

GEBIETSERKENNUNG MIT DER FAKTORISIERUNGSMETHODE

Dissertation zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Bastian Gebauer

geboren in Mülheim an der Ruhr

Mainz 2006

Datum der mündlichen Prüfung: 28. Juli 2006

D77 Mainzer Dissertation

Aus datenschutzrechtlichen Bedenken gestattet die Johannes Gutenberg-Universität Mainz in ihrem elektronischen Publikationssystem ArchiMeD weder die Nennung der Gutachter, noch die namentliche Nennung Dritter in der Danksagung. In dieser Version wurden diese Namen deshalb entfernt.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen ganz herzlich bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere danke ich meinem Doktorvater für die perfekte Mischung aus Betreuung und Freiheit, sowie dem Zweit- und Drittkorrektor der Arbeit. Der Universität Innsbruck danke ich für ihre Gastfreundschaft und die sehr angenehme Zusammenarbeit. Auch möchte ich mich sehr herzlich bei allen jetzigen und ehemaligen Mitarbeitern unserer Arbeitsgruppe für die anregenden Gespräche und die angenehme Atmosphäre bedanken.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Verlobten, neben der die Mathematik immer nur meine zweite große Liebe sein kann.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Faktorisierungsmethode für reelle elliptische Probleme	5
2.1	Motivation: Gebietserkennung durch Diffusionsprozesse	6
2.2	Funktionalanalytische Hilfsmittel	9
2.3	Abstrakte Formulierung des Problems	12
2.3.1	Abstrakte Lösungsräume und Spurooperatoren	12
2.3.2	Bilinearformen und Operatoren	16
2.4	Die Bildraumidentität für reelle elliptische Probleme	18
2.4.1	Die Bildraumidentität	18
2.4.2	Erweiterungen	21
2.5	Anwendungen	28
2.5.1	Impedanztomographie	28
2.5.2	Optische Tomographie	30
2.5.3	Vollständiges Elektrodenmodell in der EIT	32
2.5.4	Elektrostatik	33
2.5.5	Lineare Elastizitätstheorie	35
3	Lokalisierung von Objekten durch niederfrequente Strahlung	37
3.1	Formale asymptotische Analysis	40
3.2	Das direkte Problem und sein magnetostatischer Grenzfall	42
3.2.1	Mathematische Formulierung des direkten Problems	43
3.2.2	Äußere Calderon-Abbildungen	51

INHALTSVERZEICHNIS

3.2.3	Asymptotik für niedrige Frequenzen	62
3.2.4	Die Messoperatoren	78
3.3	Das inverse Problem	80
3.3.1	Magnetische Objekte	80
3.3.2	Perfekt leitende Objekte	85
3.3.3	Rekonstruktion der Objekte	86
3.4	Numerische Ergebnisse	92
4	Ein parabolisch-elliptisches Problem	97
4.1	Das direkte Problem	99
4.1.1	Funktionsräume für das direkte Problem	100
4.1.2	Lösungstheorie für das direkte Problem	103
4.1.3	Randmessungen und ein Referenzproblem	110
4.2	Das inverse Problem	111
4.2.1	Faktorisierung der Messoperatoren	112
4.2.2	Bildraumabschätzung	117
4.2.3	Charakterisierung der Einschlüsse	120
4.3	Numerische Ergebnisse	123
	Literatur	127

Kapitel 1

Einleitung

Der Begriff Tomographiemethoden (von griechisch $\tau\omicron\mu\eta$ = Schnitt) umfasst in seiner ursprünglichen Bedeutung verschiedene bildgebende Verfahren, mit denen das Innere eines Körper scheinweise ausgemessen werden kann, und wird heute allgemein für Verfahren verwendet, mit denen das Innere eines Körpers durch Messungen an seiner Oberfläche dargestellt werden kann. Dazu wird der Körper einem physikalischen Experiment unterzogen, z. B. wird Licht, Schall oder Strom durch den Körper geleitet und die austretende Menge gemessen. Außer zu medizinischen Zwecken am menschlichen Körper lassen sich solche Methoden auch für andere nichtdestruktive Untersuchungen, etwa des Erdbodens, oder zur Qualitätssicherung in der Produktion einsetzen.

Mit dem Begriff *direktes Problem* oder *Vorwärtsproblem* bezeichnet man dabei das Problem, für einen Körper mit bekannten physikalischen Eigenschaften den Ausgang des Experiments vorherzusagen, z. B. wie ein eingespeister Strom durch einen Körper mit bekannter Leitfähigkeitsverteilung hindurchfließen wird. Das *inverse Problem* dazu ist das Problem der Tomographie und besteht darin, aus dem Ausgang eines oder mehrerer Experimente auf die physikalischen Eigenschaften im Inneren des Körpers zu schließen, und damit z. B. in der Impedanztomographie durch Messung von Strom-Spannungspaaren ein Bild der Leitfähigkeitsverteilung im Inneren des Körpers zu erstellen.

Mathematisch lassen sich viele solcher Experimente durch partielle Differentialgleichungen beschreiben, in die die physikalischen Eigenschaften des Inneren des Körpers als Koeffizienten eingehen. Das direkte Problem besteht dann darin, die Differentialgleichung zu lösen, während das inverse Problem darin besteht, aus der Kenntnis von Lösungen (genauer gesagt von Rand-

werten von Lösungen auf der Oberfläche des Körpers) die Koeffizienten der Differentialgleichungen zu rekonstruieren.

Typischerweise werden diese Rekonstruktionen umso schwieriger, je größer die Wellenlänge der verwendeten Licht- oder Schallwellen ist, gleichzeitig wird aber die Belastung für den Körper bei größerer Wellenlänge, also niedrigerer Frequenz, geringer. Der Stromfluss in der Impedanztomographie kann dabei als Grenzfall elektromagnetischer Wellen von unendlich langer Wellenlänge angesehen werden, vgl. [45, 13] und ist deshalb mathematisch von besonderem Interesse. Schon die 1980 von Calderon gestellte Frage, ob es überhaupt möglich ist, die Leitfähigkeitsverteilung durch Randmessungen von Strom-Spannungs-Paaren zu rekonstruieren, wurde erst vor kurzem von Astala und Päivärinta in [5] für den zweidimensionalen Fall positiv beantwortet und ist für allgemeine Leitfähigkeiten im Dreidimensionalen noch offen.

In der praktischen Anwendung besteht das Ziel häufig darin, Gebiete zu finden, in denen die physikalischen Parameter sprunghaft von einem ansonsten bekannten Referenzzustand abweichen. So haben etwa Tumorzellen eine deutlich höhere Leitfähigkeit als gesundes Gewebe, und ein vergrabenes magnetisches Objekt besitzt eine sehr viel höhere Permeabilität als der umgebende Erdboden. Diese Problematik lässt sich unter dem Begriff der *Gebietserkennung* zusammenfassen, die gesuchten Gebiete werden auch als *Einschlüsse* bezeichnet.

Der naheliegende Ansatz, solche Gebietserkennungsprobleme praktisch zu lösen, besteht darin, die gesuchten Einschlüsse geeignet zu parametrisieren und iterativ zu bestimmen. Dabei wird ausgehend von einer Startnäherung in jedem Iterationsschritt die Näherung so verändert, dass simulierte Messungen zu durch die neue Näherung beschriebenen Einschlüssen besser mit den realen Messungen übereinstimmen. In jedem Iterationsschritt ist also (mindestens) eine numerische Lösung des Vorwärtsproblems erforderlich. Für große Wellenlängen sind die inversen Probleme *schlecht gestellt*, d. h. kleine Fehler in den Messungen haben große Konsequenzen für die rekonstruierten physikalischen Eigenschaften im Inneren. Dies macht zusätzliche Regularisierung und eine hohe Anzahl an Iterationsschritten notwendig. Für die Anwendung iterativer Verfahren möchten wir exemplarisch auf den Übersichtsartikel zur Impedanztomographie [46] von Lionheart verweisen.

Gegenstand dieser Arbeit ist ein relativ neues, nicht-iteratives Verfahren zur Gebietserkennung, die sogenannte *Faktorisierungsmethode*. Sie basiert auf einer 1996 in [15] beschriebenen Idee von Colton und Kirsch, wird 1998 von Kirsch in [38] für akustische Streuprobleme entwickelt, mit Grinberg und Arens auf unterschiedliche Randbedingungen des Streukörpers, auf Streukör-

per im Halbraum und auf periodische Strukturen erweitert [29, 31, 30, 28, 4] und schließlich auch auf elektromagnetische Streuprobleme angewendet [39]. Ein Buch von Grinberg und Kirsch zur Anwendung der Faktorisierungsmethode bei Streuproblemen ist in Vorbereitung.

Brühl und Hanke verallgemeinern die Methode in [10, 11] auf das elliptische Problem der Impedanztomographie, und Hähner überträgt sie in [37] auf ein inverses Problem in der Elektrostatik. Sie wird erfolgreich auf weitere elliptische Probleme übertragen: von Hyvönen in [35] auf die optische Tomographie, von Bal in [6] auf singuläre Schichten in der Impedanz- und der optischen Tomographie, von Hanke in [33] und Hyvönen in [36] auf verschiedene Elektrodenmodelle in der Impedanztomographie. Schappel erweitert sie in [57] auf Halbraumprobleme in der Impedanztomographie, Kirsch in [40] auf komplexe anisotrope Diffusionsprobleme, und in [43, 44] leitet Kress sie für vektorharmonische Felder her.

Die Faktorisierungsmethode vergleicht die Ergebnisse von Messungen an einem Körper mit Einschlüssen mit denen eines Referenzkörpers ohne Einschlüsse. Durch eine Faktorisierung der Differenz der Messungen wird der Bildraum eines virtuellen Messoperators bestimmt. Der Einschluss wird dann dadurch charakterisiert, dass gewisse singuläre Funktionen genau dann zu diesem Bildraum gehören, wenn ihre Singularität im Inneren des Einschlusses liegt. Auf diese Weise liefert die Methode sowohl das theoretische Ergebnis, dass der Einschluss durch die Messungen eindeutig bestimmt ist, als auch ein numerisch implementierbares Verfahren, um den Einschluss zu lokalisieren.

Die Hauptschwierigkeit in der Anwendung der Faktorisierungsmethode auf neue Probleme liegt im Beweis einer *Bildraumidentität*, mit der sich der Bildraum des virtuellen Messoperators aus den realen Messungen bestimmen lässt. In den zitierten Arbeiten ist dieser Beweis scheinbar nur durch Ausnutzung sehr spezieller Eigenschaften der betrachteten Probleme möglich. Eine einheitliche Theorie darüber, welche Art von Einschlüssen durch die Faktorisierungsmethode gefunden werden kann, existiert bisher nicht.

In dieser Arbeit entwickeln wir zunächst im zweiten Kapitel eine solche Theorie für allgemeine reelle elliptische Probleme und demonstrieren an mehreren Beispielen, wie diese sowohl bereits bekannte als auch neue Anwendungen als Spezialfälle enthält.

Im dritten Kapitel untersuchen wir ausführlich eine neue Anwendung der Methode: die Lokalisierung von Objekten durch niederfrequente elektromagnetische Strahlung, etwa bei der humanitären Minensuche oder der Metaldetektion. Wir zeigen, dass sich die zugrundeliegende Wellengleichung in guter Näherung durch die elliptischen Gleichungen der Magnetostatik appro-

ximieren lässt. Durch Anwendung unserer allgemeinen Theorie demonstrieren wir dann, wie magnetische oder perfekt elektrisch leitende Objekte mit der Faktorisierungsmethode aus Randmessungen geortet werden können.

Im vierten Kapitel gehen wir über die elliptischen Gleichungen hinaus und betrachten eine Anwendung mit expliziter Zeitabhängigkeit. Die Lokalisierung von Einschlüssen vergleichsweise hoher Wärmekapazität durch thermische Randmessungen führt auf eine parabolisch-elliptische Differentialgleichung. Wir zeigen die eindeutige Lösbarkeit dieser Gleichung und erweitern die Faktorisierungsmethode auf die Behandlung dieses Problems.

Abgrenzung des eigenen Beitrags

Teile dieser Arbeit entstanden in Zusammenarbeit mit anderen Doktoranden:

Die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 3.4 wurden von Christoph Schneider erstellt, der ebenfalls an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz bei Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois promoviert. Das vierte Kapitel entstand in Zusammenarbeit mit Florian Frühauf, Doktorand an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, und seinem Betreuer Prof. Dr. Otmar Scherzer. Dabei erstellte ich die Abschnitte 4.1, 4.2 über das direkte und das inverse Problem, während Florian Frühauf das in Abschnitt 4.3 verwendete numerische Verfahren zur Lösung des direkten Problems entwickelte und die dort gezeigten numerischen Rekonstruktionen erstellte.

Bereits veröffentlichte Ergebnisse

Die im zweiten Kapitel entwickelte Faktorisierungsmethode für reelle elliptische Probleme wurde bereits in der Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen veröffentlicht [26].

Die Ergebnisse des vierten Kapitels wurden dem SIAM Journal on Numerical Analysis zur Veröffentlichung eingereicht [25]. Eine Entscheidung über die Annahme zur Publikation liegt noch nicht vor.

Kapitel 2

Die Faktorisierungsmethode für reelle elliptische Probleme

In diesem Kapitel entwickeln wir eine allgemeine Theorie, um die Faktorisierungsmethode auf reelle elliptische Probleme anzuwenden, und zeigen, dass bereits unter vergleichsweise schwachen Voraussetzungen an das betrachtete Problem die benötigte Bildraumidentität gilt. Insbesondere geben wir ein einfaches Kriterium dafür an, wie die Einschlüsse vom Referenzkörper abweichen müssen. Dieses Kriterium lässt sich leicht in Bedingungen an die Koeffizienten einer gegebenen reellen elliptischen Differentialgleichung übersetzen.

Obwohl durch unsere sehr abstrakte Betrachtung des Problems die verwendeten Räume und Operatoren ihre anschauliche Bedeutung verlieren, können die Beweise einfacher und elementarer als in den in der Einleitung zitierten speziellen Anwendungen der Methode geführt werden.

Im Abschnitt 2.1 demonstrieren wir die Faktorisierungsmethode an einer einfacheren Version der Diffusionsgleichung aus [40]. Dieses Beispiel dient uns dann als anschauliche Motivation, um in Abschnitt 2.3 reelle elliptische Probleme auf Gebieten mit Einschlüssen in abstrakten Hilberträumen zu formulieren. Randmessungen werden wir dort mittels abstrakter Spuoperatoren und reelle elliptische Probleme über ihre zugehörigen symmetrischen und koerziven Bilinearformen definieren.

Im Abschnitt 2.4 formulieren und beweisen wir das Hauptresultat dieses Kapitels: *Die Bildraumidentität gilt, wenn die Differenz zwischen der den Einschluss beschreibenden Bilinearform und der den Referenzkörper beschreibenden Bilinearform koerziv ist.* Außerdem entwickeln wir eine Erweiterung für den Fall, in dem die Differenz eine kompakte Störung einer koerziven Bili-

nearform ist, und beweisen die Bildraumidentität auch für isolierende und perfekt absorbierende Einschlüsse. Der Einschluss wird dabei nicht als zusammenhängend vorausgesetzt, die Begriffe „Einschluss“ und „Einschlüsse“ benutzen wir synonym.

Am Beispiel aus Abschnitt 2.1 zeigen wir, wie sich unsere allgemeinen Resultate auf ein gegebenes Problem anwenden lassen. In Abschnitt 2.5 demonstrieren wir kurz an fünf anderen Anwendungen, wie diese in unseren allgemeinen Resultaten enthalten sind. Die ersten vier Anwendungen wurden dabei schon von anderen Autoren behandelt, das fünfte Beispiel ist eine neue Anwendung für die Faktorisierungsmethode.

2.1 Motivation: Gebietserkennung durch Diffusionsprozesse

Wir demonstrieren die Faktorisierungsmethode an einer einfacheren Version der Diffusionsgleichung aus einer Arbeit von Kirsch [40]:

Beispiel 2.1 (Diffusionsgleichung)

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand $S := \partial B$. Treten Teilchen mit einer Flussdichte $g \in H^{-\frac{1}{2}}(S)$ in dieses Gebiet ein, so führt dies zu einer (stationären) Teilchendichte $u_0 \in H^1(B)$, die die Diffusionsgleichungen

$$-\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u_0) + cu_0 = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.1)$$

$$\kappa \partial_\nu u_0|_S = g \quad \text{auf } S \quad (2.2)$$

löst. Dabei sind $\kappa, c \in L^\infty_+(B)$ die Diffusions- und Absorptionsparameter im Gebiet B , ν ist die äußere Normale an S , und mit L^∞_+ bezeichnen wir den Raum der L^∞ -Funktionen mit positiven wesentlichen Infima.

Messungen der Teilchendichte u_0 auf S für alle möglichen Werte von g werden beschrieben durch den Neumann-Dirichlet-Operator

$$\Lambda_0 : \begin{cases} H^{-\frac{1}{2}}(S) & \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(S), \\ g & \mapsto u_0|_S, \end{cases} \quad u_0 \in H^1(B) \text{ löst (2.1), (2.2).}$$

Wir stellen uns dabei Messungen an einem homogenen Gebiet vor, in dem z. B. κ und c konstant sind, und bezeichnen Λ_0 im Folgenden auch als Referenzmessungen.

Befindet sich hingegen in B ein Einschluss mit abweichenden Diffusions- und Absorptionsparametern, so unterscheiden sich in der Regel die Messergebnisse von diesen Referenzmessungen. Sei etwa Ω eine offene Menge mit

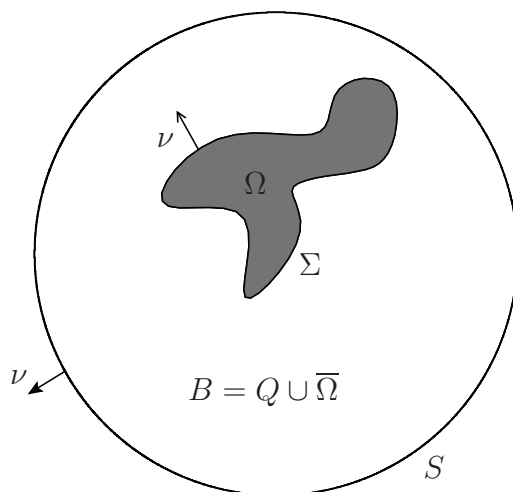


Abbildung 2.1: Gebietskizze

C^1 -Rand $\Sigma := \partial\Omega$, $\bar{\Omega} \subset B$, in der die Diffusions- und Absorptionsparameter um κ_1 bzw. c_1 geringer sind als im Fall der Referenzmessungen, und deren Komplement $Q := B \setminus \bar{\Omega}$ zusammenhängend ist, vgl. Abbildung 2.1 für eine Gebietskizze. Bezeichnen wir mit χ_Ω die charakteristische Funktion von Ω und setzen noch $\kappa - \kappa_1\chi_\Omega, c - c_1\chi_\Omega \in L_+^\infty(B)$ voraus, dann löst die resultierende Teilchendichte $u_1 \in H^1(B)$ die Gleichungen

$$-\operatorname{div}((\kappa - \kappa_1\chi_\Omega) \operatorname{grad} u_1) + (c - c_1\chi_\Omega)u_1 = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.3)$$

$$\kappa \partial_\nu u_1|_S = g \quad \text{auf } S, \quad (2.4)$$

und Randmessungen werden beschrieben durch

$$\Lambda_1 : \begin{cases} H^{-\frac{1}{2}}(S) & \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(S), \\ g & \mapsto u_1|_S, \end{cases} \quad u_1 \in H^1(B) \text{ löst (2.3), (2.4).}$$

Wir betrachten das Problem, den Einschluss durch Vergleich der Randmessungen Λ_1 mit den Referenzmessungen Λ_0 zu finden, also χ_Ω aus Λ_1 und Λ_0 zu berechnen. Dazu führen wir zunächst den Hilfsoperator

$$L : \begin{cases} H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma) & \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(S), \\ \psi & \mapsto u|_S \end{cases}$$

ein, wobei $u \in H^1(Q)$, die Lösung ist von

$$-\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) + cu = 0 \quad \text{in } Q, \quad (2.5)$$

$$\kappa \partial_\nu u|_\Sigma = -\psi \quad \text{auf } \Sigma, \quad (2.6)$$

$$\kappa \partial_\nu u|_S = 0 \quad \text{auf } S, \quad (2.7)$$

und ν auf Σ die äußere Normale bezüglich Ω bezeichnet. L beschreibt virtuelle Messungen der Teilchendichte, die durch Einspeisung eines Teilchenflusses von innerhalb der Inklusion in das Komplement Q der Inklusion resultieren würde. Der Operator L wird also Informationen über Q und damit über die Lage von Ω enthalten. In der Tat lässt sich zeigen, dass unter zusätzlichen Glattheitsannahmen an die Koeffizienten κ und c der Einschluss Ω durch den Bildraum von L eindeutig bestimmt ist. Für die Details verweisen wir auf [40]. Die Idee besteht darin, zu Punkten $z \in B$ Lösungen G_z von $\kappa \partial_\nu G_z = 0$ auf S und

$$-\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} G_z) + c G_z = 0 \quad \text{in } B \setminus \{z\} \quad (2.8)$$

zu verwenden, die in z eine so starke Singularität besitzen, dass sie nicht zu einer Lösung auf ganz B fortgesetzt werden können. Ist $z \in \Omega$, so ist offensichtlich $G_z|_S \in \mathcal{R}(L)$, da $G_z|_Q$ dann ja (2.5)–(2.7) löst. Ist die Lösung außerdem eindeutig durch ihre Cauchy-Randwerte auf S bestimmt, dann lässt sich auch die Umkehrung zeigen, also

$$z \in \Omega \quad \text{genau dann, wenn} \quad G_z|_S \in \mathcal{R}(L). \quad (2.9)$$

Die Hauptaussage der Faktorisierungsmethode besteht nun darin, dass unter geeigneten Voraussetzungen an κ_1 und c_1 der Bildraum von L (den virtuellen Messungen) aus Λ_1 und Λ_0 (den wahren Messungen) bestimmt werden kann durch die Bildraumidentität

$$\mathcal{R}((\Lambda_1 - \Lambda_0)^{1/2}) = \mathcal{R}(L). \quad (2.10)$$

Zur Bildung der Wurzel von $\Lambda_1 - \Lambda_0$ bedienen wir uns der Einfachheit halber der eigentlich nur für L^2 -Räume gebräuchlichen Konvention, den Hilbertraum $H^{\frac{1}{2}}(S)$ mit seinem Dualraum $H^{-\frac{1}{2}}(S)$ zu identifizieren. Eine analoge Bildraumidentität gilt nach geeigneter Abänderung der Operatoren tatsächlich auch in $L^2(S)$, vgl. Bemerkung 2.15.

Der Einschluss kann nun dann dadurch gefunden werden, dass G_z für jeden Punkt $z \in B$ berechnet und dann überprüft wird, ob

$$G_z|_S \in \mathcal{R}(L) = \mathcal{R}((\Lambda_1 - \Lambda_0)^{1/2})$$

gilt, vgl. die Abschnitte 3.4 und 4.3 für die numerische Implementierung eines solchen Bildraumtests mittels des Picardkriteriums.

Wir werden in diesem Kapitel die Bildraumidentität (2.10) für allgemeine reelle elliptische Probleme beweisen und dabei zur Motivation unserer Annahmen und Veranschaulichung unserer Ergebnisse immer wieder zu Beispiel 2.1 zurückkehren.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_1 & & H_1 & \xrightarrow{\iota_{H_1}} & H'_1 \\
 \downarrow A & & \uparrow A^* & & \uparrow A' \\
 H_2 & & H_2 & \xrightarrow{\iota_{H_2}} & H'_2
 \end{array}$$

Abbildung 2.2: Beziehung zwischen dualem und adjungiertem Operator

2.2 Funktionalanalytische Hilfsmittel

Wir führen zunächst einige Notationen und Bezeichnungen aus der Funktionalanalysis ein, die in der Literatur nicht überall einheitlich verwendet werden. Für das Skalarprodukt eines reellen oder komplexen Hilbertraumes H verwenden wir runde Klammern (\cdot, \cdot) , den Antidualraum bezeichnen wir mit H' , und die antiduale Paarung auf $H' \times H$ schreiben wir mit eckigen Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir verwenden dabei die Konvention, dass das Skalarprodukt und die antiduale Paarung jeweils in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente antilinear sind.

Mit $\iota_H : H \rightarrow H'$ bezeichnen wir die Isometrie, die „ H mit seinem Antidualraum identifiziert“, d. h.

$$\langle \iota_H u, \cdot \rangle := (u, \cdot) \quad \text{für alle } u \in H.$$

Zu einem stetigen linearen Operator $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ zwischen zwei Hilberträumen H_1, H_2 bezeichnen wir den dualen Operator mit A' und den adjungierten Operator mit A^* . Dabei gilt $A^* = \iota_{H_1}^{-1} A' \iota_{H_2}$, vgl. Abbildung 2.2.

Entsprechend unserer Konvention für Skalarprodukte und antiduale Paarungen sind Sesquilinearformen in dieser Arbeit stets in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente antilinear. Eine Sesqui- bzw. Bilinearform

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reflexiven Banachraum X heißt *hermitesch* bzw. *symmetrisch*, wenn $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ für alle $u, v \in X$. Eine hermitesche Sesquilinearform bzw. eine symmetrische Bilinearform bezeichnen wir als *positiv semidefinit*, falls $a(u, u) \geq 0$ für alle $u \in X$, und als *koerziv*, falls ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$ für alle $u \in X$.

Durch eine stetige Sesqui- bzw. Bilinearform a wird auf kanonische Weise ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, X')$ induziert. Dieser ist definiert durch

$$\langle Au, \cdot \rangle := a(u, \cdot) \quad \text{für alle } u \in X.$$

Umgekehrt induziert jeder Operator $A \in \mathcal{L}(X, X')$ eine stetige Sesqui- bzw. Bilinearform a durch

$$a : (u, v) \mapsto \langle Au, v \rangle.$$

Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, X')$ heißt hermitesch bzw. symmetrisch, positiv semidefinit oder koerziv, falls die von ihm induzierte Sesqui- bzw. Bilinearform a es ist. Für hermitesche bzw. symmetrische Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(X, X')$ schreiben wir auch $A \geq 0$, falls A positiv semidefinit ist, und $A \geq B$, wenn $A - B \geq 0$ ist. Falls X ein Hilbertraum ist, verwenden wir dieselben Bezeichnungen auch für den Operator $\tilde{A} := \iota_X^{-1}A \in \mathcal{L}(X, X)$. Offenbar ist in diesem Fall ein hermitescher bzw. symmetrischer Operator *selbstadjungiert*.

Die folgenden zwei Lemmata fassen die für uns wichtigen Aussagen des Satzes von Lax-Milgram und der Fredholm-Alternative zusammen:

Lemma 2.2

Sei X ein komplexer oder reeller reflexiver Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X, X')$ sei hermitesch bzw. symmetrisch. Dann gilt:

- (a) *Ist A koerziv, so ist A bijektiv und damit stetig invertierbar.*
- (b) *Ist A bijektiv und $A \geq 0$, dann ist A koerziv.*

Beweis:

Die Behauptung (a) ist ein Spezialfall des Satzes von Lax-Milgram, vgl. z. B. [19, VI, §3, Theorem 7]. Behauptung (b) findet sich z. B. in [24, Corollary A.55]. □

Lemma 2.3

Sei X ein komplexer oder reeller reflexiver Banachraum, $A \in \mathcal{L}(X, X')$ sei bijektiv und $K \in \mathcal{L}(X, X')$ sei kompakt. Dann ist der Kern von $A + K$ endlichdimensional, und falls $A + K$ injektiv ist, so ist $A + K$ bijektiv.

Beweis:

Die Behauptung wird auch als Fredholm-Alternative bezeichnet. Sie folgt aus dem Satz von Riesz-Schauder, vgl. z. B. [59, Satz VI.2.1]. □

Wir zeigen noch einen Zusammenhang zwischen der Definitheit von $A - B$ und der von $A^{-1} - B^{-1}$:

Lemma 2.4

Sei X ein komplexer oder reeller reflexiver Banachraum und $A, B \in \mathcal{L}(X, X')$ hermitesch bzw. symmetrisch. Ist A koerziv, dann ist

$$BA^{-1}B - B \geq B - A. \tag{2.11}$$

Ist B bijektiv, so folgt hieraus

$$A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(BA^{-1}B - B)B^{-1} \geq B^{-1}(B - A)B^{-1},$$

insbesondere impliziert $B \geq A$ also $A^{-1} \geq B^{-1}$.

Beweis:

Sei $w \in X$ und setze $v := A^{-1}Bw$. Es ist

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\langle Av, v \rangle &= \frac{1}{2}\langle Aw, w \rangle - \frac{1}{2}\langle A(w - v), (w - v) \rangle - \langle Av, w \rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\langle Aw, w \rangle - \langle Av, w \rangle = \frac{1}{2}\langle Aw, w \rangle - \langle Bw, w \rangle, \end{aligned}$$

und damit

$$-\frac{1}{2}BA^{-1}B \leq \frac{1}{2}A - B,$$

woraus (2.11) folgt. □

Das folgende Lemma wurde von Brühl zur Erweiterung der Faktorisierungsmethode auf nicht-konstante Leitfähigkeiten in der Impedanztomographie gebraucht, vgl. [9, Satz 4.9]. Wir schreiben es in der Form, in der es von der Gruppe Bourbaki in [8, pp. 355–358] als 14. „important property of Banach spaces“ bezeichnet wird, geben der Einfachheit halber aber einen elementaren Beweis an:

Lemma 2.5

Seien X, Y zwei Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $x' \in X'$. Dann ist

$$x' \in \mathcal{R}(A') \quad \text{genau dann, wenn} \quad \exists C > 0 : |\langle x', x \rangle| \leq C \|Ax\| \quad \forall x \in X.$$

Beweis:

Ist $x' \in \mathcal{R}(A')$, dann existiert ein $y' \in Y'$, so dass $x' = A'y'$. Es folgt, dass

$$|\langle x', x \rangle| = |\langle y', Ax \rangle| \leq \|y'\| \|Ax\| \quad \text{für alle } x \in X,$$

die Behauptung gilt also mit $C = \|y'\|$.

Nun sei $x' \in X'$, und es existiere ein $C > 0$, so dass $|\langle x', x \rangle| \leq C \|Ax\|$ für alle $x \in X$. Definieren wir

$$f(z) := \langle x', x \rangle \quad \text{für alle } z = Ax \in \mathcal{R}(A),$$

dann ist f offenbar ein wohldefiniertes, stetiges antilineares Funktional mit $\|f(z)\| \leq C \|z\|$. Aus dem Satz von Hahn-Banach (vgl. z.B. [1, Satz 4.15]) folgt, dass ein $y' \in Y'$ existiert, so dass $y'|_{\mathcal{R}(A)} = f$. Für alle $x \in X$ gilt dann

$$\langle A'y', x \rangle = \langle y', Ax \rangle = f(Ax) = \langle x', x \rangle$$

und damit $x' = A'y' \in \mathcal{R}(A')$. □

Als nützliche Folgerung erhalten wir so auf elementarem Wege eine für die Faktorisierungsmethode grundlegende Aussage:¹

Lemma 2.6

Seien X_i Banachräume mit Normen $\|\cdot\|_i$, X ein dritter Banachraum und $A_i \in \mathcal{L}(X, X_i)$, $i = 1, 2$.

(a) Existiert ein $C' > 0$ mit $\|A_1x\|_1 \leq C' \|A_2x\|_2$ für alle $x \in X$, so ist

$$\mathcal{R}(A'_1) \subseteq \mathcal{R}(A'_2).$$

(b) Sind X , X_1 und X_2 Hilberträume, und existiert eine Konstante $C' > 0$ mit $\|A_1x\|_1 \leq C' \|A_2x\|_2$ für alle $x \in X$, so ist

$$\mathcal{R}(A_1^*) \subseteq \mathcal{R}(A_2^*).$$

Insbesondere folgt aus $A_1^*A_1 = A_2^*A_2$

$$\mathcal{R}(A_1^*) = \mathcal{R}(A_2^*),$$

vgl. Abbildung 2.3.

Beweis:

(a) Sei $y' \in \mathcal{R}(A'_1)$. Aus Lemma 2.5 erhalten wir, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$|\langle y', x \rangle| \leq C \|A_1x\|_1 \leq CC' \|A_2x\|_2 \quad \text{für alle } x \in X,$$

und durch nochmalige Anwendung von Lemma 2.5 folgt $y' \in \mathcal{R}(A'_2)$.

(b) Aus (a) erhalten wir $\mathcal{R}(A'_1) \subseteq \mathcal{R}(A'_2)$ und für Hilberträume X , X_1 und X_2 folgt aus der Bijektivität der Operatoren ι_X , ι_{X_1} und ι_{X_2} damit auch $\mathcal{R}(A_1^*) \subseteq \mathcal{R}(A_2^*)$. □

2.3 Abstrakte Formulierung des Problems

2.3.1 Abstrakte Lösungsräume und Spurooperatoren

Um die Faktorisierungsmethode auf reelle elliptische Gleichungen zu verallgemeinern, benötigen wir nicht nur den Raum der Lösungen $H(B)$ der Gleichung auf B (wie $H^1(B)$ für Beispiel 2.1), sondern wir müssen die Lösungen

¹vgl. [23, Prop. 2.18] für einen spektraltheoretischen Beweis oder [40, Lemma 2.4] für einen Beweis für injektive und kompakte Operatoren

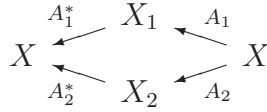


Abbildung 2.3: Skizze zu Lemma 2.6

auch auf den Einschluss Ω , auf sein Komplement Q und auf die Ränder S und Σ einschränken können. Hierfür benötigen wir geeignete Funktionenräume $H(\Omega)$, $H(Q)$, $H(\Sigma)$ und $H(S)$, im Diffusionsbeispiel etwa die Räume $H^1(\Omega)$, $H^1(Q)$, $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ und $H^{\frac{1}{2}}(S)$ mit den bekannten Einschränkungs- und Spurooperatoren.

Bemerkung 2.7

Zur besseren Lesbarkeit dieses Abschnittes und als Möglichkeit, das Hauptresultat in Abschnitt 2.4 auch ohne Einstieg in die technischen Details zu verstehen, fassen wir in dieser Bemerkung kurz die anschauliche Bedeutung der im Hauptresultat verwendeten Operatoren und Bilinearformen zusammen:

Für die in Abbildung 2.1 skizzierten Mengen stellen wir uns $E_{(\cdot)}$ und $\gamma_{(\cdot) \rightarrow (\cdot)}$ als die Einschränkungs- und Spurooperatoren auf den angegebenen Teilmengen und Rändern vor. Von zwei reellen elliptischen Differentialoperatoren A_i , die den Körper mit Einschlüssen ($i = 1$) beziehungsweise den Referenzkörper ($i = 0$) beschreiben, nehmen wir an, dass sie auf Q übereinstimmen, aber sich auf Ω unterscheiden. Die entsprechenden Einschränkungen bezeichnen wir dann mit A_Q bzw. $A_{\Omega,i}$ und die dazugehörigen Bilinearformen mit $a_{(\cdot)}$.

Im Allgemeinen müssen $H(\cdot)$ keine Räume von Funktionen oder Distributionen auf den Mengen B , Ω , Q , Σ oder S sein. Wir behandeln deshalb B , Ω , Q , Σ und S nur noch als Indizes für abstrakte reelle Hilberträume, zwischen denen abstrakte Einschränkungs- und Spurooperatoren existieren. Durch diese Verallgemeinerung ist es möglich, auch Faktorräume (etwa in Anwendung 2.5.1) oder den Fall $S \neq \partial B$ (in Anwendung 2.5.4) zu behandeln.

Voraussetzung und Definition 2.8

Seien $H(B)$, $H(Q)$, $H(\Omega)$, $H(S)$ und $H(\Sigma)$ reelle Hilberträume mit Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_{H(\cdot)}$, zwischen denen die folgenden stetigen linearen Operatoren gegeben seien:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{Q \rightarrow S} &: H(Q) \rightarrow H(S), & E_Q &: H(B) \rightarrow H(Q), \\
 \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} &: H(Q) \rightarrow H(\Sigma), & E_\Omega &: H(B) \rightarrow H(\Omega), \\
 \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} &: H(\Omega) \rightarrow H(\Sigma).
 \end{aligned}$$

Wir definieren damit die stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{aligned}\gamma_{B \rightarrow S} &: H(B) \rightarrow H(S), & \gamma_{B \rightarrow S} &:= \gamma_{Q \rightarrow S} E_Q, \\ \gamma_{B \rightarrow \Sigma} &: H(B) \rightarrow H(\Sigma), & \gamma_{B \rightarrow \Sigma} &:= \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} E_Q\end{aligned}$$

und nehmen an, dass die folgenden Voraussetzungen erfüllt seien:

(V1) Es existiert ein $k > 0$, so dass für alle $u \in H(B)$

$$(u, u)_{H(B)} \leq k \left((E_Q u, E_Q u)_{H(Q)} + (E_\Omega u, E_\Omega u)_{H(\Omega)} \right),$$

d. h. zusammen mit der Stetigkeit von E_Q und E_Ω ist die Bilinearform

$$(u, v) \mapsto (E_Q u, E_Q v)_{H(Q)} + (E_\Omega u, E_\Omega v)_{H(\Omega)}$$

ein Skalarprodukt auf $H(B)$, das eine äquivalente Norm induziert.

(V2a) Es gilt

$$\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} E_Q = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} E_\Omega.$$

(V2b) E_Ω und E_Q besitzen stetige Rechtsinversen E_Ω^- und E_Q^- mit der Eigenschaft, dass für alle $u \in H(\Omega)$ und $v \in H(Q)$

$$\begin{aligned}E_Q E_\Omega^- u &= 0, & \text{falls } \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} u &= 0, \\ E_\Omega E_Q^- v &= 0, & \text{falls } \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} v &= 0.\end{aligned}$$

(V3) $\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}$ und $\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}$ besitzen stetige Rechtsinversen $\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-$ und $\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^-$.

Wie schon erwähnt können beim Diffusionsbeispiel die folgenden Räume gewählt werden:²

$$\begin{aligned}H(B) &:= H^1(B), & H(S) &:= H^{\frac{1}{2}}(S), \\ H(Q) &:= H^1(Q), & H(\Sigma) &:= H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \\ H(\Omega) &:= H^1(\Omega).\end{aligned}$$

E_Q und E_Ω sind dabei die Einschränkungen auf die Teilmengen Q bzw. Ω , und $\gamma_{(\cdot) \rightarrow (\cdot)}$ sind die Spurooperatoren auf S und Σ . Dann ist die Voraussetzung (V1) trivial, (V2b) folgt z. B. aus [55, Lemma 6.85] und [55, Theorem 6.88]. (V3) steht z. B. in [55, Theorem 6.108] und (V2a) lässt sich leicht durch Approximation mit einer Folge glatter Funktionen zeigen.

²vgl. Bemerkung 2.15 für die Wahl von $H(S)$

Lemma 2.9

(a) Wenn (V1) und (V3) gelten, dann sind (V2a) und (V2b) äquivalent zu

(V2*) Zu gegebenem $u_Q \in H(Q)$ und $u_\Omega \in H(\Omega)$ existiert genau dann ein $u \in H(B)$ mit $u_Q = E_Q u$ und $u_\Omega = E_\Omega u$, wenn

$$\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} u_Q = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_\Omega.$$

Insbesondere können E_Ω^- und E_Q^- so gewählt werden, dass

$$E_Q E_\Omega^- = \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} \quad \text{und} \quad E_\Omega E_Q^- = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}. \quad (2.12)$$

Wir werden dies von nun an voraussetzen.

(b) Sind E_Ω^- und E_Q^- entsprechend (2.12) gewählt, so ist

$$E_Q^- \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- = E_\Omega^- \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^-.$$

Beweis:

(a) (i) Es gelten (V1), (V2a), (V2b) und (V3). Seien $u_Q \in H(Q)$ und $u_\Omega \in H(\Omega)$.

(\alpha) Wenn ein $u \in H(B)$ existiert mit $u_Q = E_Q u$ und $u_\Omega = E_\Omega u$, dann folgt aus (V2a)

$$\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} u_Q = \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} E_Q u = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} E_\Omega u = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_\Omega.$$

(\beta) Sei umgekehrt $\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} u_Q = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_\Omega$, dann erfüllt

$$u := E_Q^- u_Q - E_\Omega^- (E_\Omega E_Q^- u_Q - u_\Omega) \in H(B)$$

die Bedingung $E_\Omega u = u_\Omega$, und aus (V2a) erhalten wir

$$\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} (E_\Omega E_Q^- u_Q - u_\Omega) = \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} E_Q E_Q^- u_Q - \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_\Omega = 0,$$

so dass mit (V2b) folgt

$$E_Q E_\Omega^- (E_\Omega E_Q^- u_Q - u_\Omega) = 0$$

und damit $E_Q u = u_Q$.

(ii) Nun gelten (V1), (V2*) und (V3), dann ist (V2a) trivial.

Um (V2b) zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass wegen (V2*) zu jedem $u_\Omega \in H(\Omega)$ ein $u \in H(B)$ existiert, so dass

$$E_\Omega u = u_\Omega \quad \text{und} \quad E_Q u = \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_\Omega.$$

Definieren wir damit

$$E_{\Omega}^{-} : H(\Omega) \rightarrow H(B), \quad E_{\Omega}^{-} u_{\Omega} := u,$$

so ist dies wegen (V1) eine stetige Abbildung.

Definieren wir noch analog $E_{\bar{Q}}^{-}$, dann sieht man leicht, dass E_{Ω}^{-} und $E_{\bar{Q}}^{-}$ (V2b) und (2.12) erfüllen.

(b) Mit (2.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{\Omega} (E_{\bar{Q}}^{-} \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^{-}) &= \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma}^{-} \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma} \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^{-} = \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma}^{-} = E_{\Omega} (E_{\bar{\Omega}}^{-} \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma}^{-}), \\ E_{\bar{Q}} (E_{\bar{Q}}^{-} \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^{-}) &= \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^{-} = \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma} \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma} \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma}^{-} = E_{\bar{Q}} (E_{\bar{\Omega}}^{-} \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma}^{-}), \end{aligned}$$

und zusammen mit (V1) ergibt dies $E_{\bar{Q}}^{-} \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^{-} = E_{\bar{\Omega}}^{-} \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma}^{-}$. \square

2.3.2 Bilinearformen und Operatoren

Beispiel 2.10 (Fortsetzung des Diffusionsbeispiels)

Eine äquivalente variationelle Definition für den Neumann-Dirichlet-Operator

$$\Lambda_1 : H^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(S)$$

ist $\Lambda_1 g = u|_S$, wobei $u \in H^1(B)$ die Lösung ist von

$$a_1(u, v) = \langle g, v|_S \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(S) \times H^{\frac{1}{2}}(S)} \quad \text{für alle } v \in H^1(B) \quad (2.13)$$

mit

$$a_1(u, v) := \int_B \{(\kappa - \kappa_1 \chi_{\Omega}) \nabla u \cdot \nabla v + (c - c_1 \chi_{\Omega}) uv\} dx.$$

Aufgrund unserer Annahmen an die Koeffizienten ist dabei die Bilinearform a_1 stetig, koerziv und symmetrisch auf $H^1(B)$.

Der gemäß Abschnitt 2.2 induzierte Operator

$$A_1 : H^1(B) \rightarrow (H^1(B))', \quad A_1 u := a_1(u, \cdot)$$

ist koerziv und damit stetig invertierbar, d.h. es existiert eine eindeutige Lösung von (2.13), und diese hängt stetig von g ab. Mit diesem Operator kann Λ_1 geschrieben werden als

$$\Lambda_1 = \gamma_{B \rightarrow S} A_1^{-1} \gamma'_{B \rightarrow S}. \quad (2.14)$$

Analoges gilt für Λ_0 mit der Bilinearform

$$a_0(u, v) := \int_B \{\kappa \nabla u \cdot \nabla v + cuv\} dx.$$

a_0 und a_1 stimmen für Funktionen, deren Träger in Q liegt, überein. Es gilt

$$a_0(u, v) = a_Q(u|_Q, v|_Q) + a_{\Omega,0}(u|_\Omega, v|_\Omega), \quad (2.15)$$

$$a_1(u, v) = a_Q(u|_Q, v|_Q) + a_{\Omega,1}(u|_\Omega, v|_\Omega), \quad (2.16)$$

wobei

$$a_Q(u, v) := \int_Q \{\kappa \nabla u \cdot \nabla v + cuv\} dx,$$

$$a_{\Omega,0}(u, v) := \int_\Omega \{\kappa \nabla u \cdot \nabla v + cuv\} dx,$$

$$a_{\Omega,1}(u, v) := \int_\Omega \{(\kappa - \kappa_1) \nabla u \cdot \nabla v + (c - c_1)uv\} dx.$$

Um die Faktorisierungsmethode zu verallgemeinern, postulieren wir die Existenz von koerziven Bilinearformen a_Q , $a_{\Omega,0}$ und $a_{\Omega,1}$ und benutzen diese, um a_0 und a_1 entsprechend (2.15) und (2.16) zusammensetzen. Mit ihnen definieren wir dann (abstrakte) Neumann-Dirichlet-Operatoren gemäß (2.14):

Voraussetzung und Definition 2.11

Seien

$$\begin{aligned} a_Q &: H(Q) \times H(Q) \rightarrow \mathbb{R}, \\ a_{\Omega,0}, a_{\Omega,1} &: H(\Omega) \times H(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

stetige, koerzive und symmetrische Bilinearformen. Definiere

$$a_i : H(B) \times H(B) \rightarrow \mathbb{R} \quad (i = 0, 1)$$

durch

$$a_i(u, v) := a_Q(E_Q u, E_Q v) + a_{\Omega,i}(E_\Omega u, E_\Omega v) \quad \text{für alle } u, v \in H(B). \quad (2.17)$$

Wegen (V1) sind auch dies stetige, koerzive und symmetrische Bilinearformen, und mit den gemäß Abschnitt 2.2 induzierten Operatoren A_Q , $A_{\Omega,i}$, A_i lässt sich (2.17) auch schreiben als

$$A_i = E'_Q A_Q E_Q + E'_\Omega A_{\Omega,i} E_\Omega \quad (i = 0, 1). \quad (2.18)$$

Schließlich seien die Operatoren $\Lambda_i : H'(S) \rightarrow H(S)$ ($i = 0, 1$) definiert durch

$$\Lambda_i := \gamma_{B \rightarrow S} A_i^{-1} \gamma'_{B \rightarrow S}. \quad (2.19)$$

2.4 Die Bildraumidentität für reelle elliptische Probleme

2.4.1 Die Bildraumidentität

Satz 2.12

Es gelten die Voraussetzungen und Definitionen 2.8 und 2.11. Ist zusätzlich $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ koerziv, dann gilt

$$\mathcal{R}((\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)})^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei $L : H'(\Sigma) \rightarrow H(S)$ gegeben ist durch $L := \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma}$.

Für das Diffusionsbeispiel 2.1 und 2.10 stimmt diese Definition von L offenbar mit (2.5)–(2.7) überein, und $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ ist koerziv, falls $\kappa_1, c_1 \in L_+^\infty(\Omega)$. Also folgt unter dieser Bedingung aus Satz 2.12 die Bildraumidentität (2.10). (Häufig wird in Anwendungen $\iota_{H(S)}$ der Einfachheit halber weggelassen, also nicht zwischen $H(S)$ und seinem Dualraum $H'(S)$ unterschieden.)

Um Satz 2.12 zu beweisen, zerlegen wir zunächst $\Lambda_1 - \Lambda_0$ in drei Operatoren:³

Lemma 2.13

Es gelten die Voraussetzungen und Definitionen 2.8 und 2.11. Dann gilt

$$\Lambda_1 - \Lambda_0 = LFL',$$

wobei $F : H(\Sigma) \rightarrow H'(\Sigma)$ gegeben ist durch

$$F := (\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-)' A_Q E_Q (A_1^{-1} - A_0^{-1}) E_Q' A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-.$$

Beweis:

Durch einfache Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} & (A_1^{-1} - A_0^{-1}) E_Q' A_Q \\ &= (A_1^{-1} - A_0^{-1}) E_Q' A_Q E_Q E_Q^- \\ &\stackrel{(2.18)}{=} (A_1^{-1} (A_1 - E_\Omega' A_{\Omega,1} E_\Omega) - A_0^{-1} (A_0 - E_\Omega' A_{\Omega,0} E_\Omega)) E_Q^- \\ &= (A_0^{-1} E_\Omega' A_{\Omega,0} - A_1^{-1} E_\Omega' A_{\Omega,1}) E_\Omega E_Q^- \\ &\stackrel{(2.12)}{=} (A_0^{-1} E_\Omega' A_{\Omega,0} - A_1^{-1} E_\Omega' A_{\Omega,1}) \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}. \end{aligned}$$

³Dies ist die Faktorisierung, nach der die Methode benannt ist.

Also ist

$$(A_1^{-1} - A_0^{-1}) E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} = (A_1^{-1} - A_0^{-1}) E'_Q A_Q.$$

Kombinieren wir diese Gleichung mit ihrer dualen, so erhalten wir die Behauptung aus der Definition von $\gamma_{B \rightarrow S}$, F und L . \square

Der Operator F ist offenbar symmetrisch, und seine Definitheit hängt im Wesentlichen von dem Faktor $A_1^{-1} - A_0^{-1}$ ab. Mit Lemma 2.4 können wir die Definitheit von $A_1^{-1} - A_0^{-1}$ auf die von $A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1}$ bzw. $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ zurückführen und damit die Koerzivitat von F zeigen:

Lemma 2.14

Es gelten die Voraussetzungen und Definitionen 2.8 und 2.11. Ist $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ koerziv, dann ist auch F koerziv.

Beweis:

Aus Lemma 2.4 folgt

$$A_1^{-1} - A_0^{-1} \geq A_0^{-1} (A_0 - A_1) A_0^{-1} = A_0^{-1} E'_\Omega (A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1}) E_\Omega A_0^{-1}.$$

Es gilt also fur alle $\phi \in H(\Sigma)$

$$\langle F\phi, \phi \rangle_{H'(\Sigma) \times H(\Sigma)} \geq \langle (A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1})v, v \rangle_{H'(\Omega) \times H(\Omega)}, \quad (2.20)$$

wobei $v := E_\Omega A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \phi$ ist.

Da $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ und damit $A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1}$ koerziv ist, folgt die Behauptung, falls der Operator $E_\Omega A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-$ eine stetige Linksinverse besitzt. Eine solche Linksinverse ist gegeben durch

$$\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} (E_Q^-)' E'_\Omega A_{\Omega,0} + \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma},$$

denn es ist

$$\begin{aligned} & (\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} (E_Q^-)' E'_\Omega A_{\Omega,0} + \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}) (E_\Omega A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-) \\ &= \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} (E_Q^-)' (E'_\Omega A_{\Omega,0} E_\Omega) A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \\ & \quad + \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} E_\Omega A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \\ &= \text{id}_{H(\Sigma)} - \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- + \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} E_\Omega A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \\ &= \text{id}_{H(\Sigma)}, \end{aligned}$$

wobei wir (2.18) benutzt haben, um den Term $(E'_\Omega A_{\Omega,0} E_\Omega)$ zu ersetzen, und im letzten Schritt Voraussetzung (V2a) verwendet haben. \square

Nun können wir Satz 2.12 beweisen:

Beweis von Satz 2.12: Aus Lemma 2.13 folgt

$$\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)} = L \iota_{H(\Sigma)} \iota_{H(\Sigma)}^{-1} F L' \iota_{H(S)}.$$

Nach Lemma 2.14 ist der Operator $\tilde{F} := \iota_{H(\Sigma)}^{-1} F \in \mathcal{L}(H(\Sigma), H(\Sigma))$ selbstadjungiert und koerziv, er besitzt also eine bijektive selbstadjungierte Wurzel $\tilde{F}^{1/2}$ (vgl. z. B. [56, Theorem 12.33]).

Setzen wir noch $\tilde{L} := L \iota_{H(\Sigma)} \in \mathcal{L}(H(\Sigma), H(S))$, so ist $\tilde{L}^* = L' \iota_{H(S)}$ und damit

$$\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)} = \tilde{L} \tilde{F} \tilde{L}^* = \tilde{L} \tilde{F}^{1/2} (\tilde{F}^{1/2})^* \tilde{L}^*.$$

Daher ist $\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}$ selbstadjungiert und positiv semidefinit, besitzt also ebenfalls eine selbstadjungierte Wurzel $(\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)})^{1/2}$. Aus Lemma 2.6 folgt

$$\mathcal{R}((\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)})^{1/2}) = \mathcal{R}(\tilde{L} \tilde{F}^{1/2}) = \mathcal{R}(L \iota_{H(\Sigma)} \tilde{F}^{1/2}).$$

Da $\iota_{H(\Sigma)}$ und $\tilde{F}^{1/2}$ surjektiv sind, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.15

(a) *Durch einfaches Vertauschen von Λ_1 und Λ_0 können wir die Behauptung von Satz 2.12 erweitern zu folgender Aussage:*

Wenn $a_{\Omega,1} - a_{\Omega,0}$ oder $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ koerziv ist, dann ist

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L), \quad (2.21)$$

wobei der Betrag eines Operators $A \in \mathcal{L}(H)$ in einem reellen Hilbertraum H durch $|A| = (A^ A)^{1/2}$ definiert wird.⁴*

Für das Diffusionsbeispiel 2.1, 2.10 gilt also die Bildraumidentität (2.21), falls $\kappa_1, c_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ oder $-\kappa_1, -c_1 \in L_+^\infty(\Omega)$.

(b) *Es wurde nicht vorausgesetzt, dass die Operatoren $\gamma_{Q \rightarrow S}$ und $\gamma_{B \rightarrow S}$ surjektiv sind. Im Diffusionsbeispiel können wir also auch $H(S) = L^2(S)$ wählen. Identifizieren wir $L^2(S)$ mit seinem Dualraum, so bedeutet dies, dass der Definitionsbereich von Λ_0 und Λ_1 von $H^{-\frac{1}{2}}(S)$ auf $L^2(S)$ eingeschränkt und der Wertebereich der Operatoren Λ_0 , Λ_1 und L als Teilmenge von $L^2(S)$ statt von $H^{\frac{1}{2}}(S)$ aufgefasst wird. Mit diesen Änderungen an Λ_0 , Λ_1 und L gilt die Bildraumidentität (2.10) also auch in $L^2(S)$.*

⁴Hier ist offenbar $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ entweder $(\Lambda_1 - \Lambda_0) \iota_{H(S)}$ oder $(\Lambda_0 - \Lambda_1) \iota_{H(S)}$, da einer der beiden Ausdrücke positiv semidefinit ist.

Wird für $H(S)$ ein Raum von Funktionen gewählt, die nur auf einem Teil des Randes definiert sind, so beschreiben Λ_1 und Λ_0 Messungen mit eingeschränktem Messbereich. Auch für diese gilt also die Bildraumidentität aus Satz 2.12, vgl. [33], [57] für entsprechende Resultate in der Impedanztomographie.

2.4.2 Erweiterungen

2.4.2.1 Kompakte Störungen

Wenn im Diffusionsbeispiel der Einschluss nur einen abweichenden Diffusionskoeffizienten besitzt, der Absorptionskoeffizient aber auf ganz B gleich c ist, dann ist

$$\langle (A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1})u, u \rangle = \int_{\Omega} \kappa_1 \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

$A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1}$ ist nun nicht mehr koerziv, aber der Operator

$$A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1} + I' \iota_{L^2(\Sigma)} I$$

ist es, wobei I die kompakte Einbettung von $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ in $L^2(\Sigma)$ ist. Die folgende Erweiterung von Satz 2.12 ermöglicht es, auch solche kompakten Störungen von koerziven Operatoren zu behandeln.

Satz 2.16

Es gelten die Voraussetzungen 2.8 und 2.11. Existiert ein kompakter und symmetrischer Operator $K : H(\Omega) \rightarrow H'(\Omega)$, so dass $A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1} + K$ koerziv ist, und ist $\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}(A_{\Omega,1}^{-1} - A_{\Omega,0}^{-1})\gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}$ injektiv, dann gilt

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei L wie in Satz 2.12 definiert ist.

Beweis:

Dieser Beweis wurde inspiriert von dem Beweis von Theorem 3.3 in [40].

Aus Lemma 2.13 folgt die Faktorisierung $\Lambda_1 - \Lambda_0 = LFL'$, und wenn wir genau wie im Beweis von Lemma 2.14 vorgehen, erhalten wir die Koerzivität von $F + K_2$ mit einem kompakten und symmetrischen $K_2 : H(\Sigma) \rightarrow H'(\Sigma)$. Nach Lemma 2.3 ist der Operator F also bijektiv, wenn er injektiv ist.

Um zu zeigen, dass aus der Injektivität von $\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}(A_{\Omega,1}^{-1} - A_{\Omega,0}^{-1})\gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}$ die Injektivität (und damit Bijektivität) von F folgt, definieren wir die Hilfsoperatoren

$$F_i := (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-)' (A_Q E_Q A_i^{-1} E_Q' A_Q - A_Q) \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^- \quad (i = 0, 1).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 A_Q E_Q A_i^{-1} E'_Q A_Q - A_Q &= A_Q E_Q A_i^{-1} (A_i - E'_\Omega A_{\Omega,i} E_\Omega) E_Q^- - A_Q \\
 &= -A_Q E_Q A_i^{-1} E'_\Omega A_{\Omega,i} E_\Omega E_Q^- \\
 &\stackrel{(2.12)}{=} -A_Q E_Q A_i^{-1} E'_\Omega A_{\Omega,i} \gamma_{\bar{\Omega} \rightarrow \Sigma} \gamma_{Q \rightarrow \Sigma},
 \end{aligned}$$

also

$$(A_Q E_Q A_i^{-1} E'_Q A_Q - A_Q) \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma} \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} = A_Q E_Q A_i^{-1} E'_Q A_Q - A_Q \quad (2.22)$$

und

$$F_i \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma} = (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma})' A_Q E_Q A_i^{-1} E'_Q \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma} - \text{id}_{H'(\Sigma)}.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
 &F_i \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} A_{\Omega,i}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} \\
 &\stackrel{(2.12)}{=} (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma})' A_Q E_Q A_i^{-1} E'_Q A_Q E_Q E_\Omega^- A_{\Omega,i}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} - (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma})' A_Q E_Q E_\Omega^- A_{\Omega,i}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} \\
 &\stackrel{(2.18)}{=} (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma})' A_Q E_Q A_i^{-1} (A_i - E'_\Omega A_{\Omega,i} E_\Omega) E_\Omega^- A_{\Omega,i}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} \\
 &\quad - (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma})' A_Q E_Q E_\Omega^- A_{\Omega,i}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} \\
 &= -(\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma})' A_Q E_Q A_i^{-1} E'_\Omega \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} = -(\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma})' A_Q E_Q A_i^{-1} E'_Q \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma},
 \end{aligned}$$

also

$$F_i (\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma} + \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} A_{\Omega,i}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}) = -\text{id}_{H'(\Sigma)},$$

und zusammen mit der Symmetrie der Operatoren folgt, dass F_i bijektiv ist und

$$F_i^{-1} = -\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma} - \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} A_{\Omega,i}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}. \quad (2.23)$$

Damit ist

$$F = F_1 - F_0 = F_1 (F_0^{-1} - F_1^{-1}) F_0 = F_1 \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} (A_{\Omega,1}^{-1} - A_{\Omega,0}^{-1}) \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} F_0,$$

und die Injektivität (und damit Bijektivität) von F folgt tatsächlich aus der vorausgesetzten Injektivität des Operators $\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} (A_{\Omega,1}^{-1} - A_{\Omega,0}^{-1}) \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}$.

Genau wie im Beweis von Satz 2.12 erhalten wir $\tilde{\Lambda} := (\Lambda_1 - \Lambda_0) \iota_{H(S)} = \tilde{L} \tilde{F} \tilde{L}^*$ mit bijektivem selbstadjungiertem \tilde{F} , das nun die Summe eines koerziven selbstadjungierten und eines kompakten selbstadjungierten Operators ist.

Sei E die Spektralzerlegung von $\tilde{\Lambda}$, vgl. z. B. [56, Theorem 12.23], und setze

$$P_- := E(] - \infty, 0]), \quad P_+ := E([0, \infty[),$$

dann ist $|\tilde{\Lambda}| = \tilde{\Lambda}(P_+ - P_-)$.

Da $\langle \tilde{F}v, v \rangle < 0$ für alle $v \in \mathcal{R}(\tilde{L}^*P_-)$ ist, ist der Raum $\mathcal{R}(\tilde{L}^*P_-)$ endlichdimensional. Also ist er abgeschlossen und es existiert ein $c > 0$, so dass

$$\langle \tilde{F}v, v \rangle \leq -c\|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{R}(\tilde{L}^*P_-).$$

Aus $\langle \tilde{F}v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathcal{R}(\tilde{L}^*P_+)$ folgt nun $\overline{\mathcal{R}(\tilde{L}^*P_+)} \cap \mathcal{R}(\tilde{L}^*P_-) = \{0\}$.

Da $\overline{\mathcal{R}(\tilde{L}^*P_+)} + \mathcal{R}(\tilde{L}^*P_-)$ abgeschlossen ist, vgl. z. B. [56, Theorem 1.42], existiert z. B. nach [56, Theorem 5.16] eine stetige Projektion

$$Q_- : \overline{\mathcal{R}(\tilde{L}^*P_+)} + \mathcal{R}(\tilde{L}^*P_-) \rightarrow \mathcal{R}(\tilde{L}^*P_-) \quad \text{mit } \mathcal{N}(Q_-) = \overline{\mathcal{R}(\tilde{L}^*P_+)}.$$

Durch Nullsetzung auf dem orthogonalen Komplement kann Q_- zu einer stetigen Projektion auf $H(\Sigma)$ fortgesetzt werden. Setzen wir noch

$$Q_+ := \text{id}_{H(\Sigma)} - Q_-,$$

so erhalten wir $\tilde{L}^*P_- = Q_- \tilde{L}^*$ und $\tilde{L}^*P_+ = Q_+ \tilde{L}^*$. Damit ist

$$|\tilde{\Lambda}| = \tilde{\Lambda}(P_+ - P_-) = \tilde{L} \tilde{F} (Q_+ - Q_-) \tilde{L}^*,$$

wobei $\tilde{F}(Q_+ - Q_-)$ bijektiv, selbstadjungiert (da P_+ und P_- mit $\tilde{\Lambda}$ vertauschen) und positiv ist. Die Behauptung folgt nun wie im Beweis von Satz 2.12. \square

Für das Diffusionsbeispiel mit $c_1 = 0$ bleibt noch die Injektivität von

$$\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}(A_{\Omega,1}^{-1} - A_{\Omega,0}^{-1})\gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}$$

zu zeigen, was gerade die Differenz der Neumann-Dirichlet-Operatoren auf dem Einschluss ist. Sei also $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ im Nullraum dieses Operators. Nach Lemma 2.4 gilt

$$A_{\Omega,1}^{-1} - A_{\Omega,0}^{-1} \geq A_{\Omega,0}^{-1}(A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1})A_{\Omega,0}^{-1},$$

und da der Nullraum von $(A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1})$ nur konstante Funktionen enthält, muss die Funktion $A_{\Omega,0}^{-1}\gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}g$ konstant sein, woraus leicht $g = 0$ gefolgert werden kann.

2.4.2.2 Isolierende Einschlüsse

Im Diffusionsbeispiel haben wir bisher vorausgesetzt, dass der Einschluss zwar abweichende Diffusions- bzw. Absorptionseigenschaften besitzt, dass aber noch immer Teilchen hindurchdiffundieren können. Ist dies nicht möglich, so spricht man von isolierenden Einschlüssen oder Hohlräumen. Im Diffusionsbeispiel ist dann Λ_1 gegeben durch $\Lambda_1 g = u|_S$, wobei u die Lösung ist von

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) - cu = 0 \quad \text{in } Q, \quad \kappa \partial_\nu u = \begin{cases} 0 & \text{auf } \Sigma, \\ g & \text{auf } S. \end{cases}$$

Die elliptische Gleichung, die die Diffusion in so einem Körper mit Hohlräumen beschreibt, ist also nur auf dem Komplement Q des Einschlusses definiert. Wir können die Idee des Hohlräum auf unsere abstrakte Formulierung übertragen, indem wir die Bilinearform $a_{\Omega,1}$ in Voraussetzung 2.11 weglassen und die Definition von Λ_1 ersetzen durch

$$\Lambda_1 := \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S}.$$

Die Bildraumidentität kann nun analog zu Satz 2.12 bewiesen werden.

Satz 2.17

Gegeben seien Hilberträume $H(\cdot)$ wie in Voraussetzung 2.8 und Bilinearformen $a_Q, a_{\Omega,0}$ wie in Voraussetzung 2.11. Seien A_Q und $A_{\Omega,0}$ die dazugehörigen Operatoren. Definiere

$$\Lambda_0 := \gamma_{B \rightarrow S} A_0^{-1} \gamma'_{B \rightarrow S} \quad \text{und} \quad \Lambda_1 := \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}((\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)})^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei L wie in Satz 2.12 definiert ist.

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} & \Lambda_1 - \Lambda_0 \\ &= \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S} - \gamma_{B \rightarrow S} A_0^{-1} \gamma'_{B \rightarrow S} = \gamma_{Q \rightarrow S} (A_Q^{-1} - E_Q A_0^{-1} E_Q) \gamma'_{Q \rightarrow S} \\ &= \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} (E_Q^-)' (E_Q' A_Q E_Q - E_Q' A_Q E_Q A_0^{-1} E_Q' A_Q E_Q) E_Q^- A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S}. \end{aligned}$$

Durch zweimalige Anwendung von $E_Q' A_Q E_Q = A_0 - E_Q' A_{\Omega,0} E_Q$ kann der eingeklammerte Ausdruck geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & E_Q' A_Q E_Q - E_Q' A_Q E_Q A_0^{-1} E_Q' A_Q E_Q \\ &= E_Q' A_Q E_Q A_0^{-1} E_Q' A_{\Omega,0} E_Q = E_Q' A_{\Omega,0} E_Q - E_Q' A_{\Omega,0} E_Q A_0^{-1} E_Q' A_{\Omega,0} E_Q, \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} & E'_Q A_Q E_Q - E'_Q A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q E_Q \\ &= E'_\Omega (E_\Omega^-)' (E'_Q A_Q E_Q - E'_Q A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q E_Q) E_\Omega^- E_\Omega, \end{aligned}$$

und damit folgt die Faktorisierung

$$\begin{aligned} & \Lambda_1 - \Lambda_0 \\ &= \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} (E_Q^-)' E'_\Omega (E_\Omega^-)' (E'_Q A_Q E_Q - E'_Q A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q E_Q) \\ & \quad E_\Omega^- E_\Omega E_Q^- A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S} \\ & \stackrel{(2.12)}{=} \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma} (\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^-)' (E_\Omega^-)' (E'_Q A_Q E_Q - E'_Q A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q E_Q) \\ & \quad E_\Omega^- \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S} \\ &= L (\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^-)' (E_\Omega^-)' E'_Q A_Q (A_Q^{-1} - E_Q A_0^{-1} E'_Q) A_Q E_Q E_\Omega^- \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}^- L' \\ & \stackrel{(2.12)}{=} L F L', \end{aligned}$$

wobei nun

$$F := (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-)' A_Q (A_Q^{-1} - E_Q A_0^{-1} E'_Q) A_Q \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-.$$

Wenden wir Lemma 2.4 auf A_Q^{-1} und $E_Q A_0^{-1} E'_Q$ an, so erhalten wir

$$E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q - E_Q A_0^{-1} E'_Q \geq E_Q A_0^{-1} E'_Q - A_Q^{-1}$$

und damit

$$A_Q^{-1} - E_Q A_0^{-1} E'_Q \geq E_Q A_0^{-1} E'_Q - E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q.$$

Für F folgt damit

$$\begin{aligned} F &\geq (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-)' A_Q (E_Q A_0^{-1} E'_Q - E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q) A_Q \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^- \\ &= (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-)' A_Q E_Q A_0^{-1} (A_0 - E'_Q A_Q E_Q) A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^- \\ &= (\gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-)' A_Q E_Q A_0^{-1} E'_\Omega A_{\Omega,0} E_\Omega A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-. \end{aligned}$$

Im Beweis von Lemma 2.14 zeigten wir, dass die Abbildung

$$E_\Omega A_0^{-1} E'_Q A_Q \gamma_{\bar{Q} \rightarrow \Sigma}^-$$

eine stetige Linksinverse besitzt. Deshalb folgt aus der Koerzivität von $A_{\Omega,0}$ die Koerzivität von F , und der Rest der Beweises ist identisch mit dem Beweis von Satz 2.12. \square

2.4.2.3 Perfekt absorbierende Einschlüsse

Neben den isolierenden Einschlüssen sind auch vollständig absorbierende Einschlüsse von Bedeutung. Im Diffusionsbeispiel sind dies Gebiete, in denen die Teilchendichte stets Null beträgt. Λ_1 ist dann gegeben durch $\Lambda_1 g = u|_S$, wobei u die Lösung ist von

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) - cu = 0 \quad \text{in } Q, \quad u|_\Sigma = 0 \quad \text{und} \quad \kappa \partial_\nu u|_S = g.$$

Eine äquivalente variationelle Formulierung ist, dass $u \in H_0(Q)$ die Lösung ist von

$$a_Q(u, v) = \langle g, v|_S \rangle_{H^{-1/2}(S) \times H^{1/2}(S)} \quad \text{für alle } v \in H_0(Q), \quad (2.24)$$

wobei $H_0(Q) := \{v \in H^1(Q) : v|_\Sigma = 0\}$ ist, und die eindeutige Lösbarkeit von (2.24) aus der Koerzivität der Einschränkung von a_Q auf $H_0(Q)$ folgt.

Um auch solche Einschlüsse in unserer abstrakten Formulierung behandeln zu können, führen wir den Raum

$$H_0(Q) := \mathcal{N}(\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}) = \{u \in H(Q) : \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} u = 0\}$$

ein und bezeichnen seine Einbettung in $H(Q)$ mit $I : H_0(Q) \rightarrow H(Q)$. Die Einschränkung der Bilinearform a_Q auf den Raum $H_0(Q)$ induziert dann den koerziven Operator $I' A_Q I$. Wie in Abschnitt 2.4.2.2 lassen wir nun die Bilinearform $a_{\Omega,1}$ in Voraussetzung 2.11 weg und ersetzen die Definition von Λ_1 durch

$$\Lambda_1 := \gamma_{Q \rightarrow S} I (I' A_Q I)^{-1} I' \gamma'_{Q \rightarrow S}.$$

Auch für diesen Fall erhalten wir die Bildraumidentität:

Satz 2.18

Gegeben seien Hilberträume $H(\cdot)$ wie in Voraussetzung 2.8 und Bilinearformen $a_Q, a_{\Omega,0}$ wie in Voraussetzung 2.11. Seien A_Q und $A_{\Omega,0}$ die dazugehörigen Operatoren. Definiere

$$\Lambda_0 := \gamma_{B \rightarrow S} A_0^{-1} \gamma'_{B \rightarrow S} \quad \text{und} \quad \Lambda_1 := \gamma_{Q \rightarrow S} I (I' A_Q I)^{-1} I' \gamma'_{Q \rightarrow S}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}((\Lambda_0 \iota_{H(S)} - \Lambda_1 \iota_{H(S)})^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei L wie in Satz 2.12 definiert ist.

Beweis:

Wir definieren wie im Beweis von Satz 2.16

$$F_0 := (\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-)' (A_Q E_Q A_0^{-1} E'_Q A_Q - A_Q) \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-$$

und verwenden die dort gezeigten Beziehungen (2.22) und (2.23). Außerdem definieren wir

$$F_1 := (\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-)' (A_Q I (I' A_Q I)^{-1} I' A_Q - A_Q) \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^-.$$

Offenbar ist $(A_Q I (I' A_Q I)^{-1} I' A_Q - A_Q) v = 0$ für alle $v \in \mathcal{R}(I)$, also gilt insbesondere

$$(A_Q I (I' A_Q I)^{-1} I' A_Q - A_Q) (\text{id}_{H(Q)} - \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}) = 0$$

und damit

$$(A_Q I (I' A_Q I)^{-1} I' A_Q - A_Q) \gamma_{Q \rightarrow \Sigma}^- \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} = A_Q I (I' A_Q I)^{-1} I' A_Q - A_Q. \quad (2.25)$$

Wegen $\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} I = 0$ ist auch $I' \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma} = 0$. Aus (2.25) erhalten wir deshalb

$$F_1 \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma} = -\text{id}_{H'(\Sigma)},$$

und zusammen mit der Symmetrie der Operatoren folgt hieraus die Bijektivität von F_1 sowie

$$F_1^{-1} = -\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma}. \quad (2.26)$$

Aus (2.22) und (2.25) erhalten wir nun die Faktorisierung

$$\Lambda_0 - \Lambda_1 = L(F_0 - F_1)L',$$

und wegen Lemma 2.4 ist

$$F_0 - F_1 \geq F_1(F_1^{-1} - F_0^{-1})F_1 = F_1 \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} A_{\Omega,0}^{-1} \gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma} F_1,$$

wobei wir (2.23) und (2.26) verwendet haben. Da $\gamma'_{\Omega \rightarrow \Sigma}$ und F_1 stetige Links-inversen besitzen, folgt hieraus die Koerzitivität von $F_0 - F_1$ und damit wie im Beweis von Satz 2.12 die Behauptung. \square

2.5 Anwendungen

Wir haben bereits gesehen, dass aus unserem allgemeinen Resultat die Bildraumidentität für eine einfache Form der Diffusionsgleichung folgt, die von Kirsch in [40] bewiesen wurde. In diesem Abschnitt leiten wir noch fünf andere Anwendungen aus unserer abstrakten Formulierung ab. Die Bildraumidentität ist für die ersten vier bereits bekannt: die erste Anwendung (Impedanztomographie) wurde von Brühl in [10] behandelt, die zweite (optische Tomographie) von Hyvönen in [35], der auch in [36] ein ähnliches Faktorisierungsergebnis für die dritte Anwendung (vollständiges Elektrodenmodell in der Impedanztomographie) zeigte. Bei der vierten Anwendung (Elektrostatik) erweitert unser allgemeines Resultat das von Hähner, der in [37] den Fall eines geerdeten Einschlusses behandelte. Die fünfte Anwendung (lineare Elastizität) ist eine bisher nicht bekannte Anwendung der Faktorisierungsmethode.

Wir beschränken uns dabei auf eine kurze Herleitung der Bildraumidentität, mit der $\mathcal{R}(L)$ aus den Messungen bestimmt werden kann. Für die Frage, wie der Einschluss Ω mit Hilfe singulärer Funktionen aus $\mathcal{R}(L)$ rekonstruiert werden kann, verweisen wir auf die oben und in der Einleitung genannten Arbeiten über die Faktorisierungsmethode und auf das dritte und vierte Kapitel dieser Arbeit, in denen wir uns jeweils ausführlich einer praktischen Anwendung widmen und auch numerische Ergebnisse präsentieren.

2.5.1 Impedanztomographie

In der Impedanztomographie wird ein elektrischer Strom g am Rand S eines Körpers B mit Einschluss Ω angelegt. Dies führt zu einem elektrischen Potential u , das die folgenden Gleichungen löst, vgl. z. B. [13]:

$$\operatorname{div}((\kappa - \kappa_1 \chi_\Omega) \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.27)$$

$$\kappa \partial_\nu u = g \quad \text{auf } S. \quad (2.28)$$

Dabei ist κ die Leitfähigkeit in B , und κ_1 ist die Änderung der Leitfähigkeit in dem Einschluss.

Der Einschluss Ω soll lokalisiert werden, indem das Potential u auf dem Rand für verschiedene angelegte Ströme gemessen wird, und zwar sowohl an dem Körper mit Einschluss als auch an einem Referenzkörper ohne Einschluss. Gegeben sind also die Messoperatoren $\Lambda_i : g \mapsto u_i|_S$, wobei u_i die Lösung ist von (2.27), (2.28) mit dem Term $\kappa_1 \chi_\Omega$ ($i = 1$) bzw. ohne diesen Term ($i = 0$).

Dabei seien $B, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte, offene Mengen mit $\overline{\Omega} \subset B$. B besitze einen C^1 -Rand $S := \partial B$, und B sowie $Q := B \setminus \overline{\Omega}$ seien zusammenhängend. Die Menge Ω bestehe aus m Zusammenhangskomponenten Ω_j mit C^1 -Rändern $\Sigma_j := \partial\Omega_j$, $j = 1, \dots, m$. Die Mengen $\overline{\Omega_j}$ seien paarweise disjunkt, und es sei $\Sigma := \partial\Omega$.

Für den angelegten Strom gelte $\int_S g \, d\sigma = 0$. Die Leitfähigkeit erfülle

$$\kappa \in L_+^\infty(B), \quad \kappa - \kappa_1 \in L_+^\infty(\Omega).$$

Die geeigneten Lösungsräume sind

$$\begin{aligned} H(B) &:= H^1(B)/\text{span}\{\mathbf{1}_B\}, \\ H(Q) &:= H^1(Q)/\text{span}\{\mathbf{1}_Q\}, \\ H(S) &:= L^2(S)/\text{span}\{\mathbf{1}_S\}, \\ H(\Omega) &:= H^1(\Omega)/\text{span}\{\mathbf{1}_{\Omega_j} : j = 1, \dots, m\}, \\ H(\Sigma) &:= H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)/\text{span}\{\mathbf{1}_{\Sigma_j} : j = 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{1}_X$ die konstante Funktion $u(x) = 1 \, \forall x \in X$ bezeichnet.

Diese Faktorräume sind isomorph zu den orthogonalen Komplementen ihrer Faktoren in den dazugehörigen H^1 - bzw. L^2 -Räumen und erhalten dadurch ihre Hilbertraumstruktur, etwa

$$(u + \text{span}\{\mathbf{1}_B\}, v + \text{span}\{\mathbf{1}_B\})_{H(B)} = (P_{\mathbf{1}_B^\perp} u, P_{\mathbf{1}_B^\perp} v)_{H^1(B)},$$

wobei $P_{\mathbf{1}_B^\perp}$ die orthogonale Projektion von $H^1(B)$ auf $\text{span}\{\mathbf{1}_B\}^\perp$ ist.

Die Einschränkungs- und Spurooperatoren aus dem Diffusionsbeispiel (vgl. unsere Bemerkung unter Definition 2.8) können kanonisch auf diese Räume eingeschränkt werden, etwa

$$E_\Omega(u + \text{span}\{\mathbf{1}_B\}) := u|_\Omega + \text{span}\{\mathbf{1}_{\Omega_j} : j = 1, \dots, m\}.$$

Voraussetzung (V1) folgt dann aus der Poincaréschen Ungleichung. Die Voraussetzungen (V2a), (V2b) und (V3) lassen sich leicht aus dem Diffusionsbeispiel übertragen.

Wir schreiben im Folgenden Restklassen wie Funktionen, also etwa u statt $u + \text{span}\{\mathbf{1}_B\}$. Die Bilinearformen für die variationelle Formulierung von

(2.27), (2.28) lauten

$$a_Q(u, v) := \int_Q \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{für } u, v \in H(Q), \quad (2.29)$$

$$a_{\Omega,0}(u, v) := \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{für } u, v \in H(\Omega), \quad (2.30)$$

$$a_{\Omega,1}(u, v) := \int_{\Omega} (\kappa - \kappa_1) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{für } u, v \in H(\Omega), \quad (2.31)$$

wobei wir den Gradienten kanonisch auf die obigen Faktorräume übertragen haben.

Mit unserer Voraussetzung an die Koeffizienten erfüllen diese bekanntlich Voraussetzung 2.11. Falls $\kappa_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ oder $-\kappa_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ gilt, so ist $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ oder $a_{\Omega,1} - a_{\Omega,0}$ koerziv, und Satz 2.12 bzw. Bemerkung 2.15(a) liefert die von Brühl in [10, Abschnitt 4.2] gezeigte Bildraumidentität:

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei $L : H(\Sigma)' \rightarrow H(S)$ gegeben ist durch $L\psi = u|_S$ mit der Lösung $u \in H(Q)$ von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) &= 0 && \text{in } Q, \\ \kappa \partial_\nu u|_\Sigma &= -\psi && \text{auf } \Sigma, \\ \kappa \partial_\nu u|_S &= 0 && \text{auf } S. \end{aligned}$$

Für den Fall eines isolierenden Einschlusses ergibt sich die Bildraumidentität aus Satz 2.17 und für den Fall eines geerdeten Einschlusses aus Satz 2.18.

Brühl zeigt in [10, Abschnitt 4.3], wie für $\kappa = 1$ der Einschluss Ω mit Hilfe von geeigneten singulären Funktionen aus $\mathcal{R}(L)$ rekonstruiert werden kann. Wir werden diesen Funktionen im vierten Kapitel bei einem anderen inversen Problem begegnen.

2.5.2 Optische Tomographie

Die Ausbreitung von Licht im nahezu infraroten Bereich in einem stark streuenden Medium kann durch die Diffusionsgleichung mit Robin-Randbedingungen modelliert werden, vgl. [34, 35]:

$$-\operatorname{div}((\kappa - \kappa_1 \chi_\Omega) \operatorname{grad} u) + (c - c_1 \chi_\Omega)u = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.32)$$

$$u + \kappa \partial_\nu u = g \quad \text{auf } S. \quad (2.33)$$

Die Koeffizienten und Lösungsräume können dabei wie im Diffusionsbeispiel gewählt werden. Der Einfachheit halber haben wir Konstanten in der Robin-Randbedingung ausgelassen, so dass auch dieselben Bilinearformen verwendet werden können.

Die Randmessungen in der optischen Tomographie können beschrieben werden durch die Operatoren $\Lambda_i : g \mapsto u_i|_S$, wobei u_i die Lösung ist von (2.32), (2.33) mit den Termen $\kappa_1\chi_\Omega$, $c_1\chi_\Omega$ ($i = 1$) bzw. ohne diese Terme ($i = 0$). Für $\Lambda_1 - \Lambda_0$ macht es dabei keinen Unterschied, ob wir g auf $u|_S$ oder auf die physikalisch relevantere Größe $u|_S - \kappa\partial_\nu u|_S$ abbilden.

Wir machen dieselben Voraussetzungen an B , Ω , $Q := B \setminus \bar{\Omega}$, κ , $\kappa - \kappa_1$, c und $c - c_1$ wie im Diffusionsbeispiel 2.1. Die Robin-Randbedingungen lassen sich durch einen zusätzlichen Randintegralterm in der variationellen Formulierung von (2.32), (2.33) behandeln. $a_{\Omega,0}$ und $a_{\Omega,1}$ werden wie im Diffusionsbeispiel 2.10 gewählt. a_Q wird ergänzt zu

$$a_Q(u, v) := \int_Q (\kappa \nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx + \int_S u|_S v|_S \, d\sigma \quad \text{für } u, v \in H(Q).$$

Offenbar ist die Voraussetzung 2.11 dann noch immer erfüllt. $A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1}$ ist koerziv, falls $\kappa_1, c_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ ist, bzw. eine kompakte Störung eines koerziven Operators, falls die zweite Forderung durch $c_1 = 0$ ersetzt wird. Entsprechendes gilt für $A_{\Omega,0} - A_{\Omega,1}$, falls $-\kappa_1, -c_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ bzw. $-\kappa_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ und $c_1 = 0$ ist. Die zusätzliche Voraussetzung für Satz 2.16 ist dieselbe wie für das Diffusionsbeispiel und wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 gezeigt. Für solche Einschlüsse liefert also die Anwendung von Satz 2.12 und Bemerkung 2.15 bzw. Satz 2.16 die Bildraumidentität

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei $L : H(\Sigma)' \rightarrow H(S)$ gegeben ist durch $L\psi := u|_S$ mit der Lösung $u \in H(Q)$ von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) + cu &= 0 && \text{in } Q, \\ \kappa \partial_\nu u|_\Sigma &= -\psi && \text{auf } \Sigma, \\ u + \kappa \partial_\nu u|_S &= 0 && \text{auf } S. \end{aligned}$$

Dies entspricht bis auf unwesentliche Details der von Hyvönen in [35, Lemma 6.2] gezeigten Bildraumidentität. Für $\kappa, c \in C^\infty(B)$ kann mit den in [35] definierten Testfunktionen Ω aus $\mathcal{R}(L)$ rekonstruiert werden.

2.5.3 Vollständiges Elektrodenmodell in der Impedanztomographie

Eine Erweiterung des Modells der Impedanztomographie resultiert aus der Annahme, dass elektrische Ströme in das Gebiet B über perfekt leitende Elektroden eingespeist werden, die an Stücken S_k des Randes S mit positivem Kontaktwiderstand z befestigt sind.

Die Gleichungen (2.27), (2.28) werden dann zu dem sogenannten vollständigen Elektrodenmodell der Impedanztomographie ergänzt, vgl. [58, 36]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((\kappa - \kappa_1 \chi_\Omega) \operatorname{grad} u) &= 0 && \text{in } B, \\ \kappa \partial_\nu u &= g && \text{auf } S_0, \\ u + z \kappa \partial_\nu u &= U_k \mathbf{1}_{S_k} && \text{auf } S_k, \\ \int_{S_k} \kappa \partial_\nu u \, d\sigma &= I_k, && k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dabei ist in (2.34) I_k der Strom, der in die k -te Elektrode eingespeist wird, und U_k ist das gemessene Potential auf der k -ten Elektrode. Die Messungen sind dann gegeben durch die Operatoren

$$\Lambda_i : (g, I_1, \dots, I_K) \mapsto (u_i|_{S_0}, U_1^{(i)}, \dots, U_K^{(i)}),$$

wobei $i = 1$ wieder den Fall mit Einschlüssen (also mit dem Term $\kappa_1 \chi_\Omega$) und $i = 0$ den Fall ohne Einschlüsse (also ohne diesen Term) beschreibt.

Wir machen dabei dieselben Voraussetzungen an B , Ω , $Q := B \setminus \overline{\Omega}$, κ und $\kappa - \kappa_1$ wie in Abschnitt 2.5.1. Zusätzlich sei S unterteilt in $K + 1$ disjunkte, offene Stücke $S = \overline{S_0} \cup \overline{S_1} \cup \dots \cup \overline{S_K}$ und $z \in L_+^\infty(S)$.

Die Lösungsräume müssen dann um die unbekanntenen Potentiale $(U_k)_k \in \mathbb{R}^K$ erweitert werden:

$$\begin{aligned} H(B) &:= (H^1(B) \times \mathbb{R}^K) / \operatorname{span}\{\mathbf{1}_B, 1, \dots, 1\}, \\ H(Q) &:= (H^1(Q) \times \mathbb{R}^K) / \operatorname{span}\{\mathbf{1}_Q, 1, \dots, 1\}, \\ H(S) &:= (L^2(S_0) \times \mathbb{R}^K) / \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{S_0}, 1, \dots, 1\}, \\ H(\Omega) &:= H^1(\Omega) / \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{\Omega_j} : j = 1, \dots, m\}, \\ H(\Sigma) &:= H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) / \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{\Sigma_j} : j = 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

wobei die erweiterten Räume und ihre Faktorräume kanonisch mit einer Hilbertraumstruktur ausgestattet und die Einschränkungs- und Spuoperatoren

entsprechend erweitert werden, etwa

$$\begin{aligned} \gamma_{B \rightarrow S} : (u, U_1, \dots, U_K) + \text{span} \{(\mathbf{1}_B, 1, \dots, 1)\} \\ \mapsto (u|_{S_0}, U_1, \dots, U_K) + \text{span} \{(\mathbf{1}_{S_0}, 1, \dots, 1)\}. \end{aligned}$$

Voraussetzungen (V1), (V2a), (V2b) und (V3) können dann wie in Abschnitt 2.5.1 gezeigt werden. Die Bilinearformen $a_{\Omega,0}$ und $a_{\Omega,1}$ werden wie in Abschnitt 2.5.1 gewählt und a_Q ist die kanonische Restriktion von

$$((u, (U_k)_k), (v, (V_k)_k)) \mapsto \int_Q \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_{k=1}^K \int_{S_k} \frac{1}{z} (U_k - u)(V_k - v) \, d\sigma$$

auf den Faktorraum $H(Q)$.

Mit den getroffenen Voraussetzungen an die Koeffizienten erfüllen die Bilinearformen Voraussetzung 2.11. Falls $\kappa_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ oder $-\kappa_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ gilt, so ist $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ oder $a_{\Omega,1} - a_{\Omega,0}$ koerziv, und Satz 2.12 bzw. Bemerkung 2.15(a) liefert die Bildraumidentität

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei $L : H(\Sigma)' \rightarrow H(S)$ gegeben ist durch $L\psi := (u|_{S_0}, U_1, \dots, U_K)$ mit der Lösung $(u, U_1, \dots, U_K) \in H(Q)$ von

$$\begin{aligned} \text{div}(\kappa \text{grad } u) &= 0 && \text{in } Q, \\ \kappa \partial_\nu u|_\Sigma &= -\psi && \text{auf } \Sigma, \\ \kappa \partial_\nu u|_{S_0} &= 0 && \text{auf } S_0, \\ u + z \kappa \partial_\nu u &= U_k \mathbf{1}_{S_k} && \text{auf } S_k, \\ \int_{S_k} \kappa \partial_\nu u \, d\sigma &= 0, && k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

In [36] beweist Hyvönen für $\kappa = 1$ ein ähnliches Resultat und zeigt damit, wie die Einschlüsse ohne Messungen auf S_0 aus einer Grenzwertbetrachtung für $K \rightarrow \infty$ rekonstruiert werden können.

2.5.4 Elektrostatik

Das elektrostatische Potential u von Ladungen auf einer geschlossenen Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Ladungsdichte $g(y)$, $y \in S$, löst

$$\text{div}((\epsilon - \epsilon_1 \chi_\Omega) \text{grad } u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad (2.35)$$

$$-[\epsilon \partial_\nu u]_S = g \quad \text{auf } S, \quad (2.36)$$

wobei ϵ die Dielektrizität in \mathbb{R}^3 und ϵ_1 die Änderung der Dielektrizität in Einschlüssen Ω ist, die von S umschlossen seien. $[\epsilon\partial_\nu u]_S$ ist die Differenz zwischen der von außen und der von innen ausgewerteten Normalenableitung auf S .

Um die Einschlüsse zu lokalisieren, messen wir das Potential auf S für verschiedene Ladungsdichten. Unsere Messungen sind also gegeben durch die Operatoren $\Lambda_i : g \mapsto u_i|_S$, wobei wieder u_i die Lösung ist von (2.35), (2.36) mit dem Term $\epsilon_1\chi_\Omega$ ($i = 1$) bzw. ohne diesen Term ($i = 0$).

Dabei nehmen wir an, dass $\Omega \subset B := \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene Menge ist und bezeichnen ihren Rand mit $\Sigma := \partial\Omega$. $Q := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ sei zusammenhängend, und Ω bestehe aus m Zusammenhangskomponenten Ω_j mit C^1 -Rändern Σ_j ($j = 1, \dots, m$). Die Mengen $\overline{\Omega}_j$ seien paarweise disjunkt, und S sei die Oberfläche einer Kugel, die $\overline{\Omega}$ enthält (hier ist also $S \neq \partial B$), $\epsilon \in L_+^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $\epsilon - \epsilon_1 \in L_+^\infty(\Omega)$.

Die passenden Lösungsräume sind (vgl. [21, XI, Part B]):

$$\begin{aligned} H(B) &:= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) : (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^3), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \right\}, \\ H(Q) &:= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) : (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}}u \in L^2(Q), \nabla u \in L^2(Q; \mathbb{R}^3) \right\}, \\ H(S) &:= L^2(S), \\ H(\Omega) &:= H^1(\Omega)/\text{span}\{\mathbf{1}_{\Omega_j} : j = 1, \dots, m\}, \\ H(\Sigma) &:= H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)/\text{span}\{\mathbf{1}_{\Sigma_j} : j = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ der Raum der Distributionen auf \mathbb{R}^3 . Die Voraussetzungen (V1)–(V3) bleiben erfüllt, wenn die Einschränkungs- und Spurooperatoren wie in Anwendung 2.5.1 gewählt werden.

Auch die Bilinearformen werden wie in (2.29)–(2.31) gewählt. (a_Q ist nun durch das Integral über das unbeschränkte Gebiet $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ definiert.) In den genannten Räumen erfüllen sie Voraussetzung 2.11, vgl. [21, XI, Part B].

Wieder ist $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ koerziv, wenn $\epsilon_1 \in L_+^\infty(\Omega)$, und $a_{\Omega,1} - a_{\Omega,0}$ ist koerziv für $-\epsilon_1 \in L_+^\infty(\Omega)$. Unter diesen Bedingungen folgt also aus Satz 2.12 und Bemerkung 2.15(a)

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei $L : H(\Sigma)' \rightarrow H(S)$ gegeben ist durch $L\psi := u|_S$ mit der Lösung $u \in H(Q)$ von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) &= 0 && \text{in } Q, \\ \epsilon \partial_\nu u|_\Sigma &= -\psi && \text{auf } \Sigma. \end{aligned}$$

Für den Fall eines geerdeten Einschlusses ergibt sich die Bildraumidentität aus Satz 2.18. Für diesen Fall bewies Hähner in [37] bereits die Bildraumidentität für $\epsilon = 1$ und zeigte, wie Ω mit geeigneten singulären Funktionen aus $\mathcal{R}(L)$ rekonstruiert werden kann. Unsere allgemeinen Resultate bestätigen, dass die von ihm vorgeschlagene Rekonstruktionsmethode auch auf durchlässige Einschlüsse angewendet werden kann.

2.5.5 Lineare Elastizitätstheorie

Wir beenden dieses Kapitel mit einer neuen Anwendung der Faktorisierungsmethode: einem inversen Problem in der linearen Elastizität.⁵

Werden Kräfte g auf den Rand S eines elastischen Körpers $B \subset \mathbb{R}^3$ ausgeübt, so ergibt sich eine Verschiebung $u = (u_i)_{i=1}^3$, die im Gleichgewichtszustand die linearen Elastizitätsgleichungen löst, vgl. [14, Sect. 6.3]:

$$\operatorname{div}((\lambda - \lambda_1 \chi_\Omega)(\operatorname{Spur} e(u))I + 2(\mu - \mu_1 \chi_\Omega)e(u)) = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.37)$$

$$(\lambda(\operatorname{Spur} e(u))I + 2\mu e(u))\nu = g \quad \text{auf } S. \quad (2.38)$$

Dabei sind λ und μ die Lamé-Konstanten und ν der äußere Normalenvektor auf S . Der Verzerrungstensor $e(u)$ ist durch $e(u)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ und die Einheitsmatrix I durch $I_{ij} = \delta_{ij}$ definiert ($i, j = 1, 2, 3$). Die Divergenz einer Matrix ist der Vektor, dessen Einträge die Divergenzen der transponierten Zeilenvektoren der Matrix sind.

Um den Einschluss Ω zu lokalisieren, üben wir verschiedene Kräfte g auf den Rand des Körper aus und messen die resultierenden Verschiebungen am Rand. Dies lässt sich beschreiben durch die Operatoren $\Lambda_i : g \mapsto u^{(i)}|_S$, wobei $u^{(i)}$ die Lösung der Gleichungen (2.37), (2.38) mit den Termen $\lambda_1 \chi_\Omega$, $\mu_1 \chi_\Omega$ ($i = 1$) bzw. ohne diese Terme ($i = 0$) ist.

Wir machen dieselben Voraussetzungen an B , Ω und $Q := B \setminus \bar{\Omega}$ wie in Abschnitt 2.5.1. Für die Lamé-Konstanten gelte

$$\lambda, \mu \in L_+^\infty(B), \quad \lambda - \lambda_1, \mu - \mu_1 \in L_+^\infty(\Omega).$$

Für ein Gebiet $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^3$ definieren wir den Raum der sogenannten *Starrkörperdeformationen* auf \mathcal{X} als

$$N_{\mathcal{X}} := \{u : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^3 : u(x) = a + b \wedge x \quad \forall x \in \mathcal{X}, a, b \in \mathbb{R}^3\}$$

⁵Vergleiche auch [7], wo das inverse Problem, Hohlräume in einem elastischen Medium zu lokalisieren, mit Level-Set-Methoden behandelt wird.

(dies ist gerade der Raum aller u mit $e(u) = 0$). Die passenden Lösungsräume sind dann

$$\begin{aligned} H(B) &:= H^1(B; \mathbb{R}^3)/N_B, & H(\Omega) &:= H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)/\bigoplus_{j=1}^m N_{\Omega_j}, \\ H(Q) &:= H^1(Q; \mathbb{R}^3)/N_Q, & H(\Sigma) &:= H^{\frac{1}{2}}(\Sigma; \mathbb{R}^3)/\bigoplus_{j=1}^m N_{\Sigma_j}, \\ H(S) &:= L^2(S; \mathbb{R}^3)/N_S. \end{aligned}$$

Voraussetzungen (V1), (V2a), (V2b) und (V3) können dann analog zum Diffusionsbeispiel gezeigt werden (mit der Kornschen Ungleichung anstelle der Poincaréschen Ungleichung).

Die Bilinearformen zu (2.37), (2.38) sind

$$\begin{aligned} a_Q(u, v) &:= \int_Q (\lambda \operatorname{Spur} e(u) \operatorname{Spur} e(v) + 2\mu e(u) : e(v)) \, dx, \\ a_{\Omega,0}(u, v) &:= \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{Spur} e(u) \operatorname{Spur} e(v) + 2\mu e(u) : e(v)) \, dx, \\ a_{\Omega,1}(u, v) &:= \int_{\Omega} ((\lambda - \lambda_1) \operatorname{Spur} e(u) \operatorname{Spur} e(v) + 2(\mu - \mu_1) e(u) : e(v)) \, dx, \end{aligned}$$

wobei $B : C$ das Skalarprodukt $\sum_{ij} b_{ij} c_{ij}$ zweier Matrizen B, C bezeichnet, und wir $e(\cdot)$ kanonisch auf die oben angegebenen Faktorräume übertragen haben.

Mit den obigen Voraussetzungen an die Koeffizienten folgt aus der Kornschen Ungleichung, dass die Bilinearformen Voraussetzung 2.11 erfüllen, und dass $a_{\Omega,0} - a_{\Omega,1}$ koerziv ist, wenn $\lambda_1 \geq 0$ und $\mu_1 \in L_+^\infty(\Omega)$. Genauso ist $a_{\Omega,1} - a_{\Omega,0}$ koerziv, falls $\lambda_1 \leq 0$ und $-\mu_1 \in L_+^\infty(\Omega)$ gilt. Unter diesen Bedingungen liefert also die Anwendung von Satz 2.12 mit Bemerkung 2.15 die gewünschte Bildraumidentität

$$\mathcal{R}(|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L),$$

wobei $L : H(\Sigma)' \rightarrow H(S)$ gegeben ist durch $L\psi := u|_S$ mit der Lösung $u \in H(Q)$ von

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda(\operatorname{Spur} e(u))I + 2\mu e(u)) &= 0 && \text{in } B, \\ (\lambda(\operatorname{Spur} e(u))I + 2\mu e(u)) \nu &= -\psi && \text{auf } \Sigma, \\ (\lambda(\operatorname{Spur} e(u))I + 2\mu e(u)) \nu &= 0 && \text{auf } S. \end{aligned}$$

Der Fall von Hohlräumen wird wieder von Satz 2.17 und der Fall eines unverschiebbaren Einschlusses von Satz 2.18 abgedeckt.

Kapitel 3

Lokalisierung von Objekten durch niederfrequente Strahlung

In diesem Kapitel untersuchen wir ausführlich eine neue Anwendung der Faktorisierungsmethode: die Lokalisierung von Objekten durch niederfrequente elektromagnetische Strahlung. Ein wichtiges Beispiel für dieses Problem ist die humanitäre Minensuche. Abbildung 3.1 zeigt ein einfaches Modell eines Metall- oder Minendetektors. In einer an einer Stange befestigten Scheibe S verlaufen Spulen, in die Wechselströme mit (komplexer) Amplitude J und Frequenz ω eingespeist werden. Hierdurch entsteht im umgebenden Raum ein zeitharmonisches elektromagnetisches Feld mit Amplitude (E^ω, H^ω) , das wiederum durch Spulen in S gemessen werden kann. Das erzeugte Feld löst die zeitharmonischen Maxwellgleichungen und hängt sowohl vom erzeugenden Strom J als auch von den physikalischen Eigenschaften des umgebenden Raumes ab. So wird sich etwa ein anderes Feld einstellen, wenn sich wie in Abbildung 3.1 ein magnetisches oder perfekt elektrisch leitendes Objekt Ω in der Nähe des Messgerätes befindet. Wir setzen dabei Ω nicht als zusammenhängend voraus, so dass der Begriff „Objekt“ auch immer synonym für mehrere Objekte steht.

Gegenstand dieses Kapitels ist das Problem, ein solches Objekt zu lokalisieren, indem zu verschiedenen Strömen das resultierende elektromagnetische Feld auf S gemessen wird. Wir betrachten dabei den idealisierten Fall, dass S eine zweidimensionale Fläche ist, in die ein beliebiger Flächenstrom J eingespeist und auf der überall die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes E^ω gemessen werden kann. In der Praxis sind die möglichen Anregungen und Messungen durch Anzahl und Form der durch S verlaufenden Spulen begrenzt.

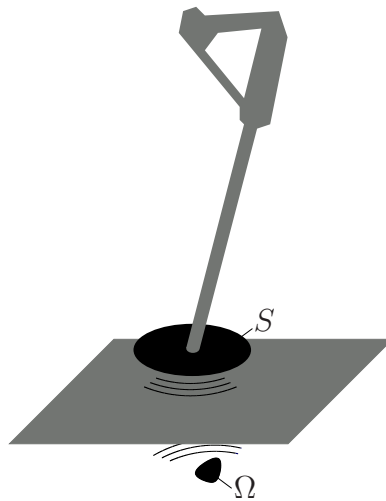


Abbildung 3.1: Skizze der Problemstellung

Die hier beschriebenen Messungen bezeichnet man als Nahfeldmessungen und unterscheidet sie von Fernfeldmessungen, bei denen das asymptotische Verhalten der vom Objekt Ω gestreuten Felder für $|x| \rightarrow \infty$ gemessen wird (vgl. z. B. [51, Chp. 9.5] für eine exakte Definition des Fernfeldes).

Kirsch zeigte in [39], dass mit der Faktorisierungsmethode das Objekt Ω aus Fernfeldmessungen rekonstruiert werden kann. Im Rahmen des BMBF-Projektes „HuMin/MD – Metal detectors for humanitarian demining – Development potentials in data analysis methodology and measurement“ entstand eine gemeinsame Arbeit mit Hanke, Kirsch, Muniz und Schneider [27], in der wir ein perfekt elektrisch leitendes Objekt aus Nahfeldmessungen mittels der sogenannten Linear-Sampling-Methode rekonstruierten. Wie bei der Faktorisierungsmethode wird bei dieser Methode die Tatsache ausgenutzt, dass, falls eine bestimmte, in einem Punkt singuläre Funktion im Bildraum eines mit den Messungen zusammenhängenden Operators liegt, der Ort der Singularität im Inneren des Objektes liegen muss. Im Unterschied zur Faktorisierungsmethode gilt jedoch nicht der Umkehrschluss, so dass (in der Theorie) nur eine (möglicherweise leere) Teilmenge von Ω gefunden wird. Eine rigorose Anwendung der Faktorisierungsmethode auf Nahfeldmessungen gelang bisher nicht.

In diesem Kapitel entwickeln wir die Faktorisierungsmethode für eine Niederfrequenzapproximation der Nahfeldmessungen und erhalten damit eine (für niedrige Frequenzen) theoretisch abgesicherte Methode zur Rekonstruktion eines magnetischen oder perfekt elektrisch leitenden Objektes. Handelsübliche Minendetektoren arbeiten mit Frequenzen im unteren zweistelligen

kHz-Bereich, der „Foerster Minex 2FD 4.500“ verwendet z. B. die Frequenzen 2,4 kHz und 19,2 kHz, vgl. [32, p. 82]. 19,2 kHz entspricht (im Vakuum) einer Wellenlänge von über 15 km. Im Vergleich zu den gesuchten Objekten, deren Durchmesser im Bereich weniger cm liegt, finden die Messungen also tatsächlich mit sehr großen Wellenlängen bzw. sehr niedrigen Frequenzen ω statt.

Der Grenzwert des elektromagnetischen Feldes für niedrige Frequenzen, d. h. für $\omega \rightarrow 0$, wurde für konstante Dielektrizität und Permeabilität von Werner in [60, 61] und für allgemeine Koeffizienten von Picard in [53] mit Hilbertraummethoden untersucht. In [54] studieren Ramm und Somersalo das inverse Problem, aus dem Niederfrequenzverhalten elektromagnetischer Felder Abweichungen in der Dielektrizität und der Permeabilität von konstanten Referenzwerten zu rekonstruieren, und setzen diese dabei als zweimal stetig differenzierbar voraus. Für eine feste einfallende Welle leiten Ammari und Nédélec in [3] mit variationellen Methoden die höheren Terme einer asymptotischen Entwicklung des elektrischen und magnetischen Feldes her und beweisen ihre Konvergenz. Dabei werden die Koeffizienten der Maxwell-Gleichungen lediglich als so glatt vorausgesetzt, dass die Maxwell-Gleichungen eindeutig lösbar sind. Für weitere Arbeiten zur Niederfrequenzasymptotik verweisen wir auf die in [3] zitierte Literatur.

In diesem Kapitel übertragen wir die Ergebnisse von Ammari und Nédélec, um den Term führender Ordnung der asymptotischen Entwicklung eines durch Flächenströme angeregten elektrischen Feldes zu bestimmen. Dabei zeigen wir mit Hilfe einer neuen variationellen Formulierung, dass auch ohne zusätzliche Glattheitsannahmen die Maxwell-Gleichungen für hinreichend kleine Frequenzen eindeutig lösbar sind, und dass die betrachteten Nahfeldmessungen in guter Näherung mit Messungen magnetostatischer Felder übereinstimmen. Magnetostatische Felder werden durch reelle elliptische Gleichungen beschrieben, die eng verwandt sind mit den vektorharmonischen Gleichungen, für die Kress in [43, 44] die Faktorisierungsmethode entwickelt. Wir erhalten die Faktorisierungsmethode für das sich asymptotisch ergebende magnetostatische Problem aus unseren allgemeinen Ergebnissen in Kapitel 2.

Im ersten Abschnitt motivieren wir unsere Ergebnisse durch eine formale asymptotische Entwicklung der Maxwell-Gleichungen und interpretieren den führenden Term physikalisch als magnetostatisches Potential. In Abschnitt 3.2 geben wir zunächst den ohne elektrisch leitende Einschlüsse auftretenden Gleichungen eine mathematisch präzise Bedeutung und zeigen die eindeutige Lösbarkeit der magnetostatischen Gleichungen. Mit Hilfe der äußeren Calderon-Abbildungen für die Maxwell- und die magnetostatischen Gleichungen reduzieren wir diese Gleichungen auf beschränkte Gebiete und

beweisen die durch die formalen Überlegungen motivierte Asymptotik mathematisch rigoros. Dabei erhalten wir insbesondere die eindeutige Lösbarkeit der Maxwell-Gleichungen für hinreichend kleine Frequenzen. Schließlich erweitern wir unsere Ergebnisse auf den Fall perfekt elektrisch leitender Einschlüsse.

In Abschnitt 3.3 zeigen wir, wie durch Anwendung unserer allgemeinen Theorie aus Kapitel 2 der Ort eines magnetischen oder perfekt elektrisch leitenden Objektes mit der Faktorisierungsmethode aus magnetostatischen Messungen (und damit aus niedrigfrequenten elektromagnetischen Messungen) rekonstruiert werden kann.

Abschnitt 3.4 zeigt die von Christoph Schneider mit dieser Methode erzielten numerischen Ergebnisse (vgl. Abgrenzung des eigenen Beitrags in Kapitel 1).

3.1 Formale asymptotische Analysis

Die komplexen Amplituden E^ω , H^ω der durch Wechselströme mit (komplexer) Amplitude J und Frequenz ω erzeugten elektrischen und magnetischen Felder lösen in Abwesenheit elektrisch leitfähiger Materialien die zeitharmonischen Maxwellgleichungen, vgl. [51, Sect. 1.2]:

$$\operatorname{rot} H^\omega + i\omega\epsilon E^\omega = J, \quad (3.1)$$

$$-\operatorname{rot} E^\omega + i\omega\mu H^\omega = 0, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div}(\epsilon E^\omega) = 0, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div}(\mu H^\omega) = 0, \quad (3.4)$$

zusammen mit einer Abfallbedingung im Unendlichen, der sogenannten Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung. Hierbei ist ϵ die Dielektrizität und μ die Permeabilität des umgebenden Raumes, und wir nehmen an, dass außerhalb eines beschränkten Gebietes ein Vakuum herrsche.

Wie angekündigt verschieben wir die mathematisch rigorose Behandlung dieser Gleichungen auf den nächsten Abschnitt und bemerken an dieser Stelle lediglich, dass J eine Distribution sein wird, deren Träger in der zweidimensionalen Fläche S liegt. Bilden wir formal die Divergenz von Gleichung (3.1) und benutzen (3.3), so erhalten wir als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichungen $\operatorname{div} J = 0$. Physikalisch bedeutet dies die Quellenfreiheit des Stroms, d.h. die Abwesenheit von Oberflächenladungen, und wir werden diese von nun an voraussetzen.

Eliminieren wir H^ω aus den Gleichungen (3.1)–(3.4), so erhalten wir

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E^\omega \right) - \omega^2 \epsilon E^\omega = i\omega J, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon E^\omega) = 0. \quad (3.6)$$

Aufgrund unserer Annahme an J ist dabei die Gleichung (3.6) redundant, da sie durch Divergenzbildung aus (3.5) folgt.

Wenn wir mit relativen Parameterwerten arbeiten, d. h. E^ω und H^ω so normieren, dass ϵ und μ im Vakuum gleich 1 sind, vgl. [51, Sect. 1.2], so entspricht eine Frequenz von 20 kHz dem Wert $\omega \approx 4 \times 10^{-4} \text{m}^{-1}$. Es erscheint daher angebracht, Terme höherer Ordnung in ω zu vernachlässigen. Entwickeln wir E^ω in eine Potenzreihe in ω , also

$$E^\omega = E_0 + \omega E_1 + \omega^2 E_2 + O(\omega^3),$$

so ergeben sich durch Koeffizientenvergleich aus (3.5) und (3.6) die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E_0 \right) = 0, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon E_0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E_1 \right) = iJ, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon E_1) = 0, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E_2 \right) - \epsilon E_0 = 0, \quad (3.11)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon E_2) = 0. \quad (3.12)$$

Offenbar werden die ersten und letzten beiden Gleichungen von $E_0 = 0$ und $E_2 = 0$ gelöst. Auch wenn wir im Rahmen dieser rein formalen Motivation nicht auf die Abfall- bzw. Ausstrahlungsbedingungen für $|x| \rightarrow \infty$ eingehen, erscheint es doch plausibel, dass $E_0 = 0$ und $E_2 = 0$ die eindeutigen Lösungen von (3.7), (3.8) bzw. (3.11), (3.12) sein werden. Schreiben wir noch abkürzend $E := -iE_1$, so ist

$$E^\omega = i\omega E + O(\omega^3),$$

d. h. für kleine Frequenzen ω kann in guter Näherung die Maxwell-Gleichung (3.5) durch die einfachere Version (3.9) ersetzt werden.

Die Gleichungen (3.9), (3.10) besitzen eine eigenständige physikalische Bedeutung. Setzen wir $B := \operatorname{rot} E$, dann löst B die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} B = J, \quad \operatorname{div} B = 0.$$

Dies ist gerade das Ampèresche Gesetz, mit dem sich das von einem Gleichstrom J erzeugte magnetostatische Feld B berechnet.

Wegen $B = \operatorname{rot} E$ ist also E ein Vektorpotential dieses magnetostatischen Feldes. Ein solches Vektorpotential ist nur bis auf die Addition eines rotationsfreien Feldes $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\operatorname{rot} A = 0$ eindeutig bestimmt, also bis auf Addition von $A = \operatorname{grad} \varphi$ mit einem skalaren Feld $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$. Durch die Gleichung (3.10) wird (zumindest für $\epsilon = 1$) $\operatorname{div} E = 0$ und damit $\Delta \varphi$ festgelegt. Mit dieser Forderung (der sogenannten Coulomb-Eichung) ist das Vektorpotential E eindeutig bestimmt.

Zusammengefasst gilt also:

Messungen des durch Wechselströme niedriger Frequenz erzeugten elektromagnetischen Feldes entsprechen in guter Näherung Messungen des magnetostatischen Feldes (bzw. des zugehörigen Vektorpotentials) von Gleichströmen.

3.2 Das direkte Problem und sein magnetostatischer Grenzfall

In Abschnitt 3.1 motivierten wir formal, dass

$$E^\omega = i\omega E + O(\omega^3),$$

wobei E^ω die Lösung der Maxwell-Gleichungen und E die Lösung der magnetostatischen Gleichungen ist. In diesem Abschnitt werden wir diese Tatsache mathematisch rigoros beweisen.

Für den Rest dieses Kapitels sei S ein beschränktes, relativ offenes Teilgebiet der zweidimensionalen Ebene, also

$$S \subset \mathbb{R}_0^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot e_3 = 0\}, \quad e_3 := (0, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^3,$$

und S besitze als zweidimensionales Gebiet einen Lipschitz-Rand. Die Dielektrizität und die Permeabilität $\epsilon, \mu \in L_+^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ seien identisch 1 außerhalb eines beschränkten Gebiets, etwa

$$\operatorname{supp}(\epsilon - 1), \operatorname{supp}(\mu - 1) \subset B_r$$

für eine offene Kugel B_r mit Radius $r > 0$, die \overline{S} enthalte. Außerdem sei ϵ in einer Umgebung von \overline{S} konstant.

3.2.1 Mathematische Formulierung des direkten Problems

3.2.1.1 Funktionenräume für das direkte Problem

Zur mathematischen Formulierung des direkten Problems benötigen wir neben den bereits im zweiten Kapitel verwendeten Standard-Sobolevräumen noch Räume von Funktionen mit quadratisch integrierbarer Rotation oder Divergenz. Auf einer offenen Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$ sei $\mathcal{D}(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in \mathcal{O} und Werten in \mathbb{C}^3 . Außerdem sei

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3) := \{u|_{\mathcal{O}} : u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)\},$$

und $\mathcal{D}'(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ sei der Raum der Distributionen auf \mathcal{O} mit Werten in \mathbb{C}^3 . Da wir Funktionen und Distributionen mit Werten in \mathbb{C} , \mathbb{C}^3 , \mathbb{R} und \mathbb{R}^3 verwenden, geben wir in diesem Kapitel bei Funktionen- und Distributionenräumen den Wertebereich stets durch ein Semikolon abgetrennt mit an.

Wir definieren die Räume

$$\begin{aligned} H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3) &:= \{u \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : \text{rot } u \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)\}, \\ L_{\text{loc}}^2(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3) &:= \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) : u|_{\mathcal{O}'} \in L^2(\mathcal{O}'; \mathbb{C}^3) \\ &\quad \text{für alle offenen, beschränkten } \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}\}, \\ H_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3) &:= \{u \in L_{\text{loc}}^2(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3) : u|_{\mathcal{O}'} \in H(\text{rot}, \mathcal{O}'; \mathbb{C}^3) \\ &\quad \text{für alle offenen, beschränkten } \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}\}, \end{aligned}$$

wobei für $u \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ die Rotation im distributionellen Sinne gebildet wird.

Ist \mathcal{O} eine beschränkte, offene Menge mit C^2 -Rand $\partial\mathcal{O}$, dann bezeichnen wir mit $TL^2(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ bzw. mit $TH^s(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ den Teilraum der L^2 - bzw. H^s -Funktionen, deren Normalenkomponente (fast überall) verschwindet. Genauso definieren wir $TL^2(S; \mathbb{C}^3)$.

Für Funktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C})$ und Vektorfelder $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3)$ mit Spurwerten $\varphi_0 = \varphi|_{\partial\mathcal{O}}$ bzw. Tangentialkomponenten $u_0 = (\nu \wedge u)|_{\partial\mathcal{O}} \wedge \nu$ definieren wir den Flächengradienten und die Flächenrotation durch

$$\nabla_{\partial\mathcal{O}} \varphi_0 := (\nu \wedge (\nabla\varphi)|_{\partial\mathcal{O}}) \wedge \nu \quad \text{und} \quad \text{rot}_{\partial\mathcal{O}} u_0 := \nu \cdot (\text{rot } u)|_{\partial\mathcal{O}},$$

wobei ν der äußere Normalenvektor auf $\partial\mathcal{O}$ sei. Es lässt sich zeigen, dass diese Operatoren tatsächlich nur von den Spurwerten φ_0 bzw. u_0 abhängen,

und dass sie stetig fortgesetzt werden können zu

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial\mathcal{O}} &: H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}) \rightarrow TH^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \\ \text{rot}_{\partial\mathcal{O}} &: TH^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}).\end{aligned}$$

Der negative antiduale Operator des Flächengradienten wird als Flächendivergenz

$$\text{div}_{\partial\mathcal{O}} : TH^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C})$$

bezeichnet. Den negativen antidualen Operator der Flächenrotation kennzeichnen wir der Notation in [12] folgend mit einem Vektorpfeil

$$\overrightarrow{\text{rot}}_{\partial\mathcal{O}} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}) \rightarrow TH^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3).$$

Für eine ausführlichere Einführung dieser Operatoren und die dazugehörigen Beweise verweisen wir auf [12, Chp. 2].

Wir benötigen noch den Spurraum

$$TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) = \left\{ u \in TH^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : \text{rot}_{\partial\mathcal{O}} u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}) \right\},$$

der definiert wird als Abschluss von $TH^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)}^2 := \|u\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)}^2 + \|\text{rot}_{\partial\mathcal{O}} u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C})}^2.$$

Analoge Notationen verwenden wir für die Fälle, dass die Rotation durch die Divergenz ersetzt wird, oder die Funktionen reellwertig sind.

Wir fassen nun kurz die für uns wesentlichen Spursätze und Greenschen Formeln zusammen:

Satz 3.1

Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene Menge mit C^2 -Rand $\partial\mathcal{O}$ und bezeichne mit ν den äußeren Normalenvektor an $\partial\mathcal{O}$.

(a) Die für $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3)$ durch

$$\gamma_t : u \mapsto \nu \wedge u|_{\partial\mathcal{O}}, \quad \gamma_\tau : u \mapsto (\nu \wedge u|_{\partial\mathcal{O}}) \wedge \nu, \quad \gamma_\nu : u \mapsto \nu \cdot u|_{\partial\mathcal{O}}$$

definierten Spurabbildungen können fortgesetzt werden zu stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned}\gamma_t &: H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3) \rightarrow TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \\ \gamma_\tau &: H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3) \rightarrow TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \\ \gamma_\nu &: H(\text{div}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}).\end{aligned}$$

Die Fortsetzungen besitzen stetige Rechtsinversen. Auch die Einschränkungen von γ_t und γ_τ auf den Raum

$$\{u \in H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : \text{div } u = 0\}$$

besitzen stetige Rechtsinversen.

(b) Es gelten die Greenschen Formeln

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \text{rot } u \cdot \bar{v} \, dx - \int_{\mathcal{O}} u \cdot \text{rot } \bar{v} \, dx &= \langle \nu \wedge u|_{\partial\mathcal{O}}, (\nu \wedge v|_{\partial\mathcal{O}}) \wedge \nu \rangle, \\ \int_{\mathcal{O}} w \cdot \overline{\text{grad } \phi} \, dx + \int_{\mathcal{O}} (\text{div } w) \bar{\phi} \, dx &= \langle \nu \cdot w|_{\partial\mathcal{O}}, \phi|_{\partial\mathcal{O}} \rangle \end{aligned}$$

für alle $u, v \in H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$, $w \in H(\text{div}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ und $\phi \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C})$.

Dabei bezeichnet in der ersten Gleichung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die antiduale Paarung auf

$$TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) \times TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$$

und in der zweiten Gleichung die auf $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C})$.

Beweis:

Dies wird in [51, Theorem 3.24] und [51, Theorem 3.31] gezeigt. Die benötigten Glattheitsvoraussetzungen an $\partial\mathcal{O}$ und die Tatsache, dass auch die Einschränkungen von γ_t und γ_τ auf die divergenzfreien Funktionen surjektiv sind, finden sich in [12, Chp. 2]. \square

Entsprechende Aussagen gelten für beschränkte offene Mengen, die aus endlich vielen C^2 -berandeten Zusammenhangskomponenten mit paarweise disjunkten Abschlüssen bestehen, und für die Komplemente solcher Mengen, vgl. [20, IX, §1, Theorem 1,2].

Ist eine Funktion auf beiden Seiten des Randes definiert, so verwenden wir den Index „-“, wenn die Spur von innen und den Index „+“, wenn die Spur von außen gebildet wird. Den Sprung der Spur bezeichnen wir wie in Abschnitt 2.5.4 mit $[\cdot]_{\partial\mathcal{O}}$, es ist also z. B.

$$[\nu \wedge u]_{\partial\mathcal{O}} = \nu \wedge u^+|_{\partial\mathcal{O}} - \nu \wedge u^-|_{\partial\mathcal{O}}.$$

Sind innere und äußere Spur identisch, so lassen wir den Index weg, wenn es der Lesbarkeit dient.

Zur Diskussion der magnetostatischen Gleichungen benötigen wir außerdem den schon in Anwendung 2.5.4 verwendeten gewichteten Sobolevraum

$$W^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) := \{u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : (1 + |x|^2)^{-1/2}u \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \nabla u \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^{3,3})\}$$

auf einer offenen Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei diesmal ∇u die Jacobi-Matrix von u bezeichnet.

Ist \mathcal{O} beschränkt, so stimmt dieser Raum offenbar (bis auf den Übergang zu einer äquivalenten Norm) mit $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ überein. Ist \mathcal{O} ein Gebiet mit beschränktem Komplement, so ergibt sich (bis auf eine äquivalente Norm) nach [20, IX, §1, Remark 7] und [21, XI, §2, Remark 2] gerade der Beppo-Levi-Raum, der durch Abschluss von $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3)$ bezüglich der Norm

$$u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^{3,3})} \tag{3.13}$$

entsteht.

Insbesondere liegt in beiden Fällen $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3)$ dicht in $W^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ und für ein Gebiet \mathcal{O} mit beschränktem Komplement definiert (3.13) eine äquivalente Norm auf $W^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$.

Einen nützlichen Zusammenhang zwischen Gradient, Rotation und Divergenz eines Vektorfeldes liefert das folgende Lemma:

Lemma 3.2

Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte Menge mit C^2 -Rand $\partial\mathcal{O}$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathcal{O}} \{|\operatorname{rot} u|^2 + |\operatorname{div} u|^2\} dx + I_{\partial\mathcal{O}}, \quad |I_{\partial\mathcal{O}}| \leq C \int_{\partial\mathcal{O}} |u|^2 d\sigma$$

für alle $u \in W^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ mit $\nu \wedge u|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ oder $\nu \cdot u|_{\partial\mathcal{O}} = 0$.

Beweis:

Die Behauptung wird in dieser Form im Beweis von [20, IX, §1, Theorem 3] gezeigt. Sie ist ein Spezialfall einer allgemeinen Formel, die z. B. in [52, Lemma 5.4.2] bewiesen wird. \square

Hieraus folgt:¹

¹Vergleiche auch [20, IX, §1, Remark 1] für (a), [20, IX, §2] für (b) und [20, IX, §1, Remark 2] für (c).

Korollar 3.3

(a) Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ offene, beschränkte Mengen mit $\overline{\mathcal{O}_2} \subset \mathcal{O}_1$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass für alle $u \in H(\text{rot}, \mathcal{O}_1; \mathbb{C}^3) \cap H(\text{div}, \mathcal{O}_1; \mathbb{C}^3)$ gilt:

$$u|_{\mathcal{O}_2} \in H^1(\mathcal{O}_2; \mathbb{C}^3),$$

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O}_2; \mathbb{C}^3)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\mathcal{O}_1; \mathbb{C}^3)} + \|\text{rot } u\|_{L^2(\mathcal{O}_1; \mathbb{C}^3)} + \|\text{div } u\|_{L^2(\mathcal{O}_1; \mathbb{C})} \right).$$

(b) Die Abbildung

$$(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu} \text{rot } u \cdot \overline{\text{rot } v} \, dx$$

definiert eine koerzive Sesquilinearform auf dem Hilbertraum

$$\{u \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) : \text{div } u = 0\}.$$

(c) Lemma 3.2 gilt auch für beschränkte offene Mengen, die aus endlich vielen C^2 -berandeten Zusammenhangskomponenten mit paarweise disjunkten Abschlüssen bestehen, und für die Komplemente solcher Mengen.

Schließlich zeigen wir noch eine leichte Verallgemeinerung der Tatsache, dass Vektorfelder durch Addition eines Gradienten eines skalaren Feldes divergenzfrei gemacht werden können:

Lemma 3.4

Seien $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ offene, beschränkte Mengen mit C^2 -Rändern und $\overline{\mathcal{O}'} \subset \mathcal{O}$. Außerdem erfülle $\tilde{\epsilon} \in L_+^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ die Bedingung $\text{supp}(\tilde{\epsilon} - 1) \subset \mathcal{O}'$.

Dann existiert ein $C > 0$, so dass für jedes Vektorfeld

$$u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) \quad \text{mit} \quad \text{supp}(\text{div}(\tilde{\epsilon}u)) \subset \mathcal{O}'$$

ein skalares Feld $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ existiert mit

$$\text{div}(\tilde{\epsilon}(u + \nabla\varphi)) = 0 \quad \text{und} \quad \|\varphi\|_{W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})} \leq C \|u\|_{L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)}.$$

Außerdem ist

$$\nabla\varphi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}} \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3) \quad \text{und} \quad \|\nabla\varphi\|_{W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)}.$$

Beweis:

Es ist $\text{div } u = 0$ in $\mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}$ und damit $u \in H(\text{div}, \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}; \mathbb{C}^3)$. Durch Multiplikation von u mit einer unendlich oft differenzierbaren Abschneidefunktion, die in einer Umgebung von $\partial\mathcal{O}$ gleich eins ist und in einer Umgebung von

$\overline{\mathcal{O}}$ verschwindet, erhalten wir aus Satz 3.1, dass $\nu \cdot u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C})$ ist und stetig von $u|_{\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ abhängt.

Aus dem Satz von Lax-Milgram folgt die Existenz eines $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\epsilon} \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \psi} \, dx = - \int_{\mathcal{O}} \tilde{\epsilon} u \cdot \overline{\nabla \psi} \, dx + \langle \nu \cdot u|_{\partial\mathcal{O}}, \psi|_{\partial\mathcal{O}} \rangle$$

für alle $\psi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ gilt, und φ stetig von $u|_{\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ abhängt. Man sieht leicht, dass damit $\operatorname{div}(\tilde{\epsilon}(u + \nabla\varphi)) = 0$ erfüllt ist.

In einer Umgebung von $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ gilt $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$ und $\operatorname{div}(\nabla\varphi) = 0$. Mit Korollar 3.3(a) erhalten wir, dass $\nu \cdot \nabla\varphi|_{\partial\mathcal{O}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C})$ ist und stetig von $u|_{\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ abhängt. Aus [52, Theorem 2.5.21] folgt damit, dass $\nabla\varphi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}} \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}; \mathbb{C}^3)$ ist und stetig von $u|_{\mathcal{O}} \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ abhängt. \square

3.2.1.2 Die Maxwell-Gleichungen

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Maxwell-Gleichungen (3.1)–(3.4) eine mathematische Bedeutung geben. Eine physikalisch sinnvolle Forderung an die Felder E^ω und H^ω ist, dass sie lokal endliche Energie besitzen, d. h. $E^\omega, H^\omega \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Interpretieren wir noch rot und div im distributionellen Sinne, so machen die Gleichungen (3.1)–(3.4) Sinn und sind offenbar äquivalent zu (3.5), (3.6):

Bemerkung 3.5

Sei $J \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$.

- (a) Lösen die Funktionen $E^\omega, H^\omega \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ die Gleichungen (3.1)–(3.4), dann ist $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ und E^ω löst (3.5), (3.6).
- (b) Ist umgekehrt $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ eine Lösung von (3.5), (3.6), dann lösen E^ω und $H^\omega := \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} E^\omega \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ die Gleichungen (3.1)–(3.4).

Wir fordern von dem Flächenstrom, dass $J \in TL^2_\diamond(S; \mathbb{C}^3)$, wobei

$$TL^2_\diamond(S; \mathbb{C}^3) := \left\{ v \in TL^2(S; \mathbb{C}^3) : \int_S v \cdot \nabla\varphi \, d\sigma = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \right\}.$$

Offenbar ist dies ein abgeschlossener Unterraum von $TL^2(S; \mathbb{C}^3)$ und damit selbst ein Hilbertraum. Nach [20, IX, §1, Prop. 1] ist die Bedingung in der Definition von TL^2_\diamond äquivalent zu der Forderung, dass die Flächendivergenz

von J auf S verschwindet und J auf dem eindimensionalen Rand von S in \mathbb{R}_0^3 verschwindende Normalenkomponenten besitzt.

Wir unterscheiden dabei aus Gründen der Lesbarkeit nicht zwischen der Funktion $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ und der zugehörigen Distribution

$$J \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \quad J(\varphi) := \int_S J\varphi \, d\sigma \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}).$$

Die Bedingung in der Definition von TL_\diamond^2 bedeutet für diese Distribution, dass $\operatorname{div} J = 0$ ist, d. h. (3.6) ist bereits in (3.5) enthalten.

Wir benötigen außerdem noch die bereits erwähnte Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung, vgl. z. B. [51, Sect. 1.3]:

$$\int_{\partial B_\rho} |\nu \wedge \operatorname{rot} E^\omega + i\omega E^\omega|^2 \, d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{für } \rho \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Zusammengefasst suchen wir also zu gegebener Frequenz $\omega > 0$ und gegebenem Flächenstrom $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ eine Lösung $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ der Maxwell-Gleichungen (3.5), (3.14). Unter zusätzlichen Glattheitsannahmen an ϵ und μ kann die eindeutige Lösbarkeit dieses Problems wie in [51, Sect. 10] gezeigt werden. Wir werden in Satz 3.24 beweisen, dass für hinreichend kleine Frequenzen auch ohne weitere Glattheitsforderungen jeweils eindeutige Lösungen existieren und diese stetig von J abhängen.

3.2.1.3 Die magnetostatischen Gleichungen

Auch die magnetostatischen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \right) = J, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon E) = 0 \quad (3.16)$$

machen Sinn für $E \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, wenn die Ableitungen im distributionellen Sinne interpretiert werden. Gleichung (3.15) ist äquivalent zu

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} w \, dx = \int_S J \cdot w \, d\sigma \quad \text{für alle } w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3). \quad (3.17)$$

Aufgrund der Divergenzfreiheit von J ist (3.17) für Testfunktionen der Form $w = \nabla\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ immer erfüllt. Durch stetige Fortsetzung und Anwendung von Lemma 3.4 mit $\tilde{\epsilon} = 1$ folgt deshalb, dass es genügt, (3.17) für divergenzfreie Testfunktionen nachzuprüfen:

Korollar 3.6

$E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ erfüllt (3.15) genau dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu} \text{rot } E \cdot \text{rot } w \, dx = \int_S J \cdot w \, d\sigma$$

für alle $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ mit $\text{div } w = 0$ gilt.

Zusammen mit Korollar 3.3(b) folgt durch Anwendung von Lax-Milgram für den Fall konstanter Dielektrizität die eindeutige Existenz einer Lösung der magnetostatischen Gleichungen (vgl. auch [20, IX, §2]):

Korollar 3.7

Es existiert genau eine Lösung $\tilde{E} \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ von (3.15) mit $\text{div } \tilde{E} = 0$. Diese hängt stetig von $J \in TL_{\diamond}^2(S; \mathbb{C}^3)$ ab.

Für den hier betrachteten Fall, dass die Dielektrizität ϵ außerhalb einer Kugel B_r konstant eins ist, motiviert dies als Abfallbedingung im Unendlichen die Forderung

$$E|_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}} \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3). \quad (3.18)$$

Mit dieser Abfallbedingung lässt sich zeigen:

Satz 3.8

Zu jedem $J \in TL_{\diamond}^2(S; \mathbb{C}^3)$ existiert genau eine Lösung $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ von (3.15) und (3.16), die die Abfallbedingung (3.18) erfüllt.

Für jedes beschränkte Gebiet \mathcal{O} existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $J \in TL_{\diamond}^2(S; \mathbb{C}^3)$

$$\|E|_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)} + \|\text{rot } E\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)} \leq C \|J\|_{TL_{\diamond}^2(S; \mathbb{C}^3)}. \quad (3.19)$$

Beweis:

Wir zeigen zuerst die Existenz einer Lösung. Nach Korollar 3.7 existiert eine Lösung $\tilde{E} \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ von (3.15) mit $\text{div } \tilde{E} = 0$, und diese hängt stetig von J ab. Es folgt, dass zu jedem Gebiet \mathcal{O} ein $C' > 0$ existiert, so dass für alle $J \in TL_{\diamond}^2(S; \mathbb{C}^3)$

$$\left\| \tilde{E}|_{\mathcal{O}} \right\|_{L^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)} + \left\| \text{rot } \tilde{E} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)} \leq C' \|J\|_{TL_{\diamond}^2(S; \mathbb{C}^3)}.$$

Da $\text{div}(\epsilon \tilde{E})$ außerhalb von B_r verschwindet, existiert nach Lemma 3.4 ein $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, so dass $\text{div}(\epsilon(\tilde{E} + \nabla \varphi)) = 0$ ist, also erfüllt

$$E := \tilde{E} + \nabla \varphi \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$$

die Gleichungen (3.15) und (3.16).

Da $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ stetig von $\tilde{E}|_{B_r} \in L^2(B_r; \mathbb{C}^3)$ und damit von J abhängt, erfüllt E die Gleichung (3.19), und wegen $\nabla\varphi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}} \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$ gilt für E auch die Abfallbedingung (3.18).

Um die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen, sei E eine Lösung von (3.15), (3.16) und (3.18) mit $J = 0$. Durch Anwendung von Lemma 3.4 mit $\tilde{\epsilon} = 1$ erhalten wir dann ein $\psi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, so dass

$$\tilde{E} := E + \nabla\psi \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$$

die Gleichungen (3.15) und (3.18) mit $\text{div } \tilde{E} = 0$ erfüllt.

Da \tilde{E} , $\text{rot } \tilde{E}$ und $\text{div } \tilde{E}$ lokal quadratisch integrierbar sind, folgt aus Korollar 3.3(a) $\tilde{E} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Zusammen mit $\tilde{E}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}} \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$ erhalten wir also $\tilde{E} \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Wegen Korollar 3.7 ist dann aber $\tilde{E} = 0$ und damit

$$\text{div}(\epsilon \nabla\psi) = -\text{div}(\epsilon E) = 0.$$

Es ist also $\psi = 0$ und damit $E = \tilde{E} - \nabla\psi = 0$. □

3.2.2 Äußere Calderon-Abbildungen

3.2.2.1 Einige spezielle Funktionen

Wir werden wie in [41, 42, 3, 51] mit Hilfe von äußeren Calderon-Abbildungen die Maxwellgleichungen und die magnetostatischen Gleichungen auf die beschränkte Kugel B_r reduzieren. Dafür benötigen wir einige spezielle Funktionen. Für ihre Eigenschaften verweisen wir auf [16, Sect. 2.3, 2.4] und [52, Sect. 2.4].

Definition 3.9

(a) Für $l \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$P_l(t) := \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (1 - t^2)^l$$

das Legendre-Polynom der Ordnung l .

(b) Für $l, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq l$ heißt

$$P_l^m(t) := (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_l(t)$$

die m -te zugeordnete Legendre-Funktion der Ordnung l .

(c) Die Funktionen $Y_l^m : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}_0$, $-l \leq m \leq l$,

$$Y_l^m(\hat{x}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

heißen Kugelflächenfunktionen oder einfach Kugelfunktionen. Dabei seien θ und φ die Winkel in der Polarkoordinatendarstellung des Vektors \hat{x} auf der Einheitskugel ∂B_1 , d. h. $\hat{x} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^T$.

(d) Die Funktionen $G_l^m, R_l^m : \partial B_r \rightarrow \mathbb{C}^3$, $l \in \mathbb{N}$, $-l \leq m \leq l$,

$$G_l^m(x) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla_{\partial B_r} Y_l^m(\hat{x}),$$

$$R_l^m(x) = \hat{x} \wedge G_l^m(x), \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|},$$

heißen Vektorkugelfunktionen.

(e) Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißen $j_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_n :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$j_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{n+2l}}{2^l l! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n+2l+1)} \quad \text{und}$$

$$y_n(t) = -\frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l-n-1}}{2^l l! (-2n+1)(-2n+3) \cdots (-2n+2l-1)}$$

sphärische Besselfunktionen n -ter Ordnung und sphärische Neumannfunktionen n -ter Ordnung.

Die Funktion

$$h_n^{(1)} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}, \quad h_n^{(1)} := j_n + iy_n$$

heißt sphärische Hankelfunktion n -ter Ordnung 1. Art.

Satz 3.10

(a) Die Funktionen $\frac{1}{r} Y_l^m(\hat{x})$, $l \in \mathbb{N}_0$, $-l \leq m \leq l$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\partial B_r; \mathbb{C})$. Jedes $f \in H^s(\partial B_r; \mathbb{C})$ kann entwickelt werden in

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m \frac{Y_l^m(\hat{x})}{r}, \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|}. \quad (3.20)$$

Eine äquivalente Norm auf $H^s(\partial B_r; \mathbb{C})$ ist gegeben durch

$$\|f\|_{H^s(\partial B_r; \mathbb{C})}^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (l+1)^{2s} |\alpha_l^m|^2. \quad (3.21)$$

(b) Die Funktionen G_l^m, R_l^m , $l \in \mathbb{N}$, $-l \leq m \leq l$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $TL^2(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$. Jedes $f \in TH^s(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$ kann entwickelt werden in

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m G_l^m(x) + \beta_l^m R_l^m(x). \quad (3.22)$$

Eine äquivalente Norm auf $TH^s(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$ ist gegeben durch

$$\|f\|_{TH^s(\partial B_r; \mathbb{C}^3)}^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (1 + l(l+1))^s (|\alpha_l^m|^2 + |\beta_l^m|^2). \quad (3.23)$$

Dasselbe gilt für $TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)$ und $TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)$ mit

$$\begin{aligned} \|f\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)}^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{1 + l(l+1)} |\alpha_l^m|^2 + \frac{|\beta_l^m|^2}{\sqrt{1 + l(l+1)}}, \\ \|f\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)}^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{|\alpha_l^m|^2}{\sqrt{1 + l(l+1)}} + \sqrt{1 + l(l+1)} |\beta_l^m|^2. \end{aligned}$$

Beweis:

Bis auf den Übergang zu äquivalenten Normen wird Behauptung (a) in [52, Sect. 2.5] und Behauptung (b) in [51, Sect. 9.3.3] gezeigt. Die dabei benutzten Eigenschaften der Kugelfunktionen werden in [52, Sect. 2.4] bewiesen. \square

3.2.2.2 Calderon-Abbildungen für die Maxwell-Gleichungen

Für die tangentielle Komponente eines Vektorfeldes u auf der Oberfläche der Kugel B_r schreiben wir im Folgenden kurz

$$\gamma_\tau u := (\nu \wedge u|_{\partial B_r}) \wedge \nu,$$

wobei $\nu = \hat{x} = \frac{x}{|x|}$ die äußere Normale im Punkt $x \in \partial B_r$ bezeichnet.

Wir geben zunächst die äußeren Calderon-Abbildungen für die Maxwell-Gleichungen an:

Definition und Satz 3.11

Zu $g \in TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)$ sei $E_\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3 \setminus B_r; \mathbb{C}^3)$ die Lösung von

$$\text{rot}(\text{rot} E^\omega) - \omega^2 E^\omega = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}, \quad (3.24)$$

$$\gamma_\tau E^\omega = g \quad \text{auf } \partial B_r, \quad (3.25)$$

$$\int_{\partial B_\rho} |\nu \wedge \text{rot} E^\omega + i\omega E^\omega|^2 d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{für } \rho \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Damit definieren wir die äußeren Calderon-Abbildungen für die Maxwell-Gleichungen

$$\Gamma_\omega^\tau : \begin{cases} TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3) & \rightarrow TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3), \\ g & \mapsto \nu \wedge \text{rot } E^\omega|_{\partial B_r}, \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\Gamma_\omega^\nu : \begin{cases} TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3) & \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}), \\ g & \mapsto \nu \cdot E^\omega|_{\partial B_r}. \end{cases} \quad (3.28)$$

(3.24)–(3.26) sind dabei eindeutig lösbar, Γ_ω^τ und Γ_ω^ν sind stetig, und für jedes

$$g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m G_l^m(x) + \beta_l^m R_l^m(x) \in TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)$$

ist

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega^\tau g &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{\omega^2 r}{\gamma_l(\omega r)} \alpha_l^m G_l^m - \frac{\gamma_l(\omega r)}{r} \beta_l^m R_l^m \right\}, \\ \Gamma_\omega^\nu g &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\gamma_l(\omega r)} \alpha_l^m \frac{Y_l^m}{r}, \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma_l(\omega r) := 1 + \omega r \frac{(h_l^{(1)})'(\omega r)}{h_l^{(1)}(\omega r)}.$$

Beweis:

Die Behauptung wird für Γ_ω^τ in [51, Sect. 9.4.1] gezeigt, die explizite Form von Γ_ω^ν findet sich in [3, p. 842]. Da unsere Notationen leicht von den dort verwendeten abweichen, geben wir die wesentlichen Zwischenergebnisse für die expliziten Darstellungen an:

Für $l \in \mathbb{N}$, $-l \leq m \leq l$ lösen die Funktionen

$$M_l^m(x) := \text{rot} \left(x h_l^{(1)}(\omega|x|) Y_l^m(\hat{x}) \right), \quad N_l^m(x) := \frac{1}{i\omega} \text{rot } M_l^m(x)$$

die Maxwell-Gleichungen (3.24) und (3.26). Sie besitzen die Randwerte

$$\begin{aligned} \nu \cdot M_l^m|_{\partial B_r} &= 0, \\ \gamma_\tau M_l^m &= -r h_l^{(1)}(\omega r) \sqrt{l(l+1)} R_l^m(x), \\ \nu \wedge \text{rot } M_l^m|_{\partial B_r} &= \left(h_l^{(1)}(\omega r) + \omega r (h_l^{(1)})'(\omega r) \right) \sqrt{l(l+1)} R_l^m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\nu \cdot N_l^m|_{\partial B_r} &= \frac{l(l+1)}{i\omega} h_l^{(1)}(\omega r) \frac{Y_l^m(\hat{x})}{r}, \\ \gamma_\tau N_l^m &= \frac{1}{i\omega} \left(h_l^{(1)}(\omega r) + \omega r (h_l^{(1)})'(\omega r) \right) \sqrt{l(l+1)} G_l^m, \\ \nu \wedge \operatorname{rot} N_l^m|_{\partial B_r} &= -i\omega r h_l^{(1)}(\omega r) \sqrt{l(l+1)} G_l^m.\end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\Gamma_\omega^\tau G_l^m(x) &= \frac{\omega^2 r}{\gamma_l(\omega r)} G_l^m(x), & \Gamma_\omega^\nu G_l^m(x) &= \frac{\sqrt{l(l+1)} Y_l^m(\hat{x})}{\gamma_l(\omega r) r}, \\ \Gamma_\omega^\tau R_l^m(x) &= -\frac{\gamma_l(\omega r)}{r} R_l^m(x), & \Gamma_\omega^\nu R_l^m(x) &= 0,\end{aligned}$$

und die explizite Darstellung folgt mit Hilfe von Satz 3.10. \square

3.2.2.3 Calderon-Abbildungen für die Magnetostatik

Zur Definition der äußeren Calderon-Abbildungen für die magnetostatischen Gleichungen zeigen wir zuerst die eindeutige Lösbarkeit des Außenraumproblems in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}$:

Lemma 3.12

Zu jedem $g \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$ existiert genau ein $E \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$, das die magnetostatischen Gleichungen

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}, \quad (3.29)$$

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}, \quad (3.30)$$

$$\gamma_\tau E = g \quad \text{auf } \partial B_r, \quad (3.31)$$

$$\int_{\partial B_r} \nu \cdot E \, d\sigma = 0 \quad \text{auf } \partial B_r \quad (3.32)$$

löst. E hängt stetig von g ab.

Beweis:

(a) Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Sei dazu $E \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$ eine Lösung von (3.29), (3.30) und (3.32) mit $\gamma_\tau E = 0$. Aus der Greenschen Formel folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}} \operatorname{rot} E \cdot \overline{\operatorname{rot} v} \, dx = - \langle \nu \wedge \operatorname{rot} E|_{\partial B_r}, \gamma_\tau v \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus B_r; \mathbb{C}^3)$ und, da beide Seiten stetig in v sind, auch für alle $v \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$. Insbesondere folgt für $v := E$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}} |\operatorname{rot} E|^2 dx = - \langle \nu \wedge \operatorname{rot} E|_{\partial B_r}, \gamma_\tau E \rangle = 0,$$

also ist $\operatorname{rot} E = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}$.

Aus dem Satz von Lax-Milgram erhalten wir die Existenz einer Lösung $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ des Diffraktionsproblems

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r, \quad [\partial_\nu \varphi]_{\partial B_r} = \nu \cdot E|_{\partial B_r}.$$

Setzen wir E durch Null auf B_r fort, so gilt für $E - \nabla \varphi$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (E - \nabla \varphi) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r, & & [(\nu \wedge (E - \nabla \varphi)) \wedge \nu]_{\partial B_r} &= 0, \\ \operatorname{div} (E - \nabla \varphi) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r, & & [\nu \cdot (E - \nabla \varphi)]_{\partial B_r} &= 0 \end{aligned}$$

und damit (vgl. z. B. [12, Sect. 2.2])

$$\operatorname{rot} (E - \nabla \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} (E - \nabla \varphi) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Insbesondere ist nach Korollar 3.3(a)

$$\tilde{E} := E - \nabla \varphi \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3).$$

Da φ in einer Umgebung von $\mathbb{R}^3 \setminus B_{2r}$ harmonisch ist, folgt wie in Lemma 3.4

$$\nabla \varphi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{2r}}} \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{2r}}; \mathbb{C}^3).$$

Insgesamt erhalten wir $\tilde{E} \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, und aus Korollar 3.3(b) folgt damit $\tilde{E} = 0$, also $E = \nabla \varphi$.

Aus $E|_{B_r} = 0$ folgt nun, dass $\varphi|_{\partial B_r}$ konstant ist. Wegen (3.32) ist also

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi|^2 dx = - \int_{\partial B_r} [\partial_\nu \varphi]_{\partial B_r} \overline{\varphi} d\sigma = - \int_{\partial B_r} \nu \cdot E|_{\partial B_r} \overline{\varphi} d\sigma = 0$$

und damit $E = 0$.

(b) Um die Existenz zu zeigen, betrachten wir die Sesquilinearform

$$a(u, v) := \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_r} \operatorname{rot} u \cdot \overline{\operatorname{rot} v} dx$$

auf dem Raum

$$H := \left\{ u \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3) : \operatorname{div} u = 0, \gamma_\tau u = 0, \int_{\partial B_r} \nu \cdot u \, d\sigma = 0 \right\},$$

der als abgeschlossener Unterraum von $W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$ ein Hilbertraum ist.

Aus Lemma 3.2 folgt, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$a(u, u) \geq \|u\|_H^2 - c \|\nu \cdot u\|_{L^2(\partial B_r; \mathbb{C})}^2 \quad \text{für alle } u \in H.$$

Außerdem ist $a(u, u) \geq 0$ für alle $u \in H$, und ist $a(u, u) = 0$ für ein $u \in H$, so folgt aus (a) $u = 0$.

Wir bezeichnen mit $A \in \mathcal{L}(H, H')$ den durch a induzierten Operator und mit $K \in \mathcal{L}(H, L^2(\partial B_r; \mathbb{C}))$ die kompakte Spurabbildung

$$K : u \mapsto \nu \cdot u|_{\partial B_r} \in L^2(\partial B_r; \mathbb{C}) \quad \text{für alle } u \in H.$$

Außerdem sei $\iota_{(\cdot)}$ die in Abschnitt 2.2 eingeführte Isometrie zwischen einem Hilbertraum und seinem Antidualraum. Dann ist A injektiv, $A \geq 0$ und $A + K' \iota_{L^2(\partial B_r; \mathbb{C})} K$ koerziv. Aus Lemma 2.2 und Lemma 2.3 erhalten wir, dass A stetig invertierbar ist. Zu jedem $l \in H'$ existiert also eine eindeutige Lösung $u \in H$ von

$$a(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in H, \quad (3.33)$$

und diese stetig hängt von l ab.

Nach [20, IX, §1, Remark 8] existiert eine stetige Rechtsinverse

$$\gamma_\tau^- : TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3) \rightarrow W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$$

des Spuoperators $A \mapsto (\nu \wedge A|_{\partial B_r}) \wedge \nu$ mit

$$\nu \cdot (\gamma_\tau^- f)|_{\partial B_r} = 0, \quad \operatorname{div}(\gamma_\tau^- f) = 0 \quad \text{für alle } f \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3),$$

d. h. γ_τ^- ordnet vorgegebenen Tangentialkomponenten f eine divergenzfreie Funktion $\gamma_\tau^- f \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$ mit diesen Tangentialkomponenten und verschwindenden Normalenkomponenten auf B_r zu.

Sei nun $E_0 \in H$ die Lösung von (3.33) zu

$$l(v) := -a(\gamma_\tau^- g, v) \quad \text{für alle } v \in H.$$

Dann hängt $E := E_0 + \gamma_r^- g$ stetig von g ab und erfüllt offenbar (3.30)–(3.32). Schließlich folgt wie in Lemma 3.4 und Korollar 3.6, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_r} \operatorname{rot} E \cdot \overline{\operatorname{rot} v} \, dx = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3).$$

E löst also auch Gleichung (3.29). \square

Definition 3.13

Zu gegebenem $g \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$ sei $E \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$ die Lösung von (3.29)–(3.32) aus Lemma 3.12. Damit definieren wir die äußeren Calderon-Abbildungen für die magnetostatischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \Gamma^\tau : TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3) &\rightarrow TH^{-\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3), & g &\mapsto \nu \wedge \operatorname{rot} E|_{\partial B_r}, \\ \Gamma^\nu : TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}), & g &\mapsto \nu \cdot E|_{\partial B_r}. \end{aligned}$$

Lemma 3.14

Für jedes

$$g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m G_l^m(x) + \beta_l^m R_l^m(x) \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$$

ist

$$\Gamma^\tau g = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l}{r} \beta_l^m R_l^m \quad \text{und} \quad \Gamma^\nu g = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{-\sqrt{l+1}}{\sqrt{l}} \alpha_l^m \frac{Y_l^m}{r}.$$

Insbesondere kann Γ^τ stetig fortgesetzt werden zu einer stetigen, symmetrischen Abbildung

$$\Gamma^\tau : TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3) \rightarrow TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)$$

und Γ^ν zu einer stetigen Abbildung

$$\Gamma^\nu : TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}).$$

Beweis:

Man rechnet leicht nach, dass für $l \in \mathbb{N}$, $-l \leq m \leq l$ die Funktionen

$$\tilde{M}_l^m(x) := \operatorname{rot} \left(\frac{x}{|x|^{l+1}} Y_l^m(\hat{x}) \right), \quad \tilde{N}_l^m(x) := \operatorname{rot} \tilde{M}_l^m(x)$$

in $W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C}^3)$ liegen und die Gleichungen (3.29) und (3.30) lösen. Ihre Randwerte auf ∂B_r sind

$$\begin{aligned}\nu \cdot \tilde{M}_l^m|_{\partial B_r} &= 0, \\ \gamma_\tau \tilde{M}_l^m &= -r^{-l} \sqrt{l(l+1)} R_l^m(x), \\ \nu \wedge \text{rot } \tilde{M}_l^m(x)|_{\partial B_r} &= -lr^{-(l+1)} \sqrt{l(l+1)} R_l^m(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\nu \cdot \tilde{N}_l^m|_{\partial B_r} &= l(l+1) \frac{Y_l^m(\hat{x})}{r^{l+2}}, \\ \gamma_\tau \tilde{N}_l^m &= -lr^{-(l+1)} \sqrt{l(l+1)} G_l^m, \\ \nu \wedge \text{rot } \tilde{N}_l^m|_{\partial B_r} &= 0.\end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\Gamma^\tau G_l^m(x) &= 0, & \Gamma^\nu G_l^m(x) &= \frac{-\sqrt{l+1} Y_l^m(\hat{x})}{\sqrt{l} r}, \\ \Gamma^\tau R_l^m(x) &= \frac{l}{r} R_l^m(x), & \Gamma^\nu R_l^m(x) &= 0,\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus Satz 3.10. \square

Lemma 3.15

Für alle Lösungen $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C})$ von

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r} \quad \text{mit} \quad \langle \partial_\nu \varphi|_{\partial B_r}, \mathbf{1}_{\partial B_r} \rangle = 0$$

gilt $\Gamma^\nu \gamma_\tau \nabla \varphi = \partial_\nu \varphi|_{\partial B_r}$ und $\Gamma^\tau \gamma_\tau \nabla \varphi = 0$. Dabei ist $\mathbf{1}_{\partial B_r}$ die konstante Funktion $x \mapsto 1$ für alle $x \in \partial B_r$.

Beweis:

Bekanntlich besitzt

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}, \quad \varphi|_{\partial B_r} = g \quad \text{auf } \partial B_r \quad (3.34)$$

für jedes $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$ genau eine Lösung $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{C})$ und φ und $\partial_\nu \varphi|_{\partial B_r}$ hängen stetig von g ab. Da auch $\gamma_\tau \nabla = \nabla_{\partial B_r}$, Γ^τ und Γ^ν stetige Abbildungen sind, genügt es, die Aussagen für die Basisfunktionen $Y_l^m(\hat{x})$ zu zeigen.

Die Lösung von (3.34) zu $g = Y_l^m(\hat{x})$ ist $\varphi(x) = \frac{r^{l+1}}{|x|^{l+1}} Y_l^m(\hat{x})$, vgl. z. B. [52, Theorem 2.5.1]. Wegen $\langle \partial_\nu \varphi|_{\partial B_r}, \mathbf{1}_{\partial B_r} \rangle = 0$ genügt es deshalb die Aussagen für $Y_l^m(\hat{x})$ mit $l \geq 1$ zu zeigen, und für diese gilt

$$\partial_\nu \varphi|_{\partial B_r} = -\frac{l+1}{r} Y_l^m(\hat{x}) = \Gamma^\nu(\sqrt{l(l+1)} G_l^m(x)) = \Gamma^\nu(\nabla_{\partial B_r} Y_l^m(\hat{x})),$$

und $\Gamma^\tau(\nabla_{\partial B_r} Y_l^m(\hat{x})) = \Gamma^\tau(\sqrt{l(l+1)} G_l^m(x)) = 0$. \square

3.2.2.4 Reduktion auf ein beschränktes Gebiet

Mit den äußeren Calderon-Abbildungen können wir die Probleme nun auf das beschränkte Gebiet B_r reduzieren.

Lemma 3.16

(a) Löst $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ die Maxwell-Gleichung (3.5) mit Ausstrahlungsbedingung (3.14), dann löst $E^\omega|_{B_r} \in H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} E^\omega \right) - \omega^2 \epsilon E^\omega = i\omega J \quad \text{in } B_r, \quad (3.35)$$

$$\text{div}(\epsilon E^\omega) = 0 \quad \text{in } B_r, \quad (3.36)$$

$$\Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau E^\omega = \nu \wedge \text{rot} E^\omega|_{\partial B_r}, \quad (3.37)$$

$$\Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau E^\omega = \nu \cdot E^\omega|_{\partial B_r}. \quad (3.38)$$

Umgekehrt kann jede Funktion aus $H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$, die (3.35) und (3.37) löst, fortgesetzt werden zu einer Lösung $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ der Maxwell-Gleichungen (3.5), (3.14). Die Gleichungen (3.36) und (3.38) sind in diesem Sinne redundant.

(b) Löst $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ das magnetostatische Problem (3.15), (3.16) mit Abfallbedingung (3.18), dann löst $E|_{B_r} \in H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} E \right) = J \quad \text{in } B_r, \quad (3.39)$$

$$\text{div}(\epsilon E) = 0 \quad \text{in } B_r, \quad (3.40)$$

$$\Gamma^\tau \gamma_\tau E = \nu \wedge \text{rot} E|_{\partial B_r}, \quad (3.41)$$

$$\Gamma^\nu \gamma_\tau E = \nu \cdot E|_{\partial B_r}. \quad (3.42)$$

Umgekehrt kann jede Funktion aus $H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$, die (3.39)–(3.42) löst, fortgesetzt werden zu einer Lösung $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ der magnetostatischen Gleichungen (3.15), (3.16) und (3.18).

Beweis:

(a) Aus der Definition der äußeren Calderon-Operatoren folgt sofort, dass jede Lösung der Maxwell-Gleichungen auf \mathbb{R}^3 die Gleichungen (3.35)–(3.38) löst.

Umgekehrt kann jede Lösung $\tilde{E}^\omega \in H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$ der reduzierten Maxwell-Gleichungen (3.35) und (3.37) durch die Lösung von (3.24)–(3.26) in Definition und Satz 3.11 mit $g := (\nu \wedge \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r}) \wedge \nu$ zu einer Funktion

$E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r; \mathbb{C}^3)$ fortgesetzt werden, für die gilt

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} E^\omega \right) - \omega^2 \epsilon E^\omega &= i\omega J && \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r, \\ [(\nu \wedge E^\omega) \wedge \nu]_{\partial B_r} &= 0 && \text{auf } \partial B_r, \\ [\nu \wedge \text{rot} E^\omega]_{\partial B_r} &= 0 && \text{auf } \partial B_r. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (vgl. z. B. [12, Sect. 2.2]) $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ und

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} E^\omega \right) - \omega^2 \epsilon E^\omega = i\omega J \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

E^ω löst also die Maxwell-Gleichungen (3.5), (3.14) (und damit insbesondere auch (3.36) und (3.38)).

- (b) Jede Lösung E der magnetostatischen Gleichungen erfüllt wegen (3.16) auch die Gleichung (3.32) in Lemma 3.12, also folgt aus der Definition der äußeren Calderon-Operatoren, dass $E|_{B_r}$ die Gleichungen (3.39)–(3.42) löst.

Umgekehrt kann auch hier jede Lösung $\tilde{E} \in H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$ der reduzierten magnetostatischen Gleichungen (3.39)–(3.42) durch die Lösung von (3.29)–(3.32) mit $g := \gamma_\tau \tilde{E}$ fortgesetzt werden zu einer Funktion $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r; \mathbb{C}^3)$, die (3.18) erfüllt, und für die gilt

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} E \right) &= J && \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r, \\ \text{div} (\epsilon E) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_r, \\ [(\nu \wedge E) \wedge \nu]_{\partial B_r} &= 0 && \text{auf } \partial B_r, \\ [\nu \wedge \text{rot} E]_{\partial B_r} &= 0 && \text{auf } \partial B_r, \\ [\nu \cdot E]_{\partial B_r} &= 0 && \text{auf } \partial B_r. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (vgl. z. B. [12, Sect. 2.2]) $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ und

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} E \right) &= J && \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \text{div} (\epsilon E) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

E löst also die magnetostatischen Gleichungen (3.15) und (3.16). \square

3.2.3 Asymptotik für niedrige Frequenzen

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass die Maxwell-Gleichungen für kleine Frequenzen ω eindeutig lösbar sind und tatsächlich

$$E^\omega = i\omega E + O(\omega^3)$$

gilt.

3.2.3.1 Asymptotik der Calderon-Abbildungen

Lemma 3.17

Für $\omega \rightarrow 0$ konvergiert Γ_ω^τ gegen Γ^τ und Γ_ω^ν gegen Γ^ν . Es gilt

$$\Gamma_\omega^\tau - \Gamma^\tau = O(\omega^2) \quad \text{in } \mathcal{L}(TH^{-\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3), TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)),$$

insbesondere also auch in $\mathcal{L}(TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3), TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3))$. Außerdem ist

$$\Gamma_\omega^\nu - \Gamma^\nu = O(\omega^2) \quad \text{in } \mathcal{L}(TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3), H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})).$$

Beweis:

Wir benutzen zwei Abschätzungen aus [51, Lemma 9.20] und [3, Lemma 2.4]²: Es existieren ein $\omega_0 > 0$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$, so dass für alle $0 < \omega r < \omega_0$ und alle $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$C_1 l \leq |\gamma_l(\omega r)| \leq C_2 l \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{\gamma_l(\omega r)} + \frac{1}{l} \right| \leq \frac{C_3}{l^2} \omega^2 r^2.$$

Mit den expliziten Darstellungen von Γ_ω^τ und Γ^τ erhalten wir ein $C > 0$, so dass für jedes

$$g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m G_l^m(x) + \beta_l^m R_l^m(x) \in TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)$$

²Die Aussage von [3, Lemma 2.4] lautet $\left| \frac{1}{\gamma_l(z)} + \frac{1}{l} \right| \leq \frac{C_3}{l^2} z$, bewiesen wird dort jedoch das hier verwendete $\left| \frac{1}{\gamma_l(z)} + \frac{1}{l} \right| \leq \frac{C_3}{l^2} z^2$.

die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned}
 & \|(\Gamma_\omega^\tau - \Gamma^\tau)g\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)}^2 \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \sqrt{1+l(l+1)} \left| \frac{\omega^2 r}{\gamma_l(\omega r)} \alpha_l^m \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{1+l(l+1)}} \left| \frac{\gamma_l(\omega r) + l}{r} \beta_l^m \right|^2 \right\} \\
 &\leq C \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{\omega^4 r^2}{\sqrt{1+l(l+1)}} |\alpha_l^m|^2 + \frac{\omega^4 r^2}{\sqrt{1+l(l+1)}} |\beta_l^m|^2 \right\} \\
 &= C \omega^4 r^2 \|g\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3)}^2.
 \end{aligned}$$

$\Gamma_\omega^\tau - \Gamma^\tau$ kann also stetig auf $TH^{-\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$ fortgesetzt werden und die Fortsetzung erfüllt

$$\Gamma_\omega^\tau - \Gamma^\tau = O(\omega^2)$$

in $\mathcal{L}(TH^{-\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3), TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial B_r; \mathbb{C}^3))$.

Die zweite Behauptung wird auch in [3, Lemma 2.7] bewiesen. Mit den Reihenentwicklungen für Γ_ω^ν und Γ^ν erhalten wir ein $C' > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
 \|(\Gamma_\omega^\nu - \Gamma^\nu)g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})}^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (l+1) \left| \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\gamma_l(\omega r)} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{l} \right|^2 |\alpha_l^m|^2 \\
 &\leq C_3 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l(l+1)^2 \omega^4 r^4}{l^4} |\alpha_l^m|^2 \\
 &\leq C' \omega^4 r^4 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{\sqrt{1+l(l+1)}} |\alpha_l^m|^2 \\
 &\leq C' \omega^4 r^4 \|g\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3)}^2,
 \end{aligned}$$

also $\Gamma_\omega^\nu - \Gamma^\nu = O(\omega^2)$ in $\mathcal{L}(TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3), H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}))$. \square

3.2.3.2 Variationsformulierung des magnetostatischen Problems

Aus der expliziten Form von Γ^ν in Lemma 3.14 folgt, dass unser Γ^ν mit dem von Ammari und Nédélec in [3, Lemma 2.7] definierten Operator D übereinstimmt, so dass wir zwei Lemmata aus [3] benutzen können:

Lemma 3.18

Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u &= 0 && \text{in } B_r, \\ \operatorname{div}(\epsilon u) &= 0 && \text{in } B_r, \\ \nu \cdot u|_{\partial B_r} &= \Gamma^\nu \gamma_\tau u \end{aligned}$$

hat in $H(\operatorname{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$ nur die Lösung $u = 0$.

Beweis:

[3, Lemma 5.1] □

Lemma 3.19

Der Raum

$$\begin{aligned} V &:= \{u \in H(\operatorname{rot}, B_r; \mathbb{C}^3) : \\ &\quad \operatorname{div}(\epsilon u) = 0, \nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})\}, \\ \|u\|_V &:= \|u\|_{H(\operatorname{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)} + \|\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} \end{aligned}$$

ist kompakt eingebettet in $L^2(B_r; \mathbb{C}^3)$.

Beweis:

[3, Lemma 5.2] □

Für das folgende Lemma benötigen wir unsere Voraussetzung, dass ϵ in einer Umgebung von \bar{S} konstant ist.

Lemma 3.20

Sei \mathcal{O} eine Umgebung von \bar{S} . Jedes $v \in H(\operatorname{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ mit $\operatorname{div}(\epsilon v) = 0$ kann zerlegt werden in $v = v_1 + v_2$, wobei $v_2 \in H(\operatorname{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ in einer Umgebung von \bar{S} verschwindet und $v_1 \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. v_1 (und damit auch v_2) hängt dabei stetig von v ab.

Insbesondere ist die Auswertung der Tangentialkomponente auf S , d. h.

$$v \mapsto (\nu \wedge v|_S) \wedge \nu,$$

eine kompakte Abbildung von

$$\{v \in H(\operatorname{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : \operatorname{div}(\epsilon v) = 0\} \quad \text{nach} \quad TL^2(S; \mathbb{C}^3).$$

Beweis:

Sei $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ ein Gebiet mit $\bar{S} \subset \mathcal{O}_1$ und der Eigenschaft, dass ϵ auf \mathcal{O}_1 konstant ist. Seien \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_3 zwei weitere Gebiete mit $\bar{S} \subset \mathcal{O}_3$, $\overline{\mathcal{O}_3} \subset \mathcal{O}_2$ und $\overline{\mathcal{O}_2} \subset \mathcal{O}_1$. Dann existiert eine Abschneidefunktion

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}; \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi = \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_2, \\ 1 & \text{auf } \mathcal{O}_3. \end{cases}$$

Jedes $v \in H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ mit $\text{div}(\epsilon v) = 0$ lässt sich durch $v_1 := \varphi v$ und $v_2 := (1 - \varphi)v$ zerlegen in $v = v_1 + v_2$, wobei offenbar $v_2 \in H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ in \mathcal{O}_3 verschwindet.

Aus Korollar 3.3 erhalten wir ein $C > 0$, so dass für alle $v \in H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ mit $\text{div}(\epsilon v) = 0$

$$v|_{\mathcal{O}_2} \in H^1(\mathcal{O}_2; \mathbb{C}^3), \quad \|v|_{\mathcal{O}_2}\|_{H^1(\mathcal{O}_2; \mathbb{C}^3)} \leq C \|v|_{\mathcal{O}_1}\|_{H(\text{rot}, \mathcal{O}_1; \mathbb{C}^3)}.$$

Es existieren also $C_1, C_2 > 0$, so dass für alle solchen v gilt

$$v_1 = \varphi v \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3),$$

und

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)} &= \|\varphi v\|_{H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)} = \|(\varphi v)|_{\mathcal{O}_2}\|_{H^1(\mathcal{O}_2; \mathbb{C}^3)} \leq C_1 \|v|_{\mathcal{O}_2}\|_{H^1(\mathcal{O}_2; \mathbb{C}^3)} \\ &\leq C_2 \|v\|_{H(\text{rot}, \mathcal{O}; \mathbb{C}^3)}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt. □

Definieren wir zu $J \in TL_\infty^2(S; \mathbb{C}^3)$ das antilineare Funktional

$$l : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \mapsto \int_S J \cdot \bar{v} \, d\sigma,$$

dann erhalten wir aus Lemma 3.20, dass $l \in V'$ ist und stetig von J abhängt.

Wir definieren noch die Sesquilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{B_r} \frac{1}{\mu} \text{rot } u \cdot \overline{\text{rot } v} \, dx + \langle \Gamma^\tau \gamma_\tau u, \gamma_\tau v \rangle \\ &\quad + (\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau u, \nu \cdot v|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau v)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} \end{aligned}$$

für alle $u, v \in V$, wobei $(\cdot, \cdot)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})}$ das Skalarprodukt auf $H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$ bezeichne.

Damit können wir eine äquivalente Variationsformulierung des magnetostatischen Problems angeben.

Lemma 3.21

Die Sesquilinearform a ist koerziv. $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ löst genau dann das magnetostatische Problem (3.15), (3.16) und (3.18), wenn $E|_{B_r} \in V$ ist und

$$a(E|_{B_r}, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (3.43)$$

Beweis:

Offenbar ist a eine stetige Sesquilinearform auf V . Sei $A \in \mathcal{L}(V, V')$ der durch sie induzierte Operator (vgl. Abschnitt 2.2) und K die nach Lemma 3.19 kompakte Einbettung von V nach $L^2(B_r; \mathbb{C}^3)$. Aus der expliziten Darstellung in Lemma 3.14 erhalten wir $\Gamma^\tau \geq 0$ und damit $A \geq 0$. Bezeichnen wir wieder mit $\iota_{(\cdot)}$ die in Abschnitt 2.2 eingeführte Isometrie zwischen einem Hilbertraum und seinem Antidualraum, dann existiert ein $c > 0$, so dass

$$\begin{aligned} & \langle (A + K' \iota_{L^2(B_r; \mathbb{C}^3)} K)u, u \rangle_{V' \times V} \\ &= \int_{B_r} \frac{1}{\mu} |\text{rot } u|^2 dx + \langle \Gamma^\tau \gamma_\tau u, \gamma_\tau u \rangle + \|\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})}^2 \\ & \quad + \|u\|_{L^2(B_r; \mathbb{C}^3)}^2 \\ & \geq c \|u\|_V^2. \end{aligned}$$

Außerdem folgt für jedes $u \in \mathcal{N}(A)$ aus $a(u, u) = 0$

$$\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau u = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot } u = 0 \quad \text{in } B,$$

also mit Lemma 3.18 $u = 0$.

Insgesamt ist also A injektiv, $A \geq 0$ und $A + K' \iota_{L^2(B_r; \mathbb{C}^3)} K$ koerziv. Aus Lemma 2.3 erhalten wir, dass A bijektiv ist, und aus Lemma 2.2 folgt, dass A sogar koerziv ist. Insbesondere besitzt also (3.43) eine eindeutige Lösung.

Sei nun $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ eine Lösung des magnetostatischen Problems (3.15), (3.16) und (3.18). Aus Lemma 3.16 erhalten wir

$$\nu \cdot E|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau E = 0,$$

also insbesondere $E|_{B_r} \in V$, und dass für alle $v_1 \in H_0^1(B_r; \mathbb{C}^3)$ und alle $v_2 \in H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$, die in einer Umgebung von S verschwinden, gilt

$$\begin{aligned} l(v_1) &= \int_S J \cdot \overline{v_1} d\sigma = \int_{B_r} \frac{1}{\mu} \text{rot } E \cdot \overline{\text{rot } v_1} dx = a(E|_{B_r}, v_1), \\ l(v_2) &= 0 = \int_{B_r} \frac{1}{\mu} \text{rot } E \cdot \overline{\text{rot } v_2} dx + \langle \nu \wedge \text{rot } E|_{\partial B_r}, \gamma_\tau v_2 \rangle = a(E|_{B_r}, v_2). \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.20 erfüllt $E|_{B_r}$ also (3.43), und da sowohl (3.15)–(3.18) als auch (3.43) eindeutig lösbar sind, folgt daraus auch, dass umgekehrt jede Lösung der Variationsgleichung (3.43) zu einer Lösung des magnetostatischen Problems (3.15)–(3.18) fortgesetzt werden kann. \square

3.2.3.3 Variationsformulierung der Maxwell-Gleichungen

Auch für die Maxwell-Gleichungen können wir auf V eine äquivalente Variationsformulierung angeben. Hierfür benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 3.22

Es existiert ein $\omega_0 > 0$, so dass für alle $0 < \omega < \omega_0$ zu jedem $u \in \mathcal{D}(B_r; \mathbb{C}^3)$ ein $\varphi \in H^1(B_r; \mathbb{C})$ existiert mit

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi) = \operatorname{div}(\epsilon u) \quad \text{in } B_r \quad \text{und} \quad \nu \cdot \nabla \varphi|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \nabla \varphi = \omega^2 \varphi|_{\partial B_r}. \quad (3.44)$$

Insbesondere ist $u - \nabla \varphi \in V$.

Beweis:

Man sieht leicht, dass $\varphi \in H^1(B_r; \mathbb{C})$ genau dann (3.44) löst, wenn

$$\varphi \in H := \left\{ \psi \in H^1(B_r; \mathbb{C}) : \int_{\partial B_r} \psi \, d\sigma = 0 \right\}$$

und

$$\int_{B_r} \epsilon \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \psi} \, dx - \int_{\partial B_r} \omega^2 \varphi|_{\partial B_r} \overline{\psi}|_{\partial B_r} \, d\sigma - \langle \Gamma^\nu \gamma_\tau \nabla \varphi, \psi \rangle = \int_{B_r} \epsilon u \cdot \overline{\nabla \psi} \, dx \quad (3.45)$$

für alle $\psi \in H$ erfüllt.

Aus der expliziten Darstellung von Γ^ν in Lemma 3.14 folgt, dass

$$-\langle \Gamma^\nu \gamma_\tau \nabla \psi, \psi \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \psi \in H.$$

Für hinreichend kleine ω ist also aufgrund der Poincaréschen Ungleichung die linke Seite von (3.45) eine koerzive Sesquilinearform auf H , und die Behauptung folgt aus dem Satz von Lax-Milgram. \square

Für hinreichend kleine ω ist nach Lemma 3.17 für alle $u \in V$

$$\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau u = \nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau u - (\Gamma_\omega^\nu - \Gamma^\nu) \gamma_\tau u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$$

und wir können die Sesquilinearform $a_\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ definieren durch

$$\begin{aligned} a_\omega(u, v) := & \int_{B_r} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} u \cdot \overline{\operatorname{rot} v} - \omega^2 \epsilon u \cdot \overline{v} \right) dx + \langle \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau u, \gamma_\tau v \rangle \\ & + (\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau u, \nu \cdot v|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau v)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} \end{aligned}$$

für alle $u, v \in V$.

Lemma 3.23

Es existiert ein $\omega_0 > 0$, so dass für alle Frequenzen $0 < \omega < \omega_0$ eine Funktion $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ genau dann die Maxwell-Gleichungen (3.5), (3.14) löst, wenn $E^\omega|_{B_r} \in V$ ist und

$$a_\omega(E^\omega|_{B_r}, v) = i\omega l(v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (3.46)$$

Beweis:

Wähle $\omega_0 > 0$ so klein, dass Lemma 3.22 gilt, und gemäß Lemma 3.17

$$\Gamma_\omega^\nu - \Gamma^\nu \in \mathcal{L}(TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial B_r; \mathbb{C}^3), H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})).$$

Sei $0 < \omega < \omega_0$ und $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ eine Lösung der Maxwell-Gleichungen. Dann folgt aus Lemma 3.16

$$\nu \cdot E^\omega|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu(\gamma_\tau E^\omega) = (\Gamma_\omega^\nu - \Gamma^\nu)(\gamma_\tau E^\omega) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$$

und $\text{div}(\epsilon E^\omega) = 0$. Es ist also $E^\omega \in V$.

Für alle $v_1 \in H_0^1(B_r; \mathbb{C}^3)$ ist

$$\begin{aligned} i\omega l(v_1) &= \int_S i\omega J \cdot \overline{v_1} \, d\sigma = \int_{B_r} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } E^\omega \cdot \overline{\text{rot } v_1} - \omega^2 \epsilon E^\omega \cdot \overline{v_1} \right) dx \\ &= a_\omega(E^\omega|_{B_r}, v_1), \end{aligned}$$

und für alle $v_2 \in H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$, die in einer Umgebung von S verschwinden, ist

$$\begin{aligned} i\omega l(v_2) &= 0 \\ &= \int_{B_r} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } E^\omega \cdot \overline{\text{rot } v_2} - \omega^2 \epsilon E^\omega \cdot \overline{v_2} \right) dx + \langle \nu \wedge \text{rot } E^\omega|_{\partial B_r}, \gamma_\tau v_2 \rangle \\ &= a_\omega(E^\omega|_{B_r}, v_2). \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.20 erfüllt $E^\omega|_{B_r}$ also (3.46).

Sei nun umgekehrt $\tilde{E}^\omega \in V$ eine Lösung von (3.46) mit $0 < \omega < \omega_0$. Wir zeigen, dass \tilde{E}^ω dann (3.35) und (3.37) aus Lemma 3.16 erfüllt. Dazu sei $u \in \mathcal{D}(B_r; \mathbb{C}^3)$ gegeben, und $\varphi \in H^1(B_r; \mathbb{C})$ sei gemäß Lemma 3.22 die Lösung von

$$\text{div}(\epsilon \nabla \varphi) = \text{div}(\epsilon u) \quad \text{und} \quad \nu \cdot \nabla \varphi|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \nabla \varphi = \omega^2 \varphi|_{\partial B_r}.$$

Dann ist $u - \nabla\varphi \in V$ und aus (3.46) folgt

$$\begin{aligned} & i\omega \int_S J \cdot \bar{u} \, d\sigma \\ &= \int_{B_r} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{E}^\omega \cdot \overline{\operatorname{rot} u} - \omega^2 \epsilon \tilde{E}^\omega \cdot \bar{u} \right) dx + \int_{B_r} \omega^2 \epsilon \tilde{E}^\omega \cdot \overline{\nabla\varphi} \, dx \\ & \quad - \left\langle \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, \gamma_\tau \nabla\varphi \right\rangle - \left(\nu \cdot \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, \omega^2 \varphi|_{\partial B_r} \right)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{div}(\epsilon \tilde{E}^\omega) = 0$ ist

$$\int_{B_r} \omega^2 \epsilon \tilde{E}^\omega \cdot \overline{\nabla\varphi} \, dx = \omega^2 \left\langle \nu \cdot \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r}, \varphi|_{\partial B_r} \right\rangle$$

und aus $\gamma_\tau \nabla\varphi = \nabla_{\partial B_r} \varphi$ (vgl. [12, Sect. 2.3]) und der expliziten Darstellung von Γ_ω^τ und Γ_ω^ν in Definition und Satz 3.11 folgt

$$\left\langle \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, \gamma_\tau \nabla\varphi \right\rangle = \omega^2 \left\langle \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, \varphi|_{\partial B_r} \right\rangle.$$

Kombinieren wir diese drei Gleichungen, so erhalten wir

$$i\omega \int_S J \cdot \bar{u} \, d\sigma = \int_{B_r} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{E}^\omega \cdot \overline{\operatorname{rot} u} - \omega^2 \epsilon \tilde{E}^\omega \cdot \bar{u} \right) dx.$$

\tilde{E}^ω löst also (3.35).

Mit der Greenschen Formel ergibt (3.46) nun für alle $v \in V$

$$\begin{aligned} & \left\langle \nu \wedge \operatorname{rot} \tilde{E}^\omega - \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, \gamma_\tau v \right\rangle \\ &= \left(\nu \cdot \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, \nu \cdot v|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau v \right)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sei $\delta > 0$ so klein, dass $\operatorname{supp}(\epsilon - 1) \subset B_{r-\delta}$. Zu vorgegebenen Normalenkomponenten $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$ mit $\int_{\partial B_r} f \, d\sigma = 0$ existiert nach [20, IX, §1, Remark 8] ein $v \in H^1(B_r \setminus \overline{B_{r-\delta}}; \mathbb{C}^3)$, so dass $\operatorname{div} v = 0$ in $B_r \setminus \overline{B_{r-\delta}}$,

$$\nu \cdot v|_{\partial B_r} = f, \quad \gamma_\tau v = 0 \quad \text{und} \quad v|_{\partial B_{r-\delta}} = 0.$$

Setzen wir v durch 0 auf $B_{r-\delta}$ fort, so ist $v \in V$, und wir erhalten aus (3.47)

$$\left(\nu \cdot \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, f \right)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} = 0$$

für alle $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$ mit $\int_{\partial B_r} f \, d\sigma = 0$. Hieraus folgt, dass die Funktion $\nu \cdot \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \tilde{E}^\omega$ auf ∂B_r konstant ist. Wegen $\operatorname{div}(\epsilon \tilde{E}^\omega) = 0$ und der expliziten Darstellung von Γ_ω^ν in Definition und Satz 3.11 ist außerdem

$$\int_{\partial B_r} \left(\nu \cdot \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \tilde{E}^\omega \right) d\sigma = 0.$$

Es ist also $\nu \cdot \tilde{E}^\omega|_{\partial B_r} = \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \tilde{E}^\omega$.

Analog erhalten wir für jedes $g \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$ ein $v \in V$ mit $\nu \cdot v|_{\partial B_r} = 0$ und $\gamma_\tau v = g$. Aus (3.47) folgt also

$$\left\langle \nu \wedge \operatorname{rot} \tilde{E}^\omega - \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau \tilde{E}^\omega, g \right\rangle = 0 \quad \text{für alle } g \in TH^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C}^3)$$

und damit (3.37). □

3.2.3.4 Existenz und Asymptotik der Maxwell-Lösungen

Satz 3.24

Es existieren $\omega_0 > 0$ und $C > 0$, so dass zu jeder Frequenz $0 < \omega < \omega_0$ und jedem Flächenstrom $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ genau eine Lösung $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ der Maxwell-Gleichung (3.5) mit Ausstrahlungsbedingung (3.14) existiert, und für diese Lösung gilt

$$\|E^\omega|_{B_r} - i\omega E|_{B_r}\|_{H(\operatorname{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)} \leq C\omega^3 \|J\|_{TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)}.$$

Dabei ist $E \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ die Lösung des magnetostatischen Problems (3.15), (3.16) zum Flächenstrom J mit Abfallbedingung (3.18).

Insbesondere hängen die Lösungen der Maxwell-Gleichung stetig von J ab.

Beweis:

Seien $A, A_\omega \in \mathcal{L}(V, V')$ die durch die Sesquilinearformen a und a_ω induzierten Operatoren. Definieren wir $B_\omega := A_\omega - A$, dann gilt für alle $u, v \in V$

$$\begin{aligned} \langle B_\omega u, v \rangle &= - \int_{B_r} \omega^2 \epsilon u \cdot \bar{v} \, dx + \langle (\Gamma_\omega^\tau - \Gamma^\tau) \gamma_\tau u, \gamma_\tau v \rangle \\ &\quad + \langle (\Gamma^\nu - \Gamma_\omega^\nu) \gamma_\tau u, \nu \cdot v|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} \end{aligned}$$

und aus Lemma 3.17 folgt

$$\|B_\omega\|_{\mathcal{L}(V, V')} = O(\omega^2).$$

Gleichung (3.46) in Lemma 3.23 ist äquivalent zu

$$(A + B_\omega)E^\omega|_{B_r} = i\omega l,$$

wobei A nach Lemma 3.21 koerziv, also insbesondere stetig invertierbar ist, und $A^{-1}l = E|_{B_r}$ die Lösung des magnetostatischen Problems ist.

Durch Darstellung als Neumannsche Reihe, vgl. z. B. [1, Satz 3.7, 3.8], erhalten wir die Existenz eines $\omega_0 > 0$ und eines $C' > 0$, so dass für alle $0 < \omega < \omega_0$ der Operator $A + B_\omega$ invertierbar ist und

$$\|(A + B_\omega)^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V', V)} \leq C'\omega^2.$$

Da l stetig von J abhängt, existiert also ein $C > 0$, so dass

$$\|E^\omega|_{B_r} - i\omega E|_{B_r}\|_{H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)} \leq \|E^\omega|_{B_r} - i\omega E|_{B_r}\|_V \leq C\omega^3 \|J\|_{TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)}$$

für alle $0 < \omega < \omega_0$ und alle $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$. \square

3.2.3.5 Behandlung perfekt leitender Objekte

Satz 3.24 gilt ohne weitere Glattheitsannahmen an ϵ oder μ . Er umfasst insbesondere auch den in der Einleitung angesprochenen Fall, dass sich ein magnetisches Objekt in der Nähe der Messebene S befindet, die Permeabilität also in einem beschränkten Gebiet sprunghaft erhöht ist. Wir zeigen nun, wie unser Ergebnis auch auf den Fall perfekt elektrisch leitender Objekte Ω ausgedehnt werden kann. Auf der Oberfläche $\Sigma := \partial\Omega$ solcher Objekte verschwindet die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes. Das durch einen Flächenstrom $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ erzeugte elektrische Feld löst also die Gleichungen

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} E^\omega \right) - \omega^2 \epsilon E^\omega = i\omega J \quad \text{in } Q := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (3.48)$$

$$\nu \wedge E^\omega|_\Sigma = 0 \quad \text{auf } \Sigma = \partial\Omega, \quad (3.49)$$

zusammen mit der Austrahlungsbedingung (3.14).

Dabei ist ν die äußere Normale auf Σ , und wir setzen voraus, dass Ω eine offene, beschränkte Menge ist, die aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten Ω_j mit C^2 -Rändern $\Sigma_j := \partial\Omega_j$ ($j = 1, \dots, m$) und paarweise disjunkten Abschlüssen besteht. Außerdem sei $\overline{\Omega} \subset B_r$, und Ω sei derart, dass $\nabla H^1(\Omega; \mathbb{C})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ ist. Die letzte Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn die Zusammenhangskomponenten von

Ω einfach zusammenhängend sind oder durch endlich viele reguläre Schnitte in einfach zusammenhängende Gebiete überführt werden können. Für den Beweis dieser Tatsache, die Voraussetzungen an die Schnitte und den Zusammenhang zwischen $\nabla H^1(\Omega)$ und dem Raum der rotationsfreien Funktionen verweisen wir auf [20, IX, §1].

Lemma 3.25

Jede Lösung $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ von (3.48) erfüllt

$$\text{div}(\epsilon E^\omega) = 0 \quad \text{in } Q, \quad (3.50)$$

$$\langle \nu \cdot \epsilon E^\omega|_{\Sigma_j}, \mathbf{1}_{\Sigma_j} \rangle = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\}, \quad (3.51)$$

wobei $\mathbf{1}_{\Sigma_j}$ die konstante Funktion $x \mapsto 1$ für alle $x \in \Sigma_j$ bezeichnet.

Beweis:

Gleichung (3.50) folgt durch Divergenzbildung aus (3.48). Zum Beweis von (3.51) sei $j \in \{1, \dots, m\}$ und $\varphi \in W^1(Q; \mathbb{C})$ eine Funktion mit beschränktem Träger und den Eigenschaften

$$\varphi|_{\Sigma_j} = 1, \quad \text{supp } \varphi \cap \bar{S} = \emptyset \quad \text{sowie} \quad \text{supp } \varphi \cap \bar{\Omega}_k = \emptyset \quad \text{für alle } k \neq j.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & - \langle \nu \cdot \epsilon E^\omega|_{\Sigma_j}, \mathbf{1}_{\Sigma_j} \rangle \\ &= \int_Q \epsilon E^\omega \cdot \overline{\nabla \varphi} \, dx = \frac{1}{\omega^2} \int_Q \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } E^\omega \right) \cdot \overline{\nabla \varphi} \, dx \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_Q \frac{1}{\mu} \text{rot } E^\omega \cdot \overline{\text{rot}(\nabla \varphi)} \, dx + \frac{1}{\omega^2} \left\langle \nu \wedge \frac{1}{\mu} \text{rot } E^\omega|_{\Sigma_j}, (\nu \wedge \nabla \varphi|_{\Sigma_j}) \wedge \nu \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

und damit (3.51). □

Wir werden (für hinreichend kleine Frequenzen ω) die eindeutige Existenz der Lösungen $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ und die Konvergenz von $\frac{1}{i\omega} E^\omega$ gegen die Lösung $E \in W^1(Q; \mathbb{C}^3)$ des entsprechenden magnetostatischen Problems

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } E \right) = J \quad \text{in } Q, \quad (3.52)$$

$$\text{div}(\epsilon E) = 0 \quad \text{in } Q, \quad (3.53)$$

$$\nu \wedge E|_\Sigma = 0 \quad \text{auf } \Sigma, \quad (3.54)$$

$$\langle \nu \cdot \epsilon E|_{\Sigma_j}, \mathbf{1}_{\Sigma_j} \rangle = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\} \quad (3.55)$$

mit Abfallbedingung (3.18) zeigen.

Für die dazugehörigen variationellen Formulierungen definieren wir

$$V_0 := \{v \in V : v|_\Omega = \nabla\varphi \quad \text{mit einem } \varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{C})\}.$$

Aus der vorausgesetzten Abgeschlossenheit von $\nabla H^1(\Omega; \mathbb{C})$ in $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ erhalten wir, dass V_0 ein abgeschlossener Unterraum von V ist.

Lemma 3.26

Es existiert eine stetige, lineare Abbildung

$$\alpha : V_0 \rightarrow W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}),$$

so dass für alle $v \in V_0$

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha v) &= v && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(\epsilon \nabla(\alpha v)) &= 0 && \text{in } Q, \\ \langle \epsilon \partial_\nu(\alpha v)^+ |_{\Sigma_j}, \mathbf{1}_{\Sigma_j} \rangle &= 0 && \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Beweis:

Zu $v \in V_0$ wählen wir $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{C})$ derart, dass

$$\nabla\varphi = v|_\Omega \quad \text{und} \quad \int_{\Sigma_j} \varphi \, d\sigma = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dann folgt aus der Poincaréschen Ungleichung, dass φ stetig von v abhängt. Durch $\varphi|_Q := \tilde{\varphi}$ mit der Lösung $\tilde{\varphi} \in W^1(Q; \mathbb{C})$ von

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\epsilon \nabla \tilde{\varphi}) &= 0 && \text{in } Q, \\ \tilde{\varphi}|_\Sigma &= \varphi|_\Sigma && \text{auf } \Sigma, \end{aligned}$$

können wir φ zu einer Funktion in $W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ fortsetzen, die stetig von $v \in V_0$ abhängt und

$$\nabla\varphi = v \quad \text{in } \Omega, \quad \text{sowie} \quad \operatorname{div}(\epsilon \nabla\varphi) = 0 \quad \text{in } Q$$

erfüllt.

Für $j \in \{1, \dots, m\}$ existiert genau ein $\chi_j \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ mit

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \chi_j) = 0 \quad \text{in } Q \quad \text{und} \quad \chi_j = \delta_{jk} \quad \text{in } \Omega_k, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Durch

$$\beta(\chi_j) := \left(\langle \epsilon \partial_\nu \chi_j^+ |_{\Sigma_k}, \mathbf{1}_{\Sigma_k} \rangle \right)_{k=1}^m \in \mathbb{C}^m$$

definieren wir eine lineare Abbildung $\beta : \text{span}\{\chi_j : j = 1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{C}^m$. Ist $\beta(\psi) = 0$ für eine Funktion $\psi \in \text{span}\{\chi_j : j = 1, \dots, m\}$, so ist

$$\int_Q \epsilon |\nabla \psi|^2 dx = - \sum_{k=1}^m \langle \epsilon \partial_\nu \psi^+ |_{\Sigma_k}, \psi |_{\Sigma_k} \rangle = 0$$

und damit $\psi = 0$. β ist also eine injektive lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen gleicher Dimension und besitzt deshalb eine stetige Inverse. Die Funktion

$$\alpha : v \mapsto \varphi - \beta^{-1} \left(\langle \epsilon \partial_\nu \varphi^+ |_{\Sigma_k}, \mathbf{1}_{\Sigma_k} \rangle_{k=1}^m \right)$$

ist somit stetig und besitzt offenbar die gewünschten Eigenschaften. \square

Wir gehen nun analog zu dem Fall magnetischer Einschlüsse vor und zeigen zunächst eine Variationsformulierung für das magnetostatische Problem. Dazu schränken wir die in Abschnitt 3.2.3.2 definierte Sesquilinearform a und das antilineare Funktional l auf V_0 ein, und erhalten so

$$\tilde{a} : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \tilde{l} : V_0 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Lemma 3.27

Die Sesquilinearform \tilde{a} ist koerziv. $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ löst genau dann das magnetostatische Problem (3.52)–(3.55) mit Abfallbedingung (3.18), wenn $E|_{B_r \cap Q} = (\tilde{E} - \nabla(\alpha \tilde{E}))|_{B_r \cap Q}$ mit der Lösung $\tilde{E} \in V_0$ von

$$\tilde{a}(\tilde{E}, v) = \tilde{l}(v) \quad \text{für alle } v \in V_0. \tag{3.56}$$

Insbesondere ist das magnetostatische Problem eindeutig lösbar und die Lösung $E|_{B_r \cap Q} \in H(\text{rot}, B_r \cap Q; \mathbb{C}^3)$ hängt stetig von $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ ab.

Beweis:

Die Koerzivität von \tilde{a} folgt sofort aus der von a (vgl. Lemma 3.21), und mit demselben Beweis wie in Lemma 3.16 erhalten wir, dass $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ genau dann das magnetostatische Problem (3.52)–(3.55) mit Abfallbedingung (3.18) löst, wenn $E|_{B_r \cap Q}$ die Gleichungen (3.52) und (3.53) in $B_r \cap Q$, sowie die Randbedingungen (3.54),(3.55) auf Σ und (3.41), (3.42) auf ∂B_r erfüllt.

Sei nun $E \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ eine Lösung des magnetostatischen Problems (3.52)–(3.55) mit Abfallbedingung (3.18) und $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ die Lösung von

$$\text{div}(\epsilon \nabla \varphi) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma, \quad [\epsilon \partial_\nu \varphi]_\Sigma = -\nu \cdot \epsilon E|_\Sigma.$$

Setzen wir E durch 0 auf Ω fort und definieren $\tilde{E} := E + \nabla\varphi$, dann folgt aus Lemma 3.15, dass $\tilde{E} \in V_0$ ist, und aus der Definition von α , dass

$$E|_{B_r \cap Q} = (\tilde{E} - \nabla(\alpha\tilde{E}))|_{B_r \cap Q}.$$

Für alle $v \in V_0$ erhalten wir wie im Beweis von Lemma 3.21

$$\begin{aligned} l(v) &= \int_S J \cdot \bar{v} \, d\sigma = \int_S J \cdot \overline{(v - \nabla(\alpha v))} \, d\sigma \\ &= \int_{Q \cap B_r} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \overline{\operatorname{rot} (v - \nabla(\alpha v))} \, dx + \langle \Gamma^\tau \gamma_\tau E, \gamma_\tau (v - \nabla(\alpha v)) \rangle \\ &= \int_{B_r} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{E} \cdot \overline{\operatorname{rot} v} \, dx + \langle \Gamma^\tau \gamma_\tau \tilde{E}, \gamma_\tau v \rangle, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass aus der Symmetrie von Γ^τ und Lemma 3.15 folgt

$$\langle \Gamma^\tau \gamma_\tau E, \gamma_\tau \nabla(\alpha v) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma^\tau \gamma_\tau \nabla(\alpha \tilde{E}), \gamma_\tau v \rangle = 0.$$

Außerdem folgt aus Lemma 3.15

$$\nu \cdot \tilde{E}|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \tilde{E} = \nu \cdot E|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau E = 0.$$

\tilde{E} löst also (3.56)

Es sei nun umgekehrt $\tilde{E} \in V_0$ eine Lösung von (3.56), und

$$E|_{B_r \cap Q} := (\tilde{E} - \nabla(\alpha\tilde{E}))|_{B_r \cap Q} \in H(\operatorname{rot}, B_r \cap Q; \mathbb{C}^3).$$

Dann folgt aus den Definitionen von V_0 und α sofort (3.53) auf $B_r \cap Q$, sowie (3.54) und (3.55).

Da zu jedem $v \in \mathcal{D}(B_r \cap Q; \mathbb{C}^3)$ ein $\psi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ existiert mit

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \psi) = -\operatorname{div}(\epsilon v)$$

und damit wegen Lemma 3.15 $v + \nabla\psi \in V_0$ gilt, folgt aus (3.56)

$$\begin{aligned} &\int_S J \cdot \bar{v} \, d\sigma \\ &= \tilde{l}(v + \nabla\psi) = \tilde{a}(\tilde{E}, v + \nabla\psi) \\ &= \int_{Q \cap B_r} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \cdot \overline{\operatorname{rot} v} \, dx + \langle \Gamma^\tau \gamma_\tau \tilde{E}, \gamma_\tau \nabla\psi \rangle \\ &\quad + \left(\nu \cdot \tilde{E}|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \tilde{E}, \nu \cdot \nabla\psi|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \nabla\psi \right)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} \end{aligned}$$

für alle $v \in \mathcal{D}(B_r \cap Q; \mathbb{C}^3)$. Aus der Symmetrie von Γ^τ und Lemma 3.15 erhalten wir

$$\left\langle \Gamma^\tau \gamma_\tau \tilde{E}, \gamma_\tau \nabla \psi \right\rangle = 0, \quad \nu \cdot \nabla \psi|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \nabla \psi = 0$$

und damit $\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \right) = J$ in $B_r \cap Q$. (3.41) und (3.42) folgen nun genauso wie im Beweis von Lemma 3.23. \square

Zur variationellen Behandlung der Maxwell-Gleichungen schränken wir die Sesquilinearform a_ω aus Abschnitt 3.2.3.3 nicht nur auf V_0 ein, sondern ersetzen sie (für hinreichend kleine ω) durch

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\omega(\tilde{u}, \tilde{v}) := & \int_{B_r} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{u} \cdot \overline{\operatorname{rot} \tilde{v}} - \omega^2 \epsilon u \cdot v \right) dx + \langle \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau u, \gamma_\tau v \rangle \\ & + (\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau u, \nu \cdot \tilde{v}|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \tilde{v})_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} \end{aligned}$$

für alle $\tilde{u}, \tilde{v} \in V_0$, wobei $u := \tilde{u} - \nabla(\alpha \tilde{u})$ und $v := \tilde{v} - \nabla(\alpha \tilde{v})$. Dabei verwenden wir, dass nach Lemma 3.15 und Lemma 3.17 für hinreichend kleine Frequenzen ω

$$\nu \cdot u|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau u = \nu \cdot \tilde{u}|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \tilde{u} - (\Gamma_\omega^\nu - \Gamma^\nu) \gamma_\tau u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$$

ist. Wir können nun eine Variationsformulierung von (3.48), (3.49) angeben:

Lemma 3.28

Es existiert ein $\omega_0 > 0$, so dass für alle $0 < \omega < \omega_0$ $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ genau dann die Maxwell-Gleichungen (3.48), (3.49) und (3.14) löst, wenn $E^\omega|_{B_r \cap Q} = (\tilde{E}^\omega - \nabla(\alpha \tilde{E}^\omega))|_{B_r \cap Q}$ mit einer Lösung $\tilde{E}^\omega \in V_0$ von

$$\tilde{a}_\omega(\tilde{E}^\omega, \tilde{v}) = i\omega \tilde{l}(\tilde{v}) \quad \text{für alle } \tilde{v} \in V_0. \quad (3.57)$$

Beweis:

Auch hier erhalten wir mit demselben Beweis wie in Lemma 3.16, dass $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ genau dann die Maxwell-Gleichungen (3.48), (3.49) und (3.14) löst, wenn $E^\omega|_{B_r \cap Q}$ die Gleichung (3.48) in $B_r \cap Q$, sowie die Randbedingungen (3.49) auf Σ und (3.37) auf ∂B_r erfüllt.

Sei nun $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ eine Lösung der Maxwell-Gleichungen (3.48), (3.49) und (3.14). Wie im Beweis von Lemma 3.27 sei $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ die Lösung von

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi) = 0 \quad \text{in } Q, \quad [\epsilon \partial_\nu \varphi]_\Sigma = -\nu \cdot \epsilon E^\omega|_\Sigma,$$

und wir setzen E^ω durch 0 auf Ω fort. Da für hinreichend kleine ω gilt, dass $\nu \cdot E^\omega|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau E^\omega \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})$ ist (vgl. Abschnitt 3.2.3.3), erhalten wir wieder aus Lemma 3.15, dass $\tilde{E}^\omega := E^\omega + \nabla \varphi \in V_0$, und aus der Definition von α , dass $\varphi = \alpha \tilde{E}^\omega$, also

$$E^\omega|_{B_r \cap Q} = (\tilde{E}^\omega - \nabla(\alpha \tilde{E}^\omega))|_{B_r \cap Q}.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.23 folgt für alle $\tilde{v} \in V_0$ mit $v := \tilde{v} - \nabla(\alpha \tilde{v})$

$$\begin{aligned} i\omega l(\tilde{v}) &= \int_S i\omega J \cdot \bar{\tilde{v}} \, d\sigma = \int_S i\omega J \cdot \bar{v} \, d\sigma \\ &= \int_{Q \cap B_r} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E^\omega \cdot \overline{\operatorname{rot} v} - \omega^2 \epsilon E^\omega \cdot \bar{v} \right) dx + \langle \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau E^\omega, \gamma_\tau v \rangle \\ &= \int_{B_r} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{E}^\omega \cdot \overline{\operatorname{rot} \tilde{v}} - \omega^2 \epsilon E^\omega \cdot \bar{v} \right) dx + \langle \Gamma_\omega^\tau \gamma_\tau E^\omega, \gamma_\tau v \rangle. \end{aligned}$$

und damit

$$\tilde{a}_\omega(\tilde{E}^\omega, \tilde{v}) = i\omega \tilde{l}(\tilde{v}) \quad \text{für alle } \tilde{v} \in V_0.$$

Wenden wir Lemma 3.22 auf ein $u \in \mathcal{D}(Q; \mathbb{C}^3)$ an, so erhalten wir eine Funktion $\psi \in H^1(B_r; \mathbb{C})$ mit

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \psi) = \operatorname{div}(\epsilon u) \quad \text{in } B_r, \quad \nu \cdot \nabla \psi|_{\partial B_r} - \Gamma_\omega^\nu \gamma_\tau \nabla \psi = \omega^2 \psi|_{\partial B_r}$$

und $u - \nabla \psi \in V_0$. Die Rückrichtung folgt deshalb wie im Beweis von Lemma 3.23. \square

Satz 3.29

Es existieren $\omega_0 > 0$ und $C > 0$, so dass zu jeder Frequenz $0 < \omega < \omega_0$ und jedem Flächenstrom $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ genau eine Lösung $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ der Maxwell-Gleichungen (3.48), (3.49) und (3.14) existiert, und für diese Lösung gilt

$$\|E^\omega|_{B_r \cap Q} - i\omega E|_{B_r \cap Q}\|_{H(\operatorname{rot}, B_r \cap Q; \mathbb{C}^3)} \leq C\omega^3 \|J\|_{TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)}.$$

Dabei ist $E \in H_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ die Lösung des magnetostatischen Problems (3.52)–(3.55) zum Flächenstrom J mit Abfallbedingung (3.18).

Insbesondere hängen die Lösungen der Maxwell-Gleichung stetig von J ab.

Beweis:

Für hinreichend kleine Frequenzen ω erhalten wir aus Lemma 3.17 ein $C_1 > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_\omega(\tilde{u}, \tilde{v}) - \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v})| &= \left| - \int_{B_r} \omega^2 \epsilon u \cdot \bar{v} \, dx + \langle (\Gamma_\omega^\tau - \Gamma^\tau) \gamma_\tau u, \gamma_\tau v \rangle \right. \\ &\quad \left. + ((\Gamma^\nu - \Gamma_\omega^\nu) \gamma_\tau u, \nu \cdot \tilde{v}|_{\partial B_r} - \Gamma^\nu \gamma_\tau \tilde{v})_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B_r; \mathbb{C})} \right| \\ &\leq C_1 \omega^2 \|u\|_{H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)} (\|v\|_{H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)} + \|\tilde{v}\|_{V_0}) \end{aligned}$$

für alle $\tilde{u}, \tilde{v} \in V_0$, $u := \tilde{u} - \nabla(\alpha \tilde{u})$ und $v := \tilde{v} - \nabla(\alpha \tilde{v})$.

Mit Lemma 3.26 folgt, dass $u, v \in H(\text{rot}, B_r; \mathbb{C}^3)$ stetig von $\tilde{u}, \tilde{v} \in V_0$ abhängen, es existiert also ein $C_2 > 0$, so dass

$$|\tilde{a}_\omega(\tilde{u}, \tilde{v}) - \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v})| \leq C_2 \omega^2 \|\tilde{u}\|_{V_0} \|\tilde{v}\|_{V_0} \quad \text{für alle } \tilde{u}, \tilde{v} \in V_0.$$

Wie in Satz 3.24 folgt damit, dass für hinreichend kleine ω die Gleichung (3.57) genau eine Lösung $\tilde{E}^\omega \in V_0$ besitzt, und eine Konstante $C_3 > 0$ existiert, so dass

$$\left\| \tilde{E}^\omega - i\omega \tilde{E} \right\|_{V_0} \leq C_3 \omega^3 \|J\|_{TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)},$$

wobei $\tilde{E} \in V_0$ die Lösung von (3.56) ist. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.27, Lemma 3.28 und der Stetigkeit von α . \square

3.2.4 Die Messoperatoren

Wir kehren zurück zu der zu Beginn des Kapitels geschilderten Problemstellung, auf S elektrische Felder zu verschiedenen Flächenströmen fester Frequenz $\omega > 0$ zu messen. Dies wird beschrieben durch den Messoperator

$$\Lambda^\omega : TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3) \rightarrow TL^2(S; \mathbb{C}^3), \quad J \mapsto (\nu \wedge E^\omega|_S) \wedge \nu,$$

wobei zu $J \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ wieder E^ω die Lösung der Maxwell-Gleichungen mit Frequenz ω sei, d. h. $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ löse (3.5) und (3.14) (ohne perfekt leitende Objekte) bzw. $E^\omega \in H_{\text{loc}}(\text{rot}, Q; \mathbb{C}^3)$ löse (3.48), (3.49) und (3.14) (mit perfekt leitenden Objekten Ω und den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.2.3.5).

Nach Lemma 3.20 und Satz 3.24 bzw. Satz 3.29 ist Λ^ω für hinreichend kleine Frequenzen ω ein wohldefinierter, kompakter Operator, und die Messungen stimmen in guter Näherung mit entsprechenden magnetostatischen Messungen überein, wenn diese mit gleichen Parametern ϵ und μ durchgeführt werden.

Die Dielektrizität ϵ tritt bei den magnetostatischen Messungen jedoch lediglich in den Normierungsbedingungen (3.16) bzw. (3.53) und (3.55) auf. Ist E das magnetostatische Potential zur Dielektrizität ϵ und \tilde{E} dasjenige zur konstanten Dielektrizität $\tilde{\epsilon} = 1$, so folgt für den Fall ohne perfekt leitende Objekte aus der Eindeutigkeit des magnetostatischen Problems und Lemma 3.4, dass $E = \tilde{E} + \nabla\varphi$ ist, wobei $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ die Gleichung $\operatorname{div}(\epsilon\nabla\varphi) = -\operatorname{div}(\epsilon\tilde{E})$ löst (vgl. auch den Beweis von Satz 3.8). Analoges gilt in Anwesenheit eines perfekt leitenden Objektes mit einem φ , das auf dem Rand des Objektes lokal konstant ist. Aufgrund unserer Annahme, dass ϵ in einer Umgebung von S konstant ist, ist in beiden Fällen φ in einer Umgebung von S analytisch.

Bezeichnen wir mit $N_S(\mathbb{C}^3)$ den Abschluss von

$$\{(\nu \wedge \nabla\varphi|_S) \wedge \nu : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})\} \subset TL^2(S; \mathbb{C}^3)$$

bezüglich der $TL^2(S; \mathbb{C}^3)$ -Norm, dann unterscheiden sich die magnetostatischen Messungen zu unterschiedlichen Dielektrizitäten also nicht in dem Faktorraum $TL^2(S; \mathbb{C}^3)/N_S(\mathbb{C}^3)$, den wir mit dem Antidualraum des orthogonalen Komplementes von $N_S(\mathbb{C}^3)$, also mit $TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$, identifizieren können.³

Wir definieren den Messoperator des magnetostatischen Problems deshalb als Abbildung in diesen Faktorraum und erhalten so die nach Lemma 3.20 kompakte Abbildung

$$\Lambda : TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3) \rightarrow TL^2(S; \mathbb{C}^3)/N_S(\mathbb{C}^3), \quad J \mapsto (\nu \wedge E|_S) \wedge \nu + N_S(\mathbb{C}^3),$$

wobei E die Lösung des magnetostatischen Problems (3.15), (3.16) und (3.18) (ohne perfekt leitende Objekte) bzw. (3.52)–(3.55) und (3.18) (mit perfekt leitenden Objekten) ist. Durch diese Definition hängt Λ nicht von ϵ ab, wir können also $\epsilon = 1$ setzen, ohne dass sich die Restklasse $(\nu \wedge E|_S) \wedge \nu + N_S(\mathbb{C}^3)$ ändert.

Ohne die Notation zu ändern schränken wir auch den Messoperator Λ^ω auf diesen Faktorraum ein, betrachten ihn also als Abbildung von $TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3)$ nach $TL^2(S; \mathbb{C}^3)/N_S(\mathbb{C}^3)$. Damit erhalten wir aus Satz 3.24 bzw. Satz 3.29, dass

$$\Lambda = \frac{1}{i\omega} \Lambda^\omega + O(\omega^2) \quad \text{in } \mathcal{L}(TL_\diamond^2(S; \mathbb{C}^3), TL^2(S; \mathbb{C}^3)/N_S(\mathbb{C}^3)),$$

wenn Λ und Λ^ω zu Messungen mit derselben Permeabilität μ aber nicht notwendigerweise derselben Dielektrizität ϵ gehören.

³Vergleiche auch [20, IX, §1, Prop. 1] für andere mögliche orthogonale Zerlegungen von $TL^2(S; \mathbb{C}^3) \cong L^2(S; \mathbb{C}^2)$ in Gradientenfelder und divergenzfreie Felder.

Anstelle des Problems, magnetische Objekte durch niederfrequente elektromagnetische Messungen Λ^ω zu lokalisieren, können wir im Folgenden also das Problem betrachten, den Ort dieser Objekte aus magnetostatischen Messungen Λ zu rekonstruieren. Dabei spielt die Dielektrizität ϵ der Objekte und des umgebenden Raumes keine Rolle. Insbesondere muss ϵ weder glatt noch bekannt sein, sondern lediglich unsere zu Beginn dieses Abschnitts geforderte Voraussetzung erfüllen, dass es konstant in einer Umgebung von S und außerhalb eines beschränkten Gebietes gleich eins ist.

Die magnetostatischen Gleichungen sind reelle Differentialgleichungen, wir verlieren deshalb keine Information, wenn wir von nun an Λ als Operator zwischen reellen Hilberträumen reellwertiger Funktionen betrachten, d. h.

$$\Lambda : H(S) \rightarrow H'(S)$$

mit $H(S) := TL^2(S; \mathbb{R}^3)/N_S$ und $H'(S) := TL_\diamond^2(S; \mathbb{R}^3)$, wobei N_S der analog $N_S(\mathbb{C}^3)$ definierte reelle Raum ist. Offenbar gelten die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.1 auch für die entsprechenden Räume reellwertiger Funktionen.

Für den praktischen Umgang mit $H(S)$ bemerken wir noch, dass für jedes $u \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{R}^3)$ und jede Funktion $v \in TL^2(S; \mathbb{R}^3)$, die in einer Restklasse $v + N_S \in H(S)$ liegt, gilt

$$\langle u, v + N_S \rangle_{H'(S) \times H(S)} = \int_S u \cdot v \, d\sigma.$$

Wir schreiben im Folgenden wie in Abschnitt 2.5 Restklassen wie Funktionen, also z. B. v statt $v + N_S$.

3.3 Das inverse Problem

Wir betrachten nun das inverse Problem, den Ort eines magnetischen oder perfekt leitenden Objektes durch Messungen des elektrischen Feldes zu verschiedenen angelegten Flächenströmen J zu ermitteln. Wie in Abschnitt 3.2 untersuchen wir dabei zunächst den Fall ohne perfekt leitende Objekte.

3.3.1 Magnetische Objekte

Während die bisherigen Ergebnisse für allgemeine Permeabilitätsverteilungen galten, beschränken wir uns jetzt auf den Spezialfall, dass die Permeabilität

außerhalb eines magnetischen Objektes Ω homogen und innerhalb dieses Objektes um einen Anteil μ_1 erhöht ist:⁴

$$\mu(x) = 1 + \chi_\Omega(x)\mu_1(x), \quad \mu_1 \in L_+^\infty(\Omega).$$

Ω sei dabei eine offene, beschränkte Menge, die aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten Ω_j mit C^2 -Rändern $\Sigma_j := \partial\Omega_j$ ($j = 1, \dots, m$) und paarweise disjunkten Abschlüssen besteht. Außerdem setzen wir voraus, dass Ω ein zusammenhängendes Komplement $Q := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ besitzt, und dass sich Ω unterhalb der Messebene S befindet, also

$$\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}_-^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot e_3 < 0\}.$$

Unser Ziel ist es, einen Algorithmus zu finden, um Ω aus elektromagnetischen Messungen niedriger Frequenz zu rekonstruieren. Da sich aufgrund der Ergebnisse des letzten Abschnitts aus diesen elektromagnetischen Messungen (näherungsweise) die Ergebnisse magnetostatischer Messungen berechnen lassen, können wir stattdessen das Problem betrachten, Ω aus magnetostatischen Messungen zu bestimmen, d. h. aus dem Operator

$$\Lambda_1 : H'(S) \rightarrow H(S), \quad J \mapsto (\nu \wedge E_1|_S) \wedge \nu,$$

wobei $E_1 \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ die Lösung ist von

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu(x)} \operatorname{rot} E_1 \right) = J, \quad \operatorname{div} E_1 = 0.$$

Auf dieses Problem können wir unsere allgemeine Theorie aus Kapitel 2 für die Faktorisierungsmethode anwenden. Dazu bezeichnen wir wieder mit Λ_0 den Messoperator zu Referenzmessungen ohne das gesuchte Objekt Ω , also

$$\Lambda_0 : H'(S) \rightarrow H(S), \quad J \mapsto (\nu \wedge E_0|_S) \wedge \nu,$$

wobei $E_0 \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ die Lösung ist von

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E_0) = J, \quad \operatorname{div} E_0 = 0.$$

Neben dem schon definierten reellen Hilbertraum $H(S)$ benötigen wir noch die Räume

$$\begin{aligned} H(B) &:= \{u \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0\}, \\ H(Q) &:= \{u \in W^1(Q; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0, \quad \nu \cdot u|_\Sigma = 0\} / N_Q, \\ H(\Omega) &:= \{u \in W^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0, \quad \nu \cdot u|_\Sigma = 0\} / N_\Omega, \\ H(\Sigma) &:= TH^{\frac{1}{2}}(\Sigma; \mathbb{R}^3) / N_\Sigma, \end{aligned}$$

⁴Analoge Ergebnisse erhalten wir auch für den Fall verminderter Permeabilität, vgl. Bemerkung 2.15.

wobei ν die äußere Normale auf Σ bezeichnet und die Faktorräume gebildet werden bezüglich

$$\begin{aligned} N_Q &:= \{u \in W^1(Q; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{rot} u = 0, \quad \nu \cdot u|_\Sigma = 0\}, \\ N_\Omega &:= \{u \in W^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{rot} u = 0, \quad \nu \cdot u|_\Sigma = 0\}, \\ N_\Sigma &:= \{g \in TH^{\frac{1}{2}}(\Sigma; \mathbb{R}^3) : \operatorname{rot}_\Sigma g = 0\}. \end{aligned}$$

Wir definieren den Einschränkungoperator

$$E_Q : H(B) \rightarrow H(Q), \quad u \mapsto u|_Q - \nabla\varphi,$$

wobei $\varphi \in W^1(Q; \mathbb{R})$ die Lösung ist von

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{auf } Q, \quad \partial_\nu\varphi|_\Sigma = \nu \cdot u|_\Sigma.$$

Mit [52, Theorem 2.5.21] folgt aus $\nu \cdot u|_\Sigma \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma; \mathbb{R})$, dass $\nabla\varphi \in W^1(Q; \mathbb{R}^3)$ ist und stetig von $\nu \cdot u|_\Sigma$, also auch von $u \in H(B)$, abhängt. E_Q ist also stetig. Da für alle $u \in H(B)$ gilt, dass $\int_\Sigma \nu \cdot u \, d\sigma = 0$ ist, können wir analog auch den Einschränkungoperator $E_\Omega : H(B) \rightarrow H(\Omega)$ definieren.

Funktionen aus N_Q sind rotationsfrei und stimmen daher in einer Umgebung von S mit Gradientenfeldern überein (vgl. [20, IX, §1, Lemma 4]). Es gilt also

$$(\nu \wedge u|_S) \wedge \nu \in N_S \quad \text{für alle } u \in N_Q,$$

so dass der Spuroperator $u \mapsto (\nu \wedge u|_S) \wedge \nu$ eine stetige Abbildung

$$\gamma_{Q \rightarrow S} : H(Q) \rightarrow H(S)$$

zwischen den Faktorräumen $H(Q)$ und $H(S)$ induziert. Analoges gilt aufgrund der Definition von N_Σ für die Spurooperatoren von Q und Ω auf Σ , so dass wir die Spurooperatoren

$$\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} : H(Q) \rightarrow H(\Sigma) \quad \text{und} \quad \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} : H(\Omega) \rightarrow H(\Sigma)$$

erhalten. Die Operatoren

$$\gamma_{B \rightarrow S} := \gamma_{Q \rightarrow S} E_Q \quad \text{und} \quad \gamma_{B \rightarrow \Sigma} := \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} E_Q$$

stimmen dann offenbar mit den Einschränkungen der Spurooperatoren auf S bzw. Σ auf die Faktorräume $H(S)$ bzw. $H(\Sigma)$ überein.

Außerdem definieren wir die Bilinearformen

$$\begin{aligned} a_Q(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx && \text{für alle } u, v \in H(Q), \\ a_{\Omega,0}(u, v) &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx && \text{für alle } u, v \in H(\Omega), \\ a_{\Omega,1}(u, v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_1(x)} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx && \text{für alle } u, v \in H(\Omega). \end{aligned}$$

Lemma 3.30

Die Hilberträume $H(S)$, $H(\Sigma)$, $H(B)$, $H(\Omega)$ und $H(Q)$ mit den Operatoren E_Q , E_{Ω} , $\gamma_{Q \rightarrow S}$, $\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}$ und $\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}$ erfüllen die Bedingungen (V1)–(V3) in Voraussetzung und Definition 2.8.

Die Bilinearformen a_Q , $a_{\Omega,0}$ und $a_{\Omega,1}$ erfüllen die Bedingungen in Voraussetzung und Definition 2.11.

Beweis:

Nach Lemma 3.2 und Korollar 3.3(c) existiert ein $C > 0$, so dass

$$\int_Q |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_Q |\operatorname{rot} u|^2 \, dx + C \int_{\Sigma} |(\nu \wedge u|_{\Sigma}) \wedge \nu|^2 \, d\sigma$$

für alle $u \in W^1(Q; \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} u = 0$ und $\nu \cdot u|_{\Sigma} = 0$. Da die Abbildung

$$u \mapsto (\nu \wedge u|_{\Sigma}) \wedge \nu \in L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3)$$

kompakt ist, folgt aus Lemma 2.2 und Lemma 2.3, dass a_Q eine koerzive Bilinearform auf $H(Q)$ ist. Genauso folgt, dass $a_{\Omega,0}$ und $a_{\Omega,1}$ auf $H(\Omega)$ koerziv sind.

Nach Korollar 3.3(b) ist auch die Bilinearform

$$(u, v) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx$$

in $H(B)$ koerziv, und wir erhalten insbesondere, dass (V1) erfüllt ist.

Aus [20, IX, §1, Remark 8] und der Definition von N_{Σ} folgt, dass $\gamma_{Q \rightarrow \Sigma}$ und $\gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma}$ stetige Rechtsinversen besitzen, (V3) ist also erfüllt. Offenbar gilt auch

$$\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} E_Q = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} E_{\Omega}.$$

Um (V2*) zu zeigen, seien $u_Q \in H(Q)$ und $u_{\Omega} \in H(\Omega)$ mit

$$\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} u_Q = \gamma_{\Omega \rightarrow \Sigma} u_{\Omega}.$$

Dann existiert nach Definition von $H(\Sigma)$ ein $g \in TH^{\frac{1}{2}}(\Sigma; \mathbb{R}^3)$ mit $\text{rot}_\Sigma g = 0$ und

$$(\nu \wedge u_Q|_\Sigma) \wedge \nu = (\nu \wedge u_\Omega|_\Sigma) \wedge \nu + g.$$

Aus Korollar 3.3 und dem Satz von Lax-Milgram folgt, dass eine Funktion $v \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ existiert, so dass $\text{div } v = 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}^3} \text{rot } v \cdot \text{rot } w \, dx = \int_\Sigma g \cdot (\nu \wedge w|_\Sigma) \, d\sigma \quad (3.58)$$

für alle $w \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ mit $\text{div } w = 0$. Für alle $\varphi \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ gilt $\nu \wedge \nabla \varphi|_\Sigma = \overrightarrow{\text{rot}}_\Sigma \varphi|_\Sigma$ (vgl. z. B. [12, Chp. 2, Lemma 4]), deshalb folgt aus Lemma 3.4, dass (3.58) für alle $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ gilt. Es ist also

$$\text{rot rot } v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma.$$

Insbesondere löst v komponentenweise die homogene Laplace-Gleichung in einer Umgebung von $\mathbb{R}^3 \setminus B_r$, so dass wie im Beweis von Lemma 3.4 aus [52, Theorem 2.5.21] folgt, dass $\text{rot } v \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{R}^3)$.

Durch Anwendung der Greenschen Formel in Q und Ω erhalten wir

$$[(\nu \wedge \text{rot } v) \wedge \nu]_\Sigma = -g.$$

Definieren wir die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $u|_\Omega := u_\Omega + \text{rot } v|_\Omega$ und $u|_Q := u_Q + \text{rot } v|_Q$, dann gilt deshalb

$$\begin{aligned} \text{rot } u|_\Omega &\in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), & \text{div } u &= 0 & \text{in } \Omega, & & [\nu \cdot u]_\Sigma &= 0, \\ \text{rot } u|_Q &\in L^2(Q; \mathbb{R}^3), & \text{div } u &= 0 & \text{in } Q, & & [(\nu \wedge u) \wedge \nu]_\Sigma &= 0, \end{aligned}$$

also $\text{rot } u \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und $\text{div } u = 0$ in \mathbb{R}^3 . Mit $u \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r}; \mathbb{R}^3)$ und Korollar 3.3 erhalten wir daraus $u \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, und aus $\text{rot rot } v = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ folgt

$$E_Q u = u_Q \quad \text{und} \quad E_\Omega u = u_\Omega.$$

(V2*) ist also erfüllt. □

Bezeichnen wir wieder mit A_Q , $A_{\Omega,0}$ und $A_{\Omega,1}$ die von den Bilinearformen a_Q , $a_{\Omega,0}$ und $a_{\Omega,1}$ induzierten Operatoren und definieren

$$A_j := E'_Q A_Q E_Q + E'_\Omega A_{\Omega,j} E_\Omega, \quad j = 0, 1, \quad (3.59)$$

so gilt offenbar $\Lambda_j = \gamma_{B \rightarrow S} A_j^{-1} \gamma'_{B \rightarrow S}$. Wir können also das Hauptresultat aus Kapitel 2 anwenden und erhalten die Bildraumidentität:

Satz 3.31

Es gilt

$$\mathcal{R} \left((\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)})^{1/2} \right) = \mathcal{R}(L),$$

mit dem Operator

$$L : H(\Sigma) \rightarrow H(S), \quad L = \gamma_{Q \rightarrow S} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow \Sigma},$$

also $L(\psi) = (\nu \wedge E|_S) \wedge \nu$, wobei $E \in H(Q)$ die Lösung ist von

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, & & \nu \cdot E|_\Sigma &= 0 & \text{auf } \Sigma, \\ \operatorname{div} E &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, & & \nu \wedge \operatorname{rot} E|_\Sigma &= \psi & \text{auf } \Sigma. \end{aligned}$$

Beweis:

Dies folgt aus Lemma 3.30 und Satz 2.12. □

3.3.2 Perfekt leitende Objekte

Wir betrachten nun den Fall, dass Ω ein perfekt leitendes Objekt ist. Für Ω gelte dabei zusätzlich zu den in Abschnitt 3.3.1 getroffenen Voraussetzungen noch, dass $\nabla H^1(\Omega; \mathbb{R})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ist (vgl. Abschnitt 3.2.3.5). Die Definition von Λ_1 muss dann ersetzt werden durch

$$\Lambda_1 : H'(S) \rightarrow H(S), \quad J \mapsto (\nu \wedge E_1|_S) \wedge \nu,$$

wobei $E_1 \in W^1(Q; \mathbb{R}^3)$ die Lösung ist von

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E_1 &= J & \text{in } Q, & & \nu \wedge E_1|_\Sigma &= 0 & \text{auf } \Sigma, \\ \operatorname{div} E_1 &= 0 & \text{in } Q, & & \langle \nu \cdot E_1|_{\Sigma_j}, \mathbf{1}_{\Sigma_j} \rangle &= 0 & \text{für alle } j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Es sei wieder $\varphi \in W^1(Q; \mathbb{R})$ die Lösung von

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{auf } Q, \quad \partial_\nu \varphi|_\Sigma = \nu \cdot E_1|_\Sigma.$$

Dann folgt wie bei der Definition des Einschränkungsooperators auf Q , dass $\nabla \varphi \in W^1(Q; \mathbb{R}^3)$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (E_1 - \nabla \varphi) &= J & \text{in } Q, & & \operatorname{rot}_S ((\nu \wedge (E_1 - \nabla \varphi)) \wedge \nu) &= 0, \\ \operatorname{div} (E_1 - \nabla \varphi) &= 0 & \text{in } Q, & & \nu \cdot (E_1 - \nabla \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Es ist also

$$E - \nabla \varphi \in H_0(Q) := \{u \in H(Q) : \gamma_{Q \rightarrow \Sigma} = 0\}.$$

Bezeichnen wir wie in Abschnitt 2.4.2.3 mit I die Einbettung von $H_0(Q)$ nach $H(Q)$, so erhalten wir $A_Q I(E - \nabla\varphi) = \gamma'_{Q \rightarrow S} J$ und damit

$$\Lambda_1 = \gamma_{Q \rightarrow S} I (I' A_Q I)^{-1} I' \gamma'_{Q \rightarrow S}.$$

Auch für diesen Fall erhalten wir also aus unseren Ergebnissen in Kapitel 2 die Bildraumidentität:

Satz 3.32

Es gilt

$$\mathcal{R} \left((\Lambda_0 \iota_{H(S)} - \Lambda_1 \iota_{H(S)})^{1/2} \right) = \mathcal{R}(L),$$

wobei L wie in Satz 3.31 definiert ist.

Beweis:

Dies folgt aus Lemma 3.30 und Satz 2.18. □

3.3.3 Rekonstruktion der Objekte

Wir zeigen nun wie Ω aus $\mathcal{R}(L)$ und damit aus $\Lambda_1 - \Lambda_0$ rekonstruiert werden kann. Die folgenden Ergebnisse gelten dabei gleichermaßen für magnetische Objekte gemäß Abschnitt 3.3.1 und für perfekt leitende Objekte gemäß Abschnitt 3.3.2. Insbesondere setzen wir keine Kenntnis darüber voraus, ob die gesuchten Objekte magnetisch oder perfekt leitend sind. Es müssen jedoch entweder alle gesuchten Objekte magnetisch oder alle Objekte perfekt leitend sein.

Wir verwenden zur Rekonstruktion Vektorpotentiale von magnetischen Dipolen, d. h. die Funktionen

$$G_{z,d}(x) := \text{rot}(\Phi_z(x)d), \quad x \neq z,$$

wobei $d \in \mathbb{R}^3$, $|d| = 1$ ein beliebiger Richtungsvektor und

$$\Phi_z(x) := \frac{1}{4\pi|x-z|}, \quad x \neq z$$

die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung ist. $G_{z,d}(x)$ ist auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$ analytisch, und für $x \neq z$ gilt

$$\begin{aligned} \text{rot } G_{z,d}(x) &= \text{grad div}(\Phi_z(x)d), \\ \text{rot rot } G_{z,d}(x) &= 0, \\ \text{div } G_{z,d}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen noch die Tangentialkomponenten von $G_{z,d}$ auf S mit

$$g_{z,d} := (\nu \wedge G_{z,d}|_S) \wedge \nu \in H(S).$$

Damit gilt:

Lemma 3.33

Für alle $z \in \mathbb{R}_-^3$ und alle $d \in \mathbb{R}^3$, $|d| = 1$ gilt

$$z \in \Omega \quad \text{genau dann, wenn} \quad g_{z,d} \in \mathcal{R}(L).$$

Beweis:

Sei zuerst $z \in \Omega$ und sei $\varphi \in W^1(Q; \mathbb{R})$ die Lösung von

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{auf } Q, \quad \partial_\nu \varphi|_\Sigma = \nu \cdot G_{z,d}|_\Sigma.$$

Wie in der Definition von E_Q folgt $\nabla \varphi \in W^1(Q; \mathbb{R}^3)$. Außerdem ist

$$\nu \wedge \text{rot } G_{z,d}|_\Sigma = \nu \wedge \text{grad div} (\Phi_z(x)d)|_\Sigma = \overrightarrow{\text{rot}}_\Sigma \text{div} (\Phi_z(x)d)|_\Sigma \in H'(\Sigma)$$

(vgl. z. B. [12, Chp. 2, Lemma 4]), und offenbar löst $G_{z,d} - \nabla \varphi \in H(Q)$ die Gleichungen in der Definition von $L(\nu \wedge \text{rot } G_{z,d})|_\Sigma$.

Zusammen mit $(\nu \wedge \nabla \varphi|_S) \wedge \nu \in N_S$ erhalten wir also

$$g_{z,d} = (\nu \wedge G_{z,d}|_S) \wedge \nu \in \mathcal{R}(L).$$

Sei nun umgekehrt $z \in \mathbb{R}_-^3$ und $(\nu \wedge G_{z,d}|_S) \wedge \nu \in \mathcal{R}(L)$, dann existiert ein $E \in W^1(Q)$, so dass $\text{rot}(\text{rot } E) = 0$, $\text{div } E = 0$ in Q und

$$(\nu \wedge (E - G_{z,d})|_S) \wedge \nu \in N_S. \quad (3.60)$$

Wir gehen nun ähnlich wie in [27, Theorem 3.2] vor. Da sowohl E als auch $G_{z,d}$ in $Q \setminus \{z\}$ analytisch sind, ist es auch

$$w := \text{rot}(E - G_{z,d}).$$

Aus (3.60) folgt, dass eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ existiert mit

$$(\nu \wedge \nabla \varphi_n|_S) \wedge \nu \rightarrow (\nu \wedge (E - G_{z,d})|_S) \wedge \nu \quad \text{in } TL^2(S; \mathbb{C}^3),$$

also $e_1 \cdot \nabla \varphi_n \rightarrow e_1 \cdot (E - G_{z,d})$ und $e_2 \cdot \nabla \varphi_n \rightarrow e_2 \cdot (E - G_{z,d})$ in $L^2(S; \mathbb{C})$.
Damit folgt im distributionellen Sinne

$$\partial_x(e_2 \cdot (E - G_{z,d})) - \partial_y(e_1 \cdot (E - G_{z,d})) = 0.$$

Da $E - G_{z,d}$ analytisch ist, existieren die Ableitungen auch im klassischen Sinne und stimmen mit den distributionellen Ableitungen überein, es ist also $w \cdot e_3 = 0$ auf S . Da $w \cdot e_3$ analytisch auf der zweidimensionalen Ebene \mathbb{R}_0^3 ist, erhalten wir daraus $w \cdot e_3 = 0$ auf ganz \mathbb{R}_0^3 .

Spiegeln wir $w|_{\mathbb{R}_+^3}$ von dem oberen Halbraum \mathbb{R}_+^3 an der Ebene \mathbb{R}_0^3 in den unteren Halbraum, so erhalten wir die Funktion

$$\tilde{w}(x) := \begin{cases} w(x) & \text{für } x \cdot e_3 \geq 0, \\ \alpha(w(\alpha(x))) & \text{für } x \cdot e_3 < 0, \end{cases}$$

wobei die Spiegelung α gegeben ist durch

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto x - 2(x \cdot e_3)e_3.$$

Es ist $\tilde{w} \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, und aus $\operatorname{div} w = 0$ und $\operatorname{rot} w = 0$ in \mathbb{R}_+^3 erhalten wir

$$\operatorname{div} \tilde{w} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{w} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_0^3.$$

Da per Definition die Tangentialkomponente und wegen $(w \cdot e_3)|_{\mathbb{R}_0^3} = 0$ auch die Normalkomponente auf \mathbb{R}_0^3 stetig ist, folgt

$$\operatorname{div} \tilde{w} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{w} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Aus dem Poincaréschen Lemma (vgl. z. B. [20, IX, §1, Lemma 4']) erhalten wir, dass ein $u \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ existiert mit $\tilde{w} = \operatorname{rot} u$. Dieses u löst dann aber $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = 0$ und $\operatorname{div} u = 0$ auf \mathbb{R}^3 , so dass aus Korollar 3.7 $u = 0$, also auch $\tilde{w} = 0$ und damit $w|_{\mathbb{R}_+^3} = 0$ folgt.

Mit der Analytizität von w folgt damit $w = 0$ in $Q \setminus \{z\}$, also

$$\operatorname{rot} G_{z,d} = \operatorname{rot} E \quad \text{in } Q \setminus \{z\}.$$

Wäre $z \notin \Omega$, dann würde dies wegen

$$\operatorname{rot} E \in L^2(Q \setminus \{z\}) \quad \text{aber} \quad \operatorname{rot} G_{z,d} \notin L^2(Q \setminus \{z\})$$

zum Widerspruch führen. Es ist also $z \in \Omega$. □

Aus Satz 3.31 bzw. Satz 3.32 und Lemma 3.33 erhalten wir das Eindeutigkeitsresultat, dass das Objekt aus den Messungen rekonstruiert werden kann:

Korollar 3.34

Die Menge Ω ist durch Kenntnis von Λ_1 und Λ_0 eindeutig bestimmt. Für jedes $d \in \mathbb{R}^3$ mit $|d| = 1$ gilt

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{R}_-^3 : g_{z,d} \in \mathcal{R} \left(\left| \Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)} \right|^{1/2} \right) \right\}.$$

Zur praktischen Umsetzung dieses Resultats folgen wir der Vorgehensweise von Hanke und Brühl in [33] und formulieren die Bildraumbedingung in einen Konvergenztest um. Dafür benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 3.35

Der Operator $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ ist kompakt und injektiv. Sein Bildraum liegt dicht in $H(S)$.

Beweis:

$|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ stimmt für magnetische Objekte mit $\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}$ und für perfekt leitende Objekte mit $\Lambda_0 \iota_{H(S)} - \Lambda_1 \iota_{H(S)}$ überein. Die Kompaktheit folgt deshalb aus Lemma 3.20.

Es genügt nun, die Injektivität von L' zu zeigen, da dann $\mathcal{R}(L)$ dicht in $H(S)$ liegt und aus Satz 3.31 bzw. Satz 3.32 und der Symmetrie des Operators $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2}$ die Injektivität von $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ folgt. Aus dessen Symmetrie folgt dann wiederum, dass der Bildraum dicht liegt.

Sei also $J \in H'(S)$ mit $\gamma_{Q \rightarrow \Sigma} A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S} J = L'J = 0$. Dann existiert ein Element $u \in W^1(Q; \mathbb{R}^3)$ in der Restklasse $A_Q^{-1} \gamma'_{Q \rightarrow S} J \in H(Q)$, so dass

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) &= J & \text{in } Q, & & \nu \cdot u|_{\Sigma} &= 0 & \text{auf } \Sigma, \\ \operatorname{div} u &= 0 & \text{in } Q, & & \nu \wedge \operatorname{rot} u|_{\Sigma} &= 0 & \text{auf } \Sigma \end{aligned}$$

und $\operatorname{rot}_{\Sigma}((\nu \wedge u|_{\Sigma}) \wedge \nu) = 0$. Wie im Beweis von Lemma 3.30 erhalten wir ein $v \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} v \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma; \mathbb{R}^3)$,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \quad \text{und} \quad [(\nu \wedge \operatorname{rot} v) \wedge \nu]_{\Sigma} = -(\nu \wedge u|_{\Sigma}) \wedge \nu.$$

Setzen wir u durch Null auf Ω fort, dann erfüllt $\tilde{u} := u + \operatorname{rot} v \in W^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{div} \tilde{u} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \tilde{u}) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}.$$

\tilde{u} ist also analytisch auf $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}$. Aus $\operatorname{rot} \tilde{u} = 0$ auf Ω folgt deshalb $\operatorname{rot} \tilde{u} = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}$, und mit $\operatorname{rot} \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ erhalten wir $\operatorname{rot} \tilde{u} = 0$ auf \mathbb{R}^3 und damit $J = 0$. \square

Aus Lemma 3.35 erhalten wir, dass eine Orthonormalbasis $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen von $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ mit zugehörigen positiven Eigenwerten $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, vgl. [59, Theorem IV.3.2]. Mit dieser Spektralzerlegung und dem Picard-Kriterium (vgl. [23, Theorem 2.8]) können wir Korollar 3.34 umformulieren:

Korollar 3.36

Für jedes $d \in \mathbb{R}^3$ mit $|d| = 1$ und $z \in \mathbb{R}_-^3$ ist

$$z \in \Omega \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(g_{z,d}, v_k)_{H(S)}^2}{\sigma_k} < \infty.$$

Aus Korollar 3.36 ergibt sich ein (theoretischer) Algorithmus, um Ω aus den Messoperatoren Λ_1 und Λ_0 zu berechnen. Dafür wird zuerst die Spektralzerlegung $(v_k, \sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des Operators $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ gebildet und dann (mit einem beliebig gewählten d) für jeden Punkt $z \in \mathbb{R}_-^3$ getestet, ob die Picardreihe konvergiert.

In praktischen Anwendungen wird jedoch nicht der komplette (unendlichdimensionale) Messoperator $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ bekannt sein, sondern es werden nur Messungen von endlich vielen Informationen über das elektrische Feld zu endlich vielen verschiedenen Flächenströmen vorliegen. Um einen numerisch implementierbaren Algorithmus zu erhalten, bezeichnen wir mit

$$j : \mathbb{R}^n \rightarrow H(S)$$

die injektive Abbildung, die einem endlichdimensionalen Vektor seine Bedeutung als kontinuierliche Funktion in $H(S)$ zuordnet, und nehmen an, dass die Ergebnisse der Messungen so in einer Matrix M dargestellt sind, dass

$$M \approx j^* |\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}| j.$$

Offenbar ist $j^* j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ selbstadjungiert, positiv semidefinit und bijektiv, besitzt also eine bijektive selbstadjungierte Wurzel. Ist $R := (j^* j)^{-1/2}$ die Inverse dieser Wurzel und sind $(\tilde{\sigma}_k)_{k=1}^n$ die Eigenwerte und $(\tilde{v}_k)_{k=1}^n$ die Eigenvektoren von RMR , so ist

$$jRRj^* : H(S) \rightarrow H(S)$$

die orthogonale Projektion auf den endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{R}(j)$ von $H(S)$ und $(\tilde{\sigma}_k)_{k=1}^n$ und $(jR\tilde{v}_k)_{k=1}^n$ sind Näherungen an die Eigenwerte und Eigenvektoren der Galerkin-Projektion

$$jRRj^* |\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}| jRRj^* : H(S) \rightarrow H(S)$$

von $|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|$ auf den Raum $\mathcal{R}(j)$.

Verwenden wir deshalb die (endlich vielen) $(\tilde{\sigma}_k)_{k=1}^n$ und $(jR\tilde{v}_k)_{k=1}^n$ als Näherung an die (unendlich vielen) Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators

$\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}$, so erhalten wir eine endliche Summe als Näherung an die unendliche Picardreihe in Korollar 3.36. Dabei sollten nur diejenigen Eigenwerte verwendet werden, die größer sind als die Spektralnorm des Messfehlers

$$\delta = \left\| Rj^* |\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}| jR - RMR \right\| \quad (3.61)$$

in den praktischen Messungen. Ob die Picardreihe konvergiert, muss dann anhand dieser endlich vielen Summanden mit Hilfe eines (empirisch zu bestimmenden) Schwellenwertes $C > 0$ abgeschätzt werden. Zur Normierung von $g_{z,d}$ teilen wir dabei die Picardreihe noch durch eine Näherung an

$$\|g_{z,d}\|_{H(S)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} (g_{z,d}, v_k)_{H(S)}^2.$$

Mit $(g_{z,d}, jR\tilde{v}_k)_{H(S)} = (Rj^*g_{z,d}) \cdot \tilde{v}_k$ erhalten wir dann:

Algorithmus 3.37

Gegeben sei die injektive Abbildung $j : \mathbb{R}^n \rightarrow H(S)$, die einem endlichdimensionalen Vektor seine Bedeutung als kontinuierliche Funktion zuordnet. Außerdem sei $R := (j^*j)^{-1/2}$, und M sei eine n -dimensionale, symmetrische Matrix, die (im Sinne von (3.61)) den Operator $j^*|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|j$ mit einer Genauigkeit von $\delta > 0$ approximiert.

- (i) Berechne die Eigenwerte $(\tilde{\sigma}_k)_{k=1}^n$ und Eigenvektoren $(\tilde{v}_k)_{k=1}^n$ von RMR .
- (ii) Auf einem Gitter von Punkten $z_l \in \mathbb{R}_-^3$, $l = 1, 2, \dots$, markiere z_l , falls

$$\sum_{\{k : \tilde{\sigma}_k > \delta\}} \frac{|(Rj^*g_{z_l,d}) \cdot \tilde{v}_k|^2}{\tilde{\sigma}_k} \Big/ \sum_{\{k : \tilde{\sigma}_k > \delta\}} |(Rj^*g_{z_l,d}) \cdot \tilde{v}_k|^2 < C. \quad (3.62)$$

Dabei kann $d \in \mathbb{R}^3$, $|d| = 1$ beliebig gewählt sein, und $C > 0$ muss empirisch bestimmt werden.

Wir bemerken noch, dass (abgesehen von der Normierung) (3.62) die Picardreihe zu

$$Rj^*g_{z_l,d} \in \mathcal{R} \left((RMR)^{1/2} \right)$$

darstellt. Durch Anwendung von Lemma 2.6 können wir (3.62) deshalb auch als näherungsweise Überprüfung von

$$\begin{aligned} Rj^*g_{z_l,d} &\in \mathcal{R} \left((Rj^*|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|jR)^{1/2} \right) \\ &= \mathcal{R} \left(Rj^*|\Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)}|^{1/2} \right) \end{aligned}$$

anstelle von

$$g_{z_i,d} \in \mathcal{R} \left(\left| \Lambda_1 \iota_{H(S)} - \Lambda_0 \iota_{H(S)} \right|^{1/2} \right)$$

interpretieren.

Bemerkung 3.38

Mit Algorithmus 3.37 kann der Einschluss Ω aus magnetostatischen Messungen rekonstruiert werden. Unser eigentliches Ziel in diesem Kapitel war jedoch die Rekonstruktion von Ω aus elektromagnetischen Messungen niedriger Frequenz. Diese elektromagnetischen Messungen liefern aber gemäß Abschnitt 3.2 eine gute Näherung an die magnetostatischen Messungen. Bezeichnet Λ_k^ω ($k = 0, 1$) den analog Λ_k definierten Messoperator zu elektromagnetischen Messungen bei Anwesenheit ($k = 1$) bzw. Abwesenheit ($k = 0$) des Objektes Ω , so gilt nach Abschnitt 3.2.4 $\Lambda_k \approx \frac{1}{i\omega} \Lambda_k^\omega$. Eine endlichdimensionale Näherung M an $\frac{1}{i\omega}(\Lambda_1^\omega - \Lambda_0^\omega)$ ist deshalb eine endlichdimensionale Näherung an $\Lambda_1 - \Lambda_0$ und kann in Algorithmus 3.37 verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass M nur näherungsweise eine reelle symmetrische Matrix sein wird. Zur Anwendung von Algorithmus 3.37 muss deshalb M durch den symmetrischen Anteil der Matrix ersetzt werden, deren Einträge die Realteile der Einträge von M sind, oder die Eigenwertzerlegung muss durch eine Singulärwertzerlegung ersetzt werden.

3.4 Numerische Ergebnisse

Das in diesem Kapitel entwickelte Verfahren wurde von Christoph Schneider mit simulierten Daten aus dem BMBF-Projekt „HuMin/MD – Metal detectors for humanitarian demining - Development potentials in data analysis methodology and measurement“ implementiert. Zur Simulation der Messungen wurde ein im Rahmen dieses BMBF-Projekts von Klaus Erhard erstelltes Programm verwendet, das die Maxwell-Gleichungen mit einer Randintegralmethode löst.

Das Programm simuliert die durch einen magnetischen Dipol erzeugten elektromagnetischen Felder zu verschiedenen Frequenzen ω bei Anwesenheit eines perfekt leitenden Objektes Ω , vgl. [27]. Dabei wird direkt das vom Objekt zurückgestreute sogenannte Sekundärfeld berechnet, d. h. die Lösung E^ω von

$$\text{rot rot } E^\omega - \omega^2 E^\omega = 0 \quad \text{in } Q, \quad (3.63)$$

$$\nu \wedge E^\omega|_\Sigma = -\nu \wedge \text{rot} (i\omega \Phi_z^\omega e_3)|_\Sigma \quad \text{auf } \Sigma, \quad (3.64)$$

wobei

$$\Phi_z^\omega(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\omega|x-z|}}{|x-z|}$$

die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung ist.

Wegen

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\Phi_z^\omega e_3) - \omega^2 \operatorname{rot} (\Phi_z^\omega e_3) = -\operatorname{rot}(\delta_z e_3)$$

ist dies gerade die auch für die Faktorisierungsmethode benötigte Differenz zwischen dem von

$$J_z = -\operatorname{rot}(\delta_z e_3) = (-\partial_y \delta_z, \partial_x \delta_z, 0)^T$$

erzeugten Feld in Anwesenheit des perfekt leitenden Objektes und dem von diesem Strom erzeugten Feld, das sich ohne Objekt ergeben würde.

Wir unterteilen die quadratische Messebene S in $m \times m$ gleich große Quadrate und berechnen zu den Mittelpunkten $(z_{l,k})_{l,k=1}^m \subset S$ die durch die Ströme $J_{z_{l,k}}$ erzeugten Felder E^ω . Die Normalenkomponente der dazugehörigen magnetischen Felder $e_3 \cdot \frac{1}{i\omega} \operatorname{rot} E^\omega$ werten wir in den Gitterpunkten $(z_{l,k})_{l,k=1}^m$ aus und sammeln sie spaltenweise in der Matrix $M_\omega \in \mathbb{C}^{m^2, m^2}$.

Es sei

$$\tilde{j} : \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow TL_\diamond^2(S; \mathbb{R}^3), \quad v \mapsto \overrightarrow{\operatorname{rot}}_S V(x)$$

eine Abbildung, die einem endlichdimensionalen Vektor $v \in \mathbb{R}^{m^2}$ die Flächenrotation einer (hinreichend glatten) skalaren Funktion $V(x)$ zuordnet, deren Funktionswerte in den Gitterpunkten gerade die Einträge des Vektors v sind und die auf den Rand von S verschwindet. Ist umgekehrt $U(x) \in TL_\diamond^2(S; \mathbb{R}^3)$ eine (hinreichend glatte) Funktion und $u_{\operatorname{rot}} \in \mathbb{R}^{m^2}$ der Vektor, dessen Einträge die Auswertungen von $\operatorname{rot}_S U(x)$ in den Gitterpunkten sind, dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^{m^2}$

$$(\tilde{j}^* U) \cdot v = \int_S U(x) \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}_S V(x) \, d\sigma = - \int_S (\operatorname{rot}_S U(x)) V(x) \, d\sigma \approx -c u_{\operatorname{rot}} \cdot v,$$

wobei $c := \frac{1}{m^2} |S|$ das Gewicht der (zweidimensionalen) Mittelpunktsregel für das Integral über S ist. Es ist also $\tilde{j}^* U \approx -c u_{\operatorname{rot}}$ und $\tilde{j}^* \tilde{j}$ ordnet einem Vektor $v \in \mathbb{R}^{m^2}$ die Auswertungen von $-\operatorname{rot}_S \operatorname{rot}_S V(x)$ in den Gitterpunkten zu. Wir approximieren $-\tilde{j}^* \tilde{j}$ durch den diskreten Laplace-Operator D , der durch Anwendung zentraler Differenzen in den Gitterpunkten $(z_{l,k})_{l,k=1}^m$ entsteht.

Der Vektor $c M_\omega u$ besteht (näherungsweise) aus den Auswertungen der Normalenkomponente des durch $J = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}_S U(x) = -\tilde{j} u$ erzeugten magnetischen

Feldes in den Gitterpunkten $(z_{l,k})_{l,k=1}^m$, und für alle $u, v \in \mathbb{R}^{m^2}$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \left(\iota_{H(S)}^{-1} \tilde{j} v, ((\Lambda_1 - \Lambda_0) \iota_{H(S)} \iota_{H(S)}^{-1} \tilde{j} u) \right)_{H(S)} \\
 &= \int_S (\tilde{j} v) \cdot ((\Lambda_1 - \Lambda_0) \tilde{j} u) \, d\sigma \approx \frac{1}{i\omega} \int_S (\tilde{j} v) \cdot ((\Lambda_1^\omega - \Lambda_0^\omega) \tilde{j} u) \, d\sigma \\
 &= \frac{1}{i\omega} \int_S \overrightarrow{\text{rot}}_S V(x) \cdot ((e_3 \wedge E^\omega) \wedge e_3) \, d\sigma \\
 &= -\frac{1}{i\omega} \int_S V(x) \text{rot}_S((e_3 \wedge E^\omega) \wedge e_3) \, d\sigma \approx -c^2 v \cdot (M_\omega u).
 \end{aligned}$$

Mit $j := \iota_{H(S)}^{-1} \tilde{j}$, $R := (j^* j)^{-1/2} \approx (-D)^{-1/2}$ ist also

$$j^*(\Lambda_0 - \Lambda_1) \iota_{H(S)} j \approx c^2 M_\omega$$

und wir können gemäß Bemerkung 3.38 in Algorithmus 3.37 die (komplexe) Matrix $c^2 R M_\omega R$ als Näherung an die (reelle) Matrix $R j^*(\Lambda_0 - \Lambda_1) \iota_{H(S)} j R$ verwenden, wenn wir die Eigenwertzerlegung durch eine Singulärwertzerlegung ersetzen. Für die Implementierung von (3.62) bemerken wir noch, dass

$$j^* g_{z,d} \approx -c g_{\text{rot}},$$

wobei der Vektor $g_{\text{rot}} \in \mathbb{R}^{m^2}$ die Auswertungen von

$$\text{rot}_S g_{z,d} = e_3 \cdot \text{grad div}(\Phi_z(x) d)$$

in den Gitterpunkten enthält.

Für die numerischen Beispiele verwenden wir ein 12×12 Punkte-Gitter auf einer Messebene S der Größe $44 \text{ cm} \times 44 \text{ cm}$. Als Objekt verwenden wir zuerst eine mittig unter der Messebene liegende Kugel mit Radius 4 cm , deren Mittelpunkt sich 15 cm unter S befindet.

Wir simulieren die Messungen M_ω für verschiedene Frequenzen ω und überprüfen numerisch das asymptotische Verhalten. In Abbildung 3.2 ist in rot die relative Abweichung

$$\frac{1}{\|RM_0R\|} \|RM_\omega R - RM_0R\|$$

der simulierten Messungen M_ω für verschiedene Werte der Frequenz ω in der Spektralnorm aufgetragen. Für M_0 verwenden wir dabei die simulierten Messungen für $\omega = 10^{-7} \text{ m}^{-1}$. Die durchgezogenen Linien zeigen zum Vergleich die Funktionen

$$\omega \mapsto C_1 \omega, \quad \omega \mapsto C_2 \omega^2 \quad \text{und} \quad \omega \mapsto C_3 \omega^3,$$

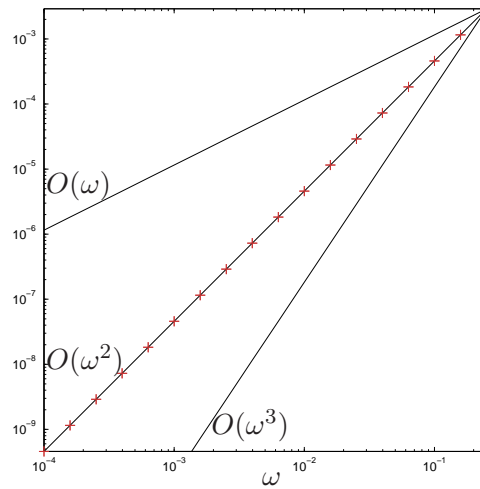


Abbildung 3.2: Konvergenzgeschwindigkeit für niedrige Frequenzen

wobei C_1 , C_2 und C_3 so gewählt wurden, dass die Funktionen im rechten Randpunkt der Abbildung mit der relativen Abweichung übereinstimmen. Die beobachtete Konvergenzgeschwindigkeit stimmt sehr gut mit der theoretisch erwarteten Geschwindigkeit $O(\omega^2)$ überein.

Der relative Fehler in den simulierten Messungen wurde über einen in [27] beschriebenen Symmetrietest geschätzt. Unabhängig von ω beträgt er etwa 3×10^{-4} . Auch unterhalb dieser Fehlerschranke stimmt die beobachtete Konvergenzgeschwindigkeit mit der theoretisch erwarteten überein. Dies weist darauf hin, dass die für die Simulation der Messungen verwendete Randintegralmethode unabhängig von ihrem Diskretisierungsfehler das richtige Konvergenzverhalten für $\omega \rightarrow 0$ besitzt.

Abbildung 3.3 zeigt die numerische Rekonstruktion der Kugel, die mit Algorithmus 3.37 und der Wahl $d = e_3$ erzielt wurde. Auf der rechten Seite der Abbildung ist der Schnitt durch die horizontale Ebene in 15 cm Tiefe dargestellt. Die Frequenz beträgt 19,2 kHz, also $\omega \approx 4 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Der geschätzte Fehler von etwa 3×10^{-4} führt dazu, dass wir 8 Singulärwerte verwenden. Den Schwellenwert C wählen wir für dieses Beispiel so, dass die Rekonstruktion möglichst gut mit dem gesuchten Objekt übereinstimmt. In praktischen Anwendungen muss dieser Wert empirisch bestimmt oder ein anderes Konvergenzkriterium für die Picardreihe verwendet werden (vgl. Abschnitt 4.3).

Abbildung 3.4 zeigt die Rekonstruktion einer Kugel derselben Größe, die sich nun aber 20 cm unter der Messebene befindet, und den Schnitt durch die horizontale Ebene in 20 cm Tiefe. Der geschätzte Fehler beträgt wieder etwa 3×10^{-4} , was auch diesmal zur Verwendung von 8 Singulärwerten führte.

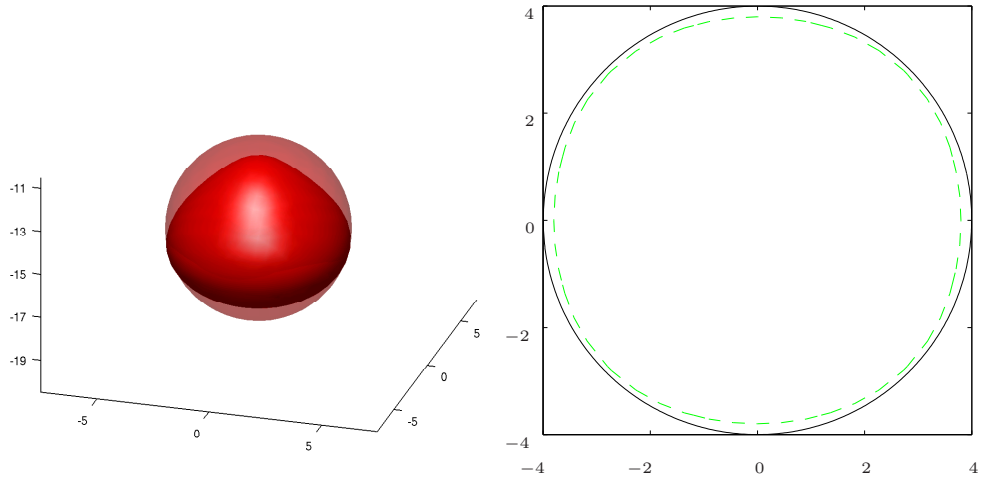


Abbildung 3.3: Rekonstruktion einer 15 cm tief liegenden Kugel

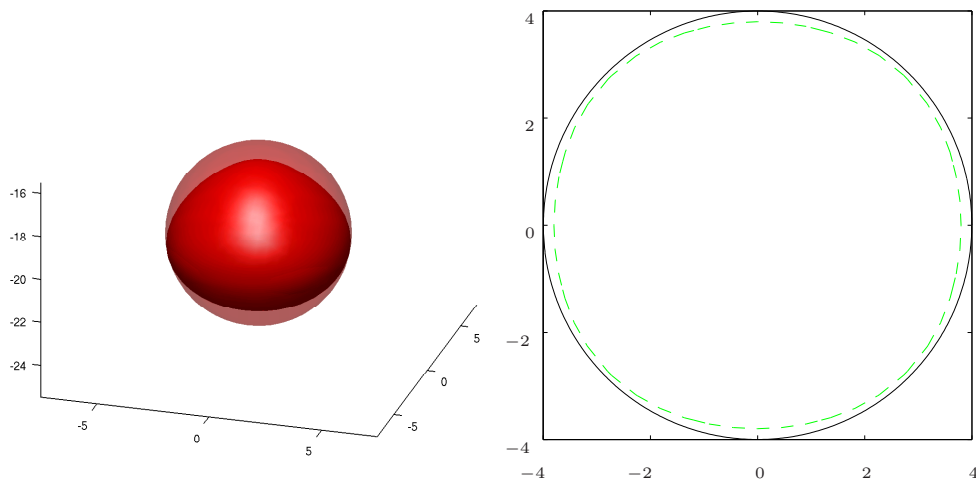


Abbildung 3.4: Rekonstruktion einer 20 cm tief liegenden Kugel

Kapitel 4

Ein parabolisch-elliptisches Problem

Bisher bekannte Anwendungen der Faktorisierungsmethode (vgl. z. B. unsere Übersicht in Kapitel 1) beschränken sich auf Fernfeldmessungen der Helmholtz- bzw. Maxwell-Gleichungen und auf elliptische Probleme. Eine Anwendung der Methode auf ein Problem mit expliziter Zeitabhängigkeit, etwa ein parabolisches Problem, gelang bisher nicht.

In diesem Kapitel entwickeln wir eine Erweiterung der Faktorisierungsmethode, mit der durch parabolische Differentialgleichungen beschriebene Einschlüsse in einem durch elliptische Differentialgleichungen beschriebenen Gebiet gefunden werden können. Dazu betrachten wir als Musterproblem die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t(c(x)u(x, t)) - \operatorname{div}(\kappa(x) \operatorname{grad} u(x, t)) = 0 \quad \text{in } B \times]0, T[, \quad (4.1)$$

in einem Gebiet $B \subset \mathbb{R}^n$ mit (räumlich variierender) Wärmekapazität $c(x)$ und Leitfähigkeit $\kappa(x)$. Wir verwenden dabei im gesamten Kapitel die Konvention, dass sich Divergenz und Gradient nur auf die räumlichen Koordinaten beziehen.

Den hier untersuchten Spezialfall erhalten wir, wenn die Wärmekapazität $c(x)$ außerhalb eines Einschlusses Ω vernachlässigbar klein ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $c(x) = \chi_\Omega(x)$ die charakteristische Funktion von Ω ist. Die Evolutionsgleichung (4.1) ergibt dann das parabolisch-elliptische Problem

$$\partial_t u(x, t) - \operatorname{div}(\kappa(x) \operatorname{grad} u(x, t)) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div}(\kappa(x) \operatorname{grad} u(x, t)) = 0 \quad \text{in } Q \times]0, T[, \quad (4.3)$$

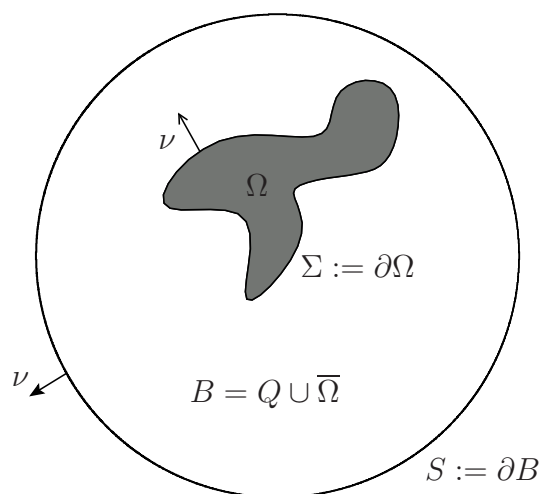


Abbildung 4.1: Gebietskizze

zu dem noch geeignete Übergangsbedingungen auf $\Sigma := \partial\Omega$ hinzukommen, und wieder $Q := B \setminus \overline{\Omega}$ ist.

Wir verwenden dabei für die betrachteten Mengen dieselben Notationen wie in Beispiel 2.1. Abbildung 4.1 zeigt noch einmal die Gebietskizze aus diesem Beispiel. Wie in den vorherigen Kapiteln setzen wir nicht voraus, dass der Einschluss Ω zusammenhängend ist, und verwenden die Begriffe „Einschluss“ und „Einschlüsse“ auch weiterhin synonym.

Das inverse Problem, den Einschluss aus Randmessungen zu lokalisieren, besteht darin, aus der Neumann-Dirichlet-Abbildung

$$\kappa \partial_\nu u|_S \mapsto u|_S, \quad S := \partial B \quad (4.4)$$

die Menge Ω zu rekonstruieren.

Zur Motivation dieses parabolisch-elliptischen Musterproblems betrachten wir noch einmal die in Kapitel 3 behandelte Aufgabe, Objekte durch niederfrequente elektromagnetische Strahlung zu lokalisieren. Besitzen diese Objekte eine endliche elektrische Leitfähigkeit σ , so induziert ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld in ihnen Wirbelströme. Ammari, Buffa und Nédélec zeigen in [2], dass in diesem Fall ein durch niedrigfrequente Ströme J erzeugtes elektrisches Feld E durch die parabolisch-elliptische Gleichung

$$\partial_t(\sigma E) - \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E = -\partial_t J, \quad (4.5)$$

beschrieben werden kann, wobei μ wie in Kapitel 3 die Permeabilität ist, und die Leitfähigkeit σ außerhalb eines beschränkten Gebietes, d. h. außerhalb des

gesuchten Objektes Ω , verschwindet. Die hier untersuchte Gleichung (4.1) mit $c = \chi_\Omega$ ist also ein skalares Musterproblem für die Suche nach (nicht perfekt) elektrisch leitenden Objekten in einer nicht-leitenden Umgebung durch niedrigfrequente elektromagnetische Strahlung.

Außerdem tritt (4.1) mit $c = \chi_\Omega$ auch als zweidimensionale Version von (4.5) auf, die Wirbelströme in unendlich langen Zylindern beschreibt. Für den Fall $B = \mathbb{R}^2$ und $\kappa = 1$ wird dieses Problem von MacCamy und Sury in [50] und von Costabel, Ervin und Stephan in [18] behandelt. In beiden Arbeiten werden Randintegraloperatoren dazu benutzt, die Laplace-Gleichung im Außengebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ durch eine nicht-lokale Randbedingung für die parabolische Gleichung in Ω zu ersetzen. Das resultierende Problem wird dann mit einer Galerkin-Methode gelöst. In [17] verwendet Costabel auch zur Lösung des resultierenden inneren Problems Randintegraloperatoren.

Wir behandeln das Problem in Abschnitt 4.1 mit allgemeiner Leitfähigkeit $\kappa \in L_+^\infty(B)$ in einem beschränkten Gebiet B mit vorgegebenen Neumann-Randwerten auf S . Indem wir die Gleichung (4.1) im distributionellen Sinne interpretieren, können wir die Gleichungen (4.2), (4.3) zusammen mit natürlichen Übergangsbedingungen auf Σ herleiten (diese müssten ansonsten postuliert und physikalisch begründet werden). Außerdem können wir zeigen, dass die schwache Formulierung in geeigneten Sobolevräumen äquivalent ist zu (4.1). Wir zeigen die Existenz einer eindeutigen Lösung mit dem Projektionslemma von Lions.

Im Abschnitt 4.2 betrachten wir das inverse Problem und zeigen, dass, wenn die Wärmeleitfähigkeit im Inneren von Ω höher ist als im Außenbereich Q , die Punkte innerhalb des Einschlusses mit einer Variante der Faktorisierungsmethode charakterisiert werden können. Bei der Suche nach elektrisch leitenden Objekten würde die höhere Wärmeleitfähigkeit einer geringeren Permeabilität, also einem diamagnetischen Material wie Kupfer, entsprechen.

Abschnitt 4.3 zeigt die von Florian Frühauf mit dieser Methode erzielten numerischen Ergebnisse (vgl. Abgrenzung des eigenen Beitrags in Kapitel 1).

4.1 Das direkte Problem

Für den Rest dieses Kapitels sei $T > 0$. $\Omega, B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ seien zwei beschränkte, offene Mengen mit $\overline{\Omega} \subset B$. B besitze einen C^1 -Rand $S := \partial B$, und B sowie $Q := B \setminus \overline{\Omega}$ seien zusammenhängend. Die Menge Ω bestehe aus endlich vielen C^1 -berandeten Zusammenhangskomponenten, deren Abschlüsse paarweise disjunkt seien, und es sei $\Sigma := \partial\Omega$.

4.1.1 Funktionenräume für das direkte Problem

Zur Untersuchung der parabolisch-elliptischen Gleichung benötigen wir Räume von Funktionen, die eine andere Regularität in der Orts- als in der Zeitkoordinate besitzen. Wir definieren die *anisotropen Sobolevräume* für $r, s \geq 0$ und $\mathcal{X} \in \{B, \Omega, Q, S, \Sigma\}$ durch

$$H^{r,s}(\mathcal{X}) := L^2(0, T, H^r(\mathcal{X})) \cap H^s(0, T, L^2(\mathcal{X}))$$

und für $s < \frac{1}{2}$ und $\mathcal{X} \in \{S, \Sigma\}$ durch

$$H^{-r,-s}(\mathcal{X}) := (H^{r,s}(\mathcal{X}))'.$$

Für eine ausführliche Diskussion dieser Sobolevräume verweisen wir auf [49, Sect. 4.2] und fassen hier nur kurz die Eigenschaften der Neumann- und Dirichletspuoperatoren im für uns wichtigen Spezialfall von Lösungen der Laplace- und der Wärmeleitungsgleichung zusammen.

Mit ν bezeichnen wir dabei wieder die äußere Normale auf S bzw. auf Σ , und verwenden wie in Kapitel 3 auf dem Rand Σ die Indizes „ $-$ “ bzw. „ $+$ “ um zu kennzeichnen, ob die Spur von innerhalb oder von außerhalb des Einschlusses gebildet wird.

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{D}(\overline{Q} \times [0, T]) := \{\varphi|_{Q \times]0, T[} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times]-\infty, T[)\}$$

und verwenden analoge Notationen für andere Räume von Testfunktionen, die auf Teilen des Randes nicht-verschwindende Randwerte besitzen.

Satz 4.1

(a) Die durch

$$v \mapsto v|_S \quad \text{und} \quad v \mapsto v^+|_\Sigma, \quad v \in \mathcal{D}(\overline{Q} \times]0, T[)$$

definierten Spurabbildungen können stetig fortgesetzt werden zu Abbildungen von $H^{1,0}(Q)$ nach $H^{\frac{1}{2},0}(S)$ bzw. nach $H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$. Die Fortsetzungen besitzen stetige Rechtsinversen.

Das Gleiche gilt für die Spurabbildung $H^{1,0}(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$, $v \mapsto v^-|_\Sigma$.

(b) Die Neumann-Spurabbildungen

$$v \mapsto \kappa \partial_\nu v|_S \quad \text{und} \quad v \mapsto \kappa \partial_\nu v^+|_\Sigma$$

werden für jede Lösung $v \in H^{1,0}(Q)$ der Gleichung

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} v) = 0 \quad \text{in } Q \times]0, T[\quad (4.6)$$

definiert durch

$$\begin{aligned} \langle \kappa \partial_\nu v|_S, f \rangle &:= \int_0^T \int_Q \kappa \nabla v \cdot \nabla v_f \, dx \, dt, \\ \langle \kappa \partial_\nu v^+|_\Sigma, \phi \rangle &:= - \int_0^T \int_Q \kappa \nabla v \cdot \nabla v_\phi \, dx \, dt \end{aligned}$$

für alle Funktionen f auf S und alle Funktionen ϕ auf Σ , die Fortsetzungen $v_f, v_\phi \in \mathcal{D}(\overline{Q} \times]0, T[)$ besitzen mit

$$v_f|_S = f, \quad v_f^+|_\Sigma = 0 \quad \text{bzw.} \quad v_\phi|_S = 0, \quad v_\phi^+|_\Sigma = \phi.$$

Die Neumann-Spurabbildungen können stetig fortgesetzt werden zu Abbildungen vom Unterraum der Lösungen von (4.6) (ausgestattet mit der $H^{1,0}(Q)$ -Norm) nach $H^{-\frac{1}{2},0}(S)$ bzw. $H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$.

(c) Die Neumann-Spurabbildung

$$v \mapsto \kappa \partial_\nu v^-|_\Sigma$$

wird für jede Lösung $v \in H^{1,0}(\Omega)$ der Gleichung

$$\partial_t v - \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} v) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\quad (4.7)$$

definiert durch

$$\langle \kappa \partial_\nu v^-|_\Sigma, \phi \rangle := \int_0^T \int_\Omega \kappa \nabla v \cdot \nabla v_\phi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega v \partial_t v_\phi \, dx \, dt$$

für alle Funktionen ϕ auf Σ , die Fortsetzungen $v_\phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega} \times]0, T[)$ besitzen mit $v_\phi|_\Sigma = \phi$.

Die Neumann-Spurabbildung kann stetig fortgesetzt werden zu einer Abbildung vom Unterraum der Lösungen von (4.7) (ausgestattet mit der $H^{1,0}(\Omega)$ -Norm) nach $H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)$.

Beweis:

Die Behauptungen (a) und (b) sind einfache Folgerungen aus den klassischen Spursätzen auf H^1 . Für (c) verweisen wir auf [17, Lemma 2.15 und Prop. 2.18]. \square

Aus den klassischen Spursätzen auf H^1 folgt auch die Existenz einer stetigen Rechtsinversen $\gamma_{\Sigma}^- : H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma) \rightarrow H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ des Spuroperators $v \mapsto v^+|_{\Sigma}$ mit den speziellen Eigenschaften, dass

$$(\gamma_{\Sigma}^- h)|_S = 0 \quad \text{und} \quad (\gamma_{\Sigma}^- h)|_{\Omega} = 0 \quad \text{für alle } h \in H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma).$$

γ_{Σ}^- ordnet also vorgegebenen äußeren Spurwerten h auf Σ eine Funktion in $H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ mit diesen äußeren Spurwerten auf Σ und verschwindenden Spurwerten auf S zu, die außerdem auf Ω verschwindet. Insbesondere gilt $[\gamma_{\Sigma}^- h]_{\Sigma} = h$, wobei wir wieder die Bezeichnungen

$$[v]_{\Sigma} := v^+|_{\Sigma} - v^-|_{\Sigma} \quad \text{und} \quad [\kappa \partial_{\nu} v]_{\Sigma} := \kappa \partial_{\nu} v^+|_{\Sigma} - \kappa \partial_{\nu} v^-|_{\Sigma}$$

verwenden.

Lösungen der parabolisch-elliptischen Gleichung werden in Ω eine Ableitung bezüglich der Zeit besitzen. Wir bezeichnen deshalb bezüglich des Gelfandtripels $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)'$ mit

$$W := W(0, T, H^1(\Omega), H^1(\Omega)')$$

den Raum der Funktionen $u \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ mit vektorwertiger distributioneller Zeitableitung $u' \in L^2(0, T, H^1(\Omega)')$, vgl. [22, XVIII, §1].

Lemma 4.2

(a) *Es ist $W \subset C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.*

(b) *Für alle $u, v \in W$ gilt die Greensche Formel*

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T \langle v'(t), u(t) \rangle dt = \int_{\Omega} (u(T)v(T) - u(0)v(0)) dx.$$

Beweis:

Die Behauptungen (a) und (b) werden in [22, XVIII, §1, Theorem 1+2] bewiesen. □

Wir benötigen schließlich noch eine Verallgemeinerung des Satzes von Lax-Milgram, mit der auch parabolische Probleme¹ behandelt werden können: das *Projektionslemma von Lions*.

Lemma 4.3 (Projektionslemma von Lions)

Sei H ein reeller Hilbertraum und Φ ein Unterraum von H . Außerdem sei $a : H \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit den folgenden Eigenschaften:

¹Vergleiche auch [17, Lemma 2.3], wo mit diesem Lemma die Lösbarkeit der Wärmeleitungsgleichung gezeigt wird.

- a) Für jedes $\varphi \in \Phi$ ist die Linearform $u \mapsto a(u, \varphi)$ stetig auf H .
 b) Es existiert ein $\alpha > 0$, so dass $a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_H^2$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Dann existiert zu jeder stetigen Linearform $l \in H'$ ein $u_0 \in H$, so dass

$$a(u_0, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \Phi \quad \text{und} \quad \|u_0\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{H'}.$$

Beweis:

Wir übernehmen den Beweis aus [47, III, Théorème 1.1]:

Aus der Voraussetzung (a) und dem Rieszschen Darstellungssatz folgt, dass zu jedem $\varphi \in \Phi$ ein $K\varphi \in H$ existiert mit

$$(u, K\varphi) = a(u, \varphi) \quad \text{für alle } u \in H.$$

Dies definiert einen linearen (möglicherweise unbeschränkten) Operator

$$K : \Phi \rightarrow V := K(\Phi) \subseteq H.$$

Aus Voraussetzung (b) folgt die Injektivität von K , er besitzt also eine algebraische Inverse $R_0 : V \rightarrow \Phi$. Wiederum mit (b) folgt, dass

$$\|R_0 v\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} a(R_0 v, R_0 v) = \frac{1}{\alpha} (R_0 v, v) \leq \frac{1}{\alpha} \|R_0 v\| \|v\|,$$

und damit $\|R_0 v\| \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|$. Der Operator R_0 kann also stetig fortgesetzt werden auf den Abschluss \bar{V} von V . Bezeichnen wir diese Fortsetzung mit \bar{R}_0 , so erhalten wir einen stetigen Operator $\bar{R}_0 : \bar{V} \rightarrow \bar{\Phi}$.

$\bar{\Phi}$ ist als abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums H selbst ein Hilbertraum. Wenden wir den Rieszschen Darstellungssatz auf $\bar{\Phi}$ an, so erhalten wir ein $\xi_l \in \bar{\Phi}$ mit

$$l(\varphi) = (\xi_l, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \bar{\Phi}.$$

Schließlich sei $P : H \rightarrow \bar{V}$ die orthogonale Projektion auf \bar{V} , dann besitzt $u_0 := P^* \bar{R}_0^* \xi_l$ die gewünschten Eigenschaften. \square

4.1.2 Lösungstheorie für das direkte Problem

Wir untersuchen nun das parabolisch-elliptische Problem

$$\partial_t(\chi_\Omega(x)u(x, t)) - \operatorname{div}(\kappa(x) \operatorname{grad} u(x, t)) = 0 \quad \text{in } B \times]0, T[, \quad (4.8)$$

und setzen dabei $\kappa \in L_+^\infty(B)$ voraus.

Wie schon in Abschnitt 3.2.1 verwenden wir einen distributionellen Ansatz und bemerken zunächst, dass die linke Seite von (4.8) eine mathematische Bedeutung für jedes $u \in H^{1,0}(B) = L^2(0, T, H^1(B))$ besitzt, wenn die Ableitungen im Sinne (skalarwertiger) Distributionen interpretiert werden. Die Gleichung (4.8) ist äquivalent zu

$$\int_0^T \int_\Omega u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) \, dx \, dt - \int_0^T \int_B \kappa(x) \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) \, dx \, dt = 0 \quad (4.9)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B \times]0, T[)$.

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass die Gleichung (4.8) (zusammen mit geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen) eine eindeutige Lösung in dem Raum $H^{1,0}(B)$ besitzt. In Satz 4.7 geben wir eine äquivalente variationelle Formulierung der Gleichung an.

Wir schreiben (4.8) zunächst als Diffraktionsproblem:

Lemma 4.4

$u \in H^{1,0}(B)$ löst genau dann Gleichung (4.8), wenn $u \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ ist, und u die folgenden Gleichungen löst:

$$\partial_t u - \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{in } Q \times]0, T[, \quad (4.11)$$

$$[\kappa \partial_\nu u]_\Sigma = 0, \quad (4.12)$$

$$[u]_\Sigma = 0. \quad (4.13)$$

Insbesondere implizieren (4.11) und (4.12), dass $\kappa \partial_\nu u^-|_\Sigma$ stetig fortgesetzt werden kann zu einem Element von $H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$.

Beweis:

Wie im zeitunabhängigen Fall (vgl. unsere Bemerkung unter Voraussetzung und Definition 2.8) gilt genau dann $u \in H^{1,0}(B)$, wenn $u \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ ist und u die Bedingung (4.13) erfüllt. Die Behauptung folgt dann aus den Definitionen der distributionellen Ableitung und der Neumann-Spurwerte. \square

Für die Behandlung des inversen Problems werden wir auch Diffraktionsprobleme mit inhomogenen Sprungbedingungen benötigen und ersetzen deshalb im Folgenden (4.12) und (4.13) durch entsprechende inhomogene Versionen.

Im nächsten Lemma zeigen wir die Eindeutigkeit der Lösung für das Diffraktionsproblem mit Neumann-Randwerten und einer Anfangsbedingung auf Ω .

Lemma 4.5

Sei $u \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ eine Lösung von (4.10), (4.11) und

$$[\kappa \partial_\nu u]_\Sigma = \psi \in H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma), \quad (4.14)$$

$$[u]_\Sigma = f \in H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma), \quad (4.15)$$

$$\kappa \partial_\nu u|_S = g \in H^{-\frac{1}{2},0}(S). \quad (4.16)$$

Dann ist $u|_\Omega \in W$, und u ist eindeutig bestimmt durch ψ , f , g und die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{auf } \Omega. \quad (4.17)$$

Beweis:

Wieder impliziert (4.14), dass $\kappa \partial_\nu u^-|_\Sigma$ stetig fortgesetzt werden kann zu einem Element von $H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$. Wir können also $w \in L^2(0, T, H^1(\Omega)')$ definieren, indem wir für jedes $t \in]0, T[$ und $v \in H^1(\Omega)$

$$\langle w(t), v \rangle := \langle \kappa \partial_\nu u^-(t)|_\Sigma, v^-|_\Sigma \rangle - \int_\Omega \kappa \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx$$

setzen. Damit ist

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(- \int_0^T u \partial_t \varphi \, dt \right) v \, dx \\ &= \int_0^T \langle \kappa \partial_\nu u^-|_\Sigma, v^-|_\Sigma \rangle \varphi \, dt - \int_0^T \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, \varphi \, dt \\ &= \left\langle \int_0^T w \varphi \, dt, v \right\rangle \end{aligned}$$

für alle $v(x)\varphi(t) \in \mathcal{D}(\bar{\Omega} \times]0, T[)$, also durch stetige Fortsetzung auch für alle $v \in H^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$. Im Sinne vektorwertiger Distributionen gilt also

$$w = (u|_\Omega)' \quad \text{bezüglich} \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)'$$

und damit $u|_\Omega \in W$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei u eine Lösung zu $f = 0$, $\psi = 0$, $g = 0$ und (4.17). Aus der Greenschen Formel in W (vgl. Lemma 4.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega |u(T)|^2 \, dx &= \int_0^T \langle u'(t), u(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^T \langle \kappa \partial_\nu u^-|_\Sigma, u^-|_\Sigma \rangle \, dt - \int_0^T \int_\Omega \kappa |\nabla u|^2 \, dx \, dt \\ &= - \int_0^T \int_B \kappa |\nabla u|^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $u(x, t) = c(t)$ ist, wobei $c \in C^0([0, T]; \text{span}\{\mathbf{1}_B\})$ die Gleichungen $c' = 0$ und $c(0) = 0$ erfüllt. Also ist $u = 0$. \square

Wir zeigen die Existenz einer Lösung des parabolisch-elliptischen Diffraktionsproblems (4.10), (4.11), (4.14)–(4.17) unter der zusätzlichen Bedingung, dass g und ψ verschwindendes Integralmittel besitzen. Für $\mathcal{X} \in \{S, \Sigma\}$ definieren wir dazu die Räume

$$\begin{aligned} H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{X}) &:= \left\{ g \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{X}) : \langle g, \mathbf{1}_\mathcal{X} \rangle = 0 \right\}, \\ H_\diamond^{-\frac{1}{2}, 0}(\mathcal{X}) &:= L^2(0, T, H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{X})). \end{aligned}$$

Dies sind offenbar abgeschlossene Unterräume von $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{X})$ bzw. $H^{-\frac{1}{2}, 0}(\mathcal{X})$, also selbst Hilberträume.

Lemma 4.6

Zu jedem

$$g \in H_\diamond^{-\frac{1}{2}, 0}(S), \quad f \in H^{\frac{1}{2}, 0}(\Sigma) \quad \text{und} \quad \psi \in H_\diamond^{-\frac{1}{2}, 0}(\Sigma)$$

existiert eine Lösung $u \in H^{1, 0}(B \setminus \Sigma)$ von (4.10), (4.11), (4.14)–(4.17).

u hängt stetig von g , f und ψ ab und erfüllt

$$\int_\Omega u(x, t) \, dx = 0 \quad \text{für } t \in [0, T] \text{ f. ü.}$$

Beweis:

Wir benutzen das Projektionslemma von Lions (Lemma 4.3). Dafür setzen wir $u_f := \gamma_{\Sigma^-} f \in H^{1, 0}(B \setminus \Sigma)$ und definieren die Räume

$$\begin{aligned} H_\square^1(B) &:= \left\{ v \in H^1(B) : \int_\Omega v \, dx = 0 \right\}, \\ H &:= L^2(0, T, H_\square^1(B)), \\ \Phi &:= \left\{ \varphi \in \mathcal{D}([0, T] \times \overline{B}) : \int_\Omega \varphi \, dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Außerdem definieren wir für alle $v \in H$ und $\varphi \in \Phi$

$$\begin{aligned} a(v, \varphi) &:= \int_0^T \int_B \kappa \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega v \, \partial_t \varphi \, dx \, dt, \\ \langle l, v \rangle &:= - \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u_f \cdot \nabla v \, dx \, dt + \int_0^T \langle g, v|_S \rangle \, dt - \int_0^T \langle \psi, v|_\Sigma \rangle \, dt. \end{aligned}$$

H ist als abgeschlossener Unterraum von $H^{1,0}(B)$ selbst ein Hilbertraum. Offenbar ist $\Phi \subset H$, und für jedes $\varphi \in \Phi$ ist die Linearform $v \mapsto a(v, \varphi)$ stetig auf H .

Aus der Poincaréschen Ungleichung folgt, dass $v \mapsto (\int_B |\nabla v|^2 dx)^{1/2}$ eine äquivalente Norm auf $H_{\square}^1(B)$ definiert, es existiert also ein $\alpha > 0$, so dass für alle $\varphi \in \Phi$ gilt

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) &= \int_0^T \int_B \kappa |\nabla \varphi(x, t)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\varphi(0, x)|^2 dx \\ &\geq \int_0^T \int_B \kappa |\nabla \varphi(x, t)|^2 dx dt \geq \alpha \|\varphi\|_H^2. \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus der Stetigkeit von γ_{Σ}^- und der des Spuoperators die Existenz eines $C > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \langle l, v \rangle &\leq C \left(\|g\|_{H^{-\frac{1}{2},0}(S)} + \|f\|_{H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)} + \|\psi\|_{H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)} \right) \|v\|_{H^{1,0}(B)} \\ &= C \left(\|g\|_{H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(S)} + \|f\|_{H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)} + \|\psi\|_{H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)} \right) \|v\|_H \end{aligned}$$

für alle $g \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(S)$, $f \in H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$, $\psi \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ und $v \in H$. Es ist also $l \in H'$ und

$$\|l\|_{H'} \leq C \left(\|g\|_{H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(S)} + \|f\|_{H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)} + \|\psi\|_{H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)} \right).$$

Aus dem Projektionslemma von Lions (Lemma 4.3) folgt die Existenz einer Lösung $\tilde{u} \in H$ von

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_B \kappa \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{u} \partial_t \varphi dx dt \\ &= - \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u_f \cdot \nabla \varphi dx dt + \int_0^T \langle g, \varphi|_S \rangle dt - \int_0^T \langle \psi, \varphi|_{\Sigma} \rangle dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

für alle $\varphi \in \Phi$, und dass \tilde{u} stetig von l (und damit stetig von g , f und ψ) abhängt.

Definieren wir $u := \tilde{u} + u_f \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$, dann erfüllt u die Sprungbedingung (4.15) und es existieren Konstanten $C', C'' > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{1,0}(B \setminus \Sigma)} &\leq C' \left(\|\tilde{u}|_{\Omega}\|_{H^{1,0}(\Omega)} + \|\tilde{u}|_Q\|_{H^{1,0}(Q)} + \|u_f\|_{H^{1,0}(B \setminus \Sigma)} \right) \\ &\leq C'' \left(\|\tilde{u}\|_H + \|u_f\|_{H^{1,0}(B \setminus \Sigma)} \right). \end{aligned}$$

u hängt also stetig von g , f und ψ ab.

Wegen $\int_{\Omega} \tilde{u}(x, t) dx = 0$ für $t \in [0, T]$ f.ü. verschwindet die linke Seite von (4.18) für alle räumlich konstanten Testfunktionen

$$\varphi(x, t) = c(t) \in \mathcal{D}([0, T[\times\overline{B}]).$$

Aufgrund unserer zusätzlichen Annahme an g und ψ verschwindet auch die rechte Seite von (4.18) für solche φ . Die Gleichung (4.18) ist also erfüllt für alle $\varphi \in \Phi$ und für alle $\varphi(x, t) = c(t)$. Damit folgt, dass (4.18) für alle $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[\times\overline{B}])$ gilt, und wir erhalten, dass u die Gleichungen (4.10), (4.11), (4.14) und (4.16) löst.

Sei $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[\times\Omega)$. Aus Lemma 4.5 folgt, dass $\tilde{u}|_{\Omega} = u|_{\Omega} \in W$. Wir können also die Greensche Formel anwenden und erhalten

$$-\int_{\Omega} u(0)\varphi(0) dx = \int_0^T \int_{\Omega} u \partial_t \varphi dx dt + \int_0^T \langle u', \varphi \rangle dt.$$

Aus (4.18) erhalten wir aufgrund der Bedingung an den Träger von φ

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \partial_t \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

Außerdem ist (vgl. Beweis von Lemma 4.5)

$$\int_0^T \langle u', \varphi \rangle dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_{\Omega} u(0)\varphi(0) dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}([0, T[\times\Omega),$$

und da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, folgt damit $u|_{\Omega}(0) = 0$. □

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts in einer variationellen Formulierung des Problems in Sobolevräumen zusammen:

Satz 4.7

Seien

$$g \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}, 0}(S), \quad f \in H^{\frac{1}{2}, 0}(\Sigma), \quad \psi \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}, 0}(\Sigma)$$

und $u_f := \gamma_{\Sigma}^{-} f \in H^{1, 0}(B \setminus \Sigma)$.

Für $u \in H^{1, 0}(B \setminus \Sigma)$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent. Es gibt genau ein $u \in H^{1, 0}(B \setminus \Sigma)$, das diese Aussagen erfüllt, dieses hängt stetig von g , f und ψ ab, und es gilt $\int_{\Omega} u(x, t) dx = 0$ für $t \in [0, T]$ f.ü.

(a) u löst

$$\partial_t u - \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \quad (4.19)$$

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{in } Q \times]0, T[, \quad (4.20)$$

$$[\kappa \partial_\nu u]_\Sigma = \psi, \quad (4.21)$$

$$[u]_\Sigma = f, \quad (4.22)$$

$$\kappa \partial_\nu u|_S = g, \quad (4.23)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (4.24)$$

(b) u erfüllt $u|_\Omega \in W$, $u(x, 0) = 0$ in Ω , und $\tilde{u} := u - u_f$ löst

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle (\tilde{u}|_\Omega)', v|_\Omega \rangle dt + \int_0^T \int_B \kappa \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \langle g, v|_S \rangle dt - \int_0^T \langle \psi, v|_\Sigma \rangle dt - \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u_f \cdot \nabla v \, dx \, dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

für alle $v \in H^{1,0}(B)$.

(c) $\tilde{u} := u - u_f$ löst

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_B \kappa \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx \, dt - \int_0^T \langle (v|_\Omega)', \tilde{u}|_\Omega \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle g, v|_S \rangle dt - \int_0^T \langle \psi, v|_\Sigma \rangle dt - \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u_f \cdot \nabla v \, dx \, dt \end{aligned}$$

für alle $v \in H^{1,0}(B)$ mit $v|_\Omega \in W$ und $v(x, T) = 0$ auf Ω .

Beweis:

Die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen in (a) und die Eigenschaften der Lösung haben wir in Lemma 4.5 und Lemma 4.6 gezeigt. Wir müssen also nur noch die Äquivalenz der Aussagen (a), (b) und (c) beweisen.

Wir beginnen mit der Implikation von (a) nach (b). Dazu sei $u \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ eine Lösung der Gleichungen in (a) und $\tilde{u} := u - u_f$. Dann gilt $\tilde{u} \in H^{1,0}(B)$, $\kappa \partial_\nu u^-|_\Sigma \in H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ und wegen Lemma 4.5 auch $\tilde{u}|_\Omega = u|_\Omega \in W$.

Es genügt, (4.25) für alle $v \in \mathcal{D}(]0, T[\times \overline{B})$ zu zeigen. Aus (4.19) und (4.20) folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle (\tilde{u}|_\Omega)', v|_\Omega \rangle dt - \int_0^T \langle \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u|_\Omega), v|_\Omega \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle (\tilde{u}|_\Omega)', v|_\Omega \rangle dt - \int_0^T \langle \kappa \partial_\nu u^-|_\Sigma, v|_\Sigma \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u|_Q), v|_Q \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \kappa \partial_\nu u|_S, v|_S \rangle dt - \int_0^T \langle \kappa \partial_\nu u^+|_\Sigma, v|_\Sigma \rangle dt - \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir diese zwei Gleichungen und benutzen (4.21) und (4.23), so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle (\tilde{u}|_\Omega)', v|_\Omega \rangle dt + \int_0^T \langle \psi, v|_\Sigma \rangle dt - \int_0^T \langle g, v|_S \rangle dt \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt + \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Nun folgt (4.25) aus

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt + \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_B \kappa \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx \, dt + \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u_f \cdot \nabla v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Die Implikation von (b) nach (c) ergibt sich aus der Greenschen Formel auf W , und die Implikation von (c) nach (a) folgt durch Einsetzen von Testfunktionen und Anwendung der Greenschen Formel wie im Beweis von Lemma 4.6. \square

4.1.3 Randmessungen und ein Referenzproblem

Wir nehmen an, dass der Einschluss Ω nicht nur eine höhere Wärmekapazität, sondern auch eine höhere Leitfähigkeit κ als der homogene Hintergrund Q besitzt, und setzen von nun an voraus, dass

$$\kappa|_Q = 1 \quad \text{und} \quad \kappa|_\Omega - 1 \in L_+^\infty(\Omega).$$

Wir definieren den Messoperator

$$\Lambda_1 : g \mapsto u_1|_S,$$

wobei $u_1 \in H^{1,0}(B)$ die Gleichung (4.8) mit $\partial_\nu u_1|_S = g$ und $u_1(x, 0) = 0$ auf Ω löst. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.2 folgt, dass Λ_1 ein stetiger linearer Operator von $H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(S)$ nach $H^{\frac{1}{2},0}(S)$ ist.

Um den Einschluss Ω zu lokalisieren, vergleichen wir wieder Λ_1 mit Randmessungen an einem Gebiet ohne Einschlüsse, d. h. mit dem Messoperator

$$\Lambda_0 : g \mapsto u_0|_S,$$

wobei u_0 die Gleichung $\Delta u_0(x, t) = 0$ in $B \times]0, T[$ mit $\partial_\nu u_0|_S = g$ löst. Aus dem Satz von Lax-Milgram folgt, dass $u_0 \in H^{1,0}(B)$ bis auf Addition einer räumlich konstanten Funktion $u(x, t) = c(t) \in L^2(0, T, \text{span}\{\mathbf{1}_B\})$ eindeutig bestimmt ist, und dass Λ_0 ein stetiger linearer Operator

$$\Lambda_0 : H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(S) \rightarrow H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(S) := L^2(0, T, H_\diamond^{\frac{1}{2}}(S))$$

ist, wobei der Faktorraum $H_\diamond^{\frac{1}{2}}(S) := H^{\frac{1}{2}}(S)/\text{span}\{\mathbf{1}_S\}$ offenbar identifiziert werden kann mit dem Dualraum von $H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(S)$ und $H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(S)$ mit dem Dualraum von $H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(S)$.

Analog definieren wir Faktorräume auf B , Q und Σ , wobei wir auch für nicht-zusammenhängende Einschlüsse den Faktorraum $H_\diamond^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ bezüglich des eindimensionalen Raumes der auf Σ konstanten Funktionen und nicht bezüglich des mehrdimensionalen Raumes der lokal konstanten Funktionen bilden. Wie in den Abschnitten 2.5 und 3.3 verwenden wir für die Elemente der Faktorräume dieselben Bezeichner wie für Funktionen.

Ohne die Notation zu ändern, schränken wir mit dem kanonischen Epimorphismus Λ_1 auf den Raum des Referenzproblems ein. Wir betrachten also die Messoperatoren als Abbildungen

$$\Lambda_0, \Lambda_1 : H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(S) \rightarrow H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(S).$$

4.2 Das inverse Problem

Wir betrachten in diesem Abschnitt das inverse Problem, den Einschluss Ω aus den Messoperatoren Λ_0 und Λ_1 zu lokalisieren. Dazu erweitern wir die Faktorisierungsmethode auf dieses parabolisch-elliptische Problem und faktorisieren zunächst wie in Abschnitt 2.4.1 die Differenz der Messoperatoren $\Lambda_0 - \Lambda_1$ in das Produkt

$$\Lambda_0 - \Lambda_1 = L(F_0 - F_1)L',$$

vgl. Abbildung 4.2, wobei der Operator L wieder virtuellen Messungen auf dem Komplement Q der Inklusion entspricht und sein Bildraum Informationen über Q und damit über die Lage von Ω enthält.

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(S) & \xrightarrow{\Lambda_0 - \Lambda_1} & H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(S) \\
 \searrow L' & & \nearrow L \\
 & H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma) \xrightarrow{F_0 - F_1} H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) &
 \end{array}$$

 Abbildung 4.2: Faktorisierung von $\Lambda_0 - \Lambda_1$

Im Unterschied zu den beiden vorherigen Kapiteln und bisherigen Anwendungen der Faktorisierungsmethode können wir jedoch nicht mehr den gesamten Bildraum $\mathcal{R}(L)$ aus den Messungen $\Lambda_0 - \Lambda_1$ berechnen. Mit einem neuen Ansatz können wir aber zeigen, dass alle Funktionen aus $\mathcal{R}(L)$ mit hinreichender Zeitregularität bestimmt werden können, und dass dies genügt, um Ω zu rekonstruieren.

4.2.1 Faktorisierung der Messoperatoren

Wir definieren den virtuellen Messoperator

$$L : H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) \rightarrow H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(S), \quad L\psi := v|_S,$$

wobei $v \in H_{\diamond}^{1,0}(Q)$ die Lösung ist von

$$\Delta v = 0 \text{ in } Q \times]0, T[, \quad \partial_{\nu} v = \begin{cases} -\psi & \text{auf } \Sigma, \\ 0 & \text{auf } S. \end{cases} \quad (4.26)$$

Wir benötigen außerdem die beiden Operatoren

$$\begin{aligned}
 F_0 &: H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma), & F_0\phi &:= \partial_{\nu} v_0^+|_{\Sigma}, \\
 F_1 &: H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma), & F_1\phi &:= \partial_{\nu} v_1^+|_{\Sigma},
 \end{aligned}$$

wobei $v_0, v_1 \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ Lösungen sind von

$$\begin{aligned}
 \Delta v_0 &= 0 & \text{in } (Q \cup \Omega) \times]0, T[, & & [\partial_{\nu} v_0]_{\Sigma} &= 0, \\
 \partial_{\nu} v_0|_S &= 0, & & & [v_0]_{\Sigma} &= \phi
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

und

$$\begin{aligned}
 \Delta v_1 &= 0 & \text{in } Q \times]0, T[, & & [\kappa \partial_{\nu} v_1]_{\Sigma} &= 0, \\
 \partial_t v_1 - \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} v_1) &= 0 & \text{in } \Omega \times]0, T[, & & [v_1]_{\Sigma} &= \phi, \\
 v_1(x, 0) &= 0 & \text{in } \Omega, & & \partial_{\nu} v_1|_S &= 0.
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Offenbar ist F_0 wohldefiniert, obwohl v_0 nach dem Satz von Lax-Milgram durch (4.27) nur bis auf Addition einer räumlich konstanten Funktion bestimmt ist. Durch Anwendung der Greenschen Formel auf Q folgt, dass die Bildräume von F_0 und F_1 in dem Raum $H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ enthalten sind. Da außerdem ihr Kern offenbar den Raum $L^2(0, T, \text{span}\{\mathbf{1}_{\Sigma}\})$ enthält, betrachten wir sie von nun an als Operatoren

$$F_0, F_1 : H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma) \rightarrow H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma).$$

Wir bemerken noch, dass F_0 und F_1 den im Beweis von Satz 2.16 eingeführten Operatoren entsprechen.

Satz 4.8

Für die Differenz der Messoperatoren gilt

$$\Lambda_0 - \Lambda_1 = L(F_0 - F_1)L'. \quad (4.29)$$

Die Operatoren L und L' sind injektiv.

Beweis:

Sei $g \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(S)$. Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert eine Lösung $w \in H_{\diamond}^{1,0}(Q)$ von

$$\Delta w = 0 \text{ in } Q \times]0, T[\quad \text{mit} \quad \partial_{\nu} w = \begin{cases} 0 & \text{auf } \Sigma, \\ g & \text{auf } S. \end{cases}$$

Sei außerdem $\psi \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$, und $v \in H_{\diamond}^{1,0}(Q)$ sei die Lösung von (4.26) in der Definition von $L\psi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi, L'g \rangle &= \langle g, L\psi \rangle = \langle \partial_{\nu} w|_S, v|_S \rangle = \int_0^T \int_Q \nabla w \cdot \nabla v \, dx \, dt \\ &= \langle -\partial_{\nu} v^+|_{\Sigma}, w^+|_{\Sigma} \rangle = \langle \psi, w^+|_{\Sigma} \rangle, \end{aligned}$$

also $L'g = w^+|_{\Sigma}$.

Seien nun $v_0, v_1 \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ die Lösungen von (4.27) und (4.28) aus den Definitionen von $F_0 w^+|_{\Sigma}$ und $F_1 w^+|_{\Sigma}$. Wir definieren $u_0, u_1 \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ durch $u_i|_{\Omega} := -v_i|_{\Omega}$ und $u_i|_Q := w - v_i|_Q$ ($i = 0, 1$). Für die so definierten Funktionen gilt $u_0, u_1 \in H^{1,0}(B)$, und u_0, u_1 lösen die Gleichungen in der Definition von $\Lambda_0 g$ und $\Lambda_1 g$. Es ist also

$$(\Lambda_0 - \Lambda_1)g = (u_0 - u_1)|_S = -(v_0 - v_1)|_S.$$

Da $\Delta(v_1 - v_0) = 0$ in $Q \times]0, T[$ und $\partial_\nu(v_1 - v_0)|_S = 0$ ist, gilt auch

$$L(\partial_\nu(v_0^+ - v_1^+)|_\Sigma) = -(v_0 - v_1)|_S$$

und damit

$$(\Lambda_0 - \Lambda_1)g = L(\partial_\nu(v_0^+ - v_1^+)|_\Sigma) = L(F_0 - F_1)w^+|_\Sigma = L(F_0 - F_1)L'g,$$

womit (4.29) gezeigt ist.

Um die Injektivität von L' zu zeigen, sei $L'g = 0$ mit einem $g \in H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(S)$. Dann existiert aufgrund der obigen Charakterisierung von L' eine Lösung $w \in H^{1,0}(Q)$ von

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } Q \times]0, T[, \quad w^+|_\Sigma = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\nu w = \begin{cases} 0 & \text{auf } \Sigma, \\ g & \text{auf } S. \end{cases}$$

Setzen wir w durch 0 auf $\Omega \times]0, T[$ fort und bezeichnen diese Fortsetzung mit $\tilde{w} \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$, so gilt

$$\Delta \tilde{w} = 0 \quad \text{in } (B \setminus \Sigma) \times]0, T[, \quad [\tilde{w}]_\Sigma = 0, \quad [\kappa \partial_\nu \tilde{w}]_\Sigma = 0,$$

also $\tilde{w} \in H^{1,0}(B)$ und $\Delta \tilde{w} = 0$ auf $B \times]0, T[$. Für $t \in]0, T[$ f.ü. ist $\tilde{w}(\cdot, t)$ daher analytisch. Da \tilde{w} auf Ω verschwindet und B zusammenhängend ist, folgt $w = \tilde{w} = 0$ auf Q und damit $g = 0$. L' ist also injektiv.

Die Injektivität von L folgt mit denselben Argumenten, wenn die Funktion aus der Definition von L durch 0 auf $(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}) \times]0, T[$ fortgesetzt wird. Da Q zusammenhängend ist, ist auch $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend. \square

Wie in Abschnitt 2.4.1 benötigen wir noch eine Koerzitivitätsbedingung für den Operator $F_0 - F_1$. Um diese zu zeigen, führen wir die Operatoren λ_1 und λ ein, die zu Messungen im Einschluss bzw. im Komplement gehören.

Wir definieren

$$\begin{aligned} \lambda_1 : H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) &\rightarrow H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma), & \lambda_1 \psi &:= u_1^-|_\Sigma, \\ \lambda : H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) &\rightarrow H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(\Sigma), & \lambda \psi &:= u^+|_\Sigma, \end{aligned}$$

wobei $u_1 \in W$ die Lösung ist von

$$\partial_t u_1 - \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u_1) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \quad (4.30)$$

$$\kappa \partial_\nu u_1^-|_\Sigma = \psi \quad \text{auf } \Sigma, \quad (4.31)$$

$$u_1(x, 0) = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (4.32)$$

und $u \in H_\diamond^{1,0}(Q)$ die Lösung ist von

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } Q \times]0, T[\quad \text{mit} \quad \partial_\nu u = \begin{cases} -\psi & \text{auf } \Sigma, \\ 0 & \text{auf } S. \end{cases} \quad (4.33)$$

Dabei besitzt die Gleichung in der Definition von λ wieder nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige Lösung. Die eindeutige Lösbarkeit von (4.30)–(4.32) wird in [17, Corollary 3.17] sogar für $\psi \in H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$ bewiesen. Für die hier betrachteten Neumann-Randdaten kann sie auch analog zu Lemma 4.5 und Lemma 4.6 gezeigt werden.

Wieder verwenden wir den kanonischen Epimorphismus, um λ_1 auf dieselben Räume wie λ einzuschränken, d. h. wir betrachten λ_1 als Operator

$$\lambda_1 : H_\diamond^{-\frac{1}{2}, 0}(\Sigma) \rightarrow H_\diamond^{\frac{1}{2}, 0}(\Sigma).$$

Lemma 4.9

λ_1 ist koerziv bezüglich $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$, d. h. es existiert ein $c > 0$, so dass

$$\langle \psi, \lambda_1 \psi \rangle \geq c \|\psi\|_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)}^2 \quad \text{für alle } \psi \in H_\diamond^{-\frac{1}{2}, 0}(\Sigma). \quad (4.34)$$

Beweis:

Offenbar löst jede Lösung $u_1 \in W$ von (4.30)–(4.32) durch Nullfortsetzung auf Q die Gleichungen (4.19), (4.20) und (4.24) in Satz 4.7(a), sowie

$$[\kappa \partial_\nu u_1]_\Sigma = -\psi, \quad [u_1]_\Sigma = -\lambda_1 \psi \quad \text{und} \quad \kappa \partial_\nu u_1|_S = 0.$$

Es gilt also $\int_\Omega u_1(x, t) dx = 0$ für $t \in [0, T]$ f. ü. und mit $u_f := -\gamma_\Sigma^- \lambda_1 \psi$ erhalten wir für $\tilde{u} := u_1 - u_f$ aus der Variationsformulierung in Satz 4.7(b)

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (\tilde{u}|_\Omega)', \tilde{u}|_\Omega \rangle dt + \int_0^T \int_B \kappa |\nabla \tilde{u}|^2 dx dt &= \int_0^T \langle \psi, \tilde{u}|_\Sigma \rangle dt \\ &\quad - \int_0^T \int_Q \kappa \nabla u_f \cdot \nabla \tilde{u} dx dt. \end{aligned}$$

Mit $\tilde{u}|_\Sigma = \lambda_1 \psi$, $u_f|_\Omega = 0$ und $u_1|_Q = 0$ ergibt sich

$$\langle \psi, \lambda_1 \psi \rangle = \int_0^T \langle (u_1|_\Omega)', u_1|_\Omega \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega \kappa |\nabla u_1|^2 dx dt.$$

Wegen $\int_\Omega u_1(x, t) dx = 0$ für $t \in [0, T]$ f. ü. folgt deshalb aus der Poincaré-schen Ungleichung die Existenz eines $c' > 0$, so dass

$$\langle \psi, \lambda_1 \psi \rangle \geq c' \|u_1\|_{H^{1,0}(\Omega)}^2,$$

und mit der Stetigkeit des Neumann-Spuroperators in Satz 4.1(c) folgt die Behauptung. \square

Nun können wir die Koerzivitätsbedingung für $F_0 - F_1$ zeigen:

Lemma 4.10

Es existiert ein $c' > 0$, so dass

$$\langle (F_0 - F_1)\phi, \phi \rangle \geq c' \|F_1\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)}^2 \quad \text{für alle } \phi \in H_{\Sigma}^{\frac{1}{2}, 0}(\Sigma).$$

F_1 ist bijektiv, und es ist $F_1^{-1} = -\lambda - \lambda_1$.

Beweis:

Zu gegebenem $\phi \in H^{\frac{1}{2}, 0}(\Sigma)$ seien $v_0, v_1 \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ die Lösungen von (4.27) und (4.28) in der Definition von F_0 und F_1 . Außerdem sei $v_\phi := \gamma_{\Sigma}^- \phi$. Dann lösen $\tilde{v}_i := v_i - v_\phi$ ($i = 0, 1$)

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_B \nabla \tilde{v}_0 \cdot \nabla w \, dx \, dt &= - \int_0^T \int_Q \nabla v_\phi \cdot \nabla w \, dx \, dt, \\ \int_0^T \langle (\tilde{v}_1|_{\Omega})', w|_{\Omega} \rangle \, dt + \int_0^T \int_B \kappa \nabla \tilde{v}_1 \cdot \nabla w \, dx \, dt &= - \int_0^T \int_Q \nabla v_\phi \cdot \nabla w \, dx \, dt \end{aligned}$$

für alle $w \in H^{1,0}(B)$, vgl. Satz 4.7 für die zweite Gleichung. Aus dem Satz von Lax-Milgram folgt, dass $\tilde{v}_0(\cdot, t)$ für $t \in]0, T[$ f. ü. das Funktional

$$w \mapsto \frac{1}{2} \int_B |\nabla w(x)|^2 \, dx + \int_Q \nabla v_\phi(x, t) \cdot \nabla w(x) \, dx$$

in $H^1(B)$ minimiert, es ist also insbesondere

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^T \int_B |\nabla \tilde{v}_0|^2 \, dx \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_B |\nabla \tilde{v}_0|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_Q \nabla v_\phi \cdot \nabla \tilde{v}_0 \, dx \, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_B |\nabla \tilde{v}_1|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_Q \nabla v_\phi \cdot \nabla \tilde{v}_1 \, dx \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_B |\nabla \tilde{v}_1|^2 \, dx \, dt - \int_0^T \int_B \kappa |\nabla \tilde{v}_1|^2 \, dx \, dt - \int_0^T \langle (\tilde{v}_1|_{\Omega})', \tilde{v}_1|_{\Omega} \rangle \, dt. \end{aligned}$$

Aus unserer Annahme $\kappa|_{\Omega} - 1 \in L_+^{\infty}(\Omega)$ folgt die Existenz eines $c_{\kappa} > 0$, so

dass

$$\begin{aligned}
 \langle (F_0 - F_1)\phi, \phi \rangle &= \langle \partial_\nu v_0^+ |_\Sigma, \phi \rangle - \langle \partial_\nu v_1^+ |_\Sigma, \phi \rangle \\
 &= \int_0^T \int_Q \nabla v_1 \cdot \nabla v_\phi \, dx \, dt - \int_0^T \int_Q \nabla v_0 \cdot \nabla v_\phi \, dx \, dt \\
 &= \int_0^T \int_Q \nabla v_\phi \cdot \nabla \tilde{v}_1 \, dx \, dt - \int_0^T \int_Q \nabla v_\phi \cdot \nabla \tilde{v}_0 \, dx \, dt \\
 &= \int_0^T \int_B |\nabla \tilde{v}_0|^2 \, dx \, dt - \int_0^T \int_B \kappa |\nabla \tilde{v}_1|^2 \, dx \, dt - \int_0^T \langle (\tilde{v}_1|_\Omega)', \tilde{v}_1|_\Omega \rangle \, dt \\
 &\geq \int_0^T \int_\Omega (\kappa - 1) |\nabla \tilde{v}_1|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \langle (\tilde{v}_1|_\Omega)', \tilde{v}_1|_\Omega \rangle \, dt \\
 &\geq c_\kappa \langle \kappa \partial_\nu \tilde{v}_1^- |_\Sigma, \lambda_1 (\kappa \partial_\nu \tilde{v}_1^- |_\Sigma) \rangle = c_\kappa \langle \partial_\nu v_1^+ |_\Sigma, \lambda_1 (\partial_\nu v_1^+ |_\Sigma) \rangle \\
 &= c_\kappa \langle F_1 \phi, \lambda_1 F_1 \phi \rangle,
 \end{aligned}$$

für alle $\phi \in H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ und damit auch für alle $\phi \in H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ gilt. Der erste Teil der Behauptung folgt nun aus Lemma 4.9.

Um die Surjektivität von F_1 zu zeigen, sei $\psi \in H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ gegeben, und es seien $u \in H^{1,0}(Q)$, $u_1 \in W$ die Funktionen aus den Definitionen von $\lambda\psi$ und $\lambda_1\psi$. Wir definieren $v_1 \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ durch $v_1 := -u$ in Q und $v_1 := u_1$ in Ω . Dann löst v_1 die Gleichungen in der Definition von F_1 mit $[v_1]_\Sigma = (-\lambda - \lambda_1)\psi$. Es ist also

$$F_1(-\lambda - \lambda_1)\psi = \partial_\nu v_1^+ |_\Sigma = \psi.$$

Es bleibt noch die Injektivität von F_1 zu zeigen. Hierfür sei $F_1\phi = 0$ mit einem $\phi \in H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$, und $v_1 \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ sei die Funktion aus der Definition von F_1 . Dann löst v_1 die Laplace-Gleichung in Q und die Wärmeleitungsgleichung in Ω , jeweils mit verschwindenden Neumann-Randwerten. v_1 verschwindet also auf Ω und ist räumlich konstant auf Q , womit $\phi \in L^2(0, T, \text{span}\{\mathbf{1}_\Sigma\})$ folgt. \square

4.2.2 Bildraumabschätzung

Wir schreiben den symmetrischen Anteil der Faktorisierung (4.29) in Satz 4.8 mit adjungierten Operatoren. Mit den Abkürzungen

$$\iota_S := \iota_{H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(S)} \quad \text{und} \quad \iota_\Sigma := \iota_{H_\diamond^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)}$$

(vgl. Abschnitt 2.2) setzen wir

$$\begin{aligned}\Lambda &:= \Lambda_0 - \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda'_1), & \tilde{\Lambda} &:= \Lambda_{\iota_S}, \\ F &:= F_0 - \frac{1}{2}(F_1 + F'_1), & \tilde{F} &:= \iota_\Sigma^{-1}F.\end{aligned}$$

Aus Lemma 4.10 folgt, dass \tilde{F} positiv semidefinit ist, und damit, dass auch $\tilde{\Lambda}$ es ist. Sie besitzen also selbstadjungierte Wurzeln $\tilde{F}^{1/2}$ und $\tilde{\Lambda}^{1/2}$ (vgl. [56, Theorem 12.33]). Wie im Beweis von Satz 2.12 erhalten wir aus der Faktorisierung einen Zusammenhang zwischen den Bildräumen dieser Wurzeln.

Lemma 4.11

Es gilt

$$\mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) = \mathcal{R}(L_{\iota_\Sigma}\tilde{F}^{1/2}).$$

Beweis:

Durch Anwendung von Satz 4.8 erhalten wir

$$\tilde{\Lambda}^{1/2}\tilde{\Lambda}^{1/2} = \tilde{\Lambda} = L_{\iota_\Sigma}\tilde{F}L'_{\iota_S} = (L_{\iota_\Sigma})\tilde{F}(L_{\iota_\Sigma})^* = (L_{\iota_\Sigma})\tilde{F}^{1/2}\tilde{F}^{1/2}(L_{\iota_\Sigma})^*.$$

Die Behauptung folgt also aus Lemma 2.6. □

Wäre F koerziv bezüglich des Raumes $H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)$, so wäre $\tilde{F}^{1/2}$ surjektiv und wir erhielten die Bildraumidentität $\mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) = \mathcal{R}(L)$. Hier haben wir jedoch nur die schwächere Koerzitivitätsbedingung aus Lemma 4.10. Der nächste Satz zeigt aber, dass aus dieser schwächeren Bedingung immer noch folgt, dass $\mathcal{R}(\tilde{F}^{1/2})$ alle Funktionen mit einer gewissen Zeitregularität enthält.

Satz 4.12

Es gilt

$$\mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) \subseteq \mathcal{R}(L) = L\left(H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)\right), \quad (4.35)$$

$$\mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) \supseteq L\left(H^{\frac{1}{4}}(0, T, H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))\right). \quad (4.36)$$

Beweis:

Gleichung (4.35) folgt direkt aus Lemma 4.11.

Bezeichnen wir mit

$$j_1 : H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) \quad \text{und} \quad j_2 : H^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)$$

die entsprechenden Einbettungsoperatoren und benutzen Lemma 4.10, dann folgt mit $j := j_2 j_1$ die Existenz eines $c' > 0$, so dass für alle $\phi \in H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$

$$\left\| \tilde{F}^{1/2} \phi \right\|_{H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)}^2 = (\tilde{F} \phi, \phi)_{H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)} \geq c' \|j F_1 \phi\|_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)}^2.$$

Mit $F_1^* j^* = \iota_{\Sigma}^{-1} F_1' j' \iota_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)}$ erhalten wir aus Lemma 2.6

$$\mathcal{R}(\tilde{F}^{1/2}) \supseteq \mathcal{R}(F_1^* j^*) = \mathcal{R}(\iota_{\Sigma}^{-1} F_1' j')$$

und aus Lemma 4.11

$$\mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) = \mathcal{R}(L \iota_{\Sigma} \tilde{F}^{1/2}) \supseteq \mathcal{R}(L F_1' j').$$

Offenbar ist j_2' der Einbettungsoperator von $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ nach $H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ und j_1' ist der kanonische Epimorphismus von $H^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$ auf $H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$. Der Bildraum von $j' = j_1' j_2'$ besteht also aus allen Restklassen in $H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)$, die einen Repräsentanten aus $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ besitzen, d. h. es ist $\mathcal{R}(j') = H_{\diamond}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ mit²

$$\begin{aligned} H_{\diamond}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma) &:= \left(H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma) + L^2(0, T, \text{span}\{\mathbf{1}_{\Sigma}\}) \right) / L^2(0, T, \text{span}\{\mathbf{1}_{\Sigma}\}) \\ &\subset H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma). \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.10 erhalten wir $(F_1')^{-1} = -\lambda' - \lambda_1'$, und aus [17, Corollary 3.17] folgt die Existenz eines $C > 0$, so dass

$$\|\lambda_1 \psi\|_{H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma)} \leq C \|j \psi\|_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)}.$$

Nach Lemma 2.6 gilt also $\mathcal{R}(\lambda_1') \subseteq \mathcal{R}(j') = H_{\diamond}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$.

Offenbar ist $\lambda = \lambda'$. Wir müssen nun nur noch zeigen, dass

$$\lambda \left(H^{\frac{1}{4}}(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)) \right) \subseteq H_{\diamond}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma), \quad (4.37)$$

denn dann folgt $(F_1')^{-1} \left(H^{\frac{1}{4}}(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)) \right) \subseteq H_{\diamond}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma) = \mathcal{R}(j')$, und damit

$$\begin{aligned} L \left(H^{\frac{1}{4}}(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)) \right) &= L F_1' (F_1')^{-1} \left(H^{\frac{1}{4}}(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)) \right) \\ &\subseteq \mathcal{R}(L F_1' j') \subseteq \mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}). \end{aligned}$$

²Durch diese Definition ist $H_{\diamond}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ isomorph zu $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)/H^{\frac{1}{4}}(0, T, \text{span}\{\mathbf{1}_{\Sigma}\})$.

Zum Beweis von (4.37) bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}$ die nicht-zeitabhängige Neumann-Dirichlet-Abbildung, also

$$\bar{\lambda} : H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma) \rightarrow H_{\diamond}^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{u}^+|_{\Sigma},$$

wobei $\bar{u} \in H_{\diamond}^1(Q)$ die Lösung ist von

$$\Delta \bar{u} = 0 \quad \text{in } Q, \quad \partial_{\nu} \bar{u} = \begin{cases} -\bar{\psi} & \text{auf } \Sigma, \\ 0 & \text{auf } S. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $\psi \in H^1(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ und $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\lambda\psi)\varphi' dt &= -\bar{\lambda} \left(\int_0^T \psi\varphi'(t) dt \right) = \bar{\lambda} \left(\int_0^T \psi'\varphi(t) dt \right) \\ &= \int_0^T (\lambda\psi')\varphi dt \in H_{\diamond}^{\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{aligned}$$

Es ist also $\lambda\psi \in H^1(0, T, H_{\diamond}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$ mit $(\lambda\psi)' = \lambda(\psi')$, d. h. λ ist nicht nur ein stetiger Operator von $L^2(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))$ nach $L^2(0, T, H_{\diamond}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$, sondern auch von $H^1(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))$ nach $H^1(0, T, H_{\diamond}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$.

Durch Interpolation (vgl. [48, Chp. 1, Theorem 5.1 und Remark 9.5]) folgt, dass λ auch ein stetiger Operator ist von

$$H^{\frac{1}{4}}(0, T, H_{\diamond}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)) \quad \text{nach} \quad H^{\frac{1}{4}}(0, T, H_{\diamond}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)) \subset H_{\diamond}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma).$$

Es gilt also (4.37) und damit die Behauptung. \square

4.2.3 Charakterisierung der Einschlüsse

Durch Hintereinanderausführung der Zeitintegration und der (kompakten) Einbettung $H_{\diamond}^{\frac{1}{2}}(S) \hookrightarrow L_{\diamond}^2(S) := L^2(S)/\text{span}\{\mathbf{1}_S\}$ erhalten wir den kompakten Operator

$$I : H_{\diamond}^{\frac{1}{2}, 0}(S) \rightarrow L_{\diamond}^2(S), \quad u \mapsto \int_0^T u(\cdot, t) dt.$$

Identifizieren wir $L_{\diamond}^2(S)$ mit seinem Dualraum, so ist

$$I\tilde{\Lambda}I^* = I\Lambda I', \tag{4.38}$$

wobei $I' : L^2_\diamond(S) \rightarrow H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(S)$ offenbar gegeben ist durch

$$I'v = w \quad \text{mit} \quad w(\cdot, t) = v(\cdot) \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ f. ü.}$$

Der Operator $I\Lambda I'$ beschreibt das Einspeisen eines zeitlich konstanten Wärmeflusses in einen Körper und die Messung von Zeitintegralen der resultierenden Oberflächentemperatur.

Lemma 4.13

Der Operator $I\Lambda I'$ ist kompakt, symmetrisch und injektiv. Der Bildraum von $I\Lambda I'$ liegt dicht in $L^2_\diamond(S)$.

Beweis:

Die Symmetrie und Kompaktheit folgen direkt aus der Definition. Um die Injektivität zu zeigen, sei $I\Lambda I'g = 0$ mit einem $g \in L^2_\diamond(S)$. Dann erhalten wir aus der Faktorisierung in Satz 4.8

$$\langle FL'I'g, L'I'g \rangle = \langle ILFL'I'g, g \rangle = 0,$$

und aus Lemma 4.10 folgt $L'I'g = 0$. Da L' nach Satz 4.8 injektiv ist und I' offenbar ebenfalls, muss $g = 0$ sein. $I\Lambda I'$ ist also injektiv. Die Dichtheit des Bildraums folgt wegen der Symmetrie aus der Injektivität. \square

Um die Lage des Einschlusses Ω aus den Messungen $I\Lambda I'$ zu bestimmen, können wir dieselben Dipolfunktionen verwenden, die Brühl und Hanke für die Impedanztomographie in [10, 11] benutzen. Für eine Richtung $d \in \mathbb{R}^n$, $|d| = 1$ und einen Punkt $z \in B$ definieren wir

$$D_{z,d}(x) := \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^n}.$$

Dann ist $D_{z,d}(x)$ analytisch und $\Delta D_{z,d}(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$. Für eine Kugel $B_\epsilon(z)$ mit Mittelpunkt z und so kleinem Radius $\epsilon > 0$, dass $\overline{B_\epsilon(z)} \subset B$ ist, gilt

$$\int_S \partial_\nu D_{z,d}(x)|_S \, d\sigma = \int_{\partial B_\epsilon(z)} \partial_\nu D_{z,d}(x)|_{\partial B_\epsilon(z)} \, d\sigma = 0,$$

also ist $\partial_\nu D_{z,d}|_S \in H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(S)$.

Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert eine Lösung $v_{z,d} \in H^1(B)$ von

$$\Delta v_{z,d} = 0 \quad \text{in } B \quad \text{und} \quad \partial_\nu v_{z,d}|_S = -\partial_\nu D_{z,d}|_S \quad \text{auf } S.$$

Die Funktion $G_{z,d} := D_{z,d} + v_{z,d}$ ist harmonisch (und damit analytisch) in $B \setminus \{z\}$. Sie erfüllt $\partial_\nu G_{z,d}|_S = 0$, und es ist $G_{z,d} \notin L^2(B \setminus \{z\})$.

Der Ort des Einschlusses kann nun durch die Randwerte

$$g_{z,d} := G_{z,d}|_S \in H_\diamond^{\frac{1}{2}}(S)$$

charakterisiert werden.

Satz 4.14

Für jedes $d \in \mathbb{R}^n$, $|d| = 1$ und jedes $z \in B$ gilt

$$z \in \Omega \quad \text{genau dann, wenn} \quad g_{z,d} \in \mathcal{R}((I\Lambda I')^{1/2}).$$

Beweis:

Aus Lemma 2.6 und (4.38) folgt, dass $\mathcal{R}((I\Lambda I')^{1/2}) = \mathcal{R}(I\tilde{\Lambda}^{1/2})$. Wir erhalten also aus Satz 4.12, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{R}((I\Lambda I')^{1/2}) &\subseteq IL\left(H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma)\right), \\ \mathcal{R}((I\Lambda I')^{1/2}) &\supseteq IL\left(H^{\frac{1}{4}}(0,T, H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))\right). \end{aligned}$$

Sei zuerst $z \in \Omega$, dann definieren wir $w \in H_\diamond^{1,0}(Q)$ durch

$$w(x,t) := \frac{1}{T}G_{z,d}(x) \quad \text{für } t \in [0,T] \text{ f. ü.}$$

Die Funktion w ist in einer Umgebung von $Q \times [0,T]$ analytisch, insbesondere ist $-\partial_\nu w^+|_\Sigma \in H^{\frac{1}{4}}(0,T, H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))$. Außerdem löst w die Gleichung (4.26) in der Definition von L , also ist

$$g_{z,d} = Iw|_S = IL(-\partial_\nu w^+|_\Sigma) \in IL\left(H^{\frac{1}{4}}(0,T, H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))\right) \subseteq \mathcal{R}((I\Lambda I')^{1/2}).$$

Um die Rückrichtung zu zeigen, sei $g_{z,d} \in \mathcal{R}((I\Lambda I')^{1/2}) \subseteq IL(H_\diamond^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma))$. Dann stimmt $g_{z,d}$ mit dem Integral über die Randwerte einer Lösung der Laplace-Gleichung auf Q mit verschwindenden Neumann-Randwerten überein. Durch Integration dieser Lösung erhalten wir, dass $g_{z,d} = w|_S$ ist, wobei $w \in H_\diamond^1(Q)$ eine Lösung ist von

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } Q \quad \text{und} \quad \partial_\nu w|_S = 0 \quad \text{auf } S.$$

In der Restklasse $G_{z,d} - w \in H_\diamond^1(Q)$ liegt daher ein Element $v \in H^1(Q)$ mit

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } Q \setminus \{z\}, \quad \partial_\nu v|_S = 0 \quad \text{und} \quad v|_S = 0.$$

Aus den verschwindenden Cauchy-Randdaten auf S folgt, dass die Fortsetzung von v durch Null auf $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ die homogene Laplace-Gleichung auf ganz

$\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega} \cup \{z\})$ löst, dort also analytisch ist. Da $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega} \cup \{z\})$ zusammenhängend ist, folgt

$$v = 0 \quad \text{in } Q \setminus \{z\}.$$

Wäre $z \notin \Omega$, so führte dies zu dem Widerspruch, dass $w \in L^2_\diamond(Q \setminus \{z\})$, aber $G_{z,d} \notin L^2_\diamond(Q \setminus \{z\})$. Es ist also $z \in \Omega$. \square

Da $I\Lambda I'$ kompakt, symmetrisch und injektiv ist, existiert eine Orthonormalbasis $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen mit zugehörigen positiven Eigenwerten $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$, vgl. [59, Theorem IV.3.2]. Wie in Kapitel 3 können wir diese Spektralzerlegung benutzen, um Theorem 4.14 mit dem Picard-Kriterium (vgl. [23, Theorem 2.8]) umzuformulieren:

Korollar 4.15

Für jedes $d \in \mathbb{R}^n$, $|d| = 1$ und $z \in B$ ist

$$z \in \Omega \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_k} \left(\int_S g_{z,d} v_k \, d\sigma \right)^2 < \infty.$$

Wir können daher wie in Kapitel 3 den Einschluss Ω aus realen oder simulierten Messungen durch Anwendung des Algorithmus 3.37 numerisch bestimmen.

4.3 Numerische Ergebnisse

Die in diesem Kapitel beschriebene Faktorisierungsmethode wurde von Florian Frühauf implementiert und getestet. Zur Simulation der Messungen wurde die parabolisch-elliptische Gleichung numerisch durch eine Kopplung von finiten Elementen mit Randelementen ähnlich wie in [18] gelöst. Die Details werden in [25, Sect. 4] beschrieben.

Wir betrachten den Fall, dass $\kappa|_\Omega = 2$ und B der Einheitskreis in \mathbb{R}^2 ist. Für orthonormierte trigonometrische Funktionen $f_k \in L^2_\diamond(S)$, $k = 1, \dots, m$ werden die Entwicklungskoeffizienten von $I\Lambda I' f_k$ bezüglich derselben Funktionen spaltenweise in einer Matrix M gesammelt. Sei $j : \mathbb{R}^m \rightarrow L^2_\diamond(S)$ die Funktion, die den k -ten Einheitsvektor auf f_k abbildet. Dann ordnet j^* einer Funktion aus $L^2_\diamond(S)$ ihre Entwicklungskoeffizienten bezüglich der Funktionen $(f_k)_{k=1}^m$ zu. Entsprechend ist j^*j die Einheitsmatrix und $M \approx j^*I\Lambda I'j$.

Die Funktion $g_{z,d}$ kann für diese Wahl von B explizit angegeben werden (vgl. [10, Example 3.2]):

$$g_{z,d}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2}.$$

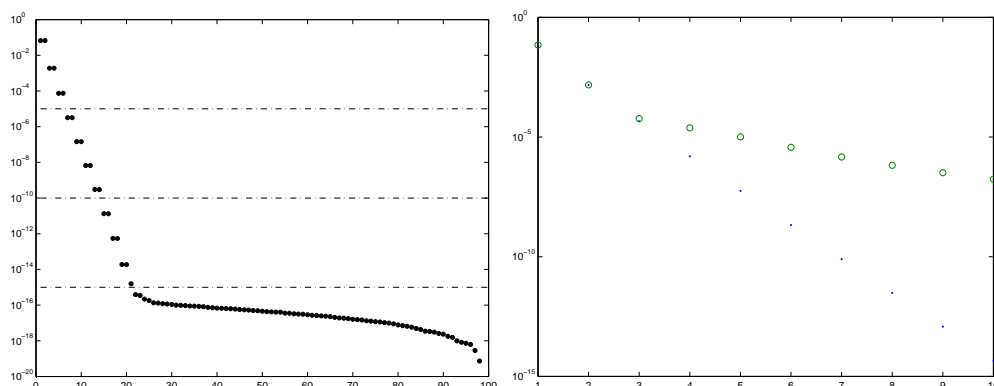


Abbildung 4.3: Eigenwerte $\tilde{\sigma}_k$ von A und der Einfluss von Messfehlern auf die (gemittelten) Eigenwerte

Wir berechnen gemäß Algorithmus 3.37 die Eigenfunktionen $(\tilde{u}_k)_{k=1}^m$ und Eigenwerte $(\tilde{\sigma}_k)_{k=1}^m$ von M und setzen $\tilde{v}_k := j^* \tilde{u}_k$, $k = 1, \dots, m$. In Algorithmus 3.37 wird über die Konvergenz der (aus unendlich vielen Summanden bestehenden) Picard-Reihe entschieden, indem geprüft wird, ob der Wert der endlichen Summe

$$\sum_{k=1}^m \frac{\left(\int_S g_{z,d} \tilde{v}_k \, d\sigma \right)^2}{\tilde{\sigma}_k} \quad (4.39)$$

über einem empirisch zu bestimmenden Schwellenwert C liegt. Einen solchen Schwellenwert verwenden wir hier nicht, sondern benutzen ein alternatives Kriterium aus der Dissertation von Brühl [9]. Numerische Beispiele zeigen, dass Zähler und Nenner der Reihe in (4.39) etwa exponentiell abfallen, und dass jeweils zwei Eigenwerte näherungsweise denselben Wert haben, vgl. die linke Seite von Abbildung 4.3. Wie in [9] vergleichen wir deshalb die Steigung der Ausgleichsgeraden durch

$$h_1(k) = \log \left(\sqrt{\tilde{\sigma}_{2k-1} \tilde{\sigma}_{2k}} \right)$$

mit der durch

$$h_2(k) = \log \left(\frac{1}{2} \left(\int_S g_{z,d} \tilde{v}_{2k-1} \, d\sigma \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_S g_{z,d} \tilde{v}_{2k} \, d\sigma \right)^2 \right).$$

Wir nehmen an, dass ein Punkt z im Einschluss liegt, falls h_1 langsamer fällt als h_2 . Abbildung 4.4 demonstriert dieses Vorgehen für zwei Testpunkte. Die rechte Seite zeigt die Ausgleichsgeraden durch $h_2(k)$ für einen Punkt

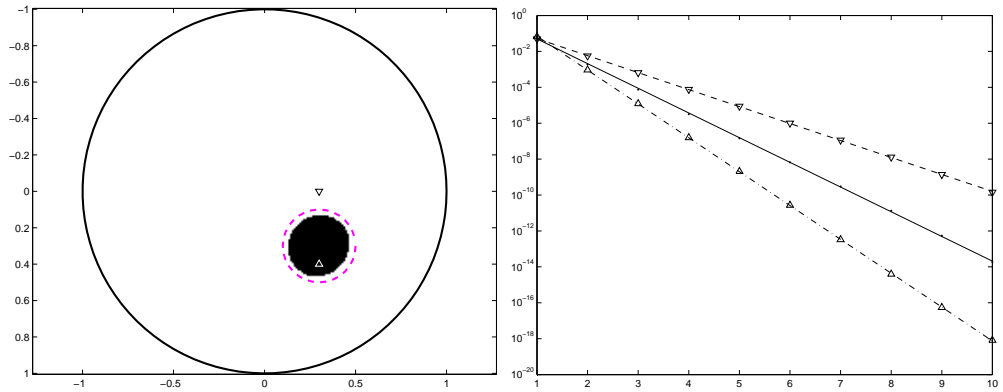


Abbildung 4.4: Vergleich der Steigungen der Ausgleichsgeraden

innerhalb („ \triangle “) und außerhalb („ ∇ “) des Einschlusses im Vergleich zur Ausgleichsgeraden durch $h_1(k)$ („ \circ “). Wenden wir diese Methode für eine große Menge von Punkten an, so ergibt sich die schwarze Fläche auf der linken Seite von Abbildung 4.4 als Rekonstruktion des gestrichelt eingezeichneten Einschlusses.

Die Anzahl der für diesen Rekonstruktionsalgorithmus verwendeten Eigenwerte und Fourierkoeffizienten wählen wir gemäß Algorithmus 3.37 in Abhängigkeit von dem geschätzten Messfehler $\delta > 0$. Auf der linken Seite von Abbildung 4.3 liegt δ im Bereich der Rechengenauigkeit. Auf der rechten Seite von Abbildung 4.3 sind die exakten („ \circ “) und die mit einem relativen Fehler von 0,1% gestörten („ \circ “) gemittelten Eigenwerte eingezeichnet.

Als erstes Beispiel zeigen wir die Rekonstruktion eines Kreises im Inneren von B in der linken Seite von Abbildung 4.4. Der Ort von Ω (gestrichelt eingezeichnet) wird erkannt, aber die Größe etwas unterschätzt.

Im zweiten Beispiel verwenden wir vier Einschlüsse unterschiedlicher Größe. Abbildung 4.5 zeigt die erzielte Rekonstruktion. Position und Größe der Einschlüsse werden erkannt.

Unser letztes Beispiel verwendet einen nicht-konvexen, mondformigen Einschluss. Die linke Seite von Abbildung 4.6 zeigt die dazugehörige Rekonstruktion. Die Form des Einschlusses wird erkannt, aber die Größe etwas unterschätzt. Die rechte Seite der Abbildung zeigt die Rekonstruktion zu Messdaten, die durch Addition eines 0,1%-igen Rauschens verfälscht wurden. Die Position des Einschlusses wird noch immer erkannt, jedoch nicht mehr seine genaue Form.

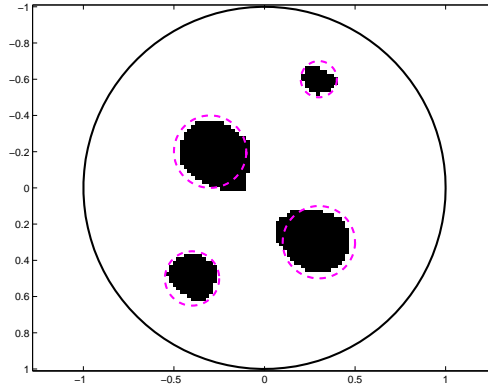


Abbildung 4.5: Rekonstruktion von vier Einschlüssen

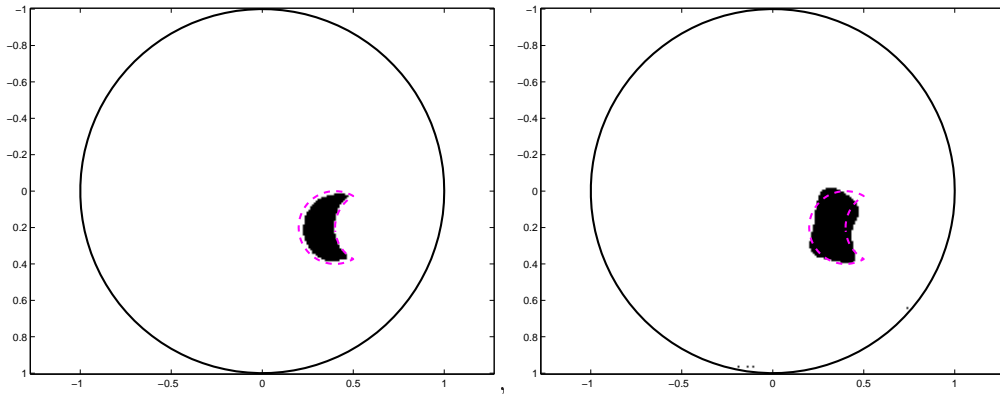


Abbildung 4.6: Rekonstruktion eines nicht-konvexen Einschlusses (gestrichelte Linie), links: mit exakten Daten, rechts: mit verrauschten Daten

Literaturverzeichnis

- [1] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, dritte Auflage, 1999.
- [2] H. Ammari, A. Buffa, J.-C. Nédélec, A justification of eddy currents model for the Maxwell equations, *SIAM J. Appl. Math.* **60**, 1805–1823, 2000.
- [3] H. Ammari, J.-C. Nédélec, Low-frequency electromagnetic scattering, *SIAM J. Math. Anal.* **31**(4), 836–861, 2000.
- [4] T. Arens, A. Kirsch, The factorization method in inverse scattering from periodic structures, *Inverse Probl.* **19**, 1195–1211, 2003.
- [5] K. Astala, L. Päivärinta, Calderon’s inverse conductivity problem in the plane, *Ann. Math.* **163**(1), 265–299, 2006.
- [6] G. Bal, Reconstructions in impedance and optical tomography with singular interfaces, *Inverse Probl.* **21**, 113–131, 2005.
- [7] H. Ben Ameer, M. Burger, B. Hackl, Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity, *Inverse Probl.* **20**, 673–696, 2004.
- [8] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Topological Vector Spaces, Chapters 1–5*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] M. Brühl, *Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie*, Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, 1999.
- [10] M. Brühl, Explicit characterization of inclusions in electrical impedance tomography, *SIAM J. Math. Anal.* **32**(6), 1327–1341, 2001.
- [11] M. Brühl, M. Hanke, Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography, *Inverse Probl.* **16**, 1029–1042, 2000.

- [12] M. Cessenat, *Mathematical Methods in Electromagnetism: Linear Theory and Applications*, Bd. 41 von *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.* World Scientific, Singapore, 1996.
- [13] M. Cheney, D. Isaacson, J. C. Newell, Electrical Impedance Tomography, *SIAM Rev.* **41**(1), 85–101, 1999.
- [14] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity - Volume I: Three Dimensional Elasticity*, Bd. 20 von *Stud. Math. Appl.* North-Holland Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1993.
- [15] D. Colton, A. Kirsch, A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, *Inverse Probl.* **12**, 383–393, 1996.
- [16] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory Second Edition*, Bd. 93 von *Appl. Math. Sci.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [17] M. Costabel, Boundary integral operators for the heat equation, *Integral Equations Oper. Theory* **13**, 488–552, 1990.
- [18] M. Costabel, V. J. Ervin, E. P. Stephan, Symmetric coupling of finite elements and boundary elements for a parabolic-elliptic interface problem, *Q. Appl. Math.* **48**, 265–279, 1990.
- [19] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 2: Functional and Variational Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [20] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 3: Spectral Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [21] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 4: Integral Equations and Numerical Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [22] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 5: Evolution Problems I*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [23] H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Bd. 375 von *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2000.

- [24] A. Ern, J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Bd. 159 von *Appl. Math. Sci.* Springer-Verlag, New York, 2004.
- [25] F. Frühauf, B. Gebauer, O. Scherzer, Detecting interfaces in a parabolic-elliptic problem from surface measurements, *zur Veröffentlichung eingereicht*.
- [26] B. Gebauer, The Factorization Method for Real Elliptic Problems, *Z. Anal. Anwend.* **25**, 81–102, 2006.
- [27] B. Gebauer, M. Hanke, A. Kirsch, W. Muniz, C. Schneider, A sampling method for detecting buried objects using electromagnetic scattering, *Inverse Probl.* **21**, 2035–2050, 2005.
- [28] N. I. Grinberg, Obstacle localization in an homogeneous half-space, *Inverse Probl.* **17**, 1113–1125, 2001.
- [29] N. I. Grinberg, Obstacle visualization via the factorization method for the mixed boundary value problem, *Inverse Probl.* **18**, 1687–1704, 2002.
- [30] N. I. Grinberg, The Operator Factorization Method in Inverse Obstacle Scattering, *Integral Equations Oper. Theory*, published online: 1 October 2005, DOI: 10.1007/s00020-004-1355-z.
- [31] N. I. Grinberg, A. Kirsch, The factorization method for obstacles with a-priori separated sound-soft and sound-hard parts, *Math. Comput. Simul.* **66**, 267–279, 2003.
- [32] D. Guelle, A. Smith, A. Lewis, T. Bloodworth, *EUR 20837 Metal detector handbook for Humanitarian Demining*. European Commission, Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2003.
- [33] M. Hanke, M. Brühl, Recent progress in electrical impedance tomography, *Inverse Probl.* **19**, S65–S90, 2003.
- [34] J. Heino, E. Somersalo, Estimation of optical absorption in anisotropic background, *Inverse Probl.* **18**, 559–573, 2002.
- [35] N. Hyvönen, Characterizing inclusions in optical tomography, *Inverse Probl.* **20**, 737–751, 2004.
- [36] N. Hyvönen, Complete electrode model of electrical impedance tomography: Approximation properties and characterization of inclusions, *SIAM J. Appl. Math.* **64**, 902–931, 2004.

- [37] P. Hähner, An inverse Problem in electrostatics, *Inverse Probl.* **15**, 961–975, 1999.
- [38] A. Kirsch, Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator, *Inverse Probl.* **14**, 1489–1512, 1998.
- [39] A. Kirsch, The factorization method for Maxwell’s equations, *Inverse Probl.* **20**, S117–134, 2004.
- [40] A. Kirsch, The factorization method for a class of inverse elliptic problems, *Math. Nachr.* **278**, 258–277, 2005.
- [41] A. Kirsch, P. Monk, A finite element/spectral method for approximating the time-harmonic maxwell system in \mathbb{R}^3 , *SIAM J. Appl. Math.* **55**, 1324–1344, 1995.
- [42] A. Kirsch, P. Monk, Corrigendum: A finite element/spectral method for approximating the time-harmonic maxwell system in \mathbb{R}^3 , *SIAM J. Appl. Math.* **58**, 2024–2028, 1998.
- [43] R. Kress, A sampling method for an inverse boundary value problem for harmonic vector fields, in: S. I. Kabanikhin, V. G. Romanov, Hrsg., *Ill-Posed and Inverse Problems*, 271–290, VSP, 2002.
- [44] R. Kress, A factorisation method for an inverse Neumann problem for harmonic vector fields, *Georgian Math. J.* **10**, 549–560, 2003.
- [45] M. Lassas, The impedance imaging problem as a low-frequency limit, *Inverse Probl.* **13**, 1503–1518, 1997.
- [46] W. R. B. Lionheart, EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments, *Physiol. Meas.* **25**, 125–142, 2004.
- [47] J. L. Lions, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [48] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications I*, Bd. 181 von *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [49] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications II*, Bd. 182 von *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.

- [50] R. C. MacCamy, M. Suri, A time-dependent interface problem for two-dimensional eddy currents, *Q. Appl. Math.* **44**, 675–690, 1987.
- [51] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [52] J.-C. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems*, Bd. 144 von *Appl. Math. Sci.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [53] R. Picard, On the low frequency asymptotics in electromagnetic theory, *J. Reine Angew. Math.* **354**, 50–73, 1984.
- [54] A. G. Ramm, E. Somersalo, Electromagnetic inverse problems with surface measurements at low frequencies, *Inverse Probl.* **5**, 1107–1116, 1989.
- [55] M. Renardy, R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Bd. 13 von *Texts Appl. Math.* Springer-Verlag, New York, 1993.
- [56] W. Rudin, *Functional Analysis 2nd ed.* McGraw-Hill, New-York, 1991.
- [57] B. Schappel, *Die Faktorisierungsmethode für die elektrische Impedanztomographie im Halbraum*, Doktorarbeit, Joh. Gutenberg-Universität Mainz, 2005.
- [58] E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson, Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography, *SIAM J. Appl. Math.* **52**(4), 1023–1040, 1992.
- [59] D. Werner, *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995.
- [60] P. Werner, Über das Verhalten elektromagnetischer Felder für kleine Frequenzen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. I. Innenraumprobleme., *J. Reine Angew. Math.* **278/279**, 365–397, 1975.
- [61] P. Werner, Über das Verhalten elektromagnetischer Felder für kleine Frequenzen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. II. Außenraumprobleme., *J. Reine Angew. Math.* **280**, 98–121, 1976.

LITERATURVERZEICHNIS

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Faktorisierungsmethode zur Erkennung von Gebieten mit sprunghaft abweichenden Materialparametern untersucht. Durch eine abstrakte Formulierung beweisen wir die der Methode zugrunde liegende Bildraumidentität für allgemeine reelle elliptische Probleme und deduzieren bereits bekannte und neue Anwendungen der Methode.

Für das spezielle Problem, magnetische oder perfekt elektrisch leitende Objekte durch niederfrequente elektromagnetische Strahlung zu lokalisieren, zeigen wir die eindeutige Lösbarkeit des direkten Problems für hinreichend kleine Frequenzen und die Konvergenz der Lösungen gegen die der elliptischen Gleichungen der Magnetostatik. Durch Anwendung unseres allgemeinen Resultats erhalten wir die eindeutige Rekonstruierbarkeit der gesuchten Objekte aus elektromagnetischen Messungen und einen numerischen Algorithmus zur Lokalisierung der Objekte.

An einem Musterproblem untersuchen wir, wie durch parabolische Differentialgleichungen beschriebene Einschlüsse in einem durch elliptische Differentialgleichungen beschriebenen Gebiet rekonstruiert werden können. Dabei beweisen wir die eindeutige Lösbarkeit des zugrunde liegenden parabolisch-elliptischen direkten Problems und erhalten durch eine Erweiterung der Faktorisierungsmethode die eindeutige Rekonstruierbarkeit der Einschlüsse sowie einen numerischen Algorithmus zur praktischen Umsetzung der Methode.

Lebenslauf

Bastian Gebauer

Persönliche Daten

Geboren	am 22. Januar 1977 in Mülheim an der Ruhr
Eltern	Gerhard Heinz Friedrich Gebauer und Barbara Eva Maria Gebauer, geborene Veit
Familienstand	ledig

Ausbildung und berufliche Tätigkeit

1983–1987	Grundschule in Schwabenheim
1987–1996	Sebastian Münster-Gymnasium in Ingelheim Abschluss: Abitur
1996–1997	Zivildienst
1997–2002	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz
26. März 2002	Diplomabschluss Mathematik
WS 1999/2000 –WS 2001/2002	Wissenschaftliche Hilfskraft am Fachbereich Ma- thematik und Informatik der Johannes Gutenberg- Universität Mainz
Seit April 2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Ma- thematik und Informatik der Johannes Gutenberg- Universität Mainz