

CHIRALE EFFEKTIVE FELDTHEORIE
MIT VEKTORMESONEN

—

Vom elektromagnetischen Formfaktor
zur virtuellen Compton-Streuung

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

SANDRO GORINI

geb. in Wiesbaden

März 2014

Sandro Gorini:

Chirale effektive Feldtheorie mit Vektormesonen

Vom elektromagnetischen Formfaktor zur virtuellen Compton-Streuung

ERSTER BERICHTERSTATTER:

ZWEITER BERICHTERSTATTER:

DATUM DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG:

5. Mai 2014

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Modellierung niederenergetischer elektromagnetischer und hadronischer Prozesse im Rahmen einer manifest lorentzinvarianten, chiralen effektiven Feldtheorie unter expliziter, dynamischer Berücksichtigung resonanter, das heißt vektormesonischer Freiheitsgrade. Diese effektive Theorie kann daher als Approximation der grundlegenden Quantenchromodynamik bei kleinen Energien verstanden werden. Besonderes Augenmerk wird dabei auf das verwendete Zähl- sowie Renormierungsschema gelegt, wodurch eine konsistente Beschreibung mesonischer Prozesse bis zu Energien von etwa 1 GeV ermöglicht wird.

Das verwendete Zählschema beruht dabei im Wesentlichen auf einem Argument für großes N_c (Anzahl der Farbfreiheitsgrade) und lässt eine äquivalente Behandlung von Goldstonebosonen (Pionen) und Resonanzen (Rho- und Omegamesonen) zu. Als Renormierungsschema wird das für (bezüglich der starken Wechselwirkung) instabile Teilchen besonders geeignete *complex-mass scheme* als Erweiterung des *extended on-mass-shell scheme* verwendet, welches in Kombination mit dem BPHZ-Renormierungsverfahren (benannt nach Bogoliubov, Parasiuk, Hepp und Zimmermann) ein leistungsfähiges Konzept zur Berechnung von Quantenkorrekturen in dieser chiralen effektiven Feldtheorie darstellt. Sämtliche vorgenommenen Rechnungen schließen Terme der chiralen Ordnung vier sowie einfache Schleifen in Feynman-Diagrammen ein.

Betrachtet werden unter anderem der Vektorformfaktor des Pions im zeitartigen Bereich, die reelle Compton-Streuung (beziehungsweise Photonenfusion) im neutralen und geladenen Kanal sowie die virtuelle Compton-Streuung, eingebettet in die Elektron-Positron-Annihilation. Zur Extraktion der Niederenergiekopplungskonstanten der Theorie wird letztendlich eine Reihe experimenteller Datensätze verschiedenartiger Observablen verwendet.

Die hier entwickelten Methoden und Prozeduren – und insbesondere deren technische Implementierung – sind sehr allgemeiner Natur und können daher auch an weitere Problemstellungen aus diesem Gebiet der niederenergetischen Quantenchromodynamik angepasst werden.

ABSTRACT

This thesis is concerned with modelling electromagnetic and hadronic processes in the low-energy regime, employing a manifestly lorentz-invariant chiral effective field theory with dynamical vector mesons. This effective theory serves as an approximation of the more fundamental quantum chromodynamics at low energies. Focusing on power counting and renormalization, a consistent description of different processes up to approximately 1 GeV is possible.

The key ingredient of the power counting is a large- N_c argument, which implies an equivalent treatment of Goldstone bosons (pions) and resonances (rho and omega mesons). A suitable renormalization scheme is the complex-mass scheme (a generalization of the extended on-mass-shell scheme) which—combined with the BPHZ renormalization method (named after Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, and Zimmermann)—yields a powerful framework for the computation of quantum corrections in chiral effective theories. All calculations contain contributions up to and including fourth chiral order at the one-loop level.

Analyzed quantities are, besides others, the vector form factor of the pion in the timelike region and real Compton scattering (respectively photon fusion) in the neutral and charged channels. In addition, virtual Compton scattering off the pion, embedded into electron-positron annihilation, is discussed. Furthermore, experimental data of various observables are used to extract the values of all contributing low-energy coupling constants.

The developed methods—especially the technical implementations—are of very general nature and, therefore, straightforward to adapt to additional problems in low-energy quantum chromodynamics.

INHALTSVERZEICHNIS

1	PROLOG	1
2	QUANTENCHROMODYNAMIK UND EFFEKTIVE FELDTHEORIEN	5
2.1	Quantenchromodynamik	5
2.2	Chirale Störungstheorie	8
2.3	Effektive Lagrangedichte	10
3	QUANTENFELDTHEORIEN	19
3.1	Matrixelemente	19
3.2	Renormierung	21
3.3	Ward-Identitäten	29
4	NIEDERENERGETISCHE PROZESSE	33
4.1	Zerfall des Rhomesons	33
4.2	Formfaktor des Pions	35
4.3	Pionenstreuung	36
4.4	Virtuelle Compton-Streuung und Photonenfusion . . .	39
4.5	Kopplungskonstanten	47
5	EXTRAKTION DER KOPPLUNGEN	49
5.1	Präzision	49
5.2	Strategie	50
5.3	Neutrale Photonenfusion	52
5.4	Formfaktor und geladene Photonenfusion	53
5.5	Pionenstreuung	56
5.6	Virtuelle Compton-Streuung	57
5.7	Vollständiger Parametersatz	63
6	EPILOG	65
A	NOTATIONEN UND KONVENTIONEN	71
A.1	Experimentelle Zahlenwerte	71
A.2	Allgemeines	72
A.3	Skalare Integrale	72
A.4	Isospin-Zerlegung	74
A.5	Einige QED-Relationen	76
B	KINEMATIK	77
B.1	Allgemeines	77

B.2	Zweiteilchenstreuung	79
B.3	Dreiteilchen-Endzustand	81
C	DAS BOOTSTRAP-VERFAHREN	87
D	MODELLUNABHÄNGIGE ANALYSE	89
E	ERGÄNZUNGEN	95
E.1	Analytische Ausdrücke	95
E.2	Graphen und Dichteverteilungen	98
E.3	Alternatives Renormierungsschema	111
F	TECHNISCHE DETAILS	113
G	FEYNMAN-DIAGRAMME	115
H	FEYNMAN-REGELN	119
I	MASCHINENLESBARE FUNKTIONEN	123
	LITERATURVERZEICHNIS	127

PROLOG

Umfeld

Das Gebäude der modernen theoretischen Physik ruht auf zwei fundamentalen Säulen, der allgemeinen Relativitätstheorie einerseits und den relativistischen Quantenfeldtheorien andererseits. Erste ist geometrischer Natur und beschreibt gravitative Effekte auf kosmologischen Skalen während Letztere die drei übrigen elementaren Wechselwirkungen – die elektromagnetische sowie die schwache und starke Kernkraft – im Standardmodell der Teilchenphysik zusammenfasst. Diese Eichtheorie, die auf universellen Prinzipien wie der Quantentheorie, der speziellen Relativitätstheorie sowie der Clusterzerlegung basiert, generiert aufgrund ihrer mathematischen Struktur Wechselwirkungen zwischen fermionischer Materie durch bosonische Austauschteilchen [1]. Diese Materie unterteilt sich darüber hinaus in punktförmige Leptonen und Quarks, die – nach bisherigem Kenntnisstand – fundamental sind. Die verschiedenen Austauschbosonen klassifizieren die Art von Wechselwirkung, denen die Materiefelder unterworfen werden und sind bezüglich ihrer Eigenschaften sehr eng mit den Symmetrien der zugrunde liegenden Theorie verknüpft.

Die Quantenelektrodynamik (QED), vereinigt mit der schwachen Kraft zur elektroschwachen Wechselwirkung, beschreibt durch eine $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie elektromagnetisch oder schwach geladene Teilchen und verwendet dazu den Austausch von masselosen Photonen beziehungsweise massiven W- und Z-Bosonen, die ihre Masse durch den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung erhalten [2–4]. Die Quantenchromodynamik (QCD) [5–7] ist durch eine $SU(3)$ -Symmetrie charakterisiert und liefert ein Modell zur Beschreibung der Dynamik von Farbladung tragender Materie – ausschließlich Quarks – mittels Austausch von Gluonen (als Eichbosonen); im Gegensatz zur QED tragen diese Austauschteilchen jedoch selbst Farbladungen und sind damit einer Selbstwechselwirkung unterworfen.

Bislang sind experimentell keine freien Quarks sondern lediglich farbneutrale Kompositionen, bestehend aus einem Quark-Antiquark-Paar (den Mesonen) oder drei Quarks (den Baryonen) beobachtet worden; dieses Phänomen wird im Allgemeinen als Farbeinschluss (*color confinement*) bezeichnet [8]. Darüber hinaus ist

die Kopplungskonstante der QCD eine laufende Kopplung, die für große Energien ab einigen GeV klein genug ist, perturbative Methoden zuzulassen [5, 8, 9]. Im Bereich kleiner Energien, bis etwa 1 GeV, versagen diese jedoch, so dass auf effektive Feldtheorien zurückgegriffen werden muss, die als Abstraktion fundamentalerer Prinzipien die Dynamik eines Problems auf effektive Freiheitsgrade einschränken und somit vereinfachen. Eine mögliche Alternative zu diesen effektiven Theorien stellt die Gitter-QCD dar [10], die starke Wechselwirkungsprozesse in einer diskretisierten Raumzeit simuliert und somit eine zu perturbativen Methoden komplementäre Herangehensweise verwendet, die im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt wird.

Eine effektive Feldtheorie der QCD ist die sogenannte chirale Störungstheorie (*chiral perturbation theory*, χ PT) [11–13], die anstelle von Quarks und Gluonen zusammengesetzte Systeme – Goldstonebosonen [14] – als Freiheitsgrade verwendet, jedoch nur für sehr kleine Energieüberträge bis einige 100 MeV uneingeschränkt anwendbar ist. Sie basiert auf der chiralen Symmetrie der QCD-Lagrangedichte im Grenzfall verschwindender Quarkmassen sowie einer manifest sichtbaren Skalenseparation zwischen den leichten Mesonen (Pionen mit Massen von rund 140 MeV) und der typischen hadronischen Skala der Symmetriebrechung Λ (rund 1 GeV).

Eine Erweiterung des Konzeptes effektiver Feldtheorien durch Einbau weiterer Vektormesonen vergrößert den möglichen Konvergenzbereich von besagten wenigen 100 MeV signifikant und definiert auf diese Art chirale effektive Feldtheorien (χ EFT), deren Freiheitsgrade im Allgemeinen jedoch bezüglich der starken Wechselwirkung instabile Teilchen sind. Die konsistente Beschreibung dieser Resonanzen ist prinzipiell sehr wichtig, wie beispielsweise das überaus erfolgreiche Vektormesondominanzmodell [15, 16] zeigt, vom konzeptionellen und technischen Standpunkt – insbesondere bezüglich Kausalität und Unitarität [17] – jedoch durchaus anspruchsvoll. Besonderes Augenmerk muss in diesem Zusammenhang sowohl auf die einer systematischen Entwicklung zugrunde liegende Skalenseparation [18] als auch auf ein angemessenes Renormierungsschema [19–23] gelegt werden, da die korrekte Berücksichtigung von Quantenkorrekturen in Anwesenheit von Resonanzen nicht trivial ist.

Das in dieser Arbeit verwendete Modell hadronischer Wechselwirkungen ist eine solche χ EFT mit pionischen und vektormesonischen Freiheitsgraden, wodurch eine konsistente theoretische Beschreibung verschiedenartiger Prozesse bis zu Energien von etwa

1 GeV unter Berücksichtigung von Effekten höherer Ordnung ermöglicht wird.

Motivation

Das bereits erwähnte Standardmodell der Teilchenphysik ist eine ausgesprochen leistungsfähige Theorie, deren Voraussagen bisher häufig mit äußerster Präzision experimentell bestätigt worden sind. Allerdings gibt es auch signifikante Abweichungen zwischen theoretischen Vorhersagen und experimentell gemessenen Zahlenwerten, die beispielsweise im Falle des anomalen magnetischen Moments des Myons bei rund drei Standardabweichungen liegen [24]. Die größte hierzu beitragende Unsicherheit ist nach wie vor der hadronische Anteil der Elektron-Positron-Annihilation in zwei Pionen, so dass eine genaue Analyse dieses Prozesses neue Erkenntnisse liefern kann.

Besonders interessant sind dabei radiative Methoden (*radiative return*) wie *initial-state* (isr) und *final-state radiation* (fsr), da dadurch Energiescans an Colliderexperimenten fester Schwerpunktenenergie durchgeführt werden können [25]. Der isr-Teil ist ein reiner QED-Prozess und damit ausgesprochen gut bekannt, der fsr-Beitrag kodiert jedoch die hadronischen Anteile und ist daher stark modellabhängig.

Der ursprüngliche Versuch einer (soweit möglich) modellunabhängigen fsr-Analyse, die auf experimentellen Daten einer Ladungsasymmetrie beruht, um mögliche Regionen zulässiger hadronischer Parameter zu kartographieren und damit Einflüsse auf Wirkungsquerschnitte abzuschätzen, erwies sich letztendlich als nicht zielführend; die relevanten Resultate sowie weitergehende Informationen sind in Anhang D zusammengefasst. Die Verwendung eines leistungsfähigen und nicht auf diesen einzelnen Prozess beschränkten hadronischen Modells ist somit unumgänglich und soll in der vorliegenden Arbeit genauer untersucht werden.

Struktur

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen der QCD sowie der χ PT kurz dargestellt und die wesentlichen Konstruktionsmerkmale der χ EFT erklärt. Darüber hinaus wird die vollständige Lagrangedichte, welche die Basis sämtlicher weiterer Rechnungen darstellt, motiviert.

Im darauf folgenden Kapitel 3 werden einige allgemeine quantenfeldtheoretische Aspekte wie beispielsweise die Renormierung

genauer beleuchtet und explizit der dieser Arbeit zugrunde liegenden Theorie angepasst.

Das anschließende Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Berechnung niederenergetischer Prozesse und der Verknüpfung mit experimentellen Observablen. Speziell werden der Formfaktor des Pions, die Photonenfusion, die Pionenstreuung sowie die virtuelle Compton-Streuung am Pion, eingebettet in die Elektron-Positron-Annihilation, untersucht.

Daraufhin werden in Kapitel 5 sämtliche Kopplungskonstanten mit Hilfe verschiedener experimenteller Datensätze bestimmt.

Eine kurze Zusammenfassung schließt sich in Kapitel 6 an.

Im Anhang finden sich eine umfassende Zusammenstellung der verwendeten Notationen (Kapitel A), eine ausführliche Erörterung der relevanten kinematischen Randbedingungen (B), eine kurze Einführung in das zur Parameteranpassung verwendete *bootstrap*-Verfahren (C), die bereits angesprochene modellunabhängige Analyse (D) und – neben einigen Ergänzungen (E) und technischen Details (F) – natürlich die notwendigen Feynman-Diagramme (G) und -Regeln (H) sowie, darüber hinaus, maschinenlesbare Versionen der wichtigsten berechneten Funktionen (I).

QUANTENCHROMODYNAMIK UND EFFEKTIVE FELDTHEORIEN

In diesem Kapitel werden, ausgehend von der fundamentalen Quantenchromodynamik, die relevanten Konstruktionsmerkmale der chiralen Störungstheorie sowie die Lagrangedichte der in dieser Arbeit verwendeten chiralen effektiven Feldtheorie zusammengestellt.

2.1 QUANTENCHROMODYNAMIK

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist eine nicht-abelsche $SU(3)$ -Eichtheorie, welche die fundamentalen Wechselwirkungen der fermionischen Materiefelder (Quarks) untereinander durch Austausch acht masseloser Eichbosonen (Gluonen) beschreibt [5–7].

Es existieren insgesamt 18 verschiedene Quarks, die in sechs *flavors* mit jeweils drei *color*-Freiheitsgraden auftreten und die in Tabelle 2.1 auf der nächsten Seite eingetragen, auffällig unterschiedlichen Massen aufweisen.

2.1.1 Lagrangedichte und Symmetrie des Grundzustands

Kombiniert man die drei Dirac-Spinoren eines flavors f zu einem Vektor q_f , so lautet die Poincaré- und lokal eichinvariante Lagrangedichte der QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=u,\dots,t} \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a,\mu\nu},$$

wobei die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} \mathcal{A}_\mu^a$$

die acht Gluonenfelder \mathcal{A}_μ^a – entsprechend den Generatoren einer $SU(3)$ – einführt. g_s ist die starke Kopplungskonstante, die

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a - g_s f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$$

sind Feldstärketensoren, welche die antisymmetrischen $SU(3)$ -Strukturkonstanten f^{abc} enthalten (die Definitionen sind sämtlich aus [27] entnommen, woran sich auch die weiteren Ausführungen die-

Flavor:	<i>up</i>	<i>down</i>	<i>strange</i>
Masse in MeV:	≈ 2	≈ 5	≈ 95
Flavor:	<i>charm</i>	<i>beauty</i>	<i>truth</i>
Masse in GeV:	≈ 1	≈ 4	≈ 173

Tabelle 2.1: Quarkmassen, entnommen aus [26].

ses Kapitels orientieren). Der verallgemeinerte kinetische Term der Lagrangedichte (derjenige, der quadratisch in \mathcal{G} ist) lässt eine Gluonenselbstwechselwirkung zu, die eines der Hauptcharakteristika dieser Yang-Mills-Theorie ist [28, 29].

Bezüglich einer typischen hadronischen Skala der Symmetriebrechung $\Lambda := 4\pi F \approx 1.156 \text{ GeV}$ (mit der Pionzerfallskonstante F) sind die ersten beiden Quarks (u und d) ausgesprochen leicht, so dass im niederenergetischen Bereich der QCD nur diese eine signifikante Rolle spielen. Darüber hinaus ist die Summe der Stromquarkmassen der leichten Hadronen sehr viel kleiner als die beobachtete Gesamtmasse, so dass es in erster Näherung ausreicht, die Lagrangedichte im chiralen Grenzfall verschwindender Quarkmassen,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d} \bar{q}_f i\gamma^\mu D_\mu q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a,\mu\nu},$$

zu betrachten. Unter Verwendung der beiden Projektionsoperatoren $P^L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ und $P^R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ zerfällt diese in – bezüglich der Helizität – getrennte links- und rechtshändige Quarkfelder $q^{L|R} = P^{L|R} q$,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d} \left(\bar{q}_f^L i\gamma^\mu D_\mu q_f^L + \bar{q}_f^R i\gamma^\mu D_\mu q_f^R \right) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a,\mu\nu}.$$

Da die kovariante Ableitung flavor-unabhängig ist, existiert eine globale $U(2)_L \times U(2)_R$ -Invarianz bezüglich der Quarkfeldtransformationen

$$q^{L|R} \mapsto U^{L|R} q^{L|R}, \quad \text{wobei} \quad U^{L|R} = \exp\left(-\frac{i}{2} \tau^a \theta_a^{L|R} - i\theta^{L|R}\right),$$

mit den drei Pauli-Matrizen τ^a und Parametern θ . Der Vektor q entspricht hierbei dem zweikomponentigen Quarkisospinor $(q_u, q_d)^T$. Verwendet man das Noethertheorem [30] sowie die Methode von

Gell-Mann und Lévy [31], so finden sich $3 + 3 + 1 + 1 = 8$ erhaltene Ströme L_a^μ , R_a^μ , L^μ und R^μ , die in den Linearkombinationen

$$\begin{aligned} V_a^\mu &= R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} q, & A_a^\mu &= R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} q, \\ V^\mu &= R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, & A^\mu &= R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 q, \end{aligned}$$

das heißt in (Triplet- und Singulett-) Vektor- und Axialvektorströmen, zusammengefasst werden können. Die globale $U(2)_L \times U(2)_R$ zerfällt in eine $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ -Symmetrie, wobei die $U(1)_V$ der Baryonenzahlerhaltung entspricht. Die $U(1)_A$ überlebt durch Fluktuationen im Gluonenhintergrund eine Quantisierung nicht und erzeugt eine hier nicht weiter relevante Anomalie [32–34]; die verbleibende $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ist die chirale Symmetriegruppe der QCD für zwei masselose Quarks.

2.1.2 Symmetriebrechung

Die erwähnten erhaltenen Ströme V_a^μ und A_a^μ implizieren die Existenz von Ladungsoperatoren $Q_{V,a}$ und $Q_{A,a}$, die mit dem Hamiltonoperator im chiralen Grenzfall kommutieren und daher die Existenz von degenerierten Zuständen diametraler Parität im Hadronenspektrum nahe legen. Diese Zustände sollten sich in Multipletts entsprechend der Dimensionalität irreduzibler Darstellungen der chiralen Symmetriegruppe anordnen. Empirisch beobachtet man jedoch keine sogenannte Paritätsverdoppelung, weshalb davon ausgegangen werden kann, dass es in der QCD zu einer spontanen Symmetriebrechung kommt; der Grundzustand ist daher nicht mehr invariant unter der vollständigen chiralen Symmetriegruppe.

Dem Coleman-Theorem zufolge [35] bestimmt die Symmetrie des Grundzustandes die Symmetrie des Spektrums und umgekehrt sollten sich aus dem Spektrum Informationen über den Grundzustand ableiten lassen. Sei n_H die Anzahl an Generatoren der Grundzustandssymmetrie und n_G die Zahl der Generatoren der kompletten Symmetriegruppe des Hamiltonoperators – also sechs für die $SU(2)_L \times SU(2)_R$ – so folgt aus dem Goldstonetheorem [14, 36] die Existenz von $n_G - n_H$ masselosen Goldstonebosonen. Da sich im Teilchenspektrum drei Pionen finden, die sehr viel leichter sind als sämtliche übrigen nur aus Up- und Down-Quarks zusammengesetzten Hadronen, identifiziert man dieses Triplet mit den Goldstonebosonen einer spontan zur $SU(2)_V$ gebrochenen Grundzustandssymmetrie der Quantenchromodynamik.

Eine zusätzliche explizite Symmetriebrechung durch die Massenmatrix \mathcal{M} mischt die links- und rechtshändigen Felder gemäß

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = -\bar{q}^{\text{R}} \mathcal{M} q^{\text{L}} - \bar{q}^{\text{L}} \mathcal{M}^{\dagger} q^{\text{R}}, \quad \text{mit} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix},$$

so dass die oben definierten Ströme die expliziten Divergenzen

$$\partial_{\mu} V_a^{\mu} = i\bar{q}[\mathcal{M}, \frac{1}{2}\tau_a]q \quad \text{und} \quad \partial_{\mu} A_a^{\mu} = i\bar{q}\{\mathcal{M}, \frac{1}{2}\tau_a\}\gamma_5 q$$

entwickeln und die chirale Symmetrie somit nicht mehr erhalten ist; dies erklärt die kleine, jedoch nicht vollständig verschwindende Pionenmasse [27].

2.2 CHIRALE STÖRUNGSTHEORIE

Bisher ist es nicht möglich, aus der Quantenchromodynamik als fundamentale Theorie ein vollständiges Hadronenspektrum oder starke Wechselwirkungsprozesse mit beliebiger Genauigkeit abzuleiten. Für große Energien – ab einigen GeV – ist zwar asymptotische Freiheit zu erwarten [5, 8, 9], im niederenergetischen Bereich hingegen ist eine perturbative Beschreibung mit Quarkfeldern nicht möglich.

Eine Alternative hierzu ist eine effektive Feldtheorie mit Goldstonebosonen als dynamische Freiheitsgrade, die sogenannte chirale Störungstheorie (*chiral perturbation theory*, χPT) [12, 13].

2.2.1 Effektive Feldtheorien

Die Idee, die hinter dem Konzept einer effektiven Feldtheorie steht, lässt sich vereinfachend zusammenfassen zu

... if one writes down the most general possible Lagrangian, including all terms consistent with assumed symmetry principles, and then calculates matrix elements with this Lagrangian to any given order of perturbation theory, the result will simply be the most general possible S matrix consistent with analyticity, perturbative unitarity, cluster decomposition and the assumed symmetry principles. S. Weinberg [11]

Diese Konstruktionsvorschrift liefert jedoch a priori eine unendliche Anzahl an möglichen Termen, da bezüglich des Komplexitätsgrades neben den Symmetrien keinerlei weitere Einschränkungen vorgenommen werden. Für praktische Anwendungen ist es daher

offensichtlich notwendig, eine konsistente Methode zu entwickeln, welche die zur Verfügung stehenden Terme nach ihrer Relevanz klassifiziert, so dass mit einer *endlichen* Anzahl an Ausdrücken hinreichend genaue Approximationen physikalischer Observablen berechnet werden können.

2.2.2 Klassisches Zählschema

Bezeichne p eine bezüglich der hadronischen Skala Λ kleine Größe – Massen oder Impulse – so können die einzelnen Terme einer effektiven Lagrangedichte \mathcal{L} als Potenzreihe in p/Λ entwickelt werden. In einer rein pionischen Theorie treten Impulse – gleichzusetzen mit Ableitungen – immer lorentzinvariant und daher quadratisch auf. Weiterhin ist die Quarkmasse als kleinste mögliche Einheit proportional zur quadrierten Pionenmasse [37], so dass sich die vollständige effektive Lagrangedichte als Reihe einzelner Beiträge mit geradzahlgiger Ordnung darstellen lässt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots$$

Die chirale Ordnung eines einzelnen Terms dieser Lagrangedichte beziehungsweise eines einzelnen beitragenden Diagramms lässt sich mit dem Weinberg'schen Zählschema [11] bestimmen: Lineares Reskalieren der äußeren Impulse ($p_i \rightarrow tp_i$) sowie quadratisches Reskalieren der leichten Quarkmassen ($m \rightarrow t^2m$)¹ liefert einen globalen Koeffizienten t^n und damit einen Beitrag der chiralen Ordnung n zu $\mathcal{L}^{(n)}$ (im Folgenden mit $\mathcal{O}(n)$ abgekürzt).

Jeder einzelne Term einer effektiven Lagrangedichte erhält darüber hinaus als Koeffizient eine Niederenergiekopplungskonstante (*low-energy coupling constant*, LEC), die allerdings nicht aus der Theorie abgeleitet werden kann sondern durch Anpassungen an experimentelle Daten fixiert werden muss.

2.2.3 Resonanzen

Neben den Goldstonebosonen existieren im niederenergetischen Bereich bis zu 1 GeV Resonanzen, die in der klassischen χ PT nicht enthalten sind, jedoch – wie zum Beispiel im Falle des Vektormesondominanzmodells [15, 16] – eine durchaus gewichtige Rolle

¹ Wie bereits erwähnt ist $m \propto m_\pi^2$ [37], so dass durch diese Wahl Konsistenz mit der Massenschalenbedingung $p^2 = m_\pi^2$ sichergestellt wird.

spielen können. Ohne expliziten Einbau einer Resonanz als zusätzlichen Freiheitsgrad liefert deren Propagator

$$\frac{1}{q^2 - m^2} \approx -\frac{1}{m^2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{m^2} + \left(\frac{q^2}{m^2} \right)^2 + \dots \right\}$$

nur für $|q^2| < m^2$ Beiträge, die in Kopplungen absorbiert werden können [38–40]. Berücksichtigung als neue dynamische Größe erlaubt jedoch die Überwindung dieser natürlichen Barriere und liefert schließlich eine sogenannte chirale effektive Feldtheorie (χ EFT), deren Konvergenzbereich durch die Masse der leichtesten, *nicht* eingebauten Resonanz nach oben hin beschränkt wird. Nach Inklusion des Rho- und Omegamesons liegt diese Grenze in der Region der hadronischen Skala $\Lambda = 4\pi F$, also bei rund 1 GeV.

Die Massen der instabilen Teilchen sind dabei komplexe Größen, deren renormierte Werte auf die Polposition des zugeordneten vollständigen (*dressed*) Propagators gesetzt werden, um Unabhängigkeit von Feldredefinitionen zu gewährleisten [41–48].

2.3 EFFEKTIVE LAGRANGEDICHTE

Die Lagrangedichte einer effektiven Feldtheorie setzt sich aus einer Vielzahl einzelner Bausteine zusammen, denen jeweils wohldefinierte Transformationscharakteristika bezüglich der chiralen Gruppe $G = \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$, mit Elementen (L, R) , sowie diskrete chirale Ordnungen $\mathcal{O}(n)$ zugewiesen werden können. Diese Ordnungen beruhen dabei auf einem Zählschema, das im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht nur Pionen sondern auch Rhomesonen beachten muss.

2.3.1 Zählschema und Präzision

Die empirischen Massen der leichten (Vektor-) Mesonen sind auffällig unterschiedlich und reichen (im Falle des Rhomesons) nahe an die hadronische Skala $\Lambda = 4\pi F$ heran – eine Skalenseparation ist auf den ersten Blick daher nicht offensichtlich. Allerdings kann im Rahmen der *large- N_c -QCD* ein Argument gefunden werden, welches das Zählschema weniger als Ausprägung einer manifesten Skalenseparation sondern vielmehr als perturbative Entwicklung im kleinen Parameter $1/N_c$ interpretiert [18, 49].

Referenz [18] folgend verhält sich die Skala Λ für große Werte von N_c proportional zu $\sqrt{N_c}$ während die Mesonenmassen m gegen endliche Werte streben und der Entwicklungskoeffizient m/Λ daher

klein wird [50, 51]. Terme der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(n)$ skalieren wie $(m/\Lambda)^n$ und somit letztendlich wie $(1/\sqrt{N_c})^n$, so dass im Folgenden sowohl Pionen- als auch Rhomesonen gleich behandelt werden können. Deren Massen sowie Ableitungen der entsprechenden Felder sind damit konsequent von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$.

Bezeichne die Abkürzung $\varepsilon := 1/\sqrt{N_c}$ den Entwicklungskoeffizienten, so werden beliebige physikalische Observablen σ als Reihe mit Beiträgen verschiedener chiraler Ordnung $\sigma^{(n)}$ gemäß

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \varepsilon\sigma^{(1)} + \varepsilon^2\sigma^{(2)} + \varepsilon^3\sigma^{(3)} + \dots$$

dargestellt. Da praktische Rechnungen lediglich eine endliche Anzahl an Termen berücksichtigen, wird ein systematischer Fehler eingeführt, der mit der Größe ε^δ abgeschätzt werden kann. δ bezeichnet dabei die Differenz der Ordnungen der vernachlässigten Beiträge sowie der führenden Beiträge mit nicht-verschwindendem $\sigma^{(n)}$.

Die in dieser Arbeit betrachteten Prozesse beinhalten Terme mit geraden Ordnungen bis einschließlich $\mathcal{O}(4)$, so dass $\mathcal{O}(6)$ vernachlässigt wird. Die minimal beitragende Ordnung ist im besten Falle $\mathcal{O}(2)$, welche ein $\delta = 6 - 2 = 4$ und daher einen systematischen Fehler von $\varepsilon^4 = 1/N_c^2$ impliziert. Für $N_c = 3$ bedeutet dies daher eine (optimistisch abgeschätzt) mindestens zehnprozentige Unsicherheit aller vorgenommenen Rechnungen. Im späteren Kapitel 5.1 wird auf diese Fehler noch einmal eingegangen.

2.3.2 Bausteine

Die relevanten Bausteine für die in den folgenden Abschnitten zusammenzustellende Lagrangedichte einer chiralen effektiven Feldtheorie bestehen aus Quantenfeldern beziehungsweise deren (kovarianten) Ableitungen. Soweit nicht anders erwähnt sind diese Bausteine [27] entnommen.

Die dynamischen Freiheitsgrade sind 2×2 -Matrizen, welche die physikalischen Teilchen durch Felder in kartesischen Koordinaten parametrisieren.² Die drei Pionen sind in einem

$$U := e^{i\phi/F} \quad \text{mit} \quad \phi := \pi^a \tau^a = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

sowie dem Transformationsverhalten $U \mapsto RUL^\dagger$ bezüglich der chiralen Gruppe G , zusammengefasst. Diesem U wird dabei die

² Die Transformation zwischen kartesischen und sphärischen Koordinaten ist in Anhang A.4 definiert.

Ordnung $\mathcal{O}(0)$ zugewiesen; die drei τ^a sind die Pauli-Matrizen, die Pionzerfallskonstante $F \approx 92 \text{ MeV}$ ist eine der Kopplungen und experimentell bekannt. Das Photon ist als externes Feld mit dem physikalischen Photonfeld \mathcal{A}_μ über

$$v_\mu := -\frac{1}{2}e\mathcal{A}_\mu\tau^3 \quad (2.2)$$

verknüpft und von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$, um Konsistenz bezüglich der weiter unten definierten kovarianten Ableitung $D_\mu U$ sicherzustellen (in dieser Arbeit ist $e > 0$ mit $e^2/4\pi \approx 1/137$).

Die drei möglichen Rhomesonen können in einem Feld ρ_μ (analog zu U von der Ordnung $\mathcal{O}(0)$) zusammengefasst werden, welches jedoch inhomogen transformierend gewählt wird [38]. Es ist

$$\rho_\mu := \frac{1}{2}\rho_\mu^a\tau^a \quad \text{mit} \quad \rho_\mu \mapsto K\rho_\mu K^\dagger - \frac{i}{g}\partial_\mu K K^\dagger, \quad (2.3)$$

wobei der Kompensator K durch das Transformationsverhalten der unitären Wurzel $u := \sqrt{U}$ mit

$$u \mapsto \sqrt{RUL^\dagger} \equiv RuK^{-1} \quad \text{und} \quad K = \sqrt{RUL^\dagger}^{-1}R\sqrt{U},$$

festgelegt wird; g ist eine weitere Kopplungskonstante. Die den beiden Vektoren v_μ und ρ_μ zugeordneten Feldstärketensoren

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &:= \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu \quad \text{und} \\ \rho_{\mu\nu} &:= \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu - ig[\rho_\mu, \rho_\nu] \end{aligned} \quad (2.4)$$

transformieren jeweils homogen (das heißt $X_{\mu\nu} \mapsto KX_{\mu\nu}K^\dagger$) und sind von den Ordnungen $\mathcal{O}(2)$ ($f_{\mu\nu}$) beziehungsweise $\mathcal{O}(0)$ (der Kommutator in $\rho_{\mu\nu}$) und $\mathcal{O}(1)$ (die Ableitungen in $\rho_{\mu\nu}$).

Die kovariante Ableitung der Pionenfelder ist definiert gemäß

$$D_\mu U := \partial_\mu U + i[U, v_\mu], \quad \text{mit} \quad D_\mu U \mapsto RD_\mu UL^\dagger, \quad (2.5)$$

generiert Wechselwirkungen mit Photonen und ist insgesamt von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ (weiterhin ist $D_\mu U^\dagger = (D_\mu U)^\dagger$). Weitere Bausteine dieser Ordnung sind Kombinationen der bisherigen, insbesondere zum einen der inhomogen transformierende chirale Zusammenhang

$$\Gamma_\mu := \frac{1}{2}\{u^\dagger(\partial_\mu - iv_\mu)u + u(\partial_\mu - iv_\mu)u^\dagger\}, \quad (2.6)$$

$\mathcal{O}(n)$	Felder	Ableitungen	Massen	Kompositionen
0	π, ρ_μ			$U, u, \rho_{\mu\nu}$
1	v_μ	$\partial_\mu\pi, \partial_\mu\rho_\nu$		$u_\mu, D_\mu U, \Gamma_\mu, \rho_{\mu\nu}$
2		$\partial_\mu v_\nu$	m_π^2, m_ρ^2	$\chi, \chi_\pm, f_{\mu\nu}, f_\pm^{\mu\nu}$

Tabelle 2.2: Bausteine der χ EFT-Lagrangedichte mit deren zugewiesenen chiralen Ordnungen $\mathcal{O}(n)$. $\rho_{\mu\nu}$ enthält Beiträge der Ordnungen $\mathcal{O}(0)$ und $\mathcal{O}(1)$.

mit $\Gamma_\mu \mapsto K\Gamma_\mu K^\dagger - \partial_\mu K K^\dagger$, zum anderen ein homogen transformierendes chirales Vielbein

$$u_\mu := i\{u^\dagger\partial_\mu u - u\partial_\mu u^\dagger - i(u^\dagger v_\mu u - uv_\mu u^\dagger)\}. \quad (2.7)$$

Die Masse der Pionen wird durch die beiden Objekte

$$\chi := \mathbb{1}m_\pi^2 \quad \text{und} \quad \chi_\pm := u^\dagger\chi u^\dagger \pm u\chi^\dagger u = m_\pi^2(U^\dagger \pm U),$$

jeweils von der Ordnung $\mathcal{O}(2)$, eingeführt. Letzteres ist, genau wie der modifizierte Feldstärketensor

$$f_{\mu\nu}^\pm := uf_{\mu\nu}u^\dagger \pm u^\dagger f_{\mu\nu}u \quad (2.8)$$

mit der Ordnung $\mathcal{O}(2)$, aus [38] entnommen.

Eine Zusammenfassung dieser Bausteine mit den jeweils zugewiesenen chiralen Ordnungen findet sich in Tabelle 2.2.

2.3.3 Pionische Lagrangedichte

Die beiden pionischen Anteile der Lagrangedichte in einer für den SU(2)-Sektor nützlichen Form (entnommen aus [27], ursprünglich zu finden in [12] und [52]) ohne Terme, die ausschließlich externe Felder beinhalten, lauten für die chirale Ordnung $\mathcal{O}(2)$

$$\mathcal{L}_\pi^{(G)} = \frac{1}{4}F^2 \text{tr}(D_\mu U D^\mu U^\dagger) + \frac{1}{4}F^2 \text{tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \quad (2.9)$$

beziehungsweise für die chirale Ordnung $\mathcal{O}(4)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\pi^{(s)} = & \frac{1}{4}l_1 \operatorname{tr}^2(D_\mu U D^\mu U^\dagger) \\
& + \frac{1}{4}l_2 \operatorname{tr}(D_\mu U D_\nu U^\dagger) \operatorname{tr}(D^\mu U D^\nu U^\dagger) \\
& + \frac{1}{16}(l_3 + l_4) \operatorname{tr}^2(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\
& + \frac{1}{8}l_4 \operatorname{tr}(D_\mu U D^\mu U^\dagger) \operatorname{tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\
& + l_5 \operatorname{tr}(f_{\mu\nu} U f^{\mu\nu} U^\dagger) \\
& + \frac{i}{2}l_6 \operatorname{tr}\left(f_{\mu\nu}(D^\mu U D^\nu U^\dagger + D^\mu U^\dagger D^\nu U)\right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

und beinhalten die Kopplungen F sowie l_1 bis l_6 .

2.3.4 Vektormesonische Lagrangedichte

Der Ausgangspunkt für die Konstruktion einer vektormesonischen Lagrangedichte ist die allgemeinste Struktur mit dimensionslosen Kopplungen, die sich aus einem homogen transformierenden Feld $V_\mu := \frac{1}{2}V_\mu^a \tau^a$ (mit $V_\mu \mapsto K V_\mu K^\dagger$) zusammensetzen lässt, nämlich

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V = & -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(V_{\mu\nu} V^{\mu\nu}) + m^2 \operatorname{tr}(V_\mu V^\mu) + ig \operatorname{tr}(V_{\mu\nu} [V^\mu, V^\nu]) \\
& - g^2 \operatorname{tr}(V_\mu V^\mu V_\nu V^\nu) + g^2 \operatorname{tr}(V_\mu V_\nu V^\mu V^\nu),
\end{aligned}$$

wobei $V_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu$ mit $\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu + [\Gamma_\mu, V_\nu]$. Selbstkonsistenzbedingungen sorgen dafür, dass lediglich eine einzige Kopplungskonstante g auftritt [53], zusätzliche Zwangsbedingungen fixieren die Zahl unabhängiger Komponenten der Felder V_μ [1, 54]. Mit der Abkürzung $\mathcal{V}_{\mu\nu} := V_{\mu\nu} - ig [V_\mu, V_\nu]$ lässt sich dies zusammenfassen zu

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{V}_{\mu\nu} \mathcal{V}^{\mu\nu}) + m^2 \operatorname{tr}(V_\mu V^\mu),$$

deren Invarianz bezüglich $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen und korrektes Hochenergieverhalten [38] durch die beiden Identifikationen $\mathcal{V}_{\mu\nu} \rightarrow \rho_{\mu\nu}$ und $V_\mu \rightarrow \rho_\mu - \frac{i}{g}\Gamma_\mu$ gewährleistet werden kann; generell sind physikalische Observablen unempfindlich gegen Feldredefinitionen [55]. Die effektive Lagrangedichte für Rhomesonen mit massiver Yang-Mills-Struktur lautet schließlich [56]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho^{(Y)} = & -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu}) \\
& + \left(\hat{m}_\rho^2 + c_\chi \operatorname{tr}(\chi_+)\right) \operatorname{tr}\left((\rho_\mu - \frac{i}{g}\Gamma_\mu)(\rho^\mu - \frac{i}{g}\Gamma^\mu)\right),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

mit den Kopplungen g und c_χ . Der c_χ -Term ist ein zusätzlicher, mit den Symmetrien verträglicher Baustein, der Auswirkungen auf die Masse des Rhomesons jenseits des chiralen Grenzfalls (\hat{m}_ρ) hat. Da im Falle perfekter Isospin-Symmetrie $\text{tr}(\chi_+) = 4m_\pi^2$ (bis auf Terme höherer Ordnung) wird die physikalische, komplexe Rhomasse – diejenige, die im Propagator verwendet wird – mit $m_\rho^2 = \hat{m}_\rho^2 + 4c_\chi m_\pi^2$ identifiziert. Darüber hinaus wird die KSRF-Relation³ $2g^2 F^2 = m_\rho^2$ [57, 58] verwendet.

Der erste, kinetische Term in Gleichung (2.11) liefert mit den in Tabelle 2.2 zusammengefassten Bausteinen Vertizes mit drei oder vier Rhomesonen, die von den Ordnungen $\mathcal{O}(1)$ beziehungsweise $\mathcal{O}(0)$ sind, da Ableitungen nicht zwingend Bestandteil lorentz-invarianter Terme sein müssen. Eine Unterdrückung höherer Schleifen durch chirale Ordnungen ist damit jedoch nicht sichergestellt, da hierzu die Vertexordnung $\mathcal{O}(2)$ nicht unterschritten werden darf. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen ist wiederum ein large- N_c -Argument (ebenfalls [18] entnommen) und beruht auf der Feststellung, dass Vertizes mit n Vektormesonen wie $N_c^{1-n/2}$ skalieren [50, 59]. Dies bedeutet jedoch, dass neben der bisherigen, gleichen Behandlung von Pionen und Rhomesonen in Anwesenheit letzterer eine zusätzliche Ordnungskorrektur der Form $N_c^{1-n/2} = (N_c^{-1/2})^{n-2} \doteq \mathcal{O}(n-2)$ vorgenommen werden muss. Für $n = 3$ Rhomesonen verschiebt sich die Ordnung somit von $\mathcal{O}(1)$ zu $\mathcal{O}(2)$, für $n = 4$ von $\mathcal{O}(0)$ zu $\mathcal{O}(2)$, so dass eine systematische Unterdrückung höherer Schleifen durch das Zählschema gewährleistet wird.

Weitere sechs mögliche Beiträge zur vektormesonischen Lagrange-dichte finden sich in [38] und bilden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho^{(\text{E})} = & e_1 \text{tr}(\rho_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu}) \\ & + ie_2 \text{tr}(\rho_{\mu\nu} [u^\mu, u^\nu]) \\ & + ie_3 \text{tr}\left((\rho_\mu - \frac{i}{g}\Gamma_\mu) [u_\nu, f_-^{\mu\nu}]\right) \\ & + e_4 \text{tr}\left((\rho_\mu - \frac{i}{g}\Gamma_\mu) [u^\mu, \chi_-]\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die beiden übrigen Terme

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}\left((\rho_\mu - \frac{i}{g}\Gamma_\mu) u^\nu u^\alpha u^\beta\right) \quad \text{und} \\ & \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}\left((\rho_\mu - \frac{i}{g}\Gamma_\mu) \{u^\nu, f_+^{\alpha\beta}\}\right), \end{aligned}$$

³ Benannt nach Kawarabayashi, Suzuki, Riazuddin und Fayyazuddin

generieren Vertizes mit einer ungeraden Anzahl an Pionenlinien der Ordnungen drei oder vier und sind daher für diese Arbeit nicht relevant.

2.3.5 Effektive Lagrangedichte

Zusammengefasst ergibt sich die im Folgenden verwendete χ_{EFT} -Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\chi_{\text{EFT}}} = \sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_{\pi}^{(G_i)} + \sum_{i=1}^6 \mathcal{L}_{\pi}^{(S_i)} + \sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_{\pi}^{(Y_i)} + \sum_{i=1}^4 \mathcal{L}_{\pi}^{(E_i)} \quad (2.13)$$

mit insgesamt elf unbekanntenen Niederenergiekopplungskonstanten l_1 bis l_6 , e_1 bis e_4 und c_χ ; g kann durch die KSRF-Relation eliminiert werden. Die Zahlenwerte von F sowie der Massen m_π und m_ρ sind bekannt und in Anhang A.1 verzeichnet.

Die relevanten Vertizes für die in Kapitel 4 betrachteten niederenergetischen Prozesse auf Einschleifenniveau sind (aufgelöst nach möglichen chiralen Ordnungen) in Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite zusammengefasst. Die Namensgebung der einzelnen Terme der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\chi_{\text{EFT}}}$ orientiert sich an der Reihenfolge der einzelnen Summanden in den Gleichungen (2.9) (G_1 und G_2), (2.10) (S_1 bis S_6), (2.11) (Y_1 und Y_2) sowie (2.12) (E_1 bis E_4).

		$\mathcal{O}(n)$	Vertizes
$\mathcal{L}_\pi^{(G)}$	G1	2	$\pi^2\gamma, \pi^2\gamma^2, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2$
	G2	2	π^4, π^6
$\mathcal{L}_\pi^{(S)}$	S1	4	$\pi^4, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2, \pi^6$
	S2	4	$\pi^4, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2, \pi^6$
	S3	4	π^4, π^6
	S4	4	$\pi^2\gamma, \pi^2\gamma^2, \pi^4, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2, \pi^6$
	S5	4	$\pi^2\gamma^2, \pi^4\gamma^2$
	S6	4	$\pi^2\gamma, \pi^2\gamma^2, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2$
$\mathcal{L}_\rho^{(Y)}$	Y1	2	ρ^3, ρ^4
		2	$\pi^2\rho^2, \pi^4\rho^2$
	Y2	3	$\gamma\rho, \pi^2\rho, \pi^2\gamma\rho, \pi^4\rho, \pi^4\gamma\rho$
	4	$\pi^2\gamma, \pi^2\gamma^2, \pi^4, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2, \pi^6$	
$\mathcal{L}_\rho^{(E)}$	E1	2	$\gamma\rho^2, \pi^2\gamma\rho^2$
		3	$\gamma\rho, \pi^2\gamma\rho, \pi^4\gamma\rho$
	E2	2	$\pi^2\rho^2, \pi^2\gamma\rho^2, \pi^4\rho^2$
		3	$\pi^2\rho, \pi^2\gamma\rho, \pi^4\rho, \pi^4\gamma\rho$
	E3	3	$\pi^2\gamma\rho, \pi^4\gamma\rho$
		4	$\pi^2\gamma^2, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2$
	E4	3	$\pi^2\rho, \pi^2\gamma\rho, \pi^4\rho, \pi^4\gamma\rho$
		4	$\pi^2\gamma, \pi^2\gamma^2, \pi^4, \pi^4\gamma, \pi^4\gamma^2, \pi^6$

Tabelle 2.3: Vertexinhalt der einzelnen Terme in $\mathcal{L}_{\chi\text{EFT}}$ aus Gleichung (2.13), sortiert nach chiralen Ordnungen $\mathcal{O}(n)$, mit zusätzlicher $\rho^{3,4}$ -Vertexkorrektur.

QUANTENFELDTHEORIEN

In diesem Kapitel werden einige technische Aspekte von Quantenfeldtheorien im Allgemeinen und der in dieser Arbeit verwendeten chiralen effektiven Feldtheorie im Besonderen zusammengefasst.

3.1 MATRIXELEMENTE

Die zentrale Größe einer jeden quantenfeldtheoretischen Rechnung ist die sogenannte S -Matrix, der unitäre Grenzfall des Zeitentwicklungsoperators, der die physikalische Information eines Streuprozesses in Form einer Übergangswahrscheinlichkeit zwischen Wellenpaketen eines Anfangs- und Endzustandes kodiert.

Die in diesem Abschnitt verwendeten Definitionen, Notationen und Konventionen orientieren sich an [4].

3.1.1 Green'sche Funktionen

Bezeichnen die Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{p}' vereinfachend sowohl Impuls als auch sämtliche weitere Charakteristika von ein- beziehungsweise auslaufenden Teilchen eines beliebigen Streuprozesses mit Zeitentwicklungsoperator e^{-iHt} , so definiert

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle_{\text{in}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}' | e^{-iH(2t)} | \mathbf{p} \rangle =: \langle \mathbf{p}' | \mathcal{S} | \mathbf{p} \rangle$$

formal die unitäre S -Matrix (\mathcal{S}) der Theorie; diese ist mit der interessanteren Übergangsmatrix \mathcal{T} gemäß $\mathcal{S} = \mathbb{1} + i\mathcal{T}$ verknüpft, die den eigentlichen Wechselwirkungsanteil beschreibt. Das für praktische Anwendungen relevante invariante Matrixelement \mathcal{M} ist, mit einer gesamtimpulserhaltenden Deltadistribution für die ein- und auslaufenden p_i und p'_i , definiert gemäß

$$\langle \mathbf{p}' | i\mathcal{T} | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_i p_i - \sum_i p'_i) i\mathcal{M}(\mathbf{p}, \mathbf{p}').$$

Zur Berechnung des Matrixelementes wird die weiter unten ausführlicher behandelte LSZ-Reduktionsformel¹ verwendet, die auf n -Punkt-Korrelationsfunktionen, den Green'schen Funktionen G , beruht. Diese sind chronologische (zeitgeordnete) Produkte orts-

¹ Benannt nach Lehmann, Symanzik und Zimmermann, vgl. Abschnitt 3.1.2

und zeitabhängiger Feldoperatoren $\phi_i = \phi_i(x_i)$, ausgewertet zwischen dem Vakuumzustand der Theorie. Diese Produkte können als Summe von Feynman-Diagrammen aufgefasst werden, so dass vereinfachend

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | \mathcal{T}\{\phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n)\} | 0 \rangle \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{Summe aller verbundenen} \\ \text{Diagramme mit } n \text{ externen Linien} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

gilt, wobei die Zeitordnung \mathcal{T} in Anhang A.2 definiert ist; im Allgemeinen tragen die Feldoperatoren weitere Lorentz- oder Isospinindizes, die hier im Index $i = 1, \dots, n$ subsumiert sind.

Fouriertransformierte von Zweipunkt-Korrelationsfunktionen,

$$S_f(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle 0 | \mathcal{T}\{\phi_{\text{frei}}(x)\phi_{\text{frei}}(0)\} | 0 \rangle,$$

beschreiben die raumzeitliche Evolution eines keiner Wechselwirkung unterworfenen Teilchens und werden freie (*undressed*) Propagatoren genannt. Vollständige (*dressed*) Propagatoren S hingegen beinhalten Wechselwirkungen und werden durch Einfügen einer unendlichen Anzahl an Selbstenergieeinschüben E (die Summe aller einteilchenirreduziblen Schleifendiagramme mit zwei externen Linien ohne externe Propagatoren) gemäß

$$\begin{aligned} S &= S_f + S_f E S_f + S_f E S_f E S_f + \cdots \\ &= S_f + S_f E (S_f + S_f E S_f + \cdots) = S_f + S_f E S \end{aligned}$$

konstruiert. Auflösen nach S sowie Entwicklung der E liefert im Allgemeinen vollständige (nicht renormierte) Propagatoren mit einem Residuum $R \neq 1$.

3.1.2 Reduktionsformel

Die LSZ-Reduktion [60, 61] verknüpft schließlich Matrixelemente \mathcal{M} mit (in den Impulsraum fouriertransformierten) Green'schen n -Punkt-Funktionen (auf der Massenschale, das heißt $p_i^2 = m_i^2$, angedeutet durch ms) und lautet [4]

$$i\mathcal{M}(p_1, \dots, p_n) = \left[\prod_{i=1}^n R_i^{-1/2} S_{f,i}^{-1} \right] G(p_1, \dots, p_n) \Big|_{\text{ms}}; \quad (3.2)$$

die R_i sind dabei die Residuen der vollständigen externen Propagatoren. Im Folgenden werden sowohl die Argumente p_1, \dots, p_n als auch die Produktzeichen $\prod_{i=1}^n$ (angedeutet durch $[\cdot]$) unterdrückt.

Definiert man eine trunkeerte Green'sche Funktion G_t – die Summe aller Diagramme *ohne* externe Linien – durch Abseparation von vollständigen Propagatoren gemäß

$$G = [S_i] G_t = [R_i S_{f,i}] G_t, \quad (3.3)$$

so folgt für das Matrixelement aus Gleichung (3.2) schließlich

$$i\mathcal{M} = [\sqrt{R_i}] G_t. \quad (3.4)$$

Bis auf konstante Koeffizienten sind diese G_t die sogenannten Vertexfunktionen.

3.1.3 Feynman-Diagramme

Prinzipiell tragen zu den trunkeerten Green'schen Funktionen eines Prozesses *alle* Impulsraumdiagramme bei, die eine kompatible Signatur (Anzahl und Teilchentyp) externer Linien aufweisen – und damit potentiell unendlich viele. Aus diesem Grund ist es notwendig, Kriterien für die Klassifikation einzelner Diagramme zu finden, um sie einer Gruppe vergleichbarer Relevanz zuordnen zu können. Die beiden zur Verfügung stehenden Merkmale sind zum einen die Anzahl an Schleifen, welche einer Entwicklung in der Wirkung \hbar entsprechen, zum anderen die einem Diagramm zugeordnete chirale Ordnung $\mathcal{O}(n)$.

Wegen des in dieser Arbeit verwendeten Zählschemas, das ausschließlich geradzahlige Gesamtordnungen zulässt, zerfällt die Summe aller beitragenden Diagramme Σ_D bis zur chiralen Ordnung vier mit bis zu einer Schleife in

$$\Sigma_D = G_t = T^{(2)} + T^{(4)} + L^{(4)}, \quad (3.5)$$

wobei die $T^{(n)}$ die Summe aller Baumdiagramme sowie $L^{(n)}$ die der Einschleifendiagramme der Ordnung n bezeichnen.

3.2 RENORMIERUNG

A priori sind die aus einer hermiteschen Lagrangedichte durch perturbative Rechnungen abgeleiteten Observablen, zumindest in führender Ordnung, endlich. Werden jedoch zusätzlich Quantenkorrekturen höherer Ordnung – also insbesondere Schleifen, die eine d^4k -Integration implizieren – berücksichtigt, so sind die berechneten Observablen im Allgemeinen divergent und besitzen somit keine unmittelbare Aussagekraft. Um diesen Rechnungen Bedeu-

tung verleihen zu können, ist daher ein Verfahren notwendig, diese Unendlichkeiten in einem ersten Schritt manifest sichtbar zu machen und anschließend konsistent unter Kontrolle zu bringen – die sogenannte *Regularisierung* mit anschließender *Renormierung*.

Im klassischen Sinne ist die χ EFT nicht renormierbar, da die Divergenzen der Schleifenintegrale nicht durch Redefinition eines endlichen Satzes von Feldern und Kopplungen beseitigt werden können. Da es sich jedoch um eine effektive Feldtheorie handelt, der die allgemeinste Lagrangedichte zugrunde liegt, lässt sich die störungstheoretische Renormierbarkeit zumindest Ordnung für Ordnung sicherstellen [1].

3.2.1 Dimensionale Regularisierung

Die Divergenzen der Einschleifenintegrale sind in den Strukturen $\int d^4k \prod_i 1/N_i$ enthalten, sofern die Nenner der Teilchenpropagatoren N_i vom Integrationsimpuls k abhängen. Verwendete Methoden zur Regularisierung dieser Integrale sind die Pauli-Villars-, die Cut-Off- und die dimensionale Regularisierung [62], wobei letztere die Poincaré- und globalen Symmetrien der χ EFT erhält und daher in dieser Arbeit ausschließlich angewandt wird.

Im Rahmen der dimensional Regularisierung wird die Raumzeitdimension von vier auf D erweitert und ein divergentes Integral somit durch analytische Fortsetzung für nicht-ganzzahlige Dimensionen definiert. Anschließendes Verwenden einiger Integralrelationen Gauß'scher Exponentialfunktionen und Entwicklung der auftretenden Γ -Funktionen in einer Reihe um $D = 4$ liefert schließlich Ausdrücke, in denen die Unendlichkeiten in der Form $(D - 4)^{-1}$ für $D \rightarrow 4$ zu Tage treten. Bezeichne μ den 't Hooft-Parameter, der die gesamte Massendimension konstant hält, so bedeutet dies für ein beliebiges Schleifenintegral schematisch

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \prod_i \frac{1}{N_i} &\xrightarrow{\text{dim. Reg.}} \mu^{4-D} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \prod_i \frac{1}{N_i} = \dots \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{D-4}\right) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(D-4). \end{aligned}$$

In der chiralen Störungstheorie wird für gewöhnlich

$$R := \frac{2}{D-4} - (\ln 4\pi - \gamma_E + 1)$$

als divergente Größe für $D \rightarrow 4$ identifiziert und durch das $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema (*modified minimal subtraction in χ PT*) in renormierte Kopplungskonstanten absorbiert [27].

3.2.2 Renormierung

Die der Renormierung zugrunde liegende Idee ist die Aufspaltung einer hermiteschen, unrenormierten Lagrangedichte \mathcal{L}_0 – abhängig von unrenormierten Kopplungen g_0 , Massen m_0 und Feldern ϕ_0 – in eine renormierte (\mathcal{L}_r) sowie eine geeignete Gegentermlagrangedichte (\mathcal{L}_{gt}). Durch die Ersetzungen

$$g_0 \rightarrow g_r + \delta g, \quad m_0^2 \rightarrow m_r^2 + \delta m^2 \quad \text{und} \quad \phi_0 \rightarrow \sqrt{Z} \phi_r,$$

mit $Z = 1 + \delta Z$, werden renormierte (das heißt endliche) Objekte g_r, m_r^2, ϕ_r und (unendliche) Gegenterme $\delta g, \delta m^2, \delta Z$ definiert, die eine Aufspaltung gemäß

$$\mathcal{L}_0(g_0, m_0, \phi_0) = \mathcal{L}_r(g_r, m_r, \phi_r) + \mathcal{L}_{gt}(\dots)$$

zulassen. \mathcal{L}_r enthält dabei ausschließlich renormierte Größen, \mathcal{L}_{gt} sämtliche weitere Terme (unrenormierte Größen und Kombinationen von renormierten und unrenormierten Objekten) [63]. Diese beiden Strukturen sind jeweils für sich genommen nicht notwendigerweise hermitesch jedoch insgesamt identisch zum hermiteschen \mathcal{L}_0 , so dass die Unitarität der Theorie nicht verletzt wird [22]. Ist es möglich, die durch Schleifenintegrationen auftretenden Unendlichkeiten mit denjenigen in Gegentermen zu identifizieren, so können physikalische Observablen als Funktionen von renormierten Kopplungen dargestellt werden und sind somit endlich und messbar.

Da die Aufspaltung der Kopplungskonstanten nicht eindeutig ist, existieren beliebig viele Renormierungsschemata, die sich durch die Fixierung des endlichen, renormierten Anteils einer Kopplung voneinander unterscheiden. Für Theorien mit instabilen Teilchen als expliziten Freiheitsgraden, und damit potentiell großen Imaginärteilen in den Schleifenintegralen, bietet sich das *complex-mass* Schema (CMS) [19–23] als Erweiterung des *extended on-mass-shell* Schemas [64] an, bei dem die renormierten Massen mit den Polpositionen der vollständigen Teilchenpropagatoren identifiziert werden. Die renormierten Kopplungen können damit im Allgemeinen komplexwertige Größen sein.

Renormierung der Felder

Eine Ersetzung aller in der Theorie auftretenden Felder gemäß $\phi_{0,i} \rightarrow \sqrt{Z_i} \phi_i^r$ renormiert diese. Für den renormierten vollständigen Propagator S_i^r impliziert dies $S_i^r = Z_i^{-1} S_i$, die renormier-

te Green'sche Funktion lautet $G^r = [\prod_{i=1}^n Z_i^{-1/2}] G$ (das Produkt $\prod_{i=1}^n$ wird im Folgenden wiederum durch die Klammer $[\cdot]$ angedeutet). Das renormierte Matrixelement ist (analog Gleichung (3.4)) gegeben durch

$$i\mathcal{M}^r = [\sqrt{R_i^r}] G_t^r, \quad (3.6)$$

mit den Residuen der vollständigen, renormierten Propagatoren R_i^r . Für die trunkierte, renormierte Green'sche Funktion G_t^r folgt

$$\begin{aligned} G_t^r &= [(S_i^r)^{-1}] G^r = [Z_i S_i^{-1}] G^r = [\sqrt{Z_i} S_i^{-1}] [\sqrt{Z_i}] G^r \\ &= [\sqrt{Z_i} S_i^{-1}] G = [\sqrt{Z_i}] G_t. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstanten Z_i sind beliebig und werden mit den Residuen der vollständigen, unrenormierten Propagatoren identifiziert (letztendlich eine der Renormierungsbedingungen). Dies impliziert renormierte Residuen $R_i^r = 1$ und daher für das renormierte Matrixelement schließlich

$$i\mathcal{M}^r = G_t^r = [\prod_{i=1}^n \sqrt{Z_i}] G_t. \quad (3.8)$$

Alternativ kann natürlich auch die Forderung $R_i^r = 1$ als Renormierungsbedingung aufgefasst werden.

Renormierung der Kopplungskonstanten

Für die Renormierung der Kopplungskonstanten sind zwei verschiedene Methoden – nicht zu verwechseln mit den oben angesprochenen Renormierungsschemata – gebräuchlich: Die Gegentermmethode sowie das BPHZ-Verfahren² [63, 65–69]. Während erstere eine Berechnung der notwendigen Gegenterme in \mathcal{L}_{gt} voraussetzt, um die Aufspaltung $\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_{gt}$ und Absorption der Divergenzen explizit durchführen zu können, basiert letztere auf einer Entwicklung divergenter Integranden und Abzug eben dieser an einer festgelegten kinematischen Stelle. Prinzipiell sind beide Methoden äquivalent, jedoch ist der direkte Abzug unerwünschter Beiträge technisch einfacher zu implementieren und wird daher hier primär verwendet. Genau genommen kann auch der Gebrauch des $\overline{\text{MS}}$ -Schemas als Manifestation eines BPHZ-Abzugsverfahrens interpretiert werden, da die genaue Struktur der Gegenterme, so sie einmal bestimmt sind, keine Rolle mehr spielt und Beiträge in Amplituden proportional zur Divergenz R einfach ignoriert werden.

² Benannt nach Bogoliubov, Parasiuk, Hepp und Zimmermann

Die für die vorliegende Arbeit relevanten Diagrammtopologien sind glücklicherweise von vergleichsweise einfacher Struktur, da lediglich eine Schleife und keine divergenten Subgraphen auftreten können; es ist daher nicht nötig, den allgemeinsten Fall, die sogenannte *Waldformel*, anzuwenden.

Bezeichne $\mathcal{I} = \mathcal{I}(k, \mathbf{p}) = \prod_i 1/N_i$ einen Schleifenintegranden, abhängig von einem Integrationsimpuls k sowie einer beliebigen Anzahl an externen Impulsen, zusammengefasst im Vektor \mathbf{p} , so versucht die BPHZ-Methode eine Ersetzung der Form

$$\int d^4k \mathcal{I}(k, \mathbf{p}) \xrightarrow{\text{BPHZ}} \int d^4k \tilde{\mathcal{I}}(k, \mathbf{p}) \quad (3.9)$$

durchzuführen, welche die rechte Seite nach der Integration divergenzfrei hält. Sei d der totale Divergenzgrad eines Integrals – die Differenz der maximalen Potenz der Integrationsvariablen im Zähler und Nenner –, so lautet die Konstruktionsvorschrift für $\tilde{\mathcal{I}}$

$$\tilde{\mathcal{I}}(k, \mathbf{p}) = (1 - t^{(d)})\mathcal{I}(k, \mathbf{p}), \quad (3.10)$$

wobei der Tayloroperator $t^{(d)}$ die ersten d Ableitungen nach den externen Impulsen \mathbf{p} um den Renormierungspunkt \mathbf{p}_0 symbolisiert [68]; mit dem Multiindex α daher zusammengefasst zu

$$t^{(d)}\mathcal{I}(\mathbf{p}) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha \mathcal{I})(\mathbf{p}_0). \quad (3.11)$$

Die konkrete Anwendung dieser Entwicklung wird im zweiten Teil des folgenden Abschnitts (oder auch in Anhang A.3) demonstriert.

3.2.3 Anwendung des complex-mass Schemas

Mit diesen Vorüberlegungen ist es nun möglich, das *complex-mass* Schema speziell auf die in dieser Arbeit verwendete effektive Theorie zu übertragen.

Propagatoren

Das einzige zu renormierende externe Feld ist das Pion, dessen Selbstenergieeinschübe $-i\Sigma(p^2)$ der Summe der in Abbildung G.1 aufgeführten Diagramme entsprechen (Isospinindizes werden un-

terdrückt); der vollständige (*dressed*, jedoch noch unrenormierte) Propagator lautet damit

$$S_\pi = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}, \quad (3.12)$$

wobei die Σ für Rechnungen der Ordnung $\mathcal{O}(4)$ maximal linear in p^2 sind. Die Forderung, der Pol entspreche der renormierten und diese wiederum der physikalischen Masse m_π liefert, nach einer Aufspaltung gemäß $m_0^2 \rightarrow m_\pi^2 + \delta m^2$, die Renormierungsbedingung

$$p^2 - m_\pi^2 - \delta m^2 - \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m_\pi^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \delta m^2 = -\Sigma(m_\pi^2)$$

und fixiert somit die Gegenterme δm^2 . Mit den bezüglich der Masse renormierten Selbstenergiebeiträgen $\tilde{\Sigma}(p^2) := \Sigma(p^2) - \Sigma(m_\pi^2)$, die sich in der hier vorliegenden Ordnung darstellen lassen gemäß $\tilde{\Sigma}(p^2) = (p^2 - m_\pi^2)\tilde{\Sigma}'$, folgt für den Propagator letztendlich

$$S_\pi = \frac{i}{p^2 - m_\pi^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)} = \frac{iR_\pi}{p^2 - m_\pi^2}, \quad (3.13)$$

mit dem Residuum $R_\pi = (1 - \tilde{\Sigma}')^{-1} \approx 1 + \tilde{\Sigma}'$. Die $\tilde{\Sigma}' = \partial\tilde{\Sigma}/\partial p^2$ sind in dieser Ordnung energieunabhängig.

Der vollständig renormierte Propagator ergibt sich durch geeignete Wahl der Wellenfunktionsrenormierungskonstante Z_π , die das Residuum $R_\pi = 1$ setzt. Für dieses $Z_\pi = 1 + \delta Z_\pi$ folgt

$$\delta Z_\pi := \tilde{\Sigma}' = -\frac{A_0(m_\pi^2)}{24\pi^2 F^2} - \frac{2m_\pi^2 l_4}{F^2}, \quad (3.14)$$

mit dem im folgenden Abschnitt definierten skalaren Integral A_0 ; l_4 ist eine der Kopplungskonstanten.

Eine analoge Argumentation auf das Rhomeson übertragend lautet der unrenormierte, vollständige Propagator

$$S_\rho^{\mu\nu} = -i \frac{g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu \frac{1 + \Pi_2(p^2)}{m_0^2 + \Pi_1(p^2) + p^2 \Pi_2(p^2)}}{p^2 - m_0^2 - \Pi_1(p^2)},$$

wobei sich die Selbstenergieeinschübe gemäß

$$i\Pi^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} i\Pi_1(p^2) + p^\mu p^\nu i\Pi_2(p^2)$$

parametrisieren lassen (da deren Ausdrücke für die in dieser Arbeit betrachtete Ordnung keine Rolle spielen, wird auf eine Anga-

be der zugehörigen Diagramme verzichtet). Eine Aufspaltung der Form $m_0^2 \rightarrow m_\rho^2 + \delta m^2$ mit gleichzeitiger Forderung, der Pol des Propagators entspreche der physikalischen Masse m_ρ (und diese wiederum der renormierten) ergibt die Bedingung

$$p^2 - m_\rho^2 - \delta m^2 - \Pi_1(p^2) \Big|_{p^2=m_\rho^2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \delta m^2 = -\Pi_1(m_\rho^2),$$

so dass sich der Propagator schreiben lässt gemäß

$$S_\rho^{\mu\nu} = -i \frac{g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu \frac{1 + \Pi_2(p^2)}{m_\rho^2 + \tilde{\Pi}_1(p^2) + p^2 \Pi_2(p^2)}}{p^2 - m_\rho^2 - \tilde{\Pi}_1(p^2)},$$

wobei $\tilde{\Pi}_1(p^2) := \Pi_1(p^2) - \Pi_1(m_\rho^2)$. Nach einer Entwicklung dieser $\tilde{\Pi}_1$ um den Pol lässt sich dieser Propagator (in Polnähe) in die Form

$$S_\rho^{\mu\nu} = -i R_\rho \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_\rho^2}}{p^2 - m_\rho^2} + \text{polfreie Anteile},$$

mit dem Residuum $R_\rho \approx 1 + \tilde{\Pi}'_1(m_\rho^2)$, bringen. Eine geeignete Wahl der Z_ρ setzt wiederum $R_\rho = 1$ (diese Darstellung ist [56] entnommen).

Schleifenintegrale

Die Notation von [70] übernehmend, hängt das allgemeine skalare n -Punkt-Integral in D Dimensionen von internen Impulsen p_i beziehungsweise Massen m_i ab und ist definiert gemäß

$$T^n = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{N_0 N_1 \cdots N_{n-1}},$$

wobei $N_i = (k + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon$ für $i = 0, \dots, n-1$ ($p_0 = 0$). Der totale Divergenzgrad ist $d = D - 2n$; für $d < 0$ sind diese Integrale ultraviolett-konvergent, Infrarotdivergenzen spielen hier keine Rolle, da keine masselosen Propagatoren auftreten. Umschreiben sämtlicher tensorieller Integrale mittels Passarino-Veltman-Reduktion [71] liefert letztendlich Amplituden, die ausschließlich von skalaren Integralen abhängen und mit $T^{1,2,\dots} = A_0, B_0, \dots$ bezeichnet werden. Von diesen weisen in vier Dimensionen lediglich A_0 und B_0 ein $d \geq 0$ und damit Ultraviolettdivergenzen auf; C_0 mit $d = -2$ ist endlich und nicht renormierungsbedürftig. Die Argumente dieser Integrale sind Skalarprodukte geeigneter Linearkombinationen der Impulse p_i sowie quadrierte Massen

m_i^2 und zusammen mit etwaigen Tensorcoeffizienten ausführlich in Anhang A.3 definiert.

Die Ersetzung aus Gleichung (3.10) jeweils auf das gesamte Integral angewandt – das heißt Vertauschung von Integration und Entwicklung – ergibt für A_0 die Renormierungsvorschrift

$$A_0(m^2) \xrightarrow{\text{BPHZ}} (1 - t^{(2)})A_0(m^2) = 0, \quad (3.15)$$

da dieses Integral nicht von externen Impulsen abhängt und somit für jeden Renormierungspunkt gleich ist.

Vom Grad $d = 0$ ist $B_0(p^2, m^2, m^2)$ und wird daher gemäß

$$\begin{aligned} B_0(p^2, m^2, m^2) &\xrightarrow{\text{BPHZ}} (1 - t^{(0)})B_0(p^2, m^2, m^2) \\ &= B_0(p^2, m^2, m^2) - B_0(p_0^2, m^2, m^2) =: R_2(p^2, m^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ersetzt, wobei bei dieser Gelegenheit das renormierte skalare Integral R_2 definiert worden ist (Schleifen mit unterschiedlichen Massen treten in den hier betrachteten Prozessen nicht auf).

Weitere Integralstrukturen, die durch Reduktion der hier relevanten Amplituden entstehen können, werden jeweils von einem Koeffizienten $D - 4$ begleitet, so dass ausschließlich deren divergente Anteile (sofern sie existieren) nicht-verschwindende Beiträge liefern könnten. Durch korrekte Anwendung des BPHZ-Verfahrens werden diese jedoch vollständig subtrahiert, daher sind die einzigen letztendlich numerisch zu bestimmenden Integrale die endlichen R_2 sowie C_0 .

Bezeichne der Operator $\mathcal{R}^{\text{BPHZ}}$ die Anwendung der Ersetzungsregeln aus den Gleichungen (3.15) und (3.16), so erzeugt das BPHZ-Verfahren aus trunkierten Green'schen Funktionen G_t gemäß

$$i\mathcal{M}^r = \mathcal{R}^{\text{BPHZ}} \left\{ \left[\prod_{i=1}^n \sqrt{Z_i} \right] G_t \right\} \quad (3.17)$$

ein letztendlich bezüglich der Felder und Kopplungskonstanten renormiertes Matrixelement \mathcal{M}^r . Die Zahlenwerte dieser Kopplungen sind komplex und werden durch Anpassung an experimentelle Daten bestimmt.

3.2.4 Renormierungspunkt

Als Renormierungs- beziehungsweise Abzugspunkt wird die hadronische Skala der Symmetriebrechung, $\Lambda^2 = (4\pi F)^2 \approx 1.337 \text{ GeV}^2$, verwendet, die renormierten Massen der beteiligen Teilchen sind die physikalischen (mit den Zahlenwerten aus Anhang A.1).

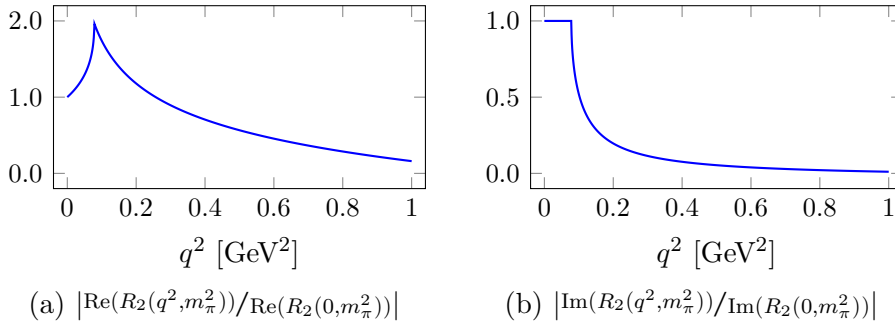


Abbildung 3.1: Real- und Imaginärteil der renormierten Integrale $R_2(q^2, m_\pi^2) = B_0(q^2, m_\pi^2, m_\pi^2) - B_0(\Lambda^2, m_\pi^2, m_\pi^2)$, normiert auf $R_2(0, m_\pi^2)$, mit $m_\pi = m_{\pi^\pm}$. Die vertikale Eins entspricht einem Fehler von rund 3% im Formfaktor des Pions und ist jenseits der Zweipionschwelle ($q^2 = 4m_\pi^2 \approx 0.073 \text{ GeV}^2$) zu vernachlässigen.

Aufgrund der Wahl dieses Renormierungspunktes jenseits der Zweipionschwelle entstehen jedoch garantierte imaginäre Beiträge der R_2 -Integrale, die insbesondere an der Stelle $R_2(0, m_\pi^2)$ nicht verschwinden und daher den in Kapitel 4.2 ausführlich betrachteten Formfaktor des Pions für $q^2 = 0$ von der Eins verdrängen. Diese Abweichungen liegen dort jedoch in der Größenordnung von rund zwei bis drei Prozent und sind daher wegen der insgesamt zu erwartenden Unsicherheit der hier vorgenommenen theoretischen Beschreibung (wie in Kapitel 2.3.1 erläutert mindestens 10%) zu vernachlässigen. Darüber hinaus reduziert sich diese Diskrepanz für $q^2 > 0.2 \text{ GeV}^2$ deutlich, wie Abbildung 3.1 zu entnehmen ist.

Diese minimale Abweichung ist der Preis, den es für den Einbau der Vektormesonen und Berücksichtigung von Quantenkorrekturen in Kombination mit dem Abzugspunkt Λ^2 zu entrichten gilt.

3.3 WARD-IDENTITÄTEN

Im Rahmen der chiralen Störungstheorie lassen sich sogenannte (chirale) Ward-Identitäten ableiten [12, 13], die Relationen zwischen den einzelnen Green'schen Funktionen verschiedener Prozesse herstellen und zur Kontrolle theoretischer Berechnungen hinzugezogen werden können. Wie bereits erwähnt sind Green'sche Funktionen Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten quantenfeldtheoretischer Operatoren. Von Interesse sind hier ein elektromagnetischer Stromoperator $J^\mu(x) = \bar{q}\gamma^\mu(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\tau^3)q$

(mit dem Quarkfeld $q = q(x)$) sowie eine pseudoskalare Dichte $\pi_a(x) = i\bar{q}\gamma_5\tau^a q$, welche die gleichzeitigen Kommutatoren

$$\begin{aligned} [J_0(\mathbf{x}, t), \pi_a(\mathbf{y}, t)] &= i\varepsilon_{3ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\pi_b(\mathbf{x}, t) \quad \text{und} \\ [J_0(\mathbf{x}, t), J^\mu(\mathbf{y}, t)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

erfüllen (die genaue Gestalt der J^μ und π_a ist für die weiteren Betrachtungen dabei unerheblich, die Kommutatoren sind ausreichend). Die elektromagnetische Ward-Identität als Teilmenge der chiralen Ward-Identitäten verknüpft nun $n + 1$ -Punkt- mit n -Punkt-Funktionen über die Relation [27]

$$\begin{aligned} &\partial_\mu^x \langle 0 | \mathcal{T}\{J^\mu \pi_{a_1} \cdots \pi_{a_n}\} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \mathcal{T}\{\partial_\mu^x J^\mu \pi_{a_1} \cdots \pi_{a_n}\} | 0 \rangle \\ &\quad + \delta(x^0 - x_1^0) \langle 0 | \mathcal{T}\{[J_0, \pi_{a_1}] \pi_{a_2} \cdots \pi_{a_n}\} | 0 \rangle \\ &\quad + \delta(x^0 - x_2^0) \langle 0 | \mathcal{T}\{\pi_{a_1} [J_0, \pi_{a_2}] \pi_{a_3} \cdots \pi_{a_n}\} | 0 \rangle \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \delta(x^0 - x_n^0) \langle 0 | \mathcal{T}\{\pi_{a_1} \cdots \pi_{a_{n-1}} [J_0, \pi_{a_n}]\} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

mit den Abkürzungen $J^\mu = J^\mu(x)$ und $\pi_{a_n} = \pi_{a_n}(x_n)$; für erhaltene Ströme verschwindet der erste Term der rechten Seite. Während diese Identität Green'sche Funktionen im Ortsraum beschreibt ist für praktische Berechnungen der Impulsraum relevant, der durch eine Fourier-Transformation (FT) der Form

$$\begin{aligned} &\delta^{(4)}(p_1 + \cdots + p_n) G(p_1, \dots, p_n) \\ &= \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{-ip_i \cdot x_i} G(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.20)$$

erreicht werden kann (Faktoren von 2π treten jeweils auf beiden Seiten der relevanten Gleichungen auf und spielen daher keine Rolle). Die einfachste Green'sche Funktion ist der Pionpropagator

$$G_{ab}(x_1, x_2) = \langle 0 | \mathcal{T}\{\pi_a(x_1)\pi_b(x_2)\} | 0 \rangle \xrightarrow{\text{FT}} \delta_{ab}S(p), \quad (3.21)$$

wobei es sich bei S um den vollständigen (*dressed*) Propagator (entweder renormiert oder unrenormiert) handelt.

3.3.1 Formfaktor des Pions

Die entsprechende Green'sche Funktion des Formfaktors (die Summe aller beitragenden Diagramme mit externen, vollständigen Propagatoren) lautet

$$G_{ab}^\mu(x, x_1, x_2) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ J^\mu(x) \pi_a(x_1) \pi_b(x_2) \} | 0 \rangle \\ \xrightarrow{\text{FT}} S(p_1) i\varepsilon_{3ab} \Gamma^\mu(p_1, -p_2) S(p_2), \quad (3.22)$$

mit der in Kapitel 4.2 definierten Vertexfunktion Γ^μ . Die Impulse p_i (assoziiert mit den x_i) und q (zu x gehörend) sind jeweils einlaufend gewählt (daher das Vorzeichen von p_2 in Γ^μ); die Elementarladung e tritt nicht explizit auf, da der Stromoperator in Einheiten der Ladung definiert ist.

Anwenden der Identität (3.19) und Ausnutzen der Kommutatorrelationen (3.18) liefert

$$\partial_\mu^x G_{ab}^\mu(x, x_1, x_2) = \delta^{(4)}(x - x_1) i\varepsilon_{3am} G_{mb}(x, x_2) \\ + \delta^{(4)}(x - x_2) i\varepsilon_{3bm} G_{am}(x_1, x),$$

beziehungsweise (nach Anwendung der in Gleichung (3.20) definierten Fourier-Transformation auf beiden Seiten)

$$-iq_\mu S(p_1) i\varepsilon_{3ab} \Gamma^\mu(p_1, -p_2) S(p_2) \\ = i\varepsilon_{3am} \delta_{mb} S(p_2) + i\varepsilon_{3bm} \delta_{am} S(p_1) \\ \Rightarrow q_\mu \Gamma^\mu(p_1, -p_2) = iS^{-1}(p_1) - iS^{-1}(p_2), \quad (3.23)$$

und damit die bekannte Ward-Takahashi-Identität [72, 73]. Auf der Massenschale reduziert sie sich zu $q_\mu \Gamma^\mu = 0$.

3.3.2 Virtuelle Compton-Streuung

Die Green'sche Funktion der virtuellen Compton-Streuung $G_{ab}^{\mu\nu}$ lässt sich aufgrund ihrer Isospin-Struktur allgemein in die Form

$$G_{ab}^{\mu\nu}(x, y, x_1, x_2) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ J^\mu(x) J^\nu(y) \pi_a(x_1) \pi_b(x_2) \} | 0 \rangle \\ \xrightarrow{\text{FT}} S(p_1) \left(\delta_{ab} \Gamma_1^{\mu\nu} + (\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) \Gamma_2^{\mu\nu} \right) S(p_2) \quad (3.24)$$

bringen [74], wobei die Symmetrien der beiden Vertexfunktionen $\Gamma_i^{\mu\nu} = \Gamma_i^{\mu\nu}(q, p_1, p_2)$ in Kapitel 4.4 ausführlicher behandelt werden. Die Impulse p_i ($\leftrightarrow x_i$) und q ($\leftrightarrow x$) sowie q' ($\leftrightarrow y$) sind wiederum einlaufend gewählt, die Ladung tritt nicht auf.

Anwendung der Relationen (3.19) und (3.18) liefert

$$\begin{aligned}\partial_\mu^x G_{ab}^{\mu\nu}(x, y, x_1, x_2) &= \delta^{(4)}(x - x_1) i \varepsilon_{3am} G_{mb}^\nu(y, x, x_2) \\ &\quad + \delta^{(4)}(x - x_2) i \varepsilon_{3bm} G_{am}^\nu(y, x_1, x)\end{aligned}$$

mit den G_{ab}^ν des Formfaktors aus Gleichung (3.22). Eine Fouriertransformation beider Seiten und Kontraktion der ε -Tensoren ergibt

$$\begin{aligned}-iq_\mu S(p_1) &\left(\delta_{ab} \Gamma_1^{\mu\nu}(q, p_1, p_2) \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) \Gamma_2^{\mu\nu}(q, p_1, p_2) \right) S(p_2) \\ &= (\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) \left(S(q + p_1) \Gamma^\nu(q + p_1, -p_2) S(p_2) \right. \\ &\quad \left. - S(p_1) \Gamma^\nu(p_1, q + p_2) S(q + p_2) \right)\end{aligned}$$

und damit schließlich sowohl $q_\mu \Gamma_1^{\mu\nu} = 0$ als auch

$$\begin{aligned}q_\mu \Gamma_2^{\mu\nu}(q, p_1, p_2) &= i S(q + p_1) \Gamma^\nu(q + p_1, -p_2) S^{-1}(p_1) \\ &\quad - i S^{-1}(p_2) \Gamma^\nu(p_1, q + p_2) S(q + p_2), \quad (3.25)\end{aligned}$$

die Ward-Identität der virtuellen Compton-Streuung [75, 76]. Auf der Massenschale reduziert sie sich wiederum zu $q_\mu \Gamma_2^{\mu\nu} = 0$.

NIEDERENERGETISCHE PROZESSE

Die in Kapitel 2.3 abgeleitete Lagrangedichte ist die einer effektiven Theorie und enthält daher eine Reihe von Kopplungskonstanten (LEC), deren renormierte Zahlenwerte durch Anpassung an experimentelle Daten bestimmt werden müssen. Es ist unwahrscheinlich, sämtliche unbekannt Parameter durch eine einzelne messbare Größe eines einzigen Prozesses fixieren zu können; aus diesem Grund ist es zweckdienlich, mehrere verschiedene (möglichst einfache) Prozesse zu analysieren und somit sukzessive alle Kopplungskonstanten festzulegen. Insbesondere bieten sich der Zerfall des Rhomesons, der elektromagnetische Formfaktor des Pions, die Streuung zweier Pionen sowie die reelle und virtuelle Compton-Streuung am Pion an.

In diesem Kapitel werden die relevanten theoretischen Amplituden dieser Prozesse berechnet sowie deren LEC-Inhalt angegeben. Soweit möglich werden darüber hinaus sinnvolle (Linear-) Kombinationen dieser Kopplungen bestimmt. Die eigentliche Extraktion der Kopplungen l_1 bis l_6 , e_1 bis e_4 und c_χ aus experimentellen Daten wird erst im folgenden Kapitel 5 vorgenommen.

4.1 ZERFALL DES RHOMESONS

Der Zerfall eines neutralen Rhomesons in zwei geladene Pionen wird durch ein einzelnes Baumdiagramm der chiralen Ordnung drei beschrieben. Die totale Zerfallsbreite des Prozesses

$$\rho_a(p) \rightarrow \pi_b(p_1) + \pi_c(p_2) \quad (4.1)$$

lautet (nach einer Phasenraumintegration) im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens

$$\Gamma_\rho = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{p^2}} \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{16\pi m}, \quad (4.2)$$

wobei die Masse m dem Realteil der physikalischen Rhomesonmasse $m_\rho = m - \frac{i}{2}\Gamma_\rho$ entspricht und bei etwa 770 MeV liegt; die Breite $\Gamma_\rho \approx 150$ MeV ist ebenfalls experimentell bekannt, die Massenschalenbedingung des (instabilen) Rhomesons wird durch $p^2 = m^2$ festgelegt.

Das Matrixelement des Zerfalls aus (4.1) lässt sich in der Form $i\mathcal{M}_{abc} = \epsilon_\mu \varepsilon_{abc} (p_1^\mu - p_2^\mu) B$ parametrisieren, wobei $\epsilon_\mu := \epsilon_\mu(\lambda)$ den Polarisationsvektor des einlaufenden Rhomesons darstellt. Die Abkürzung $B = B(p^2)$ ist energieabhängig, enthält die relevanten Kopplungskonstanten und lautet auf der Massenschale

$$B = \frac{m_\rho}{\sqrt{2}F} + \frac{2}{F^2}(2e_4 m_\pi^2 - e_2 m^2); \quad (4.3)$$

die Masse m_ρ stammt dabei aus der Lagrangedichte. Eine Projektion auf physikalische Koordinaten liefert als realisierbaren Prozess (das heißt $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ mit den Zweipionenzuständen aus Anhang A.4) letztendlich $i\mathcal{M} = i\epsilon_\mu (p_1^\mu - p_2^\mu) B$ beziehungsweise

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{3} \sum_\lambda \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* (p_1^\mu - p_2^\mu) (p_1^\nu - p_2^\nu) |B|^2 \\ &= \frac{1}{3} (m^2 - 4m_\pi^2) |B|^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Einsetzen von Gleichung (4.4) in (4.2) und Verwendung der Relation (4.3) liefert eine Bedingung der Form

$$|B|^2 = \left| \frac{m_\rho}{\sqrt{2}F} + \frac{4m_\pi^2}{F^2} e_4 - \frac{2m^2}{F^2} e_2 \right|^2 = \frac{48\pi m^2 \Gamma_\rho}{(m^2 - 4m_\pi^2)^{3/2}},$$

wobei die Zahlenwerte sämtlicher Objekte (bis auf e_2 und e_4) bekannt sind. Wegen des Betragsquadrats der linken Seite ist die Phase zwischen e_2 und e_4 nicht zugänglich, so dass für den weiteren Verlauf (und insbesondere zur Anpassung sämtlicher Kopplungen im folgenden Kapitel) vereinfachend ein reeller Zahlenwert für e_2 angenommen wird. Dies erlaubt die Konstruktion eines funktionalen Zusammenhangs der Form

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{F^2}{2m^2} \left(\operatorname{Re}(a) \pm \sqrt{b - \operatorname{Im}^2(a)} \right) \quad \text{mit} \\ a &:= \frac{m_\rho}{\sqrt{2}F} + \frac{4m_\pi^2}{F^2} e_4 \quad \text{und} \quad b := \frac{48\pi m^2 \Gamma_\rho}{(m^2 - 4m_\pi^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei die Abkürzung a komplex, b jedoch reell ist. e_2 wird damit in sämtlichen Rechnungen effektiv eliminiert und verbleibt, solange $b > \operatorname{Im}^2(a)$, reell.

4.2 FORMFAKTOR DES PIONS

Der einfachste elektromagnetische Prozess ist die Wechselwirkung eines Photons mit zwei Pionen und wird (kartesisch) durch

$$\gamma^*(q) + \pi_a(p) \rightarrow \pi_b(p') \quad (4.6)$$

beschrieben. Die (renormierte) Summe der in Abbildung G.2 aufgeführten Diagramme Σ_D^r definiert über

$$\Sigma_D^r = e\varepsilon_{3ab}\epsilon_\mu \Gamma^\mu(p, p') \quad (4.7)$$

eine Vertexfunktion Γ^μ , die wiederum in zwei Formfaktoren F und G gemäß

$$\Gamma^\mu(p, p') = (p' + p)^\mu F(q^2, p^2, p'^2) + (p' - p)^\mu G(q^2, p^2, p'^2)$$

mit $q = p' - p$ zerfällt. Invarianz von Γ^μ unter Zeitinversion impliziert $G(q^2, p^2, p'^2) = -G(q^2, p'^2, p^2)$ und daher auf der Massenschale $G(q^2, m_\pi^2, m_\pi^2) = 0$. Die verbleibende Funktion

$$F_\pi(q^2) := F(q^2, m_\pi^2, m_\pi^2) \quad (4.8)$$

ist der elektromagnetische Formfaktor des Pions, dessen analytischer Ausdruck in Abschnitt E.1.1 angegeben ist. Für ein raumartiges $q^2 < 0$ ist F_π reell, für die in dieser Arbeit betrachteten zeitartigen $q^2 > 0$ jedoch komplex.

Die Vertexfunktion erfüllt wegen der elektromagnetischen U(1)-Symmetrie die in Kapitel 3.3 abgeleitete Ward-Takahashi-Identität

$$q_\mu \Gamma^\mu(p, p') = iS_\pi^{-1}(p) - iS_\pi^{-1}(p'), \quad (4.9)$$

die auf der Massenschale äquivalent zu $q_\mu \Gamma^\mu(p, p') = 0$ ist. Die Ward-Identität ist explizit überprüft worden und für beliebige Renormierungsschemata erfüllt.

Da die oben genannten, beitragenden Diagramme von der Ordnung zwei beziehungsweise vier sind, liegt die zu erwartende Unsicherheit theoretischer Vorhersagen (mit den Überlegungen aus Kapitel 2.3.1) im besten Falle bei etwa $1/N_c^2 \approx 10\%$.

Im Grenzfall kleiner Impulsüberträge ist

$$F_\pi(0) = 1 - \frac{m_\pi^2}{24\pi^2 F^2} R_2(0, m_\pi^2) \approx 0.98 - 0.03i \quad (4.10)$$

und daher – wie bereits in Abschnitt 3.2.4 beschrieben – im Rahmen der hier zu erreichenden Genauigkeit durchaus mit $F_\pi(0) = 1$

kompatibel. Die in F_π auftretenden Kopplungskonstanten sind l_6 , e_1 , e_2 und e_4 .

Bisher sind als vektormesonische Freiheitsgrade lediglich Rhomesonen berücksichtigt worden, so dass die in der Natur auftretende Rho-Omega-Mischung nicht abgebildet werden kann und nun – ausschließlich im Formfaktor – rein phänomenologisch implementiert wird. Weitere Resonanzen spielen für den in dieser Arbeit relevanten Energiebereich bis circa 1 GeV und die betrachteten Prozesse keine Rolle. Die Beiträge des Omegamesons sind im Vergleich zum Rhomeson klein, daher ist eine Berücksichtigung in führender Ordnung durch ein einzelnes Baumdiagramm ausreichend. Die wichtigste Struktur dieses Diagramms ist zweifelsohne der Propagator, sodass das sehr vereinfachende Modell

$$F_\pi^{(\omega)}(q^2) := F_\pi(q^2) + \frac{hq^2}{q^2 - m_\omega^2}, \quad (4.11)$$

mit dem zusätzlichen (dimensionslosen) komplexen Parameter h , verwendet werden kann; der Faktor q^2 im Zähler fixiert dabei die Ladung unabhängig von h .

Für die folgenden Betrachtungen ist sowohl F_π als auch $F_\pi^{(\omega)}$ von Bedeutung, wobei bezüglich der Bezeichnungen nicht zwischen diesen beiden Größen unterschieden und jeweils aus dem Kontext ersichtlich wird, welcher Formfaktor F_π letztendlich gemeint ist. Insbesondere werden im weiteren Verlauf zur Anpassung der Kopplungen Datenpunkte verwendet, die aus den Prozessen $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0$ (wegen der Quantenzahlen der beteiligten Teilchen ohne Omegameson, ALEPH) und $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ (mit Omega, KLOE) extrahiert wurden – die entsprechenden Referenzen sind in Kapitel 5 angegeben.

4.3 PIONENSTREUUNG

Die Streuung zweier Pionen, in einer kartesischen Basis gegeben durch

$$\pi_a(p_1) + \pi_b(p_2) \rightarrow \pi_c(p_3) + \pi_d(p_4), \quad (4.12)$$

wird durch die Feynman-Diagramme in Abbildung G.3 im Anhang bis zur chiralen Ordnung vier mit einer Schleife vollständig erfasst.

4.3.1 Amplituden

Das Matrixelement, die renormierte Summe aller beitragenden Diagramme, zerfällt gemäß

$$\mathcal{M}^r = \mathcal{M}_1 \delta_{ab} \delta_{cd} + \mathcal{M}_2 \delta_{ac} \delta_{bd} + \mathcal{M}_3 \delta_{ad} \delta_{bc} \quad (4.13)$$

in drei unabhängige Isospinamplituden \mathcal{M}_i [12]. Eine Projektion auf physikalische Zustände oder solche mit Gesamtisospin I liefert sowohl die Amplituden $\mathcal{M}^{(I)}$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(0)} &= 3\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3, \\ \mathcal{M}^{(1)} &= \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_3 \quad \text{und} \\ \mathcal{M}^{(2)} &= \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3, \end{aligned} \quad (4.14)$$

(deren Konstruktion in Anhang A.4 dargestellt ist) als auch die für die $\pi^+ \pi^-$ -Streuung relevante Linearkombination

$$\mathcal{M}_\pm = \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3. \quad (4.15)$$

Die gemäß Kapitel 2.3.1 zu erwartende Unsicherheit liegt, analog zum Formfaktor, ebenfalls bei mindestens 10 %, da wiederum Terme der Ordnung sechs vernachlässigt worden sind.

4.3.2 Streulängen

An der Schwelle, in invarianten Mandelstamvariablen $s = 4m_\pi^2$ sowie $t = 0 = u$ (die Definition der kinematischen Variablen findet sich in Anhang B.2), verschwindet die Isospin-Amplitude $\mathcal{M}^{(1)}$ wegen Bose-Symmetrie; weiterhin ergibt sich für die beiden Streulängen $a^{(I)} := \frac{1}{32\pi} \mathcal{M}^{(I)}|_{\text{th}}$

$$\begin{aligned} 32\pi a^{(0)} &= \frac{7m_\pi^2}{F^2} + \frac{40m_\pi^4}{F^4} \left(l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3 \right) + \frac{256m_\pi^6 e_4^2}{m_\rho^2 F^4} + \dots, \\ 32\pi a^{(2)} &= -\frac{2m_\pi^2}{F^2} + \frac{16m_\pi^4}{F^4} \left(l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3 \right) - \frac{128m_\pi^6 e_4^2}{m_\rho^2 F^4} + \dots, \end{aligned}$$

deren vollständige Ausdrücke (inklusive Quantenkorrekturen) in Anhang E.1.2 angegeben sind. Die Terme führender Ordnung (jeweils der erste) entsprechen dabei dem Stromalgebresultat von Weinberg [77]. Die enthaltenen Kopplungskonstanten sind die Kombination $l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3$ sowie e_4^2 und, in den Schleifen, c_χ^2 .

Eine passende Linearkombination der vollständigen Ausdrücke eliminiert offensichtlich die Kopplungen l_1 bis l_3 und liefert die einfache Relation

$$c_1 e_4^2 + c_2 c_\chi^2 = c_3 \quad (4.16)$$

mit den drei (komplexen) Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{36m_\pi^6}{\pi m_\rho^2 F^4}, \\ c_2 &= \frac{9m_\pi^4}{32\pi^3 F^4} \left(\frac{4m_\pi^4 - 4m_\pi^2 m_\rho^2 + 3m_\rho^4}{m_\rho^4} R_2(4m_\pi^2, m_\rho^2) \right. \\ &\quad \left. - 3R_2(0, m_\rho^2) \right), \\ c_3 &= 2a^{(0)} - 5a^{(2)} - \frac{3m_\pi^2}{4\pi F^2} \\ &\quad + \frac{3m_\pi^4}{512\pi^3 F^4} (5R_2(0, m_\pi^2) - 13R_2(2m_\pi^2, m_\pi^2)), \end{aligned} \quad (4.17)$$

deren Zahlenwerte ausschließlich von bekannten Größen abhängen (zu finden in Anhang A.1); für die $a^{(I)}$ liegen experimentelle Messwerte vor.

Analog zum Zerfall des Rhomesons – jedoch ohne weitere Annahmen bezüglich möglicher Zahlenwerte – kann die Kopplung c_χ ebenfalls durch e_4 ausgedrückt und damit für weitere Rechnungen eliminiert werden. Es ist, ausgehend von Gleichung (4.16),

$$c_\chi = \pm \sqrt{\frac{1}{c_2} (c_3 - c_1 e_4^2)}. \quad (4.18)$$

4.3.3 Wirkungsquerschnitt

Der totale Wirkungsquerschnitt der $\pi^+\pi^-$ -Streuung, ausgedrückt durch invariante Mandelstamvariablen s und t , lautet

$$\sigma = \frac{1}{16\pi s(s - 4m_\pi^2)} \int_{t^-}^{t^+} dt |\mathcal{M}_\pm(s, t)|^2; \quad (4.19)$$

der physikalisch zulässige Integrationsbereich ohne experimentelle Einschränkungen der Streuwinkel erstreckt sich von

$$t^- = 4m_\pi^2 - s \quad \text{bis} \quad t^+ = 0.$$

Details zur Kinematik sind wiederum in Anhang B.2 ausführlich dargestellt. Die im Wirkungsquerschnitt auftretenden Kopplungs-

konstanten sind l_1 bis l_3 , c_χ^2 sowie e_2 und e_4 . Mittelfristig ist es jedoch zweckmäßig, anstelle der l_i Linearkombinationen der Form

$$l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3 =: X, \quad 2l_1 + 9l_2 =: Y \quad \text{und} \quad l_2 =: Z \quad (4.20)$$

zu verwenden, da der Parameter X derjenige ist, der direkt aus den Streulängen extrahiert werden kann.

4.4 VIRTUELLE COMPTON-STREUUNG UND PHOTONENFUSION

Die zweifach virtuelle Compton-Streuung am Pion ist – wiederum in kartesischen Koordinaten ausgedrückt – der Prozess

$$\gamma^*(q, \lambda) + \pi_a(p) \rightarrow \gamma^*(q', \lambda') + \pi_b(p') \quad (4.21)$$

und wird durch die Diagramme in den Abbildungen G.4 und G.5 im Anhang bis zur chiralen Ordnung vier unter expliziter Berücksichtigung des Rhomesons beschrieben.

4.4.1 Vertexfunktionen

Das renormierte Matrixelement der virtuellen Compton-Streuung zerfällt wegen seiner Isospinstruktur gemäß

$$i\mathcal{M}^r = -ie^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \left\{ \delta_{ab} \Gamma_1^{\mu\nu} + (\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) \Gamma_2^{\mu\nu} \right\} \quad (4.22)$$

in zwei Tensoren $\Gamma_i^{\mu\nu}$, wobei die Polarisationsvektoren $\epsilon_\mu := \epsilon_\mu(\lambda)$ und $\epsilon_\nu^* := \epsilon_\nu^*(\lambda')$ dem ein- beziehungsweise auslaufenden Photon zugeordnet sind [74]. Impulserhaltung impliziert lediglich drei voneinander unabhängige Viererimpulse, beispielsweise q , q' und $P := p + p'$, und daher als mögliche Lorentzinvarianten die Skalarprodukte q^2 , q'^2 , $q \cdot q'$ und $q \cdot P = q' \cdot P$, so dass allgemein die Argumente $\Gamma_i^{\mu\nu} = \Gamma_i^{\mu\nu}(q, q', P)$ gewählt werden können – die zugehörigen Invarianten werden nicht extra notiert.

Die diskreten Symmetrien, das heißt Invarianz unter Pionen- und Photonen-Kreuzung, lauten damit (zu finden in [78])

$$\begin{aligned} \Gamma_i^{\mu\nu}(q, q', P) &= \Gamma_i^{\mu\nu}(q, q', -P) \quad \text{und} \\ \Gamma_i^{\mu\nu}(q, q', P) &= \Gamma_i^{\nu\mu}(-q, -q', P). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Die kontinuierlichen Symmetrien sind die Ward-Identitäten für $\Gamma_1^{\mu\nu}$ und $\Gamma_2^{\mu\nu}$ aus Kapitel 3.3, die wiederum explizit überprüft worden sind. Auf der Massenschale folgt die bekannte Eichinvarianz

$$q_\mu \Gamma_i^{\mu\nu} = 0 = \Gamma_i^{\mu\nu} q'_\nu. \quad (4.24)$$

Die Tensoren $\Gamma_i^{\mu\nu}$ sowie etwaige Linearkombinationen dieser zerfallen darüber hinaus gemäß $\Gamma^{\mu\nu} = f_i \tau_i^{\mu\nu}$ in zehn invariante Amplituden f_i mit kinematischen Koeffizienten $\tau_i^{\mu\nu}$, die sich durch Kombination der drei Impulse q , q' und P mit den beiden zur Verfügung stehenden Lorentzindizes μ und ν ergeben. Eine einfache Wahl für die $\tau_i^{\mu\nu}$ sind die zehn Strukturen

$$\begin{array}{ccccc} g^{\mu\nu}, & P^\mu P^\nu, & P^\mu q^\nu, & P^\mu q'^\nu, & q^\mu P^\nu, \\ q^\mu q^\nu, & q^\mu q'^\nu, & q'^\mu P^\nu, & q'^\mu q^\nu, & q'^\mu q'^\nu, \end{array}$$

die keinerlei besondere Symmetrierelationen erfüllen, technisch jedoch sehr einfach zu identifizieren sind. Prinzipiell ist es möglich, beliebige weitere Tensorbasissysteme zu wählen, wobei die entsprechenden Transformationsmatrizen jedoch nicht notwendigerweise frei von kinematischen Singularitäten sind.

Für einen Vergleich mit weiteren Rechnungen wäre eine Projektion auf die (eichinvarianten) Basen aus [78] oder auch [79] notwendig, um beispielsweise die verallgemeinerten Polarisierbarkeiten des Pions zu analysieren. Allerdings ist es nicht gelungen, die in der vorliegenden Arbeit berechnete VCS-Amplitude singularitätenfrei in diese Basissysteme zu transformieren, so dass eine Verknüpfung mit bisherigen Ergebnissen deutlich erschwert wird.

4.4.2 *Photonenfusion*

Durch geeignete Vertauschung der ein- und auslaufenden Teilchen in Gleichung (4.21) lässt sich die Kinematik der Photonenfusion,

$$\gamma(q_1, \lambda_1) + \gamma(q_2, \lambda_2) \rightarrow \pi_a(p_1) + \pi_b(p_2), \quad (4.25)$$

erzeugen. Mit den Tensoren $\Gamma_i^{\mu\nu}$ der zweifach virtuellen Compton-Streuung sowie den drei Ersetzungen $P \rightarrow p_2 - p_1$, $q \rightarrow q_1$ und $q' \rightarrow -q_2$ ergibt sich das kartesische Matrixelement

$$i\mathcal{M}^r = -ie^2 \epsilon_{1,\mu} \epsilon_{2,\nu} \left\{ \delta_{ab} \Gamma_1^{\mu\nu} + (\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) \Gamma_2^{\mu\nu} \right\}, \quad (4.26)$$

welches anschließend natürlich wiederum auf die physikalischen Freiheitsgrade π^\pm und π^0 projiziert werden muss. Mit den Rela-

tionen für gekoppelte Zweipionzustände aus Anhang A.4 ergeben sich die neutrale und geladene Amplitude

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{00}^r &= -ie^2\epsilon_{1,\mu}\epsilon_{2,\nu}\Gamma_1^{\mu\nu} \equiv \epsilon_{1,\mu}\epsilon_{2,\nu}T_{00}^{\mu\nu} \quad \text{und} \\ i\mathcal{M}_{\pm}^r &= -ie^2\epsilon_{1,\mu}\epsilon_{2,\nu}(\Gamma_1^{\mu\nu} + \Gamma_2^{\mu\nu}) \equiv \epsilon_{1,\mu}\epsilon_{2,\nu}T_{\pm}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

wobei $\Gamma_i^{\mu\nu} = \Gamma_i^{\mu\nu}(q_1, -q_2, p_2 - p_1)$ sowie (da zwei reelle Photonen beteiligt sind) $q_1^2 = q_2^2 = q_1 \cdot \epsilon_1 = q_2 \cdot \epsilon_2 = 0$ [74]. Die in diesen Amplituden enthaltenen Kopplungskonstanten sind im neutralen Kanal ausschließlich $c_\chi e_1^2$, im geladenen die Linearkombination $L := 2l_5 - l_6$ sowie $c_\chi e_1^2$, e_1 und e_2 .

Die systematische Unsicherheit aus Kapitel 2.3.1 beträgt im Falle des geladenen Kanals wiederum rund $1/N_c^2 \approx 10\%$, da Terme der Ordnung zwei und vier zur Amplitude beitragen. Der neutrale Kanal enthält allerdings ausschließlich Quantenkorrekturen der chiralen Ordnung vier, so dass eine globale Ungenauigkeit von bis zu $1/N_c \approx 30\%$ angenommen werden kann.

Das über einlaufende Photon-Polarisationen gemittelte Betragsquadrat dieser Matrixelemente lautet

$$\langle |\mathcal{M}^r|^2 \rangle = \frac{1}{2^2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \epsilon_{1,\mu}^* \epsilon_{2,\nu}^* T^{\mu\nu\dagger} \epsilon_{1,\alpha} \epsilon_{2,\beta} T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} T_{\mu\nu}^\dagger T^{\mu\nu},$$

wobei für die beiden möglichen Kanäle jeweils die entsprechend definierten $T^{\mu\nu}$ aus Gleichung (4.27) verwendet werden. Der explizite algebraische Ausdruck für $\langle |\mathcal{M}_{00}^r| \rangle$ findet sich in Anhang E.1.3, derjenige für $\langle |\mathcal{M}_{\pm}^r| \rangle$ in Anhang I.

Für den totalen Wirkungsquerschnitt (ausgedrückt durch Mandelstamvariablen) ergibt sich

$$\sigma(s) = \frac{1}{16\pi s^2} \int_{t^-}^{t^+} dt \langle |\mathcal{M}(s, t)|^2 \rangle, \quad (4.28)$$

mit den durch den experimentell zulässigen Streuwinkel θ^* gemäß $|\cos \theta^*| \leq \xi$ eingeschränkten Integrationsgrenzen

$$t^\pm = \frac{1}{2} \left(\pm \xi \sqrt{s(s - 4m_\pi^2)} - s + 2m_\pi^2 \right).$$

Details zur Kinematik sind in Anhang B.2 zusammengefasst.

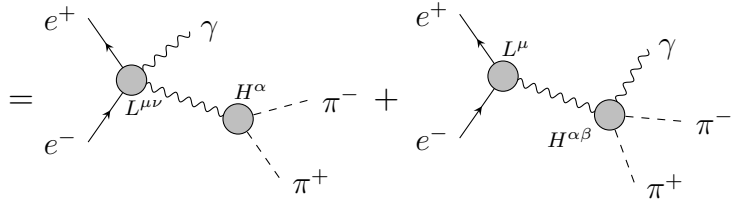
Bis zur hier vorliegenden chiralen Ordnung vier ist das Matrixelement des neutralen Kanals \mathcal{M}_{00}^r von der Variablen t und somit dem Streuwinkel θ^* unabhängig. Weiterhin tritt diese Integrationsvariable im geladenen Kanal \mathcal{M}_{\pm}^r nicht in den Schleifenintegralen auf, so dass eine vollständige analytische Integration möglich ist.

4.4.3 Einfach virtuelle Compton-Streuung

Die einfach virtuelle Compton-Streuung am Pion (vcs) wird nicht direkt sondern durch Einbettung in leptonische Prozesse gemessen. Eine Möglichkeit ist die strahlungsbegleitete Streuung hochenergetischer geladener Pionen an atomaren Elektronen (das heißt $\pi^\pm e^- \rightarrow \pi^\pm e^- \gamma$) [80]. Im weiteren Verlauf wird jedoch die Elektron-Positron-Annihilation unter Abstrahlung eines Photons sowie zweier Pionen,

$$e^+(r_1, k_1) + e^-(r_2, k_2) \rightarrow \pi^+(p_1) + \pi^-(p_2) + \gamma(q, \lambda), \quad (4.29)$$

verwendet, wobei ein zeitartiges virtuelles Photon ausgetauscht wird. Das Matrixelement zerfällt in einen sogenannten *initial-state radiation* (ISR) Anteil, welcher die Abstrahlung des reellen Photons auf der leptonischen Seite beschreibt, sowie einen *final-state radiation* (FSR) Anteil, der die eigentlichen vcs-Beiträge beinhaltet. Es gilt daher

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_{\text{ISR}} + i\mathcal{M}_{\text{FSR}}$$


$$= \text{ISR diagram} + \text{FSR diagram}, \quad (4.30)$$

wobei $L^{\mu\nu}$ und $H^{\alpha\beta}$ virtuelle Compton-Streuung am Elektron beziehungsweise Pion sowie L^μ und H^α den elektromagnetischen Vertex des Elektrons respektive Pions parametrisieren. Für zwei auslaufende geladene Pionen folgt durch eine Projektion auf physikalische Zustände

$$H^\alpha = ie(p_1 - p_2)^\alpha F_\pi((p_1 + p_2)^2) \quad \text{sowie} \quad (4.31)$$

$$H^{\alpha\beta} = -ie^2(\Gamma_1^{\alpha\beta} + \Gamma_2^{\alpha\beta}),$$

mit den $\Gamma_i^{\alpha\beta} = \Gamma_i^{\alpha\beta}(k_1 + k_2, q, p_1 - p_2)$ aus Gleichung (4.22). Der Formfaktor F_π enthält dabei das Omegameson. Die beiden Ten-

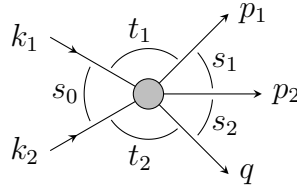
soren $\Gamma^{\alpha\beta}$ zerfallen darüber hinaus gemäß $\Gamma^{\alpha\beta} = f_i \tau_i^{\mu\nu}$ in drei invariante Amplituden $f_i = f_i(s_0, s_1, s_2)$ mit der Basis

$$\begin{aligned}\tau_1^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}, \\ \tau_2^{\mu\nu} &= k \cdot q P^\mu P^\nu - k \cdot P (q^\mu P^\nu + P^\mu k^\nu) \quad \text{und} \\ \tau_3^{\mu\nu} &= q^\mu k^\nu,\end{aligned}\tag{4.32}$$

wobei die Abkürzungen $k := k_1 + k_2$ und $P := p_1 - p_2$ verwendet worden sind (die Ausdrücke der f_i sind in Anhang I zusammengestellt).

Geeignete kinematische Invarianten für diesen Prozess finden sich beispielsweise in [81] und lauten

$$\begin{aligned}s_0 &= (k_1 + k_2)^2, \\ s_1 &= (p_1 + p_2)^2, \\ s_2 &= (p_2 + q)^2, \\ t_1 &= (k_1 - p_1)^2, \\ t_2 &= (k_2 - q)^2.\end{aligned}\tag{4.33}$$



Die quadrierte invariante Masse des auslaufenden Zweipionen-Systems ist dabei s_1 .

Die leptonischen Beiträge in führender Ordnung mit den in Anhang A.5 angegebenen Feynman-Regeln lauten (mit $e > 0$)

$$\begin{aligned}L^\mu &= -i\gamma^\mu e \quad \text{sowie} \\ L^{\mu\nu} &= ie^2 \left\{ \gamma^\mu \frac{\not{q} - \not{k}_1 + m_e}{2q \cdot k_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\not{k}_2 - \not{q} + m_e}{2q \cdot k_2} \gamma^\mu \right\}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Für die Berechnung von differentiellen Wirkungsquerschnitten ist darüber hinaus das über die einlaufenden Elektronenspins gemittelte und die auslaufende Photonpolarisation summierte Matrixelement \mathfrak{M} mit $\mathfrak{M} := \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, \lambda} \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}$ relevant, welches in die drei Komponenten

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\text{isr}} &= \langle |\mathcal{M}_{\text{isr}}|^2 \rangle, \quad \mathfrak{M}_{\text{fsr}} = \langle |\mathcal{M}_{\text{fsr}}|^2 \rangle \quad \text{und} \\ \mathfrak{M}_{\text{int}} &= \langle \mathcal{M}_{\text{isr}}^\dagger \mathcal{M}_{\text{fsr}} + \mathcal{M}_{\text{isr}} \mathcal{M}_{\text{fsr}}^\dagger \rangle\end{aligned}\tag{4.35}$$

zerfällt; $\mathfrak{M}_{\text{int}}$ ist dabei eine isr-fsr-Interferenz.

Im nun Folgenden werden für die Fermionen die Abkürzungen $\bar{v}_1 := \bar{v}(r_1, k_1)$ und $u_2 := u(r_2, k_2)$ verwendet.

Komponenten

Aus den in Gleichung (4.30) angegebenen Diagrammen lassen sich die isr-Beiträge direkt ablesen und lauten

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{\text{isr}} &= \bar{v}_1 \epsilon_\mu^* L^{\mu\nu} \frac{-ig_{\nu\alpha}}{s_1} H^\alpha u_2 \\ \Rightarrow \mathfrak{M}_{\text{isr}} &= e^2 (p_1 - p_2)_\nu (p_1 - p_2)_\beta |F_\pi|^2 \mathfrak{L}^{\nu\beta}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

wobei der Formfaktor $F_\pi = F_\pi(s_1)$ von der invarianten Masse s_1 der auslaufenden Pionen abhängt. Der gemittelte leptonische Teil $\mathfrak{L}^{\nu\beta}$ ist dabei

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{\nu\beta} &= \frac{1}{4s_1^2} \sum_{r_1, r_2, \lambda} \epsilon_\mu \epsilon_\alpha^* \bar{u}_2 L^{\mu\nu\dagger} v_1 \bar{v}_1 L^{\alpha\beta} u_2 \\ &= -\frac{g_{\mu\alpha}}{4s_1^2} \text{tr}((\not{k}_2 + m_e) L^{\mu\nu\dagger} (\not{k}_1 - m_e) L^{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

und beinhaltet sämtliche QED-Beiträge führender Ordnung. Kontraktion mit den Pionenimpulsen und Zusammenfassen der Elementarladungen e liefert somit schließlich

$$\mathfrak{M}_{\text{isr}} = e^6 |F_\pi|^2 S_{\text{isr}}, \quad (4.37)$$

mit den reinen QED-Anteilen

$$S_{\text{isr}} = \frac{1}{e^4} (p_1 - p_2)_\nu (p_1 - p_2)_\beta \mathfrak{L}^{\nu\beta}. \quad (4.38)$$

Ganz analog ergeben sich aus dem zweiten Diagramm die fsr-Beiträge

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{\text{fsr}} &= \bar{v}_1 L^\mu \frac{-ig_{\mu\alpha}}{s_0} H^{\alpha\beta} \epsilon_\beta^* u_2 \\ \Rightarrow \mathfrak{M}_{\text{fsr}} &= e^6 \Gamma_\pm^{\alpha\beta\dagger} \Gamma_\pm^{\mu\nu} \mathfrak{L}_{\beta\nu\alpha\mu}; \end{aligned} \quad (4.39)$$

der leptonische Teil ist in diesem Falle gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\beta\nu\alpha\mu} &= \frac{1}{4s_0^2} \sum_{r_1, r_2, \lambda} \epsilon_\beta \epsilon_\nu^* \bar{u}_2 \gamma_\alpha v_1 \bar{v}_1 \gamma_\mu u_2 \\ &= -\frac{g_{\beta\nu}}{4s_0^2} \text{tr}((\not{k}_2 + m_e) \gamma_\alpha (\not{k}_1 - m_e) \gamma_\mu) \\ &= \frac{g_{\beta\nu}}{s_0^2} (g_{\alpha\mu} (k_1 \cdot k_2 + m_e^2) - k_{1,\alpha} k_{2,\mu} - k_{2,\alpha} k_{1,\mu}). \end{aligned}$$

Einsetzen der drei invarianten Amplituden f_i mit ihren entsprechenden Basiselementen aus Gleichung (4.32) liefert schließlich

$$\mathfrak{M}_{\text{fsr}} = e^6 \sum_{i,j=1}^3 f_i^* f_j S_{ij}^{\text{fsr}}, \quad (4.40)$$

mit dem bezüglich der Vertauschung von i und j symmetrischen

$$S_{ij}^{\text{fsr}} = \tau_i^{\alpha\beta} \tau_j^{\mu\nu} \mathfrak{L}_{\beta\nu\alpha\mu}. \quad (4.41)$$

Der isr-fsr-Interferenzterm $\mathfrak{M}_{\text{int}}$ reduziert sich letztendlich zu $\mathfrak{M}_{\text{int}} = 2 \text{Re}\langle \mathcal{M}_{\text{isr}}^\dagger \mathcal{M}_{\text{fsr}} \rangle$ mit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_{\text{isr}}^\dagger \mathcal{M}_{\text{fsr}} \rangle &= \frac{e^6}{4s_0 s_1} (p_1 - p_2)_\nu F_\pi^* \Gamma^{\alpha\beta} \mathfrak{L}_{\alpha\beta}^\nu, \quad \text{wobei} \\ \mathfrak{L}_{\alpha\beta}^\nu &= -g_{\mu\beta} \text{tr}\left(\left(\not{k}_2 + m_e\right) \frac{i}{e^2} L^{\mu\nu\dagger} \left(\not{k}_1 - m_e\right) \gamma_\alpha\right), \end{aligned}$$

wobei $F_\pi = F_\pi(s_1)$. Verwendung der invarianten Amplituden f_i sowie Zusammenfassen sämtlicher Konstanten liefert

$$\mathfrak{M}_{\text{int}} = e^6 \sum_{i=1}^3 \text{Re}(F_\pi^* f_i) S_i^{\text{int}}, \quad (4.42)$$

wobei

$$S_i^{\text{int}} = \frac{1}{2s_0 s_1} (p_1 - p_2)_\nu \tau_i^{\alpha\beta} \mathfrak{L}_{\alpha\beta}^\nu. \quad (4.43)$$

Die Funktionen f_i , F_π sowie S_{isr} , S_{ij}^{fsr} und S_i^{int} sind in Anhang I in einer maschinenlesbaren Form angegeben.

Observablen

Eine mögliche experimentelle Observable ist der einfach differentielle Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma} := d\sigma/ds_1$ als Funktion von s_1 , für den bis etwa 1 GeV^2 präzise Datensätze der KLOE-Kollaboration existieren (genaue Referenzen werden im folgenden Kapitel genannt). Dieses $\hat{\sigma}$ zerfällt in die drei Beiträge

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\text{isr}} + \hat{\sigma}_{\text{fsr}} + \hat{\sigma}_{\text{int}} \quad (4.44)$$

und berechnet sich (mit der Gram-Determinante Δ_4) jeweils gemäß

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{1024\pi^4 s_0 (s_0 - 4m_e^2)} \int ds_2 dt_1 dt_2 \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-\Delta_4}} \quad (4.45)$$

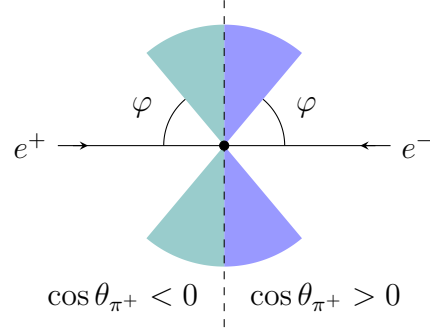


Abbildung 4.1: Seitenansicht der e^+e^- -Annihilation. Die gestrichelte Linie symbolisiert eine Ebene mit der Strahlachse als Normale (eine Vereinfachung von Abbildung B.2 im Anhang). Die farbigen Flächen entsprechen den experimentell zulässigen Streuwinkeln θ_{π^\pm} beider abgestrahlter Pionen. Blau ist dabei die Vorwärts-, grün die Rückwärtsrichtung.

aus den entsprechenden gemittelten Matrixelementen \mathfrak{M} ; diese mehrdimensionale Integration ist ausschließlich numerisch durchzuführen. Weitere Details (insbesondere zu den verwendeten Integrationsgrenzen und Definitionen) sind in Anhang B.3 zusammengefasst.

Sind die experimentell zulässigen Winkel beider abgestrahlter Pionen bezüglich der Strahlachse symmetrisch (und liegen daher innerhalb der farbigen Flächen in Abbildung 4.1), so trägt die isrsr-Interferenz nicht zum Wirkungsquerschnitt bei, da diese ungerade unter Ladungskonjugation ist; allerdings ist sie aus diesem Grunde wesentlich für eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie \mathcal{A}_{fb} des π^+ im Endzustand [25, 82].

Seien die Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtsanteile des (differenziellen) Wirkungsquerschnitts, kombiniert mit experimentellen Einschränkungen, gegeben durch

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^+ &:= \hat{\sigma} \text{ für } \cos \theta_{\pi^+} > 0 \text{ und } |\cos \theta_{\pi^\pm}| < \cos \varphi \text{ (blau),} \\ \hat{\sigma}^- &:= \hat{\sigma} \text{ für } \cos \theta_{\pi^+} < 0 \text{ und } |\cos \theta_{\pi^\pm}| < \cos \varphi \text{ (grün),}\end{aligned}$$

($\hat{\sigma}$ ist nur durch $|\cos \theta_{\pi^\pm}| < \cos \varphi$ eingeschränkt, für KLOE ist beispielsweise $\varphi = 50^\circ$), so lautet die Asymmetrie

$$\mathcal{A}_{\text{fb}} = \frac{\hat{\sigma}^- - \hat{\sigma}^+}{\hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+}. \quad (4.46)$$

Da für die einzelnen Komponenten der $\hat{\sigma}^\pm$ (mit der Zerlegung aus Gleichung (4.44))

$$\hat{\sigma}_{\text{isr}}^+ = \hat{\sigma}_{\text{isr}}^-, \quad \hat{\sigma}_{\text{fsr}}^+ = \hat{\sigma}_{\text{fsr}}^- \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_{\text{int}}^+ = -\hat{\sigma}_{\text{int}}^- \quad (4.47)$$

gilt, folgt für die Asymmetrie schließlich

$$\mathcal{A}_{\text{fb}} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{int}}^- - \hat{\sigma}_{\text{int}}^+}{\hat{\sigma}_{\text{isr}}^- + \hat{\sigma}_{\text{fsr}}^- + \hat{\sigma}_{\text{isr}}^+ + \hat{\sigma}_{\text{fsr}}^+} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{int}}^- - \hat{\sigma}_{\text{int}}^+}{\hat{\sigma}_{\text{isr}}^- + \hat{\sigma}_{\text{fsr}}^-}. \quad (4.48)$$

Prinzipiell sollte sie daher sehr empfindlich auf das verwendete fsr-Modell reagieren und somit direkten experimentellen Zugriff darauf gewähren.

4.5 KOPPLUNGSKONSTANTEN

Eine vollständige Liste der in diesem Kapitel abgeleiteten Prozesse beziehungsweise Observablen mit den enthaltenen Kopplungskonstanten ist in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Im nun folgenden Kapitel werden die Zahlenwerte dieser LEC durch Anpassungen an experimentelle Datensätze bestimmt.

RZ (4.1)				e_2	e_4			
FF (4.2)			l_6	e_1	e_2	e_4	h	
PL (4.3.2)	$l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3$			c_χ^2		e_4^2		
PW (4.3.3)	l_1	l_2	l_3	c_χ^2	e_2	e_4		
FN (4.4.2)				$c_\chi e_1^2$				
FG (4.4.2)			$2l_5 - l_6$	$c_\chi e_1^2$	e_1	e_2		
VCS (4.4.3)		l_5	l_6	$c_\chi e_1^2$	e_1	e_2	e_3	e_4

Tabelle 4.1: Kopplungskonstanten des Rhozerfalls (RZ), Pionformfaktors (FF), der Pionstreulängen (PL), des Wirkungsquerschnitts der geladenen Pionenstreuung (PW), der Photonfusion im neutralen (FN) sowie geladenen (FG) Kanal und schließlich der virtuellen Compton-Streuung am geladenen Pion (VCS).

EXTRAKTION DER KOPPLUNGEN

Die bis zu diesem Punkt zusammengestellten Amplituden niederenergetischer Prozesse können nun endlich dazu verwendet werden, die renormierten Zahlenwerte der Kopplungskonstanten (LEC, im Folgenden auch *Parameter* oder *Freiheitsgrade* genannt) durch Anpassung an experimentelle Daten zu bestimmen. Wegen der großen Menge zur Verfügung stehender Kopplungen ist es unwahrscheinlich, sämtliche Werte durch eine einzige kombinierte Regression festlegen zu können¹; stattdessen werden die einzelnen Parameter durch sukzessives Anpassen einzelner Prozesse extrahiert. Eine Übersicht der vorliegenden Kopplungen – sowie einiger identifizierter (Linear-) Kombinationen dieser – ist in Tabelle 4.1 auf Seite 47 zusammengestellt.

Die in dieser Arbeit verwendete χ_{EFT} enthält Terme der klassischen chiralen Störungstheorie und somit auch l_1 bis l_6 , deren renormierte Zahlenwerte jedoch wegen des expliziten Einbaus des Rhomesons nicht mit den χ_{PT} -Werten vergleichbar sind. Prinzipiell könnten alle LEC komplex sein, jedoch werden im weiteren Verlauf reelle l_i angenommen. Die mit den Rhomesonen verknüpften Kopplungen e_1 bis e_4 und c_χ sind a priori komplex, da diese in der effektiven Lagrangedichte mit ebenfalls komplexen Rhomassen erscheinen und darüber hinaus dazu verwendet werden, Imaginärteile der Schleifenintegrale am Renormierungspunkt zu absorbieren. Eine Sonderstellung nimmt dabei jedoch e_2 ein, da zur Anwendung der Relation (4.5) aus Kapitel 4.1 reelle Zahlenwerte angenommen werden müssen.

Sämtliche verwendeten Amplituden beinhalten Quantenkorrekturen, sofern sie maximal von der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(4)$ sind.

5.1 PRÄZISION

Die Kalibrierung der Theorie durch experimentelle Daten erfolgt mit einem *bootstrap*-Verfahren [83], welches auf wiederholter nichtlinearer Regression durchmischter Datensätze beruht; technische Details sowie die verwendete Nomenklatur sind in Anhang C zu-

¹ Hierfür wäre eine aufwändige Trennung von LEC und kinematischen Größen nötig, die bei numerischen Integrationen wegen deren endlicher Präzision problematisch ist.

sammengefasst. Die auf diese Weise ermittelten Zahlenwerte der Kopplungen und deren Fehler ergeben sich aus den Mittelwerten sowie der Standardabweichung der durch das bootstrapping erzeugten Verteilungsdichten (deren Abbildungen allein im Anhang zu finden sind). Um extreme statistische Ausreißer unter Kontrolle zu halten, werden gelegentlich nicht alle bootstrap-Datensätze sondern lediglich ein β -Perzentil verwendet (die äußeren $\alpha = 1 - \beta$ Punkte werden ignoriert).

Insgesamt liefert dieses Verfahren Zahlenwerte der Kopplungskonstanten, die mit *statistischen* Unsicherheiten behaftet sind. Zusätzlich sollten darüber hinaus prinzipiell die in Kapitel 2.3.1 beschriebenen *systematischen* Fehler beachtet werden, die eine weitere globale Unsicherheit von mindestens 10% implizieren. Die in den Abbildungen dieses Kapitels verwendeten Fehlerbänder beruhen jedoch ausschließlich auf den statistischen Unsicherheiten, so dass sämtliche Angaben nur bis auf (im besten Falle) rund 10% genau sein können.

In den meisten Fällen liegen die Fehler der experimentellen Daten im niedrigen einstelligen Prozentbereich, so dass sie damit wesentlich genauer als die durch die hier verwendete Theorie zu erwartende Präzision sind. Sind die experimentellen Fehler nur schwer von den eigentlichen Datenpunkten zu unterscheiden, werden in den Abbildungen keine Fehlerbalken eingezeichnet.

5.2 STRATEGIE

Die verwendete Strategie zur sukzessiven Parameteranpassung wird in diesem Abschnitt etwas genauer erläutert und ist als Übersicht in Tabelle 5.1 auf der nächsten Seite zusammengefasst, deren einzelne Spalten von links nach rechts abgearbeitet werden.

Es ist naheliegend, mit der Kopplungskonstantenkombination $d := c_\chi e_1^2$ aus dem neutralen Kanal der Photonfusion (Kapitel 4.4.2) zu beginnen, da dieses d der einzige (komplexe) Freiheitsgrad dieses Prozesses ist – Spalte A in Tabelle 5.1 ist damit behandelt.

Darüber hinaus lassen sich einige bereits angesprochene Abhängigkeiten verschiedener Kopplungen untereinander ausnutzen, die effektive Anzahl voneinander unabhängiger Parameter zu reduzieren. Insbesondere ergibt sich aus dem Zerfall des Rhomesons die Relation

$$e_2 = \frac{F^2}{2m^2} \left(\operatorname{Re}(a) + \varkappa_3 \sqrt{b - \operatorname{Im}^2(a)} \right), \quad (5.1)$$

	A	B	C	D	E	F
RZ		e_4	e_2			
FF		l_6, e_4	e_1, e_2	h		
PL		e_4	c_χ			l_1, l_2, l_3
PW		e_4	c_χ, e_2			l_1, l_2, l_3
FN	d					
FG	d	L	e_1, e_2			
VCS	d	l_5, l_6, e_4	e_1, e_2	h	e_3	
#	2	4		2	2	2

Tabelle 5.1: Strategie zur Anpassung der Kopplungskonstanten; die Prozessbezeichnungen (erste Spalte) entsprechen denjenigen in Tabelle 4.1. Der Reihe nach, von links nach rechts gelesen, werden die fett gedruckten Elemente angepasst, woraufhin deren und sämtliche weiter links angeordneten Spalten vollständig bekannt sind. Die Anzahl an reellen, anzupassenden Freiheitsgraden pro Spalte ist in Zeile # eingetragen. Die Elemente der Spalte C hängen ausschließlich von e_4 ab; die verwendeten Abkürzungen sind $d := c_\chi e_1^2$ und $L := 2l_5 - l_6$.

mit den in Gleichung (4.5) genannten $a = a(e_4)$ und b ; e_2 wird dabei reell angenommen, so dass die Bedingung $b > \text{Im}^2(a)$ erfüllt sein muss. Die hier und im Folgenden auftretenden $\varkappa_i = \pm 1$ parametrisieren jeweils mögliche Haupt- und Nebenzweige einer Wurzel.

Aus den Streulängen der Pionenstreuung ergibt sich zusätzlich

$$c_\chi = \varkappa_2 \sqrt{\frac{1}{c_2}(c_3 - c_1 e_4^2)} \quad (5.2)$$

mit den bekannten c_i aus Gleichung (4.17) in Kapitel 4.3.2. Unter zusätzlicher Verwendung von $d := c_\chi e_1^2$ folgt direkt

$$e_1 = \varkappa_1 \sqrt{\varkappa_2 d} \left(\frac{c_2}{c_3 - c_1 e_4^2} \right)^{1/4}, \quad (5.3)$$

so dass letztendlich e_1, e_2 und c_χ durch e_4 ausgedrückt werden können; die Zahlenwerte der in a, b und c_i enthaltenen Größen sind in Anhang A.1 zusammengefasst, deren Unsicherheiten jedoch nicht weiter berücksichtigt werden, um die folgenden Rechnungen nicht unnötig zu verkomplizieren (kleine Ungenauigkeiten werden darüber hinaus durch die angepassten Kopplungen absorbiert). Spalte C in Tabelle 5.1 ist damit bekannt, sobald e_4 festgelegt worden

ist. Jedoch sind die drei möglichen Vorzeichen \varkappa_i in den Gleichungen (5.1) bis (5.3) voneinander unabhängig, so dass insgesamt acht verschiedenen Gruppen möglicher Parameter analysiert werden müssen.

Eine kombinierte Analyse sowohl des omegafreien Formfaktors als auch des totalen Wirkungsquerschnitts der geladenen Photofusion liefert, unter Verwendung der Relationen (5.1) und (5.3), die reellen Zahlenwerte $L := 2l_5 - l_6$ und l_6 sowie ein komplexes e_4 (Spalte B und damit auch C). Durch eine anschließende, separate Anpassung des Formfaktors mit Omegamesonen ergibt sich darüber hinaus der phänomenologische Parameter h .

Die einzige zu diesem Zeitpunkt noch verbleibende freie Kopplung ist e_3 , die letztendlich durch die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie der e^+e^- -Annihilation festgelegt wird. Die übrigen Kopplungen l_1 bis l_3 (mit den Streulängen sind jedoch nur zwei unabhängig) sind für die virtuelle Compton-Streuung zwar nicht interessant, können jedoch zusätzlich durch den Wirkungsquerschnitt der Pionenstreuung bestimmt werden.

5.3 NEUTRALE PHOTONENFUSION

Zur Extraktion der Kopplungskonstantenkombination $d := c_\chi e_1^2$ bietet sich der totale Wirkungsquerschnitt der neutralen Photofusion an, da zu diesem sonst keine weiteren LEC beitragen. d ist komplexwertig, so dass insgesamt zwei voneinander unabhängige Parameter, der Real- und Imaginärteil ($d = d' + id''$), festgelegt werden müssen.

Der Energiebereich verwendeter Daten wird auf $s \approx 0.85 \text{ GeV}^2$ eingeschränkt, da darüber hinausgehende resonante Strukturen durch die dieser Arbeit zugrunde liegende Theorie nicht aufgelöst werden können.² Zur Anpassung tragen letztendlich die ersten 13 Datenpunkte der Crystal Ball-Kollaboration für $|\cos \theta^*| < 0.8$ (entnommen aus [85], im Folgenden C8 genannt) sowie für eben diesen Winkelbereich die ersten 10 Punkte der Belle-Kollaboration (aus [84], B8) bei; darüber hinaus werden 16 weitere Belle-Punkte für $|\cos \theta^*| < 0.6$ (B6) verwendet. Die gewählte Ausgangspopulation $\mathcal{A} = \text{B6} \cup \text{B8} \cup \text{C8}$ enthält damit 39 Elemente, die eingesetzte Masse m_π ist die des neutralen Pions m_{π^0} .

Das 99-Perzentil von insgesamt 10 000 bootstrap-Stichproben liefert die in Anhang E.2.1 abgebildeten relativen Häufigkeitsverteilungen des Real- und Imaginärteils von d . Die Mittelwerte der

² Beispielsweise ist das $f_0(980)$ in den Daten aus [84] gut zu erkennen.

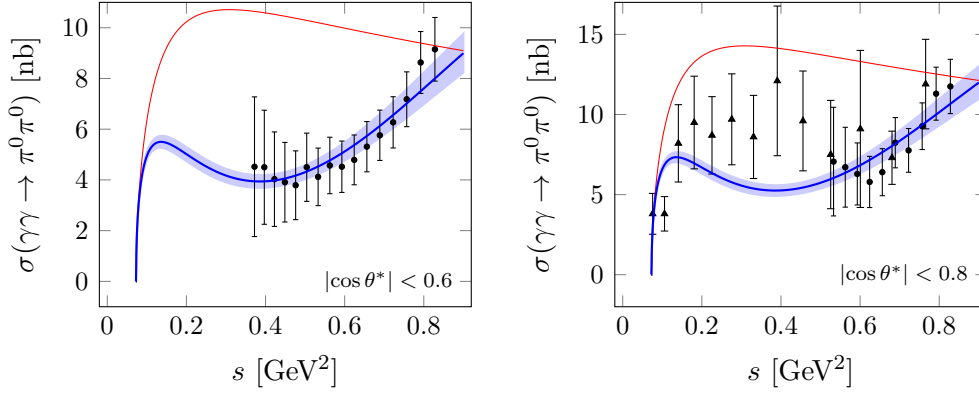


Abbildung 5.1: Wirkungsquerschnitt der neutralen Photonenfusion für berechnetes d mit 1σ -Fehlerband (blau) und (zum Vergleich) für $d = 0$ (rot). Belle-Daten (Punkte) aus [84] und Crystal Ball-Daten (Dreiecke) aus [85].

entsprechenden Verteilungen bilden den endgültigen Zahlenwert und liefern letztendlich

$$d = -0.175 (\pm 7\%) + i0.213 (\pm 8\%). \quad (5.4)$$

Der damit berechnete Wirkungsquerschnitt ist darüber hinaus in Abbildung 5.1 zu finden, wobei das ebenfalls eingetragene Fehlerband eine Standardabweichung der Verteilungen des Real- und Imaginärteils von d berücksichtigt und somit eine reine statistische Unsicherheit darstellt.

Die Übereinstimmung der theoretischen Anpassung mit den experimentellen Daten ist ausgesprochen gut und beispielsweise mit den Ergebnissen einer $SU(3)$ -Rechnung aus [86] oder durch Dispersionsrelationen erhaltenen Resultaten aus [87] vergleichbar.

5.4 FORMFAKTOR UND GELADENE PHOTONENFUSION

Zur Anpassung von l_6 , $e_4 = e_4^r + ie_4^i$ und $L := 2l_5 - l_6$, und daher insgesamt vier unabhängigen reellen Parametern, werden sowohl der omegafreie Formfaktor des Pions als auch der totale Wirkungsquerschnitt der geladenen Photonenfusion gleichzeitig verwendet. Als Ausgangspopulation dienen 40 Datenpunkte der ALEPH-Kollaboration für den Formfaktor ohne Omega [88]³ (gewonnen aus $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0$) sowie 37 Punkte des MARK-II-Detektors für die geladene Fusion [90]; weitere Datensätze (beispielsweise der

³ Die Aktualisierung [89] wurde nicht mehr beachtet.

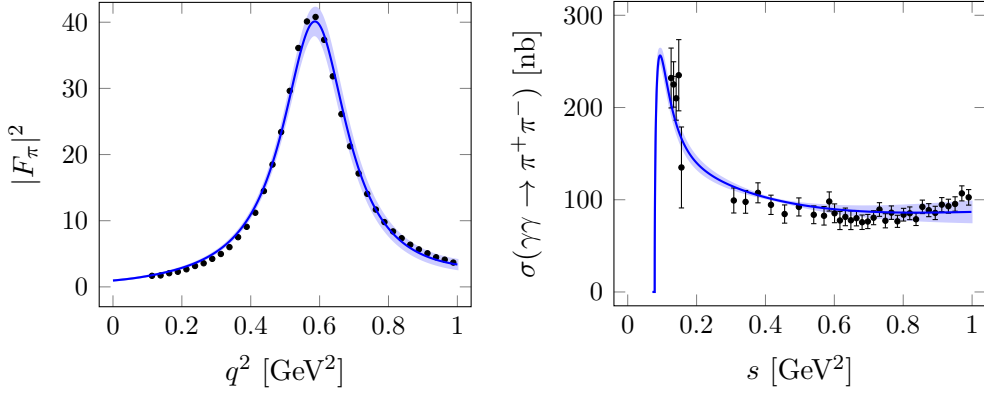


Abbildung 5.2: Omega-freier Formfaktor mit ALEPH-Daten aus [88] (links) und geladene Photonenfusion mit MARK-II-Daten aus [90] (rechts). Jeweils mit 1σ -Fehlerband, basierend auf Liste L_1 .

Belle- oder Cello-Kollaborationen) werden nicht weiter berücksichtigt.⁴

Jeweils 10 000 bootstrap-Datensätze liefern für jede mögliche Kombination der Vorzeichen \varkappa_i aus den Gleichungen (5.1) bis (5.3) Dichteverteilungen der vier unbekannt, reellen Parameter, die jeweils einzeln analysiert werden müssen. Mögliche Ausschlusskriterien bestimmter Parametersätze sind zum einen ein nicht-verschwindender Imaginärteil der Kopplung e_2 (diese ist reell angenommen), zum anderen eine mangelhafte Übereinstimmung der erhaltenen Kurven mit den experimentellen Daten. Die vollständige Analyse ist in Anhang E.2.2 zusammengefasst und liefert letztendlich nur zwei mögliche Parameterlisten:

$$\begin{array}{ll}
 L_1 : & l_5 = -0.0320 (\pm 1 \%) \\
 & l_6 = -0.0697 (\pm 1 \%) \\
 & e_4^r = 0.520 (\pm 1 \%) \\
 & e_4^i = 0.242 (\pm 6 \%) \\
 L_2 : & l_5 = -0.0290 (\pm 2 \%) \\
 & l_6 = -0.0464 (\pm 2 \%) \\
 & e_4^r = -0.264 (\pm 6 \%) \\
 & e_4^i = -0.302 (\pm 5 \%)
 \end{array}$$

Mit den Werten aus Liste L_1 ergibt sich schließlich exemplarisch der in Abbildung 5.2 eingezeichnete Formfaktor beziehungsweise Wirkungsquerschnitt, wobei das Fehlerband die statistischen Unsicherheiten in sämtlichen (gemäß Tabelle 4.1 oder 5.1) beitragenden Parametern berücksichtigt – die Graphen von L_2 sind vergleichbar.

Diese Ergebnisse stimmen wiederum sehr gut mit den experimentellen Daten überein und sind ähnlich zu denjenigen in [91] (für den Formfaktor) oder [86] (für die Photonenfusion).

⁴ Der zeitliche Aufwand der Parameteranpassung durch bootstrapping reagiert sehr empfindlich auf die Größe der Ausgangspopulation, daher wird lediglich der MARK-II Datensatz verwendet.

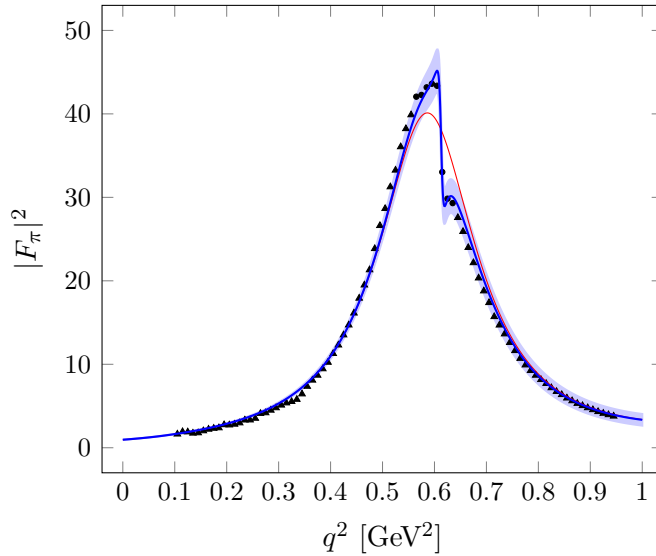


Abbildung 5.3: Formfaktor des Pions inklusive Omegamesonen (blau), mit Daten aus [92, 93]; zum Vergleich der Formfaktor ohne Omega ($h = 0$) in rot. Die für die Anpassung des Parameters h verwendeten Daten sind die acht Punkte in der Region des Peaks. Das Fehlerband berücksichtigt die Unsicherheiten sämtlicher beitragender Kopplungen.

Zur Extraktion der rein phänomenologischen Kopplung h im Pionformfaktor mit Omegamesonen werden die sehr präzisen Daten der KLOE-Kollaboration verwendet (entnommen aus [92] und [93] mit einfacher Mittelung für Werte gleicher Energie). Darüber hinaus gehende Datensätze (beispielsweise CMD-2 oder SND) werden nicht berücksichtigt, da durch diese keine wesentliche neue Information gewonnen wird.⁵ Weiterhin ist zur Auflösung der Omega-beiträge ausschließlich die zentrale Region in der Nähe des Rho-mesons interessant, so dass lediglich acht Datenpunkte (Nummer 47 bis 54) als Ausgangspopulation ausgewählt werden. Die Dichteverteilungen mit den entsprechenden resultierenden Graphen für jeweils 10 000 bootstrap-Stichproben mit den beiden als sinnvoll zu erachtenden Gruppen L_i aus der vorhergehenden Anpassung finden sich in Anhang E.2.3. Beide möglichen Resultate mit den ermittelten Zahlenwerten für h ,

$$\begin{aligned} L_1 : \quad h &= -0.00363 (\pm 39\%) - i 0.0123 (\pm 10\%) \quad \text{und} \\ L_2 : \quad h &= 0.00237 (\pm 49\%) - i 0.0124 (\pm 10\%), \end{aligned}$$

⁵ Im weiteren Verlauf werden von KLOE gemessene Wirkungsquerschnitte relevant sein, so dass es für eine konsistente Datenbasis naheliegend ist, ebenfalls auf deren Formfaktoren zurückzugreifen.

sind vielversprechend. Exemplarisch ist in Abbildung 5.3 der funktionale Verlauf für Gruppe L_1 dargestellt, das Fehlerband berücksichtigt die Unsicherheiten sämtlicher beitragender Kopplungen (also neben h noch l_6 , e_1 , e_2 und e_4).

Innerhalb der Fehlerbänder ist die Beschreibung der experimentellen Daten recht gut und beispielsweise wiederum mit [91] vergleichbar. Allerdings ist, gerade in der Region des Peaks, leider nicht die Präzision etablierter Modelle wie beispielsweise Gounaris-Sakurai [94], Kühn-Santamaria [95] oder der sehr aktuellen HLS-Vorhersage aus [96] zu erreichen.

5.5 PIONENSTREUUNG

Die bislang noch freien Kopplungen der geladenen Pionenstreuung, l_1 bis l_3 , spielen für die in dieser Arbeit betrachteten elektromagnetischen Prozesse keine Rolle und können nur schwer bestimmt werden. Prinzipiell wäre eine vollständige Partialwellenanalyse notwendig, um Zahlenwerte mit moderaten Fehlern aus experimentellen Daten zu extrahieren, die jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengt. Als minimaler Kompromiss werden daher Daten des totalen Wirkungsquerschnitts verwendet, dessen Analyse jedoch technisch aufwändig ist, da – im Gegensatz zur Photonenfusion – die Integrationsvariable (die Mandelstamvariable t) als Argument der Schleifenintegrale auftritt und somit eine komplizierte Trennung von Kopplungen und kinematischen Größen vorgenommen werden muss (vergleichbar zu der weiter unten in Kapitel 5.6.4 beschriebenen Methode).

Die Kopplungen l_i können in die (reellen) Linearkombinationen

$$X = l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3, \quad Y = 2l_1 + 9l_2 \quad \text{und} \quad Z = l_2$$

zerlegt werden, wobei der Zahlenwert des X durch die Ausdrücke der Streulängen aus Kapitel 4.3.2 festgelegt ist. Allerdings entwickelt dieses X einen signifikanten imaginären Anteil, der zwar durch geeignete Einschränkungen der Relationen (5.1) bis (5.3) unter Kontrolle gebracht werden kann, hier jedoch nicht weiter beachtet wird.

Anpassung des Y und Z an Daten aus [97] liefert schließlich die in Anhang E.2.4 zusammengefassten Ergebnisse, deren Aussagekraft in Anbetracht der erhaltenen Unsicherheiten sowie der erwähnten Inkonsistenz jedoch nebensächlich ist.

5.6 VIRTUELLE COMPTON-STREUUNG

Die einzige noch verbleibende freie (komplexe) Kopplungskonstante ist e_3 , die ausschließlich in den invarianten Amplituden f_i der virtuellen Compton-Streuung auftritt, welche ihrerseits in die Elektron-Positron-Annihilation eingebettet wurde. Die weiteren gemäß Tabelle 5.1 beitragenden Kopplungen sind festgelegt; im weiteren Verlauf werden die Zahlenwerte der beiden möglichen Listen L_i aus Abschnitt 5.4 zugrunde gelegt.

5.6.1 Einfluss von e_3

Da die Kopplung e_3 ausschließlich in den invarianten Amplituden f_i auftritt, liegt die Vermutung nahe, dass sie Einfluss auf die verallgemeinerten Polarisierbarkeiten des Pions haben könnte.

Die vollständige vcs-Amplitude $\mathcal{M}_{\text{vcs}}^{\mu\nu}$, das Produkt der f_i sowie der Tensorbasis aus Gleichung (4.32), lässt sich zwar nicht singularitätenfrei in die vcs-Basis aus Referenz [78] überführen, die reinen e_3 -Anteile liefern jedoch

$$\mathcal{M}_{\text{vcs}}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 f_i \tau_i^{\mu\nu} = (q^\mu k^\nu - q \cdot k g^{\mu\nu}) k^2 A e_3 + \dots, \quad (5.5)$$

wobei $k^2 = s_0$ der Energie des virtuellen Photons und damit (im fsr-Fall) der Schwerpunktsenergie entspricht; A enthält weitere physikalische Konstanten sowie die Kopplung e_1 .

Vergleich dieses Terms mit der in obiger Referenz zusammengestellten, allgemeinen vcs-Amplitude mit eichinvarianter Tensorbasis (Gl. (18)) impliziert einen Beitrag von e_3 zu der dort f_1 genannten Funktion (nicht die hier verwendete invariante Amplitude) und damit in der Tat einen Einfluss auf die Steigung sowohl der elektrischen als auch magnetischen Polarisierbarkeit des Pions (ebenfalls in der genannten Referenz abgeleitet, Gln. (35,36)).

Weiterhin ist das in Gleichung (5.5) auftretende Produkt von Vierervektoren, ausgedrückt in Invarianten, $q \cdot k \propto s_0 - s_1$, so dass gerade bei kleinen Energien s_1 signifikante Beiträge der e_3 -Terme zu erwarten sind.

5.6.2 Observablen

Die beiden zur Verfügung stehenden Observablen sind in Kapitel 4.4.3 ausführlich diskutiert worden und zum einen der differen-

tielle Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma} := d\sigma/ds_1$, zum anderen die Asymmetrie \mathcal{A}_{fb} . Der Wirkungsquerschnitt zerfällt gemäß

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\text{isr}} + \hat{\sigma}_{\text{fsr}} + \hat{\sigma}_{\text{int}} \quad (5.6)$$

in drei Beiträge, wobei $\hat{\sigma}_{\text{int}}$ auf eine Interferenz zwischen isr- und fsr-Amplitude zurückzuführen ist. Mit den Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtsanteilen $\hat{\sigma}^\pm = \hat{\sigma}(\cos\theta_{\pi^+} \gtrless 0)$ folgt für die Asymmetrie schließlich

$$\mathcal{A}_{\text{fb}} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{int}}^- - \hat{\sigma}_{\text{int}}^+}{\hat{\sigma}_{\text{isr}} + \hat{\sigma}_{\text{fsr}}}. \quad (5.7)$$

Für symmetrische Streuwinkel θ_{π^\pm} trägt die Interferenz $\hat{\sigma}_{\text{int}}$, da sie ungerade unter Ladungskonjugation ist, nicht zur Summe $\hat{\sigma}$ und daher auch nicht zum Nenner der Asymmetrie bei.

Veröffentlichte Datensätze liegen für zwei verschiedene Regionen akzeptierter Photonenstreuwinkel mit unterschiedlichen Schwerpunktsenergien $\sqrt{s_0}$ vor [92, 93]; dargestellt sind die Observablen darin jeweils in Abhängigkeit von s_1 .

Weitere Details zur Kinematik sind in Anhang B.3 zusammengefasst.

5.6.3 Kleine Photonenwinkel

Die KLOE-Daten aus [92] sind bei einer Schwerpunktsenergie von rund $\sqrt{s_0} = 1.02$ GeV aufgenommen worden und berücksichtigen ausschließlich kollineare Ereignisse mit $|\cos\theta_\gamma| > \cos 15^\circ$; die Richtung der abgestrahlten Pionen spielt dabei keine Rolle.⁶ In diesem Bereich sind die fsr-Beiträge des Wirkungsquerschnitts kinematisch sehr stark unterdrückt, so dass im Wesentlichen $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\text{isr}}$ und daher eine Anpassung von e_3 nicht sinnvoll ist. Allerdings kann diese Analyse dazu verwendet werden, sowohl die für diese Arbeit notwendigen numerischen Integrationsalgorithmen (Referenz in Anhang F) zu überprüfen, als auch die Präzision der reinen QED-Anteile führender Ordnung, S_{isr} aus Gleichung (4.38), abzuschätzen.

Bezeichne die Abkürzung $d\Delta$ das dreidimensionale Integrationsmaß $ds_2 dt_1 dt_2$ inklusive sämtlicher kinematischer und kombinatorischer

⁶ Tatsächlich wurden zwei Pionenspuren im Kalorimeter des KLOE-Detektors nachgewiesen und die Richtung des Photons rekonstruiert.

rischer Faktoren sowie geeignet gewählter Grenzen (definiert in Anhang B.3), so lautet der isr-Beitrag (mit $\mathfrak{M}_{\text{isr}}$ aus Gleichung (4.37))

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\text{isr}} = \int d\Delta \mathfrak{M}_{\text{isr}} = e^6 |F_\pi|^2 \int d\Delta S_{\text{isr}} \equiv |F_\pi|^2 \mathcal{S},$$

wobei $F_\pi = F_\pi(s_1)$ den Formfaktor inklusive Omegamesonen bezeichnet. Ein Vergleich der theoretischen Vorhersage des so definierten \mathcal{S} mit einem aus experimentellen Daten gewonnenen \mathcal{S}_{dat} lässt eine Abschätzung der Präzision sowohl der numerischen Methoden als auch der verwendeten QED-Anteile zu. Das Verhältnis

$$r(s_1) := \frac{\mathcal{S}_{\text{dat}}}{\mathcal{S}} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{dat}}/|F_\pi|_{\text{dat}}^2}{\mathcal{S}} \approx 1.173 - \frac{0.289}{\text{GeV}^2} s_1 \quad (5.8)$$

ist in etwa linear in s_1 und wird durch die hier angegebene Funktion sehr gut approximiert; die Abweichungen sind kleiner 10 % und vollständig auf die Vernachlässigung von QED-Beiträge höherer Ordnung (Schleifen und Strahlungskorrekturen) zurückzuführen – \mathcal{S} ist frei von modellabhängigen hadronischen Komponenten.

Den energieabhängigen Korrekturfaktor $r(s_1)$ verwendend ergeben sich die in Abbildung 5.4 auf der nächsten Seite eingetragenen Wirkungsquerschnitte

$$\hat{\sigma} = |F_\pi|^2 \mathcal{S} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}^r := r \hat{\sigma};$$

die fsr-Anteile $\hat{\sigma}_{\text{fsr}}$ liegen (berechnet mit $e_3 = 0$) bei deutlich unter 0.1 nb/GeV^2 und sind damit zu vernachlässigen. Die Abweichungen des korrigierten Wirkungsquerschnitts $\hat{\sigma}^r$ von den KLOE-Daten lassen sich auf den (nicht perfekt die Daten reproduzierenden) Formfaktor des Pions aus Abbildung 5.3 zurückführen. Insgesamt ist daher davon auszugehen, dass sowohl die berechneten QED-Anteile \mathcal{S} in führender Ordnung ausreichend genau als auch die verwendeten numerischen Methoden korrekt implementiert worden sind.

5.6.4 Große Photonenwinkel

Zur Extraktion des Zahlenwertes von e_3 bietet sich eine KLOE-Messung bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_0} = 1.00 \text{ GeV}$ und unter Berücksichtigung großer Photonenwinkel ($|\cos \theta_\gamma| < \cos 50^\circ$) an [93]⁷, da die fsr-Beiträge nicht mehr kinematisch unterdrückt sind und eine gewichtigere Rolle spielen. Besonders nützlich ist in diesem Zusammenhang die Asymmetrie \mathcal{A}_{fb} , da sie wegen ihrer

⁷ Sowohl die beiden Pionen als auch das Photon wurden im Kalorimeter nachgewiesen.

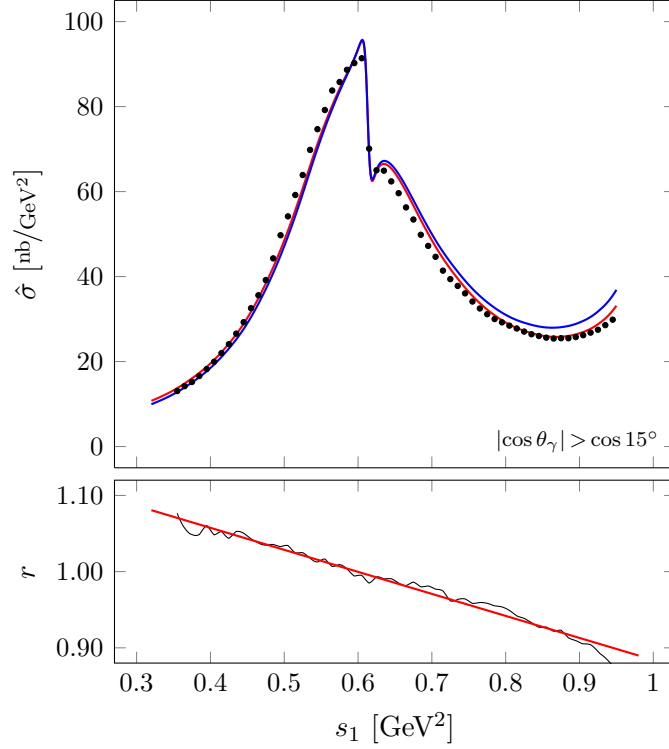


Abbildung 5.4: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}$ für kleine Photonenwinkel, gemessen bei $\sqrt{s_0} = 1.02$ GeV (mit Daten aus [92]), oben. Eingezeichnet sind theoretische Vorhersagen für $\hat{\sigma}$ (blau) sowie $\hat{\sigma}^r$ (rot); auf eine Angabe von Fehlerbändern wird verzichtet. Interpolierte Daten $\mathcal{S}_{\text{dat}}/s$ (schwarz) sowie approximierende Funktion $r = r(s_1)$ aus Gleichung (5.8) (rot), unten.

Sensitivität auf den Interferenzterm ein direktes Maß der hadronischen Anteile liefert [25, 82].

Ein etwaiges bootstrapping zum Fixieren von e_3 ist jedoch problematisch, da die Phasenraumintegration für einen Dreiteilchen-Endzustand ausschließlich numerisch durchgeführt werden kann. Zwar ist prinzipiell eine Aufspaltung der gemittelten Betragsquadrate \mathfrak{M} in Kopplungskonstanten und kinematische Größen möglich, wegen der endlichen Präzision numerischer Methoden jedoch sehr aufwändig, zeitintensiv und nicht praktikabel. Die in dieser Arbeit gewählte Vorgehensweise sukzessiver Parameteranpassung umgeht dieses Problem teilweise, da zu diesem Zeitpunkt lediglich eine einzige Kopplung verbleibt, nämlich e_3 . Aufteilen der drei Amplituden gemäß $f_i = a_i + e_3 b_i$ in jeweils zwei Komponenten

(sowohl die a_i als auch die b_i enthalten Kopplungen, jedoch nicht e_3) lässt eine Zerlegung der Wirkungsquerschnitte in der Form

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\text{fsr}} &= \int d\Delta \mathfrak{M}_{\text{fsr}} = \int d\Delta (h_1 + e_3 h_2 + e_3^* h_3 + e_3^* e_3 h_4) \quad \text{und} \\ \hat{\sigma}_{\text{int}} &= \int d\Delta \mathfrak{M}_{\text{int}} = \int d\Delta \operatorname{Re}(h_5 + e_3 h_6),\end{aligned}$$

mit \mathfrak{M} aus den Gleichungen (4.40) und (4.42), zu. Die im Allgemeinen komplexwertigen Funktionen $h_i = h_i(s_1)$ sind dabei

$$\begin{aligned}h_1 &= 2 \operatorname{Re}(a_1^* a_2 S_{12}^{\text{fsr}} + a_1^* a_3 S_{13}^{\text{fsr}} + a_2^* a_3 S_{23}^{\text{fsr}}) + \sum_{i=1}^3 |a_i|^2 S_{ii}^{\text{fsr}}, \\ h_2 &= \sum_{i=1}^3 a_i^* b_i S_{ii}^{\text{fsr}} + (a_2^* b_1 + a_1^* b_2) S_{12}^{\text{fsr}} \\ &\quad + (a_3^* b_1 + a_1^* b_3) S_{13}^{\text{fsr}} + (a_3^* b_2 + a_2^* b_3) S_{23}^{\text{fsr}}, \\ h_3 &= h_2^* \quad \text{und} \quad h_4 = h_1(a \leftrightarrow b), \quad \text{sowie} \\ h_5 &= F_\pi^* \sum_{i=1}^3 a_i S_i^{\text{int}} \quad \text{und} \quad h_6 = F_\pi^* \sum_{i=1}^3 b_i S_i^{\text{int}},\end{aligned}$$

mit den S_{ij}^{fsr} und S_i^{int} aus (4.41) beziehungsweise (4.43). Der Formfaktor $F_\pi = F_\pi(s_1)$ enthält wiederum das Omegameson. Eine Integration dieser einzelnen Komponenten h_i ist, unter Verwendung der Kopplungskonstanten aus den Listen L_1 oder L_2 und der Grenzen für $|\cos \theta_{\gamma, \pi^\pm}| < \cos 50^\circ$, ohne Weiteres möglich und liefert letztendlich Wirkungsquerschnitte in Form einfacher Polynome in e_3 und damit sehr kompakte Ausdrücke für \mathcal{A}_{fb} .⁸

Da der Zahlenwert der Kopplung e_3 für Energien ab etwa 0.6 GeV² kaum Einfluss auf die Asymmetrie hat⁹, werden als Ausgangspopulation nur die ersten 25 Datenpunkte verwendet. Jeweils 10 000 bootstrap-Datensätze liefern für beide Listen die in Anhang E.2.5 zusammengefassten Dichteverteilungen mit den jeweiligen zugeordneten Mittelwerten und daraus resultierenden Graphen für die Asymmetrie und den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Damit ergeben sich die möglichen Zahlenwerte

$$\begin{aligned}L_1 : \quad e_3 &= -0.0618 (\pm 109 \%) + i 0.521 (\pm 85 \%) \quad \text{und} \\ L_2 : \quad e_3 &= 0.00475 (\pm 540 \%) - i 0.595 (\pm 28 \%).\end{aligned}$$

⁸ Die möglichen Beiträge für $|\cos \theta_{\pi^\pm}| < \xi$ mit $\xi = \cos 50^\circ$ (für die Anteile der Asymmetrie) oder $\xi = 1$ (für den gesamten differentiellen Wirkungsquerschnitt) sind separat zu berechnen.

⁹ Durch einfache manuelle Variation zwischen ± 2 festgestellt und plausibel mit den Überlegungen aus Abschnitt 5.6.1.

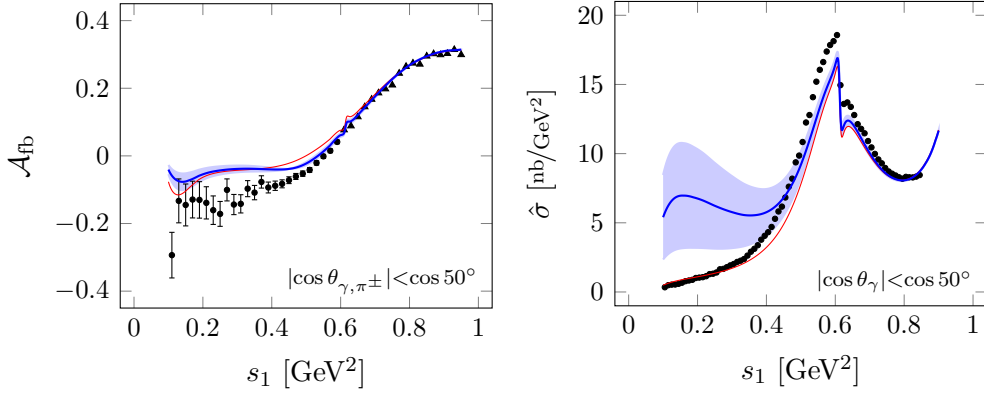


Abbildung 5.5: Asymmetrie (Daten aus [25], links) und differentieller Wirkungsquerschnitt (Daten aus [98], rechts) für L_2 . Zur Anpassung der Asymmetrie sind nur die Punkte verwendet worden. In blau für berechnetes e_3 , in rot für $e_3 = 0$.

Sowohl die Asymmetrie als auch der differentielle Wirkungsquerschnitt sind für L_2 in Abbildung 5.5 eingetragen; die Fehlerbänder berücksichtigen dabei lediglich die Unsicherheiten von e_3 . Wegen deren relativer Größe sind keine definitiven Aussagen über das Vorzeichen der entsprechenden Zahlenwerte möglich.

Offensichtlich ist es nur schwer möglich, eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment herzustellen.

Für große Energien s_1 ist eine sehr gute Vereinbarkeit der berechneten Asymmetrie mit den experimentellen Daten festzustellen, die jedoch ausschließlich auf den Kopplungen l_5 und l_6 sowie h und e_4 (und daher auch e_1 , e_2 und c_χ) beruht, da die Vergleichskurve für $e_3 = 0$ nahezu identisch verläuft (Abbildung 5.5, links). Ein direkter Vergleich mit der deutlich schlechteren Anpassung der Liste L_1 aus Anhang E.2.5 unterstreicht dabei den Einfluss des hadronischen Modells auf die Asymmetrie. Allerdings ist insbesondere bei kleinen Werten von s_1 eine signifikante Abweichung sichtbar, die ein Hinweis darauf ist, dass die einzige für diese Analyse zur Verfügung stehende Kopplung eine suboptimale Wahl gewesen sein könnte. Allerdings ist nicht klar, welcher Parameter bessere Ergebnisse verspricht, da e_3 die einzige LEC ist, welche ausschließlich die in Gleichung (5.5) verwendete kinematische Struktur aufweist.

Der Eindruck einer schlechten Parameterwahl wird durch Einsetzen sämtlicher LEC in den gesamten differentiellen Wirkungsquerschnitt (isr- und fsr-Beiträge, die Interferenz annulliert sich) verstärkt, da in diesem Falle über den gesamten Energiebereich (jedoch insbesondere bei kleinen Energien) eine gravierende Diskrepanz festzustellen ist (Abbildung 5.5, rechts). Die möglichen Ursachen dieser ungenügenden Beschreibung experimenteller Da-

ten sind vielschichtig, lassen sich jedoch grob in zwei Kategorien, technische und physikalische Aspekte, einteilen.

Zu den technischen Aspekten gehört sowohl eine unzureichende Berücksichtigung von QED-Effekten höherer Ordnung als auch eine fehlerhafte Übersetzung experimenteller Randbedingungen in Integrationsgrenzen; beides ist jedoch sehr unwahrscheinlich, da die *small angle*-Daten gut beschrieben werden können. Weiterhin kann auch ein einfacher Rechenfehler oder eine Fehlinterpretation der zur Verfügung stehenden Daten nicht mit Sicherheit ausgeschlossen werden. Darüber hinaus ist es sicherlich auch möglich, durch die in diesem gesamten Kapitel dargestellte Strategie der sukzessiven Parameteranpassung lediglich ein lokales Optimum möglicher Zahlenwerte der LEC gefunden zu haben.

Zu den Gründen physikalischer Natur gehören eine ungenügende Berücksichtigung des Omegamesons in den Feynman-Diagrammen der virtuellen Compton-Streuung (unwahrscheinlich, da dessen Einfluss vergleichsweise gering sein sollte) oder fehlende weitere Resonanzen (ebenfalls unwahrscheinlich, da die wichtigste Signatur, das Rhomeson, bereits konsistent eingebaut ist).

Zu diesem Zeitpunkt muss dieses Problem als offene Frage betrachtet werden, die weitergehende Untersuchungen verlangt.

5.7 VOLLSTÄNDIGER PARAMETERSATZ

Die vollständigen Liste der in L_1 und L_2 enthaltenen Kopplungen, die letztendlich für die virtuelle Compton-Streuung am Pion relevant sind, ist in Tabelle 5.2 auf der nächsten Seite zusammengefasst. Die Fehler entsprechen dabei einer Standardabweichung der zugehörigen Dichteverteilungen beziehungsweise einer quadratischen Addition der zugrundeliegenden Fehler.

An dieser Stelle ist zu betonen, dass die hier angegebenen Niederenergiekopplungskonstanten ausschließlich in Kombination mit der in Kapitel 2.3.5 zusammengestellten Lagrangedichte sowie unter Verwendung des in Kapitel 3.2.3 erläuterten *complex-mass* Renormierungsschemas und der dort angegebenen BPHZ-Vorschrift gültig sind.

Eine Übertragung auf andersartige Lagrangedichten ist nicht ohne Weiteres möglich.

	Liste L ₁		Liste L ₂	
l_5	-0.0320	±1 %	-0.0290	±2 %
l_6	-0.0697	±1 %	-0.0464	±2 %
e_1^r	0.165	±1 %	0.189	±1 %
e_1^i	0.0211	±8 %	-0.0235	±14 %
e_2	0.118	±1 %	0.0608	±2 %
e_3^r	-0.0618	±108 %	0.00475	±540 %
e_3^i	0.521	±85 %	0.595	±28 %
e_4^r	0.242	±6 %	-0.302	±5 %
e_4^i	0.520	±1 %	-0.264	±6 %
c_χ^r	-4.18	±7 %	-6.10	±1 %
c_χ^i	9.01	±1 %	4.49	±2 %
h^r	-0.00363	±40 %	0.00237	±49 %
h^i	-0.0123	±10 %	-0.0125	±10 %

Tabelle 5.2: Vollständige Liste der Real- und Imaginärteile der in L₁ und L₂ enthaltenen Kopplungen.

EPILOG

In der vorliegenden Arbeit sind die relevanten Konstruktionsmerkmale einer lorentzinvarianten chiralen effektiven Feldtheorie zur Modellierung einer Vielzahl niederenergetischer hadronischer Prozesse erörtert worden. Neben der Angabe einer geeigneten Lagrangedichte, die nicht nur Pionen sondern darüber hinaus Vektormesonen als neue Freiheitsgrade aufweist, ist besonderes Augenmerk auf das verwendete Zähl- sowie Renormierungsschema gelegt worden; sämtliche Rechnungen schließen Quantenkorrekturen ein.

Weiterhin ist eine konsistente Methode zur Extraktion der in der Theorie enthaltenen Kopplungskonstanten vorgestellt worden, deren Ergebnisse stellenweise sehr gut mit experimentellen Daten übereinstimmen, letztendlich jedoch noch einige Fragen offen lassen.

Theorie

Zur Beschreibung mesonischer Prozesse bis zu Energieüberträgen von rund 1 GeV im Rahmen einer effektiven Feldtheorie war die Berücksichtigung resonanter Freiheitsgrade obligatorisch. Die hierzu verwendete Lagrangedichte ist die allgemeinste der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(4)$ im Sektor gerader innerer Parität mit dynamischen Pionen und Rhomesonen, deren theoretische Vorhersagekraft durch phänomenologische Berücksichtigung des Omegameasons im Zusammenhang mit dem Formfaktor des Pions noch weiter verbessert worden ist. Das angewandte Zählschema beruht dabei auf einer nicht ganz offensichtlichen Separation der leichten (Vektor-) Mesonenmassen und der hadronischen Skala $4\pi F$, die jedoch im Rahmen der *large- N_c* -QCD möglich ist [18, 49] (Kapitel 2.3).

Die Berechnung von Quantenkorrekturen in Form von Schleifen der Feynman-Diagramme setzte die Verwendung des *complex-mass* Renormierungsschemas [19–23] voraus, welches die komplexen Massen der eingebauten Resonanzen – die Polpositionen vollständiger Propagatoren – mit renormierten Massen identifiziert. In Kombination mit dimensionaler Regularisierung [62] und dem BPHZ-Verfahren [65–67] sowie, zum Vergleich, dem $\overline{\text{MS}}$ -Schema, war eine konsistente Renormierung möglich. Neben allgemeinen Überlegungen zur Renormierung quantenfeldtheoretischer Rechnungen

ist dieses *complex-mass* Schema sowie die BPHZ-Methode explizit demonstriert worden (Kapitel 3.2.3).

Zur Kontrolle der Rechnungen sind darüber hinaus die elektromagnetischen Ward-Identitäten [72, 75, 76] abgeleitet und auf dem Niveau der Vertexfunktionen der relevanten Prozesse für das verwendete Renormierungsschema überprüft worden.

Prozesse

Die Bestimmung der Niederenergiekonstanten (LEC) ist durch eine sukzessive Anpassung einzelner Kopplungen und wiederholtes Einsetzen der extrahierten Werte in weitere, kompliziertere Prozesse durchgeführt worden (Kapitel 5). Integraler Bestandteil war dabei ein *bootstrap*-Verfahren [83], das sehr robuste Ergebnisse sowohl bezüglich der Zahlenwerte als auch der statistischen Unsicherheiten einzelner Kopplungen liefert (Anhang C).

Die in aller Ausführlichkeit betrachteten Prozesse waren im Einzelnen

- der elektromagnetische Formfaktor des Pions,
- die Pionenstreuung,
- die neutrale und geladene Photonenfusion sowie schließlich
- die virtuelle Compton-Streuung am Pion (vcs), eingebettet in die Elektron-Positron-Annihilation in zwei Pionen unter Abstrahlung eines reellen Photons.

Verwendete Observablen waren Formfaktoren, differentielle und totale Wirkungsquerschnitte sowie Asymmetrien, deren experimentelle Rahmenbedingungen in Form von Einschränkungen zulässiger Integrationsbereiche kinematischer Invarianten ausführlich diskutiert worden sind (Anhang B).

Die Zahlenwerte des finalen Satzes von Kopplungskonstanten hängen vom gewählten Renormierungsschema ab, so dass eine naive Übertragung auf andere Theorien ausgeschlossen ist; jedoch sollte es problemlos möglich sein, im Rahmen des hier vorliegenden Modells weitere Prozesse zu analysieren und damit bereits extrahierte Kopplungen zu verwenden.

Offene Fragen

Eine bislang offen gebliebene Frage ist der Einfluss der *final-state radiation*-Beiträge auf die niederenergetische Elektron-Positron-Annihilation und insbesondere deren Kalibrierung durch Ladungs-

ziehungsweise Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien. Zwar ist es möglich, eine passable Übereinstimmung von Theorie und Experiment bezüglich der Asymmetrie zu erreichen, die Übertragung dieser Ergebnisse auf differentielle Wirkungsquerschnitte ist jedoch problematisch.

Mögliche Gründe hierfür sind eine ungenügende Berücksichtigung von QED-Quantenkorrekturen oder das Fehlen relevanter Beiträge im hadronischen Modell.

Lösungsmöglichkeiten sind natürlich der Einbau in einen leistungsfähigen Event-Generator, beispielsweise PHOKHARA [25], der bereits höheren QED-Effekten Rechnung trägt oder aber konsistente Implementierung weiterer Resonanzen, wodurch jedoch eine Vielzahl neuer Kopplungskonstanten entstehen kann, die wiederum Anpassungen an experimentelle Daten verlangen.

Zu diesem Zeitpunkt muss dieses Problem jedoch als noch offene Frage betrachtet werden.

Technische Details

Da aus der χ EFT-Lagrangedichte aus Kapitel 2.3.5 eine sehr große Anzahl verschiedener Vertizes mit jeweils unterschiedlichen chiralen Ordnungen extrahiert werden kann und darüber hinaus eine Vielfalt physikalischer Prozesse beschrieben werden soll, war die Verwendung von geeigneten Computerprogrammen essentiell. Teilweise sind dafür bereits vorhandene Programme und Bibliotheken eingesetzt worden, wobei in vielen Fällen jedoch sehr starke Modifikationen notwendig waren. Teilweise sind jedoch auch neue Programme geschrieben worden, die explizit dazu geeignet sind, mit sehr langen algebraischen Ausdrücken nicht-kommutierender Objekte mit mehreren Zehntausenden von Termen umzugehen oder aber geeignete Interfaces zwischen einzelnen Programmpaketen bereitstellen.

Die technische Umsetzung der in dieser Arbeit vorgestellten Rechnungen, ausgehend von der Lagrangedichte speziell die Ableitung der Feynman-Regeln, Generation der einzelnen Diagramme und Amplituden, Überprüfung der erhaltenen Ausdrücke und schließlich die Anwendung numerischer Methoden, beanspruchte einen Großteil der insgesamt aufgewendeten Zeit.

Ausblick

Die hier vorgestellten Methoden sind sehr allgemeiner Natur und damit durchaus noch ausbaufähig. Weitere direkt hierauf aufbauende Studien sind eine vollständige Partialwellenanalyse der Pio-

nenstreuung zur besseren Extraktion der entsprechenden LEC, ein konsistenter Einbau des Omegamesons, um dessen Beiträge in sämtlichen Prozessen einzuschalten sowie, vielleicht am wichtigsten, eine Anpassung der VCS-Parameter an tatsächliche VCS-Daten für beliebige Virtualitäten, da nur auf diese Weise störende Einflüsse der QED oder des komplizierten Dreiteilchen-Phasenraums eliminiert werden können.

Weiterhin sollte es mit den vorhandenen Quellcodes und Methoden möglich sein, analoge Rechnungen in einer vollständigen $SU(3)$ - χ EFT durchzuführen, um die Wechselwirkung weiterer Goldstonebosonen zu analysieren.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die hier vorgestellte chirale effektive Feldtheorie in Kombination mit dem verwendeten Zählschema sowie der *complex-mass* Renormierung einen offensichtlich leistungsfähigen Rahmen zur konsistenten und gleichzeitigen Beschreibung unterschiedlichster niederenergetischer hadronischer Prozesse darstellt und dadurch, wegen der bislang noch offenen Fragen, weitere Analysen verdient.

NOTATIONEN UND KONVENTIONEN

A.1 EXPERIMENTELLE ZAHLENWERTE

Die in dieser Arbeit verwendeten Zahlenwerte physikalischer Konstanten sind dem aktuellen *Review of Particle Physics* der *Particle Data Group* [26] entnommen. Benutzt werden letztendlich die auf maximal drei signifikante Stellen gerundeten Werte:

$$\begin{aligned}
 m_{\pi^0} &= 0.135 \text{ GeV} & F &= 0.0922 \text{ GeV} \\
 m_{\pi^\pm} &= 0.140 \text{ GeV} & e &= \sqrt{4\pi\alpha} \\
 m_e &= 0.511 \text{ MeV} & \alpha &= 1/137 \\
 m_\rho &= (0.770 - 0.075i) \text{ GeV} & (\hbar c)^2 &= 0.389 \text{ GeV}^2 \text{ mb} \\
 m_\omega &= (0.783 - 0.004i) \text{ GeV}
 \end{aligned}$$

Weiterhin sind empirische Daten der Streulängen der Pionenstreuung relevant, deren aktueller experimenteller Status beispielsweise in [27, Kap. 3.5.4] zusammengefasst ist. Die dort genannten Zahlenwerte sind

$$a^{(0)} = 0.217 \pm 0.008 \pm 0.006 \approx 0.217 \pm 0.010$$

(ursprünglich entnommen aus [99]) und

$$a^{(0)} - a^{(2)} = 0.268 \pm 0.010 \pm 0.004 \pm 0.013 \approx 0.268 \pm 0.017,$$

wobei im letzten Schritt die Fehler jeweils quadratisch addiert worden sind. Für die der vorliegenden Arbeit zugrunde liegenden Zahlenwerte ergibt sich daher

$$a^{(0)} = 0.217 \quad \text{und} \quad a^{(2)} = -0.051.$$

Fehler sämtlicher Messdaten werden nicht weiter berücksichtigt, um hierauf aufbauende Rechnungen nicht unnötig zu verkomplizieren; weiterhin sind diese Unsicherheiten für gewöhnlich deutlich kleiner als die gemäß der Überlegung in Kapitel 2.3.1 zu erwartende theoretische Präzision.

A.2 ALLGEMEINES

Die verwendete Minkowskimetrik ist

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Die vollständig antisymmetrischen Levi-Civita-Symbole in drei oder vier Dimensionen, ε_{ijk} beziehungsweise $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, sind jeweils $+1$ für gerade Permutationen der Indizes, -1 für ungerade und 0 sonst.

Mit der Heavyside'schen Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

lautet das chronologische (zeitgeordnete) Produkt quantenfeldtheoretischer Operatoren

$$\mathcal{T}\{\phi(x)\phi(y)\} = \Theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x).$$

Die drei Generatoren der $SU(2)$ sind die Pauli-Matrizen

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die die Relationen

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\tau_j, \frac{1}{2}\tau_k\right] &= \frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}\tau_l, & \tau_j^2 &= \mathbb{1}_{2 \times 2}, & \{\tau_j, \tau_k\} &= 2\delta_{jk}\mathbb{1}_{2 \times 2}, \\ \tau_j\tau_k &= i\varepsilon_{jkl}\tau_l + \delta_{jk}\mathbb{1}_{2 \times 2}, & \text{und} & & \text{tr}\{\tau_j\tau_k\} &= 2\delta_{jk}\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

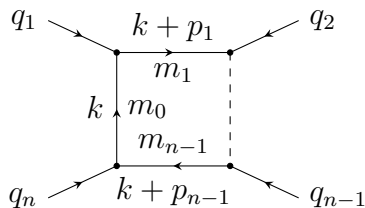
erfüllen.

A.3 SKALARE INTEGRALE

Das allgemeine n -Punkt-Integral vom Tensorrang r in D Dimensionen hängt von internen Impulsen p_i beziehungsweise Massen m_i ab, ist definiert gemäß

$$T^{n, \mu_1 \dots \mu_r} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_r}}{N_0 N_1 \dots N_{n-1}},$$

mit $N_i = (k + p_i)^2 - m_i^2 + i\varepsilon$ für $i = 0, \dots, n-1$ ($p_0 = 0$) [70] und beschreibt eine Schleife in der Form



mit den externen Impulsen q_i ; es ist dabei $p_j = \sum_{i=1}^j q_i$. Der 't Hooft-Parameter μ fixiert die Massendimension. Für gewöhnlich wird die Notation $T^{1,\mu\dots} = A^{\mu\dots}$, $T^{2,\mu\dots} = B^{\mu\dots}$ et cetera verwendet; für $r = 0$ (das heißt skalare Integrale) gilt darüber hinaus $T^{1,2,\dots} = A_0, B_0, \dots$. Tensorielle Integrale lassen sich in nahezu beliebige Tensorkoeffizienten zerlegen, gebräuchlich ist dabei die Basis aus [100]. Exemplarisch bedeutet dies für $B^{\mu\nu}$ daher beispielsweise

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} B_{00} + p_1^\mu p_1^\nu B_{11},$$

wobei $(D - 4)B_{00} = \frac{1}{6}p_1^2 - m^2$ (zu finden im Anhang in [70]).

In den in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen treten (neben den regulären A_0 , B_0 und C_0) die Strukturen $(D - 4)B_{00}$ auf, die jedoch im Rahmen des BPHZ-Renormierungsschemas konsequent ignoriert werden, da sich das B_{00} im Allgemeinen in einen divergenten und einen (für $D \rightarrow 4$) endlichen Anteil aufspalten lässt, die unabhängig voneinander entwickelt werden können. Korrekte Anwendung des Abzugsschemas verwirft den unendlichen Anteil jedoch¹, so dass insgesamt keine Beiträge des B_{00} zu erwarten sind (die endlichen Anteile werden wegen des Koeffizienten $D - 4$ eliminiert). Alternativ lässt sich der relevante unendliche Anteil natürlich (mit dem $t^{(d)}$ aus Gleichung (3.10)) gemäß

$$t^{(2)}\left(\frac{1}{6}p_1^2 - m^2\right) = \left(\frac{1}{6}p_1^2 - m^2\right)$$

explizit entwickeln, woraus die verwendete Renormierungsvorschrift

$$(D - 4)B_{00}(p^2, m^2, m^2) \xrightarrow{\text{BPHZ}} 0.$$

folgt.

Die verwendete Methode, tensorielle Integrale in skalare umzuschreiben, ist die sogenannte Passarino-Veltman-Reduktion [71].

Mit der Abkürzung

$$d\Omega := \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} d^D k$$

¹ Dies ist die Definition des Abzugsschemas: Die unendlichen Anteile werden subtrahiert.

sind die Argumente der in dieser Arbeit verwendeten Integrale

$$\begin{aligned}
A_0(m_0^2) &= \int \frac{d\Omega}{k^2 - m_0^2}, \\
B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) &= \int \frac{d\Omega}{(k^2 - m_0^2)[(k + p_1)^2 - m_1^2]} \quad \text{und} \\
C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) \\
&= \int \frac{d\Omega}{(k^2 - m_0^2)[(k + p_1)^2 - m_1^2][(k + p_1 + p_2)^2 - m_2^2]}.
\end{aligned}$$

Die Notation ist damit kompatibel mit den relevanten Computerprogrammen (speziell *LoopTools* [101]).

Da keine Integrale mit gemischten Massen auftauchen, wird eine vereinfachende Notation, die gleichzeitig via BPHZ renormierte Integrale mit Renormierungspunkt Λ^2 definiert, verwendet. Es ist

$$\begin{aligned}
R_2(p^2, m^2) &:= B_0(p^2, m^2, m^2) - B_0(\Lambda^2, m^2, m^2) \quad \text{und} \\
R_3(p_1^2, p_2^2, p_3^2, m^2) &:= C_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2, m^2, m^2, m^2).
\end{aligned}$$

Die Skala Λ^2 wird nicht als Argument der Integrale R_i aufgefasst, da diese eine extern festgelegte Größe und keine intrinsische, dynamische Variable ist.

A.4 ISOSPIN-ZERLEGUNG

Sämtliche Green'sche Funktionen sind Summen von Feynman-Diagrammen in kartesischer Notation, das heißt mit Feldern π_i und ρ_i für $i = 1, 2, 3$. Physikalische Prozesse werden jedoch ausschließlich in Koordinaten wohldefinierter Ladungszustände, also mit Feldern $\pi^{\pm,0}$ und $\rho^{\pm,0}$, beschrieben, so dass eine Transformation zwischen diesen beiden Systemen notwendig ist. Diese ist gegeben durch die Definitionen

$$\begin{aligned}
|\pi^\pm\rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi_1\rangle \pm i |\pi_2\rangle) \quad \text{und} \quad |\pi^0\rangle = |\pi_3\rangle \quad \text{bzw.} \\
|\rho^\pm\rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rho_1\rangle \pm i |\rho_2\rangle) \quad \text{und} \quad |\rho^0\rangle = |\rho_3\rangle.
\end{aligned}$$

Weiterhin relevant sind gekoppelte Zweipionenzustände, dargestellt in kartesischer und sphärischer Notation wohldefinierten Isospins. Bezeichne I_3 die dritte Komponente des Gesamtisospins I , so sind die physikalischen Pionen gegeben durch $|\pi^\pm\rangle = |1, \pm 1\rangle$

und $|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle$. Für Zweipionenzustände gilt die Clebsch-Gordan-Zerlegung

$$|\pi\pi'\rangle = |\pi\rangle \otimes |\pi'\rangle = |1, I_3\rangle \otimes |1, I'_3\rangle = \sum_{I, M} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ I_3 & I'_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} I \\ M \end{matrix} \right) |I, M\rangle$$

mit $I = 0, 1, 2$ sowie $M = I_3 + I'_3$; für diese Arbeit relevant sind die Zustände

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle \quad \text{und} \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 0\rangle. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich durch simples Ausmultiplizieren der kartesischen Darstellung

$$|\pi\pi'\rangle = |\pi\rangle \otimes |\pi'\rangle = \sum_j a_j |\pi_j\rangle \otimes \sum_k b_k |\pi_k\rangle = \sum_{j,k} a_j b_k |\pi_j\pi_k\rangle$$

und daher

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= \frac{1}{2} \left(-|\pi_1\pi_1\rangle + i|\pi_1\pi_2\rangle - i|\pi_2\pi_1\rangle - |\pi_2\pi_2\rangle \right) \quad \text{sowie} \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= |\pi_3\pi_3\rangle. \end{aligned}$$

Kombination dieser Darstellungen liefert für die Matrixelemente

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle \pi_c\pi_d | \pi_a\pi_b \rangle = \mathcal{M}_1\delta_{ab}\delta_{cd} + \mathcal{M}_2\delta_{ac}\delta_{bd} + \mathcal{M}_3\delta_{ad}\delta_{bc} \quad \text{und} \\ \mathcal{M} &= \langle I', M' | I, M \rangle = \mathcal{M}^{(I)}\delta_{II'}\delta_{MM'} \end{aligned}$$

(letztere folgt aus dem Wigner-Eckart-Theorem [102]) die Relationen [12]

$$\begin{aligned} \langle \pi^+\pi^- | \pi^+\pi^- \rangle &= \frac{1}{6}\mathcal{M}^{(2)} + \frac{1}{2}\mathcal{M}^{(1)} + \frac{1}{3}\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2, \\ \langle \pi^0\pi^0 | \pi^0\pi^0 \rangle &= \frac{2}{3}\mathcal{M}^{(2)} + \frac{1}{3}\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 \quad \text{und} \\ \langle \pi^0\pi^0 | \pi^+\pi^- \rangle &= \frac{1}{3}\mathcal{M}^{(2)} - \frac{1}{3}\mathcal{M}^{(0)} = -\mathcal{M}_1. \end{aligned}$$

Auflösen nach den $\mathcal{M}^{(I)}$ ergibt damit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(0)} &= 3\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3, \\ \mathcal{M}^{(1)} &= \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_3 \quad \text{und} \\ \mathcal{M}^{(2)} &= \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3. \end{aligned}$$

A.5 EINIGE QED-RELATIONEN

Die hier aufgeführten QED-Relationen sind [4] entnommen und entsprechen daher der dort vorgenommenen Normierung.

Die folgenden Feynman-Regeln sind von rechts nach links zu lesen: Der Pfeil auf den Linien symbolisiert die Flussrichtung der Fermionen, der vertikale Balken das Ende des Diagramms; p bezeichnet den Impulsfluss. Die einzelnen Zeilen entsprechen den Propagatoren P, den ein- und auslaufenden Fermionen F, den ein- und auslaufenden Antifermionen AF, den ein- und auslaufenden Photonen PH sowie dem QED-Vertex V

$$\begin{array}{ll}
\text{P} & \begin{array}{c} p \\ \longleftarrow \\ \hline \end{array} = \frac{i(\not{p} + m_e)}{p^2 - m_e^2} & \begin{array}{c} \mu \text{ } \overset{p}{\text{~~~~~}} \text{ } \nu \\ \hline \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} \\
\text{F} & \begin{array}{c} p \\ \longleftarrow \\ \hline \end{array} = u(r, p) & \begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \\ \hline \end{array} = \bar{u}(r, p) \\
\text{AF} & \begin{array}{c} \longleftarrow p \\ \longrightarrow \\ \hline \end{array} = \bar{v}(r, p) & \begin{array}{c} p \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \hline \end{array} = v(r, p) \\
\text{PH} & \begin{array}{c} \longleftarrow p \\ \mu \text{ } \text{~~~~~} \text{ } \nu \\ \hline \end{array} = \epsilon_\mu(\lambda, p) & \begin{array}{c} p \longrightarrow \\ \mu \text{ } \text{~~~~~} \text{ } \nu \\ \hline \end{array} = \epsilon_\mu^*(\lambda, p) \\
\text{V} & \begin{array}{c} \mu \text{ } \text{~~~~~} \text{ } \nu \\ \hline \diagup \diagdown \end{array} = -ie\gamma^\mu
\end{array}$$

Die Dirac-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
\bar{u}(r, p)(\not{p} - m_e) &= 0 = (\not{p} - m_e)u(r, p) \quad \text{und} \\
\bar{v}(r, p)(\not{p} + m_e) &= 0 = (\not{p} + m_e)v(r, p),
\end{aligned}$$

mit $\gamma^\mu p_\mu =: \not{p}$. Die Vollständigkeitsrelationen sind

$$\begin{aligned}
\sum_r u(r, p)\bar{u}(r, p) &= \not{p} + m_e \quad \text{und} \quad \sum_r v(r, p)\bar{v}(r, p) = \not{p} - m_e \\
\text{sowie} \quad \sum_\lambda \epsilon_\mu^*(\lambda)\epsilon_\nu(\lambda) &\rightarrow -g_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Mit $u := u(r, p)$ und $u' := u(r', p')$ (\bar{u} analog) sowie expliziten Spinorindizes und zwei Produkten von Gamma-Matrizen $\Gamma^{(i)}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{r, r'} \bar{u}'_a \Gamma_{ab}^{(1)} u_b \bar{u}_c \Gamma_{cd}^{(2)} u'_d &= \sum_{r'} u'_d \bar{u}'_a \Gamma_{ab}^{(1)} (\not{p} + m_e)_{bc} \Gamma_{cd}^{(2)} \\
&= (\not{p}' + m_e)_{da} \Gamma_{ab}^{(1)} (\not{p} + m_e)_{bc} \Gamma_{cd}^{(2)} \\
&= \text{tr}\left((\not{p}' + m_e)\Gamma^{(1)}(\not{p} + m_e)\Gamma^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

KINEMATIK

In diesem Kapitel werden einige allgemeine kinematische Überlegungen zusammengefasst und für die in dieser Arbeit relevanten Prozesse angepasst. Sämtliche Definitionen sind aus [81] entnommen.

Besonderes Augenmerk wird hierbei auf kinematische Invarianten mit deren Wertebereichen sowie den Wirkungsquerschnitt als Observable gelegt.

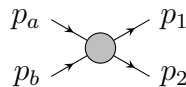
B.1 ALLGEMEINES

B.1.1 Wertebereiche

Die kinematischen Abhängigkeiten eines beliebigen $2 \rightarrow n$ -Teilchen Prozesses können durch Zusammenfassen einzelner Impulse zu Impulsgruppen auf $2 \rightarrow 2$ -Subprozesse der Form $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ mit $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ zurückgeführt werden. Mit der kinematischen Funktion

$$G(x, y, z, u, v, w) = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & v & x & z \\ 1 & v & 0 & u & y \\ 1 & x & u & 0 & w \\ 1 & z & y & w & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

gilt für den physikalisch zulässigen Wertebereich des Prozesses



die Ungleichung

$$G\left((p_a + p_b)^2, (p_a - p_1)^2, p_2^2, p_a^2, p_b^2, p_1^2\right) \leq 0. \quad (\text{B.2})$$

Neben diesen rein physikalischen Randbedingungen sind weiterhin experimentelle Grenzen, bedingt durch eine Detektorakzeptanz kleiner 4π , zu berücksichtigen. Im Schwerpunktsystem (cm-System), ausgezeichnet durch $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{0}$, lässt sich ein Impuls $P := p_a + p_b = (\sqrt{s}, \mathbf{0})$ mit $s = (p_a + p_b)^2$ definieren, dessen

Raumkomponente identisch verschwindet. Mit seiner Hilfe können sowohl die Energien als auch die Raumkomponenten sämtlicher Impulse im cm-System durch Invariante ausgedrückt werden; es gilt (mit $P^2 = s$)

$$E_i = \frac{P \cdot p_i}{\sqrt{s}} \quad \text{sowie} \quad (B.3)$$

$$\mathbf{p}_i^2 = \frac{(P \cdot p_i)^2}{P^2} - p_i^2 = -\frac{\Delta_2(P, p_i)}{s},$$

mit der symmetrischen Gram-Determinante

$$\Delta_n(p_a, \dots, p_n) = \det \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 \cdot p_2 & \cdots & p_1 \cdot p_n \\ p_2 \cdot p_1 & p_2^2 & \cdots & p_2 \cdot p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n \cdot p_1 & p_n \cdot p_2 & \cdots & p_n^2 \end{pmatrix}. \quad (B.4)$$

Für den Winkel θ^* zwischen zwei beliebigen Impulsen p_i und p_j im cm-System folgt aus $p_i \cdot p_j = E_i E_j - |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| \cos \theta^*$ schließlich

$$\cos \theta^* = \frac{P \cdot p_i P \cdot p_j - P^2 p_i \cdot p_j}{\sqrt{\Delta_2(P, p_i) \Delta_2(P, p_j)}}. \quad (B.5)$$

B.1.2 Wirkungsquerschnitt

Der totale Wirkungsquerschnitt eines $2 \rightarrow n$ -Teilchen Prozesses mit den Impulsen $p_a + p_b \rightarrow \sum_{i=1}^n p_i$ setzt sich aus kinematischen sowie dynamischen Komponenten zusammen und lautet allgemein

$$\sigma_n = \frac{1}{F} \int d\Phi_n \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle,$$

mit dem Flussfaktor $F = 2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)$, wobei $s = (p_a + p_b)^2$. Die kinematische Funktion

$$\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz,$$

verknüpft mit $\Delta_2(p_a, p_b) = -\frac{1}{4}\lambda(s, p_a^2, p_b^2)$, beinhaltet ausschließlich Parameter der einlaufenden Teilchen. Das Phasenraumintegral ist definiert gemäß

$$\int d\Phi_n = \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^n p_i \right),$$

wobei $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$, und bildet zusammen mit F den kinematischen Baustein. Sämtliche Strukturen im Wirkungsquerschnitt σ_n , die nicht ausschließlich durch diese beiden Größen erzeugt werden können, lassen sich auf dynamische, das heißt physikalische Eigenschaften des zu untersuchenden Prozesses zurückführen und sind im (häufig gemittelten) quadrierten Matrixelement $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ kodiert.

Für theoretische Analysen des Matrixelementes ist ein in möglichst vielen Variablen differentieller Wirkungsquerschnitt am geeignetsten, da dieser keine kinematischen Anomalien durch (numerische) Phasenraumintegrationen beinhaltet und daher einen Blick auf die eigentliche Physik zulässt. Experimentell ist jedoch – beispielsweise wegen begrenzter Detektorauflösung oder Kenntnis der beteiligten Teilchen und Impulse – ein wenig differentieller (das heißt integrierter) Wirkungsquerschnitt zugänglich, so dass die Vor- und Nachteile einer teilweisen numerischen Integration abgewogen werden müssen.

B.2 ZWEIFTEILCHENSTREUUNG

B.2.1 *Kinematik*

Die Kinematik der Zweiteilchenstreuung,

$$p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 \quad \text{mit} \quad p_i = (E_i, \mathbf{p}_i), \quad (\text{B.6})$$

lässt die Definition von insgesamt drei Invarianten – den Mandelstam-Variablen – zu,

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_a - p_1)^2 \quad \text{und} \quad u = (p_a - p_2)^2. \quad (\text{B.7})$$

Da $s + t + u = p_a^2 + p_b^2 + p_1^2 + p_2^2$ verbleiben auf der Massenschale $p_i^2 = m_i^2$ zwei unabhängige Variablen, für gewöhnlich s und t . Die gemischten Skalarprodukte lassen sich durch

$$\begin{aligned} p_a \cdot p_b &= \frac{1}{2}(s - p_a^2 - p_b^2), & p_1 \cdot p_a &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_a^2 - t), \\ p_2 \cdot p_a &= \frac{1}{2}(p_2^2 + p_a^2 - u), & p_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(s - p_1^2 - p_2^2), \\ p_2 \cdot p_b &= \frac{1}{2}(p_2^2 + p_b^2 - t), & p_1 \cdot p_b &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_b^2 - u) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

in Invariante transformieren.

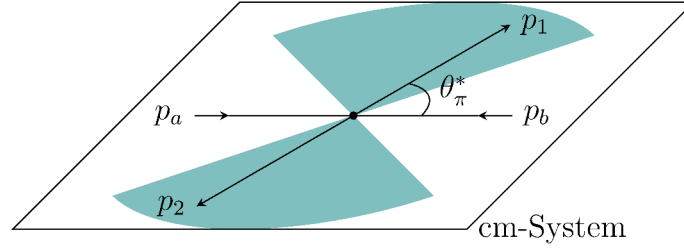


Abbildung B.1: Experimentell zulässiger Bereich der $2 \rightarrow 2$ -Teilchenstreuung, abhängig vom Streuwinkel, $|\cos \theta^*| \leq \xi$.

B.2.2 Wirkungsquerschnitt

Der einfach differentielle Wirkungsquerschnitt in Invarianten ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, p_a^2, p_b^2)} \langle |\mathcal{M}(s, t)|^2 \rangle, \quad (\text{B.9})$$

der totale Wirkungsquerschnitt damit

$$\sigma = \int_{t^-}^{t^+} dt \frac{d\sigma}{dt}. \quad (\text{B.10})$$

Physikalische Grenzen

Der physikalisch zulässige Wertebereich der Variablen $t \in [t^-, t^+]$ kann aus der Bedingung in Gleichung (B.2) extrahiert werden. Übertragen auf die in dieser Arbeit relevanten Prozesse gilt im Falle der Pionenstreuung ($\pi\pi \rightarrow \pi\pi$)

$$\begin{aligned} G(s, t, m_\pi^2, m_\pi^2, m_\pi^2, m_\pi^2) &= -4m_\pi^2 st + s^2 t + st^2 \leq 0 \\ \Rightarrow 4m_\pi^2 - s &\leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

für die (reelle) Photonfusion ($\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$)

$$\begin{aligned} G(s, t, m_\pi^2, 0, 0, m_\pi^2) &= m_\pi^4 s - 2m_\pi^2 st + s^2 t + st^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \\ m_\pi^2 - \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{s(s - 4m_\pi^2)} &\leq t \leq m_\pi^2 - \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{s(s - 4m_\pi^2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Experimentelle Grenzen

Im hier relevanten Fall der $2 \rightarrow 2$ -Streuung ist θ^* der Streuwinkel zwischen p_a und p_1 im Schwerpunktsystem, dessen Akzeptanzbereich durch die Relation $|\cos \theta^*| \leq \xi$ (äquivalent zu $\cos \theta^* \leq \xi$ und $\cos \theta^* \geq -\xi$) mit $\xi \in [0, 1]$ (grüner Bereich in Abbildung B.1) angegeben wird.

Für die Pionenstreuung mit vier Pionen auf der Massenschale folgt für den physikalisch zulässig minimalen Wert t_2^- sowie maximalen Wert t_2^+

$$\cos \theta^* = 1 + \frac{2t}{s - 4m_\pi^2} \quad \Rightarrow \quad t^\pm = \frac{1}{2}(\pm\xi - 1)(s - 4m_\pi^2), \quad (\text{B.13})$$

und ist damit identisch zu Gleichung (B.11) für $\xi = \pm 1$. Für die Photonfusion mit zwei Pionen auf der Massenschale sowie zwei masselosen Photonen ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos \theta^* &= \frac{s - 2m_\pi^2 + 2t}{\sqrt{s(s - 4m_\pi^2)}} \\ \Rightarrow \quad t^\pm &= \frac{1}{2}\left(\pm\xi\sqrt{s(s - 4m_\pi^2)} - s + 2m_\pi^2\right), \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

welches wiederum mit Gleichung (B.12) für $\xi = \pm 1$ konsistent ist.

B.3 DREITEILCHEN-ENDZUSTAND

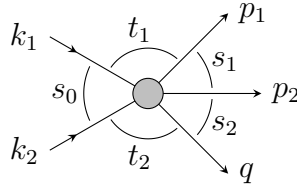
B.3.1 *Kinematik*

Die Kinematik eines $2 \rightarrow 3$ -Prozesses lautet

$$k_1 + k_2 \rightarrow p_1 + p_2 + q. \quad (\text{B.15})$$

Die zugehörigen Invarianten sind für gewöhnlich definiert gemäß

$$\begin{aligned} s_0 &= (k_1 + k_2)^2, \\ s_1 &= (p_1 + p_2)^2, \\ s_2 &= (p_2 + q)^2, \\ t_1 &= (k_1 - p_1)^2 \quad \text{und} \\ t_2 &= (k_2 - q)^2. \end{aligned}$$



$$(\text{B.16})$$

Die zehn möglichen gemischten Skalarprodukte sind daher

$$\begin{aligned}
k_1 \cdot k_2 &= \frac{1}{2}(-k_1^2 - k_2^2 + s_0), \\
p_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(-p_1^2 - p_2^2 + s_1), \\
p_2 \cdot q &= \frac{1}{2}(-p_2^2 - q^2 + s_2), \\
k_1 \cdot p_1 &= \frac{1}{2}(k_1^2 + p_1^2 - t_1), \\
k_2 \cdot q &= \frac{1}{2}(k_2^2 + q^2 - t_2), \\
p_1 \cdot q &= \frac{1}{2}(p_2^2 + s_0 - s_1 - s_2), \\
k_1 \cdot q &= \frac{1}{2}(-k_2^2 + s_0 - s_1 + t_2), \\
k_2 \cdot p_1 &= \frac{1}{2}(-k_1^2 + s_0 - s_2 + t_1), \\
k_2 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(-q^2 + s_2 - t_1 + t_2), \\
k_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(-p_1^2 + s_1 + t_1 - t_2).
\end{aligned} \tag{B.17}$$

B.3.2 Wirkungsquerschnitt

Der vierfach differentielle Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch

$$\frac{d^4\sigma}{ds_1 ds_2 dt_1 dt_2} = \frac{\langle |\mathcal{M}^2| \rangle}{1024\pi^4 \lambda(s, k_1^2, k_2^2) \sqrt{-\Delta_4}}, \tag{B.18}$$

die Argumente von Δ_4 (aus Gleichung (B.4)) sind vier beliebige Linearkombinationen der zur Verfügung stehenden Impulse – der Fall $\Delta_4 > 0$ ist kinematisch ausgeschlossen.

Letztendlich interessant ist der bezüglich s_1 einfach differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\hat{\sigma} := \frac{d\sigma}{ds_1} = \frac{1}{1024\pi^4 \lambda(s, k_1^2, k_2^2)} \int ds_2 dt_1 dt_2 \frac{\langle |\mathcal{M}^2| \rangle}{\sqrt{-\Delta_4}} \tag{B.19}$$

mit den im Folgenden abzuleitenden Integrationsbereichen. Steht das Maß $d\Delta$ abkürzend für sämtliche auftretenden Faktoren, so ist vereinfachend

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= \int d\Delta \langle |\mathcal{M}^2| \rangle \quad \text{mit} \\
d\Delta &:= \frac{1}{1024\pi^4 \lambda(s, k_1^2, k_2^2)} \int ds_2 dt_1 dt_2 \frac{1}{\sqrt{-\Delta_4}}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

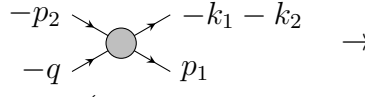
sowie geeigneten Grenzen.

Physikalische Grenzen

Für den konkreten Fall der e^+e^- -Annihilation in zwei Pionen und ein reelles Photon,

$$e^+(k_1) + e^-(k_2) \rightarrow \pi^+(p_1) + \pi^-(p_2) + \gamma(q), \quad (\text{B.21})$$

folgt aus Gleichung (B.2) für $s_2 = (p_2 + q)^2$

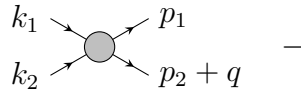


$$G\left((p_2 + q)^2, (k_1 + k_2 - p_2)^2, p_1^2, p_2^2, q^2, (k_1 + k_2)^2\right) \leq 0$$

und liefert

$$\begin{aligned} G &= m_\pi^4 s_1 + s_1 s_2 (s_1 + s_2 - s_0) + m_\pi^2 (s_0^2 - s_0 s_1 - 2s_1 s_2) \leq 0 \\ \Rightarrow s_2^\pm &= \frac{1}{2} \left(2m_\pi^2 + s_0 - s_1 \right) \pm \frac{1}{2s_1} \sqrt{s_1 (s_0 - s_1)^2 (s_1 - 4m_\pi^2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

wobei die Massenschalenbedingungen $k_i^2 = m_e^2$, $p_i^2 = m_\pi^2$ und $q^2 = 0$ verwendet worden sind. Für $t_1 = (k_1 - p_1)^2$ eignet sich



$$G\left((k_1 + k_2)^2, (k_1 - p_1)^2, (p_2 + q)^2, k_1^2, k_2^2, p_1^2\right) \leq 0$$

und ergibt

$$\begin{aligned} G &= m_e^4 s_0 + s_0 (m_\pi^2 (s_2 - t_1) + t_1 (s_0 - s_2 + t_1)) \\ &\quad + m_e^2 (m_\pi^4 + s_2^2 - m_\pi^2 (s_0 + 2s_2) - s_0 (s_2 + 2t_1)) \leq 0 \end{aligned}$$

woraus der Bereich

$$\begin{aligned} t_1^\pm &= \frac{1}{2} \left(2m_e^2 + m_\pi^2 - s_0 + s_2 \right) \\ &\quad \pm \frac{1}{2s_0} \sqrt{s_0 (s_0 - 4m_e^2) (m_\pi^4 + (s_0 - s_2)^2 - 2m_\pi^2 (s_0 + s_2))} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

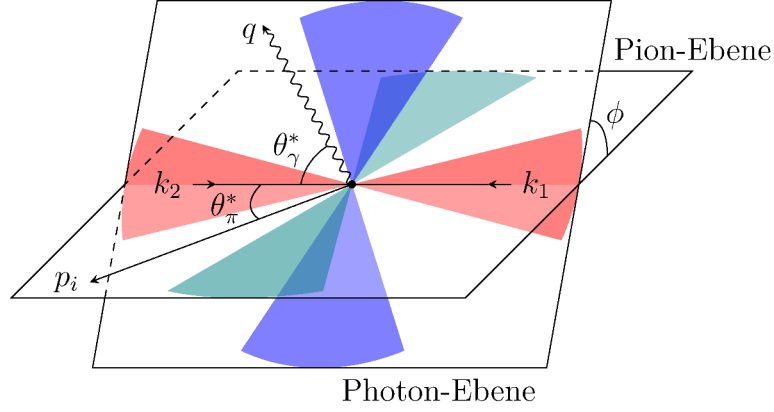


Abbildung B.2: Experimentelle Grenzen der $2 \rightarrow 3$ -Streuung für $|\cos \theta_\gamma^*| \geq \xi$ (rot), $|\cos \theta_\gamma^*| \leq \xi$ (blau) und $|\cos \theta_\pi^*| \leq \xi$ (grün).

folgt. Für $t_2 = (k_2 - q)^2$ ist

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 k_2 & \rightarrow & q \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & \bullet & \\
 & \nearrow & \searrow \\
 k_1 & \rightarrow & p_1 + p_2
 \end{array}
 & \rightarrow & \\
 & & G\left((k_1 + k_2)^2, (k_2 - q)^2, (p_1 + p_2)^2, k_2^2, k_1^2, q^2\right) \leq 0
 \end{array}$$

nützlich und liefert schließlich

$$G = m_e^4 s_0 + s_0 t_2 (s_0 - s_1 + t_2) + m_e^2 (s_1^2 - s_0 (s_1 + 2t_2)) \quad (\text{B.24})$$

beziehungsweise die beiden Grenzen

$$t_2^\pm = \frac{1}{2} (2m_e^2 - s_0 + s_1) \pm \frac{1}{2s_0} \sqrt{s_0 (s_0 - 4m_e^2) (s_0 - s_1)^2}. \quad (\text{B.25})$$

Experimentelle Grenzen

Der Impuls $K := k_1 + k_2 = (\sqrt{s_0}, \mathbf{0})$ definiert das cm-System. Die Strahlachse (k_1 oder k_2) definiert darüber hinaus in Kombination mit dem reellen Photon beziehungsweise einem der beiden Pionen eine Photon- respektive Pion-Ebene. Zu berücksichtigen ist die Abstrahlung sowohl des Photons unter kleinen ($|\cos \theta_\gamma^*| \geq \xi$, rot) beziehungsweise großen ($|\cos \theta_\gamma^*| \leq \xi$, blau) Winkeln als auch bei der Pionen unter großen Winkeln ($|\cos \theta_\pi^*| \leq \xi$, grün), schematisch dargestellt in Abbildung B.2

Für den Photon-Streuwinkel θ_γ^* folgt aus Gleichung (B.5)

$$\cos \theta_\gamma^* = \frac{s_0(2m_e^2 - s_0 + s_1 - 2t_2)}{\sqrt{s_0(s_0 - 4m_e^2)(s_0 - s_1)^2}}, \quad (\text{B.26})$$

umgestellt nach t_2 ergibt sich $t_2 = a - b \cos \theta_\gamma^*$ mit den beiden Abkürzungen

$$\begin{aligned} a &= m_e^2 - \frac{s_0 - s_1}{2} \quad \text{und} \\ b &= \frac{1}{2s_0} \sqrt{s_0(s_0 - 4m_e^2)(s_0 - s_1)^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Die Bedingung $|\cos \theta_\gamma^*| \geq \xi$ übersetzt sich damit in

$$t_2 \leq a - b\xi \quad \text{und} \quad t_2 \geq a + b\xi, \quad (\text{B.28})$$

für $|\cos \theta_\gamma^*| \leq \xi$ folgt analog

$$t_2 \geq a - b\xi \quad \text{und} \quad t_2 \leq a + b\xi. \quad (\text{B.29})$$

In Kombination mit den festen physikalischen Grenzen aus (B.25) ergibt sich für die beiden experimentell realisierbaren Winkel (im Falle des KLOE-Detektors) von $\theta_\gamma^* < 15^\circ$ (rot) sowie $\theta_\gamma^* > 50^\circ$ (blau) der (maßstabsgetreue) Akzeptanzbereich:



Für numerische Berechnungen ist eine Übersetzung der geometrischen Gegebenheiten eines konkreten Experiments im Allgemeinen nicht notwendig, da ein numerischer Test der Form $|\cos \theta| \leq \xi$ einfacher zu implementieren ist.

Für die Winkel der beiden Pionen zur Strahlachse folgt ganz analog zu den bisherigen Überlegungen

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\pi_1} &= \frac{s_0(s_0 - s_2 + 2t_1 - m_\pi^2 - 2m_e^2)}{\sqrt{s_0(s_0 - 4m_e^2)(m_\pi^4 + (s_0 - s_2)^2 - 2m_\pi^2(s_0 - s_2))}} \quad \text{und} \\ \cos \theta_{\pi_2} &= \frac{s_0(m_\pi^2 - s_1 + s_2 - 2t_1 + 2t_2)}{\sqrt{s_0(s_0 - 4m_e^2)(m_\pi^4 + (s_1 + s_2)^2 - 2m_\pi^2(2s_0 + s_1 + s_2))}}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

DAS BOOTSTRAP-VERFAHREN

Zur Bestimmung der Niederenergiekopplungskonstanten ist eine Anpassung der theoretischen Amplituden an experimentelle Daten notwendig; hierzu wird die Methode der kleinsten Quadrate (*non-linear least squares*) in Kombination mit dem *bootstrap*-Verfahren [83] zur Fehlerabschätzung verwendet, da dieses technisch einfach zu implementieren ist.

Eine Menge von n experimentellen Datenpunkten, zusammengefasst im Vektor $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i, \delta_i)$ – mit y_i -Messfehlern δ_i (Fehler bezüglich der x -Achse werden nicht berücksichtigt) – definiert als Ausgangspunkt eine Population $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Bezeichne der reelle Vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ die Menge aller freien Parameter einer theoretischen Vorhersage $f = f(x_i, \mathbf{p})$, so gilt es im Allgemeinen, die Funktion

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i, \mathbf{p}))^2}{\delta_i^2}, \quad (\text{C.1})$$

bezüglich \mathbf{p} (numerisch) zu minimieren. Diese Prozedur liefert eine Abschätzung $\hat{\mathbf{p}}$ der unbekannt Parameter, die – neben der genauen Struktur der Funktion f – vom Inhalt der Population \mathcal{A} abhängt, $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}(\mathcal{A})$.

Mit *bootstrapping* bezeichnet man nun das m -malige Durchmischen¹ der Ausgangspopulation zur Erzeugung neuer bootstrap-Datensätze \mathcal{B}_i ($i = 1, \dots, m$) mit anschließender Abschätzung der unbekannt Parameter $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}(\mathcal{B}_i)$ gemäß (C.1). Der Mittelwert

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{p}}(\mathcal{B}_i) \quad \text{bzw.} \quad \langle \hat{p}_j \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{p}_j(\mathcal{B}_i) \quad (\text{C.2})$$

liefert dabei ein mögliches Maß für die Zahlenwerte der einzelnen unbekannt Parameter p_j , die den Vektor \mathbf{p} bilden. Die aus der Varianz

$$V(\hat{p}_j) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\hat{p}_j(\mathcal{B}_i) - \langle \hat{p}_j \rangle)^2 \quad (\text{C.3})$$

¹ Einmaliges *Durchmischen* einer Population \mathcal{A} mit n Elementen \mathbf{v}_i bedeutet n -maliges *Ziehen mit Zurücklegen* von \mathbf{v}_i aus \mathcal{A} , so dass eine neue Population \mathcal{B} mit n Elementen entsteht, die jedoch Dopplungen enthalten kann.

abgeleitete Standardabweichung $\sigma_{p_j} = \sqrt{V(p_j)}$ ist darüber hinaus eine mögliche Abschätzung der Fehler besagter Parameter.

Die letztendlich in dieser Arbeit verwendeten Zahlenwerte der Parameter p_j sind die sehr einfache Wahl

$$p_j = \langle \hat{p}_j \rangle \pm \sigma_{p_j}, \quad (\text{C.4})$$

das heißt die bootstrap-Mittelwerte plus/minus eine Standardabweichung der entsprechenden bootstrap-Verteilung.

Der Korrelationskoeffizient der Parameter p_i und p_j ist über die Kovarianz

$$\text{cov}(p_i, p_j) = \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m (\hat{p}_i(\mathcal{B}_l) - \langle \hat{p}_i \rangle) (\hat{p}_j(\mathcal{B}_l) - \langle \hat{p}_j \rangle) \quad (\text{C.5})$$

gemäß

$$\text{cor}(p_i, p_j) = \frac{\text{cov}(p_i, p_j)}{\sigma_{p_i} \sigma_{p_j}} \quad (\text{C.6})$$

definiert.

Für den Fehler σ_f einer Funktion $f = f(\mathbf{p}) = f(p_1, \dots, p_k)$ mit den p_j aus Gleichung (C.4) kann die Relation

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^k \left(\left. \frac{\partial f}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}=\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle} \sigma_{p_i} \right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \text{cov}(p_i, p_j), \quad (\text{C.7})$$

die Gauß'sche Fehlerpropagation mit korrelierten Parametern [103], verwendet werden. Sind die Kovarianzen nicht bekannt, muss auf den zweiten Term verzichtet werden. Da die korrekte Berücksichtigung der Korrelationen für die in dieser Arbeit relevanten Funktionen f (meist quadrierte Matrixelemente) technisch sehr aufwändig ist werden diese nicht verwendet.

Experimentelle Analysen, die sich die Abstrahlung (zusätzlicher) Photonen im Anfangszustand zunutze machen (*radiative return*) stellen ein ausgesprochen mächtiges Werkzeug zur Vermessung hadronischer Wirkungsquerschnitte in Collider-Experimenten fester Schwerpunktenenergie \sqrt{s} dar. Die Emission eines einzelnen direkt oder indirekt nachgewiesenen Photons lässt einen Energiescan über einen weiten Bereich von der Schwelle bis zur maximalen Schwerpunktsenergie zu. Besonders erfolgreich wird diese Methode (wegen der hohen Luminosität) bei Detektoren moderner Mesonenfabriken wie beispielsweise KLOE, BES-III, BABAR oder BELLE eingesetzt [25].

Speziell in der Elektron-Positron-Annihilation $e^-e^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ kann das nachgewiesene Photon entweder vom leptonischen Teil (*initial-state radiation*, isr) oder hadronischen Teil (*final-state radiation*, fsr) emittiert werden. Während die isr-Beiträge mit außerordentlicher Präzision durch die QED beschrieben werden können (inklusive Quanten- und Strahlungskorrekturen höherer Ordnung), setzen die fsr-Anteile im Allgemeinen die Wahl eines niederenergetischen Modells der QCD voraus, das die charakteristischen Eigenschaften des Zweipionen-Endzustandes erfasst. Prinzipiell kann fsr als Verunreinigung beziehungsweise unerwünschter Hintergrund aufgefasst werden, so dass es wünschenswert ist, einen Eindruck von der Größe der entsprechenden Einflüsse zu erhalten, ohne ein besonderes hadronisches Modell zugrunde legen zu müssen.

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Ergebnisse einer modellunabhängigen¹ Analyse des fsr-Beitrages mit Hilfe des Event-Generators PHOKHARA (beispielsweise [104]) – beziehungsweise einer via MPI² parallelisierten Version – für die Kinematik des *off-peak* KLOE-Experiments ($\sqrt{s} = 1 \text{ GeV}$, [93]) zusammengefasst. Überprüft wurde dabei die Möglichkeit, durch experimentelle Daten der Asymmetrie Informationen über den Wirkungsquerschnitt oder zumindest der zu erwartenden Fehler zu extrahieren – ohne an ein bestimmtes hadronisches Modell gebunden zu sein.

¹ Nicht vollständig modellunabhängig, da Annahmen bezüglich der verwendeten Tensorbasis gemacht werden müssen.

² *Message Passing Interface*, Kommunikationsprotokoll für parallele, verteilte, numerische Berechnungen. Verwendet wurde die *OpenMPI*-Implementierung.

Daten, Definitionen und weitere Informationen sind aus dem sehr umfangreichen Bericht [25], insbesondere Kapitel 4 sowie den darin genannten Referenzen, entnommen.

Wirkungsquerschnitt und Asymmetrie

Der bezüglich der invarianten Masse des Zweipionensystems (s_1) differentielle Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma} := d\sigma/ds_1$ der e^+e^- -Annihilation zerfällt in die Beiträge

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\text{isr}} + \hat{\sigma}_{\text{fsr}} + \hat{\sigma}_{\text{int}},$$

wobei der isr-fsr-Interferenzterm $\hat{\sigma}_{\text{int}}$ ungerade unter Ladungskonjugation ist (weitere Details zu den einzelnen Bausteinen, den kinematischen Randbedingungen und Definitionen der Observablen sind in Kapitel 4.4.3 zu finden). Dies impliziert eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie der emittierten Pionen, die (mit $\hat{\sigma}^\pm = \hat{\sigma}$ für $\cos\theta_{\pi^+} \gtrless 0$) definiert ist gemäß (Gleichung (4.48))

$$\mathcal{A}_{\text{fb}} = \frac{\hat{\sigma}^- - \hat{\sigma}^+}{\hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{int}}^- - \hat{\sigma}_{\text{int}}^+}{\hat{\sigma}_{\text{isr}} + \hat{\sigma}_{\text{fsr}}} = \frac{N^- - N^+}{N^- + N^+}$$

und für symmetrische Integrationswinkel der Pionen sehr empfindlich auf die Interferenzen und damit die fsr-Modelle reagiert. Da die in diesem Kapitel vorgestellte Analyse mit Hilfe eines Event-Generators durchgeführt wurde, bestand Zugriff auf die explizite Anzahl der in Vorwärts- (N^+) oder Rückwärtsrichtung (N^-) emittierten π^+ .

Im Folgenden werden sowohl diese Asymmetrie als auch der *totale* Wirkungsquerschnitt (ebenfalls durch explizite Zählraten bestimmt) eine Rolle spielen und vereinfachend mit \mathcal{A} beziehungsweise σ bezeichnet.

Methode

Das im Generator bereits implementierte fsr-Modell [105] verwendet als Ansatz die eichinvariante Tensorbasis $T_i^{\mu\nu}$ der vcs-Kontaktdiagramme (die Polfreien Beiträge) aus [78], der Eichinvarianz sowie Symmetrie bezüglich Ladungskonjugation und Photonen-Kreuzung zugrunde liegt. Die möglichen hadronischen Modelle sind dabei durch die drei Funktionen f_i parametrisiert, welche die Koeffizienten der vcs-Amplitude $\mathcal{M}^{\mu\nu} = f_i T_i^{\mu\nu}$ bilden.

Die hier besprochene modellunabhängige Methode beschränkt sich auf eine (zufällige) Variation dieser (komplexen) Funktionen f_i , um Bereiche zulässiger (das heißt mit den Daten kompatibler)

Asymmetrien zu identifizieren; die im gleichen Schritt berechneten Wirkungsquerschnitte liefern Informationen bezüglich des Einflusses eines etwaigen *f_s*-Modells, welches durch die Asymmetrien kalibriert worden ist. (Poldiagramme sind durch eine Parametrisierung des Formfaktors des Pions berücksichtigt und werden *nicht* modifiziert.)

Für jede einzelne Energie s_1 , für die experimentelle Daten sowohl für die Asymmetrie (\mathcal{A}_{dat}) als auch für den (totalen) Wirkungsquerschnitt (σ_{dat}) vorliegen, werden eine Menge von Zahlenwerten der drei f_i generiert und anschließend die theoretischen Vorhersagen \mathcal{A}_{th} und σ_{th} berechnet; es entstehen hierdurch lange Listen von Tupeln der Form $(s_1, f_1, f_2, f_3, \mathcal{A}_{\text{th}}, \sigma_{\text{th}})$, welche die relevanten Informationen einer bestimmten physikalischen Konfiguration der f_i beinhalten. Anschließender Vergleich der \mathcal{A}_{th} mit den zugehörigen – durch s_1 festgelegten – experimentellen Daten \mathcal{A}_{dat} liefert zwei neue, disjunkte Listen: Die Trefferliste, die ausschließlich Tupel enthält, deren Asymmetrie mit den Daten *kompatibel* ist (also innerhalb der Fehlerbalken liegt), und der dazu komplementäre Rest. Nach dieser Definition sind die in der Trefferliste enthaltenen Asymmetrien auf die Bereiche der experimentellen Daten eingeschränkt.

Graphisches Auftragen der in der Trefferliste enthaltenen Wirkungsquerschnitte liefert einen Eindruck, wie präzise mögliche (modellunabhängige) Informationen, welche durch die Asymmetrie gewonnen wurden, letztendlich bezüglich des Wirkungsquerschnitts sein können.

Ergebnisse

Insgesamt ist ein sechsdimensionaler Parameterraum abgetastet worden, um die Einflüsse der drei komplexen Funktionen f_i zu analysieren. Da eine Darstellung der entsprechenden Ergebnisse jedoch nicht ohne Weiteres möglich ist, werden hier nur die Resultate einer Variation des Real- und Imaginärteils von $f_1 = f_1^r + if_1^i$ bei gleichzeitiger Fixierung von $f_2 = f_3 = 0$ zusammengefasst. Die endgültige Kernaussage ist jedoch identisch.

Die Trefferliste liefert für jede einzelne Energie Verteilungen wie diejenigen, die exemplarisch in Abbildung D.1 eingetragen sind. Die Farben dieses zweidimensionalen Dichtehistogramms entsprechen dabei der relativen Häufigkeit, eine kompatible Konfiguration gefunden zu haben (von 0 % in weiß bis 100 % in blau). Die konkreten Zahlenwerte der gewählten f_1 (f_1^r horizontal und f_1^i vertikal) spielen dabei keine Rolle und sind implementierungsabhängig, wurden jedoch nach Möglichkeit so eingestellt, die experimentell

zulässigen Asymmetrien gut auszuleuchten. Die grünen Bereiche in Abbildung D.2 (oben) entsprechen dabei den getesteten Werten.

Die in Abbildung D.2 (unten) eingezeichneten Bänder sind gleichzeitig die Spannbreiten derjenigen Wirkungsquerschnitte, die in der Trefferliste enthalten sind.

Dieser modellunabhängigen Analyse nach ist es daher – sogar unter Verwendung der vereinfachenden Annahme, lediglich f_1 trage signifikant zur f_{sr} -Amplitude bei – nicht möglich, durch einfache Anpassung an Daten der Asymmetrie sinnvolle Aussagen über den Wirkungsquerschnitt zu treffen. Ein zugrunde liegendes Modell der hadronischen Beiträge der Elektron-Positron-Annihilation ist daher essentiell.

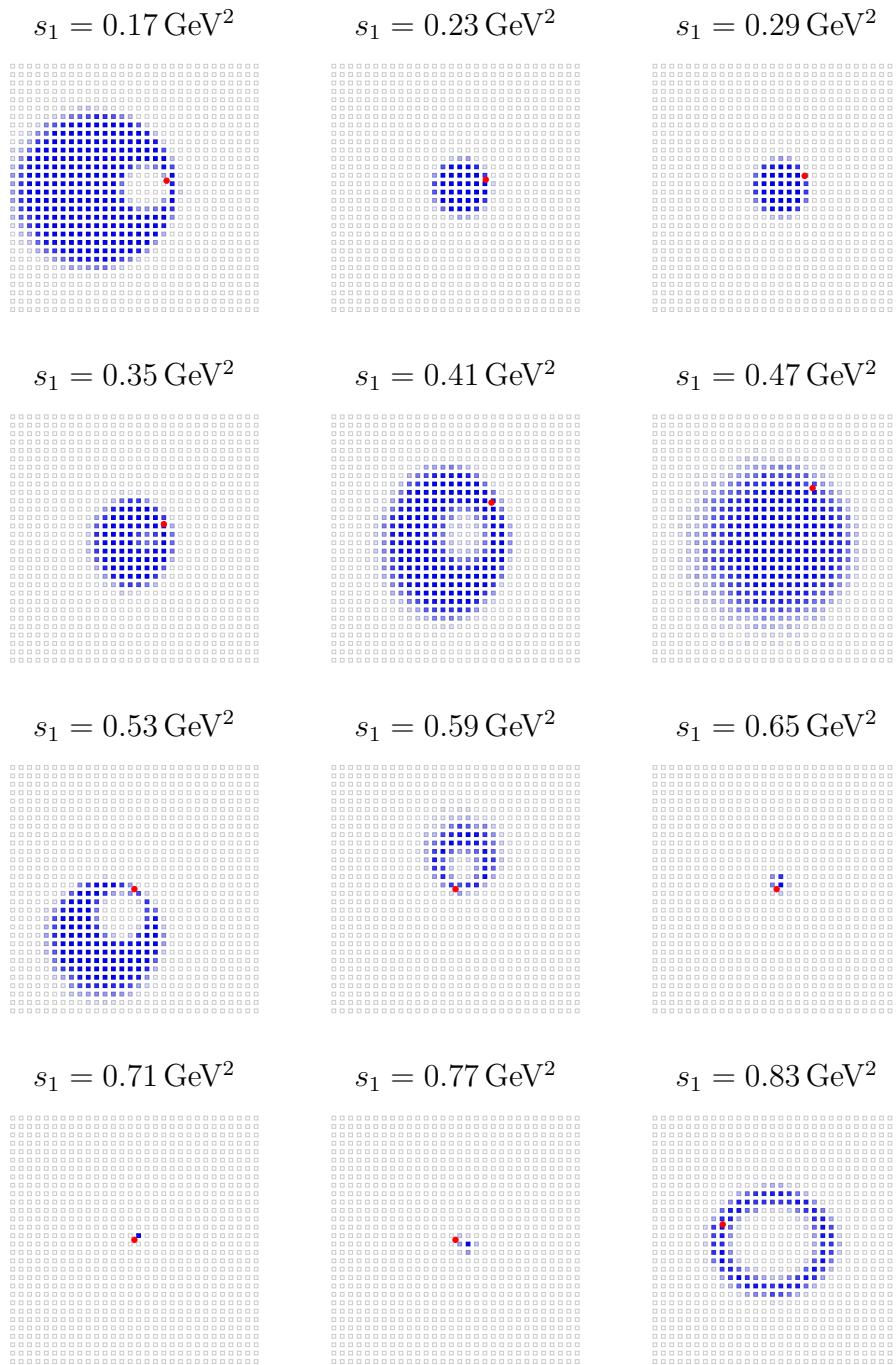


Abbildung D.1: Einige ausgewählte Trefferverteilungen mit horizontalem f_1^r und vertikalem f_1^i , beliebige Skala. Jeder Datenpunkt (Quadrat) entspricht 64 f_1 -Konfigurationen; farblich eingetragen sind dabei die relativen Häufigkeiten von Konfigurationen kompatibel mit Asymmetrie-Daten von weiß = 0 bis blau = 1. Zur Orientierung ist $f_1 = 0$ in rot eingezeichnet.

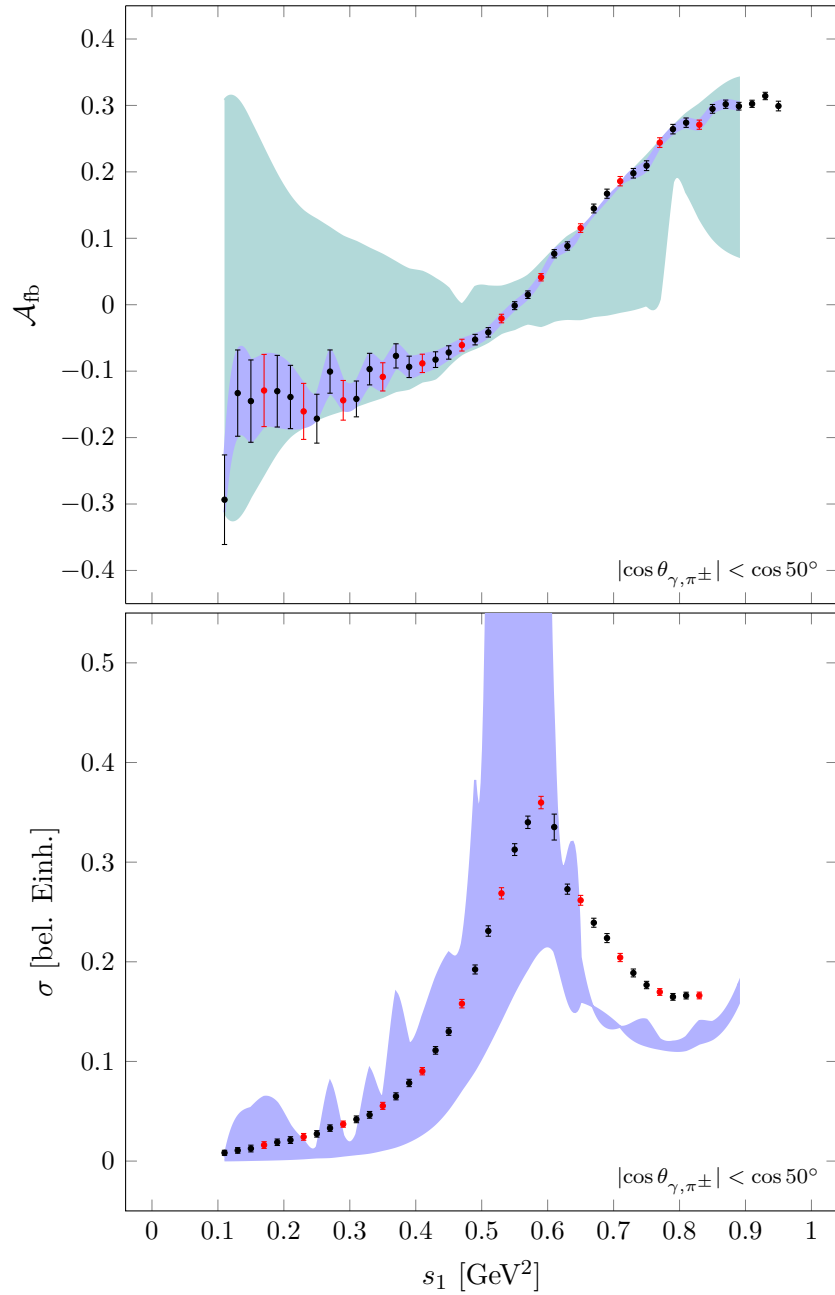


Abbildung D.2: *Oben:* Abgetasteter Asymmetriebereich (in grün) sowie die mit den Daten kompatiblen Werte (aus der Trefferliste, in blau). *Unten:* Die entsprechenden Wirkungsquerschnitte der Trefferliste (in blau). Die für Abbildung D.1 verwendeten Energien sind jeweils in rot eingetragen, die Datenpunkte sind in [25] zu finden.

ERGÄNZUNGEN

E.1 ANALYTISCHE AUSDRÜCKE

In diesem Kapitel finden sich einige analytische Ausdrücke der in dieser Arbeit berechneten Größen. Da diese Objekte teilweise ausgesprochen umfangreich und unübersichtlich sind, wird häufig auf eine lesbare Version verzichtet. Sämtliche relevanten Funktionen sind jedoch in Anhang I in einer maschinenlesbaren Form aufgeführt.

E.1.1 *Formfaktor des Pions*

Der Formfaktor des Pions zerfällt gemäß

$$\begin{aligned}
F_\pi^{(\omega)} = & \\
& - \frac{1}{q^2 - m_\rho^2} \left\{ m_\rho^2 + q^4 \frac{4e_1 e_2 + l_6}{F^2} \right. \\
& \quad \left. + q^2 \frac{4e_4 m_\pi^2 (\sqrt{2}F - 2e_1 m_\rho) - m_\rho^2 (\sqrt{2}F(e_1 + 2e_2) + l_6 m_\rho)}{F^2 m_\rho} \right\} \\
& - \frac{1}{q^2 - m_\rho^2} \left\{ - \frac{m_\pi^2 m_\rho^2 R_2(q^2, m_\pi^2)}{24\pi^2 F^2} \right. \\
& \quad + q^2 \frac{F^2(4m_\pi^2 + m_\rho^2) R_2(q^2, m_\pi^2) - 16e_1 e_2 m_\rho^4 R_2(q^2, m_\rho^2)}{96\pi^2 F^4} \\
& \quad - q^4 \frac{F^2 R_2(q^2, m_\pi^2) - 16e_1 e_2 m_\rho^2 R_2(q^2, m_\rho^2)}{96\pi^2 F^4} \\
& \quad \left. + q^6 \frac{e_1 e_2 R_2(q^2, m_\rho^2)}{96\pi^2 F^4} \left(1 - \frac{q^2}{m_\rho^2} \right) \right\} \\
& + \frac{hq^2}{q^2 - m_\omega^2}
\end{aligned}$$

in einen Term führender und einen höherer Ordnung sowie einen Omega-Beitrag.

E.1.2 *Streulängen*

Die vollständigen Ausdrücke inklusive Quantenkorrekturen für die Streulängen der Pionenstreuung an der Schwelle (th.), definiert gemäß $32\pi a^{(I)} := \mathcal{M}^{(I)}|_{\text{th}}$, lauten

$$\begin{aligned} 32\pi a^{(0)} &= \frac{7m_\pi^2}{F^2} + \frac{40m_\pi^4}{F^4} \left(l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3 \right) + \frac{256m_\pi^6 e_4^2}{m_\rho^2 F^4} \\ &+ \frac{m_\pi^4}{96\pi^2 F^4} \left(10R_2(0, m_\pi^2) + 147R_2(4m_\pi^2, m_\pi^2) \right) \\ &+ \frac{9c_\chi^2 m_\pi^4}{2\pi^2 F^4} \left(2R_2(0, m_\rho^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4m_\pi^4 - 4m_\pi^2 m_\rho^2 + 3m_\rho^4}{m_\rho^4} R_2(4m_\pi^2, m_\rho^2) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 32\pi a^{(2)} &= -\frac{2m_\pi^2}{F^2} + \frac{16m_\pi^4}{F^4} \left(l_1 + l_2 + \frac{1}{3}l_3 \right) - \frac{128m_\pi^6 e_4^2}{m_\rho^2 F^4} \\ &+ \frac{m_\pi^4}{48\pi^2 F^4} \left(11R_2(0, m_\pi^2) + 6R_2(4m_\pi^2, m_\pi^2) \right) \\ &+ \frac{9c_\chi^2 m_\pi^4}{\pi^2 F^4} R_2(0, m_\rho^2). \end{aligned}$$

Die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(m_\pi^2)$ entsprechen dabei dem Stromalgebraresultat von Weinberg [77], diejenigen der Ordnung $\mathcal{O}(m_\pi^4)$ (ohne Rhomesonen, daher nur die l_i -Beiträge) denjenigen von Gasser & Leutwyler [12] (gut zu erkennen an l_1 , wobei der fehlende Faktor $3 \times 32\pi^2$ auf die Definition der renormierten \bar{l}_i zurückzuführen ist).

E.1.3 *Amplituden der Photonenfusion*

Die gemittelte Amplitude des neutralen Kanals der Photonenfusion ist bezüglich ihrer Länge überschaubar und lautet

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}^{00}|^2 \rangle &= \frac{1}{1152\pi^4 m_\rho^{*2} F^8 m_\rho^2} \\ &\times \left\{ e^4 m_\pi^4 \left[-3 \left(m_\rho^2 (e_1^2 s c_\chi (s - 4m_\rho^2) R_3(0, s, 0, m_\rho^2) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2F^2 (s - m_\pi^2) R_3(0, s, 0, m_\pi^2) \right) + e_1^2 s^2 c_\chi R_2(s, m_\rho^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - 8e_1^2 s c_\chi m_\rho^2 R_2(0, m_\rho^2) \right] \left[6m_\rho^{*2} R_3^*(0, s, 0, m_\pi^2) F^2 (m_\pi^2 - s) \right. \\ &\quad \left. - c_\chi^* e_1^{*2} s (-12m_\rho^{*4} R_3(0, s, 0, m_\rho^2)^* \right. \\ &\quad \left. + m_\rho^{*2} (3R_3^*(0, s, 0, m_\rho^2) s + 8R_2^*(0, m_\rho^2)) \right. \\ &\quad \left. \left. + 3R_2^*(s, m_\rho^2) s \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Diejenige des geladenen Kanals ist jedoch deutlich umfangreicher und daher lediglich in maschinenlesbarer Form in Anhang I angegeben.

E.1.4 *VCS-Amplituden*

Die drei invarianten Amplituden der VCS, angepasst an die e^+e^- -Kinematik und ausgedrückt in Invarianten, sind ausgesprochen umfangreich und werden daher, ausgenommen exemplarisch f_2 , in maschinenlesbarer Form in Anhang I angegeben. Dieses f_2 lautet

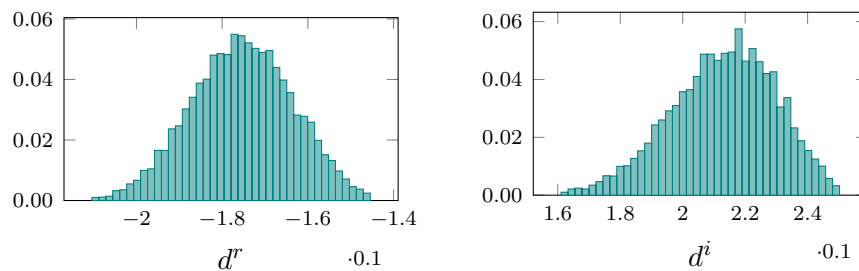
$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{48\pi^2 F^4 m_\rho^2 (m_\pi^2 - s_2)(m_\pi^2 + s_0 - s_1 - s_2)(m_\rho^2 - s_0)} \\ &\times \left\{ (m_\rho^2 - s_0) \left[F^2 m_\rho^2 \left((4m_\pi^2 - s_0) R_2(s_0, m_\pi^2) + 4m_\pi^2 R_2(0, m_\pi^2) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e_1 e_2 s_0 (s_0^2 - 16m_\rho^4) R_2(s_0, m_\rho^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + 96\pi^2 F^2 m_\rho \left[\sqrt{2} (e_1 + 2e_2) F s_0 m_\rho^2 - 4\sqrt{2} e_4 F m_\pi^2 s_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - s_0 m_\rho (s_0 (4e_1 e_2 + l_6) - 8e_1 e_4 m_\pi^2) + m_\rho^3 (l_6 s_0 - F^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

E.2 GRAPHEN UND DICHTEVERTEILUNGEN

In diesem Abschnitt werden eine Reihe von Abbildungen aufgeführt, für die im eigentlichen Text dieser Arbeit kein Platz gefunden wurde. Es handelt sich hierbei hauptsächlich um Dichteverteilungen der durch *bootstrapping* bestimmten Parameter, die jeweils im Haupttext ausführlich besprochen und definiert sind. Etwaige Korrelationen dieser Parameter (die nur bei gleichzeitiger Anpassung verschiedener Freiheitsgrade bestimmt werden können) werden konsequent ignoriert, da sie folgende Rechnungen sehr stark verkomplizieren und nicht immer zugänglich sind. Die Verteilungen der χ_r^2 werden nicht abgebildet sondern lediglich als Mittelwert $\langle \chi_r^2 \rangle$ angegeben. Mit β -Perzentil ist eine Verteilung nach Elimination der $\alpha = 1 - \beta$ äußeren Werte (je $\alpha/2$ pro Seite) gemeint.

E.2.1 *Photonenfusion, neutraler Kanal*

Die Dichteverteilungen für $d = d^r + id^i$ des neutralen Kanals der Photonenfusion, berechnet mit einer Ausgangspopulation von 39 Elementen, ergeben sich aus 10 000 bootstrap-Stichproben; letztendlich verwendet wird ein 99-Perzentil, es ist $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 0.7$:



E.2.2 Formfaktor und geladene Photonenfusion

Zur Bestimmung der Kopplungskonstanten l_6 , $e_4 = e_4^r + ie_4^i$ und $L := 2l_5 - l_6$ wird die geladene Photonenfusion (Daten aus [90]) zusammen mit dem omegafreien Formfaktor (Daten aus [88]) gleichzeitig angepasst. Die Ausgangspopulation enthält 77 Datenpunkte.

Abhängigkeiten der LEC e_1 und e_2 von e_4 werden durch die Relationen

$$e_1 = \varkappa_1 \sqrt{\varkappa_2 d} \left(\frac{c_2}{c_3 - c_1 e_4^2} \right)^{1/4} \quad \text{und}$$

$$e_2 = \frac{F^2}{2m^2} \left(\text{Re}(a) + \varkappa_3 \sqrt{b - \text{Im}^2(a)} \right),$$

hergestellt, wobei die verschiedenen Vorzeichen $\varkappa_i = \pm 1$ unabhängig voneinander variiert werden können (Details zu den enthaltenen Parametern sind in Abschnitt 5.2 zu finden). Die möglichen Variationen werden in acht Gruppen $G = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ mit

$$\begin{aligned} G_1 &= (+, +, +), & G_2 &= (+, +, -), & G_3 &= (+, -, +), \\ G_4 &= (+, -, -), & G_5 &= (-, +, +), & G_6 &= (-, +, -), \\ G_7 &= (-, -, +), & G_8 &= (-, -, -) \end{aligned}$$

zusammengefasst und jeweils einzeln analysiert.

Im Folgenden werden für jede Gruppe die Dichteverteilungen der freien Parameter l_6 , e_4^r , e_4^i und L , bestimmt durch 10 000 bootstrap-Datensätze, angegeben (Rohdaten). Weiterhin werden (manuell) isolierte Peak-Strukturen identifiziert und eine entsprechende Untermenge des vollständigen Rohdatensatzes herausgegriffen; diese dient zur Bestimmung der Mittelwerte und Fehler (jeweils eine Standardabweichung) der freien Parameter.

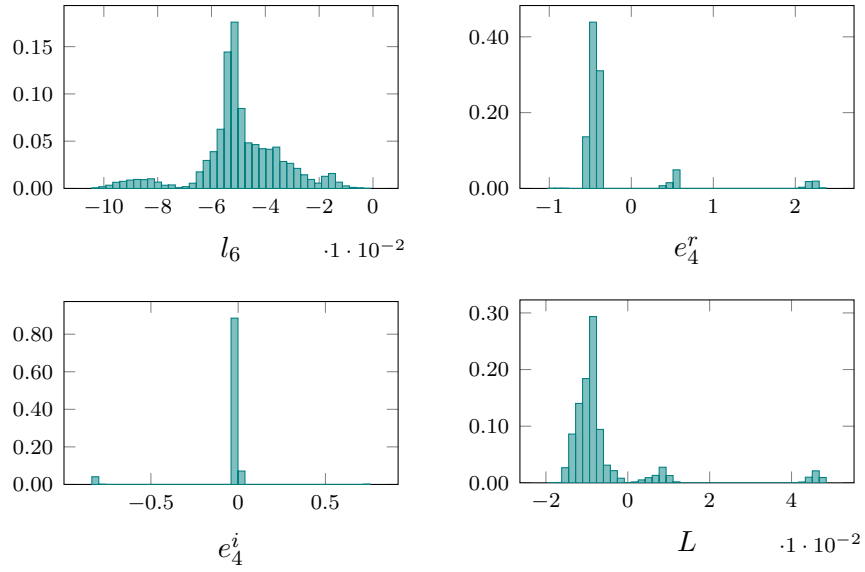
Zur Identifikation geeigneter Vorzeichengruppen wird der Imaginärteil der Kopplung e_2 verwendet, da diese in dieser Arbeit reell gewählt worden ist: Sollte $\text{Im}(e_2) \neq 0$ sein wird die gesamte Gruppe verworfen. Zahlenwerte der bestimmten Parameter werden letztendlich nur angegeben, wenn experimentelle Daten gut beschrieben werden können.

Korrelationen werden zur Vereinfachung der Rechnungen konsequent ignoriert. Fehler der abgeleiteten Kopplungen l_5 , e_1 , e_2 und c_χ ergeben sich durch Gauß'sche Fehlerpropagation.

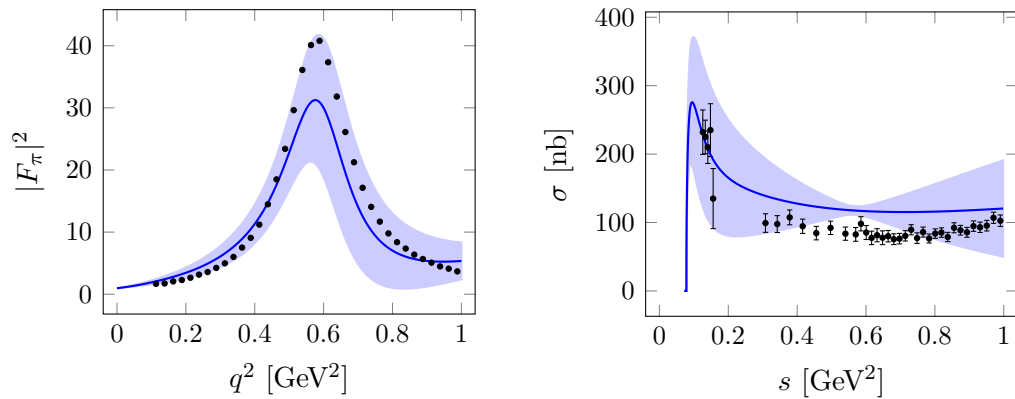
Die Resultate dieses Abschnitts vorwegnehmend: Lediglich G_3 liefert Zahlenwerte, die sowohl $\text{Im}(e_2) = 0$ berücksichtigen als auch eine gute Übereinstimmung mit Daten erzeugen.

Signaturgruppe 1

Rohdaten:



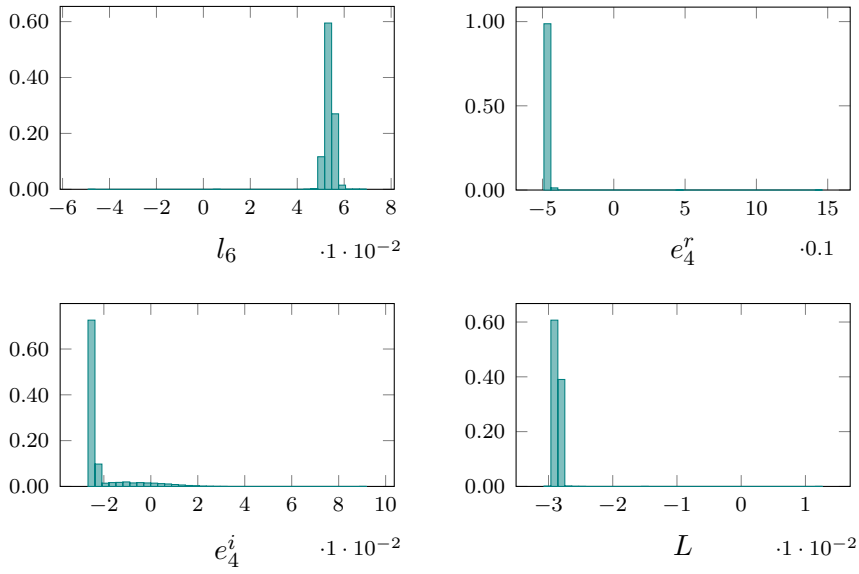
Isolation des Peaks liefert Mittelwerte mit $\text{Im}(e_2) = 0$. Die entsprechenden Abbildungen sind damit (es ist $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 20$):



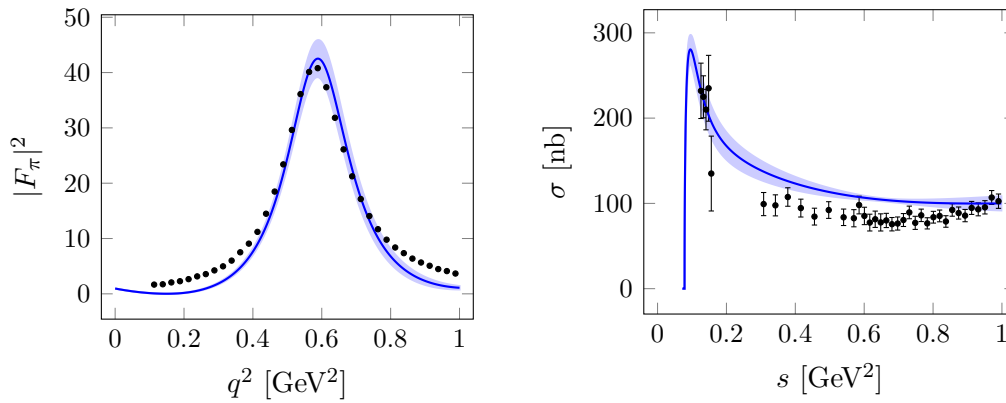
Die Qualität dieser Anpassung ist nicht brauchbar, daher wird diese Gruppe nicht weiter beachtet.

Signaturgruppe 2

Rohdaten:



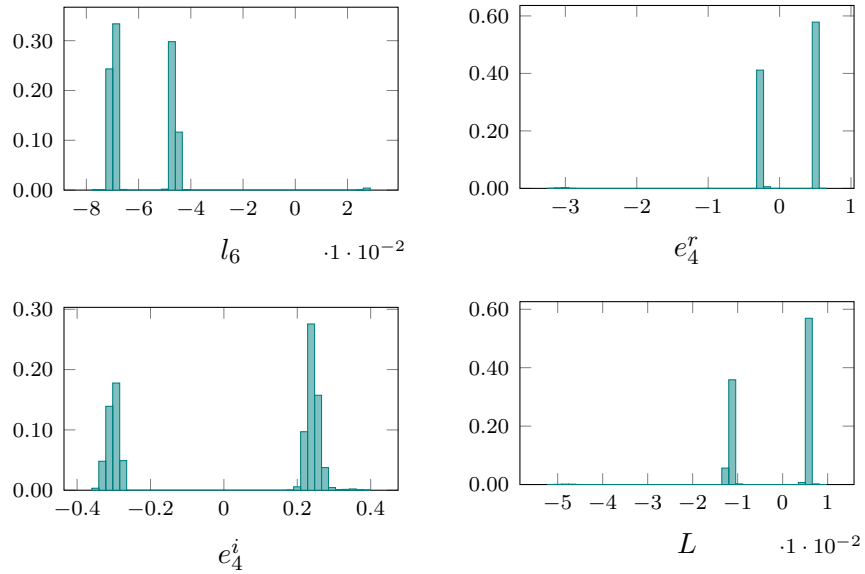
Isolation des Peaks liefert Mittelwerte mit $\text{Im}(e_2) = 0$. Die entsprechenden Abbildungen sind damit (es ist $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 5$):



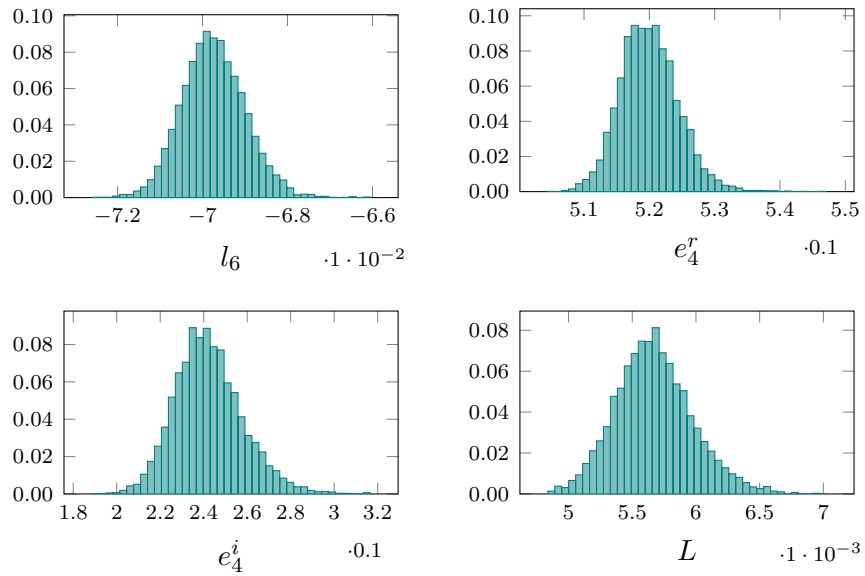
Die Qualität dieser Anpassung ist nicht brauchbar, daher wird diese Gruppe nicht weiter beachtet.

Signaturgruppe 3

Die Rohdaten für Signatur G_3 lassen die Identifikation zweier, etwa gleich großer Peaks zu, die beide einzeln berücksichtigt werden:



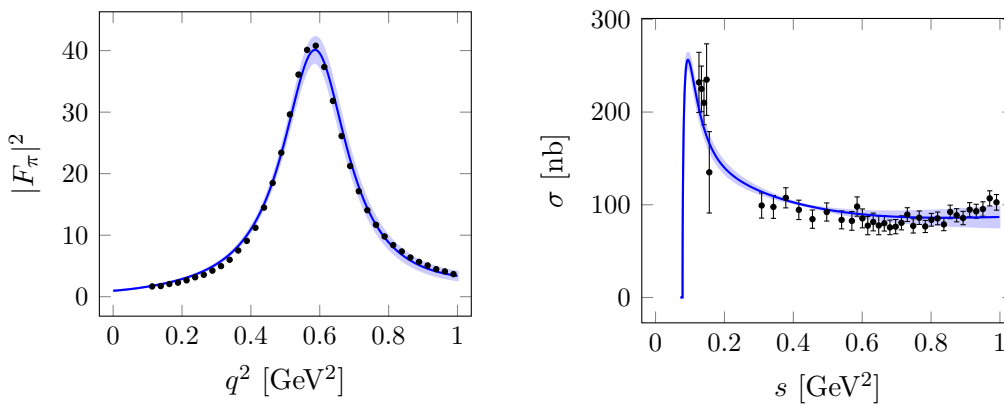
Isolation des linken Peaks liefert:



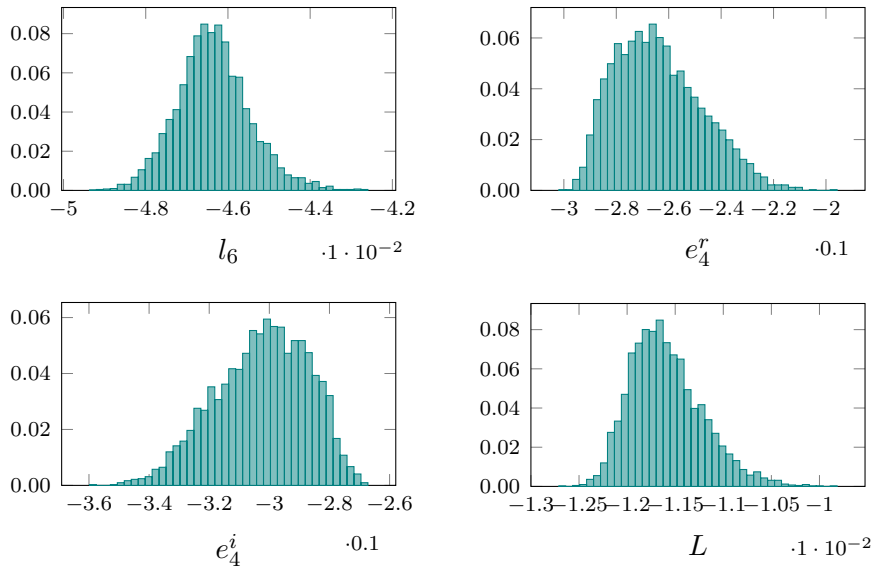
Die Mittelwerte der Liste L_1 sind damit

	Realteil		Imaginärteil	
l_5	-0.0320	$\pm 1\%$		
l_6	-0.0697	$\pm 1\%$		
e_1	0.165	$\pm 1\%$	0.0211	$\pm 8\%$
e_2	0.118	$\pm 1\%$		
e_4	0.520	$\pm 1\%$	0.242	$\pm 6\%$
c_χ	-4.18	$\pm 7\%$	9.00	$\pm 1\%$

Es ergeben sich die Abbildungen (mit $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 0.8$):



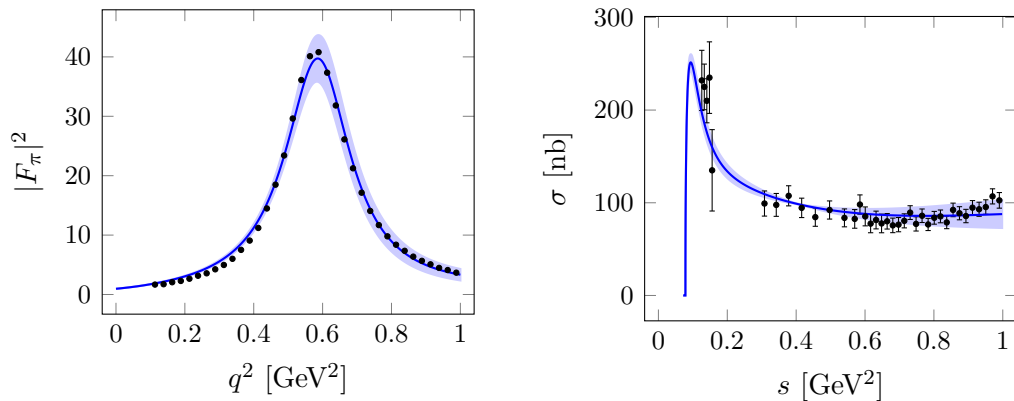
Isolation des rechten Peaks liefert:



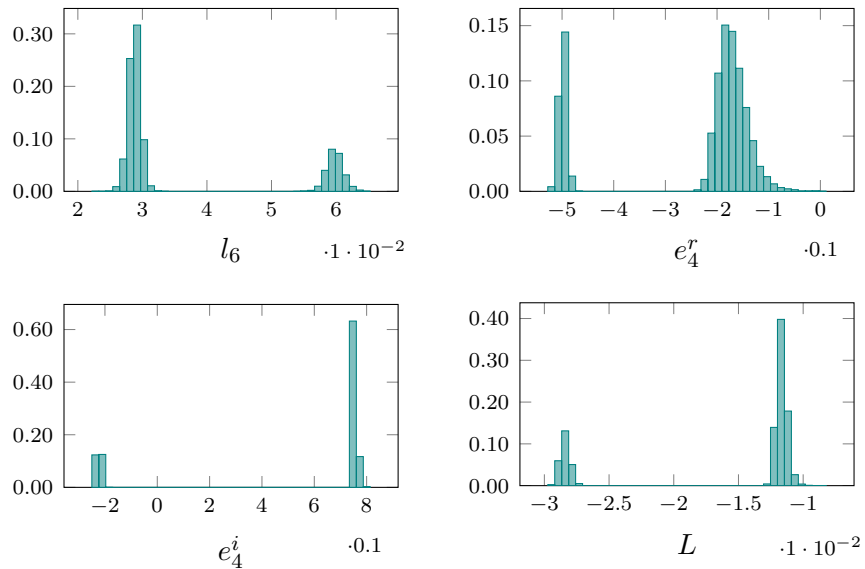
Die Mittelwerte der Liste L_2 sind damit

	Realteil		Imaginärteil	
l_5	-0.0290	$\pm 2\%$		
l_6	-0.0464	$\pm 2\%$		
e_1	0.189	$\pm 1\%$	-0.0235	$\pm 14\%$
e_2	0.0608	$\pm 2\%$		
e_4	-0.264	$\pm 6\%$	-0.302	$\pm 5\%$
c_χ	-6.10	$\pm 1\%$	4.49	$\pm 2\%$

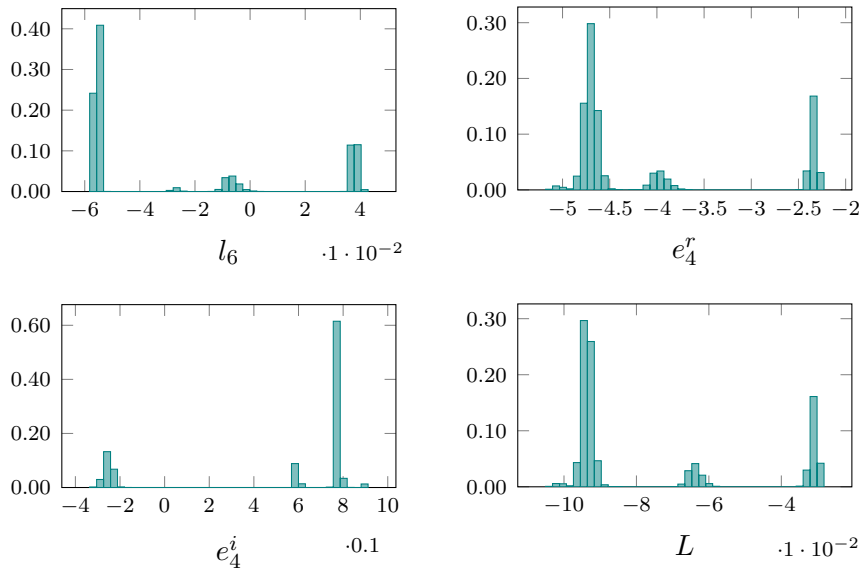
Es ergeben sich die Abbildungen (mit $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 0.8$):



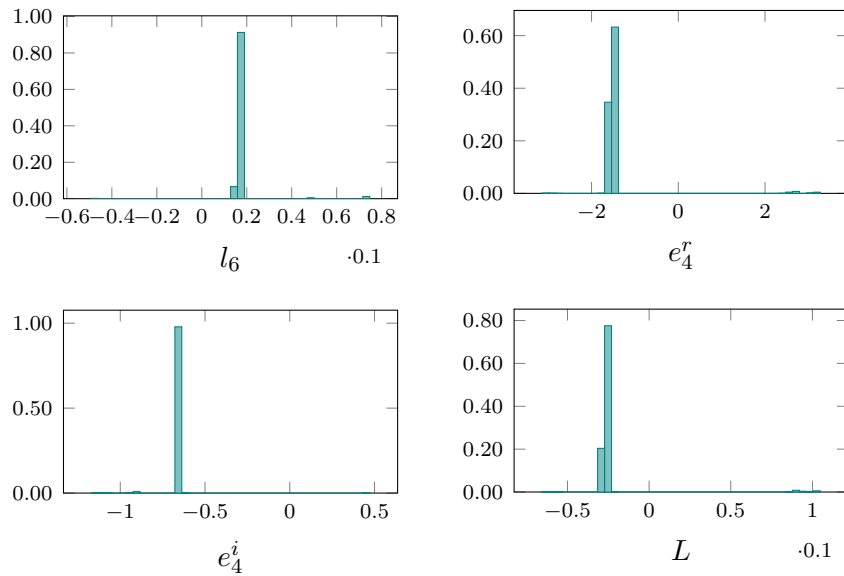
Signaturgruppe 4



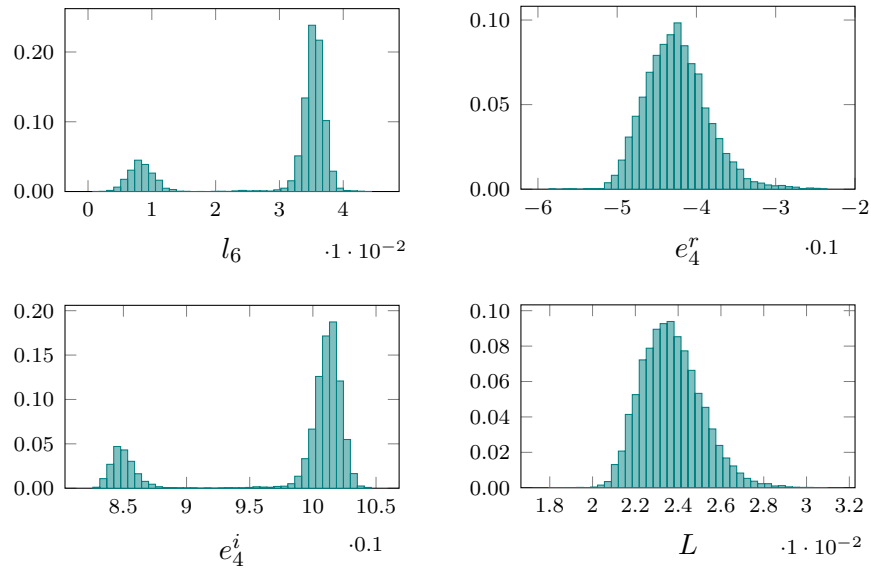
Isolation des größeren Peaks liefert $e_2 = 0.0312 - 0.0152i$; da $\text{Im}(e_4) \neq 0$ wird diese Gruppe nicht weiter beachtet.

Signaturgruppe 5

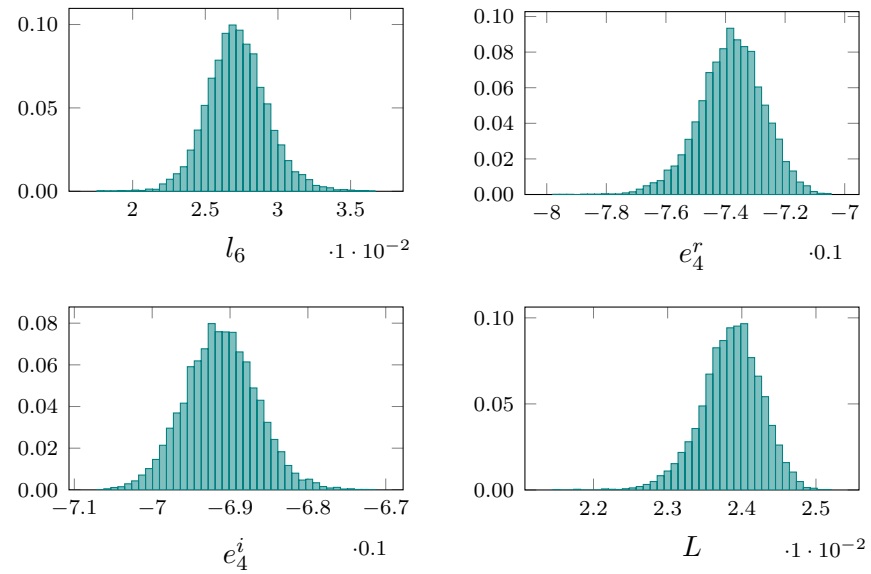
Isolation des größeren Peaks (ganz links in l_6) liefert $e_2 = -0.268 + 0.0188i$; da $\text{Im}(e_4) \neq 0$ wird diese Gruppe nicht weiter beachtet.

Signaturgruppe 6

Isolation des Peaks liefert $e_2 = -0.0586 - 0.0174i$; da $\text{Im}(e_4) \neq 0$ wird diese Gruppe nicht weiter beachtet.

Signaturgruppe 7

Isolation des größeren Peaks (rechts in l_6) liefert $e_2 = -0.0586 - 0.0174i$; da $\text{Im}(e_4) \neq 0$ wird diese Gruppe nicht weiter beachtet.

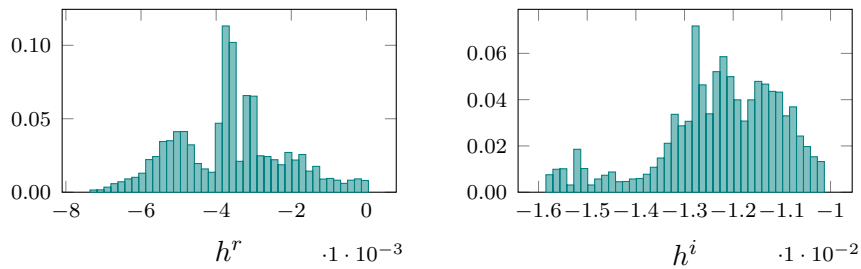
Signaturgruppe 8

Es folgt $e_2 = -0.00647 - 0.0248i$; da $\text{Im}(e_4) \neq 0$ wird diese Gruppe nicht weiter beachtet.

E.2.3 Formfaktor inklusive Omegamesonen

Für den Formfaktor des Pions inklusive Omegamesonen werden als Grundlage die beiden möglichen Listen L_i potentieller Parameter aus Abschnitt E.2.2 verwendet. Die experimentellen Daten stammen aus [92, 93], wobei jedoch nur acht Punkte im Bereich des Rho-Omega-Peaks zur Anpassung verwendet werden. Von den jeweils 10 000 bootstrap-Stichproben werden die äußeren 5% eliminiert (es verbleibt das 95-Perzentil), eine weitere Einschränkung zur Selektion einzelner Peaks wird nicht vorgenommen.

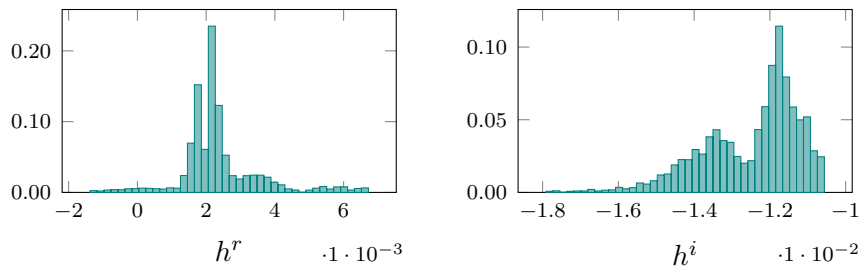
Die Dichteverteilungen mit Liste L_1 als Ausgangspunkt sind:



Der Mittelwert des Chi-Quadrat liegt bei etwa $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 50$. Hieraus folgt als Zahlenwert des Parameters h letztendlich

$$h = -0.00363 (\pm 39\%) - i 0.0123 (\pm 10\%).$$

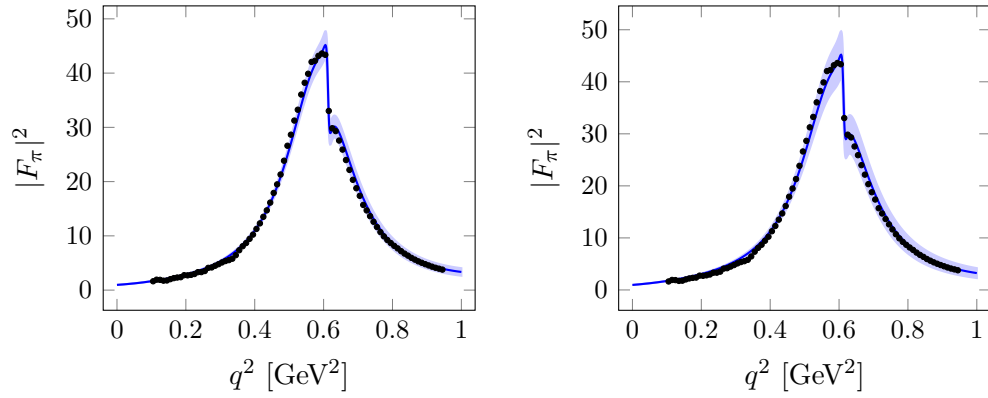
Die Dichteverteilungen mit Liste L_2 als Ausgangspunkt sind:



Der Mittelwert des Chi-Quadrat liegt bei etwa $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 60$. Hieraus folgt als Zahlenwert des Parameters h letztendlich

$$h = 0.00237 (\pm 49\%) - i 0.0124 (\pm 10\%).$$

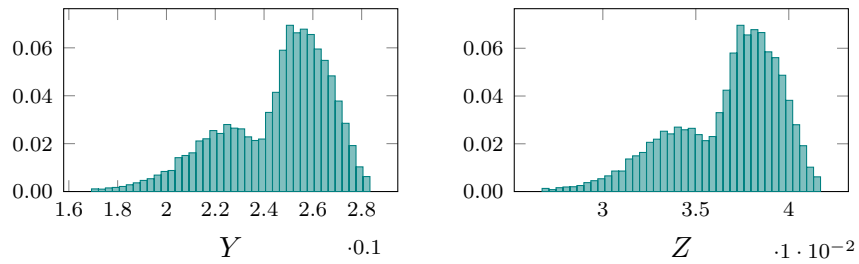
Die entsprechenden Graphen für die beiden Gruppen L_1 (links) und L_2 (rechts) sehen damit ähnlich aus und sind:



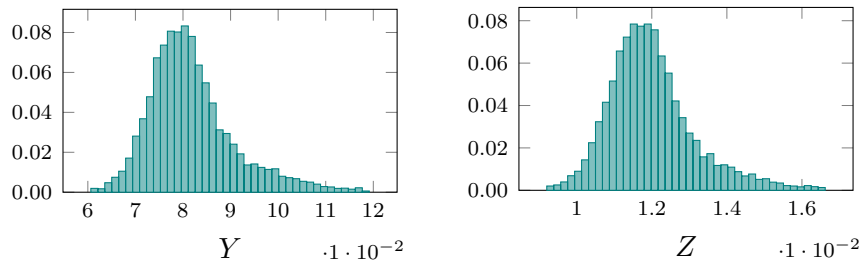
E.2.4 Pionenstreuung

Die Ausgangspopulation zur Anpassung des Wirkungsquerschnitts der Pionenstreuung besteht aus 17 Datenpunkten, entnommen aus [97]. Insgesamt sind 10 000 bootstrap-sample berechnet worden, von denen letztendlich ein 99-Perzentil verwendet wird.

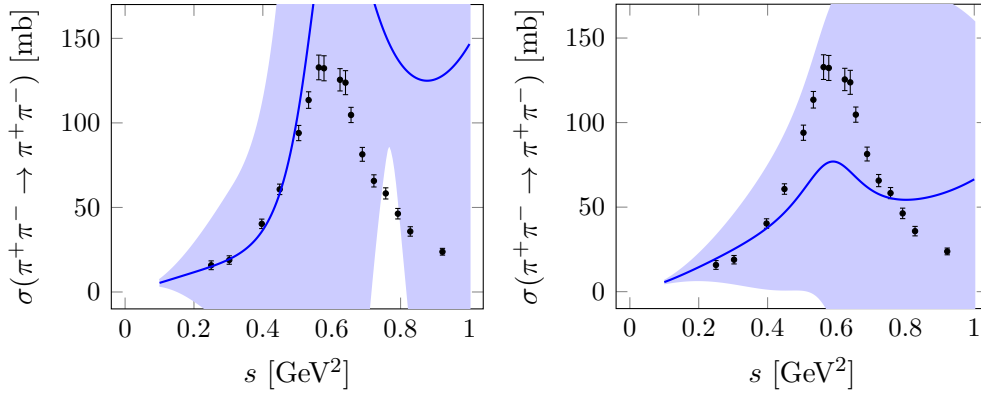
Die Dichteverteilungen mit den beiden Gruppen als Ausgangspunkt sind für L_1 :



Für L_2 :



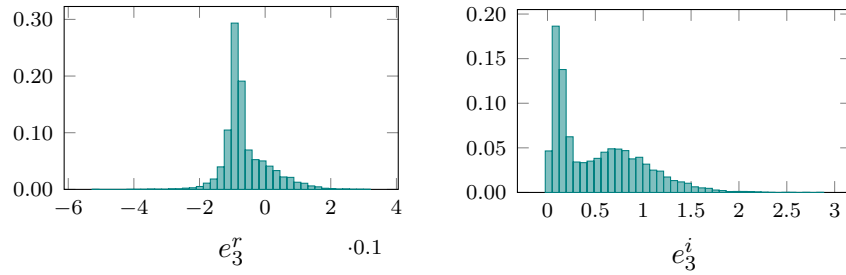
Es ergeben sich die beiden Graphen (links L_1 mit $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 570$, rechts L_2 mit $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 57$):



E.2.5 Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

Für die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie steht eine (komplexe) Kopplung (e_3) zur Verfügung, die für die beiden Listen L_i bereits festgelegter Parameter angepasst wird. Die Ausgangspopulation besteht aus insgesamt 25 Datenpunkten, es wurden 10 000 bootstrap-Stichproben erhoben.

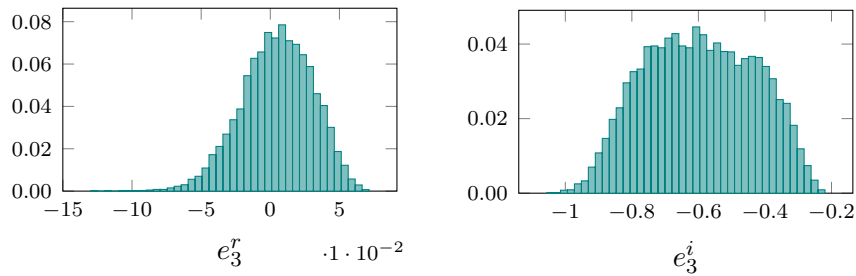
Mit Liste L_1 als Ausgangspunkt ergeben sich die Dichteverteilungen:



Diese liefern den Mittelwert

$$e_3 = -0.0618 (\pm 109\%) + i0.521 (\pm 85\%).$$

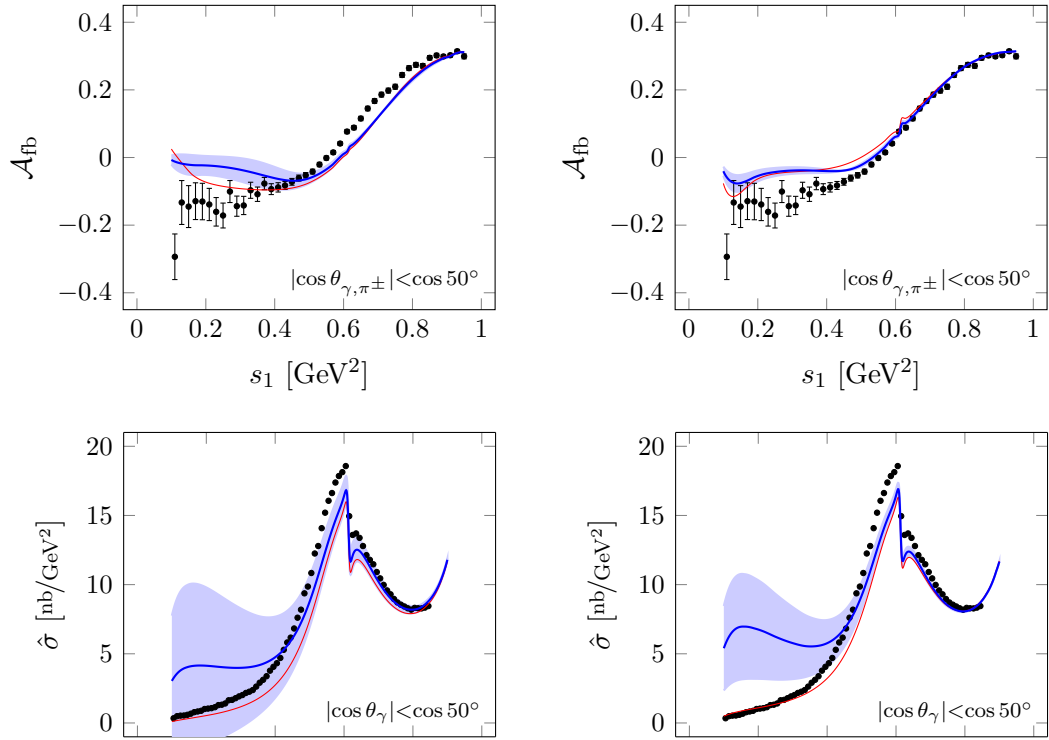
Liste L_2 als Ausgangspunkt liefert



mit dem Mittelwert

$$e_3 = 0.00475 (\pm 540\%) - i 0.595 (\pm 28\%).$$

Die mit diesen Werten für e_3 berechneten Asymmetrien beziehungsweise differentiellen Wirkungsquerschnitte sind (links für L_1 mit $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 11$, rechts für L_2 mit $\langle \chi_r^2 \rangle \approx 8.5$, zum Vergleich ist $e_3 = 0$ in rot eingetragen):



E.3 ALTERNATIVES RENORMIERUNGSSCHEMA

Das in Kapitel 3 ausführlich motivierte *complex-mass* Renormierungsschema in Kombination mit dem BPHZ-Abzugsverfahren ist natürlich nur eine von vielen Möglichkeiten, Ultraviolettdivergenzen konsistent in Gegenterme zu absorbieren. Eine in der klassischen chiralen Störungstheorie verwendete Methode, das sogenannte $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema, subtrahiert Terme proportional zur divergenten Größe

$$R = \frac{2}{D-4} - (\ln 4\pi - \gamma_E + 1),$$

die natürlich nur im Rahmen der dimensional Regularisierung entstehen kann. Die nach einer Passarino-Veltman-Reduktion verbleibenden divergenten skalaren Integrale A_0 und B_0 – lauten in dieser Regularisierung (mit dem Regulator μ)

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= -m^2 \left(R + \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) \quad \text{und} \\ B_0(p^2, m^2, m^2) &= - \left(R + \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + J\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right), \end{aligned}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^1 dz \ln(1 + x(z^2 - z) - i0^+) \\ &= \begin{cases} -2 - \sigma \ln \frac{\sigma-1}{\sigma+1} & \text{für } x < 0, \\ -2 + 2\sqrt{\frac{4}{x} - 1} \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{4}{x} - 1} & \text{für } 0 \leq x < 4, \\ -2 - \sigma \ln \frac{1-\sigma}{1+\sigma} - i\pi\sigma & \text{für } 4 < x, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $\sigma = \sigma(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{x}}$ für $x \notin [0, 4]$ (entnommen aus [106]). Die bisher vernachlässigten zusätzlichen endlichen Beiträge, die beispielsweise aus der Kombination $(D-4)B_{00}$ entstehen, müssen in diesem Zusammenhang jedoch berücksichtigt werden.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Photonenfusion sowie des omegafreien Formfaktors des Pions unter Verwendung des *complex-mass* Renormierungsschemas (die renormierten Teilchenmassen werden mit komplexen Polpositionen der vollständigen Propagatoren identifiziert) und Subtraktion der divergenten Anteile via $\widetilde{\text{MS}}$ zusammengefasst. Die Prozedur der sukzessiven Parameteranpassung ist dabei identisch zu der in Kapitel 5 vorgestellten. Für die neutrale Photonenfusion ergeben sich dabei die in Abbildung E.1 eingetragenen Graphen, die geladene Fusion in Kombination mit dem Formfaktor des Pion für eine einzige rea-

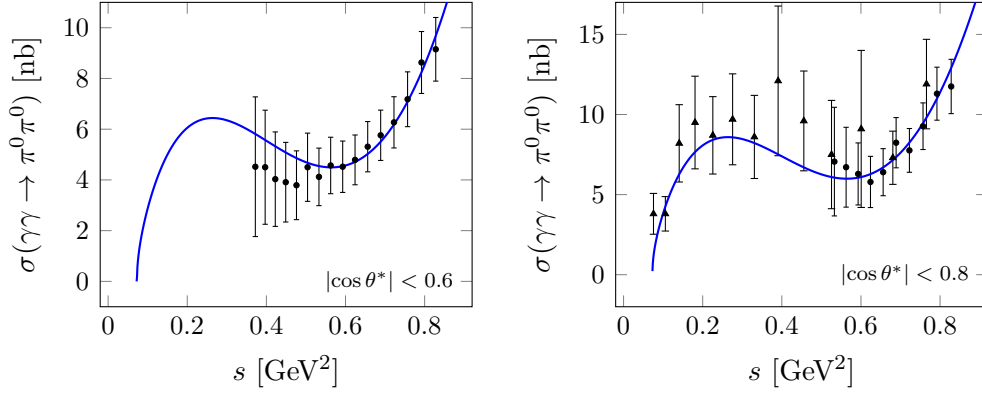


Abbildung E.1: Wirkungsquerschnitt der neutralen Photonenfusion mit 1σ -Fehlerband. Belle-Daten (Punkte) aus [84] und Crystal Ball-Daten (Dreiecke) aus [85].

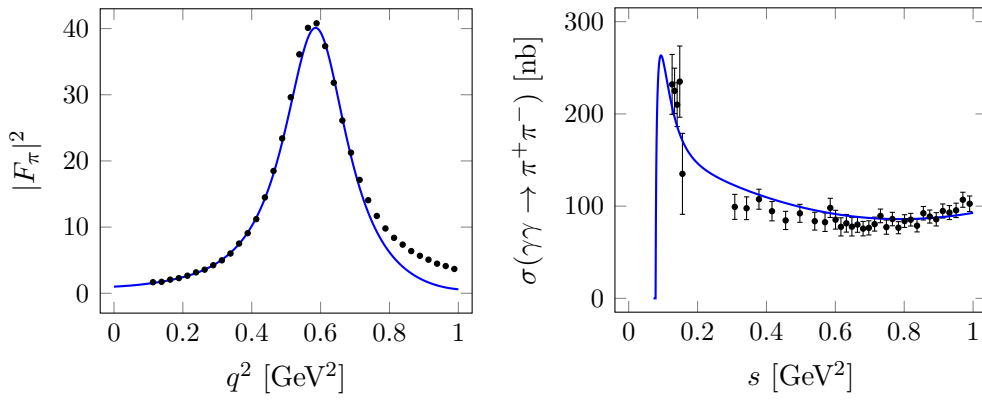


Abbildung E.2: Formfaktor ohne Omegameson mit ALEPH-Daten aus [88] (gewonnen aus $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0$), links; geladene Photonenfusion mit MARK-II-Daten aus [90], rechts.

listische Parametergruppe ist in Abbildung E.2 zusammengestellt. Auf die Angabe von Zahlenwerten der LEC sowie den zugeordneten Dichteverteilungen wird verzichtet. Weiterhin wird keine ausführliche Analyse der verschiedenen Signaturgruppen durchgeführt, diese Abbildungen lediglich exemplarischer Natur sind.

Es ist festzustellen, dass sich durch Verwendung eines alternativen Renormierungsschemas die Qualität der Beschreibung experimenteller Daten nicht großartig ändert; allerdings sind die tatsächlichen Zahlenwerte der angepassten LEC durchaus renormierungsschemaabhängig.

TECHNISCHE DETAILS

Für die technische Implementierung notwendiger Rechnungen sind eine Reihe verschiedener Computerprogramme verwendet worden.

Zur Entwicklung der sehr komprimierten Lagrangedichte aus Gleichung (2.13) in einzelne Quantenfelder wurde *FORM* [107] verwendet, da dies für nicht-kommutative Algebra mit tausenden von Termen besonders gut geeignet ist.

Weitere analytische Berechnungen sind mittels *Mathematica*, Version 9 [108] und insbesondere einiger spezieller Pakete durchgeführt worden:

FEYNARTS 3.7 [109]: Nach Modifikation des Quellcodes: Zur Bestimmung relevanter Feynman-Diagramme und Erzeugung der zugeordneten analytischen Ausdrücke.

FORMCALC 8.2: [101]: Zur Reduktion tensorieller Integrale und Vereinfachung von Lorentz- sowie Isospinstrukturen in den analytischen Ausdrücken der Feynman-Diagramme.

FEYNCALC 8.2 [110]: Zur Berechnung von Dirac-Spuren im QED-Anteil der VCS.

Numerische Berechnungen sind nahezu vollständig in *Fortran* (mittels [111]) durchgeführt worden. Nachladen weiterer Bibliotheken war jedoch notwendig, insbesondere:

LOOPTOOLS 2.8 [101]: Zur numerischen Berechnung der skalaren n -Punkt-Integrale.

CUBA 3.2 [112]: Zur numerischen Integration für den Dreiteilchen-Endzustand der VCS mittels Vegas-Algorithmus.

FEYNMAN-DIAGRAMME

In diesem Kapitel werden die relevanten Feynman-Diagramme der betrachteten Prozesse aufgeführt.

Die Summe aller zu einem Prozess beitragenden Diagramme Σ_D besteht für gewöhnlich aus Baundiagrammen der chiralen Ordnung zwei ($T_i^{(2)}$) und vier ($T_i^{(4)}$) sowie Einschleifendiagrammen der Ordnung vier ($L_i^{(4)}$); den äußeren Linien werden keine Propagatoren zugeordnet. Die Vertexordnungen aus Tabelle 2.3 auf Seite 17 sind explizit eingetragen, die Pion- und Rhomesonpropagatoren sind jeweils von der Ordnung $\mathcal{O}(-2)$. Jede Schleife trägt darüber hinaus zusätzlich eine Ordnung von $\mathcal{O}(4)$ bei.

Multiplikation mit den Wellenfunktionsrenormierungskonstanten des Pions, $Z_\pi = 1 + \delta Z_\pi$, liefert für die renormierten Summen Σ_D^r mit N externen Pionen Korrekturen der Form $\frac{1}{2}N\delta Z_\pi T^{(2)}$, die insgesamt von der chiralen Ordnung vier sind.

Pion ($\pi^{\pm,0}$)	-----
Photon (γ)	~~~~~
Rho ($\rho^{\pm,0}$)	—————
Vertex $\mathcal{O}(n)$	⊙

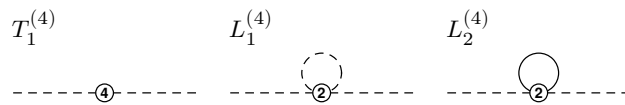


Abbildung G.1: Selbstenergiediagramme des Pions.

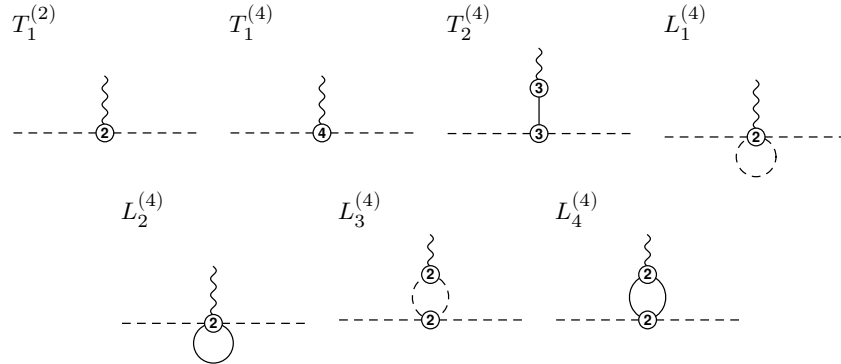


Abbildung G.2: Baum- und Schleifendiagramme des Pionformfaktors mit $\Sigma_D = T_1^{(2)} + \sum_{i=1}^2 T_i^{(4)} + \sum_{i=1}^4 L_i^{(4)}$. Korrektur durch Renormierung ist $\Sigma_D^r = \Sigma_D + \delta Z_\pi T_1^{(2)}$.

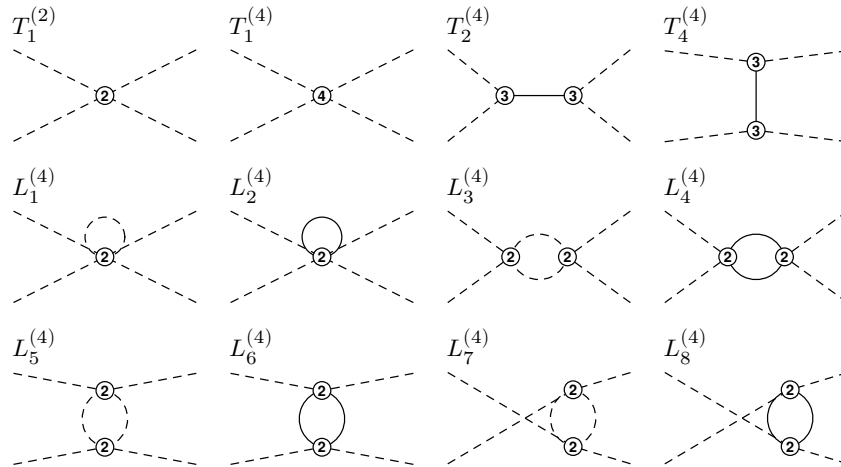


Abbildung G.3: Baum- und Schleifendiagramme der Pionenstreuung mit $\Sigma_D = T_1^{(2)} + \sum_{i=1}^4 T_i^{(4)} + \sum_{i=1}^8 L_i^{(4)}$. Korrektur durch Renormierung ist $\Sigma_D^r = \Sigma_D + 2\delta Z_\pi T_1^{(2)}$.

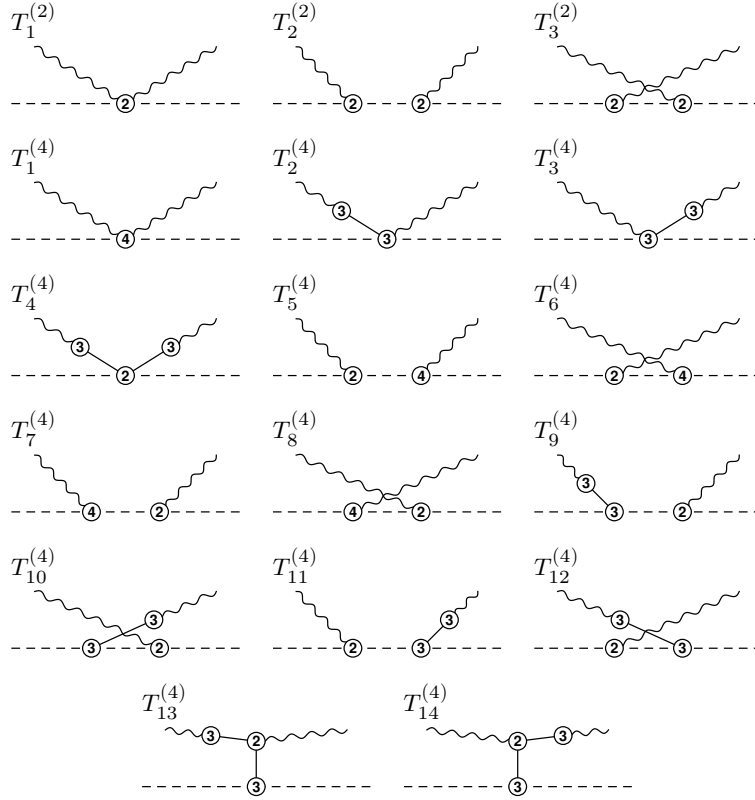


Abbildung G.4: Baumdiagramme der virtuellen Compton-Streuung am Pion mit $\Sigma_D = \sum_{i=1}^3 T_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{14} T_i^{(4)} + \sum_{i=1}^{24} L_i^{(4)} + \sum_{i=1}^2 C_i^{(4)}$; die Korrekturen $C_i^{(4)}$ ergeben sich durch Verwendung des vollständigen Pionenpropagators in $T_2^{(2)}$ und $T_3^{(2)}$ und lauten $C_i^{(4)} = \delta Z_\pi T_i^{(2)}$. Die Schleifendiagramme finden sich in folgender Abbildung G.5. Korrektur durch Renormierung ist $\Sigma_D' = \Sigma_D + \delta Z_\pi T^{(2)}$.

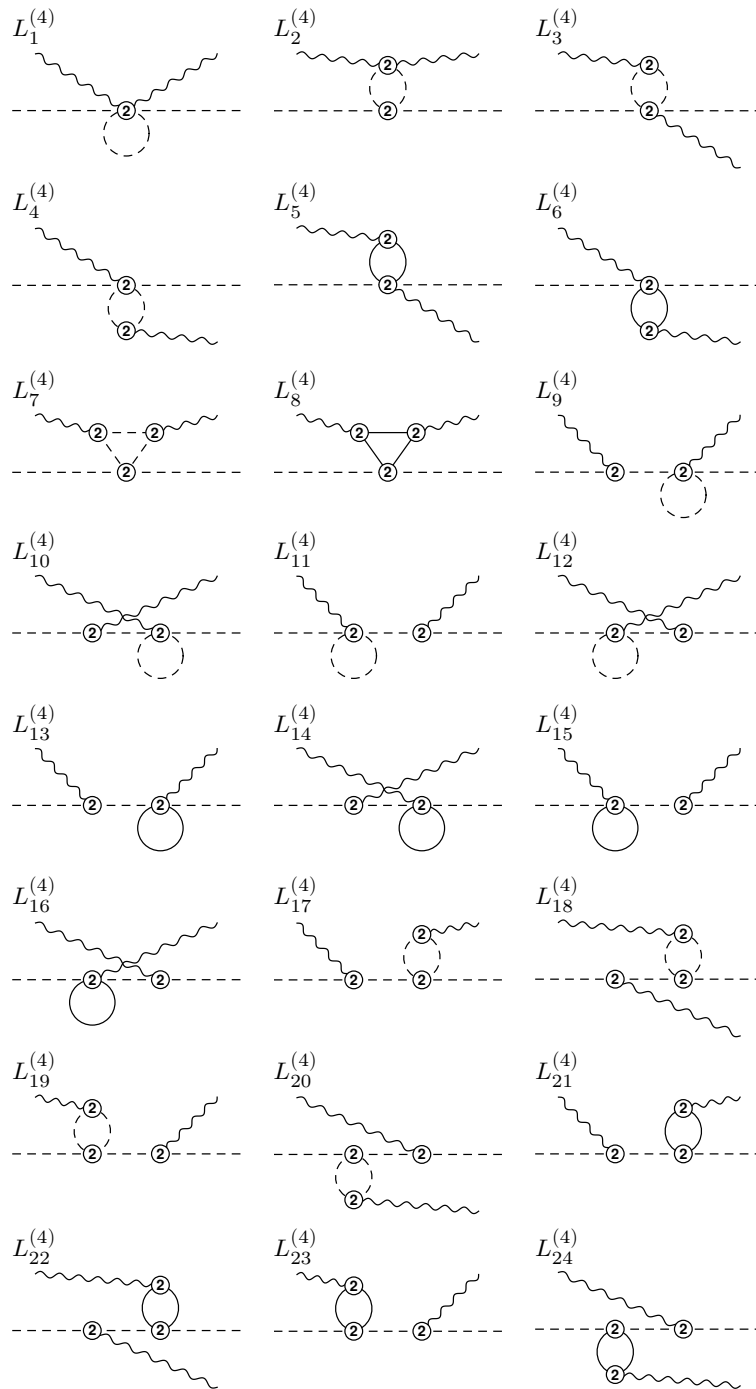


Abbildung G.5: vcs-Schleifendiagramme.

FEYNMAN-REGELN

In diesem Kapitel sind einige der verwendeten Feynman-Regeln zusammengefasst. Da diese zum Teil ausgesprochen kompliziert sind, werden stellenweise lediglich die Komponenten führender chiraler Ordnung in einer lesbaren, der gesamte Ausdruck jedoch in einer für den Import in ein Computeralgebrasystem geeigneten Form angegeben.

Die Anteile verschiedener chiraler Ordnung sind jeweils durch einen Koeffizienten χ^n identifiziert; alle Impulse sind einlaufende. Die verwendete Notation ist

$$\begin{aligned} p^\mu &= \text{FV}[p, \text{mu}], & \delta_{ab} &= \text{ID}[a, b], \\ g^{\mu\nu} &= \text{MT}[\text{mu}, \text{nu}], & \varepsilon_{abc} &= \text{IE}[a, b, c], \\ p \cdot q &= \text{SP}[p, q], & \chi^n &= \text{chi}^n; \end{aligned}$$

Zeilenumbrüche müssen konsequent entfernt werden. Die Lorentz-Indizes sind μ_i , die Isospin-Indizes a_i , die Impulse jeweils p_i .

$$\begin{aligned} &\gamma^{\mu_1}(p_1)\rho_{a_1}^{\mu_2}(p_2) \\ &= -\frac{i e \delta_{3a_2}}{g} \left(2e_1 g p_1^{\mu_2} p_2^{\mu_1} - g^{\mu_1 \mu_2} (2e_1 g p_1 \cdot p_2 + m_\rho^2) \right) \\ &= (\text{I} * \text{chi}^3 * \text{e} * \text{ID}[3, a_2] * (-2 * \text{e}_1 * g * \text{FV}[p_1, \text{mu}_2] * \text{FV}[p_2, \text{mu}_1] + \text{MT}[\text{mu}_1, \text{mu}_2] * (\text{mr}^2 + 2 * \text{e}_1 * g * \text{SP}[p_1, p_2]))) / g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\pi_{a_1}(p_1)\pi_{a_2}(p_2)\gamma^{\mu_1}(p_3) \\ &= e e_{3a_1 a_2} (p_1^{\mu_1} - p_2^{\mu_1}) + \dots \\ &= (\text{chi}^2 * \text{e} * \text{IE}[3, a_1, a_2] * (2 * (\text{FV}[p_1, \text{mu}_1] - \text{FV}[p_2, \text{mu}_1]) + (\text{chi}^2 * (\text{FV}[p_2, \text{mu}_1] * (8 * \text{e}_4 * g * \text{mp}^2 - 4 * g^2 * 14 * \text{mp}^2 + \text{mr}^2 - 4 * g^2 * 16 * \text{SP}[p_1, p_3]) + \text{FV}[p_1, \text{mu}_1] * (-8 * \text{e}_4 * g * \text{mp}^2 + 4 * g^2 * 14 * \text{mp}^2 - \text{mr}^2 + 4 * g^2 * 16 * \text{SP}[p_2, p_3]))) / (\text{F}^2 * g^2)) / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\pi_{a_1}(p_1)\pi_{a_2}(p_2)\rho_{a_3}^{\mu_1}(p_3) \\ &= \frac{1}{2gF^2} \left(\epsilon_{a_1 a_2 a_3} (p_2^{\mu_1} (8e_4 g m_\pi^2 + 8e_2 g p_1 \cdot p_3 + m_\rho^2) \right. \\ &\quad \left. - p_1^{\mu_1} (8e_4 g m_\pi^2 + 8e_2 g p_2 \cdot p_3 + m_\rho^2)) \right) \\ &= (\text{chi}^3 * \text{IE}[a_1, a_2, a_3] * (\text{FV}[p_2, \text{mu}_1] * (-4 * \text{cx} * \text{mp}^2 + 4 * (\text{cx} + 2 * \text{e}_4 * g) * \text{mp}^2 + \text{mr}^2 + 8 * \text{e}_2 * g * \text{SP}[p_1, p_3]) - \text{FV}[p_1, \text{mu}_1] * (-4 * \text{cx} * \text{mp}^2 + 4 * (\text{cx} + 2 * \text{e}_4 * g) * \text{mp}^2 + \text{mr}^2 + 8 * \text{e}_2 * g * \text{SP}[p_2, p_3]))) / (2 * \text{F}^2 * g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma^{\mu_1}(p_1)\rho_{a_1}^{\mu_2}(p_2)\rho_{a_2}^{\mu_3}(p_3) \\
&= 2ee_1g\epsilon_{3a_2a_3}\left(g^{\mu_1\mu_2}p_1^{\mu_3}-g^{\mu_1\mu_3}p_1^{\mu_2}\right) \\
&= 2\text{chi}^2\text{e}\text{e}\text{e}\text{1}\text{g}\text{IE}[3, a_2, a_3]\text{(FV}[p_1, \text{mu}3]\text{*MT}[\text{mu}1, \text{mu}2]-\text{FV}[p_1, \text{mu}2]\text{*MT}[\text{mu}1, \text{mu}3])}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{a_1}^{\mu_1}(p_1)\rho_{a_2}^{\mu_2}(p_2)\rho_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \\
&= g\epsilon_{a_1a_2a_3}\left(g^{\mu_2\mu_3}p_2^{\mu_1}-g^{\mu_1\mu_2}p_2^{\mu_3}-g^{\mu_2\mu_3}p_3^{\mu_1}\right. \\
&\quad \left.-g^{\mu_1\mu_3}p_1^{\mu_2}+g^{\mu_1\mu_3}p_3^{\mu_2}+g^{\mu_1\mu_2}p_1^{\mu_3}\right) \\
&= \text{chi}^2\text{g}\text{IE}[a_1, a_2, a_3]\text{(FV}[p_1, \text{mu}3]\text{*MT}[\text{mu}1, \text{mu}2]-\text{FV}[p_2, \text{mu}3]\text{*MT}[\text{mu}1, \text{mu}2]-\text{FV}[p_1, \text{mu}2]\text{*MT}[\text{mu}1, \text{mu}3]+\text{FV}[p_3, \text{mu}2]\text{*MT}[\text{mu}1, \text{mu}3]+\text{FV}[p_2, \text{mu}1]\text{*MT}[\text{mu}2, \text{mu}3]-\text{FV}[p_3, \text{mu}1]\text{*MT}[\text{mu}2, \text{mu}3])}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi_{a_1}(p_1)\pi_{a_2}(p_2)\pi_{a_3}(p_3)\pi_{a_4}(p_4) \\
&= \frac{i}{3F^2}\left(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_1a_4}\left(m_\pi^2-p_1\cdot p_2-p_1\cdot p_3+2p_1\cdot p_4\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+2p_2\cdot p_3-p_2\cdot p_4-p_3\cdot p_4\right)\right. \\
&\quad -\delta_{a_1a_3}\delta_{a_2a_4}\left(m_\pi^2-p_1\cdot p_2+2p_1\cdot p_3-p_1\cdot p_4\right. \\
&\quad \left.-p_2\cdot p_3+2p_2\cdot p_4-p_3\cdot p_4\right) \\
&\quad \left.-\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\left(m_\pi^2+2p_1\cdot p_2-p_1\cdot p_3-p_1\cdot p_4\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-p_2\cdot p_3-p_2\cdot p_4+2p_3\cdot p_4\right)\right)+\dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((-1/12)\text{chi}^2(4\text{F}^2(\text{ID}[a_1, a_2]\text{*ID}[a_3, a_4]\text{*}(-\text{mp}^2-2\text{*SP}[p_1, p_2]+\text{SP}[p_1, p_3]+\text{SP}[p_1, p_4]+\text{SP}[p_2, p_3]+\text{SP}[p_2, p_4]-2\text{*SP}[p_3, p_4])+\text{ID}[a_1, a_3]\text{*ID}[a_2, a_4]\text{*}(-\text{mp}^2+\text{SP}[p_1, p_2]-2\text{*SP}[p_1, p_3]+\text{SP}[p_1, p_4]+\text{SP}[p_2, p_3]-2\text{*SP}[p_2, p_4]+\text{SP}[p_3, p_4])+\text{ID}[a_1, a_4]\text{*ID}[a_2, a_3]\text{*}(-\text{mp}^2+\text{SP}[p_1, p_2]+\text{SP}[p_1, p_3]-2\text{*SP}[p_1, p_4]-2\text{*SP}[p_2, p_3]+\text{SP}[p_2, p_4]+\text{SP}[p_3, p_4]))-(\text{chi}^2(\text{ID}[a_1, a_3]\text{*ID}[a_2, a_4]\text{*}(32\text{g}^2\text{*13}\text{mp}^4+32\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^4+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_1, p_2]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_1, p_2]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_1, p_2]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_1, p_2]+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_3]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_3]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_2, p_3]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_2, p_3]+48\text{g}^2\text{*12}\text{*SP}[p_2, p_3])-(12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)+48\text{g}^2\text{*12}\text{*SP}[p_2, p_3])-(24\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_4]-96\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_4]+40\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_2, p_4]-6\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_2, p_4]+\text{SP}[p_1, p_3]\text{*}(-24\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2-96\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2+40\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2-6\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)+96\text{g}^2\text{*11}\text{*SP}[p_2, p_4])+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_3, p_4]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_3, p_4]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_3, p_4]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_3, p_4]+48\text{g}^2\text{*12}\text{*SP}[p_1, p_2]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_1, p_2]+\text{ID}[a_1, a_4]\text{*ID}[a_2, a_3]\text{*}(32\text{g}^2\text{*13}\text{mp}^4+32\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^4+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_1, p_2]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_1, p_2]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_1, p_2]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_1, p_2]-24\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_3]-96\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_3]+40\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_2, p_3]-6\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_2, p_3]+\text{SP}[p_1, p_4]\text{*}(-24\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2-96\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2+40\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2-6\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)+96\text{g}^2\text{*11}\text{*SP}[p_2, p_3])+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_4]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_4]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_2, p_4]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_2, p_4]+\text{SP}[p_1, p_3]\text{*}(12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)+48\text{g}^2\text{*12}\text{*SP}[p_2, p_4])+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_3, p_4]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_3, p_4]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_3, p_4]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_3, p_4]+48\text{g}^2\text{*12}\text{*SP}[p_1, p_2]\text{*SP}[p_3, p_4])+\text{ID}[a_1, a_2]\text{*ID}[a_3, a_4]\text{*}(32\text{g}^2\text{*13}\text{mp}^4+32\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^4+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_1, p_3]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_1, p_3]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_1, p_3]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_1, p_3]+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_3]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_3]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_2, p_3]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_2, p_3]+\text{SP}[p_1, p_4]\text{*}(12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)+48\text{g}^2\text{*12}\text{*SP}[p_2, p_3])+12\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_4]+48\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_2, p_4]-8\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_2, p_4]+3\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_2, p_4]+48\text{g}^2\text{*12}\text{*SP}[p_1, p_3]\text{*SP}[p_2, p_4]-24\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2\text{*SP}[p_3, p_4]-96\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2\text{*SP}[p_3, p_4]+40\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2\text{*SP}[p_3, p_4]-6\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)\text{*SP}[p_3, p_4]+\text{SP}[p_1, p_2]\text{*}(-24\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2-96\text{e}4\text{g}\text{*m}\text{p}^2+40\text{g}^2\text{*14}\text{mp}^2-6\text{*}(-4\text{c}\text{x}\text{m}\text{p}^2+\text{m}\text{r}^2)+96\text{g}^2\text{*11}\text{*SP}[p_3, p_4])))/\text{g}^2)/\text{F}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi_{a_1}(p_1)\pi_{a_2}(p_2)\gamma^{\mu_1}(p_3)\gamma^{\mu_2}(p_4) \\
&= -2ie^2 (\delta_{3a_1}\delta_{3a_2} - \delta_{a_1a_2}) g^{\mu_1\mu_2} + \dots \\
&= (-2*I)\text{chi}^2e^2*((ID[3,a1]*ID[3,a2]-ID[a1,a2])*MT[mu1,mu2]+(\text{chi}^2*(ID[a1,a2]*(g*((-e3+g*16)*(FV[p1,mu2]+FV[p2,mu2])*FV[p4,mu1]+FV[p3,mu2]*((-e3+g*16)*(FV[p1,mu1]+FV[p2,mu1])+4*g*15*FV[p4,mu1]))+MT[mu1,mu2]*(2*cx*mp^2+8*e4*g*mp^2-2*g^2*14*mp^2+mr^2+g*(e3-g*16))*SP[p1,p3]+e3*g*SP[p1,p4]-g^2*16*SP[p1,p4]+e3*g*SP[p2,p3]-g^2*16*SP[p2,p3]+e3*g*SP[p2,p4]-g^2*16*SP[p2,p4]-4*g^2*15*SP[p3,p4]))+ID[3,a1]*ID[3,a2]*(g*((-e3+g*16)*(FV[p1,mu2]+FV[p2,mu2])*FV[p4,mu1]+FV[p3,mu2]*((-e3+g*16)*(FV[p1,mu1]+FV[p2,mu1]))-4*g*15*FV[p4,mu1]))+MT[mu1,mu2]*(-8*e4*g*mp^2+2*g^2*14*mp^2-mr^2+g*((-e3+g*16))*SP[p1,p3]-e3*g*SP[p1,p4]+g^2*16*SP[p1,p4]-e3*g*SP[p2,p3]+g^2*16*SP[p2,p3]-e3*g*SP[p2,p4]+g^2*16*SP[p2,p4]+4*g^2*15*SP[p3,p4])))/(F^2*g^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi_{a_1}(p_1)\pi_{a_2}(p_2)\gamma^{\mu_1}(p_3)\rho_{a_3}^{\mu_2}(p_4) \\
&= \dots \\
&= ((-I/2)*\text{chi}^3e*((-ID[3,a1]*ID[a2,a4]*(-2*g*(4*e2*FV[p1,mu2]+FV[p4,mu1]+FV[p3,mu2]*(2*e3*FV[p1,mu1]+e1*FV[p4,mu1]))+MT[mu1,mu2]*(8*e4*g*mp^2+mr^2+4*e3*g*SP[p1,p3]+8*e2*g*SP[p1,p4]+2*e1*g*SP[p3,p4]))+2*ID[3,a4]*ID[a1,a2]*(-2*g*(2*e2*(FV[p1,mu2]+FV[p2,mu2])*FV[p4,mu1]+FV[p3,mu2]*(e3*(FV[p1,mu1]+FV[p2,mu1])+e1*FV[p4,mu1]))+MT[mu1,mu2]*(4*cx*mp^2+8*e4*g*mp^2+mr^2+2*e3*g*SP[p1,p3]+4*e2*g*SP[p1,p4]+2*e3*g*SP[p2,p3]+4*e2*g*SP[p2,p4]+2*e1*g*SP[p3,p4]))-ID[3,a2]*ID[a1,a4]*(-2*g*(4*e2*FV[p2,mu2]+FV[p4,mu1]+FV[p3,mu2]*(2*e3*FV[p2,mu1]+e1*FV[p4,mu1]))+MT[mu1,mu2]*(8*e4*g*mp^2+mr^2+4*e3*g*SP[p2,p3]+8*e2*g*SP[p2,p4]+2*e1*g*SP[p3,p4])))/(F^2*g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi_{a_1}(p_1)\pi_{a_2}(p_2)\rho_{a_3}^{\mu_1}(p_3)\rho_{a_4}^{\mu_2}(p_4) \\
&= \frac{4i}{F^2} (e_2g (\delta_{a_2a_3}\delta_{a_1a_4} - \delta_{a_1a_3}\delta_{a_2a_4}) (p_1^{\mu_2}p_2^{\mu_1} - p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}) \\
&\quad - m_\pi^2\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}c_\chi g^{\mu_1\mu_2}) \\
&= ((-4*I)\text{chi}^2*(-(e2*g*(FV[p1,mu2]+FV[p2,mu1]-FV[p1,mu1]+FV[p2,mu2])*ID[a1,a4]*ID[a2,a3]-ID[a1,a3]*ID[a2,a4]))+cx*mp^2*ID[a1,a2]*ID[a3,a4]+MT[mu1,mu2])/F^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{a_1}^{\mu_1}(p_1)\rho_{a_2}^{\mu_2}(p_2)\rho_{a_3}^{\mu_3}(p_3)\rho_{a_4}^{\mu_4}(p_4) \\
&= -ig^2 (\delta_{a_2a_3}\delta_{a_1a_4} (2g^{\mu_2\mu_3}g^{\mu_1\mu_4} - g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} - g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}) \\
&\quad - \delta_{a_1a_3}\delta_{a_2a_4} (g^{\mu_2\mu_3}g^{\mu_1\mu_4} - 2g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}) \\
&\quad - \delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4} (g^{\mu_2\mu_3}g^{\mu_1\mu_4} + g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} - 2g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4})) \\
&= (-I)\text{chi}^2g^2*(-(ID[a1,a2]*ID[a3,a4]*(MT[mu1,mu4]*MT[mu2,mu3]+MT[mu1,mu3]*MT[mu2,mu4]-2*MT[mu1,mu2]*MT[mu3,mu4]))+ID[a1,a4]*ID[a2,a3]*(2*MT[mu1,mu4]*MT[mu2,mu3]-MT[mu1,mu3]*MT[mu2,mu4]-MT[mu1,mu2]*MT[mu3,mu4])-ID[a1,a3]*ID[a2,a4]*(MT[mu1,mu4]*MT[mu2,mu3]-2*MT[mu1,mu3]*MT[mu2,mu4]+MT[mu1,mu2]*MT[mu3,mu4]))
\end{aligned}$$

MASCHINENLESBARE FUNKTIONEN

In diesem Kapitel sind einige relevante Funktionen in einer für ein Computeralgebrasystem (speziell *Mathematica*) verwertbaren Form angegeben. Im einzelnen sind dies

- der Formfaktor des Pions, ohne Omega,
- die gemittelten, quadrierten Matixelemente der Photonenfusion in Invarianten,
- die invarianten Amplituden f_i der vcs und die kinematischen Beiträge S (jeweils in Invarianten).

Die Notation ist identisch zu derjenigen in Kapitel H, die komplexe Konjugation wird mit *cc* abgekürzt; Zeilenumbrüche müssen wiederum entfernt werden.

$F_\pi =$

$$(96F^2m^2\pi^2(m^2-2s)(s_0(s_0-4s_1)-4mp^2(s_0-s_1))R_2[s_0,mp^2]+3F^2m^2(m^2-s_0)s_0s_1R_2[s_1,mp^2]-((s_0-s_1)*(-384F^4m^4\pi^2-1536Sqrt[2]*e4F^3mp^2m^2\pi^2s_0+3072e1e4F^2mp^2m^2\pi^2s_0+768Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_0+768F^2*15m^4\pi^2s_0-192Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_0^2+384Sqrt[2]*e2F^3m^3\pi^2s_0^2-192Sqrt[2]*e3F^3m^3\pi^2s_0^2-384e1^2F^2m^2\pi^2s_0^2-768e1e2F^2m^2\pi^2s_0^2+384e1e3F^2m^2\pi^2s_0^2-768F^2*15m^4\pi^2s_0^2-384Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_1+768Sqrt[2]*e2F^3m^3\pi^2s_1-768F^2*15m^4\pi^2s_1+384F^2*16m^4\pi^2s_1+192Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_0s_1-384Sqrt[2]*e2F^3m^3\pi^2s_0s_1+192Sqrt[2]*e3F^3m^3\pi^2s_0s_1+384e1^2F^2m^2\pi^2s_0s_1-768e1e2F^2m^2\pi^2s_0s_1-384e1e3F^2m^2\pi^2s_0s_1+768F^2*15m^4\pi^2s_0s_1-384F^2*16m^4\pi^2s_0s_1+16F^2mp^2m^2(m^2-s_0)R_2[0,mp^2]+16e1m^2*(-2cx*e1mp^2+(e1-2e2)m^2)*(m r^2-s_0)*(s_0-s_1)R_2[0,mr^2]+16cx*e1^2mp^2m^4s_0R_2[s_0,mr^2]+16e1^2m^6s_0R_2[s_0,mr^2]+32e1e2m^6s_0R_2[s_0,mr^2]-8cx*e1^2mp^2m^2s_0^2R_2[s_0,mr^2]-16e1^2m^4s_0^2R_2[s_0,mr^2]-32e1e2m^4s_0^2R_2[s_0,mr^2]-8cx*e1^2mp^2s_0^3R_2[s_0,mr^2]-e1^2m^2s_0^3R_2[s_0,mr^2]-2e1e2m^2s_0^3R_2[s_0,mr^2]+e1^2s_0^4R_2[s_0,mr^2]+2e1e2s_0^4R_2[s_0,mr^2]+32cx*e1^2mp^2m^4s_1R_2[s_0,mr^2]-16e1^2m^6s_1R_2[s_0,mr^2]+32e1e2m^6s_1R_2[s_0,mr^2]-32e1e2m^6s_1R_2[s_0,mr^2]+20cx*e1^2mp^2s_0^2s_1R_2[s_0,mr^2]+e1^2m^2s_0^2s_1R_2[s_0,mr^2]-2e1e2m^2s_0^2s_1R_2[s_0,mr^2]-e1^2s_0^3s_1R_2[s_0,mr^2]+2e1e2s_0^3s_1R_2[s_0,mr^2]-48cx*e1^2mp^2m^4s_0R_2[s_1,mr^2]+48cx*e1^2mp^2m^2s_0^2R_2[s_1,mr^2]-12cx*e1^2mp^2m^2s_0s_1R_2[s_1,mr^2]+12cx*e1^2mp^2s_0^2s_1R_2[s_1,mr^2]+24cx*e1^2mp^2m^2s_1^2R_2[s_1,mr^2]-24cx*e1^2mp^2s_0s_1^2R_2[s_1,mr^2]+24F^2mp^2m^4s_1R_3[0,s_1,s_0,mp^2]-24F^2mp^2m^2s_0s_1R_3[0,s_1,s_0,mp^2]+96cx*e1^2mp^2m^6s_0R_3[0,s_1,s_0,mr^2]-96cx*e1^2mp^2m^4s_0^2R_3[0,s_1,s_0,mr^2]-96cx*e1^2mp^2m^6s_1R_3[0,s_1,s_0,mr^2]+72cx*e1^2mp^2m^4s_0s_1R_3[0,s_1,s_0,mr^2]+24cx*e1^2mp^2m^2s_0^2s_1R_3[0,s_1,s_0,mr^2]+24cx*e1^2mp^2m^2s_1^2R_3[0,s_1,s_0,mr^2]-24cx*e1^2mp^2m^2s_0s_1^2R_3[0,s_1,s_0,mr^2])/4)/(48F^4m^2\pi^2(m^2-s_0)(s_0-s_1))$$

$f_1 =$

$$(-F^2m^2(m^2-2s)(s_0(s_0-4s_1)-4mp^2(s_0-s_1))R_2[s_0,mp^2]+3F^2m^2(m^2-s_0)s_0s_1R_2[s_1,mp^2]-((s_0-s_1)*(-384F^4m^4\pi^2-1536Sqrt[2]*e4F^3mp^2m^2\pi^2s_0+3072e1e4F^2mp^2m^2\pi^2s_0+768Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_0+768F^2*15m^4\pi^2s_0-192Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_0^2+384Sqrt[2]*e2F^3m^3\pi^2s_0^2-192Sqrt[2]*e3F^3m^3\pi^2s_0^2-384e1^2F^2m^2\pi^2s_0^2-768e1e2F^2m^2\pi^2s_0^2+384e1e3F^2m^2\pi^2s_0^2-768F^2*15m^4\pi^2s_0^2-384Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_1+768Sqrt[2]*e2F^3m^3\pi^2s_1-768F^2*15m^4\pi^2s_1+384F^2*16m^4\pi^2s_1+192Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_0s_1-384Sqrt[2]*e2F^3m^3\pi^2s_0s_1+192Sqrt[2]*e3F^3m^3\pi^2s_0s_1+384e1^2F^2m^2\pi^2s_0s_1-768e1e2F^2m^2\pi^2s_0s_1-384e1e3F^2m^2\pi^2s_0s_1+768F^2*15m^4\pi^2s_0s_1-384F^2*16m^4\pi^2s_0s_1+16F^2mp^2m^2(m^2-s_0)R_2[0,mp^2]+16e1m^2*(-2cx*e1mp^2+(e1-2e2)m^2)*(m r^2-s_0)*(s_0-s_1)R_2[0,mr^2]+16cx*e1^2mp^2m^4s_0R_2[s_0,mr^2]+16e1^2m^6s_0R_2[s_0,mr^2]+32e1e2m^6s_0R_2[s_0,mr^2]-8cx*e1^2mp^2m^2s_0^2R_2[s_0,mr^2]-16e1^2m^4s_0^2R_2[s_0,mr^2]-32e1e2m^4s_0^2R_2[s_0,mr^2]-8cx*e1^2mp^2s_0^3R_2[s_0,mr^2]-e1^2m^2s_0^3R_2[s_0,mr^2]-2e1e2m^2s_0^3R_2[s_0,mr^2]+e1^2s_0^4R_2[s_0,mr^2]+2e1e2s_0^4R_2[s_0,mr^2]+32cx*e1^2mp^2m^4s_1R_2[s_0,mr^2]-16e1^2m^6s_1R_2[s_0,mr^2]+32e1e2m^6s_1R_2[s_0,mr^2]-32e1e2m^6s_1R_2[s_0,mr^2]+20cx*e1^2mp^2s_0^2s_1R_2[s_0,mr^2]+e1^2m^2s_0^2s_1R_2[s_0,mr^2]-2e1e2m^2s_0^2s_1R_2[s_0,mr^2]-e1^2s_0^3s_1R_2[s_0,mr^2]+2e1e2s_0^3s_1R_2[s_0,mr^2]-48cx*e1^2mp^2m^4s_0R_2[s_1,mr^2]+48cx*e1^2mp^2m^2s_0^2R_2[s_1,mr^2]-12cx*e1^2mp^2m^2s_0s_1R_2[s_1,mr^2]+12cx*e1^2mp^2s_0^2s_1R_2[s_1,mr^2]+24cx*e1^2mp^2m^2s_1^2R_2[s_1,mr^2]-24cx*e1^2mp^2s_0s_1^2R_2[s_1,mr^2]+24F^2mp^2m^4s_1R_3[0,s_1,s_0,mp^2]-24F^2mp^2m^2s_0s_1R_3[0,s_1,s_0,mp^2]+96cx*e1^2mp^2m^6s_0R_3[0,s_1,s_0,mr^2]-96cx*e1^2mp^2m^4s_0^2R_3[0,s_1,s_0,mr^2]-96cx*e1^2mp^2m^6s_1R_3[0,s_1,s_0,mr^2]+72cx*e1^2mp^2m^4s_0s_1R_3[0,s_1,s_0,mr^2]+24cx*e1^2mp^2m^2s_0^2s_1R_3[0,s_1,s_0,mr^2]+24cx*e1^2mp^2m^2s_1^2R_3[0,s_1,s_0,mr^2]-24cx*e1^2mp^2m^2s_0s_1^2R_3[0,s_1,s_0,mr^2])/4)/(48F^4m^2\pi^2(m^2-s_0)(s_0-s_1))$$

$f_2 =$

$$(-96F^4m^4\pi^2-384Sqrt[2]*e4F^3mp^2m^2\pi^2s_0+768e1e4F^2mp^2m^2\pi^2s_0+96Sqrt[2]*e1F^3m^3\pi^2s_0+192Sqrt[2]*e2F^3m^3\pi^2s_0+96F^2*16m^4\pi^2s_0-384e1e2F^2m^2\pi^2s_0^2-96F^2*16m^4\pi^2s_0^2+4F^2mp^2m^2(m^2-s_0)R_2[0,mp^2]+F^2m^2(4mp^2-s_0)*(m^2-s_0)R_2[s_0,mp^2]+16e1e2m^6s_0R_2[s_0,mr^2]-16e1e2m^4s_0^2R_2[s_0,mr^2]-e1e2m^2s_0^3R_2[s_0,mr^2]+e1e2s_0^4R_2[s_0,mr^2])/48F^4m^2\pi^2(m^2-s_0)(mp^2-s_2)(mp^2+s_0-s_1-s_2)$$

$f_3 =$

$$\begin{aligned}
 & -((F^2*mr^2*(mr^2-s0)*(12*mp^4*s0*s1-4*mp^2*(s0^3-6*s0^2*s1-s1^3+6*s0*s1*(s1+s2))+s0*(s0^3-3*s0^2*s1 \\
 & +3*s0*s1*(s1-4*s2)+s1*(-s1^2+12*s1*s2+12*s2^2)))*R2[s0,mp^2])/4-3*F^2*mr^2*(mr^2-s0)*s0*s1*(mp^2-2s2) \\
 & *(mp^2+s0-s1-s2)*R2[s1,mp^2]+((s0-s1)*((e1*(mr^2-s0)*((s0-s1)^2*(-((16*mr^4-s0^2)*(e1*(s0-s1)+2*e2*(s0+s1) \\
 & +s0+1))-4*cxc*ei*mp^2*(s0*(2*s0-5*s1)+4*mr^2*(s0+2*s1)))+(e1-2*e2)*(16*mr^4-s0^2)*(s0-s1)+4*cxc*ei*mp \\
 & p^2*(s0*(2*s0-5*s1)+4*mr^2*(s0+2*s1)))*(2*mp^2+s0-s1-2*s2)^2)*R2[s0,mp^2])/8+2*(-3*cxc*ei^2*mp^2*(mr^2- \\
 & 2-s0)*(4*mr^2*s0+(s0-2*s1)*s1)*(mp^2-2s2)*(mp^2+s0-s1-s2)*R2[s1,mp^2]+2*mr*(3*F^2*mp^2*mr*(mr^2-s0)*s \\
 & 1*(mp^2-2s2)*(mp^2+s0-s1-s2)*R3[0,s1,s0,mp^2]+((s0-s1)*((2*mp^2+s0-s1-2*s2)^2*(2*e1*mr*(2*cxc*ei*mp^2 \\
 & +e1-2*e2)*mr^2)*(mr^2-s0)*R2[0,mp^2]+3*(8*F^2*Pi^2*(4*15*mr^3-2*16*mr^3-Sqrt[2]*e3*F*s0-2*e1^2*mr*s \\
 & 0-4*15*mr*s0+2*16*mr*s0+2*Sqrt[2]*e2*F*(-2*mr^2+s0)+e1*(Sqrt[2]*F*(2*mr^2-s0)+2*(2*e2+e3)*mr*s0))+cx \\
 & *ei^2*mp^2*mr*(mr^2-s0)*(4*mr^2-s1)*R3[0,s1,s0,mp^2]))-(s0-s1)*(2*F^2*mp^2*mr*(mr^2-s0)*R2[0,mp^2]+2 \\
 & *e1*mr*(-2*cxc*ei*mp^2+(e1-2*e2)*mr^2)*(mr^2-s0)*(s0-s1)*R2[0,mp^2]-3*(8*F^2*Pi^2*(2*F^2*mr^3+2*mr*(e \\
 & 1^2*s0*(s0-s1)-(mr^2-s0)*(2*15*(s0-s1)+16*s1)+e1*s0*(-8*e4*mp^2+e3*(-s0+s1)+2*e2*(s0+s1))+Sqrt[2]*F \\
 & *(8*e4*mp^2*s0-2*e2*s0^2+e3*s0^2-4*e2*mr^2*s1+2*e2*s0*s1-e3*s0*s1+e1*(s0*(s0-s1)*mr^2*(-4*s0+2*s1)) \\
 &)-cxc*ei^2*mp^2*mr*(mr^2-s0)*(4*mr^2-s1)*(s0-s1)*R3[0,s1,s0,mp^2])))))/((24*F^4*mr^2*Pi^2*(mr^2- \\
 & 2-s0)*(s0-s1)^2*(mp^2-2s2)*(mp^2+s0-s1-s2))
 \end{aligned}$$

$(|\mathcal{M}^{00}|^2) =$

$$\begin{aligned}
 & (e^4*mp^4*(6*F^2*(mp^2-S)*cc[mr]^2*cc[R3[0,S,0,mp^2]]-S*cc[cx]*cc[e1]^2*(3*S*cc[R2[S,mp^2]]-12*cc[mr \\
 &]^4*cc[R3[0,S,0,mp^2]]+cc[mr]^2*(8*cc[R2[0,mp^2]]+3*S*cc[R3[0,S,0,mp^2]])))*(-8*cxc*ei^2*mr^2*S*R2[0, \\
 & mr^2]-3*(cxc*ei^2*S^2*R2[S,mp^2]+mr^2*(2*F^2*(mp^2+S)*R3[0,S,0,mp^2]+cxc*ei^2*S*(-4*mr^2+S)*R3[0,S,0, \\
 & mr^2])))/(1152*F^8*mr^2*Pi^4*cc[mr]^2)
 \end{aligned}$$

$(|\mathcal{M}^{\pm}|^2) =$

$$\begin{aligned}
 & (e^4*(s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*cc[e1]^2*(-4*cc[mr]^4*cc[R2[0,mp^2]]+mp^2*cc[cx]*(3*S*cc[R2[S,mp^2]]-1 \\
 & 2*cc[mr]^4*cc[R3[0,s,0,mp^2]]+cc[mr]^2*(8*cc[R2[0,mp^2]]+3*S*cc[R3[0,s,0,mp^2]])))+(4*F^2*mp^2*4*mr^2 \\
 & *R2[0,mp^2]+4*e1*mr^2*(2*cxc*ei*mp^2-(e1-2*e2)*mr^2)*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]-3*(-cxc*ei^2*mp^2 \\
 & *s*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[s,mp^2]+mr*(16*F^2*Pi^2*(mr*(-(F^2*mp^2)+L*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))+Sqrt[2]*e \\
 & 1*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)-2*Sqrt[2]*e2*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))-F^2*mp^2*mr*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R3[0,s,0, \\
 & mp^2]-cxc*ei^2*mp^2*mr*(4*mr^2-s)*(mp^2-t)*(mp^2+s+t)*R3[0,s,0,mp^2])))+8*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*c \\
 & c[e1]*cc[mr]*(cc[e2]*cc[mr]^3*cc[R2[0,mp^2]]*(-4*F^2*mp^4*mr^2*R2[0,mp^2]+4*e1*mr^2*(2*cxc*ei*mp^2-(e \\
 & 1-2*e2)*mr^2)*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]-3*(-cxc*ei^2*mp^2*s*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[s,mp^2]+mr* \\
 & (16*F^2*Pi^2*(mr*(-(F^2*mp^2)+L*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))+Sqrt[2]*e1*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)-2*Sqrt[2]*e2*F \\
 & *(mp^2-t)*(mp^2-s-t))-F^2*mp^2*mr*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R3[0,s,0,mp^2]-cxc*ei^2*mp^2*mr*(4*mr^2-s)*(mp^2- \\
 & 2-t)*(mp^2+s+t)*R3[0,s,0,mp^2])))-6*F^3*Pi^2*(-4*Sqrt[2]*F^2*mp^4*mr^2*R2[0,mp^2]+4*Sqrt[2]*e1*mr^2 \\
 & *(2*cxc*ei*mp^2-(e1-2*e2)*mr^2)*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]-3*(-(Sqrt[2]*cxc*ei^2*mp^2*s*(mp^2-t)*(mp^2- \\
 & s-t)*R2[s,mp^2]+mr*(16*F^2*Pi^2*(Sqrt[2]*mr*(-(F^2*mp^2)+L*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))+2*e1*F*(mp^2-t) \\
 & *(mp^2-s-t)-4*e2*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))-Sqrt[2]*F^2*mp^2*mr*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R3[0,s,0,mp^2]-Sqrt[2] \\
 & *(cxc*ei^2*mp^2*mr*(4*mr^2-s)*(mp^2-t)*(mp^2+s+t)*R3[0,s,0,mp^2])))+F^2*cc[mr]*(96*F*Pi^2*s*(m \\
 & p^2-t)*(mp^2+s+t)*cc[e2]*(4*Sqrt[2]*F^2*mp^4*mr^2*R2[0,mp^2]+4*Sqrt[2]*e1*mr^2*(2*cxc*ei*mp^2-(e1-2 \\
 & *e2)*mr^2)*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]-3*(-(Sqrt[2]*cxc*ei^2*mp^2*s*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[s,mp^2] \\
 &)+mr*(16*F^2*Pi^2*(Sqrt[2]*mr*(-(F^2*mp^2)+L*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))+2*e1*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)-4*e2*F* \\
 & *(mp^2-t)*(mp^2-s-t))-Sqrt[2]*F^2*mp^2*mr*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R3[0,s,0,mp^2]-Sqrt[2]*cxc*ei^2*mp^2*mr* \\
 & (4*mr^2-s)*(mp^2-t)*(mp^2+s+t)*R3[0,s,0,mp^2])))+cc[mr]*(48*Pi^2*s^2*(mp^2-t)*(mp^2+s+t)*cc[LL]*(-4 \\
 & *F^2*mp^4*mr^2*R2[0,mp^2]+4*e1*mr^2*(2*cxc*ei*mp^2-(e1-2*e2)*mr^2)*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]-3*(- \\
 & -cxc*ei^2*mp^2*s*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[s,mp^2]+mr*(16*F^2*Pi^2*(mr*(-(F^2*mp^2)+L*(mp^2-t)*(mp^2-s- \\
 & t))+Sqrt[2]*e1*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)-2*Sqrt[2]*e2*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))-F^2*mp^2*mr*(mp^2-t)*(mp^2- \\
 & -s-t)*R3[0,s,0,mp^2]-cxc*ei^2*mp^2*mr*(4*mr^2-s)*(mp^2-t)*(mp^2+s+t)*R3[0,s,0,mp^2])))-4*mp^2*cc[R2[\\
 & 0,mp^2]]*(-4*F^2*mp^2*mr^2*(mp^8-4*mp^6*t-4*mp^2*t^2*(s+t)+t^2*(s+t))^2+mp^4*(s^2+2*s*t+6*t^2))*R2[0, \\
 & mp^2]+4*e1*mp^2*mr^2*(2*cxc*ei*mp^2-(e1-2*e2)*mr^2)*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]+3*(cxc*ei^2*mp^ \\
 & 4*s^3*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[s,mp^2]+mr*(16*F^2*Pi^2*(-(Sqrt[2]*(e1-2*e2)*F*mp^2*s^2*(mp^2-t)*(mp^2- \\
 & -t))-L*mp^2*mr*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)+F^2*mr*(mp^8-4*mp^6*t-4*mp^2*t^2*(s+t)+t^2*(s+t))^2+mp^4*(s^2 \\
 & +2*s*t+6*t^2)))+F^2*mp^4*mr*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R3[0,s,0,mp^2]+cxc*ei^2*mp^4*mr*(4*mr^2-s)*s^2*(m \\
 & p^2-t)*(mp^2+s+t)*R3[0,s,0,mp^2])))+3*(mp^2*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*cc[R3[0,s,0,mp^2]]*(-(4*F^2*mp^4 \\
 & *mr^2*R2[0,mp^2]+4*e1*mr^2*(2*cxc*ei*mp^2-(e1-2*e2)*mr^2)*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]-3*(-cxc*ei^2 \\
 & *mp^2*s*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[s,mp^2]+mr*(16*F^2*Pi^2*(mr*(-(F^2*mp^2)+L*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))+Sqrt[2] \\
 & *e1*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)-2*Sqrt[2]*e2*F*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))-F^2*mp^2*mr*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R3[\\
 & 0,s,0,mp^2]-cxc*ei^2*mp^2*mr*(4*mr^2-s)*(mp^2-t)*(mp^2+s+t)*R3[0,s,0,mp^2])))+16*F^2*Pi^2*(4*F^2*mp \\
 & 2*(mp^8-4*mp^6*t-4*mp^2*t^2*(s+t)+t^2*(s+t))^2+mp^4*(s^2+2*s*t+6*t^2))*R2[0,mp^2]+4*e1*mp^2*mr^2 \\
 & *(2*cxc*ei*mp^2-(e1-2*e2)*mr^2)*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R2[0,mp^2]+3*(cxc*ei^2*mp^4*s^3*(mp^2-t)*(mp^ \\
 & 2-s-t)*R2[s,mp^2]+mr*(16*F^2*Pi^2*(-(Sqrt[2]*(e1-2*e2)*F*mp^2*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t))-L*mp^2*mr*s^2 \\
 & *(mp^2-t)*(mp^2-s-t)+F^2*mr*(mp^8-4*mp^6*t-4*mp^2*t^2*(s+t)+t^2*(s+t))^2+mp^4*(s^2+2*s*t+6*t^2)))+F^2 \\
 & *mp^4*mr*s^2*(mp^2-t)*(mp^2-s-t)*R3[0,s,0,mp^2]+cxc*ei^2*mp^4*mr*(4*mr^2-s)*s^2*(mp^2-t)*(mp^2+s+t)* \\
 & R3[0,s,0,mp^2])))))/((1152*F^8*mr^2*Pi^4*(mp^2-t)^2*(mp^2+s+t)^2*cc[mr]^2)
 \end{aligned}$$

$S_{ISR} =$

$$\begin{aligned}
 & (4*(2*me^8*mp^2+me^6*(2*mp^4-s1^2+2*s2^2+s1*(s2-2*t1+2*t2)-mp^2*(4*s0-5*s1+4*s2+8*t2))+t2*(s0-s1+t2) \\
 & *(mp^4*s1+s1*(s2^2+t1*(s1+2*t1-2*t2)+s2*(-2*t1+t2)-s0*(s2-t1+t2))+mp^4*(s0^2+2*s0*t2+2*t2^2-s1*(2*t1 \\
 & +t2))+me^4*(-s1^3+3*s1^2*s2+s1*s2^2-s1^2*t1+2*s1*s2*t1+2*s1*t1^2*mp^4*(-4*s0+5*s1-4*t2)+4*s1^2*t2-5 \\
 & *s1*s2*t2-4*s2^2*t2+2*s1*t1*t2-4*s1*t2^2+s0*(s1^2+s1*(-4*s2+3*t1-3*t2)+4*s2*(-t1+t2))+mp^2*(3*s0^2+s \\
 & 1^2+4*t2*(2*s2+3*t2)-s1*(4*s2+6*t1+9*t2)+s0*(-3*s1+4*(s2+t1+2*t2))))+me^2*(s1^2*s2^2+3*s1^3*t1-2*s1^2 \\
 & *s2*t1+4*s1^2*t1^2+s0^2*(2*(t1-t2)^2+s1*(s2+t1-t2))-s1^3*t2-2*s1^2*s2*t2-2*s1*s2^2*t2+2*s1*t1*t2-2* \\
 & 4*s1*t1^2+2*t2-s1^2*t2^2+3*s1*s2*t2^2+2*s2^2*t2^2+2*s1*t1*t2^2+2*s1*t2^2+3*mp^4*(2*s0^2-5*s0*s1+3*s1^2+4 \\
 & *s0*t2-6*s1*t2+2*t2^2)-s0*(s1^2*(s2+4*t1-2*t2)+4*s2*t2*(t1+t2)+s1*(s2^2+6*t1*(t1-t2)-2*s2*(t1+2*t2) \\
 &))+mp^2*(s0^3+3*s1^2*(6*t1-2*t2)+4*t2^2*(s2+2*t2)+s0^2*(-s1+4*t1+2*t2)-s1*t2*(4*s2+8*t1+7*t2)+s0*(2*s1 \\
 & *(-5*t1+t2)+4*t2*(s2+t1+2*t2))))/(s1^2*(me^2-t2)^2*(me^2-s0+s1-t2)^2)
 \end{aligned}$$

$S_1^{int} =$

$$\begin{aligned}
 & (2*(4*me^4*(mp^2-s2)+s0*s1*s2-s1^2*s2+s0^2*t1-2*s0*s1*t1+s1^2*t1-s0^2*t2+s0*s1*t2+s0*s2*t2+s1*s2*t2- \\
 & mp^2*(s0^2+s1*t2+s0*(-s1+t2))-me^2*(3*s1^2+s1*s2+4*s1*t1-4*s1*t2-4*s2*t2+mp^2*(3*s0-5*s1+4*t2)+s0*(- \\
 & 3*s1+s2-4*t1+4*t2)))/(s0*s1*(me^2-t2)*(me^2+s0-s1+t2))
 \end{aligned}$$

$S_2^{\text{int}} =$

(s0^2*s1^2*s2-2*s0*s1^3*s2+s1^4*s2-4*s0*s1^2*s2^2+4*s1^3*s2^2+2*me^6*(8*mp^4+mp^2*(9*s0-9*s1-8*s2)-...)) / (2*s0*s1*(me^2-t2)*(-me^2+s0-s1+t2))

$S_3^{\text{int}} =$

(-(s0*s1^2*s2)+s1^3*s2+2*me^6*(-mp^2+s1+s2)-s0^2*s1*t1+2*s0*s1^2*t1-s1^3*t1-s0^2*s1*t2+s0*s1^2*t2+s0...)) / (s0*s1*(me^2-t2)*(-me^2+s0-s1+t2))

$S_{11}^{\text{fsr}} =$

$(2*me^2+s0)/s0^2$

$S_{12}^{\text{fsr}} = S_{21}^{\text{fsr}} =$

(2*me^4*(mp^2+s0-s1-s2)-s0*s1*s2+s1^2*s2-2*s1*s2^2+3*s0^2*t1-2*s0*s1*t1-s1^2*t1-6*s0*s2*t1+6*s1*s2*t...)) / (4*s0^2)

$S_{13}^{\text{fsr}} = S_{31}^{\text{fsr}} =$

0

$S_{22}^{\text{fsr}} =$

(-(s0^3*s1*s2)+s0^2*s1^2*s2+s0*s1^3*s2-s1^4*s2+6*s0^2*s1*s2^2-6*s1^3*s2^2-12*s0*s1*s2^3+4*s1^2*s2^3+8*s1*s2^4+me^4*(8*mp^6-s0^3-2*s1^3+4*mp^4*(5*s0-5*s1-2*s2)+6*s0^2*s2+2*s1^2*s2+12*s1*s2^2+8*s2^3+s0...)) / (8*s0^2)

$S_{23}^{\text{fsr}} = S_{32}^{\text{fsr}} =$

(-(2*mp^2+s0-s1-2*s2)*(2*me^4*(mp^2-s1-s2)-s0*s1*s2-s1^2*s2-s0^2*t1+s1^2*t1+s0^2*t2-3*s0*s1*t2-s0*s2...)) / (8*s0^2)

$S_{33}^{\text{fsr}} =$

$(me^2-t2)*(me^2-s0+s1-t2)/(2*s0)$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [2] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [3] A. Lahiri und P. B. Pal. *A First Book of Quantum Field Theory*. Alpha Science International, Calcutta, 2001.
- [4] M. E. Peskin und D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, Reading, 1995.
- [5] D. J. Gross und F. Wilczek. „Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories“. In: *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), Seite 1343.
- [6] S. Weinberg. „Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions“. In: *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973), Seite 494.
- [7] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler. „Advantages of the Color Octet Gluon Picture“. In: *Phys. Lett. B* **47** (1973), Seite 365.
- [8] D. J. Gross und F. Wilczek. „Asymptotically Free Gauge Theories 1“. In: *Phys. Rev. D* **8** (1973), Seite 3633.
- [9] H. D. Politzer. „Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?“ In: *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), Seite 1346.
- [10] M. Creutz. *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [11] S. Weinberg. „Phenomenological Lagrangians“. In: *Physica A* **96** (1979), Seite 327.
- [12] J. Gasser und H. Leutwyler. „Chiral Perturbation Theory to One Loop“. In: *Ann. Phys.* **158** (1984), Seite 142.
- [13] J. Gasser und H. Leutwyler. „Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark“. In: *Nucl. Phys. B* **250** (1985), Seite 465.
- [14] J. Goldstone. „Field Theories with Superconductor Solutions“. In: *Nuovo Cim.* **19** (1961), Seite 154.
- [15] J. J. Sakurai. *Currents and Mesons*. University of Chicago Press, Chicago, 1969.

- [16] R. P. Feynman. *Photon-Hadron Interactions*. WA Benjamin, Reading, 1972.
- [17] M. J. G. Veltman. „Unitarity and Causality in a Renormalizable Field Theory with Unstable Particles“. In: *Physica* **29** (1963), Seite 186.
- [18] M. F. M. Lutz und S. Leupold. „On the Radiative Decays of Light Vector and Axial-Vector Mesons“. In: *Nucl. Phys. A* **813** (2008), Seite 96.
- [19] S. Actis u. a. „Two-Loop Threshold Singularities, Unstable Particles and Complex Masses“. In: *Phys. Lett. B* **669** (2008), Seite 62.
- [20] A. Denner u. a. „Predictions for all Processes $e^+e^- \rightarrow 4f + \gamma$ “. In: *Nucl. Phys. B* **560** (1999), Seite 33.
- [21] A. Denner u. a. „Electroweak Corrections to Charged-Current $e^+e^- \rightarrow 4f$ Processes: Technical Details and Further Results“. In: *Nucl. Phys. B* **724** (2005), Seite 247.
- [22] A. Denner und S. Dittmaier. „The Complex-Mass Scheme for Perturbative Calculations with Unstable Particles“. In: *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **160** (2006), Seite 22.
- [23] R. G. Stuart. „Pitfalls of Radiative Corrections Near a Resonance“. In: *Les Arcs, Proceedings, Z⁰ Physics* (1990), Seite 41.
- [24] K. Hagiwara u. a. „Improved predictions for $g - 2$ of the muon and $\alpha_{\text{QED}}(M_Z^2)$ “. In: *Phys. Lett. B* **649** (2007), Seite 173.
- [25] S. Actis u. a. „Quest for precision in hadronic cross sections at low energy: Monte Carlo tools vs. experimental data“. In: *Eur. Phys. J. C* **66** (2010), Seite 585.
- [26] J. Beringer u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Phys. Rev. D* **86** (2012), Seite 010001.
- [27] S. Scherer und M. R. Schindler. *A Primer for Chiral Perturbation Theory*. Springer, Berlin, 2012.
- [28] W. J. Marciano und H. Pagels. „Quantum Chromodynamics: A Review“. In: *Phys. Rept.* **36** (1978), Seite 137.
- [29] G. Altarelli. „Partons in Quantum Chromodynamics“. In: *Phys. Rept.* **81** (1982), Seite 1.
- [30] E. Noether. „Invariante Variationsprobleme“. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1918), Seite 235.

- [31] M. Gell-Mann und M. Lévy. „The Axial Vector Current in Beta Decay“. In: *Nuovo Cim.* **16** (1960), Seite 705.
- [32] J. S. Bell und R. Jackiw. „A PCAC Puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the Sigma Model“. In: *Nuovo Cim. A* **60** (1969), Seite 47.
- [33] S. L. Adler. „Axial Vector Vertex in Spinor Electrodynamics“. In: *Phys. Rev.* **177** (1969), Seite 2426.
- [34] S. L. Adler und W. A. Bardeen. „Absence of Higher Order Corrections in the Anomalous Axial Vector Divergence Equation“. In: *Phys. Rev.* **182** (1969), Seite 1517.
- [35] S. Coleman. „The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World“. In: *Journal of Mathematical Physics* **7** (1966), Seite 787.
- [36] J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg. „Broken Symmetries“. In: *Phys. Rev.* **127** (1962), Seite 965.
- [37] M. Gell-Mann, R. J. Oakes und B. Renner. „Behavior of Current Divergences under $SU(3) \times SU(3)$ “. In: *Phys. Rev.* **175** (1968), Seite 2195.
- [38] G. Ecker u. a. „Chiral Lagrangians for Massive Spin-1 Fields“. In: *Phys. Lett. B* **223** (1989), Seite 425.
- [39] G. Ecker u. a. „The Role of Resonances in Chiral Perturbation Theory“. In: *Nucl. Phys. B* **321** (1989), Seite 311.
- [40] J. F. Donoghue, C. Ramirez und G. Valencia. „The Spectrum of QCD and Chiral Lagrangians of the Strong and Weak Interactions“. In: *Phys. Rev. D* **39** (1989), Seite 1947.
- [41] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer. „On the definition of the Delta mass and width“. In: *Phys. Rev. D* **76** (2007), Seite 037501.
- [42] J. Gegelia u. a. „On the gauge invariance of the Z boson mass“. In: *International Seminar on Quarks, Proceedings* (1992).
- [43] P. Gambino und P. A. Grassi. „The Nielsen identities of the SM and the definition of mass“. In: *Phys. Rev. D* **62** (2000), Seite 076002.
- [44] A. Sirlin. „Observations concerning mass renormalization in the electroweak theory“. In: *Phys. Lett. B* **267** (1991), Seite 240.
- [45] A. Sirlin. „Theoretical considerations concerning the Z_0 mass“. In: *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), Seite 2127.

- [46] G. Valencia und S. Willenbrock. „The Goldstone Boson Equivalence Theorem and the Higgs Resonance“. In: *Phys. Rev. D* **42** (1990), Seite 853.
- [47] S. Willenbrock und G. Valencia. „The Higgs resonance shape“. In: *Phys. Lett. B* **247** (1990), Seite 341.
- [48] S. Willenbrock und G. Valencia. „On the definition of the Z boson mass“. In: *Phys. Lett. B* **259** (1991), Seite 373.
- [49] M. F. M. Lutz und E. E. Kolomeitsev. „On meson resonances and chiral symmetry“. In: *Nucl. Phys. A* **730** (2004), Seite 392.
- [50] G. 't Hooft. „A Planar Diagram Theory for Strong Interactions“. In: *Nucl. Phys. B* **72** (1974), Seite 461.
- [51] M. Harada und K. Yamawaki. „Hidden local symmetry at loop: A New perspective of composite gauge boson and chiral phase transition“. In: *Phys. Rept.* **381** (2003), Seite 1.
- [52] J. Gasser, M. E. Sainio und A. Švarc. „Nucleons with Chiral Loops“. In: *Nucl. Phys. B* **307** (1988), Seite 779.
- [53] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer. „Path integral quantization for massive vector bosons“. In: *Int. J. Mod. Phys. A* **25** (2010), Seite 3603.
- [54] M. Henneaux und C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [55] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh und A. Salam. „Change of Variables and Equivalence Theorems in Quantum Field Theories“. In: *Nucl. Phys.* **28** (1961), Seite 529.
- [56] D. Djukanovic u. a. „Complex-Mass Renormalization in Chiral Effective Field Theory“. In: *Phys. Lett. B* **680** (2009), Seite 235.
- [57] K. Kawarabayashi und M. Suzuki. „Partially Conserved Axial Vector Current and the Decays of Vector Mesons“. In: *Phys. Rev. Lett.* **16** (1966), Seite 255.
- [58] Riazuddin und Fayyazuddin. „Algebra of Current Components and Decay Widths of ρ and K^* Mesons“. In: *Phys. Rev.* **147** (1966), Seite 1071.
- [59] R. K. Bhaduri. *Models of the Nucleon: From Quarks to Soliton*. Addison-Wesley, Redwood City, 1988.
- [60] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann. „On the formulation of quantized field theories“. In: *Nuovo Cim.* **1** (1955), Seite 205.

- [61] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann. „On the formulation of quantized field theories. II“. In: *Nuovo Cim.* **6** (1957), Seite 319.
- [62] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman. „Regularization and Renormalization of Gauge Fields“. In: *Nucl. Phys. B* **44** (1972), Seite 189.
- [63] J. C. Collins. *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [64] T. Fuchs u. a. „Renormalization of Relativistic Baryon Chiral Perturbation Theory and Power Counting“. In: *Phys. Rev. D* **68** (2003), Seite 056005.
- [65] N. N. Bogoliubov und O. S. Parasiuk. „On the Multiplication of the causal function in the quantum theory of fields“. In: *Acta Math.* **97** (1957), Seite 227.
- [66] K. Hepp. „Proof of the Bogolyubov-Parasiuk theorem on renormalization“. In: *Commun. Math. Phys.* **2** (1966), Seite 301.
- [67] W. Zimmermann. „Convergence of Bogolyubov's method of renormalization in momentum space“. In: *Commun. Math. Phys.* **15** (1969), Seite 208.
- [68] S. J. Chang. *Introduction to Quantum Field Theory*. World Scientific, Singapore, 1990.
- [69] C. Itzykson und J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [70] A. Denner und S. Dittmaier. „Reduction schemes for one-loop tensor integrals“. In: *Nucl. Phys. B* **734** (2006), Seite 62.
- [71] G. Passarino und M. J. G. Veltman. „One Loop Corrections for e^+e^- Annihilation Into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg Model“. In: *Nucl. Phys. B* **160** (1979), Seite 151.
- [72] J. C. Ward. „An Identity in Quantum Electrodynamics“. In: *Phys. Rev.* **78** (1950), Seite 182.
- [73] Y. Takahashi. „On the generalized Ward identity“. In: *Nuovo Cim.* **6** (1957), Seite 371.
- [74] C. Unkmeir u. a. „Generalized polarizabilities of the pion in chiral perturbation theory“. In: *Phys. Rev. D* **61** (2000), Seite 034002.

- [75] M. Gell-Mann und M. L. Goldberger. „Scattering of low-energy photons by particles of spin $1/2$ “. In: *Phys. Rev.* **96** (1954), Seite 1433.
- [76] E. Kazes. „Generalized current conservation and low energy limit of photon interactions“. In: *Nuovo Cim.* **13.6** (1959), Seite 1226.
- [77] S. Weinberg. „Pion Scattering Lengths“. In: *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966), Seite 616.
- [78] D. Drechsel u. a. „Generalized polarizabilities and the spin averaged amplitude in virtual Compton scattering off the nucleon“. In: *Phys. Rev. C* **55** (1997), Seite 424.
- [79] A. I. L’vov u. a. „Generalized dipole polarizabilities and the spatial structure of hadrons“. In: *Phys. Rev. C* **64** (2001), Seite 15203.
- [80] C. Unkmeir u. a. „Pion generalized dipole polarizabilities by virtual Compton scattering $\pi e \rightarrow \pi e \gamma$ “. In: *Phys. Rev. C* **65** (2002), Seite 015206.
- [81] E. Byckling und K. Kajantie. *Particle Kinematics*. John Wiley, London, 1973.
- [82] S. Binner, J. H. Kühn und K. Melnikov. „Measuring $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ using tagged photon“. In: *Phys. Lett. B* **459** (1999), Seite 279.
- [83] B. Efron und R. J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York, 1993.
- [84] S. Uehara u. a. „High-statistics measurement of neutral pion-pair production in two-photon collisions“. In: *Phys. Rev. D* **78** (2008), Seite 052004.
- [85] H. Marsiske u. a. „A Measurement of $\pi^0\pi^0$ Production in Two Photon Collisions“. In: *Phys. Rev. D* **41** (1990), Seite 3324.
- [86] I. V. Danilkin u. a. „Photon-fusion reactions from the chiral Lagrangian with dynamical light vector mesons“. In: *Eur. Phys. J. C* **73** (2013), Seite 2358.
- [87] M. Hoferichter, D. R. Phillips und C. Schat. „Roy-Steiner equations for $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ “. In: *Eur. Phys. J. C* **71** (2011), Seite 1743.
- [88] S. Schael u. a. „Branching ratios and spectral functions of tau decays: Final ALEPH measurements and physics implications“. In: *Phys. Rept.* **421** (2005), Seite 191.

- [89] M. Davier u. a. „Update of the ALEPH non-strange spectral functions from hadronic τ decays“. In: *arXiv:1312.1501v3* (2014).
- [90] J. Boyer u. a. „Two photon production of pion pairs“. In: *Phys. Rev. D* **42** (1990), Seite 1350.
- [91] T. Bauer u. a. „Complex-mass scheme and resonances in EFT“. In: *AIP Proceedings* **1432** (2012), Seite 269.
- [92] F. Ambrosino u. a. „Measurement of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma(\gamma))$ and the dipion contribution to the muon anomaly with the KLOE detector“. In: *Phys. Lett. B* **670** (2009), Seite 285.
- [93] F. Ambrosino u. a. „Measurement of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$ from threshold to 0.85GeV^2 using initial state radiation with the KLOE detector“. In: *Phys. Lett. B* **700** (2011), Seite 102.
- [94] G. J. Gounaris und J. J. Sakurai. „Finite width corrections to the vector meson dominance prediction for $\rho \rightarrow e^+e^-$ “. In: *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968), Seite 244.
- [95] J. H. Kühn und A. Santamaria. „Tau decays to pions“. In: *Z. Phys. C* **48** (1990), Seite 445.
- [96] M. Benayoun u. a. „Upgraded Breaking Of The HLS Model: A Full Solution to the $\tau^-e^+e^-$ and ϕ Decay Issues And Its Consequences On $g-2$ VMD Estimates“. In: *Eur. Phys. J. C* **72** (2012), Seite 1848.
- [97] S. D. Protopopescu u. a. „ $\pi\pi$ -Partial-Wave-Analysis from Reactions $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$ and $\pi^+p \rightarrow K^+K^-\Delta^{++}$ at $7.1\text{GeV}/c$ “. In: *Phys. Rev. D* **7** (1973), Seite 1279.
- [98] D. Babusci u. a. „Precision measurement of $\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma)}$ and determination of the $\pi^+\pi^-$ contribution to the muon anomaly with the KLOE detector“. In: *Phys. Lett. B* **720** (2013), Seite 336.
- [99] G. Colangelo, J. Gasser und A. Rusetsky. „Isospin breaking in $K(14)$ decays“. In: *Eur. Phys. J. C* **59** (2009), Seite 777.
- [100] A. Denner. „Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200“. In: *Fortsch. Phys.* **41** (1993), Seite 307.
- [101] T. Hahn und M. Perez-Victoria. „Automatized One-Loop Calculations in Four and D Dimensions“. In: *Comput. Phys. Commun.* **118** (1999), Seite 153.

- [102] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1994.
- [103] R. Barlow. *Statistics*. Wiley, Chichester, 1989.
- [104] G. Rodrigo u. a. „Radiative return at NLO and the measurement of the hadronic cross-section in electron positron annihilation“. In: *Eur. Phys. J. C* **24** (2002), Seite 71.
- [105] G. Pancheri, O. Shekhovtsova und G. Venanzoni. „Test of FSR in the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ at DAΦNE and extraction of the pion form factor at threshold“. In: *Phys. Lett. B* **642** (2006), Seite 342.
- [106] S. Scherer. „Introduction to Chiral Perturbation Theory“. In: *Adv. Nucl. Phys.* **27** (2003), Seite 277.
- [107] J. A. M. Vermaseren. *New features of FORM*, math-ph/0010025. 2000.
- [108] Wolfram Research, Inc. *Mathematica*. 9.0.1.0. Wolfram Research, Inc., 2013.
- [109] T. Hahn. „Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3“. In: *Comput. Phys. Commun.* **140** (2001), Seite 418.
- [110] R. Mertig, M. Bohm und A. Denner. „FeynCalc: Computer algebraic Calculation of Feynman Amplitudes“. In: *Comput. Phys. Commun.* **64** (1991), Seite 345.
- [111] Intel Corporation. *Intel Fortran Compiler*. 13.1.1 20130313. Intel Corporation, 2013.
- [112] T. Hahn. „The CUBA library“. In: *Nucl. Instrum. Meth. A* **559** (2006), Seite 273.