und wie diese jeweils mit $\bar{\mu}$ und $\sqrt{-\square}$ zu skalieren sind.

Im Anhang berechnen wir dann die *reduzierte quadratische Form*

$$\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}}[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \Phi^{j_S} (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{j_S i_S}^S \Phi^{i_S} + \Phi^{j_V m} (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{j_V i_V m k}^V \Phi^{i_S k} + \Phi^{j_T mn} (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{j_T i_T mnkl}^T \Phi^{i_T kl} \right\}.$$

im Graviton- und im Geistsektor. Die Operatoren $(\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{j_S i_S}^S$, $(\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{j_V i_V m k}^V$ und $(\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{j_T i_T mnkl}^T$ sind komponentenweise in Anhang H angegeben. (Hier haben wir ein Resultat vorweggenommen, das wir erst ableiten werden, nämlich die Tatsache, daß die gesamte Rechnung in den drei Sektoren der skalaren, der vektoriellen und der tensoriellen Felder separat ausgeführt werden kann.)

Die Reskalierungen des freien Anteils sind einfach zu berücksichtigen, da zwischen den Feldern kein x -abhängiges Objekt steht, auf das die Operatoren $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ wirken könnten. Wir können für diese folgende Regeln angeben: Bezüglich der $\bar{\mu}$ -Reskalierung sind die Matrixelemente im Gravitonsektor, die zwei $\bar{\varepsilon}$ -Komponentenfelder miteinander koppeln, mit $\bar{\mu}^{-1}$ zu multiplizieren, die $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Kopplungen hingegen mit $\bar{\mu}$; die gemischten Komponenten werden bezüglich der Massenskala nicht reskaliert. Im Geistsektor sind die $\bar{\xi}$ - ξ -Komponenten mit $\bar{\mu}^{-1}$ und die $\bar{\Upsilon}$ - Υ -Komponenten mit $\bar{\mu}$ zu reskalieren; die gemischten Komponenten erfahren auch hier keine Modifikation.

Bezüglich der $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ -Reskalierung liest man an (6.11), (6.12), (6.20) und (6.22) folgende Systematik ab: Die Skalare $\{a, d\}$ aus der Vielbein-Zerlegung werden mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^2$ reskaliert, die Vektoren $\{b^m, c^m, d^m\}$ mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^1$ und der Tensor $\{d^{mn}\}$ mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^0 \equiv 1$, also gar nicht. (Hier haben wir wie im gesamten Anhang alle Indizes unter Verwendung von Hintergrundvielbeinen auf Lorentz-Indizes umgeschrieben.) In der Zerlegung der Spinzusammenhangsfluktuation sind die Skalare $\{B, D\}$ mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^3$, die Vektoren $\{A^m, B^m, C^m, D^m\}$ mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^2$ und die Tensoren $\{B^{mn}, D^{mn}\}$ mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^1$ zu multiplizieren. Im Geistsektor werden die Grassmann-wertigen Skalare $\{\bar{f}, f\}$ in der Zerlegung der Diffeomorphismus-Geister mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^1$ reskaliert, die transversalen Vektoren $\{\bar{g}_m, g^m\}$ hingegen gar nicht. In der Zerlegung der Lorentz-Geister treten nur Vektoren $\{\bar{F}_m, \bar{G}_m, F^m, G^m\}$ auf, die allesamt mit $(\frac{1}{\sqrt{-\square}})^1$ zu multiplizieren sind.

6.3.1 Der freie Anteil

Nach diesen Reskalierungen ergibt sich der in Anhang F berechnete freie Anteil (F.60) der quadratischen Form im Gravitonsektor zu

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}]_{\bar{e}=\text{const}, \bar{\omega}=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \times \\
& \times \left\{ \begin{pmatrix} a \\ d \\ B \\ D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{(1+\beta_D)^2}{\alpha_D} \square \bar{\mu}^{-1} & 3\left(2\Lambda_k - \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} \square\right) \bar{\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 3\left(2\Lambda_k - \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} \square\right) \bar{\mu}^{-1} & 3\left(4\Lambda_k - 3\frac{\beta_D^2}{\alpha_D} \square\right) \bar{\mu}^{-1} & 6\sqrt{-\square} & -\frac{6}{\gamma_k} \sqrt{-\square} \\ 0 & 6\sqrt{-\square} & 3\bar{\mu} & -\frac{3}{\gamma_k} \bar{\mu} \\ 0 & -\frac{6}{\gamma_k} \sqrt{-\square} & -\frac{3}{\gamma_k} \bar{\mu} & 3\bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \\ B \\ D \end{pmatrix} \right. \\
& + \begin{pmatrix} b^m \\ c^m \\ A^m \\ D^m \\ d^m \\ B^m \\ C^m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha'_L} \bar{\mu}^{-1} & -\left(2\Lambda_k + \frac{1}{2\alpha'_L}\right) \bar{\mu}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(2\Lambda_k + \frac{1}{2\alpha'_L}\right) \bar{\mu}^{-1} & -\left(\frac{\square}{\alpha_D} - \frac{1}{2\alpha'_L}\right) \bar{\mu}^{-1} & 0 & 2\sqrt{-\square} & 0 & -\frac{2}{\gamma_k} \sqrt{-\square} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} & 0 & -\frac{1}{\gamma_k} \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{-\square} & \bar{\mu} & \bar{\mu} & -\frac{2}{\gamma_k} \sqrt{-\square} & -\frac{1}{\gamma_k} \bar{\mu} & -\frac{1}{\gamma_k} \bar{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\gamma_k} \sqrt{-\square} & 2\left(2\Lambda_k + \frac{1}{\alpha'_L}\right) \bar{\mu}^{-1} & 2\sqrt{-\square} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\gamma_k} \sqrt{-\square} & -\frac{1}{\gamma_k} \bar{\mu} & -\frac{1}{\gamma_k} \bar{\mu} & 2\sqrt{-\square} & \bar{\mu} & \bar{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma_k} \bar{\mu} & 0 & \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_m \\ c_m \\ A_m \\ D_m \\ d_m \\ B_m \\ C_m \end{pmatrix} \\
& + \left. \begin{pmatrix} d^{mn} \\ B^{mn} \\ D^{mn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2\Lambda_k \bar{\mu}^{-1} & -\sqrt{-\square} & \frac{1}{\gamma_k} \sqrt{-\square} \\ -\sqrt{-\square} & -\frac{\bar{\mu}}{2} & \frac{\bar{\mu}}{2\gamma_k} \\ \frac{1}{\gamma_k} \sqrt{-\square} & \frac{\bar{\mu}}{2\gamma_k} & -\frac{\bar{\mu}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{mn} \\ B_{mn} \\ D_{mn} \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Des weiteren nimmt der freie Anteil der Geistwirkung bezüglich der obigen Feldzerlegung die Form

$$\begin{aligned} & \Gamma_{k \text{ gh}}^{(0)}[\xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}] \\ &= - \int d^4x \bar{e} \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{g}_m \\ \bar{F}_m \\ \bar{G}_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (1 + \beta_D)\square\bar{\mu}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{-\square}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{-\square}}{2} & \frac{\bar{\mu}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\mu}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g^m \\ F^m \\ G^m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.30)$$

an.

Wir erkennen zunächst, daß der die freie quadratische Form vermittelnde Operator im Graviton- und im Geistsektor (bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ in ersterem) wie gewünscht die Dimension einer Masse besitzt. Für ein reelles γ_k ist er selbstadjungiert, und wie im Falle des Dirac-Operators treten auch hier in den gemischten Komponenten die ersten Ableitungen auf.

Wir haben dabei in der obigen Darstellung die Komponentenfelder nicht mehr in der ursprünglichen $(\bar{\varepsilon}, \bar{\tau})$ -Reihenfolge angeordnet. Bei genauerer Betrachtung stellt man allerdings fest, daß in (6.29) die Ableitungsoperatoren erster Ordnung, $\sqrt{-\square}$, genau in den Matrixelementen auftreten, die ein Komponentefeld der $\bar{\varepsilon}$ -Zerlegung mit einem der $\bar{\tau}$ -Zerlegung koppeln. Zudem bildet im Geistsektor für $\beta_D = -1$ der Eigenraum der reinen Gradientenfelder einen nichttrivialen Kern des freien Anteils von $\Gamma_{k \text{ gh}}^{(2)}$. Die skalare Mode wird dann singulär, was mit unseren Überlegungen zu den Nullmoden des freien Faddeev-Popov-Operators aus Abschnitt 4.2.1 übereinstimmt.

Wir können aus der Gestalt dieses Operators im Graviton- und im Geistsektor nun zwei Schlüsse ziehen, die für den weiteren Fortgang unserer Rechnung von Bedeutung sind. Der erste hängt mit der gewählten Reihenfolge der Komponentenfelder zusammen, die gerade einer *paritätsgeordneten Darstellung* des Operators entspricht. Wir haben dazu die Komponentenfelder in echte Tensoren und Pseudotensoren nullter, erster und zweiter Stufe unterteilt. Zur ersten Klasse zählen dabei Objekte, in deren Definition eine gerade Anzahl von $O(4)$ -Levi-Civita-Tensoren eingeht, denn diese ändern unter einer P- oder

T-Transformation ihr Vorzeichen nicht. Die echten Tensoren unserer Zerlegung enthalten entweder keinen oder zwei Epsilon-Tensoren. In den Pseudotensoren hingegen tritt eine ungerade Anzahl von Levi-Civita-Tensoren auf; im Falle der von uns betrachteten Komponentenfelder handelt es sich jeweils um genau einen. Daher wechseln sie bei einer Raumspiegelung oder Zeitumkehr ihr Vorzeichen. Die echten Skalare sind durch $\{a, d, B\}$ gegeben, den einzigen Pseudoskalar stellt der Spuranteil $\{D\}$ dar. Des weiteren sind $\{b^m, c^m, A^m, D^m\}$ und $\{d^{mn}, B^{mn}\}$ echte Vektoren bzw. echte Tensoren, und ihre Pseudo-Pendants sind durch $\{\bar{d}^m, \bar{B}^m, \bar{C}^m\}$ und $\{\bar{D}^{mn}\}$ gegeben. Im skalaren, im Vektor- und im Tensor-Sektor koppeln dann auf den zugehörigen beiden Hauptdiagonalblöcken jeweils echte Tensoren oder Pseudo-Tensoren untereinander zu echten Skalaren, die P- und T-invariant sind. Auf den Nebendiagonalblöcken hingegen mischen echte und Pseudo-Tensoren zu Pseudo-Skalaren, die die P- und T-Invarianz verletzen.

Man sieht, daß diese paritätsungeraden Kopplungen alle proportional zum inversen Immirzi-Parameter sind, da gerade der Immirzi-Term der Wirkung einen pseudoskalaren Beitrag hinzufügt; dies wurde in Abschnitt 2.2 gezeigt. Die paritätsgeraden Hauptdiagonalblöcke sind hingegen alle unabhängig von γ_k . Demgegenüber ist die Geistwirkung ein echter Skalar, der seinerseits aus zwei echten Skalaren $\{\bar{f}, f\}$, vier echten Vektoren $\{\bar{g}_m, \bar{F}_m, g^m, F^m\}$ und zwei Pseudovektoren $\{\bar{G}_m, G^m\}$ gebildet wird und somit bezüglich des Paritätsgrades eine entsprechende Blockstruktur aufweist.

Die zweite wichtige Eigenschaft des freien Anteils von $\Gamma_k^{(2)}$ besteht in dem Umstand, daß dieser Operator überhaupt in einen skalaren, einen Vektor- und einen Tensorsektor zerfällt. In gewisser Hinsicht ist dies nicht überraschend, denn die einzigen Tensorstrukturen, die im freien Sektor Tensoren unterschiedlicher Stufe miteinander koppeln könnten, wären die partielle Ableitung ∂ und der Levi-Civita-Tensor. Da jedoch alle beteiligten Felder transversal und die Tensoren zudem symmetrisch sind, verschwinden alle derartigen Terme. Diese Beobachtung hat für den weiteren Fortgang eine wichtige Konsequenz, zu deren Erläuterung wir an dieser Stelle etwas vorgreifen:

Im Zuge der Berechnung der rechten Seite der Propertime-Gleichung (3.28) werden wir das Exponential dieses Operators mit dem Wechselwirkungsanteil von $\Gamma_k^{(2)}$ multiplizieren und dann die Spur dieses Produktes berechnen. Die sektorweise Blockstruktur des freien Anteils bleibt auch nach dem Exponentieren erhalten, so daß wir schematisch geschrieben die Spur des Produkts eines Operators allgemeiner Struktur und eines blockdiagonalen

Operators zu bilden haben, für die gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\} = \text{Tr} \begin{pmatrix} aA & bD \\ cA & dD \end{pmatrix} \\ &= \text{Tr}(aA) + \text{Tr}(dD) \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} aA & 0 \\ 0 & dD \end{pmatrix} = \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dieser Identität entnehmen wir, daß es zur Berechnung der Spur ausreichend ist, auch im Wechselwirkungsanteil nur die separaten Skalar-, Vektor- und Tensor-Blöcke zu bestimmen; Matricelemente, die Komponentenfelder aus unterschiedlichen Sektoren miteinander koppeln, tragen nicht zur gesuchten Spur bei und müssen deshalb nicht berechnet werden.

Im Geistsektor gilt eine noch stärkere Aussage, da dort auch innerhalb des Vektorsektors eine Blockstruktur vorliegt und im freien Anteil die $O(4)$ -Geistkomponenten $\{\bar{G}_m, G^m\}$ von den übrigen Vektoren entkoppeln. Daher müssen auch im Wechselwirkungsbeitrag deren Mischungen mit den anderen Vektoren nicht berücksichtigt werden. (Im Geistsektor trägt der $O(4)$ - $O(4)$ -Block selbst jedoch nicht zum Wechselwirkungsanteil bei.)

Wir können also allgemein die Struktur des freien Anteils dazu benutzen, um die Menge der zu berechnenden Beiträge aus dem Wechselwirkungsanteil einzuschränken. Wie bereits angesprochen haben wir dieses Resultat schon in Form der sektorweisen Aufspaltung der quadratischen Form in (6.24) vorweggenommen.

6.3.2 Der Wechselwirkungsanteil

Jetzt ist der Wechselwirkungsanteil, der die Beiträge der Ordnung v und ∂v enthält, zu berechnen. Dies wird in Anhang H für den Graviton- und den Geistsektor durchgeführt. Dabei sind im wesentlichen die in den Zerlegungen auftretenden Ableitungen partiell zu integrieren, wobei im Unterschied zum freien Anteil die Effekte der $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ -Reskalierungen und die $\bar{\mu}$ -Reskalierungen noch nicht berücksichtigt werden. Die resultierenden Tensorstrukturen sind zu kompliziert, um sie hier in geschlossener Form anzugeben, doch wir möchten die allgemeine Vorgehensweise an einem vergleichsweise übersichtlichen Beispiel erläutern.

Dazu betrachten wir in dem Anteil $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(1)}$ die Kopplung der Vektoren b^m und A^k , die keine zusätzlichen Beiträge aus der Eichfixierung erhält. Auf die betrachtete Komponente weisen wir hier wie auch im Anhang in Form einer Unterstreichung hin. Vernachlässigen wir den globalen Vorfaktor $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k}$, so ist diese Komponente gegeben durch

Komponente $A^m - b^k$:

$$\begin{aligned} & \int d^4x (\partial_\beta b^m) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu n^{(\pm)b}{}_l v_\mu \right] \partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} \\ &= \int d^4x b^m \left[\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu n^{(\pm)b}{}_l (\partial_\beta v_\mu) \right] \partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} . \end{aligned}$$

Hier haben wir die Konstanz des Hintergrundvielbeins ausgenutzt sowie den Umstand, daß der zweite Beitrag, der entsteht, wenn die partielle Ableitung an v_μ vorbei wirkt, aufgrund der Kontraktion der beiden Ableitungen mit der Epsilon-Tensordichte verschwindet. Übertragen wir die Antisymmetrisierung in $\partial^{[a} A^{l]}$ auf die Tensorstruktur der quadratischen Form, so erhalten wir

Komponente $A^m - b^k$:

$$\int d^4x b^m \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (K_{abcm}^{(\gamma_k)} n^{(\pm)b}{}_l - K_{lbcm}^{(\gamma_k)} n^{(\pm)b}{}_a) \bar{e}^c{}_\nu (\partial_\beta v_\mu) \right] \partial_\alpha \partial^a A^l .$$

Jetzt kontrahieren wir jeweils die beiden Levi-Civita-Tensoren aus dem Anteil von $K^{(\gamma_k)}$, der nicht von $\frac{1}{\gamma_k}$ abhängt, über das Hintergrundvielbein mit $\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}$ und erhalten unter Ausnutzung der Transversalität der Felder schließlich

Komponente $A^m - b^k$:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[((\partial_b v_m) - (\partial_m v_b)) \square + ((\partial_m v_a) - (\partial_a v_m)) \partial^a \partial_b \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}{}_{ma} \varepsilon^{prs}{}_l + \eta_{ml} n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s \right\} A^l . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Hier haben wir wiederum alles auf $O(4)$ -Indizes umgeschrieben.

Wir können an diesem Ausdruck eine typische Struktur ablesen, die wir bereits im Kontext des freien Anteils angesprochen haben und die sich auch auf alle übrigen Matrixelemente erstreckt. Hier werden zwei echte Vektoren miteinander gekoppelt, und der

Beitrag, der unabhängig von $\frac{1}{\gamma_k}$ ist, enthält keinen $O(4)$ -Levi-Civita-Tensor. Bei anderen Feldern mit echtem Tensorcharakter treten in der Ordnung $\mathcal{O}((\frac{1}{\gamma_k})^0)$ auch zwei dieser Tensoren auf, doch liegt hier stets P- und T-Invarianz vor. Der Beitrag, der proportional zu $\frac{1}{\gamma_k}$ ist, enthält hingegen genau einen Levi-Civita-Tensor und induziert somit die P- oder T-Verletzung. Dies trifft auch auf den zweiten Diagonalblock in der paritätsgeordneten Darstellung zu, der Pseudotensoren mit Pseudotensoren koppelt. In den beiden paritätsungeraden Nebendiagonalblöcken ist der Paritätsgrad der beiden Beiträge der Ordnung $(\frac{1}{\gamma_k})^0$ und $(\frac{1}{\gamma_k})^1$ in den Matrixelementen gerade vertauscht. In beiden Fällen koppeln die von $\frac{1}{\gamma_k}$ unabhängigen Beiträge also zu echten Skalaren, die zu $\frac{1}{\gamma_k}$ proportionalen Beiträge hingegen zu Pseudoskalaren, so daß sich dies in konsistenter Weise zusammenfügt.

Darüber hinaus läßt sich an (6.31) noch eine Subtilität diskutieren, die im Zuge dieser Rechnung beachtet werden muß. Im paritätsgeraden Beitrag wirkt in Form von ∂_m in zwei Termen die partielle Ableitung bezüglich der Komponente des Feldes b^m , das in der quadratischen Form links auftritt, auf v_μ . Wir könnten diese Ableitung partiell integrieren. Da b^m transversal ist, würde ∂_m dann mit umgekehrtem Vorzeichen am Vektorfeld v_μ vorbei nach rechts wirken. Der resultierende Operator ist von der in (6.31) angegebenen Form verschieden. Wir werden bei der Berechnung der Spur feststellen, daß die beiden Terme in der letztgenannten Form nicht zu dieser beitragen, wohingegen sie dies in der angegebenen Form (6.31) sehr wohl tun.

Diese Ambiguität ist letztlich darin begründet, daß die reelle quadratische Form (6.24) nicht in eindeutiger Weise auf einen hermiteschen Operator $\Gamma_k^{(2)}$ führt. Vielmehr erlaubt die Transversalität der Felder in erster Ordnung in v_μ die Addition von Nullrichtungen der Form

$$\begin{aligned} & \int d^4x \bar{e} b^m [\dots ((\partial_m v_a) + v_a \partial_m)] A^k \\ &= \int d^4x \bar{e} (\partial_m b^m) [-\dots v_a] A^k = 0. \end{aligned}$$

Um einen hermiteschen Operator $\Gamma_k^{(2)}$ zu definieren, müssen wir daher eine bestimmte Konvention festlegen, nach der Ambiguitäten dieser Art zu behandeln sind. Isolieren wir

im obigen Matrixelement den betreffenden Beitrag gemäß

$$\int d^4x \bar{e} b^m [n^{(\pm) b}{}_k ((\partial_m v_a) \partial^a \partial_b - (\partial_m v_b) \square)] A^k ,$$

so finden wir im transponierten Matrixelement das entsprechende Gegenstück

$$\int d^4x \bar{e} A^k [-n^{(\pm) b}{}_k ((\partial_m v_a) \partial^a \partial_b - (\partial_m v_b) \square)] b^m$$

mit antisymmetrischem $n^{(\pm)}$. Vernachlässigen wir zweite und höhere Ableitungen von v_μ , so gehen diese beiden Komponenten des Operators auch nach Abstreifen der Felder und ohne explizite Bezugnahme auf deren Transversalität durch partielle Integration auseinander hervor und sind somit zueinander adjungiert. Schreiben wir den zweideutigen Term aus (6.31) hingegen isoliert in der alternativen Form

$$\int d^4x \bar{e} b^m [-n^{(\pm) b}{}_k (v_a \partial^a \partial_b \partial_m - v_b \partial_m \square)] A^k ,$$

so sind in der transponierten Komponente noch Terme zu ergänzen, die zwar auf dem Niveau der quadratischen Form verschwinden, die auf Operatorniveau jedoch benötigt werden, um dessen Hermitizität zu gewährleisten. Dieses Matrixelement ist dann von der Form

$$\int d^4x \bar{e} A^k [-n^{(\pm) b}{}_k (((\partial_m v_a) + v_a \partial_m) \partial^a \partial_b - ((\partial_m v_b) + v_b \partial_m) \square)] b^m .$$

Die Wirkung der Ableitungen entlang der transversalen Richtungen könnte auf Operatorniveau durch Einfügen transversaler Projektoren zur Linken und zur Rechten des Matrixelements explizit berücksichtigt werden, wobei die Wirkung dieser Ableitungen auf die Projektoren dann verschwände. Dies führt die zweite Darstellung auf die erste zurück. Zweideutige Terme der geschilderten Art schreiben wir daher stets in der ersten der beiden dargestellten Formen, in der man die entsprechende partielle Ableitung immer auf das Vektorfeld v_μ anwendet. So eliminieren wir in konsistenter Weise die transversalen Richtungen aus $\Gamma_k^{(2)}$ und finden stets paarweise Entsprechungen zwischen zueinander adjungierten Matrixelementen.

Schließlich bestätigen wir in Anhang I die Korrektheit unserer Rechnung, indem wir auch

auf dem Niveau der Komponentenfelder unter Vernachlässigung der Ordnung $\mathcal{O}(\partial^2 v)$ die Selbstadjungiertheit des Wechselwirkungsanteils der quadratischen Form durch partielles Integrieren explizit nachprüfen. Wir haben somit einen selbstadjungierten Operator $\Gamma_k^{(2)}$ erster Ordnung zur Hand, der alle erforderlichen Beiträge enthält und als Argument der rechten Seite der Propertime-Gleichung (3.28) dienen soll. Die explizite Umsetzung wird im folgenden Kapitel erläutert.

Kapitel 7

Die Auswertung der Flußgleichung

7.1 Eine Propertime-Gleichung für Gravitation im First-Order-Zugang

Unterdrücken wir wie bereits in Abschnitt 5.3 aus Gründen der Übersichtlichkeit die Indexstruktur der Operatoren, so bezeichnet in der Zerlegung

$$\Gamma_k^{(2)} = H + V = H_0 + \frac{1}{\gamma_k} \bar{H} + V \quad (7.1)$$

der Operator H_0 den paritätsgeraden, blockdiagonalen Anteil des freien inversen Propagators H , der unabhängig vom Immirzi-Parameter ist, während \bar{H} den paritätsungeraden Anteil von H darstellt. Dieser besitzt in der paritätsgeordneten Darstellung nur Einträge auf den Nebendiagonalblöcken, die alle proportional zu $\frac{1}{\gamma_k}$ sind; man kann seine Gestalt unmittelbar der freien quadratischen Form (6.29) entnehmen. Die Eichfixierungsterme tragen nur zu H_0 bei. Da der Geistsektor bezüglich der paritätsgeordneten Darstellung blockdiagonal und unabhängig vom Immirzi-Parameter ist, verschwindet dort \bar{H} , d.h. $\bar{H}^{\text{gh}} \equiv 0$. Der Wechselwirkungsanteil V hingegen enthält alle Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega})$ und $\mathcal{O}(\partial\bar{\omega})$. Wir wollen ihn an dieser Stelle nicht weiter aufspalten, so daß er sowohl Matrixelemente der Ordnungen $(\frac{1}{\gamma_k})^0$ und $(\frac{1}{\gamma_k})^1$ als auch paritätsgerade und -ungerade Beiträge in den Haupt- und Nebendiagonalblöcken besitzt. Wir nehmen jedoch an, daß an dieser Stelle die $\bar{\mu}$ - und $\sqrt{-\square}$ -Reskalierungen bereits durchgeführt worden sind. Ferner beziehen wir uns nun auf

die konkreten Hintergrund-Konfigurationen $\bar{e}^a{}_\mu = \kappa \delta^a{}_\mu = \text{const}$ und $\bar{\omega}^{(\pm)ab}{}_\mu = \frac{1}{2}n^{(\pm)ab}v_\mu$.

Die zentrale Beobachtung besteht in der Tatsache, daß der freie Anteil H_0 in Blöcke zerfällt, so daß wir H_0 in der Form

$$H_0 = H_0^{\text{S}} \oplus H_0^{\text{VI}} \oplus H_0^{\text{VII}} \oplus H_0^{\text{T}} \oplus H_0^{\text{ghS}} \oplus H_0^{\text{ghV}}$$

schreiben können. Wir haben dabei ebenfalls der Übersichtlichkeit wegen den Vektorblock im Gravitonsektor in zwei Unterblöcke *VI* und *VII* aufgespalten. Wir werden diese Operatoren in Kürze explizit angeben. Dabei besitzt der Raum der Skalare die Dimension eins, der Raum der transversalen Vektoren ist dreidimensional, und der der transversalen spurlos-symmetrischen Tensoren besitzt die Dimension fünf; wir schreiben entsprechend $d_{\text{S}} \equiv d_{\text{ghS}} = 1$, $d_{\text{V}} \equiv d_{\text{ghV}} = 3$ und $d_{\text{T}} = 5$.

Zunächst stellen wir fest, daß aufgrund dieser Struktur das Spektrum von H_0 analytisch berechnet werden kann. Wir werden dies ausnutzen, indem wir die Propertime-Gleichung auf diesen Operator anwenden.

Da die gewählte Parametrisierung der Gravitonfluktuationen und Geistfelder die angegebenen Massendimensionen der Komponentenfelder impliziert, besitzt der Operator $\Gamma_k^{(2)}$ nach der Funktionalableitung ebenfalls eine Dimension. Die als Wirkungsfunktional dimensionslose quadratische Form ist gegeben als Raumzeitintegral eines Objektes der Massendimension 4. Die reskalierten Gravitonfluktuationen besitzen die Massendimension $\frac{1}{2}$, die Geistfelder hingegen die Massendimension $\frac{3}{2}$, so daß man nach der Funktionalableitung im ersten Fall einen Operator der Dimension 3 (das Produkt aus $\frac{1}{16\pi G_k}$ und einem Dirac-artigen inversen Propagator der Dimension 1), im zweiten Fall hingegen einen inversen Dirac-Propagator der Dimension einer Masse erhält. Für die paritätsgeraden freien Beiträge H_0 werden wir die konkrete Form in Kürze angeben. Zudem erhält man eine vierdimensionale Delta-Distribution, die gemäß unserer Konvention, in der die Koordinaten die Dimension einer Länge tragen, die Massendimension 4 besitzt, doch dies ist im Sinne eines dimensionsbehafteten Index zu verstehen. Das innere Produkt enthält eine dimensionsvolle Summe über diesen Index in Form einer x -Integration, die die Massendimension der Delta-Distribution kompensiert und die auftritt, wenn wir die Spur auf der rechten Seite der Propertime-Gleichung explizit berechnen. Unmittelbar in der Ortsdarstellung ausgewertet, enthielte auch die Spur „Tr“ ein solches Integral. Dieser Dimensionsaspekt muß daher

nicht berücksichtigt werden, so daß wir auf der rechten Seite der Propertime-Gleichung nur die Matrixoperatoren reskalieren müssen, um hier in Übereinstimmung mit der linken Seite ebenfalls ein dimensionsloses Objekt zu erhalten. Wir wählen dazu auch hier den Massenparameter $\bar{\mu}$. Aus der Definition des Funktionals Γ_k über eine renormierungsgruppenverbesserte Ein-Loop-Determinante ergibt sich zunächst

$$\Gamma_k - S = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \ln \left(\frac{\Gamma_k^{\text{grav}}}{\bar{\mu}^3} \right) - 2 \text{Tr} \ln \left(\frac{\Gamma_k^{\text{gh}}}{\bar{\mu}} \right) \right\}. \quad (7.2)$$

Der relative Vorfaktor 2 vor der Geistspur ist darauf zurückzuführen, daß wir hier in schematischer Schreibweise die Geistwirkung der Grassmann-wertigen Geist- und Antigeist-Felder $\varphi \in \{\xi, \Upsilon\}$ bzw. $\bar{\varphi} \in \{\bar{\xi}, \bar{\Upsilon}\}$ in der Form

$$- \int d^4x \bar{e} \bar{\varphi} \Omega \varphi$$

und *nicht* in der Form

$$- \int d^4x \bar{e} \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix} \equiv -2 \int d^4x \bar{e} \bar{\varphi} \Omega \varphi$$

darstellen.

Für die weiteren Untersuchungen werden wir jetzt den Ausdruck auf der rechten Seite von (7.2) geeignet manipulieren. Dabei finden die Umformungen zunächst auf schematischem Niveau statt; die explizite Realisierung der Spur wird später angegeben. Zudem beschränken wir uns auf den Gravitonsektor, da die einzelnen Schritte unmittelbar auf den Geistsektor zu übertragen sind. In ersterem gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{H^{\text{grav}} + V^{\text{grav}}}{\bar{\mu}^3} \right) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{H^{\text{grav}}}{\bar{\mu}^3} \left(\mathbb{1} + (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{H^{\text{grav}}}{\bar{\mu}^3} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\mathbb{1} + (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} \right). \end{aligned}$$

Hier haben wir die beiden Spuren auseinandergezogen. Wir werden im Anschluß an diese Rechnung erläutern, warum das auch für nicht-kommutierende Operatoren zulässig ist. Wir verwenden nun die Taylor-Reihe des Logarithmus, um den zweiten Term bis zur benötigten ersten Ordnung zu entwickeln. Zudem wenden wir die bereits durchgeführte Umformung

noch einmal auf den paritätsgeraden und den paritätsungeraden Anteil des freien inversen Gravitonpropagators H^{grav} an. Dies liefert

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{H^{\text{grav}}}{\bar{\mu}^3} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\mathbb{1} + (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} \right) \\
 = & \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{H_0^{\text{grav}}}{\bar{\mu}^3} \left\{ \mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} (H_0^{\text{grav}})^{-1} \bar{H}^{\text{grav}} \right\} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} \right) + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2) \\
 = & \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{H_0^{\text{grav}}}{\bar{\mu}^3} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} \right) + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2) \\
 = & \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H_0^{\text{grav}})^2 (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^{-2} \right) + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2)
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

mit

$$\mathcal{M} := (H_0^{\text{grav}})^{-1} \bar{H}^{\text{grav}} .$$

Des weiteren möchten wir den ersten und den letzten der drei Terme in (7.3) sowohl im Graviton- als auch im Geistsektor in der Eigenbasis von H_0 berechnen. Wir haben den ersten Term quadriert und den dritten Term mit $(H_0^{\text{grav}})^2$ erweitert und dabei die Zyklizität der Spur ausgenutzt, um im folgenden die Operatoren $\ln((H_0^{\text{grav}})^2)$ und $(H_0^{\text{grav}})^{-2}$ über die bereits angegebenen Eigenzeitintegrale darzustellen. Da (H_0^{grav}) hermitesch ist, ist $(H_0^{\text{grav}})^2$ ein positiv-definiter Operator (wir mußten den Ursprung $p^2 = 0$ aus dem Impulsraum entfernen, um Nullmoden in $\Gamma_k^{(2)}$ auszuschließen). Für $\bar{\lambda}_0^{\text{grav}} \in \text{spec}(H_0^{\text{grav}})$ mit $\bar{\lambda}_0^{\text{grav}} \in \mathbb{R}$ führt dies auf eine erwünschte Dämpfung der Form $e^{-s(\bar{\lambda}_0^{\text{grav}})^2}$; für den Geistsektor gilt Entsprechendes. Zudem lassen sich über ein Abschneiden der Propertime-Integration, dessen Systematik wohlbekannt ist, die auftretenden Spuren regularisieren. Den zweiten Term können wir aufgrund einiger bemerkenswerter algebraischer Eigenschaften von \mathcal{M} direkt berechnen, und seine Regularisierung ist ebenfalls von einfacher Form.

Zunächst begründen wir jedoch, warum wir unter der Spur auch für nicht-kommutierende Operatoren den Logarithmus eines Produktes als Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren schreiben dürfen. In erster Ordnung gilt zunächst

$$\text{Tr} \ln(A + \delta A) - \text{Tr} \ln A = \delta \text{Tr} \ln A + \mathcal{O}(\delta A^2) .$$

Die Variation des Exponentialis eines Operators ist gegeben durch [80]

$$\delta e^B = \int_0^1 dt e^{(1-t)B} \delta B e^{tB} .$$

Wenden wir dies auf die Propertime-Darstellung des Logarithmus an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta \text{Tr} \ln A &= \delta \text{Tr} \left(- \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-sA} \right) \\ &= \text{Tr} \left(- \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^1 dt \{ e^{-s(1-t)A} (-s \delta A) e^{-stA} \} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\left(\int_0^1 dt \right) \left\{ \int_0^\infty ds e^{-sA} \right\} \delta A \right) \\ &= \text{Tr} \left(A^{-1} \delta A \right) . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dabei haben wir die Zyklizität der Spur ausgenutzt, die alle Ordnungsambiguitäten auflöst. Insgesamt liefert dies

$$\text{Tr} \ln(A + \delta A) = \text{Tr} \ln A + \text{Tr} \left(A^{-1} \delta A \right) + \mathcal{O}(\delta A^2) ,$$

was auf linearem Niveau gerade mit einer Entwicklung der Form

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln(A + \delta A) &= \text{Tr} \ln \{ A(\mathbb{1} + A^{-1} \delta A) \} \\ &= \text{Tr} \ln \{ A \} + \text{Tr} \ln \{ \mathbb{1} + A^{-1} \delta A \} \\ &= \text{Tr} \ln \{ A \} + \text{Tr} \{ A^{-1} \delta A \} + \mathcal{O}(\delta A^2) \end{aligned}$$

übereinstimmt. Da wir bei diesen Umformungen insbesondere keine Annahmen hinsichtlich des Kommutators von A und δA gemacht haben, ist die Behauptung damit gezeigt. In der obigen Rechnung ist dann im ersten Schritt A mit H^{grav} und δA mit V^{grav} , im zweiten Schritt hingegen A mit H_0^{grav} und δA mit \bar{H}^{grav} zu identifizieren.

Lassen wir auf der rechten Seite die Terme, die nicht zu den Beta-Funktionen der betrachteten Kopplungen beitragen, unberücksichtigt, so ist mit $H^{\text{gh}} \equiv H_0^{\text{gh}}$ die unseren

Untersuchungen zugrundeliegende Gleichung durch

$$\Gamma_k - S = \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H_0^{\text{grav}})^2 (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^{-2} \right) - 2 \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} (H_0^{\text{gh}})^{-2} \right) \right\} \quad (7.5)$$

gegeben.

Quantisierung erfordert nun die Definition dieser nicht-existenten Spuren vermöge einer Regularisierung. Anschließend wird die Skalenableitung der rechten Seite den von uns betrachteten Fluß auf dem Theorienraum $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ definieren.

Man erkennt an der rechten Seite von (7.5) auch die bereits angesprochene Invarianz bezüglich eines globalen Vorzeichenwechsels im Geistsektor, der einem Vorzeichenwechsel der Eichbedingungen entspricht.

Da wir nahezu alle Spuren in der Eigenbasis von H_0 berechnen, müssen wir zunächst das Spektrum dieses Operators untersuchen.

7.2 Die Blockstruktur von H_0

Wir geben H_0 blockweise an, indem wir diesen Operator aus der freien quadratischen Form ablesen. Die zweifache funktionale Ableitung bezüglich der Gravitonfelder und der Geister führt zudem auf eine Delta-Distribution. Von den beiden Hintergrundvielbein-Determinanten, die als Vorfaktoren dieser Ableitungen auftreten, hebt sich eine gegen die Hintergrundvielbein-Determinante in $\Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ bzw. $\Gamma_{k \text{ gh}}^{\text{quad}(0)}$ weg.

Des weiteren ist folgendes zu beachten: Bezüglich der $O(4)$ -Indizes ist der freie Anteil im Graviton- und im Geistsektor diagonal. Um jedoch der Transversalitätseigenschaft der beteiligten Felder Rechnung zu tragen, ist dies auf Operator-Niveau nicht durch Einheitsoperatoren in Form entsprechender Kronecker-Symbole, sondern durch symmetrische, transversale Projektoren zu berücksichtigen. Wir bezeichnen sie mit P_S , P_V und P_T für den skalaren, den Vektor- und den Tensor-Sektor. Ohne diese hier näher zu spezifizieren, ist dann der Operator H_0 unter Berücksichtigung aller Indizes von folgender Gestalt:

Skalarer Sektor (a, d, B, D):

$$\begin{aligned}
 H_0^S &\hat{=} (H_0^S)_{j_S}^{i_S} (-\square_x) P_S \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \\
 &= \frac{1}{16\pi G_k} \begin{pmatrix} -\frac{(1+\beta_D)^2}{\alpha_D} \square_x \bar{\mu}^{-1} & 3(2\Lambda_k - \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} \square_x) \bar{\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 3(2\Lambda_k - \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} \square_x) \bar{\mu}^{-1} & 3(4\Lambda_k - 3\frac{\beta_D^2}{\alpha_D} \square_x) \bar{\mu}^{-1} & 6\sqrt{-\square_x} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{-\square_x} & 3\bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\bar{\mu} \end{pmatrix} P_S \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}
 \end{aligned}$$

Erster Block des Vektorsektors (b^m, c^m, A^m, D^m):

$$\begin{aligned}
 H_0^{VI} &\hat{=} (H_0^{VI})_{j_{VI}}^{i_{VI}} (-\square_x) P_V^m \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \\
 &= \frac{1}{16\pi G_k} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha'_L} \bar{\mu}^{-1} & -(2\Lambda_k + \frac{1}{2\alpha'_L}) \bar{\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ -(2\Lambda_k + \frac{1}{2\alpha'_L}) \bar{\mu}^{-1} & -(\frac{\square_x}{\alpha_D} - \frac{1}{2\alpha'_L}) \bar{\mu}^{-1} & 0 & 2\sqrt{-\square_x} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} \\ 0 & 2\sqrt{-\square_x} & \bar{\mu} & \bar{\mu} \end{pmatrix} P_V^m \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}
 \end{aligned}$$

Zweiter Block des Vektorsektors (d^m, B^m, C^m):

$$\begin{aligned}
 H_0^{VII} &\hat{=} (H_0^{VII})_{j_{VII}}^{i_{VII}} (-\square_x) P_V^m \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \\
 &= \frac{1}{16\pi G_k} \begin{pmatrix} 2(2\Lambda_k + \frac{1}{\alpha'_L}) \bar{\mu}^{-1} & 2\sqrt{-\square_x} & 0 \\ 2\sqrt{-\square_x} & \bar{\mu} & \bar{\mu} \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix} P_V^m \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}
 \end{aligned}$$

Tensorsektor (d^{mn}, B^{mn}, D^{mn}):

$$\begin{aligned}
 H_0^T &\hat{=} (H_0^T)_{j_T}^{i_T} (-\square_x) P_V^{mn} \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \\
 &= \frac{1}{16\pi G_k} \begin{pmatrix} -2\Lambda_k \bar{\mu}^{-1} & -\sqrt{-\square_x} & 0 \\ -\sqrt{-\square_x} & -\frac{\bar{\mu}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\mu}}{2} \end{pmatrix} P_V^{mn} \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}
 \end{aligned}$$

Skalarer Block des Geistsektors (\bar{f}, f):

$$\begin{aligned} H_0^{\text{ghS}} &\stackrel{\wedge}{=} (H_0^{\text{ghS}})_{j_{\text{ghS}}}^{i_{\text{ghS}}}(-\square_x) P_S \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \\ &= -(1 + \beta_D) \square_x \bar{\mu}^{-1} P_S \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \end{aligned}$$

Vektorblock des Geistsektors ($\bar{g}_m, \bar{F}_m, \bar{G}_m, g^m, F^m, G^m$):

$$\begin{aligned} H_0^{\text{ghV}} &\stackrel{\wedge}{=} (H_0^{\text{ghV}})_{j_{\text{ghV}}}^{i_{\text{ghV}}}(-\square_x) P_{V^m k} \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \\ &= - \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\frac{\sqrt{-\square_x}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{-\square_x}}{2} & \frac{\bar{\mu}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\mu}}{2} \end{array} \right) P_{V^m k} \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \end{aligned}$$

Die Indizes $i_S, i_{VI}, i_{VII}, i_T, i_{\text{ghS}}$ und i_{ghV} numerieren dabei in der Reihenfolge der angegebenen Aufzählung wie schon in (6.25) die einzelnen Feldkomponenten durch. Zudem haben wir im Gravitonsektor den Vektorindex $i_V \in \{1, \dots, 7\}$ in zwei Unterindexmengen $i_{VI} \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $i_{VII} \in \{1, 2, 3\}$ aufgespalten, um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten. Wie bereits angesprochen, wird der skalare Block von H_0 im Geistsektor, H_0^{ghS} , für $\beta_D = -1$ singulär.

Diese Blockstruktur hat einen darstellungstheoretischen Hintergrund: Die Anzahl der Tensoren und Pseudotensoren nullter, erster und zweiter Stufe in den Zerlegungen (6.11) und (6.12) stimmt gerade mit den Multiplizitäten der Zustände mit fester Spinparität überein, die in einer entsprechenden Zerlegung der Lorentz-Gruppe in Ref. [55, 56] angegeben wurden. Die Größe der Blöcke ist somit durch diese Multiplizitäten gegeben.

Der Operator H_0 besitzt also zum einen eine den Komponenten der Zerlegung entsprechende Matrixstruktur. Des weiteren hängt er über transversale Projektoren von den Lorentz-Indizes k, l, m, n und über eine Delta-Distribution von den Raumzeit-Koordinaten x und y ab. Die Eigenvektoren dieses Operators faktorisieren demgemäß in drei Anteile.

Hier ist eine weitere Bemerkung angebracht: In der Propertime-Gleichung (7.5) tritt der Operator $(H_0)^{-1}$ auf. Da aber H_0 im Vektor- und im Tensorsektor durch ein Tensorprodukt mit einem nichttrivialen Projektor gegeben ist, sollte dieser inverse Operator nicht existie-

ren. Wir wollen die Projektoren jedoch nicht im Sinne einer Einbettung als Projektoren auf niederdimensionale Unterräume auffassen, sondern vielmehr als Einheitsoperatoren auf diesen Räumen. Beispielsweise stellt P_V den Einheitsoperator auf dem Raum aller transversalen Vektoren dar, auf dem alle seine Eigenwerte gleich $+1$ sind. Gemäß der Identität $P^2 = P$, die einen Projektor definiert, enthält auch der inverse Operator $(H_0)^{-1}$ in jedem Sektor einen Projektor. Wir werden auch bei der noch folgenden Ableitung der Vollständigkeitsrelationen feststellen, daß in diesen die entsprechenden Projektoren die üblichen Einheitsoperatoren ersetzen.

Zur Lösung des Eigenwert-Problems für den Matrixanteil sind die Eigenwerte und Eigenvektoren des d'Alembert-Operators zu diskutieren. Dabei ist eine Subtilität zu beachten, mit der sich der nächste Abschnitt befaßt.

7.2.1 Impulseigenbasen

Der gewählte Hintergrund $\bar{e}^a{}_\mu := \kappa \delta^a{}_\mu \Leftrightarrow \bar{e}_a{}^\mu := \kappa^{-1} \delta_a{}^\mu$ führt nach (A.2) auf eine Hintergrundmetrik mit konstantem konformen Faktor: $\bar{g}_{\mu\nu} = \kappa^2 \eta_{\mu\nu} \Leftrightarrow \bar{g}^{\mu\nu} = \kappa^{-2} \eta^{\mu\nu}$. Dabei ist $\eta_{\mu\nu}$ die übliche flache Minkowski-Metrik, die im Euklidischen gleich der Einheitsmatrix ist. Entsprechend ist die Vielbein-Determinante gegeben durch $\bar{e} = \kappa^4$. Wie üblich definieren wir $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Gesucht werden Eigenfunktionen des Operators $\bar{\square} := \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ mit Eigenwert $-p^2$, d. h. $p^2 \in \text{spec}(-\bar{\square})$. Dazu betrachten wir die Wirkung dieses Operators auf ebene Wellen der Form $\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x}$. Es ist illustrativ, diese mit der Wirkung von $\hat{\square} := \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \equiv \kappa^2 \bar{\square}$ auf diese Funktionen zu vergleichen. Daher führen wir die beiden Sätze $\{\bar{\partial}_\mu, \bar{\partial}^\mu, \bar{\partial}_a, \bar{\partial}^a\}$ und $\{\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}^\mu, \hat{\partial}_a, \hat{\partial}^a\}$ von Operatoren ein, deren Eigenwerte wir mit $\{i\bar{p}_\mu, i\bar{p}^\mu, i\bar{p}_a, i\bar{p}^a\}$ bzw. $\{i\hat{p}_\mu, i\hat{p}^\mu, i\hat{p}_a, i\hat{p}^a\}$ bezeichnen. Dabei sei $\bar{\partial}_\mu = \hat{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu$, und die Operatoren des ersten Satzes gehen durch Anwendung der Hintergrundmetrik bzw. des Hintergrundvielbeins auseinander hervor. Im zweiten Fall wird der jeweilige Index mit der flachen Metrik oder dem Kronecker-Symbol herauf- bzw. heruntergezogen. Wenden wir diese Operatoren auf eine Eigenfunktion der Gestalt $\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x}$ an und definieren wir $p^\mu := \eta^{\mu\nu} p_\nu$, $p_a := \delta_a{}^\mu p_\mu$, $p^a := \delta^a{}_\mu p^\mu$, so erhalten

wir

$$\begin{aligned}
\bar{p}_\mu &= \hat{p}_\mu = \kappa p_\mu, \\
\bar{p}^\mu &= \bar{g}^{\mu\nu} \bar{p}_\nu = \kappa^{-1} p^\mu, & \hat{p}^\mu &= \eta^{\mu\nu} \hat{p}_\nu = \kappa p^\mu \\
\bar{p}_a &= \bar{e}_a^\mu \bar{p}_\mu = p_a, & \hat{p}_a &= \delta_a^\mu \hat{p}_\mu = \kappa p_a \\
\bar{p}^a &= \bar{e}^a_\mu \bar{p}^\mu = p^a, & \hat{p}^a &= \delta^a_\mu \hat{p}^\mu = \kappa p^a.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Mit $p^2 = \eta^{ab} p_a p_b$ ergibt sich für den Operator $\bar{\square} = \bar{\partial}^\mu \bar{\partial}_\mu = \bar{\partial}^a \bar{\partial}_a$ somit der Eigenwert $-\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu = -\bar{p}^a \bar{p}_a = -p^2$, für $\hat{\square} = \hat{\partial}^\mu \hat{\partial}_\mu = \hat{\partial}^a \hat{\partial}_a$ erhalten wir hingegen $-\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\hat{p}^a \hat{p}_a = -\kappa^2 p^2$.

Die bisher aufgetretenen partiellen Ableitungen sowie der aus diesen konstruierte d'Alembert-Operator entsprechen hier offenbar den mit einem Querstrich versehenen Objekten, denn sie wurden bezüglich der Kontraktion mit den Hintergrundstrukturen definiert.

Kehren wir zur ursprünglichen Schreibweise $\square \equiv \bar{\square}$ zurück, so besitzt die Funktion $\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x}$ also die geforderte Eigenschaft, Eigenfunktion des Operators \square mit Eigenwert $-p^2$ zu sein. Wir können daher direkt mittels des über diese modifizierten ebenen Wellen realisierten Basiswechsels in den Impulsraum übergehen und die angegebenen Spektraleigenschaften ausnutzen, ohne die konkrete Form von \bar{e}^a_μ explizit einsetzen und einen entsprechenden Umweg über den flachen Minkowski-Raum gehen zu müssen. Zudem können wir bei der Spurberechnung die Ersetzungen $\partial^a \rightarrow ip^a$ und $\partial_a \rightarrow ip_a$ vornehmen, nachdem wir alles auf $O(4)$ -Indizes umgeschrieben haben. (Wir haben hier die ebenen Wellen symmetrisch normiert, so daß weder im Orts- noch im Impulsraum zusätzliche (2π) -Potenzen in das innere Produkt zu definieren sind.)

Darüber hinaus ist die Vollständigkeitsrelation dieser Eigenfunktionen gegeben durch

$$\int d^4 p \frac{1}{(2\pi)^4} e^{i\kappa p(x-y)} = \frac{1}{\kappa^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} = \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}, \tag{7.7}$$

d. h. der zusätzliche Vorfaktor im Exponenten führt wie gewünscht auf eine tensorielle Delta-Distribution.

Der konforme Faktor κ^2 wird in den ebenen Wellen explizit durch den zusätzlichen Faktor κ im Exponenten berücksichtigt, so daß der Impuls p_μ nach diesem „Zurückziehen“ auf

dem (euklidischen) Minkowski-Raum mit Standardmetrik lebt. Dementsprechend tritt im inneren Produkt auf dem Impulsraum in der obigen Vollständigkeitsrelation kein zusätzlicher Volumenfaktor auf.

Für alle übrigen Teile der Rechnung ist die explizite Gestalt des konstanten Hintergrundvielbeins $\bar{e}^a{}_\mu$ nicht von Belang, so daß wir es an keiner weiteren Stelle spezifizieren müssen. Nachdem wir es dazu verwandt haben, alle Komponenten der quadratischen Form auf $O(4)$ -Indizes umzuschreiben, tritt in dieser nur noch seine Determinante als globaler Vorfaktor auf.

Da einer der drei Bestandteile des Operators H_0 durch eine (matrixwertige) Funktion von \square gegeben ist, enthalten seine Eigenvektoren als einen Anteil eine ebene Welle der Form $\frac{1}{(2\pi)^2} \exp[i \kappa p(x - y)]$.

7.2.2 Die Eigenwerte und Eigenvektoren des Matrixanteils von H_0

Die Anwendung der \square -abhängigen Matrizen $(H_0^S)_{j_S}^{i_S}$, $(H_0^{VI})_{j_{VI}}^{i_{VI}}$, $(H_0^{VII})_{j_{VII}}^{i_{VII}}$, $(H_0^T)_{j_T}^{i_T}$, $(H_0^{\text{ghS}})_{j_{\text{ghS}}}^{i_{\text{ghS}}}$ und $(H_0^{\text{ghV}})_{j_{\text{ghV}}}^{i_{\text{ghV}}}$ auf die ebenen Wellen führt in diesen Operatoren auf die Ersetzungen $-\square \rightarrow p^2$ und somit $\sqrt{-\square} \rightarrow p \equiv \sqrt{p^2}$.

Die Tatsache, daß im Euklidischen im Unterschied zur Lorentzischen Signatur durch $-\square$ ein positiv-definiter Operator definiert wird, ist gerade an dieser Stelle im First-Order-Zugang von wesentlicher Bedeutung. Demgegenüber träten im Rahmen einer Lorentzischen Behandlung sowohl positive als auch negative Eigenwerte auf. Um auch in diesem Fall die Konvergenz der Eigenzeit-Integrale zu gewährleisten, müßte man der Propertime-Gleichung (3.28) statt der Laplace-Darstellung die Fourier-Darstellung zugrunde legen. Dies ersetzt die Gauß-Integrale durch Fresnel-Integrale, so daß keinerlei Konvergenzprobleme entstünden. Allerdings gibt es in der Lorentzischen Signatur keine reellen selbstdualen oder anti-selbstdualen Felder von der Art unseres Hintergrunds $\bar{\omega}^{(\pm)}$, denn dort sind die zugehörigen Eigenwerte nicht durch ± 1 , sondern durch $\pm i$ gegeben. Vom konzeptionellen Standpunkt ist die Wahl der euklidischen Signatur für diese Rechnung nicht entscheidend. Insbesondere greifen wir nicht auf Instanton-Methoden oder andere nicht-störungstheoretische Techniken zurück, die häufig die Wahl einer euklidischen Signatur motivieren.

Im Hinblick auf die Bestimmung des Spektrums der obigen Block-Operatoren haben

wir diese jetzt in ein algebraisches Problem überführt, und die reellen Eigenwerte der resultierenden 2×2 -, 3×3 - und 4×4 -Matrizen können über die Cardanischen Formeln und deren Pendant für Polynome vierten Grades berechnet werden, was in Anhang G.1 durchgeführt wird.

Wir bezeichnen die Eigenwerte mit $\bar{\lambda}_{\alpha_S}^S(p^2)$, $\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2)$, $\bar{\lambda}_{\alpha_T}^T(p^2)$, $\bar{\lambda}_{\alpha_{ghS}}^{ghS}(p^2)$ und $\bar{\lambda}_{\alpha_{ghV}}^{ghV}(p^2)$. Lassen wir den globalen Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ im Gravitonsektor unberücksichtigt, so besitzen sie die Dimension einer Masse. Verschiedene Eigenwerte innerhalb eines Sektors werden mit α_S , α_V , α_T , α_{ghS} und α_{ghV} durchnummeriert; diese Indizes nehmen jeweils die gleichen Werte wie die zugehörigen Indizes der Art i_S , i_V etc. an. Die Anzahl der entsprechenden Komponentenfelder, die den Laufbereich dieser Indizes beschränkt, bezeichnen wir mit $n_S = 4$, $n_V = 7$, $n_T = 3$, $n_{ghS} = 1$ und $n_{ghV} = 3$. Zudem ist es günstig, einen Index χ einzuführen, der die einzelnen Sektoren durchläuft, d. h. symbolisch gilt $\chi \in \{S, V, T, ghS, ghV\}$.

Unter Kenntnis der Eigenwerte reduziert sich die Berechnung der Eigenvektoren dann auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Dies wird in Anhang G.3 ausgeführt. Zu dem Eigenwert $\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2)$, $\alpha_\chi \in \{1, \dots, n_\chi\}$, gehört dann ein Eigenvektor $v_{\alpha_\chi}^\chi$ mit Komponenten $(v_{\alpha_\chi}^\chi)^{i_\chi}(p^2)$ und $i_\chi, j_\chi \in \{1, \dots, n_\chi\}$. Blockweise lautet die Eigenwertgleichung

$$(H_0^\chi)^{i_\chi}_{j_\chi}(p^2) \times (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{j_\chi}(p^2) = \bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2) \times (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{i_\chi}(p^2), \quad \alpha_\chi \in \{1, \dots, n_\chi\}. \quad (7.8)$$

Die Eigenvektoren bilden in jedem Block eine Basis des \mathbb{R}^{n_χ} , und die zugehörigen Vollständigkeits- und Orthogonalitätsrelationen lauten

$$\sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{i_\chi} (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{j_\chi} = \delta_{i_\chi}^{j_\chi} \quad (7.9)$$

und

$$\sum_{i_\chi=1}^{n_\chi} (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{i_\chi} (v_{\beta_\chi}^\chi)^{i_\chi} = \delta_{\beta_\chi}^{\alpha_\chi}. \quad (7.10)$$

mit $\{\delta_{i_\chi}^{j_\chi}\} \equiv \mathbb{1}_{n_\chi \times n_\chi}$. Um eine kovariante Schreibweise zu ermöglichen, benutzen wir zusätzlich den Tensor $\eta^{\alpha_\chi \beta_\chi}$, um den dualen Vektor $v^{\alpha_\chi} := \{\eta^{\alpha_\chi \beta_\chi}\} v_{\beta_\chi}$ zu definieren. Im Euklidischen ist dieser Tensor ebenfalls von der Form $\{\eta^{\alpha_\chi \beta_\chi}\} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_{n_\chi})$. Das

erlaubt, diese Objekte gemäß

$$(v^{\chi}_{\alpha_{\chi}})^{i_{\chi}} \equiv \langle i_{\chi} | \alpha_{\chi} \rangle \quad \text{und} \quad (v^{\chi \alpha_{\chi}})_{i_{\chi}} \equiv \langle \alpha_{\chi} | i_{\chi} \rangle$$

als Matrixelemente der Übergangsabbildungen aufzufassen, die zwischen den beiden Basen vermitteln.

Den letzten Baustein in der Konstruktion der Eigenvektoren von H_0 liefern die Beiträge der Projektoren. Deren Struktur bildet den Gegenstand des nächsten Abschnitts.

7.2.3 Die transversalen Projektoren und deren Eigenvektoren

Der skalare Sektor. Dieser Unterraum besitzt die Dimension $d_S = 1$, so daß hier $P_S \equiv 1$ gilt.

Der Vektor-Sektor. Im Vektorsektor erfüllt der transversale Projektor im Ortsraum die Vollständigkeitsrelation

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^m \partial_k}{\square} + P_{V\ k}^m \left(\frac{-i\partial}{\sqrt{-\square}} \right) \right] \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} = \delta_k^m \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \\ \Leftrightarrow & P_{V\ k}^m \left(\frac{-i\partial}{\sqrt{-\square}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} = \left(\delta_k^m - \frac{\partial^m \partial_k}{\square} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \end{aligned}$$

mit $\partial_k = \bar{e}_k^{\mu} \partial_{\mu}$, $\partial^m = \eta^{mk} \partial_k$ und $\square = \bar{g}^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$. Wir verwenden nun die Vollständigkeitsrelation der modifizierten ebenen Wellen, um die Delta-Distribution darzustellen. Dies liefert

$$\begin{aligned} P_{V\ k}^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \int d^4p \frac{1}{(2\pi)^4} e^{i\kappa p(x-y)} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\delta_k^m - \frac{\partial^m \partial_k}{\square} \right) e^{i\kappa p(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\delta_k^m - \frac{p^m p_k}{p^2} \right) e^{i\kappa p(x-y)}, \end{aligned}$$

wobei wir auf die in Abschnitt 7.2.1 diskutierten Spektraleigenschaften der Operatoren ∂^m , ∂_k und \square zurückgegriffen haben. Wir können dann die Impulsdarstellung des transversalen Projektors zu

$$P_{V\ k}^m(\hat{p}) := \delta_k^m - \frac{p^m p_k}{p^2} \tag{7.11}$$

ablesen. Hierin bezeichnet \hat{p}_μ den Einheitsvektor $\frac{p_\mu}{p}$. Dabei wurde in der Ortsdarstellung von P_V das Argument vergleichsweise umständlich gewählt, um es in der gleichen funktionalen Form durch den Impulseigenwert \hat{p} ersetzen zu können. Bei diesem Darstellungswechsel handelt es sich um eine Fourier-Transformation, die für konform-flache Raumzeiten mit konstantem konformen Faktor existiert und die über die modifizierten ebenen Wellen realisiert wird.

Der Projektor P_V besitzt die gewünschten Eigenschaften:

- $P_V^m(\hat{p})P_V^l(\hat{p}) = P_V^m(\hat{p})$
- $P_V^m(\hat{p})p^k = 0, p_m P_V^m(\hat{p}) = 0$
- $P_V^m(\hat{p})\delta_m^k = 4 - 1 = 3 = P_V^m(\hat{p})P_{V_m}^k(\hat{p}) = d_V$

Die Eigenvektoren, die diesen Unterraum aufspannen, bezeichnen wir mit $t_I^m(\hat{p})$, $I \in \{1, 2, 3\}$. Analog zu Polarisationsvektoren können sie o. B. d. A. als reell angenommen werden. Für eine feste Ausgangskonstellation, bei der beispielsweise der Einheitsvektor \hat{p}_0 in 1-Richtung zeigt, können wir die drei Eigenvektoren mit den übrigen Basisvektoren e_I , $I \in \{1, 2, 3\}$ in 2-, 3- und 4-Richtung identifizieren. Für ein beliebiges \hat{p} erhalten wir die t_I dann durch Anwenden einer Drehung $R(\hat{p})$, die durch den neuen Impulsvektor parametrisiert werden kann. Aus der Orthonormiertheit der ursprünglichen Vektoren

$$e_I^m e_{Jm} = \eta_{IJ}, \quad \{\eta_{IJ}\} = \text{diag}(+1, +1, +1)$$

folgt die der neuen Basisvektoren $\{t_I\}$ über

$$\begin{aligned} t_I^m(\hat{p})t_{Jm}(\hat{p}) &= R(\hat{p})^m_n e_I^n R(\hat{p})^k_m e_{Jk} = R(\hat{p})^m_n R(\hat{p})^k_m e_I^n e_{Jk} \\ &= \delta_n^k e_I^n e_{Jk} = e_I^n e_{Jn} = \eta_{IJ}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Zudem sind die $\{e_I\}$ vollständig in dem Sinne, daß sie den gesamten, zu \hat{p}_0 orthogonalen Unterraum aufspannen, d. h. es gilt

$$e_I^m e_k^I = P_V^m(\hat{p}_0). \quad (7.13)$$

Die neuen Vektoren t_I sind ebenfalls vollständig gemäß

$$\begin{aligned}
 t_I^m(\hat{p})t_n^I(\hat{p}) &= R(\hat{p})^m_k R(\hat{p})_n^l e_I^k e^I_l \\
 &= R(\hat{p})^m_k P_V^k_l(\hat{p}_0) R(\hat{p})_n^l \\
 &= R(\hat{p})^m_l R(\hat{p})_n^l - (R(\hat{p})^m_k \hat{p}_0^k) (R(\hat{p})_n^l \hat{p}_{0l}) \\
 &= \delta_n^m - \hat{p}^m \hat{p}_n \\
 &= P_V^m_n(\hat{p}) .
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Die in den longitudinalen und transversalen Anteil zerfallende Vollständigkeitsrelation im Impulsraum läßt sich somit auch in der Form

$$\begin{aligned}
 \delta_k^m &= \frac{p^m p_k}{p^2} + P_V^m_n(\hat{p}) \\
 &= \hat{p}^m \hat{p}_k + t_I^m(\hat{p}) t_{Ik}(\hat{p})
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

schreiben. Wir verwenden hier die auf dem Unterraum der transversalen Vektoren definierten Tensoren η_{IJ} , η^{IJ} , δ^I_J und δ_I^J , um auf den entsprechenden Index zu wirken. Sie sind im Euklidischen alle von der Form $\text{diag}(+1, +1, +1)$. Die Vektoren $\{t_I\}$ treten sowohl im Graviton- als auch im Geistsektor als Bestandteile der Eigenvektoren im Vektorblock auf.

Der Tensor-Sektor. Wir führen nun einen analogen Projektor für die transversalen spurlos-symmetrischen Tensoren ein, wobei wir bei dessen Konstruktion direkt von der Impulsdarstellung ausgehen. Ein allgemeiner transversaler symmetrischer Tensor läßt sich nach den Basistensoren $\frac{1}{2}(t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m)$ entwickeln. Aus diesen kann der Spuranteil in der Form $P_V^{mn} \eta_{IJ}$ extrahiert werden, wobei dieser mit dem Projektor P_V zu bilden ist, um die Transversalität zu gewährleisten. In

$$\frac{1}{2}(t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m - \iota P_V^{mn} \eta_{IJ})$$

ist also der Vorfaktor ι so zu bestimmen ist, daß die Spur dieses Objekts verschwindet. Man erhält

$$\frac{1}{2}(t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m - \iota P_V^{mn} \eta_{IJ}) \eta_{mn} = \eta_{IJ} - \frac{\iota}{2} 3 \eta_{IJ} ,$$

so daß $\iota = \frac{2}{3}$ zu wählen ist. Die Eigenvektoren zu dem gesuchten Projektor sind somit gegeben durch

$$\frac{1}{2} \left(t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m - \frac{2}{3} P_V^{mn} \eta_{IJ} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m - \frac{2}{3} t^{Km} t_K^n \eta_{IJ} \right).$$

Sie bilden eine Basis des Raums der spurlos-symmetrischen Tensoren auf dem zu \hat{p} orthogonalen Unterraum. Dessen Dimension bezeichnen wir mit $d_T = 5$.

Die Eigenvektoren sind orthogonal, denn es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m - \frac{2}{3} P_V^{mn} \eta_{IJ} \right) \frac{1}{2} \left(t_m^K t_n^L + t_n^K t_m^L - \frac{2}{3} P_{Vmn} \eta^{KL} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_I^K \delta_J^L + \delta_I^L \delta_J^K - \frac{2}{3} \eta_{IJ} \eta^{KL} \right). \end{aligned}$$

Dies stellt die (IJ) - (KL) -Komponente der Identität auf dem Raum der spurlos-symmetrischen Tensoren dar.

Der zugehörige Projektor ist dann analog zu den Vektoren wieder über die Vollständigkeitsrelation der Basistensoren definiert, d. h. es ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m - \frac{2}{3} P_V^{mn} \eta_{IJ} \right) \left(t_k^I t_l^J + t_l^I t_k^J - \frac{2}{3} P_{Vkl} \eta^{IJ} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(P_V^m{}_k P_V^n{}_l + P_V^m{}_l P_V^n{}_k - \frac{2}{3} P_V^{mn} P_{Vkl} \right. \\ & \quad \left. + P_V^m{}_l P_V^n{}_k + P_V^n{}_l P_V^m{}_k - \frac{2}{3} P_V^{mn} P_{Vkl} + 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(P_V^m{}_k P_V^n{}_l + P_V^m{}_l P_V^n{}_k - \frac{2}{3} P_V^{mn} P_{Vkl} \right) \\ &=: P_T^{mn}{}_{kl}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Er weist analog zu seinem Vektor-Gegenstück die Eigenschaften

- $P_T^{mn}{}_{pq} P_T^{pq}{}_{kl} = P_T^{mn}{}_{kl}$
- $p_m P_T^{mn}{}_{kl} = 0$, $p_n P_T^{mn}{}_{kl} = 0$, $P_T^{mn}{}_{kl} p^k = 0$, $P_T^{mn}{}_{kl} p^l = 0$
- $P_T^{mn}{}_{kl} \delta_m^k \delta_n^l = \frac{1}{2} \left(9 + 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = 5 = P_T^{mn}{}_{kl} P_T^{kl}{}_{mn} = d_T$

auf. Zudem kann man leicht überprüfen, daß gemäß

$$P_{\text{T}}^{mn} \frac{1}{2} (t_I^k t_J^l + t_I^l t_J^k - \frac{2}{3} P_V^{kl} \eta_{IJ}) = \frac{1}{2} (t_I^m t_J^n + t_I^n t_J^m - \frac{2}{3} P_V^{mn} \eta_{IJ})$$

die oben angegebenen Tensoren tatsächlich Eigenvektoren dieses Projektors sind.

7.3 Verallgemeinerte Orts- und Impulsdarstellung

Um das Folgende kompakt schreiben und die Zusammenhänge möglichst übersichtlich darstellen zu können, greifen wir auf die Bra- und Ket-Schreibweise der Quantenmechanik zurück. Normieren wir dort die ebenen Wellen, die den Basiswechsel zwischen Orts- und Impulseigenzuständen vermitteln, analog zu den von uns eingeführten modifizierten ebenen Wellen ebenfalls in symmetrischer Weise, so gilt in einer Dimension

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}.$$

Die Vollständigkeitsrelationen nehmen die symmetrische Form

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \mathbb{1} = \int dp |p\rangle \langle p|$$

an, wobei keine zusätzlichen (2π) -Potenzen in eines der beiden inneren Produkte hineinzudefinieren sind. Damit ergibt sich das Matrixelement einer Funktion des Impulsoperators \hat{p} in Ortsdarstellung zu

$$\begin{aligned} \langle x | f(\hat{p}) | y \rangle &= \int dp \int dp' \langle x | p \rangle \langle p | f(\hat{p}) | p' \rangle \langle p' | y \rangle \\ &= \int dp' f(p') \langle x | p' \rangle \langle p' | y \rangle \\ &= \int dp' f\left(\frac{\hbar}{i} \partial_x\right) \frac{1}{2\pi} e^{ip'(x-y)} \\ &= f\left(\frac{\hbar}{i} \partial_x\right) \langle x | y \rangle. \end{aligned}$$

Betrachten wir beispielsweise den Vektor-Sektor des Gravitonanteils, so haben wir zuvor

den abstrakten Operator H_0^V analog zur Ortsdarstellung in einer Darstellung der Form

$$\langle x m i_V | H_0^V | y k j_V \rangle = (H_0^V)_{j_V}^{i_V} (-\square_x) P_V^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \quad (7.17)$$

geschrieben. Allgemein wurde H_0 als Operator auf einem Hilbert-Raum mit den Basis-Kets $\{|x i_S\rangle, |x m i_V\rangle, |x m n i_T\rangle, |x i_{ghS}\rangle, |x m i_{ghV}\rangle\}$ aufgefaßt, die die *verallgemeinerte Ortsdarstellung* definieren.

Wir kennen jetzt die Quantenzahlen $\{p, \alpha_S\}$, $\{p, I, \alpha_V\}$, $\{p, I, J, \alpha_T\}$, $\{p, \alpha_{ghS}\}$ und $\{p, I, \alpha_{ghV}\}$, die für die Klassifikation der H_0 -Eigenvektoren im skalaren, im Vektor- und im Tensorsektor benötigt werden. Nach den vorangegangenen Überlegungen sind die Projektionen dieser Eigenvektoren auf die obigen Basis-Kets des verallgemeinerten Ortsraumes (die „Wellenfunktionen“) von folgender Form:

Skalarer Sektor des Gravitonanteils:

$$\langle x i_S | p \alpha_S \rangle = (v_{\alpha_S}^S)^{i_S} (p^2) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x} \quad (7.18)$$

Vektor-Sektor des Gravitonanteils:

$$\langle x m i_V | p I \alpha_V \rangle = (v_{\alpha_V}^V)^{i_V} (p^2) t_I^m(\hat{p}) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x} \quad (7.19)$$

Tensor-Sektor des Gravitonanteils:

$$\langle x m n i_T | p I J \alpha_T \rangle = (v_{\alpha_T}^T)^{i_T} (p^2) \frac{1}{2} \left(t_I^m(\hat{p}) t_J^n(\hat{p}) + t_I^n(\hat{p}) t_J^m(\hat{p}) - \frac{2}{3} P_V^{mn}(\hat{p}) \eta_{IJ} \right) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x}, \quad (7.20)$$

Skalarer Sektor des Geistanteils:

$$\langle x i_{ghS} | p \alpha_{ghS} \rangle = (v_{\alpha_{ghS}}^{ghS})^{i_{ghS}} (p^2) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x} \quad (7.21)$$

Vektor-Sektor des Geistanteils:

$$\langle x m i_{ghV} | p I \alpha_{ghV} \rangle = (v_{\alpha_{ghV}}^{ghV})^{i_{ghV}} (p^2) t_I^m(\hat{p}) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x} \quad (7.22)$$

Daß in der Quantenmechanik die Impulseigenzustände in Ortsdarstellung durch symmetrisch normierte ebene Wellen gegeben sind, drückt man in der Form

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ipx} \equiv \psi_p(x) \quad (7.23)$$

aus, und man könnte mithin ganz suggestiv

$$\psi_{pI\alpha_V}(x, m, i_V) = (v_{\alpha_V}^V)^{i_V} (p^2) t_I^m(\hat{p}) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ikpx}$$

etc. schreiben. Dabei definieren die Basis-Kets $\{|p\alpha_S\rangle, |pI\alpha_V\rangle, |pIJ\alpha_T\rangle, |p\alpha_{ghS}\rangle, |pI\alpha_{ghV}\rangle\}$ die *verallgemeinerte Impulsdarstellung*.

Es bleibt zu bemerken, daß für reelle Felder wie im vorliegenden Fall die komplexen ebenen Wellen durch ihren geeignet normierten Realteil ersetzt werden müßten. Wir werden allerdings nur deren Eigenfunktionseigenschaft bezüglich \square sowie eine geeignete Vollständigkeitsrelation benötigen. In dieser Hinsicht unterscheiden sich beide Formulierungen nicht. Die ebenen Wellen selbst treten anschließend nicht mehr explizit auf, so daß die Verwendung der komplexen Darstellung der Eigenfunktionen auf die weitere Rechnung keinen unerwünschten Einfluß hat. Daher werden wir aus Gründen der Einfachheit auch weiterhin auf diese Form zurückgreifen.

Wir wollen nun die Vollständigkeit im Impuls- und im Ortsraum ableiten, indem wir in Analogie zu dem eindimensionalen Beispiel aus der Quantenmechanik die Gültigkeit der Relationen

$$\int dp \langle x|p\rangle \langle p|x'\rangle = \langle x|x'\rangle = \delta(x-x') \equiv \mathbb{1}_{xx'}$$

und

$$\int dx \langle p|x\rangle \langle x|p'\rangle = \langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \equiv \mathbb{1}_{pp'}$$

für die verallgemeinerten Impuls- und Ortseigenzustände bestätigen. Wir beschränken uns dabei auf das Beispiel des Vektor-Sektors des Gravitonanteils; im Unterschied zum skalaren Sektor sind hier auch die transversalen Eigenvektoren zu berücksichtigen. Hinsichtlich der Vollständigkeit im verallgemeinerten Impulsraum gilt dann

Vektor-Sektor des Gravitonanteils:

$$\begin{aligned}
& \int d^4p \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} \sum_{I=1}^3 \langle x m i_V | p I \alpha_V \rangle \langle p I \alpha_V | y k j_V \rangle \\
&= \int d^4p (v^V_{\alpha_V})^{i_V} (p^2) (v^{V \alpha_V})_{j_V} (p^2) t_I^m(\hat{p}) t_k^I(\hat{p}) \frac{1}{(2\pi)^4} e^{i\kappa p(x-y)} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta_{j_V}^{i_V} P_V^m{}_k(\hat{p}) e^{i\kappa p(x-y)} \\
&= \delta_{j_V}^{i_V} P_V^m{}_k \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}, \tag{7.24}
\end{aligned}$$

so daß wir die (x, m, i_V) - (y, k, j_V) -Komponente des zugehörigen Einheitsoperators $\mathbb{1}_V$ in dem betrachteten verallgemeinerten Ortsraum erhalten. In den anderen Sektoren verläuft die Rechnung analog:

Skalarer Sektor des Gravitonanteils:

$$\int d^4p \sum_{\alpha_S=1}^{n_S} \langle x i_S | p \alpha_S \rangle \langle p \alpha_S | y j_S \rangle = \delta_{j_S}^{i_S} \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \tag{7.25}$$

Tensor-Sektor des Gravitonanteils:

$$\int d^4p \sum_{\alpha_T=1}^{n_T} \sum_{I,J=1}^3 \langle x m n i_T | p I J \alpha_T \rangle \langle p I J \alpha_T | y k l j_T \rangle = \delta_{j_T}^{i_T} P_V^{mn}{}_{kl} \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \tag{7.26}$$

Skalarer Sektor des Geistanteils:

$$\int d^4p \sum_{\alpha_{ghS}=1}^{n_{ghS}} \langle x i_{ghS} | p \alpha_{ghS} \rangle \langle p \alpha_{ghS} | y j_{ghS} \rangle = \delta_{j_{ghS}}^{i_{ghS}} \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \tag{7.27}$$

Vektor-Sektor des Geistanteils:

$$\int d^4p \sum_{\alpha_{ghV}=1}^{n_{ghV}} \langle x m i_{ghV} | p I \alpha_{ghV} \rangle \langle p I \alpha_{ghV} | y k j_{ghV} \rangle = \delta_{j_{ghV}}^{i_{ghV}} P_V^m{}_k \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \tag{7.28}$$

Demgegenüber ergibt sich die Vollständigkeit im Ortsraum folgendermaßen für den **Vektor-Sektor des Gravitonanteils:**

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \bar{e} \sum_{m=1}^4 \sum_{i_V=1}^{n_V} \langle p' J \beta_V | x m i_V \rangle \langle x m i_V | p I \alpha_V \rangle \\
&= \int d^4x \bar{e} \frac{1}{(2\pi)^4} e^{i\kappa(p-p')x} (v^V \beta_V)_{i_V} (p'^2) (v^V \alpha_V)^{i_V} (p^2) t_m^J(\hat{p}') t_I^m(\hat{p}) \\
&= \frac{\bar{e}}{\kappa^4} \delta^{(4)}(p-p') (v^V \beta_V)_{i_V} (p'^2) (v^V \alpha_V)^{i_V} (p^2) t_m^J(\hat{p}') t_I^m(\hat{p}) \\
&= \delta^{(4)}(p-p') (v^V \beta_V)_{i_V} (p'^2) (v^V \alpha_V)^{i_V} (p^2) t_m^J(\hat{p}') t_I^m(\hat{p}). \tag{7.29}
\end{aligned}$$

Kontrahiert man (7.29) mit einem Tensor $T^{\alpha_V I}(p)$ und summiert bzw. integriert anschließend über α_V , I und p , so erhält man $T^{\beta_V J}(p')$, d. h. die obige Abbildung vermittelt in der Tat die Identität. Man erkennt im Vergleich der beiden Vollständigkeitsrelationen erneut die Asymmetrie der beiden inneren Produkte auf dem x - und dem p -Raum bezüglich des Volumenfaktors. Analoges gilt für die anderen Sektoren:

Skalarer Sektor des Gravitonanteils:

$$\int d^4x \bar{e} \sum_{i_S=1}^{n_S} \langle p' \beta_S | x i_S \rangle \langle x i_S | p \alpha_S \rangle = \delta^{(4)}(p-p') (v^S \beta_S)_{i_S} (p'^2) (v^S \alpha_S)^{i_S} (p^2) \tag{7.30}$$

Tensor-Sektor des Gravitonanteils:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \bar{e} \sum_{m,n=1}^4 \sum_{i_T=1}^{n_T} \langle p' K L \beta_T | x m n i_T \rangle \langle x m n i_T | p I J \alpha_T \rangle \\
&= \delta^{(4)}(p-p') (v^T \beta_T)_{i_T} (p'^2) (v^T \alpha_T)^{i_T} (p^2) \frac{1}{4} \left(t_m^K(\hat{p}') t_n^L(\hat{p}') + t_n^K(\hat{p}') t_m^L(\hat{p}') - \frac{2}{3} P_{Vmn}(\hat{p}') \eta^{KL} \right) \times \\
& \quad \times \left(t_I^m(\hat{p}) t_J^n(\hat{p}) + t_I^n(\hat{p}) t_J^m(\hat{p}) - \frac{2}{3} P_V^{mn}(\hat{p}) \eta_{IJ} \right) \tag{7.31}
\end{aligned}$$

Skalarer Sektor des Geistanteils:

$$\int d^4x \bar{e} \sum_{i_{ghS}=1}^{n_{ghS}} \langle p' \beta_{ghS} | x i_{ghS} \rangle \langle x i_{ghS} | p \alpha_{ghS} \rangle = \delta^{(4)}(p-p') (v^{ghS} \beta_{ghS})_{i_{ghS}} (p'^2) (v^{ghS} \alpha_{ghS})^{i_{ghS}} (p^2) \tag{7.32}$$

Vektor-Sektor des Geistanteils:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \bar{e} \sum_{m=1}^4 \sum_{i_{\text{ghV}}=1}^{n_{\text{ghV}}} \langle p' J \beta_{\text{ghV}} | x m i_{\text{ghV}} \rangle \langle x m i_{\text{ghV}} | p I \alpha_{\text{ghV}} \rangle \\
&= \delta^{(4)}(p - p') (v^{\text{ghV}} \beta_{\text{ghV}})_{i_{\text{ghV}}} (p'^2) (v^{\text{ghV}} \alpha_{\text{ghV}})^{i_{\text{ghV}}} (p^2) t^J_m(\hat{p}') t_I^m(\hat{p}) \quad (7.33)
\end{aligned}$$

In dieser kompakten Form kann jetzt die von uns in der verallgemeinerten Ortsdarstellung gelöste Eigenwertgleichung angegeben werden. Dabei beschränken wir uns auch hier auf den Vektorblock des Gravitonanteils; für die vier übrigen Teile sind lediglich die Indizes der Ortsdarstellung und die Quantenzahlen der Eigenzustände zu ersetzen. Die Eigenwertgleichung für H_0 im Vektor-Sektor des Gravitonanteils lautet:

$$\begin{aligned}
& \langle x m i_V | H_0^V | y k j_V \rangle \langle y k j_V | p I \alpha_V \rangle \\
&\equiv \int d^4y \bar{e} \sum_{k=1}^4 \sum_{j_V=1}^7 \left[(H_0^V)^{i_V}_{j_V} (-\square_x) P_V^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x - y)}{\bar{e}} \right] \\
&\quad (v^V_{\alpha_V})^{j_V} (p^2) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p y} t_I^k(\hat{p}) \\
&= \sum_{k=1}^4 \sum_{j_V=1}^7 (H_0^V)^{i_V}_{j_V} (p^2) P_V^m(\hat{p}) (v^V_{\alpha_V})^{j_V} (p^2) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x} t_I^k(\hat{p}) \\
&= \bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2) \times (v^V_{\alpha_V})^{i_V} (p^2) t_I^m(\hat{p}) \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x} \\
&= \bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2) \times \langle x m i_V | p I \alpha_V \rangle. \quad (7.34)
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurden H_0^V und P_V partiell integriert und nach rechts auf eine „imaginäre“ x -abhängige Funktion angewandt, um die beiden Operatoren anschließend nach Auswertung der Delta-Distribution partiell zurückzuintegrieren und auf die ebene Welle $\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x}$ wirken zu lassen.

Die Tatsache, daß der volle Operator H_0 in jedem Block durch ein Tensorprodukt des algebraischen Anteils mit dem Projektor auf den jeweiligen transversalen Unterraum gegeben ist, hat zur Folge, daß die Eigenwerte $\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2)$ jeweils d_χ -fach entartet sind. Daß sich das Eigenwertproblem im wesentlichen auf den Matrixanteil reduziert, ist in der trivialen Abhängigkeit von H_0 bezüglich der $O(4)$ -Indizes und der Raumzeitkoordinaten begründet, die in Form des Projektors und der Delta-Distribution durch die entsprechenden Einheits-

operatoren gegeben ist.

7.4 Die Berechnung der Spur

Gemäß der der Propertime-Gleichung zugrundeliegenden Renormierungsgruppen-Verbesserung gilt nach (7.5)

$$\begin{aligned} \Gamma_k - S &= \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H_0^{\text{grav}})^2 (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^{-2} \right) \\ &- 2 \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left((H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} (H_0^{\text{gh}})^{-2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Nachdem wir uns im letzten Abschnitt von der Vollständigkeit des Eigensystems von H_0 überzeugt haben, sollen im folgenden in (7.35) alle Spuren außer der zweiten in dieser Basis berechnet werden. Im Anschluß erfolgt deren Regularisierung. Wir werden dabei in jeder von ihnen einen positiven Operator in Form eines Eigenzeitintegrals exponentieren und dieses im Anschluß regularisieren. Zur Kennzeichnung schreiben wir den Operator in der entsprechenden Spur in einer eckigen Klammer ($[]$) und versehen diese mit dem Subskript REG. Zudem schreiben wir jeweils ein vorerst nur symbolisches Propertime-Integral. Dessen erforderliche Regularisierung drücken wir aus, indem wir das Integralzeichen \int verwenden.

7.4.1 Die freien H_0 -Logarithmen

Die Spur ist sektorweise definiert als die Summe der Diagonalmatrixelemente des betreffenden Operators, wobei in der Eigenbasis über die entsprechenden Quantenzahlen zu summieren ist. Die Spur der paritätsgeraden freien Beiträge im Graviton- und Geistsektor, d. h. $\frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2} \right)$ in (7.35), läßt sich in der Eigenbasis unmittelbar angeben.

Betrachten wir als Beispiel wieder den Vektorblock des Gravitonsektors und schieben wir vermöge der Vollständigkeitsrelation (7.29) zwei $\mathbb{1}$ -Operatoren im Ortsraum ein, so erhalten wir unter Verwendung der Eigenwertgleichung (7.34) die Spur einer beliebigen

Funktion von H_0^V zu

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{f(H_0^V)\} &= \sum_{p I \alpha_V} \langle p I \alpha_V | f(H_0^V) | p I \alpha_V \rangle \\
&= \sum_{p I \alpha_V} \sum_{x m i_V} \sum_{y k j_V} \langle p I \alpha_V | x m i_V \rangle \langle x m i_V | f(H_0^V) | y k j_V \rangle \langle y k j_V | p I \alpha_V \rangle \\
&= \sum_{p I \alpha_V} \sum_{x m i_V} f(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2)) \langle p I \alpha_V | x m i_V \rangle \langle x m i_V | p I \alpha_V \rangle \\
&= \int d^4 p \int d^4 x \bar{e} \sum_{I=1}^3 \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} \sum_{m=1}^4 \sum_{i_V=1}^{n_V} f(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2)) \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-i\kappa p x} t_m^I(\hat{p}) (v^{\alpha_V})_{i_V}(p^2) \times \\
&\quad \times e^{i\kappa p x} t_m^I(\hat{p}) (v^{\alpha_V})^{i_V}(p^2) \\
&= \left(\int d^4 x \bar{e} \right) d_V \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} f(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2)) \delta^{\alpha_V} \\
&\equiv \left(\int d^4 x \bar{e} \right) d_V \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} f(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2)) \tag{7.36}
\end{aligned}$$

mit $\sum_p \equiv \int d^4 p$ und $\sum_x \equiv \int d^4 x \bar{e}$. Der Faktor d_V entstammt der Entartung der Eigenwerte. Da zudem der freie Anteil in einer Entwicklung nach lokalen Diffeomorphismusinvarianten nur Terme erzeugen kann, die proportional zum Raumzeitvolumen sind, erhalten wir erwartungsgemäß die mit der kosmologischen Konstanten assoziierte Invariante $\int d^4 x \bar{e}$. Der freie Anteil trägt somit nur zu deren Beta-Funktion bei.

(Beim Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile wird die Spur der $n_V \times n_V$ -Diagonalmatrix berechnet, deren α_V - α_V -Eintrag durch $f(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V)$ gegeben ist. Betrachten wir nur den Matrixanteil des Eigenwertproblems und lassen der Übersichtlichkeit wegen den Sektorindex V unberücksichtigt, so resultiert mit $(v^\alpha)_i \equiv \langle \alpha | i \rangle \Leftrightarrow (v_\alpha)^i \equiv \langle i | \alpha \rangle$ die mögliche Irritation bezüglich der Summation über α wie üblich daraus, daß in der Eigenwertgleichung $\langle i | H_0 | j \rangle \langle j | \alpha \rangle = \bar{\lambda}_\alpha \langle i | \alpha \rangle$ nicht über α summiert wird. Bilden wir die Spur, indem wir diese Gleichung mit $\langle \alpha | i \rangle$ multiplizieren und über α summieren, so erhalten wir entsprechend $\langle \alpha | i \rangle \langle i | H_0 | j \rangle \langle j | \alpha \rangle = \langle \alpha | H_0 | \alpha \rangle \equiv \text{Tr}\{H_0\} = \bar{\lambda}_\alpha \langle \alpha | i \rangle \langle i | \alpha \rangle = \bar{\lambda}_\alpha \langle \alpha | \alpha \rangle = \text{Tr}\{\text{diag}(\bar{\lambda}_\alpha)\} = \sum_\alpha \bar{\lambda}_\alpha$.)

Um den Massenparameter $\bar{\mu}$ zu berücksichtigen, mit dem der freie, paritätsgerade Anteil im Graviton- und Geistsektor reskaliert wird und der in beiden Logarithmen von (7.35)

auftritt, geben wir die Spur des Einheitsoperators an. Dessen Ortsdarstellung ist für den betrachteten Beispielsektor gegeben durch

$$\langle x m i_V | \mathbb{1}^V | y k j_V \rangle = \delta_{j_V}^{i_V} P_V^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}.$$

Wir erhalten seine Spur, indem wir in (7.36) $f(H_0^V) = \mathbb{1}^V$ und dementsprechend $f(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V) = 1 \forall \alpha_V$ setzen. Überträgt man dies auf die analogen Rechnungen in den übrigen Sektoren, so führt das für einen beliebigen Sektor χ auf

$$\text{Tr}(\mathbb{1}^\chi) = d_\chi \cdot n_\chi \left(\int d^4x \bar{e} \right) \left(\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \right).$$

Wir erhalten also die Anzahl $d_\chi \cdot n_\chi$ der Feldkomponenten des betreffenden Sektors, was multipliziert mit dem x -Integral auf die Anzahl der (unendlich vielen) Feldfreiheitsgrade führt. Dies wird noch mit der Summe über alle Impulsmoden multipliziert.

Wenden wir uns jetzt den gesuchten Logarithmen zu. Ziehen wir gemäß der der Propertime-Darstellung zugrundeliegenden Operator-Identität

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left\{ e^{-sA} - e^{-sB} \right\}$$

Zähler und Nenner im Argument der beiden Logarithmen in (7.35) auseinander, so ergibt sich schließlich für den freien Beitrag die gesuchte Spur zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ \text{Tr} \ln \left[\left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) \right]_{\text{REG}} - 2 \text{Tr} \ln \left[\left(\frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2} \right) \right]_{\text{REG}} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ \int \frac{ds}{s} \left(\text{Tr} e^{-s(H_0^{\text{grav}})^2} - \text{Tr} e^{-s\bar{\mu}^6} \right) - 2 \int \frac{ds'}{s'} \left(\text{Tr} e^{-s'(H_0^{\text{gh}})^2} - \text{Tr} e^{-s'\bar{\mu}^2} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\int d^4x \bar{e} \right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \int \frac{ds}{s} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \left(\sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} e^{-s(\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} - n_\chi e^{-s\bar{\mu}^6} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2 \int \frac{ds'}{s'} \sum_{\chi \in \{\text{gh} S, \text{gh} V\}} d_\chi \left(\sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} e^{-s'(\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} - n_\chi e^{-s'\bar{\mu}^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \left(\int d^4x \bar{e} \right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \int \frac{ds}{s} \left(\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} e^{-s (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} - 40 e^{-s \bar{\mu}^6} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \int \frac{ds'}{s'} \left(\sum_{\chi \in \{\text{gh} S, \text{gh} V\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} e^{-s' (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} - 10 e^{-s' \bar{\mu}^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Dabei gibt $\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi n_\chi = 40$ die Zahl der Feldkomponenten im Gravitonsektor und $\sum_{\chi \in \{\text{gh} S, \text{gh} V\}} d_\chi n_\chi = 10$ die der Feldkomponenten im Geistsektor an. Wir haben hier für den Graviton- und Geistsektor zwei unterschiedliche Propertime-Variablen s und s' verwendet, da deren Massendimension verschieden ist. Zudem belassen wir den konstanten $\bar{\mu}$ -Beitrag an dieser Stelle ebenfalls unter dem Impulsintegral, da er im Zuge der Regularisierung eine p -abhängige Modifikation erfährt.

7.4.2 Die Wechselwirkungsbeiträge

Bei den Spuren in (7.35), die den Wechselwirkungsoperator V enthalten, ist zu beachten, daß der aus der im Anhang H berechneten quadratischen Form $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(1)}$ konstruierte Operator V nach der Funktionalableitung bezüglich der Komponentenfelder neben der Matrixstruktur auch eine nichttriviale $O(4)$ -Indexstruktur aufweist. Im Unterschied zu H_0 ist er nicht proportional zu dem entsprechenden transversalen Projektor. Insbesondere hängt er explizit von partiellen ersten Ableitungen der Lorentz-Indizes ab, so daß er keine reine Funktion von \square ist. Wir schreiben dementsprechend für seine Ortsdarstellung im Graviton-Vektor-Sektor

$$\langle x m i_V | V^V | y k j_V \rangle = (V^V)_{j_V k}^{i_V m} (-i \partial_a^x) \frac{\delta^{(4)}(x - y)}{\bar{e}}.$$

Dabei trägt die Ableitung im Argument einen Dummy- $O(4)$ -Index a um zu verdeutlichen, daß V^V in verallgemeinerter Ortsdarstellung bei Anwendung auf eine ebene Welle $e^{i\kappa p x}$ wirklich vom Vektor p_a und nicht nur von dessen Betrag p abhängt. In den Matrixelementen treten auch das Vektorfeld v_μ und dessen erste Ableitung auf. Allerdings bleibt v_μ von den Manipulationen im Zuge der Spurberechnung unberührt (insbesondere wird es nicht Fourier-transformiert), so daß wir diese Abhängigkeit vorerst nicht berücksichtigen. Dementsprechend soll das Ableitungsargument auch nur diejenigen Ableitungen umfassen, die an v_μ bzw. $\partial_\mu v_\nu$ vorbei wirken und V^V zu einem Differentialoperator machen. Es bezieht

sich *nicht* auf die partiellen Ableitungen, die auf v_μ wirken.

Im folgenden ist die Spur des Produktes von V^V und $(H^V)^{-1}$ zu bilden. Da (H^V) im Ortsraum proportional zu den Einheitsoperatoren P_V und $\frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}$ ist, gilt dies auch für $(H^V)^{-1}$. Insbesondere enthält dieser Operator ebenfalls einen Faktor $\frac{1}{\bar{e}}$, da bezüglich des inneren Produktes $\int d^4x \bar{e}$ im Ortsraum der Einheitsoperator durch die tensorielle Delta-Distribution $\frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}$ gegeben ist. Daher ist bei der Berechnung von $(H^V)^{-1}$ nur der Matrixanteil $(H^V)_{j_V}^{i_V}(-\square)$ von H^V zu invertieren, d. h. auf dem Niveau der Ersetzung $-\square \rightarrow p^2$ ist die Matrix $((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(p^2)$, die zur Matrix $(H^V)_{j_V}^{i_V}(p^2)$ invers ist, zu bestimmen. Dabei ist $p^2 \neq 0$ lediglich ein festgehaltener Parameter. Wir überprüfen diese Aussage, indem wir im Ortsraum den so konstruierten inversen Operator mit H^V multiplizieren, d. h. wir berechnen

$$\begin{aligned}
& \sum_{y k j_V} \langle x m i_V | (H^V)^{-1} | y k j_V \rangle \langle y k j_V | H^V | z n k_V \rangle \\
&= \int d^4y \bar{e} \sum_{k=1}^4 \sum_{j_V=1}^{n_V} \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(-\square_x) P_V^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \right] \\
& \quad \left[(H^V)_{k_V}^{j_V}(-\square_y) P_V^k \left(\frac{-i\partial_y}{\sqrt{-\square_y}} \right) \frac{\delta^{(4)}(y-z)}{\bar{e}} \right] \\
&= \int d^4y \bar{e} \sum_{k=1}^4 \sum_{j_V=1}^{n_V} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(-\square_x) P_V^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) e^{i\kappa p(x-y)} \right] \\
& \quad \left[(H^V)_{k_V}^{j_V}(-\square_y) P_V^k \left(\frac{-i\partial_y}{\sqrt{-\square_y}} \right) e^{i\kappa p'(y-z)} \right].
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die tensoriellen Delta-Distributionen über die modifizierten ebenen Wellen dargestellt. Dies hat eine Transformation der Matrixanteile und der Projektoren in den Impulsraum zur Folge, und die Ausführung des y - und des p' -Integrals führt auf

$$\begin{aligned}
& \int d^4y \bar{e} \sum_{k=1}^4 \sum_{j_V=1}^{n_V} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{i\kappa y(p-p')} e^{i\kappa p x} e^{-i\kappa p' z} \\
& \quad \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(p^2) P_V^m(\hat{p}) \right] \left[(H^V)_{k_V}^{j_V}(p'^2) P_V^k(\hat{p}') \right] \\
&= \sum_{k=1}^4 \sum_{j_V=1}^{n_V} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d^4p' \delta^{(4)}(p-p') e^{i\kappa p x} e^{-i\kappa p' z} \\
& \quad \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(p^2) P_V^m(\hat{p}) \right] \left[(H^V)_{k_V}^{j_V}(p'^2) P_V^k(\hat{p}') \right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^4 \sum_{j_V=1}^{n_V} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\kappa p(x-z)} \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(p^2) (H^V)^{j_V}_{k_V}(p^2) P_{V k}^m(\hat{p}) P_{V n}^k(\hat{p}) \right].$$

Verwenden wir die Vollständigkeitsrelation der modifizierten ebenen Wellen, so erhalten wir das gewünschte Resultat in der Form

$$\begin{aligned} & \sum_{y k j_V} \langle x m i_V | (H^V)^{-1} | y k j_V \rangle \langle y k j_V | H^V | z n k_V \rangle \\ &= \delta_{k_V}^{i_V} P_{V n}^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-z)}{\bar{e}} \\ &\equiv \langle x m i_V | \mathbb{1}^V | z n k_V \rangle. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der inversen Matrix $((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(p^2)$ kann von einem Computeralgebra-Programm wie Mathematica ausgeführt werden.

Wir können jetzt den Wechselwirkungsbeitrag des Vektorsektors zur Spur auf der rechten Seite von (7.35) berechnen. Dabei stellen wir nach der Erweiterung der Spur mit $(H_0)^2$ das Inverse dieses Operators in Propertime-Form dar. Zudem nutzen wir bezüglich dieses Anteils die Eigenwert-Eigenschaft (7.34) aus. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^V)^{-1} V^V (H_0^V)^2 [(H_0^V)^{-2}]_{\text{REG}} \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p I \alpha_V} \sum_{x m i_V} \sum_{y k j_V} \sum_{z n k_V} \sum_{w l q_V} \langle p I \alpha_V | x m i_V \rangle \langle x m i_V | (H^V)^{-1} | y k j_V \rangle \langle y k j_V | V^V | z n k_V \rangle \times \\ & \quad \times \langle z n k_V | (H_0^V)^2 \rlap{-}\int ds e^{-s(H_0^V)^2} | w l q_V \rangle \langle w l q_V | p I \alpha_V \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x \bar{e} \int d^4 y \bar{e} \int d^4 z \bar{e} \int d^4 p \sum_{i_V, j_V, k_V=1}^{n_V} \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} \sum_{k, m, n=1}^4 \sum_{I=1}^3 \\ & \quad \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-i\kappa p x} t_m^I(\hat{p}) (v^{V\alpha_V})_{i_V}(p^2) \times \\ & \quad \times \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(-\square_x) P_{V k}^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}} \right] \left[(V^V)^{j_V k}_{k_V n} (-i\partial_y^a) \frac{\delta^{(4)}(y-z)}{\bar{e}} \right] \times \\ & \quad \times (\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2 \left(\rlap{-}\int ds e^{-s(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2} \right) e^{i\kappa p z} t_n^I(\hat{p}) (v_{\alpha_V}^V)^{k_V}(p^2). \end{aligned}$$

Wir integrieren nun den Operator in der ersten eckigen Klammer partiell und wenden ihn

auf $e^{-i\kappa p x}$ an. Nach Auswertung der Delta-Distribution wird er zurückintegriert, und man erhält

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d^4 x \bar{e} \int d^4 z \bar{e} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{i_V, j_V, k_V=1}^{n_V} \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} \sum_{k, m, n=1}^4 e^{-i\kappa p x} P_{V m}^n(\hat{p}) (v^{V\alpha_V})_{i_V}(p^2) \times \\ & \times (\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2 \left(\int ds e^{-s(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2} \right) \times \\ & \times \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(-\square_x) P_{V k}^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) (V^V)^{j_V k}_{k_V n} (-i\partial_a^x) \frac{\delta^{(4)}(x-z)}{\bar{e}} \right] (v^{V\alpha_V})^{k_V}(p^2) e^{i\kappa p z}. \end{aligned}$$

Wir wiederholen dieses Vorgehen bezüglich des kompletten Operators in der eckigen Klammer, was schließlich auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^V)^{-1} V^V (H_0^V)^2 [(H_0^V)^{-2}]_{\text{REG}} \} \\ & = \frac{1}{2} \int d^4 x \bar{e} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{i_V, j_V, k_V=1}^{n_V} \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} \sum_{k, m, n=1}^4 (\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2 \left(\int ds e^{-s(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2} \right) P_{V m}^n(\hat{p}) \times \\ & \times (v^{V\alpha_V})_{i_V}(p^2) \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(p^2) P_{V k}^m(\hat{p}) (V^V)^{j_V k}_{k_V n}(p_a) \right] (v^{V\alpha_V})^{k_V}(p^2) \\ & = \frac{1}{2} \int d^4 x \bar{e} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{i_V, j_V=1}^{n_V} \sum_{\alpha_V=1}^{n_V} \sum_{k, n=1}^4 (\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2 \left(\int ds e^{-s(\bar{\lambda}_{\alpha_V}^V(p^2))^2} \right) \times \\ & \times (v^{V\alpha_V})_{i_V}(p^2) \left[((H^V)^{-1})_{j_V}^{i_V}(p^2) (V^V)^{j_V k}_{k_V n}(p_a) P_{V k}^n(\hat{p}) \right] (v^{V\alpha_V})^{k_V}(p^2) \end{aligned} \quad (7.37)$$

führt. Da keine der drei transversalen Richtungen I ausgezeichnet war, kombinieren die transversalen Eigenvektoren $\{t_I\}$ zu einem Projektor P_V , so daß der Index I verschwindet. Darüber hinaus hängt V^V über v_μ und $\partial_\mu v_\nu$ von x ab, was gerade auf die beiden von uns gesuchten Krümmungsinvarianten führt. Somit kann hier das x -Integral im Unterschied zum freien Fall nicht als Vorfaktor vor die Summe geschrieben werden. Wir werden auf diesen Punkt in Kürze genauer eingehen. Hätten wir auch im Wechselwirkungsanteil analog zum freien Beitrag die Transversalität der Komponentenfelder durch Einschieben von Projektoren explizit berücksichtigt, so stellen wir nun fest, daß sich der obige Ausdruck nicht ändert, wenn man in ihm die Ersetzung $(V^V)^{j_V k}_{i_V n} \rightarrow (V^V)^{j_V p}_{i_V q} P_{V p}^k P_{V n}^q$ vornimmt.

Der Operator $(V^V)^{i_V k}_{j_V m}(p_a)$ ist unter dem Impulsintegral mit $P_{V k}^m(\hat{p})$ zu kontrahieren, was unter Berücksichtigung der p -Integration auf einen Operator $(V_{\text{contr}}^V)^{i_V}_{j_V}(p^2)$ führt, der

ebenfalls nur noch vom Betrag p des Impulses abhängt. Das konkrete Vorgehen werden wir an einem Beispiel erläutern. Die nichttriviale $O(4)$ -Indexabhängigkeit dieses Objektes ist damit verschwunden, so daß die resultierende Matrix für jede Feldspezies strukturell von der Form der Matrix $(H_0^X)^{i_X}_{j_X}$ ist. Die Vorfaktoren $\frac{1}{16\pi G_k}$ kürzen sich im Produkt von $(H^X)^{-1}$ und (V_{contr}^X) weg. Der Geistbeitrag ergibt sich, indem man im ursprünglichen Ausdruck (7.35) den Faktor $(H_0^{\text{grav}})^2$ streicht und dafür $(H^{\text{grav}})^{-1}$ durch H_0^{gh} ersetzt. Diese Matrix wird mit $V_{\text{contr}}^{\text{gh}}$ multipliziert. Auf dem Niveau von (7.37) ist entsprechend der Faktor $(\bar{\lambda}_{\alpha_{\text{grav}}}^{\text{grav}})^2$ zu streichen und die Ersetzung $(H^{\text{grav}})^{-1} \rightarrow H_0^{\text{gh}}$ vorzunehmen. Bezüglich $(H_0^{\text{gh}})^{-2}$ wendet man wiederum die Propertime-Darstellung an und drückt das Eigenzeit-Integral über das Spektrum $(\bar{\lambda}_{\alpha_{\text{gh}}}^{\text{gh}})^2$ aus.

An dieser Stelle soll die bereits erwähnte $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ -Reskalierung des Wechselwirkungsanteils diskutiert werden. In Anhang H berechnen wir in der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega})$ und $\mathcal{O}(\partial\bar{\omega})$ die reduzierte quadratische Form $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(1)}$, in der die Reskalierungen noch nicht berücksichtigt sind. Entsprechend erhalten wir dann durch funktionale Ableitung einen Operator $(\tilde{V}^V)^{j_V k}_{i_V n}(-i\partial_a)$. Dessen Beziehung zum reskalierten Operator $(V^V)^{j_V k}_{i_V n}(-i\partial_a)$ ist mit der Notation aus (6.27) für den Vektorsektor durch

$$(V^V)^{i_V m}_{j_V k}(-i\partial_a) = \bar{\mu}^{a_{i_V}} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_{i_V}} (\tilde{V}^V)^{i_V m}_{j_V k}(-i\partial_a) \bar{\mu}^{a_{j_V}} \left(\frac{1}{\sqrt{-\square}} \right)^{b_{j_V}}$$

gegeben. Dabei sind die $\bar{\mu}$ -Reskalierungen unproblematisch. Gemäß der allgemeinen Identität

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-tA}$$

für Potenzen inverser positiver Operatoren gilt

$$\frac{1}{\sqrt{-\square}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt t^{\frac{1}{2}} e^{t\square}.$$

Will man die entsprechenden Potenzen dieses Operators, die links von \tilde{V}^V stehen, partiell nach rechts integrieren, so wäre diese Exponentialreihe zu entwickeln. Dabei wirkt sie auf v_μ und $\partial_\mu v_\nu$ in \tilde{V}^V sowie nach rechts. Da höhere Ableitungen nicht berücksichtigt werden müssen, wäre ihre Wirkung auf $\partial_\mu v_\nu$ zu vernachlässigen. Allerdings erzeugt sie bei Anwendung auf v_μ auch erste Ableitungen des Vektorfeldes, die berücksichtigt werden

müßten.

Stattdessen wollen wir ausnutzen, daß wir bei der Berechnung der Spur dieses selbstadjungierten Operators diesen auch auf den linken Eigenzustand wirken lassen können. Da die Eigenzustände in jedem Sektor einen Faktor $\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\kappa p x}$ enthalten, sind sie insbesondere Eigenzustände von $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ mit Eigenwert $\frac{1}{p}$; beispielsweise gilt

$$\langle p I \alpha_V | \frac{1}{\sqrt{-\square}} = \frac{1}{p} \langle p I \alpha_V | .$$

Führen wir also die Reskalierungen erst unter der Spur durch, so können wir auch für den Wechselwirkungsanteil bezüglich p elementweise die Skalierungsvorschriften verwenden, die wir bereits im Rahmen der Reskalierung des freien Anteils angegeben hatten.

Bevor wir die Projektor-Kontraktion durchführen, ist noch eine weitere zentrale Beobachtung festzuhalten: Im Wechselwirkungsanteil gilt sowohl für den Graviton- als auch für den Geistsektor, daß bei allen drei Tensorarten der Komponentenfelder auf die Beiträge, die v_μ in undifferenzierter Form enthalten, stets eine ungerade Anzahl partieller Ableitungen folgt, wohingegen nach $\partial_\mu v_\nu$ stets eine gerade Zahl partieller Ableitungen auftritt: Im Gravitonbeitrag folgen auf einen solchen Ausdruck im skalaren Sektor stets vier Ableitungen, im Falle der Vektoren sind es zwei, und im Tensor-Sektor tritt gar keine Ableitung auf. Im Geistbeitrag folgen im skalaren Sektor zwei, und im Vektor-Sektor folgt gar keine Ableitung auf $\partial_\mu v_\nu$. Das läßt sich der konkreten Form der in Anhang H berechneten Komponenten entnehmen. Diese Ableitungen übersetzen sich unter der Spur in Vektoren p_a , über die integriert wird. Nun gilt allgemein

$$\int d^4 p f(p^2) \underbrace{p_a \dots p_b}_{\text{ungerade}} = 0 ,$$

so daß alle Terme, in denen das Vektorfeld v_μ unabgeleitet auftritt, nicht zur Spur beitragen und im folgenden nicht mehr berücksichtigt werden müssen. Da sich unter dem Impulsintegral der Spur die reskalierten Tensorstrukturen von denjenigen im Anhang nur um Potenzen von $\frac{1}{p} \equiv \frac{1}{\sqrt{p^2}}$ unterscheiden, bleibt diese Struktur der Terme von der Reskalierung unberührt.

Die Kontraktion führen wir an dem bereits betrachteten Beispiel des A^m-b^k -Matrixelemen-

tes durch. Da sich der Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ dieses V -Matrixelements gegen denjenigen von $(H^V)^{-1}$ weghebt, müssen wir ihn hier nicht berücksichtigen. Die entsprechende Komponente von $(V^V)_{j_V}^{i_V}{}^k{}_m(p_a)$ unter der Spur erhält man, indem man im Matrixelement in (6.31), das bloß noch $O(4)$ -Indizes enthält, die Ersetzungen $\partial_a \rightarrow i p_a$ und $\square \rightarrow -p^2$ vornimmt. Definieren wir zudem $f_{ab} := \partial_a v_b$, so ist die folgende Kontraktion auszuführen:

Komponente $A^m - b^k$:

$$\begin{aligned} & \int d^4 p \left\{ \frac{1}{2} (n^{(\pm)ab} f_{cd}) p_p p_q \left[\left((\delta_a^c \delta_m^d - \delta_m^c \delta_a^d) \eta^{pq} + (\delta_m^c \eta^{dp} - \eta^{cp} \delta_m^d) \delta_a^q \right) \eta_{bk} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{am} \delta_b^p \varepsilon^{cdq}{}_k + \eta_{mk} \varepsilon_a{}^{cdq} \delta_b^p) \right] P_V{}^{mk} \right\} \\ &= \int d^4 p \left\{ \frac{1}{2} (n^{(\pm)ab} f_{cd}) \left[p^2 (P_V{}^d{}_b \delta_a^c - P_V{}^c{}_b \delta_a^d) + (P_V{}^c{}_b p^d - P_V{}^d{}_b p^c) p_a \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (p_b \varepsilon^{cdq}{}_k P_V{}^k{}_a p_q + 3 \varepsilon_a{}^{cdq} p_q p_b) \right] \right\}. \end{aligned}$$

(Trotz des Verschwindens der $O(4)$ -Indizes aufgrund der Kontraktion mit dem Projektor geben wir bei der Unterstreichung der Feldkomponenten auch deren Lorentz-Tensorstruktur an. Zwar ist die Matrix V_{contr}^χ nun eine $n_\chi \times n_\chi$ -Matrix, deren Spalten und Zeilen sich nur auf den jeweiligen Feldtyp beziehen und die für die $O(4)$ -Tensorstruktur dieser Felder „blind“ ist, doch können wir so den skalaren Spuranteil, die vektorielle antisymmetrische Komponente und den symmetrisch-spurlosen Anteil der ursprünglichen Tensoren voneinander unterscheiden, die wir alle mit demselben Buchstaben bezeichnet hatten.)

Wir beachten nun die Antisymmetrie von $n^{(\pm)ab}$ und die des Epsilon-Tensors und verwenden folgende Formel für symmetrische Integration

$$\int d^4 p f(p^2) p_a p_b = \frac{1}{4} \eta_{ab} \int d^4 p f(p^2) p^2,$$

die für alle Projektor-Kontraktionen inklusive jener im Tensor-Sektor ausreicht. Die Verallgemeinerung auf Integranden, deren Tensorcharakter durch das Tensorprodukt von vier Impulsvektoren gegeben ist, wird nicht benötigt. Damit gilt

Komponente $A^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4p \left\{ -\frac{1}{2}(n^{(\pm)ab} f_{cd}) \left[p^2 (P_V^d \delta_a^c - P_V^c \delta_a^d) + (\delta_b^c p^d - \delta_b^d p^c) p_a \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (p_b \varepsilon^{cdq} \delta_k^q p_a + 3 \varepsilon_a^{cdq} p_q p_b) \right] \right\} \\
&= \int d^4p \left\{ -\frac{1}{2}(n^{(\pm)ab} f_{cd}) \left[\frac{3}{4} (\delta_b^d \delta_a^c - \delta_b^c \delta_a^d) p^2 + \frac{1}{4} (\delta_b^c \delta_a^d - \delta_b^d \delta_a^c) p^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} \varepsilon^{cd}{}_{ba} + \frac{3}{4} \varepsilon_a{}^{cd}{}_{b} \right) \right] \right\} \\
&= \int d^4p \left\{ -\frac{1}{2}(n^{(\pm)ab} f_{cd}) \left[\frac{3}{4} (\delta_b^d \delta_a^c - \delta_b^c \delta_a^d) p^2 + \frac{1}{4} (\delta_b^c \delta_a^d - \delta_b^d \delta_a^c) p^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} \varepsilon^{cd}{}_{ba} + \frac{3}{4} \varepsilon_a{}^{cd}{}_{b} \right) \right] \right\} \\
&= \int d^4p \left\{ -\frac{1}{2}(n^{(\pm)ab} f_{cd}) \left[\delta_a^c \delta_b^d - \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{cd}{}_{b} \right] p^2 \right\} \\
&= \int d^4p \left\{ -\frac{1}{2}(n^{(\pm)ab} f_{ab}) \left[1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2 \right\}
\end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der (Anti-)Selbstdualität von $n^{(\pm)ab}$. Entsprechend der angegebenen Regeln ist nun eine A^m -Komponente mit $\frac{1}{p^2}$ und eine b^k -Komponente mit $\frac{1}{p}$ zu skalieren. Da es sich um eine gemischte $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponente handelt, entfällt die $\bar{\mu}$ -Reskalierung. Wir erhalten somit abschließend

Komponente $A^m - b^k$:

$$\int d^4p \left\{ -\frac{1}{2}(n^{(\pm)ab} f_{ab}) \left[1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right] p^{-1} \right\}. \quad (7.38)$$

Man beachte, daß unter Vernachlässigung des globalen Vorfaktors $\frac{1}{16\pi G_k}$ dieses Objekt die Dimension einer Masse besitzt, da $n^{(\pm)ab} f_{ab}$ als Feldstärke die Massendimension 2 aufweist.

Eine analoge Berechnung findet man in Anhang J für die skalaren, die vektor- und die tensorwertigen Felder im Graviton- und Geistsektor. Für die skalaren Komponenten reduziert sich die Rechnung auf die Anwendung der obigen Formel für symmetrische Integration. Dabei schreiben wir in Anhang J die Impulsintegration nicht mehr explizit aus; die Gleichheitszeichen gelten dort also nur unter dem Integral. Alle Beiträge weisen eine Struktur auf, die sich bereits an dem obigen Beispiel ablesen läßt. Die einzigen beiden

lokalen, im Krümmungstensor, d. h. in $\partial\bar{\omega}$, linearen Invarianten sind gegeben durch

$$\left(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) = \int d^4x \bar{e} \bar{F}^{(\pm)ab}{}_{\mu\nu} \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu \quad (7.39)$$

sowie

$$\pm \left(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) = \int d^4x \bar{e} \star \bar{F}^{(\pm)ab}{}_{\mu\nu} \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu . \quad (7.40)$$

Wie erwartet sind alle nicht-verschwindenden Beiträge im Wechselwirkungsanteil der Spur proportional zu einem dieser beiden Terme, so daß sich dort das Raumzeitintegral $(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab})$ als Vorfaktor separieren läßt. Der Beitrag, dessen Vorzeichen unabhängig von der Wahl von $\bar{\omega}^{(+)}$ oder $\bar{\omega}^{(-)}$ ist, kann dann der Verallgemeinerung des Krümmungsskalars zugeordnet werden. Der Anteil, der sein Vorzeichen beim Übergang von $\bar{\omega}^{(+)}$ zu $\bar{\omega}^{(-)}$ ändert, entstammt hingegen dem Immirzi-Term. Im allgemeinen enthält jede Komponente beide Invarianten, wobei - im Einklang mit unseren Überlegungen zur Paritätsstruktur - die zu (7.39) proportionalen Beiträge der paritätsgeraden Mischungen auf den Diagonalblöcken unabhängig vom Immirzi-Parameter sind, während die zum Immirzi-Term (7.40) proportionalen Anteile dieser Mischungen alle einen Vorfaktor $\frac{1}{\gamma_k}$ enthalten. Da A^m und b^k echte Vektoren sind, verdeutlicht deren Mischung (7.38) beispielhaft diese Aussage. Für die Nebendiagonalblöcke gilt das Umgekehrte: Hier koppeln echte Tensoren mit Pseudotensoren, die nur über die paritätsverletzende Dualisierung aus dem Immirzi-Term zu einem echten Skalar koppeln können, so daß hier alle paritätsgeraden Beiträge proportional zu $\frac{1}{\gamma_k}$ sind. Demgegenüber koppeln sie ohne Dualisierung, d. h. in der Ordnung $\mathcal{O}((\frac{1}{\gamma_k})^0)$, zu Pseudoskalaren, die den typischen Vorzeichenwechsel aufweisen.

Definieren wir somit

$$(V_{\text{contr}}^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi} =: (V_{\text{contr}}^{\chi(+)})_{j_\chi}^{i_\chi} \mp (V_{\text{contr}}^{\chi(-)})_{j_\chi}^{i_\chi} ,$$

so gilt in der paritätsgeordneten Darstellung bezüglich der $\frac{1}{\gamma_k}$ -Abhängigkeit schematisch

$$(V_{\text{contr}}^{\chi(+)}) \simeq \begin{pmatrix} (V_{\text{contr}}^{\chi(+)})_{\text{TT}} & \frac{1}{\gamma_k} (V_{\text{contr}}^{\chi(+)})_{\text{TP}} \\ \frac{1}{\gamma_k} (V_{\text{contr}}^{\chi(+)})_{\text{PT}} & (V_{\text{contr}}^{\chi(+)})_{\text{PP}} \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

und

$$(V_{\text{contr}}^{\chi(-)}) \simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_k}(V_{\text{contr}}^{\chi(-)})_{\text{TT}} & (V_{\text{contr}}^{\chi(-)})_{\text{TP}} \\ (V_{\text{contr}}^{\chi(-)})_{\text{PT}} & \frac{1}{\gamma_k}(V_{\text{contr}}^{\chi(-)})_{\text{PP}} \end{pmatrix}. \quad (7.42)$$

Darin fassen T und P die (echten) Tensor- sowie die Pseudotensorfelder der jeweiligen Spezies zusammen. Bevor wir die Matrizen explizit angeben, verwenden wir diese vergrößerte Darstellung, um ein Gefühl für die allgemeine Struktur dieser Objekte zu vermitteln.

Weiterhin respektiert $(H^\chi)^{-1}$ die Blockstruktur von H^χ . Da das Produkt dieser Operatoren die paritätsgerade Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ liefern soll, muß $(H^\chi)^{-1}$ komponentenweise bezüglich des γ_k -Grades folgende Struktur aufweisen:

$$(H^\chi)^{-1} \simeq \begin{pmatrix} A_{\text{TT}}^{\chi \text{ even}}(\gamma_k) & A_{\text{TP}}^{\chi \text{ odd}}(\gamma_k) \\ A_{\text{PT}}^{\chi \text{ odd}}(\gamma_k) & A_{\text{PP}}^{\chi \text{ even}}(\gamma_k) \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Diese Schreibweise soll implizieren, daß beispielsweise alle nicht-verschwindenden Mischungen von Pseudotensoren mit Tensoren durch ungerade Funktionen in γ_k gegeben sind. Diese Struktur läßt sich auch explizit an den per Computer invertierten Matrizen ablesen, die wir hier jedoch nicht angeben wollen.

Bezüglich des γ_k -Grades weist das Produkt aus (7.43) und $(V_{\text{contr}}^{\chi(+)} \mp V_{\text{contr}}^{\chi(-)})$ die Form

$$(H^\chi)^{-1} \{ (V_{\text{contr}}^{\chi(+)} \mp V_{\text{contr}}^{\chi(-)}) \} \simeq \begin{pmatrix} B_{\text{TT}}^{\chi \text{ even}}(\gamma_k) \mp B_{\text{TT}}^{\chi \text{ odd}}(\gamma_k) & B_{\text{TP}}^{\chi \text{ odd}}(\gamma_k) \mp B_{\text{TP}}^{\chi \text{ even}}(\gamma_k) \\ B_{\text{PT}}^{\chi \text{ odd}}(\gamma_k) \mp B_{\text{PT}}^{\chi \text{ even}}(\gamma_k) & B_{\text{PP}}^{\chi \text{ even}}(\gamma_k) \mp B_{\text{PP}}^{\chi \text{ odd}}(\gamma_k) \end{pmatrix}$$

auf. Aus dieser ist ersichtlich, daß die Spur dieses Ausdrucks nach abschließender Impulsintegration für jeden Sektor χ hinsichtlich des γ_k -Grades von der Gestalt $f^{\chi \text{ even}}(\gamma_k) \mp f^{\chi \text{ odd}}(\gamma_k)$ mit einer geraden (ungeraden) Funktion $f^{\chi \text{ even}}$ ($f^{\chi \text{ odd}}$) sein wird. Diese Eigenschaft wird bei der Analyse der Beta-Funktionen von Wichtigkeit sein. Zudem wird die Argumentation auch nicht durch die bereits durchgeführte Erweiterung der Spur mit H_0^χ beeinträchtigt, da es sich bei diesem Operator unter der Spur um eine blockdiagonale, paritätsgerade Matrix handelt, die unabhängig von γ_k ist.

Diese Erörterungen beziehen sich nur auf den Gravitonsektor, da der Geistsektor vollständig paritätsgerade und blockdiagonal ist. Die Geistwirkung besitzt keinen pseudoskalaren Anteil, so daß man keine Beiträge, die proportional zum Immirzi-Term $\pm \left(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right)$

wären, erhält. Demgemäß verzichten wir auf eine entsprechende Aufspaltung.

Explizit lauten die „contr“-Matrizen:

Skalare im Graviton-Sektor (a, d, B, D):

$$(V_{\text{contr}}^{\text{S}(+)})_{j\text{S}}^{i\text{S}} \mp (V_{\text{contr}}^{\text{S}(-)})_{j\text{S}}^{i\text{S}} = \frac{1}{16\pi G_k} n^{(\pm)ab} f_{ab} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2\alpha_{\text{D}}}\bar{\mu}^{-1} & \left[-\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{1}{\gamma_k}\right) - \frac{1}{2\alpha_{\text{D}}}\left(5\beta_{\text{D}}+\frac{1}{2}\right)\right]\bar{\mu}^{-1} & \left(1\mp\frac{1}{\gamma_k}\right)p^{-1} & \left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k}\right)p^{-1} \\ \left[-\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{1}{\gamma_k}\right) + \frac{3}{2\alpha_{\text{D}}}\left(\beta_{\text{D}}+\frac{1}{2}\right)\right]\bar{\mu}^{-1} & \left[-\left(1\mp\frac{1}{\gamma_k}\right) + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2\alpha_{\text{D}}}\right]\bar{\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ -\left(1\mp\frac{1}{\gamma_k}\right)p^{-1} & -2\left(1\mp\frac{1}{\gamma_k}\right)p^{-1} & 0 & 0 \\ \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)p^{-1} & 2\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)p^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

Tensoren im Graviton-Sektor (d^{mn}, B^{mn}, D^{mn}):

$$(V_{\text{contr}}^{\text{T}(+)})_{j\text{T}}^{i\text{T}} \mp (V_{\text{contr}}^{\text{T}(-)})_{j\text{T}}^{i\text{T}} = \frac{1}{16\pi G_k} n^{(\pm)ab} f_{ab} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{5}{6}\left(1\mp\frac{1}{\gamma_k}\right)\bar{\mu}^{-1} & -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\pm\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{5}{6}\right)p^{-1} & \frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{5}{24}p^{-1} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\mp\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{5}{3}\right)p^{-1} & 0 & 0 \\ \left(\pm\frac{5}{6}-\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{5}{24}\right)p^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

Skalare im Geist-Sektor (\bar{f}, f):

$$(V_{\text{contr}}^{\text{ghS}})_{j_{\text{ghS}}}^{i_{\text{ghS}}} = n^{(\pm)ab} f_{ab} \times (0) \quad (7.46)$$

Vektoren im Geist-Sektor ($\bar{g}_m, \bar{F}_m, \bar{G}_m, g^m, F^m, G^m$):

$$(V_{\text{contr}}^{\text{ghV}})_{j_{\text{ghV}}}^{i_{\text{ghV}}} = n^{(\pm)ab} f_{ab} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\bar{\mu}^{-1} & \frac{3}{16}p^{-1} & 0 \\ \frac{3}{8}p^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

Vektoren im Graviton-Sektor ($b^m, c^m, A^m, D^m, d^m, B^m, C^m$):

$$\begin{aligned}
 (V_{\text{contr}}^{\text{V}(+)})_{jV}^{iV} \mp (V_{\text{contr}}^{\text{V}(-)})_{jV}^{iV} &= \frac{1}{16\pi G_k} n^{(\pm)ab} f_{ab} \times \\
 &\times \begin{pmatrix}
 0 & \left[\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) - \frac{3}{4\alpha_D} \right] \bar{\mu}^{-1} & -\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) p^{-1} & -\frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \mp \frac{2}{\gamma_k} \right) p^{-1} & \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \bar{\mu}^{-1} & \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{5}{8} \right) p^{-1} & \frac{1}{2} \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) p^{-1} \\
 \left[\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) - \frac{1}{8\alpha_D} \right] \bar{\mu}^{-1} & -\frac{3}{4\alpha_D} \bar{\mu}^{-1} & -\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) p^{-1} & -\frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \mp \frac{2}{\gamma_k} \right) p^{-1} & \left[\left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \pm \frac{1}{2\alpha_D} \right] \bar{\mu}^{-1} & \left(\mp \frac{3}{4} + \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{5}{8} \right) p^{-1} & \left(\mp \frac{1}{4} + \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{1}{2} \right) p^{-1} \\
 -\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) p^{-1} & \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) p^{-1} & 0 & 0 & \left(\pm \frac{5}{4} - \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{13}{8} \right) p^{-1} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \mp \frac{2}{\gamma_k} \right) p^{-1} & -\frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \mp \frac{2}{\gamma_k} \right) p^{-1} & 0 & 0 & \frac{5}{4} \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) p^{-1} & 0 & 0 \\
 \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \bar{\mu}^{-1} & \left[\left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \mp \frac{3}{4\alpha_D} \right] \bar{\mu}^{-1} & 0 & 0 & -\left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) \bar{\mu}^{-1} & \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\gamma_k} p^{-1} & \mp \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\gamma_k} p^{-1} \\
 \left(\pm \frac{1}{4} - \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{5}{8} \right) p^{-1} & \left(\mp \frac{3}{4} + \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{5}{8} \right) p^{-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} \mp \frac{3}{\gamma_k} \right) p^{-1} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) p^{-1} & \left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{9}{8} \right) p^{-1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{13}{4} \mp \frac{3}{\gamma_k} \right) p^{-1} & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

Diese Matrizen besitzen die gewünschten Massendimensionen, d. h. 3 im Falle des Gravitationssektors und 1 im Falle des Geistsektors. Wie angesprochen hebt sich in ersterem der Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ gegen den reziproken Vorfaktor von $(H^{\text{grav}})^{-1}$ weg. Weiterhin sind die Objekte unabhängig von der kosmologischen Konstante und der Lorentz-Eichfixierung, da diese nur zum freien Anteil beitragen. Dies trifft auch auf den $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Block zu, so daß alle Komponenten, die diesem zuzuordnen sind, in den obigen Matrizen verschwinden. Die Diffeomorphismus-Eichbedingung trägt nur zu den $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponenten bei. In den gemischten $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ - bzw. $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponenten finden sich die p^{-1} -Terme, die der First-Order-Natur entstammen. Schließlich weisen sie bezüglich der Parität und der $\frac{1}{\gamma_k}$ -Abhängigkeit die zuvor angegebene Struktur auf. Zudem sind diese Matrizen nicht mehr hermitesch, da bereits eine teilweise Spurbildung erfolgt ist: Aufgrund der Impulsintegration verschwinden einige Terme, die auf Operatorniveau benötigt werden, um die Hermitizität zu gewährleisten.

Wir möchten an dieser Stelle noch eine allgemeine Betrachtung anstellen, die im Zuge der Analyse der Beta-Funktionen von Interesse sein wird. Nehmen wir an, in der Trunkierung wäre kein pseudoskalarer Anteil in Form des Immirzi-Terms enthalten. Dann wäre H mit H_0 identisch, d. h. der freie Anteil wäre analog zum Geistsektor blockdiagonal und γ_k -unabhängig. Wir könnten dann das Argument bezüglich der Spur des Produkts einer blockdiagonalen und einer beliebigen Matrix nicht nur sektorweise, sondern (ebenfalls wie im Geistsektor) bezüglich der Paritätsordnung auch blockweise anwenden. Die zu $\frac{1}{\gamma_k}$ proportionalen Terme wären in $V_{\text{contr}}^{\chi(+)}$ und $V_{\text{contr}}^{\chi(-)}$ nicht vorhanden, und die Nebendiagonalterme in $V_{\text{contr}}^{\chi(-)}$, die beim Übergang von $\bar{\omega}^{(+)}$ zu $\bar{\omega}^{(-)}$ ihr Vorzeichen wechseln, würden aufgrund des gerade erwähnten Spurarguments nicht zur Spur beitragen.

Dies ist zu erwarten, da diese Komponenten bekanntlich auf der rechten Seite dem pseudoskalaren Immirzi-Term und nicht der gesuchten Invariante $\int d^4x \bar{e} \bar{F}^{\mu\nu ab} \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu$ zuzuordnen sind. Dementsprechend wäre hier der relevante Wechselwirkungsbeitrag durch $V_{\text{contr}}^{\chi(+)}|_{\gamma_k \rightarrow \infty}$ gegeben, und er hätte die gleiche Gestalt wie sein Gegenstück aus dem Geistsektor. Wenn also die betrachtete Trunkierung nur den paritätsgeraden Term $\int d^4x \bar{e} \bar{F}^{\mu\nu ab} \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu$ enthält, so erzeugt die Spur auf der rechten Seite keine pseudoskalaren Beiträge. In der metrischen Gravitation gibt es nur eine lokale, im Krümmungstensor lineare Invariante, die einen echten Skalar darstellt. Wir können daher festhalten, daß in einer Trunkierung, die nur die beiden Invarianten $\int d^4x \bar{e} \bar{F}^{\mu\nu ab} \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu$ und $\int d^4x \bar{e}$ enthält, die erforderlichen Wechselwirkungsbeiträge durch $V_{\text{contr}}^{\chi(+)}|_{\gamma_k \rightarrow \infty}$ und $V_{\text{contr}}^{\chi(-)} \rightarrow 0$ gegeben sind.

Darüber hinaus besteht die Frage, ob die Wahl eines konstanten selbstdualen bzw. anti-selbstdualen Spinzusammenhangs als Hintergrundkonfiguration und eine Entwicklung bis zur quadratischen Ordnung in $\bar{\omega}^{(\pm)}$ nicht günstiger gewesen wäre, um auf der rechten Seite die beiden gesuchten Invarianten zu reproduzieren. Zwar hätte man dann eine entsprechend größere Anzahl von Termen berücksichtigen müssen, doch wären keine Ableitungen $\partial\bar{\omega}^{(\pm)}$ aufgetreten. Allerdings sind dann für ein ebenfalls konstantes Hintergrundvielbein die Ausdrücke $\bar{F}^{(\pm)ab}{}_{\mu\nu}\bar{e}_a{}^\mu\bar{e}_b{}^\nu$ und $\star\bar{F}^{(\pm)ab}{}_{\mu\nu}\bar{e}_a{}^\mu\bar{e}_b{}^\nu$ konstant, so daß beide Invarianten Oberflächenterme sind. Vor allem hinsichtlich der auszuführenden partiellen Integrationen kann eine derartige Situation problematisch sein. Im obigen Fall hingegen separiert das mit der Invariante assoziierte Raumzeitintegral vollständig von der restlichen Spur ab. Da wir keine Annahmen bezüglich der x -Abhängigkeit von v_μ gemacht haben, können wir die Hintergrund-Konfiguration als beliebig gut lokalisiert betrachten. Außerdem muß bei einer Entwicklung bis zu $\mathcal{O}(\bar{\omega}^2)$ beachtet werden, daß in dieser Ordnung auch Terme der Form $T^a \wedge T_a$ auftreten, die zur Nieh-Yan-Invariante beitragen und die von den gesuchten Termen zu trennen sind. Abschließend spricht gegen diese Strategie ebenfalls die Tatsache, daß dann unter der Spur zwei überlappende Impulsintegrale auftreten.

Definieren wir nun

$$(V_{\text{contr}}^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi} =: (n^{(\pm)ab} f_{ab}) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi} \quad \forall \chi \in \{\text{S, V, T, gh S, gh S}\},$$

so erhalten wir abschließend die Wechselwirkungsbeiträge der Spur zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left((H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 [(H_0^{\text{grav}})^{-2}]_{\text{REG}} \right) - 2 \text{Tr} \left((H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} [(H_0^{\text{gh}})^{-2}]_{\text{REG}} \right) \right\} \\ = & \frac{1}{2} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \sum_{\chi \in \{\text{S, V, T}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi, k_\chi=1}^{n_\chi} \right. \\ & \left[(v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} (p^2) ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi} (p^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi} (p^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi} (p^2) (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi (p^2))^2 \int ds e^{-s(\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi (p^2))^2} \right] \\ & - 2 \sum_{\chi \in \{\text{gh S, gh V}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi, k_\chi=1}^{n_\chi} \\ & \left. \left[(v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} (p^2) (H_0^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi} (p^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi} (p^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi} (p^2) \int ds' e^{-s'(\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi (p^2))^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi, k_\chi=1}^{n_\chi} \right. \\
&\quad \left[(v^{\chi \alpha_\chi})_{i_\chi} (p^2) ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi} (p^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi} (p^2) (v^{\chi \alpha_\chi})^{k_\chi} (p^2) (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi (p^2))^2 \int ds e^{-s(\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi (p^2))^2} \right] \\
&\quad - 2 \sum_{\chi \in \{\text{gh S, gh V}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{j_\chi, k_\chi=1}^{n_\chi} \\
&\quad \left. \left[\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi (p^2) (v^{\chi \alpha_\chi})_{j_\chi} (p^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi} (p^2) (v^{\chi \alpha_\chi})^{k_\chi} (p^2) \int ds' e^{-s'(\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi (p^2))^2} \right] \right\}. \quad (7.49)
\end{aligned}$$

Bei der Umformung haben wir beachtet, daß auch $(H_0^{\text{gh}})_{j_{\text{gh}}}^{i_{\text{gh}}}(p^2)$ eine reelle, symmetrische Matrix ist, so daß ihre Linkseigenvektoren mit ihren Rechtseigenvektoren identisch sind.

7.5 Die Berechnung von $\frac{1}{2}\text{Tr} \ln \left\{ \mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right\}$

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit dem verbleibenden Beitrag der Spur auf der rechten Seite von (7.35). Es handelt sich um denjenigen Term, der die dimensionslose Matrix \mathcal{M} enthält, so daß er mithin nur im Gravitonsektor auftritt. Dieser Term entstammt dem pseudoskalaren Anteil der Wirkung.

Zunächst gilt wie üblich für das Beispiel der Vektoren aus dem Gravitonsektor

$$\frac{1}{2}\text{Tr} \ln \left\{ \mathbb{1}^V + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^V \right\} = \frac{1}{2} \sum_{p I \alpha_V} \langle p I \alpha_V | \ln \left\{ \mathbb{1}^V + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^V \right\} | p I \alpha_V \rangle.$$

Wir schieben nun wieder zwei $\mathbb{1}$ -Operatoren im verallgemeinerten Ortsraum ein, verwenden die Ortsraumdarstellung

$$\langle x m i_V | \ln \left\{ \mathbb{1}^V + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^V \right\} | y k j_V \rangle = \left(\ln \left\{ \mathbb{1}^V + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^V(-\square_x) \right\} \right)_{j_V}^{i_V} P_V^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}$$

und erhalten nach den vertrauten Manipulationen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\text{Tr} \ln \left\{ \mathbb{1}^V + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^V \right\} \\
&= \frac{1}{2} (d^4 x \bar{e}) d_V \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{i_V=1}^{n_V} \left(\ln \left\{ \mathbb{1}^V + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^V(p^2) \right\} \right)_{i_V}^{i_V}, \quad (7.50)
\end{aligned}$$

so daß also die übliche algebraische Spur der $n_V \times n_V$ -Matrix $(\ln\{\mathbb{1}^V + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^V(p^2)\})_{j_V}^{i_V}$ in regularisierter Form zu berechnen ist. Um dies durchzuführen, sind einige algebraische Eigenschaften von $(\mathcal{M}^V(p^2))_{j_V}^{i_V}$ sehr hilfreich, mit denen wir uns im folgenden Unterabschnitt befassen.

7.5.1 Zu den algebraischen Eigenschaften der Matrix \mathcal{M}

Wir geben die Matrix \mathcal{M} zunächst sektorweise an:

Skalare im Graviton-Sektor (a, d, B, D):

$$(\mathcal{M}^S)_{j_S}^{i_S}(p^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{2p}{\bar{\mu}} & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

Vektoren im Graviton-Sektor ($b^m, c^m, A^m, D^m, d^m, B^m, C^m$):

$$(\mathcal{M}^V)_{j_V}^{i_V}(p^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2p}{\bar{\mu}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2p}{\bar{\mu}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

Tensoren im Graviton-Sektor (d^{mn}, B^{mn}, D^{mn}):

$$(\mathcal{M}^T)_{j_T}^{i_T}(p^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{2p}{\bar{\mu}} & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

In diesen Blöcken tritt nur der Quotient $\frac{p}{\bar{\mu}}$ auf, so daß \mathcal{M} insbesondere unabhängig von

Λ_k , α_D und α'_L ist.

Wir unterdrücken jetzt die Matrixindizes $i_{\bar{\chi}}$, $j_{\bar{\chi}}$, $\bar{\chi} \in \{S, V, T\}$. Zudem bezeichne in der folgenden Diskussion $\mathbb{1}^{\bar{\chi}} = \{(\mathbb{1}^{\bar{\chi}})_{j_{\bar{\chi}}}^{i_{\bar{\chi}}}\} \equiv \mathbb{1}_{n_{\bar{\chi}} \times n_{\bar{\chi}}}$ den algebraischen Anteil des Einheitsoperators, so daß $\mathbb{1}^{\bar{\chi}}$ und $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ jeweils $n_{\bar{\chi}} \times n_{\bar{\chi}}$ -Matrizen sind.

Die wichtigste Eigenschaft von $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ ist dann durch folgenden Sachverhalt gegeben: Für jeden Sektor $\bar{\chi}$ existieren orthogonale Projektoren $\Pi_+^{\bar{\chi}}$ und $\Pi_-^{\bar{\chi}}$, so daß gilt

$$\mathcal{M}^{\bar{\chi}} = \Pi_+^{\bar{\chi}} - \Pi_-^{\bar{\chi}} \quad \text{mit} \quad \Pi_+^{\bar{\chi}} \cdot \Pi_-^{\bar{\chi}} = 0. \quad (7.54)$$

Dies impliziert $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2 = \Pi_+^{\bar{\chi}} + \Pi_-^{\bar{\chi}}$, so daß man die Projektoren gemäß $\Pi_+^{\bar{\chi}} = \frac{1}{2}((\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2 + \mathcal{M}^{\bar{\chi}})$ und $\Pi_-^{\bar{\chi}} = \frac{1}{2}((\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2 - \mathcal{M}^{\bar{\chi}})$ bestimmen kann. Definiert man zudem

$$\Pi_0^{\bar{\chi}} := \mathbb{1}^{\bar{\chi}} - \Pi_+^{\bar{\chi}} - \Pi_-^{\bar{\chi}},$$

so folgt unmittelbar

$$\Pi_0^{\bar{\chi}} \cdot \Pi_+^{\bar{\chi}} = 0 = \Pi_0^{\bar{\chi}} \cdot \Pi_-^{\bar{\chi}} \quad \text{sowie} \quad \Pi_0^{\bar{\chi}} \cdot \Pi_0^{\bar{\chi}} = \Pi_0^{\bar{\chi}},$$

und wir können diese Beziehungen formal in der üblichen Relation für Projektoren auf orthogonale Unterräume zusammenfassen:

$$\Pi_i^{\bar{\chi}} \cdot \Pi_j^{\bar{\chi}} = \delta_{ij} \Pi_j^{\bar{\chi}}, \quad i, j \in \{+, -, 0\}. \quad (7.55)$$

Weiterhin gilt

$$(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^3 = (\Pi_+^{\bar{\chi}} + \Pi_-^{\bar{\chi}}) \cdot (\Pi_+^{\bar{\chi}} - \Pi_-^{\bar{\chi}}) = \Pi_+^{\bar{\chi}} - \Pi_-^{\bar{\chi}} = \mathcal{M}^{\bar{\chi}} \quad (7.56)$$

und somit für $n \in \mathbb{N}$

$$(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^{2n-1} = \mathcal{M}^{\bar{\chi}} \quad \text{und} \quad (\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^{2n} = (\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2. \quad (7.57)$$

Die Eigenschaft (7.56), $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^3 = \mathcal{M}^{\bar{\chi}}$, besagt, daß \mathcal{M} eine sogenannte *Krein-Form* definiert. Man beachte, daß dies trivialerweise auch für $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2 = \mathbb{1}^{\bar{\chi}}$ der Fall wäre; hier jedoch gilt $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2 = \mathbb{1}^{\bar{\chi}} - \Pi_0^{\bar{\chi}}$, wobei der Differenzbeitrag $\Pi_0^{\bar{\chi}}$ zu $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ orthogonal ist.

Wir führen nun die Größe $\nu_{\bar{\chi}}$ ein, die die Anzahl der Skalare, Vektoren und spurlossymmetrischen Tensoren in der Zerlegung (6.12) der reskalierten Spinzusammenhangsfluktuation $\bar{\mu}^{-\frac{1}{2}} \bar{\tau}^{kl}$ angibt. Da wir in dieser die letzten beiden Komponenten durch Dualisierung der ersten beiden erhalten, ist $\nu_{\bar{\chi}}$ eine gerade Zahl. Es gilt $\nu_S = 2$, $\nu_V = 4$ und $\nu_T = 2$ in Übereinstimmung mit den $2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 24$ unabhängigen Komponenten des Spinzusammenhangs.

Das Spektrum der Projektoren $\Pi_+^{\bar{\chi}}$ und $\Pi_-^{\bar{\chi}}$ weist nun jeweils $\frac{\nu_{\bar{\chi}}}{2}$ -mal den Eigenwert $+1$ und $(n_{\bar{\chi}} - \frac{\nu_{\bar{\chi}}}{2})$ -mal den Eigenwert 0 auf. Da die Eigenräume von $\Pi_+^{\bar{\chi}}$ und $\Pi_-^{\bar{\chi}}$ orthogonal sind, besitzt $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ die Eigenwerte $+1$ und -1 jeweils mit Entartungsgrad $\frac{\nu_{\bar{\chi}}}{2}$. Der Eigenwert 0 ist $(n_{\bar{\chi}} - \nu_{\bar{\chi}})$ -fach entartet. Im Spektrum von $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2$ tritt daher der Eigenwert $+1$ mit $\nu_{\bar{\chi}}$ -facher Entartung und der Eigenwert 0 mit $(n_{\bar{\chi}} - \nu_{\bar{\chi}})$ -facher Entartung auf. Dabei sind die 0 -Eigenwerte den Komponentenfeldern der $\bar{\varepsilon}$ -Zerlegung zuzuordnen.

Somit gilt für die algebraische Spur über die Indizes $i_{\bar{\chi}}$ und $j_{\bar{\chi}}$ dieser Matrizen

$$\text{Tr}_{\text{alg}}\{\mathcal{M}^{\bar{\chi}}\} = 0 \quad \text{sowie} \quad \text{Tr}_{\text{alg}}\{(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^2\} = \nu_{\bar{\chi}}. \quad (7.58)$$

Die Matrix $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ ist jedoch nicht hermitesch. Vielmehr gilt mit $\mathcal{M}^{\bar{\chi}} := (H_0^{\bar{\chi}})^{-1} \bar{H}^{\bar{\chi}}$ aufgrund der Hermitizität der beiden Matrizen auf der rechten Seite

$$(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^\dagger = \bar{H}^{\bar{\chi}} (H_0^{\bar{\chi}})^{-1} = H_0^{\bar{\chi}} \mathcal{M}^{\bar{\chi}} (H_0^{\bar{\chi}})^{-1}.$$

Dennoch besitzen $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ und $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^\dagger$ dieselben Eigenwerte: Sei $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ eine im allgemeinen komplexe, nicht-hermitesche $n_{\bar{\chi}} \times n_{\bar{\chi}}$ -Matrix mit charakteristischem Polynom $P_{\mathcal{M}^{\bar{\chi}}}(\tilde{\lambda}^{\bar{\chi}}) \equiv \det(\mathcal{M}^{\bar{\chi}} - \tilde{\lambda}^{\bar{\chi}})$, so gilt für das charakteristische Polynom von $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^\dagger$:

$$P_{(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^\dagger}(\tilde{\lambda}^{\bar{\chi}}) = \det((\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^\dagger - \tilde{\lambda}^{\bar{\chi}}) = \det((\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^* - \tilde{\lambda}^{\bar{\chi}}) = [\det(\mathcal{M}^{\bar{\chi}} - (\tilde{\lambda}^{\bar{\chi}})^*)]^* = [P_{\mathcal{M}^{\bar{\chi}}}(\tilde{\lambda}^{\bar{\chi}})]^*.$$

Dabei haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, daß die Determinante einer transponierten Matrix gleich der der ursprünglichen ist. Die Nullstellen der charakteristischen Polynome von $(\mathcal{M}^{\bar{\chi}})^\dagger$ und $\mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ sind also identisch, so daß die Behauptung bewiesen ist.

Um einen Eindruck von der Gestalt der Eigenvektoren zu erhalten, geben wir diese ebenfalls sektorweise an.

Skalarer Block des Gravitonsektors:

$$\{\tilde{v}_{\alpha_S}^S\} = \left\{ (0, 0, 1, 1)^T, (0, 0, -1, 1)^T, \left(0, -\frac{\bar{\mu}}{2p}, 1, 0\right)^T, (1, 0, 0, 0)^T \right\} \quad (7.59)$$

Vektorblock des Gravitonsektors:

$$\begin{aligned} \{\tilde{v}_{\alpha_V}^V\} = & \left\{ (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)^T, (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)^T, (0, 0, -1, 0, 0, 0, 1)^T, (0, 0, 0, -1, 0, 1, 0)^T, \right. \\ & \left. \left(0, 0, 0, 0, -\frac{\bar{\mu}}{2p}, 0, 1\right)^T, \left(0, -\frac{\bar{\mu}}{2p}, 1, 0, 0, 0, 0\right)^T, (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \right\} \end{aligned} \quad (7.60)$$

Tensorblock des Gravitonsektors:

$$\{\tilde{v}_{\alpha_T}^T\} = \left\{ (0, 1, 1)^T, (0, -1, 1)^T, \left(-\frac{\bar{\mu}}{2p}, 1, 0\right)^T \right\} \quad (7.61)$$

Die Matrix \mathcal{M} stellt die Wirkung des ursprünglichen $O(4)$ -Dualitätsoperators \star auf dem Raum aller Komponentenfelder der $\bar{\varepsilon}$ - und der $\bar{\tau}$ -Zerlegung für den freien Anteil dar und entspricht somit dem Pendant der fermionischen γ_5 -Involution auf dem freien Gravitonsektor.

Diese algebraischen Eigenschaften haben zur Folge, daß man insbesondere Exponentialreihen unmittelbar berechnen kann. Da die Projektoren $\Pi_i^{\bar{X}}$ orthogonal zueinander sind und somit ihre Kommutatoren verschwinden, treten z. B. bei der Berechnung von $e^{-s(\mathbb{1}^{\bar{X}} + \frac{1}{\gamma} \mathcal{M}^{\bar{X}})}$ in der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel keine entsprechenden Terme auf. Stattdessen gilt

$$\begin{aligned} e^{-s(\mathbb{1}^{\bar{X}} + \frac{1}{\gamma} \mathcal{M}^{\bar{X}})} &= e^{-s(\Pi_0^{\bar{X}} + (1 + \frac{1}{\gamma})\Pi_+^{\bar{X}} + (1 - \frac{1}{\gamma})\Pi_-^{\bar{X}})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \left(\Pi_0^{\bar{X}} + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\Pi_+^{\bar{X}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\Pi_-^{\bar{X}} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \left((\Pi_0^{\bar{X}})^n + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^n (\Pi_+^{\bar{X}})^n + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^n (\Pi_-^{\bar{X}})^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \left((\Pi_0^{\bar{X}}) + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^n (\Pi_+^{\bar{X}}) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^n (\Pi_-^{\bar{X}}) \right) \\ &= \Pi_0^{\bar{X}} e^{-s} + \Pi_+^{\bar{X}} e^{-s(1 + \frac{1}{\gamma})} + \Pi_-^{\bar{X}} e^{-s(1 - \frac{1}{\gamma})}. \end{aligned}$$

Wir berechnen im folgenden die gesuchte algebraische Spur.

7.5.2 Die Berechnung von $\text{Tr}_{\text{alg}} \ln \left\{ \mathbb{1} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M} \right\}$

Der Operator $\mathcal{N}^{\bar{\chi}} := \mathbb{1}^{\bar{\chi}} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^{\bar{\chi}}$ besitzt in jedem Sektor $\bar{\chi}$ den $\frac{\nu_{\bar{\chi}}}{2}$ -fach entarteten Eigenwert $1 + \frac{1}{\gamma_k}$, den $\frac{\nu_{\bar{\chi}}}{2}$ -fach entarteten Eigenwert $1 - \frac{1}{\gamma_k}$ sowie den $(n_{\bar{\chi}} - \nu_{\bar{\chi}})$ -fach entarteten Eigenwert 1. Wir bezeichnen sein Spektrum mit $\text{spec}(\mathcal{N}^{\bar{\chi}}) = \{\lambda_{\mathcal{N}^{\bar{\chi}} \alpha_{\bar{\chi}}}^{\bar{\chi}}\}$, $\alpha_{\bar{\chi}} \in \{1, \dots, n_{\bar{\chi}}\}$. Wir stellen auch diesen Logarithmus über ein Propertime-Integral dar, da das eine konsistente Regularisierung aller auftretenden Spuren erlaubt. Um zudem einen positiven Operator zu exponentieren, quadrieren wir $\mathcal{N}^{\bar{\chi}}$ gemäß

$$\text{Tr}_{\text{alg}} \{ \ln \mathcal{N}^{\bar{\chi}} \} = \frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{alg}} \{ \ln (\mathcal{N}^{\bar{\chi}})^2 \}$$

und regularisieren das Eigenzeit-Integral

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{alg}} \left[\ln (\mathcal{N}^{\bar{\chi}})^2 \right]_{\text{REG}} = -\frac{1}{2} \int \frac{ds}{s} \text{Tr}_{\text{alg}} \left(e^{-s (\mathcal{N}^{\bar{\chi}})^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha_{\bar{\chi}}=1}^{n_{\bar{\chi}}} \int \frac{ds}{s} \left(e^{-s (\lambda_{\mathcal{N}^{\bar{\chi}} \alpha_{\bar{\chi}}}^{\bar{\chi}})^2} \right).$$

Da das Spektrum von $\mathcal{N}^{\bar{\chi}}$ invariant ist unter einem Vorzeichenwechsel des Immirzi-Parameters $\gamma_k \rightarrow -\gamma_k$, ist diese Spur, die nur zur Beta-Funktion der kosmologischen Konstante beitragen wird, ebenfalls eine gerade Funktion von γ_k .

Wir können die algebraische Spur auch ohne Blick auf deren zukünftige Regularisierung exakt berechnen, was eine Vorstellung von der γ_k -Abhängigkeit der unregularisierten Spur ermöglicht. Wir geben daher das Resultat an und entwickeln dazu in

$$\text{Tr}_{\text{alg}} \ln \left\{ \mathbb{1}^{\bar{\chi}} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^{\bar{\chi}} \right\} \equiv \left(\ln \left\{ \mathbb{1}^{\bar{\chi}} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^{\bar{\chi}} \right\} \right)_{i_{\bar{\chi}}}^{i_{\bar{\chi}}}$$

den Logarithmus in die entsprechende Exponentialreihe, wobei nun im Unterschied zum Wechselwirkungsanteil *alle* Ordnungen zu berücksichtigen sind. Unterdrücken wir weiterhin

die Matrixindizes, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{\mathrm{alg}} \ln \left\{ \mathbb{1}^{\bar{x}} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^{\bar{x}} \right\} &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{alg}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{\gamma_k^n} (\mathcal{M}^{\bar{x}})^n \right\} \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathrm{alg}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{2n}}{2n-1} \frac{1}{\gamma_k^{2n-1}} (\mathcal{M}^{\bar{x}})^{2n-1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \frac{1}{\gamma_k^{2n}} (\mathcal{M}^{\bar{x}})^{2n} \right) \right\} \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathrm{alg}} \left\{ \left(\mathcal{M}^{\bar{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{1}{\gamma_k^{2n-1}} - (\mathcal{M}^{\bar{x}})^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \frac{1}{\gamma_k^{2n}} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Kombiniert man die bereits verwandte Entwicklung des Logarithmus mit $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $x \in \mathbb{R}$, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2} (\ln(1+x) + \ln(1-x)) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)).$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{\mathrm{alg}} \ln \left\{ \mathbb{1}^{\bar{x}} + \frac{1}{\gamma_k} \mathcal{M}^{\bar{x}} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \right\} \mathrm{Tr}_{\mathrm{alg}} \mathcal{M}^{\bar{x}} + \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \right\} \mathrm{Tr}_{\mathrm{alg}} (\mathcal{M}^{\bar{x}})^2 \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma_k + 1}{\gamma_k - 1} \right) \cdot 0 + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{\gamma_k^2} \right) \cdot \nu_{\bar{x}} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma_k^2 - 1}{\gamma_k^2} \right) \cdot \nu_{\bar{x}}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Spur hängt also logarithmisch vom Immirzi-Parameter ab und ist zudem eine gerade Funktion von γ_k .

7.6 Die Regularisierung der Spuren

Der zu regularisierende Ausdruck ist durch

$$\begin{aligned}
\Gamma_k - S &= -\frac{1}{4} \left(\int d^4x \bar{e} \right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \not\int \frac{ds}{s} \left(\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} e^{-s (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} - 40 e^{-s \bar{\mu}^6} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \not\int \frac{ds'}{s'} \left(\sum_{\chi \in \{\text{gh } S, \text{gh } V\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} e^{-s' (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} - 10 e^{-s' \bar{\mu}^2} \right) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \left(\int d^4x \bar{e} \right) \sum_{\bar{\chi} \in \{S, V, T\}} d_{\bar{\chi}} \sum_{\alpha_{\bar{\chi}}=1}^{n_{\bar{\chi}}} \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \not\int \frac{ds}{s} \left(e^{-s (\lambda_{\mathcal{N}\alpha_{\bar{\chi}}}^{\bar{\chi}})^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi, k_\chi=1}^{n_\chi} \right. \\
&\quad \left[(v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi}(p^2) ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi}(p^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi}(p^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi}(p^2) (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2 \times \right. \\
&\quad \left. \times \not\int ds e^{-s (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} \right] \\
&\quad - 2 \sum_{\chi \in \{\text{gh } S, \text{gh } V\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi, k_\chi=1}^{n_\chi} \\
&\quad \left. \left[(v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi}(p^2) (H_0^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi}(p^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi}(p^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi}(p^2) \not\int ds' e^{-s' (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

gegeben. Es handelt sich dabei allerdings nicht um die endgültige Form, da eine weitere Regularisierung, die zusätzlich zum Abschneiden der Propertime-Integrale auftreten wird, noch nicht berücksichtigt wurde. Daher haben wir auch das Propertime-Integral über die p -unabhängigen Eigenwerte von $\mathcal{N}^{\bar{\chi}}$ unter das Impulsintegral geschrieben, denn diese Regularisierung wird auch hier auf eine p -Abhängigkeit führen. Es handelt sich dabei um eine Dämpfung des Impulsintegrals $\int d^4p$, die zusammen mit der Ersetzung des Symbols $\not\int ds$ durch ein geeignet abgeschnittenes Eigenzeit-Integral die von uns verwandte Regularisierungsprozedur bildet.

Bevor wir diese diskutieren, schreiben wir zunächst die Spur auf dimensionslose Kopplungen

$$g_k := G_k k^2$$

und

$$\lambda_k := \frac{\Lambda_k}{k^2}$$

um. Zudem definieren wir die Größen

$$\mu := \frac{\bar{\mu}}{k} \quad \text{und} \quad y := \frac{p}{k},$$

die ebenfalls dimensionslos sind. Schließlich ist noch zu beachten, daß auch der eigentliche Lorentz-Eichparameter α_L dimensionsbehaftet ist. Wir können dies berücksichtigen, indem wir ihn entweder mit der Skala k oder dem Massenparameter $\bar{\mu}$ reskalieren. Wir entscheiden uns formal für die zweite Möglichkeit und definieren einen dimensionslosen Parameter f über

$$\alpha'_L =: f \bar{\mu}^{-2} \mu^{-2} \equiv f \mu^{-4} k^{-2},$$

was jedoch für $f = f' \mu^4$ in die erstgenannte Möglichkeit übergeht. Bezüglich des ursprünglichen Massenparameters $\alpha_L = \frac{\alpha'_L}{16\pi G_k}$ gilt dann nämlich

$$\alpha_L = 16\pi G_k \bar{\mu}^{-2} \mu^{-2} f = 16\pi g_k f \bar{\mu}^{-4},$$

so daß der Lorentz-Eichfixierungsbeitrag zur Wirkung die Form

$$\begin{aligned} S_{\text{gf}}^L[\varepsilon; \bar{e}] &= \frac{1}{2\alpha_L} \int d^4x \bar{e} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab} \\ &= \frac{1}{16\pi G_k} \cdot \frac{1}{2f\mu^{-2}\bar{\mu}^{-2}} \int d^4x \bar{e} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab} \end{aligned}$$

annimmt. Die Tatsache, daß hier in die Definition des Eichparameters, dessen Renormierung wir vernachlässigen, eine laufende Kopplung eingeht, diskutieren wir weiter unten.

Zudem reskalieren wir die Eigenwerte gemäß

$$\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) := 16\pi G_k \bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2) k^{-1} \quad \text{für } \chi \in \{\text{S, V, T}\} \quad (7.62)$$

sowie

$$\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) := \bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2) k^{-1} \quad \text{für } \chi \in \{\text{gh S}, \text{gh V}\}. \quad (7.63)$$

Die Objekte auf der linken Seite sind dimensionslos; sie hängen nicht mehr explizit von p , $\bar{\mu}$, Λ_k oder α'_L ab, sondern lassen sich als reine Funktionen von y , μ , λ_k und f schreiben. Im Gravitonsektor haben wir darüber hinaus den globalen Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ herausdefiniert. Wir diskutieren nun die beiden angesprochenen Renormierungsschemata.

7.6.1 Die $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Erweiterung

Wir definieren zunächst einen Operator $\hat{\mathbf{p}}^2$, dessen verallgemeinerte Ortsdarstellung für das übliche Beispiel des Vektorblocks des Gravitonsektors gegeben sei durch

$$\langle x m i_V | \hat{\mathbf{p}}^2 | y k j_V \rangle = (-\square_x) \delta_{j_V}^{i_V} P_V^m \left(\frac{-i\partial_x}{\sqrt{-\square_x}} \right) \frac{\delta^{(4)}(x-y)}{\bar{e}}.$$

Dieser Operator ist positiv und vertauscht mit H_0 sowie \mathcal{N} , aber nicht mit V ; natürlich vertauscht er auch mit $\bar{\mu} \mathbb{1}$. Wir wollen an den beiden Spuren $\frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left\{ \frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right\}$ und $\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 (H_0^{\text{grav}})^{-2} \}$ aus dem Gravitonsektor erläutern, wie die Regularisierung verfährt.

Betrachten wir zunächst den unregularisierten Fall, so erweitern wir im freien Beitrag den Logarithmus mit $\hat{\mathbf{p}}^{2n} \equiv (\hat{\mathbf{p}}^2)^n$, worin n eine frei wählbare, natürliche Zahl bezeichne. Anschließend ziehen wir den Logarithmus auseinander, was hier ohne Einschränkungen möglich ist, da alle beteiligten Operatoren eine gemeinsame Eigenbasis besitzen. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left\{ \frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right\} &= \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \{ (H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n} \hat{\mathbf{p}}^{-2n} \bar{\mu}^{-6} \} \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \{ (H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n} \} + \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \{ \hat{\mathbf{p}}^{-2n} \bar{\mu}^{-6} \} \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \{ (H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n} \} - \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \{ \hat{\mathbf{p}}^{2n} \bar{\mu}^6 \}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Wir definieren nun den regularisierten Logarithmus in $\frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left\{ \frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right\} \right]_{\text{REG}}$, indem wir

beide Logarithmen in (7.64) separat über regularisierte Propertime-Integrale darstellen gemäß

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left\{ \frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right\} \right]_{\text{REG}} \\ & := -\frac{1}{4} \rlap{-}\int \frac{ds}{s} \text{Tr} \left\{ e^{-s(H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n}} - e^{-s \hat{\mathbf{p}}^{2n} \bar{\mu}^6} \right\}. \end{aligned}$$

Darin besitzt die Eigenzeit-Variable in beiden Fällen die gleiche Dimension. Werten wir die Spur in der verallgemeinerten Impulseigenbasis aus, führt dies auf die Ersetzung $\hat{\mathbf{p}}^{2n} \rightarrow p^{2n}$. Das in der Spur enthaltene Impulsintegral wird entsprechend gedämpft. Verschiedene Wahlen des Parameters n entsprechen dabei Variationen des Abschneidens. Die Behandlung der \mathcal{N} -abhängigen Spur erfolgt analog, indem man $\bar{\mu}$ durch 1 ersetzt.

Im Wechselwirkungsterm in der zweiten Zeile von (7.35) erweitern wir die Spur ebenfalls zusätzlich zu $(H_0^{\text{grav}})^2$ noch mit $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ und wenden dann auf $((H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n})^{-1}$ die Propertime-Darstellung an, die anschließend zu regularisieren ist:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 [(H_0^{\text{grav}})^{-2}]_{\text{REG}} \right\} \\ & := \rlap{-}\int ds \text{Tr} \left\{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n} e^{-s(H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n}} \right\}. \end{aligned}$$

Auch hier führt die Berechnung in der Eigenbasis zusätzlich zur Spektraldarstellung von $(H_0^{\text{grav}})^2$ auf die Ersetzung $\hat{\mathbf{p}}^{2n} \rightarrow p^{2n}$ und somit auf eine Dämpfung der erwünschten Art. Die Erweiterungen erhöhen die Massendimension der Propertime-Variable s um $2n$. Diese Regularisierung wird in gleicher Form auf die Geistbeiträge angewandt.

Um dies zusammenzufassen, betrachten wir einen positiven Operator Ω mit Massendimension \hat{n} , d. h. $[\Omega] = \hat{n}$. Dann gelten die Regularisierungsvorschriften

$$\text{Tr} \left[\ln \left(\frac{\Omega}{\bar{\mu}^{\hat{n}}} \right) \right]_{\text{REG}} := -\rlap{-}\int \frac{ds}{s} \left(\text{Tr} e^{-s\Omega \hat{\mathbf{p}}^{2n}} - \text{Tr} e^{-s\bar{\mu}^{\hat{n}} \hat{\mathbf{p}}^{2n}} \right) \quad (7.65)$$

und

$$\text{Tr} \left\{ A [\Omega^{-1}]_{\text{REG}} \right\} := \text{Tr} \left\{ A \hat{\mathbf{p}}^{2n} \rlap{-}\int ds e^{-s\Omega \hat{\mathbf{p}}^{2n}} \right\} \quad (7.66)$$

mit einem Operator A mit Massendimension $[A] = \hat{n}$.

Im Falle des Gravitonanteils ist $\Omega \equiv (H_0^{\text{grav}})^2$ und somit $\hat{n} = 6$, so daß k^{6+2n} einen Infrarot-Cutoff bezüglich des Spektrums von $(H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n}$ darstellt. Im Falle des Geistsektors gilt hingegen $\Omega \equiv (H_0^{\text{gh}})^2$ mit $\hat{n} = 2$. Entsprechend ist durch k^{2+2n} ein Infrarot-Cutoff bezüglich des Spektrums von $(H_0^{\text{gh}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n}$ gegeben. Die Operatoren H_0^{grav} und H_0^{gh} hängen ebenfalls nur von $\square \equiv \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ mit $p^2 \in \text{spec}\{-\square\}$ ab. Da sich einige Eigenwerte von $(H_0^{\text{grav}})^2$ bzw. $(H_0^{\text{gh}})^2$ mit wachsendem p^2 einem konstanten Wert annähern, wird die $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Erweiterung benötigt, um die Konvergenz der Impulsintegrale zu gewährleisten.

Das in den Regularisierungsvorschriften (7.65) und (7.66) auftretende Symbol $\not\int$ bedarf nun einer präzisen Definition, die der folgende Abschnitt bereitstellt.

7.6.2 Die Propertime-Regularisierung

In diesem Abschnitt geben wir an, was wir unter dem Symbol $\not\int ds$, der Regularisierung des Eigenzeit-Integrals $\int_0^\infty ds$, verstehen. Wir werden diese Regularisierung auf drei Arten implementieren. Um diese zu erläutern, betrachten wir im folgenden immer Ausdrücke der Form $\not\int \frac{ds}{s} \text{Tr}\{e^{-s\Omega}\}$ oder $\not\int ds \text{Tr}\{A e^{-s\Omega}\}$. Die Massendimension des Operators Ω sei weiterhin durch \hat{n} gegeben, so daß die Eigenzeit-Variable die Massendimension $-\hat{n}$ besitzt.

Der scharfe Propertime-Cutoff. Die bereits erläuterte, heuristische Vorstellung der Propertime-Darstellung besteht darin, daß das Teilchen für große Eigenzeiten über einen großen räumlichen Bereich diffundiert und somit das Verhalten des Systems auf großen Abstandsskalen erprobt. Umgekehrt ist in dem Verhalten für kleine Eigenzeiten die Information über die Dynamik des Systems bei höchsten Impulsen enthalten, so daß man eine intuitive Vorstellung im Sinne der Heisenbergschen Unschärferelation erhält. Für das Abschneiden großer Eigenzeiten wäre dann bezogen auf eine Impulsskala ein Infrarot-Cutoff k verantwortlich, für kleine Eigenzeiten hingegen ein Ultraviolett-Cutoff Λ_{UV} . Ein scharfes Abschneiden regularisiert somit die s -Integration gemäß

$$\not\int ds := \int_{\Lambda_{\text{UV}}^{-\hat{n}}}^{k^{-\hat{n}}} ds .$$

Ziel unserer Bemühungen ist die Konstruktion einer Flußgleichung, die die Änderung des Wirkungsfunktionalen bezüglich der IR-Cutoffskala k erfaßt. Da diese IR-Flußgleichung

von der UV-Regularisierung unberührt bleibt, können wir bereits an dieser Stelle die UV-Regularisierung entfernen und entsprechend alle Ausdrücke für $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$ betrachten. Mit $s_0(k) := k^{-\hat{n}}$ erhalten wir schließlich

$$\partial_t \int_0^{s_0(k)} ds F(s) = (\partial_t s_0(k)) F(s_0(k)) = -\hat{n} F(s_0(k)) s_0(k). \quad (7.67)$$

In (7.67) bezeichnet die Funktion $F(s)$ die Spuren $\text{Tr}\{Ae^{-s\Omega}\}$ bzw. $\frac{1}{s}\text{Tr}\{Ae^{-s\Omega}\}$, so daß z. B.

$$\partial_t \int \frac{ds}{s} \text{Tr}\{Ae^{-s\Omega}\} = -\hat{n} \text{Tr}\{Ae^{-\Omega k^{-\hat{n}}}\} \quad (7.68)$$

gilt, wenn wir die Eigenzeit scharf abschneiden. (Im allgemeinen wird s_0 von der Form $s_0(k) = \zeta k^{-\hat{n}}$ sein, doch auch für diesen Fall behalten die Überlegungen ihre Gültigkeit bei. Wir werden später darauf zurückkommen.)

Die C_k^m -Regularisierung. Hier wird das Eigenzeit-Integral vermöge

$$\int ds := \int_0^\infty ds C_k^m(s)$$

regularisiert, wobei die in der Literatur vielfach verwandten Funktionen C_k^m gegeben sind durch

$$C_k^m(s) := \frac{\Gamma(m+1, sk^{\hat{n}}) - \Gamma(m+1, s\Lambda_{UV}^{\hat{n}})}{\Gamma(m+1)}$$

mit $m \geq 0$, $s \geq 0$ und $k \geq 0$. In dieser Definition treten die unvollständigen Gamma-Funktionen

$$\Gamma(\alpha, x) := \int_x^\infty dr r^{\alpha-1} e^{-r}$$

auf, so daß sich die Regulatorfunktion C_k^m auch in der Form

$$C_k^m(s) = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\int_{sk^{-\hat{n}}}^\infty - \int_{s\Lambda_{UV}^{-\hat{n}}}^\infty \right) dr r^m e^{-r} \equiv \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_{sk^{-\hat{n}}}^{s\Lambda_{UV}^{-\hat{n}}} dr r^m e^{-r}$$

mit $\Gamma(m+1) = m!$ schreiben läßt. Deren Skalenableitung ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}\partial_t C_k^m(s) &= \left(\frac{\partial}{\partial (sk^{\hat{n}})} C_k^m(s) \right) (\partial_t sk^{\hat{n}}) = -\frac{1}{\Gamma(m+1)} (sk^{\hat{n}})^m e^{-sk^{\hat{n}}} (\hat{n} sk^{\hat{n}}) \\ &= -\frac{\hat{n}}{m!} (sk^{\hat{n}})^{m+1} e^{-sk^{\hat{n}}} .\end{aligned}\quad (7.69)$$

Zudem gilt im Grenzfall $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$ für diese Regulatorfunktionen folgende Darstellung:

$$C_k^m(s) \equiv \frac{1}{m!} \int_{sk^{\hat{n}}}^{\infty} dr r^m e^{-r} = e^{-sk^{\hat{n}}} \sum_{\sigma=0}^m \frac{(sk^{\hat{n}})^{\sigma}}{\sigma!} .$$

Für $k \rightarrow 0$ gilt in diesem Fall wie gewünscht $C_{k=0}^m(s) = 1 \forall m, s$. Dies bedeutet, daß für $k \rightarrow 0$ der Regulator tatsächlich entfernt wird. Wir beweisen diese Behauptung unter Verwendung einer erzeugenden Funktion: Mit $\int_{sk^{\hat{n}}}^{\infty} dr e^{-\beta r} = \frac{1}{\beta} e^{-\beta sk^{\hat{n}}}$ gilt

$$\begin{aligned}C_k^m(s) &= \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{d\beta} \right)^m \int_{sk^{\hat{n}}}^{\infty} dr e^{-\beta r} \Big|_{\beta=1} \\ &= \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{d\beta} \right)^m \left\{ \frac{1}{\beta} e^{-\beta w} \right\} \Big|_{\beta=1, w=sk^{\hat{n}}} \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\sigma=0}^m \binom{m}{\sigma} \left\{ \left[\left(\frac{d}{d\beta} \right)^{\sigma} \frac{1}{\beta} \right] \cdot \left[\left(\frac{d}{d\beta} \right)^{m-\sigma} e^{-\beta w} \right] \right\} \Big|_{\beta=1, w=sk^{\hat{n}}} \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\sigma=0}^m \binom{m}{\sigma} (-1)^m \left[\sigma! \beta^{-(\sigma+1)} w^{m-\sigma} e^{-\beta w} \right] \Big|_{\beta=1, w=sk^{\hat{n}}} \\ &= \left(\sum_{\sigma=0}^m \frac{1}{(m-\sigma)!} w^{m-\sigma} e^{-w} \right)_{w=sk^{\hat{n}}} \\ &= \left(e^{-w} \sum_{\sigma'=0}^m \frac{w^{\sigma'}}{\sigma'!} \right)_{w=sk^{\hat{n}}} ,\end{aligned}\quad (7.70)$$

was $\lim_{k \rightarrow 0} C_k^m(s) = 0$ für jedes $s > 0$ impliziert.

Abschließend wollen wir die Korrektheit der Darstellung (7.70) bestätigen, indem wir auch unter deren Verwendung die Skalenableitung berechnen: Mit $\partial_t = \hat{n} sk^{\hat{n}} \partial_w$ erhalten

wir

$$\begin{aligned}
\partial_t C_k^m(s) &= \hat{n} s k^{\hat{n}} \left(-C_k^m(s) + e^{-w} \sum_{\sigma'=1}^m \sigma' \cdot \frac{w^{\sigma'-1}}{\sigma'!} \right)_{w=sk^{\hat{n}}} \\
&= \hat{n} s k^{\hat{n}} \left(-C_k^m(s) + e^{-w} \sum_{\sigma''=0}^{m-1} \frac{w^{\sigma''}}{\sigma''!} \right)_{w=sk^{\hat{n}}} \\
&= -\frac{\hat{n} s k^{\hat{n}}}{m!} (s k^{\hat{n}})^m e^{-s k^{\hat{n}}} \\
&\equiv -\frac{\hat{n}}{m!} (s k^{\hat{n}})^{m+1} e^{-s k^{\hat{n}}},
\end{aligned}$$

was (7.69) reproduziert.

Die f_k^m -Regularisierung. Diese Regularisierung geht aus der C_k^m -Regularisierung durch eine Ersetzung der Form $s \rightarrow z s$ hervor. Im Falle der Propertime-Darstellung von Logarithmen gilt $z = m$, für die Darstellung inverser Operatoren ist hingegen $z = m + 1$ zu wählen; dies wird sich bei der konkreten Regularisierung der Spuren erschließen. Somit gilt

$$\oint ds := \int_0^\infty ds f_k^m(s)$$

mit

$$f_k^m(s) := C_k^m(zs) \equiv \frac{\Gamma(m+1, z s k^{\hat{n}}) - \Gamma(m+1, z s \Lambda_{UV}^{\hat{n}})}{\Gamma(m+1)}.$$

Da die Skalenableitung von dieser Reskalierung unberührt bleibt, ist diese auch hier unabhängig von Λ_{UV} und gegeben durch

$$\partial_t f_k^m(s) = -\frac{\hat{n}}{m!} (z s k^{\hat{n}})^{m+1} e^{-z s k^{\hat{n}}}.$$

Für ganzzahliges m und $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$ gilt entsprechend

$$f_k^m(s) = e^{-z s k^{\hat{n}}} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(z s k^{\hat{n}})^\sigma}{\sigma!}.$$

Die beiden Familien $\{C_k^m\}$ und $\{f_k^m\}$ von Funktionen spannen den ganzen Raum der Regulator-Funktionen, die die in Abschnitt 3.3 angegebenen Eigenschaften besitzen, auf

[59, 60, 61]. Insbesondere ist auch das scharfe Eigenzeit-Abschneiden als Grenzfall in der f_k^m -Regularisierung enthalten. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir die regularisierte 1-Loop-Determinante des Operators Ω . Da wir hier nur die Propertime-Darstellung regularisieren und somit die $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Regularisierung nicht durchgeführt wird, kennzeichnen wir den Operator mit dem Subskript **reg**:

$$\mathrm{Tr} [\ln \Omega]_{\mathrm{reg}} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} f_k^m(s) \mathrm{Tr} e^{-s\Omega} .$$

In diesem Fall ist $z = m$ zu wählen, so daß die Skalenableitung gegeben ist durch

$$\partial_t \mathrm{Tr} [\ln \Omega]_{\mathrm{reg}} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} (\partial_t f_k^m(s)) \mathrm{Tr} e^{-s\Omega} \equiv \mathrm{Tr} [Y_k^m(\Omega)]$$

mit

$$\begin{aligned} Y_k^m(\Omega) &:= - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(- \frac{\hat{n}}{m!} \right) (msk^{\hat{n}})^{m+1} e^{-msk^{\hat{n}}} e^{-s\Omega} \\ &= \frac{\hat{n}}{m!} (mk^{\hat{n}})^{m+1} \int_0^\infty ds s^m e^{-(\Omega+mk^{\hat{n}})s} . \end{aligned}$$

Nun gilt für einen positiven Operator Ω

$$\int_0^\infty ds s^m e^{-(\Omega+mk^{\hat{n}})s} = \frac{1}{(\Omega + mk^{\hat{n}})^{m+1}} \int_0^\infty dt t^m e^{-t} = \frac{1}{(\Omega + mk^{\hat{n}})^{m+1}} \Gamma(m + 1) ,$$

und wir erhalten mithin

$$Y_k^m(\Omega) := \hat{n} \left(\frac{mk^{\hat{n}}}{mk^{\hat{n}} + \Omega} \right)^{m+1} . \quad (7.71)$$

Die Skala, bei der die Ω -Eigenwerte abgeschnitten werden, ist also durch $\sqrt[\hat{n}]{m} k$ und nicht durch k gegeben. Im Grenzfall $m \rightarrow \infty$ erhalten wir aus (7.71)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_k^m(\Omega) = \hat{n} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Omega}{mk^{\hat{n}}}} \right)^{m+1} = \hat{n} \exp \left\{ - \frac{\Omega}{k^{\hat{n}}} \right\} .$$

Das gleiche Resultat ergibt sich auch mit dem scharfen Eigenzeit-Cutoff. Nach (7.68) gilt

$$\partial_t \left(- \int_0^{k^{-\hat{n}}} \frac{ds}{s} \mathrm{Tr} e^{-s\Omega} \right) = \hat{n} \mathrm{Tr} \exp \left\{ - \frac{\Omega}{k^{\hat{n}}} \right\} ,$$

was in der Tat mit dem Grenzfall $m \rightarrow \infty$ der f_k^m -Regularisierung übereinstimmt.

Im Unterschied zur Propertime-Darstellung des Logarithmus tritt bei derjenigen eines inversen Operators unter dem Eigenzeitintegral die Variable s mit dem Exponenten $m + 1$ auf. Damit erhöht sich in dem Ausdruck für das Gegenstück zu Y_k^m der Exponent auf $m + 2$, so daß in diesen Spuren $z = m + 1$ zu wählen ist, um anhand einer analogen Grenzwertbetrachtung den scharfen Cutoff reproduzieren zu können.

Wir betrachten abschließend die C_k^m -Regularisierung einer solchen 1-Loop-Determinante, um die unterschiedliche Wirkung zu illustrieren. Hier gilt

$$\partial_t \text{Tr} [\ln \Omega]_{\text{reg}} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} (\partial_t C_k^m(s)) \text{Tr} e^{-s\Omega} \equiv \text{Tr} [\tilde{Y}_k^m(\Omega)]$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_k^m(\Omega) &:= - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(- \frac{\hat{n}}{m!} \right) (sk^{\hat{n}})^{m+1} e^{-sk^{\hat{n}}} e^{-s\Omega} \\ &= \frac{\hat{n}}{m!} (k^{\hat{n}})^{m+1} \int_0^\infty ds s^m e^{-(\Omega+k^{\hat{n}})s} . \end{aligned}$$

Wegen $\int_0^\infty ds s^m e^{-(\Omega+k^{\hat{n}})s} = \frac{1}{(\Omega+k^{\hat{n}})^{m+1}} \Gamma(m+1)$ führt dies auf

$$\tilde{Y}_k^m(\Omega) = \hat{n} \left(\frac{k^{\hat{n}}}{k^{\hat{n}} + \Omega} \right)^{m+1} ,$$

was einem tatsächlichen Abschneiden der Ω -Eigenwerte bei der Skala k entspricht. Eigenwerte, die viel kleiner sind als $k^{\hat{n}}$, tragen offensichtlich nicht signifikant zu $\text{Tr} [\tilde{Y}_k^m(\Omega)]$ bei.

An diesen drei Regularisierungsschemata ist unmittelbar abzulesen, daß eine Ersetzung $\partial_k \rightarrow \partial_{\Lambda_{\text{UV}}}$ auf einen Vorzeichenwechsel führt. Bei der Formulierung einer Flußgleichung bezüglich der UV-Cutoff-Skala würde somit die entsprechende Skalenableitung $\Lambda_{\text{UV}} \partial_{\Lambda_{\text{UV}}}$ die gleichen Beta-Funktionen mit entgegengesetztem Vorzeichen liefern. Auf dem Niveau der Flußdiagramme würde sich die Richtung, in der die Trajektorien durchlaufen werden, einfach umkehren, was genau unseren Vorstellungen entspricht.

Wie in Kapitel 3 erläutert, besteht eine Möglichkeit, von der Wetterich-Gleichung zur Propertime-Gleichung zu gelangen, darin, das Argument des Cutoff-Operators \mathcal{R}_k mit $\Gamma_k^{(2)}$ zu identifizieren und an dieser Stelle die Skalenabhängigkeit von $\Gamma_k^{(2)}$ zu vernachlässigen.

Auf der rechten Seite der Propertime-Gleichung (3.28) treten somit keine Skalenableitungen dimensionsloser Kopplungen auf, und wir können im Rahmen dieser Näherung die dimensionslose Newton-Konstante g_k in die Umdefinition des Lorentz-Eichparameters α'_L eingehen lassen.

Aus dem gleichen Grund stellt auch die Annahme eines konstanten dimensionslosen Massenparameters μ keine Einschränkung dar. Nehmen wir an, ein konstanter dimensionsvoller Massenparameter $\bar{\mu}$ entspräche der physikalisch „korrekten“ Wahl, so gälte $\bar{\mu} = \mu_k k$ mit k -abhängigem $\mu_k = \frac{\bar{\mu}}{k}$ und $\bar{\mu} = \text{const.}$ Die Skalenabhängigkeit des dimensionlosen Parameters hätte allerdings auf der rechten Seite der Propertime-Gleichung keine zusätzlichen Terme zur Folge.

Zudem wird nur für $\mu = \text{const}$ das Differentialgleichungssystem $\partial_t u_\alpha = \beta_\alpha(u_1, u_2, \dots)$, das wir ableiten werden, autonom. Mit anderen Worten: Nur für $\mu = \text{const}$ weist das Vektorfeld $\vec{\beta} \equiv (\beta_\lambda, \beta_\gamma, \beta_g)$ keine explizite k -Abhängigkeit oder „RG-Zeitabhängigkeit“ auf, wobei man $t \equiv \ln k$ als die „RG-Zeit“ bezeichnet.

Der Parameter μ entspringt der Freiheit, die Fluktuationen zu parametrisieren und somit eine Darstellung des Operators $\Gamma_k^{(2)}$ zu wählen. Da wir die linke Seite für verschwindende Fluktuationen auswerten, ist sie unabhängig von der gewählten Darstellung. Insbesondere erhalten wir keine Flußgleichung für den Parameter μ . Dies stellt eine Näherung an eine exakte bimetrische Behandlung dar, die bereits im Kontext der QEG durchgeführt wurde [51, 52, 53]. In dieser hängt auch die linke Seite der Flußgleichung von den Fluktuationen und mithin von der Darstellung von $\Gamma_k^{(2)}$ ab, so daß sich im Rahmen einer solchen Rechnung ebenfalls eine Flußgleichung für $\mu \equiv \mu_k$ ableiten lassen sollte. Man erhielte so ein Vektorfeld $\vec{\beta} \equiv (\beta_\lambda, \beta_\gamma, \beta_g, \beta_\mu)$, das nicht explizit von k abhinge.

Eine andere Möglichkeit, ein autonomes System von Flußgleichungen zu erhalten, besteht darin, den Parameter μ über eine der dimensionslosen Kopplungen auszudrücken. In der Tat stellt die Identifikation $\bar{\mu} \equiv \sqrt{G_k}^{-1} \Rightarrow \mu_k = \sqrt{g_k}^{-1}$ eine natürliche Wahl dar, da man so den dimensionsvollen Massenparameter $\bar{\mu}$ mit der laufenden Planck-Masse $\sqrt{G_k}^{-1}$ identifiziert. Dieser Fall wurde auch im Rahmen der Analyse in Kapitel 8 untersucht, wobei sich die expliziten Ergebnisse im separaten Anhang K befinden.

7.6.3 Die explizite Regularisierung der Spuren

In diesem Abschnitt sollen die Regularisierungsvorschriften auf die renormierungsgruppenverbesserte 1-Loop-Korrektur (7.35) angewandt werden. Um dabei die C_k^m - und die f_k^m -Regularisierung einheitlich zu behandeln, führen wir zwei Parameter ζ_H und ζ_V ein, die für die freien und die Wechselwirkungsbeiträge beide Regularisierungen erfassen. In ersteren tritt immer die Eigenzeitdarstellung des Logarithmus auf, so daß hier wie erläutert $\zeta_H = 1$ für die C_k^m -Regularisierung und $\zeta_H = m$ für die f_k^m -Regularisierung zu wählen ist. In den Wechselwirkungsbeiträgen tritt hingegen die Eigenzeitdarstellung eines inversen Operators auf, und man erhält die beiden Schemata für $\zeta_V = 1$ bzw. $\zeta_V = m + 1$.

Da alle Ausdrücke nur noch vom Betrag p des Impulsvektors abhängen, führen wir im Impulsintegral die Winkelintegration gemäß

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dp p^3$$

aus; darin bezeichnet v_3 das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel, $v_3 = 2\pi^2$.

Die Regularisierung von $\frac{1}{4} \text{Tr} \ln \frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6}$

Wir führen zunächst die $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Erweiterung aus:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) \right]_{\text{REG}} \\ &= -\frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ \int \frac{ds}{s} \left(e^{-s(H_0^{\text{grav}})^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n}} - e^{-s\bar{\mu}^6 \hat{\mathbf{p}}^{2n}} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int \frac{ds}{s} \int_0^\infty dy y^3 \\ & \quad \left[\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \exp \left\{ -s y^{2n} \cdot \frac{1}{(16\pi g_k)^2} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 k^{6+2n} \right\} - 40 \exp \left\{ -s \mu^6 y^{2n} k^{6+2n} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Hier haben wir bereits alles auf dimensionslose Größen umgeschrieben. Wir ersetzen im folgenden in den entsprechenden Objekten das Argument p^2 durch y^2 , um daran zu erinnern, daß in diesen ausschließlich die dimensionslosen Größen λ_k , μ , f und y auftreten.

Des weiteren tritt vor H_0^{grav} der globale Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ auf. Um das Abschneiden be-

züglich des Spektrums eines Operators zu implementieren, das demjenigen eines üblichen, k -unabhängigen d'Alembert-Operators \square möglichst ähnlich ist, schneiden wir das s -Integral im Gravitonsektor nicht mit $k^{-(6+2n)}$, sondern mit $(16\pi g_k)^2 k^{-(6+2n)}$ ab. Dies kommt einer Implementierung der „ $z = \zeta$ “-Regel aus der QEG nahe [13]. Bei der anschließenden Skalenableitung der Regularisierung vernachlässigen wir auch in diesem Term die ∂_t -Ableitung von g_k . Der Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ tritt dann in der regularisierten Spur nicht mehr auf. Dementsprechend sind der H_0^{grav} - und der $\bar{\mu}$ -Term in der obigen Spur separat zu regularisieren.

Wir betrachten zunächst die scharfe Regularisierung.

Der scharfe Propertime-Cutoff. Hier ist der IR-regularisierte Ausdruck gegeben durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) \right]_{\text{REG}} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^3 \\ & \times \left[\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \int_0^{(16\pi g_k)^2 k^{-(6+2n)}} \frac{ds}{s} \exp \left\{ -s y^{2n} \cdot \frac{1}{(16\pi g_k)^2} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 k^{6+2n} \right\} \right. \\ & \left. - 40 \int_0^{k^{-(6+2n)}} \frac{d\tilde{s}}{\tilde{s}} \exp \left\{ -\tilde{s} \mu^6 y^{2n} k^{6+2n} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Formel (7.67) und vernachlässigen die Skalenableitung von g_k in $\partial_t s_0(k)$.

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} & \partial_t \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) \right]_{\text{REG}} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^3 \\ & \times \left[- (6+2n) \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \exp \left\{ -y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 \right\} \right. \\ & \left. + (6+2n) 40 \exp \left\{ -\mu^6 y^{2n} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n+3}{2} \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^3 \\
&\quad \left[\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \exp \left\{ -y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. - 40 \exp \left\{ -\mu^6 y^{2n} \right\} \right].
\end{aligned}$$

Die C_k^m/f_k^m -Regularisierung. Wir fassen diese beiden Regularisierungen in der Form $C_k^m(\zeta_H s)$ zusammen. Auch hier sind beide Propertime-Integrale separat abzuschneiden. Die Regulatorfunktionen sind für den H_0^{grav} -Term durch

$$C_k^m(\zeta_H s) = \frac{1}{m!} \int_{\zeta_H s (16\pi g_k)^{-2} k^{6+2n}}^\infty dr r^m e^{-r}$$

und für den $\bar{\mu}$ -Term durch

$$\tilde{C}_k^m(\zeta_H s) = \frac{1}{m!} \int_{\zeta_H s k^{6+2n}}^\infty dr r^m e^{-r}.$$

gegeben. Damit ergeben sich deren Skalenableitungen zu

$$\partial_t C_k^m(\zeta_H s) = -\frac{6+2n}{m!} (\zeta_H s (16\pi g_k)^{-2} k^{6+2n})^{m+1} \exp \left\{ -\zeta_H s (16\pi g_k)^{-2} k^{6+2n} \right\}$$

und

$$\partial_t \tilde{C}_k^m(\zeta_H s) = -\frac{6+2n}{m!} (\zeta_H s k^{6+2n})^{m+1} \exp \left\{ -\zeta_H s k^{6+2n} \right\},$$

und die Regularisierung gestaltet sich analog zum Beispiel der 1-Loop-Determinante mit $\hat{n} = 6 + 2n$: Der Faktor k^{6+2n} im Exponenten hebt sich gegen den entsprechenden Faktor aus dem Regulator weg. Im Falle des ersten Terms gilt dies auch für den Faktor $\frac{1}{(16\pi g_k)^2}$. Dies erkennt man, indem man im diskutierten Beispiel $\text{Tr}[\ln \Omega]_{\text{reg}}$ für das f_k^m -Abschneiden

$m = \zeta_{\text{H}}(16\pi g_k)^{-2}$ setzt. Insgesamt führt dies auf

$$\begin{aligned} & \partial_t \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{(H_0^{\text{grav}})^2}{\bar{\mu}^6} \right) \right]_{\text{REG}} \\ &= \frac{n+3}{2} \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^3 \left[\sum_{\chi \in \{\text{S}, \text{V}, \text{T}\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \left(\frac{\zeta_{\text{H}}}{\zeta_{\text{H}} + y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right)^{m+1} \right. \\ & \quad \left. - 40 \left(\frac{\zeta_{\text{H}}}{\zeta_{\text{H}} + y^{2n} \mu^6} \right)^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

Die Variation der Parameter m und n erlaubt später Aussagen über die Schemaabhängigkeit der Resultate.

Die Regularisierung von $\frac{1}{4} \text{Tr} \ln \mathcal{N}^2$

Wir erhalten zunächst vermöge der $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Erweiterung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \mathcal{N}^2 \right]_{\text{REG}} \\ &= -\frac{1}{4} \text{Tr} \int \frac{ds}{s} \left(e^{-s \mathcal{N}^2 \hat{\mathbf{p}}^{2n}} - e^{-s \hat{\mathbf{p}}^{2n}} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int \frac{ds}{s} \int_0^\infty dy y^3 \left(\sum_{\chi \in \{\text{S}, \text{V}, \text{T}\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} e^{-s (\lambda_{\mathcal{N} \alpha_\chi}^\chi)^2 y^{2n} k^{2n}} - 40 e^{-s y^{2n} k^{2n}} \right). \end{aligned}$$

Wir führen nun die y -Integration aus gemäß

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dy y^3 e^{-s (\lambda_{\mathcal{N} \alpha_\chi}^\chi)^2 y^{2n} k^{2n}} &= (s (\lambda_{\mathcal{N} \alpha_\chi}^\chi)^2 k^{2n})^{-\frac{2}{n}} \int_0^\infty dz z^3 e^{-z^{2n}} \\ &= (s (\lambda_{\mathcal{N} \alpha_\chi}^\chi)^2 k^{2n})^{-\frac{2}{n}} \frac{1}{2n} \int_0^\infty dz' (z')^{\frac{2}{n}-1} e^{-z'} \\ &= (s (\lambda_{\mathcal{N} \alpha_\chi}^\chi)^2)^{-\frac{2}{n}} k^{-4} \frac{1}{2n} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \mathcal{N}^2 \right]_{\text{REG}} \tag{7.72} \\ &= -\frac{1}{8n} \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \left(\int ds s^{-\frac{2}{n}-1} \right) k^{-4} \left[\sum_{\chi \in \{\text{S}, \text{V}, \text{T}\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} (\lambda_{\mathcal{N} \alpha_\chi}^\chi)^{-\frac{4}{n}} - 40 \right]. \end{aligned}$$

Die Impulsintegration des \mathcal{N} -unabhängigen Beitrags ergibt sich dabei aus dem gerade berechneten für $\lambda_{\mathcal{N}\alpha_x}^x \equiv 1$. Nun enthält das Spektrum von \mathcal{N} die Eigenwerte $1 + \frac{1}{\gamma_k}$ und $1 - \frac{1}{\gamma_k}$ jeweils in $\frac{\nu_x}{2}$ -facher Entartung, der Eigenwert 1 hingegen ist $(n_x - \nu_x)$ -fach entartet. Mit $\sum_x d_x(n_x - \nu_x) - 40 = \sum_x (d_x(n_x - \nu_x) - d_x n_x) = -\sum_x d_x \nu_x$ gilt dann schließlich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \mathcal{N}^2 \right]_{\text{REG}} \\ &= -\frac{1}{8n} \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \left(\int ds s^{-\frac{2}{n}-1} \right) k^{-4} \times \\ & \quad \times \left[\sum_{x \in \{S, V, T\}} \frac{d_x \nu_x}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} - 2 \right) \right] \\ &= -\frac{3}{2n} \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \left(\int ds s^{-\frac{2}{n}-1} \right) k^{-4} \times \\ & \quad \times \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} - 2 \right] \end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\sum_{x \in \{S, V, T\}} \frac{d_x \nu_x}{2} = 12.$$

Die Regularisierung wirkt somit ausschließlich auf das isolierte Propertime-Integral.

Der scharfe Propertime-Cutoff. Da die Matrix \mathcal{N} keinen nichttrivialen Vorfaktor enthält und da ihre Eigenwerte dimensionslos sind, ist der scharfe Propertime-Cutoff hier gegeben durch

$$\int ds s^{-\frac{2}{n}-1} \equiv \int_0^{k^{-2n}} ds s^{-\frac{2}{n}-1},$$

so daß die Anwendung der Skalenableitung

$$\partial_t \int_0^{k^{-2n}} ds s^{-\frac{2}{n}-1} = -2n k^4$$

liefert. Die t -Ableitung der regularisierten Spur ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} & \partial_t \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \mathcal{N}^2 \right]_{\text{REG}} \\ &= 3 \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} - 2 \right]. \end{aligned}$$

Die C_k^m / f_k^m -Regularisierung. Auch hier ist ein Logarithmus zu regularisieren, so daß wie im freien Anteil $C_k^m(\zeta_{\text{H}} s)$ zu wählen ist. Es gilt dann wegen $C_k^m(\zeta_{\text{H}} s) = \frac{1}{m!} \int_{\zeta_{\text{H}} s}^{\infty} dr r^m e^{-r}$

$$\partial_t C_k^m(\zeta_{\text{H}} s) = -\frac{2n}{m!} (\zeta_{\text{H}} s k^{2n})^{m+1} e^{-\zeta_{\text{H}} s k^{2n}}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} ds (\partial_t C_k^m(\zeta_{\text{H}} s)) s^{-\frac{2}{n}-1} &= -\frac{2n}{m!} (\zeta_{\text{H}} k^{2n})^{m+1} \int_0^{\infty} ds s^{m-\frac{2}{n}} e^{-\zeta_{\text{H}} s k^{2n}} \\ &= -\frac{2n}{m!} (\zeta_{\text{H}} k^{2n})^{m+1} (\zeta_{\text{H}} k^{2n})^{-(m+1-\frac{2}{n})} \Gamma\left(m+1-\frac{2}{n}\right) \\ &= -\frac{2n}{m!} k^4 (\zeta_{\text{H}})^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(m+1-\frac{2}{n}\right). \end{aligned}$$

Die Skalenableitung der regularisierten Spur erhalten wir somit zu

$$\begin{aligned} & \partial_t \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \mathcal{N}^2 \right]_{\text{REG}} \\ &= \frac{3}{m!} \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} (\zeta_{\text{H}})^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(m+1-\frac{2}{n}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} - 2 \right]. \end{aligned}$$

Die Regularisierung von $\frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} \}$

Wir führen zunächst die $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Erweiterung aus und erhalten nach der Ersetzung

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} \} \rightarrow \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 [(H_0^{\text{grav}})^{-2}]_{\text{REG}} \}$$

den Beitrag in der Form

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 [(H_0^{\text{grav}})^{-2}]_{\text{REG}} \} \\
& := \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \int d^4 s \hat{\mathbf{p}}^{2n} (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 e^{-s \hat{\mathbf{p}}^{2n} (H_0^{\text{grav}})^2} \right\} \\
& = \frac{1}{2} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dp p^{3+2n} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
& \quad \left\{ (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi}(p^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi}(p^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi} \int d^4 s e^{-s p^{2n}} (\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2))^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Wir schreiben jetzt dieses Integral auf dimensionslose Größen um. Die Eigenvektoren $v_{\alpha_\chi}^\chi$ hängen zwar von dimensionsbehafteten Größen wie p^2 etc. ab, doch sie selbst sind dimensionslos, so daß das Umschreiben auf dimensionslose Größen in ihrem Fall nicht auf zusätzliche k -Potenzen führt. Die Operatoren H^χ und V_{contr}^χ besaßen ursprünglich die gleiche Massendimension 3. Im Matrixprodukt von $(H^\chi)^{-1}$ und $\check{V}_{\text{contr}}^\chi$ heben sich nun die Vorfaktoren $\frac{1}{16\pi G_k}$ gegenseitig weg. Da wir jedoch beim Übergang von V_{contr}^χ zu $\check{V}_{\text{contr}}^\chi$ mit dem kontrahierten Feldstärketensor ein Objekt der Massendimension 2 herausdefiniert haben, besitzt nun nach dem Wegfall des G_k -abhängigen Vorfaktors das Objekt $\check{V}_{\text{contr}}^\chi$ ebenso wie $(H^\chi)^{-1}$ die Massendimension -1 . Das Umschreiben auf dimensionslose Größen $(H^\chi)^{-1}(p^2) \rightarrow (H^\chi)^{-1}(y^2)$ und $\check{V}_{\text{contr}}^\chi(p^2) \rightarrow \check{V}_{\text{contr}}^\chi(y^2)$ liefert in der obigen Spur also einen zusätzlichen Faktor k^{-2} . Nach dem Umschreiben des Impulsintegrals $\int dp p^3$ auf die dimensionslose Variable y erhält man den aus Dimensionsgründen zu erwartenden Faktor k^2 , der die Dimension der Invariante $(\int d^4 x \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab})$ kompensiert. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 [(H_0^{\text{grav}})^{-2}]_{\text{REG}} \} \\
& = \frac{1}{2} \left(\int d^4 x \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) k^2 \frac{v_3}{(2\pi)^4} k^{2n} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
& \quad \left\{ (16\pi g_k)^{-2} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 k^6 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi}(y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{k_\chi}^{j_\chi}(y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi} \times \right. \\
& \quad \left. \times \int d^4 s e^{-s y^{2n}} (16\pi g_k)^{-2} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 k^{6+2n} \right\}.
\end{aligned}$$

Dieses Integral regularisieren wir nun.

Der scharfe Propertime-Cutoff. Da das Spektrum des gleichen Operators wie im μ -

unabhängigen Term des freien Beitrags exponentiert wird, verfahren wir analog, d. h. wir wählen $s_0(k) = (16\pi g_k)^2 k^{-(6+2n)}$. Da jetzt allerdings kein Logarithmus dargestellt wird, hebt sich der für diesen typische $\frac{1}{s}$ -Faktor nicht gegen den Faktor $s_0(k)$ aus der Skalena-bleitung der Integralgrenze weg. Stattdessen hat letzterer nun die erwünschte Wirkung, den Ausdruck unter dem y -Integral dimensionslos zu machen und den globalen Faktor $(16\pi g_k)^{-2}$ zu eliminieren. Wir erhalten nämlich

$$\begin{aligned} & \partial_t \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 [(H_0^{\text{grav}})^{-2}]_{\text{REG}} \} \\ &= -(n+3) \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\ & \quad \left\{ (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)^{j_\chi}_{k_\chi} (y^2) (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{k_\chi} e^{-y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right\}. \end{aligned}$$

Die C_k^m / f_k^m -Regularisierung. Auch hier greifen wir auf die Regulatorfunktion C_k^m der Regularisierung der freien Spur zurück. Dabei ist allerdings ζ_H durch ζ_V zu ersetzen, um die beiden Schemata zu erfassen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \partial_t \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H^{\text{grav}})^{-1} V^{\text{grav}} (H_0^{\text{grav}})^2 [(H_0^{\text{grav}})^{-2}]_{\text{REG}} \} \\ &= -\frac{(n+3)}{m!} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \frac{v_3}{(2\pi)^4} k^{2n} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\ & \quad \left\{ (16\pi g_k)^{-2} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 k^6 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)^{j_\chi}_{k_\chi} (y^2) (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{k_\chi} \times \right. \\ & \quad \left. \times (\zeta_V (16\pi g_k)^{-2} k^{6+2n})^{m+1} \int_0^\infty ds s^{m+1} e^{-s(y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V)} (16\pi g_k)^{-2} k^{6+2n} \right\} \\ &= -\frac{(n+3)}{m!} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \frac{v_3}{(2\pi)^4} k^{2n} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\ & \quad \left\{ (16\pi g_k)^{-2} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 k^6 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)^{j_\chi}_{k_\chi} (y^2) (v_{\alpha_\chi}^\chi)^{k_\chi} \times \right. \\ & \quad \left. \times (\zeta_V (16\pi g_k)^{-2} k^{6+2n})^{m+1} \frac{1}{[(y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V) (16\pi g_k)^{-2} k^{6+2n}]^{m+2}} \Gamma(m+2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(n+3) \frac{m+1}{\zeta_V} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
&\quad \left\{ (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)^{j_\chi}_{k_\chi} (y^2) (v^\chi_{\alpha_\chi})^{k_\chi} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\zeta_V}{y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V} \right)^{m+2} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Regularisierung von $\frac{1}{4} \text{Tr} \ln \frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2}$

Der scharfe Propertime-Cutoff. Die Regularisierung ergibt sich unmittelbar aus dem Ausdruck für den freien Gravitonbeitrag. Hier ist die Dimension der Eigenzeit-Variable durch $2 + 2n$ gegeben. Da zudem kein Vorfaktor der Form $\frac{1}{16\pi G_k}$ auftritt, entfällt hier die $(16\pi g_k)^2$ -Modifikation. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
\partial_t \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2} \right) \right]_{\text{REG}} &= \frac{n+1}{2} \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^3 \\
&\quad \left[\sum_{\chi \in \{\text{gh} S, \text{gh} V\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \exp \left\{ -y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 \right\} - 10 \exp \left\{ -\mu^2 y^{2n} \right\} \right].
\end{aligned}$$

Die C_k^m / f_k^m -Regularisierung. Auch hier erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
\partial_t \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{(H_0^{\text{gh}})^2}{\bar{\mu}^2} \right) \right]_{\text{REG}} &= \frac{n+1}{2} \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^3 \\
&\quad \left[\sum_{\chi \in \{\text{gh} S, \text{gh} V\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \left(\frac{\zeta_H}{\zeta_H + y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right)^{m+1} \right. \\
&\quad \left. - 10 \left(\frac{\zeta_H}{\zeta_H + y^{2n} \mu^2} \right)^{m+1} \right].
\end{aligned}$$

Die Regularisierung von $\frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H_0^{\text{gh}})^{-1} V^{\text{gh}} \}$

Wir verfahren analog zum Wechselwirkungsbeitrag des Gravitonsektors. Bis auf die Tatsache, daß hier keine sich kompensierenden Vorfaktoren der Form $\frac{1}{16\pi G_k}$ auftreten, übertragen sich die Überlegungen zu den kanonischen Massendimensionen der beteiligten Objekte, so daß das Produkt aus $\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi$ und $\check{V}_{\text{contr}}^\chi$ dimensionslos ist. Der zu regularisierende

Ausdruck ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} [(H_0^{\text{gh}})^{-2}]_{\text{REG}} \} \\
&= \frac{1}{2} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) \frac{v_3}{(2\pi)^4} k^{4+2n} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{\text{gh S, gh V}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
& \left\{ \lambda_{\alpha_\chi}^\chi (y^2) (v^{\chi \alpha_\chi})_{i_\chi} (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (v^\chi_{\alpha_\chi})^{j_\chi} \times \right. \\
& \left. \times \int ds e^{-s y^{2n}} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi (y^2))^2 k^{2+2n} \right\}.
\end{aligned}$$

Der scharfe Propertime-Cutoff. Wir schneiden das Eigenzeitintegral scharf ab mit $s_0(k) = k^{-(2+2n)}$, so daß sich die Skalenableitung zu

$$\begin{aligned}
& \partial_t \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} [(H_0^{\text{gh}})^{-2}]_{\text{REG}} \} \\
&= -(n+1) \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) k^2 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{\text{gh S, gh V}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
& \left\{ \lambda_{\alpha_\chi}^\chi (y^2) (v^{\chi \alpha_\chi})_{i_\chi} (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (v^\chi_{\alpha_\chi})^{j_\chi} \times \right. \\
& \left. \times e^{-y^{2n}} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi (y^2))^2 \right\}
\end{aligned}$$

ergibt.

Die C_k^m / f_k^m -Regularisierung. Mit $C_k^m(\zeta_V s) = \frac{1}{m!} \int_{\zeta_V s}^\infty dr r^m e^{-r}$, was auf

$$\partial_t C_k^m(\zeta_V s) = -\frac{2+2n}{m!} (\zeta_V s k^{2+2n})^{m+1} \exp\{-\zeta_V s k^{2+2n}\}$$

führt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \partial_t \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (H_0^{\text{gh}}) V^{\text{gh}} [(H_0^{\text{gh}})^{-2}]_{\text{REG}} \} \\
&= -\frac{n+1}{m!} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) \frac{v_3}{(2\pi)^4} k^{4+2n} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{\text{gh S, gh V}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
& \left\{ \lambda_{\alpha_\chi}^\chi (y^2) (v^{\chi \alpha_\chi})_{i_\chi} (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (v^\chi_{\alpha_\chi})^{j_\chi} (\zeta_V k^{2+2n})^{m+1} \times \right. \\
& \left. \times \int ds s^{m+1} e^{-s (y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi (y^2))^2 + \zeta_V) k^{2+2n}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n+1}{m!} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) \frac{v_3}{(2\pi)^4} k^{4+2n} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{\text{gh S, gh V}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
&\quad \left\{ \lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)^{i_\chi}_{j_\chi}(y^2) (v^\chi_{\alpha_\chi})^{j_\chi} (\zeta_V k^{2+2n})^{m+1} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{[(y^{2n}(\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V) k^{2+2n}]^{m+2}} \Gamma(m+2) \right\} \\
&= -(n+1) \frac{m+1}{\zeta_V} \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \sum_{\chi \in \{\text{gh S, gh V}\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \\
&\quad \left\{ \lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)^{i_\chi}_{j_\chi}(y^2) (v^\chi_{\alpha_\chi})^{j_\chi} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\zeta_V}{y^{2n}(\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V} \right)^{m+2} \right\}.
\end{aligned}$$

Damit liegen alle Spuren auf der rechten Seite von (7.35) in regularisierter Form vor.

7.6.4 Die explizite Flußgleichung für Γ_k

Nach diesen Vorbereitungen kann die zu analysierende Flußgleichung für das Funktional Γ_k angegeben werden. Wir spalten dazu im Gravitonsektor den Wechselwirkungsterm gemäß $\check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}} =: \check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(+)} \mp \check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(-)}$ auf und geben die Flußgleichung separat für den scharfen Propertime-Cutoff sowie für das über die Regulatorfunktionen C_k^m und f_k^m implementierte Abschneiden an.

Der scharfe Propertime-Cutoff. Hier lautet die Flußgleichung

$$\begin{aligned}
& \partial_t \Gamma_k \\
= & \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \left\{ \frac{v_3}{(2\pi)^4} \left[\frac{n+3}{2} \int_0^\infty dy y^3 \left(\left[\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \exp\{ -y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 \} \right] \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. \left. - 40 \exp\{ -\mu^6 y^{2n} \} \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + 3 \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} - 2 \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. - 2 \frac{n+1}{2} \int_0^\infty dy y^3 \left(\left[\sum_{\chi \in \{\text{gh}S, \text{gh}V\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \exp\{ -y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 \} \right] \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. \left. - 10 \exp\{ -\mu^2 y^{2n} \} \right) \right] \right\} \\
& + \left(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \left\{ \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \left[- (n+3) \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. \left((\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} \left((H^\chi)^{-1} \right)_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^{\chi(+)} \right)_{k_\chi}^{j_\chi} (y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})_{k_\chi}^{j_\chi} e^{-y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + 2(n+1) \sum_{\chi \in \{\text{gh}S, \text{gh}V\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \left(\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} (\check{V}_{\text{contr}}^{\chi})_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})_{j_\chi}^{i_\chi} \times \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. \left. \times e^{-y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right) \right] \right\} \\
& \mp \left(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \left\{ \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \left[- (n+3) \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. \left((\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} \left((H^\chi)^{-1} \right)_{j_\chi}^{i_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^{\chi(-)} \right)_{k_\chi}^{j_\chi} (y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})_{k_\chi}^{j_\chi} e^{-y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{7.73}$$

Die C_k^m/f_k^m -Regularisierung. Wir erhalten für $\zeta_H = 1 = \zeta_V$ die C_k^m -Regularisierung, die Wahl $\zeta_H = m$ und $\zeta_V = m + 1$ führt auf die f_k^m -Regularisierung, die im Grenzfall $m \rightarrow \infty$ die gerade angegebene scharfe Propertime-Regularisierung reproduziert. Fügen wir die Resultate aus dem vorangegangenen Abschnitt zusammen, so erhalten wir die Flußgleichung in der Form

$$\begin{aligned}
& \partial_t \Gamma_k \\
= & \left(\int d^4 x \bar{e} \right) k^4 \left\{ \frac{v_3}{(2\pi)^4} \left[\frac{n+3}{2} \int_0^\infty dy y^3 \left(\left[\sum_{\chi \in \{S, V, T\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \left(\frac{\zeta_H}{\zeta_H + y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right)^{m+1} \right] \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. - 40 \left(\frac{\zeta_H}{\zeta_H + y^{2n} \mu^6} \right)^{m+1} \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{3}{m!} (\zeta_H)^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(m+1 - \frac{2}{n}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\frac{4}{n}} - 2 \right] \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - 2 \frac{n+1}{2} \int_0^\infty dy y^3 \left(\left[\sum_{\chi \in \{\text{gh} S, \text{gh} V\}} d_\chi \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \left(\frac{\zeta_H}{\zeta_H + y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2} \right)^{m+1} \right] \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. - 10 \left(\frac{\zeta_H}{\zeta_H + y^{2n} \mu^2} \right)^{m+1} \right] \right] \right\} \\
& + \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) k^2 \left\{ \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \left[- (n+3) \frac{m+1}{\zeta_V} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left((\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})^{i_\chi}_{j_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^{\chi(+)}{}^{j_\chi}_{k_\chi} (y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi} \times \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. \times \left(\frac{\zeta_V}{y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V} \right)^{m+2} \right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + 2(n+1) \frac{m+1}{\zeta_V} \sum_{\chi \in \{\text{gh} S, \text{gh} V\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \left(\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} (\check{V}_{\text{contr}}^\chi)^{i_\chi}_{j_\chi} (y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{j_\chi} \times \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. \times \left(\frac{\zeta_V}{y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V} \right)^{m+2} \right) \right] \right\} \\
& \mp \left(\int d^4 \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \right) k^2 \left\{ \frac{v_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dy y^{3+2n} \left[- (n+3) \frac{m+1}{\zeta_V} \sum_{\chi \in \{S, V, T\}} \sum_{\alpha_\chi=1}^{n_\chi} \sum_{i_\chi, j_\chi=1}^{n_\chi} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left((\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 (v^{\chi\alpha_\chi})_{i_\chi} ((H^\chi)^{-1})^{i_\chi}_{j_\chi} (y^2) (\check{V}_{\text{contr}}^{\chi(-)}{}^{j_\chi}_{k_\chi} (y^2) (v^{\chi\alpha_\chi})^{k_\chi} \times \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. \times \left(\frac{\zeta_V}{y^{2n} (\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2))^2 + \zeta_V} \right)^{m+2} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{7.74}$$

In (7.73) und (7.74) wird jede der beiden Invarianten mit der zu ihrer kanonischen Mas-sendimension inversen Potenz von k multipliziert, was auch aus Dimensionsgründen der Fall sein muß. Diese Kombinationen werden dann jeweils mit einem Integral multipliziert, dessen Integranden von λ_k , γ_k , μ , α_D , β_D und f abhängen. Die Abhängigkeit von γ_k entstammt zum einen dem Spektrum von \mathcal{N} sowie zum anderen den Produkten $(H^{\text{grav}})^{-1} \check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(+)}$ und $(H^{\text{grav}})^{-1} \check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(-)}$. Demgegenüber hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren der freien Operatoren nicht von dieser Kopplung, sondern nur von den übrigen dimensionslosen Größen ab. Die von uns gewählte Form des Abschneidens, die einer groben Implementierung der $z = \zeta$ -Regel entspricht, hat dazu geführt, daß die rechte Seite nicht mehr von der dimensionslosen Newton-Konstante g_k abhängt.

Für die weiteren Untersuchungen geben wir (7.73) und (7.74) in der einheitlichen Form

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k &= \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \left[I_{\text{F}}^{\text{grav}}(\lambda_k, \mu) + I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}(\gamma_k) - 2 I_{\text{F}}^{\text{gh}}(\mu) \right] \\ &+ \left(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 \left[I_{\text{V}(+)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) - 2 I_{\text{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right] \\ &\mp \left(\int d^4x \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \right) k^2 I_{\text{V}(-)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) \end{aligned} \quad (7.75)$$

an. Darin wurde die Abhängigkeit von den Eichparametern bei der Angabe der Argumente unterdrückt. Durch die Angabe eines Wertes für $\beta_D \neq -1$ wird eine konkrete Eichung gewählt, deren Implementierung über die Eichparameter α_D und f festgelegt wird. Zudem wird über die „Familien-Parameter“ n bzw. (n, m) die explizite Form der scharfen Propertime-Regularisierung bzw. der C_k^m/f_k^m -Regularisierung bestimmt. Die funktionale Form der rechten Seite liegt damit jedoch noch nicht eindeutig fest, da zusätzlich noch ein Wert für den dimensionslosen Massenparameter μ anzugeben ist. Im Rahmen der Propertime-Näherung ist es konsistent und in keiner Weise einschränkend, diesen als k -unabhängig anzunehmen, zumal man nur so ein autonomes System erhält. Da er nicht mit einer eigenen Invariante assoziiert ist und auch auf keinem anderen Wege eine Flußgleichung für ihn abgeleitet werden kann, handelt es sich bei diesem Parameter nicht um eine Kopplung. Wir haben ihn dennoch als Argument der Funktionen auf der rechten Seite aufgeführt.

7.6.5 Die Beta-Funktionen für g_k , γ_k und λ_k

Unser Ziel besteht darin, die Beta-Funktionen der drei dimensionslosen Kopplungen über die im vorangegangenen Abschnitt abgeleiteten Funktionen, die auf der rechten Seite der Flußgleichung (7.75) als Koeffizienten der Invarianten auftreten, auszudrücken.

Dazu betrachten wir den für diese Parameter relevanten Teil $\Gamma_{k \text{ Ho}}$ der Trunkierung für $e^a{}_\mu \equiv \bar{e}^a{}_\mu$ sowie $\omega^{ab}{}_\mu \equiv \bar{\omega}^{ab}{}_\mu$ und berechnen die Wirkung der Skalenableitung auf diesen. Mit

$$\Gamma_{k \text{ Ho}}[\bar{e}, \bar{\omega}] = -\frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \left[\left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k}\right) \bar{F}^{ab}{}_{\mu\nu} \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\nu - 2 \Lambda_k \right]$$

und

$$\mathcal{Z}_{\text{NK}} := \frac{\bar{G}}{G_k} = \frac{\bar{G}}{g_k} k^2 \Rightarrow \partial_t \mathcal{Z}_{\text{NK}} = \frac{\bar{G}}{g_k} k^2 \left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) = \mathcal{Z}_{\text{NK}} \left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right),$$

worin \bar{G} den Wert der dimensionsvollen Newton-Konstante bei einer Referenzskala k_0 bezeichnet, erhalten wir für die *linke* Seite der trunkierten Flußgleichung:

$$\begin{aligned} & \partial_t \Gamma_k \\ &= -\frac{1}{16\pi \bar{G}} \int d^4x \bar{e} \left[\left((\partial_t \mathcal{Z}_{\text{NK}}) \mp \partial_t \left(\frac{\mathcal{Z}_{\text{NK}}}{\gamma_k} \right) \right) \bar{F}^{ab}{}_{\mu\nu} \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\nu - 2 \partial_t (\mathcal{Z}_{\text{NK}} \Lambda_k) \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi \bar{G}} \mathcal{Z}_{\text{NK}} \int d^4x \bar{e} \left[\left(\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) \mp \left(\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) \frac{1}{\gamma_k} + \partial_t \frac{1}{\gamma_k} \right) \right) \bar{F}^{ab}{}_{\mu\nu} \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\nu \right. \\ & \quad \left. - 2 \left(\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) \lambda_k + 2 \lambda_k + \partial_t \Lambda_k \right) k^2 \right] \\ &= \left(\int d^4x \bar{e} \bar{F}^{ab}{}_{\mu\nu} \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\nu \right) k^2 \left\{ -\frac{1}{16\pi g_k} \left[\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) \mp \left(\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) \frac{1}{\gamma_k} + \partial_t \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] \right\} \\ & \quad + \left(\int d^4x \bar{e} \right) k^4 \left\{ \left(-\frac{1}{16\pi g_k} \right) (-2) \left[\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) \lambda_k + 2 \lambda_k + \partial_t \lambda_k \right] \right\}. \end{aligned}$$

Über einen Koeffizientenvergleich mit der *rechten* Seite von (7.75) ergibt sich das folgende

System von gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{16\pi g_k}\right)\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) &= \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu)\right) \\ \left(-\frac{1}{16\pi g_k}\right)\left[\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right)\frac{1}{\gamma_k} + \partial_t \frac{1}{\gamma_k}\right] &= I_{V(-)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) \\ \left(-\frac{1}{16\pi g_k}\right)(-2)\left[\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right)\lambda_k + 2\lambda_k + \partial_t \lambda_k\right] &= \left(I_F^{\text{grav}}(\lambda_k, \mu) + I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}(\gamma_k) - 2 I_F^{\text{gh}}(\mu)\right). \end{aligned}$$

Wir beachten, daß mit $\partial_t \frac{1}{\gamma_k} =: \beta_{\frac{1}{\gamma}}$ für die Beta-Funktion des Immirzi-Parameters $\beta_{\gamma} := \partial_t \gamma_k \equiv -\gamma_k^2 \beta_{\frac{1}{\gamma}}$ gilt.

Unter Verwendung von

$$\left(2 - \frac{\partial_t g_k}{g_k}\right) = -16\pi g_k \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu)\right)$$

lassen sich diese Gleichungen dann schließlich zu

$$\begin{aligned} \partial_t g_k = \beta_g &= \left[2 + 16\pi \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu)\right) g_k\right] g_k \\ \partial_t \gamma_k = \beta_{\gamma} &= 16\pi g_k \gamma_k \left[\gamma_k I_{V(-)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) - \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu)\right)\right] \\ \partial_t \lambda_k = \beta_{\lambda} &= 8\pi g_k \left[\left(I_F^{\text{grav}}(\lambda_k, \mu) + I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}(\gamma_k) - 2 I_F^{\text{gh}}(\mu)\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu)\right) \lambda_k\right] - 2 \lambda_k \end{aligned} \tag{7.76}$$

auffösen.

Das Gleichungssystem (7.76) stellt das zentrale Ergebnis dieser Arbeit dar. Die auf der rechten Seite auftretenden Funktionen sind dabei zu kompliziert, um detailliertere Aussagen hinsichtlich der schematischen Form der Beta-Funktionen und insbesondere deren Abhängigkeiten von den einzelnen Kopplungen und Parametern treffen zu können. Den physikalischen Gehalt von (7.76) werden wir im nächsten Kapitel analysieren.

Um jedoch einen besonderen Aspekt seiner allgemeinen Struktur besser zu verstehen, möchten wir abschließend eine Überlegung zum γ_k -Grad der Wechselwirkungsbeiträge anführen. Es wurde bereits dargelegt, daß der skalare Anteil der Spur von $(H^{\text{grav}})^{-1} \check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}}$, der

durch $(H^{\text{grav}})^{-1}\check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(+)}$ gegeben ist, bezüglich γ_k gerade ist, wohingegen der pseudoskalare Beitrag $(H^{\text{grav}})^{-1}\check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(-)}$ ungerade bezüglich γ_k ist. In den betreffenden Wechselwirkungsbeiträgen des Gravitonsektors tritt jedoch nicht die Spur dieser Objekte auf. Vielmehr berechnen wir mit $(v^{\chi\alpha\chi})_{i_\chi} = \langle \alpha_\chi | i_\chi \rangle$ und $(v^{\chi}_{\alpha\chi})^{i_\chi} = \langle i_\chi | \alpha_\chi \rangle$ jeweils die α_χ - α_χ -Komponente, die dann noch mit einer Funktion des zugehörigen Eigenwertes $\lambda_{\alpha_\chi}^\chi$ multipliziert wird; dies wird dann über α_χ summiert. Da jedoch die Eigenwerte und Eigenvektoren unabhängig von γ_k sind, ändert sich der γ_k -Grad der einzelnen Diagonalmatrixelemente nicht, so daß sich die Eigenschaft der Spur auf diesen Ausdruck überträgt. Um diesen Sachverhalt anders zu verdeutlichen, kann man auch die Funktion des Eigenwertes als Funktion der Matrix H_0^{grav} schreiben. Dann läßt sich die Summe über α_χ ausführen. Es verbleibt die Berechnung der üblichen Matrixspur des Produktes dieser Funktion von H_0^{grav} mit $(H^{\text{grav}})^{-1}\check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(+)}$ bzw. $(H^{\text{grav}})^{-1}\check{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(-)}$. Nun ist H_0^{grav} eine paritätsgerade, blockdiagonale und von γ_k unabhängige Matrix, was sich auf Funktionen dieser Matrix überträgt. Dann wird durch die Multiplikation mit dieser Funktion das Spurargument nicht beeinträchtigt. Aus diesen Überlegungen folgt, daß $I_{V(+)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu)$ eine gerade Funktion und $I_{V(-)}^{\text{grav}}(\lambda_k, \gamma_k, \mu)$ eine ungerade Funktion bezüglich γ_k ist. Darüber hinaus ist die Funktion $I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}(\gamma_k)$ ebenfalls symmetrisch bezüglich der Vertauschung $\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_k$. *Mithin wird der durch (7.76) definierte Fluß unter $\gamma_k \rightarrow -\gamma_k$ auf sich selbst abgebildet, d. h. er ist symmetrisch zur $(\gamma_k = 0)$ -Ebene.*

Kapitel 8

Analyse des Renormierungsgruppenflusses

In diesem Kapitel soll das in Kapitel 7 abgeleitete Differentialgleichungssystem für die drei laufenden Kopplungen g , λ und γ untersucht werden.

Zunächst wählen wir, sofern nicht anders angegeben, den Parameter der $\hat{\mathbf{p}}^{2n}$ -Regularisierung zu $n = 3$. Dies ist der kleinste Wert, der die Konvergenz aller auftretenden Impulsintegrale gewährleistet. Größere Werte hätten ein zunehmend stärkeres „Auswaschen“ der Eigenschaften des Renormierungsgruppenflusses zur Folge. Die verwandte Form der Propertime-Gleichung vernachlässigt als Näherung der Wetterich-Gleichung jegliches Laufen der dimensionslosen Kopplungen auf der rechten Seite der Flußgleichung, und diesen approximativen Charakter wollen wir nicht zusätzlich verstärken. Die Schemaabhängigkeit der Ergebnisse testen wir über eine Variation der Regularisierung, die den scharfen Propertime-Cutoff sowie die C_k^m - und f_k^m -Regularisierung für jeweils verschiedene Werte des Abschneideparameters m umfaßt.

Um darüber hinaus die Dimension des Parameterraumes weiter einzuschränken, implementieren wir im Rahmen der numerischen Analyse die $O(4)$ -Eichbedingung immer mit $f = 1$ für den Lorentz-Eichparameter. Um die Eichabhängigkeit der Resultate zu überprüfen, verbleiben somit die beiden Parameter β_{D} und α_{D} . Ersteren wählen wir zu 0 oder 1, und letzterer nimmt vornehmlich die Werte 1, 10 und 10^{-1} an. Der physikalisch interessante Wert $\alpha_{\text{D}} = 0$, der vermutlich einen Fixpunktwert darstellt, läßt sich hingegen numerisch

nicht zuverlässig realisieren. Von besonderem Interesse ist die Frage, wie sich die Resultate qualitativ für verschiedene Werte des Massenparameters μ verhalten.

Im folgenden betrachten wir drei Trunkierungen. In der ersten sind nur das First-Order-Gegenstück zum Ricci-Skalar und der kosmologische Term anwesend, so daß hier der zweidimensionale Fluß von g_k und λ_k analysiert wird. Anschließend schalten wir den Immirzi-Term ein. Zunächst wird als zweite Trunkierung das reine (γ, g) -System ohne kosmologische Konstante untersucht, bevor wir uns im Rahmen des (λ, γ, g) -Systems mit der vollen dreidimensionalen Trunkierung befassen.

Die Kopplungen λ , γ und g sind dabei als Koordinaten auf dem von ihren assoziierten Invarianten aufgespannten dreidimensionalen Unterraum des Theorienraums aufzufassen, auf dem auch das Vektorfeld $\vec{\beta} \equiv (\beta_\lambda, \beta_\gamma, \beta_g)$ definiert ist. Wir schreiben hingegen λ_k , γ_k und g_k , sofern wir uns nicht auf intrinsische geometrische Eigenschaften des Theorienraums, sondern auf den durch das Vektorfeld $\vec{\beta}$ erzeugten und mit k parametrisierten Fluß beziehen, der durch das Differentialgleichungssystem (7.76) gegeben ist. Die Reihenfolge der Kopplungen in der Bezeichnung der Trunkierungen ist der von uns gewählten Darstellung angepaßt, in der (λ, γ, g) im dreidimensionalen Fall ein rechtshändiges Dreibein bilden.

8.1 Das (λ, g) -System

Wie in Abschnitt 7.4.2 erläutert, erhalten wir für das zweidimensionale (λ, g) -System ohne Immirzi-Term im Trunkierungsansatz die relevanten Beiträge der Spur, indem wir auf der rechten Seite der Flußgleichung den geraden Wechselwirkungsbeitrag $\hat{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(+)}$ für $\gamma_k \rightarrow \infty$ auswerten und den ungeraden Anteil $\hat{V}_{\text{contr}}^{\text{grav}(-)}$ nicht berücksichtigen. Dies entfernt aus der vollen Spur alle skalaren Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{\gamma_k})$, die aus dem Immirzi-Term stammen sowie alle pseudoskalaren Beiträge der Ordnungen $\mathcal{O}(\frac{1}{\gamma_k}{}^0)$ und $\mathcal{O}(\frac{1}{\gamma_k}{}^1)$, die auf der rechten Seite ausschließlich zur Beta-Funktion des Immirzi-Terms beitragen. Dann treten auch im Graviton-Sektor ausschließlich Skalare auf, und alle Matrixkomponenten der Operatoren sind blockdiagonal. Insbesondere ist H^{grav} mit H_0^{grav} identisch, so daß der Graviton-Anteil im Wechselwirkungsbeitrag der Spur in (7.49) wie gewünscht die zum Geist-Anteil analoge Form annimmt. Entsprechend bezeichnen wir den resultieren-

den Graviton-Wechselwirkungsbeitrag zur Beta-Funktion mit $I_V^{\text{grav}}(\lambda, \mu)$, so daß wir das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\partial_t g_k = \beta_g(g_k, \lambda_k) = \left[2 + \eta_N(\lambda_k, g_k, \mu) \right] g_k \quad (8.1a)$$

$$\text{mit } \eta_N(\lambda_k, g_k, \mu) = 16\pi \left(I_V^{\text{grav}}(\lambda_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) g_k$$

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(g_k, \lambda_k) = & 8\pi g_k \left[\left(I_F^{\text{grav}}(\lambda_k, \mu) - 2 I_F^{\text{gh}}(\mu) \right) \right. \\ & \left. + 2 \left(I_V^{\text{grav}}(\lambda_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \lambda_k \right] - 2 \lambda_k \quad (8.1b) \end{aligned}$$

erhalten. Da \bar{H} nun verschwindet, entfällt in diesen Gleichungen auch der \mathcal{N} -Beitrag aus der vollen Beta-Funktion; er enthielt die Beiträge zum freien Anteil, die aus der Anwesenheit des Immirzi-Terms resultierten.

Bevor wir die Resultate der numerischen Analyse anführen, sei noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Trunkierung *nicht* das Gegenstück zur Einstein-Hilbert-Trunkierung der QEG darstellt. Vielmehr ist diese von der metrischen Theorie maximal weit entfernt in dem Sinne, daß in ihr die Torsion völlig frei fluktuiert. Im Metrik-Formalismus hingegen wird die Torsion a priori gleich Null gesetzt.

Da an einem Fixpunkt (λ^*, g^*) beide Beta-Funktionen verschwinden, folgt im nicht-Gaußschen Fall ($g^* \neq 0$, $\eta_N = -2$) aus (8.1a) die erste Fixpunktbedingung

$$16\pi \left(I_V^{\text{grav}}(\lambda^*, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) g^* = -2$$

und somit

$$g^* = - \left[8\pi \left(I_V^{\text{grav}}(\lambda^*, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \right]^{-1}. \quad (8.2)$$

Für die zweite Fixpunktbedingung $\beta_g(\lambda^*, g^*) = 0$ folgt aus (8.1b) mit (8.2)

$$- \frac{\left(I_F^{\text{grav}}(\lambda^*, \mu) - 2 I_F^{\text{gh}}(\mu) \right)}{\left(I_V^{\text{grav}}(\lambda^*, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right)} - 4 \lambda^* = 0 \quad (8.3)$$

Wir haben numerisch nach Lösungen λ^* von Gleichung (8.3) gesucht und mittels (8.2) die

zugehörigen g^* -Werte bestimmt.

Auf diese Art können für $\mu = 1$ keine weiteren Fixpunkte außer dem Gaußschen (GFP) gefunden werden. Für $\mu = 2$ tritt für bestimmte Werte der Eichparameter ein nicht-Gaußscher Fixpunkt (NGFP) auf, wobei jedoch das Vorzeichen von g^* von der Wahl der Parameter abhängt. Ab $\mu \approx 3$ hingegen stellt sich eine Systematik ein, die bis zum untersuchten Maximalwert von $\mu = 50$ erhalten bleibt und somit eine generische Eigenschaft eines großen Bereichs im Parameterraum zu sein scheint.

Um diesen Bereich zu untersuchen, haben wir jeweils für $\mu = 5$, $\mu = 10$ und $\mu = 15$ dem Diffeomorphismusparameter die Werte $\alpha_D = 1$, $\alpha_D = 10$ und $\alpha_D = 0,1$ zugewiesen und zudem jeden dieser Fälle für $\beta_D = 0$ und $\beta_D = 1$ betrachtet. Jede dieser Parameterkonfigurationen wurde auf sieben verschiedene Arten regularisiert, zunächst mittels des scharfen Propertime-Cutoffs sowie anschließend unter Verwendung der C_k^m - und der f_k^m -Regularisierung. In beiden Fällen wurde der Abschneideparameter m zu $m = 1$, $m = 10$ und $m = 50$ gewählt.

Die Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen:

(A) Im Zuge dieser Analyse stellten wir fest, daß die „weichen“ C_k^m - und die f_k^m -Regularisierungen stetig mit dem scharfen Propertime-Cutoff zusammenhängen; insbesondere erhalten wir im Falle der f_k^m -Regularisierung für $m = 50$ die erwartete, nahezu perfekte Übereinstimmung mit dem scharfen Cutoff. Generell bestätigen diese Regularisierungen sowohl in qualitativer als auch in quantitativer Hinsicht das bereits auf Grundlage des scharfen Cutoffs gewonnene Bild. Wir geben daher in den folgenden Tabellen nur die unter Verwendung des scharfen Cutoffs erhaltenen Werte an.

(B) In den Tabellen 8.1, 8.2 und 8.3 geben wir neben den Fixpunktwerte g^* und λ^* und deren Produkt auch die zugehörigen kritischen Exponenten Θ_1 und Θ_3 des Fixpunkts an. Sie sind definiert als die Eigenwerte der am Fixpunkt (λ^*, g^*) ausgewerteten Stabilitätsmatrix zu den Eigenvektoren V^1 und V^3 . (Die unübliche Numerierung an dieser Stelle erklärt sich durch die Darstellung der Analyse der dreidimensionalen (λ, γ, g) -Trunkierung am Ende dieses Kapitels.) Dabei ist zu beachten, daß prima facie ein kritischer Exponent Θ_A *nicht* mit einer bestimmten Kopplung u_α assoziiert werden kann. Dies ist nur dann der Fall, wenn der zugehörige Eigenvektor V^A nahezu parallel zur u_α -Achse auf dem Theorienraum verläuft (vgl. Formel (1.25), Kapitel 1). In diesem Sinne sind in guter Näherung die

Scharfer Propertime-Cutoff, $\mu = 5$						
		λ^*	g^*	λ^*g^*	Θ_1	Θ_3
$\alpha_D = 1$	$\beta_D = 1$	-3,35	3,07	-10,28	2,86	1,87
	$\beta_D = 0$	-3,28	2,75	-9,03	2,98	1,76
$\alpha_D = 10$	$\beta_D = 1$	-0,36	0,71	-0,26	-21,53	2,46
	$\beta_D = 0$	-0,41	0,91	-0,37	-25,96	2,40
$\alpha_D = 0,1$	$\beta_D = 1$	-9,19	24,70	-226,85	230,31	4,02

Tabelle 8.1: Die Eigenschaften des NGFP für den scharfen Propertime-Cutoff und $\mu = 5$ im (λ, g) -System.

Scharfer Propertime-Cutoff, $\mu = 10$						
		λ^*	g^*	λ^*g^*	Θ_1	Θ_3
$\alpha_D = 1$	$\beta_D = 1$	-6,16	2,77	-17,05	3,33	1,90
	$\beta_D = 0$	-5,88	2,45	-14,39	3,35	1,88
$\alpha_D = 10$	$\beta_D = 1$	-0,35	0,46	-0,16	-20,33	2,40
	$\beta_D = 0$	-0,41	0,66	-0,27	-26,51	2,37
$\alpha_D = 0,1$	$\beta_D = 1$	-11,71	13,91	-162,83	156,34	4,02

Tabelle 8.2: Die Eigenschaften des NGFP für den scharfen Propertime-Cutoff und $\mu = 10$ im (λ, g) -System.

kritischen Exponenten Θ_1 und Θ_3 mit den Kopplungen λ bzw. g assoziiert. Für sämtliche Parameterwerte sind Θ_1 und Θ_3 rein reell.

(C) Außer den in den Tabellen 8.1, 8.2 und 8.3 angegebenen Fixpunkten wurde für $\mu = 5$, $\alpha_D = 0$ und $m = 10$ im Rahmen der f_k^m -Regularisierung noch ein weiterer Fixpunkt bei $(\lambda^* = 1,7; g^* = -1,16)$ für $\beta_D = 1$ und bei $(\lambda^* = 1,96; g^* = -1,30)$ für $\beta_D = 0$ gefunden. Da dieser Fixpunkt jedoch nur für diese beiden speziellen Parameterwahlen

Scharfer Propertime-Cutoff, $\mu = 15$						
		λ^*	g^*	λ^*g^*	Θ_1	Θ_3
$\alpha_D = 1$	$\beta_D = 1$	-7,79	2,47	-19,24	3,39	1,90
	$\beta_D = 0$	-7,37	2,18	-16,04	3,41	1,89
$\alpha_D = 10$	$\beta_D = 1$	-0,38	0,38	-0,15	-20,06	2,38
	$\beta_D = 0$	-0,46	0,56	-0,25	-26,67	2,36
$\alpha_D = 0,1$	$\beta_D = 1$	-13,67	11,37	-155,39	145,67	4,02

Tabelle 8.3: Die Eigenschaften des NGFP für den scharfen Propertime-Cutoff und $\mu = 15$ im (λ, g) -System.

im Rahmen dieses Schemas auftrat und sich nicht bei Variation der Parameter und des Abschneideverfahrens stetig weiterverfolgen ließ, wurde er als unphysikalisches Artefakt betrachtet.

(D) Zwar scheint der Einfluß des Parameters β_D gering zu sein, doch für $\alpha_D = 0,1$ und $\beta_D = 0$ konnte in keinem der untersuchten Fälle ein Fixpunkt gefunden werden. Hingegen existiert für alle übrigen Parameterkonfigurationen ein Fixpunkt mit $\lambda^* < 0$ und $g^* > 0$.

(E) Nach den Tabellen 8.1, 8.2 und 8.3 werden die Beträge *beider* Fixpunktkoordinaten λ^* und g^* für wachsendes α_D kleiner, so daß bei der Bildung des Produktes $\lambda^* g^*$ gerade *keine* Kompensation auftritt, die dieses verglichen mit den Fixpunktwerten der beiden separaten Kopplungen bezüglich einer Variation des Eichparameters signifikant robuster machen würde. Dies trifft auch zu, wenn man für feste μ^- , α_D - und β_D -Werte die Fixpunktkoordinaten und deren Produkt für die verschiedenen Abschneideverfahren vergleicht.

(F) Die entscheidenden Schlüsse bezüglich der Schemaabhängigkeiten lassen sich aus dem Verhalten der kritischen Exponenten ziehen. In Abhängigkeit des Eichparameters α_D kann man diesen für alle Regularisierungen folgende Wertebereiche zuordnen:

$$\begin{aligned} \alpha_D = 1 & : 2,40 < \Theta_1 < 3,45, \quad 1,70 < \Theta_3 < 1,95 \\ \alpha_D = 10 & : -35 < \Theta_1 < -15, \quad 2,30 < \Theta_3 < 2,65 \\ \alpha_D = 0,1 & : 80 < \Theta_1 < 230, \quad 4,02 \leq \Theta_3 \leq 4,04. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß Θ_1 sehr stark eichabhängig ist und im Falle von $\alpha_D = 10$ und $\alpha_D = 0,1$ für die unterschiedlichen Regularisierungsverfahren einen verhältnismäßig großen Wertebereich überstreicht. Demgegenüber ist der enge Wertebereich des kritischen Exponenten Θ_3 bemerkenswert, zumal sich die zugehörigen g^* -Werte über alle Parameterkombinationen hinweg um einen Faktor 200 unterscheiden. Für $\alpha_D = 1$ und $\alpha_D = 10$ liegt Θ_3 wenig unterhalb bzw. oberhalb von 2, während für $\alpha_D = 0,1$ die Rechnung auf ausgesprochen stabile Art und Weise einen kritischen Exponenten von 4 nahelegt. Allerdings verschwindet hier der Fixpunkt bei einer vermeintlich geringen Variation der Eichbedingung, so daß der Status dieses Befundes unklar ist. In jedem Falle deuten die Resultate auf einen positiven Exponenten Θ_3 hin, dessen Wert zudem im Bereich derjenigen Werte liegen sollte, die sich für den analogen kritischen Exponenten im Rahmen der QEG ergeben haben [25]. Allgemein ist in dem untersuchten Parameterbereich die Eichabhängigkeit der Ergebnisse

weitaus stärker als ihre μ - oder Schemaabhängigkeit.

(G) Als wichtigste Vorhersage des untersuchten Flusses, die sich in perfekt schemaunabhängiger Weise ergibt, ist die bloße *Existenz eines nicht-Gaußschen Fixpunktes* zu nennen, so daß wir hier einen ersten Hinweis auf asymptotische Sicherheit gefunden haben. Zudem ist für alle diese Fixpunkte g^* positiv, d.h. es liegt wie in der metrischen Quantengravitation *Anti-Screening* vor. Im Unterschied zur QEG finden wir hier für alle Fixpunkte einen *negativen λ^* -Wert*.

(H) In Abbildung 8.1 skizzieren wir schematisch das Phasenportrait des RG-Flusses in der λ - g -Ebene. Wie in der QEG unterscheiden wir auch hier drei Bereiche, die wir in analoger Nomenklatur mit Ia, IIa und IIIa bezeichnen. Dabei sind Trajektorien vom Typ Ia solche, die für $k \rightarrow 0$ nach $\lambda = -\infty$ laufen. Trajektorien des Bereichs IIIa streben im IR-Limes $k \rightarrow 0$ nach $\lambda = +\infty$. Diese Bereiche sind durch eine Separatrix getrennt, die die Klasse IIa bildet und den Gaußschen mit dem nicht-Gaußschen Fixpunkt verbindet, indem sie für $k \rightarrow 0$ in den GFP hineinläuft. In Abbildung 8.2 geben wir ein echtes Bild der Umgebung des NGFP für $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 1$, $\mu = 5$ und den scharfen Cutoff an. Die Pfeile an den Trajektorien zeigen in die Richtung von abnehmendem k , d. h. der Fluß ins Infrarote erfolgt aus dem Fixpunkt heraus. Dies ist äquivalent zu der von uns ermittelten Positivität der zugehörigen kritischen Exponenten für diese Parameterwahl, da für eine dimensionslose Kopplung u_α der um den Fixpunkt linearisierte Fluß gemäß $\sim V_\alpha^1 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\Theta_1} + V_\alpha^3 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\Theta_3}$ verläuft. (Mit $\alpha \in \{\lambda, g\}$ bezeichnet darin V_α^A die λ - bzw. g -Komponente des Eigenvektors V^A .)

Dieses Resultat legt nahe, beide Richtungen V^1 und V^3 bzw. beide Kopplungen λ und g als *relevant* einzustufen, so daß die Dimension der UV-kritischen Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} des NGFP in dieser Trunkierung 2 ist. Unsere Ergebnisse deuten insgesamt darauf hin, daß die Newton-Konstante mit großer Sicherheit relevant ist, wohingegen die Befunde bezüglich der kosmologischen Konstante einer zu starken Eichabhängigkeit unterworfen sind, um hier eine ähnlich klare Aussage treffen zu können.

Wie bereits erläutert wurde, enthalten auch die Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix Information über das Verhalten des Flusses am Fixpunkt, indem sie dessen asymptotische Richtungen erfassen. Im betrachteten Fall wurde das Eigensystem zu $\vec{v}_\lambda = (-0, 99; -0, 06)^T$ und $\vec{v}_g = (0, 93; -0, 37)^T$ bestimmt.

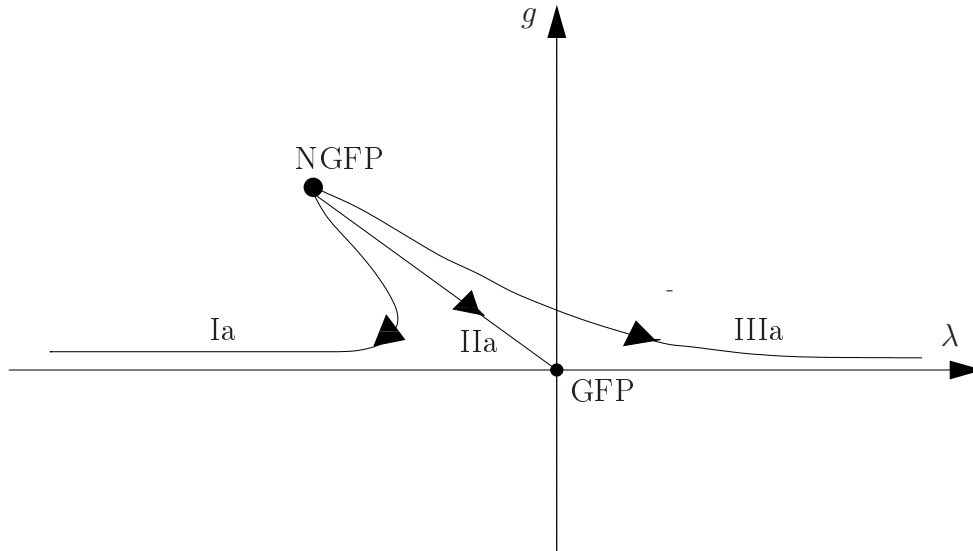


Abbildung 8.1: Schematische Darstellung des Flusses um den NGFP in der (λ, g) -Trunkierung.

Abschließend läßt sich feststellen, daß wir im Rahmen der (λ, g) -Trunkierung überzeugende Hinweise für das Auftreten asymptotischer Sicherheit gefunden haben. Zudem weist der zugehörige NGFP ein positives $g^* > 0$ und mithin Anti-Screening auf. Der λ^* -Wert ist im Unterschied zur QEG negativ, $\lambda^* < 0$. Allerdings signalisiert die Rechnung bezüglich der Behandlung der kosmologischen Konstanten in Form der schwankenden Θ_1 -Werte ihre eigene Unzulänglichkeit. Das Laufen von λ ist aufgrund der hohen kanonischen Skalendimension von Λ_k nur schwer zu kontrollieren. Zudem muß ein negativer λ^* -Wert nicht in phänomenologischem Widerspruch zu der gegenwärtig gemessenen, positiven und kleinen kosmologischen Konstanten des Universums stehen, da diese Messungen auf astronomischen Skalen und somit tief im Infraroten erfolgen. Die relevanten Trajektorien befinden sich in Abbildung 8.1 in dem mit IIIa bezeichneten Bereich. Er enthält auch in der QEG diejenigen Trajektorien, die in der Natur realisiert sein könnten, da sie über ein langes klassisches Regime verfügen. Darüber hinaus erfährt die Beta-Funktion von λ im Rahmen einer korrekten bimetrischen Analyse, die im Gegensatz zu unserer Näherung die sogenannte Split-Symmetrie der Flußgleichung respektiert und bei der die Fluktuationen auf beiden Seiten nicht gleich Null gesetzt werden, eine Korrektur in Form einer Tadpole-Gleichung, die durchaus auf ein positives λ^* führen kann [51, 52, 53]. Diesen allgemeineren Standpunkt wollen wir hier nicht näher erläutern.

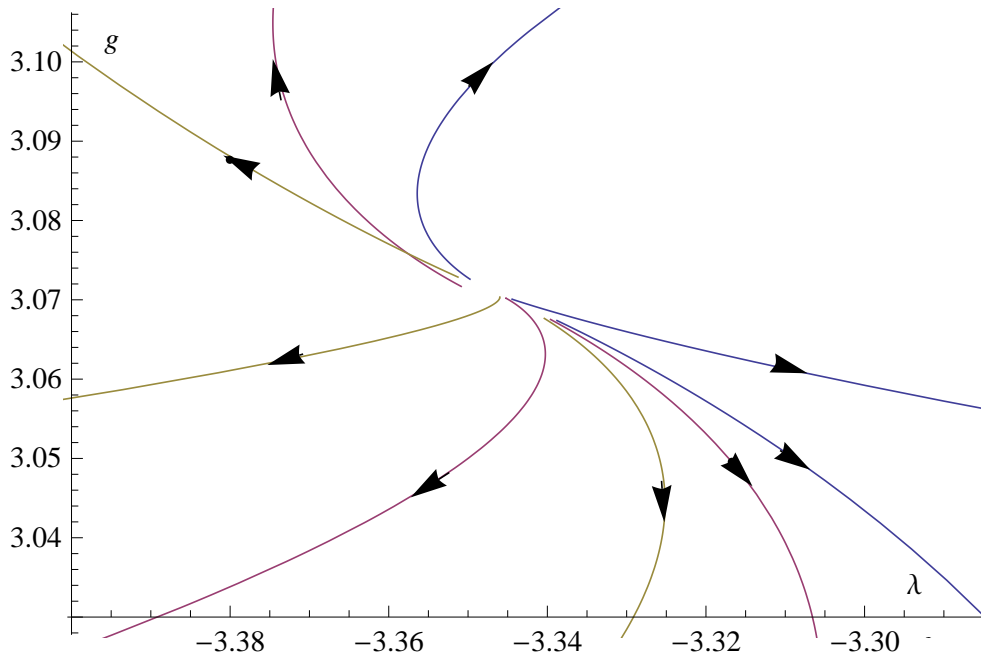


Abbildung 8.2: Der zweidimensionale RG-Fluß in der (λ, g) -Ebene für $\mu = 5$, $\alpha_{\text{D}} = 1$ und $\beta_{\text{D}} = 1$ unter Verwendung des scharfen Propertime-Cutoffs. Die Pfeile zeigen in Richtung abnehmender k -Werte.

Daher sind präzisere Untersuchungen erforderlich, um genauere Aussagen zu den expliziten Eigenschaften des Flusses im Fixpunktregime treffen zu können.

8.2 Die Identifikation des μ -Parameters mit der laufenden Planck-Masse

Die Natur des μ -Parameters betreffend, erscheint noch eine weitere Identifikation als natürlich. Die laufende dimensionsvolle Newton-Konstante G_k führt auf eine laufende Planck-Masse, die in natürlichen Einheiten durch $\sqrt{G_k}^{-1} = \sqrt{g_k}^{-1} k$ gegeben ist. Identifizieren wir diese mit dem dimensionsbehafteten Massenparameter $\bar{\mu}$, so impliziert dies für die entsprechenden dimensionslosen Größen $\mu \equiv \sqrt{g_k}^{-1}$. Die Funktionen $I_{\text{F}}^{\text{grav}}$, I_{F}^{gh} , $I_{\text{V}}^{\text{grav}}$ und $I_{\text{F}}^{\text{grav}}$ auf der rechten Seite des Differentialgleichungssystems (8.1) hängen damit ebenfalls von g_k ab.

Wir haben auch für diese Wahl des Massenparameters den Renormierungsgruppen-Fluß

(RG-Fluß) des (λ, g) -Systems untersucht. Die Ergebnisse sind im Anhang K zusammengestellt. Sie belegen, daß für diese Identifikation die Existenz eines NGFP stark schemabhängig ist und daß dieser zudem Eigenschaften aufweist, die im Gegensatz zur Wahl $\mu = \text{const}$ nicht mit denjenigen des QEG-Fixpunktes in Einklang stehen. Daher haben wir uns in den folgenden Untersuchungen auf den Fall $\mu = \text{const}$ beschränkt.

8.3 Das (γ, g) -System

Wir betrachten jetzt die „Holst-Trunkierung“ (3.24) ohne den kosmologischen Term, berücksichtigen aber im Unterschied zum vorangegangenen Abschnitt den Immirzi-Term. Die Beta-Funktionen dieser zweidimensionalen Trunkierung erhalten wir, indem wir im vollen System (7.76) in den Beta-Funktionen für g_k und γ_k jeweils $\lambda_k = 0$ setzen:

$$\partial_t g_k = \beta_g(g_k, \gamma_k) = \left[2 + \eta_N(0, g_k, \mu) \right] g_k \quad (8.4a)$$

$$\partial_t \gamma_k = \beta_\gamma(g_k, \gamma_k) = 16\pi g_k \gamma_k \left[\gamma_k I_{V(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma_k, \mu) - \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \right] \quad (8.4b)$$

Die aus (8.4) erhaltenen Flußdiagramme belegen, daß der Fluß spiegelsymmetrisch zur $(\gamma = 0)$ -Linie, d. h. zur g -Achse ist. Zudem ist offensichtlich $g = 0$ eine Fixlinie. Insbesondere existiert auch hier ein Gaußscher Fixpunkt ($g^* = 0, \gamma^* = 0$).

Um eventuelle nicht-Gaußsche Fixpunkte zu finden, versuchen wir zunächst, $\beta_\gamma(g^*, \gamma^*) = 0$ mit $\gamma^* \neq 0$ zu lösen. Mit (8.4b) führt dies auf die Bedingung

$$\gamma^* I_{V(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma^*, \mu) - \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma^*, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) = 0. \quad (8.5)$$

Besitzt (8.5) eine Lösung, so läßt sich der zugehörige g^* -Wert aus der zweiten Bedingung $\eta_N^* = -2$ bestimmen, d. h. mit (8.4a)

$$g^* = - \left[8\pi \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma^*, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \right]^{-1}. \quad (8.6)$$

Finden wir einen NGFP (g^*, γ^*) , so linearisieren wir den Fluß um diesen Punkt und berechnen seine kritischen Exponenten als die (negativen) Eigenwerte der Stabilitätsmatrix. Für den betrachteten Fall $\mu = \text{const}$ hat diese speziell die Einträge

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \beta_g(\gamma, g)}{\partial g} \right|_{\gamma=\gamma^*, g=g^*} &= \left. \frac{\partial}{\partial g} \left\{ [2 + \eta_N(0, g, \mu)] g \right\} \right|_{\gamma=\gamma^*, g=g^*} \\ &= 2 + \eta_N(0, g^*, \mu) + g^* \left(\frac{\partial}{\partial g} \eta_N \right) (g^*) \\ &= \eta_N(0, g^*, \mu) = -2 \end{aligned}$$

und

$$\left. \frac{\partial \beta_\gamma(\gamma, g)}{\partial g} \right|_{\gamma=\gamma^*, g=g^*} = 16\pi\gamma^* \left[\gamma^* I_{V(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma^*, \mu) - \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma^*, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \right] = 0.$$

Die Stabilitätsmatrix ist dann von der Form

$$B \equiv \{B_{ij}\} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma} & \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \gamma} & \frac{\partial \beta_g}{\partial g} \end{array} \right) \Big|_{\gamma=\gamma^*, g=g^*} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma} & 0 \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \gamma} & -2 \end{array} \right) \Big|_{\gamma=\gamma^*, g=g^*},$$

so daß für die kritischen Exponenten

$$\Theta_2 = - \left. \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma^*, g=g^*} \quad \text{und} \quad \Theta_3 = 2$$

gilt. Da der Eigenvektor V^3 zum Eigenwert $-\Theta_3$ durch $V^3 = (0, 1)^T$ gegeben ist, ist Θ_3 tatsächlich der mit der Newton-Konstante g assoziierte kritische Exponent.

8.3.1 Die Pseudofixpunkte NGFP'_±

Auch im Rahmen der (γ, g) -Trunkierung stellt sich heraus, daß der scharfe Propertime-Cutoff keinerlei pathologische Züge aufweist, sondern sich vielmehr harmonisch in die Menge der übrigen Regularisierungsverfahren einfügt, so daß wir uns hier ebenfalls bei der Angabe der erhaltenen Resultate auf dieses Schema beschränken.

Wir finden für $\mu = 1$ bis zum untersuchten Maximalwert von $\mu = 50$ für jeden der beiden Halbräume $\gamma > 0$ und $\gamma < 0$ des spiegelsymmetrischen Flusses einen Fixpunkt, der

Scharfer Propertime-Cutoff, $\beta_D = 1$				
$\mu = 1$	γ^*	g^*	Θ_2	Θ_3
$\alpha_D = 1$	1,054	-0,026	4,05	2
$\alpha_D = 10$	1,007	1,252	5598,6	2
$\alpha_D = 0,1$	1,054	-0,026	4,93	2
$\mu = 2$	γ^*	g^*	Θ_2	Θ_3
$\alpha_D = 1$	1,138	1,722	7,14	2
$\alpha_D = 10$	1,017	0,042	66,92	2
$\alpha_D = 0,1$	0,981	-16,370	-794,2	2
$\mu = 5$	γ^*	g^*	Θ_2	Θ_3
$\alpha_D = 1$	1,061	2,118	18,56	2
$\alpha_D = 10$	1,009	0,057	116,13	2
$\alpha_D = 0,1$	0,979	-8,625	-269,8	2

Tabelle 8.4: Die Eigenschaften des Pseudofixpunktes NGFP'_{\pm} im (γ, g) -System für $\mu \in \{1; 2; 5\}$ und $\alpha_D \in \{1; 10; 0,1\}$.

sehr nah bei $\gamma = \pm 1$ liegt. Wir bezeichnen dieses Fixpunktpaar mit NGFP'_{\pm} und geben die zugehörigen Werte für $\mu = 1$, $\mu = 2$ und $\mu = 5$ in Tabelle 8.4 an.

Wir haben uns dabei auf den Fall $\beta_D = 0$ beschränkt, da sich für $\beta_D = 1$ keine wesentlichen Unterschiede ergeben.

Für alle untersuchten Massenparameter $\mu > 1$ läßt sich folgende Systematik feststellen: Der Betrag der γ^* -Werte ist für $\alpha_D = 1$ und $\alpha_D = 10$ immer größer als 1, wobei die Abweichung von 1 im zweiten Fall gegenüber dem ersten jeweils um etwa eine Größenordnung kleiner ist. Hier sind die zugehörigen g^* -Werte stets positiv. Demgegenüber sind für $\alpha_D = 0,1$ die γ^* -Beträge kleiner als 1, und man erhält negative g^* -Werte. Für wachsendes μ bleibt diese Systematik erhalten, wobei sich die auftretenden γ^* -Werte jedoch zunehmend dem Wert 1 nähern. Für $\mu < 1$ konnte für die untersuchten Werte $\mu = 0,2$, $\mu = 0,5$ und $\mu = 0,8$ keine entsprechende Systematik festgestellt werden.

Aus den stark eichabhängigen Werten für den kritischen Exponenten Θ_2 , die für $\alpha_D = 1$ und $\alpha_D = 10$ immer positiv und für $\alpha_D = 0,1$ immer negativ sind, läßt sich auf Unzulänglichkeiten innerhalb der Rechnung schließen. Um deren Natur aufzuklären, ist es hilfreich,

den Graphen der Funktion

$$\frac{\beta_\gamma(g, \gamma)}{g\gamma} = 16\pi \left[\gamma I_{V(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \right]$$

zu betrachten, die nur von γ abhängt. Darüber hinaus ist die anomale Dimension η_N der Newton-Konstante definiert über $\beta_g =: (2 + \eta_N)g$, so daß auch durch

$$\frac{\eta_N(g, \gamma)}{g} = 16\pi \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right)$$

eine Funktion von γ gegeben ist. Die Abbildungen 8.3 und 8.4 zeigen die Graphen dieser beiden Funktionen für $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und $\mu = 5$.

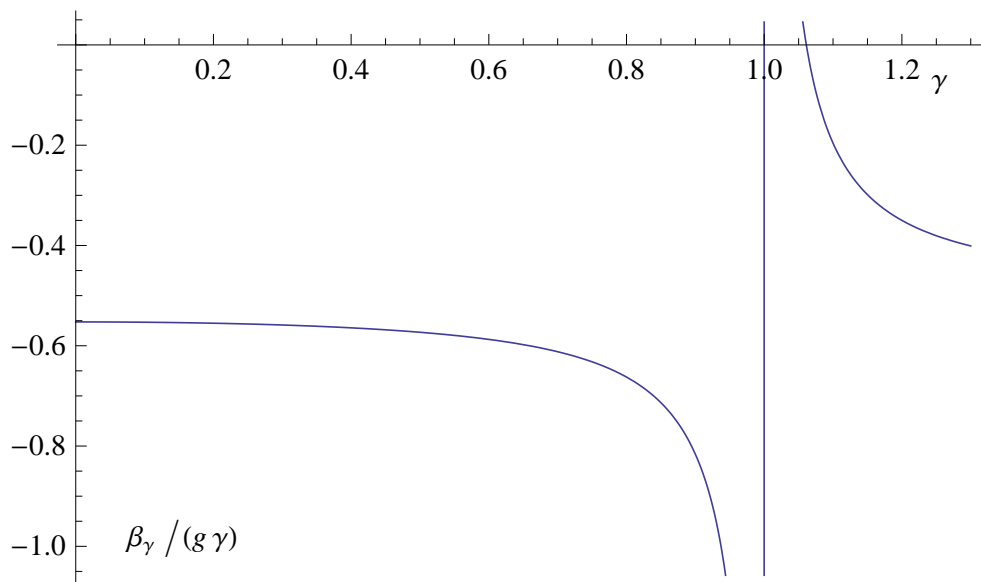


Abbildung 8.3: Die Funktion $\gamma \mapsto \frac{\beta_\gamma}{(g\gamma)}$ für den scharfen Propertime-Cutoff und die Parameterwahl $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$ und $\beta_D = 0$. Man beachte die Nähe der Nullstelle dieser Funktion zum Pol bei $\gamma = 1$.

Aus Abbildung 8.3 ist ersichtlich, daß die Beta-Funktion von γ bei $\gamma = \pm 1$ einen Pol aufweist, dessen Natur wir weiter unten erläutern. Insbesondere wird sich aus den dort folgenden Überlegungen ergeben, daß die diskutierten Fixpunkte \mathbf{NGFP}'_{\pm} , die sich in unmittelbarer Nähe dieser Polstellen befinden, nicht glaubwürdig sind; wir bezeichnen sie daher als *Pseudofixpunkte*. Die Funktion $\gamma \mapsto \frac{\eta_N}{g}$, deren Graphen wir in Abbildung 8.4 angeben, weist bei $\gamma = \pm 1$ ebenfalls einen Pol auf. Für $\alpha_D = 0,1$ werden die beiden

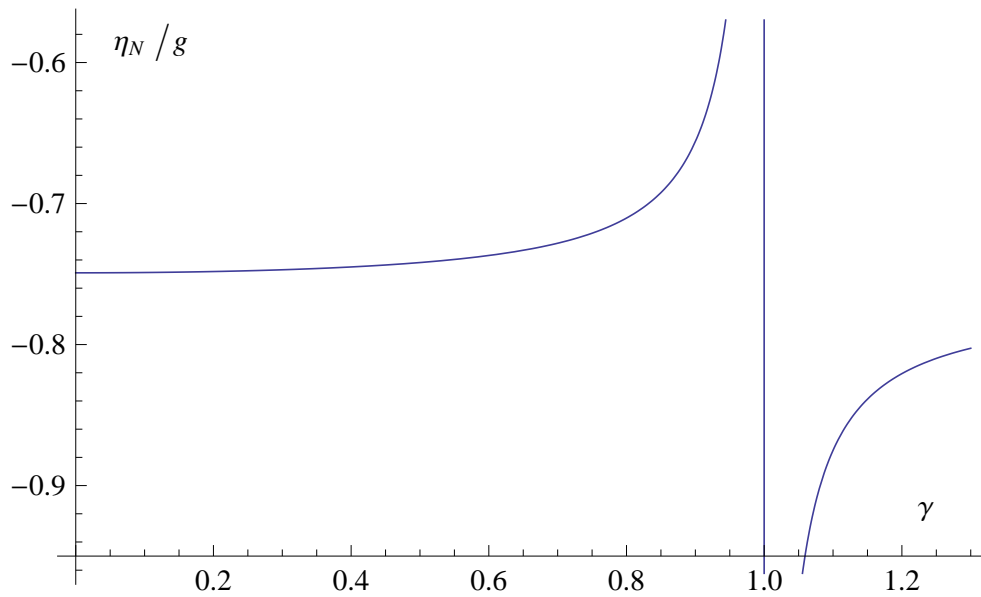


Abbildung 8.4: Die Funktion $\gamma \mapsto \frac{\eta_N}{g}$ für den scharfen Propertime-Cutoff und die Parameterwahl $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$ und $\beta_D = 0$. Auch hier liegt die Nullstelle in der unmittelbaren Umgebung des Pols bei $\gamma = 1$.

Teilgraphen links und rechts des Pols nach oben verschoben, so daß die konstante Funktion, die außerhalb der Umgebung von $\gamma = \pm 1$ eine Asymptote des Graphen darstellt, in diesem Fall einen positiven Wert annimmt. Dementsprechend tritt die Nullstelle der Funktion dann bereits vor dem Pol bei $|\gamma^*| < 1$ auf.

Das angesprochene asymptotische Verhalten führt zum eigentlichen Hauptresultat dieser Untersuchungen. Dieses wird in Abschnitt 8.3.5 diskutiert. Zuvor bemerken wir noch, daß es sich bei den Polstellen $\gamma^* \approx \pm 1$ offenbar um *Pole erster Ordnung* handelt, da der Graph der Funktion $\gamma \mapsto (1 - \gamma^2) \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ in Abbildung 8.5 bei $\gamma^* = \pm 1$ vollkommen regulär ist. Wir werden diese Betrachtung weiter unten in Abschnitt 8.3.3 vertiefen. Dies wird uns erlauben, den Ursprung des Pseudofixpunktes zu verstehen.

Die Gestalt der Graphen 8.3 und 8.4 motiviert die folgende Analyse. Wir haben zwar auch im (γ, g) -System für die Identifikation $\mu = \sqrt{g}^{-1}$ Fixpunkte um $\gamma^* \approx \pm 1$ mit entsprechend instabilen kritischen Exponenten Θ_2 gefunden, doch da hier die Beta-Funktion von γ sowie die anomale Dimension der Newton-Konstante keine eindimensionale Darstellung der oben erläuterten Art erlauben, wurde im folgenden ausschließlich der Fall $\mu = \text{const}$

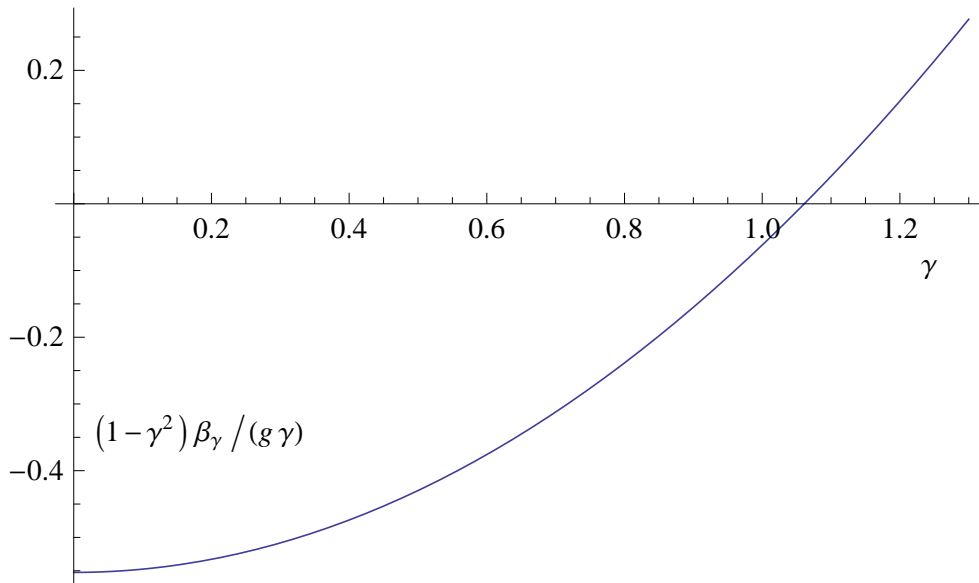


Abbildung 8.5: Die Funktion $\gamma \mapsto (1 - \gamma^2) \frac{\beta_\gamma}{(g\gamma)}$ für den scharfen Propertime-Cutoff und die Parameterwahl $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$ und $\beta_D = 0$.

untersucht.

8.3.2 Die physikalischen Fixpunkte NGFP'_0 und NGFP'_∞

Die Graphen in den Abbildungen 8.3 und 8.4 legen nahe, für die Funktion

$$\gamma \mapsto \frac{\beta_\gamma}{g\gamma} = 16\pi \left[\gamma I_{\text{V}(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - \left(I_{\text{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_{\text{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right) \right]$$

folgende Grenzwerte zu betrachten:

$$c_0 := \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{\beta_\gamma}{g\gamma} \right) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} 16\pi \left[\gamma I_{\text{V}(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - \left(I_{\text{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_{\text{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right) \right]$$

und

$$c_\infty := \lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\beta_\gamma}{g\gamma} \right) = \lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} 16\pi \left[\gamma I_{\text{V}(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - \left(I_{\text{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_{\text{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right) \right].$$

Diese Grenzwerte hängen parametrisch von μ ab.

Bevor wir die Resultate angeben, ist an dieser Stelle noch eine allgemeine Bemerkung

angebracht. Betrachten wir den von der allgemeinen Form unserer Trunkierung erfaßten Unterraum des Theorienraums, so beschreiben wir diesen mittels der Koordinaten (λ, γ, g) . Analog zur stereographischen Projektion der Sphäre ist dieses Koordinatensystem allerdings im zweiten der oben betrachteten Grenzfälle nicht definiert, da die Koordinate γ dort divergiert. Um die Umgebung der Untermannigfaltigkeit „ $\gamma = \pm\infty$ “ zu erfassen, ist es nötig, eine zweite Karte auf dem Theorienraum einzuführen, die dort wohldefiniert ist. Dies wird durch Einführung einer neuen Koordinate $\hat{\gamma}$ erreicht, wobei die Übergangsabbildung der beiden Karten auf dem Gebiet ihres Überlapps durch

$$\hat{\gamma} := \frac{1}{\gamma}$$

gegeben ist. Beide Koordinaten sind jeweils auf dem offenen Intervall $(-\infty, +\infty)$ definiert, und für Null decken sie gerade den Bereich ab, der außerhalb des Definitionsbereichs ihres Gegenstücks liegt; bei $\gamma = \hat{\gamma} = \pm 1$ stimmen sie überein.

Wir können damit den zweiten Grenzwert in der wohldefinierten Form

$$c_\infty := \lim_{\hat{\gamma} \rightarrow 0} 16\pi \left[\hat{\gamma}^{-1} I_{\mathbb{V}(-)}^{\text{grav}}(0, \hat{\gamma}^{-1}, \mu) - \left(I_{\mathbb{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \hat{\gamma}^{-1}, \mu) - 2 I_{\mathbb{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right) \right]$$

angeben.

Behandeln wir den Bereich „ $\gamma = \pm\infty$ “ in wohldefinierter Art und Weise im $\hat{\gamma}$ -Bild, so ist es natürlich, dort auch den Fluß mittels dieser Kopplung zu untersuchen. Die Beta-Funktion der Kopplung $\hat{\gamma}$ ist dann mit

$$\beta_{\hat{\gamma}}(g_k, \hat{\gamma}_k) = \partial_t \hat{\gamma}_k = -\frac{\partial_t \gamma_k}{\gamma_k^2} = -\hat{\gamma}_k^2 \beta_\gamma(g_k, \hat{\gamma}_k^{-1})$$

gegeben durch

$$\beta_{\hat{\gamma}}(g, \hat{\gamma}) = -16\pi g \hat{\gamma} \left[\hat{\gamma}^{-1} I_{\mathbb{V}(-)}^{\text{grav}}(0, \hat{\gamma}^{-1}, \mu) - \left(I_{\mathbb{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \hat{\gamma}^{-1}, \mu) - 2 I_{\mathbb{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right) \right].$$

Die numerische Analyse ergibt, daß die Grenzwerte c_0 und c_∞ für $\mu \gtrsim 0,8$ tatsächlich existieren und daß sie für eine feste Parameterwahl jeweils nahezu *übereinstimmen*. Mit

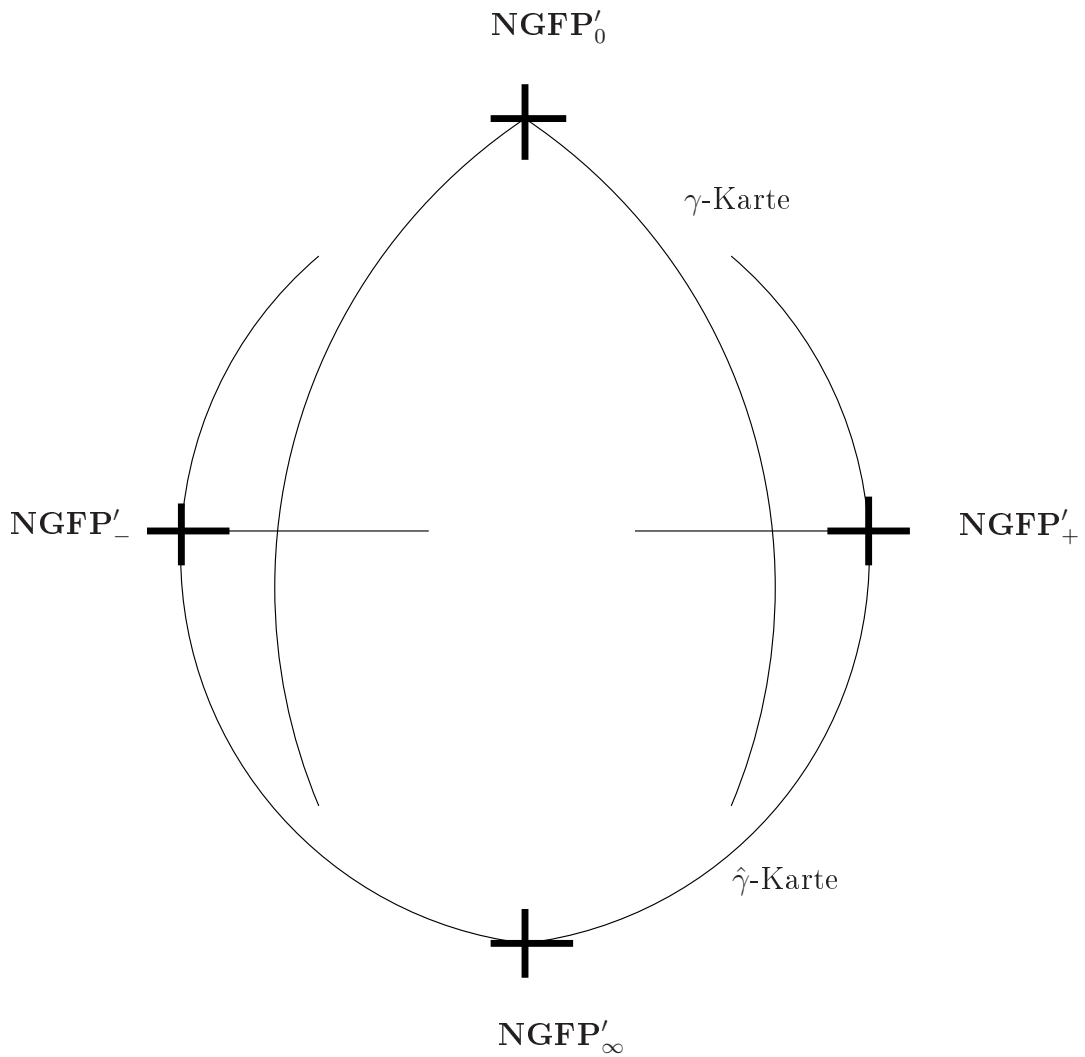


Abbildung 8.6: Die Lage der Fixpunkte in der γ - bzw. $\hat{\gamma}$ -Karte.

$\frac{\beta_\gamma}{\gamma} = -\frac{\beta_{\hat{\gamma}}}{\hat{\gamma}}$ gilt also

$$c_0 \equiv \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{\beta_\gamma}{g\gamma} \right) \approx - \lim_{\hat{\gamma} \rightarrow 0} \left(\frac{\beta_{\hat{\gamma}}}{g\hat{\gamma}} \right) \equiv c_\infty . \tag{8.7}$$

Diese Übereinstimmung wurde für alle Kombinationen, die sich aus den sieben angegebenen Regularisierungen sowie den Parameterwahlen $\alpha_D \in \{1; 10; 0, 1\}$ und $\beta_D \in \{0; 1\}$ ergeben, festgestellt. Für unterschiedliche Parameterwerte hingegen weichen die bestimmten Grenzwerte c_0 oder c_∞ im allgemeinen stark voneinander ab. Die Beta-Funktionen um

$\gamma \approx 0$ bzw. $\hat{\gamma} \approx 0$ sind dann von der Form

$$\beta_\gamma(g, \gamma) = c_0 g \gamma, \quad \gamma \approx 0$$

und

$$\beta_{\hat{\gamma}}(g, \hat{\gamma}) = -c_\infty g \hat{\gamma}, \quad \hat{\gamma} \approx 0,$$

so daß insbesondere bei $\gamma = 0$ und $\hat{\gamma} = 0$ jeweils ein Fixpunkt vorliegt; letzterer wäre dabei in der γ -Karte nicht sichtbar gewesen. Die zugehörigen g^* -Werte bestimmen wir wie üblich über

$$g_0^* = -\frac{1}{8\pi} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right]^{-1}$$

bzw.

$$g_\infty^* = -\frac{1}{8\pi} \lim_{\hat{\gamma} \rightarrow 0} \left[I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \hat{\gamma}^{-1}, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right]^{-1},$$

und es gilt

$$g_0^* \approx g_\infty^*. \quad (8.8)$$

Wir bezeichnen diese Fixpunkte mit $\mathbf{NGFP}'_0 \equiv (\gamma^*, g_0^*)$ und $\mathbf{NGFP}'_\infty \equiv (\hat{\gamma}^*, g_\infty^*)$.

Die zugehörigen kritischen Exponenten ergeben sich wegen

$$\left. \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial g} \right|_{\gamma=0, g=g_0^*} = 0 = \left. \frac{\partial \beta_{\hat{\gamma}}}{\partial g} \right|_{\hat{\gamma}=0, g=g_\infty^*}$$

zu $\Theta_3 = 2$ und

$$\Theta_2 = - \left. \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0, g=g_0^*} = -c_0 g_0^*,$$

$$\Theta_2 = - \left. \frac{\partial \beta_{\hat{\gamma}}}{\partial \hat{\gamma}} \right|_{\hat{\gamma}=0, g=g_\infty^*} = c_\infty g_\infty^*.$$

Wir werden in Kürze noch näher darauf eingehen, daß für die Funktion $\gamma \mapsto \frac{\eta_N}{g}$ ein analoges asymptotisches Verhalten gilt; dies kann man bereits Abbildung 8.4 sowie der ungefähren Übereinstimmung von g_0^* und g_∞^* entnehmen. Man kann auch hier die zugehörigen Grenzwerte bestimmen, so daß in den Bereichen $\gamma \approx 0$ und $\hat{\gamma} \approx 0$, in denen $\frac{\eta_N}{g}$ ungefähr konstant ist, die Beta-Funktion β_g nicht mehr von γ bzw. $\hat{\gamma}$ abhängt:

$$\left. \frac{\partial \beta_g}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0, g=g_0^*} = 0 = \left. \frac{\partial \beta_g}{\partial \hat{\gamma}} \right|_{\hat{\gamma}=0, g=g_\infty^*} .$$

Somit ist neben $V^3 = (0, 1)^T$ der zweite Eigenvektor durch $V^2 \equiv V^{\hat{2}} = (1, 0)^T$ gegeben. Da dieser in die γ - bzw. $\hat{\gamma}$ -Richtung zeigt, können den kritischen Exponenten in eindeutiger Weise Kopplungen zugeordnet werden. Wir nehmen dementsprechend bis auf weiteres die Identifikationen $\Theta_2 \equiv \Theta_\gamma$, $\Theta_{\hat{2}} \equiv \Theta_{\hat{\gamma}}$ und $\Theta_3 \equiv \Theta_g$ vor.

Tabelle 8.5 zeigt die Werte von c_0 , c_∞ , g_0^* , g_∞^* , Θ_γ , $\Theta_{\hat{\gamma}}$ und Θ_g in Abhängigkeit von μ und α_D . Wir beschränken uns dabei wieder auf den scharfen Propertime-Cutoff sowie den Fall $\beta_D = 0$, da sich diese Resultate bezüglich entsprechender Variationen sowohl qualitativ als auch quantitativ als stabil erwiesen haben.

Die ungefähre Gleichheit $c_0 \approx c_\infty$ bzw. $g_0^* \approx g_\infty^*$ impliziert $\Theta_\gamma \approx -\Theta_{\hat{\gamma}}$. Zudem stellt man auch hier für $\mu \geq 2$ eine Systematik fest: Zum einen findet man für alle Regularisierungen und alle Parameterkombinationen einen *positiven* Wert $g_0^* \approx g_\infty^* > 0$, d. h. es liegt stets *Anti-Screening* vor. Darüber hinaus ist Θ_γ für $\alpha_D = 1$ und $\alpha_D = 10$ stets positiv, für $\alpha_D = 0, 1$ hingegen immer negativ. (Für $\Theta_{\hat{\gamma}}$ gilt entsprechend die umgekehrte Aussage.) Des weiteren werden die Übereinstimmungen mit wachsendem μ immer präziser, so daß die ungefähre Gleichheit $c_0 \approx c_\infty$ bzw. $g_0^* \approx g_\infty^*$ für $\mu \rightarrow \infty$ vermutlich exakt wird.

Den Befund der annähernden Übereinstimmung $c_0 \approx c_\infty$ und $g_0^* \approx g_\infty^*$ wollen wir in Abschnitt 8.3.5 zu einer stärkeren Hypothese hinsichtlich der Struktur von β_g und β_γ ausbauen. Zunächst setzen wir diese Beobachtung jedoch zu der Existenz der in Abschnitt 8.3.1 diskutierten Pseudofixpunkte \mathbf{NGFP}'_{\pm} in Beziehung.

Vorher ist allerdings noch eine allgemeine Bemerkung zur Achsenbeschriftung angebracht: Tragen wir in diesem Kapitel bei den Graphen γ -abhängiger Funktionen oder bei Phasenportraits des Flusses an einer Achse die Koordinate γ auf, so liegt bei $\gamma = 0$ die maximale Unterdrückung der Torsion vor. Dies sollte vor allem beachtet werden, wenn die

Scharfer Propertime-Cutoff, $\beta_D = 1$							
$\mu = 1$	c_0	c_∞	g_0^*	g_∞^*	Θ_γ	$\Theta_{\hat{\gamma}}$	Θ_g
$\alpha_D = 1$	8,52	7,67	-0,26	-0,26	0,22	-0,20	2
$\alpha_D = 10$	-29,78	-25,21	4,74	4,42	141,1	-129,9	2
$\alpha_D = 0,1$	10,46	9,39	-0,025	-0,025	0,27	-0,24	2
$\mu = 2$	c_0	c_∞	g_0^*	g_∞^*	Θ_γ	$\Theta_{\hat{\gamma}}$	Θ_g
$\alpha_D = 1$	-0,69	-0,55	2,09	2,03	1,46	-1,12	2
$\alpha_D = 10$	-25,21	-24,34	0,04	0,04	1,05	-1,01	2
$\alpha_D = 0,1$	0,61	0,65	5,51	5,10	-3,39	3,31	2
$\mu = 5$	c_0	c_∞	g_0^*	g_∞^*	Θ_γ	$\Theta_{\hat{\gamma}}$	Θ_g
$\alpha_D = 1$	-0,55	-0,49	2,67	2,59	1,48	-1,27	2
$\alpha_D = 10$	-17,85	-17,55	0,06	0,06	1,05	-1,03	2
$\alpha_D = 0,1$	0,62	0,65	6,75	6,29	-4,19	4,07	2
$\mu = 50$	c_0	c_∞	g_0^*	g_∞^*	Θ_γ	$\Theta_{\hat{\gamma}}$	Θ_g
$\alpha_D = 1$	-1,34	-1,33	1,57	1,56	2,09	-2,08	2
$\alpha_D = 10$	-31,95	-31,94	0,033	0,033	1,063	-1,063	2
$\alpha_D = 0,1$	1,18	1,18	4,97	4,94	-5,85	5,83	2

Tabelle 8.5: Die Eigenschaften von NGFP'_0 und NGFP'_∞ für die Parameterwerte $\mu \in \{1; 2; 5; 50\}$ sowie $\alpha_D \in \{1; 10; 0,1\}$.

Trunkierung um die dritte Kopplung λ erweitert wird, so daß der Fluß in dieser Ebene demjenigen der Einstein-Hilbert-Trunkierung am nächsten kommt, ohne mit ihm identisch zu sein. Tragen wir hingegen $\hat{\gamma}$ auf, so fluktuiert für $\hat{\gamma} = 0$ die Torsion völlig frei, und diese Ebene ist in diesem Sinne von der metrischen Gravitation maximal weit entfernt.

8.3.3 Das Wesen der Pseudofixpunkte NGFP'_\pm

Im folgenden kommen wir noch einmal auf die Natur der in Abschnitt 8.3.1 diskutierten Polstelle bei $\gamma = \pm 1$ zurück. Dazu haben wir in Abbildung 8.7 den Graphen der Funktion $\gamma \mapsto (1 - \gamma^2) \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ für $\gamma = 0$ bis $\gamma = 15$ dargestellt.

Abbildung 8.7 bestätigt die bereits durch Abbildung 8.5 nahegelegte Vermutung, nach der $\gamma \mapsto (1 - \gamma^2) \frac{\beta_\gamma}{(g\gamma)}$ eine reguläre Funktion ähnlich einer Parabel ist. Berücksichtigt man zusätzlich deren Invarianz unter $\gamma \rightarrow -\gamma$, so können wir $\gamma \mapsto \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ durch einen Ansatz der

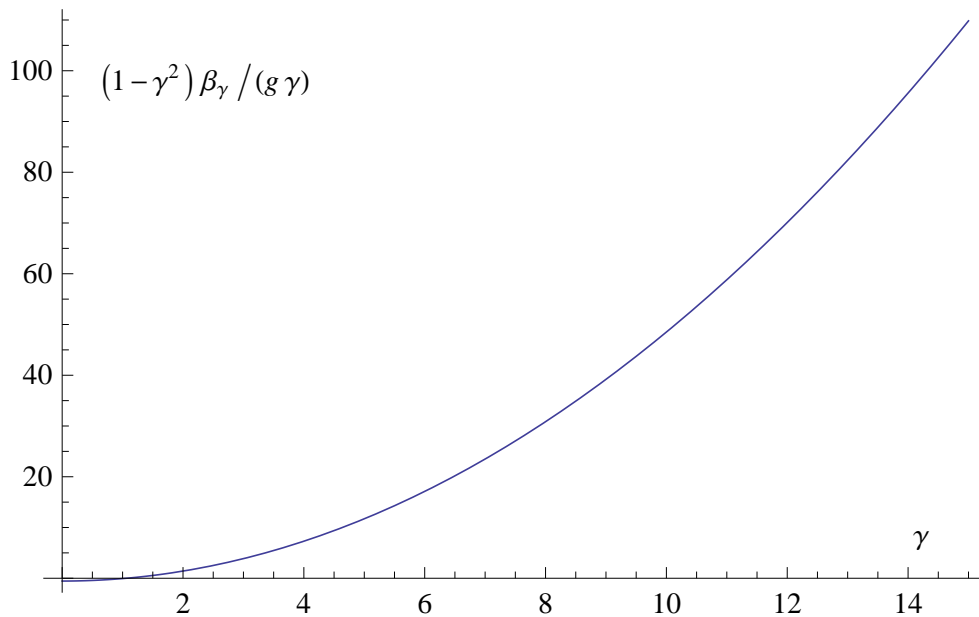


Abbildung 8.7: Die Funktion $\gamma \mapsto (1 - \gamma^2) \frac{\beta_\gamma}{(g\gamma)}$ für den scharfen Propertime-Cutoff und die Parameterwahl $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$ und $\beta_D = 0$.

Form

$$\frac{\beta_\gamma}{g\gamma}(\gamma) = a \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} - b \frac{1}{1 - \gamma^2}.$$

approximieren. Schreiben wir diesen nun auf $\hat{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ um, so erhalten wir

$$\frac{\beta_\gamma}{g\gamma}\left(\frac{1}{\hat{\gamma}}\right) = b \frac{\hat{\gamma}^2}{1 - \hat{\gamma}^2} - a \frac{1}{1 - \hat{\gamma}^2} = -\frac{\beta_{\hat{\gamma}}}{g\hat{\gamma}}(\hat{\gamma})$$

mit $\frac{\beta_\gamma}{\gamma} = -\frac{\beta_{\hat{\gamma}}}{\hat{\gamma}}$. Die von uns beobachtete Relation (8.7) liegt dann exakt vor für $a = b$.

In der γ -Schreibweise gilt weiterhin

$$\frac{\beta_\gamma}{g\gamma}(\gamma) = -\frac{a}{1 - \gamma^2} \left[\frac{b}{a} - \gamma^2 \right],$$

woraus sich die Nullstellen zu

$$\gamma^* = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

ergeben.

Für das Beispiel $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und $\mu = 5$ liest man $b = -(1 - \gamma^2) \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}(\gamma)|_{\gamma=0}$ aus Abbildung 8.5 zu $b = 0,55$ ab. Des Weiteren gilt hier gemäß Tabelle 8.4 für den Pseudofixpunkt $\gamma^* = 1,0612$ und somit $-a = -\frac{b}{\gamma^{*2}} \approx -0,49$. Nehmen wir nun an, die Relation (8.7) sei eine exakte Eigenschaft, so daß man im Rahmen einer korrekten Rechnung $b = a$ und somit $\frac{\beta_\gamma}{g\gamma}(\gamma) = -a$ finden würde, so gälte dann also $-a = -b = c_0$. Der obigen Tabelle entnehmen wir für diese Parameterwahl den Wert $c_0 = -0,55$, so daß tatsächlich eine gute Übereinstimmung mit den erhaltenen Werten für $-a$ und $-b$ vorliegt. Die Graphen der Funktionen $(1 - \gamma^2) \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ und $0,49\gamma^2 - 0,55$ stellen sich für $\gamma \in [0; 1,3]$ sowie für $\gamma_k \in [0; 15]$ als vollkommen deckungsgleich heraus. Auch das bringt die im Rahmen dieser groben Analyse außergewöhnlich gute Übereinstimmung zum Ausdruck. Somit ist bemerkenswert, daß vierte und höhere gerade Potenzen in γ , die ebenfalls mit der Symmetrie der Beta-Funktion dieser Kopplung verträglich wären, offenbar nicht im Polynom des Zählers auftreten.

Der Verdacht liegt nahe, daß das Auftreten der Polstellen und der sich in deren Regime befindlichen Pseudofixpunkte bloß durch die der Berechnung innewohnenden Approximationen hervorgerufen wurde. Gleichzeitig liefert dies einen Beleg für die Güte der Rechnung. Da sich alle Pseudofixpunkte in einer ausgesprochen kleinen Umgebung um $\gamma = \pm 1$ befinden und da $\gamma^{*2} = \frac{b}{a}$ gilt, erhalten wir für dieses Verhältnis in der Tat einen Wert, der mit der Hypothese

$$\frac{\beta_\gamma}{g\gamma} = c_0 \quad \forall \gamma \in [0; \infty) \quad (8.9)$$

verträglich ist. Das impliziert insbesondere, daß die Relation (8.7) exakt gilt.

Für die Wahl $\alpha_D = 0,1$ gilt wie angegeben $b = -\frac{\beta_\gamma}{g\gamma}(0) < 0$ und somit $-a > 0$, was in konsistenter Weise mit den erhaltenen positiven Werten für c_0 für diese Wahl des Eichparameters übereinstimmt. Die anhand des gewählten Beispiels diskutierten Eigenschaften sind mithin vollkommen generischer Natur. Zudem liefert dies auch die gemeinsame Ursache der beiden Befunde, daß zum einen für wachsendes μ die beiden Pseudofixpunkte immer näher an $\gamma = \pm 1$ heranrücken und daß zudem in diesem Fall die näherungsweise Gleichheit (8.7) immer präziser erfüllt wird; offenbar kommt mit wachsendem μ unsere Rechnung einer exakten Behandlung immer näher. Wie im Rahmen der μ -Reskalierung diskutiert sind im Grenzfall $\mu \rightarrow \infty$ gegenüber der $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Komponente des inversen Propagators, die nur

zum freien Anteil beiträgt, alle übrigen Blöcke vernachlässigbar. Die Vielbeinfluktuationen werden entsprechend unterdrückt, so daß dann eine frei fluktuierende $O(4)$ -Eichtheorie auf einer festen Hintergrund-Raumzeit mit Metrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ vorliegt, was ein intuitives Verständnis der physikalischen Bedeutung des Parameters μ erlaubt.

Die Vermutung, daß sich im Rahmen einer exakten Behandlung die Funktion $\frac{\beta_\gamma}{g^\gamma}(\gamma)$ als γ -unabhängig herausstellen sollte, wird in Abschnitt 8.3.5 weiter ausgearbeitet. Zunächst wollen jedoch anhand der zugehörigen Flußdiagramme einen Eindruck von der expliziten Gestalt des (γ, g) -Flusses vermitteln.

8.3.4 Der explizite Fluß des (γ, g) -Systems

Wir stellen nun den von dem Vektorfeld (β_γ, β_g) mit

$$\begin{aligned}\beta_\gamma(g, \gamma) &= 16\pi g \gamma \left[\gamma I_{\mathbb{V}(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - \left(I_{\mathbb{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_{\mathbb{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right) \right] \\ \beta_g(g, \gamma) &= \left[2 + 16\pi \left(I_{\mathbb{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_{\mathbb{V}}^{\text{gh}}(\mu) \right) g \right] g\end{aligned}\tag{8.10}$$

erzeugten Fluß, der die Schar der Lösungen dieses Differentialgleichungssystems für verschiedene Anfangsbedingungen zusammenfaßt, graphisch dar. Wir geben auch hier die für die Wahl $\alpha_{\text{D}} = 1$, $\beta_{\text{D}} = 0$ und $\mu = 5$ sowie den scharfen Propertime-Cutoff erhaltenen Bilder an. Wir stellen dabei den Fluß sowohl in der γ - als auch in der $\hat{\gamma}$ -Karte jeweils stückweise auf dem Intervall $(0; 1)$ und auf dem Intervall $(1; \infty)$ dar. Die resultierenden Phasenportraits sind in den Abbildungen 8.8-8.11 zusammengefaßt.

Für die Wahl $\alpha_{\text{D}} = 1$, $\beta_{\text{D}} = 0$, $\mu = 5$ ist der kritische Exponent Θ_γ positiv, so daß die Trajektorien für kleiner werdendes k aus dem Fixpunkt $(\gamma^* = 0; g_0^*)$ herausfließen und daher ein *UV-attraktiver* Fixpunkt vorliegt. Somit ist hier γ eine *relevante Kopplung*, die neben g zur Dimension von \mathcal{S}_{UV} beiträgt. Die Relation (8.7) impliziert, daß für den Fixpunkt $(\hat{\gamma}^* = 0; g_0^*)$ das Umgekehrte gilt: Die Trajektorien werden für $k \rightarrow 0$ von ihm abgestoßen, so daß er für sie einen *IR-repulsiven* Fixpunkt darstellt. Sein kritischer Exponent $\Theta_{\hat{\gamma}}$ ist negativ, und die Kopplung $\hat{\gamma}$ ist in der vorliegenden Situation *irrelevant*. Sie erhöht die Dimension von \mathcal{S}_{UV} nicht.

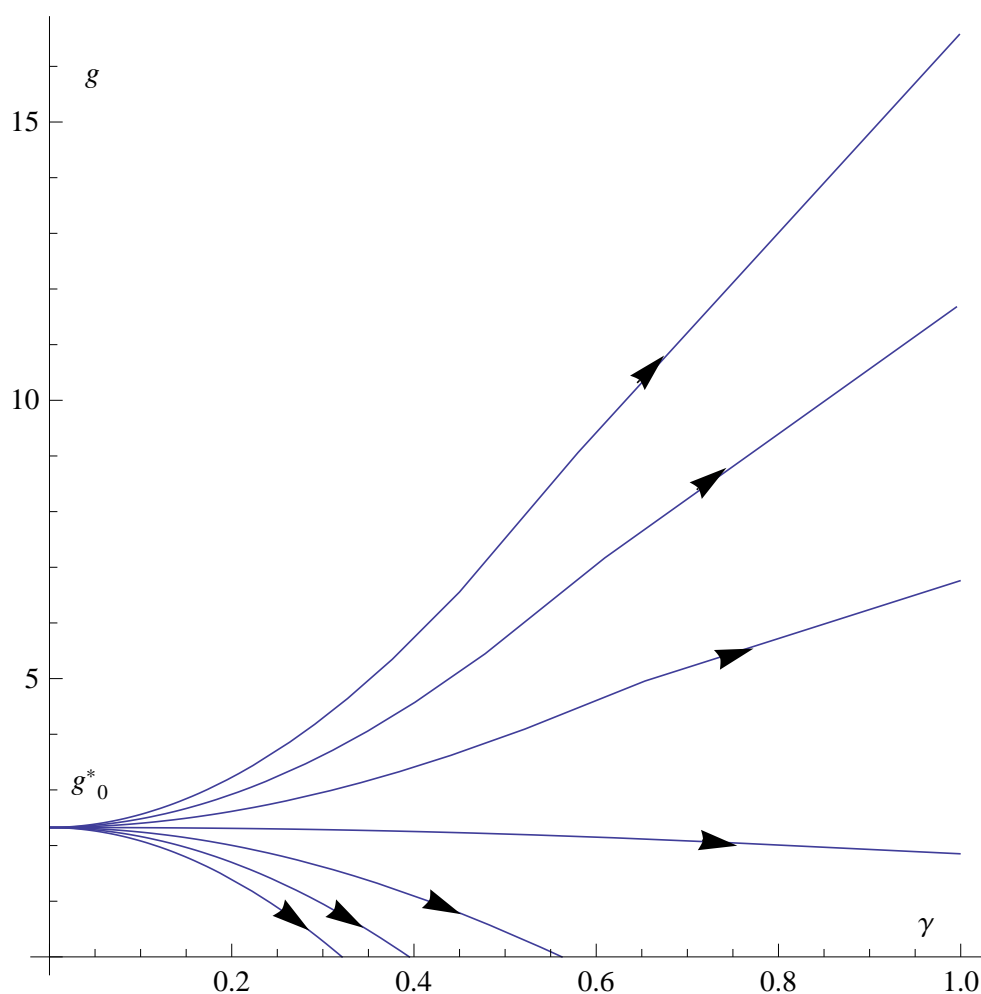


Abbildung 8.8: Der Fluß des (γ, g) -Systems in der γ -Karte auf dem Intervall $[0; 1)$. Die Pfeile zeigen in Richtung kleiner werdender k -Werte.

Allerdings sind diese Aussagen eichabhängig: Für $\alpha_D = 10$ bleibt die Situation unverändert bestehen, doch für $\alpha_D = 0, 1$ kehrt sich mit der Pfeilrichtung auch die Rollenverteilung der beiden Fixpunkte um.

Die beiden Fixpunkte \mathbf{NGFP}'_0 und \mathbf{NGFP}'_∞ befinden sich genau an den beiden Punkten, an denen die γ - und die $\hat{\gamma}$ -Karte dieser eindimensionalen Untermannigfaltigkeit gerade nicht überlappen.

Die Abbildungen 8.8-8.11 zeigen deutlich, wie mittels der Inversion das Teilintervall $(1; \infty)$ in der einen Karte auf das Teilintervall $(0; 1)$ in der anderen kompaktifiziert wird.

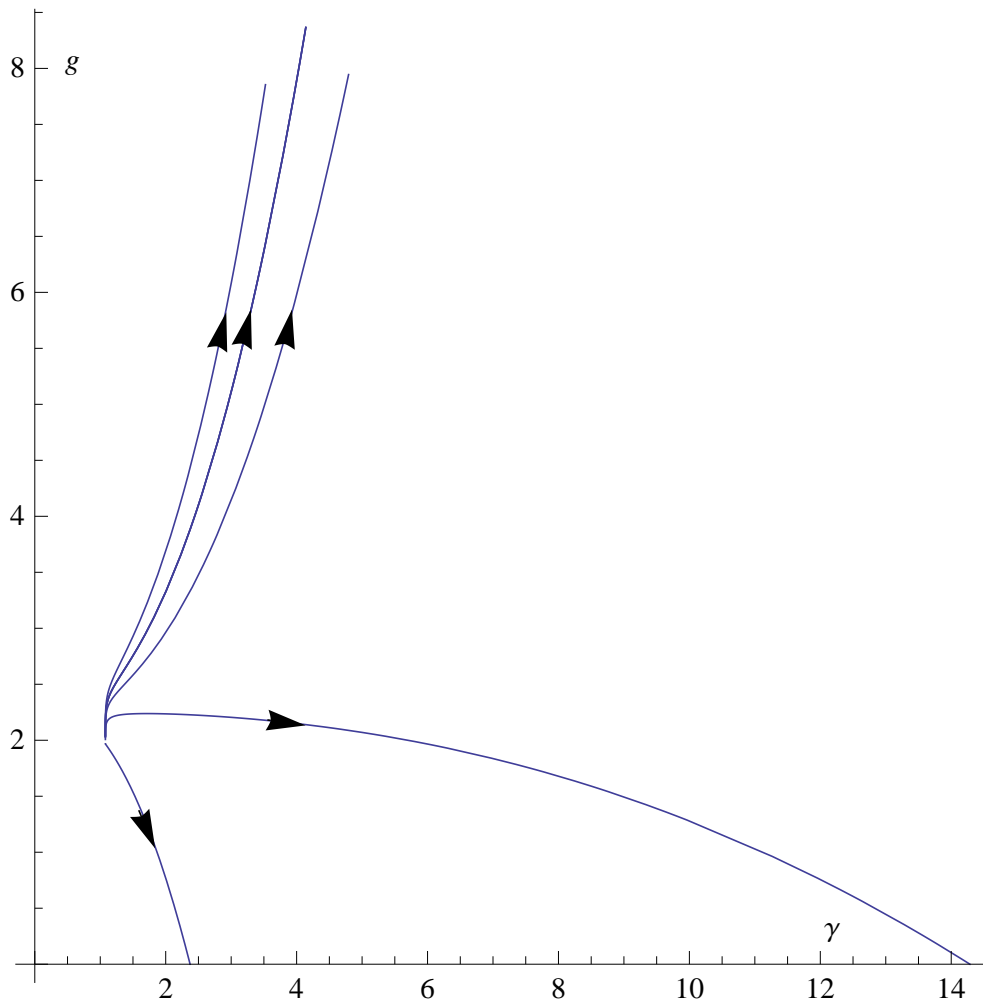


Abbildung 8.9: Der Fluß des (γ, g) -Systems in der γ -Karte auf dem Intervall $(1; \infty)$.

Zudem ist auch der Pseudofixpunkt NGFP'_+ zu erkennen: Im vorliegenden Fall gilt $|\gamma^*| > 1$, und er befindet sich bei $g \approx 2$ am unteren Beginn des kurzen vertikalen Stücks, aus dem die Trajektorien in Abbildung 8.9 herauslaufen. Wir erkennen ihn nach der Inversion als Startpunkt der Trajektorien im Teilraum $\hat{\gamma} < 1$ in Abbildung 8.10 wieder. In dem Teilraum, in dem sich der Pseudofixpunkt nicht befindet, ändert die Beta-Funktion ihr Vorzeichen nicht, so daß die Trajektorien dort wie in den Abbildungen 8.8 und 8.11 dargestellt einfach auf die Linie $\gamma = 1$ bzw. $\hat{\gamma} = 1$ treffen, sofern sie nicht zuvor auf der Fixlinie $g = 0$ enden. Ein entsprechendes Diagramm eines Teilstücks des Flusses auf dem unteren Halbraum $g < 0$ für die gleiche Parameterwahl bestätigte zudem, daß dort die Trajektorien für $k \rightarrow 0$ auf dieser Fixlinie enden.

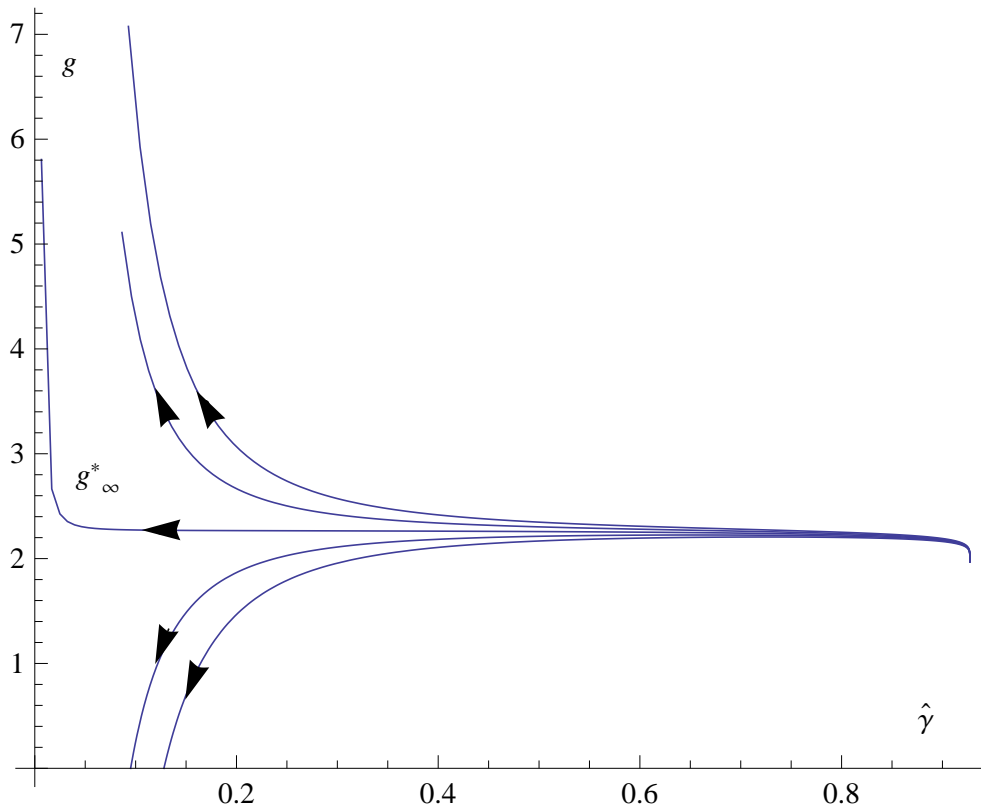


Abbildung 8.10: Der Fluß des (γ, g) -Systems in der $\hat{\gamma}$ -Karte auf dem Intervall $(0; 1)$.

Die Frage nach der physikalischen Relevanz dieser beiden Fixpunkte ist äquivalent zu der Frage, wie die Kopplungen γ und $\hat{\gamma}$ in typische Observablen eingehen und ob durch diese eine Wahl der Koordinaten auf dem Theorienraum gegenüber der anderen ausgezeichnet wird. Hängen insbesondere die Observablen auf symmetrische Art und Weise von den beiden Kopplungen ab, z. B. über die Kombination $\gamma + \frac{1}{\gamma}$, so wären beide Fixpunkte gleichermaßen von Bedeutung.

Zudem wäre die hypothetische Trajektorie, entlang der $\beta_g(g_k, \gamma_k) = 0$ gilt, ein potentieller Kandidat, der diese beiden Fixpunkte miteinander verbinden könnte. Setzen wir die Fixpunktbedingung

$$g_k = -\frac{1}{8\pi} \left[I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma_k, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right]^{-1} \quad (8.11)$$

in die Beta-Funktion β_γ ein, so wäre der Fluß auf der verbleibenden eindimensionalen

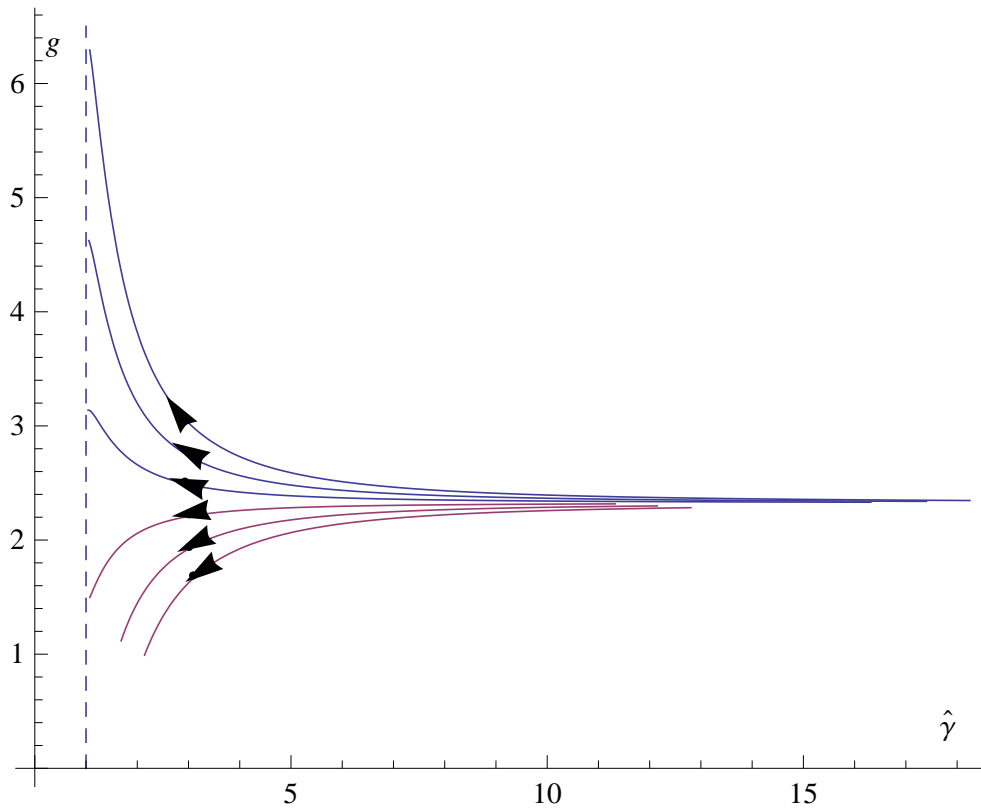


Abbildung 8.11: Der Fluß des (γ, g) -Systems in der $\hat{\gamma}$ -Karte auf dem Intervall $(1; \infty)$.

Untermannigfaltigkeit mit Koordinate γ bzw. $\hat{\gamma}$ durch die Differentialgleichung

$$\partial_t \gamma_k = 2 \left(1 - \frac{\gamma_k I_{\mathbb{V}(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma_k, \mu)}{I_{\mathbb{V}(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma_k, \mu) - 2 I_{\mathbb{V}}^{\text{gh}}(\mu)} \right) \gamma_k$$

gegeben. Wir wären jedoch nicht in der Lage, diese auf dem ganzen Intervall $[0; \infty)$ zu lösen, da Lösungen nicht über den Pol der Beta-Funktion bei $\gamma = 1$ fortgesetzt werden können. Die Berechnung einer solchen Crossover-Trajektorie wäre vermutlich erst im Rahmen einer verbesserten Trunkierung möglich. (Diese Bemerkungen gelten in gleicher Weise für den Halbraum $\gamma < 0$.)

Abschließend bemerken wir, daß die Fixpunkte NGFP'_0 und NGFP'_∞ die beiden bekannten Extremfälle verkörpern: Während bei $(\gamma^* = 0; g_0^*)$ die maximale Unterdrückung der Torsion vorliegt, fluktuiert sie bei $(\hat{\gamma}^* = 0; g_\infty^*)$ vollkommen frei.

Im nächsten Abschnitt wollen wir wie angekündigt die Hypothese (8.9), auf die wir die Beobachtung (8.7) verallgemeinert hatten, erweitern.

8.3.5 Eine Hypothese hinsichtlich der exakten Beta-Funktionen des (γ, g) -Systems

Zunächst definieren wir

$$f^{(+)}(\gamma) := 16\pi \left(I_{V(+)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right)$$

sowie

$$f^{(-)}(\gamma) := 16\pi \gamma I_{V(-)}^{\text{grav}}(0, \gamma, \mu),$$

so daß die Beta-Funktionen die Form

$$\beta_\gamma(g, \gamma) = g \gamma \left(f^{(-)}(\gamma) - f^{(+)}(\gamma) \right) = g \gamma f^{(-)}(\gamma) \left(1 - \frac{f^{(+)}(\gamma)}{f^{(-)}(\gamma)} \right) \quad (8.12a)$$

$$\beta_g(g, \gamma) = \left(2 + f^{(+)}(\gamma) \right) g \quad (8.12b)$$

annehmen. (Da wir nun nur an der Abhängigkeit von den Kopplungen interessiert sind, haben wir in dieser Schreibweise die μ -Abhängigkeit unterdrückt.) Die Funktionen $f^{(+)}$ und $f^{(-)}$ sind beide *gerade in γ* . Sie haben folgenden Ursprung: Die Funktion $f^{(-)}$ enthält alle Beiträge der funktionalen Spur, die wir aufgrund ihres Vorzeichenwechsels als Pseudoskalare identifiziert hatten. Demgegenüber verkörpert $f^{(+)}$ die skalaren Beiträge, und sie enthält somit insbesondere alle Beiträge aus dem Geistsektor. In $f^{(-)}$ werden die pseudoskalaren Beiträge zusätzlich mit γ multipliziert, um den Vorfaktor $\frac{1}{\gamma}$ der Trunkierung, auf deren Grundlage die rechte Seite der Flußgleichung berechnet wurde, zu kompensieren.

Wir haben bereits in Form von (8.9) die Vermutung motiviert, daß die Differenz $f^{(-)} - f^{(+)}$ in der Beta-Funktion von γ im Rahmen einer exakten Rechnung unabhängig von γ sein könnte. Darüber hinaus weist die Funktion $f^{(+)} \equiv \frac{\eta_N}{g}$ ein ähnliches Verhalten auf. Um dies zu verdeutlichen, geben wir in den Abbildungen 8.12, 8.13, 8.14 und 8.15 die Graphen der Funktionen $f^{(+)}$ und $f^{(-)}$ für die Werte $\mu = 1$ und $\mu = 5$ des Massenparameters an;

auch hier beziehen wir uns auf die Parameter $\alpha_D = 1$ und $\beta_D = 0$ sowie auf den scharfen Propertime-Cutoff.

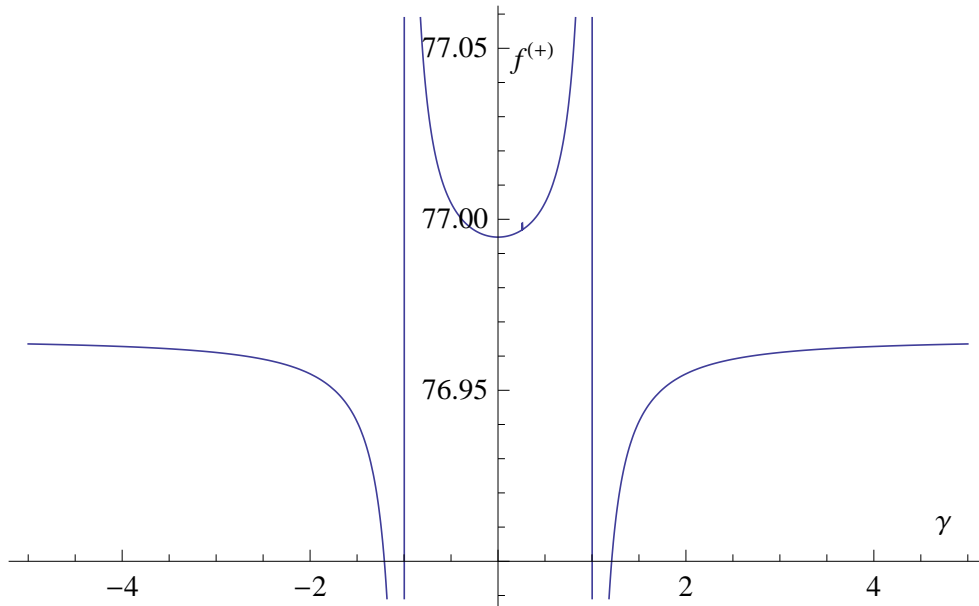


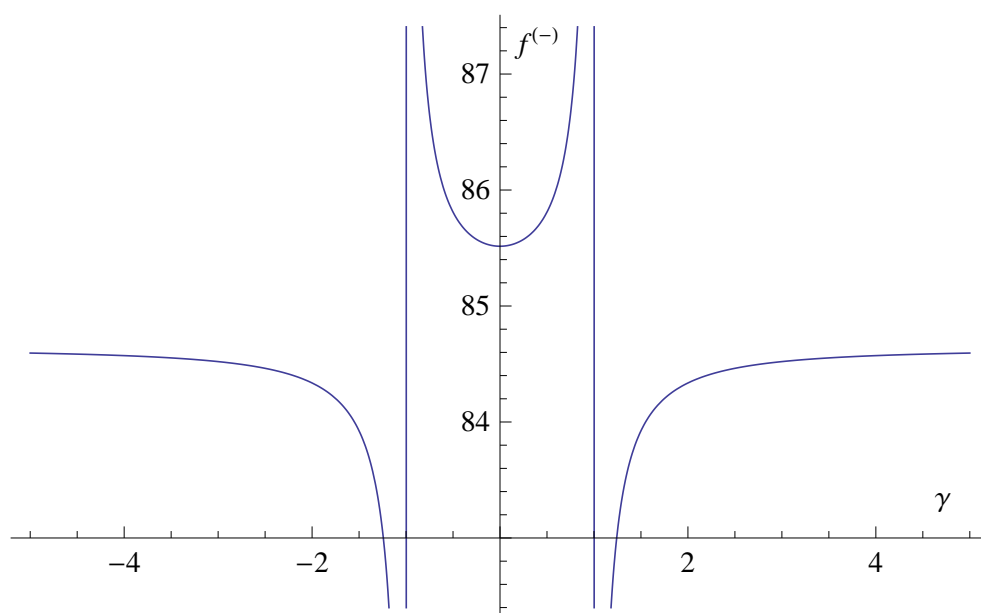
Abbildung 8.12: Die Funktion $f^{(+)}(\gamma)$ für $\mu = 1$. Man beachte den engen, an der Ordinate aufgetragenen Wertebereich.

Außerhalb des Bereichs um die Pole bei $\gamma = \pm 1$ nehmen die Funktionen $f^{(+)}$ und $f^{(-)}$ für $\gamma > 1$ und $\gamma < 1$ jeweils nahezu die gleichen Werte an. Man beachte insbesondere die Tatsache, daß $f^{(+)}(\gamma = 0)$ bzw. $f^{(-)}(\gamma = 0)$ mit den waagrechten Asymptoten $f^{(+)}(\gamma \rightarrow \pm\infty)$ bzw. $f^{(+)}(\gamma \rightarrow \pm\infty)$, die man aus den Abbildungen 8.12, 8.13, 8.14 und 8.15 extrapolieren kann, nahezu übereinstimmen. Dies ist vor allem im Fall $\mu = 1$ angesichts der dort vorliegenden Größenverhältnisse, die man an der Ordinate ablesen kann, bemerkenswert.

Diese (ungefähre) γ -Unabhängigkeit impliziert, daß in den exakten Beta-Funktionen auch $f^{(+)}$ und $f^{(-)}$ *separat* unabhängig von γ sein sollten. Damit nimmt unsere Hypothese die stärkere Form

$$f^{(+)} \equiv b^{(+)} = \text{const} \quad \text{und} \quad f^{(-)} \equiv b^{(-)} = \text{const} \tag{8.13}$$

an, wobei die Konstanten $b^{(+)}$ und $b^{(-)}$ eichparameter- und μ -abhängig sind. Die RG-Gleichungen mit den Beta-Funktionen (8.4a), (8.4b) nehmen damit die folgende sehr einfache Gestalt an:

Abbildung 8.13: Die Funktion $f^{(-)}(\gamma)$ für $\mu = 1$.

$$\partial_t g_k = \beta_g(g_k, \gamma_k) = \left[2 + b^{(+)} g_k \right] g_k \quad (8.14a)$$

$$\partial_t \gamma_k = \beta_\gamma(g_k, \gamma_k) = \left[b^{(-)} - b^{(+)} \right] g_k \gamma_k \quad (8.14b)$$

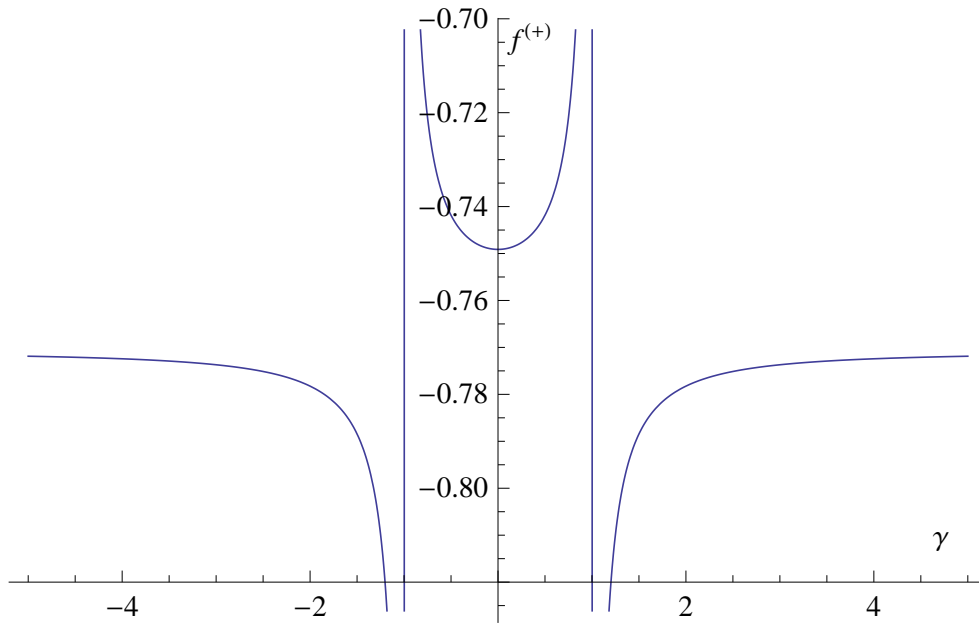
Um die Güte der Hypothese (8.13) bzw. (8.14) zu testen, werten wir im nächsten Unterabschnitt die Funktionen $f^{(+)}(\gamma)$ und $f^{(-)}(\gamma)$ für $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$ explizit numerisch aus, wobei wir die resultierenden Werte mit

$$b_0^{(\pm)} := \lim_{\gamma \rightarrow 0} f^{(\pm)}(\gamma) \quad \text{und} \quad b_\infty^{(\pm)} := \lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} f^{(\pm)}(\gamma)$$

bezeichnen. Unserer Hypothese (8.13) entspricht dann $b_0^{(\pm)} \stackrel{!}{=} b_\infty^{(\pm)} \equiv b^{(\pm)}$.

Verwenden wir wieder die $\hat{\gamma}$ -Karte, um den zweiten Grenzwert zu erfassen, so sind die entsprechenden Beta-Funktionen in diesen beiden Regimen gegeben durch

$$\beta_\gamma(g, \gamma) = \left[b_0^{(-)} - b_0^{(+)} \right] g \gamma, \quad \beta_{\hat{\gamma}}(g, \hat{\gamma}) = - \left[b_\infty^{(-)} - b_\infty^{(+)} \right] g \hat{\gamma}.$$


 Abbildung 8.14: Die Funktion $f^{(+)}(\gamma)$ für $\mu = 5$.

Sie besitzen Nullstellen bei $\gamma^* = 0$ bzw. $\hat{\gamma}^* = 0$. Weiterhin bestimmen wir die zugehörigen g -Fixpunktkoordinaten aus (8.14a) zu

$$g_0^* = -\frac{2}{b_0^{(+)}}, \quad g_\infty^* = -\frac{2}{b_\infty^{(+)}}.$$

Zudem gilt mit (8.14b) für den kritischen Exponenten des Immirzi-Parameters

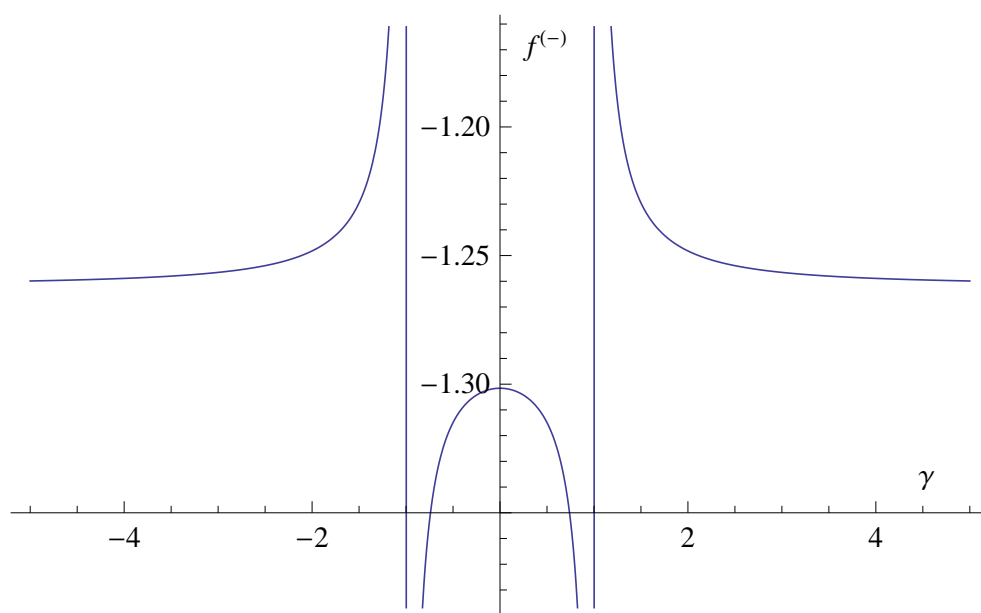
$$\Theta_\gamma = -\left. \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma_k} \right|_{\gamma^*, g_0^*} = -g_0^* (b_0^{(-)} - b_0^{(+)}) = -2 \left[1 - \left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}} \right)_0 \right] \quad (8.15)$$

und analog

$$\Theta_{\hat{\gamma}} = 2 \left[1 - \left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}} \right)_\infty \right] \quad (8.16)$$

sowie $\Theta_g = 2$. Dabei haben wir für die Quotienten die Schreibweise

$$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}} \right)_0 := \frac{b_0^{(-)}}{b_0^{(+)}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}} \right)_\infty := \frac{b_\infty^{(-)}}{b_\infty^{(+)}}$$

Abbildung 8.15: Die Funktion $f^{(-)}(\gamma)$ für $\mu = 5$.

eingeführt.

Integration der hypothetischen Flußgleichungen (8.14) liefert

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{2 A k^2}{1 - a b^{(+)} k^2} \\ \gamma_k &= B (1 - A b^{(+)} k^2)^{1 - \frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}} \end{aligned} \quad (8.17)$$

mit Integrationskonstanten A und B .

Offensichtlich ist das Verhältnis $\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}$ von zentraler Bedeutung. Insbesondere läuft γ_k nicht, wenn dieses gleich eins ist. (In diesem Fall sind die skalaren und die pseudoskalaren Beiträge zur Spur gerade gleich.)

8.3.6 Test der Hypothese bezüglich der exakten Form von β_g und β_γ

Wir haben die Quotienten $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$ und $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$ für verschiedene Eich- und Massenparameter berechnet, wobei wir $\beta_D = 0$ gesetzt und den scharfen Propertime-Cutoff verwandt

Scharfer Propertime-Cutoff, $\beta_D = 0$				
		$\alpha_D = 1$	$\alpha_D = 10$	$\alpha_D = 0, 1$
$\mu = 1$	$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$	1,11	71,54	1,13
	$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$	1,10	65,94	1,12
$\mu = 5$	$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$	1,74	1,53	-1,10
	$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$	1,64	1,52	-1,03
$\mu = 50$	$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$	2,05	1,53	-1,92
	$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$	2,04	1,53	-1,91

Tabelle 8.6: Die Quotienten $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$ und $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$ für verschiedene Werte des μ - und des Eichparameters.

haben. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.6 zusammengefaßt.

Hier ist für festen μ - und Eichparameter der Grad der Übereinstimmung von $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$ und $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$ ein Maß für die Güte der Hypothese. Zudem liegen mit Ausnahme der Kombination $\mu = 1$ und $\alpha_D = 10$ die erhaltenen Verhältnisse zumindest betragsmäßig in der Größenordnung von eins. Dies ist insbesondere in Anbetracht der Tatsache bemerkenswert, daß sich für die einzelnen Fälle Zähler und Nenner separat um mehrere Größenordnungen unterscheiden, was man auch den Abbildungen 8.12 und 8.13 bzw. 8.14 und 8.15 entnehmen kann. Zudem hatte der Fall $\mu = 1$ bereits in den vorangegangenen Betrachtungen einen Sonderstatus offenbart.

Die beiden anderen μ -Werte $\mu = 5$ und $\mu = 50$ zeigen das bereits aus Abschnitt 8.3.2 vertraute Verhalten: Hier stimmen ebenfalls in jedem der betrachteten Fälle die Quotienten für $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$ nahezu überein. Doch analog zum Vorzeichen von c_0 bzw. c_∞ weicht auch hier das für das Verhältnis erhaltene Vorzeichen für $\alpha_D = 0, 1$ von demjenigen für $\alpha_D = 1$ und $\alpha_D = 10$ ab.

8.3.7 Zur Eichparameterabhängigkeit

Bemerkenswert ist die Eichabhängigkeit der Ergebnisse, und im Hinblick auf die Frage, die wir stellen, ist unsere Eichung in der Tat schlecht gewählt. Fragen wir nämlich in der (γ, g) -Trunkierung nach dem Verhältnis von skalaren zu pseudoskalaren Beiträgen zu der gesamten Spur, so bricht unsere Eichung eine womöglich vorhandene Symmetrie,

da die resultierenden Eichfixierungs- und Geistbeiträge ausschließlich Skalare sind; sie ist somit nicht vorurteilsfrei. Das Laufen von γ könnte allein durch die gewählte Eichfixierung induziert sein, die skalare Beiträge vor Pseudoskalaren auszeichnet; dies könnte auch die mitunter starke Eichabhängigkeit unserer Resultate erklären.

Um die Eichinvarianzen auf eine Art und Weise zu fixieren, die diese Symmetrie der Trunkierung respektiert, wäre beispielsweise im $O(4)$ -Sektor eine Ersetzung der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ab} &\rightarrow \left(\mathbb{1} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right) \mathcal{G}^{ab} \\ \Rightarrow \quad \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab} &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{\gamma_k^2} \right) \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab} - \frac{2}{\gamma_k} \mathcal{G}^{ab} \star \mathcal{G}_{ab} \end{aligned} \quad (8.18)$$

denkbar, so daß die resultierende Geistwirkung die Struktur der Trunkierung widerspiegelt. Um diese und den Eichfixierungsbeitrag als Differenzen eines Skalars und eines Pseudoskalars ohne relative Gewichtung zu erhalten, erscheint es zunächst ratsam, in diesem Ansatz den Immirzi-Parameter γ_k durch 1 zu ersetzen. Dann würde allerdings ein Projektor auf die ursprüngliche Eichbedingung wirken, was naturgemäß auf Nullmoden führt, die jedoch durch die Eichbedingung gerade fixiert werden sollen. Da es sich bei den beiden Monomen der Trunkierung nicht um Quadrate von Tensoren handelt, ist nicht offensichtlich, wie ein Eichfixierungsbeitrag die Struktur dieser Trunkierung widerspiegeln könnte. Darüber hinaus hätte der obige Ansatz eine γ_k -abhängige Geistwirkung zur Folge. Zudem ist nicht offensichtlich, wie eine analoge Diffeomorphismeichbedingung, die auf einen Eichfixierungsterm und eine Geistwirkung mit entsprechenden Eigenschaften führt, aussehen sollte.

Um die durch die Eichbedingung möglicherweise induzierte Symmetriebrechung weitestgehend zu reduzieren, kann man die verwendete Eichfixierung derart abändern, daß in ihr sowohl die Eichfixierungs- als auch die Geistbeiträge unterdrückt werden. Dazu wird der Eichparameter gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha_D}} \mathcal{F}_\mu \\ \mathcal{G}^{ab} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} \mathcal{G}^{ab} \end{aligned}$$

in die Eichbedingungen hineindefiniert, so daß eine Variation der Eichparameter nun einer

Scharfer Propertime-Cutoff, $\beta_D = 0$ und redefinierte Eichbedingung, $\alpha_D = 1000 = f$			
	$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 50$
$\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0 \equiv \left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$	1,059	1,417	1,430

Tabelle 8.7: Die Werte der Quotienten $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$ und $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$ für die redefinierte Eichbedingung.

Variation der Eichbedingungen entspricht. Der eigentliche Eichparameter als Maß für die Breite der Gauß-Verteilung, mit der die Eichbedingung auf den Eichorbits implementiert wird, ist hingegen konstant durch eins gegeben. Wählen wir nun α_D und f sehr groß, so werden die Eichfixierungs- und Geistbeiträge entsprechend unterdrückt.

Bislang war der inverse Geistpropagator gewissermaßen zufällig ein hermitescher Operator, was insbesondere einen reellen, symmetrischen Matrixanteil in der verallgemeinerten Impulsdarstellung zur Folge hatte; dies gilt für die modifizierten Eichbedingungen nicht mehr. Wir hatten uns die ursprünglich gültigen algebraischen Eigenschaften im Zuge der Spurberechnung zunutze gemacht, so daß wir jetzt einen Fehler begehen, wenn wir die bislang verwandten Formeln unmodifiziert auf die neuen Eichbedingungen anwenden. Für große Eichparameter wird jedoch auch dieser Fehler unterdrückt. Allerdings sind große Eichparameter maximal weit von den Fixpunktwerten $\alpha_D = 0$ und $f = 0$ entfernt. Zudem werden einzelne Moden fast singulär, da die durch den Eichfixierungsterm gegebene Gauß-Verteilung in diesem Fall sehr breit wird und kaum noch unterdrückende Wirkung besitzt.

Wir haben eine solche Analyse dennoch mit $\alpha_D = 1000 = f$ durchgeführt und stellen fest, daß für $\mu = 1$, $\mu = 5$ und $\mu = 50$ die für $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$ und $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$ erhaltenen Werte stets übereinstimmen. Wir geben diese in Tabelle 8.7 an.

Dabei ist zu bemerken, daß im Falle $\mu = 1$ Zähler und Nenner jeweils von der Größenordnung 10^{18} sind, so daß der angegebene Wert nicht allzu glaubwürdig erscheint. In einem nächsten Schritt könnte man die redefinierte Diffeomorphismus-Eichbedingung beibehalten und die Lorentz-Eichbedingung in der ursprünglichen Form ohne zusätzlichen Vorfaktor durch einen Ansatz der Art (8.18) ersetzen. Eine in dem geschilderten Sinne „gute“ Eichbedingung würde sich über eine entsprechend reduzierte Eichabhängigkeit der Ergebnisse offenbaren.

Sollte man mit einer „guten“ Eichbedingung in der Tat eine *verschwindende* Beta-Funktion für den Immirzi-Parameter finden, so würde dies bedeuten, daß das Monom

$$\frac{1}{G_k} \int d^4x \bar{e} \left(F_{\mu\nu}^{ab} - \frac{1}{\gamma_k} \star F_{\mu\nu}^{ab} \right) e_a^\mu e_b^\nu$$

nur als Ganzes durch die Newton-Konstante im Vorfaktor renormiert wird.

Die eigentliche dimensionslose Kopplung vor dem Immirzi-Term ist durch das Produkt $g_k \gamma_k$ gegeben, dessen Beta-Funktion unter Annahme unserer Hypothese die Form

$$\begin{aligned} \beta_{g\gamma} &= (\partial_t g_k) \gamma_k + g_k \partial_t \gamma_k \\ &= (2 + b^{(+)} g_k) g_k \gamma_k + (g_k)^2 \gamma_k [b^{(-)} - b^{(+)}] \\ &= [2 + b^{(-)} g_k] g_k \gamma_k \end{aligned}$$

annehmen würde. Für $b^{(+)} = b^{(-)}$ gälte dann

$$\beta_{g\gamma}(g, \gamma) = \gamma \beta_g(g, \gamma).$$

Dies entspricht gerade der Transformation der Komponente eines Vektorfeldes, wenn die zugehörige Koordinate (g) mit einem konstanten Faktor (γ) multipliziert wird. Diese Situation wäre derjenigen in dreidimensionaler, topologisch massiver Gravitation vergleichbar, bei der man zu der Einstein-Hilbert-Wirkung den dem Immirzi-Term verwandten Chern-Simons-Term hinzufügt. Im Zuge einer RG-Analyse wurde festgestellt, daß die Beta-Funktion der assoziierten Kopplung ebenfalls verschwindet [81].

8.4 Das (λ, γ, g) -System

8.4.1 Die Geometrie des (λ, γ, g) -Flusses

Wir wenden uns nun der vollen dreidimensionalen Trunkierung zu, wobei sich deren Analyse im wesentlichen auf zwei Kernpunkte konzentriert: Zum einen soll sie die Frage beantworten, inwiefern sich Hypothese (8.14) bezüglich der Gestalt der exakten Beta-Funktion des Immirzi-Parameters auf das dreidimensionale System verallgemeinern läßt. Sollte darüber hinaus die Vermutung zutreffen, daß man unter Verwendung einer „guten“ Eichung im Rahmen der zweidimensionalen Trunkierung eine verschwindende Beta-Funktion für den Immirzi-Parameter findet, so wird die dafür verantwortliche Symmetrie im Fall mit kosmologischer Konstante bereits auf dem Niveau der Trunkierung gebrochen: Der kosmologische Term ist ein Skalar. Dieser sollte für $\lambda \neq 0$ ein Weglaufen des Verhältnisses $\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}$ aus dem Bereich der Größenordnung 1 induzieren. Zudem sollten die Ergebnisse der besseren dreidimensionalen Trunkierung eichunabhängiger sein, da die Eichbedingung sowie die aus ihr resultierende Geistwirkung hier keine Symmetrie der Trunkierung brechen. Insbesondere trägt die Kopplung λ wie der Lorentz-Eichparameter f nur zum freien Anteil bei. Dort treten λ und f in der Regel gemeinsam mit α_D auf, da alle diese drei Größen mit Skalaren in der Trunkierung assoziiert sind, die jeweils nur Beiträge zum $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Block von $\Gamma_k^{(2)}$ liefern.

Zur Klärung des ersten Punktes haben wir die Funktionen $\gamma \mapsto \frac{\eta_N}{g}$ und $\gamma \mapsto \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ jeweils für die Grenzwerte $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$ in Abhängigkeit von λ betrachtet, wobei wir hier sowie bei allen übrigen Analysen des (λ, γ, g) -Systems $\beta_D = 0$ gesetzt und den scharfen Propertime-Cutoff verwandt haben. Für die Parameterkombinationen $\mu = 1; 5; 50$ und $\alpha_D = 1; 10; 0,1$ haben wir die zugehörigen Graphen erstellt. In jedem dieser Fälle stimmen die Graphen der beiden Funktionen für die Grenzfälle $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$ in bemerkenswertem Maße miteinander überein. Zwar weisen sie in weiten Bereichen eine starke λ -Abhängigkeit auf, diese wird jedoch in den meisten Fällen für negative λ schwach.

In den Graphen für $\mu = 1$ traten auffällig viele Polstellen auf, so daß dieser Parameterwert auch hier seinen Status als Grenzfall bestätigt. Mit wachsendem μ wurden die Graphen regulärer, und für $\mu = 50$ sind sie nahezu deckungsgleich, was die von uns bereits zuvor beobachtete Tendenz bestätigt. Wir geben in den Abbildungen 8.16 und 8.17 die Graphen der beiden Funktionen für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 1$ an, wobei wir die beiden Grenzfälle

jeweils in einer Abbildung zusammenfassen; die gestrichelte Linie stellt den Fall $\gamma \rightarrow \infty$ dar.

Unsere in Abschnitt 8.3.5 formulierte Hypothese fußte auf der Feststellung, daß in diesen Graphen die Funktionswerte der Funktionen $\lambda \mapsto \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\eta_N}{g}$ und $\lambda \mapsto \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\eta_N}{g}$ bzw. die Funktionswerte der Funktionen $\lambda \mapsto \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ und $\lambda \mapsto \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ bei $\lambda = 0$ jeweils nahezu übereinstimmen. Diese Beobachtung überträgt sich nun offenbar auf den gesamten dargestellten λ -Bereich. Dabei treten für $\lambda > 0$ diskontinuierliche Sprünge und Polstellen auf. In dem physikalisch relevanten Halbraum $\lambda \leq 0$, der den NGFP enthält, verlaufen die Funktionen vollkommen regulär.

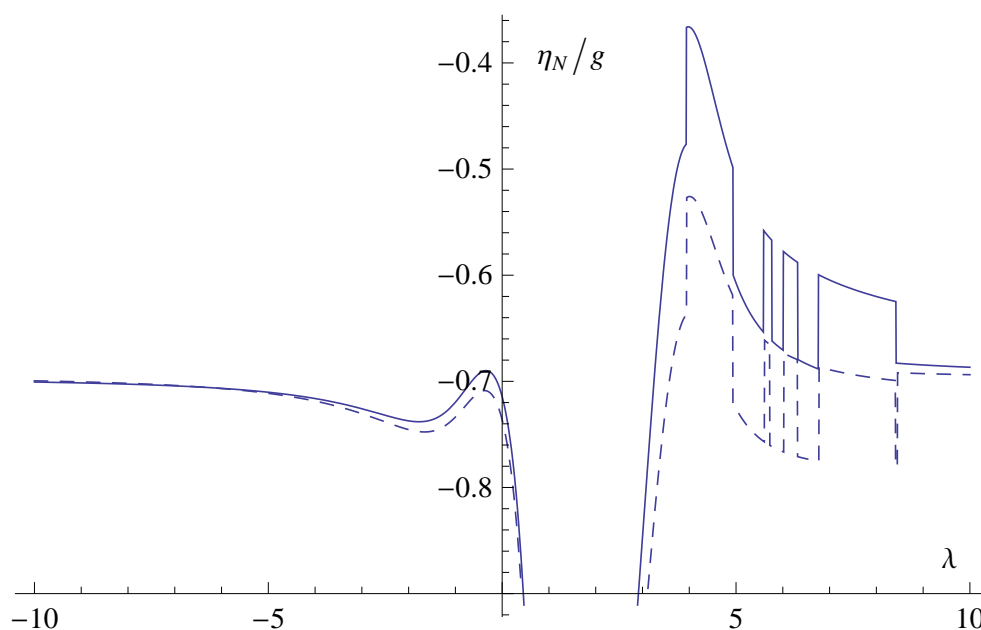


Abbildung 8.16: Die Funktion $\lambda \mapsto \frac{\eta_N}{g}$ für $\gamma \rightarrow 0$ (durchgezogene Linie) und $\gamma \rightarrow \infty$ (gestrichelte Linie) für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 1$. Der Fixpunkt tritt in dem Halbraum $\lambda \leq 0$ auf.

Unsere ursprüngliche Hypothese ist also dahingehend zu erweitern, daß im Rahmen der dreidimensionalen Trunkierung die Konstanten $b^{(+)}$ und $b^{(-)}$ durch λ -abhängige Funktionen $B^{(+)}(\lambda)$ und $B^{(-)}(\lambda)$ zu ersetzen sind. Das Flußgleichungssystem nimmt damit folgende Gestalt an:

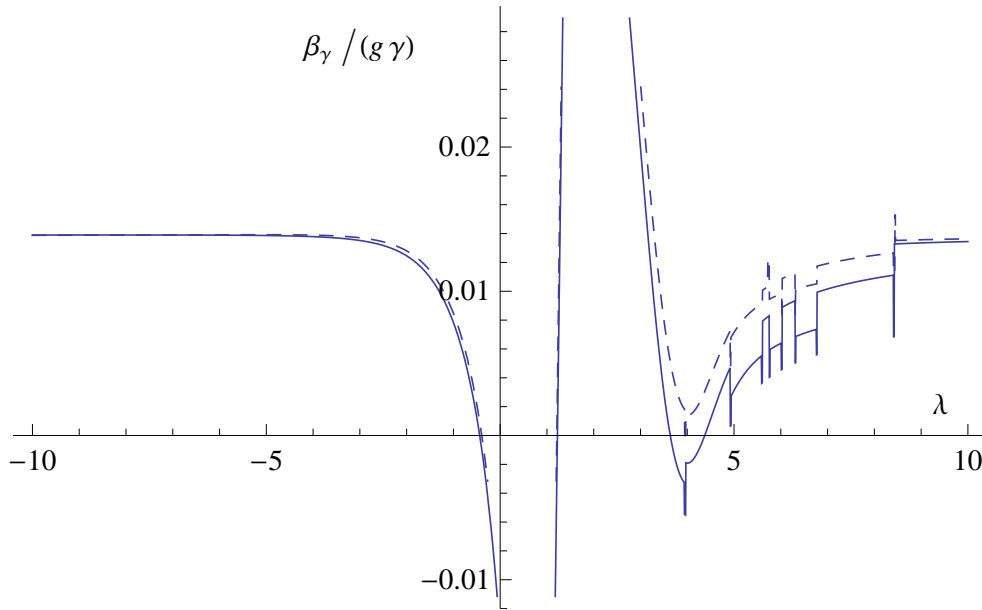


Abbildung 8.17: Die Funktion $\lambda \mapsto \frac{\beta_\gamma}{g\gamma}$ für $\gamma \rightarrow 0$ (durchgezogene Linie) und $\gamma \rightarrow \infty$ (gestrichelte Linie) für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 1$.

$$\partial_t g_k = \beta_g(g_k, \gamma_k \lambda_k) = \left(2 + B^{(+)}(\lambda_k) g_k\right) g_k \quad (8.19a)$$

$$\partial_t \gamma_k = \beta_\gamma(g_k, \gamma_k, \lambda_k) = \left(B^{(-)}(\lambda_k) - B^{(+)}(\lambda_k)\right) g_k \gamma_k \quad (8.19b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(g_k, \gamma_k, \lambda_k) = & 8\pi g_k \left(I_F^{\text{grav}}(\lambda_k, \mu) + I_N^{\text{grav}}(\gamma_k) - 2 I_F^{\text{gh}}(\mu) \right) \\ & + g_k \lambda_k B^{(+)}(\lambda_k) - 2 \lambda_k \end{aligned} \quad (8.19c)$$

Darin haben wir die mutmaßlich γ -unabhängigen Funktionen auf der rechten Seite von (7.76) durch $B^{(+)}(\lambda)$ bzw. $B^{(-)}(\lambda)$ ersetzt gemäß

$$16\pi \left(I_{V^{(+)}}^{\text{grav}}(\lambda, \gamma, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \rightarrow B^{(+)}(\lambda), \quad (8.20)$$

$$16\pi \gamma I_{V^{(-)}}^{\text{grav}}(\lambda, \gamma, \mu) \rightarrow B^{(-)}(\lambda) \quad (8.21)$$

und anschließend die μ -Abhängigkeit unterdrückt.

Das Laufen des Immirzi-Parameters wurde im Rahmen der (γ, g) -Trunkierung im wesentlichen durch das Verhältnis $\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}$ bestimmt, das gemäß unserer Hypothese konstant und lediglich von den Eichparametern und μ abhängen sollte. Auf Grundlage unserer Analyse konnten wir nicht ausschließen, daß diese Konstante gleich 1 ist, was $\beta_\gamma(g, \gamma) = 0$ implizieren würde. Ein vermeintliches Laufen von γ könnte ein Artefakt der Eichfixierung darstellen, die eine womöglich vorhandene Symmetrie bricht. Demgegenüber ist die Symmetrie im dreidimensionalen Fall mit den Kopplungen (λ, γ, g) bereits explizit auf dem Niveau der Trunkierung gebrochen. Für $\lambda \neq 0$ sollte der Quotient $\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}(\lambda)$ merklich von 1 verschieden und im Hinblick auf Variationen der Eichparameter robuster sein.

Dies wollen wir nun auf Grundlage des Flußgleichungssystems (8.19) untersuchen. Dazu definieren wir für die beiden γ -Grenzfälle die Funktionen

$$B_0^{(+)}(\lambda) := 16 \pi \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(I_{V^{(+)}}^{\text{grav}}(\lambda, \gamma, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right), \quad (8.22)$$

$$B_0^{(-)}(\lambda) := 16 \pi \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\gamma I_{V^{(-)}}^{\text{grav}}(\lambda, \gamma, \mu) \right) \quad (8.23)$$

sowie

$$\begin{aligned} B_\infty^{(+)}(\lambda) &:= 16 \pi \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(I_{V^{(+)}}^{\text{grav}}(\lambda, \gamma, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right) \\ &\equiv 16 \pi \lim_{\hat{\gamma} \rightarrow 0} \left(I_{V^{(+)}}^{\text{grav}}(\lambda, \hat{\gamma}^{-1}, \mu) - 2 I_V^{\text{gh}}(\mu) \right), \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} B_\infty^{(-)}(\lambda) &:= 16 \pi \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\gamma I_{V^{(-)}}^{\text{grav}}(\lambda, \gamma, \mu) \right) \\ &\equiv 16 \pi \lim_{\hat{\gamma} \rightarrow 0} \left(\hat{\gamma}^{-1} I_{V^{(+)}}^{\text{grav}}(\lambda, \hat{\gamma}^{-1}, \mu) \right). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Im Sinne unserer Hypothese sollte

$$B_0^{(\pm)}(\lambda) \stackrel{!}{=} B_\infty^{(\pm)}(\lambda) \equiv B^{(\pm)}(\lambda) \quad (8.26)$$

gelten. Darüber hinaus führen wir für die Verhältnisse die Notation

$$\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}} \right)_0(\lambda) \equiv \frac{B_0^{(-)}(\lambda)}{B_0^{(+)}(\lambda)} \quad \text{und} \quad \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}} \right)_\infty(\lambda) \equiv \frac{B_\infty^{(-)}(\lambda)}{B_\infty^{(+)}(\lambda)}$$

ein.

Die Beziehung zu der im Rahmen der (γ, g) -Trunkierung eingeführten Notation ist durch $B_0^{(\pm)}(0) \equiv b_0^{(\pm)}$, $B_\infty^{(\pm)}(0) \equiv b_\infty^{(\pm)}$ sowie $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0(0) \equiv \left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_0$ und $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_\infty(0) \equiv \left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_\infty$ gegeben.

Wir betrachten nun die Graphen der Funktionen $\lambda \mapsto \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0(\lambda)$ und $\lambda \mapsto \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_\infty(\lambda)$ und beschränken uns dabei auf den Fall $\mu = 5$ sowie $\alpha_D = 1; 10; 0, 1$. Wir geben in den Abbildungen 8.18, 8.19 und 8.20 jeweils nur eine der Funktionen an, $\lambda \mapsto \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0(\lambda)$. Der Verlauf der anderen, $\lambda \mapsto \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_\infty(\lambda)$, stellt sich als nahezu identisch heraus, was Hypothese (8.26) bestätigt. Auch für die dreidimensionale Trunkierung ist zu erwarten, daß sich ab $\mu \gtrsim 2$ eine Systematik einstellt, so daß die Wahl $\mu = 5$ repräsentativ sein sollte. Für $\mu = 1$ hingegen treten die angesprochenen Pole auf.

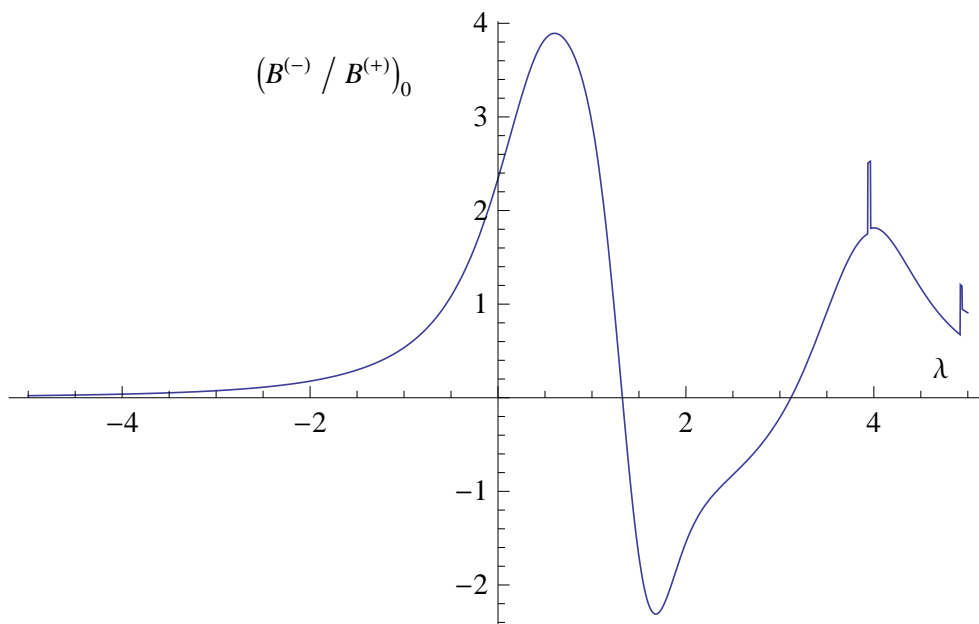


Abbildung 8.18: Die Funktion $\lambda \mapsto \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0(\lambda)$ für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 1$.

Man erkennt an den Abbildungen 8.18, 8.19 und 8.20, daß der Quotient $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0$ von den bereits bestimmten Werten für $\lambda = 0$ wegläuft und sein Betrag für negative λ sehr schnell klein wird.

Diese Beobachtung ist im Hinblick auf die Fixpunktstruktur, der wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden wollen, von Interesse.

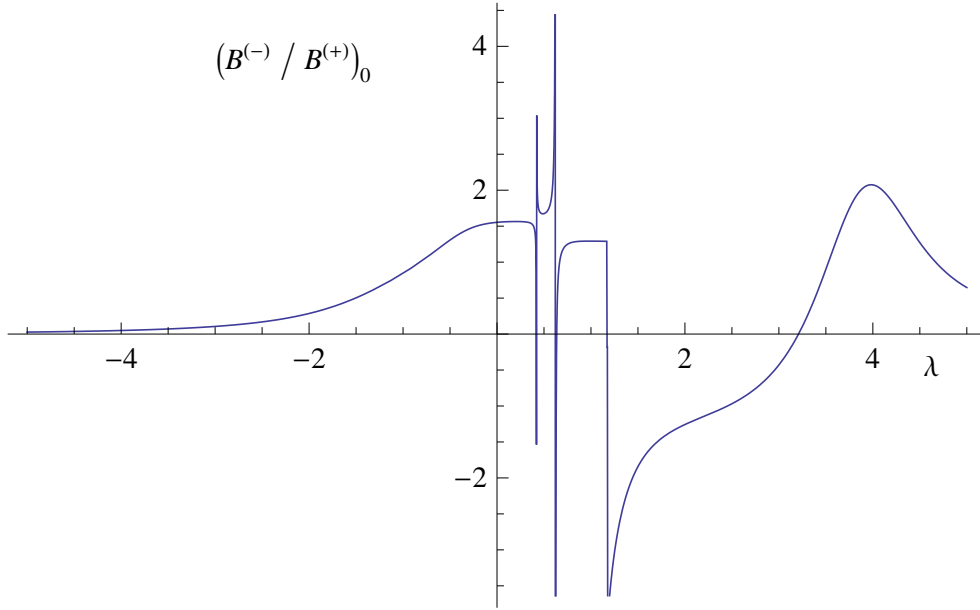


Abbildung 8.19: Die Funktion $\lambda \mapsto \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0(\lambda)$ für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 10$. Auch hier ist der physikalisch relevante Bereich durch $\lambda \leq 0$ gegeben.

8.4.2 Die physikalischen Fixpunkte NGFP_0 und NGFP_∞

Für die beiden γ -Grenzfälle nimmt die Beta-Funktion β_γ aus (8.19b) die Form

$$\beta_\gamma(\lambda, \gamma, g) = \left(B_0^{(-)}(\lambda) - B_0^{(+)}(\lambda)\right)g\gamma$$

bzw.

$$\beta_{\hat{\gamma}}(\lambda, \hat{\gamma}, g) = -\left(B_\infty^{(-)}(\lambda) - B_\infty^{(+)}(\lambda)\right)g\hat{\gamma}$$

an. Sie besitzt somit wiederum die Nullstellen $\gamma^* = 0$ und $\hat{\gamma}^* = 0$. Die zugehörigen λ - und g -Koordinaten des Fixpunktes bestimmen wir, indem wir λ_0^* und λ_∞^* aus

$$-\frac{16\pi\left(I_F^{\text{grav}}(\lambda_0^*, \mu) + I_N^{\text{grav}}(\gamma^*) - 2I_F^{\text{gh}}(\mu)\right)}{B_0^{(+)}(\lambda_0^*)} - 4\lambda_0^* = 0$$

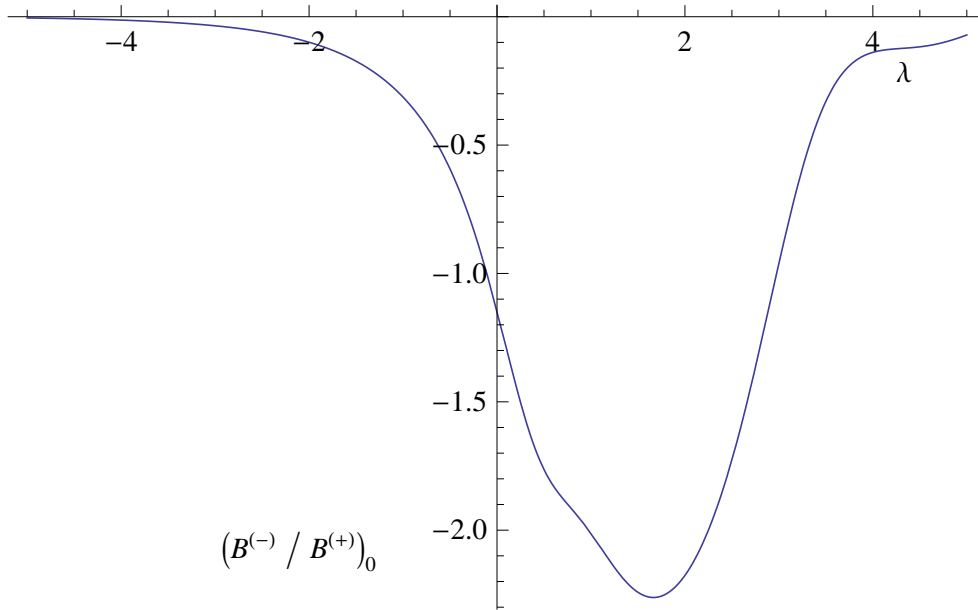


Abbildung 8.20: Die Funktion $\lambda \mapsto \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0(\lambda)$ für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 0, 1$.

und

$$-\frac{16\pi \left(I_F^{\text{grav}}(\lambda_\infty^*, \mu) + I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}((\hat{\gamma}^*)^{-1}) - 2 I_F^{\text{gh}}(\mu) \right)}{B_\infty^{(+)}(\lambda_\infty^*)} - 4\lambda_\infty^* = 0$$

bestimmen und diese dann in

$$g_0^* = -\frac{2}{B_0^{(+)}(\lambda_0^*)} \quad \text{und} \quad g_\infty^* = -\frac{2}{B_\infty^{(+)}(\lambda_\infty^*)}$$

einsetzen.

Wir bezeichnen diese Fixpunkte mit $\mathbf{NGFP}_0 \equiv (\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*)$ und $\mathbf{NGFP}_\infty \equiv (\lambda_\infty^*, \hat{\gamma}^*, g_\infty^*)$.

Neben diesen Fixpunkten weist auch das Flußgleichungssystem in seiner ursprünglich abgeleiteten Form (7.76) ohne Rückgriff auf Hypothese (8.19) bereits die $(\lambda = 0, g = 0)$ -Fixlinie und somit insbesondere einen Gaußschen Fixpunkt auf. Kandidaten für physikalische Fixpunkte sollten vom GFP nicht durch Polstellen einer Beta-Funktion getrennt sein, d. h. sie sollten insbesondere in einem Bereich liegen, der in den Abbildungen 8.16 und 8.17 regulär mit der $(\lambda = 0)$ -Achse verbunden ist. Zudem erwarten wir, daß die λ -

Scharfer Propertime-Cutoff, $\mu = 5, \beta_D = 0$							
	λ_0^*	g_0^*	$\lambda_0^* g_0^*$	Θ_1	Θ_3	Θ_γ	$\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0$
$\alpha_D = 1$	-6,78	3,37	-22,86	3,71	1,94	-1,98	0,01
$\alpha_D = 10$	-1,08	1,36	-1,47	-6,64	2,46	-0,43	0,784
$\alpha_D = 0,1$	-7,42	3,65	-27,09	3,73	2,28	-2,00	0,00015
	λ_∞^*	g_∞^*	$\lambda_\infty^* g_\infty^*$	Θ_1	Θ_3	$\Theta_{\hat{\gamma}}$	$\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_\infty$
$\alpha_D = 1$	-4,18	3,30	-13,79	3,22	1,81	1,94	0,03
$\alpha_D = 10$	-1,83	2,18	-3,98	-2,40	2,76	1,34	0,328
$\alpha_D = 0,1$	-5,16	3,86	-19,89	3,32	2,55	2,01	-0,005

Tabelle 8.8: Die Eigenschaften der physikalischen Fixpunkte NGFP_0 und NGFP_∞ des (λ, γ, g) -Systems.

Koordinaten der Fixpunkte nicht übereinstimmen, denn $\gamma^* = 0$ und $\hat{\gamma}^* = 0$ tragen über die Funktion $I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}(\gamma)$ unterschiedlich zur Beta-Funktion dieser Kopplung bei: Während dieser Term im ersten Fall den Wert $-6 \frac{v_4}{(2\pi)^4} \Gamma(\frac{2}{n})$ annimmt, verschwindet er im zweiten. Dies überträgt sich auf die g -Koordinaten der Fixpunkte, so daß wir hier auch jenseits jeglicher Approximationen $g_0^* \neq g_\infty^*$ erwarten.

Wir finden für $\mu = 5$ und jeden betrachteten α_D -Wert wieder ein Paar von Fixpunkten, das wie gefordert im regulären Bereich liegt. Die erhaltenen Werte geben wir zusammen mit den übrigen Eigenschaften in Tabelle 8.8 an.

Der Vollständigkeit wegen sei angemerkt, daß wir auch für $\mu = 1, \alpha_D = 0,1$ und $\gamma^* = 0$ einen Fixpunkt im regulären Bereich finden, der jedoch kein $\hat{\gamma}^*$ -Gegenstück besitzt. Er liegt bei $(\lambda_0^* = 0,55; g_0^* = -0,99)$ und weist die kritischen Exponenten $\Theta_\lambda = 6,28, \Theta_g = 1,53$ und $\Theta_\gamma = -1,07$ sowie den Wert $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0 = 0,463$ auf. Da er offenbar ein Eichartefakt und keine generische Eigenschaft des Flusses darstellt, die gegenüber Parametervariationen stabil wäre, wurde er verworfen.

Hingegen weisen die in Tabelle 8.8 angegebenen Fixpunkte alle eine *negative* λ^* - und eine *positive* g^* -Koordinate auf, was bereits bei den beiden zuvor untersuchten zweidimensionalen Trunkierungen der Fall war. Insbesondere erscheint also auch hier das *Anti-Screening als generische Fixpunkt-Eigenschaft*. Die expliziten Werte der Fixpunktkoordinaten sind denen der zweidimensionalen Trunkierungen vergleichbar, wobei sie im vorliegenden Fall stabiler erscheinen.

Da insbesondere die λ -Ableitungen von $B_0^{(+)}$ und $B_0^{(-)}$ bei λ_0^* endlich bleiben (sie werden sogar klein), gilt

$$\left. \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial g} \right|_{\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*} = 0 = \left. \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*}$$

und mithin

$$\begin{aligned} \Theta_\gamma &= - \left. \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma} \right|_{\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*} \\ &= -g_0^* \left(B_0^{(-)}(\lambda_0^*) - B_0^{(+)}(\lambda_0^*) \right) \\ &= -2 \left[1 - \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}} \right)_0(\lambda_0^*) \right]. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Dies überträgt sich in analoger Weise auf die $\hat{\gamma}$ -Darstellung. Wir finden hier entsprechend

$$\Theta_{\hat{\gamma}} = 2 \left[1 - \left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}} \right)_\infty(\lambda_\infty^*) \right]. \quad (8.28)$$

Da die beiden Fixpunktwerte für λ jedoch verschieden sind, $\lambda_0^* \neq \lambda_\infty^*$, impliziert dies auch bei Annahme der Hypothese *nicht*, daß $\Theta_\gamma = -\Theta_{\hat{\gamma}}$ gilt.

Die Stabilitätsmatrix ist dann von der Form

$$\mathcal{B}_0 := \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \gamma} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma} & \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_g}{\partial \gamma} & \frac{\partial \beta_g}{\partial g} \end{array} \right) \Bigg|_{\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} & 0 & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} \\ 0 & \frac{\partial \beta_\gamma}{\partial \gamma} & 0 \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} & 0 & -2 \end{array} \right) \Bigg|_{\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*}$$

bzw.

$$\mathcal{B}_\infty := \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \hat{\gamma}} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_{\hat{\gamma}}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_{\hat{\gamma}}}{\partial \hat{\gamma}} & \frac{\partial \beta_{\hat{\gamma}}}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_g}{\partial \hat{\gamma}} & \frac{\partial \beta_g}{\partial g} \end{array} \right) \Bigg|_{\lambda_\infty^*, \hat{\gamma}^*, g_\infty^*} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} & 0 & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} \\ 0 & \frac{\partial \beta_{\hat{\gamma}}}{\partial \hat{\gamma}} & 0 \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} & 0 & -2 \end{array} \right) \Bigg|_{\lambda_\infty^*, \hat{\gamma}^*, g_\infty^*}.$$

Da der Eigenvektor V^2 dieser Matrizen in γ - bzw. $\hat{\gamma}$ -Richtung zeigt, konnten wir in (8.27) und (8.28) den zugehörigen kritischen Exponenten die Kopplungen γ bzw. $\hat{\gamma}$ zuordnen. Demgegenüber zeigen die Eigenvektoren V^1 und V^3 nur annähernd in λ - oder g -Richtung.

Vielmehr sind die zugehörigen kritischen Exponenten Θ_1 und Θ_3 durch das Negative der Eigenwerte der 2×2 -Matrix

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} & -2 \end{array} \right) \Big|_{\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} \\ \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} & -2 \end{array} \right) \Big|_{\lambda_\infty^*, \hat{\gamma}^*, g_\infty^*}$$

gegeben. Wie bereits im (λ, g) -System, so ist auch hier der kritische Exponent Θ_1 in guter Näherung der kosmologischen Konstanten λ und der kritische Exponent Θ_3 der Newton-Konstante g zuzuordnen.

Die Gleichungen (8.27) und (8.28) für die kritischen Exponenten Θ_γ und $\Theta_{\hat{\gamma}}$ sind somit strukturell von der gleichen Form wie die Beziehungen (8.15) und (8.16), die sich bei der Analyse des (γ, g) -Systems ergeben hatten. Dabei ist jedoch das Verhältnis $\left(\frac{b^{(-)}}{b^{(+)}}\right)_{0,\infty}$ der (hypothetischen) Konstanten für die beiden γ -Grenzfälle jeweils durch eine entsprechende Funktion von λ zu ersetzen, $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_{0,\infty}(\lambda = \lambda_{0,\infty}^*)$, die am zugehörigen Fixpunktwert ausgewertet wird.

In Tabelle 8.8 werden die abgeleiteten Relationen (8.27) und (8.28) jeweils von den Einträgen in den beiden rechten äußeren Spalten für alle untersuchten Fälle erfüllt.

Besonders interessant sind die Fälle $\alpha_D = 1$ und $\alpha_D = 0, 1$, in denen zusätzlich $\Theta_\gamma = -\Theta_{\hat{\gamma}}$ gilt und die die Werte $\Theta_\gamma = -2$ und $\Theta_{\hat{\gamma}} = 2$ nahelegen. Dies wird in den Abbildungen 8.18 und 8.20 verdeutlicht. Da diese für die beiden Grenzfälle nahezu identisch sind, liegen hier beide Fixpunkte in einem Bereich, in dem das dargestellte Verhältnis $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0(\lambda)$ und folglich auch $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_\infty(\lambda)$ fast verschwindet. Die Anwesenheit der kosmologischen Konstante würde somit das System in einen Fixpunkt treiben, in dem die skalaren Beiträge gegenüber den pseudoskalaren fast vollständig überwiegen. In der Tat verschwinden letztere nahezu, so daß die Beta-Funktionen um den Fixpunkt nur noch von $B^{(+)}(\lambda)$ abhängen.

Zur Illustration geben wir in den Abbildungen 8.21 und 8.22 die separaten Graphen von $B_0^{(-)}(\lambda)$ und $B_0^{(+)}(\lambda)$ für $\alpha_D = 1$ und $\mu = 5$ an; sie sind im wesentlichen mit ihren für $\gamma \rightarrow \infty$ erhaltenen Gegenstücken identisch.

Die kritischen Exponenten von λ und g liegen in dem aus der (λ, g) -Trunkierung vertrauten Bereich. Für den Eichparameter $\alpha_D = 10$ tritt der Fixpunkt hingegen jeweils weit vor dem Abflachen dieses Quotienten auf, so daß sich $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_0$ und $\left(\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}\right)_\infty$ für beide Fixpunkte

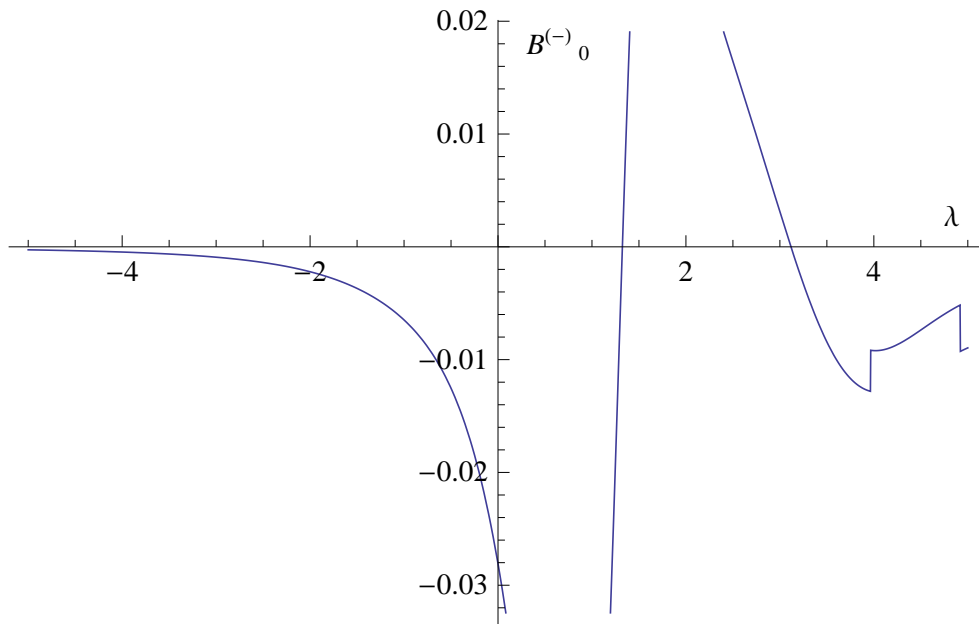


Abbildung 8.21: Die Funktion $\lambda \mapsto B_0^{(-)}(\lambda)$ für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 1$. Auch hier ist der physikalisch relevante Bereich der Halbraum $\lambda \leq 0$.

merklich unterscheiden. Allerdings stimmen die kritischen Exponenten Θ_γ und $\Theta_{\tilde{\gamma}}$ in ihren Vorzeichen mit den für die beiden anderen Eichparameter erhaltenen Werte überein, und auch Θ_3 ist mit den Werten für $\alpha_D = 1$ und $\alpha_D = 0, 1$ verträglich. Dies gilt jedoch nicht für den kritischen Exponenten Θ_1 der kosmologischen Konstante, der zudem im Falle $\alpha_D = 10$ für beide Fixpunkte deutlich verschieden ist. Des weiteren ist auch in der dreidimensionalen Trunkierung mit dem Auftreten von Polstellen in den Beta-Funktionen bei $\gamma \approx \pm 1$ und daher mit Pseudofixpunkten NGFP_\pm der erläuterten Art zu rechnen.

Im Zuge analoger Berechnungen im QEG-Rahmen wurde zumeist $\alpha_D = 1$ gesetzt, weil dies hilfreiche Vereinfachungen der Rechnungen zur Folge hatte. Die Universalität der erhaltenen Ergebnisse wurde durch Variieren des Abschneideschemas getestet. Würden wir hier ebenfalls die Eichabhängigkeit unberücksichtigt lassen und nur den Fall $\alpha_D = 1 = f$ für verschiedene Regularisierungen untersuchen, so ergäbe sich daraus ein attraktives Szenario, das (bis auf das Vorzeichen der Funktion $\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}$) durch die für den Eichparameter $\alpha_D = 0, 1$ erhaltenen Ergebnisse gestützt würde:

Darin würde die Beta-Funktion für den Immirzi-Parameter in der (γ, g) -Trunkierung bei Wahl einer geeigneten Eichung verschwinden. Ihr scheinbares Laufen wäre bloß ein Eich-

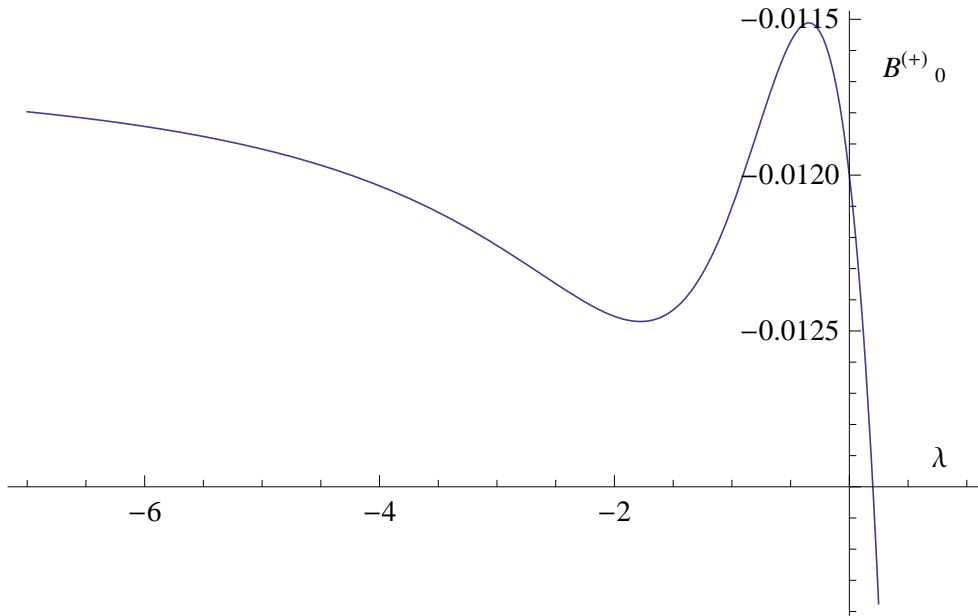


Abbildung 8.22: Die Funktion $\lambda \mapsto B_0^{(+)}(\lambda)$ für $\mu = 5$ und $\alpha_D = 1$.

artefakt, und ihre nicht vorhandene Renormierung würde eine Kompensation der skalaren und pseudoskalaren Beiträge zur Spur ausdrücken. Die Anwesenheit der kosmologischen Konstante würde diese Symmetrie jedoch brechen und das System zu zwei Fixpunkten treiben, die über Hypothese (8.19b) hinsichtlich der Struktur von $\beta_\gamma(\lambda, \gamma, g)$ miteinander verknüpft wären. An diesen Fixpunkten wäre das Laufen des Immirzi-Parameters maximal in dem Sinne, daß dort der Quotient $\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}}$ verschwindet. Mit $\frac{B^{(-)}}{B^{(+)}} \approx 0$ findet man an beiden Fixpunkten die kritischen Exponenten $\Theta_\gamma \approx -2$ und $\Theta_{\hat{\gamma}} \approx 2$ sowie $3,7 \gtrsim \Theta_1 \gtrsim 3,2$ und $2,5 \gtrsim \Theta_3 \gtrsim 1,8$. Am Fixpunkt $(\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*)$ wären somit die Kopplungen λ und g relevant, und γ wäre irrelevant. Bei $(\lambda_\infty^*, \hat{\gamma}^*, g_\infty^*)$ hingegen wären alle drei Kopplungen λ , γ und g relevant und trügen zur Dimension der UV-kritischen Hyperfläche bei.

Die beiden Fixpunkte würden wiederum die Extremfälle maximal unterdrückter bzw. völlig frei fluktuierender Torsion verkörpern. Auch hier stellt sich die Frage, welche der beiden Versionen des Immirzi-Parameters der physikalischen Kopplung entspricht. Zukünftige Untersuchungen könnten ebenfalls zeigen, ob eine vollständige Trajektorie, die beide Fixpunkte miteinander verbindet, indem sie im Ultravioletten aus dem einen herausläuft und im Infrarot-Limes $k \rightarrow 0$ in dem anderen endet, existiert.

8.4.3 Der explizite Fluß des (λ, γ, g) -Systems

Wir möchten abschließend die Flußdiagramme in der Nähe der Fixpunkte \mathbf{NGFP}_0 und \mathbf{NGFP}_∞ angeben. Dabei haben wir an den Beta-Funktionen (8.19) zwei Näherungen vorgenommen: Wir haben zum einen die in diesen für die Grenzfälle $\gamma \rightarrow 0$ und $\hat{\gamma} \rightarrow 0$ auftretenden Funktionen $B_0^{(\pm)}(\lambda)$ und $B_\infty^{(\pm)}(\lambda)$ aus (8.22), (8.23), (8.24) und (8.25) bis zur ersten Ordnung in λ entwickelt. Zudem wurde in (8.19) für $n = 3$ die Funktion $I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}(\gamma)$ durch ihren jeweiligen Fixpunktwert ersetzt gemäß

$$I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}(\gamma^*) = -6\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{v_3}{(2\pi)^4} \quad \text{bzw.} \quad I_{\mathcal{N}}^{\text{grav}}((\hat{\gamma}^*)^{-1}) = 0.$$

In den Abbildungen 8.23-8.28 sind nun jeweils die drei zweidimensionalen Schnitte entlang der (λ, g) -, der (λ, γ) - und der (γ, g) -Ebene dieser beiden Flüsse dargestellt.

Dabei läßt sich den Abbildungen 8.23 und 8.26 entnehmen, daß der Fluß in der (λ, g) -Ebene strukturell von der gleichen Form ist wie der Fluß um den Fixpunkt der zweidimensionalen (λ, g) -Trunkierung, der in der Abbildung 8.2 dargestellt wurde. In diesem Umstand drückt sich die von uns bereits festgestellte näherungsweise Übereinstimmung der zugehörigen kritischen Exponenten Θ_1 und Θ_3 aus.

Betrachten wir darüber hinaus die Abbildungen 8.24 und 8.25 der (λ, γ) - und (γ, g) -Schnitte des Flusses um \mathbf{NGFP}_0 und vergleichen wir diese mit ihren \mathbf{NGFP}_∞ -Gegenstücken 8.27 und 8.28, so bringen diese sehr anschaulich den Unterschied zwischen einer irrelevanten und einer relevanten Kopplung zum Ausdruck.

In den Abbildungen 8.24 und 8.25 ist $\Theta_\gamma = -2$, d. h. die Kopplung γ ist am Fixpunkt \mathbf{NGFP}_0 irrelevant. Die γ -Richtung ist in diesen beiden Abbildungen somit UV-repulsiv, so daß der Fluß für $k \rightarrow \infty$ in dieser Richtung vom Fixpunkt abgestoßen wird. (Dabei ist zu beachten, daß sich diese Aussagen auf die UV-Eigenschaften des Flusses beziehen, so daß in den Abbildungen die Pfeilrichtungen umzukehren sind.) Demgegenüber sind die λ - und die g -Richtung jeweils UV-attraktiv. In diesem Fall ist die UV-kritische Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} zweidimensional, und das System muß wirklich in die (λ, g) -Ebene gesetzt werden um zu gewährleisten, daß es im UV-Limes in den Fixpunkt \mathbf{NGFP}_0 läuft.

Am Fixpunkt \mathbf{NGFP}_∞ hingegen ist $\Theta_{\hat{\gamma}} = 2$, so daß alle drei Kopplungen $(\lambda, \hat{\gamma}, g)$ re-

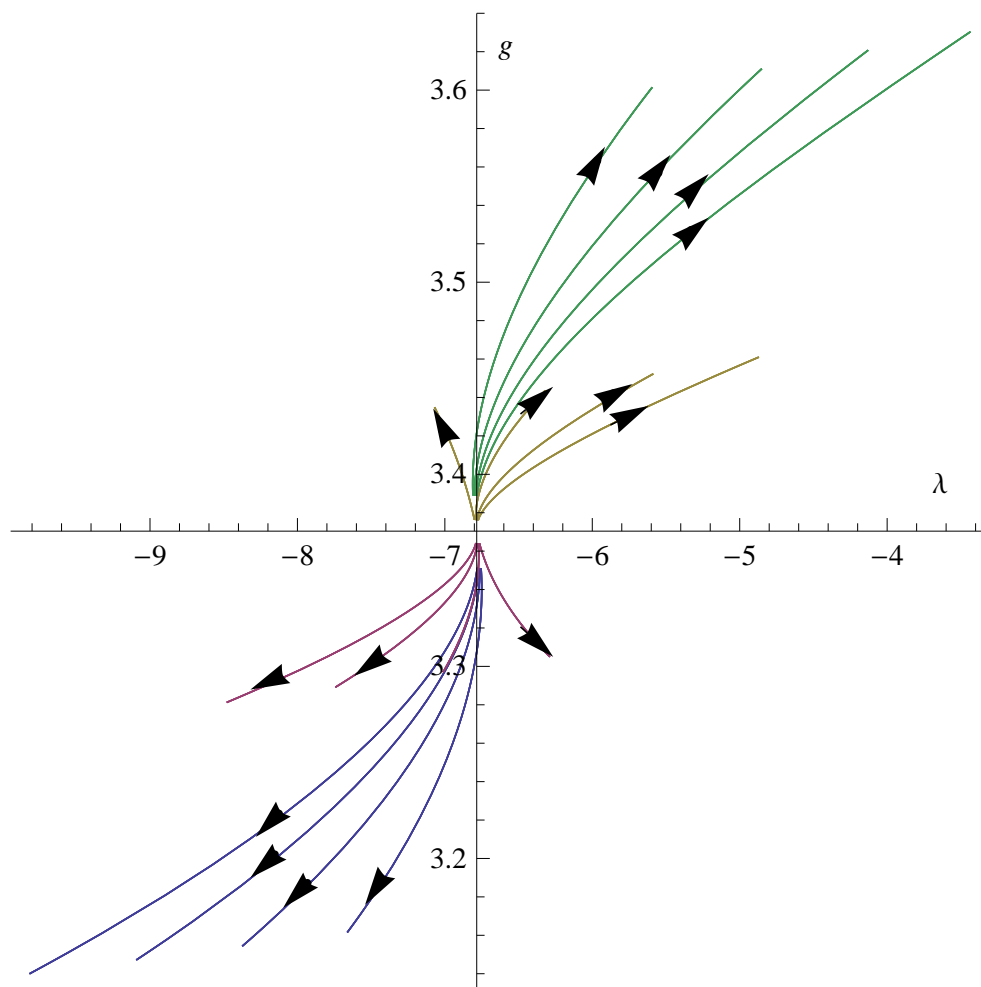


Abbildung 8.23: Der (λ, g) -Schnitt des (λ, γ, g) -Systems am Fixpunkt \mathbf{NGFP}_0 für $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und den scharfen Propertime-Cutoff.

levant und die zugehörigen Richtungen UV-attraktiv sind, was man sehr schön an den drei Abbildungen 8.26, 8.27 und 8.28 für die Schnitte entlang der drei zweidimensionalen Unterräume erkennt. Hier ist $\dim \mathcal{S}_{UV} = 3$, d. h. der gesamte, von λ , $\hat{\gamma}$ und g aufgespannte dreidimensionale Unterraum des Theorienraums $\mathcal{T}_{\text{QECG}}$ trägt zu $\dim \mathcal{S}_{UV}$ bei: Jede Trajektorie in diesem Unterraum läuft für $k \rightarrow \infty$ in den Fixpunkt \mathbf{NGFP}_∞ .

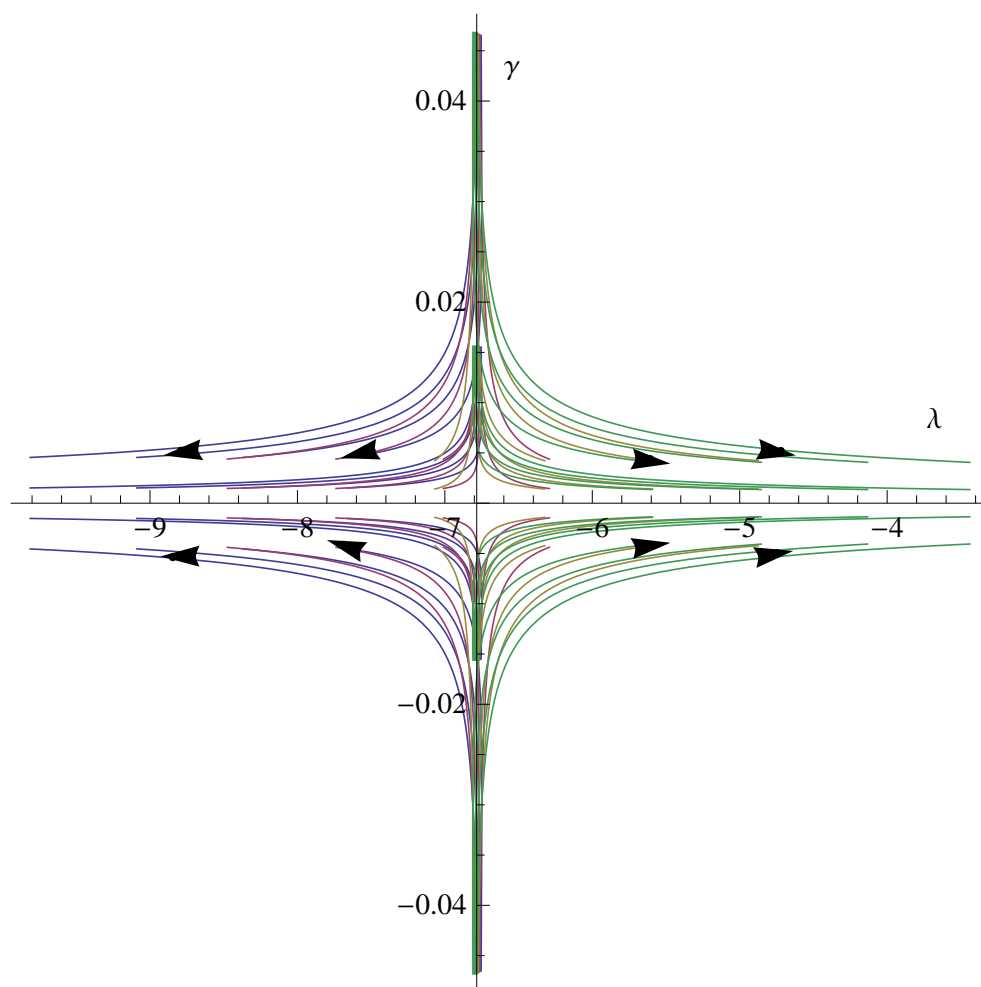


Abbildung 8.24: Der (λ, γ) -Schnitt des (λ, γ, g) -Systems am Fixpunkt \mathbf{NGFP}_0 für $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und den scharfen Propertime-Cutoff.

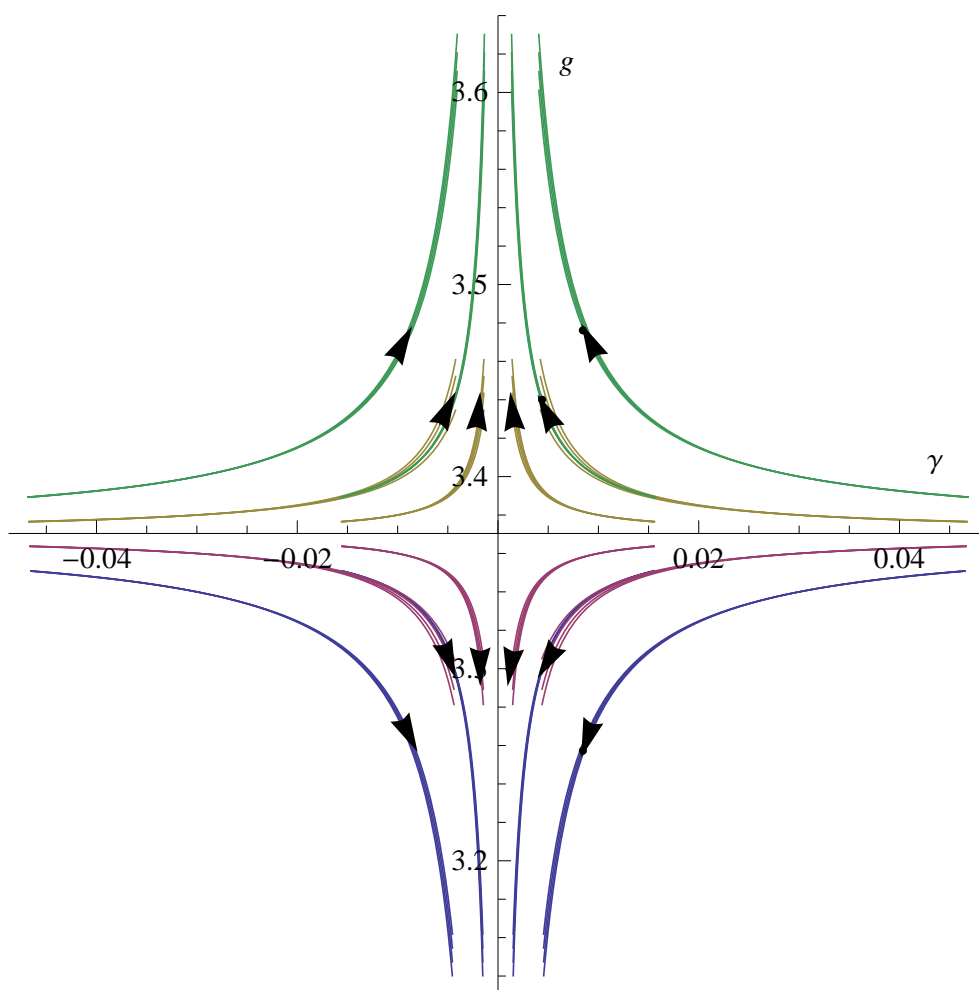


Abbildung 8.25: Der (γ, g) -Schnitt des (λ, γ, g) -Systems am Fixpunkt \mathbf{NGFP}_0 für $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und den scharfen Propertime-Cutoff.

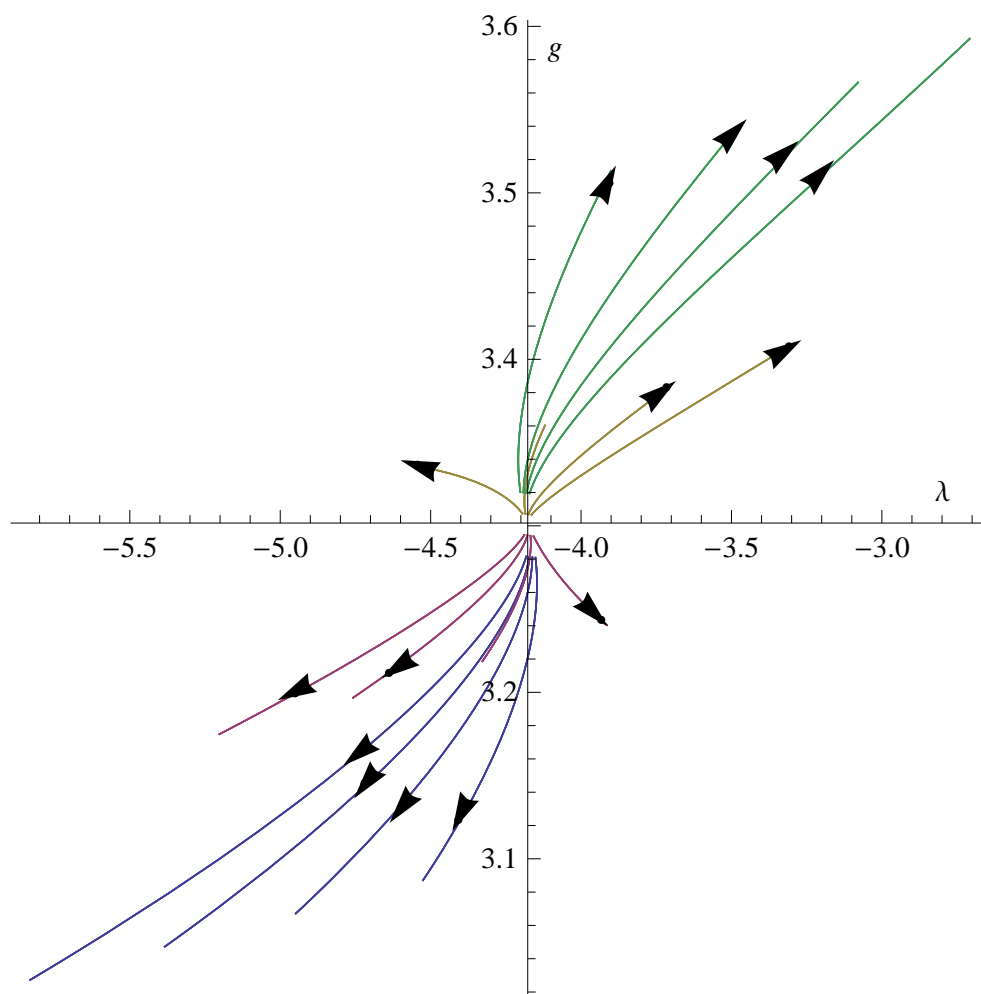


Abbildung 8.26: Der (λ, g) -Schnitt des $(\lambda, \hat{\gamma}, g)$ -Systems am Fixpunkt \mathbf{NGFP}_∞ für $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und den scharfen Propertime-Cutoff.

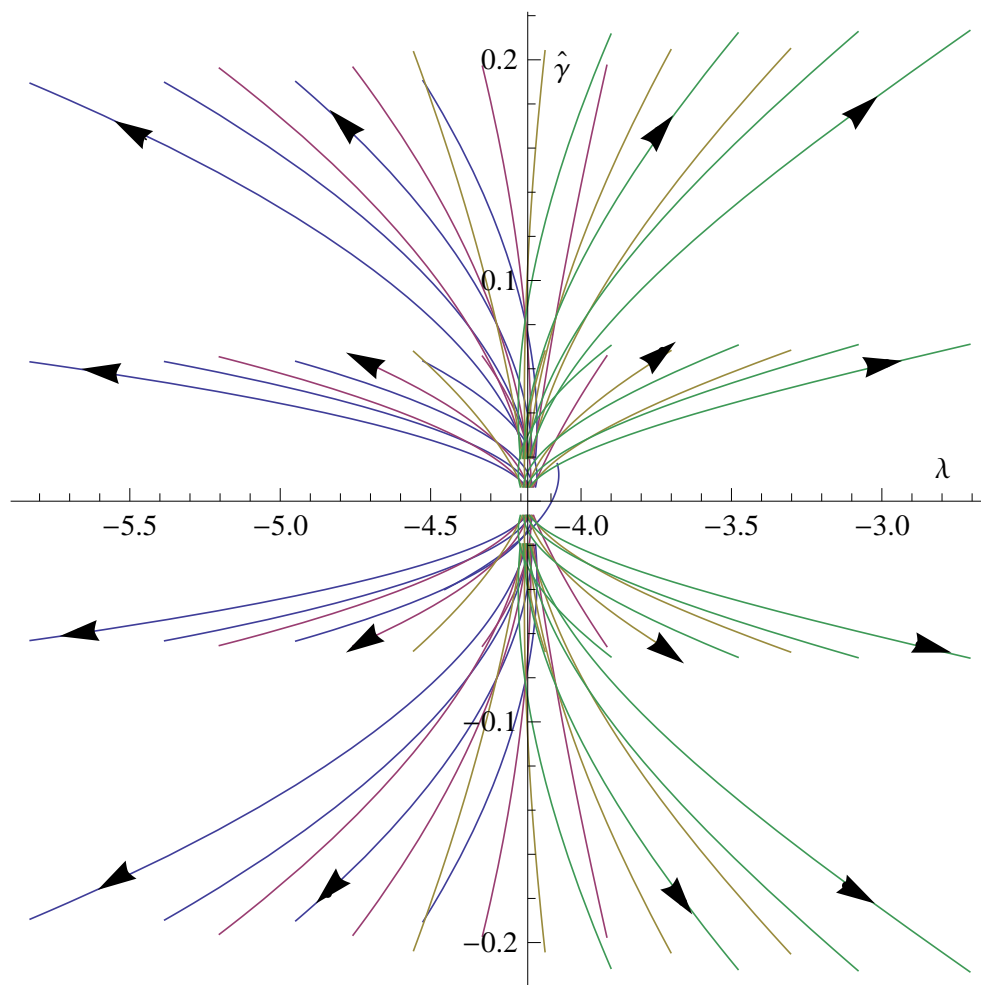


Abbildung 8.27: Der $(\lambda, \hat{\gamma})$ -Schnitt des $(\lambda, \hat{\gamma}, g)$ -Systems am Fixpunkt NGFP_∞ für $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und den scharfen Propertime-Cutoff.

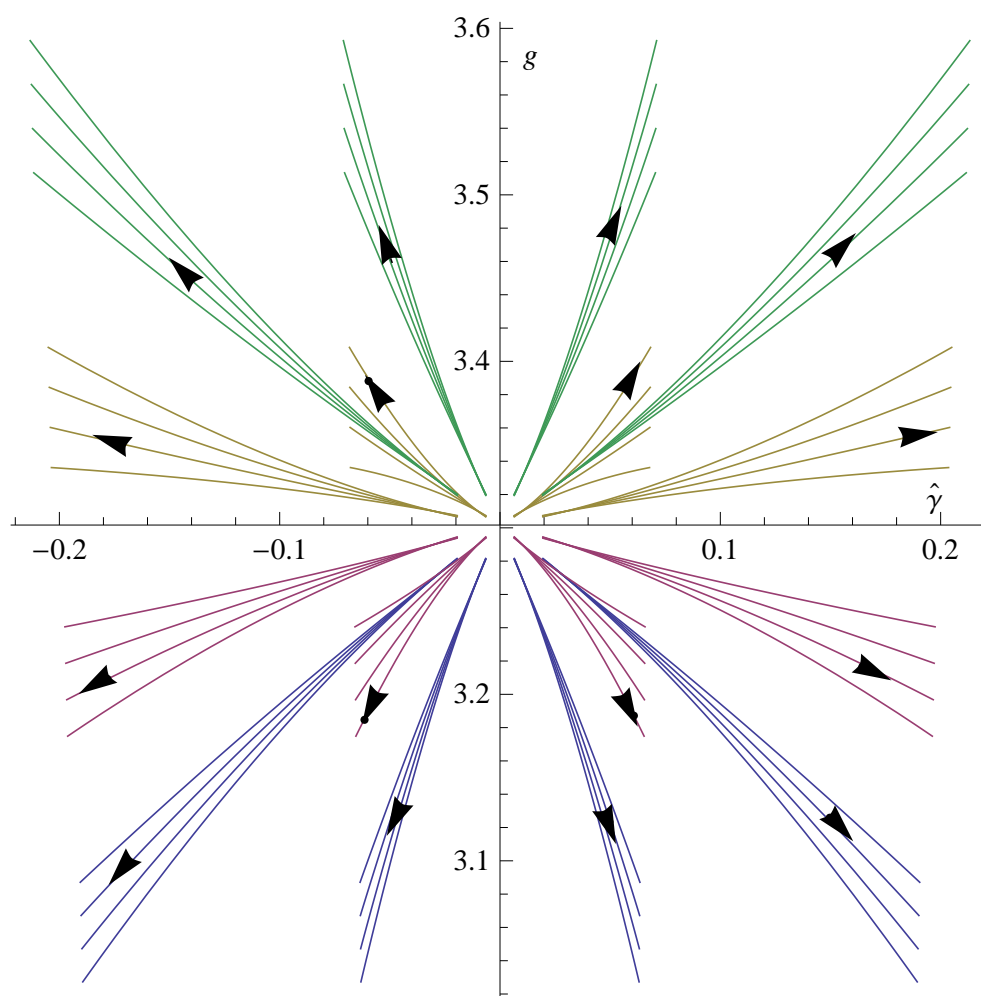


Abbildung 8.28: Der $(\hat{\gamma}, g)$ -Schnitt des $(\lambda, \hat{\gamma}, g)$ -Systems am Fixpunkt NGFP_∞ für $\mu = 5$, $\alpha_D = 1$, $\beta_D = 0$ und den scharfen Propertime-Cutoff.

Kapitel 9

Diskussion und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde in Analogie zum metrischen Zugang die Methodik der Wilsonschen Renormierungsgruppe auf Gravitation im First-Order-Zugang mit den fundamentalen Feldern e^a_μ und ω^{ab}_μ angewandt. Besonderes Interesse galt dabei der Frage, ob sich auch für diesen Feldgehalt Hinweise auf asymptotische Sicherheit der Gravitation finden lassen. Dann sollten diese Feldvariablen analog zur metrischen *Quanten-Einstein-Gravitation* (QEG) die Definition einer Quantenfeldtheorie der (e, ω) -Gravitation als Kontinuumslimites an einem nicht-Gaußschen Fixpunkt erlauben. Diese hypothetische Quantentheorie bezeichnen wir als *Quanten-Einstein-Cartan-Gravitation* (QECG).

Die untersuchte Trunkierung ist dabei von der Form der euklidischen Holst-Wirkung

$$\Gamma_{k \text{ Ho}}[e^a_\mu, \omega^{ab}_\mu] = -\frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x e \left\{ \left(F^{ab}_{\mu\nu} - \frac{1}{2\gamma_k} \varepsilon^{ab}_{cd} F^{cd}_{\mu\nu} \right) e_a^\mu e_b^\nu - 2\Lambda_k \right\} \quad (9.1)$$

+ Eichfixierungs- und Geistbeiträge

mit der laufenden Newton-Konstante G_k , der kosmologischen Konstante Λ_k und dem Immirzi-Parameter γ_k . Die drei im *Prolog* aufgelisteten Unterschiede zur metrischen Theorie wurden im Zuge dieser Berechnung einzeln berücksichtigt.

Aufgrund der großen Anzahl der Feldkomponenten konnte kein an das Spektrum von $\Gamma_k^{(2)}$ angepaßter Cutoff konstruiert werden, da dies selbst im freien Fall, d. h. für $\bar{\omega} = 0$, auf ein charakteristisches Polynom vom Grad sieben führt. Stattdessen haben wir eine Gleichung des *Proper-time-Typs*

$$\partial_t \Gamma_k = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} (\partial_t f_k(s)) \text{Tr} \{ e^{-s \Gamma_k^{(2)}} \} \quad (9.2)$$

untersucht. Als geeigneter Operator erwies sich der $(\frac{1}{\gamma_k} \rightarrow 0)$ -Grenzfall des freien Anteils von $\Gamma_k^{(2)}$, den wir mit H_0 bezeichnen. Dessen Spektrum kann analytisch berechnet werden. Allerdings ist der Operator H_0 wie die Holst-Wirkung von erster Ordnung. Somit ist erst durch sein Quadrat ein positiver Operator gegeben, der als Exponent der Propertime-Gleichung (9.2) dienen kann.

Zusätzlich zu diesen beiden Aspekten, dem größeren Feldraum einerseits und der First-Order-Natur der klassischen Wirkung andererseits, erfordert die Eichgruppe $\mathbf{G} = \text{Diff} \times O(4)_{\text{loc}}$ eine Modifikation des üblichen Formalismus. Nur auf diese Weise werden die Diffeomorphismen mit den Lorentz-Transformationen „verträglich“, so daß man eine hintergrundinvariante Geistwirkung erhält. Diese Kovariantisierung wurde in Kapitel 4 durchgeführt. Dort werden auch die verwendeten Eichbedingungen diskutiert.

Zur Berechnung der funktionalen Spur in (9.2) haben wir die Fluktuationen und Geistfelder in irreduzible Komponentfelder zerlegt, wobei aus Dimensionsgründen ein zusätzlicher Massenparameter $\bar{\mu} \equiv \mu k$ auftritt. Anschließend wurden die drei Invarianten der Trunkierung (9.1) mittels der drei Hintergrundkonfigurationen $\{\bar{e}^a_\mu = \text{const}, \bar{\omega}^{ab}_\mu = 0\}$ und $\{\bar{e}^a_\mu = \text{const}, \bar{\omega}^{ab}_\mu \equiv \bar{\omega}^{(\pm)ab}_\mu = \frac{1}{2} n^{(\pm)ab} v_\mu\}$ aus der Spur auf der rechten Seite von (9.2) herausprojiziert. Als zentrales Ergebnis der Arbeit erhielten wir das zugehörige Flußgleichungssystem in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t \lambda_k &= \beta_\lambda(\lambda_k, \gamma_k, g_k) \\ \partial_t \gamma_k &= \beta_\gamma(\lambda_k, \gamma_k, g_k) \\ \partial_t g_k &= \beta_g(\lambda_k, \gamma_k, g_k) \end{aligned}} \quad (9.3)$$

Dabei sind die Beta-Funktionen auf der rechten Seite zu kompliziert, um sie in dieser Arbeit explizit angeben zu können. Das Differentialgleichungssystem (9.3) wurde insbesondere hinsichtlich seiner Fixpunkt-Struktur untersucht.

Für jede Wahl der Eichparameter und des Regularisierungsschemas finden wir überzeugende Hinweise auf *asymptotische Sicherheit*. Für alle Werte $\mu \gtrsim 2$ existieren im Rahmen der Trunkierung Fixpunkte, an denen der „Kontinuumslimit“ genommen werden kann. Dabei ist die Schemaabhängigkeit gering, die Eichabhängigkeit im Vergleich zu ähnlichen Rechnungen in der QEG jedoch stark. Die Beta-Funktion des Immirzi-Parameters ist von der einfachen Form

$$\beta_\gamma(\lambda, \gamma, g) = f(\lambda) g \gamma. \quad (9.4)$$

Mit $\hat{\gamma} := \frac{1}{\gamma}$ und $\beta_{\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}) = -\hat{\gamma}^2 \beta_\gamma(\hat{\gamma}^{-1}) = -f(\lambda) g \hat{\gamma}$ besitzen β_γ und $\beta_{\hat{\gamma}}$ die Nullstellen $\gamma^* = 0$ und $\hat{\gamma}^* = 0$. Wir erhalten daher ein Paar von *nicht-Gaußschen Fixpunkten*, $\mathbf{NGFP}_0 \equiv (\lambda_0^*, \gamma^*, g_0^*)$ und $\mathbf{NGFP}_\infty \equiv (\lambda_\infty^*, \hat{\gamma}^*, g_\infty^*)$, mit $\lambda_0^* < 0$, $\lambda_\infty^* < 0$ sowie $g_0^* > 0$, $g_\infty^* > 0$; diese weisen somit *Anti-Screening* auf.

Die beiden Kopplungen λ und g sind *relevant*, so daß beide Fixpunkte in λ - und g -Richtung *UV-attraktiv* sind. Demgegenüber deuten die Resultate darauf hin, daß die Kopplung γ bei \mathbf{NGFP}_0 *irrelevant* und die Kopplung $\hat{\gamma}$ bei \mathbf{NGFP}_∞ *relevant* sein sollte.

Insgesamt legen die Ergebnisse sehr nahe, daß die QECG als asymptotisch sichere Theorie existiert und daß diese Quantenfeldtheorie der Gravitation die gewünschten Eigenschaften aufweist. Um letztere genauer bestimmen zu können, sind präzisere Rechnungen erforderlich, die insbesondere die Eichabhängigkeiten reduzieren.

9.2 Methodische Entwicklungen

Im Verlauf dieser Arbeit wurden verschiedene grundlegende Fragen und Probleme untersucht bzw. gelöst, die über die beschriebenen Rechnungen hinaus auch für zukünftige Untersuchungen der First-Order-Gravitation von Interesse sein sollten.

(A) In Kapitel 4 wurde das Problem hintergrundinvarianter Geistwirkungen gelöst. Dazu wurde eine manifest kovariante Parametrisierung der Eichtransformationen konstruiert, deren Hintergrundversion mittels der Faddeev-Popov-Methode tatsächlich auf hintergrundinvariante Geistwirkungen führt. Zudem wurden in diesem Kapitel zwei für praktische Rechnungen vorteilhafte Eichbedingungen angegeben, von deren Zulässigkeit wir uns durch eine

detaillierte Analyse des Nullmodenspektrums überzeugt haben.

(B) Des weiteren wurde die Notwendigkeit erläutert, im Zuge der Fluktuationszerlegung den Massenparameter $\bar{\mu}$ einzuführen. Damit der Fluß $(\mathcal{T}_{\text{QECG}}, \vec{\beta})$ nicht explizit k -abhängig wird, wurde in der verwendeten Trunkierung $\mu \equiv \frac{\bar{\mu}}{k}$ als dimensionslose Konstante behandelt.

(C) Die Block- bzw. Tensorproduktstruktur von $\Gamma_k^{(2)}$, die durch den Paritätsgrad der einzelnen irreduziblen Komponentenfelder bedingt ist, kann mit Hilfe der in Kapitel 7 eingeführten verallgemeinerten Orts- und Impulsdarstellung sehr effizient behandelt werden. Sie könnte ebenfalls als Element in zukünftigen Rechnungen enthalten sein.

(D) Dies sollte gleichwohl für die Zerlegung der Fluktuationen $\bar{\varepsilon}_\mu^a$ und $\bar{\tau}_\mu^{ab}$ gelten. Zudem erscheint der gewählte Hintergrund $(\bar{e}, \bar{\omega}^{(\pm)})$ mit quasi-abelschem $\omega^{(\pm)ab}_\mu = \frac{1}{2}n^{(\pm)}v_\mu$ für weitere Untersuchungen der „Holst-Trunkierung“ als denkbar geeignet. In deren Rahmen könnte auch auf den Operator $\Gamma_k^{(2)}$ zurückgegriffen werden, der komponentenweise bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega}^{(\pm)})$ und $\mathcal{O}(\partial\bar{\omega}^{(\pm)})$ berechnet wurde.

9.3 Strukturelle Eigenschaften des RG-Flusses

Bei der Untersuchung des RG-Flusses haben wir zunächst für Werte $\mu \gtrsim 2$ eine robuste Systematik der Ergebnisse festgestellt, die im folgenden zusammengefaßt werden soll.

(A) Für alle untersuchten Wahlen der Parameter (α_D, β_D, f) und der Regularisierungsschemata (f_k^m bzw. C_k^m) wurden in der (λ, g) -, (γ, g) - und (λ, γ, g) -Trunkierung *nicht-Gaußsche Fixpunkte* gefunden, so daß sich starke Hinweise auf *asymptotische Sicherheit der QECG* ergeben haben. Dabei fügen sich die Ergebnisse aus der (λ, g) - und der (γ, g) -Trunkierung im Rahmen der (λ, γ, g) -Trunkierung in harmonischer und konsistenter Weise zusammen. Die Schemaabhängigkeit ist äußerst gering, doch es tritt eine deutliche Eichabhängigkeit auf. Zudem hängt der scharfe Propertime-Cutoff stetig mit der weichen f_k^m - bzw. C_k^m -Regularisierung zusammen.

(B) Alle Fixpunkte weisen eine positive g -Koordinate $g^* > 0$ und mithin *Anti-Screening* auf. Des weiteren legen sie einen negativen λ -Fixpunktwert $\lambda^* < 0$ nahe. (Dies impliziert keinen Widerspruch zu gegenwärtigen Beobachtungen, da diese den Wert der kosmologi-

schen Konstanten auf astronomischen Skalen und daher weit im Infraroten messen.) Für die kritischen Exponenten konnten die Wertebereiche $4 \geq \Theta_1 \geq 3$ und $2,6 \geq \Theta_3 \geq 1,8$ bestimmt werden. Dabei stimmen die zugehörigen Eigenrichtungen annähernd mit der λ - bzw. g -Richtung überein, so daß wir in guter Näherung die Identifikationen $\Theta_1 \approx \Theta_\lambda$ und $\Theta_3 \approx \Theta_g$ vornehmen können. Sowohl die *kosmologische Konstante* als auch die *Newton-Konstante* dürften daher wie in der QEG *relevant* sein.

(C) Die Untersuchungen der (γ, g) -Trunkierung legen nahe, daß die Beta-Funktion des Immirzi-Parameters in dieser durch das Produkt aus g , γ und einer Konstanten gegeben ist. Mit $\hat{\gamma} := \gamma^{-1}$ treten somit Fixpunkte \mathbf{NGFP}'_0 und \mathbf{NGFP}'_∞ bei $\gamma^* = 0$ und $\hat{\gamma}^* = 0$ mit $\Theta_\gamma = -\Theta_{\hat{\gamma}}$ auf. Da auch die anomale Dimension η_N der Newton-Konstante unabhängig von γ ist, wird diesen Fixpunkten die gleiche g -Koordinate $g_0^* = g_\infty^* > 0$ mit $\Theta_g = 2$ zugewiesen. Außer den Werten 0 und $\pm\infty$ sind daher keine γ -Werte besonders ausgezeichnet.

(D) Erweitern wir die (γ, g) -Trunkierung um den kosmologischen Term, so sind die angesprochenen Konstanten durch λ -abhängige Funktionen zu ersetzen. Wir finden auch hier zu $\gamma^* = 0$ und $\hat{\gamma}^* = 0$ jeweils einen Fixpunkt \mathbf{NGFP}_0 bzw. \mathbf{NGFP}_∞ , dessen λ - und g -Koordinaten nun jedoch verschieden sind. Dies hat zur Folge, daß im allgemeinen $\Theta_\gamma \neq -\Theta_{\hat{\gamma}}$ gilt. Dabei sind die Formeln (8.27) und (8.28) für diese kritischen Exponenten durch eine einfache Verallgemeinerung derjenigen aus der (γ, g) -Trunkierung gegeben. Die Fixpunktwerte λ^* und g^* sind jeweils mit denen der (λ, g) -Trunkierung verträglich. Den Immirzi-Parameter betreffend, erweist sich für die drei in der (λ, γ, g) -Trunkierung betrachteten Parameterkombinationen die Kopplung γ als irrelevant und die Kopplung $\hat{\gamma}$ als relevant. Weitere Untersuchungen sind erforderlich, um dieses Resultat zu bestätigen.

9.4 Stabilitätseigenschaften des RG-Flusses

(A) **Schemaabhängigkeit:** Die Schemaabhängigkeit der erhaltenen Ergebnisse ist ausgesprochen gering. Insbesondere hängt der scharfe Propertime-Cutoff stetig mit den weichen f_k^m - und C_k^m -Regularisierungen zusammen, so daß er keine „pathologischen“ Züge aufweist.

(B) **μ -Abhängigkeit:** Die dargestellte Systematik erstreckt sich von $\mu \approx 2$ bis zum untersuchten Maximalwert von $\mu = 50$. Somit ist sie offenbar typisch für einen großen Bereich des Parameterraumes. Im Grenzfall $\mu \rightarrow \infty$ wird der hypothetische Fluß (8.19) allem An-

schein nach schon auf dem Niveau unserer approximativen Behandlung exakt. Für $\mu \leq 1$ hingegen kann die angegebene Systematik nicht beobachtet werden. Die Beta-Funktionen weisen hier zahlreiche Polstellen auf, und innerhalb des regulären Bereichs, der mit dem Gaußschen Fixpunkt verbunden ist, existieren im (λ, γ, g) -System keine nicht-Gaußschen Fixpunkte.

(C) Eichparameterabhängigkeit: Die Eichparameterabhängigkeit ist im Vergleich zu analogen Rechnungen in der QEG relativ stark ausgeprägt. Zwar hingen strukturelle Eigenschaften wie die Existenz eines nicht-Gaußschen Fixpunktes oder die Vorzeichen von λ^* und g^* in keiner der drei betrachteten Trunkierungen von α_D ab, doch waren z.B. die Vorzeichen der kritischen Exponenten Θ_γ und $\Theta_{\tilde{\gamma}}$ im (γ, g) -System α_D -abhängig. Die Werte von Θ_γ und $\Theta_{\tilde{\gamma}}$ sind auch im (λ, γ, g) -System eichparameterabhängig. Hier stimmen jedoch für alle drei betrachteten α_D -Werte die Vorzeichen der kritischen Exponenten überein. Das könnte die Vermutung bestätigen, daß die gewählte Eichung besser an die volle (λ, γ, g) -Trunkierung als an die zweidimensionale (γ, g) -Trunkierung angepaßt ist.

Auf Grundlage der vorliegenden Untersuchungen im (γ, g) -System kann insbesondere nicht entschieden werden, ob die Konstante in β_γ und somit die Beta-Funktion des Immirzi-Parameters selbst verschwindet, so daß dessen Laufen nur die spezielle Behandlung der Eichmoden widerspiegeln würde. Sollte dies zutreffen, können wir allerdings verstehen, inwiefern in diesem Fall die gewählte Eichbedingung ungeeignet wäre (vgl. Abschnitt 8.3.7). Selbst wenn in der (γ, g) -Trunkierung $\beta_\gamma = 0$ gelten sollte, so induziert nach unseren Untersuchungen der (λ, γ, g) -Trunkierung die kosmologische Konstante λ mit Sicherheit ein „physikalisches“ Laufen von γ , so daß $\beta_\gamma \neq 0$ gilt.

Die Frage, ob an den Fixpunkten der dreidimensionalen Trunkierung die kanonischen Dimensionen $\Theta_\gamma = 2$ und $\Theta_{\tilde{\gamma}} = -2$ vorliegen, ist eng mit der Frage nach dem Verschwinden von β_γ in der (γ, g) -Trunkierung verknüpft: Beide hängen vom Verhältnis der λ -abhängigen Funktionen $B^{(-)}(\lambda)$ und $B^{(+)}(\lambda)$ ab, wobei dieses im ersten Fall bei den entsprechenden Fixpunktwerten und im zweiten Fall bei $\lambda = 0$ auszuwerten ist.

Um hier Fortschritte zu machen, scheint es insbesondere erforderlich zu sein, die Eichabhängigkeiten der Resultate besser zu kontrollieren, indem man eine dem Problem besser angepaßte Eichung wählt. Allerdings ist die Existenz einer solchen „besseren“ Eichbedingung keineswegs gesichert. Dazu ist anzumerken, daß selbst im Rahmen einer vollkommen

exakten Rechnung der Großteil der universellen, d. h. \mathcal{R}_k -unabhängigen Größen eine Eichabhängigkeit aufweisen wird, da zwischen universellen Größen und der Frage nach Eichunabhängigkeit eigentlich kein direkter Zusammenhang besteht. Die adäquaten Objekte zur Behandlung dieser Frage sind vielmehr die Observablen, also diejenigen Größen innerhalb einer Eichtheorie, die per Definition eichunabhängig sind. Sie bilden lediglich eine kleine Teilmenge der universellen Größen, da der weitaus größte Teil von diesen keine Observablen darstellt. Dies erkennt man daran, daß die effektive Wirkung $\Gamma_{k=0}$ zwar \mathcal{R}_k -unabhängig, aber eichfixierungsabhängig ist. Nur Größen wie die aus ihr gebildeten S-Matrix-Elemente, d. h. on-shell-Greensfunktionen, sind observabel. Zudem kann in der Praxis die Eich- oder Schemaabhängigkeit auch ausgenutzt werden. Beispielsweise erlauben Eichungen oder Regularisierungen, die auf kleine Fixpunktwerte der dimensionslosen Kopplungen führen, eine störungstheoretische Behandlung des Fixpunktregimes.

9.5 Ausblick

Abschließend möchten wir darauf eingehen, wie die von uns durchgeführten Untersuchungen erweitert und verfeinert werden könnten. Zudem wollen wir einige physikalische Fragestellungen aufzeigen, deren Beantwortung von Interesse ist.

(A) In Anbetracht der obigen Bemerkungen ist es natürlich erstrebenswert, die Eichabhängigkeiten der Ergebnisse zu reduzieren; demgegenüber ist die Schemaabhängigkeit der erhaltenen Ergebnisse ausgesprochen gering. Die Suche nach „besseren“ Eichbedingungen sollte daher Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.

(B) Eine stärkere Eichunabhängigkeit könnte erfahrungsgemäß auch unter Verwendung einer Wetterich-Gleichung erzielt werden. Zwar wäre die Konstruktion eines Cutoff-Operators \mathcal{R}_k , der an das Spektrum von $\Gamma_k^{(2)}$ angepaßt ist, technisch sehr schwierig und mit den im Abschnitt 3.2 erläuterten Problemen behaftet. Doch auch ein relativ grober Cutoff der Form $\mathcal{R}_k(p^2) = k^2 R^{(0)}\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \mathbb{1}$, worin $\mathbb{1}$ die Identität auf dem Raum der Komponentenfelder der Fluktuationszerlegungen bezeichnet, könnte unter Umständen bereits die Eichunabhängigkeit der Ergebnisse verbessern.

(C) Zudem wäre es interessant, eine von der QECG verschiedene Quantentheorie zu betrachten und den Raum der zugrundeliegenden Felder (e, ω) derart abzuändern, daß man

sich bereits zu Beginn auf rein selbstduale oder rein anti-selbstduale Spinzusammenhänge $\omega \equiv \omega^{(\pm)}$ einschränkt und nur diese chirale Hälfte quantisiert. Eine solche Theorie käme dem ursprünglichen Ashtekar-Programm sehr nahe [45, 46]. Dabei wäre auf dem Niveau der Trunkierung (9.1) der Immirzi-Parameter $\gamma_k = \mp 1$ zu setzen, und man würde auf diesem neuen Theorienraum den RG-Fluß in der verbleibenden (λ, g) -Trunkierung studieren. Zwar hat sich im Zuge unserer Untersuchungen der Wert $\gamma = \pm 1$ nicht als besonders herausgestellt, doch ergeben sich daraus keinerlei Implikationen für die chirale Theorie: Die Projektion auf eine der beiden Chiralitäten $\omega = \omega^{(\pm)}$ kommutiert aller Wahrscheinlichkeit nach nicht mit der Quantisierung der Theorie.

(D) Des weiteren stellt sich die Frage, ob zwischen dem (e, ω) -Fluß und seinem metrischen Analogon ein Zusammenhang besteht. Auch wenn a priori kein Grund dafür ersichtlich ist, so legt doch die klassische Beziehung $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$ die Vermutung nahe, einen geeigneten Metrik-Operator als zusammengesetzten Operator aus zwei Vielbeinen konstruieren zu können. Dann wäre das metrische Feld eine Art „Bindungszustand“ zweier Vielbein-Felder. Man sollte mithin den metrischen Fluß als das gravitative Analogon eines „mesonischen“ Flusses interpretieren können, der aus einer Theorie von „Quarks“ und „Gluonen“ folgt. Bei solchen Untersuchungen könnte man auf Techniken aus der QCD zurückgreifen, die es erlauben, den Übergang von den fundamentalen Quark-Freiheitsgraden zu kollektiven Meson-Freiheitsgraden zu beschreiben [82]. Diese Vermutung widerspricht auf den ersten Blick einem No-Go-Theorem von S. Weinberg und E. Witten [83], so daß man zunächst die Gültigkeit der diesem zugrundeliegenden Annahmen überprüfen müßte.

(E) Von besonderem physikalischen Interesse wäre die Analyse der CP-Verletzung, die der Immirzi-Term bei der Ankopplung von Spinorfeldern induziert, sofern diese nicht-minimal angekoppelt werden [40]. Um solche phänomenologischen Aspekte mit zusätzlichen Materiefeldern praktisch untersuchen zu können, wären hinreichende Vereinfachungen der in dieser Arbeit abgeleiteten Flußgleichung hilfreich, die bereits die wesentlichen Eigenschaften des RG-Flusses erfassen.

Anhang A

Eine kurze Einführung in die Einstein-Cartan-Gravitation

Zur Notation. Wir bezeichnen mit lateinischen Buchstaben a, b, \dots, k, l, \dots die $O(4)$ - oder Lorentz-Indizes und mit griechischen Buchstaben $\mu, \nu, \dots, \alpha, \beta, \dots$ die Raumzeit-Indizes. Zudem stellt die Klammerung zweier Indizes mit eckigen ($[]$) oder runden ($()$) Klammern deren gewichtete Anti-Symmetrisierung bzw. Symmetrisierung mit Vorfaktor $\frac{1}{2!}$ dar.

A.1 Vielbein, Spinzusammenhang und Torsion

Als ein fundamentaler konzeptioneller Grundpfeiler der Allgemeinen Relativitätstheorie muß sicher das Äquivalenzprinzip angesehen werden, dessen physikalische Aussage in seiner starken Form darin besteht, daß sich *lokal* Gravitation immer „wegtransformieren“ läßt, so daß in lokalen Inertialsystemen nach wie vor die Spezielle Relativitätstheorie gilt.

Betrachten wir eine Raumzeit-Mannigfaltigkeit \mathcal{M} als Basisraum sowie deren assoziiertes Tangentialbündel $T\mathcal{M}$, dann liefern Schnitte in dieses Bündel als Fasern die lokalen Tangentialräume $T_x\mathcal{M}$ im Punkt $x \in \mathcal{M}$. Das starke Äquivalenzprinzip postuliert dann die Existenz eines *lokalen* Isomorphismus $e^a{}_\mu(x)$, der einen Vektor $v^\mu(x) \in T_x\mathcal{M}$ auf einen Lorentz-Vektor $v^a(x) \in \mathbb{M}^4$ abbildet, also

$$v^\mu(x) \mapsto v^a(x) := e^a{}_\mu(x)v^\mu(x). \quad (\text{A.1})$$

Das Feld $e^a{}_\mu(x)$ heißt **Vielbein** und ersetzt in diesem Zugang die Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ als zentrales dynamisches Objekt einer Gravitationstheorie, was in den nun folgenden Ausführungen präzisiert werden soll.

Faßt man diese Abbildung zunächst als Einsform $e^a := e^a{}_\mu dx^\mu$ auf, die auf Vektoren wirkt, so definiert sie an jedem Punkt der Raumzeit ein Orthonormalsystem, d. h. es gilt

$$e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x)g^{\mu\nu}(x) = \eta^{ab}. \quad (\text{A.2})$$

Die inverse Abbildung, die auf den Dualraum wirkt und somit als lokaler Isomorphismus zwischen Einsformen und kovarianten Lorentz-Vektoren interpretiert werden kann, wird mit $e_a{}^\mu(x)$ bezeichnet, so daß für dieses **inverse Vielbein** also

$$e^a{}_\mu(x)e_a{}^\nu(x) = \delta_\mu{}^\nu \quad \text{und} \quad e_a{}^\mu(x)e_b{}^\nu(x) = \delta_b^a \quad (\text{A.3})$$

gilt. Wendet man nun $e_a{}^\rho(x)$ und $e_b{}^\sigma(x)$ auf (A.2) an, so liefert dies

$$g^{\rho\sigma}(x) = \eta^{ab}e_a{}^\rho(x)e_b{}^\sigma(x). \quad (\text{A.4})$$

Es läßt sich sofort bestätigen, daß dann für die Metrik als dem eindeutigen, zu (A.4) inversen Objekt die Beziehung

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab}e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x) \quad (\text{A.5})$$

gelten muß, derentwegen das Vielbein manchmal auch als „die Quadratwurzel aus der Metrik“ bezeichnet wird.

Da sich nun $v^a = e^a{}_\mu v^\mu$ unter Lorentz-Transformationen als Vektor transformieren soll, impliziert dies für das Vielbein nach (A.1) ebenfalls ein vektorielles Transformationsverhalten:

$$e^a{}_\mu(x) \mapsto e'^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_b(x)e^b{}_\mu(x). \quad (\text{A.6})$$

Man erkennt nun, daß das Vielbein durch (A.5) nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf Eichtransformationen der Form (A.6) festgelegt ist, da

$$\begin{aligned} e'^a{}_\mu(x)e'^b{}_\nu(x)\eta_{ab} &= \Lambda^a{}_c(x)e^c{}_\mu(x)\Lambda^b{}_d(x)e^d{}_\nu(x)\eta_{ab} \\ &= e^c{}_\mu(x)e^d{}_\nu(x)(\Lambda^T)_c{}^a(x)\eta_{ab}\Lambda^b{}_d(x) \\ &= e^c{}_\mu(x)e^d{}_\nu(x)\eta_{cd} \\ &\equiv g_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

gilt, wobei Λ^T die zu Λ transponierte lineare Abbildung bezeichnet, und die definierende Eigenschaft der Lorentz-Transformationen besteht ja gerade darin, daß die durch sie vermittelte Konjugation die quadratische Form η_{ab} invariant läßt.

Die Einführung des Vielbeins führt somit zusätzlich zu den üblichen, den differenzierbaren Reparametrisierungen der Koordinaten entsprechenden Diffeomorphismen noch auf eine weitere Eichinvarianz bezüglich der $O(4)$ -Wirkung in jedem lokalen Lorentz-System. (Hier haben wir uns bereits auf die euklidische Formulierung der Theorie mit $\eta \equiv \{\eta_{ab}\} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$ bezogen. Damit jedoch alle Ausführungen formal auch für die Lorentzsche Signatur gültig bleiben, behalten wir weiterhin die entsprechende Notation bei und verwenden die zugehörigen Begriffe wie Minkowski-Raum, Lorentz-Vektor etc. synonym, auch wenn im Euklidischen $\{\eta_{ab}\} \equiv \{\delta_{ab}\}$ und $M^4 \equiv \mathbb{R}^4$ gilt. Entsprechend wäre im Lorentzischen Fall mit $\{\eta_{ab}\} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$ die Gruppe $O(4)$ durch $O(1, 3)$ zu ersetzen.)

Multipliziert man (A.2) mit $e_b{}^\lambda$ und η_{ac} , so erhält man nach Umbenennung der Indizes

$$e_a{}^\mu(x) = \eta_{ab}g^{\mu\nu}(x)e^b{}_\nu(x),$$

so daß sich also das inverse Vielbein durch Kontraktion der entsprechenden dualen Indizes des Vielbeins mit der Minkowski- bzw. Raumzeit-Metrik ergibt. Wir verwenden daher im folgenden auch des öfteren Ausdrücke der Form

$$e_{a\mu}(x) := \eta_{ab}e^b{}_\mu(x) \equiv g_{\mu\nu}(x)e_a{}^\nu(x);$$

die Überführung flacher Indizes in Raumzeit-Indizes und umgekehrt erfolgt also per Definition unter Verwendung des Vielbeins bzw. seines Inversen.

Der Vielbein-Formalismus ist vor allem bei der Ankopplung von Fermionen an Gravitation von Interesse, da deren definierende Eigenschaft gerade darin besteht, sich bezüglich der Spinordarstellung der Lorentz-Gruppe zu transformieren, wohingegen sie sich unter Diffeomorphismen wie Skalare verhalten. Daher greift man insbesondere bei der Formulierung von Supergravitationstheorien auf den Vielbein-Formalismus zurück.

Aufgrund der zusätzlichen Eichinvarianz (A.6) ist es nun nur natürlich, Eichtheorie auf den den Tangentialräumen zugeordneten lokalen, flachen Minkowski-Räumen zu betreiben. Dazu betrachten wir zunächst die Exponentialdarstellung einer lokalen Lorentz-Transformation

$$\Lambda(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^{ab}(x)M_{ab}\right\} \quad (\text{A.7})$$

mit dem Transformationsparameter $\lambda^{ab}(x)$ und den Erzeugern M_{ab} . Da $\dim O(4) = 6$, kann die Lie-Algebra also durch antisymmetrische Generatoren $M_{ab} = -M_{ba}$ mit $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$ dargestellt werden, was o. B. d. A. $\lambda^{ab}(x) = -\lambda^{ba}(x)$ impliziert. Zudem gilt allgemein für die Kommutatoren

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc} \\ &= \frac{1}{2}f_{ab,cd}{}^{ef}M_{ef} \end{aligned}$$

mit den Strukturkonstanten

$$\begin{aligned} f_{ab,cd}{}^{ef} &:= \eta_{ad}\delta_b^e\delta_c^f - \eta_{ac}\delta_b^e\delta_d^f - \eta_{bd}\delta_a^e\delta_c^f + \eta_{bc}\delta_a^e\delta_d^f \\ &\quad - \eta_{ad}\delta_c^e\delta_b^f + \eta_{ac}\delta_d^e\delta_b^f + \eta_{bd}\delta_c^e\delta_a^f - \eta_{bc}\delta_d^e\delta_a^f, \end{aligned}$$

die die Algebra definieren. In der Vektordarstellung gilt z. B.

$$(M_{ab})^c{}_d = \delta_a^c\eta_{bd} - \delta_b^c\eta_{ad},$$

so daß (A.7) für die infinitesimale Lorentz-Transformation eines Vektors bei Vernachlässi-

gung von Termen $\sim \mathcal{O}(\lambda^2)$ auf

$$\begin{aligned}
 v^a \mapsto \Lambda^a_b v^b &= v^a + \frac{1}{2} \lambda^{cd} (M_{cd})^a_b v^b + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
 &= v^a + \frac{1}{2} \lambda^{cd} (\delta_c^a \eta_{db} - \delta_d^a \eta_{cb}) v^b + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
 &= v^a + \frac{1}{2} (\lambda^a_b - \lambda_b^a) v^b + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
 &= v^a + \lambda^a_b v^b + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
 \Rightarrow \delta_L(\lambda) v^a &= \lambda^a_b v^b
 \end{aligned}$$

unter Verwendung der Antisymmetrie des Transformationsparameters führt, was nach (A.6) insbesondere

$$\delta_L(\lambda) e^a_\mu = \lambda^a_b e^b_\mu \tag{A.8}$$

zur Folge hat.

Wir definieren nun wie üblich eine $O(4)$ -**kovariante Ableitung** mit Lie-Algebra-wertigem Eichfeld gemäß

$$\nabla_\mu := \partial_\mu \mathbb{1} + \frac{1}{2} \omega^{ab}_\mu(x) M_{ab},$$

wobei das Eichfeld $\omega^{ab}_\mu = -\omega^{ba}_\mu$ als **Spinzusammenhang** bezeichnet wird. Als Zusammenhang transformiert es sich in der adjungierten Darstellung, in der die Erzeuger der Eichtransformationen auf ein Lie-Algebra-Element der Form $\chi = \chi^{ab} M_{ab}$ gemäß

$$\begin{aligned}
 (\delta_L \chi)_{ab} = [M_{ab}, \chi] &= \chi^{cd} [M_{ab}, M_{cd}] \\
 &= \frac{1}{2} f_{ab,cd}{}^{ef} \chi^{cd} M_{ef} \\
 &=: (\delta_L \chi^{ef})_{ab} M_{ef}
 \end{aligned}$$

wirken, wobei

$$(\delta_L \chi^{ef})_{ab} = \frac{1}{2} f_{ab,cd}{}^{ef} \chi^{cd}$$

die komponentenweise Wirkung bezeichnet. Faßt man dies als durch die Generatoren M_{ab}

vermittelte lineare Abbildung auf mit

$$(\delta_L \chi^{ef})_{ab} \equiv M_{ab}(\chi^{ef}) = (M_{ab})^{ef}{}_{cd} \chi^{cd},$$

so liest man sofort ab, daß in der adjungierten Darstellung die Komponenten der Generatoren gerade durch die Strukturkonstanten gegeben sind, also

$$(M_{ab})^{cd}{}_{ef} = \frac{1}{2} f_{ab,ef}{}^{cd}.$$

Damit sich nun kovariante Ableitungen von Tensoren als Tensoren entsprechenden Ranges transformieren, muß sich der Spinzusammenhang unter infinitesimalen Lorentz-Transformationen in der für Eichfelder charakteristischen inhomogenen Weise transformieren, was auf

$$\begin{aligned} \delta_L(\lambda) \omega^a{}_{\mu}{}^b &= -\nabla_{\mu} \lambda^{ab} = -\left(\partial_{\mu} \lambda^{ab} + \frac{1}{2} \omega^c{}_{\mu}{}^d M_{cd}(\lambda^{ab}) \right) \\ &= -\left(\partial_{\mu} \lambda^{ab} + \frac{1}{4} \omega^c{}_{\mu}{}^d f_{cd,ef}{}^{ab} \lambda^{ef} \right) \\ &= -\left(\partial_{\mu} \lambda^{ab} + \omega^a{}_{c\mu} \lambda^{cb} + \omega^b{}_{c\mu} \lambda^{ac} \right) \\ &\equiv -\partial_{\mu} \lambda^{ab} + \lambda^a{}_{c\mu} \omega^{cb}{}_{\mu} + \lambda^b{}_{c\mu} \omega^{ac}{}_{\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

führt, wohingegen sich das Vielbein ja nach (A.6) als Vektor, also wie ein Materiefeld, transformiert. Somit gilt per Konstruktion beispielsweise für die **kovariante Ableitung eines Lorentz-Vektors** v^a

$$\begin{aligned} \delta_L(\lambda) \nabla_{\mu} v^a &= \delta_L(\lambda) (\partial_{\mu} v^a + \omega^a{}_{b\mu} v^b) \\ &= \partial_{\mu} (\lambda^a{}_{\mu} v^b) + (-\partial_{\mu} \lambda^a{}_{\mu} - \omega^a{}_{c\mu} \lambda^c{}_{\mu} - \omega_b{}^c{}_{\mu} \lambda^a{}_{\mu}) v^b + \omega^a{}_{b\mu} \lambda^b{}_{\mu} v^c \\ &= \lambda^a{}_{\mu} (\partial_{\mu} v^b + \omega^b{}_{c\mu} v^c) \\ &= \lambda^a{}_{\mu} \nabla_{\mu} v^b. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Weiterhin definieren wir den **Feldstärketensor** wie in einer Eichtheorie üblich als den

Kommutator zweier kovarianter Ableitungen:

$$\begin{aligned}
 [\nabla_\mu, \nabla_\nu] &= \left[\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu}^{ab}(x)M_{ab}, \partial_\nu + \frac{1}{2}\omega_{\nu}^{cd}(x)M_{cd} \right] \\
 &= \left(\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^{ab} + \frac{1}{8}\omega_{\mu}^{cd}\omega_{\nu}^{ef}f_{cd,ef}^{ab} \right) M_{ab} \\
 &= (\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^{ab} + \omega_{c[\mu}^a\omega_{\nu]}^{cb})M_{ab} \\
 &=: \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{ab}M_{ab} \\
 \Rightarrow F_{\mu\nu}^{ab} &= \partial_\mu\omega_{\nu}^{ab} - \partial_\nu\omega_{\mu}^{ab} + \omega_{c\mu}^a\omega_{\nu}^{cb} - \omega_{c\nu}^a\omega_{\mu}^{cb}. \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

Wir können dies auch konkret in der Vektordarstellung ausrechnen. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu v^a &= \left(\partial_\mu\delta_b^a + \frac{1}{2}\omega_{\mu}^{cd}(M_{cd})^a_b \right) v^b \\
 &= \partial_\mu v^a + \frac{1}{2}\omega_{\mu}^{cd}(\eta_{db}\delta_c^a - \eta_{cb}\delta_d^a)v^b \\
 &= \partial_\mu v^a + \frac{1}{2}(\omega_{b\mu}^a - \omega_b^a{}_\mu)v^b \\
 &= \partial_\mu v^a + \omega_{b\mu}^a v^b,
 \end{aligned}$$

was auf

$$\begin{aligned}
 [\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^a &= 2(\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^a{}_{b\nu]} + \omega_{c[\mu}^a\omega_{\nu]}^c{}_{b\nu])v^b \\
 &= \frac{1}{2}(F_{\mu\nu}^{cd}(M_{cd})^a_b)v^b \\
 &= \frac{1}{2}(F_{b\mu\nu}^a - F_b^a{}_{\mu\nu})v^b \\
 &= F_{b\mu\nu}^a v^b
 \end{aligned}$$

führt und somit (A.11) reproduziert.

Da das Vielbein $e^a{}_\mu$ wie bereits gesagt als Raumzeit-Einsform aufgefaßt werden kann, transformiert es sich unter einem von einem Vektorfeld ξ^μ erzeugten Diffeomorphismus wie ein kovariantes Vektorfeld gemäß

$$\delta_D(\xi)e^a{}_\mu = \xi^\nu\partial_\nu e^a{}_\mu + (\partial_\mu\xi^\nu)e^a{}_\nu. \tag{A.12}$$

Dies garantiert auch, daß durch die rechte Seite von (A.5) ein kovariantes Tensorfeld vom Rang 2 definiert wird. Das inverse Vielbein transformiert sich dann mit Blick auf (A.3) als

duales Objekt wie ein kontravariantes Vektorfeld, d.h. es gilt

$$\delta_D(\xi)e_a^\mu = -e_a^\nu(\delta_D(\xi)e_\nu^b)e_b^\mu = \xi^\nu\partial_\nu e_a^\mu - (\partial_\nu\xi^\mu)e_a^\nu. \quad (\text{A.13})$$

Damit durch die kovariante Ableitung $\nabla_\mu v^a$ bezüglich Diffeomorphismen ebenfalls ein kovariantes Vektorfeld definiert wird, muß sich auch der Spinzusammenhang kovariant transformieren, also

$$\delta_D(\xi)\omega_{\mu}^{ab} = \xi^\nu\partial_\nu\omega_{\mu}^{ab} + (\partial_\mu\xi^\nu)\omega_{\nu}^{ab}, \quad (\text{A.14})$$

denn da sich v^a unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie ein Skalar verhält gemäß

$$\delta_D(\xi)v^a = \xi^\mu\partial_\mu v^a, \quad (\text{A.15})$$

ergibt sich wie gewünscht

$$\begin{aligned} \delta_D(\xi)\nabla_\mu v^a &= (\partial_\mu v^a + \omega_{b\mu}^a v^b) \\ &= \partial_\mu(\xi^\nu\partial_\nu v^a) + (\xi^\nu\partial_\nu\omega_{b\mu}^a + (\partial_\mu\xi^\nu)\omega_{b\nu}^a)v^b + \omega_{b\mu}^a\xi^\nu\partial_\nu v^b \\ &= \partial_\mu(\xi^\nu\partial_\nu v^a) + (\partial_\mu\xi^\nu)\omega_{b\nu}^a v^b + \xi^\nu\partial_\nu(\omega_{b\mu}^a v^b) \\ &= \partial_\mu(\xi^\nu\partial_\nu v^a) - (\partial_\mu\xi^\nu)\partial_\nu v^a - \xi^\nu\partial_\nu(\partial_\mu v^a) + (\partial_\mu\xi^\nu)\nabla_\nu v^a + \xi^\nu\partial_\nu(\nabla_\mu v^a) \\ &= (\partial_\mu\xi^\nu)\nabla_\nu v^a + \xi^\nu\partial_\nu(\nabla_\mu v^a). \end{aligned}$$

Wir möchten nun des weiteren eine kovariante Ableitung konstruieren, die als solche gleichermaßen auf Objekte wirkt, die sowohl Raumzeit- als auch Lorentz-Indizes tragen. Dazu definieren wir zunächst einen **Raumzeit-Zusammenhang** $\Gamma(e, \omega)$ über

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(e, \omega) := e_a^\lambda\nabla_\mu e_\nu^a = e_a^\lambda(\partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b). \quad (\text{A.16})$$

Dessen Transformationsverhalten unter Diffeomorphismen ist unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
 \delta_D(\xi)(\nabla_\mu e^a{}_\nu) &= \delta_D(\xi)(\partial_\mu e^a{}_\nu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu) \\
 &= \partial_\mu(\delta_D(\xi)e^a{}_\nu) + (\delta_D(\xi)\omega^a{}_{b\mu})e^b{}_\nu + \omega^a{}_{b\mu}\delta_D(\xi)e^b{}_\nu \\
 &= \partial_\mu(\xi^\rho\partial_\rho e^a{}_\nu + (\partial_\nu\xi^\rho)e^a{}_\rho) + (\xi^\rho\partial_\rho\omega^a{}_{b\mu} + (\partial_\mu\xi^\rho)\omega^a{}_{b\rho})e^b{}_\nu \\
 &\quad + \omega^a{}_{b\mu}(\xi^\rho\partial_\rho e^b{}_\nu + (\partial_\nu\xi^\rho)e^b{}_\rho) \\
 &= \xi^\rho\partial_\rho(\partial_\mu e^a{}_\nu + \omega^a{}_{b\mu}e^b{}_\nu) + (\partial_\mu\xi^\rho)(\partial_\rho e^a{}_\nu + \omega^a{}_{b\rho}e^b{}_\nu) \\
 &\quad + (\partial_\nu\xi^\rho)(\partial_\mu e^a{}_\rho + \omega^a{}_{b\mu}e^b{}_\rho) + (\partial_\mu\partial_\nu\xi^\rho)e^a{}_\rho \\
 &= \xi^\rho\partial_\rho\nabla_\mu e^a{}_\nu + (\partial_\mu\xi^\rho)\nabla_\rho e^a{}_\nu + (\partial_\nu\xi^\rho)\nabla_\mu e^a{}_\rho + (\partial_\mu\partial_\nu\xi^\rho)e^a{}_\rho \quad (\text{A.17})
 \end{aligned}$$

gerade durch

$$\begin{aligned}
 \delta_D(\xi)\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= (\delta_D(\xi)e_a{}^\lambda)\nabla_\mu e^a{}_\nu + e_a{}^\lambda\delta_D(\xi)\nabla_\mu e^a{}_\nu \\
 &= (\xi^\rho\partial_\rho e_a{}^\lambda - (\partial_\rho\xi^\lambda)e_a{}^\rho)\nabla_\mu e^a{}_\nu \\
 &\quad + e_a{}^\lambda[\xi^\rho\partial_\rho\nabla_\mu e^a{}_\nu + (\partial_\mu\xi^\rho)\nabla_\rho e^a{}_\nu + (\partial_\nu\xi^\rho)\nabla_\mu e^a{}_\rho + (\partial_\mu\partial_\nu\xi^\rho)e^a{}_\rho] \\
 &= \xi^\rho\partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + (\partial_\mu\xi^\rho)\Gamma_{\rho\nu}^\lambda + (\partial_\nu\xi^\rho)\Gamma_{\mu\rho}^\lambda - (\partial_\rho\xi^\lambda)\Gamma_{\mu\nu}^\rho + (\partial_\mu\partial_\nu\xi^\lambda) \quad (\text{A.18})
 \end{aligned}$$

gegeben. Somit transformiert sich Γ in der für einen Zusammenhang typischen Weise, d. h. insbesondere *nicht* wie ein Tensor, denn von diesem unterscheidet sich das Transformationsverhalten (A.18) gerade durch die charakteristische gemischte Ableitung im letzten Term der letzten Zeile. Zudem folgt unter Verwendung von (A.10)

$$\begin{aligned}
 \delta_L(\lambda)\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \lambda_a{}^b e_b{}^\lambda \nabla_\mu e^a{}_\nu + e_a{}^\lambda \lambda_b{}^a \nabla_\mu e^b{}_\nu \\
 &= \lambda_b{}^a (-e_a{}^\lambda \nabla_\mu e^b{}_\nu + e_a{}^\lambda \nabla_\mu e^b{}_\nu) \\
 &= 0. \quad (\text{A.19})
 \end{aligned}$$

Die Wirkung dieser kovarianten Ableitung auf ein Objekt der Form $v^a{}_\mu$, das sich wie ein Vektor bezüglich Lorentz-Transformationen sowie kovariant unter Diffeomorphismen transformiert, ist dann gegeben durch

$$D_\mu v^a{}_\nu := \partial_\mu v^a{}_\nu + \omega^a{}_{b\mu} v^b{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho v^a{}_\rho \equiv \nabla_\mu v^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho v^a{}_\rho. \quad (\text{A.20})$$

Ersetzen wir in (A.17) das Vielbein $e^a{}_\mu$ durch $v^a{}_\mu$, so erhalten wir

$$\delta_D(\xi)(\nabla_\mu v^a{}_\nu) = \xi^\rho \partial_\rho \nabla_\mu v^a{}_\nu + (\partial_\mu \xi^\rho) \nabla_\rho v^a{}_\nu + (\partial_\nu \xi^\rho) \nabla_\mu v^a{}_\rho + (\partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho) v^a{}_\rho.$$

Des weiteren gilt

$$\delta_D(\xi)(\Gamma_{\mu\nu}^\rho v^a{}_\rho) = (\delta_D(\xi)\Gamma_{\mu\nu}^\rho) v^a{}_\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \delta_D(\xi) v^a{}_\rho$$

mit $\delta_D(\xi)\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ aus (A.18) sowie

$$\delta_D(\xi) v^a{}_\rho = \xi^\sigma \partial_\sigma v^a{}_\rho + (\partial_\rho \xi^\sigma) v^a{}_\sigma,$$

was insgesamt auf

$$\begin{aligned} \delta_D(\xi) D_\mu v^a{}_\nu &= \xi^\sigma \partial_\sigma (\nabla_\mu v^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho v^a{}_\rho) + (\partial_\mu \xi^\sigma) (\nabla_\sigma v^a{}_\nu - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho v^a{}_\rho) + (\partial_\nu \xi^\sigma) (\nabla_\mu v^a{}_\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho v^a{}_\rho) \\ &\quad - (\partial_\sigma \xi^\rho) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma v^a{}_\rho + (\partial_\rho \xi^\sigma) \Gamma_{\mu\nu}^\rho v^a{}_\sigma + (\partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho) v^a{}_\rho - (\partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho) v^a{}_\rho \\ &= \xi^\rho \partial_\rho D_\mu v^a{}_\nu + (\partial_\mu \xi^\rho) D_\rho v^a{}_\nu + (\partial_\nu \xi^\rho) D_\mu v^a{}_\rho \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

führt, d. h. die Anwendung dieser kovarianten Ableitung respektiert die Tensoreigenschaft bezüglich Diffeomorphismen. Mit (A.10) und (A.19) erhalten wir zudem

$$\begin{aligned} \delta_L(\lambda) D_\mu v^a{}_\nu &= \delta_L(\lambda) \nabla_\mu v^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \delta_L(\lambda) v^a{}_\rho \\ &= \lambda^a{}_b \nabla_\mu v^b{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \lambda^a{}_b v^b{}_\rho \\ &= \lambda^a{}_b D_\mu v^b{}_\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

so daß diese kovariante Ableitung auch die Lorentz-Tensorstruktur erhält.

Die Verallgemeinerung auf **Tensoren höheren Ranges** ist offensichtlich: Sei z.B. $W^a{}_c{}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ ein Tensor der Stufe (2,1) bezüglich Lorentz-Indizes sowie der Stufe (2,2) bezüglich

Raumzeit-Indizes, so gilt

$$\begin{aligned}
 D_\lambda W_{c \rho\sigma}^{ab \mu\nu} &= \nabla_\lambda W_{c \rho\sigma}^{ab \mu\nu} + \Gamma_{\lambda\tau}^\mu W_{c \rho\sigma}^{ab \tau\nu} + \Gamma_{\lambda\tau}^\nu W_{c \rho\sigma}^{ab \mu\tau} \\
 &\quad - \Gamma_{\lambda\rho}^\tau W_{c \tau\sigma}^{ab \mu\nu} - \Gamma_{\lambda\sigma}^\tau W_{c \rho\tau}^{ab \mu\nu} \\
 &= \partial_\lambda W_{c \rho\sigma}^{ab \mu\nu} + \omega_{d\lambda}^a W_{c \rho\sigma}^{db \mu\nu} + \omega_{d\lambda}^b W_{c \rho\sigma}^{ad \mu\nu} + \omega_c^d{}_\lambda W_{d \rho\sigma}^{ab \mu\nu} \\
 &\quad + \Gamma_{\lambda\tau}^\mu W_{c \rho\sigma}^{ab \tau\nu} + \Gamma_{\lambda\tau}^\nu W_{c \rho\sigma}^{ab \mu\tau} - \Gamma_{\lambda\rho}^\tau W_{c \tau\sigma}^{ab \mu\nu} - \Gamma_{\lambda\sigma}^\tau W_{c \rho\tau}^{ab \mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man mit (A.16)

$$\begin{aligned}
 D_\mu e^a{}_\nu &= \nabla_\mu e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^a{}_\rho \\
 &= \nabla_\mu e^a{}_\nu - e_b{}^\rho (\nabla_\mu e^b{}_\nu) e^a{}_\rho \\
 &= \nabla_\mu e^a{}_\nu - \nabla_\mu e^a{}_\nu \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

d. h. das Vielbein ist per Konstruktion des Raumzeit-Zusammenhangs $\Gamma(e, \omega)$ *kovariant konstant*, so daß der Isomorphismus $e^a{}_\mu$ mit der kovarianten Ableitung kommutiert:

$$D_\mu v_\nu = e^a{}_\nu D_\mu v_a \equiv e^a{}_\nu \nabla_\mu v_a.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \delta_D(\xi) D_\mu e^a{}_\nu &= \xi^\rho \partial_\rho D_\mu e^a{}_\nu + (\partial_\mu \xi^\rho) D_\rho e^a{}_\nu + (\partial_\nu \xi^\rho) D_\mu e^a{}_\rho \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

sowie

$$\delta_L(\lambda) D_\mu e^a{}_\nu = \lambda^a{}_b D_\mu e^b{}_\nu = 0$$

ist diese Aussage eichinvariant, und sie gilt nach (A.3) in analoger Weise auch für das inverse Vielbein.

Um dies einzusehen, beweisen wir kurz die Gültigkeit einer **Produktregel für die kovariante Ableitung**, die wir im Verlauf der Arbeit noch des öfteren anwenden. Seien

$T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}$ sowie $T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}$ Tensoren der Stufe (k, l) bzw. (p, q) be-

züglich ihrer Lorentz-Indizes sowie der Stufe (m, n) bzw. (r, s) bezüglich ihrer Raumzeit-Indexstruktur. Werden diese beiden Tensoren nun über einen gemeinsamen Raumzeit-Index kontrahiert, so daß o. B. d. A. $\nu_n = \rho_1 \equiv \tau$ sei, so gilt

$$\begin{aligned}
& D_\lambda \left(T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \tau} T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\tau \rho_2 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \right) \\
= & \left(D_\lambda T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \tau} \right) T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\tau \rho_2 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& + \Gamma_{\lambda \tau}^{\nu_n} T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \nu_n} T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\tau \rho_2 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& + T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \tau} D_\lambda T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\tau \rho_2 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& - T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \tau} \Gamma_{\lambda \rho_1}^\tau T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
= & \left(D_\lambda T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \tau} \right) T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\tau \rho_2 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& + T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \tau} D_\lambda T_2^{c_1 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\tau \rho_2 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} .
\end{aligned}$$

Analog gilt für die Kontraktion flacher Indizes mit o. B. d. A. $b_l = c_1 \equiv e$:

$$\begin{aligned}
& D_\lambda \left(T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{l-1} e}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} T_2^{ec_2 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \right) \\
= & \left(D_\lambda T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{l-1} e}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \right) T_2^{ec_2 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& - \omega_e{}^{b_l}{}_\lambda T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{l-1} b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} T_2^{ec_2 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& + T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{l-1} e}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} D_\lambda T_2^{ec_2 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& - T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{l-1} e}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \omega_{c_1 \lambda}^e T_2^{c_1 c_2 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
= & \left(D_\lambda T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{l-1} e}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \right) T_2^{ec_2 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\
& + T_1^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{l-1} e}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} D_\lambda T_2^{ec_2 \dots c_p}{}_{d_1 \dots d_q}{}^{\rho_1 \dots \rho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}
\end{aligned}$$

mit $\omega_e{}^{b_l}{}_\lambda = -\omega_{e\lambda}{}^{b_l}$.

Man ersieht sofort, daß bei mehreren Indizes gleichen oder unterschiedlichen Typs bloß eine entsprechende Anzahl kompensierender Zusatzterme zu ergänzen ist, die sich dann in analoger Weise gegenseitig wegheben, so daß sich die Aussage in offensichtlicher Weise verallgemeinert. Als Spezialfall erhält man die Produktregel für die $O(4)$ -kovariante Ableitung ∇_μ .

Damit haben wir dann

$$\begin{aligned}
D_\mu \delta_a^b &\equiv \nabla_\mu \delta_a^b &= \partial_\mu \delta_a^b + \omega_a^c{}_\mu \delta_c^b + \omega^b{}_{c\mu} \delta_a^c \\
&&= \omega_a^b{}_\mu + \omega^b{}_{a\mu} \\
&&= 0 \\
&= D_\mu (e_a^\nu e_\nu^b) &= e_a^\nu D_\mu e_\nu^b + (D_\mu e_a^\nu) e_\nu^b \\
&&= e_\nu^b D_\mu e_a^\nu,
\end{aligned}$$

woraus für ein reguläres, nicht-ausgeartetes Vielbein, dessen Inverses existiert,

$$D_\mu e_a^\nu = 0 \quad (\text{A.24})$$

folgt. Zudem ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
D_\lambda W_{c\rho\sigma}^{ab\mu\nu} &= e_d^\mu e_e^\nu e_f^\rho e_g^\sigma D_\lambda W_{c\,fg}^{ab\,de} \\
&\equiv e_d^\mu e_e^\nu e_f^\rho e_g^\sigma \nabla_\lambda W_{c\,fg}^{ab\,de},
\end{aligned}$$

wobei wir wie üblich vermöge des Vielbeins Raumzeit-Indizes in Lorentz-Indizes überführt haben gemäß

$$W_{c\,fg}^{ab\,de} := e_\mu^d e_\nu^e e_f^\rho e_g^\sigma W_{c\,\rho\sigma}^{ab\,\mu\nu}.$$

Darüber hinaus impliziert die kovariante Konstanz des Vielbeins nach (A.5) unter Verwendung der Produktregel wegen

$$\begin{aligned}
D_\lambda g_{\mu\nu} &= D_\lambda (e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}) \\
&= (D_\lambda e_\mu^a) e_\nu^b \eta_{ab} + e_\mu^a D_\lambda (e_\nu^b \eta_{ab}) \\
&= (D_\lambda e_\mu^a) e_\nu^b \eta_{ab} + e_\mu^a (D_\lambda e_\nu^b) \eta_{ab} + e_\mu^a e_\nu^b D_\lambda \eta_{ab} \\
&= 0
\end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

mit $D_\lambda \eta_{ab} = \nabla_\lambda \eta_{ab} \equiv 0$ die **Metritizität des Zusammenhangs**, die ja in der metrischen Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Festlegung auf den Levi-Civita-Zusammenhang von vornherein gegeben ist. Unter erneuter Verwendung der Produktregel

folgt dann natürlich auch die kovariante Konstanz der inversen Metrik, so daß die Umwandlung des kovarianten Index der kovarianten Raumzeit-Ableitung in einen kontravarianten (und umgekehrt) in folgendem Sinne wohldefiniert ist:

$$D^\mu v_\mu := g^{\mu\nu} D_\nu v_\mu \equiv D_\nu v^\nu .$$

Für die $O(4)$ -kovariante Ableitung $\nabla = \partial + \omega$ hingegen gilt dies nicht.

An dieser Stelle führen wir noch kurz eine **Operator-Notation für kovariante Ableitungen** ein, die sich im Verlauf der Arbeit als nützlich erweisen wird. Da häufig kovariante Ableitungen von Feldern funktional nach diesen zu differenzieren sind, möchten wir die kovariante Ableitung, die auf einen beliebigen Raumzeit- und $O(4)$ -Tensor wirkt, als matrixwertigen Operator schreiben. Dazu versehen wir das Symbol D_μ von links nach rechts mit den entsprechenden Lorentz- und Raumzeit-Indizes, wobei die festen Indizes, die die Komponenten des Tensors *nach* der kovarianten Ableitung bezeichnen, links von den Kontraktionsindizes stehen; dabei stehen in beiden Indexmengen die Lorentz-Indizes wiederum jeweils links von den Raumzeit-Indizes. Sei also $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}$ ein Lorentz-Tensor der Stufe (k, l) sowie ein Raumzeit-Tensor der Stufe (m, n) , so gilt

$$D_\lambda T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = D_\lambda{}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n c_1 \dots c_k}{}^{d_1 \dots d_l}_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n} T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l}{}^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}$$

mit

$$\begin{aligned}
 & D_{\lambda}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n c_1 \dots c_k}{}^{d_1 \dots d_l}_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n} \\
 = & \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \partial_{\lambda} \\
 & + \delta^{a_2}_{c_2} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \omega^{a_1}_{c_1 \lambda} \\
 & + \delta^{a_1}_{c_1} \delta^{a_3}_{c_3} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \omega^{a_2}_{c_2 \lambda} + \dots \\
 & + \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_{k-1}}_{c_{k-1}} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \omega^{a_k}_{c_k \lambda} \\
 & + \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_2}^{d_2} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \omega_{b_1}^{d_1}_{\lambda} + \dots \\
 & + \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_{l-1}}^{d_{l-1}} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \omega_{b_{l-1}}^{d_{l-1}}_{\lambda} \\
 & + \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_2}_{\rho_2} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \Gamma_{\lambda \rho_1}^{\mu_1} + \dots \\
 & + \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_{m-1}}_{\rho_{m-1}} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \Gamma_{\lambda \rho_m}^{\mu_m} \\
 & - \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_2}^{\sigma_2} \dots \delta_{\nu_n}^{\sigma_n} \Gamma_{\lambda \nu_1}^{\sigma_1} - \dots \\
 & - \delta^{a_1}_{c_1} \dots \delta^{a_k}_{c_k} \delta_{b_1}^{d_1} \dots \delta_{b_l}^{d_l} \delta^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \delta^{\mu_m}_{\rho_m} \delta_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\nu_{n-1}}^{\sigma_{n-1}} \Gamma_{\lambda \nu_n}^{\sigma_n} .
 \end{aligned}$$

Die analoge Schreibweise für die $O(4)$ -kovariante Ableitung ∇_{μ} ergibt sich aus der Anwendung auf einen reinen Lorentz-Tensor, so daß dann die Terme mit dem Raumzeit-Zusammenhang Γ sowie alle Kronecker-Symbole mit Raumzeit-Indizes wegfallen. Da sich die Wirkung von $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ auf kovariante Tensoren gerade durch ein Vorzeichen von derjenigen auf kontravariante Tensoren unterscheidet, gilt für die Kontraktion der kovarianten Ableitung eines Tensors von der obigen Form mit einem Tensor $M_{a_1 \dots a_k}{}^{b_1 \dots b_l}{}_{\mu_1 \dots \mu_m}{}^{\nu_1 \dots \nu_n}$ vom Lorentz-Rang (l, k) und vom Diffeomorphismusrang (n, m) bei partieller Integration

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x M_{a_1 \dots a_k}{}^{b_1 \dots b_l}{}_{\mu_1 \dots \mu_m}{}^{\nu_1 \dots \nu_n} D_{\lambda} T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\
 = & \int d^4x M_{a_1 \dots a_k}{}^{b_1 \dots b_l}{}_{\mu_1 \dots \mu_m}{}^{\nu_1 \dots \nu_n} D_{\lambda}^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n c_1 \dots c_k}{}^{d_1 \dots d_l}_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n} T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}{}^{\rho_1 \dots \rho_m}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \\
 = & - \int d^4x (D_{\lambda c_1 \dots c_k}{}^{d_1 \dots d_l}{}_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n} T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}{}^{\rho_1 \dots \rho_m}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} M_{a_1 \dots a_k}{}^{b_1 \dots b_l}{}_{\mu_1 \dots \mu_m}{}^{\nu_1 \dots \nu_n}) \\
 = & - \int d^4x (D_{\lambda} M_{c_1 \dots c_k}{}^{d_1 \dots d_l}{}_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n}) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}{}^{\rho_1 \dots \rho_m}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} ,
 \end{aligned}$$

d. h. unter dem Integral gilt in dieser Schreibweise

$$D_{\lambda}^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n c_1 \dots c_k}{}^{d_1 \dots d_l}_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n} = -D_{\lambda c_1 \dots c_k}{}^{d_1 \dots d_l}_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n} M_{a_1 \dots a_k}{}^{b_1 \dots b_l}{}_{\mu_1 \dots \mu_m}{}^{\nu_1 \dots \nu_n} .$$

Um nun die physikalische Bedeutung von (A.23) noch etwas besser zu verstehen, betrachten wir einen Vektor $v^\mu(x) \in T_x(\mathcal{M})$, den wir längs eines infinitesimalen Vektors dx^μ *parallelverschoben*. Im Tangentialraum mit assoziiertem Zusammenhang Γ ist dies definiert als

$$v^\mu(x + dx) = v^\mu(x) + \delta v^\mu(x)$$

mit

$$\delta v^\mu(x) = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) dx^\rho v^\sigma(x).$$

Wir können diesen **Paralleltransport** aber vermöge

$$v^a(x) = e^a_\mu(x) v^\mu(x)$$

auch im lokalen Lorentz-System unter Verwendung des Spinzusammenhangs realisieren gemäß

$$v^a(x + dx) = v^a(x) + \delta v^a(x)$$

mit

$$\delta v^a(x) = -\omega^a_{b\mu} v^b(x) dx^\mu.$$

Wir werten nun Gleichung (A.1) an der Stelle $x+dx$ aus, wobei v^a und v^μ jeweils der obigen Vorschrift entsprechend paralleltransportiert werden und zudem das Vielbein $e^a_\mu(x + dx)$ um x entwickelt wird. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} v^a(x + dx) &= e^a_\mu(x + dx) v^\mu(x + dx) \\ &= (e^a_\mu(x) + (\partial_\tau e^a_\mu(x)) dx^\tau) (v^\mu(x) - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) dx^\rho v^\sigma(x)) \\ &= v^a(x) + (\partial_\rho e^a_\sigma(x) - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) e^a_\mu(x)) dx^\rho v^\sigma(x) + \mathcal{O}(dx^2) \\ &= v^a(x) - \omega^a_{b\rho} v^b(x) dx^\rho \\ &= v^a(x) - \omega^a_{b\rho} e^b_\sigma(x) v^\sigma(x) dx^\rho \\ \Leftrightarrow \quad \partial_\rho e^a_\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu e^a_\mu + \omega^a_{b\rho} e^b_\sigma &= D_\rho e^a_\sigma = 0 \end{aligned}$$

für beliebige v^μ und beliebige, infinitesimale dx^μ . Wir sehen also, daß die kovariante Konstanz des Vielbeins tatsächlich äquivalent ist zur Verträglichkeit des Paralleltransports mit dem durch das Vielbein realisierten Isomorphismus. Die Gleichung

$$v^a(x + dx) = e^a{}_\mu(x + dx)v^\mu(x + dx)$$

ist also nur dann konsistent, wenn das Vielbein ebenfalls paralleltransportiert wird gemäß

$$e^a{}_\mu(x + dx) = e^a{}_\mu(x) + \delta e^a{}_\mu(x)$$

mit

$$\delta e^a{}_\mu(x) = (\Gamma^\rho{}_{\sigma\mu}(x)e^a{}_\rho(x) - \omega^a{}_{b\sigma}(x)e^b{}_\mu(x))dx^\sigma .$$

Die Eichinvarianz von (A.23) impliziert, daß die Verträglichkeit dieser beiden Formen von Paralleltransport unter Eichtransformationen erhalten bleibt.

Mit Blick auf (A.18) stellen wir weiterhin fest, daß durch die Antisymmetrisierung

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} := 2 \Gamma^\lambda{}_{[\mu\nu]} \tag{A.26}$$

ein Tensor definiert wird, da dann wegen $\partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\xi^\lambda = 0$ der störende Term im Transformationsverhalten (A.18) unter Diffeomorphismen gerade wegfällt. Diesen Tensor bezeichnet man als die **Torsion des Raumzeitzusammenhangs** Γ , und diese Größe besitzt eine schöne, anschauliche geometrische Bedeutung. Dazu betrachten wir wie in Abbildung A.1 dargestellt zwei infinitesimale Vektoren $v^\mu(x)$ und $w^\mu(x)$. Nun bringen wir v^μ über Paralleltransport vom Punkt x zum Punkt $x + w$ und addieren ihn zu $w^\mu(x)$ hinzu, was in der Abbildung dem Weg I entspricht. Anschließend subtrahieren wir das Resultat der gleichen Prozedur, wobei wir allerdings v und w vertauschen, so daß dies gerade durch den mit II bezeichneten Weg gegeben ist.

Nach den vorangegangenen Ausführungen wissen wir nun, wie der Paralleltransport zu realisieren ist, nämlich gerade gemäß

$$v^\mu(x + w) - v^\mu(x) = -\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}(x)w^\rho(x)v^\sigma(x)$$

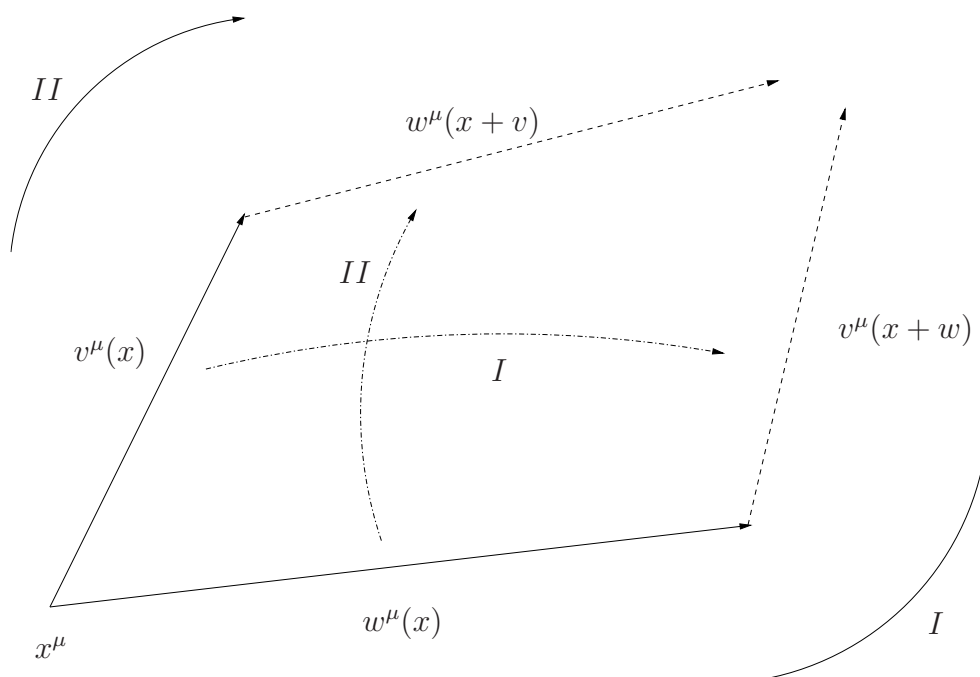


Abbildung A.1: Für nicht-verschwindende Torsion schließen vermöge Paralleltransports konstruierte Parallelogramme im allgemeinen nicht.

bzw.

$$w^\mu(x+v) - w^\mu(x) = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x)v^\rho(x)w^\sigma(x),$$

so daß sich der Kommutator dieser beiden Vorgänge zu

$$\begin{aligned} & (w^\mu(x) + v^\mu(x+w)) - (v^\mu(x) + w^\mu(x+v)) \\ &= v^\mu(x+w) - v^\mu(x) - (w^\mu(x+v) - w^\mu(x)) \\ &= -(\Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu(x))w^\rho(x)v^\sigma(x) \\ &= T_{\rho\sigma}^\mu(x)v^\rho(x)w^\sigma(x) \end{aligned}$$

ergibt. Die geometrische Aussage ist nun also folgende: Bei nicht-verschwindender Torsion schließen vermöge Paralleltransports konstruierte Parallelogramme nicht. Versieht man den \mathbb{R}^2 mit einem nicht-symmetrischen Zusammenhang $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \neq \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, so ist Abbildung A.1 wirklich eine exakte Darstellung dieses Sachverhalts.

Im metrischen Zugang hingegen schränkt man sich a priori auf den **Levi-Civita-Zusammenhang** ein, dessen zweite definierende Eigenschaft neben der Metrizität ja gerade die Torsionsfreiheit ist. Dieser Zusammenhang läßt sich dann in eindeutiger Weise durch die Metrik ausdrücken, was auf das **Christoffel-Symbol**

$$\Gamma_{\text{LC}\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\tau}(\partial_{\mu}g_{\tau\nu} + \partial_{\nu}g_{\tau\mu} - \partial_{\tau}g_{\mu\nu})$$

führt, das offensichtlich symmetrisch in den beiden unteren Indizes ist. Dies stellt also die entscheidende Verallgemeinerung der Einstein-Cartan-Theorie mit dem nach (A.16) konstruierten Raumzeit-Zusammenhang $\Gamma(e, \omega)$ gegenüber dem metrischen Zugang mit dem Levi-Civita-Zusammenhang $\Gamma_{\text{LC}}(g)$ dar: Während beide Zusammenhänge metrisch sind, erlaubt ersterer im Unterschied zu letzterem nicht-verschwindende Torsion.

A.2 Die Beziehung zum metrischen Formalismus

Wir wollen nun eine Verbindung zwischen diesen beiden Formulierungen herstellen. Dies ist auch nützlich im Hinblick auf die klassische Theorie, der das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit gewidmet ist, und die durch sie beschriebene Dynamik. Zu diesem Zweck wiederholen wir kurz die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften der zentralen Objekte im Metrik-Zugang. Wie üblich werden natürlich unter Verwendung der Metrik bzw. ihres Inversen kontra- in kovariante Raumzeit-Indizes überführt und umgekehrt. Das zentrale Objekt zur Beschreibung der gravitativen Wechselwirkung ist der **Riemannsche Krümmungstensor**

$$R_{\text{LC}\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{\rho}(g) := \partial_{\mu}\Gamma_{\text{LC}\nu\rho}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\text{LC}\mu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\text{LC}\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\text{LC}\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\text{LC}\nu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\text{LC}\mu\rho}^{\sigma}.$$

Offensichtlich gilt

$$R_{\text{LC}\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{\rho} = -R_{\text{LC}\nu\mu}{}^{\lambda}{}_{\rho}. \quad (\text{A.27})$$

Weitere Symmetrieeigenschaften dieses Tensors sind durch

$$R_{\text{LC}\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\text{LC}\mu\nu\rho\lambda}, \quad (\text{A.28})$$

die Paarsymmetrie

$$R_{LC\mu\nu\lambda\rho} = R_{LC\lambda\rho\mu\nu} \quad (\text{A.29})$$

sowie die **1. Bianchi-Identität**

$$R_{LC\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho + R_{LC\nu\rho}{}^\lambda{}_\mu + R_{LC\rho\mu}{}^\lambda{}_\nu = 0 \quad (\text{A.30})$$

gegeben, die nach (A.28)

$$\begin{aligned} R_{LC[\mu\nu\rho]}{}^\lambda &= 0 \\ \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} R_{LC\mu\nu\rho\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

impliziert [84, 85]. Durch Kontraktion des kontravarianten mit dem ersten kovarianten Index in (A.27) erhält man den **Ricci-Tensor**

$$R_{LC\mu\nu} := R_{LC\lambda\mu}{}^\lambda{}_\nu, \quad (\text{A.32})$$

der aufgrund der Paarsymmetrie (A.29) symmetrisch ist:

$$R_{LC\mu\nu} = R_{LC\nu\mu}.$$

Kontrahiert man diesen Tensor nun seinerseits mit der inversen Metrik, so erhält man den **Krümmungsskalar**

$$R_{LC} := g^{\mu\nu} R_{LC\mu\nu}. \quad (\text{A.33})$$

Betrachtet man reine Gravitation ohne Materieankopplung, so sind die Bewegungsgleichungen durch die **Einstein-Gleichungen** im Vakuum

$$R_{LC\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{LC} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.34})$$

mit der kosmologischen Konstanten Λ gegeben.

Wir kehren nun zur Einstein-Cartan-Theorie zurück und betrachten diese für verschwin-

dende Torsion, d. h. es sei

$$T_{\mu\nu}^{\lambda}(e, \omega) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Das sind 24 Gleichungen, die sich nun nach den 24 Komponenten des Spinzusammenhangs $\omega = \omega(e)$ auflösen lassen. Dazu geht man in der gleichen Weise vor wie gewöhnlich bei der Ableitung des Christoffel-Symbols (A.27) aus der Metrizität des Zusammenhangs: Wir schreiben (A.35) mit $e_{a\lambda} := e_a^{\tau} g_{\tau\lambda}$ in der Form

$$2 e_{a\lambda} \nabla_{[\mu} e^a_{\nu]} = 0,$$

addieren eine zyklische Permutation von $(\lambda\mu\nu)$ und subtrahieren die dritte. Dies liefert

$$\begin{aligned} & 2(e_{a\lambda} \nabla_{[\mu} e^a_{\nu]} + e_{a\mu} \nabla_{[\nu} e^a_{\lambda]} - e_{a\nu} \nabla_{[\lambda} e^a_{\mu]}) \\ = & 2(e_{a\lambda} \partial_{[\mu} e^a_{\nu]} + e_{a\mu} \partial_{[\nu} e^a_{\lambda]} - e_{a\nu} \partial_{[\lambda} e^a_{\mu]}) \\ & + e_{a\lambda} (\omega^a_{b\mu} e^b_{\nu} - \omega^a_{b\nu} e^b_{\mu}) + e_{a\mu} (\omega^a_{b\nu} e^b_{\lambda} - \omega^a_{b\lambda} e^b_{\nu}) - e_{a\nu} (\omega^a_{b\lambda} e^b_{\mu} - \omega^a_{b\mu} e^b_{\lambda}) \\ = & 2(e_{a\lambda} \partial_{[\mu} e^a_{\nu]} + e_{a\mu} \partial_{[\nu} e^a_{\lambda]} - e_{a\nu} \partial_{[\lambda} e^a_{\mu]}) \\ & + e_{a\lambda} (\omega^a_{b\mu} e^b_{\nu} - \omega^a_{b\nu} e^b_{\mu}) + e_{a\mu} (\omega^a_{b\nu} e^b_{\lambda} - \omega^a_{b\lambda} e^b_{\nu}) \\ & + e_{b\mu} \omega^b_{a\lambda} e^a_{\nu} - e_{b\lambda} \omega^b_{a\mu} e^a_{\nu} \\ = & 2(e_{a\lambda} \partial_{[\mu} e^a_{\nu]} + e_{a\mu} \partial_{[\nu} e^a_{\lambda]} - e_{a\nu} \partial_{[\lambda} e^a_{\mu]}) \\ & + e_{a\mu} \omega^a_{b\nu} e^b_{\lambda} - e_{a\lambda} \omega^a_{b\nu} e^b_{\mu} \\ = & 0 \\ \Rightarrow & e_{a\lambda} \omega^a_{b\nu} e^b_{\mu} - e_{a\mu} \omega^a_{b\nu} e^b_{\lambda} \\ = & 2 e_{a\lambda} \omega^a_{b\nu} e^b_{\mu} \\ = & 2(e_{a\lambda} \partial_{[\mu} e^a_{\nu]} + e_{a\mu} \partial_{[\nu} e^a_{\lambda]} - e_{a\nu} \partial_{[\lambda} e^a_{\mu]}) \\ \Rightarrow \quad \omega^{ab}_{\mu}(e) = & e^{a\lambda} (e_{c\nu} \partial_{[\mu} e^c_{\lambda]} + e_{c\lambda} \partial_{[\nu} e^c_{\mu]} - e_{c\mu} \partial_{[\lambda} e^c_{\nu]}) e^{b\nu} \\ = & e^{a\lambda} \partial_{[\mu} e^b_{\lambda]} + e^{b\nu} \partial_{[\nu} e^a_{\mu]} - e^{a\lambda} e^{b\nu} (\partial_{[\lambda} e^c_{\nu]}) e_{c\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

so daß für nicht-verschwindende Torsion in der Einstein-Cartan-Theorie alle dynamischen

Freiheitsgrade durch diejenigen des Vielbeins gegeben sind. Nach Ausdivision der sechsdimensionalen Eichgruppe $O(4)$ verbleiben $16 - 6 = 10$ physikalische Freiheitsgrade, was genau der Anzahl unabhängiger Komponenten des symmetrischen Tensorfeldes $g_{\mu\nu}(x)$ im Metrik-Zugang entspricht. Dabei haben wir in den obigen Umformungen die Existenz eines inversen Vielbeins e_a^μ vorausgesetzt.

Wir beweisen nun folgenden

Satz: Der Zusammenhang $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(e) \equiv \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(e, \omega(e)) = e_a^\lambda(\partial_\mu e^a_\nu + \omega^a_{b\mu}(e)e^b_\nu)$ mit $\omega^a_{b\mu}(e)$ aus (A.36) ist identisch mit dem Christoffel-Symbol $\Gamma_{\text{LC}\mu\nu}^\lambda(g)$ der Metrik $g_{\mu\nu}$ aus (A.5).

Beweis: Mit $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(e) &= e_a^\lambda \left[\partial_\mu e^a_\nu + \frac{1}{2} e^{a\rho} (\partial_\mu e_{b\rho} - \partial_\rho e_{b\mu}) e^b_\nu + \partial_{[\nu} e^a_{\mu]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} e^{a\rho} (\partial_\rho e^b_\nu - \partial_\nu e^b_\rho) e_{b\mu} \right] \\
&= e_a^\lambda \left[\partial_\mu e^a_\nu + \frac{1}{2} e^{a\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} - e_{b\rho} \partial_\mu e^b_\nu - \partial_\rho g_{\mu\nu} + e_{b\mu} \partial_\rho e^b_\nu) \right. \\
&\quad \left. + \partial_{[\nu} e^a_{\mu]} - \frac{1}{2} e^{a\rho} (\partial_\rho g_{\nu\mu} - e^b_\nu \partial_\rho e_{b\mu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + e^b_\rho \partial_\nu e_{b\mu}) \right] \\
&= e_a^\lambda \left[\partial_\mu e^a_\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu e^a_\nu + \partial_{[\nu} e^a_{\mu]} - \frac{1}{2} \partial_\nu e^a_\mu \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} e^{a\rho} (e_{b\mu} \partial_\rho e^b_\nu + e^b_\nu \partial_\rho e_{b\mu}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} e^{a\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu}) \right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - 2 \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\
&= \Gamma_{\text{LC}\mu\nu}^\lambda(g). \tag{A.37}
\end{aligned}$$

In diesem Sinne sind also die beiden Formulierungen für verschwindende Torsion wirklich äquivalent.

Um die **Beziehung zwischen den Krümmungstensoren** $F^a_{b\mu\nu}$ und $R_{\text{LC}\nu\rho\sigma}^\mu$ abzuleiten, die diese Äquivalenz der Raumzeit-Zusammenhänge impliziert, drücken wir nun vermöge Inversion der Beziehung (A.36) den torsionsfreien Spinzusammenhang durch den

zugehörigen Raumzeit-Zusammenhang $\Gamma(e)$ aus gemäß

$$\omega_{\mu}^{ab}(e) = (-\partial_{\mu}e^a_{\nu} + e^a_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(e))e^{b\nu}.$$

Mit der Definition (A.11) erhalten wir dann den zugehörigen Feldstärketensor zu

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{ab}(e) &= 2(\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^{ab} + \omega_{c[\mu}\omega_{\nu]}^{cb}) \\ &= 2[\partial_{[\mu}((-\partial_{\nu]}e^a_{\rho} + e^a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho})e^{b\rho} \\ &\quad + (-\partial_{[\mu}e^a_{\rho} + e^a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho]})e_c^{\rho}(-\partial_{\nu]}e^c_{\lambda} + e^c_{\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda})e^{b\lambda}] \\ &= 2[(\partial_{[\mu}e^a_{\rho})\partial_{\nu]}e^{b\rho} + (\partial_{[\mu}e^a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho})e^{b\rho} - e^a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho}\partial_{\nu]}e^{b\rho} \\ &\quad + (\partial_{[\mu}e^a_{\rho})(\partial_{\nu]}e^c_{\lambda})e_c^{\rho}e^{b\lambda} - e^{b\lambda}\delta^{\rho}_{\tau}(\partial_{[\mu}e^a_{\rho})\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda} \\ &\quad - e^a_{\sigma}e^{b\lambda}\Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho}e_c^{\rho}\partial_{\nu]}e^c_{\lambda} + e^a_{\sigma}e^{b\lambda}\delta^{\rho}_{\tau}\Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}e^{b\lambda}] \\ &= 2[(\partial_{[\mu}e^a_{\rho})\partial_{\nu]}e^{b\rho} + (\partial_{[\mu}e^a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho})e^{b\rho} - e^a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho}\partial_{\nu]}e^{b\rho} \\ &\quad - (\partial_{[\mu}e^a_{\rho})\partial_{\nu]}e^{b\rho} - (\partial_{[\mu}e^a_{\rho})\Gamma^{\rho}_{\nu]\lambda}e^{b\lambda} \\ &\quad + e^a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho}\partial_{\nu]}e^{b\rho} + e^a_{\sigma}e^{b\lambda}\Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu]\lambda}] \\ &= 2e^a_{\rho}e^{b\sigma}(\partial_{[\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu]\sigma} + \Gamma^{\rho}_{[\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu]\sigma}) \end{aligned}$$

unter Verwendung von $\partial_{\mu}\eta_{ab} = 0$, was mit $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(e) = \Gamma_{\text{LC}\mu\nu}^{\lambda}(g)$ für Torsionsfreiheit nach (A.37) auf

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{ab}(e) &= 2e^a_{\rho}e^{b\sigma}(\partial_{[\mu}\Gamma_{\text{LC}\nu]\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\text{LC}[\mu\tau}^{\rho}\Gamma_{\text{LC}\nu]\sigma}^{\tau}) \\ &= e^a_{\rho}e^{b\sigma}R_{\text{LC}\mu\nu\sigma}^{\rho}(g) \end{aligned}$$

mit $g_{\mu\nu} = e^a_{\mu}e^b_{\nu}\eta_{ab}$ und der Definition (A.27) des Riemannschen Krümmungstensors führt. Die Umkehrung liefert dann für torsionsfreie Zusammenhänge $\omega = \omega(e)$ die Beziehung

$$R_{\text{LC}\mu\nu\sigma}^{\rho}(g) = e_a^{\rho}e_{b\sigma}F_{\mu\nu}^{ab}(e) \equiv F_{\sigma\mu\nu}^{\rho}(e). \quad (\text{A.38})$$

Definieren wir noch für allgemeine Spinzusammenhänge - also insbesondere für solche, die nicht notwendigerweise auf verschwindende Torsion führen - den Tensor

$$F_{\mu}^a(\omega) := e_b^{\nu}F_{\mu\nu}^{ab} = e_b^{\nu}F_{\nu\mu}^{ba} \quad (\text{A.39})$$

sowie den Skalar

$$F(\omega) := e_a^\mu e_b^\nu F_{\mu\nu}^{ab} = e_a^\mu F_\mu^a,$$

so gelten im torsionsfreien Fall nach (A.38) für den Ricci-Tensor und den Krümmungsskalar die Beziehungen

$$R_{\text{LC}\mu\nu} = e_a^\rho e_{b\nu} F_{\rho\mu}^{ab} = F_\mu^a e_{a\nu}$$

und

$$R_{\text{LC}} = F.$$

Für allgemeine Raumzeit-Zusammenhänge $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(e, \omega)$ mit $\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \neq 0$ führen wir nun noch ein Analogon zum Riemannschen Krümmungstensors ein gemäß

$$R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho(e, \omega) := \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma. \quad (\text{A.40})$$

Wir wollen an dieser Stelle noch eine nützliche Formel angeben, die die Beziehung zwischen dem Spinzusammenhang einerseits sowie dem Vielbein und der Torsion andererseits präzisiert. Dazu definieren wir den **Kontorsionstensor**

$$K_{\mu\nu}^a := \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^a - e^{a\rho} e_{b\mu} T_{\nu\rho}^b + e^{a\rho} e_{b\nu} T_{\rho\mu}^b), \quad (\text{A.41})$$

und es gilt nun

$$\omega_{\mu}^{ab} = \omega_{\mu}^{ab}(e) + e^{b\nu} K_{\mu\nu}^a. \quad (\text{A.42})$$

Wir beweisen diese Formel, indem wir sie mit $e_{b\rho}$ kontrahieren und anschließend ρ in ν umbenennen. Dann gilt zunächst

$$\omega_{\mu}^{ab}(e) e_{b\nu} = e^{a\lambda} (\partial_{[\mu} e_{\lambda]}^b) e_{b\nu} + \partial_{[\nu} e_{\mu]}^a - e^{a\lambda} (\partial_{[\lambda} e_{\nu]}^c) e_{c\mu}$$

und damit

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu}^a &= \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}^a - e^{a\rho}e_{b\mu}T_{\nu\rho}^b + e^{a\rho}e_{b\nu}T_{\rho\mu}^b) \\
&= \frac{1}{2}[\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \omega_{b\nu}^a e_\mu^b \\
&\quad - e^{a\lambda}e_{b\mu}(\partial_\nu e_\lambda^b - \partial_\lambda e_\nu^b + \omega_{c\nu}^b e_\lambda^c - \omega_{c\lambda}^b e_\nu^c) \\
&\quad + e^{a\lambda}e_{b\nu}(\partial_\lambda e_\mu^b - \partial_\mu e_\lambda^b + \omega_{c\lambda}^b e_\mu^c - \omega_{c\mu}^b e_\lambda^c)] \\
&= -\partial_{[\nu}e_{\mu]}^a + e^{a\lambda}(\partial_{[\lambda}e_{\nu]}^b)e_{b\mu} - e^{a\lambda}(\partial_{[\mu}e_{\lambda]}^b)e_{b\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \omega_{b\nu}^a e_\mu^b - \omega_{\nu}^{ba}e_{b\mu} + \omega_{c\lambda}^b e_{b\mu}e_\nu^c e^{a\lambda} + \omega_{c\lambda}^b e_{b\nu}e_\mu^c e^{a\lambda} - \omega_{a\mu}^b e_{b\mu}e_{b\nu}) \\
&= -\omega_{\mu}^{ab}(e)e_{b\nu} + \omega_{\mu}^{ab}e_{b\nu}, \tag{A.43}
\end{aligned}$$

was nach Multiplikation mit einem inversen Vielbein die Behauptung beweist.

Wir berechnen nun den **Kommutator zweier kovarianter Ableitungen** der Form (A.20) eines Objektes mit einem kontravarianten Lorentz-Index sowie einem kovarianten Raumzeit-Index. Da diese sowohl den Spin- als auch den Raumzeit-Zusammenhang enthält, wird in der Lie-Klammer neben dem Feldstärketensor (A.11) auch der gerade definierte Raumzeit-Krümmungstensor (A.40) auftreten. Explizit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&[D_\mu, D_\nu]v_\rho^a \\
&= 2D_{[\mu}(\partial_{\nu]}v_\rho^a + \omega_{b\nu]}^a v_\rho^b - \Gamma_{\nu]\rho}^\sigma v_\sigma^a) \\
&= 2[\partial_{[\mu}(\partial_{\nu]}v_\rho^a + \omega_{b\nu]}^a v_\rho^b - \Gamma_{\nu]\rho}^\sigma v_\sigma^a) + \omega_{b[\mu}^a(\partial_{\nu]}v_\rho^b + \omega_{c\nu]}^b v_\rho^c - \Gamma_{\nu]\rho}^\sigma v_\sigma^b) \\
&\quad - \Gamma_{[\mu\nu]}^\sigma(\partial_\sigma v_\rho^a + \omega_{b\sigma}^a v_\rho^b - \Gamma_{\sigma\rho}^\tau v_\tau^a) - \Gamma_{[\mu\rho]}^\sigma(\partial_{\nu]}v_\sigma^a + \omega_{b\nu]}^a v_\sigma^b - \Gamma_{\nu]\sigma}^\tau v_\tau^a)] \\
&= 2[(\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^a) v_\rho^b + \omega_{b[\mu}^a \omega_{\nu]}^{bc} v_\rho^c - \Gamma_{[\mu\nu]}^\sigma D_\sigma v_\rho^a \\
&\quad - (\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\rho}^\sigma) v_\sigma^a - \Gamma_{[\mu\sigma}^\tau \Gamma_{\nu]\rho}^\sigma v_\tau^a)] \\
&= F_{b\mu\nu}^a v_\rho^b - T_{\mu\nu}^\sigma D_\sigma v_\rho^a - R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\rho v_\sigma^a. \tag{A.44}
\end{aligned}$$

Des weiteren berechnen wir noch

$$[D_\mu, D^2]v_\rho^a = (D^\nu[D_\mu, D_\nu] + [D_\mu, D_\nu]D^\nu)v_\rho^a.$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned}
& D_{[\mu}D_{\nu]}D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&= \partial_{[\mu}D_{\nu]}D_{\lambda}v^{\rho}_a + \omega^a_{b[\mu}D_{\nu]}D_{\lambda}v^b_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{[\mu\nu]}D_{\sigma}D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&\quad - \Gamma^{\sigma}_{[\mu\lambda]}D_{\nu]}D_{\sigma}v^{\rho}_a - \Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho]}D_{\nu]}D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&= \partial_{[\mu}(\partial_{\nu]}D_{\lambda}v^{\rho}_a + \omega^a_{b\nu]}D_{\lambda}v^b_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu]\lambda}D_{\sigma}v^{\rho}_a - \Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho}D_{\lambda}v^{\rho}_a) \\
&\quad + \omega^a_{b[\mu}(\partial_{\nu]}D_{\lambda}v^b_{\rho} + \omega^b_{c\nu]}D_{\lambda}v^c_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu]\lambda}D_{\sigma}v^b_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho}D_{\lambda}v^b_{\sigma}) \\
&\quad - \Gamma^{\sigma}_{[\mu\nu]}D_{\sigma}D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&\quad - \Gamma^{\sigma}_{[\mu\lambda]}(\partial_{\nu]}D_{\sigma}v^{\rho}_a + \omega^a_{b\nu]}D_{\sigma}v^b_{\rho} - \Gamma^{\tau}_{\nu]\sigma}D_{\tau}v^{\rho}_a - \Gamma^{\tau}_{\nu]\rho}D_{\sigma}v^{\rho}_a) \\
&\quad - \Gamma^{\sigma}_{[\mu\rho]}(\partial_{\nu]}D_{\lambda}v^{\rho}_a + \omega^a_{b\nu]}D_{\lambda}v^b_{\sigma} - \Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}D_{\tau}v^{\rho}_a - \Gamma^{\tau}_{\nu]\sigma}D_{\lambda}v^{\rho}_a) \\
&= \frac{1}{2}F^a_{b\mu\nu}D_{\lambda}v^b_{\rho} - \frac{1}{2}T^{\sigma}_{\mu\nu}D_{\sigma}D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&\quad - (\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\lambda})D_{\sigma}v^{\rho}_a - (\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho})D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&\quad - \Gamma^{\tau}_{[\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\lambda}D_{\tau}v^{\rho}_a - \Gamma^{\tau}_{[\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho}D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&= \frac{1}{2}F^a_{b\mu\nu}D_{\lambda}v^b_{\rho} - \frac{1}{2}T^{\sigma}_{\mu\nu}D_{\sigma}D_{\lambda}v^{\rho}_a - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{\sigma}{}_{\lambda}D_{\sigma}v^{\rho}_a - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho}D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&\Rightarrow g^{\nu\lambda}[D_{\mu}, D_{\nu}]D_{\lambda}v^{\rho}_a \\
&= g^{\nu\lambda}[F^a_{b\mu\nu}D_{\lambda}v^b_{\rho} - T^{\sigma}_{\mu\nu}D_{\sigma}D_{\lambda}v^{\rho}_a - R_{\mu\nu}{}^{\sigma}{}_{\lambda}D_{\sigma}v^{\rho}_a - R_{\mu\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho}D_{\lambda}v^{\rho}_a], \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

woran sich zusammen mit (A.44) eine Gesetzmäßigkeit für die Anwendung eines derartigen Kommutators auf einen beliebigen Tensor ablesen läßt.

Zusammen mit (A.44) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
& [D_\mu, D^2]v^a{}_\rho \\
= & g^{\nu\lambda} [D_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} v^b{}_\rho + F^a{}_{b\mu\nu} D_\lambda v^b{}_\rho \\
& - D_\lambda T^{\sigma}{}_{\mu\nu} D_\sigma v^a{}_\rho - T^{\sigma}{}_{\mu\nu} D_\sigma D_\lambda v^a{}_\rho \\
& - D_\lambda R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho v^a{}_\sigma - R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\lambda D_\sigma v^a{}_\rho - R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho D_\lambda v^a{}_\sigma] \\
= & g^{\nu\lambda} [(D_\lambda F^a{}_{b\mu\nu}) v^b{}_\rho + 2F^a{}_{b\mu\nu} D_\lambda v^b{}_\rho \\
& - (D_\lambda T^{\sigma}{}_{\mu\nu}) D_\sigma v^a{}_\rho - T^{\sigma}{}_{\mu\nu} (D_\lambda D_\sigma + D_\sigma D_\lambda) v^a{}_\rho \\
& - (D_\lambda R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho) v^a{}_\sigma - R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\lambda D_\sigma v^a{}_\rho - 2R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho D_\lambda v^a{}_\sigma] \\
= & g^{\nu\lambda} [(D_\lambda F^a{}_{b\mu\nu}) v^b{}_\rho + 2F^a{}_{b\mu\nu} D_\lambda v^b{}_\rho - (D_\lambda T^{\sigma}{}_{\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\lambda) D_\sigma v^a{}_\rho \\
& - (D_\lambda R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho) v^a{}_\sigma - 2R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho D_\lambda v^a{}_\sigma \\
& - T^{\sigma}{}_{\mu\nu} ([D_\lambda, D_\sigma] + 2D_\sigma D_\lambda) v^a{}_\rho] \\
= & g^{\nu\lambda} [(D_\lambda F^a{}_{b\mu\nu}) v^b{}_\rho + 2F^a{}_{b\mu\nu} D_\lambda v^b{}_\rho - (D_\lambda T^{\sigma}{}_{\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\lambda) D_\sigma v^a{}_\rho \\
& - (D_\lambda R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho) v^a{}_\sigma - 2R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho D_\lambda v^a{}_\sigma \\
& - T^{\sigma}{}_{\mu\nu} ([D_\lambda, D_\sigma] + 2D_\sigma D_\lambda) v^a{}_\rho] \\
= & g^{\nu\lambda} [(D_\lambda F^a{}_{b\mu\nu}) v^b{}_\rho + 2F^a{}_{b\mu\nu} D_\lambda v^b{}_\rho - (D_\lambda T^{\sigma}{}_{\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\lambda) D_\sigma v^a{}_\rho \\
& - (D_\lambda R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho) v^a{}_\sigma - 2R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho D_\lambda v^a{}_\sigma \\
& - T^{\sigma}{}_{\mu\nu} (F^a{}_{b\lambda\sigma} v^b{}_\rho - T^{\tau}{}_{\lambda\sigma} D_\tau v^a{}_\rho - R^{\tau}{}_{\lambda\sigma}{}^\rho v^a{}_\tau) - 2T^{\sigma}{}_{\mu\nu} D_\sigma D_\lambda v^a{}_\rho] \\
= & g^{\nu\lambda} [(D_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} - F^a{}_{b\lambda\sigma} T^{\sigma}{}_{\mu\nu}) v^b{}_\rho + 2F^a{}_{b\mu\nu} D_\lambda v^b{}_\rho \\
& - (D_\lambda T^{\sigma}{}_{\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\lambda - T^{\tau}{}_{\mu\nu} T^{\sigma}{}_{\lambda\tau}) D_\sigma v^a{}_\rho \\
& - (D_\lambda R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho - T^{\tau}{}_{\mu\nu} R^{\sigma}{}_{\lambda\tau}{}^\rho) v^a{}_\sigma \\
& - 2R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho D_\lambda v^a{}_\sigma - 2T^{\sigma}{}_{\mu\nu} D_\sigma D_\lambda v^a{}_\rho] \\
= & (D^\nu F^a{}_{b\mu\nu} - F^a{}_{b\sigma}{}^\nu T^{\sigma}{}_{\mu\nu}) v^b{}_\rho + 2F^a{}_{b\mu\nu} D^\nu v^b{}_\rho \\
& - (D^\nu T^{\sigma}{}_{\mu\nu} + R^{\sigma\nu}{}_{\mu\nu} - g^{\nu\lambda} T^{\tau}{}_{\mu\nu} T^{\sigma}{}_{\lambda\tau}) D_\sigma v^a{}_\rho \\
& - (D^\nu R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho - T^{\tau}{}_{\mu\nu} R^{\sigma}{}_{\tau\rho}{}^\nu) v^a{}_\sigma \\
& - 2R^{\sigma}{}_{\mu\nu}{}^\rho D^\nu v^a{}_\sigma - 2T^{\sigma}{}_{\mu\nu} D_\sigma D^\nu v^a{}_\rho, \tag{A.46}
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt noch einmal (A.44) eingesetzt und zudem wieder die Produktregel benutzt haben.

Zum Ende dieses Abschnittes möchten wir noch das **Levi-Civita-Symbol** einführen und kurz einige nützliche Identitäten angeben. Zunächst sei in jedem lokalen Lorentz-System der auf dem \mathbb{R}^4 wohldefinierte total-antisymmetrische Tensor ε^{abcd} mit $\varepsilon^{0123} = +1 = \varepsilon_{0123}$ gegeben. Er erfüllt die üblichen Relationen

$$\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{efgd} = \zeta(\delta_a^e\delta_b^f\delta_c^g + \delta_a^f\delta_b^g\delta_c^e + \delta_a^g\delta_b^e\delta_c^f - \delta_a^e\delta_b^g\delta_c^f - \delta_a^f\delta_b^e\delta_c^g - \delta_a^g\delta_b^f\delta_c^e) \quad (\text{A.47})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{abcd}\varepsilon^{efcd} = 2\zeta(\delta_a^e\delta_b^f - \delta_a^f\delta_b^e) \quad (\text{A.48})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{abcd}\varepsilon^{ebcd} = 6\zeta\delta_a^e \quad (\text{A.49})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{abcd}\varepsilon^{abcd} = 24\zeta. \quad (\text{A.50})$$

Man beachte, daß sich bloß an dieser Stelle die bisherigen Ausführungen für Lorentz- und euklidische **Signatur der Mannigfaltigkeit** unterscheiden, was sich in einem relativen Vorzeichen der Relation (A.47) sowie der aus ihr abgeleiteten Beziehungen (A.48) - (A.50) niederschlägt. Für Lorentz- und euklidische Signatur folgt nämlich aus der Orientierung $\varepsilon^{0123} = +1$ durch Kontraktion mit $\{\eta_{ab}\} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$, daß $\varepsilon_{0123} = -1$ gilt. Wir haben dies in den Relationen durch einen entsprechenden Faktor ζ derart berücksichtigt, daß $\zeta = +1$ die euklidischen und $\zeta = -1$ die Lorentz-Identitäten liefert.

Der Levi-Civita-Tensor induziert eine **Orientierung der Raumzeit-Mannigfaltigkeit**, und mit seiner Hilfe können wir unter anderem die Determinante des inversen Vielbeins in der Form

$$e^{-1} = e_a^0 e_b^1 e_c^2 e_d^3 \varepsilon^{abcd}$$

schreiben, was die Definition der ε -**Tensordichte**

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} := e e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma \varepsilon^{abcd} \quad (\text{A.51})$$

motiviert. Multiplikation mit zwei inversen Vielbeinen liefert

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\rho^c e_\sigma^d = e e_a^\mu e_b^\nu \varepsilon^{abcd}, \quad (\text{A.52})$$

woraus unter Verwendung von (A.49)

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^a{}_\rho e^b{}_\sigma \varepsilon_{abcd} &= 2\zeta e e_a{}^\mu e_b{}^\nu (\delta^a{}_c \delta^b{}_d - \delta^a{}_d \delta^b{}_c) \\ &= 4\zeta e e_{[c}{}^\mu e_{d]}{}^\nu\end{aligned}\tag{A.53}$$

und somit

$$e(e_a{}^\mu e_b{}^\nu - e_a{}^\nu e_b{}^\mu) = \frac{\zeta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^c{}_\rho e^d{}_\sigma\tag{A.54}$$

folgt. Eine weitere Kontraktion mit $e^a{}_\mu e^b{}_\nu$ führt schließlich auf

$$\begin{aligned}e(4 \cdot 4 - 4) &= 12e = \frac{\zeta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \\ \Rightarrow e &= \frac{\zeta}{24} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma.\end{aligned}\tag{A.55}$$

Aus (A.3) ergibt sich analog zu der Variation inverser Matrizen die Variation des inversen Vielbeins zu

$$\delta e_a{}^\mu = -e_a{}^\nu (\delta e^b{}_\nu) e_b{}^\mu.\tag{A.56}$$

Die Variation der Determinante bestimmt man wie in der linearen Algebra üblich: Für eine komplexe $n \times n$ -Matrix A mit $\varepsilon \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\det(e^{(\varepsilon A)}) &= e^{\text{Tr}(\varepsilon A)} = e^{\varepsilon \text{Tr} A} \\ \Rightarrow \det(\mathbb{1} + \varepsilon A) &= 1 + \varepsilon \text{Tr} A + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

womit sich für $M \in \mathbb{C}_{n \times n}$ und eine infinitesimale Variation dM in erster Ordnung

$$\begin{aligned}d \ln(\det M) &= \ln(\det(M + dM)) - \ln(\det M) \\ &= \ln\left(\frac{\det(M + dM)}{\det M}\right) \\ &= \ln(\det(M^{-1}(M + dM))) \\ &= \ln(\det(\mathbb{1} + M^{-1}dM))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(1 + \text{Tr}(M^{-1}dM) + \mathcal{O}((dM)^2)) \\
&= \text{Tr}(M^{-1}dM) + \mathcal{O}((dM)^2) \\
\Rightarrow \quad d \ln(\det M) &= \frac{1}{\det M} d(\det M) = \text{Tr}(M^{-1}dM) + \mathcal{O}((dM)^2) \\
\Rightarrow \quad d(\det M) &= (\det M) \text{Tr}(M^{-1}dM) + \mathcal{O}((dM)^2)
\end{aligned}$$

ergibt. Somit erhält man für die **Variation der Determinante des Vielbeins**

$$\delta e = e e_a^\mu \delta e^a_\mu. \quad (\text{A.57})$$

Die **Variation der Tensordichte** $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ verschwindet hingegen, da zunächst

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} &= e (e_e^\lambda e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma - e_a^\lambda e_e^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma - e_a^\mu e_b^\lambda e_e^\nu e_c^\rho e_d^\sigma \\
&\quad - e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda e_e^\rho e_d^\sigma - e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\lambda e_e^\sigma) \varepsilon^{abcd} \delta e^e_\lambda \\
&= (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_e^\lambda - \varepsilon^{\lambda\nu\rho\sigma} e_e^\mu - \varepsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} e_e^\nu - \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} e_e^\rho - \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} e_e^\sigma) \delta e^e_\lambda
\end{aligned}$$

gilt. Sind in diesem Ausdruck nun alle Indizes μ, ν, ρ, σ verschieden, so liefern die zu subtrahierenden Terme von links nach rechts jeweils einen Beitrag für $\lambda = \mu$ bzw. $\lambda = \nu$ bzw. $\lambda = \rho$ bzw. $\lambda = \sigma$, was zusammen gerade den ersten Term kompensiert. Seien weiterhin mit o. B. d. A. $\mu = \nu$ genau zwei Indizes gleich, so liefern von den fünf Termen bloß zwei Beiträge, und zwar gerade die ersten beiden der vier zu subtrahierenden Terme, in denen jeweils einer der beiden gleichen Indizes durch den Summationsindex λ ersetzt wird. In unserem Beispiel ergibt sich also ohne Summation über den doppelten Index $\mu = \nu$

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon^{\mu\mu\rho\sigma} &= (-\varepsilon^{\lambda\mu\rho\sigma} e_e^\mu - \varepsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} e_e^\mu) \delta e^e_\lambda \\
&= (\varepsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} e_e^\mu - \varepsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} e_e^\mu) \delta e^e_\lambda \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sind schließlich mehr als zwei Indizes gleich, so verschwindet jeder einzelne der fünf Terme. Wir erhalten somit wie behauptet

$$\delta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad (\text{A.58})$$

was insbesondere

$$\partial_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (\text{A.59})$$

impliziert.

Die Tatsache, daß die Tensordichte $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ die Orientierung der Mannigfaltigkeit erfäßt, läßt sich auch an der Gleichung

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$$

für die **orientierte Volumenform** ablesen. Diese Identität besagt, daß die Levi-Civita-Tensordichte wie ihr Pendant im flachen Minkowski-Raum einer Permutation der Indexmenge $\{1; 2; 3; 4\}$ (im Euklidischen) das entsprechende Signum zuordnet. Aus dieser Darstellung des Levi-Civita-Symbols ist zudem unmittelbar ersichtlich, daß die Tensordichte $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ unabhängig von dem Vielbein $e^a_\mu(x)$ und somit x_μ -unabhängig ist.

Damit beenden wir diesen einführenden Abschnitt zu den Grundlagen der Einstein-Cartan-Theorie.

Anhang B

(Anti-)Selbstduale euklidische Zusammenhänge und Feldstärken

Den Hauptgegenstand dieses kurzen Kapitels bildet der Beweis eines Satzes, auf den bei der Diskussion der Holst-Wirkung Bezug genommen wird. Zuvor wollen wir jedoch die dafür erforderlichen Begriffe einführen. Ein Lie-Algebra-Element $\Omega^{ab} = -\Omega^{ba} \in o(4)$ heißt **selbstdual**, wenn es Eigenvektor des **Dualitätsoperators** \star bezüglich der Lorentz-Indizes zum Eigenwert $+1$ ist, also

$$\star \Omega^{ab} := \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \Omega^{cd} = \Omega^{ab} . \quad (\text{B.1})$$

Ein **anti-selbstdualer** $O(4)$ -**Tensor** hingegen besitzt den Eigenwert -1 . Wir bezeichnen dabei diese Operation mit \star , um sie von der Hodge-Dualität zu unterscheiden. Diese wirkt auf Raumzeit-Indizes und ist beispielsweise in dem Sinne mit dem Integral verträglich, daß sie über dieses ein inneres Produkt für Differentialformen definiert. Sie wird gängigerweise mit dem Symbol $*$ bezeichnet.

Wir definieren nun die Projektoren $W^{(\pm)} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \star)$ auf diese beiden Chiralitäten, und

es gilt entsprechend

$$W^{(\pm)ab}{}_{cd} = \frac{1}{2}(\eta^a{}_c\eta^b{}_d \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{cd}), \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W^{(\pm)ab}{}_{cd}W^{(\pm)cd}{}_{[ef]} &= \frac{1}{4}(\eta^a{}_c\eta^b{}_d \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{cd})(\eta^c{}_{[e}\eta^d{}_{f]} \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{cd}{}_{ef}) \\ &= \frac{1}{4}(\eta^a{}_{[e}\eta^b{}_{f]} \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{ef} \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{ef} + \frac{1}{4} \cdot 2(\eta^a{}_e\eta^b{}_f - \eta^a{}_f\eta^b{}_e)) \\ &= \frac{1}{4}(\eta^a{}_{[e}\eta^b{}_{f]} \pm \varepsilon^{ab}{}_{ef} + \eta^a{}_{[e}\eta^b{}_{f]}) \\ &= \frac{1}{2}(\eta^a{}_{[e}\eta^b{}_{f]} \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{ef}) \\ &\equiv W^{(\pm)ab}{}_{[ef]}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W^{(\pm)ab}{}_{cd}W^{(\mp)cd}{}_{[ef]} &= \frac{1}{4}(\eta^a{}_{[e}\eta^b{}_{f]} \pm \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{ef} \mp \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{ef} - \frac{1}{2}(\eta^a{}_e\eta^b{}_f - \eta^a{}_f\eta^b{}_e)) \\ &= \frac{1}{4}(\eta^a{}_{[e}\eta^b{}_{f]} - \eta^a{}_{[e}\eta^b{}_{f]}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

unter Verwendung der euklidischen Relation für die ε -Kontraktion. Zudem gilt $W^{(\pm)ab}{}_{cd} \equiv W^{(\pm)ab}{}_{[cd]}$ bei Anwendung auf einen antisymmetrischen Tensor. Die beiden Unterräume sind nach (B.4) orthogonal, und man kann nun einen beliebigen algebrawertigen Tensor eindeutig in eine selbstduale und eine anti-selbstduale Komponente zerlegen, gemäß

$$\Omega^{ab} = \Omega^{+ab} + \Omega^{-ab},$$

mit

$$\Omega^{\pm ab} := W^{(\pm)ab}{}_{cd}\Omega^{cd} = \frac{1}{2}(\Omega^{ab} \pm \star\Omega^{ab}). \quad (\text{B.5})$$

Wegen

$$\star\star\Omega^{ab} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}{}_{cd}\varepsilon^{cd}{}_{ef}\Omega^{ef} = \frac{1}{2}(\eta^a{}_c\eta^b{}_d - \eta^a{}_d\eta^b{}_c)\Omega^{cd} = \frac{1}{2}(\Omega^{ab} - \Omega^{ba}) = \Omega^{ab} \quad (\text{B.6})$$

folgt dann

$$\star\Omega^{\pm ab} = \frac{1}{2}\star(\Omega^{ab} \pm \star\Omega^{ab}) = \frac{1}{2}(\star\Omega^{ab} \pm \Omega^{ab}) = \pm\frac{1}{2}(\Omega^{ab} \pm \star\Omega^{ab}) \equiv \pm\Omega^{\pm ab}. \quad (\text{B.7})$$

Für eine Lorentz-Signatur sind die Eigenwerte ± 1 (anti-)selbstdualer Zustände durch $\pm i$ zu ersetzen, da dann der Faktor ζ auf der rechten Seite von (A.48) sein Vorzeichen ändert. Identifiziert man nun Ω^{ab} mit dem Spinzusammenhang $\omega^{ab}{}_{\mu}$ bzw. mit dem Feldstärketensor $F^{ab}{}_{\mu\nu}$, so ist die (anti-)selbstduale Komponente der Feldstärke gerade durch die Feldstärke der (anti-)selbstdualen Komponente des Spinzusammenhangs gegeben, d. h. es gilt der folgende

Satz:

$$\boxed{F^{ab}{}_{\mu\nu}{}^{(\pm)}(\omega) = F^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega^{(\pm)})} \quad (\text{B.8})$$

Beweis: Zunächst ist

$$\begin{aligned} F^{ab}{}_{\mu\nu}{}^{(\pm)}(\omega) &= \frac{1}{2}(F^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega) \pm \star F^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega)) \\ &= \partial_{[\mu}\omega^{ab}{}_{\nu]} \pm \partial_{[\mu}\star\omega^{ab}{}_{\nu]} + \omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} \pm \star(\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}) \\ &= 2\partial_{[\mu}\omega^{ab}{}_{\nu]}{}^{(\pm)} + \omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} \pm \star(\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}) \end{aligned}$$

sowie

$$F^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega^{(\pm)}) = 2\partial_{[\mu}\omega^{ab}{}_{\nu]}{}^{(\pm)} + 2\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}{}^{(\pm)},$$

so daß sich also die Behauptung auf

$$\begin{aligned} \omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} \pm \star(\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}) &= 2\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}{}^{(\pm)} \\ \Leftrightarrow (N \pm \star N)^{ab}{}_{\mu\nu} &= 2\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}{}^{(\pm)} \end{aligned}$$

reduziert, wobei wir auf der linken Seite noch die Definition

$$N^{ab}{}_{\mu\nu} := \omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}$$

eingeführt haben. Nun gilt für die rechte Seite

$$\begin{aligned} 2\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}{}^{(\pm)} &= \frac{1}{2}\left[\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} + (\star\omega^a{}_{c[\mu})\star\omega^{cb}{}_{\nu]} \pm \left((\star\omega^a{}_{c[\mu})\omega^{cb}{}_{\nu]} + \omega^a{}_{c[\mu}\star\omega^{cb}{}_{\nu]}\right)\right] \\ &= P^{ab}{}_{\mu\nu} \pm Q^{ab}{}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

mit

$$P^{ab}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} + (\star\omega^a{}_{c[\mu})\star\omega^{cb}{}_{\nu]})$$

sowie

$$Q^{ab}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}((\star\omega^a{}_{c[\mu})\omega^{cb}{}_{\nu]} + \omega^a{}_{c[\mu}\star\omega^{cb}{}_{\nu]}) .$$

Unter Verwendung der euklidischen Identität

$$\begin{aligned} \varepsilon^a{}_{cde}\varepsilon^{cb}{}_{fg} &= -(\eta^{ab}\eta_{df}\eta_{eg} + \eta^a{}_f\eta_{dg}\eta_e{}^b + \eta^a{}_g\eta_d{}^b\eta_{ef} \\ &\quad - \eta^{ab}\eta_{dg}\eta_{ef} - \eta^a{}_f\eta_d{}^b\eta_{eg} - \eta^a{}_g\eta_{df}\eta_e{}^b) \end{aligned}$$

ergibt sich dann für den Anteil $P^{ab}{}_{\mu\nu}$ aus (B.9), der beim Übergang von selbstdualen zu anti-selbstdualen Zusammenhängen sein Vorzeichen nicht ändert, gerade

$$\begin{aligned} P^{ab}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} + \frac{1}{4}\varepsilon^a{}_{cde}\varepsilon^{cb}{}_{fg}\omega^{de}{}_{[\mu}\omega^{fg}{}_{\nu]}) \\ &= \frac{1}{2}[\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} - \frac{1}{2}(\eta^{ab}\omega^{cd}{}_{[\mu}\omega_{cd\nu]} + \omega^{db}{}_{[\mu}\omega^a{}_{d\nu]} + \omega^{be}{}_{[\mu}\omega_e{}^a{}_{\nu]})] \\ &= \frac{1}{2}(\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} + \omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]}) \\ &= \omega^a{}_{c[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} \\ &\equiv N^{ab}{}_{\mu\nu} , \end{aligned}$$

da die Antisymmetrisierung $\omega^{cd}{}_{[\mu}\omega_{cd\nu]}$ verschwindet. Für

$$\begin{aligned} Q^{ab}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\varepsilon^a{}_{cde}\omega^{de}{}_{[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} + \varepsilon^{cb}{}_{de}\omega^a{}_{c[\mu}\omega^{de}{}_{\nu]}) \\ &= \frac{1}{4}(\varepsilon^a{}_{cde}\omega^{de}{}_{[\mu}\omega^{cb}{}_{\nu]} - \varepsilon^{cb}{}_{de}\omega^{de}{}_{[\mu}\omega^{ca}{}_{\nu]}) \end{aligned} \tag{B.10}$$

untersuchen wir schließlich die möglichen Beiträge der Summe auf der rechten Seite für gleiche sowie für verschiedene feste Indizes a und b . Im Falle $a = b$ verschwindet (B.10) natürlich aufgrund der Antisymmetrie $Q^{ab}{}_{\mu\nu} = -Q^{ba}{}_{\mu\nu}$. Sei nun $a \neq b$, so erhält man einen Beitrag für $d = b$ oder $e = b$ im ersten Term bzw. für $d = a$ oder $e = a$ im zweiten Term,

so daß

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(\varepsilon^a{}_c{}^b{}_e \omega^{be}{}_{[\mu} \omega^c{}_{b\nu]} + \varepsilon^a{}_cd \omega^d{}_{b[\mu} \omega^{cb}{}_{\nu]} + \varepsilon^{cba}{}_e \omega^a{}_c{}_{[\mu} \omega^e{}_{\nu]}) + \varepsilon^{cb}{}_d{}^a{}_c \omega^a{}_c{}_{[\mu} \omega^d{}_{a\nu]}) \\
= & \frac{1}{2}(\varepsilon^{ab}{}_{cd} \omega^c{}_b{}_{[\mu} \omega^{bd}{}_{\nu]} + \varepsilon^{ab}{}_{cd} \omega^c{}_a{}_{[\mu} \omega^{ad}{}_{\nu]}) \\
= & \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} \omega^c{}_e{}_{[\mu} \omega^{ed}{}_{\nu]},
\end{aligned}$$

da für nicht-verschwindende Beiträge $(e \neq c) \wedge (e \neq d)$, also $(e = a) \vee (e = b)$ gelten muß. Hier sind natürlich die mehrfach auftretenden festen Indizes a und b nicht im Sinne einer Summation aufzufassen. Mithin gilt

$$Q^ab{}_{\mu\nu} = \star P^ab{}_{\mu\nu} \equiv \star N^ab{}_{\mu\nu},$$

so daß damit die Behauptung bewiesen ist. Es sei allerdings darauf hingewiesen, daß im allgemeinen

$$F^ab{}_{\mu\nu}(\alpha \omega^{(\pm)}) \neq \alpha F^ab{}_{\mu\nu}{}^{(\pm)}(\omega)$$

gilt, da der Feldstärketensor nichtlinear vom Spinzusammenhang abhängt.

Anhang C

Die Hintergrundfeld-Methode

Das zentrale Objekt in störungstheoretischen Zugängen zur Quantenfeldtheorie, aus dem unter anderem die Propagatoren für Feynman-Diagramme abgeleitet werden, ist die sogenannte *effektive Wirkung* Γ , die ein Funktional der Vakuumerwartungswerte der betrachteten Quantenfelder darstellt. Sie wird aus dem erzeugenden Funktional Z , das von den äußeren Quellen abhängt und ein Analogon zur Zustandssumme der statistischen Physik darstellt, konstruiert, indem man eine Legendre-Transformation bezüglich der äußeren Quellen auf $W := -\frac{i}{\hbar} \ln Z$ anwendet. Dies wird auch gleich noch im Detail ausgeführt werden.

Im Zuge dieser Prozedur tritt nun folgendes Problem auf: Auch falls in der Pfadintegraldarstellung von Z eine eichinvariante klassische Wirkung exponentiert wird, so wird die aus dem gerade grob skizzierten Verfahren resultierende effektive Wirkung Γ im allgemeinen nicht mehr invariant unter diesen Eichtransformationen sein. Zur Erläuterung des grundsätzlichen Problems betrachten wir zunächst einmal das erzeugende Funktional einer Theorie, bei der ein Eichfeld \mathcal{A}_μ^a an Materie-Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ gekoppelt wird. Es ist gegeben durch den Ausdruck

$$Z[J_\mu^a, \xi^a, \bar{\xi}^a, \eta^i, \bar{\eta}^i] = \int \mathcal{D}\mathcal{A}_\mu^a \mathcal{D}C^a \mathcal{D}\bar{C}^a \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\text{cl}}[\mathcal{A}, \psi, \bar{\psi}] + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}}) \right\} \quad (\text{C.1})$$

mit den Quellen J_μ^a, ξ^a und $\bar{\xi}^a$ für das Eichfeld und die Anti-Geist- bzw. Geistfelder sowie

den (Anti-)Spinor-Quellen η_i und $\bar{\eta}_i$. Erstere tragen Lie-Algebra-Indizes a, b, \dots , wohingegen letztere Indizes i, j, \dots der jeweiligen Fundamental-Darstellung besitzen, z.B. $i = 1, \dots, N$ für eine $SU(N)$ -Yang-Mills-Theorie. Die zugehörigen Spinor-Indizes werden hier unterdrückt. Weiterhin umfasse das Wirkungsfunktional $S_{\text{cl}}[\mathcal{A}, \psi, \bar{\psi}]$ sowohl die klassische Yang-Mills-Wirkung des Eichfeldes als auch den Materieanteil, und wir setzen voraus, daß dieses invariant unter den Eichtransformationen

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{A}_\mu^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \lambda^c \equiv \frac{1}{g} D_\mu \lambda^a, \\ \delta \psi_i &= i \lambda^a T_{ij}^a \psi_j, \\ \delta \bar{\psi}_i &= -i \lambda^a \bar{\psi}_j T_{ji}^a\end{aligned}\tag{C.2}$$

sei. Hierbei bezeichnet λ^a den infinitesimalen Parameter einer solchen Eichtransformation, g sei die Kopplung und f^{abc} seien die total-antisymmetrischen Strukturkonstanten der Eichgruppe. Das Eichfeld transformiert sich somit als Zusammenhang inhomogen bezüglich der regulären Darstellung, wohingegen sich die Materiefelder homogen wie Vektoren in der Fundamentaldarstellung transformieren. Wie in der Yang-Mills-Theorie üblich, unterscheiden wir nicht zwischen oberen und unteren Lie-Algebra- bzw. Fundamentaldarstellungsindizes, wohingegen ko- und kontravariante Raumzeit-Indizes μ, ν, \dots unter Verwendung der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ineinander überführt werden.

Um die Konvergenz dieses Pfadintegrals zu gewährleisten, wird diese Eichinvarianz nun durch einen Eichfixierungsterm S_{gf} gebrochen, was gemäß der Faddeev-Popov-Methode auf sogenannte (Anti-)Geistfelder \mathcal{C} und $\bar{\mathcal{C}}$ mit entsprechender Geistwirkung S_{gh} führt, die sich homogen bezüglich der regulären Darstellung transformieren:

$$\delta \mathcal{C}^a = f^{abc} \mathcal{C}^b \lambda^c \quad \text{und} \quad \delta \bar{\mathcal{C}}^a = f^{abc} \bar{\mathcal{C}}^b \lambda^c.\tag{C.3}$$

Diese explizite Brechung der Eichinvarianz hat nun zur Folge, daß die aus diesem Funktional vermöge der anfangs skizzierten Vorgehensweise erhaltene effektive Wirkung Γ ebenfalls nicht eichinvariant sein wird, bekanntermaßen jedoch invariant unter BRST-Transformationen, die wir hier aber nicht diskutieren wollen. Der Quellterm, der die Ankopplung der im Pfadintegral ausintegrierten Quantenfelder an die äußeren Ströme be-

schreibt, ist gegeben durch

$$S_{\text{source}} = \int d^4x (J_\mu^a \mathcal{A}^{a\mu} + \bar{C}^a \xi^a + \bar{\xi}^a C^a + \bar{\psi}_i \eta_i + \bar{\eta}_i \psi_i),$$

und man stellt somit fest, daß das in diesem auftretende Produkt aus Eichfeld und assoziierter Quelle ebenfalls nicht invariant ist, sofern sich letztere als Vektor bezüglich der regulären Darstellung transformiert gemäß

$$\delta J_\mu^a = f^{abc} J_\mu^b \lambda^c. \quad (\text{C.4})$$

Abhilfe schafft hier nun die Hintergrundfeld-Methode, die es erlaubt, bei Wahl einer geeigneten Eichfixierung trotz der beiden genannten Problempunkte eichinvariante effektive Wirkungen zu konstruieren [86, 87, 88]. Die grundlegende Idee besteht darin, zunächst allgemein alle Felder, über die im Pfadintegral integriert wird, in einen Hintergrund- und einen Fluktuationsanteil zu zerlegen gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^a &= \bar{A}_\mu^a + a_\mu^a, \\ C^a &= C^a + c^a, \\ \bar{C}^a &= \bar{C}^a + \bar{c}^a, \\ \psi_i &= \Psi_i + \chi_i, \\ \bar{\psi}_i &= \bar{\Psi}_i + \bar{\chi}_i, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

wobei \bar{A}_μ^a , C^a , \bar{C}^a , Ψ_i und $\bar{\Psi}_i$ die Hintergründe und a_μ^a , c^a , \bar{c}^a , χ_i und $\bar{\chi}_i$ die Fluktuationen bezeichnen. Dabei wird von letzteren überhaupt nicht vorausgesetzt, in irgendeinem Sinne „klein“ zu sein, und die zu erläuternde Methode basiert keineswegs auf der Idee einer Störungstheorie um einen festen Hintergrund. Die Hintergründe sind ihrerseits irgendwelche fest gewählten, aber beliebigen Feldkonfigurationen, die keinen weiteren Einschränkungen unterliegen. Im Pfadintegral wird dann über die Fluktuationen integriert, so daß das resultierende erzeugende Funktional $Z[J, \xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}; \bar{A}, C, \bar{C}, \Psi, \bar{\Psi}]$ zusätzlich zu den äußeren Quellen nun auch noch parametrisch von den Hintergrundkonfigurationen abhängt.

Nun realisiert man die Eichtransformationen (C.2) und (C.3) auf dem Niveau der zerlegten Felder auf zwei Arten: zum einen zunächst vermöge sogenannter *wahrer* Eichtrans-

formationen, die wir mit δ^G bezeichnen:

$$\begin{aligned}
\delta^G \bar{A}_\mu^a &= 0, & \delta^G a_\mu^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a + f^{abc} (\bar{A}_\mu^b + a_\mu^b) \lambda^c, \\
\delta^G C^a &= 0, & \delta^G c^a &= f^{abc} (C^b + c^b) \lambda^c, \\
\delta^G \bar{C}^a &= 0, & \delta^G \bar{c}^a &= f^{abc} (\bar{C}^b + \bar{c}^b) \lambda^c, \\
\delta^G \Psi_i &= 0, & \delta^G \chi_i &= i \lambda^a T_{ij}^a (\Psi_j + \chi_j), \\
\delta^G \bar{\Psi}_i &= 0, & \delta^G \bar{\chi}_i &= -i \lambda^a (\bar{\Psi}_j + \bar{\chi}_j) T_{ji}^a.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Bezüglich dieser sind die Hintergrundfelder also klassische Felder, die sich überhaupt nicht transformieren. Die zweite Klasse bilden die mit δ^B bezeichneten *Hintergrundtransformationen*:

$$\begin{aligned}
\delta^B \bar{A}_\mu^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a + f^{abc} \bar{A}_\mu^b \lambda^c =: \frac{1}{g} \bar{D}_\mu \lambda^a, & \delta^B a_\mu^a &= f^{abc} a_\mu^b \lambda^c, \\
\delta^B C^a &= f^{abc} C^b \lambda^c, & \delta^B c^a &= f^{abc} c^b \lambda^c, \\
\delta^B \bar{C}^a &= f^{abc} \bar{C}^b \lambda^c, & \delta^B \bar{c}^a &= f^{abc} \bar{c}^b \lambda^c, \\
\delta^B \Psi_i &= i \lambda^a T_{ij}^a \Psi_j, & \delta^B \chi_i &= i \lambda^a T_{ij}^a \chi_j, \\
\delta^B \bar{\Psi}_i &= -i \lambda^a \bar{\Psi}_j T_{ji}^a, & \delta^B \bar{\chi}_i &= -i \lambda^a \bar{\chi}_j T_{ji}^a.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Beide Transformationen (C.6) und (C.7) reproduzieren also für die ursprünglichen unzerlegten Felder jeweils die Eichtransformationen (C.2) und (C.3). Der entscheidende Schritt besteht nun darin, sich bei der Auswahl der Eichfixierung auf solche Eichbedingungen zu beschränken, die die Eigenschaft besitzen, die wahren Eichtransformationen mit klassischen Hintergründen nach wie vor zu brechen, aber bezüglich der Hintergrundtransformationen invariant zu sein und auf einen δ^B -invarianten Geistterm zu führen.

Die Anteile S_{gf} und S_{gh} sind dann per Konstruktion invariant, ebenso wie natürlich die klassische Wirkung $S_{\text{cl}}[\mathcal{A}, \psi, \bar{\psi}]$, da diese ja jeweils nur von der Summe aus Hintergrund und Fluktuation abhängt, bezüglich der aber die Hintergrundtransformation wie eine Eichtransformation wirkt, und unter dieser ist S_{cl} ja nach Voraussetzung invariant. Verabredet man zudem, im Quellterm nur die Eichfeldfluktuation a_μ^a und nicht den Hintergrund \bar{A}_μ^a an den

äußeren Strom J_μ^a zu koppeln, so ist dieser Term nun für

$$\delta^B J_\mu^a = f^{abc} J_\mu^b \lambda^c \quad (\text{C.8})$$

wie auch die anderen Beiträge zu S_{source} als Skalarprodukt zweier Vektoren invariant, da sich a_μ^a ja nach (C.7) unter δ^B ebenfalls homogen transformiert.

Im erzeugenden Funktional (C.1) wird also eine hintergrundtransformationsinvariante Wirkung exponentiert, so daß dieses als Ausgangspunkt zur Konstruktion einer invarianten effektiven Wirkung verwandt werden kann.

Dabei ist es instruktiv, sich die Beziehung zwischen den im Hintergrund-Formalismus abgeleiteten Größen und deren Analoga im konventionellen Zugang zu verdeutlichen. Wir beschränken uns im folgenden allerdings auf reine Yang-Mills-Theorie ohne Materie-Ankoppelung. Das entsprechende erzeugende Funktional lautet dann zunächst

$$Z[J, \xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\text{YM}}[\mathcal{A}] + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}}) \right\},$$

wobei

$$S_{\text{YM}}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

mit dem Yang-Mills-Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^a := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$$

und

$$S_{\text{source}} = \int d^4x (J_\mu^a \mathcal{A}^{a\mu} + \bar{C}^a \xi^a + \bar{\xi}^a C^a).$$

Nun sind die Felder aufzuspalten, und anschließend ist eine Eichbedingung mit den gewünschten Eigenschaften zu wählen. Dabei ist zunächst folgende Vorbemerkung angebracht: Wir werden gleich die sogenannte Yang-Mills-Hintergrundeichung verwenden, die die Eichung nur durch Bedingungen an das Eichfeld fixiert und auch bei Anwesenheit von Fermionen diese nicht miteinbeziehen würde. Im allgemeinen muß das aber natürlich nicht

so sein, und wir werden später in der Tat nicht bloß den Zusammenhang verwenden, um die entsprechenden Eichbedingungen zu implementieren.

Im vorliegenden Beispiel hingegen würden Fermionen bei einer Hintergrundzerlegung ausschließlich als Summe von Hintergrunds- und Fluktuationskomponente im Materie- und Quellterm der Wirkung auftreten, so daß dann eine Hintergrundtransformation den gleichen Effekt wie eine Eichtransformation hätte, und unter diesen sind diese beiden Anteile ja invariant. Die Hintergrundzerlegung kann dann schließlich durch eine Translation des Fluktuationsintegrationsmaßes kompensiert werden, so daß sie vollkommen redundant wäre, und folglich würde man auch bei der Ankopplung von Fermionfeldern diese nicht aufspalten. Eine analoge Überlegung gilt für die Geistfelder, deren Zerlegung ohnehin nur bei der Betrachtung von Diagrammen mit externen Geist- oder Anti-Geistlinien in der Störungstheorie von Interesse ist. Von größter Bedeutung ist daher die Hintergrundfeldmethode sicherlich für das Eichfeld aufgrund dessen inhomogener Transformationseigenschaft, und es ist offensichtlich, wie der Formalismus bei der zusätzlichen Berücksichtigung von Materiefeldern zu erweitern ist.

Für das Eichfeld gilt nun also

$$\mathcal{A}_\mu^a = \bar{A}_\mu^a + a_\mu^a$$

mit

$$\delta^G \bar{A}_\mu^a = 0, \quad \delta^G a_\mu^a = \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a + f^{abc} (\bar{A}_\mu^b + a_\mu^b) \lambda^c \quad (\text{C.9})$$

und

$$\delta^B \bar{A}_\mu^a = \frac{1}{g} \bar{D}_\mu \lambda^a, \quad \delta^B a_\mu^a = f^{abc} a_\mu^b \lambda^c, \quad (\text{C.10})$$

so daß mit der Wahl des Hintergrundes \bar{A}_μ^a gewissermaßen bezüglich Hintergrundtransformationen ein Ursprung im affinen Raum der Zusammenhänge ausgezeichnet wird und sich die Differenz $a_\mu^a = \mathcal{A}_\mu^a - \bar{A}_\mu^a$ nun wie ein Vektor transformiert.

Als Eichbedingung wählen wir die bereits angesprochene Yang-Mills-Hintergrundeichung

$$\mathcal{G}^a[a, \bar{A}] = \partial^\mu a_\mu^a + g f^{abc} \bar{A}^{b\mu} a_\mu^c \equiv \bar{D}^\mu a_\mu^a \quad (\text{C.11})$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta^B \mathcal{G}^a &= \partial^\mu \delta^B a_\mu^a + g f^{abc} ((\delta^B \bar{A}^{b\mu}) a_\mu^c + \bar{A}^{b\mu} \delta^B a_\mu^c) \\
&= f^{abc} [\partial^\mu (a_\mu^b \lambda^c) + g (\frac{1}{g} (\bar{D}^\mu \lambda^b) a_\mu^c + \bar{A}^{b\mu} f^{cde} a_\mu^d \lambda^e)] \\
&= f^{abc} [(\partial^\mu a_\mu^b) \lambda^c + a_\mu^b \partial^\mu \lambda^c + (\partial^\mu \lambda^b) a_\mu^c + g f^{bde} \bar{A}^{d\mu} \lambda^e a_\mu^c + g f^{cde} \bar{A}^{b\mu} a_\mu^d \lambda^e] \\
&= f^{abc} (\partial^\mu a_\mu^b) \lambda^c + g (f^{abd} f^{bce} + f^{acb} f^{bde}) \bar{A}^{c\mu} a_\mu^d \lambda^e \\
&= f^{abc} (\partial^\mu a_\mu^b + g f^{bde} \bar{A}^{d\mu} a_\mu^e) \lambda^c \\
&= f^{abc} \mathcal{G}^b \lambda^c .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Jacobi-Identität für die Strukturkonstanten

$$f^{abd} f^{dce} + f^{bcd} f^{dae} + f^{cad} f^{dbe} = 0 .$$

verwandt. Aufgrund deren Antisymmetrie folgt dann die Invarianz des Eichfixierungsterms:

$$\begin{aligned}
\delta^B S_{\text{gf}} &= \delta^B \left(\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \mathcal{G}^a \mathcal{G}^a \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \int d^4x \mathcal{G}^a \delta^B \mathcal{G}^a \\
&= \frac{1}{\alpha} f^{abc} \int d^4x \mathcal{G}^a \mathcal{G}^b \lambda^c \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Da allerdings durch \bar{A}_μ^a bezüglich δ^G kein Zusammenhang definiert ist und sich hier a_μ^a zudem auch nicht als Vektor transformiert, ergibt sich mit (C.9) bei Anwendung einer wahren Eichtransformation

$$\begin{aligned}
\delta^G \mathcal{G}^a &= \bar{D}^\mu \delta^G a_\mu^a \\
&= \frac{1}{g} \bar{D}^\mu (\bar{D}_\mu \lambda^a + g f^{abc} a_\mu^b \lambda^c) ,
\end{aligned}$$

so daß durch diese Eichbedingung die wahren Eichtransformationen weiterhin wie gewünscht gebrochen werden.

Aus dieser Eichfixierung bestimmt man nun den Geistterm nach der üblichen Methode: Man variiert die Eichbedingung bezüglich der Fluktuation und schaltet dann eine durch

das Geistfeld erzeugte wahre Eichtransformation dahinter, was auf

$$\begin{aligned}
S_{\text{gh}} &= \int d^4x \bar{\mathcal{C}}^a \frac{\delta \mathcal{G}^a}{\delta a_\mu^b} (\delta_{\bar{\mathcal{C}}}^G a)_\mu^b \\
&= \int d^4x \bar{\mathcal{C}}^a (\partial^\mu \delta^{ab} + g f^{acb} \bar{A}^{c\mu}) \left(\frac{1}{g} \partial_\mu \mathcal{C}^b + f^{bde} (\bar{A}_\mu^d + a_\mu^d) \mathcal{C}^e \right) \\
&= \frac{1}{g} \int d^4x \bar{\mathcal{C}}^a \bar{D}^{ab\mu} D_\mu \mathcal{C}^b \\
&= -\frac{1}{g} \int d^4x (\bar{D}^\mu \bar{\mathcal{C}}^a) (D_\mu \mathcal{C}^a)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

führt, wobei D wieder die kovariante Ableitung bezüglich des ursprünglichen Zusammenhangs $\mathcal{A} = \bar{A} + a$ bezeichnet. Da wir die Geist- und Anti-Geistfelder selbst nicht in Hintergrund- und Fluktuationsanteil aufspalten, können wir fordern, daß auch sie sich unter Hintergrundtransformationen wie Vektoren bezüglich der regulären Darstellung verhalten, d.h.

$$\delta^B \mathcal{C}^a = f^{abc} \mathcal{C}^b \lambda^c \quad \text{und} \quad \delta^B \bar{\mathcal{C}}^a = f^{abc} \bar{\mathcal{C}}^b \lambda^c. \tag{C.13}$$

Zudem transformieren sich sowohl \bar{A} als auch $\bar{A} + a$ unter Hintergrundtransformationen wie Zusammenhänge, so daß sich aus der letzten Zeile von (C.12) ersehen läßt, daß es sich bei dem Geistterm um das Skalarprodukt zweier kovarianter Ableitungen von Vektoren handelt, die sich somit wiederum homogen transformieren gemäß

$$\delta^B \bar{D}^\mu \bar{\mathcal{C}}^a = f^{abc} (\bar{D}^\mu \bar{\mathcal{C}}^b) \lambda^c \quad \text{bzw.} \quad \delta^B D_\mu \mathcal{C}^a = f^{abc} (D_\mu \mathcal{C}^b) \lambda^c,$$

woraus schließlich die δ^B -Invarianz des Geistterms folgt.

Das erzeugende Funktional ist dann gegeben durch

$$Z_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^B[J, \xi, \bar{\xi}; \bar{A}] = \int \mathcal{D}a \mathcal{D}\mathcal{C} \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\text{YM}}[\bar{A} + a] + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}}) \right\} \tag{C.14}$$

wobei die Indizierung andeuten soll, daß es gemäß der Hintergrundfeldmethode unter Verwendung der speziellen Eichbedingung (C.11) konstruiert wurde. Es hängt natürlich zusätzlich zu den externen Quellen auch noch parametrisch von \bar{A} ab. Weiterhin folgt die δ^B -Invarianz des Maßes $\mathcal{D}a$ unter Verwendung der Translationsinvarianz des Produktmaßes

ßes aus der vorausgesetzten Eichinvarianz des Maßes \mathcal{DA} , die ja gerade äquivalent ist zur Hintergrundinvarianz des translatierten Maßes $\mathcal{D}(\bar{A} + a)$. Bei der Ankopplung von Fermionen können hier allerdings Anomalien auftreten, die wir an dieser Stelle jedoch nicht betrachten und auch im folgenden ausschließen wollen. Koppeln wir zudem wie bereits diskutiert bloß die Fluktuation des Eichfeldes an die externe Quelle gemäß

$$S_{\text{source}} = \int d^4x (J_\mu^a a^{a\mu} + \bar{\mathcal{C}}^a \xi^a + \bar{\xi}^a \mathcal{C}^a),$$

so ist dieses Funktional per Konstruktion δ^{B} -invariant für

$$\delta^{\text{B}} J_\mu^a = f^{abc} J_\mu^b \lambda^c.$$

Wie angekündigt wollen wir nun einen Zusammenhang zur gewöhnlichen Eichfixierung ohne Hintergrundfeld herstellen, und dazu substituieren wir in (C.14) $a'_\mu := a_\mu + \bar{A}_\mu$ und setzen anschließend wieder $a'_\mu = a_\mu$. Dies liefert

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J, \xi, \bar{\xi}; \bar{A}] &= \int \mathcal{D}a \mathcal{D}\mathcal{C} \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\text{YM}}[a] + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}}) \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x J_\mu^a \bar{A}^{a\mu} \right\} \\ &= Z_{\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]}[J, \xi, \bar{\xi}; \bar{A}] \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x J_\mu^a \bar{A}^{a\mu} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

wobei nun Z das gewöhnliche Yang-Mills-Pfadintegral bezeichnet, allerdings berechnet in der speziellen Eichung $\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]$, so daß dieses jetzt ebenfalls parametrisch vom Hintergrund \bar{A} abhängt. Mit der üblichen Definition $W := -\frac{i}{\hbar} \ln Z$ für das erzeugende Funktional verbundener Graphen ergibt sich dann

$$W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J, \xi, \bar{\xi}; \bar{A}] = W_{\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]}[J, \xi, \bar{\xi}; \bar{A}] - \int d^4x J_\mu^a \bar{A}^{a\mu}, \quad (\text{C.16})$$

was natürlich ebenfalls δ^{B} -invariant ist. Funktionale Ableitung dieser Gleichung bezüglich der externen Eichfeldquelle liefert desweiteren für die Vakuumwartungswerte

$$\bar{a}_\mu^{\text{B} a} = \bar{a}_\mu^a - \bar{A}_\mu^a \quad (\text{C.17})$$

mit

$$\bar{a}^{\text{B}a\mu}[J, \bar{A}] := \frac{\delta W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}}{\delta J_\mu^a} \quad \text{und} \quad \bar{a}^{a\mu}[J, \bar{A}] := \frac{\delta W_{\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]}^{\text{B}}}{\delta J_\mu^a}, \quad (\text{C.18})$$

wobei zu deren Bezeichnung wie üblich ebenfalls ein Querstrich über die entsprechende Integrationsvariable im Pfadintegral gesetzt wird. Beide hängen natürlich von J_μ^a und \bar{A}_μ^a ab, allerdings wurde der Hintergrund-Vakuumerwartungswert \bar{a}^{B} unter Verwendung der Eichung $\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]$ berechnet, wohingegen sich der konventionelle Vakuumerwartungswert \bar{a} auf die Eichung $\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]$ bezieht. Um die Darstellung übersichtlich zu halten, wird die natürlich ebenfalls vorhandene Abhängigkeit dieser Größen von den Geistquellen hier nicht explizit berücksichtigt.

Um nun die Frage zu beantworten, wie sich diese Felderwartungswerte unter Hintergrundtransformationen verhalten, nutzen wir die bereits erwähnte δ^{B} -Invarianz des W^{B} -Funktionals aus, d.h. es gilt

$$W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J + \delta^{\text{B}}J; \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}] - W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J; \bar{A}] = 0 \quad (\text{C.19})$$

für

$$\delta^{\text{B}}J_\mu^a = f^{abc}J_\mu^b\lambda^c \quad \text{und} \quad \delta^{\text{B}}\bar{A}_\mu^a = \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\lambda^a.$$

Mit der Definition

$$\delta^{\text{B}}\bar{a}_\mu^{\text{B}a}[J, \bar{A}] := \bar{a}_\mu^{\text{B}a}[J + \delta^{\text{B}}J, \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}] - \bar{a}_\mu^{\text{B}a}[J, \bar{A}]$$

liefert dann die funktionale Ableitung von (C.19) nach der äußeren Quelle

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)} (W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J + \delta^{\text{B}}J; \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}] - W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J; \bar{A}]) \\ = & \int d^4y \frac{\delta W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J + \delta^{\text{B}}J; \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}]}{\delta(J_\nu^b(y) + \delta^{\text{B}}J_\nu^b(y))} \frac{\delta(J_\nu^b(y) + \delta^{\text{B}}J_\nu^b(y))}{\delta J_\mu^a(x)} - \frac{\delta W_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[J; \bar{A}]}{\delta J_\mu^a(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4y \bar{a}^{\text{B}b}_\nu [J + \delta^{\text{B}}J, \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}; y] (\delta^{ba} + f^{bac}\lambda^c(y)) \eta_{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y) - \bar{a}^{\text{B}a}_\mu [J, \bar{A}; x] \\
&= \bar{a}^{\text{B}a}_\mu [J + \delta^{\text{B}}J, \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}; x] - f^{abc} \bar{a}^{\text{B}b}_\mu [J + \delta^{\text{B}}J, \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}; x] \lambda^c(x) - \bar{a}^{\text{B}a}_\mu [J, \bar{A}; x] \\
&= \delta^{\text{B}} \bar{a}^{\text{B}a}_\mu [J, \bar{A}; x] - g f^{abc} \bar{a}^{\text{B}b}_\mu [J + \delta^{\text{B}}J, \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}; x] \lambda^c(x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar

$$\begin{aligned}
\delta^{\text{B}} \bar{a}^{\text{B}a}_\mu [J, \bar{A}; x] &= f^{abc} \bar{a}^{\text{B}b}_\mu [J + \delta^{\text{B}}J, \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}; x] \lambda^c(x) \\
&= f^{abc} \bar{a}^{\text{B}b}_\mu [J, \bar{A}; x] \lambda^c(x) + \mathcal{O}(\lambda^2, \lambda \partial \lambda)
\end{aligned} \tag{C.20}$$

ergibt. Dies impliziert nun ein Transformationsverhalten von \bar{a}_μ^a , das die δ^{B} -Invarianz der rechten Seite von (C.16) garantiert, und dieses ist natürlich gerade gegeben durch

$$\begin{aligned}
\delta^{\text{B}} \bar{a}_\mu^a &= \delta^{\text{B}} \bar{a}^{\text{B}a}_\mu + \delta^{\text{B}} \bar{A}_\mu^a \\
&= \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a + f^{abc} (\bar{a}^{\text{B}b}_\mu + \bar{A}_\mu^b) \lambda^c \\
&= \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a + f^{abc} \bar{a}_\mu^b \lambda^c.
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Unter der Voraussetzung, daß sich die Relationen (C.18) nach der externen Quelle $J_\mu^a = J_\mu^a[\bar{a}^{\text{B}}, \bar{A}] = J_\mu^a[\bar{a}, \bar{A}]$ auflösen lassen, kann man nun die Legendre-Transformierte von W^{B} bezüglich J_μ^a bilden, was die bereits ganz zu Anfang angesprochene effektive Wirkung Γ^{B} liefert:

$$\Gamma_{\mathcal{G}^a[\bar{a}, \bar{A}]}^{\text{B}}[\bar{a}^{\text{B}}; \bar{A}] := W_{\mathcal{G}^a[\bar{a}, \bar{A}]}^{\text{B}}[J[\bar{a}^{\text{B}}, \bar{A}]; \bar{A}] - \int d^4x J_\mu^a[\bar{a}^{\text{B}}, \bar{A}] \bar{a}^{\text{B}a\mu}. \tag{C.22}$$

Entsprechend der obigen Bemerkung wurden auch hier wiederum die Quellen und Vakuumenerwartungswerte, die von den Geistfeldern herrühren, nicht berücksichtigt, da sie im Vergleich zum gängigen Formalismus keinerlei Modifikation erfahren. Dieser Ausdruck ist nun ebenfalls δ^{B} -invariant, da zum einen das Transformationsverhalten (C.20) von $\bar{a}_\mu^{\text{B}a}$ in führender Ordnung ja gerade vermittels der Invarianz von W^{B} bestimmt wurde und da desweiteren der zweite Term als Skalarprodukt zweier Vektoren ebenfalls invariant ist. Wir schreiben diese beiden Terme nun auf die konventionellen Fluktuationserwartungswerte \bar{a}_μ^a

um, was auf

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[\bar{a}^{\text{B}}[\bar{a}, \bar{A}]; \bar{A}] &\equiv \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[\bar{a} - \bar{A}; \bar{A}] \\
&= W_{\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]}[J[\bar{a}, \bar{A}]; \bar{A}] - \int d^4x J_{\mu}^a[\bar{a}, \bar{A}] \bar{A}^{a\mu} \\
&\quad - \int d^4x J_{\mu}^a[\bar{a}, \bar{A}] (\bar{a}^{a\mu} - \bar{A}^{a\mu}) \\
&= W_{\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]}[J[\bar{a}, \bar{A}]; \bar{A}] - \int d^4x J_{\mu}^a[\bar{a}, \bar{A}] \bar{a}^{a\mu} \\
&\equiv \Gamma_{\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]}[\bar{a}; \bar{A}] \tag{C.23}
\end{aligned}$$

führt und somit also die übliche effektive Wirkung als Legendre-Transformierte $\Gamma[\bar{a}; \bar{A}]$ von $W[J; \bar{A}]$ bezüglich der externen Quelle unter Verwendung der Eichung $\mathcal{G}^a[a - \bar{A}, \bar{A}]$ reproduziert.

Bei Anwendungen der Hintergrundfeldmethode in der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie setzt man in der effektiven Wirkung (C.22) nun $\bar{a}^{\text{B}} = 0$, was $\delta^{\text{B}} \bar{a}^{\text{B}} = 0$ sowie $\bar{a} = \bar{A}$ impliziert. Mit $\bar{A} = A$ ist dann $\Gamma[A] := \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, A]}^{\text{B}}[0; A]$ ein invariantes Funktional bezüglich inhomogener Transformation von A_{μ}^a , aus dem die korrekte S-Matrix bestimmt werden kann [87, 88]. Dies vereinfacht zum einen mitunter konkrete Rechnungen erheblich, weiterhin schränkt diese Invarianzeigenschaft von $\Gamma[A]$ aber auch die Struktur möglicher Counterterme bei störungstheoretischer Renormierung stark ein, so daß hier die Hintergrundfeldmethode ähnliche Vorteile mit sich bringt wie die BRST-Invarianz.

Klarerweise enthält aber das Objekt $\Gamma[A]$ weniger Information als $\Gamma^{\text{B}}[\bar{a}; \bar{A}]$. Ein entsprechendes Problem tritt z. B. bei der Rekonstruktion des externen Quellstromes auf. Zunächst gilt ja allgemein nach (C.22)

$$\frac{\delta \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[\bar{a}^{\text{B}}; \bar{A}]}{\delta \bar{a}_{\mu}^{\text{B} a}} = -J^{a\mu}[\bar{a}, \bar{A}],$$

d.h. insbesondere

$$J^{a\mu}[0, A] = - \left. \frac{\delta \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[\bar{a}^{\text{B}}; \bar{A}]}{\delta \bar{a}_{\mu}^{\text{B} a}} \right|_{\bar{a}^{\text{B}}_{\mu} = 0, \bar{A}_{\mu}^a = A_{\mu}^a},$$

was unter alleiniger Verwendung von $\Gamma[A] \equiv \Gamma^{\text{B}}[0; A]$ nicht zu bestimmen wäre.

Schwerwiegender wiegt darüberhinaus jedoch die Tatsache, daß die zweite Funktionalableitung von $\Gamma[A]$ bezüglich des Feldes A_μ^a generisch Nullmoden aufweist und mithin nicht invertiert werden kann, so daß es insbesondere nicht möglich ist, ausgehend von dieser effektiven Wirkung einen Propagator zu definieren. Das läßt sich folgendermaßen einsehen: Ausnutzen der Hintergrundtransformations-Invarianz mit $\delta^{\text{B}}\bar{a}^{\text{B}} = 0$ für $\bar{a}^{\text{B}} = 0$ und anschließende Taylor-Entwicklung liefert

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}] &= \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A} + \delta^{\text{B}}\bar{A}] \\ &= \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}] + \int d^4x \frac{\delta\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}]}{\delta\bar{A}_\mu^a(x)} \delta^{\text{B}}\bar{A}_\mu^a(x),\end{aligned}$$

und somit folgt unter Verwendung von (C.10)

$$\frac{1}{g} \int d^4x \frac{\delta\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}]}{\delta\bar{A}_\mu^a(x)} \bar{D}_\mu^{ab}(x) \lambda^b(x) = 0,$$

was nach partieller Integration bei Betrachtung beliebiger Eichparameter $\lambda^a(x)$ auf

$$\bar{D}_\mu^{ba}(x) \frac{\delta\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}]}{\delta\bar{A}_\mu^a(x)} = 0$$

führt. Leitet man diese Gleichung erneut nach dem Hintergrundfeld ab, so erhält man

$$\begin{aligned}& \frac{\delta}{\delta\bar{A}_\nu^d(y)} (\partial_\mu \delta^{ba} + g f^{bca} \bar{A}_\mu^c(x)) \frac{\delta\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}]}{\delta\bar{A}_\mu^a(x)} \\ &= \bar{D}_\mu^{ba}(x) \frac{\delta^2\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}]}{\delta\bar{A}_\nu^d(y) \delta\bar{A}_\mu^a(x)} + g f^{bda} \frac{\delta\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}]}{\delta\bar{A}_\nu^a(x)} \delta^{(4)}(x-y) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{C.24}$$

Falls nun \bar{A}_μ^a eine Vakuumlösung ist mit

$$\frac{\delta\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^{\text{B}}[0; \bar{A}]}{\delta\bar{A}_\mu^a(x)} = 0,$$

so verschwindet in (C.24) der zweite Term, und die resultierende Gleichung läßt sich nach

x -Integration des ersten Terms und anschließender partieller Integration der kovarianten Ableitung schließlich in Form einer Nullmoden-Gleichung schreiben gemäß

$$\int d^4x \frac{\delta^2 \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^B[0; \bar{A}]}{\delta \bar{A}_\nu^d(y) \delta \bar{A}_\mu^a(x)} \bar{D}_\mu^{ab}(x) \lambda^b(x) = 0, \quad (\text{C.25})$$

was für $\bar{A} = A$ und $\frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A} = 0$ natürlich äquivalent ist zu

$$\int d^4x \frac{\delta^2 \Gamma[A]}{\delta A_\nu^b(y) \delta A_\mu^a(x)} D_\mu^{ac}(x) \lambda^c(x) = 0$$

mit

$$D_\mu^{ab} := \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A_\mu^c. \quad (\text{C.26})$$

Wir schließen also aus (C.25), daß die „Hesse-Matrix“ $\left(\frac{\delta}{\delta A}\right)^2 \Gamma^B[0; \bar{A}]$ verschwindende Eigenwerte besitzt und daß die zugehörigen Eigenvektoren durch die „Eichtransformationen“ $D\lambda$ gegeben sind.

Oft verwendet man für die effektive Hintergrundwirkung auch die Schreibweise

$$\Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^B[\bar{a}, \bar{A}] := \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^B[\bar{a}^B[\bar{a}, \bar{A}]; \bar{A}] = \Gamma_{\mathcal{G}^a[a, \bar{A}]}^B[\bar{a} - \bar{A}; \bar{A}],$$

so daß dieses Funktional dann natürlich invariant ist unter inhomogener Transformation beider Argumente.

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir den Renormierungsgruppenfluß, der die Struktur eines derartigen Wirkungsfunktionals für Gravitation im Vielbein-Formalismus bestimmt, untersuchen. Die gemittelten Hintergrundfluktuationen der beiden dynamischen Felder, die wir betrachten und mit denen sich das vorherige Kapitel befaßt hat, werden dann mit $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\tau}$, die konventionellen Erwartungswerte hingegen werden mit e und ω bezeichnet. Die zugehörigen Hintergrundkonfigurationen sind durch \bar{e} und $\bar{\omega}$ gegeben, und das Funktional $\Gamma[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}] \equiv \Gamma[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}]$ wird der gerade geschilderten Methode entsprechend unter Verwendung der gewählten Hintergrundeichungen konstruiert. Die so gewährleistete Invarianz stellt dann sicher, daß auch während des Flusses dieses Objektes nur invariante Terme erzeugt werden, so daß Γ im allgemeinsten Fall eine Linearkombination aller denkbaren

Invarianten ist.

Bei Yang-Mills-Theorien wird die parametrische Abhängigkeit von den Hintergrundfeldern gängigerweise als der Preis empfunden, den man bei der Konstruktion einer invarianten effektiven Wirkung zu zahlen hat. Es mag hilfreich sein, sich vorzustellen, daß ihre Rolle dort von derselben Art wie die des Eichparameters ist: Sie sind fest, aber beliebig, und eine spezielle Wahl gibt an, wie die Eichfixierung konkret implementiert wird. Doch für unseren Zugang ist diese Hintergrundzerlegung auch noch in ganz anderer Hinsicht wesentlich, interessanterweise nämlich gerade im Kontext der Hintergrund-*Unabhängigkeit*, und auf diesen Punkt gehen wir an geeigneter Stelle noch genauer ein.

Anhang D

Die Berechnung der Ward-Algebren

D.1 Die Algebra der Ward-Operatoren \mathcal{W}_D und \mathcal{W}_L

Den Gegenstand dieses Anhangs bildet die explizite Berechnung der Kommutatoren der Ward-Operatoren. Die Resultate werden in Abschnitt 4.1 des Kapitels 4 zitiert.

Der Kommutator $[\mathcal{W}_D(w_1), \mathcal{W}_D(w_2)]$. Wir betrachten die Anwendung eines Kommutators zweier Diffeomorphismen auf ein beliebiges Funktional. Dann gilt zunächst für den Teil, der die Vielbein- und Spinzusammenhangstransformationen erzeugt

$$\begin{aligned} & \left[\int d^4x \left(\delta_D(w_1) \hat{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \right), \right. \\ & \left. \int d^4y \left(\delta_D(w_2) \hat{e}^c{}_\nu(y) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} + \delta_D(w_2) \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right) \right] \\ = & \int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_D(w_1) \hat{e}^a{}_\mu(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} \delta_D(w_2) \hat{e}^c{}_\nu(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} \right. \\ & + \delta_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \delta_D(w_2) \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \\ & - \delta_D(w_2) \hat{e}^c{}_\nu(y) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} \delta_D(w_1) \hat{e}^a{}_\mu(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} \\ & \left. - \delta_D(w_2) \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \delta_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ \mathcal{L}_{w_1} \hat{e}^a{}_\mu(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} \mathcal{L}_{w_2} \hat{e}^c{}_\nu(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{L}_{w_1} \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \mathcal{L}_{w_2} \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right. \\
&\quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ \mathcal{L}_{w_1} \hat{e}^a{}_\mu(x) \left((w_2^\rho(y) \partial_\rho^y \delta^c{}_a \delta_\nu{}^\mu \delta^{(4)}(x-y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\partial_\nu^y w_2^\mu(y)) \delta^c{}_a \delta^{(4)}(x-y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{L}_{w_1} \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \left(w_2^\rho(y) \partial_\rho^y \delta^c{}_a \delta^d{}_b \delta_\nu{}^\mu \delta^{(4)}(x-y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\partial_\nu^y w_2^\mu(y)) \delta^c{}_a \delta^d{}_b \delta^{(4)}(x-y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right. \\
&\quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\}.
\end{aligned}$$

Wir integrieren nun partiell, um anschließend die Delta-Distributionen auswerten zu können. Dies führt auf

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \int d^4y \left\{ \mathcal{L}_{w_1} \hat{e}^c{}_\mu(x) \delta^{(4)}(x-y) \left[-\delta_\nu{}^\mu \partial_\rho^y \left(w_2^\rho(y) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\partial_\nu^y w_2^\mu(y)) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{L}_{w_1} \hat{\omega}^{cd}{}_\mu(x) \delta^{(4)}(x-y) \left[-\delta_\nu{}^\mu \partial_\rho^y \left(w_2^\rho(y) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\partial_\nu^y w_2^\mu(y)) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right] \right. \\
&\quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= \int d^4x \left[(w_2^\rho \partial_\rho \mathcal{L}_{w_1} \hat{e}^c{}_\nu + (\partial_\nu w_2^\rho) \mathcal{L}_{w_1} \hat{e}^c{}_\rho) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(x)} \right. \\
&\quad \left. + (w_2^\rho \partial_\rho \mathcal{L}_{w_1} \hat{\omega}^{cd}{}_\nu + (\partial_\nu w_2^\rho) \mathcal{L}_{w_1} \hat{e}^c{}_\rho) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right. \\
&\quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right].
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Lie-Ableitung einer Lie-Ableitung und schreiben dies entsprechend

in der Form

$$\begin{aligned}
& \left[\int d^4x \left(\delta_D(w_1) \hat{e}^a{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_\mu(x)} + \delta_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \right), \right. \\
& \left. \int d^4y \left(\delta_D(w_2) \hat{e}^c{}_\nu(y) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(y)} + \delta_D(w_2) \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right) \right] \\
&= \int d^4x \left[(\mathcal{L}_{w_2} \mathcal{L}_{w_1} \hat{e}^c{}_\nu - \mathcal{L}_{w_1} \mathcal{L}_{w_2} \hat{e}^c{}_\nu) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(x)} \right. \\
& \quad \left. + (\mathcal{L}_{w_2} \mathcal{L}_{w_1} \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(x) - \mathcal{L}_{w_1} \mathcal{L}_{w_2} \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right] \\
&= - \int d^4x \left(\mathcal{L}_{[w_1, w_2]} \hat{e}^c{}_\nu \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_\nu(x)} + \mathcal{L}_{[w_1, w_2]} \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)} \right). \tag{D.1}
\end{aligned}$$

Hier haben wir wiederum die Identität (4.1) für die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ von Vektorfeldern verwandt. Zudem soll die abkürzende Schreibweise „ $-(1 \leftrightarrow 2)$ “ hier wie auch stets im folgenden bedeuten, daß der voranstehende Ausdruck mit vertauschten Numerierungen 1 und 2 zu subtrahieren ist.

Da es sich bei dem Diffeomorphismusgeist \mathcal{C}^μ um ein Vektorfeld handelt, ändert sich bei der analogen Rechnung für diese Komponente des Feldraums lediglich das Vorzeichen des Terms, der in der Lie-Ableitung durch Multiplikation wirkt. Auch in diesem Fall wird schließlich wieder die Lie-Ableitung entlang des Kommutators der Vektorfelder reproduziert. Durch den Diffeomorphismus-Antigeist hingegen wird ebenfalls eine Einsform definiert, so daß die Rechnung vollkommen identisch zu (D.1) verläuft. Schließlich transformieren sich die Lorentz-Geist- und Lorentz-Antigeist-Felder als Skalare unter Diffeomorphismen. Dies hat zur Folge, daß bei der Berechnung ihrer Beiträge zu der Kommutator-Relation zweier Diffeomorphismus-Ward-Operatoren im Vergleich zu (D.1) in der Lie-Ableitung bloß der Ableitungsterm erhalten bleibt, wohingegen der Multiplikationsterm entfällt. Die analoge Rechnung führt schließlich auch hier auf die Lie-Ableitung entlang der Lie-Klammer der beiden erzeugenden Vektorfelder. Insgesamt leiten wir somit für zwei Diffeomorphismus-Ward-Operatoren die Vertauschungsrelation

$$[\mathcal{W}_D(w_1), \mathcal{W}_D(w_2)] = \mathcal{W}_D([w_1, w_2]) \tag{D.2}$$

ab.

Der Kommutator $[\mathcal{W}_L(\lambda_1), \mathcal{W}_L(\lambda_2)]$. Bei der Berechnung des Kommutators zweier Lorentz-

Ward-Operatoren ist zunächst zu beachten, daß sich sowohl das Vielbein als auch die Lorentz-Geister und Lorentz-Antigeister homogen als Tensoren erster bzw. zweiter Stufe transformieren. Wir berechnen hier bloß den Kommutator der Lorentz-Geist-Komponente gemäß

$$\begin{aligned}
& \left[\int d^4x \delta_L(\lambda_1) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)}, \int d^4y \delta_L(\lambda_2) \Sigma^{cd}(y) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \right] \\
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_L(\lambda_1) \Sigma^{ab}(x) \left(\frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \delta_L(\lambda_2) \Sigma^{cd}(y) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \right. \\
&\quad \left. - \delta_L(\lambda_2) \Sigma^{cd}(y) \left(\frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \delta_L(\lambda_1) \Sigma^{ab}(x) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \right\} \\
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_L(\lambda_1) \Sigma^{ab}(x) \left(\frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} (\lambda_2^c{}_e(y) \Sigma^{ed}(y) + \lambda_2^d{}_e(y) \Sigma^{ce}(y)) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \right. \\
&\quad \left. - \delta_L(\lambda_2) \Sigma^{cd}(y) \left(\frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} (\lambda_1^a{}_e(x) \Sigma^{eb}(x) + \lambda_1^b{}_e(x) \Sigma^{ae}(x)) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \right\} \\
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ (\delta_L(\lambda_1) \Sigma^{ab}(x)) (\lambda_2^c{}_a(y) \delta^d{}_b + \lambda_2^d{}_b(y) \delta^c{}_a) \delta^{(4)}(x-y) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \right. \\
&\quad \left. - (\delta_L(\lambda_2) \Sigma^{cd}(y)) (\lambda_1^a{}_c(x) \delta^b{}_d + \lambda_1^b{}_d(x) \delta^a{}_c) \delta^{(4)}(y-x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ (\lambda_2^c{}_a (\lambda_1^a{}_e \Sigma^{ed} + \lambda_1^d{}_e \Sigma^{ae}) + \lambda_2^d{}_b (\lambda_1^c{}_e \Sigma^{eb} + \lambda_1^b{}_e \Sigma^{ce})) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(x)} \right. \\
&\quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ (\lambda_2^c{}_e \lambda_1^e{}_f \Sigma^{fd} + \lambda_2^d{}_e \lambda_1^e{}_f \Sigma^{cf} + (\lambda_2^c{}_e \lambda_1^d{}_f + \lambda_1^c{}_e \lambda_2^d{}_f) \Sigma^{ef}) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(x)} \right. \\
&\quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= - \int d^4x \left\{ ([\lambda_1, \lambda_2]^c{}_e \Sigma^{ed} + [\lambda_1, \lambda_2]^d{}_e \Sigma^{ce}) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(x)} \right. \\
&= - \int d^4x \delta_L([\lambda_1, \lambda_2]) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)}. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Hierin verschwindet der in λ_1 und λ_2 symmetrische Term aufgrund der Antisymmetrisierung in 1 und 2.

Aus dieser Rechnung geht der Vielbein-Kommutator durch Einschränkung auf einen kontravarianten Index hervor, wohingegen für den Antigeist-Beitrag ko- und kontravariante Indizes gerade zu vertauschen sind. Daher liefert auch bezüglich dieser Feldkomponenten der Kommutator zweier Lorentz-Ward-Operatoren die entsprechende Komponente des

Ward-Operators, der die durch den $O(4)$ -Kommutator der beiden ursprünglichen Parameter gegebene Lorentz-Transformation erzeugt.

Im Gegensatz zu diesen Lorentz-Tensoren transformiert sich der Spinzusammenhang inhomogen, so daß dieser Anteil des Ward-Operators separat zu untersuchen ist, doch auch hier können wir auf die obige Rechnung (D.3) zurückgreifen. Da bei der Berechnung des Kommutators die Funktionalableitung bezüglich des Spinzusammenhangs angewandt auf dessen Variation trotz des in dieser auftretenden inhomogenen Terms keinen zusätzlichen Beitrag liefert, gilt auch hier zunächst

$$\begin{aligned}
 & \left[\int d^4x \delta_L(\lambda_1) \hat{\omega}^{ab}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)}, \int d^4y \delta_L(\lambda_2) \hat{\omega}^{cd}_\nu(y) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)} \right] \\
 &= \int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_L(\lambda_1) \hat{\omega}^{ab}_\mu(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)} \delta_L(\lambda_2) \hat{\omega}^{cd}_\nu(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)} \right. \\
 & \quad \left. - \delta_L(\lambda_2) \hat{\omega}^{cd}_\nu(y) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)} \delta_L(\lambda_1) \hat{\omega}^{ab}_\mu(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)} \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ (\lambda_2^c{}_a \delta_L(\lambda_1) \hat{\omega}^{ad}_\nu + \lambda_2^d{}_b \delta_L(\lambda_1) \hat{\omega}^{cb}_\nu) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(x)} \right. \\
 & \quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\}; \tag{D.4}
 \end{aligned}$$

die beiden Raumzeit-Indizes werden durch die Funktionalableitung einfach gleichgesetzt. Der tensorartige Transformationsanteil des Spinzusammenhangs verhält sich nun genauso wie die Lorentz-Geist-Komponente des Kommutators (D.3), so daß wir jetzt bloß noch den inhomogenen Beitrag betrachten wollen. Für diesen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x \left\{ (\lambda_2^c{}_a \partial_\nu \lambda_1^{ad} + \lambda_2^d{}_b \partial_\nu \lambda_1^{cb}) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(x)} \right. \\
 & \quad \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ \partial_\nu (\lambda_1^{ce} \lambda_2^d - \lambda_2^{ce} \lambda_1^d) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(x)} \right\} \\
 &= - \int d^4x \left\{ (-\partial_\nu [\lambda_1, \lambda_2]^{ab}) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)} \right\}. \tag{D.5}
 \end{aligned}$$

Somit ist auch für den Spinzusammenhang die Vertauschungsrelation von der Form

$$\begin{aligned} & \left[\int d^4x \delta_L(\lambda_1) \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x)}, \int d^4y \delta_L(\lambda_2) \hat{\omega}^{cd}{}_{\nu}(y) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}{}_{\nu}(y)} \right] \\ &= - \int d^4x \delta_L([\lambda_1, \lambda_2]) \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x)}. \end{aligned}$$

Beachten wir abschließend, daß der Lorentz-Ward-Operator entlang der Diffeomorphismus-Geist- und Diffeomorphismus-Antigeist-Richtungen im Feldraum überhaupt keine Transformationen erzeugt, da sich diese nach (3.13) unter Lorentz-Transformationen nicht transformieren, so ist damit die Kommutatorrelation

$$[\mathcal{W}_L(\lambda_1), \mathcal{W}_L(\lambda_2)] = \mathcal{W}_L([\lambda_1, \lambda_2]) \quad (\text{D.6})$$

gezeigt.

Der Kommutator $[\mathcal{W}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)]$. Abschließend wenden wir uns dem gemischten Teil der Ward-Algebra zu. Auch hier werten wir zunächst wiederum die Vielbein-Komponente aus, die gemäß der üblichen Methode der Berechnung durch

$$\begin{aligned} & \left[\int d^4x \delta_D(w) \hat{e}^a{}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(x)}, \int d^4y \delta_L(\lambda) \hat{e}^b{}_{\nu}(y) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^b{}_{\nu}(y)} \right] \\ &= \int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_D(w) \hat{e}^a{}_{\mu}(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(x)} \delta_L(\lambda) \hat{e}^b{}_{\nu}(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^b{}_{\nu}(y)} \right. \\ & \quad \left. - \delta_L(\lambda) \hat{e}^b{}_{\nu}(y) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{e}^b{}_{\nu}(y)} \delta_D(w) \hat{e}^a{}_{\mu}(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(x)} \right\} \\ &= \int d^4x \int d^4y \left\{ (\delta_D(w) \hat{e}^a{}_{\mu}(x)) \lambda^b{}_a(y) \delta_{\nu}{}^{\mu} \delta^{(4)}(x-y) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^b{}_{\nu}(y)} \right. \\ & \quad \left. - (\delta_L(\lambda) \hat{e}^b{}_{\nu}(y)) (w^{\rho}(x) \partial_{\rho}^x \delta_{\mu}{}^{\nu} \delta^{(4)}(x-y) + (\partial_{\mu}^x w^{\nu}(x)) \delta^{(4)}(x-y)) \delta^a{}_b \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(x)} \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \lambda^b{}_a (\delta_D(w) \hat{e}^a{}_{\nu}(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^b{}_{\nu}(x)} \right. \\ & \quad \left. - (w^{\rho} \partial_{\rho} (\delta_L(\lambda) \hat{e}^a{}_{\mu}(x)) + (\partial_{\mu} w^{\nu}) \delta_L(\lambda) \hat{e}^a{}_{\nu}(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(x)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \left(\lambda^a_b \mathcal{L}_w \hat{e}^b_\mu(x) - \mathcal{L}_w(\lambda^a_b \hat{e}^b_\mu)(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)} \\
&= \int d^4x \left(-w^\rho \partial_\rho \lambda^a_b \right) \hat{e}^b_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)} \\
&= - \int d^4x \delta_L(\mathcal{L}_w \lambda) \hat{e}^a_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)}
\end{aligned}$$

gegeben ist. Dabei haben wir die Linearität (4.6) der Lie-Ableitung ausgenutzt.

Für den Lorentz-Geist als Raumzeit-Skalar und Lorentz-Tensor zweiter Stufe verläuft die Rechnung vollkommen analog:

$$\begin{aligned}
&\left[\int d^4x \delta_D(w) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)}, \int d^4y \delta_L(\lambda) \Sigma^{cd}(y) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \right] \\
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_D(w) \Sigma^{ab}(x) \left(\frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \delta_L(\lambda) \Sigma^{cd}(y) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \right. \\
&\quad \left. - \delta_L(\lambda) \Sigma^{cd}(y) \left(\frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \delta_D(w) \Sigma^{ab}(x) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \right\} \\
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ (\delta_D(w) \Sigma^{ab}(x)) (\lambda^c_a(y) \delta^d_b + \lambda^d_b(y) \delta^c_a) \delta^{(4)}(x-y) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} \right. \\
&\quad \left. - (\delta_L(\lambda) \Sigma^{cd}(y)) (w^\rho(x) \partial_\rho \delta^a_c \delta^b_d \delta^{(4)}(x-y)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \right\} \\
&= \int d^4x \left(\lambda^a_e \mathcal{L}_w \Sigma^{eb}(x) + \lambda^b_e \mathcal{L}_w \Sigma^{ae}(x) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{L}_w(\lambda^a_e \Sigma^{eb}(x) + \lambda^b_e \Sigma^{ae}(x)) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \\
&= - \int d^4x \left((\mathcal{L}_w \lambda^a_e) \Sigma^{eb}(x) + (\mathcal{L}_w \lambda^b_e) \Sigma^{ae}(x) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \\
&= - \int d^4x \delta_L(\mathcal{L}_w \lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)}.
\end{aligned}$$

Um dies auf den Lorentz-Antigeist zu übertragen, müssen erneut bloß ko- und kontravariante Indizes vertauscht werden.

Die Berechnung der Spinzusammenhangs-Komponente entspricht gewissermaßen einer Kombination dieser beiden Resultate: Zum einen verschwindet wiederum der inhomogene Beitrag der $O(4)$ -Transformation nach der Funktionalableitung bezüglich \hat{w}^{ab}_μ , so daß hier bloß der homogene Tensoranteil beiträgt. Zum anderen verhält sich der Spinzusammenhang als Einsform bezüglich Diffeomorphismen genau wie das Vielbein. Dies führt unter

Berücksichtigung von (4.8) und (4.9) auf

$$\begin{aligned}
& \left[\int d^4x \delta_D(w) \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)}, \int d^4y \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y)} \right] \\
&= \int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_D(w) \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)} \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y)} \right. \\
&\quad \left. - \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y)} \delta_D(w) \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)} \right\} \\
&= \int d^4x \left(\lambda^a {}_e \mathcal{L}_w \hat{\omega}^{eb}_{\mu}(x) + \lambda^b {}_e \mathcal{L}_w \hat{\omega}^{ae}_{\mu}(x) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{L}_w (-\partial_{\mu} \lambda^{ab} + \lambda^a {}_e \hat{\omega}^{eb}_{\mu}(x) + \lambda^b {}_e \hat{\omega}^{ae}_{\mu}(x)) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)} \\
&= - \int d^4x \delta_L(\mathcal{L}_w \lambda) \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)}.
\end{aligned}$$

Da auch hier die Diffeomorphismus-Geist- und Diffeomorphismus-Antigeistkomponenten wegen (3.13) erneut keine Beiträge liefern, erfüllen der Diffeomorphismus- und der Lorentz-Ward-Operator somit die Vertauschungsrelation

$$[\mathcal{W}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] = \mathcal{W}_L(\mathcal{L}_w \lambda). \quad (\text{D.7})$$

Die Gleichungen (D.2), (D.6) und (D.6) bilden den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen in Kapitel 4.

D.2 Die Algebra der modifizierten Operatoren $\widetilde{\mathcal{W}}_D$ und \mathcal{W}_L

Hier berechnen wir die durch die Feldabhängigkeit des Transformationsparameters bedingten Zusatzbeiträge zur Algebra der modifizierten Ward-Operatoren $\widetilde{\mathcal{W}}_D$ und \mathcal{W}_L auf dem Niveau der unzerlegten Quantenfelder. Wir betrachten zunächst den **Kommutator** $[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w_1), \widetilde{\mathcal{W}}_D(w_2)]$. Es treten nun im Gegensatz zur ursprünglichen Parametrisierung auch die im Hauptteil angesprochenen gemischten Beiträge auf. Diese sind z. B. für das Vielbein

durch

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \int d^4y \left\{ \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x)} \widetilde{\delta}_D(w_2) \hat{e}^c{}_{\nu}(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_{\nu}(y)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x) w_2^{\mu} \delta^c{}_a \hat{e}^b{}_{\nu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_{\nu}(x)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ w_2^{\mu} \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^c{}_{b\mu} \hat{e}^b{}_{\nu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_{\nu}(x)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= - \int d^4x \left\{ w_2^{\mu} w_1^{\rho} \hat{F}^c{}_{b\mu\rho} \hat{e}^b{}_{\nu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^c{}_{\nu}(x)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= 2 \int d^4x w_1^{\rho} w_2^{\sigma} \hat{F}^a{}_{b\rho\sigma} \hat{e}^b{}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(x)} \\
&= 2 \int d^4x \delta_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F}) \hat{e}^a{}_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(x)} \tag{D.8}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
(w_1 w_2 \cdot \hat{F})^{ab} &\equiv w_1^{\mu} w_2^{\nu} \hat{F}^{ab}{}_{\mu\nu} \\
&= -(w_1 w_2 \cdot \hat{F})^{ba} \\
&= -(w_2 w_1 \cdot \hat{F})^{ab}
\end{aligned}$$

gegeben. Man erhält also aufgrund der Feldabhängigkeit des Transformationsparameters für die Vielbein-Komponente des Ward-Operators den Zusatzbeitrag $-2\mathcal{W}_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F})$.

Der Zusatzterm für den Lorentz-Geist-Anteil ist strukturell von der gleichen Form

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \int d^4y \left\{ \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x)} \widetilde{\delta}_D(w_2) \Sigma^{cd}(y) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(y)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}{}_{\mu}(x) w_2^{\mu} (\delta^c{}_a \Sigma^d{}_b(x) + \delta^d{}_a \Sigma^c{}_b(x)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(x)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= - \int d^4x \left\{ w_2^{\mu} w_1^{\rho} (\hat{F}^c{}_{b\mu\rho} \Sigma^{bd}(x) + \hat{F}^d{}_{b\mu\rho} \Sigma^{cb}(x)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{cd}(x)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
&= 2 \int d^4x w_1^{\rho} w_2^{\sigma} (\hat{F}^a{}_{e\rho\sigma} \Sigma^{eb}(x) + \hat{F}^b{}_{e\rho\sigma} \Sigma^{ae}(x)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \\
&= 2 \int d^4x \delta_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F}) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)}, \tag{D.9}
\end{aligned}$$

und Entsprechendes gilt für den Lorentz-Antigeist.

Da sich für die Diffeomorphismus-Geister und -Antigeister die neuen Diffeomorphismen nicht von den ursprünglichen unterscheiden, sind hier keine derartigen Zusatzterme zu berücksichtigen. Dies fügt sich konsistent in die obigen Rechnungen ein, da der Lorentz-Ward-Operator weder eine \mathcal{C} - noch eine $\bar{\mathcal{C}}$ -Komponente besitzt.

Für den Spinzusammenhang selbst erhält man die analogen Zusatzterme durch Anwendung der Funktionalableitung auf den $\hat{\omega}$ -abhängigen Transformationsparameter der Lorentz-Transformation, um die wir den ursprünglichen Diffeomorphismus ergänzt haben. Die zusätzlichen Beiträge sind in der folgenden Rechnung durch Unterstreichung und einen Pfeil gekennzeichnet, wohingegen die unmarkierten Beiträge auch bei einer Transformation mit feldunabhängigem Transformationsparameter auftreten:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \int d^4y \left\{ (\widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)} \widetilde{\delta}_D(w_2) \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\ = & \int d^4x \int d^4y \left\{ (\widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x)} (\mathcal{L}_{w_2} \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y) - \partial_{\nu}^y (w_2^{\rho}(y) \hat{\omega}^{cd}_{\rho}(y)) \right. \right. \\ & \left. \left. + w_2^{\rho}(y) \hat{\omega}^{c}_{\epsilon\rho}(y) \hat{\omega}^{ed}_{\nu}(y) + w_2^{\rho}(y) \hat{\omega}^d_{\epsilon\rho}(y) \hat{\omega}^{ce}_{\nu}(y)) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y)} \right. \\ & \left. - (1 \leftrightarrow 2) \right\}. \end{aligned}$$

Die Zusatzterme ergeben sich mithin zu

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \int d^4x \int d^4y \left\{ \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{ab}_{\mu}(x) \left(-\partial_{\nu}^y (w_2^{\mu}(y) \delta^c_a \delta^d_b \delta^{(4)}(x-y)) + w_2^{\mu}(y) \delta^c_a \hat{\omega}^d_{\nu}(y) \delta^{(4)}(x-y) \right. \right. \\ & \left. \left. + w_2^{\mu}(y) \delta^d_a \hat{\omega}^c_{b\nu}(y) \delta^{(4)}(x-y) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ (-\partial_{\nu}(w_2^{\mu} \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{cd}_{\mu}(x)) - \hat{\omega}^d_{b\nu} w_2^{\mu} \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{cb}_{\mu}(x) \right. \\ & \left. - \hat{\omega}^c_{b\nu} w_2^{\mu} \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{bd}_{\mu}(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(x)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ (-\hat{\nabla}_{\nu}(w_2^{\mu} \widetilde{\delta}_D(w_1) \hat{\omega}^{cd}_{\mu}(x))) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(x)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ (\hat{\nabla}_{\nu}(w_2^{\mu} w_1^{\rho} \hat{F}^{cd}_{\mu\rho}(x))) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_{\nu}(y)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int d^4x (-\hat{\nabla}_\mu (w_1^\rho w_2^\sigma \hat{F}^{ab}_{\rho\sigma}(x))) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)} \\
&= 2 \int d^4x \delta_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F}) \hat{\omega}^{ab}_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)}. \tag{D.10}
\end{aligned}$$

Damit haben wir für alle Komponenten gezeigt, daß sich die aufgrund der Feldabhängigkeit des Transformationsparameters zu erwartenden Zusatzbeiträge bei der Berechnung des Kommutators (4.22) zu $-2\mathcal{W}_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F})$ zusammenfassen lassen. Wir greifen auf dieses Resultat im Hauptteil im Rahmen der Gleichung (4.23) zurück.

Der Kommutator $[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)]$. Jetzt sind noch für den gemischten Teil der Algebra die entsprechenden Zusatzterme zu ermitteln, wobei sich die relevanten Funktionalableitungen bereits in (D.8), (D.9) und (D.10) finden. Betrachten wir also die Vielbein-Komponente des Operators $[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)]$, so liefert nur die Wirkung der Funktionalableitung bezüglich $\hat{\omega}$ aus dem Beitrag mit negativem Vorzeichen des Lorentz-Ward-Operators auf den $\hat{\omega}$ -abhängigen Transformationsparameter in $\widetilde{\mathcal{W}}_D(w)$ einen zusätzlichen Beitrag. Dieser ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
& - \int d^4x \int d^4y (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)} \delta_L(w \cdot \hat{\omega}) \hat{e}^a_\mu(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)} \\
&= - \int d^4x (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_\nu(x)) w^\nu(x) \delta^a_c \hat{e}_{d\mu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)} \\
&= - \int d^4x w^\nu (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^a_{b\nu}) \hat{e}^b_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)} \\
&= \int d^4x w^\nu (\hat{\nabla}_\nu \lambda^a_b) \hat{e}^b_\mu(x) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)} \\
&= \int d^4x (\delta_L(w \cdot \hat{\nabla} \lambda) \hat{e}^a_\mu(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{e}^a_\mu(x)},
\end{aligned}$$

denn durch die $O(4)$ -kovariante Ableitung eines (antisymmetrischen) Tensor wird wiederum ein (antisymmetrischer) Tensor definiert, und diese Eigenschaft bleibt natürlich auch nach Raumzeit-Kontraktion mit dem Lorentz-Skalar w erhalten.

Ganz analog erhält man für den Lorentz-Geist

$$\begin{aligned}
& - \int d^4x \int d^4y (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)} \delta_L(w \cdot \hat{\omega}) \Sigma^{ab}(x) \right) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \\
= & - \int d^4x (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_\nu(x)) w^\nu(x) (\delta^a_c \Sigma^b_d(x) + \delta^b_c \Sigma^a_d(x)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \\
= & - \int d^4x w^\nu ((\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^a_{c\nu}) \Sigma^{cb}(x) + (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^b_{c\nu}) \Sigma^{ac}(x)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \\
= & \int d^4x w^\nu ((\hat{\nabla}_\nu \lambda^a_c) \Sigma^{cb}(x) + (\hat{\nabla}_\nu \lambda^b_c) \Sigma^{ac}(x)) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)} \\
= & \int d^4x \delta_L(w \cdot \hat{\nabla} \lambda) \Sigma^{ab}(x) \frac{\delta}{\delta \Sigma^{ab}(x)},
\end{aligned}$$

was wiederum das Resultat für den Antigeist impliziert. Auch hier sind keine \mathcal{C} - und $\bar{\mathcal{C}}$ -Beiträge zu berücksichtigen.

Abschließend wenden wir uns dem Spinzusammenhang selbst zu. Dabei sind diejenigen Beiträge, die von der Feldabhängigkeit des Parameters herrühren, wiederum wie zuvor extra gekennzeichnet:

$$\begin{aligned}
& - \int d^4x \int d^4y (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)} \delta_L(w \cdot \hat{\omega}) \hat{\omega}^{ab}_\mu(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)} \\
= & - \int d^4x \int d^4y (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)) \left(\frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{cd}_\nu(y)} \left(- \partial_\mu^x (w^\rho(x) \hat{\omega}^{ab}_\rho(x)) + w^\rho(x) \hat{\omega}^a_{e\rho}(x) \hat{\omega}^{eb}_\mu(x) \right. \right. \\
& \left. \left. + w^\rho(x) \hat{\omega}^b_{e\rho}(x) \hat{\omega}^{ae}_\mu(x) \right) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}_\mu(x)}.
\end{aligned}$$

Für diesen Kommutator ergeben sich die Zusatzbeiträge der Spinzusammenhangs-Komponente

zu

$$\begin{aligned}
& - \int d^4x \int d^4y (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{cd}{}_\nu(y)) (-\partial_\mu^y (w^\nu(x) \delta^a{}_c \delta^b{}_d \delta^{(4)}(x-y)) + w^\nu(x) \delta^a{}_c \hat{\omega}^b{}_{d\mu}(y) \delta^{(4)}(x-y) \\
& \quad + w^\nu(x) \delta^b{}_c \hat{\omega}^a{}_{d\mu}(x) \delta^{(4)}(x-y)) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \\
& = - \int d^4x \left(-\partial_\mu (w^\nu (\delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{ab}{}_\nu(x))) + \hat{\omega}^b{}_{d\mu} w^\nu \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{ad}{}_\nu(x) \right. \\
& \quad \left. + \hat{\omega}^a{}_{d\mu} w^\nu \delta_L(\lambda) \hat{\omega}^{bd}{}_\nu(x) \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \\
& = \int d^4x \left(-\partial_\mu (w^\nu \hat{\nabla}_\nu \lambda^{ab}(x)) - \hat{\omega}^a{}_{e\mu} w^\nu \hat{\nabla}_\nu \lambda^{eb} - \hat{\omega}^b{}_{e\mu} w^\nu \hat{\nabla}_\nu \lambda^{ae} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \\
& = \int d^4x (-\hat{\nabla}_\mu (w^\nu \hat{\nabla}_\nu \lambda^{ab}(x))) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)} \\
& = \int d^4x (\delta_L(w \cdot \hat{\nabla} \lambda) \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)) \frac{\delta}{\delta \hat{\omega}^{ab}{}_\mu(x)}.
\end{aligned}$$

Wir haben somit komponentenweise nachgerechnet, daß die Feldabhängigkeit des Transformationsparameters in dem Kommutator $[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)]$ auf einen Zusatzterm der Form $-\mathcal{W}_L(w \cdot \hat{\nabla} \lambda)$ führt, der seinerseits ebenfalls keine \mathcal{C} - und $\bar{\mathcal{C}}$ -Komponenten enthält. Dieses Resultat geht in die Gleichung (4.26) im Hauptteil ein.

Dort bestimmen wir noch die Beiträge, die sich vermöge der Linearität der Ward-Operatoren ergeben und leiten schließlich ab, daß die modifizierte Algebra die Form

$$\boxed{
\begin{aligned}
[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w_1), \widetilde{\mathcal{W}}_D(w_2)] &= \widetilde{\mathcal{W}}_D([w_1, w_2]) - \mathcal{W}_L(w_1 w_2 \cdot \hat{F}) \\
[\mathcal{W}_L(\lambda_1), \mathcal{W}_L(\lambda_2)] &= \mathcal{W}_L([\lambda_1, \lambda_2]) \\
[\widetilde{\mathcal{W}}_D(w), \mathcal{W}_L(\lambda)] &= 0
\end{aligned}
} \tag{D.11}$$

besitzt.

D.3 Eine Bemerkung zur Algebra der Ward-Operatoren \mathcal{W}_D^G und \mathcal{W}_L^G in der ursprünglichen Parametrisierung

Die Vielbein-Komponente des δ^G -Ward-Operators für Diffeomorphismen ist gegeben durch

$$\int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_D^G(w_1) \varepsilon^a{}_\mu(x) \left(\frac{\delta}{\delta \varepsilon^a{}_\mu(x)} \delta_D^G(w_2) \varepsilon^b{}_\nu(y) \right) \frac{\delta}{\delta \varepsilon^b{}_\nu(y)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\}. \quad (\text{D.12})$$

Da sich nun die Fluktuation des Vielbeins unter wahren Eichtransformationen gerade linear wie ein auf die Summe aus Hintergrund- und Fluktuationskomponente angewandter unzerlegter Diffeomorphismus transformiert, erzeugt die darauf wirkende Funktionalableitung bezüglich der Fluktuation gerade die gleiche Struktur wie in der Rechnung (D.1) für das Vielbein im Falle der ursprünglichen Transformation $\delta_D(w_2)$, die man nun genauso wie zuvor auf die voranstehende Transformation $\delta_D^G(w_1) \varepsilon^a{}_\mu$ wirken läßt. Diese Überlegung überträgt sich in gleicher Weise auf den Lorentz-Sektor. Betrachtet man insbesondere den Beitrag der Spinzusammenhangsfluktuation

$$\int d^4x \int d^4y \left\{ \delta_L^G(\lambda_1) \tau^{ab}{}_\mu(x) \left(\frac{\delta}{\delta \tau^{ab}{}_\mu(x)} \delta_L^G(\lambda_2) \tau^{cd}{}_\nu(y) \right) \frac{\delta}{\delta \tau^{cd}{}_\nu(y)} - (1 \leftrightarrow 2) \right\}, \quad (\text{D.13})$$

so lassen sich die Rechnungen (D.4) und (D.5) ebenfalls ganz analog übertragen.

Anhang E

Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$

In diesem Anhang wird die zweite Variation des Funktionals Γ_k bezüglich der unzerlegten Fluktuationen $\bar{\varepsilon}_\mu^a$ und $\bar{\tau}_\mu^{ab}$ berechnet.

E.1 Die Berechnung von $\Gamma_k^{(2)}$ in den unzerlegten Feldern

Der Gravitonanteil unserer Trunkierung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Gamma_{k \text{ grav}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}] &= -\frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x e \left\{ (e_a^\mu e_b^\nu - \frac{1}{2\gamma_k} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_{a\rho} e_{b\sigma}) F_{\mu\nu}^{ab} - 2\Lambda_k \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha_D} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\nu + \frac{1}{2\alpha_L} \int d^4x \bar{e} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab}.\end{aligned}$$

Mit der Definition der Tensordichte aus dem Anhang A

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} &:= e \varepsilon^{abcd} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma \\ \Leftrightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\rho^c e_\sigma^d &= e \varepsilon^{abcd} e_a^\mu e_b^\nu \\ \Leftrightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e_\mu^a e_\nu^b &= 4 e \cdot e_{[c}^\rho e_{d]}^\sigma \\ \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c e_\sigma^d &= 2 e (4 \cdot 4 - 4) = 24 e\end{aligned}$$

ergibt sich

$$e \cdot e_{[a}{}^\mu e_{b]}{}^\nu = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^c{}_\rho e^d{}_\sigma$$

sowie

$$e = \frac{1}{24} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma,$$

so daß der obige Trunkierungsansatz die Gestalt

$$\begin{aligned} \Gamma_{k \text{ grav}}[e, \omega, \bar{e}, \bar{\omega}] &= -\frac{1}{64\pi G_k} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \left(\varepsilon_{abcd} - \frac{1}{2\gamma_k} \cdot 2(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc}) \right) F_{\mu\nu}^{ab} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Lambda_k}{3} \varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \right\} e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha_D} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\nu + \frac{1}{2\alpha_L} \int d^4x \bar{e} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab} \\ &= -\frac{1}{64\pi G_k} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ K_{abcd}^{(\gamma_k)} F_{\mu\nu}^{ab} - \frac{\Lambda_k}{3} \varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \right\} e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \\ &\quad + \frac{1}{16\pi G_k} \left(\frac{1}{2\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\nu + \frac{1}{2\alpha'_L} \int d^4x \bar{e} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}_{ab} \right) \end{aligned}$$

mit

$$K_{abcd}^{(\gamma_k)} := \varepsilon_{abcd} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})$$

und

$$\alpha'_L := \frac{\alpha_L}{16\pi G_k}$$

annimmt. Den Bemerkungen im Hauptteil folgend ist die Massendimension von α'_L durch -2 gegeben.

Wir berechnen nun zunächst in der $(\bar{e}, \bar{\tau})$ -Darstellung die vier Blöcke, die in der quadratischen Form (6.1) auftreten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit bestimmen wir diese dabei für den Graviton- und den Eichfixierungsanteil separat, indem wir Γ_k gemäß $\Gamma_{k \text{ grav}} = \Gamma_{k \text{ Ho}} + \Gamma_{k \text{ gf}}$ zerlegen; $\Gamma_{k \text{ gf}}$ enthält dabei alle Beiträge proportional zu $\frac{1}{\alpha_D}$ oder $\frac{1}{\alpha_L}$.

Nun ergibt sich unter Beachtung von (A.59)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega]}{\delta e^k_\alpha(y)} &= -\frac{1}{64\pi G_k} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \left(2K_{abck}^{(\gamma_k)} F_{\mu\nu}^{ab}(x) - \frac{4}{3} \Lambda_k \varepsilon_{abck} e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) e^c_\rho(x) \right) \delta^{(4)}(x-y) \\ &= -\frac{1}{32\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \left(K_{abck}^{(\gamma_k)} F_{\mu\nu}^{ab}(y) - \frac{2}{3} \Lambda_k \varepsilon_{abck} e^a_\mu(y) e^b_\nu(y) \right) e^c_\rho(y) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\delta^2 \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega]}{\delta e^m_\beta(x) \delta e^k_\alpha(y)} = -\frac{1}{32\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \left(K_{abmk}^{(\gamma_k)} F_{\mu\nu}^{ab}(y) - 2\Lambda_k \varepsilon_{abmk} e^a_\mu(y) e^b_\nu(y) \right) \delta^{(4)}(x-y). \quad (\text{E.1})$$

Um die Funktionalableitungen bezüglich des Spinzusammenhangs zu berechnen, sind folgende Identitäten nützlich: Mit

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{\mu\nu}^{ab}(x)}{\delta \omega^{kl}_\alpha(y)} &= \delta^a_k \delta^b_l (\delta_\nu^\alpha \partial_\mu^x - \delta_\mu^\alpha \partial_\nu^x) \delta^{(4)}(x-y) \\ &\quad + (\delta^a_k \eta_{cl} \delta_\mu^\alpha \omega^{cb}_\nu(x) + \omega^a_{c\mu}(x) \delta^c_k \delta^b_l \delta_\nu^\alpha - \delta^a_k \eta_{cl} \delta_\nu^\alpha \omega^{cb}_\mu - \omega^a_{c\nu} \delta^c_k \delta^b_l \delta_\mu^\alpha) \delta^{(4)}(x-y) \\ &= [\delta_\nu^\alpha (\delta^a_k \delta^b_l \partial_\mu^x + \delta^b_l \omega^a_{k\mu}(x) + \delta^a_k \omega^b_{l\mu}(x)) \\ &\quad - \delta_\mu^\alpha (\delta^a_k \delta^b_l \partial_\nu^x + \delta^b_l \omega^a_{k\nu}(x) + \delta^a_k \omega^b_{l\nu}(x))] \delta^{(4)}(x-y) \\ &\equiv [\delta_\nu^\alpha \nabla_\mu^{x ab}_{kl} - \delta_\mu^\alpha \nabla_\nu^{x ab}_{kl}] \delta^{(4)}(x-y) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 F_{\mu\nu}^{ab}(z)}{\delta \omega^{mn}_\beta(x) \delta \omega^{kl}_\alpha(y)} &= [\delta^a_k (\delta^b_n \eta_{lm} \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha - \eta_{lm} \delta^b_n \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) \\ &\quad + \delta^b_l (\delta^a_m \eta_{kn} \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta^a_m \eta_{kn} \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha)] \delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(z-y) \\ &= (\delta^a_k \eta_{lm} \delta^b_n - \delta^a_m \eta_{nk} \delta^b_l) (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) \delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(z-y) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega]}{\delta e_\beta^m(x) \delta \omega_\alpha^{kl}(y)} &= \frac{\delta}{\delta e_\beta^m(x)} \left[-\frac{1}{32\pi G_k} \int d^4 z \varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} K_{abcd}^{(\gamma_k)} e_\rho^c(z) e_\sigma^d(z) (\nabla_\mu^{z ab} \delta^{(4)}(z-y)) \right] \\
&= -\frac{1}{16\pi G_k} \int d^4 z \varepsilon^{\mu\alpha\rho\beta} K_{abcm}^{(\gamma_k)} e_\rho^c(z) (\nabla_\mu^{z ab} \delta^{(4)}(z-y)) \delta^{(4)}(x-z) \\
&= -\frac{1}{16\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} e_\nu^c(x) (\nabla_\mu^{x ab} \delta^{(4)}(x-y)), \tag{E.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega]}{\delta \omega^{mn}_\beta(x) \delta e_\alpha^k(y)} &= \frac{\delta}{\delta \omega^{mn}_\beta(x)} \left[-\frac{1}{32\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\rho\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} e_\rho^c(y) F_{\mu\nu}^{ab}(y) \right] \\
&= \frac{1}{16\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} e_\nu^c(y) (\nabla_\mu^{y ab} \delta^{(4)}(y-x)) \tag{E.3}
\end{aligned}$$

sowie abschließend

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \Gamma_{k \text{ Ho}}[e, \omega]}{\delta \omega^{mn}_\beta(x) \delta \omega_\alpha^{kl}(y)} &= -\frac{1}{32\pi G_k} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} (K_{kncd}^{(\gamma_k)} \eta_{lm} - K_{mlcd}^{(\gamma_k)} \eta_{kn}) e_\rho^c(y) e_\sigma^d(y) \delta^{(4)}(y-x) \\
&= \frac{1}{32\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (K_{knab}^{(\gamma_k)} \eta_{lm} - K_{mlab}^{(\gamma_k)} \eta_{kn}) e_\mu^a(y) e_\nu^b(y) \delta^{(4)}(y-x). \tag{E.4}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der „**Holst-Anteil**“ der quadratischen Form (6.1), $\Gamma_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}}$, zu

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \\ \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \end{pmatrix}^T \times \left(-\frac{1}{16\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \right) \times \\
&\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} (K_{abmk}^{(\gamma_k)} F_{\mu\nu}^{ab} - 2\Lambda_k \varepsilon_{abmk} e_\mu^a(y) e_\nu^b(y)) \delta^{(4)}(x-y) & K_{abcm}^{(\gamma_k)} e_\nu^c(x) (\nabla_\mu^{x ab} \delta^{(4)}(x-y)) \\ -K_{abck}^{(\gamma_k)} e_\nu^c(y) (\nabla_\mu^{y ab} \delta^{(4)}(y-x)) & -\frac{1}{2} (K_{knab}^{(\gamma_k)} \eta_{lm} - K_{mlab}^{(\gamma_k)} \eta_{kn}) e_\mu^a(y) e_\nu^b(y) \delta^{(4)}(y-x) \end{array} \right) \Bigg|_{e=\bar{e}, \omega=\bar{\omega}} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_\alpha^k(y) \\ \bar{\tau}^{kl}_\alpha(y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir integrieren nun im $(\bar{\varepsilon}, \bar{\tau})$ - und im $(\bar{\tau}, \bar{\varepsilon})$ -Block die kovariante Ableitung partiell, um die Delta-Distributionen auszuwerten. Anschließend machen wir die partielle Integration

im $(\bar{\varepsilon}, \bar{\tau})$ -Block wieder rückgängig:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \\ \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \end{pmatrix}^T \times \left(-\frac{1}{16\pi G_k} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \right) \times \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K_{abmk}^{(\gamma_k)} \bar{F}^{ab}_{\mu\nu}(x) - 2\Lambda_k \varepsilon_{abmk} \bar{e}_\mu^a(x) \bar{e}_\nu^b(x)) & K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c(x) \bar{\nabla}_\mu^{ab}{}_{kl} \\ K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{\nabla}_\mu^{ab}{}_{mn} \bar{e}_\nu^c(x) & K_{nkab}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\mu^a(x) \bar{e}_\nu^b(x) \eta_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_\alpha^k(x) \\ \bar{\tau}_\alpha^{kl}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Aufgrund der Antisymmetrie des Spinzusammenhangs in den $O(4)$ -Indizes wird bei partieller Integration die kovariante Ableitung $\nabla_\mu^{ab}{}_{kl}$ unter dem Integral in $-\nabla_\mu^{kl}{}_{ab}$ überführt. Des weiteren haben wir im $(\bar{\tau}, \bar{\tau})$ -Block die Antisymmetrie der Spinzusammenhangsfluktuationen ausgenutzt: Es gilt nämlich

$$\bar{\tau}^{mn}_\beta K_{mlab}^{(\gamma_k)} \eta_{kn} \bar{\tau}_\alpha^{kl} = -\bar{\tau}^{mn}_\beta K_{nlab}^{(\gamma_k)} \eta_{km} \bar{\tau}_\alpha^{kl} = \bar{\tau}^{mn}_\beta K_{nkab}^{(\gamma_k)} \eta_{lm} \bar{\tau}_\alpha^{kl},$$

und der Tensor $K^{(\gamma_k)}$ ist in den ersten beiden Indizes antisymmetrisch. Zudem bezeichnen in (E.5) Querstriche wie üblich die Auswertung der jeweiligen Größe auf den gewählten Hintergrundkonfigurationen.

Nun berechnen wir die **Eichfixierungsbeiträge**. Diese liefern nur einen Beitrag zum $(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$ -Sektor von Γ_k^{quad} , da die Eichbedingungen nur bezüglich der Vielbeinfluktuationen implementiert werden. Zunächst gilt

$$\Gamma_{k \text{ gf}}[e, \bar{e}, \bar{\omega}] = \frac{1}{16\pi G_k} \left(\frac{1}{2\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\nu + \frac{1}{2\alpha'_L} \int d^4x \bar{e} \eta_{ac} \eta_{bd} \mathcal{G}^{ab} \mathcal{G}^{cd} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu &= \bar{e}_a^\nu (\bar{D}_\nu (e - \bar{e})_\mu^a + \beta_D \bar{D}_\mu (e - \bar{e})_\nu^a) \\ &= \bar{e}_a^\nu (\bar{D}_\nu^a{}_{\mu\tau} + \beta_D \bar{D}_\mu^a{}_{\nu\tau}) e_\tau^b \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{ab} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\nu}((e - \bar{e})^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu - (e - \bar{e})^b{}_\mu \bar{e}^a{}_\nu) \\ &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\nu}(e^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu - e^b{}_\mu \bar{e}^a{}_\nu),\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

wobei wir definitionsgemäß $\bar{\varepsilon} = e - \bar{e}$ gesetzt haben. In (E.6) fallen dann die Beiträge des Hintergrundvielbeins weg, da dieses per Konstruktion kovariant konstant ist, und in (E.7) verschwindet wegen $\bar{\varepsilon}^{[ab]} \equiv \eta^{[ab]} = 0$ seine Antisymmetrisierung. Wir berechnen nun

$$\frac{\delta\mathcal{F}_\mu(x)}{\delta e^k{}_\alpha(y)} = \bar{e}_a{}^\rho(x) (\bar{D}_\rho{}^a{}_{\mu k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\mu{}^a{}_{\rho k}{}^\alpha) \delta^{(4)}(x - y)$$

sowie

$$\frac{\delta\mathcal{G}^{ab}(x)}{\delta e^k{}_\alpha(y)} = \delta_k^{[a} \bar{e}^{b]\alpha}(x) \delta^{(4)}(x - y),$$

so daß sich die zweite Variation von $\Gamma_{k\text{ gf}}$ zu

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\Gamma_{k\text{ gf}}}{\delta e^m{}_\beta(x)\delta e^k{}_\alpha(y)} &= \frac{1}{16\pi G_k} \frac{\delta}{\delta e^m{}_\beta(x)} \left\{ \frac{1}{\alpha_D} \int d^4z \bar{e}(z) \bar{g}^{\mu\nu}(z) \mathcal{F}_\mu(z) \times \right. \\ &\quad \times [\bar{e}_a{}^\rho(z) (\bar{D}_\rho{}^a{}_{\nu k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\nu{}^a{}_{\rho k}{}^\alpha) \delta^{(4)}(y - z)] \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} \int d^4z \bar{e}(z) \mathcal{G}^{ab}(z) \eta_{ak} \bar{e}_b{}^\alpha(z) \delta^{(4)}(y - z) \right\} \\ &= \frac{1}{16\pi G_k} \left\{ \frac{1}{\alpha_D} \int d^4z \bar{e}(z) \bar{g}^{\mu\nu}(z) [\bar{e}_b{}^\sigma(z) (\bar{D}_\sigma{}^b{}_{\mu m}{}^\beta + \beta_D \bar{D}_\mu{}^b{}_{\sigma m}{}^\beta) \delta^{(4)}(x - z)] \right. \\ &\quad [\bar{e}_a{}^\rho(z) (\bar{D}_\rho{}^a{}_{\nu k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\nu{}^a{}_{\rho k}{}^\alpha) \delta^{(4)}(y - z)] \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} \bar{e}(y) \delta_m^{[a} \bar{e}^{b]\beta}(y) \eta_{ak} \bar{e}_b{}^\alpha(y) \delta^{(4)}(x - y) \right\} \\ &= \frac{1}{16\pi G_k} \left\{ -\frac{1}{\alpha_D} [(\bar{D}_\sigma{}^x{}_{\mu m}{}^{\beta b} + \beta_D \bar{D}_\mu{}^x{}_{\sigma m}{}^{\beta b}) \bar{e}_b{}^\sigma(x) \bar{e}(x) \bar{g}^{\mu\nu}(x) \bar{e}_a{}^\rho(x) \right. \\ &\quad (\bar{D}_\rho{}^x{}_{\nu k}{}^\alpha + \beta_D \bar{D}_\nu{}^x{}_{\rho k}{}^\alpha) \delta^{(4)}(y - x)] \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} \frac{1}{2} \bar{e}(y) (\eta_{mk} \bar{g}^{\beta\alpha}(y) - \bar{e}_m{}^\alpha(y) \bar{e}_k{}^\beta(y)) \delta^{(4)}(x - y) \right\}\end{aligned}\quad (\text{E.8})$$

ergibt. Im letzten Schritt haben wir dabei verwandt, daß analog zur $O(4)$ -kovarianten Ableitung ∇ bei partieller Integration der Raumzeit-kovarianten Ableitung D unter dem Integral $\bar{D}_\nu{}^x{}_{\rho k}{}^\alpha = -\bar{D}_\nu{}^x{}_{k\rho}{}^\alpha$ gilt.

Setzen wir dieses Resultat nun in die quadratische Form ein, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{k \text{ gf}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}] \\
 = & \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \left(\frac{1}{16\pi G_k} \right) \cdot \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \\
 & \left(-\frac{1}{\alpha_D} [(\bar{D}_{\sigma m}^{x \beta b} + \beta_D \bar{D}_{\mu m}^{x \beta b}) \bar{e}(x) \bar{g}^{\mu\nu}(x) \bar{e}_b^\sigma(x) \bar{e}_a^\rho(x) (\bar{D}_{\rho \nu k}^{x a \alpha} + \beta_D \bar{D}_{\nu \rho k}^{x a \alpha}) \delta^{(4)}(y-x)] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} \frac{1}{2} \bar{e}(y) (\eta_{mk} \bar{g}^{\beta\alpha}(y) - \bar{e}_m^\alpha(y) \bar{e}_k^\beta(y)) \delta^{(4)}(x-y) \right) \bar{\varepsilon}_\alpha^k(y) \\
 = & \frac{1}{2} \int d^4x \left(\frac{1}{16\pi G_k} \right) \cdot \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \\
 & \left(-\frac{1}{\alpha_D} (\bar{D}_{\sigma m}^{x \beta b} + \beta_D \bar{D}_{\mu m}^{x \beta b}) \bar{e}(x) \bar{g}^{\mu\nu}(x) \bar{e}_b^\sigma(x) \bar{e}_a^\rho(x) (\bar{D}_{\rho \nu k}^{x a \alpha} + \beta_D \bar{D}_{\nu \rho k}^{x a \alpha}) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} \frac{1}{2} \bar{e}(x) (\eta_{mk} \bar{g}^{\beta\alpha}(x) - \bar{e}_m^\alpha(x) \bar{e}_k^\beta(x)) \right) \bar{\varepsilon}_\alpha^k(x). \tag{E.9}
 \end{aligned}$$

Auch hier haben wir die kovarianten Ableitungen partiell integriert, die Delta-Distribution ausgewertet und anschließend die partiellen Integrationen wieder rückgängig gemacht. Im abschließenden Ausdruck wirken dann die kovarianten Ableitungen jeweils auf alles, was rechts von ihnen steht; ihr Wirkungsbereich ist nicht länger durch eckige Klammern beschränkt. Integrieren wir in (E.9) die linke der beiden kovarianten Ableitungen schließlich partiell, so führt dies auf

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k \text{ gf}}^{\text{quad}}[\bar{\varepsilon}; \bar{e}, \bar{\omega}] &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e}(x) \\
 & \left\{ \frac{1}{\alpha_D} \bar{g}^{\mu\nu}(x) [\bar{e}_b^\sigma(x) (\bar{D}_{\sigma \mu m}^{x b \beta} + \beta_D \bar{D}_{\mu \sigma m}^{x b \beta}) \bar{\varepsilon}_\beta^m(x)] \right. \\
 & \quad \left. [\bar{e}_a^\rho(x) (\bar{D}_{\rho \nu k}^{x a \alpha} + \beta_D \bar{D}_{\nu \rho k}^{x a \alpha}) \bar{\varepsilon}_\alpha^k(x)] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} \bar{\varepsilon}^{[\alpha\beta]}(x) \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}(x) \right\}. \tag{E.10}
 \end{aligned}$$

Wir erkennen darin den ursprünglichen Eichfixierungsterm wieder, der nun jedoch statt der Fluktuationen ε deren Erwartungswerte $\bar{\varepsilon}$ enthält. Jener war ursprünglich per Konstruktion quadratisch in den Fluktuationen, so daß wir ihn in dieser Entwicklung natürlich exakt reproduzieren sollten.

E.2 Zur Hermitizität von $\Gamma_k^{(2)}$

Gemäß seiner Konstruktion durch zweifache funktionale Ableitung eines Funktionals sollte der Operator $\Gamma_k^{(2)}$ hermitesch sein, und von dieser Eigenschaft wollen wir uns in diesem Unterabschnitt kurz überzeugen.

Im $(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$ - und im $(\bar{\tau}, \bar{\tau})$ -Block wirkt $\Gamma_k^{(2)}$ abgesehen von dem Beitrag aus der Diffeomorphismuseichung als reiner Multiplikationsoperator, so daß sich die Selbstadjungiertheit in diesem Sektor in eine Symmetrie der Matrixelemente übersetzt. Diese ist in der Tat gegeben, denn es gilt (unter Vernachlässigung des Vorfaktors $\frac{1}{16\pi G_k}$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (K_{abmk}^{(\gamma_k)} \bar{F}_{\mu\nu}^{ab} - 2\Lambda_k \varepsilon_{abmk} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b) \\ = & \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (K_{abkm}^{(\gamma_k)} \bar{F}_{\mu\nu}^{ab} - 2\Lambda_k \varepsilon_{abkm} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \bar{\tau}^{mn}{}_\beta [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{nkab}^{(\gamma_k)} \eta_{ml} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b] \bar{\tau}^{kl}{}_\alpha \\ = & \bar{\tau}^{mn}{}_\beta [\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} K_{knab}^{(\gamma_k)} \eta_{lm} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b] \bar{\tau}^{kl}{}_\alpha \\ = & \bar{\tau}^{mn}{}_\beta [\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} K_{lmab}^{(\gamma_k)} \eta_{kn} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b] \bar{\tau}^{kl}{}_\alpha \end{aligned}$$

unter Verwendung der Antisymmetrie der Spinzusammenhangsfluktuationen. Die Selbstadjungiertheit der Eichfixierungsbeiträge ist in der Form (E.9) am besten zu erkennen: Durch zweimalige partielle Integration der kovarianten Ableitungen wird der Diffeomorphismusanteil offensichtlich in sich selbst überführt, wohingegen der $O(4)$ -Beitrag als Multiplikationsoperator wiederum symmetrisch bezüglich der Indexvertauschung $\{k, \alpha\} \leftrightarrow \{m, \beta\}$ ist. Abschließend ist also noch die Selbstadjungiertheit der Nebendiagonalblöcke zu zeigen: Diese gehen gemäß

$$\begin{aligned} & \bar{\varepsilon}_\beta^m [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \bar{\nabla}_\mu^{ab}{}_{kl}] \bar{\tau}^{kl}{}_\alpha \\ = & \bar{\tau}^{kl}{}_\alpha [\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{\nabla}_\mu^{ab}{}_{kl} \bar{e}_\nu^c] \bar{\varepsilon}_\beta^m, \end{aligned}$$

über eine partielle Integration auseinander hervor, so daß also in der Tat die durch (E.5) und (E.9) definierte quadratische Form für reelle Felder $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\tau}$ hermitesch ist. Bis auf den

Vorfaktor $\frac{1}{2}$ können wir daher deren Kern mit dem Operator $\Gamma_k^{(2)}$ identifizieren und diesen entsprechend ablesen.

Anhang F

Berechnung des freien Anteils $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}}$

Unter dem freien Anteil der quadratischen Form (E.5) verstehen wir diejenigen Beiträge derselben, die für einen verschwindenden Hintergrundspinzusammenhang $\bar{\omega} = 0$ verbleiben, so daß also die Terme erster und zweiter Ordnung in $\bar{\omega}$ nicht berücksichtigt werden. Wir berechnen im folgenden den freien Anteil der *reduzierten quadratischen Form*, $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(0)}$, in dem die $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ - und die $\bar{\mu}$ -Reskalierungen, die den Zerlegungen (6.11), (6.12), (6.20) und (6.22) innewohnen, noch nicht berücksichtigt sind.

Nach $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(0)} = \tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(0)} + \tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(0)} + \tilde{\Gamma}_{k \text{ gh}}^{\text{quad}(0)}$ setzt sich diese quadratische Form aus drei Teilen zusammen. Wir berechnen sie separat, wobei wir den Eichfixierungsbeitrag $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(0)}$ unmittelbar im Anschluß an die $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponente des Holst-Anteils $\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(0)}$ berechnen.

F.1 Berechnung des freien Anteils $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}$ im Gravitonsektor

Dieser ist explizit gegeben durch

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(0)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left\{ \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \left[\Lambda_k \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \varepsilon_{abmk} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b \right] \bar{\varepsilon}_\alpha^k(x) \right. \\
&\quad + \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \delta_k^a \delta_l^b \partial_\mu \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha(x) \\
&\quad + \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \delta_m^a \delta_n^b K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \partial_\mu \right] \bar{\varepsilon}_\alpha^k(x) \\
&\quad \left. + \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\delta_n^b \delta_k^a \eta_{lm} - \delta_m^a \delta_l^b \eta_{kn}) K_{abcd}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\mu^c \bar{e}_\nu^d \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha(x) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left\{ \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \left[\Lambda_k \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \varepsilon_{abmk} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b \right] \bar{\varepsilon}_\alpha^k(x) \right. \\
&\quad + \bar{\varepsilon}_\beta^m(x) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \delta_k^a \delta_l^b \partial_\mu \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha(x) \\
&\quad + \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \delta_m^a \delta_n^b K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \partial_\mu \right] \bar{\varepsilon}_\alpha^k(x) \\
&\quad \left. + \bar{\tau}^m_{l\beta}(x) \left[\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{mkcd}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\mu^c \bar{e}_\nu^d \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha(x) \right\}, \tag{F.1}
\end{aligned}$$

wobei wir die Antisymmetrie der Spinzusammenhangsfluktuationen in den beiden $O(4)$ -Indizes sowie die Antisymmetrie des Tensors $K_{abcd}^{(\gamma_k)}$ in den ersten beiden Indizes ausgenutzt haben, um den $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Block entsprechend umzuformen. Wir setzen jetzt die Zerlegungen (6.11) und (6.12) ein und berechnen (F.1) zeilenweise.

F.1.1 Der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(0)}$

Der zu berechnende Ausdruck ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left\{ (\partial^m \partial_\beta a + \partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta + (\square \bar{e}_\beta^m - \partial^m \partial_\beta) d + \varepsilon^m_{pqr} \bar{e}_\beta^p \partial^q d^r + d_\beta^m) \right. \\
&\quad \left[\Lambda_k \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \varepsilon_{abmk} \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b \right] \\
&\quad \left. (\partial^k \partial_\alpha a + \partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha + (\square \bar{e}_\alpha^k - \partial^k \partial_\alpha) d + \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}_\alpha^u \partial^v d^w + d_\alpha^k) \right\}. \tag{F.2}
\end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst den Skalar a auf der linken Seite, so verschwinden nach partieller Integration der beiden Ableitungen die Beiträge a - a , a - b^k und a - c_α , da in diesen Fällen

stets zwei partielle Ableitungen mit einem Levi-Civita-Tensor kontrahiert werden. Zur Berechnung des ersten nicht-verschwindenden Beitrages verwenden wir die Identität

$$\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}\varepsilon_{abmk}\bar{e}^a{}_{\mu}\bar{e}^b{}_{\nu} = 2\bar{e}(\bar{e}_m{}^{\beta}\bar{e}_k{}^{\alpha} - \bar{e}_k{}^{\beta}\bar{e}_m{}^{\alpha}),$$

so daß sich dieser bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{32\pi G_k}$ zu

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ a [\Lambda_k \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \varepsilon_{abmk} \bar{e}^a{}_{\mu} \bar{e}^b{}_{\nu}] \partial^m \partial_{\beta} (\square \bar{e}^k{}_{\alpha} - \partial^k \partial_{\alpha}) d \} \\ &= \int d^4x \{ a [2\bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m{}^{\beta} \bar{e}_k{}^{\alpha} - \bar{e}_k{}^{\beta} \bar{e}_m{}^{\alpha}) \bar{e}^k{}_{\alpha} \partial^m \partial_{\beta} \square] d \} \\ &= \int d^4x \{ a [6\bar{e} \Lambda_k \square^2] d \} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

ergibt. Die beiden verbleibenden Beiträge verschwinden ebenfalls:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ a [\Lambda_k \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \varepsilon_{abmk} \bar{e}^a{}_{\mu} \bar{e}^b{}_{\nu}] \partial^m \partial_{\beta} \varepsilon^k{}_{uvw} \bar{e}^u{}_{\alpha} \partial^v d^w \} \\ &= \int d^4x \{ a [2\bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m{}^{\beta} \bar{e}_k{}^{\alpha} - \bar{e}_k{}^{\beta} \bar{e}_m{}^{\alpha}) \bar{e}^u{}_{\alpha} \varepsilon^k{}_{uvw} \partial^m \partial_{\beta} \partial^v] d^w \} \\ &= \int d^4x \{ a [2\bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m{}^{\beta} \delta_k^u - \bar{e}_k{}^{\beta} \delta_m^u) \varepsilon^k{}_{uvw} \partial^m \partial_{\beta} \partial^v] d^w \} = 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\int d^4x \{ a [2\bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m{}^{\beta} \bar{e}_k{}^{\alpha} - \bar{e}_k{}^{\beta} \bar{e}_m{}^{\alpha}) \partial^m \partial_{\beta}] d^k{}_{\alpha} \} = 0,$$

wobei letzteres aus der Spur- und der Divergenzfreiheit des Tensors $d^k{}_{\alpha}$ resultiert.

Wenden wir uns nun dem Vektor b^m zu, so verschwinden auch hier zunächst die Beiträge b^m - a und b^m - b^k . Nach partieller Integration erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ b^m [-\Lambda_k \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \varepsilon_{abmk} \bar{e}^a{}_{\mu} \bar{e}^b{}_{\nu}] \partial_{\beta} \partial^k c_{\alpha} \} \\ &= \int d^4x \{ b^m [-2\bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m{}^{\beta} \bar{e}_k{}^{\alpha} - \bar{e}_k{}^{\beta} \bar{e}_m{}^{\alpha}) \partial_{\beta} \partial^k] c_{\alpha} \} \\ &= \int d^4x \{ b^m [2\bar{e} \Lambda_k \square] c_m \} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

sowie

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ b^m [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha) \partial_\beta \square \bar{e}_\alpha^k] d \} \\ &= \int d^4x \{ b^m [-2 \bar{e} \Lambda_k (4-1) \partial_m \square] d \} = 0 \end{aligned}$$

nach anschließender partieller Integration wegen der Divergenzfreiheit von b^m ,

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ b^m [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \partial_\beta \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}_\alpha^u \partial^v d^w \} \\ &= \int d^4x \{ b^m [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \delta_k^u - \bar{e}_k^\beta \delta_m^u) \varepsilon^k_{uvw} \partial_\beta \partial^v] d^w \} = 0 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\int d^4x \{ b^m [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \partial_\beta d^k_\alpha \} = 0.$$

Ebenfalls aufgrund zweier antisymmetrisierter Ableitungen verschwinden die Beiträge $c_{\beta-a}$ und $c_{\beta-c_\alpha}$. Wir berechnen den einzigen nicht-verschwindenden Beitrag zu

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ c_\beta [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \partial^m \partial_\alpha b^k \} \\ &= \int d^4x \{ c_k [2 \bar{e} \Lambda_k \square] b^k \}, \end{aligned} \tag{F.5}$$

denn wir erhalten darüber hinaus

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ c_\beta [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \partial^m \square \bar{e}_\alpha^k d \} \\ &= \int d^4x \{ c_\beta [-2 \bar{e} \Lambda_k (4-1) \partial^\beta \square] d \} = 0 \end{aligned}$$

nach partieller Integration,

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ c_\beta [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \partial^m \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}_\alpha^u \partial^v d^w \} \\ &= \int d^4x \{ c_\beta [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \delta_k^u - \bar{e}_k^\beta \delta_m^u) \varepsilon^k_{uvw} \partial^m \partial^v] d^w \} = 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\int d^4x \{ c_\beta [- 2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \partial^m d^k_\alpha \} = 0 .$$

Für den Spuranteil d erhalten wir nach zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \bar{e}^m_\beta \square \partial^k \partial_\alpha a \} \\ &= \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (4 - 1) \square^2] a \} \\ &= \int d^4x \{ d [6 \bar{e} \Lambda_k \square^2] a \} , \end{aligned} \tag{F.6}$$

$$\int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \bar{e}^m_\beta \square \partial_\alpha b^k \} = 0 ,$$

$$\int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \bar{e}^m_\beta \square \partial^k c_\alpha \} = 0 ,$$

was jeweils aus der Divergenzfreiheit der Vektorfelder b^k und c_α resultiert, sowie

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] (\bar{e}^m_\beta \square - \partial^m \partial_\beta) (\bar{e}^k_\alpha \square - \partial^k \partial_\alpha) d \} \\ &= \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha) \\ & \quad (\square^2 \bar{e}^m_\beta \bar{e}^k_\alpha - \bar{e}^k_\alpha \partial^m \partial_\beta \square - \bar{e}^m_\beta \partial^k \partial_\alpha \square + \partial^m \partial^k \partial_\beta \partial_\alpha)] d \} \\ &= \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (16 \square^2 - 4 \square^2 - 4 \square^2 + \square^2 - 4 \square^2 + \square^2 + 0)] d \} \\ &= \int d^4x \{ d [12 \bar{e} \Lambda_k \square^2] d \} , \end{aligned} \tag{F.7}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] (\bar{e}^m_\beta \square - \partial^m \partial_\beta) \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}^u_\alpha \partial^v d^w \} \\ &= \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \delta_k^u - \bar{e}_k^\beta \delta_m^u) (\bar{e}^m_\beta \square - \partial^m \partial_\beta) \varepsilon^k_{uvw} \partial^v] d^w \} \\ &= \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (0 - (\delta_k^u \square - \partial^u \partial_k)) \varepsilon^k_{uvw} \partial^v] d^w \} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] (\bar{e}_\beta^m \square - \partial^m \partial_\beta) d_\alpha^k \} \\ &= \int d^4x \{ d [2 \bar{e} \Lambda_k (0 - \square \bar{e}_k^\alpha + \partial^\alpha \partial_k)] d_\alpha^k \} = 0. \end{aligned}$$

Der für den Vektor d^r zu berechnende Beitrag ist durch

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d^r [-2 \bar{e} \Lambda_k (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha)] \varepsilon_{pqr}^m \bar{e}^p \partial^q \\ & \quad (\partial^k \partial_\alpha a + \partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha + (\square \bar{e}_\alpha^k - \partial^k \partial_\alpha) d + \varepsilon_{uvw}^k \bar{e}_\alpha^u \partial^v d^w + d_\alpha^k) \} \\ &= \int d^4x \{ d^r [2 \bar{e} \Lambda_k \bar{e}_m^\alpha \varepsilon_{kqr}^m \partial^q] (\partial^k \partial_\alpha a + \partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha \\ & \quad + (\square \bar{e}_\alpha^k - \partial^k \partial_\alpha) d + \varepsilon_{uvw}^k \bar{e}_\alpha^u \partial^v d^w + d_\alpha^k) \} \end{aligned}$$

gegeben, so daß das Verschwinden der Beiträge d^r - a , d^r - b^k , d^r - c_α und d^r - d unmittelbar ersichtlich ist. Für den d^r - d^w -Beitrag erhalten wir hingegen

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d^r [2 \bar{e} \Lambda_k \varepsilon_{kqr}^m \varepsilon_{mvw}^k \partial^q \partial^v] d^w \} \\ &= \int d^4x \{ d^r [-4 \bar{e} \Lambda_k (\eta_{qv} \eta_{rw} - \eta_{qw} \eta_{rv}) \partial^q \partial^v] d^w \} \\ &= \int d^4x \{ d^r [-4 \bar{e} \Lambda_k \square] d^w \}. \end{aligned} \tag{F.8}$$

Die d^r - d_α^k -Komponente liefert wegen der Symmetrie des Tensors d_α^k ebenfalls keinen Beitrag:

$$\int d^4x \{ d^r [2 \bar{e} \Lambda_k \varepsilon_{kqr}^m \partial^q] d_m^k \} = 0. \tag{F.9}$$

Abschließend berechnen wir, welche Felder auf der rechten Seite in (F.2) an den Tensor d_β^m koppeln. Da dieser spurfrei ist, ist der Ausdruck

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d_\beta^m [-2 \bar{e} \Lambda_k \bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha] (\partial^k \partial_\alpha a + \partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha \\ & \quad + (\square \bar{e}_\alpha^k - \partial^k \partial_\alpha) d + \varepsilon_{uvw}^k \bar{e}_\alpha^u \partial^v d^w + d_\alpha^k) \} \end{aligned}$$

für die einzelnen Komponentenfelder auszuwerten.

Nach partieller Integration der Ableitungen verschwinden zunächst die Komponenten $d_{\beta}^m\text{-}a$, $d_{\beta}^m\text{-}b^k$ sowie $d_{\beta}^m\text{-}c_{\alpha}$ aufgrund der Divergenzfreiheit des Tensors. Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d_{\beta}^m [- 2 \bar{e} \Lambda_k \bar{e}_k^{\beta} \bar{e}_m^{\alpha}] (\square \bar{e}_{\alpha}^k - \partial^k \partial_{\alpha}) d \} \\ = & \int d^4x \{ d_{\beta}^m [- 2 \bar{e} \Lambda_k (\square \bar{e}_m^{\beta} - \partial^{\beta} \partial_m)] d \} = 0 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d_{\beta}^m [- 2 \bar{e} \Lambda_k \bar{e}_k^{\beta} \bar{e}_m^{\alpha}] \varepsilon^k{}_{uvw} \bar{e}_{\alpha}^u \partial^v d^w \} \\ = & \int d^4x \{ d_{\beta}^m [- 2 \bar{e} \Lambda_k \varepsilon^k{}_{m\nu w} \partial^{\nu}] d^w \} = 0 \end{aligned}$$

sowie abschließend

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d_{\beta}^m [- 2 \bar{e} \Lambda_k \bar{e}_k^{\beta} \bar{e}_m^{\alpha}] d_{\alpha}^k \} \\ = & \int d^4x \{ d_{\beta}^m [- 2 \bar{e} \Lambda_k] d_m^{\beta} \} \\ = & \int d^4x \{ d_{\beta}^m [- 2 \bar{e} \Lambda_k] d_m^{\beta} \} , \end{aligned} \tag{F.10}$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie des Tensors d_{β}^m ausgenutzt haben.

F.1.2 Berechnung des Eichfixierungsbeitrags $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(0)}$

Da die Eichbedingungen bloß den Fluktuationserwartungswert des Vielbeins und nicht den des Spinzusammenhangs beinhalten, liefert der Eichfixierungsterm in der Wirkung ausschließlich Beiträge zur $\bar{e}\text{-}\bar{e}$ -Komponente der quadratischen Form, deren Berechnung wir an dieser Stelle einschieben. Wir setzen dazu analog in den Eichfixierungsbeiträgen (E.10) die Zerlegung (6.11) ohne $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ - und $\bar{\mu}$ -Reskalierung ein und berechnen für diese zunächst den freien Anteil; der Beitrag der Ordnung $\mathcal{O}(\bar{\omega})$ wird im Anschluß an der entsprechenden Stelle in Anhang H berechnet.

Wir erhalten mit

$$\partial_\nu \bar{\varepsilon}^\nu = \partial_\mu \square a + \square c_\mu$$

und

$$\bar{\varepsilon}^\nu \equiv \text{Tr}(\bar{\varepsilon} \cdot) = \square a + \text{Tr}(d \cdot) = \square a + 3 \square d$$

nach (4.44)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu &= (1 + \beta_D) \partial_\mu \square a + \square c_\mu + 3\beta_D \partial_\mu \square d \\ &+ \frac{1}{2} v_a [n^{(\pm) a}{}_b (\partial^b \partial_\mu a + \partial_\mu b^b + \partial^b c_\mu + (\bar{e}^b_\mu \square - \partial^b \partial_\mu) d + \varepsilon^b{}_{klm} \bar{e}^k_\mu \partial^l d^m + d^b{}_\mu) \\ &+ n^{(\pm) \rho}{}_\mu (\partial^a \partial_\rho a + \partial_\rho b^a + \partial^a c_\rho + (\bar{e}^a_\rho \square - \partial^a \partial_\rho) d + \varepsilon^a{}_{pqr} \bar{e}^p_\rho \partial^q d^r + d^a{}_\rho) . \end{aligned}$$

Die $O(4)$ -Eichfixierung hingegen liefert nur Beiträge zum freien Anteil, und dieser ergibt sich mit $\bar{\varepsilon}^m{}_\beta \bar{\varepsilon}^{[\beta]}_{[m]} = \bar{\varepsilon}^{[m}{}_\beta \bar{\varepsilon}^{\beta]}_{[m]}$ bezüglich der Komponenten der Fluktuationszerlegung nach den entsprechenden partiellen Integrationen zu

$$\begin{aligned} \Gamma_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(0)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4 x \bar{e} \left\{ \frac{1}{\alpha_D} [((1 + \beta_D) \partial_\mu \square a + \square c_\mu + 3\beta_D \partial_\mu \square d) \right. \\ &\quad \left. ((1 + \beta_D) \partial^\mu \square a + \square c^\mu + 3\beta_D \partial^\mu \square d)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} (\partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta + \varepsilon^m{}_{kln} \bar{e}^k_\beta \partial^l d^n) \right. \\ &\quad \left. (\partial^{[\beta} b_{m]} + \partial_{[m} c^{\beta]} + \varepsilon_m{}^{pqr} \bar{e}_p{}^\beta \partial_q d_r) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4 x \bar{e} \left\{ \frac{1}{\alpha_D} [a(- (1 + \beta_D)^2 \square^3) a + 0 + a(- 3\beta_D(1 + \beta_D) \square^3) d \right. \\ &\quad \left. + 0 + c_\mu(\square^2) c^\mu + 0 + d(- 3\beta_D(1 + \beta_D) \square^3) a + 0 \right. \\ &\quad \left. + d(- 9\beta_D^2 \square^3) d] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} [b^m(- \partial_\beta \partial^{[\beta} b_{m]}) + b^m(- \partial_\beta \partial_{[m} c^{\beta]}) + b^m(- \partial_p \varepsilon_m{}^{pqr} \partial_q d_r) \right. \\ &\quad \left. + c_\beta(- \partial^m \partial^{[\beta} b_{m]}) + c_\beta(- \partial^m \partial_{[m} c^{\beta]}) + c_p(- \partial^m \varepsilon_m{}^{pqr} \partial_q d_r) \right. \\ &\quad \left. + d^n(- \varepsilon^m{}_{kln} \partial^l \partial^{[k} b_{m]}) + d^n(- \varepsilon^m{}_{kln} \partial^l \partial_{[m} c^{k]}) \right. \\ &\quad \left. + d^n(- \varepsilon^m{}_{kln} \varepsilon_m{}^{kqr} \partial^l \partial_q d_r) \right\} . \end{aligned}$$

Beachten wir auch hier wieder die Transversalität aller Vektoren, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(0)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \left\{ \frac{1}{\alpha_D} \left[a \left(- (1 + \beta_D)^2 \square^3 \right) a + a \left(- 3\beta_D (1 + \beta_D) \square^3 \right) d \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + d \left(- 3\beta_D (1 + \beta_D) \square^3 \right) a + d \left(- 9\beta_D^2 \square^3 \right) d \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + c_\mu \left(\square^2 \right) c^\mu \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha'_L} \left[b^m \left(- \frac{\square}{2} \right) b_m + b^m \left(\frac{\square}{2} \right) c_m + c_\beta \left(\frac{\square}{2} \right) b^\beta + c_\beta \left(- \frac{\square}{2} \right) c^\beta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + d^n \left(- 2\square \right) d_n \right] \right\}. \tag{F.11}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir den \bar{e} - \bar{e} -Block von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ auf dem Niveau der \bar{e} -Zerlegung berechnet.

F.1.3 Der \bar{e} - $\bar{\tau}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$

Wenden wir uns nun wieder (F.1) zu, so ist hier der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e}^m_\beta(x) \left[- \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{klcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu \partial_\mu \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha(x) \\
 = &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left\{ (\partial^m \partial_\beta a + \partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta + (\square \bar{e}^m_\beta - \partial^m \partial_\beta) d + \varepsilon^m_{abc} \bar{e}^a_\beta \partial^b d^c + d^m_\beta) \times \right. \\
 &\quad \times \left[- \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{klcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu \partial_\mu \right] (\partial_\alpha \partial^k A^l + \partial^k (\square \bar{e}^l_\alpha - \partial^l \partial_\alpha) B + \partial^k \varepsilon^l_{uvw} \bar{e}^u_\alpha \partial^v B^w \\
 &\quad + \partial^k B^l_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial_\alpha \partial^u C^v + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u ((\square \bar{e}^v_\alpha - \partial^v \partial_\alpha) D \\
 &\quad \left. + \varepsilon^v_{rst} \bar{e}^r_\alpha \partial^s D^t + D^v_\alpha) \right\} \tag{F.12}
 \end{aligned}$$

zu berechnen, wobei wir ausgenutzt haben, daß aufgrund der Antisymmetrie des Tensors $K^{(\gamma_k)}$ in den ersten beiden Indizes die explizite Antisymmetrisierung der Spinzusammenhangsfluktuation hinfällig ist.

Zum einen ist nun zu beachten, daß aufgrund der Kontraktion mit $\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \partial_\mu$ jedes Koeffizientenfeld, vor dem eine partielle Ableitung bezüglich eines Raumzeitindex auftritt, keinen Beitrag liefert; dies folgt nach einer partiellen Integration natürlich auch unmittelbar für die entsprechenden Felder der Vielbeinfluktuationszerlegung. Zudem läßt sich in der Zerlegung der Spinzusammenhangsfluktuation die Komponente, die den Vektor D^t beinhaltet,

wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\varepsilon_v{}^{kl}{}^u\varepsilon^{rst}\bar{e}^r{}_\alpha\partial^u\partial^s D^t \\
= & -\frac{1}{2}\left(\delta_r^k\delta_s^l\eta_{ut} + \delta_s^k\delta_t^l\eta_{ur} + \delta_t^k\delta_r^l\eta_{us} - \delta_r^k\delta_t^l\eta_{us} - \delta_s^k\delta_r^l\eta_{ut} - \delta_t^k\delta_s^l\eta_{ur}\right)\partial^u\partial^s D^t \\
= & \frac{1}{2}\left[\delta_t^l\left(\bar{e}^k{}_\alpha\Box - \partial^k\partial_\alpha\right) - \delta_t^k\left(\bar{e}^l{}_\alpha\Box - \partial^l\partial_\alpha\right)\right]D^t \\
= & \left(\bar{e}^{[k}{}_\alpha\Box - \partial^{[k}\partial_\alpha\right)D^{l]}, \tag{F.13}
\end{aligned}$$

wobei wiederum die explizite Antisymmetrisierung nach dem Einsetzen in (F.12) weggelassen werden kann und zudem der zweite Term, der die partielle Ableitung enthält, keinen Beitrag liefert. Somit läßt sich (F.12) in der Form

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left\{ \left(\partial^m c_\beta + \bar{e}^m{}_\beta \Box d + \varepsilon^m{}_{abc} \bar{e}^a{}_\beta \partial^b d^c + d^m{}_\beta \right) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{klcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \partial_\mu \right] \right. \\
& \quad \left. \left(\partial^k \bar{e}^l{}_\alpha \Box B + \partial^k \varepsilon^l{}_{uv} \bar{e}^u{}_\alpha \partial^v B^w + \partial^k B^l{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial^u \bar{e}^v{}_\alpha \Box D + \bar{e}^k{}_\alpha \Box D^l \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial^u D^v{}_\alpha \right) \right\} \tag{F.14}
\end{aligned}$$

schreiben, wobei wir im weiteren Verlauf zur expliziten Berechnung dieses Ausdrucks auf die Relation

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{klcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \partial_\mu \\
= & -\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \left(\varepsilon_{klcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{kc}\eta_{lm} - \eta_{km}\eta_{lc}) \right) \bar{e}^c{}_\nu \partial_\mu \\
= & \bar{e} \left[(\bar{e}_l{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha - \bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_l{}^\alpha) \partial_k + (\bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_k{}^\alpha - \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha) \partial_l + (\bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_l{}^\alpha - \bar{e}_l{}^\beta \bar{e}_k{}^\alpha) \partial_m \right. \\
& \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k{}^p{}^{rs} \eta_{lm} - \varepsilon_l{}^p{}^{rs} \eta_{km}) \bar{e}_r{}^\beta \bar{e}_s{}^\alpha \partial_p \right]
\end{aligned}$$

zurückgreifen werden.

Für den Vektor c_β erhalten wir nun bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{32\pi G_k}$ unter Berücksichtigung der Tatsache, daß alle Terme, die ein inverses Hintergrundvielbein der Form $\bar{e}_m{}^\beta$ beinhalten,

nicht beitragen, die folgenden Resultate:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left\{ c_\beta \left[-\bar{e} \left(\partial^\beta \square - \partial_\beta \square + (4-1) \partial^\beta \square \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k^{p\ rs} \eta_{lm} - \varepsilon_l^{p\ rs} \eta_{km}) \bar{e}_r^\beta \delta_s^l \partial_p \partial^m \partial^k \right) \right] \square B \right\} = 0, \\
 & \int d^4x \left\{ c_\beta \left[-\bar{e} \left(\bar{e}_l^\beta \partial^u \square - 0 + (\delta_l^u \partial^\beta - \bar{e}_l^\beta \partial^u) \square \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k^{p\ rs} \eta_{lm} - \varepsilon_l^{p\ rs} \eta_{km}) \bar{e}_r^\beta \delta_s^u \partial_p \partial^m \partial^k \right) \right] \varepsilon_{uvw}^l \partial^v B^w \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ c_\beta \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_r^\beta \varepsilon_l^{p\ rs} \varepsilon_{svw}^l \partial_p \partial^v \square \right] B^w \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ c_r \left[-2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} (\delta_v^p \partial_p \delta_w^r - \delta_w^p \partial_p \delta_v^r) \partial_p \partial^v \square \right] B^w \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ c_r \left[-2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \square^2 \right] B^r \right\}, \tag{F.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left\{ c_\beta \left[-\bar{e} \left(\bar{e}_l^\beta \partial^\alpha \square - 0 + (\bar{e}_l^\alpha \partial^\beta - \bar{e}_l^\beta \partial^\alpha) \square \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k^{p\ rs} \eta_{lm} - \varepsilon_l^{p\ rs} \eta_{km}) \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \partial_p \partial^m \partial^k \right) \right] B^l_\alpha \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ c_\beta \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_r^\beta \varepsilon_l^{p\ rs} \partial_p \square \right] B^l_s \right\} = 0
 \end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie des Tensors B^k_α ,

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left\{ c_\beta \left[-\bar{e} \left(0 - 0 + (\bar{e}_k^\beta \delta_l^v - \bar{e}_l^\beta \delta_k^v) \square \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k^{p\ rs} \partial_l - \varepsilon_l^{p\ rs} \partial_k) \bar{e}_r^\beta \delta_s^v \partial_p \right) \right] \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u \square D \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left\{ c_\beta \left[-\bar{e} \left(\bar{e}_l^\beta \square - 0 + (\bar{e}_l^\beta - 4\bar{e}_l^\beta) \square \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k^{p\ rs} \eta_{lm} - \varepsilon_l^{p\ rs} \eta_{km}) \bar{e}_r^\beta \delta_s^k \partial_p \partial^m \right) \right] \square D^l \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ c_l \left[2 \bar{e} \square^2 \right] D^l \right\} \tag{F.16}
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ c_\beta \left[-\bar{e} \left(0 - 0 + (\bar{e}_k^\beta \bar{e}_l^\alpha - \bar{e}_l^\beta \bar{e}_k^\alpha) \square \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k^{p \ rs} \partial_l - \varepsilon_l^{p \ rs} \partial_k) \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \partial_p \right) \right] \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u D^v_\alpha \right\} \\ & = \int d^4x \left\{ c_\beta \left[-\bar{e} \bar{e}_k^\beta \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u \square \right] D^v_l = 0. \right. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Skalar d , so sind nach zweifacher partieller Integration dessen Beiträge gegeben durch

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ d \left[\bar{e} \left(-3\bar{e}_l^\alpha \partial_k + 3\bar{e}_k^\alpha \partial_l + \bar{e}_l^\alpha \partial_k - \bar{e}_k^\alpha \partial_l + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{kl}^{p \ s} - \varepsilon_{lk}^{p \ s}) \bar{e}_s^\alpha \partial_p \right) \square \right] \right. \\ & \quad \left. \left(\partial^k \bar{e}^l_\alpha \square B + \partial^k \varepsilon^l_{uvw} \bar{e}^u_\alpha \partial^v B^w + \partial^k B^l_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u \bar{e}^v_\alpha \square D + \bar{e}^k_\alpha \square D^l \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u D^v_\alpha \right) \right\} \\ & = \int d^4x \left\{ d \left[2\bar{e} \left(\bar{e}_k^\alpha \partial_l - \bar{e}_l^\alpha \partial_k + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{kl}^{p \ s} \bar{e}_s^\alpha \partial_p \right) \square \right] \right. \\ & \quad \left. \left(\partial^k \bar{e}^l_\alpha \square B + \partial^k \varepsilon^l_{uvw} \bar{e}^u_\alpha \partial^v B^w + \partial^k B^l_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u \bar{e}^v_\alpha \square D + \bar{e}^k_\alpha \square D^l \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u D^v_\alpha \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Da in der Zerlegung des Spinzusammenhangs sowohl vor dem Spuranteil B als auch vor dem antisymmetrischen und dem symmetrisch-spurlosen Anteil B^k bzw. B^k_α aufgrund der Transversalität des ursprünglichen, unzerlegten Tensorfeldes partielle Ableitungen ∂^k auftreten, koppeln diese in (F.20) allesamt nicht an den inversen Immirzi-Parameter. Bezüglich der dualisierten Felder D , D^k und D^k_α verhält es sich gerade umgekehrt, da der Teil der quadratischen Form, der unabhängig von $\frac{1}{\gamma_k}$ ist, Ableitungen ∂_k bzw. ∂_l enthält, deren Kontraktion mit $\varepsilon^{kl}_{uv} \partial^u$ verschwindet. (Der Vektoranteil D^k läßt sich ja nach (F.13) ebenfalls in dieser Form schreiben.) Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ d [2\bar{e}(\square^3 - 4\square^3)] B \} \\ & = \int d^4x \{ d [-6\bar{e}\square^3] B \}, \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

$$\int d^4x \{ d[2 \bar{e}(\partial_l \partial^u - \delta_l^u \square)] \square \varepsilon^l{}_{uvw} \partial^v B^w \} = 0,$$

$$\int d^4x \{ d[2 \bar{e}(\partial_l \partial^\alpha - \bar{e}_l{}^\alpha \square)] \square B^l{}_\alpha \} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ d \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^p{}_{kl}{}^s \varepsilon^{kl}{}_{us} \partial_p \partial^u \square \right] \square^2 D \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ d \left[6 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \square^3 \right] D \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

$$\int d^4x \left\{ d \left[2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^p{}_{kl}{}^s \delta_s{}^k \partial_p \right] \square^2 D^l \right\} = 0,$$

und

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ d \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^p{}_{kl}{}^s \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial_p \partial^u \right] \square D^v{}_s \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ d \left[2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} (\delta^s{}_v \square - \partial^s \partial_v) \right] \square D^v{}_s \right\} = 0. \end{aligned}$$

Der Vektor d^c in (F.12) liefert die Beiträge

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ d^c \left[-\bar{e} \left(\bar{e}_m{}^\alpha (\varepsilon^m{}_{lbc} \partial_k - \varepsilon^m{}_{kbc} \partial_l) + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^m{}_{rbc} (\varepsilon^p{}_{kl}{}^s \eta_{lm} - \varepsilon^p{}_{l}{}^{rs} \eta_{km}) \bar{e}_s{}^\alpha \partial_p \right) \partial^b \right] \right. \\ & \quad \left. (\partial^k \bar{e}^l{}_\alpha \square B + \partial^k \varepsilon^l{}_{uvw} \bar{e}_\alpha^u \partial^v B^w + \partial^k B^l{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial^u \bar{e}_\alpha^v \square D + \bar{e}_\alpha^k \square D^l \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial^u D^v{}_\alpha) \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} \left(\bar{e}_m{}^\alpha (\varepsilon^m{}_{kbc} \partial_l - \varepsilon^m{}_{lbc} \partial_k) + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{rlbc} \varepsilon^{rp}{}_{ks} - \varepsilon_{rkbc} \varepsilon^{rp}{}_{ls}) \bar{e}_s{}^\alpha \partial_p \right) \partial^b \right] \right. \\ & \quad \left. (\partial^k \bar{e}^l{}_\alpha \square B + \partial^k \varepsilon^l{}_{uvw} \bar{e}_\alpha^u \partial^v B^w + \partial^k B^l{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial^u \bar{e}_\alpha^v \square D + \bar{e}_\alpha^k \square D^l \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial^u D^v{}_\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

was im einzelnen auf

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} \left(\bar{e}_m{}^\alpha (\varepsilon^m{}_{kbc} \partial_l - \varepsilon^m{}_{lbc} \partial_k) \right) \partial^b \right] \partial^k \bar{e}^l{}_\alpha \square B \right\} = 0, \\
& \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} (0 - \varepsilon^m{}_{lbc} \varepsilon^l{}_{m\nu w} \square) \partial^b \right] \partial^v B^w \right\} \\
& = \int d^4x \left\{ d^c \left[2 \bar{e} (\eta_{bv} \eta_{cw} - \eta_{bw} \eta_{cv}) \square \partial^b \right] \partial^v B^w \right\} \\
& = \int d^4x \left\{ d^c \left[2 \bar{e} \square^2 \right] B_c \right\} \tag{F.21}
\end{aligned}$$

und

$$\int d^4x \left\{ d^c \left[(\varepsilon^m{}_{kbc} \partial_l - \varepsilon^m{}_{lbc} \partial_k) \partial^b \right] \partial^k B^l{}_m \right\} = 0$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{rlbc} \varepsilon^{rp}{}^s \partial_p \partial^b \right] \varepsilon^{kl}{}_{us} \partial^u \square D \right\} \\
& = \int d^4x \left\{ d^c \left[2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{rlbc} (\eta^{rl} \delta_u^p - \delta_u^r \eta^{pl}) \partial_p \partial^b \partial^u \square \right] D \right\} = 0, \\
& \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} (0 - \varepsilon_{rkbc} \varepsilon^{rp}{}^k) \partial_p \partial^b \right] \square D^l \right\} \\
& = \int d^4x \left\{ d^c \left[-2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} (\delta_b^p \eta_{cl} - \eta_{bl} \delta_c^p) \partial_p \partial^b \right] \square D^l \right\} \\
& = \int d^4x \left\{ d^c \left[-2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \square^2 \right] D_c \right\} \tag{F.22}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{rlbc} \varepsilon^{rp}{}^s \partial_p \partial^b \right] \varepsilon^{kl}{}_{uv} \partial^u D^v{}_s \right\} \\
& = \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^{kl}{}_{uv} (\delta_l^p \eta_{bk} \delta_c^s + \eta_{lk} \delta_b^s \delta_c^p + \delta_l^s \delta_b^p \eta_{ck} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \delta_l^p \delta_b^s \eta_{ck} - \eta_{lk} \delta_b^p \delta_c^s - \delta_l^s \eta_{bk} \delta_c^p) \partial_p \partial^b \partial^u \right] D^v{}_s \right\} \\
& = \int d^4x \left\{ d^c \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^{kl}{}_{uv} (\eta_{ck} \square - \partial_k \partial_c) \right] D^v{}_l \right\} = 0
\end{aligned}$$

führt. Dabei haben wir ausgenutzt, daß auch der Vektor d^c nicht über den inversen Immirzi-Parameter an die Felder vom Typ B koppelt, wohingegen er dies bezüglich der dualen Felder vom Typ D ausschließlich auf diese Art und Weise tut. Dies gilt auch für die Beiträge des symmetrischen, spurlosen Tensors d^m_β , die durch

$$\int d^4x \left\{ d^m_\beta \left[\bar{e} \left(\bar{e}_m^\alpha (\bar{e}_l^\beta \partial_k - \bar{e}_k^\beta \partial_l) + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_k^{p\ rs} \eta_{lm} - \varepsilon_l^{p\ rs} \eta_{km}) \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \partial_p \right) \right] \right. \\ \left. \left(\partial^k \bar{e}_\alpha^l \square B + \partial^k \varepsilon_{uvw}^l \bar{e}_\alpha^u \partial^v B^w + \partial^k B_\alpha^l + \frac{1}{2} \varepsilon_{uv}^{kl} \partial^u \bar{e}_\alpha^v \square D + \bar{e}_\alpha^k \square D^l \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{uv}^{kl} \partial^u D^v \right) \right\}$$

gegeben sind, und dies liefert explizit

$$\int d^4x \left\{ d^m_\beta [\bar{e} (\bar{e}_m^\beta \square - \partial^\beta \partial_m)] \square B \right\} = 0,$$

$$\int d^4x \left\{ d^m_\beta [\bar{e} (\bar{e}_l^\beta \varepsilon^l_{m\nu\nu} \square - 0)] \partial^\nu B^w \right\} \\ = \int d^4x \left\{ d^m_l [\bar{e} \varepsilon^l_{m\nu\nu} \partial^\nu] B^w \right\} = 0$$

und

$$\int d^4x \left\{ d^m_\beta [\bar{e} \bar{e}_m^\alpha (\bar{e}_l^\beta \square - \partial_l \partial^\beta)] B_\alpha^l \right\} \\ = \int d^4x \left\{ d^m_\beta [\bar{e} \square] B_m^\beta \right\} \\ = \int d^4x \left\{ d^m_\beta [\bar{e} \square] B_m^\beta \right\} \quad (\text{F.23})$$

sowie

$$\int d^4x \left\{ d^m_\beta \left[\bar{e} \bar{e}_r^\beta \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_k^{p\ rs} \varepsilon^k_{mus} \partial_p \right] \partial^u \square D \right\} \\ = \int d^4x \left\{ d^m_r \left[-2 \bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} (\delta_m^p \delta_u^r - \delta_u^p \delta_m^r) \partial_p \partial^u \square \right] D \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ d^m_\beta \left[\bar{e} \bar{e}_r^\beta \cdot \frac{1}{\gamma_k} (0 - \varepsilon^{p \ r \ m}) \partial_p \right] \square D^l \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ d^m_r \left[-\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^{p \ r \ m} \partial_p \square \right] D^l \right\} = 0 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ d^m_\beta \left[\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^{p \ rs} \varepsilon^k_{\ muv} \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \partial_p \right] \partial^u D^v_\alpha \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ d^m_r \left[-\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} (\delta^p_m \delta^r_u \delta^s_v + \delta^p_u \delta^r_v \delta^s_m + \delta^p_v \delta^r_m \delta^s_u \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \delta^p_m \delta^r_v \delta^s_u - \delta^p_u \delta^r_m \delta^s_v - \delta^p_v \delta^r_u \delta^s_m) \partial_p \partial^u \right] D^v_s \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ d^m_r \left[-\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \square \right] D^r_m \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ d^m_r \left[-\bar{e} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \square \right] D^r_m \right\}. \end{aligned} \tag{F.24}$$

Damit haben wir den \bar{e} - $\bar{\tau}$ -Block der quadratischen Form $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ berechnet.

F.1.4 Der $\bar{\tau}$ - \bar{e} -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$

Ganz analog zum vorangegangenen Abschnitt lässt sich dieser Beitrag auf die Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{\tau}^{mn}_\beta(x) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{mnck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu \partial_\mu \right] \bar{e}^k_\alpha(x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left\{ \left(\partial^m \square \bar{e}^n_\beta B + \partial^m \varepsilon^n_{\ pqr} \bar{e}^p_\beta \partial^q B^r + \partial^m B^n_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon^{mn}_{\ pq} \partial^p \square \bar{e}^q_\beta D + \bar{e}^m_\beta \square D^n \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{mn}_{\ pq} \partial^p D^q_\beta \right) \left[\bar{e} \left((\bar{e}_n^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\beta \bar{e}_n^\alpha) \partial_m + (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_m^\alpha) \partial_k \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha) \partial_n + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon^a_{\ m \ bc} \eta_{nk} - \varepsilon^a_{\ n \ bc} \eta_{mk}) \bar{e}_b^\beta \bar{e}_c^\alpha \partial_a \right) \right] \\ & \quad \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k_\alpha \square d + \varepsilon^k_{\ efg} \bar{e}^e_\alpha \partial^f d^g + d^k_\alpha) \right\} \end{aligned} \tag{F.25}$$

bringen, in welcher er nun von uns wieder komponentenweise berechnet wird.

Nach dreifacher partieller Integration erhalten wir bis auf den bereits oben unberück-

sichtigten Vorfaktor den Beitrag des Skalars B in der Form

$$\int d^4x \left\{ B \left[-\bar{e} \left(2(\bar{e}_k^\alpha \square - \partial_k \partial^\alpha) + \frac{1}{\gamma_k} \cdot 0 \right) \square \right] \right. \\ \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}_\alpha^k \square d + \varepsilon^k_{efg} \bar{e}_\alpha^e \partial^f d^g + d^k_\alpha) \right\},$$

was im einzelnen auf

$$\int d^4x \{ B[0] c_\alpha \},$$

$$\int d^4x \{ B[-2\bar{e}(4-1)\square^3] d \}$$

$$= \int d^4x \{ B[-6\bar{e}\square^3] d \}, \quad (\text{F.26})$$

$$\int d^4x \{ B[-2\bar{e}(\delta_k^e \square - \partial_k \partial^e)] \varepsilon^k_{efg} \partial^f d^g \}$$

$$= \int d^4x \{ B[0] d^g \}$$

sowie

$$\int d^4x \{ B[0] d^k_\alpha \}$$

aufgrund der Spur- und Divergenzfreiheit des Tensors d^k_α führt. Manchmal drücken wir dabei das Verschwinden eines Beitrages auch derart aus, daß wir in dieser tabellenartigen Darstellung der Matrixelemente ein solches verschwindendes Matrixelement als [0] schreiben.

Für den Vektor B^r erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ B^r \left[\bar{e} \left(-\square \partial^q \bar{e}_n^\alpha \varepsilon^n_{kqr} + \frac{1}{\gamma_k} (0 - \varepsilon_n^{a \ p c} \varepsilon^n_{pqr}) \partial_k \partial^q \partial_a \bar{e}_c^\alpha \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}_\alpha^k \square d + \varepsilon^k_{efg} \bar{e}_\alpha^e \partial^f d^g + d^k_\alpha) \right] \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ B^r \left[\bar{e} \left(-\square \partial^q \bar{e}_n^\alpha \varepsilon^n_{kqr} - \frac{2}{\gamma_k} (\square \partial_k \bar{e}_r^\alpha - \partial^\alpha \partial_r \partial_k) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}_\alpha^k \square d + \varepsilon^k_{efg} \bar{e}_\alpha^e \partial^f d^g + d^k_\alpha) \right] \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ B^r \left[-\bar{e} \left(\partial^q \bar{e}_n^\alpha \varepsilon^n_{kqr} + \frac{2}{\gamma_k} \partial_k \bar{e}_r^\alpha \right) \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}_\alpha^k \square d + \varepsilon^k_{efg} \bar{e}_\alpha^e \partial^f d^g + d^k_\alpha) \right] \right\},
\end{aligned}$$

da in der zweiten Zeile der zweite Term mit dem inversen Immirzi-Parameter als Vorfaktor nach partieller Integration verschwindet. Für die einzelnen Komponentenfelder liefert dies

$$\int d^4x \left\{ B^r \left[-\frac{2\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] c_r \right\}, \quad (\text{F.27})$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ B^r \left[-\bar{e} \left(\partial^q \delta_n^k \varepsilon^n_{kqr} + \frac{2}{\gamma_k} \partial^r \right) \square^2 \right] d \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ B^r [0] d \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ B^r \left[-\bar{e} \left(\varepsilon^n_{kqr} \varepsilon^k_{nfg} \partial^q \partial^f + \frac{2}{\gamma_k} \cdot 0 \right) \square \right] d^g \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ B^r [2\bar{e}(\eta_{qf} \eta_{rg} - \eta_{qg} \eta_{rf}) \partial^q \partial^f] \square \right\} d^g \\
&= \int d^4x \left\{ B^r [2\bar{e} \square^2] d_r \right\}
\end{aligned}$$

sowie abschließend

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ B^r \left[-\bar{e} \left(\partial^q \bar{e}_n^\alpha \varepsilon^n_{kqr} + \frac{2}{\gamma_k} \partial_k \bar{e}_r^\alpha \right) \square \right] d^k_\alpha \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ B^r [-\bar{e} \square \partial^q \varepsilon^n_{kqr}] d^k_n \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ B^r [0] d^k_\alpha \right\}
\end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie des Tensors $d^k{}_\alpha$.

Schließlich ist der Beitrag der Tensorkomponente $B^n{}_\beta$ unter Beachtung ihrer Spur- und Divergenzfreiheit durch

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ B^n{}_\beta \left[-\bar{e} \left(-\bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_n{}^\alpha \square - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_n{}^{bc} \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_c{}^\alpha \partial_k \partial_a \right) \right] \right. \\ & \quad \left. \left(\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k{}_\alpha \square d + \varepsilon^k{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f d^g + d^k{}_\alpha \right) \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ B^n{}_\beta \left[\bar{e} \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_n{}^\alpha \square \right] \right. \\ & \quad \left. \left(\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k{}_\alpha \square d + \varepsilon^k{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f d^g + d^k{}_\alpha \right) \right\} \end{aligned}$$

gegeben; auch hier verschwindet im zweiten Schritt der Beitrag, der proportional zum inversen Immirzi-Parameter ist, aufgrund der Symmetrie des Tensors. Dies liefert

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [\bar{e} \square] \partial^\beta c_n \} \\ = & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [0] c_\alpha \} \end{aligned}$$

nach partieller Integration,

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [\bar{e} \bar{e}_n{}^\beta \square] \square d \} \\ = & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [0] d \} \end{aligned}$$

wegen Spurfreiheit,

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [\bar{e} \bar{e}_k{}^\beta \square \varepsilon^k{}_{nfg} \square \partial^f] d^g \} \\ = & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [0] d^g \} \end{aligned}$$

wegen Symmetrie sowie letztendlich

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [\bar{e} \square] d_n{}^\beta \} \\ = & \int d^4x \{ B^n{}_\beta [\bar{e} \square] d_n{}^\beta \}. \end{aligned} \tag{F.28}$$

Wenden wir uns nun in (F.25) den zu den gerade berechneten Beiträgen dualen Gegenstücken zu, so ist der Beitrag des skalaren Pendants D zunächst durch

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D \left[-\frac{\bar{e}}{2} \left(0 + \frac{2}{\gamma_k} \varepsilon^m{}_{kpb} \varepsilon^a{}_{m \ c} \bar{e}_c{}^\alpha \partial^p \partial_a \right) \square \right] \right. \\ & \quad \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k{}_\alpha \square d + \varepsilon^k{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f d^g + d^k{}_\alpha) \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ D \left[\frac{2\bar{e}}{\gamma_k} (\square \bar{e}_k{}^\alpha - \partial_k \partial^\alpha) \square \right] \right. \\ & \quad \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k{}_\alpha \square d + \varepsilon^k{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f d^g + d^k{}_\alpha) \right\} \end{aligned}$$

gegeben, und dies führt auf

$$\int d^4x \{ D[0] c_\alpha \},$$

$$\int d^4x \left\{ D \left[\frac{6\bar{e}}{\gamma_k} \square^3 d \right] \right\}, \quad (\text{F.29})$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D \left[\frac{2\bar{e}}{\gamma_k} (\square \delta_k{}^e - \partial_k \partial^e) \square \right] \varepsilon^k{}_{efg} \partial^f d^g \right\} \\ = & \int d^4x \{ D[0] d^g \} \end{aligned}$$

und

$$\int d^4x \{ D[0] d^k{}_\alpha \}.$$

Für den vektoriellen Anteil D^n gilt erneut aufgrund der Divergenzfreiheit

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D^n \left[\bar{e} \left(-\bar{e}_n{}^\alpha \partial_k + 4\bar{e}_n{}^\alpha \partial_k - \bar{e}_n{}^\alpha \partial_k - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^a{}_{nk}{}^c \bar{e}_c{}^\alpha \partial_a \right) \square \right] \right. \\ & \quad \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k{}_\alpha \square d + \varepsilon^k{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f d^g + d^k{}_\alpha) \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ D^n \left[\bar{e} \left(2\bar{e}_n{}^\alpha \partial_k - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^a{}_{nk}{}^c \bar{e}_c{}^\alpha \partial_a \right) \square \right] \right. \\ & \quad \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k{}_\alpha \square d + \varepsilon^k{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f d^g + d^k{}_\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Komponentenweise führt dies auf

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D^n \left[\bar{e} \left(2\bar{e}_n^\alpha \square - \frac{1}{\gamma_k} \cdot 0 \right) \square \right] c_\alpha \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^n [2 \bar{e} \square^2] c_n \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D^n \left[\bar{e} \left(2\partial_n - \frac{1}{\gamma_k} \cdot 0 \right) \square^2 \right] d \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^n [0] d \right\} \end{aligned}$$

nach partieller Integration,

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D^n \left[\bar{e} \left(0 - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{nk}^a \varepsilon_{efg}^e \partial_a \partial^f \right) \square \right] d^g \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^n \left[-\frac{2\bar{e}}{\gamma_k} (\delta_f^a \eta_{ng} - \delta_g^a \eta_{nf}) \partial_a \partial^f \square \right] d^g \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^n \left[-\frac{2\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] d_n \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

sowie

$$\int d^4x \left\{ D^n [0] d^k_\alpha \right\}$$

wegen Divergenzfreiheit bzw. Symmetrie.

In diesem Unterabschnitt verbleibt nun zu guter Letzt noch die Berechnung der Beiträge des Tensors D^q_β . Diejenigen Beiträge, die nicht proportional zum inversen Immirzi-Parameter sind, verschwinden zunächst, da in diesem Fall entweder zwei partielle Ableitungen oder dieser selbst mit dem ε -Tensor kontrahiert werden, der in der Zerlegung der Spinzusammenhangsfluktuation die Dualisierung vermittelt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D^q_b \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \varepsilon_m^{abc} \varepsilon_{kpq}^m \bar{e}_c^\alpha \partial_a \partial^p \right] \right. \\ & \quad \left. (\partial^k c_\alpha + \bar{e}^k_\alpha \square d + \varepsilon_{efg}^k \bar{e}_\alpha^e \partial^f d^g + d^k_\alpha) \right\}, \end{aligned}$$

und dies liefert schließlich

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ D^q_b [0] c_\alpha \}, \\ & \int d^4x \left\{ D^q_b \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \varepsilon^a{}_{bc} \varepsilon^m{}_{cpq} \partial_a \partial^p \right] \square d \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^q_b \left[\frac{2\bar{e}}{\gamma_k} (\delta^b{}_q \square - \partial_q \partial^b) \square \right] d \right\} \\ &= \int d^4x \{ D^q_b [0] d \} \end{aligned}$$

wegen Spur- bzw. Divergenzfreiheit und

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D^q_b \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \varepsilon^a{}_{bc} \varepsilon^m{}_{kpq} \varepsilon^k{}_{cfg} \partial_a \partial^p \partial^f \right] d^g \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^q_b \left[\frac{\bar{e}}{\gamma_k} (\delta^b{}_p (\delta^a{}_k \delta^c{}_q - \delta^a{}_q \delta^c{}_k) + \delta^b{}_q (\delta^a{}_p \delta^c{}_k - \delta^a{}_k \delta^c{}_p) + \delta^a{}_q \delta^b{}_k \delta^c{}_p - \delta^a{}_p \delta^b{}_k \delta^c{}_q) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \varepsilon^k{}_{cfg} \partial_a \partial^p \partial^f \right] d^g \right\} \\ &= \int d^4x \{ D^q_b [0] d^g \}, \end{aligned}$$

erneut wegen Divergenzfreiheit, Spurfreiheit und Symmetrie. Als einziger nicht-verschwindender Beitrag ergibt sich hier

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left\{ D^q_b \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \varepsilon^a{}_{bc} \varepsilon^m{}_{kpq} \partial_a \partial^p \right] d^k{}_c \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^q_b \left[\frac{\bar{e}}{\gamma_k} (\delta^b{}_q (\delta^a{}_p \delta^c{}_k - \delta^a{}_k \delta^c{}_p) + \delta^a{}_q (\delta^b{}_k \delta^c{}_p - \delta^b{}_p \delta^c{}_k) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \delta^c{}_q (\delta^a{}_k \delta^b{}_p - \delta^a{}_p \delta^b{}_k)) \partial_a \partial^p \right] d^k{}_c \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^q_b \left[\frac{\bar{e}}{\gamma_k} (\partial_k \partial^b - \square \delta^b{}_k \delta^c{}_q) \right] d^k{}_c \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^q_b \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square \right] d^b{}_q \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ D^q_b \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square \right] d_q{}^b \right\}, \end{aligned}$$

was die Berechnung des $\bar{\tau}$ - \bar{e} -Beitrags zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ abschließt.

F.1.5 Der $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(0)}$

Um den noch verbliebenen Block der quadratischen Form $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ zu berechnen, bietet es sich an, bloß ein Viertel der auf dem Niveau der Zerlegung (6.12) entstehenden Beiträge zu berechnen; alle übrigen lassen sich auf diese mittels der Dualisierung zurückführen. Wir zeigen zunächst, wie dieser Zusammenhang explizit beschaffen ist und berechnen im Anschluß wie gewohnt die benötigten Mischungen, so daß sich der gesamte $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Block angeben läßt.

Das zu betrachtende Matrixelement, das in diesem Sektor bloß Beiträge zum freien Anteil liefert, ist zunächst von der Form

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \{ \bar{\tau}^{mn}{}_{\beta}(x) T_{mn}{}^{\beta\alpha}{}_{kl} \bar{\tau}^{kl}{}_{\alpha}(x) \}$$

mit

$$\begin{aligned} T_{mn}{}^{\beta\alpha}{}_{kl} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\delta_k^a \delta_n^b \eta_{lm} - \delta_l^b \delta_m^a \eta_{kn}) K_{abcd}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\mu^c \bar{e}_\nu^d \\ &= \bar{e} \left[\left((\bar{e}_k^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_k^\alpha) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{kn}{}^{ab} \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right) \eta_{lm} \right. \\ &\quad \left. - \left((\bar{e}_m^\beta \bar{e}_l^\alpha - \bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ml}{}^{ab} \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right) \eta_{kn} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

wobei in dieser Umformung die Identitäten (A.52) und (A.53) Anwendung fanden. Die Spinzusammenhangsfluktuation ist bekanntlich antisymmetrisch in den $O(4)$ -Indizes,

$$\bar{\tau}^{mn}{}_{\beta} \equiv \bar{\tau}^{[mn]}{}_{\beta},$$

und es ist hilfreich, diese Antisymmetrie vermöge Antisymmetrisierung auf $T_{mn}{}^{\beta\alpha}{}_{kl}$ zu übertragen gemäß

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^{[mn]}{}_{\beta} T_{mn}{}^{\beta\alpha}{}_{kl} \bar{\tau}^{[kl]}{}_{\alpha} &= \bar{\tau}^{[mn]}{}_{\beta} T_{[mn]}{}^{\beta\alpha}{}_{[kl]} \bar{\tau}^{[kl]}{}_{\alpha} \\ &\equiv \bar{\tau}^{mn}{}_{\beta} T_{[mn]}{}^{\beta\alpha}{}_{[kl]} \bar{\tau}^{kl}{}_{\alpha}. \end{aligned}$$

In dieser Form kann auf die explizite Antisymmetrisierung der Spinzusammenhangsfluktuation in der Zerlegung (6.12) verzichtet werden, und durch Einsetzen von (F.32) erhalten

wir

$$\begin{aligned}
T_{[mn] [kl]}^{\beta \alpha} &:= \frac{1}{4} (T_{mn}^{\beta \alpha}{}_{kl} - T_{nm}^{\beta \alpha}{}_{kl} - T_{mn}^{\beta \alpha}{}_{lk} + T_{nm}^{\beta \alpha}{}_{lk}) \\
&= \frac{\bar{e}}{2} \left[(\bar{e}_k^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{lm} - (\bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{ln} \right. \\
&\quad - (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{km} + (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{kn} \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{kn}^{ab} \eta_{lm} - \varepsilon_{km}^{ab} \eta_{ln} - \varepsilon_{ln}^{ab} \eta_{km} + \varepsilon_{lm}^{ab} \eta_{kn}) \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right],
\end{aligned}$$

so daß schließlich der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left\{ \left[\partial_\beta \partial^m A^n + \partial^m \square \bar{e}_\beta^n B + \partial^m \varepsilon^n{}_{uvw} \bar{e}_\beta^u \partial^v B^w + \partial^m B^n{}_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon^{mn}{}_{uv} \partial_\beta \partial^u C^v \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{mn}{}_{uv} \partial^u \square \bar{e}_\beta^v D + (\bar{e}_\beta^m \square - \partial^m \partial_\beta) D^n + \frac{1}{2} \varepsilon^{mn}{}_{uv} \partial^u D^v{}_\beta \right] \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{\bar{e}}{2} \left((\bar{e}_k^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{lm} - (\bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{ln} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{km} + (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{kn} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{kn}^{ab} \eta_{lm} - \varepsilon_{km}^{ab} \eta_{ln} - \varepsilon_{ln}^{ab} \eta_{km} + \varepsilon_{lm}^{ab} \eta_{kn}) \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right) \right] \\
&\quad \left[\partial_\alpha \partial^k A^l + \partial^k \square \bar{e}_\alpha^l B + \partial^k \varepsilon^l{}_{pqr} \bar{e}_\alpha^p \partial^q B^r + \partial^k B^l{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{pq} \partial_\alpha \partial^p C^q \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{pq} \partial^p \square \bar{e}_\alpha^q D + (\bar{e}_\alpha^k \square - \partial^k \partial_\alpha) D^l + \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}{}_{pq} \partial^p D^q{}_\alpha \right] \right\} \quad (\text{F.33})
\end{aligned}$$

komponentenweise zu berechnen ist. Wir werden dies im folgenden allerdings bloß für die mit A und B bezeichneten Feldkomponenten explizit ausführen. Deren Mischungen mit ihren dualen Gegenstücken C und D sowie die Beiträge, die diese ihrerseits untereinander liefern, leiten wir hingegen aus der algebraischen Struktur von $T_{[mn] [kl]}^{\beta \alpha}$ ab.

Verwenden wir zunächst die in dieser auftretenden inversen Vielbeine, um die Raumzeitindizes der Fluktuationserwartungswerte in $O(4)$ -Indizes umzuwandeln, so stellt sich der zu berechnende Ausdruck bis auf den üblichen Vorfaktor in der Form

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \left\{ \bar{\tau}^{mn}{}_a \left[\frac{\bar{e}}{2} \left[\left((\delta_m^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_m^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{mk}^{ab} \right) \eta_{ln} - \left((\delta_n^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_n^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{nk}^{ab} \right) \eta_{lm} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left((\delta_m^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_m^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ml}^{ab} \right) \eta_{kn} + \left((\delta_n^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_n^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{nl}^{ab} \right) \eta_{km} \right] \right] \bar{\tau}^{kl}{}_b \right\} \quad (\text{F.34})
\end{aligned}$$

dar. Das gewichtete antisymmetrisierte Produkt der beiden Kronecker-Symbole wirkt dabei auf antisymmetrische $O(4)$ -Tensoren zweiter Stufe wie der Einheitsoperator, und wenn wir dessen Einschränkung auf diesen Unterraum mit $\mathbb{1}_{[\]}$ bezeichnen, so gilt beispielsweise in dem obigen Ausdruck

$$\bar{e} \left[(\delta_m^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_m^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{mk}^{ab} \right] \eta_{ln} = \bar{e} \left[\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right]_{mk}^{ab} \eta_{ln},$$

wobei \star wie üblich die $O(4)$ -Dualisierung bezeichnet. Da in der Zerlegung (6.12) die Komponenten C und D mit A bzw. B über Dualisierung verknüpft sind, kontrahieren wir nun die quadratische Form in (F.34) mit $\frac{1}{2} \varepsilon_{uv}^{mn}$, d. h. wir wenden die Operation \star_{uv}^{mn} auf sie an. Nach elementaren Umformungen führt dies auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \varepsilon_{uv}^{mn} \cdot \frac{1}{2} \left[\left((\delta_m^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_m^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{mk}^{ab} \right) \eta_{ln} - \left((\delta_n^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_n^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{nk}^{ab} \right) \eta_{lm} \right. \\ & \quad \left. - \left((\delta_m^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_m^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ml}^{ab} \right) \eta_{kn} + \left((\delta_n^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_n^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{nl}^{ab} \right) \eta_{km} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{luv}^a \delta_k^b - \varepsilon_{luv}^b \delta_k^a - \varepsilon_{kuv}^a \delta_l^b + \varepsilon_{kuv}^b \delta_l^a) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} [(\delta_u^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_u^b) \eta_{lv} - (\delta_v^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_v^b) \eta_{lu} - (\delta_u^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_u^b) \eta_{kv} \right. \\ & \quad \left. + (\delta_v^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_v^b) \eta_{ku}] \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

Nun kommt folgende Identität zur Anwendung, die wir unmittelbar im Anschluß beweisen wollen:

$$\boxed{\begin{aligned} & \varepsilon_{luv}^a \delta_k^b - \varepsilon_{luv}^b \delta_k^a - \varepsilon_{kuv}^a \delta_l^b + \varepsilon_{kuv}^b \delta_l^a \\ &= \varepsilon_{uk}^{ab} \eta_{lv} - \varepsilon_{vk}^{ab} \eta_{lu} - \varepsilon_{ul}^{ab} \eta_{kv} + \varepsilon_{vl}^{ab} \eta_{ku} \end{aligned}} \quad (\text{F.36})$$

Zum Beweis stellt man zunächst fest, daß die linke und die rechte Seite die gleichen Symmetrieeigenschaften aufweisen: Sie sind beide jeweils antisymmetrisch in den Indexpaaren $[k, l]$, $[u, v]$ und $[a, b]$, wobei der Unterschied der beiden Seiten gerade darin besteht, daß die Paare $[u, v]$ und $[a, b]$ ihre Rollen tauschen. Die drei Indexpaare müssen also paarweise voneinander verschieden sein, um einen nichtverschwindenden Beitrag zu erhalten, und in jedem solchen Falle trägt auf beiden Seiten jeweils nur einer der vier Terme bei, wobei dieser seinerseits für genau zwei Indexkombinationen nicht verschwindet. Diese Bedingungen lassen sich durch Einfügen zusätzlicher Kronecker-Symbole implementieren, wobei nun zu beachten ist, daß über doppelt auftretende Indizes nicht summiert wird; vielmehr ist der

dreifach auftretende Index derjenige, dessen möglicher Wertebereich durch die Bedingung ausgedrückt wird. Die acht beitragenden Terme der linken Seite sind dann von der Form

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^a{}_{lkv} \delta_k^b \delta_u^k + \varepsilon^a{}_{luk} \delta_k^b \delta_v^k - \varepsilon^b{}_{lkv} \delta_k^a \delta_u^k - \varepsilon^b{}_{luk} \delta_k^a \delta_v^k \\
& - \varepsilon^a{}_{klv} \delta_l^b \delta_u^l - \varepsilon^a{}_{kul} \delta_l^b \delta_v^l + \varepsilon^b{}_{klv} \delta_l^a \delta_u^l + \varepsilon^b{}_{kul} \delta_l^a \delta_v^l \\
& = \varepsilon^a{}_{l \ v}{}^k \delta_k^b \eta_{ku} + \varepsilon^a{}_{l \ u}{}^k \delta_k^b \eta_{kv} - \varepsilon^b{}_{l \ v}{}^k \delta_k^a \eta_{ku} - \varepsilon^b{}_{l \ u}{}^k \delta_k^a \eta_{kv} \\
& - \varepsilon^a{}_{k \ v}{}^l \delta_l^b \eta_{lu} - \varepsilon^a{}_{k \ u}{}^l \delta_l^b \eta_{lv} + \varepsilon^b{}_{k \ v}{}^l \delta_l^a \eta_{lu} + \varepsilon^b{}_{k \ u}{}^l \delta_l^a \eta_{lv} \\
& = \varepsilon^{lb}{}_{uk} \delta_l^a \eta_{lv} + \varepsilon^{al}{}_{uk} \delta_l^b \eta_{lv} - \varepsilon^{lb}{}_{vk} \delta_l^a \eta_{lu} - \varepsilon^{al}{}_{vk} \delta_l^b \eta_{lu} \\
& - \varepsilon^{kb}{}_{ul} \delta_k^a \eta_{kv} - \varepsilon^{ak}{}_{ul} \delta_k^b \eta_{kv} + \varepsilon^{kb}{}_{vl} \delta_k^a \eta_{ku} + \varepsilon^{ak}{}_{vl} \delta_k^b \eta_{ku} ,
\end{aligned}$$

wobei das erste Gleichheitszeichen hier nur im euklidischen Fall gilt, für die Lorentzsche Signatur hingegen ergäben sich entsprechende Vorzeichen. Im zweiten Schritt haben wir dann die Terme geeignet umgeordnet, und paarweise nacheinander liefern sie nun, wiederum bezogen auf den dreifach auftretenden Index, alle Kombinationen, die Beiträge zur Folge haben. Wir können nun also in diesen vier Paaren die rigiden Bedingungen durch Summen ersetzen, was auf die rechte Seite von (F.36) führt und somit die Behauptung (F.36) beweist.

Wir setzen dieses Resultat nun in (F.35) ein und erhalten nach einer Umordnung der Terme

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \varepsilon^{mn}{}_{uv} \cdot \frac{1}{2} \left[\left((\delta_m^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_m^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{mk}{}^{ab} \right) \eta_{ln} - \left((\delta_n^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_n^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{nk}{}^{ab} \right) \eta_{lm} \right. \\
& \quad \left. - \left((\delta_m^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_m^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ml}{}^{ab} \right) \eta_{kn} + \left((\delta_n^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_n^b) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{nl}{}^{ab} \right) \eta_{km} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[\left(\varepsilon_{uk}{}^{ab} - \frac{1}{\gamma_k} (\delta_u^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_u^b) \right) \eta_{lv} - \left(\varepsilon_{vk}{}^{ab} - \frac{1}{\gamma_k} (\delta_v^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_v^b) \right) \eta_{lu} \right. \\
& \quad \left. - \left(\varepsilon_{ul}{}^{ab} - \frac{1}{\gamma_k} (\delta_u^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_u^b) \right) \eta_{kv} + \left(\varepsilon_{vl}{}^{ab} - \frac{1}{\gamma_k} (\delta_v^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_v^b) \right) \eta_{ku} \right] ,
\end{aligned}$$

so daß wir unter Verwendung der zuvor eingeführten Bezeichnungen die Beziehung

$$\begin{aligned}
& \star^{mn}{}_{uv} \left[\left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right)_{mk}{}^{ab} \eta_{nl} - \left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right)_{nk}{}^{ab} \eta_{ml} - \left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right)_{ml}{}^{ab} \eta_{nk} + \left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right)_{nl}{}^{ab} \eta_{mk} \right] \\
& = \left[\left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]} \right)_{uk}{}^{ab} \eta_{vl} - \left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]} \right)_{vk}{}^{ab} \eta_{ul} - \left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]} \right)_{ul}{}^{ab} \eta_{vk} + \left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]} \right)_{vl}{}^{ab} \eta_{uk} \right] \\
& =: 4 \left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]} \right) [u[k]{}^{ab} \eta_v]_l] \tag{F.37}
\end{aligned}$$

bewiesen haben. Dabei sind in der verkürzenden Schreibweise, die wir in der letzten Zeile eingeführt haben, die beiden Arten von eckigen Klammern durchaus gleichberechtigt; sie dienen lediglich dazu anzugeben, bezüglich welcher Indexpaare die paarweise Antisymmetrisierung erfolgt.

Die Operationen $\mathbb{1}_{[\]}$ und \star werden darin vertauscht, wobei die Indexersetzungen $m \rightarrow u$ und $n \rightarrow v$ vorgenommen werden, so daß uns dieses Resultat nun angibt, wie sich aus der Kenntnis des A - B -Blockes in (F.33) die Beiträge der Form C - A , C - B , D - A und D - B ergeben: Die Elemente der Matrix, die den inversen Immirzi-Parameter enthalten, sind mit $-\gamma_k$ zu multiplizieren, die übrigen nicht-verschwindenden Beiträge hingegen müssen mit $-\frac{1}{\gamma_k}$ multipliziert werden.

Um nun analog die Beiträge der Art A - C , A - D , B - C und B - D zu bestimmen, muß die quadratische Form (F.34) mit $\frac{1}{2}\varepsilon^{kl}_{pq}$ kontrahiert werden. Die Wirkung dieser Operation können wir unter Ausnutzung einfacher Symmetrieeigenschaften bestimmen, denn da die quadratische Form antisymmetrisch unter der Vertauschung $m \leftrightarrow k \wedge n \leftrightarrow l$ ist, erhalten wir durch Anwendung dieser Dualisierung ein zusätzliches Minuszeichen. Auf der rechten Seite von (F.37) führt dies auf die entsprechende Ersetzung $k \rightarrow p \wedge l \rightarrow q$. Abschließend machen wir die Umordnung der Indizes wieder rückgängig, so daß sich diejenigen, welche sich in (F.34) auf die rechte Fluktuation beziehen, auch in der quadratischen Form rechts von den anderen Indizes befinden:

$$\begin{aligned}
 \star^{kl}_{pq} 4\left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star\right) [m[k \quad \eta_n]l]^{ab} &= - \star^{kl}_{pq} 4\left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star\right) [k[m \quad \eta_l]n]^{ab} \\
 &\stackrel{\text{(F.37)}}{=} - 4\left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]}\right) [p[m \quad \eta_q]n]^{ab} \\
 &= 4\left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]}\right) [m[p \quad \eta_n]q]^{ab}. \tag{F.38}
 \end{aligned}$$

Mit Blick auf (F.37) bemerkt man also, daß die $\{A, B\}$ - $\{C, D\}$ -Beiträge ihren $\{C, D\}$ - $\{A, B\}$ -Gegenstücken gleichen.

Um abschließend die Form der Matrixelemente C - C , C - D , D - C und D - D zu ermitteln, ist die kombinierte Anwendung der beiden Dualisierungen zu untersuchen. Diese ergibt sich

mit den gerade abgeleiteten Identitäten zu

$$\begin{aligned}
\star^{kl}{}_{pq} \star^{mn}{}_{uv} 4 \left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right) [m[k{}^{\ ab} \eta_n]l] &\stackrel{\text{(F.37)}}{=} \star^{kl}{}_{pq} 4 \left(\star - \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{1}_{[\]} \right) [u[k{}^{\ ab} \eta_v]l] \\
&= -\frac{4}{\gamma_k} \star^{kl}{}_{pq} \left(\mathbb{1}_{[\]} - \gamma_k \star \right) [u[k{}^{\ ab} \eta_v]l] \\
&\stackrel{\text{(F.38)}}{=} -\frac{4}{\gamma_k} \left(\star - \gamma_k \mathbb{1}_{[\]} \right) [u[p{}^{\ ab} \eta_v]q] \\
&= 4 \left(\mathbb{1}_{[\]} - \frac{1}{\gamma_k} \star \right) [u[p{}^{\ ab} \eta_v]q], \tag{F.39}
\end{aligned}$$

so daß also die Form des C - D -Blocks der des A - B -Blocks gleicht.

Wir müssen ersteren nun bloß noch explizit berechnen. Dieser ist bis auf den üblichen Vorfaktor bekanntlich gegeben durch

$$\begin{aligned}
\int d^4x \left\{ \left[\partial_\beta \partial^m A^n + \partial^m \square \bar{e}_\beta^n B + \partial^m \varepsilon^n{}_{uvw} \bar{e}_\beta^u \partial^v B^w + \partial^m B^n{}_\beta \right] \right. \\
\left[\frac{\bar{e}}{2} \left((\bar{e}_k^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{lm} - (\bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{ln} \right. \right. \\
\left. \left. - (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{km} + (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{kn} \right) \right. \\
\left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{kn}{}^{ab} \eta_{lm} - \varepsilon_{km}{}^{ab} \eta_{ln} - \varepsilon_{ln}{}^{ab} \eta_{km} + \varepsilon_{lm}{}^{ab} \eta_{kn}) \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right] \\
\left. \left[\partial_\alpha \partial^k A^l + \partial^k \square \bar{e}^l{}_\alpha B + \partial^k \varepsilon^l{}_{pqr} \bar{e}^p{}_\alpha \partial^q B^r + \partial^k B^l{}_\alpha \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Für den Beitrag des Vektors A^n erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int d^4x \left\{ A^n \left[\frac{\bar{e}}{2} \left((\bar{e}_k^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{lm} - (\bar{e}_k^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_k^\alpha) \eta_{ln} \right. \right. \right. \\
\left. \left. - (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_n^\alpha - \bar{e}_n^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{km} + (\bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_l^\alpha) \eta_{kn} \right) \right. \\
\left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{kn}{}^{ab} \eta_{lm} - \varepsilon_{km}{}^{ab} \eta_{ln} - \varepsilon_{ln}{}^{ab} \eta_{km} + \varepsilon_{lm}{}^{ab} \eta_{kn}) \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right] \\
\left. \partial^m \partial_\beta \left[\partial_\alpha \partial^k A^l + \partial^k \square \bar{e}^l{}_\alpha B + \partial^k \varepsilon^l{}_{pqr} \bar{e}^p{}_\alpha \partial^q B^r + \partial^k B^l{}_\alpha \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Der A^n - A^l -Beitrag verschwindet zunächst, da die quadratische Form in α und β antisymmetrisch ist und anschließend mit zwei partiellen Ableitungen kontrahiert wird. Wir erhalten also

$$\int d^4x \{ A^n [0] A^l \}$$

und weiterhin

$$\int d^4x \left\{ A^n \left[\frac{\bar{e}}{2} \left((\square\partial_n - \square\partial_n) - (\square\partial_n - \square\partial_n) - (\square\partial_n - 4\square\partial_n) + (\square\partial_n - 4\square\partial_n) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{kn}^{ab} \partial_b \partial^k \partial_a - \varepsilon_{km}^a \partial^m \partial_a \partial^k - \varepsilon_{ln}^{ab} \delta_b^l \square\partial_a + \varepsilon_{lm}^{ab} \delta_b^l \partial^m \partial_a \partial_n) \right) \right] \square B \right\} \\ = 0,$$

$$\int d^4x \left\{ A^n \left[\frac{\bar{e}}{2} \left(0 - 0 - 0 + 0 - \frac{1}{\gamma_k} (0 - 0 - \varepsilon_{ln}^{ap} \square\partial_a + 0) \right) \right] \varepsilon^l{}_{pqr} \partial^q B^r \right\} \\ = \int d^4x \left\{ A^n \left[\frac{\bar{e}}{\gamma_k} (\eta_{nq} \delta_r^a - \eta_{mr} \delta_q^a) \square\partial_a \partial^q \right] B^r \right\} \\ = \int d^4x \left\{ A^n \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] B_n \right\} \quad (\text{F.40})$$

und

$$\int d^4x \{ A^n [0] B^l{}_\alpha \}$$

wegen Divergenz- und Spurfreiheit sowie Symmetrie.

Nach dreifacher partieller Integration und anschließender Vereinfachung nimmt der Beitrag des Skalars B die Form

$$\int d^4x \left\{ B \left[\bar{e} \left(\bar{e}_k^\alpha \partial_l - \bar{e}_l^\alpha \partial_k - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^b{}_{mkl} \bar{e}_b^\alpha \partial^m \right) \right] \square \right. \\ \left. \left[\partial_\alpha \partial^k A^l + \partial^k \square \bar{e}^l{}_\alpha B + \partial^k \varepsilon^l{}_{pqr} \bar{e}^p{}_\alpha \partial^q B^r + \partial^k B^l{}_\alpha \right] \right\}$$

an, was komponentenweise auf

$$\int d^4x \{ B [0] A^l \}, \\ \int d^4x \{ B [-3 \bar{e} \square^3] B \}, \quad (\text{F.41}) \\ \int d^4x \{ B [0] B^r \}$$

und

$$\int d^4x \{ B[0] B^l{}_\alpha \}$$

führt.

Der B^W -Beitrag ist nach zweifacher partieller Integration und anschließender Anwendung bekannter Identitäten durch

$$\begin{aligned} \int d^4x \{ B^w \left[\frac{\bar{e}}{2} \left(2\varepsilon_{klw} \bar{e}_m{}^\alpha + \varepsilon^n{}_{kvw} \bar{e}_n{}^\alpha \eta_{lm} - \varepsilon^n{}_{lvw} \bar{e}_n{}^\alpha \eta_{km} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left((\eta_{ml} \eta_{kv} - \eta_{mk} \eta_{lv}) \bar{e}_w{}^\alpha + (\eta_{mw} \eta_{kv} - \eta_{mv} \eta_{kw}) \bar{e}_l{}^\alpha \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (\eta_{mk} \eta_{lw} - \eta_{ml} \eta_{kw}) \bar{e}_v{}^\alpha + (\eta_{mv} \eta_{lw} - \eta_{mw} \eta_{lv}) \bar{e}_k{}^\alpha \right) \right] \partial^m \partial^v \right. \\ \left. \left[\partial_\alpha \partial^k A^l + \partial^k \square \bar{e}^l{}_\alpha B + \partial^k \varepsilon^l{}_{pqr} \bar{e}^p{}_\alpha \partial^q B^r + \partial^k B^l{}_\alpha \right] \right\} \end{aligned}$$

gegeben, und wir berechnen daraus

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ B^w \left[-\frac{\bar{e}}{2\gamma_k} \cdot 2 \square^2 \eta_{lw} \right] A^l \} \\ &= \int d^4x \{ B^w \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] A_w \}, \end{aligned} \quad (\text{F.42})$$

$$\int d^4x \{ B^w [0] B \},$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \{ B^w \left[\frac{\bar{e}}{2} \left(0 + 0 - \varepsilon^n{}_{lvw} \varepsilon^l{}_{nqr} \square \partial^v \partial^q - \frac{1}{\gamma_k} \cdot 0 \right) \right] B^r \} \\ &= \int d^4x \{ B^w \left[\bar{e} \square^2 \right] B_w \} \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

sowie

$$\int d^4x \{ B^w [0] B^l{}_\alpha \}.$$

Zu guter Letzt nehmen die Beiträge des symmetrischen, spurlosen Tensors B_β^n die Form

$$\int d^4x \left\{ B_\beta^n \left[\frac{\bar{e}}{2} \left((\bar{e}_k^\beta \eta_{ln} - \bar{e}_l^\beta \eta_{kn}) \bar{e}_m^\alpha - (\bar{e}_k^\beta \eta_{lm} - \bar{e}_l^\beta \eta_{km}) \bar{e}_n^\alpha \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{mk}^{ab} \eta_{ln} - \varepsilon_{ml}^{ab} \eta_{kn}) \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right) \partial^m \right] \right. \\ \left. \left[\partial_\alpha \partial^k A^l + \partial^k \square \bar{e}^l{}_\alpha B + \partial^k \varepsilon^l{}_{pqr} \bar{e}^p{}_\alpha \partial^q B^r + \partial^k B^l{}_\alpha \right] \right\}$$

an, und dies liefert komponentenweise die Beiträge

$$\int d^4x \{ B_\beta^n [0] A^l \},$$

$$\int d^4x \{ B_\beta^n [0] B \},$$

$$\int d^4x \{ B_\beta^n [0] B^r \}$$

und abschließend

$$\int d^4x \left\{ B_\beta^n \left[\frac{\bar{e}}{2} \cdot \bar{e}_l^\beta \bar{e}_n^\alpha \square \right] B^l{}_\alpha \right\} \\ = \int d^4x \left\{ B^l{}_n \left[\frac{\bar{e}}{2} \square \right] B_n^l \right\}. \quad (\text{F.44})$$

Dank der von uns angestellten Vorüberlegungen sind wir nun in der Lage, alle weiteren nicht-verschwindenden Beiträge unmittelbar anzugeben:

$$\int d^4x \{ C^n [\bar{e} \square^2] B_n \}, \quad (\text{F.45})$$

$$\int d^4x \left\{ D \left[\frac{3\bar{e}}{\gamma_k} \square^3 \right] B \right\}, \quad (\text{F.46})$$

$$\int d^4x \{ D^n [\bar{e} \square^2] A_n \}, \quad (\text{F.47})$$

$$\int d^4x \left\{ D^n \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] B_n \right\}, \quad (\text{F.48})$$

$$\int d^4x \left\{ D^n_l \left[-\frac{\bar{e}}{2\gamma_k} \square \right] B_n^l \right\}, \quad (\text{F.49})$$

$$\int d^4x \left\{ A^n \left[\bar{e} \square^2 \right] D_n \right\}, \quad (\text{F.50})$$

$$\int d^4x \left\{ B \left[\frac{3\bar{e}}{\gamma_k} \square^3 \right] D \right\}, \quad (\text{F.51})$$

$$\int d^4x \left\{ B^n \left[\bar{e} \square^2 \right] C_n \right\}, \quad (\text{F.52})$$

$$\int d^4x \left\{ B^n \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] D_n \right\}, \quad (\text{F.53})$$

$$\int d^4x \left\{ B^n_l \left[-\frac{\bar{e}}{2\gamma_k} \square \right] D_n^l \right\}, \quad (\text{F.54})$$

$$\int d^4x \left\{ C^n \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] D_n \right\}, \quad (\text{F.55})$$

$$\int d^4x \left\{ D \left[-3\bar{e} \square^3 \right] D \right\}, \quad (\text{F.56})$$

$$\int d^4x \left\{ D^n \left[-\frac{\bar{e}}{\gamma_k} \square^2 \right] C_n \right\}, \quad (\text{F.57})$$

$$\int d^4x \left\{ D^n \left[\square^2 \right] D_n \right\}, \quad (\text{F.58})$$

$$\int d^4x \left\{ D_n^l \left[\frac{\bar{e}}{2} \square \right] D_n^l \right\}. \quad (\text{F.59})$$

Wir haben somit den freien Beitrag der quadratischen Form $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ auf dem Niveau der zerlegten Fluktuationen vollständig berechnet.

F.2 Der freie Anteil $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(0)}$ im Gravitonsektor

Fassen wir nun die Resultate dieses Abschnittes zusammen, so stellt sich der freie Anteil von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}} \equiv \tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}} + \tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}}$ nach Zerlegung der Gravitonfluktuationen gemäß (6.11) bzw. (6.12) in der Form

$$\begin{aligned} & \Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}[\bar{e}, \bar{\tau}; \bar{e}, \bar{\omega}]_{\bar{e}=\text{const}, \bar{\omega}=0} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \left\{ \begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} d^m_\beta \\ B^m_\beta \\ D^m_\beta \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{ccc} -2\Lambda_k & \square & -\frac{1}{\gamma_k} \square \\ \square & \frac{1}{2} \square & -\frac{1}{2\gamma_k} \square \\ -\frac{1}{\gamma_k} \square & -\frac{1}{2\gamma_k} \square & \frac{1}{2} \square \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} d_m^\beta \\ B_m^\beta \\ D_m^\beta \end{array} \right) \\ & + \left(\begin{array}{c} a \\ d \\ B \\ D \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{cccc} -\frac{(1+\beta_D)^2}{\alpha_D} \square^3 & 3(2\Lambda_k - \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} \square) \square^2 & 0 & 0 \\ 3(2\Lambda_k - \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} \square) \square^2 & 3(4\Lambda_k - 3\frac{\beta_D^2}{\alpha_D} \square) \square^2 & -6\square^3 & \frac{6}{\gamma_k} \square^3 \\ 0 & -6\square^3 & -3\square^3 & \frac{3}{\gamma_k} \square^3 \\ 0 & \frac{6}{\gamma_k} \square^3 & \frac{3}{\gamma_k} \square^3 & -3\square^3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a \\ d \\ B \\ D \end{array} \right) \\ & + \left(\begin{array}{c} b^m \\ c^m \\ d^m \\ A^m \\ B^m \\ C^m \\ D^m \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{cccccc} -\frac{1}{2\alpha_L} \square & (2\Lambda_k + \frac{1}{2\alpha_L}) \square & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2\Lambda_k + \frac{1}{2\alpha_L}) \square & (\frac{\square}{\alpha_D} - \frac{1}{2\alpha_L}) \square & 0 & 0 & -\frac{2}{\gamma_k} \square^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2(2\Lambda_k + \frac{1}{\alpha_L}) \square & 0 & 2\square^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma_k} \square^2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\gamma_k} \square^2 & 2\square^2 & -\frac{1}{\gamma_k} \square^2 & \square^2 & \square^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square^2 & 0 \\ 0 & 2\square^2 & -\frac{2}{\gamma_k} \square^2 & \square^2 & -\frac{1}{\gamma_k} \square^2 & -\frac{1}{\gamma_k} \square^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_m \\ c_m \\ d_m \\ A_m \\ B_m \\ C_m \\ D_m \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.60}) \end{aligned}$$

dar. Diese quadratische Form ist offensichtlich für einen reellen Immirzi-Parameter γ_k selbstadjungiert.

F.3 Berechnung des freien Anteils $\tilde{\Gamma}_{k\text{ gh}}^{\text{quad}(0)}$ im Geistsektor

Wir setzen die Zerlegungen der Geist- und Antigeistfelder in die vier in Kapitel 4 berechneten Anteile der Geistwirkung ein. Dabei betrachten wir in diesem Abschnitt nur die vom Hintergrundspinzusammenhang $\bar{\omega}$ unabhängigen Terme und führen auch hier die entsprechenden $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ - und $\bar{\mu}$ -Reskalierungen nicht aus. Für (4.68) ergibt sich diese nullte Ordnung vermöge partieller Integration unter Beachtung von (6.21) zu

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \left\{ (\partial_\mu \bar{f} + \bar{g}_\mu) [(1 + \beta_D) \partial^\mu \partial_\nu] (\partial^\nu f + g^\nu) \right\} \\ &= - \int d^4x \bar{e} \left\{ (\bar{f} [- (1 + \beta_D) \square^2] f) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.61})$$

Für (4.69) und (4.70) erhalten wir analog

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \left\{ (\partial_\mu \bar{f} + \bar{g}_\mu) [\partial_c \bar{e}_d{}^\mu] \left(\partial^{[c} F^{d]} + \frac{1}{2} \varepsilon^{cd}{}_{kl} \partial^k G^l \right) \right\} \\ &= - \int d^4x \bar{e} \left\{ (\partial_\mu \bar{f} + \bar{g}_\mu) \left[\frac{\square}{2} \right] F^\mu \right\} \\ &= - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{g}_\mu \left[\frac{\square}{2} \right] F^\mu \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.62})$$

sowie

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \left(\partial_{[a} \bar{F}_{b]} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^{kl} \partial_k \bar{G}_l \right) [\bar{e}^a{}_\nu \partial^b] (\partial^\nu f + g^\nu) \right\} \\ &= - \int d^4x \bar{e} \left\{ \left(\frac{1}{2} (\bar{F}_a \partial_b - \bar{F}_b \partial_a) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^{kl} \bar{G}_k \partial_l \right) [\bar{e}^a{}_\nu \partial^b] (\partial^\nu f + g^\nu) \right\} \\ &= - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{F}_a \left[\frac{\square}{2} \right] g^a \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.63})$$

Abschließend nimmt (4.71) in dieser Darstellung die Form

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \left(\partial_{[a} \bar{F}_{b]} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^{kl} \partial_k \bar{G}_l \right) \left(\partial^a F^b + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{mn} \partial^m G^n \right) \right\} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \left(\frac{1}{2} (\bar{F}_a \partial_b - \bar{F}_b \partial_a) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^{kl} \bar{G}_k \partial_l \right) \left(\partial^a F^b + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{mn} \partial^m G^n \right) \right\} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{F}_a \left[-\frac{\square}{2} \right] F^a + \bar{G}_k \left[\frac{1}{2} (\delta^k{}_m \delta^l{}_n - \delta^k{}_n \delta^l{}_m) \partial_l \partial^m \right] G^m \right\} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{F}_a \left[-\frac{\square}{2} \right] F^a + \bar{G}_a \left[-\frac{\square}{2} \right] G^a \right\}
 \end{aligned} \tag{F.64}$$

an, so daß sich der freie Teil der Geistwirkung zu

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{k \text{ gh}}^{\text{quad}(0)}[\xi, \bar{\xi}, \Upsilon, \bar{\Upsilon}; \bar{e}] \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{g}_a \\ \bar{F}_a \\ \bar{G}_a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -(1 + \beta_D) \square^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\square}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\square}{2} & -\frac{\square}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\square}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g^a \\ F^a \\ G^a \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{F.65}$$

ergibt.

Anhang G

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren des algebraischen Anteils von H_0

Wir möchten nun die Eigenwerte und Eigenvektoren der in Kapitel 7.2 angegebenen Matrizen berechnen. Diese sind durch die Kerne der gerade berechneten quadratischen Form gegeben, wobei nun jedoch bereits die $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ - und μ -Reskalierungen ausgeführt wurden. Mit der Ersetzung $-\square \rightarrow p^2$, $p := \sqrt{p^2}$ sowie $y := \frac{p}{k}$, $\mu := \frac{\bar{\mu}}{k}$ und $f := \alpha'_L \mu^4 k^2$ lauten die zu diagonalisierenden Matrizen, sofern man sie durch dimensionslose Größen und k ausdrückt:

Skalarer Block des Gravitonsektors $\{a, d, B, D\}$:

$$(H_0^S)_{j_s}^{i_s}(y^2) = \frac{1}{16\pi g_k} \begin{pmatrix} \frac{(1+\beta_D)^2}{\alpha_D} y^2 \mu^{-1} & 3(2\lambda_k + \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} y^2) \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 3(2\lambda_k + \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D} y^2) \mu^{-1} & 3(4\lambda_k + 3\frac{\beta_D^2}{\alpha_D} y^2) \mu^{-1} & 6y & 0 \\ 0 & 6y & 3\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\mu \end{pmatrix} \cdot k^3$$

Erster Vektorblock des Gravitonsektors $\{b^m, c^m, A^m, D^m\}$:

$$(H_0^{VI})_{j_{VI}}^{i_{VI}}(y^2) = \frac{1}{16\pi g_k} \begin{pmatrix} \frac{\mu^3}{2f} & -\left(2\lambda_k \mu^{-1} + \frac{\mu^3}{2f}\right) & 0 & 0 \\ -\left(2\lambda_k \mu^{-1} + \frac{\mu^3}{2f}\right) & \left(\frac{y^2}{\alpha_D} \mu^{-1} + \frac{\mu^3}{2f}\right) & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 2y & \mu & \mu \end{pmatrix} \cdot k^3$$

Zweiter Vektorblock des Gravitonsektors $\{d^m, B^m, C^m\}$:

$$(H_0^{VII})_{j_{VII}}^{i_{VII}}(y^2) = \frac{1}{16\pi g_k} \begin{pmatrix} 2(2\lambda_k \mu^{-1} + \frac{\mu^3}{f}) & 2y & 0 \\ 2y & \mu & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \cdot k^3$$

Tensorblock des Gravitonsektors $\{d^{mn}, B^{mn}, D^{mn}\}$:

$$(H_0^T)_{j_T}^{i_T}(y^2) = \frac{1}{16\pi g_k} \begin{pmatrix} -2\lambda_k \mu^{-1} & -y & 0 \\ -y & -\frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \cdot k^3$$

Skalarer Block des Geistsektors $\{\bar{f}, f\}$:

$$(H_0^{\text{ghS}})_{j_{\text{ghS}}}^{i_{\text{ghS}}}(y^2) = (1 + \beta_D) y^2 \mu^{-1} k$$

Vektorblock des Geistsektors $\{\bar{g}_m, \bar{F}_m, \bar{G}_m, g^m, F^m, G^m\}$:

$$(H_0^{\text{ghV}})_{j_{\text{ghV}}}^{i_{\text{ghV}}}(y^2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y}{2} & 0 \\ \frac{y}{2} & -\frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \cdot k$$

G.1 Die Eigenwerte von H_0

Wir berechnen in diesem Abschnitt die Eigenwerte $\lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2)$ der dimensionslosen Matrizen, die jeweils auf der rechten Seite der obigen H_0 -Blöcke stehen. Die dimensionsvollen Eigenwerte ergeben sich dann über $\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2) = \frac{1}{16\pi G_k} \lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) k$ für $\chi \in \{S, V, T\}$ bzw. über

$\bar{\lambda}_{\alpha_\chi}^\chi(p^2) = \lambda_{\alpha_\chi}^\chi(y^2) k$ für $\chi \in \{\text{gh S}, \text{gh V}\}$. Jetzt geben wir sektorweise die charakteristischen Polynome an.

Skalarer Block des Gravitonsektors: Hier gilt zunächst

$$\lambda_4^S = 3\mu.$$

Die drei übrigen Eigenwerte erhalten wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} & P_S(\lambda_{\alpha_S}^S) \\ = & (\lambda_{\alpha_S}^S)^3 - \left[\frac{(1 + \beta_D)^2 y^2}{\alpha_D \mu} + 3 \left(4\lambda_k + 3 \frac{\beta_D^2}{\alpha_D} y^2 \right) \mu^{-1} + 3\mu \right] (\lambda_{\alpha_S}^S)^2 \\ & + \left[3 \frac{(1 + \beta_D)^2}{\alpha_D} \left(4\lambda_k + 3 \frac{\beta_D^2}{\alpha_D} y^2 \right) \frac{y^2}{\mu^2} + 3 \frac{(1 + \beta_D)^2}{\alpha_D} y^2 + 9 \left(4\lambda_k + 3 \frac{\beta_D^2}{\alpha_D} y^2 \right) - 36y^2 \right. \\ & \quad \left. - 9 \left(2\lambda_k + \frac{\beta_D(1 + \beta_D)}{\alpha_D} y^2 \right)^2 \mu^{-2} \right] (\lambda_{\alpha_S}^S) \\ & - 9 \frac{(1 + \beta_D)^2}{\alpha_D} \left(4\lambda_k + 3 \frac{\beta_D^2}{\alpha_D} y^2 \right) \frac{y^2}{\mu} + 36 \frac{(1 + \beta_D)^2}{\alpha_D} \frac{y^4}{\mu} + 27 \left(2\lambda_k + \frac{\beta_D(1 + \beta_D)}{\alpha_D} y^2 \right)^2 \mu^{-1}. \end{aligned}$$

Erster Vektorblock des Gravitonsektors: Das charakteristische Polynom für $\lambda_{\alpha_{VI}}^{VI}$ ist durch

$$\begin{aligned} & P_{VI}(\lambda_{\alpha_{VI}}^{VI}) \\ = & (\lambda_{\alpha_{VI}}^{VI})^4 + \left[-\frac{\mu^3}{2f} - \left(\left(\frac{y^2}{\alpha_D} + \frac{\mu^4}{2f} \right) \mu^{-1} + \mu \right) \right] (\lambda_{\alpha_{VI}}^{VI})^3 \\ & + \left[\frac{\mu^3}{2f} \left(\left(\frac{y^2}{\alpha_D} + \frac{\mu^4}{2f} \right) \mu^{-1} + \mu \right) + \left(\frac{y^2}{\alpha_D} + \frac{\mu^4}{2f} \right) - 4y^2 - \mu^2 - \frac{1}{4} \left(4\lambda_k + \frac{\mu^4}{f} \right)^2 \mu^{-2} \right] (\lambda_{\alpha_{VI}}^{VI})^2 \\ & + \left[-\frac{\mu^3}{2f} \left(\frac{y^2}{\alpha_D} + \frac{\mu^4}{2f} \right) + 2\frac{\mu^3}{f} y^2 + \frac{\mu^5}{2f} + \left(\frac{y^2}{\alpha_D} + \frac{\mu^4}{2f} \right) \mu + \frac{1}{4} \left(4\lambda_k + \frac{\mu^4}{f} \right)^2 \mu^{-1} \right] (\lambda_{\alpha_{VI}}^{VI}) \\ & + \left[-\frac{\mu^4}{2f} \left(\frac{y^2}{\alpha_D} + \frac{\mu^4}{2f} \right) + \frac{1}{4} \left(4\lambda_k + \frac{\mu^4}{f} \right)^2 \right] \end{aligned} \tag{G.1}$$

gegeben.

Zweiter Vektorblock des Gravitonsektors: Hier sind die dimensionslosen Eigenwerte $\lambda_{\alpha VII}^{VII}$ die Nullstellen von

$$\begin{aligned} & P_{VII}(\lambda_{\alpha VII}^{VII}) \\ = & (\lambda_{\alpha VII}^{VII})^3 + \left[- \left(2 \left(2\lambda_k + \frac{\mu^4}{f} \right) \mu^{-1} + \mu \right) \right] (\lambda_{\alpha VII}^{VII})^2 \\ & + \left[2 \left(2\lambda_k + \frac{\mu^4}{f} \right) - \mu^2 - 4y^2 \right] (\lambda_{\alpha VII}^{VII}) + \left[2 \left(2\lambda_k + \frac{\mu^4}{f} \right) \mu \right]. \end{aligned}$$

Im Falle der drei verbleibenden Blöcke faktorisieren die charakteristischen Polynome in Polynome, die höchstens vom Grad 2 sind, so daß sich für diese die Eigenwerte unmittelbar angeben lassen.

Tensorblock des Gravitonsektors: Es gilt

$$\lambda_{1,2}^T = -\frac{1}{4}(4\lambda_k \mu^{-1} + \mu) \pm \sqrt{\frac{1}{16}(4\lambda_k \mu^{-1} + \mu)^2 + y^2 - \lambda_k}$$

sowie

$$\lambda_3^T = -\frac{\mu}{2}.$$

Skalarer Block des Geistsektors: Hier liest man unmittelbar

$$\lambda_1^{\text{ghS}} = (1 + \beta_D) y^2 \mu^{-1}$$

ab, so daß dieser Block also wie im Hauptteil erläutert für die Wahl $\beta_D = -1$ singularär wird.

Vektorblock des Geistsektors: Abschließend findet man für diesen

$$\lambda_{1,2}^{\text{ghV}} = -\frac{1}{4}(\mu \mp \sqrt{\mu^2 + 4y^2})$$

und

$$\lambda_3^{\text{ghV}} = -\frac{\mu}{2}.$$

G.2 Die allgemeinen Lösungsformeln für Polynome dritten und vierten Grades

Die Nullstellen der charakteristischen Polynome dritten und vierten Grades lassen sich vermöge bekannter Formeln bestimmen [89, 90]. Da es sich in unserem Fall um die Eigenwerte eines hermiteschen Operators bzw. einer reellen symmetrischen Matrix handelt, ist es ausreichend, sich auf den Fall dreier reeller Lösungen zu beschränken. Die Nullstellen eines Polynoms der Form

$$P(x) \equiv x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

sind dann durch

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3} a_2 + 2\sqrt{-u} \cos\left(\frac{\vartheta}{3}\right) \\ x_2 &= -\frac{1}{3} a_2 + 2\sqrt{-u} \cos\left(\frac{\vartheta + 2\pi}{3}\right) \\ x_3 &= -\frac{1}{3} a_2 + 2\sqrt{-u} \cos\left(\frac{\vartheta + 4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

mit

$$u := \frac{3a_1 - a_2^2}{9}, \quad v := \frac{9a_1 a_2 - 27a_0 - 2a_2^2}{54}, \quad \vartheta := \arccos\left(\frac{v}{\sqrt{-u^3}}\right)$$

gegeben. Dies sind die Cardanischen Formeln für den Spezialfall dreier reeller Lösungen.

Des weiteren ergeben sich die Nullstellen eines Polynoms vierten Grades der Form

$$P(z) \equiv z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0$$

mit

$$\alpha := -\frac{3}{8} A_3^2 + A_2, \quad \beta := \frac{1}{8} A_3^3 - \frac{1}{2} A_3 A_2 + A_1, \quad \gamma := -\frac{3}{256} A_3^4 + \frac{1}{16} A_3^2 A_2 - \frac{1}{4} A_3 A_1 + A_0$$

zu

$$z_{1,2} = -\frac{A_3}{4} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha + 2y_1} \pm \sqrt{-3\alpha - 2y_1 - \frac{2\beta}{\sqrt{\alpha + 2y_1}}} \right)$$

$$z_{3,4} = -\frac{A_3}{4} + \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\alpha + 2y_1} \pm \sqrt{-3\alpha - 2y_1 + \frac{2\beta}{\sqrt{\alpha + 2y_1}}} \right).$$

Darin bezeichnet y_1 eine der drei Lösungen der folgenden Gleichung dritten Grades:

$$y^3 + \frac{5}{2}\alpha y^2 + (2\alpha^2 - \gamma)y + \left(\frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta^2}{8} \right) = 0.$$

Wir haben uns im Zuge der numerischen Untersuchung davon überzeugt, daß die Nullstellen des Polynoms vierten Grades in der Tat unabhängig davon sind, welche der drei Lösungen dieser Gleichung wir wählen.

G.3 Die Eigenvektoren von H_0

Unter Kenntnis der Eigenwerte reduziert sich die Bestimmung der Eigenvektoren auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Da es sich um die Eigenvektoren reeller, symmetrischer Matrizen handelt, sind diese in jedem der fünf Sektoren S, V, T, ghS und ghV untereinander jeweils orthogonal. Am übersichtlichsten läßt sich die von verwandte Methode zu deren Berechnung am Beispiel des Unterblocks VII des Vektorsektors illustrieren. Wir werten auf diesem die Eigenwertgleichung in der Form

$$\begin{pmatrix} 2(2\lambda_k \mu^{-1} + \frac{\mu^3}{f}) & 2y & 0 \\ 2y & \mu & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_{\alpha_{VII}}^{VII} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

aus und erhalten das Gleichungssystem

$$2\left(2\lambda_k \mu^{-1} + \frac{\mu^3}{f}\right)a + 2yb = \lambda_{\alpha_{VII}}^{VII} a$$

$$2ya + \mu b + \mu c = \lambda_{\alpha_{VII}}^{VII} b$$

$$\mu b = \lambda_{\alpha_{VII}}^{VII} c.$$

Wir lösen dieses auf und erhalten den zum Eigenwert $\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII}$ gehörenden normierten Eigenvektor schließlich zu

$$(v_{\alpha_{VII}}^{VII})^{i_{VII}} = \left[\frac{((\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII})^2 - \mu\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII} - \mu^2)^2 + 4y^2\mu^2}{4y^2(\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII})^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(0, 0, 0, 0, \frac{(\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII})^2 - \mu\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII} - \mu^2}{2y\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII}}, 1, \frac{\mu}{\lambda_{\alpha_{VII}}^{VII}} \right)^T.$$

Dabei haben wir beachtet, daß die vorliegende Matrix als Unterblock einer blockdiagonalen 7×7 -Matrix aufzufassen ist und sie somit auf einen Unterraum des \mathbb{R}^7 wirkt. Zudem kann man das obige Gleichungssystem auch auf andere Arten auflösen; diese sind jedoch zueinander und zu der dargestellten Möglichkeit genau dann äquivalent, falls das charakteristische Polynom verschwindet.

Wir geben nun blockweise alle auf analoge Weise bestimmten Eigenvektoren an:

Skalarer Block des Gravitonsektors:

$$(v_{\alpha_S}^S)^{i_S} = \left[1 + \frac{36y^2}{(\lambda_{\alpha_S}^S - 3\mu)^2} + \frac{9\left(2\lambda_k + \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D}y^2\right)^2}{\mu^2\left(\lambda_{\alpha_S}^S - \frac{(1+\beta_D)^2}{\alpha_D}y^2\mu^{-1}\right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(\frac{3\left(2\lambda_k + \frac{\beta_D(1+\beta_D)}{\alpha_D}y^2\right)\mu^{-1}}{\lambda_{\alpha_S}^S - \frac{(1+\beta_D)^2}{\alpha_D}y^2\mu^{-1}}, 1, \frac{6y}{\lambda_{\alpha_S}^S - 3\mu}, 0 \right)^T, \alpha_S \in \{1, 2, 3\} \\ (v_{\alpha_S}^S)^{i_S} = (0, 0, 0, 1)^T, \alpha_S = 4$$

Vektorblock des Gravitonsektors:

$$(v_{\alpha_V}^V)^{i_V} = \left[\frac{(4\lambda_k f \mu^4 + 1)^2}{(1 - 2f\mu^{-3}\lambda_{\alpha_V}^V)^2} + 1 + \frac{4y^2(\mu^2 + (\lambda_{\alpha_V}^V)^2)}{((\lambda_{\alpha_V}^V)^2 - \mu\lambda_{\alpha_V}^V - \mu^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(\frac{4\lambda_k f \mu^4 + 1}{1 - 2f\mu^{-3}\lambda_{\alpha_V}^V}, 1, \frac{2y\mu}{(\lambda_{\alpha_V}^V)^2 - \mu\lambda_{\alpha_V}^V - \mu^2}, \frac{2y\lambda_{\alpha_V}^V}{(\lambda_{\alpha_V}^V)^2 - \mu\lambda_{\alpha_V}^V - \mu^2}, 0, 0, 0 \right)^T, \\ \alpha_V \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(v_{\alpha_V}^V)^{i_V} = \left[\frac{((\lambda_{\alpha_V}^V)^2 - \mu\lambda_{\alpha_V}^V - \mu^2)^2 + 4y^2\mu^2}{4y^2(\lambda_{\alpha_V}^V)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(0, 0, 0, 0, \frac{(\lambda_{\alpha_V}^V)^2 - \mu\lambda_{\alpha_V}^V - \mu^2}{2y\lambda_{\alpha_V}^V}, 1, \frac{\mu}{\lambda_{\alpha_V}^V} \right)^T, \alpha_V \in \{5, 6, 7\}$$

(Dabei sind die Identifikationen $\alpha_V = \alpha_{VI}$ für $\alpha_V \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $\alpha_V = \alpha_{VII} + 4$ für $\alpha_V \in \{5, 6, 7\}$ vorzunehmen.)

Tensorblock des Gravitonsektors:

$$(v_{\alpha_T}^T)^{i_T} = \left[\frac{(2\lambda_{\alpha_T}^T + \mu)^2}{4y^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{2\lambda_{\alpha_T}^T + \mu}{2y}, 1, 0 \right)^T, \alpha_T \in \{1, 2\} \\ (v_{\alpha_T}^T)^{i_T} = (0, 0, 1)^T, \alpha_T = 3$$

Skalarer Block des Geistsektors:

$$(v_{\alpha_{ghS}}^{ghS})^{i_{ghS}} = 1, \alpha_{ghS} = 1$$

Vektorblock des Geistsektors:

$$(v_{\alpha_{ghV}}^{ghV})^{i_{ghV}} = \left[\frac{(2\lambda_{\alpha_{ghV}}^{ghV})^2}{y^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left(1, \frac{2\lambda_{\alpha_{ghV}}^{ghV}}{y}, 0 \right)^T, \alpha_{ghV} \in \{1, 2\} \\ (v_{\alpha_{ghV}}^{ghV})^{i_{ghV}} = (0, 0, 1)^T, \alpha_{ghV} = 3$$

Anhang H

Berechnung des Beitrages erster Ordnung zu $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}}$

Ziel dieses Abschnittes ist die Berechnung der relevanten Beiträge zu $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}} \equiv \tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}} + \tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}} + \tilde{\Gamma}_{k \text{ gh}}^{\text{quad}}$, die sich für nicht-verschwindende Hintergrundfelder $\bar{\omega} \neq 0$ ergeben und somit über den freien Anteil hinausgehen. Diese Beiträge bilden den *Wechselwirkungsanteil*. Zunächst wählen wir für den Spinzusammenhang eine Hintergrundkonfiguration der Form

$$\bar{\omega}^{(\pm) ab}{}_{\mu}(x) = \frac{1}{2} n^{(\pm) ab} v_{\mu}(x), \quad (\text{H.1})$$

wobei $n^{(\pm) ab}$ einen konstanten, antisymmetrischen, (anti-)selbstdualen $O(4)$ -Tensor bezeichnet, d.h. er genügt der entsprechenden euklidischen Eigenwertgleichung

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{ab}{}_{cd} n^{(\pm) cd} = \pm n^{(\pm) ab}.$$

Das Vektorfeld $v_{\mu}(x)$ hingegen soll an dieser Stelle zunächst nicht näher spezifiziert werden; insbesondere wollen wir keinerlei einschränkende Annahmen bezüglich seiner x -Abhängigkeit machen. Der assoziierte Feldstärketensor ist dann quasi-abelsch und gegeben durch

$$\bar{F}^{(\pm) ab}{}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \left(\frac{1}{2} v_{\nu} n^{(\pm) ab} \right) - \partial_{\nu} \left(\frac{1}{2} v_{\mu} n^{(\pm) ab} \right) = \partial_{[\mu} v_{\nu]} n^{(\pm) ab}.$$

Da dieser Anteil der gesuchten Invarianten also eine Potenz in $n^{(\pm)ab}$, eine Potenz in v_μ sowie genau eine Ableitung ∂ enthält, müssen wir in der folgenden Rechnung bloß bis zur ersten Ableitung in v_μ entwickeln. Im Falle des gewählten Hintergrundes ist es offensichtlich, daß sich die (Anti-)Selbstdualität des Hintergrundspinzusammenhangs auf den assoziierten Feldstärketensor überträgt.

Wir berechnen die erforderlichen Beiträge des $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -, des $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ - und des $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Blocks, indem wir die Zerlegung (6.11) und (6.12) der Fluktuationserwartungswerte in die erste, zweite und dritte Zeile von (E.5) einsetzen. Auch in diesem Anhang berücksichtigen wir die $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ - und $\bar{\mu}$ -Reskalierungen noch nicht. Man beachte, daß der $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Block dabei keinen Beitrag liefert, da durch die zweifache funktionale Ableitung nach dem Spinzusammenhang jegliche Abhängigkeit von dessen Hintergrundkonfiguration verschwunden ist, so daß dieser ausschließlich zum freien Anteil von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}$ bzw. $\Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}}$ beiträgt. Da die Eichfixierungsbeiträge nur von der Vielbein-Fluktuation $\bar{\varepsilon}$ abhängen, liefern auch sie keine Beiträge zum $\bar{\tau}$ - $\bar{\tau}$ -Block des Wechselwirkungsteils. Diesen bezeichnen wir im folgenden mit $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(1)}$ bzw. $\Gamma_k^{\text{quad}(1)}$.

H.1 Der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(1)}$

Mit

$$\begin{aligned}
K_{abmk}^{(\gamma_k)} \bar{F}^{(\pm)ab}{}_{\mu\nu} &= \left(\varepsilon_{abmk} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{am}\eta_{bk} - \eta_{ak}\eta_{bm}) \right) \bar{F}^{(\pm)ab}{}_{\mu\nu} \\
&= \pm 2 \bar{F}^{(\pm)}{}_{mk\mu\nu} - \frac{1}{\gamma_k} (\bar{F}^{(\pm)}{}_{mk\mu\nu} - \bar{F}^{(\pm)}{}_{km\mu\nu}) \\
&= \pm 2 \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) \bar{F}^{(\pm)}{}_{mk\mu\nu} \\
&= -2 \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \bar{F}^{(\pm)}{}_{mk\mu\nu}
\end{aligned}$$

und

$$\bar{F}^{(\pm)}{}_{mk\mu\nu} = \partial_{[\mu} v_{\nu]} n_{mk}^{(\pm)}$$

erhalten wir für die $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponente zunächst

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad}(1)}|_{\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{\varepsilon}^m_\beta \left[-\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abmk}^{(\gamma_k)} \bar{F}^{(\pm)ab}_{\mu\nu} \right] \bar{\varepsilon}^k_\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{\varepsilon}^m_\beta \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \partial_{[\mu} v_{\nu]} n^{(\pm)}_{mk} \right] \bar{\varepsilon}^k_\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \left(\partial^m \partial_\beta a + \partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta + (\square \bar{e}^m_\beta - \partial^m \partial_\beta) d + \varepsilon^m_{pqr} \bar{e}^p_\beta \partial^q d^r + d^m_\beta \right) \\
 &\quad \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \partial_\mu v_\nu n^{(\pm)}_{mk} \right] \\
 &\quad \left(\partial^k \partial_\alpha a + \partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha + (\square \bar{e}^k_\alpha - \partial^k \partial_\alpha) d + \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}^u_\alpha \partial^v d^w + d^k_\alpha \right).
 \end{aligned}$$

Wie im Hauptteil erläutert, schränkt die Tatsache, daß im freien Sektor die Skalare, Vektoren und symmetrisch-spurlosen Tensoren nur untereinander mischen, die zur Spur auf der rechten Seite beitragenden Terme dahingehend ein, daß auch im Wechselwirkungsanteil diese Sektoren separat betrachtet werden können und Mischungen zwischen diesen nicht berücksichtigt werden müssen. Daher bietet es sich an, aus Gründen der Übersichtlichkeit die folgende Rechnung sektorweise durchzuführen. Zudem untergliedern wir die einzelnen Sektoren gemäß der Paritätsordnung, in der wir den freien Teil des inversen Propagators dargestellt haben, jeweils in die entsprechenden beiden Haupt- und Nebendiagonalblöcke. Wir listen dabei die berechneten Beiträge in Form einer quasi-tabellarischen Darstellung auf, indem wir zunächst in Fettdruck die Mengen der Felder angeben, die in dem entsprechenden Haupt- oder Nebendiagonalblock miteinander gekoppelt werden. Diesen stellen wir dann komponentenweise dar, indem wir dem betreffenden Matrixelement die beiden Felder, die dieses miteinander koppelt, unterstrichen voranstellen.

H.1.1 Der skalare Sektor

Block $\{a, d\}$ - $\{a, d\}$:

Komponente $a - a$:

$$\begin{aligned}
 &\int d^4x (\partial^m \partial_\beta a) \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n^{(\pm)}_{mk} \right] \partial^k \partial_\alpha a \\
 &= \int d^4x a \left\{ \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n^{(\pm)}_{mk} \right] \partial^m \partial_\beta \partial^k \partial_\alpha + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right\} a = 0 \quad (\text{H.2})
 \end{aligned}$$

Komponente a - d:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x (\partial^m \partial_\beta a) \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] (\square \bar{e}_\alpha^k - \partial^k \partial_\alpha) d \\
&= \int d^4x a \left\{ \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] (\square \partial^m \partial_\beta \bar{e}_\alpha^k - \partial^m \partial^k \partial_\beta \partial_\alpha) + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right\} d \\
&= \int d^4x a \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) \bar{e}_\beta^k n_{km}^{(\pm)} \partial^m \partial_\alpha \square + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right] d \tag{H.3}
\end{aligned}$$

Komponente d - a:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x [(\square \bar{e}_\beta^m - \partial^m \partial_\beta) d] \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \partial^k \partial_\alpha a \\
&= \int d^4x d \left\{ \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] (\square \bar{e}_\beta^m - \partial^m \partial_\beta) \partial^k \partial_\alpha + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right\} a \\
&= \int d^4x d \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) \bar{e}_\beta^m n_{mk}^{(\pm)} \partial^k \partial_\alpha \square + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right] a \tag{H.4}
\end{aligned}$$

Komponente d - d:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x [(\square \bar{e}_\beta^m - \partial^m \partial_\beta) d] \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] (\square \bar{e}_\alpha^k - \partial^k \partial_\alpha) d \\
&= \int d^4x d \left\{ \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] (\square \bar{e}_\beta^m - \partial^m \partial_\beta) (\square \bar{e}_\alpha^k - \partial^k \partial_\alpha) + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right\} d \\
&= \int d^4x d \left\{ \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) (n_{\beta\alpha}^{(\pm)} \square^2 - n_{m\alpha}^{(\pm)} \partial^m \partial_\beta \square - n_{\beta k}^{(\pm)} \partial^k \partial_\alpha \square \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + n_{mk}^{(\pm)} \partial^m \partial^k \partial_\beta \partial_\alpha) \right] + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right\} d \\
&= \int d^4x d \left\{ \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) (n_{\beta\alpha}^{(\pm)} \square^2 - 2n_{\beta k}^{(\pm)} \partial^k \partial_\alpha \square) \right] + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right\} d \\
&= \int d^4x d \left\{ \left[2 \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) (\partial_\mu v_\nu) (\pm \bar{e} n^{(\pm)\mu\nu} \square^2 - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} n_{\beta k}^{(\pm)} \partial^k \partial_\alpha \square) \right] + \mathcal{O}(\partial^2 v) \right\} d, \tag{H.5}
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die (Anti-)Selbstdualität (H.2) in der Form

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}n_{\beta\alpha}^{(\pm)} &= \frac{\bar{e}}{2}\bar{e}_a^\mu\bar{e}_b^\nu\bar{e}_c^\beta\bar{e}_d^\alpha\bar{e}^k_\beta\bar{e}^m_\alpha\varepsilon^{abcd}n_{km}^{(\pm)} \\
 &= \frac{\bar{e}}{2}\bar{e}_a^\mu\bar{e}_b^\nu\varepsilon^{abcd}n_{cd}^{(\pm)} \\
 &= \pm\bar{e}\bar{e}_a^\mu\bar{e}_b^\nu n^{(\pm)ab} \\
 &= \pm\bar{e}n^{(\pm)\mu\nu}
 \end{aligned}$$

ausgenutzt haben. Man kann unmittelbar ablesen, daß der Operator in diesem Sektor wie gewünscht hermitesch ist, da zum einen der zweite und dritte berechnete Beitrag nach partieller Integration ineinander übergehen und zudem der d - d -Eintrag für sich genommen ebenfalls selbstadjungiert ist. Im folgenden werden wir den Zusatz „ $+\mathcal{O}(\partial^2 v)$ “ nicht mehr explizit ausschreiben, so daß in diesem Anhang die Gültigkeit aller Gleichheitszeichen im Rahmen dieser Näherung (sowie natürlich unter Vernachlässigung von Oberflächentermen) zu verstehen ist.

H.1.2 Der Vektor-Sektor

Block $\{b, c\}$ - $\{b, c\}$:

Die Beiträge zum Hauptdiagonalblock der Vektor-Vektor-Kopplungen ergeben sich hier zu

Komponente $b^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
 &\int d^4x(\partial_\beta b^m)\left[\left(\frac{1}{\gamma_k}\mp 1\right)\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}(\partial_\mu v_\nu)n_{mk}^{(\pm)}\right]\partial_\alpha b^k \\
 &= \int d^4x\left\{-b^m\left[\left(\frac{1}{\gamma_k}\mp 1\right)\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}(\partial_\mu v_\nu)n_{mk}^{(\pm)}\right]\partial_\beta\partial_\alpha b^k\right\} = 0
 \end{aligned} \tag{H.6}$$

Komponente $b^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 &\int d^4x(\partial_\beta b^m)\left[\left(\frac{1}{\gamma_k}\mp 1\right)\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}(\partial_\mu v_\nu)n_{mk}^{(\pm)}\right]\partial^k c_\alpha \\
 &= \int d^4x\left\{-b^m\left[\left(\frac{1}{\gamma_k}\mp 1\right)\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}(\partial_\mu v_\nu)n_{mk}^{(\pm)}\right]\partial_\beta\partial^k c_\alpha\right\}
 \end{aligned} \tag{H.7}$$

Komponente $c^m - b^k$:

$$\begin{aligned} & \int d^4x (\partial^m c_\beta) \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \partial_\alpha b^k \\ &= \int d^4x \left\{ -c_\beta \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \partial^m \partial_\alpha b^k \right\} \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

Komponente $c^m - c^k$:

$$\begin{aligned} & \int d^4x (\partial^m c_\beta) \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \partial^k c_\alpha \\ &= \int d^4x \left\{ -c_\beta \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \partial^m \partial^k c_\alpha \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Block $\{b, c\} - \{d\}$:

Im Vektor-Sektor des $\bar{\varepsilon}\text{-}\bar{\varepsilon}$ -Beitrages sind nun auch noch Beiträge zu den Nebendiagonalblöcken zu berechnen, deren Ursprung in der Möglichkeit der Komponentenfelder, zu einem Pseudoskalar zu kombinieren, begründet ist. Der skalare sowie der Tensor-Sektor des $\bar{\varepsilon}\text{-}\bar{\varepsilon}$ -Matrixelements sind jedoch bereits vollständig in den paritätsgeraden Diagonalblöcken enthalten, so daß sie keine derartigen Beiträge liefern.

Zu berechnen sind also nur die Kopplungen der Vektoren b^m und c_β mit dem Pseudovektor d^k , und der entsprechende Term in der quadratischen Form lautet:

$$\int d^4x (\partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta) \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}_\alpha^u \partial^v d^w.$$

Wir kontrahieren nun wie üblich die beiden ε -Tensoren miteinander und verwenden die entstehenden Vielbeine dazu, alles auf $O(4)$ -Indizes umzuschreiben. Anschließend integrieren wir die Ableitung vor dem Komponentenfeld auf der linken Seite partiell, was für den $b^m\text{-}d^k$ -Beitrag auf

Komponente $b^m - d^k$:

$$\int d^4x \bar{e} b^m \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n_{mk}^{(\pm)} \left[((\partial^k v_w) - (\partial_w v^k)) \square + ((\partial_w v_v) - (\partial_v v_w)) \partial^v \partial^k \right] \right] d^w \quad (\text{H.10})$$

führt; dabei haben wir $\bar{e}_w^\beta \partial_\beta d^w = 0$ beachtet. Für den zweiten Beitrag erhalten wir in

analoger Weise

Komponente $c^m - d^k$:

$$\int d^4x \bar{e} c^n \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm)}_{mk} [((\partial_v v^k) - (\partial^k v_v)) \partial^v \partial^m \eta_{nw} + ((\partial_w v_v) - (\partial_v v_w)) \partial^v \partial^m \delta_n^k] \right] d^w . \quad (\text{H.11})$$

Da hier nur die Ableitung ∂v auftritt und da wir höhere Ableitungen vernachlässigen können, können wir die partielle Ableitung ∂^v vor d^w bei Kontraktion mit dem Vektor c^β partiell integrieren und dann dessen Divergenzfreiheit ausnutzen, ohne daß dabei für uns relevante Zusatzterme entstünden; dies erklärt das Verschwinden der betreffenden Terme.

Block $\{d\}$ - $\{b, c\}$:

Die Pendants dieser beiden Matrixelemente im gegenüberliegenden Nebendiagonalblock bestimmen wir in gleicher Weise aus

$$\int d^4x (\varepsilon^m_{pqr} \bar{e}^p \partial^q d^r) \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n^{(\pm)}_{mk} \right] (\partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha)$$

zu

Komponente $d^m - b^k$:

$$\int d^4x \bar{e} d^r \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm)}_{mk} [((\partial_r v^m) - (\partial^m v_r)) \square + ((\partial_a v_r) - (\partial_r v_a)) \partial^a \partial^m] \right] b^k \quad (\text{H.12})$$

und

Komponente $d^m - c^k$:

$$\int d^4x \bar{e} d^r \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm)}_{mk} [((\partial^m v_c) - (\partial_c v^m)) \partial^c \partial^k \eta_{rn} + ((\partial_a v_r) - (\partial_r v_a)) \partial^a \partial^k \delta_n^m] \right] c^n . \quad (\text{H.13})$$

Block $\{d\}$ - $\{d\}$:

Abschließend liefert die Kopplung des Pseudovektors d^m mit sich selbst noch einen

Beitrag der Form

Komponente $d^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x (\varepsilon_{pqr}^m \bar{e}^p_\beta \partial^q d^r) \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}^u_\alpha \partial^v d^w \quad (\text{H.14}) \\
&= \int d^4x (\varepsilon_{pqr}^m \bar{e}^p_\beta \partial^q d^r) \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \right] \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}^u_\alpha \partial^v d^w \\
&= \int d^4x \left\{ -d^r \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \varepsilon_{pqr}^m \varepsilon^k_{uvw} \bar{e}^p_\beta \bar{e}^u_\alpha \right] \partial^q \partial^v d^w \right\} \\
&\stackrel{(\text{A.52})}{=} \int d^4x \left\{ -d^r \left[\bar{e} \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \left(\frac{1}{2} (\varepsilon^{abpu} \varepsilon_{pqr}^m) \varepsilon^k_{uvw} + \frac{1}{2} (\varepsilon^{abpu} \varepsilon^k_{uvw}) \varepsilon_{pqr}^m \right) \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu \right] \right. \\
&\quad \left. \partial^q \partial^v d^w \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -d^r \left[\bar{e} \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) (\partial_\mu v_\nu) n_{mk}^{(\pm)} \left(\frac{1}{2} (\eta^{um} (\delta^a_r \delta^b_q - \delta^a_q \delta^b_r) + \delta^u_r (\delta^a_q \eta^{bm} - \delta^b_q \eta^{am})) \varepsilon^k_{uvw} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\eta^{pk} (\delta^a_v \delta^b_w - \delta^a_w \delta^b_v) + \delta^p_w (\eta^{ak} \delta^b_v - \eta^{bk} \delta^a_v)) \varepsilon_{pqr}^m \right) \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu \right] \partial^q \partial^v d^w \right\} \\
&= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} \left\{ -d^r \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) n_{mk}^{(\pm)} \left[-\varepsilon^{mk}_{vw} ((\partial_r v_q) - (\partial_q v_r)) + \varepsilon^k_{rvw} ((\partial_q v^m) - (\partial^m v_q)) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon^m_{rqw} ((\partial_v v^k) - (\partial^k v_v)) + \varepsilon^{mk}_{qr} ((\partial_v v_w) - (\partial_w v_v)) \right] \right] \partial^q \partial^v d^w \right\} \\
&= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^r \left[-\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) n_{mk}^{(\pm)} \left[\varepsilon^{mk}_{qr} ((\partial_v v_w) - (\partial_w v_v)) - \varepsilon^{mk}_{vw} ((\partial_r v_q) - (\partial_q v_r)) \right] \right] \partial^q \partial^v d^w
\end{aligned}$$

zum paritätsgeraden unteren Hauptdiagonalblock. Hier haben wir die Kontraktion des ε -Tensors symmetrisiert, um einen selbstadjungierten Operator zu erhalten, der die beiden Vektoren koppelt; dies werden wir im Anschluß an die Berechnung von $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(1)}$ in Anhang I überprüfen. Dieser Term ist in dem gesamten Objekt $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(1)}$ der einzige, der quadratisch in einem Vektor ist und nicht verschwindet.

H.1.3 Der Tensor-Sektor

Block $\{d\}$ - $\{d\}$:

Die spurlosen, symmetrischen Tensoren liefern für den $\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}$ -Block bloß einen Beitrag, den man sofort abliest:

Komponente $d^{mn} - d^{kl}$:

$$\int d^4x d^m_\beta \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\partial_\mu v_\nu) n^{(\pm)}_{mk} \right] d^k_\alpha \quad (\text{H.15})$$

H.2 Berechnung des Eichfixierungsbeitrags $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}}(1)$

Mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu = & (1 + \beta_D) \partial_\mu \square a + \square c_\mu + 3\beta_D \partial_\mu \square d \\ & + \frac{1}{2} v_a \left[n^{(\pm) a}_b (\partial^b \partial_\mu a + \partial_\mu b^b + \partial^b c_\mu + (\bar{e}^b_\mu \square - \partial^b \partial_\mu) d + \varepsilon^b_{klm} \bar{e}^k_\mu \partial^l d^m + d^b_\mu) \right. \\ & \left. + n^{(\pm) \rho}_\mu (\partial^a \partial_\rho a + \partial_\rho b^a + \partial^a c_\rho + (\bar{e}^a_\rho \square - \partial^a \partial_\rho) d + \varepsilon^a_{pqr} \bar{e}^p_\rho \partial^q d^r + d^a_\rho) \right] \end{aligned}$$

ergibt sich der Wechselwirkungsanteil für die Eichfixierungsbeiträge der quadratischen Form zu

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}}(1) = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \bar{e} \left\{ \frac{1}{\alpha_D} \left[(1 + \beta_D) \partial_\mu \square a + \square c_\mu + 3\beta_D \partial_\mu \square d \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2} v_a \left[n^{(\pm) a}_b (\partial^b \partial^\mu a + \partial^\mu b^b + \partial^b c^\mu + (\bar{e}^{b\mu} \square - \partial^b \partial^\mu) d \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \varepsilon^b_{klm} \bar{e}^{k\mu} \partial^l d^m + d^{b\mu} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + n^{(\pm) \mu\rho} (\partial^a \partial_\rho a + \partial_\rho b^a + \partial^a c_\rho + (\bar{e}^a_\rho \square - \partial^a \partial_\rho) d \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \varepsilon^a_{pqr} \bar{e}^p_\rho \partial^q d^r + d^a_\rho) \right] \right] \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} v_a \left[n^{(\pm) a}_b (\partial^b \partial_\mu a + \partial_\mu b^b + \partial^b c_\mu + (\bar{e}^b_\mu \square - \partial^b \partial_\mu) d \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \varepsilon^b_{klm} \bar{e}^k_\mu \partial^l d^m + d^b_\mu) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + n^{(\pm) \rho}_\mu (\partial^a \partial_\rho a + \partial_\rho b^a + \partial^a c_\rho + (\bar{e}^a_\rho \square - \partial^a \partial_\rho) d \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \varepsilon^a_{pqr} \bar{e}^p_\rho \partial^q d^r + d^a_\rho) \right] \right] \right\} \cdot \quad (\text{H.16}) \\ & \left[(1 + \beta_D) \partial^\mu \square a + \square c^\mu + 3\beta_D \partial^\mu \square d \right] \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck tritt weder eine $b^m - b^k$ - noch eine $d^m - d^k$ -Mischung auf. Zudem gibt es auch keinen $d^{mn} - d^{kl}$ -Beitrag zum Tensorsektor. Wir berechnen die einzelnen Komponenten wieder nach den einzelnen Sektoren gegliedert und in diesen dann paritätsgeordnet. Auch

hier unterdrücken wir im folgenden den Vorfaktor $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi G_k}$.

H.2.1 Der skalare Sektor

Block $\{a, d\}$ - $\{a, d\}$:

Komponente $a - a$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} d^4x \bar{e} \left\{ a \left[-\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} ((\partial_{\mu} v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial_{\mu} + v_a \partial_{\mu} \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (n^{(\pm)a}{}_b \partial^b \partial^{\mu} + n^{(\pm)\mu\rho} \partial^a \partial_{\rho}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} (n^{(\pm)a}{}_b ((\partial^b v_a) \partial_{\mu} + (\partial_{\mu} v_a) \partial^b + v_a \partial^b \partial_{\mu}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} ((\partial^a v_a) \partial_{\rho} + (\partial_{\rho} v_a) \partial^a + v_a \partial^a \partial_{\rho}) \right) \partial^{\mu} \square \right] a \left. \right\} \\
= & \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[-\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} \left(n^{(\pm)a}{}_b ((\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square + v_a \partial^b \square^2) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} ((\partial_{\mu} v_a) \partial^a \partial_{\rho} \square + 2(\partial_k v_a) \partial^a \partial^k \partial_{\mu} \partial_{\rho} + v_a \partial^a \partial_{\mu} \partial_{\rho} \square) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} \left(n^{(\pm)a}{}_b ((\partial^b v_a) \square^2 + (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square + v_a \partial^b \square^2) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} ((\partial^a v_a) \partial^{\mu} \partial_{\rho} \square + (\partial_{\rho} v_a) \partial^a \partial^{\mu} \square + v_a \partial^a \partial^{\mu} \partial_{\rho} \square) \right) \right] a \left. \right\} \\
= & \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[\left(-\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} - (1+\beta_{\text{D}}) + \frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} + \frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} - \frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] a \left. \right\} \\
= & \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[- (1+\beta_{\text{D}}) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{(1+\beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(- (1+\beta_{\text{D}}) \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] a \left. \right\} \tag{H.17}
\end{aligned}$$

Komponente a – d:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[-\frac{(1+\beta_D)}{2} ((\partial_\mu v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial_\mu + v_a \partial_\mu \square) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. (n^{(\pm)a}{}_b (\square \bar{e}^{b\mu} - \partial^b \partial^\mu) + n^{(\pm)\mu\rho} (\square \bar{e}^a{}_\rho - \partial^a \partial_\rho)) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{3\beta_D}{2} (n^{(\pm)a}{}_b ((\partial^b v_a) \partial_\mu + (\partial_\mu v_a) \partial^b + v_a \partial^b \partial_\mu) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} ((\partial^a v_a) \partial_\rho + (\partial_\rho v_a) \partial^a + v_a \partial^a \partial_\rho) \right) \partial^\mu \square \right] d \left. \right\} \\
 = & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[-\frac{(1+\beta_D)}{2} \left(n^{(\pm)a}{}_b ((\partial^b v_a) \square^2 + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square + v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_\mu v_a) \partial^\mu \partial^b \square - 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square - v_a \partial^b \square^2 \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} ((\partial_\mu v_\rho) \square^2 + 2(\partial_k v_\rho) \partial^k \partial^\mu \square + v_\rho \partial^\mu \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_\mu v_a) \partial^a \partial_\rho \square - 2(\partial_k v_a) \partial^a \partial^k \partial_\mu \partial_\rho - v_a \partial^a \partial_\mu \partial_\rho \square) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3\beta_D}{2} \left(n^{(\pm)a}{}_b ((\partial^b v_a) \square^2 + (\partial_\mu v_a) \partial^\mu \partial^b \square + v_a \partial^b \square^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} ((\partial^a v_a) \partial^\mu \partial_\rho \square + (\partial_\rho v_a) \partial^a \partial^\mu \square + v_a \partial^a \partial^\mu \partial_\rho \square) \right) \right] d \left. \right\} \\
 = & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[\left(\frac{(1+\beta_D)}{2} - \frac{(1+\beta_D)}{2} - \frac{3\beta_D}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-(1+\beta_D) + \frac{(1+\beta_D)}{2} + (1+\beta_D) + (1+\beta_D) + \frac{3\beta_D}{2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. n^{(\pm)a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-\frac{(1+\beta_D)}{2} + \frac{(1+\beta_D)}{2} + \frac{(1+\beta_D)}{2} + \frac{3\beta_D}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{(1+\beta_D)}{2} - \frac{3\beta_D}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] d \left. \right\} \\
 = & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[\left(-\frac{3\beta_D}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 + \left(3\beta_D + \frac{3}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(2\beta_D + \frac{1}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b v_a \partial^b \square^2 + \left(-\beta_D + \frac{1}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] d \left. \right\}
 \end{aligned}
 \tag{H.18}$$

Komponente $d - a$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} ((\partial_{\mu} v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial_{\mu} + v_a \partial_{\mu} \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (n^{(\pm)a}{}_b \partial^b \partial^{\mu} + n^{(\pm)\mu\rho} \partial_{\rho} \partial^a) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} (n^{(\pm)a}{}_b (\bar{e}^b{}_{\mu} v_a \square + 2\bar{e}^b{}_{\mu} (\partial_k v_a) \partial^k - (\partial^b v_a) \partial_{\mu} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\partial_{\mu} v_a) \partial^b - v_a \partial^b \partial_{\mu}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} (\bar{e}^a{}_{\rho} v_a \square + 2\bar{e}^a{}_{\rho} (\partial_k v_a) \partial^k - (\partial^a v_a) \partial_{\rho} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\partial_{\rho} v_a) \partial^a - v_a \partial^a \partial_{\rho}) \right) \partial^{\mu} \square \right] a \left. \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[\left(-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} \right) (n^{(\pm)a}{}_b ((\partial_{\mu} v_a) \partial^{\mu} \partial^b \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square + v_a \partial^b \square^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} ((\partial_{\mu} v_a) \partial^a \partial_{\rho} \square + 2(\partial_k v_a) \partial^a \partial^k \partial_{\mu} \partial_{\rho} + v_a \partial^a \partial_{\mu} \partial_{\rho} \square) \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} \right) (n^{(\pm)a}{}_b (v_a \partial^b \square^2 + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square - (\partial^b v_a) \square^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\partial_{\mu} v_a) \partial^{\mu} \partial^b \square - v_a \partial^b \square^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)\mu\rho} (v_{\rho} \partial^{\mu} \square^2 + 2(\partial_k v_{\rho}) \partial^k \partial^{\mu} \square - (\partial^a v_a) \partial^{\mu} \partial_{\rho} \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\partial_{\rho} v_a) \partial^a \partial^{\mu} \square - v_a \partial^a \partial^{\mu} \partial_{\rho} \square) \right) \right] a \left. \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[\left(\frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} - 3\beta_{\text{D}} + (1 + \beta_{\text{D}}) - \frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} - (1 + \beta_{\text{D}}) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. n^{(\pm)a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + \frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} - \frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} - \frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + \frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] a \left. \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[\left(\frac{(1 + \beta_{\text{D}})}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 + \left(-2\beta_{\text{D}} - \frac{1}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-5\beta_{\text{D}} - \frac{1}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\beta_{\text{D}} + \frac{1}{2} \right) n^{(\pm)a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] a \left. \right\} \tag{H.19}
\end{aligned}$$

Komponente $d - d$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} ((\partial_{\mu} v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial_{\mu} + v_a \partial_{\mu} \square) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. (n^{(\pm) a}{}_b (\square \bar{e}^{b\mu} - \partial^b \partial^{\mu}) + n^{(\pm) \mu\rho} (\square \bar{e}^a_{\rho} - \partial^a \partial_{\rho})) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} (n^{(\pm) a}{}_b (v_a \bar{e}^b_{\mu} \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \bar{e}^b_{\mu} - (\partial^b v_a) \partial_{\mu} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_{\mu} v_a) \partial^b - v_a \partial^b \partial_{\mu}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm) \mu\rho} (v_a \bar{e}^a_{\rho} \square + 2\bar{e}^a_{\rho} (\partial_k v_a) \partial^k - (\partial^a v_a) \partial_{\rho} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_{\rho} v_a) \partial^a - v_a \partial^a \partial_{\rho}) \right] \partial^{\mu} \square \right\} d \\
 = & \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} (n^{(\pm) a}{}_b ((\partial^b v_a) \square^2 + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square + v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square - 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square - v_a \partial^b \square^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm) \mu\rho} ((\partial_{\mu} v_{\rho}) \square^2 + 2(\partial_k v_{\rho}) \partial^k \partial_{\mu} \square + v_{\rho} \partial_{\mu} \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_{\mu} v_a) \partial^a \partial_{\rho} \square - 2(\partial_k v_a) \partial^a \partial^k \partial_{\mu} \partial_{\rho} - v_a \partial^a \partial_{\mu} \partial_{\rho} \square) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} \right) (n^{(\pm) a}{}_b (v_a \partial^b \square^2 + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square - (\partial^b v_a) \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square - v_a \partial^b \square^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm) \mu\rho} (v_{\rho} \partial_{\mu} \square^2 + 2(\partial_k v_{\rho}) \partial^k \partial_{\mu} \square - (\partial^a v_a) \partial_{\mu} \partial_{\rho} \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_{\rho} v_a) \partial^a \partial_{\mu} \square - v_a \partial^a \partial_{\mu} \partial_{\rho} \square) \right] \right\} d \\
 = & \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[\left(\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} - \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-3\beta_{\text{D}} + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + 3\beta_{\text{D}} + 3\beta_{\text{D}} + 3\beta_{\text{D}} - \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + 3\beta_{\text{D}} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. n^{(\pm) a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} - \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} - \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} + \frac{3\beta_{\text{D}}}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] \right\} d \\
 = & \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ d \left[\left(\frac{3\beta_{\text{D}}}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (3\beta_{\text{D}}) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (3\beta_{\text{D}}) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] \right\} \tag{H.20}
 \end{aligned}$$

H.2.2 Der Vektor-Sektor

Block $\{b, c\}$ - $\{b, c\}$:

Wir bestimmen zunächst die Beiträge im linken oberen paritätsgeraden Diagonalblock, in dem echte Vektoren mit echten Vektoren koppeln und berechnen

Komponente $b^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ b^b \left[-\frac{1}{2} (n^{(\pm)a}{}_b ((\partial_\mu v_a) + v_a \partial_\mu) + n^{(\pm)\rho}{}_\mu ((\partial_\rho v_b) + v_b \partial_\rho)) \square \right] c^\mu \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ b^a \left[\frac{1}{2} (n^{(\pm)a}{}_b (\partial_\mu v_b) - n^{(\pm)\rho}{}_\mu (\partial_\rho v_a) - v_a n^{(\pm)\rho}{}_\mu \partial_\rho) \square \right] c^\mu \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ b^a \left[\frac{1}{2} (n^{(\pm)a}{}_b (\partial_\mu v_b) + n^{(\pm)\rho}{}_\mu (\partial_\rho v_a) + v_a n^{(\pm)\rho}{}_\mu \partial_\rho) \square \right] c^\mu \right\} \quad (\text{H.21})
\end{aligned}$$

sowie

Komponente $c^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ c_\mu \left[\frac{1}{2} (v_a \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k) (n^{(\pm)a}{}_b \partial^\mu b^b + n^{(\pm)\mu\rho} \partial_\rho b^a) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ c_\mu \left[\frac{1}{2} (v_b n^{(\pm)b}{}_a \partial^\mu \square + 2n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_b) \partial^k \partial^\mu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + v_a n^{(\pm)\mu\rho} \partial_\rho \square + 2n^{(\pm)\mu\rho} (\partial_k v_a) \partial^k \partial_\rho) \right] b^a \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha_{\text{D}}} \int d^4x \bar{e} \left\{ c_\mu \left[\frac{1}{2} (-n^{(\pm)b}{}_a (\partial^\mu v_b) \square + v_a n^{(\pm)\mu\rho} \partial_\rho \square + 2n^{(\pm)\mu\rho} (\partial_k v_a) \partial^k \partial_\rho) \right] b^a \right\}. \quad (\text{H.22})
\end{aligned}$$

Abschließend berechnen wir

Komponente $c^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ c_\mu \left[\frac{1}{2} \left((v_a \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k) (\delta^\mu_\nu n^{(\pm)a}{}_b \partial^b + n^{(\pm)\mu}{}_\nu \partial^a) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - (\delta^\mu_\nu n^{(\pm)a}{}_b (v_a \partial^b + (\partial^b v_a)) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + n^{(\pm)\mu}{}_\nu ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) \right) \square \right] c^\nu \right\} \\
 = & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ c_\mu \left[\frac{1}{2} \left(\delta^\mu_\nu n^{(\pm)a}{}_b ((\partial_a v^b) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + n^{(\pm)\mu}{}_\nu (2v_a \partial^a \square + (\partial^a v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^a) \right) \right] c^\nu \right\}. \tag{H.23}
 \end{aligned}$$

Block $\{b, c\}$ - $\{d\}$:

Die Diffeomorphismus-Eichfixierung steuert zu den Nebendiagonalblöcken bloß die c^m - d^k -Komponente im Vektor-Sektor bei. Der relevante Beitrag lautet hier

Komponente $c^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c^k \left\{ (v_a \square + 2(\partial_u v_a) \partial^u) (n^{(\pm)a}{}_b \varepsilon^b{}_{klm} + n^{(\pm)p}{}_k \varepsilon^a{}_{plm}) \right\} \partial^l d^m \\
 = & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c^k \left\{ \varepsilon^b{}_{lm} n^{(\pm)a}{}_b (v_a \square + 2(\partial_u v_a) \partial^u) - n^{(\pm)kb} \varepsilon^{ba}{}_{lm} (v_a \square + 2(\partial_u v_a) \partial^u) \right\} \partial^l d^m. \tag{H.24}
 \end{aligned}$$

Block $\{d\}$ - $\{b, c\}$:

Sein Gegenstück ist gegeben durch

Komponente $d^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} \left\{ v_a (n^{(\pm)a}{}_b \varepsilon^b{}_{klm} \bar{e}^k{}_\mu (\partial^l d^m) + n^{(\pm)\rho}{}_\mu \varepsilon^a{}_{pqr} \bar{e}^p{}_\rho (\partial^q d^r)) \right\} \square c^\mu \\
 = & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^m \left\{ (\varepsilon_m{}^b{}_{lk} n^{(\pm)a}{}_b - \varepsilon_m{}^b{}_{l} n^{(\pm)a}{}_{bk}) ((\partial^l v_a) + v_a \partial^l) \right\} \square c^k. \tag{H.25}
 \end{aligned}$$

H.3 Der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$

Bis auf den üblichen Vorfaktor $\frac{1}{16\pi G_k}$ ist dieser unter Beachtung der Antisymmetrie von $K_{abcm}^{(\gamma_k)}$ und $\bar{\tau}^{kl}_\alpha$ im ersten bzw. im O(4)-Indexpaar zunächst von der Form

$$\begin{aligned}
& (2 \cdot 16\pi G_k) \tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}|_{\bar{\varepsilon}-\bar{\tau}} \\
&= \int d^4x \bar{\varepsilon}^m_\beta \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu (\delta^a_k \bar{\omega}^b_{l\mu} + \delta^b_l \bar{\omega}^a_{k\mu}) \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha \\
&= \int d^4x \bar{\varepsilon}^m_\beta \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu (\delta^a_k \bar{\omega}^b_{l\mu} - \delta^b_l \bar{\omega}^a_{k\mu}) \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha \\
&= \int d^4x \bar{\varepsilon}^m_\beta \left[-2\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu \delta^a_k \bar{\omega}^b_{l\mu} \right] \bar{\tau}^{kl}_\alpha \\
&= \int d^4x \left(\partial^m \partial_\beta a + \partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta + (\square \bar{e}^m_\beta - \partial^m \partial_\beta) d + \varepsilon^m_{pqr} \bar{e}^p_\beta \partial^q d^r + d^m_\beta \right) \\
&\quad \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu v_\mu n^{(\pm)b}_l \right] \\
&\quad \left(\partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} + \partial^{[a} ((\square \bar{e}^l]_\alpha - \partial^l] \partial_\alpha) B + \varepsilon^l_{efg} \bar{e}^e_\alpha \partial^f B^g + B^l]_\alpha \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^{al}_{ef} \partial_\alpha \partial^e C^f \\
&\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^{al}_{ef} \partial^e ((\square \bar{e}^f]_\alpha - \partial^f] \partial_\alpha) D + \varepsilon^f_{egh} \bar{e}^e_\alpha \partial^g D^h + D^f]_\alpha \Big). \tag{H.26}
\end{aligned}$$

Im Hinblick auf den weiteren Verlauf der Rechnung ist folgende Identität hilfreich:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu \\
&= \bar{e}_p^\mu \bar{e}_q^\nu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \varepsilon^{pqrs} \left(\varepsilon_{abcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac} \eta_{bm} - \eta_{am} \eta_{bc}) \right) \bar{e}^c_\nu \\
&= \bar{e} \varepsilon^{pqrs} \left(\varepsilon_{abcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac} \eta_{bm} - \eta_{am} \eta_{bc}) \right) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \\
&= \bar{e} \left(\delta^p_a \delta^r_m \delta^s_b + \delta^p_b \delta^r_a \delta^s_m + \delta^p_m \delta^r_b \delta^s_a - \delta^p_a \delta^r_b \delta^s_m - \delta^p_b \delta^r_m \delta^s_a - \delta^p_m \delta^r_a \delta^s_b \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{am}) \right) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \\
&= \bar{e} \left(\bar{e}_a^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_m^\alpha + \bar{e}_m^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_a^\alpha - \bar{e}_m^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{am}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right). \tag{H.27}
\end{aligned}$$

Wir berechnen (H.26) wiederum sektorweise.

H.3.1 Der skalare Sektor

Block $\{a, d\}$ - $\{B\}$:

Wir berechnen zunächst die Mischungen der echten Skalare und erhalten den ersten Beitrag zu

Komponente $a - B$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x (\partial^m \partial_\beta a) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm)b}{}_l \right] \cdot \frac{1}{2} (\partial^a \bar{e}^l{}_\alpha - \partial^l \bar{e}^a{}_\alpha) \square B \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} a \left[n^{(\pm)b}{}_l \left(\bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha + \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha + \bar{e}_m{}^\mu \bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha - \bar{e}_m{}^\mu \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{am}) \bar{e}_p{}^\mu \bar{e}_r{}^\beta \bar{e}_s{}^\alpha \right) \right. \\
 & \quad \left. ((\partial^m v_\mu) \partial_\beta + (\partial_\beta v_\mu) \partial^m + v_\mu \partial^m \partial_\beta) (\partial^a \bar{e}^l{}_\alpha - \partial^l \bar{e}^a{}_\alpha) \right] \square B \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} a \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[((\partial^l v_a) \partial^a \partial_b + (\partial_b v_a) \partial^a \partial^l + v_a \partial^a \partial^l \partial_b - (\partial^a v_a) \partial_b \partial^l - (\partial_b v_a) \partial^a \partial^l - v_a \partial^a \partial_b \partial^l) \right. \right. \\
 & \quad + ((\partial^a v_b) \partial_a \partial^l + (\partial_a v_b) \partial^a \partial^l + v_b \partial^l \square - 4(\partial^a v_b) \partial_a \partial^l - 4(\partial_a v_b) \partial^a \partial^l - 4v_b \partial^l \square) \\
 & \quad + (0 - (\partial^a v_a) \partial_b \partial^l - (\partial_b v_a) \partial^a \partial^l - v_a \partial^a \partial_b \partial^l) \\
 & \quad - (0 - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^l - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^l - v_b \partial^l \square) \\
 & \quad - ((\partial^l v_b) \square + (\partial_a v_b) \partial^a \partial^l + v_b \partial^l \square - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^l - (\partial_a v_b) \partial^a \partial^l - v_b \partial^l \square) \\
 & \quad - ((\partial^a v_a) \partial_b \partial^l + (\partial_b v_a) \partial^a \partial^l + v_a \partial^a \partial_b \partial^l - 4(\partial^a v_a) \partial_b \partial^l - 4(\partial_b v_a) \partial^a \partial^l - 4v_a \partial^a \partial_b \partial^l) \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\varepsilon_a{}^{prs} ((\partial_b v_p) \partial_r + (\partial_r v_p) \partial_b + v_p \partial_b \partial_r) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varepsilon_b{}^{prs} ((\partial_a v_p) \partial_r + (\partial_r v_p) \partial_a + v_p \partial_a \partial_r) (\delta^l{}_s \partial^a - \delta^a{}_s \partial^l) \right) \right] \square B \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} a \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[(-2v_b \partial^l \square - (\partial^l v_b) \square - (\partial^l v_a) \partial^a \partial_b - 3(\partial^a v_b) \partial_a \partial^l) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon^{lpr}{}_a (\partial_p v_r) \partial^a \partial_b - \varepsilon_b{}^{lpr} (\partial_a v_p) \partial^a \partial_r + \varepsilon_b{}^{lpr} (\partial_p v_r) \square - \varepsilon_b{}^{lpr} v_p \partial_r \square) \right] \right\} \square B. \quad (\text{H.28})
 \end{aligned}$$

Hier kann bei den letzten dreien der vier Terme, die auf den inversen Immirzi-Parameter folgen, zudem noch die (Anti-)Selbstdualitätsrelation (H.2) angewandt werden, worauf wir allerdings an dieser Stelle zunächst verzichten wollen.

Des weiteren erhalten wir unter Beachtung der Tatsache, daß unter dem Integral ein Term der Form $(\square d)v_\mu$ bei partieller Integration in $d(2(\partial^k v_\mu) \partial_k + v_\mu \square + \mathcal{O}(\partial^2 v))$ übergeht

Komponente d – B:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x ((\square \bar{\varepsilon}^m_\beta - \partial^m \partial_\beta) d) [-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{\varepsilon}^c_\nu v_\mu n^{(\pm)b}_l] \cdot \frac{1}{2} (\partial^a \bar{\varepsilon}^l_\alpha - \partial^l \bar{\varepsilon}^a_\alpha) \square B \\
= & \int d^4x d \{ n^{(\pm)b}_l [-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{\varepsilon}^c_\nu \bar{\varepsilon}^m_\beta (2(\partial^k v_\mu) \partial_k + v_\mu \square) \\
& + \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{\varepsilon}^c_\nu ((\partial^m v_\mu) \partial_\beta + (\partial_\beta v_\mu) \partial^m + v_\mu \partial^m \partial_\beta)] \} \\
& \cdot \frac{1}{2} (\partial^a \bar{\varepsilon}^l_\alpha - \partial^l \bar{\varepsilon}^a_\alpha) \square B \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d \{ n^{(\pm)b}_l \left[2 \left(\bar{\varepsilon}_b^\mu \bar{\varepsilon}_a^\alpha - \bar{\varepsilon}_a^\mu \bar{\varepsilon}_b^\alpha + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ab}^{ps} \bar{\varepsilon}_p^\mu \bar{\varepsilon}_s^\alpha \right) (2(\partial^k v_\mu) \partial_k + v_\mu \square) (\partial^a \bar{\varepsilon}^l_\alpha - \partial^l \bar{\varepsilon}^a_\alpha) \right. \\
& - \left((-2v_b \partial^l \square - (\partial^l v_b) \square - (\partial^l v_a) \partial^a \partial_b - 3(\partial^a v_b) \partial_a \partial^l) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon^{lpr}_a (\partial_p v_r) \partial^a \partial_b - \varepsilon_b^{lpr} (\partial_a v_p) \partial^a \partial_r + \varepsilon_b^{lpr} (\partial_p v_r) \square - \varepsilon_b^{lpr} v_p \partial_r \square) \right) \right] \} \square B \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d \{ n^{(\pm)b}_l \left[2 \left((2(\partial^k v_b) \partial_k + v_b \square) \partial^l - 4(2(\partial^k v_b) \partial_k + v_b \square) \partial^l - (2(\partial^k v_a) \partial_k + v_a \square) \partial^a \delta^l_b \right. \right. \\
& \left. \left. + (2(\partial^k v_b) \partial_k + v_b \square) \partial^l \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ab}^{ps} (2(\partial^k v_p) \partial_k + v_p \square) (\partial^a \delta^l_s - \partial^l \delta^a_s) \right) \right. \\
& - \left((-2v_b \partial^l \square - (\partial^l v_b) \square - (\partial^l v_a) \partial^a \partial_b - 3(\partial^a v_b) \partial_a \partial^l) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon^{lpr}_a (\partial_p v_r) \partial^a \partial_b - \varepsilon_b^{lpr} (\partial_a v_p) \partial^a \partial_r + \varepsilon_b^{lpr} (\partial_p v_r) \square - \varepsilon_b^{lpr} v_p \partial_r \square) \right) \right] \} \square B \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d \{ n^{(\pm)b}_l \left[2 \left(-2(2(\partial^k v_b) \partial_k + v_b \square) \partial^l + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_b^{lp}_a (2(\partial^k v_p) \partial_k \partial^a + v_p \partial^a \square) \right) \right. \\
& - \left((-2v_b \partial^l \square - (\partial^l v_b) \square - (\partial^l v_a) \partial^a \partial_b - 3(\partial^a v_b) \partial_a \partial^l) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon^{lpr}_a (\partial_p v_r) \partial^a \partial_b - \varepsilon_b^{lpr} (\partial_a v_p) \partial^a \partial_r + \varepsilon_b^{lpr} (\partial_p v_r) \square - \varepsilon_b^{lpr} v_p \partial_r \square) \right) \right] \} \square B \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d \{ n^{(\pm)b}_l \left[(-5(\partial^k v_b) \partial_k \partial^l - 2v_b \partial^l \square + (\partial^l v_b) \square + (\partial^l v_a) \partial^a \partial_b) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (-3\varepsilon_b^{lp}_a (\partial^k v_p) \partial_k \partial^a - \varepsilon_b^{lp}_a v_p \partial^a \square - \varepsilon^{lpr}_a (\partial_p v_r) \partial^a \partial_b - \varepsilon_b^{lpr} (\partial_p v_r) \square) \right] \} \square B, \tag{H.29}
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß die zweite Zeile des Ausdrucks nach dem ersten Gleichheitszeichen bis auf das Vorzeichen gerade dem unmittelbar zuvor berechneten a - B -Beitrag entspricht. Zur Umformulierung der ersten Zeile haben wir die mit $\bar{\varepsilon}^m_\beta$ kontrahierte Relation

(H.27) verwandt:

$$\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \bar{e}_\beta^m = 2\bar{e} \left(\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\alpha - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ab}^{ps} \bar{e}_p^\mu \bar{e}_s^\alpha \right).$$

Block $\{a, d\}$ - $\{D\}$:

Die paritätsungeraden Nebendiagonalblöcke im skalaren Sektor ergeben sich aus

$$\int d^4x (\partial^m \partial_\beta a + (\square \bar{e}_\beta^m - \partial^m \partial_\beta) d) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \left(\varepsilon_{abcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac} \eta_{bm} - \eta_{am} \eta_{bc}) \right) \times \right. \\ \left. \times \bar{e}_\nu^c v_\mu n^{(\pm)b}_l \right] \frac{1}{2} \varepsilon^{al}_{ef} \partial^e (\square \bar{e}_\alpha^f - \partial^f \partial_\alpha) D.$$

Die gemischte partielle Ableitung vor dem rechten Skalar D fällt dabei aufgrund der Kontraktion mit dem ε -Tensor weg. Wir kontrahieren für den Term ohne $\frac{1}{\gamma_k}$ die beiden ε -Tensoren in der eckigen Klammer, für den Immirzi-Beitrag hingegen verwenden wir das ε vor dem Feld D zur Kontraktion. Umgeschrieben auf $O(4)$ -Indizes erhalten wir dann

$$\frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} (\partial^m \partial_v a + (\square \delta_v^m - \partial^m \partial_v) d) \left[n^{(\pm)b}_l \left((v_a (\delta_b^v \delta_m^f - \delta_m^v \delta_b^f) - v_b \delta_a^v \delta_m^f + \right. \right. \\ \left. \left. + v_m \delta_a^v \delta_b^f) \varepsilon^{al}_{ef} + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bm} (\eta^{lv} \delta_e^a - \eta^{la} \delta_e^v) + \eta_{be} (\eta^{lv} \delta_m^a - \eta^{la} \delta_m^v)) v_a \right) \right] \partial^e \square D,$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß bei Kontraktion eines Kronecker-Symbols mit einem der antisymmetrischen Tensoren ε oder $n^{(\pm)}$ die entsprechenden Terme verschwinden. Wir berechnen nun mittels zweifacher partieller Integration den a - D -Beitrag zu

Komponente $a - D$:

$$\frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} a \left[n^{(\pm)b}_l \left((\partial^f v_a) \partial_b - (2(\partial_m v_a) \partial^m + v_a \square) \delta_b^f + (\partial_a v_m) \partial^m \delta_b^f \right) \varepsilon^{al}_{ef} \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bm} (\eta^{lv} \delta_e^a - \eta^{la} \delta_e^v) + \eta_{be} (\eta^{lv} \delta_m^a - \eta^{la} \delta_m^v)) ((\partial^m v_a) \partial_v + (\partial_v v_a) \partial^m + v_a \partial_v \partial^m) \right] \\ \partial^e \square D \\ = \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} a \left[\left(\varepsilon^l_{f e} n^{(\pm)b}_l (\partial^f v_a) \partial_b \pm 2n^{(\pm)a}_e ((\partial_a v_m) \partial^m - 2(\partial_m v_a) \partial^m - v_a \square) \right) \partial^e \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm)b}_l \left(2v_b \partial^l \square + 3(\partial^m v_b) \partial_m \partial^l + (\partial^l v_b) \square + (\partial^l v_m) \partial^m \partial_b \right) \right] \square D. \quad (\text{H.30})$$

Um das d - D -Matrixelement zu berechnen, betrachten wir zunächst nur den Beitrag des \square -Operators vor d und ziehen von dem erhaltenen Resultat anschließend das a - D -Matrixelement mit a ersetzt durch d ab. Mit zweifacher partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \bar{\varepsilon}(\square \bar{\varepsilon}^m_\beta d) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \left(\varepsilon_{abcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac}\eta_{bm} - \eta_{am}\eta_{bc}) \right) \right. \\
& \quad \left. \bar{\varepsilon}^c_\nu v_\mu n^{(\pm)b}_l \right] \frac{1}{2} \varepsilon^{al}_{ef} \partial^e \square \bar{\varepsilon}^f_\alpha D \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\varepsilon} d \left[n^{(\pm)b}_l \left((2(\partial_k v_u) \partial^k + v_u \square) (-2\delta^u_a \delta^f_b) \varepsilon^{al}_{ef} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (-4\eta_{eb}\eta^{la}) (2(\partial_k v_a) \partial^k + v_a \square) \right) \right] \partial^e \square D \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\varepsilon} d \left[4 \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm)a}_e (2(\partial_k v_a) \partial^k + v_a \square) \right] \partial^e \square D
\end{aligned}$$

und somit

Komponente $d - D$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\varepsilon} d \left[\mp 2n^{(\pm)a}_e (2(\partial_k v_a) \partial^k + (\partial_a v_k) \partial^k + v_a \square) \partial^e - \varepsilon^l_{fa} n^{(\pm)b}_l (\partial^f v_a) \partial_b \partial^e \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm)a}_e (5(\partial_k v_a) \partial^k \partial^e + 2v_a \partial^e \square - (\partial^e v_a) \square - (\partial^e v_k) \partial^k \partial_a) \right] \square D. \quad (\text{H.31})
\end{aligned}$$

H.3.2 Der Vektor-Sektor

Wir betrachten zunächst die Kopplungen der echten Vektoren untereinander:

Block $\{b, c\}$ - $\{A, D\}$:

Hier ist der zu betrachtende Beitrag durch

$$\begin{aligned}
& \int d^4x (\partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{\varepsilon}^c_\nu v_\mu n^{(\pm)b}_l \right] \left(\partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} + \frac{1}{2} \varepsilon^{al}_{ef} \partial^e \varepsilon^{f}_{ghi} \bar{\varepsilon}^g_\alpha \partial^h D^i \right) \\
&= \int d^4x (\partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{\varepsilon}^c_\nu v_\mu n^{(\pm)b}_l \right] \\
& \quad \left(\partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} + \frac{1}{2} [(\square \bar{\varepsilon}^a_\alpha - \partial^a \partial_\alpha) \delta^l_i - (\square \bar{\varepsilon}^l_\alpha - \partial^l \partial_\alpha) \delta^a_i] D^i \right)
\end{aligned}$$

gegeben. Wir berechnen nun dessen separate Komponenten.

Komponente $b^m - A^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x b^m [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu (\partial_\beta v_\mu) n^{(\pm)b}_l] \partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ -n^{(\pm)b}_l \left[\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_a^\alpha + \bar{e}_m^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{am}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right] \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}_a \left[\bar{e}_l^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_l^\alpha + \bar{e}_m^\mu \bar{e}_l^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_l^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_l^\alpha \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_l^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{lm}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right] \right\} (\partial_\beta v_\mu) \partial_\alpha \partial^a A^l \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ -n^{(\pm)b}_l \left[\bar{e}_b^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_a^\alpha + \bar{e}_m^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_m^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha - \frac{1}{\gamma_k} \cdot 0 \right] \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}_a \left[\bar{e}_m^\mu \bar{e}_l^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_l^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_l^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{lm}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right] \right\} \\
 & (\partial_\beta v_\mu) \partial_\alpha \partial^a A^l \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ -n^{(\pm)b}_l [(\partial_m v_b) \square + (\partial_a v_m) \partial^a \partial_b - (\partial_m v_a) \partial^a \partial_b - (\partial_b v_m) \square] \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}_a [(\partial_l v_m) \partial_b \partial^a - (\partial_m v_l) \partial_b \partial^a] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l^{prs} - \eta_{lm} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b^{prs}) (\partial_r v_p) \partial^a \partial_s \right\} A^l \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ -n^{(\pm)b}_l [(\partial_m v_b) \square + (\partial_a v_m) \partial^a \partial_b - (\partial_m v_a) \partial^a \partial_b - (\partial_b v_m) \square] \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}_a [(\partial_l v_m) \partial_b \partial^a - (\partial_m v_l) \partial_b \partial^a] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l^{prs} - \eta_{lm} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b^{prs}) (\partial_r v_p) \partial^a \partial_s \right\} A^l \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ n^{(\pm)b}_l [((\partial_b v_m) - (\partial_m v_b)) \square + ((\partial_m v_a) - (\partial_a v_m)) \partial^a \partial_b] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l^{prs} + \eta_{ml} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s \right\} A^l, \tag{H.32}
 \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß eine partielle Ableitung bezüglich des Index m nach partieller Integration wegen des Constraints $\partial_m b^m = 0$ verschwindet, denn da ausschließlich die erste Ableitung des Vektorfeldes v_μ auftritt, wirkt die partielle Ableitung innerhalb der von uns betrachteten Näherung nach dieser Integration nur auf das Feld b^m ; die Zusatzterme wären von der Ordnung $\mathcal{O}(\partial^2 \omega)$, so daß diese von uns vernachlässigt werden können. Im

letzten Schritt haben wir zudem die Antisymmetrie des Tensors $n^{(\pm)b}_a$ berücksichtigt, so daß dessen Kontraktion mit zwei partiellen Ableitungen verschwindet.

Komponente $b^m - D^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x b^m [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu n^{(\pm)b}_l ((\partial_\beta v_\mu) + v_\mu \partial_\beta)] \frac{1}{2} [(\square \bar{e}^a{}_\alpha - \partial^a \partial_\alpha) \delta^l{}_i - (\square \bar{e}^l{}_\alpha - \partial^l \partial_\alpha) \delta^a{}_i] D^i \\
= & \int d^4x b^m \{ [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu n^{(\pm)b}_l (\partial_\beta v_\mu)] (\square \bar{e}^{[a}{}_\alpha - \partial^{[a} \partial_\alpha) D^l] \\
& + [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu n^{(\pm)b}_l v_\mu \partial_\beta] \square \bar{e}^{[a}{}_\alpha D^l] \} \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} b^m \left\{ [-n^{(\pm)b}_l [2((\partial_m v_b) - (\partial_b v_m))] \right. \\
& + [n^{(\pm)b}_m ((\partial_b v_l) - (\partial_l v_b)) + n^{(\pm)b}_l ((\partial_m v_b) - (\partial_b v_m))] \\
& + \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)b}_l \varepsilon_b{}^{pr}{}_m + n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l{}^{pra} - \eta_{lm} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b{}^{apr}) (\partial_p v_r) \Big] \square \\
& + n^{(\pm)b}_l [((\partial_m v_b) - (\partial_b v_m)) \square + ((\partial_a v_m) - (\partial_m v_a)) \partial^a \partial_b] \\
& + \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l{}^{prs} + \eta_{lm} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s \\
& + [-n^{(\pm)b}_l [2(v_b \partial_m - v_m \partial_b)] + [n^{(\pm)b}_m (v_l \partial_b - v_b \partial_l) + n^{(\pm)b}_l (v_b \partial_m - v_m \partial_b)] \\
& + \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)b}_l \varepsilon_b{}^{pr}{}_m + n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l{}^{pra} - \eta_{lm} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b{}^{apr}) v_r \partial_p \Big] \square \Big\} D^l \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} b^m \left\{ [n^{(\pm)b}_m (-(\partial_b v_l) + (\partial_l v_b) - v_l \partial_b) \square \right. \\
& + n^{(\pm)b}_l (v_m \partial_b \square + (\partial_a v_m) \partial^a \partial_b + (\partial_m v_b) \square - (\partial_m v_a) \partial^a \partial_b)] \\
& + \frac{1}{\gamma_k} (-n^{(\pm)b}_l \varepsilon_{mb}{}^{pr} (\partial_p v_r) \square - n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l{}^{apr} (\partial_p v_r) \square - \eta_{ml} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b{}^{apr} (\partial_p v_r) \square \\
& + n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l{}^{prs} (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s + \eta_{ml} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b{}^{prs} (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s + n^{(\pm)b}_l \varepsilon_{mb}{}^{pr} v_p \partial_r \square \\
& \left. + n^{(\pm)}_{ma} \varepsilon_l{}^{apr} v_p \partial_r \square + \eta_{ml} n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b{}^{apr} v_p \partial_r \square \right\} D^l, \tag{H.33}
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß die erste Zeile des Ausdrucks nach dem ersten Gleichheitszeichen gerade durch (H.32) mit der Ersetzung $\partial_\alpha \partial^{[a} \rightarrow (\square \bar{e}^{[a}{}_\alpha - \partial_\alpha \partial^{[a}$ gegeben ist; insbesondere läßt sich der Anteil, der subtrahiert wird, also sofort übernehmen.

Komponente $c^m - A^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x c_\beta [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c ((\partial^m v_\mu) + v_\mu \partial^m) n^{(\pm)b}_l] \partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\beta \left\{ \left[-n^{(\pm)b}_l \left(\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_a^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_m^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_b^{prs} \eta_{am} \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)b}_a \left(\bar{e}_l^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_l^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{lm}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right) \right] (\partial^m v_\mu) \right. \\
 & \quad \left. + \left[-n^{(\pm)b}_l \left(\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_a^\alpha + \bar{e}_m^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_b^{prs} \eta_{am} \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)b}_a \left(\bar{e}_l^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_l^\beta \bar{e}_m^\alpha + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_b^{prs} \eta_{lm} \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right) \right] v_\mu \partial^m \right\} \partial_\alpha \partial^a A^l \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\beta \left\{ \left(-n^{(\pm)b}_l [(\partial^\beta v_b) \square - \bar{e}_b^\beta (\partial^m v_m) \square + \bar{e}_b^\beta (\partial^m v_a) \partial_m \partial^a - (\partial^\beta v_a) \partial^a \partial_b \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \bar{e}_b^\beta v_a \partial^a \square - v_b \partial^\beta \square + v_b \partial^\beta \square - \bar{e}_b^\beta v_m \partial^m \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + v_m \partial^m \partial_b \partial^\beta - v_a \partial^a \partial_b \partial^\beta \right] \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}_a [\bar{e}_b^\beta (\partial^m v_l) \partial_m \partial^a - \bar{e}_l^\beta (\partial^m v_b) \partial_m \partial^a + \bar{e}_b^\beta v_l \partial^a \square - \bar{e}_l^\beta v_b \partial^a \square] \right) \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_l^\beta [n^{(\pm)b}_l \varepsilon_b^{rps} (\partial^m v_p) \partial_m \partial_s + n^{(\pm)b}_a \varepsilon^{rps}_l (\partial_b v_p) \partial^a \partial_s - n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b^{rps} (\partial_l v_p) \partial^a \partial_s \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}_l \varepsilon_b^{rps} v_p \partial_s \square] \right\} A^l \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\beta \left\{ \left(n^{(\pm)\beta}_l [(\partial^m v_m) \square - (\partial^m v_a) \partial_m \partial^a] + n^{(\pm)b}_l [(\partial^\beta v_a) \partial^a \partial_b - (\partial^\beta v_b) \square] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)\beta}_a [(\partial^m v_l) \partial_m \partial^a + v_l \partial^a \square] - \bar{e}_l^\beta n^{(\pm)b}_a [(\partial^m v_b) \partial_m \partial^a + v_b \partial^a \square] \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_r^\beta [n^{(\pm)b}_l \varepsilon_b^{rps} (\partial^m v_p) \partial_m \partial_s + n^{(\pm)b}_a \varepsilon^{rps}_l (\partial_b v_p) \partial^a \partial_s \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm)b}_a \varepsilon_b^{rps} (\partial_l v_p) \partial^a \partial_s + n^{(\pm)b}_l \varepsilon_b^{rps} v_p \partial_s \square] \right\} A^l \tag{H.34}
 \end{aligned}$$

Komponente $c^m - D^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x c_\beta [\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^m v_\mu) + v_\mu \partial^m)] \frac{1}{2} [(\square \bar{e}^a{}_\alpha - \partial^a \partial_\alpha) \delta^l{}_i - (\square \bar{e}^l{}_\alpha - \partial^l \partial_\alpha) \delta^a{}_i] D^i \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\beta \left\{ n^{(\pm)b}{}_l [((\partial^m v_a) + v_a \partial^m) (\bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha) + ((\partial^m v_b) + v_b \partial^m) (\bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha - \bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha) \right. \\
& \quad + ((\partial^m v_m) + v_m \partial^m) (\bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha - \bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha) \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_r{}^\beta (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{am}) \bar{e}_s{}^\alpha ((\partial^m v_p) + v_p \partial^m) \right] \Big\} \\
& \quad [(\square \bar{e}^a{}_\alpha - \partial^a \partial_\alpha) \delta^l{}_i - (\square \bar{e}^l{}_\alpha - \partial^l \partial_\alpha) \delta^a{}_i] D^i \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\beta \left\{ n^{(\pm)b}{}_i [((\partial^m v_m) + v_m \partial^m) (-\bar{e}_b{}^\beta \square) + \bar{e}_b{}^\beta ((\partial^m v_a) \partial^a \partial_m + v_a \partial^a \square) \right. \\
& \quad - ((\partial^m v_b) + v_b \partial^m) \partial_m \partial^\beta + ((\partial^m v_m) + v_m \partial^m) \\
& \quad \left. (4\bar{e}_b{}^\beta \square - \bar{e}_b{}^\beta \square - \bar{e}_b{}^\beta \square + \partial_b \partial^\beta) \right] \\
& \quad - n^{(\pm)b}{}_l [-\bar{e}_b{}^\beta ((\partial^l v_i) + v_i \partial^l) + \bar{e}_b{}^\beta ((\partial^m v_i) + v_i \partial^m) \partial^l \partial_m \\
& \quad + \bar{e}_i{}^\beta ((\partial^l v_b) + v_b \partial^l) \square - ((\partial^m v_b) + v_b \partial^m) \partial_m \partial^l] \\
& \quad + ((\partial^m v_m) + v_m \partial^m) (\bar{e}_b{}^\beta \delta^l{}_i \square - \bar{e}_b{}^\beta \partial^l \partial_i - \bar{e}_i{}^\beta \delta_b{}^l \square + \bar{e}_i{}^\beta \partial^l \partial_b)] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_b{}^\beta \left\{ n^{(\pm)b}{}_i [-\varepsilon_b{}^{pr}{}_m ((\partial^m v_p) + v_p \partial^m) \square + \varepsilon_b{}^{prs} ((\partial^m v_p) + v_p \partial^m) \partial_m \partial_s] \right. \\
& \quad + n^{(\pm)b}{}_l [-\varepsilon_i{}^{prl} ((\partial_b v_p) + v_p \partial_b) \square + \varepsilon_b{}^{prl} ((\partial_i v_p) + v_p \partial_i) \square \\
& \quad \left. + \varepsilon_i{}^{prs} ((\partial_b v_p) + v_p \partial_b) \partial^l \partial_s - \varepsilon_b{}^{prs} ((\partial_i v_p) + v_p \partial_i) \partial^l \partial_s] \right\} \Big\} D^i \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\beta \left\{ n^{(\pm)b}{}_i [\bar{e}_b{}^\beta (v_m \partial^m \square + (\partial^m v_a) \partial^a \partial_m) - (\partial^\beta v_m) \partial^m \partial_b + (\partial^\beta v_b) \square] \right. \\
& \quad + n^{(\pm)b}{}_l [\bar{e}_b{}^\beta ((\partial^l v_i) \square - (\partial^m v_i) \partial_m \partial^l) + \bar{e}_i{}^\beta ((\partial^m v_b) \partial_m \partial^l - (\partial^l v_b) \square)] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_r{}^\beta (n^{(\pm)b}{}_i \varepsilon^r{}_{bm}{}^p (\partial^m v_p) \square + n^{(\pm)b}{}_i \varepsilon^r{}_{b}{}^{ps} (\partial^m v_p) \partial_m \partial_s + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^{rlp}{}_i (\partial_b v_p) \square \\
& \quad + n^{(\pm)b}{}_i \varepsilon^{rlp}{}_i v_p \partial_b \square + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^{rps}{}_i (\partial_b v_p) \partial^l \partial_s - n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^r{}_{b}{}^{lp} (\partial_i v_p) \square \\
& \quad \left. - n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^r{}_{b}{}^{ps} (\partial_i v_p) \partial^l \partial_s) \right\} D^i, \tag{H.35}
\end{aligned}$$

wobei wir unter anderem ausgenutzt haben, daß ein Term der Form $(\partial^\beta v_a) + v_a \partial^\beta$ nach partieller Integration verschwindet, da dann die Ableitung nur noch auf c_β wirkt. Aus dem gleichen Grund verschwinden bei Vernachlässigung der Ordnung $\mathcal{O}(\partial^2 v)$ Terme der Form $(\partial^m v_a) \partial^\beta$.

Block $\{b, c\}$ - $\{B, C\}$:

Wir berechnen nun die Einträge, die in der nach Parität geordneten Matrixdarstellung von $\Gamma_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$ im Vektor-Sektor im rechten oberen Block zu finden sind. Diese ergeben sich aus

$$\int d^4x (\partial_\beta b^m + \partial^m c_\beta) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \left(\varepsilon_{abcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac}\eta_{bm} - \eta_{am}\eta_{bc}) \right) \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm)b}{}_l \right] \\ \left(\partial^{[a} \varepsilon^{l]}{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f B^g + \frac{1}{2} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_\alpha \partial^e C^f \right)$$

Wir integrieren einmal partiell und übertragen die Antisymmetrisierung in der zum Feld B^g gehörigen Tensorstruktur auf die Tensorstruktur des Integralkerns. Dies liefert

Komponente $b^m - B^k$:

$$\int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ \left[\left((\varepsilon_{abcm} n^{(\pm)b}{}_l - \varepsilon_{lbcm} n^{(\pm)b}{}_a) + \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)b}{}_l (\eta_{am}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bm}) - n^{(\pm)b}{}_a (\eta_{lm}\eta_{bc} - \eta_{lc}\eta_{bm})) \right) \right. \right. \\ \left. \left. (\eta^{ul} \delta_f^c \delta_g^w + \delta_f^u \delta_g^c \eta^{wl} + \delta_f^u \eta^{cl} \delta_g^w - \eta^{ul} \delta_g^c \delta_f^w - \delta_f^u \eta^{cl} \delta_g^w - \delta_f^u \delta_g^c \eta^{wl}) \right] \right. \\ \left. ((\partial_w v_u) + v_u \partial_w) \right\} \partial^a \partial^f B^g \\ = \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^m \left\{ \left[\varepsilon_{abcm} n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^l v_f) \partial^f \delta_g^c + (\partial_f v_g) \partial^f \eta^{cl} - (\partial_f v^l) \partial^f \delta_g^c - (\partial_g v_f) \partial^f \eta^{cl}) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{abcm} n^{(\pm)b}{}_l (v_f \partial^f \partial^l \delta_g^c + v_g \square \eta^{cl} - v^l \square \delta_g^c) \right. \right. \\ \left. \left. - \varepsilon_{lbcm} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial_g v^l) \partial^c + (\partial^l v_f) \partial^f \delta_g^c - (\partial_f v^l) \partial^f \delta_g^c - (\partial^l v_g) \partial^c) \right. \right. \\ \left. \left. - \varepsilon_{lbcm} n^{(\pm)b}{}_a (v_f \partial^f \partial^l \delta_g^c - v^l \square \delta_g^c) \right] \partial^a \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[(-n^{(\pm)}{}_{ml} (\partial_g v^l) \square - n^{(\pm)}{}_{lg} v_f \partial^f \partial^l \partial_m - n^{(\pm)}{}_{ma} ((\partial_f v_g) + v_g \partial_f) \partial^f \partial^a \right. \right. \\ \left. \left. + n^{(\pm)}{}_{lg} v^l \partial_m \square + n^{(\pm)}{}_{ma} (\partial_g v_f) \partial^f \partial^a + n^{(\pm)}{}_{ml} ((\partial^l v_g) + v_g \partial^l) \square \right. \right. \\ \left. \left. - (-n^{(\pm)}{}_{ma} (\partial_g v_f) \partial^f \partial^a - n^{(\pm)}{}_{ma} (\partial_g v_f) \partial^f \partial^a - 3n^{(\pm)}{}_{ma} ((\partial_f v_g) + v_g \partial_f) \partial^f \partial^a \right. \right. \\ \left. \left. + n^{(\pm)}{}_{ag} ((\partial_f v_m) + v_m \partial_f) \partial^f \partial^a + n^{(\pm)}{}_{ma} ((\partial_f v_g) + v_g \partial_f) \partial^f \partial^a \right. \right. \\ \left. \left. + 3n^{(\pm)}{}_{ma} (\partial_g v_f) \partial^f \partial^a + n^{(\pm)}{}_{ma} ((\partial_f v_g) + v_g \partial_f) \partial^f \partial^a \right] \right\} B^g$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} b^m \left\{ \left[\varepsilon_{mbag} n^{(\pm)b}{}_l \left((\partial^l v_f) \partial^f \partial^a - (\partial_f v^l) \partial^f \partial^a - v^l \partial^a \square - (\partial^a v_f) \partial^f \partial^l \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + (\partial_f v^a) \partial^f \partial^l + v^a \partial^l \square \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_{mbac} n^{(\pm)b}{}_l \left((\partial^a v_g) - (\partial_g v^a) \right) \partial^c \partial^l \pm 2n_{ma}^{(\pm)} \left((\partial_g v_f) \partial^f - (\partial_f v_g) \partial^f - v_g \square \right) \partial^a \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n_{ma}^{(\pm)} (v_g \partial^a \square + (\partial^a v_g) \square - (\partial_g v^a) \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n_{ag}^{(\pm)} \left(((\partial_m v_f) - (\partial_f v_m)) \partial^f \partial^a - (\partial_m v^a) \square - v_m \partial^a \square \right) \right] \right\} B^g. \quad (\text{H.36})
\end{aligned}$$

Wir haben dabei wiederum beachtet, daß bei einem Term der Form $(\partial_m v_k) + v_k \partial_m$ die Ableitung partiell integriert und auf den divergenzfreen Vektor b^m angewandt werden kann; derartige Terme verschwinden also. Der gleichen Logik folgend haben wir im Sinne unserer Konvention Terme der Form $v_k \partial_m$ als $-(\partial_m v_k)$ geschrieben.

Des weiteren erhalten wir

Komponente $b^m - C^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} b^m \left[n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^{uvcw} \left(\varepsilon_{abcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac} \eta_{bm} - \eta_{am} \eta_{bc}) \right) (\partial_u v_v) \right] \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_w \partial^e C^f \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} b^m \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[((\partial_a v_b) - (\partial_b v_a)) \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_m \partial^e + ((\partial_m v_a) - (\partial_a v_m)) \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_b \partial^e \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n_{ml}^{(\pm)} \left(((\partial^l v_f) - (\partial_f v^l)) \square + ((\partial_f v_e) - (\partial_e v_f)) \partial^e \partial^l \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_m{}^l{}_{ef} \varepsilon_b{}^{pqr} (\partial_p v_q) \partial^e \partial_r \right] \right\} C^f \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} b^m \left\{ \varepsilon^{la}{}_{ef} n^{(\pm)b}{}_l \left((\partial_m v_a) - (\partial_a v_m) \right) \partial^e \partial_b \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n_{ml}^{(\pm)} \left(((\partial^l v_f) - (\partial_f v^l)) \square + ((\partial_f v_e) - (\partial_e v_f)) \partial^e \partial^l \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_m{}^l{}_{ef} \varepsilon_b{}^{pqr} (\partial_p v_q) \partial^e \partial_r \right] \right\} C^f \quad (\text{H.37})
\end{aligned}$$

Komponente $c^m - B^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} c_w \left\{ \left[(\varepsilon_{abcm} n^{(\pm)b}{}_l (\partial^m v_p) - \varepsilon_{lbcm} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial^m v_p) + v_p \partial^m)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)b}{}_l (\eta_{am} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bm}) - n^{(\pm)b}{}_a (\eta_{lm} \eta_{bc} - \eta_{lc} \eta_{bm})) ((\partial^m v_p) + v_p \partial^m) \right] \right. \\
& \quad \left. (\varepsilon^{pcwe} \varepsilon^l{}_{efg}) \right\} \partial^a \partial^f B^g \quad (\text{H.38})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_w \left\{ \left[\varepsilon_{abcm} n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^m v_f) \eta^{wl} \delta_g^c - (\partial^m v_f) \eta^{cl} \delta_g^w) \right. \right. \\
 &\quad - \varepsilon_{lbcm} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial^m v^l) \delta_f^c \delta_g^w + (\partial^m v_f) \delta_g^c \eta^{wl} - (\partial^m v_g) \delta_f^c \eta^{wl}) \\
 &\quad \left. \left. - \varepsilon_{lbcm} n^{(\pm)b}{}_a (v_f \partial^m \delta_g^c \eta^{wl} - v^l \partial^m \delta_g^c \delta_f^w) \right] \partial^a \partial^f \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma_k} \left[-n^{(\pm)w}{}_g ((\partial_a v_f) \partial^f \partial^a + v_f \partial^f \square) + \delta_g^w n^{(\pm)ab} ((\partial_c v^b) \partial^c \partial^a - (\partial^a v^b) \square) \right. \\
 &\quad \left. + n^{(\pm)ag} (-(\partial^w v^a) \square + (\partial^w v_c) \partial^c \partial^a) + n^{(\pm)w}{}_a ((\partial_c v_g) \partial^c \partial^a - (\partial^a v_g) \square) \right] \Big\} B^g \\
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_w \left\{ \left[n^{(\pm)wb} \varepsilon_{bmag} (\partial^m v_f) \partial^f \partial^a \pm 2\delta_g^w n^{(\pm)ma} (\partial^m v_f) \partial^f \partial^a + \delta_g^w \varepsilon_{bmlf} n^{(\pm)b}{}_a (\partial^m v^l) \partial^f \partial^a \right. \right. \\
 &\quad + \varepsilon_{bmga}^w n^{(\pm)b}{}_a (\partial^m v_f) \partial^f \partial^a - \varepsilon_{bmf}^w n^{(\pm)b}{}_a (\partial^m v_g) \partial^f \partial^a + \varepsilon_{bmga}^w n^{(\pm)b}{}_a v_f \partial^f \partial^m \partial^a \\
 &\quad \left. \left. - \varepsilon_{blmg} n^{(\pm)b}{}_a (\partial^w v^l) \partial^m \partial^a \right] \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma_k} \left[-n^{(\pm)w}{}_g ((\partial_a v_f) \partial^f \partial^a + v_f \partial^f \square) + \delta_g^w n^{(\pm)ab} ((\partial_c v^b) \partial^c \partial^a - (\partial^a v^b) \square) \right. \\
 &\quad \left. \left. + n^{(\pm)ag} ((\partial^w v_c) \partial^c \partial^a - (\partial^w v^a) \square) + n^{(\pm)w}{}_a ((\partial_c v_g) \partial^c \partial^a - (\partial^a v_g) \square) \right] \Big\} B^g
 \end{aligned}$$

Komponente $c^m - C^k$:

$$\begin{aligned}
 &\int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_w \left\{ \varepsilon^{wpcs} \left(\varepsilon_{abcm} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ac} \eta_{bm} - \eta_{am} \eta_{bc}) \right) ((\partial^m v_p) + v_p \partial^m) n^{(\pm)b}{}_l \right\} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_s \partial^e C^f \\
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l [((\partial^u v_b) \partial_u + v_b \square) \delta_a^w - ((\partial^u v_a) \partial_u + v_a \square) \delta_b^w \right. \\
 &\quad - ((\partial^m v_m) + v_m \partial^m) \partial_b \delta_a^w + ((\partial^w v_a) + v_a \partial^w) \partial_b] \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial^e \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)w}{}_m ((\partial^m v_f) + v_f \partial^m) \square - n^{(\pm)ml} \delta_f^w ((\partial^m v^l) + v^l \partial^m) \square \\
 &\quad + n^{(\pm)ml} \delta_f^w ((\partial^m v^e) + v^e \partial^m) \partial^e \partial^l - n^{(\pm)ml} ((\partial^m v_f) + v_f \partial^m) \partial^l \partial^w \\
 &\quad \left. + \varepsilon_b{}^p{}_{wq} \varepsilon_m{}^l{}_{ef} n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^m v_p) + v_p \partial^m) \partial_q \partial^e] \right\} C^f \\
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_w \left\{ [n^{(\pm)w}{}_l \varepsilon^{la}{}_{ef} ((\partial^c v_a) \partial_c + v_a \square) + \varepsilon^{wl}{}_{ef} n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^m v_m) + v_m \partial^m) \partial_b \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon^{wl}{}_{ef} n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^c v_b) \partial_c + v_b \square)] \partial^e \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma_k} [\delta_f^w n^{(\pm)ml} (-(\partial^m v^l) \square - v^l \partial^m \square + (\partial^m v_a) \partial^a \partial^l) \\
 &\quad \left. + n^{(\pm)w}{}_m (-(\partial^m v_f) \square - v_f \partial^m \square) + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_b{}^w{}_{pq} \varepsilon^l{}_{mef} (\partial^m v_p) \partial_q \partial^e] \right\} C^f \tag{H.39}
 \end{aligned}$$

Block $\{d\}$ - $\{A, D\}$:

Dieser Teil des Nebendiagonalblocks in der paritätsgeordneten Matrixdarstellung entsteht aus

$$\begin{aligned}
& \int d^4x (\varepsilon^m_{pqr} \bar{e}^p_\beta \partial^q d^r) \{ -\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c_\nu v_\mu n^{(\pm)b}_l \} \\
& \quad \left(\partial_\alpha \partial^{[a} A^{l]} + \frac{1}{2} ((\square \bar{e}^a_\alpha - \partial^a \partial_\alpha) \delta^l_i - (\square \bar{e}^l_\alpha - \partial^l \partial_\alpha) \delta^a_i) D^i \right) \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^r \left\{ \left[(n^{(\pm)b}_l \varepsilon_{abcm} - n^{(\pm)b}_a \varepsilon_{lbcm}) \varepsilon^{ucpv} \varepsilon^m_{pqr} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}_l \varepsilon^m_{pqr} \varepsilon^{upcv} (\eta_{ac} \eta_{bm} - \eta_{am} \eta_{bc}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n^{(\pm)b}_a \varepsilon^m_{pqr} \varepsilon^{upcv} (\eta_{lc} \eta_{bm} - \eta_{lm} \eta_{bc}) \right] ((\partial^q v_u) + v_u \partial^q) \right\} \\
& \quad (\partial_v \partial^a A^l + (\square \delta^a_v - \partial^a \partial_v) D^l),
\end{aligned}$$

wobei wir die Antisymmetrisierung der Felder auf der rechten Seite auf die Tensorstruktur zwischen den Feldern übertragen haben. Die Auswertung der Tensor-Kontraktionen führt auf

Komponente $d^m - A^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^r \left\{ \varepsilon^m_{pqr} [n^{(\pm)b}_a (\delta_b^p (\partial^q v_l) \partial_m - (\partial^q v_b) \partial_m \delta_l^p) \partial^a \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm)b}_l (\delta_b^p (\partial^q v_a) \partial_m \partial^a + (\partial^q v_m) \partial_b \partial^p - ((\partial^q v_m) + v_m \partial^q) \delta_b^p \square) \right] \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}_l (- (\partial_a v_r) \partial^a \partial_b + \eta_{rb} (\partial^q v_a) \partial^a \partial_q + (\partial_b v_r) \square - (\partial^a v_a) \square \eta_{rb}) \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm)b}_a (- (\partial^q v_b) \partial_q \partial^a \eta_{lr} - v_b \partial^a \square \eta_{lr} + (\partial^q v_l) \partial_q \partial^a \eta_{rb} + v_l \partial^a \square \eta_{rb}) \right] \} A^l \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^r \left\{ -\varepsilon_{rbq}{}^m n^{(\pm)b}_a (\partial^q v_l) \partial_m \partial^a + \varepsilon_{rbq}{}^m n^{(\pm)b}_l ((\partial^q v_a) \partial^a \partial_m - (\partial^q v_m) \square - v_m \partial^q \square) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_{rq}{}^m n^{(\pm)b}_l (\partial^q v_b) \partial_m \partial^a + \varepsilon_{rq}{}^m n^{(\pm)b}_l (\partial^q v_m) \partial^p \partial_b \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}_l ((\partial_b v_r) \square - (\partial_a v_r) \partial^a \partial_b + \eta_{rb} ((\partial^q v_a) \partial^a \partial_q - (\partial^a v_a) \square)) \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm)b}_a (- \eta_{rl} (v_b \partial^a \square + (\partial^q v_b) \partial_q \partial^a) + \eta_{rb} (v_l \partial^a \square + (\partial^q v_l) \partial_q \partial^a)) \right] \} A^l.
\end{aligned}$$

Den d^m - D^k -Beitrag berechnen wir wie üblich, indem bei diesem zunächst bloß den \square -Operator vor dem Vektor D^k berücksichtigen und von diesem Resultat dann die Struktur (H.40) mit der Ersetzung $A^k \rightarrow D^k$ abziehen. Dementsprechend erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^r \left\{ \left[(n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_{abcm} - n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon_{lbcm}) \varepsilon^{ucpa} \varepsilon^m{}_{pqr} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^m{}_{pqr} \varepsilon^{upca} (\eta_{ac} \eta_{bm} - \eta_{am} \eta_{bc}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon^m{}_{pqr} \varepsilon^{upca} (\eta_{lc} \eta_{bm} - \eta_{lm} \eta_{bc}) \right] ((\partial^q v_u) + v_u \partial^q) \right\} \square D^l \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^r \left\{ \pm 2n^{(\pm)}{}_{rq} ((\partial^q v_l) + v_l \partial^q) + \varepsilon_r{}^a{}_{ql} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial^q v_b) + v_b \partial^q) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_{rb}{}^m{}_q n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^q v_m) + v_m \partial^q) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}{}_l ((\partial_b v_r) + v_r \partial_b) - n^{(\pm)}{}_{rl} ((\partial^q v_q) + v_q \partial^q) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}{}_a \eta_{rl} ((\partial^a v_b) + v_b \partial^a) - n^{(\pm)}{}_{ra} (2(\partial^a v_l) + 2v_l \partial^a) + n^{(\pm)b}{}_r (\partial_l v_b) \right\} \square D^l
 \end{aligned}$$

und damit

Komponente $d^m - D^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^r \left\{ \left[\pm 2n^{(\pm)}{}_{rq} ((\partial^q v_l) + v_l \partial^q) \square + \varepsilon_r{}^a{}_{ql} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial^q v_b) + v_b \partial^q) \square \right. \right. \quad (\text{H.41}) \\
 & \quad \left. \left. + \varepsilon_{rbq}{}^m n^{(\pm)b}{}_a (\partial^q v_l) \partial_m \partial^a - \varepsilon_{rbq}{}^m n^{(\pm)b}{}_l (\partial^q v_a) \partial^a \partial_m \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varepsilon_{rq}{}^m{}_l n^{(\pm)b}{}_a (\partial^q v_b) \partial_m \partial^a - \varepsilon_{rq}{}^m{}_p n^{(\pm)b}{}_l (\partial^q v_m) \partial^p \partial_b \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}{}_l (v_r \partial_b \square + (\partial_a v_r) \partial^a \partial_b) - n^{(\pm)}{}_{rl} (v_q \partial^q \square + (\partial^q v_a) \partial^a \partial_q) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm)b}{}_a \eta_{rl} ((\partial^a v_b) \square - (\partial^q v_b) \partial_q \partial^a) \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm)}{}_{ra} (v_l \partial^a \square + 2(\partial^a v_l) \square - (\partial^q v_l) \partial_q \partial^a) + n^{(\pm)b}{}_r (\partial_l v_b) \square \right\} D^l .
 \end{aligned}$$

Block $\{d\}$ - $\{B, C\}$:

Die Kopplungen des Pseudovektors d^m mit den Pseudovektoren B^k und C^k aus den Zerlegungen (6.11) und (6.12) des Vielbeins bzw. des Spinzusammenhangs tragen zu dem unteren paritätsgeraden Diagonalblock bei. Zu berechnen ist hier der Ausdruck

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \varepsilon^m{}_{uvw} \bar{e}^u{}_\beta \partial^v d^w \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm)b}{}_l \right] \left(\partial^{[a} \varepsilon^{l]}{}_{efg} \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f B^g + \frac{1}{2} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_\alpha \partial^e C^f \right) \\
= & \int d^4x d^w \left[n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \left((\partial^v v_\mu) + v_\mu \partial^v \right) \right] \varepsilon^m{}_{uvw} \bar{e}^u{}_\beta \\
& \left(\frac{1}{2} (\partial^a \varepsilon^l{}_{efg} - \partial^l \varepsilon^a{}_{efg}) \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f B^g + \frac{1}{2} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_\alpha \partial^e C^f \right) \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} \varepsilon^m{}_{uvw} \bar{e}^u{}_\beta \partial^v d^w \left[\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \left((\partial^v v_\mu) + v_\mu \partial^v \right) n^{(\pm)b}{}_l \right] \varepsilon^m{}_{uvw} \bar{e}^u{}_\beta \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[\left((\partial^v v_a) + v_a \partial^v \right) (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha) + \left((\partial^v v_b) + v_b \partial^v \right) (\bar{e}_a^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_a^\alpha) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left((\partial^v v_m) + v_m \partial^v \right) (\bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha - \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{am}) \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \left((\partial^v v_p) + v_p \partial^v \right) \right] \right\} \\
& \varepsilon^m{}_{uvw} \bar{e}^u{}_\beta \left[(\partial^a \varepsilon^l{}_{efg} - \partial^l \varepsilon^a{}_{efg}) \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f B^g + \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_\alpha \partial^e C^f \right],
\end{aligned}$$

woraus sich die beiden Komponenten wie folgt ergeben:

Komponente $d^m - B^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[\left((\partial^v v_a) + v_a \partial^v \right) (\bar{e}_m^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\beta \bar{e}_m^\alpha) + \left((\partial^v v_b) + v_b \partial^v \right) (\bar{e}_a^\beta \bar{e}_m^\alpha - \bar{e}_m^\beta \bar{e}_a^\alpha) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left((\partial^v v_m) + v_m \partial^v \right) (\bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha - \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{am}) \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \left((\partial^v v_p) + v_p \partial^v \right) \right] \right\} \\
& (\varepsilon^m{}_{uvw} \bar{e}^u{}_\beta (\partial^a \varepsilon^l{}_{efg} - \partial^l \varepsilon^a{}_{efg}) \bar{e}^e{}_\alpha \partial^f B^g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[((\partial^v v_a) + v_a \partial^v) (\delta_m^u \delta_b^e - \delta_b^u \delta_m^e) + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (\delta_a^u \delta_m^e - \delta_m^u \delta_a^e) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\delta_b^u \delta_a^e - \delta_a^u \delta_b^e) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{am}) ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \delta_r^u \delta_s^e \right] \right. \\
 &\quad \left. - n^{(\pm)b}{}_a \left[((\partial^v v_l) + v_l \partial^v) (\delta_m^u \delta_b^e - \delta_b^u \delta_m^e) + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (\delta_l^u \delta_m^e - \delta_m^u \delta_l^e) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\delta_b^u \delta_l^e - \delta_l^u \delta_b^e) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_l^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{lm}) ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \delta_r^u \delta_s^e \right] \right\} \\
 &\quad (\varepsilon^m{}_{uvw} \varepsilon^l{}_{efg} \partial^a \partial^f B^g) \\
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[((\partial^v v_a) + v_a \partial^v) (0 - \varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^l{}_{mfg}) + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (\varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^l{}_{mfg} - 0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^l{}_{afg} - \varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^l{}_{bfg}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{pue} \varepsilon_{buvw} - \varepsilon_b^{pue} \varepsilon_{auvw}) \varepsilon^l{}_{efg} ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \right] \right. \\
 &\quad \left. - n^{(\pm)b}{}_a \left[((\partial^v v_l) + v_l \partial^v) (0 - \varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^l{}_{mfg}) + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (\varepsilon^m{}_{lvw} \varepsilon^l{}_{mfg} - 0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (0 - \varepsilon^m{}_{lvw} \varepsilon^l{}_{bfg}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_l^{pue} \varepsilon_{buvw} - \varepsilon_b^{pue} \varepsilon_{luvw}) \varepsilon^l{}_{efg} ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \right] \right\} \partial^a \partial^f B^g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm) b}{}_l \left[((\partial^v v_a) + v_a \partial^v) (\delta_b^l \eta_{vf} \eta_{wg} + \eta_{bf} \eta_{vg} \delta_w^l + \eta_{bg} \delta_v^l \eta_{wf} - \delta_b^l \eta_{vg} \eta_{wf} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \eta_{bf} \delta_v^l \eta_{wg} - \eta_{bg} \eta_{vf} \delta_w^l) \right. \right. \\
& \quad + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (-\delta_a^l \eta_{vf} \eta_{wg} - \eta_{af} \eta_{vg} \delta_w^l - \eta_{ag} \delta_v^l \eta_{wf} + \delta_a^l \eta_{vg} \eta_{wf} \\
& \quad + \eta_{af} \delta_v^l \eta_{wg} + \eta_{ag} \eta_{vf} \delta_w^l) \\
& \quad + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^l{}_{afg} - \varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^l{}_{bfg}) \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bv} \delta_w^p \delta_a^e + \eta_{bw} \delta_a^p \delta_v^e - \eta_{bv} \delta_a^p \delta_w^e - \eta_{bw} \delta_v^p \delta_a^e - \eta_{av} \delta_w^p \delta_b^e \\
& \quad \quad \left. - \eta_{aw} \delta_b^p \delta_v^e + \eta_{av} \delta_b^p \delta_w^e + \eta_{aw} \delta_v^p \delta_b^e) \varepsilon^l{}_{efg} ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \right] \\
& - n^{(\pm) b}{}_a \left[((\partial^v v_l) + v_l \partial^v) (\delta_b^l \eta_{vf} \eta_{wg} + \eta_{bf} \eta_{vg} \delta_w^l + \eta_{bg} \delta_v^l \eta_{wf} - \delta_b^l \eta_{vg} \eta_{wf} \right. \\
& \quad \left. - \eta_{bf} \delta_v^l \eta_{wg} - \eta_{bg} \eta_{vf} \delta_w^l) \right. \\
& \quad + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (-2(\eta_{vf} \eta_{wg} - \eta_{vg} \eta_{wf})) \\
& \quad + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\delta_b^m \eta_{vf} \eta_{wg} + \delta_f^m \eta_{vg} \eta_{wb} + \delta_g^m \eta_{vb} \eta_{wf} - \delta_b^m \eta_{vg} \eta_{wf} \\
& \quad \quad \left. - \delta_f^m \eta_{vb} \eta_{wg} - \delta_g^m \eta_{vf} \eta_{wb}) \right. \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bv} \delta_w^p \delta_l^e + \eta_{bw} \delta_l^p \delta_v^e - \eta_{bv} \delta_l^p \delta_w^e - \eta_{bw} \delta_v^p \delta_l^e - \eta_{lv} \delta_w^p \delta_b^e \\
& \quad \quad \left. - \eta_{lw} \delta_b^p \delta_v^e + \eta_{lv} \delta_b^p \delta_w^e + \eta_{lw} \delta_v^p \delta_b^e) \varepsilon^l{}_{efg} ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \right] \left. \right\} \partial^a \partial^f B^g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[\delta_w^l ((\partial_g v_a) + v_a \partial_g) \partial^a \partial_b + \eta_{bg} ((\partial^l v_a) + v_a \partial^l) \partial^a \partial_w \right. \right. \\
 & - \eta_{wg} ((\partial^l v_a) + v_a \partial^l) \partial^a \partial_b - \delta_w^l \eta_{bg} ((\partial_f v_a) + v_a \partial_f) \partial^a \partial^f \\
 & - \eta_{wg} ((\partial_f v_b) + v_b \partial_f) \partial^l \partial^f - \delta_w^l ((\partial_g v_b) + v_b \partial_g) \square \\
 & + ((\partial_g v_b) + v_b \partial_g) \partial^l \partial_w + \eta_{wg} ((\partial^l v_b) + v_b \partial^l) \square \\
 & + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^l{}_{afg} - \varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^l{}_{bfg}) \partial^a \partial^f \\
 & + \frac{1}{\gamma_k} [((\partial_b v_w) + v_w \partial_b) \partial^e + \eta_{bw} ((\partial^e v_a) + v_a \partial^e) \partial^a - \delta_w^e ((\partial_b v_a) + v_a \partial_b) \partial^a \\
 & - \eta_{bw} ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) \partial^e - ((\partial_a v_w) + v_w \partial_a) \delta_b^e \partial^a - ((\partial^e v_b) + v_b \partial^e) \partial_w \\
 & \left. + \delta_w^e ((\partial_a v_b) + v_b \partial_a) \partial^a + ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) \delta_b^e \partial_w \right] \varepsilon^l{}_{efg} \partial^f \Big] \\
 & - n^{(\pm)b}{}_a \left[\eta_{wg} [((\partial_f v_b) + v_b \partial_f) \partial^f - ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) \partial_b] + ((\partial_g v_w) + v_w \partial_g) \partial_b \right. \\
 & + \eta_{bg} ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) \partial_w - ((\partial_g v_b) + v_b \partial_g) \partial_w - ((\partial_f v_w) + v_w \partial_f) \partial^f \eta_{bg} \partial_w \\
 & - 2\eta_{wg} ((\partial_f v_b) + v_b \partial_f) \partial^f + 2((\partial_g v_b) + v_b \partial_g) \partial_w \\
 & + \eta_{wg} [((\partial_f v_b) + v_b \partial_f) \partial^f - ((\partial_b v_f) + v_f \partial_b) \partial^f] \partial_w \\
 & + \eta_{wb} [((\partial_g v_f) + v_f \partial_g) \partial^f - ((\partial_f v_g) + v_g \partial_f) \partial^f] \\
 & + ((\partial_b v_g) + v_g \partial_b) \partial_w - ((\partial_g v_b) + v_b \partial_g) \partial_w \\
 & + \frac{1}{\gamma_k} [\eta_{bw} ((\partial^e v_l) + v_l \partial^e) - \delta_w^e ((\partial_b v_l) + v_l \partial_b) - \delta_b^e ((\partial_l v_w) + v_w \partial_l) \partial_w \\
 & - \eta_{lw} ((\partial^e v_b) + v_b \partial^e) + \delta_w^e ((\partial_l v_b) + v_b \partial_l) \\
 & \left. + \delta_b^e \eta_{lw} ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) \right] \varepsilon^l{}_{efg} \partial^f \Big] \partial^a \Big\} B^g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^w \left\{ \left[n^{(\pm)b}{}_w (\partial_g v_a) \partial^a \partial_b + n^{(\pm)}{}_{gl} v_a \partial^a \partial^l \partial_w - \eta_{wg} n^{(\pm)b}{}_l (\partial^l v_a) \partial^a \partial_b \right. \right. \\
& - n^{(\pm)}{}_{gw} ((\partial_f v_a) \partial^a \partial^f + v_a \partial^a \square) - \eta_{wg} n^{(\pm)b}{}_l ((\partial_f v_b) \partial^f \partial^l + v_b \partial^l \square) \\
& - n^{(\pm)b}{}_w (\partial_g v_b) \square \\
& + \eta_{wg} n^{(\pm)b}{}_l ((\partial^l v_b) + v_b \partial^l) \square - n^{(\pm)b}{}_l (\partial^v v_m) \varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^l{}_{bfg} \partial^a \partial^f \\
& + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}{}_{wl} \varepsilon^l{}_{efg} (\partial^e v_a) \partial^a + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^l{}_{wfg} ((\partial_b v_a) + v_a \partial_b) \partial^a \right. \\
& \quad - n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^l{}_{bfg} ((\partial_a v_w) \partial^a + v_w \square) \\
& \quad \left. + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^l{}_{wfg} ((\partial_a v_b) \partial^a + v_b \square) + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon^l{}_{bfg} v_a \partial^a \partial_w \right] \partial^f \Big] \\
& - \left[\eta_{wg} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial_f v_b) + v_b \square) \partial^a + n^{(\pm)}{}_{ga} v_l \partial^l \partial_w \partial^a - n^{(\pm)}{}_{ga} ((\partial_f v_w) \partial^f + v_w \square) \partial^a \right. \\
& \quad - 2\eta_{wg} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial_f v_b) \partial^f + v_b \square) \partial^a + \eta_{wg} n^{(\pm)b}{}_a ((\partial_f v_b) \partial^f + v_b \square) \partial^a \\
& \quad - \eta_{wg} n^{(\pm)b}{}_a (\partial_b v_f) \partial^f \partial^a + n^{(\pm)}{}_{wa} (\partial_g v_f) \partial^f \partial^a - n^{(\pm)}{}_{wa} ((\partial_f v_g) \partial^f + v_g \square) \partial^a \\
& + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}{}_{wa} \varepsilon^l{}_{efg} (\partial^e v_l) \partial^a \partial^f - n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon^l{}_{wfg} (\partial_b v_l) \partial^a \partial^f - n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon^l{}_{bfg} (\partial_l v_w) \partial^a \partial^f \right. \\
& \quad - n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon_{wefg} (\partial^e v_b) \partial^a \partial^f + n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon^l{}_{wfg} (\partial_l v_b) \partial^a \partial^f \\
& \quad \left. + n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon_{wbfg} ((\partial^p v_p) + v_p \partial^p) \partial^a \partial^f \right] \Big] \Big\} B^g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l [\eta_{wg} (- (\partial^l v_a) \partial^a \partial_b - (\partial_f v_b) \partial^f \partial^l - v_b \partial^l \square \right. \\
 &\quad + (\partial^l v_b) \square + v_b \partial^l \square - (\partial_f v_b) \partial^f \partial^l \\
 &\quad - v_b \partial^l \square + 2(\partial_f v_b) \partial^f \partial^l + 2v_b \partial^l \square - (\partial_f v_b) \partial^f \partial^l - v_b \partial^l \square + (\partial_b v_f) \partial^f \partial^l \\
 &\quad \left. + (- (\partial^v v_m) \varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^l{}_{bfg} \partial^a \partial^f) \right] \\
 &+ n^{(\pm)b}{}_w [(\partial_g v_a) \partial^a \partial_b - (\partial_g v_b) \square - (\partial_f v_g) \partial^f \partial_b - v_g \partial_b \square + (\partial_g v_f) \partial^f \partial_b] \\
 &+ n^{(\pm)}{}_{gl} [v_a \partial^a \partial^l \partial_w - v_a \partial^a \partial^l \partial_w + (\partial_f v_w) \partial^f \partial^l + v_w \partial^l \square] \\
 &+ n^{(\pm)}{}_{wg} [(\partial_f v_a) \partial^a \partial^f + v_a \partial^a \square] \\
 &+ \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm)b}{}_l [- \varepsilon^l{}_{wfg} ((\partial_b v_a) + v_a \partial_b) \partial^a + \varepsilon^l{}_{wfg} ((\partial_a v_b) \partial^a + v_b \square) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_b{}^l{}_{fg} ((\partial_a v_w) \partial^a + v_w \square) - \varepsilon_b{}^l{}_{fg} v_a \partial^a \partial_w \right] \partial^f \\
 &\quad + n^{(\pm)b}{}_a [- \varepsilon_w{}^l{}_{fg} (\partial_b v_l) \partial^a \partial^f + \varepsilon_w{}^l{}_{fg} (\partial_l v_b) \partial^a \partial^f + \varepsilon_w{}^l{}_{fg} (\partial_l v_b) \partial^a \partial^f \\
 &\quad - \varepsilon_b{}^l{}_{fg} (\partial_l v_w) \partial^a \partial^f - \varepsilon_{wbfg} ((\partial^p v_p) + v_p \partial^p) \partial^a \partial^f] \\
 &\quad \left. + n^{(\pm)}{}_{wl} \varepsilon^l{}_{efg} (\partial^e v_a) \partial^a \partial^f + n^{(\pm)}{}_{wl} \varepsilon^{ae}{}_{fg} (\partial_a v_e) \partial^l \partial^f \right\} B^g \\
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l [\eta_{wg} ((\partial^l v_b) \square - (\partial_f v_b) \partial^f \partial^l + 2(\partial_b v_f) \partial^f \partial^l) - \varepsilon_{wv}{}^m{}{}_a \varepsilon_b{}^{lfg} (\partial^v v_m) \partial^a \partial^f] \right. \\
 &\quad + n^{(\pm)b}{}_w [(\partial_g v_b) \square + v_g \partial_b \square + (\partial_f v_g) \partial^f \partial_b - 2(\partial_g v_f) \partial^f \partial_b] \\
 &\quad + n^{(\pm)}{}_{lg} [- v_w \partial^l \square - (\partial_f v_w) \partial^f \partial^l] \\
 &\quad + n^{(\pm)}{}_{wg} [v_f \partial^f \square + (\partial_f v_a) \partial^a \partial^f] \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm)b}{}_l [\varepsilon^l{}_{wfg} (v_b \square + (\partial_a v_b) \partial^a - (\partial_b v_a) \partial^a - (\partial^a v_a) \partial_b - 2v_a \partial^a \partial_b) \partial^f \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_b{}^l{}_{fg} ((\partial_a v_w) \partial^a + v_w \square + (\partial_w v_a) \partial^a) \partial^f \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_w{}^a{}_{fg} (- (\partial_b v_a) \partial^l + 2(\partial_a v_b) \partial^l) \partial^f \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon^{la}{}_{fg} (\partial_a v_w) \partial_b \partial^f \right] \\
 &\quad \left. + n^{(\pm)}{}_{wl} [\varepsilon^{le}{}_{fg} (\partial_e v_a) \partial^a \partial^f + \varepsilon^{ae}{}_{fg} (\partial_a v_e) \partial^l \partial^f] \right\} B^g \tag{H.42}
 \end{aligned}$$

Komponente $d^m - C^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[((\partial^v v_a) + v_a \partial^v) (\bar{\varepsilon}_m^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha - \bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_m^\alpha) + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (\bar{\varepsilon}_a^\beta \bar{\varepsilon}_m^\alpha - \bar{\varepsilon}_m^\beta \bar{\varepsilon}_a^\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_a^\alpha - \bar{\varepsilon}_a^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{am}) \bar{\varepsilon}_r^\beta \bar{\varepsilon}_s^\alpha ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \right] \right\} \\
& \quad (\varepsilon^m{}_{uvw} \varepsilon^{al}{}_{ef} \bar{\varepsilon}^u{}_\beta \partial_\alpha \partial^e C^f) \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[((\partial^v v_a) + v_a \partial^v) (0 - \varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_m) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (\varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_m - 0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (\varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_a - \varepsilon^m{}_{avw} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_b) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{pus} \varepsilon_{buvw} - \varepsilon_b^{pus} \varepsilon_{auvw}) \varepsilon^{al}{}_{ef} ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \partial_s \right] \right\} \partial^e C^f \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[- ((\partial^v v_a) + v_a \partial^v) \varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial_m \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + ((\partial^v v_b) + v_b \partial^v) (-\eta^{ml} \eta_{ve} \eta_{wf} - \delta^m{}_e \eta_{vf} \delta_w^l - \delta^m{}_f \delta_v^l \eta_{we} + \eta^{ml} \eta_{vf} \eta_{we} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \delta^m{}_e \delta_v^l \eta_{wf} + \delta^m{}_f \eta_{ve} \delta_w^l) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + ((\partial^v v_m) + v_m \partial^v) (0 + \eta^{ml} \eta_{ve} \eta_{wf} + \delta^m{}_e \eta_{vf} \delta_w^l + \delta^m{}_f \delta_v^l \eta_{we} - \eta^{ml} \eta_{vf} \eta_{we} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \delta^m{}_e \delta_v^l \eta_{wf} - \delta^m{}_f \eta_{ve} \delta_w^l) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bv} \delta_w^p \delta_a^s + \eta_{bv} \delta_a^p \delta_v^s - \eta_{bv} \delta_a^p \delta_w^s - \eta_{bv} \delta_v^p \delta_a^s - \eta_{av} \delta_w^p \delta_b^s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \eta_{aw} \delta_b^p \delta_v^s + \eta_{av} \delta_b^p \delta_w^s + \eta_{aw} \delta_v^p \delta_b^s) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \varepsilon^{al}{}_{ef} ((\partial^v v_p) + v_p \partial^v) \partial_s \right] \right\} \partial^e C^f \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[[-\varepsilon^m{}_{bvw} \varepsilon^{al}{}_{ef} (\partial^v v_a) \partial_m \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \eta_{wf} (-((\partial_e v_b) + v_b \partial_e) \partial^l + ((\partial^l v_b) + v_b \partial^l) \partial_e) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \delta_w^l (\partial_f v_b) \partial_e \right] \right. \\
& \quad \left. + [\eta_{wf} ((\partial_e v^l) + v^l \partial_e - (\partial^l v_e)) \partial_b + \delta_w^l (\partial_f v_e) \partial_b \right. \\
& \quad \left. - \delta_w^l ((\partial_e v_f) + v_f \partial_e) \partial_b \right] \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} [-v_a \partial_b \partial_w + \eta_{bw} ((\partial^s v_a) + v_a \partial^s) \partial_s - (\partial_a v_w) \partial_b \right. \\
& \quad \left. - \eta_{aw} ((\partial^s v_b) + v_b \partial^s) \partial^s + \eta_{aw} ((\partial^p v_p) + v_p \partial^p) \partial_b \varepsilon^{al}{}_{ef} \right] \right\} \partial^e C^f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[-\varepsilon_{w b v}{}^m \varepsilon^{l a}{}_{e f} (\partial^v v_a) \partial_m \partial^e \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \eta_{w f} \left(-(\partial_e v_b) \partial^e \partial^l - v_b \partial^l \square + (\partial^l v_b) \square + v_b \partial^l \square - (\partial_e v_b) \partial^e \partial^l \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - v_b \partial^l \square + (\partial_b v_e) \partial^e \partial^l \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + n^{(\pm)b}{}_w \left[(\partial_f v_b) \square - (\partial_f v_e) \partial^e \partial_b + (\partial_e v_f) \partial^e \partial_b + v_f \partial_b \square \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[-n^{(\pm)}{}_{w l} \varepsilon^{l a}{}_{e f} \left((\partial^s v_a) \partial_s + v_a \square \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_{w b e f} \left((\partial^s v^l) \partial_s + v_l \square - (\partial^a v_a) \partial^l - v_a \partial^a \partial^l \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_b{}^a{}_{e f} \left(v_a \partial^l \partial_w + (\partial_a v_w) \partial^l \right) \right] \right\} \partial^e C^f \\
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[-\varepsilon_{w b v}{}^m \varepsilon^{l a}{}_{e f} (\partial^v v_a) \partial_m \partial^e \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \eta_{w f} \left(-v_b \partial^l \square + (\partial^l v_b) \square - 2(\partial_e v_b) \partial^e \partial^l + (\partial_b v_e) \partial^e \partial^l \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + n^{(\pm)b}{}_w \left[(\partial_f v_b) \square - (\partial_f v_e) \partial^e \partial_b + (\partial_e v_f) \partial^e \partial_b + v_f \partial_b \square \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[-n^{(\pm)}{}_{w l} \varepsilon^{l a}{}_{e f} \left((\partial^s v_a) \partial_s + v_a \square \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_{w b e f} \left((\partial^s v^l) \partial_s + v_l \square - (\partial^a v_a) \partial^l - v_a \partial^a \partial^l \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_b{}^a{}_{e f} \left((\partial_a v_w) - (\partial_w v_a) \right) \partial^l \right] \partial^e \right\} C^f . \tag{H.43}
 \end{aligned}$$

H.3.3 Der Tensor-Sektor

Block $\{d\}$ - $\{B\}$:

Die paritätsgerade Mischung ist hier gegeben durch

$d^{mn} - B^{kl}$:

$$\begin{aligned}
 &\int d^4x d^m{}_\beta \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm)b}{}_l \right] \partial^{[a} B^l]{}_\alpha \\
 &= \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^m{}_\beta \left\{ n^{(\pm)b}{}_l \left[v_a (\bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha - \bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha) + v_b (\bar{e}_m{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha - \bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_m{}^\alpha) + v_m (\bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{am}) v_p \bar{e}_r{}^\beta \bar{e}_s{}^\alpha \right] \right\} (\partial^a B^l{}_\alpha - \partial^l B^a{}_\alpha)
 \end{aligned} \tag{H.44}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^m_{\beta} \{ n^{(\pm)b}{}_l [v_a (\bar{\varepsilon}_b{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} - \bar{\varepsilon}_m{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_b{}^{\alpha}) + v_b (\bar{\varepsilon}_m{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_a{}^{\alpha} - \bar{\varepsilon}_a{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha}) + v_m (\bar{\varepsilon}_a{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_b{}^{\alpha} - \bar{\varepsilon}_b{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_a{}^{\alpha}) \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{am}) v_p \bar{\varepsilon}_r{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_s{}^{\alpha}] \\
&\quad - n^{(\pm)b}{}_a [v_l (\bar{\varepsilon}_b{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} - \bar{\varepsilon}_m{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_b{}^{\alpha}) + v_b (\bar{\varepsilon}_m{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_l{}^{\alpha} - \bar{\varepsilon}_l{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha}) + v_m (\bar{\varepsilon}_l{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_b{}^{\alpha} - \bar{\varepsilon}_b{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_l{}^{\alpha}) \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_l{}^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{lm}) v_p \bar{\varepsilon}_r{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_s{}^{\alpha}] \} \partial^a B^l{}_{\alpha} \\
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^m_{\beta} \{ n^{(\pm)b}{}_l [v_a \bar{\varepsilon}_b{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} - v_b \bar{\varepsilon}_a{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bm} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{am}) v_p \bar{\varepsilon}_r{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_s{}^{\alpha}] \\
&\quad - n^{(\pm)b}{}_a [v_l \bar{\varepsilon}_b{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} - v_b \bar{\varepsilon}_l{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} + v_m \bar{\varepsilon}_l{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_b{}^{\alpha} + \frac{1}{\gamma_k} \eta_{lm} \varepsilon_b{}^{prs} v_p \bar{\varepsilon}_r{}^{\beta} \bar{\varepsilon}_s{}^{\alpha}] \} \partial^a B^l{}_{\alpha} \\
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^m_{\beta} \{ \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} n^{(\pm)\beta}{}_l v_a \partial^a + \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} (\partial^{\beta} v_b) n^{(\pm)b}{}_l - \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} v_l n^{(\pm)\beta}{}_a \partial^a \\
&\quad + \bar{\varepsilon}_m{}^{\alpha} \bar{\varepsilon}_l{}^{\beta} v_b n^{(\pm)b}{}_a \partial^a - \bar{\varepsilon}_l{}^{\beta} v_m n^{(\pm)\alpha}{}_a \partial^a \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_k} \bar{\varepsilon}_r{}^{\beta} (- n^{(\pm)}{}_{ml} \varepsilon_a{}^{rp}{}^s v_p \partial^a + n^{(\pm)b}{}_l \varepsilon_b{}^{rs} (\partial_m v_p) + \eta_{ml} n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon_b{}^{rs} v_p \partial^a) \bar{\varepsilon}_s{}^{\alpha} \} B^l{}_{\alpha} .
\end{aligned}$$

Block $\{d\}$ - $\{D\}$:

Der einzige Beitrag im Tensor-Sektor zum paritätsungeraden Nebendiagonalblock ergibt sich zu

Komponente $d^{mn} - D^{kl}$:

$$\begin{aligned}
&\int d^4x d^m_{\beta} \{ - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abcm}^{(\gamma_k)} \bar{\varepsilon}^c{}_{\nu} v_{\mu} n^{(\pm)b}{}_l \} \frac{1}{2} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial^e D^f{}_{\alpha} \tag{H.45} \\
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^{mn} \{ (\varepsilon^p{}_{nk} K_{abcm}^{(\gamma_k)}) v_p n^{(\pm)b}{}_l \} \varepsilon^{al}{}_{ef} \partial^e D^f{}_{\alpha} \\
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} d^{mn} \{ (- \eta_{mk} n^{(\pm)}{}_{nl} \varepsilon^{la}{}_{ef} v_a + \eta_{mk} \varepsilon_n{}^l{}_{ef} n^{(\pm)b}{}_l v_b - v_m \varepsilon_n{}^l{}_{ef} n^{(\pm)}{}_{lk}) \partial^e \\
&\quad + \frac{1}{\gamma_k} (- \eta_{nf} n^{(\pm)}{}_{mk} v_e \partial^e - n^{(\pm)}{}_{mk} (\partial_n v_f) - \varepsilon_m{}^l{}_{ef} \varepsilon_n{}^{cp}{}^q n^{(\pm)}{}_{lc} v_p \partial^e) \} D^f{}_{\alpha} .
\end{aligned}$$

H.4 Der $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$

Analog zum $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Anteil ist dieser von der Form

$$\begin{aligned}
 & (2 \cdot 16\pi G_k) \tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)} \Big|_{\bar{\tau}-\bar{\varepsilon}} \\
 = & \int d^4x \bar{\tau}^{mn} \Big[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (\delta_m^a \bar{\omega}_n^b{}_\mu + \delta_n^b \bar{\omega}_m^a{}_\mu) K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \Big] \bar{\varepsilon}^k{}_\alpha \\
 = & \int d^4x \bar{\tau}^{an} \Big[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} v_\mu n^{(\pm)}{}_n{}^b K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \Big] \bar{\varepsilon}^k{}_\alpha \\
 = & \int d^4x \bar{e} \left(\partial_\beta \partial^{[a} A^{n]} + \partial^{[a} ((\square \bar{e}^n]{}_\beta - \partial^n] \partial_\beta) B + \varepsilon^{n]}{}_{efg} \bar{e}^e{}_\beta \partial^f B^g + B^n]{}_\beta \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^{an}{}_{lm} \partial_\beta \partial^l C^m \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon^{an}{}_{lm} \partial^l \left((\square \bar{e}^m]{}_\beta - \partial^m] \partial_\beta) D + \varepsilon^m{}_{egh} \bar{e}^e{}_\beta \partial^g D^h + D^m]{}_\beta \right) \\
 & \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \left(\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_k^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_a^\alpha + \bar{e}_k^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_b^\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{ak}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right) v_\mu \right] \\
 & \left(\partial^k \partial_\alpha a + \partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha + (\square \bar{e}^k{}_\alpha - \partial^k \partial_\alpha) d + \varepsilon^k{}_{uvw} \bar{e}^u{}_\alpha \partial^v d^r + d^k{}_\alpha \right). \tag{H.46}
 \end{aligned}$$

Wie im $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Block berechnen wir nun ebenfalls sektorweise die benötigten Beiträge.

H.4.1 Der skalare Sektor

Block $\{B\}$ - $\{a, d\}$:

Nach zweifacher partieller Integration ergeben sich hier die beiden erforderlichen Matrixelemente aus

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} (\square B) \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \left(\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_k^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_a^\alpha + \bar{e}_k^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{ak}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right) \left(\bar{e}^a{}_\beta ((\partial^n v_\mu) + v_\mu \partial^n) - \bar{e}^n{}_\beta ((\partial^a v_\mu) + v_\mu \partial^a) \right) \right] \\
 & \left(\partial^k \partial_\alpha a + (\bar{e}^k{}_\alpha \square - \partial^k \partial_\alpha) d \right),
 \end{aligned}$$

und für die separaten Anteile erhalten wir:

Komponente $B - a$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} (\square B) \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\left(((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) \square - 0 \right) \right. \right. \\
& \quad + \left(((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) \square - ((\partial^a v_b) + v_b \partial^a) \partial^n \partial_a \right) \\
& \quad + \left(4((\partial^n v_k) + v_k \partial^n) \partial^k \partial_b - ((\partial^n v_k) + v_k \partial^n) \partial^k \partial_b \right) \\
& \quad - \left(((\partial^n v_k) + v_k \partial^n) \partial^k \partial_b - ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) \partial^n \partial_b \right) \\
& \quad - \left(4((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) \square - ((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) \square \right) \\
& \quad \left. \left. - \left(((\partial^n v_k) + v_k \partial^n) \partial^k \partial_b - 0 \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(0 - \varepsilon_a^{pns} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a) \partial_b \partial_s - \varepsilon_b^{ps} ((\partial^n v_p) + v_p \partial^n) \partial^k \partial_s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_b^{pns} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a) \partial_a \partial_s \right) \right] \Big\} a \\
& = \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} (\square B) \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\left(2((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) \square - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^n - v_b \partial^n \square + 4(\partial^n v_k) \partial^k \partial_b \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b - (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b - 3((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) \square - (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(-\varepsilon_a^{pns} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s + \varepsilon_b^{pns} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s + \varepsilon_b^{pns} v_p \partial_s \square \right) \right] \right\} a \\
& = \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} (\square B) \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\left(-(\partial^n v_b) \square - 2v_b \partial^n \square + (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^n \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(-\varepsilon_a^{pns} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s + \varepsilon_b^{pns} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s + \varepsilon_b^{pns} v_p \partial_s \square \right) \right] \right\} a \quad (\text{H.47}) \\
& = \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\left(-(\partial^n v_b) \square^2 - 2(v_b \partial^n \square + 2(\partial^k v_b) \partial_k \partial^n) \square \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b \square - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^n \square \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(-\varepsilon_a^{pns} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s \square + \varepsilon_b^{pns} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s \square \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_b^{pns} (v_p \partial_s \square + 2(\partial^a v_p) \partial_a \partial_s) \square \right) \right] \right\} a \\
& = \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\left(-(\partial^n v_b) \square - 2v_b \partial^n \square - 5(\partial^k v_b) \partial_k \partial^n + (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(-\varepsilon_a^{pns} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s + 3\varepsilon_b^{pns} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s + \varepsilon_b^{pns} v_p \partial_s \square \right) \right] \right\} \square a, \quad (\text{H.48})
\end{aligned}$$

wobei wir auch hier zunächst auf die Anwendung der (Anti-)Selbstdualitätsrelation (H.2) verzichten.

Die Berechnung der nächsten Komponente zerfällt wieder in die beiden Teilschritte aus (H.29):

Komponente B – d:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} (\square B) \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b \left[2 \left(\bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\beta - \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_a{}^\beta - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ab}{}^{pr} \bar{e}_p{}^\mu \bar{e}_r{}^\beta \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left(\bar{e}^a{}_\beta ((\partial^n v_\mu) + v_\mu \partial^n) - \bar{e}^n{}_\beta ((\partial^a v_\mu) + v_\mu \partial^a) \right) \square \right. \\
 & \quad \left. \left. + (\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu) \left(\bar{e}^a{}_\beta ((\partial^n v_\mu) + v_\mu \partial^n) - \bar{e}^n{}_\beta ((\partial^a v_\mu) + v_\mu \partial^a) \right) \partial^k \partial_\alpha \right] \right\} d \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} (\square B) \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b \left[2 \left(((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) - 0 - 4((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) + ((\partial^n v_b) + v_b \partial^n) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (0 - \varepsilon_{ab}{}^{pn} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a)) \right) \square \\
 & \quad - (- (\partial^n v_b) \square - 2v_b \partial^n \square + (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^n) \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (- \varepsilon_a{}^{ps} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s + \varepsilon_b{}^{ps} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s + \varepsilon_b{}^{ps} v_p \partial_s \square) \right] \right\} d \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} (\square B) \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b \left[(- 3(\partial^n v_b) \square - 2v_b \partial^n \square - (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b + (\partial^k v_b) \partial_k \partial^n) \right. \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (- \varepsilon_a{}^{ps} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s + \varepsilon_b{}^{ps} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s + 2\varepsilon_b{}^{ps} (\partial_p v_s) \square \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varepsilon_b{}^{ps} v_p \partial_s \square) \right] \right\} d \tag{H.49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} B \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b \left[(- 3(\partial^n v_b) \square - 2v_b \partial^n \square - (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b - 3(\partial^k v_b) \partial_k \partial^n) \right. \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (- \varepsilon_a{}^{ps} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s - \varepsilon_b{}^{ps} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s + 2\varepsilon_b{}^{ps} (\partial_p v_s) \square \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varepsilon_b{}^{ps} v_p \partial_s \square) \right] \right\} \square d . \tag{H.50}
 \end{aligned}$$

Block $\{D\}$ - $\{a, d\}$:

Darüber hinaus sind im skalaren Sektor noch die Beiträge zu den Nebendiagonalblöcken zu berechnen. Der für diese verantwortliche Term in der quadratischen Form ist durch

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \bar{e} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{an}{}_{lm} \partial^l \square \bar{e}^m{}_{\beta} D \right) \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \left((\bar{e}_b{}^{\beta} (\delta_a{}^p \delta_k{}^s - \delta_k{}^p \delta_a{}^s) + \bar{e}_k{}^{\beta} (\delta_a{}^s \delta_b{}^p - \delta_b{}^s \delta_a{}^p) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{e}_a{}^{\beta} (\delta_b{}^s \delta_k{}^p - \delta_k{}^s \delta_b{}^p) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left((\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{ak}) \bar{e}_r{}^{\beta} \right) v_p \right] \\
& \quad (\partial^k \partial_s a + (\square \delta_s^k - \partial^k \partial_s) d) \\
= & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} D \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \left((\delta_b{}^m (\delta_a{}^p \delta_k{}^s - \delta_k{}^p \delta_a{}^s) + \delta_k{}^m (\delta_a{}^s \delta_b{}^p - \delta_b{}^s \delta_a{}^p) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left((\varepsilon_a{}^{pms} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{pms} \eta_{ak}) \right) \right] \\
& \quad \left(- (2(\partial_u v_p) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_p) \square + v_p \partial^l \square) \right) \varepsilon^{an}{}_{lm} (\partial^k \partial_s a + (\square \delta_s^k - \partial^k \partial_s) d)
\end{aligned}$$

gegeben. Dies führt für den D - a -Beitrag auf

Komponente $D - a$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} D \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \left([(- (2(\partial_u v_a) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_a) \square + v_a \partial^l \square) + (\partial^l v_k) \partial^k \partial_a) \varepsilon^{an}{}_{lb} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon^{an}{}_{lm} (\partial^l v_a) \partial^m \partial_b \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (2v^n \partial_b \square + 5(\partial_k v^n) \partial^k \partial_b - (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n + (\partial_b v^n) \square) \right] \square a \\
= & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} D \left[\pm 2n^{(\pm)}{}_l{}^a (2(\partial_u v_a) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_a) \square + v_a \partial^l \square - (\partial^l v_k) \partial^k \partial_a) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^{n a}{}_l{}^m n^{(\pm)}{}_n{}^b (\partial^l v_a) \partial^m \partial_b \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm)}{}_n{}^b (2v^n \partial_b \square + 5(\partial_k v^n) \partial^k \partial_b - (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n + (\partial_b v^n) \square) \right] \square a .
\end{aligned} \tag{H.51}$$

Das D - d -Matrixelement berechnen wir wie bereits zuvor: Wir betrachten zunächst nur die \square -Komponente von d und ziehen von diesem Ausdruck dann das Matrixelement (H.51) ab.

Erstere ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} D \left[n^{(\pm) b}{}_n \left((2\delta_b{}^m \delta_a{}^p + \delta_a{}^m \delta_b{}^p) - \frac{2}{\gamma_k} \varepsilon_a{}^{pm}{}_b \right) \right. \\
 & \quad \left. \left(- (2(\partial_u v_p) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_p) \square + v_p \partial^l \square) \right) \right] \varepsilon^{an}{}_{lm} \square d \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} D \left[n^{(\pm) b}{}_n \left(2\varepsilon_{bl}{}^p + \frac{4}{\gamma_k} (\eta^{pm} \eta_{bl} - \delta_l^p \delta_b^n) \right) \right. \\
 & \quad \left. \left(- (2(\partial_u v_p) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_p) \square + v_p \partial^l \square) \right) \right] \square d \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} D \left[-4 \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm) p}{}_l (2(\partial_u v_p) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_p) \square + v_p \partial^l \square) \right] \square d,
 \end{aligned}$$

und wir erhalten somit

Komponente $D - d$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} D \left[\pm 2n^{(\pm) a}{}_l (2(\partial_u v_a) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_a) \square + v_a \partial^l \square + (\partial^l v_k) \partial^k \partial_a) - \varepsilon_{lm}{}^a n^{(\pm) b}{}_n (\partial^l v_a) \partial^m \partial_b \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm) b}{}_n (2v^n \partial_b \square + 3(\partial_k v^n) \partial^k \partial_b + (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n + 3(\partial_b v^n) \square) \right] \square d. \quad (\text{H.52})
 \end{aligned}$$

H.4.2 Der Vektor-Sektor

Auch diesen berechnen wir blockweise.

Block $\{A, D\}$ - $\{b, c\}$:

Dieser Anteil ist von der Form

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left(\partial_\beta \partial^{[a} A^{n]} + \frac{1}{2} \varepsilon^{an}{}_{lm} \varepsilon^m{}_{egh} \bar{e}^e{}_\beta \partial^l \partial^g D^h \right) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm) b}{}_n (\partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha) \right. \\
 &= \int d^4x \left(\partial_\beta \partial^{[a} A^{n]} + \frac{1}{2} [(\square \bar{e}^a{}_\beta - \partial^a \partial_\beta) \delta_h^n - (\square \bar{e}^n{}_\beta - \partial^n \partial_\beta) \delta_h^a] D^h \right) \\
 & \quad \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm) b}{}_n (\partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha) \right],
 \end{aligned}$$

und komponentenweise liefert er bis auf zweite und höhere Ableitungen in v_μ folgende Beiträge:

Komponente $A^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x (\partial_\beta \partial^{[a} A^{n]}) [-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm) b}] \partial_\alpha b^k \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} A^n \left\{ n^{(\pm) b} \left[\bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_k{}^\alpha + \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha + \bar{e}_k{}^\mu \bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_a{}^\mu \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_a{}^\beta \bar{e}_k{}^\alpha - \bar{e}_k{}^\mu \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_a{}^\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{ak}) \bar{e}_p{}^\mu \bar{e}_r{}^\beta \bar{e}_s{}^\alpha \right] \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm) a} \left[\bar{e}_n{}^\mu \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_k{}^\alpha + \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_n{}^\alpha + \bar{e}_k{}^\mu \bar{e}_n{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_n{}^\mu \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_n{}^\beta \bar{e}_k{}^\alpha - \bar{e}_k{}^\mu \bar{e}_b{}^\beta \bar{e}_n{}^\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_n{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{nk}) \bar{e}_p{}^\mu \bar{e}_r{}^\beta \bar{e}_s{}^\alpha \right] \right\} ((\partial_\beta v_\mu) \partial^a) \partial_\alpha b^k \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} A^n \left\{ n^{(\pm) b} \left[(\partial_k v_b) \partial^\alpha + \bar{e}_b{}^\alpha (\partial_a v_k) \partial^a - \bar{e}_b{}^\alpha (\partial_k v_a) \partial^a - (\partial_b v_k) \partial^\alpha - n^{(\pm) a} \cdot 0 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm) b} (\varepsilon_a{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{ak}) - n^{(\pm) a} (\varepsilon_n{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{nk}) \right] (\partial_r v_p) \partial^a \partial_s \right] \right\} b^k \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} A^n \left\{ n^{(\pm) b} \left[((\partial_k v_b) - (\partial_b v_k)) \square + ((\partial_a v_k) - (\partial_k v_a)) \partial^a \partial_b \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm) ak} \varepsilon_n{}^{prs} + \eta_{nk} n^{(\pm) b} \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s \right\} b^k, \tag{H.53}
\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, daß nach der partiellen Integration die Ableitung ∂_β , sofern sie nicht auf v_μ wirkt, mit ∂_α antisymmetrisiert wird und somit verschwindet.

Komponente $A^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x (\partial_\beta \partial^{[a} A^{n]}) \left[-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm) b} \right] \partial^k c_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} A^n \left\{ n^{(\pm) b} \left[\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_k^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_a^\alpha + \bar{e}_k^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_a^\alpha \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{ak}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right] \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) a} \left[\bar{e}_n^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_k^\alpha + \bar{e}_b^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_n^\alpha + \bar{e}_k^\mu \bar{e}_n^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_n^\mu \bar{e}_k^\beta \bar{e}_b^\alpha - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_n^\beta \bar{e}_k^\alpha - \bar{e}_k^\mu \bar{e}_b^\beta \bar{e}_n^\alpha \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_n^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{nk}) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \bar{e}_s^\alpha \right] \right\} \\
 & \quad \left((\partial_\beta v_\mu) \partial^a + (\partial^a v_\mu) \partial_\beta + v_\mu \partial^a \partial_\beta \right) \partial^k c_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} A^n \left\{ n^{(\pm) b} \left[(\partial^\alpha v_b) \partial_k - (\partial^\alpha v_k) \partial_b + \bar{e}_b^\alpha (2(\partial_a v_k) \partial^a + v_k \square) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial_k v_a) \partial^a - (\partial^a v_a) \partial_k - v_a \partial^a \partial_k \right] \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) a} \left[\bar{e}_n^\alpha \left((\partial_k v_b) \partial^a + (\partial^a v_b) \partial_k + v_b \partial^a \partial_k - (\partial_b v_k) \partial^a - (\partial^a v_k) \partial_b - v_k \partial^a \partial_b \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \bar{e}_b^\alpha \left((\partial_n v_k) \partial^a + (\partial^a v_k) \partial_n + v_k \partial^a \partial_n - (\partial_k v_n) \partial^a - (\partial^a v_n) \partial_k - v_n \partial^a \partial_k \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm) b} \varepsilon_b^{prs} \left((\partial_r v_p) \partial_k + (\partial_k v_p) \partial_r + v_p \partial_k \partial_r \right) + n^{(\pm) ak} \varepsilon_n^{prs} (\partial^a v_p) \partial_r \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - n^{(\pm) a} \varepsilon_b^{prs} v_p \partial^a \partial_r \eta_{nk} \right] \bar{e}_s^\alpha \right\} \partial^k c_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} A^n \left\{ n^{(\pm) b} \left[(\partial^\alpha v_b) \square - (\partial^\alpha v_k) \partial^k \partial_b \right] + n^{(\pm) a} \left[(\partial^a v_k) \partial^k \partial_a - (\partial^a v_a) \square \right] \right. \\
 & \quad \left. - \bar{e}_n^\alpha n^{(\pm) b} \left[(\partial_k v_b) \partial^k \partial^a + (\partial^a v_b) \square + v_b \partial^a \square \right] \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) a} \left[(\partial_k v_n) \partial^k \partial^a + (\partial^a v_n) \square + v_n \partial^a \square \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm) b} \varepsilon_b^{prs} \left(-(\partial_p v_r) \square + (\partial_k v_p) \partial^k \partial_r + v_p \partial_r \square \right) + n^{(\pm) ak} \varepsilon_n^{prs} (\partial^a v_p) \partial^k \partial_r \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - n^{(\pm) b} \varepsilon_b^{prs} (\partial_n v_p) \partial^a \partial_r \right] \bar{e}_s^\alpha \right\} c_\alpha, \tag{H.54}
 \end{aligned}$$

was sich unter anderem vermöge der Tatsache ergibt, daß Terme der Form $\partial_n v_k + v_k \partial_n$ und $(\partial^a v_k) \partial_n$ nach partieller Integration aufgrund der Divergenzfreiheit von A^n verschwinden. Dies gilt auch für einen Term der Form $(\partial_b v_k) \partial^k \partial^a + (\partial^a v_k) \partial^k \partial_b$, sofern er mit dem antisymmetrischen Tensor $n^{(\pm) a}{}^b$ kontrahiert wird.

Komponente $D^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left(\frac{1}{2} [(\square \bar{e}^a{}_\beta - \partial^a \partial_\beta) \delta^n{}_h - (\square \bar{e}^n{}_\beta - \partial^n \partial_\beta) \delta^a{}_h] D^h \right) [-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu n^{(\pm) b}{}_n] \partial_\alpha b^k \\
= & \int d^4x \frac{1}{2} D^h \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \right) [\bar{e}^a{}_\beta (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) - (\partial_\beta v_\mu) \partial^a] \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{hbck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \right) [\bar{e}^n{}_\beta (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) - (\partial_\beta v_\mu) \partial^n] \right\} \partial_\alpha b^k \\
= & \int d^4x \frac{1}{2} D^h \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \right) \bar{e}^a{}_\beta (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{hbck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \right) \bar{e}^n{}_\beta (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) \right. \\
& \quad \left. - [n^{(\pm) b}{}_h \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \right) (\partial_\beta v_\mu) \partial^a - n^{(\pm) b}{}_n \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{hbck}^{(\gamma_k)} \bar{e}^c{}_\nu \right) (\partial_\beta v_\mu) \partial^n] \right\} \partial_\alpha b^k \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} D^h \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \left[2(\bar{e}_k{}^\mu \bar{e}_b{}^\alpha - \bar{e}_b{}^\mu \bar{e}_k{}^\alpha) + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{kb}{}^{ps} \bar{e}_p{}^\mu \bar{e}_s{}^\alpha \right] (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left[(\delta_h{}^n \bar{e}_b{}^\alpha - \delta_b{}^n \bar{e}_h{}^\alpha) (2(\partial^m v_k) \partial_m + v_k \square) + \delta_k{}^n (\bar{e}_h{}^\alpha (2(\partial^m v_b) \partial_m + v_b \square) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \bar{e}_b{}^\alpha (2(\partial^m v_h) \partial_m + v_h \square)) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bk} \varepsilon_h{}^{pns} - \eta_{hk} \varepsilon_b{}^{pns}) (2(\partial^m v_p) \partial_m + v_p \square) \bar{e}_s{}^\alpha \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[n^{(\pm) b}{}_h \left((\partial_k v_b) \partial^\alpha - (\partial_b v_k) \partial^\alpha + \bar{e}_b{}^\alpha ((\partial_a v_k) \partial^a - (\partial_k v_a) \partial^a) - \frac{1}{\gamma_k} \cdot 0 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left(0 - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_h{}^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{prs} \eta_{hk}) (\partial_r v_p) \partial^n \bar{e}_s{}^\alpha \right) \right] \right\} \partial_\alpha b^k \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} D^h \left\{ \left[n^{(\pm) b}{}_h (4(\partial^m v_k) \partial_m \partial_b + 2v_k \partial_b \square) - \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm) b}{}_h \varepsilon_b{}^{ps}{}_k (2(\partial^m v_p) \partial_m \partial_s + v_p \partial_s \square) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[n^{(\pm) b}{}_h (2(\partial^m v_k) \partial_m \partial_b + v_k \partial_b \square) - 0 + n^{(\pm) b}{}_k v_b \partial_h \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n^{(\pm) b}{}_k (2(\partial^m v_h) \partial_m \partial_b + v_h \partial_b \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(-n^{(\pm) b}{}_{nk} \varepsilon_h{}^{nps} - \eta_{hk} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{nps} \right) (2(\partial^m v_p) \partial_m \partial_s + v_p \partial_s \square) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[n^{(\pm) b}{}_h [((\partial_k v_b) - (\partial_b v_k)) \square + ((\partial_a v_k) - (\partial_k v_a)) \partial^a \partial_b] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm) b}{}_{nk} \varepsilon_h{}^{prs} - \eta_{hk} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_r v_p) \partial^n \partial_s \right] \right\} b^k \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} D^h \left\{ \left[n^{(\pm) b}{}_h ((\partial^m v_k) \partial_m \partial_b + (\partial_k v_m) \partial^m \partial_b + v_k \partial_b \square + (\partial_b v_k) \square - (\partial_k v_b) \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n^{(\pm) b}{}_k (2(\partial^m v_h) \partial_m \partial_b + v_h \partial_b \square + (\partial_h v_b) \square) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left[(n^{(\pm) b}{}_h \varepsilon_b{}^{ps}{}_k + n^{(\pm) b}{}_{nk} \varepsilon_h{}^{nps} + \eta_{hk} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{nps}) (2(\partial^m v_p) \partial_m \partial_s + v_p \partial_s \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (n^{(\pm) b}{}_{nk} \varepsilon_h{}^{prs} - \eta_{hk} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^n \partial_s \right] \right\} b^k \tag{H.55}
\end{aligned}$$

Vermöge der Kombination algebraischer Beziehungen aus den Berechnungen von (H.54) und (H.55) ergibt sich die letzte Komponente dieses Unterblocks zu

Komponente $D^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left(\frac{1}{2} [(\square \bar{e}_\beta^a - \partial^a \partial_\beta) \delta_h^n - (\square \bar{e}_\beta^n - \partial^n \partial_\beta) \delta_h^a] D^h \right) [-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c v_\mu n^{(\pm) b}] \partial^k c_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{1}{2} D^h \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \right) [\bar{e}_\beta^a (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) \right. \\
 & \quad \left. - ((\partial^a v_\mu) \partial_\beta + (\partial_\beta v_\mu) \partial^a + v_\mu \partial^a \partial_\beta)] \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{hbck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \right) [\bar{e}_\beta^n (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) \right. \\
 & \quad \left. - ((\partial^n v_\mu) \partial_\beta + (\partial_\beta v_\mu) \partial^n + v_\mu \partial^n \partial_\beta)] \right\} \partial^k c_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{1}{2} D^h \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \right) \bar{e}_\beta^a (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{hbck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \right) \bar{e}_\beta^n (2(\partial^m v_\mu) \partial_m + v_\mu \square) \right. \\
 & \quad \left. - [n^{(\pm) b}{}_h \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{abck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \right) ((\partial^a v_\mu) \partial_\beta + (\partial_\beta v_\mu) \partial^a + v_\mu \partial^a \partial_\beta) \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left(-\varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} K_{hbck}^{(\gamma_k)} \bar{e}_\nu^c \right) ((\partial^n v_\mu) \partial_\beta + (\partial_\beta v_\mu) \partial^n + v_\mu \partial^n \partial_\beta)] \right\} \partial^k c_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} D^h \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \left[2\bar{e}_b^\alpha (2(\partial^m v_k) \partial_m + v_k \square) + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{kb}^{ps} (2(\partial^m v_p) \partial_m + v_p \square) \bar{e}_s^\alpha \right] \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left[(\delta_h^n \bar{e}_b^\alpha - \delta_b^n \bar{e}_h^\alpha) (2(\partial^m v_k) \partial_m + v_k \square) + \delta_k^n ((2(\partial^m v_b) \partial_m + v_b \square) \bar{e}_h^\alpha) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (2(\partial^m v_h) \partial_m + v_h \square) \bar{e}_b^\alpha \right] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bk} \varepsilon_h^{pns} - \eta_{hk} \varepsilon_b^{pns}) (2(\partial^m v_p) \partial_m + v_p \square) \bar{e}_s^\alpha \right] \\
 & \quad \left. - [n^{(\pm) b}{}_h ((\partial^\alpha v_b) \partial_k - (\partial^\alpha v_k) \partial_b) \right. \\
 & \quad \left. + \bar{e}_b^\alpha (2(\partial^a v_k) \partial_a + v_k \square - (\partial_k v_a) \partial^a - (\partial^a v_a) \partial_k - v_a \partial^a \partial_k) \right] \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n \left(\bar{e}_h^\alpha ((\partial_k v_b) \partial^n + (\partial^n v_b) \partial_k + v_b \partial^n \partial_k - (\partial_b v_k) \partial^n - (\partial^n v_k) \partial_b - v_k \partial^n \partial_b) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \bar{e}_b^\alpha ((\partial_h v_k) \partial^n + (\partial^n v_k) \partial_h + v_k \partial^n \partial_h - (\partial_k v_h) \partial^n - (\partial^n v_h) \partial_k - v_h \partial^n \partial_k) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(n^{(\pm) b}{}_h [0 - \varepsilon_b^{prs} ((\partial_r v_p) \partial_k + (\partial_k v_p) \partial_r + v_p \partial_k \partial_r)] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - n^{(\pm) b}{}_{nk} \varepsilon_h^{prs} (\partial^n v_p) \partial_r + n^{(\pm) b}{}_n \eta_{hk} \varepsilon_b^{prs} v_p \partial^n \partial_r \right) \bar{e}_s^\alpha \right\} \partial^k c_\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} D^h \left\{ n^{(\pm) \alpha}{}_h [v_k \partial^k \square + (\partial^k v_k) \square + (\partial^k v_a) \partial^a \partial_k] \right. \\
& + \bar{e}_h^\alpha n^{(\pm) b}{}_k [- (\partial^m v_b) \partial_m \partial^k + (\partial^k v_b) \square] \\
& + n^{(\pm) \alpha}{}_n [(\partial^m v_h) \partial_m \partial^n - (\partial^n v_h) \square] + n^{(\pm) b}{}_h [(\partial^\alpha v_k) \partial^k \partial_b - (\partial^\alpha v_b) \square] \\
& + \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \varepsilon_b^{prs} ((\partial^m v_p) \partial_m \partial_r + (\partial_p v_r) \square) \right. \\
& + n^{(\pm) b}{}_n [- \varepsilon_{hb}^{ps} (2(\partial^m v_p) \partial_m \partial^n + v_p \partial^n \square) + \varepsilon_b^{nps} (\partial_h v_p) \square \\
& \quad + \varepsilon_b^{prs} (\partial_h v_p) \partial_r \partial^n] \\
& \left. - n^{(\pm) nk} \varepsilon_h^{prs} (\partial^n v_p) \partial_r \partial^k \right\} \bar{e}_s^\alpha \} c_\alpha . \tag{H.56}
\end{aligned}$$

Dabei erklären die bereits im Anschluß an die Rechnung (H.54) gemachten Bemerkungen auch hier das Verschwinden der entsprechenden Terme.

Block $\{A, D\}$ - $\{d\}$:

Antisymmetrisiert man statt der Felder die Tensorstruktur zwischen diesen, so erhält man diese Beiträge aus folgendem Teil der quadratischen Form:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} (\partial_r \partial^a A^n + (\square \delta_r^a - \partial^a \partial_r) D^n) \left\{ \left[[n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon^{pruc} \varepsilon_{abkc} - n^{(\pm) b}{}_a \varepsilon^{pruc} \varepsilon_{nbkc}] \varepsilon_{uvw}^k \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm) b}{}_a (\varepsilon_n^{pru} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{pru} \eta_{nk}) - n^{(\pm) b}{}_n (\varepsilon_a^{pru} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{pru} \eta_{ak})] \varepsilon_{uvw}^k \right] v_p \right\} \partial^v d^w
\end{aligned}$$

Zunächst berechnen wir

Komponente $A^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4 \bar{e} \frac{A^n}{2} \left\{ \varepsilon^k{}_{uvw} \left[n^{(\pm) b}{}_n (\delta_a^u (\delta_b^p \delta_k^r - \delta_b^r \delta_k^p) + \delta_b^u (\delta_k^p \delta_a^r - \delta_k^r \delta_a^p)) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - n^{(\pm) b}{}_a (\delta_n^u (\delta_b^p \delta_k^r - \delta_b^r \delta_k^p) + \delta_b^u (\delta_k^p \delta_n^r - \delta_k^r \delta_n^p)) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm) b}{}_a (\eta_{nv} (\delta_w^p \delta_b^r - \delta_b^p \delta_w^r) + \eta_{nw} (\delta_b^p \delta_v^r - \delta_b^p \delta_v^r)) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \delta_n^r (\delta_v^p \eta_{bw} - \delta_w^p \eta_{bv}) + \delta_n^p (\delta_w^r \eta_{bv} - \delta_v^r \eta_{bw}) \right] \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n (\eta_{av} (\delta_w^p \delta_b^r - \delta_b^p \delta_w^r) + \eta_{aw} (\delta_b^p \delta_v^r - \delta_b^p \delta_v^r)) \right. \\
 & \quad \left. + \delta_a^r (\delta_v^p \eta_{bw} - \delta_w^p \eta_{bv}) + \delta_a^p (\delta_w^r \eta_{bv} - \delta_v^r \eta_{bw}) \right] \\
 & \quad \left. ((\partial_r v_p) \partial^a + (\partial^a v_p) \partial_r + v_p \partial_r \partial^a) \right\} \partial^v d^w \\
 \\
 = & \int d^4 \bar{e} \frac{A^n}{2} \left\{ [\varepsilon_a^k{}_{vw} n^{(\pm) b}{}_n (\partial^a v_k) \partial_b + n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b^k{}_{vw} ((\partial_k v_a) \partial^a - v_k \square - 2(\partial^a v_k) \partial_a) \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon_n^k{}_{vw} n^{(\pm) b}{}_a (\partial_k v_b) \partial^a + \varepsilon_b^k{}_{vw} n^{(\pm) b}{}_a (\partial_k v_n) \partial^a] \partial^v \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm) b}{}_a (\eta_{nw} ((\partial_v v_b) \partial^v \partial^a + (\partial^a v_b) \square + v_b \partial^a \square) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \eta_{bw} (- (\partial_v v_n) \partial^v \partial^a - (\partial^a v_n) \square - v_n \partial^a \square) \right] \right. \\
 & \quad \left. - n^{(\pm) b}{}_n ((\partial_b v_w) \square - (\partial^a v_w) \partial_a \partial_b + \eta_{bw} ((\partial^a v_v) \partial^v \partial_a - (\partial^a v_a) \square)) \right] \left. \right\} d^w .
 \end{aligned}
 \tag{H.57}$$

Zur Bestimmung des D^m - b^k -Beitrags integrieren wir zunächst wieder nur den \square -Operator partiell gemäß

$$\begin{aligned}
& \int d^4 x \frac{\bar{e}}{2} (\square D^n) \left\{ \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^{pau} \varepsilon_{abkc} - n^{(\pm)}{}_a{}^b \varepsilon^{pau} \varepsilon_{nbkc} \right] \varepsilon^k{}_{uvw} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}{}_a{}^b (\varepsilon_n{}^{pau} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{pau} \eta_{mk}) + n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_b{}^{pau} \eta_{ak} \right] \varepsilon^k{}_{uvw} \right\} \partial^v d^w \\
= & \int d^4 x \frac{\bar{e}}{2} D^n \left\{ \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_b{}^k{}_{vw} (-2(2(\partial_m v_k) \partial^m + v_k \square)) + \varepsilon_n{}^a{}_{vw} n^{(\pm)}{}_a{}^b (2(\partial_m v_b) \partial^m + v_b \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_b{}^k{}_{vw} (2(\partial_m v_k) \partial^m + v_k \square) \pm 2n^{(\pm)}{}_{vw} (2(\partial_m v_n) \partial^m + v_n \square) \right] \partial^v \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[-\eta_{mw} n^{(\pm)}{}_v{}^b (2(\partial_k v_b) \partial^k \partial^v + v_b \partial^v \square) - n^{(\pm)}{}_w{}^b (\partial_n v_b) \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2n^{(\pm)}{}_w{}^b (2(\partial_k v_n) \partial^k \partial_b + v_n \partial_b \square) - n^{(\pm)}{}_{nw} (2(\partial_k v_v) \partial^v \partial^k + v_v \partial^v \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)}{}_n{}^b (2(\partial_k v_w) \partial^k \partial_b + v_w \partial_b \square) \right] \right\} d^w
\end{aligned}$$

und erhalten damit nach Subtraktion von (H.57) mit der Ersetzung $A^m \rightarrow D^m$

Komponente $D^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4 x \frac{\bar{e}}{2} D^n \left\{ \left[-n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_b{}^k{}_{vw} (\partial_k v_a) \partial^a + \varepsilon_n{}^k{}_{vw} n^{(\pm)}{}_a{}^b (\partial_k v_b) \partial^a \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_n{}^a{}_{vw} n^{(\pm)}{}_a{}^b (2(\partial_m v_b) \partial^m + v_b \square) - \varepsilon_a{}^k{}_{vw} n^{(\pm)}{}_n{}^b (\partial^a v_k) \partial_b \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \varepsilon_b{}^k{}_{vw} n^{(\pm)}{}_a{}^b (\partial_k v_n) \partial^a \pm 2n^{(\pm)}{}_{vw} (2(\partial_m v_n) \partial^m + v_n \square) \right] \partial^v \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}{}_a{}^b \eta_{mw} ((\partial_v v_b) \partial^v \partial^a - (\partial^a v_b) \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)}{}_{aw} (-(\partial_n v^a) \square - 3(\partial_k v_n) \partial^k \partial^a + (\partial^a v_n) \square - v_n \partial^a \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)}{}_n{}^b ((\partial^a v_w) \partial_a \partial_b + v_w \partial_b \square + (\partial_b v_w) \square) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n^{(\pm)}{}_{nw} ((\partial_a v_v) \partial^v \partial^a + v_a \partial^a \square + (\partial^a v_a) \square) \right] \right\} d^w. \quad (\text{H.58})
\end{aligned}$$

Block $\{B, C\}$ - $\{b, c\}$:

Diese Beiträge ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
& \int d^4 x \left(\partial^{[a} \varepsilon^{n]}{}_{efg} \bar{e}^e{}_{\beta} \partial^f B^g + \frac{1}{2} \varepsilon^{an}{}_{lm} \partial_\beta \partial^l C^m \right) \\
& \quad \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b K_{abkc}^{(\gamma_k)} \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \bar{e}^c{}_{\nu} v_\mu \right] (\partial_\alpha b^k + \partial^k c_\alpha)
\end{aligned}$$

zu

Komponente $B^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} B^g \left\{ \left[n^{(\pm)}_n{}^b \left(\varepsilon_{abkc} \varepsilon^{pesc} \left(\varepsilon^n_{efg} \partial^a - \varepsilon^a_{efg} \partial^n \right) \partial^f \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon^n_{efg} \left(n^{(\pm)}_n{}^b \left(\varepsilon_a{}^{pes} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{pes} \eta_{ak} \right) \right. \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. \left. - n^{(\pm)}_a{}^b \left(\varepsilon_n{}^{pes} \eta_{bk} - \varepsilon_b{}^{pes} \eta_{nk} \right) \right) \partial^a \partial^f \right] v_p \right\} \partial_s b^k \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} B^g \left\{ \left[n^{(\pm)}_n{}^b \left[\varepsilon_{abkg} \left((\partial^a v^n) \square + (\partial^f v^n) \partial_f \partial^a + v^n \partial^a \square + (\partial^n v_f) \partial^f \partial^a \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - (\partial^a v_f) \partial^f \partial^n - (\partial^n v^a) \square - (\partial^f v^a) \partial_f \partial^n - v^a \partial^n \square \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \varepsilon_{abk}{}^n \left(-(\partial_g v_f) \partial^f \partial^a - (\partial^a v_g) \square - (\partial^f v_g) \partial_f \partial^a - v_g \partial^a \square \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \varepsilon_{abkf} \left(-(\partial^f v_g) \partial^n \partial^a - (\partial_g v^a) \partial^n \partial^f \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}_{nk} \left(-v_n \partial_g \square \right) + n^{(\pm)}_{ga} \left((\partial_k v^a) \square - (\partial^a v_k) \square - (\partial^s v_k) \partial_s \partial^a - v_k \partial^a \square \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)}_k{}^s \left(2(\partial^a v_g) \partial_a \partial_s + v_g \partial_s \square \right) - n^{(\pm)}_g{}^s \left(\partial_k v_a \partial^a \partial_s \right) \right] \right\} b^k \\
 = & \int \frac{\bar{e}}{2} B^g \left\{ \varepsilon_{gbak} n^{(\pm)}_n{}^b \left((\partial^n v^a) \square - (\partial^a v^n) \square + v^a \partial^n \square - v^n \partial^a \square + (\partial^f v^a) \partial_f \partial^n \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial^f v^n) \partial_f \partial^a + (\partial^a v_f) \partial^f \partial^n - (\partial^n v_f) \partial^f \partial^a \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_{bafk} n^{(\pm)}_n{}^b \left((\partial^f v_g) \partial^n \partial^a + (\partial_g v^a) \partial^n \partial^f \right) \right. \\
 & \quad \left. \pm 2n^{(\pm)}_{ak} \left(-(\partial_g v_f) \partial^f \partial^a - (\partial^a v_g) \square - (\partial^f v_g) \partial_f \partial^a - v_g \partial^a \square \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}_{nk} \left((\partial_g v^n) \square + v_g \partial^n \square + 2(\partial^a v_g) \partial_a \partial^n \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + n^{(\pm)}_{ga} \left((\partial_k v^a) \square - (\partial^a v_k) \square - (\partial^s v_k) \partial_s \partial^a - v_k \partial^a \square - (\partial_k v_s) \partial^s \partial^a \right) \right] \right\} b^k
 \end{aligned} \tag{H.59}$$

(ein Ausdruck der Form $n^{(\pm)}_a{}^b \left((\partial^a v_k) \partial_b + (\partial_b v_k) \partial^a + v_k \partial^a \partial_b \right)$ verschwindet aufgrund der Antisymmetrie von $n^{(\pm)}$),

Komponente $B^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B^g \left\{ n^{(\pm) b} \left[\varepsilon^s{}_{bkc} \left[((\partial^n v_f) \partial^f + (\partial^f v_f) \partial^n + v_f \partial^f \partial^n) \delta_g^c \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - ((\partial^n v_g) \partial^c + (\partial^c v_g) \partial^n + v_g \partial^n \partial^c) \right] \partial^k \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \eta^{ns} \varepsilon_{abkc} \left[- ((\partial^a v_f) \partial^f + (\partial^f v_f) \partial^a + v_f \partial^f \partial^a) \delta_g^c \partial^k \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_{abkg} \left[((\partial^a v^n) \partial^s + (\partial^s v^n) \partial^a + v^n \partial^s \partial^a) \partial^k \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - ((\partial^n v^a) \partial^s + (\partial^s v^a) \partial^n + v^a \partial^s \partial^n) \partial^k \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \delta_g^s \varepsilon_{abkf} \left((\partial^n v^a) \partial^f + (\partial^f v^a) \partial^n + v^a \partial^f \partial^n \right) \partial^k \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_{abk}^n \left[\delta_g^s \left((\partial^a v_f) \partial^f + (\partial^f v_f) \partial^a + v_f \partial^f \partial^a \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - ((\partial^a v_g) \partial^s + (\partial^s v_g) \partial^a + v_g \partial^s \partial^a) \right] \partial^k \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[\delta_g^s n^{(\pm) nk} \left(- (\partial^a v^n) \partial_a \partial^k + (\partial^k v^n) \square \right) + n^{(\pm) ga} \left((\partial^s v^a) \square - (\partial^s v^k) \partial_k \partial^a \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm) ks} \left(- 2(\partial^a v_g) \partial_a \partial^k - v_g \partial^k \square \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm) gs} \left(- (\partial_k v_a) \partial^a \partial^k - (\partial^a v_a) \square - v_a \partial^a \square \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm) bs} \left((\partial_k v_g) \partial^k \partial_b + (\partial_b v_g) \square + v_g \partial_b \square \right) \right] \right\} c_s \\
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B^g \left\{ \left[\varepsilon_{gbk}^s n^{(\pm) b} \left((\partial^n v_f) \partial^f + (\partial^f v_f) \partial^n + v_f \partial^f \partial^n \right) \partial^k + \varepsilon_{bck}^s n^{(\pm) b} \left(\partial^c v_g \right) \partial^k \partial^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_{gbak} n^{(\pm) bs} \left(\partial^a v_f \right) \partial^f \partial^k + \varepsilon_{gbak} n^{(\pm) b} \left(\partial^s v^a \right) \partial^k \partial^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \delta_g^s \varepsilon_{bfak} n^{(\pm) b} \left(\partial^f v^a \right) \partial^k \partial^n \pm 2 \delta_g^s n^{(\pm) ak} \left(\partial^a v_f \right) \partial^f \partial^k \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[\delta_g^s n^{(\pm) nk} \left(- (\partial^a v^n) \partial_a \partial^k + (\partial^k v^n) \square \right) + n^{(\pm) ga} \left((\partial^s v^a) \square - (\partial^s v^k) \partial_k \partial^a \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm) ks} \left(- (\partial^a v_g) \partial_a \partial^k + (\partial^k v_g) \square \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm) gs} \left(- (\partial_k v_a) \partial^a \partial^k - (\partial^a v_a) \square - v_a \partial^a \square \right) \right] \right\} c_s ,
\end{aligned} \tag{H.60}$$

Komponente $C^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} C^m \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^{prsc} \left(\varepsilon_{abkc} - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ak}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bk}) \right) \right. \\
 & \quad \left. ((\partial_r v_p)\partial^l + (\partial^l v_p)\partial_r + v_p \partial_r \partial^l) \right\} \varepsilon^{an}{}_{lm} \partial_s b^k \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} C^m \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^{an}{}_{lm} ((\partial_a v_k)\partial_b + (\partial_k v_b)\partial_a - (\partial_k v_a)\partial_b - (\partial_b v_k)\partial_a) \partial^l \right. \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)}{}_{nk} ((\partial_m v^n) - (\partial^n v_m)) \square + ((\partial^n v_l) - (\partial_l v^n)) \partial^l \partial_m \\
 & \quad \quad + ((\partial_l v_m) - (\partial_m v_l)) \partial^l \partial^n \\
 & \quad \quad \left. + n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_m{}^n{}_{lk} \varepsilon_b{}^{prs} (\partial_p v_r) \partial^l \partial_s] \right\} b^k \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} C^m \left\{ \varepsilon_m{}^na n^{(\pm)}{}_n{}^b ((\partial_a v_k) - (\partial_k v_a)) \partial^l \partial_b \right. \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)}{}_{nk} ((\partial_m v^n) - (\partial^n v_m)) \square + ((\partial_l v_m) - (\partial_m v_l)) \partial^l \partial^n \\
 & \quad \quad \left. + n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_m{}^n{}_{lk} \varepsilon_b{}^{prs} (\partial_p v_r) \partial^l \partial_s] \right\} b^k \tag{H.61}
 \end{aligned}$$

und schließlich

Komponente $C^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} C^m \left\{ [n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^{an}{}_{lm} ((\partial_k v_b)\partial^l + (\partial^l v_b)\partial_k + v_b \partial^l \partial_k) \right. \\
 & \quad \quad - (\partial_b v_k)\partial^l - (\partial^l v_k)\partial_b - v_k \partial_b \partial^l) \\
 & \quad \quad + n^{(\pm)}{}_n{}^a \varepsilon^{bn}{}_{lm} ((\partial_b v_k)\partial^l + (\partial^l v_k)\partial_b + v_k \partial^l \partial_b \\
 & \quad \quad \quad \left. - (\partial_k v_b)\partial^l - (\partial^l v_b)\partial_k - v_b \partial_k \partial^l)] \partial^k \right. \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)}{}_{nk} \delta_m{}^a ((\partial^n v_l) - (\partial_l v^n)) \partial^l \partial^k - (\partial^l v^n) \partial_l \partial^k - v^n \partial^k \square] \\
 & \quad \quad \left. + n^{(\pm)}{}_k{}^a (-2(\partial_l v_m) \partial^l \partial^k - v_m \partial^k \square) - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_m{}^n{}_{lk} \varepsilon_b{}^{pra} (\partial^l v_p) \partial^k \partial_r] \right\} c_a \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} C^m \left\{ [\varepsilon_m{}^n{}_l{}^a n^{(\pm)}{}_n{}^b ((\partial_b v_k)\partial^k \partial^l + (\partial^l v_k)\partial^k \partial_b + v_k \partial^k \partial^l \partial_b) \right. \\
 & \quad \quad - (\partial_k v_b)\partial^k \partial^l - (\partial^l v_b)\square - v_b \partial^l \square] \\
 & \quad \quad + \varepsilon_m{}^nb n^{(\pm)}{}_n{}^a ((\partial_b v^l)\square + v^l \partial_b \square + (\partial_k v^l)\partial^k \partial_b) \\
 & \quad \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)}{}_{nk} \delta_m{}^a ((\partial^n v_l) - 2(\partial_l v^n)) \partial^l \partial^k - v^n \partial^k \square] \\
 & \quad \quad \left. + n^{(\pm)}{}_k{}^a (-2(\partial_l v_m) \partial^l \partial^k - v_m \partial^k \square) - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_m{}^n{}_{lk} \varepsilon_b{}^{pra} (\partial^l v_p) \partial^k \partial_r] \right\} c_a .
 \end{aligned}$$

Block $\{B, C\}$ - $\{d\}$:

Hier ist der Ausdruck

$$\int d^4x \bar{e} \left(\partial^{[a} \varepsilon^{n]}_{efg} \bar{e}^e_{\beta} \partial^f B^g + \frac{1}{2} \varepsilon^{an}_{lm} \partial_{\beta} \partial^l C^m \right) \left[n^{(\pm)}_{\ n}{}^b \left(\bar{e}_a^{\mu} \bar{e}_b^{\beta} \bar{e}_k^{\alpha} + \bar{e}_b^{\mu} \bar{e}_k^{\beta} \bar{e}_a^{\alpha} + \bar{e}_k^{\mu} \bar{e}_a^{\beta} \bar{e}_b^{\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{e}_a^{\mu} \bar{e}_k^{\beta} \bar{e}_b^{\alpha} - \bar{e}_b^{\mu} \bar{e}_a^{\beta} \bar{e}_k^{\alpha} - \bar{e}_k^{\mu} \bar{e}_b^{\beta} \bar{e}_a^{\alpha} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\varepsilon_a^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{ak} \right) \bar{e}_p^{\mu} \bar{e}_r^{\beta} \bar{e}_s^{\alpha} \right] v_{\mu} \\ \left(\varepsilon^k_{uvw} \bar{e}_u^{\alpha} \partial^v d^w \right),$$

zu berechnen, der auf die folgenden beiden Komponenten führt:

Komponente $B^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} B^g \left[n^{(\pm)}{}_n{}^b \left(\delta_k^u (\bar{e}_a^\mu \delta_b^e - \bar{e}_b^\mu \delta_a^e) + \delta_a^u (\bar{e}_b^\mu \delta_k^e - \bar{e}_k^\mu \delta_b^e) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \delta_b^u (\bar{e}_k^\mu \delta_a^e - \bar{e}_a^\mu \delta_k^e) - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{peu} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{peu} \eta_{ak}) \bar{e}_p^\mu \right) \right] \\
 & \quad \left[\varepsilon_{efg}^n ((\partial^a v_\mu) \partial^f + (\partial^f v_\mu) \partial^a + v_\mu \partial^a \partial^f) \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon_{efg}^a ((\partial^n v_\mu) \partial^f + (\partial^f v_\mu) \partial^n + v_\mu \partial^n \partial^f) \right] \varepsilon_{uvw}^k \partial^v d^w \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} B^g \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b \left[((\partial^u v_b) \partial^f + (\partial^f v_b) \partial^u + v_b \partial^u \partial^f) \varepsilon_{kfg}^n \varepsilon_{uvw}^k \right. \right. \\
 & \quad - ((\partial^u v_k) \partial^f + (\partial^f v_k) \partial^u + v_k \partial^u \partial^f) \varepsilon_{bfg}^n \varepsilon_{uvw}^k \\
 & \quad - ((\partial^n v_b) \partial^f + (\partial^f v_b) \partial^n + v_b \partial^n \partial^f) \varepsilon_{kfg}^a \varepsilon_{avw}^k \\
 & \quad \left. + ((\partial^n v_k) \partial^f + (\partial^f v_k) \partial^n + v_k \partial^n \partial^f) \varepsilon_{bfg}^a \varepsilon_{avw}^k \right] \partial^v \\
 & \quad + n^{(\pm)}{}_n{}^u \left[((\partial^a v_k) \partial^f + (\partial^f v_k) \partial^a + v_k \partial^a \partial^f) \varepsilon_{afg}^n \right. \\
 & \quad - ((\partial^a v_a) \partial^f + (\partial^f v_a) \partial^a + v_a \partial^a \partial^f) \varepsilon_{kfg}^n \\
 & \quad - ((\partial^n v_k) \partial^f + (\partial^f v_k) \partial^n + v_k \partial^n \partial^f) \cdot 0 \\
 & \quad \left. + ((\partial^n v_a) \partial^f + (\partial^f v_a) \partial^n + v_a \partial^n \partial^f) \varepsilon_{kfg}^a \right] \varepsilon_{uvw}^k \partial^v \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} \left[(n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon_a^{peu} \varepsilon_{efg}^n \varepsilon_{uvw}^k - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_b^{peu} \varepsilon_{efg}^n \varepsilon_{auvw}) \right. \\
 & \quad \quad \left. ((\partial^a v_p) \partial^f + (\partial^f v_p) \partial^a + v_p \partial^a \partial^f) \right. \\
 & \quad \left. - (n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon_a^{peu} \varepsilon_{efg}^a \varepsilon_{uvw}^k - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_b^{peu} \varepsilon_{kefg}^k \varepsilon_{uvw}^k) \right. \\
 & \quad \left. ((\partial^n v_p) \partial^f + (\partial^f v_p) \partial^n + v_p \partial^n \partial^f) \right] \partial^v \left. \right\} d^w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B^g \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b [(\partial^u v_b) \partial^f (-\delta^n_u \eta_{fv} \eta_{gw} - \delta^n_v \eta_{fw} \eta_{gu} - \delta^n_w \eta_{fu} \eta_{gv} + \delta^n_u \eta_{fw} \eta_{gv} \right. \\
& \quad \left. + \delta^n_v \eta_{fu} \eta_{gw} + \delta^n_w \eta_{fv} \eta_{gu}) - (\partial^u v_k) \partial^f \varepsilon^n_{bfg} \varepsilon^k_{uvw} \right. \\
& \quad - ((\partial^n v_b) \partial^f + (\partial^f v_b) \partial^n + v_b \partial^n \partial^f) (-2(\eta_{fv} \eta_{gw} - \eta_{fw} \eta_{gv})) \\
& \quad + ((\partial^n v_k) \partial^f + (\partial^f v_k) \partial^n + v_k \partial^n \partial^f) \\
& \quad \left(-\delta_b^k \eta_{fv} \eta_{gw} - \eta_{bv} \eta_{fw} \delta_g^k - \eta_{bw} \delta_f^k \eta_{gv} + \delta_b^k \eta_{fw} \eta_{gv} \right. \\
& \quad \left. + \eta_{bv} \delta_f^k \eta_{gw} + \eta_{bw} \eta_{fv} \delta_g^k \right)] \partial^v \\
& + n^{(\pm)}_n{}^u [0 - ((\partial^a v_a) \partial^f + (\partial^f v_a) \partial^a + v_a \partial^a \partial^f) \\
& \quad \left(-\delta^n_u \eta_{fv} \eta_{gw} - \delta^n_v \eta_{fw} \eta_{gu} - \delta^n_w \eta_{fu} \eta_{gv} + \delta^n_u \eta_{fw} \eta_{gv} \right. \\
& \quad \left. + \delta^n_v \eta_{fu} \eta_{gw} + \delta^n_w \eta_{fv} \eta_{gu} \right) \\
& \quad + ((\partial^n v_a) \partial^f + (\partial^f v_a) \partial^n + v_a \partial^n \partial^f) \\
& \quad \left(-\delta^a_u \eta_{fv} \eta_{gw} - \delta^a_v \eta_{fw} \eta_{gu} - \delta^a_w \eta_{fu} \eta_{gv} + \delta^a_u \eta_{fw} \eta_{gv} \right. \\
& \quad \left. + \delta^a_v \eta_{fu} \eta_{gw} + \delta^a_w \eta_{fv} \eta_{gu} \right)] \partial^v \\
& - \frac{1}{\gamma_k} \left\{ [n^{(\pm)}_{nk} (\delta_a^k \delta^p_v \delta^e_w + \eta_{av} \delta^p_w \eta^{ek} + \eta_{aw} \eta^{pk} \delta^e_v - \delta_a^k \delta^p_w \delta^e_v \right. \\
& \quad \left. - \eta_{av} \eta^{pk} \delta^e_w - \eta_{aw} \delta^p_v \eta^{ek}) \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm)}_n{}^b (\eta_{ba} \delta^p_v \delta^e_w + \eta_{bv} \delta^p_w \delta^e_a + \eta_{bw} \delta^p_a \delta^e_v - \eta_{ba} \delta^p_w \delta^e_v \right. \\
& \quad \left. - \eta_{bv} \delta^p_a \delta^e_w - \eta_{bw} \delta^p_v \delta^e_a)] \varepsilon^n_{efg} ((\partial^a v_p) \partial^f + (\partial^f v_p) \partial^a + v_p \partial^a \partial^f) \right. \\
& \quad - [n^{(\pm)}_{nk} (\delta_a^k \delta^p_v \delta^e_w + \eta_{av} \delta^p_w \eta^{ek} + \eta_{aw} \eta^{pk} \delta^e_v - \delta_a^k \delta^p_w \delta^e_v \\
& \quad \left. - \eta_{av} \eta^{pk} \delta^e_w - \eta_{aw} \delta^p_v \eta^{ek}) \varepsilon^a_{efg} \right. \\
& \quad \left. - [n^{(\pm)}_n{}^b (\delta_b^k \delta^p_v \delta^e_w + \eta_{bv} \delta^p_w \eta^{ek} + \eta_{bw} \eta^{pk} \delta^e_v - \delta_b^k \delta^p_w \delta^e_v \right. \\
& \quad \left. - \eta_{bv} \eta^{pk} \delta^e_w - \eta_{bw} \delta^p_v \eta^{ek}) \varepsilon_{kefg} ((\partial^n v_p) \partial^f + (\partial^f v_p) \partial^n + v_p \partial^n \partial^f)] \right\} \partial^v d^w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} B^g \left\{ n^{(\pm)}{}_n{}^b [\eta_{gw} (- (\partial^n v_b) \square + (\partial^f v_b) \partial^f \partial^n) + \delta_n{}^w (\partial_g v_b) \square - \varepsilon^n{}_{bfg} \varepsilon^k{}_{uvw} (\partial^u v_k) \partial^f \partial^v \right. \\
 & + 2\eta_{gw} ((\partial^n v_b) \square + (\partial^f v_b) \partial_f \partial^n + v_b \partial^n \square) - 2 \cdot 0 + \eta_{gw} ((\partial^n v_k) \partial^k \partial_b \\
 & - (\partial^n v_b) \square - (\partial^f v_b) \partial_f \partial^n - v_b \partial^n \square) + \eta_{bw} ((\partial^n v_g) \square + (\partial^f v_g) \partial_f \partial^n \\
 & \left. + v_g \partial^n \square - v_k \partial^k \partial^n \partial_g) \right] \\
 & + n^{(\pm)}{}_n{}^u [\eta_{gw} (- (\partial_u v_a) \partial^a \partial^n) \\
 & + \delta_w{}^n (v_a \partial^a \partial_u \partial_g - \eta_{gu} ((\partial^a v_a) \square + (\partial^f v_a) \partial^a \partial_f + v_a \partial^a \square)) \\
 & + \eta_{gu} (\partial_w v_a) \partial^a \partial^n + \eta_{gw} (- (\partial^n v_u) \square - (\partial_v v_u) \partial^v \partial^n - v_u \partial^n \square) \\
 & - \eta_{gu} (\partial_w v_v) \partial^v \partial^n + \eta_{gu} ((\partial^n v_w) \square + (\partial^f v_w) \partial_f \partial^n + v_w \partial^n \square)] \\
 & - \frac{1}{\gamma_k} \left\{ [n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon^n{}_{wfg} ((\partial^k v_v) \partial^f + (\partial^f v_v) \partial^k + v_v \partial^k \partial^f - (\partial_v v^k) \partial^f - (\partial^f v^k) \partial_v - v^k \partial_v \partial^f) \right. \\
 & + n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon^{nk}{}_{fg} ((\partial_v v_w) \partial^f + (\partial^f v_w) \partial_v + v_w \partial_v \partial^f - (\partial_w v_v) \partial^f) \\
 & + n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon^n{}_{vfg} (- (\partial^f v_w) \partial^k) \\
 & - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^n{}_{wfg} ((\partial_b v_v) \partial^f + (\partial^f v_v) \partial_b + v_v \partial_b \partial^f \\
 & \quad - ((\partial^a v_a) \partial^f + (\partial^f v_a) \partial^a + v_a \partial^a \partial^f) \eta_{bv}) \\
 & - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^n{}_{wfg} (\eta_{bw} (\partial^f v_a) \partial^a - (\partial^f v_w) \partial_b)] \\
 & - [n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon^k{}_{wfg} ((\partial^n v_v) \partial^f + (\partial^f v_v) \partial^n + v_v \partial^n \partial^f) - n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon_{vwfg} (\partial^f v^k) \partial^n \\
 & + n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon_v{}^k{}_{fg} (\partial^f v_w) \partial^n - n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon^k{}_{vfg} (\partial^f v_w) \partial^n + n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon_{wvfg} (\partial^f v^k) \partial^n \\
 & - n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon_w{}^k{}_{fg} ((\partial^n v_v) \partial^f + (\partial^f v_v) \partial^n + v_v \partial^n \partial^f) \\
 & - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon_{bwfg} ((\partial^n v_v) \partial^f + (\partial^f v_v) \partial^n + v_v \partial^n \partial^f) \\
 & - n^{(\pm)}{}_{nw} \varepsilon_{kvfg} (\partial^f v^k) \partial^n + n^{(\pm)}{}_{nv} \varepsilon_{kwfg} (\partial^n v^k) \partial^f \\
 & \left. + n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon^k{}_{vfg} (\partial^f v_w) \partial^n \right] \partial^v \left. \right\} d^w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B^g \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\eta_{gw} \left(-(\partial^n v_b) \square + (\partial_f v_b) \partial^f \partial^n + 2(\partial^n v_b) \square + 2(\partial^f v_b) \partial_f \partial^n \square \right. \right. \right. \\
& + 2v_b \partial^n + (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b - (\partial^n v_b) \square - (\partial^f v_b) \partial_f \partial^n - v_b \partial^n \square \\
& \left. \left. \left. - (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n - (\partial^n v_b) \square - (\partial_f v_b) \partial^f \partial^n - v_b \partial^n \square \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \varepsilon^n{}_{bfg} \varepsilon^k{}_{uvw} (\partial^u v_k) \partial^f \partial^v \right] \right. \\
& + n^{(\pm)}_n{}^b \left[-(\partial_w v_k) \partial^k \partial_b + (\partial_w v_k) \partial^k \partial_b - (\partial_b v_w) \square - (\partial_k v_w) \partial^k \partial_b - v_w \partial_b \square \right] \\
& + n^{(\pm)}_w{}^b \left[-(\partial_g v_b) \square + (\partial_b v_g) \square + (\partial^f v_g) \partial_f \partial_b + v_g \partial_b \square \right. \\
& \left. - v_k \partial^k \partial_b \partial_g - v_a \partial^a \partial_b \partial_g \right] \\
& + n^{(\pm)}_{gw} \left[(\partial^a v_a) \square + (\partial^f v_a) \partial^a \partial_f + v_a \partial^a \square \right] \\
& - \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon^n{}_{wfg} \left[-(\partial_b v_v) \partial^v \partial^f - (\partial^f v_v) \partial^v \partial_b - v_v \partial^v \partial^f \partial_b + (\partial_v v_b) \partial^v \partial^f \right. \right. \\
& + (\partial^f v_b) \square + v_b \partial^f \square + (\partial_b v_v) \partial^v \partial^f + (\partial^f v_v) \partial^v \partial_b \\
& + v_v \partial^v \partial^f \partial_b - (\partial^a v_a) \partial_f \partial_b - (\partial^f v_a) \partial^a \partial_b - v_a \partial^a \partial^f \partial_b \\
& - (\partial_b v_v) \partial^v \partial^f - (\partial^f v_v) \partial^v \partial_b - v_v \partial^v \partial^f \partial_b + (\partial_b v_v) \partial^v \partial^f \\
& + (\partial^f v_v) \partial^v \partial_b + v_v \partial^v \partial^f \partial_b - (\partial_b v_v) \partial^v \partial^f - (\partial^f v_v) \partial^v \partial_b \\
& \left. \left. - v_v \partial^v \partial^f \partial_b \right] \right. \\
& + n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_b{}^n{}_{fg} \left[(\partial_v v_w) \partial^v \partial^f - (\partial_w v_v) \partial^v \partial^f + (\partial^f v_w) \square + v_w \partial^f \square \right] \\
& + n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_{vwfg} \left[(\partial^f v^n) \partial^v \partial_b + (\partial^f v^n) \partial^v \partial_b - (\partial_b v^v) \partial^f \partial^n \right] \\
& + n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon^n{}_{vfg} \left[(\partial^f v_w) \partial^v \partial_b - (\partial^f v_w) \partial^v \partial_b + (\partial^f v_w) \partial^v \partial_b \right. \\
& \left. + (\partial^f v_w) \partial^v \partial_b - (\partial^f v_w) \partial^v \partial_b \right] \\
& \left. + n^{(\pm)}_w{}^b \left[-\varepsilon_{bvfg} (\partial^f v_a) \partial^a \partial^v + \varepsilon_{kvfg} (\partial^f v^k) \partial^v \partial_b \right] \right\} d^w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} B^g \left\{ n^{(\pm) b} \left[\eta_{gw} \left(-(\partial^n v_b) \square + (\partial_f v_b) \partial^f \partial^n + 2(\partial^n v_k) \partial^k \partial_b \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varepsilon_g^n \varepsilon_{bf} \varepsilon_u^k v_w (\partial^u v_k) \partial^f \partial^v \right] \right. \\
 & \quad + n^{(\pm) b} \left[-(\partial_b v_w) \square - v_w \partial_b \square - (\partial_k v_w) \partial^k \partial_b \right] \\
 & \quad + n^{(\pm) b} \left[v_g \partial_b \square + (\partial_b v_g) \square - (\partial_g v_b) \square + (\partial^f v_g) \partial_f \partial_b + 2(\partial_g v_k) \partial^k \partial_b \right] \\
 & \quad + n^{(\pm) b} \left[(\partial^a v_a) \square + (\partial^f v_a) \partial^a \partial_f + v_a \partial^a \square \right] \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm) b} \left[\varepsilon_{wfg}^n (v_b \partial^f \square + (\partial^f v_b) \square - 2v_v \partial^v \partial^f \partial_b + (\partial_v v_b) \partial^v \partial^f \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - (\partial_b v_v) \partial^v \partial^f - (\partial^a v_a) \partial_f \partial_b - 2(\partial^f v_a) \partial^a \partial_b \right) \right. \\
 & \quad \quad + \varepsilon_b^n \varepsilon_{fg} \left((\partial_v v_w) \partial^v \partial^f - (\partial_w v_v) \partial^v \partial^f + (\partial^f v_w) \square + v_w \partial^f \square \right) \\
 & \quad \quad + \varepsilon_{vwfg} \left(2(\partial^f v^n) \partial^v \partial_b - (\partial_b v^v) \partial^f \partial^n \right) \\
 & \quad \quad \left. \left. + \varepsilon_{vfg}^n \left((\partial^f v_w) \partial^v \partial_b \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) b} \left[\varepsilon_{bfvg} (\partial^f v_a) \partial^a \partial^v + \varepsilon_{fkvg} (\partial^f v^k) \partial^v \partial_b \right] \right\} d^w \quad (\text{H.63})
 \end{aligned}$$

Komponente $C^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} C^m \left\{ n^{(\pm) b} \left[\delta_k^u \left(\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\beta - \bar{e}_b^\mu \bar{e}_a^\beta \right) + \delta_a^u \left(\bar{e}_b^\mu \bar{e}_k^\beta - \bar{e}_k^\mu \bar{e}_b^\beta \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \delta_b^u \left(\bar{e}_k^\mu \bar{e}_a^\beta - \bar{e}_a^\mu \bar{e}_k^\beta \right) - \frac{1}{\gamma_k} \left(\varepsilon_a^{pru} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{pru} \eta_{ak} \right) \bar{e}_p^\mu \bar{e}_r^\beta \right] \right. \\
 & \quad \left. \varepsilon^{an}_{lm} \left((\partial_\beta v_\mu) \partial^l + (\partial^l v_\mu) \partial_\beta + v_\mu \partial_\beta \partial^l \right) \right\} \varepsilon^k_{uvw} \partial^v d^w \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} C^m \left\{ n^{(\pm) b} \left[\varepsilon^{an}_{lm} \varepsilon^k_{avw} \left((\partial_k v_b) \partial^l + (\partial^l v_b) \partial_k + v_b \partial_k \partial^l - (\partial_b v_k) \partial^l - (\partial^l v_k) \partial_b - v_k \partial_b \partial^l \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \varepsilon^{an}_{lm} \varepsilon^k_{bvw} \left((\partial_a v_k) \partial^l + (\partial^l v_k) \partial_a + v_k \partial_a \partial^l - (\partial_k v_a) \partial^l - (\partial^l v_a) \partial_k - v_a \partial_k \partial^l \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\varepsilon_a^{pru} \varepsilon_{buvw} - \varepsilon_b^{pru} \varepsilon_{auvw} \right) \varepsilon^{an}_{lm} \left((\partial_r v_p) \partial^l + (\partial^l v_p) \partial_r + v_p \partial_r \partial^l \right) \right] \right\} \partial^v d^w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} C^m \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\left(-\eta^{nk} \eta_{lv} \eta_{mw} - \delta^n_v \eta_{lw} \delta_m^k - \delta^n_w \delta_l^k \eta_{mv} + \eta^{nk} \eta_{lv} \eta_{mw} + \delta^n_v \delta_l^k \eta_{mw} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta^n_w \eta_{lv} \delta_m^k \right) \left((\partial_k v_b) \partial^l - (\partial_b v_k) \partial^l - (\partial^l v_k) \partial_b - v_k \partial_b \partial^l \right) \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon^{an}{}_{lm} \varepsilon^k{}_{bvw} (\partial_k v_a) \partial^l \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\eta_{av} \delta_w^p \delta_b^r + \eta_{aw} \delta_b^p \delta_v^r - \eta_{av} \delta_b^p \delta_w^r - \eta_{aw} \delta_v^p \delta_b^r \eta_{bv} \delta_w^p \delta_a^r - \eta_{bw} \delta_a^p \delta_v^r \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \eta_{bv} \delta_a^p \delta_w^r + \eta_{bw} \delta_v^p \delta_a^r \right) \varepsilon^{an}{}_{lm} \left((\partial_r v_p) \partial^l + (\partial^l v_p) \partial_r + v_p \partial_r \partial^l \right) \right\} \partial^v d^w \\
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} C^m \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\eta_{mw} \left((\partial_k v_b) \partial^k \partial^n - (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n - (\partial^n v_b) \square + (\partial_b v^n) \square \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\partial^l v^n) \partial_l \partial_b + v^n \partial_b \square \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-(\partial_w v^n) \partial_m \partial_b + (\partial_w v_m) \partial^n \partial_b \right) + 0 + \varepsilon_m{}^{na}{}_{l} \varepsilon_b{}^k{}_{vw} (\partial_k v_a) \partial^l \partial^v \right] \\
&\quad + n^{(\pm)}_w{}^b \left[(\partial_m v_b) \square - (\partial_b v_m) \square - (\partial^l v_m) \partial_l \partial_b - v_m \partial_b \square + v_l \partial^l \partial_b \partial_m \right] \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\varepsilon_v{}^n{}_{lm} (\partial^l v_w) \partial^v \partial_b + \varepsilon_w{}^n{}_{lm} \left((\partial_v v_b) \partial^v \partial^l + (\partial^l v_b) \square + v_b \partial^l \square \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\partial_b v_v) \partial^v \partial^l - (\partial^l v_v) \partial^v \partial_b - v_v \partial^v \partial^l \partial_b \right) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^{an}{}_{lm} \left(-0 + (\partial_w v_a) \partial^l \partial_b \right) \right] \\
&\quad \left. + n^{(\pm)}_{nw} \varepsilon^{an}{}_{lm} \left[-(\partial_v v_a) \partial^v \partial^l - (\partial^l v_a) \square - v_a \partial^l \square + 0 \right] \right\} d^w \\
&= \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} C^m \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\eta_{mw} \left(v^n \partial_b \square + 2(\partial_b v^n) \square - (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon_m{}^{na}{}_{l} \varepsilon_b{}^k{}_{vw} (\partial_k v_a) \partial^l \partial^v \right] \right. \\
&\quad \left. + n^{(\pm)}_w{}^b \left[v_m \partial_b \square + (\partial_b v_m) \square - (\partial_m v_b) \square + (\partial^l v_m) \partial_l \partial_b + (\partial_m v_l) \partial^l \partial_b \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b \left[\varepsilon_m{}^n{}_{lv} \left((\partial^l v_w) \partial^v \partial_b - (\partial_w v^l) \partial^v \partial_b \right) + \varepsilon_m{}^n{}_{lw} \left((\partial_v v_b) \partial^v \partial^l + (\partial^l v_b) \square \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + v_b \partial^l \square - (\partial_b v_v) \partial^v \partial^l - (\partial^l v_v) \partial^v \partial_b - v_v \partial^v \partial^l \partial_b \right] \right. \\
&\quad \left. \left. + n^{(\pm)}_{nw} \varepsilon_m{}^{na}{}_{l} \left[(\partial_v v_a) \partial^v \partial^l + (\partial^l v_a) \square + v_a \partial^l \square \right] \right\} d^w \right. \tag{H.64}
\end{aligned}$$

H.4.3 Der Tensor-Sektor

Block $\{B\}$ - $\{d\}$:

Analog zum $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Anteil ist auch hier nur ein paritätsgerader Beitrag zu berechnen:

Komponente $B^{mn} - d^{kl}$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} (\partial^a B^n_\beta - \partial^n B^a_\beta) \{ n^{(\pm)}_n{}^b [v_a (\bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_m^\alpha - \bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha) + v_b (\bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_a^\alpha - \bar{\varepsilon}_a^\beta \bar{\varepsilon}_k^\alpha) \\
 & \quad + v_k (\bar{\varepsilon}_a^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha - \bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_a^\alpha) \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{ak}) v_p \bar{\varepsilon}_r^\beta \bar{\varepsilon}_s^\alpha] \} d^k_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} (\partial^a B^n_\beta) \{ n^{(\pm)}_n{}^b [v_a (\bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_k^\alpha - \bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha) + v_b (\bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_a^\alpha - \bar{\varepsilon}_a^\beta \bar{\varepsilon}_k^\alpha) + v_k (\bar{\varepsilon}_a^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha - \bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_a^\alpha) \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_a^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{ak}) v_p \bar{\varepsilon}_r^\beta \bar{\varepsilon}_s^\alpha] \\
 & \quad - n^{(\pm)}_a{}^b [v_n (\bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_k^\alpha - \bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha) + v_b (\bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_n^\alpha - \bar{\varepsilon}_n^\beta \bar{\varepsilon}_k^\alpha) \\
 & \quad + v_k (\bar{\varepsilon}_n^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha - \bar{\varepsilon}_b^\beta \bar{\varepsilon}_n^\alpha) \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_n^{prs} \eta_{bk} - \varepsilon_b^{prs} \eta_{nk}) v_p \bar{\varepsilon}_r^\beta \bar{\varepsilon}_s^\alpha] \} d^k_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B^n_\beta \{ n^{(\pm)}_n{}^b [\bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) - \bar{\varepsilon}_k^\beta (\partial^\alpha v_b)] \\
 & \quad - n^{(\pm)}_a{}^b [\bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_b^\alpha ((\partial^a v_n) + v_n \partial^a) - \bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_n^\alpha ((\partial^a v_b) + v_b \partial^a) + \bar{\varepsilon}_n^\alpha \bar{\varepsilon}_b^\beta ((\partial^a v_k) + v_k \partial^a)] \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} \bar{\varepsilon}_r^\beta [n^{(\pm)}_{nk} \varepsilon_a^{prs} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a) - n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_b^{prs} ((\partial_k v_p) + v_p \partial_k) \\
 & \quad - n^{(\pm)}_{ak} \varepsilon_n^{prs} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a) + \eta_{nk} n^{(\pm)}_a{}^b \varepsilon_b^{prs} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a)] \bar{\varepsilon}_s^\alpha \} d^k_\alpha \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} B^n_\beta \{ [\bar{\varepsilon}_k^\beta n^{(\pm)}_n{}^\alpha ((\partial^a v_a) + v_a \partial^a) - \bar{\varepsilon}_k^\beta n^{(\pm)}_n{}^b (\partial^\alpha v_b) - \bar{\varepsilon}_k^\beta n^{(\pm)}_a{}^\alpha ((\partial^a v_n) + v_n \partial^a) \\
 & \quad + \bar{\varepsilon}_k^\beta \bar{\varepsilon}_n^\alpha n^{(\pm)}_a{}^b ((\partial^a v_b) + v_b \partial^a) - \bar{\varepsilon}_n^\alpha n^{(\pm)}_a{}^\beta ((\partial^a v_k) + v_k \partial^a)] \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} \bar{\varepsilon}_r^\beta [n^{(\pm)}_{nk} \varepsilon_a^{rps} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a) - n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_b^{rps} (\partial_k v_p) \\
 & \quad - \eta_{nk} n^{(\pm)}_a{}^b \varepsilon_b^{rps} ((\partial^a v_p) + v_p \partial^a)] \bar{\varepsilon}_s^\alpha \} d^k_\alpha
 \end{aligned} \tag{H.65}$$

Block $\{D\}$ - $\{d\}$:

Hier berechnen wir schließlich

Komponente $D^{mn} - d^{kl}$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{an}{}_{lm} \partial^l D^m{}_\beta \right) \{ n^{(\pm)}{}_n{}^b K_{abkc}^{(\gamma_k)} \varepsilon^{\mu\beta\alpha\nu} \bar{e}^c{}_\nu v_\mu \} d^k{}_\alpha \quad (\text{H.66}) \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} D^{mp} \{ - n^{(\pm)}{}_n{}^b (K_{abkc}^{(\gamma_k)} \varepsilon^{u\quad pqc}) \varepsilon^{an}{}_{lm} ((\partial^l v_u) + v_u \partial^l) \} d^{kq} \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} D^{mp} \{ \varepsilon_m{}^n{}_{lq} n^{(\pm)}{}_n{}^b ((\partial^l v_b) + v_b \partial^l) \eta_{pk} - \varepsilon_m{}^n{}_{l\ a} n^{(\pm)}{}_{nq} ((\partial^l v_a) + v_a \partial^l) \eta_{pk} \\
 & - \varepsilon_m{}^n{}_{lq} n^{(\pm)}{}_{np} ((\partial^l v_k) + v_k \partial^l) \\
 & + \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}{}_{pk} (\partial_q v_m) - n^{(\pm)}{}_{pk} \eta_{mq} ((\partial^l v_l) + v_l \partial^l) \\
 & + \varepsilon_m{}^n{}_{lk} \varepsilon_{pb}{}^u n^{(\pm)}{}_n{}^b ((\partial^l v_u) + v_u \partial^l) \} d^{kq} .
 \end{aligned}$$

Damit haben wir im Gravitonsektor alle erforderlichen Matrixelemente des Wechselwirkungsanteils berechnet.

H.5 Berechnung des Wechselwirkungsanteils $\tilde{\Gamma}_{kgh}^{\text{quad}(1)}$ im Geistsektor

Wir berechnen jetzt die Terme erster Ordnung in $\bar{\omega}$ in (4.68), (4.69) und (4.70) auf dem Niveau der zerlegten Geistfelder und ignorieren auch hier zunächst die inversen \square -Operatoren und die $\bar{\mu}$ -Reskalierungen, die in diesen auftreten. Die Wirkung von ersteren läßt sich zu einem späteren Zeitpunkt der Rechnung, nämlich unter der Spur auf der rechten Seite der Flußgleichung, unmittelbar angeben. Zudem nutzen wir aus, daß im Geistsektor die Struktur des freien inversen Propagators die zu der Spur auf der rechten Seite beitragenden Mischungen nicht bloß sektorweise, sondern in diesen Sektoren sogar blockweise einschränkt: Im freien Anteil mischen die Vektoren (\bar{G}_m, G^k) nicht mit den übrigen Vektoren, so daß der Vektor-Sektor in zwei Blöcke zerfällt. Berücksichtigen wir zudem die Tatsache, daß der $O(4)$ - $O(4)$ -Block gar nicht zu dem Wechselwirkungsanteil beiträgt, so sind nach (F.65) also bloß die Mischungen $\bar{f}-f$, \bar{g}_m-g^k , \bar{g}_m-F^k und \bar{F}_m-g^k zu berechnen.

Block $\{\bar{f}\}$ - $\{f\}$:

Die Matrixelemente, die \bar{f} mit f und \bar{g}_m mit g^k koppeln, erhält man aus (4.68) zu

Komponente $\bar{f} - f$:

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \left\{ (\partial_\mu \bar{f}) \left[\frac{1}{2} (v_a n^{(\pm) a}{}_\nu \partial^\mu - n^{(\pm) \mu k} (\partial_k v_\nu)) \right] (\partial^\nu f) \right\} \\ = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{f} \left[- \frac{1}{2} ((\partial_\mu v_a) n^{(\pm) a}{}_\nu \partial^\mu + v_a n^{(\pm) a}{}_\nu \partial^\nu \square + n^{(\pm) k \mu} (\partial_k v_\nu) \partial^\nu \partial_\mu) \right] f \right\} \end{aligned} \quad (\text{H.67})$$

Block $\{\bar{g}, \bar{F}\}$ - $\{g, F\}$:

bzw. nach partieller Integration unter Berücksichtigung von (6.21) gemäß unserer Hermitizitätskonvention zu

Komponente $\bar{g}_m - g^k$:

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{g}_\mu \left[\frac{1}{2} (v_a n^{(\pm) a}{}_\nu \partial^\mu - n^{(\pm) \mu k} (\partial_k v_\nu)) \right] g^\nu \right\} \\ = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{g}_\mu \left[- \frac{1}{2} ((\partial^\mu v_a) n^{(\pm) a}{}_\nu + n^{(\pm) \mu k} (\partial_k v_\nu)) \right] g^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (\text{H.68})$$

Der \bar{g}_m - F^k Beitrag ergibt sich aus (4.69) zu

Komponente $\bar{g}_m - F^k$:

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{g}_\mu \left[\frac{1}{2} (v_k n^{(\pm) k}{}_c \bar{e}_d{}^\mu + v_c n^{(\pm) \mu}{}_d) \right] \partial^{[c} F^{d]} \right\} \\ = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{g}_\mu \left[\frac{1}{4} (v_k n^{(\pm) k}{}_i \bar{e}_b{}^\mu - v_k n^{(\pm) k}{}_b \bar{e}_i{}^\mu + v_l n^{(\pm) \mu}{}_b - v_b n^{(\pm) \mu}{}_l) \partial^l \right] F^b \right\} \\ = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{g}_\mu \left[\frac{1}{4} v_k (n^{(\pm) k}{}_i \bar{e}_b{}^\mu \partial^l - n^{(\pm) k}{}_b \partial^\mu) + \frac{1}{4} (v_l n^{(\pm) \mu}{}_b - v_b n^{(\pm) \mu}{}_l) \partial^l \right] F^b \right\} \\ = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{g}_\mu \left[\frac{1}{4} (v_k n^{(\pm) k}{}_i \bar{e}_b{}^\mu \partial^l + (\partial^\mu v_k) n^{(\pm) k}{}_b) + \frac{1}{4} (v_l n^{(\pm) \mu}{}_b - v_b n^{(\pm) \mu}{}_l) \partial^l \right] F^b \right\}, \end{aligned} \quad (\text{H.69})$$

und schließlich ergibt sich mit (4.70) der \bar{F}_m - g^k -Beitrag zu

Komponente $\bar{F}_m - g^k$:

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \partial_{[a} \bar{F}_{b]} \left[\frac{1}{2} v_\nu n^{(\pm) ab} \right] g^\nu \right\} \\
 = & - \int d^4x \bar{e} \left\{ \bar{F}_a \left[\frac{1}{2} n^{(\pm) ab} ((\partial_b v_\nu) + v_\nu \partial_b) \right] g^\nu \right\}. \tag{H.70}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir alle erforderlichen Beiträge der reduzierten quadratischen Form $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}}$ bzw. Γ_k^{quad} bestimmt.

Anhang I

Nachweis der Hermitizität von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad} (1)}$ auf dem Niveau der zerlegten Fluktuationen

Eine Möglichkeit, die Korrektheit der vorangegangenen Rechnungen zu überprüfen, besteht darin, nun nachzurechnen, daß der gerade bestimmte Wechselwirkungsanteil der quadratischen Form, $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad} (1)}$, auch auf dem Niveau der zerlegten Gravitonfluktuationen (6.11) und (6.12) nach wie vor selbstadjungiert ist. Wir führen den Nachweis wieder sektorweise, indem wir durch partielle Integration die einzelnen Matrixelemente in ihre adjungierten Matrixelemente überprüfen.

I.1 Überprüfung der Hermitizität von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ Ho}}^{\text{quad} (1)}$ im $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Block

I.1.1 Der skalare Sektor

Block $\{a, d\}$ - $\{a, d\}$:

Die Hermitizität des aus (H.2), (H.3), (H.4) und (H.5) bestehenden Unterblocks ist offensichtlich.

I.1.2 Der Vektor-Sektor

Block $\{b, c\}$ - $\{b, c\}$, $\{d\}$ - $\{d\}$:

Auch in diesen beiden Teilblöcken der beiden Hauptdiagonalblöcke im Vektor-Sektor läßt sich die Hermitizität auf einfache Symmetrieeigenschaften der jeweiligen Matrixelemente zurückführen.

Block $\{d\}$ - $\{b, c\}$:

Abschließend betrachten wir im Vektor-Sektor die Beiträge d^m - b^k und d^m - c^k in den Nebendiagonalblöcken. Partielle Integration des ersteren liefert

Komponente $d^m - b^k$:

$$\int d^4x \bar{\varepsilon} b^k \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm)}_{km} \left[((\partial^m v_r) - (\partial_r v^m)) \square + ((\partial_r v_a) - (\partial_a v_r)) \partial^a \partial^m \right] \right] d^r,$$

und im zweiten Fall erhalten wir

Komponente $d^m - c^k$:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \bar{\varepsilon} c^n \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm)}_{mk} \left[((\partial^m v_c) - (\partial_c v^m)) \partial^c \partial^k \eta_{nr} + ((\partial_a v_r) - (\partial_r v_a)) \partial^a \partial^k \delta_n^m \right] \right] d^r \\ = & \int d^4x \bar{\varepsilon} c^n \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) n^{(\pm)}_{km} \left[((\partial_c v^m) - (\partial^m v_c)) \partial^c \partial^k \eta_{nr} + ((\partial_r v_a) - (\partial_a v_r)) \partial^a \partial^k \delta_n^m \right] \right] d^r, \end{aligned}$$

so daß wir in beiden Fällen die Gegenstücke (H.10) und (H.11) reproduzieren.

I.1.3 Der Tensor-Sektor

Block $\{d\}$ - $\{d\}$:

Die Hermitizität dieser Komponente ergibt sich abschließend ebenfalls unmittelbar aus den Symmetrieeigenschaften der Tensorstruktur in (H.15).

I.2 Überprüfung der Hermitizität des Eichfixierungsbeitrags $\tilde{\Gamma}_{k \text{ gf}}^{\text{quad}(1)}$

I.2.1 Der skalare Sektor

Block $\{a, d\}$ - $\{a, d\}$:

Komponente $a - a$:

Unter Vernachlässigung zweiter und höherer Ableitungen des Vektorfeldes v_μ ist die termweise Hermitizität des Ausdrucks (H.17) offensichtlich.

Des weiteren liefert partielle Integration von (H.19)

Komponente $d - a$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[\left(\frac{1 + \beta_D}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(2\beta_D + \frac{1}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b \left((\partial^b v_a) \square^2 + v_a \partial^b \square^2 + 4(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-5\beta_D - \frac{1}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-\beta_D + \frac{1}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] d \right\} \\
 = & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ a \left[\left(-\frac{3\beta_D}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v^b) \square^2 + \left(2\beta_D + \frac{1}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b v_a \partial^b \square^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(3\beta_D + \frac{3}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_k v_a) \partial^k \partial^b \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-\beta_D + \frac{1}{2} \right) n^{(\pm) a}{}_b (\partial_a v_k) \partial^k \partial^b \square \right] d \right\} ,
 \end{aligned}$$

was (H.18) reproduziert.

Komponente $d - d$:

Auch dieser Beitrag geht Term für Term nach vierfacher partieller Integration wie gewünscht in sich selbst über.

I.2.2 Der Vektor-Sektor

Block $\{b, c\}$ - $\{b, c\}$:

Wir berechnen zunächst die paritätsgeraden Mischungen. Partielle Integration von (H.22) führt auf

Komponente $c^m - b^k$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ b^a \left[\frac{1}{2} \left(n^{(\pm) a b} (\partial^\mu v_b) \square - n^{(\pm) \mu \rho} ((\partial_\rho v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial_\rho + v_a \partial_\rho \square) \right. \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + 2n^{(\pm) \mu \rho} (\partial_k v_a) \partial^k \partial_\rho \right) \right] c_\mu \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ b^a \left[\frac{1}{2} \left(n^{(\pm) a b} (\partial^\mu v_b) \square + n^{(\pm) \rho \mu} (\partial_\rho v_a) \square + v_a n^{(\pm) \rho \mu} \partial_\rho \square \right) \right] c_\mu \right\}, \end{aligned}$$

was mit (H.21) identisch ist.

Darüber hinaus erhalten wir

Komponente $c^m - c^k$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ c^\nu \left[\frac{1}{2} \left(\delta_\nu^\mu n^{(\pm) a b} ((\partial_a v^b) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^b) \right. \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. - n^{(\pm) \nu \mu} \left(-2(\partial^a v_a) \square - 4(\partial_k v_a) \partial^k \partial^a - 2v_a \partial^a \square \right. \right. \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + (\partial^a v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^a \right) \right] c_\mu \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \left\{ c^\nu \left[\frac{1}{2} \left(\delta_\nu^\mu n^{(\pm) a b} ((\partial_a v^b) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k) \right. \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + n^{(\pm) \nu \mu} \left((\partial^a v_a) \square + 2(\partial_k v_a) \partial^k \partial^a + 2v_a \partial^a \square \right) \right) \right] c_\mu \right\}, \end{aligned}$$

wodurch die Hermitizität dieser Vektor-Vektor-Kopplung bestätigt wird.

Block $\{d\}$ - $\{b, c\}$:

Wir integrieren die einzige Mischung (H.25) im paritätsungeraden Sektor partiell zu

Komponente $d^m - c^k$:

$$\frac{1}{\alpha_D} \int d^4x \bar{e} \frac{c^k}{2} \left\{ (\varepsilon_k{}^b{}_{lm} n^{(\pm) a b} - n^{(\pm) kb} \varepsilon^{ba}{}_{lm}) (v_a \partial^l + 2(\partial_u v_a) \partial^u \partial^l) \right\} \square d^m,$$

was offensichtlich mit deren Gegenstück (H.24) übereinstimmt.

I.2.3 Überprüfung der Hermitizität von $\tilde{\Gamma}_{k \text{ grav}}^{\text{quad}(1)}$ im $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ - bzw. im $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Block

In diesem Abschnitt reproduzieren wir durch partielle Integration der $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Matrixelemente deren Gegenstücke im $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Block.

I.2.4 Der skalare Sektor

Block $\{B\}$ - $\{a, d\}$:

Zum Nachweis der Hermitizität der B - a -Komponente ist es vorteilhaft, dieses Matrixelement in der Form (H.47) zu betrachten, in der der d'Alembert-Operator vor B noch nicht partiell integriert wurde. Partielle Integration liefert dann

Komponente $B - a$:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} a \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[\left(-(\partial^n v_b) \square + 2((\partial^n v_b) \square + v_b \partial^n \square + 2(\partial^k v_b) \partial_k \partial^n) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b - (\partial^k v_b) \partial_k \partial^n \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(-\varepsilon_a^{n ps} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s + \varepsilon_b^{n ps} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \varepsilon_b^{n ps} ((\partial_s v_p) \square + v_p \partial_s \square + 2(\partial^a v_p) \partial_a \partial_s) \right) \right] \right\} \square B \\ = & \int d^4x \frac{\bar{\varepsilon}}{2} a \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[\left(-(\partial^n v_b) \square - 2v_b \partial^n \square - 3(\partial^k v_b) \partial_k \partial^n - (\partial^n v_k) \partial^k \partial_b \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\varepsilon_a^{n ps} (\partial^a v_p) \partial_b \partial_s - \varepsilon_b^{n ps} (\partial^a v_p) \partial_a \partial_s + \varepsilon_b^{n ps} (\partial_p v_s) \square \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \varepsilon_b^{n ps} v_p \partial_s \square \right) \right] \right\} \square B, \end{aligned}$$

was wie gewünscht (H.28) reproduziert.

Auch den B - d -Beitrag integrieren wir in der Form (H.49) partiell:

Komponente B – d:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[\left(-3(\partial^n v_b)\square + 2((\partial^n v_b)\square + v_b \partial^n \square + 2(\partial^k v_b)\partial_k \partial^n) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. -(\partial^n v_k)\partial^k \partial_b + (\partial^k v_b)\partial_k \partial^n \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(-\varepsilon_a{}^{n ps}(\partial^a v_p)\partial_b \partial_s + \varepsilon_b{}^{n ps}(\partial^a v_p)\partial_a \partial_s + 2\varepsilon_b{}^{n ps}(\partial_p v_s)\square \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \varepsilon_b{}^{n ps}(v_p \partial_s \square + (\partial_s v_p)\square + 2(\partial^a v_p)\partial_a \partial_s) \right) \right] \right\} \square B \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[((\partial^n v_b)\square - 2v_b \partial^n \square - 5(\partial^k v_b)\partial_k \partial^n + (\partial^n v_k)\partial^k \partial_b) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(\varepsilon_a{}^{n ps}(\partial^a v_p)\partial_s \partial_b + 3\varepsilon_b{}^{n ps}(\partial^a v_p)\partial_a \partial_s + \varepsilon_b{}^{n ps}(\partial_p v_s)\square \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \varepsilon_b{}^{n ps} v_p \partial_s \square \right) \right] \right\} \square B,
\end{aligned}$$

was gerade auf (H.29) führt.

Block {D}-{a, d}:

Um die Hermitizität der Nebendiagonalmatrixelemente zu überprüfen, integrieren wir (H.51) und (H.52) partiell. Dies liefert

Komponente D – a:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} a \left[\pm 2n^{(\pm) a}{}_l (2(\partial_u v_a)\partial^u \partial^l + (\partial^l v_a)\square - v_a \partial^l \square - (\partial^l v_a)\square \right. \\
& \quad \left. -4(\partial_k v_a)\partial^k \partial^l - (\partial^l v_k)\partial^k \partial_a \right) \\
& \quad \left. + \varepsilon_l{}^n{}_m n^{(\pm) b}{}_n (\partial^l v_a)\partial^m \partial_b \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm) b}{}_n \left(-2v^n \partial_b \square - 2(\partial_b v^n)\square - 8(\partial_k v^n)\partial^k \partial_b \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 5(\partial_k v^n)\partial^k \partial_b - (\partial_b v_k)\partial^k \partial^n + (\partial_b v^n)\square \right) \right] \square D \\
= & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} a \left[\pm 2n^{(\pm) a}{}_l \left(-2(\partial_u v_a)\partial^u \partial^l - v_a \partial^l \square - (\partial^l v_k)\partial^k \partial_a \right) + \varepsilon_l{}^n{}_m n^{(\pm) b}{}_n (\partial^l v_a)\partial^m \partial_b \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm) b}{}_n \left(-2v^n \partial_b \square - (\partial_b v^n)\square - 3(\partial_k v^n)\partial^k \partial_b - (\partial_b v_k)\partial^k \partial^n \right) \right] \square D
\end{aligned}$$

sowie

Komponente $D - d$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} d \left[\pm 2n^{(\pm)a}{}_l (2(\partial_u v_a) \partial^u \partial^l + (\partial^l v_a) \square - v_a \partial^l \square - (\partial^l v_a) \square - 4(\partial_k v_a) \partial^k \partial^l \right. \\
 & \quad \left. + (\partial^l v_k) \partial^k \partial_a) - \varepsilon^n{}_{l m} n^{(\pm)b}{}_n (\partial^l v_a) \partial^m \partial_b \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm)b}{}_n (-2v^n \partial_b \square - 2(\partial_b v^n) \square - 8(\partial_k v^n) \partial^k \partial_b \right. \\
 & \quad \left. + 3(\partial_k v^n) \partial^k \partial_b + (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n + 3(\partial_b v^n) \square) \right] \square D \\
 = & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{e} d \left[\pm 2n^{(\pm)a}{}_l (-2(\partial_u v_a) \partial^u \partial^l - v_a \partial^l \square + (\partial^l v_k) \partial^k \partial_a) - \varepsilon^n{}_{l m} n^{(\pm)b}{}_n (\partial^l v_a) \partial^m \partial_b \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} n^{(\pm)b}{}_n (-2v^n \partial_b \square + (\partial_b v^n) \square - 5(\partial_k v^n) \partial^k \partial_b + (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n) \right] \square D,
 \end{aligned}$$

was wie gewünscht mit (H.30) bzw. (H.31) übereinstimmt.

I.2.5 Der Vektor-Sektor

Wir überprüfen die Hermitizität blockweise:

Block $\{A, D\}$ - $\{b, c\}$:

Nach zweifacher partieller Integration von (H.53) erhalten wir unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\partial^2 v)$

Komponente $A^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^k \left\{ n^{(\pm)b}{}_n [- ((\partial_b v_k) - (\partial_k v_b)) \square + ((\partial_a v_k) - (\partial_k v_a)) \partial^a \partial_b] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}{}_{ak} \varepsilon_n{}^{prs} + \eta_{nk} n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s \right\} b^k \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^k \left\{ n^{(\pm)b}{}_n [((\partial_b v_k) - (\partial_k v_b)) \square + ((\partial_k v_a) - (\partial_a v_k)) \partial^a \partial_b] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (n^{(\pm)}{}_{ka} \varepsilon_n{}^{prs} + \eta_{nk} n^{(\pm)b}{}_a \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^a \partial_s \right\} A^n,
 \end{aligned}$$

was mit (H.32) identisch ist.

Partielle Integration von (H.54) liefert zudem

Komponente $A^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\alpha \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b [(\partial^\alpha v_b)\square - (\partial^\alpha v_k)\partial^k \partial_b] + n^{(\pm)}_n{}^\alpha [(\partial^a v_k)\partial^k \partial_a - (\partial^a v_a)\square] \right. \\
& \quad - \bar{e}_n{}^\alpha n^{(\pm)}_a{}^b [(\partial_k v_b)\partial^k \partial^a + (\partial^a v_b)\square - (v_b \partial^a \square + (\partial^a v_b)\square + 2(\partial_k v_b)\partial^k \partial^a] \\
& \quad + n^{(\pm)}_a{}^\alpha [(\partial_k v_n)\partial^k \partial^a + (\partial^a v_n)\square - (v_n \partial^a \square + (\partial^a v_n)\square + 2(\partial_k v_n)\partial^k \partial^a)] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_b{}^{prs} (- (\partial_p v_r)\square + (\partial_k v_p)\partial^k \partial_r - (v_p \partial_r \square + (\partial_r v_p)\square + 2(\partial_k v_p)\partial^k \partial_r) \right. \\
& \quad \left. + n^{(\pm)}_{ak} \varepsilon_n{}^{prs} (\partial^a v_p)\partial^k \partial_r - n^{(\pm)}_a{}^b \varepsilon_b{}^{prs} (\partial_n v_p)\partial^a \partial_r \right] \bar{e}_s{}^\alpha \left. \right\} A^n \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\alpha \left\{ n^{(\pm)}_n{}^b [(\partial^\alpha v_k)\partial^k \partial_b - (\partial^\alpha v_b)\square] + n^{(\pm)}_n{}^\alpha [(\partial^a v_a)\square - (\partial^a v_k)\partial^k \partial_a] \right. \\
& \quad - \bar{e}_n{}^\alpha n^{(\pm)}_a{}^b [v_b \partial^a \square + (\partial_k v_b)\partial^k \partial^a] + n^{(\pm)}_a{}^\alpha [v_n \partial^a \square + (\partial_k v_n)\partial^k \partial^a] \\
& \quad - \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_s{}^\alpha \left[n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_b{}^{s\ pr} ((\partial_k v_p)\partial^k \partial_r + v_p \partial_r \square) + n^{(\pm)}_{ak} \varepsilon^{spr} (\partial^a v_p)\partial^k \partial_r \right. \\
& \quad \left. - n^{(\pm)}_a{}^b \varepsilon_b{}^{s\ pr} (\partial_n v_p)\partial^a \partial_r \right] \left. \right\} A^n,
\end{aligned}$$

was die $c_\beta A^k$ -Komponente (H.34) reproduziert. Dabei haben wir im Sinne unserer Konvention unter dem Integral die Umformung $A^n [\dots v_p \partial^a \partial_r \partial_n] c_\alpha = c_\alpha [-\dots (\partial_n v_p)\partial^a \partial_r] A^n$ ausgeführt.

Ebenfalls mit partieller Integration ergibt sich

Komponente $D^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^k \left\{ [n^{(\pm)}_h{}^b ((\partial^m v_k)\partial_m \partial_b + (\partial_k v_m)\partial^m \partial_b - (\partial_b v_k)\square - 2(\partial^m v_k)\partial_m \partial_b \right. \\
& \quad - v_k \partial_b \square + (\partial_b v_k)\square - (\partial_k v_b)\square) \\
& \quad - n^{(\pm)}_k{}^b (2(\partial^m v_h)\partial_m \partial_b - (\partial_b v_h)\square - 2(\partial^m v_h)\partial_m \partial_b - v_h \partial_b \square + (\partial_h v_b)\square)] \\
& \quad - \frac{1}{\gamma_k} \left[(n^{(\pm)}_h{}^b \varepsilon_b{}^{ps}{}_k + n^{(\pm)}_{nk} \varepsilon_h{}^{nps} + \eta_{hk} n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_b{}^{nps}) (- (\partial_s v_p)\square - v_p \partial_s \square) \right. \\
& \quad \left. - (n^{(\pm)}_{nk} \varepsilon_h{}^{prs} - \eta_{hk} n^{(\pm)}_n{}^b \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r)\partial^n \partial_s \right] \left. \right\} D^h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^k \left\{ [n^{(\pm) b}{}_h (v_k \partial_b \square + (\partial_k v_b) \square + (\partial^m v_k) \partial_m \partial_b - (\partial_k v_m) \partial^m \partial_b) \right. \\
 & + n^{(\pm) b}{}_k ((-\partial_b v_h) + (\partial_h v_b) - v_h \partial_b) \square] \\
 & - \frac{1}{\gamma_k} [(n^{(\pm) b}{}_h \varepsilon_{kb}{}^{ps} + n^{(\pm) kn} \varepsilon^{nps}{}_h + \eta_{kh} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{nps}) ((\partial_p v_s) \square - v_p \partial_s \square) \\
 & \left. - (n^{(\pm) kn} \varepsilon^{prs}{}_h - \eta_{kh} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{prs}) (\partial_p v_r) \partial^n \partial_s] \right\} D^h
 \end{aligned}$$

unter erneuter Beachtung von $D^h [\dots v_b \partial_h \square] b^k = b^k [-\dots (\partial_h v_b) \partial_k \square] D^h$ und $b^k [\dots (\partial_k v_b) \square] D^h = b^k [-\dots v_b \partial_k \square] D^h$. In diesem Ausdruck erkennen wir (H.33) wieder.

Analog erhalten wir für die nächste Komponente

Komponente $D^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\alpha \left\{ n^{(\pm) \alpha}{}_h [-((\partial^k v_k) \square + v_k \partial^k \square + 2(\partial^m v_k) \partial_m \partial^k) + (\partial^k v_k) \square + (\partial^k v_a) \partial^a \partial_k] \right. \\
 & + \bar{e}_h{}^\alpha n^{(\pm) b}{}_k [- (\partial^m v_b) \partial_m \partial^k + (\partial^k v_b) \square] + n^{(\pm) \alpha}{}_n [(\partial^m v_h) \partial_m \partial^n - (\partial^n v_h) \square] \\
 & + n^{(\pm) b}{}_h [(\partial^\alpha v_k) \partial^k \partial_b - (\partial^\alpha v_b) \square] \\
 & + \frac{1}{\gamma_k} \{ n^{(\pm) b}{}_h \varepsilon_b{}^{prs} ((\partial^m v_p) \partial_m \partial_r + (\partial_p v_r) \square) \\
 & + n^{(\pm) b}{}_n [-\varepsilon_{hb}{}^{ps} (2(\partial^m v_p) \partial_m \partial^n - v_p \partial^n \square - (\partial^n v_p) \square - 2(\partial^m v_p) \partial_m \partial^n) \\
 & + \varepsilon_b{}^{nps} (\partial_h v_p) \square + \varepsilon_b{}^{prs} (\partial_h v_p) \partial_r \partial^n] \\
 & \left. - n^{(\pm) nk} \varepsilon_h{}^{prs} (\partial^n v_p) \partial_r \partial^k \} \bar{e}_s{}^\alpha \right\} D^h \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_\alpha \left\{ n^{(\pm) \alpha}{}_h [v_k \partial^k \square + (\partial^k v_a) \partial^a \partial_k] + \bar{e}_h{}^\alpha n^{(\pm) b}{}_k [(\partial^m v_b) \partial_m \partial^k - (\partial^k v_b) \square] \right. \\
 & + n^{(\pm) \alpha}{}_n [(\partial^n v_h) \square - (\partial^m v_h) \partial_m \partial^n] + n^{(\pm) b}{}_h [(\partial^\alpha v_b) \square - (\partial^\alpha v_k) \partial^k \partial_b] \\
 & + \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_s{}^\alpha \left\{ n^{(\pm) b}{}_h \varepsilon_b{}^{s pr} ((\partial_p v_r) \square + (\partial^m v_p) \partial_m \partial_r) \right. \\
 & + n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{s p}{}_h ((\partial^n) v_p \square + v_p \partial^n \square) + n^{(\pm) nk} \varepsilon_h{}^{spr} (\partial^n v_p) \partial^k \partial_r \\
 & \left. \left. - n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{s np} (\partial_h v_p) \square - n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_b{}^{s pr} (\partial_h v_p) \partial^n \partial_r \right\} \right\} D^h,
 \end{aligned}$$

was mit (H.35) übereinstimmt.

Block $\{A, D\}$ - $\{d\}$:

Hier berechnen wir vermöge partieller Integration von (H.57)

Komponente $A^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4 \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ [\varepsilon_{wa}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_n (\partial^a v_k) \partial_b \partial^v \right. \\
& \quad + n^{(\pm)b}{}_n \varepsilon_{wb}{}^k{}_v ((\partial_k v_a) \partial^a \partial^v + (\partial^v v_k) \square + v_k \partial^v \square + 2(\partial^a v_k) \partial_a \partial^v - 2(\partial^a v_k) \partial_a \partial^v) \\
& \quad + \varepsilon_w{}^k{}_{vn} n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_b) \partial^a \partial^v - \varepsilon_{wb}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_n) \partial^a \partial^v] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}{}_a \eta_{wn} ((\partial_v v_b) \partial^v \partial^a + (\partial^a v_b) \square - v_b \partial^a \square - (\partial^a v_b) \square - 2(\partial_u v_b) \partial^u \partial^a) \\
& \quad - n^{(\pm)}{}_{wa} (- (\partial_v v_n) \partial^v \partial^a - (\partial^a v_n) \square + v_n \partial^a \square + (\partial^a v_n) \square + 2(\partial_u v_n) \partial^u \partial^a) \\
& \quad \left. + n^{(\pm)b}{}_n ((\partial_b v_w) \square - (\partial^a v_w) \partial_a \partial_b) + n^{(\pm)}{}_{wn} ((\partial^a v_v) \partial^v \partial_a - (\partial^a v_a) \square) \right\} A^n \\
= & \int d^4 \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ [\varepsilon_{wa}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_n (\partial^a v_k) \partial_b \partial^v + \varepsilon_{wb}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_n ((\partial_k v_a) \partial^a \partial^v + (\partial^v v_k) \square + v_k \partial^v \square) \right. \\
& \quad + \varepsilon_w{}^k{}_{vn} n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_b) \partial^a \partial^v - \varepsilon_{wb}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_n) \partial^a \partial^v] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}{}_a \eta_{wn} ((\partial_v v_b) \partial^v \partial^a + v_b \partial^a \square) - n^{(\pm)}{}_{wa} ((\partial_v v_n) \partial^v \partial^a + v_n \partial^a \square) \\
& \quad \left. + n^{(\pm)b}{}_n ((\partial_b v_w) \square - (\partial^a v_w) \partial_a \partial_b) + n^{(\pm)}{}_{wn} ((\partial^a v_v) \partial^v \partial_a - (\partial^a v_a) \square) \right\} A^n .
\end{aligned}$$

Zudem liefert partielle Integration von (H.58)

Komponente $D^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ \left[-\varepsilon_{wb}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_n (\partial_k v_a) \partial^a \partial^v - \varepsilon_w{}^k{}_{vn} n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_b) \partial^v \partial^a \right. \right. \\
 & \quad - \varepsilon_w{}^a{}_{vn} n^{(\pm)b}{}_a (2(\partial_m v_b) \partial^m \partial^v - v_b \partial^v \square - (\partial^v v_b) \square - 2(\partial_u v_b) \partial^u \partial^v) \\
 & \quad - \varepsilon_{wa}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_n (\partial^a v_k) \partial_b \partial^v + \varepsilon_{wb}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_n) \partial^a \partial^v \\
 & \quad \mp 2n^{(\pm)}{}_{wv} (2(\partial_m v_n) \partial^m \partial^v - v_n \partial^v \square - (\partial^v v_n) \square - 2(\partial_u v_n) \partial^u \partial^v) \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}{}_a \eta_{wn} ((\partial_v v_b) \partial^v \partial^a - (\partial^a v_b) \square) \\
 & \quad \quad + n^{(\pm)}{}_{wa} ((\partial_n v^a) \square + 3(\partial_k v_n) \partial^k \partial^a - (\partial^a v_n) \square \\
 & \quad \quad \quad - v_n \partial^a \square - (\partial^a v_n) \square - 2(\partial_u v_n) \partial^u \partial^a) \\
 & \quad \quad - n^{(\pm)b}{}_n ((\partial^a v_w) \partial_a \partial_b - v_w \partial_b \square - (\partial_b v_w) \square - 2(\partial_u v_w) \partial^u \partial_b + (\partial_b v_w) \square) \\
 & \quad \quad \left. \left. + n^{(\pm)}{}_{wn} ((\partial_a v_v) \partial^v \partial^a - v_a \partial^a \square - (\partial^a v_a) \square - 2(\partial_u v_a) \partial^a \partial^u + (\partial^a v_a) \square) \right] \right\} D^n \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ \left[-\varepsilon_{wb}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_n (\partial_k v_a) \partial^a \partial^v - \varepsilon_w{}^k{}_{vn} n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_b) \partial^v \partial^a \right. \right. \\
 & \quad + \varepsilon_w{}^a{}_{vn} n^{(\pm)b}{}_a (v_b \partial^v \square + (\partial^v v_b) \square) - \varepsilon_{wa}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_n (\partial^a v_k) \partial_b \partial^v \\
 & \quad + \varepsilon_{wb}{}^k{}_v n^{(\pm)b}{}_a (\partial_k v_n) \partial^a \partial^v \pm 2n^{(\pm)}{}_{wv} (v_n \partial^v \square + (\partial^v v_n) \square) \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm)b}{}_a \eta_{wn} ((\partial_v v_b) \partial^v \partial^a - (\partial^a v_b) \square) \\
 & \quad \quad + n^{(\pm)}{}_{wa} ((\partial_n v^a) \square + (\partial_k v_n) \partial^k \partial^a - 2(\partial^a v_n) \square - v_n \partial^a \square) \\
 & \quad \quad \left. \left. + n^{(\pm)b}{}_n ((\partial^a v_w) \partial_a \partial_b + v_w \partial_b \square) - n^{(\pm)}{}_{wn} ((\partial_a v_v) \partial^v \partial^a + v_a \partial^a \square) \right] \right\} D^n .
 \end{aligned}$$

so daß beide Ausdrücke ihre Pendanten (H.40) bzw. (H.41) reproduzieren.

Block $\{B, C\}$ - $\{b, c\}$:

Partielle Integration überführt (H.59) in

Komponente $B^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^k \left\{ \varepsilon_{kbag} n^{(\pm)b}{}_n \left(-(\partial^n v^a) \square + (\partial^a v^n) \square + v^a \partial^n \square + (\partial^n v^a) \square + 2(\partial_u v^a) \partial^u \partial^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - v^n \partial^a \square - (\partial^a v^n) \square - 2(\partial_u v^n) \partial^u \partial^a \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\partial^f v^a) \partial_f \partial^n + (\partial^f v^n) \partial_f \partial^a - (\partial^a v_f) \partial^f \partial^n + (\partial^n v_f) \partial^f \partial^a \right) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_{kba f} n^{(\pm)b}{}_n \left(-(\partial^f v_g) \partial^n \partial^a - (\partial_g v^a) \partial^n \partial^f \right) \right. \\
& \quad \left. \pm 2n^{(\pm)}{}_{ka} \left((\partial_g v_f) \partial^f \partial^a + (\partial^a v_g) \square + (\partial^f v_g) \partial_f \partial^a \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - v_g \partial^a \square - (\partial^a v_g) \square - 2(\partial_u v_g) \partial^u \partial^a \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}{}_{kn} \left(-(\partial_g v^n) \square + v_g \partial^n \square + (\partial^n v_g) \square + 2(\partial_u v_g) \partial^u \partial^n - 2(\partial^a v_g) \partial_a \partial^n \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)}{}_{ag} \left(-(\partial_k v^a) \square + (\partial^a v_k) \square + (\partial^s v_k) \partial_s \partial^a \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - v_k \partial^a \square - (\partial^a v_k) \square - 2(\partial_u v_k) \partial^u \partial^a + (\partial_k v_s) \partial^s \partial^a \right) \right] \right\} B^g \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^k \left\{ \varepsilon_{kbag} n^{(\pm)b}{}_n \left((\partial_u v^a) \partial^u \partial^n - (\partial_u v^n) \partial^u \partial^a + v^a \partial^n \square - v^n \partial^a \square \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\partial^n v_f) \partial^f \partial^a - (\partial^a v_f) \partial^f \partial^n \right) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_{kba f} n^{(\pm)b}{}_n \left((\partial^a v_g) - (\partial_g v^a) \right) \partial^f \partial^n \right. \\
& \quad \left. \pm 2n^{(\pm)}{}_{ka} \left((\partial_g v_u) \partial^u \partial^a - (\partial_u v_g) \partial^u \partial^a - v_g \partial^a \square \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm)}{}_{kn} \left(v_g \partial^n \square + (\partial^n v_g) \square - (\partial_g v^n) \square \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^{(\pm)}{}_{ag} \left(-(\partial_k v^a) \square - v_k \partial^a \square + (\partial_k v_s) \partial^s \partial^a - (\partial_s v_k) \partial^s \partial^a \right) \right] \right\} B^g,
\end{aligned}$$

was mit (H.36) übereinstimmt.

Für (H.60) erhalten wir

Komponente $B^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_s \left\{ \left[\varepsilon^s{}_{bkg} n^{(\pm) b}{}_n \left(-(\partial^n v_f) \partial^f \partial^k - (\partial^f v_f) \partial^n \partial^k + v_f \partial^f \partial^n \partial^k + (\partial^f v_f) \partial^n \partial^k \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + (\partial^n v_f) \partial^f \partial^k + (\partial^k v_f) \partial^f \partial^n \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon^s{}_{bck} n^{(\pm) b}{}_n (\partial^c v_g) \partial^k \partial^n + n^{(\pm) sb} \varepsilon_{bakg} (\partial^a v_f) \partial^f \partial^k - \varepsilon_{bakg} n^{(\pm) b}{}_n (\partial^s v^a) \partial^k \partial^n \right. \\
 & \quad \left. + \delta^s{}_g \varepsilon_{bfak} n^{(\pm) b}{}_n (\partial^f v^a) \partial^k \partial^n \pm 2 \delta^s{}_g n^{(\pm) ak} (\partial^a v_f) \partial^f \partial^k \right] \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} \left[\delta^s{}_g n^{(\pm) nk} \left(-(\partial^a v^n) \partial_a \partial^k + (\partial^k v^n) \square \right) + n^{(\pm) ag} \left((\partial^s v^k) \partial_k \partial^a - (\partial^s v^a) \square \right) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) s}{}_k \left((\partial^a v_g) \partial_a \partial^k - (\partial^k v_g) \square \right) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) s}{}_g \left((\partial_k v_a) \partial^a \partial^k + (\partial^a v_a) \square - v_a \partial^a \square - (\partial^a v_a) \square - 2(\partial_u v_a) \partial^a \partial^u \right) \right] \Big\} B^g \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_s \left\{ \left[\varepsilon^s{}_{bkg} n^{(\pm) b}{}_n \left((\partial^k v_f) \partial^f \partial^n + v_f \partial^f \partial^n \partial^k \right) - \varepsilon^s{}_{bck} n^{(\pm) b}{}_n (\partial^c v_g) \partial^k \partial^n \right. \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) sb} \varepsilon_{bakg} (\partial^a v_f) \partial^f \partial^k - \varepsilon_{bakg} n^{(\pm) b}{}_n (\partial^s v^a) \partial^k \partial^n \right. \\
 & \quad \left. + \delta^s{}_g \varepsilon_{bfak} n^{(\pm) b}{}_n (\partial^f v^a) \partial^k \partial^n \pm 2 \delta^s{}_g n^{(\pm) ak} (\partial^a v_f) \partial^f \partial^k \right] \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} \left[\delta^s{}_g n^{(\pm) nk} \left((\partial^k v^n) \square - (\partial^a v^n) \partial_a \partial^k \right) + n^{(\pm) ag} \left((\partial^s v^k) \partial_k \partial^a - (\partial^s v^a) \square \right) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) s}{}_k \left((\partial^a v_g) \partial_a \partial^k - (\partial^k v_g) \square \right) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) s}{}_g \left(-(\partial_k v_a) \partial^a \partial^k - v_a \partial^a \square \right) \right] \Big\} B^g
 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (H.38). Zweifache partielle Integration von (H.61) führt auf

Komponente $C^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} b^k \left\{ \varepsilon^{na}{}_{lm} n^{(\pm) b}{}_n \left((\partial_k v_a) - (\partial_a v_k) \right) \partial^l \partial_b \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left[n^{(\pm) kn} \left((\partial^n v_m) - (\partial_m v^n) \right) \square + \left((\partial_m v_l) - (\partial_l v_m) \right) \partial^l \partial^n \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon_k{}^n{}_{lm} \varepsilon_b{}^{prs} (\partial_p v_r) \partial^l \partial_s \right] \right\} C^m
 \end{aligned}$$

was (H.37) entspricht, und schließlich reproduziert (H.62) nach partieller Integration gemäß

Komponente $C^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_a \left\{ [\varepsilon^{an}{}_{lm} n^{(\pm) b}{}_n (- (\partial_b v_k) \partial^k \partial^l - (\partial^l v_k) \partial^k \partial_b + (\partial_k v_b) \partial^k \partial^l \right. \\
& \quad + v_k \partial^k \partial^l \partial_b + (\partial^k v_k) \partial^l \partial_b + (\partial^l v_k) \partial^k \partial_b + (\partial_b v_k) \partial^k \partial^l \\
& \quad + (\partial^l v_b) \square - v_b \partial^l \square - (\partial^l v_b) \square - 2(\partial_u v_b) \partial^u \partial^l \\
& \quad + n^{(\pm) a}{}_n \varepsilon^{nb}{}_{lm} ((\partial_b v^l) \square - v^l \partial_b \square - (\partial_b v^l) \square - 2(\partial_u v^l) \partial^u \partial_b + (\partial_k v^l) \partial^k \partial_b)] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm) a}{}_{nk} \delta^a{}_m ((\partial^n v_l) - 2(\partial_l v^n)) \partial^l \partial^k + v^n \partial^k \square + (\partial^k v^n) \square + 2(\partial_u v^n) \partial^u \partial^k) \\
& \quad + n^{(\pm) a}{}_k (2(\partial_l v_m) \partial^l \partial^k - v_m \partial^k \square - (\partial^k v_m) \square - 2(\partial_u v_m) \partial^u \partial^k) \\
& \quad \left. + \varepsilon^a{}_b{}^{pr} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon^n{}_{lkm} (\partial^l v_p) \partial_r \partial^k \right\} C^m \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} c_a \left\{ [\varepsilon^{an}{}_{lm} n^{(\pm) b}{}_n (v_k \partial^k \partial^l \partial_b + (\partial^k v_k) \partial^l \partial_b - v_b \partial^l \square - (\partial_k v_b) \partial^k \partial^l) \right. \\
& \quad + n^{(\pm) a}{}_n \varepsilon^{nb}{}_{lm} (- v^l \partial_b \square - (\partial_k v^l) \partial^k \partial_b)] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} [n^{(\pm) a}{}_{nk} \delta^a{}_m ((\partial^n v_l) \partial^l \partial^k + v^n \partial^k \square + (\partial^k v^n) \square) \\
& \quad \left. + n^{(\pm) a}{}_k (- v_m \partial^k \square - (\partial^k v_m) \square) + \varepsilon^a{}_b{}^{pr} n^{(\pm) b}{}_n \varepsilon^n{}_{lkm} (\partial^l v_p) \partial_r \partial^k \right\} C^m
\end{aligned}$$

gerade den Ausdruck (H.39).

Block $\{B, C\}$ - $\{d\}$:

Um die Hermitizität des zweiten Blocks zu bestätigen, integrieren wir (H.63) ebenfalls partiell:

Komponente $B^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{\epsilon}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[\eta_{gw} \left((\partial^n v_b) \square - (\partial_f v_b) \partial^f \partial^n + 2(\partial_b v_k) \partial^k \partial^n \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varepsilon_{wu}{}^k \varepsilon_b{}^n{}_{fg} (\partial^u v_k) \partial^v \partial^f \right] \right. \\
 & \quad + n^{(\pm) b}{}_g \left[(\partial_b v_w) \square - (\partial_b v_w) \square - 2(\partial_k v_w) \partial^k \partial_b - v_w \partial_b \square + (\partial_k v_w) \partial^k \partial_b \right] \\
 & \quad + n^{(\pm) b}{}_w \left[(\partial_b v_g) \square + 2(\partial_k v_g) \partial^k \partial_b + v_g \partial_b \square - (\partial_b v_g) \square + (\partial_g v_b) \square \right. \\
 & \quad \left. - (\partial^f v_g) \partial_f \partial_b - 2(\partial_g v_k) \partial^k \partial_b \right] \\
 & \quad + n^{(\pm) w}{}_{wg} \left[-(\partial^a v_a) \square - (\partial^f v_a) \partial^a \partial_f + (\partial^a v_a) \square + 2(\partial^f v_a) \partial^a \partial_f + v_a \partial^a \square \right] \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[\varepsilon_{wfg}{}^n \left(-(\partial^f v_b) \square - 2(\partial^a v_b) \partial_a \partial^f - v_b \partial^f \square + (\partial^f v_b) \square \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2(\partial^v v_v) \partial^f \partial_b + 2(\partial_b v_v) \partial^v \partial^f + 2(\partial^f v_v) \partial^v \partial_b + 2v_v \partial^v \partial^f \partial_b \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (\partial_v v_b) \partial^v \partial^f - (\partial_b v_v) \partial^v \partial^f - (\partial^a v_a) \partial^f \partial_b - 2(\partial^f v_a) \partial^a \partial_b \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_b{}^n{}_{fg} \left((\partial_v v_w) \partial^v \partial^f - (\partial_w v_v) \partial^v \partial^f + (\partial^f v_w) \square \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\partial^f v_w) \square - 2(\partial^a v_w) \partial_a \partial^f - v_w \partial^f \square \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_{vwfg} \left(2(\partial^f v^n) \partial^v \partial_b - (\partial_b v^v) \partial^f \partial^n \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_{vfg}{}^n \left((\partial^f v_w) \partial^v \partial_b \right) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) b}{}_w \left[\varepsilon_{bfvg} (\partial^f v_a) \partial^a \partial^v + \varepsilon_{fkvg} (\partial^f v^k) \partial^v \partial_b \right] \right\} B^g \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{\epsilon}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[\eta_{wg} \left((\partial^n v_b) \square - (\partial_f v_b) \partial^f \partial^n + 2(\partial_b v_k) \partial^k \partial^n \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varepsilon_{wu}{}^k \varepsilon_b{}^n{}_{fg} (\partial^u v_k) \partial^v \partial^f \right] \right. \\
 & \quad + n^{(\pm) b}{}_g \left[-v_w \partial_b \square - (\partial_k v_w) \partial^k \partial_b \right] \\
 & \quad + n^{(\pm) b}{}_w \left[(\partial_g v_b) \square + v_g \partial_b \square + (\partial_k v_g) \partial^k \partial_b - 2(\partial_g v_k) \partial^k \partial_b \right] \\
 & \quad + n^{(\pm) w}{}_{wg} \left[v_a \partial^a \square + (\partial^f v_a) \partial^a \partial_f \right] \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm) b}{}_n \left[\varepsilon_{wfg}{}^n \left(-v_b \partial^f \square - (\partial^a v_b) \partial_a \partial^f + (\partial_b v_a) \partial^a \partial^f \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (\partial^a v_a) \partial^f \partial_b + 2v_a \partial^a \partial^f \partial_b \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_b{}^n{}_{fg} \left(-v_w \partial^f \square - (\partial_w v_a) \partial^a \partial^f - (\partial_a v_w) \partial^a \partial^f \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_{wvfg} \left((\partial_b v^v) \partial^f \partial^n - 2(\partial^v v_b) \partial^f \partial^n \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_{vfg}{}^n \left(-(\partial^v v_w) \partial^f \partial_b \right) \right. \\
 & \quad \left. + n^{(\pm) b}{}_w \left[-\varepsilon_{bfvg} (\partial^f v_a) \partial^a \partial^v - \varepsilon_{fkvg} (\partial^f v^k) \partial_b \partial^v \right] \right\} B^g,
 \end{aligned}$$

was (H.42) entspricht. Dabei wurden unter anderem die Antisymmetrie von $n^{(\pm)ab}$ sowie unsere Konvention $d^w [+ \dots v_a \partial^a \partial^f \partial_w] B^g = d^w [- \dots (\partial_w v_a) \partial^a \partial^f] B^g$ beachtet.

Schließlich liefert die partielle Integration von (I.1)

Komponente $C^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm) b}{}_n [\eta_{mw} (- (\partial_b v^n) \square - 2(\partial_k v^n) \partial^k \partial_b - v^n \partial_b \square + 2(\partial_b v^n) \square - (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_m{}^n{}_l \varepsilon_b{}^k{}_{vw} (\partial_k v_a) \partial^l \partial^v \right] \\
& \quad + n^{(\pm) b}{}_w [- (\partial_b v_m) \square - 2(\partial^k v_m) \partial_k \partial_b - v_m \partial_b \square + (\partial_b v_m) \square - (\partial_m v_b) \square \\
& \quad \quad + (\partial^l v_m) \partial_l \partial_b + (\partial_m v_l) \partial^l \partial_b] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm) b}{}_n [\varepsilon_m{}^n{}_{lw} ((\partial^l v_w) \partial^v \partial_b - (\partial_w v^l) \partial^v \partial_b) + \varepsilon_m{}^n{}_{lw} ((\partial_v v_b) \partial^v \partial^l + (\partial^l v_b) \square \right. \\
& \quad \quad - (\partial^l v_b) \square - 2(\partial^k v_b) \partial_k \partial^l - v_b \partial^l \square - (\partial_b v_k) \partial^k \partial^l - (\partial^l v_k) \partial^k \partial_b \\
& \quad \quad \left. + (\partial^k v_k) \partial^l \partial_b + (\partial^l v_k) \partial^k \partial_b + (\partial_b v_k) \partial^k \partial^l + v_k \partial^k \partial^l \partial_b] \right. \\
& \quad \left. + n^{(\pm) nw} \varepsilon_m{}^n{}_l [(\partial_k v_a) \partial^k \partial^l + (\partial^l v_a) \square - (\partial^l v_a) \square \right. \\
& \quad \quad \left. - 2(\partial^k v_a) \partial_k \partial_l - v_a \partial^l \square] \right\} C^m \\
= & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^w \left\{ n^{(\pm) b}{}_n [\eta_{wm} (v^n \partial_b \square - (\partial_b v^n) \square - 2(\partial_k v_b) \partial^k \partial^n + (\partial_b v_k) \partial^k \partial^n) \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon_{wb}{}^k{}_v \varepsilon^{na}{}_{lm} (\partial_k v_a) \partial^v \partial^l \right] \\
& \quad + n^{(\pm) b}{}_w [v_m \partial_b \square + (\partial_m v_b) \square + (\partial^k v_m) \partial_k \partial_b - (\partial_m v_k) \partial^k \partial_b] \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} \left\{ n^{(\pm) b}{}_n [- \varepsilon^{n}{}_{lvm} ((\partial^l v_w) - (\partial_w v^l)) \partial^v \partial_b \right. \\
& \quad \quad \left. - \varepsilon_w{}^n{}_{lm} (- v_b \partial^l \square - (\partial^k v_b) \partial_k \partial^l + (\partial^k v_k) \partial^l \partial_b + v_k \partial^k \partial^l \partial_b) \right] \\
& \quad \left. + n^{(\pm) wn} \varepsilon^{na}{}_{lm} [- v_a \partial^l \square - (\partial^k v_a) \partial_k \partial^l] \right\} C^m ,
\end{aligned}$$

was mit (H.43) übereinstimmt.

I.2.6 Der Tensor-Sektor

Block {B, d}:

Hier ist der Ausdruck (H.65) partiell zu integrieren. Dies ergibt unter Berücksichtigung der Divergenzfreiheit der beteiligten Tensoren

Komponente $B^{mn} - d^{kl}$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^k{}_\alpha \{ [-\bar{e}_k{}^\beta n^{(\pm)}{}_n{}^\alpha v_a \partial^a - \bar{e}_k{}^\beta n^{(\pm)}{}_n{}^b (\partial^\alpha v_b) + \bar{e}_k{}^\beta n^{(\pm)}{}_a{}^\alpha v_n \partial^a \\
 & \quad - \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_n{}^\alpha n^{(\pm)}{}_a{}^b v_b \partial^a + \bar{e}_n{}^\alpha n^{(\pm)}{}_a{}^\beta v_k \partial^a] \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_r{}^\beta [n^{(\pm)}{}_{nk} \varepsilon^r{}_{ps} v_p \partial^a - n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^r{}_{ps} v_p \partial_k - \eta_{nk} n^{(\pm)}{}_a{}^b \varepsilon^r{}_{ps} v_p \partial^a] \bar{e}_s{}^\alpha \} B^n{}_\beta \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^k{}_\alpha \{ [\bar{e}_k{}^\beta n^{(\pm)}{}_n{}^\alpha v_a \partial^a + \bar{e}_k{}^\beta n^{(\pm)}{}_n{}^b (\partial^\alpha v_b) - \bar{e}_k{}^\beta v_n n^{(\pm)}{}_a{}^\alpha \partial^a \\
 & \quad + \bar{e}_k{}^\beta \bar{e}_n{}^\alpha v_b n^{(\pm)}{}_a{}^b \partial^a - \bar{e}_n{}^\alpha v_k n^{(\pm)}{}_a{}^\beta \partial^a] \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} \bar{e}_s{}^\alpha [-n^{(\pm)}{}_{kn} \varepsilon^{sp}{}_{ar} v_p \partial^a + n^{(\pm)}{}_n{}^b \varepsilon^s{}_{pr} (\partial_k v_p) + \eta_{kn} n^{(\pm)}{}_a{}^b \varepsilon^s{}_{pr} v_p \partial^a] \bar{e}_r{}^\beta \} B^n{}_\beta,
 \end{aligned}$$

was mit (H.45) identisch ist.

Block {D, d};

Partielle Integration von (H.66) führt abschließend auf

Komponente $D^{mn} - d^{kl}$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^{kq} \{ \varepsilon_q{}^n{}_{lm} n^{(\pm)}{}_n{}^b v_b \partial^l \eta_{kp} + n^{(\pm)}{}_{qn} \varepsilon^n{}_{lm} v_a \partial^l \eta_{kp} - n^{(\pm)}{}_{np} \varepsilon_q{}^n{}_{lm} v_k \partial^l \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} (-n^{(\pm)}{}_{kp} (\partial_q v_m) - n^{(\pm)}{}_{kp} \eta_{qm} v_l \partial^l + \varepsilon_k{}^n{}_{lm} \varepsilon_{qb}{}^u v_p n^{(\pm)}{}_n{}^b v_u \partial^l) \} D^{mp} \\
 = & \int d^4x \frac{\bar{e}}{2} d^{kq} \{ \eta_{kp} \varepsilon_q{}^n{}_{lm} n^{(\pm)}{}_n{}^b v_b \partial^l - \eta_{kp} n^{(\pm)}{}_{qn} \varepsilon^n{}_{lm} v_a \partial^l - v_k \varepsilon_q{}^n{}_{lm} n^{(\pm)}{}_{np} \partial^l \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} (-n^{(\pm)}{}_{kp} (\partial_q v_m) - n^{(\pm)}{}_{kp} \eta_{qm} v_l \partial^l - \varepsilon_k{}^n{}_{lm} \varepsilon_{qb}{}^u v_p n^{(\pm)}{}_n{}^b v_u \partial^l) \} D^{mp},
 \end{aligned}$$

so daß wie gewünscht (H.45) reproduziert wird.

Anhang J

Die Kontraktion von \tilde{V} mit den Projektoren

Das Objekt \tilde{V} stellt bis auf den üblichen Vorfaktor $\frac{1}{2}$ den Integralkern der quadratischen Form $\tilde{\Gamma}_k^{\text{quad}(1)}$ dar, die wir im Kapitel H berechnet haben. Der Unterschied zu dem im Hauptteil auftretenden Wechselwirkungsanteil V des Operators $\Gamma_k^{(2)}$ besteht in dem Umstand, daß in \tilde{V} die $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ und $\bar{\mu}$ -Reskalierungen der Zerlegungen noch nicht berücksichtigt wurden.

In diesem Kapitel des Anhangs wollen wir die erste Stufe der Spurbildung auf der rechten Seite der Flußgleichung durchführen, indem wir die im Kapitel H berechneten Komponenten von \tilde{V} gemäß ihrer Tensorstruktur mit den entsprechenden Projektoren kontrahieren, wobei wir - wie bereits im Hauptteil erläutert - im Hinblick auf die Impulsintegration alle Beiträge, in denen keine Ableitung auf den Vektor v_μ wirkt, weglassen können.

Dazu schreiben wir alle Matrixelemente vollständig auf $O(4)$ -Indizes um und ersetzen dann die partiellen Ableitungen durch ip^a bzw. ip_a . Die nach dem Abstreifen der Komponentenfelder verbleibenden freien Indizes bezeichnen wir einheitlich mit m und k im Vektor- bzw. mit $\{m, n\}$ und $\{k, l\}$ im Tensorsektor. Die Summationsindizes entnehmen wir der Menge a, b, c, \dots . Die Rechnung verwendet wiederholt die Symmetrieeigenschaften der auftretenden Tensoren sowie eine Reihe von Standardrelationen, auf die bei ihrem ersten Auftreten hingewiesen wird. Wir berechnen zunächst den skalaren Sektor der paritätsgeordneten Matrix, anschließend den Vektor-Sektor, und zu guter Letzt wenden wir

uns den Tensoren zu.

J.1 Der skalare Sektor

J.1.1 Beiträge aus der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponente

Block $\{a, d\}$ - $\{a-d\}$:

Mit $f_{ab} := \partial_a v_b$ können wir im skalaren Sektor von V_{red} einen Ausdruck der Form

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \partial_p \partial_q \square \rightarrow \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q p^2 \rightarrow \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \frac{1}{4} p^4 \eta_{pq}$$

extrahieren. Der letzte Schritt dieser Ersetzung gilt, da wir unter dem Integral die Regel $\int d^4 p f(p^2) p_a p_b \equiv \frac{1}{4} \int d^4 p f(p^2) p^2 \eta_{ab}$ für symmetrische Integration anwenden können. Für Skalare ist der Projektor trivial, und wir erhalten somit

Komponente $a - a$:

$$0$$

Komponente $a - d$:

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}_{ab} \right] p^4 = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\left(-1 \pm \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4$$

Komponente $d - a$:

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}_{ab} \right] p^4 = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\left(-1 \pm \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4$$

Komponente $d - d$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) (\pm 4\delta_a^c \delta_b^d - \varepsilon^{cd}_{ab}) \right] p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(-1 \pm \frac{1}{\gamma_k} \right) (4 - 2) \right] p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[2 \left(-1 \pm \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4
\end{aligned}$$

J.1.2 Beiträge aus der Eichfixierung

Komponente $a - a$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \frac{-(1 + \beta_D)}{2\alpha_D} \left[\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} + \frac{1}{2} \delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq} + \delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp} \right] \eta_{pq} p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \frac{-(1 + \beta_D)}{2\alpha_D} [-1 + 2 + 1] p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[-\frac{1 + \beta_D}{\alpha_D} \right] p^4
\end{aligned}$$

Komponente $a - d$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\left(-\frac{3\beta_D}{4\alpha_D} \delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq} + \left(\frac{3\beta_D}{2} + \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{\alpha_D} \delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{\beta_D}{2\alpha_D} + \frac{1}{4\alpha_D} \right) \delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp} \right] \eta_{pq} p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[-\frac{10\beta_D + 1}{2\alpha_D} \right] p^4
\end{aligned}$$

Komponente $d - a$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\frac{1 + \beta_D}{4\alpha_D} \delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq} + \frac{1}{2\alpha_D} \left(-5\beta_D - \frac{1}{2} \right) \delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\alpha_D} \left(-\beta_D + \frac{1}{2} \right) \delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp} \right] \eta_{pq} p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\frac{3}{\alpha_D} \left(\beta_D + \frac{1}{2} \right) \right] p^4
\end{aligned}$$

Komponente d – d:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[\frac{3\beta_D}{4\alpha_D} \delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq} + \frac{3\beta_D}{2\alpha_D} \delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} + \frac{3\beta_D}{2\alpha_D} \delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp} \right] \eta_{pq} p^4 \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[\frac{3\beta_D}{\alpha_D} \right] p^4 \end{aligned}$$

J.1.3 Beiträge aus der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Komponente

Block $\{a, d\}$ - $\{B, D\}$:

Komponente a – B:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[-\delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} - \delta_a^q \delta_b^c \eta^{dp} - 3\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_b^{cdp} \delta_a^q - \varepsilon_{ab}^{dq} \eta^{cp} + \varepsilon_{ab}^{cd} \eta^{pq}) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[2 \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4 \end{aligned}$$

Komponente a – D:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[\varepsilon_a^{cdq} \delta_b^p \pm 2\delta_b^q (\delta_a^c \eta^{dp} - 2\delta_a^d \eta^{cp}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (3\delta_a^d \eta^{cp} \delta_b^q + \delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} + \delta_b^c \eta^{dp} \delta_a^q) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[2 \left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4 \end{aligned}$$

Komponente d – B:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[-5\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} + \delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} + \delta_b^c \delta_a^q \eta^{dp} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (-3\varepsilon_{ab}^{dq} \eta^{cp} - \varepsilon_b^{cdp} \delta_a^q - \varepsilon_{ab}^{cd} \eta^{pq}) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(\frac{5}{4} - 1 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ab}^{cd} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 \right) \right] p^4 = 0 \end{aligned}$$

Komponente $d - D$:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[-\varepsilon_a^{cdq} \delta_b^p \mp 2\delta_b^q (2\delta_a^d \eta^{cp} + \delta_a^c \eta^{dp}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (5\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} - \delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} - \delta_a^q \delta_b^c \eta^{dp}) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\left(\mp \frac{1}{2} \pm 1 \mp \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\gamma_k} \left(-\frac{5}{4} + 1 + \frac{1}{4} \right) \right] p^4 = 0 \end{aligned}$$

J.1.4 Beiträge aus der $\bar{\tau}$ - \bar{e} -Komponente

Block $\{B, D\}$ - $\{a, d\}$:

Komponente $B - a$:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[-\delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq} - 5\delta_a^q \delta_b^d \eta^{cp} + \delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (-\varepsilon_a^{cdq} \delta_b^p + 3\varepsilon_{ab}^{dq} \eta^{cp}) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[2 \left(-1 \pm \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4 \end{aligned}$$

Komponente $B - d$:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[-3\delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq} - \delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp} - 3\delta_a^q \delta_b^d \eta^{cp} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (-\varepsilon_a^{cdq} \delta_b^p - \varepsilon_{ab}^{dq} \eta^{cp} + 2\varepsilon_{ab}^{cd} \eta^{pq}) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(-3 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ab}^{cd} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \right) \right] p^4 \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[4 \left(-1 \pm \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4 \end{aligned}$$

Komponente $D - a$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[\varepsilon_a^{cdp} \delta_b^q \pm 2(2\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} + \delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} - \delta_b^c \delta_a^q \eta^{dp}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(-5\delta_a^d \eta^{cp} \delta_b^q + \delta_b^c \eta^{dp} \delta_a^q - \delta_b^c \delta_a^d \eta^{pq} \right) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[\left(\pm \frac{1}{2} \mp 1 \mp 2 \pm \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} + 1 \right) \right] p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[2 \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4
\end{aligned}$$

$D - d$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[-\varepsilon_a^{cdp} \delta_b^q \pm 2\delta_a^d (2\eta^{cp} \delta_b^q + \delta_b^c \eta^{pq}) \pm 2\delta_a^q \delta_b^c \eta^{dp} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(-3\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} - 3\delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} - \delta_b^c \delta_a^q \eta^{dp} \right) \right] \eta_{pq} \frac{p^4}{4} \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[\left(\mp \frac{1}{2} \mp 1 \mp 2 \mp \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} + 3 + \frac{1}{4} \right) \right] p^4 \\
&= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[4 \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^4
\end{aligned}$$

J.1.5 Beiträge aus dem Geistsektor

Block $\{\bar{f}\}$ - $\{f\}$:

Im Geistsektor gibt es bloß ein Matricelement, das aus der Kopplung zweier Skalare hervorgeht. Da in der Zerlegung der Geistfelder nur jeweils eine Ableitung auf diese wirkt, tritt hier zusätzlich zu den drei übrigen Ableitungen kein \square -Operator auf, so daß wir

$$\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \partial_p \partial_q \rightarrow -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} p_p p_q .$$

extrahieren. Für die Kontraktion des Matricelements erhalten wir dann mit symmetrischer Integration

Komponente \bar{f} - f :

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} + \delta_a^c \delta_b^p \eta^{dq} \right] \\ &= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] p^2 = 0 \end{aligned}$$

J.2 Der Vektor-Sektor

Hier kontrahieren wir die beiden freien Indizes m und k des entsprechenden Matrixelements mit dem Projektor P_V , der auf transversale Vektoren projiziert. Er ist gegeben durch

$$P_V{}^{mk} := \eta^{mk} - \frac{p^m p^k}{p^2},$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} P_V{}^{mk} p_k &= \left(\eta^{mk} - \frac{p^m p^k}{p^2} \right) p_k = p^m - p^m = 0, \\ P_V{}^{mk} \eta_{mk} &= 4 - \frac{p^2}{p^2} = 3 \equiv d_V = P_V{}^{mk} P_V{}_{mk}. \end{aligned}$$

Zudem ist $P_V{}^{mk}$ offensichtlich symmetrisch, so daß insbesondere seine Kontraktion mit einem ε -Tensor verschwindet. Bei den folgenden Kontraktionen werden im wesentlichen diese Eigenschaften verwandt. Darüber hinaus extrahieren wir stets die Kombination

$$\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\partial_p\partial_q \rightarrow -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q.$$

Schließlich besitzen im folgenden die Gleichheitszeichen nur dann Gültigkeit, sofern man

sich die Ausdrücke unter einem Impulsintegral $\int d^4p$ vorstellt; aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir darauf verzichtet, dies immer explizit auszuschreiben.

J.2.1 Beiträge aus der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponente

Block $\{b, c\}$ - $\{b, c\}$:

Komponente $b^m - b^k$:

0

Komponente $b^m - c^k$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[-2 \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cdp} \eta_{am} \delta_b^q \right] P_V^{mk} \\ &= -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[-2 \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}{}_{ba} \cdot \frac{1}{4} \right] p^2 \\ &= \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir beachtet, daß $p_p p_q \varepsilon^{cdp} P_V^{mk} = p_p p_q \varepsilon^{cdp} \eta^{mk} \rightarrow \varepsilon^{cd}{}^m \eta^{mk} \frac{p^2}{4}$ gilt. Wird ein Index des Projektors zusammen mit einem Vektor p^a über einen ε -Tensor kontrahiert, so liefert der zweite Term des transversalen Projektors, d. h. der longitudinale Projektor, keinen Beitrag. Da P_V zudem in Form des longitudinalen Projektors explizit Impulsvektoren enthält und somit keine reine Funktion von p^2 ist, können wir nicht bereits zu Beginn der Rechnung die symmetrische Integration auf das Produkt $p_p p_q$ anwenden; diesen Schritt werden wir erst dann vollziehen, sobald sich ein Ausdruck ergeben hat, der bezüglich seines Tensorcharakters bloß noch von zwei Viererimpulsvektoren abhängt.

Komponente $c^m - b^k$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[-2 \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}{}^q \delta_a^p \eta_{bk} \right] P_V^{mk} \\ &= -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[-2 \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}{}_{ba} \cdot \frac{1}{4} \right] p^2 \\ &= \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2 \end{aligned}$$

Komponente $c^m - c^k$:

0

Block $\{b, c\}$ - $\{d\}$:

Komponente $b^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\pm 2\eta_{ma}(\delta_k^c(\delta_b^d\eta^{pq} - \eta^{dp}\delta_b^q) - \delta_k^d(\delta_b^c\eta^{pq} - \eta^{cp}\delta_b^q)) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{\gamma_k}\eta_{ma}(\delta_k^c(\eta^{dp}\delta_b^q - \delta_b^d\eta^{pq}) - \delta_k^d(\eta^{cp}\delta_b^q - \delta_b^c\eta^{pq})) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}4f_{[cd]}p_p p_q \left[\pm \eta_{ma}\delta_k^c(\delta_b^d\eta^{pq} - \eta^{dp}\delta_b^q) + \frac{1}{\gamma_k}\eta_{ma}\delta_k^c(\eta^{dp}\delta_b^q - \delta_b^d\eta^{pq}) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}4f_{[cd]} \left[\left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \left(P_V^c{}_a \delta_b^d - \frac{1}{4}\delta_a^c \delta_b^d \right) \right] p^2 \\
 = & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[2 \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
 \end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, daß $n^{(\pm)ab}P_V^c{}_a p_b = n^{(\pm)ab}\delta_a^c p_b$ gilt. Außerdem folgt mit symmetrischer Integration $\int d^4 p f(p^2) P_V^{ab} = \frac{3}{4} \int d^4 p f(p^2) \eta^{ab}$. Abschließend gilt natürlich $n^{(\pm)ab}f_{[ab]} = n^{(\pm)ab}f_{ab}$, da $n^{(\pm)}$ antisymmetrisch ist.

Komponente $c^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\pm 2\delta_a^q(\eta_{mk}(\delta_b^c\eta^{dp} - \delta_b^d\eta^{cp}) + \eta_{mb}(\eta^{cp}\delta_k^d - \eta^{dp}\delta_k^c)) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{\gamma_k}\delta_a^q(\eta_{mk}(\delta_b^d\eta^{cp} - \delta_b^c\eta^{dp}) + \eta_{mb}(\eta^{dp}\delta_k^c - \eta^{cp}\delta_k^d)) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}4f_{[cd]} \left[\left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \left(\frac{3}{4}\delta_a^d \delta_b^c + \frac{1}{4}\delta_b^d \delta_a^c \right) \right] p^2 \\
 = & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[2 \left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
 \end{aligned}$$

Block {d}-{b, c}:Komponente $d^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\mp 2\eta_{bk}((\delta_m^c \delta_a^d - \delta_m^d \delta_a^c)\eta^{pq} - \delta_a^q(\delta_m^c \eta^{dp} - \delta_m^d \eta^{cp})) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{\gamma_k}\eta_{bk}(\delta_a^q(\delta_m^d \eta^{cp} - \delta_m^c \eta^{dp}) + (\delta_m^c \delta_a^d - \delta_m^d \delta_a^c)\eta^{pq}) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}4f_{[cd]} \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \left(\frac{3}{4}\delta_a^d \delta_b^c - \frac{1}{4}\delta_b^c \delta_a^d \right) \right] p^2 \\
= & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[2 \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $d^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\mp 2\delta_b^q(\eta_{mk}(\delta_a^c \eta^{dp} - \delta_a^d \eta^{cp}) + \eta_{ak}(\delta_m^d \eta^{cp} - \delta_m^c \eta^{dp})) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{\gamma_k}\delta_b^q(\eta_{mk}(\delta_a^c \eta^{dp} - \delta_a^d \eta^{cp}) + \eta_{ak}(\eta^{cp} \delta_m^d - \eta^{dp} \delta_m^c)) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}4f_{[cd]} \left[\left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \left(\frac{3}{4}\delta_a^c \delta_b^d + \frac{1}{4}\delta_a^d \delta_b^c \right) \right] p^2 \\
= & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[2 \left(\pm 1 - \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
\end{aligned}$$

Block {d}-{d}:Komponente $d^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[- \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon_{mab}^q (\delta_k^c \eta^{dp} - \eta^{cp} \delta_k^d) - \varepsilon_{abk}^q (\delta_m^c \eta^{dp} - \delta_m^d \eta^{cp}) \right] P_V^{mk} \\
= & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \left(\frac{1}{4}\varepsilon_{ab}^c{}^d - \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}^d{}^c - \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}{}^{dc} + \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}{}^{cd} \right) \right] p^2 \\
= & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[2 \left(-1 \pm \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
\end{aligned}$$

J.2.2 Beiträge aus der Eichfixierung

Komponente $b^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p^2 \cdot \frac{1}{\alpha_D} \left[\eta_{ma}\delta_b^d\delta_k^c + \delta_a^c\eta_{bk}\delta_m^d \right] P_V^{mk} \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p^2 \cdot \frac{1}{\alpha_D} \left[P_{V\ a}^c\delta_b^d + P_{V\ b}^d\delta_a^c \right] \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab}\frac{1}{\alpha_D} \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right] p^2 \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[-\frac{3}{2\alpha_D} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $c^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \cdot \frac{1}{\alpha_D} \left[\delta_a^d\delta_m^c\eta_{bk}\eta^{pq} - 2\eta_{ma}\delta_b^q\eta^{cp}\delta_k^d \right] P_V^{mk} \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab}\frac{1}{\alpha_D} \left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right] p^2 \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[-\frac{1}{4\alpha_D} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $c^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \cdot \frac{1}{\alpha_D} \left[\eta_{mk}(\delta_a^c\delta_b^d\eta^{pq} + 2\delta_a^d\delta_b^q\eta^{cp}) + \eta_{ma}\eta_{bk}(\eta^{cd}\eta^{pq} + 2\eta^{cp}\eta^{dq}) \right] P_V^{mk} \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\frac{1}{\alpha_D} \left[3\delta_a^c\delta_b^d \left(1 - \frac{2}{4} \right) \right] p^2 \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[-\frac{3}{2\alpha_D} \right] p^2
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $n^{(\pm)ab}P_{V\ ab} = 0$ beachtet.

Komponente $c^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \cdot \frac{1}{\alpha_D} \left[2\varepsilon_{ma}{}^q \delta_b{}^d \eta^{cp} - 2\eta_{ma} \varepsilon_b{}^{dq} \eta^{cp} \right] P_V{}^{mk} \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \frac{1}{\alpha_D} p_p p_q \left[-2\varepsilon_b{}^{dq} P_V{}^k{}_a \eta^{cp} \right] \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \frac{1}{\alpha_D} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_b{}^{dc} \right] p^2 \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[\pm \frac{1}{\alpha_D} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $d^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \cdot \frac{1}{\alpha_D} \left[(\varepsilon_{ma}{}^c \delta_b{}^d - \varepsilon_{ma}{}^{cd} \eta_{bk}) \eta^{pq} \right] P_V{}^{mk} \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \frac{1}{\alpha_D} \left[-P_V{}^m{}_b \varepsilon_{ma}{}^{cd} \right] p^2 \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \frac{1}{\alpha_D} \left[\frac{3}{4} \varepsilon_{ba}{}^{cd} \right] p^2 \\
&= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[\mp \frac{3}{2\alpha_D} \right] p^2
\end{aligned}$$

J.2.3 Beiträge aus der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Komponente

Block $\{b, c\}$ - $\{A, D\}$:

Komponente $b^m - A^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta^{pq} (\delta_a{}^c \delta_m{}^d - \delta_a{}^d \delta_m{}^c) \eta_{bk} + \delta_a{}^q \eta_{bk} (\delta_m{}^c \eta^{dp} - \delta_m{}^d \eta^{cp}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ma} \delta_b{}^p \varepsilon^{cdq}{}_k + \eta_{mk} \delta_b{}^p \varepsilon_a{}^{cdq}) \right] P_V{}^{mk} \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[p^2 (\delta_a{}^c P_V{}^d{}_b - \delta_a{}^d P_V{}^c{}_b) + p_a p^d P_V{}^c{}_b - p_a p^c P_V{}^d{}_b \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon^{cdq}{}_k P_V{}^k{}_a p_q p_b + 3\varepsilon_a{}^{cdq} p_q p_b) \right] \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\frac{3}{4} (\delta_a{}^c \delta_b{}^d - \delta_a{}^d \delta_b{}^c) + \frac{1}{4} (\delta_a{}^d \delta_b{}^c - \delta_a{}^c \delta_b{}^d) - \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} \varepsilon^{cd}{}_{ba} + \frac{3}{4} \varepsilon_a{}^{cd}{}_b \right) \right] p^2 \\
&= -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $b^m - D^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{ma}\eta^{pq}(-\delta_b^c\delta_k^d + \delta_k^c\delta_b^d) + \delta_m^d\eta^{cp}\eta_{bk}\delta_a^q + \delta_m^c\delta_a^d\eta_{bk}\eta^{pq} - \delta_m^c\eta^{dp}\delta_a^q\eta_{bk} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k}(-\eta_{bk}\eta^{pq}\varepsilon_{ma}^{cd} - \eta_{ma}\eta^{pq}\varepsilon_b^{cd} - \eta_{mk}\varepsilon_{ab}^{cd}\eta^{pq} + \eta_{ma}\delta_b^p\varepsilon^{cdq}_k \right. \\
 & \quad \left. + \eta_{mk}\delta_b^p\varepsilon_a^{cdq}) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[-(P_V^d\delta_b^c - P_V^c\delta_b^d)p^2 + P_V^d p_a p^c + P_V^c\delta_a^d p^2 - P_V^c p_a p^d \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k}(-P_V^m\varepsilon_{ma}^{cd}p^2 - \varepsilon_b^{cd}P_V^k p^2 - 3\varepsilon_{ab}^{cd}p^2 + \varepsilon^{cdq}_k P_V^k p_q p_b + 3\varepsilon_a^{cdq} p_q p_b) \right] \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\delta_a^c\delta_b^d \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\gamma_k}\varepsilon_{ab}^{cd} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 3 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) \right] p^2 \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[\frac{5}{4} \mp \frac{2}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $c^m - A^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{ma}\eta_{bk}(\eta^{cd}\eta^{pq} - \eta^{cp}\eta^{dq}) + \eta_{bk}\delta_m^c(\delta_a^q\eta^{dp} - \delta_a^d\eta^{pq}) \right. \\
 & \quad \left. + \eta_{ma}\delta_b^q\eta^{cp}\delta_k^d - \eta_{mk}\delta_a^d\delta_b^q\eta^{cp} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k}(\varepsilon_{ma}^{dq}\eta_{bk}\eta^{cp} + \varepsilon_m^{dq}\delta_a^c\delta_b^p - \varepsilon_{ma}^{dq}\delta_k^c\delta_b^p) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\delta_a^c\delta_b^d \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4}\varepsilon_{ba}^{dc} - \frac{1}{4}\varepsilon_a^c{}^d{}_b \right) \right] p^2 \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $c^m - D^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{bk}(\eta_{ma}\eta^{cq}\eta^{dp} - \delta_m^c \eta^{dp}\delta_a^q + \delta_m^c \delta_a^d \eta^{pq}) + \eta_{ma}\delta_k^d(\delta_b^c \eta^{pq} - \eta^{cp}\delta_b^q) \right. \\
& \quad + \eta_{mk}\delta_a^d(\eta^{cp}\delta_b^q - \delta_b^c \eta^{pq}) \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k}(\eta_{bk}(\varepsilon_{ma}^{cd}\eta^{pq} + \varepsilon_{ma}^{dq}\eta^{cp}) + \varepsilon_{mb}^d \delta_a^c \eta^{pq} + \varepsilon_m^{dq} \delta_a^c \delta_b^p \\
& \quad \left. - \varepsilon_{mab}^d \delta_k^c \eta^{pq} - \varepsilon_{ma}^{dq} \delta_k^c \delta_b^p) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[P_{Vab} p^c p^d - P_V^c p_a p^d + P_V^c \delta_a^d p^2 + P_{Va}^d (\delta_b^c p^2 - p^c p_b) + 3\delta_a^d (p^c p_b - \delta_b^c p^2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (P_{Vb}^m \varepsilon_{ma}^{cd} p^2 + P_{Vb}^m \varepsilon_{ma}^{dq} p_q p^c + 0 + 0 - P_V^{cm} \varepsilon_{mab}^d p^2 - P_V^{cm} \varepsilon_{ma}^{dq} p_q p_b) \right] \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(0 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 3 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} \varepsilon_{ba}^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ba}^{dc} - \frac{3}{4} \varepsilon_{ab}^{cd} - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{dc} \right) \right] p^2 \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[\frac{5}{4} \mp \frac{2}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Block $\{b, c\}$ - $\{B, C\}$:

Komponente $b^m - B^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\varepsilon_{ma}^q \delta_b^c \eta^{dp} - \varepsilon_{ma}^q \delta_b^d \eta^{cp} - \varepsilon_{ma}^c \eta^{dp} \delta_b^q + \varepsilon_{ma}^d \eta^{cp} \delta_b^q + \varepsilon_{ma}^{cp} \delta_b^q \delta_k^d \right. \\
& \quad - \varepsilon_{ma}^{dp} \delta_b^q \delta_k^c \pm 2\eta_{ma} \delta_b^q (\eta^{dp} \delta_k^c - \eta^{cp} \delta_k^d) \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ma} (\delta_b^c \delta_k^d - \delta_b^d \delta_k^c) \eta^{pq} + \eta_{bk} \delta_a^q (\delta_m^c \eta^{dp} - \delta_m^d \eta^{cp}) - \eta_{bk} \delta_m^c \delta_a^d \eta^{pq}) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab} \left\{ 2f_{[cd]} p_p p_q \left[\frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{dc} \pm \frac{1}{2} \delta_a^c \delta_b^d + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} \delta_a^d \delta_b^c + \frac{1}{4} \delta_b^c \delta_a^d \right) \right] - f_{cd} \left[-\frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{3}{4} \delta_a^c \delta_b^d \right] \right\} p^2 \\
= & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[2 \left(\mp 1 + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $b^m - C^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[(\varepsilon_a^{dp} \delta_m^c - \varepsilon_a^{cp} \delta_m^d) \delta_b^q \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ma} (\delta_b^c \delta_k^d - \delta_b^d \delta_k^c) \eta^{pq} + \eta_{ma} \delta_b^q (\eta^{dp} \delta_k^c - \eta^{cp} \delta_k^d) - \varepsilon_{ma}^p \varepsilon_b^{cdq}) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab} 2f_{[cd]} \left[\frac{1}{4} \varepsilon_a^d \delta_b^c + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} \delta_a^d \delta_b^c + \frac{1}{4} \delta_a^c \delta_b^d \right) \right] p^2 \\
 = & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $c^m - B^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{ma} \varepsilon_b^{cq} \eta^{dp} + \eta_{mk} \varepsilon_{ab}^{cq} \eta^{dp} + \eta_{mk} \varepsilon_a^{cdq} \delta_b^q + \varepsilon_{ma}^c \delta_b^q \eta^{dp} \right. \\
 & \quad - \varepsilon_{ma}^{cp} \delta_b^q \delta_k^d - \varepsilon_a^{dp} \delta_b^q \delta_m^c \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ma} \eta_{bk} (-\eta^{dp} \eta^{cq}) + \eta_{mk} (\delta_a^q \delta_b^d \eta^{cp} - \delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq}) + \eta_{bk} \delta_m^c (\delta_a^q \eta^{dp} - \delta_a^d \eta^{pq}) \right. \\
 & \quad \left. + \eta_{ma} \delta_k^d (\eta^{cp} \delta_b^q - \delta_b^c \eta^{pq}) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \varepsilon_{ab}^{cd} + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} - 3 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\mp \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $c^m - C^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{ma} \varepsilon_b^{dq} \eta^{cp} + \varepsilon_{ma}^q \eta^{cd} \delta_b^p - \varepsilon_{ma}^q \delta_b^d \eta^{cp} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{mk} \delta_a^c (\delta_b^q \eta^{dp} - \delta_b^d \eta^{pq}) - \eta_{ma} \delta_b^c \eta^{pq} \delta_k^d + \varepsilon_{ma}^{dp} \varepsilon_b^{cq}) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{cd} + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} - 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \right) \delta_a^c \delta_b^d \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\mp \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Block $\{d\}$ - $\{A, D\}$:

Komponente $d^m - A^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[-\varepsilon_{ma}{}^{cp}\delta_b{}^q\delta_k{}^d + \varepsilon_{ma}{}^{cq}\eta^{dp}\eta_{bk} - \varepsilon_{ma}{}^{cd}\eta^{pq}\eta_{bk} + \varepsilon_m{}^{cp}{}_k\delta_a{}^d\delta_b{}^q + \varepsilon_m{}^{cdp}\delta_a{}^q\eta_{bk} \right. \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k}(\delta_a{}^c\delta_m{}^d\eta_{bk}\eta^{pq} - \delta_a{}^q\delta_m{}^d\eta^{cp}\eta_{bk} + \eta_{ma}\eta_{bk}(\eta^{cq}\eta^{dp} - \eta^{cd}\eta^{pq}) \\
& \quad \left. + \eta_{mk}\delta_a{}^d\delta_b{}^q\eta^{cp} - \eta_{ma}\eta^{cp}\delta_b{}^q\delta_k{}^d) \right] P_V{}^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\varepsilon_{ab}{}^{cd} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \right] p^2 \\
= & 0
\end{aligned}$$

Komponente $d^m - D^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\pm 2\eta_{ma}\delta_b{}^c\delta_k{}^d\eta^{pq} + \varepsilon_{ma}{}^c{}_k\delta_b{}^d\eta^{pq} + \varepsilon_{ma}{}^{cp}\delta_b{}^q\delta_k{}^d - \varepsilon_{ma}{}^{cq}\eta_{bk}\eta^{dp} \right. \\
& \quad - \varepsilon_m{}^{cp}{}_k\delta_a{}^d\delta_b{}^q - \varepsilon_m{}^{cdp}\delta_a{}^q\eta_{bk} \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k}(\delta_m{}^d\eta^{cp}\delta_a{}^q\eta_{bk} - \eta_{ma}\eta_{bk}\eta^{cq}\eta^{dp} + \eta_{mk}\delta_a{}^d\delta_b{}^c\eta^{pq} - \eta_{mk}\delta_a{}^d\delta_b{}^q\eta^{cp} \\
& \quad \left. - 2\eta_{ma}\delta_b{}^c\delta_k{}^d\eta^{pq} + \eta_{ma}\delta_b{}^q\eta^{cp}\delta_k{}^d + \eta_{ma}\delta_b{}^d\delta_k{}^c\eta^{pq}) \right] P_V{}^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\left(\mp \frac{3}{2} \right) \delta_a{}^c\delta_b{}^d + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \varepsilon_{ab}{}^{cd} + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} - 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) \delta_a{}^c\delta_b{}^d \right] p^2 \\
= & 0
\end{aligned}$$

Block $\{d\}$ - $\{B, C\}$:

Komponente $d^m - B^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{mk}(\delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} - \eta^{cp} \delta_a^d \delta_b^q + 2\delta_a^c \eta^{dp} \delta_b^q) - \varepsilon_m^{cdp} \varepsilon_{ab}^q \right. \\
 & \quad + \eta_{ma}(\delta_k^c \delta_b^d \eta^{pq} + \eta^{cp} \delta_k^d \delta_b^q - 2\delta_k^c \eta^{dp} \delta_b^q) - \delta_a^q \eta_{bk} \eta^{cp} \delta_m^d + \eta_{ma} \eta_{bk} \eta^{cq} \eta^{dp} \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k}(\varepsilon_{bm}^q \delta_a^d \eta^{cp} - \delta_a^c \varepsilon_{bm}^q \eta^{dp} - \varepsilon_{bm}^q \eta^{cd} \delta_a^p + \varepsilon_{ab}^q \eta^{cp} \delta_m^d \\
 & \quad + \varepsilon_{ab}^q \delta_m^c \eta^{dp} - \varepsilon_m^{dq} \delta_a^c \delta_b^p + 2\varepsilon_m^{cq} \delta_a^d \delta_b^p + \varepsilon_b^{cq} \delta_a^p \delta_m^d \\
 & \quad \left. + \eta_{ma}(\varepsilon_b^{cq} \eta^{dp} + \varepsilon^{cdq} \delta_b^p) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(-3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{dc} + \frac{1}{4} \varepsilon_b^{ca} + \frac{1}{4} \varepsilon_b^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon^{cd}{}_{ba} \right) \right] p^2 \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(0 \right) + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $d^m - C^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[-\varepsilon_{ma}^{cp} \varepsilon_b^{dq} + \eta_{mk}(\delta_a^d \delta_b^c \eta^{pq} - 2\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} + \delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp}) \right. \\
 & \quad + \eta_{ma}(\delta_k^c \delta_b^d \eta^{pq} - \delta_k^c \delta_b^q \eta^{dp} + \delta_k^d \eta^{cp} \delta_b^q) \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} \left(-\eta_{ma} \varepsilon_b^{dq} \eta^{cp} + \delta_b^d \varepsilon_{ma}^q \eta^{cp} - \delta_b^p \varepsilon_{ma}^q \eta^{cd} \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_a^{dq} \delta_b^p \delta_m^c - \varepsilon_a^{cq} \delta_m^d \delta_b^p \right) \left. \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 - 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(-\frac{1}{4} \varepsilon_b^{dc} + \frac{1}{4} \varepsilon_a^{dc} - \frac{1}{4} \varepsilon_a^{cd} \right) \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\mp \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

J.2.4 Beiträge aus der $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponente

Block $\{A, D\}$ - $\{b, c\}$:

Komponente $A^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[\eta_{ma} \left((\delta_k^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_k^d) \eta^{pq} + (\eta^{cp} \delta_k^d - \delta_k^c \eta^{dp}) \delta_b^q \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} (\delta_a^p \varepsilon_m^{cdq} \eta_{bk} + \eta_{mk} \delta_b^p \varepsilon_a^{cdq}) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} \varepsilon_b^{cd} + \frac{3}{4} \varepsilon_a^{cd} \right) \right] p^2 \\
= & -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $A^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[\eta_{ma} \delta_k^c (\delta_b^d \eta^{pq} - \delta_b^q \eta^{dp}) + \eta_{ma} \eta_{bk} (\eta^{cq} \eta^{dp} - \eta^{cd} \eta^{pq}) \right. \\
& \quad - \eta_{mk} \delta_b^d (\eta^{cp} \delta_a^q + \delta_a^c \eta^{pq}) + \eta_{bk} \delta_m^d (\delta_a^q \eta^{cp} + \delta_a^c \eta^{pq}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (-\eta_{ma} \varepsilon_b^{cd} \eta^{pq} + \eta_{ma} \varepsilon_b^{dq} \eta^{cp} + \delta_a^c \delta_b^p \varepsilon_m^{dq} - \delta_b^p \delta_m^c \varepsilon_a^{dq}) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{\gamma_k} \left(-\frac{3}{4} \varepsilon_b^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon_b^{dc} - \frac{1}{4} \varepsilon_a^{dc} \right) \right] p^2 \\
= & -\frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[-\frac{9}{4} \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $D^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{ma}(\delta_b^q(\eta^{cp}\delta_k^d + \delta_k^c\eta^{dp}) + (\delta_b^c\delta_k^d - \delta_k^c\delta_b^d)\eta^{pq}) \right. \\
& \quad - \eta_{bk}(2\eta^{cp}\delta_m^d\delta_a^q + \delta_m^c\delta_a^d\eta^{pq}) \\
& \quad - \frac{1}{\gamma_k}(2\eta_{ma}\varepsilon_b^{dq}\eta^{cp} + 2\eta_{bk}\varepsilon_{ma}^{dq}\eta^{cp} + 2\eta_{mk}\varepsilon_{ab}^{dq}\eta^{cp} - \delta_a^p\eta_{bk}\varepsilon_m^{cdq} \\
& \quad \left. + \eta_{mk}\delta_a^p\varepsilon_b^{cdq}) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\delta_a^c\delta_b^d \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_b^{dc}{}_a + \frac{1}{2}\varepsilon_{ba}^{dc} + \frac{3}{2}\varepsilon_{ab}^{dc} - \frac{1}{4}\varepsilon_b^{cd}{}_a + \frac{3}{4}\varepsilon_b^{cd}{}_a \right) \right] p^2 \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[-\frac{5}{4} \pm \frac{2}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $D^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\eta_{ma}\eta_{bk}(\eta^{cd}\eta^{pq} + \eta^{cq}\eta^{dp}) + \eta_{mk}\delta_b^d(-\eta^{cp}\delta_a^q + \delta_a^c\eta^{pq}) \right. \\
& \quad + \eta_{bk}\delta_m^d(\eta^{cp}\delta_a^q - \delta_a^c\eta^{pq}) + \eta_{ma}\delta_k^c(\delta_b^q\eta^{dp} - \delta_b^d\eta^{pq}) \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k}(\eta_{ma}\varepsilon_b^{dq}\eta^{cp} + \eta_{ma}\varepsilon_b^{cd}\eta^{pq} - 2\varepsilon_{ma}^d\delta_b^q\eta^{cp} \\
& \quad \left. + \varepsilon_{ab}^d\eta^{pq}\delta_m^c + \varepsilon_a^{dp}\delta_m^c\delta_b^q - \delta_a^c\delta_b^q\varepsilon_m^{dpk}) \right] P_V^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\delta_a^c\delta_b^d \left(0 + 3 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4}\varepsilon_b^{dc}{}_a + \frac{3}{4}\varepsilon_b^{cd}{}_a + \frac{3}{4}\varepsilon_{ab}^{dc} + \frac{1}{4}\varepsilon_a^{dc}{}_b \right) \right] p^2 \\
= & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab} \left[\frac{5}{4} \mp \frac{2}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Block $\{A, D\}$ - $\{d\}$:

Komponente $A^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[\eta_{ma} \varepsilon^{cdq} \delta_b^p + \eta_{ma} \varepsilon_b^{cq} \eta^{dp} - 2\eta_{ma} \varepsilon_b^{dq} \eta^{cp} - \varepsilon_m^{cq} \delta_a^d \delta_b^p \right. \\
& \quad + \varepsilon_a^{cq} \delta_b^p \delta_m^d \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{mk} \delta_b^d (\delta_a^q \eta^{cp} + \delta_a^c \eta^{pq}) - \eta_{bk} \delta_m^d (\delta_a^q \eta^{cp} + \delta_a^c \eta^{pq}) \\
& \quad \quad \left. - \eta_{ma} \delta_k^d (\delta_b^c \eta^{pq} - \eta^{cp} \delta_b^q) - \eta_{ma} \eta_{bk} (\eta^{cq} \eta^{dp} - \eta^{cd} \eta^{pq}) \right] P_V^{mk} \\
& = -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \varepsilon_{ab}^{cd} + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} + 3 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) \delta_a^c \delta_b^d \right] p^2 \\
& = \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\pm \frac{5}{4} - \frac{13}{8} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $D^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[-\eta_{ma} \varepsilon_b^{cq} \eta^{dp} + \varepsilon_m^{cq} \delta_a^d \delta_b^p + 2\varepsilon_{ma}^q \delta_b^d \eta^{cp} \right. \\
& \quad - \eta_{ma} \delta_b^p \varepsilon^{cdq} - \varepsilon_a^{cq} \delta_b^p \delta_m^d \pm 4\eta_{aq} \eta_{bk} \delta_m^d \eta^{cp} \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{mk} \delta_b^d (\delta_a^q \eta^{cp} - \delta_a^c \eta^{pq}) + \eta_{bk} (-\delta_m^c \delta_a^d \eta^{pq} - 3\eta^{cp} \delta_m^d \delta_a^q + \delta_a^c \delta_m^d \eta^{pq}) \\
& \quad \quad \left. + \eta_{ma} \delta_k^d (\delta_b^q \eta^{cp} + \delta_b^c \eta^{pq}) - \eta_{ma} \eta_{bk} (\eta^{cq} \eta^{dp} + \eta^{cd} \eta^{pq}) \right] P_V^{mk} \\
& = -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ab}^{cd} + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{3}{4} - 3 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \delta_a^c \delta_b^d \right] p^2 \\
& = \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\frac{5}{4} \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
\end{aligned}$$

Block $\{B, C\}$ - $\{b, c\}$:

Komponente $B^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[(\varepsilon_{ma}{}^d{}_k \delta_b^c - \varepsilon_{ma}{}^c{}_k \delta_b^d) \eta^{pq} + (\varepsilon_{ma}{}^d{}_k \eta^{cp} + \varepsilon_{ma}{}^c{}_k \eta^{dp}) \delta_b^p \right. \\
 & \quad - \varepsilon_{ma}{}^q{}_k (\eta^{cp} \delta_b^d + \eta^{dp} \delta_b^c) \\
 & \quad + \varepsilon_a{}^{qc}{}_k \delta_b^p \delta_m^d + \varepsilon_a{}^{dq}{}_k \delta_m^c \delta_b^p \mp 2\eta_{bk} (\delta_m^c \eta^{dp} \delta_a^q + \delta_a^c \delta_m^d \eta^{pq} + \delta_m^d \eta^{cp} \delta_a^q) \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bk} (\delta_m^c \delta_a^d \eta^{pq} + 2\delta_m^d \eta^{cp} \delta_a^q) \\
 & \quad \quad \left. + \eta_{ma} (\delta_b^d \delta_k^c \eta^{pq} - \delta_b^c \delta_k^d \eta^{pq} - \eta^{cp} \delta_b^q \delta_k^d - \eta^{dp} \delta_b^q \delta_k^c)) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\varepsilon_{ab}{}^{cd} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \delta_a^c \delta_b^d \left(\pm \frac{1}{2} \mp \frac{3}{2} \mp \frac{1}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \delta_a^c \delta_b^d \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\pm \frac{1}{4} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $B^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}p_p p_q \left[\varepsilon_{ma}{}^q{}_k (\delta_b^c \eta^{dp} + \delta_b^p \eta^{cd}) + \varepsilon_a{}^{cp}{}_k \delta_m^d \delta_b^q + \varepsilon_{ma}{}^{cq} \eta^{dp} \eta_{bk} \right. \\
 & \quad + \varepsilon_{ma}{}^{dq} \delta_b^q \delta_k^c + \eta_{mk} \varepsilon_a{}^{cdp} \delta_b^q \pm 2\eta_{mk} \delta_a^c \eta^{dp} \delta_b^q \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{mk} (-\delta_a^d \delta_b^q \eta^{cp} + \delta_b^c \delta_a^d \eta^{pq}) + \eta_{ma} \delta_k^c (\delta_b^d \eta^{pq} - \delta_b^q \eta^{dp}) + 2\eta_{ak} \delta_b^q \eta^{cp} \delta_m^d \\
 & \quad \quad \left. + \eta_{ma} \eta_{bk} (-\eta^{cq} \eta^{dp} - \eta^{cd} \eta^{pq}) + \delta_m^d \eta_{bk} (\delta_a^q \eta^{cp} + \delta_a^c \eta^{pq}) \right] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd} \left[\varepsilon_{ab}{}^{cd} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \delta_a^c \delta_b^d \left(-3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\mp \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $C^m - b^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} p_p p_q \left[(\varepsilon_{ma}{}^{cp} \delta_k^d - \varepsilon_{ma}{}^{dp} \delta_k^c) \delta_b^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bk} (\delta_m^c \delta_a^d - \delta_m^d \delta_a^c) \eta^{pq} + \eta_{bk} \delta_a^q (\eta^{cp} \delta_m^d - \eta^{dp} \delta_m^c) + \varepsilon_m{}^{ap}{}_k \varepsilon_b{}^{cdq}) \right] P_V{}^{mk} \\
= & -\bar{e} n^{(\pm) ab} f_{[cd]} p_p p_q \left[\varepsilon_{ma}{}^{cp} \delta_k^d \delta_b^q + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{bk} \delta_m^c \delta_a^d \eta^{pq} + \eta_{bk} \delta_a^q \eta^{cp} \delta_m^d + \frac{1}{2} \varepsilon_m{}^{ap}{}_k \varepsilon_b{}^{cdq}) \right] P_V{}^{mk} \\
= & -\bar{e} n^{(\pm) ab} f_{[cd]} \left[\frac{1}{4} \varepsilon_{ab}{}^{cd} + \frac{1}{\gamma_k} \delta_a^c \delta_b^d \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \right] p^2 \\
= & \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[\frac{1}{2} \left(\mp 1 + \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] p^2
\end{aligned}$$

Komponente $C^m - c^k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} p_p p_q \left[\varepsilon_{ma}{}^q{}_k \delta_b^c \eta^{dp} + \varepsilon_{ma}{}^c{}_k \delta_b^q \eta^{dp} - \varepsilon_{ma}{}^q{}_k \delta_b^d \eta^{cp} \right. \\
& \quad - \varepsilon_{ma}{}^c{}_k \delta_b^d \eta^{pq} + \varepsilon_{ma}{}^{cd} \eta_{bk} \eta^{pq} + \varepsilon_{ma}{}^q{}_d \eta^{cp} \eta_{bk} \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{mk} ((\delta_a^c \eta^{dp} - \delta_a^d \eta^{cp}) \delta_b^q - \delta_a^d \eta^{cp} \delta_b^q) \right. \\
& \quad \quad \left. - 2\eta_{bk} \delta_a^q \eta^{cp} \delta_m^d - \varepsilon_{ma}{}^{cp} \varepsilon_b{}^{dq}{}_k) \right] P_V{}^{mk} \\
= & -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm) ab} f_{cd} \left[\varepsilon_{ab}{}^{cd} \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\gamma_k} \delta_a^c \delta_b^d \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \right) \right] p^2 \\
= & \bar{e} n^{(\pm) ab} f_{ab} \left[\pm 1 - \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
\end{aligned}$$

Block $\{B, C\}$ - $\{d\}$:

Komponente $B^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[\eta_{mk} (-\delta_a^c \delta_b^d \eta^{pq} + \delta_a^q \delta_b^d \eta^{cp} + 2\delta_a^c \delta_b^q \eta^{dp}) - \varepsilon_{mab}^p \varepsilon^{cdq}_k \right. \\
 & \quad + \eta_{ma} \delta_k^d (-\delta_b^c \eta^{pq} - \eta^{cp} \delta_b^q) \\
 & \quad + \eta_{bk} (\delta_a^c \delta_m^d \eta^{pq} - \delta_m^c \delta_a^d \eta^{pq} + \delta_m^d \eta^{cp} \delta_a^q + 2\delta_m^c \eta^{dp} \delta_a^q) \\
 & \quad + \eta_{ma} \eta_{bk} (\eta^{cd} \eta^{pq} + \eta^{cq} \eta^{dp}) \\
 & \quad - \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{bk}^c \delta_m^d \eta^{pq} + \varepsilon_{bk}^q \delta_m^c \eta^{cp} \delta_a^d - \varepsilon_{bk}^q \delta_a^c \eta^{dp} \\
 & \quad \quad - \varepsilon_{bk}^p \delta_m^c \eta^{cd} \delta_a^q - 2\varepsilon_{bk}^c \delta_m^d \eta^{dp} \delta_a^q + \varepsilon_{ab}^q \delta_k^d \eta^{cp} \\
 & \quad \quad - \varepsilon_{ab}^q \delta_m^c \eta^{dp} + \varepsilon_{ab}^c \delta_k^d \eta^{pq} + 2\varepsilon_{k}^p \delta_a^c \delta_b^d \\
 & \quad \quad \left. - \varepsilon_{k}^d \delta_a^c \delta_b^q + \varepsilon_b^{pc} \delta_k^d \delta_a^q + \eta_{bk} (\varepsilon_a^{cq} \eta^{dp} + \varepsilon^{cdp}_m \delta_a^q) \right) \Big] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(-3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{cd} - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{dc} + \frac{3}{4} \varepsilon_{ab}^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ba}^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon_a^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon^{cd}_{ab} \right) \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[-\frac{5}{4} \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

Komponente $C^m - d^k$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} p_p p_q \left[\eta_{mk} (2\delta_b^c \delta_a^d \eta^{pq} - \delta_b^c \eta^{dp} \delta_a^q) + \varepsilon_{ma}^{dp} \varepsilon_b^{cq}_k \right. \\
 & \quad + \eta_{bk} (\delta_a^c \delta_m^d \eta^{pq} - \delta_m^c \delta_a^d \eta^{pq} + \eta^{cp} \delta_m^d \delta_a^q + \delta_m^c \eta^{dp} \delta_a^q) \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma_k} (\varepsilon_{ma}^{cp} \delta_b^q \delta_k^d - \varepsilon_{ma}^{dp} \delta_b^q \delta_k^c + \varepsilon_{ma}^q \eta^{cp} \delta_b^d + \varepsilon_{ma}^c \delta_b^d \eta^{pq} \\
 & \quad \quad \left. - \varepsilon_{ma}^q \delta_b^c \eta^{dp} - \varepsilon_{ma}^c \delta_b^q \eta^{dp} + \eta_{bk} (\varepsilon_{ma}^{dq} \eta^{cp} + \varepsilon_{ma}^{dc} \eta^{pq}) \right) \Big] P_V^{mk} \\
 = & -\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(-6 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{4} \varepsilon_a^{dc} - \frac{1}{4} \varepsilon_a^{cd} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ba}^{dc} + \frac{3}{4} \varepsilon_{ba}^{dc} \right) \right] p^2 \\
 = & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\frac{13}{8} \mp \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right] p^2
 \end{aligned}$$

J.2.5 Beiträge aus dem Geistsektor

Auch im Vektor-Sektor ist bei den Geistern der Grad der Ableitungen jeweils um eins niedriger als in den Zerlegungen der Vielbein- und Spinzusammenhangsfluktuationen. Entsprechend extrahieren wir hier $\frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}$. Die Kontraktionen der drei einzigen Beiträge ergeben sich dann zu

Block $\{\bar{g}, \bar{F}\}$ - $\{g, F\}$:

Komponente $\bar{g}_m - g^k$:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\left[\eta^{mc}\delta_a^d\eta_{bk} + \delta_a^m\delta_b^c\delta_k^d\right]P_{Vm}{}^k \\ &= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\left[\frac{3}{4}\delta_a^d\delta_b^c + \frac{3}{4}\delta_a^d\delta_b^c\right] \\ &= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab}\left[-\frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

Komponente $\bar{g}_m - F^k$:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\left[-\frac{1}{2}\eta^{mc}\delta_a^d\eta_{bk}\right]P_{Vm}{}^k \\ &= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\left[-\frac{3}{8}\delta_a^d\delta_b^c\right] \\ &= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab}\left[\frac{3}{8}\right] \end{aligned}$$

Komponente $\bar{F}_m - g^k$:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\left[-\delta_a^m\delta_b^c\delta_k^d\right]P_{Vm}{}^k \\ &= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{cd}\left[-\frac{3}{4}\delta_a^d\delta_b^c\right] \\ &= \frac{\bar{e}}{2}n^{(\pm)ab}f_{ab}\left[\frac{3}{4}\right] \end{aligned}$$

J.3 Der Tensor-Sektor

Hier entstehen durch Umschreiben auf $O(4)$ -Indizes und anschließendes Abstreifen der Komponentenfelder auf der linken und rechten Seite der quadratischen Form die freien Indexpaare $\{m, n\}$ bzw. $\{k, l\}$. Dementsprechend ist die resultierende Tensorstruktur mit dem Projektor P_T^{mnkl} , der auf symmetrisch-spurlose Tensoren projiziert, zu kontrahieren. Er läßt sich über transversale Vektor-Projektoren P_V gemäß

$$P_T^{mnkl} = \frac{1}{2} \left(P_V^{mk} P_V^{nl} + P_V^{ml} P_V^{nk} - \frac{2}{3} P_V^{mn} P_V^{kl} \right)$$

darstellen, so daß sich die bereits im Vektor-Sektor verwandten Relationen einfach auf den Tensor-Sektor übertragen. Zudem folgen hier wie bereits im Vektor-Sektor der Geistfelder auf eine Ableitung des Vektorfeldes v_μ keine weiteren Ableitungen, so daß wir jetzt bei jedem Matrixelement ebenfalls die Struktur $\frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd}$ extrahieren. Auch in diesem Abschnitt besitzen alle Gleichheitszeichen bloß Gültigkeit unter einem Impulsintegral $\int d^4p$.

J.3.1 Beiträge aus der \bar{e} - \bar{e} -Komponente

Block $\{d\}$ - $\{d\}$:

Komponente $d^{mn} - d^{kl}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[2 \left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}_{nl} \eta_{ma} \eta_{bk} \right] P_T^{mnkl} \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}_{nl} \left(P_V^{ab} P_V^{nl} + P_V^l{}_a P_V^n{}_b - \frac{2}{3} P_V^a{}_a P_V^b{}_b \right) \right] \\ &= \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\left(\frac{1}{\gamma_k} \mp 1 \right) \varepsilon^{cd}_{nl} \left(-\frac{5}{6} \delta_a^n \delta_b^l \right) \right] \\ &= \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\frac{5}{6} \left(1 \mp \frac{1}{\gamma_k} \right) \right] \end{aligned}$$

J.3.2 Beiträge aus der $\bar{\varepsilon}$ - $\bar{\tau}$ -Komponente

Block $\{d\}$ - $\{B, D\}$:

Komponente $d^{mn} - B^{kl}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\eta_{ml} \delta_n^c \delta_a^d \eta_{bk} - \frac{1}{\gamma_k} \eta_{bk} \varepsilon_{na}^d \delta_m^c \right] P_T^{mnkl} \\
= & \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \cdot \frac{1}{2} \left[P_V^c{}_b \delta_a^d + 3P_V^c{}_b \delta_a^d - \frac{2}{3} P_V^c{}_b \delta_a^d \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\gamma_k} \left(0 + \varepsilon_{na}^d P_V^{cl} P_V^{nb} - \frac{2}{3} \varepsilon_{na}^d P_V^{cn} P_V^{lb} \right) \right] \\
= & \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{10}{3} P_V^c{}_b \delta_a^d - \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{5}{3} \varepsilon_{na}^d P_V^{cl} P_V^{nb} \right] \\
= & \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[-\frac{5}{4} \mp \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right]
\end{aligned}$$

Komponente $d^{mn} - D^{kl}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\frac{1}{\gamma_k} \left(-\eta_{ma} \eta_{bl} \delta_n^c \delta_k^d \right) \right] P_T^{mnkl} \\
= & \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\frac{1}{\gamma_k} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \left(P_V^d{}_a P_V^c{}_b + P_V^{ab} P_V^{cd} - \frac{2}{3} P_V^c{}_a P_V^d{}_b \right) \right] \\
= & -\frac{\bar{\varepsilon}}{4} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{1}{2} \delta_a^d \delta_b^c + 0 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \delta_a^c \delta_b^d \right) \right] \\
= & \bar{\varepsilon} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\frac{5}{24} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right]
\end{aligned}$$

J.3.3 Beiträge aus der $\bar{\tau}$ - $\bar{\varepsilon}$ -Komponente

Block $\{B, D\}$ - $\{d\}$:

Komponente $B^{mn} - d^{kl}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\eta_{nk} \eta_{ma} \eta_{bl} \eta^{cd} - \eta_{nk} \eta_{ma} \delta_b^d \delta_l^c - \eta_{nk} \delta_a^c \eta_{bl} \delta_m^d \right. \\
& \quad \left. + \eta_{nk} \eta_{ml} \delta_a^c \delta_b^d - \eta_{ml} \eta_{nb} \delta_a^c \delta_k^d \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\eta_{ma} \eta_{bk} \varepsilon_n^{cd} - \eta_{ma} \varepsilon_{nb}^d \delta_l^c - \eta_{mk} \varepsilon_{na}^d \delta_b^c) \right] P_T^{mnkl} \\
= & \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(P_{Vab} + 3P_{Vab} - \frac{2}{3} P_{Vab} \right) \eta^{cd} - \left(P_{Va}^c + 3P_{Va}^c - \frac{2}{3} P_{Va}^c \right) \delta_b^d \right. \\
& \quad - \left(P_{Vb}^d + 3P_{Vb}^d - \frac{2}{3} P_{Vb}^d \right) \delta_a^c + \left(3 + 9 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \delta_a^c \delta_b^d \\
& \quad - \left(P_{Vb}^d + 3P_{Vb}^d - \frac{2}{3} P_{Vb}^d \right) \delta_a^c \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_k} \left(\varepsilon_n^{cd} \left(0 + P_{Va}^l P_{Vb}^n - \frac{2}{3} P_{Va}^n P_{Vb}^l \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \varepsilon_{nb}^d \left(0 + P_{Va}^l P_{Vn}^c - \frac{2}{3} P_{Va}^n P_{Vc}^l \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \varepsilon_{na}^d \delta_b^c \left(3P_{Vnl} + P_{Vnl} - \frac{2}{3} P_{Vnl} \right) \right) \left. \right] \\
= & \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \cdot \frac{1}{2} \left[\delta_a^c \delta_b^d \left(-\frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 10 - \frac{5}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \varepsilon_{ab}^{cd} \left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \right) \right] \\
= & \frac{\bar{\varepsilon}}{2} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\frac{5}{4} \mp \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right]
\end{aligned}$$

Komponente $D^{mn} - d^{kl}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{e}}{2} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\varepsilon_{ma}{}^c \delta_b{}^d \eta_{nk} - \varepsilon_{ma}{}^{cd} \eta_{bl} \eta_{nk} - \varepsilon_{ma}{}^c \eta_{nb} \delta_k{}^b \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} (\delta_m{}^d \eta_{na} \delta_l{}^c \eta_{bk} - \eta_{ma} \eta_{bk} \eta_{ml} \eta^{cd} + \varepsilon_{ma}{}^c \varepsilon_{nb}{}^d) \right] P_T{}^{mnkl} \\
= & \frac{\bar{e}}{4} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[\varepsilon_{ma}{}^c \left(P_V{}^{ml} + 3P_V{}^{ml} - \frac{2}{3}P_V{}^{ml} \right) - \varepsilon_{ma}{}^{cd} \left(P_V{}^m{}_b + 3P_V{}^m{}_b - \frac{2}{3}P_V{}^m{}_b \right) \right. \\
& \quad - \varepsilon_{ma}{}^c \left(P_V{}^{md} P_V{}^l{}_b + P_V{}^{ml} P_V{}^d{}_b - \frac{2}{3}P_V{}^m{}_b P_V{}^{dl} \right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(\left(P_V{}^d{}_b P_V{}^c{}_a + P_V{}^{dc} P_V{}^{ab} - \frac{2}{3}P_V{}^d{}_a P_V{}^c{}_b \right) - \left(P_V{}^{ab} + 3P_V{}^{ab} - \frac{2}{3}P_V{}^{ab} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon_{ma}{}^c \varepsilon_{nb}{}^d \left(P_V{}^{mk} P_V{}^{nl} + P_V{}^{ml} P_V{}^{nk} - \frac{2}{3}P_V{}^{mn} P_V{}^{kl} \right) \right) \right] \\
= & \frac{\bar{e}}{4} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[-\frac{10}{3} \varepsilon_{ma}{}^{cd} P_V{}^m{}_b - \frac{5}{3} \varepsilon_{ma}{}^c P_V{}^{md} P_V{}^l{}_b \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{5}{3} P_V{}^c{}_a P_V{}^d{}_b + \frac{5}{3} \varepsilon_{ma}{}^c \varepsilon_{nb}{}^d P_V{}^{ml} P_V{}^{nk} \right) \right] \\
= & \frac{\bar{e}}{4} n^{(\pm)ab} f_{cd} \left[-\frac{5}{2} \varepsilon_{ba}{}^{cd} - \frac{5}{6} \varepsilon_{a b}{}^{dc} + \frac{1}{\gamma_k} \left(\frac{5}{6} \delta_a{}^c \delta_b{}^d + \frac{5}{6} \varepsilon_{ma}{}^c \varepsilon_b{}^{dm} \right) \right] \\
= & \bar{e} n^{(\pm)ab} f_{ab} \left[\pm \frac{5}{6} - \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{\gamma_k} \right]
\end{aligned}$$

Nach der $\frac{1}{\sqrt{-\square}}$ und $\bar{\mu}$ -Reskalierung ergeben sich aus diesen Kontraktionen die Matrixelemente der Matrizen $V_{\text{contr}}^{\chi(+)}$ und $V_{\text{contr}}^{\chi(-)}$, die im Hauptteil in Abschnitt 7.4.2 angegeben werden

Anhang K

Die Identifikation des μ -Parameters mit der laufenden Planck-Masse

Die Natur des μ -Parameters betreffend, erscheint noch eine weitere Identifikation als natürlich. Die laufende dimensionsvolle Newton-Konstante G_k führt auf eine laufende Planck-Masse, die in natürlichen Einheiten durch $\sqrt{G_k}^{-1} = \sqrt{g_k}^{-1} k$ gegeben ist. Identifizieren wir diese mit dem dimensionsbehafteten Massenparameter $\bar{\mu}$, so impliziert dies für die entsprechenden dimensionslosen Größen $\mu \equiv \sqrt{g_k}^{-1}$. Auf diese natürliche Weise hat man sich des externen Parameters μ , dessen Renormierungsverhalten in diesem Rahmen gänzlich unklar ist, entledigt. Wir erhalten dann das Flußgleichungssystem

$$\partial_t g_k = \beta_g(g_k, \lambda_k) = \left[2 + 16\pi \left(I_V^{\text{grav}}(\lambda_k, \sqrt{g_k}^{-1}) - 2 I_V^{\text{gh}}(\sqrt{g_k}^{-1}) \right) \right] g_k$$

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(g_k, \lambda_k) = 8\pi g_k & \left[\left(I_F^{\text{grav}}(\lambda_k, \sqrt{g_k}^{-1}) - 2 I_F^{\text{gh}}(\sqrt{g_k}^{-1}) \right) \right. \\ & \left. + 2 \left(I_V^{\text{grav}}(\lambda_k, \sqrt{g_k}^{-1}) - 2 I_V^{\text{gh}}(\sqrt{g_k}^{-1}) \right) \lambda_k \right] - 2 \lambda_k . \end{aligned}$$

Um zu untersuchen, ob und wie sich dieses System von dem in Abschnitt 8.1 diskutierten unterscheidet, wird das Gleichungssystem für die feste Parameterwahl $\alpha_D = 1$ und $\beta_D = 1$ untersucht. Wir finden für das scharfe Abschneiden sowie für die f_k^m -Regularisierung mit Abschneideparameter $m = 50$, $m = 30$ und $m = 20$ jeweils einen NGFP, dessen Koordinaten sich nicht stark von den entsprechenden für $\mu = \text{const}$ unterscheiden.

Scharfer Propertime-Cutoff							
$\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}$			λ^*	g^*	λ^*g^*	Θ_1	Θ_3
	$\alpha_D = 1$	$\beta_D = 1$	-3,44	1,43	-4,91	7,13	- 2,92
f_k^m -Regularisierung							
$\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}$			λ^*	g^*	λ^*g^*	Θ_1	Θ_3
$m = 20$	$\alpha_D = 1$	$\beta_D = 1$	-3,58	1,44	-5,17	6,96	-2,69
$m = 30$	$\alpha_D = 1$	$\beta_D = 1$	-3,53	1,44	-5,08	7,01	-2,77
$m = 50$	$\alpha_D = 1$	$\beta_D = 1$	-3,50	1,43	-5,01	7,06	-2,83

Tabelle K.1: Die Eigenschaften des NGFP für die Wahl $\mu = \sqrt{g}^{-1}$ im (λ, g) -System.

Zudem erhält man ebenfalls einen positiven kritischen Exponenten Θ_1 , der jedoch um mehr als einen Faktor 2 größer ist. Allerdings hängen jetzt auch die Funktionen I_V^{grav} und I_V^{gh} in den Beta-Funktionen für g_k und λ_k von g_k ab. Dies hat zur Folge, daß sich das Vorzeichen des kritischen Exponenten Θ_3 ändert, und es gilt nun $-3 < \Theta_3 < -2,5$. Zudem konnte weder für $m = 10$ und $m = 1$ noch für eine der C_k^m -Regularisierungen mit den gleichen Abschneideparametern ein Fixpunkt gefunden werden. Der Befund für den kritischen Exponenten Θ_3 legt nahe, daß sich im Bezug auf die universellen Eigenschaften des Flusses eher die für $\mu = \text{const}$ erhaltenen Resultate mit der QEG in Zusammenhang bringen lassen sollten. Wir geben die erhaltenen Fixpunktwerte in Tabelle K.1 an.

Literaturverzeichnis

- [1] **C. Kiefer**, *Quantum Gravity*, 2nd edn., Oxford Science Publications, Oxford, 2007
- [2] **S.W. Hawking, R. Penrose**, *The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology*, Proc. R. Soc. Lond. **A314** (1970) 529
- [3] **S.W. Hawking**, *Black hole explosions?*, Nature **248** (1974) 30
- [4] **J.D. Bekenstein**, *Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. **D7** (1973) 2333
- [5] **A. Bonanno, M. Reuter**, *Entropy signature of the running cosmological constant*, JCAP **0708** (2007) 024
- [6] **S. Weinberg**, *Asymptotically Safe Inflation*, Phys. Rev. **D81** (2010) 083535
- [7] **A. Bonanno, M. Reuter**, *Spacetime Structure of an Evaporating Black Hole in Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D73** (2006) 083005
- [8] **B.S. DeWitt**, *Gravity: A universal Regulator?*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 114
- [9] **L. Crane, L. Smolin**, *Space-time foam as the universal regulator*, Gen. Rel. Grav. **17** (1985) 1209
- [10] **M. Reuter, F. Saueressig**, *Functional Renormalization Group Equations, Asymptotic Safety, and Quantum Einstein Gravity*, in: **H. Ocampo, E. Pariguan, S. Paycha** (ed.), *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010

-
- [11] **C. Wetterich**, *Exact evolution equation for the effective potential*, Phys. Lett. **B301** (1993) 90
- [12] **E. Manrique, M. Reuter**, *Bare action and regularized functional integral of asymptotically safe quantum gravity*, Phys. Rev. **D79** (2009) 025008
- [13] **M. Reuter**, *Nonperturbative Evolution Equation for Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D57** (1998) 971
- [14] **M.H. Goroff, A. Sagnotti**, *Quantum gravity at two loops*, Phys. Lett. **B160** (1985) 81
- [15] **M.H. Goroff, A. Sagnotti**, *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys. **B266** (1986) 709
- [16] **A.E.M. van de Ven**, *Two loop quantum gravity*, Nucl. Phys. **B378** (1992) 309
- [17] **S. Weinberg**, *Ultraviolet divergences in quantum gravity*, in: **S. Hawking, W. Israel** (ed.), *An Einstein centenary survey*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979
- [18] **H.W. Hamber**, *Quantum Gravity on the Lattice*, Gen. Rel. Grav. **41** (2009) 817
- [19] **E. Bentivegna, A. Bonanno, M. Reuter**, *Confronting the IR Fixed Point Cosmology with High Redshift Observations*, JCAP **0401** (2004) 001
- [20] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Ultraviolet Fixed Point and Generalized Flow Equation of Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D65** (2002) 025013
- [21] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Is Quantum Einstein Gravity Nonperturbatively Renormalizable?*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 483
- [22] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Towards Nonperturbative Renormalizability of Quantum Einstein Gravity*, Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002) 993
- [23] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Flow Equation of Quantum Einstein Gravity in an Higher-Derivative Truncation* Phys. Rev. **D66** (2002) 025026

-
- [24] **O. Lauscher**, *Untersuchungen zum nichtstörungstheoretischen Renormierungsverhalten der Quanten-Einstein-Gravitation*, Dissertation (2002)
- [25] **A. Codello, R. Percacci, C. Rahmede**, *Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation*, *Annals Phys.* **324** (2009) 414
- [26] **R. Percacci, D. Perini**, *Asymptotic Safety of Gravity Coupled to Matter*, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 044018
- [27] **U. Ellwanger, M. Hirsch, A. Weber**, *Flow Equations for the Relevant Part of the Pure Yang-Mills Action*, *Z. Phys.* **C69** (1996) 687
- [28] **L.P. Kadanoff**, *Scaling laws for Ising models near T_C* , *Physics* **2** (1966) 263
- [29] **K.G. Wilson, J. Kogut**, *The renormalization group and the ε -expansion*, *Phys. Rept.* **12C** (1974) 77
- [30] **M. Reuter, H. Weyer**, *Running Newton Constant, Improved Gravitational Actions, and Galaxy Rotation Curves*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 124028
- [31] **M. Reuter, H. Weyer**, *Quantum Gravity at Astrophysical Distances?*, *JCAP* **0412** (2004) 001
- [32] **M. Reuter, H. Weyer**, *Do we Observe Quantum Gravity Effects at Galactic Scales?*, *EAS Publ. Ser.* **20** (2006) 251
- [33] **M. Reuter, H. Weyer**, *On the Possibility of Quantum Gravity Effects at Astrophysical Scales*, *Int. J. Mod. Phys.* **D15** (2006) 2011
- [34] **Y. Nambu, G. Jona-Lasinio**, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345
- [35] **Y. Nambu, G. Jona-Lasinio**, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II*, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246
- [36] **S. Holst**, *Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 5966

-
- [37] **P. Peldan**, *Actions for Gravity, with Generalizations: A Review*, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 1087
- [38] **G. Barbero**, *Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times*, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 5507
- [39] **S. Mercuri**, *Fermions in Ashtekar-Barbero Connections Formalism for Arbitrary Values of the Immirzi Parameter*, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 084016
- [40] **L. Freidel, D. Minic, T. Takeuchi**, *Quantum Gravity, Torsion, Parity Violation and all that*, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 104002
- [41] **I.L. Shapiro**, *Physical Aspects of the Space-Time Torsion*, *Phys. Rept.* **357** (2002) 113
- [42] **A.S. Belyaev, I.L. Shapiro, M.A.B. do Vale**, *Torsion Phenomenology at the LHC*, *Phys. Rev.* **D75** (2007) 034014
- [43] **A. Ashtekar**, *Quantum Geometry In Action: Big Bang and Black Holes*, arXiv:math-ph/0202008
- [44] **A. Ashtekar**, *Gravity and the Quantum*, *New J. Phys.* **7** (2005) 198
- [45] **H. Nicolai, K. Peeters, M. Zamaklar**, *Loop quantum gravity: an outside view*, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) R193
- [46] **T. Thiemann**, *Loop Quantum Gravity: An Inside View*, *Lect. Notes Phys.* **721** (2007) 185
- [47] **R.K. Kaul, P. Majumdar**, *Quantum Black Hole Entropy*, *Phys. Lett.* **B439** (1998) 267
- [48] **R.K. Kaul, P. Majumdar**, *Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy*, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 5255
- [49] **S. Das, R.K. Kaul, P. Majumdar**, *A new holographic entropy bound from quantum geometry*, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 044019
- [50] **M. Reuter**, *Effective Average Action of Chern-Simons Field Theory*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 4430

-
- [51] **E. Manrique, M. Reuter**, *Bimetric Truncations for Quantum Einstein Gravity and Asymptotic Safety*, *Annals Phys.* **325** (2010) 785
- [52] **E. Manrique, M. Reuter, F. Saueressig**, *Matter Induced Bimetric Actions for Gravity*, arXiv:1003.5129 [hep-th]
- [53] **E. Manrique, M. Reuter, F. Saueressig**, *Bimetric Renormalization Group Flows in Quantum Einstein Gravity*, arXiv:1006.0099 [hep-th]
- [54] **H. Gies**, *Introduction to the functional RG and applications to gauge theories*, arXiv:hep-ph/0611146
- [55] **R. Kuhfuss, J. Nitsch**, *Propagating Modes in Gauge Field Theories of Gravity*, *Gen. Rel. Grav.* **18** (1986) 1207
- [56] **E. Sezgin, P. van Nieuwenhuizen**, *New ghost-free gravity Lagrangians with propagating torsion*, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 3269
- [57] **J. Schwinger**, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664
- [58] **W. Dittrich, M. Reuter**, *Effective Lagrangians in QED*, *Lecture Notes in Physics Vol. 220*, Springer, Berlin, 1985
- [59] **D.F. Litim, J.M. Pawłowski**, *Predictive power of renormalisation group flows: a comparison*, *Phys. Lett.* **B516** (2001) 197
- [60] **D.F. Litim, J.M. Pawłowski**, *Completeness and consistency of renormalisation group flows*, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 025030
- [61] **A. Bonanno, M. Reuter**, *Proper Time Flow Equation for Quantum Gravity*, *JHEP* **0502** (2005) 035
- [62] **A. Bonanno, D. Zappala**, *Towards an accurate determination of the critical exponents with the Renormalization Group flow equations*, *Phys. Lett.* **B504** (2001) 181
- [63] **L. Freidel, A. Starodubtsev**, *Quantum gravity in terms of topological observables*, arXiv:hep-th/0501191

- [64] **R. Jackiw**, *Gauge-Covariant Conformal Transformations*, Phys. Rev. Lett. **41** (1978) 1635
- [65] **R. Jackiw**, *Topological Investigations of Quantized Gauge Theories*, in: **B.S. DeWitt, R. Stora** (ed.), *Relativity, Groups and Topology II, Proceedings of Les Houches Summer School, Les Houches, France, 1983*, Elsevier, Amsterdam, 1984
- [66] **R. Floreanini, R. Percacci**, *A multiplicative background field method*, in: **V. Koloskov** (ed.), *Gravitation theory and Geometric methods in Field Theory, volume in honour of D. Ivanenko's 90th jubilee*, Moscow, 1994
- [67] **V.N. Gribov**, *Quantization of non-Abelian gauge theories*, Nucl Phys. **B139** (1978) 1
- [68] **P.A.M. Dirac**, *Lectures On Quantum Mechanics*, Academic Press, New York, 1965
- [69] **S.P. Robinson, F. Wilczek**, *Gravitational Correction to Running of Gauge Couplings*, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 231601
- [70] **A.R. Pietrykowski**, *Gauge Dependence of Gravitational Correction to Running of Gauge Couplings*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 061801
- [71] **D.J. Toms**, *Quantum gravity and charge renormalization*, Phys. Rev. **D76** (2007) 045015
- [72] **D. Ebert, J. Plefka, A. Rodigast**, *Absence of gravitational contributions to the running Yang-Mills coupling*, Phys. Lett. **B660** (2008) 579
- [73] **Y. Tang, Y.-L. Wu**, *Gravitational Contributions to the Running of Gauge Couplings*, arXiv:0807.0331 [hep-th]
- [74] **D.J. Toms**, *Cosmological constant and quantum gravitational corrections to the running fine structure constant*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 131301
- [75] **J.-E. Daum, U. Harst, M. Reuter**, *Running Gauge Coupling in Asymptotically Safe Quantum Gravity*, JHEP **01** (2010) 084

- [76] **M. Reuter, C. Wetterich**, *Effective average action for gauge theories and exact evolution equations*, Nucl. Phys. **B417** (1994) 181
- [77] **R.U. Sexl, H.K. Urbantke**, *Relativität, Teilchen, Gruppen*, 3. Aufl., Springer, Wien, 1992
- [78] **J. Zanelli, O. Chandia**, *Topological Invariants, Instantons and Chiral Anomaly on Spaces with Torsion*, Phys. Rev. **D55** (1997) 7580
- [79] **E.W. Mielke, D. Kreimer**, *Chiral Anomaly in Contorted Spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **31** (1999) 701
- [80] **F. Schwabl**, *Statistische Mechanik*, 3. Aufl., Springer, Berlin, 2006
- [81] **R. Percacci, E. Sezgin**, *One Loop Beta Functions in Topologically Massive Gravity*, arXiv:1002.2640 [hep-th]
- [82] **U. Ellwanger, C. Wetterich**, *Evolution equations for the quark-meson transition*, Nucl. Phys. **B423** (1994) 137
- [83] **S. Weinberg, E. Witten**, *Limits on massless particles*, Phys. Lett. **B96** (1980) 59
- [84] **N. Straumann**, *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik (Lecture Notes in Physics)*, Springer, Berlin, 1982
- [85] **H.-J. Matschull**, *Riemannsche Geometrie*,
<http://wwwthep.uni-mainz.de/~matschul/> (Skript)
- [86] **L.F. Abbott**, *Introduction to the Background Field Method*, Acta Phys. Polon. **B13** (1982) 33
- [87] **S. Weinberg**, *The Quantum Theory of Fields, Vol.1: Foundations*, 1st edn., Cambridge University Press, Cambridge, 1995
- [88] **D. Zinn-Justin**, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 4th edn., Clarendon Press, Oxford, 2002
- [89] **K. Rottmann**, *B. I. Hochschultaschenbücher, Bd. 13, Mathematische Formelsammlung*, 4. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008

- [90] **E.W. Weisstein**, *Cubic Formula*, MathWorld-A Wolfram Web Resource,
<http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>

