



Algebraische Zyklen auf abelschen Varietäten der Dimension 4 mit Polarisierung von Typ $(1, 2, 2, 2)$.

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades:

“Doktor der Naturwissenschaften“

(Dr. rer. nat.)

am Fachbereich Mathematik der

Johannes Gutenberg-Universität

in Mainz



Vorgelegt von

Russell Aarón Quiñones Estrella

geb. in Mérida, Yucatán (Mexiko).

Mainz, den 14. Mai, 2009.

Tag der Mündliche Prüfung: 26.06.2009

¹(D77) **Dissertation**, Johannes Gutenberg Universität **Mainz**.

Para
mi esposa e hijos

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit algebraischen Zyklen auf komplexen abelschen Varietäten der Dimension 4. Ziel der Arbeit ist ein nicht-triviales Element in $\text{Griff}^{3,2}(A^4)$ zu konstruieren. Hier bezeichnet A^4 die *generische* abelsche Varietät der Dimension 4 mit Polarisierung von Typ $(1, 2, 2, 2)$.

Die ersten drei Kapitel sind eine Wiederholung von elementaren Definitionen und Begriffen und daher eine Festlegung der Notation. In diesen erinnern wir an elementare Eigenschaften der von Saito definierten Filtrierungen F_S und Z auf den Chowgruppen (vgl. [Sa0] und [Sa]). Wir wiederholen auch eine Beziehung zwischen der F_S -Filtrierung und der Zerlegung von Beauville der Chowgruppen (vgl. [Be2] und [DeMu]), welche aus [Mu] stammt. Die wichtigsten Begriffe in diesem Teil sind die *höhere Griffiths' Gruppen* und die *infinitesimalen Invarianten höherer Ordnung*.

Dann beschäftigen wir uns mit *verallgemeinerten Prym-Varietäten* bezüglich $(2 : 1)$ Überlagerungen von Kurven. Wir geben ihre Konstruktion und wichtige geometrische Eigenschaften und berechnen den Typ ihrer Polarisierung.

Kapitel 3 enthält ein Resultat aus [BCV] über die Dominanz der Abbildung $p(3, 2) : \mathcal{R}(3, 2) \rightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$. Dieses Resultat ist von Relevanz für uns, weil es besagt, dass die generische abelsche Varietät der Dimension 4 mit Polarisierung von Typ $(1, 2, 2, 2)$ eine verallgemeinerte Prym-Varietät bezüglich einer $(2 : 1)$ Überlagerung einer Kurve vom Geschlecht 7 über eine Kurve vom Geschlecht 3 ist.

Der zweite Teil der Dissertation ist die eigentliche Arbeit und ist auf folgende Weise strukturiert: Kapitel 4 enthält die Konstruktion der Degeneration von A^4 . Das bedeutet, dass wir in diesem Kapitel eine Familie $X \rightarrow S$ von verallgemeinerten Prym-Varietäten konstruieren, sodass die klassifizierende Abbildung $S \rightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$ dominant ist. Desweiteren wird ein relativer Zykel Y/S auf X/S konstruiert zusammen mit einer Untervarietät $T \subset S$, sodass wir eine explizite Beschreibung der Einbettung $Y|_T \hookrightarrow X|_T$ angeben können.

Das letzte und wichtigste Kapitel enthält Folgendes: Wir beweisen dass, die *infinitesimale Invariante zweiter Ordnung* $\delta_2(\alpha)$ von α nicht trivial ist. Hier bezeichnet α die Komponente von Y in $\text{Ch}_{(2)}^3(X/S)$ unter der Beauville-Zerlegung. Damit und mit Hilfe der Ergebnissen aus Kapitel 5 können wir zeigen, dass

$$0 \neq [\alpha] \in \text{Griff}^{3,2}(X/S).$$

Wir können diese Aussage verfeinern und zeigen (vgl. Theorem 6.3.1)

Theorem 0.0.1 *Für $s \in S$ generisch gilt*

$$0 \neq [\alpha_s] \in \text{Griff}^{3,2}(A^4),$$

wobei A^4 die generische abelsche Varietät der Dimension 4 mit Polarisierung vom Typ $(1, 2, 2, 2)$ ist.

Summary

This PhD Thesis is about algebraic cycles on complex abelian varieties of dimension 4. The main goal of our work is to construct a non trivial element in $Griff^{3,2}(A^4)$. Here A^4 denotes the *generic* abelian variety of dimension 4 with polarization of type $(1, 2, 2, 2)$.

The first 3 chapters are a review of the basic definitions and concepts and their purpose is to fix the notation. In them we recall the definitions and basic properties of the F_S and the Z -filtration defined by Saito (cf. [Sa0] and [Sa]). We review a relationship between the F_S filtration and the decomposition of the Chow groups defined by Beauville (cf. [Be2] and [DeMu]) which can be founded in [Mu]. The main concepts in this part are the *higher Griffiths' groups* and the *higher infinitesimal invariants*.

We study after that the *generalized Prym variety* associated to a double cover of curves. We give its construction and main geometric properties and compute the type of its polarization.

The chapter 3 contains a result of [BCV] about the dominantness of the map $p(3, 2) : \mathcal{R}(3, 2) \rightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$. This result is relevant for us because it says that the generic abelian variety of dimension 4 and polarization of type $(1, 2, 2, 2)$ is a generalized Prym variety associated to a double covering of a genus 7 curve over a genus 3 curve.

The second part of the PhD-Thesis is actually my work and is as follows structured: The chapter 4 contains the construction of the degeneration of A^4 . This means, in this chapter we construct a family $X \rightarrow S$ of generalized Prym varieties such that the classifying map $S \rightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$ is dominant. We construct also a relative cycle Y/S on X/S together with a subvariety $T \subset S$ in such a way that we can give an explicit description of the embedding $Y|_T \hookrightarrow X|_T$. The last and main chapter contains the following: We show that the *second infinitesimal invariant* $\delta_2(\alpha)$ of α is non-trivial. Here α is the component of Y in $Ch_{(2)}^3(X/S)$ under the decomposition of Beauville for $Ch^3(X/S)$. With this and our results from chapter 5, we can show that

$$0 \neq [\alpha] \in Griff^{3,2}(X/S).$$

We can get a finer version of this result (cf. Theorem 6.3.1):

Theorem 0.0.2 *For $s \in S$ generic holds*

$$0 \neq [\alpha_s] \in Griff^{3,2}(A^4),$$

where A^4 is the generic abelian variety of dimension 4 with polarization of type $(1, 2, 2, 2)$.

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	xi
0 Einführung	xiii
1 Notation	1
1.1 Die Leray-Filtrierung	1
1.1.1 Die (holomorphe) Leray-Spektralsequenz	2
1.2 Eine Filtrierung auf der Chowgruppen und die höhere Griffiths- Gruppen	3
1.2.1 Die Saito-Filtrierung	3
1.2.2 Die Z -Filtrierung	4
1.2.3 Die höhere Griffiths-Gruppen	4
1.2.4 Die infinitesimalen Invarianten höherer Ordnung	5
1.3 Beauvilles Zerlegung der Chowgruppen	5
1.4 Die Leray-Zerlegung in der Kohomologie	6
1.5 Über die Abel-Jacobi-Abbildung	7
1.5.1 Zykel auf Produkten	8
2 Die verallgemeinerte Prym-Varietät	11
2.1 Überlagerungen vom Grad 2	11
2.1.1 Die Geometrie der $(2 : 1)$ Überlagerung	12
2.2 Definition der verallgemeinerten Prym-Varietät und ihre Eigen- schaften	13
2.2.1 Eigenschaften der Prym-Varietät	15
2.3 Induzierte Zerlegungen in der Kohomologie	15
2.4 Über die Polarisierung von X_f	16
3 Der Modulraum von $(2 : 1)$ Überlagerungen von Kurven	19
3.1 Der Modulraum $\mathcal{R}(g, b)$	19
3.2 Die Ableitung von $p(g, b)$	20
3.2.1 Der Tangentialraum $T_{[X]}(\mathcal{A}_n(\delta))$	20

3.2.2	Der Tangentialraum von $\mathcal{R}(g, b)$	21
3.2.3	Die Berechnung von $d_{\tau p}(g, b)$	21
3.3	Die Dominanz von $\mathcal{R}(3, 2) \longrightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$	22
II Zyklen auf dem generischen Element		
von $\mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$		23
4	Die Konstruktion der Degeneration	25
4.1	Stabilen Kurven	25
4.2	Die Beschreibung einer guten Familie von Kurven	26
4.3	Die Konstruktion der $(2 : 1)$ Überlagerung	27
4.3.1	Verallgemeinerte Prym-Varietät und Zykel	29
4.4	Beschreibung der Einbettung $Y _T \hookrightarrow X _T$	31
4.4.1	$\gamma_{(x,y)} : \tilde{\Gamma}_{(x,y)} \hookrightarrow Pic^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}) \simeq J \times \tilde{J} \times J$	31
4.4.2	$(1 - i) \circ \gamma_{(x,y)} : \tilde{\Gamma}_{(x,y)} \hookrightarrow Pic^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}) \longrightarrow J \times P$	32
4.4.3	Die Einbettung $Y _T \hookrightarrow X _T$	32
5	Die Kohomologieklassse von Y	33
5.1	Die Kohomologieklassse von $C \times \tilde{E} \times Y_{(x,y)}$ in $C \times \tilde{E} \times X_{(x,y)}$	33
5.2	Der primitive Anteil von a in $(H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E})) \otimes (H^1(J) \otimes H^3(P))$ ist nicht trivial	34
5.3	Die Kohomologieklassse von a bleibt nicht trivial unter Einschränkungen zu offenen Mengen von $C \times \tilde{E}$	36
5.3.1	Der Satz über die Nicht-Trivialität der Kohomologieklassse	37
6	Ein nicht triviales Element in $Griff^{3,2}(A^4)$	39
6.1	Über Leray-Sequenzen von Garben und Zyklen	39
6.2	Die infinitesimale Invariante δ_2 von α	41
6.3	Über die Griffiths-Gruppe	42
6.3.1	Die Nicht-Trivialität von $Griff^{3,2}(A^4)$	45
6.4	Weitere Fragen	46
Literaturverzeichnis		49

Teil I
Grundlagen

Kapitel 0

Einführung

In den 50er und 60er Jahren wurden algebraische Zyklen für die algebraische Geometrie und ihre Grenzgebiete besonders wichtig. Dies war die Konsequenz einiger fundamentaler Vermutungen über sie und einige ihrer Anwendungen wie zum Beispiel

- die **Hodge-Vermutung**, welche besagt, dass jede Hodgeklasse algebraisch ist,
- die **Tate-Vermutung**, die eine Beziehung zwischen Galois-Moduln aus der étalen Kohomologie und algebraischen Zyklen voraussagt,
- und die sogenannten **Standard-Vermutungen** (Grothendieck bewies, dass von diesen die Weil-Vermutungen über die Zeta-Funktion von Varietäten über endlichen Körpern abgeleitet werden können.)

Wir führen zunächst einige Notationen ein.

Es seien X und S glatte, projektive Varietäten über \mathbb{C} und $f : X \rightarrow S$ ein flacher Morphismus. Wir bezeichnen mit $Ch^r(X/S)$ die **rationalen** (d.h. mit \mathbb{Q} tensorierte) **Chowgruppe** aller relativen Zyklen der Kodimension r modulo rationaler Äquivalenz von Zyklen.

Weiter bezeichne $Ch^r(X/S)_{hom}$ (beziehungsweise $Ch^r(X/S)_{alg}$), die Untergruppe von $Ch^r(X/S)$, die homologisch (bzw. algebraisch) äquivalent zu Null sind. Für die Definition von *rationaler*, *algebraischer* bzw. *homologischer* Äquivalenz siehe [BL] Abschnitt 16.1.

Algebraische Zyklen, die homologisch und nicht algebraisch äquivalent zu Null sind, also nicht-triviale Elemente in der Griffiths-Gruppe

$$Griff^r(X/S) := \frac{Ch^r(X/S)_{hom}}{Ch^r(X/S)_{alg}},$$

sind nur schwer zu konstruieren. Mit Hilfe von Kurven können wir jedoch gute Zyklen auf bestimmten abelschen Varietäten finden. Die Idee hier ist ganz einfach: Wir können Varietäten betrachten, die z.B. Quotienten von Jacobischen

sind. Da es immer eine Einbettung der Kurve in ihre Jacobische gibt, haben wir auf diese Weise natürliche Zyklen auf solche Varietäten.

Torelli hat in **1914** bewiesen (siehe [To]), dass sich jede abelsche Varietät als ein Quotient einer Jacobischen realisieren lässt und daher tragen auch abelsche Varietäten natürliche Zyklen. In einigen Fällen lassen sich abelsche Varietäten auch als Prym-Varietäten oder verallgemeinerte Prym-Varietäten darstellen und haben daher ebenfalls gute Zyklen.

Im Jahr **1983** konstruierte Ceresa (siehe [Ce]) nicht-triviale Zyklen auf der generischen Jacobischen der Dimension $g \geq 3$. Explizit haben wir

Satz 0.0.1 (Ceresa) *Es sei $g \geq 3$ und $J(C)$ der Dimension g generisch. Weiter seien W_r das Bild der kanonischen Abbildung $\text{Sym}^r(C) \rightarrow J(C)$ und $W_r^- := (-1_{J(C)})_* W_r$. Dann gilt für die Zyklen $W_r - W_r^- \in \text{Ch}^{g-r}(J(C))$, $1 \leq r \leq g - 2$, dass diese homologisch aber nicht algebraisch äquivalent zu Null sind.*

Hier das Wort **generisch** hat für uns folgende Bedeutung (vgl. [BL] S.559).

Definition 0.0.1 *Eine polarisierte abelsche Varietät A mit Polarisierung von Typ (d_1, \dots, d_g) heißt generisch für die Eigenschaft P , wenn sie sich außerhalb einer abzählbaren Vereinigung von echten Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{A}_g(d_1, \dots, d_g)$ befindet, welche durch P bestimmt sind.*

Hier bezeichnet $\mathcal{A}_g(d_1, \dots, d_g)$ den Modulraum der g -dimensionalen abelschen Varietäten mit Polarisierung von Typ (d_1, \dots, d_g) (Siehe Abschnitt 2.4 für die Definition von Polarisierung bzw. Typ der Polarisierung).

Weil die generische abelsche Varietät A^3 der Dimension 3 eine Jacobische ist, zeigte Ceresa also

Satz 0.0.2 (Ceresa) $\text{Griff}^2(A^3) \neq 0$.

Es sei nun M die von den Zyklen $C - C^-$ erzeugte Untergruppe von $\text{Griff}^2(A^3)$. Bardelli und Nori haben im Jahr **1988** bzw. **1989** bewiesen (siehe [Ba] und [No]), dass M sehr groß ist:

Satz 0.0.3 (Bardelli/Nori) *Der \mathbb{Q} -Vektorraum M ist nicht endlich erzeugt.*

Colombo und Pirola (siehe [Co-Pi]) zeigten dann **1994**:

Satz 0.0.4 (Colombo-Pirola) $M \neq \text{Griff}^2(A^3)$.

In höhere Dimension sind die oben genannten Resultate in Dimension 3 nur schwer zu verallgemeinern. In Dimension 5 jedoch lässt sich die generische abelsche Varietät A^5 der Dimension 5 als eine Prym-Varietät darstellen (siehe [Be]). Fakhrudin [Fk] benutzte **1996** diese Tatsache und konstruierte nicht-triviale Elemente aus $\text{Griff}^4(A^5)$. Er zeigte

Satz 0.0.5 (Fakhruddin) *Die Gruppen $\text{Griff}^3(A^5)$ und $\text{Griff}^4(A^5)$ haben unendlichen Rang und:*

- *Für die generische Prym-Varietät P der Dimension $g \geq 5$ ist $\text{Griff}^j(P)$ für $3 \leq j \leq g - 1$, nicht-trivial.*
- *Ist J die generische Jacobische der Dimension $g \geq 11$, dann gilt $\text{Griff}^{g-1}(J) \neq 0$.*
- *In beliebiger Charakteristik gilt für die generische Kurve C von Geschlecht $g \geq 3$:
 $C - C^-$ ist homologisch aber nicht algebraisch äquivalent zu Null in $J(C)$.*

Die Methoden von Fakhruddin sind also auch stark genug, um den Satz von Ceresa in beliebiger Charakteristik zeigen zu können.

Unser Fokus steht in Zyklen der Dimension 1 auf abelschen Varietäten. Die zuvor genannten Ergebnisse sind über A^3 und A^5 . Was ist dann mit A^4 ?

Wir möchten das Verfahren von Fakhruddin verallgemeinern. Wir werden $(2 : 1)$ Überlagerungen von Kurven betrachten, bei denen wir Verzweigungspunkte erlauben, d.h. wir werden von Prym-Varietäten zu *verallgemeinerten Prym-Varietäten* übergehen. Dazu benutzen wir einen Satz von Bardelli, Ciliberto und Verra von **1995** (siehe Kapitel 3), welcher die generische abelsche Varietät der Dimension 4 als eine verallgemeinerte Prym-Varietät bezüglich einer $(2 : 1)$ Überlagerung von Kurven $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ darstellt, wobei $g(\tilde{\Gamma}) = 7$ und $g(\Gamma) = 3$ (f hat also 4 Verzweigungspunkte).

Wir werden auch anstatt die Griffiths-Gruppen die **höheren Griffiths-Gruppen** betrachten (siehe Abschnitt 1.2.3). Dazu werden wir die Filtrierung von Saito (siehe [Sa0]) auf den Chowgruppen betrachten. Von dieser Filtrierung ist erwartet, dass sie die *Bloch-Belinson Filtrierungsvermutung* löst.

Wir stützen uns auf die Theorie von infinitesimalen Invarianten höherer Ordnung (vgl. Abschnitte 1.2.4 und 6.2) und auf die Kohomologieklassse von Zyklen, um ein nicht-triviales Element in $\text{Griff}^{3,2}(A^4)$ zu konstruieren. Hier bezeichnet A^4 das generische Element von $\mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$ (siehe Theorem 6.3.1).



Kapitel 1

Notation

Dieses Kapitel dient dem Zweck, die elementaren Begriffe und Bezeichnungen einzuführen, die wir benutzen werden.

1.1 Die Leray-Filtrierung

Es seien X und S glatte algebraische Varietäten über \mathbb{C} und $f : X \rightarrow S$ ein glatter Morphismus.

Wir haben eine Inklusion $f^*\Omega_S^1 \hookrightarrow \Omega_X^1$, deren Quotient $\Omega_{X/S}^1$ das Bündel der relativen holomorphen Differentialformen ist. Wir haben dann eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow 0.$$

Auf jedem Bündel Ω_X^r existiert die sogenannte **Leray-Filtrierung** $L_S^p \Omega_X^r$ definiert durch

$$L_S^p \Omega_X^r := f^*\Omega_S^p \wedge \Omega_X^{r-p}.$$

Die assoziierte graduierte Garbe bezüglich dieser Filtrierung ist

$$Gr_L^p \Omega_X^r = f^*\Omega_S^p \otimes \Omega_{X/S}^{r-p}.$$

Der Bequemlichkeit halber bezeichnen wir $L_S^p \Omega_X^r$ mit $L_S^p(r)$ und $Gr_L^p \Omega_X^r$ mit $Gr_L^p(r)$. Es ist klar, dass

$$\Omega_X^r = L_S^0(r) \supseteq L_S^1(r) \supseteq \cdots \supseteq L_S^r(r) \supseteq L_S^{r+1}(r) = 0$$

gilt. Wir nehmen nun an, dass f polarisierte abelsche Varietäten als Fasern hat (insbesondere sind die Fasern kompakt und kählersch) und betrachten die kohärente Garbe $R^p f_* \Omega_X^r$. Diese ist durch

$$L^p R^l f_* \Omega_X^r := \text{Im} \left(R^l f_* L_S^p \Omega_X^r \longrightarrow R^l f_* \Omega_X^r \right)$$

filtriert.

1.1.1 Die (holomorphe) Leray-Spektralsequenz

Die Leray-Filtrierung liefert die Leray-Spektralsequenz

$$\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X) := R^{p+q}f_*(Gr_L^p(r)) \Rightarrow R^{p+q}f_*\Omega_X^r \quad (1.1)$$

mit

$$\mathcal{E}_\infty^{p,q}(r, X) = Gr_L^p R^{p+q}f_*\Omega_X^r.$$

Die Differentialabbildung $d_1 : \mathcal{E}_1^{p,q}(r, X) \longrightarrow \mathcal{E}_1^{p+1,q}(r, X)$ ist der Verbindungsmorphismus $R^{p+q}f_*(Gr_L^p(r)) \longrightarrow R^{p+q+1}f_*(Gr_L^{p+1}(r))$ aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow Gr_L^{p+1}(r) \longrightarrow L_S^p(r)/L_S^{p+2}(r) \longrightarrow Gr_L^p(r) \longrightarrow 0.$$

Nach der Projektionsformel gilt $\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X) \simeq \Omega_S^p \otimes R^{p+q}f_*\Omega_{X/S}^{r-p}$. Außerdem $R^i f_*\Omega_{X/S}^j \simeq \mathcal{H}^{j,i} := Gr_F^j \mathcal{H}^{i+j}$, wobei $\mathcal{H}^t := R^t f_*\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_S$ die Hodge-Bündel sind und F^\bullet die auf jeder Faser definierte Hodgefiltrierung ist.

Wir möchten zu der Beziehung zwischen der Leray-Spektralsequenz und dem De-Rham-Komplex bezüglich \mathcal{H}^i näher eingehen.

Dazu bezeichnen wir mit $K_X^\bullet(t)$ den folgenden \mathbb{C} -linearen Komplex:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^t \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}^t \otimes \Omega_S^1 \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}^t \otimes \Omega_S^2 \longrightarrow \dots$$

wobei ∇ der Gauß-Manin-Zusammenhang ist. Es gilt auch die Transversalitätsbedingung von Griffiths

$$\nabla F^p \mathcal{H}^t \subset F^{p-1} \mathcal{H}^t \otimes \Omega_S$$

und somit können wir $K_X^\bullet(t)$ filtrieren, $F^p K_X^\bullet(t)$:

$$0 \longrightarrow F^p \mathcal{H}^t \xrightarrow{\nabla} F^{p-1} \mathcal{H}^t \otimes \Omega_S^1 \xrightarrow{\nabla} F^{p-2} \mathcal{H}^t \otimes \Omega_S^2 \longrightarrow \dots$$

Der graduierte Anteil ist $Gr_F^p K_X^\bullet(t)$ (\mathcal{O}_S -linear):

$$0 \longrightarrow Gr_F^p \mathcal{H}^t \xrightarrow{\bar{\nabla}} Gr_F^{p-1} \mathcal{H}^t \otimes \Omega_S^1 \xrightarrow{\bar{\nabla}} Gr_F^{p-2} \mathcal{H}^t \otimes \Omega_S^2 \longrightarrow \dots$$

Mit dieser Notation haben wir dann folgenden

Satz 1.1.1 Für q, r kann man den Komplex $(\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X), d_1)$ und den Komplex $(Gr_F^r K_X^\bullet(r+q), \bar{\nabla})$ miteinander identifizieren.

Beweis: Siehe [Vo] II Seite 139. □

Ikeda hat in [Ike] das folgende Resultat bewiesen

Satz 1.1.2 Ist f glatt und projektiv, dann degeneriert die Spektralsequenz (1.1) in \mathcal{E}_2 .

1.2 Eine Filtrierung auf der Chowgruppen und die höhere Griffiths-Gruppen

Dieser Abschnitt enthält die wichtigsten Begriffe der Dissertation, nämlich

1.2.1 Die Saito-Filtrierung

Saito [Sa0] hat induktiv eine Filtrierung auf $Ch^p(X/S)$ definiert, welche die **Bloch-Beilinson-Filtrierungsvermutung** lösen könnte. Wir betrachten zunächst diese Konstruktion von Saito. Wir definieren $F_S^0 Ch^p(X/S) := Ch^p(X/S)$ und

$$F_S^{i+1} Ch^p(X/S) := \sum_{Y, \Gamma, q} \text{Im} \left(F_S^i Ch^{p+d-q}(Y/S) \xrightarrow{\Gamma_*} Ch^p(X/S) \right),$$

wobei Y , Γ und q die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) Y ist ein glattes projektives Schema, flach über S und von relativer Dimension d ,
- (ii) $q \in \mathbb{Z}$ erfüllt $p \leq q \leq p + d$,
- (iii) $\Gamma \in Ch^q(Y \times_S X/S)$ ist ein algebraischer Zykel mit folgender Eigenschaft

$$\Gamma_* \left(H_{dR}^{2(p+d-q)-i}(Y_s) \right) \subset F^{p-i+1} H_{dR}^{2p-i}(X_s);$$

hier ist F die Hodgefiltrierung auf der De-Rham-Kohomologie. Im Fall $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$ werden wir $F^i Ch^p(X)$ statt $F_{\text{Spec}(\mathbb{C})}^i Ch^p(X/\text{Spec}(\mathbb{C}))$ schreiben. Wir präsentieren zunächst einige Eigenschaften dieser Filtrierung, deren Beweisen in [Sa0] und [Sa] zu finden sind.

Satz 1.2.1 *Für X/S glatt und projektiv gilt:*

SF1. Die Filtrierung F_S ist stabil unter Basiswechsel und Korrespondenzen. Insbesondere gilt für $\alpha \in F_S^i Ch^p(X/S)$, dass für jedes $s_0 \in S$ auch $\alpha_{s_0} \in F^i Ch^p(X_{s_0})$.

SF2. Umgekehrt, ist $\alpha_{s_0} \in F^i Ch^p(X_{s_0})$ für $s_0 \in S$ generisch, dann gibt es eine offene Menge $U \subset S$ und eine étale Abbildung $f : T \rightarrow U \subset S$ mit

$$f^*(\alpha) \in F_T^i Ch^p(T \times_S X).$$

SF3. $F_S^{i+1} Ch^p(X/S) = F_S^i Ch^p(X/S)$ für $i \geq p + 1$.

Zwei wichtige Eigenschaften dieser Filtrierung sind:

Theorem 1.2.1 *Für X und S wie zuvor gilt:*

- i) $F_S^1 Ch^r(X/S) = Ch^r(X/S)_{\text{hom}} := \ker \{ Ch^r(X/S) \rightarrow H^r(X, \Omega_X^r) \}$
- ii) $F_S^2 Ch^r(X/S) \subset \ker \{ AJ_X^r : Ch^r(X/S)_{\text{hom}} \rightarrow J^r(X) \}$, wobei $J^r(X)$ die Intermediate-Jacobian und AJ_X^r die Abel-Jacobi-Abbildung ist (vgl. Abschnitt 1.5).

1.2. Eine Filtrierung auf der Chowgruppen und die höhere Griffiths-Gruppen

1.2.2 Die Z-Filtrierung

Wir können auch eine aufsteigende Filtrierung auf $F_S^i Ch^r(X/S)$ definieren

$$0 \subset Z_0 F_S^i Ch^r(X/S) \subset Z_1 F_S^i Ch^r(X/S) \subset \cdots \\ \cdots \subset Z_{n-r} F_S^i Ch^r(X/S) = F_S^i Ch^r(X/S),$$

wobei n die relative Dimension von $f : X \rightarrow S$ ist. Diese Filtrierung wird definiert durch

$$Z_l F_S^i Ch^r(X/S) = \sum_{Y, \Gamma} \text{Im} \left\{ \Gamma_* : F_S^i Ch^{d-l}(Y/S) \rightarrow Ch^r(X/S) \right\},$$

wobei Y/S über alle glatten projektiven Varietäten der relativen Dimension d läuft und $\Gamma \in Ch^{l+r}(Y \times_S X/S)$.

Für die Z-Filtrierung gilt eine analoge Aussage wie in Satz (1.2.1), nämlich

Satz 1.2.2 *Für X/S glatt und projektiv gilt*

ZF1. Die Z-Filtrierung auf $F_S^i Ch^r(X/S)$ ist stabil unter Basiswechsel und Korrespondenzen. Insbesondere gilt für $\alpha \in Z_l F_S^i Ch^r(X/S)$, dass für jedes $s_0 \in S$ auch $\alpha_{s_0} \in Z_l F^i Ch^r(X_{s_0})$.

ZF2. Umgekehrt, gilt $\alpha_{s_0} \in Z_l F^i Ch^r(X_{s_0})$ für $s_0 \in S$ generisch, dann gibt es eine offene Menge $U \subset S$ und eine étale Abbildung $f : T \rightarrow U \subset S$ mit $f^(\alpha) \in Z_l F_S^i Ch^r(T \times_S X/T)$.*

Ein wichtiges Resultat über diese Filtrierung ist

Satz 1.2.3 *Ist $Ch^r(X/S)_{alg}$ die Untergruppe von $Ch^r(X/S)$, die aus Klassen von Zyklen bestehen, die algebraisch äquivalent zu Null sind, dann gilt*

$$Ch^r(X/S)_{alg} = Z_0 F_S^1 Ch^r(X/S).$$

1.2.3 Die höhere Griffiths-Gruppen

Für $i, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert man die höhere Griffiths-Gruppen wie folgt:

$$Griff^{r,i}(X/S) := \frac{F_S^i Ch^r(X/S)}{F_S^{i+1} Ch^r(X/S) + Z_0 F_S^i Ch^r(X/S)}.$$

Aus den vorherigen Eigenschaften der Filtrierungen F_S und Z folgt unmittelbar,

$$Griff^{r,1} \simeq \left(\frac{Ch^r(X/S)_{hom}}{Ch^r(X/S)_{alg}} \right) / F_S^2 Ch^r(X/S) \\ = \frac{Griff^r(X/S)}{F_S^2 Ch^r(X/S)},$$

wobei $Griff^r(X/S)$ die klassische Griffiths-Gruppe darstellt.

1.2.4 Die infinitesimalen Invarianten höherer Ordnung

Infinitesimale Invarianten wurden von Griffiths im Jahr **1983** in [Grf] definiert. Danach wurden sie tiefer studiert von Voisin im Jahr **1988** (siehe [Vo0]) und von Green im Jahr **1989** (siehe [Grn]).

Diese Theorie wurde von Saito in **2002** verallgemeinert (siehe [Sa]). Er definierte die *infinitesimalen Invarianten höherer Ordnung*. Ein Jahr später studierte Ikeda in [Ike] Saitos infinitesimale Invarianten. Wir betrachten hier seine Notation und Verfahren.

Zunächst geben wir die folgende

Definition 1.2.1 *Wir bezeichnen mit cl die folgende Verknüpfung*

$$Ch^r(X/S) \xrightarrow{cl} H^r(X, \Omega_X^r) \longrightarrow H^0(S, R^r f_* \Omega_X^r)$$

und nennen sie die Zykelklasse (vgl. [Ike]).

Der nächste Satz zeigt, dass die Filtrierungen L_S von $R^r f_* \Omega_X^r$ und F_S von $Ch^r(X/S)$ verträglich sind.

Satz 1.2.4 *Für die Zykelklasse gilt*

$$cl(F_S^p Ch^r(X/S)) \subset H^0(S, L_S^p R^r f_* \Omega_X^r).$$

Beweis: Siehe [Ike] Lemma 2.6, Seite 581. □

Nun sind wir in der Lage, die infinitesimalen Invarianten zu definieren.

Definition 1.2.2 *Für einen algebraischen Zykel $\alpha \in F_S^i Ch^r(X/S)$ bezeichnen wir mit $\delta_i(\alpha)$ das Bild von $cl(\alpha)$ unter*

$$H^0(S, L_S^i R^r f_* \Omega_X^r) \longrightarrow H^0(S, Gr_L^i R^r f_* \Omega_X^r)$$

und nennen es **infinitesimale Invariante der Ordnung i von α** .

1.3 Beauvilles Zerlegung der Chowgruppen

Es seien X, S, f wie im Abschnitt 1.4. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ bezeichne

$$m_{X/S} : X \longrightarrow X$$

die Multiplikation mit m auf dem abelschen Schema $f : X \longrightarrow S$.

Wir definieren folgende Eigenräume von $Ch^r(X/S)$,

$$Ch_{(i)}^r(X/S) := \{ \alpha \in Ch^r(X/S) : (m_{X/S})_* \alpha = m^{2n-2r+i} \alpha \}.$$

Im Fall $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$ hat Beauville **1986** bewiesen (siehe [Be2]), dass es eine funktorielle Zerlegung wie im nächsten Satz gibt. Den nächsten Satz für ein allgemeines Schema S wurde von Deninger und Murre bewiesen.

1.4. Die Leray-Zerlegung in der Kohomologie

Satz 1.3.1 Sind $d = \dim S$, $p_1 = \max(r - n, 2r - 2n)$ und $p_2 = \min(2r, r + d)$, dann gilt

$$Ch^r(X/S) = \bigoplus_{i=p_1}^{p_2} Ch_{(i)}^r(X/S).$$

Beweis: Siehe [DeMu]. □

Diese Zerlegung ist mit der Saito-Filtrierung verträglich:

Satz 1.3.2 Mit X, S, f wie im Satz (1.3.1) gilt

$$\bigoplus_{j \geq i} Ch_{(j)}^r(X/S) \subset F^i Ch^r(X/S)$$

Beweis: Siehe [Mu]. □

1.4 Die Leray-Zerlegung in der Kohomologie

Es ist bekannt, dass für \mathbb{C} -Schemata S und X , S glatt und zusammenhängend und $f : X \rightarrow S$ glatt und projektiv von relativer Dimension n , die Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^q f_* \mathbb{C}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

in E_2 degeneriert. Ist außerdem f ein relatives abelsches Schema, dann ist die folgende induzierte Zerlegung in der Kohomologie kanonisch

$$H^r(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_q H^{r-q}(S, R^q f_* \mathbb{C}).$$

Dass diese Zerlegung in diesem Fall kanonisch ist, kommt aus der Tatsache, dass wir über eine *Multiplikation* auf jeder Faser verfügen. Explizit können wir $H^{r-q}(S, R^q f_* \mathbb{C})$ mit dem Unterraum von $H^r(X, \mathbb{C})$ identifizieren, auf dem für jedes $m \in \mathbb{Z}$, $(m_{X/S})_*$ als Multiplikation mit m^{2n-q} wirkt. Daher haben wir, dass diese Zerlegung der Kohomologie mit der Zerlegung von Beauville aus Abschnitt (1.3) verträglich ist:

Satz 1.4.1 Es sei $f : X \rightarrow S$ ein glattes, projektives, abelsches S -Schema. Ist $cl_{\mathbb{Q}} : Ch^r(X/S) \rightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^r(X, \Omega_X^r) \subset H^{2r}(X, \mathbb{C})$ die Zykelklasse, dann gilt

$$cl_{\mathbb{Q}} \left(Ch_{(i)}^r(X/S) \right) \subset H^i(S, R^{2r-i} f_* \mathbb{C}).$$

Es sei nun \mathcal{L} ein relativ amples Geradenbündel auf X . Mit Hilfe dieser kanonischen Zerlegung können wir das Bild L von $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X, \mathbb{C})$ in $H^0(S, R^2 f_* \mathbb{C})$ definieren.

Bezeichnet nun \mathbb{P}_j das lokale System auf S bezüglich der j -ten primitiven Kohomologie ($\otimes \mathbb{C}$) der Fasern, dann gilt

$$R^q f_* \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{j \geq 0} L^j \mathbb{P}_{q-2j}.$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{P}_j = 0$ falls $j > n$.

Wir sind an dem Fall $q = 4$, $r = 6$ interessiert. Genauer gesagt, wir werden uns auf $H^2(S, \mathbb{P}_4) \subset H^6(X, \mathbb{C})$ konzentrieren.

1.5 Über die Abel-Jacobi-Abbildung

Es sei X eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit der Dimension n über \mathbb{C} . Sei $Z \in \mathcal{Z}_{hom}^r(X) =$ die Gruppe algebraischer Zyklen auf X der Kodimension r , welche homologisch äquivalent zu Null sind. Es existiert also eine stückweise differenzierbare Kette $\Gamma \subset X$ der reellen Dimension $2(n-r)+1$ mit $\partial\Gamma = Z$.

Wir betrachten dann die Linearform

$$\int_{\Gamma} - \in (F^{n-r+1} H^{2(n-r)+1}(X, \mathbb{C}))^* \simeq H^{2r-1}(X, \mathbb{C}) / F^r H^{2r-1}(X, \mathbb{C}).$$

Hier bezeichnet $F^r H^i$ die übliche Hodge-Filtrierung und $\int_{\Gamma} -$ die Abbildung $\alpha \mapsto \int_{\Gamma} \alpha$. Dieses Element ist von der Wahl von Γ abhängig. Deswegen betrachten wir den Quotienten nach

$$H_{2(n-r)+1}(X, \mathbb{Z}) \simeq H^{2r-1}(X, \mathbb{Z}).$$

Damit erhalten wir, dass das Element $\int_{\Gamma} -$ in

$$J^r(X) := H^{2r-1}(X, \mathbb{C}) / (F^r H^{2r-1}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{2r-1}(X, \mathbb{Z}))$$

nur von Z abhängt und nicht mehr von der Wahl von Γ .

Definition 1.5.1 *Der komplexe Torus $J^r(X)$ heißt die Intermediate-Jacobian.*

Mit der vorigen Notation haben wir den wichtigsten Begriff dieses Abschnittes:

Definition 1.5.2 *Die Abel-Jacobi-Abbildung*

$$AJ_X^r : \mathcal{Z}_{hom}^r(X) \longrightarrow J^r(X)$$

ist durch $Z \mapsto \{\omega \mapsto \int_{\Gamma} \omega\}$ definiert.

Der Fall $r = n = \dim X$ liefert

$$J^n(X) \simeq \frac{H^{n-1,n}(X)}{H^{2n-1}(X, \mathbb{Z})} \simeq \frac{H^0(X, \Omega_X^1)^*}{H_1(X, \mathbb{Z})} =: Alb(X)$$

also, die Albanese-Varietät. Die Albanese-Varietät ist in einigen Fällen besonders einfach zu beschreiben. Das ist zum Beispiel der Fall wenn X ein komplexer Torus ist:

Ist $X = V/\Lambda$ ein komplexer Torus, dann haben wir Identifikationen $V = H^0(X, \Omega_X^1)$, $\Lambda = H_1(X, \mathbb{Z})$ (siehe [BL] S.13-16). Also gilt in diesem Fall $X \simeq Alb(X)$. Ein solcher Isomorphismus kann nach der Wahl eines Punktes $p_0 \in X$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Alb(X) \\ p &\longmapsto \left\{ \omega \mapsto \int_{p_0}^p \omega \right\} \pmod{H_1(X, \mathbb{Z})} \end{aligned}$$

1.5.1 Zykel auf Produkten

Wir haben zunächst den folgenden wichtigen Satz

Satz 1.5.1 (Griffiths 1968) *Es sei Y eine zusammenhängende glatte projektive Varietät und $y_0 \in Y$ ein festgewählter Punkt. Weiter sei $Z \subset Y \times X$ ein Zykel der Kodimension r . Nehmen wir an, dass $Z = \sum_i n_i Z_i$, mit jedem Z_i glatt und $pr_1 : Z_i \rightarrow Y$ Submersionen sind. Dann sind alle Fasern $Z_y = \sum_i n_i Z_{i,y}$, $Z_{i,y} := pr_1^{-1}(y) \cap Z_i \subset \{y\} \times X \simeq X$, homologisch äquivalent. Darüber hinaus ist die folgende Abbildung holomorph*

$$\begin{aligned} AJ_X^Z : Y &\longrightarrow J^r(X) \\ y &\longmapsto AJ_X^r(Z_y - Z_{y_0}) \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [Vo] Vol. I, Seite 294. □

Wir schauen uns den Fall näher an, in dem $Y = C$ eine Kurve und $r = n = \dim X$ ist. Wir nehmen an, dass auch $Z \subset C \times X$ eine Kurve ist. Nach der Wahl eines Punktes $c_0 \in C$ haben wir nach dem Satz von Griffiths einen Morphismus $C \rightarrow J^n(X)$. Dieser faktorisiert nach der universellen Eigenschaft der Jacobischen über $J(C)$:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{AJ_X^Z} & J^n(X) \\ & \searrow & \nearrow \psi_Z \\ & J(C) & \end{array}$$

Andererseits liefert die Künneth-Zerlegung von $H^{2n}(C \times X, \mathbb{Z})$ ein Element

$$[Z]^{1,2n-1} \in H^1(C, \mathbb{Z}) \otimes H^{2n-1}(X, \mathbb{Z}) \quad (1.2)$$

und dieses liefert einen Homomorphismus $[Z]^{1,2n-1} : H^1(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2n-1}(X, \mathbb{Z})$. $H^1(C, \mathbb{Z})$ und $H^{2n-1}(X, \mathbb{Z})$ sind die Gitter, die in der Definition von $J(C)$ bzw. $J^n(X)$ vorkommen. Deshalb liefert dieser Homomorphismus einen Morphismus von komplexen Tori $J(C) \longrightarrow J^n(X) \simeq \text{Alb}(X)$. Die Beziehung zwischen diesen beiden Abbildungen ist:

Satz 1.5.2 ψ_Z ist der durch

$$[Z]^{1,2n-1} : H^1(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2n-1}(X, \mathbb{Z})$$

induzierte Morphismus.

Beweis: Siehe [Vo] Vol. I, Seite 291. □

Bemerkung: Ist AJ_X^Z nicht trivial, so folgt aus der Kommutativität des vorigen Diagramms, dass auch ψ_Z nicht trivial ist und nach Satz (1.5.2) folgt dann daraus, dass die Komponente (1.2) nicht trivial ist.

Kapitel 2

Die verallgemeinerte Prym-Varietät

In diesem Kapitel wiederholen wir die elementare Konstruktion einer verallgemeinerten Prym-Varietät bezüglich einer $(2 : 1)$ Überlagerung sowie ihre wichtigsten Eigenschaften. Wir berechnen auch den Typ ihrer Polarisierung als abelsche Varietät und geben eine explizite Darstellung von ihr als komplexer Torus bezüglich der Kohomologie der zugehörigen Überlagerung.

2.1 Überlagerungen vom Grad 2

Es seien \tilde{C} und C glatte, projektive Kurven über \mathbb{C} . Ferner sei $f : \tilde{C} \rightarrow C$ eine Überlagerung vom Grad 2, verzweigt in $B \in C^{(2b)}$, wobei $C^{(n)}$ die Menge aller effektiven Divisoren von Grad n bezeichnet. Ist $g = g(C)$, dann folgt aus der Hurwitz-Formel, dass $\tilde{g} := g(\tilde{C}) = 2g - 1 + b$ gilt.

Es sei $i : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ die zugehörige Involution (Decktransformation); dasselbe Symbol bezeichne auch die induzierte Involution auf der Jacobischen $\tilde{J} := J(\tilde{C})$. Der Norm-Morphismus $N_f : \tilde{J} \rightarrow J := J(C)$, der durch

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}}\left(\sum r_j c_j\right) \mapsto \mathcal{O}_C\left(\sum r_j f(c_j)\right)$$

definiert ist, macht folgendes Diagramm kommutativ (natürlich nach der Wahl von Basispunkten)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{J} & \xrightarrow{N_f} & J \end{array}$$

Sei $f^* : J \rightarrow \tilde{J}$ der zur Überlagerung gehörige *Pullback*-Morphismus. Unmittelbar aus der Konstruktion ergeben sich die folgenden wichtigen Eigenschaften:

2.1. Überlagerungen vom Grad 2

(P1) $N_f f^* = 2J$

(P2) $f^* N_f = 1_{\tilde{C}} + i$

(P3) $if^* = f^*$

2.1.1 Die Geometrie der $(2 : 1)$ Überlagerung

Da $B \in C^{(2b)}$, können wir $B = p_0 + p_1 + \dots + p_{2b-1}$ schreiben, wobei $p_0, \dots, p_{2b-1} \in C$. Wir bezeichnen auch mit $p_i \in \tilde{C}$ den eindeutigen Punkt in $f^{-1}(p_i)$, $i = 0, 1, \dots, 2b-1$.

Da alle anderen Punkte außer den p_i zwei Urbilder haben, nehmen wir zwei Kopien von C und schneiden in jede Kopie Wege zwischen p_{2i} und p_{2i+1} hinein, $i = 0, 1, \dots, 2b-1$, so wie im Bild 2.1. Dann verkleben wir die Kopien durch

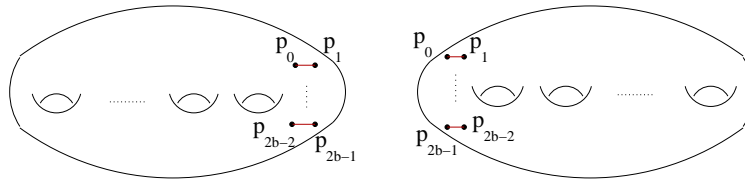


Abbildung 2.1: Wahl von Wegen.

Identifizieren der Wege (siehe Abbildung 2.2). Damit können wir \tilde{C} als die

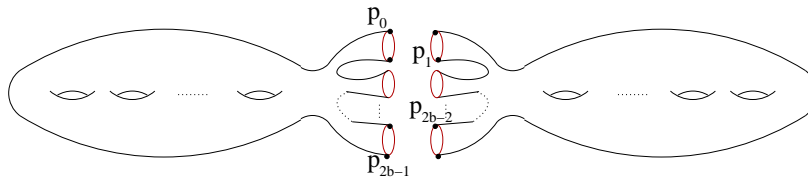


Abbildung 2.2: Identifizierung der Wege.

dadurch entstandene Kurve im Bild (2.3) auffassen. Hier wird auch bestätigt,

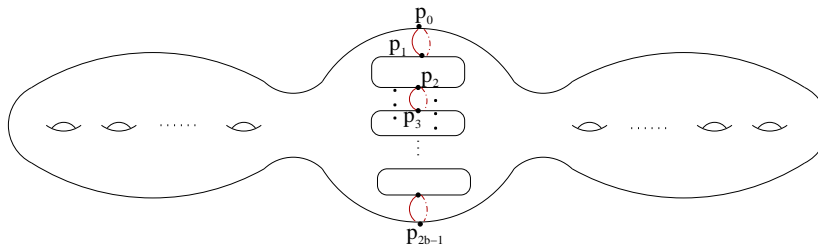


Abbildung 2.3: Die Kurve \tilde{C} .

warum das Geschlecht von \tilde{C} genau $2g + b - 1$ ist, welches wir aus der Hurwitz-Formel schon kannten.

Die Involution bildet die *linke* (wir können eine der Kopien auszeichnen) auf die *rechte* Seite dieser Kurve ab und die Abbildung f identifiziert sie. Im Fall $b = 2$ sieht all dies wie im Bild (2.4) aus.

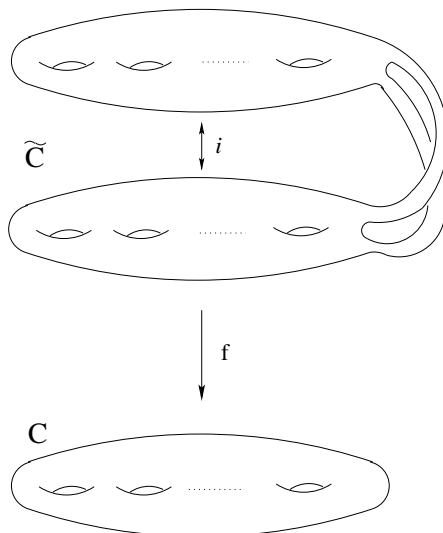


Abbildung 2.4: Der Fall $b = 2$

2.2 Definition der verallgemeinerten Prym-Varietät und ihre Eigenschaften

Betrachten wir zuerst die komplexe abelsche Varietät $Y := \text{im } f^*$ von \tilde{J} . Wegen (P1) ist N_f surjektiv und aus (P2) folgt dann $Y = \text{im}(1_{\tilde{J}} + i)$. Y ist eine abelsche Varietät der Dimension g , weil f^* auf Grund (P1) einen endlichen Kern besitzt, nämlich $\ker(f^*) \subset J_2 := \ker(2_J)$ (für eine abelsche Varietät A und eine ganze Zahl n bezeichnen wir mit A_n den Kern $\ker(n_A)$).

Definition 2.2.1 Wir setzen $X_f := \text{im}(1_{\tilde{J}} - i)$ und nennen sie die verallgemeinerte Prym-Varietät bezüglich $f : \tilde{C} \rightarrow C$.

Satz 2.2.1 Die abelschen Varietäten X_f, Y bilden ein komplementäres Paar in dem Sinne, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : X_f \times Y &\longrightarrow \tilde{J} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

eine Isogenie ist.

2.2. Definition der verallgemeinerten Prym-Varietät und ihre Eigenschaften

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass ϕ einen endlichen Kern hat. Sei dazu $x+y = 0$. Aus (P3), der Definition von X_f und Y und der Tatsache, dass i eine Involution ist, ergibt sich

$$0 = ix + iy = -x + y,$$

aber dann ist $2x = 0$ und $2y = 0$. Daraus folgt $(x, y) \in \tilde{J}_2 \times \tilde{J}_2$ und somit ist $\ker(\phi)$ endlich.

Zeigen wir nun, dass ϕ surjektiv ist. Sei $z \in \tilde{J}$ beliebig. Wähle $z' \in \tilde{J}$ mit $z = 2z'$, dann folgt

$$\begin{aligned} z &= 2z' = z' + z' \\ &= (1-i)z' + (1+i)z' \in X_f \times Y. \end{aligned}$$

□

Folgerung 2.2.1 Die Dimension von X_f ist gleich $g + b - 1$.

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass $\dim Y = g$ ist. Daraus und aus $\dim \tilde{J} = 2g + b - 1$ folgt die Aussage. □

Da X_f zusammenhängend und $(1_{\tilde{J}} + i)(1_{\tilde{J}} - i) = 0$ ist, folgt

$$X_f \subset (\ker(1_{\tilde{J}} + i))_0. \quad (2.1)$$

Mit dieser Bemerkung können wir den Beweis von (2.2.1) wortwörtlich übernehmen, um zu zeigen, dass auch $(\ker(1_{\tilde{J}} - i))_0$ und $X_f = \text{im}(1_{\tilde{J}} - i)$ ein komplementäres Paar bilden.

Damit stimmen die Dimensionen von Y und $(\ker(1_{\tilde{J}} - i))_0$ überein. Aus $Y \subset (\ker(1_{\tilde{J}} - i))_0$ folgt somit die Gleichheit:

$$Y = \text{im} f^* = (\ker(1_{\tilde{J}} - i))_0.$$

Lemma 2.2.1 $(\ker N_f)_0 = (\ker(1_{\tilde{J}} + i))_0$.

Beweis: Aus (P2) folgt $\ker N_f \subset (\ker(1_{\tilde{J}} + i))$ und somit

$$(\ker N_f)_0 \subset (\ker(1_{\tilde{J}} + i))_0.$$

Aus (P2) folgert man auch, dass $f^* N_f$ die abelsche Untervarietät $(\ker(1_{\tilde{J}} + i))_0$ auf Null abbildet. Weil $N_f((\ker(1_{\tilde{J}} + i))_0)$ zusammenhängend und $\ker f^*$ endlich ist, folgt $N_f((\ker(1_{\tilde{J}} + i))_0) = 0$. Damit gilt

$$(\ker(1_{\tilde{J}} + i))_0 \subset (\ker N_f)_0.$$

□

Aus diesem Lemma und der Gleichung

$$\dim(\ker N_f)_0 = g + b - 1 = \dim X_f$$

folgert man mit (2.1), dass $X_f = (\ker N_f)_0$ gilt.

2.2.1 Eigenschaften der Prym-Varietät

Als eine Zusammenfassung aller unseren Ergebnisse in diesem Abschnitt haben wir folgenden Satz.

Satz 2.2.2 *Die verallgemeinerte Prym-Varietät X_f bezüglich der $(2 : 1)$ Überlagerung $f : \tilde{C} \rightarrow C$ und ihre komplementäre Varietät $Y = \text{im} f^*$ erfüllen folgende Bedingungen:*

$$(E1) \quad X_f = \text{im}(1_{\tilde{C}} - i) = (\ker(1_{\tilde{C}} + i))_0 = (\ker N_f)_0.$$

$$(E2) \quad \dim X_f = g + b - 1.$$

$$(E3) \quad Y = \text{im} f^* = \text{im}(1_{\tilde{C}} + i) = (\ker(1_{\tilde{C}} - i))_0 .$$

$$(E4) \quad \dim Y = g.$$

2.3 Induzierte Zerlegungen in der Kohomologie

Die Involution i induziert eine Involution in der Kohomologie von $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j})$ und diese liefert eine Zerlegung in ± 1 Eigenräume:

$$H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j}) = H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j})^+ \oplus H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j})^-$$

Wir können die Komponenten dieser Zerlegung mit Hilfe der Kohomologie von C darstellen. Dazu erinnern wir an folgenden Satz:

Satz 2.3.1 *Es seien X, Y glatte Varietäten, $f : X \rightarrow Y$ endlich vom Grad n , verzweigt in $B \in \text{Div}(Y)$ und $\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_Y(B)$. Dann gilt:*

$$(R1) \quad \omega_X \simeq f^*(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{n-1})$$

$$(R2) \quad f_* \mathcal{O}_X \simeq \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-j}$$

Beweis: Siehe [BHPV] Seite 55. □

In unserem Fall ist $n = 2$ und damit erhalten wir die Zerlegung

$$\begin{aligned} H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j}) &\simeq H^0(C, f_* \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j}) \simeq H^0(C, f_* f^*(\omega_C \otimes \mathcal{L})^{\otimes j}) && \text{(nach (R1))} \\ &\simeq H^0(C, (f_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \otimes (\omega_C \otimes \mathcal{L})^{\otimes j}) && \text{(Projektionsformel)} \\ &\simeq H^0(C, (\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}) \otimes (\omega_C \otimes \mathcal{L})^{\otimes j}) && \text{(nach (R2))} \\ &\simeq H^0(C, (\omega_C \otimes \mathcal{L})^{\otimes j}) \oplus H^0(C, \omega_C^{\otimes j} \otimes \mathcal{L}^{\otimes j-1}) \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Zerlegung in Eigenräume und wie man leicht sieht (vgl. [BCV]), gilt

$$H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j})^+ \simeq \begin{cases} H^0(C, \omega_C^{\otimes j} \otimes \mathcal{L}^{\otimes j-1}) & j \text{ ungerade} \\ H^0(C, (\omega_C \otimes \mathcal{L})^{\otimes j}) & j \text{ gerade} \end{cases}$$

2.4. Über die Polarisierung von X_f

$$H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes j})^- \simeq \begin{cases} H^0(C, (\omega_C \otimes \mathcal{L})^{\otimes j}) & j \text{ ungerade} \\ H^0(C, \omega_C^{\otimes j} \otimes \mathcal{L}^{\otimes j-1}) & j \text{ gerade} \end{cases}$$

Analog dazu existiert eine Zerlegung von $H_1(\tilde{C}, \mathbb{Z})$ in ± 1 -Eigenräume. Berücksichtigen wir nun noch, dass $\tilde{J} = H^0(\omega_{\tilde{C}})^* / H_1(\tilde{C}, \mathbb{Z})$ gilt, dann erhalten wir aus unseren Zerlegungen unmittelbar die

Folgerung 2.3.1 *Die verallgemeinerte Prym-Varietät $X_f = \text{im}(1_{\tilde{J}} - i)$ ist als komplexer Torus durch*

$$X_f = \frac{(H^0(\omega_{\tilde{C}})^-)^*}{H_1(\tilde{C}, \mathbb{Z})^-} \simeq \frac{H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*}{H_1(\tilde{C}, \mathbb{Z})^-}$$

darzustellen.

2.4 Über die Polarisierung von X_f

In diesem Abschnitt möchten wir den Typ der Polarisierung von X_f näher studieren.

Zu Erinnerung: Eine komplexe polarisierte abelsche Varietät ist ein Paar (X, E) mit

- $X = V/\Lambda$ ein komplexer Torus,
- $E : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-ausgeartete alternierende Form mit $E(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ und $E(u, v) = E(iv, iu)$.

Dann haben wir:

Lemma 2.4.1 (Definition des Typs der Polarisierung) *Es gibt eine Basis $\{\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g\}$ von Λ , sodass die Matrix von E bezüglich dieser Basis die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix}$ hat, wobei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_g)$, $d_i \geq 0$, $d_i | d_{i+1}$. D heißt der Typ der Polarisierung*

Eine Polarisierung von Typ $(1, 1, 1, \dots, 1)$ wird *prinzipal* genannt. Es ist bekannt, dass jede Jacobische prinzipal polarisiert ist (siehe z.B. [BL] S. 317).

Wir kehren zu unserer Betrachtung von X_f zurück.

Es sei E die alternierende Form auf $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^*$ mit Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\tilde{g}} \\ -\mathbf{1}_{\tilde{g}} & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis (siehe Bild (2.5) unten):

$$\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{\tilde{g}}^{(1)}, \sigma_1, \dots, \sigma_{b-1}, \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_g^{(0)}, \delta_1^{(1)}, \dots, \delta_g^{(1)}, \mu_1, \dots, \mu_{b-1}, \delta_1^{(0)}, \dots, \delta_1^{(0)}.$$

Dabei ist $\tilde{g} = 2g + b - 1$ und $\mathbf{1}_{\tilde{g}}$ bezeichnet die $\tilde{g} \times \tilde{g}$ -Einheitsmatrix.

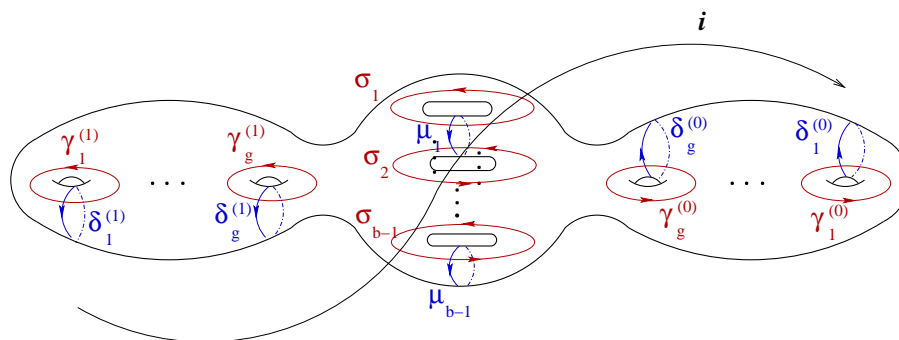


Abbildung 2.5: Symplektische Basis.

Der Einfachheit halber werden wir diese Basis mit

$$\left\{ \gamma_i^{(1)}, \sigma_j, \gamma_i^{(0)}, \delta_i^{(1)}, \mu_j, \delta_i^{(0)} \right\}_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j \leq b-1}}$$

bezeichnen. Wesentlich ist, dass $H(\cdot, \cdot) := E(i\cdot, \cdot) + iE(\cdot, \cdot)$ eine Prinzipal-Polarisierung auf \tilde{J} definiert. Wir möchten den Typ der induzierten Polarisierung auf der Prym-Varietät X_f berechnen.

Hierfür bemerken wir, dass die induzierte Basis von $H^1(\tilde{C}, \mathbb{Z})^-$ die Form

$$\left\{ \gamma_i^{(1)} - \gamma_i^{(0)}, \delta_i^{(1)} - \delta_i^{(0)}, \sigma_j, \mu_j \right\}_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j \leq b-1}}$$

hat. Nach trivialen Berechnungen haben wir:

- 1) $E(\gamma_i^{(1)} - \gamma_i^{(0)}, \delta_j^{(1)} - \delta_j^{(0)}) = 2\delta_{ij}$,
- 2) $E(\gamma_i^{(1)} - \gamma_i^{(0)}, \gamma_j^{(1)} - \gamma_j^{(0)}) = E(\delta_i^{(1)} - \delta_i^{(0)}, \delta_j^{(1)} - \delta_j^{(0)}) = 0$,
- 3) $E(\gamma_i^{(1)} - \gamma_i^{(0)}, \sigma_j) = E(\delta_i^{(1)} - \delta_i^{(0)}, \mu_j) = 0$,
- 4) $E(\gamma_i^{(1)} - \gamma_i^{(0)}, \mu_j) = E(\delta_i^{(1)} - \delta_i^{(0)}, \sigma_j) = 0$,
- 5) $E(\sigma_i, \mu_j) = \delta_{ij}$.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen

Satz 2.4.1 Die verallgemeinerte Prym-Varietät X_f ist eine polarisierte abelsche Varietät mit Polarisierung vom Typ

$$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2),$$

wobei die Eins $(b-1)$ -Mal erscheint und die Zwei g -Mal.

Wir sind an dem Fall $b=2$ interessiert. In diesem Fall ist dann die Polarisierung vom Typ $(1, 2, \dots, 2)$.

Kapitel 3

Der Modulraum von $(2 : 1)$ Überlagerungen von Kurven

In diesem Kapitel präsentieren wir ein Resultat aus [BCV], welches besagt, dass die generische abelsche Varietät A^4 der Dimension 4 und mit Polarisierung von Typ $(1, 2, 2, 2)$ eine verallgemeinerte Prym-Varietät ist, bezüglich einer in 4 Punkten verzweigten $(2 : 1)$ Überlagerung einer Kurve von Geschlecht 3.

3.1 Der Modulraum $\mathcal{R}(g, b)$.

Es seien C eine glatte, irreduzible, projektive Kurve vom Geschlecht g , $B \in C^{(2b)}$ und $\mathcal{L}^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_C(B)$. Im Fall $B \sim 0$ setzen wir voraus, dass \mathcal{L} nicht trivial ist. Die Wahl eines Geradenbündels \mathcal{L} mit $\mathcal{L}^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_C(B)$ ist gleichwertig mit der Wahl einer in B verzweigten Überlagerung $f : \tilde{C} \rightarrow C$ (diese Bemerkung wird in Abschnitt (4.3) angewendet). Wir wissen bereits, dass in dieser Situation $\tilde{g} = 2g + b - 1$ gilt.

Definition 3.1.1 *Wir bezeichnen mit $\mathcal{R}(g, b)$ den Modulraum aller Isomorphieklassen von Überlagerungen $f : \tilde{C} \rightarrow C$ vom Grad 2. Dabei ist die Kurve C glatt, irreduzibel und projektiv vom Geschlecht g , \tilde{C} ist glatt und irreduzibel und f ist verzweigt in $2b$ verschiedenen Punkten von C .*

Aufgrund unserer obigen Bemerkung können wir $\mathcal{R}(g, b)$ auch auffassen als Modulraum der Tripel (C, B, \mathcal{L}) bestehend aus einer glatten, irreduziblen und projektiven Kurve C vom Geschlecht g , einem effektiven Divisor $B \in C^{(2b)}$ und einem Geradenbündel \mathcal{L} auf C mit $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B)$, dass im Fall $B \sim 0$ nicht trivial ist.

Durch diese Überlegungen erkennt man leicht, dass die Dimension von $\mathcal{R}(g, b)$ durch

$$\dim \mathcal{R}(g, b) = \dim \mathcal{M}_g + 2b = 3g - 3 + 2b$$

3.2. Die Ableitung von $p(g, b)$

gegeben ist (letzte Gleichung nur falls $g \geq 2$ gilt). $\mathcal{R}(g, b)$ ist ein abgeschlossenes Unterschema von $\overline{\mathcal{R}}(g, b)$, dem Modulraum aller **zulässigen** $(2 : 1)$ Überlagerungen (siehe [Be] S. 176). In der Konstruktion von Beauville zeigte er, dass $\overline{\mathcal{R}}(g, b)$ irreduzibel und vollständig ist.

Für eine solche Überlagerung $(f : \tilde{C} \rightarrow C) \in \mathcal{R}(g, b)$ bezeichnen wir mit $X_f := (\ker N_f)_0$ die dazugehörige verallgemeinerte Prym-Varietät. Es existiert dann eine natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} p(g, b) : \mathcal{R}(g, b) &\longrightarrow \mathcal{A}_{g+b-1}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2) \\ (f : \tilde{C} \rightarrow C) &\mapsto [X_f], \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}_n(d_1, \dots, d_n)$ den Modulraum der polarisierten abelschen Varietäten der Dimension n mit Polarisierung vom Typ (d_1, \dots, d_n) bezeichnet. Den Typ der Polarisierung haben im Abschnitt (2.4) berechnet.

Für $b = 0, 1$ ist unsere verallgemeinerte Prym-Varietät X_f gemäß *Wirtingers Satz* (siehe [BL], S. 373), ein Prym-Tyurin-Varietät.

Von nun an setzen wir voraus, dass $g \geq 2$ und $b \geq 2$ ist. Wir sind vor allem am Fall $b = 2$ interessiert.

Man kann den Morphismus $p(g, b)$ zu einer *eigentlichen* Abbildung fortsetzen

$$p^+(g, b) : \overline{\mathcal{R}}(g, b) \longrightarrow \mathcal{A}_{g+b-1}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2).$$

3.2 Die Ableitung von $p(g, b)$

Wir möchten wissen, wann die Abbildung $p(g, b)$ dominant ist, denn dies bedeutet, dass die *generische* abelsche Varietät der Dimension $g + b - 1$ eine verallgemeinerte Prym-Varietät ist. Diesem Zweck ist der Rest des Kapitels gewidmet. Wir werden dies nicht im Allgemeinen betrachten, sondern nur in den Fall $b = 2$, $g = 3$. Zunächst wiederholen wir einige wichtige Grundlagen über die Tangentialräume von $\mathcal{A}_n(d_1, \dots, d_n)$ und $\mathcal{R}(g, b)$.

3.2.1 Der Tangentialraum $T_{[X]}(\mathcal{A}_n(\delta))$

Der Einfachheit halber setzen wir $\delta = (d_1, \dots, d_n)$. Wir bestimmen nun $T_{[X]}(\mathcal{A}_n(\delta))$, für $[X] \in \mathcal{A}_n(\delta)$ beliebig.

Es ist allgemein bekannt, dass der Deformationsraum von X (als komplexe Mannigfaltigkeit) mit $H^1(X, T_X)$ identifiziert werden kann. Da $T_X \simeq \Omega_X^{n-1} \otimes K_X^*$ gilt (siehe [H], Übung 5.16 b), erhalten wir folgende Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^1(X, T_X) &\simeq H^1(X, \Omega_X^{n-1}) && (K_X \text{ ist hier trivial}) \\ &\simeq H^{n-1,1}(X) && (\text{Satz von Dolbeault}) \\ &\simeq \bigwedge^{n-1} H^{1,0}(X) \otimes H^{0,1}(X) \\ &\simeq T_0(X) \otimes T_0(\widehat{X}) \simeq T_0(X)^{\otimes 2} \end{aligned}$$

Nun sind wir nicht an allen diesen komplexen Mannigfaltigkeiten interessiert, sondern nur an jenen, die eine Polarisierung von Typ δ tragen. Die Polarisierung von X liefert eine Isogenie $\lambda : X \rightarrow \widehat{X}$ (hier ist $\widehat{X} \simeq \text{Pic}^0(X)$ die duale abelsche Varietät), deren Tangentialabbildung $T_0(X) \rightarrow T_0(\widehat{X})$ ein linearer Isomorphismus ist. Diese Abbildung ist **symmetrisch** in dem Sinne, dass wenn wir X durch \widehat{X} ersetzen (also durch Dualisierung), diese lineare Abbildung unverändert bleibt (siehe [vG-O] S. 5 oder [BCV] S. 122), und deswegen liefert dies eine Involution auf $T_0(X) \otimes T_0(\widehat{X}) \simeq T_0(X)^{\otimes 2}$, die die Faktoren vertauscht. Nun, wenn wir nicht nur die komplexe Struktur, sondern auch die Polarisierung behalten möchten, müssen wir uns auf den Unterraum von $H^1(X, T_X) \simeq T_0(X)^{\otimes 2}$ einschränken, der invariant unter dieser Involution ist. Damit haben wir

$$T_{[X]}(\mathcal{A}_n(\delta)) \simeq \text{Sym}^2(T_0(X)).$$

3.2.2 Der Tangentialraum von $\mathcal{R}(g, b)$

Der Tangentialraum von $\mathcal{R}(g, b)$ im Punkt $\tau = (C, B, \mathcal{L})$ ist explizit bekannt. Es gilt (siehe [BCV])

$$T_\tau(\mathcal{R}(g, b)) \simeq H^1(\widetilde{C}, T_{\widetilde{C}})^+$$

wobei das $+$ wieder für den $+1$ -Untervektorraum steht, welche durch die Involution bezüglich der (2 : 1) Überlagerung induziert ist.

3.2.3 Die Berechnung von $d_\tau p(g, b)$

Wir wissen bereits aus der Folgerung (2.3.1), dass

$$T_0(X_f) = (H^0(\omega_C \otimes \mathcal{L}))^*$$

gilt. Dann folgt aus den letzten zwei Abschnitten

$$d_\tau p(g, b) : H^1(\widetilde{C}, T_{\widetilde{C}})^+ \rightarrow \text{Sym}^2(T_0(X_f)) \simeq \text{Sym}^2(H^0(\omega_C \otimes \mathcal{L})^*).$$

Aufgrund der Kodaira-Serre-Dualität und wegen $T_{\widetilde{C}}^* \simeq \omega_{\widetilde{C}}$ folgert man

$$H^1(\widetilde{C}, T_{\widetilde{C}})^* \simeq H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}^{\otimes 2}).$$

Daraus und mit Hilfe unseren Zerlegungen der Kohomologie (siehe Abschnitt (2.3)) folgt, dass wir die duale Abbildung zu $d_\tau p(g, b)$ mit folgender Abbildung

$$D_C : \text{Sym}^2 H^0(\omega_C \otimes \mathcal{L}) \rightarrow H^0((\omega_C \otimes \mathcal{L})^{\otimes 2}) \quad (3.1)$$

identifizieren können, welche das gewöhnliche Produkt von Schnitten ist.

3.3 Die Dominanz von $\mathcal{R}(3, 2) \longrightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$

Hier möchten wir einen Satz aus [BCV] erwähnen, nämlich über die Dominanz von $p(3, 2)$.

Bardelli, Ciliberto und Verra haben in [BCV] nicht nur die Dominanz dieser Abbildung gezeigt, sondern haben auch gezeigt, dass sie generisch endlich ist. Darüber hinaus haben sie den Grad und den Verzweigungsort dieser Abbildung berechnet. Wir führen folgende abgeschlossene Untermenge von $\mathcal{R}(3, 2)$ ein, um diesen Satz aus [BCV] zu formulieren:

$$\mathcal{R}_{eff}^+ = \left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen von Tripeln } (C, B, \mathcal{L}), \\ \text{so dass } h^0(\mathcal{L}) \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R}_{hyp}^+ = \left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen von Tripeln } (C, B, \mathcal{L}), \\ \text{so dass } C \text{ hyperelliptisch ist} \end{array} \right\}$$

Theorem 3.3.1 *Die Abbildung $p(3, 2)$ ist dominant, generisch endlich und verzweigt in $\mathcal{R}_{eff}^+ \cup \mathcal{R}_{hyp}^+$. Außerdem ist $p(3, 2)$ vom Grad 3.*

Beweis: Siehe [BCV] S. 123 und S. 142 □

Dieses Ergebnis ist von besonderer Bedeutung für uns. Es besagt nämlich, dass die generische abelsche Varietät A^4 der Dimension 4 und mit Polarisierung von Typ $(1, 2, 2, 2)$ eine verallgemeinerte Prym-Varietät bezüglich eine $(2 : 1)$ Überlagerung einer Kurve vom Geschlecht 7 über eine Kurve vom Geschlecht 3 ist. Darüber hinaus gibt es prinzipiell drei *verschiedene* $(2 : 1)$ Überlagerungen von Kurven vom Geschlecht 7 über Kurven vom Geschlecht 3, welche A^4 als Prym-Varietät haben.

Teil II

**Zyklen auf dem generischen
Element
von $\mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$**

Kapitel 4

Die Konstruktion der Degeneration

In diesem Kapitel konstruieren wir eine Familie von verallgemeinerten Prym-Varietäten $X \rightarrow S$ (siehe die Definition (4.3.1)) zusammen mit einem Zykel $Y \rightarrow S$, $Y \subset X$ und mit der Eigenschaft, dass die klassifizierende Abbildung $S \rightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$ dominant ist. Wir konstruieren auch eine Untervarietät $T \subset S$, auf der wir die Einbettung $Y|_T \hookrightarrow X|_T$ explizit angeben können. Für diese Konstruktionen benötigen wir eine Familie von $(2 : 1)$ Überlagerungen von stabilen Kurven.

4.1 Stablen Kurven

Definition 4.1.1 *Eine Kurve D vom Geschlecht g heißt stabil, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- D ist reduziert und zusammenhängend,
- D hat nur gewöhnliche Doppelpunkte als Singularitäten,
- ist K eine glatte, rationale Komponente von D , so schneidet K die anderen Komponenten in mindestens drei Punkten.

Wir folgen dem Verfahren von [Fk] für unsere Konstruktion der Degeneration. Der wichtigste Unterschied zwischen Fakhruddins Verfahren und unserem besteht darin, dass in [Fk] nur étale Überlagerungen betrachtet werden. Hier hingegen betrachten wir Verzweigung in vier Punkten, d.h. mit $b = 2$ (Notation aus dem Kapitel 2).

Zunächst führen wir die dazu benötigte Notation ein.

Es sei $n \geq 3$ fest. Weiter sei $\overline{\mathcal{M}}_3^{(n)}$ der Modulraum der stabilen Kurven vom Geschlecht 3 mit n -Teilungspunktstruktur d.h. eine Wahl einer Basis für die n -Torsionspunkte auf der Jacobischen. Für eine genauere Definition von n -Teilungspunktstruktur siehe [Mo].

4.2. Die Beschreibung einer guten Familie von Kurven

Wir definieren ${}^1 \overline{\mathcal{R}}(3, 2)(n)$ durch das folgende Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{R}}(3, 2)(n) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_3^{(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{R}}(3, 2) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_3 \end{array}$$

Das heißt, $\overline{\mathcal{R}}(3, 2)(n) := \overline{\mathcal{M}}_3^{(n)} \times_{\overline{\mathcal{M}}_3} \overline{\mathcal{R}}(3, 2)$. $\overline{\mathcal{R}}(3, 2)(n)$ ist glatt, da er étal über $\overline{\mathcal{M}}_3^{(n)}$ ist und dieser Raum glatt ist.

Wesentlich ist, dass $\overline{\mathcal{M}}_3^{(n)}$ eine universelle Familie $\Gamma_3^{(n)} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_3^{(n)}$ für $n \geq 3$ besitzt. Bezeichne dann $\Gamma^{(n)}$ das Pullback von $\Gamma_3^{(n)}$ unter die Projektionsabbildung $\overline{\mathcal{R}}(3, 2)(n) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_3^{(n)}$.

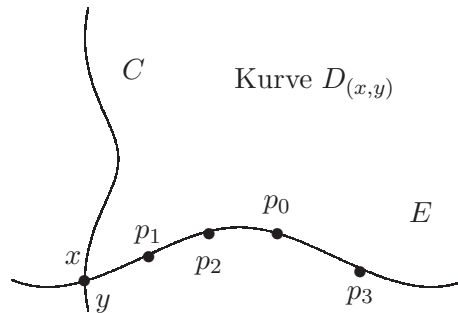
4.2 Die Beschreibung einer guten Familie von Kurven

Es sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Ferner sei E eine elliptische Kurve und p_0, p_1, p_2, p_3 seien festgewählte Punkte auf E .

Voraussetzung: Es gibt keine Hodgeklasse vom Typ $(1, 1)$ in $H^1(C, \mathbb{Q}) \otimes H^1(E, \mathbb{Q})$.

Diese Annahme ist erfüllt, wenn wir C und E *generisch* wählen, weil die Jacobi-sche $J(C)$ dann keinen Faktor enthält, der zu E isogen ist. Von nun an sind C und E generisch.

Für jeden Punkt $(x, y) \in C \times (E - \{p_0, \dots, p_3\})$ sei $D_{(x,y)}$ die Kurve, die man erhält, indem man C und E wie in folgendem Bild verklebt.



Dann ist $D_{(x,y)}$ eine stabile Kurve vom Geschlecht 3. Dies liefert eine Familie von stabilen Kurven $\mathcal{C} \rightarrow C \times (E - \{p_0, \dots, p_3\})$ mit einem ausgezeichneten Divisor $B = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$. Nach der Wahl eines nicht trivialen Geradenbündels \mathcal{L} mit $\mathcal{L}^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}(B)$ und einer n -Teilungspunktstruktur haben wir eine Injektion

$$h : C \times (E - \{p_0, p_1, p_2, p_3\}) \rightarrow S_1 \quad \text{mit} \quad h^*(\Gamma^{(n)}) = \mathcal{C},$$

¹Siehe auch Kapitel 3

wobei S_1 die offene Teilmenge von $\overline{\mathcal{R}}(3, 2)(n)$ bestehend aus *baumartigen* Kurven ist (vgl [Fk] Seite 112). Setze $T_1 = h(C \times (E - \{p_0, \dots, p_3\})) \subset S_1$, das sind Kurven der Form $D_{(x,y)}$.

In einer natürlichen Weise haben wir *vier* Schnitte, welche auf T_1 durch p_0, \dots, p_3 gegeben sind.

4.3 Die Konstruktion der $(2 : 1)$ Überlagerung

In diesem Abschnitt behandeln wir den Schnitt p_0 mit besonderer Aufmerksamkeit. Der Artikel [Kl] von Kleiman ist eine Referenz für den Stoff dieses Abschnittes.

Für jeden S_1 -Morphismus $g : T \rightarrow S_1$ betrachten wir die Funktoren

$$\text{Pic}(\Gamma_1/S_1)(T) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen} \\ \text{von Geradenbündeln } \mathcal{L} \text{ auf} \\ \Gamma_1 \times_{S_1} T, \text{ welche längs} \\ p_0 \text{ \textbf{rigidifiziert}} \text{ sind} \end{array} \right\}$$

und

$$\text{Div}^m(\Gamma_1/S_1)(T) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Relative effektive Divisoren} \\ D \text{ von } \Gamma_1 \times_{S_1} T \text{ von Grad } m \end{array} \right\}.$$

\mathcal{L} auf $\Gamma_1 \times_{S_1} T$ längst p_0 *rigidifiziert* bedeutet (siehe [BL] Seite 597):

$$(p_0 \circ g, 1_T)^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_T.$$

Der erste Funktor ist von einem glatten, algebraischen Raum $\mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1}$ von endlichen Typ auf S_1 dargestellt, welcher ein Gruppenschema ist (siehe [BLR] Seite 204).

Auch weil $\Gamma_1 \rightarrow S_1$ Kurven als Fasern hat (und flach und projektiv ist), ist der Funktor der relativ effektiven Divisoren, mit Fasern vom Grad m , auch von einem Schema darstellbar für jedes $m \geq 1$ (siehe [Kl] S. 24). Bezeichnen wir dieses Schema mit $\mathbf{Div}_{\Gamma_1/S_1}^m$.

Es sei $\mathbf{A}_{\Gamma_1/S_1}^m : \mathbf{Div}_{\Gamma_1/S_1}^m \rightarrow \mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1}$ die relative Abel-Jacobi-Abbildung (siehe [Kl] S. 27).

Durch das Bild unserer vier Schnitten erhalten wir einen Divisor B auf $\Gamma_1 = \Gamma_1 \times_{S_1} S_1$ durch

$$B := \text{Im}\{p_0 + p_1 + p_2 + p_3\} \subset \Gamma_1$$

und damit gibt es einen S_1 -Morphismus $b : S_1 \rightarrow \mathbf{Div}_{\Gamma_1/S_1}^4$ (d.h. einen Schnitt von $\mathbf{Div}_{\Gamma_1/S_1}^4 \rightarrow S_1$). Die Verknüpfung

$$\mathbf{A}_{\Gamma_1/S_1}^4 \circ b \in \text{Hom}_{S_1}(S_1, \mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1})$$

liefert nun ein Geradenbündel \mathcal{L}_0 auf Γ_1 . Es sei ϕ folgende Komposition

$$\mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1} \xrightarrow{2} \mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1} \xrightarrow{\otimes \mathcal{L}_0^{-1}} \mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1}$$

4.3. Die Konstruktion der (2 : 1) Überlagerung

und wir setzen

$$S_2 := (\ker(\phi) - \{Null\}) \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1}.$$

Sei $f_2 : S_2 \rightarrow S_1$ die folgende Komposition:

$$S_2 \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{\Gamma_1/S_1} \rightarrow S_1$$

Auf $\Gamma_2 := \Gamma_1 \times_{S_1} S_2$ gibt es dann ein Geradenbündel \mathcal{M} , welches $\mathcal{M}^{\otimes 2} \simeq \mathcal{L}_0$ erfüllt. Hier bezeichnet auch \mathcal{L}_0 das Pullback von \mathcal{L}_0 auf Γ_2 durch f_2 .

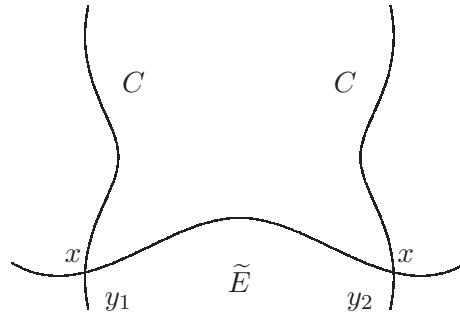
Dann gibt es eine Familie von (2 : 1) Überlagerungen

$$U : \tilde{\Gamma}_2 \rightarrow \Gamma_2$$

(mit B als Verzweigungsdivisor). Es sei T'_2 die Teilmenge von $T_2 = f_2^{-1}(T_1)$, so dass

$$\tilde{\Gamma}_2|_{T'_2} \rightarrow T'_2$$

aus Kurven der folgenden Form besteht



dabei ist:

- \tilde{E} eine verzweigte (2 : 1) Überlagerung von E in den 4 Punkten p_0, p_1, p_2, p_3 (und damit ist \tilde{E} eine Kurve vom Geschlecht 3),
- $y_1 \neq y_2$ sind Elemente aus $U^{-1}(y)$ (und damit liegen die 4 Verzweigungspunkte in $E - \{y\}$),

Es sei T_3 die Zusammenhangskomponente von T_2 , welche T'_2 enthält. Dann ist nach Konstruktion $f_2|_{T_3} : T_3 \rightarrow T_1$ ein Isomorphismus.

Sei S_3 die zusammenhängende Zariski-offene Teilmenge von S_2 , die T_3 enthält und zwar so, dass die Familie

$$\tilde{\Gamma}_3 := \tilde{\Gamma}_2|_{S_3} \rightarrow S_3$$

aus baumartigen Kurven besteht. Wir bezeichnen mit den gleichen Buchstaben p_0, \dots, p_3 die eindeutigen Punkte auf \tilde{E} , die durch unsere ausgezeichneten Punkte in E entstehen. Es sei $\tilde{T}_3 := C \times (\tilde{E} - \{p_0, \dots, p_3\})$.

Wir möchten jetzt unsere Parameter von T_3 nach \tilde{T}_3 hochziehen.

Zu diesem Zweck betrachten wir einen Basiswechsel von $\tilde{\Gamma}_3 \rightarrow S_3$ durch die Abbildung $\tilde{T}_3 \xrightarrow{2:1} T_3 \hookrightarrow S_3$. Auf diese Weise entsteht das kommutative Diagramm, das auf der rechten Seite abgebildet ist.

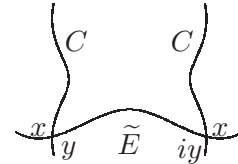
$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma}_4 & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T}_4 & \longrightarrow & S_3 \end{array}$$

Zunächst wollen wir einen Basispunkt auswählen, um unsere Kurven in ihre Jacobische einzubetten. Dazu betrachten wir den folgenden effektiven Divisor $D := \{y + iy \in (\tilde{\Gamma}_4)_{(x,y)} : y \in \tilde{E}\}$. Dieser trifft eine allgemeine Faser in genau zwei Punkten. Daher existiert eine generisch endliche surjektive Abbildung $\tilde{T}_5 \rightarrow \tilde{T}_4$ zusammen mit zwei effektiven Divisoren D_1, D_2 auf $\tilde{\Gamma}_5 := \tilde{\Gamma}_4 \times_{\tilde{T}_4} \tilde{T}_5$, welche eine generische Faser in jeweils einen Punkt treffen und so, dass $g^*(D) = D_1 + D_2$, wobei $g : \tilde{\Gamma}_5 \rightarrow \tilde{\Gamma}_4$ die natürliche Projektion ist. Die geometrische Bedeutung davon ist es, dass wir dadurch eine der Kopien von C (nennen wir sie *die linke Kopie*) auszeichnen können, indem wir zum Beispiel D_1 fixieren.

Auf jeder Faser definiert dann D_1 einen einzigen Punkt und damit erhalten wir einen Schnitt von $\tilde{\Gamma}_5 \rightarrow \tilde{T}_5$.

Es sei $f : S \rightarrow S_5$ ein étaler Morphismus mit der Eigenschaft, dass $\tilde{\Gamma} := \tilde{\Gamma}_5 \times_{S_5} S \rightarrow S$ einen Schnitt hat, der diesen Schnitt fortsetzt. Es sei $\sigma : S \rightarrow \tilde{\Gamma}$ dieser Schnitt.

Es sei T die dazugehörige Komponente von $f^{-1}(\tilde{T}_5)$, sodass die Familie $\tilde{\Gamma}|_T \rightarrow T$ aus Kurven wie auf der rechten Figur besteht.



Sowohl die Familien $\tilde{\Gamma} \rightarrow S, \tilde{\Gamma}|_T \rightarrow T$ als auch den Schnitt σ werden wir gebrauchen, um einen nicht-trivialen Zykel auf der generischen abelschen Varietät der Dimension vier mit Polarisierung von Typ $(1, 2, 2, 2)$ zu konstruieren (vgl. Theorem (6.3.1)).

4.3.1 Verallgemeinerte Prym-Varietät und Zykel

Genau wie im vorigen Abschnitt existiert $\mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}$, weil $\tilde{\Gamma} \rightarrow S$ einen Schnitt besitzt. Wir folgen nun wortwörtlich dem Verfahren von Fakhruddin (vgl. [Fk] S. 113) für unsere Konstruktion der Familie von Prym-Varietäten und Zykel. Dazu führen wir folgende Notation ein:

- $\mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0$ bezeichnet den offenen Unterraum von $\mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}$, welcher den Funktor von Geradenbündeln darstellt, welche Grad Null auf jede Komponente jeder Faser haben.
- $\mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}$ ist der offene Unterraum von $\mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}$, welcher Geradenbündeln vom totalen Grad j auf jeder Faser darstellt.
- $H \subset \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(0)}$ ist der Abschluss der zusammenhängenden Komponente,

4.3. Die Konstruktion der (2 : 1) Überlagerung

welche die Identität enthält.

- $P_c := \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(0)}/H$.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass $\mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0 \subset \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(0)}$. Der Morphismus

$$\phi : \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0 \longrightarrow \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(0)} \longrightarrow P_c$$

ist ein Isomorphismus, weil er so auf den Fasern ist. Es sei nun Γ_0 die offene (und dichte) Teilmenge von $\tilde{\Gamma}$, worauf $\tilde{\Gamma} \rightarrow S$ ein glatter Morphismus ist. Wir haben dann einen Morphismus $\gamma_1 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(1)}$ und daher definieren wir $\gamma_0 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(0)}$ durch $\gamma_0(p) := \gamma_1(p) - \gamma_1(\sigma(\pi(p)))$.

Es sei $\gamma : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0$ die folgende Verknüpfung

$$\Gamma_0 \xrightarrow{\gamma_0} \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^{(0)} \twoheadrightarrow P_c \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0.$$

Aus der Normalität von Γ können wir γ zu einem Morphismus $\gamma : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0$ fortsetzen. Die Involution auf $\tilde{\Gamma}$ liefert eine weitere Involution i auf $\mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0$.

Definition 4.3.1 *Das abelsche Schema*

$$X = \text{Prym}(\tilde{\Gamma}/\Gamma) := \text{Im} \left(1 - i : \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0 \longrightarrow \mathbf{Pic}_{\tilde{\Gamma}/S}^0 \right)$$

heißt **relative verallgemeinerte Prym-Varietät**.

Wir wissen bereits, dass $\pi : X \rightarrow S$ ein polarisiertes abelsches Schema der relativen Dimension 4 ist, mit Polarisierung von Typ (1, 2, 2, 2) (siehe Abschnitt (2.4)).

Wir haben auch in einer natürlichen Weise einen Zykel auf X , nämlich

$$Y := ((1 - i) \circ \gamma)(\tilde{\Gamma}) \hookrightarrow X$$

Dies ist eine Untervarietät der relativen Kodimension 3 von X .

Faserweise (auf T) ist das alles sehr einfach, da die Bedeutung genauso wie in Kapitel 2 ist, nämlich

$$X_{(x,y)} = \text{Prym}(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}/\Gamma_{(x,y)}) \quad \text{d.h.} \quad X_{(x,y)} = (1 - i)(\text{Pic}^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}))$$

und

$$Y_{(x,y)} = (1 - i) \circ \gamma(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}) \hookrightarrow X_{(x,y)}.$$

Wir identifizieren $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ mit der Untervarietät $Y_{(x,y)}$ von $X_{(x,y)}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Gamma}_{(x,y)} & \longrightarrow & \Gamma_{(x,y)} \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \\
 \text{Pic}^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}) & \longrightarrow & \text{Pic}^0(\Gamma_{(x,y)}) \\
 \downarrow 1-i & & \\
 X_{(x,y)} & &
 \end{array}$$

4.4 Beschreibung der Einbettung $Y|_T \hookrightarrow X|_T$

Dieser Abschnitt ist besonders wichtig, weil hier die genaue Beschreibung unseres Zyklus angegeben wird.

Zunächst bemerken wir, dass für $(x,y) \in T \simeq C \times (\tilde{E} - \{p_0, \dots, p_3\})$ gilt $X_{(x,y)} \simeq J \times P$, wobei $P := \text{Prym}(\tilde{E}/E)$ die zugehörige verallgemeinerte Prym-Varietät ist und $J = J(C)$ die Jacobische. Dies kann man leicht sehen, wenn man die Wirkung von $(1-i)$ auf jedem Bestandteil von

$$\text{Pic}^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}) \simeq J \times \tilde{J} \times J$$

betrachtet, wobei \tilde{J} die Jacobische von \tilde{E} bezeichnet. Um $Y|_T \hookrightarrow X|_T$ beschreiben zu können, müssen wir zwei Schritte erledigen, und zwar die Einbettung $\gamma_{(x,y)} : \tilde{\Gamma}_{(x,y)} \hookrightarrow \text{Pic}^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)})$ beschreiben (dies ist das Ziel des Abschnitts (4.4.1)) und dann die Abbildung $1-i$ auf das Bild anwenden (das wird in (4.4.2) erledigt).

4.4.1 $\gamma_{(x,y)} : \tilde{\Gamma}_{(x,y)} \hookrightarrow \text{Pic}^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}) \simeq J \times \tilde{J} \times J$

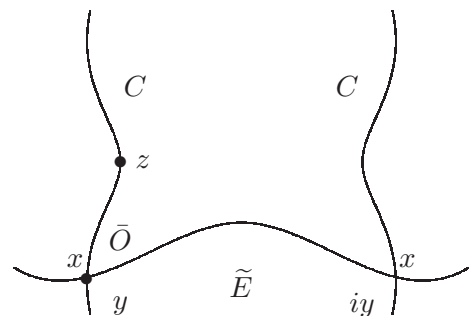
Bezeichne mit \bar{O} den eindeutigen Punkt, den $\sigma|_T$ definiert. Wir analysieren jetzt das Bild eines Punktes $z \in C$. Wir können sehen, dass

$$\gamma_{(x,y)}(z) = [z - \bar{O}] \times 0 \times 0 = [z - x] \times 0 \times 0$$

und insbesondere

$$\gamma_{(x,y)}(y_1) = \gamma_{(x,y)}(x) = [x - x] \times [y - y] \times 0.$$

Da die Beschreibungen in den Punkten x und $y = \bar{O}$ verträglich sind, haben wir für die Einbettung $\tilde{T} \hookrightarrow \text{Pic}^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)})$ die folgende Beschreibung $z \mapsto 0 \times$



4.4. Beschreibung der Einbettung $Y|_T \hookrightarrow X|_T$

$[z - y] \times 0$. Auf diese Weise bekommen wir folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} C &\hookrightarrow J \times \tilde{J} \times J : & z &\mapsto [z - x] \times 0 \times 0 \\ \tilde{E} &\hookrightarrow J \times \tilde{J} \times J : & z &\mapsto 0 \times [z - y] \times 0 \\ C &\hookrightarrow J \times \tilde{J} \times J : & z &\mapsto 0 \times [iy - y] \times [z - x] \end{aligned}$$

4.4.2 $(1 - i) \circ \gamma_{(x,y)} : \tilde{\Gamma}_{(x,y)} \hookrightarrow \text{Pic}^0(\tilde{\Gamma}_{(x,y)}) \longrightarrow J \times P$

Hier müssen wir $(1 - i)$ anwenden. Auf den Komponenten von $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ sieht dann diese Komposition wie folgt aus:

- 1) $C \hookrightarrow J \times P$ bettet sich als $z \mapsto [z - x] \times 0$ ein,
- 2) $\tilde{E} \hookrightarrow J \times P$ bettet sich als $z \mapsto 0 \times [y - z]$ ein,
- 3) $C \hookrightarrow J \times P$ bettet sich als $z \mapsto [x - z] \times [2iy - 2y]$ ein.

Dies beschreibt $Y_{(x,y)} \hookrightarrow X_{(x,y)}$ für $(x, y) \in T$. Wir sehen dann, dass diese Abbildungen **auch** für die Punkte $p_0, \dots, p_3 \in \tilde{E}$ wohldefiniert sind. Deshalb können wir unsere Familie *algebraisch* zu diesen Punkten *fortsetzen*, d.h. wir können den Totalraum $X|_T$ als $(C \times \tilde{E}) \times (J \times P)$ betrachten.

4.4.3 Die Einbettung $Y|_T \hookrightarrow X|_T$

Mit der vorigen faserweisen Beschreibung können wir die Einbettung $Y|_T \hookrightarrow X|_T$ jetzt global (und Komponentenweise) angeben:

- 1) $(C \times \tilde{E}) \times C \hookrightarrow (C \times \tilde{E}) \times (J \times P)$ durch
$$(x_1, y, x_2) \mapsto (x_1, y, [x_2 - x_1], 0)$$
- 2) $(C \times \tilde{E}) \times \tilde{E} \hookrightarrow (C \times \tilde{E}) \times (J \times P)$ durch
$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0, [y - z])$$
- 3) $(C \times \tilde{E}) \times C \hookrightarrow (C \times \tilde{E}) \times (J \times P)$ durch
$$(x_1, y, x_2) \mapsto (x_1, y, [x_1 - x_2], [2iy - 2y])$$

Diese Beschreibung wird eine sehr große Rolle spielen, wenn wir uns im Kapitel 5 mit der Kohomologie unserer Zykeln Y beschäftigen. Wir sind nämlich an der Komponente (unter der Künneth-Zerlegung) interessiert, die in $H^2(\tilde{E} \times C) \otimes H^4(J \times P)$ liegt, oder genauer gesagt, in

$$\left(H^1(\tilde{E}) \otimes H^1(C) \right) \otimes (H^1(J) \otimes H^3(P)).$$

Kapitel 5

Die Kohomologieklassse von Y

Wir werden hier beweisen, dass die Kohomologieklassse von Y nicht trivial ist, indem wir zeigen, dass $[Y|_T] \neq 0$. Darüber hinaus bleibt die primitive Komponente von $[Y]$ in $H^2(S, R^4 f_* \mathbb{Q})$ nicht trivial unter Einschränkungen auf offene Mengen von S (siehe Satz (5.3.2) für die genaue Aussage).

5.1 Die Kohomologieklassse von $C \times \tilde{E} \times Y_{(x,y)}$ in $C \times \tilde{E} \times X_{(x,y)}$

Die Kodimension von $C \times \tilde{E} \times Y_{(x,y)}$ in $C \times \tilde{E} \times X_{(x,y)}$ ist 3. Wir möchten uns an die Komponente von $[Y|_T]$ in

$$\left(H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E}) \right) \otimes \left(H^1(J) \otimes H^3(P) \right)$$

konzentrieren. Zuerst merken wir an, dass der einzige Beitrag von $[Y|_T]$ in

$$\left(H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E}) \right) \otimes \left(H^1(J) \otimes H^3(P) \right)$$

aus 3) kommt (Abschnitt (4.4.3)). Der in 3) gegebene Zykel Z ist das Produkt der folgenden Zyklen

- Z_1 (der Kodimension 1), durch $C \times C \hookrightarrow C \times J, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, [x_2 - x_1])$ induziert und
- Z_2 (der Kodimension 2), durch $\tilde{E} \hookrightarrow \tilde{E} \times P, y \mapsto (y, [2iy - 2y])$ induziert.

Lemma 5.1.1 *Es gilt*

- $0 \neq [Z_1] \in H^1(C) \otimes H^1(J)$ und
- $0 \neq [Z_2] \in H^1(\tilde{E}) \otimes H^3(P)$

5.2. Der primitive Anteil von a in

$(H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E})) \otimes (H^1(J) \otimes H^3(P))$ ist nicht trivial

Beweis: Wir beweisen die Aussage für Z_2 . Für Z_1 ist der Beweis analog. Es bezeichne $[Z_2]^{1,3}$ die Komponente von $[Z_2]$ in $H^1(\tilde{T}) \otimes H^3(P)$. Mit der Notation und Ergebnisse aus dem Abschnitt (1.5.1) wissen wir, dass

$$AJ_P^{Z_2} : \tilde{E} \longrightarrow J^2(P)$$

$$z \mapsto AJ_P^2((Z_2)_z - (Z_2)_{\bar{O}}) = [z - \bar{O}].$$

holomorph ist. Die letzte Gleichheit kommt aus der Identifizierung

$$J^2(P) \simeq H^{1,2}(P)/H^3(P, \mathbb{Z}) \simeq H^0(P, \Omega_P^1)^*/H_1(P, \mathbb{Z}) =: Alb(P) \simeq P.$$

Da nun AJ^{Z_2} nicht-trivial ist, folgt aus der letzten Bemerkung aus Abschnitt (1.5.1), dass $[Z_2]^{1,3} \neq 0$. \square

Sei a diese nicht triviale Komponente von $[Y|_T]$.

5.2 Der primitive Anteil von a in

$(H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E})) \otimes (H^1(J) \otimes H^3(P))$ ist nicht trivial

Der Einfachheit halber führen wir zunächst folgende Notation ein:

$$H(i, j) := (H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E})) \otimes (H^i(J) \otimes H^j(P))$$

$$H(i) := (H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E})) \otimes H^i(J \times P)$$

Mit dieser Notation und mit Hilfe von des Hard-Lefschetz-Satzes haben wir folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H(2) & \xrightarrow[\simeq]{L^2} & H(6) \\ L \downarrow & & \uparrow L \\ H(4) & \xrightarrow[\simeq]{id} & H(4) \end{array}$$

so wie auch die folgende Lefschetz-Zerlegung

$$H(4) \simeq (L^2\mathbb{P}_0 \oplus L\mathbb{P}_2) \oplus \mathbb{P}_4.$$

Hier ist L wie in Abschnitt (1.4) und \mathbb{P}_j eine Faser des lokalen System $(R^j f_* \mathbb{C})_{prim}|_T$.

Achtung: $H(4)$ ist ein direkter Summand von $H^6(X|_T, \mathbb{Q})$, also

$$0 \neq a \in H(1, 3) \subset H(4) \subset H^6(X|_T, \mathbb{Q}).$$

Satz 5.2.1 *Ist a' der primitive Anteil von a in $H(1, 3)$, dann gilt $a' \neq 0$.*

Beweis: Da $L^2\mathbb{P}_0 \oplus L\mathbb{P}_2 \subset LH(2)$, müssen wir zeigen, dass a nicht im Bild von

$$L : H(2) \longrightarrow H(4)$$

liegt. Dafür müssen wir an der Stelle erinnern, dass die Polarisierung L (siehe Abschnitt (1.4) für eine Definition von Polarisierung) das Produkt der Polarisierungen ist, d.h. $L = L_J + L_P$, wobei

$$L_J \in H^0(C \times \tilde{E}) \otimes (H^2(J) \otimes H^0(P))$$

die (prinzipale) Polarisierung von J ist, und

$$L_P \in H^0(C \times \tilde{E}) \otimes (H^0(J) \otimes H^2(P))$$

die Polarisierung von P (wir haben im Abschnitt (2.4) den Typ der Polarisierung L_P berechnet). Wir haben folgende Isomorphismen aus dem Hard-Lefschetz-Satz

$$L_J : H(1,1) \simeq H(3,1), \quad L_J^2 : H(0,2) \simeq H(4,2)$$

und deswegen sind

$$\begin{aligned} L_J : H(1,1) &\longrightarrow H(3,1) \\ L_J : H(0,2) &\longrightarrow H(2,2) \end{aligned} \tag{5.1}$$

injektive Abbildungen. Analog haben wir, dass die folgenden Abbildungen ebenso injektiv sind:

$$\begin{aligned} L_P : H(1,1) &\longrightarrow H(1,3) \\ L_P : H(2,0) &\longrightarrow H(2,2) \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass $\alpha \in H^2$ die Bedingung $L\alpha = a$ erfüllt. Ist nun $\alpha^{1,1}$ die in $H(1,1)$ liegende Komponente von α , dann ist, nach (5.1) und $\alpha \in H(1,3)$, $\alpha^{1,1} = 0$. Daraus folgt unmittelbar mit Hilfe der anderen Abbildungen, dass

$$a = L\alpha = L_J\alpha + L_P\alpha \in H(4,0) \oplus H(2,2) \oplus H(0,4)$$

aber $0 \neq a \in H(1,3)$ steht damit im Widerspruch. Also kann a nicht in $LH(2)$ liegen. \square

Folgerung 5.2.1 *Ist $T = C \times \tilde{E}$ und $X_0 = J \times P$, dann ist die Hodge-Komponente von a' in*

$$H^0(T, \Omega_T^2) \otimes H^3(X, \Omega_{X_0}^1)_{\text{prim}}$$

nicht trivial.

5.3. Die Kohomologieklassse von a bleibt nicht trivial unter Einschränkungen zu offenen Mengen von $C \times \tilde{E}$

Beweis: Nach einer Betrachtung der Hodge-Typen folgt dies unmittelbar aus dem folgenden Lemma. \square

Lemma 5.2.1 *Es gibt keine Hodgeklasse in $H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E})$.*

Beweis: Nehmen wir an, es gebe Hodgeklassen in $H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E})$. Dann hätten wir einen nicht-trivialen Morphismus $J(C) \rightarrow J(\tilde{E})$ und daher eine Isogenie $J(\tilde{E}) \rightarrow J(C) \times E'$ für eine gewisse elliptische Kurve E' . Es bezeichne auch \tilde{E} das Bild von \tilde{E} unter der Verknüpfung

$$\tilde{E} \hookrightarrow J(\tilde{E}) =: \tilde{J} \twoheadrightarrow J(C) \times E'.$$

Genau wie am Anfang des Kapitels haben wir dann

$$0 \neq [\tilde{E}] \in H^1(J(C)) \otimes H^1(E') \simeq H^1(C) \otimes H^1(E').$$

Wenn wir jetzt zeigen, dass $H^1(E') = H^1(E)$, dann haben wir einen Widerspruch, weil dann $H^1(C) \otimes H^1(E)$ eine Hodgeklasse hätte (siehe Voraussetzung in Schnitt 4.2).

Da E generisch ist, haben wir dass es eine Isogenie $\tilde{J} \rightarrow P \times E$ gibt (siehe den Beweis der Bemerkung (4.7) S. 228 aus [CvGTiB]), wobei P einfach ist. Damit und weil auch \tilde{J} isogen zu $J(C) \times E'$ ist, erhalten wir eine Isogenie $J(C) \times E' \rightarrow P \times E$. Der nicht-triviale Morphismus

$$E' \hookrightarrow J(C) \times E' \twoheadrightarrow P \times E \twoheadrightarrow E$$

zeigt dann, dass E' und E isogen sind. Daher gilt $H^1(E) = H^1(E')$. \square

5.3 Die Kohomologieklassse von a bleibt nicht trivial unter Einschränkungen zu offenen Mengen von $C \times \tilde{E}$

Wir wollen folgenden Satz anwenden:

Satz 5.3.1 *Seien X und S glatte, algebraische Varietäten, $f : X \rightarrow S$ glatt und eigentlich und $a \in H^m(X, \mathbb{Q})$. Angenommen, es existiert eine Untervarietät $T \subset S$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Für jede nicht leere offene Menge U von T , $i^(a) \neq 0$, wobei $i : f^{-1}(U) \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung ist.*

Dann gilt Folgendes für jede nicht leere offene Menge V von S :

$$j^*(a) \neq 0, \text{ wobei } j : f^{-1}(V) \hookrightarrow X \text{ die Inklusionsabbildung ist.}$$

Beweis: Siehe [Fk] Seite 111. \square

Wir zeigen nun, dass für unsere Zykelklasse a die Voraussetzungen des Satzes (5.3.1) gelten.

Dafür sei $U \subset C \times \tilde{E}$ offen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $Z := C \times \tilde{E} - U$ eine Untervarietät der Kodimension 1 ist (also ein Primdivisor). Dies ist möglich, da diese Menge eine Basis der Topologie bilden.

Es bezeichnet T die kompakte kählersche Mannigfaltigkeit $C \times \tilde{E}$. Weiter sei $\tau : \tilde{T} \rightarrow T$ eine Aufblasung nach $Sing(Z)$.

$U = T - Z \subset T - Sing(Z)$ kann als offene Untermenge von \tilde{T} betrachtet werden. Ist $\tilde{Z} = \tilde{T} - U$, dann haben wir folgende Gysin-Sequenz (siehe [Ku] Seite 82):

$$H^0(\tilde{Z}) \xrightarrow{\phi} H^2(\tilde{T}) \xrightarrow{\tilde{i}^*} H^2(U),$$

wobei $\tilde{i} : U \hookrightarrow \tilde{T}$ die Inklusionsabbildung bezeichnet und ϕ die Gysin-Abbildung ist. Wir haben nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\tilde{Z}) & \xrightarrow{\phi} & H^2(\tilde{T}) & \xrightarrow{\tilde{i}^*} & H^2(U) \\ & & \parallel & & \parallel \\ H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E}) & \hookrightarrow & H^2(T) & \xrightarrow{i^*} & H^2(U) \end{array} \quad (5.2)$$

wobei $i : U \hookrightarrow T$ die Inklusionsabbildung bezeichnet. Es ist bekannt, dass ϕ vom Typ $(1, 1)$ ist (siehe [PS] Lemma 1.16, S. 18). Damit und mit Hilfe des Lemmas (5.2.1) haben wir aus dem Diagramm (5.2), dass die Einschränkung von i^* auf

$$H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E}) \rightarrow H^2(U)$$

injektiv ist. Hieraus folgt, dass die Abbildung

$$i^* : H^1(C) \otimes H^1(\tilde{E}) \otimes H^4(J \times P) \rightarrow H^2(U) \otimes H^4(J \times P)$$

ebenso injektiv ist. Insbesondere haben wir, dass

$$0 \neq i^*(a) \in H^6\left((C \times \tilde{E}) \times (J \times P)|_U\right).$$

Also a erfüllt die Voraussetzungen des Satzes (5.3.1).

5.3.1 Der Satz über die Nicht-Trivialität der Kohomologiekategorie

Wir können jetzt die vorigen Ergebnisse zusammenfassen und damit erhalten wir den

Satz 5.3.2 *Der primitive Anteil der Kohomologiekategorie von Y in $H^2(S, R^4 f_* \mathbb{Q})$ (d.h. im Anteil $H^2(S, \mathbb{P}_4)$) bleibt nicht trivial, wenn wir sie auf jede offene Teilmenge von S einschränken.*

5.3. Die Kohomologieklassse von a bleibt nicht trivial unter Einschränkungen zu offenen Mengen von $C \times \tilde{E}$

Beweis: Die obige Betrachtung zeigt, dass $[Y] \in H^2(S, R^4 f_* \mathbb{Q})$ die Voraussetzungen des Satzes (5.3.1) erfüllt. \square

Kapitel 6

Ein nicht triviales Element in $Griff^{3,2}(A^4)$

Wir sind an der Komponente α in $Ch_{(2)}^3(X/S)$ des Zyklen Y interessiert. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass α ein nicht-triviales Element in $Griff^{3,2}(A^4)$ liefert. Dazu werden wir die Theorie von infinitesimalen Invarianten aus [Ike] anwenden sowie unsere Ergebnisse über die Kohomologieklassen von α (bzw. Y) aus den vorigen Kapiteln.

6.1 Über Leray-Sequenzen von Garben und Zyklen

Für unsere Abbildung $f : X \rightarrow S$ bezeichnen wir mit f' die Einschränkung von f auf $X_T := f^{-1}(T) \subset X$ ($T \subset S$ wie im Kapitel 4), also wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\quad} & X_T \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{\quad} & T \end{array}$$

Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & Y \times_S X & & \\ & p_1 \swarrow & \downarrow \phi & \searrow p_2 & \\ Y & & & & X \\ & \searrow \pi & & \swarrow f & \\ & & S & & \end{array}$$

mit $\pi : Y \rightarrow S$ glatt und projektiv und Y eine glatte, projektive Varietät der relative Dimension d .

6.1. Über Leray-Sequenzen von Garben und Zyklen

Ist nun γ ein Schnitt von $R^u \phi_* \Omega_{Y \times_S X}^t$, dann bezeichnen wir mit $\bar{\gamma}$ sein Bild unter $R^u \phi_* \Omega_{Y \times_S X}^t \longrightarrow R^u \phi_* \Omega_{Y \times_S X/S}^t$. Mit dieser Notation haben wir das folgende Lemma:

Lemma 6.1.1 *Ein Schnitt γ von $R^u \phi_* \Omega_{Y \times_S X}^t$ liefert einen Morphismus von Leray-Spektralsequenzen (d.h. $d_1 \circ \bar{\gamma}_* = \bar{\gamma}_* \circ d_1$ auf der linken Seite):*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1^{p,q}(r, Y) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & R^{p+q} \pi_* \Omega_Y^r \\ \bar{\gamma}_* \downarrow & & \downarrow \gamma_* \\ \mathcal{E}_1^{p,q+u-d}(r+t-d, X) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & R^{p+q+u-d} f_* \Omega_X^{r+t-d} \end{array}$$

wobei $\bar{\gamma}_* = 1_{\Omega_S^p} \otimes (p_2)_*(p_1^*(-) \cdot \bar{\gamma})$ auf der linken Seite und $\gamma_* = (p_2)_*(p_1^*(-) \cdot \gamma)$ auf der rechten.

Beweis: Siehe [Ike] Lemma 2.1. □

Beispiel: Ein Zykel $\Gamma \in Ch^r(Y \times_S X/S)$ liefert durch seine Zykelklasse

$$\gamma = cl(\Gamma) \in H^0(S, R^r \phi_* \Omega_{Y \times_S X}^r)$$

einen Morphismus von Spektral-Sequenzen:

$$\bar{\gamma}_* : \mathcal{E}_1^{p,q}(\bullet, Y) \longrightarrow \mathcal{E}_1^{p,q+r-d}(\bullet + r - d, Y).$$

Auf dieser Weise werden wir das Lemma (6.1.1) anwenden (siehe die Beweise von Lemmata (6.3.1) und (6.3.3)).

Unser Schnitt $L \in H^0(S, R^2 f_* \mathbb{C})$ aus Abschnitt 1.4 (also die Polarisierung von X) liefert einen weiteren Schnitt von $R^1 f_* \Omega_{X/S}^1$ und dieser induziert Morphismen (für $r + q \leq 4$)

$$u : \mathcal{E}_1^{p,q}(r, X) = \Omega_S^p \otimes R^{p+q} f_* \Omega_{X/S}^{r-p} \longrightarrow \Omega_S^p \otimes R^{p+q+1} f_* \Omega_{X/S}^{r-p+1} = \mathcal{E}_1^{p,q+1}(r+1, X).$$

Nach dem Hard-Lefschetz-Satz haben wir dann Isomorphismen

$$\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X) \xrightarrow[\simeq]{u^{4-r-q}} \mathcal{E}_1^{p,4-r}(4-q, X).$$

Definition 6.1.1 *Der primitive Anteil $\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X)_{prim}$ von $\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X)$ (hier $q + r \leq 5$) ist durch*

$$\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X)_{prim} := \ker \left\{ u^{5-r-q} : \mathcal{E}_1^{p,q}(r, X) \longrightarrow \mathcal{E}_1^{p,5-r}(5-q, X) \right\}$$

erklärt.

Bemerkung: Da $u = 1_{\Omega_S^p} \otimes L$ gilt, wobei L wie im Abschnitt (5.2) ist, haben wir

$$\mathcal{E}_1^{p,q}(r, X)_{prim} \simeq \Omega_S^p \otimes \left(R^{p+q} f_* \Omega_{X/S}^{r-p} \right)_{prim}. \quad (6.1)$$

6.2 Die infinitesimale Invariante δ_2 von α

Wir wissen bereits aus dem Satz (1.4.1), dass $cl_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ in $H^2(S, R^4 f_* \mathbb{C})$ liegt und dass diese Klasse nicht Null ist (siehe Satz (5.3.2)). Diese Information hilft uns, den folgenden Satz zu beweisen:

Lemma 6.2.1 *Es gilt $\delta_2(\alpha) \neq 0$. Darüber hinaus gilt*

$$0 \neq \delta_2(\alpha)|_T \in H^0(T, \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X_T)_{prim}).$$

Beweis: Es ist klar, dass die erste Aussage aus der zweiten folgt, deshalb beweisen wir nur die zweite.

Die zweite Aussage benötigt jedoch eine Erklärung, da ursprünglich $\delta_2(\alpha)$ ein Element in $H^0(S, \mathcal{E}_2^{2,1}(3, X))$ ist und keine kanonische Liftung nach $H^0(S, \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X))$ hat. Auf T jedoch ist der Gauß-Manin-Zusammenhang ∇ trivial, weil die Familie $X_T \rightarrow T$ trivial ist, und somit $d_1 = \overline{\nabla} = 0$ auf T . Folglich ist

$$\mathcal{E}_2^{2,1}(3, X_T) \simeq \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X_T).$$

Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Ch_{(2)}^3(X/S) & \hookrightarrow & F_S^2 Ch^3(X/S) & \xrightarrow{\delta_2} & H^0(S, Gr_L^2 R^3 f_* \Omega_X^3) \\ \downarrow cl_C & & & & \parallel \\ H^2(S, R^4 f_* \mathbb{C}) & & & & H^0(S, \mathcal{E}_2^{2,1}(3, X)) \\ \downarrow res|_T & & & & \downarrow res|_T \\ H^2(T) \otimes H^4(X_0, \mathbb{C}) & & & & H^0(T, \mathcal{E}_2^{2,1}(3, X_T)) \\ \downarrow proj & & & & \parallel (d_1 = \overline{\nabla} = 0) \\ H^0(\Omega_T^2) \otimes H^3(X_0, \Omega_{X_0}^1) & \xlongequal{\cong} & H^0(T, \Omega_T^2 \otimes R^3 f'_* \Omega_{X_T/T}^1) & \xlongequal{\cong} & H^0(T, \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X_T)) \end{array}$$

Die Zusammensetzung der Funktionen der linken Spalte bezeichnen wir mit $cl_T(3, 1)$ und die Verknüpfung der Abbildungen der oberen Zeile mit denen aus der rechten Spalte bezeichnen wir mit $\delta_2(\cdot)|_T$. Aus dem Abschnitt (5.2) wissen wir bereits, dass

$$\begin{aligned} 0 \neq cl_T(3, 1)(\alpha) &\in H^0(\Omega_T^2) \otimes H^3(X_0, \Omega_{X_0}^1)_{prim} \\ &= H^0\left(T, \Omega_T^2 \otimes (R^3 f'_* \Omega_{X_T/T}^1)_{prim}\right) \\ &= H^0(T, \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X_T)_{prim}) \end{aligned}$$

Hieraus ist dann zu sehen, dass

$$0 \neq \delta_2(\alpha)|_T \in H^0(T, \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X_T)_{prim}). \quad (6.2)$$

□

Diese Eigenschaft wird von besonderer Wichtigkeit im nächsten Abschnitt.

6.3 Über die Griffiths-Gruppe

Hier möchten wir beweisen, dass unser Zykel α ein nicht triviales Element in

$$\text{Grif} f^{3,2}(X_s) = \frac{F^2Ch^3(X_s)}{F^3Ch^3(X_s) + Z_0F^2Ch^3(X_s)}$$

liefert, wobei $s \in S(\mathbb{C})$ generisch ist. Der Bequemlichkeit halber teilen wir dies in ein paar Lemmata auf. Wir wissen schon (Satz (1.3.2)), dass $\alpha \in F_S^2Ch^3(X/S)$ und deswegen haben wir (siehe Satz(1.2.1)), dass $\alpha_s \in F^2Ch^3(X_s)$.

Lemma 6.3.1 $\alpha_s \notin F^3Ch^3(X_s)$.

Beweis: Wir nehmen an, $\alpha_s \in F^3Ch^3(X_s)$. Dann haben wir aus Satz (1.2.1) eine étale Abbildung $f' : S' \rightarrow U \subset S$ mit U offene Menge und $\alpha' := (f')^*(\alpha) \in F_{S'}^3Ch^3(X_{S'}/S')$ (hier ist $X' = S' \times_S X$). Dies bedeutet (siehe Definition von $F_{S'}$ in Abschnitt (1.2.1)), es gibt ein glattes und projektives Schema Y , flach über S' und von relativen Dimension d und

$$\alpha' = \Gamma_*\beta$$

für einen Zykel $\beta \in F^2Ch^{3-q+d}(Y/S')$, wobei $\Gamma \in Ch^q(Y \times_{S'} X'/S')$ die Eigenschaft

$$\Gamma_* \left(H^{2d-2q+4}(Y_s) \right) \subset (F^2H^4(X'_s))$$

besitzt. Wir bemerken, dass nach dem Satz (5.3.2) $U = S$ angenommen werden kann. Um die Notation zu vereinfachen werden wir S' mit S (bzw. X' , α' mit X , α) mit der Hoffnung, dass keine Missverständnisse entstehen kann. Wegen dieser Voraussetzung an Γ wissen wir, dass

$$\Gamma_* : R^{3-q+d}f_*(\Omega_{Y/S}^{1-q+d}) \rightarrow R^3f_*(\Omega_{X/S}^1)$$

trivial ist. Daher ist sowohl die induzierte Abbildung von Spektralsequenzen

$$\mathcal{E}_1^{2,1-q+d}(3-q+d, Y) \xrightarrow{(1_{\Omega_S^2}) \otimes \Gamma_*} \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X)$$

als auch die induzierte Abbildung

$$\mathcal{E}_2^{2,1-q+d}(3-q+d, Y) \xrightarrow{[(1_{\Omega_S^2}) \otimes \Gamma_*]} \mathcal{E}_2^{2,1}(3, X)$$

die Null-Abbildung. Deshalb ist die durch $[(1_{\Omega_S^2}) \otimes \Gamma_*]$ induzierte Abbildung $\gamma_* : H^0(S, Gr_L^2 R^{3-q+d} \pi_* \Omega_Y^{3-q+d}) \rightarrow H^0(Gr_L^2 R^3 f_* \Omega_X^3)$ auch trivial (hier benutzen wir $\mathcal{E}_2^{2,\bullet} = \mathcal{E}_\infty^{2,\bullet} = Gr_L^2$).

Aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 F_S^2 Ch^{3-q+d}(Y/S) & \xrightarrow{\Gamma_*} & F_S^2 Ch^3(X/S) \\
 \delta_2 \downarrow & & \downarrow \delta_2 \\
 H^0(S, Gr_L^2 R^{3-q+d} \pi_* \Omega_Y^{3-q+d}) & \xrightarrow{\gamma_* = 0} & H^0(S, Gr_L^2 R^3 f_* \Omega_X^3)
 \end{array}$$

und aus Lemma (6.2.1) folgt, dass $0 \neq \delta_2(\alpha) = \gamma_* \delta_2(\beta) = 0$, also haben wir einen Widerspruch. \square

Bisher haben wir nur $\delta_2(\alpha) \neq 0$ benutzt, aber wir wissen darüber hinaus, dass $0 \neq \delta(\alpha)|_T \in H^0(T, \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X)_{prim})$.

Nun möchten wir aus dieser Tatsache Nutzen ziehen. Doch zuerst wollen wir Folgendes bemerken:

Lemma 6.3.2 *Die Abbildung*

$$1_{\Omega_S^2} \otimes \bar{\nabla} : \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X)_{prim} \longrightarrow \Omega_S^2 \otimes \left(\Omega_S^1 \otimes R^4 f_* (\Omega_{X/S}^0) \right)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Wir zeigen, dass

$$\bar{\nabla} : \left(R^3 f_* \Omega_{X/S}^1 \right)_{prim} \longrightarrow \Omega_S^1 \otimes R^4 f_* \Omega_{X/S}^0$$

ein Isomorphismus ist. Dies zeigen wir faserweise. Dazu bezeichne $\omega \in H^1(X_s, \Omega_{X_s}^1)$ die Klasse der Polarisierung von X_s und $H^1(X_s, T_{X_s})_\omega = \{ \eta \in H^1(X_s, T_{X_s}) : \eta \wedge \omega = 0 \}$. Wir haben folgende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(X_s, \Omega_{X_s}^3)_{prim} \longrightarrow H^1(X_s, \Omega_{X_s}^3) \xrightarrow{\wedge \omega} H^2(X_s, \Omega_{X_s}^4) \longrightarrow 0$$

Nach Anwenden der Poincaré-Dualität erhalten wir

$$0 \longrightarrow H^2(X_s, \Omega_{X_s}^0) \xrightarrow{\wedge \omega} H^3(X_s, \Omega_{X_s}^1) \longrightarrow H^1(X_s, \Omega_{X_s}^3)_{prim}^* \longrightarrow 0$$

Damit sehen wir, dass in diesem Fall

$$H^1(X_s, \Omega_{X_s}^3)_{prim}^* = H^3(X_s, \Omega_{X_s}^1)_{prim} \tag{6.3}$$

gilt. Aus dem Lemma (2.2) von [Ce] wissen wir, dass das Wedgeprodukt

$$H^1(X_s, T_{X_s})_\omega \otimes H^0(X_s, \Omega_{X_s}^4) \longrightarrow H^1(X_s, \Omega_{X_s}^3)_{prim}$$

6.3. Über die Griffiths-Gruppe

surjektiv ist. Also nach Dualisieren erhalten wir mit Hilfe von (6.3) eine Inklusion

$$H^3(X_s, \Omega_{X_s}^1)_{\text{prim}} \hookrightarrow H^1(X_s, T_{X_s})_{\omega}^* \otimes H^4(X_s, \Omega_{X_s}^0) \simeq \Omega_{X_s}^1 \otimes H^4(X_s, \Omega_{X_s}^0),$$

wobei der rechte Isomorphismus durch die Kodaira-Spencer-Abbildung induziert ist. Nach einem Satz von Griffiths (siehe [Vo] II Seite 136) ist diese Inklusion genau $\overline{\nabla}$. Nun folgt die Aussage unmittelbar aus

$$\dim H^3(X_s, \Omega_{X_s}^1)_{\text{prim}} = 10 = \dim (\Omega_{S,s}^1 \otimes H^4(X_s, \Omega_{X_s}^0)).$$

□

Aus der Zerlegung von Lefschetz für $R^3 f_* \Omega_{X/S}^1$ haben wir, dass $\mathcal{E}_1^{2,1}(\mathfrak{z}, X)$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$\mathcal{E}_1^{2,1}(\mathfrak{z}, X) \simeq \mathcal{E}_1^{2,1}(\mathfrak{z}, X)_{\text{prim}} \oplus \mathcal{V}.$$

Mit dieser Notation haben wir nun:

Lemma 6.3.3 *Ist $\alpha \in Z_0 F^2 Ch^3(X/S)$, dann ist $\delta_2(\alpha) \in H^0(S, \mathcal{F})$, wobei*

$$\mathcal{F} := \frac{\mathcal{V} \cap \ker \left(d_1 : \mathcal{E}_1^{2,1}(\mathfrak{z}, X) \longrightarrow \mathcal{E}_1^{3,1}(\mathfrak{z}, X) \right)}{\mathcal{V} \cap \text{Im} \left(d_1 : \mathcal{E}_1^{1,1}(\mathfrak{z}, X) \longrightarrow \mathcal{E}_1^{3,1}(\mathfrak{z}, X) \right)}.$$

Hier ist d_1 wie im Satz (1.1.1).

Beweis: Nehmen wir an, dass (siehe Definition von Z_0 in Abschnitt (1.2.1))

$$\alpha = \Gamma_* \beta,$$

wobei $\beta \in F^2 Ch^d(Y/S)$, $\pi : Y \longrightarrow S$ eine projektive, glatte Varietät der relativen Dimension d ist, und $\Gamma \in Ch^3(Y \times_S X/S)$.

Aus $d = \dim(Y/S)$ folgt unmittelbar, dass $R^{d+1} \pi_*(\Omega_{Y/S}^{d-3}) = 0$ und deshalb folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1^{2,d-2}(d, Y) = \Omega_S^2 \otimes R^d \pi_*(\Omega_{Y/S}^{d-2}) \xrightarrow{1_{\Omega_S^2} \otimes \Gamma_*} \Omega_S^2 \otimes R^3 f_*(\Omega_{X/S}^1) = \mathcal{E}_1^{2,1}(\mathfrak{z}, X) & & \\ \downarrow 1_{\Omega_S^2} \otimes \overline{\nabla} & & \downarrow 1_{\Omega_S^2} \otimes \overline{\nabla} \\ 0 = \Omega_S^2 \otimes \left(\Omega_S^1 \otimes R^{d+1} \pi_*(\Omega_{Y/S}^{d-3}) \right) \xrightarrow{1_{\Omega_S^2} \otimes \Gamma_*} \Omega_S^2 \otimes \left(\Omega_S^1 \otimes R^4 f_*(\Omega_{X/S}^0) \right) & & \end{array}$$

dass

$$\left(1_{\Omega_S^2} \otimes \overline{\nabla} \right) \left(1_{\Omega_S^2} \otimes \Gamma_* \right) \left(\mathcal{E}_1^{2,d-2}(d, Y) \right) = 0. \quad (6.4)$$

Wir setzen

$$\mathcal{E}_{prim}(\Gamma) := \left\{ \left(1_{\Omega_S^2} \otimes \Gamma_* \right) \left(\mathcal{E}_1^{2,d-2}(d, Y) \right) \right\} \cap \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X)_{prim}$$

Wegen Lemma (6.3.2) und $\mathcal{E}_{prim}(\Gamma) \subset \mathcal{E}_1^{2,1}(3, X)_{prim}$ haben wir aus (6.4), dass

$$\mathcal{E}_{prim}(\Gamma) = 0.$$

Deswegen gilt in der Kohomologie, dass das Bild von

$$\left[\left(1_{\Omega_S^2} \right) \otimes \overline{\nabla} \right] : \mathcal{E}_2^{2,d-2}(d, Y) \longrightarrow \mathcal{E}_2^{2,1}(3, X) \quad (6.5)$$

in \mathcal{F} enthalten ist. Ist nun γ_* die durch (6.5) definierte Abbildung, dann folgt unsere Behauptung aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F^2Ch^d(Y/S) & \xrightarrow{\Gamma_*} & F^2Ch^3(X/S) \\ \delta_2 \downarrow & & \downarrow \delta_2 \\ H^0 \left(S, \mathcal{E}_2^{2,d-2}(d, Y) \right) & \xrightarrow{\gamma_*} & H^0 \left(S, \mathcal{E}_2^{2,1}(3, X) \right) \end{array}$$

□

Aus der Definition von \mathcal{F} aus Lemma (6.3.3) und der Tatsache, dass auf T unser Morphismus d_1 die Null-Abbildung ist, können wir leicht sehen, dass $\mathcal{F}|_T = \mathcal{V}|_T$.

Diese Bemerkung ist für das Folgende sehr wichtig.

Lemma 6.3.4 *Es gilt $\alpha \notin Z_0 F^2Ch^3(X/S)$.*

Beweis: Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann hätten wir aus Lemma (6.3.3), dass

$$\delta_2(\alpha)|_T \in H^0(T, \mathcal{F}|_T) = H^0(T, \mathcal{V}|_T)$$

und dies widerspricht Lemma (6.2.1). □

6.3.1 Die Nicht-Trivialität von $Griff^{3,2}(A^4)$

Leichtere Änderungen an dem Beweis von Lemma (6.3.1) zeigen

Lemma 6.3.5 $\alpha \notin F_S^3Ch^3(X/S)$

Dies und unsere bisherigen Ergebnisse (Lemmata (6.3.1) und (6.3.4)) lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Satz 6.3.1 *Der Zykel*

- $\alpha \in Ch_{(2)}^3(X/S)$ liefert ein nicht-triviales Element in $Griff^{3,2}(X/S)$,
- $\alpha_s \in Ch_{(2)}^3(X_s)$ liefert ein nicht-triviales Element in $Griff^{3,2}(X_s)$ für $s \in S$ generisch.

Wir können dieses Resultat verfeinern.

Theorem 6.3.1 *Das Element $\alpha_s \in Ch_{(2)}^3(X_s)$ liefert ein nicht-triviales Element in*

$$Griff^{3,2}(A^4),$$

wobei A^4 die generische abelsche Varietät der Dimension 4 mit Polarisierung vom Typ $(1, 2, 2, 2)$ ist.

Beweis: Da die Abbildung $S \rightarrow \mathcal{A}_4(1, 2, 2, 2)$ dominant ist (siehe Theorem (3.3.1)), kann man X_s als die abelsche Varietät A^4 realisieren. Nach Lemma (6.3.1) und da $\alpha_s \in F^2Ch^3(X_s)$, bleibt zu zeigen, dass $\alpha_s \notin Z_0F^2Ch^3(X_s)$. Genau wie in Beweis von Lemma 6.3.1, da $s \in S$ generisch ist, können wir nach Satz (1.2.2) annehmen, dass es eine offene Menge $U \subset S$ und eine étale Abbildung $f : S' \rightarrow S$ mit $\alpha' := f^*(\alpha) \in Z_0F^2Ch^3(X'/S')$ gibt, wobei $X' := S' \times_S X$. Jetzt verfahren wir genau wie bei den Beweisen von Lemmata (6.3.3) und (6.3.4). \square

6.4 Weitere Fragen

Wie bereits erwähnt, es ist erwartet, dass die Saito-Filtrierung die Bloch-Beilinson-Vermutung löst. Jedoch ist noch nicht bewiesen worden, dass diese im Allgemeinen die folgende Eigenschaft besitzt:

$$F_S^{r+1}Ch^r(X/S) = 0.$$

Frage 1 *Kann man $N = N(r) \in \mathbb{N}$ finden mit $F^nCh^r(A^4) = 0$ für alle $n \geq N$?*

Oder noch allgemeiner

Frage 2 *Kann man $N := N(r, d) \in \mathbb{N}$ finden mit $F_S^nCh^r(X/S) = 0$ für alle $n \geq N$, wobei d die relative Dimension von X/S ist?*

Dies ist eine tief liegende Frage. Wir haben auch bereits erwähnt (siehe Satz 1.2.3), dass für die Z -Filtrierung

$$Z_0F^1Ch^r(X/S) = Ch^r(X/S)_{alg}$$

gilt. Daher können wir uns fragen:

Frage 3 Können wir allgemein zeigen, dass

$$Z_0 F_S^r Ch^p(X/S) = F_S^r Ch^p(X/S) \cap Ch^p(X/S)_{alg}?$$

Im Spezialfall $S = Spec(\mathbb{C})$, $X = A^n$?

Frage 4 Können wir im Fall $S = Spec(\mathbb{C})$, $X = A^n$ zeigen, dass es eine Inklusion

$$Ch_{(s)}^r(A^n) \subset F^s Ch^r(A^n) / F^{s+1} Ch^r(A^n)$$

gibt?

Die letzten zwei Fragen versuchen klassische und höhere Griffiths-Gruppen zu vergleichen. Setzen wir nun

$$Griff_{(s)}^r := \frac{Ch^r(X/S)_{hom} \cap Ch_{(s)}^r(X/S)}{Ch^r(X/S)_{alg} \cap Ch_{(s)}^r(X/S)}.$$

Frage 5 Zu welcher Beziehung stehen die beide Gruppen $Griff_{(s)}^r(X/S)$ und $Griff^{r,s}(X/S)$?

Natürlich können wir versuchen, in jeder Frage Sonderfälle zu betrachten, z.B. $S = Spec(\mathbb{C})$, $X = A^n$. Fahrkrudin [Fk] hat nicht triviale Elemente in $Griff_{(2)}^3(A)$ und in $Griff_{(2)}^4(A)$ konstruiert, wobei A die generische prinzipal polarisierte abelsche Varietät der Dimension 5 ist.

Frage 6 Liefern die Zyklen aus [Fk] für $i = 3, 4$ nicht triviale Elemente in $Griff^{i,2}(A)$?

Frage 7 Liefert unserer Zykel aus Satz (6.3.1) ein nicht triviales Element in $Griff_{(2)}^3(A^4)$?

Wie vorher gesagt, alle diese Fragen versuchen die klassischen und die höheren Griffiths-Gruppen zu vergleichen und bilden daher, nach meiner Meinung, ein sehr gutes Forschungsprojekt.

6.4. Weitere Fragen

Literaturverzeichnis

- [Ba] Bardelli, Fabio. *Curves of genus 3 on a general abelian threefold and the non-finite generation of the Griffiths group*. Arithmetic of complex manifolds, Proc. Erlangen, **vol. 1399** Springer-Verlag: 10-26 (1988).
- [Be] Beauville, Arnaud. *Prym Varieties and the Schottky problem*. Invent. Math. **41**:146-196 (1977).
- [Be2] Beauville, Arnaud. *Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne*. Math. Ann. **273**:647-651 (1986).
- [BCV] Bardelli, Fabio; Ciliberto, Ciro; Verra, Alessandro. *Curves of minimal genus on a general abelian variety*. Compositio Math. **96**: 115-147 (1995).
- [BHPV] Barth, Wolf; Hulek, Klaus; Peters, Chris; Ven, Antonius Van de. *Compact complex surfaces. Second enlarged edition*. Springer-Verlag (2003).
- [BL] Birkenhake, Christina; Lange, Herbert. *Complex abelian varieties. Second Edition*. Springer-Verlag (2004).
- [BLR] Bosch, Siegfried; Lütkebohmert, Werner; Raynaud, Michel. *Néron Models*. Springer Verlag (1990).
- [Ce] Ceresa, Giuseppe. *C is not algebraically equivalent to C^- in its Jacobian*. Annals of Math. **117**: 285-291, (1983). Online bei J-STOR unter <http://www.jstor.org/stable/2007078>
- [CvGTiB] Ciliberto, Ciro; van der Geer, Gerard; Teixidor i Bigas, Montserrat. *On the number of parameters of curves whose jacobians possess nontrivial endomorphisms*. Journal of Alg. Geometry, **Vol. 1**: 215-229 (1992).
- [Co-Pi] Colombo, Elisabetta; Pirola, Gian Prieto. *New Cycles in the Griffiths group of the generic abelian threefold*. Amer. Journal of Mathematics, **Vol. 116, No. 3**: 637-667 (1994). Online bei J-STOR unter <http://www.jstor.org/stable/2374995>

- [DeMu] Deninger, Christopher; Murre, Jacob P. *Motivic decomposition of abelian schemes and the Fourier transform*. J. für reine und angewandte Math. **422**: 201-219 (1991).
- [Fk] Fakhruddin, Najmuddin. *Algebraic cycles on generic abelian varieties*. Compositio Mathematica **100**: 101-119, (1996). Online bei Numdam unter http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__100_1_101_0
- [Grn] Green, Mark L. *Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel-Jacobi map*. J. Differential Geo. **29**: 545-555 (1989).
- [Grf] Griffiths, Phillip A. *Infinitesimal variation of Hodge structures III: Determinantal varieties and the infinitesimal invariant of normal functions*. Comp. Math. **50**: 267-324 (1983).
- [H] Hartshorne, Robin. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag (1977)
- [Ike] Ikeda, Atsushi. *Algebraic cycles and infinitesimal invariants on jacobian varieties*. J. Algebraic Geometry **12**: 573-603 (2003).
- [Itk] Iitaka, Shigeru. *Algebraic Geometry, An introduction to birational geometry of Algebraic Varieties*. Springer-Verlag (1981)
- [Kl] Kleiman, Steven L. *The Picard scheme*.
Online in <http://arxiv.org/abs/math/0504020>
- [Ku] Kulikov, Valentine S. *Mixed Hodge structures and singularities*. Cambridge Tracts in Mathematics. (1998)
- [Mas] Masiewicki, Leon. *Universal Properties of Prym Varieties with an Application to Algebraic Curves of Genus Five*. Transactions of the American Mathematical Society **222**: 221-240 (1976). Online bei J-STOR unter <http://www.jstor.org/stable/1997667>
- [Mo] Mostafa, Samy M. *Die Singularitäten der Modulmannigfaltigkeit $\overline{M}_g(n)$ der stabilen Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ mit n -Teilungspunktstruktur*. J. für reine und angewandte Math. **343**: 81-98 (1983). Online bei DigiZeitschriften.
- [Mu] Murre, Jacob P. *On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety*. Indaga. Math. (N.S.) **4**: 177-201 (1993).
- [No] Nori, Madhav. *Cycles on the generic abelian threefold*. Proc. Indian Acad. Society **99**: 191-196 (1989).
- [PS] Peters, Chris; Steenbrink, Joseph. *Mixed Hodge Structures*. Springer-Verlag (2008).

- [Sa0] Saito, Shuji. *Motives and filtrations on Chow groups*. Inv. Math. **125**: 146-196 (1996).
- [Sa] Saito, Shuji. *Higher normal functions and Griffiths groups*. J. Algebraic Geo. **11**: 161-201 (2002).
- [To] Torelli, Ruggiero. *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica*. Rend. Circ. Mat. Palermo, **37** (1914).
- [vG-O] van der Geer, Gerard; Oort, Frans. *Moduli of Abelian Varieties: A Short Introduction and Survey*. In *Moduli of Curves and Abelian Varieties*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH (1999).
- [Vo0] Voisin, Claire. *Une remarque sur l'invariant infinitésimal des fonctions normales*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **307**: 157-160 (1988).
- [Vo] Voisin, Claire. *Hodge theory and complex algebraic geometry I, II* Cambridge studies in advanced mathematics **76, 77** (2002, 2003).