

Der g -Faktor des Protons

Dissertation zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
am Fachbereich 08: Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

von
Andreas Mooser
geboren in Penzberg, Freistaat Bayern

Mainz, den 16. Dezember 2013

Datum der mündlichen Prüfung: 13. Mai 2014

Zusammenfassung: In dieser Arbeit wird die bisher präziseste und erste direkte Hochpräzisionsmessung des g -Faktors eines einzelnen Protons präsentiert. Die Messung beruht auf der nicht-destruktiven Bestimmung der Zyklotronfrequenz und der Larmorfrequenz eines in einer Penning-Falle gespeicherten Protons. Zur Bestimmung der Larmorfrequenz wird die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion einer externen Spin-Flip-Anregung aufgenommen. Zu diesem Zweck wird der kontinuierliche Stern-Gerlach Effekt verwendet, welcher zu einer Kopplung des Spin-Moments an die axiale Bewegung des Protons führt. Ein Spin-Flip zeigt sich dabei in einem Sprung der axialen Bewegungsfrequenz. Die Schwierigkeit besteht darin, diesen Frequenzsprung auf einem Hintergrund axialer Frequenzfluktuationen zu detektieren. Um diese Herausforderung zu bewältigen, wurden neuartige Methoden und Techniken angewandt. Zum einen wurden supraleitende Nachweise mit höchster Empfindlichkeit entwickelt, welche schnelle und damit präzise Frequenzmessungen erlauben. Zum anderen wurde eine auf dem statistischen Bayes Theorem basierende Spin-Flip-Analyse-Methode angewandt. Mit diesen Verbesserungen war es möglich, einzelne Spin-Flips eines einzelnen Protons zu beobachten. Dies wiederum ermöglichte die Anwendung der sogenannten Doppelfallen-Methode, und damit die eingangs erwähnte Messung des g -Faktors mit einer Präzision von $4.3 \cdot 10^{-9}$.

Summary: The most precise and first direct high-precision measurement of the g -factor of a single proton is presented in this thesis. The measurement is based on the non-destructive determination of the cyclotron frequency and the Larmor frequency of a single proton stored in a Penning trap. In order to determine the Larmor frequency, the spin-flip probability is recorded as a function of an external spin-flip excitation. For this purpose, the continuous Stern-Gerlach effect is exploited, which leads to a coupling of the spin moment to the axial motion. Hence, a spin-flip is observed as a jump of the axial eigenfrequency. The challenge is to detect this frequency jump on a background of axial frequency fluctuations. In order to meet this challenge, novel techniques and methods were applied. On one hand, highly-sensitive superconducting detection systems were developed, which allowed for fast and therefore precise frequency measurements. On the other hand, a spin-flip analysis method based on the statistical Bayes theorem was developed. These improvements enabled the detection of single spin-flips of a single proton. As a result, the observation of single spin-flips allowed for the application of the so-called double-Penning trap method, and therefore the above-mentioned measurement of the g -factor with a precision of $4.3 \cdot 10^{-9}$.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie der Penning-Falle	7
2.1	Ideale Penning-Falle	7
2.2	Anharmonische elektrische Speicherpotentiale	12
2.3	Die zylindersymmetrische Penning-Falle	13
2.4	Inhomogene magnetische Felder	15
2.5	Kontinuierlicher Stern-Gerlach Effekt	17
2.6	Die Doppel-Fallen Methode	20
2.7	Die Linienform der Larmorresonanz im inhomogenen Magnetfeld . .	23
3	Nachweis der Teilchenbewegung	29
3.1	Das Detektionssignal	30
3.1.1	Wechselwirkung des Ions mit seiner Spiegelladung	30
3.1.2	Die Signalform	31
3.1.3	Das Rauschspektrum	32
3.1.4	Präzision der Frequenzbestimmung	33
3.2	Seitenbandkopplung - Messung der radialen Bewegungsfrequenzen .	35
3.3	Experimentelle Realisierung des supraleitenden Axialnachweises . .	37
3.3.1	Aufbau der supraleitenden, axialen Resonatoren	37
3.3.2	Güte des unbelasteten Resonators	39
3.3.3	Der Verstärker	41
3.3.4	Rauschanpassung	42
3.4	Manipulation der Teilchentemperatur über aktives Feedback	46
4	Experimenteller Aufbau	49
4.1	Überblick über die experimentelle Apparatur	49
4.2	In der Fallenkammer	52

4.3	Verkabelung	55
4.4	Kontrollprogramm und Messgeräte	56
5	Experimentelle Ergebnisse - Die Präzisionsfalle	59
5.1	Erzeugung und Präparation eines einzelnen Protons	60
5.1.1	Massenspektrum und Entfernen von Fremdionen	60
5.1.2	Reduktion der Anzahl der Protonen	63
5.2	Optimierung der Präzisionsfalle	65
5.2.1	Ausrichten der Fallenturms	65
5.2.2	Optimierung des Tuning-ratios	66
5.3	Messung der Eigenfrequenzen	71
5.3.1	Stabilität der axialen Frequenz	71
5.3.2	Messung der Magnetronfrequenz	73
5.3.3	Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz	74
5.4	Messung der magnetischen Feldinhomogenität in der Präzisionsfalle	80
6	Experimentelle Ergebnisse - Die Analysefalle	81
6.1	Messung der magnetischen Flasche	81
6.2	Messung der Temperatur der Eigenmoden	83
6.3	Stabilität der axialen Frequenz	86
7	Spin-Flips eines einzelnen Protons	91
7.1	Statistische Methode	92
7.2	Grenzwertmethode	93
7.2.1	Berechnung der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit	94
7.2.2	Idealer Grenzwert und Auflöselimit zur Messung der Larmor- frequenz in der Analysefalle	95
7.3	Bayes Methode	97
7.4	Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit und Bestimmung von B_2 über die statistische Methode	101
7.5	Messung der Larmorfrequenz über die Grenzwertmethode	103
7.6	Vergleich der Grenzwertmethode und der Bayes Methode	105
7.7	Beobachtung einzelner Spin-Flips eines einzelnen Protons über die Bayes Methode	107
8	Demonstration der Doppel-Fallen Methode	109
8.1	Güte der Spin-Zustands-Detektion der Doppel-Fallen Methode	109
8.2	Messablauf und Ergebnis	113

9	Der g-Faktor des Protons	117
9.1	Messablauf	117
9.2	Die g -Faktor Resonanz	118
9.3	Systematische Fehler	120
9.3.1	Elektrisches Speicherpotential	121
9.3.2	Magnetisches Feld	123
9.3.3	Nichtlineare Drift des Magnetfeldes	126
9.3.4	Sonstige systematische Verschiebungen	128
9.4	Ergebnis	129
10	Fazit und Ausblick	131
10.1	Präzisere Messung des g -Faktors des Protons	132
10.1.1	Messung der Zyklotronfrequenz	132
10.1.2	Spin-Flip-Detektion	134
	Literaturverzeichnis	137

Abbildungsverzeichnis

1.1	Relative Präzision verschiedener Messungen des Proton g -Faktors	3
2.1	Schematische Darstellung einer hyperbolischen Penning-Falle	8
2.2	Darstellung der Bewegung eines Protons in einer Penning-Falle	10
2.3	Schematische Darstellung einer zylindrischen 5-poligen Penning-Falle	14
2.4	Inhomogenes Magnetfeld der Analysefalle basierend auf Finite Elemente Rechnungen	19
2.5	Schematische Darstellung der Doppel-Falle	22
2.6	Linienprofil der Larmorresonanz in der Analysefalle	25
2.7	Larmorresonanz in der Analysefalle	26
3.1	Schematische Darstellung des Detektionsprinzips	32
3.2	Spektrum des axialen Nachweises der Präzisionsfalle mit einem gespeicherten Proton	33
3.3	Präzision der Frequenzbestimmung basierend auf simulierten Rauschspektren	34
3.4	Axiale Spektren eines Einzeldips und eines Doppeldips	35
3.5	Schematische Darstellung der axialen Nachweise	38
3.6	Resonanz der freien Nachweisspule	40
3.7	Schematische Darstellung des kryogenen Verstärkers	41
3.8	Detaillierte schematische Darstellung des Nachweissystems	43
3.9	Theoretisch erreichbare Signal-zu-Rausch Verhältnisse	44
3.10	Rauschspektrum des axialen Nachweises	45
3.11	Schematische Darstellung der Feedbackschleife	47
4.1	Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus	50
4.2	Testmessung zur Standzeit des Badkryostaten	52
4.3	Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus innerhalb der Fallenkammer	53

4.4	Allan Deviation der Spannungsquelle	56
5.1	Massenspektren in der Präzisionsfalle	61
5.2	Anregungssignal zur Energieerhöhung der Fremdionen	62
5.3	Spektrum der reduzierten Zyklotronmode	63
5.4	Reduktion der Anzahl der Protonen in der Präzisionsfalle	64
5.5	Justage des Fallenturms	65
5.6	Optimierung des Tuning-ratios über die axiale Signalform	66
5.7	Optimierung des Tuning-ratios über die Erhöhung der axialen Energie	67
5.8	Ideales Tuning-ratio als Funktion der axialen Energieerhöhung . . .	68
5.9	Bestimmung der Beiträge C_4 und C_6 zu den axialen Frequenzverschiebungen	69
5.10	Stabilität der axialen Frequenz in der Präzisionsfalle	72
5.11	Magnetron Doppeldip	73
5.12	Zyklotron Doppeldip	74
5.13	Langzeitstabilität der freien Zyklotronfrequenz	75
5.14	Ursprung der Zyklotronfrequenz Fluktuationen	77
5.15	Bestimmung des Koeffizienten B_2T_z in der Präzisionsfalle	78
5.16	Fluktuationen der freien Zyklotronfrequenz	79
5.17	Magnetfeld der Präzisionsfalle	80
6.1	Ausmessen der magnetischen Flasche	82
6.2	Messung der Temperatur der Magnetronmode ohne Feedback	84
6.3	Messung der Temperatur der Magnetronmode mit negativem Feedback	85
6.4	Messung der Temperatur der Zyklotronmode	86
6.5	Frequenzfluktuationen der axialen Mode	87
6.6	Ursprung des Random Walks	89
6.7	Vergleich der axialen Frequenzfluktuationen	90
7.1	Theoretische Verteilung der axialen Frequenzfluktuationen	92
7.2	Gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit zur Grenzwertmethode	95
7.3	Theoretische Resultate zur Grenzwertmethode	96
7.4	Gemessene Verteilung der axialen Frequenzfluktuationen	102
7.5	Messung der Larmorresonanz in der Analysefalle über die Grenzwertmethode	103
7.6	Gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion des Grenzwertes	104

7.7	Simulationsergebnisse zur Bestimmung des idealen Grenzwertes der Grenzwertmethode	106
7.8	Vergleich der Grenzwertmethode und Bayes Methode zur Detektion des Spin-Zustandes	107
7.9	Beobachtung einzelner Spin-Flips eines einzelnen Protons	108
8.1	Güte der Spin-Flip-Detektion in der Analysefalle in Abhängigkeit der Zyklotron Energie	111
8.2	Güte der Spin-Flip-Detektion in der Präzisionsfalle in Abhängigkeit der Zyklotron Energie	112
8.3	Gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in der Präzisionsfalle	113
8.4	Schematische Darstellung der Messroutine zur Demonstration der Doppel-Fallen Methode	114
8.5	Demonstration der Doppel-Fallen Methode	115
9.1	g -Faktor Resonanz	120
9.2	Axiale Frequenzfluktuationen während der g -Faktor Messung	121
9.3	Verteilung der axialen Frequenzdifferenzen	123
9.4	Nichlineare Drift des Magnetfeldes	127

Tabellenverzeichnis

2.1	Experimentelle Parameter der Penning-Fallen	21
3.1	Parameter der axialen Nachweise	46
9.1	Systematische Verschiebungen des gemessenen g -Faktors	129

Kapitel 1

Einleitung

Einer der Eckpfeiler der Modernen Physik ist das Standardmodell der Teilchenphysik. Basierend auf 12 fundamentale Fermionen und deren Wechselwirkungen - Elektromagnetismus, schwache Wechselwirkung und starke Wechselwirkung - beschreibt es zahlreiche experimentelle Beobachtungen. Beispielsweise konnte die elektroschwache Vereinheitlichung, wofür S. Weinberg, S. Glashow und A. Salam im Jahr 1979 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurden, mit dem experimentellen Nachweis der W^\pm -Bosonen und des Z^0 -Bosons bestätigt werden. Des Weiteren kann im Rahmen des Standardmodells über die Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld eine der fundamentalsten Eigenschaften der Materie, die Masse, erklärt werden. Als Konsequenz des Higgs-Feldes sollten massive Bosonen, die Higgs-Bosonen, existieren [1]. Erst kürzlich konnte von der ATLAS-Kollaboration und der CMS-Kollaboration ein bisher unbekanntes massives Boson, kompatibel mit dem Standardmodell Higgs-Boson, beobachtet werden [2, 3]. Dies ist eine weitere eindrucksvolle Bestätigung des Standardmodells. In diesem Jahr wurden F. Englert und P. Higgs für die theoretische Entwicklung des Higgs-Mechanismus mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet. Allerdings können nicht alle experimentellen Beobachtungen mit dem Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben werden. Hierzu zählen die dunkle Materie, die Gravitation, Neutrino-Oszillationen und die Asymmetrie der beobachteten Menge an Materie und Antimaterie im Universum. Letzteres könnte zum Beispiel über eine Brechung der CPT -Symmetrie erklärt werden [4]. CPT steht hierbei für die gemeinsame Transformation der Ladungskonjugation C , welche alle Teilchen in ihre Antiteilchen transformiert, der Parität P , daher räumlichen Spiegelung, und der zeitlichen Inversion T eines Prozesses. Theoretisch kann gezeigt werden, dass auf einer flachen Raumzeit jede lokale, Lorentz-invariante und unitäre Quantenfeldtheorie, wie die Quantenfeldtheorien des Standardmodells, die CPT -Symmetrie aufzeigt.

Dies ist als Schwinger-Lüders-Pauli oder *CPT*-Theorem bekannt [5, 6].

Ob die *CPT*-Symmetrie allgemeine Gültigkeit besitzt ist eine offene Frage. Daher ist es wichtig, die Voraussagen experimentell zu überprüfen. Die Überprüfung ist durch den Vergleich der Eigenschaften der Teilchen mit ihren Antiteilchen möglich [7, 8]. So ist die entscheidende Konsequenz der *CPT*-Symmetrie, dass alle Teilchen/Antiteilchen Paare exakt die gleiche Masse und mit umgekehrten Vorzeichen die gleiche Ladung sowie das identische magnetische Moment besitzen. Folglich kann aus dem Vergleich von Materie und Antimaterie auf eine Brechung der *CPT*-Symmetrie und damit auf neue Physik, wie sie in Erweiterungen des bisherigen Standardmodells beschrieben werden [9], rückgeschlossen werden.

Eine theoretisch ausgezeichnete Wechselwirkung beziehungsweise ausgezeichnetes System für eine mögliche Verletzung der *CPT*-Symmetrie ist nicht bekannt. Folglich wird in verschiedensten Experimenten an unterschiedlichsten Systemen die Gültigkeit des Theorems untersucht. Allerdings konnte bis heute in keinem der untersuchten Systeme eine Verletzung beobachtet werden.

Einer der bekanntesten Tests der *CPT*-Symmetrie ist der Vergleich der Massen zweier Mesonen, des Kaons und des Antikaons, $(m(K^0) - m(\bar{K}^0))/m(Avg) < 9 \cdot 10^{-19}$ [10]. Darüber hinaus konnten auch Experimente mit Fermionen gespeichert in Penning-Fallen empfindliche Grenzen auf eine Verletzung der *CPT*-Symmetrie setzen. So kann anhand des Vergleichs der Anomaliefrequenzen $\omega_a = \omega_L - \omega_c$ des Elektrons und des Positrons die *CPT*-Symmetrie überprüft werden [11]. Hierbei geben ω_L die Larmorfrequenz und ω_c die Zyklotronfrequenz an. Die Anomaliefrequenzen lassen sich aus den Messungen der *g*-Faktoren beider Leptonen bestimmen, welche mit einer beeindruckenden, relativen Präzision von 10^{-12} bestimmt wurden [12]. Eine Verletzung der *CPT*-Symmetrie konnte anhand dieser Messungen auf einem Niveau von

$$\frac{\hbar(\omega_a^-/2) - \hbar(\omega_a^+/2)}{mc^2} < 1.2 \cdot 10^{-21}, \quad (1.1)$$

ausgeschlossen werden [13].

Einen weiteren Kandidaten zu einem Test der *CPT*-Symmetrie bietet der Vergleich der Anomaliefrequenzen des Protons und des Antiprotons. Dieses System verspricht auf Grund der höheren Energie $E = mc^2$, vergleiche Gleichung 1.1, bei gleicher experimenteller Präzision eine höhere Sensitivität auf eine mögliche Brechung der *CPT*-Symmetrie als bisher erreichbar. In einem ersten Schritt hierzu wird in unserem Penning-Fallen-Experiment die erste direkte Präzisionsmessung des *g*-Faktors eines einzelnen Protons angestrebt [14]. Unter Verwendung eines ähnlichen experimentellen Aufbaus soll anschließend der *g*-Faktor des Antiprotons gemessen werden

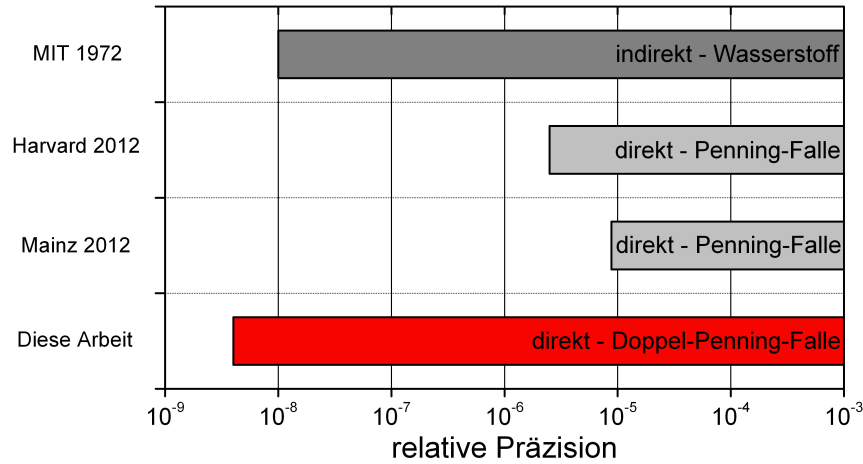


Abbildung 1.1: Relative Präzision verschiedener Messungen des Proton g -Faktors. Der bisher präziseste Wert stammt aus einer indirekten Messung an atomarem Wasserstoff. In 2012 wurden erstmals direkte Messungen in einer Penning-Falle mit einer starken magnetischen Inhomogenität durchgeführt. Das Ergebnis dieser Arbeit wurde unter Verwendung der Doppel-Penning-Fallen-Technik erreicht. Es ist um einen Faktor 2 präziser als der indirekte Wert und einen Faktor 500 präziser als die ersten direkten Messungen in einer Penning-Falle.

[15], um so einen wichtigen Beitrag zu den Tests des CPT -Theorems zu leisten.

Der bisher präziseste Wert des g -Faktors des freien Protons basiert auf Messungen von P. F. Winkler *et. al.* [16], die vor mehr als 40 Jahren durchgeführt wurden. Im Experiment wurde die Zeemanaufspaltung der Hyperfeinstruktur in atomarem Wasserstoff spektroskopiert. Aus der Messung konnte das Verhältnis der magnetischen Momente des Protons und des Elektrons gebunden im Atom, $\mu_p(H)/\mu_e(H)$, mit einer relativen Präzision von 10^{-8} bestimmt werden. Um hieraus einen Wert für den g -Faktor des freien Protons zu berechnen, müssen Strahlungs-, Rückstoß- und paramagnetische Korrekturen in der Größenordnung $17.7 \cdot 10^{-6}$ berücksichtigt werden [17, 18].

Eine erste direkte Messung mit einem einzelnen in einer Penning-Falle gespeicherten Proton gelang im Jahr 2012 an unserem Experiment. Basierend auf einer statistischen Detektion von Spin-Flips [19] konnte der g -Faktor des Protons mit einer relativen Präzision von $8.8 \cdot 10^{-6}$ direkt gemessen werden [20]. Im selben Jahr gelang dies einer weiteren Gruppe aus Harvard, welche unter Verwendung gleicher Messtechniken eine relative Präzision von $2.5 \cdot 10^{-6}$ erreichte [21]. Beide Messungen sind durch eine magnetische Inhomogenität, welche zur statistischen Detektion der Spin-Flips

benötigt wird, limitiert. Unter Berücksichtigung aller bisherigen Messungen ist der g -Faktor des freien Protons, dominiert durch die Messung an Wasserstoff, mit einer Präzision von $8.2 \cdot 10^{-9}$ bekannt [18].

Die bisher limitierende Größe bei einer Überprüfung des CPT -Theorems stellt der g -Faktor des Antiprotons dar. Ebenfalls unter Verwendung einer Penning-Falle bestimmt, ist dieser mit einer relativen Präzision von $4.4 \cdot 10^{-6}$ bekannt [22]. Basierend auf gleichen Messtechniken wie bei den direkten Messungen am Proton ist auch diese Messung durch eine magnetische Inhomogenität limitiert.

Zur Messung des g -Faktors wird ein einzelnes Proton in einer kryogenen Penning-Falle gespeichert. Aus der Messung der Larmorfrequenz und der freien Zyklotronfrequenz im magnetischen Speicherpotential der Penning-Falle lässt sich der g -Faktor bestimmen. Zur Messung der Zyklotronfrequenz werden die drei Eigenfrequenzen des Ions über die sogenannte Spiegelstromtechnik detektiert [23]. Die Larmorfrequenz wird aus der sogenannten Larmorresonanz, einer Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion der Frequenz einer externen magnetischen Dipolanregung, gewonnen. Um die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, müssen in einem ersten Meilenstein Spin-Flips des einzelnen Protons nachgewiesen werden. Hierzu wird der Penning-Falle eine magnetische Inhomogenität überlagert, welche das magnetische Spin-Moment an eine der drei Bewegungsmoden des Ions in der Penning-Falle koppelt. Ein Spin-Flip führt somit zu einem Sprung der Bewegungsfrequenz. Der *statistische* Nachweis dieser einzelnen Spin-Flips ist uns im Jahr 2011 gelungen [19] und ermöglichte die bereits beschriebene direkte Messung des g -Faktors [20].

Jedoch wird die erreichbare Präzision der g -Faktor Messung durch eine Verbreiterung der Larmorresonanz auf Grund der magnetischen Inhomogenität limitiert. Um dies zu umgehen, wurde unter Leitung von W. Quint und G. Werth an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz die sogenannte Doppel-Fallen Methode entwickelt [24]. Hierbei wird die Präzisionsmessung der Frequenzen in einer Penning-Falle mit einem homogenen Magnetfeld durchgeführt, während die Spin-Flip-Detektion in einer zweiten Penning-Falle erfolgt, welcher die magnetische Inhomogenität überlagert ist. Um diese Doppel-Fallen Methode anzuwenden, müssen einzelne Spin-Flips des Protons *direkt* nachgewiesen werden. Die direkte Beobachtung dieser einzelnen Spin-Flips gelang uns Anfang des Jahres 2012 [25] und ermöglichte die bisher einzige Demonstration der Doppel-Fallen Methode mit einem einzelnen Proton [26]. In der Folge erlaubte dies die erste direkte Präzisionsmessung des g -Faktors eines einzelnen

Protons mit einer relativen Präzision von $4.3 \cdot 10^{-9}$ [27], welche im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurde. Der gemessene Wert ist konsistent mit dem Wert aus der Spektroskopie der Wasserstoff-Hyperfeinstruktur, aber 2-mal genauer, und stellt die erste direkte Präzisionsmessung des g -Faktors des freien Protons dar.

Das an unserem Experiment erfolgreich entwickelte Messprinzip lässt sich direkt auf ein einzelnes Antiproton anwenden, dessen Speicherung in Penning-Fallen bereits erfolgreich demonstriert wurde [28]. Damit kann unsere Präzisionsmessung als ein Meilenstein zur Messung des g -Faktors des Antiprotons mit vergleichbarer Präzision verstanden werden, womit eine Verbesserung des assoziierten CPT -Tests um einen Faktor 1000 in greifbare Nähe rückt. Die an unserem Experiment entwickelten Methoden werden im Rahmen des BASE-Experiments, das sich derzeit am Antiprotonen Entschleuniger (CERN) im Aufbau befindet, zur Anwendung gebracht [15].

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert. In Kapitel 2 wird eine Einführung in die Theorie der Penning-Falle und das Messschema zur Bestimmung des g -Faktors gegeben. Anschließend wird in Kapitel 3 der elektronische Nachweis eines einzelnen Protons beschrieben. Das Kapitel 4 gibt einen Überblick über den experimentellen Aufbau. In den beiden folgenden Kapiteln 5 und 6 werden erste systematische und experimentelle Studien zu den Frequenzmessungen im Doppel-Fallen-System diskutiert. In Kapitel 7 wird anschließend die Detektion eines Spin-Flips, dem wichtigsten Bestandteil einer erfolgreichen Messung des g -Faktors, beschrieben. Die Detektion der einzelnen Spin-Flips erlaubt die Anwendung der Doppel-Fallen Methode, welche in Kapitel 8 beschrieben wird. In Kapitel 9 wird das Ergebnis der Proton g -Faktor Messung präsentiert.

Kapitel 2

Theorie der Penning-Falle

Bringt man ein einzelnes Proton mit Masse m und Ladung q in ein homogenes Magnetfeld B_0 , so kreist dieses auf einer geschlossenen Zyklotronbahn mit der freien Zyklotronfrequenz

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B_0. \quad (2.1)$$

Des Weiteren kommt es im gleichen Magnetfeld zu einer Energieaufspaltung zwischen den beiden Spin-Zuständen des Protons, $\Delta E = h\nu_L$, welche sich durch die Larmorfrequenz

$$\nu_L = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} \frac{g}{2} B_0 \quad (2.2)$$

ausdrücken lässt. Hierbei gibt g den sogenannte g -Faktor des Protons an. Folglich kann der g -Faktor des Protons aus der Messung der Larmorfrequenz und der Zyklotronfrequenz bestimmt werden. Aus dem Frequenzverhältnis ergibt sich

$$g = 2 \frac{\nu_L}{\nu_c}. \quad (2.3)$$

Um den g -Faktor hieraus präzise und akkurat bestimmen zu können, sind lange Beobachtungszeiten unter definierten Bedingungen entscheidend. Penning-Fallen haben sich hier als mächtiges Werkzeug erwiesen, welche diese langen, präzisen und darüber hinaus zerstörungsfreien Beobachtungen einzelner Ionen unter kontrollierbaren Bedingungen erlauben [29].

2.1 Ideale Penning-Falle

Eine ideale Penning-Falle ist die Überlagerung eines homogenen magnetischen Feldes und eines elektrischen Quadrupolpotentials [30]. Das Magnetfeld sei für die

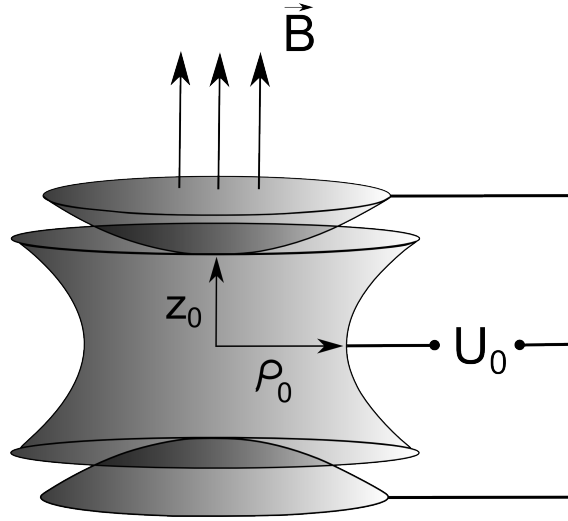


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung einer Penning-Falle. Gezeigt sind drei hyperbolische Fallenelektroden über die durch Anlegen einer Spannung das elektrische quadrupolförmige Speicherpotential erzeugt wird. Diesem ist ein homogenes Magnetfeld überlagert.

folgenden Betrachtungen entlang der z -Richtung, im Folgenden als axiale Richtung bezeichnet, orientiert

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z. \quad (2.4)$$

Im Magnetfeld wird das geladene Teilchen in den Raumrichtungen senkrecht zum Magnetfeld gespeichert, bleibt allerdings entlang des Magnetfeldes ungebunden. Wird dem Magnetfeld zusätzlich ein elektrisches Quadrupolpotential überlagert, welches entlang der axialen Richtung ein Potentialminimum hat, kann das Ion auch in der verbleibenden Raumrichtung gespeichert werden.

Das elektrische Speicherpotential wird durch Spannungen, welche an leitende, zylindersymmetrische Elektroden anliegen, produziert. Abbildung 2.1 zeigt eine mögliche Elektrodenkonfiguration mit den elektrischen Äquipotentialflächen folgenden hyperbolischen Elektrodenoberflächen. Für das elektrische Potential lässt sich schreiben

$$\Phi(z, \rho) = C_2 U_0 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right), \quad (2.5)$$

mit C_2 einem charakteristischen Fallenkoeffizienten. Im Fall einer hyperbolischen Penning-Falle gilt

$$C_2 = 4 \left(z_0^2 + \frac{\rho_0^2}{2} \right)^{-1}, \quad (2.6)$$

mit z_0 sowie ρ_0 den Abständen des Fallenzentrums zu den Endkappen beziehungsweise der Ringelektrode, vergleiche Abbildung 2.1. U_0 gibt die Spannung, welche

2.1. IDEALE PENNING-FALLE

zwischen den Endkappen und der Ringelektrode angelegt wird, an.

Die resultierende Bewegung des Ions in der Penning-Falle lässt sich als Überlagerung dreier unabhängiger harmonischer Oszillatoren mit charakteristischen Eigenfrequenzen beschreiben.

Zum ersten die axiale Oszillation entlang der Magnetfeldlinien als direkte Konsequenz des angelegten elektrischen Feldes mit der Frequenz

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2qC_2U_0}{m}}. \quad (2.7)$$

Die axiale Bewegung ist unabhängig vom Magnetfeld.

Zum zweiten die sogenannte reduzierte Zyklotronbewegung mit der Frequenz

$$\nu_+ = \frac{\nu_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\nu_c}{2}\right)^2 - \frac{\nu_z^2}{2}}. \quad (2.8)$$

Diese Bewegung entspricht der *freien* Zyklotronbewegung eines geladen Teilchens in einem magnetischen Feld, ist jedoch auf Grund des nicht verschwindenden radialen Anteils des elektrischen Feldes zu niedrigeren Frequenzen hin verschoben.

Zum dritten die Magnetronbewegung mit der Frequenz

$$\nu_- = \frac{\nu_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\nu_c}{2}\right)^2 - \frac{\nu_z^2}{2}}. \quad (2.9)$$

Diese Bewegung ist das Resultat einer $\vec{E} \times \vec{B}$ Drift, senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zur radialen Komponente des elektrischen Feldes. Für die in diesem Experiment typischen Fallenparameter von $U_0 = 2.7 \text{ V}$, $C_2 = 30 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2}$ und $B_0 = 1.899 \text{ T}$ ergibt sich für die Eigenfrequenzen

$$\nu_z = 632 \text{ kHz},$$

$$\nu_+ = 28.9 \text{ MHz},$$

$$\nu_- = 6.7 \text{ kHz}.$$

Um einen Eindruck der Bewegung eines Ions in der Falle zu bekommen, ist eine Trajektorie der Bewegung in Abbildung 2.2 gezeigt. Zum einen rotiert das Teilchen senkrecht zum Magnetfeld auf der reduzierten Zyklotronbahn in blau. Zusätzlich bewegt sich das Ion auf der Magnetronbahn, in grün, um das Fallenzentrum. Diesen beiden Bewegungen ist schließlich die axiale Oszillation, in rot, in Richtung des Magnetfeldes überlagert.

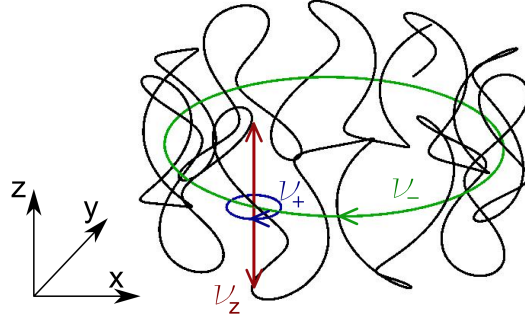


Abbildung 2.2: Darstellung der Bewegung eines Protons in einer Penning-Falle. In rot ist die axiale Oszillation entlang der Magnetfeldlinien gezeigt. Dieser sind zwei radiale Bewegungen überlagert. Zum ersten die Kreisbewegung der Magnetron Mode in grün, sowie zweitens die Bewegung der reduzierten Zyklotron Bewegung in blau. In schwarz ist die resultierende Gesamtbewegung des Ions gezeigt.

Die freie Zyklotronfrequenz ν_c , welche zur Bestimmung des g -Faktors gemessen werden muss, ist keine Eigenfrequenz einer Bewegung des Ions in der Penning-Falle. Jedoch lässt sich ν_c aus den Bewegungsfrequenzen des Ions in der Falle bestimmen,

$$\nu_c = \nu_+ + \nu_-, \quad (2.10)$$

$$\nu_c^2 = \nu_+^2 + \nu_-^2 + \nu_z^2. \quad (2.11)$$

Die letzte Gleichung wird als Invarianz-Theorem bezeichnet [31]. Sie behält nicht nur im Fall einer wie bisher beschriebenen idealen Konfiguration der Penning-Falle Gültigkeit, sondern ist auch im Fall einer Verkippung der Magnetfeldachse gegen das elektrische Speicherpotential oder einer Eliptizität des elektrischen Speicherpotentials gültig [32]. Folglich wird zur Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz das Invarianz-Theorem angewendet. Allgemein gilt in einer Penning-Falle für die Hierarchie der Eigenfrequenzen $\nu_+ \gg \nu_z \gg \nu_-$. Hieraus folgt, dass die am präzisesten zu bestimmende Frequenz zu einer Messung der freien Zyklotronfrequenz die reduzierte Zyklotronfrequenz ist.

Für die Stabilität der Teilchentrajektorie lässt sich eine nützliche Relation ableiten. Dominiert die defokussierende Kraft des radialen elektrischen Feldes über die fokussierende Kraft des Magnetfeldes, kommt es zu einer Aufweitung der Teilchenbahn und damit verbunden zu einem Verlust des Ions. Die Stabilitätsbedingung lässt sich aus dem Radikanten der Gleichung 2.9 ableiten. Es gilt

$$\frac{q}{m} \geq 4 \frac{C_2 U_0}{B_0^2}. \quad (2.12)$$

Bei festen Parametern B_0 und $C_2 U_0$ ist diese Stabilitätsbedingung für schwerere Ionen nicht erfüllt. Wird die Fallenspannung kontinuierlich erhöht, kommt es zu einem Verlust von immer leichteren Ionen. Protonen bleiben bei dieser Erhöhung am längsten gespeichert. Daher kann diese Eigenschaft der Penning-Falle in unserem Experiment verwendet werden, Fremdionen aus der Falle zu entfernen.

Die Energie¹ in der Zyklotronmode ist rein kinetisch und ausgedrückt über den Radius der Bewegungsamplitude ρ_+ gegeben durch

$$E_+ = \frac{1}{2} m \omega_+^2 \rho_+^2. \quad (2.13)$$

In Analogie gilt für die Energie der axialen Mode mit Amplitude z_0

$$E_z = \frac{1}{2} m \omega_z^2 z_0^2. \quad (2.14)$$

Im Gegensatz hierzu gilt für die Energie der Magnetron Mode mit Amplitude ρ_-

$$E_- = \frac{1}{2} m \omega_-^2 \rho_-^2 - \frac{4\pi^2}{4} m \omega_z^2 \rho_-^2 \approx -\frac{1}{4} m \omega_z^2 \rho_-^2, \quad (2.15)$$

wobei im letzten Schritt die Näherung $\nu_- \ll \nu_z$ verwendet wurde. Die Energie in der Magnetron Mode ist rein potentiell und die Bewegung metastabil. Eine Reduzierung der Magnetronenergie führt zu einer Vergrößerung des Radius ρ_- . Ist der einzige Verlustmechanismus der Mode die Strahlungsdämpfung, so folgt für die Dämpfungskonstante [32]

$$\gamma_- = \frac{4q^2}{3mc^3} \frac{\omega_-^3}{\omega_+ - \omega_-} = 10^{30} \text{ 1/s}. \quad (2.16)$$

Dies entspricht einer vernachlässigbaren Zerfallskonstanten von $\tau_- = 10^{23}$ Jahren. Neben der bisherigen klassischen Beschreibung der Ionenbewegung ist auch eine quantenmechanische Beschreibung möglich. Die Bewegung des Ions in einer idealen Penning-Falle kann über drei vollständig entkoppelte harmonische Oszillatoren beschrieben werden [33]. Im quantenmechanischen Bild folgt hieraus für den das System beschreibenden Hamiltonian

$$H = \hbar \omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_+ \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) - \hbar \omega_- \left(n_- + \frac{1}{2} \right), \quad (2.17)$$

¹Die Energien lassen sich sowohl in den Einheiten eV als auch K ausdrücken, wobei $eV = k_B K$. Beide Einheiten werden in dieser Arbeit synonym verwendet. Wird hingegen die Temperatur einer thermischen Verteilung angegeben, wird dies explizit erwähnt.

wobei n_z , n_+ und n_- die Quantenzahlen der axialen Mode, der Zyklotronmode und der Magnetronmode sind.

2.2 Anharmonische elektrische Speicherpotentiale

Im Experiment können Abweichungen des Speicherpotentials von den idealen Bedingungen eines quadrupolförmigen, elektrischen Feldes auftreten. Da dies zu signifikanten Modifikationen der Bewegungsfrequenzen des gespeicherten Ions und daher zu einer Abweichung des gemessenen g -Faktors vom wahren g -Faktor führen kann, werden diese im Folgenden diskutiert.

Das elektrische Speicherpotential einer Penning-Falle lässt sich durch eine Multipolentwicklung in Legendre-Polynomen P_i ausdrücken [32]. Es gilt

$$\Phi(z, \rho) = U_0 \sum_k C_k (z^2 + \rho^2)^{k/2} P_k \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right), \quad (2.18)$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$. Folglich ergibt sich das Bild der idealen Penning-Falle für $C_k = 0$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\}$. Auf Grund der Symmetrie $z \rightarrow -z$ der Penning-Falle tragen ungerade Beiträge in k nicht bei. Während der Term 0. Ordnung ($k = 0$) als konstanter Beitrag zum Potential nicht zur Bewegung des Ions in der Falle beiträgt, definiert der Term 2. Ordnung die axiale Frequenz, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben. Wird zusätzlich die Korrektur auf Grund von C_4 mit berücksichtigt, ergibt sich für die axiale Komponente die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{z} = -\frac{q}{m} 2U_0 (C_2 z + 2C_4 z^3) \quad (2.19)$$

eines Duffing Oszillators. Der nichtlineare Term zur Rückstellkraft führt folglich zu einer Abhängigkeit der axialen Bewegungsfrequenz ν_z von dessen Bewegungsamplitude z_0 . Es resultiert somit eine Abhängigkeit der axialen Frequenzen von der Energie der axialen Mode $E_z = \pi m \nu_z^2 z_0^2$. Unter Berücksichtigung weiterer führender Korrekturen zum Potential ergibt sich für die relative Abweichung der axialen Frequenz [32]

$$\frac{\Delta \nu_z}{\nu_z} = \frac{3}{4} \frac{1}{qU_0} \left(\frac{C_4}{C_2^2} E_z + \frac{5}{4} \frac{C_6}{C_2^3} E_z^2 \right). \quad (2.20)$$

Daneben kommt es auf Grund der Anharmonizitäten des Speicherpotentials auch zu Kopplungen aller Bewegungsmoden des gespeicherten Ions. So gilt nach [32] für

die reduzierte Zyklotronfrequenz

$$\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} = \frac{1}{qU_0} \frac{3C_4}{C_2^2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^4 E_+ - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 E_z - \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 E_- \right), \quad (2.21)$$

für die Magnetronfrequenz

$$\frac{\Delta\nu_-}{\nu_-} = \frac{1}{qU_0} \frac{3C_4}{C_2^2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 E_+ - E_z - E_- \right), \quad (2.22)$$

und für die axiale Frequenz

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = \frac{1}{qU_0} \frac{3C_4}{C_2^2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 E_+ + \frac{1}{4} E_z + E_- \right). \quad (2.23)$$

Hingegen wird die Energieaufspaltung zwischen den Spin-Zuständen ausschließlich durch das Magnetfeld bestimmt. Folglich kommt es zu keiner Verschiebung der Larmorfrequenz.

2.3 Die zylindersymmetrische Penning-Falle

Im Gegensatz zu der im vorherigen Abschnitt vorgestellten hyperbolischen Penning-Falle werden in unserem Experiment zylindrische Penning-Fallen verwendet, wie sie von G. Gabrielse eingeführt wurden [34]. Zylindersymmetrische Penning-Fallen bieten im Vergleich zu den hyperbolischen Fallen verschiedene Vorteile. Zum Transport von Ionen zwischen verschiedenen Penning-Fallen wäre bei hyperbolischen Fallen eine Modifikation der Elektroden durch Bohrung, welche einen Zugang zum Fallenzentrum erlaubt, erforderlich. Dies würde zu Abweichungen vom idealen quadrupolförmigen Fallenelektrodenpotential führen. Im Gegensatz hierzu besteht bei einem zylindrischen Fallendesign ein direkter Zugang zum Fallenzentrum. Dies ermöglicht ohne eine Modifikation der Elektroden ein Ion adiabatisch zwischen zwei Fallen hin und her zu transportieren. Zusätzlich ist, im Gegensatz zu hyperbolischen Elektroden, das durch zylindrische Fallenelektroden erzeugte Potential analytisch lösbar. Daneben lassen sich in mechanischen Werkstätten zylindrische Fallen mit höchster Präzision herstellen².

Im Experiment werden 5-polige zylindersymmetrische Penning-Fallen, bestehend

²Die in unserem Experiment verwendeten Fallenelektroden werden mit Toleranzen von $3\ \mu\text{m}$ bis $10\ \mu\text{m}$ gefertigt.

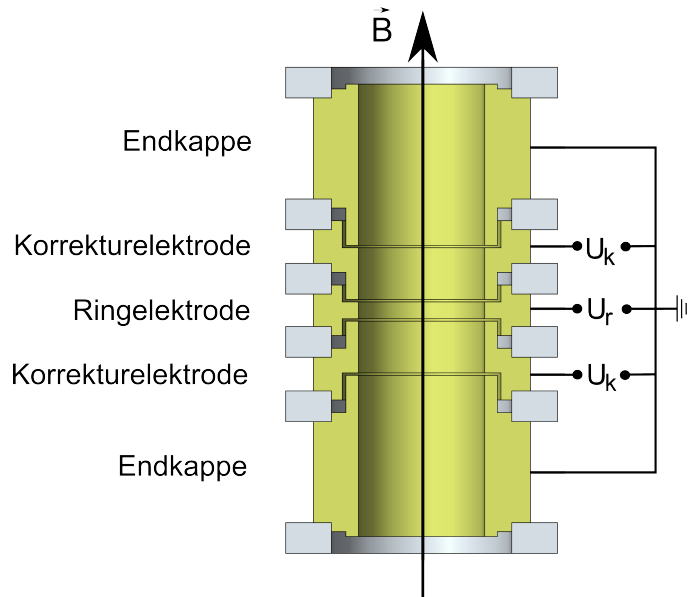


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung einer zylindrischen 5-poligen Penning-Falle mit angelegter Ringspannung U_r sowie den Korrekturspannungen U_k . Die einzelnen Elektroden werden durch Saphirringe, hell-blau dargestellt, elektrisch voneinander isoliert. Die Spannungen erzeugen das elektrische Speicherpotential, welchem das Magnetfeld \vec{B} überlagert ist.

aus einer Ringelektrode, zwei Korrektur Elektroden und zwei Endkappen verwendet. In Abbildung 2.3 ist eine solche Penning-Falle dargestellt. Die Endkappen werden auf dem Bezugspotential gehalten, während zwischen der Spannung an der Ringelektrode $U_r = U_0$ und den Spannungen an den beiden Korrektur Elektroden U_k ein definiertes Spannungsverhältnis gewählt wird,

$$U_r = Tr \cdot U_k. \quad (2.24)$$

Der dimensionslose Parameter Tr wird *Tuning-ratio* genannt. Bei geeigneter Wahl von Tr ist es immer möglich die Anharmonizität C_4 zu beseitigen, daher $C_4 = 0$. Beim theoretischen Design einer zylindrischen Penning-Falle ergeben sich vier frei wählbare Parameter. Dies sind der gemeinsame Radius aller Elektroden, die Länge der beiden Korrektur Elektroden, die Länge der Ringelektrode sowie das Tuning-ratio. Wird der Radius der Falle festgelegt, bleiben beim Design der Falle drei Freiheitsgrade übrig. Mit Hilfe dieser wird die Penning-Falle so konstruiert, dass sie zum einen *orthogonal* und zum anderen *kompensiert* ist [35]:

- Orthogonalität bedeutet, dass die axiale Frequenz unabhängig vom angelegten Tuning-ratio ist, daher $\partial \nu_z / \partial T = 0$. Dies stellt keine Limitierung der

erreichbaren Präzision dar, ist aber von experimentellem Vorteil, da die axiale Frequenz nur in einem schmalen Frequenzband detektiert werden kann.

- Kompensation bedeutet, dass die beiden führenden Korrekturterme des anharmonischen Potentials, C_4 und C_6 , simultan Null gesetzt werden können, daher $C_4 = C_6 = 0$.

2.4 Inhomogene magnetische Felder

Neben den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Abweichungen von der idealen Penning-Falle, kann auch das Magnetfeld vom idealen homogenen Verlauf abweichen. Hieraus folgen ebenfalls Verschiebungen der Eigenfrequenzen und Kopplungen der Bewegungsmoden [32].

Auf Grund des axialen, magnetischen Moments der Zyklotronbewegung

$$\vec{\mu}_{+,z} = -I_+ \pi \rho_+^2 \hat{e}_z = -\frac{1}{2\pi} \frac{qE_+}{m\nu_+} \hat{e}_z \quad (2.25)$$

mit $I_+ = q\nu_+$ dem Strom des Ions, wird das elektrische Potential um den Beitrag eines zusätzlichen magnetischen Potentials

$$\Phi_{mag} = -|\vec{\mu}_{+,z}| B/q \quad (2.26)$$

modifiziert. Betrachtet man nun die lineare Korrektur zum Magnetfeld B_1 ,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + B_1 z \hat{e}_z, \quad (2.27)$$

so kommt es auf Grund des Magnetfeldgradienten zu einer Verschiebung Δz des Gleichgewichtspunkts entlang der axialen Richtung³. Aus $\partial_z(\Phi_{mag} + \Phi_{el}) = 0$ erhält man

$$\Delta z = \frac{B_1}{2\pi m C_2 U_0} \frac{E_+}{\nu_+}. \quad (2.28)$$

Hieraus resultiert eine Verschiebung der Zyklotronfrequenz um

$$\Delta\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B_1 \Delta z. \quad (2.29)$$

³Auf Grund der niedrigen Energie der Magnetron Mode ist das magnetische Moment letzterer an dieser Stelle vernachlässigbar.

Die Korrektur zweiter Ordnung zum Magnetfeld B_2 , welche im Rahmen dieser Arbeit als *magnetische Flasche* bezeichnet wird, stellt die wichtigste Korrektur dar. Formal lässt sich die Änderung des Magnetfelds folgendermaßen ausdrücken

$$\Delta B(\rho, z) = B_2 \left[\left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \hat{e}_z + z\rho\hat{e}_\rho \right]. \quad (2.30)$$

Auf Grund der quadratischen Korrektur erhält man einen endlichen Beitrag in der Bewegungsgleichung der axialen Frequenz

$$\ddot{z} = -\frac{q}{m}\partial_z\Phi_e - \frac{q}{m}\partial_z\Phi_{mag} = -\left(4\pi^2\nu_z^2 + \frac{2qB_2}{2\pi m^2\nu_+}E_+ \right) z, \quad (2.31)$$

welcher zu einer relativen Verschiebung der axialen Frequenz von

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = \frac{1}{4\pi^2m\nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} E_+, \quad (2.32)$$

führt. Dies gilt in Analogie für das magnetische Moment auf Grund der Magnetronbewegung. Da mit der Bewegung der axialen Mode kein radial magnetisches Moment verbunden ist, bleibt die axiale Frequenz in Bezug auf die quadratische Korrektur zum Magnetfeld unabhängig von der axialen Energie. Zusammenfassend gilt für die relative Änderung der axialen Frequenz

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = \frac{1}{4\pi^2m\nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} (E_+ + |E_-|). \quad (2.33)$$

Zur Vollständigkeit sei an dieser Stelle bereits erwähnt, dass folglich über eine Messung der axialen Frequenzverschiebung die absolute Energie der radialen Moden bestimmt werden kann, siehe Abschnitt 6.2.

Neben der axialen Frequenzverschiebung kommt es zu einer Verschiebung der Zyklotronfrequenz und der Larmorfrequenz mit der Bewegungsamplitude/Energie der axialen Bewegungsmode. Die mittlere Magnetfeldabweichung, welche vom Ion in der Falle gesehen wird, ergibt sich zu

$$\langle \Delta B \rangle = \langle B_2 z(t)^2 \rangle = B_2 \frac{z_0^2}{2} = \frac{B_2}{4\pi^2m\nu_z^2} E_z. \quad (2.34)$$

Hieraus folgt für die relative Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz

$$\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} = \frac{1}{4\pi^2m\nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} E_z \quad (2.35)$$

und analog für die relative Verschiebung der Larmorfrequenz

$$\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} E_z. \quad (2.36)$$

Auf Grund der Abnahme des Magnetfeldes mit dem Radius, wird mit zunehmendem Bahnradius der Zyklotronbewegung das Magnetfeld abnehmen. Folglich wird die reduzierte Zyklotronfrequenz bei einer Zunahme der Zyklotronenergie, $E_+ \propto \rho_+^2$ abnehmen. Analog gilt dies für die Abhängigkeit der Zyklotronfrequenz von der Magnetronenergie.

Zusammenfassend gilt für die Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz, und analog der Larmorfrequenz, auf Grund der quadratischen Korrektur zum Magnetfeld und der endlichen Energien in den Moden

$$\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} \left(-\frac{\nu_z^2}{\nu_+^2} E_+ + E_z - 2|E_-| \right), \quad (2.37)$$

$$\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} \left(-\frac{\nu_z^2}{\nu_+^2} E_+ + E_z - 2|E_-| \right). \quad (2.38)$$

Für die relative Verschiebung der Magnetronfrequenz gilt

$$\frac{\Delta\nu_-}{\nu_-} = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} (2E_+ - E_z + 2|E_-|). \quad (2.39)$$

2.5 Kontinuierlicher Stern-Gerlach Effekt

Wie bereits beschrieben basiert die Messung des g -Faktors auf der Messung der Larmorfrequenz ν_L und der Zyklotronfrequenz ν_c . ν_c wird aus der Messung der Eigenfrequenzen des Protons in der Penning-Falle bestimmt. Da mit jeder Eigenbewegung eine Verschiebung einer Ladung verbunden ist, kann hierüber ein experimenteller Zugang zu den Eigenfrequenzen gefunden werden, siehe Kapitel 3. Diese Technik lässt sich nicht auf die Bestimmung von ν_L anwenden, da mit der Larmorfrequenz keine Verschiebung einer Ladung verknüpft ist.

Zugang zu ν_L erhält man über eine Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit p_{sf} als Funktion der Frequenz ν_{rf} einer externen magnetischen Dipolanregung, die der Induktion von Spin-Übergängen dient. Wird p_{sf} zu unterschiedlichen Frequenzen ν_{rf} gemessen, erhält man die sogenannte Larmorresonanz. Aus dem Maximum dieser Larmorresonanz kann ν_L bestimmt werden.

Um die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, muss ein Spin-Flip detektiert

werden können. Zu diesem Zweck wird der Penning-Falle eine magnetische Flasche B_2 überlagert. Es kommt dann in Analogie zur bereits beschriebenen Kopplung der radialen magnetischen Momente der Eigenbewegungen an die axiale Bewegung auch zu einer Kopplung des magnetischen Spin-Moments

$$\vec{\mu}_s = g \frac{q}{2m} \vec{S} \quad (2.40)$$

an die axiale Bewegung. Wird das magnetische Spin-Moment in Gleichung 2.26 substituiert und über Gleichung 2.31 die Verschiebung der axialen Frequenz bestimmt, so erhält man

$$\Delta\nu_z = \frac{\vec{\mu}_s B_2 \hat{e}_z}{4\pi^2 m \nu_z}. \quad (2.41)$$

Folglich führt eine Änderung des Spin-Zustandes von $\Delta m_s = \pm 1$ zu

$$\Delta\nu_z = \mp g \frac{q\hbar B_2}{8\pi^2 m^2 \nu_z}. \quad (2.42)$$

Es kann somit aus dem Frequenzsprung zweier aufeinander folgender axialer Frequenzmessungen, zwischen denen versucht wurde einen Spin-Flip zu treiben, auf den Spin-Zustand des Protons zurückgeschlossen werden. Aus der mehrmaligen Wiederholung einer solchen Messung lässt sich p_{sf} bestimmen.

Die Technik dieser Kopplung des Spin-Moments an die axiale Bewegung in einer Penning-Falle wurde erstmals von H. Dehmelt zur Detektion von Spin-Übergängen eines einzelnen Elektrons eingeführt [36] und wird in Analogie zu den berühmten Experimenten von O. Stern und W. Gerlach [37] als *kontinuierlicher Stern-Gerlach Effekt* bezeichnet.

Die zur Spin-Flip-Detektion benötigte magnetische Flasche wird durch eine aus ferromagnetischem Material, Co/Fe , hergestellte Ringelektrode erzeugt. Die Penning-Falle, welcher diese magnetischen Inhomogenität überlagert ist, wird als *Analysefalle* bezeichnet. In Abbildung 2.4 ist das Magnetfeld der Analysefalle basierend auf Finite Elemente Rechnung mit dem Programm *Comsol* gezeigt⁴. Für die im Experiment verwendete Inhomogenität folgt $B_2 = 300000 \text{ T/m}^2$. Dies bedeutet, dass das Magnetfeld innerhalb der magnetischen Flasche auf einer Distanz von 1.5 mm um circa 1 T abnimmt. Diese extrem starke Inhomogenität ist notwendig, um einen ausreichend großen Frequenzsprung auf Grund eines Spin-Flips des Protons detektieren zu können. Im Vergleich hierzu werden in ähnlichen Experimenten zur Messung der g -Faktoren an Elektronen, gebunden in hochgeladenen Ionen [39, 40, 41, 42, 43] oder dem freien Elektron/Positron [44, 13], kleinere magnetische Flaschen benötigt,

⁴Die in unserem Experiment verwendete Analysefalle wurde von C. C. Rodegheri entworfen [38]

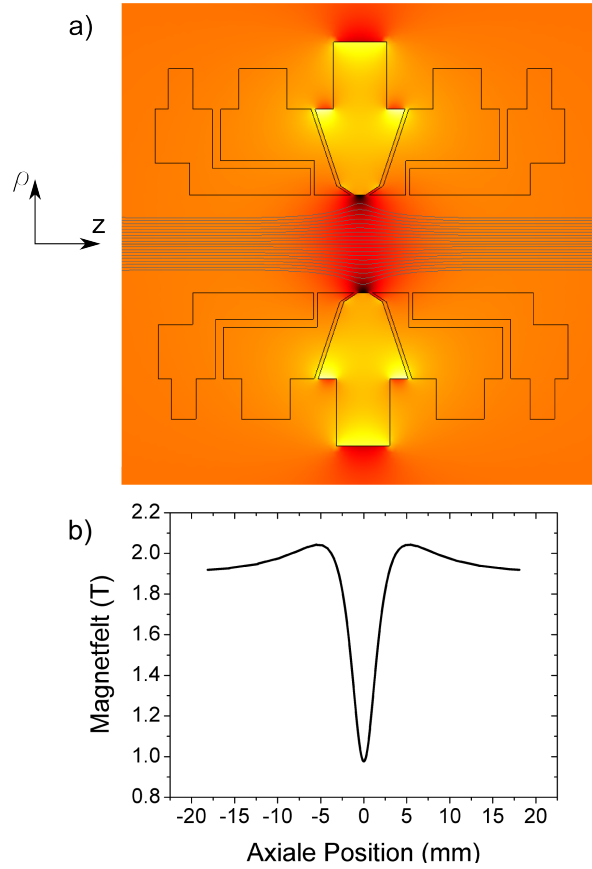


Abbildung 2.4: In a) ist das inhomogene Magnetfeld der Analysefalle basierend auf Berechnungen mit dem Finite Elemente Programm *Comsol* gezeigt. Die ferromagnetische Rinnelektrode formt das Magnetfeld zu einer sogenannten magnetischen Flasche. Dies führt zu einer Verzerrung der magnetischen Feldlinien. Der Farbcode gibt die Stärke des absoluten Magnetfeldes an; in rot $B = 1,1$ T und in weiß $B = 4$ T. In b) ist die axiale Komponente des Magnetfelds B_z auf der Symmetrieachse, $\rho = 0$ mm, basierend auf den Finite Elemente Rechnungen gezeigt.

da dort ein Spin-Flip des deutlich größeren Bohr-Magnetons μ_B des Elektrons mit Masse m_e ,

$$\frac{\mu_B/m_e}{\mu_s/m} = 10^6, \quad (2.43)$$

detektiert werden muss, vergleiche Gleichung 2.41. Trotz der starken Inhomogenität in diesem Experiment ergibt sich der zu detektierende Frequenzsprung auf Grund eines Spin-Flips bei einer axialen Frequenz von 742 kHz lediglich zu $\Delta\nu_{z,sf} = 170$ mHz. Die extrem starke Inhomogenität bedeutet zusätzlich eine starke Kopplung der magnetischen Momente der radialen Moden an die axiale Mode. So führt eine Ände-

rung der Energie der Zyklotronmode um $\Delta E = 35 \text{ neV}$, dies entspricht 10^{-4} der thermischen Energie $350 \mu\text{eV}$ (4 K), zu einem axialen Frequenzsprung in der gleichen Größenordnung eines Spin-Flips.

Neben der klassischen Beschreibung der Kopplungen auf Grund der magnetischen Flasche, ist es hilfreich auf die quantenmechanische Beschreibung zurückzugreifen. Im quantenmechanischen Bild gilt

$$\Delta\nu_z = \frac{h\nu_+}{4\pi^2 m\nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} \left(\left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nu_-}{\nu_+} \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + \frac{g}{2} m_s \right). \quad (2.44)$$

So führt ein Magnetronquantensprung $\Delta n_- = \pm 1$ zu einem axialen Frequenzsprung von $\Delta\nu_z = \pm 45 \mu\text{Hz}$, während ein Zyklotronquantensprung $\Delta n_+ = \pm 1$ zu einem axialen Frequenzsprung von $\Delta\nu_z = \pm 63 \text{ mHz}$ führt.

2.6 Die Doppel-Fallen Methode

Wie in den vorherigen Abschnitten gezeigt, ist die Einführung der Analysefalle mit der magnetischen Flasche in diesem Experiment zwingend erforderlich, um den g -Faktor des Protons zu messen. Auf der anderen Seite wurde in Abschnitt 2.4 gezeigt, dass die magnetische Feldinhomogenität B_2 zu signifikanten Verschiebungen der Eigenfrequenzen führen kann. Folglich wird der gemessene g -Faktor vom wahren g -Faktor abweichen. Betrachtet man die relative Abweichung des g -Faktors auf Grund einer systematischen Verschiebung der Larmorfrequenz $\Delta\nu_L$ und der freien Zyklotronfrequenz $\Delta\nu_c$, so ergibt sich

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} - \frac{\Delta\nu_c}{\nu_c}. \quad (2.45)$$

Die freie Zyklotronfrequenz wird nicht direkt gemessen, sondern über das Invarianz Theorem bestimmt. Hieraus ergibt sich für die Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = \frac{1}{\nu_c^2} (\nu_+ \Delta\nu_+ + \nu_z \Delta\nu_z + \nu_- \Delta\nu_-). \quad (2.46)$$

Auf Grund der niedrigen Magnetronfrequenz, $\nu_-/\nu_c^2 \ll \nu_+/\nu_c^2$, und der niedrigen axialen Frequenz, $\nu_z/\nu_c^2 \ll \nu_+/\nu_c^2$, sind die Verschiebungen $\Delta\nu_-$ der Magnetron Mode und $\Delta\nu_z$ der axialen Moden für die weiteren Betrachtungen vernachlässigbar. Es folgt für die relative Verschiebung des g -Faktors

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} - \frac{\nu_+ \Delta\nu_+}{\nu_c^2}. \quad (2.47)$$

Tabelle 2.1: Experimentelle Parameter der Penning-Fallen

Parameter	Präzisionsfalle	Analysefalle
$C_{2,theo}$	$30 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2}$	$115 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2}$
U_0	2.733 V	1.017 V
B_0	1.899 T	1.160 T
$B_{2,theo}$	298000 T/m^2	4 T/m^2
ν_z	623 kHz	742 kHz
ν_+	28.97 MHz	17.8 MHz
ν_-	6.7 kHz	15 kHz
ν_L	80.9 MHz	50 MHz
T_z	7 K	7 K

Aus dem Vergleich mit den Gleichungen 2.37 sowie 2.38 erhält man

$$\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = \frac{\Delta\nu_+}{\nu_+}. \quad (2.48)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} \left(1 - \frac{\nu_+^2}{\nu_c^2} \right). \quad (2.49)$$

Im Fall der Analysefalle mit $B_2 = 300000 \text{ T/m}^2$ ergibt sich eine relative Verschiebung des g -Faktor in Abhängigkeit der axialen Temperatur T_z von $4 \cdot 10^{-8}/\text{K}$ beziehungsweise von $-8 \cdot 10^{-8}/\text{K}$ in Abhängigkeit der Temperatur der Magnetronmode⁵. Experimentell ist es nicht möglich die Temperaturen der axialen Mode und der Magnetronmode während einer Messung des g -Faktors auf wenige mK zu stabilisieren. Folglich kann die angestrebte relative Präzision von $\Delta g/g = 10^{-9}$ in der Analysefalle nicht erreicht werden.

Um dieses Problem zu umgehen, wurde von Häffner et al. die Doppel-Fallen Methode vorgeschlagen [24]. Hierbei werden die Präzisionsmessungen der Larmorfrequenz und der Zyklotronfrequenz in einer ersten Penning-Falle, der Präzisionsfalle, mit einem homogenen Magnetfeld durchgeführt. Die Detektion des Spin-Zustandes, daher eines Spin-Flips, erfolgt in einer zweiten Penning-Falle, der Analysefalle, welcher die magnetische Flasche überlagert ist. Die beiden Penning-Fallen sind über Transportelektroden mit einander verbunden. Die wichtigsten experimentellen Parameter der Präzisionsfalle und Analysefalle können Tabelle 2.1 entnommen werden.

In Abbildung 2.5 ist der schematische Aufbau, der in diesem Experiment verwen-

⁵Die Abhängigkeit von der Temperatur der Zyklotronmode ist mit ν_z^2/ν_+^2 unterdrückt

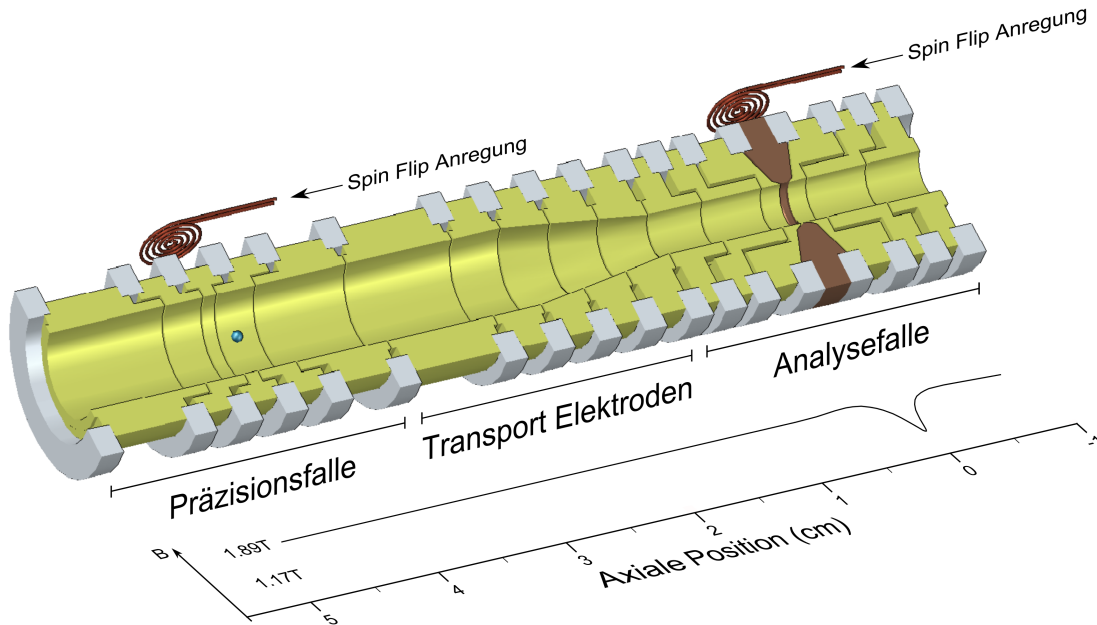


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung der Doppel-Falle. Der Aufbau besteht aus einer Präzisionsfalle mit einem homogenen Magnetfeld sowie einer Analysefalle mit einem inhomogenen Magnetfeld. In der Präzisionsfalle können die Larmor- und Zyklotronfrequenz zur Messung des g -Faktors präzise bestimmt werden. Das inhomogene Magnetfeld der Analysefalle dient der Detektion des Spin-Zustandes. Die ferromagnetische Ringelektrode der Analysefalle, welche die magnetische Flasche erzeugt, ist farblich hervorgehoben. Der Verlauf der axialen Komponente des Magnetfeldes ist am unteren Rand der Abbildung gezeigt. Die beiden Fallen sind über Transportelektroden miteinander verbunden. Alle Elektroden werden durch Saphirringe, hellblau dargestellt, elektrisch von einander isoliert. Über Spulen, welche sich auf der äußeren Seite der Fallenelektroden befinden, wird das magnetische Dipolfeld zur Spin-Flip-Anregung eingestrahlt.

deten Doppel-Fallen Konfiguration gezeigt. Da das starke inhomogene Magnetfeld der Analysefalle zu einer Inhomogenität in der Präzisionsfalle führen kann, sind beide Fallen 44 mm von einander getrennt. Somit kann, nach Finite Elemente Berechnungen, die magnetische Inhomogenität in der Präzisionsfalle im Vergleich zur Analysefalle um einen Faktor von 100000 auf $B_2 = 4 \text{ T/m}^2$ gesenkt werden. Dies entspricht bei der hier angestrebten Präzision einer vernachlässigbaren, relativen Abweichung des g -Faktors von $\Delta g/g = 1 \cdot 10^{-12}$, bei einer typischen axialen Temperatur von 4 K.

Im Folgenden wird ein Zyklus der Doppel-Fallen Methode zur Messung des g -Faktors

2.7. DIE LINIENFORM DER LARMORRESONANZ IM INHOMOGENEN MAGNETFELD

beschrieben:

- In der Analysefalle wird über eine Anregung ein Spin-Flip induziert. Aus der Richtung des resultierenden Frequenzsprungs, vergleiche Gleichung 2.42, kann auf den Spin-Zustand des Protons am Ende der Einstrahlung rückgeschlossen werden.
- Das Proton wird in die Präzisionsfalle transportiert.
- Im homogenen Magnetfeld der Präzisionsfalle wird identisch zur Analysefalle versucht einen Spin-Flip zu induzieren. Gleichzeitig wird die freie Zyklotronfrequenz gemessen.
- Das Proton wird in die Analysefalle transportiert.
- In der Analysefalle wird über eine Anregung ein Spin-Flip induziert. Aus der Orientierung des resultierenden Frequenzsprungs kann auf den Spin-Zustand des Protons vor der Einstrahlung rückgeschlossen werden. Der Vergleich der Spin-Zustände in der Analysefalle vor und nach der Messung in der Präzisionsfalle lässt darauf rückschließen, ob in der Präzisionsfalle ein Spin-Flip induziert wurde.

Folglich kann diese Methode nur dann angewendet werden, wenn einzelne Spin-Flips *direkt* beobachtet werden können. Wird dieser Zyklus mehrmals wiederholt, lässt sich die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit zu einer Anregung ν_{rf} bestimmen. Aus einem Scan von ν_{rf} erhält man die Larmorresonanz, aus der ν_L bestimmt werden kann. Da die Messung der Zyklotronfrequenz simultan zur Messung zur Anregung der Spin-Übergänge abläuft, ist die Messung nicht sensitiv auf Langzeitdriften des Magnetfeldes.

2.7 Die Linienform der Larmorresonanz im inhomogenen Magnetfeld

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, basiert die Messung der Larmorfrequenz auf der Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion der Frequenz einer externen Anregung zur Induzierung von Spin-Flips, der Larmorresonanz. Im inhomogenen Magnetfeld B_2 kann es hierbei zu einer thermischen Verbreiterung und einer Verschiebung dieser Resonanz kommen.

Auf Grund der axialen Oszillation des Protons mit Amplitude z_0 in der Falle, kommt es zu einer Modulation des Magnetfeldes im Ruhesystem des Teilchens

$$B(t) = B_0 + B_2 z(t) = B_0 + B_2 z_0^2 \sin^2(2\pi\nu_z t) \quad (2.50)$$

und damit verbunden zu einer Modulation der Larmorfrequenz⁶

$$\nu_L = \nu_{L,0} \left(1 + \frac{B_2}{B_0} z_0^2 \sin^2(2\pi\nu_z t) \right), \quad (2.51)$$

mit Seitenbändern bei ganzzahligen Vielfachen von $\pm 2\nu_z$. $\nu_{L,0}$ gibt die Larmorfrequenz zum Magnetfeld B_0 im Zentrum der Falle an. Betrachtet man den zeitlichen Mittelwert folgt

$$\nu_L = \nu_{L,0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{B_2}{B_0} \langle z_0^2 \rangle \right). \quad (2.52)$$

Da die axiale Mode an einen Nachweis gekoppelt ist, ist sie im Gleichgewicht mit einem thermischen Bad. Die Stärke der Kopplung kann über $\gamma_z = q^2 R / m D^2$ beschrieben werden, mit R dem Widerstand des Nachweises und D dem sogenannten effektiven Elektrodenabstand, vergleiche Kapitel 3. Es folgt, dass die Energie einer Boltzmann-Verteilung mit Temperatur T_z folgt. Über den Gleichverteilungssatz

$$\langle E \rangle = 2\pi^2 m \nu_z^2 \langle z_0^2 \rangle = k_B T_z \quad (2.53)$$

kann die mittlere quadratische Amplitude der axialen Mode

$$\langle z_0^2 \rangle = \frac{k_B T_z}{4\pi^2 m \nu_z^2} \quad (2.54)$$

bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\delta\nu_L = \frac{B_2}{B_0} \frac{k_B T_z}{8\pi^2 m \nu_z^2} \nu_L \quad (2.55)$$

für die Korrektur zu $\nu_{L,0}$. Der Parameter $\delta\nu_L$ wird Linienbreitenparameter genannt. Im Folgenden muss zwischen den Grenzfällen der schwachen Kopplung, $\gamma_z \ll \delta\nu_L$, und der starken Kopplung, $\gamma_z \gg \delta\nu_L$, unterschieden werden. Der Grenzfall der schwachen Kopplung ist für die Analysefalle gültig, während der Grenzfall der starken Kopplung auf die Präzisionsfalle anzuwenden ist.

⁶Entsprechendes gilt für die Frequenz der reduzierten Zyklotronmode und Magnetronmode.

2.7. DIE LINIENFORM DER LARMORRESONANZ IM INHOMOGENEN MAGNETFELD

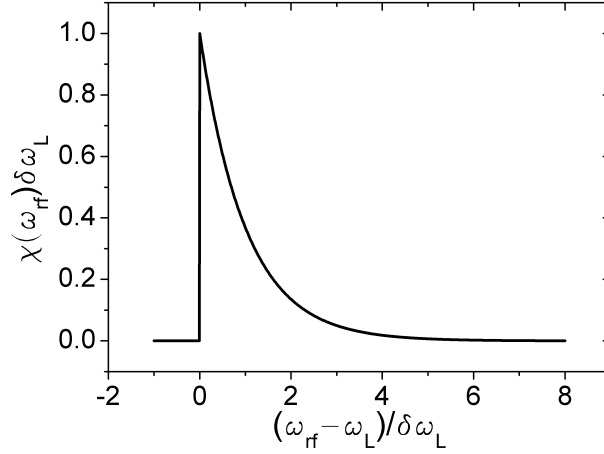


Abbildung 2.6: Linienprofil der Larmorresonanz in der Analysefalle. Die scharfe Kante spiegelt die unverschobene Larmorfrequenz wieder. Der exponentielle Abfall resultiert aus der thermischen Boltzmann-Verteilung der axialen Energie.

Grenzfall der schwachen Kopplung

Ist die Kopplung schwach, $\gamma_z \ll \delta\nu_L$, wird die quadratische Amplitude während der Zeit $1/\delta\nu_L$ nicht auf den Mittelwert $\langle z_0^2 \rangle$ relaxieren. Folglich kommt es auf Grund der endlichen Energierverteilung der axialen Mode, gekoppelt an das thermische Bad, zu einer Verbreiterung der Larmorresonanz. In [45, 46] wird das resultierende Linienprofil χ des Zweiniveausystems hergeleitet,

$$\chi_s(\nu) = \frac{\Theta(\nu - \nu_L)}{\delta\nu_L} \exp\left(-\frac{\nu - \nu_L}{\delta\nu_L}\right), \quad (2.56)$$

mit $\Theta(x)$ der Heaviside Funktion. Das Linienprofil ist in Abbildung 2.6 gezeigt. Nach einer scharfen Kante bei der unverschobenen Larmorfrequenz zu $E_z = 0$ ist ein exponentieller Abfall auf Grund der Boltzmann-Verteilung sichtbar. Für die Parameter dieses Experiments ergibt sich eine relative Linienbreite von $\delta\nu_L/\nu_L = 6 \cdot 10^{-4}$ bei einer absoluten Larmorfrequenz von $\nu_L = 50$ MHz.

Die Anregung von Spin-Übergängen erfolgt über das bekannte Prinzip von Rabi [47]. Es wird ein zirkulärpolarisiertes, magnetisches Wechselfeld mit Frequenz ν_{rf} und Amplitude b_{rf} senkrecht zum homogenen Magnetfeld B_0 eingestrahlt. Nach der Näherung der rotierenden Wellen sieht das Teilchen dann im mit $\nu_{rf} = \nu_L$ rotierenden Bezugssystem effektiv ein konstantes Magnetfeld in radialer Richtung, um das der Spin mit der Frequenz $\Omega_{rf} = 2\pi\nu_L b_{rf}/B_0$ präzidiert. Im Laborsystem kommt diese Präzision einem Spin-Flip in Richtung des homogenen Magnetfeldes

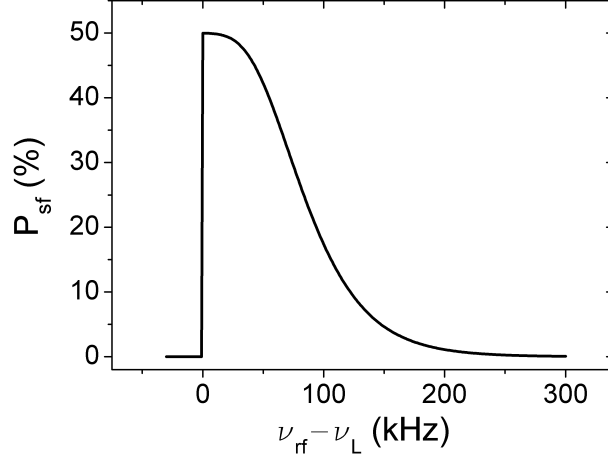


Abbildung 2.7: Larmorresonanz in der Analysefalle. Aufgetragen ist die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit gegen die Frequenz der externen Anregung ν_{rf} . Für das Beispiel wurden die typischen Parameter des Experiments von $T_z = 10\text{ K}$, $t_0 = 10\text{ s}$ und $b_{rf} = 2 \cdot \mu\text{T}$ gewählt.

gleich.

Nach [45, 46] folgt für die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit

$$P_{sf}(\nu_{rf}) = \frac{1}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{2} \Omega_{rf}^2 t \chi_s(\nu_{rf}) \right) \right), \quad (2.57)$$

mit t der Einstrahldauer der externen Anregung. In Abbildung 2.7 ist ein Beispiel einer Larmorresonanz gezeigt. Eine Erhöhung der Amplitude oder der Einstrahlzeit führt nach einer Sättigung der Resonanz auf eine Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von 50% zu einer Verbreiterung. Im Gegensatz hierzu wird bei einer Erniedrigung der axialen Temperatur T_z die Resonanz schmaler, da durch die geringere axiale Bewegungsamplitude ein kleinerer Feldbereich abgetastet wird. Folglich wird für eine präzise Messung der Larmorfrequenz in der magnetischen Flasche eine niedrige axiale Temperatur angestrebt.

Grenzfall der starken Kopplung

Im Gegensatz zur bisherigen Diskussion der schwachen Kopplung in der Analysefalle gilt in der Präzisionsfalle mit endlicher Inhomogenität B_2 , siehe Tabelle 2.1, der Grenzfall der starken Kopplung, $\gamma_z \gg \delta\nu_L$. Das resultierende Linienprofil kann ebenfalls [45, 46] entnommen werden. Es ergibt sich ein Lorentzprofil mit Breite

2.7. DIE LINIENFORM DER LARMORRESONANZ IM INHOMOGENEN MAGNETFELD

$\delta\nu_L^2/\gamma_z$ und um $\delta\nu_L = 1.5$ Hz verschobener Resonanzfrequenz,

$$\chi_w(\nu) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\delta\nu_L^2/\gamma_z}{(\nu - \nu_L - \delta\nu_L)^2 + (\delta\nu_L^2/\gamma_z)^2}. \quad (2.58)$$

Die Verschiebung des Linienprofils geht direkt in die über Gleichung 2.57 beobachtete Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion der Frequenz der externen Anregung ν_{rf} ein und würde bei $B_2T_z = 28 \text{ T/m}^2\text{K}$ zu einer systematischen Verschiebung des gemessenen g -Faktors von $\Delta g/g = 10^{-8}$ führen.

Um diese systematische Verschiebung zu vermeiden, wird die sogenannte *g-Faktor Resonanz* aufgenommen. Hierbei wird die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion des getesteten g -Faktors $g_t = 2\nu_{rf}/\nu_{c,m}$, mit $\nu_{c,m} = \nu_c + \Delta\nu_c(B_2)$ der durch die gleiche Inhomogenität verschobenen Zyklotronfrequenz, betrachtet. Der aus dieser Resonanz bestimmte g -Faktor weicht folglich nach Gleichung 2.49 um $\Delta g/g = 3 \cdot 10^{-12}$ vom wahren g -Faktor ab. Dies ist bei einer angestrebten Präzision von $\Delta g/g = 10^{-9}$ vernachlässigbar.

Kapitel 3

Nachweis der Teilchenbewegung

Die Bestimmung der Zyklotronfrequenz basiert auf der Messung der Eigenfrequenzen des Protons in der Penning-Falle. Zur Messung dieser Frequenzen nutzt man aus, dass mit der Bewegung des Ions eine Verschiebung einer Ladung verbunden ist. Als Folge werden Bildladungsströme in den Fallenelektroden induziert. Diese können zur Detektion der Bewegung des Ions und Messung der Frequenzen verwendet werden. Für den induzierten Strom gilt

$$I_{ind} = \frac{q}{D} \dot{z} = \frac{q}{D} \omega_z z. \quad (3.1)$$

Dieser Strom, welcher im fA-Bereich liegt, wird über eine hohe Impedanz Z in ein detektierbares Spannungssignal umgewandelt

$$U_{ind} = Z I_{ind}. \quad (3.2)$$

Hierbei geben z die axialen Koordinate des Ions und D den *effektiven Elektrodenabstand* an. Letzterer hängt sowohl von der Geometrie der Falle als auch der Elektrode, an welcher der induzierte Strom zur Messung abgegriffen wird, ab. Er beschreibt somit die Stärke der Kopplung des Ions an die Nachweisimpedanz Z . D lässt sich analytisch berechnen [48]. In der Präzisionsfalle beträgt der effektive Elektrodenabstand 7.8 mm und in der Analysefalle 10 mm.

Als Nachweisimpedanz Z wird ein Parallelschwingkreis verwendet, um die nicht vermeidbare Fallenkapazität zu kompensieren. Anschließend wird das Signal nachverstärkt und nach einer Fouriertransformation spektral untersucht. Das Ion bleibt während dieser Detektion ungestört in der Falle gespeichert, so dass eine zeitlich unbegrenzte, zerstörungsfreie Messung der Bewegungsfrequenzen möglich ist.

In Abschnitt 3.1 wird die Signalform des Detektionssignals und die damit verbundene Messgenauigkeit der Eigenfrequenz beschrieben. Anschließend wird in Abschnitt

3.2 die Seitenbandkopplung zur Messung der radialen Bewegungsfrequenzen vorgestellt. Der folgende Abschnitt 3.3 beschreibt die Nachweise zur Messung der axialen Frequenz. Schließlich wird in Abschnitt 3.4 die Technik des aktiven Feedback zur Manipulation der Teilchentemperatur vorgestellt.

3.1 Das Detektionssignal

3.1.1 Wechselwirkung des Ions mit seiner Spiegelladung

Auf Grund der Wechselwirkung des Ions mit seiner eigenen Spiegelladung erfährt dieses, analog dem Speicherpotential der Penning-Falle, eine zusätzliche Kraft

$$F_{ind} = \frac{q}{D} U_{ind}. \quad (3.3)$$

Folglich muss die Bewegungsgleichung des freien, ungedämpften, harmonischen Oszillators der Eigenbewegung erweitert werden. Es gilt

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z + \frac{F_{ind}}{m} = 0. \quad (3.4)$$

Hieraus folgt unter Verwendung der Relationen nach Gleichungen 3.1 und 3.2

$$\ddot{z} + \frac{q^2}{D^2 m} Z \dot{z} + \omega_z^2 z = 0. \quad (3.5)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines über die Detektionsimpedanz gedämpften harmonischen Oszillators. Die Linienform der dissipierten Leistung wird durch eine Lorentzkurve beschrieben, dessen Breite durch die Dämpfungskonstante γ_z charakterisiert ist

$$\Delta\nu_z = \frac{1}{2\pi} \gamma_z = \frac{1}{2\pi} \frac{q^2}{D^2 m} Z. \quad (3.6)$$

Die resultierende Frequenzverschiebung

$$\omega_z \rightarrow \sqrt{\omega_z^2 + \left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2} \cong \omega_z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_z}{2\omega_z}\right)^2\right) \quad (3.7)$$

ist mit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_z}{2\omega_z}\right)^2 < 10^{-11} \quad (3.8)$$

vollständig vernachlässigbar; siehe Tabelle 3.1 für die experimentellen Parameter. Sind N Protonen in der Falle gespeichert, so nimmt die Breite des Detektionssignals zu [49]

$$\Delta\nu_z = \frac{N}{2\pi} \gamma_z = \frac{N}{2\pi} \frac{q^2}{D^2 m} Z. \quad (3.9)$$

Die Proportionalität der Breite zur Teilchenzahl kann bei der Präparation eines einzelnen Protons ausgenutzt werden, um die Anzahl der gespeicherten Ionen zu bestimmen.

3.1.2 Die Signalform

Während ein angeregtes Proton Energie im Nachweis dissipiert und als Peak detektiert werden kann [50], ändert sich die Signalform für ein Proton im thermischen Gleichgewicht mit dem Nachweis. Um die Signalform im thermischen Gleichgewicht zu beschreiben, ist es für die weiteren Betrachtungen hilfreich in der Differentialgleichung 3.5 den induzierten Strom aus Gleichung 3.1 zu substituieren [51]. Es folgt

$$\frac{mD^2}{q^2} \dot{I}_{ind} + \frac{mD^2}{q^2} \omega_z^2 \int I_{ind} dt + Z I_{ind} = 0. \quad (3.10)$$

Dies ist die Differentialgleichung eines Serienschwingkreises mit

$$l_{ion} = \frac{mD^2}{q^2} \quad \text{und} \quad c_{ion} = \frac{q^2}{mD^2 \omega_z^2}. \quad (3.11)$$

Folglich kann das Ion als Serienschwingkreis beschrieben werden, vergleiche Abbildung 3.1. Die Gesamtimpedanz Z_s des Nachweissignals ergibt sich schließlich aus der Parallelschaltung des Serienschwingkreises des Ions Z_{ion} und des Parallelschwingkreises der Nachweisimpedanz Z_N

$$Z_s(\omega) = \frac{Z_N(\omega) Z_{ion}(\omega)}{Z_N(\omega) + Z_{ion}(\omega)} \quad (3.12)$$

mit

$$\frac{1}{Z_N(\omega)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C \quad (3.13)$$

der Nachweisimpedanz des Parallelschwingkreises und

$$Z_{ion}(\omega) = i\omega l_{ion} + \frac{1}{i\omega c_{ion}} \quad (3.14)$$

der Impedanz des Ions. Durch das gespeicherte Proton kommt es folglich auf der Eigenfrequenz $2\pi\nu_z = 1/\sqrt{l_{ion}c_{ion}}$ zu einem Kurzschluss der Nachweisimpedanz Z_N . Dieser Kurzschluss wird *Dip* genannt. Durch eine Kurvenanpassung der Signalform an den Dip kann die axiale Bewegungsfrequenz bestimmt werden.

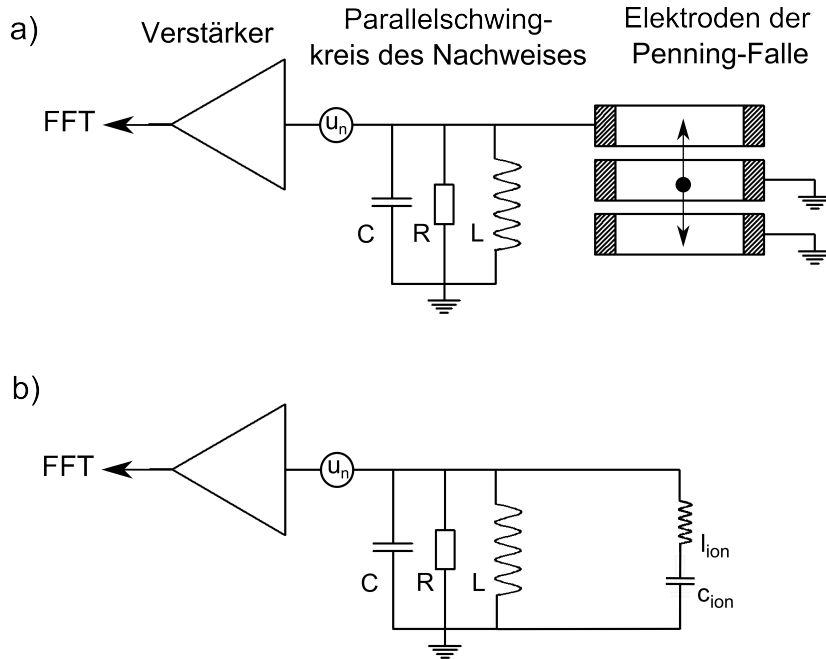


Abbildung 3.1: In a) ist eine schematische Darstellung des Detektionsprinzips zur Messung der Eigenfrequenzen eines Ions in einer Penning-Falle gezeigt. Der durch das Ion induzierte Strom wird über einen Serienschwingkreis in ein detektierbares Spannungssignal transformiert. Anschließend wird das Signal nachverstärkt und nach einer *Fast Fourier Transformation* (FFT) weiter untersucht. u_n bezeichnet das Eingangsrauschen des Verstärkers. In b) ist das äquivalente Ersatzschaltbild gezeigt. Das Ion kann als Serienschwingkreis verstanden werden.

3.1.3 Das Rauschspektrum

Experimentell wird das Rauschen der Impedanz Z_s zur Bestimmung der Eigenfrequenzen aufgenommen. Dies ermöglicht die Messung der Eigenfrequenz im thermischen Gleichgewicht mit dem Nachweis bei kryogenen Temperaturen von wenigen Kelvin. Somit werden Verschiebungen der Eigenfrequenzen auf Grund von Fallanharmonizitäten, welche bei höheren Temperaturen zunehmen, minimiert. Das detektierte Rauschen, im folgenden als Signal S bezeichnet, setzt sich aus dem Johnson-Nyquist-Rauschen der Impedanz Z_s sowie dem Eingangsrauschen des Verstärkers u_n zusammen, vergleiche Abbildung 3.1,

$$S^2 = 4k_b T_z \Re(Z_s) + u_n^2. \quad (3.15)$$

T_z bezeichnet die physikalische Temperatur des Nachweises. In Abbildung 3.2 ist ein Rauschspektrum des axialen Nachweises der Präzisionsfalle mit einem gespeicherten

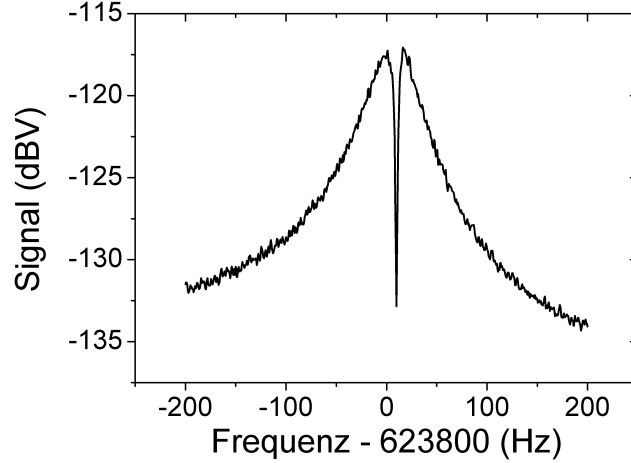


Abbildung 3.2: Spektrum des axialen Nachweises der Präzisionsfalle mit einem gespeichertem Proton. Um die Qualität des dargestellten Signals zu verbessern, wurde über 10 aufeinanderfolgende Rauschspektren gemittelt. Die breite Resonanz resultiert aus dem Johnson-Nyquist-Rauschen des Detektionsschwingkreises. Die leichte Asymmetrie ist auf das $1/f$ -Rauschen des Verstärkers zurückzuführen. Der scharfe Einbruch im Zentrum ist das Resultat des gespeichertem Protons, welches das Rauschen des Nachweises auf seiner Eigenfrequenz ν_z kurzschließt.

Proton gezeigt. Die breite Resonanz resultiert aus dem thermischen Rauschen der Nachweisimpedanz. Ihr Maximum liegt bei $\nu_{res} = 1/2\pi\sqrt{LC}$. Der scharfe Einbruch im Zentrum ist das Resultat des gespeichertem Protons, welches das Rauschen des Nachweises auf seiner Eigenfrequenz $\nu_z = 1/2\pi\sqrt{l_{ion}c_{ion}}$ kurzschließt. Durch das Eingangsrauschen des Verstärkers ist die Tiefe des detektierten Dips auf u_n begrenzt.

3.1.4 Präzision der Frequenzbestimmung

Um die Präzision der Frequenzbestimmung zu charakterisieren, werden basierend auf dem Impedanzmodell, Gleichung 3.12, Rauschspektren mit fest vorgegebener Eigenfrequenz $\nu_{z,0}$ des Ions simuliert. Anschließend wird die aus der Kurvenanpassung resultierende Frequenz $\nu_{z,fit}$ bestimmt. Die Streuung der $\nu_{z,0} - \nu_{z,fit}$, im folgenden als beobachtete Frequenzfluktuationen bezeichnet, kann dann als Maß für die Präzision der Frequenzbestimmung definiert werden. In Abbildung 3.3 sind die beobachteten Frequenzfluktuationen als Funktion der Dipbreite, Gleichung 3.6, und des Signal-zu-Rausch Verhältnisses, definiert als

$$\frac{S}{N} = \frac{\sqrt{4k_b T_z \Re(Z_N(\nu_{res}))} + u_n^2}{u_n} \quad (3.16)$$

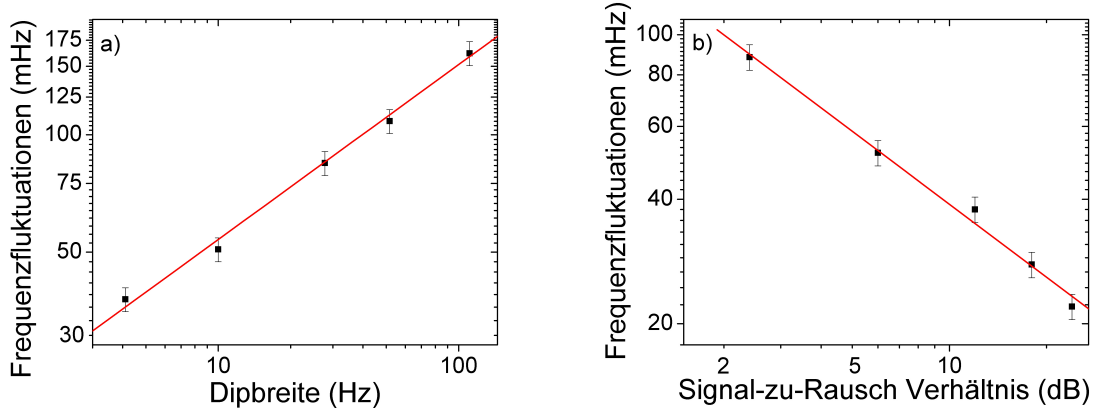


Abbildung 3.3: Präzision der Frequenzbestimmung basierend auf simulierten Rauschspektren. In a) sind die beobachteten Frequenzfluktuationen als Funktion der Dipbreite zu konstantem Signal-zu-Rausch Verhältnis gezeigt. Analog sind in b) die beobachteten Frequenzfluktuationen als Funktion des Signal-zu-Rausch Verhältnisses für konstante Dipbreite gezeigt. In die Simulation gehen die experimentellen Werte von $Q = 12500$, $R = 120 \text{ M}\Omega$ und $\nu_z = \nu_{res} = 742 \text{ kHz}$ ein. Um das Signal-zu-Rausch Verhältnis zu variieren wurde das Eingangsrauschen des Verstärkers u_n geändert. Die Dipbreite wurde über eine Variation des effektiven Elektrodenabstandes D geändert, vergleiche Gleichung 3.6. Für die Rauschspektren wurde bei einer Auflösung von 125 mHz eine Mittelungszeit von 200 s gewählt.

gezeigt. Es lässt sich erkennen, dass die Frequenz mit steigendem S/N und mit sinkender Dipbreite präziser bestimmbar ist. Aus einer Kurvenanpassung erhält man für die beobachteten Frequenzfluktuationen folgende Proportionalitäten, $\propto \sqrt{N/S}$ und $\propto \sqrt{\Delta\nu_z}$.

Um ein hohes S/N zu erhalten ist zum einen ein niedriges Spannungsrauschen des Verstärkers wünschenswert. Zum anderen sollte die Impedanz des Nachweisschwingkreises auf seiner Resonanzfrequenz möglichst groß sein. Letzteres bedeutet, dass bei gegebener Resonanzfrequenz $\nu_{res} = \nu_z$, daher gegebener Induktivität, eine Spule mit hoher Güte Q , dem Verhältnis aus gespeicherter Energie zu dissipierter Energie pro Oszillationszyklus, benötigt wird,

$$\Re(Z_N(\nu_{res})) = R = 2\pi\nu_{res}LQ. \quad (3.17)$$

Allerdings ist eine höhere Güte, daher eine höhere Impedanz, mit einer Zunahme der Dipbreite verbunden, vergleiche Gleichung 3.6. Dies kann kompensiert werden, indem ein größerer, effektiver Elektrodenabstand D zum Nachweis durch einen Signalabgriff an einer zum Fallenzentrum weiter entfernten Elektrode gewählt wird.

3.2. SEITENBANDKOPPLUNG - MESSUNG DER RADIALEN BEWEGUNGSFREQUENZEN

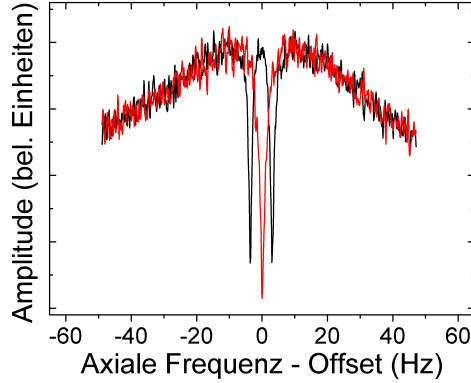


Abbildung 3.4: In rot ist das axiale Spektrum eines Einzeldips und in schwarz der Doppeldip bei einer Seitenbandkopplung der axialen Mode und der reduzierten Zyklotronmode gezeigt.

3.2 Seitenbandkopplung - Messung der radialen Bewegungsfrequenzen

Die Frequenzen der Magnetronmode und der reduzierten Zyklotronmode werden über eine Seitenbandkopplung an die axiale Mode bestimmt [52, 53, 23]. Hierzu wird ein Quadrupolfeld

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega_{rf}t) (z\hat{e}_\rho + \rho\hat{e}_z) \quad (3.18)$$

auf der Frequenz $\omega_{rf} = \omega_z + \omega_-$ für eine Messung der Magnetronfrequenz, beziehungsweise auf der Frequenz $\omega_{rf} = \omega_+ - \omega_z$ für eine Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz, eingestrahlt. E_0 gibt die Amplitude des elektrischen Feldgradienten an. Als Folge kommt es zu einer Amplitudenmodulation der axialen Bewegung

$$z(t) = z_0 \sin(\omega_z t) \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \quad (3.19)$$

mit

$$\Omega = \frac{qE_0}{2m\sqrt{\omega_z\omega_\pm}} \quad (3.20)$$

der Rabi-Frequenz. Im Frequenzraum ergeben sich hieraus zwei neue Eigenfrequenzen $\omega_{l,r} = \omega_z \mp \Omega/2$, im folgenden Doppeldip genannt, welche im axialen Spektrum beobachtet werden können, vergleiche Abbildung 3.4. Über die Messung der axialen Frequenz ω_z und der Frequenz der beiden Seitenbänder $\omega_{l,r} = \omega_z \pm \Omega/2$ kann auf

die Frequenz der radialen Mode zurückgeschlossen werden. Es gilt

$$\omega_+ = \omega_l + \omega_r - \omega_z + \omega_{rf} \quad (3.21)$$

$$\omega_- = -\omega_l - \omega_r + \omega_z + \omega_{rf} \quad (3.22)$$

für die Zyklotronmode und die Magnetronmode respektive. Somit können über die Detektion des axialen Spektrums alle Eigenfrequenzen des gespeicherten Protons bestimmt werden.

Ist die Quadrupolanregung gegenüber der resonanten Seitenbandeinstrahlung auf $\omega_{rf} = \omega_z + \omega_-$ beziehungsweise $\omega_{rf} = \omega_+ - \omega_z$ um δ verstimmt, sind die Eigenbewegungen mit der modifizierten Rabi-Frequenz $\Omega_\delta = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ moduliert und es kommt zu einer symmetrischen Verschiebung der Seitenbänder

$$\omega_l = \omega_z - \frac{\Omega_\delta}{2} - \frac{\delta}{2} \quad (3.23)$$

$$\omega_r = \omega_z + \frac{\Omega_\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \quad (3.24)$$

womit die über Gleichung 3.22 bestimmten radialen Eigenfrequenzen invariant gegenüber einer Verstimmung sind.

Bei einer kontinuierlichen Seitenbandkopplung der radialen Moden an die axiale Mode stellt sich ein Gleichgewichtszustand $\langle n_z \rangle = \langle n_\pm \rangle$ ein [32]. Hieraus folgt für die Energien der Moden

$$\langle E_+ \rangle = \frac{\omega_+}{\omega_z} \langle E_z \rangle, \quad (3.25)$$

$$\langle |E_-| \rangle = \frac{\omega_-}{\omega_z} \langle E_z \rangle. \quad (3.26)$$

Da die axiale Mode während der Seitenbandkopplung an den axialen Nachweis mit Temperatur T_z gekoppelt ist, bleibt die Energie der axialen Mode auf $\langle E_z \rangle = k_B T_z$ fixiert. Folglich kann mit einer Seitenbandkopplung an die axiale Mode die Energie der Magnetronmode $\langle |E_-| \rangle$ reduziert werden. Dagegen kommt es bei einer Kopplung der reduzierten Zyklotronmode an die axiale Mode zu einer Erhöhung der Energie $\langle E_+ \rangle$.

3.3 Experimentelle Realisierung des supraleitenden Axialnachweises

Auf Grund der nicht vermeidbaren Fallenkapazität werden Spulen mit Induktivität L_p , welche mit der Fallenkapazität einen Parallelschwingkreis mit Resonanzfrequenz ν_{res} bilden, zum Nachweis der Eigenbewegung des gespeicherten Ions verwendet. Dieser Schwingkreis soll einen möglichst hohen Parallelwiderstand $R_p = 2\pi\nu_{res}L_pQ$ besitzen, um die hohen Signal-zu-Rausch Verhältnisse zu erreichen, welche zur präzisen Messung der Frequenz gefordert sind. Um dies zu erreichen werden zum einen Spulen mit einer hohen Induktivität L_p benötigt. Zum anderen sollen die Spulen eine hohe Güte Q beziehungsweise einen kleinen äquivalenten Serienwiderstand $R_s = 4\pi^2\nu_{res}^2L^2/R_p$ besitzen. Um diese kleinen Serienwiderstände/hohen Güten zu erreichen, werden supraleitende Spulen mit einem verschwindenden Gleichstromwiderstand verwendet. Daneben werden für ein hohes Signal-zu-Rausch Verhältnis rauscharme Verstärker benötigt.

Im Experiment werden zwei axiale Nachweise, je einer für die Präzisionsfalle und einer für die Analysefalle, verwendet. Jeder Nachweis besteht aus einem Verstärker und einem Resonator mit der Nachweisinduktivität.

3.3.1 Aufbau der supraleitenden, axialen Resonatoren

Der schematische Aufbau der Resonatoren ist in Abbildung 3.5 gezeigt. Der Resonator besteht aus zwei toroidalen Spulen, welche sich in separaten supraleitenden Gehäusen, gefertigt aus Niob Titan (*NbTi*), befinden. Beide Gehäuse können über eine Schraubverbindung am Gehäuse aneinander befestigt werden. Separate Gehäuse wurden gewählt, um zum einen eine Wechselwirkung der beiden Spulen zu vermeiden und zum anderen beide Nachweise separat ausbauen zu können. Um Wirbelstromverluste und eine damit verbundene Gütelimitierung zu vermeiden, werden Toroidspulen verwendet. Die Spulen mit bis zu 800 Windungen eines einzelnen Teflon(*PTFE*)-isolierten supraleitenden NbTi Drahtes sind auf einen PTFE-Körper mit einem Außendurchmesser von 35 mm gewickelt. Raumtrenner auf der Außenseite der Spulenkörper garantierten dabei eine homogene Wicklung der Spulen. Obwohl das Volumen der Spulenkörper maximiert wurde, um eine hohe Induktivität zu erreichen, werden Spulen mit einer 3-lagigen Wicklung benötigt. Die resultierende Streukapazität beziehungsweise Eigenkapazität der Spulen wurde minimiert, indem die Spulen blockweise innerhalb der einzelnen Sektoren, welche durch die Raumtrenner geschaffen werden, gewickelt wurden. Da mit der Eigenkapazität dielektrische

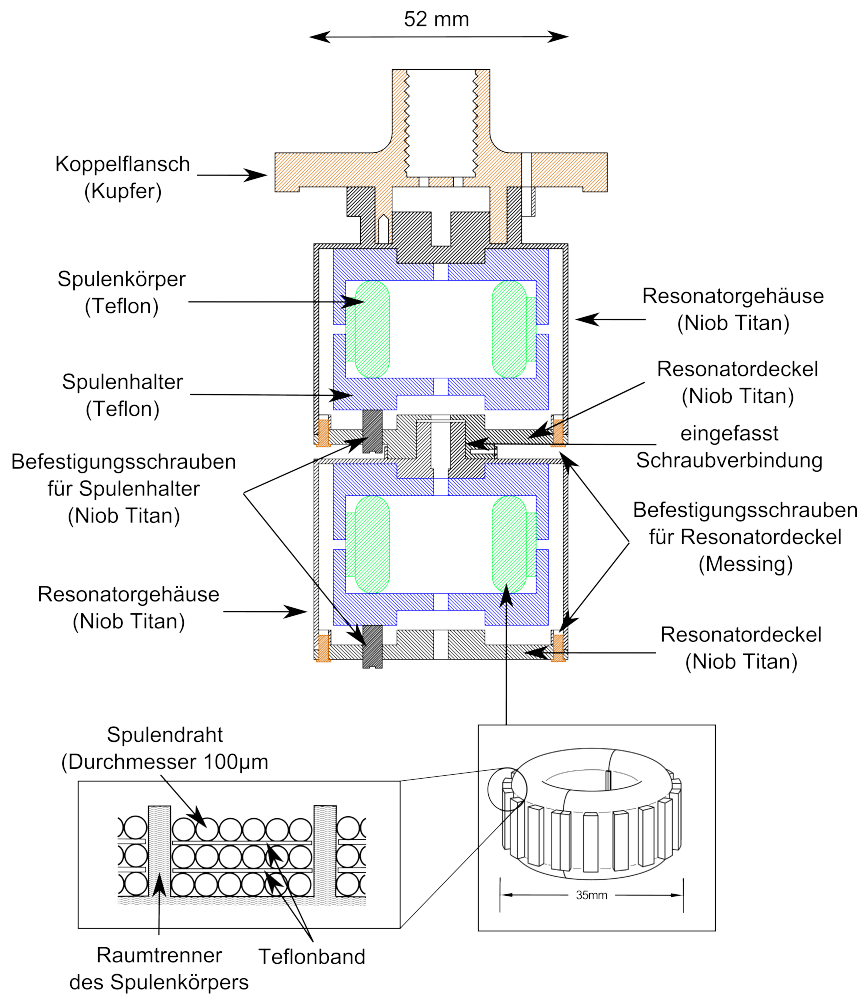


Abbildung 3.5: Schematische Darstellung der axialen Nachweise. Details finden sich im Text.

Verluste der Spule verbunden sind, reduziert diese Wicklungsart außerdem mögliche Verluste, daher eine Limitierung der Güte [54]. Um eine gute thermische Ankopplung des supraleitenden Drahtes zu garantieren, wurde jede Lage mit PTFE-Band fixiert. Dies reduziert ebenfalls die Streukapazität der Spule, daher eine mögliche Limitierung der Güte [55]. Die Spulen befinden sich in PTFE-Halterungen, über welche der thermische Kontakt hergestellt wird. Innerhalb der NbTi-Gehäuse werden die Halterungen mit NbTi-Madenschrauben befestigt.

Für Testmessungen werden die Resonatoren mit einem Pulsrohr-Kühler (*Vericold Technologies 4 K Pulse Tube*) auf 3 K abgekühlt.

3.3.2 Güte des unbelasteten Resonators

Um die freie Güte des Parallelschwingkreises aus Induktivität und Eigenkapazität der Spule mit Resonanzfrequenz $\nu_{res, frei}$ zu bestimmen, wird mit einem Netzwerkanalysator (*HP3755*) die Transferfunktion aufgenommen. Aus der 3dB Breite $\Delta\nu_{3dB}$ folgt für die Güte

$$Q = \frac{\nu_{res, frei}}{\Delta\nu_{3dB}}. \quad (3.27)$$

In [48] wurde berichtet, dass dielektrische Verluste im Isolationsmaterial der supraleitenden Spulendrähte die wesentliche Limitierung der Güte darstellen. Solche dielektrischen Verluste werden über effektive ohmsche Widerstände modelliert. Der sogenannte Verlustwinkel $\tan \delta$, das Verhältnis aus Wirkleistung zu Blindleistung, verknüpft diesen effektiven ohmschen Widerstand mit dem idealen verlustfreien Bauteil. Folglich gilt für eine nicht ideale Kapazität, wie der Eigenkapazität C der Spule,

$$R_{s,c} = \frac{\omega C}{\tan \delta} \quad (3.28)$$

mit $R_{s,c}$ dem effektiven Serienwiderstand zur Kapazität. Über eine einfache Impedanztransformation lässt sich dieser Serienwiderstand durch den experimentell zugänglichen Serienwiderstand R_s zur Induktivität ausdrücken. Es gilt

$$R_{s,l} = \frac{\omega^3 L_p^2 C_p \tan \delta}{1 + \tan^2 \delta}. \quad (3.29)$$

Man beachte, dass sich diese Relation auf der Resonanzfrequenz der Spule für typische Werte $\tan \delta \ll 1$ auf $Q \cong 1/\tan \delta$ reduziert. Folglich werden für Materialien mit niedrigeren Verlustwinkeln höhere Güten erwartet.

Es wurden Spulen mit einer FORMVAR-Isolierung und einer PTFE-Isolierung verglichen. Der FORMVAR-isolierte Draht hatte einen Durchmesser von $75 \mu\text{m}$ und der PTFE-isolierte $100 \mu\text{m}$. Beide Enden der Spule wurden an $500 \mu\text{m}$ starken Kupferdraht gelötet. Ein Ende wurde an Masse gelegt, während das zweite Ende über eine kleine Kapazität 0.3 pF (*Johanson Kondensator*) thermisch an der Masse verankert wurde.

Im Fall der FORMVAR-isolierten Spule wurde eine Induktivität von 1.64 mH bei einer Resonanzfrequenz von 1.578 MHz gemessen. Eine unbelastete Güte von 35000 wurde erreicht. Anschließend wurde die FORMVAR-isolierte Spule durch die PTFE-isolierten Spule mit einer Induktivität von 1.56 mH ausgetauscht. Mit dieser Spule

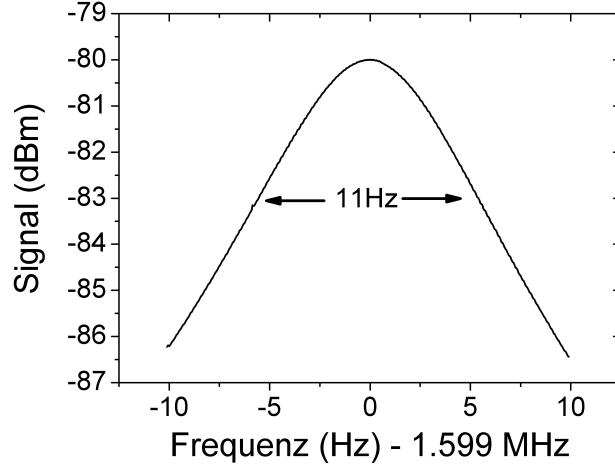


Abbildung 3.6: Resonanz der freien, PTFE-isolierten Spule. Aus der 3dB Breite von 11 Hz ergibt sich eine Güte von 148000.

wurde eine freie Güte von 148000 bei einer Resonanzfrequenz von 1.599 MHz erreicht¹, siehe Abbildung 3.6.

Aus der Güte der PTFE-isolierten Spule ergibt sich $\tan \delta = 6.7 \cdot 10^{-6}$. Dies ist in guter Übereinstimmung mit den bei kryogenen Temperaturen gemessenen Werten von $\tan \delta = 1.2 \cdot 10^{-6}$ bei einer Frequenz von 10 kHz [58] und $\tan \delta = 9.0 \cdot 10^{-6}$ bei einer Frequenz von 11 MHz [59]. Es wird daher angenommen, dass weitere Verlustmechanismen, wie Wirbelstromverluste an den rauen Oberflächen der Resonatorwände, nicht zu einer Limitierung der Güte beitragen.

Aus der Güte der FORMVAR-isolierten Spule ergibt sich $\tan \delta = 3 \cdot 10^{-5}$. Dieser Wert liegt unterhalb des einzigen bei kryogenen Temperaturen unabhängig bestimmten Wertes von $\tan \delta = 3 \cdot 10^{-4}$ [54]. Es wird angenommen, dass die PTFE-Bänder zur thermischen Ankopplung zwischen den Drahtwicklungen den effektiven Verlustwinkel verkleinern.

Die mit der freien, PTFE-isolierten Spule erreichte Güte liefert einen so hohen Parallelwiderstand, $R_p = 2 \text{ G}\Omega$, dass die Impedanz der gesamten Nachweiselektronik inklusive Verstärker ausschließlich durch den Eingangswiderstand des Verstärkers limitiert ist (siehe die beiden folgenden Abschnitte). Daher ist im Rahmen dieser Arbeit eine weitere Optimierung der Güte zunächst nicht erforderlich. Sollte dennoch eine Erhöhung der freien Güte angestrebt werden, so wäre ein erster Schritt

¹Die in dieser Arbeit optimierten Spulen wurden mittlerweile in anderen Penning-Fallen Experimenten, z.B. BASE [15], ALPHA-Trap oder PENTATRAN [56, 57], übernommen.

3.3. EXPERIMENTELLE REALISIERUNG DES SUPRALEITENDEN AXIALNACHWEISES

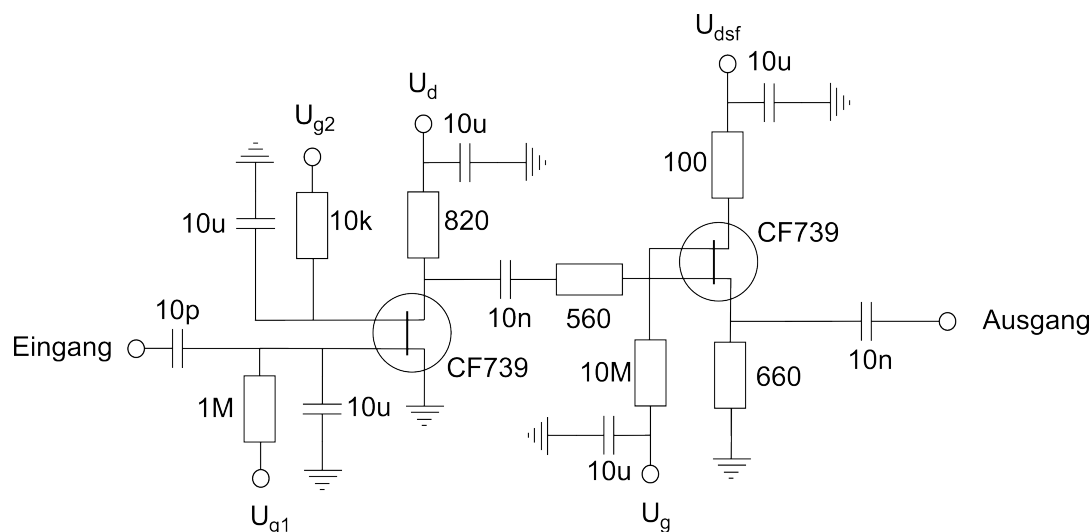


Abbildung 3.7: Schematische Darstellung des kryogenen Verstärkers.

die Reduzierung der verwendeten PFTE-Menge, um so die dielektrischen Verluste zu minimieren. Hierzu wäre es denkbar, Spulenkörper aus Saphir anzufertigen.

3.3.3 Der Verstärker

Um das Signal zu verstärken und die Impedanz des Nachweiskreises an die Impedanz der FFT-Analysatoren anzupassen, werden Verstärker verwendet. Zum einen sollen diese Verstärker einen möglichst großen Eingangswiderstand R_{in} besitzen, um die Güte der Spule nicht zu limitieren. Zum anderen sollen sie ein geringes Rauschen besitzen, um ein möglichst großes Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu erreichen. Um letzteres zu unterstützen werden die Verstärker im kryogenen Bereich betrieben. Der Betrieb neben den Resonatoren reduziert außerdem parasitäre Kapazitäten durch lange Kabelwege, welche niedrigere Induktivitäten bei gegebener Resonanzfrequenz $\nu_{res} = \nu_z$ erfordern würden. Schließlich soll der Leistungsverbrauch der Verstärker möglichst gering sein, um eine Heizung der kryogenen Apparatur zu vermeiden.

Eine schematische Zeichnung der Verstärker ist in Abbildung 3.7 gezeigt. Das Design der Verstärker basiert auf einer Entwicklung von S.Ulmer [48]. Die Eingangsstufe des Verstärkers bildet ein CF739 Feld Effekt Transistor (FET), welcher auf Grund seines niedrigen Rauschens ausgewählt wurde. Als Gallium Arsenid Transistor arbeitet dieser bei kryogenen Temperaturen, während die Ladungsträger bei Transistoren, welche auf Siliziumverbindungen basieren, ausfrieren würden. Der CF739 ist als Dual-Gate FET, daher einer integrierten Reihenschaltung zweier Transisto-

ren, konzipiert. Dies erlaubt die Unterdrückung des parasitären Miller-Effekts und den Einsatz des Transistors bei hohen Frequenzen. Die zweite Stufe des Verstärkers bildet ebenfalls ein *CF739* in Source-Schaltung. Dies erlaubt eine Impedanzanpassung des Nachweissystems an die $50\ \Omega$ Leitungen der Raumtemperaturelektronik. Alle Versorgungsspannungen werden über einfache *RC*-Glieder gefiltert. Bei kleinen Kapazitäten im *pF*-Bereich handelt es sich um Johanson Kondensatoren hoher Güte, während für die μF -Kondensatoren *ECHU*-Folienkondensatoren verwendet werden. Bei den Widerständen handelt es um einfache Dünnschichtwiderstände.

Der Verstärker wurde bei 4 K getestet. Es wurde eine Spannungsverstärkung von 12 dB erreicht, während der Leistungsverbrauch bei verträglichen 6 mW liegt. Bei der im Experiment durch die Fallkapazität $C_p = 20\ \text{pF}$ verstimmt Resonanzfrequenz des Nachweises, $\nu_{res} = 780\ \text{kHz}$, beträgt die äquivalente Spannungsrauschdichte am Eingang des Verstärkers $u_n = 0.9\ \text{nV}/\text{Hz}^{0.5}$. Durch Anschließen der Nachweisspule an den Eingang des Verstärkers können der Eingangswiderstand R_{in} und die Eingangskapazität C_{in} über die Verstimmung der Resonanzfrequenz und die Limitierung der Güte bestimmt werden. Es ergeben sich $R_{in} = 6\ \text{M}\Omega$ und $C_{in} = 2\ \text{pF}$.

Daneben besitzt der Verstärker ein Stromrauschen. Um dieses Stromrauschen i_{in} im fA-Bereich in ein detektierbares Spannungsrauschen umzuwandeln muss ein hochohmiger Widerstand am Eingang des Verstärkers angeschlossen werden. Ebenfalls wird der Parallelschwingkreis der Nachweisspule verwendet. Für das gemessene Gesamtrauschen $u_{n,tot}$ gilt

$$u_{n,tot}^2 = u_n^2 + 4k_B T R_{p,amp} + i_{in}^2 R_{p,amp}^2, \quad (3.30)$$

mit $R_{p,amp} = 2\pi\nu_{res,amp} Q L_p$ dem Parallelwiderstand auf der durch C_{in} verstimmt Resonanzfrequenz der Nachweisspule und T deren Temperatur. Während u_n und R_p unabhängig bestimmt werden können, kann für T nur eine untere Grenze, die Temperatur an der kalten Stufe des Pulsrohrkühlers, angegeben werden. Eine direkte Temperaturmessung an der Nachweisspule ist nicht möglich. Folglich lässt sich nur eine obere Grenze zum Stromrauschen von $< 5\ \text{fA}$ angeben.

3.3.4 Rauschanpassung

Um ein ideales Signal-zu-Rausch Verhältnis des Nachweises zu erreichen, muss der Verstärker von den Detektionsspulen abgekoppelt werden. Hierbei muss zwischen der Detektion eines Dips im thermischen Gleichgewicht mit dem Nachweis und eines Peaks, daher eines angeregten Protons, unterschieden werden.

Abbildung 3.8 gibt eine detaillierte Beschreibung des Nachweissystems. Das Ion

3.3. EXPERIMENTELLE REALISIERUNG DES SUPRALEITENDEN AXIALNACHWEISES

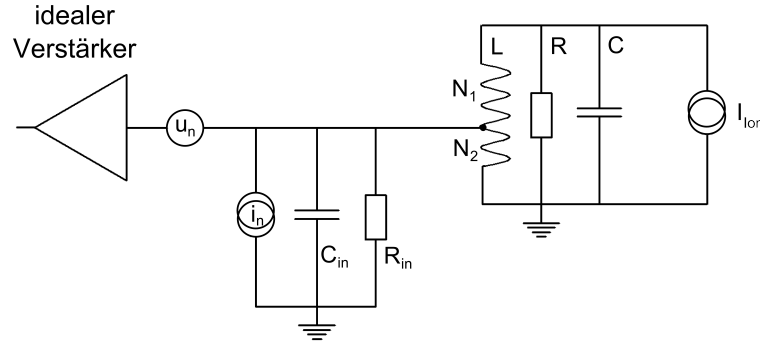


Abbildung 3.8: Detaillierte schematische Darstellung des Nachweises.

induziert einen Strom I_{Ion} in die Nachweispule, welche als Parallelschwingkreis mit Induktivität L , Kapazität C und Parallelwiderstand R modelliert wird. Die Spule ist über einen Autotransformator vom Verstärker abgekoppelt. Für den Abkoppelungsfaktor α gilt

$$\alpha = \frac{N_2}{N_1 + N_2}, \quad (3.31)$$

mit $N_{tot} = N_1 + N_2$ der Gesamtzahl an Wicklungen der Spule. Der Verstärker besitzt einen Eingangswiderstand R_{in} , eine Eingangskapazität von C_{in} , ein Spannungsrauschen von u_n sowie ein Stromrauschen von i_n parallel zum RC -Glied.

Auf der Resonanzfrequenz der Nachweisimpedanz ergibt sich hieraus für den Gesamtwiderstand R , welcher zur Umwandlung des induzierten Stromes in das Spannungssignal zur Verfügung steht,

$$R = \frac{1}{\alpha^2} \frac{R_p R_{in}}{R_p + R_{in}/\alpha^2}. \quad (3.32)$$

Folglich gilt für die detektierbare Spannung des Ionensignals

$$U_{ind} = \alpha R I_{Ion}, \quad (3.33)$$

welches als Signal der Peak-Detektion definiert werden kann. Das Rauschen zu diesem Signal ist durch das thermische Rauschen des Widerstands R sowie dem Spannungsrauschen des Verstärkers gegeben, so dass für das Signal-zu-Rausch Verhältnis

$$SNR_{Peak}^2 = \frac{U_{ind}^2}{4k_B RT \alpha^2 + u_n^2 + R^2 \alpha^4 i_n^2} \quad (3.34)$$

geschrieben werden kann [60]. Dieses Signal-zu-Rausch Verhältnis kann bei geeigneter Wahl der Abkopplung α maximiert werden. Für den idealen Abkopplungsfaktor

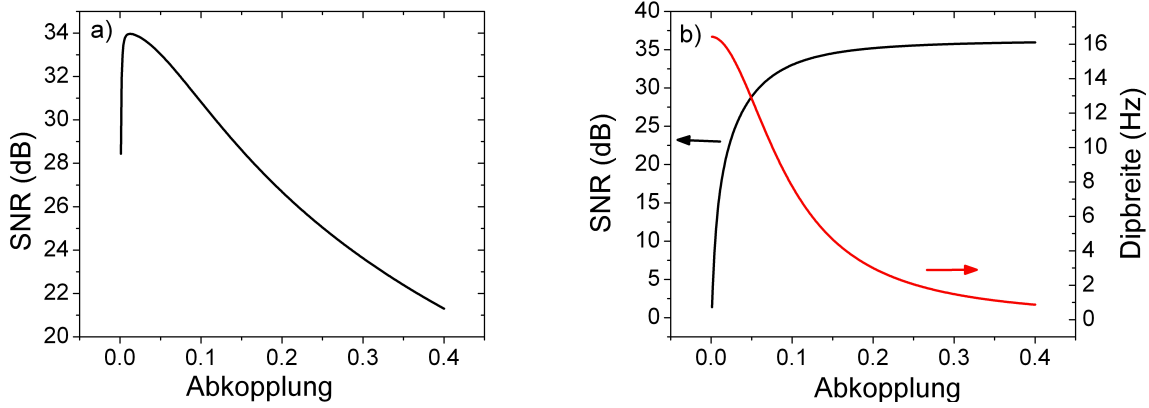


Abbildung 3.9: Theoretisch erreichbare Signal-zu-Rausch Verhältnisse für die Peak-Detektion (a) und die Dip-Detektion (b) als Funktion der Abkopplung der Nachweisspule vom Verstärker. Das erreichbare Signal bei der Peak-Detektion ist proportional zur Energie des angeregten Ions. In a) wurde eine Energie von 86 meV gewählt. In b) ist neben dem Signal-zu-Rausch Verhältnis die erwartete Dipbreite gezeigt. Zur Berechnung der Dipbreite wurde der effektive Elektrodenabstand der Analysefalle von 10 mm angenommen.

gilt

$$\alpha_{ideal} = \left(\frac{u_n^2}{i_n^2 R_p^2 + 4k_B T R_p^2 / R_{in} + R_p^2 / R_{in}^2 u_n^2} \right)^{1/4}. \quad (3.35)$$

Im Gegensatz hierzu wird das Signal-zu-Rausch Verhältnis für eine Detektion des Dips über das Verhältnis aus dem Rauschuntergrund u_n des Verstärkers und dem thermischen Rauschen im Maximum der Nachweisimpedanz definiert. Es gilt

$$SNR_{Dip}^2 = \frac{4k_B T R \alpha^2 + R^2 \alpha^4 i_n^2 + u_n^2}{u_n^2}. \quad (3.36)$$

Dieses Signal-zu-Rausch Verhältnis steigt monoton als Funktion der Abkopplung α an.

In Abbildung 3.9 sind die erreichbaren Signal-zu-Rausch Verhältnisse sowohl für die Peak als auch Dip-Detektion gezeigt. Während für eine Peak-Detektion eine starke Abkopplung gewählt werden sollte, begünstigt eine schwache Abkopplung die Dip-Detektion. Für typische Werte $R_{in} \ll R_p$ ist das S/N der Dip-Detektion nach Gleichung 3.36 durch den Eingangswiderstand limitiert, $R \rightarrow R_{in}$ für $\alpha \rightarrow 1$.

Basierend auf diesen Berechnungen wurde für die Analysefalle eine Abkopplung von $\alpha = 0.2$ gewählt. Dies führt bei der Dip-Detektion zu einer vernachlässigbaren Limitierung des erreichbaren Signal-zu-Rausch Verhältnisses sowie einer kleinen

3.3. EXPERIMENTELLE REALISIERUNG DES SUPRALEITENDEN AXIALNACHWEISES

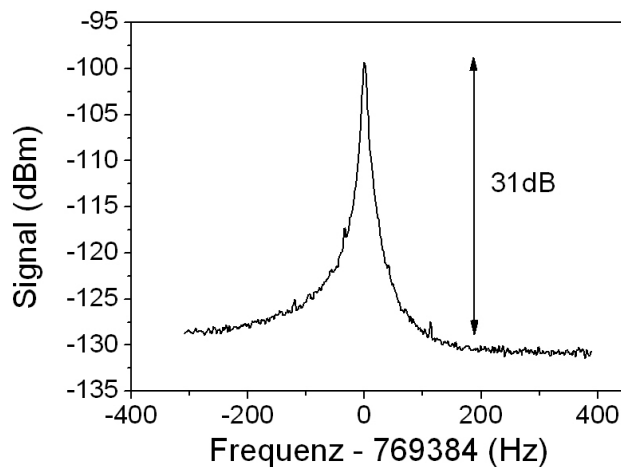


Abbildung 3.10: Rauschspektrum des axialen Nachweises. Die Resonanzfrequenz wurde mit einer Testfalle auf die im Experiment vorliegende Eigenfrequenz des Ions verstimmt. In der Messung an einem separaten Teststand konnte ein Signal-zu-Rausch-Verhältnis von 31 dB bei einer Güte von 38000 erreicht werden.

Dipbreite, so dass eine präzise Messung der Frequenz bei der Spin-Flip-Detektion möglich ist. Im Gegensatz hierzu besitzt der Nachweis in der Präzisionsfalle eine Abkopplung von 0.1, um spätere in dieser Arbeit nicht verwendete Phasenmessungen der reduzierten Zyklotronfrequenz über die *Pulse-and-Amplify* Methode [61, 62] oder die *Pulse-and-Phase* Methode [63] zu begünstigen. In Abbildung 3.10 ist das Rauschspektrum des Nachweissystems gezeigt. In dieser Messung an einem separaten Teststand² konnte bei einer Güte von 38000 das erwartete Signal-zu-Rausch-Verhältnis von 31 dB erreicht werden.

Im experimentellen Aufbau an der gesamten Apparatur konnten die in den Testmessungen erreichten Güten nicht reproduziert werden. In den Testmessungen wurden Limitierungen der freien Spulen-Güte um bis zu einen Faktor 2 beobachtet, indem die Signalleitungen nahe einer Massefläche geführt wurden. Es wird daher angenommen, dass parasitäre, kapazitive Kopplungen auf dem Signalweg von der Penning-Falle zu den Spulen zur Limitierung führen.

Tabelle 3.1 gibt eine Zusammenfassung der Nachweisparameter am Experiment.

²Für kryogene Testmessungen werden die Resonatoren mit einem Puls-Rohr-Kühler (*Vericold Technologies - 4K Pulse Tube*) abgekühlt. Details zum Teststand finden sich in [64].

Tabelle 3.1: Parameter der axialen Nachweise

Parameter	Präzisionsfalle	Analysefalle
Wicklungen	1200	950
L_p	2.65 mH	1.91 mH
Q	12500	9500
α	0.1	0.2
R_p	130 M Ω	85 M Ω
ν_{res}	623 kHz	742 kHz
S/N	20 dB	25 dB
D	7.8 mm	10 mm
γ_z	34 Hz	13 Hz

3.4 Manipulation der Teilchentemperatur über aktives Feedback

Aktives Feedback, beschrieben in [65], gehört mit zu den am häufigsten eingesetzten Techniken, welche im Experiment verwendet werden, da über Feedback die Teilchentemperatur manipuliert werden kann [66].

In Abbildung 3.11 ist der schematische Aufbau der verwendeten Feedbackschleife gezeigt. Das Detektionssignal wird über einen Phasenschieber und einen variablen, spannungsgesteuerten Abschwächer (VCA - voltage controlled attenuator) kapazitive auf den Nachweis, hier als einfacher Widerstand R modelliert, rückgekoppelt. Über den Phasenschieber kann die Phase des Feedbacksignals auf $\pm = 180^\circ$ für positives beziehungsweise negatives Feedback eingestellt werden. Der Abschwächer dient der Manipulation der Feedbackstärke G_f .

Um den Einfluss dieser Feedbackschleife zu beschreiben, lässt sich die über den Widerstand R abfallende Spannung betrachten. Es gilt

$$V = IR \pm +IRG_f = IR(1 \pm G_f) \quad (3.37)$$

mit $+$ für positives Feedback und $-$ für negatives Feedback, respektive. Folglich gilt für den effektiven Widerstand R_{eff} mit Feedback

$$R_{eff} = R(1 \pm G_f). \quad (3.38)$$

Betrachtet man die Rauschspannung u_n mit Feedback, so folgt für diese

$$u_n^2 = 4k_bTR \pm 4k_bTRG_f, \quad (3.39)$$

3.4. MANIPULATION DER TEILCHENTEMPERATUR ÜBER AKTIVES FEEDBACK

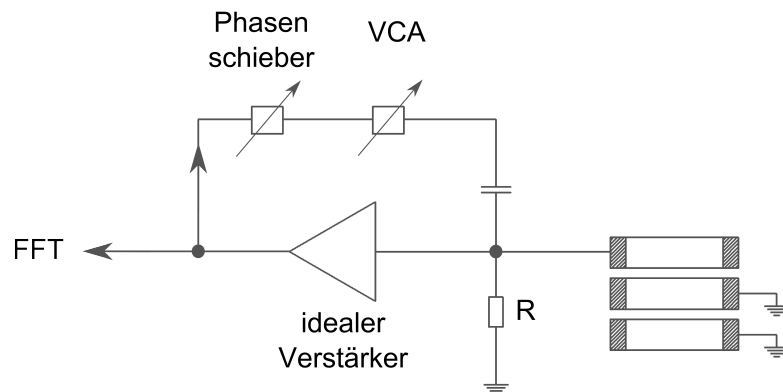


Abbildung 3.11: Schematische Darstellung der Feedbackschleife. Das Nachweissignal wird über einen Phasenschieber und einen spannungsgesteuerten Abschwächer (VCA) kapazitiv auf den Nachweis rückgekoppelt. Die Nachweisimpedanz wird hier als einfacher Widerstand modelliert.

und nach Verwendung von Gleichung 3.38

$$u_n^2 = 4k_b R_{eff} T (1 \pm G_f). \quad (3.40)$$

Folglich kommt es zu einer Variation der effektiven Temperatur $T_{eff} = T(1 \pm G_f)$ des Nachweises und damit des an den Nachweis gekoppelten Ions mit der Feedbackstärke G_f . Insbesondere kann die Temperatur des Ions über negatives Feedback unter die physikalische Temperatur der Apparatur gekühlt werden. Dies wird bei der Beobachtung einzelner Spin-Flips in der Analysefalle von Bedeutung sein, siehe Kapitel 7.

Im realen Experiment muss zusätzlich das Rauschen des Verstärkers berücksichtigt werden, so dass nicht beliebig niedrige Temperaturen erreicht werden können. Eine ausführliche Beschreibung des elektronischen Feedbacks unter Berücksichtigung des Verstärkerrauschens kann in [67, 68] gefunden werden.

Kapitel 4

Experimenteller Aufbau

Die zentralen Komponenten des experimentellen Aufbaus bilden die Penning-Falle, bestehend aus dem supraleitenden Magneten und den Fallenelektroden sowie die kryogenen Nachweise zur Detektion der Bewegungsmoden des gespeicherten Protons. Daneben werden zur erfolgreichen Bestimmung des g -Faktors des Protons viele weitere Komponenten benötigt. Dies beinhaltet stabile, hoch-präzise und variable Spannungsquellen zur Erzeugung des elektrischen Speicherpotentials oder einen Flüssig-Helium-Kryostaten, welcher die im Experiment benötigten kryogenen Temperaturen liefert. In diesem Kapitel wird ein Überblick über diese und weitere Komponenten des experimentellen Aufbaus gegeben.

4.1 Überblick über die experimentelle Apparatur

In Abbildung 4.1 ist der experimentelle Aufbau des Mainzer g -Faktor Experiments gezeigt. Die Elektroden der Penning-Falle befinden sich im Zentrum eines supraleitenden Magneten. Der Magnet besitzt eine horizontale, einseitig geöffnete, warme Bohrung von 88 mm Durchmesser; seine Magnetfeldstärke ist $B_0 = 1.899$ T.

Die kryogenen Temperaturen werden von einem Badkryostaten bereitgestellt, welcher eine erste, mit flüssigen Stickstoff betriebene Stufe und eine zweite, mit flüssigen Helium betriebene Stufe besitzt. Die erste Stufe erfüllt zwei Aufgaben. Zum einen dient sie der mechanischen Stabilisierung der zweiten Stufe, zum anderen reduziert sie die thermische Strahlungsbelastung auf die zweite Stufe. Mit der ersten Stufe werden in der Umgebung der Falle bei einer Wärmelast von 5 W Temperaturen von 100 K erreicht. Die Elektroden der Penning-Falle und die Nachweise sind an die zweite Stufe angekoppelt. Bei einer Wärmelast von 100 mW werden typischerweise Tempe-

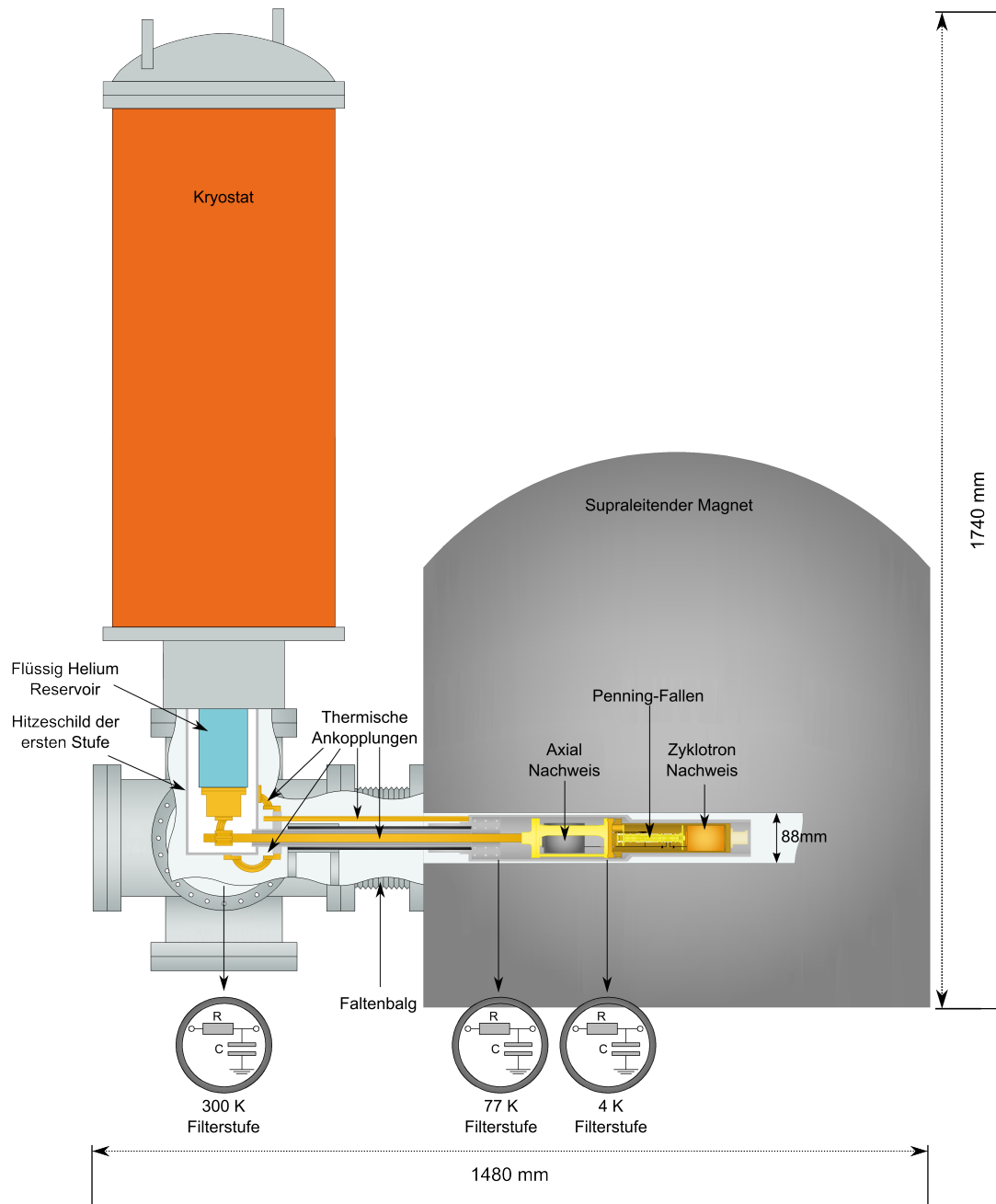


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus [20].

4.1. ÜBERBLICK ÜBER DIE EXPERIMENTELLE APPARATUR

raturen von 5.2 K an der Falle/Nachweise erreicht.

Um das Experiment bei kryogenen Temperaturen betreiben zu können, wird ein Isoliervakuum und damit verbunden ein räumlicher Abschluß der Apparatur gegen die Umgebung benötigt. Hierzu werden die inneren zugänglichen Volumina des Badkryostaten sowie die Bohrung des Magneten mit einem flexiblen Faltenbalg und einem CF-200 6-fach Kreuz zu einem geschlossenen Volumen verbunden, in dem bei kryogenem Betrieb Drücke von $5 \cdot 10^{-8}$ mbar erreicht werden.

Das CF-200 Kreuz ist auf einem aus Aluminium gefertigten Justagetisch gelagert, welcher eine Einstellung in Neigung und Höhe der Apparatur gegen den Magneten erlaubt. Der Justagetisch seinerseits ist parallel zur Bohrung des Magneten verschiebbar. Zusammen wird somit eine in alle Raumrichtungen beliebige Justage der experimentellen Apparatur, insbesondere der Fallenelektroden der Penning-Falle, gegenüber dem Magneten möglich.

Mechanisch wird die erste Stufe des Experiments gegen das 6-fach Kreuz mit einem GFK-Rohr auf Höhe des Faltenbalgs gehalten. Die zweite Stufe der Apparatur ist wiederum an der ersten Stufe mit Kevlarfäden aufgehängt. Letzteres liefert mit einer Last von 60 mW den höchsten Beitrag zur Wärmelast an der zweiten Stufe. Eine detaillierte Beschreibung der kryogenen Mechanik kann in [64] gefunden werden.

Die Gesamtlast auf die zweite Stufe beträgt 100 mW. Um dennoch eine experimentell ausreichend lange Standzeit zu gewährleisten, müssen vergleichsweise große Reservoirs für die kryogenen Flüssigkeiten verwendet werden. So fassen sowohl das Reservoir für flüssigen Stickstoff als auch das Reservoir für flüssiges Helium je 35 l. Im laufenden Betrieb betragen die Standzeiten für Stickstoff 3 Tage beziehungsweise 5 Tage für Helium, vergleiche Abbildung 4.2.

Zusammen mit einem Zyklotronnachweis [69] befinden sich die Elektroden der Penning-Falle in einer gegen das Isoliervakuum abgeschlossenen Fallenkammer. Diese Fallenkammer ist über einen hoch-reinen, geglühten Kupferstab mit der zweiten Stufe des Badkryostaten verbunden. Um mechanischen Kräften, die durch sich ändernde Längen der verwendeten Werkstücke beim Abkühlen der Apparatur entstehen können, entgegenzuwirken, werden alle thermischen Ankopplungen an den Badkryostaten über flexible Bänder aus hochreinem Kupfer entlastet.

Die gesamte Apparatur ist von einer Holzbox umgeben, um die Temperatur aktiv auf 40 mK zu stabilisieren. Ebenfalls über eine PID-Reglung werden die Drücke der flüssigen Helium Reservoirs des Magneten und des Badkryostaten auf 0.002 mbar stabilisiert ¹.

¹Die Druckstabilisierung wurde im Rahmen der Diplomarbeit von Clemens Leiteritz aufgebaut [70].

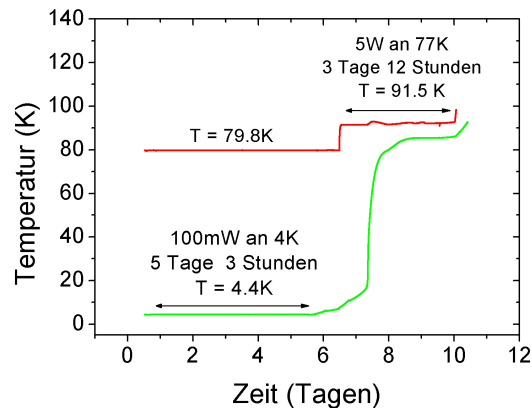


Abbildung 4.2: Testmessung zur Standzeit des Badkryostaten. Aufgetragen gegen die Zeit sind die Temperaturen der ersten Stufe (rot) und zweiten Stufe (grün), welche am Hitzeschild der ersten Stufe beziehungsweise an der thermischen Ankopplung der zweiten Stufe erreicht wurden. Um die Wärmelast der Apparatur zu simulieren, wurde über Heizwiderstände Leistung dissipiert.

4.2 In der Fallenkammer

Den innersten Teil des experimentellen Aufbaus bildet die Fallenkammer mit den beiden Penning-Fallen. In Abbildung 4.3 ist eine schematische Zeichnung der Fallenkammer gezeigt.

Sowohl die Präzisionsfalle als auch die Analysefalle besteht aus 5 Elektroden, einer Ringelektrode, zwei Korrektorelektroden und zwei Endkappen. Der Radius der Analysefalle ist im Vergleich zur Präzisionsfalle geringer, um so das ferromagnetische Material der Ringelektrode nahe zum Fallenzentrum zu bringen und eine starke magnetische Flasche zu erzeugen. Die beiden Penning-Fallen haben einen Abstand von 45 mm und sind über Transportelektroden verbunden, mit welchen ein adiabatischer Transport des Protons zwischen den Fallen möglich ist. Die Transportelektroden verjüngen sich zur Analyse Falle hin, um die unterschiedlichen Radien der Fallen anzupassen.

Alle Elektroden sind zylindersymmetrisch und aus sauerstofffreiem elektrolysiertem Kupfer hergestellt. Um eine mögliche Oxidation der Elektroden zu vermeiden, werden diese elektrolytisch mit einer Schichtdicke von $5 \mu\text{m}$ vergoldet. Eine Sperrschicht aus Silber, im Fall der Transportelektroden sowie der Elektroden der Präzisionsfalle, beziehungsweise eine Sperrschicht aus Nickel, im Fall der Analysefalle, verhindert

4.2. IN DER FALLENKAMMER

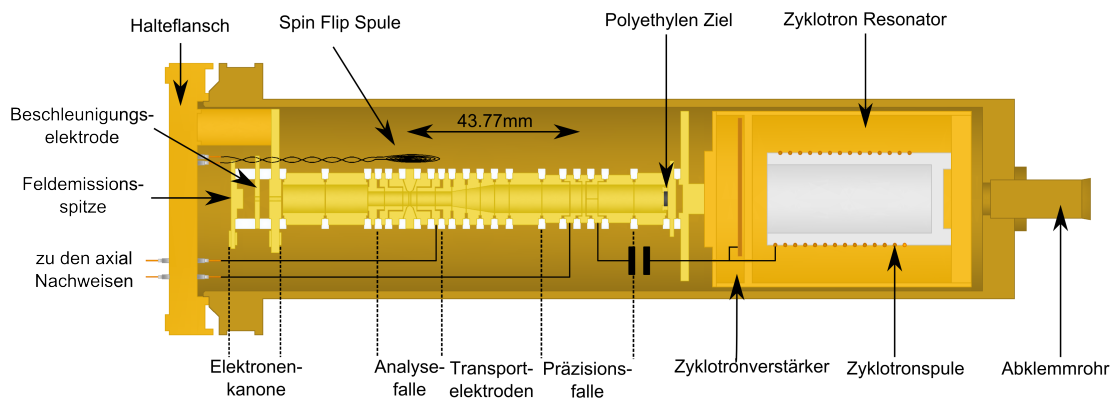


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus innerhalb der Fallenkammer [20]. Auf der linken Seite der Abbildung ist der Fallenturm mit der Analysefalle, der Präzisionsfalle, den Transportelektroden sowie der Elektronenkanone gezeigt. Auf der rechten Seite der Abbildung ist der Zyklotronnachweis, bestehend aus einem Kupferresonator, einer Zylinderspule und einem Verstärker, zu sehen.

eine Diffusion der Goldschicht in das Kupfermaterial². Vor der Vergoldung werden die Elektroden, welche mit einer Präzision von $\leq 3 \mu\text{m}$ hergestellt wurden, zusätzlich poliert.

Die einzelnen Elektroden sind durch Ringe aus Saphir, einem guten thermischen Leiter mit niedrigem dielektrischem Verlustwinkel und hohem elektrischem Widerstand [71, 72, 73], elektrisch voneinander getrennt. Der aus den Elektroden und den Saphirringen gebildete Turm wird mit Kupferbolzen gegen einen massiven Halteflansch fixiert. In diesen Flansch sind elektrische Durchführungen eingelötet, über welche alle Versorgungsspannungen und Signalleitungen in die abgeschlossene Fallenkammer geführt werden. Dazu zählen ebenfalls die Verbindungsleitungen von den Fallenelektroden zu den axialen Nachweisen, welche sich außerhalb der Fallenkammer befinden.

Auf Grund der parasitären Eigenkapazität der Durchführung kommt es zu dielektrischen Verlusten im Isolationsmaterial der Durchführungen. Herkömmliche Durchführungen verwenden multikristalines Al_2O_3 als Isolationsmaterial. Für diese Durchführungen wurde ein effektiver Parallelwiderstand von $120 \text{ M}\Omega$ gemessen [74]. Dieser Widerstand, welcher parallel zur Impedanz der axialen Nachweisspule liegt, würde die Güten von circa 10000 auf 5000 limitieren. Um dies zu vermeiden, werden die

²Nickel eignet sich im Vergleich zu Silber besser als Sperrschicht, wird allerdings auf Grund seiner ferromagnetischen Eigenschaften nicht für die Präzisionsfalle verwendet.

axialen Nachweise über spezielle Durchführungen, aus monokristalinem Saphir mit niedrigerem dielektrischem Verlustwinkel [71, 72, 73], mit den Fallenelektroden verbunden. Für letztere wurde ein effektiver Paralellwiderstand von $> 2G\Omega$ gemessen, sodass eine Limitierung der Güte ausfällt.

Der Flansch mit den Durchführungen wird mit einer Indiumdichtung gegen die Fallenkammer versiegelt. Das Ende der Fallenkammer bildet ein kleines Rohr. Über dieses Rohr kann bei Raumtemperatur die Fallenkammer auf einen Druck von 10^{-6} mbar evakuiert werden. Nachdem dieser Druck erreicht wurde, wird das Rohr kalt verschweißt, sodass das Innere der Fallenkammer hermetisch abgeschlossen ist. Wird nun die Fallenkammer auf die kryogenen Temperaturen abgekühlt, können auf Grund des kryogenen Pumpeffekts Hintergrunddrücke im Bereich $< 10^{-15}$ mbar erreicht werden. In dieser Umgebung ist es gelungen, einzelne Protonen über Zeiträume von bis zu 10 Monaten verlustlos zu speichern.

Neben den bereits beschriebenen axialen Nachweisen steht in der Präzisionsfalle ein Zyklotronnachweis zur Verfügung. Dieser besteht aus einem rauscharmen Verstärker mit gleichem Design zu den bereits beschriebenen axialen Verstärkern und einer zylindrischen Kupferspule und wird in [69] ausführlich beschrieben. Der Nachweis besitzt bei einer Resonanzfrequenz von 28.9 MHz eine Güte von 600, und wird sowohl zur Präparation eines einzelnen Teilchens als auch zur Kühlung der reduzierten Zyklotronmode verwendet. In der Analysefalle steht kein Zyklotronnachweis zur Verfügung, da die damit verbundenen Energiefluktuationen der reduzierten Zyklotronmode mit $E_{th}/k_B = 4$ K zu axialen Frequenzfluktuationen von 300 Hz führen würden und einen Nachweis der axialen Mode über die Dip-Methode verhindern würden.

Am Rand der Analysefalle und der Präzisionsfalle befindet sich jeweils eine Spin-Flip-Spule (in Abbildung 4.3 ist zur besseren Übersicht nur eine der beiden Spin-Flip-Spulen gezeigt.). Die Spin-Flip-Spulen sind als Scheibenspulen ausgelegt und werden über PTFE-Halterungen an den Fallenelektroden befestigt. Mit ihnen werden die magnetischen Wechselfelder zur Anregung von Spin-Flips erzeugt. Die Wechselfelder gelangen durch die Spalte zwischen den elektrisch leitenden Elektroden in das Falleninnere. Weitere Details zu den Spin-Flip-Spulen finden sich in [75].

Daneben befindet sich in der Fallenkammer eine Elektronenkanone [64], welche der Erzeugung der Ionen dient. Die Elektronenkanone besteht aus einer Feldemissionspitze (Wolframdraht) und einer Beschleunigungselektrode. Über die Beschleunigungselektrode werden Elektronen aus der Spitze gezogen und treffen auf der gegenüberliegenden Seite der Fallenkammer auf ein Polyethylen Target. Dort werden Atome aus dem Target gelöst und anschließend durch den gleichen Elektronenstrahl

ionisiert.

4.3 Verkabelung

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die elektrische Verkabelung der Apparatur gegeben. Die elektrischen Leitungen lassen sich in vier Gruppen, Wechselstromleitungen, Gleichstromleitungen, Spin-Flip Leitung und Hochspannungsleitung, aufteilen. Für alle Leitungen werden Materialien mit niedriger Wärmeleitfähigkeit (*Manganin, Konstantan*) verwendet, um die thermische Last auf die kryogenen Stufen gering zu halten.

Die Hochspannungsleitung wird zur Erzeugung der Ionen benötigt. Diese ungefilterte Leitung wird in einem geschlossenem Stahlrohr zur Falle geführt, um die Umgebung gegen Störeinflüsse abzuschirmen [76, 77]. Um die Analysefalle vor Störungen der Hochspannungsleitung zu schützen, befindet sich zwischen der Elektronenkanone und der Analysefalle eine Abschirmelektrode, welche während des Betriebs auf Masse gehalten wird.

Alle Gleichspannungsleitungen sind mit drei RC -Filtern, welche sich bei 300 K, 77 K und 4 K befinden, ausgestattet, vergleiche Abbildung 4.1. Jeder dieser Tiefpässe besteht aus einem $820\text{ k}\Omega$ Widerstand und einem 2.7 nF Kondensator. Einzige Ausnahme bilden die DC-Versorgungsleitungen zur Analysefalle. Hier werden Kapazitäten von 27 nF verwendet, um mögliche Störeinkopplungen stärker unterdrücken zu können.

Da die Spin-Flip-Anregung hohe Leistungen erfordert, werden die entsprechenden Leitungen ungefiltert in die Fallenkammer geführt. Um dennoch mögliche induktive Störeinkopplungen zu unterdrücken werden verdrehte Leitungen, sogenannte Twisted-Pair-Kabel verwendet [78]. Gegen kapazitive Störeinkopplungen sind die Leitungen mit einem zusätzlichen Masseschirm geschützt [78].

Die Wechselstromleitungen, welche ebenfalls über geschirmte, verdrehte Leitungen zur Penning-Falle geführt werden, dienen dem Einstrahlen der Seitenbandkopplung. Um mögliche Störeinkopplungen zu reduzieren, wird die Penning-Falle mit kapazitiven Spannungsteilern $18\text{ pF}/100\text{ pF}$ an der 4 K-Stufe geschützt. Über stromgesteuerte Relais werden während einer Spin-Flip Messung in der Analysefalle alle nicht benötigten Wechselstromleitungen an Raumtemperatur gegen Masse geschaltet.

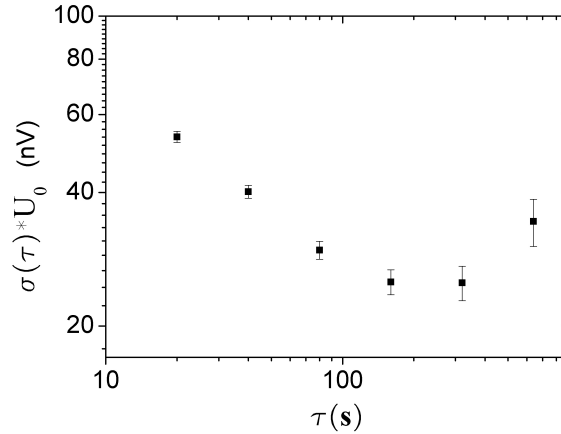


Abbildung 4.4: Allan Deviation der Spannungsquelle. Der Abfall zu kurzen Zeiten resultiert aus der Mittelung über das weiße Rauschen der Spannungsquelle. Eine Drift der Spannungsquelle führt zu einem Anstieg bei längeren Mittelungszeiten.

4.4 Kontrollprogramm und Messgeräte

Die Potentiale der Fallenelektroden werden von einer hoch präzisen Spannungsquelle *UM-14-LN*, *Stahl Electronics*, bereitgestellt. Mit dieser über eine *USB*-Schnittstelle ansteuerbaren Quelle können mit einer Auflösung von 16-bit alle Elektroden der Penning-Falle unabhängig mit Spannung von 0 bis -14 Volt versorgt werden. Daneben steht ein Präzisionsmodus mit einer Auflösung von 24-bit zur Verfügung, um die Korrektorelektroden und Ringelektroden der beiden Fallen zu versorgen.

Eine hohe Stabilität dieser Spannungsquelle ist zwingend, da $\nu_z \propto \sqrt{U_0}$. Um die Stabilität der Quelle zu bestimmen, wurde der zeitliche Verlauf der Spannung mit einem Präzisionsmultimeter, *FLUKE-8508a-reference multi meter*, aufgenommen. Anschließend wurde als Maß der Spannungsfluktuationen die Allan-Deviation [79]

$$\sigma(\tau) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{U_0} \right)^2}, \quad (4.1)$$

berechnet. $U_0 = 1 \text{ V}$ gibt hierbei die nominale Spannung und τ die Mittelungszeit zur Bestimmung von U_i an. In Abbildung 4.4 ist die Allan-Deviation der Spannungsquelle im Präzisionsmodus gezeigt. Bei einer Mittelungszeit von 40 s wird eine Stabilität von 40 nV bei einer absoluten Spannung von 1 V erreicht. Dies führt zu axialen Frequenzfluktuationen von 14 mHz und stellt damit keine Limitierung bei der Beobachtung von Spin-Flips, $\Delta\nu_{z,sf} = 171 \text{ mHz}$, oder der Präzisionsmessung der

4.4. KONTROLLPROGRAMM UND MESSGERÄTE

Eigenfrequenzen in der Präzisionsfalle dar.

Zur Anregung von Spin-Flips und dem Einstrahlen der Seitenbandanregungen werden verschiedenste Signalgeneratoren (*Agilent 3350A/3320A*, *Rhode und Schwarze SMB100A*) verwendet. Alle Generatoren sowie die Signalanalytoren sind mit einem 10 MHz Rubidium Frequenzstandard (*Stanford FS725*) mit einer absoluten Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-11}$ und einer Langzeitstabilität von $5 \cdot 10^{-10}$ pro Jahr synchronisiert. Die gesamte Ansteuerung der Apparatur erfolgt über *National Instruments LabView* Programme. Dies ermöglicht die automatisierte Kontrolle aller Signalgeneratoren, Spannungsquellen, Schaltrelais und spannungsgesteuerten Abschwächer über *GBIB* und *USB* Schnittstellen. Daneben werden alle relevanten Umweltfaktoren wie Raumtemperatur, Raumdruck, Heliumdruck, Luftfeuchtigkeit und Vibrationen über ein auf LabView basierendes Kontrollprogramm mitgeschrieben und in einer Datenbank (*MYSQL*) gespeichert ³.

³Das Kontrollprogramm und die hierfür benötigten Messgeräte wurden von Clemens Leiteritz eingerichtet.

Kapitel 5

Experimentelle Ergebnisse - Die Präzisionsfalle

Zur exakten Bestimmung des g -Faktors muss die freie Zyklotronfrequenz, respektive das Magnetfeld, präzise und akkurat bestimmt werden. Die Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz basiert auf der Messung der drei Eigenfrequenzen des gespeicherten Protons. Folglich ist eine präzise und akkurate Messung der Eigenfrequenzen zwingend. Hierzu wird eine Penning-Falle mit einem homogenen Magnetfeld und einem reinen elektrischen Quadrupolpotential benötigt. In der experimentellen Realität lassen sich letztere Bedingungen nicht erfüllen, sodass es immer zu Abweichungen der idealen Konfiguration kommen wird. Um dennoch mit größtmöglicher Genauigkeit den g -Faktor bestimmen zu können, muss das elektrische Potential der Falle optimiert werden. Dies bedeutet insbesondere die Reduzierung möglicher systematischer Verschiebungen der Eigenfrequenzen auf Grund der Korrekturterme höherer Ordnung zum Potential, daher eine Optimierung des *Tuning-ratios*.

Zunächst wird in Abschnitt 5.1 die Erzeugung und Präparation des einzelnen Protons in der Präzisionsfalle beschrieben. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 auf die Optimierung der Präzisionsfalle eingegangen. Dies beinhaltet die Ausrichtung der Falle bezüglich des homogenen Magnetfeldes sowie die Optimierung des *Tuning-ratios*. Da die erreichten Frequenzstabilitäten die erreichbare Präzision des gemessenen g -Faktors bestimmen, werden im folgenden Abschnitt 5.3 die Ergebnisse zur Messung aller Eigenfrequenzen präsentiert. Am Ende des Kapitels in Abschnitt 5.4 wird die Messung zur magnetischen Inhomogenität der Präzisionsfalle vorgestellt und eine mögliche systematische Verschiebung des gemessenen g -Faktor diskutiert.

5.1 Erzeugung und Präparation eines einzelnen Protons

Die Penning-Falle befindet sich in einer abgeschlossenen Vakuumkammer. Innerhalb dieser Kammer müssen die Protonen erzeugt werden. Zu diesem Zweck wird über die Feldemissionsspitze ein Elektronenstrahl auf das Polyethylen Target geschossen. Hierzu wird an die Beschleunigungselektrode eine Spannung im Bereich von 1 kV für eine Zeitdauer von wenigen Sekunden angelegt, um Elektronen aus der Feldemissionsspitze zu ziehen. Da während der Erzeugung Potentiale an den Elektroden der Präzisionsfalle anliegen, müssen die Elektronen energetisch angehoben werden, um Atome ionisieren zu können. Zu diesem Zweck wird an die Feldemissionsspitze eine negative Spannung von -50 V angelegt. Die Elektronen treffen auf ein Polyethylen Target und lösen aus diesem verschiedene Atome aus. Diese Atome driften in die Präzisionsfalle und werden dort vom selben Elektronenstrahl ionisiert. Da während der Erzeugung das elektrische Potential an den Elektroden der Präzisionsfalle anliegt, bleiben die dort erzeugten Ionen gespeichert.

5.1.1 Massenspektrum und Entfernen von Fremdionen

Die Konstituenten der so erzeugten Ionenwolke können über ein sogenanntes Massenspektrum sichtbar gemacht werden. Hierbei nutzt man die Abhängigkeit der axialen Frequenz vom Ladungs-zu-Masse Verhältnis aus.

Wird bei konstantem Tuning-ratio, daher C_2 konstant, die Spannung der Ringelektrode $U(t) = U_0(t - t_0)$ kontinuierlich variiert ergibt sich für die axiale Frequenz

$$\nu_z(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{qC_2U_0}{m}}(t - t_0). \quad (5.1)$$

Folglich kommen Ionen mit unterschiedlichem Ladungs-zu-Masse Verhältnis q/m zu unterschiedlichen Zeitpunkten in Resonanz mit dem Detektionsschwingkreis, $\nu_z(t) = \nu_{res}$. Dort dissipieren die nach der Erzeugung axial angeregten Ionen Energie und können als Peak auf dem Rauschspektrum der Nachweisimpedanz detektiert werden. Das Ergebnis dieser Messung ist in Abbildung 5.1 gezeigt [48]. Neben Protonen können die Bestandteile der auf dem Target ausgefrorenen Luft beobachtet werden.

Um die Falle von den Fremdionen zu reinigen, wird eine dreistufige Routine verwendet. Im ersten und zweiten Schritt wird die axiale Energie der Fremdionen erhöht,

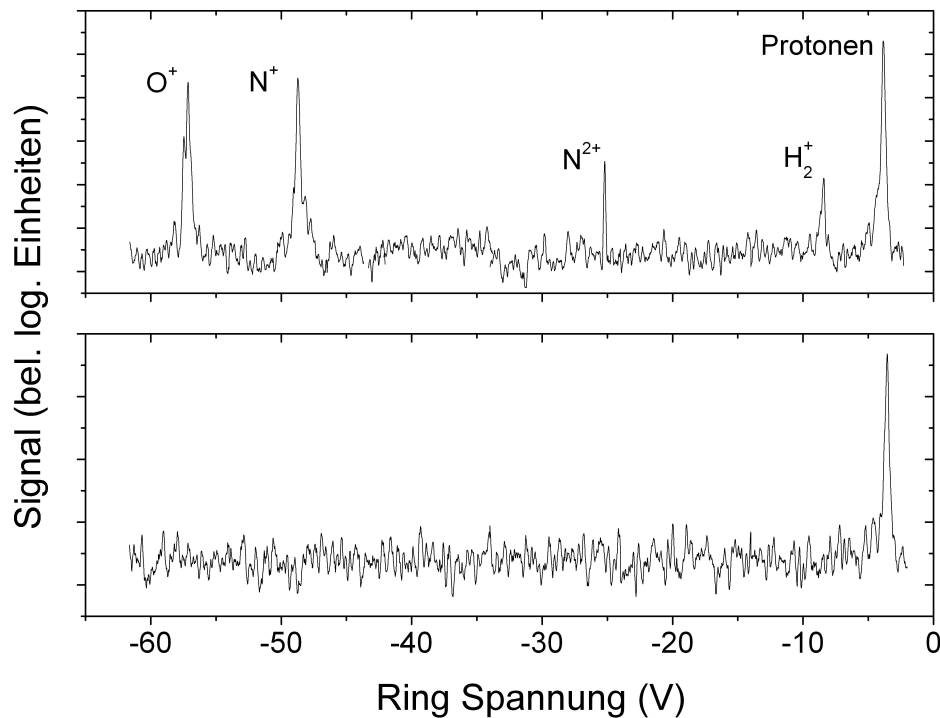


Abbildung 5.1: Massenspektren in der Präzisionsfalle [48]. Im oberen Teil ist ein Spektrum nach dem Laden der Falle gezeigt. Es können die Bestandteile ausgefrorener Luft mit unterschiedlichem Ladungs-zu-Masse Verhältnis beobachtet werden. Daneben erscheint ein Signal, welches durch Protonen erzeugt wird. Im unteren Teil der Abbildung ist dasselbe Spektrum gezeigt, nachdem die Falle von Fremdionen gereinigt wurde. Es ist nur noch das Signal der Protonen sichtbar.

sodass diese aus der Falle ausdampfen. Im dritten Schritt wird durch eine geeignete Konfiguration der Fallenpotentiale die Bewegung der Fremdionen auf eine instabile Bahn gebracht.

Um im ersten Schritt die axiale Energie der Fremdionen zu erhöhen, wird bei niedrigen Frequenzen ein Breitband-Signal (SWIFT - stored wave inverse-fourier transform) mit einer Amplitude von 10 dBm für 10 sek in die Falle eingestrahlt. Da Protonen die Ionen mit dem größten Ladungs-zu-Masse Verhältnis, daher der höchsten axialen Frequenz, sind, besitzt das Signal eine obere Grenzfrequenz von 500 kHz, um die Energie der Protonen nicht zu erhöhen. H_2^+ , das zweit-leichteste Ion in der Falle, und alle schwereren Ionen werden hingegen angeregt. Zusätzlich wird das Anregungssignal auf der Frequenz der Protonen bei 700 kHz mit einem auf einem

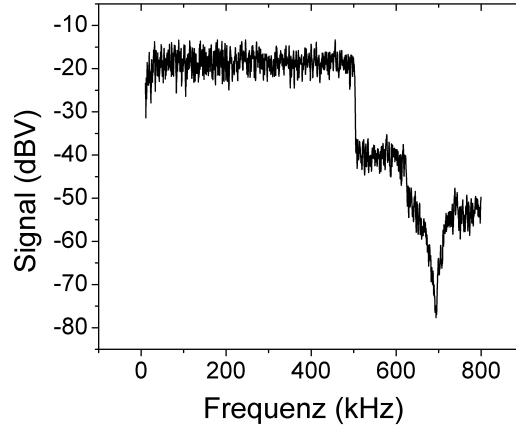


Abbildung 5.2: Anregungssignal zur Energieerhöhung der Fremdionen [48]. Ein SWIFT-Signal (stored wave inverse-fourier transform) mit einer Grenzfrequenz von 500 kHz wird über einen Filter basierend auf einen Serienschwingkreis (Notch-Filter) an eine der Fallenelektroden angelegt. Während der Anregung befinden sich die Protonen im Minimum des Anregungssignals bei $\nu_z \approx 700$ kHz.

Serienschwingkreis basierenden Filter (Notch-Filter) um 60 dB abgeschwächt [48]. In Abbildung 5.2 ist das an die Falle angelegte Anregungssignal gezeigt. Nach Anlegen dieses Signals wird das Potential der Falle auf eine Spannung von 0.1 V reduziert, sodass die angeregten Fremdionen aus der Falle ausdampfen. Um das Ausdampfen zu unterstützen, wird an die der Endkappe folgenden Zielelektrode eine Spannung von -10 V angelegt.

Im zweiten Schritt wird ein Anregungssignal mit einer Amplitude von -10 dBm kontinuierlich von 40 kHz bis 500 kHz über einen Zeitraum von 1 min durchgeföhren. Anschließend wird analog zum Abdampfen das Fallenpotential erniedrigt. Im unteren Teil der Abbildung 5.1 ist das Massenspektrum nach der 5-maligen Wiederholung der ersten beiden Schritte zu sehen. Es können keine Fremdionen mehr beobachtet werden.

Da allerdings in einem solchen Massenspektrum einzelne Ionen nicht eindeutig beobachtet werden können, kann aus dem zuletzt vorgestellten Ergebnis nicht darauf rückgeschlossen werden, dass alle Fremdionen die Falle verlassen haben. Folglich wird im dritten Schritt die Stabilitätsbedingung der Penning-Falle,

$$\frac{q}{m} \geq 2 \frac{C_2 U_0}{B_0^2}, \quad (5.2)$$

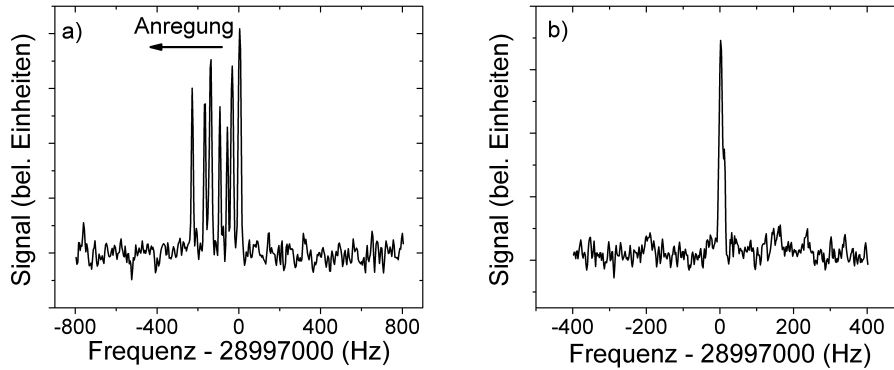


Abbildung 5.3: Spektrum der reduzierten Zyklotronmode. In a) ist das Signal einer Wolke von Protonen zu sehen. Auf Grund eines inhomogenen Speicherpotentials hängt die reduzierte Zyklotronfrequenz von der Energie ab. Protonen mit höherer Energie sind zu niedrigeren Frequenzen verschoben. Über gezielte Anregungen der Teilchen hoher Energie können diese sukzessive aus der Penning-Falle entfernt werden. Schließlich bleibt ein einzelnes Proton in der Penning-Falle gespeichert. Das Signal eines einzelnen Protons ist in b) gezeigt.

ausgenutzt. Protonen besitzen das größte Ladungs-zu-Masse Verhältnis aller Ionen und bleiben damit bei einer hohen Spannung U_0 als einzigste Ionenspezies gespeichert. Folglich können über eine kontinuierliche Spannungsrampe sukzessive immer leichtere Fremdionen aus der Falle entfernt werden. Da die Analysefalle im Vergleich zur Präzisionsfalle ein niedrigeres Magnetfeld und einen kleineren Fallenradius, daher $C_{2,AT} > C_{2,PT}$, besitzt, bietet sich letztere für eine solche Spannungsrampe an. In der Analysefalle sind bei einer Ringspannung von -110 V alle Fremdionen auf instabilen Bahnen, während in der Präzisionsfalle -1.6 kV benötigt werden. Nachdem die Ionenwolke in die Analysefalle transportiert wurde, wird mit einer separaten Spannungsquelle das Potential in 30 sek von -1 V auf -150 V und wieder zurück gefahren. Die so erhaltene Ionenwolke sollte keine Fremdionen mehr enthalten.

5.1.2 Reduktion der Anzahl der Protonen

Zur Reduktion der Teilchenzahl wird die reduzierte Zyklotronmode als Indikator betrachtet. Nach einer breitbandigen Anregung dieser Mode können Spektren, wie in Abbildung 5.3 a) gezeigt, beobachtet werden. Diese sind wie folgt zu interpretieren. Auf Grund einer endlichen Inhomogenität B_2 des Magnetfeldes der Präzisionsfalle kommt es zu einer energieabhängigen Verschiebung der Frequenzen $\nu_+(E_+)$. Teilchen mit einer höheren Energie sind zu niedrigeren Frequenzen verschoben. Die einzelnen Signale können somit Protonen unterschiedlicher Energie zugeordnet werden.

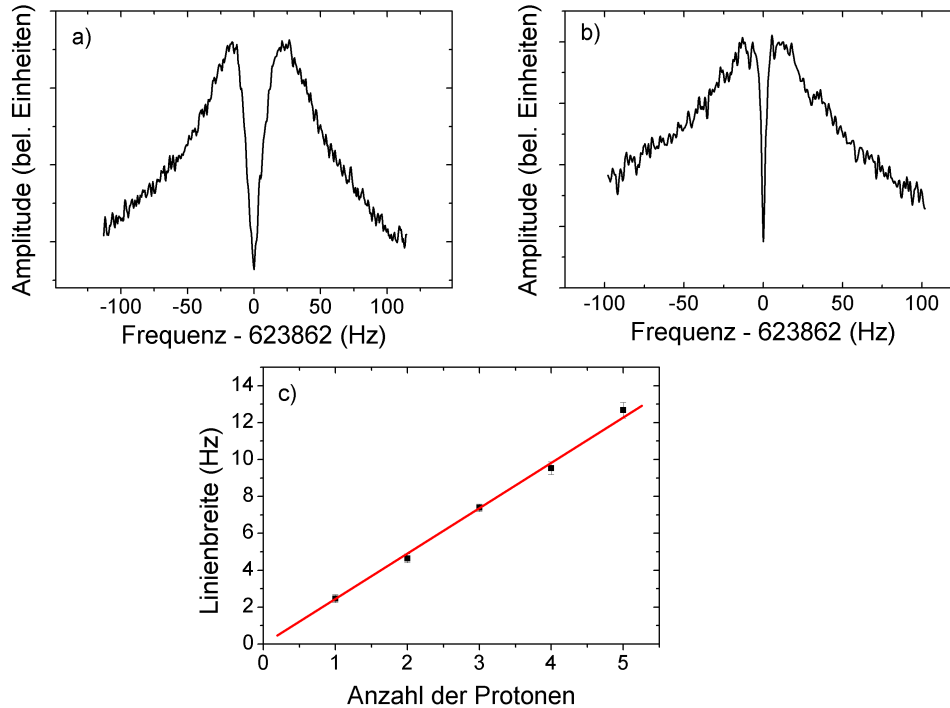


Abbildung 5.4: Reduktion der Anzahl der Protonen in der Präzisionsfalle. In a) ist das axiale Rauschspektrum mit 5 gespeicherten Protonen gezeigt. Die Breite des Dips nimmt ab, wenn die Anzahl der Protonen reduziert wird. Dies ist in Abbildung b), einem axialen Spektrum mit einem einzelnen gespeicherten Proton, gezeigt. In c) ist Breite des Dips gegen die Anzahl der gespeicherten Protonen gezeigt. Es ergibt sich der erwartete lineare Zusammenhang.

Um nun einzelne Protonen aus der Falle zu entfernen wird eine weitere Anregung verwendet. Die Frequenz der Anregung wird auf einen Wert oberhalb der Frequenz der Protonen mit niedrigster Energie eingestellt und dann zu niedrigeren Frequenzen verstimmt. Als Folge wird den Ionen hoher Energie zusätzlich Energie zugeführt. Nach der Anregung wird das Potential der Falle auf 0.1 V gefahren, wodurch die Protonen hoher Energie die Falle verlassen können. Dieser Prozess wird wiederholt, bis sich nur noch ein einzelnes Proton in der Falle befindet, siehe Abbildung 5.3 b). Die exakte Anzahl der Protonen in der Falle lässt sich über das axiale Signal bestimmen. Die Breite des axialen Dips im Rauschspektrum des Nachweises ist proportional zur Anzahl der Teilchen [49, 51]. Folglich kann aus der Messung der Breite zu unterschiedlichen Teilchenzahlen, siehe Abbildung 5.4, eindeutig belegt werden, dass sich nur ein einzelnes Proton in der Falle befindet.

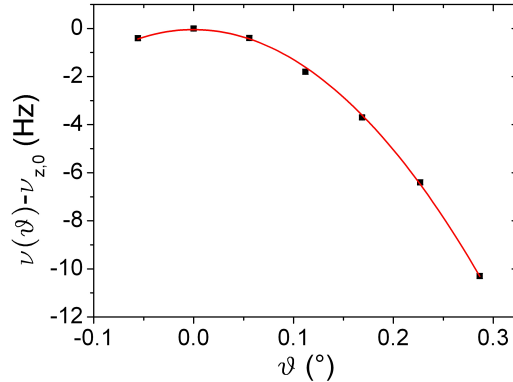


Abbildung 5.5: Justage des Fallenturms. Aufgetragen ist die axiale Frequenzverschiebung gegen den Verkippungswinkel zwischen elektrischem Speicherpotential und Magnetfeld. Im Maximum ist der Fallenturm orientiert.

5.2 Optimierung der Präzisionsfalle

5.2.1 Ausrichten der Fallenturms

Ist das elektrische Speicherpotential gegenüber dem homogenen Magnetfeld verkippert, sieht das Proton in der Falle ein effektiv flacheres elektrisches Potential. Dies führt zu einer Verringerung der axialen Frequenz und einer Vergrößerung der Magnetronfrequenz [31]. Beide Effekte kompensieren sich in der über das Invarianz Theorem bestimmten freien Zyklotronfrequenz, sodass es auf Grund einer Verkippung zu keiner systematischen Verschiebung des gemessenen g -Faktors kommt. Dennoch kann eine Verkippung der Falle bei einem Teilchentransport zwischen der Präzisionsfalle und der Analysefalle zu einer Aufweitung des Radius der Magnetronmode ρ_- , bis hin zum Verlust des Teilchen, führen. Um dies zu vermeiden wird die Falle justiert. Wie bereits beschrieben kommt es bei einer Verkippung der Falle zu einer Verringerung der axialen Frequenz. Für die Abhängigkeit der axialen Frequenz vom Verkippungswinkel ϑ zwischen elektrischen Speicherpotential und Magnetfeld gilt

$$\nu_z(\vartheta) = \nu_{z,0} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin^2(\vartheta)} \quad (5.3)$$

mit $\nu_{z,0}$ der axialen Frequenz zur justierten Konfiguration. Folglich kann aus der Bestimmung der maximalen axialen Frequenz auf $\vartheta = 0^\circ$ rückgeschlossen werden.

In Abbildung 5.5 ist die axiale Frequenz als Funktion des Verkippungswinkels ϑ gezeigt. Es ist möglich die Falle auf $\ll 0.05^\circ$ zu justieren. Nach der Justage bei-

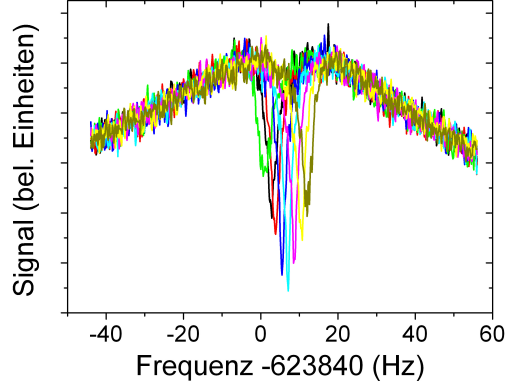


Abbildung 5.6: Optimierung des Tuning-ratios über die axiale Signalform. Das Tuning-ratio wurde in Schritten von 10^{-4} variiert. Das Signal zum Tuning-ratio mit dem tiefsten Dip besitzt die niedrigste Anharmonizität C_4 . Die Verschiebung der axialen Frequenz auf Grund der Variation des Tuning-ratios ist auf die endliche Orthogonalität der Falle von $D_2 = 3 \text{ Hz/mUnit}$ zurückzuführen.

der Achsen kann nach mehrmaligem Transport zwischen den beiden Fallen keine Aufweitung von ρ_- beobachtet werden.

5.2.2 Optimierung des Tuning-ratios

Die präzise Messung des g -Faktors verlangt die präzise Messung der Eigenfrequenzen des Protons. Da allerdings anharmonische, elektrische Speicherpotentiale zu Verschiebungen der Eigenfrequenzen führen können, kann dies zu einer systematischen Verschiebung des gemessenen g -Faktors führen. Folglich muss das Potential der Falle optimiert werden.

In einem ersten Schritt kann das Potential über die Linienform des axialen Dips optimiert werden. Da sich die axiale Mode im thermischen Gleichgewicht mit dem Nachweis befindet, ist die Energie der Mode Boltzmann-verteilt. Die resultierende Linienform ist eine Faltung aus der Linienform des idealen Dips, einer Lorenz Kurve, und der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie. Es ergibt sich

$$\chi(\omega) = \frac{A}{\pi k_B T_z} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E_z}{k_B T_z}\right) \frac{\gamma_z/2}{\left(\omega - \omega_z \left(1 + \frac{3}{4} \frac{C_4}{C_2^2} \frac{E_z}{qU_0}\right)\right)^2 - \gamma_z^2/4} dE_z \quad (5.4)$$

mit E_z der Energie der axialen Mode, γ_z der Kopplungskonstanten an den axialen Nachweis, T_z der Temperatur des Nachweises und A einem Normalisierungsfaktor

5.2. OPTIMIERUNG DER PRÄZISIONSFALLE

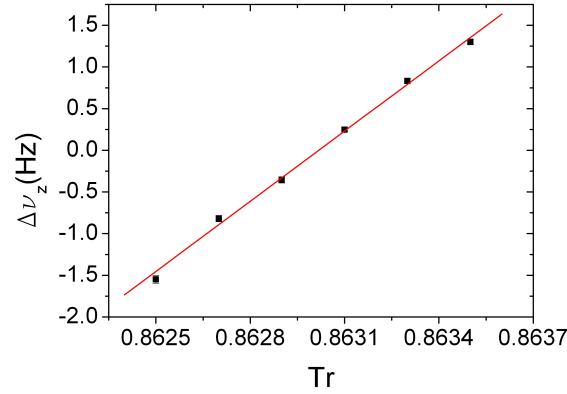


Abbildung 5.7: Optimierung des Tuning-ratios über die Erhöhung der axialen Energie. Aufgetragen ist die axiale Frequenzverschiebung bei einer Erhöhung der Energie der axialen Mode gegen das Tuning-ratio. Aus dieser Messung lässt sich das ideale Tuning-ratio auf 10^{-5} bestimmen. In diesem Beispiel wurde die Energie um $\Delta T = E/k_B = 20$ K erhöht.

[48]. Folglich kommt es mit einer Erhöhung der Anharmonizität C_4 zu einer Verbreiterung des Dips und zu einer Reduktion des Signal-zu-Rausch Verhältnisses. Um die Anharmonizität C_4 zu variieren wird das Tuning-ratio Tr , welches das Verhältnis aus der Spannung an der Ringelektrode U_0 und der Korrektorelektrode U_k angibt,

$$Tr = \frac{U_k}{U_0} \quad (5.5)$$

variiert. Spektren der axialen Mode zu unterschiedlichen Tuning-ratios sind in Abbildung 5.6 gezeigt. Aus dieser Messung lässt sich das ideale Tuning-ratio auf 10^{-4} beziehungsweise 0.1mUnit optimieren. Dies entspricht einer relativen Verschiebung der axialen Frequenz von $\Delta\nu_z/\nu_z = 2 \cdot 10^{-9}$. Folglich ist eine weitere Optimierung der Falle notwendig.

Im zweiten Schritt wird die Verschiebung der axialen Frequenz bei einer Erhöhung der axialen Energie von E_0 auf $E_0 + \Delta E$ betrachtet. Das ideale Tuning-ratio ergibt sich für $\Delta\nu_z(E_0) - \Delta\nu_z(E_0 + \Delta E) = 0$.

Um die Energie der axialen Mode zu variieren wird der Nachweis mit breitbandigen, weißen Rauschen angeregt. Dies führt zu einer Erhöhung der Temperatur des Nachweises und damit verbunden zu einer Erhöhung der Energie des gespeicherten Protons. Aus dem Vergleich der Spektren des Nachweises mit und ohne weißem Rauschen kann auf die Änderung der Temperatur rückgeschlossen werden. Für die

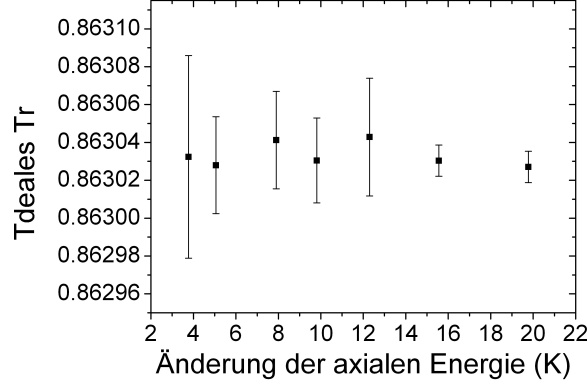


Abbildung 5.8: Ideales Tuning-ratio als Funktion der axialen Energieerhöhung. Es kann keine Variation des idealen Tuning-ratios als Funktion der axialen Energie beobachtet werden und deshalb ist eine zufällige Kompensation der Beiträge $C_4\Delta E$ und $C_6\Delta E^2$ auszuschließen.

Rauschspannung u_{tot} auf der Resonanzfrequenz ν_{res} des Nachweises gilt

$$u_{tot}^2 = 4k_B T_{eff} R = 4k_B T_0 R + u_w^2 \quad (5.6)$$

mit R dem Parallelwiderstand und T_0 der Temperatur des Resonators. T_{eff} gibt die effektive Temperatur des Resonators mit zusätzlich externen Rauschen u_w an. Hieraus lässt sich die Änderung der Temperatur zu

$$\Delta T = T_{eff} - T_0 = \frac{u_w^2}{4k_B R} \quad (5.7)$$

bestimmen.

Die Frequenzverschiebung wird ebenfalls als Funktion des Tuning-ratios aufgenommen. Das Ergebnis der Messung ist in Abbildung 5.7 gezeigt. Aus dieser Messung kann das ideale Tuning-ratio auf 10^{-5} bestimmt werden.

Allerdings kann es auf Grund der unterschiedlichen Vorzeichen der Beiträge $C_4\Delta E$ und $C_6\Delta E^2$ zu einer lokalen Kompensation $C_4\Delta E - C_6\Delta E^2 = 0$ kommen. Folglich kann nicht auf eine Kompensation $\Delta\nu_z(E_0) = 0$ im thermischen Gleichgewicht bei E_0 rückgeschlossen werden. Daher wurden die Energieerhöhungen $\Delta T = \Delta E/k_B$ in einem Bereich von 4 – 22 K variiert. Es konnte keine Variation des idealen Tuning-ratios als Funktion der Temperaturerhöhung beobachtet werden, siehe Abbildung 5.8. Dies ist in Übereinstimmung mit den theoretischen Berechnungen der Fallentpotentiale [48], welche bei einer Erhöhung der axialen Energie auf < 30 K keinen signifikanten Beitrag der Korrektur C_6 vorhersagt.

5.2. OPTIMIERUNG DER PRÄZISIONSFALLE

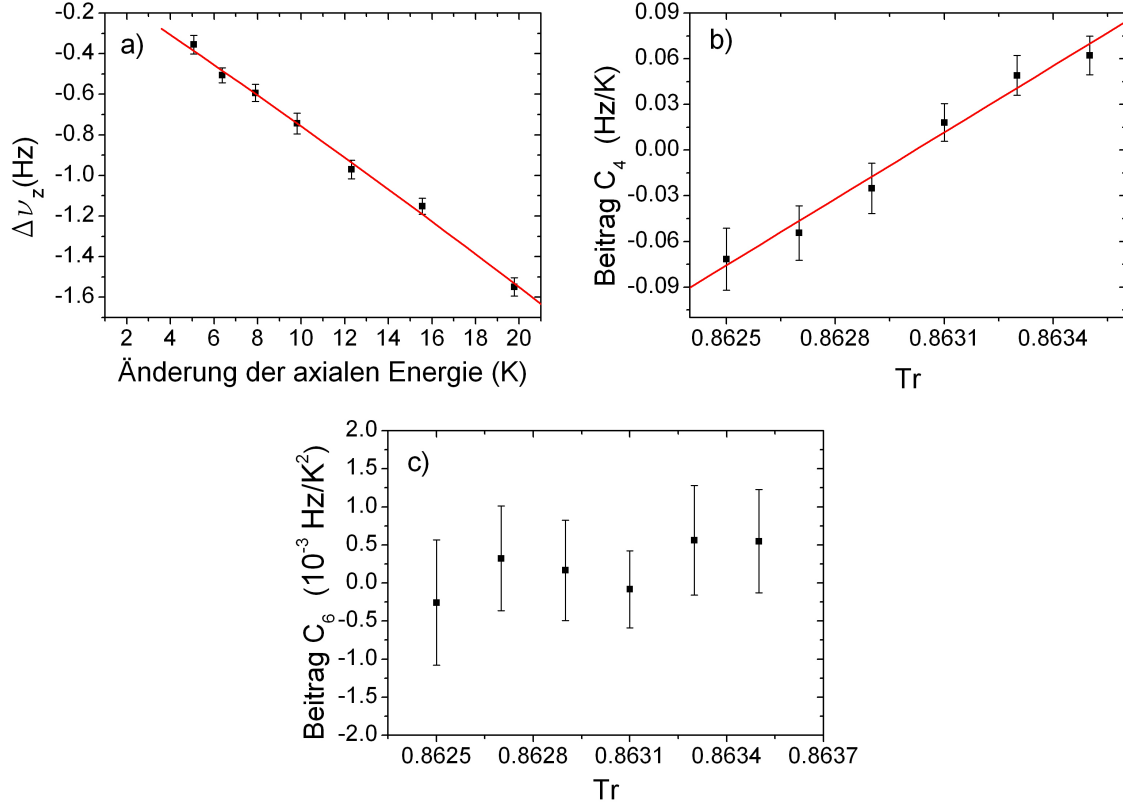


Abbildung 5.9: Bestimmung der Beiträge zu den axialen Frequenzverschiebungen auf Grund der Korrekturen C_4 und C_6 . In a) ist die axiale Frequenzverschiebung als Funktion der Änderung der axialen Energie bei einem Tuning-ratio von 0.8625 gezeigt. Aus einer Kurvenanpassung lassen sich die Beiträge auf Grund der Korrekturen C_4 und C_6 zur Frequenzverschiebung bestimmen. Diese Beiträge sind b) und c) für C_4 beziehungsweise C_6 zu verschiedenen Tuning-ratios gezeigt.

Um die exakten Beiträge der Korrektur auf Grund der Anharmonizitäten C_4 und C_6 explizit zu messen, kann die axiale Frequenzverschiebung als Funktion der axialen Energie bei konstantem Tuning-ratio betrachtet werden. Für die Frequenzverschiebung gilt

$$\Delta\nu_z = \frac{3}{4} \frac{\nu_z}{qU_0} \left(\frac{C_4}{C_2^2} \Delta E_z + \frac{5}{4} \frac{C_6}{C_2^3} \Delta E_z^2 \right). \quad (5.8)$$

Aus einer Kurvenanpassung können die Beiträge der Anharmonizität

$$A_4 = \frac{3}{4} \frac{\nu_z}{qU_0} \frac{C_4}{C_2^2} \quad (5.9)$$

und

$$A_6 = \frac{15}{16} \frac{\nu_z}{qU_0} \frac{C_6}{C_2^3} \quad (5.10)$$

bestimmt werden. Da die Änderung der axialen Energie nach Gleichung 5.6 bekannt ist, lassen sich diese absolut bestimmen.

In Abbildung 5.9 ist die Messung der Beiträge gezeigt. Aus der linearen Abhängigkeit des Beitrags zu C_4 lässt sich ein experimenteller Wert zu $D_4 = \partial C_4 / \partial T r$ bestimmen. Es folgt $D_4 = 4.6(0.6) \cdot 10^{-3} \text{mm}^{-4} / \partial T r$ in guter Übereinstimmung zum theoretischen Wert von $D_4 = 3.7 \cdot 10^{-3} \text{mm}^{-4} / \partial T r$. Der Beitrag zu C_6 auf die Frequenzverschiebung, welcher verträglich mit Null ist, ist um mehr als eine Größenordnung gegenüber dem Beitrag von C_4 unterdrückt und damit vernachlässigbar. Das ideale Tuning-ratio kann auf 10^{-5} bestimmt werden. Dies entspricht einer relativen Verschiebung der axialen Frequenz von $\Delta\nu_z / \nu_z = 8 \cdot 10^{-9}$.

Neue Methode zur Messung der absoluten Temperatur des axialen Nachweises

Da die Frequenzverschiebung bei einer gegebenen Verstimmung der Falle kalibriert ist, kann mit einer weiteren Messung, einer Erhöhung der axialen Energie über Feedback, auf die absolute Temperatur des Nachweises T_0 rückgeschlossen werden. Hierzu wird bei einer vorgegebenen Verstimmung die absolute Änderung der Temperatur $\Delta T = T_w - T_0$ aus der Frequenzverstimmung mit weißem Rauschen bestimmt. Daneben kann über positives Feedback eine Frequenzverschiebung erreicht werden. Für die Temperaturerhöhung des Nachweises mit Feedback der Stärke g_f gilt

$$(1 + g_f) = \frac{T_f}{T_0}. \quad (5.11)$$

Über die Erhöhung des Parallelwiderstandes $R_f = (1 + g_f)R$ lässt sich die Erhöhung der Temperatur unabhängig messen. Sind bei gleicher Verstimmung der Falle die Frequenzverschiebungen beider Methoden identisch, gilt $T_w = T_f$ und es folgt

$$T_0 = \frac{\Delta T}{\frac{R_{p,f}}{R_p} - 1}. \quad (5.12)$$

Bei einer Verstimmung des Tuning-ratios um 0.00023 wurde bei einer Erhöhung des Widerstandes um $(1 + g_f) = 2.1$ eine axiale Frequenzverschiebung von 200 mHz gemessen. Hieraus folgt nach den Messungen des letzten Abschnitts, dass sich die

Temperatur des Nachweises absolut um $\Delta T = 7.1(1.1)$ K geändert hat. Die Fehler basieren auf der Unsicherheit in der Kalibrierung der Falle. Die absolute Temperatur des Nachweises ergibt sich zu $T_0 = 7.8(1.2)$ K.

5.3 Messung der Eigenfrequenzen

5.3.1 Stabilität der axialen Frequenz

Grundvoraussetzung zur präzisen Messung der Zyklotronfrequenz über das Invarianz-Theorem ist eine hohe axiale Frequenzstabilität.

Als Maß für die Frequenzstabilität hat sich in unserem Experiment die Standardabweichung der Differenz zweier aufeinander folgender axialer Frequenzmessungen $\alpha_i(T) = \nu_{z,i}(t_i) - \nu_{z,i+1}(t_i + T)$ etabliert,

$$\sigma(T) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (\alpha_i(T) - \bar{\alpha}(T))^2}. \quad (5.13)$$

σ ist eine Funktion der Mittelungszeit T . Diese Definition ist vergleichbar zur Definition der *Allan Deviation*

$$\sigma(T) \propto \sqrt{\sum_i (\alpha_i(T))^2} \quad (5.14)$$

als Maß der Frequenzstabilität, jedoch invariant gegenüber einer Drift der Frequenz, wie durch Einsetzen von $\nu_{z,i} = \nu_{z,0} + i\Delta\nu$ leicht überprüft werden kann. Die Allan Deviation eignet sich zur Differenzierung von Rauschbeiträgen über eine Betrachtung der Skalierung der Frequenzfluktuationen als Funktion der Mittelungszeit T [79]. Diese Skalierungen bleiben in der hier verwendeten Definition der Frequenzfluktuationen erhalten.

In Abbildung 5.10 a) ist eine axiale Frequenzmessreihe gezeigt. Aus dieser lässt sich die Verteilung der axialen Frequenzfluktuationen, gezeigt in Abbildung 5.10 b), bestimmen. Aus einem endlichen Mittelwert dieser Verteilung kann auf eine endliche Drift der axialen Frequenz rückgeschlossen werden. Es ergibt sich ein vernachlässigbarer Beitrag von 2 mHz auf einer für Messungen typischen Zeitskala von 60 s. Die Standardabweichung dieser Verteilung dient als Maß für die axiale Frequenzstabilität. In Abbildung 5.10 c) ist diese als Funktion der Mittelungszeit gezeigt. Aus der Skalierung mit $1/\sqrt{T}$ kann auf eine Mittelung über weißes Rauschen rückgeschlossen werden. Der Beitrag des Spannungsrauschens zur axialen Frequenzstabilität $\sigma_S(T)$

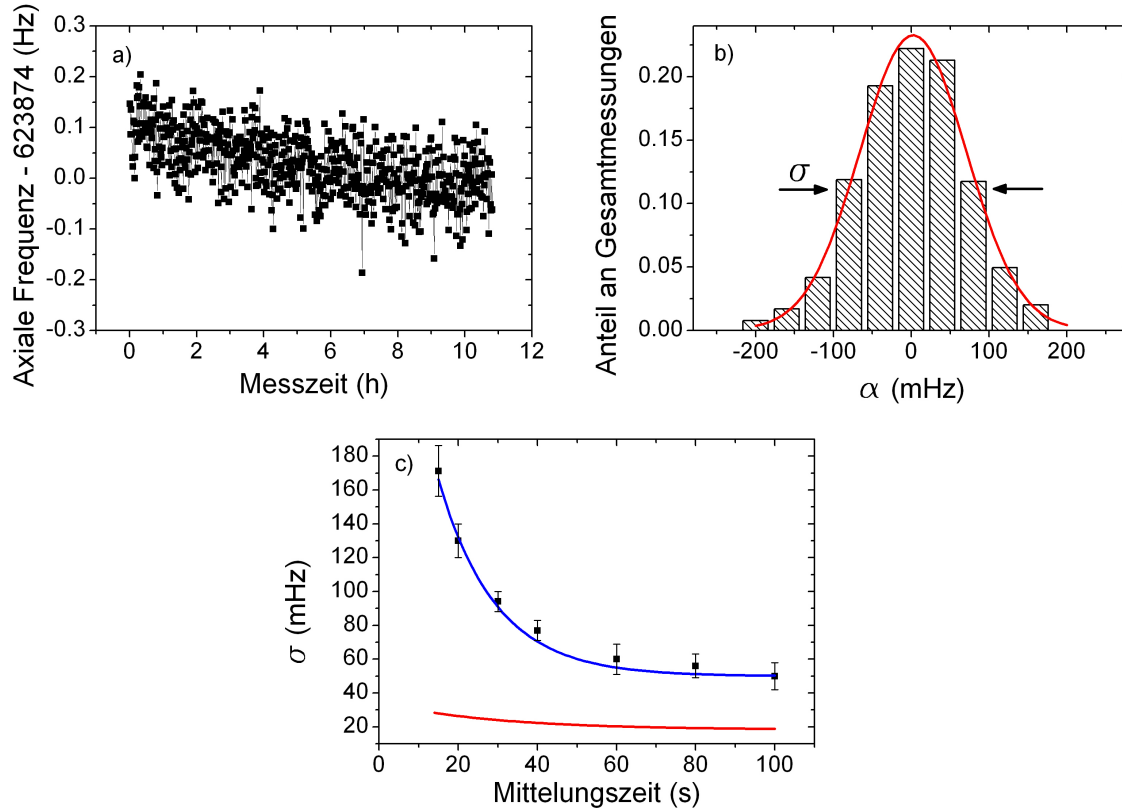


Abbildung 5.10: Stabilität der axialen Frequenz in der Präzisionsfalle. In a) ist eine axiale Frequenzmessreihe über einen Zeitraum von 11 Stunden gezeigt. Aus dieser können die Frequenzsprünge $\alpha_i = \nu_{z,i} - \nu_{z,i+1}$ zwischen zwei aufeinander folgenden Messungen bestimmt werden. Die Verteilung der α ist in b) gezeigt. Als Maß für die Frequenzfluktuationen lässt sich die Standardabweichung σ dieser Verteilung definieren. In c) sind die Frequenzfluktuationen in schwarz als Funktion der Mittelungszeit gezeigt. Man erkennt die typische Skalierung einer Mittelung über weißes Rauschen. Zusätzlich sind in rot die erwarteten Fluktuationen auf Grund der Spannungsfluktuationen und in blau die Frequenzfluktuationen nach Abzug der Spannungsfluktuationen gezeigt. Spannungsfluktuationen tragen nicht signifikant zu den Frequenzfluktuationen bei.

ist in rot gezeigt, und trägt nicht wesentlich zu den axialen Frequenzfluktuationen bei. Der dominierende Beitrag zu den Frequenzfluktuationen

$$\sigma_{FFT}^2(T) = \sigma_{tot}^2(T) - \sigma_S^2(T) \quad (5.15)$$

resultiert aus der Kurvenanpassung an das Rauschspektrum zur Bestimmung der Frequenz, welcher in Abbildung 5.10 c) in blau gezeigt ist. Ein überlagerter Random

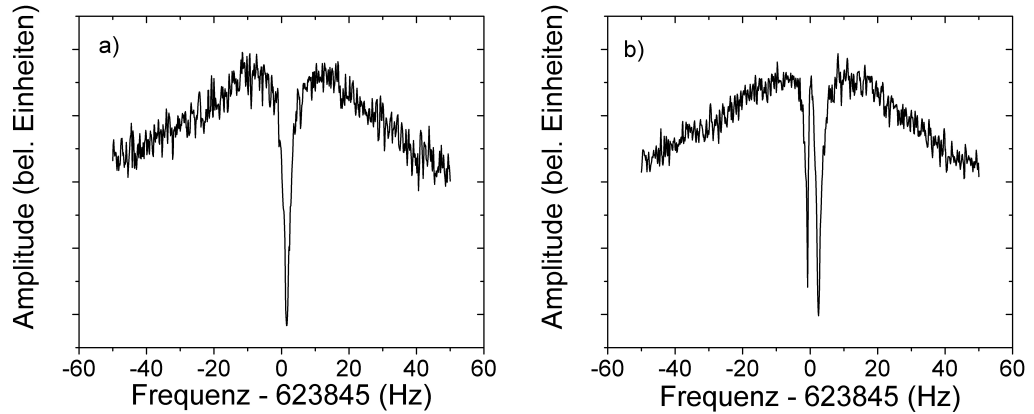


Abbildung 5.11: Magnetron Doppeldip. In a) ist das axiale Spektrum eines Einzeldips im thermischen Gleichgewicht mit dem Nachweis gezeigt. Durch eine Seitenbandkopplung an die Magnetronmode kommt es zu einer vollständigen Amplitudenmodulation und der Einzeldip spaltet in den Doppeldip auf. Der Doppeldip ist in b) gezeigt. Aus den Frequenzen der beiden Seitenbänder sowie der Frequenz des Einzeldips kann die Frequenz des Magnetronmode bestimmt werden. Die Asymmetrie im Doppeldip resultiert aus einer endlichen Verstimmung der Seitenbandkopplung. Die Bestimmung der Magnetronfrequenz ist invariant gegenüber dieser Verstimmung.

Walk, welcher mit \sqrt{T} skalieren würde, kann in der Präzisionsfalle nicht beobachtet werden. Bei einer Mittelungszeit von 60 s wird eine Frequenzstabilität von 60(9) mHz erreicht. Dies führt zu einer beobachteten Frequenzfluktuation der reduzierten Zyklotronfrequenz, welche mit der Doppeldip-Methode über drei axiale Frequenzmessungen bestimmt wird, von 104(15) mHz. Dies ist gegenüber dem Beitrag auf Grund der magnetischen Inhomogenität in der Präzisionsfalle, siehe Abschnitt 5.3.3, vernachlässigbar.

5.3.2 Messung der Magnetronfrequenz

Im Gegensatz zur Messung der axialen Frequenz wird die Magnetronfrequenz, wie in Kapitel 3.2 diskutiert, indirekt über eine Seitenbandkopplung bestimmt. Hierzu wird eine Anregung mit der Frequenz $\nu_{rf} = \nu_- + \nu_z + \delta$ auf eine Hälfte einer geteilten Korrektorelektrode gegeben. Diese Anregung führt zu einer Kopplung der beiden Moden. Es kommt zu einer Amplitudenmodulation und, damit verknüpft, dem Auftreten von zwei Seitenbändern in beiden Moden. Diese Seitenbänder können im axialen Spektrum beobachtet werden. Der axiale Einzeldip spaltet in zwei Signale, im folgenden Doppeldip genannt, auf. In Abbildung 5.11 sind der Einzeldip

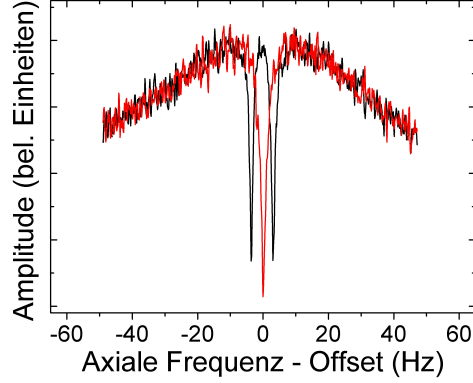


Abbildung 5.12: In rot ist das axiale Spektrum eines Einzeldips und in schwarz der Doppeldip bei einer Seitenbandkopplung der axialen Mode und der reduzierten Zyklotronmode gezeigt.

bei Frequenz ν_z ohne eine Seitenbandkopplung und der Doppeldip bei Frequenzen ν_l und ν_r mit einer Seitenbandkopplung gezeigt. Aus dieser Messung lässt sich über den Zusammenhang

$$\nu_- = \nu_z + \nu_{rf} - \nu_l - \nu_r \quad (5.16)$$

die Magnetronfrequenz mit einer relativen Präzision von $\Delta\nu_-/\nu_- = 1.4 \cdot 10^{-4}$ bestimmen. Diese Unsicherheit limitiert die Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz auf $\Delta\nu_c/\nu_c = 10^{-12}$ und ist somit vernachlässigbar. Erst eine relative Unsicherheit von $\Delta\nu_-/\nu_- = 2 \cdot 10^{-2}$ würde signifikant auf einem Niveau von 10^{-9} zur freien Zyklotronfrequenz beitragen. Dies entspricht einer absoluten Änderung der Magnetronfrequenz, $\nu_- = 6 \text{ kHz}$, von 100 Hz. Tatsächlich wurde über eine Messzeit von einem Jahr keine Änderung der Magnetronfrequenz um mehr als 200 mHz, daher $\Delta\nu_-/\nu_- = 3 \cdot 10^{-4}$, beobachtet.

5.3.3 Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz

Die reduzierte Zyklotronfrequenz wird ebenfalls über eine Seitenbandkopplung an die axiale Mode bestimmt. In Abbildung 5.12 sind die entsprechenden axialen Spektren gezeigt.

Über die Relation

$$\nu_+ = \nu_{rf} + \nu_l + \nu_r - \nu_z \quad (5.17)$$

kann die Frequenz der reduzierten Zyklotronmode bestimmt werden.

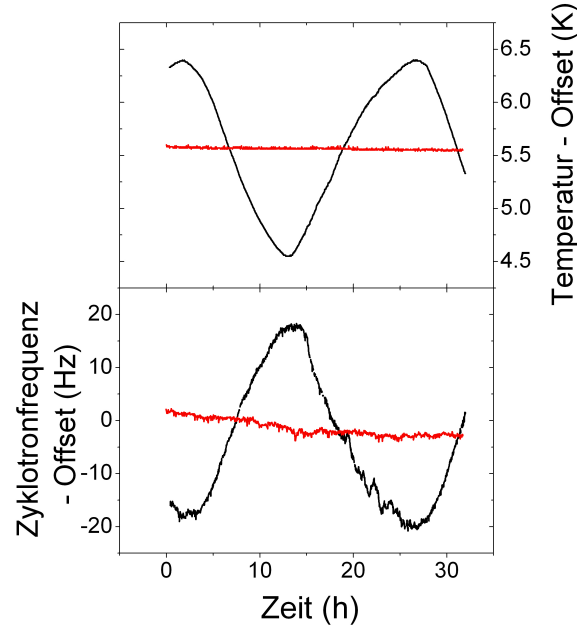


Abbildung 5.13: In a) ist die Langzeitstabilität der freien Zyklotronfrequenz in rot mit einer Stabilisierung der Temperatur des Experiments und in schwarz ohne eine Stabilisierung der Temperatur gezeigt. In b) sind die simultan gemessenen Temperaturen gezeigt. Die Temperatur konnte auf 40 mK stabilisiert werden.

Langzeitstabilität der freien Zyklotronfrequenz

Aus einer Langzeitmessung der freien Zyklotronfrequenz können Rückschlüsse auf die Stabilität des Magnetfeldes gezogen werden. In Abbildung 5.13 wird diese Messung vor und nach der Installation einer Temperaturstabilisierung gezeigt. Deutlich sichtbar ist eine Korrelation des Magnetfeldes mit der Raumtemperatur, welche nach [80] auf eine Bewegung der Apparatur zurückzuführen ist. Nach der Temperaturstabilisierung konnte eine Stabilität von $\Delta\nu_c/\nu_c/t = 4.0(0.4) \cdot 10^{-9}$ h erreicht werden. Dies ist vergleichbar mit den Magnetsystemen, welche an ISOL-TRAP [81] und TRIGA-TRAP [82] verwendet werden. Auf der Zeitskala einer 1ppb-Präzisionsmessung des Frequenzverhältnisses $2\nu_L/\nu_c$ von 6 min stellt dies keine Limitierung dar. Aus der Bestimmung des Gewichts $\Delta_{c,nl} = (\nu_{c,i}/2 + \nu_{c,i+2}/2 - \nu_{c,i+1})/\nu_{c,i+1}$, mit $\nu_{c,i}$ der Messung zum Zeitpunkt i , kann auf nicht-lineare Beiträge in der Drift rückgeschlossen werden. Es ergibt sich $\Delta_{c,nl} = 0.01(0.10) \cdot 10^{-9}$. Eine nicht-lineare Drift des Magnetfeldes kann somit auf einem Niveau von 0.1ppb ausgeschlossen werden. Dies bedeutet, dass bei einer angestrebten Präzision von

1ppb eine lineare Interpolation des Magnetfeldes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen möglich ist.

Die Ursache für die endliche Drift der Zyklotronfrequenz nach der Temperaturstabilisierung konnte nicht abschließend geklärt werden. Ausgeschlossen werden konnten eine Korrelation mit dem Druck der Heliumreservoirs, welche auf 0.2 mbar stabilisiert werden, und eine Korrelation mit dem Luftdruck, welcher den Druck der offenen Stickstoffreservoirs vorgibt. Eine mögliche Korrelation mit Füllständen der einzelnen Reservoirs bleibt zu untersuchen.

Kurzzeitfluktuationen der freien Zyklotronfrequenz

Um die Kurzzeitfluktuationen der freien Zyklotronfrequenz zu beschreiben, bedarf es einer detaillierten Beschreibung der Bestimmung der reduzierten Zyklotronfrequenz. Letztere wird über den Doppeldip und einen Einzeldip, daher drei axialen Frequenzmessungen, bestimmt. Folglich tragen Verschiebungen dieser Frequenzen direkt zu einer Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz bei. Es gilt

$$\nu_l = \nu_z + \Delta\nu_z(B_2T_+) - \frac{\Omega}{2} - \frac{\delta}{2} \quad (5.18)$$

$$\nu_r = \nu_z + \Delta\nu_z(B_2T_+) + \frac{\Omega}{2} - \frac{\delta}{2} \quad (5.19)$$

mit $\Delta\nu_z$ einer möglichen Verschiebung der axialen Frequenz auf Grund der magnetischen Inhomogenität B_2 . Die Verstimmung δ ist gegeben durch

$$\delta = \nu_{rf} - (\nu_+ + \Delta\nu_+(B_2T_z) - \nu_z - \Delta\nu_z(B_2T_+)) \quad (5.20)$$

mit $\Delta\nu_+(B_2T_z)$ einer Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz auf Grund der magnetischen Inhomogenität B_2 . Experimentell gemessen werden die beiden Seitenbänder ν_l und ν_r sowie die verschobene axiale Frequenz $\nu_{z,exp} = \nu_z + \Delta\nu_z$. Hieraus folgt für die über die Doppeldip Methode bestimmte reduzierte Zyklotronfrequenz

$$\nu_+ + \Delta\nu_+(B_2T_z) = \nu_{rf} + \nu_r + \nu_l - \nu_z - \Delta\nu_z(B_2T_+). \quad (5.21)$$

Folglich wird über die Doppeldip Methode die verschobene reduzierte Zyklotronfrequenz bestimmt. Des Weiteren ergibt sich eine Korrelation zwischen der Verschiebung der axialen Frequenz und der Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz. In Abbildung 5.14 a) ist diese Korrelation anhand der Frequenzfluktuationen beider Moden belegt.

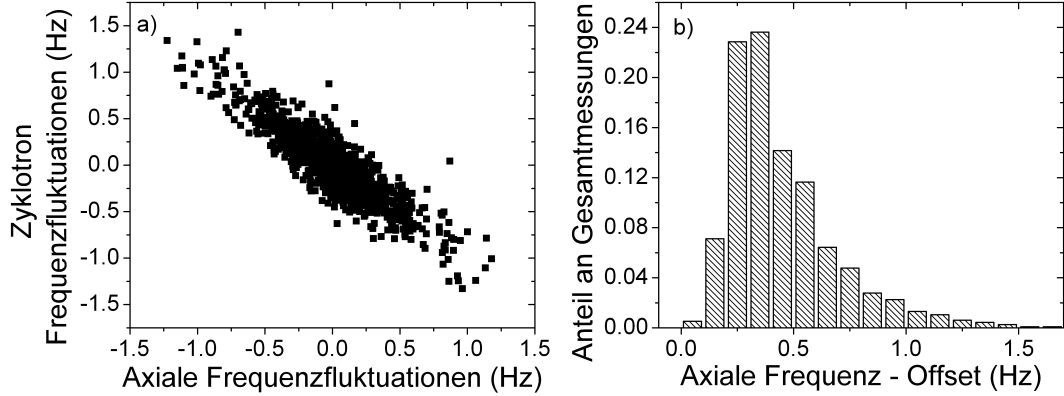


Abbildung 5.14: Ursprung der Zyklotronfrequenz Fluktuationen. In a) ist die Korrelation zwischen den axialen Frequenzfluktuationen und den Frequenzfluktuationen der Zyklotronmode gezeigt. In b) ist die Verteilungen der axialen Frequenzmessung gezeigt.

Im Vergleich zur Stabilitätsmessung der reinen axialen Frequenz von 60 mHz werden hier deutlich höhere axiale Frequenzfluktuationen von 300 mHz beobachtet. In Abbildung 5.14 b) ist die Verteilung der axialen Frequenzen gezeigt. Diese Verteilung lässt sich aus einer Faltung der normal-verteilten axialen Frequenzfluktuationen w_n mit Mittelwert Null und einer Boltzmann-Verteilung w_B beschreiben. Die Boltzmann-Verteilung ist das Resultat einer Kopplung des magnetischen Moments der reduzierten Zyklotronmode an die axiale Mode über eine endliche magnetische Inhomogenität B_2 , wie im Folgenden diskutiert wird.

Während die Seitenbandkopplung aktiv ist befinden sich beide Moden im Gleichgewicht mit dem thermischen Bad des axialen Resonators. Folglich ist die Energie beider Moden Boltzmann-verteilt. Für das Verhältnis der Temperatur der axialen Mode T_z und der Temperatur der reduzierten Zyklotronmode T_+ gilt

$$\frac{T_+}{T_z} = \frac{\nu_+}{\nu_z}. \quad (5.22)$$

Wird die Kopplung beendet, nimmt die Energie $T_+ = E_+/k_B$ der Zyklotronmode einen festen aber beliebigen Wert der Boltzmann-Verteilung während der Kopplung an, welcher schließlich zu einer Verschiebung der axialen Frequenz nach

$$\Delta\nu_z = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z} \frac{B_2}{B_0} k_B T_z = 8.2 \cdot B_2 T_z \frac{\text{mHz m}^2}{\text{T K}} \quad (5.23)$$

führt. Folglich sind die $\Delta\nu_z$ nach der Kopplung mit w_B Boltzmann-verteilt. Die gesamte Verteilung der axialen Frequenzen nach der Kopplung ergibt sich aus

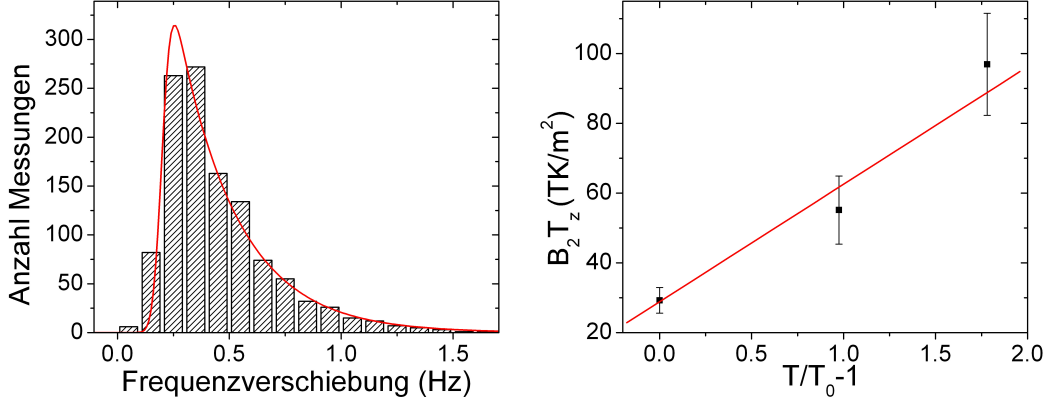


Abbildung 5.15: Bestimmung des Koeffizienten $B_2 T_z$. Über eine Kurvenanpassung in schwarz an die Verteilung der axialen Frequenzverschiebungen kann der Koeffizient $B_2 T_z$ bestimmt werden. Die Messung kann über Feedback auf den axialen Nachweis zu unterschiedlichen Temperaturen T_z wiederholt werden. Die Abhängigkeit kann über einen linearen Zusammenhang beschrieben werden.

der Faltung

$$w_{z,K}(\Delta f; \Delta \nu_z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_z(x - \Delta f) w_B(x; \Delta \nu_z) \partial x \quad (5.24)$$

der normalverteilten axialen Frequenzfluktuationen der reinen axialen Messung

$$w_z(\Delta f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{\Delta f^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (5.25)$$

und der Boltzmann-Verteilung nach der Kopplung

$$w_B(\Delta f; \Delta \nu_z) = \Theta(\Delta f) \frac{1}{\Delta \nu_z} \exp\left(-\frac{\Delta f}{\Delta \nu_z}\right). \quad (5.26)$$

$\Theta(x)$ ist die Heaviside Stufen-Funktion. σ_z ist aus der Messung der axialen Frequenzstabilität bekannt. Aus einer Kurvenanpassung von 5.24 an die gemessene Verteilung, siehe Abbildung 5.15, kann $B_2 T_z$ bestimmt werden. Es ergibt sich ein Messwert von $B_2 T_z = 29(3) \text{ T/m}^2\text{K}$, woraus mit der unabhängigen Messung der axialen Temperatur eine Inhomogenität von $3.7(1.4) \text{ T/m}^2$ folgt.

Auf Grund der Korrelation der Frequenzfluktuationen der reduzierten Zyklotronmode mit der axialen Temperatur, müssen diese durch negatives Feedback, daher einer Reduzierung der axialen Temperatur, verringert werden können. In Abbildung 5.16 sind die Fluktuationen zu Temperaturen T_0 und $1/2 \cdot T_0$ gezeigt. Ohne

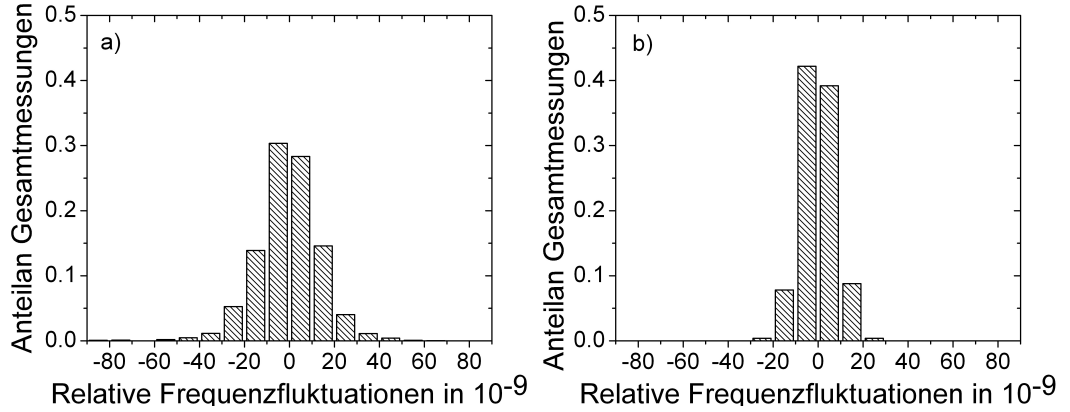


Abbildung 5.16: Fluktuationen der freien Zyklotronfrequenz. In a) sind die relativen Fluktuationen der freien Zyklotronfrequenz ohne axiales Feedback gezeigt. Analog b) mit negativem Feedback. Auf Grund der niedrigeren axialen Temperatur kommt es zu einer Reduzierung der axialen Frequenzfluktuationen, welche sich direkt in einer Reduzierung der Fluktuationen der freien Zyklotronfrequenz bemerkbar macht.

Feedback wurden Frequenzfluktuationen von 400 mHz gemessen. Hierzu tragen die axialen Frequenzfluktuationen von 100 mHz nur zu einem Viertel bei. Mit Feedback konnten die Frequenzfluktuationen um circa einen Faktor 2 auf $\Delta\nu_c/\nu_c = 7 \cdot 10^{-9}$ reduziert werden.

Zusammenfassend, die beobachteten Frequenzfluktuationen der reduzierten Zyklotronmode basieren nicht auf einer Fluktuation des Magnetfeldes. Vielmehr wird zu jeder Doppeldip Messung nicht die axiale Frequenz mit $\Delta\nu_z(T_+ = 0\text{K}) = 0\text{Hz}$ bestimmt, sondern eine zufällige Boltzmann-verteilte Frequenzverschiebung $\Delta\nu_z$ gemessen. Dies führt nach Gleichung 5.21 zu einer beobachteten Fluktuation der reduzierten Zyklotronfrequenz.

Die Frequenzfluktuationen der reduzierten Zyklotronfrequenz bestimmen die beobachteten Fluktuationen der freien Zyklotronfrequenz, welche über das Invarianz-Theorem, Gleichung 2.11, bestimmt wird. Bei der Bestimmung des g -Faktors aus dem Verhältnis der Larmorfrequenz und der freien Zyklotronfrequenz führen diese Frequenzfluktuationen zu einer Verbreiterung der g -Faktor Resonanz. Da nach Gleichung 5.21 mit der Doppeldip-Methode die Frequenz $\nu_+ + \Delta\nu_+(B_2T_z)$ gemessen wird und ebenso $\nu_L + \Delta\nu_L(B_2T_z)$ bestimmt wird, kommt es nach der Diskussion aus Kapitel 2.7 zu keiner relevanten systematischen Verschiebung der g -Faktor Resonanz.

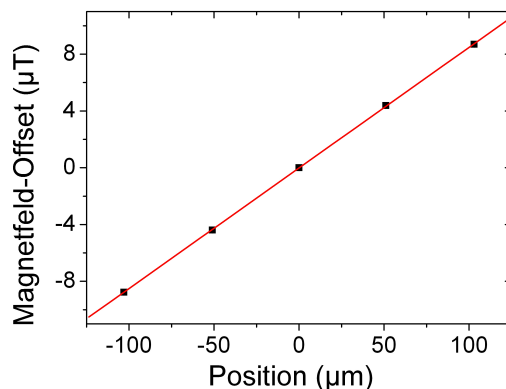


Abbildung 5.17: Magnetfeld der Präzisionsfalle. Aufgetragen ist das Magnetfeld als Funktion der Position in der Falle. Die Messfehler sind kleiner als die Datenpunkte.

5.4 Messung der magnetischen Feldinhomogenität in der Präzisionsfalle

Zur Messung der Inhomogenität in der Präzisionsfalle werden Offsetspannungen an die Korrektorelektroden angelegt. Dies führt zu einer Verschiebung des Teilchens entlang der Magnetfeldachse. Aus dem theoretisch bekannten Fallenpotential zu einem Offset lässt sich die Position des Teilchens bestimmen. Über die Doppeldip-Methode kann anschließend die freie Zyklotronfrequenz, und daher das Magnetfeld, als Funktion der Position in der Falle bestimmt werden. Das Ergebnis der Messung ist in Abbildung 5.17 gezeigt. Es ergibt sich $B_1 = 84.96(0.01)$ mT/m. Auf Grund des relativ zu B_1 kleinen Beitrags von B_2 kann aus dieser Messung kein Wert für B_2 angegeben werden.

Auf Grund des magnetischen Moments, $\mu_+ \propto E_+$, der reduzierten Zyklotronmode kommt es im Gradienten des Magnetfelds zu einer Verschiebung des axialen Gleichgewichtpunktes und damit zu einer Verschiebung des vom Proton erfahrenen Magnetfeldes, vergleiche Abschnitt 2.4.

Sollten die Larmorfrequenz und die reduzierte Zyklotronfrequenz zur gleichen Energie E_+ bestimmt werden, tritt keine systematische Verschiebung des gemessenen g -Faktors auf, da $\Delta\nu_L/\Delta\nu_c = g/2$. Sollten die Frequenzen jedoch zu unterschiedlichen Energien gemessen werden, muss eine systematische Verschiebung des gemessenen g -Faktors berücksichtigt werden. So führt eine Energiedifferenz von $\Delta T_+ = E_+/k_B = 100$ K zwischen den Messungen der Larmorfrequenz und der Zyklotronfrequenz zu einer relativen Verschiebung des gemessenen g -Faktors von 0.2 ppb.

Kapitel 6

Experimentelle Ergebnisse - Die Analysefalle

Die Analysefalle dient der Identifikation des Spin-Eigenzustandes. Zu diesem Zweck ist der Falle eine magnetische Flasche überlagert, welche das Spin-Moment an die axiale Mode koppelt. Ein Spin-Flip führt somit zu einer Änderung der axialen Frequenz.

In diesem Kapitel werden erste Ergebnisse zu Messungen in der Analysefalle vorgestellt, bevor im nächsten Kapitel ausführlich auf die Spin-Flip Detektion eingegangen wird. In Abschnitt 6.1 wird die Messung der magnetischen Flasche vorgestellt. Da für das Verständnis der axialen Frequenzfluktuation die Temperatur der radialen Moden eine entscheidende Rolle spielt, wird in Abschnitt 6.2 die Messung der Temperatur der Eigenmoden beschrieben. Schließlich wird in Abschnitt 6.3 ausführlich auf die Stabilität der axialen Frequenz eingegangen, welche für eine erfolgreiche Detektion von Spin-Flips zwingend ist.

6.1 Messung der magnetischen Flasche

In diesem Abschnitt wird die Messung der magnetischen Flasche der Analysefalle vorgestellt. Zur Messung des Magnetfelds muss die reduzierte Zyklotronfrequenz gemessen werden. Dabei kann die Doppeldip Methode, welche in der Präzisionsfalle angewendet wurde, nicht in der Analysefalle verwendet werden. Auf Grund der Seitenbandkopplung käme es zu einer Energiemodulation der Zyklotronmode. In der magnetischen Flasche wäre damit eine Frequenzmodulation der axialen Mode mit einer Trägerfrequenz von $\nu_t = 1.7\text{kHz}$ verbunden und das axiale Signal mit einer

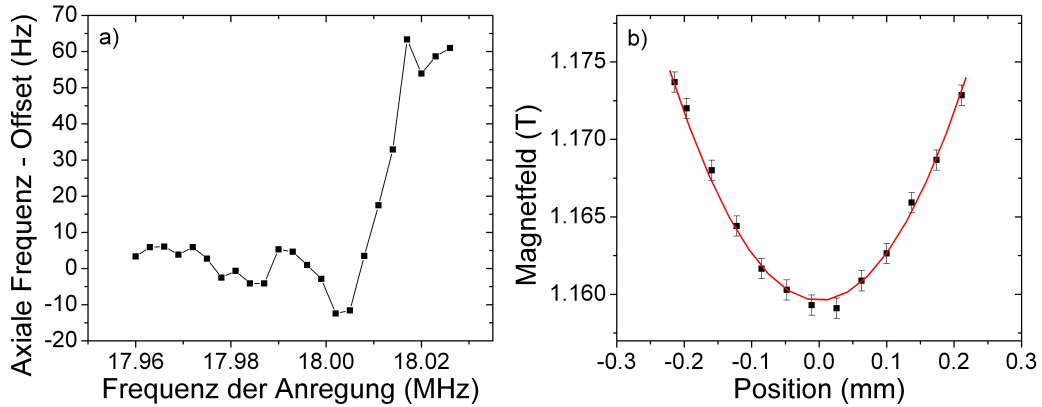


Abbildung 6.1: Ausmessen der magnetischen Flasche [48]. In a) ist eine Messsequenz zur Bestimmung der reduzierten Zyklotronfrequenz gezeigt. Zwischen zwei axialen Frequenzmessungen wird eine Anregung mit fester Frequenz eingestrahlt. Ist diese Anregung in Resonanz mit der Frequenz der reduzierten Zyklotronmode, wird die Energie dieser Mode erhöht. Dies führt zu einem Sprung in der axialen Frequenz, woraus auf die Zyklotronfrequenz rückgeschlossen werden kann. Wird das Teilchen entlang der Falle durch Offset Spannungen verschoben, kann diese Messung an unterschiedlichen Positionen der Falle wiederholt werden. In b) ist das Magnetfeld als Funktion der Position gezeigt. Es ergibt sich der für eine magnetische Flasche erwartete quadratische Zusammenhang. Die rote Kurve stellt eine Kurvenanpassung an die Daten dar.

Breite von 1 Hz nicht mehr detektierbar. Daher bedarf es einer alternativen Methode zur Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz.

Die hier verwendete Methode basiert auf einer Messung der axialen Frequenz [39, 48]. Zwischen zwei axialen Frequenzmessungen wird eine radiale Anregung mit Frequenz ν_{rf} eingestrahlt. Ist diese Anregung in Resonanz mit der Frequenz der reduzierten Zyklotronmode nimmt diese Energie auf. Es kommt folglich zu einer Verschiebung der axialen Frequenz, vergleiche Gleichung 2.33 in Kapitel 2.4. In Abbildung 6.1 a) ist das Ergebnis der axialen Frequenzmessung als Funktion von ν_{rf} gezeigt. Aufgrund der endlichen Linienbreite der Zyklotronresonanz, wie sie analog in Abschnitt 2.7 für die Larmorresonanz diskutiert wurde, schmiert der Anstieg der axialen Frequenz aus. Aus dieser Messung lässt sich die reduzierte Zyklotronfrequenz auf 1.5 kHz bestimmen.

Wird diese Messung durch Anlegen von Offset-Spannungen an die Korrektorelektroden zu unterschiedlichen Positionen in der Falle wiederholt und die Magnetronfrequenz in analoger Weise bestimmt, erhält man aus dem Invarianz Theorem die freie Zyklotronfrequenz und damit das Magnetfeld, siehe Abbildung 6.1 b). Aus einer

Kurvenanpassung kann die Stärke der magnetischen Flasche B_2 bestimmt werden. Es ergibt sich in sehr guter Übereinstimmung zum Wert aus den Finite Elemente Rechnungen, $B_2 = 298(1) \text{ T/m}^2$, ein experimenteller Wert von $B_2 = 297(10) \text{ T/m}^2$.

6.2 Messung der Temperatur der Eigenmoden

Wie sich im folgenden Abschnitt zeigen wird, ist eine Bestimmung der absoluten Temperatur der Eigenmoden entscheidend zum Verständnis der axialen Frequenzstabilität in der Analysefalle. Daneben kommt es bei einer Erhöhung der Magnetrontemperatur zu einer signifikanten Verschiebung der Larmorfrequenz in der Analysefalle um $\Delta\nu_L/T_- = -11 \text{ kHz/K}$, wodurch die erreichten Spin-Flip-Wahrscheinlichkeiten bei fester Anregungsfrequenz reduziert werden. Dies beeinflusst die Detektierbarkeit des Spin-Zustandes, siehe Abschnitt 7.6. Aus diesen Gründen ist eine Bestimmung der thermischen Energie und eine Kalibrierung der absoluten Temperatur von hohem Interesse.

Die Messung der Magnetrontemperatur erfolgt analog zu der bereits in Abschnitt 5.3.3 vorgestellten Methode. Dabei wird die Verschiebung der axialen Frequenz durch das magnetische Moment der Magnetronmode, welche über die magnetische Flasche eingeführt wird, ausgenutzt. Ein Messzyklus besteht aus einer Seitenbandkopplung der Magnetronmode mit der axialen Mode und einer anschließenden Messung der axialen Frequenz ohne die Seitenbandkopplung. Während der Seitenbandkopplung befindet sich die axiale Mode im thermischen Gleichgewicht mit dem axialen Nachweis der Analysefalle bei der thermischen Temperatur T_z . Folglich gilt während der Kopplung für die Temperatur der Magnetronmode, siehe Abschnitt 3.2,

$$\frac{T_-}{T_z} = \frac{\nu_-}{\nu_z}. \quad (6.1)$$

Wird die Seitenbandkopplung ausgeschaltet nimmt die Magnetronmode eine zufällige aber feste Temperatur $T_{-,f} = E_-/k_B$ der Temperaturverteilung während der Kopplung ein. Dies führt schließlich über die magnetische Flasche zu einer Verschiebung der axialen Frequenz von

$$\Delta\nu_z = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z} \frac{B_2}{B_0} T_{-,f} = 72 \text{ Hz/K} \cdot T_{-,f}. \quad (6.2)$$

In Abbildung 6.2 a) ist eine Reihe axialer Frequenzmessungen nach den Seitenbandkopplungen gezeigt. Aus der niedrigsten Frequenz kann auf $\Delta\nu_z(T_{-,f} = 0) = 0 \text{ Hz}$

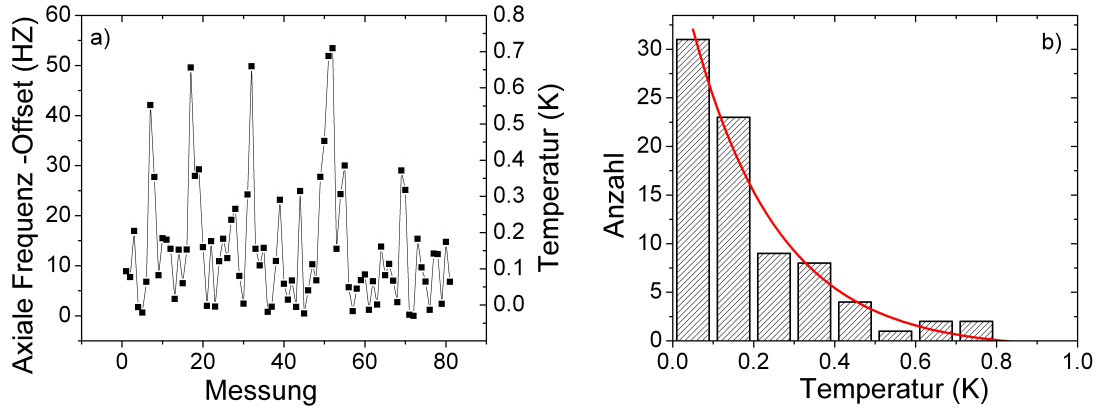


Abbildung 6.2: Messung der Temperatur der Magnetronmode ohne Feedback. In a) sind die axialen Frequenzverschiebungen nach einer Seitenbandkopplung der axialen Mode und der Magnetronmode gezeigt. Aus der Frequenzverschiebung kann auf die momentane Temperatur der Magnetronmode rückgeschlossen werden, siehe rechte Achse der Abbildung. In b) ist die Verteilung der momentanen Temperaturen gezeigt. Man erkennt die typische Boltzmann-Verteilung eines thermischen Bades. Aus dieser Messung lässt sich die thermische Temperatur der axialen Mode und der Magnetronmode bestimmen.

rückgeschlossen werden und folglich jeder weiteren Frequenzverschiebung nach Gleichung 6.2 eine Temperatur zugeordnet werden, womit dieses Messschema einer absoluten Temperaturkalibrierung entspricht. Werden die Daten gebinnt in einem Histogramm dargestellt, vergleiche Abbildung 6.2 b), erkennt man die für ein thermisches Bad typische Boltzmann-Verteilung

$$w(T_{-,f}) = \frac{1}{k_B T_-} \exp\left(-\frac{k_B T_{-,f}}{k_B T_-}\right). \quad (6.3)$$

Aus einer Kurvenanpassung lässt sich die thermische Temperatur der Magnetronmode zu $T_- = 170(10)$ mK bestimmen. Hieraus folgt über die Relation aus Gleichung 6.1 für die thermische Temperatur der axialen Mode beziehungsweise des axialen Nachweises $T_z = 8.4(0.5)$ K.

In Abschnitt 3.4 wurde vorgestellt, dass durch die Anwendung von negativem Feedback die Temperatur des Nachweises und damit verknüpft die Temperatur der axialen Mode reduziert werden kann. Dies bewirkt auch eine Reduzierung der Magnetrontemperatur. In Abbildung 6.3 ist die Messung der Magnetrontemperatur mit negativem Feedback gezeigt. Die Magnetrontemperatur konnte auf $T_- = 50(3)$ mK reduziert werden. Dies entspricht nach Gleichung 6.1 einer Temperatur der axialen Mode von $T_z = 2.4(0.2)$ K. Eine mögliche Verschiebung der Larmorfrequenz über die Kopplung an die Magnetronmode in der magnetischen Flasche kann somit auf

6.2. MESSUNG DER TEMPERATUR DER EIGENMODEN

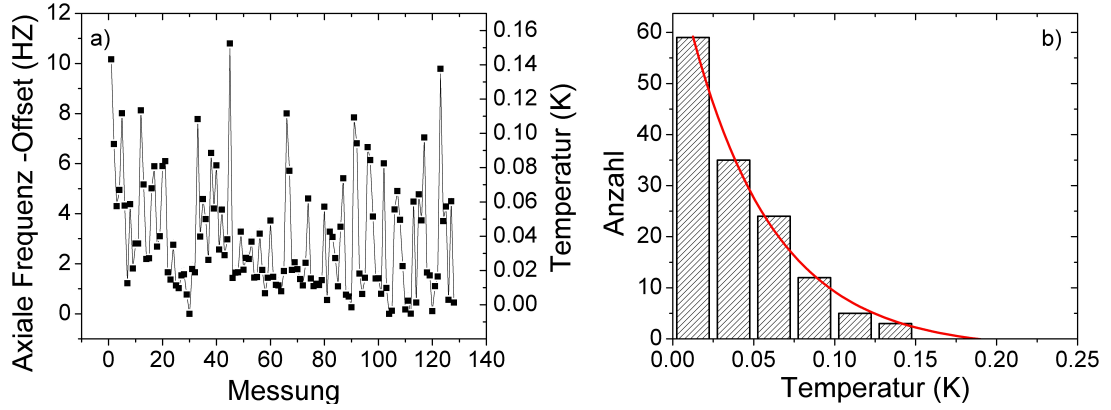


Abbildung 6.3: Messung der Temperatur der Magnetronmode mit negativem Feedback. Analog zu Abbildung 6.2 sind in a) die axialen Frequenzverschiebungen nach einer Seitenbandkopplung der axialen Mode und der Magnetronmode gezeigt. In b) ist die Verteilung der momentanen Temperaturen gezeigt. Man beachte die unterschiedlichen Skalen im Vergleich zu Abbildung 6.2.

$\Delta\nu_L = -570$ Hz beschränkt werden.

Für die Temperatur der Zyklotronmode nach einer Seitenbandkopplung an den axialen Nachweis gilt

$$\frac{T_+}{T_z} = \frac{\nu_+}{\nu_z}. \quad (6.4)$$

Folglich wird nach den letzten Messungen $T_+ = 50$ K erwartet. Eine Möglichkeit niedrigere Temperaturen zu erreichen bietet die Thermalisierung der Zyklotronmode mit dem Zyklotronnachweis in der Präzisionsfalle. Hierzu wird das Proton in der Präzisionsfalle mit dem thermischen Bad des Zyklotronnachweises thermalisiert. Anschließend wird das Ion in die Analysefalle transportiert und dort dessen absolute axiale Frequenz bestimmt. Analog der bisherigen Beschreibung kann die niedrigste Frequenz mit $\Delta\nu_z(T_+ = 0) = 0$ Hz identifiziert werden. In Abbildung 6.4 a) sind die gemessenen Frequenzverschiebungen einer zweiwöchigen Messreihe gezeigt. Hervorzuheben ist, dass keine Drift oder Variation bei den Frequenzmessungen mit niedriger Frequenzverschiebung beobachtet werden kann. Dies spricht für die hervorragende Stabilität der Spannungsquelle sowie der gesamten Apparatur. Aus der Verteilung der Frequenzverschiebungen, siehe Abbildung 6.4 b), kann die Temperatur der Zyklotronmode, respektive des Zyklotronnachweises, bestimmt werden. Es ergibt sich $T_+ = 5.6(0.4)$ K.

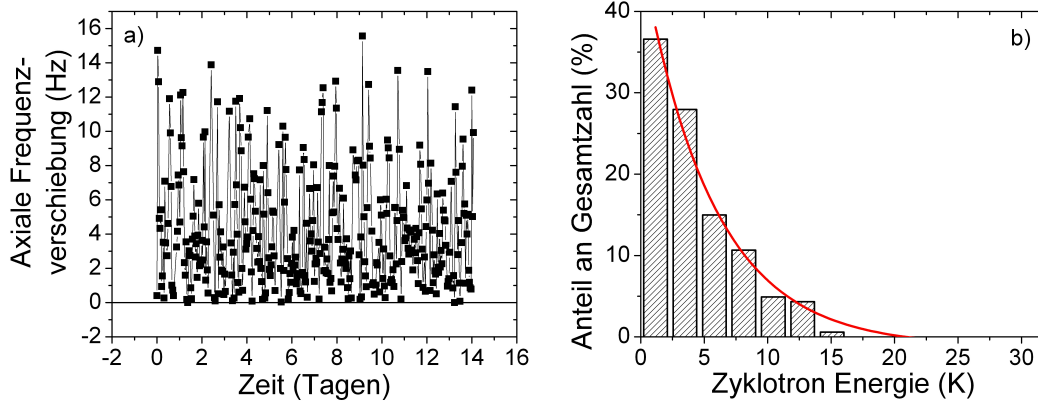


Abbildung 6.4: Messung der Temperatur der Zyklotronmode. In a) sind die axialen Frequenzverschiebungen in der Analysefalle nach einer Thermalisierung der reduzierten Zyklotronmode mit dem thermischen Bad des Zyklotronnachweises in der Präzisionsfalle gezeigt. In b) ist die Verteilung der momentanen Temperaturen gezeigt.

6.3 Stabilität der axialen Frequenz

Um einen Spin-Flip zu detektieren muss ein Frequenzsprung auf Grund eines Spin-Flips von $\Delta\nu_{z,sf} = 171$ mHz aufgelöst werden. Folglich ist eine hohe Stabilität der axialen Frequenz in der Analysefalle für eine erfolgreiche Detektion eines Spin-Flips zwingend.

Analog zur Beschreibung in Abschnitt 5.3.1 wird als Maß für die Frequenzfluktuationen die Standardabweichung der Differenz zweier aufeinander folgender Frequenzmessungen $\alpha_i(T) = \nu_{z,i}(t_i) - \nu_{z,i+1}(t_i + T)$ definiert

$$\sigma(T) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (\alpha_i(T) - \bar{\alpha}(T))^2}, \quad (6.5)$$

mit T der FFT Mittelungszeit. In Abbildung 6.5 ist σ als Funktion der Mittelungszeit gezeigt¹. Die beobachteten Frequenzfluktuationen lassen sich aus der Überlagerung zweier Beiträge beschreiben,

$$\sigma^2(T) = \sigma_n^2(T) + \sigma_w^2(T). \quad (6.6)$$

Zu niedrigen Zeiten erkennt man einen Abfall, welcher mit $1/\sqrt{T}$ skaliert und daher einem weißen Rauschen $\sigma_n(T)$ zuzuordnen ist [79]. Dieser Abfall wurde bereits in der Präzisionsfalle beobachtet und kann auch hier auf die endliche Bestimmbarkeit der

¹Die folgenden Ergebnisse sind auch Teil der Dissertation von H. Kracke [80].

6.3. STABILITÄT DER AXIALEN FREQUENZ

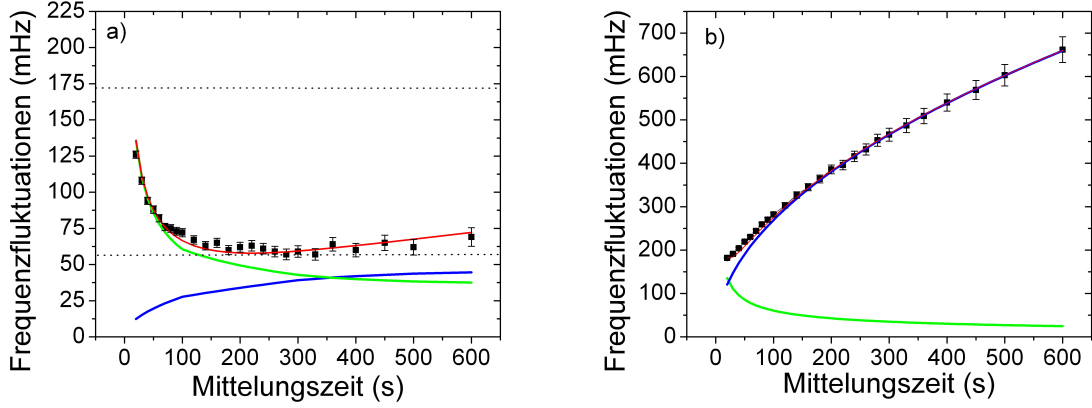


Abbildung 6.5: Frequenzfluktuationen der axialen Mode. In a) zu einem Proton mit niedriger Zyklotronenergie von $T_+ = 0.35$ K und in b) zu einem Proton mit hoher Zyklotronenergie von $T_+ = 5$ K. Aufgetragen sind jeweils die Frequenzfluktuationen gegen die FFT-Mittelungszeit. In grün dargestellt lässt sich zu kleinen Zeiten ein Abfall, der mit $1/\sqrt{T}$ skaliert, erkennen. Dieser resultiert aus der endlichen Bestimmbarkeit der axialen Frequenz aus dem thermischen, weißen Rauschen des Detektionssignals. Überlagert wird dieser Abfall durch einen Anstieg, welcher mit \sqrt{T} skaliert und daher als Random Walk zu interpretieren ist. In a) gibt die untere gestrichelte, horizontale Linie die optimale Stabilität $\sigma_{opt} = 55$ mHz an, welche erreicht wurde. Die obere gestrichelte, horizontale Linie gibt die Größe eines Frequenzsprungs auf Grund eines Spin-Flips an.

axialen Frequenz aus dem thermischen Rauschen des Detektionssignals zurückgeführt werden. Bei langen Mittelungszeiten ist dem weißen Rauschen ein zusätzlicher Beitrag, welcher mit \sqrt{T} skaliert, überlagert. Auf Grund der Skalierung ist dieser Beitrag einem Random Walk $\sigma_w(T)$ zuzuordnen²[79]. Der Random Walk wurde in der Präzisionsfalle nicht beobachtet und muss daher auf die magnetische Flasche zurückgeführt werden. Die Zunahme des Random Walks mit der Zyklotronenergie gibt bereits einen ersten Hinweis auf den Ursprung des Random Walks.

Es wurde eine optimale axiale Frequenzstabilität von $\sigma_{opt} = 55$ mHz erreicht. Der Frequenzsprung auf Grund eines Spin-Flips beträgt $\Delta\nu_{z,SF} = 171$ mHz. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit eine zufällige Frequenzfluktuation größer als $\Delta\nu_{z,SF}$ zu beobachten circa $P = 1\%$ ($\Delta\nu_{z,SF} \approx 3\sigma_{opt}$). Dies bedeutet, dass für ein Proton niedriger Zyklotronenergie einzelne Spin-Flips signifikant detektiert werden können.

Ursprung des Random Walks

Wie bereits angedeutet gibt die Skalierung des Random Walks mit der Zyklotron-

²Auf Grund der Invarianz von σ gegenüber einer Frequenzdrift ist eine Drift auszuschließen.

energie einen ersten Hinweis auf den Ursprung der Frequenzfluktuationen. Der Zusammenhang, welcher erstmals in [48] beschrieben wurde, wird im folgenden diskutiert.

Wie in Abschnitt 2.5 beschrieben führt in der magnetischen Flasche ein Zyklotronquantensprung $\Delta n_+ = \pm 1$ zu einer Verschiebung der axialen Frequenz von $\Delta\nu_{z,+} = 63 \text{ mHz}$. Ändert sich nun während der Mittelungszeit T der Zyklotronquantenzustand mit einer Rate von $\delta n_+/\delta t$ führt dies nach Gleichung 6.5 zu einem Beitrag in den axialen Frequenzfluktuationen von

$$\sigma_+ = \sqrt{\frac{\delta n_+}{\delta t} T \Delta\nu_{z,+}^2}. \quad (6.7)$$

Dies entspricht der Skalierung eines Random Walks, wie er von der Brown'schen Bewegung von Gasen bekannt ist. Wird angenommen, dass über die Linienbreite der Zyklotronresonanz $2\pi\Delta_+ = qB_2 \langle z^2 \rangle / m = 2\pi 15.6 \text{ kHz}$ ein konstantes weißes Rauschen E_0 anliegt, kann $\delta n_+/\delta t$ über Fermi's Goldene Regel gefunden werden

$$\delta n_+/\delta t = \frac{2\pi}{\hbar} \Delta_+ \rho(E_+) \Gamma_{i \rightarrow f}^2, \quad (6.8)$$

mit $\rho(E_+) = 1/\hbar\omega_+$ der Zustandsdichte des quantenmechanischen, harmonischen Oszillators der Zyklotronmode. $\langle z^2 \rangle$ gibt den Erwartungswert des Quadrats der axialen Bewegungsamplitude an.

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = qE_0 \sqrt{\frac{\hbar}{m_p \omega_+} \frac{n_+}{2}} \quad (6.9)$$

ist das Matrixelement des elektrischen Dipolübergangs in der Zyklotronmode mit E_0 der spektralen Rauschdichte des überlagerten elektrischen Feldes. Hieraus ergibt sich, dass die Übergangsrate mit der Energie der reduzierten Zyklotronmode skaliert, $\delta n_+/\delta t \propto n_+$.

Aus der Messung der axialen Frequenzfluktuationen zu unterschiedlichen Temperaturen $T_+ = E_+/k_B \propto n_+$ der Zyklotronmode kann die Abhängigkeit $\delta n_+/\delta t(n_+)$ überprüft werden. In Abbildung 6.6 a) sind Messungen zu axialen Frequenzfluktuationen für unterschiedliche Zyklotrontemperaturen gezeigt. Aus jeder dieser Messungen lässt sich über Gleichung 6.7 die Übergangsrate $\delta n_+/\delta t$ bestimmen. In Abbildung 6.6 b) ist diese gegen die Temperatur der Zyklotronmode aufgetragen. Die Daten sind konsistent mit der vorhergesagten linearen Abhängigkeit. Aus einer Kurvenanpassung erhält man $\delta n_+/\delta t/T_+ = 0.027(0.001) \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Dies entspricht einer Rauschamplitude von $E_0 = 7 \text{ nV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$. Um $\sigma_+ < \Delta\nu_{z,sf}/3$ bei einer typischen

6.3. STABILITÄT DER AXIALEN FREQUENZ

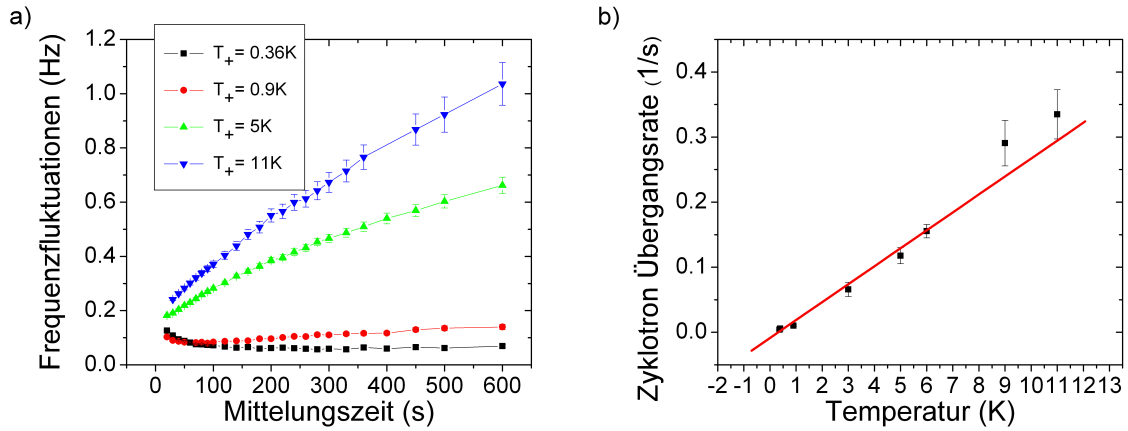


Abbildung 6.6: Ursprung des Random Walks. In a) sind axiale Frequenzfluktuationen zu unterschiedlichen Temperaturen der reduzierten Zyklotronmode gezeigt. Aus jeder dieser Messung lässt sich die Übergangsrate der Zyklotronmode bestimmen. In b) ist diese Übergangsrate als Funktion der Zyklotrontemperatur $T_+ \propto n_+$ gezeigt.

Mittelungszeit von 200s zu erhalten, muss ein Proton mit einer Zyklotronenergie von weniger als 0.1K beziehungsweise 10neV ausgewählt werden.

Dies stellt eine entscheidende Einschränkung für die Anwendung der Doppel-Fallen Methode dar. Auf der einen Seite muss das Proton in der Präzisionsfalle auf Zyklotronenergien von 300K geheizt werden, um über die Doppeldip-Methode die reduzierte Zyklotronfrequenz zu messen. Auf der anderen Seite werden in der Analysefalle niedrige Zyklotronenergien benötigt, um den Spin-Zustand des Protons zu detektieren. Dies bedeutet, dass nach einer Messung in der Präzisionsfalle das Proton stark gekühlt werden muss, um in der Analysefalle den Spin-Zustand detektieren zu können. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, eignet sich hierfür die Seitenbandkopplung nicht. Vielmehr sollte die Thermalisierung über den Zyklotronnachweis der Präzisionsfalle gewählt werden.

Im Folgenden sollen kurz die wesentlichen Verbesserungen, welche die Reduzierung der axialen Frequenzfluktuationen auf $\sigma_{opt} = 55\text{mHz}$ gegenüber [48] ermöglicht haben, beschrieben werden. In Abbildung 6.7 sind die axialen Frequenzfluktuationen des jetzigen Aufbaus der Apparatur dem des vorherigen Aufbaus gegenübergestellt. Die Verbesserungen können in zwei Kategorien, eine Reduzierung des Random Walks und einer Reduzierung des weißen Rauschens, aufgeteilt werden.

Als Ursache des Random Walks wurde ein weißes Rauschen identifiziert. Ein solches Rauschen, welches an die Zyklotronmode koppelt, muss eine Quadrupolkomponente

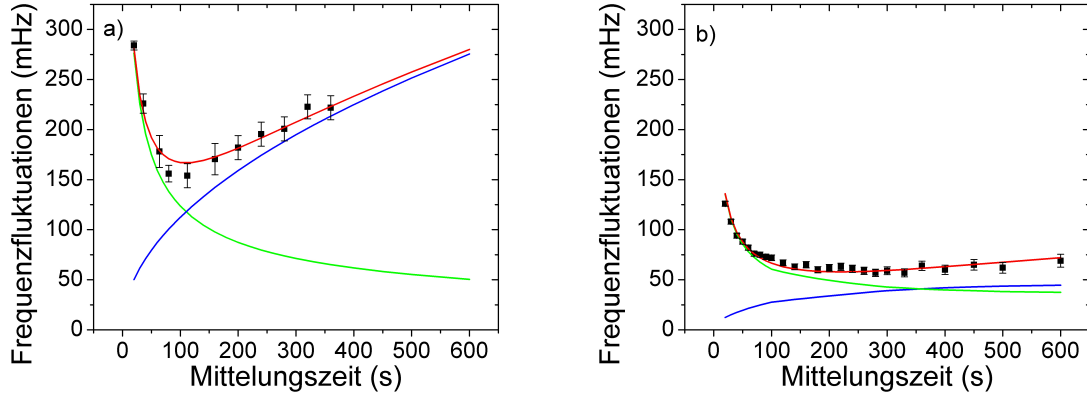


Abbildung 6.7: Vergleich der axialen Frequenzfluktuationen vor a) [48] und nach b) dem Umbau. Gezeigt sind jeweils in grün die Beiträge des weißen Rauschens und in blau die Beiträge des Random Walks, welche aus einer Kurvenanpassung an die Daten, in rot, gewonnen werden können.

besitzen. Folglich wurde, um den Einfluß des Rauschens zu unterdrücken, eine zuvor geteilte Elektrode, welche zur Quadrupolkopplung in der Analysefalle verwendet wurde, ersetzt. Zusätzlich wurden alle Gleichspannungsleitungen und Spannungsteiler der Anregungsleitungen im 4 K-Bereich mit 10-mal größeren Kapazitäten versehen. Schließlich wurde die Kopplung des axialen Nachweises, der einzigen aktiven Rauschquelle im System, an das Proton verringert, indem ein größerer effektiver Elektrodenabstand gewählt wurde. Anhand der Abbildung 6.7 ist deutlich sichtbar, dass diese Eingriffe den Random Walk reduzieren konnten. In Zahlen: Die Amplitude E_0 des weißen Rauschens wurde um einen Faktor 4 verringert. Dies entspricht einer Unterdrückung des Beitrags des Random Walks um $\sqrt{\sigma_{old}^2 - \sigma_{new}^2} = 109$ mHz, im Vergleich zum vorherigen Aufbau.

Des Weiteren wurde die Limitierung bei kurzen Mittelungszeiten durch das weiße Rauschen des Detektorsignals durch die Entwicklung der neuen Nachweise verbessert. Auf Grund des höheren Signal-zu-Rausch Verhältnisses und der kleineren Dipbreite ermöglichen sie eine schnellere Messung der axialen Frequenz mit gleichzeitig höherer Präzision. In Zahlen: Die Stärke des weißen Rauschens lässt sich über einen Amplitudenfaktor A_p als $\sigma_n(T) = \sqrt{A_p/T}$ ausdrücken. A_p wurde um einen Faktor 2 auf 0.6 s^{-1} verbessert.

Kapitel 7

Spin-Flips eines einzelnen Protons

Aus der Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion einer externen magnetischen Dipolanregung, der Larmorresonanz, lässt sich die Larmorfrequenz bestimmen. Dazu muss ein Spin-Flip, welcher zu einem Sprung der axialen Frequenz in der Analysefalle führt, detektiert werden. Die Schwierigkeit besteht darin, diesen Frequenzsprung auf dem Hintergrund der axialen Frequenzfluktuation korrekt als Spin-Flip zu identifizieren.

Im folgenden muss zwischen der Messung der Larmorfrequenz in der Analysefalle und der Präzisionsfalle unterschieden werden. Bei der Messung der Larmorfrequenz in der Präzisionsfalle wird die Doppel-Fallen Methode verwendet. Dies erfordert die direkte Identifikation des Spin-Zustands in der Analysefalle vor und nach einem Spin-Flip-Versuch in der Präzisionsfalle. Daher muss hier nach einer Messung der axialen Frequenz in der Analysefalle dem Proton eindeutig ein Spin-Zustand zugeordnet werden. Hingegen ist bei einer Messung der Larmorfrequenz in der Analysefalle keine direkte Identifikation des Spin-Zustandes erforderlich. Letzteres verlangt nur eine gemittelte Messung über eine Reihe vieler axialer Frequenzmessungen.

Zur Spin-Flip-Analyse wurden drei Methoden verwendet: Die statistische Methode, die Grenzwertmethode und die Bayes Methode. Die statistische Methode erlaubt nur eine Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in der Analysefalle und ist nicht geeignet einzelne Spin-Flips zu identifizieren. Daher lässt sich diese Methode nicht auf die Doppel-Fallen Methode anwenden. Letzteres wird erst durch die Grenzwertmethode möglich. Mit dieser Methode lässt sich die Larmorfrequenz sowohl in der Analyse- als auch Präzisionsfalle bestimmen. Die Bayes Methode schließlich erlaubt nur eine Identifikation des Spin-Zustandes. Da diese Methode die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in der Analysefalle als Vorgabeparameter verwendet, ist mit dieser Methode eine Messung der Larmorfrequenz in der Analysefalle nicht möglich. Sie

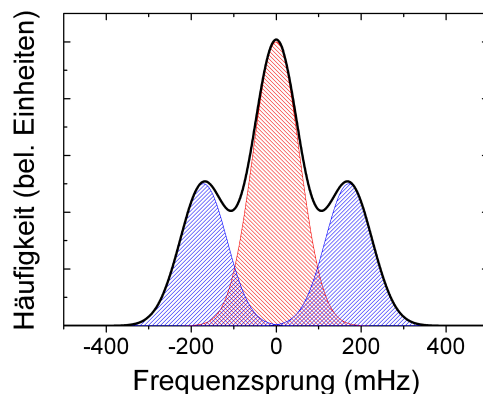


Abbildung 7.1: Theoretische Verteilung der axialen Frequenzfluktuationen $\Delta\nu_{z,i}$. In rot ist die Verteilung der N_{back} gezeigt. Die Verteilungen der $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ sind in blau gezeigt. Die durchgezogene schwarze Linie gibt den Verlauf der Gesamtverteilung N_{tot} an. Als Streuung der Verteilung wurden der im Experiment optimal erreichte Wert von σ_z verwendet.

ist in Bezug auf eine Messung der Larmorfrequenz nur für die Doppel-Fallen Methode geeignet.

In den folgenden Kapiteln werden die einzelnen Methoden zur Spin-Flip-Analyse vorgestellt. Zunächst werden die theoretischen Konzepte, die den einzelnen Methoden zugrunde liegen, beschrieben. Anschließend werden die Methoden auf Messergebnisse in der Analysefalle angewandt und deren Anwendbarkeit belegt.

7.1 Statistische Methode

Betrachtet wird in der Analysefalle eine Reihe axialer Frequenzmessungen $\nu_{z,i}$, in der zwischen zwei aufeinander folgenden Messungen i und $i + 1$ eine magnetische Dipolanregung eingestrahlt wurde, um einen Spin-Flip zu induzieren. Die hieraus resultierende Gesamtverteilung N_{tot} der axialen Frequenzfluktuationen $\Delta\nu_{z,i} = \nu_{z,i} - \nu_{z,i+1}$ kann über drei separate, nicht unabhängige Normalverteilungen N_{back} , $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ beschrieben werden, vergleiche Abbildung 7.1.

N_{back} beschreibt die normal-verteilten Hintergrundfluktuationen mit Mittelwert $\mu = 0$ und Streuung σ_z , welche keine Spin-Flips enthalten. Diesen überlagert sind die Verteilungen der Frequenzfluktuationen inklusive der Spin-Flips, $N_{sf\uparrow}$ für einen Spin-Übergang von up nach down und $N_{sf\downarrow}$ für einen Spin-Übergang von down nach up mit Mittelwerten $\mu = +\Delta\nu_{z,sf}$, $\mu = -\Delta\nu_{z,sf}$ und identischer Streuung σ_z . Die Erwartungswerte letzterer Verteilungen sind um den Betrag des Frequenzsprungs

eines Spin-Flips $\Delta\nu_{z,sf}$ nach oben beziehungsweise unten verschoben. Der Anteil an Messergebnissen in den Verteilungen $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ ist gegenüber der Verteilung N_{back} um die Wahrscheinlichkeit einen Spin-Flip zu induzieren unterdrückt. Für die einzelnen Verteilungen gilt

$$N_{back}(p_{SF}, \Delta\nu_z) = (1 - p_{SF})N(\Delta\nu_z; \sigma_z, 0) \quad (7.1)$$

$$N_{sf\uparrow}(p_{SF}, \Delta\nu_z) = \frac{p_{SF}}{2}N(\Delta\nu_z; \sigma_z, -\Delta\nu_z, sf) \quad (7.2)$$

$$N_{sf\downarrow}(p_{SF}, \Delta\nu_z) = \frac{p_{SF}}{2}N(\Delta\nu_z; \sigma_z, +\Delta\nu_z, sf) \quad (7.3)$$

$$N_{tot}(p_{SF}, \Delta\nu_z) = N_{back}(p_{SF}, \Delta\nu_z) + N_{sf\downarrow}(p_{SF}, \Delta\nu_z) + N_{sf\uparrow}(p_{SF}, \Delta\nu_z) \quad (7.4)$$

mit p_{SF} der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit und $N(\Delta\nu_z; \sigma, \mu)$ der Normalverteilung mit Standardabweichung σ und Mittelwert μ .

Aus den beiden Maxima der Verteilung $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ lassen sich zwei Parameter bestimmen. Zum einen die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit, welche zur Bestimmung der Larmorfrequenz in der Analysefalle gemessen werden muss. Zum anderen lässt sich $\Delta\nu_{z,sf}$ bestimmen und damit die Inhomogenität B_2 der magnetischen Flasche in der Analysefalle. Die Gesamtverteilung N_{tot} ergibt sich aus der Summe der Einzelverteilungen.

Darüber hinaus ist es möglich über die Verbreiterung der Gesamtverteilung N_{tot} gegenüber der Verteilung ohne Spin-Flips N_{back} auf p_{SF} rückzuschließen [19].

7.2 Grenzwertmethode

Um den g -Faktor des Protons präzise bestimmen zu können, muss die Doppel-Fallen Methode angewendet werden. Dies bedeutet, dass der Spin-Zustand über die Detektion eines *einzelnen* Spin-Flips in der Analysefalle bestimmt werden muss. Die einfachste Methode einen Spin-Flip zu identifizieren, ist die sogenannte Grenzwertmethode. In Abbildung 7.1 ist die theoretische Verteilung der axialen Frequenzsprünge für im Experiment optimal erreichbare Frequenzfluktuationen von $\sigma_{z,opt} = 55$ mHz gezeigt. Es lässt sich erkennen, dass hohe axiale Frequenzsprünge $\Delta\nu_{z,i}$, insbesondere $\Delta\nu_{z,i} > 3\sigma_{z,opt}$, nicht auf Hintergrundfluktuationen ohne einen Spin-Flip zurückgeführt werden können. Im Umkehrschluss beinhalten letztere $\Delta\nu_{z,i}$ einen Frequenzsprung auf Grund eines Spin-Flips eines einzelnen Protons. Der offensichtlichste Ansatz zur Identifikation dieser einzelnen Spin-Flips ist die Einführung eines Grenzwertes TH , um nach der Regel $\Delta\nu_{z,i} > TH$ einen Frequenzsprung als Spin-Flip zu

interpretieren.

Ein Spin-Flip wird wie folgt interpretiert:

$$\begin{aligned}
 \Delta\nu_{z,i} \geq TH &\Rightarrow \text{Spin-Flip down nach up,} \\
 TH \geq \Delta\nu_{z,i} \geq TH &\Rightarrow \text{kein Spin-Flip,} \\
 \Delta\nu_{z,i} \leq TH &\Rightarrow \text{Spin-Flip up nach down.}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Da diese Zuordnung einem $\Delta\nu_{z,i}$ eindeutig einen Spin-Zustand zuordnet, kann diese Methode für die Doppel-Fallen Methode verwendet werden. Allerdings kann auf Grund des endlichen Überlapps der Verteilung N_{back} mit den Verteilungen der $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$, nicht jeder Frequenzsprung $\Delta\nu_{z,i} > TH$ korrekt einem Spin-Flip zugeordnet werden. Dies wird in den folgenden Betrachtungen zu einer Abweichung der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit sowie einer endlichen Detektierbarkeit der einzelnen Spin-Flips führen.

7.2.1 Berechnung der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit

Auf Grund des endlichen Überlapps der Verteilungen N_{back} , $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ weicht die in der Analysefalle gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,m}$ von der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,w}$ ab. Allerdings kann bei bekannten Parametern σ_z und $\Delta\nu_{z,sf}$ sowie bei vorgegebenem Grenzwert TH von $p_{SF,m}$ auf $p_{SF,w}$ rückgeschlossen werden. Hierzu wird der Anteil an identifizierten Spin-Flips betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned}
 p_{SF,m} &= \int_{-\infty}^{-TH} (N_{back}(p_{SF,w}, \Delta\nu_z) + N_{sf\uparrow}(p_{SF,w}, \Delta\nu_z) + N_{sf\downarrow}(p_{SF,w}, \Delta\nu_z)) d\Delta\nu_z \\
 &+ \int_{TH}^{\infty} (N_{back}(p_{SF,w}, \Delta\nu_z) + N_{sf\uparrow}(p_{SF,w}, \Delta\nu_z) + N_{sf\downarrow}(p_{SF,w}, \Delta\nu_z)) d\Delta\nu_z.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 p_{SF,m} &= 1 + \frac{1}{2} p_{SF,w} \text{Erf} \left(\frac{\Delta\nu_{z,sf} - TH}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) + (p_{SF,w} - 1) \text{Erf} \left(\frac{TH}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) \\
 &- \frac{1}{2} p_{SF,w} \text{Erf} \left(\frac{\Delta\nu_{z,sf} + TH}{\sqrt{2}\sigma_z} \right),
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

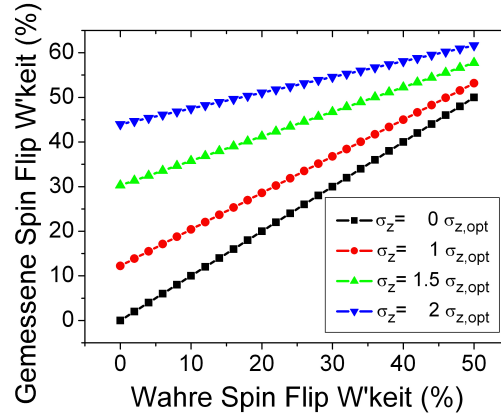


Abbildung 7.2: Gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,m}$ in Abhängigkeit der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,w}$ zu unterschiedlichen Frequenzfluktuationen σ ($\sigma_{opt} = 55$ mHz). Als Grenzwert wurde $TH = 1/2\Delta\nu_{z,SF}$ gewählt.

mit $Erf(x)$ der Fehlerfunktion. Unter idealen Bedingungen, daher $\sigma_z \rightarrow 0$, gilt $Erf(x \rightarrow \infty) = 1$. Somit ist $p_{SF,m} = p_{SF,w}$ und es kann ohne Korrektur auf die wahre Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit rückgeschlossen werden. Im Gegensatz hierzu gilt für $\sigma_z \rightarrow \infty$, damit $Erf(x \rightarrow 0) = 0$, dass $p_{SF,m} \rightarrow 1$ unabhängig von $p_{SF,w}$. Eine eindeutige Zuordnung zwischen $p_{SF,w}$ und $p_{SF,m}$ ist nicht mehr möglich. In Abbildung 7.2 ist für unterschiedliche Parameter σ_z $p_{SF,m}$ in Abhängigkeit von $p_{SF,w}$ gezeigt. Für im Experiment typische Frequenzfluktuationen von $\sigma_z < 2\sigma_{z,opt}$ lässt sich anhand Abbildung 7.2 erkennen, dass bei festem Parameter TH immer eine eindeutige Zuordnung möglich ist. Folglich ist mit der Grenzwertmethode eine Messung der Larmorfrequenz in der Analysefalle möglich.

7.2.2 Idealer Grenzwert und Auflöselimit zur Messung der Larmorfrequenz in der Analysefalle

Bei gegebenen Parametern σ_z und $p_{SF,w}$ ist die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,m}$ von der Wahl des Grenzwertes TH abhängig. Im Bereich kleiner TH werden mit abnehmenden TH zunehmend Frequenzsprünge $\Delta\nu_{z,i}$ nicht korrekt als Spin-Flip interpretiert. Als Resultat nimmt für $p_{SF,w} = 0\%$ mit abnehmenden TH die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,m}$ zu, vergleiche Abbildung 7.3 a) für $p_{SF,w} = 0\%$. Im Gegensatz hierzu werden im Bereich großer TH mit zunehmenden TH zunehmend Spin-Flips nicht mehr korrekt als solche erkannt. Das Resultat hier-

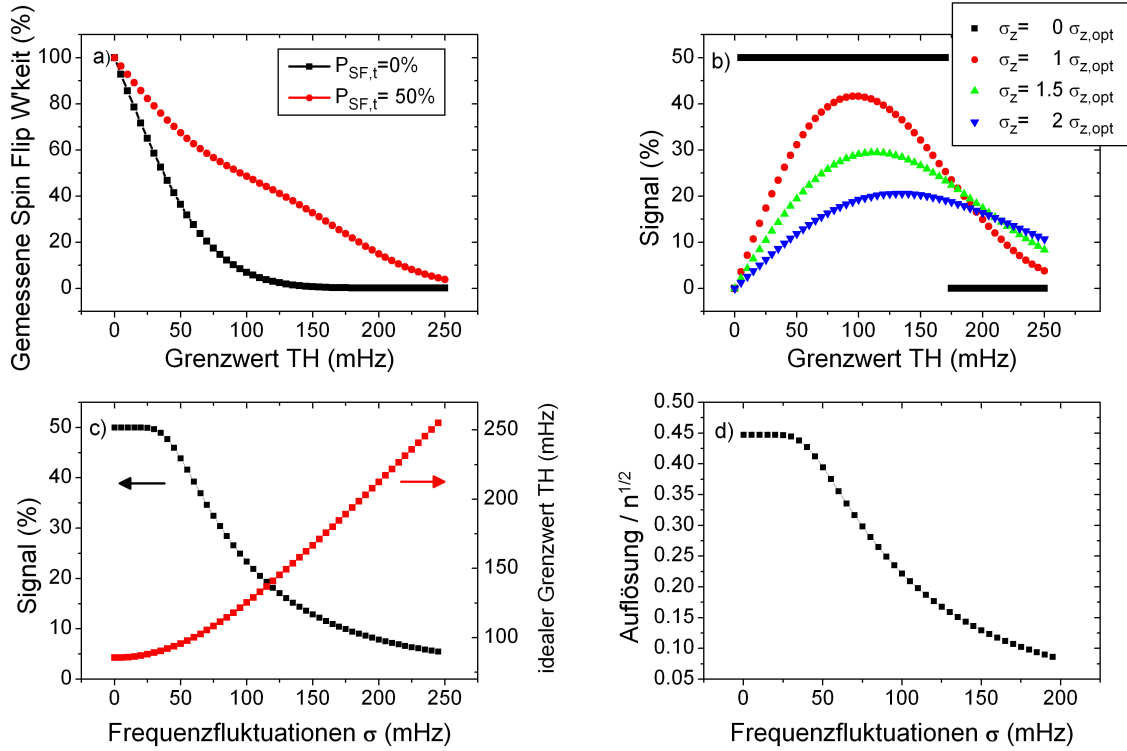


Abbildung 7.3: Theoretische Resultate zur Grenzwertmethode. In a) ist die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,m}$ als Funktion des Grenzwertes TH für eine wahre Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von $p_{SF,w} = 50\%$ sowie $p_{SF,w} = 0\%$ gezeigt. In b) ist das Signal, definiert als $p_{SF,m}(p_{SF,w} = 50\%) - p_{SF,m}(p_{SF,w} = 0\%)$ als Funktion des Grenzwertes zu unterschiedlichen Frequenzfluktuationen σ_z gezeigt. Die optimal erreichte Frequenzfluktuation σ_{opt} am Experiment beträgt 55 mHz. Es lässt sich erkennen, dass bei geeigneter Wahl von TH das Signal maximiert werden kann. Der ideale Grenzwert TH_{ideal} , welcher das Signal maximiert, ist als Funktion des Grenzwertes in c) gezeigt. In d) ist die Auflösung in Einheiten der Wurzel der Anzahl der Datenpunkte \sqrt{n} als Funktion der Frequenzfluktuationen σ_z gezeigt. Details zur Definition der Auflösung finden sich im Text.

von ist, dass für $p_{SF,w} = 50\%$ mit steigendem TH $p_{SF,m}$ sinkt, vergleiche Abbildung 7.3 a) für $p_{SF,w} = 50\%$. Um einen geeigneten Grenzwert zu bestimmen, lässt sich als Signal die Differenz der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeiten zu $p_{SF,w} = 0\%$ sowie $p_{SF,w} = 50\%$ definieren

$$S(TH, \sigma_z) = p_{SF,m}(p_{SF,w} = 50\%) - p_{SF,m}(p_{SF,w} = 0\%). \quad (7.7)$$

In Abbildung 7.3 b) ist das theoretisch erwartete Signal S als Funktion des Grenzwertes TH zu unterschiedlichen Frequenzfluktuationen σ_z gezeigt. Unter idealen

Bedingungen, $\sigma_z = 0$ mHz, wird bis zu einem Grenzwert von $TH = \Delta\nu_{z,SF}$ das volle Signal von 50 % erreicht. Wird $TH > \Delta\nu_{z,SF}$ gewählt, so werden keine Spin-Flips detektiert, woraus $S = 0$ % folgt. Für endliche Frequenzfluktuationen σ_z lässt sich erkennen, dass bei geeigneter Wahl des Grenzwertes das Signal maximiert werden kann. Dieser ideale Grenzwert TH_{ideal} hängt von den Frequenzfluktuationen ab.

In Abbildung 7.3 c) ist der TH_{ideal} sowie das erreichbare Signal S als Funktion der Frequenzfluktuationen σ_z gezeigt. Mit sinkenden Frequenzfluktuationen konvergiert der ideale Grenzwert TH_{ideal} gegen $\Delta\nu_{z,SF}/2$. Für die im Experiment optimal erreichte Frequenzfluktuation von $\sigma_{opt} = 55$ mHz wird erwartet bei einem idealen Grenzwert von $TH_{ideal} = 95$ mHz ein Signal von $S = 40$ % zu erreichen. Dies bedeutet, dass bei einer nicht resonanten Spin-Flip-Anregung mit wahrer Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{SF,w} = 0$ % eine gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von $p_{SF,w} = 13$ % und für eine resonante Anregung mit $p_{SF,m} = 50$ % $p_{SF,w} = 53$ % erwartet wird.

Als Maß für die Auflösung der Larmorresonanz lässt sich $S/\delta S$ definieren, mit δS dem Fehler auf S . In δS gehen der Fehler auf die binominalverteilte Zufallsvariable der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit δp_{SF} sowie der Fehler auf das Maß der Frequenzfluktuationen $\delta\sigma_z$ ein. Für δp_{SF} und $\delta\sigma_z$ gilt [83]

$$\delta\sigma_z = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad (7.8)$$

$$\delta p_{SF} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ für } np, n(1-p) > 4. \quad (7.9)$$

Folglich ist $S/\delta S$ eine Funktion der Anzahl der gemessenen Datenpunkte n und skaliert mit \sqrt{n} . In Abbildung 7.3 d) ist die Auflösung in Einheiten von \sqrt{n} gezeigt. Wird als Auflöselimit 3σ , daher $S/\delta S = 3$, vorgegeben, so kann bei einer axialen Frequenzfluktuation von $\sigma_{opt} = 55$ mHz, nach 80 axialen Frequenzmessungen je Frequenzpunkt die Larmorresonanz signifikant aufgelöst werden.

7.3 Bayes Methode

Im Vergleich zur Grenzwertmethode haben wir eine alternative Analyse-Methode zur Spin-Zustands Detektion entwickelt¹. Diese Methode basiert auf einem Wahrscheinlichkeitstheorem, dem Bayes Theorem [84].

¹Bei der Entwicklung der Bayes Methode hat K. Franke entscheidend mitgewirkt. Die Ergebnisse werden auch Teil seiner Dissertation sein.

Während in anderen statistischen Verfahren Hypothesen entweder akzeptiert oder verworfen werden, erlaubt das Bayes Theorem eine Wahrscheinlichkeits-Aussage über einer Hypothese, welche mit jeder neu gewonnenen Beobachtung basierend auf Erkenntnissen aktualisiert wird. Das Bayes Theorem lässt sich wie folgt definieren

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}. \quad (7.10)$$

Hierbei gibt $P(A|B)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit an, A zu beobachten unter der Bedingung, dass B sicher eingetreten ist. Entsprechendes gilt für $P(B|A)$, während $P(A)$ und $P(B)$ die einfachen Wahrscheinlichkeiten angeben A beziehungsweise B zu beobachten. Auf einfache Weise lässt sich über die Definition 7.10 der Bezug auf die hier gegebenen Anforderungen herstellen. Hierzu wird $P(A)$ mit der Wahrscheinlichkeit in einem Spin-Zustand zu sein, die Hypothese, und $P(B)$ mit der Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Frequenz zu messen, die neue Beobachtung, identifiziert. Die Erkenntnis drückt sich folglich in der Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ aus, welche basierend auf einen bekannten Spin-Zustand die Wahrscheinlichkeit, eine Frequenz zu messen, beschreibt.

Um das Theorem von Bayes auf die Detektion des Spin-Zustandes anwenden zu können, muss zunächst eine Beschreibung der axialen Frequenzfluktuationen in der Analysefalle aufgestellt werden. Wie bereits in Abschnitt 6.3 beschrieben, ist der durch das Fallenpotential definierten axialen Frequenz ein Random Walk sowie ein weißes Rauschen überlagert. Während das weiße Rauschen individuell zu jeder einzelnen Frequenzmessung beiträgt, summiert sich der Beitrag des Randoms Walks entsprechend seiner Definition über die einzelnen Frequenzmessungen hinweg auf. Werden die Beiträge des kumulativen Random Walks als $W_i = \sum w_i$, des weißen Rauschens als n_i und des Frequenzsprungs eines Spin-Flips als $\Delta\nu_{z,sf}$ definiert, so ist die i te Frequenz in einer Reihe von Messungen gegeben durch

$$f_i = W_i + n_i \pm 1/2\Delta\nu_{z,sf} + f_0. \quad (7.11)$$

Die Verteilungen der w_i und n_i werden durch Normalverteilungen $N(\mu; \sigma)$ mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ_w beziehungsweise σ_n beschrieben. f_0 bezeichnet den Beitrag des Speicherpotentials zur axialen Frequenz. Da Komponenten des Speicherpotentials, welche zu Frequenzfluktationen beitragen, bereits durch n_i und w_i beschrieben sind, kann f_0 hier als konstant angenommen werden und ist in den folgenden Betrachtungen als Offset auf die Frequenz f_i vernachlässigbar.

Mit diesen Definitionen lässt sich eine bedingte Wahrscheinlichkeit definieren

$$P_{\alpha,W}^i = P(\alpha_i, W_i | f_i, f_{i-1}, \dots). \quad (7.12)$$

Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei der i ten Frequenzmessung in einem gegebenen Spin-Zustand $\alpha_i = \{\uparrow_i, \downarrow_i\}$ zu sein und einen kumulativen Random Walk W_i zu haben, unter der Bedingung die Frequenzen f_i, f_{i-1}, \dots beobachtet zu haben. Mit dieser bedingten Wahrscheinlichkeit kann das Theorem von Bayes angewendet werden, welches die *a-posteriori* Wahrscheinlichkeit $P_{\alpha, W}^i$ mit der *a-priori* Wahrscheinlichkeit $P(\alpha_i, W_i | f_{i-1}, \dots)$ ohne die letzte Frequenzinformation f_i verknüpft. Es gilt

$$P_{\alpha, W}^i = \frac{P(f_i | \alpha_i, W_i, f_{i-1}, \dots) P(\alpha_i, W_i | f_{i-1}, \dots)}{P(f_i | f_{i-1}, \dots)}. \quad (7.13)$$

Die Normierung $P(f_i | f_{i-1}, \dots)$ kann über $\int_W \sum_{\alpha} P_{\alpha, W}^i = 1$ gefunden werden. Durch den Beitrag des Random Walks wird eine Korrelation zwischen den einzelnen Frequenzmessungen eingeführt und diese können nicht mehr als unabhängig betrachtet werden, $P(f_i | f_{i-1}) \neq P(f_i)$. In der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_{\alpha, W}^i$ wird allerdings der Beitrag des Random Walks gesondert berücksichtigt. Daher ist im ersten Faktor des Zählers die Verteilung der Frequenz f_i bis auf den Beitrag des weißen Rauschens vollständig durch α_i und W_i beschrieben und es lässt sich folgende Vereinfachung anwenden

$$P(f_i | \alpha_i, W_i, f_{i-1}, \dots) = P(f_i | \alpha_i, W_i). \quad (7.14)$$

Der erste Faktor der Gleichung 7.13 gibt somit die Verteilung der Frequenzen bei vollständiger Information der Beiträge des Random Walks und des Spin-Zustandes wieder und hängt damit nur vom Beitrag des weißen Rauschens ab. Es gilt daher

$$P(f_i | \alpha_i, W_i) = N(f_i - (W_i \pm 1/2 \Delta \nu_{z, sf}); \sigma_n), \quad (7.15)$$

mit $-$ für $\alpha_i = \uparrow_i$ und $+$ für $\alpha_i = \downarrow_i$.

Der zweite Faktor im Zähler der Gleichung 7.13 hängt vom vorherigen Zustand nur über die vorherigen Frequenzmessungen f_{i-1}, f_{i-2}, \dots ab. Nach dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit kann er weiter vereinfacht werden, indem über alle möglichen, vorherigen Spin-Zustände α_{i-1} summiert und über alle möglichen, vorherigen Random Walks W_{i-1} integriert wird. Es folgt

$$\begin{aligned} P(\alpha_i, W_i | f_{i-1}, \dots) & \quad (7.16) \\ &= \sum_{\alpha_{i-1}} \int_{W'} P(\alpha_i, W_i | \alpha_{i-1}, W'_{i-1}, f_{i-1}, \dots) \times P(\alpha_{i-1}, W'_{i-1} | f_{i-1}, \dots) \end{aligned}$$

und nach Verwendung der Definition aus Gl. 7.12

$$\begin{aligned}
 P & \left(\alpha_i, W_i | f_{i-1}, \dots \right) & (7.17) \\
 & = \sum_{\alpha_{i-1}} \int_{W'} P \left(\alpha_i, W_i | \alpha_{i-1}, W'_{i-1}, f_{i-1}, \dots \right) \times P_{\alpha, W'}^{i-1}.
 \end{aligned}$$

Der zweite Faktor dieser Gleichung $P_{\alpha, W'}^{i-1}$, ist einfach die Random-Walk- und Zustands-Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $i - 1$. Der erste Faktor führt eine Aktualisierung der Random Walk und Zustandswahrscheinlichkeit ein, welche die Entwicklung der Random-Walk- und Zustands-Wahrscheinlichkeit von Zeitpunkt $i - 1$ nach i beschreibt. Er beschreibt die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt i im Zustand α_i zu sein und den kumulativen Random Walk W_i zu haben ohne die Kenntnis der letzten Frequenzmessung f_i . Unter der Voraussetzung der vollständigen Beschreibung des vorherigen Zustands $\alpha_{i-1}, W_{i-1}, f_{i-1}, \dots$, ist die Wahrscheinlichkeit, dies zu beobachten, unabhängig vom weißen Rauschen. Daher hängt dieser Beitrag nicht von σ_n ab und es gilt

$$\begin{aligned}
 P & \left(\alpha_i, W_i | \alpha_{i-1}, W'_{i-1}, f_{i-1}, \dots \right) \\
 & = P(\alpha_i, W_i | \alpha_{i-1}, W'_{i-1}) \\
 & = (1 - p_{sf}) N(W_i - W'_{i-1}; \sigma_w) \quad \text{für } \alpha_i = \alpha_{i-1} & (7.18)
 \end{aligned}$$

$$= p_{sf} N(W_i - W'_{i-1}; \sigma_w) \quad \text{für } \alpha_i \neq \alpha_{i-1}, \quad (7.19)$$

mit p_{sf} der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit.

Die gesuchte Zustands-Wahrscheinlichkeit P_α^i zum Zeitpunkt i unabhängig vom Beitrag des Random Walks kann schließlich über die Marginalisierung

$$P_\alpha^i = \int_W P_{\alpha, W}^i \quad (7.20)$$

gefunden werden.

Vorgabeparameter zur Bayes Methode sind somit die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit p_{sf} , der Beitrag des Random Walks σ_w und der Beitrag des weißen Rauschens σ_n . Diese müssen in unabhängigen Messungen bestimmt werden. So kann p_{sf} aus den Spin-Flip-Analyse Methoden der vorherigen Abschnitte bestimmt werden. σ_n und σ_w lassen sich aus der Analyse der Frequenzfluktuationen, welche in Abschnitt 6.3 beschrieben wurden, bestimmen.

Zusammenfassend: Als Ergebnis der Bayes Analyse erhält man bei bekannten Beiträgen des weißen Rauschens σ_n und des Random Walks σ_w sowie bekannter Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit p_{sf} die Wahrscheinlichkeit sich in einem Spin-Zustand zu befinden unter der Voraussetzung einen gegebenen Satz von axialen Frequenzen f_i, f_{i-1}, \dots gemessen zu haben.

7.4 Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit und Bestimmung von B_2 über die statistische Methode

Zur statistischen Detektion von Spin-Flips in der Analysefalle wird folgendes Messschema kontinuierlich wiederholt². i bezeichnet hierbei den Messzyklus.

- Messung der axialen Frequenz $\nu_{z,i,1}$.
- Resonante Einstrahlung der magnetischen Dipolanregung mit Frequenz $\nu_{L,res}$ und Einstrahldauer T_0 zur Anregung von Spin-Flips.
- Messung der axialen Frequenz $\nu_{z,i,2}$.
- Neben-resonante Einstrahlung der magnetischen Dipolanregung mit Frequenz $\nu_{L,off}$ und Einstrahldauer T_0 .
- Messung der axialen Frequenz $\nu_{z,i,3}$.
- Wartezeit T_0 ohne Einstrahlen einer Anregung.

Die Frequenz der neben-resonanten Einstrahlung wird um 2 MHz gegenüber der erwarteten resonanten Einstrahlung nach unten verstimmt. Dies garantiert bei einer erwarteten Linienbreite der Resonanz von 100 kHz, dass auf $\nu_{L,off}$ keine Spin-Flips induziert werden. Aus den 3 Frequenzmessungen können 3 axiale Frequenzsprünge mit zugehörigen Verteilungen bestimmt werden. $\Delta\nu_{z,i,1} = \nu_{z,i,1} - \nu_{z,i,2}$ gibt den axialen Frequenzsprung nach einer resonanten Einstrahlung an und dient somit der Messung der Gesamtverteilung N_{tot} . Aus der Bestimmung von $\Delta\nu_{z,i,2} = \nu_{z,i,2} - \nu_{z,i,3}$ wird die neben-resonante Verteilung ohne Spin-Flips N_{keinSF} unabhängig bestimmt. Daneben können aus der Verteilung $\Delta\nu_{z,i,3} = \nu_{z,i,3} - \nu_{z,i+1,1}$ die Hintergrundfluktuationen N_{back} , daher die Verteilung der axialen Frequenzfluktuationen ohne Einstrahlen einer Anregung, bestimmt werden.

²Die folgenden Ergebnisse sind auch Teil der Dissertation von H. Kracke [80].

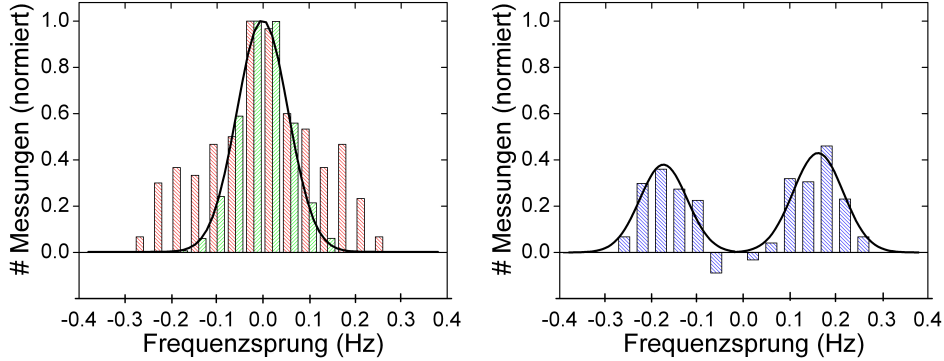


Abbildung 7.4: Gemessene Verteilung der axialen Frequenzfluktuationen. a) In grün die Verteilung der Hintergrundfluktuationen der axialen Frequenz $N_{kein,SF}$ ohne zusätzliche Dipolanregung zum Induzieren von Spin-Flips. In rot die Gesamtverteilung N_{tot} , inklusive einer Einstrahlung eines magnetischen Wechselfeldes zur Spin-Flip-Anregung zwischen zwei aufeinander folgenden Frequenzmessungen. b) Resultierende Verteilung nachdem $N_{kein,SF}$ von N_{tot} abgezogen wurde. Diese können den beiden Verteilungen $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ zugeordnet werden.

Aus dem Vergleich der Verteilungen N_{back} und $N_{kein,SF}$ kann rückgeschlossen werden, ob die magnetische Dipolanregung zum Induzieren von Spin-Flips zu einer Erhöhung der axialen Frequenzfluktuationen führt. Letzteres wäre der Fall, wenn die Anregung zu Energiefluktuationen der Zyklotronmode oder der Magnetronmode führt und somit einen zusätzlichen Beitrag zu axialen Frequenzfluktuationen liefert. Aus den beiden Verteilungen ergeben sich Breiten von $\sigma_{z,keinSF} = 56(3)$ mHz beziehungsweise $\sigma_{z,back} = 58(3)$ mHz. Hieraus kann geschlossen werden, dass die Anregung zu keiner signifikanter Erhöhung der axialen Frequenzfluktuationen beiträgt. Folglich wird durch die Spin-Flip-Anregung die Energie der radialen Moden während der Einstrahlung nicht verändert.

In Abbildung 7.4 a) sind die Verteilungen N_{tot} und N_{keinSF} gezeigt. Nach Abzug der Verteilung N_{keinSF} von N_{tot} erhält man die Verteilungen, welche $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ zugeordnet werden können, siehe Abbildung 7.4 b). Die Streuungen dieser Verteilungen $\sigma_{z,\uparrow} = 55(5)$ mHz und $\sigma_{z,\downarrow} = 58(5)$ mHz sind in guter Übereinstimmung mit der unabhängig bestimmten Streuung der Hintergrundfluktuationen $\sigma_{z,keinSF} = 56(3)$ mHz und bestätigt somit die zu Beginn beschriebene Überlagerung der $N_{sf\uparrow}$, $N_{sf\downarrow}$ und $N_{kein,SF}$. Aus den beiden Maxima der Verteilung $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ lässt sich die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit zu $p_{sf} = 44\%$ bestimmen. Des Weiteren lässt sich $\Delta\nu_{z,sf}$ bestimmen. Aus den Verteilungen erhält man $\Delta\nu_{z,sf} = 165(7)$ mHz und $\Delta\nu_{z,sf} = 172(9)$ mHz. Hieraus lässt sich unabhängig zur Messung aus Abschnitt 6.1 die Stärke der magnetischen Flasche B_2 bestimmen. Es ergibt sich

in guter Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 6.1 gefundenen Ergebnis von $B_2 = 297(10) \text{ T/m}^2$ ein Wert von $B_2 = 286(12) \text{ mT/m}^2$ für die Verteilung $N_{sf\downarrow}$ beziehungsweise $B_2 = 298(16) \text{ mT/m}^2$ für die Verteilung $N_{sf\uparrow}$.

7.5 Messung der Larmorfrequenz über die Grenzwertmethode

Zur Messung der Larmorresonanz in der Analysefalle über die Grenzwertmethode wird die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion der Frequenz der eingestrahlten Anregung zur Induzierung von Spin-Flips aufgenommen. Hierzu wird das im vorherigen Abschnitt beschriebene Messschema zu unterschiedlichen Frequenzen der Spin-Flip-Anregung $\nu_{L,res}$ wiederholt. Anschließend werden alle Frequenzsprünge $\Delta\nu_z > TH$ zwischen axialen Frequenzmessungen mit Spin-Flip-Anregung als Spin-Flip identifiziert. Aus dem Verhältnis der Anzahl an identifizierten Spin-Flips zu der Ge-

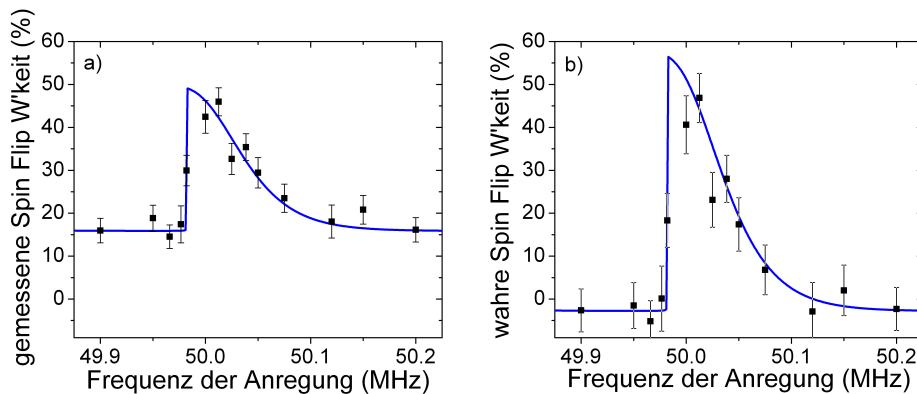


Abbildung 7.5: Messung der Larmorresonanz in der Analysefalle über die Grenzwertmethode. In a) ist die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Frequenz der eingestrahlten Anregung zur Induzierung von Spin-Flips aufgetragen. Je Frequenzpunkt gehen 140 Messwerte in die Bestimmung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit ein. Deutlich lässt sich die erwartete asymmetrische Linienform, welche die thermische Boltzmann-Verteilung der axialen Energie widerspiegelt, erkennen. Der endliche Untergrund von $p_{SF,m} = 15\%$ bei einer nebenresonanten Einstrahlung ist auf die endliche Detektierbarkeit von Spin-Flips zurückzuführen. Die blaue, durchgezogene Linie ist eine Anpassung der theoretischen Linienform an die Daten. Die Daten wurden zu einer Hintergrundfluktuation von $\sigma_z = 86 \text{ mHz}$ aufgenommen, woraus sich der hier verwendete ideale Grenzwert von $TH_{ideal} = 111 \text{ mHz}$ ergibt. In b) ist die aus der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit berechnete wahre Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion der Frequenz der eingestrahlten Anregung aufgetragen.

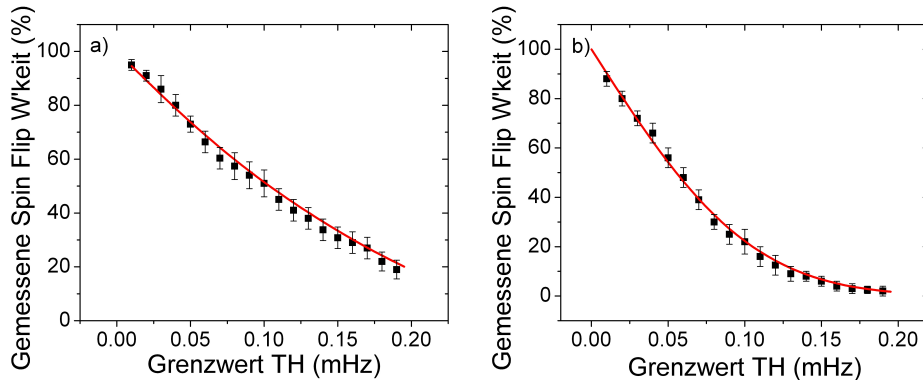


Abbildung 7.6: Gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion des Grenzwertes. In a) ist die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit für einen resonanten Datenpunkt mit einer wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von 47(6)% gezeigt. Analog ist in b) die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit für einen neben-resonanten Datenpunkt mit wahrer Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von 2(6)% gezeigt. In beiden Fällen stellen die roten, durchgezogenen Linien die theoretisch vorhergesagte, gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit ohne eine Kurvenanpassung dar. In die theoretische Berechnung gehen die unabhängig bestimmten Frequenzfluktuationen σ_z sowie die wahre Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit ein. In beiden Fällen lässt sich eine hervorragende Übereinstimmung zwischen theoretischer Vorhersage und Messdaten erkennen.

samtzahl an Spin-Flip-Versuchen kann die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit bestimmt werden.

In Abbildung 7.5 a) ist das Ergebnis zur 36 stündigen Messung der Larmorresonanz in der Analysefalle gezeigt. Je Frequenzpunkt wurden $n = 140$ Datenpunkte aufgenommen, sodass das Auflösungslimit von 3σ bei einer axialen Frequenzfluktuation von hier $\sigma_z = 86$ mHz erreicht wird, vergleiche Abbildung 7.3 d).

Aufgrund der endlichen Identifizierbarkeit der Spin-Flips resultiert ein endlicher Untergrund an detektierten Spin-Flips für eine neben-resonante Einstrahlung. Als Resultat wird dort eine endliche Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von 15% beobachtet. Deutlich sichtbar ist die asymmetrische Linienform der Resonanz, welche die Boltzmann Verteilung der axialen Energie im thermischen Gleichgewicht mit dem axialen Nachweis widerspiegelt.

Bei gegebenen Frequenzfluktuationen $\sigma_z = 86$ mHz sowie Grenzwert $TH_{ideal} = 111$ mHz kann aus der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit auf die wahre Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit rückgeschlossen werden, vergleiche Abschnitt 7.2. In Abbildung 7.5 b) ist die berechnete wahre Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit gezeigt.

Zusätzlich kann die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit zu unterschiedlichen

Grenzwerten betrachtet werden. In Abbildung 7.6 ist zum einen das Resultat der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit bei einer Variation des Grenzwertes TH zu einem resonanten Datenpunkt, $p_{sf,w} = 47(6)\%$ und einen neben-resonanten Datenpunkt, $p_{sf,w} = 2(6)\%$, gezeigt. Zum anderen sind die theoretisch vorhergesagten Spin-Flip-Wahrscheinlichkeiten dargestellt. Es lässt sich eine hervorragende Übereinstimmung der theoretischen Vorhersage mit den gemessenen Daten erkennen.

Auf Basis dieser Daten kann eindeutig auf die Anwendbarkeit der Grenzwertmethode zur Detektion von Spin-Flips rückgeschlossen werden. Da mit der Grenzwertmethode jedem Frequenzsprung eindeutig ein Spin-Zustand zugeordnet wird, eignet sich diese Methode im weiteren zur Anwendung der Doppel-Fallen Methode, welche zwingend zur präzisen Messung des g -Faktors des Protons verwendet werden muss.

7.6 Vergleich der Grenzwertmethode und der Bayes Methode

In diesem Abschnitt werden die Grenzwertmethode und die Bayes Methode verglichen. Der Vergleich erfolgt hierbei über die sogenannte *Güte*, welche die Wahrscheinlichkeit, den Spin-Zustand korrekt zu identifizieren, angibt.

Die Bayes Methode verwendet als Vorgabeparameter die Beiträge des weißen Rauschens, des Random Walks sowie die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit. Alle drei Parameter können vor einer Analyse des Spin-Zustandes in unabhängigen Messungen bestimmt werden. Im Gegensatz hierzu ist der Grenzwert TH der Grenzwertmethode ein zunächst frei wählbarer Parameter. Um den idealen Grenzwert TH_{ideal} zu bestimmen, der den Spin-Zustand am häufigsten korrekt vorhersagt, wurden basierend auf dem Frequenzmodell aus Gleichung 7.11 axiale Frequenzreihen simuliert. Diese Frequenzreihen enthalten zufällig generierte Spin-Flips bei fest vorgegebener Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit p_{sf} und Frequenzfluktuation σ_z . Anschließend wurden die simulierten Daten mit der Grenzwertmethode analysiert und das Ergebnis mit den bekannten Spin-Zuständen verglichen. Die Güte der Spin-Zustands-Detektion kann somit aus dem Verhältnis der Anzahl an richtig identifizierten Spin-Zuständen und der Gesamtzahl an simulierten Frequenzpunkten/Spin-Zuständen bestimmt werden. Folglich ergibt sich der ideale Grenzwert TH_{ideal} aus dem Maximum der Güte als Funktion des Grenzwertes TH . Um die Abhängigkeit $TH_{ideal}(\sigma_z)$ zu untersuchen, wurden die Güten zu unterschiedlichen Frequenzfluktuationen σ_z bestimmt.

In Abbildung 7.7 ist die Güte zu unterschiedlichen Frequenzfluktuationen σ_z in Abhängigkeit des Grenzwertes TH für $p_{sf} = 50\%$ gezeigt. Man erkennt, dass unab-

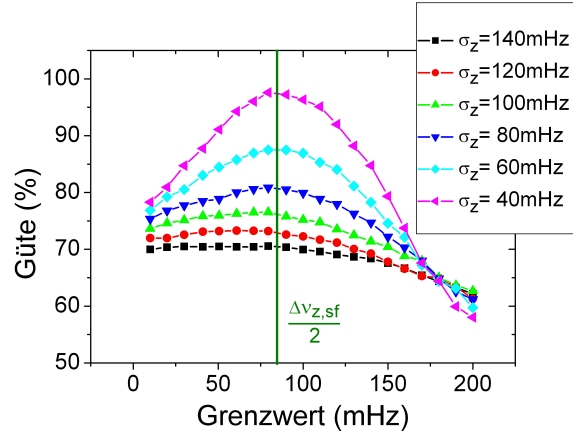


Abbildung 7.7: Simulationsergebnisse zur Bestimmung des idealen Grenzwertes der Grenzwertmethode. Gezeigt ist die Güte der Detektion des Spin-Zustandes in Abhängigkeit des Grenzwertes zu unterschiedlichen axialen Frequenzfluktuationen σ_z für $p_{sf} = 50\%$

hängig von σ_z die Güte sowohl für hohe als auch niedrige Grenzwerte TH abnimmt. Wird ein zu niedriger Grenzwert gewählt steigt die Irrtumswahrscheinlichkeit für eine falsche Identifizierung eines Spin-Flips, folglich des Spin-Zustandes. Die Güte sinkt. Umgekehrt fällt bei hohen Grenzwerten mit zunehmenden TH die Wahrscheinlichkeit einen Spin-Flip als solchen zu identifizieren und die Güte der Detektion des Spin-Zustandes sinkt ebenfalls. Für $TH = 0$ Hz und niedrigem σ_z konvergiert die Güte gegen 75%. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass zum einem alle Frequenzsprünge der Verteilungen $N_{sf\uparrow}$ und $N_{sf\downarrow}$ und zum anderen 50% der Frequenzsprünge der Verteilung N_{back} korrekt identifiziert werden. Für zunehmende σ_z konvergiert die Güte bei $TH = 0$ Hz gegen 50%. Schließlich kann erkannt werden, dass eine Maximierung der Güte für einen Grenzwert von $TH = \Delta\nu_{z,SF}/2$ unabhängig von der Stärke der axialen Frequenzfluktuationen σ_z erreicht wird.

Zum Vergleich der Bayes Methode und Grenzwertmethode werden analog die Güten der Spin-Flip-Detektion basierend auf den simulierten Frequenzreihen bestimmt. Parameter, die in den simulierten Daten variiert werden, sind die Beiträge des weißen Rauschens σ_n und Random Walks σ_w , welche zu den Frequenzfluktuationen σ_z führen, sowie die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit p_{SF} .

In Abbildung 7.8 a) sind Linien gleicher Güte zur Spin-Zustands Detektion in Abhängigkeit der beiden Rauschparameter σ_w und σ_n für die die Grenzwertmethode und die Bayes Methode gezeigt. Man erkennt, dass für einen reinen Random Walk beide Methoden die selbe Güte liefern. Nimmt der Beitrag des weißen Rauschens zu so ist die Bayes Methode der Grenzwertmethode überlegen. Deutlich wird dies

7.7. BEOBACHTUNG EINZELNER SPIN-FLIPS EINES EINZELNEN PROTONS ÜBER DIE BAYES METHODE

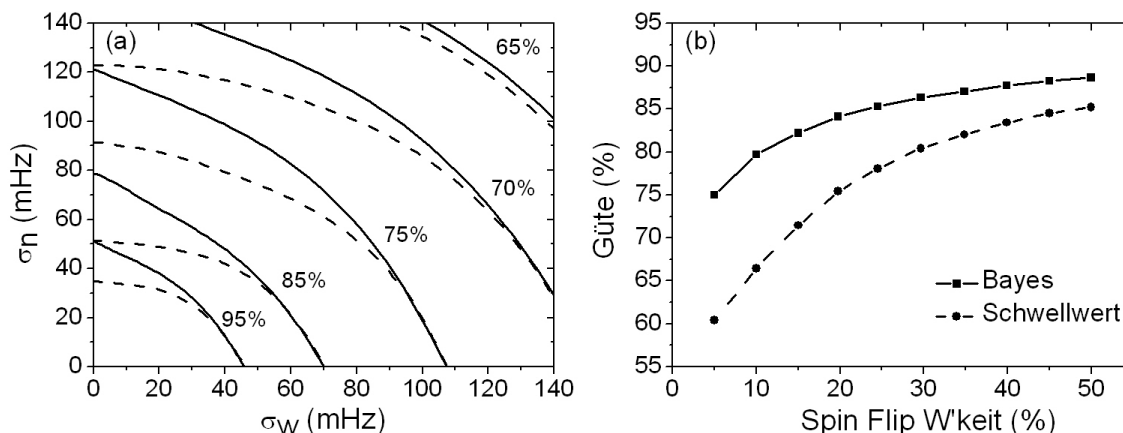


Abbildung 7.8: Vergleich der Grenzwertmethode und Bayes Methode zur Detektion des Spin-Zustandes. In a) sind Linien gleicher Güte für eine Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von 50 % als Funktion der Anteile von weißem Rauschen σ_n und Random Walk σ_w gezeigt; Durchgezogene Linien: Bayes Methode, gestrichelte Linien Grenzwertmethode. In b) ist die Güte als Funktion der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit für $\sigma_w = \sigma_n = 39$ mHz gezeigt.

auch bei einem Vergleich der Güten zu festen Parametern $\sigma_w = \sigma_n = 39$ mHz und einer Variation der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit p_{SF} , siehe Abbildung 7.8 b). So liefert die Grenzwertmethode bei $p_{SF} = 20$ % eine Güte von 74 % während mit der Bayes Methode 84 % erreicht werden. Unter der im Experiment optimal erreichten Bedingung von $\sigma_{opt} = 55$ % und $p_{SF} = 50$ % wird mit der Bayes Methode eine Güte von 87 % erreicht. Dies bedeutet, dass in circa 9 aus 10 axialen Frequenzmessungen der Spin-Zustand in der Analysefalle korrekt identifiziert werden kann und damit die Anwendung der Doppel-Fallen Methode möglich ist.

7.7 Beobachtung einzelner Spin-Flips eines einzelnen Protons über die Bayes Methode

Bei einer erreichten Güte der Spin-Flip-Detektion von 87 % ist die direkte Beobachtung einzelner Spin-Flips möglich. Die experimentelle Beobachtung dieser einzelnen Spin-Flips ist in Abbildung 7.9 gezeigt. Im oberen Abschnitt der Abbildung ist eine Reihe axialer Frequenzmessungen gezeigt. Dünne vertikale Pfeile deuten auf Zeitpunkte zu denen eine off-resonante Spin-Flip-Anregung eingestrahlt wurde. Zu diesen Zeitpunkten können keine außergewöhnlichen Frequenzsprünge beobachtet werden. Diese wichtige Überprüfung des Hintergrunds zeigt, dass die Spin-Flip-Anregung keinen Effekt auf die Energie der radialen Moden hat, welche ebenfalls zu

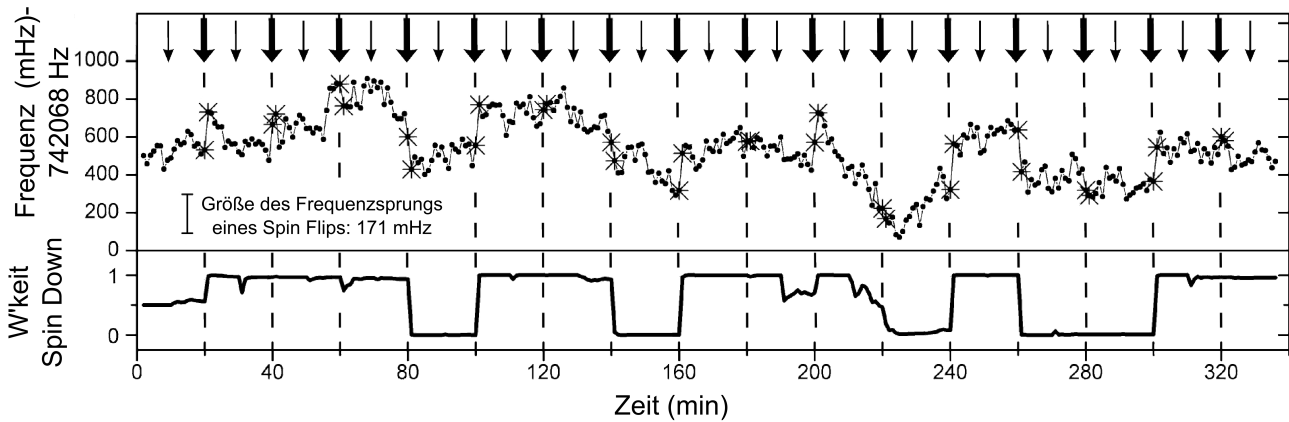


Abbildung 7.9: Beobachtung einzelner Spin-Flips eines einzelnen Protons [25]. Der obere Teil der Abbildung zeigt die Messung einer axialen Frequenzreihe. Zwischen den gekreuzten Datenpunkten, hervorgehoben durch dicke vertikale Pfeile, wurde eine resonante Spin-Flip-Anregung eingestrahlt. Dazwischen wurde eine off-resonante Spin-Flip-Anregung, hervorgehoben durch dünne vertikale Pfeile, eingestrahlt. Ansonsten war die Spin-Flip-Anregung ausgeschaltet. Große axiale Frequenzsprünge nach einer resonanten Anregung sind das Resultat einzelner Spin-Flips eines einzelnen Protons. Der untere Teil der Abbildung zeigt das Ergebnis der Spin-Zustands-Analyse durch die Bayes Methode.

einer Änderung der axialen Frequenz führen würde. Dicke vertikale Pfeile deuten auf Zeitpunkte zu denen eine resonante Spin-Flip-Anregung eingestrahlt wurde. Mehrere axiale Frequenzsprünge von der Größe eines Frequenzsprungs auf Grund eines Spin-Flips von $\Delta\nu_{z,SF} = 171$ mHz können exakt zu diesen Zeitpunkten beobachtet werden. Ein Beispiel eines Spin-Flips vom Spin-Zustand down zum Spin-Zustand up ist bei 240 min zu sehen. Im unteren Teil der Abbildung 7.9 ist das Ergebnis der Bayes Analyse gezeigt. Die Bayes Analyse wurde zum Zeitpunkt $t = 0$ mit maximaler Unsicherheit $p_{down} = 50\%$ initialisiert. Die Bayes Analyse bestätigt die Spin-Flips, welche in den Rohdaten sichtbar sind, und liefert ein konsistentes Bild der Zeitentwicklung des Spin-Zustandes. Man beachte, dass zu jedem Datenpunkt nur momentane und vorangegangene Messwerte beitragen; daher die Bayes Analyse ist kausal [85, 86].

Kapitel 8

Demonstration der Doppel-Fallen Methode

Zur präzisen Messung des g -Faktors des Protons sollen sowohl die Zyklotronfrequenz als auch die Larmorfrequenz im homogenen Magnetfeld der Präzisionsfalle gemessen werden. Die Larmorfrequenz lässt sich hierbei aus einer Messung der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion einer externen Anregung bestimmen. Letzteres verlangt die Detektion eines Spin-Flips in der Präzisionsfalle durch die zweimalige Detektion des Spin-Zustandes in der Analysefalle, die Doppel-Fallen Methode (siehe Kapitel 2.6).

8.1 Güte der Spin-Zustands-Detektion der Doppel-Fallen Methode

Um einen Spin-Übergang in der Präzisionsfalle zu detektieren, muss der Spin-Zustand in der Analysefalle direkt vor und nach der Messung in der Präzisionsfalle identifiziert werden. Dies geschieht über eine Reihe axialer Frequenzmessungen zwischen denen paarweise versucht wird einen Spin-Übergang zu treiben. Entscheidend ist hierbei, den Spin-Zustand α_{init} am Ende einer ersten solchen Messreihe, welche der Messung in Präzisionsfalle vorausgeht, und den Spin-Zustand α_{fin} am Anfang einer zweiten solchen Messreihe, welche der Messung in der Präzisionsfalle folgt, zu bestimmen. Zwischen den Identifikationen der Spin-Zustände α_{init} und α_{fin} muss in den folgenden Betrachtungen unterschieden werden.

Entsprechend der Diskussion in Abschnitt 7.2 kann ein großer axialer Frequenzsprung $\Delta\nu_z$ zwischen zwei aufeinander folgenden Frequenzmessungen mit hoher

Wahrscheinlichkeit korrekt einem Spin-Übergang zugeordnet werden. Dies kann genutzt werden, um α_{init} mit hoher Wahrscheinlichkeit korrekt zu identifizieren, indem eine Abbruchbedingung $\Delta\nu_z > \Delta_{TH,\nu_z}$ für die Messreihe zur Detektion des Spin-Zustandes in der Analysefalle definiert wird. Dies lässt sich nicht auf die Identifikation von α_{fin} anwenden.

Als Güte G_{PT} der Spin-Flip-Detektion in der Präzisionsfalle wird die Wahrscheinlichkeit, einen Spin-Flip in der Präzisionsfalle korrekt zu identifizieren, definiert. G_{PT} ist abhängig von den Güten G_{init} und G_{fin} , den Wahrscheinlichkeiten einer korrekten Detektion der Spin-Zustände α_{init} und α_{fin} . G_{init} und G_{fin} sind wiederum Funktionen der Energie der Zyklotronmode E_+ , da E_+ die Fluktuationen der axialen Frequenz σ_z bestimmt.

In Abbildung 8.1 a) ist die Abhängigkeit der Stabilität der axialen Frequenz von E_+ gezeigt. Es wurde eine optimale axiale Frequenzstabilität von $\sigma_{opt} = 55$ mHz erreicht. Basierend auf diesen Daten können axiale Frequenzreihen simuliert werden, aus welchen sich wiederum die Güten G_{init} und G_{fin} bestimmen lassen, siehe Abbildungen 8.1 b) und c). Es ist erkennbar, dass sich α_{init} mit deutlich höherer Güte bestimmen lässt als α_{fin} . Auch zeigt sich, dass α_{init} mit zunehmender Abbruchbedingung $\nu_z > \Delta_{TH,\nu_z}$ besser bestimmbar ist. So liefert bei einer Energie von $E_p = 120$ μ eV eine Abbruchbedingung von $\nu_z > \Delta_{TH,\nu_z} = \Delta\nu_{z,sf} + \sigma_{opt} \approx 220$ mHz eine Güte von 90 %, während bei $\nu_z > \Delta_{TH,\nu_z} = \Delta\nu_{z,sf} + 2\sigma_{opt} \approx 250$ mHz eine Güte von 92 % erreicht wird. Letztere kann kaum mehr verbessert werden, indem die Abbruchbedingung weiter erhöht wird, wie am Beispiel von $\nu_z > \Delta_{TH,\nu_z} = \Delta\nu_{z,sf} + 3\sigma_{opt} \approx 280$ mHz mit einer Güte von 93 % bei $E_p = 120$ μ eV gezeigt ist. Eine Erhöhung der Abbruchbedingung führt lediglich zu einer Zunahme der im Mittel benötigten Anzahl an Datenpunkten zum Erreichen der Abbruchbedingung, vergleiche Abbildung 8.1 d). Im Experiment werden α_{init} und α_{fin} zu unterschiedlichen E_p bestimmt. Dies muss bei der Bestimmung von G_{PT} berücksichtigt werden. Für die mittlere Güte \bar{G}_{fin} der Detektion von α_{fin} folgt

$$\bar{G}_{fin}(E_{p,cut}) = \int_0^{E_{p,cut}} \omega(E_p; E_{p,cut}) G_{fin}(E_p) dE_p \quad (8.1)$$

mit

$$\omega(E_p; E_{p,cut}) = \frac{1}{1 - e^{-E_{p,cut}/E_p}} \frac{1}{E_{p,th}} e^{-E_p/E_{p,th}} \quad (8.2)$$

der Boltzmann-verteilten Energie der Zyklotronmode normiert auf das Intervall $[0, E_{p,cut}]$. $E_{p,cut}$ bezeichnet hierbei die während der Messung größte akzeptierte Energie in der Zyklotronmode; daher, im Experiment wird die Abbruchbedingung

8.1. GÜTE DER SPIN-ZUSTANDS-DETEKTION DER DOPPEL-FALLEN METHODE

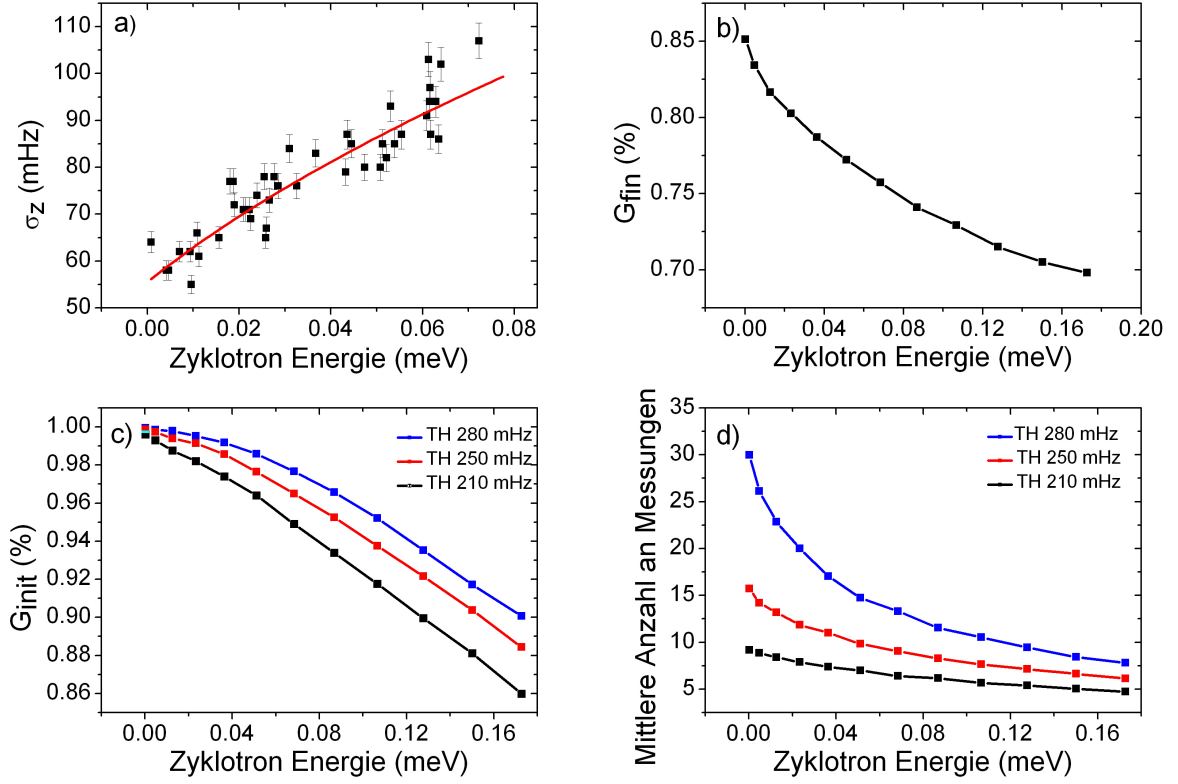


Abbildung 8.1: Güte der Spin-Flip-Detektion in der Analysefalle in Abhängigkeit der Zyklotron Energie. a) Frequenzfluktuationen in der Analysefalle in Abhängigkeit der Energie der Zyklotron Mode. b) Die, basierend auf den simulierten Frequenzdaten berechnete, Güte G_{fin} der Spin-Flip-Detektion für den Endzustand. c) Die, basierend auf den simulierten Frequenzdaten, berechnete Güte G_{init} der Spin-Flip-Detektion für den Anfangszustand zu unterschiedliche Abbruchbedingungen $\nu_z > \Delta_{TH,\nu_z}$ der Messreihe. d) Mittlere Anzahl an benötigten Frequenzmessungen in der Analysefalle bis zum Eintreten der Abbruchbedingung für unterschiedliche Δ_{TH,ν_z} .

$E_p < E_{p,cut}$ definiert. $E_{p,th}$ ist die thermische Energie der Zyklotron Mode, welche durch die effektive Temperatur des Zyklotron-Nachweises definiert ist. Es folgt

$$G_{PT}(E_p, E_{p,cut}) = G_{init}(E_+) \bar{G}_{fin}(E_{p,cut}) + (1 - G_{init}(E_+)) (1 - \bar{G}_{fin}(E_{p,cut})) \quad (8.3)$$

für die Güte der Spin-Flip-Detektion in der Präzisionsfalle zu einer festen Energie E_p während der Bestimmung von α_{init} . Der zweite Summand berücksichtigt, dass ein Spin-Flip in der Präzisionsfalle auch bei der simultanen Fehlinterpretation von α_{init} und α_{fin} richtig erkannt wird. Da auch α_{init} zu statistisch verteilten E_p im

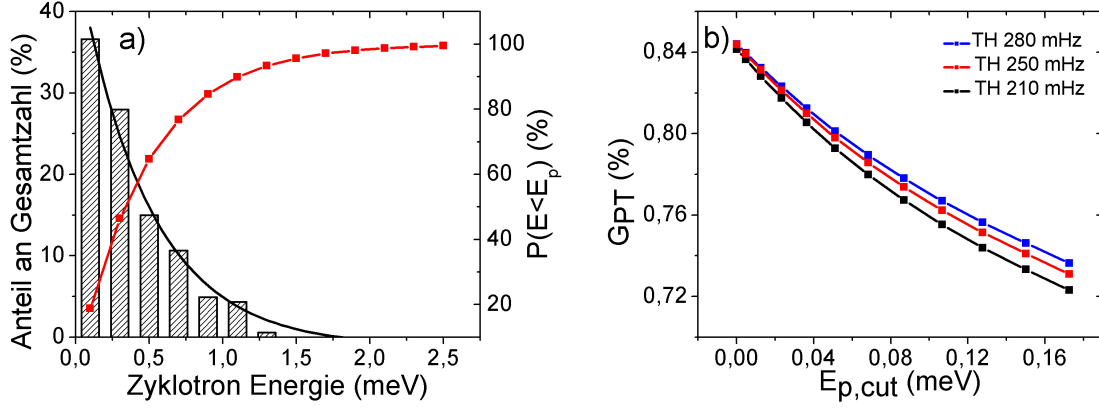


Abbildung 8.2: Güte der Spin-Flip-Detektion in der Präzisionsfalle. a) Verteilung der Energien in der Zyklotronmode in der Analysefalle sowie die gemessene Wahrscheinlichkeit $P(E < E_p)$ ein Teilchen bei einer niedrigeren Energie in der Zyklotronmode als E_p zu finden. b) Die basierend auf den simulierten Frequenzdaten berechnete Güte $G_{PT}(E_p, cut)$ der Spin-Flip-Detektion in der Präzisionsfalle.

Intervall $[0, E_{p, cut}]$ bestimmt wird, folgt

$$G_{PT}(E_p, cut) = \int_0^{E_p, cut} G_{PT}(E_p, E_p, cut) \omega(E_p; E_p, cut) dE_p \quad (8.4)$$

für die Güte der Spin-Flip-Detektion in der Präzisionsfalle, bei Betrachtung aller Messergebnisse im Intervall $[0, E_{p, cut}]$.

In Abbildung 8.2 ist neben der Verteilung der gemessenen Zyklotronenergien in der Analysefalle die berechnete Güte $G_{PT}(E_p, cut)$ für unterschiedliche $\Delta_{TH\nu_z}$ gezeigt. Für die weiteren Messungen wurde $\Delta_{TH\nu_z} = 250 \text{ mHz}$ gewählt. Ein höherer Grenzwert führt auf Grund der Limitierung durch $G_{fin}(E_p)$ zu keiner signifikanten Verbesserung von $G_{PT}(E_p, cut)$. Dies bedeutet, dass bei $E_{cut} = 130 \mu\text{eV}$ eine Güte von 75 %, daher eine Fehlinterpretation von einem aus vier Spin-Flip-Versuchen in der Präzisionsfalle, erwartet wird. Für den derzeit verwendeten Zyklotron Nachweis liegt die Wahrscheinlichkeit $P(E < E_p)$ ein Teilchen unterhalb $E_p = 130 \mu\text{eV}$ zu finden bei circa 20 %, siehe Abbildung 8.2 a). Um $E_{cut} = 130 \mu\text{eV}$ zu erreichen muss das Proton auf circa 1/4 der thermischen Energie $E_{therm} = 0.5 \text{ meV}$ gekühlt werden. Zur Präparation eines Teilchens, welches diesen Randbedingungen genügt, werden im Mittel zwei Stunden benötigt.

Auf Grund der endlichen Güte der Spin-Flip-Detektion weicht die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{sf, m}$ von der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit $p_{sf, w}$ ab

$$p_{sf, m} = p_{sf, w} \cdot G_{PT}(E_p, cut) + (1 - p_{sf, w}) \cdot (1 - G_{PT}(E_p, cut)). \quad (8.5)$$

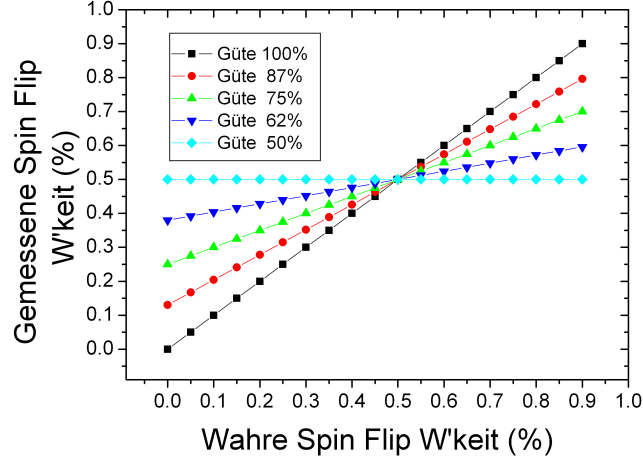


Abbildung 8.3: Gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion der wahren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit für unterschiedliche Güten der Spin-Flip-Detektion der Präzisionsfalle.

In Abbildung 8.3 ist der Zusammenhang graphisch für unterschiedliche Güten der Spin-Flip-Detektion in der Präzisionsfalle gezeigt. Unter idealen Voraussetzungen einer optimalen Güte von 100 % gilt $p_{sf,m} = p_{sf,w}$. Im Gegensatz hierzu kann bei minimaler Güte von $G_{PT}(E_{p,cut}) = 50\%$ nicht mehr eindeutig auf $p_{sf,w}$ rückgeschlossen werden. Der Kontrast zwischen $p_{sf,m}(p_{sf,w} = 0\%)$ und $p_{sf,m}(p_{sf,w} = 50\%)$ nimmt mit steigender Güte zu. Es wird erwartet bei $E_{cut} = 110 \mu\text{eV}$ für einen off-resonanten Datenpunkt mit $p_{sf,w} = 0\%$ eine Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von $p_{sf,m} = 25\%$ zu beobachten, während für einen resonanten Datenpunkt $p_{sf,w} = p_{sf,m} = 50\%$ erwartet wird.

8.2 Messablauf und Ergebnis

Abbildung 8.4 gibt einen schematischen Überblick über die Messroutine zur Detektion von Spin-Übergängen in der Präzisionsfalle.

Die folgende Liste beschreibt den Ablauf der Messung:

- Aufnahme einer axialen Frequenzreihe mit Abbruchbedingung $\Delta\nu_z > \Delta_{TH\nu_z}$ in der Analysefalle. Zwischen zwei Frequenzmessungen wird paarweise versucht einen Spin-Übergang zu treiben. Aus der Frequenzreihe werden α_{fin} sowie $\alpha_{init,ref}$ einer Referenzmessung bestimmt. α_{fin} bezeichnet den Spin-Zustand am Anfang dieser Messreihe und $\alpha_{init,ref}$ den Spin-Zustand am Ende dieser Messreihe.

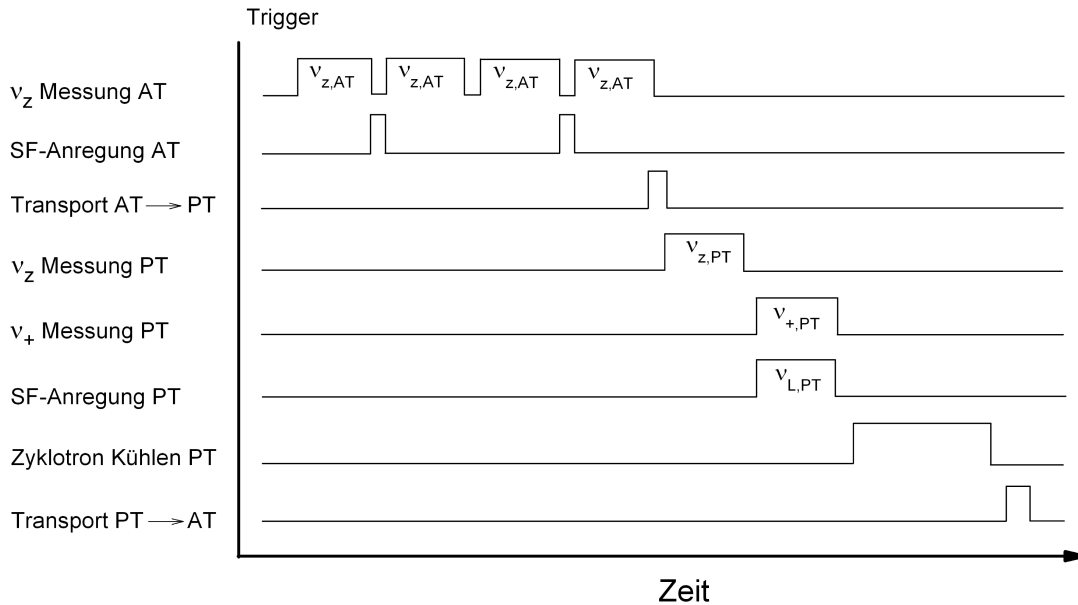


Abbildung 8.4: Schematische Darstellung der Messroutine zur Demonstration der Doppel-Fallen Methode.

- Aufnahme einer zweiten axialen Frequenzreihe mit identischer Abbruchbedingung und paarweisem Einstrahlen der Spin-Flip-Anregung. Aus dieser Frequenzreihe werden $\alpha_{fin,ref}$ sowie α_{init} bestimmt. $\alpha_{fin,ref}$ bezeichnet den Spin-Zustand am Anfang dieser Messreihe und α_{init} den Spin-Zustand am Ende dieser Messreihe.
- Das Teilchen wird in die Präzisionsfalle transportiert.
- Messung der axialen Frequenz in der Präzisionsfalle.
- Es wird versucht einen Spin-Übergang in der Präzisionsfalle zu treiben, während simultan die Zyklotron Frequenz über den Doppeldip gemessen wird. Dies führt zu einer Erhöhung der Energie der Zyklotronmode auf $E_p = 34 \text{ meV}$.
- Ein Proton wird in der Analysefalle mit niedriger Zyklotron Energie $E_p \leq E_{p,cut}$ präpariert. Dazu wird das Proton mit dem Wärmebad des Zyklotron-Nachweises in der Präzisionsfalle thermalisiert und anschließend E_p in der AT bestimmt. Die Thermalisierung und Bestimmung von E_p werden wiederholt bis obige Bedingung erfüllt ist.

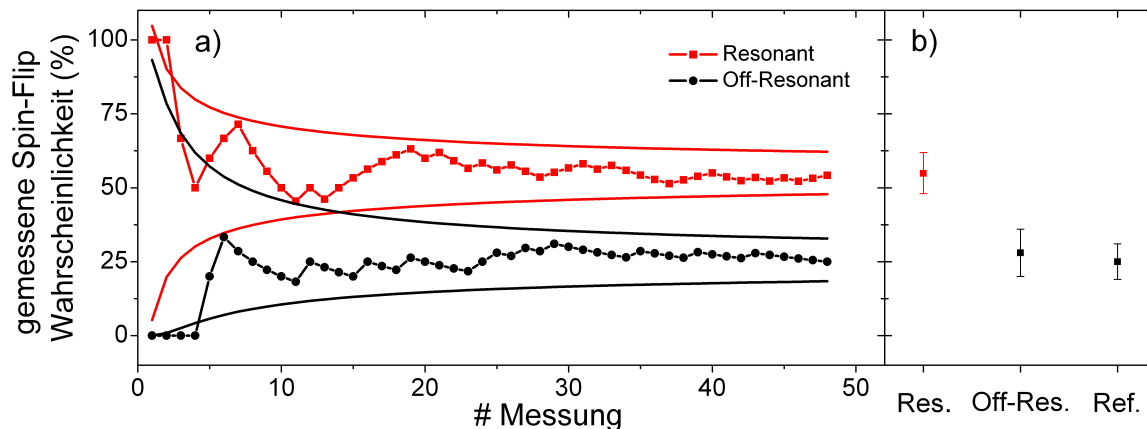


Abbildung 8.5: Demonstration der Doppel-Fallen Methode [26]. a) Aufgetragen ist die kummulative Entwicklung der in der Präzisionsfalle gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit gegen die Anzahl der beitragenden Datenpunkte. In rot Daten für eine resonante Einstrahlung der Spin-Flip-Anregung und in schwarz Daten für eine um 1 MHz gegenüber der resonanten Einstrahlung verstimmtten Anregung. Durchgezogene Linien geben das 1σ Konfidenzintervall an. Beide Messreihen konvergieren zu konstanten Werten. b) Vergleich der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeiten des resonanten, off-resonanten Datenpunktes sowie der Referenzmessung.

- Auf Grund der magnetischen Flasche der Analysefalle kommt es zu einer Verschiebung der Larmorfrequenz von $\Delta\nu_L = -11 \text{ kHz}\cdot\text{K}/T_-$. Daher wird die Magnetronmode über eine Seitenbandanregung an die über Rückkopplung gekühlte axiale Mode gekoppelt, womit die Magnetrontemperatur auf $T_- = 50(3) \text{ mK}$ reduziert wird, vergleiche Abschnitt 6.2. Die damit verbundene Verschiebung der Larmorfrequenz von $\Delta\nu_L = 550 \text{ Hz}$ ist gegenüber der Linienbreite der Larmorresonanz von 100 kHz zu vernachlässigen. Damit kann bei fester Frequenz der Spin-Flip-Anregung in der Analysefalle eine zuverlässige Sättigung der Larmorresonanz auf eine Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von 50% und somit eine Spin-Zustands-Detektion hoher Güte garantiert werden. Anschließend wird wieder zu Punkt eins des Messschemas gesprungen.

Aus α_{fin} und α_{init} lässt sich bestimmen ob in der Präzisionsfalle ein Spin-Übergang getrieben wurde. Wird die Messung mehrmals wiederholt, lässt sich die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in der Präzisionsfalle bestimmen. Über die Messung von $\alpha_{fin,ref}$ sowie $\alpha_{init,ref}$ kann, unter identischen Bedingung wie zur Messung von α_{fin} und α_{init} , bestimmt werden, ob in der Analysefalle ein Spin-Übergang beobachtet wird, obwohl explizit kein Übergang getrieben wurde. Daher ist die Güte G_{ref} , welche

über die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit der Referenzmessung $p_{SF,Ref} = 1 - G_{ref}$ bestimmbar ist, direkt ein Maß der Güte der Spin-Flip-Detektion $G_{PT}(E_{p,cut})$ in der Präzisionsfalle.

Daten wurden für eine resonante und eine off-resonante Spin-Flip-Anregung aufgenommen. Die off-resonante Anregung ist um 1 MHz gegenüber der resonanten Anregung verstimmt. In Abbildung 8.5 ist die kumulative Entwicklung der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit gezeigt. Durchgezogene Linien geben das 1σ Konfidenzintervall an. Beide Messungen konvergieren zu konstanten Werten. Der off-resonante Datenpunkt konvergiert zu $p_{sf} \approx 28(8)\%$, da einer aus vier Spin-Flip-Versuchen in der Präzisionsfalle falsch interpretiert wird. Dies ist das Resultat der endlichen Güte der Spin-Flip-Detektion. Das Ergebnis ist in guter Übereinstimmung mit der direkten Referenzmessung der Detektionsgüte $G_{ref} = 1 - p_{sf,ref} = 1 - 25(6)\%$ in der Analysefalle. Für den resonanten Datenpunkt wurde $p_{sf} \approx 52(8)\%$ gemessen. Der signifikante Unterschied von 3σ zeigt zweifelsfrei, dass Spin-Flips eines einzelnen Protons im homogenen Magnetfeld der Präzisionsfalle detektiert werden konnten. Der nächste Schritt, eine vollständige Aufnahme der Resonanz über eine Variation der Frequenz der Spin-Flip-Anregung in der Präzisionsfalle, ist eine direkte Präzisionsmessung des g -Faktors eines einzelnen Protons unter Anwendung der Doppel-Fallen Methode.

Kapitel 9

Der g -Faktor des Protons

Nachdem im letzten Kapitel die Anwendung der Doppel-Fallen Methode erfolgreich demonstriert werden konnte, ist es nur noch ein kleiner Schritt zu einer ersten, direkten Präzisionsmessung des g -Faktors des Protons. Hierzu muss lediglich die Frequenz des magnetischen Wechselfeldes zur Spin-Flip-Anregung über die Larmorresonanz gestimmt werden.

In Abschnitt 9.1 wird nochmals eine Sequenz zur präzisen Messung der Frequenzen in der Präzisionsfalle beschrieben. Anschließend wird in Abschnitt 9.2 das Messergebnis und die statistische Auswertung präsentiert. Im folgenden Abschnitt 9.3 werden die systematischen Fehlerquellen diskutiert, um in Abschnitt 9.4 das abschließende Ergebnis zu präsentieren.

9.1 Messablauf

Zur Aufnahme der g -Faktor Resonanz wird der im letzten Kapitel 8.2 beschriebene Messzyklus kontinuierlich wiederholt. Da für die weitere Diskussion der exakte Ablauf der Zyklotronfrequenzmessung und Einstrahlung der Spin-Flip-Anregung wichtig ist, wird dieser nochmals detailliert beschrieben:

- Aufnahme eines Doppeldips zur Messung der Zyklotronfrequenz $\nu_{c,ref}$ und Bestimmung der Frequenz der Seitenbandkopplung $\nu_p - \nu_z$.
- Messung der axialen Frequenz $\nu_{z,vor,1}$.
- Einstrahlen des Zyklotronseitenbandes ν_{Sb} und Aufnahme eines Doppeldips mit Seitenbändern $\nu_{l,vor}$ und $\nu_{r,vor}$.

- Messung der axialen Frequenz $\nu_{z,vor,2}$.
- Einstrahlen der magnetischen Dipolanregung zum Induzieren eines Spin-Flips. Basierend auf der vorherigen Zyklotronfrequenzmessung wird die erwartete Larmorfrequenz ν_L berechnet. Die Frequenz $\nu_{L,exc}$ der Einstrahlung wird gegenüber ν_L um einen zufällig generierten, um Null verteilten Offset verschoben.
- Messung der axialen Frequenz $\nu_{z,nach,1}$.
- Einstrahlen des Zyklotronseitenbandes ν_{Sb} und Aufnahme eines Doppeldips mit Seitenbändern $\nu_{l,nach}$ und $\nu_{r,nach}$.
- Messung der axialen Frequenz $\nu_{z,nach,2}$.

Den zeitaufwendigsten Beitrag zu einem Messzyklus stellt mit circa 2 Stunden die bereits im vorherigen Abschnitt beschriebene Präparation eines kalten Protons zur Detektion des Spin-Zustandes in der Analysefalle dar. Inklusive der weiteren Messsequenzen benötigt ein Messzyklus circa 3 Stunden. Die Aufnahme einer vollständigen g -Faktor Resonanz mit circa 400 Datenpunkten beansprucht, inklusive der Messunterbrechungen auf Grund des Füllens der Kryostate, 4 Monate.

9.2 Die g -Faktor Resonanz

Aus dem Maximum der gemessenen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion des gemessenen Frequenzverhältnisses

$$g_m = 2 \frac{\nu_{L,exc}}{\nu_{c,AVG}} = 2 \frac{\nu_{L,exc}}{\nu_{c,vor}/2 + \nu_{c,nach}/2}, \quad (9.1)$$

der g -Faktor Resonanz, kann der g -Faktor des Protons bestimmt werden. Hierbei geben

$$\nu_{c,vor} = \nu_{l,vor} + \nu_{r,vor} + \nu_{Sb} - \nu_{z,vor,2}, \quad (9.2)$$

$$\nu_{c,nach} = \nu_{l,nach} + \nu_{r,nach} + \nu_{Sb} - \nu_{z,nach,2} \quad (9.3)$$

die gemessenen Zyklotronfrequenzen vor und nach dem Einstrahlen der Spin-Flip-Anregung an. Jedem einzelnen Frequenzverhältnisse $g_{m,i}$, mit i dem Laufindex des Messzykluses, kann ein erfolgreicher Spin-Flip-Versuch $g_{m,i,sf}$ beziehungsweise ein nicht erfolgreicher Spin-Flip-Versuch $g_{m,i,ksf}$ zugeordnet werden. Werden die Daten gebinnt, ist es möglich die gemessene Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in Intervallen

darzustellen und somit die g -Faktor Resonanz zu visualisieren, vergleiche hierzu die Datenpunkte aus Abbildung 9.1. Allerdings wird eine Kurvenanpassung mit der Methode der kleinsten Quadrate an die so bestimmten Datenpunkte der Resonanz aus zwei Gründen nicht angewendet. Zum einen können die Intervalle beliebig gewählt werden, womit nicht ausgeschlossen werden kann, dass es auf Grund der Wahl zu einer systematischen Verschiebung des Ergebnisses kommt. Zum anderen handelt es sich bei den Datenpunkten um binominalverteilte Zufallsvariablen mit entsprechend binominalverteilten Fehlern. Dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung normalverteilter Fehler für eine Kurvenanpassung mit der Methode der kleinsten Quadrate. Aus diesen Gründen wird die Maximum-Likelihood Methode angewendet, welche bereits bei der Bestimmung der g -Faktoren von Elektronen gebunden in hochgeladenen Ionen erfolgreich angewendet wurde [62, 87].

Hierzu wird die sogenannte Log-Likelihood Funktion, definiert als

$$\mathcal{L} = \log \prod_i L(g_{m,i}; \theta_j) = \sum_i \log L(g_{m,i}; \theta_j) \quad (9.4)$$

mit θ_j den noch näher zu bestimmenden Fitparametern und L der Linienform der Resonanz, über eine Variation des Parametersatzes θ_j maximiert.

Wie eingangs des Abschnittes beschrieben können jedem einzelnen Frequenzverhältnis $g_{m,i}$ ein erfolgreicher $g_{m,i,sf}$ oder nicht erfolgreicher $g_{m,i,ksf}$ Spin-Flip-Versuch zugeordnet werden. Um beide Fälle während der Kurvenanpassung zu berücksichtigen, wird folgende Log-Likelihood Funktion verwendet

$$\mathcal{L} = \sum_i \log L(g_{m,i,sf}; \theta_j) + \sum_i \log (1 - L(g_{m,i,ksf}; \theta_j)). \quad (9.5)$$

Als Linienform L wurde eine Gaußsche Normalverteilung G mit Mittelwert μ und Breite σ verwendet, welche auf Grund der endlichen Güte der Spin-Flip-Detektion G_{sf} gestaucht wird,

$$L(\mu, \sigma, G_{sf}) = G(\mu, \sigma) \cdot G_{sf} + (1 - G(\mu, \sigma)) \cdot (1 - G_{sf}), \quad (9.6)$$

vergleiche auch Gleichung 8.5. Aus der Kurvenanpassung, siehe Abbildung 9.1, lässt sich der gemessene g -Faktor mit einer relativen Präzision von

$$\frac{\Delta g}{g} = 3.8 \cdot 10^{-9} \quad (9.7)$$

bestimmen. Es ergibt sich eine Resonanzbreite von $19 \cdot 10^{-9}$, zu der $17 \cdot 10^{-9}$ auf Grund der Streuung der Zyklotronfrequenz beitragen, siehe Abschnitt 9.3.3.

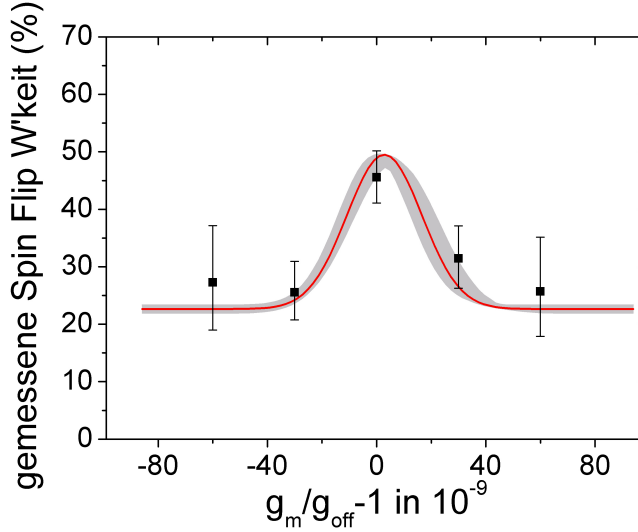


Abbildung 9.1: g -Faktor Resonanz. Aufgetragen ist die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion des gemessenen Frequenzverhältnisses $g_m = 4\nu_{L,exc}/(\nu_{c,vor} + \nu_{c,nach})$. Aus einer Maximum-Likelihood Anpassung, rote Kurve, lässt sich das Zentrum der Resonanz auf $3.8 \cdot 10^{-9}$ bestimmen. Die graue Fläche gibt das 1σ Konfidenzband bezüglich einer Variation des Zentrums an. Die Datenpunkte sind nur zur Visualisierung eingezeichnet.

9.3 Systematische Fehler

Bevor ein endgültiger Wert des g -Faktors angegeben werden kann, müssen eine Reihe möglicher systematischer Verschiebungen berücksichtigt werden. Wie bereits in Kapitel 2 beschrieben kann es in einer nicht idealen Penning-Falle zu energieabhängigen Frequenzverschiebungen der Zyklotronfrequenz $\Delta\nu_c(E_+, E_z, E_-)$ und der Larmorfrequenz $\Delta\nu_L(E_+, E_z, E_-)$ kommen. Zusätzlich können zeitliche Änderungen des Magnetfeldes, des elektrischen Potentials oder der Energien auftreten, welche zu zeitabhängigen Verschiebungen der Frequenzen führen.

Daneben kommt es zu Verschiebungen der Eigenfrequenzen auf Grund der Wechselwirkung des Protons mit seiner Spiegelladung, der Wechselwirkung mit der Nachweisimpedanz und der effektiven, relativistischen Massenzunahme.

Für die relative Verschiebung des gemessenen g -Faktors in Abhängigkeit der Frequenzverschiebungen gilt

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\nu_L(E_+, E_z, E_-, t)}{\nu_L} - \frac{\Delta\nu_c(E_+, E_z, E_-, t)}{\nu_c}. \quad (9.8)$$

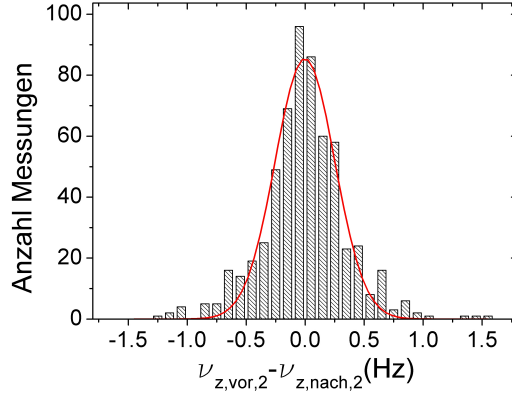


Abbildung 9.2: Axiale Frequenzfluktuationen während der g -Faktor Messung. Aufgetragen ist die Verteilung der axialen Frequenzdifferenzen $\nu_{z,vor,2} - \nu_{z,nach,2}$. Es ergibt sich eine systematische Verschiebung von $2(10)$ mHz.

9.3.1 Elektrisches Speicherpotential

Drift des elektrischen Speicherpotentials

Die Messung der axialen Frequenz erfolgt nicht simultan zur Messung der beiden Seitenbänder ν_l und ν_r . Folglich kann es auf Grund einer Drift des elektrischen Speicherpotentials zu einer Verschiebung der bestimmten reduzierten Zyklotronfrequenz kommen. Aus dem Vergleich der axialen Frequenzmessungen $\Delta\nu_z = \nu_{z,vor,2} - \nu_{z,nach,2}$ kann auf eine mögliche Drift rückgeschlossen werden. In Abbildung 9.2 ist die Verteilung der axialen Frequenzdifferenzen gezeigt. Es ergibt sich $\Delta\nu_z = 2(10)$ mHz. Dies entspricht nach Gleichung 3.22 einer Verschiebung der gemessenen, reduzierten Zyklotronfrequenz von

$$\nu_+ = \nu_{+,0} + \Delta\nu_z \quad (9.9)$$

und analog der Magnetronfrequenz von

$$\nu_- = \nu_{-,0} - \Delta\nu_z. \quad (9.10)$$

Für die über das Invarianz-Theorem, Gleichung 2.11, bestimmte freie Zyklotronfrequenz folgt

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = \frac{1}{\nu_c} \sqrt{(\nu_{+,0} + \Delta\nu_z)^2 + (\nu_{z,0} + \Delta\nu_z)^2 + (\nu_{-,0} - \Delta\nu_z)^2} - 1. \quad (9.11)$$

Aus $\Delta\nu_z = 2(10)$ mHz ergibt sich eine relative Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz von

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = 0.07(0.35) \cdot 10^{-9}. \quad (9.12)$$

Anharmonisches elektrisches Speicherpotential

Wie eingangs der Arbeit diskutiert führt ein anharmonisches, elektrisches Speicherpotential zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen und somit zu einer Verschiebung der aus den Eigenfrequenzen bestimmten freien Zyklotronfrequenz. Diese Verschiebung tritt nicht bei der Larmorfrequenz auf, da diese ausschließlich durch das Magnetfeld bestimmt ist.

Nach Abschnitt 5.2.2 konnte das ideale Tuning-ratio auf $\Delta Tr = 10^{-5}$ optimiert werden. Zusammen mit dem Messwert $D_4 = 4.6(0.6) \cdot 10^{-3} \text{mm}^{-4} / \Delta Tr$ ergibt sich eine Unsicherheit auf die Fallenanharmonizität von

$$\Delta C_4 = D_4 \cdot \Delta Tr = 4.6(0.6) 10^4 \text{m}^{-4}. \quad (9.13)$$

Die direkte Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz wird durch die Energie der axialen Mode dominiert. Nach Gleichung 2.21

$$\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} = -\frac{1}{qU_0} \frac{3\Delta C_4}{C_2^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 E_z \quad (9.14)$$

resultiert eine vernachlässigbare Unsicherheit auf eine relative Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz von $= -0.002 \cdot 10^{-9}$.

Neben der direkten Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz kommt es zu einer Verschiebung der axialen Frequenz und damit zu einer Verschiebung der aus dem Doppeldip bestimmten reduzierten Zyklotronfrequenz. Die axiale Frequenzverschiebung wird durch die Energie der axialen Mode dominiert. Für die relative Verschiebung der axialen Frequenz, siehe Gleichung 2.20, gilt

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = \frac{3}{4} \frac{1}{qU_0} \frac{C_4}{C_2^2} E_z, \quad (9.15)$$

daher $\Delta\nu_z/\nu_z = 9(1) \cdot 10^{-9}$. Hieraus folgt nach Gleichung 9.11 für die Unsicherheit einer relativen Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz

$$\Delta \left(\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} \right) = 0.20(0.02) \cdot 10^{-9}. \quad (9.16)$$

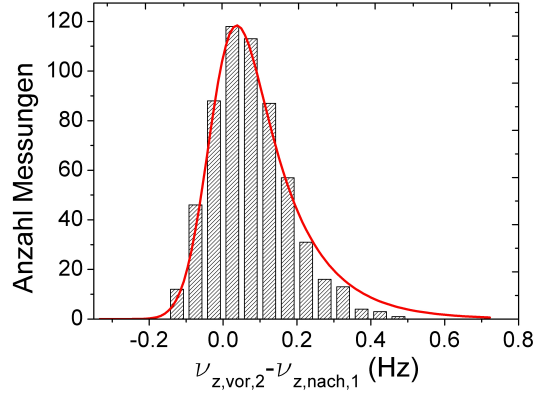


Abbildung 9.3: Verteilung der axialen Frequenzdifferenzen $\nu_{z,vor,2} - \nu_{z,nach,1}$ während der g -Faktor Messung. Die Frequenzverschiebung resultiert aus der Änderung der reduzierten Zyklotronenergie im inhomogenen Magnetfeld B_2 der Präzisionsfalle.

9.3.2 Magnetisches Feld

Linearer Magnetfeldgradient

Auf Grund des axialen magnetischen Moments $\mu_{+,z} \propto E_+ \propto T_+$ der reduzierten Zyklotronmode kommt es im magnetischen Feldgradienten B_1 zu einer Verschiebung des axialen Gleichgewichtspunktes. Damit verbunden ist eine Änderung des vom Ion erfahrenen Magnetfeldes. Folglich wird der gemessene g -Faktor vom wahren g -Faktor abweichen, sollten die Larmorfrequenz und die freie Zyklotronfrequenz nicht zur gleichen Zyklotronenergie bestimmt werden.

Im Folgenden wird eine mögliche Änderung von T_+ diskutiert. Da im inhomogenen Magnetfeld B_2 die axiale Frequenz von der Energie der reduzierten Zyklotronmode $T_+ = E_+/k_B$ abhängt, kann aus der Verteilung der axialen Frequenzdifferenzen $\nu_{z,vor,2} - \nu_{z,nach,1}$ auf eine Änderung ΔT_+ rückgeschlossen werden. Abbildung 9.3 zeigt die Verteilung der axialen Frequenzdifferenzen. Es ergibt sich eine Frequenzverschiebung von $\Delta\nu_z = 120(10)$ mHz. Dies entspricht nach Gleichung 2.33

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z^2} \frac{B_2}{B_0} k_B \Delta T_+ \quad (9.17)$$

einer Änderung der Energie der reduzierten Zyklotronmode von $\Delta T_+ = 180(20)$ K. Diese Änderung ist auf das Einkühlen der reduzierten Zyklotronmode über den

Zyklotronnachweis nach der ersten Doppeldip-Messungen zurückzuführen¹

$$T_+(t) = T_{+,0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right). \quad (9.18)$$

Hierbei bezeichnen $T_{+,0}$ die Energie der Zyklotronmode während der Seitenbandkopplung und τ_+ die Kühlzeitkonstante des Zyklotronnachweises. Da die Energie $T_{+,0} = 360(40)$ K während der Kopplung bekannt ist, kann aus der Frequenzverschiebung $\Delta\nu_z = 120(10)$ mHz die Kühlzeitkonstante des Zyklotronnachweises zu $\tau_+ = 260(30)$ sek bestimmt werden. Dies ist in Übereinstimmung mit der Kühlzeitkonstanten von

$$\tau_+ = \frac{1}{2\pi} \frac{mD_+^2}{R_{zykl}q^2} = 240(10) \text{ sek}, \quad (9.19)$$

welche unabhängig aus den Parametern des Nachweises bestimmt werden kann.

Folglich werden die Larmorfrequenz und die Zyklotronfrequenz nicht zur gleichen Energie T_+ bestimmt, womit es durch den Magnetfeldgradienten zu einer systematischen Verschiebung des gemessenen g -Faktor kommt.

Für die relative Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz durch die Energieänderung $\Delta T_+ = 180(20)$ K im Magnetfeldgradienten $B_1 = 84.96(0.01)$ mT/m folgt nach Abschnitt 2.4

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = 0.08(0.01) \cdot 10^{-9}. \quad (9.20)$$

Der gemessene g -Faktor muss um diese Verschiebung korrigiert werden.

Axiale Frequenzverschiebung

In Abschnitt 5.3.3 wurde gezeigt, dass über die Doppel-Dip Methode die verschobene reduzierte Zyklotronfrequenz

$$\nu_+ + \Delta\nu_+ = \nu_{rf} + \nu_{r,m} + \nu_{l,m} - \nu_{z,m} \quad (9.21)$$

mit

$$\nu_{l,m} = \nu_z + \Delta\nu_{z,koppel} - \frac{\Omega}{2} - \frac{\delta}{2} \quad (9.22)$$

$$\nu_{r,m} = \nu_z + \Delta\nu_{z,koppel} + \frac{\Omega}{2} - \frac{\delta}{2} \quad (9.23)$$

$$\nu_{z,m} = \nu_z + \Delta\nu_{z,einzel} \quad (9.24)$$

¹Während der Seitenbandkopplung beträgt die Energie der reduzierten Zyklotronmode $T_+ = (\nu_+/\nu_z) \cdot T_z \approx 360$ K. Wird die Kopplung abgeschaltet, relaxiert T_+ auf die thermische Energie des Nachweises von $T_{+,th} \approx 5$ K.

bestimmt wird. $\Delta\nu_{z,koppel}$ und $\Delta\nu_{z,einzel}$ geben die Verschiebungen der axialen Frequenz während der Doppeldip-Messung und der Einzeldip-Messung an. Da während der Kopplung für die Verstimmung δ

$$\delta = \nu_{rf} - (\nu_+ + \Delta\nu_+ - \nu_z - \Delta\nu_{z,koppel}) \quad (9.25)$$

gilt, ist Gleichung 9.21 nur unter der Bedingung $\Delta\nu_{z,koppel} = \Delta\nu_{z,einzel}$ gültig. Allerdings führt die exponentielle Änderung der Zyklotronenergie während der Messung des Einzeldips zu einer Verschiebung der gemessenen, axialen Frequenz

$$\Delta\nu_{z,einzel} = \Delta\nu_{z,koppel} - \Delta\nu_z. \quad (9.26)$$

Damit verbunden ist eine Verschiebung der gemessenen Zyklotronfrequenz. Im Experiment wird über die exponentiell abfallende Frequenzverschiebung

$$\Delta\nu_{z,einzel}(t) = \frac{1}{4\pi^2 m \nu_z} \frac{B_2}{B_0} k_B T_{+,0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) = \Delta\nu_{z,koppel} \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) \quad (9.27)$$

mit einer exponentiellen Gewichtung gemittelt. $T_{+,0}$ bezeichnet die Energie der reduzierten Zyklotronmode während der Seitenbandkopplung. Basierend auf der Kühlzeitkonstanten der reduzierten Zyklotronmode von $\tau_+ = 240(10)$ sek und $\Delta\nu_{z,koppel} = 240(30)$ mHz, vergleiche Abschnitt 5.3.3, kann die relative Verschiebung der gemessenen, axialen Frequenz zu $\Delta\nu_z/\nu_z = 15(4) \cdot 10^{-9}$ bestimmt werden. Hieraus folgt für die Verschiebung der gemessenen, freien Zyklotronfrequenz

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = 0.5(0.1) \cdot 10^{-9}. \quad (9.28)$$

Dies stellt die dominierende systematische Verschiebung dar.

Magnetische Flasche

Auf Grund der endlichen Temperaturen der Bewegungsmoden kommt es im inhomogenen Magnetfeld B_2 der Präzisionsfalle zu einer Verschiebung der Larmorfrequenz $\Delta\nu_L$ und einer Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz $\Delta\nu_+$. Im inhomogenen Magnetfeld B_2 gilt

$$\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = \frac{\Delta\nu_+}{\nu_+}. \quad (9.29)$$

Hieraus folgt für die relative Verschiebung des gemessenen g -Faktors

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} \left(1 - \frac{\nu_+^2}{\nu_c^2}\right). \quad (9.30)$$

Diese Verschiebung wird durch die endliche Temperatur der axialen Mode dominiert. Mit $B_2 T_z = 29(3) \text{ T/m}^2\text{K}$, siehe Abschnitt 5.3.3, folgt

$$\frac{\Delta g}{g} = 3.8(0.4) \cdot 10^{-12}. \quad (9.31)$$

9.3.3 Nichtlineare Drift des Magnetfeldes

Da zur Bestimmung des g -Faktors der Mittelwert aus der Zyklotronfrequenzmessung vor und nach dem Einstrahlen der Spin-Flip-Anregung verwendet wird, führen lineare Driften des Magnetfeldes zu keiner systematischen Verschiebung des gemessenen g -Faktors. Allerdings gibt es Hinweise auf eine weiter zu untersuchende nicht lineare Drift des Magnetfeldes während der Messung des g -Faktors. In Abbildung 9.4a) ist der Mittelwert aller Zyklotronfrequenz-Differenzen $\nu_{c,vor} - \nu_{c,ref}$ als Funktion der Zeit, welche bis zur letzten Spin-Flip-Anregung in der Analysefalle vergangen ist, gezeigt. Folglich steigt das Magnetfeld nach der Spin-Flip-Anregung in der Analysefalle an. Da $\nu_{c,ref}$ und $\nu_{c,vor}$ zu einer festen Zeitdifferenz aufgenommen wurden, würde eine lineare Drift zu einer konstanten Magnetfeldänderung führen. Dies kann jedoch nicht beobachtet werden. Somit ist eine nicht-lineare Drift des Magnetfeldes nicht auszuschließen. Eine solche Drift konnte nicht bei den Stabilitätsmessungen der Zyklotronfrequenz beobachtet werden, siehe Abschnitt 5.3.3.

Eine mögliche Erklärung ist ein relaxierender Spannungsoffset an einer der Elektroden der Präzisionsfalle. Dieser Offset würde zu einer axialen Verschiebung des Protons in der Falle führen. Damit verbunden wäre eine Änderung der Zyklotronfrequenz im Magnetfeldgradienten B_1 der Präzisionsfalle. Um die beobachtete Drift der Zyklotronfrequenz zu erklären, müsste das Proton um $\Delta x = 0.2 \mu\text{m}$ verschoben werden. Dies entspricht einem Spannungsoffset von circa $200 \mu\text{V}$ an einer der Korrektorelektroden². Die damit verbundene Verschiebung der axialen Frequenz von 2 mHz liegt in der Größenordnung der beobachteten Spannungsdrift, welche in Abschnitt 9.3.1 diskutiert wurde. Die resultierende Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz wäre mit $\Delta\nu_c/\nu_c = 0.07 \cdot 10^{-9}$ gegenüber der statistischen Präzision zu vernachlässigen.

Eine weitere mögliche Erklärung ist eine thermische Ausdehnung des Fallenturms auf Grund eines Aufheizens der Apparatur durch die Spin-Flip-Anregung in der Analysefalle. Wird angenommen, dass der Magnetfeldgradient B_1 der Präzisionsfalle durch den ferromagnetischen Ring der Analysefalle erzeugt wird, führt eine

²An den Endkappen wäre ein Spannungsoffset von $400 \mu\text{V}$ nötig. Dieser würde zu einer axialen Frequenzverschiebung von 20 Hz führen, welche nicht beobachtet wird.

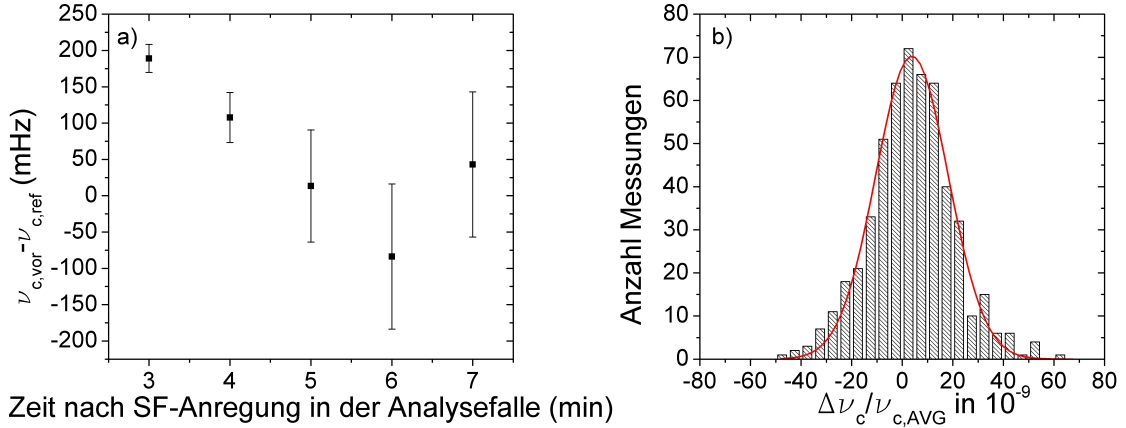


Abbildung 9.4: Nichtlineare Drift des Magnetfeldes. In a) ist der Mittelwert aller Zyklotronfrequenz-Differenzen $\nu_{c,vor} - \nu_{c,ref}$ als Funktion der Zeit, welche bis zur letzten Spin-Flip-Anregung in der Analysefalle vergangen ist, gezeigt. Da $\nu_{c,ref}$ und $\nu_{c,vor}$ zu einer festen Zeitdifferenz bestimmt werden, handelt es sich bei der resultierenden Magnetfeldänderung um eine nicht-lineare Drift. In b) ist die Verteilung der relativen Zyklotronfrequenz-Differenzen, $\Delta\nu_c / \nu_{c,AVG}$, während der g -Faktor Messung gezeigt. Für den Mittelwert dieser Verteilung ergibt sich $3.8(0.5) \cdot 10^{-9}$.

Änderung des Abstands beider Fallen von $\Delta x = 0.2 \mu\text{m}$ zu der beobachteten Frequenzverschiebung. Um diese Änderung zu erklären, müssten sich die Kupferelektroden der Falle während der Spin-Flip-Anregung um circa 300 mK aufheizen. Die dazu benötigte thermische Energie entspricht einem zehntel der elektrischen Energie der Spin-Flip-Anregung. Des weiteren könnten temperaturabhängige Suszeptibilitäten der im Experiment verwendeten Bauteile zu einer Magnetfeldänderung führen. Diese Beobachtungen wurden in [88] gemacht.

Um die systematische Verschiebung des g -Faktors konservativ abzuschätzen, kann die Verschiebung des Magnetfeldes vor und nach dem Einstrahlen der Spin-Flip-Anregung betrachtet werden.

In Abbildung 9.4 b) ist die Verteilung der relativen Zyklotronfrequenz-Differenzen

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_{c,AVG}} = \frac{\nu_{c,nach} - \nu_{c,vor}}{\nu_{c,nach}/2 + \nu_{c,vor}/2} \quad (9.32)$$

gezeigt. Für den Mittelwert dieser Verteilung ergibt sich

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = 3.8(0.5) \cdot 10^{-9}. \quad (9.33)$$

Da zur Bestimmung des g -Faktors die mittlere Zyklotronfrequenz $\nu_{c,vor}/2 + \nu_{c,nach}/2$ verwendet wird, kann eine mögliche systematische Verschiebung des gemessenen g -

Faktors berücksichtigt werden, indem

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = 2 \cdot 10^{-9} \quad (9.34)$$

als konservativer, systematischer Fehler angenommen wird. Dies stellt den dominierenden systematischen Fehler dar.

9.3.4 Sonstige systematische Verschiebungen

Relativistische Verschiebungen

Auf Grund der effektiven Zunahme der Ruhemasse des Protons kommt es zu einer relativistischen Verschiebung der Larmorfrequenz und der reduzierten Zyklotronfrequenz. Nach [32] gilt für die relative Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz

$$\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} = -\frac{1}{mc^2} k_B T_p = -\frac{\nu_p}{\nu_z} \frac{1}{mc^2} k_B T_z, \quad (9.35)$$

wobei letztere Umformung für die hier verwendete Doppeldip-Methode gültig ist. Es ergibt sich $\Delta\nu_+/\nu_+ = -3 \cdot 10^{-11}$ sowie $\Delta\nu_L/\nu_L = (2/9)(\Delta\nu_+/\nu_+) = -7 \cdot 10^{-12}$.

Wechselwirkung mit dem Nachweis

Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben kommt es auf Grund der Wechselwirkung des Protons mit der Impedanz des Nachweises zu einer Verschiebung des gedämpften axialen Ostillators. Für die relative Verschiebung der axialen Frequenz gilt

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_z}{2\omega_z} \right)^2. \quad (9.36)$$

Hieraus folgt für die Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz $\Delta\nu_c/\nu_c \approx 10^{-11}$.

Wechselwirkung des Protons mit seiner Spiegelladung

Auf Grund der Wechselwirkung des Protons mit den leitenden Oberflächen der Falenelektroden kommt es zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen. Dies kann auf die induzierte Spiegelladung, welche zu einem zusätzlichen Beitrag zum elektrischen Speicherpotential führt, zurückgeführt werden. In [89] wird diese Wechselwirkung ausführlich diskutiert. Es lässt sich zeigen, dass es auf Grund der axialen Symmetrie der Falle zu keiner Verschiebung der axialen Frequenz kommt. Dies gilt nicht für die

Tabelle 9.1: Systematische Verschiebungen des gemessenen g -Faktors

Effekt	relative Größe in 10^{-9}	Unsicherheit in 10^{-9}
Spannungsdrift	-0.07	0.35
Elektrisches Potential	-	0.2
Magnetfeldgradient	0.08	0.01
Magnetische Flasche	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$
Nicht-lineare Magnetfelddrift	-	2.0
Axiale Frequenzverschiebung	-0.5	0.1
Relativistische Verschiebung	< 0.03	< 0.03
Dämpfung des Nachweises	-0.01	< 0.01
Spiegelladung	-0.02	< 0.02

radialen Bewegungsfrequenzen. Folglich kommt es zu einer Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz. Es gilt

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = \left(-\frac{\nu_+}{\nu_c} + \frac{\nu_-}{\nu_c} \right) \frac{q^2}{16\pi^3\epsilon_0 m r_0^3 \nu_c^2}, \quad (9.37)$$

mit r_0 dem Radius der Penning-Falle. Hieraus folgt $\Delta\nu_c/\nu_c = -2 \cdot 10^{-11}$.

9.4 Ergebnis

Aus der Kurvenanpassung an die g -Faktor Resonanz kann der g -Faktor des Protons zu $g = 5.585\,694\,720(21)$ bestimmt werden. Dieser Wert muss um die systematischen Verschiebungen von $\Delta g/g = 0.48 \cdot 10^{-9}$, siehe Tabelle 9.1, korrigiert werden. Den größten Beitrag zu den systematischen Verschiebungen liefert die axiale Frequenzmessung, welche nicht zur gleichen Zyklotrontemperatur der Doppeldip-Messung erfolgt. Für den korrigierten g -Faktor folgt

$$g = 5.585\,694\,723(21)(11)$$

Der erste Fehler gibt die statistische Unsicherheit und der zweite Fehler die systematische Unsicherheit an. Letztere wird durch die nicht-lineare Drift des Magnetfeldes dominiert. Die Gesamtunsicherheit beträgt $\Delta g/g = 4.3 \cdot 10^{-9}$ und stellt die bisher präziseste und direkte Messung des g -Faktors eines Nukleons dar. Der Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem bisher akzeptierten Wert für den g -Faktor des Protons von $5.585\,694\,713(46)$ [18], allerdings um einen Faktor zwei präziser.

Es muss hervorgehoben werden, dass dieses Ergebnis das Resultat einer Messung über 4 Monate nach einer 8 jährigen Vorbereitungszeit, zu der die ehemaligen Doktoranden S. Kreim, S. Ulmer, C. C. Rodegheri und H. Kracke beigetragen haben, ist.

Kapitel 10

Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die präziseste Messung des g -Faktors eines einzelnen Protons durchgeführt. Der g -Faktor konnte mit einer relativen Unsicherheit von $\Delta g/g = 4.3 \cdot 10^{-9}$ bestimmt werden:

$$g = 5.585\,694\,723(21)(11)$$

Die Fehler geben die statistische beziehungsweise systematische Unsicherheit an. Der bisher präziseste Wert des g -Faktors des Protons stammt aus Messungen an gebundenem Wasserstoff von P.F. Winkler *et. al.* [16]. Der von uns bestimmte Wert ist in guter Übereinstimmung zu dem aus dieser Messung indirekt extrahierten Wert von 5.585 694 706(56).

Möglich wurde unsere Messung durch eine Reihe an Verbesserungen des experimentellen Aufbaus. Hierzu zählen insbesondere die Entwicklung der neuen axialen Nachweise sowie die Unterdrückung der Rauschanregung der reduzierten Zyklotronmode. Zusammen wurde somit eine präzisere und schnellere Messung einer stabileren axialen Frequenz möglich. In der Folge konnten erstmals einzelne Spin-Flips eines einzelnen Protons direkt beobachtet werden [25]. Dies wiederum erlaubte die Anwendung der Doppel-Fallen Methode [26], und damit verknüpft die präzise Messung des g -Faktors.

Der Test der CPT -Symmetrie aus dem Vergleich der g -Faktoren des Protons und des Antiprotons ist durch die Präzision, mit welcher der g -Faktor des Antiprotons zur Zeit bekannt ist, $\Delta g/g = 4.4 \cdot 10^{-6}$ [22], limitiert. Folglich kann mit dieser Messung keine Verbesserung des Tests auf eine mögliche Verletzung der CPT -Symmetrie erreicht werden. Allerdings lassen sich die an diesem Experiment entwickelten Techniken direkt auf eine Messung des g -Faktors des Antiprotons, dessen Speicherung in einer Penning-Falle bereits erfolgreich demonstriert wurde [28], anwenden. Somit

scheint eine um 3 Größenordnungen präzisere Messung möglich. Die *BASE* Kollaboration [15] unter Leitung des ehemaligen Doktoranden S. Ulmer an unserem Experiment hat bereits begonnen, das entsprechende Experiment am Antiprotonen Entschleuniger (CERN) aufzubauen.

10.1 Präzisere Messung des g -Faktors des Protons

In einem nächsten Schritt soll versucht werden, den g -Faktor des Protons präziser zu messen. Um dies zu erreichen, muss die Zyklotronfrequenz, deren Streuung die statistische Unsicherheit dominiert, präziser bestimmt werden. Hierzu bieten sich eine Reihe unterschiedlicher Methoden an, die in den folgenden Abschnitten beschrieben werden.

Neben der statistischen Unsicherheit durch die Zyklotronfrequenzmessung, soll die Güte der Spin-Flip-Detektion in der Analysefalle verbessert werden. Dies erlaubt dann die Messung der g -Faktor Resonanz mit größerer Signifikanz bei kürzerer Messzeit. Möglichkeiten eine Erhöhung der Detektionsgüte zu erreichen werden in Abschnitt 10.1.2 beschrieben.

10.1.1 Messung der Zyklotronfrequenz

Messung der Zyklotronfrequenz mit axialer Rückkopplung

Wie in Abschnitt 5.3.3 gezeigt, ist die Ursache der beobachteten Fluktuation der Zyklotronfrequenz die Fluktuation der axialen Frequenz nach der Seitenbandkopplung. So führt die Seitenbandkopplung zu einer im Mittel Boltzmann-verteilten Energie der reduzierten Zyklotronmode mit $E_p = \nu_p/\nu_z E_z$. E_z gibt die Energie der axialen Mode während der Seitenbandkopplung an. Damit verbunden ist eine Fluktuation der axialen Frequenz $\Delta\nu_z \propto B_2 E_p \propto B_2 E_z$ in der endlichen magnetischen Flasche B_2 der Präzisionsfalle. In einem ersten einfachen Ansatz können diese Fluktuationen reduziert werden, indem die Energie der axialen Mode während der Kopplung reduziert wird. Möglich wird dies durch die Verwendung einer Rückkopplung des axialen Signals. Da allerdings während der axialen Rückkopplung das axiale Signal detektiert werden muss, kann keine beliebig starke Rückkopplung verwendet werden. Nimmt man an, dass eine axiale Dippbreite von 1 Hz zur Detektion des axialen Signals ausreichend ist, kann mit der Rückkopplung die Energie der axialen Mode um einen Faktor 3 reduziert werden. Dies würde die beobachteten Fluktuationen der

Zyklotronfrequenz von 400 MHz auf 130 MHz reduzieren, woraus sich ein Beitrag zur Breite der g -Faktor Resonanz von $5 \cdot 10^{-9}$ ergeben würde.

Reduktion der magnetischen Flasche

Offensichtlich kann der letzterer Effekt auch durch eine Verringerung der magnetischen Flasche der Präzisionsfalle erreicht werden. Basierend auf Finite-Elemente Rechnungen ergibt sich, auf Grund der magnetischen Flasche der Analysefalle, eine magnetische Restinhomogenität von $B_2 = 4 \text{ T/m}^2$ in der Präzisionsfalle. In Abschnitt 5.3.3 wurde diese Inhomogenität zu $3.7(1.4) \text{ T/m}^2$ bestimmt. Es kann folglich davon ausgegangen werden, dass die Inhomogenität der Präzisionsfalle durch den ferromagnetischen Ring der Analysefalle verursacht wird. Um den Einfluss der Analysefalle auf die Inhomogenität der Präzisionsfalle zu reduzieren, kann der Abstand beider Fallen vergrößert werden. Hierzu müssen zusätzliche Transportelektroden eingefügt werden. Wird der Abstand um realistische 30 mm vergrößert, kann die Inhomogenität um einen Faktor 10 reduziert werden, womit der Beitrag der Zyklotronfrequenz-Fluktuationen zur Linienbreite der g -Faktor Resonanz signifikant reduziert werden würde.

Direkte Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz

Die Ursache der beobachteten Fluktuationen der Zyklotronfrequenz $\Delta\nu_c$ liegt in der axialen Frequenzfluktuation $\Delta\nu_z$. Letztere führt über die Doppel-Dip Methode direkt zu einer beobachteten Fluktuation der reduzierten Zyklotronfrequenz. Es gilt $\Delta\nu_c \propto \Delta\nu_+ \propto \Delta\nu_z$. Der Beitrag der axialen Frequenzfluktuation bei der Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz kann umgangen werden, indem die reduzierte Zyklotronfrequenz direkt gemessen wird. Die axialen Frequenzfluktuationen tragen dann in der über das Invarianz-Theorem bestimmten freien Zyklotronfrequenz lediglich um einen Beitrag, welcher mit $\nu_z/\nu_c = 0.01$ unterdrückt ist, bei.

Eine Möglichkeit, die reduzierte Zyklotronfrequenz direkt zu messen, bieten die phasensensitiven Messmethoden *Pulse-and-Phase* [52, 90] und *Pulse-and-Amplify* [61], welche mit großem Erfolg verwendet wurden, um die reduzierte Zyklotronfrequenz mit einer relativen Präzision von wenigen 10^{-12} zu bestimmen [91, 61]. Hierbei wird die reduzierte Zyklotronmode zunächst mit einem Puls angeregt. Nach einer Entwicklungszeit wird schließlich die Phaseninformation kohärent auf die axiale Mode übertragen und dort ausgelesen. Aus einer Reihe an Phasenmessungen zu unterschiedlichen Evolutionszeiten lässt sich so die Frequenz der reduzierten Zyklotronmode bestimmen.

Selbstabschirmende Spule

Wird die Zyklotronfrequenz über die im letzten Abschnitt beschriebenen Methoden präziser bestimmt, werden Fluktuationen des Magnetfeldes die Präzision der Zyklotronfrequenzmessung limitieren. Eine Reduktion der Magnetfeldfluktuationen ist über eine sogenannte selbstabschirmende Spule möglich [92]. Das Prinzip dieser Spule basiert auf der Erhaltung des magnetischen Flusses durch eine geschlossene, supraleitende Leiterschleife. Experimentell werden supraleitende Zylinderluftspulen verwendet. Bei geeigneter Wahl der Geometrie dieser Spule ist es möglich neben dem magnetischen Fluss durch die Spule das Magnetfeld im Zentrum der Penning-Falle zu erhalten. Solche selbstabschirmenden Spulen werden bereits an verschiedensten Penning-Fallen-Experimenten erfolgreich verwendet [93, 94, 87]. Eine Weiterentwicklung auf eine in alle 3 Raumdimensionen selbstabschirmende Spule wird in [95] beschrieben.

10.1.2 Spin-Flip-Detektion

Weiterentwicklung der Bayes Methode

Wie in Abschnitt 7.6 gezeigt, führt die Bayes Methode bei der Bestimmung des Spin-Zustandes zu einer Mittelung über das unkorrelierte weiße Rauschen. Dies gilt nicht für den Beitrag des Random Walks, welcher zu einer Korrelation der axialen Frequenzen führt. Die Verhältnisse der Frequenzkorrelationen zwischen weißem Rauschen und Random Walk kehren sich um, wenn nicht die absoluten Frequenzen sondern Frequenzdifferenzen betrachtet werden. Hier führt weißes Rauschen zu einer Korrelation der Frequenzdifferenzen, während der Random Walk keinen Beitrag zu einer Korrelation liefert. Folglich sollte es möglich sein, die Bayes Methode auf die Betrachtung von Frequenzdifferenzen auszuweiten und so auch eine Mittelung über den Beitrag des Random Walks zu erreichen. Dies würde es erlauben, auch bei höheren Zyklotronenergien den Spin-Zustand mit hoher Güte zu identifizieren.

Phasensensitive Spin-Flip-Detektion

Neben der bereits beschriebenen phasensensitiven Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz, kann auch der Frequenzsprung eines Spin-Flips über eine phasensensitive Messung beobachtet werden [96]. Hierzu wird das Ion axial angeregt und nach einer vorgegebenen Entwicklungszeit die axiale Phase bestimmt. Wird diese Messung nach einem Spin-Flip-Versuch wiederholt, kann bei geeigneter Entwicklungszeit aus einem Phasensprung von $\pm 180^\circ$ auf den Spin-Zustand vor und nach dem

Einstrahlen der Spin-Flip-Anregung zurückgeschlossen werden. Der Vorteil dieser Methode ist die im Vergleich zur Messung des axialen Dips sehr kurze Messzeit von wenigen Sekunden. Folglich sind die Beiträge des Random Walks, welcher mit \sqrt{T} skaliert, deutlich geringer.

Schnelle adiabatische Passage

In Abschnitt 7.6 wurde gezeigt, dass die Güte der Spin-Flip-Detektion mit höheren Spin-Flip-Wahrscheinlichkeiten zunimmt und bei einer Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von $p_{sf} = 50\%$ ein Maximum erreicht. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass mit zunehmender p_{sf} die Anzahl an Messergebnissen in der Verteilung der Hintergrundfluktuationen abnimmt. Wäre es daher möglich den Spin-Übergang mit noch höherer Wahrscheinlichkeit zu treiben, könnte die Detektionsgüte weiter erhöht werden. Theoretisch wird bei $p_{sf} = 100\%$ eine Detektionsgüte von 96% erreicht.

Eine mögliche Realisierung bietet die sogenannte schnelle adiabatische Passage [97], welche für Spin-Flip-Anregungen mit $p_{sf} \propto 100\%$ verwendet wird. Hierbei wird die Spin-Flip-Anregung adiabatisch über die Larmorresonanz gefahren, sodass der Spin vom Anfangszustand zum Endzustand umgeklappt wird. Die adiabatische Bedingung wird hierbei durch die Bloch-Bedingungen beschrieben, welche verlangen, dass die Rate, mit der die Frequenz der Anregung über die Larmorfrequenz gestimmt wird, langsam im Vergleich zum Quadrat der Rabi-Frequenz sein muss. Zusätzlich kommt es auf Grund der Kopplung der axialen Mode an das thermische Bad des Nachweises zu einer Änderung des mittleren Magnetfelds auf der Zeitskala der Kopplungskonstanten γ_z . Folglich muss die Scanrate schnell im Vergleich zur Kopplungskonstanten γ_z gewählt werden.

Eine selbstabschirmende Spule für unser Experiment wird zur Zeit von P. Koß im Rahmen seiner Masterarbeit entworfen. Um diese zu implementieren muss die bestehende Apparatur umgebaut werden. Alle weiteren hier beschriebenen Messmethoden lassen sich ohne einen Umbau der Apparatur im bestehenden experimentellen Aufbau implementieren und befinden sich ebenfalls bereits heute in der Entwicklung. Unter den vorgeschlagenen Messmethoden müssen die phasensensitiven Methoden zur Zyklotronfrequenzmessung hervorgehoben werden. Mit diesen konnten relative Präzisionen von wenigen 10^{-12} demonstriert werden, welche auch an unseren Experiment erreichbar sein sollten. Daher versprechen diese Methoden eine weitere signifikant verbesserte Messung des g -Faktors des Protons/Antiprotons und damit einen Test der CPT -Symmetrie mit höchster Empfindlichkeit. Mit dieser faszinierenden Perspektive schließt die Arbeit ab.

Literaturverzeichnis

- [1] P. W. Higgs. *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*. Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
- [2] ATLAS-Kollaboration. *Observation of a new particle in the search for the standard model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*. Phys. Lett. B **716**, 1 (2012).
- [3] CMS-Kollaboration. *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*. Phys. Lett. B **716**, 30 (2012).
- [4] O. Bertolami, D. Colladay, V. A. Kostelecký, und R. Potting. *CPT violation and baryogenesis*. Phys. Lett. B **395**, 178 (1997).
- [5] G. Lüders. *Proof of the TCP theorem*. Ann. Phys. **2**, 1 (1957).
- [6] O. W. Greenberg. *CPT violation implies violation of Lorentz invariance*. Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [7] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, und N. Russell. *CPT and Lorentz tests in Penning traps*. Phys. Rev. D **57**, 3932 (1998).
- [8] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, und N. Russell. *CPT and Lorentz tests in hydrogen and antihydrogen*. Phys. Rev. Lett. **82**, 2254 (1999).
- [9] D. Colladay und V. A. Kostelecký. *CPT violation and the standard model*. Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).
- [10] J. Beringer *et al.* *Review of particle physics*. Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [11] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, und N. Russell. *Testing CPT with anomalous magnetic moments*. Phys. Rev. Lett. **79**, 1432 (1997).

- [12] R. S. Van Dyck, P. B. Schwinberg, und H. G. Dehmelt. *New high-precision comparison of electron and positron g-factors*. Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987).
- [13] H. Dehmelt, R. Mittleman, R. S. Van Dyck, und P. Schwinberg. *Past electron-positron g-2 experiments yielded sharpest bound on CPT violation for point particles*. Phys. Rev. Lett. **83**, 4694 (1999).
- [14] A. Mooser *et al.* *Towards a direct measurement of the g-factor of a single isolated proton*. Can. Journ. Phys. **89**, 165 (2011).
- [15] S. Ulmer *et al.* *Technical Design Report BASE*. SPSC-TDR (2013).
- [16] P. Winkler, D. Kleppner, T. Myint, und F. Walther. *Magnetic moment of the proton in Bohr magnetons*. Phys. Rev. A **5**, 83 (1972).
- [17] S. Karshenboim und V. Ivanov. *The g-factor of the proton*. Phys. Lett. B **566**, 27 (2003).
- [18] P. J. Mohr, B. N. Taylor, und D. B. Newell. *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010*. Rev. Mod. Phys. **84**, 1527 (2012).
- [19] S. Ulmer *et al.* *Observation of spin flips with a single trapped proton*. Phys. Rev. Lett. **106**, 253001 (2011).
- [20] C. C. Rodegheri *et al.* *An experiment for the direct determination of the g-factor of a single proton in a Penning trap*. New Journ. Phys. **14**, 063011 (2012).
- [21] J. DiSciaccia und G. Gabrielse. *Direct measurement of the proton magnetic moment*. Phys. Rev. Lett. **108**, 153001 (2012).
- [22] J. DiSciaccia *et al.* *One-particle measurement of the antiproton magnetic moment*. Phys. Rev. Lett. **110**, 130801 (2013).
- [23] S. Ulmer *et al.* *Direct measurement of the free cyclotron frequency of a single particle in a Penning trap*. Phys. Rev. Lett. **107**, 103002 (2011).
- [24] H. Häffner *et al.* *Double Penning trap technique for precise g-factor determinations in highly charged ions*. Eur. Phys. J. D **22**, 163 (2003).
- [25] A. Mooser *et al.* *Resolution of single spin-flips of a single proton*. Phys. Rev. Lett. **110**, 140405 (2013).

- [26] A. Mooser *et al.* *Demonstration of the double Penning trap technique with a single proton.* Phys. Lett. B **723**, 78 (2013).
- [27] A. Mooser *et al.* *einzureichen.* Nature .
- [28] G. Gabrielse *et al.* *Thousandfold improvement in the measured antiproton mass.* Phys. Rev. Lett. **65**, 1317 (1990).
- [29] K. Blaum. *High-accuracy mass spectrometry with stored ions.* Phys. Rep. **425**, 1 (2006).
- [30] J. R. Pierce. *Theory and design of electron beams.* van Nostrand Co. (1949).
- [31] L. S. Brown und G. Gabrielse. *Precision spectroscopy of a charged particle in an imperfect Penning trap.* Phys. Rev. A **25**, 2423 (1982).
- [32] L. S. Brown und G. Gabrielse. *Geonium theory: physics of a single electron or ion in a Penning trap.* Rev. Mod. Phys. **58**, 233 (1986).
- [33] M. Kretschmar. *Single particle motion in a Penning trap: description in the classical canonical formalism.* Phys. Scripta **46**, 544 (1992).
- [34] J. Tan und G. Gabrielse. *One electron in an orthogonalized cylindrical Penning trap.* Appl. Phys. Lett. **55**, 2144 (1989).
- [35] G. Gabrielse, L. Haarsma, und S. L. Rolston. *Open-endcap Penning traps for high precision experiments.* Int. J. Mass Spec. **88**, 319 (1989).
- [36] H. Dehmelt. *Continuous Stern-Gerlach effect: principle and idealized apparatus.* P. Natl. Acad. Sci. **83**, 2291 (1986).
- [37] W. Gerlach und O. Stern. *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld.* Z. Phys. A **9**, 349 (1922).
- [38] C. C. Rodegheri. *einzureichen.* Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
- [39] N. Hermanspahn *et al.* *Observation of the continuous Stern-Gerlach effect on an electron bound in an atomic ion.* Phys. Rev. Lett. **84**, 427 (2000).
- [40] H. Häffner *et al.* *High-accuracy measurement of the magnetic moment anomaly of the electron bound in hydrogenlike carbon.* Phys. Rev. Lett. **85**, 5308 (2000).

- [41] J. Verdú *et al.* *Electronic g-factor of hydrogenlike oxygen* $^{16}\text{O}^{7+}$. Phys. Rev. Lett. **92**, 93002 (2004).
- [42] S. Sturm *et al.* *g-factor of hydrogenlike* $^{28}\text{Si}^{13+}$. Phys. Rev. Lett. **107**, 023002 (2011).
- [43] A. Wagner *et al.* *g-factor of Lithiumlike Silicon* $^{28}\text{Si}^{11+}$. Phys. Rev. Lett. **110**, 033003 (2013).
- [44] D. Hanneke, S. Fogwell, und G. Gabrielse. *New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant*. Phys. Rev. Lett. **100**, 120801 (2008).
- [45] L. S. Brown. *Geonium lineshape*. Ann. Phys. **159**, 62 (1985).
- [46] L. S. Brown. *Line shape for a precise measurement of the electron's magnetic moment*. Phys. Rev. Lett. **52**, 2013 (1984).
- [47] I. I. Rabi, S. Millman, P. Kusch, und J. Zacharias. *The molecular beam resonance method for measuring nuclear magnetic moments*. Phys. Rev. **53**, 318 (1938).
- [48] S. Ulmer. *First observation of spin flips with a single proton stored in a cryogenic Penning trap*. Dissertation, Ruprecht Karls Universität Heidelberg (2011).
- [49] D. J. Wineland und H. G. Dehmelt. *Principles of the stored ion calorimeter*. J. Appl. Phys. **46**, 919 (1975).
- [50] H. G. Dehmelt und F. L. Walls. *Bolometric technique for the rf spectroscopy of stored ions*. Phys. Rev. Lett. **21**, 127 (1968).
- [51] X. Feng *et al.* *Tank circuit model applied to particles in a Penning trap*. J. Appl. Phys. **79**, 8 (1996).
- [52] E. A. Cornell, R. M. Weisskoff, K. R. Boyce, und D. E. Pritchard. *Mode coupling in a Penning trap: π pulses and a classical avoided crossing*. Phys. Rev. A **41**, 312 (1990).
- [53] M. Kretzschmar. *A quantum mechanical model of Rabi oscillations between two interacting harmonic oscillator modes and the interconversion of modes in a Penning trap*. AIP Conf. Proc. **457**, 242 (1999).

- [54] A. Vinante *et al.* *Thermal noise in a high Q ultracryogenic resonator.* Rev. Sci. Instr. **76**, 074501 (2005).
- [55] P. Falferi *et al.* *A high inductance kHz resonator with a quality factor larger than 10^6 .* Rev. Sci. Instr. **65**, 2916 (1994).
- [56] C. Roux. *High-resolution mass spectrometry: the trap design and detection system of Pentatrap and new Q -values for neutrino studies.* Dissertation, Ruprecht Karls Universität Heidelberg (2012).
- [57] J. Repp *et al.* *PENTATRAP: a novel cryogenic multi-Penning-trap experiment for high-precision mass measurements on highly charged ions.* Appl. Phys. B **107**, 983 (2012).
- [58] P. Vincett. *Calorimetric measurement of very low dielectric loss at low temperatures.* J. Phys. D Appl. Phys. **2**, 699 (1969).
- [59] K. Siegel, R. Domchick, and F. Arams. *Superconducting high- Q radio-frequency circuit using niobium stannide above 4.2 K.* P. IEEE **55**, 457 (1967).
- [60] S. R. Jefferts, T. Heavner, P. Hayes, and G. H. Dunn. *Superconducting resonator and a cryogenic GaAs field-effect transistor amplifier as a single-ion detection system.* Rev. Sci. Instr. **64**, 737 (1993).
- [61] S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, and K. Blaum. *Phase-sensitive cyclotron frequency measurements at ultralow energies.* Phys. Rev. Lett. **107**, 143003 (2011).
- [62] S. Sturm. *The g -factor of the electron bound in $^{28}\text{Si}^{13+}$: the most stringent test of bound-state quantum electrodynamics.* Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2012).
- [63] E. A. Cornell *et al.* *Single-ion cyclotron resonance measurement of $M(\text{CO}^+)/M(\text{N}_2^2+)$.* Phys. Rev. Lett. **63**, 1674 (1989).
- [64] S. Ulmer. *Entwicklung des experimentellen Aufbaus zur Messung des g -Faktors des Protons in einer Penning-Falle.* Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2006).
- [65] H. Dehmelt, W. Naournes, and J. Sandberg. *Self-excited mono-ion oscillator.* Proc. Natl. Acad. Sci. **83**, 5761 (1986).

- [66] N. Guise, J. DiSciaccia, und G. Gabrielse. *Self-excitation and feedback cooling of an isolated proton*. Phys. Rev. Lett. **104**, 143001 (2010).
- [67] B. D’Urso. *Cooling and self-excitation of a one-electron oscillator*. Dissertation, Harvard University (2003).
- [68] B. D’Urso, B. Odom, und G. Gabrielse. *Feedback cooling of a one-electron oscillator*. Phys. Rev. Lett **90**, 043001 (2003).
- [69] S. Ulmer *et al.* *A cryogenic detection system at 28.9 MHz for the non-destructive observation of a single proton at low particle energy*. Nucl. Instrum. Meth. A **705**, 55 (2012).
- [70] C. Leiteritz. *Aufbau einer Dampfdruckstabilisierung zur Bestimmung des g-Faktors eines in einer kryogenen Penning-Falle gespeicherten Protons*. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2013).
- [71] J. Mollh, R. Heidinger, und A. Ibarra. *Alumina ceramics for heating systems*. J. Nucl. Mater **212**, 1029 (1994).
- [72] R. Vila, J. Gonzalez, M. Molla, und A. Ibarra. *Dielectric spectroscopy of alumina ceramics over a wide frequency*. J. Nucl. Mater **253**, 141 (1998).
- [73] N. McN Alford *et al.* *Dielectric loss of oxide single crystals and polycrystalline analogues from 10 to 320 K*. J. Eur. Cer. Soc. **21**, 2605 (2001).
- [74] S. Ulmer *et al.* *The quality factor of a superconducting rf-resonator in a magnetic field*. Rev. Sci. Instrum. **80**, 123302 (2009).
- [75] A. Mooser. *Untersuchung des Magnetfelds zur Spinflipanregung eines Protons in einer Penning-Falle*. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2009).
- [76] G. Durcansky. *EMV-gerechtes Gerätedesign*. Franzis-Verlag (1992).
- [77] R. P. Clayton. *Introduction to electromegnetic compatibility*. Wiley-Verlag (2006).
- [78] A. J. Schwab. *Elektromagnetische Verträglichkeit*. Springer-Verlag (1996).
- [79] W. J. Riley. *Handbook of frequency stability analysis*. NIST (2008).

- [80] H. Kracke. *Detection of individual spin transitions of a single proton confined in a cryogenic Penning trap*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2012).
- [81] M. Marie-Jeanne *et al.* *Towards a magnetic field stabilization at ISOLTRAP for high-accuracy mass measurements on exotic nuclides*. Nucl. Instrum. Meth. A **587**, 464 (2008).
- [82] J. Ketelaer *et al.* *Accuracy studies with carbon clusters at the Penning trap mass spectrometer TRIGA-TRAP*. Eur. Phys. J. D **58**, 47 (2010).
- [83] I. Bronstein. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch-Verlag (2001).
- [84] D. S. Sivia. *Data analysis: a Bayesian tutorial*. Oxford University Press (1996).
- [85] S. Brakhane *et al.* *Bayesian feedback control of a two-atom spin-state in an atom-cavity system*. Phys. Rev. Lett. **109**, 173601 (2012).
- [86] S. Reick *et al.* *Analyzing quantum jumps of one and two atoms strongly coupled to an optical cavity*. J. Opt. Soc. Am. B **27**, A152 (2010).
- [87] A. Wagner. *The g-factor of the valence electron bound in lithiumlike silicon $^{28}\text{Si}^{11+}$* . Dissertation, Ruprecht Karls Universität Heidelberg (2013).
- [88] M. Redshaw. *Precise measurements of the atomic masses of ^{28}Si , ^{31}P , ^{32}S , $^{84,86}\text{Kr}$, $^{129,132,136}\text{Xe}$, and the dipole moment of PH^+ using single-Ion and two-ion Penning trap techniques*. Dissertation, Florida State University (2007).
- [89] H. Häffner. *Präzisionsmessung des magnetischen Moments des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2000).
- [90] S. Rainville, J. K. Thompson, und D. E. Pritchard. *An ion balance for ultra-high-precision atomic mass measurements*. Science **303**, 334 (2004).
- [91] E. G. Myers. *The most precise atomic mass measurements in Penning traps*. Int. J. Mass Spec. **349**, 107 (2013).
- [92] G. Gabrielse und J. Tan. *Self-shielding superconducting solenoid systems*. J. Appl. Phys. **63**, 5143 (1988).
- [93] G. Gabrielse und J. Tan. *Self-shielding superconducting solenoid systems*. J. Appl. Phys. **63** (1988).

- [94] R. S. van Dyck, D. L. Farnham, S. L. Zafonte, und P. B. Schwinberg. *Ultrastable superconducting magnet system for a Penning trap mass spectrometer*. Rev. Sci. Instrum. **70**, 1665 (1999).
- [95] F. Köhler. *einzureichen*. Dissertation, Ruprecht Karls Universität Heidelberg.
- [96] S. Stahl *et al.* *Phase-sensitive measurement of trapped particle motions*. J. Phys. B - At. Mol. Opt. **38**, 297 (2005).
- [97] C. J. Hardy, W. A. Edelstein, und D. Vatis. *Efficient adiabatic fast passage for NMR population inversion in the presence of radiofrequency field inhomogeneity and frequency offsets*. J. Magn. Reson. **66**, 470 (1969).

Resolution of Single Spin Flips of a Single Proton

A. Mooser,^{1,2} H. Kracke,^{1,2} K. Blaum,^{3,4} S. A. Bräuninger,^{3,4} K. Franke,^{3,5} C. Leiteritz,¹
W. Quint,^{4,6} C. C. Rodegheri,^{1,3} S. Ulmer,⁵ and J. Walz^{1,2}

¹*Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, D-55099 Mainz, Germany*

²*Helmholtz-Institut Mainz, D-55099 Mainz, Germany*

³*Max-Planck-Institut für Kernphysik, D-69117 Heidelberg, Germany*

⁴*Ruprecht Karls-Universität Heidelberg, D-69047 Heidelberg, Germany*

⁵*RIKEN Advanced Science Institute, Hirosawa, Wako, Saitama 351-0198, Japan*

⁶*GSI-Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, D-64291 Darmstadt, Germany*

(Received 6 June 2012; revised manuscript received 8 January 2013; published 4 April 2013)

The spin magnetic moment of a single proton in a cryogenic Penning trap was coupled to the particle's axial motion with a superimposed magnetic bottle. Jumps in the oscillation frequency indicate spin flips and were identified using a Bayesian analysis.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.140405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.140405)

PACS numbers: 13.40.Em, 14.20.Dh, 37.10.Rs, 37.10.Ty

Recent dramatic advances in quantum control of a single isolated nucleus have opened the way for direct precision measurements of the proton and antiproton magnetic moments. At present, the most precise value for the proton magnetic moment comes from measurements of the hyperfine splitting in atomic hydrogen [1]. Bound-state corrections have to be included to extract the magnetic moment of the free proton with a precision of 8.2 parts in 10^9 [2]. The antiproton magnetic moment has been determined with a precision of 2 parts in 10^3 [3] from superhyperfine spectroscopy of antiprotonic helium [4] and from fine-structure spectroscopy of antiprotonic lead [5].

A direct precision measurement with just one isolated particle in a Penning trap has the potential to improve the precision of the value of the proton magnetic moment μ_p by more than 1 order of magnitude. In addition, there would be no need for theoretical corrections. Thus, a direct measurement could be used for consistency tests with previous measurements based on hyperfine splittings. In the case of the antiproton, the potential for improvement is more than 6 orders of magnitude. This would enable another stringent test of the symmetry between matter and antimatter in the baryon sector [6].

The principle of a direct measurement of μ_p is to determine the Larmor (spin-precession) frequency ν_L and the cyclotron frequency ν_c of a proton in a magnetic field. The frequency ratio $\nu_L/\nu_c = \mu_p/\mu_N$ gives the proton magnetic moment μ_p in terms of the nuclear magneton μ_N . The cyclotron frequency ν_c of a proton in a Penning trap can readily be measured by preparing a double-dressed state [7] and applying the Brown-Gabrielse invariance theorem [8]. The Larmor frequency ν_L can be determined by driving spin flips and measuring the transition probability as a function of the drive frequency. To this end, an inhomogeneous magnetic field, a “magnetic bottle,” is used, which couples the spin magnetic moment

to the axial motion of the proton. Using the “continuous Stern-Gerlach effect” [9,10], jumps in the axial oscillation frequency indicate spin flips. The challenge is to detect these spin flips on a background of axial frequency changes, which result from tiny changes of the motional angular momentum of the proton in the trap.

Recently we reported on the statistical detection of spin flips of a single proton in an inhomogeneous magnetic field [11]. We have used this method to obtain 8.9×10^{-6} [12], while a similar experiment by another group achieved 2.5×10^{-6} [13]. Both measurements are limited by the inhomogeneity of the magnetic field. The precision can be boosted by several orders of magnitude using the double-Penning trap technique [14]. In this elegant method the measurement of ν_c and the excitation of spin flips at ν_L happen in a first Penning trap with a homogeneous magnetic field. Spin state detection is carried out in a second Penning trap with a magnetic bottle. This method has been used to measure the magnetic moment of the electron bound in $^{28}\text{Si}^{13+}$ with a relative precision of 5×10^{-10} [15]. For the application of the double Penning trap technique single spin flip resolution is required, which was not achieved so far with nuclear spins.

In this Letter, we present the first detection of single spin flips of a single proton. Noise-driven random transitions between the cyclotron quantum states cause a background of frequency fluctuations. The characterization of these frequency fluctuations enables a novel spin state analysis method for Penning trap experiments based on a Bayesian formalism.

Our apparatus consists of a cryogenic double-Penning trap, mounted in a superconducting magnet and cooled by a liquid helium cryostat. Both Penning traps are shown in Fig. 1 and have five electrodes in compensated and orthogonal design [12,16]. The precision trap is placed in the central homogeneous volume of the 1.89 T magnetic field. The analysis trap has a ring electrode made of

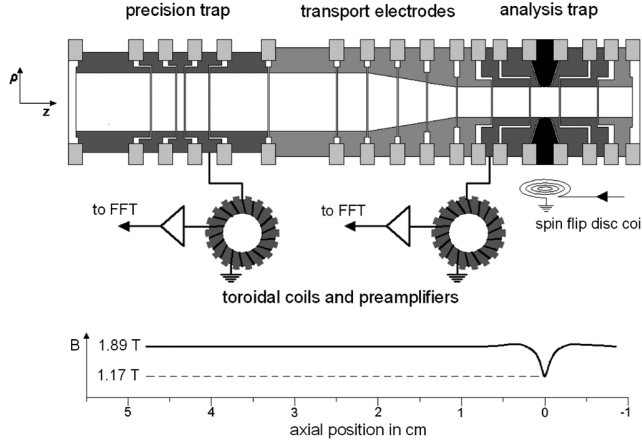


FIG. 1. Schematic of the experiment. Two cylindrical Penning traps are connected by transport electrodes. Superconducting toroidal coils and cryogenic low-noise preamplifiers are used for the detection of the axial motion. The signals are analyzed by a fast Fourier transform, FFT. The central ring electrode of the analysis trap (black) is made of a ferromagnetic Co/Fe alloy. The magnetic field along the z -axis is indicated in the lower graph. Voltages are applied to the electrodes using low-pass filters (not shown). For further details see text.

ferromagnetic Co/Fe material, which shapes the magnetic field to a so-called magnetic bottle

$$\vec{B}(z, \rho) = B_0 \hat{e}_z + B_2 \left[\left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \hat{e}_z - z \rho \hat{e}_\rho \right], \quad (1)$$

with $B_2 = 2.97(10) \times 10^5 \text{ T/m}^2$. The proton can be moved between both traps using transport electrodes. The whole electrode stack is placed in a sealed vacuum chamber and cryopumping is utilized. Collisions with residual gas are negligible and single particles can be trapped for months.

In the Penning trap the proton has three eigenmotions, the axial motion with frequency ν_z , and two radial motions: the magnetron and the modified cyclotron motion at frequency ν_- and ν_+ , respectively. The eigenfrequencies are $\nu_z = 623 \text{ kHz}$, $\nu_- = 8 \text{ kHz}$, $\nu_+ = 28.9 \text{ MHz}$ in the precision trap, and $\nu_z = 742 \text{ kHz}$, $\nu_- = 15 \text{ kHz}$, $\nu_+ = 17.9 \text{ MHz}$ in the analysis trap. The motion of the proton induces image currents in the trap electrodes. These currents in the fA range are measured by connecting a superconducting inductance L to the trap, which forms a resonant circuit together with the parasitic trap capacitance. The resonant circuit has a quality factor Q and acts as an effective parallel resistance $R_p = 2\pi\nu_{\text{res}}QL$ on its resonance frequency ν_{res} . The signals are amplified and a fast Fourier transform (FFT) is performed to access the particle's eigenfrequency. Both traps are connected to detection circuits for the axial motion. The detection system for the precision trap has a quality factor of 12500, resulting in $R_p = 130 \text{ M}\Omega$ and a signal-to-noise ratio of $S/N = 20 \text{ dB}$. Here the noise is given by $N = u_n$, with u_n the

voltage noise density of the preamplifier, and the signal by $S^2 = 4k_B T R_p \Delta\nu \alpha^2 + i_n^2 R_p^2 \alpha^4 + u_n^2$, with i_n the current noise density of the preamplifier, $\Delta\nu$ the bandwidth, and α the decoupling of the inductor and preamplifier [17]. The resonator for the analysis trap has a quality factor of 9500 with $R_p = 85 \text{ M}\Omega$ at $S/N = 25 \text{ dB}$. At $\nu_{\text{res}} = \nu_z$ the trapped proton shorts the thermal noise of the detector. This causes a dip in the noise spectrum of the detector from which ν_z can be determined [18]. Additionally, one cyclotron damping coil is connected to a split electrode of the precision trap [19].

The proton spin magnetic moment μ_p is coupled to the axial motion by the magnetic bottle in the analysis trap. This causes an additional potential term $\Phi_{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, which adds to the electric quadrupolar potential Φ_E of the Penning trap. $\vec{\mu}$ is the sum of the magnetic moments $\vec{\mu}_+$ and $\vec{\mu}_-$ due to the modified cyclotron and magnetron motion, respectively, and the spin magnetic moment $\vec{\mu}_p$. The total axial potential energy of the single particle is $E_{\text{pot}} = q_p \Phi_E - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$ and the axial frequency is

$$\nu_z = \sqrt{\frac{1}{m_p} \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial z^2} \Big|_{z=0}} = \sqrt{\frac{2eC_2V_0}{m_p} + \frac{2}{m_p} (\mu_p + \mu_+ + \mu_-) B_2}, \quad (2)$$

where C_2 is a geometry parameter of the trap and V_0 the trapping potential. Changes in $\mu_p B_0$, E_+ and $|E_-|$ shift the axial frequency by

$$\Delta\nu_z \approx \frac{1}{4\pi^2 m_p \nu_z} \frac{B_2}{B_0} (E_+ + |E_-| \pm \mu_p B_0). \quad (3)$$

In our analysis trap a proton spin flip causes an axial frequency jump of $\Delta\nu_{z,\text{sf}} = 171 \text{ mHz}$ at 742 kHz . The strong magnetic bottle, however, also makes the axial frequency extremely sensitive to the energy in the radial modes. A change of only 4 parts in 10^4 of the thermal cyclotron energy of $360 \mu\text{eV}$ (4.2 K) causes the axial frequency to change by the same amount as a proton spin flip.

Therefore, for the detection of individual spin flips the stability of the radial energy is crucial. Transitions between the cyclotron quantum states n_+ cause axial frequency jumps of $\Delta\nu_{z,+} = \pm 63 \text{ mHz}$. As a result, the axial frequency fluctuates with $\Xi_{\text{cyc}}^2 = (\delta n_+ / \delta t) T \Delta\nu_{z,+}^2$, where T is the FFT averaging time. The cyclotron transition rate can be calculated using Fermi's golden rule

$$\frac{\delta n_+}{\delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} \Delta_+ \rho(E_+) \Gamma_{i \rightarrow f}^2. \quad (4)$$

Here $\rho(E_+)$ is the density of states of the one-dimensional harmonic oscillator and $2\pi\Delta_+ = eB_2 \langle z^2 \rangle / m_p$ is the line width of the cyclotron resonance [20] due to the coupling of the axial mode to the thermal bath of the detection

system. $\langle z^2 \rangle$ is the expectation value of the square of the axial amplitude.

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = qE_0 \sqrt{\frac{\hbar}{m_p \omega_+} \frac{n_+}{2}} \quad (5)$$

is the electric dipole cyclotron transition matrix element with E_0 the spectral noise density of a spurious electric field. Note that Eq. (4) gives a cyclotron transition rate which is proportional to the cyclotron energy, $\delta n_+ / \delta t \propto n_+$.

In the experiment E_+ was calibrated by determining $\nu_z + \Delta\nu_z(E_+)$ with the method described in Ref. [21]. The proton's cyclotron mode was thermalized with the damping coil in the precision trap several times, which results in Boltzmann-distributed frequency shifts $\Delta\nu_z(E_+)$ in the analysis trap. $E_+ = 0$ is then identified by $\Delta\nu_z = 0$. After the calibration Ξ_{cyc} was measured for different cyclotron energies and the transition rate $\delta n_+ / \delta t$ was determined as a function of E_+ . The measurement data are shown in Fig. 2(a) and are consistent with a linear relation as predicted above. $(\delta n_+ / \delta t) / E_+ = 0.35 \text{ meV}^{-1} \text{ s}^{-1}$ was obtained, which corresponds to a noise drive of $E_0 = 7 \text{ nV} \cdot \text{m}^{-1} \text{ Hz}^{-1/2}$. To obtain $\Xi_{\text{cyc}} < \Delta\nu_{z,\text{sf}}/3$ at a typical FFT averaging time of 200 s a proton with a cyclotron energy of less than 10 μeV has to be selected.

As a measure for the axial frequency fluctuation we define Ξ as the standard deviation of the difference between two subsequent axial frequency measurements $\alpha(T) = \nu_z(t) - \nu_z(t+T)$, $\Xi(T) = \sqrt{(N-1)^{-1} \sum_N [\alpha(T) - \bar{\alpha}(T)]^2}$. Ξ is invariant under drifts and, in the case of $\langle \alpha(T) \rangle = 0$, has the same characteristics as the common Allan deviation [22]. In Fig. 2(b) the variation of Ξ with the measuring time T is shown. For short measuring times Ξ decreases with $1/\sqrt{T}$ due to averaging of the detector white noise as indicated by the dashed line. At measuring times above

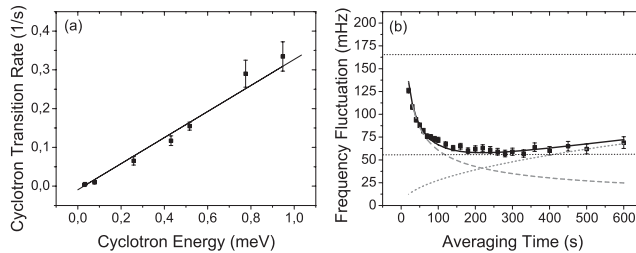


FIG. 2. (a) Cyclotron transition rate as function of the cyclotron energy. (b) Measurement of the axial frequency stability as a function of averaging time. The dashed line which decreases is due to detector white noise averaging. The dotted line comes from a calculation with white noise driving the cyclotron mode (see text). The lower horizontal line indicates the best stability of $\Xi_{\text{opt}} = 55 \text{ mHz}$ achieved. The upper horizontal line indicates the size of the frequency jump due to a spin flip of 171 mHz, which is about $3\Xi_{\text{opt}}$.

300 s Ξ increases with \sqrt{T} , which is due to a random walk caused by fluctuations of the cyclotron energy. The dotted line is the result of a calculation with a transition rate for cyclotron quantum jumps of $\delta n_+ / \delta t = 0.002 \text{ s}^{-1}$.

The lowest axial frequency fluctuation achieved is $\Xi_{\text{opt}} = 55 \text{ mHz}$, which corresponds to a reduction of the frequency fluctuations due to the random walk and white noise by about 90% compared to our previous work [12]. This improvement is due to the detection system with a higher quality factor reducing the white noise contribution. By an increase of the effective electrode distance a stronger decoupling [18] is possible. Because of the smaller line width of the noise dip and the higher signal-to-noise ratio of the detection system, the axial frequency is measured faster and more precisely. For a reduction of a cyclotron noise drive a split electrode of the analysis trap, initially used for coupling of the axial mode to radial modes, was replaced.

Spin state analysis can be done with a simple method assigning each axial frequency jump above a given threshold to a spin flip. We developed an alternative and more advanced method, which is based on probability theory and uses a conditional probability theorem, Bayes rule [23]. In a series of measurements, each axial frequency f_i is modeled as the sum of an accumulated random walk $W_i = \sum w_i$, white noise n_i and a frequency jump due to a spin flip with $f_i = W_i + n_i \pm 1/2 \Delta\nu_{z,\text{sf}}$. The distributions of w_i and n_i can be described by normal distributions $N(\mu; \sigma)$ with mean μ and standard deviations σ_w and σ_n , respectively. The conditional probability $P_{\alpha, W}^i = P(\alpha_i, W_i | f_i, f_{i-1}, \dots)$ is defined, which is the probability of being in a spin state $\alpha_i = \{\uparrow_i, \downarrow_i\}$ and having an accumulated random walk W_i given all frequency information f_i, f_{i-1}, \dots . This definition allows the application of Bayes' rule relating the *a posteriori* probability $P_{\alpha, W}^i$ to the *a priori* probability $P(\alpha_i, W_i | f_{i-1}, \dots)$,

$$P_{\alpha, W}^i = \frac{P(f_i | \alpha_i, W_i, f_{i-1}, \dots) P(\alpha_i, W_i | f_{i-1}, \dots)}{P(f_i | f_{i-1}, \dots)}, \quad (6)$$

with $P(f_i | f_{i-1}, \dots)$ the normalization found by $\int_W \sum_{\alpha} P_{\alpha, W}^i = 1$. Because of the frequency correlation introduced by the random walk the conditional probability of measuring frequency f_i after a measurement of f_{i-1} cannot be regarded independently, $P(f_i | f_{i-1}) \neq P(f_i)$. In our definition α_i and W_i completely specify the distribution of f_i , and the first factor in the numerator can be simplified, $P(f_i | \alpha_i, W_i, f_{i-1}, \dots) = P(f_i | \alpha_i, W_i)$. Hence, the first factor is the probability density for f_i , given the state as well as random walk information at time i . It depends on the white noise contribution,

$$P(f_i | \alpha_i, W_i) = N(f_i - W_i \pm 1/2 \Delta\nu_{z,\text{sf}}; \sigma_n), \quad (7)$$

with + for $\alpha_i = \uparrow_i$ and - for $\alpha_i = \downarrow_i$, respectively. The second factor in the numerator of Eq. (6) depends on the previous state through the previous frequency

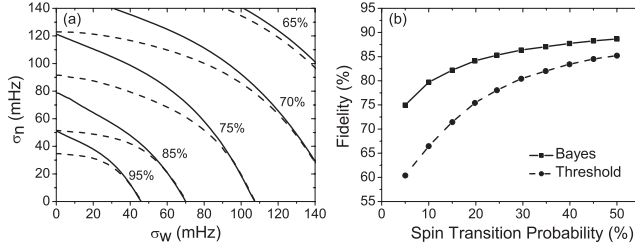


FIG. 3. Comparison of the threshold method and Bayes analysis. (a) Shows contour lines of the fidelity for a spin flip probability of 50% as a function of the white noise σ_n and random walk σ_w contribution; solid lines: Bayes analysis, dashed lines: threshold method. (b) Shows the fidelity as a function of the spin flip probability at $\sigma_w = \sigma_n = 39$ mHz.

measurements f_{i-1}, f_{i-2}, \dots . Integrating over all possible states and random walks gives

$$P(\alpha_i, W_i | f_{i-1}, \dots) = \sum_{\alpha_{i-1}} \int_{W'} P(\alpha_i, W_i | \alpha_{i-1}, W'_{i-1}, f_{i-1}, \dots) \times P_{\alpha, W}^{i-1}. \quad (8)$$

The first factor describes the probability density without the knowledge of the latest frequency measurement. It introduces an update of the state probabilities describing the evolution of the state probability from measurement $i-1$ to i ,

$$\begin{aligned} P(\alpha_i, W_i | \alpha_{i-1}, W'_{i-1}, f_{i-1}, \dots) &= P(\alpha_i, W_i | \alpha_{i-1}, W'_{i-1}), \\ &= (1 - p_{sf}) N(W_i - W'_{i-1}; \sigma_w) \text{ for } \alpha_i = \alpha_{i-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$= p_{sf} N(W_i - W'_{i-1}; \sigma_w) \text{ for } \alpha_i \neq \alpha_{i-1}, \quad (10)$$

with the spin transition probability p_{sf} . The second factor in Eq. (8) $P_{\alpha, W}^{i-1}$ simply is the state and random walk probability at time $i-1$. The final state probability at time i , P_{α}^i , is obtained by usage of the marginalization

rule $P_{\alpha}^i = \int_W P_{\alpha, W}^i$. Input parameters are the spin flip probability p_{sf} , the random walk contribution σ_w , and the white noise contribution σ_n .

To investigate the quality of the spin state analysis we define the fidelity as the fraction of correctly identified spin states in a series of frequency measurements. It was found numerically that the best fidelity in the threshold method is obtained for a threshold of $\Delta\nu_{z, sf}/2$.

Figure 3(a) shows the fidelity achieved with both the threshold method and Bayes' algorithm using simulated data. In the case of a pure random walk both methods give the same fidelity. If white noise contributes significantly the Bayes algorithm has better fidelity than the threshold method. In Fig. 3(b) the fidelity is shown as a function of the spin flip probability using, again, simulated data. The random walk and white noise contribution were set to values which correspond to the optimal frequency stability ($\sigma_w = \sigma_n$) in the experiment, $\Xi_{opt} = \sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_n^2} = 55$ mHz. The Bayes' method is clearly superior to the threshold method and has a fidelity of 88% at 50% spin flip probability.

The experimental observation of single spin flips is shown in Fig. 4. The upper trace shows a time series of axial frequency measurements. Thin, vertical arrows indicate times when an off-resonant radio frequency was applied to the spin flip coil (see Fig. 1). No extraordinary frequency jumps are seen in the data at these times. This is an important background test which shows that the spin flip drive does not affect the cyclotron motion. Thick, vertical arrows indicate times when a resonant drive was applied. Several axial frequency jumps whose size corresponds to spin flips can clearly be seen in the raw data exactly at these times. One example of a spin flip down and later up is at 240 min and 260 min. The lower trace in Fig. 4 is the result of the Bayesian spin state analysis which is initialized with uncertainty (50% spin down probability) at $t=0$. Note, that the Bayesian analysis is causal [24]; i.e., at each point in time it uses only present and prior axial frequency

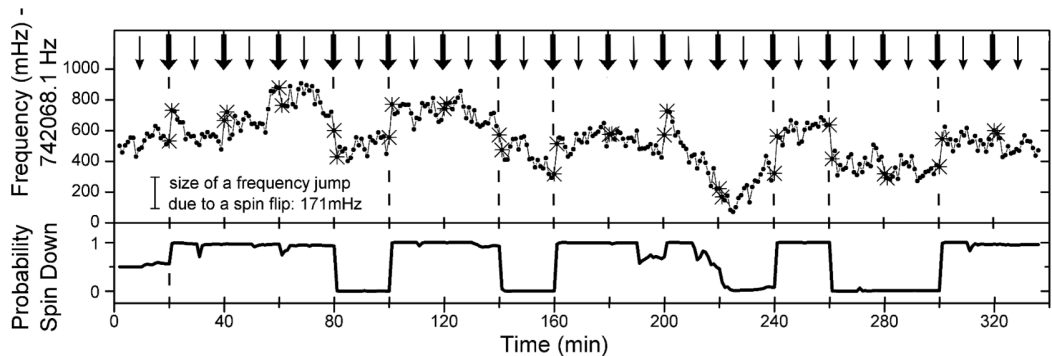


FIG. 4. Observation of single spin flips with a single proton. At the top, a series of axial frequency measurements is shown. A resonant spin flip drive was applied between the crossed data points, indicated by thick arrows. In between an off-resonant spin flip drive was turned on, indicated by the thin arrows; otherwise, the drive was turned off. Large axial frequency jumps after a resonant drive are due to single proton spin flips. At the bottom, the result of the Bayesian analysis is shown.

data. The Bayesian analysis nicely confirms the spin flips visible in the raw data and provides a consistent picture of the time evolution of the proton spin state projection.

In conclusion we observed single spin flips of a single proton for the first time. This enables the application of the double-Penning trap method to measure magnetic moments of both the proton and the antiproton with 10^{-9} precision, or better.

We acknowledge fruitful discussions with Sven Sturm. J.W. acknowledges a helpful discussion with D. Meschede. This work was supported by the BMBF, the EU (ERC Grant No. 290870-MEFUCO), the Helmholtz-Gemeinschaft, the Max-Planck Society, the IMPRS-PTFS, and the RIKEN Initiative Research Program.

Note added in proof.—Related observations are discussed in Ref. [25].

-
- [1] P.F. Winkler, D. Kleppner, T. Myint, and F.G. Walther, *Phys. Rev. A* **5**, 83 (1972).
- [2] P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 633 (2008).
- [3] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86**, 010001 (2012).
- [4] T. Pask, D. Barna, A. Dax, R.S. Hayano, M. Hori, D. Horváth, S. Friedreich, B. Juhász, O. Massiczek, N. Ono, A. Sótér, and E. Widmann, *Phys. Lett. B* **678**, 55 (2009).
- [5] A. Kreissl, A.D. Hancock, H. Koch, Th. Köhler, H. Poth, U. Raich, D. Rohmann, A. Wolf, L. Tauscher, A. Nilsson, M. Suffert, M. Chardalas, S. Dedoussis, H. Daniel, T. von Egidy, F.J. Hartmann, W. Kanert, H. Plendl, G. Schmidt, and J.J. Reidy, *Z. Phys. C* **37**, 557 (1988).
- [6] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998).
- [7] S. Ulmer, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, W. Quint, C.C. Rodegheri, and J. Walz, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 103002 (2011).
- [8] L.S. Brown and G. Gabrielse, *Phys. Rev. A* **25**, 2423 (1982).
- [9] H. Dehmelt, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **83**, 2291 (1986).
- [10] W. Quint, J. Alonso, S. Djekić, H.J. Kluge, S. Stahl, T. Valenzuela, J. Verdú, M. Vogel, and G. Werth, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. B* **214**, 207 (2004).
- [11] S. Ulmer, C.C. Rodegheri, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, W. Quint, and J. Walz, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 253001 (2011).
- [12] C.C. Rodegheri, H. Kracke, K. Blaum, S. Kreim, A. Mooser, W. Quint, S. Ulmer, and J. Walz, *New J. Phys.* **14**, 063011 (2012).
- [13] J. DiSciaccia and G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 153001 (2012).
- [14] H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5308 (2000).
- [15] S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, J. Zatorski, Z. Harman, W. Quint, G. Werth, C.H. Keitel, and K. Blaum, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 023002 (2011).
- [16] G. Gabrielse, L. Haarsma, and S.L. Rolston, *Int. J. Mass Spectrom.* **88**, 319 (1989); **93**, 121(E) (1989).
- [17] S. Jefferts, T. Heavner, P. Hayes, and G.H. Dunn, *Rev. Sci. Instrum.* **64**, 737 (1993).
- [18] X. Feng, M. Charlton, M. Holzscheiter, R.A. Lewis, and Y. Yamazaki, *J. Appl. Phys.* **79**, 8 (1996).
- [19] S. Ulmer, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, W. Quint, C.C. Rodegheri, and J. Walz, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **705**, 55 (2013).
- [20] L.S. Brown, *Ann. Phys. (N.Y.)* **159**, 62 (1985).
- [21] S. Djekic, J. Alonso, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, T. Valenzuela, J. Verdú, M. Vogel, and G. Werth, *Eur. Phys. J. D* **31**, 451 (2004).
- [22] W.J. Riley, *Handbook of Frequency Stability Analysis* (NIST, Boulder, 2008).
- [23] D.S. Sivia, *Data Analysis: A Bayesian Tutorial* (Oxford University Press, Oxford, 1996).
- [24] S. Brakhane, W. Alt, T. Kampschulte, M. Martinez-Dorantes, R. Reimann, S. Yoon, A. Widera, and D. Meschede, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 173601 (2012).
- [25] J. DiSciaccia, M. Marshall, K. Marable, and G. Gabrielse, following Letter, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 140406 (2013).



Demonstration of the double Penning Trap technique with a single proton

A. Mooser^{a,b}, S. Bräuninger^{c,d}, K. Franke^{c,e}, H. Kracke^{a,b}, C. Leiteritz^a, C.C. Rodegheri^{c,d}, H. Nagahama^f, G. Schneider^{a,e}, C. Smorra^e, K. Blaum^c, Y. Matsuda^f, W. Quint^{d,g}, J. Walz^{a,b}, Y. Yamazaki^h, S. Ulmer^{e,*}

^a Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität D-55099 Mainz, Germany

^b Helmholtz-Institut Mainz, D-55099 Mainz, Germany

^c Max-Planck-Institut für Kernphysik, Saupfercheckweg 1, D-69117 Heidelberg, Germany

^d Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, D-69047 Heidelberg, Germany

^e RIKEN, Ulmer Initiative Research Unit, 2-1 Hirosawa, Wako, Saitama 351-0198, Japan

^f Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo, Tokyo 153-8902, Japan

^g GSI – Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, D-64291 Darmstadt, Germany

^h RIKEN, Atomic Physics Laboratory, 2-1 Hirosawa, Wako, Saitama, 351-0198, Japan

ARTICLE INFO

Article history:

Received 2 April 2013

Accepted 5 May 2013

Available online 9 May 2013

Editor: V. Metag

Keywords:

Fundamental symmetries

CPT tests

Penning traps

ABSTRACT

Spin flips of a single proton were driven in a Penning trap with a homogeneous magnetic field. For the spin-state analysis the proton was transported into a second Penning trap with a superimposed magnetic bottle, and the continuous Stern–Gerlach effect was applied. This first demonstration of the double Penning trap technique with a single proton suggests that the antiproton magnetic moment measurement can potentially be improved by three orders of magnitude or more.

© 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

CPT symmetry is a fundamental symmetry in the local, relativistic quantum field theories involved in the Standard Model [1]. It implies exact equality between the fundamental properties of particles and their corresponding antiparticles. Any measured difference between masses, charges, lifetimes or magnetic moments of an exactly conjugated matter/antimatter system would thus indicate physics beyond the Standard Model, and potentially contribute to the solution of one of the hottest topics in modern physics—the observed matter/antimatter asymmetry in the universe [2]. This is the fascination and motivation driving experiments which compare the properties of matter and antimatter at lowest energies and greatest precision [3–9].

Our experiments [10–12] focus on the precise comparison of the magnetic moments of the proton p and the antiproton \bar{p} , $\mu = g/2 \cdot q\hbar/(2m)$, where g is the so-called g -factor, and q/m the charge-to-mass ratio. The magnetic moment in units of the nuclear magneton μ_N

$$\frac{\mu}{\mu_N} = \frac{g}{2} = \frac{\nu_L}{\nu_c}, \quad (1)$$

can be determined by measuring the free cyclotron frequency $2\pi\nu_c = q/m \cdot B_0$ and the spin precession frequency $2\pi\nu_L = g/2 \cdot q/m \cdot B_0$ (also called Larmor frequency) of a single particle stored in a cryogenic Penning trap, where B_0 is the trap's magnetic field. The free cyclotron frequency is determined by image current detection, whereas for the measurement of ν_L the continuous Stern–Gerlach effect is applied [13]. In this scheme a strong magnetic bottle $B(z) = B_0 + B_2z^2$, where z is the direction of the magnetic field, is superimposed on the Penning trap. This couples the spin-magnetic moment of the particle to its axial oscillation frequency ν_z , and thus, reduces the determination of the spin direction to a non-destructive frequency measurement. A magnetic radio frequency field at ν_{rf} is applied to induce spin transitions [14], and from a measurement of the spin-flip probability $P_{SF}(\nu_{rf})$, the Larmor frequency ν_L is obtained. By using this method the magnetic moment of a single trapped proton was measured by two independent groups with precisions of $8.9 \cdot 10^{-6}$ [11] and $2.5 \cdot 10^{-6}$ [15]. Applying the same techniques to the antiproton, diSciaccia et al. recently reported on a $4.4 \cdot 10^{-6}$ measurement of the antiparticle's magnetic moment [16]. Compared to the former value [17], this improved the precision of $\mu_{\bar{p}}$ by an unprecedented factor of 680. However, the achieved experimental precisions are limited by the strong magnetic bottle $B_2 \approx 300\,000 \text{ T/m}^2$ which broadens the Larmor resonance line significantly [19]. To overcome this problem, a GSI/University of Mainz Collaboration developed the elegant

* Corresponding author.

E-mail address: stefan.ulmer@cern.ch (S. Ulmer).

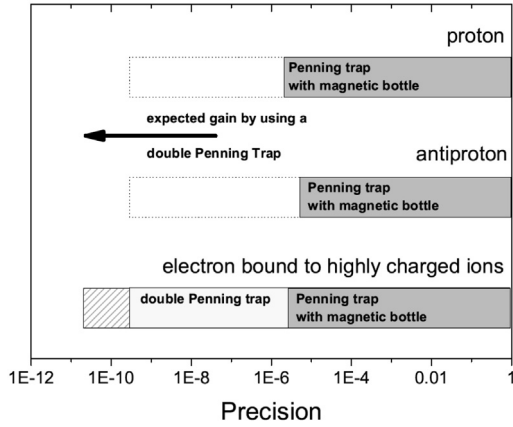


Fig. 1. Precision achieved in recent measurements of magnetic moments with single trapped particles. The dark grey bars indicate the precision which has been achieved in Penning traps with a superimposed magnetic bottle for spin detection. Light grey bar: using the double Penning trap technique the precision improved dramatically to about 0.5 ppb in experiments with a single electron bound to a highly charged ion. Hatched bar: a phase sensitive detection method recently enabled a 20 ppt measurement [18]. For the (anti)proton magnetic moment a gain in precision by more than three orders of magnitude is expected from using the double Penning trap technique.

double Penning trap method [20], where the analysis of the spin state and the precision measurements of ν_c and ν_L are separated to two traps: an analysis trap (AT) with the superimposed B_2 , and a precision trap (PT), in which the magnetic field is a factor of 75 000 more homogeneous. This reduces the line width of the spin resonance by orders of magnitude and boosts experimental precision. Fig. 1 shows that this method has been applied with great success in measurements of the magnetic moment of the electron bound to highly charged ions, where sub-ppb precision was achieved [21–24]. So far, in case of the (anti)proton magnetic moment measurements the application of this method was not possible.

In this Letter we report the first successful demonstration of the double Penning trap method with a single trapped proton. This is a major step towards a dramatic improvement in the measurement precision of the magnetic moment of both the proton and the antiproton to the ppb level and beyond.

The double Penning trap setup is shown in Fig. 2. This assembly is mounted into the horizontal bore of a temperature and pressure stabilized superconducting magnet, with a field strength of $B_0 = 1.89$ T. The precision trap is located in the homogeneous center with $\Delta B/B \approx 10^{-6}$ in a volume of about 1 cm^3 . The two traps consist of carefully designed stacked cylindrical electrodes, which are made out of oxygen free copper. All electrodes are gold-plated, which prevents oxidation of the inner trap surfaces. The PT has an inner diameter of 7 mm, whereas the one of the AT is only 3.6 mm. The central ring electrode of this small trap is made of ferromagnetic CoFe material, which has a saturation magnetization of $B_{\text{sat}} = 2.35$ T. Together with the small diameter of the AT this material produces the strong magnetic bottle. The distance between the trap centers is 45 mm. The residual magnetic inhomogeneity B_2 in the center of the precision trap is 4 T/m^2 . The traps are connected by transport electrodes, which are used to shuttle the single particle adiabatically back and forth between AT and PT. Small coils are mounted close to the Penning trap electrodes. Strong rf drives applied to these coils at frequencies close to the Larmor frequency $\nu_L \approx 81$ MHz induce spin transitions. Although the copper electrodes act as efficient rf shields, the field amplitude b_{rf} which penetrates through the $140 \mu\text{m}$ slits between adjacent electrodes is still strong enough to achieve Rabi frequen-

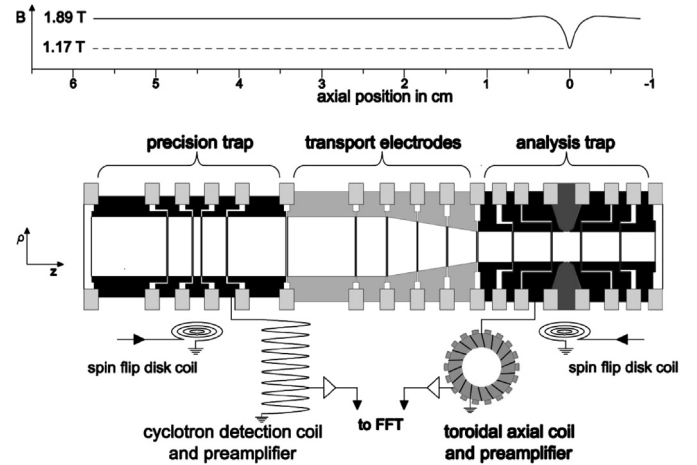


Fig. 2. Schematic of the double Penning trap setup. The system consists of two Penning traps which are connected by transport electrodes. The central ring electrode of the analysis trap is made of ferromagnetic material. For further details see text.

cies $\Omega = \mu_p b_{\text{rf}}/\hbar$ of several 10 Hz. The whole assembly shown in Fig. 2 is mounted in a hermetically sealed, pinched-off, and cryo-pumped vacuum chamber with a total volume of about one liter. In this trap-can pressures in the order of 10^{-16} mbar are achieved which avoids particle loss [26].

A single proton in the precision trap oscillates perpendicular to the magnetic field at the modified cyclotron frequency ν_+ of about 28.9 MHz. The electrostatic potential slightly shifts ν_+ from ν_c [25]. In addition to this radial motion an axial oscillation along the magnetic field lines occurs at $\nu_z = 623$ kHz, which is due to the axial electrostatic potential of the Penning trap. A magnetron motion at $\nu_- = 6.7$ kHz is induced by the crossed magnetic and electric fields. It is also perpendicular to B_0 .

To measure ν_+ and ν_z of the single trapped proton, highly sensitive detection systems are used. Small image currents I_p are induced in the trap electrodes by the particle's motion and are picked up by detection coils with inductances L and high quality factors Q . Together with the trap capacitance C_T they form a tuned circuit. On resonance ν_r each detection system acts as an effective parallel resistance $R_p = 2\pi\nu_r LQ$. When the particle's respective oscillation frequency and ν_r are matched, a voltage drop $u_p = R_p I_p$ is obtained, which is amplified and analyzed with a fast Fourier transform (FFT) spectrum analyzer. A particle excited to high oscillation amplitudes appears as a peak in the FFT spectrum. The interaction with the detection resistor R_p cools the proton resistively with a cooling time constant $\tau = m/R_p \cdot D^2/q^2$, where D is a characteristic trap dimension. When cooled to thermal equilibrium, the particle acts like a series tuned circuit, which shorts the thermal noise [28,29] of the detection system, and appears as a dip in the FFT spectrum [30]. For a non-destructive frequency measurement such a particle dip is recorded and the frequencies ν_z and ν_+ are obtained via a best fit to the data. In contrast to this direct detection method the magnetron frequency is measured via sideband coupling [31]. This method can also be used to measure ν_+ [32].

For an application of the double Penning trap technique the sequence shown in Fig. 3 is applied. First, a single proton is prepared in the AT and its spin state is determined. To this end, the axial frequency is measured, and afterwards a spin flip drive is applied with an amplitude sufficiently large to saturate the incoherent spin-transition to $P_{\text{SF}} = 50\%$ [10]. Subsequently the axial frequency is measured again. A spin quantum jump in our magnetic bottle shifts the axial frequency by 171 mHz. Once such a

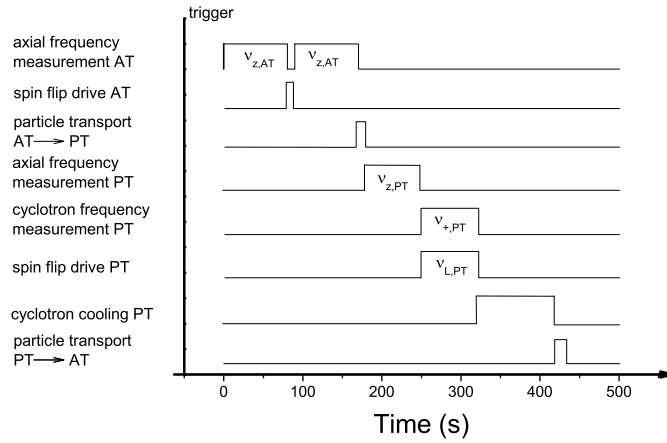


Fig. 3. Illustration of a double Penning trap sequence. For details see text.

frequency jump is identified [12], the spin state is defined. Next, the single proton is transported to the PT, and while a spin-flip drive is applied, the cyclotron frequency is measured. The experimental cycle is finished by transporting the particle back to the AT where the spin state is analyzed as above. In this way a signature is obtained for whether or not the drive applied in the PT flipped the spin.

Obviously, for the application of this technique, “single spin flip resolution” is required [12], which means, that the spin state of the proton has to be identified with high fidelity F , where F is the fraction of correctly identified spin flips in the PT. This is very difficult because of the strong magnetic bottle B_2 , which also couples the magnetic moment of the orbital angular magnetic momentum to the axial oscillation frequency. Small fluctuations of the energies in the radial modes, E_+ and E_- , cause axial frequency fluctuations, which can be expressed as

$$\Delta\nu_z(n_+, n_-) = \frac{h\nu_+}{4\pi^2 m_p \nu_z} \frac{B_2}{B_0} \cdot \left(\left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nu_-}{\nu_+} \left(n_- + \frac{1}{2} \right) \right), \quad (2)$$

where n_+ is the cyclotron and n_- the magnetron quantum number, respectively. A cyclotron quantum jump $\Delta n_+ = \pm 1$ causes an axial frequency shift of $\Delta\nu_z = \pm 63$ mHz and a transition of the magnetron quantum number $\Delta n_- = \pm 1$ leads to $\Delta\nu_z = \pm 54$ μ Hz. Thus, to clearly observe spin transitions it is crucial to keep axial frequency fluctuations induced by radial quantum transitions small in comparison to the frequency shift $\Delta\nu_{z,SF} = 171$ mHz induced by a spin flip.

The transition amplitude for electric dipole transitions between cyclotron quantum states is

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = qE_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi m_p \nu_+} \frac{n_+}{2}}, \quad (3)$$

where E_0 is the electric field amplitude of a spurious noise-drive. The transition rate $\delta n_+/dt$ scales as $\Gamma_{i \rightarrow f}^2$, and is proportional to the cyclotron quantum number n_+ . Thus, to resolve single proton spin flips it is of major importance to cool the particle to low cyclotron energies E_+ .

The scaling of the axial frequency $\nu_z(E_+)$ in the strong magnetic bottle (see Eq. (2)) enables a calibration of the absolute modified cyclotron energy E_+ . For such an energy calibration the particle is transported to the precision trap where it interacts with the cyclotron detector [27]. With a typical noise correlation-time of $\tau_+ = 300$ s the particle's cyclotron mode is thermalized,

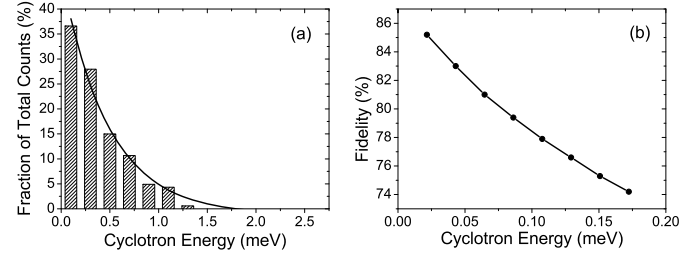


Fig. 4. (a) Histogram of axial frequency measurements after thermalization of the modified cyclotron mode with the detection system in the PT. The abscissa is scaled to absolute energy values. For further details see text. (b) Single spin transition fidelity in the PT as a function of the cyclotron energy E_+ . Note the change in the cyclotron energy scale.

which means that E_+ follows a random walk in thermal energy space. The distribution of the energy values E_+ taken on in this process is described by the probability function $w(E_+) = \frac{1}{kT_+} \exp(-E_+/kT_+)$. After thermalization the particle is shuttled to the analysis trap, and the axial frequency ν_z is measured. Then, the single proton is transported back to the PT and thermalized again. This cycle is repeated for hundreds of times. Fig. 4(a) shows the results obtained from such a sequence plotted as a histogram. Together with a fit of $w(E_+)$ to the data and an independent measurement of B_2 [11], the measured frequencies are scaled to absolute energy-values (abscissa of histogram). These results constitute a measurement of the temperature of the cyclotron detector T_+ , probed with the single particle. For this data-set $T_+ = 5.3$ K is obtained. After such a detailed temperature calibration the cyclotron energy E_+ of the single particle can be determined via a single axial frequency measurement.

By using this temperature calibration the axial frequency fluctuation \mathcal{E} , defined as the rms value of the differences of two subsequent axial frequency measurements $\nu_{z,i} - \nu_{z,i+1}$ [10], was recorded for different E_+ -values. Based on this result the spin flip fidelity F is obtained as a function of E_+ using simulated axial frequency noise data. Results are shown in Fig. 4(b). At cyclotron energies below 150 μ eV a spin-flip fidelity $F > 75\%$ is obtained, which means, that three out of four induced spin flips can be clearly identified. With the current cyclotron detector, the average probability to prepare a particle which meets these requirements is about 20%, and the preparation of such a particle takes on average about 2 h.

For the application of the double Penning trap technique a single proton is prepared at low cyclotron quantum number n_+ in

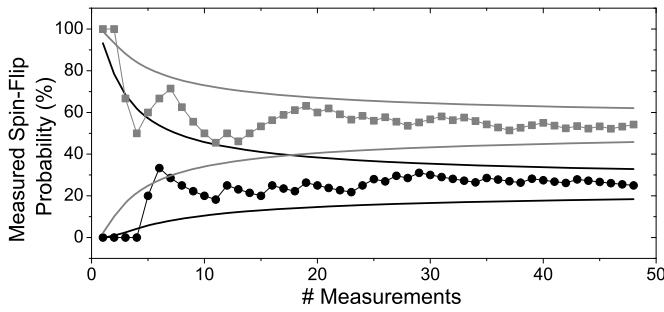


Fig. 5. Spin flip probability in the PT as a function of the number of measurements. The squares represent data points where a resonant spin flip drive was applied, while the dots represent results of an off-resonant reference measurement, where the drive was detuned by 1 MHz. The solid lines indicate the 1σ confidence bands.

the AT. Significant Larmor frequency shifts arise from large magnetron radii. Thus, in the next step the latter is cooled to about $10\ \mu\text{m}$ by coupling to the axial mode [31]. This enables reliable saturation of the spin transition to 50% spin flip probability, which is necessary for a high-fidelity spin state detection [12]. When the spin-state is defined, the particle is transported to the precision trap, where the free cyclotron frequency is obtained by determining ν_+ and ν_z . The magnetron frequency ν_- is measured routinely only once a day. In parallel to the measurement of the modified cyclotron frequency ν_+ , spin flips are driven in the same way as in the AT. The measurement of ν_+ heats the cyclotron mode, and thus, in a next step the proton is thermalized with the cyclotron detector, subsequently transported back to the AT, and the cyclotron energy is determined. In case $E_+ > 150\ \mu\text{eV}$, which corresponds to a single spin flip fidelity $F < 75\%$, the particle is shuttled back to the PT and the cyclotron mode is thermalized again. Once E_+ is low enough to resolve single spin flips with fidelity $F > 75\%$, the spin eigenstate is determined. From this measurement we deduce whether the spin in the PT has flipped. For a determination of the spin-flip probability in the PT this sequence is repeated many times. Data were taken for a resonant and an off-resonant spin-flip drive in the PT, the latter detuned by 1 MHz. Fig. 5 shows the evolution of the cumulative spin flip probability for the resonant as well as the off-resonant drive as a function of the number of measurements. The solid lines indicate the 1σ confidence intervals. Both measurements converge to constant values. The off-resonant data point reaches $P_{\text{SF}} \approx 25\%$ since one out of four spin flip trials in the precision trap is misinterpreted. This is caused by the limited fidelity F for the spin state detection, which results in a measured spin flip probability $P_{\text{SF,m}} = P_{\text{SF,t}} \cdot F + (1 - P_{\text{SF,t}}) \cdot (1 - F)$, where $P_{\text{SF,t}}$ is the actual spin flip probability. For the resonant data point $P_{\text{SF}} \approx 54(8)\%$ is measured. The significant shift of $29(11)\%$ between the two measurements proves the unambiguous detection of proton spin quantum jumps driven in the homogeneous magnetic field of the PT. A scan of the full Larmor resonance would constitute a first proton g -factor measurement by means of the double Penning trap technique. So far, this method has only been applied to measure electron magnetic moments, however, the proton magnetic moment is about a factor of 650 times smaller and application of this method is much more challenging.

In conclusion, for the first time the application of the double Penning trap method has been demonstrated with a single proton. This result paves the way towards the first direct high-precision measurement of the proton and antiproton magnetic moments in the BASE experiment at the Antiproton Decelerator of CERN [33, 34].

Acknowledgements

We acknowledge financial support of RIKEN Initiative Research Unit Program, the Max-Planck Society, the BMBF, the Helmholtz-Gemeinschaft, HGS-HIRE, and the EU (ERC Grant No. 290870-MEFUCO).

References

- [1] G. Lüders, *Ann. Phys.* 2 (1957) 1.
- [2] M. Dine, A. Kusenko, *Rev. Mod. Phys.* 76 (2003) 1.
- [3] R.S. Van Dyck, P.B. Schwinberg, H.G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 26.
- [4] G. Gabrielse, A. Khabbazi, D.S. Hall, C. Heimann, H. Kalinowsky, W. Jhe, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 3198.
- [5] Y. Enomoto, et al., *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 243401.
- [6] M. Hori, et al., *Nature* 475 (2011) 484.
- [7] G. Andresen, et al., ALPHA Collaboration, *Nature* 483 (2012) 439.
- [8] G. Gabrielse, et al., *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 113002.
- [9] A. Kellerbauer, et al., *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* 266 (2008) 351.
- [10] S. Ulmer, C.C. Rodegheri, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, W. Quint, J. Walz, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 253001.
- [11] C.C. Rodegheri, K. Blaum, H. Kracke, S. Kreim, A. Mooser, W. Quint, S. Ulmer, J. Walz, *New J. Phys.* 14 (2012) 063011.
- [12] A. Mooser, et al., *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 140405.
- [13] H. Dehmelt, P. Ekström, *Bull. Am. Phys. Soc.* 18 (1973) 72.
- [14] I.I. Rabi, J.M.B. Kelloff, J.R. Zacharias, *Phys. Rev.* 46 (1934) 157.
- [15] J. DiSciaccia, G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 153001.
- [16] J. DiSciaccia, et al., *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 130801.
- [17] T. Pask, D. Barna, A. Dax, R.S. Hayano, M. Hori, D. Horvath, S. Friedreich, B. Juhasz, O. Massiczek, N. Ono, *Phys. Lett. B* 678 (2009) 55.
- [18] S. Sturm, A. Wagner, M. Kretzschmar, W. Quint, G. Werth, K. Blaum, *Phys. Rev. A* 87 (2013) 030501(R).
- [19] L.S. Brown, *Ann. Phys.* 159 (1985) 62.
- [20] H. Häffner, T. Beier, S. Djekic, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdù, T. Valenzuela, G. Werth, *Eur. Phys. J. D* 22 (2003) 163.
- [21] N. Hermanspahn, H. Häffner, H. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdù, G. Werth, *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 427.
- [22] H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdù, G. Werth, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 5308.
- [23] J. Verdù, S. Djekic, S. Stahl, T. Valenzuela, M. Vogel, G. Werth, T. Beier, H. Kluge, W. Quint, *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 093002.
- [24] S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, J. Zatorski, Z. Harman, W. Quint, G. Werth, C.H. Keitel, K. Blaum, *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011) 023002.
- [25] L.S. Brown, G. Gabrielse, *Rev. Mod. Phys.* 58 (1986) 233.
- [26] G. Gabrielse, D.F. Phillips, W. Quint, H. Kalinowsky, G. Rouleau, W. Jhe, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 3544.
- [27] S. Ulmer, H. Kracke, K. Blaum, A. Mooser, W. Quint, C.C. Rodegheri, J. Walz, *Nucl. Instrum. Meth. A* 705 (2013) 55.
- [28] J. Johnson, *Phys. Rev.* 32 (1928) 97.
- [29] H. Nyquist, *Phys. Rev.* 32 (1928) 110.
- [30] D.J. Wineland, H.G. Dehmelt, *J. Appl. Phys.* 46 (1975) 919.
- [31] E.A. Cornell, R.M. Weisskoff, K.R. Boyce, D.E. Pritchard, *Phys. Rev. A* 41 (1990) 312.
- [32] S. Ulmer, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, C.C. Rodegheri, W. Quint, J. Walz, *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011) 103002.
- [33] S. Mauri, *Hyperfine Interact.* 109 (1997) 43.
- [34] P. Belochitskii, T. Eriksson, S. Maury, *Nucl. Instrum. Meth. A* 214 (2004) 176.