

Messung des Landé- $g_J$ -Faktors im  
Grundzustand von  $Ca^+$  und  
Untersuchung des Speicherverhaltens  
von Elektronen in einem  
Penningkäfig

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften  
(„doctor rerum naturalium“)

am Fachbereich für Physik  
der Johannes Gutenberg Universität  
in Mainz  
vorgelegt von

**Giovanni Tommaseo**  
geboren in Mainz

Mainz, Juli 2002

7. Juli 2002

Tommaseo, Giovanni:

*„Messung des Landé- $g_J$ -Faktors im Grundzustand von  $Ca^+$  und Untersuchung des Speicherverhaltens von Elektronen in einem Penningkäfig“.*

Die vorliegende Arbeit wurde selbständig und nur unter Verwendung der im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmitteln verfasst.

Gesetzt in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2 $\epsilon$ , T<sub>E</sub>X-Version 3.14159, METAFONT 2.7182 (Web2C 7.3.1).



Nur um eines bitten wir euch: - das täglich  
Vorkommende findet nicht natürlich.  
Von nichts sei gesagt: es ist selbstverständlich.  
In dieser Zeit der fortgesetzten Kriege und  
der planmäßigen Unwahrheiten,  
der zurechtgelegten Erklärungen und der  
wohlüberlegten Willkür.  
In dieser Zeit der entmenschlichten Menschheit und  
der kultivierten Gleichgültigkeit.  
So dass nichts dastehe als  
etwas Unwandelbares.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Frei nach B. Brechts „Die Ausnahme und die Regel“ (1929/1930).  
Aus: Die Gedichte von Bertolt Brecht in einem Band, Suhrkamp Verlag,  
Frankfurt am Main, 10. Aufl. (1999), S. 1155.

*A mio nonno Giovanni  
Ad Elisabetta*

## Danksagung

Ich danke meinem Doktorvater Prof. Dr. G. Werth für die Freiheit, die er mir einräumte, eigenen Ideen bei der Arbeit im Labor nachzugehen und das Experiment in eigenverantwortlicher Weise zu gestalten. Außerdem danke ich ihm für sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit und für die uneingeschränkte Unterstützung. Ferner danke ich ihm auch dafür, dass er für die finanziellen Mittel gesorgt hat, die eine Promotionsstelle zur Verfügung stellten und die Durchführung der Experimente ermöglichten.

Ich danke der Arbeitsgruppe (Alexandros Drakoudis, Peter Paasche, José Verdù, Helena Prima Garcia, Heiko Leuthner, Tristan Valenzuela, Slobodan Đekić und Carmen Angelescu) für das kollegiale und herzliche Arbeitsklima.

In besonderer Weise danke ich Tobias Pfeil für die sehr witzige und gleichzeitig sehr fruchtbare Zusammenarbeit im Labor während der Messungen an  $Ca^+$  und für das sehr gewissenhafte Korrekturlesen der Arbeit. Weiterhin danke ich ihm für die Freundschaft, die über die Arbeit im Labor hinaus geblieben ist.

Ein großes Danke geht an 'Sir' Richard Ley für die vielen geistig anregenden Diskussionen und die sehr akribische Durchsicht der Arbeit.

Dr. Alexander Luchinskij danke ich für seinen aufbauenden Humor, dessen Art mir sehr vertraut ist und für seine Einsichten u. a. in die menschliche Natur, in telepathische Fähigkeiten, in das (geheimnisvolle?) Lächeln der Mona Lisa und in den Einsatz von Dostojewskijs Romanen in der Psychoanalyse.

Herrn Todt vom MPI für Chemie danke ich für die große Hilfsbereitschaft bei der Präparation der ionischen Bleilösung und für die erhellenden Gespräche zur Erzeugung von  $Pb^+$ -Ionen.

Dr. Paul Indelicato vom Laboratoire Kastler-Brossel danke ich für die Zeit, die er in die Berechnung des Landé-Faktors von  $Ca^+$  investiert hat.

Ich danke Prof. M. Kretzschmar für die erhellenden Gespräche zur Handhabung der Hillschen Differentialgleichung. Ohne seine Hilfe würde Abschnitt 8.2.4 nicht in dieser Form in meiner Arbeit stehen.

Der mechanischen Werkstatt (stellvertretend Herrn Becker und Herrn Felzer) danke ich für die jederzeit professionelle Arbeit und das freundliche Entgegenkommen bei Kleinaufträgen. Ohne ihre Hilfe wäre die Realisierung der Messapparatur undenkbar gewesen.

Ich danke Olli für die langjährige Freundschaft und für seinen ansteckenden Humor. Weiterhin danke ich Sergio für die lustigen Videoabende.

Der größte Dank gebührt meiner Familie: meinen Eltern und meiner Zwillingsschwester für ihre uneingeschränkte Liebe und ihr unverwüstliches Vertrauen, meinen zweiten Eltern in Avezzano, Francesca und Duccio für das Gefühl, auch zu ihnen zu gehören und Elisabetta . . .

*Armonie che vanno via  
come gli uccelli quando finisce l'estate.  
Voci che ridono, piangono, cantano, tacciono,  
sbiadite dal rumore del tempo.  
Vita che scorre tra le dita, tra i denti,  
sussurando come vento nelle foglie.  
Lucciole nella notte come firmamento  
così vicino da toccare.*

*Tutto quello che rimane sei tu,  
ed io vivo in te.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Vorwort . . . . .	1
1.2	Motivation . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ionenspeicherung in einem Penningkäfig</b>	<b>7</b>
2.1	Die Bewegungsmoden in einer idealen Penningfalle . . . . .	9
2.2	Die reale Penningfalle . . . . .	14
2.2.1	Störung des Viererpotentials . . . . .	16
2.2.2	Axialsymmetrische Störungen . . . . .	18
2.2.3	Ionentrajektorien in Anwesenheit von Puffergas und eines Quadrupol-Hochfrequenzfeldes . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Atomphysikalische Grundlagen von <math>^{40}\text{Ca}^+</math> und <math>^{208}\text{Pb}^+</math> bzw. <math>^{207}\text{Pb}^+</math></b>	<b>29</b>
3.1	Das $^{40}\text{Ca}$ -Isotop . . . . .	29
3.2	Die Zeeman-Aufspaltung der Feinstruktur im $^{40}\text{Ca}^+$ -Ion . . . . .	30
3.3	Die Isotope $^{208}\text{Pb}$ und $^{207}\text{Pb}$ . . . . .	36
3.4	Die Hyperfeinstruktur des Ions $^{207}\text{Pb}^+$ . . . . .	38
3.4.1	Die magnetische Dipol-Wechselwirkung der Hyperfein- struktur . . . . .	40
3.5	Die Zeemanaufspaltung der Feinstruktur von $^{208}\text{Pb}^+$ und der Hyperfeinstruktur von $^{207}\text{Pb}^+$ . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Der Aufbau des Experimentes</b>	<b>49</b>
4.1	Der Gesamtaufbau . . . . .	49
4.2	Der Ionenkäfig . . . . .	52
4.3	Der Magnet . . . . .	54
4.4	Das Lasersystem für $\text{Ca}^+$ . . . . .	55
4.4.1	Der Laser Intensity Stabilizer . . . . .	57
4.5	Das optische Nachweissystem . . . . .	58
4.6	Die Mikrowellenanlagen . . . . .	59
4.7	Das elektronische Nachweissystem der gespeicherten Teilchen	61

4.8	Die Ansteuerung der einzelnen Komponenten und die Datenaufnahme . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Messungen an <math>Ca^+</math></b>	<b>67</b>
5.1	Die Speicherung von $Ca^+$ -Ionen . . . . .	67
5.2	Die Aufnahme des optischen Spektrums von $Ca^+$ . . . . .	73
5.3	Das Messprinzip der optischen Mikrowellen-Doppelresonanz . . . . .	80
5.4	Die Aufnahme einer Resonanzkurve . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Der elektronische <math>g</math>-Faktor des Grundzustandes von <math>Ca^+</math></b>	<b>105</b>
6.1	Die Bestimmung des Magnetfeldes . . . . .	105
6.1.1	Das Messprinzip und der Messzyklus einer Elektronen-Zyklotronresonanz . . . . .	106
6.1.2	Die Messung der Zyklotron-Resonanzkurve von gespeicherten Elektronen . . . . .	110
6.2	Der Landé- $g_J$ -Faktor von $Ca^+$ . . . . .	125
6.3	Theoretische Berechnung von $g_J$ -Faktoren gebundener Elektronen in ionischen Systemen . . . . .	129
6.3.1	Korrelations- und relativistische Effekte . . . . .	130
6.3.2	Die RMBP-Theorie . . . . .	135
6.3.3	Die MCDF-Methode . . . . .	137
6.3.4	Erste Ergebnisse theoretischer Berechnungen zum Landé- $g_J$ -Faktor von $^{40}Ca^+$ . . . . .	139
<b>7</b>	<b>Vorbereitende Messungen und Berechnungen an <math>Pb^+</math></b>	<b>143</b>
7.1	Verdopplung der magnetischen Flussdichte im supraleitenden Magneten . . . . .	143
7.2	Die Erzeugung und die Speicherung von $Pb^+$ -Ionen . . . . .	146
7.3	Simulation der Zeemanspektren von $^{208}Pb^+$ und $^{207}Pb^+$ . . . . .	152
7.4	Analytische Auflösung der Breit-Rabi-Formel nach dem Kern- $g$ -Faktor und diamagnetische Korrektur . . . . .	163
<b>8</b>	<b>Die Untersuchung des Speicherverhaltens von Elektronen</b>	<b>169</b>
8.1	Instabilitäten in der Penningfalle . . . . .	169
8.2	Die Untersuchung von anharmonischem Verhalten gespeicherter Elektronen bei einer parametrischen Anregung . . . . .	176
8.2.1	Aufnahme eines axialen Anregungsspektrums und Auflösung von Subharmonischen zur $2\omega_z$ -Resonanz . . . . .	178
8.2.2	Die individuelle und die kollektive Bewegung im axialen Anregungsspektrum . . . . .	180
8.2.3	Schwellenverhalten bei Anregung der $2\omega_z$ -Resonanz und der Subharmonischen . . . . .	187
8.2.4	Theoretische Erklärung des Schwelleneffektes . . . . .	192



<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	iii
<b>9 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>211</b>
<b>10 Nachwort</b>	<b>215</b>
<b>A Technisches Datenblatt der verwendeten Komponenten</b>	<b>217</b>
<b>B Clebsch-Gordan-Koeffizienten</b>	<b>221</b>
<b>C Theoretische Beschreibung der Seitenbandstruktur im Zeeman-Resonanzspektrum</b>	<b>225</b>
<b>D Herleitung der Bewegungsgleichung für die Kollektivbewegung einer Elektronenwolke in einer realen Penningfalle</b>	<b>233</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>239</b>



# Tabellenverzeichnis

3.1	Physikalische Eigenschaften von Calcium . . . . .	30
3.2	Die stabilen $Ca$ -Isotope . . . . .	30
3.3	Physikalische Eigenschaften von Blei . . . . .	37
3.4	Die stabilen $Pb$ -Isotope . . . . .	37
3.5	Die radioaktiven $Pb$ -Isotope . . . . .	37
5.1	Ioneneigenfrequenzen von $Ca^+$ und $K^+$ . . . . .	70
5.2	Wellenlängen der vier optischen Übergänge in $Ca^+$ . . . . .	74
5.3	Frequenzpositionen der Seitenbänder im Zeemanspektrum von $Ca^+$ . . . . .	101
5.4	Frequenzpositionen der Seitenbänder im Zeemanspektrum von $Ba^+$ . . . . .	101
6.1	Elektronen-Eigenfrequenzen für zwei unterschiedliche Speicherspannungen . . . . .	108
6.2	Klassische Radien der Teilchenbewegungen für $e^-$ und $Ca^+$ . . . . .	123
6.3	Experimentell bestimmte $g_J$ -Faktoren . . . . .	126
6.4	Theoretische Landé-Faktoren von $Ca^+$ . . . . .	139
7.1	Formel für relative Intensitäten von Zeemankomponenten . . . . .	153
7.2	Formel für relative Intensitäten von Zeemankomponenten . . . . .	153
7.3	Relative Intensitäten von Übergängen $J' \rightarrow J, F' \rightarrow F$ . . . . .	154
7.4	Energiematrix von $6^2P_{3/2}$ für den gekoppelten Fall . . . . .	158
7.5	Energiematrix von $6^2P_{3/2}$ für den entkoppelten Fall . . . . .	159
7.6	Energiematrix von $6^2P_{1/2}$ für den entkoppelten Fall . . . . .	159
7.7	Tabellierte Werte von $\sigma$ und $\kappa$ . . . . .	166
8.1	Numerische Werte von Singularitäten im Stabilitätsbereich einer Penningfalle . . . . .	175
B.1	Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle J, 1, m_J, q   J', m'_J \rangle$ . . . . .	221



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Auszug aus Pierces „ <i>Theory and Design of Electron Beams</i> “ . . . . .	2
2.1	Hyperbolische Oberflächen des Ionenkäfigs . . . . .	8
2.2	Querschnitt durch die hyperbolische Falle . . . . .	11
2.3	Bewegung eines Ions in einem Penningkäfig . . . . .	13
2.4	Reale Bewegung eines Ions in einem Penningkäfig . . . . .	13
2.5	Ionentrajektorie in Anwesenheit von Puffergas mit Quadrupoleinstrahlung . . . . .	24
2.6	Ionentrajektorie bei Anwesenheit einer Quadrupolanregung . . . . .	25
2.7	Ionentrajektorie bei Anwesenheit von Puffergas . . . . .	26
3.1	Feinstruktur-Termschema von $CaII$ . . . . .	31
3.2	Zeemanaufspaltung der Feinstruktur von $^{40}Ca^+$ . . . . .	35
3.3	Grotrian-Diagramm von $^{207}Pb^+$ . . . . .	39
3.4	Hyperfineinstruktur-Aufspaltung von $^{207}Pb^+$ . . . . .	40
3.5	Zeemanaufspaltung der Feinstruktur von $^{208}Pb^+$ . . . . .	44
4.1	Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus . . . . .	50
4.2	AutoCAD-Zeichnung der „Calciumfalle“ . . . . .	53
4.3	AutoCAD-Zeichnung der „Bleifalle“ . . . . .	53
4.4	Schematische Darstellung des Ti:Sa-Ringlasers . . . . .	56
4.5	Schematische Darstellung des „noise eaters“ . . . . .	57
4.6	AutoCAD-Zeichnung des Kühlers für den Photomultiplier . . . . .	59
4.7	Mikrowellenanlage . . . . .	60
4.8	Der Ionen- und Elektronennachweis . . . . .	62
4.9	’Screenshot’ der Ansteuerungssoftware - Laser/Mikrowelle . . . . .	64
4.10	’Screenshot’ der Ansteuerungssoftware - Elektronen-Zyklotron-Resonanz . . . . .	65
5.1	Ionensignal am Oszilloskop-Bildschirm . . . . .	68
5.2	Graphische Darstellung der Verweildauer der Ionen bei unterschiedlichen Potentialen . . . . .	69
5.3	Ionensignal am Oszilloskop-Bildschirm . . . . .	71
5.4	Doppelstruktur im Ionen-Nachweissignal . . . . .	73

5.5	Optisches Spektrum von $Ca^+$ bei einer Laserleistung von $400\mu W$	74
5.6	Optisches Spektrum von $Ca^+$ bei einer Laserleistung von $20\mu W$	75
5.7	Graphische Darstellung der optischen Mikrowellen-Doppelresonanz-Methode . . . . .	81
5.8	Polarisationsschema für $\sigma^\pm$ - und $\pi$ -Übergänge . . . . .	82
5.9	Asymmetrische Mikrowellen-Resonanzkurve . . . . .	85
5.10	Pumpschema und Verzweigungsverhältnisse des $Ca^+$ -Systems	87
5.11	Relative Besetzungszahlen des Grundzustandes und des metastabilen Niveaus im $Ca^+$ -System . . . . .	90
5.12	Simulationen der asymmetrischen Zeeman-Resonanzkurve . . . . .	94
5.13	Simulation der asymmetrischen Zeeman-Resonanzkurve . . . . .	96
5.14	Simulationen der asymmetrischen Zeeman-Resonanzkurve . . . . .	97
5.15	Säulendiagramm zur Asymmetrie der Zeeman-Resonanzkurve	98
5.16	Seitenbandstruktur im Zeemanspektrum von $Ca^+$ . . . . .	100
5.17	Seitenbandstruktur im Zeemanspektrum von $Ba^+$ . . . . .	100
5.18	Zeemanresonanz-Kurve mit FWHM $3kHz$ . . . . .	102
5.19	Zeemanresonanz-Kurve FWHM $630kHz$ . . . . .	103
6.1	Elektronen-Zyklotronresonanz-Messzyklus . . . . .	107
6.2	Elektronen-Zyklotronresonanz-Spektrum mit Seitenbandstruktur . . . . .	110
6.3	Asymmetrische Linienform der Zyklotron-Resonanzkurve . . . . .	112
6.4	Asymmetrische Linienform der Zyklotron-Resonanzkurve . . . . .	112
6.5	Theoretische Linienform der Elektronen-Resonanzkurve . . . . .	116
6.6	Theoretische Linienform der Elektronen-Resonanzkurve . . . . .	118
6.7	Theoretische Linienform der Elektronen-Resonanzkurve . . . . .	119
6.8	Theoretische Linienform der Elektronen-Resonanzkurve . . . . .	120
6.9	Theoretische Linienform der Elektronen-Resonanzkurve . . . . .	120
6.10	Aufnahme einer Elektronen-Zyklotron-Resonanzkurve . . . . .	121
6.11	Doppelstruktur der Zyklotron-Resonanzkurve . . . . .	121
6.12	Aufnahme einer Elektronen-Zyklotron-Resonanzkurve . . . . .	122
6.13	Zeitlicher Verlauf der Magnetfeldstärke . . . . .	124
6.14	Säulendiagramm der Elektronen-Zyklotron-Messungen . . . . .	126
6.15	$g$ -Faktor Reihen der Alkali-Atome . . . . .	127
6.16	$g$ -Faktor Reihen der zu den Alkali-Atomen zugehörigen isoelektrischen Ionen . . . . .	128
6.17	Graphische Differenz von $g_J(\text{Atom})$ und $g_J(\text{Ion})$ . . . . .	128
6.18	'Ladder approximation' Diagramme . . . . .	130
6.19	Brueckner-Goldstone Diagramme . . . . .	134
6.20	Brueckner-Goldstone Diagramme . . . . .	136
6.21	Graphische Darstellung der theoretischen Landé-Faktoren für $Ca^+$ . . . . .	140
7.1	Elektronenzyklotronkurve bei $B = 2.87T$ . . . . .	144

7.2	Elektronenzyklotronkurve bei $B = 2.87T$ . . . . .	144
7.3	Zeitlicher Verlauf der Magnetfeldstärke . . . . .	145
7.4	Homogenität des Magnetfeldes . . . . .	145
7.5	Elektronisches Nachweissignal von $Pb^+$ . . . . .	147
7.6	Elektronisches Nachweissignal von $Pb^+$ mit einer zusätzlichen leichten Masse . . . . .	148
7.7	Elektronisches Nachweissignal von $Pb^+$ nach Erzeugung . . . . .	150
7.8	Elektronisches Nachweissignal von $Pb^+$ nach 4 Zyklen . . . . .	150
7.9	Elektronisches Nachweissignal von $Pb^+$ nach 8 Zyklen . . . . .	150
7.10	Zeemanspektrum der Feinstruktur von $^{208}Pb^+$ . . . . .	155
7.11	Hyperfeinstruktur von $^{207}Pb^+$ . . . . .	156
7.12	Hyperfeinstruktur von $^{207}Pb^+$ . . . . .	156
7.13	Zeemanaufspaltung der Hfs von $^{207}Pb^+$ . . . . .	160
7.14	Zeemanaufspaltung der Hfs von $^{207}Pb^+$ . . . . .	160
7.15	Zeemanspektrum der Hfs von $^{207}Pb^+$ bei unterschiedlichen spektralen Laserbreiten . . . . .	161
7.16	Zeemanspektrum der Hfs von $^{207}Pb^+$ bei $B = 2.87T$ . . . . .	161
7.17	Zeemanspektrum der Hfs von $^{207}Pb^+$ in Abhängigkeit des Ma- gnetfeldes . . . . .	162
7.18	Zeemanaufspaltung des Grundzustandes von $^{207}Pb^+$ . . . . .	165
8.1	Instabilitäten in der Penningfalle für gespeicherte $Pb^+$ -Ionen .	174
8.2	Instabilitäten in der Penningfalle für gespeicherte Elektronen	174
8.3	Axiales Anregungsspektrum . . . . .	179
8.4	$2\omega_z$ -Resonanz mit Kollektivbewegung . . . . .	181
8.5	Vergrößerte Aufnahme Kollektivbewegung . . . . .	181
8.6	Die $2\omega_z$ -Resonanz in Abhängigkeit von der Amplitude der pa- rametrischen Anregung . . . . .	183
8.7	Die $2\omega_z$ -Resonanz in Abhängigkeit von der Amplitude der pa- rametrischen Anregung . . . . .	183
8.8	Die $2\omega_z$ -Resonanz mit quadrierter $y$ -Achse . . . . .	186
8.9	Die Kollektivbewegung mit quadrierter $y$ -Achse . . . . .	186
8.10	Graphik zur Bestimmung der Schwelle der $2\omega_z$ -Resonanz . . . . .	188
8.11	Abhängigkeit der Schwelle von der Ordnung der Resonanzen .	188
8.12	Abhängigkeit der Schwelle vom Puffergasdruck . . . . .	189
8.13	Elektronischer Schaltkreis zur Veranschaulichung des Dämp- fungsmechanismus' bei der Elektronenbewegung . . . . .	191
8.14	Strutt-Diagramm . . . . .	196
8.15	Strutt-Diagramm . . . . .	197
8.16	Breite der Instabilitätszungen in Abhängigkeit von $a$ . . . . .	198
8.17	Isokurven für $n = 1$ . . . . .	203
8.18	Isokurven für $n = 2$ . . . . .	204
8.19	Isokurven für $n = 3$ . . . . .	204
8.20	Isokurven für $n = 4$ . . . . .	205

8.21	Isokurven für $n = 5$ . . . . .	205
8.22	Isokurven für $n = 6$ . . . . .	206
8.23	Simulation des Schwellenverhaltens für $\gamma = 10^{-4}$ . . . . .	206
8.24	Simulation des Schwellenverhaltens für unterschiedliche Dämpfungswerte . . . . .	207
8.25	Isokurve für $n = 1$ mit $l = 6$ . . . . .	208
8.26	Isokurven für $n = 1$ mit $l = 6$ . . . . .	208
8.27	Isokurven für $n = 3$ mit $l = 6, 8$ . . . . .	209
8.28	Isokurven für $n = 3$ mit $l = 10, 12$ . . . . .	210



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Vorwort

Das fundamentale Prinzip der Penningfalle, d. h. die Erhöhung der Verweildauer von geladenen Teilchen in einem räumlich begrenzten Volumen durch den Einsatz eines statischen elektrischen Feldes und eines axialen homogenen Magnetfeldes, geht zurück auf eine Veröffentlichung aus dem Jahre 1936 von F. M. Penning [231] über „*die Glimmentladung bei niedrigem Druck zwischen koaxialen Zylindern in einem axialen Magnetfeld*“. Er beobachtete, dass bei einem genügend starken Magnetfeld, „Elektronen welche von dem äußeren Zylinder als Kathode emittiert werden“, nicht mehr auf die Anode auftreffen, sondern zur Kathode zurückkehren und dass somit „der Anodenstrom auf null [herabsinkt]“, wenn die Stärke des Magnetfeldes einen kritischen Wert übersteigt. Penning fährt fort in der Beschreibung des Effektes: „Ist jedoch ein wenig Gas in der Röhre anwesend, so werden die Elektronen, bevor sie zur Kathode zurückkehren, teilweise mit einer Gasmolekel zusammenstoßen; verliert das Elektron dabei einen Energiebetrag größer als die Austrittsarbeit, so wird dadurch [eine] Zurückkehr zur Kathode unmöglich. Das Elektron legt dann einen viel größeren Weg zurück und ionisiert viel häufiger als ohne Magnetfeld“.

Im vorgestellten Auszug ist zwar bereits die Hauptidee der heutigen Penningfalle beschrieben und, wenn man zwischen den Zeilen lesen will, sogar andeutungsweise der Einsatz von Puffergas als eine Kühltechnik für gespeicherte Ionen, doch die erste vollständige Beschreibung des Speichermechanismus' muss J. R. Pierce zugesprochen werden. In seiner Abhandlung [233] aus dem Jahre 1949 beschreibt er nicht nur das Potential, das notwendig ist, um Elektronen zu speichern, sondern auch, wie es mit hyperbolischen Elektroden realisiert werden kann. Außerdem bestimmt er die notwendigen Stabilitätsbedingungen für die Speicherung, die besagen, dass die abstoßende Kraft in radialer Richtung, verursacht durch das elektrische Quadrupolpotential, kompensiert werden muss durch ein homogenes, statisches Magnetfeld in axialer Richtung, das eine Begrenzung der Ionenbewegung in radialer Richtung bewirkt. Mit Pierces theoretischen und technischen Grundlagen waren

providing end hats as shown in Fig. 4.6, which increase the radius at which electrons from the central emitting portion of the cathode would have to travel to move away in the  $z$  direction, while assuring that these electrons will not have energy enough to attain that radius.

In some types of oscillating magnetrons it is desirable to have the electrons reach the anode. This can be accomplished

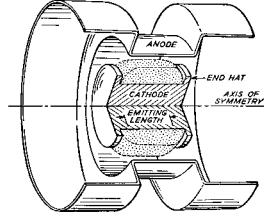


FIG. 4.6—By use of end hats the electron flow in the magnetron can be limited in an axial direction.

by tilting the field with respect to the axis of the magnetron. The electrons can then, in effect, run out along magnetic lines of force.

We see from the above example that a strong magnetic field can "trap" electrons so that they can move only so far in either the  $r$  or the  $z$  directions. There is one particular field which perhaps merits individual attention; a charge-free region in which the electric potential is given by

$$V = \frac{\omega_c^2}{2\eta} \left( \frac{r^2}{2} - z^2 \right) + V_0 \quad (4.29)$$

This field can be produced by hyperbolic electrodes indicated in cross-section in Fig. 4.7. Suppose we have also a uniform

magnetic field of strength  $B$  in the  $z$  direction. There can be no magnetic forces in the  $z$  direction, so the equation of motion in this direction is

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z \quad (4.30)$$

This implies a sinusoidal oscillation of radian frequency  $\omega_0$ . If it were not for the magnetic field, electrons would escape in the  $r$  direction. We see that, remote from the axis, the maximum potential (that at  $z = 0$ ) is closely given by

$$V = \frac{\omega_0^2 r^2}{4\eta} \quad (4.31)$$

From (4.28), remote from the axis the cutoff potential approaches

$$V = \frac{\omega_c^2 r^2}{8\eta} \quad (4.32)$$

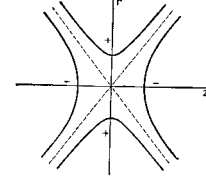


FIG. 4.7—Electron motion between hyperbolic electrodes may be limited to a certain region by use of an axial magnetic field.

Thus, the condition under which electrons cannot get indefinitely far away from the axis is that

$$\omega_c > \sqrt{2}\omega_0 \quad (4.33)$$

We see that it is possible to obtain a pure sinusoidal motion of electrons trapped in this combination of electric and magnetic fields.

#### 4.5. Radius of Curvature; Focusing Due to Electric Deflection

We can evaluate, if we like, the radius of curvature of an electron path. This is of use chiefly when the electron moves in a plane, and we will consider here two-dimensional deflecting fields only. The radius of curvature of the path has a value  $R$  such that the centrifugal force  $mR\dot{\theta}^2$  is just balanced

**Abb. 1.1:** Auszug aus der Veröffentlichung von Pierce über „Theory and Design of Electron Beams“ [233], der die Ionenspeicherung in einer Penningfalle beschreibt.

somit die Voraussetzungen geschaffen, Penningfallen für Problemstellungen in der experimentellen Atomphysik einzusetzen. Erste mögliche Experimente wurden 1953 von Bloch in Veröffentlichungen vorgeschlagen [22] und fast zeitgleich wurden von Frisch [48] erste Erfahrungen mit den Eigenschaften solcher Kombinationen von elektromagnetischen Feldern gesammelt, deren Form in Pierces Buch beschrieben wird (siehe Abb. 1.1). Im Laufe der Zeit konnten atomare Systeme untersucht und vermessen werden, die H. G. Dehmelt als *Geonium atom* [64] bezeichnet hat, d. h. die in der Falle gespeicherte Ionenwolke kann als Analogon zu einem einzelnen Atom mit mehreren Hüllenelektronen angesehen werden, wobei der Atomkern dem äußeren, durch die Elektrodenkonfiguration vorgegebenen Speicherpotential entspricht. Die durch die äußeren elektromagnetischen Felder eingefangenen Teilchen sind somit über die Falle und die Vakuumapparatur mit der Erde verbunden.

Experimente an einem solchen ionischen System haben jedoch nur einen begrenzten wissenschaftlichen Wert, wenn es keine Möglichkeit gibt, ausgewählte atomare Zustände in diesem System zu präparieren und Übergänge zwischen den einzelnen Zuständen zu induzieren. In dieser Hinsicht muss das Aufkommen des Lasers als eine sehr große Bereicherung für die Fallenphysik betrachtet werden. Es ist keine Übertreibung, wenn man behauptet, dass die Erfindung des Lasers zusammen mit der Erfindung und Entwicklung der Io-

nenfallen zu den größten Errungenschaften in der modernen Quantenphysik des letzten Jahrhunderts gezählt werden müssen<sup>1</sup>. Ionenfallen, und speziell Penningfallen haben eine bis dahin nicht für möglich geglaubte Präzision in der Bestimmung von physikalischen Größen wie  $g$ -Faktoren gebundener Elektronen und Atomkerne, Energieaufspaltungen (sprich Zeeman-, Feinstruktur- und Hyperfeinstrukturaufspaltungen), Lebensdauer metastabiler Zustände usw. ermöglicht und der Atomspektroskopie sozusagen eine 'terra incognita' erschlossen. Die Messung dieser physikalischen Größen gehört heute zu den klassischen Anwendungen der Spektroskopie<sup>2</sup>, speziell der Laser- und Mikrowellenspektroskopie. Man bedenke nur was für ein weiter Weg seit dem ersten Stern-Gerlach-Aufbau (zur Bestimmung des Spins und des magnetischen Momentes des Elektrons) oder seit der Atomstrahlresonanz-Apparatur nach Rabi (Erweiterung des Stern-Gerlach-Experimentes zur Bestimmung von Zeemanaufspaltungen) zurückgelegt worden ist.

Der Vorteil, den eine Penningfalle einer Stern-Gerlach- oder einer Rabi-Apparatur im Wesentlichen voraus hat, ist die Tatsache, dass die geladenen Teilchen für einen undefiniert langen Zeitraum einem äußeren elektromagnetischen Feld ausgesetzt sind und mit diesem wechselwirken können, weil sie in einem räumlich begrenzten Volumen eingesperrt sind. Aufgrund der geltenden Heisenbergschen Energie-Zeit-Unschärfe  $\Delta E \Delta t \geq \hbar^\ddagger$  können, wenn  $\Delta t$  genügend groß ist, durch die Anregung von ionischen Fein- und Hyperfeinzuständen hochauflösende Atomspektren vermessen werden.

## 1.2 Motivation

Neugier ist die ureigene Triebfeder der menschlichen Natur; es ist die Sehnsucht nach dem Unbekannten, die das menschliche Herz von Kind auf beherbergt. Diese Neugier erwächst aus der Verwunderung, aus dem Erstaunen, d. h. aus dem Bewusstsein des Nichtwissens. Plato sagt, unser Auge habe uns „des Anblicks der Sterne, der Sonne und des Himmelsgewölbes teilhaftig

---

<sup>1</sup>Somit ist es nicht verwunderlich, dass 1964 den Physikern N. G. Basov, A. M. Prokhorov und C. H. Townes für Leistungen auf dem Gebiet des Masers/Lasers (genauer Wortlaut: „*For fundamental work in the field of quantum electronics, which has led to the construction of oscillators and amplifiers based on the maser-laser principle*“) und 1989 den Wissenschaftlern H. G. Dehmelt, W. Paul und N. Ramsey der Nobelpreis verliehen wurde. Ersteren für die Entwicklung von Ionenfallen und Letzterem für neue Methoden im Bereich des Wasserstoff-Masers und der Atomuhren (genauer Wortlaut: „*For the development of the ion trap technique*“ und „*for invention of the separated oscillatory fields method and its use in the hydrogen maser and other atomic clocks*“).

<sup>2</sup>Es sei erwähnt, dass auf diesem Gebiet 1981 den Physikern N. Bloembergen, A. L. Shawlow („*For their contribution to the development of laser spectroscopy*“) und K. M. Siegbahn („*For his contribution to the development of high-resolution electron spectroscopy*“) der Nobelpreis zugesprochen wurde.

<sup>‡</sup>wobei  $\Delta E$  die Unsicherheit in der Energiebestimmung eines atomaren Überganges und  $\Delta t$  die Wechselwirkungs- bzw. die Beobachtungszeit ist.  $\hbar$  ist das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum.

werden lassen“ und dieser Anblick habe uns „den Trieb zur Untersuchung des Alls gegeben“. Sich wundern drängt, den Durst nach Erkenntnis zu stillen, die zum Wissen führt. Doch das Wissen, das um seiner selbst willen existiert, stellt die Frage nach dem praktischen Nutzen z. B. nach dem der Erforschung des Makrokosmos'. Dies gilt natürlich auch für das andere Ende der Längenskala, für den Mikrokosmos. Man fragt sich auch hier etwa, welchen Sinn es habe, sich mit dem Aufbau von Atomen und der Wechselwirkung zwischen Atomhülle und Atomkern, und zwischen Materie und Licht zu beschäftigen. Die Kritik der angewandten Wissenschaft an der Grundlagenforschung setzt meistens an dieser Stelle an.

Auf dem Weg von der Freude an der Erkenntnis hin zum praktischen Nutzen gibt es speziell in der Experimentalphysik viele Zwischenschritte. Im Laboralltag, z. B. während einer Messreihe in einem speziellen Gebiet der Atomphysik, der Laserspektroskopie, kann der praktische, gemeine Endnutzen der Forschungsarbeit meistens noch nicht gesehen, sondern höchstens nur erahnt werden und stellt daher ein fernes Handlungsmotiv dar. Die greifbaren Motive<sup>3</sup> der Arbeit sind hier viel spezifischerer Art: Ionische Grundzustands-, Feinstruktur- und Hyperfeinstrukturaufspaltungen und elektronische sowie Kern- $g$ -Faktoren in Penningfallen zu messen, ermöglicht es zum einen, fundamentale Theorien, etwa die Quantenelektrodynamik<sup>4</sup>, zu überprüfen und zum anderen atomare Ortswellenfunktionen zu bestimmen. Liest man in dem bereits 1989 von S. Weinberg veröffentlichten Artikel [316] zwischen den Zeilen, so kann man Ionenfallen bei grundlegenden Fragestellungen der modernen Physik, etwa bei der Frage nach der Linearität der Quantenmechanik, einsetzen. Weinberg weist darauf hin, dass „it seems long overdue to find precision tests of quantum mechanics itself, that would be more stringent than existing tests of specific quantum-mechanical theories. One sensitive way to test the linearity of quantum mechanics is to look for detuning phenomenon characteristic of any system of nonlinear oscillators“. Die nichtlinearen Oszillatoren, von denen im letzten Satz des Zitates die Rede ist, können mit dem Vorhandensein von Anharmonizitäten in den Ionenbewegungen gespeicherter Teilchen identifiziert werden. Diese Nichtlinearitäten rühren daher, dass die im Labor verwendete Ionenfalle nicht ideal ist<sup>5</sup>. In diesem Zusammenhang stellen sich Ionenkäfige und speziell Penningfallen als außergewöhnliche Werkzeuge heraus. Zum einen bieten diese 'Teilchencontainer' die Möglichkeit atomphysikalische Präzisionsmessungen durchzuführen und zum anderen können mit diesem Werkzeug auch nichtlineare dynamische Prozesse untersucht werden. Beide Anwendungsmöglichkeiten wurden im Rahmen dieser Arbeit verwirklicht.

In einem ersten Teil der vorliegenden Arbeit wurde ein erdalkaliähnliches

---

<sup>3</sup>Im wörtlichen Sinne von ‚Beweggründe‘

<sup>4</sup>Die quantenphysikalische Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung

<sup>5</sup>wie der Ausdruck ‚nicht ideal‘ zu verstehen ist, wird im Unterabschnitt 2.2 erläutert.

System ( $^{40}\text{Ca}^+$ ) mit Hilfe der optischen Mikrowellen-Doppelresonanzmethode spektroskopisch untersucht und der elektronische  $g$ -Faktor des Grundzustandes mit einer Genauigkeit von  $4.2 \cdot 10^{-8}$  bestimmt. Damit konnte eine weitere Lücke in der Reihe der bereits ermittelten  $g_J$ -Faktoren der zu den Alkaliatomen  $\text{Li}$ ,  $\text{Na}$ ,  $\text{K}$ ,  $\text{Rb}$  und  $\text{Cs}$  jeweils gehörenden *isoelektrischen* Erdalkali-Ionen geschlossen werden. Die Messung an solchen einfach positiv geladenen Erdalkali-Ionen ist dabei besonders geeignet, da man ein sogenanntes  $\Lambda$ -level als Termschema hat, in dem die  $(n-1)D$ -Zustände energetisch zwischen dem  $S$ -Grundzustand und den ersten angeregten  $P$ -Niveaus der  $n$ -Schale liegen. Ein weiteres Charakteristikum des Niveau-Schemas ist, dass die  $D$ -Zustände über eine für atomare Verhältnisse ungewöhnlich lange Lebensdauer verfügen (z. B.  $\tau(\text{Ca}^+, 3D_{3/2}) \approx 1 \text{ sec}$ ). Der  $S - P$ -Übergang liegt meist in Wellenlängenbereichen, die mit handelsüblichen Lasern erreicht werden können. Bei ungeraden Isotopen, die einen nichtverschwindenden Kernspin besitzen, können wegen der zusätzlichen Zeemanaufspaltung im Magnetfeld Hyperfeinstrukturaufspaltungen und Kern- $g$ -Faktoren bestimmt werden. Ist dabei die Zeemanaufspaltung größer als die Dopplerbreite des optischen Überganges, so kann mit einem schmalbandigen Laser selektiv ein Zeeman-Unterniveau angeregt und komplett entvölkert werden.

Vom theoretischen Standpunkt stellt das ionische  $\text{Ca}$ -System ein interessantes Untersuchungsobjekt dar. Aufgrund des wasserstoffähnlichen Aufbaus - man hat eine abgeschlossene Schale und nur ein Valenzelektron in der äußeren Hülle - spielen Kerneffekte eine wichtige Rolle. Das vom Valenzelektron induzierte elektrische Feld führt zu einer Polarisation des Kernvolumens. Das somit geänderte elektrische Feld des Kerns beeinflusst rückwirkend das gebundene Elektron in der äußeren Schale. Diese Effekte lassen sich durch unterschiedliche Ansätze theoretisch beschreiben. Die beiden wichtigsten Theorien sind die auf dem Variationsprinzip beruhende 'Multiconfiguration Dirac-Fock'-Methode (MCDF) und die auf einer Störungsrechnung für Vielteilchensysteme aufbauende 'Relativistic Many-Body Perturbation'-Theorie (RMBPT). Beide Theorien ermöglichen die Bestimmung von Landé- $g_J$ -Faktoren, sowie auch die Berechnung von Lebensdauern metastabiler und angeregter Zustände, Übergangsraten und Zeemanaufspaltungen. Über den Vergleich von theoretischen Vorhersagen mit experimentell bestimmten physikalischen Größen erhält man die Möglichkeit, qualitative Aussagen über die verwendeten Theorien zu machen und gegebenenfalls neue Denkanstöße zu geben, die zu einer Erweiterung bzw. Modifikation der Theorien führen können.

In einem zweiten Teil der Arbeit wurde ein sehr viel schwereres ionisches System ( $^{208}\text{Pb}^+$ ) in einer Penningfalle gespeichert und die Grundlagen (sowohl experimentell als auch theoretisch) gelegt, um mit der gleichen spektroskopischen Methode den Kern- $g$ -Faktor von  $^{207}\text{Pb}^+$  zu bestimmen. Dies wäre dann die erste optische Mikrowellen-Doppelresonanzmessung, die an so schweren ionischen Systemen durchgeführt wird. Damit könnte zum einen

die Diskrepanz zwischen den theoretischen Vorhersagen und dem in einem Speicherring an hochgeladenen wasserstoffähnlichen Blei-Ionen (81fach positiv geladenes Blei-207) gemessenen Wert<sup>6</sup> aufgelöst werden. Zum anderen könnte der bereits 1998 in einem Artikel von Gustavsson und Mårtensson-Pendrill ausgesprochenen Notwendigkeit einer „Neumessung“ von magnetischen Kernmomenten Rechnung getragen werden [112]. Die Autoren schlagen hierbei vor, das experimentelle Potential von Ionenfallen auszunutzen, die hochpräzise spektroskopische Messungen an ionischen Systemen ermöglichen („*One possible method would be to perform the measurements on closed-shell ions in ion traps*“).

Ebenfalls in diesem zweiten Teil wurde die Dynamik einer gespeicherten Elektronenwolke untersucht, unter dem Einfluss einer äußeren periodischen Anregung der axialen Eigenbewegung der Teilchen. Hierbei wurde das Phänomen beobachtet, dass ab bestimmten kritischen Teilchendichten die gespeicherten Teilchen kollektive Eigenschaften manifestieren, die sich in einer beobachtbaren kohärenten Schwerpunktsbewegung der Elektronenwolke bemerkbar machen. Die Forderung nach Erhaltung der Symmetrie bei einer Zeittranslation des Schwerpunktes der Teilchenwolke hat zur Folge, dass diese „Synchronisation der Oszillatoren“ bistabil ist in Bezug auf die Phase zwischen äußerer Anregung und Antwortverhalten des Systems. Dieses selbstorganisierte kollektive Verhalten der Elektronenwolke, die sich aufgrund der periodischen äußeren Erregung weit weg von einem thermischen Gleichgewicht befindet, tritt nur dann auf wenn die Amplitude der parametrischen Anregung eine bestimmte Schwelle überschreitet. Desweiteren tauchen mit zunehmender Anregungsamplitude zusätzliche Instabilitäten in der Elektronenbewegung auf, die im axialen Anregungsspektrum bei bestimmten gebrochenrationalen Vielfachen der axialen Eigenbewegung  $\omega_z$  auftreten. Während bei der parametrischen Anregung eines einzelnen Elektrons Möglichkeiten wie die Konstruktion eines „1-bit-Speichers“ [304] oder die Durchführung von stringenteren Tests zur QED einfacher zu realisieren sind, bietet ein größeres Ensemble von wechselwirkenden 'quantenmechanischen Oszillatoren' genügend Komplexität, um nichttriviale Effekte der nichtlinearen Dynamik untersuchen zu können, wie z. B. Hysterese-Verhalten, Bistabilität, Phasensprünge oder Schwellenverhalten. Letztgenannter Effekt wurde im Rahmen der durchgeführten Messungen an gespeicherten Elektronen genauer untersucht und lieferte interessante Ergebnisse, die theoretisch mit Hilfe der gedämpften Mathieuschen Differentialgleichung beschrieben und verstanden werden können.

---

<sup>6</sup>Siehe hierzu den Artikel im *Spektrum der Wissenschaft, Dossier: Laser in neuen Anwendungen 2/1998*, S. 82 ff. und [267].

## Kapitel 2

# Ionenspeicherung in einem Penningkäfig

Es existiert eine Vielzahl von Möglichkeiten, Ionen einzufangen und diese für eine unbestimmte Zeit an ein räumlich begrenztes Volumen zu binden. Die Unterschiede liegen dabei in der Form und in der Betriebsart der Falle. Im Folgenden wird nur auf die hyperbolisch geformte Falle eingegangen, die im sogenannten 'Penningmodus' betrieben wird. Die Falle besteht aus drei Elektroden: aus der Ringelektrode, die in der Form Ähnlichkeit mit der Innenfläche eines Torus<sup>1</sup> besitzt, und aus zwei Endkappen, die wie zwei Halbkugeln sich oberhalb bzw. unterhalb der Ringebene befinden. Im Idealfall sind die Oberflächen dieser Elektroden rotationssymmetrische Hyperboloide (siehe Abb. 2.1), die folgende parametrische Form haben:

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{r_0^2} - \frac{z^2}{z_0^2} &= +1 && \text{für die Ringelektrode} \\ \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{z^2}{z_0^2} &= -1 && \text{für die Endkappen (Kalotten),}\end{aligned}$$

mit Äquipotentialoberflächen, die einem idealen Quadrupolpotential folgen. Durch Anlegen einer Gleichspannung  $U$  zwischen Ring und Kalotten<sup>1</sup> erfährt das Ion eine in  $z$ -Richtung liegende und zum Zentrum der Falle gerichtete elektrische Kraft, die proportional und entgegengerichtet zur Verschiebung des geladenen Teilchens vom Ursprung ist:  $\vec{F} \propto -z\hat{e}_z$ . Dadurch vollführt das Ion harmonische Oszillationen in axialer Richtung und ist somit in dieser Bewegung eingefangen (axiale Bewegung). In der radialen Ebene dagegen (d. h.  $x$ - und  $y$ -Richtung) ist die Bewegung instabil, da diese Kraft auf das Ion

---

<sup>1</sup>Bei Speicherung von positiv geladenen Teilchen werden die Endkappen auf einer gegenüber dem Ring positiv gehaltenen Spannung gelegt. Praktisch sieht dies so aus, dass auf die Ringelektrode eine negative Spannung gegeben wird und die Kalotten demzufolge geerdet werden.

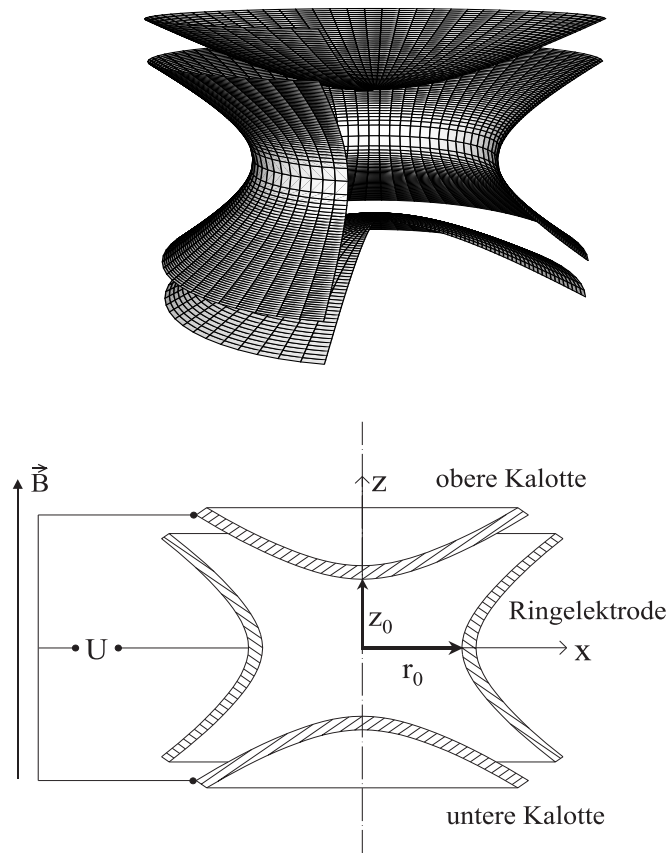


Abb. 2.1: Hyperbolische Elektroden im Penningmodus



abstoßend ist. Doch durch das zusätzliche Anlegen eines statischen, homogenen Magnetfelds in  $z$ -Richtung werden die Ionen, beim Versuch sich vom Fallenzentrum zu entfernen, auf Epizykloidenbahnen gelenkt (Zyklotronbewegung). Außerdem erfahren die Ionen noch ein inhomogenes elektrisches Feld, das sich aus dem Kreuzprodukt zwischen elektrischem und magnetischem Feld,  $(\vec{E} \times \vec{B})$ , ergibt. Dieses inhomogene elektrische Feld führt einerseits zu einer Präzessionsbewegung der Teilchen um das Zentrum der Falle (Magnetronbewegung) und zum anderen zu einer Verschiebung der Frequenz der Zyklotronbewegung (reduzierte Zyklotronbewegung). Man erreicht also durch die Superposition zweier elektromagnetischer Felder (bei der Penningfalle sind es ein elektrostatisches Feld und ein homogenes, statisches Magnetfeld) eine dreidimensionale Speicherung von geladenen Teilchen. Anders formuliert bedeutet dies, dass das notwendige räumliche Potentialminimum nicht allein mit einem statischen, elektrischen Feld realisiert werden kann (Earnshaw Theorem).

Im Folgenden wird kurz auf die ideale Penningfalle eingegangen, sowohl um die drei harmonischen Bewegungen herzuleiten, da diese für den experimentellen Teil der Arbeit von fundamentaler Bedeutung sind, als auch um häufig in der Literatur auftretende Inkonsistenzen zu klären, die sich in falschen Vorzeichen und widersprüchlichen Definitionen äußern. Die folgende Herleitung basiert auf dem Lagrangeformalismus und beschreibt ein *positiv* geladenes Teilchen in einem hyperbolisch geformten Quadrupolkäfig, der im 'Penningmodus' betrieben wird. Das Hauptaugenmerk richtet sich dann aber sogleich auf die reale Penningfalle, wie sie in den Labors vorzufinden ist, mit allen ihren konstruktionstechnisch bedingten Beschränkungen und Imperfektionen sowie mit den störenden äußeren Einflüssen.

## 2.1 Die Bewegungsmoden in einer idealen Penningfalle

In einer idealen Falle ist die axiale Bewegung beschränkt durch das zwischen Ring und Kalotten angelegte elektrostatische Feld. Die Anwesenheit eines homogenen magnetischen Feldes in axialer Richtung zwingt für sich betrachtet das geladene Teilchen<sup>2</sup> auf kreisähnliche Zyklotronbahnen und bindet es radial an das Fallenzentrum. Erst die Kombination aus magnetischem und elektrischem Feld führt zu einer Speicherung in allen drei Raumrichtungen, da sie eine dritte harmonische Bewegung einführt, und wandelt die Teilchentrajektorie in der  $x - y$ -Ebene von einer Kreisbahn zu einer Epizykloidenbahn.

Für ein geladenes Teilchen der Masse  $m$  und der Ladung  $e > 0$ , das sich in einem elektromagnetischen Feld aufhält, kann man folgendes Viererpotential

---

<sup>2</sup>Der Einfachheit halber wird im Folgendem von einem *einzelnen* Ion gesprochen.

einführen,

$$\Phi = (\Phi, \vec{A})$$

das sich aus dem skalaren Quadrupolpotential<sup>3</sup>

$$\Phi = \frac{U_0}{r_0^2 + 2z_0^2}(-x^2 - y^2 + 2(z^2 - z_0^2)) \quad \text{mit} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

und dem Vektorpotential<sup>4</sup>

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{B} = B\hat{e}_z \quad \rightsquigarrow \vec{A} = \frac{1}{2}B(-y\hat{e}_x + x\hat{e}_y)$$

zusammensetzt. Die Lagrangefunktion für ein massives, geladenes Teilchen, das sich in einer Penningfalle bewegt, setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie  $T$  und der potentiellen Energie  $V = -e\Phi$ , d. h.  $\mathcal{L} = T - V$ , und hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + e\Phi \\ &= \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{e}{2m}(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2 + e\Phi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Der Term  $\frac{e^2}{2m}\vec{A}^2 \equiv \int dV \mathcal{L}_0$  ist der diamagnetische Anteil der Lagrangefunktion, d. h. für  $\Phi = 0$ , und kann für die folgende theoretische Berechnung vernachlässigt werden. Mit der Tatsache, dass die Vektoroperatoren  $\vec{p}$  und  $\vec{A}$  miteinander kommutieren<sup>5</sup> erhält man  $\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} = 2\vec{A} \cdot \vec{p} = mB(xy - yx)$  und man kann die Lagrangefunktion folgendermaßen umschreiben:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2}(xy - yx) - \frac{eU_0}{r_0^2 + 2z_0^2}(x^2 + y^2 - 2(z^2 - z_0^2)) \quad (2.2)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich dann aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (2.3)$$

wobei  $q_i \in \{x, y, z\}$  und  $\dot{q}_i \in \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$  respektive die kanonischen Orts- und Impulskoordinaten sind.

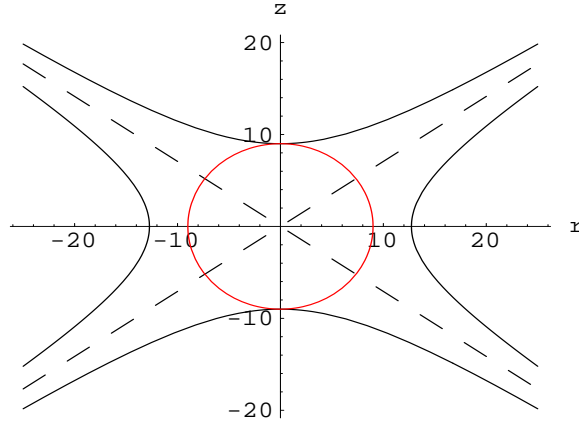
Für die  $x$ -Komponente ergibt sich:

$$\ddot{x} - \frac{eB}{m}\dot{y} + \frac{2eU_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)}x = 0 \quad (2.4)$$

<sup>3</sup>wobei die Vorzeichen so gewählt sind, dass ein positiv geladenes Teilchen gespeichert wird, d. h. die Ringelektrode liegt auf negativem Potential und die Kalotten sind geerdet:  $\Phi(x=0, y=0, z=z_0) = 0$  und  $\Phi(r=r_0, z=0) = -U_0$

<sup>4</sup>Man kann sich überzeugen, dass diese Darstellung ein gleichförmiges Magnetfeld  $\vec{B}$  beschreibt, indem man die Rotation bzw. die Divergenz von  $\vec{A}$  bildet. Es gilt nämlich:  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \vec{B}$  und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .

<sup>5</sup> $[\vec{p}, \vec{A}] = \frac{m}{2}B(-\dot{x}y + \dot{y}x) - \frac{m}{2}B(-y\dot{x} + x\dot{y}) = \frac{m}{2}B(\underbrace{[\dot{y}, x]}_{=0} + \underbrace{[y, \dot{x}]}_{=0}) = 0$



**Abb. 2.2:** Geometrie der Elektrodenoberflächen in einer Schnittzeichnung bei der speziellen Wahl des axialen und des radialen Käfighalbdurchmessers  $r_0 = \sqrt{2}z_0$ . Die gestrichelten Geraden sind die Asymptoten mit einer Steigung zur radialen Ebene von  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Der rot eingezeichnete Kreis veranschaulicht das maximal mögliche Speichervolumen, wobei natürlich die besten Speicherbedingungen nahe dem Käfigsprung sind.

In ähnlicher Weise folgt für die  $y$ -Komponente:

$$\ddot{y} + \frac{eB}{m}\dot{x} + \frac{2eU_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)}y = 0 \quad (2.5)$$

Schließlich erhält man für die  $z$ -Komponente:

$$\ddot{z} - \frac{4eU_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)}z = 0 \quad (2.6)$$

Im Allgemeinen ist die Stabilität der Speicherung für den idealen Käfig (d. h. unendlich ausgedehnte Elektrodenoberflächen) unabhängig von der Wahl des Käfighalbdurchmessers  $r_0$  und der Käfighöhe  $z_0$ , doch für den speziellen Fall  $r_0 = \sqrt{2}z_0$  [152] können die Beiträge höherer Ordnungen zum Quadrupolpotential minimiert werden. Dies liegt daran, dass die gemeinsamen Asymptoten von  $r$  und  $z$  die Lücke zwischen den Elektroden halbieren, was bei einer anderen Wahl erst im Unendlichen erreicht wird (siehe Abb. 2.2).

Die Gleichung (2.6) ist eine gewöhnliche harmonische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der Lösung

$$z(t) = |A_z| \cos(\omega_z t + \varphi_z) + |A_z| \sin(\omega_z t + \varphi_z) \quad (2.7)$$

und der Eigenfrequenz der axialen Bewegung

$$\boxed{\omega_z = \sqrt{-\frac{2eU_0}{mr_0^2}}} \quad (2.8)$$

Definiert man nun die *Zyklotronfrequenz*  $\omega_c := \frac{eB}{m}$ , so kann man die Gleichungen (2.4) und (2.5) umschreiben zu

$$\ddot{x} - \omega_c \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 \quad (2.9)$$

$$\ddot{y} + \omega_c \dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 \quad (2.10)$$

Um diese beiden DGL zu entkoppeln geht man in die komplexe Ebene, indem (2.10) mit der imaginären Einheit  $i$  multipliziert wird und anschließend (2.9) und (2.10) addiert werden<sup>6</sup>. Definiert man zusätzlich noch  $u := x + iy$ , so ergibt sich:

$$\ddot{u} + i\omega_c \dot{u} - \frac{1}{2}\omega_z^2 u = 0 \quad (2.11)$$

Mit dem Ansatz  $u(t) = e^{-i\omega t}$  erhält man die charakteristische Gleichung

$$\omega^2 - \omega_c \omega + \frac{1}{2}\omega_z^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \quad (2.12)$$

wobei  $\omega_+ \equiv \omega'_c$  die *reduzierte Zyklotronfrequenz* und  $\omega_- \equiv \omega_m$  die *Magnetronfrequenz* ist. Die allgemeine Lösung von (2.11) ist dann:

$$u(t) = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t}$$

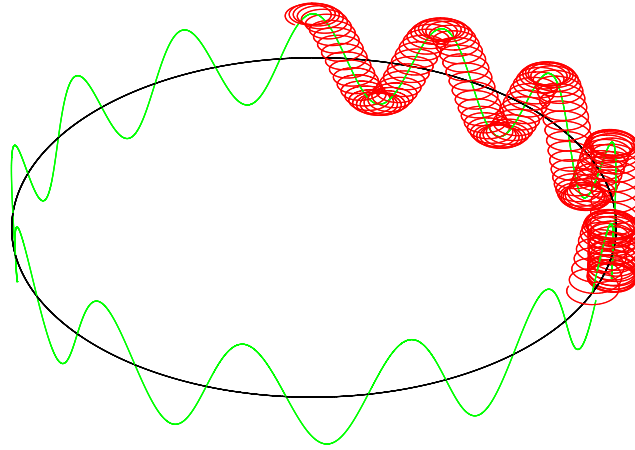
Wählt man  $A_{\pm} = |A_{\pm}| e^{i\varphi_{\pm}}$  mit beliebigen Phasen  $\varphi_{\pm}$ , so erhält man die zeitlich veränderlichen Trajektorien der  $x$ - und  $y$ -Bewegung:

$$\begin{aligned} x(t) &= |A_+| \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + |A_-| \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ y(t) &= -|A_+| \sin(\omega_+ t + \varphi_+) - |A_-| \sin(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned} \quad (2.13)$$

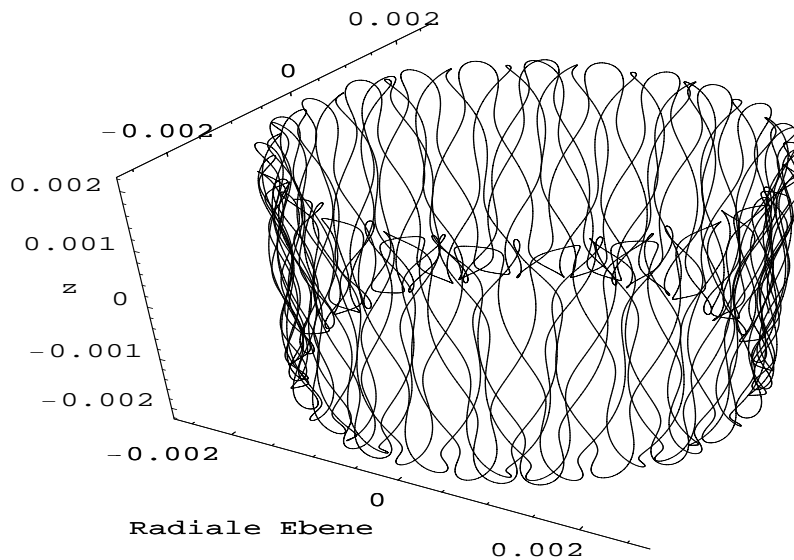
Hierbei ist  $|A_+|$  der Radius der reduzierten Zyklotronbewegung und  $|A_-|$  der Radius der Magnetronbewegung.

Aus den hergeleiteten Gleichungen in (2.7) und (2.13) sieht man, dass ein massives, geladenes Teilchen in einem idealen, hyperbolisch geformten Penningkäfig ein multiperiodisches System darstellt, das sich aus einer Überlagerung von drei *harmonischen* Bewegungen (die axiale, die Magnetron- und die reduzierte Zyklotronbewegung) zusammensetzt (siehe Abb. 2.3). Geht man in ein rotierendes Bezugssystem  $S_{\Omega}$ , das sich in Bezug auf das Laborsystem mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = -\frac{\omega_c}{2}$  dreht, so ist die hyperbolisch-geformte Penningfalle äquivalent zu einem dreidimensionalen Oszillator, der in der  $x - y$ -Ebene mit der Frequenz  $\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)$  und in axialer Richtung mit  $\omega_z$  schwingt.

<sup>6</sup>Diese Konvention wurde erstmals von Byrne und Farago [48] eingeführt.



**Abb. 2.3:** Idealierte räumliche Trajektorie eines einzelnen Ions in einem Penningkäfing. Die schwarze Linie stellt die langsame Magnetronbewegung dar, der die schnelle reduzierte Zyklotronbewegung (rote Kurve) und die vom Käfigpotential abhängige axiale Bewegung (grüne Kurve) überlagert sind.



**Abb. 2.4:** Realistische Bewegung eines einzelnen Ions in einem Penningkäfing. Außer den Parametern  $r_0 = \sqrt{2} \cdot 9\text{mm}$ ,  $U = -23.9\text{V}$ ,  $B = 1.43\text{T}$  und  $m = 40\text{a.m.u.}$  wurden folgende Annahmen für die Radien der einzelnen Eigenbewegungen gemacht:  $r_+ = 100\mu\text{m}$ ;  $r_- = 2,5\text{mm}$  und  $r_z = 2,12\text{mm}$ . Diese ergeben sich aus den klassischen Radien (siehe Unterabschnitt 6.1.2.)

Die Energie, die in der Zyklotronbewegung steckt ist hauptsächlich kinetisch; in der Magnetronbewegung steckt hingegen zum größten Teil potentielle Energie und die axiale Bewegung schließlich oszilliert zwischen kinetischer und potentieller Energie. Eine Reduktion der Energie der axialen und der Zyklotronbewegung führt zu einer Verkleinerung der Bewegungsamplitude beider Bewegungen: Die Bewegungsmoden sind somit stabil. Im Gegensatz hierzu ist die Magnetronbewegung ungebunden, und jeder dissipative Prozess führt unweigerlich dazu, dass sich der Magnetronradius aufweitet. Bildlich gesprochen rollt das Teilchen den radialen Potentialberg hinunter. Da jedoch die Dämpfungszeit für die Magnetronbewegung in der Größenordnung von Jahren liegt, kann die Bewegung als metastabil angesehen werden. Ein Energietransfer zwischen den einzelnen Bewegungsmoden ist durch zusätzliches Einstrahlen von sogenannten Seitenbandfrequenzen, d. h. von Linearkombinationen der Eigenfrequenzen, möglich. Eine wichtige Seitenbandfrequenz ist die reine Zyklotronfrequenz  $\omega_c$ , die die direkte Summe aus reduzierter Zyklotronfrequenz und Magnetronfrequenz ist ( $\omega_c = \omega_+ + \omega_-$ ). Diese Frequenz ist von fundamentaler Bedeutung im Zusammenhang mit dem Puffergaskühlen, das als Kühltechnik in den durchgeführten Messungen verwendet wurde. Man erzielt zum einen eine Reduktion in der Bewegungsamplitude der gespeicherten Teilchen, was zum Kühlen der Ionenwolke und somit zu einer Erhöhung der Verweildauer in der Falle sowie zu einem besseren räumlichen Überlapp mit dem Laser führt. Zum anderen kann die Lebensdauer von metastabilen Zuständen drastisch verkürzt werden, so dass in einem  $\Lambda$ -Niveausystem der Pumpzyklus nicht für einige Zeit unterbrochen wird. Im Unterabschnitt 2.2.3 wird in aller Ausführlichkeit auf diesen Sachverhalt eingegangen.

Abschließend sei noch erwähnt, um auf die Bewegung eines Teilchens in einem Penningkäfig zurückzukommen, dass sich bei üblichen Betriebsbedingungen, wie etwa  $r_0 = \sqrt{2} \cdot 9mm$ ;  $U = -23.9V$ ;  $B = 1.43T$ ;  $m = 40a.m.u.$   $\leadsto \omega_c = 2\pi \cdot 550.6kHz$ ;  $\omega_z = 2\pi \cdot 134.3kHz$ ;  $\omega_+ = 2\pi \cdot 533.7kHz$ ; und  $\omega_- = 2\pi \cdot 16.9kHz$  folgende Beziehung zwischen den einzelnen Frequenzen ergibt:

$$\omega_- \ll \omega_z \ll \omega_+ \approx \omega_c \quad (2.14)$$

Diese Relation spielt eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung des Magnetfeldes durch Messung der Zyklotronfrequenz gespeicherter Elektronen.

## 2.2 Die reale Penningfalle

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene ideale Penningfalle trägt vielen Abweichungen und Störungen nicht Rechnung, die bei einer realen Falle, wie sie im Labor eingesetzt wird, auftreten. Die endlich ausgedehnten Elektrodenoberflächen und die zusätzlich vorhandenen Löcher und Bohrungen in der Ringelektrode (zur Durchführung des Laserstrahls) und in den Endkappen (die obere Kalotte ist durch ein Drahtnetz ersetzt, um die

Fluoreszenz der angeregten Ionen detektieren zu können und die Öfen zur Erzeugung der Ionen befinden sich in Bohrungen in der unteren Kalotte) führen zu einer Verformung des elektrischen Quadrupolpotentials und zum Auftauchen von sogenannten nichtlinearen Resonanzen, d. h. von Speicherbedingungen, die zu Instabilitäten in den Teilchenbewegungen bis hin zum Teilchenverlust führen können. Diese Störterme, zusätzlich verursacht durch die Raumladungseffekte der Ionenwolke (mit den untereinander wechselwirkenden Teilchen) führen zu Verschiebungen in den drei Eigenfrequenzen der Bewegung. Inhomogenitäten des Magnetfeldes, die durch die konstruktions-technischen Vorgaben des supraleitenden Magneten sowie durch Suszeptibilität und Magnetisierung des verwendeten Fallenmaterials gegeben sind, können sich ebenso störend auf die Bewegungsmoden der Ionen auswirken. Außerdem können Störungen durch Verkippung der Fallenachse ( $z$ -Achse) gegenüber der axialen Magnetfeldrichtung verursacht werden. Sind die bis jetzt aufgelisteten Einflüsse unerwünscht und nur bedingt zu meistern bzw. zu kompensieren, so können Störungen auch absichtlich gewollt sein, indem z. B. Puffergas in die Vakuumapparatur, wo sich die Penningfalle befindet, eingelassen wird und extern ein zusätzliches Hochfrequenzfeld an die Ringelektrode angelegt wird. Diese sogenannte Puffergaskühlung mit Seitenbandanregung wird im Rahmen der realen Falle theoretisch abgehandelt.

Die Notwendigkeit für den Einsatz von Puffergas und eines Hochfrequenzfeldes erwächst aus dem Termschema des in dieser Arbeit spektroskopisch untersuchten  $^{40}\text{Ca}^+$ -Ions (siehe Abb. 3.1). Nach Anregung des Systems mit einem Laser aus dem Grundzustand in das erste angeregte Niveau, zerfällt dieses in ein metastabiles Niveau, das sich wiederum nach einer Sekunde durch elektrische Quadrupolstrahlung in den Grundzustand abregt. Nach einigen optischen Pumpzyklen sammeln sich die Ionen somit in einem Zustand an, der auf einer atomphysikalischen Zeitskala betrachtet, sich für sehr lange Zeit der Messung im Grundzustand entzieht und den Zyklus unterbricht. Ein Zurückpumpen der Ionen mit zusätzlichen Lasern aus dem metastabilen Zustand in das angeregte Niveau ist wegen der großen Zeemanaufspaltung des  $D$ -Niveaus und der somit benötigten Vielzahl an Lasern praktisch nicht durchführbar. Eine Alternative bietet die stoßinduzierte Reduzierung der Lebensdauer des Zustandes durch das Betreiben der Penningfalle in einer Puffergasatmosphäre. Das Zulassen der Stöße führt jedoch zum Verlust der Ionen, da sich die Magnetronbahn aufweitet und die Bewegungsmode instabil wird. Doch indem eine Seitenbandfrequenz der Ioneneigenbewegungen, nämlich  $\omega_+ + \omega_- \equiv \omega_c$ , über eine viergeteilte Ringelektrode eingestrahlt wird<sup>7</sup>, hat man einen Mechanismus zur Verfügung, der einem erlaubt, die Magnetronbewegung durch Anbindung an die gedämpfte reduzierte Zyklotronbewegung zu kühlen.

---

<sup>7</sup>Diese Idee wurde ursprünglich von Brown und Gabrielse im berühmten Artikel „*Geonium Theory: Physics of a Single Electron or Ion in a Penning Trap*“ [43] vorgeschlagen.

G. Bollen hat im Rahmen von Experimenten zur Massenspektrometrie in Penningfallen gezeigt, dass durch das zusätzliche Einstrahlen eines quadrupolähnlichen Hochfrequenzfeldes in radialer Ebene die unterschiedlichen Bewegungsmoden in der Falle miteinander gekoppelt werden. Die Bahnen der Ionen werden dann nicht nur stabilisiert, sondern in ihrer Bewegungsamplitude reduziert, d. h. die Teilchen werden gekühlt [257, 28]. C. Lichtenberg hat erstmals diesen Kühlmechanismus in der optischen Spektroskopie an gespeicherten  $Ba^+$ -Ionen angewandt und untersucht [184].

Weitere positive Effekte dieser Seitenbandkühlung sind eine Zentrierung der Ionenwolke im Fallenzentrum, was zu einem größeren räumlichen Überlapp mit einem Laserstrahl und somit zu einer Erhöhung der Nachweiswahrscheinlichkeit von Fluoreszenzphotonen führt. Weiterhin werden eine Verlängerung der Verweildauer der Ionen im Penningkäfig und eine Kühlung der Ionen auf Puffergastemperatur (d. h. im Regelfall Zimmertemperatur) erzielt. Letzteres führt zu einer Reduzierung der Dopplerbreite und somit zu einer Erhöhung des spektralen Überlapps der Ionenwolke mit einem schmalbandigen Laser. Im experimentellen Abschnitt der Arbeit wird der Leser jedoch sehen, dass dieser Mechanismus nicht vollständig verstanden ist. Die Theorie weist noch Unzulänglichkeiten auf, zumal der Prozess der Puffergaskühlung mit Seitenbandanregung nur für ein einzelnes Teilchen und nicht für ein Teilchenensemble beschrieben wird. Ausgangspunkt dieses Abschnittes ist eine gegenüber Glg. (2.1) erweiterte Lagrangefunktion, die alle erwähnten Störungen berücksichtigt [98]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + e(\vec{A} + \delta\vec{A}) \right)^2 + e\delta\Phi \\ & + eA_1 \left[ -U(t) \frac{1}{2} \frac{2z_0^2 - r_0^2}{2z_0^2 + r_0^2} \right. \\ & \left. + \frac{U(t)}{2z_0^2 + r_0^2} (2(z^2 - z_0^2) - (x^2 + y^2) - \varepsilon(x^2 - y^2)) \right] \\ & + e \frac{V_{rf}}{2\rho_0^2} \cos(\Omega t + \alpha_{rf}) x \cdot y - \frac{1}{2} e U(t) \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} C_k \left( \frac{r}{d} \right)^k P_k(\cos \Theta) + \int dV \mathcal{L}_0 \end{aligned}$$

Für  $\delta\vec{A} = 0$ ,  $\delta\Phi = 0$ ,  $A_1 = 1$ ,  $U(t) = U_0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $r_0^2 = 2z_0^2$ ,  $V_{rf} = 0$  und  $C_k = 0$  erhält man die Lagrangefunktion für ein ideales System.

### 2.2.1 Störung des Viererpotentials

Betrachtet werden äußere störende Einflüsse, die zu zusätzlichen Termen im skalaren Potential  $\Phi$  und im Vektorpotential  $\vec{A}$  führen,

$$\Phi' = \Phi + \delta\Phi \quad \text{und} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \delta\vec{A} \quad (2.15)$$

d. h. es werden die endlichen Ausdehnungen der Elektrodenoberflächen und die Magnetfeldinhomogenitäten berücksichtigt. Mit diesem Ansatz erhält



man den gestörten Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} + e \left( \vec{A} + \delta\vec{A} \right) \right]^2 - e(\Phi + \delta\Phi) \\ &= \mathcal{H} + \frac{e}{m} \left( \vec{p} + e\vec{A} \right) \delta\vec{A} + \frac{e^2}{2m} \left( \delta\vec{A} \right)^2 - e\delta\Phi\end{aligned}\quad (2.16)$$

wobei  $\mathcal{H} \equiv T + V$  der Hamiltonoperator des ungestörten Systems ist. Da die Störung durch äußere Einflüsse verursacht wird und nicht durch Raumladungseffekte der Ionenwolke, erfüllen die Störungsterme in (2.15) die Laplace-Gleichung:

$$\vec{\nabla}^2(\delta\Phi) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}^2(\delta\vec{A}) = 0$$

Weiterhin, unter der Annahme, dass diese Störungen keine Singularität im Fallenzentrum besitzen, können diese in Potenzreihen von sphärisch harmonischen Kugelflächenfunktionen entwickelt werden:

$$\delta\Phi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_{lm}(t) (x^2 + y^2 + z^2)^{l/2} Y_{lm} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$$

Die Multipolmomente  $Q_{lm}(t)$  bilden hierbei keinen vollständigen Satz, der zu einer orthonormalen Basis führt. Durch die Forderung, dass  $\Phi$  z. B. reell sein muss, ergibt sich  $Q_{l,-m}(t) = (-1)^m Q_{l,m}^*(t)$ . Weiterhin wird die Zahl der unabhängigen Multipolmomente durch die Annahme einer symmetrischen Störung reduziert. Eine zeitunabhängige Störungsrechnung ergibt dann [162]:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \mathcal{H}(J) + \frac{3(eQ_{22})^2}{m^2 \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \omega_c} \left( \frac{J_+}{\omega_+} - \frac{J_-}{\omega_-} \right) \\ &+ \frac{3eQ_{40}}{2m^2} \left( \frac{J_z^2}{\omega_z^2} - \frac{4J_z(J_+ - J_-)}{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \omega_c} + \frac{J_+^2 + J_-^2 - 4J_+J_-}{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right) + \dots\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}J_+ &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint p_+ dq_+ \\ J_- &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint p_- dq_- \\ J_z &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint p_z dq_z.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Diese sind konjugierte Drehimpulskoordinaten, die sich aus den kanonischen Orts- und Impulskoordinaten

$$\begin{aligned}q_{\pm} &= +\sqrt{m}(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)^{1/4} |A_{\pm}| \cos(\omega_{\pm}t + \varphi_{\pm}) \\ p_{\pm} &= \mp\sqrt{m}(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)^{1/4} |A_{\pm}| \sin(\omega_{\pm}t + \varphi_{\pm}) \\ q_z &= +\sqrt{m\omega_z} |A_z| \cos(\omega_z t + \varphi_z) \\ p_z &= -\sqrt{m\omega_z} |A_z| \sin(\omega_z t + \varphi_z)\end{aligned}$$

ergeben. Die Integrale in (2.17) erstrecken sich über eine volle Periode der jeweiligen harmonischen Bewegung, so dass man die Drehimpulskoordinaten folgendermaßen schreiben kann:

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} |A_+|^2 \sin^2(\omega_+ t + \varphi_+) d\omega_+ \\ &= \frac{1}{2} m \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} |A_+|^2 \\ J_- &= -\frac{1}{2} m \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} |A_-|^2 \quad \text{und} \\ J_z &= \frac{1}{2} m \omega_z z^2 \end{aligned}$$

Mit der Beziehung

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \omega_i \quad i = +, -, z$$

erhält man folgende verschobene Eigenfrequenzen:

$$\begin{aligned} \omega_+' &= \omega_+ + \frac{3(eQ_{22})^2}{m^2 \omega_c \omega_+ \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}} + \frac{3eQ_{40}}{2m \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}} (|A_+|^2 + 2|A_-|^2 - 2|A_z|^2) \\ \omega_-' &= \omega_- - \frac{3(eQ_{22})^2}{m^2 \omega_c \omega_- \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}} + \frac{3eQ_{40}}{2m \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}} (-2|A_+|^2 - |A_-|^2 - 2|A_z|^2) \\ \omega_z' &= \omega_z + \frac{3eQ_{40}}{2m \omega_z} (-2|A_+|^2 - 2|A_-|^2 + |A_z|^2) \end{aligned}$$

Im Falle einer Quadrupolanregung der Zyklotronbewegung ist die Ringelektrode in vier gleich große Segmente unterteilt. Ist  $\Omega$  die Frequenz des Hochfrequenzfeldes mit  $Q_{ij} = C_{ij} \cos \Omega t$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \omega_+' &= \omega_+ + 3 \left( \frac{eC_{22}}{m \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}} \right)^2 \left[ \frac{\omega_c}{\omega_c^2 - \Omega^2} - \frac{2\omega_+}{4\omega_+^2 - \Omega^2} \right] \\ \omega_-' &= \omega_- + 3 \left( \frac{eC_{22}}{m \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}} \right)^2 \left[ \frac{\omega_c}{\omega_c^2 - \Omega^2} - \frac{2\omega_-}{4\omega_-^2 - \Omega^2} \right] \end{aligned}$$

## 2.2.2 Axialsymmetrische Störungen

Die Abweichung des realen Fallenpotentials vom idealen Quadrupolpotential kann wegen der geforderten Rotationssymmetrie des Potentials in eine Potenzreihe von Legendrepolyomen entwickelt werden:

$$\Phi = \frac{U_0}{2} \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} C_k \left( \frac{r}{r_k} \right)^k P_k(\cos \theta) \quad (2.18)$$

Im Folgenden wird nur der quadratische Anteil ( $k = 2$ ) betrachtet. Das elektrostatische Potential in einer asymmetrischen Falle hat dann folgende Form:

$$\Phi = \frac{U_0}{r_0^2 + 2z_0^2} (2(z^2 - z_0^2) - (x^2 + y^2) - \varepsilon(x^2 - y^2)), \quad |\varepsilon| < 1 \quad (2.19)$$

wobei  $\varepsilon$  ein Maß für die Abweichung des Potentials von der Quadrupolsymmetrie ist.

Eine Verkipfung des Magnetfeldes gegenüber der  $z$ -Achse der Falle kann man durch folgenden allgemeinen Ansatz berücksichtigen:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B \sin \theta \cos \varphi \\ B \sin \theta \sin \varphi \\ B \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Setzt man (2.19) und (2.20) in die Lagrangefunktion (2.1) ein so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{4}m\omega_z^2 [2(z^2 - z_0^2) - (x^2 + y^2) - \varepsilon(x^2 - y^2)] \\ & + \frac{eB}{2} (z\dot{x} \sin \theta \sin \varphi - y\dot{x} \cos \theta + x\dot{y} \cos \theta \\ & - z\dot{y} \sin \theta \cos \varphi + y\dot{z} \sin \theta \cos \varphi - x\dot{z} \sin \theta \sin \varphi) \end{aligned}$$

Wendet man nun, analog zum Abschnitt 2.1 die Euler-Lagrangegleichungen in (2.3) an, so erhält man folgenden Satz an gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_c(\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta \sin \varphi) &= \frac{1}{2}\omega_z^2 x(1 + \varepsilon) \\ \ddot{y} - \omega_c(-\dot{x} \cos \theta + \dot{z} \sin \theta \sin \varphi) &= \frac{1}{2}\omega_z^2 y(1 - \varepsilon) \\ \ddot{z} - \omega_c(\dot{x} \sin \theta \sin \varphi - \dot{y} \sin \theta \cos \varphi) &= -\omega_z^2 z \end{aligned}$$

Für  $\theta = 0$  und  $\varepsilon = 0$  ergeben sich die Differentialgleichungen für den idealen Fall. Mit dem Ansatz  $x = x_0 e^{-i\omega t}$ ,  $y = y_0 e^{-i\omega t}$  und  $z = z_0 e^{-i\omega t}$  erhält man einen Satz von drei homogenen algebraischen Gleichungen, die in einer Matrixdarstellung folgende Form haben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2(1 + \varepsilon) & -i\omega\omega_c \cos \theta & i\omega\omega_c \sin \theta \sin \varphi \\ i\omega\omega_c \cos \theta & \omega^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2(1 - \varepsilon) & -i\omega\omega_c \sin \theta \cos \varphi \\ -i\omega\omega_c \sin \theta \sin \varphi & i\omega\omega_c \sin \theta \cos \varphi & \omega^2 - \omega_z^2 \end{pmatrix}}_{\equiv D(\omega^2)} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

Eine nicht-triviale Lösung ergibt sich, wenn die Determinante von  $D(\omega^2)$  identisch null ist. Sind  $\tilde{\omega}_z$ ,  $\tilde{\omega}_-$  und  $\tilde{\omega}_+$  respektive die axiale, die Magnetron- und die reduzierte Zyklotronfrequenz der realen Falle, so kann man ansetzen:

$$D(\omega^2) = (\omega^2 - \tilde{\omega}_z^2)(\omega^2 - \tilde{\omega}_-^2)(\omega^2 - \tilde{\omega}_+^2) \quad (2.22)$$

Ein Koeffizientenvergleich von (2.21) mit (2.22) liefert die Beziehungen:

$$\tilde{\omega}_z^2 \tilde{\omega}_-^2 \tilde{\omega}_+^2 = \frac{1}{4}\omega_z^6 (1 - \varepsilon^2) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_z^2 \tilde{\omega}_-^2 + \tilde{\omega}_-^2 \tilde{\omega}_+^2 + \tilde{\omega}_+^2 \tilde{\omega}_z^2 &= \omega_c^2 \omega_z^2 (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \theta \cos 2\varphi) \\ &\quad - \frac{3}{4} \omega_z^4 (1 + \frac{1}{3} \varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\tilde{\omega}_z^2 + \tilde{\omega}_-^2 + \tilde{\omega}_+^2 = \omega_c^2 \quad (2.25)$$

Die Beziehung (2.25) ist, als sogenanntes *Invarianz-Theorem*, von großer Bedeutung. Es besagt, dass man die reine Zyklotronfrequenz aus den Eigenfrequenzen der nicht-idealen Falle bestimmen kann, unabhängig von den Verkippungswinkeln ( $\theta$ ,  $\varphi$ ) und dem Asymmetrieparameter  $\varepsilon$ . Für den i. A. immer auftretenden Fall  $\tilde{\omega}_+^2 \gg \tilde{\omega}_z^2 \gg \tilde{\omega}_-^2$  ergibt sich aus den Gleichungen (2.23), (2.24) und (2.25) für kleine Störungen:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_z &\simeq \omega_z \sqrt{1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon \cos 2\varphi\right)} \\ \tilde{\omega}_- &\simeq \frac{\tilde{\omega}_z}{2\tilde{\omega}_+} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon \cos 2\varphi\right)\right)^{-3/2}} \\ \tilde{\omega}_+ &\simeq \omega_c \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\omega}_z}{\tilde{\omega}_+}\right)^2 + \frac{9}{16} \left(\frac{\tilde{\omega}_z}{\tilde{\omega}_+}\right)^4 \left(\theta^2 - \frac{2}{9} \varepsilon^2\right)\right]^{-1}\end{aligned}$$

### 2.2.3 Ionentrajektorien in Anwesenheit von Puffergas und eines Quadrupol-Hochfrequenzfeldes

Die Oszillationsfrequenzen der Zyklotronbewegung von Ionen mit Massen  $m = (10 - 200)a.m.u.$  liegen typischerweise im  $kHz/MHz$ -Bereich und können somit über die Ringelektrode mit einem Frequenzgenerator eingekoppelt werden. Wird die Ringelektrode in vier gleich große Segmente aufgeteilt und werden paarweise diametral gegenüberliegende Ringviertel mit einem azimutalen Hochfrequenzfeld verbunden, so kann man mit dieser sogenannten Quadrupolanordnung die radialen Moden der Bewegung anregen. Führt man nun zusätzlich Puffergas ein, was für sich betrachtet zum Ionenverlust wegen der instabilen Magnetronbewegung führt, so erhält man eine Wechselwirkung der gespeicherten Ionen mit den Dipolmomenten der Puffergasatome oder -moleküle. Die daraus resultierende Kraft ist im Falle von Puffergasatomen proportional zu  $1/r^{4\ddagger}$  und fällt somit schneller ab als die repulsiven Kräfte elastischer Stöße der Ionen untereinander. Die Ionen wechselwirken somit ständig mit den sie umgebenden Puffergasatomen, so dass man sagen kann, das Puffergas wirke wie ein viskoses Medium. Dies führt zu einer Reibungskraft  $\vec{F} = -\gamma m \dot{\vec{r}}$ , wobei der Dämpfungskoeffizient  $\gamma$  ausgedrückt werden kann als:

$$\gamma = \frac{|q|}{m \cdot d_0} \cdot \frac{p}{p_{norm}}$$

$|q|$  bzw.  $m$  sind hierbei respektive die Ladung bzw. die Masse der Ionen,  $d_0$  die Ionenmobilität,  $p$  der Puffergasdruck und  $p_{norm}$  der Normaldruck. Die Ionenmobilität<sup>8</sup>  $d_0$  ist definiert durch die Driftgeschwindigkeit der Ionen

<sup>‡</sup>für homonukleare Moleküle (z.B.  $N_2$ ) ist diese Kraft  $\propto r^{-3}$ , für heteronukleare Moleküle sogar  $\propto r^{-2}$ .

<sup>8</sup>Eine Herleitung der Feldabhängigkeit in Form von Näherungsformeln auf der Basis heuristischer Argumente findet sich in [339]. Eine mathematisch strengere Herleitung auf der Grundlage der gaskinetischen Theorie wurde dagegen 1975 von Viehland und Mason

in einem neutralen Gas in Einheiten von  $100\frac{m}{s}$  und durch das angelegte elektrische Feld  $E$ :  $d_0 = \frac{v_d}{E}$ .

In den Euler-Lagrange-Gleichungen wird der Reibungsterm als *holonome Nebenbedingung* berücksichtigt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{(z)} \quad (2.26)$$

mit der verallgemeinerten Zwangskraft  $Q_i^{(z)} \equiv -\gamma m \dot{r}^{\vec{i}}$

Das extern angelegte Quadrupol-Hochfrequenzfeld erweitert die Lagrange-funktion gegeben in (2.2) um den folgenden Term:

$$E_{az} = A \cdot x \cdot y \quad \text{mit} \quad A = \frac{V_{rf}}{2\rho_0^2} \cos(\Omega t + \varphi_{rf}) \quad (2.27)$$

wobei  $\Omega$  bzw.  $\varphi_{rf}$  die Frequenz bzw. die Phase des azimuthalen Hochfrequenzfeldes sind und  $V_{rf}$  das maximale Potential des Quadrupolhochfrequenzfeldes in einem Radius  $\rho_0$  vom Fallenzentrum. Die Größe

$$a_0 := \frac{V_{rf}}{2\rho_0^2} \quad (2.28)$$

wird als Hochfrequenzamplitude bezeichnet und besitzt die Dimension einer elektrischen Feldstärke. Man hat also folgende modifizierte Lagrange-funktion:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{eU_0}{r_0^2 + 2z_0^2} (x^2 + y^2 - 2(z^2 - z_0^2)) + Axy \quad (2.29)$$

Hieraus ergibt sich folgende Differentialgleichung für die  $x$ -Komponente:

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} + \frac{1}{2} \omega_z^2 x + \frac{A}{m} y - \gamma \dot{x} \quad (2.30)$$

Analog folgt für die  $y$ -Komponente:

$$\ddot{y} = -\omega_c \dot{x} + \frac{1}{2} \omega_z^2 y + \frac{A}{m} x - \gamma \dot{y} \quad (2.31)$$

Mit den Beziehungen  $\omega_c = \omega_{\pm} + \omega_{\mp}$  und  $\omega_z^2 = 2\omega_{\pm}\omega_{\mp}$  lässt sich (2.30) umschreiben zu:

$$\ddot{x} - \omega_{\mp} \dot{y} = \omega_{\pm} (\dot{y} + \omega_{\mp} x) + k(\omega_{+} - \omega_{-})y - \bar{\gamma}(\omega_{+} - \omega_{-})\dot{x} \quad (2.32)$$

Hierbei wurden folgende Definitionen gemacht:

$$k = k_0 \cos(\Omega t + \varphi_{rf}) \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{V_{rf}}{2\rho_0^2} \frac{e}{m} \frac{1}{(\omega_{+} - \omega_{-})}$$

und  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{(\omega_{+} - \omega_{-})}$

---

[338] entwickelt. Tabellierte Werte von  $d_0$  für Ionen in unterschiedlichen Puffergasmedien sind in [340, 341] zu finden.

Um die Rechnung im Weiteren zu vereinfachen, definiert man einen Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{V}^\pm := \dot{\vec{r}} + \omega_\mp \hat{e}_z \times \vec{r} \iff \begin{cases} V_x^\pm = \dot{x} - \omega_\mp y \\ V_y^\pm = \dot{y} + \omega_\mp x \end{cases}$$

Dann folgt für die Gleichung (2.32):

$$\dot{V}_x^\pm = \omega_\pm V_y^\pm + k(V_x^+ - V_x^-) - \bar{\gamma}(\omega_+ V_x^+ - \omega_- V_x^-) \quad (2.33)$$

In analoger Weise erhält man auch die  $y$ -Komponente:

$$\dot{V}_y^\pm = -\omega_\pm V_x^\pm + k(V_y^- - V_y^+) - \bar{\gamma}(\omega_+ V_y^+ - \omega_- V_y^-) \quad (2.34)$$

Die Glg. (2.33) und (2.34) können mit dem Ansatz  $\vec{V}^\pm = \vec{V}_0^\pm e^{[\pm i(\omega_\pm t + \varphi_\pm)]}$  gelöst werden. Im Resonanzfall, d. h.  $\Omega \approx \omega_c$  und  $k_0 \ll \omega_-$ , beobachtet man eine langsame Änderung in der Amplitude  $V_0^\pm$ , der schnelle Modulationen mit den Frequenzen  $\Omega$ ,  $\omega_c$  und  $(\Omega + \omega_c)$  überlagert sind. Vernachlässigt man diese höherfrequenten Terme, so lassen sich (2.33) und (2.34) umformen zu:

$$\dot{V}_{0x}^\pm = \mp i\omega_\pm V_{0x}^\pm + \omega_\pm V_{0y}^\pm \mp \frac{k_0}{2} V_{0x}^\mp e^{\pm i[(\Omega - \omega_c)t + \Delta\varphi]} \mp \bar{\gamma}\omega_\pm V_{0x}^\pm \quad (2.35)$$

und

$$\dot{V}_{0y}^\pm = \mp i\omega_\pm V_{0y}^\pm - \omega_\pm V_{0x}^\pm \pm \frac{k_0}{2} V_{0y}^\mp e^{\pm i[(\Omega - \omega_c)t + \Delta\varphi]} \mp \bar{\gamma}\omega_\pm V_{0y}^\pm \quad (2.36)$$

$$\text{mit } \Delta\varphi := \varphi_{rf} - (\varphi_+ - \varphi_-)$$

Unter der Annahme kreisförmiger Bahnen und eines negativen Drehsinns von  $\vec{V}^-$  kann man, mit der sich hieraus ergebenden Beziehung  $V_{0y}^\pm = \pm i V_{0x}^\pm = \pm i V_0^\pm$  die Gleichungen (2.35) und (2.36) schließlich umformen zu:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0^+ &= -\frac{k_0}{2} e^{i[(\Omega - \omega_c)t + \Delta\varphi]} V_0^- - \bar{\gamma}\omega_+ V_0^+ \\ \dot{V}_0^- &= +\frac{k_0}{2} e^{-i[(\Omega - \omega_c)t + \Delta\varphi]} V_0^+ + \bar{\gamma}\omega_- V_0^- \end{aligned} \quad (2.37)$$

An den DGL in (2.37) sieht man bereits, dass in Abwesenheit des Quadrupol-Hochfrequenzfeldes, d. h. bei  $k_0 = 0$ , der Radius der Zyklotronbewegung exponentiell zusammenschrumpft, während der Magnetronradius unabhängig davon exponentiell anwächst. In Abwesenheit von Puffergas, d. h. bei  $\bar{\gamma} = 0$ , sind die Zyklotron- und die Magnetronbewegung dagegen miteinander gekoppelt. Die allgemeine Lösung von (2.37) ergibt sich mit dem Ansatz:

$$V_0^\pm = f^\pm(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm \frac{i}{2}(\Omega - \omega_c)t} \quad (2.38)$$

Durch Einsetzen von (2.38) in (2.37) und Koeffizientenvergleich, kann man die Funktion  $f^\pm(t)$  eindeutig bestimmen. Mit der Definition

$$A_\pm := V_0^\pm / (\omega_+ - \omega_-)$$

erhält man schließlich als Lösung für die Halbdurchmesser der radialen Komponenten<sup>9</sup>:

$$A_\pm(t) = \left\{ A_\pm(0) \cosh(\omega_B e^{i\theta} t) \mp \frac{1}{2} \frac{A_\pm(0)(\bar{\gamma}\omega_c + i(\Omega - \omega_c)) + A_\mp(0)k_0^\pm}{\omega_B e^{i\theta}} \right. \\ \left. \sinh(\omega_B e^{i\theta} t) \right\} e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\frac{i}{2}(\Omega - \omega_c)t} \quad (2.39)$$

mit  $k_0^\pm = k_0 e^{\pm i\Delta\varphi}$ . Die Frequenz  $\omega$  und die Phase  $\theta$  sind hierbei gegeben durch:

$$\omega_B = \sqrt{\omega_B^+ \cdot \omega_B^-}, \quad \omega_B^\pm = \frac{1}{2} \sqrt{(\Omega - \omega_c)^2 + (\bar{\gamma}\omega_c \mp k_0)^2}$$

und

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_+ + \theta_-), \quad \theta_\pm = \arctan\left(\frac{\Omega - \omega_c}{\bar{\gamma}\omega_c \mp k_0}\right)$$

Man kann (2.39) für den hier interessierenden Fall  $\Omega \equiv \omega_c = \omega_+ + \omega_-$  ( $\leadsto \theta = 0$ ;  $\omega_B = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\gamma}^2\omega_c^2 - k_0^2}$ ) umschreiben zu:

$$A_\pm(t) = e^{-\frac{\bar{\gamma}}{2}(\omega_+ - \omega_-)t} \cdot \left\{ \frac{A_\pm(0)}{2} (e^{\omega_B t} + e^{-\omega_B t}) \mp \frac{1}{2} \frac{A_\pm(0)\bar{\gamma}\omega_c + A_\mp(0)k_0}{2\omega_B} (e^{\omega_B t} - e^{-\omega_B t}) \right\}$$

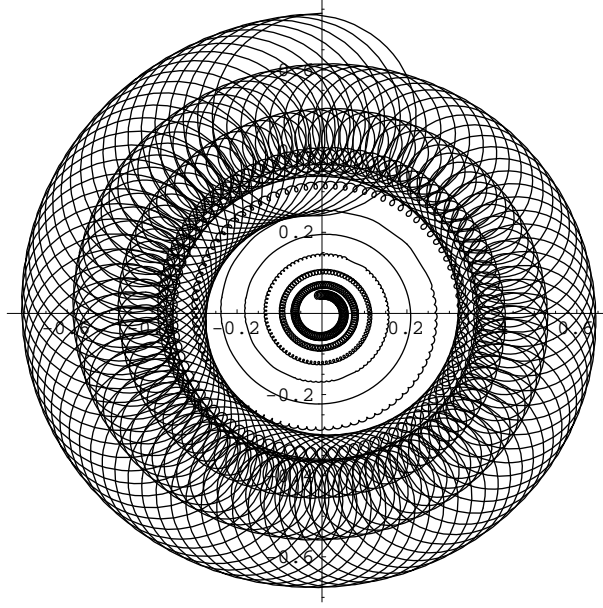
Für den Fall  $k_0 > \bar{\gamma}\omega_c$  geht  $\omega_B$  über in  $i\omega_B$  und die Lösungen beschreiben dann die Überlagerung einer periodischen Konversion zwischen Zyklotron- und Magnetronbewegung mit einer Dämpfung, deren Zeitkonstante  $\frac{\bar{\gamma}}{2}(\omega_+ - \omega_-)$  ist:

$$A_+(t) = e^{-\frac{\bar{\gamma}}{2}(\omega_+ - \omega_-)t} \left\{ A_+(0) \cos \omega_B t - \frac{\bar{\gamma}\omega_c A_+(0) + k_0 A_-(0)}{2\omega_B} \sin \omega_B t \right\} \quad (2.40)$$

$$A_-(t) = e^{-\frac{\bar{\gamma}}{2}(\omega_+ - \omega_-)t} \left\{ A_-(0) \cos \omega_B t + \frac{\bar{\gamma}\omega_c A_-(0) + k_0 A_+(0)}{2\omega_B} \sin \omega_B t \right\} \quad (2.41)$$

Eine Computersimulation ergibt die in Abb. 2.5 dargestellte Trajektorie.

<sup>9</sup>Die Trajektorien in der  $(x - y)$ -Ebene ergeben sich durch Einsetzen der jeweiligen Lösungen für  $|A_\pm(t)|$  in die kartesischen Lösungen (Glg. (2.13)), wobei für den Betrag der Radialkomponenten  $|A_\pm(t)| = A_\pm(t) \cdot A_\pm^*(t)$  gilt.



**Abb. 2.5:** Ionentrajektorie eines einzelnen Teilchens in der radialen Ebene bei Anwesenheit einer Puffergasatmosphäre und zusätzlich eingestrahelter Seitenbandanregung, die sich durch Einsetzen der Lösungen (2.40) und (2.41) in (2.13) ergibt.

Man sieht, dass man eine Kühlung sowohl der Zyklotron- als auch der Magnetronbewegung erreicht. Aufgrund der Kopplung der beiden Bewegungen wird nach einer Zeit  $t$  Energie von der Magnetronbewegung in die Zyklotronbewegung transferiert, was zu einem Aufweiten der Zyklotronbahn führt. Doch durch die Anwesenheit des Puffergas wird diese Zunahme an kinetischer Energie gedämpft. Man erhält ein periodisches Wechselspiel von Kühl- und Aufheizphasen.

Abschließend sollen die Effekte der Seitenbandanregung und des Puffergaskühlens getrennt betrachtet werden. Zunächst zur Anwesenheit des Hochfrequenzfeldes: Setzt man in (2.39)  $\gamma = 0$ ,  $\bar{\gamma} = 0$ , so erhält man

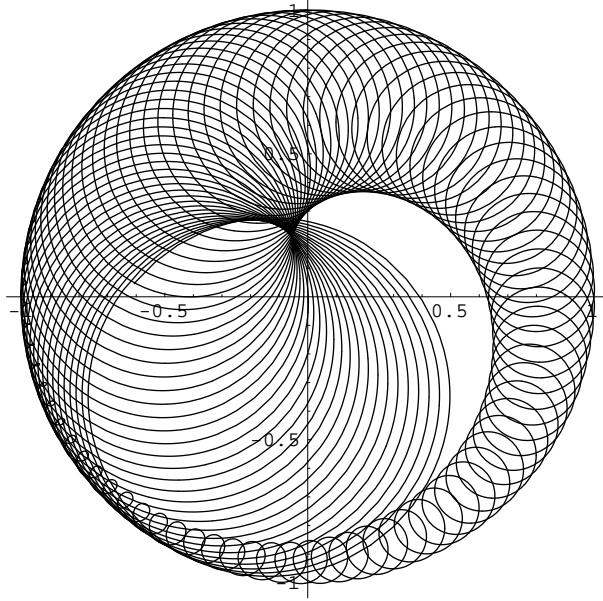
$$A_{\pm}(t) = \left\{ A_{\pm}(0) \cos(\omega_B t) \mp \frac{1}{\omega_B} \frac{A_{\pm}(0)(i(\Omega - \omega_c)) + A_{\mp}(0)k_0^{\pm}}{\omega_B} \sin(\omega_B t) \right\} e^{\frac{i}{2}(\Omega - \omega_c)t}$$

mit  $\omega_B = \frac{1}{2}\sqrt{(\Omega - \omega_c)^2 + k_0^2}$  und  $k_0^{\pm} = k_0 e^{\pm i\Delta\varphi}$ . Setzt man die Resonanzbedingung  $\Omega = \omega_c$  ein (d. h. strahlt man ein Seitenband der Eigenfrequenzen ein), so folgt schließlich:

$$A_{\pm}(t) = A_{\pm}(0) \cos\left(\frac{k_0}{2}t\right) \mp A_{\mp}(0)e^{\pm i\Delta\varphi} \sin\left(\frac{k_0}{2}t\right) \quad (2.42)$$

Abb. 2.6 veranschaulicht die zur Glg. (2.42) zugehörigen Computersimu-





**Abb. 2.6:** Ionentrajektorie eines Ions in der radialen Ebene in Anwesenheit eines Quadrupol-Hochfrequenzfeldes ohne Puffergasatmosphäre, d. h.  $\gamma = \bar{\gamma} = 0$ . Dargestellt ist der Resonanzfall  $\Omega = \omega_c$ .

lation. Man sieht, dass nur die Anwesenheit der Seitenbandanregung nicht zu einer Kühlung beider Bewegungsmoden führt. Betrachtet man nun die Spezialfälle  $A_+(0) = 0$  und  $A_-(0) = A_0$  so ergibt sich:

$$A_+(t) = A_0 e^{i(\Delta\varphi + \pi)} \sin\left(\frac{k_0}{2}t\right) \quad \text{und}$$

$$A_-(t) = A_0 \cos\left(\frac{k_0}{2}t\right)$$

Man erkennt, dass die gekoppelten Zyklotron- und Magnetronbewegungen, ihre Amplituden in einem periodischen Intervall von  $\frac{\pi}{k_0}$  'austauschen'. Die Zeit für eine komplette Konversion zwischen den beiden Bewegungsmoden ist dann  $t_B = \frac{2\pi}{k_0}$ .

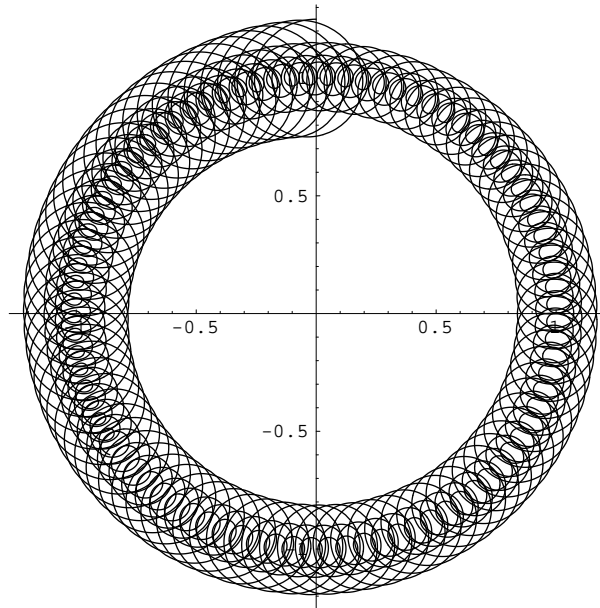
Nun der Effekt des Puffergaskühlens: Setzt man in (2.39)  $k_0 = 0$ , so erhält man wiederum im Resonanzfall ( $\leadsto \theta = 0$  und  $\omega_B = \bar{\gamma}\frac{\omega_c}{2}$ ):

$$A_{\pm}(t) = A_{\pm}(0) \left\{ \cosh\left(\frac{\bar{\gamma}\omega_c}{2}t\right) \mp \sinh\left(\frac{\bar{\gamma}\omega_c}{2}t\right) \right\} e^{-\frac{\bar{\gamma}}{2}t} \quad (2.43)$$

bzw. durch einsetzen von  $\omega_c = \omega_+ + \omega_-$  und Umformung:

$$A_{\pm}(t) = A_{\pm}(0) e^{\mp\bar{\gamma}\frac{\omega_{\pm}}{\omega_+ - \omega_-}t} \quad (2.44)$$

Man sieht an dieser Gleichung zweierlei. Einerseits erkennt man, dass der Ra-



**Abb. 2.7:** Ionentrajektorie eines Ions in der radialen Ebene in Anwesenheit von Puffergas ohne Quadrupol-Hochfrequenzfeld, d. h.  $k_0 = 0$ , wie sie aus Glg. (2.44) folgt. Dargestellt ist der Resonanzfall  $\Omega = \omega_c$ .

dius der Zyklotronbewegung in Abwesenheit der Seitenbandanregung exponentiell abnimmt, während der Radius der Magnetronbewegung exponentiell zunimmt. Da  $\omega_+ \gg \omega_-$  ist andererseits die Rate, mit der die Amplitude der Zyklotronbewegung abnimmt, größer als die Rate, mit der die Magnetronbewegung zunimmt, weil in Anwesenheit der Quadrupolanregung Energie periodisch von einer Bewegungsmode in die andere überführt wird und somit die Magnetronbewegung über die Kopplung mit der Zyklotronbewegung gekühlt wird. Wenn nach einem periodischen Zyklus die Bahn der Zyklotronbewegung durch die Zunahme an kinetischer Energie sich aufweitet, wird sie durch die Stöße mit den Puffergasatomen gedämpft. Dieser konkurrierende Prozess setzt sich solange fort, bis die Ionen sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Puffergas befinden.

Beim Einsatz der Seitenbandfrequenz  $\omega_c$  ist die in Glg. (2.28) definierte Größe  $a_0$  wichtig. In diesem Zusammenhang unterscheidet man drei Fälle:

1. Ist die Dämpfung der Bewegung größer als die Kopplung zwischen Zyklotron- und Magnetronbewegung (ausgedrückt durch  $a_0$ ), so ist der Verlust der potentiellen Energie in der Magnetronbewegung (verursacht durch die Stöße mit dem Puffergas) größer als die Zunahme durch das Einstrahlen des Quadrupol-Hochfrequenzfeldes. Dies führt zu einem Aufweiten der Magnetronbahn und schließlich zum Ionenver-

lust.

$$a_0 < \sqrt{2} \omega_z \cdot \gamma \cdot \frac{m}{q}$$

2. Für den Fall

$$\sqrt{2} \omega_z \cdot \gamma \cdot \frac{m}{q} < a_0 < \omega_c \cdot \gamma \cdot \frac{m}{q}$$

erreicht man zwar eine Abnahme der Amplitude der Magnetronbewegung, jedoch bestimmt die Anregungsamplitude  $a_0$  die Zeitkonstante der Kühlung.

3. Im dritten Fall

$$a_0 > \omega_c \cdot \gamma \cdot \frac{m}{q}$$

erreicht man wie im Fall 2 eine Kühlung der Magnetronbewegung, die Zeitkonstante der Dämpfung hängt jedoch *nicht* mehr von der Anregungsamplitude der externen Quadrupolanregung ab.



## Kapitel 3

# Atomphysikalische Grundlagen von $^{40}\text{Ca}^+$ und $^{208}\text{Pb}^+$ bzw. $^{207}\text{Pb}^+$

Im folgenden Kapitel werden die beiden ionischen Systeme beschrieben, die im Rahmen der Arbeit untersucht wurden. Außer auf die chemischen und physikalischen soll auch auf die atomphysikalischen Eigenschaften, wie z. B. Energieniveau-Schema und Zeemanaufspaltungen, eingegangen werden.

### 3.1 Das $^{40}\text{Ca}$ -Isotop

Das Element *Calcium*<sup>1</sup> ist ein silbrig weißes Metall und gehört zur II. Hauptgruppe des Periodensystems, zu den sogenannten Erdalkalimetallen. Aufgrund der größeren Kernladung besitzt jedes Metall dieser Hauptgruppe einen kleineren Atomradius als das entsprechende Metall der ersten Hauptgruppe derselben Periode. Da die Atome der Gruppe IIa kleiner sind und zwei Valenzelektronen anstelle von nur einem besitzen, haben diese Metalle höhere Schmelz- und Siedepunkte sowie größere Dichten als die Metalle der Gruppe Ia. Jedes der Erdalkalimetalle weist eine Elektronenkonfiguration auf, die aus einem Edelgaskern und zwei *s*-Elektronen im äußeren Valenzniveau besteht. Im Falle von Calcium ist der Edelgaskern Argon und die zwei Valenzelektronen halten sich in der 4*s*-Schale auf:

$$[\text{Ar}]4s^2 \equiv 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$$

Der Verlust eines der beiden Valenzelektronen führt zu einem Ion, das isoelektrisch zum Ia-Metall-Atom derselben Periode, nämlich Kalium, ist. Wegen der bereits erwähnten größeren Kernladung der Erdalkalimetallionen ist

---

<sup>1</sup>1808 von Sir Humphrey Davis entdeckt

Atomgewicht	40.08 <i>a.m.u</i>
Kernladungszahl	20
Elektronenkonfiguration (Atom)	[Ar]4s <sup>2</sup>
Elektronenkonfiguration (Ion)	[Ar]4s
Schmelzpunkt [°C]	839
Siedepunkt [°C]	1484
Dichte [ <i>g · cm</i> <sup>-3</sup> bei 20° C]	1.55
Atomradius [Å]	1.97
Kristallstruktur	kubisch seitenzentriert
1. Ionisierungsenergie [eV]	6.11
Ionenradius von Ca <sup>+</sup> [Å]	1.18

**Tab. 3.1:** *Physikalische Eigenschaften von Calcium*

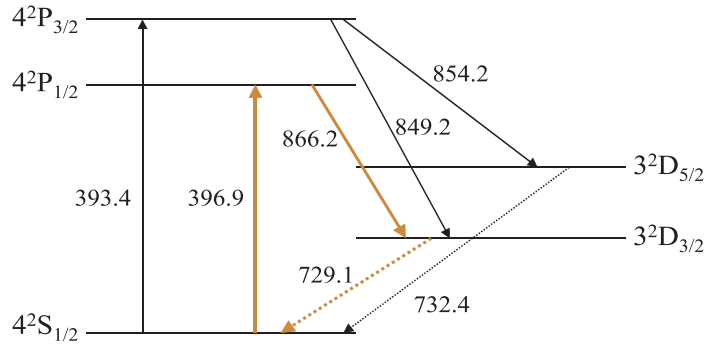
Atomgewicht <i>A</i>	nat.Vorkommen[%]	Kernspin <i>I</i>
40	96.941	0
42	0.647	0
43	0.135	7/2
44	2.086	0
46	0.004	0
48	0.187	0

**Tab. 3.2:** *Im natürlichen Gemisch vorkommende stabile Isotope*

das Verhältnis von Ionenladung zu Ionenradius im Vergleich zu den Metallionen der Gruppe Ia beträchtlich größer. In der Tabelle 3.1 sind die wichtigsten physikalischen Eigenschaften für das Ca-Atom zusammengefasst. Weiterhin weist das Element Calcium im natürlichen Isotopengemisch insgesamt sechs Isotope auf, wobei nur <sup>43</sup>Ca einen nichtverschwindenden Kernspin aufweist (siehe Tabelle 3.2). Außerdem existieren 11 instabile Isotope, von denen die langlebigsten Ca – 41, Ca – 45 und Ca – 47 sind.

### 3.2 Die Zeeman-Aufspaltung der Feinstruktur im <sup>40</sup>Ca<sup>+</sup>-Ion

Die Elektronenkonfiguration des Ca<sup>+</sup>-Ions (CaII) ist wasserstoffähnlich, d. h. sie entspricht einer abgeschlossenen Edelgasschale mit nur einem Valenzelektron in der 4s-Schale. <sup>40</sup>Ca<sup>+</sup> ist somit isoelektrisch zu Kalium und das Energieniveau-Schema entspricht dem des isoelektrischen Alkaliatoms mit einer Absenkung des D-Zustandes der letzten „gefüllten“ Schale. Das Valenzelektron befindet sich im leeren 3D-Zustand. Wegen der Spin-Bahn-Kopplung spalten die P- und die D-Zustände jeweils in zwei Unterniveaus auf mit dem entsprechenden Hüllendrehimpuls  $j = l \pm s$  (siehe Abb. 3.1).



**Abb. 3.1:** Feinstruktur-Termschema von  $\text{Ca II}$ ; die Übergangswellenlängen sind in nm angegeben. Die durchgezogenen Linien stellen elektrische Dipolübergänge (E1) und die gestrichelten Linien elektrische Quadrupolübergänge (E2) dar. Das ‚innere‘  $\Lambda$ -Niveau-System  $4S_{1/2} - 4P_{1/2} - 3D_{3/2}$  ist, da für die weiteren Untersuchungen wichtig, farbig hervorgehoben.

Die Relaxation der  $D$ -Niveaus in den Grundzustand ist nur über elektrische Quadrupolstrahlung möglich, da das zugehörige Matrixelement erheblich kleiner als das eines elektrischen Dipolüberganges ist. Diese  $D$ -Zustände besitzen demnach eine für atomare Niveaus ungewöhnlich lange Lebensdauer in der Größenordnung von  $1s$ . Aus diesem Grund werden diese Niveaus auch als *metastabil* bezeichnet. Diese Eigenschaft des Termschemas ist ein Grund für den Einsatz der Puffergaskühlmethode mit Seitenbandanregung (siehe Unterabschnitt 2.2.3), da hierdurch die effektive Lebensdauer der metastabilen Zustände erheblich verkürzt werden kann. Die Erhöhung der Quenchrates in Anwesenheit des Puffergases ist jedoch für die beiden  $D$ -Niveaus durchaus verschieden, da die Hüllenstruktur der beiden Drehimpulszustände, die die Wechselwirkung mit dem ‚Quenchgas‘ beeinflusst, unterschiedlich ist. Aufgrund der folgenden Verzweigungsverhältnisse<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{4^2P_{1/2} \longrightarrow 4^2S_{1/2}}{4^2P_{1/2} \longrightarrow 3^2D_{3/2}} &= 15.88 : 1 \\ \frac{4^2P_{3/2} \longrightarrow 4^2S_{1/2}}{4^2P_{3/2} \longrightarrow 3^2D_{3/2}} &= 150.8 : 1 \\ \frac{4^2P_{3/2} \longrightarrow 4^2S_{1/2}}{4^2P_{3/2} \longrightarrow 3^2D_{5/2}} &= 17.6 : 1 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Quelle: [183] und [275]

wurde mit einem Laser bei einer Wellenlänge von  $396.9nm$  der optische Übergang  $4^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$  angeregt und der Zerfall ins  $3^2D_{3/2}$ -Niveau detektiert, der unter Aussendung von Photonen bei  $866.2nm$  erfolgt (man spricht in diesem Fall von einem indirekten Nachweis).

Der direkte Nachweis, d. h. die Detektion der Fluoreszenz auf der gleichen Wellenlänge wie die Anregung ( $4^2P_{1/2} \rightarrow 4^2S_{1/2}$  bzw.  $4^2P_{3/2} \rightarrow 4^2S_{1/2}$ ), ist nur mit einem größeren technischen Aufwand zu realisieren, indem entweder das Laserstreulicht, das in der Falle durch Streifen an den Eintrittsöffnungen in der Ringelektrode entsteht, drastisch reduziert wird, oder zwischen Photonen der Laseranregung und Fluoreszenzphotonen, mit Hilfe einer Shutter-technik, zeitlich diskriminiert wird.

Legt man nun ein äußeres, homogenes Magnetfeld an, so zeigt das  $^{40}Ca^+$ -Ion die sogenannte Zeemanaufspaltung der Feinstruktur<sup>3</sup> auf. Diese Aufspaltung der Energieniveaus, die aus der Wechselwirkung zwischen dem durch den Spin verursachten magnetischen Moment des Hüllenelektrons und dem äußeren Magnetfeld resultiert kann durch ein quantenmechanisches Einteilchenmodell<sup>4</sup> beschrieben werden. Der relativistische Gesamt-Hamilton-Operator, der sich aus der Dirac-Gleichung ergibt, setzt sich aus dem ungestörten Hamilton-Operator, dem Anteil, der aus der Spin-Bahn-Kopplung resultiert und dem Anteil, der die Präsenz eines äußeren Magnetfeldes berücksichtigt, zusammen und hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Zeeman} = & \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + mc^2 - e\Phi(r) + \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} \\ & + \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} (\vec{r} \times (\vec{p} + e\vec{A})) \cdot \vec{S} \\ & + \frac{\hbar^2 e}{8m^2c^2} \nabla^2 \Phi(r) - \frac{1}{8m^3c^2} \left( (\vec{p} + e\vec{A})^2 + 2e \vec{S} \cdot \vec{B} \right)^2 \end{aligned}$$

Für die Energieverschiebung der beobachteten Übergänge im äußeren Feld sind hierbei nur solche Terme des Gesamt-Hamilton-Operators relevant, die nicht invariant sind unter einer Drehung im Orts- und Spinraum. Durch einen Separationsansatz in der Schrödingergleichung lassen sich die radialen Ausdrücke durch Erwartungswertintegrale über den Radialanteil  $\Psi(r)$  der Wellenfunktion ersetzen. Wegen der vorausgesetzten Axialsymmetrie der Anordnung ist die  $z$ -Komponente  $J_z$  des Gesamtdrehimpulses  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  eine Erhaltungsgröße und  $m_J$  eine „gute“ Quantenzahl.  $\vec{J}^2$  ist dann erhalten, wenn im Magnetfeld die Kopplungsenergie  $\frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{L} \cdot \vec{S}$  ausreichend ist, um die beiden magnetischen Momente  $\vec{\mu}_L$  und  $\vec{\mu}_S$  zu einem Gesamtmoment  $\vec{\mu}_J$  zu koppeln. Der Hamilton-Operator reduziert sich dann auf:

$$\mathcal{H}_{Zeeman} = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{\mu}_J = -\frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{L} + g_e \vec{S}) \quad (3.1)$$

<sup>3</sup>Es sei historisch erwähnt, dass bereits 1896 P. Zeeman die Aufspaltung von Spektrallinien in einem äußeren Magnetfeld beobachtete.

<sup>4</sup>denn man hat nur *ein* Valenzelektron in der äußeren  $4s$ -Schale



wobei  $\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e c}$  das Bohrsche Magneton und  $g_e$  der Landé-Faktor des *freien* Elektrons ist, der nach der Dirac-Theorie den Wert  $g_e = 2$  hat.

Für das in diesem Teil des Experimentes vorhandene magnetische Feld von  $B = 1.43T$  ist die Zeemanaufspaltung sehr klein gegen die Wechselwirkungsenergie des Elektronenspins  $\vec{S}$  mit dem Bahndrehimpuls  $\vec{L}$ , d. h.  $\Delta E_{Zeeman} \ll \Delta E_{LS}$ . Somit ist es gerechtfertigt, die Zeemanaufspaltung in der Störungsrechnung nur bis zur ersten Ordnung anzugeben. Unter Benutzung des Wigner-Eckart-Theorems<sup>5</sup> erhält man für  $\vec{B} = B\hat{e}_z$ :

$$\langle SLJm_J | \mathcal{H}_{Zeeman} | SLJm_J \rangle = \mu_B B (-1)^{J-m_J} \begin{pmatrix} J & 1 & J \\ -m_J & 0 & m_J \end{pmatrix} \cdot \langle SLJ || L_z + g_e S_z || SLJ \rangle$$

Das Ausmultiplizieren des reduzierten Matrixelementes ergibt:

$$\langle SLJm_J | \mathcal{H}_{Zeeman} | SLJm_J \rangle = \mu_B B (-1)^{J-m_J} \begin{pmatrix} J & 1 & J \\ -m_J & 0 & m_J \end{pmatrix} (2J+1) \cdot (-1)^{S+L+J+1} \left[ \left\{ \begin{matrix} J & J & 1 \\ L & L & S \end{matrix} \right\} \langle L || L_z || L \rangle + g_e \left\{ \begin{matrix} J & J & 1 \\ S & S & L \end{matrix} \right\} \langle S || S_z || S \rangle \right]$$

Wiederum lassen sich mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems die reduzierten Matrixelemente umformen entsprechend der folgenden Beziehung:

$$\begin{aligned} \langle Jm_J | J_z | Jm_J \rangle &\equiv m_J = (-1)^{J-m_J} \underbrace{\begin{pmatrix} J & 1 & J \\ -m_J & 0 & m_J \end{pmatrix}}_{= (-1)^{J-m_J} \frac{2m_J}{\sqrt{(2J+2)(2J+1)2J}}} \cdot \langle J || J_z || J \rangle \\ &= \begin{pmatrix} J & J & 1 \\ m_J & -m_J & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{J-m_J} \frac{2m_J}{\sqrt{(2J+2)(2J+1)2J}} \\ &\rightsquigarrow \langle J || J_z || J \rangle = \sqrt{(2J+1)(J+1)J} \end{aligned}$$

Somit folgt für das zu berechnende Matrixelement:

$$\begin{aligned} \langle SLJm_J | \mathcal{H}_{Zeeman} | SLJm_J \rangle &= \mu_B B \frac{m_J(2J+1)}{\sqrt{(J+1)(2J+1)J}} (-1)^{S+L+J+1} \quad (3.2) \\ &\cdot \left[ \left\{ \begin{matrix} J & J & 1 \\ L & L & S \end{matrix} \right\} \sqrt{(2L+1)(L+1)L} + g_e \left\{ \begin{matrix} J & J & 1 \\ S & S & L \end{matrix} \right\} \sqrt{(2S+1)(S+1)S} \right] \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Dieses ist eines der wichtigsten Theoreme der Tensoralgebra. Es besagt, dass das Matrixelement eines Tensoroperators  $T_q^{(k)}$   $k$ -ter Stufe geschrieben werden kann als:

$$\langle \alpha JM | T_q^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \langle \alpha J || T^{(k)} || \alpha' J' \rangle$$

Man erhält also eine Separation des geometrischen Teils des Matrixelementes (ausgedrückt durch das  $3j$ -Symbol) vom physikalischen Teil (ausgedrückt durch das reduzierte Matrixelement von  $T^{(k)}$ ). Die reduzierten Matrixelemente werden stets mit doppelten vertikalen Strichen geschrieben.  $\alpha, \alpha'$  beschreiben zusätzliche Quantenzahlen, die zur Charakterisierung der Zustände nötig sind.

Die  $6j$ -Symbole<sup>6</sup> liefern:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J & J & 1 \\ L & L & S \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} S & L & J \\ 1 & J & L \end{array} \right\} = (-1)^{S+L+J} \frac{2[S(S+1) - L(L+1) - J(J+1)]}{\sqrt{2L(2L+1)(2L+2)2J(2J+1)(2J+2)}}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J & J & 1 \\ S & S & L \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} L & S & J \\ 1 & J & S \end{array} \right\} = (-1)^{L+S+J} \frac{[2L(L+1) - S(S+1) - J(J+1)]}{\sqrt{2S(2S+1)(2S+2)2J(2J+1)(2J+2)}}$$

Einsetzen in (3.2) ergibt nach weiteren Umformungen:

$$\langle SLJm_J | \mathcal{H}_{Zeeman} | SLJm_J \rangle = \mu_B \cdot B \cdot m_J \cdot \underbrace{\left[ \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1) + g_e(J(J+1) - L(L+1) + S(S+1))}{2J(J+1)} \right]}_{\equiv g_J}$$

so dass man schließlich für die Energieverschiebung erhält:

$$\langle SLJm_J | \mathcal{H}_{Zeeman} | SLJm_J \rangle \equiv \Delta E_{Zeeman} = \mu_B \cdot B \cdot m_J \cdot g_J$$

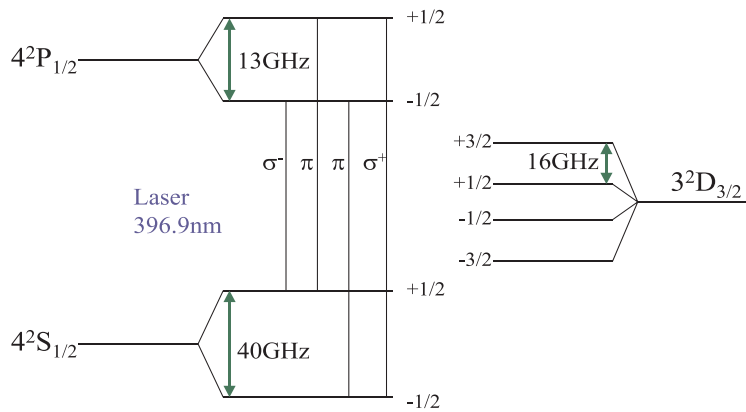
mit dem Landé-Faktor  $g_J = 1 + (g_e - 1) \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$

Wendet man die hergeleitete Beziehung auf die Zeemanaufspaltung der Feinstruktur des  $Ca^+$ -Ions an, so bekommt man das in Abb. 3.2 dargestellte Energieniveauschema. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nur der für das Experiment wichtige Teil dargestellt. Die Auswahlregeln elektrischer Dipolübergänge<sup>7</sup> zwischen den Feinstrukturtermen ergeben sich zu:  $\Delta j = 0, \pm 1$ ;  $\Delta l = \pm 1$  und  $\Delta m_J = 0 \pm 1$ . Hierbei sind linear polarisierte Übergänge (sogenannte  $\pi$ -Übergänge) mit  $\Delta m_J = 0$  verknüpft, während rechts- und linkszirkular polarisierte Übergänge respektive mit  $\Delta m_J = +1$  (sogenannte  $\sigma^+$ -Komponente) und  $\Delta m_J = -1$  (sogenannte  $\sigma^-$ -Komponente) verknüpft sind. Die im Energieniveau-Schema Abb. 3.2 eingetragenen Aufspaltungsfrequenzen sind jedoch unter einer nicht exakten Annahme bestimmt worden. Bereits Resultate der Rabischen Atomstrahlresonanzmethode haben einen Hinweis dafür geliefert, dass im  $^2S_{1/2}$ -Zustand gebundene Elektronen einen um ca. 1‰ größeren  $g_J$ -Faktor besitzen als den durch die relativistische Quantenmechanik geforderten Wert von  $g_J = 2$ . Dehmelt hat in dem berühmten ( $g-2$ )-Experiment<sup>8</sup> eindrucksvoll bewiesen, dass sogar der  $g$ -Faktor

<sup>6</sup>Darstellungen finden sich z. B. in [277], [214]

<sup>7</sup>d. h. die Wechselwirkung niedrigster Ordnung des elektromagnetischen Feldes mit dem ionischen System

<sup>8</sup>In diesem Experiment wurde bei der Temperatur des flüssigen Heliums im UHV ein einzelnes Elektron in einer Penningfalle gespeichert und die induzierten magnetische Dipolübergänge zwischen den beiden Spinzuständen mit Hilfe einer magnetischen Flasche nachgewiesen. Dabei wurden die Frequenzen der axialen und der orbitalen Zyklotronbe-



**Abb. 3.2:** Graphische Darstellung der Zeemanaufspaltung der Feinstruktur von  $^{40}\text{Ca}^+$ . Die eingezeichneten Aufspaltungsfrequenzen ergeben sich für  $B = 1.43\text{T}$ ,  $g_J(4S_{1/2}) = 2$ ,  $g_J(4P_{1/2}) = 2/3$  und  $g_J(3D_{1/2}) = 4/5$ . Die Auswahlregeln elektrischer Dipolübergänge zwischen den Feinstrukturtermen ergeben sich zu:  $\Delta j = 0, \pm 1$ ;  $\Delta l = \pm 1$  und  $\Delta m_J = 0 \pm 1$ . Hierbei sind linear polarisierte Übergänge (sogenannte  $\pi$ -Übergänge) mit  $\Delta m_J = 0$  verknüpft, während rechts- und linkszirkular polarisierte Übergänge respektive mit  $\Delta m_J = +1$  (sogenannte  $\sigma^+$ -Komponente) und  $\Delta m_J = -1$  (sogenannte  $\sigma^-$ -Komponente) verknüpft sind.

des freien Elektrons einen vom exakten Wert 2 verschiedenen Wert besitzt, nämlich [66]:

$$\begin{aligned} g_e^{exp} &= 2(1 + a_e^{exp}) \\ &= 2.002\,319\,304\,376\,8(86) \\ &\text{mit der } g\text{-Faktor-Anomalie } a_e^{exp} = 0.001\,159\,652\,188\,4(43) \end{aligned}$$

Der Grund für das anomale magnetische Moment des Elektrons liegt in der Wechselwirkung desselbigen mit seinem eigenen Strahlungsfeld und findet seine Erklärung in der Theorie der Quantenelektrodynamik. Der theoretische Wert [121] ergibt sich dann als Reihenentwicklung von Potenzen in  $\frac{\alpha}{\pi}$ , wo  $\alpha$  die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante ist:

$$\begin{aligned} g_e^{theo} &= 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328478965 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + 1.181241456 \frac{\alpha^3}{\pi^3} - 1.5098 \frac{\alpha^4}{\pi^4} \pm \dots\right) \\ &= 2(1 + a_e^{theo}) \quad \text{mit } a_e^{theo} = 0.001\,159\,652\,188 \end{aligned}$$

Hieraus folgt eine Übereinstimmung zwischen experimentellem und theoretischem Wert von  $\approx 10^{-12}$ , was die beeindruckende Genauigkeit, mit der die QED Strahlungseffekte beschreibt, zum Ausdruck bringt.

Ein Teilziel dieser Arbeit war die Bestimmung des  $g$ -Faktors des gebundenen Elektrons im  $^2S_{1/2}$ -Grundzustand des ionischen  $^{40}Ca^+$ -Systems.

### 3.3 Die Isotope $^{208}Pb$ und $^{207}Pb$

Blei wurde bereits in prähistorischer Zeit von den Menschen genutzt. Es ist ein silbrig-grau glänzendes, duktiles Metall und findet sich hauptsächlich in dem Erz *Galena*, d. h. Blei(II)-Sulfid ( $PbS$ ), das in Form grauer, kubischer Kristalle häufig zusammen mit Zinkblende vorkommt. Blei gehört zur IV. Hauptgruppe, der sogenannten Kohlenstoffgruppe. Das einfach ionisierte  $Pb^+$  hat im Grundzustand folgende Elektronenkonfiguration:

$$\begin{aligned} &1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p \left( ^2P_{1/2} \right) \\ &\equiv [Xe] 4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p \left( ^2P_{1/2} \right) \end{aligned}$$

wegung des Elektrons an die Frequenzen der magnetischen Dipolübergänge angebunden. Die hohe Präzision konnte durch die lange Verweildauer des Elektrons im elektrostatischen Quadrupolfeld der Falle erreicht werden. Außerdem wurde die Anomalie indirekt über Frequenzverhältnisse bestimmt, d. h. das Problem der Genauigkeit wurde auf die präzise Bestimmung von Frequenzverhältnissen verschoben. Die Vermessung der verschiedenen Typen von Frequenzen (d. h. die axiale Frequenz  $\nu_z$ , die Zyklotronfrequenz  $\nu_c$  und die Frequenz des magnetischen Dipolüberganges  $\nu_a$ ) bestimmte den  $g_e$ -Faktor nach der Beziehung

$$\frac{g_e - 2}{2} = a_e = \frac{\nu_a^2 - \frac{\nu_z^2}{2\nu_c}}{\nu_a^2 + \frac{\nu_z^2}{2\nu_c}}$$

Atomgewicht (nat. Gemisch)	207.2 <i>a.m.u</i>
Kernladungszahl	82
Elektronenkonfiguration (Atom)	$[Xe]4f^{14}5d^{10}6s^26p^2$
Elektronenkonfiguration (Ion)	$[Xe]4f^{14}5d^{10}6s^26p$
Schmelzpunkt [ $^{\circ}C$ ]	327.5
Siedepunkt [ $^{\circ}C$ ]	1740
Dichte [ $g \cdot cm^{-3}$ bei $20^{\circ} C$ ]	11.35
Atomradius [ $\text{\AA}$ ]	1.75
Kristallstruktur	kubisch flächenzentriert
1. Ionisierungsenergie [ $eV$ ]	7.42
Ionenradius von $Pb^+$ [ $\text{\AA}$ ]	0.84

**Tab. 3.3:** *Physikalische Eigenschaften von Blei*

Atomgewicht $A$	nat.Vorkommen[%]	Kernspin $I$
204	1.4	0
206	24.1	0
207	22.1	$\frac{1}{2}$
208	52.4	0

**Tab. 3.4:** *Im natürlichen Gemisch vorkommende stabile Isotope*

Das  $6p$  Elektron ist verantwortlich für die Quantenzahlen des Grundzustandes. Die Grundzustandskonfiguration entspricht somit der Elektronenkonfiguration des neutralen Thallium-Atoms.

In der Übersicht Tabelle 3.3 sind die wichtigsten physikalischen Eigenschaften des Bleiatoms zusammengefasst. Das in der Natur vorkommende Blei ist ein Isotopengemisch bestehend aus den Anteilen, die in Tabelle 3.4 aufgeführt sind. Außerdem existieren noch acht radioaktive Isotope (siehe Tabelle 3.5). Die drei am häufigsten vorkommenden Bleiisotope sind, kernphysikalisch betrachtet, das Endprodukt einer natürlichen  $\alpha$ -Zerfallskette

Atomgewicht $A$	Zerfallszeit $T_{1/2}$	Kernspin $I$
202	$5.3 \cdot 10^5 a$	0
203	2.16d	$\frac{5}{2}$
205	$1.5 \cdot 10^7 a$	$\frac{5}{2}$
209	3.25h	$\frac{9}{2}$
210	22.3a	0
211	36.1min	$\frac{9}{2}$
212	10.64h	0
214	27min	0

**Tab. 3.5:** *Instabile Isotope*

von schwereren Mutterkernen.  $^{208}\text{Pb}$  ist hierbei aus dem Zerfall von  $^{232}\text{Th}$  ( $\tau_{1/2} = 14.05 \cdot 10^9 a$ ) entstanden und wird deshalb auch als *Thoriumblei* bezeichnet. Die Isotope  $^{207}\text{Pb}$  bzw.  $^{206}\text{Pb}$  sind dagegen aus dem Zerfall der Kerne  $^{235}\text{U}$  ( $\tau_{1/2} = 0.7 \cdot 10^9 a$ ) bzw.  $^{238}\text{U}$  ( $\tau_{1/2} = 4.47 \cdot 10^9 a$ ) entstanden. Das gerade Bleiisotop 206 trägt aus diesem Grund häufig die Bezeichnung *Uranblei*.

Es sei am Rande angemerkt, dass diese Tochterkerne ( $^{208}\text{Pb}$ ,  $^{207}\text{Pb}$ ,  $^{206}\text{Pb}$ ) zusammen mit ihren radioaktiven Mutterkernen eine wichtige Rolle in der Nukleokosmochronologie, d. h. bei der Bestimmung des Alters der chemischen Elemente, spielen. Wegen der sehr langen Zerfallszeiten, die sich in der Größenordnung des Zeitalters des Sonnensystems bewegen ( $\approx 4.6 \cdot 10^9 a$ ), können die radioaktiven Trans-Bismuth-Kerne und die daraus entstandenen Bleiisotope als sog. Stundengläser bzw. Aeon-Gläser<sup>9</sup> dienen und somit Einblick in den chronologischen Ablauf der Nukleosynthese jenseits von Eisen geben.

Das Bleiisotop  $^{207}\text{Pb}$  besitzt als einziges stabiles Isotop einen nichtverschwindenden Kernspin von  $I = 1/2$ . Dies wurde erstmals von H. Kopfermann angenommen, aufgrund der Befunde, die die Analyse der Hyperfeinstruktur (Hfs) der einzelnen Bleilinen ergaben. Er schreibt: „Während die Linien  $\lambda\lambda = 4058, 4242, 4245$  und  $5373\text{\AA}$ , bei Aufnahmen mit gewöhnlichem Blei eine aus 4 Komponenten bestehende Hyperfeinstruktur zeigen, sind diesselben Linien des Uranbleis alle einfach“ [156]. Kopfermann beobachtete außerdem noch eine starke Isotopieverschiebung zwischen den Linien des  $^{208}\text{Pb}$  und des  $^{206}\text{Pb}$ . Die Hyperfeinstruktur des ungeraden, stabilen Isotops wurde erstmals von Rose und Granath vollständig untersucht, wobei als Quelle eine Paschen-Schüler-Röhre benutzt wurde. Die Analyse der Hyperfeinstruktur von *PbI* und *PbII* für gewöhnliches Blei, d. h. für das im natürlichen Isotopengemisch am häufigsten vorkommende Isotop, und für Uranblei erfolgte mit zwei Lummer-Gehrcke Quarzplatten [243].

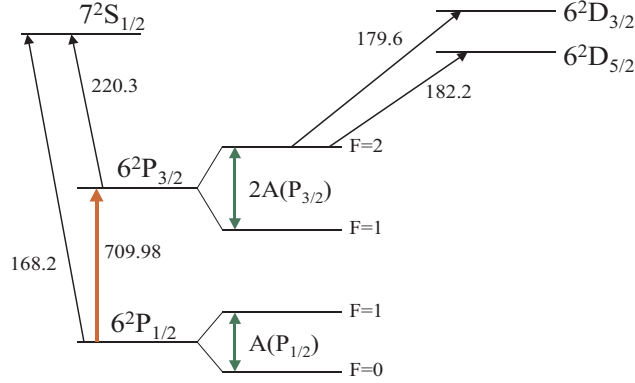
### 3.4 Die Hyperfeinstruktur des Ions $^{207}\text{Pb}^+$

Wie bereits erwähnt besitzt  $^{207}\text{Pb}^+$  einen halbzahligen Kernspin ( $I = 1/2$ ). Aus diesem Grund sind die Feinstrukturzustände  $P_{1/2}$  und  $P_{3/2}$  in die Hyperfeinkomponenten  $F = J + \frac{1}{2}$  und  $F = J - \frac{1}{2}$  aufgespalten. Das Grotrian-Diagramm in Abb. 3.3 gibt einen ersten Überblick über die Termniveaus des einfach ionisierten  $^{207}\text{Pb}^+$  wieder.

Der für die Spektroskopie interessante Übergang<sup>10</sup>  $6^2P_{1/2} \longrightarrow 6^2P_{3/2}$  ist quantenmechanisch betrachtet in 1. Näherung verboten, da sich beim Über-

<sup>9</sup>Der Begriff wurde entnommen aus dem Buch von C. E. Rolfs and W. S. Rodney „*Cauldrons in the Cosmos*“, University Press of Chicago, Chicago and London (1988).

<sup>10</sup>Zuerst beobachtet von F. M. Walters (BS Sci. Pap. **17**, 161 (1922)) und später von C. D. Cole identifiziert und eingehend untersucht (Bull. Am. Phys. Soc. **6**, 64 (1961)).



**Abb. 3.3:** Grotrian-Diagramm von  $^{207}\text{Pb}^+$ . Die eingezeichneten Übergänge sind in nm angegeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur die Hfs-Aufspaltungen der interessierenden Niveaus  $6^2P_{1/2}$  und  $6^2P_{3/2}$  eingezeichnet. Die Aufspaltungsfaktoren haben dabei die folgenden Werte ([82], [84]):  $A(P_{3/2}) = 0.580(3)\text{GHz}$  und  $A(P_{1/2}) = 12.968\ 180\ 604\ 61(22)\text{GHz}$ . Die eingezeichneten Aufspaltungen sind nicht maßstabsgetreu.

gang die Parität nicht ändert. Da jedoch dieser Dipolübergang in den höheren Multipolordnungen nach theoretischen Berechnungen zu etwa 3% aus elektrischer Quadrupolstrahlung (E2) und zu etwa 97% aus magnetischer Dipolstrahlung (M1) besteht, kann er mit einem entsprechend leistungsstarken Laser induziert werden. Das Intensitätsverhältnis aus der reinen Quadrupolstrahlung zur gesamten Intensität, d. h. die Mischung aus E2 und M1, wurde experimentell bestimmt zu [84]:

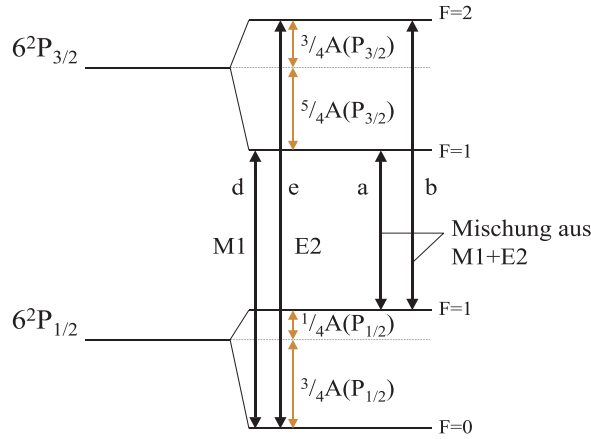
$$\frac{I_{6^2P_{1/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}}(E2)}{I_{6^2P_{1/2} \leftrightarrow 6^2P_{3/2}}(M1 + E2)} = 7.8(6)\%$$

Garstang hat für die beiden Strahlungsanteile Übergangsraten bestimmt [95]:

$$\begin{aligned} W_{ab}^S(M1) &= 25\text{Hz} \quad \text{Fehler: } \approx 20\% \\ W_{ab}^S(E2) &= 1.3\text{Hz} \quad \text{Fehler: } > 20\% \end{aligned}$$

Hieraus kann man die effektive Lebensdauer des  $6^2P_{3/2}$ -Zustandes bestimmen zu  $\tau_{theo} = 38(7)\text{ms}$ , was in guter Übereinstimmung mit dem experimentell ermittelten Wert von  $\tau_{exp} = 41.2(5)\text{ms}$  [247] steht.

Bevor im einzelnen auf die Hyperfeinstruktur bei einer magnetischen Dipol- bzw. elektrischen Quadrupolwechselwirkung eingegangen wird, sei



**Abb. 3.4:** Graphische Darstellung der Hyperfeinstruktur-Aufspaltung von  $^{207}\text{Pb}^+$ . Eingezeichnet sind die vom Schwerpunkt aus gerechneten Aufspaltungen der einzelnen Hyperfeinniveaus. Die Intensitätsverhältnisse der Übergänge  $a : b : d = 1 : 5 : 2$  für M1 und  $a : b : e = 5 : 3 : 2$  für E2 ergeben sich aus empirischen Regeln, die von Ornstein, Burger und Dorgelo bestimmt wurden.

noch einmal das Termschema – auf die für den weiteren Verlauf wichtigen Zustände reduziert – dargestellt (siehe Abb. 3.4). Eingezeichnet sind die vom Schwerpunkt aus gerechneten Aufspaltungen der einzelnen Hyperfeinniveaus. Die Intensitätsverhältnisse der Übergänge für M1 und E2 ergeben sich aus von Ornstein, Burger und Dorgelo empirisch ermittelten Formeln ([227], [228], [229]).

### 3.4.1 Die magnetische Dipol-Wechselwirkung der Hyperfeinstruktur

Bereits 1924 postulierte Pauli einen Kernspin  $\vec{I}$  für den Atomkern. Unter dieser Annahme resultiert dann die Hfs aus der magnetischen Wechselwirkung zwischen Atomkern und dem sich in der Atomhülle bewegenden Elektron. Beim Blei-Ion  $^{207}\text{Pb}^+$  führt deshalb das existierende magnetische Dipolmoment des Kerns  $\vec{\mu}_I$  zu einer Hfs-Aufspaltung der beiden Zustände  $6^2P_{1/2}$  und  $6^2P_{3/2}$ . Das magnetische Dipolmoment steht in Beziehung mit dem Kernspin über folgende Relation:

$$\vec{\mu}_I = g_I \cdot \mu_K \cdot \frac{\vec{I}}{\hbar}$$

wobei  $g_I$  der Kern-g-Faktor und  $\mu_K$  das Kernmagneton und  $\hbar$  das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum sind.



Voraussetzung für die folgende theoretische Herleitung ist, dass das  $Pb^+$ -Ion als wasserstoffähnliches System betrachtet wird. Dies ist auch in erster Näherung gerechtfertigt, da das Blei-Ion nur ein Elektron in der äußeren Schale besitzt und somit die Energiezustände des Gesamtsystems durch die Quantenzahlen dieses Hüllenelektrons bestimmt werden. Der Hamilton-Operator setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'_{M1}$$

Der störungsfreie Hamilton-Operator ergibt sich aus der Dirac-Gleichung für ein Ein-Elektronen-System und hat folgende Form:

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\vec{r})$$

mit dem durch den Kern und den Hüllentrumpf erzeugten Zentralpotential  $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ . Die magnetische Dipolwechselwirkung zwischen Elektronenhülle und Atomkern wird als Störung behandelt und ist dargestellt durch den Operator  $\mathcal{H}'_{M1}$ . Die Aufspaltungsenergien der Hfs ergeben sich dann durch zeitunabhängige Störungsrechnung erster Ordnung und sind die Erwartungswerte des Störoperators  $\mathcal{H}'_{M1}$ . Dieser setzt sich wiederum aus zwei Anteilen zusammen, wobei die Wechselwirkung des magnetischen Feldes sowohl mit dem Drehimpuls  $\vec{L}$  als auch mit dem Spin  $\vec{S}$  des Atomelektrons berücksichtigt wird:

$$\mathcal{H}'_{M1} = \mathcal{H}_{HFS}^L + \mathcal{H}_{HFS}^S \quad (3.3)$$

Im Folgenden werden nun Ausdrücke für diese beiden Terme hergeleitet. Ausgangspunkt für den „ $L$ -Anteil“ ist:

$$\mathcal{H}_{HFS}^L = \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} \quad \text{mit} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_I \times \vec{r}) \equiv -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \vec{\mu}_I \times \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \right)$$

Hierbei steckt im Vektorpotential die Annahme, dass sich der Dipol punktförmig am Ursprung befindet. Umformungen ergeben als erstes Teilergebnis:

$$\mathcal{H}_{HFS}^L = \frac{\mu_0}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{r^3} g_I \mu_K \mu_B \vec{L} \cdot \vec{I} \quad (3.4)$$

Aus Gleichung (3.4) sieht man, dass  $\mathcal{H}_{HFS}^L$  nur in Zuständen mit  $L \neq 0$  nicht-verschwindende Matrixelemente hat, d. h. der durch den Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  und das Kernmoment  $\vec{\mu}_M$  erzeugte Term verschwindet für  $s$ -Zustände. Der zweite Term in (3.3) hat die Form:

$$\mathcal{H}_{HFS}^S = -\vec{\mu}_S \cdot \vec{B} \quad (3.5)$$

mit dem magnetischen Moment des Elektrons  $\vec{\mu}_S = -g_s \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$  und dem Magnetfeld  $\vec{B}$ , das über die Beziehung  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  mit dem Vektorpotential des

Kerns zusammenhängt. Setzt man beide Ausdrücke in (3.5) ein, so ergibt sich nach einiger Umformung:

$$\mathcal{H}_{HFS}^S = -g_s \mu_B \mu_K g_I \frac{1}{\hbar^2} \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{S} \cdot \vec{I} \vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{r} \right) - (\vec{S} \cdot \vec{\nabla})(\vec{I} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} \right\}$$

Wegen  $\vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r)$  ist der erste Term in der geschweiften Klammer für  $r = 0$  nur relevant für  $s$ -Zustände ( $l = 0$ ), da die Wellenfunktion des wasserstoffähnlichen Systems sich proportional zu  $r^l$  verhält. Für  $r \neq 0$  verschwindet der Term. Ausmultiplizieren des übriggebliebenen zweiten Terms liefert schließlich:

$$\mathcal{H}_{HFS}^S = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g_s}{\hbar^2} g_I \mu_K \mu_B \frac{1}{r^3} \left( \vec{S} \cdot \vec{I} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{r})(\vec{I} \cdot \vec{r})}{r^2} \right) \quad (3.6)$$

Einsetzen von (3.4) und (3.6) in (3.3) ergibt somit für den Störoperator:

$$\mathcal{H}_{M1}^I = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{r^3} g_I \mu_K \mu_B \left\{ 2\vec{L} \cdot \vec{I} - g_s \vec{S} \cdot \vec{I} + g_s \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{r})(\vec{I} \cdot \vec{r})}{r^2} \right\} \quad (3.7)$$

Setzt man  $g_s = 2$  und definiert  $\vec{G} = \vec{L} - \vec{S} + 3\frac{(\vec{S} \cdot \vec{r})(\vec{I} \cdot \vec{r})}{r^2}$ , so kann man (3.7) kompakter schreiben:

$$\mathcal{H}_{M1}^I = \frac{\mu_0}{4\pi\hbar^2 r^3} g_I \mu_K \mu_B \vec{G} \cdot \vec{I}$$

Führt man nun die Quantenzahl  $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$  ein, die den Gesamtdrehimpuls beschreibt, so ergibt sich die Energieverschiebung aufgrund der Störung  $\mathcal{H}_{M1}^I$  in der neuen Basis  $|LSJIFm_F\rangle$  zu:

$$\Delta E_{HFS}^{M1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{\hbar^2} g_I \mu_K \mu_B \langle LSJIFm_F | \frac{1}{r^3} \vec{G} \cdot \vec{I} | LSJIFm_F \rangle$$

Setzt man voraus, dass das Matrixelement zwischen gleichen  $J$ -Quantenzahlen genommen wird, so kann man das Skalarprodukt ausdrücken als

$$\vec{G} \cdot \vec{I} = \frac{(\vec{G} \cdot \vec{J})(\vec{I} \cdot \vec{J})}{J(J+1)\hbar^2}.$$

Mit  $\vec{F}^2 = \vec{I}^2 + 2\vec{I} \cdot \vec{J} + \vec{J}^2$  folgt:

$$\Delta E_{HFS}^{M1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g_I \mu_K \mu_B}{J(J+1)\hbar^2} \{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)\} \left\langle \frac{1}{r^3} \vec{G} \cdot \vec{J} \right\rangle_{LSJIFm_F}$$

Nach einigen Umrechnungen erhält man für den noch vorhandenen Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^3} \vec{G} \cdot \vec{J} \right\rangle_{LSJIFm_F} &= L(L+1) \hbar^2 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{LSJIFm_F} \\ &= L(L+1) \hbar^2 \frac{Z^3}{a_\mu^3 n^3 L(L+\frac{1}{2})(L+1)} \\ &= \frac{\hbar^2 Z^3}{a_\mu^3 n^3 (L+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

mit  $a_\mu = a_0 \frac{m_e}{\mu}$ , wobei  $\mu$  die reduzierte Masse des Systems bestehend aus Atomkern und Elektron und  $a_0$  der Bohrsche Radius sind.

Schließlich ergibt sich für die Energieverschiebung der magnetischen Dipol-Hyperfeinstruktur:

$$\Delta E_{HFS}^{M1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g_I \mu_K \mu_B Z^3}{a_\mu^3 n^3 J(J+1)(L+\frac{1}{2})} \{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)\} \quad (3.8)$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dass für einen gegebenen Atomkern mit der Kernspinquantenzahl  $I$  die Feinstruktur-Energieniveaus des Atoms mit den festen Quantenzahlen  $L$  und  $J$  in Hyperfeinstrukturkomponenten aufgespalten werden, die durch die Quantenzahl  $F$  beschrieben sind. Da die Energiekorrektur nicht von  $m_F$  abhängt ist jeder dieser Hyperfeinstrukturzustände  $(2F+1)$ -fach entartet, wobei  $F$  die Werte  $|I-J|, |I-J|+1, \dots, I+J$  annehmen kann. Konventionenmäßig definiert man eine Größe, den sog. Hyperfeinstrukturaufspaltungsfaktor  $A$ , die unabhängig von  $F$  ist:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} g_I \mu_K \mu_B \frac{2Z^3}{a_\mu^3 n^3 J(J+1)(L+\frac{1}{2})}$$

Gleichung (3.8) lässt sich dann umschreiben zu:

$$\boxed{\Delta E_{HFS}^{M1} = \frac{A}{2} \{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)\}}$$

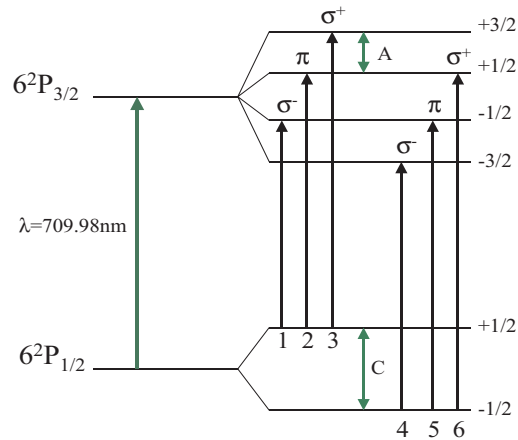
Betrachtet man zwei benachbarte Hfs-Niveaus, so ergibt sich für die Energiedifferenz die Intervallregel:

$$\Delta E_{HFS}(F) - \Delta E_{HFS}(F-1) = A \cdot F$$

Bezogen auf  $^{207}Pb^+$  erhält man für die beiden  $P$ -Zustände:

$$\begin{aligned} 6^2P_{1/2} : \quad \Delta E_{HFS}(F=1) - \Delta E_{HFS}(F=0) &= A(6^2P_{1/2}) \\ 6^2P_{3/2} : \quad \Delta E_{HFS}(F=2) - \Delta E_{HFS}(F=1) &= 2 \cdot A(6^2P_{3/2}) \end{aligned}$$

Man sieht, dass beim  $P_{3/2}$ -Niveau die Hyperfein-Separation gleich dem doppelten  $A$ -Faktor ist.



**Abb. 3.5:** Graphische Darstellung der Aufspaltung der Feinstruktur in  $^{208}\text{Pb}^+$  aufgrund der Anwesenheit eines äußeren homogenen Magnetfeldes. Die eingezeichneten Übergänge folgen aus den Auswahlregeln für einen magnetischen Dipolübergang. Weiterhin ergeben sich die eingetragenen Aufspaltungsfrequenzen für ein Magnetfeld  $B = 2.87\text{T}$ , wobei  $g_J(6^2P_{1/2}) = 2/3$  und  $g_J(6^2P_{3/2}) = 4/3$  eingesetzt wurde. Die Aufspaltungen ergeben sich zu  $C = 28.6\text{GHz}$  und  $A = 53.6\text{GHz}$  und sind nicht maßstabsgetreu eingezeichnet.

### 3.5 Die Zeemanaufspaltung der Feinstruktur von $^{208}\text{Pb}^+$ und der Hyperfeinstruktur von $^{207}\text{Pb}^+$

Bevor auf die kompliziertere und theoretisch weitaus schwieriger zu behandelnde Zeemanaufspaltung der Zustände im Blei-Ion  $^{207}\text{Pb}^+$  eingegangen wird, soll kurz die Zeemanaufspaltung der Feinstruktur von  $^{208}\text{Pb}^+$  behandelt, die formal wie die Zeemanaufspaltung von  $^{40}\text{Ca}^+$  zu berechnen ist (siehe Abschnitt 3.2). Die Ausmessung der Grundzustandsaufspaltung des geraden Isotops ist hierbei von großer Wichtigkeit, denn um den Kern- $g$ -Faktor durch Bestimmung einzelner Zeeman-Hfs-Aufspaltungen im Grundzustand von  $^{207}\text{Pb}^+$  zu ermitteln, muss die Kenntnis des elektronischen  $g$ -Faktors des geraden Bleisotops vorausgesetzt werden.

Im Falle von  $^{208}\text{Pb}^+$  hat man also bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes eine Aufhebung der Entartung in den beiden  $P$ -Zuständen. Es gelten, wie bereits bekannt, die Auswahlregeln für magnetische Dipolübergänge (in 1. Ordnung):  $\Delta l = 0$ ,  $\Delta j = 0, \pm 1$ ,  $\Delta m_J = 0, \pm 1$ . In Abbildung 3.5 sind die möglichen Übergänge graphisch dargestellt.

Nun zur Zeeman-Hfs-Aufspaltung der Zustände von  $^{207}\text{Pb}^+$ . Die bereits erwähnte  $(2F + 1)$ -fache Entartung jedes  $F$ -Unterniveaus wird durch das angelegte Magnetfeld aufgehoben. Da nun der Kern ebenfalls ein magneti-

sches Moment  $\vec{\mu}_I = g_I \mu_K \frac{\vec{I}}{\hbar}$  besitzt, folgt durch Erweiterung des Hamilton-Operators in Gleichung (3.1) (siehe Abschnitt 3.2):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{Zeeman} &= -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_I \cdot \vec{B} \\
 &= \frac{\mu_B}{\hbar} \left( \vec{L} + g_e \vec{S} \right) \cdot \vec{B} - g_I \frac{\mu_K}{\hbar} \vec{I} \cdot \vec{B}
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Das Vorzeichen der beiden Momente ist entgegengesetzt, da konventionmäßig das magnetische Moment des Kerns in gleicher Richtung wie  $\vec{I}$  steht, das der Hülle aber wegen der negativen Ladung des Elektrons entgegengesetzt zu  $\vec{J}$  ist. Wählt man o. B. d. A.  $\vec{B} = B \hat{e}_z$ , so kann man (3.9) umschreiben zu:

$$\mathcal{H}_{Zeeman} = \mu_B B \{ (L_z + g_e S_z) - g_I' I_z \} \quad \text{mit} \quad g_I' = g_I \frac{\mu_K}{\mu_B}$$

Zur Berechnung der Energieverschiebung muss wiederum folgendes Matrixelement bestimmt werden:

$$\Delta E_{Zeeman}^{HFS} = \langle \alpha J I F m_F | \mathcal{H}_{Zeeman} | \alpha J I F m_F \rangle$$

wobei  $\alpha$  die  $SL$ -Kopplung charakterisiert. Unter Verwendung des Wigner-Eckart-Theorems erhält man:

$$\Delta E_{Zeeman}^{HFS} = \mu_B B (-1)^{F-m_F} \begin{pmatrix} F & 1 & F \\ -m_F & 0 & m_F \end{pmatrix} \cdot$$

$$g_J \{ \langle \alpha J I F || J_z || \alpha J I F \rangle - \gamma \langle \alpha J I F || I_z || \alpha J I F \rangle \} \quad \text{mit} \quad \gamma \equiv \frac{g_I'}{g_J}$$

In analoger Weise zur Berechnung der Zeemanaufspaltung der Feinstruktur, wobei nun die Operatoren  $\vec{S}$ ,  $\vec{L}$  und  $\vec{J}$  'ersetzt' sind durch  $\vec{J}$ ,  $\vec{I}$  und  $\vec{F}$ , erhält man:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{Zeeman}^{HFS} &= \mu_B B \frac{(2F+1)m_F}{\sqrt{(F+1)(2F+1)F}} g_J (-1)^{(J+I+F+1)} \\
 &\cdot \left[ \left\{ \begin{matrix} F & F & 1 \\ J & J & I \end{matrix} \right\} \langle J || J_z || J \rangle - \gamma \left\{ \begin{matrix} F & F & 1 \\ I & I & J \end{matrix} \right\} \langle I || I_z || I \rangle \right]
 \end{aligned}$$

was schließlich zur endgültigen Energieverschiebung für die Zeemanaufspaltung der Hfs führt:

$$\Delta E_{Zeeman}^{HFS} = \mu_B \cdot B \cdot m_F \cdot g_F \quad (3.10)$$

mit

$$\begin{aligned}
 g_F &\equiv g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} \\
 &- g_I \frac{\mu_K}{\mu_B} \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)}
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der zweite Term in (3.11) ist, wegen  $\frac{\mu_K}{\mu_B} \propto \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1836}$ , bei schwachen Feldern zu vernachlässigen, so dass die Energieverschiebung jedes Hyperfeinunter-niveaus  $|\beta J I F m_F\rangle$  allein durch den ersten Term bestimmt wird. Die Aufspaltung im schwachen Feld ist proportional zu  $B$  und erfolgt in  $(2F+1)$  äquidistanten Komponenten. Man spricht vom sog. *linearen Zeemaneffekt*, solange die Nebendiagonalelemente vernachlässigt werden können.

Beim sogenannten Paschen-Back-Effekt der Hfs-Aufspaltung (in der Literatur findet man häufig auch die Bezeichnung Back-Goudsmit-Effekt) ist die magnetische Zeemanaufspaltung groß gegenüber der Hfs-Aufspaltung. Da das äußere Magnetfeld eine starke Einwirkung auf das magnetische Moment der Elektronenhülle hat, präzedieren der Kernspin  $\vec{I}$  und der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  der Elektronenhülle unabhängig voneinander mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten um die Magnetfeldachse.  $\vec{F}$  ist somit keine gute Quantenzahl mehr (d. h.  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  sind entkoppelt) und die Richtungsquantisierung erfordert somit getrennte Einstellungen von  $\vec{J}$  und  $\vec{I}$  mit den Komponenten  $m_J$  und  $m_I$ , deren Summe wieder eine gute Quantenzahl  $m_F = m_J + m_I$  bildet.

Der Fall mittlerer Felder, in dem die Zeemanaufspaltung von der gleichen Größenordnung ist wie die Hfs-Aufspaltung, lässt sich i. A. nur mit Hilfe komplizierter quantenmechanischer Näherungsmethoden berechnen. Der  $6^2P_{1/2}$ -Zustand des Blei-Ions  $^{207}\text{Pb}^+$  mit  $F = I \pm \frac{1}{2}$  stellt jedoch einen Sonderfall dar und der Verlauf der Zeeman-Hfs-Aufspaltung in Abhängigkeit vom Magnetfeld kann in analytisch geschlossener Form angegeben werden. Die Bestimmung der Energieverschiebung besteht darin, ein Eigenwertproblem für eine  $(2 \times 2)$ -Matrix zu lösen, wobei die *Hauptdiagonalelemente* die Summe der Matrixelemente der reinen Hfs und der Zeeman-Hfs (Gleichung (3.10)) sind, und die nicht mehr vernachlässigbaren *Nebendiagonalelemente* sich ergeben zu:

$$\langle \alpha J I F m_F | \mathcal{H}_{Zeeman} | \alpha J I (F-1) m_F \rangle = g_J \mu_B B \sqrt{(F+m_F)(F-m_F)} \cdot \sqrt{\frac{(I+J+F+1)(I+F-J)(J+F-I)(I+J+1-F)}{4F^2(2F+1)(2F-1)}} \left( 1 + \frac{g_I \mu_K}{g_J \mu_B} \right)$$

Das Vorhandensein der Nichtdiagonalelemente führt zum Mischen benachbarter Hyperfein-Niveaus mit gleicher Magnetquantenzahl  $m_F$ . Die Matrix, deren Eigenwerte es zu bestimmen gilt, hat folgende Form:

	$F = I + 1/2$	$F = I - 1/2$
$F = I + 1/2$	$\mathcal{M}_{11}$	$\mathcal{M}_{12}$
$F = I - 1/2$	$\mathcal{M}_{21}$	$\mathcal{M}_{22}$

Da die Eigenwerte der Matrix eine physikalische Observable darstellen, und reell sein müssen, gilt  $\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21}^* = \mathcal{M}_{21}$ , so dass effektiv nur drei Matrixelemente berechnet werden müssen. Die Energieverschiebungen

$\Delta E_{Zeeman}^{HFS}(F = I \pm 1/2, m_F) \equiv E$  ergeben sich also durch Lösen der folgenden Säkulargleichung:

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} - E & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{22} - E \end{pmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \left( A \frac{I}{2} + g_J \mu_B m_F B \frac{1 - 2I\gamma}{2(I + 1/2)} \right) \\ \mathcal{M}_{22} &= \left( -A \frac{(I + 1)}{2} + g_J \mu_B m_F B \frac{(-1 - 2(I + 1)\gamma)}{2(I + 1/2)} \right) \\ \mathcal{M}_{12} &= g_J \mu_B B (1 + \gamma) \frac{\sqrt{(I + 1/2)^2 - m_F^2}}{2(I + 1/2)} \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (3.12) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Delta E_{Zeeman}^{HFS}(F = I \pm 1/2, m_F) &= -\frac{A}{4} - g_I \cdot \mu_K \cdot m_F \cdot B \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ A(I + \frac{1}{2}) + \frac{g_J \cdot \mu_B \cdot m_F \cdot B}{(I + 1/2)} (\gamma + 1) \right\}^2 + (g_J \cdot \mu_B \cdot B)^2 (\gamma + 1)^2 \frac{[(I + 1/2)^2 - m_F^2]}{(I + 1/2)^2}} \\ &= -\frac{A}{4} - g_I \cdot \mu_K \cdot m_F \cdot B \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{A^2 (I + 1/2)^2 + 2A m_F (g_I \mu_K + g_J \mu_B) B + (g_I \mu_K + g_J \mu_B)^2 B^2} \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $\Delta E_0 = A(I + 1/2)^\ddagger$  und der Definition  $x \equiv \frac{(g_I \mu_K + g_J \mu_B) B}{\Delta E_0}$  erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \Delta E_{Zeeman}^{HFS}(F = I \pm 1/2, m_F) &= -\frac{\Delta E_0}{2(2I + 1)} - g_I \cdot \mu_K \cdot m_F \cdot B \\ &\pm \frac{\Delta E_0}{2} \sqrt{1 + \frac{4m_F}{2I + 1} \cdot x + x^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

In der Literatur ist Gleichung (3.13) unter dem Namen Breit-Rabi-Formel<sup>11</sup> bekannt. Für den Fall  $m_F = \pm(I + 1/2) \Leftrightarrow m_F = \pm F$  (d. h. für die äußersten Aufspaltungen) ergibt sich aus 3.13:

$$\Delta E_{Zeeman}^{HFS} = \left\{ -\frac{1}{2(2I + 1)} \pm \frac{1}{2} \right\} \Delta E_0 \pm \left\{ \frac{1}{2} g_J \mu_B - g_I \mu_K I \right\} B \propto B$$

d. h. die Energieeigenwerte sind linear in  $B$ . Für  $|m_F| < F$  gilt dies nicht mehr. Bezieht man dies speziell auf  $Pb^+$ , so bedeutet dies bei einer Aufspaltung der

<sup>†</sup> $\Delta E_0$  ist die Aufspaltungsenergie der Hyperfeinstruktur, die für  $^{207}Pb^+$  von X. Feng [84] experimentell bestimmt wurde.

<sup>11</sup>Es sei erwähnt, dass die Formel erstmals 1931 in einem „Letter to the Editor“ publiziert wurde [34].

Hyperfeinzustände  $F = 0$  und  $F = 1$  (siehe Abb. 3.4) für den Fall  $m_F = 0$ , dass sich Glg. (3.13) auf

$$\Delta E_{Zeeman}^{HFS}(F = I \pm 1/2) = -\frac{\Delta E_0}{4} \pm \frac{\Delta E_0}{2} \sqrt{1 + x^2}$$

reduziert. Bei einer Taylorentwicklung des Wurzelausdrucks erhält man eine quadratische Abhängigkeit von  $B$ .

In Abwesenheit des äußeren Magnetfeldes reduziert sich die Breit-Rabi-Formel auf den ungestörten Fall:

$$\Delta E_{Zeeman}^{HFS}(B = 0) = \begin{cases} -\frac{\Delta E_0}{2(2I+1)} + \frac{\Delta E_0}{2} & \text{für } F = I + 1/2, \\ -\frac{\Delta E_0}{2(2I+1)} - \frac{\Delta E_0}{2} & \text{für } F = I - 1/2. \end{cases}$$

und für  $^{207}\text{Pb}^+$  mit  $I + 1/2$  erhält man die bereits in Abschnitt 3.4.1 berechnete Aufspaltungsfrequenz des Grundzustandes  $6^2P_{1/2}$ .



# Kapitel 4

## Der Aufbau des Experimentes

Im Rahmen dieser Promotionsarbeit wurden zwei äußerlich unterschiedliche Apparaturen verwendet. Grund hierfür war, dass nach Abschluss der Messungen an gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen das Magnetfeld von ca.  $1.43T$  auf die doppelte magnetische Flussdichte geändert wurde<sup>1</sup>. Demzufolge war auch die Mikrowellenfrequenz, die notwendig ist, um die Zyklotronfrequenz von gespeicherten Elektronen anzuregen, doppelt so groß wie vorher. Die ursprüngliche Apparatur, die im Folgenden als *Ca-Apparatur* bezeichnet wird, hatte keine Vorrichtung, um die neue Mikrowellenfrequenz ( $\approx 80GHz$ ) über einen Hohlleiter in die Falle einzukoppeln. Deshalb wurde eine bereits bestehende Apparatur mit einigen Veränderungen und Verbesserungen neu zusammengebaut. Diese wird im folgenden Text als *Pb-Apparatur* bezeichnet werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit bezieht sich der Text, in dem nicht explizit auf die Ca-Apparatur bzw. die Pb-Apparatur verwiesen wird, auf beide Apparaturen, zumal die Unterschiede nicht von fundamentaler Natur sind. Lediglich bei Abweichungen zwischen den beiden Apparaturen wird kenntlich gemacht, worauf sich der Unterschied bezieht.

### 4.1 Der Gesamtaufbau

Der apparative Aufbau besteht aus einer Anordnung von Ultrahochvakuum-(UHV)-tauglichen zylindrischen Edelstahlrohren, deren Flansche zur Aufnahme sämtlicher Anschlüsse dienen und, aus einem einseitig plan abgeschlossenen Glasrohr<sup>2</sup>, das sowohl bei der Ca-Apparatur als auch bei der Pb-Apparatur  $60cm$  lang ist. Dieses Rohr ist über einen Glas-Metallübergang mit einem NW100 Conflat-Flansch an der Stirnseite der Anordnung befe-

---

<sup>1</sup>Wie in Abschnitt 8.1 ausführlich beschrieben wird, wäre eine Speicherung von  $Pb^+$ -Ionen bei einem Magnetfeld von  $1.43T$  nicht möglich gewesen, da die Instabilitäten in der Penningfalle (d. h. Bereiche in denen keine Speicherung möglich ist) zu dicht zusammenlagen.

<sup>2</sup>bestehend aus *fused silica*

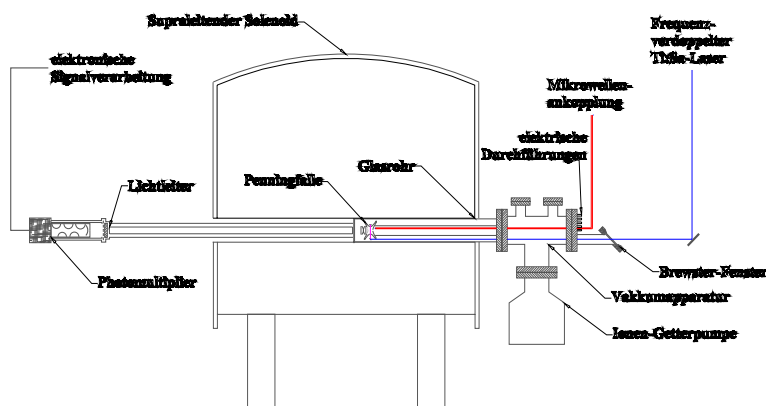


Abb. 4.1: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus

stigt. Das Zentralrohr hat hierbei einen Innendurchmesser von  $100\text{mm}$ . Das Herzstück der Apparatur - der Ionenkäfig - befindet sich am Ende des Glasrohres ca.  $47\text{cm}$  vom diesem Glas-Metallübergang entfernt. Der Ionenkäfig wird im Falle der Ca-Apparatur von einem aus vier VA-Stangen bestehenden Arm gehalten. Bei der Pb-Apparatur besteht der Träger aus einem Aluminiumrohr. Beide Haltevorrichtungen sind am Vakuumtopf befestigt. Die elektrischen Zuführungen bestehen aus einer Kupfer-Beryllium Legierung und sind durch Oxid-Keramik (Frialit) voneinander elektrisch isoliert und konzentrisch um die Haltevorrichtung angeordnet. Als letztes Verbindungsstück zwischen den rigiden Kupfer-Beryllium-Stangen und den einzelnen Fallenteilen werden flexible Kupferdrähte verwendet, die ebenso mit elektrisch isolierendem Material (Macor) ummantelt sind. Die elektrischen Durchführungen sind am Vakuumtopf mit BNC-Vakuumdurchführungen verbunden, die es ermöglichen, abgeschirmte BNC-Kabel direkt an diese Durchführungen anzuschließen, so dass sichere elektrische Verbindungen hergestellt werden. Der Übergang ins Vakuum erfolgt über vakuumtaugliche Keramikköpfe.

Am Flansch gegenüber dem Glasrohr befindet sich ein Quarzfenster, das den für die Spektroskopie notwendigen Laserstrahl in die Apparatur bis zur Penningfalle durchlässt. Die Eintrittsfläche des Fensters ist um den Winkel von  $56^\circ$  (sog. Brewsterwinkel) gegen die Laserstrahlachse geneigt. Hierdurch wird gewährleistet, dass der zurücklaufende Laserstrahl wieder vollständig die Apparatur verlässt ohne an der Innenseite des Brewsterfensters nochmals reflektiert zu werden. Außerdem sind am zentralen Rohr noch weitere NW 35 CF-Flansche angebracht, um ein *Dosierventil* für das gezielte Einlassen von Puffergas, einen *Ionisationsmesskopf* zur Druckmessung und ein *Eckventil* zum Anschluss einer Turbomolekularpumpe aufzunehmen. Im Falle

der Pb-Apparatur ist ein weiterer Flansch zur Aufnahme einer rechteckigen E-Band *Mikrowellendurchführung* aus Kupfer vorgesehen, die im Innern des Hohlleiters durch ein Glimmerfenster unterbrochen ist und den Übergang von atmosphärischem Druck zum Ultra-Hochvakuum kennzeichnet. Der Mikrowellenhohlleiter wird bis zur Ringebene der Falle geführt, so dass die Frequenz direkt durch ein Loch in der Ringelektrode in die Falle eingekoppelt wird. Bei der Ca-Apparatur wird die Mikrowellenfrequenz über ein *semi-rigid*-Mikrowellenkabel eingespeist. Dieses Kabel ist zwar aus diamagnetischem Material hergestellt, jedoch nicht für den Einsatz im UHV geeignet, da es nicht ausgeheizt werden kann. Aus diesem Grund ragt ein mit einer Mikrowellenvakuumdurchführung versehenes Rohr bis kurz vor die Falle in die Apparatur hinein. Im Vakuum werden dann die Mikrowellen über einen der Ofendrähte, die sich in der unteren Kalotte befinden, ins Falleninnere geführt.

Das in der Apparatur herrschende Vakuum von ca.  $2 \cdot 10^{-9} \text{ mbar}$  wird durch mehrtägiges Ausheizen erreicht. Dabei wird die gesamte Apparatur bei gleichzeitiger Evakuierung durch eine Turbomolekularpumpe auf eine Temperatur von ca.  $200^\circ$  erhitzt. Eine höhere Temperatur, die den Evakuierungsvorgang beschleunigen könnte, führt zur Verformung der elektrischen Durchführungen und könnte sich kritisch auf die Glas-Metall-Übergänge auswirken, wegen den unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten an den Grenzschichten. Nachdem die Apparatur wieder auf Umgebungstemperatur abgekühlt und das Eckventil geschlossen wird, hält eine Ionengetterpumpe, die über einen NW 100 CF-Flansch am unteren Ende mit dem Stahltopf verbunden ist, bei einer Saugleistung von ca.  $50 \text{ l/s}$  das Hochvakuum aufrecht. Ein supraleitender Solenoid, in dessen Raumtemperaturbohrung das Glasrohr geschoben wird, erzeugt das notwendige Magnetfeld, dessen  $z$ -Achse sich entlang der Bohrung befindet.

Das Laserlicht mit der jeweils benötigten Wellenlänge wird über Spiegel, mit Hilfe von Blenden und einer Sammellinse fokussiert, durch die Vakuumapparatur gelenkt. Hier trifft es nach ca.  $130 \text{ cm}$  auf den ersten Spiegel, der an der unteren Ringhälfte der Falle montiert ist. Dieser lenkt das Laserlicht in das Fallenzentrum um und ein zweiter Spiegel, der sich auf der gegenüberliegenden Seite der Ringelektrode befindet, reflektiert das Licht zurück. Das Fluoreszenzlicht der angeregten Ionenwolke, das senkrecht zur Laserstrahlrichtung in  $z$ -Richtung beobachtet wird, wird über einen Lichtwellenleiter zu einem Photomultiplier geleitet. Der Lichtleiter, bestehend aus Plexiglas mit planpolierten Endflächen erstreckt sich von der Ionenfalle aus gemessen etwa  $1 \text{ m}$  über die Raumtemperaturbohrung hinaus bis in ein Gebiet, wo das Magnetfeld auf  $10^{-3} \text{ T}$  abgefallen ist. Über Verstärker und NIM/TTL-Module wird das Signal weiterverarbeitet und zur Datenaufnahme an einen Rechner weitergeleitet. Dieser PC steuert über eine von S. Trapp [302] entwickelte Software den Laser und die Mikrowellenanlage.

## 4.2 Der Ionenkäfig

Die Penningfalle ist aus sauerstofffreiem Kupfer gefertigt (OFHC, engl. *oxygen free high-conductivity copper*). Die Wahl des Materials garantiert eine geringe magnetische Suszeptibilität und ist außerdem UHV-tauglich. Die Käfiganordnung besteht aus vier gleichgroßen, hyperbolisch geformten *Ringsegmenten*<sup>3</sup>, zwei ebenfalls hyperbolisch geformten Endkappen (*obere* und *untere Kalotte*) - wobei die obere Kalotte, um die Detektion des Fluoreszenzlichtes zu ermöglichen, aus einem Kupfernetz mit einer Transmission von 72% besteht - und zwei *Korrektur Elektroden*<sup>4</sup>. Die einzelnen Fallenteile werden durch 2mm dicke Kupferberyllium-Stangen, die mit elektrisch isolierender Oxidkeramik umkleidet sind, zusammengehalten. Sehr präzise gefertigte Frialit-Abstandshalter isolieren zusätzlich die Endkappen, die Korrektur elektroden und die segmentierte Ringelektrode voneinander. Über dem hyperbolisch geformten Kupfernetz befinden sich zwei Plankonvexlinsen ( $\varnothing 40mm$ ), die mit einer Gesamtbrennweite von 23mm eine Punkt-zu-Parallel Abbildung des Fallenzentrums bewirken.

Die untere Kalotte enthält einen austauschbaren Einsatz mit zwei Bohrungen ( $\varnothing 5mm$ ), in welche man zylindrische Oxidkeramiken mit vier 1mm großen Längslöcher einführt. Durch die Löcher wird ein 0.15mm dicker Rheniumdraht gefädelt. Durch Heizen des Drahtes werden dann die gewünschten neutralen Atome aus der Probe, die sich ebenfalls in den Löchern der Keramikzylinder befindet, abgedampft. Durch die gleichzeitig vom Rheniumdraht emittierten Elektronen werden die Atome ionisiert und in der Falle eingefangen. In der Mitte des Kalotteneinsatzes befindet sich eine weitere runde Öffnung ( $\varnothing 2mm$ ), die dazu dient, dass die in einiger Entfernung durch Heizen eines 0.1mm dicken thorierten Wolframdrahtes<sup>5</sup> emittierten Elektronen den Magnetfeldlinien folgend in die Falle gelangen. Bei der Ca-Apparatur befindet sich dieser Wolframdraht in ca. 15cm Entfernung und ist über dem Loch einer Macorscheibe gespannt, die über eine Edeltahlscheibe an den Haltestangen montiert und auf die Fallenmitte ausgerichtet ist. Im Falle der Pb-Apparatur ist die sogenannte Elektronenkanone Teil des Kalotteneinsatzes. Der Wolframdraht befindet sich in 10cm Entfernung und wird durch ein Kupferröhrchen, das durch eine Macorscheibe elektrisch vom Ein-

---

<sup>3</sup>Zum Anlegen der azimuthalen Quadrupolanregung.

<sup>4</sup>Zur Kompensation von elektrischen Störtermen höherer Ordnung, die eine Abweichung vom idealen Quadrupolpotential bewirken. Die Elektroden sind dabei so angeordnet, dass die Fallenasymptoten mittig durch sie hindurchgehen. Das Verhältnis aus dem Abstand der Korrektur elektroden vom Fallenzentrum zur Dicke der Elektroden ist so gewählt worden, dass ihre Form keinen Einfluss auf das elektrische Quadrupolfeld im Fallenzentrum hat. Solche Kompensationselektroden wurden erstmals von Van Dyck in einem Experiment eingesetzt und finden Erwähnung in der Veröffentlichung von R. S. VAN DYCK JR., D. J. WINELAND, P. A. EKSTROM AND H. G. DEHMELT, „*High mass resolution with a new variable anharmonicity Penning trap*“, Appl. Phys. Lett. **28**, 446 (1976).

<sup>5</sup>99.4% Wolfram; 0.6% Thoriumoxid

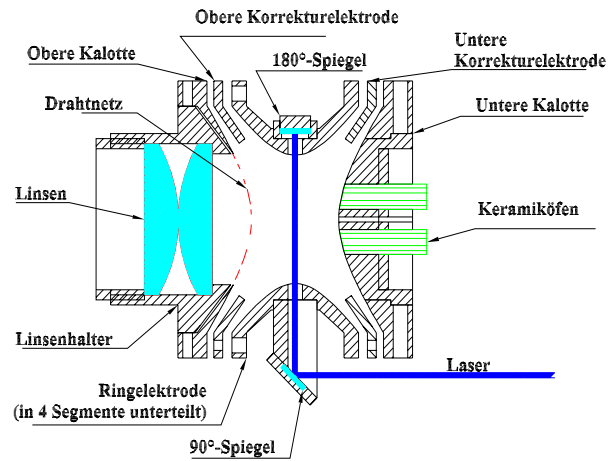


Abb. 4.2: Schnittzeichnung des Ionenkäfigs, der bei den Messungen an  $\text{Ca}^+$  verwendet wurde.

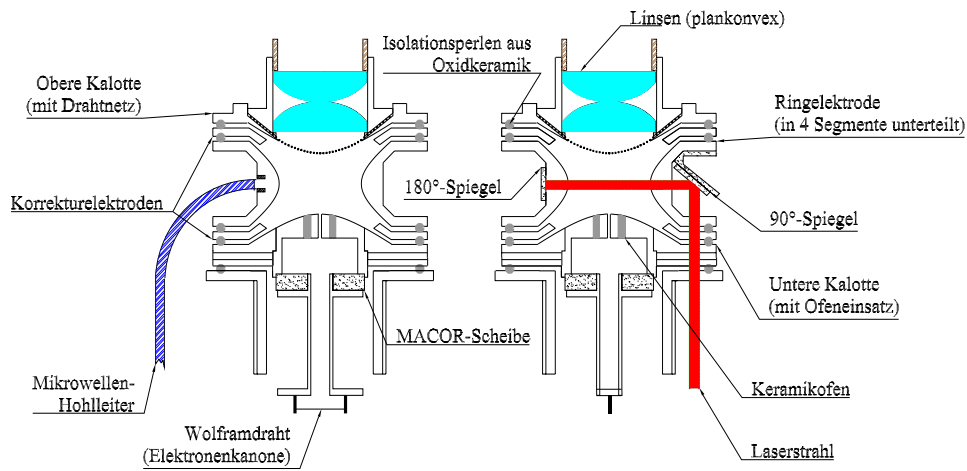


Abb. 4.3: Schnittzeichnungen des Ionenkäfigs, der bei den Messungen an  $\text{Pb}^+$  verwendet wurde. Die beiden Schnitte sind senkrecht zueinander.

satz isoliert ist, auf Abstand gehalten. Der Grund für diesen beabsichtigten Abstand des Drahtes vom Fallenzentrum liegt darin, dass bei der Elektron-Zyklotron-Resonanz-Messung (siehe Unterabschnitt 6.1.1) der Wolframdraht permanent geglüht wird. Dies könnte sich störend auf die Homogenität des Magnetfeldes am Ort der Elektronen auswirken, da nach dem Biot-Savart-Gesetz ein stromdurchflossener Leiter einen magnetischen Fluss erzeugt.

Im unteren Ringviertel befindet sich eine  $3\text{mm}$  große Bohrung, durch die das Laserlicht, über einen  $90^\circ$ -Spiegel geführt, senkrecht zur Beobachtungsrichtung durch das Fallenzentrum geschickt wird. Auf der gegenüberliegenden Seite befindet sich ebenfalls eine Bohrung im Ring mit einem  $180^\circ$ -Spiegel, der das Licht wieder auf den bereits erwähnten Spiegel zurückreflektiert. Beide Spiegel sind auf Kupferhalterungen fixiert, so dass nach Ausrichtung und Justage der Spiegel eine Verschiebung von der optimierten Position vermieden wird. Der Ionenkäfig der Pb-Apparatur besitzt außerdem noch seitlich eine dritte Öffnung in Ringebene zum Einkoppeln der Mikrowellen, die mit Hilfe eines Hohlleiters zur Falle hin transportiert werden (siehe Abb. 4.3).

### 4.3 Der Magnet

Das Magnetfeld wird durch einen Solenoiden mit supraleitenden Spulen erzeugt. Die Spulen befinden sich dabei in einem flüssigen Heliumbad, das von einem mit flüssigem Stickstoff gefüllten Stahlmantel umgeben ist. Dieser Behälter befindet sich seinerseits, zur Isolation vor der Raumtemperatur, in einem Vakuummantel. Der Magnet besitzt eine horizontale Raumtemperaturbohrung ( $\varnothing 89\text{mm}$ ,  $l = 870\text{mm}$ ), in die das Glasrohr mit dem Ionenkäfig an die homogenste Stelle<sup>6</sup> geschoben wird.

Neben den Hauptspulen verfügt der Magnet über weitere Nebenspulen, die sogenannten Korrekturspulen, mit denen die räumliche Inhomogenität vermindert werden kann<sup>7</sup>. Da jedoch der Teil der Apparatur, der in den Magneten hineinragt (Falle, elektrische Durchführungen, Fallenhalterung) eine Restsuszeptibilität aufweist, verschlechtert sich dieser Wert. Damit die gespeicherten Ionen so wenig Einfluss wie möglich von dieser Magnetfeldinhomogenität erfahren, was sich auf die Linienbreiten im Spektrum auswirkt, versucht man die räumliche Ausdehnung der Ionenwolke auf ein möglichst kleines Volumen zu begrenzen.

Abgesehen von dieser räumlichen Inhomogenität unterliegt das Magnetfeld auch zeitlichen Veränderungen. Zum einen hat man eine Langzeitdrift

---

<sup>6</sup>Die homogenste Stelle befindet sich hierbei nicht in der geometrischen Mitte der Bohrung sondern liegt bei ca.  $450\text{mm}$  von der Seite aus gemessen in die das Glasrohr hineingeführt wird (siehe Abb. 4.1).

<sup>7</sup>Die mit diesen Korrekturspulen erreichbare relative Inhomogenität ist  $< 1 \cdot 10^{-7} T$  über einem Volumen von  $V = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot z = \frac{\pi}{4} \cdot (3\text{mm})^2 \cdot (10\text{mm})$  am Ort des höchsten magnetischen Flusses.

zu kleineren Magnetfeldern hin von ca.  $-10^{-10} \frac{T}{h}$ , was aber wegen der kurzen Zeitspanne, in der die Messungen durchgeführt wurden (36h) nicht beobachtbar war. Zum anderen ist das Magnetfeld statistischen Kurzzeitschwankungen unterworfen, die im Bereich von  $10^{-8}T$  liegen. Da diese Fluktuationen zu einer Linienverbreiterung führen, muss gewährleistet werden, dass das Magnetfeld im Zeitraum der Messungen stabil bleibt. Solche Schwankungen wurden in der Tat beobachtet und als Ursache wurde außer dem stochastisch bedingten Auftreten auch das Verschieben von ferromagnetischen Werkzeugen und Gegenständen im Labor erkannt.

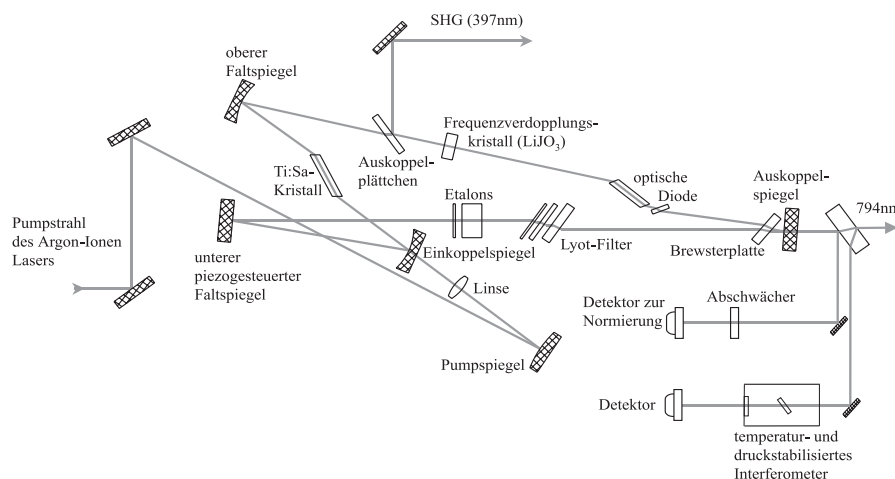
#### 4.4 Das Lasersystem für $Ca^+$

Bei den spektroskopischen Messungen an  $Ca^+$ -Ionen wurde ein Lasersystem verwendet, das sich aus einem Argon-Ionen-Laser als Pumplaser und einem frequenzverdoppelten Titan-Saphir-Laser (Ti:Sa) als Ringlaser zusammensetzt. Der Argon-Ionen-Laser besteht im Wesentlichen aus einer Gasentladungsröhre in einem optischen Resonator. Durch eine kontinuierliche Gasentladung entstehen in dieser Röhre hochangeregte Argon-Ionen, welche unter Aussendung von Photonen sich wieder in ihren Grundzustand abregen. Mit verschiedenen Spiegelsätzen können im Resonator einzelne Spektralbereiche selektiert werden. Zum Pumpen des Ti:Sa-Lasers wird ein Spiegelsatz für sichtbares Licht verwendet. Die Pumpleistung ist auf ca. 15W stabilisiert. Im Ringlaser befindet sich ein Titan-Saphir-Kristall ( $Al_2O_3 : Ti^{3+}$ ), der als Lasermedium dient. Damit kann ein Bereich von 700nm bis 825nm durchgestimmt werden. Außerdem befindet sich im Strahlengang des Ringlasers ein optisch einachsiger doppelbrechender Lithium-Jodat-Kristall<sup>8</sup> ( $LiJO_3$ ), der für die Frequenzverdopplung zuständig ist und somit Laserlicht im Bereich von ca. 380nm bis 400nm zur Verfügung stellt. Durch frequenzselektive Bauteile kann die Linienbreite des frequenzverdoppelten Laserlichtes auf weniger als 1MHz eingeschränkt werden.

Um zu gewährleisten, dass der Ringlaser im gewünschten Wellenlängenbereich nur auf einer Mode oszilliert, muss der Verstärkungsbereich des Titan-Saphir-Kristalls eingengt werden. Dazu werden außer der Wahl der Spiegel drei optische Elemente für den Einmodenbetrieb eingesetzt: ein doppelbrechender Filter, bestehend aus drei Platten, und ein dickes bzw. dünnes Etalon mit einem freien Spektralbereich (FSR) von 10GHz bzw. 280MHz. Eine optische Diode legt die Umlaufrichtung innerhalb des Ringresonators fest. Die Laserfrequenz wird aktiv auf ein thermisch- und druckstabilisiertes Etalon geregelt. Für langsam veränderliche Abweichungen von der Sollfrequenz

---

<sup>8</sup>Die Phasenanpassung erfolgt durch Änderung des Einstellwinkels, wobei der Winkel zwischen optischer Achse und Laserstrahlachse so eingestellt wird, dass sich Grund- und Oberwelle mit gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit fortpflanzen. Der  $LiJO_3$ -Kristall hat weiterhin senkrecht geschnittene Endflächen und ist zur Minimierung von Reflektionsverlusten mit einer Antirefektionsschicht für die Fundamentalmode versehen.



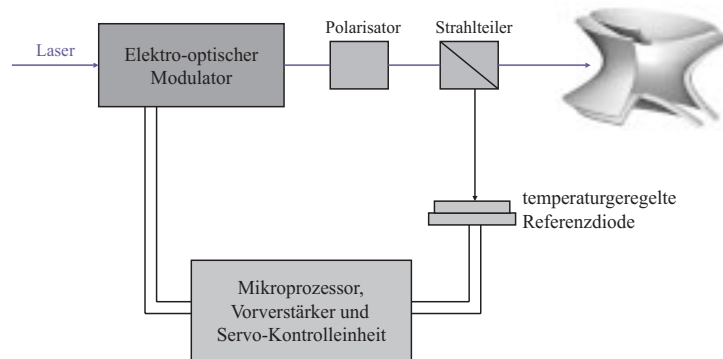
**Abb. 4.4:** Schematische Darstellung des mit Hilfe eines Argon-Ionen Lasers gepumpten Tita-Saphir-Ringlasers mit resonatorinterner Frequenzverdopplung.

wird die Resonatorlänge durch Drehen einer Glasplatte mit Hilfe eines Galvanometerantriebes geändert. Höherfrequente Störungen werden über einen piezogesteuerten Spiegel durch Veränderung der Strahlänge ausgeregelt. Zur Durchstimmung der Laserfrequenz ändert man die optische Weglänge im Referenzresonator mit Hilfe einer Glasplatte, die über einen Galvanometerantrieb angesteuert wird. Über die Regelschleife folgt der Laser dann diesem 'Fehlersignal'.

Der Laser wurde zur Aufnahme der optischen Übergänge im  $Ca^+$ -Ion in einem Wellenlängenbereich von  $396.84nm$  bis  $396.88nm$  durchgestimmt (entspricht einem Frequenzbereich von  $\approx 76GHz$ ). Die Wellenlänge wurde hierbei mit Hilfe eines Wavemeters bestimmt indem die Fundamentalmode mit einem Prisma räumlich von der SHG<sup>9</sup> getrennt und in das Gerät eingefädelt wurde. In dem Gerät wurde dann die Wellenlänge des Ti:Sa-Lasers mit der Wellenlänge eines ungestabilisierten Helium-Neon-Lasers verglichen. Die maximale Ausgangsleistung des frequenzverdoppelten Laserstrahls betrug ca.  $3mW$ . Da der Laser starke Leistungsschwankungen zeigte, musste die Leistung durch einen zusätzlich in den Strahlengang gestellten *Laser Intensity Stabilizer* (sog. *noise eater*) stabilisiert werden, so dass sich die maximale Leistung auf ca.  $1.5mW$  reduzierte. Doch für die durchgeführten Messungen war bereits eine Laserleistung von  $20\mu W$  vollkommen ausreichend. Dazu ist zu sagen, dass diese Leistung kurz hinter dem *noise eater* gemessen wurde.

<sup>9</sup>Der frequenzverdoppelte Strahl (engl. *Second Harmonic Generation*).





**Abb. 4.5:** Schematischer Aufbau zur Funktionsweise des noise eater.

Das Laserlicht wurde dann über zwei Umlenkspiegel, durch ein  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen (Laufstrecke bis jetzt ca. 50cm) auf eine Sammellinse gelenkt und schließlich auf einen ca. 1.5m entfernten 90°-Spiegel der Falle fokussiert. Man kann vermuten, dass höchstens die Hälfte der Laserleistung effektiv zur Anregung der Ionen zur Verfügung stand.

#### 4.4.1 Der Laser Intensity Stabilizer

Der noise eater besteht im Wesentlichen aus einem elektro-optischen Modulator, aus einer Referenzdiode mit Strahlteiler und aus einer elektronischen Kontrolleinheit (siehe Abb. 4.5). Der elektro-optische Modulator setzt sich zusammen aus einer Pockelszelle, einer Flüssigkristall-Zelle und einem Polarisator. Die Hauptaufgabe der Pockelszelle ist, das linear polarisierte Licht in der Schwingungsebene zu drehen, was über eine angelegte variable Spannung gesteuert werden kann. Somit können hochfrequente Modulationen in der Laserintensität weggefiltert werden. Die optisch in Serie positionierte Flüssigkristall-Zelle verhält sich wie die Pockelszelle mit dem einzigen Unterschied, dass sie niederfrequente Intensitätsschwankungen eliminiert. Nachdem der Laserstrahl die beiden Zellen passiert hat, fällt er auf einen Polarisator. Der Transmissionskoeffizient des Modulators  $T$  ist somit gegeben durch

$$T = \cos^2(\Phi_{\text{Polarisator}} - \Phi_{\text{Strahl}})$$

wobei  $\Phi_{\text{Polarisator}}$  der Winkel des Polarisators in Bezug auf die Tischebene und  $\Phi_{\text{Strahl}}$  der Drehwinkel, mit welchem der Laserstrahl den elektro-optischen Modulator verlässt. Durch Variation der Spannung an der Pockelszelle ändert man  $\Phi_{\text{Polarisator}}$  und somit den Transmissionskoeffizienten.

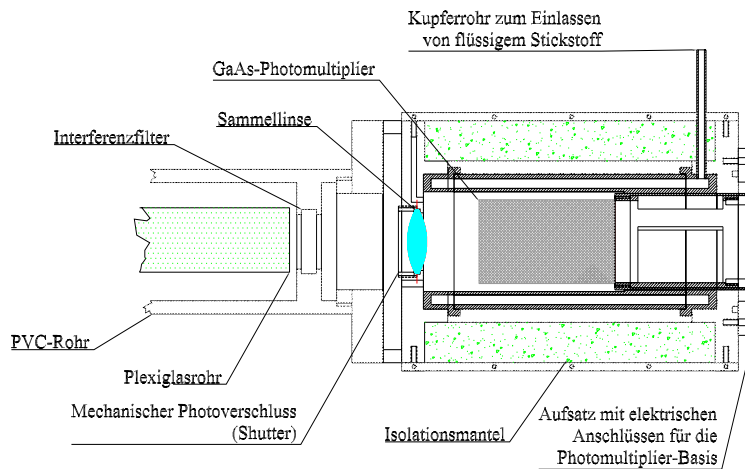
Nach dem Polarisator fällt das Laserlicht auf einen Strahlteiler. Dieser zweigt 3% des Laserstrahls, der den noise eater verlässt, ab und schickt diesen kleinen Anteil auf eine Referenz-Photodiode. Ein direkt angeschlossener hochauflösender Hochgeschwindigkeits-Vorverstärker wandelt den von der Photodiode erzeugten Strom in eine Spannung um. Zur Vermeidung von thermischen Drifts in der Dioden-Responsivität wird die Photozelle temperaturgeregelt (bei ca.  $33^{\circ}\text{C}$ ). Die anschließende Servo-Kontrolleinheit vergleicht das Signal der Referenz-Photodiode mit dem manuell eingestellten Transmissionswert am Modulator und regelt gegebenenfalls nach. Der in der Einheit enthaltene Mikroprozessor übernimmt die Auswahl der optimalen Verstärkung und der optimalen Servo-Parameter. Weiterhin wirkt er wie eine Servo-Sperre falls der Laserstrahl vorübergehend geblockt wird.

## 4.5 Das optische Nachweissystem

Die Fluoreszenzphotonen der durch das Laserlicht angeregten Ionenwolke werden durch das Linsensystem in der oberen Kalotte abgebildet und über einen Lichtwellenleiter (bestehend aus Plexiglas) und eine sich dahinter befindende Sammellinse auf die photoempfindliche Kathode eines Gallium-Arsenid-Photomultipliers geleitet. Die Photonen treffen somit auf die erste Dynode des Multipliers und die Elektronen aus der Photokathode lösen dann über eine Dynodenkaskade eine Sekundärelektronenlawine aus. Die erzeugten elektrischen Pulse werden verstärkt und als Strom an der Anode des Photomultipliers abgenommen. Ein schneller Hochfrequenz-Vorverstärker verstärkt zusätzlich diese Pulse und ein dahinter angeschlossener A/D-Wandler gibt sie schließlich als TTL-Signale aus. Diese Signale werden dann mit einer Mehrfachzählerkarte erfasst und ausgewertet.

Um jedoch überhaupt einzelne Photonen detektieren zu können, wird der Photomultiplier auf eine Temperatur von ca.  $-20^{\circ}\text{C}$  gekühlt. Die Dunkelrausch-Zählrate beträgt dann 4 bis  $7\text{cps}$  (*counts per second*). Der Multiplier befindet sich hierzu in einem Kühler (siehe Abb. 4.6), der aus einem Kühlmantel und zwei Anschlüssen aus Kupfer besteht. Durch die vertikalen Bohrungen des Kühlmantels wird kalter, gasförmiger Stickstoff geleitet, indem mit Hilfe einer Vorpumpe flüssiger Stickstoff aus einem Behälter herausgesaugt wird. Wegen der langen Wegstrecke zwischen dem Stickstoffbehälter und den Anschlüssen des Kühlers verdampft der ursprünglich flüssige Stickstoff auf dem Weg zum Photomultiplier. Die Spannungskaskade für die Dynoden des Multipliers befindet sich ebenfalls in einem abgeschlossenen Behälter innerhalb des Kühlmantels, um eine Erwärmung des Photomultipliers durch die Steckkontakte zu vermeiden. Außerdem kann sich durch die Anordnung kein Kondenswasser auf den hochspannungsführenden Kontakten bilden, was zu Kurzschlüssen führen könnte.

Auf der lichtempfindlichen Seite des Multipliers befindet sich eine Sam-



**Abb. 4.6:** Technische Schnittzeichnung des Kühlers für den Photomultiplier.

mellinse, die das einfallende Licht auf die Photokathode fokussiert. Zwischen Lichtwellenleiter und Linse sorgt zum einen ein Interferenzfilter<sup>10</sup> mit einem Transmissionskoeffizienten von 32.5%<sup>11</sup> dafür, dass kein Laserstreulicht zur photoempfindlichen Schicht des Detektors gelangt; zum anderen gewährleistet ein mechanischer, manuell auslösbarer Photoverschluss den Schutz vor einer Blendung der Photokathode beim Glühen der Ofendrähte zur Ionenerzeugung.

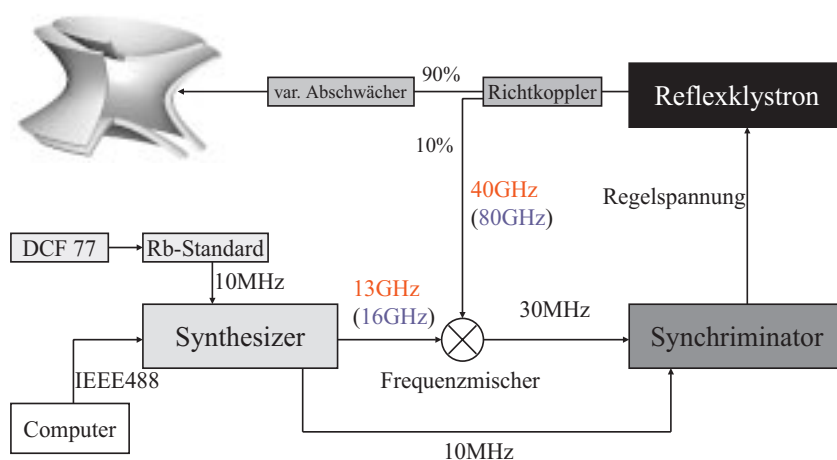
Da der Vervielfacher durch axiale Magnetfelder an Effizienz verliert, befindet sich im Kühlmantel eine magnetische Abschirmung ( $\mu$ -Metall). Zudem wird der Detektor  $1m$  hinter der Öffnung der Raumtemperaturbohrung des Magneten betrieben. Um den auf dieser langen Strecke auftretenden Verlust an Fluoreszenzphotonen zu minimieren, wurde deshalb der Plexiglaslichtleiter verwendet. Dieser befindet sich in einem Kunststoffrohr und schirmt somit den Lichtwellenleiter vor Streulicht aus der Umgebung ab.

## 4.6 Die Mikrowellenanlagen

Da, wie bereits am Anfang dieses Kapitels erwähnt, nach Abschluss der Messungen an  $Ca^+$  die Feldstärke des supraleitenden Magneten geändert wurde, musste eine weitere Mikrowellenanlage aufgebaut werden, die eine andere Frequenz zur Verfügung stellte. Somit wurden zwei im Aufbau und im Funktionsprinzip ähnliche jedoch in der Mikrowellenfrequenz unterschiedliche Anlagen verwendet. Im Falle der Spektroskopie an  $Ca^+$ -Ionen betrug

<sup>10</sup> $\lambda = (866 \pm 15)nm$

<sup>11</sup>Mit Hilfe einer Laserdiode gemessen, die Licht bei  $\lambda = 866nm$  emittiert.



**Abb. 4.7:** Schematische Darstellung der Mikrowellenanlage. Die Frequenzen in runden Klammern beziehen sich auf die '40GHz-Mikrowellenanlage'.

das Magnetfeld ca.  $1.43T$ , so dass eine Frequenzquelle von ca.  $40GHz$  gebraucht wurde, sowohl zur Induktion der Zeeman-Grundzustandsaufspaltung des ionischen  $Ca$ -Systems als auch zur Anregung der Zyklotronfrequenz von gespeicherten Elektronen<sup>12</sup>.

Vor Beginn der Untersuchungen an gespeicherten  $Pb^+$ -Ionen wurde das Magnetfeld auf  $2.87T$  geändert. Um nun die Zyklotronbewegung der Elektronen anzuregen ist eine Frequenzquelle von ca.  $80GHz$  notwendig. Im Folgenden wird der Aufbau der '40GHz-Mikrowellenanlage' beschrieben, die bis auf wenige Unterschiede ähnlich zur '80GHz-Mikrowellenanlage' ist. Auf die Unterschiede wird an den entsprechenden Stellen explizit hingewiesen.

Das Kernstück der Mikrowellenanlage besteht im Wesentlichen aus einem Reflexklystron<sup>13</sup>, das Mikrowellen in einem Frequenzbereich von  $38 - 42GHz$

<sup>12</sup>Da für eine Laser-Mikrowellen-Doppelresonanzmessung die genaue Kenntnis des Magnetfeldes am Ort der Ionen benötigt wird.

<sup>13</sup>1938 von Russell und Siegmund Varian erfunden. Das Klystron besteht aus einer Cavity, dem sog. Resonator. Elektronen, die diesen Resonator durchqueren induzieren darin ein Radiofrequenzfeld und werden 'gebuncht'. Wird nun der Elektronenstrahl mit Hilfe einer geeigneten negativ geladenen Reflektorelektrode wieder durch die Cavity geschickt, so erhöht man die Energie des Radiofrequenzfeldes. Vorausgesetzt natürlich, dass die Geschwindigkeit des Elektronenstrahls und der Abstand des Reflektors von der Cavity geeignet gewählt sind. Das Reflexklystron wird somit zu einem Oszillator. Eine detailliertere Beschreibung findet sich in [301] und in D. R. HAMILTON, J. K. KNIPP AND J. B.

erzeugt mit einer Ausgangsleistung von ca.  $40mW$ <sup>14</sup>. Ein Teil der vom Klystron erzeugten Mikrowellenstrahlung ( $\approx 10\%$ ) wird über einen Richtkopppler abgezweigt und in einem Mischer phasenstarr an die von einem Synthesizer erzeugten Frequenz angebunden. Die in diesem Mischer befindliche Mischerdiode leitet das entsprechende Differenzsignal an einen Synchriminator weiter, der die unstabilisierte Frequenz des Reflexklystrons fest an die dritte Oberwelle<sup>15</sup> des Synthesizers anbindet. Der Synchriminator benötigt hierzu ein  $30MHz$ -Differenzsignal. Bei Schwankungen des Differenzsignals regelt der Synchriminator die Frequenz nach indem er die Reflektorspannung am Reflexklystron ändert. Aufgrund der phasenstarrten Anbindung des Klystrons an den Synthesizer kann man somit die Frequenz des Klystrons durch Verstimmen der Frequenz am Synthesizer ändern, wobei die Stabilität in der Frequenz des Klystrons durch die des Synthesizers bestimmt ist. Die Kurzzeitinstabilität des Synthesizers beträgt hierbei  $\pm 5 \cdot 10^{-10}/d$ . Zur Verringerung dieser Instabilität wird der Synthesizer phasenstarr an ein kurzzeitstabiles Rubidium-Kleinatom-Frequenznormal angebunden (Schwankungen  $\pm 5 \cdot 10^{-11}/s$ ). Zur Langzeitstabilisierung wird dieses Frequenznormal per Langwelle über ein vom Normsender *DCF77* empfangenes Signal mit dem Cäsium-Standard der PTB Braunschweig verglichen und gegebenenfalls nachgeregelt.

Die somit stabilisierte und durchstimbare Mikrowellenfrequenz wird über einen Hohlleiter und ein semi-rigides Mikrowellenkabel in die Apparatur eingespeist. Im Falle der  $80GHz$ -Mikrowellenanlage wird der Hohlleiter direkt bis zur Ringelektrode der Falle durch die Vakuumapparatur geführt. Der Übergang in das Vakuum erfolgt mittels einer dünnen Glimmerscheibe.

## 4.7 Das elektronische Nachweissystem der gespeicherten Teilchen

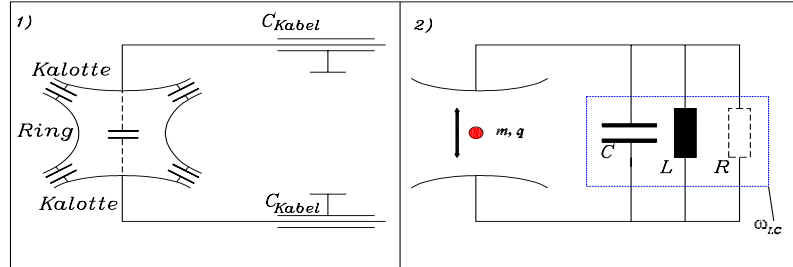
Sinn des elektronischen Nachweises ist es, Information über die *Art* und die *Anzahl* der im Käfig gespeicherten Ionen zu geben. Die prinzipielle Funktionsweise dieses elektronischen Ionennachweises beruht auf der Möglichkeit, die Energie der Ionen durch Anregung einer Ionen-Eigenbewegung, nämlich der axialen Bewegung, innerhalb des Pennigkäfigs kurzfristig zu erhöhen. Diese Anregung erfolgt durch ein von außen angelegtes Wechselfeld. Der Energieverlust, der sich aufgrund der Erhöhung der Bewegungsamplitude der Teilchen bemerkbar macht, vollzieht sich in einem *Nachweisschwingkreis*. Dieser Nachweisschwingkreis besteht aus den parasitären Kapazitäten

---

H. KUPER, *Klystrons and Microwave Triodes*, MIT Radiation Laboratory Series, Vol. 7, McGraw-Hill Book Company, Inc., NY (1948)

<sup>14</sup>Im Falle der  $80GHz$ -Mikrowellenanlage umfasst der Durchstimbereich die Frequenzen  $79.5 - 82.5GHz$  bei einer Ausgangsleistung von ca.  $400mW$ .

<sup>15</sup>Im Falle der  $80GHz$ -Mikrowellenanlage ist es die fünfte Oberwelle.



**Abb. 4.8:** Schematische Darstellung des elektronischen Ionen- und Elektronennachweises. Durch die geometrische Anordnung der kupfernen Käfigelektroden einerseits und Zuleitungskapazitäten andererseits, entstehen parasitäre Kapazitäten. Dies führt zu einer kapazitiven Kopplung der oberen und der unteren Kalotte und ist analytisch durch eine Ersatzkapazität  $C$  darstellbar (linkes Bild).

Schaltet man parallel, zur Kompensation dieser Kapazität, eine geeignete Induktivität  $L$ , so hat man den Nachweisschwingkreis mit  $\omega_{LC} = 1/\sqrt{L \cdot C}$ . Im Resonanzfall  $\omega \approx \omega_{LC}$  wird dem gespeicherten Teilchen über die axiale Bewegung Energie zugeführt, die sich in einer Energieabnahme im Nachweisschwingkreis bemerkbar macht (rechtes Bild).

des Käfigs und den elektrischen Zuleitungen - die man durch eine Kapazität geeigneter Größe darstellen kann - sowie aus der Induktivität, die so gewählt werden muss, dass die Resonanzfrequenz  $\omega_{LC}$  mit der Schwingungsfrequenz der Teilchen bei einer festen Speicherspannung zusammenfällt. Die Anregungsfrequenz wird über einen *Anregungsschwingkreis* induktiv eingekoppelt. Dieser Schwingkreis ist mit der oberen und der unteren Kalotte verbunden und regt die Schwingung der Ionen in axialer Richtung an. Wie bereits in Abschnitt 2.1 hergeleitet, ist die Frequenz dieser Ioneneigenbewegung gegeben durch:

$$\omega_z = \sqrt{-\frac{2qU_0}{mr_0^2}}$$

wobei  $U_0$  die Speicherspannung ist, die zwischen Ringelektrode und Kalotten anliegt,  $r_0$  der Ringradius in der Fallenmitte und  $m, q$  Masse und Ladung des gespeicherten Teilchens. Variiert man nun bei konstant gehaltener Nachweisfrequenz  $\omega_{LC}$  sägezahnförmig die Speicherspannung, so kann man masseselektiv die Art der Teilchen bestimmen (vorausgesetzt, dass es sich um einfach geladene Teilchen handelt), da abhängig von der Masse verschiedene Teilchen bei verschiedenen Spannungen in Resonanz mit dem Anregungsschwingkreis gelangen. Dies macht sich in einer Modulation der Amplitude des Nachweisschwingkreises bemerkbar: Die Ionen nehmen im Resonanzfall  $\omega_z \approx \omega_{LC}$  Energie auf, weil die Kalotten für die geladenen Teilchen nur noch

einen ohmschen Widerstand bilden und somit den Strom vermindern, der durch die Spule fließt. Dieser relativ kleine Stromeinbruch wird durch zwei Verstärker (Vor- und Hauptverstärker) und einem Demodulator auf einem Oszilloskop sichtbar gemacht. Aus der Spannung, bei der die Resonanz auftritt, kann man auf die Masse schließen und die Tiefe des Stromeinbruchs stellt ein Maß für die Anzahl der gespeicherten Ionen dar.

Wegen des großen Massenunterschiedes zwischen einfach positiv geladenen Ionen und Elektronen, benötigt man zwei verschiedene Nachweisverstärker mit unterschiedlichen Resonanzfrequenzen. Beim Ionennachweis im Falle von gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen<sup>16</sup> beträgt die Frequenz  $\omega_{LC} \approx 2\pi \cdot 92kHz$ , beim Elektronennachweis ist dagegen  $\omega_{LC} \approx 2\pi \cdot 12MHz$

## 4.8 Die Ansteuerung der einzelnen Komponenten und die Datenaufnahme

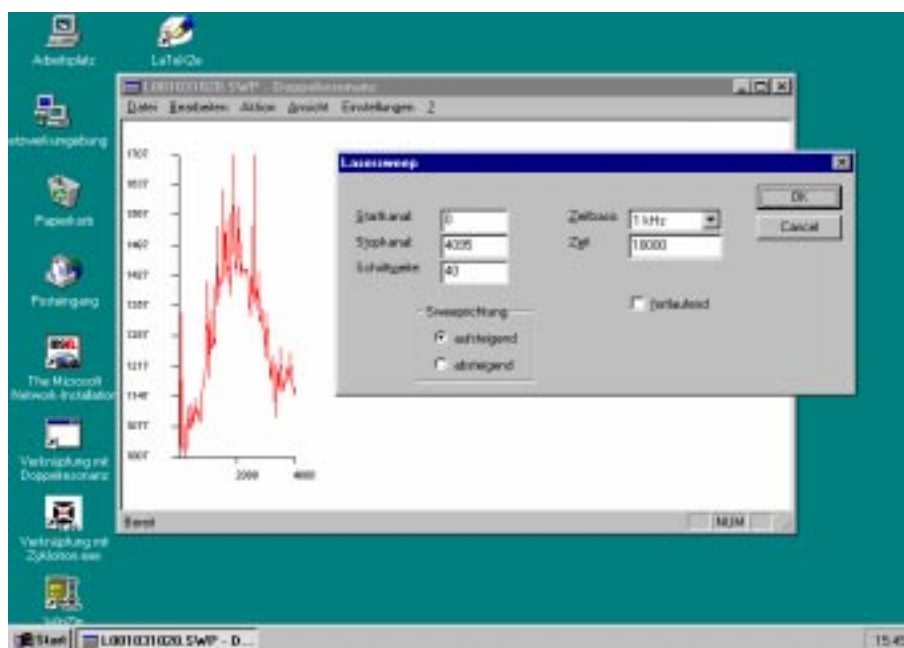
Um größtmögliche Flexibilität in der Änderung von Messvorschriften (z. B. zeitlichen Abläufen der Messzyklen) zu haben, wurde die Steuerung des Experimentes von einem Personal-Computer übernommen, wobei die Steuerungssoftware in der Programmiersprache  $C^{++}$  von S. Trapp im Rahmen von spektroskopischen Messungen an gespeicherten  $Eu^+$ -Ionen [302] erstellt wurde. Der PC ist dabei mit einem *IEEE488*-Interface zur Steuerung von Frequenzgeneratoren (etwa des Synthesizers), einer Mehrfachzählkarte zur Aufnahme der von der Nachweiselektronik in TTL-Pulsen umgewandelten Photonensignalen, sowie mit einer Multi-IO-Karte ausgestattet. Letztere steuert einerseits den Laser und übernimmt andererseits das Timing und die Datenaufnahme beim Elektronennachweiszyklus. Im Folgenden werden kurz die Prozeduren der beiden Messaufgaben beschrieben:

### Messung des optischen Spektrums und der Mikrowellen-Doppelresonanz

Das für die Untersuchung an  $Ca^+$ -Ionen verwendete Lasersystem muss mit einer Spannungsrampe verstimmt werden. Dazu wird ein D/A-Wandler der Multi-IO-Karte benutzt. Die am Photomultiplier ankommenden Photonenimpulse werden von der Zählkarte erfasst. Diese enthält mehrere 16-Bit-Zählerbausteine, die über die Software kaskadiert und logisch miteinander verknüpft werden können. Dabei nehmen zwei miteinander kaskadierte Zähler die Photonenimpulse auf, während ein weiterer Zähler mit Startwert und fester Frequenz bestimmt, wie lange die beiden Zähler Photonen

---

<sup>16</sup>Bei der Speicherung von  $Pb^+$ -Ionen wurde die Resonanzfrequenz durch zusätzliches Anlegen von parallelen Kapazitäten zwischen den Zuleitungen zur oberen und unteren Kalotte verstimmt.



**Abb. 4.9:** Screenshot der graphischen Benutzeroberfläche der Ansteuerungssoftware zur Aufnahme eines optischen Spektrums. Über eine Eingabemaske lässt sich selektiv der Scanbereich, die Frequenzschrittweite, die Messzeit pro Kanal und die Frequenzrichtung der Durchstimmung des Lasers bestimmen.

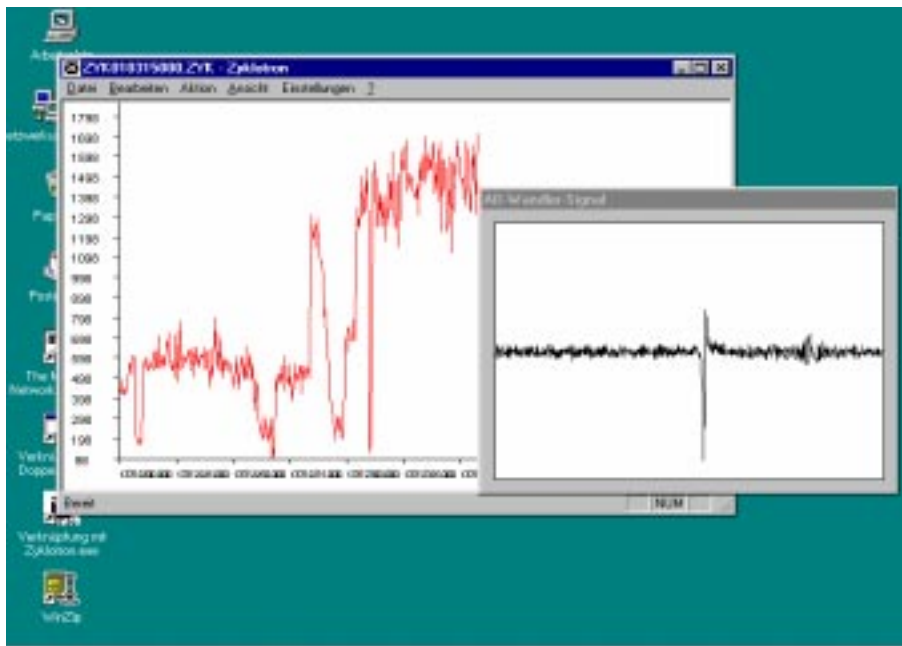
zählen sollen. Nach einer über die Eingabemaske (siehe Abb. 4.9) des Programms frei wählbaren Zeit wird der Laser in der Frequenz verstimm<sup>17</sup> und von neuem die Anzahl der ankommenden Photonen gezählt. Im Falle der Doppelresonanz-Messungen wird der Laser zum Peak der optischen Fluoreszenzkurve verstimm<sup>17</sup> und auf der festen Wellenlänge gehalten, während der Synthesizer der Mikrowellenanlage in der Frequenz verstimm<sup>17</sup> wird.

## Messung der Elektronen-Zyklotron-Resonanz

Zur Steuerung des Zeitablaufs beim *Elektronen-Nachweiszyklus* (d. h. Einschuss der Elektronen in die Falle, Absenken des Speicherpotentials, Starten der Spannungsrampe zur Detektion des Stromeinbruchs im demodulierten Signal, Sichtbarmachung und Auswertung des Absorptionssignals im Messfenster, Aufnahme des Datenpunktes) werden vier digitale Ausgänge der Multi-IO-Karte benutzt. Ein D/A-Wandler dieser Karte steuert über einen nachgeschalteten Verstärker die an der Ringelektrode anliegende Spannung, während ein weiterer Digitalausgang für den Start der Nachweisrampe

<sup>17</sup>Der Durchstimmbereich des Lasers wird vorher manuell an der Control-Box festgelegt und anschließend über das Steuerprogramm in 4095 Kanäle unterteilt, so dass die kleinstmögliche Schrittweite, mit der der Laser verstimm<sup>17</sup> werden kann, vorgegeben ist.





**Abb. 4.10:** Screenshot der graphischen Benutzeroberfläche der Ansteuerungssoftware zur Aufnahme der Elektronen-Zyklotron-Resonanz. Das im kleinen Fenster sichtbare Signal stellt das demodulierte Nachweissignal dar. Die Auswertung dieses elektronischen Signals wird dann im großen Fenster graphisch dargestellt, wobei maßgeblich die absolute Signaltiefe im Bezug auf den Mittelwert der Rauschens ist.

benutzt wird. Der dritte Ausgang steuert den Einschuss der Elektronen in die Falle, indem über eine sog. Elektronen-Umschaltbox zwischen einer negativen Beschleunigungsspannung und einer positiven Haltespannung - die beide an der Elektronenkanone liegen - zu festgesetzten Zeiten hin- und hergeschaltet wird. Schließlich digitalisiert ein A/D-Wandler das Nachweissignal vom Elektronen-Nachweisverstärker. Somit kann dieses Absorptionssignal am Bildschirm des PCs sichtbar gemacht und die Auswertung des Signals verändert werden (siehe Abb. 4.10). Gleichzeitig wird über die *IEEE488*-Schnittstelle, die mit dem Synthesizer verbunden ist, die Verstimmung der Mikrowellenfrequenz angesteuert.



# Kapitel 5

## Messungen an $Ca^+$

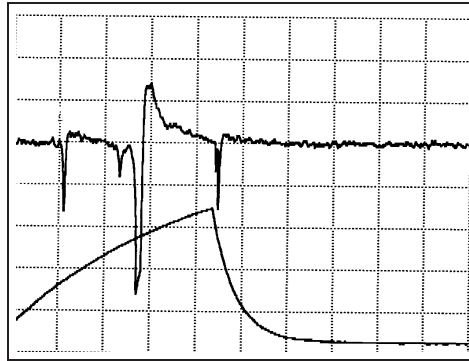
### 5.1 Die Speicherung von $Ca^+$ -Ionen

Bevor sowohl die Verweildauer der  $Ca^+$ -Ionen als auch die Quenchrates des metastabilen Niveaus mit Hilfe von Puffergas und dem zusätzlichen Anlegen eines azimutalen Quadrupol-Hochfrequenzfeldes erhöht werden konnten, mussten vorab geeignete Speicherbedingungen, wie Wahl des Speicherpotentials, Dauer der Ionenerzeugung und Wert des Glühstroms durch den Ofendraht bestimmt werden. Diese Untersuchungen wurden im UHV bei einem Druck von  $2 \cdot 10^{-9} \text{ mbar}$  durchgeführt. Bei einem anfänglichen tiefen Potentialtopf von  $U_0 = -60 \text{ V}$  konnte man am Oszilloskop durch Glühen des Ofendrahtes<sup>1</sup>, bei einem Strom von  $I = 0.7 \text{ A}$  (Dauer des Glühens  $\approx 10 \text{ s}$ ) das in Abbildung 5.1 dargestellte demodulierte Signal des Ionennachweisverstärkers beobachten. Man sieht mehrere Stromeinbrüche, die davon herrühren, dass unterschiedliche Massen beim Verfahren einer Spannungsrampe<sup>2</sup> wegen  $v_z \propto \sqrt{U_0/m}$  in Resonanz mit dem äußeren Anregungsschwingkreis gelangen und Energie über die axiale Bewegung abgeben. Durch Kenntnis der Frequenz des Nachweisschwingkreises kann man, wenn man den Schnittpunkt des Stromeinbruchs mit der Spannungsrampe ermittelt, auf die Masse der gespeicherten Ionen schließen. Wegen der niedrigen Güte des Ionennachweisverstärkers von ca.  $Q \simeq 70$  konnten jedoch benachbarte Massen am Oszilloskop nicht aufgelöst werden. Der größte Einbruch konnte deshalb einer Masse mit  $m = (40 \pm 2) \text{ a.m.u.}$  zugeordnet werden und ließ zunächst die Ungewissheit, ob es sich um  $Ca^+$ ,  $K^+$  oder um beide Ionensorten handelte. Die kleineren, links davon liegenden Einbrüche konnten mit  $m \approx 56 \text{ a.m.u.}$  bzw.  $m \approx 43 \text{ a.m.u.}$  als  $CaO^+$  bzw.  $CaH^+$  identifiziert werden. Diese Annahme wurde durch die Tatsache gestützt, dass metallisches Calcium an der Luft sehr schnell mit einer Oxidschicht überzogen wird (der Einbau der Öfen in die untere Kalotte dauerte bis zum Beginn der Evakuierung der Ap-

---

<sup>1</sup>Bestehend aus einem Rheniumfilament

<sup>2</sup>Dargestellt durch das annähernd sägezahnförmige Signal im unteren Teil der Abb. 5.1



**Abb. 5.1:** Das demodulierte Signal des Ionennachweisverstärkers beim Verfahren der Spannungsrampe, die durch den annähernd sägezahnförmigen Verlauf der unteren Kurve dargestellt ist.

paratur durch die Turbomolekularpumpe immerhin 20 Minuten). Außerdem kann Sauerstoff, wie auch Wasserstoff und Stickstoff als Restgas in der UHV-Apparatur vorhanden sein, die mit  $Ca$  eine chemische Verbindung eingehen können.

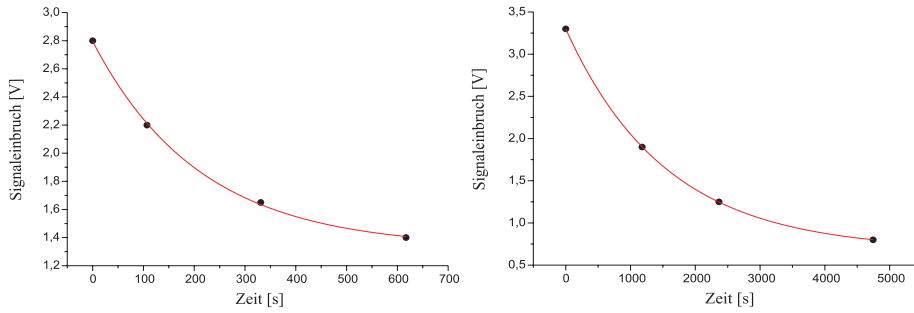
Diese beiden Peaks verschwanden jedoch nach mehrmaligem Glühen über einige Tage, so dass nur das größere Absorptionssignal übrigblieb. Die noch kurze Speicherzeit von ca. 5–10 min. erhöhte sich bei einer Reduzierung des Speicherpotentials. Bei einem Wert von  $U_0 = -23.9V$  konnte eine Verweildauer der Ionen in der Falle von ungefähr 2h registriert werden. Ein weiteres Absenken des Potentials verschlechterte wieder die Speicherzeit. Die Abbildung 5.2 zeigt die unterschiedlich schnelle Abnahme der gespeicherten Ionenanzahl in Abhängigkeit von der Zeit. Hierbei wurde als Maß für die Anzahl der Ionen die Tiefe des Stromeinbruchs am Oszilloskop genommen. Exemplarisch sind nur die Messungen bei ‚optimalem‘ (Abb. 5.2 rechtes Bild) Speicherpotential und bei einer niedrigeren Speicherspannung (Abb. 5.2 linkes Bild) dargestellt.

Der nächste Schritt bestand nun in der Wahl des Puffergases. Aus Ergebnissen von früheren Messungen an  $Ba^+$  [185] wussten wir, dass homonukleare Moleküle, wie z. B.  $N_2$ , wegen der zusätzlich auftretenden Rotations- und Vibrationszustände, einen gegenüber Edelgasen um zwei Größenordnungen größeren Wirkungsquerschnitt haben, was sich auf die Quenchraten niederschlägt<sup>3</sup>. Praktisch bedeutet dies, dass beim Einsatz von Edelgas<sup>4</sup> als Puffergas bei einem ca. 100 mal höheren Druck gearbeitet werden muss, um die gleiche Quenchratenrate wie bei Verwendung von  $N_2$  zu erhalten. Die Wahl fiel somit erstmal auf Stickstoff. Desweiteren musste der Puffergasdruckbereich

<sup>3</sup>Für  $Ca^+$  geben Knoop et al. [153] folgende Werte an:

$\Gamma_Q(He) = (1.05 \pm 0.42) \cdot 10^{-12} cm^3 s^{-1}$ ,  $\Gamma_Q(Ne) = (0.9 \pm 0.7) \cdot 10^{-12} cm^3 s^{-1}$  und  $\Gamma_Q(N_2) = (1.7 \pm 0.2) \cdot 10^{-10} cm^3 s^{-1}$

<sup>4</sup>Im Falle von  $Ca^+$  kommt nur  $He$  oder  $Ne$  in Frage.



**Abb. 5.2:** Speicherzeitmessung bei zwei unterschiedlichen Potentialen. Das linke Bild wurde bei  $U_0 = -18V$  aufgenommen. Die Speicherzeit betrug  $\tau = 211s$ . Das rechte Bild hingegen wurde bei 'optimalem' Speicherpotential von  $U_0 = -23.9V$  aufgenommen mit  $\tau = 1547s$ .

sorgfältig gewählt werden, da uns auch aus vorangegangenen Messungen an  $Ba^+$  und  $Eu^+$ -Ionen bekannt war, dass das Quenchen des metastabilen  $D$ -Niveaus durch die Stöße mit dem Puffergas einen konkurrierenden Prozess zu den Relaxationen darstellt, die sich zwischen den Zeeman-Unterniveaus des Grundzustandes eines ionischen oder atomaren Systems ereignen. In einem optischen Mikrowellen-Doppelresonanzexperiment (siehe Abschnitt 5.3) wird das höherliegende Zeeman-Niveau des Grundzustandes mit einem Laser selektiv angeregt und entvölkert. Durch dieses optische Pumpen wird eine Besetzungszahldifferenz zwischen den beiden Untersuständen geschaffen, die zu einer detektierbaren Überhöhung der Fluoreszenzlichtintensität führt, wenn man Mikrowellen einstrahlt, die Übergänge zwischen den Zeemanuntersuständen induzieren. Eine Erhöhung der Relaxationsrate vom energetisch höheren ins energetisch tiefere Zeeman-Niveau, verursacht durch die Stöße mit Puffergasmolekülen, führt zu einer Zerstörung dieses optischen Pumpeffektes. Man muss somit ein Gleichgewicht finden, indem durch das Vorhandensein von Puffergas eine erhöhte Besetzungszahldichte im Grundzustand erzielt wird (durch Quenchen des metastabilen Niveaus), ohne durch stoßinduzierte Grundzustandsrelaxation in das energetisch tiefer liegende Zeeman-Unterniveau Signal zu verlieren.

Aufgrund sowohl dieser Vorüberlegungen als auch früherer Erfahrungen wurde die Vakuumapparatur mit Stickstoff auf  $5 \cdot 10^{-5} mbar$  ‚abgepuffert‘ und bei einer eingestrahnten Quadrupolfrequenz von  $\nu_c = 557 kHz$  (Anregungsamplitude  $10V_{pp}$ ) konnte am Oszilloskop für mehrere Stunden ein Absorptionssignal beobachtet werden. Die experimentell bestimmte Seitenbandfrequenz wich hierbei vom theoretischen Wert ab. Die Tabelle 5.1 zeigt eine Übersicht der Ioneneigenfrequenzen von  $Ca^+$  und  $K^+$ , wobei für die Magnetfeldstärke  $B \simeq 1.4342T$  eingesetzt wurde.

Bewegungsmode	$Ca^+$ [kHz]	$K^+$ [kHz]
$\nu_c$	550, 593	564, 771
$\nu_z^{\ddagger}$	134, 269	135, 980
$\nu_-$	16, 890	16, 874
$\nu_+$	533, 703	547, 897

**Tab. 5.1:** Ioneneigenfrequenzen von  $Ca^+$  und  $K^+$

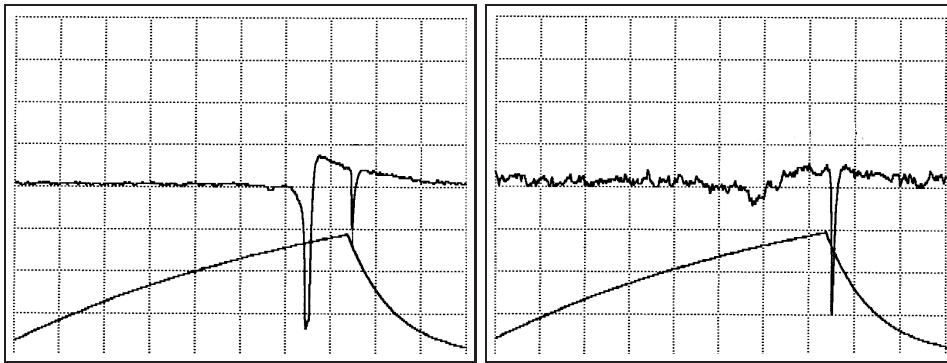
Trotz mehrmaliges Verstimmens des Lasers über den vermuteten Wellenlängenbereich konnten keine optischen Übergänge beobachtet werden. Die logische Schlussfolgerung dieser Beobachtung war, dass das sichtbare Signal am Oszilloskop entweder kein  $Ca^+$  war oder das Absorptionssignal ein Gemisch aus zwei benachbarten Massen ‚beinhaltete‘, wobei die gewünschten  $Ca^+$ -Ionen den kleineren Anteil bildeten und deshalb nur sehr wenig Fluoreszenzphotonen emittierten. In beiden Fällen bedeutete dies, dass das in makroskopischen Mengen in die Keramiköfen gefüllte metallische Calcium beim Glühen der Ofendrähte eine chemische Verbindung mit Stickstoff einging.<sup>5</sup> Außerdem wurde, wie sich nach Abschluss der Messungen an  $Ca^+$  zeigte, aus dem Rheniumfilament<sup>6</sup> in größeren Mengen Kalium freigesetzt, das in der Falle gespeichert wurde. Die folgende Beobachtung bestärkt die letztgenannte Vermutung: Nach Einschalten der Ionengetterpumpe wurden im UHV Ionen erzeugt. Zu sehen war am Oszilloskop das demodulierte Signal in Abb. 5.3 (linkes Bild). Anschließend wurde in einer Dipolanordnung – d. h. zwei benachbarte Ringsegmente wurden zusammengeschlossen – in radialer Ebene die *reduzierte Zyklotronfrequenz* von  $K^+$  eingestrahlt. Nach einigen Zyklen, d. h. einigen Durchläufen der Spannungsrampe, sah man am Oszilloskop das rechtsstehende Bild von Abb. 5.3. Der Absorptionsdip auf der ansteigenden Spannungsflanke ist fast vollständig verschwunden und das Signal<sup>7</sup> hat sich zu einer etwas höheren Masse verschoben (d. h. im rechten Bild ist das Absorptionssignal gegenüber dem Signal im linken Bild nach links gewandert). Über die eingestrahelte Hochfrequenz wurde Energie in eine der Ioneneigenbewegungen von  $K^+$  übertragen, die zum Ionenverlust desselben führte. Was an Signal nach diesem Vorgang übrigblieb identifizierten wir als  $Ca^+$ , dessen Ionenanzahl jedoch zu gering war, um es durch Laseranregung optisch beobachten zu können. Nach Einstrahlen der reduzierten

<sup>‡</sup>bei einer Speicherspannung von  $U_0 = -23.9V$

<sup>5</sup>Bei hohen Temperaturen findet eine chemische Umwandlung von Calcium in Calciumnitrid statt:  $3Ca + N_2 \longrightarrow Ca_3N_2 + 432.1kJ$

<sup>6</sup>Aus dem Katalog der Firma *Goodfellow* entnimmt man, dass das 99,97% reine Rhenium durch Wasserstoffreduktion des Kalium-Perrhenatsalzes gewonnen wird, das seinerseits durch die Ausfällung des Perrhenat-Ions  $(ReO_4)^-$  aus einer oxidierten Lösung extrahiert wird.

<sup>7</sup>Der Stromeinbruch auf der abfallenden Flanke ist gleich dem Signal auf der ansteigenden Flanke. Er erscheint lediglich schmaler, da der Spannungsbereich schneller mit einer steileren Steigung in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird.



**Abb. 5.3:** Demoduliertes elektronisches Nachweissignal. Das rechtsstehende Bild entstand nach einer dipolartigen Anregung der zu  $K^+$  gehörenden reduzierten Zyklotronbewegung.

Zyklotronfrequenz von  $Ca^+$  ( $\nu_+ \approx 534\text{kHz}$ ) verschwand auch dieser Peak. Die in der Penningfalle gespeicherte Ionenwolke von ca.  $10^6 - 10^7$  Teilchen bestand somit aus mehr als zwei Ionensorten, die jedoch mengenmäßig in einem disproportionalen Verhältnis zueinander standen, zu Gunsten der nicht erwünschten Teilchensorte  $K^+$ . Aus erst später einsichtigen Gründen<sup>8</sup> konnten die  $K^+$ -Ionen nicht dauerhaft von den  $Ca^+$ -Ionen separiert werden. Die kleinere Anzahl an vorhandenen  $Ca^+$ -Ionen wurde vielmehr bei einer Seitenbandfrequenz von  $\nu_c = 557\text{kHz}$  sympathetisch mit den  $K^+$ -Ionen gekühlt. Dabei konnte die Anregungsamplitude der Quadrupolanregung bis auf  $0.5V_{pp}$  herabgesenkt werden, ohne dass am Oszilloskop eine Veränderung zu beobachten war oder sich die Speicherzeit änderte. Man beachte hierbei, dass die experimentell ermittelte optimale Seitenbandfrequenz<sup>9</sup> genau zwischen dem theoretischen Wert für  $Ca^+$  ( $\nu_c \approx 550\text{kHz}$ ) und demjenigen für  $K^+$  ( $\nu_c \approx 564\text{kHz}$ ) lag.

Auch der Versuch, durch zusätzliches Einstrahlen der Magnetronfrequenz alle in der Falle gespeicherten Ionensorten zu destabilisieren und (bei ständiger Ionenerzeugung) mit Hilfe der ‚richtigen‘ Seitenbandfrequenz die gewünschten  $Ca^+$ -Ionen in der Falle zu akkumulieren, schlugen fehl, denn  $K^+$  wurde bei jedem Glühen des Ofendrahtes in großen Mengen produziert.

Die Verwendung von *Helium* als Puffergas konnte zwar das ‚Kaliumproblem‘ nicht lösen, doch blieb wenigstens die chemische Reaktion aus, so dass mehr  $Ca^+$ -Ionen in die Falle gelangten. Diese Vermutung stützt sich auf die

<sup>8</sup>Vermutlich ist die Puffergas-Seitenbandanregung-Kühlmethode nicht vollständig verstanden. Die theoretische Grundlage beschreibt nicht ein Ensemble von Ionen, die sich aufgrund der Coulombwechselwirkung gegenseitig beeinflussen, sondern nur ein *einzelnes* Teilchen.

<sup>9</sup>Bei  $\nu_c = 557\text{kHz}$  war die Verweildauer der gespeicherten Teilchen in der Falle maximal.

Tatsache, dass sich die eingestrahelte Zyklotronfrequenz von  $\nu_c = 557\text{kHz}$  auf  $\nu_c = 554\text{kHz}$  (Anregungsamplitude  $7V_{pp}$ ) herabsenkte, d. h. nun näher an dem theoretisch ermittelten Wert (siehe Tabelle 5.1) lag. Bei einem Druck von  $8 \cdot 10^{-3}\text{mbar}$  konnten die Ionen für einige Stunden gespeichert werden und es konnten erstmals die vier optischen Übergänge vom Grundzustand des ionischen Calciums in das erste angeregte  $P$ -Niveau beobachtet werden. Das Speicherpotential betrug nun  $U_0 = -18\text{V}$ . Am Oszilloskop sah man bei diesem hohen  $He$ -Puffergasdruck ein verbreitertes Absorptionssignal. Dies bedeutet, dass sich die Ionenwolke aufweitet und somit in anharmonische Bereiche des elektrischen Quadrupolpotentials gelangt. Dadurch wird der Spannungsbereich, in dem die Ionen durch den Nachweisschwingkreis Energie aufnehmen, größer.

Mit diesen neuen Speicherparametern (d. h.  $p = 8 \cdot 10^{-3}\text{mbar He}$ ,  $\nu_c = 554\text{kHz}$ ,  $A_{rf} = 7V_{pp}$  und  $U_0 = -18\text{V}$ ) konnten zwar im optischen Spektrum bei den stärkeren  $\sigma$ -Übergängen Zählraten von  $50 - 60\text{Hz}$  erreicht werden, doch war dieser Umstand im Hinblick auf die durchzuführende optische Mikrowellen-Doppelresonanz-Messung aus zweierlei Gründen nicht zufriedenstellend:

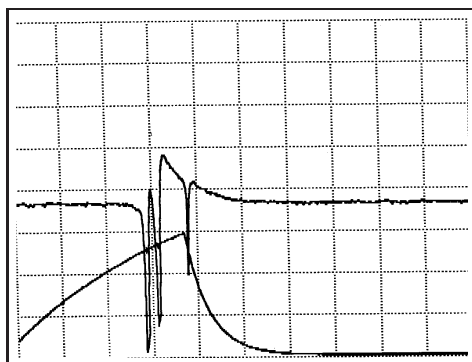
Zum einen hatte sich die Verweildauer der Ionen durch die erhöhte Stoßrate mit dem Puffergas drastisch verkürzt und zum anderen trat nun eine Erhöhung der bereits erwähnten Grundzustands-Relaxationsrate ein, so dass sich eine Einbuße in der Fluoreszenzlichtintensität des Grundzustands-Zeemanüberganges abzeichnete. Ein Ausweg aus diesem Dilemma bestand in der Reduzierung des  $He$ -Puffergasdruckes auf  $p = 3 \cdot 10^{-6}\text{mbar}$ , was zwar die ohnehin schon schlechte Quenchrage weiter verschlechterte (die Zählrate im optischen Spektrum sank auf  $20 - 30\text{Hz}$ <sup>10</sup> bei einer Dunkelrausch-Zählrate von  $4 - 7\text{Hz}$ ). Die dafür gewonnene Verlängerung der Speicherzeit auf ca.  $24\text{h}$  erlaubte jedoch, die Fluoreszenzphotonen des Mikrowellenspektrums über einen erheblich längeren Zeitraum zu akkumulieren. Bei diesem niedrigen Puffergasdruck sah das demodulierte Signal des Nachweisverstärkers folgendermaßen aus (siehe Abb. 5.4): Das Absorptionssignal wurde schmaler und es tauchte zusätzlich eine Doppelstruktur auf, wobei der Einbruch bei der betragsmäßig kleineren Spannung<sup>11</sup>, nach einer Weile kleiner wurde. Der größere Stromeinbruch stammte jedoch nicht vollständig von den gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen, da auch bei einer zeitlichen Abnahme des elektronischen Signals die optische Fluoreszenzrate sich nicht wesentlich verringerte.

---

<sup>10</sup>bei einer Laserleistung von ca.  $20\mu\text{W}$

<sup>11</sup>d. h. leichtere Ionenmasse





**Abb. 5.4:** Am Oszilloskop sichtbar gewordene Doppelstruktur im Ionen-Nachweissignal.

## 5.2 Die Aufnahme des optischen Spektrums von $Ca^+$

Zur Aufnahme der vier elektrischen Dipolübergänge von  $4^2S_{1/2}$  nach  $4^2P_{1/2}$  wurde der Ti:Sa-Laser über ein Frequenzintervall von etwa  $70GHz$ <sup>12</sup> verstimmt. Der optische Nachweis geschieht indirekt durch Beobachtung des Zerfalls aus dem angeregten  $4^2P_{1/2}$  in das metastabile  $3^2D_{3/2}$ -Niveau. Die beiden äußeren Signalüberhöhungen in den Abb. 5.5 und 5.6 entsprechen den  $\sigma^\pm$ -Übergängen:

$$4^2S_{1/2}, m_J = \pm\frac{1}{2} \longrightarrow 4^2P_{1/2}, m_J = \mp\frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \Delta m_J = \pm 1,$$

die  $\pm 27GHz$  vom Schwerpunkt des Systems<sup>13</sup> entfernt liegen, und die inneren Resonanzen sind die  $\pi$ -Übergänge:

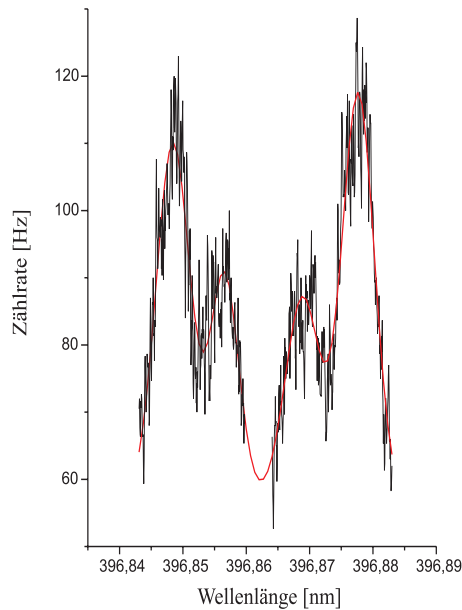
$$4^2S_{1/2}, m_J = \pm\frac{1}{2} \longrightarrow 4^2P_{1/2}, m_J = \pm\frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \Delta m_J = \pm 0,$$

die in einem Abstand von  $\pm 13GHz$  vom Schwerpunkt liegen.

Man kann alle vier möglichen Übergänge beobachten, da sich im Strahlengang des Lasers, bevor er auf das Brewsterfenster fällt und zur Falle gelangt, ein sog. „ $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen“ befindet. Dieses dünne Plättchen besteht aus einem optisch zweiachsigen Kristall (z. B. Glimmer oder Quarz) und zerlegt das einfallende Laserlicht bei richtiger Wahl der Achse in zwei senkrecht zueinander oszillierende linearpolarisierte Wellenbündel mit verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Dicke des Plättchens ist so gewählt, dass der Gangunterschied zwischen beiden Bündeln bei Austritt  $\frac{\lambda}{4}$  beträgt. Da in diesem speziellen Fall das linearpolarisierte Licht des Ti:Sa-Lasers nicht unter einem Winkel von  $45^\circ$  auf das  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen trifft, beträgt die Phasendifferenz nicht exakt  $\frac{\pi}{2}$ , und man erhält somit elliptisch polarisiertes Licht, das sowohl

<sup>12</sup>bezogen auf die frequenzverdoppelte Wellenlänge

<sup>13</sup>d. h. der Übergang  $4^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$  in Abwesenheit eines Magnetfeldes



**Abb. 5.5:** Optisches Spektrum des Überganges  $4^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$  bei einer Laserleistung von  $P = 400\mu W$ .

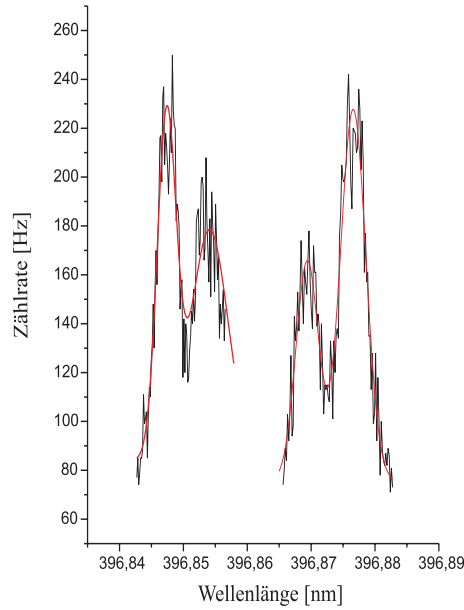
	$4^2P_{1/2}(m_J = -1/2)$	$4^2P_{1/2}(m_J = +1/2)$
$4^2S_{1/2}(m_J = +1/2)$	<b>396,84845(6)</b>	396,86889(12)
$4^2S_{1/2}(m_J = -1/2)$	396,85655(10)	<b>396,87766(6)</b>

**Tab. 5.2:** Die Wellenlängenangaben sind in nm ohne Korrektur des Brechungsindexes für den Übergang Luft-Vakuum. Die farbig unterlegten Werte sind die  $\sigma$ -Übergänge. Die in den runden Klammern angegebenen Fehler sind die Mittenfehler der an die optischen Spektren angepassten Gaußkurven.

linear als auch zirkular-polarisiertes Licht enthält. Das Vorhandensein der Beidhändigkeit des zirkular-polarisierten Lichtes (d. h. sowohl links- als auch rechts-zirkular) ist auf die Reflexion des Laserlichtes am  $180^\circ$ -Spiegel der Falle (siehe Abb. 4.2 bzw. 4.3) zurückzuführen. Da jedoch diese Polarisierungen nicht zu gleichen Anteilen entstehen, erhalten wir ein optisches Spektrum mit unterschiedlichen Peakhöhen<sup>14</sup>. Die Tabelle 5.2 fasst die Übergangswellenlängen zusammen, die sich aufgrund der Eichung des durchgestimmten Frequenzbereiches mit Hilfe eines Wavemeters ergeben.

Die Linienbreite der Übergänge wird hauptsächlich durch die Laserleistung und die Dopplerbreite bestimmt, da die spektrale Breite des Lasers mit  $< 1 MHz$  zu vernachlässigen ist. Das Intensitätsprofil der Doppler-verbreiter-

<sup>14</sup>Es sei am Rande bemerkt, dass dieses Phänomen der Resonanzfluoreszenz, d. h. die Wechselwirkung von Licht und Atomen/Ionen bereits in den zwanziger Jahren von R. W. Wood entdeckt wurde.



**Abb. 5.6:** Optisches Spektrum des Überganges  $4^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$  bei einer Laserleistung von  $P = 20\mu W$ . Es wurden hierbei vier Durchläufe aufaddiert, d. h. die Zählrate im Maximum der  $\sigma$ -Übergänge betrug ca.  $30\text{Hz}$ .

ten Spektrallinie hat in erster Näherung ein Gaußprofil:<sup>15</sup>

$$I(\omega) = I(\omega_0) e^{-\left[\frac{c(\omega - \omega_0)}{\omega_0 v_w}\right]^2}$$

$$\text{mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit } v_w = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Die Dopplerbreite entspricht der Halbwertsbreite (FWHM) und lässt sich ausdrücken als:

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{4 \ln 2} v_w = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{m}}$$

Durch Umformen ergibt sich für die mittlere kinetische Energie der Teilchen:

$$\overline{E_{kin}} = k \cdot T = \frac{\Delta\nu_D^2 \cdot \lambda_0^2 \cdot m}{8 \ln 2} \quad (5.1)$$

Aus den angefitzten Gaußkurven erhält man eine Linienbreite der Resonanzen in Abb. 5.5 von im Mittel  $9.7\text{GHz}$ . Nach Reduktion der Laserleistung von ursprünglich  $P = 400\mu W$  auf  $P = 20\mu W$  verschmälerten sich die Linienbreiten auf  $6.9\text{GHz}$  (Abb. 5.6). Ein weiteres Absenken der Laserleistung

<sup>15</sup>Eine genauere Betrachtung zeigt, dass eine Doppler-verbreitete Spektrallinie kein reines Gaußprofil darstellt, sondern eine Faltung aus einem Lorentz- und einem Gaußprofil ist, ein sog. *Voigt-Profil*.

führte zu keiner zusätzlichen Verkleinerung der Linienbreite; lediglich das Signal-zu-Rausch-Verhältnis verschlechterte sich. Deshalb kann man davon ausgehen, dass die Breite der optischen Übergänge in Abb. 5.6 hauptsächlich auf dem Dopplereffekt beruht. Setzt man in Glg. (5.1)  $\lambda_0 = 396.86nm$  und  $m = 40u$  ein, so ergibt sich eine mittlere kinetische Energie der Ionen von  $\overline{E_{kin}} \approx 0.5eV$ <sup>16</sup>, die ca. 20-mal höher liegt als die Energie der Puffergasatome bei Umgebungstemperatur, nämlich  $\frac{1}{40}eV$ . Dies bedeutet, dass das Seitenbandkühlen in Puffergasatmosphäre nicht effizient genug war: es funktionierte schlechter als von den theoretischen Berechnungen erwartet. Der Grund hierfür liegt vermutlich bei dem bereits erwähnten ‚Kalium-Problem‘. Dadurch, dass zusätzlich zu  $Ca^+$  mindestens noch eine weitere Ionensorte gespeichert wurde lag, die Seitenbandfrequenz  $\nu_c$ , die effektiv über die Ringelektrode eingestrahlt wurde, bei  $554kHz$ , d. h. um ca.  $4kHz$  gegenüber dem theoretischen Wert für  $Ca^+$ -Ionen zu höheren Frequenzen verschoben. Andererseits lag die Frequenz auch  $10kHz$  unterhalb des Wertes für  $K^+$ -Ionen. Somit konnte effizient keine Ionensorte gekühlt werden und Aufheizeffekte, die z. B.  $K^+$ -Ionen betrafen, übertrugen sich durch die Coulombwechselwirkung sympathetisch auf die  $Ca^+$ -Ionen.

Im folgenden Unterabschnitt soll die Anzahl der in der Penningfalle gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen mit Hilfe der Zählrate aus dem optischen Spektrum abgeschätzt werden. Um die Gesamtzahl der Ionen aus der Intensität im ersten Maximum der in Abb. 5.6 gezeigten laserinduzierten Übergänge zu bestimmen, müssen folgende Informationen bekannt sein:

- Die Dichteverteilung der in der Penningfalle gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen, um hieraus den Anteil der vom Laserstrahl getroffenen Ionen abschätzen zu können. Denn nur die Ionen, die mit dem Laserstrahl wechselwirken, emittieren die nachweisbaren Photonen auf der Wellenlänge  $866nm$ .
- Die Effizienz der optischen Detektion. Dies schließt die Berücksichtigung von Verlusten an Fluoreszenzphotonen auf ihrem Weg vom Fallenzentrum zum Photomultiplier ein.
- Der Umsetzungsfaktor der am Photomultiplier angeschlossenen Nachweiselektronik und der A/D-Wandelkarte im Computer.

Die drei aufgelisteten Punkte werden nun in umgekehrter Reihenfolge behandelt.

### Umsetzungsfaktor der Nachweiselektronik

Ausgangspunkt ist die Anzahl der Fluoreszenzphotonen  $N_\gamma$ , die im Photomultiplier einen bestimmten Multiplierstrom erzeugen. Dieser wird durch

<sup>16</sup>Entspricht einer Temperatur von  $T \simeq 6354K$ .

die ADC-Zählkarte in eine Zählrate  $N_{ADC}$  umgewandelt, die man am Computer-Bildschirm beobachtet. Somit kann man folgenden funktionalen Zusammenhang ansetzen:

$$N_{ADC} = \eta_{elektronik} \cdot N_{\gamma} \quad (5.2)$$

Der Umsetzungsfaktor der Elektronik  $\eta_{elektronik}$  setzt sich zusammen aus der Quantenausbeute der Photokathode des Multipliers  $\eta_Q$ , aus dem Verstärkungsfaktor des Photomultipliers  $V$  und aus der Wandelrate des ADC  $\eta_{ADC}$ . Es gilt somit:

$$\eta_{elektronik} = \eta_Q \cdot V \cdot e \cdot \eta_{ADC}$$

wobei  $e$  die Elementarladung darstellt. Die einzelnen Größen können aus den technischen Datenblättern für den Photomultiplier (Modell 943-02 von Hamamatsu) und für die ADC-Zählkarte (Modell ME260(D) von Meilhaus) entnommen werden. Mit den Werten

$$\begin{aligned} \eta_Q &= 10\% \quad (\text{bei einer Wellenlänge von } \lambda = 866nm) \\ V &= 2 \cdot 10^6 \quad (\text{bei einer Betriebsspannung von } U_B = 1750V) \\ \eta_{ADC} &= 10^{14} C^{-1} \end{aligned}$$

erhält man für den Umsetzungsfaktor:

$$\eta_{elektronik} = 3.2$$

### Effizienz der optischen Abbildung

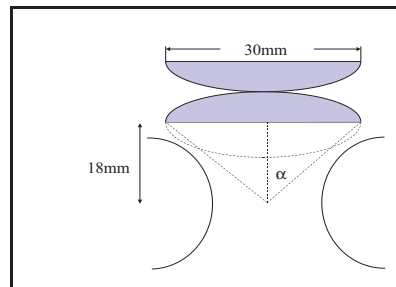
Ausgangspunkt ist hier zunächst einmal die Bestimmung des Raumwinkelanteils, der von den beiden sich oberhalb der oberen Kalotte befindenden Plankonvexlinsen erfasst wird. Dieser Anteil ist durch die Geometrie der Penningfalle vorgegeben. Aus der Zeichnung ergibt sich für den Winkel  $\alpha$ :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{15}{18}\right) \approx 0.69rad$$

Somit folgt für den Raumwinkelanteil:

$$\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{2\alpha}{4\pi} \approx 11\%.$$

Verfolgt man diesen Anteil an nachweisbaren Photonen mit Hilfe des Gesamtaufbaus in Abb. 4.1, so ergeben sich durch das Drahtnetz (obere Kalotte), die zwei Plankonvexlinsen, die Endflächen des Glasrüssels, den Plexiglasstab, den Interferenzfilter und durch die sich vor dem Photomultiplier befindende Sammellinse Transmissionen, die in der folgenden Tabelle aufgeführt sind:



Transmission durch die obere Kalotte	72%
Transmission nach Abzug der Verluste an 10 Oberflächen (2 Linsen, Glasrüssel, Plexiglasstab, Sammellinse), wobei der Verlust mit jeweils 4% angesetzt wird.	60%
Transmission durch den Interferenzfilter	32.5%

Somit ergibt sich eine Gesamteffizienz der optischen Detektion von

$$\eta_{optik} = 1.5\%$$

### Anteil der Fluoreszenzphotonen aus dem Übergang $4^2P_{1/2} \rightarrow 3^2D_{3/2}$

In dieser letzten Teilbetrachtung gehen wir von einer ellipsoidalen Verteilung der Ionenwolke aus, die rotationssymmetrisch bzgl. der  $z$ -Achse ist. Dieses geometrische Modell, dass die Ionen nach schneller Thermalisierung durch Ion-Ion-Stöße ein in guter Näherung *homogen geladenes Rotationsellipsoid* bilden, wurde eingehend von Jeffries [133, 134] und Knight [151] durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen erprobt. Als eine obere Abschätzung für die Ausdehnung der Ionenwolke in  $z$ -Richtung kann man trivialerweise den Abstand zwischen oberer und unterer Kalotte, also  $2 \cdot z_0$ , ansetzen. Die Ausdehnung in radialer Richtung wird begrenzt durch den Durchmesser des zylindrischen Keramikofens (siehe Abb. 4.2), da nur an dem Ort, wo auch Elektronen vom glühenden Rheniumfilament emittiert werden, auch neutral abgedampfte  $Ca$ -Atome ionisiert werden können. Ist es möglich einen funktionalen Zusammenhang für die Dichteverteilung der Ionen anzugeben, so kann man mit dieser Kenntnis auf den Anteil der vom Laserstrahl erfassten Ionen schließen.

Als Ansatz für ein einfaches Ionenmodell kann man sich ein Modell vorstellen, in dem die Ionenwolke durch eine thermodynamische Größe, nämlich die Temperaturverteilung, beschrieben wird. Die Puffergasatome stellen somit ein Wärmereservoir dar, das sich auf einer Temperatur  $T$  befindet. Geht man davon aus, dass die Ionen nach der Erzeugung relativ schnell im thermischen Gleichgewicht sind, so kann man die Wahrscheinlichkeit, in einem Raum- bzw. Geschwindigkeitsbereich  $d^3r$  bzw.  $d^3v$  ein Ion mit den Koordinaten  $\vec{r}$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zu finden, mit Hilfe der kanonischen Verteilung beschreiben:

$$P(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v \propto e^{-\frac{E(\vec{r}, \vec{v})}{kT}} d^3r d^3v$$

Die Energie  $E(\vec{r}, \vec{v})$  setzt sich hierbei folgendermaßen zusammen:

$$E(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2}mv^2 + eU$$

Nimmt man zunächst ein zylindersymmetrisches Speicherpotential an, so kann man  $U$  schreiben als:

$$U = \frac{r^2}{r_0^2}V_r + \frac{z^2}{z_0^2}V_z$$

$V_r$  bzw.  $V_z$  sind die Potentialtöpfe in radialer bzw. axialer Richtung. Somit ergibt sich für die Verteilungsfunktion  $f(\vec{r}, \vec{v})$

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{N}{r_0^2 z_0^2} \frac{\sqrt{8e^3 m^3 V_r^2 V_z}}{(2\pi kT)^3} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{r^2 e V_r}{r_0^2 kT} - \frac{z^2 e V_z}{z_0^2 kT}} \quad (5.3)$$

Der Vorfaktor ergibt sich aus der Normierungsbedingung:

$$\int_{\Omega} f(\vec{r}, \vec{v}) d^3 r d^3 v = N$$

wobei  $N$  die Gesamtzahl der gespeicherten Ionen ist integriert über das Fal-lenvolumen  $\Omega$ . Um nun die Dichteverteilung der Ionen zu erhalten muss (5.3) über  $d^3 v$  integriert werden:

$$n(\vec{r}) = \int f(\vec{r}, \vec{v}) d^3 v = 4\pi \int_0^{\infty} f(\vec{r}, \vec{v}) \cdot v^2 dv$$

Definiert man folgende „Breiten der räumlichen Ionenverteilung“

$$\Delta_r := r_0 \sqrt{\frac{kT}{eV_r}}$$

$$\Delta_z := z_0 \sqrt{\frac{kT}{eV_z}},$$

so folgt:

$$n(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{4\pi N}{r_0^2 z_0^2} \frac{\sqrt{e^3 m^3 V_r^2 V_z}}{\sqrt{8} (\pi kT)^3} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\Delta_r}\right)^2 - \left(\frac{z}{\Delta_z}\right)^2} \underbrace{\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{4 \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}}}$$

bzw.

$$n(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{N}{r_0^2 z_0^2} \frac{\sqrt{e^3 V_r^2 V_z}}{(\pi kT)^3} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\Delta_r}\right)^2 - \left(\frac{z}{\Delta_z}\right)^2} \quad (5.4)$$

Man sieht aus Glg. (5.4), dass die Ladungsverteilung sowohl radial als auch axial gaußförmig ist. Macht man die zusätzliche vereinfachende Annahme, dass das Speicherpotential rotationssymmetrisch sei, so kann man  $V_r = V_z = U$  ansetzen. Hieraus folgt für die Dichteverteilung in (5.4)

$$n(r, z) = A \cdot e^{\frac{1}{\Delta^2} \left(-\frac{r^2}{2} - z^2\right)} \quad (5.5)$$

$$\text{wobei } \Delta := z_0 \sqrt{\frac{kT}{eU}} \quad \text{und} \quad A := \frac{N}{r_0^2 z_0^2} \sqrt{\left(\frac{eU}{\pi kT}\right)^3}$$

Somit kann man schließlich den Anteil  $P_\gamma$  der vom Laserstrahl angeregten Ionen angeben über die Beziehung:

$$P_\gamma = \frac{\omega \iint n(r, z) d^3 r d^3 z}{\iint_\Omega n(r, z) d^3 r d^3 z}$$

wobei die Integrationsbereiche  $\omega$  bzw.  $\Omega$  die vom Laserstrahl erfassten Ionen bzw. das Fallenvolumen sind. Setzt man  $U = 18V$  und  $T = 6354K$  ein, so ergibt sich:

$$P_\gamma = \frac{\int_{-1.5}^{1.5} \left( \int_0^5 e^{\frac{1}{2.46396 \cdot 10^{-6}} (\frac{r^2}{2} - z^2)} \cdot r^2 dr \right) z^2 dz}{\int_{-9}^9 \left( \int_{-\sqrt{2} \cdot 9}^{\sqrt{2} \cdot 9} e^{\frac{1}{2.46396 \cdot 10^{-6}} (\frac{r^2}{2} - z^2)} \cdot r^2 dr \right) z^2 dz} \simeq 0.5$$

Dieser erhaltene Wert muss um den Faktor des Verzweigungsverhältnisses  $(P \rightarrow S)/(P \rightarrow D) = 15.88$  skaliert werden, da nur die Fluoreszenzphotonen bei  $\lambda = 866nm$  nachgewiesen werden. Man erhält somit für die Anzahl der in der Falle gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen

$$N_\gamma = \eta_{optik} \cdot P_{P \rightarrow D} \cdot N_{Ionen} \quad \text{mit} \quad P_{P \rightarrow D} = \frac{P_\gamma}{15.88} \approx 3.15\% \quad (5.6)$$

$N_\gamma$  ist aus Glg. (5.2) bekannt. Deshalb folgt als Gesamtergebnis:

$$N_{Ionen} = \frac{N_{ADC}}{\underbrace{\eta_Q \cdot V \cdot e \cdot \eta_{ADC}}_{\equiv \eta_{elektronik}} \cdot \eta_{optik} \cdot P_{P \rightarrow D}} \quad (5.7)$$

bzw. nach Einsetzen der Zahlenwerte:

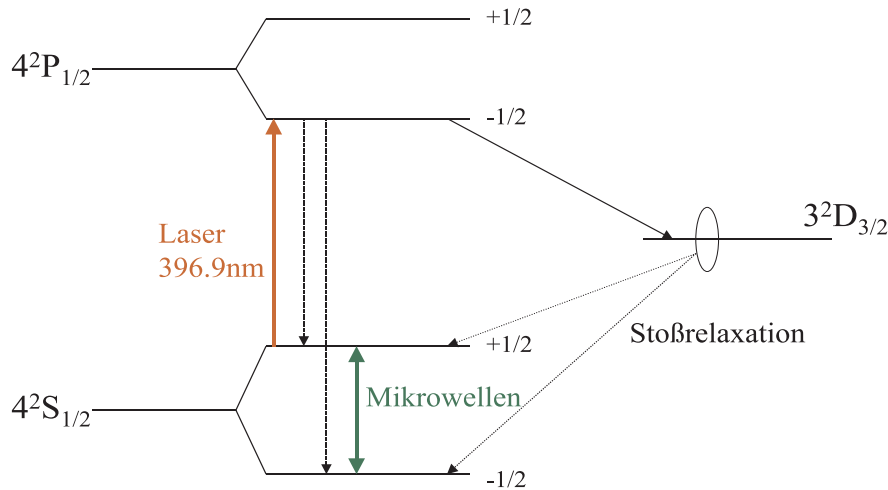
$$\boxed{N_{Ionen} \simeq 2 \cdot 10^4 \quad (\text{pro } cm^3)}$$

Man sieht somit, dass nur ein sehr kleiner Anteil an  $Ca^+$  für die Spektroskopie zur Verfügung stand.

### 5.3 Das Messprinzip der optischen Mikrowellen-Doppelresonanz

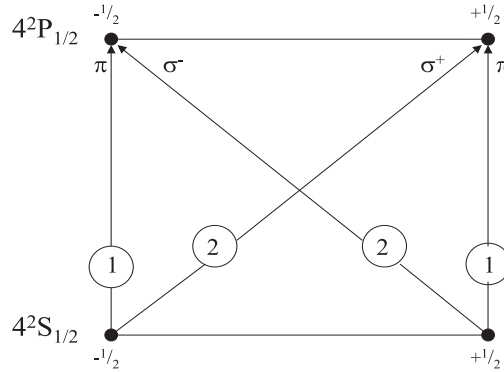
Die Methode, in welcher die in Abschnitt 5.2 vorgestellte optische Resonanzfluoreszenz mit der Hochfrequenz- oder Mikrowellentechnik kombiniert wird, nennt man *optische Mikrowellen-Doppelresonanztechnik*. Sie wurde ursprünglich von J. Brossel und F. Bitter 1949 vorgeschlagen und 1952 in einem





**Abb. 5.7:** Darstellung der optischen Mikrowellen-Doppelresonanzmethode zur Bestimmung der Zeemanaufspaltung im Grundzustand von  $^{40}Ca^+$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Zeemanaufspaltungen im metastabilen D-Niveau nicht eingetragen, sondern lediglich durch die eingezeichnete Ellipse angedeutet. Der Nachweis der Resonanzfluoreszenz erfolgt indirekt durch Beobachtung des Zerfalls  $4^2P_{1/2} \rightarrow 3^2D_{3/2}$ , der unter Aussendung von Fluoreszenzphotonen bei  $\lambda = 866\text{ nm}$  geschieht.

Pionierexperiment am Quecksilber-Zustand  $6^3P_1$  durchgeführt [38]. Die Methode beruht darauf, dass mit Hilfe linear polarisierter Resonanzeinstrahlung beträchtliche Besetzungsunterschiede angeregter magnetischer Unterniveaus der Atome erreicht werden können. Ein Ausgleich der Besetzungsunterschiede durch magnetische Dipolübergänge im angeregten Zustand kann anschließend durch Beobachtung der Änderung der Polarisation der Resonanzfluoreszenz nachgewiesen werden. Zur Messung von atomaren Größen des Grundzustandes, wie z. B. Zeeman-Aufspaltung und  $g_J$ -Faktor, wird diese optische Methode der Hochfrequenztechnik um die sog. Technik des *optischen Pumpens* erweitert. Das Wort ‚Pumpen‘ bedeutet hierbei, dass Elektronen in einem atomaren oder ionischen System von einem magnetischen Unterniveau in einen anderen transferiert, „gepumpt“, werden. Dies wird mittels der Polarisations-eigenschaft der Resonanzübergänge zwischen dem Grund- und dem angeregten Zustand erreicht. Das optische Pumpen ist somit eine effektive Methode, um in Atomen oder Ionen Besetzungsunterschiede in verschiedenen Quantenzuständen zu erzeugen und aufrecht zu erhalten. Dieser Sachverhalt soll, wie folgt, am Energie-Niveauschema von  $Ca^+$  (siehe Abb.



**Abb. 5.8:** Polarisationschema für  $\sigma^\pm$ - und  $\pi$ -Übergänge. Die magnetischen Zustände der Unterniveaus  $m_J$  sind als schwarze Punkte dargestellt und die Zahlen in den Kreisen geben die relativen Übergangswahrscheinlichkeiten an.

5.7) eingehender erläutert werden. Zunächst wird durch resonante Einstellung der Laserwellenlänge auf den  $\sigma^-$ -Übergang das Zeeman-Unterniveau  $4^2S_{1/2}(m_J = +\frac{1}{2})$  nach  $4^2P_{1/2}(m_J = -\frac{1}{2})$  gepumpt. Aufgrund der kurzen Lebensdauer von  $7ns$  [135] zerfallen die Ionen spontan vom angeregten Zustand entweder zurück in den Grundzustand oder in das metastabile  $D$ -Niveau mit einem Verzweigungsverhältnis von  $15 : 1$ . Durch die Anwesenheit von Puffergas wird der  $D$ -Zustand jedoch wieder entvölkert und die Ionen zerfallen durch Stoßrelaxation in die beiden Zeemanunterzustände des Grundniveaus. Da nun das  $(m_J = +\frac{1}{2})$ -Unterniveau des Grundzustandes ständig optisch gepumpt wird, entsteht ein Unterschied in der Besetzungszahldichte der beiden Zeeman-Niveaus ( $4^2S_{1/2}, m_J = \pm\frac{1}{2}$ ), d. h. das untere Zeeman-Niveau wird mit der Zeit stärker bevölkert und immer weniger Ionen nehmen am Pumpzyklus teil, was sich in einer Abnahme des detektierten Fluoreszenzlichtes bemerkbar macht. Wird jedoch der  $(4^2S_{1/2}, m_J = -\frac{1}{2})$ -Zustand an das lasergepumpte obere Zeeman-Niveau des Grundzustandes durch Einstrahlung des resonanten ( $\Delta m_J = 1$ )-Mikrowellenüberganges angebunden, so ändert man die Besetzungszahldifferenz und mehr Ionen nehmen wieder am optischen Pumpzyklus teil. Dies macht sich in einer Erhöhung der Fluoreszenzlichtrate aus dem Zerfall vom  $P$ - ins  $D$ -Niveau bemerkbar. Man erhält somit bei Verstimmung der Mikrowellenfrequenz eine magnetische Resonanzkurve des Überganges  $4^2S_{1/2}, m_J = +\frac{1}{2} \longleftrightarrow 4^2S_{1/2}, m_J = -\frac{1}{2}$ . Diese Methode der Laser-Mikrowellen-Doppelresonanz hat somit folgende Vorteile: Durch das optische Pumpen kann die Differenz in der Besetzungszahldichte der beiden durch die Mikrowellen angebundenen Zeeman-Niveaus größer gemacht

werden, als dies bei einer thermischen Besetzung möglich wäre. Somit erhält man, selbst wenn nur ein Bruchteil der Ionen ins angeregte  $P$ -Niveau gepumpt wird, eine größere Absorption der Mikrowellen. Im thermischen Gleichgewicht ist bekanntlich das Verhältnis der Besetzungsdichten  $N_i$ ,  $N_k$  zweier Niveaus  $|i\rangle$  und  $|k\rangle$ , die respektive die Energien  $E_i$  und  $E_k$  mit  $E_i < E_k$  besitzen, gegeben durch:

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (5.8)$$

mit  $h\nu \equiv E_k - E_i$

wobei der Index  $k$  den Grundzustand und der Index  $i$  einen angeregten Zustand darstellen. Für die in diesem Teil des Experimentes verwendete Mikrowellenfrequenz von  $\nu \approx 40\text{GHz}$ <sup>17</sup> ist der Exponent in (5.8) bei Zimmertemperatur ( $kT \approx \frac{1}{40}eV$ ) sehr klein und man kann deshalb die Absorption der Mikrowelle über eine Strecke  $\Delta x$  gemäß dem Beerschen Gesetz der linearen Absorption für den Fall  $g_i = g_k$  schreiben als

$$\Delta I = -I_0 \sigma_{ik} \Delta x (N_i - N_k) \approx -I_0 \sigma_{ik} \Delta x N_i \frac{h\nu}{kT}$$

Da  $\frac{h\nu}{kT} \approx 10^{-3}$ , bedeutet dies, dass die Absorption der Mikrowelle um den Faktor  $10^3$  ansteigt, wenn die Besetzungsdichte  $N_k$  durch optisches Pumpen so reduziert wird, dass  $N_k \approx N_i$  gilt. D.h. die Besetzung des angeregten Zustandes  $|k\rangle$  wird auf einen Wert gebracht, welcher einer Besetzung des Grundzustandes  $|i\rangle$  nahekommt, wie sie im thermischen Gleichgewicht vorzufinden ist, während alle übrigen Niveaus im angeregten Zustand (in diesem Fall  $4^2P_{1/2}$ ,  $m_J = +\frac{1}{2}$ ) thermisch kaum besetzt sind. Da man zudem noch durch die spektral aufgelöste Messung der Laser-induzierten Fluoreszenz das optisch gepumpte Niveau kennt, können die Mikrowellenübergänge bei komplexeren ionischen Systemen wie z. B.  $Eu^+$  leicht identifiziert werden, weil die Übergänge *vom* oder *zum* optisch gepumpten Niveau wesentlich größere Intensitäten haben. Es sei in diesem Zusammenhang bemerkt, dass sich die  $\pi$ -Übergänge ( $\Delta m_J = 0$ ) in der Absorption aus dem Grundzustand nicht zum optischen Pumpen eignen, da sie völlig symmetrisch durch spontane Übergänge in den Grundzustand zurückfallen. Lediglich bei einer Bestrahlung des atomaren oder ionischen Systems mit den zirkular-polarisierten Komponenten  $\sigma^+$  oder  $\sigma^-$  kommt eine Besetzungsdifferenz der beiden Grundzustandsniveaus zustande.

## 5.4 Die Aufnahme einer Resonanzkurve

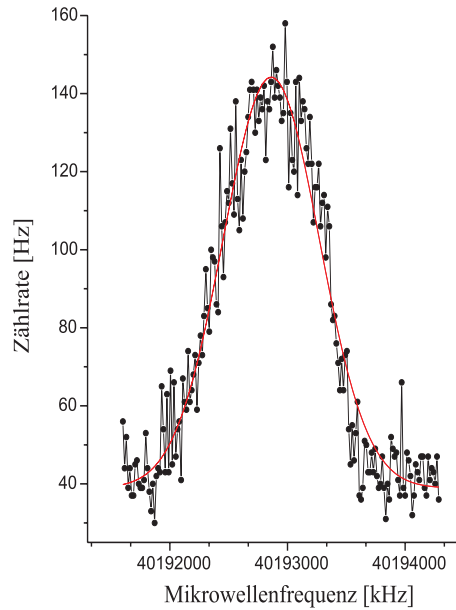
Bei dem im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Prozess – bestehend aus der Präparation eines spinpolarisierten Zustandes durch das optische Pumpen und anschließender Zerstörung des Polarisationsgrades der

<sup>17</sup>Dies entspricht einer Energie von ca.  $1.65 \cdot 10^{-4}eV$ .

benachbarten Zeeman-Unterniveaus durch Einstrahlung von resonanten Mikrowellen – spielt die Anwesenheit von Puffergas eine wichtige Rolle. Zusätzlich zur Entvölkerung der im Magnetfeld aufgespaltenen metastabilen  $D$ -Niveaus bewirkt es ein Mischen der Zeemanzustände. Dies verhindert eine vollkommene Entleerung des optisch gepumpten ( $m_J = +\frac{1}{2}$ )-Niveaus im Grundzustand. Dadurch stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein, das für eine konstante Rate von Ionen sorgt, die in das obere Zeeman-Niveau des Grundzustandes gelangen. Entscheidend ist hierbei die Größe des Puffergasdruckes, denn ein zu hoher Druck erlaubt ein übermäßiges Mischen der Zeemanzustände, weshalb die Mikrowellen-Anbindung des benachbarten Zustandes an den Laser-gepumpten Zustand zu keiner weiteren Erhöhung der Resonanzfluoreszenz führt. Ein zu niedriger Druck bewirkt hingegen kein ausreichend gutes Mischen der Zeemanzustände im Grundzustand und eine schlechte Quenchrage der  $D$ -Zustände. Als Folge hat man ein schlechtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis in den aufgenommenen Resonanzkurven, das nur durch lange Integrationszeiten, d. h. die Aufsummierung von mehreren Kurven über einen längeren Zeitraum, verbessert werden kann. Abb. 5.9 zeigt eine solche magnetische Resonanzkurve, die bei einem  $He$ -Puffergasdruck von  $3 \cdot 10^{-6} mbar$  aufgenommen wurde. Wie bereits in Abschnitt 5.1 erwähnt wurde eine, im Gegensatz zu einem Druck von  $8 \cdot 10^{-3} mbar$  schlechtere Quenchrage und ebensolche Mischung der Zeeman-Grundzustandsniveaus in Kauf genommen zu Gunsten einer längeren Speicherzeit der Ionen im Penningkäfig. Der daraus resultierende Nachteil einer sehr niedrigen Zählrate wurde durch lange Integrationszeiten kompensiert. Die dargestellte Resonanzkurve ist das Ergebnis von 20 Durchläufen.

Das Mikrowellenspektrum ist in erster Ordnung Doppler-frei, da die Amplitude der Ioneneigenbewegungen sehr viel kleiner als die Wellenlänge der eingestrahlten Mikrowellen<sup>18</sup> ist, so dass das sog. Dicke-Kriterium erfüllt ist [69]. Die Verbreiterung von  $817 kHz$  ist somit vorwiegend auf die hohe Mikrowellenleistung zurückzuführen. Beim Durchlegen einer an die Messpunkte angepassten Gaußfunktion sieht man, dass die aufgenommene Resonanzkurve eine leichte Asymmetrie aufweist. Die Mittenfrequenz des Mikrowellenspektrums ist hierbei gegenüber dem Maximum der durchgelegten symmetrischen Kurve etwas nach rechts, d. h. zu höheren Frequenzen, verschoben und die linke Flanke der Kurve fällt weniger steil ab als die entsprechende rechte Flanke. Der Grund für diese asymmetrische Linienform der Mikrowellenresonanz liegt im optischen Pumpen. Vernachlässigt man zunächst die Mikrowellen, so wird durch optische Anregung des Überganges ( $4^2S_{1/2}, m_J = +1/2$ )  $\rightarrow$  ( $4^2P_{1/2}, m_J = -1/2$ ) ein Pumpzyklus gestartet, der nach einiger Zeit zu einem Pumpgleichgewicht führt. Dieses Gleichgewicht ergibt sich aus den Übergangsraten  $S \leftrightarrow P$ ,  $P \leftrightarrow D$  und  $D \leftrightarrow S$  sowie aus der Laseranregungsrate und der Quenchrage (siehe Abb. 5.10).

<sup>18</sup>Bei einer Frequenz von  $40 GHz$  beträgt die Wellenlänge  $7.5 mm$ .



**Abb. 5.9:** Graphische Darstellung einer Mikrowellen-Resonanzkurve. Insgesamt wurden 20 Durchläufe aufaddiert, d. h. die Zählrate im Maximum der Kurve betrug pro Durchlauf ca. 5 Hz. Die Resonanzkurve wurde mit negativen Frequenzschrittweiten aufgenommen, d. h. von höheren zu niedrigeren Frequenzen.

Strahlt man nun die Mikrowellen ein, so wird dieses Pumpgleichgewicht gestört, da im Falle von resonanter Einstrahlung magnetische Dipolübergänge in die durch den Laser geleerten Zeeman-Unterniveaus des Grundzustandes angeregt werden und somit verstärkt optisches Pumpen in den metastabilen Zustand stattfindet. Verstimmt man dabei das Hochfrequenzfeld schneller als die Zeitkonstante des optischen Pumpens, so lässt man den Ionen keine Zeit, um aus dem  $D$ -Niveau in die beiden Zeeman-Untersubzustände des Grundniveaus zu relaxieren. Die Folge hiervon ist, dass die Besetzungszahl wie im anfänglichen Pumpgleichgewicht<sup>19</sup> nicht mehr erreicht wird. Dies führt schließlich zu einer Verringerung der Signalüberhöhung und zu einer Verschmierung der höherfrequenten Flanke im Mikrowellenspektrum, da beim nächsten Frequenzschritt nach Erreichen des Maximums weniger Ionen im ( $4^2S_{1/2}, m_J = -\frac{1}{2}$ )-Zustand vorhanden sind. Außerdem verschiebt sich in diesem Fall das Maximum der Resonanzkurve zu einer kleineren Frequenz hin. Ändert man die Richtung der Frequenzverstimmung, d. h. geht man mit negativen Frequenzschrittweiten durch die Resonanz von großen zu kleinen Frequenzen, so taucht die Verschmierung auf der niederfrequenten Flanke auf. Diese Asymmetrie verschwindet, wenn man entweder die Laserleistung reduziert und somit das optische Pumpen verringert oder beim Durchstim-

<sup>19</sup>z. B. ( $4^2S_{1/2}, m_J = +\frac{1}{2}$ ) = 10%, ( $4^2S_{1/2}, m_J = -\frac{1}{2}$ ) = 90%

men der Mikrowellen von einem Frequenzschritt zum nächsten genügend lange wartet, bis das anfänglich, vor dem Einstrahlen des Hochfrequenzfeldes, vorhandene Pumpgleichgewicht wieder hergestellt wird. Diese experimentell beobachtete Dynamik des optischen Pumpens und der Zerstörung der Grundzustandpolarisation durch die eingestrahnten Mikrowellen lässt sich theoretisch durch die Lösungen der Ratengleichungen für das in Abb. 5.10(a) dargestellte Pumpschema beschreiben. Setzt man die ermittelten numerischen Lösungen in die Formel, die die Übergangswahrscheinlichkeit von Mikrowellenübergängen zwischen zwei benachbarten Zuständen beschreibt, ein, so kann man bei Variation der Laseranregungsrate, der Mikrowellenleistung (ausgedrückt durch die Mikrowellenübergangsrate) und der Durchstimmgeschwindigkeit die Asymmetrie in der Linienform erklären. Ausgangspunkt sind die Ratengleichungen, die ganz allgemein folgende Form besitzen:

$$\dot{n}_i = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \cdot n_j \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, m$$

wobei  $n_i$  bzw.  $n_j$  die Besetzungszahl des Zustandes  $i$  bzw.  $j$  ist und  $\gamma_{ij}$  die Übergangsrate zwischen den beiden beteiligten Zuständen darstellt. Die Verzweungsverhältnisse in die einzelnen Zeeman-Unterniveaus (siehe Abb. 5.10(b)) ergeben sich aus dem Betragsquadrat der Clebsch-Gordan Koeffizienten des jeweiligen Überganges: Nach dem Wigner-Eckhart-Theorem ist die Übergangswahrscheinlichkeit für einen elektrischen oder magnetischen Übergang von einem Zustand  $|J, m_J\rangle$  in einen Zustand  $|J', m'_J\rangle$  proportional zur von  $m_J$  unabhängigen Übergangswahrscheinlichkeit multipliziert mit dem zugehörigen Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Der Übergang  $|J\rangle \xrightarrow{\lambda} |J'\rangle$  verzweigt sich somit in die  $(2J' + 1)$ -Zustände  $|J', m'_J\rangle$  wie die zugehörigen Clebsch-Gordan-Koeffizienten und für die Übergangsrate  $\gamma_{jj'}^s$ , die die spontane Emission vom Zustand mit der Energie  $E_J$  in den Zustand mit der Energie  $E_{J'}$  beschreibt, ergibt sich [35]:

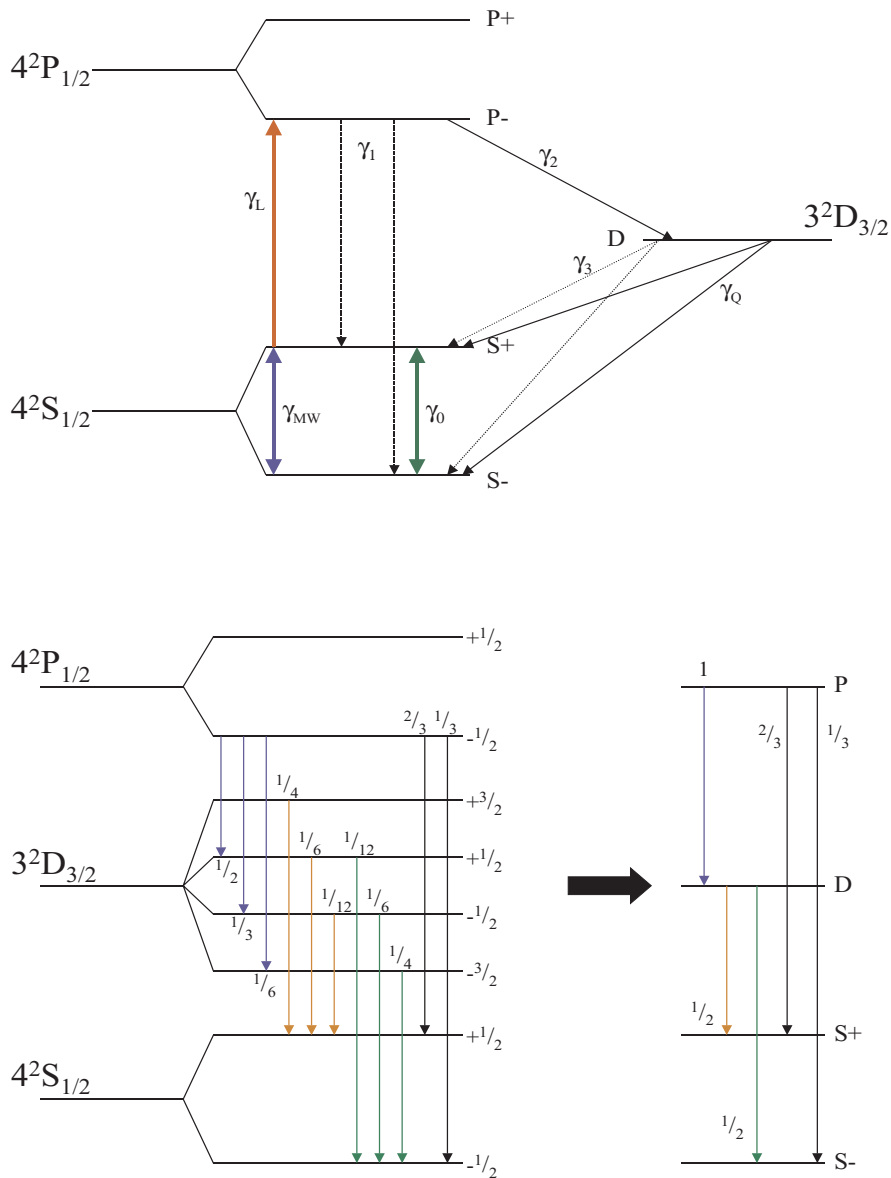
$$\gamma_{jj'}^s = \frac{1}{2\pi\hbar c^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \omega_{jj'}^3 |\hat{\epsilon} \cdot \langle \alpha', J', m'_J | \hat{\mathbf{D}} | \alpha, J, m_J \rangle|^2 \quad (5.9)$$

Das skalare Produkt aus Polarisationsvektor  $\hat{\epsilon}$  und elektrischem Dipolmoment  $\hat{\mathbf{D}}$  kann in sphärischen Koordinaten folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\hat{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \sum_{q=0,\pm 1} \epsilon_q^* D_q$$

Somit lässt sich (5.9) umschreiben zu:

$$\begin{aligned} \gamma_{jj'}^s &= \frac{1}{2\pi\hbar c^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \omega_{jj'}^3 \epsilon_q^2 \cdot \underbrace{|\langle \alpha', J', m'_J | D_q | \alpha, J, m_J \rangle|^2}_{= \frac{1}{2J'+1} |\langle J, \lambda, m_J, q | J', m'_J \rangle|^2} \cdot |\langle \alpha', J' | \hat{\mathbf{D}} | \alpha, J \rangle|^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$



**Abb. 5.10:** (a) Zu den Ratengleichungen zugehöriges Pumpschema. Die Verzweungsverhältnisse (b) ergeben sich aus dem Betragquadrat der Clebsch-Gordan Koeffizienten des jeweiligen Überganges. Diese sind im Anhang D berechnet.

wobei für Dipolübergänge  $\lambda = 1$ , für Quadrupolübergänge  $\lambda = 2$ , usw. gilt und  $q \in [-\lambda, \lambda]$ . Aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten  $\langle J, \lambda, m_J, q | J', m'_J \rangle$  ergeben sich folgende Auswahlregeln für den Fall eines elektrischen Dipolüberganges:

$$\begin{aligned}\Delta m_J &= 0, \pm 1 \\ \Delta J &= 0, \pm 1 \quad \text{mit} \quad J = 0 \leftrightarrow J' = 0 \quad \text{verboten.}\end{aligned}$$

An Gleichung (5.10) sieht man, dass die Übergangswahrscheinlichkeit nur dann einen nichtverschwindenden Beitrag besitzt, wenn die Zustände  $|J\rangle$  und  $|J'\rangle$  unterschiedliche Parität haben, da unter einer Paritätsoperation das Dipolmoment  $\hat{\mathbf{D}}$  das Vorzeichen ändert und zudem die atomaren Zustände Eigenzustände des Paritätsoperators sind (Laporte-Regel). Für *elektrische* Multipolübergänge ändert sich die Parität für ungerades  $\lambda$  und ändert sich nicht für gerades  $\lambda$ . Für *magnetische* Multipolübergänge bleibt dagegen die Parität für ungerades  $\lambda$  erhalten und ändert sich nur für gerades  $\lambda$ . Man kann somit die Auswahlregeln für jeden Multipolübergang angeben:

$$\begin{aligned}\Delta m_J &= 0, \pm 1 \quad \forall \lambda \\ |\Delta J| &= \lambda, \lambda - 1, \lambda - 2, \dots, 0 \quad \text{mit} \quad J + J' > \lambda\end{aligned}$$

Mit dem bisher Gesagten erhält man die in Abb. 5.10(b) eingezeichneten Übergänge mit den jeweiligen Verzweigungsverhältnissen<sup>20</sup>. Kombiniert man diese Erkenntnis mit dem in Abb. 5.10(a) dargestellten Pumpschema, so erhält man für  $Ca^+$  folgendes Ratengleichungssystem:

$$\begin{aligned}\dot{n}_{S_-} &= -\frac{1}{2}\gamma_0 n_{S_-} + \frac{1}{2}\gamma_0 n_{S_+} + \frac{1}{3}\gamma_1 n_{P_-} + \frac{1}{2}(\gamma_S + \gamma_Q) n_D \\ \dot{n}_{S_+} &= +\frac{1}{2}\gamma_0 n_{S_-} - \frac{1}{2}\gamma_0 n_{S_+} - \gamma_L n_{S_+} + \frac{2}{3}\gamma_1 n_{P_-} + \gamma_L n_{P_-} + \frac{1}{2}(\gamma_S + \gamma_Q) n_D \\ \dot{n}_{P_-} &= +\gamma_L n_{S_+} - \gamma_2 n_{P_-} - \gamma_1 n_{P_-} - \gamma_L n_{P_-} \\ \dot{n}_D &= +\gamma_2 n_{P_-} - (\gamma_S + \gamma_Q) n_D\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich kompakter schreiben in der Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \dot{n}_{S_-} \\ \dot{n}_{S_+} \\ \dot{n}_{P_-} \\ \dot{n}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2\gamma_0 & +1/2\gamma_0 & +1/3\gamma_1 & 1/2(\gamma_S + \gamma_Q) \\ +1/2\gamma_0 & -(1/2\gamma_0 + \gamma_L) & 2/3\gamma_1 + \gamma_L & 1/2(\gamma_S + \gamma_Q) \\ 0 & \gamma_L & -(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_L) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & -(\gamma_S + \gamma_Q) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{S_-} \\ n_{S_+} \\ n_{P_-} \\ n_D \end{pmatrix}$$

Hierbei sind:

- $\gamma_0$  : Relaxationsrate zwischen den Zeemanunterniveaus des Grundzustandes
- $\gamma_Q$  : Quenchrage von  $D \rightarrow S$
- $\gamma_1$  : Übergangsrate der gesamten spontanen Emission von  $P \rightarrow S$
- $\gamma_2$  : Übergangsrate der gesamten spontanen Emission von  $P \rightarrow D$
- $\gamma_S$  : gesamte spontane Übergangsrate von  $D \rightarrow S$
- $\gamma_L$  : induzierte Emission und Absorption durch den resonant eingestrahlenen Laser

<sup>20</sup>Eine explizite Berechnung der Verzweigungsverhältnisse findet sich in Anhang D.



Die Übergangsraten  $\gamma_1, \gamma_2$  sind bestimmt durch die Lebensdauer des ( $4^2P_{1/2}$ )-Zustandes. Zusätzlich muss noch das Verzweigungsverhältnis  $\frac{4^2P_{1/2} \rightarrow 4^2S_{1/2}}{4^2P_{1/2} \rightarrow 3^2D_{3/2}}$  berücksichtigt werden, das von Liaw [183] zu 15.88 bestimmt wurde. Mit der von Jin [135] angegebenen Lebensdauer von  $\tau(Ca^+, 4^2P_{1/2}) = 7.098(20)ns$  erhält man:

$$\gamma_1 = 1.4 \cdot 10^8 Hz \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_1}{15.88} = 8.9 \cdot 10^6 Hz$$

Die Übergangsrate  $D \rightarrow S$  ergibt sich zu  $\gamma_S \approx 0.9 Hz$ , wenn man eine mittlere Lebensdauer des metastabilen Niveaus  $3^2D_{3/2}$  von  $1113ms$  [8] ansetzt. Weiterhin werden für die Relaxationsrate  $\gamma_0$  und die Laseranregungsrate  $\gamma_L$  Folgendes angenommen:

$$\gamma_0 = 0.01 Hz \quad \text{und} \quad \gamma_L = (10^2 - 10^6) Hz$$

Schließlich ergibt sich  $\gamma_Q$  mit Hilfe der Beziehung<sup>21</sup>

$$\gamma_Q = \frac{p}{kT} \cdot \Gamma_Q \equiv \frac{p}{kT} \langle v_R \cdot \sigma_Q \rangle \equiv \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot \mu}} \cdot \sigma_Q$$

wobei für den Puffergasdruck  $p = 3 \cdot 10^{-4} Pa$  eingesetzt wurde bei einer Iontemperatur von  $T \approx 6354K^\ddagger$  und einem Wirkungsquerschnitt von  $\sigma(He) = 2 \cdot 10^{-22} m^2$  [153]:

$$\gamma_Q = 4 \cdot 10^{-3} Hz$$

Mit Hilfe des Programms MATHEMATICA<sup>®</sup> erhält man folgende numerische Lösungen für die einzelnen Besetzungszahldichten, wobei für die Laseranregungsrate  $\gamma_L = 10^2 Hz$  gewählt wurde und als Anfangsbedingungen  $n_{S_-}(t=0) = n_{S_+}(t=0) = \frac{1}{2}$ ,  $n_{P_-}(t=0) = n_D(t=0) = 0$  eingesetzt wurde:

$$n_{S_-}(t) = 0.99889 + 1.05241 \cdot 10^{-7} e^{-1.489 \cdot 10^8 t} - 0.41717 e^{-37.4013 t} \\ - 8.17257 \cdot 10^{-2} e^{-0.830795 t}$$

$$n_{S_+}(t) = 1.43858 \cdot 10^{-4} + 2.10483 \cdot 10^{-7} e^{-1.489 \cdot 10^8 t} + 0.49887 e^{-37.4013 t} \\ + 9.86952 \cdot 10^{-4} e^{-0.830795 t}$$

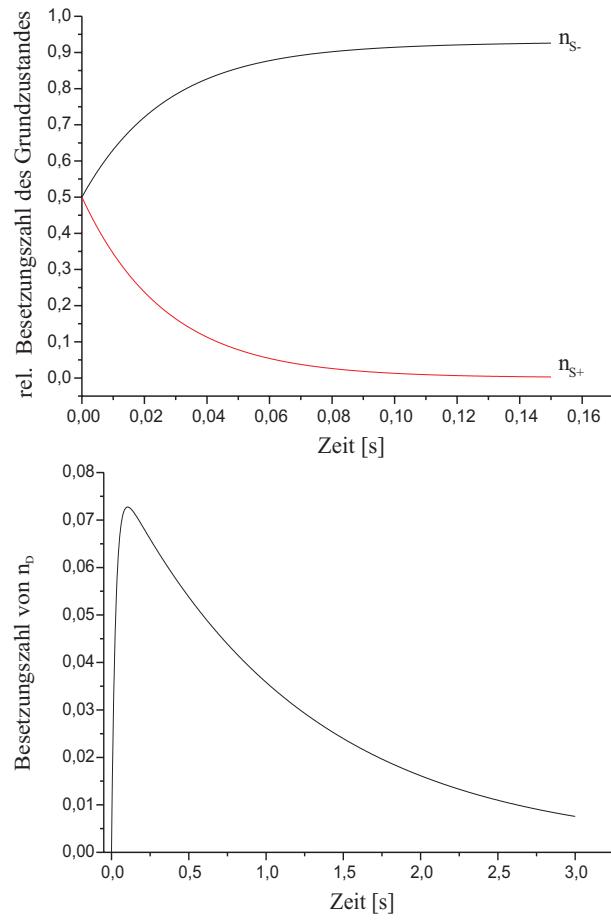
$$n_{P_-}(t) = 2.75277 \cdot 10^{-7} - 3.35795 \cdot 10^{-7} e^{-1.489 \cdot 10^8 t} + 3.02727 \cdot 10^{-7} e^{-37.4013 t} \\ - 6.05455 \cdot 10^{-7} e^{-0.830795 t}$$

$$n_D(t) = 9.61718 \cdot 10^{-4} + 2.00710 e^{-1.489 \cdot 10^8 t} - 8.16992 \cdot 10^{-2} e^{-37.4013 t} \\ + 8.07373 \cdot 10^{-2} e^{-0.830795 t}$$

Die Abb. 5.11 gibt diesen zeitlichen Verlauf für die beiden Zeemanuntersnive-

<sup>21</sup> $\mu$  ist hierbei die reduzierte Masse des  $Ca^+$ -Puffergas-Systems,  $v_R$  die Relativgeschwindigkeit der Ionen bezüglich der Puffergasatome und  $\Gamma_Q$  die Quenchrate.

<sup>‡</sup>Abgeschätzt durch die Linienbreiten der optischen Übergänge in Abschnitt 5.2.



**Abb. 5.11:** Graphische Darstellung der zeitlichen Veränderung der Besetzungszahlen des Grundzustandes (oberes Bild) und des metastabilen Niveaus (unteres Bild) von  $Ca^+$ , die sich aus den numerischen Lösungen der Ratengleichungen ergeben.

aus des Grundzustandes und für das metastabile  $D$ -Niveau graphisch wieder. Bei einer Erhöhung der Laserintensität auf  $\lambda = 10^6 Hz$  wird das Pumpgleichgewicht früher erreicht. Die Entvölkerung des  $D$ -Zustandes bleibt jedoch – so wie man es erwartet – unberührt davon. Nach einer Zeit  $t = t_0$  werden nun Mikrowellen eingestrahlt (in der Abb. 5.10(a) ist dies durch die Übergangsrates  $\gamma_{MW}$  dargestellt). In der Ausdrucksweise der Quantenmechanik kann man diesen Vorgang als eine „oszillatorische Störung“ betrachten, die Übergänge zwischen den Zeemanzuständen  $|4^2S_{1/2}, m_J = +\frac{1}{2}\rangle \equiv |q\rangle$  und  $|4^2S_{1/2}, m_J = -\frac{1}{2}\rangle \equiv |p\rangle$  induziert mit den respektiven Eigenenergien  $E_q$  und  $E_p$ . Diese Störung hat als Matrix ausgedrückt folgende Form:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\gamma_{MW}e^{i\omega t} \\ \hbar\gamma_{MW}e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Setzt man für das System  $(p, q)$  als Wellenfunktion

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} C_p(t)\psi_p \\ C_q(t)\psi_q \end{pmatrix}$$

an, so ergibt sich für die zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{V})\Psi$$

wobei  $\mathcal{H}_0$  der Hamilton-Operator des ungestörten Systems ist mit

$$\mathcal{H}_0\Psi = \begin{pmatrix} E_p \\ E_q \end{pmatrix} \Psi.$$

Einsetzen von (5.11) in die Schrödingergleichung ergibt ein Differentialgleichungssystem von zwei gekoppelten DGL erster Ordnung:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}C_p(t) &= E_pC_p(t) + \hbar\gamma_{MW}e^{i\omega t}C_q(t) \\ i\hbar\frac{d}{dt}C_q(t) &= \hbar\gamma_{MW}e^{-i\omega t}C_p(t) + E_qC_q(t) \end{aligned}$$

bzw. mit den Definitionen  $p := \frac{E_p}{\hbar}$  und  $q := \frac{E_q}{\hbar}$

$$\frac{d}{dt}C_p(t) = -ipC_p(t) - i\gamma_{MW}e^{i\omega t}C_q(t) \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{dt}C_q(t) = -i\gamma_{MW}e^{-i\omega t}C_p(t) - iqC_q(t) \quad (5.13)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit  $W_{pq}$  bzw.  $W_{qp}$  für den Übergang vom Zustand  $p$  nach  $q$  bzw. vom Zustand  $q$  nach  $p$  erhält man durch Bildung des

Betragsquadrates der Koeffizienten  $C_q(t)$  bzw.  $C_p(t)$ . Ziel ist also, das Gleichungssystem (5.12), (5.13) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} C_q(t=0) &= n_{s_+}(t_0) \\ C_p(t=0) &= n_{s_-}(t_0) \end{aligned} \quad (5.14)$$

zu lösen. Wenn man o. B. d. A. die Lösung für  $C_q(t)$  hat, so folgt über die Normierungsbedingung  $|C_q(t)|^2 + |C_p(t)|^2 = 1$  unmittelbar die Lösung für  $C_p(t)$ .

Die beiden DGL (5.12) und (5.13) können in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung überführt werden, die jeweils nur von  $C_q(t)$  oder  $C_p(t)$  abhängt. Differenziert man etwa (5.13) nochmal nach der Zeit und eliminiert die vorhandenen  $C_p(t)$  mit Hilfe von (5.12) und (5.13) selbst, so erhält man:

$$\frac{d^2}{dt^2}C_q(t) + i\{\omega + p + q\}\frac{d}{dt}C_q(t) + \{\gamma_{MW} - \omega \cdot q - p \cdot q\}C_q(t) = 0 \quad (5.15)$$

Die Lösung dieser DGL ergibt sich nach [104] zu:

$$C_q(t) = A \cdot e^{i\lambda_1 t} + B \cdot e^{i\lambda_2 t} \quad (5.16)$$

so dass man schließlich durch Einsetzen von (5.16) in (5.13) und Auflösen nach  $C_p(t)$  die weitere Lösung erhält:

$$C_q(t) = -e^{i\omega t} \left\{ \frac{q + \lambda_1}{\gamma_{MW}} \cdot A e^{i\lambda_1 t} + \frac{q + \lambda_2}{\gamma_{MW}} \cdot B e^{i\lambda_2 t} \right\} \quad (5.17)$$

$\lambda_{1/2}$  sind hierbei die Lösungen des sich aus (5.15) ergebenden charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 + i(\omega + p + q)\lambda + (b^2 - \omega \cdot q - p \cdot q) = 0$$

mit

$$\lambda_{1/2} = -\frac{(\omega + p + q)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2}$$

wobei die Resonanzfrequenz  $\omega_0 \equiv \frac{E_q - E_p}{\hbar} \equiv q - p$  eingeführt wurde. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen (5.14) in (5.16) und (5.17) folgen Ausdrücke für die Integrationsparameter  $A$  und  $B$ :

$$A = -\frac{n_{s_-}(t_0)\gamma_{MW} + n_{s_+}(t_0)\left\{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega) - \frac{1}{2}\right\}\eta}{\eta} \quad (5.18)$$

$$B = \frac{n_{s_-}(t_0)\gamma_{MW} + n_{s_+}(t_0)\left\{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega) + \frac{1}{2}\right\}\eta}{\eta} \quad (5.19)$$

Hier wurde die Abkürzung  $\eta := \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2}$  eingeführt. Somit folgt schließlich für die Übergangswahrscheinlichkeit von  $|p\rangle$  nach  $|q\rangle$ :

$$\begin{aligned} W_{pq} = |C_q(t)|^2 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos(\eta t) \\ &\equiv A^2 + B^2 + 2AB \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\eta t\right)\right) \end{aligned}$$

bzw. nach Einsetzen von  $A$  und  $B$  aus den Gleichungen (5.18) und (5.19):

$$W_{pq} = \frac{\{2\gamma_{MW}n_{S_-}(t_0) + n_{S_+}(t_0)(\omega_0 - \omega)\}^2 - n_{S_+}(t_0)^2((\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2)}{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2} \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2}\right) + n_{S_-}(t_0)^2 \quad (5.20)$$

Für den Spezialfall  $C_q(0) = 0$  und  $C_p(0) = 1$  zum Zeitpunkt  $t = t_0 = 0$  – d. h. wenn wir von einem Pumpgleichgewicht ausgehen, in dem das Zeeman-Unterniveau  $|q\rangle = |4^2S_{1/2}, m_J = +\frac{1}{2}\rangle$  durch den Laser völlig entleert ist und sich alles im unteren Zustand  $|p\rangle = |4^2S_{1/2}, m_J = -\frac{1}{2}\rangle$  angesammelt hat – erhalten wir die Rabi-Formel [235, 237]:

$$W_{pq} = \frac{(2\gamma_{MW})^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2} \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2}\right) \quad (5.21)$$

In einem letzten Schritt wird nun der Parameter  $t$  durch die Mikrowellenfrequenz  $\omega$  ausgedrückt, so dass die Übergangswahrscheinlichkeit  $W_{pq}$  nur von einem Laufparameter abhängt. Zum Zeitpunkt  $t = t_0$  werden die Mikrowellen von einer Frequenz  $\omega_A < \omega_0$  aus gestartet und linear durchgestimmt. Bezeichnet  $l$  die Frequenz-Schrittweite der Mikrowellenverstimmung und  $\Delta t$  die Zeit, die von einem Frequenzschritt zum nächsten gewartet wird, so ist der Zusammenhang gegeben durch

$$\omega = \frac{l}{\Delta t}(t - t_0) + \omega_A.$$

Weiterhin gilt

$$\omega_A = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$$

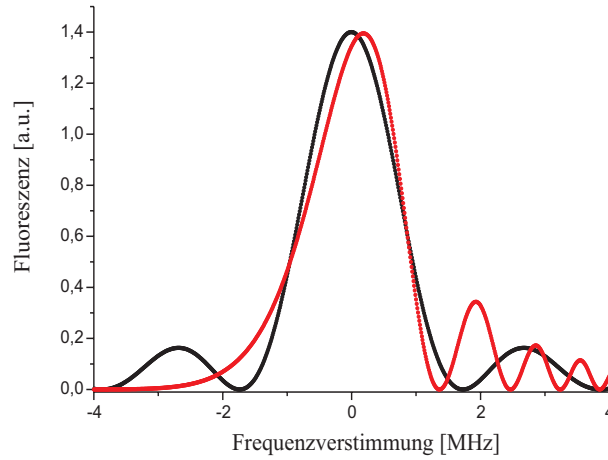
wenn man o. B. d. A. voraussetzt, dass die Resonanz in der Mitte des Messfensters liegt. Eine Kombination dieser beiden Beziehungen liefert somit als gesuchten Zusammenhang zwischen  $t$  und  $\omega$ :

$$t = \left\{(\omega - \omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\right\} \frac{\Delta t}{l} + t_0$$

Hiermit ändert sich die Gleichung (5.20) folgendermaßen:

$$W_{pq} = \frac{\{2\gamma_{MW}n_{S_-}(t) + n_{S_+}(t)(\omega_0 - \omega)\}^2 - n_{S_+}(t)^2((\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2)}{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}\left\{\left\{(\omega - \omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\right\} \frac{\Delta t}{l} + t_0\right\}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2}\right) + n_{S_-}(t)^2 \quad (5.22)$$

Variable Größen sind hierbei  $\Delta t$ ,  $\gamma_{MW}$  und  $t_0$ . Die festen Parameter haben z. B. im Falle der in Abb. 5.9 dargestellten Messkurve die Werte  $\Delta\omega =$



**Abb. 5.12:** Ergebnis der numerischen Simulation, die die spektrale Linienform für den Übergang  $|p\rangle \rightleftharpoons |q\rangle$  beschreibt, wenn alle Teilchen die gleiche Verweildauer im Oszillationsfeld haben. Die schwarze Kurve ist hierbei die bekannte Übergangswahrscheinlichkeit, die sich aus der Rabi-Formel in (5.21) ergibt. Die rote Kurve hingegen veranschaulicht, wie nach Glg. (5.22) die Übergangswahrscheinlichkeit modifiziert wird.

2.7MHz,  $\Delta t = 4s$  und  $l = 15kHz$ . In Resonanz, d. h. für  $\omega = \omega_0$  reduziert sich die Übergangswahrscheinlichkeit zu:

$$W_{pq} = \{n_{s_-}(t)^2 - n_{s_+}(t)^2\} \cdot \sin^2\left(\left\{\frac{\Delta t \Delta \omega}{2l} + t_0\right\} \gamma_{MW}\right) + n_{s_-}(t)^2$$

Abb. 5.12 stellt das Ergebnis der numerischen Simulation graphisch dar. Diese Simulation beschreibt die spektrale Linienform für den Übergang  $|p\rangle \rightleftharpoons |q\rangle$ , wenn alle Teilchen die gleiche Verweildauer im Oszillationsfeld haben. Die schwarze Kurve ist hierbei die bekannte Übergangswahrscheinlichkeit, die sich aus der Rabi-Formel in (5.21) ergibt. Die rote Kurve hingegen veranschaulicht, wie nach Glg. (5.22) die Übergangswahrscheinlichkeit modifiziert wird, wenn wir die Besetzungszahlen, die sich aus den Ratengleichungen ergeben, und die Durchstimmgeschwindigkeit der Mikrowellenfrequenz berücksichtigen. In diesem Fall wurden die Mikrowellen von höheren zu niederen Frequenzen verstimmt.

Beide Übergangswahrscheinlichkeiten gelten jedoch nur unter der Annahme, dass alle Teilchen in der Ionenwolke die gleiche Geschwindigkeit besitzen. In Wirklichkeit haben die Ionen eine Geschwindigkeitsverteilung, die mit einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschrieben werden kann. Vom physikalischen Standpunkt betrachtet bedeutet dies, dass man an eine mittlere Übergangswahrscheinlichkeit  $\overline{W_{pq}}$  interessiert ist, die eine Mittelung der hergeleiteten Übergangswahrscheinlichkeiten in (5.21) und in (5.22) über die Geschwindigkeitsverteilung  $\langle v \rangle$  in der Ionenwolke darstellt. Mathematisch

kann man dies in der folgenden Formel festhalten:

$$\overline{W_{pq}} = W_{pq} \cdot \langle v \rangle \quad (5.23)$$

wobei

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(v) \cdot v \, dv \quad (5.24)$$

ist mit der auf 1 normierten Maxwell-Boltzmann-Verteilung:

$$\varphi(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (5.25)$$

Definiert  $s \equiv v \cdot t$  die Weglänge der Teilchen im Oszillationsfeld, so ist im symmetrischen Fall folgendes Integral zu lösen:

$$\begin{aligned} \overline{W_{pq}} &= \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m}{kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \frac{(2\gamma_{MW})^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2} \\ &\quad \times \sin^2 \left( \frac{s}{2v} \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma_{MW})^2} \right) dv \end{aligned} \quad (5.26)$$

Definiert man folgende Größen:

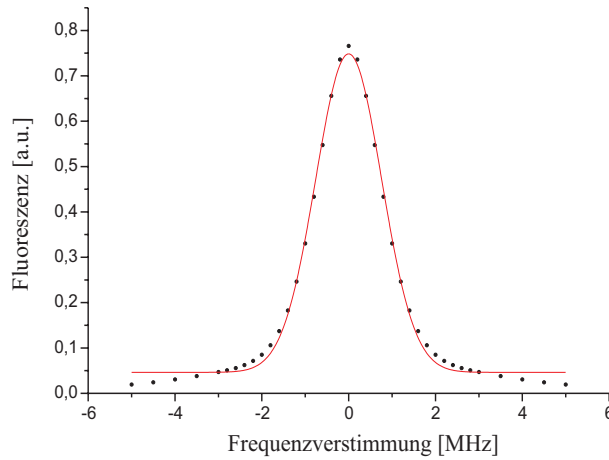
$$\begin{aligned} \alpha &:= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \\ y &:= \frac{v}{\alpha} \\ x &:= \frac{\omega_0 - \omega}{2b} \\ \beta_0 &:= \frac{2sb}{\alpha} \\ \beta &:= \beta_0 \sqrt{1 + x^2} \end{aligned}$$

so lässt sich Glg. (5.26) umformen zu:

$$\begin{aligned} \overline{W_{pq}} &= \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} 2 \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \int_0^{\infty} y^3 e^{-y^2} \sin^2 \left( \frac{\beta}{2y} \right) dy \\ &= \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} - I(\beta) \right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

mit

$$I(\beta) = \int_0^{\infty} y^3 e^{-y^2} \cos \left( \frac{\beta}{y} \right) dy \quad (5.28)$$



**Abb. 5.13:** Graphisches Ergebnis der simulierten Linienform unter Berücksichtigung der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung der Ionen für den symmetrischen Fall (schwarze Punktkurve). Diese Kurvenform kann durch eine Gaußkurve approximiert werden, wie die rote durchgezogene Kurve zeigt. Lediglich die untere Zone der abfallenden Flanken der simulierten Kurve weicht von einem gaußähnlichen Profil ab.

Das Computeralgebrasystem MATHEMATICA® liefert als Lösung für das Integral in (5.28) die sog. *Meijer G-Funktion*

$$\frac{\sqrt{\pi}}{32} \beta^4 G_{0,3}^{2,0} \left( \frac{\beta^2}{4} \mid -2, 0, -\frac{3}{2} \right) \quad (5.29)$$

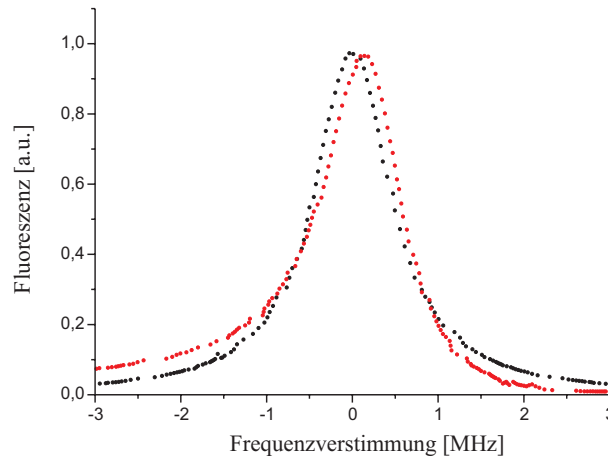
die folgendermaßen definiert ist [109]:

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds \quad (5.30)$$

Die Abb. 5.13 stellt dieses Ergebnis graphisch dar. Man sieht, dass das Ergebnis von  $\overline{W}_{pq}$  für den symmetrischen Fall recht gut durch eine Gauß-Funktion angenähert werden kann. Lediglich die untere Zone der abfallenden Flanken der simulierten Kurve weicht von einem gaußähnlichen Profil ab.

In analoger Weise geht man mit der Lösung aus Glg. (5.22) vor, die jedoch in (5.23) eingesetzt einen komplizierteren und länglicheren mathematischen Ausdruck liefert als Glg. (5.27). Die Abb. 5.14 zeigt die Lösung dieser Rechnung, zusammen mit der symmetrischen Spektrallinie. Man sieht also, dass mit einem einfachen Modell das experimentell beobachtete Phänomen in mathematisch analytisch geschlossener Form beschrieben werden kann, wobei die dazu notwendigen Ratengleichungen numerisch gelöst wurden, unter Verwendung von experimentell bekannten Übergangsraten und Lebendauern der relevanten Zustände.

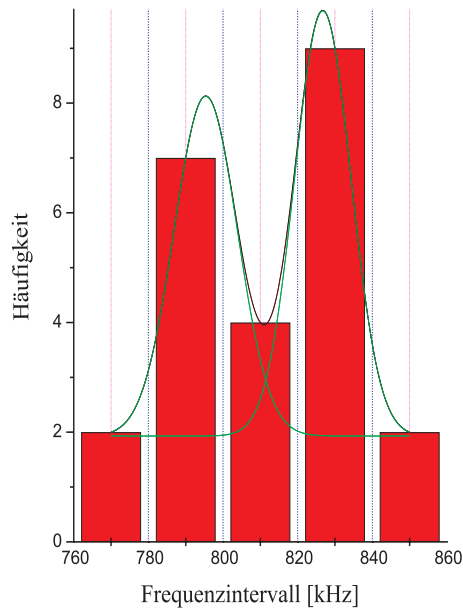




**Abb. 5.14:** Graphische Überlagerung der simulierten Linienform im symmetrischen (schwarze Punktkurve) und im asymmetrischen (rote Punktkurve) Fall. Die symmetrische Kurvenform ergibt sich hierbei durch Bildung von  $\overline{W}_{pq}$  mit Hilfe des in Glg. (5.21) dargestellten Ausdruckes, wohingegen im Falle der asymmetrischen Kurve in die Glg. (5.23) der Ausdruck (5.22) eingesetzt wurde.

Die Lage der Asymmetrie hängt hierbei von der Richtung ab, mit der die Frequenz über die Mikrowellen-Resonanz durchgestimmt wird. Im Falle von Abb. 5.9 wurde auf der höherfrequenten Seite gestartet und demzufolge die Mikrowellen zu kleineren Frequenzen hin verstimmt. Stimmt man dagegen die Mikrowellen mit zunehmender Frequenz durch, beginnend bei kleineren Frequenzen, so taucht die steilere Flanke auf der niederfrequenten Seite auf und die höherfrequente Seite ist verschmiert. In diesem Fall ist das Maximum der Resonanzkurve zu etwas kleineren Frequenzen hin verschoben, bezogen auf eine symmetrische Kurvenanpassung an die Messpunkte. Das Säulendiagramm in Abb. 5.15 veranschaulicht diesen Effekt. Es wurden Resonanzkurven bei auf- bzw. absteigender Durchstimmung der Mikrowellenfrequenz aufgenommen. Anschließend wurden die Positionen der Resonanzmaxima in einem Graphen zusammengetragen. Erstellt man ein Häufigkeitsdiagramm, so sieht man, dass sich zwei Häufungspunkte bilden, die etwa  $30\text{kHz}$  voneinander entfernt liegen. Dies bedeutet, dass bei einer Verstimmung der Frequenz in positiver Richtung das Maximum der Resonanzkurve um  $-15\text{kHz}$  gegenüber einer symmetrisch angenommenen Kurve verschoben ist. Entsprechend erhält man eine Verschiebung von  $+15\text{kHz}$  bei einer Verstimmung in negativer Richtung.

Die weiteren für die Bestimmung des Landé-g-Faktors relevanten Messungen wurden bei reduzierter Laserleistung und einer größeren Wartezeit bei der Verstimmung der Mikrowelle von einem Frequenzschritt zum nächsten aufgenommen. Somit konnten die Resonanzkurven mit symmetrischen Fitfunktionen angepasst werden und systematische Fehler, die sich aus Ver-



**Abb. 5.15:** Häufigkeitsdiagramm der Frequenzpositionen der Resonanzmaxima. Die beiden Häufungspunkte sind hierbei nicht gleich hoch, da die Anzahl der aufgenommenen Kurven mit positiver und negativer Frequenzschrittweite unterschiedlich war.

schiebungen der Resonanzmaxima aufgrund asymmetrischer Kurvenformen ergaben, entfielen. Bevor jedoch eine solche Messung vorgestellt wird, sei noch erwähnt, dass bei einer Reduzierung der Mikrowellenleistung Seitenbänder sichtbar wurden, die nur teilweise aufgelöst werden konnten, da eine Verringerung der Leistung auch zu einer Abnahme des Fluoreszenzsignals und somit zu einer Verschlechterung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses führte. Diese Seitenbandstruktur der Zeeman-Resonanz hat ihren Ursprung in den eingestrahlten Mikrowellen, die im Inneren des Penning-Käfigs aufgrund der räumlichen Abgeschlossenheit der Falle stehende Wellen bilden. Durch die oszillatorischen Eigenbewegungen, die die gespeicherten Ionen besitzen, sehen die Teilchen ein frequenz- und amplituden-moduliertes Hochfrequenzfeld. Dieses äußert sich in einem zentralen Peak, um welchen symmetrisch in periodischen Abständen Seitenbänder gruppiert sind. Anders formuliert bedeutet dies, dass wegen der Erfüllung des Dickekriteriums [69] – d. h. die Wellenlänge der Mikrowellen  $\lambda_0$  ist sehr viel größer als die Bewegungsamplituden der Ionen in  $r$ - und  $z$ -Richtung – der Doppler-Effekt 1. Ordnung zur Sichtbarmachung der Seitenbandstruktur führt. Dies hat weiterhin zur Folge, dass die zentrale Resonanz lediglich erst ab der 2. Ordnung Dopplerverschoben ist.

Dieses Phänomen<sup>22</sup> wurde in früheren Messungen an  $Ba^+$ -Ionen beob-

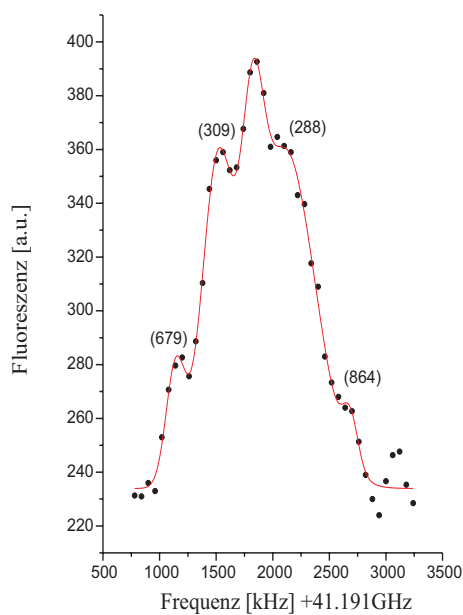
<sup>22</sup>eine ähnliche Seitenbandstruktur von gespeicherten Ionen in einer Paulfalle wurde von Schuessler beobachtet [264].

achtet [299] und lässt sich mit Hilfe des Korrelationsfunktions-Mechanismus' theoretisch beschreiben ([197], [172]). Hierbei wird das Mikrowellenfeld als Korrelationsfunktion ausgedrückt. Das Resonanzspektrum, das sich in Folge des induzierten Mikrowellenüberganges zwischen den beiden Zeeman-Unterniveaus  $|p\rangle \equiv |4^2S_{1/2}, m_J = -1/2\rangle \leftrightarrow |q\rangle \equiv |4^2S_{1/2}, m_J = +1/2\rangle$  ergibt, berechnet sich dann unter Zuhilfenahme des Wiener-Khintchine-Theorems ([318, 146]). Für das eigentliche Ziel dieser Messung, nämlich die Bestimmung des elektronischen  $g$ -Faktors des Grundzustandes im ionischen  $Ca^+$ -System, ist nur der zentrale Peak von Bedeutung, so dass die aufgetretenen Seitenbänder nur als Randeffekt eine Rolle spielten. Um jedoch allen beobachteten Effekten Rechnung zu tragen, werden im Anhang C die Frequenzpositionen der Seitenbänder theoretisch hergeleitet.

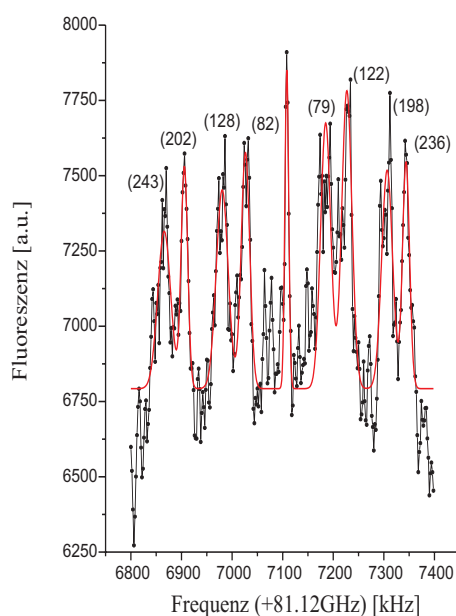
Das Mikrowellenfeld, das sich im Innern des Ionenkäfigs ausbildet, besitzt sicherlich auch eine fortlaufende Komponente, die jedoch gegenüber der stehenden Komponente weitaus schwächer ausgebildet ist. Diese Aussage wird durch die Tatsache bestätigt, dass keine Seitenbänder bei  $\omega_0 \pm l \cdot \omega_z$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , zu sehen sind, wie sie aber theoretisch vorhergesagt werden. Die fortlaufende Komponente der Mikrowellen könnte jedoch zu einer Verschiebung der Hauptresonanz im Dopplermodulierten Spektrum führen, falls die gespeicherten Ionen eine zusätzliche, rein translatorische Bewegung besitzen, deren Zeit in der Größenordnung der inversen Linienbreite liegt [210, 263]. Dies kann der Fall sein, wenn die Ionen in einem Teil der Falle erzeugt werden und in einem anderen Teil relaxieren. Wegen der langen Speicherzeiten kann man davon ausgehen, dass solche Asymmetrien in unserem Experiment ausgemittelt sind.

Die Abb. 5.16 und 5.17 stellen solche experimentell beobachteten Seitenbänder im Mikrowellenspektrum graphisch dar, wobei Abb. 5.16 aus Messungen an  $Ca^+$ -Ionen stammt, wohingegen Abb. 5.17 frühere Messungen an  $Ba^+$ -Ionen darstellt. Letztere Messungen wurden im Rahmen der im Anhang C entwickelten Theorie neu ausgewertet. Die in runden Klammern angegebenen Zahlen sind die Frequenzabstände in  $kHz$  vom zentralen Peak aus jeweils zur höher- bzw. niederfrequenten Seite hin gemessen. Die Tabellen 5.3 und 5.4 stellen nochmals die Positionen der experimentell bestimmten Seitenbänder zusammen und ordnen diese den theoretischen berechneten Positionen zu. Die recht gute Übereinstimmung zwischen den experimentellen Daten und den theoretisch hergeleiteten Werten unterstützt die Annahme, dass sich das Mikrowellenfeld im Inneren des Ionenkäfigs hauptsächlich in der  $TE_{013}$ -Mode ausbildet.

Bei einer weiteren Abschwächung der Mikrowellenleistung konnte die zentrale Überhöhung mit einer Halbwertsbreite (FWHM) von ca.  $3kHz$  aufgelöst werden. Die Abbildung 5.18 zeigt eine solche aufgenommene Messkurve, die die Aufsummierung von vier Durchläufen darstellt. Das Signal ist sehr schwach und fast von der gleichen Größenordnung wie das Rauschen. Aufgrund erheblicher Leistungsschwankungen der Mikrowellenanlage, die sich



**Abb. 5.16:** Seitenbandstruktur im Zeemanspektrum von  $\text{Ca}^+$ . Die Zahlen in runden Klammern geben den Frequenzabstand in kHz, vom zentralen Peak aus gemessen, an. Wegen des schlechten Signal-zu-Rauschverhältnisses konnte die Mikrowellenleistung nicht weiter reduziert werden, weshalb die Seitenbänder nur als kleine Überhöhungen an den Flanken der Resonanzkurve sichtbar sind.



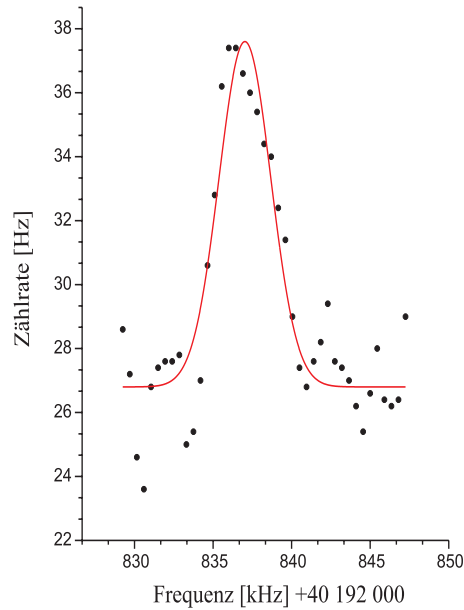
**Abb. 5.17:** Seitenbandstruktur im Zeemanspektrum von  $\text{Ba}^+$ . Die Zahlen in runden Klammern geben den Frequenzabstand in kHz, vom zentralen Peak aus gemessen, an.

Position [kHz]			
#	Experiment	Theorie	Kombination
[5]	298(25)	289	$(\nu_+ - \nu_-) - 2\nu_z$
[4]	771(19)	753	$(\nu_+ - \nu_-) + 2\nu_z$

**Tab. 5.3:** Tabellarische Übersicht der theoretischen und experimentell bestimmten Seitenbänder im Zeemanspektrum von  $Ca^+$ . Die in runden Klammern angegebenen Fehler ergeben sich aus den durch die Seitenbänder angefitzten Gaußkurven. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die in Anhang C aufgelisteten Kombinationen von Ioneneigenfrequenzen, bei denen theoretisch ein Seitenband zu erwarten ist.

Position [kHz]			
#	Experiment	Theorie	Kombination
[5]	80(1)	82	$5(\nu_+ - \nu_-) - 6\nu_z$
[7]	125(2)	132	$6(\nu_+ - \nu_-) - 7\nu_z$
[5]	201(1)	200	$4(\nu_+ - \nu_-) - 4\nu_z$
[7]	240(2)	232	$8(\nu_+ - \nu_-) - 9\nu_z$

**Tab. 5.4:** Tabellarische Übersicht der theoretischen und experimentell bestimmten Seitenbänder im Zeemanspektrum von  $Ba^+$ . Die in runden Klammern angegebenen Fehler ergeben sich aus den durch die Seitenbänder angefitzten Gaußkurven. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die in Anhang C aufgelisteten Kombinationen von Ioneneigenfrequenzen, bei denen theoretisch ein Seitenband zu erwarten ist.



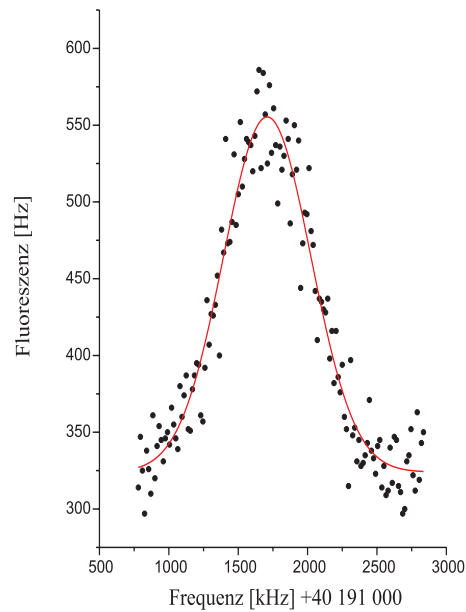
**Abb. 5.18:** Zentrale Überhöhung der Zeeman-Resonanzkurve mit einer Halbwertsbreite (FWHM) von ca. 3kHz.

bei niedrigen Leistungen deutlicher auszeichneten, konnten keine weiteren Kurven mit ähnlicher Linienbreite aufgenommen werden, da etwa bei einer darauffolgenden Messung die Leistung soweit abgenommen hatte, dass kein Fluoreszenzsignal mehr zu sehen war. Hinzu kam, dass pro Durchlauf nur ca. 2-4Hz hinzuaddiert wurde. Eine Erhöhung der Messzeit unter diesen Bedingungen hätte zu keinem deutlich besseren Signal-zu-Rausch-Verhältnis geführt. Deshalb haben wir entschieden, die Resonanzkurven bei erhöhter Mikrowellenleistung aufzunehmen, wobei mehrere Durchläufe<sup>23</sup> pro Kurve mit alternierender Richtung der Frequenzverstimmung durchgeführt wurden. Abbildung 5.19 gibt eine exemplarische Messkurve wieder, deren Halbwertsbreite 630kHz beträgt. Die durchgeführten 24 Einzelmessungen wiesen eine ähnliche FWHM auf und der Fehler der Resonanzmaxima lag im Schnitt bei 9kHz. Aufgrund der geringen Streuung der Einzelmessungen um einen gemeinsamen Häufungspunkt konnte durch Bildung eines gewichteten Mittelwertes der Fehler statistisch auf etwas weniger als 2kHz reduziert werden. Somit konnte die Zeemanaufspaltung mit einer relativen Genauigkeit von  $\simeq 4 \cdot 10^{-8}$  angegeben werden, was ungefähr eine Größenordnung besser ist als vorangegangene Messungen, die im Rahmen einer Diplomarbeit in unserem Labor durchgeführt wurden [232].

Über die Beziehung

$$h \cdot \nu_{Zeeman} \equiv \Delta E_{Zeeman}(4^2S_{1/2}, \Delta m_J = 1) = g_J \cdot \mu_B \cdot B \quad (5.31)$$

<sup>23</sup>Die Zahl liegt zwischen 10 und 28



**Abb. 5.19:** Zentrale Überhöhung der Zeeman-Resonanzkurve mit einer Halbwertsbreite (FWHM) von ca. 630kHz.

kann, bei Kenntnis der Magnetfeldstärke am Ort der gespeicherten Ionen der  $g_J$ -Faktor bestimmt werden, wobei die gewünschte Genauigkeit in der Bestimmung von  $B$  mindestens in der gleichen Größenordnung liegen muss, falls man den Landé-g-Faktor mit einer Genauigkeit im Bereich von  $10^{-8}$  angeben will. Die Magnetfeldbestimmung erfolgt hierbei durch Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz von Elektronen, die in der gleichen Penningfalle durch Umpolen der Speicherspannung gespeichert werden. Eine detaillierte Abhandlung erfolgt im nächsten Kapitel.





## Kapitel 6

# Der elektronische $g$ -Faktor des Grundzustandes von $Ca^+$

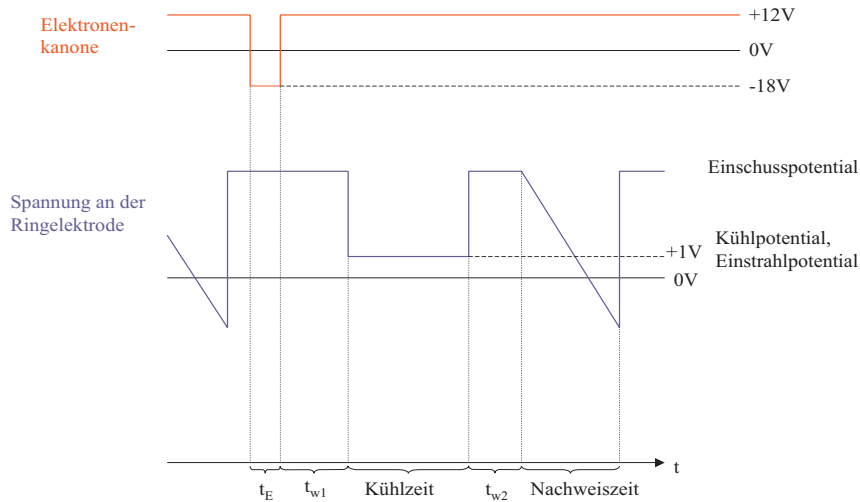
### 6.1 Die Bestimmung des Magnetfeldes

Wie bereits am Ende des vorangegangenen Kapitels angedeutet, muss zur Bestimmung des  $g_J$ -Faktors im Grundzustand des  $Ca^+$ -Systems die Magnetfeldstärke am Ort der gespeicherten Ionen bekannt sein. Eine naheliegende Lösung wäre, die Messung des Magnetfeldes über eine der beiden radialen Ioneneigenfrequenzen durchzuführen, d. h. entweder über die reduzierte Zyklotronfrequenz oder über die Magnetronfrequenz, da beide Frequenzen gemäß Gl. (2.12) von  $B$  abhängen. Gleichzeitig hängen aber  $\nu_+$  und  $\nu_-$  vom Speicherpotential ab, weshalb eine Extrapolation auf verschwindendes  $U_0$  nötig ist. Betrachtet man einen nicht harmonischen Ionenkäfig so hängen die beiden Eigenfrequenzen auch von der Energie der gespeicherten Ionen ab. Als Alternative wäre die Messung der reinen Zyklotronfrequenz  $\nu_c$  möglich, die nur vom Magnetfeld abhängt. In diesem Fall aber besteht das Problem, dass  $\nu_c$  keine Eigenfrequenz des Systems ist und – falls überhaupt –, dann nur als Seitenbandfrequenz im Frequenzspektrum auftaucht. Lediglich mit Hilfe des Invarianztheorems (Gleichung (2.25)) wäre die Möglichkeit einer Bestimmung der Zyklotronfrequenz durch die gleichzeitige Messung aller drei Eigenfrequenzen der Ionenbewegung geboten. Wegen der niedrigen Güte des verwendeten Ionennachweisverstärkers für die Raumtemperatur-Apparatur müssen, damit man ein sichtbares demoduliertes Signal des Nachweisschwingkreises erhält, größere Teilchenzahlen (ca.  $1 \cdot 10^5 \frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^3}$ ) gespeichert werden. Aufgrund der Coulombwechselwirkung hat man jedoch in der Ionenwolke Stoßeffekte. Hinzu kommen Raumladungseffekte, da wegen der elektrischen Feldfehler und axialsymmetrischen Störungen die Ladungsverteilung nicht rotationselliptisch ist. Diese Effekte führen zur Verbreiterung und Verschiebung der Ioneneigenfrequenzen und limitieren die Genauigkeit in der Bestimmung von z. B.  $\nu_c$  auf  $10^{-6}$ , so dass auch die Präzision der

Magnetfeldstärke auf  $10^{-6}$  beschränkt ist. Diese die Genauigkeit begrenzenden Faktoren haben bei Elektronen wenig oder gar keine Relevanz. Untersuchungen von M. Hubrich [120] an gespeicherten Elektronen ergaben, dass Stoßeffekte zu einer Verschiebung der Zyklotronfrequenz im Bereich von  $10^{-9}$  führen, die bei der angestrebten Präzision  $10^{-8}$  in diesem Teil des Experimentes von nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Zwar hat die Raumladung keinen Einfluss auf die Bewegungsmoden der Elektronen, die Energie der Elektronen könnte jedoch aufgrund der Coulombabstoßung von ihrer Anzahl abhängig sein. Hinzu kommt, dass wegen der kleinen Ruhemasse von Elektronen *relativistische Effekte*, die ebenfalls energieabhängig sind, zur Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz führen. Dies hat zur Konsequenz, dass bei Verwendung von Elektronen zur Bestimmung des Magnetfeldes im Inneren des Penning-Käfigs die kinetische Energie dieser Elementarteilchen reduziert werden muss. Außerdem hat man das zusätzliche Problem, dass es keine Gewissheit gibt, ob sich die Elektronen und die Ionenwolke im Mittel am selben Ort aufhalten, da das Vorzeichen des Speicherpotentials je nach Vorzeichen der Teilchenladung geändert werden muss. Es ist daher erforderlich, dass die Magnetfeldhomogenität – zumindest über die Ausdehnung beider Teilchenwolken – von der gleichen Größenordnung wie die angestrebte Messgenauigkeit sein sollte. Bevor jedoch auf diese Punkte einzeln näher eingegangen wird, sollen im folgenden Unterabschnitt das Messprinzip und der Messzyklus, die zur Aufnahme einer sog. Zyklotronresonanz von gespeicherten Elektronen führen, dargestellt werden.

### 6.1.1 Das Messprinzip und der Messzyklus einer Elektronen-Zyklotronresonanz

Die Bestimmung der Magnetfeldstärke erfolgt also durch Detektion der reduzierten Zyklotronfrequenz gespeicherter Elektronen. Diese Eigenfrequenz wird durch Einstrahlen eines Hochfrequenzfeldes in Form von Mikrowellen angeregt, da im Falle einer resonant eingestrahlten Mikrowellenfrequenz, die bei  $\nu_{res} = \nu_+$  liegt, die Elektronen Energie aufnehmen und durch Stöße untereinander bzw. aufgrund der Anharmonizitäten der Penningfalle in die beiden anderen Eigenbewegungen koppeln. Das Aufweiten der Bewegungsamplitude in radialer Richtung führt somit zu einem Aufweiten der axialen Bewegungsamplitude. In diesem Resonanzfall ist die Anzahl der sich noch im Käfig befindenden und somit nachweisbaren Elektronen minimal. Voraussetzung ist eine gleichmäßige Durchstimmung der eingestrahlten Mikrowellenfrequenz über die theoretisch berechnete reduzierte Zyklotronfrequenz und eine reproduzierbare gleichgroße Anzahl gespeicherter Elektronen pro Messzyklus. Die Verminderung der Teilchenzahl wird über einen Nachweiszyklus (siehe Abschnitt 4.7) quantitativ erfasst. Die Abbildung 6.1 zeigt schematisch den zeitlichen Ablauf eines Messzyklus' zur Aufnahme eines Datenpunktes der Zyklotronresonanz.



**Abb. 6.1:** Messzyklus zur Aufnahme eines Datenpunktes im Elektronen-Zyklotronresonanz-Spektrum. Das Einschusspotential betrug  $+20V$ .

Zunächst werden während einer Zeitdauer von  $t_E = 400ms$  bei einer Spannung an der Ringelektrode von  $U_R = +20V$  durch Anlegen einer negativen Beschleunigungsspannung zwischen Elektronenquelle und unterer Kalotte von  $U_B = -18V$  aus dem glühenden Wolframdraht emittierte Elektronen zum Penning-Käfig hin beschleunigt. Im Falleninneren angelangt, geben die Elektronen entweder Energie über Stöße mit dem Restgas ab, um selbst gespeichert zu werden, oder sie erzeugen durch Restgasionisation energieärmere Elektronen, die dann gespeichert werden. Diese beiden Vermutungen werden durch die Tatsache bekräftigt, dass das demodulierte Signal des Nachweisverstärkers am Oszilloskop erst ab einem Druck in der Vakuumapparatur von  $10^{-7}mbar$ <sup>‡</sup> auftauchte. Durch die ebenfalls zwischen Elektronenkanone und Kalotte angelegte Gegenspannung von  $U_H = +12V$  (sogenannte Haltespannung) verhindert man, dass ständig Elektronen in den Käfig eindringen, da der Wolframdraht permanent auf einem konstanten Heizstrom von  $I_H = 1.16A$  gehalten wird.

Anschließend lässt man den Elektronen Zeit ( $t_{w1} = 3000ms$ ), um bei nicht resonantem Hochfrequenzfeld über Strahlungsdämpfung, d. h. durch Emission von Synchrotronstrahlung, Energie abzugeben und zu thermalisieren. Dieser radiative Zerfall ist für die Zyklotronbewegung von Elektronen in

<sup>‡</sup>Hierzu wurde die Ionengetterpumpe ausgeschaltet. Der Druck lief in der Apparatur im Laufe einiger Stunden bis auf ca.  $2.6 \cdot 10^{-6}mbar$  hoch und stabilisierte sich bei diesem Wert.

$U_0$ [V]	$\nu_z$ [kHz]	$\nu_-$ [kHz]	$\nu_+$ [kHz]	$\nu_c$ [kHz]
1	7 416,317	0,685	40 146 819,294	40 146 819,979
15	28 723,271	10,275	40 146 809,704	40 146 819,979

**Tab. 6.1:** Elektronen-Eigenfrequenzen für zwei unterschiedliche Speicherspannungen. Das Magnetfeld beträgt  $B = 1.4342T$ .

einem starken äußeren Magnetfeld der Hauptmechanismus, der zur Kühlung der Teilchen führt. Aus diesem Grund soll kurz, bevor die Beschreibung des Messzyklus fortgesetzt wird, auf diesen Sachverhalt eingegangen werden.

Nach der klassischen Elektrodynamik strahlt jede beschleunigte Ladung elektromagnetische Wellen ab. Die abgestrahlte Leistung ergibt sich nach der Larmorformel und hat in der Lorentz-invarianten Verallgemeinerung folgende Form<sup>1</sup>:

$$P = -\frac{2e^2}{3 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot m^2c^3} \left( \frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp^\mu}{d\tau} \right)$$

wobei  $p^\mu$  der Viererimpuls ist. Eine Umformung ergibt für die abgestrahlte Energie:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{12\pi\epsilon_0c^3} \dot{r}^2 \quad (6.1)$$

Einsetzen der kinetischen Energie  $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$  und die Annahme einer gleichmäßigen Kreisbewegung, d. h.  $\ddot{r} = \omega_c \cdot \dot{r}$ , in (6.1) ergibt eine DGL

$$\dot{E} = -\gamma_c E,$$

deren Lösung ein exponentielles Zerfallsgesetz ist:

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma_c t}$$

wobei die *Zyklotrondämpfungskonstante*  $\gamma_c$  gegeben ist durch:

$$\gamma_c = \frac{e^2 \omega_c^2}{3\pi\epsilon_0 m c^3}$$

Eine quantenmechanische Rechnung, wie sie in [43] zu finden ist, liefert für die *reduzierte* Zyklotrondämpfungskonstante  $\gamma_+$ :

$$\gamma_+ = \frac{e^2 \omega_+^2}{3\pi\epsilon_0 m c^3} \frac{\omega_+}{\omega_+ - \omega_-}$$

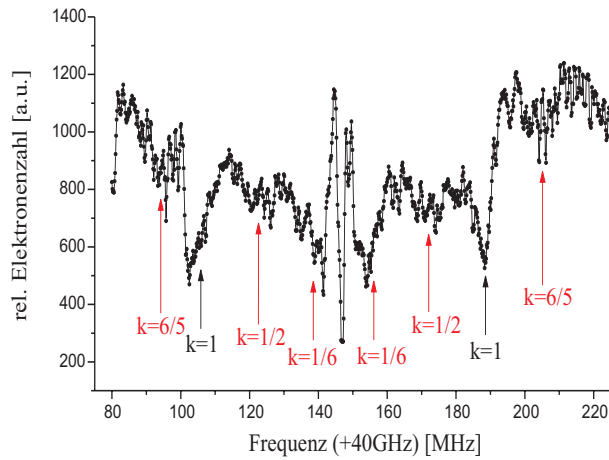
Bei einem Magnetfeld von  $B = 1.4342T$  erhält man mit Hilfe der in Tabelle 6.1 berechneten Eigenfrequenzen sowohl für die reine als auch für die reduzierte Zyklotronfrequenz eine Dämpfungszeit von ca.  $\gamma_c^{-1} \approx \gamma_+^{-1} \approx 1.25s$ .

<sup>1</sup>Siehe z. B. J. D. Jackson „Classical Electrodynamics“, 2<sup>nd</sup> Ed., Wiley & Sons, NY (1975)

Man sieht somit, dass bzgl. der Zyklotronstrahlungsdämpfung eine entsprechend lange Wartezeit notwendig ist, um die Elektronen auf Umgebungstemperatur mit einer Energie von  $E_{kin} = \frac{1}{40}eV$  abzukühlen.

In einer auf das Strahlungskühlen folgenden Zeit von  $t_s = 1200ms$  wird die Spannung an der Ringelektrode auf das sog. Kühlpotential von  $U = 1V$  herabgesetzt. Ist die Elektronentemperatur nahe der Raumtemperatur, so bleiben die Teilchen in dem flachen Potentialtopf gefangen. Besitzen jedoch die Elektronen bei resonant eingestrahlenen Mikrowellen aufgrund der Energieaufnahme eine höhere kinetische Energie, so verlassen die energiereicheren Teilchen den Potentialtopf. Man nennt diesen Mechanismus *evaporatives Kühlen*, da die Elektronen aus dem Potentialtopf ‚herauskochen‘. Die gespeicherten Teilchen haben energetisch gesehen eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit einer oberen Schranke für die kinetische Energie, die etwa gleich dem halben Speicherpotential ist, d. h.  $E_{kin}^{max} = 0.5eV$ . Beendet wird dieser Abschnitt des Zyklus, indem in einer zweiten Wartezeit  $t_2 = 20ms$  das Ringpotential wieder auf  $U_R = +20V$  heraufgesetzt wird. Die Elektronen können wieder eine größere mittlere Energie aufnehmen, so dass die Wahl der Kühlspannung und der Grad der Aufheizung durch das resonante Hochfrequenzfeld keine Auswirkung auf den anschließenden Nachweis haben. Abgeschlossen wird der Messzyklus dadurch, dass die Spannung an der Ringelektrode sägezahnförmig bis unter  $0V$  erniedrigt wird, um durch die vollständige Entleerung des Penningkäfigs gleiche Anfangsbedingungen für den nächsten Zyklus zu schaffen (man arbeitet, quantenmechanisch gesprochen, mit Elektronen, die sozusagen kein ‚Gedächtnis‘ haben).

Durch den rampenförmigen Abfall des Ringpotentials (bei einer Rampesteigung von  $\approx -10\frac{V}{ms}$ ) wird die  $z$ -Frequenz der Elektronen variiert, die im Resonanzfall dem Anregungsschwingkreis ( $\nu_z = 11,915MHz$  mit einer Anregungsamplitude von  $A = 32,3mV$ ) Energie entziehen, was sich in einer kurzzeitigen Abnahme der Spannungsamplitude des Nachweisverstärkersignals bemerkbar macht. Die Tiefe des demodulierten Nachweissignals gibt dann Auskunft über die relative Zahl der noch vorhandenen Elektronen bei einer resonanten Einstrahlung der Mikrowellen. Die Leistung des Hochfrequenzfeldes wird hierbei über einen variablen Abschwächer soweit reduziert, dass die Elektronen in Resonanz nicht den Käfig verlassen, sondern sich lediglich die Bewegungsamplituden aufweiten. Dies erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Elektronen im Mittel am selben Ort wie die  $Ca^+$ -Ionen aufhalten. Zur Aufnahme einer Zyklotron-Resonanzkurve, wie sie im folgenden Abschnitt besprochen wird, wird die Mikrowellenfrequenz nach jedem Messzyklus um eine über die Ansteuerungssoftware frei wählbare Schrittfrequenz verstimmt.



**Abb. 6.2:** Aufnahme eines Elektronen-Zyklotronresonanz-Spektrums mit aufgelösten Seitenbandstrukturen.

### 6.1.2 Die Messung der Zyklotron-Resonanzkurve von gespeicherten Elektronen

Durch die Variation der permanent eingestrahlten Mikrowellenfrequenz erhält man ein von der Amplitude des am Oszilloskop sichtbaren Absorptionssignals abhängiges Resonanzspektrum, das in Abb. 6.2 dargestellt ist. Man sieht hierbei nicht nur eine Verringerung der Elektronenzahl bei der vermuteten reduzierten Zyklotronfrequenz selbst, sondern es treten aufgrund des Dicke-Effektes symmetrisch um  $\nu_+$  angeordnete Seitenbänder auf, die im Abstand von  $\pm k \cdot \omega_z$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  liegen. Dies wird durch die Beobachtung bestärkt, dass bei einer Variation der Speicherspannung diese von der axialen Bewegung herrührenden Seitenbänder sich verschieben oder sogar verschwinden. Die Abstände der Seitenbänder, gegeben durch

$$\Delta\omega = k \sqrt{\frac{2eU_0}{mr_0^2}}$$

entsprechen ungefähr den Frequenzen, die sich für eine Speicherspannung von  $U_0 = 40V$  ergeben. In Abbildung 6.2 ist das Seitenband bei  $k = 1$  zu sehen. Zusätzlich zu den ganzzahligen Vielfachen der axialen Frequenz, treten auch Seitenbänder bei gebrochen-rationalen Vielfachen auf, etwa bei  $\frac{1}{6}\omega_z$ ,  $\frac{1}{2}\omega_z$  und  $\frac{6}{5}\omega_z$ .

Bei einer näheren Betrachtung erkennt man außerdem eine Asymmetrie in der Resonanzkurve von  $\nu_z$ , die auf Käfiganharmonizitäten (z. B. kein ideales Quadrupol-Speicherpotential) zurückzuführen ist. Der zentrale Signaleinbruch ist aufgrund der hohen Mikrowellenamplitude mit einer Halbwertsbreite von ca.  $1.6MHz$  noch leistungsverbreitert. Bevor auf die Auflösung des zentralen Signaleinbruchs bei reduzierter Mikrowellenleistung eingegangen

wird, sollen im folgenden Unterabschnitt die im Resonanzspektrum aufgetretenen Linienformen theoretisch behandelt werden.

### Theoretische Linienform im Elektronen-Zyklotron-Resonanzspektrum

Es sind im Wesentlichen drei Effekte, die zur Beobachtung der in Abb.6.3 und Abb. 6.4 dargestellten Linienformen des Elektronen-Zyklotron-Resonanzspektrums führen. Diese Effekte bedingen sich gegenseitig und haben ihren Ursprung in der Relativistik.

- Die gespeicherten Elektronen besitzen eine kinetische Energie, die sich zum einen aus der *Beschleunigungsspannung*, die an der Elektronenkanone anliegt, und zum anderen aus dem vorhandenen *Speicherpotential*, das bei Eintritt der Elektronen im Penningkäfig vorliegt, zusammensetzt. Diese resultierende kinetische Energie bestimmt somit die Breite und das Maximum der Maxwell-Boltzmann-ähnlichen Energieverteilung der Elektronen. Die sich hieraus ergebende relativistische Massenkorrektur führt zu einer Frequenzverschiebung.
- Desweiteren nehmen die Elektronen vornehmlich in axialer Richtung Energie aus dem eingestrahlten Mikrowellenfeld auf. Wegen der relativistischen Effekte ist diese Energieaufnahme größer bei Frequenzen der Mikrowelle, die kleiner als die reduzierte Zyklotronfrequenz sind. Die Folge ist eine asymmetrische Linienform, wie sie bei einem anharmonischen Oszillator mit erzwungener äußerer Anregung vorkommt.
- Schließlich verursacht die Inhomogenität des Magnetfeldes je nach Schwingungsamplitude der axialen Elektronenbewegung eine Frequenzverschiebung und ebenfalls eine Asymmetrie in der Linienform.

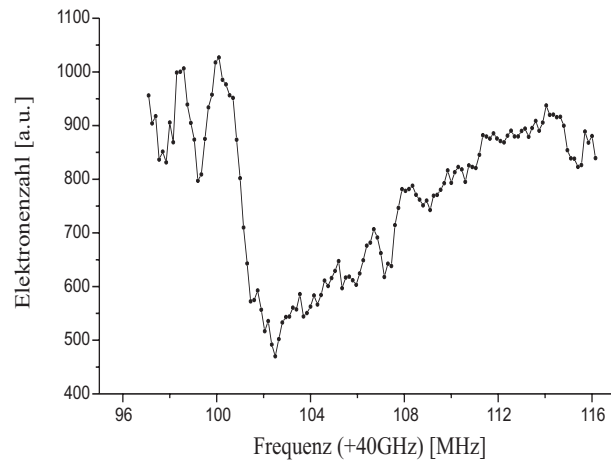
### Frequenzverschiebung aufgrund relativistischer Massenzunahme

Bezeichnet  $m_0$  die Ruhemasse, so folgt für die effektive Masse  $m$  der Elektronen, die eine Relativgeschwindigkeit  $v$  in Bezug auf ruhende Teilchen besitzen:

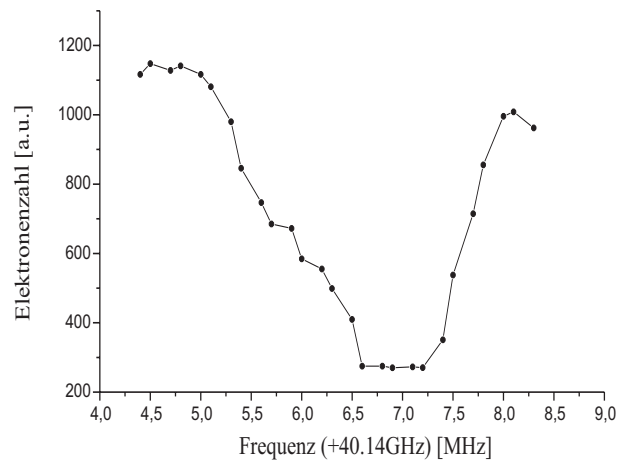
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma m_0 \quad (6.2)$$

Als kinetische Energie  $T$  wird die Differenz aus der Energie der bewegten Masse und seiner Ruheenergie bezeichnet:

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (6.3)$$



**Abb. 6.3:** Vergrößerte Darstellung des Signaleinbruchs des in Abb. 6.2 dargestellten Elektronen-Zyklotronresonanz-Spektrums bei  $k = 1$ .



**Abb. 6.4:** Vergrößerte Darstellung des zentralen Signaleinbruchs des in Abb. 6.2 dargestellten Elektronen-Zyklotronresonanz-Spektrums.



Im klassischen Fall, d. h.  $v \ll c$ , lässt sich der Wurzelausdruck in (6.3) nach der Taylorformel entwickeln und man erhält:

$$T = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} \pm \dots - 1 \right) \approx m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} m_0 v^2 = E_{kin}$$

Die effektive Masse in (6.2) lässt sich dann schreiben als:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{2E_{kin}}{m_0 c^2}}} \quad (6.4)$$

Bezeichnet nun

$$\omega_c = \frac{e \cdot B}{m_0}$$

die freie Zyklotronfrequenz der Elektronen in Anwesenheit eines äußeren homogenen Magnetfeldes im nichtrelativistischen Grenzfall, so erhält man im relativistischen Fall eine Frequenzverschiebung:

$$\tilde{\omega}_c = \frac{eB}{m} = \sqrt{1 - \frac{2E_{kin}}{m_0 c^2}} \cdot \frac{eB}{m_0} \approx \left( 1 - \frac{2E_{kin}}{m_0 c^2} \right) \omega_c$$

Betrachtet man nun das geladene relativistische Teilchen in einem zusätzlichen äußeren statischen elektrischen Feld, so erhält man nach [174] folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \omega_c \hat{e}_z \times \vec{v}(t) + \frac{1}{2} \omega_z^2 x(t) \quad (6.5)$$

Diese DGL ist in Analogie zu den Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6) zu sehen. Die Information über die Anwesenheit des elektrostatischen Quadrupol-Speicherpotentials und des homogenen Magnetfeldes steckt in der reduzierten Zyklotronfrequenz.

Bevor nun mit der Rechnung begonnen wird, müssen an (6.5) einige Modifikationen vorgenommen werden. Zum einen kann aufgrund des starken äußeren Magnetfeldes der axiale Beitrag der elektrischen Speicherfeldstärke vernachlässigt werden. Wählt man, gemäß dem experimentellen Aufbau, die Ausbreitungsrichtung der Mikrowellenfront entlang der  $z$ -Achse, wobei diese Front in Drehrichtung der Zyklotronbewegung zirkular polarisiert sein soll, so kann man folgenden Ausdruck für das Mikrowellenfeld ansetzen:

$$\mathcal{E}(t) = E_{0\sim} e^{i(\omega t - k \cdot z)} \quad (6.6)$$

$E_{0\sim}$  und  $\omega$  sind hierbei respektive die Amplitude und die Frequenz des Mikrowellenfeldes. Kompliziert wird der Ausdruck in (6.6) zunächst dadurch,

dass aufgrund der axialen Schwingung der Elektronen diese ein frequenz- und amplitudenmoduliertes Mikrowellenfeld sehen:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= E_{0\sim} e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z_0 \cos(\omega_z t + \varphi_z))} \\ &= E_{0\sim} e^{i\omega t} \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi z_0}{\lambda} \cos(\omega_z t + \varphi_z) \right] - i \cdot \sin \left[ \frac{2\pi z_0}{\lambda} \cos(\omega_z t + \varphi_z) \right] \right\}\end{aligned}\quad (6.7)$$

Da die Schwingungsamplitude  $z_0$  der Elektronen sehr viel kleiner ist als die Wellenlänge der Mikrowellen  $\lambda$ , reduziert sich der Ausdruck in der geschweiften Klammer auf 1 und man erhält

$$\mathcal{E}(t) = E_{0\sim} e^{i\omega t} \quad (6.8)$$

Schließlich muss noch die Synchrotronstrahlung berücksichtigt werden, die zum Energieverlust der sich im Kreis bewegenden Elektronen führt. Man hat somit einen Reibungsterm  $-\frac{1}{2}\gamma_c \vec{v}(t)$ . Die DGL (6.5) hat nun folgende endgültige Form:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \omega_c \hat{e}_z \times \vec{v}(t) - \frac{1}{2}\gamma_c \vec{v}(t) + \frac{eE_{0\sim}}{m} e^{i\omega t} \quad (6.9)$$

Betrachtet man nur die radiale Ebene, so folgt mit der Definition

$$\mathbf{v} \equiv v_x(t) + i v_y(t)$$

aus (6.9)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \omega_c \hat{e}_z \times \mathbf{v}(t) - \frac{1}{2}\gamma_c \mathbf{v}(t) + \frac{eE_{0\sim}}{m} e^{i\omega t} \quad (6.10)$$

Mit Hilfe der in [174] definierten Vierergeschwindigkeit

$$u(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{mit} \quad |u(t)| = \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|$$

ergibt sich für die transformierte Geschwindigkeit

$$\frac{\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{v}(t)|}{c}\right)^2}} = u(t) e^{i\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{v}(t)|}{c}\right)^2}} \right) = \left( \frac{du(t)}{dt} + i\omega u(t) \right) e^{i\omega t}$$

Hieraus erhält man für die transformierte DGL in (6.10):

$$\frac{d}{dt} u(t) + i \left\{ \omega - \omega_c \sqrt{1 - \left(\frac{|u(t)|}{c}\right)^2} \right\} u(t) + \frac{1}{2}\gamma_c u(t) \sqrt{1 - \left(\frac{|u(t)|}{c}\right)^2} = \frac{eE_{0\sim}}{m} \quad (6.11)$$

Die Differentialgleichung in (6.11) ähnelt der erzwungenen Schwingung eines gedämpften, anharmonischen Oszillators. Hierbei übernimmt die Mikrowelle die Rolle der äußeren antreibenden Kraft und die Dämpfung des Systems ergibt sich aus dem dissipativen Prozess der Synchrotronstrahlung. Da beim vorliegenden Experiment  $\omega_c \gg \gamma_c$ , werden zur weiteren Rechnung die Wurzelausdrücke in (6.11) unterschiedlich weit entwickelt. Dabei wird im Falle der reduzierten Zyklotronfrequenz der Ausdruck bis zur 2. Ordnung entwickelt, während im Falle der Strahlungsdämpfungskonstante der Ausdruck bereits nach der 1. Ordnung abgebrochen wird. Weiterhin ist nur der stationäre Zustand, d. h.  $\frac{d}{dt}u(t) = 0$  von Interesse. Deshalb reduziert sich (6.11) zu:

$$i \left\{ \omega - \omega_c \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{|u(t)|}{c} \right)^2 \right] \right\} u(t) + \frac{1}{2} \gamma_c u(t) = \frac{eE_{0\sim}}{m} \quad (6.12)$$

Im Resonanzfall  $\omega = \omega_c$  erhält man den maximalen Übertrag und aus (6.12) ergibt sich:

$$u_{max} = \frac{2eE_{0\sim}}{\gamma_c m} \Leftrightarrow |u_{max}|^2 = \left( \frac{2e}{\gamma_c m} \right)^2 \cdot |E_{0\sim}|^2 \quad (6.13)$$

Die definierte Größe  $|u_{max}|^2$  kann als Maß für die maximale Amplitude des schwingungsfähigen Systems betrachtet werden. I. A. ist es sinnvoll, die Amplitude des Systems auf  $|u_{max}|^2$  zu normieren:

$$w := \frac{|u|^2}{|u_{max}|^2} \quad (6.14)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (6.13) und (6.14) kann man (6.12) umformen zu:

$$1 + 4 \left\{ \frac{\omega - \omega_c}{\gamma_c} + \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{\gamma_c} \frac{|u|^2}{c^2} \right\}^2 = \frac{1}{w} \quad (6.15)$$

Definiert man die dimensionslose Größe

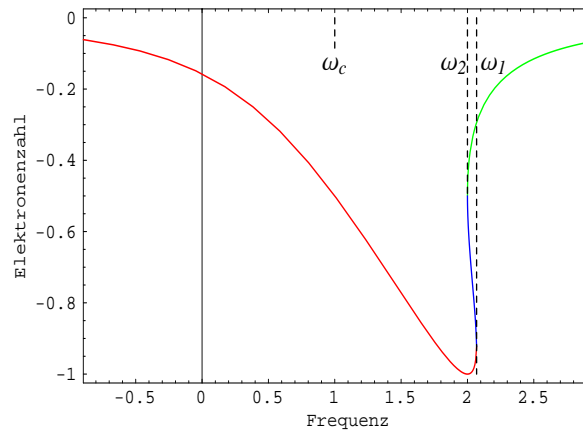
$$N := -\frac{1}{2} \frac{\omega_c}{\gamma_c} \cdot \frac{|u_{max}|^2}{c^2}$$

so erhält man schließlich

$$1 + 4 \left\{ \frac{\omega - \omega_c}{\gamma_c} - N \cdot w \right\}^2 = \frac{1}{w}$$

bzw.

$$w = \frac{1}{1 + 4 \left\{ \frac{\omega - \omega_c}{\gamma_c} - N \cdot w \right\}^2} \quad (6.16)$$



**Abb. 6.5:** Theoretisch berechnete Linienform der Elektron-Zyklotronresonanzkurve.

Im nicht-relativistischen Grenzfall  $|u_{max}|^2 \ll c$  geht  $N \rightarrow 0$  und man erhält aus (6.16) das bekannt Lorentzprofil:

$$w = \frac{1}{1 + \frac{4(\omega - \omega_c)^2}{\gamma_c^2}} = \frac{\gamma_c^2}{\gamma_c^2 + 4(\omega - \omega_c)^2} \equiv \frac{\left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2}{(\omega - \omega_c)^2 + \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} \quad (6.17)$$

Löst man (6.16) nach dem normierten Amplitudenquadrat auf, so erhält man drei Lösungen, die als Graphik in Abhängigkeit von der Mikrowellenfrequenz  $\omega$  aufgetragen den in Abb. 6.5 dargestellten Kurvenverlauf ergeben. Die asymmetrische Elektronen-Zyklotronresonanz-Kurve lässt sich gemäß den erhaltenen Lösungen in drei Frequenzbereiche unterteilen:

$$\begin{aligned} \text{Bereich ①} & : \omega < |\omega_c + \omega_2| \\ \text{Bereich ②} & : |\omega_c + \omega_2| \leq \omega \leq |\omega_c + \omega_1| \\ \text{Bereich ③} & : \omega > |\omega_c + \omega_1| \end{aligned}$$

Hierbei hat man keine eindeutige Lösung in den Bereichen ② und ③.

### Asymmetrische Linienform aufgrund der axialen Bewegung

Der zweite zu beschreibende Effekt ergibt sich als Folge des ersten Effektes bzw. ist zumindest damit korreliert. Aufgrund der hohen kinetischen Energie besitzen die Elektronen ebenso eine große axiale Amplitude. Somit sehen die Teilchen ein zeitlich gemitteltes Magnetfeld, dessen Feldstärke von der  $z$ -Schwingungsamplitude abhängt. Deshalb muss man berücksichtigen, dass die Zyklotronfrequenz von der axialen Position abhängt, da eine unterschiedliche Magnetfeldstärke zu einer anderen Elektronen-Zyklotronresonanz führt. Definiert man zur Vereinfachung der Schreibweise  $\omega_{c0} := \omega_0$  als die tatsächliche Zyklotronfrequenz und  $\omega_c := \omega \equiv \omega(z)$  als die von der axialen

Position abhängige Frequenz, so kann man folgenden Ansatz für die letztgenannte Frequenz machen:

$$\omega(z) = \omega_0 (1 + \varepsilon(z(t))^2) \quad (6.18)$$

wobei  $\varepsilon$  ein dimensionsloser Parameter ist, der die Magnetfeldinhomogenität berücksichtigt. Die harmonische axiale Bewegung ist nun mit einem externen Schwingkreis verbunden. Dieser wirkt zum einen als ein Wärmereservoir, beschrieben durch die Temperatur  $T$ :

$$\frac{1}{2}m\omega_z^2 \langle z(t)^2 \rangle = \frac{1}{2}kT \quad (6.19)$$

bzw. ausgedrückt durch die Linienbreite der Resonanz:

$$\Delta\omega = \omega_0 \varepsilon \langle z(t)^2 \rangle \quad (6.20)$$

und zum anderen als ein Dämpfungsmechanismus ausgedrückt durch die axiale Dämpfungskonstante  $\gamma$ , die in Beziehung zur Impedanz des Anregungsschwingkreises steht. Man kann deshalb für die axiale Bewegung folgende Beziehung aufstellen:

$$z(t)^2 \propto e^{-\gamma t} \cos^2(\omega_z t) \quad (6.21)$$

Das Linienprofil ergibt sich dann durch Fouriertransformation der folgenden Korrelationsfunktion [41]:

$$\chi(t) = e^{-i\omega_0 t} \left\langle e^{-i\omega_0 \varepsilon \int_0^t z(t')^2 dt'} \right\rangle \quad (6.22)$$

Nach einer länglichen Rechnung (in [41] durchgeführt), die auf dem quantenmechanischen Problem der Streuung von Teilchen an einem Kastenpotential beruht, erhält man als Endergebnis:

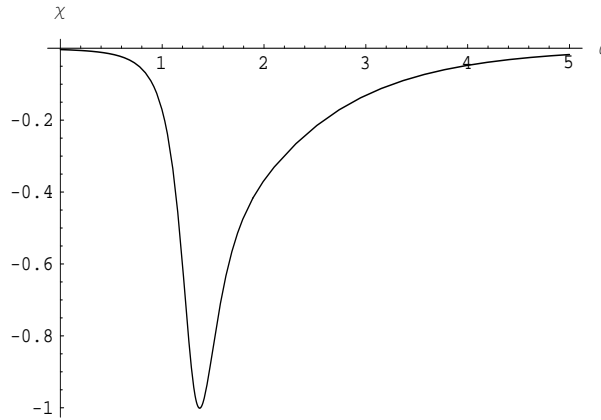
$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{e^{-i\omega_0 t}}{F(t)} & \text{für } t > 0 \\ \frac{e^{i\omega_0 t}}{F(-t)^*} & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

wobei

$$F(t) = \frac{1}{\gamma\gamma'} \left[ (\gamma' + \gamma)^2 e^{\frac{1}{2}(\gamma' - \gamma)t} - (\gamma' - \gamma)^2 e^{-\frac{1}{2}(\gamma' + \gamma)t} \right] \quad (6.24)$$

ist mit  $\gamma' \equiv \sqrt{\gamma^2 + 4i\gamma\Delta\omega}$ . Das Linienprofil ergibt sich somit über die Fourier-Beziehung:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.25)$$



**Abb. 6.6:** Simulation zum asymmetrischen Linienprofil der im Elektronen-Zyklotronspektrum sichtbar gewordenen axialen Seitenbänder. Aufgetragen ist die Fouriertransformierte Funktion  $\chi(\omega)$  aus Glg. (6.26).

mit dem Ergebnis:

$$\chi(\omega) = \frac{4}{\pi} \Re \left[ \frac{\gamma\gamma'}{(\gamma' + \gamma)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma' - \gamma)^{2n} (\gamma' + \gamma)^{-2n}}{(n + \frac{1}{2})\gamma' - \frac{1}{2}\gamma - i(\omega - \omega_0)} \right] \quad (6.26)$$

Mit Hilfe von MATHEMATICA<sup>®</sup> kann man die komplizierte Funktion (6.26) graphisch darstellen. Man erhält ähnlich wie im vorangehenden Unterabschnitt eine asymmetrische Linienform mit einem steilen Anstieg auf der niederfrequenten Flanke und einem sanften Abfall auf der höherfrequenten Flanke (siehe Abb. 6.6).

Abschließend sollen zwei Grenzfälle berücksichtigt werden: als Erstes eine schwache Kopplung der axialen Bewegung  $z(t)$  an den Anregungsschwingkreis, d. h.  $\gamma \ll \Delta\omega$ . Aus (6.23) folgt dann:

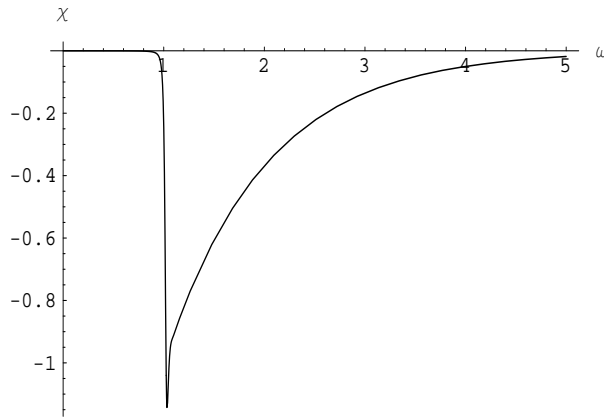
$$\chi(t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{1 + i\Delta\omega t}$$

Die Fouriertransformation ergibt:

$$\chi(\omega) = \frac{\Theta(\omega - \omega_0)}{\Delta\omega} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)} \quad (6.27)$$

mit  $\Theta(\omega - \omega_0)$  der Heaviside-Sprungfunktion. Eine Simulation der Linienform ist in Abb. 6.7 dargestellt.

Im zweiten Grenzfall soll eine starke Kopplung, d. h.  $\gamma \gg \Delta\omega$ , betrachtet werden. In diesem Fall werden die Elektronen über den Nachweis stark gedämpft und verlieren den größten Teil ihrer kinetischen Energie. Demzufolge erwartet man ein gleiches Linienprofil wie im nicht-relativistischen Fall



**Abb. 6.7:** Theoretische Linienform der axialen Seitenbänder der Elektronen-Resonanzkurve im Falle schwacher Kopplung. Aufgetragen ist die Fouriertransformierte Funktion  $\chi(\omega)$  aus Glg. (6.27).

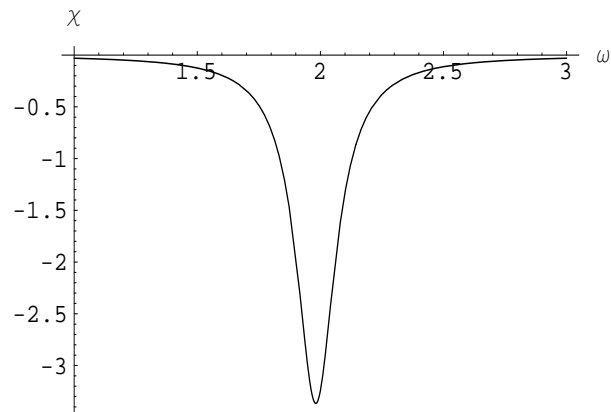
(siehe Abb. 6.8). Wiederum aus (6.23) folgt:

$$\chi(t) = e\left(-\frac{\Delta\omega^2}{\gamma}|t| - i(\omega_0 + \Delta\omega)t\right)$$

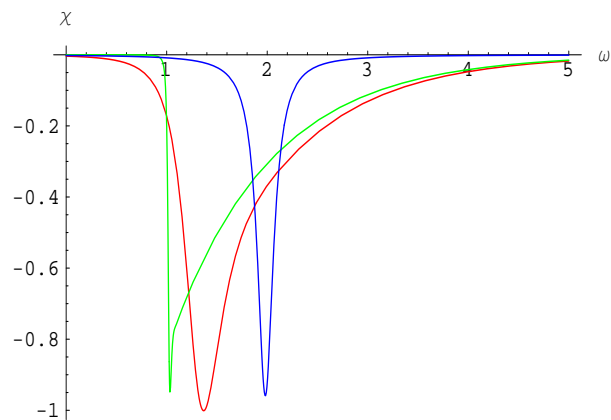
so dass man mit Hilfe von (6.25) das bekannte Lorentzprofil erhält, das zusätzlich um  $\Delta\omega$  verschoben ist:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\left(\frac{\Delta\omega^2}{\gamma}\right)}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + \left(\frac{\Delta\omega^2}{\gamma}\right)^2} \quad (6.28)$$

Eine Reduzierung der Mikrowellenleistung mit Hilfe eines regelbaren Abschwächers an der Mikrowellenanlage und eine Einengung des durchgestimmten Frequenzintervalls ergibt die in Abbildung 6.10 dargestellte Resonanzkurve. Die Linienbreite ist mit  $21\text{kHz}$  (FWHM) deutlich kleiner geworden, man erkennt jedoch eine Substruktur. Eine weitere Reduzierung der Hochfrequenzleistung führt zur erstmaligen Auflösung der reduzierten Zyklotronfrequenz  $\nu_+$  und der im Frequenzspektrum wegen der Kopplung der einzelnen Bewegungsformen als Seitenband auftauchenden reinen Zyklotronfrequenz  $\nu_c$  (siehe Abb. 6.11). Beide Frequenzen liegen aufgrund der Beziehung  $\omega_+ + \omega_- = \omega_c \Leftrightarrow \omega_c - \omega_+ = \omega_-$  gerade um den Betrag der Magnetronfrequenz auseinander, die bei dieser aufgenommenen Resonanzkurve aufgrund der vorliegenden Speicherspannung von  $U_0 = 15\text{V}$  bei  $\nu_- \approx 10\text{kHz}$  liegt. Wegen der geringen Ruhemasse des Elektrons von  $511\frac{\text{keV}}{c^2}$  spielen relativistische Effekte eine große Rolle. Aufgrund der Einsteinschen Beziehung führt eine nichtverschwindende kinetische Energie der Teilchen zu einer Massenzu-

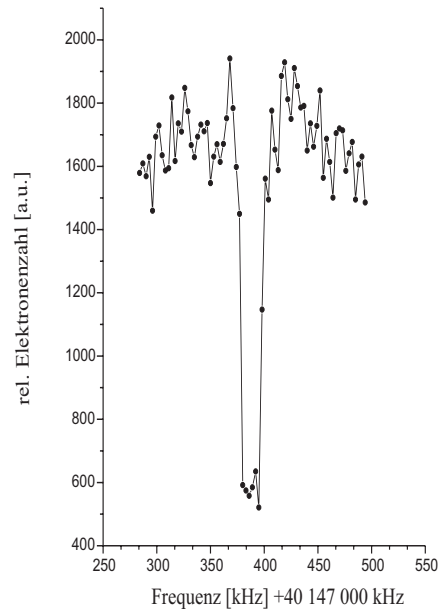


**Abb. 6.8:** Theoretische Linienform der axialen Seitenbänder der Elektronen-Resonanzkurve im Falle starker Kopplung. Aufgetragen ist die Fouriertransformierte Funktion  $\chi(\omega)$  aus Glg. (6.28).

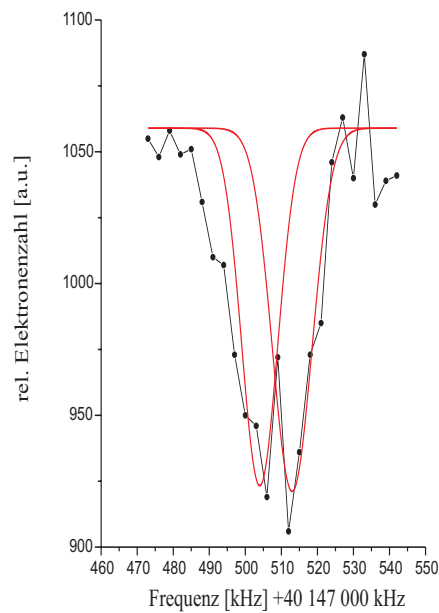


**Abb. 6.9:** Graphische Überlagerung der in den Abb. 6.6, 6.7 und 6.8 dargestellten Linienformen. Man sieht, dass die, je nach Kopplung an den Nachweisschwingkreis unterschiedliche kinetische Energie der Elektronen zu einer Verschiebung der Linienmitte führt.

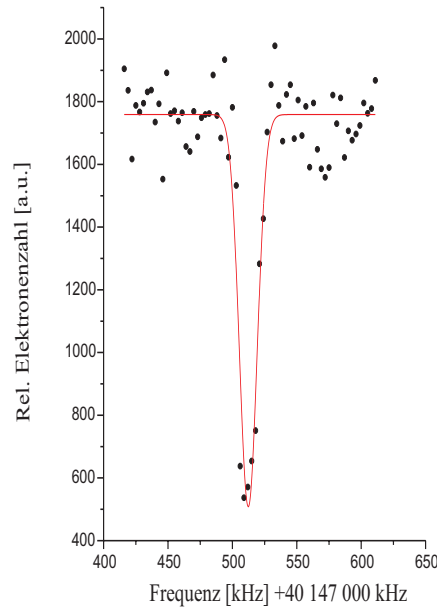




**Abb. 6.10:** Graphische Darstellung einer Elektronen-Zyklotron-Resonanzkurve.



**Abb. 6.11:** Auflösung der reduzierten Zyklotronfrequenz  $\omega'_c$  und der im Spektrum als Seitenband auftauchenden reinen Zyklotronfrequenz  $\omega_c$ . Der Frequenzabstand beträgt gerade den Betrag der Magnetonfrequenz.



**Abb. 6.12:** Elektronen-Zyklotron-Resonanzkurve mit einer Halbwertsbreite von 12kHz.

nahme, die gegeben ist durch:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{E_{kin}}{mc^2}$$

Dies führt weiterhin zu einer Verschiebung der Zyklotronfrequenz gemäß der Beziehung:

$$\frac{\Delta \nu_c}{\nu_c} = -\frac{E_{kin}}{mc^2} \quad (6.29)$$

Um diese Verschiebung möglichst klein zu halten, ist man bemüht, die kinetische Energie der Elektronen, die im Wesentlichen durch das Speicherpotential bestimmt ist, möglichst klein zu halten. Durch Absenken der Speicherspannung auf  $U_0 = 1V$  kann man somit sagen, dass bei resonant eingestrahlten Mikrowellen die kinetische Energie der Elektronen in  $z$ -Richtung maximal  $E_{kin} = \frac{1}{2}eU_0 = 0.5eV$  ist. Jedoch haben nur wenige Elektronen wirklich die maximale Energie zum Verlassen des Käfigs und die mittlere Energie der Ortsverteilung der Elektronen wird durchaus niedriger liegen. Aus Unkenntnis über die genaue Energieverteilung wird eine relativistische Frequenzverschiebung angenommen, die gleich der Hälfte der maximalen kinetischen Energie ist. Somit müssen die experimentell ermittelten Mittenfrequenzen zu höheren Frequenzen hin korrigiert werden, indem der durch Glg. (6.29) bestimmte Wert für  $\Delta \nu_c$  hinzuaddiert wird. Abb. 6.12 zeigt eine Resonanzkurve, die bei einem Speichertopf von  $U_0 = 1V$  aufgenommen wurde. Bei diesem niedrigen Speicherpotential konnte das Seitenband  $\nu_c$  nicht mehr

Radien [mm]	$e^-$	$Ca^+$
$r_+$	$3,73 \cdot 10^{-4}$	0,1
$r_-$	0,5 <sup>†</sup>	2,5 <sup>‡</sup>
$r_z$	2,01	2,12

**Tab. 6.2:** klassische Radien der Teilchenbewegungen für  $e^-$  und  $Ca^+$ . Hierbei wurde  $E_{+,z} \approx \frac{1}{40}eV$  und  $U_0(e^-) = 1V$ ,  $|U_0(Ca^+)| = 18V$  eingesetzt, wobei  $r_0 = \sqrt{2} \cdot 9mm$  und  $B = 1.43T$  benutzt wurde.

aufgelöst werden, da nach Tabelle 6.1 der Abstand zwischen reduzierter und reiner Zyklotronfrequenz lediglich  $685Hz$  beträgt.

Desweiteren muss der Tatsache Rechnung getragen werden, dass unter Umständen die Elektronen sich nicht am selben Ort wie die Ionen aufhalten. Dies führt zur Frage nach der Magnetfeldhomogenität und der zeitlichen Stabilität des Magnetfeldes. Diesbezüglich wurde von S. Trapp [302] am selben Magneten die Abhängigkeit der aufgenommenen Zyklotron-Resonanzkurven vom Ort der Falle in der Raumtemperaturbohrung des supraleitenden Magneten untersucht. Dazu wurde die Falle von der homogensten Stelle aus entlang der Magnetfeldrichtung verschoben und in Abständen von  $1mm$  die Zyklotronfrequenz gemessen. Das Ergebnis war, dass in einem Bereich von  $\pm 2mm$  um die homogenste Stelle die Schwankungen kleiner als  $10^{-8}$  waren und somit die in dieser Arbeit angestrebte Genauigkeit nicht gefährdeten. Eine Überprüfung der Homogenität in radialer Richtung konnte aus Platzgründen nicht durchgeführt werden, da der Glasrüssel fast den gleichen Außendurchmesser hat wie der Innendurchmesser der Raumtemperaturbohrung. Um die Bahnradien der Teilchenbewegungen abzuschätzen, kann man die Energieeigenwerte der Teilchen im Penningkäfig benutzen:

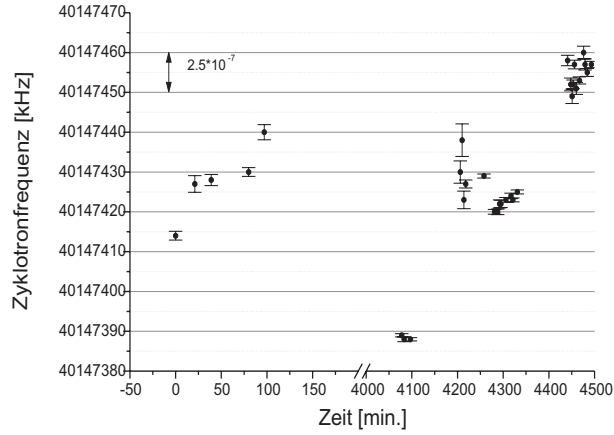
$$\begin{aligned}
 E(n_+, n_-, n_z) &= E_+^{kin} - E_-^{pot} + E_z^{kin} \\
 &= \left(n_+ + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_+ - \left(n_- + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_- + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z
 \end{aligned}$$

die über folgende Beziehungen im Zusammenhang mit den klassischen Bahn-

---

<sup>†</sup>Abgeschätzt durch den Radius der Bohrung in der unteren Kalotte. Die Elektronen, die vom Wolframdraht emittiert werden, gelangen durch das im Durchmesser  $1mm$  große Loch ins Fallennere. Deshalb kann man davon ausgehen, dass die radiale Ausdehnung nicht größer sein wird als dieser Durchmesser.

<sup>‡</sup>Abgeschätzt durch den Radius des Keramikofens. Die aus dem Keramikröhrchen abgedampften  $Ca$ -Atome werden hauptsächlich von Elektronen ionisiert, die gleichzeitig beim Glühen des Rheniumfadens emittiert werden. Aus diesem Grund kann man davon ausgehen, dass höchstens ein Volumen an Atomen von der Ausdehnung des Durchmessers des Keramikofens ionisiert wird.



**Abb. 6.13:** Graphische Auswertung der Untersuchung zeitlicher Schwankungen der Magnetfeldstärke verursacht durch äußere Einflüsse wie das Verschieben von ferromagnetischen Werkzeugen und Gegenständen im Labor. Als Maß für das Magnetfeld diente die Mittenfrequenz der Elektronen-Zyklotron-Resonanzkurve.

radien stehen:

$$r_+^2 = \left(n_+ + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{2}{m(\omega_+ - \omega_-)} = \frac{E_+^{kin}}{m\omega_+ \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}}} \approx \frac{2E_+^{kin}}{(eB)^2} m$$

$$r_-^2 = \left(n_+ - \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{2}{m(\omega_+ - \omega_-)} = \frac{E_-^{pot}}{m\omega_- \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}}} \approx \frac{2E_-^{pot}}{eU_0} r_0^2$$

$$r_z^2 = \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{2}{m\omega_z} = \frac{2E_z^{kin}}{m\omega_z^2} = \frac{E_z^{kin}}{eU_0} r_0^2$$

Man sieht aus Tabelle 6.2, dass die radiale Ausdehnung der Ladungsverteilungen von gespeicherten Elektronen nicht signifikant ist<sup>2</sup>.

Was die Langzeitdrift des Magnetfeldes betrifft, so kann sie unberücksichtigt bleiben, da die Messungen in einem Zeitraum von  $36h$  durchgeführt wurden. Statistische Kurzzeitschwankungen der magnetischen Flussdichte konnten nicht beobachtet werden, lediglich das Verschieben von ferromagnetischen Werkzeugen und Gegenständen im Labor führte zu diskreten Sprüngen in der Zyklotronfrequenz (siehe Abb. 6.13). Die Sprünge lagen hierbei im Bereich von ca.  $30kHz$ , was einer relativen Schwankung von  $8 \cdot 10^{-7}$  entspricht.

<sup>2</sup>Wobei die radiale Inhomogenität des Feldes bekannt ist, wenn die axiale Inhomogenität gemessen wurde. Dies folgt aus der Maxwell-Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

## 6.2 Der Landé- $g_J$ -Faktor von $Ca^+$

Mit der Kenntnis des Magnetfeldes am Ort der gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen ist es nun möglich, den elektronischen Landé- $g$ -Faktor des Elektrons gebunden im Grundzustand des ionischen  $Ca$ -Atoms anzugeben. Ersetzt man in Glg. (5.31) das  $B$ -Feld durch die Beziehung  $\nu_c = \frac{eB}{2\pi m}$  und berücksichtigt die Definition  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ , so heben sich die physikalischen Konstanten  $e$  und  $h$  auf und der  $g_J$ -Faktor hängt nur von der Zeeman-Resonanz- und der Elektronen-Zyklotronfrequenz ab:

$$g_J = 2 \cdot \frac{\nu_{Zeeman}}{\nu_{Zyklotron}}$$

Als gewichteter Mittelwert aus 24 Einzelmessungen, die wiederum jeweils Aufsummierungen von im Schnitt 10 bis 28 Durchläufen über den aufgenommenen Frequenzbereich sind, ergibt sich für die Mittenfrequenz der Mikrowellenresonanz:

$$\nu_{Zeeman} = 40\,192\,811,9(17) \text{ kHz}$$

Der Fehler entspricht einer relativen Ungenauigkeit von  $4.2 \cdot 10^{-8}$ . Der gewichtete Mittelwert der Elektronen-Zyklotronresonanz ergibt sich dagegen zu:

$$\nu_{Zyklotron} = 40\,147\,512,7(2) \text{ kHz}$$

wobei die relative Ungenauigkeit in der Angabe des gemittelten Wertes für die Mittenfrequenz bei  $4.3 \cdot 10^{-9}$  liegt. Die 18 Einzelmessungen wurden hierbei kurz vor bzw. nach der optischen Mikrowellen-Doppelresonanzmessung durchgeführt. Die Abb. 6.14 zeigt eine Häufigkeitsverteilung der Zyklotron-Messungen. Die Breite der Streuung beträgt in etwa  $2 \text{ kHz}$ .

Aus diesen beiden Frequenzen folgt schließlich für den  $g_J$ -Faktor<sup>3</sup> von  $Ca^+$ :

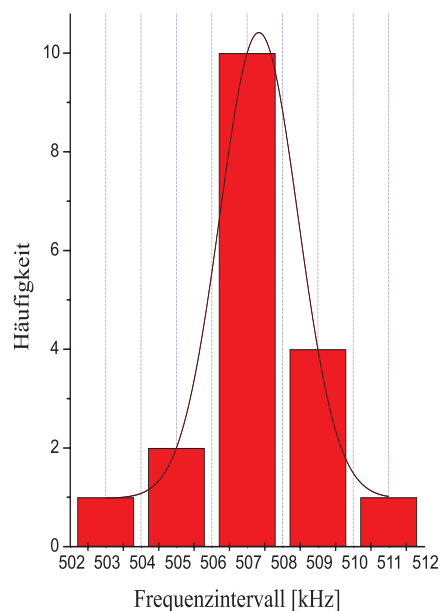
$$g_J(4^2S_{1/2}, Ca^+) = (-)2,002\,256\,64(9)$$

wobei sich der Fehler aufgrund der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ergibt:

$$\Delta g_J = \pm g_J \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta \nu_{Zeeman}}{\nu_{Zeeman}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \nu_{Zyklotron}}{\nu_{Zyklotron}}\right)^2}$$

Die relative Ungenauigkeit ist somit  $4.3 \cdot 10^{-8}$ . Man kann diesen ermittelten Wert in die tabellarische Übersicht 6.3 einfügen, die bereits experimentell bestimmte Landé- $g_J$ -Faktoren der Alkali-Atome und der zugehörigen isoelektrischen Ionen beinhaltet.

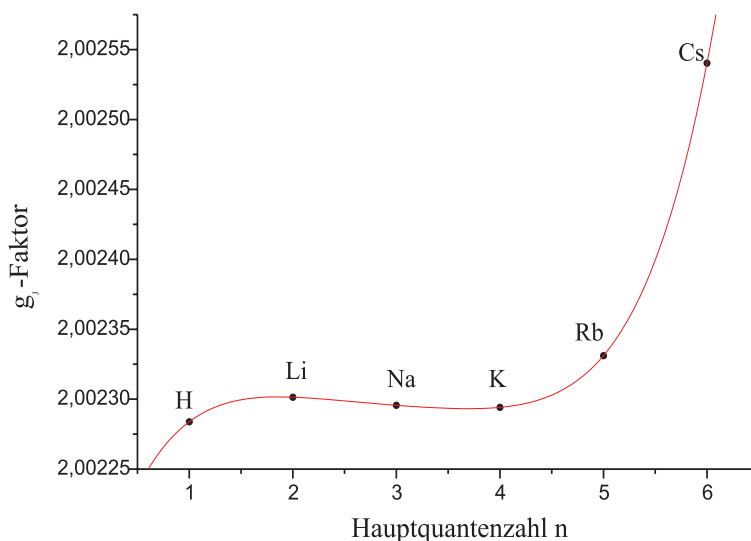
<sup>3</sup>Will man bzgl. der theoretischen Physik korrekt sein, so muss der elektronische  $g$ -Faktor stets negativ angegeben werden, da üblicherweise wegen der konventionmäßig definierten *negativen* Ladung des Elektrons das magnetische Moment der Hülle entgegengesetzt zur Richtung des Gesamtdrehimpulses  $\vec{J}$  ist. Das negative Vorzeichen ist jedoch



**Abb. 6.14:** Säulendiagramm zur Darstellung der statistischen Streuung der Zyklotron-Messungen. Die Breite der Streuung beträgt in etwa 2kHz.

Atom	$g_J$ -Faktor	Ref.	Ion	$g_J$ -Faktor	Ref.
$H$	2, 002 283 845(26)	[294]	$He^+$	2, 002 177 40(60)	[136]
$Li$	2, 002 301 42(80)	[116]	$Be^+$	2, 002 262 36(32) <sup>‡</sup>	[329]
$Na$	2, 002 295 63(16)	[16]	$Mg^+$	2, 002 254 09(30)	[29]
$K$	2, 002 294 15(16)	[15]	$Ca^+$	2, 002 256 64(9)	diese Arbeit
$Rb$	2, 002 331 09(16)	[15]	$Sr^+$	nicht gemessen	
$Cs$	2, 002 540 32(20)	[9]	$Ba^+$	2, 002 491 92(3)	[204]

**Tab. 6.3:** Elektronische  $g$ -Faktoren der Alkali-Atome und der zugehörigen isoelektronischen Ionen der Erdalkali-Gruppe.



**Abb. 6.15:** Graphische Darstellung der elektronischen Landé- $g$ -Faktoren der Alkali-Atome angeordnet nach der Hauptquantenzahl  $n$ . An die Punkte wurde ein Polynom 5. Ordnung angepasst. Bei  $n = 7$  lässt sich ein Wert für den  $g_J$ -Faktor von  $Fr$  angeben.

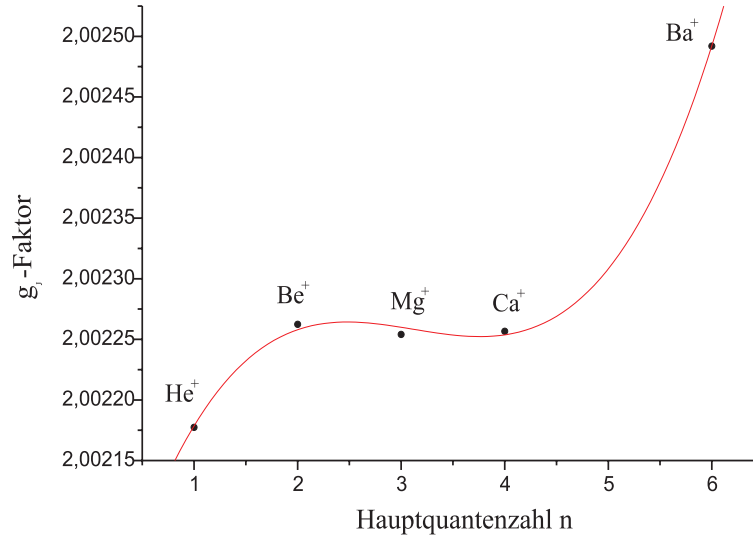
Man stellt auf den ersten Blick fest, dass die Landé- $g_J$ -Faktoren der Alkali-Atome alle größer sind als die entsprechenden  $g_J$ -Faktoren der zugehörigen isoelektrischen Ionen. Trägt man in einem Graphen die Hauptquantenzahl  $n$ , wobei zu  $n = 1$   $H$  bzw.  $He^+$ , zu  $n = 2$   $Li$  bzw.  $Be^+$ , usw. gehört, gegen den  $g_J$ -Faktor auf, so ergibt sich für beide ‚ $g$ -Faktor-Reihen‘ ein hyperbelähnlicher Verlauf. Legt man durch die Messpunkte eine polynomiale Fitfunktion dritter bzw. fünfter Ordnung, so kann man bei  $n = 5$  und  $n = 7$  folgende Werte für die  $g_J$ -Faktoren von  $Sr^+$ ,  $Fr$  und  $Ra^+$  angeben:

$$\begin{aligned} g_J(Sr^+) &= 2,002\,305\,24 \\ g_J(Fr) &= 2,003\,250\,36 \\ g_J(Ra^+) &= 2,002\,872\,17 \end{aligned}$$

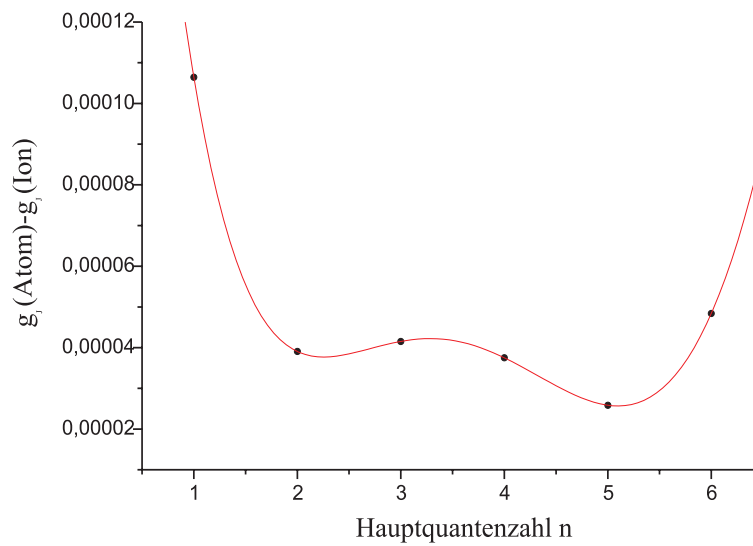
Diese numerischen Werte sind jedoch mit Vorsicht zu betrachten, da jegliche theoretische Grundlage fehlt, die einen Kurvenverlauf in den Abbildungen 6.15 und 6.16 vorhersagen könnte. Deshalb ist es nicht sinnvoll, einen Fehler anzugeben. Auffällig ist, dass die Änderung des  $g$ -Faktors in der Alkali- bzw.

in Klammern gesetzt, weil es vom experimentalphysikalischen Standpunkt inkorrekt erscheint, dass der Quozient aus zwei messbaren Frequenzen eine negative Zahl ergibt.

<sup>‡</sup>Dieser Wert ergibt sich aus dem in [329] angegebenen Wert von  $g_J = 2,002\,262\,06(42)$ , wenn man für die dort benutzten Massenverhältnisse  $m_p/m_e = 1836,152\,701(37)$  und  $m(^9Be^+)/m_p = 8,946\,534\,45(41)$  aktuellere Zahlen einsetzt. Diese Werte sind aus folgender Quelle entnommen worden: „*Fundamental Physical Constants*“ compiled by E. R. Cohen and B. N. Taylor, J. Res. Natl. Bur. Stand. **92**, 85 (1987).



**Abb. 6.16:** Graphische Darstellung der elektronischen Landé- $g$ -Faktoren der zu den Alkali-Atomen isoelektrischen Ionen angeordnet nach der Hauptquantenzahl  $n$ . Durch die Punkte wurde ein Polynom 3. Ordnung gelegt. Bei  $n = 5$  bzw.  $n = 7$  lässt sich ein Wert für den  $g_J$ -Faktor von  $Sr^+$  bzw.  $Ra^+$  angeben.



**Abb. 6.17:** Graphische Darstellung der Differenz zwischen den elektronischen Landé- $g$ -Faktoren der Alkali-Atome und den zugehörigen isoelektrischen Ionen angeordnet nach der Hauptquantenzahl  $n$ . Durch die Punkte wurde ein Polynom 4. Ordnung gelegt.



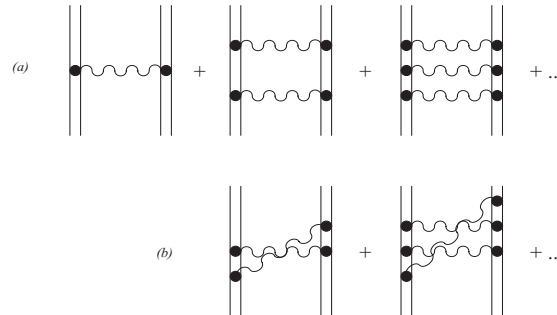
Erdalkali-Reihe mit zunehmender Hauptquantenzahl einem nicht trivialen Gesetz unterworfen zu sein scheint. Selbst die Auftragung der Differenz zwischen den  $g$ -Faktoren des atomaren und des isoelektrischen ionischen Systems in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl  $n$ , wie in Abbildung 6.17 gezeigt, ergibt wenig Aufschluss. Man kann lediglich sagen, dass die Messpunkte einer Funktion  $f(x) \propto x^k$  mit  $k = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 2$  zu folgen scheinen. Abschließend soll im folgenden Abschnitt ein theoretisches Modell vorgestellt werden, das als Grundlage für die Berechnung von Landé- $g_J$ -Faktoren atomarer und ionischer Systeme dient.

### 6.3 Theoretische Berechnung von $g_J$ -Faktoren gebundener Elektronen in ionischen Systemen

Die Elektronen in den Orbitalen des ionischen  $Ca^+$ -Systems (Ordnungszahl  $Z = 19$ ) bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 3,5% der Lichtgeschwindigkeit<sup>4</sup>. Bei theoretischen Berechnungen von Landé- $g_J$ -Faktoren, die mindestens eine Genauigkeit von  $10^{-5}$  erreichen sollen, müssen relativistische Effekte berücksichtigt werden. Will man jedoch ein Viel-Teilchen-System relativistisch behandeln, so kann dies – je nach Ansatz – die Verwendung der QED implizieren. Ein direkter theoretischer Gebrauch der ‚*Bound-State-QED*‘ (BSQED) ist für Systeme mit mehr als zwei Elektronen unpraktikabel. Lediglich sehr einfache schwere Systeme (wie z. B. hochgeladene wasserstoffähnliche Systeme mit großem  $Z$ ) lassen sich mit Hilfe der BSQED beschreiben. Der Grund hierfür ist, dass das sog. ‚ladder approximation‘ Feynman-Diagramm mit  $(n + 1)$  Photonenlinien (in Abb. 6.18 durch die Wellenlinie angedeutet) im Vergleich zu einem Diagramm ähnlicher Struktur mit  $n$  Photonenlinien nur von der Ordnung  $1/2$  ist [130]. Deshalb ist für leichte atomare oder ionische Systeme die direkte Anwendung des QED-Formalismus‘ zur Bestimmung der Energiebeiträge höherer Ordnung mit einem großen rechnerischen Aufwand verbunden. Aus diesem Grund haben sich in den letzten Jahren im Wesentlichen zwei Näherungsmethoden herauskristallisiert, mit deren Hilfe Korrelations- und relativistische Effekte durch Verwendung von angenäherten, aus der QED abgeleiteten Hamilton-Operatoren beschrieben werden können. Zum einen gibt es die auf dem Variationsprinzip beruhende ‚*Multiconfiguration Dirac-Fock*‘-Methode (MCDF) und zum anderen die von H. P. Kelly [145] anfang der 60er Jahre auf die Atomphysik übertragene ‚*relativistic Many-body perturbation theory*‘ (RMBPT). Letztere beruht auf der Rayleigh-Schrödinger Störungsrechnung für Vielteilchensysteme, die erstmals von Goldstone beschrieben wurde [103].<sup>5</sup> Eine Erweiterung der RMBPT stellt die ‚*coupled-cluster single and double excitation method*‘ (CCSD) dar.

<sup>4</sup>  $\frac{v}{c} \approx \alpha \frac{Z}{n} \approx \frac{1}{137} \cdot \frac{19}{4} = 0,035$

<sup>5</sup> Eine detaillierte Beschreibung findet sich z. B. in [86].



**Abb. 6.18:** 'Ladder approximation' (a) und 'crossed ladder approximation' (b) Diagramme. Die Wellenlinie stellt die Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung, die Photonen, dar.

Die hier aufgeführten sog. Viel-Teilchen-Methoden sind dabei nicht als disjunkte Theorien zu betrachten, sondern sie werden kompetitiv bei der Behandlung von atomphysikalischen Problemstellungen, wie etwa Berechnung von Energie-Niveaus, Lebensdauer angeregter Zustände oder  $g_J$ -Faktoren eingesetzt. Bevor die beiden Methoden vorgestellt werden, sollen zunächst die Haupteffekte beschrieben werden, die zu den Abweichungen des  $g_J$ -Faktors von der in Abschnitt 3.2 hergeleiteten Landé-Formel führen.

### 6.3.1 Korrelations- und relativistische Effekte

Ausgangspunkt der MCDF und RMBPT ist der Dirac-Coulomb-Hamilton-Operator für ein Ein-Elektronen-System:

$$\mathcal{H}_D = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{r} \quad (6.30)$$

Die Dirac-Gleichung liefert mit diesem Hamilton-Operator außer einem unendlichen Satz von gebundenen Energiezuständen noch ein positives ( $E > mc^2$ ) und ein negatives ( $E < -mc^2$ ) Energiekontinuum. Da nun die Übergangswahrscheinlichkeit eines Elektrons aus dem positiven Energiekontinuum bzw. aus den positiv gebundenen Energiezuständen in das negative Energiekontinuum nicht verschwindet, wird als Ausweg die Löchertheorie eingeführt. Diese besagt, dass im Vakuum (auch als *Fermi-See* bezeichnet) alle Zustände negativer Energie besetzt sind. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht im mathematischen Ausdruck der Dirac-Gleichung enthalten und deshalb, wie bereits 1951 Brown und Ravenhall [39] bemerkten, führt die Existenz des ( $E < -mc^2$ )-Kontinuums bei der Konstruktion eines relativistischen

Analogons zur Vielteilchen-Schrödinger-Gleichung zu nicht normierbaren Eigenfunktionen, d. h. die Viel-Teilchen-Dirac-Gleichung

$$\left\{ \sum_i \mathcal{H}_D(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j(i<j)} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right\} \Psi = E\Psi$$

besitzt keine stabilen gebundenen Energiezustände. Desweiteren wird eine klare Beschreibung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung durch das Vorhandensein von möglichen virtuellen Paarprozessen (wie Paarbildung und Paarvernichtung) getrübt. Einen Ausweg aus diesem Dilemma fand 1980 Sucher [285] mit Hilfe der BSQED. Dabei wird der sog. ‚no-pair‘-Hamilton-Operator<sup>6</sup> eingeführt, der den Dirac-Hamilton-Operator um den aus den Ein-Photonen-Austauschdiagrammen der QED stammenden Operator  $\mathcal{W}_{ij}$  erweitert:

$$\mathcal{H}^{np} = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}_D(r_i) + \sum_{i<j}^m \mathcal{W}_{ij}(|r_i - r_j|) \quad (6.31)$$

Dieser Operator, der die Elektron-Elektron-Wechselwirkung beschreibt, wird von Projektions-Operatoren  $\Lambda_i^+$  verziert, die die Elektronen zwingen, im positiven Teil des Energiespektrums zu bleiben. Für  $N$  Teilchen haben die Projektionsoperatoren folgende Form:

$$\Lambda_i^+ = \sum_{n+} \prod_{i=1}^N |\psi_{n+}(r_i)\rangle \langle \psi_{n+}(r_i)|$$

wobei  $n+$  eine positive Energielösung der Ein-Elektronen-Dirac-Gleichung ist. Der Operator  $\mathcal{W}_{ij}$  hat somit die Form:

$$\mathcal{W}_{ij} = \Lambda_i^+ \Lambda_j^+ V_{ij} \Lambda_i^+ \Lambda_j^+$$

mit

$$V_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r_{ij}}}_{(a)} \underbrace{-\frac{\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j}{r_{ij}}}_{(b)} \right. \quad (6.32)$$

$$\left. \underbrace{-\frac{\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j}{r_{ij}} \left( \cos\left(\frac{\omega_{ij} r_{ij}}{c}\right) - 1 \right) + c^2 (\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\nabla}_i) (\vec{\alpha}_j \cdot \vec{\nabla}_j) \frac{\cos\left(\frac{\omega_{ij} r_{ij}}{c}\right) - 1}{\omega_{ij}^2 r_{ij}}}_{(c)} \right\}$$

<sup>6</sup>Dieser Hamilton-Operator führt nur zu exakten Ergebnissen, wenn die Energie der Hüllenelektronen klein ist gegenüber der Paarerzeugungsenergie  $2m_0c^2$ .

Dabei ist  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  der Abstand zwischen zwei Elektronen,  $\omega_{ij}$  ist die Energie des zwischen den Elektronen ausgetauschten Photons und  $\vec{\alpha}_i$  sind die Dirac-Matrizen. Der Term (a) in (6.32) stellt die reguläre Coulombwechselwirkung dar, der Term (b) ist die magnetische (Gaunt-)Wechselwirkung und (c) ist schließlich die Verzögerungswechselwirkung. Für den Fall  $\frac{\omega_{ij} r_{ij}}{c} \ll 1$  lassen sich die Terme (b) und (c) entwickeln und man erhält den Breit-Wechselwirkungsterm:

$$B_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j}{r_{ij}} + \frac{(\vec{\alpha}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{\alpha}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^3} \right\} \quad (6.33)$$

Der Breit-Term beinhaltet somit den führenden Verzögerungsterm in der Ordnung  $\frac{1}{c^2}$  und ist die Summe aus Gaunt-Wechselwirkung und Breit-Verzögerung. Der relativistische Hamilton-Operator für das ionische System  $Ca^+$ , das einem äußeren homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist, kann somit folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{rel} &= \sum_{i=1}^{19} \left( c\vec{\alpha}_i \cdot \vec{p}_i + \beta_i mc^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{i<j} \frac{1}{r_{ij}} - \sum_{i<j} \left( \frac{\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j}{r_{ij}} + \frac{(\vec{\alpha}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{\alpha}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^3} \right) \right\} + \mathcal{H}_m \end{aligned} \quad (6.34)$$

Der Zeeman-Effekt wird durch den formal einfachen Ein-Elektron-Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}_m = ec \sum_{i=1}^{19} \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i(\vec{r}_i) \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{e}{2mc} [\beta_i \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i, \mathcal{H}_{rel}] + \frac{e}{2m} \beta_i \{ \vec{\sigma}_i \cdot \vec{A}_i, \vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i \} \\ &+ \frac{e}{2mc} [\beta_i \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i, \sum_{i<j} \mathcal{W}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)] \end{aligned} \quad (6.36)$$

dargestellt, wobei das äußere angelegte Feld durch  $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$  beschrieben ist. Eine Reduzierung von (6.34) auf das erste Pauli-Limit ergibt den üblichen Zeeman-Hamilton-Operator:

$$\mathcal{H}_{Zeeman}^o = \frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{L} + g_e \vec{S}) \cdot \vec{B}$$

der nur die Strahlungskorrektur einschließt, ausgedrückt durch den  $g$ -Faktor des freien Elektrons. Die Reduktion dagegen auf das zweite Pauli-Limit führt zu den sog. Abraham-Van Vleck-Korrekturtermen, die im Folgenden aufge-

listet sind:

$$\delta\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \sum_i \frac{E_{kin}^i}{mc^2} \cdot \vec{L}_i \quad (6.37)$$

$$\delta\mathcal{H}_2 = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \sum_i \frac{2E_{kin}^i}{mc^2} \cdot \vec{S}_i \quad (6.38)$$

$$\delta\mathcal{H}_3 = -\frac{\mu_B Z e^2}{\hbar m c^2} \sum_i \left\{ \vec{\nabla}_i \left( \frac{1}{r_i} \right) \times \vec{A}_i \right\} \cdot \vec{S}_i \quad (6.39)$$

$$\delta\mathcal{H}_4 = \frac{\mu_B e^2}{\hbar m c^2} \sum_{i < j} \left\{ \vec{\nabla}_i \left( \frac{1}{r_{ij}} \right) \times \vec{A}_i \right\} \cdot (\vec{S}_i + 2\vec{S}_j) \quad (6.40)$$

$$\delta\mathcal{H}_5 = -\frac{e^3}{2\hbar m^2 c^3} \sum_{i < j} \left( \frac{\vec{A}_i \cdot \vec{p}_j}{r_{ij}} + \frac{(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{A}_i)(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{p}_j)}{r_{ij}^3} \right) \quad (6.41)$$

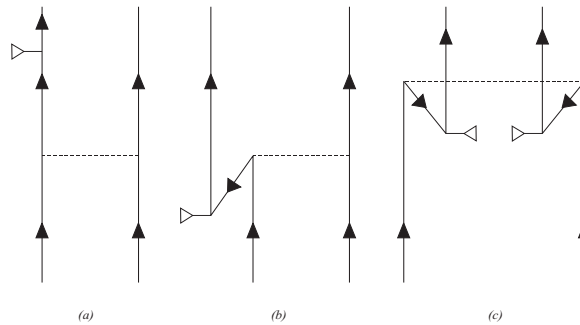
Eine Trennung des Systems in eine translatorische und eine innere Bewegung führt weiterhin zu einem zusätzlichen Korrekturterm aufgrund der Mitbewegung des Atomkerns:

$$\delta\mathcal{H}_N = -\frac{e}{2\hbar m c} \frac{m}{M} \left( \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i + \sum_{i < j} \vec{r}_i \times \vec{p}_j \right) \cdot \vec{B} \quad (6.42)$$

mit  $M$  gleich der Masse des Kerns. Die Terme (6.37) und (6.38) ergeben sich aufgrund der relativistischen Massenänderung des Elektrons und die Summe von  $\delta\mathcal{H}_1$  und  $\delta\mathcal{H}_2$  wird üblicherweise als *Breit-Margenau*-Korrektur bezeichnet. Der Term (6.39) und der Teil von  $\delta\mathcal{H}_4$ , der den Faktor  $\vec{S}_i$  beinhaltet, haben ihren Ursprung in der Reduktion des Coulombpotentials in Glg. (6.34). Der restliche Teil von  $\delta\mathcal{H}_4$ , der den Term  $2\vec{S}_j$  umfasst, findet sich in der Literatur häufig unter dem Namen *diamagnetische* Korrektur wieder und zusammen mit Term (6.41) bildet er die *Breit*-Wechselwirkung, die die verzögerte geschwindigkeitsabhängige Wechselwirkung zwischen den Elektronen darstellt. Die Terme (6.37)-(6.42) sind somit verantwortlich für die Abweichung des  $g_J$ -Faktors von der Landé-Formel. Die sich ergebenden Korrekturen haben zwei Hauptquellen: zum einen Strahlungseffekte, die beim freien Elektron etwa zur Schwinger-Korrektur von ungefähr  $-0.002319$  führen; zum anderen relativistische Effekte für ein gebundenes Elektron. Bei leichten Elementen sind diese Effekte, die mit  $(Z\alpha^2)$  skalieren, in der Größenordnung von  $10^{-4} - 10^{-5}$ . Schließlich hat man noch die Strahlungseffekte gebundener Zustände, die in der Größenordnung  $10^{-5} - 10^{-6}$  liegen.

Abschließend soll der Beitrag, der sich aus dem Vorhandensein negativer Energiezustände ergibt behandelt werden. Der in (6.31) eingeführte *no-pair*-Hamilton-Operator mit dem auf positive Energiezustände projizierten Coulombpotential berücksichtigt nicht negative Energielösungen der Dirac-Gleichung. Wie sich aber im Folgenden zeigen wird, muss positiven *und* negativen Energiezuständen Rechnung getragen werden. Der Operator in (6.36),

der die Wechselwirkung mit dem äußeren Magnetfeld beschreibt, ist nicht-diagonal bzgl. der kleinen und großen Komponente der relativistischen Wellenfunktion. Um sich zu verdeutlichen, wie sich diese Tatsache auf die Störungsreihe auswirkt, betrachte man die Brueckner-Goldstone-Diagramme<sup>7</sup> in Abb. 6.19: Man fügt eine zweite Störung ein und betrachtet die Coulomb-



**Abb. 6.19:** Diese Brueckner-Goldstone Diagramme berücksichtigen eine zweite zusätzliche Störung. Die waagerechte durchgezogene Linie mit dem leeren Dreieck an einem Ende repräsentiert die Wechselwirkung mit dem Magnetfeld und die gestrichelte Linie stellt die Elektron-Elektron Coulomb-Wechselwirkung dar. Diagramm (a) schließt die Energiezustände mit positiver Energie ein (angedeutet durch die nach oben gerichteten Pfeile), wie sie durch die Eigenzustände des ungestörten Hamilton-Operators definiert sind. Die Diagramme (b) und (c) entsprechen negativen Energiezuständen, die die Erzeugung von respektive einem oder zwei virtuellen Elektron-Positron-Paaren miteinschließen.

wechselwirkung mit einem zweiten Elektron. Wie in (6.19)(b) und (6.19)(c) dargestellt, kann man eine Mischung von negativen Energiezuständen zum ungestörten Hamilton-Operator erhalten. Wegen der ‚nicht-diagonalen Natur‘ des magnetischen Wechselwirkungsoperators trägt Diagramm (6.19)(b) zur Ordnung  $(\alpha^2 Z)$  bei. Aufgrund der Abwesenheit von nicht-relativistischen Korrekturen zu den gebundenen Zuständen sind die Beiträge von (6.19)(a) zu  $\delta g_J$  in der gleichen Größenordnung wie die Beiträge der Diagramme in (6.19)(b) und (6.19)(c). Werden die negativen Energiezustände in der Störungsrechnung höherer Ordnung nicht berücksichtigt, so liegt der Fehler, der sich hieraus ergibt in der Größenordnung  $(Z\alpha)^2$ .

Um nun zu sehen, wie sich die Berücksichtigung von  $(E < -mc^2)$ -Zuständen auf den relativistischen Hamilton-Operator in (6.34) auswirkt soll der letzte Kommutator in Glg. (6.36) betrachtet werden. Aus Gründen der Übersicht wird zunächst einmal nur die Coulomb-Wechselwirkung betrachtet.

<sup>7</sup>Auch RPA-Diagramme (engl. *random phase approximation diagrams*) genannt

Dann folgt für den letzten Term in (6.36):

$$\begin{aligned} & \frac{e}{2mc} \left[ \beta_i \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i, \Lambda_i^+ \Lambda_j^+ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \Lambda_i^+ \Lambda_j^+ \right] = \\ & \frac{e}{2mc} \left\{ -\Lambda_j^+ \left[ \beta_i \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i, \Lambda_i^- \right] \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \Lambda_i^+ \Lambda_j^+ + \Lambda_i^+ \Lambda_j^+ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left[ \Lambda_i^-, \beta_i \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i \right] \Lambda_j^+ \right\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

wobei die Tatsache benutzt wurde, dass die Beziehung  $\Lambda^+ + \Lambda^- = 1$  (mit dem Projektionsoperator auf negative Energiezustände  $\Lambda^-$ ) gilt und dass  $\frac{1}{r_{ij}}$  bzw.  $(\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{A})$  miteinander kommutieren. Bildet man den Erwartungswert von (6.43) bzgl. Eigenzuständen von (6.34) (ohne Breit-Wechselwirkung), so erhält man als Beiträge zu den negativen Energiezuständen  $|s_i^- \rangle$ :

$$\frac{e}{2mc} \sum_{s^-} \langle \Psi^{++} | \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} | s_i^- \rangle \langle s_i^- | \beta_i \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i | \Psi^{++} \rangle + \text{k. k.}^\ddagger \quad (6.44)$$

Die Anwesenheit des konjugiert-komplexen Terms folgt aus dem ersten Term auf der rechten Seite von Glg. (6.43). Da  $(\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{A})$  anti-Hermitesch ist trägt dieser Term mit entgegengesetztem Vorzeichen bei. Weiterhin führen die Beiträge, die sich aus der Erzeugung von  $(e^- - e^+)$ -Paaren ergeben, zur Addition von weiteren Termen zu (6.44):

$$\sum_{s^-} \frac{\langle \Psi^{++} | \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} | s_i^- \rangle \langle s_i^- | ce \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i | \Psi^{++} \rangle}{2mc^2} + \text{k. k.} \quad (6.45)$$

Bis zur Ordnung  $(Z\alpha^2)$  bewirkt die Anwesenheit von  $\beta$  in (6.44) nur einen Vorzeichenwechsel, so dass sich die Beiträge in (6.44) und (6.45) gegenseitig wegheben.

Betrachtet man abschließend die Breit-Wechselwirkung wie sie in (6.33) dargestellt ist, so haben die Beiträge zu den negativen Energiezuständen die Form:

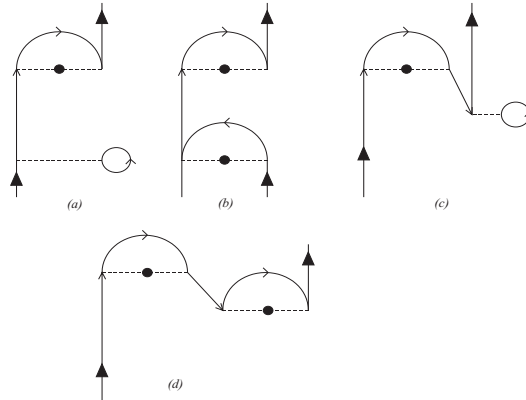
$$\sum_{s^-} \frac{\langle \Psi^{++} | B_{ij} | s_i^- \rangle \langle s_i^- | ce \vec{\alpha}_i \cdot \vec{A}_i | \Psi^{++} \rangle}{2mc^2} + \text{k. k.} \quad (6.46)$$

Der Ausdruck ist von der Ordnung  $\alpha^2$ . Die Diagramme in Abb. 6.20 stellen Korrekturen zweiter Ordnung zum Potential dar, unter Einbeziehung der Breit-Wechselwirkung.

### 6.3.2 Die RMBP-Theorie

Die RMBPT weist in ihrer Struktur Ähnlichkeiten mit der BSQED auf. Der Hauptunterschied ist, dass als Referenzzustand nicht mehr das Vakuum, sondern ein atomarer Zustand genommen wird, in der Regel ein Hartree-Fock-Zustand mit abgeschlossener Schale (sog. *Hartree-Fock closed-core state*).

<sup>‡</sup>Hermitesch konjugiert-komplex.



**Abb. 6.20:** Brueckner-Goldstone Diagramme. Die Breit-Wechselwirkung ist symbolisch durch die Linie mit dem Kreis angedeutet. Die Diagramme (a) und (c) sind Kreuzterme aufgrund der Coulomb- und der Breitwechselwirkung. Die Diagramme (c) und (d) schließen negative Energiezustände (angedeutet durch die nach unten gerichteten Pfeile) ein. Das Diagramm (a) ist von der Größenordnung  $(Z\alpha)^2$ , während die übrigen Diagramme (b)-(d) von der Größenordnung  $(Z\alpha)^4$  sind.

Das für die Störungsrechnung angesetzte Potential ist dann die Differenz aus dem ‚no-pair‘-, dem Ein-Photonen Elektron-Elektron Wechselwirkungs- und dem Hartree-Fock-Potential. Ausgangspunkt der Berechnung ist der relativistische Hamilton-Operator in (6.34), der die Summe aus Coulomb- und Breitwechselwirkung beinhaltet. Das Problem besteht dann darin, Näherungen zu der exakten Wellenfunktion  $\Psi_0$  zu finden, die folgende Eigenwertgleichung erfüllt:

$$\mathcal{H}_{rel} \Psi_0 = E \Psi_0$$

In der Viel-Teilchen-Störungstheorie erhält man somit einen Hamilton-Operator nullter Ordnung, indem die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den  $N$  Elektronen durch die Potentiale der einzelnen Teilchen  $V_i$  ersetzt wird:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^N \left( c\vec{\alpha}_i \cdot \vec{p}_i + \beta_i mc^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + V_i \right)$$

Der Beitrag erster Ordnung  $\Phi_0$  zu  $\Psi_0$  ist demzufolge eine Slater Determinante von  $N$  Einteilchen-Wellenfunktionen  $\phi_n$ , welche Lösungen sind von:

$$\left( c\vec{\alpha}_i \cdot \vec{p}_i + \beta_i mc^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + V_i \right) \phi_n(\vec{r}_i) = \epsilon_n \phi_n(\vec{r}_i)$$

Der Rest des Wechselwirkungsterms in (6.34) wird als Störung behandelt. Für die Wellenfunktion  $\Psi_0$  und den dazugehörigen Energieeigenwert  $E$  er-



geben sich schließlich die sog. ‚*linked cluster*‘ Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \sum_L \left( \frac{1}{E_0 - \mathcal{H}_0} \mathcal{H}' \right)^n \Phi_0 \\ E &= \langle \Phi_0 | \mathcal{H}_0 | \Phi_0 \rangle + \sum_L \langle \Phi_0 | \mathcal{H}' \left( \frac{1}{E_0 - \mathcal{H}_0} \mathcal{H}' \right)^n | \Phi_0 \rangle\end{aligned}$$

mit  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_{rel} - \mathcal{H}_0$  und Summation über die Schalen  $L$ .

Mit der iterativen Methode CCSD ist es möglich, Klassen von Korrelationseffekten zu allen Ordnungen  $n$  zu berechnen.

### 6.3.3 Die MCDF-Methode

Die ‚Multiconfiguration Dirac-Fock‘-Methode ist im Gegensatz zur RMBPT eine Theorie, die auf dem Variationsprinzip beruht und Näherungslösungen zum relativistischen Viel-Teilchen-Problem liefert, die über die Ein-Teilchen-Näherung hinausgehen. Die Gesamt-Wellenfunktion des Atoms bzw. Ions wird dabei durch eine ‚Testfunktion‘ beschrieben, die so konstruiert wird, dass sie den größtmöglichen funktionalen Raum der zum entsprechenden Hamilton-Operator gehörenden Lösung aufspannt. Die Variationsmethoden unterscheiden sich demzufolge in der Wahl dieser Testfunktion. Eine mögliche Wahl besteht darin, die Testfunktion als Linearkombination von Slater-Determinanten anzusetzen, die lediglich von den Ein-Elektronen-Koordinaten  $|\vec{r}_i|$  abhängen, nicht aber von den relativen Koordinaten  $r_{ij}$ . Anschließend wird die Gesamtenergie nach dem Variationsprinzip minimiert. Schränkt man die Variationsparameter auf die Mischungskoeffizienten  $c_\nu$  ein, so wird die Methode *Relativistic Configuration Interaction* (RCI) genannt. Werden hingegen zusätzlich die Ein-Elektronen-Wellenfunktionen (die sog. Ein-Elektronen Orbitale) optimiert, so spricht man von der eigentlichen MCDF-Methode.

Die zu berechnende atomare Gesamt-Wellenfunktion erfüllt die Gleichung

$$\mathcal{H}^{np} \Psi_{\Pi,J,M}(r_1, \dots, r_N) = E_{\Pi,J,M} \Psi_{\Pi,J,M}(r_1, \dots, r_N), \quad (6.47)$$

die einen Satz von Testfunktionen (*trial functions*) darstellt. Diese Funktionen sind Eigenfunktionen des Paritätsoperators  $\Pi$  und des Gesamtdrehimpulses  $\mathbf{J}^2$  mit Eigenwert  $J$  und dessen Projektion auf die  $z$ -Achse  $J_z$  mit Eigenwert  $M$ . Die Gesamtwellenfunktion  $\Psi_{\Pi,J,M}(\dots, \vec{r}_i, \dots)$  ergibt sich dann als Superposition von Konfigurations-Zustandsfunktionen (CSF, engl. *configuration state function*):

$$|\Psi_{\Pi,J,M}\rangle = \sum_{\nu=1}^n c_\nu |\nu\Pi JM\rangle$$

Die CSFs sind demzufolge ebenfalls Eigenfunktionen von  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_z$  und  $M$ . Der Index  $\nu$  steht für die übrigen Quantenzahlen (Hauptquantenzahl, Spinquantenzahl usw.), die nötig sind, um die Konfigurations-Zustandsfunktionen eindeutig zu definieren. Für ein  $N$ -Elektronensystem ist die CSF eine Linearkombination von Slater-Determinanten von Dirac Vierer-Spinoren:

$$|\nu\Pi JM\rangle = \sum_{i=1}^{N_\nu} d_i \begin{vmatrix} \Psi_1^i(r_1) & \cdots & \Psi_N^i(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1^i(r_N) & \cdots & \Psi_N^i(r_N) \end{vmatrix}$$

mit

$$\Psi_{n\kappa\mu}^i(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_{n\kappa}^i(r) \chi_{\kappa_i}^{\mu_i}(\theta, \varphi) \\ iQ_{n\kappa}^i(r) \chi_{-\kappa_i}^{\mu_i}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

wobei  $\chi_{\kappa}^{\mu}(\theta, \varphi)$  ein 2-dimensionaler sphärischer Pauli-Spinor ist. Die Wellenfunktionen  $\Psi_i(\vec{r})$  erfüllen die Beziehung

$$\left\{ \beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) \right\} \Psi_i(r) = \kappa \Psi_i(r)$$

und  $P_{n\kappa}^i(r)$  bzw.  $Q_{n\kappa}^i(r)$  sind die großen bzw. kleinen Radialkomponenten der Wellenfunktion. Die Koeffizienten  $d_i$  lassen sich unter der Bedingung bestimmen, dass die CSFs Eigenzustände von  $\mathbf{J}^2$  und  $J_z$  seien.

Man erhält nun die fundamentale Gleichung der MCDF-Methode, indem nach Umschreiben von (6.47) zu

$$E_{\Pi, J, M} = \frac{\langle \Psi_{\Pi, J, M} | \mathcal{H}^{np} | \Psi_{\Pi, J, M} \rangle}{\langle \Psi_{\Pi, J, M} | \Psi_{\Pi, J, M} \rangle}$$

auf die Koeffizienten  $c_\nu$  und auf die großen und kleinen Radialkomponenten der Wellenfunktion das Variationsprinzip angewendet wird. Die Forderung

$$\frac{\partial E_{\Pi, J, M}}{\partial c_\nu} = 0$$

führt zu einer Hamiltonmatrix, dessen Diagonalisierung die Koeffizienten  $c_\nu$  liefert. Weiterhin ergibt eine zweite Forderung

$$\frac{\partial E_{\Pi, J, M}}{\partial f^i(r)} = 0 \quad \text{mit} \quad f^i(r) = P^i(r), Q^i(r)$$

einen Satz von gekoppelten Integro-Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{n\kappa} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - V_D & c \left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) \\ -c \left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) & \varepsilon_{n\kappa} + 2mc^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - V_D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n\kappa}^i(r) \\ Q_{n\kappa}^i(r) \end{pmatrix} = a\lambda_{i,i} \begin{pmatrix} P_{n\kappa}^i(r) \\ Q_{n\kappa}^i(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_P^i(r) \\ X_Q^i(r) \end{pmatrix} + \sum_{i < j} \lambda_{j,i} \begin{pmatrix} P_{n\kappa}^i(r) \\ Q_{n\kappa}^i(r) \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

Methode		$g_J - g_{free}[10^{-5}]$	$g_J$
Dirac-Fock		Coulomb -4.851	2.002 270 8
	Anzahl der $s$ -Orbitale		
RCI	20	-5.342	2.002 265 9
RCI	25	-5.305	2.002 266 2
RCI	30	-5.399	2.002 265 3
RMBPT		-5.280	2.002 266 5
Dirac-Fock		-5.178 <sup>‡</sup>	2.002 267 5
Insgesamt		-5.726*	2.002 262 0

**Tab. 6.4:** RMBPT und MCDF Ergebnisse für den  $Ca^+$  Landé-Faktor [130].

$V_D$  ist der direkte Beitrag zum Dirac-Fock-Potential,  $(X_P^i(r), X_Q^i(r))$  sind die Austauschpotentiale zu den großen bzw. kleinen Komponenten.  $\lambda_{i,i}$  ist der Lagrange-Diagonal-Parameter, der eine Normierbarkeit der Wellenfunktion erzwingt und  $\lambda_{i,j}$  sind die Lagrange-Nichtdiagonal-Parameter, die für eine Orthogonalisierung zwischen Orbitalen mit gleichem  $\kappa$  sorgen:

$$\int_0^\infty \{P_{n\kappa}^i(r)P_{n\kappa}^j(r) + Q_{n\kappa}^i(r)Q_{n\kappa}^j(r)\} dr = \delta(\kappa_i, \kappa_j)\delta(n_i, n_j)$$

Die Dirac-Fock Eigenwerte  $\varepsilon_{n\kappa}$  ergeben sich durch eine sog. ‚frozen-orbital-approximation‘ zur Bindungsenergie eines Elektrons, das sich in einer Unterschale  $(n, \kappa)$  aufhält. Lösungen von (6.48) erhält man durch Einsatz von numerischen Rechenverfahren, die ähnlich sind zu den nicht-relativistischen Hartree-Fock Berechnungen und sich z. B. in Arbeiten von Indelicato [127], Desclaux<sup>8</sup> und Grant<sup>9</sup> finden. Eine angestrebte hohe Genauigkeit mit Hilfe der RCI-Methode impliziert die Berechnung einer sehr großen Anzahl von CSF. Deshalb eignet sich diese Methode vor allem für atomare bzw. ionische Systeme mit kleinem  $Z$ .

### 6.3.4 Erste Ergebnisse theoretischer Berechnungen zum Landé- $g_J$ -Faktor von $^{40}Ca^+$

Die theoretischen Berechnungen sind von P. Indelicato et al. am Laboratoire Kastler-Brossel in Paris Cedex durchgeführt worden. In diesem abschließenden Unterabschnitt werden erste vorläufige Ergebnisse präsentiert, denn, wie sich im Laufe der theoretischen Arbeit herausstellte, beanspru-

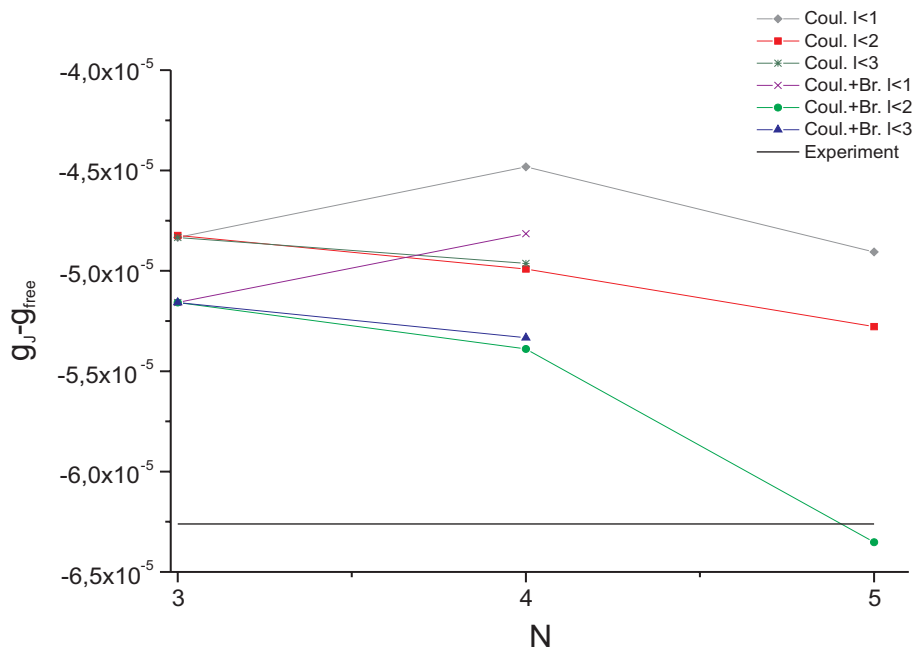
<sup>8</sup>J. P. Desclaux, Comp.Phys. Comm. **9**, 31 (1975)

<sup>9</sup>I. P. Grant, B. J. McKenzie and P. H. Norrington, Comp. Phys. Comm. **21**, 207 (1980)

<sup>‡</sup>Einschließlich des Breit-Beitrages

\*Einschließlich des Breit-Beitrages+RCI Coulomb

chen die Computer-Berechnungen in den höheren Ordnungen, die die Beiträge höherer Schalen einschließen, einen sehr großen Zeitaufwand. Die bisher gemachten Berechnungen schließen die Coulomb-Breit Korrelation für 'outer shell states' und 'double excited states' ein für alle  $s$ ,  $p$  und  $d$  Orbitale bis zu  $n = 5$ . Um jedoch unter Umständen eine bessere Konvergenz zwischen theoretischen Daten und experimentellem Wert zu erreichen, müssen noch die 'single excited states' berücksichtigt werden, die zwar keinen Einfluss auf die Bindungsenergie des Systems haben, jedoch auf dem RPA Level zum Landé-Faktor beitragen.



**Abb. 6.21:** Graphische Darstellung der theoretischen Landé-Faktoren für  $Ca^+$ , die sich aus den verschiedenen theoretischen Ansätzen ergeben.  $N$  bezeichnet die Anzahl der berücksichtigten Schalen.

Wie man an Abb. 6.21 sieht, wäre es interessant, den Beitrag zu  $6d$  zu bestimmen. Die Breit-Wechselwirkung spielt dabei eine entscheidende Rolle, da hier das  $4s$ -Orbital bereits als angeregt betrachtet werden muss. Da im Verfahren Energieeigenwerte minimiert werden müssen, besteht beim Hinzufügen der *single excited states* das Problem, dass sich diese Eigenwerte u. U. kaum ändern und somit das Optimierungsverfahren nur schwach konvergiert. Die unendlich vielen Kombinationen, die sich ergeben, können sich unter Umständen gegenseitig kompensieren. Folge ist, dass man zu gleichen Energien konvergiert, aber unterschiedliche  $g_J$ -Faktoren erhält. Tab. 6.4 fasst die numerischen Ergebnisse zusammen, wobei Korrelationen höherer Ordnung unberücksichtigt sind. Die Abb. 6.21 stellt die zum Zeitpunkt der Fertigstel-

lung der Arbeit aktuellsten Werte<sup>10</sup> graphisch dar. Man sieht, dass sich eine Konvergenz zwischen theoretischen Werten und gemessenem Wert andeutet.

---

<sup>10</sup>private Mitteilung von P. Indelicato



## Kapitel 7

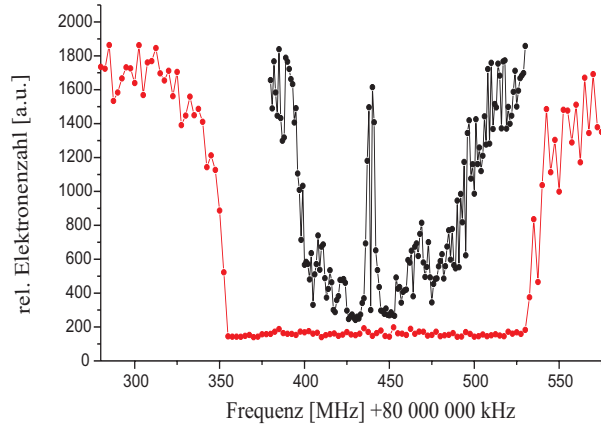
# Vorbereitende Messungen und Berechnungen an $Pb^+$

Das nun folgende Kapitel beinhaltet zum einen die Beschreibung von getroffenen Maßnahmen und ausgeführten Messungen, die notwendig waren, um die Bedingungen zu schaffen, die notwendig waren für die Speicherung von  $Pb^+$ -Ionen in einer Penningfalle. Zum anderen wurden Simulationen der Feinstruktur von  $^{208}Pb^+$  und der Hyperfeinstruktur von  $^{207}Pb^+$  in Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes durchgeführt. Ein erster Schritt bestand darin, die Feldstärke des supraleitenden Magneten zu erhöhen.

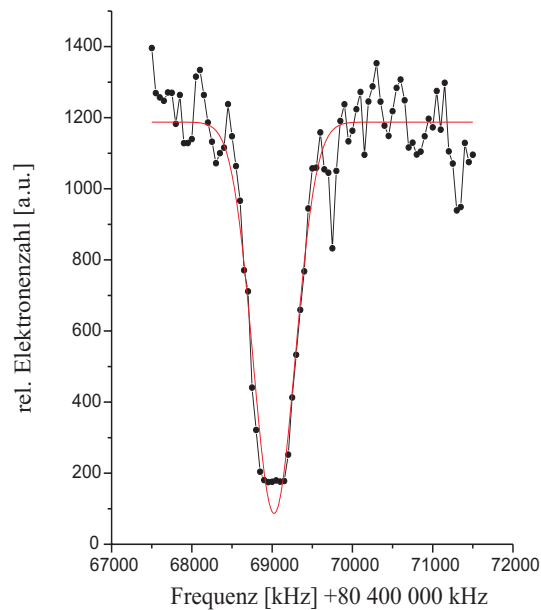
### 7.1 Verdopplung der magnetischen Flussdichte im supraleitenden Magneten

Kurze Zeit nachdem die magnetische Flussdichte im supraleitenden Magneten (SUMA) durch Änderung des Stroms, der durch die Spulen fließt, erhöht wurde, erfolgte eine vorläufige Bestimmung derselben mit lediglich einer Genauigkeit von ca.  $10^{-7}$ . Dies war zum Zeitpunkt dieser ersten Messung ausreichend, da nur sichergestellt werden sollte, dass der über einen Stromgenerator eingestellte Wert des Magnetfeldes im Durchstimmbereich der Frequenz des Klystrons lag. Die Graphiken in den Abb. 7.1 und 7.2 zeigen Elektronen-Zyklotronresonanzen, die bei unterschiedlichen Mikrowellenleistungen aufgenommen wurden. Bevor erste Präzisionsmessungen im Bereich von  $10^{-8}$  durchgeführt werden konnten, musste dem supraleitenden Magneten Zeit gelassen werden um sich zu stabilisieren. Dies war in der Tat notwendig, da für eine kurze Zeitspanne nach dem Hochfahren des Feldes ein erhöhter Heliumverbrauch konstatiert wurde. Die erhöhten zeitlichen Fluktuationen waren jedoch nicht hinderlich bei der Speicherung sowohl von Blei-Ionen als auch von Elektronen.

Nach etwa 9 Monaten erfolgte eine erste Präzisionsmessung des Magnetfeldes. Hierbei wurde die Magnetfeldstärke durch Aufnahme der reduzierten

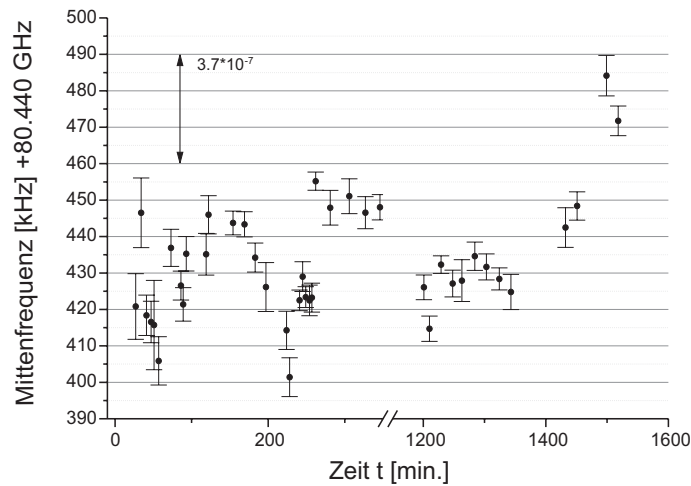


**Abb. 7.1:** Elektronen-Zyklotronresonanz bei voller Mikrowellenleistung (rote Punktcurve). Das Signal ist übersättigt, d. h. die Elektronen werden für ein großes Frequenzintervall vollständig aus der Penningfalle entfernt. Bei einer Reduzierung der Mikrowellenleistung werden Seitenbänder sichtbar (schwarze Punktcurve).

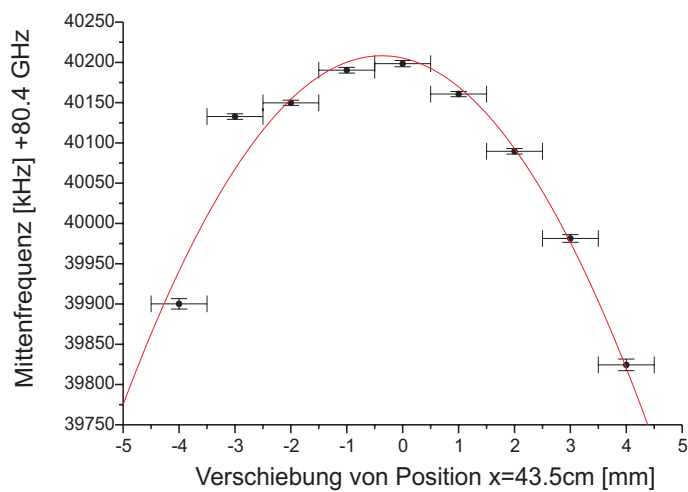


**Abb. 7.2:** Elektronen-Zyklotronresonanz bei deutlich reduzierter Mikrowellenleistung. Man sieht, dass das Signal immer noch gesättigt ist. Das Magnetfeld wurde am 26.04.01 mit einer Genauigkeit von  $6.5 \cdot 10^{-6}$  zu  $B = 2,873588T$  bestimmt. Dies war als vorläufige Messung ausreichend, da wir lediglich sicher stellen wollten, dass das veränderte Magnetfeld im gewünschten Bereich lag.





**Abb. 7.3:** Untersuchung des zeitlichen Verlaufs des Magnetfeldes.



**Abb. 7.4:** Graphische Darstellung der Homogenität des Magnetfeldes. Durch Aufnahme der Elektronen-Zyklotron-Resonanzkurve bei unterschiedlichen in horizontaler Richtung liegenden Positionen der Fallenapparatur, wurde sichergestellt, dass sich die homogenste Stelle bei  $x = 43.5\text{cm}$  durch Hochfahren des Magnetfeldes nicht verändert hatte.

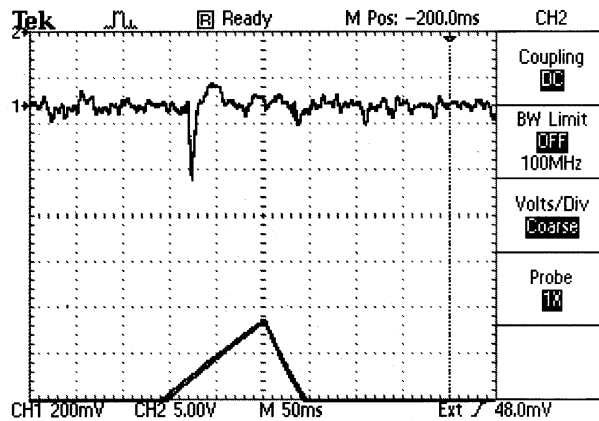
Zyklotronsfrequenz gespeicherter Elektronen über einen Zeitraum von 2 Tagen beobachtet. Ziel war zum einen die Untersuchung der zeitlichen Stabilität des Magnetfeldes, die wichtig ist für die zukünftigen Doppelresonanzmessungen an den Bleisotopen  $^{208}\text{Pb}^+$  und  $^{207}\text{Pb}^+$ . Zum anderen wurde durch horizontales Verfahren der Vakuumapparatur in der Raumtemperaturbohrung des SUMA, die Zyklotronresonanz der gespeicherten Elektronen an unterschiedlichen Orten im Magnetfeld aufgenommen. Hiermit sollte sichergestellt werden, dass die bereits bei früheren Messungen [302] ermittelte homogenste Stelle des Magnetfeldes sich nicht verschoben hatte.

## 7.2 Die Erzeugung und die Speicherung von $\text{Pb}^+$ -Ionen

Zur Untersuchung des Speicherverhaltens von  $\text{Pb}^+$ -Ionen wurde ähnlich vorgegangen wie bei den in Abschnitt 5.1 beschriebenen Untersuchungen an  $\text{Ca}^+$ -Ionen. Es bestanden lediglich einige, wenn man so sagen kann, „äußerliche“ Unterschiede:

Zum einen sollten die  $\text{Pb}^+$ -Ionen bei einem doppelt so starken Magnetfeld gespeichert werden. Aufgrund der geänderten schweren Masse von Blei musste die Frequenz des Nachweisschwingkreises angepasst werden. Dies geschah durch zusätzliches Lötten von Styroflex-Kapazitäten, die am Ausgang des Nachweisverstärkers in paralleler Schaltung zwischen den elektrischen Zuleitungen lagen, die zu den beiden Endkappen der Falle führten. Durch Variation der Kapazität im Bereich von  $10\text{pF} - 300\text{pF}$  konnte auf diese Weise die ursprüngliche Nachweisfrequenz von ca.  $97\text{kHz}$  bis auf  $42\text{kHz}$  reduziert werden, womit die (beschränkte) Freiheit gegeben war, einige stabile Speicherpunkte (siehe Abb. 8.1) einzustellen. Zum anderen wurde ein in den Dimensionen gleicher Ionenkäfig wie bei den Messungen an  $\text{Ca}^+$ -Ionen verwendet, der jedoch in der Ringebene eine zusätzliche Öffnung zum Einkoppeln von Mikrowellenstrahlung besaß.

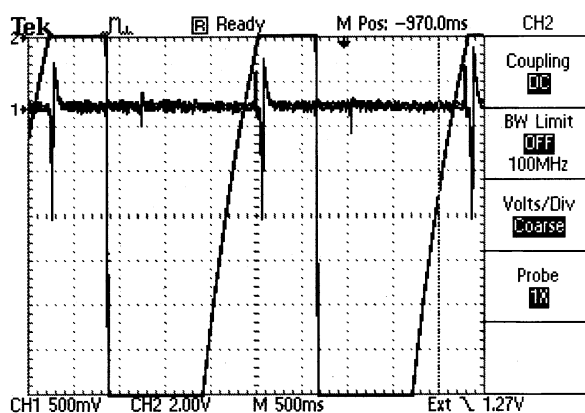
Zur Erzeugung der Blei-Ionen existieren im Wesentlichen zwei unterschiedliche Methoden, die sich sowohl aus Arbeiten auf dem Gebiet der Ionenerzeugungstechnik [67, 46, 322, 337] als auch aus früher gemachten Erfahrungen in der Arbeitsgruppe [245, 3, 84] herauskristallisiert haben. Die eine Methode beruht auf der Technik der Elektronenstoßionisation von atomarem Blei, das von einer metallischen Probe abgedampft wird. Die Elektronen, die den Ionisierungsprozess vollziehen, werden vom glühenden Ofendraht emittiert. In der anderen Methode hingegen wird das atomare Blei chemisch modifiziert, so dass es als ionische Lösung auf die Ofendrähte draufgeträufelt wird. Durch Heizen der Filamente werden dann die Blei-Ionen freigesetzt. Die Methode, die auf der Ionisation durch Elektronenstöße beruht, geht mit dem verwendeten Isotop verschwenderischer um und ist weniger effektiv als das zweitgenannte Verfahren. Die Präparation der Ionenquelle ist jedoch we-



**Abb. 7.5:** Am Oszilloskop sichtbar gewordenes Nachweissignal. Das Auftreten des elektronischen Einbruchs bei einer Nachweisspannung von  $U = -63V$  deutet auf eine Masse von  $m \approx 208u$  hin.

niger aufwendig, da die metallische Probe des jeweils verwendeten Isotops einfach nur in die vorhandenen Löcher der Keramiköfen hineingestopft wird.

Für erste Vorabmessungen wurde zunächst die Technik der Elektronenstoßionisation von atomarem Blei benutzt. Die Probe bestand aus 99,999% natürlich vorkommendem Blei, dessen Isotopenzusammensetzung sich aus Tab. 3.4 ergibt. Bei einem Speicherpotential von  $U = -84V$  und einem Puffergasdruck von  $5 \cdot 10^{-5} mbar$  mit Stickstoff als Puffergas und zusätzlich eingestrahelter Seitenbandfrequenz, deren Wert aus der Kenntnis des gemessenen Magnetfeldes bestimmt worden ist, konnte durch Glühen des Rheniumfilamentes auf  $2.3A$   $Pb^+$  erzeugt und gespeichert werden. Abb. 7.5 zeigt das elektronische Signal, das bei einer Nachweisspannung von  $U = -63V$  sichtbar wurde. Über die angelegte Nachweisfrequenz von  $\nu = 96,025kHz$  konnte die Masse zu  $m \approx 208u$  bestimmt und somit eindeutig als  $Pb^+$  identifiziert werden. Nach ca. 30 min. waren noch die Hälfte der Blei-Ionen vorhanden. Dieser anfängliche Erfolg erwies sich jedoch als ‚Eintagsfliege‘. An den darauffolgenden Tagen konnte die Speicherung von  $Pb^+$  nicht reproduziert werden. Auch die Änderung der Speicherbedingungen (Erzeugung im UHV, Variation des Speicherpotentials) brachten keinen Erfolg. Wie sich erst später, nach dem Öffnen der Vakuumapparatur herausstellte, war die Blei-Probe fast vollständig verdampft und hatte sich als grau-schwarze Schicht auf die Elektrodenoberflächen und auf die Sammellinse hinter dem Drahtgitter abgesetzt. Nur der Bruchteil an atomarem Blei, der beim allerersten Glühen des Ofendrahtes ionisiert wurde, blieb durch die Anwesenheit des Puffergases, das die kinetische Energie der Ionen reduzierte, gespeichert. Da der Keramikofen somit leer war, wurde durch Glühen der Rheniumfilamente eine leichte Masse bei  $m \approx 39u$  ionisiert, die über Stunden gespeichert werden konnte. Die Abb. 7.6 gibt das beobachtete elektronische Signal wieder,



**Abb. 7.6:** Elektronisches Nachweissignal von  $Pb^+$  (kleiner Peak) mit einem zusätzlichen Signal bei einer leichteren Masse (großer Peak), wobei es sich vermutlich um  $K^+$  handelt. Die Spannungsrampe wurde mehrmals durchfahren, weshalb der  $Pb$ -Peak zweimal und der  $K$ -Peak dreimal auftaucht.

dessen Einbruch bei einer Nachweisspannung von ca.  $U = -12V$  liegt und als  $K^+$  identifiziert wurde. Bestärkt wurde die Annahme zum einen durch die Tatsache, dass die Ionen beim Einstrahlen der Seitenbandfrequenz für  $K^+$  länger gespeichert blieben. Zum anderen kommt das Element Kalium in der chemischen Zusammensetzung des Rheniumfilamentes vor. Der kleine Einbruch, der ebenfalls auf der Spannungsrampe sichtbar ist, stammt von  $Pb^+$ . Das Signal war jedoch nur einen Nachweiszyklus am Oszilloskop-Bildschirm zu sehen und verschwand dann. Anscheinend waren noch kleine Mengen im Keramikofen übriggeblieben, oder die vom Rheniumdraht emittierten Elektronen mit der höchsten kinetischen Energie sputterten die Bleiatome aus der Metallschicht, die sich auf der Linse abgelegt hatte, ab und ionisierten diese. In den darauffolgenden Tagen verschwand jedoch das Blei-Signal gänzlich und nur  $K^+$ -Ionen blieben beim Glühen der Ofendrähte gespeichert.

Die Vermutung, dass Blei verdampft bevor es ionisiert werden kann wurde in einem Gespräch mit Herrn Todt vom MPI für Chemie bestätigt [297]. Unter seiner Anleitung wurde die zweite Methode als alternativer Weg eingeschlagen, die sog. *Silicagel-Methode*. Diese Methode hat sich in der Bleispektrometrie als Standardverfahren etabliert und wurde 1957 von Akishin et al.<sup>1</sup> entwickelt. Diese fanden heraus, dass die Erzeugung von Blei-Ionen weitaus gesteigert werden konnte, indem die Blei-Probe auf ein Silica-Zirconia-Gel implementiert wurde. Schwierigkeit hierbei war jedoch, das Gel in ausreichender reiner Form herzustellen. Bei sehr kleinen Mengen der Bleiprobe macht sich dies durch die Anwesenheit von Kohlenwasserstoffen im Massenspek-

<sup>1</sup>P. A. Akishin, O. T. Nikitin and G. M. Panchenkov, *Geochemistry (USSR)* No. 5, 500 (1957)

trum störend bemerkbar. 1969 verfeinerten Cameron et al.<sup>2</sup> diese Methode, indem sie entdeckten, dass das Zirkon weggelassen werden konnte. Das Silica-Gel war anschließend genauso effektiv wie die Gelmischung und leichter in genügend reiner Form herzustellen. Eine Beschreibung des 'Kochrezeptes' findet sich in der als Fußnote erwähnten Veröffentlichung von Cameron und Mitarbeiter. Der entscheidende Unterschied ist, dass die Bleiprobe nach dem Anwenden des Verfahrens in ionischer Form vorliegt und auf Rheniumbänder implementiert wird, von deren Oberfläche die Blei-Ionen freigesetzt werden.

Die Bleiprobe wurde zunächst in  $6n\ HCl$  aufgelöst. Durch schwaches, gleichmäßiges Heizen der Salzsäure kann der Auflösungsprozess beschleunigt werden. Anschließend wurde die entstandene Bleichlorid-Lösung soweit erhitzt, dass die Flüssigkeit verdampfte und am Bodensatz des Reagenzglases das kristalline, pulverähnliche  $PbCl_2$  übrigblieb. Diese Substanz wurde anschließend mit Perchlorsäure gemischt, damit sie sich in einem Punkt sammelt. Um nun das in ionischer Form in der Lösung vorhandene Blei auf die Rheniumfäden zu bringen, wurde die Lösung schließlich im Verhältnis 1:1 mit Silica-Gel<sup>3</sup> gemischt. Die fertige  $Pb^+$ -Lösung wurde mit einer Pipette auf die Rheniumfäden geträufelt. Durch Heizen der Fäden auf schwache Rotglut verdampfte die Flüssigkeit und nach mehrmaligem Wiederholen dieses Vorganges legte sich auf die Rheniumbänder ein weißer, mattschimmernder Belag ab. Die  $Pb^+$ -Ionen sind somit in dem Silica-Gel eingeschlossen wie in einer Glasmatrix. Dadurch wird beim Glühen der Rheniumbänder die Emission von Blei-Ionen dosiert, da das Silica-Gel die restlichen Blei-Ionen 'zurückhält'. Die Silica-Gel-Methode ist sehr effizient und die Anzahl der auf den Fäden angesammelten Ionen (ca.  $10^{17}$  Teilchen) reicht für eine sehr große Zahl von Abdampfvorgängen aus. Beim Heizen der Rheniumfäden muss auf der einen Seite die Tatsache berücksichtigt werden, dass die Silica-Matrix ab einer Temperatur von  $1650^\circ C$  zerstört wird und somit das  $Pb^+$  vollständig verdampft [297]. Auf der anderen Seite wird das Silica-Gel erst ab einer Temperatur von ca.  $1250^\circ C$  'halbdurchlässig' für die  $Pb^+$ -Ionen. Um den minimalen und den maximalen Glühstrom zu ermitteln, wurde mit einem Pyrometer die Temperatur des glühenden Rheniumfilamentes bestimmt. Beim verwendeten Rheniumband mit den Abmessungen  $l \times b \times d = 5mm \times 2mm \times 0.015mm$  betrug der Strom ab dem ein elektronisches Signal von  $Pb^+$ -Ionen am Bildschirm des Oszilloskops sichtbar werden sollte ca.  $7A$ . In der Tat wurde bei einem Heizstrom von knapp über  $7A$ , bei einem Puffergasdruck<sup>4</sup> von  $1 \cdot 10^{-5}mbar$  und einem Speicherpotential von  $U = -65V$  für mehrere Nachweiszyklen eine Masse bei  $m \approx 210u$  gespeichert.

---

<sup>2</sup>A. E. Cameron, D. H. Smith and R. L. Walker, „*Mass Spectrometry of Nanogram-Size Samples of Lead*“, Analytical Chemistry **41**(3), 525 (1969)

<sup>3</sup> $H_3PO_4 \cdot SiO_2 \cdot 2H_2O$ . Das Gel wird durch Mischen von verdünnter 85%iger Phosphorsäure mit Siliziumoxid ( $SiO_2$ ) im Verhältnis 1:1 hergestellt.

<sup>4</sup> $N_2$  als Puffergas

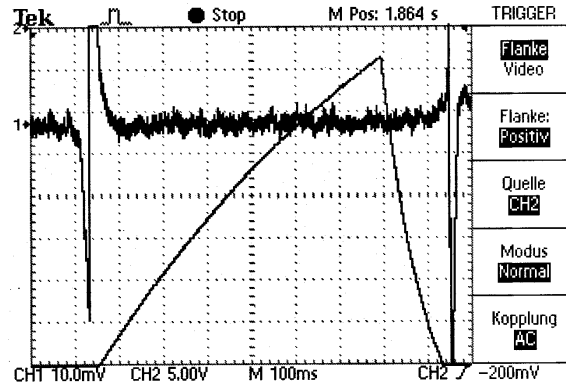


Abb. 7.7: Elektronisches Nachweissignal von  $Pb^+$  kurz nach der Erzeugung.

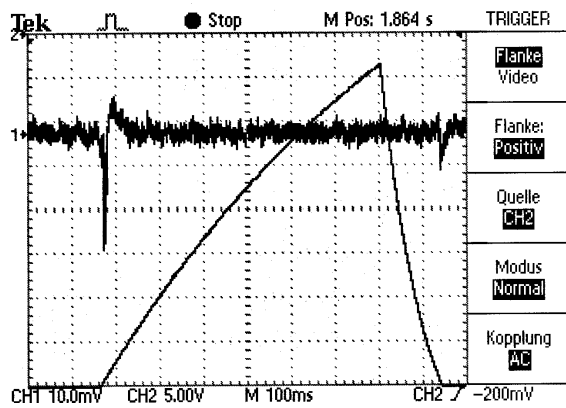


Abb. 7.8: Elektronisches Nachweissignal von  $Pb^+$  nach 4 Zyklen.

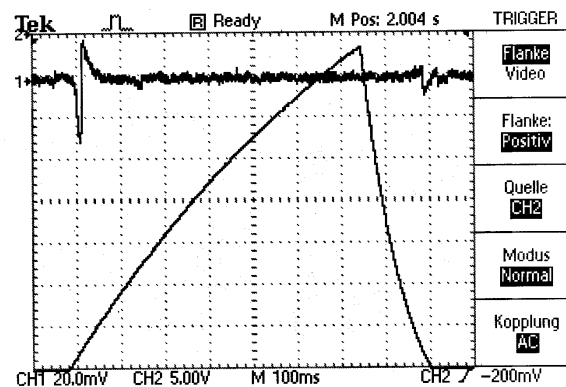


Abb. 7.9: Elektronisches Nachweissignal von  $Pb^+$  nach 8 Zyklen.

Die Abb. 7.7 bis 7.9 zeigen Momentaufnahmen kurz nach der Erzeugung, nach 4 Zyklen und nach 8 Zyklen. Außer dieser Masse wurde keine weitere (leichte) positive Masse gespeichert. Der Erzeugungsvorgang konnte mehrmals, auch an unterschiedlichen Tagen, wiederholt werden, jedoch war es nicht möglich, die Speicherdauer der Blei-Ionen entscheidend über 4 Minuten zu erhöhen. Hierbei wurde der Erzeugungsvorgang bei unterschiedlichen Drücken ( $10^{-7} - 10^{-5} \text{ mbar}$ ) und unterschiedlichen Speicherpotentialen ( $U = -12.7V; -29.2V; -80V$ ) durchgeführt. Damit sollte sichergestellt werden, dass die erzeugten  $Pb^+$ -Ionen zum einen genügend kinetische Energie verloren, um gespeichert zu werden und zum anderen nicht an einem Arbeitspunkt nahe einer Instabilität eingefangen wurden. Hinzu kam, dass nach einiger Zeit keine Blei-Ionen mehr erzeugt wurden. Man war somit keinen Schritt weiter gekommen im Vergleich zur Methode der Ionisation von metallischem Blei durch Elektronenstöße. Hierfür können hauptsächlich zwei Gründe verantwortlich sein: Einerseits könnte es sein, dass das Rheniumband nicht homogen geglüht hat, weil an den gepunkteten Stellen der Filamente, die auf den Stahlfüßen der Ofenhalterung lagen, die Wärme schneller dissipierte. Die Folge hiervon war, dass lokale Stellen der Ofenbänder heißer wurden als andere und somit unter Umständen die kritische Temperatur, ab der das Silica-Gel verdampft, überschritten wurde. Außerdem wurde bei Erhöhung des Fadenstroms eine retardierende Wirkung beim Aufglühen des Ofens konstatiert. Andererseits besteht die Möglichkeit, dass aus der Silica-Matrix auch *negativ* geladene ionische Bleiverbindungen<sup>5</sup> abgedampft werden. Da das Speicherpotential für positive Ionen ausgelegt ist, werden diese negativ geladenen Ionen destabilisiert, und über die Coulombwechselwirkung werden auch die  $Pb^+$ -Ionen aus der Penningfalle entfernt. Das Auftreten dieser Bleiverbindungen wurde auch in der Paulfalle beobachtet [245]. Da die Paulfalle außer mit einem statischen elektrischen Potential auch mit einem rf-Wechselfeld betrieben wird, können Ionen entgegengesetzter Ladung gleichzeitig gespeichert werden. Zudem erweist sich die Paulfalle als massenselektiver und nicht erwünschte Ionensorten können durch geeignete Wahl des Arbeitspunktes am Rande des Stabilitätsbereiches entfernt werden. Diese Massenselektivität hat ihr Analogon bei der Penningfalle im Puffergaskühlen mit Seitenbandanregung. Jedoch hat es sich als äußerst schwierig erwiesen, diesen Mechanismus bei einer Ionenwolke kontrolliert anzuwenden. Natürlich können auch weitere Gründe, außer den zwei angeführten, für das Nichtfunktionieren der dauerhaften Erzeugung und Speicherung von Blei-Ionen vorhanden sein. Solange jedoch keine Anläufe mit verbesserten Ansätzen durchgeführt werden, bleiben weitere Annahmen reine Spekulation.

---

<sup>5</sup>mögliche Kandidaten können  $PbO^-$  oder  $PbCl^-$  sein [297]

### 7.3 Simulation der Zeemanspektren von $^{208}\text{Pb}^+$ und $^{207}\text{Pb}^+$

Im nun folgenden Unterabschnitt werden mit Hilfe des Wigner-Eckharts-Theorems Formeln für die Stärke von Multipolübergängen hergeleitet, die es dann ermöglichen relative Intensitäten von Feinstruktur- und Hyperfeinstrukturmultipletts zu berechnen. Auf dieser Grundlage, bei Kenntnis der Größe der Zeemanaufspaltung, können Zeemanspektren erstellt werden. Die anschließende Berechnung der Zeemanspektren von  $^{208}\text{Pb}^+$  und  $^{207}\text{Pb}^+$  wird ausführlich behandelt, da diese Spektren bei den geplanten spektroskopischen Untersuchungen an den genannten Blei-Isotopen als Anhaltspunkt dienen können. Außerdem kann man sich im Vorfeld ein Bild machen, welche Laserbreiten maximal zulässig sind, um noch eindeutige Zuordnungen in den Spektren vornehmen zu können. Fangen wir also mit den Herleitungen der relativen Intensitäten an.

Die Linienstärke eines Multipolüberganges ist gegeben durch das Betragsquadrat des Matrixelementes eines Tensoroperators  $T_q^{(k)}$ , der physikalisch betrachtet für einen Multipolmoment-Operator steht [278]:

$$S(\alpha J, \alpha' J') = \sum_{MM'} |\langle \alpha J M | T_q^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle|^2 = |\langle \alpha J || T^{(k)} || \alpha' J' \rangle|^2 \quad (7.1)$$

Die folgende Rechnung beschränkt sich auf *magnetische Dipolübergänge*, da diese den größten prozentualen Anteil des Überganges  $6^2P_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$  im Blei-Spektrum ausmachen. Weiterhin wird die Feinstruktur betrachtet in der *LS-Kopplung*<sup>6</sup> mit der Basis  $|\alpha SLJ \rangle$ . Die einzelnen Ausdrücke zur Hyperfeinstruktur ergeben sich in analoger Weise durch die Ersetzung  $(S, L, J) \rightarrow (J, I, F)$ . Mit dieser Prämisse folgt aus Gl. (7.1):

$$S(\alpha SLJ, \alpha' S' L' J') = |\langle \alpha SLJ | \mathcal{H}^{M1} | \alpha' S' L' J' \rangle|^2 \quad (7.2)$$

Über die bekannte Beziehung des magnetischen Dipolwechselwirkungsoperators mit den gekoppelten Drehimpulsoperatoren  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  folgt für das Matrixelement:

$$\begin{aligned} \langle \alpha SLJ | \mathcal{H}^{M1} | \alpha' S' L' J' \rangle &= (-1)^{S+L+J'+1} \langle \alpha L || \mathcal{H}^{M1} || \alpha' L' \rangle \cdot \\ &\quad \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{array}{ccc} L & J & S \\ J' & L' & 1 \end{array} \right\} \delta_{SS'} \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Beziehung in (7.2) ergibt:

$$\begin{aligned} S(\alpha SLJ, \alpha' S' L' J') &= |\langle \alpha L || \mathcal{H}^{M1} || \alpha' L' \rangle|^2 \cdot \\ &\quad (2J+1)(2J'+1) \left\{ \begin{array}{ccc} L & J & S \\ J' & L' & 1 \end{array} \right\}^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

<sup>6</sup>Russell-Saunders-Kopplung. Geeignet zur Beschreibung von Aufspaltungen in schwachen und mittleren Feldern.



Übergang	$I_\sigma(m_F \rightarrow m_F - 1) \equiv I_{\sigma^-}$	$I_\sigma(m_F \rightarrow m_F + 1) \equiv I_{\sigma^+}$
$\gamma F \rightarrow \gamma' F$	$\frac{1}{4}(F + m_F)(F + 1 - m_F)$	$\frac{1}{4}(F - m_F)(F + 1 + m_F)$
$\gamma F \rightarrow \gamma'(F - 1)$	$\frac{1}{4}(F + m_F)(F - 1 + m_F)$	$\frac{1}{4}(F - m_F)(F - 1 - m_F)$
$\gamma F \rightarrow \gamma'(F + 1)$	$\frac{1}{4}(F + 1 - m_F)(F + 2 - m_F)$	$\frac{1}{4}(F + 1 + m_F)(F + 2 + m_F)$

**Tab. 7.1:** Relative Intensitäten von Zeemankomponenten der Hyperfeinstruktur für  $\sigma$ -Übergänge. Die Linienstärken für die Zeemankomponenten der Feinstruktur folgen mit Hilfe der Substitution  $(F, m_F) \rightarrow (J, m_J)$ .

Übergang	$I_\pi$
$\gamma F \rightarrow \gamma' F$	$m_F^2$
$\gamma F \rightarrow \gamma'(F - 1)$	$F^2 - m_F^2$
$\gamma F \rightarrow \gamma'(F + 1)$	$(F + 1)^2 - m_F^2$

**Tab. 7.2:** Relative Intensitäten von Zeemankomponenten der Hyperfeinstruktur für  $\pi$ -Übergänge. Die Linienstärken für die Zeemankomponenten der Feinstruktur folgen mit Hilfe der Substitution  $(F, m_F) \rightarrow (J, m_J)$ .

O. B. d. A. ist es sinnvoll, relative Intensitäten einzuführen, die man folgendermaßen definieren kann:

$$Q(\alpha SLJ, \alpha' S' L' J') := \frac{S(\alpha SLJ, \alpha' S' L' J')}{S(\alpha SL, \alpha' S' L')} \quad (7.4)$$

wobei

$$S(\alpha SL, \alpha' S' L') \equiv \sum_{JJ'} S(\alpha SLJ, \alpha' S' L' J') \quad (7.5)$$

die totale Linienstärke des  $M1$ -Überganges bezeichnet. Mit Hilfe der Summenregel für  $6j$ -Symbole [54, 277]

$$\sum_j (2j + 1)(2j' + 1) \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_3 & j_2 & j \\ j_1 & j_4 & j'' \end{array} \right\} = \delta_{j'j''}$$

folgt aus (7.5) durch Einsetzen von (7.3):

$$S(\alpha SL, \alpha' S' L') = (2S + 1) |\langle \alpha L || \mathcal{H}^{M1} || \alpha' L' \rangle|^2$$

und somit für die relative Intensität:

$$Q(\alpha SLJ, \alpha' S' L' J') = \frac{(2J + 1)(2J' + 1)}{(2S + 1)} \left\{ \begin{array}{ccc} L & J & S \\ J' & L' & 1 \end{array} \right\}^2 \quad (7.6)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich Formeln für die relativen Intensitäten in Fein- und Hyperfeinstrukturmultipletts gewinnen. Diese sind in den Tabellen 7.1, 7.2 und 7.3 zusammengestellt. Kommen wir nun zur Zeemanaufspaltung der Feinstruktur von  $^{208}Pb^+$ . Mit der Nomenklatur von Abb. 3.5 ergeben sich

$\mathbf{J}'$	$\mathbf{F}'$	$Q(\alpha I J F, \alpha' I' J' F') \equiv Q(\alpha' I' J' F', \alpha I J F)$
$J$	$F$	$\frac{\{J(J+1)+F(F+1)-I(I+1)\}^2(2F+1)}{4J(J+1)(2J+1)F(F+1)(2I+1)}$
$J-1$	$F$	$\frac{(I+J+F+1)(J+F-I)(I+J-F)(I+F-J+1)(2F+1)}{4F(F+1)(2J-1)(2J+1)J(2I+1)}$
$J$	$F-1$	$\frac{(I+J+F+1)(J+F-I)(I+F-J)(J+I+1-F)}{4J(J+1)(2J+1)F(2I+1)}$
$J-1$	$F-1$	$\frac{(J+I+F)(J+I+F+1)(J+F-I-1)(J+F-I)}{4(2J-1)J(2J+1)F(2I+1)}$
$J+1$	$F-1$	$\frac{(IF-J-1)(I+F-J)(I+J-F+1)(I+J-F+1)(I+J-F+2)}{4(2J+1)(J+1)(2J+3)F(2I+1)}$

**Tab. 7.3:** Relative Intensitäten von Übergängen  $J' \rightarrow J$ ,  $F' \rightarrow F$ . Tabellierte numerische Werte für  $I$  und  $J$  zwischen  $1/2$  und  $9/2$  finden sich bei White und Eliason [323].

die relativen Intensitäten der einzelnen Zeemankomponenten mit Hilfe der Tab. 7.1 und 7.2 zu:

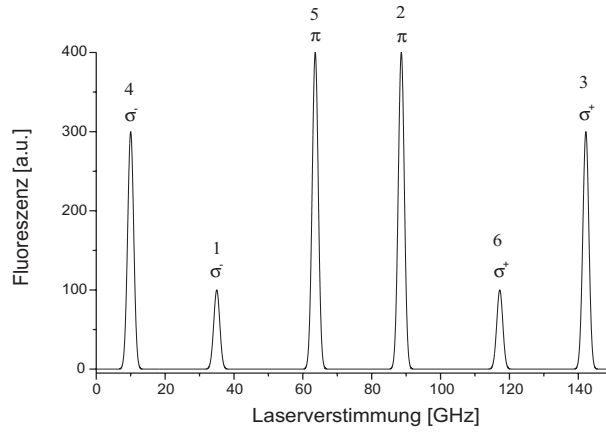
$$\textcircled{1}:\textcircled{2}:\textcircled{3}:\textcircled{4}:\textcircled{5}:\textcircled{6} = 1 : 4 : 3 : 3 : 4 : 1$$

Weiterhin ergeben sich ebenfalls mit den Bezeichnungen in Abb. 3.5 folgende, der Größe nach geordnete relative Frequenzpositionen:

$$\begin{aligned} \textcircled{4} : & \quad x + \frac{C}{2} - \frac{3A}{2} \\ \textcircled{1} : & \quad x - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} \\ \textcircled{5} : & \quad x + \frac{C}{2} - \frac{A}{2} \\ \textcircled{2} : & \quad x - \frac{C}{2} + \frac{A}{2} \\ \textcircled{6} : & \quad x + \frac{C}{2} + \frac{A}{2} \\ \textcircled{3} : & \quad x - \frac{C}{2} + \frac{3A}{2} \end{aligned}$$

Wählt man o. B. d. A.  $x \equiv 76.1GHz$ , so erhält man das Zeemanspektrum in Abb. 7.10, wobei die Laserbreite  $1.2GHz$  beträgt. Bevor nun das weitaus kompliziertere Zeemanspektrum der Hyperfeinstruktur von  $^{207}Pb^+$  berechnet wird, soll kurz das Hyperfeinstrukturspektrum in Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes betrachtet werden. Die Intensitätsverhältnisse, die bereits von Burger, Ornstein und Dorgelo empirisch ermittelt wurden, lassen sich nun mit Hilfe der Ausdrücke in Tab. 7.3 exakt angeben. Man erhält für die reine magnetische Dipolstrahlung, wobei die Nomenklatur aus Abb. 3.4 entnommen werden kann:

$$(a) : (b) : (d) = 1 : 5 : 2$$



**Abb. 7.10:** Zeemanspektrum der Feinstruktur von  $^{208}Pb^+$ . Die angenommene spektrale Breite des Lasers beträgt 1.2GHz. Der Nullpunkt der Frequenzskala ist willkürlich festgelegt.

Die Übergänge (a), (b) und (e) sind in höherer Multipolordnung durch elektrische Quadrupolstrahlung (E2) erlaubt. Diese Intensitätsverhältnisse ergeben sich zu:

$$(a) : (b) : (e) = 5 : 3 : 2$$

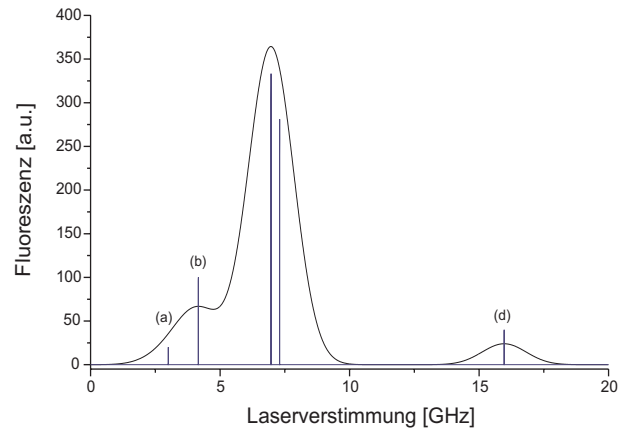
Mit den folgenden ermittelten Frequenzpositionen lässt sich somit das Spektrum simulieren:

$$\begin{aligned} {}^{208}Pb^+ (6^2P_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}) &: x \\ {}^{206}Pb^+ (6^2P_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}) &: x + 0.333GHz \\ {}^{207}Pb^+ (6^2P_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}) &\begin{cases} (a) : & x - 3.967GHz \\ (b) : & x - 2.807GHz \\ (d) : & x + 9.001GHz \end{cases} \end{aligned}$$

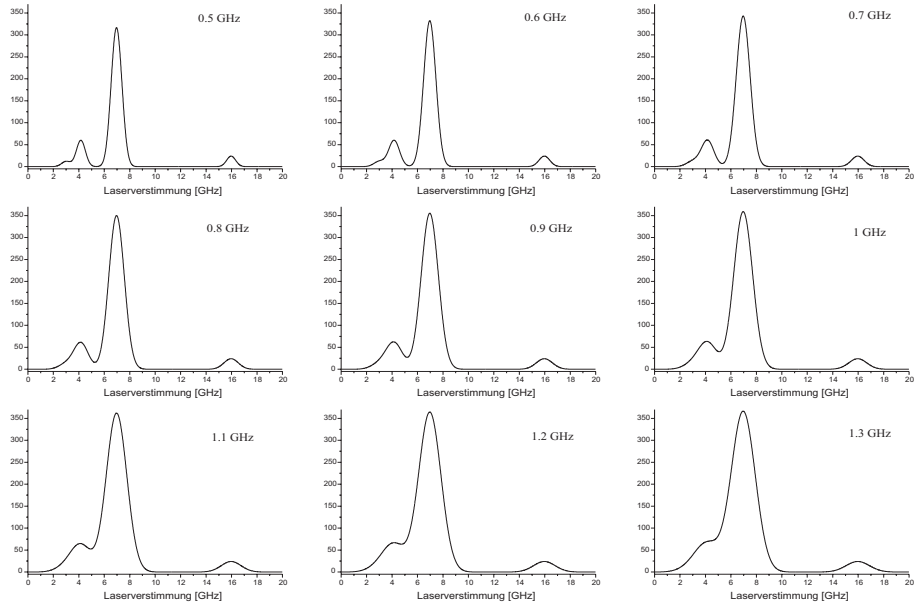
Die Abb. 7.11 stellt das simulierte Spektrum der Hyperfeinstruktur von Blei-207 graphisch dar, wobei zudem noch die beiden Isotopieverschiebungen  $\Delta\nu^{207,208} = +0.311GHz^7$  und  $\Delta\nu^{206,208} = -0.333GHz$  berücksichtigt wurden. Die einzelnen Graphen in Abb. 7.12 stellen sequentiell die Entwicklung des Hyperfeinstrukturspektrums bei unterschiedlichen spektralen Breiten des Lasers dar.

Kommen wir schließlich zur Simulation des Zeemanspektrums der Hyperfeinstruktur von  $^{207}Pb^+$ . Die Bereiche schwacher und mittlerer Magnetfelder auf der einen Seite und starker Magnetfelder auf der anderen werden gesondert behandelt, da für die Basisvektoren unterschiedliche Ansätze gemacht werden müssen.

<sup>7</sup>Dies bildet das Schwerpunkt des Systems.



**Abb. 7.11:** Spektrum der Hyperfeinstruktur von  $^{207}\text{Pb}^+$ . Die senkrechten blauen Linien geben die Intensitätsverhältnisse für eine reine magnetische Dipolstrahlung wieder, die mit Hilfe der Ausdrücke in Tab. 7.3 berechnet werden können. Die angenommene spektrale Laserbreite beträgt 1.2GHz.



**Abb. 7.12:** Spektrum der Hyperfeinstruktur von  $^{207}\text{Pb}^+$ . Die Abbildungen zeigen eine sequentielle Aufnahme, wobei die spektrale Laserbreite von 0.5GHz bis 1.3GHz kontinuierlich variiert wurde. O. B. d. A. wurde  $x \equiv 6.967\text{GHz}$  gewählt.

Im Falle schwacher und mittlerer Felder wählt man die gekoppelte Darstellung, in der  $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$  eine guten Quantenzahl ist mit den zugehörigen Basisvektoren  $|IJFm_F\rangle$ . Der Hamiltonoperator hat folgende Form:

$$\mathcal{H}_{Zeeman}^{(HFS)} = A\vec{I} \cdot \vec{J} - g_J \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{B} - g_I \frac{\mu_K}{\hbar} \vec{I} \cdot \vec{B} \quad (7.7)$$

Für die Matrixelemente in der Hauptdiagonalen ergeben sich folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \langle IJFm_F | I_z | IJFm_F \rangle &= \frac{I(I+1) - J(J+1) + F(F+1)}{2F(F+1)} \cdot m_F \\ \langle IJFm_F | J_z | IJFm_F \rangle &= \frac{J(J+1) - I(I+1) + F(F+1)}{2F(F+1)} \cdot m_F \\ \langle IJFm_F | \vec{I} \cdot \vec{J} | IJFm_F \rangle &= \frac{1}{2}(F(F+1) - I(I+1) + J(J+1)) \end{aligned}$$

bzw. für die Matrixelemente in der Nebendiagonalen:

$$\begin{aligned} \langle IJFm_F | I_z | IJ(F-1)m_F \rangle &\equiv \langle IJ(F-1)m_F | I_z | IJFm_F \rangle = \\ &\pm \sqrt{\frac{(F-I+J)(F+I-J)(I+J+1+F)(I+J+1-F)(F^2 - m_F^2)}{4F^2(2F-1)(2F+1)}} \\ \langle IJFm_F | J_z | IJ(F-1)m_F \rangle &\equiv \langle IJ(F-1)m_F | J_z | IJFm_F \rangle = \\ &\mp \sqrt{\frac{(F-I+J)(F+I-J)(I+J+1+F)(I+J+1-F)(F^2 - m_F^2)}{4F^2(2F-1)(2F+1)}} \end{aligned}$$

Somit setzt sich die Energiematrix des  $6^2P_{3/2}$ -Niveaus aus den folgenden Einträgen zusammen, wobei zur besseren Übersicht folgende Abkürzungen definiert werden:

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= \frac{1}{2}(3g_J \cdot \mu_B + g_I \cdot \mu_K)B \\ \eta_2 &:= \frac{\sqrt{3}}{4}(g_J \cdot \mu_B - g_I \cdot \mu_K)B \\ \eta_3 &:= \frac{1}{4}(5g_J \cdot \mu_B - g_I \cdot \mu_K)B \\ \eta_4 &:= \frac{1}{2}(g_J \cdot \mu_B - g_I \cdot \mu_K)B \end{aligned}$$

Im Fall starker Magnetfelder ist  $F$  keine gute Quantenzahl mehr und man geht in die entkoppelte Darstellung über. In dieser Darstellung mit den Basisvektoren  $|m_I m_J IJ\rangle$  ist  $m_F = m_I + m_J$  eine gute Quantenzahl. Man erhält somit in den Hauptdiagonalen folgende Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \langle m_I m_J IJ | I_z | m_I m_J IJ \rangle &= m_I \\ \langle m_I m_J IJ | J_z | m_I m_J IJ \rangle &= m_J \end{aligned}$$

$m_F$	$F$	-2	-1	-1	0	0	+1	+1	+2
		2	2	1	2	1	2	1	2
-2	2	$\frac{3}{4}A + \eta_1$	0	0	0	0	0	0	0
-1	2	0	$\frac{3}{4}A + \frac{1}{2}\eta_1$	$\eta_2$	0	0	0	0	0
-1	1	0	$\eta_2$	$-\frac{5}{4}A + \eta_3$	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	$\frac{3}{4}A$	$\eta_4$	0	0	0
0	1	0	0	0	$\eta_4$	$-\frac{5}{4}A$	0	0	0
+1	2	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}A - \frac{1}{2}\eta_1$	$\eta_2$	0
+1	1	0	0	0	0	0	$\eta_2$	$-\frac{5}{4}A - \eta_3$	0
+2	2	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}A - \eta_1$

**Tab. 7.4:** Energiematrix des  $6^2P_{3/2}$ -Niveaus von  $^{207}\text{Pb}^+$  für den gekoppelten Fall.

so dass die Hauptdiagonalelemente des Hamiltonoperators in (7.7) folgende Form annehmen:

$$\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{(HFS)} = A \cdot m_I \cdot m_J - g_J \mu_B \cdot B \cdot m_J - g_I \mu_K \cdot B \cdot m_I \quad (7.8)$$

Die Nebendiagonalelemente lassen sich mit Hilfe der folgenden Beziehungen bestimmen:

$$\begin{aligned} \langle (m_I \pm 1) m_J I J | I_x | m_I m_J I J \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(I \mp m_I)(I \pm m_I + 1)} \delta_{m_I \pm 1, m_I} \\ \langle (m_I \pm 1) m_J I J | I_y | m_I m_J I J \rangle &= \mp \frac{i}{2} \sqrt{(I \mp m_I)(I \pm m_I + 1)} \delta_{m_I \pm 1, m_I} \\ \langle m_I (m_J \pm 1) I J | J_x | m_I m_J I J \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(J \mp m_J)(J \pm m_J + 1)} \delta_{m_J \pm 1, m_J} \\ \langle m_I (m_J \pm 1) I J | J_y | m_I m_J I J \rangle &= \mp \frac{i}{2} \sqrt{(J \mp m_J)(J \pm m_J + 1)} \delta_{m_J \pm 1, m_J} \end{aligned}$$

Als Einträge der Energiematrix erhält man somit mit den abkürzenden Definitionen:

$$\begin{aligned} \eta_5 &:= \frac{1}{2}(3g_J \cdot \mu_B - g_I \cdot \mu_K)B \\ \eta_6 &:= \frac{1}{2}(g_J \cdot \mu_B + g_I \cdot \mu_K)B \end{aligned}$$

Mit Hilfe von MATHEMATICA<sup>®</sup> lassen sich die Energieeigenwerte der Matrizen in Abb. 7.4 und Abb. 7.5 bestimmen und man erhält sowohl für den

$m_I$	$m_J$	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$ $+\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}A + \eta_1$	0	0	0	0	0	0	0
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{4}A + \eta_5$	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$	$\frac{1}{4}A + \eta_6$	0	0	0	0	0
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}A + \eta_4$	$A$	0	0	0
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	$A$	$-\frac{1}{4}A - \eta_4$	0	0	0
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}A - \eta_6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$	0
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$	$-\frac{3}{4}A - \eta_5$	0
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}A - \eta_1$

**Tab. 7.5:** Energiematrix des  $6^2P_{3/2}$ -Niveaus von  $^{207}Pb^+$  für den entkoppelten Fall.

$m_I$	$m_J$	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}A + \frac{(g_J + g_I)}{2}\mu_B B$	0	0	0
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}A + \frac{(g_J - g_I)}{2}\mu_B B$	$+\frac{1}{2}A$	0
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}A$	$-\frac{1}{4}A - \frac{(g_J - g_I)}{2}\mu_B B$	0
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}A - \frac{(g_J + g_I)}{2}\mu_B B$

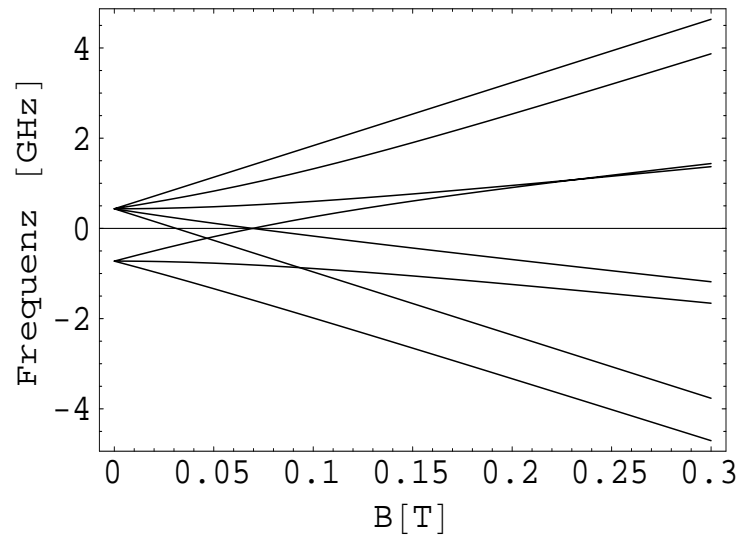
**Tab. 7.6:** Energiematrix des  $6^2P_{1/2}$ -Niveaus von  $^{207}Pb^+$  für den entkoppelten Fall.

gekoppelt als auch für den entkoppelten Fall:

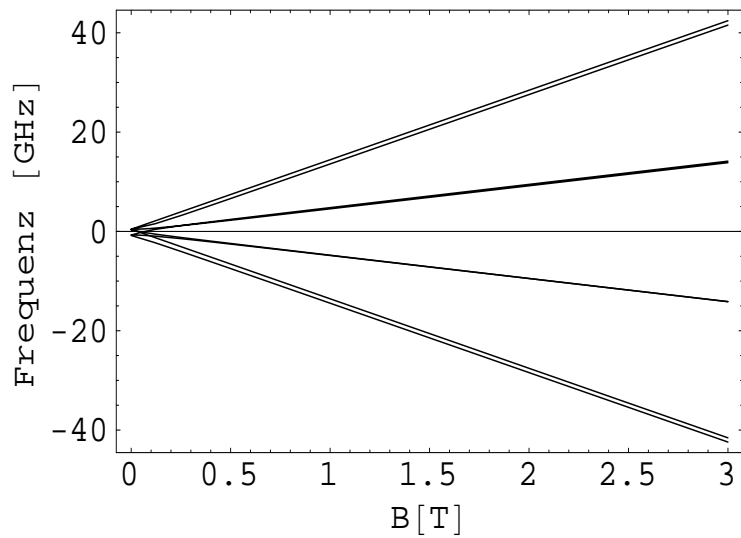
$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \frac{1}{h} \left( \frac{3}{4}A + \frac{1}{2}(3g_J \cdot \mu_B + g_I \cdot \mu_K)B \right) \\
\nu_2 &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{4}A + g_J \cdot \mu_B B - \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K)(-2A + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K))} \right) \\
\nu_3 &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{4}A + g_J \cdot \mu_B B + \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K)(-2A + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K))} \right) \\
\nu_4 &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + B^2(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K)^2} \right) \\
\nu_5 &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + B^2(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K)^2} \right) \\
\nu_6 &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{4}A - g_J \cdot \mu_B B - \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K)(2A + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K))} \right) \\
\nu_7 &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{4}A - g_J \cdot \mu_B B + \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K)(2A + B(g_J\mu_B - g_I \cdot \mu_K))} \right) \\
\nu_8 &= \frac{1}{h} \left( \frac{3}{4}A - \frac{1}{2}(3g_J \cdot \mu_B + g_I \cdot \mu_K)B \right)
\end{aligned}$$

In analoger Weise geht man beim Aufstellen der ge- und entkoppelten Energiematrizen für den  $6^2P_{1/2}$ -Zustand vor. Um die Geduld des Lesers nicht übermäßig zu strapazieren wird nur der entkoppelte Fall (siehe Tab. 7.6) dargestellt.

Die erlaubten Übergänge zwischen dem  $6^2P_{1/2}$ - und dem  $6^2P_{3/2}$ -Niveau

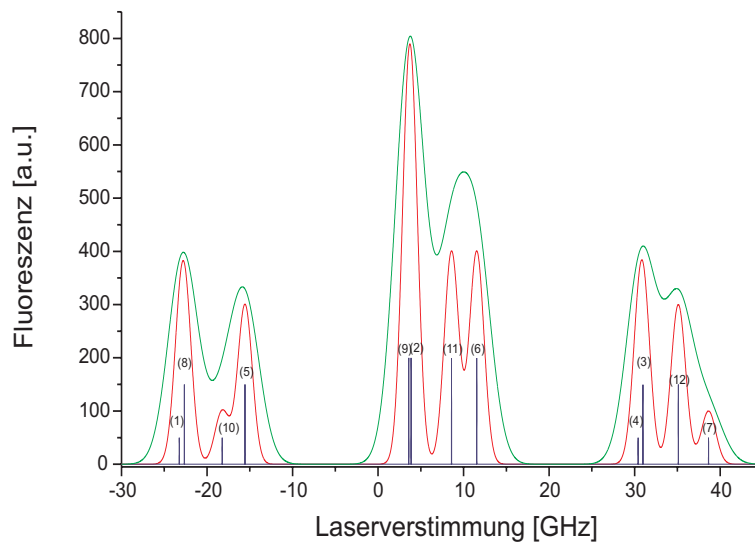


**Abb. 7.13:** Zeemanaufspaltung von  $^{207}\text{Pb}^+$  des Zustandes  $6^2P_{1/2}$  in Abhängigkeit vom Magnetfeld für schwache Magnetfelder.

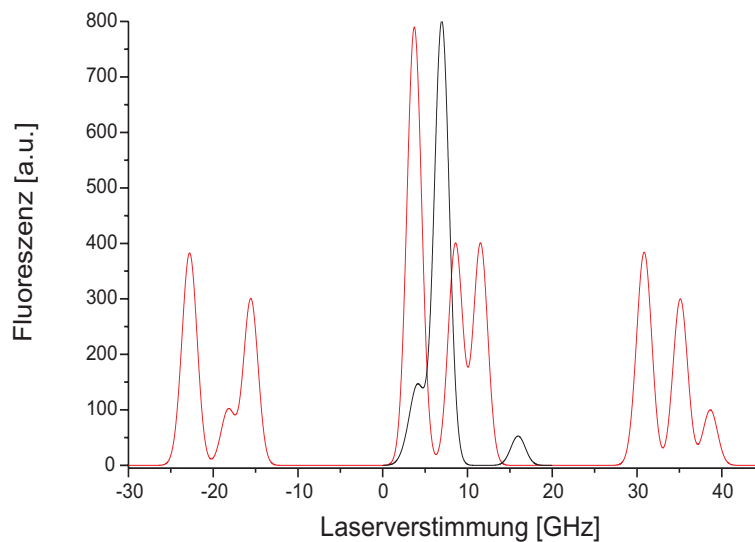


**Abb. 7.14:** Zeemanaufspaltung von  $^{207}\text{Pb}^+$  des Zustandes  $6^2P_{1/2}$  in Abhängigkeit vom Magnetfeld für mittlere bis starke Magnetfelder.

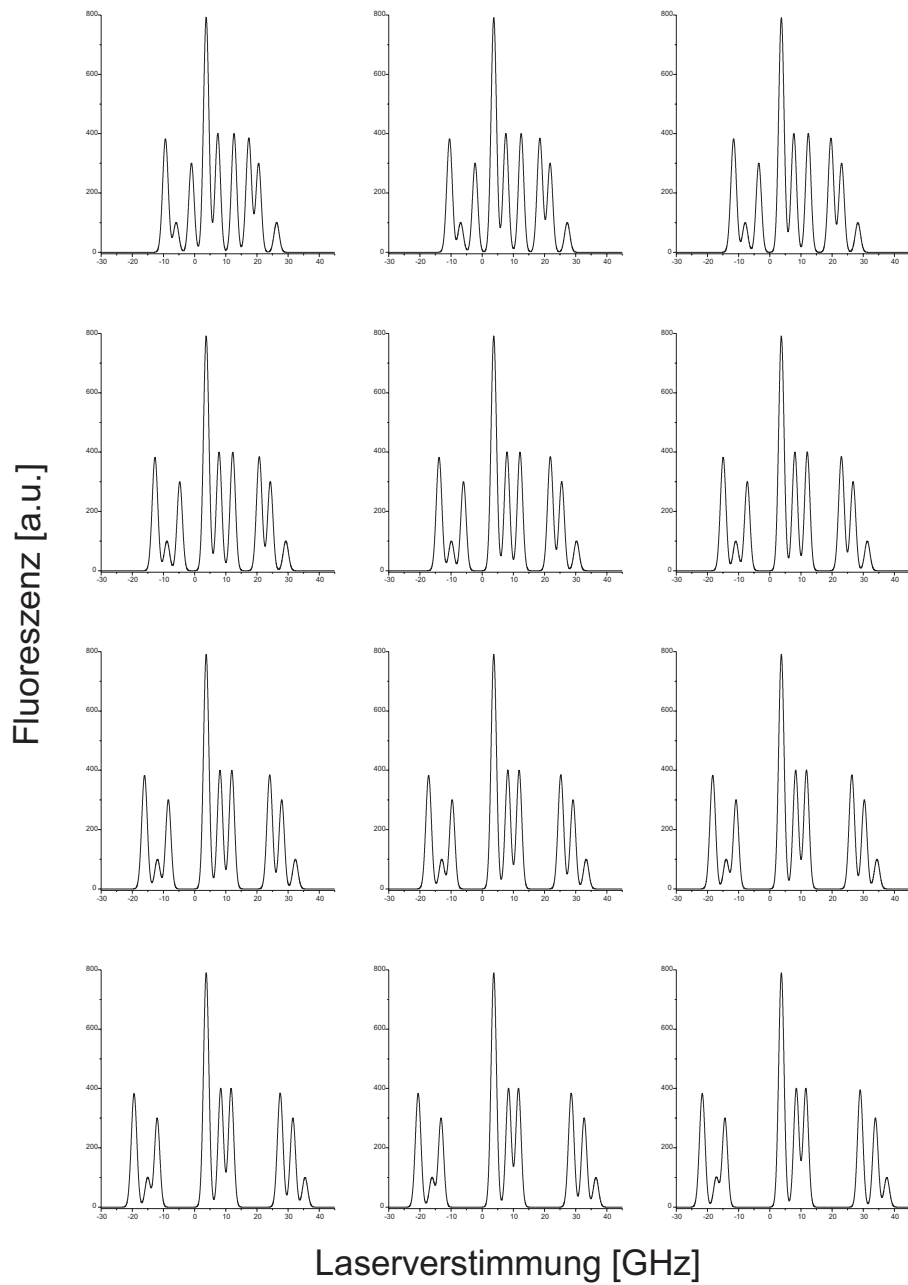




**Abb. 7.15:** Zeemanspektrum der Hyperfeinstruktur von  $^{207}Pb^+$  bei einem Magnetfeld von  $B = 2.8736T$ . Die rote und die grüne Kurve beziehen sich auf zwei unterschiedliche spektrale Laserbreiten (1.2 GHz und 2.2 GHz). Die senkrechten blauen Striche hingegen geben die Position der Übergangsfrequenzen mit dem zugehörigen relativen Intensitätsverhältnis an. Die Zahlen in runden Klammern entsprechen den auf der Seite 163 aufgelisteten Übergängen.



**Abb. 7.16:** Zeemanspektrum der Hyperfeinstruktur von  $^{207}Pb^+$  bei einem Magnetfeld von  $B = 2.8736T$  (rote Kurve). Zum Vergleich ist das Hfs-Spektrum in Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes graphisch überlagert (schwarze Kurve).



**Abb. 7.17:** Graphische Darstellung der Evolution des Zeemanspektrums der Hyperfeinstruktur von  $^{207}\text{Pb}^+$  bei einer kontinuierlichen Variation des Magnetfeldes von  $B = 1.4342\text{T}$  bis  $B = 2.8736\text{T}$  in Schrittweiten von  $0.11995\text{T}$ .

ergeben sich aus den folgenden Auswahlregeln:

$$\begin{aligned}\Delta F &= 0, \pm 1 \\ \Delta m_J &= 0, \pm 1 \\ \Delta m_I &= 0\end{aligned}$$

Somit erhält man das in Abb. 7.15 dargestellte Zeemanspektrum der Hyperfeinstruktur von Blei-207. Die Zahlen in runden Klammern entsprechen den folgenden aufgelisteten Übergängen:

- (1) :  $F = 1 \rightarrow F = 1$ ;  $m_F = 1 \rightarrow m_F = 0$
- (2) :  $F = 1 \rightarrow F = 1$ ;  $m_F = 1 \rightarrow m_F = 1$
- (3) :  $F = 1 \rightarrow F = 2$ ;  $m_F = 1 \rightarrow m_F = 2$
- (4) :  $F = 1 \rightarrow F = 2$ ;  $m_F = -1 \rightarrow m_F = 0$
- (5) :  $F = 0 \rightarrow F = 1$ ;  $m_F = 0 \rightarrow m_F = -1$
- (6) :  $F = 0 \rightarrow F = 1$ ;  $m_F = 0 \rightarrow m_F = 0$
- (7) :  $F = 0 \rightarrow F = 1$ ;  $m_F = 0 \rightarrow m_F = 1$
- (8) :  $F = 1 \rightarrow F = 2$ ;  $m_F = -1 \rightarrow m_F = -2$
- (9) :  $F = 1 \rightarrow F = 2$ ;  $m_F = -1 \rightarrow m_F = -1$
- (10) :  $F = 1 \rightarrow F = 2$ ;  $m_F = 0 \rightarrow m_F = -1$
- (11) :  $F = 1 \rightarrow F = 2$ ;  $m_F = 0 \rightarrow m_F = 0$
- (12) :  $F = 1 \rightarrow F = 2$ ;  $m_F = 0 \rightarrow m_F = 1$

Im entkoppelten Fall können die Übergänge zu gleichem  $m_J$  zusammengefasst werden und mit Hilfe der Tab. 7.1 und 7.2 erhält man die entsprechenden Intensitäten.

- (5), (8) :  $J = 1/2 \rightarrow J = 3/2$ ;  $m_J = -1/2 \rightarrow m_J = -3/2$
- (1), (10) :  $J = 1/2 \rightarrow J = 3/2$ ;  $m_J = +1/2 \rightarrow m_J = -1/2$
- (2), (11) :  $J = 1/2 \rightarrow J = 3/2$ ;  $m_J = +1/2 \rightarrow m_J = +1/2$
- (3), (12) :  $J = 1/2 \rightarrow J = 3/2$ ;  $m_J = +1/2 \rightarrow m_J = +3/2$
- (4), (7) :  $J = 1/2 \rightarrow J = 3/2$ ;  $m_J = -1/2 \rightarrow m_J = +1/2$
- (6), (9) :  $J = 1/2 \rightarrow J = 3/2$ ;  $m_J = -1/2 \rightarrow m_J = -1/2$

## 7.4 Analytische Auflösung der Breit-Rabi-Formel nach dem Kern-g-Faktor und diamagnetische Korrektur

Mit Hilfe der in Abschnitt 3.5 hergeleiteten Breit-Rabi-Formel ist es möglich, bei Kenntnis des Landé- $g_J$ -Faktors, durch Messung eines der in Abb.

7.18 dargestellten fünf erlaubten Mikrowellenübergänge, den Kern-g-Faktor zu bestimmen. Hierzu sind die folgenden kompakten Formeln hilfreich, die durch analytische Auflösung der Breit-Rabi-Formel nach  $g_I$  gewonnen wurden:

$$\text{Übergang } \nu_{01} : \quad g_I = \frac{\hbar (B g_J \mu_B (2\nu - \nu_0) + 2\hbar \nu (-\nu + \nu_0))}{B \mu_K (2B g_J \mu_B + \hbar (-2\nu + \nu_0))} \quad (7.9)$$

$$\text{Übergang } \nu_{00} : \quad g_I = \frac{1}{\mu_K} \left( g_J \mu_B - \frac{\hbar \sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}}{B} \right) \quad (7.10)$$

$$\text{Übergang } \nu_{-10} : \quad g_I = \frac{\hbar (B g_J \mu_B (2\nu + \nu_0) - 2\hbar \nu (\nu + \nu_0))}{B \mu_K (2B g_J \mu_B - \hbar (2\nu + \nu_0))} \quad (7.11)$$

$$\text{Übergang } \nu_{0-1} : \quad g_I = \frac{\hbar (B g_J \mu_B (-2\nu + \nu_0) + 2\hbar \nu (-\nu + \nu_0))}{B \mu_K (2B g_J \mu_B + \hbar (2\nu + \nu_0))} \quad (7.12)$$

$$\text{Übergang } \nu'_{01} : \quad g_I = \frac{\hbar (B g_J \mu_B (2\nu - \nu_0) + 2\hbar \nu (-\nu + \nu_0))}{B \mu_K (2B g_J \mu_B + \hbar (-2\nu + \nu_0))} \quad (7.13)$$

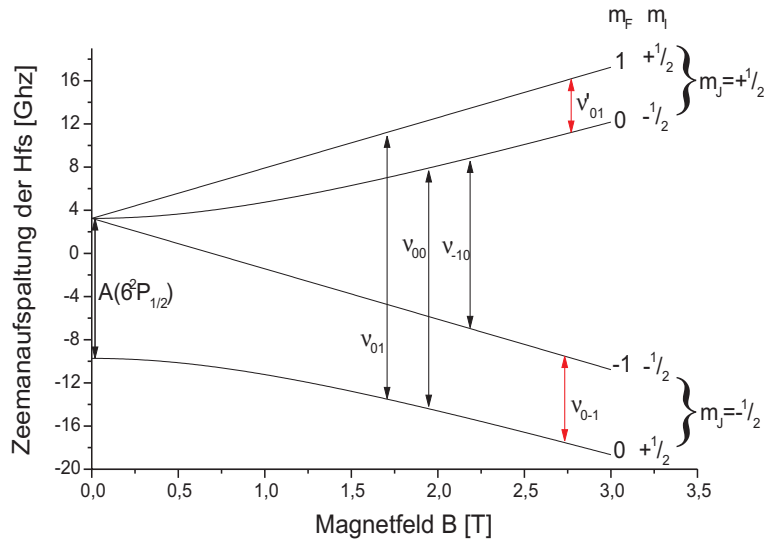
Die Auswahlregeln erfüllen hierbei die Bedingungen:

- (1)  $\Delta m_J = \pm 1 \wedge \Delta m_I = 0$
- (2)  $\Delta m_J = 0 \wedge \Delta m_I = \pm 1$

Man hat somit analytische Ausdrücke, die einem erlauben, bei Messung eines Zeemanüberganges im  $6^2P_{1/2}$ -Niveau, sofort den Kern-g-Faktor anzugeben. Dieser  $g_I$ -Faktor, der aus einer Doppelresonanzmessung gewonnen wird, muss jedoch korrigiert werden, da wegen der Wechselwirkung zwischen Hülle und Kern der sog. *Breit-Rosenthal-Effekt* und der *Bohr-Weisskopf-Effekt* in Betracht gezogen werden müssen.<sup>8</sup> Ersterer behandelt den Einfluss der räumlichen Kernladungsverteilung. Diese wird durch das Eintauchen der Hüllenelektronen in das Kernvolumen verändert, da die Elektronen am Kernort ein zusätzliches Magnetfeld bewirken. Letzterer berücksichtigt die räumliche Verteilung des magnetischen Dipolmomentes über das Kernvolumen; ein gewisser Teil der magnetischen Dipolwechselwirkung kommt hierbei von den Elektronen, die in den Kern eindringen.

Während die Kernladungsverteilung hinreichend genau beschrieben werden kann, lässt sich die Verteilung der Magnetisierung, die sich in der *diagrammatischen Abschirmung* des Atomkerns äußert, nur unzulänglich erfassen.

<sup>8</sup>Eine tiefere Betrachtung dieser beiden Effekte findet sich in der Monographie von S. Büttgenbach, „*Magnetic Hyperfine Anomalies*“, *Hyperfine Interactions* **20**, pp. 1-64 (1984).



**Abb. 7.18:** Zeemanaufspaltung des Grundzustandes  $6^2P_{1/2}$ . Eingezeichnet sind die nach den Auswahlregeln erlaubten Mikrowellenübergänge in einem Doppelresonanzexperiment.

Bereits 1941 schrieb Lamb in einer Veröffentlichung [173], dass ein äußeres magnetisches Feld eine diamagnetische Stromdichte in der Elektronenhülle des Atomkerns induziert. Dies führt dann zu einer induzierten magnetischen Flussdichte  $B'(0)$  am Kernort, die dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtet ist. Das Magnetfeld am Kernort  $B$  wird sozusagen „abgeschirmt“ und ist um den induzierten Beitrag  $B'(0)$  reduziert:

$$B = B_0 - B'(0) = B_0 \left( 1 - \frac{B'(0)}{B_0} \right) \quad (7.14)$$

wobei  $B_0$  das äußere Magnetfeld bezeichnet. Führt man, wie in der Literatur üblich, den *magnetischen Abschirmungsfaktor*  $\sigma := \frac{B'(0)}{B_0}$  ein, so lässt sich (7.14) umschreiben zu:

$$\frac{B_0}{B} = (1 - \sigma)^{-1} := \kappa \quad (7.15)$$

Dies bedeutet, dass der experimentell bestimmte magnetische Kerndipolmoment durch Multiplikation mit dem Faktor  $\kappa$  korrigiert werden muss. Mit einfachen Annahmen lässt sich ein analytischer Ausdruck für den diamagnetischen Abschirmungsfaktor  $\sigma$  herleiten. Als Ausgangspunkt betrachtet man ein Atom, das eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung  $\rho'(0)$  der Hülle besitzt. Weiterhin betrachtet man als Teilvolumen dieser „Kugelladung“ einen Ring, dessen Achse durch den Kern parallel zum äußeren Magnetfeld  $B_0$  verläuft. Die Ladung, die in diesem Ring mit dem Volumen  $2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr$

$\sigma$			$\kappa \equiv (1 - \sigma)^{-1}$			Theorie	Referenz
Atom	Ion	$i$	Atom	Ion	$i^\dagger$		
0,01136	–		1,01149	–		FTM <sup>‡</sup>	[173]
0,00998	–		1,01008	–		HF <sup>§</sup>	[70]
0,01004	0,00967	1 <sup>+</sup>	1,01014	1,00976	1 <sup>+</sup>	HF	[198]
0,02055	0,01684	4 <sup>+</sup>	1,02098	1,01713	4 <sup>+</sup>	RHFS <sup>*</sup>	[81]
	0,01686	2 <sup>+</sup>		1,01715	2 <sup>+</sup>		
–	0,0121	72 <sup>+</sup>	–	1,0122	72 <sup>+</sup>	RPA <sup>**</sup>	[155]

**Tab. 7.7:** Tabellierte theoretische Werte der diamagnetischen Abschirmung und des diamagnetischen Korrekturfaktors.

vorhanden ist, ist dann gegeben durch:

$$\rho'(0) = \frac{2\pi r^2 \rho(0) \sin \theta d\theta dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho(0)}{2} \sin \theta d\theta dr$$

Da die Ladung im Ringvolumen mit der Larmorfrequenz präzediert, wird folgender Strom induziert:

$$dI = -\frac{eB_0}{4\pi mc} \frac{\rho(0)}{2} \sin \theta d\theta dr \quad (7.16)$$

Die so entstandene Stromschleife produziert ihrerseits, nach dem Biot-Savart-Gesetz, ein magnetisches Feld  $dB'(0)$  am Kernort:

$$dB'(0) = \frac{2\pi dI \sin^2 \theta}{r c} \quad (7.17)$$

Einsetzen des Ausdruckes für den induzierten Schleifenstrom in (7.17) ergibt:

$$\frac{B'(0)}{B_0} = -\frac{e}{4mc^2} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{=\frac{4}{3}} \int_0^\infty \frac{\rho(r)}{r} dr$$

bzw. wenn man das am Kernort durch die Hüllenelektronen verursachte elektrostatische Potential  $V(0) := \int_0^\infty \frac{\rho(r)}{r} dr$  definiert:

$$\frac{B'(0)}{B_0} = \sigma = -\frac{e}{3mc^2} V(0) \quad (7.18)$$

<sup>†</sup>Ionisierungsgrad

<sup>\*</sup>Relativistic Hartree-Fock-Slater Methode

<sup>\*\*</sup>Relativistic Random Phase Approximation

<sup>‡</sup>Fermi-Thomas Modell

<sup>§</sup>Hartree-Fock Methode

In Tab. 7.7 sind bis jetzt bekannte theoretische Werte für die diamagnetische Abschirmung bzw. für den diamagnetischen Korrekturfaktor von atomarem und ionischem Blei zusammengestellt. Man sieht, dass verschiedene Ansätze Werte ergeben, die sich um ca. 10% unterscheiden. Da der gesamte Effekt etwa  $10^{-2}$  beträgt, haben alle Kernmomente eine Unsicherheit von ca.  $10^{-3}$  (siehe hierzu [112]).





## Kapitel 8

# Die Untersuchung des Speicherverhaltens von Elektronen

### 8.1 Instabilitäten in der Penningfalle

Die Teilchenbewegung in einem idealen Penningkäfig spielt in der Fallenphysik eine entscheidende Rolle, die vergleichbar ist mit der Rolle, die das Wasserstoffatom in der Atomphysik spielt [162]. Aus diesem Grunde ist es wichtig zu untersuchen, wie das reale System<sup>1</sup>, das im Laboralltag vorkommt auf Störungen reagiert. Diese anharmonischen Störungen können hierbei statischer und zeitveränderlicher<sup>2</sup> Natur sein. Die statischen Störungen haben ihren Ursprung im nicht-idealen Speicherpotential. Konstruktionstechnische Beschränkungen der Penningfalle, wie etwa nicht unendlich ausgedehnte Elektrodenoberflächen, nicht exakt hyperbolisch geformte Oberflächen und die Anwesenheit von Löchern in den Kalotten und in der Ringelektrode, führen dazu, dass das ideale Quadrupolpotential Anteile höherer Ordnungen besitzt<sup>3</sup>. Desweiteren führen auch Inhomogenitäten des Magnetfeldes sowie eine schiefe Lage zwischen Magnetfeldachse und  $z$ -Achse der Penningfalle zu Abweichungen vom idealen Quadrupolpotential. Diese vorhandenen Anharmonizitäten führen zu sog. Instabilitäten in der Penningfalle, d. h. Bereichen bei bestimmten Werten der angelegten Speicherspannung, in denen die Teilchen in ihrer Bewegung destabilisiert werden und den Käfig verlassen. Mit Hilfe der klassischen Hamiltonschen Störungsrechnung können diese Instabilitäten auf eine elegante Weise beschrieben werden. Die nun folgende theoretische Abhandlung beruht auf Berechnungen, die von M. Kretzschmar durchgeführt wurden [161]. Ausgangspunkt ist der bereits in Glg.

---

<sup>1</sup>bestehend aus geladenen Teilchen und Falle

<sup>2</sup>Auf diesen Fall wird in Abschnitt 8.2 eingegangen.

<sup>3</sup>Wie z. B., um nur einige zu nennen, Hexapol-Anteil und Oktupol-Anteil.

(2.16) (Abschnitt 2.2.1) dargestellte gestörte Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_0 + V \quad (8.1)$$

mit der Störung

$$V = \frac{e}{m}(\vec{p} + e\vec{A}) \cdot \delta\vec{A} + \frac{e^2}{2m}(\delta\vec{A})^2 - e\delta\Phi \quad (8.2)$$

Wegen der ebenfalls in Abschnitt 2.2.1 erwähnten physikalischen Gründe kann das Störpotential in (8.2) in eine Dyson-Reihe [252] entwickelt werden:

$$V = \sum_0^{\infty} \lambda^n V_n \quad (8.3)$$

die eine Potenzreihe mit den kanonischen Orts- und Impulskkoordinaten  $\{x, y, z\}$  und  $\{p_x, p_y, p_z\}$  beschreibt.  $\lambda^n V_n$  ist hierbei die Summe aller Terme n-ter Ordnung, d. h. aller Terme der Form  $x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} p_x^{n_4} p_y^{n_5} p_z^{n_6}$  mit der Bedingung  $\sum_{i=1}^6 n_i = n$ .

Als nächster Schritt werden nun verallgemeinerte Variablen eingeführt, mit denen

$$\mathcal{H}' = \underbrace{\mathcal{H}_0 + V_0 + \lambda V_1}_{=\mathcal{H}'_0} + \lambda^2 V_2 + \lambda^3 V_3 + \dots \quad (8.4)$$

umgeschrieben werden kann. Zum einen definiert man die sogenannten Drehimpulskkoordinaten  $J_k$  mit  $k \in \{+, -, z\}$ , die in Glg. (2.17) stehen. Zum anderen definiert man noch Drehwinkelkoordinaten  $\varphi_k$ ,  $k \in \{+, -, z\}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_+(t) &= \omega_+ \cdot t + \alpha_+ \\ \varphi_-(t) &= \omega_- \cdot t + \alpha_- \\ \varphi_z(t) &= \omega_z \cdot t + \alpha_z \end{aligned} \quad (8.5)$$

Die Phasen  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$ ,  $\alpha_z$  können o. B. d. A. identisch null gesetzt werden, wenn man die Anfangsbedingungen dementsprechend wählt. Somit folgt für den Hamilton-Operator nullter Ordnung:

$$\mathcal{H}_0 = \omega_+ J_+ + \omega_- J_- + \omega_z J_z \quad (8.6)$$

und die Störung in (8.3) lässt sich als folgende Fourier-Reihe schreiben:

$$\lambda^n V_n = \sum_{\ell_+, \ell_-, \ell_z} A_{\ell_+, \ell_-, \ell_z}^{(n)}(J_+, J_-, J_z) \cdot e^{i[\ell_+ \varphi_+(t) + \ell_- \varphi_-(t) + \ell_z \varphi_z(t)]} \quad (8.7)$$

wobei  $\ell_+, \ell_-, \ell_z \in \mathbb{Z}_0$  positive oder negative ganze Zahlen sind (einschließlich der Null), die nach Konstruktion die Einschränkung

$$|\ell_+| + |\ell_-| + |\ell_z| \leq n \quad (8.8)$$

erfüllen. In der angewandten Störungsmethode geht es nun darum, neue Drehimpuls- und Winkelkoordinaten  $J'_k$ ,  $\varphi'_k$  so zu konstruieren, dass der Gesamthamilton-Operator in (8.1) als Funktion dieser neuen Variablen geschrieben werden kann:

$$\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}'(J'_+, J'_-, J'_z, \varphi'_+, \varphi'_-, \varphi'_z) = \mathcal{H}'_0(J') + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n V_n(\varphi', J') \quad (8.9)$$

Dies kann erreicht werden, indem eine kanonische Transformation mit Hilfe einer erzeugenden Funktion [104] durchgeführt wird:

$$\mathcal{S}(J'_+, J'_-, J'_z, \varphi'_+, \varphi'_-, \varphi'_z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{S}_n(J'_+, J'_-, J'_z, \varphi'_+, \varphi'_-, \varphi'_z) \quad (8.10)$$

wobei  $\mathcal{S}_0 \equiv \varphi'_+ J'_+ + \varphi'_- J'_- + \varphi'_z J'_z$  die erzeugende Funktion des Identitätsoperators  $\mathbf{1}$  ist. Somit haben die kanonischen Variablen folgende Gestalt:

$$\varphi'_k \equiv \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial J_k} = \varphi_k + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{\partial}{\partial J_k} \mathcal{S}_n(\varphi, J) \quad (8.11)$$

$$J'_k \equiv \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi_k} = J_k + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \mathcal{S}_n(\varphi, J) \quad (8.12)$$

wobei  $k \in \{+, -, z\}$  ist und als vereinfachende Abkürzung

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(J_+, J_-, J_z, \varphi_+, \varphi_-, \varphi_z) \quad (8.13)$$

gesetzt wurde. Setzt man nun (8.12) in (8.9) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(\varphi, J) &= \mathcal{H}'_0(\varphi, J) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_k \omega_k \frac{\partial \mathcal{S}_n}{\partial \varphi_k} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n V_n \left( \varphi, J + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \frac{\partial \mathcal{S}_m}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (8.14)$$

Andererseits kann man (8.9) als Taylor-Reihe entwickeln und man erhält:

$$\mathcal{H}'(J) = \mathcal{H}'_0(J) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n \mathcal{H}'_n(J) \quad (8.15)$$

An dieser Stelle ist es entscheidend anzumerken, dass jeder Term auf der rechten Seite von (8.14) nicht von  $\varphi'_+$ ,  $\varphi'_-$ ,  $\varphi'_z$  abhängt, was zur Folge hat, dass  $\mathcal{H}'(J)$  stationär ist<sup>4</sup>. Weiterhin ist der lineare Term in  $\lambda$  gemäß der

<sup>4</sup>Die einzige Zeitabhängigkeit steckt in  $\varphi_k$  über die Beziehungen in (8.5).

Konstruktion in (8.4) eliminiert worden. Somit fangen alle Summen in (8.14) mit  $n = 2$  bzw.  $m = 2$  an und es muss

$$\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \varphi_k} = 0 \quad \text{mit} \quad k \in \{+, -, z\}$$

sein. Führt man einen Koeffizientenvergleich zwischen (8.14) und (8.15) durch, so erhält man für  $\lambda = 2$ :

$$\mathcal{H}_2(J) = \sum_k \omega_k \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial \varphi_k} + V_2(\varphi, J) \quad (8.16)$$

Analog zum Störpotential  $V$  kann die erzeugende Funktion  $\mathcal{S}$  ebenfalls in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$\lambda^n \mathcal{S}_n = \sum_{\ell_+, \ell_-, \ell_z} B_{\ell_+, \ell_-, \ell_z}^{(n)}(J_+, J_-, J_z) \cdot e^{i[\ell_+ \varphi_+(t) + \ell_- \varphi_-(t) + \ell_z \varphi_z(t)]} \quad (8.17)$$

mit der zugehörigen ersten Ableitung

$$\lambda^n \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \mathcal{S}_n = \sum_{\ell_+, \ell_-, \ell_z} i \ell_k B_{\ell_+, \ell_-, \ell_z}^{(n)}(J_+, J_-, J_z) \cdot e^{i[\ell_+ \varphi_+(t) + \ell_- \varphi_-(t) + \ell_z \varphi_z(t)]} \quad (8.18)$$

Alle Terme in (8.18) sind zeitabhängig, d. h. es muss  $(\ell_+, \ell_-, \ell_z) \neq (0, 0, 0)$  gelten. Setzt man schließlich (8.18) in (8.16) ein, so erhält man für die ersten nichtverschwindenden Fourierkoeffizienten in (8.7) und (8.17):

$$\boxed{A_{0,0,0}^{(2)}(J) = \lambda^2 \mathcal{H}_2(J) = 4 \mathcal{H}_2(J)} \quad (8.19)$$

und

$$\boxed{B_{\ell_+, \ell_-, \ell_z}^{(2)}(J) = i \frac{A_{\ell_+, \ell_-, \ell_z}^{(2)}(J)}{\ell_+ \omega_+ + \ell_- \omega_- + \ell_z \omega_z}} \quad \text{mit} \quad (\ell_+, \ell_-, \ell_z) \neq (0, 0, 0) \quad (8.20)$$

In [161] sind weitere Fourierkoeffizienten für Ordnungen bis  $\lambda = 6$  berechnet, sowie eine detailliertere Betrachtung der hier vorgestellten Rechnung mit Anwendungsbeispielen. Für den Zweck dieses Abschnittes ist es ausreichend sich nur die Koeffizienten der Ordnung  $\lambda = 2$  anzuschauen, zumal die Entwicklungskoeffizienten  $B_{\ell_+, \ell_-, \ell_z}^{(n)}$  der höheren Ordnung eine ähnliche Struktur wie in (8.20) aufweisen. Anhand des Ergebnisses in (8.20) kann nun die Bedingung, die zur Lokalisierung von instabilem Verhalten in der Teilchenbewegung dient, abgelesen werden, denn für

$$\boxed{\ell_+ \omega_+ + \ell_- \omega_- + \ell_z \omega_z = 0} \quad (8.21)$$

mit

$$\{\ell_+, \ell_-, \ell_z\} \in \mathbb{Z}$$

besitzt die Fourierreihe in (8.7) bzw. (8.17) eine Singularität.

Die hergeleitete Instabilitätsbedingung in Glg. (8.21) lässt sich umformen, und man erhält nach Einsetzen der Ausdrücke für  $\omega_{\pm}$  (siehe Abschnitt 2.1) und einmaliges Quadrieren:

$$(4\ell_z^2 + 2(\ell_- - \ell_+)^2)\omega_z^2 + 4(\ell_+ + \ell_-)\ell_z\omega_c\omega_z + 4\ell_+\ell_-\omega_c^2 = 0$$

Das Lösen dieser Gleichung mit Hilfe der  $pq$ -Formel führt zu folgender Beziehung:

$$\boxed{\omega_z = \eta \cdot \omega_c} \quad \text{mit} \quad \eta \in \mathbb{R} \quad (8.22)$$

wobei

$$\eta := \frac{-(\ell_- + \ell_+)\ell_z \pm \sqrt{(\ell_z^2 - 2\ell_-\ell_+)(\ell_+ - \ell_-)^2}}{(\ell_- - \ell_+)^2 + 2\ell_z^2} \quad (8.23)$$

Setzt man in (8.22) die Ausdrücke für die reduzierte und freie Zyklotronfrequenz, so erhält man folgenden Ausdruck, der einen funktionalen Zusammenhang zwischen den beiden bei der Penningfalle vorhandenen statischen Speicherfeldern herstellt.

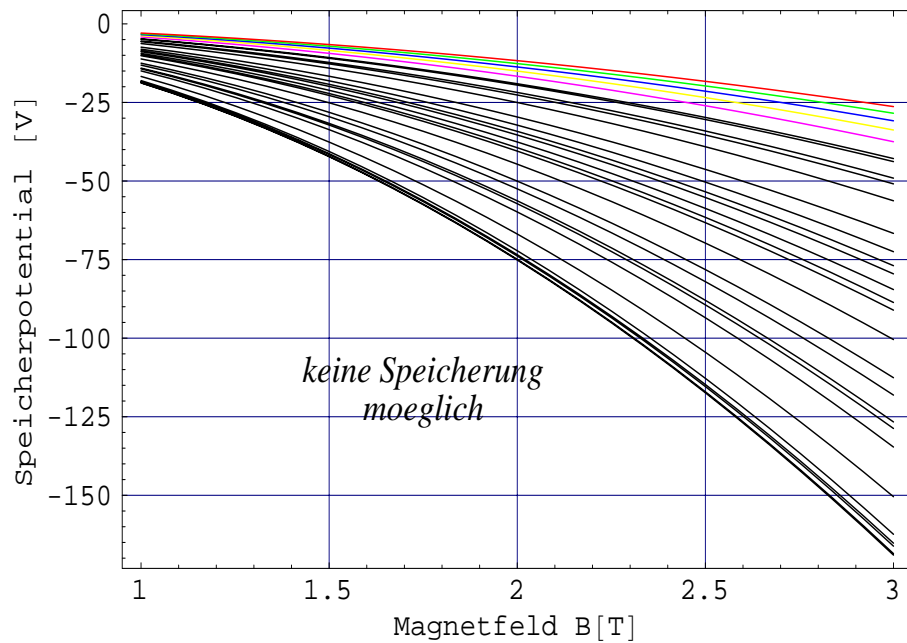
$$U_0(B) = \pm \frac{er_0^2}{2m} \cdot \eta^2 \cdot B^2 \quad (8.24)$$

Das positive Vorzeichen bezieht sich hierbei auf negativ geladene gespeicherte Teilchen, während sich das negative Vorzeichen auf positiv geladene gespeicherte Teilchen bezieht. Für jeden möglichen Wert von  $\eta$ , der sich aufgrund der Kombination der Zahlentripel  $(\ell_+, \ell_-, \ell_z)$  ergibt, erhält man parabelförmige Kurven. Die Wahl von Wertepaaren  $(U_0, B)$ , die auf diesen Kurven liegen, führt zu instabilen Bewegungen in der Teilchentrajektorie bis hin zum Teilchenverlust. Die Abb. 8.1 und 8.2 stellen solche Instabilitätskurven für den speziellen Fall gespeicherter  $Pb^+$ -Ionen und Elektronen graphisch dar. Eine Speicherung der Teilchen ist nur in den Bereichen zwischen den Parabelästen möglich. Die farbig hervorgehobenen Kurven beziehen sich exemplarisch auf einige Kombinationen von Zahlentripeln  $(\ell_+, \ell_-, \ell_z)$  (siehe Tab. 8.1):

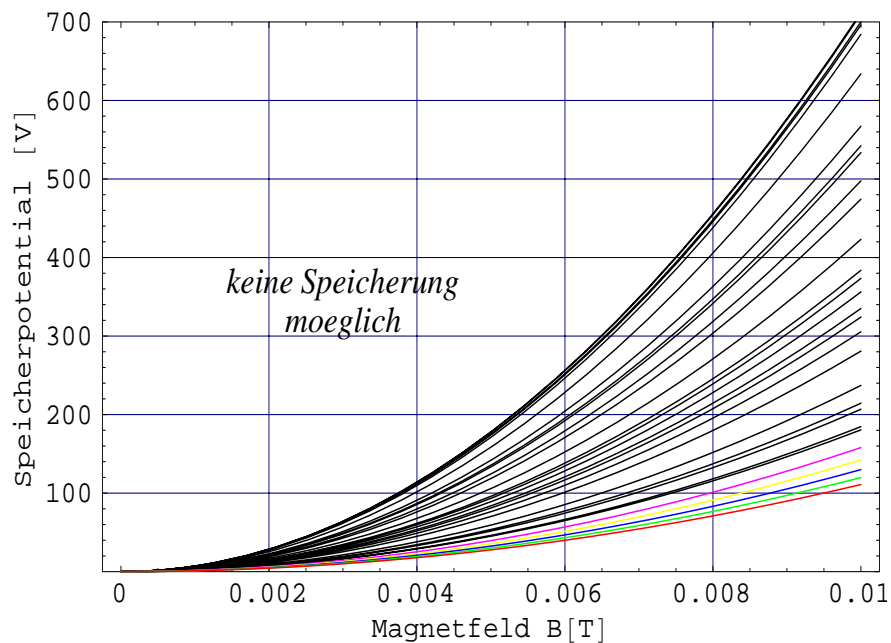
rot :	$(\ell_+, \ell_-, \ell_z) = (1, -3, -3)$
grün :	$(\ell_+, \ell_-, \ell_z) = (1, -2, -3)$
blau :	$(\ell_+, \ell_-, \ell_z) = (1, -1, -3)$
gelb :	$(\ell_+, \ell_-, \ell_z) = (1, 0, -3)$
magenta :	$(\ell_+, \ell_-, \ell_z) = (1, 1, -3)$

Die Grenze des Stabilitätsbereiches wird durch die Forderung der Positivität der Wurzel in Glg. (2.12) bestimmt:

$$\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega_z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_c} \quad (8.25)$$



**Abb. 8.1:** Instabilitätslinien innerhalb des Speicherbereichs einer Penningfalle für  $Pb^+$ -Ionen in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die farbigen Kurven beziehen sich auf unterschiedliche Zahlentripel  $(\ell_+, \ell_-, \ell_z)$ , die exemplarisch auf Seite 173 aufgeführt sind.



**Abb. 8.2:** Instabilitätslinien innerhalb des Speicherbereichs einer Penningfalle für Elektronen in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die farbigen Kurven beziehen sich auf unterschiedliche Zahlentripel  $(\ell_+, \ell_-, \ell_z)$ , die exemplarisch auf Seite 173 aufgeführt sind.

$\eta$		$(\ell_+, \ell_-, \ell_z)$						
exakt	num							
$1/\sqrt{2}$	0.707				(1, -1, 0)			(2, -2, 0)
$12/17$	0.706	(0, -3, 2)						
$(3\sqrt{5} + 1)/11$	0.701							(2, -1, -1)
$(2\sqrt{7} + 1)/9$	0.699				(1, -3, 1)			
$2\sqrt{3}/5$	0.693							(2, -3, 0)
$2/3$	0.667	(0, -2, 1)	(1, 2, -2)	(1, 0, -1)	(1, -2, 0)	(2, 2, -3)	(2, 0, -2)	(2, -2, -1)
$(5\sqrt{13} - 1)/27$	0.631							(2, -3, -1)
$(6\sqrt{2} + 2)/17$	0.617						(2, -1, -2)	
$\sqrt{6}/4$	0.612				(1, -3, 0)			
$(\sqrt{5} + 9)/19$	0.591					(2, 1, -3)		
$1/\sqrt{3}$	0.577			(1, -1, -1)			(2, -2, -2)	
$6/11$	0.545	(0, -3, 1)				(2, 0, -3)	(2, -3, -2)	
$(3/\sqrt{5} - 1)/11$	0.519			(1, -2, -1)				
$(\sqrt{13} + 1)/9$	0.512					(2, -1, -3)		
$1/2$	0.500		(1, 1, -2)					
$2/\sqrt{17}$	0.485					(2, -2, -3)		
$(2\sqrt{7} - 1)/9$	0.477			(1, -3, -1)				
$(5\sqrt{21} - 3)/43$	0.463					(2, -3, -3)		
$4/9$	0.444		(1, 0, -2)					
$1/\sqrt{6}$	0.408		(1, -1, -2)					
$(6 - \sqrt{3})/11$	0.388	(1, 3, -3)						
$(6\sqrt{2} - 2)/17$	0.381		(1, -2, -2)					
$(\sqrt{10} - 1)/6$	0.360		(1, -3, -2)					
$(9 - \sqrt{5})/19$	0.356	(1, 2, -3)						
$1/3$	0.333	(1, 1, -3)						
$6/19$	0.316	(1, 0, -3)						
$1/\sqrt{11}$	0.302	(1, -1, -3)						
$(\sqrt{13} - 1)/9$	0.290	(1, -2, -3)						
$(2\sqrt{15} - 3)/17$	0.279	(1, -3, -3)						

**Tab. 8.1:** Tabellierte numerische Werte für  $\eta$ , mit den dazugehörigen Kombinationen von  $\ell_+$ ,  $\ell_-$  und  $\ell_z$ .

Für Elektronen, d. h. für positive Speicherspannung erhält man als Speichergrenzen

$$0 < U_0 < \frac{eB^2 r_0^2}{4m} \quad (8.26)$$

während für positiv geladene Ionen, etwa  $Pb^+$ , die Speichergrenzen gegeben sind durch

$$-\frac{eB^2 r_0^2}{4m} < U_0 < 0 \quad (8.27)$$

Aus Glg. (8.25) erhält man die Information, dass  $\eta$  aus Glg. (8.23) maximal den Wert  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  annehmen kann, da die zu diesem Wert zugehörige parabel-förmige Kurve die Grenze zum instabilen Bereich bildet. Einige numerische Werte von  $\eta(\ell_+, \ell_-, \ell_z)$  für  $\ell_+ = 0, 1, 2$  und  $|\ell_-| \leq 3, |\ell_z| \leq 3$  sind in Tabelle 8.1 in absteigender Ordnung aufgelistet<sup>5</sup>.

## 8.2 Die Untersuchung von anharmonischem Verhalten gespeicherter Elektronen bei einer parametrischen Anregung

Die in den folgenden Unterabschnitten vorgestellten Messungen betreffen die Untersuchung nichtlinearer, anharmonischer Bewegungen gespeicherter Elektronen, die über die nichtharmonischen elektrostatischen und die inhomogenen magnetischen Felder hinaus auch mit einer periodisch erzwungenen, parametrischen Anregung wechselwirken. Die beobachteten Phänomene demonstrieren, dass Ionenfallen sich als „Labors für Chaos“ [26] eignen, da sie Aufschlüsse über nichtlineare Dynamik und nichtdeterministische Bewegung geben können. Die Anwesenheit von nichtlinearen Resonanzen im Bewegungsspektrum eines schwingungsfähigen Systems wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt am Beispiel von beobachteten Instabilitäten in der Teilchenbewegung ausführlich behandelt. Während diese Störung durch konstruktionstechnische Beschränkungen der Penningfalle verursacht wird, die sich in einer Abweichung des Speicherpotentials vom reinen Quadrupolpotential manifestiert, behandelt dieser Abschnitt nichtlineare Dynamik. Letztere wird durch eine Störung herbeigerufen, die von außen kommt und dem schwingungsfähigen System sozusagen aufoktroiert wird in Form einer periodischen erzwungenen Schwingung. Zur Einführung soll ein kurzer historischer Abriss dienen, der auch eine Begriffsbildung beinhaltet. Die Ausdrücke, die eingeführt werden, sind hierbei wichtig für das Verständnis der anschließenden Unterabschnitte.

Beginnen wir mit einem historisch längst bekannten Sachverhalt: Wird ein *Parameter* eines schwingungsfähigen Systems mit einer Frequenz ange-regt, die doppelt so groß ist wie die Eigenfrequenz des Systems, etwa  $2\omega$ , so

<sup>5</sup>private Mitteilung von Prof. M. Kretzschmar.



antwortet das System selber mit einer Oszillation bei einer Frequenz  $\omega$ .<sup>6</sup> Für dieses Phänomen wird in der Literatur häufig der Ausdruck *parametrische Anregung* verwendet. Er hebt die Tatsache hervor, dass die auf das System einwirkende Störung ein Parameter, d. h. eine charakteristische Größe, des Systems selbst ist. Dabei ist es wichtig zu betonen, dass sich dieses parametrische Resonanzphänomen grundlegend von linearen erzwungenen Schwingungen unterscheidet, da es ein Instabilitätsphänomen ist. Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen erzwungenen Schwingungen besteht darin, dass bei letzteren nicht nur periodische Schwingungen mit der Kreisfrequenz  $\omega$  der Erregung, sondern auch periodische Schwingungen bei den *gebrochenen Frequenzen*  $\frac{\omega}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  auftreten. Diese *Subharmonischen* bilden das fundamentale Charakteristikum nichtlinearer Systeme. Eine grundlegende Untersuchung der Theorie der subharmonischen Resonanzen mit den dazugehörigen experimental-physikalischen Implikationen wurde in den 30er Jahren von Mandelstam und Papalexi [200, 201] unternommen, die weitestgehend auf Poincarés Traktaten zur Himmelsmechanik fußt<sup>7</sup>. Das von ihnen verwendete System war ein selbstgebauter „parametrischer Generator“, der aus einem elektrischen Schwingkreis zusammen mit einem variablen Parameter<sup>8</sup> bestand.

Eine prinzipielle Verallgemeinerung in Form einer mathematischen Methode wurde von Ljapunow<sup>9</sup> ausgearbeitet, die nicht speziell an konservative Systeme gebunden war. Die Ljapunow'sche Stabilitätstheorie behandelt außer linearen auch nichtlineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Hat man als periodischen Koeffizienten eine zeitabhängige Kosinusfunktion, so erhält man als Spezialfall für eine lineare Differentialgleichung die in der Literatur sehr ausführlich behandelte gewöhnliche *Mathieusche Differentialgleichung* [213]. Mit Hilfe des Floquet-Theorems [213, 212] erhält man einen Satz von stabilen und instabilen Lösungen, die sich graphisch in einem *Strutt'schen Diagramm* darstellen lassen. Dieses Diagramm besitzt stabile und instabile Zonen in seinem 'Parameterraum'  $(a, q)$ . Mathematisch ähnlich zu behandeln ist die *gedämpfte Mathieusche DGL*, die zusätzlich noch

<sup>6</sup>In der zweiten Hälfte des 19. Jhd. wurde das Phänomen der parametrischen Anregung von Melde und Lord Rayleigh beobachtet und untersucht: F. E. Melde, Pogg. Annalen **108**, 508 (1859); Lord Rayleigh, Phil. Mag. **15**, 5<sup>th</sup> series, 229 (1883). Eine Beschreibung des mechanischen Systems, das z. B. Rayleigh verwendete, findet sich bei McLachlan [212].

<sup>7</sup>H. Poincaré, „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tome 1, p. 79, Gauthier-Villars, Paris (1892). Die von Poincaré benutzte asymptotische Methode (beruhend auf der Störungstheorie) erwies sich in der Himmelsmechanik als sehr nützlich und wurde später sogar auf die Quantenmechanik übertragen. Jedoch ist diese Methode speziell für konservative dynamische Systeme ausgearbeitet, die durch kanonische Gleichungen beschrieben werden. Die Mehrzahl der nichtlinearen Schwingungssysteme sind nicht konservativ, da sie Quellen sowohl für Energiezufuhr als auch für Energieabfuhr enthalten. Eine alternative Methode, ebenfalls asymptotische Methode genannt, wurde von Krylow, Bogoljubow und Mitropolsky entwickelt [27].

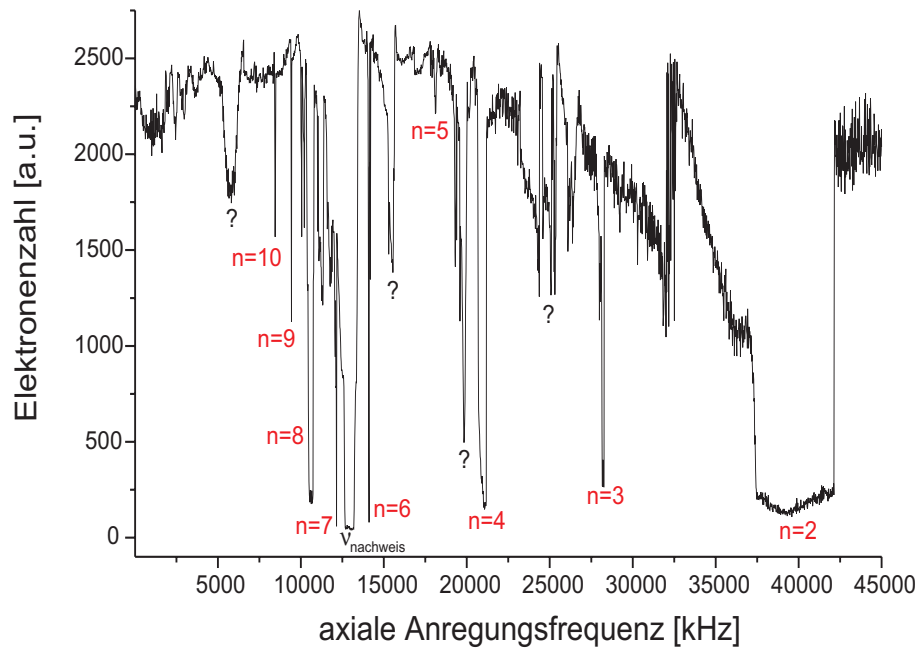
<sup>8</sup>Entweder aus einer Kapazität  $C$  oder aus einer Induktivität  $L$

<sup>9</sup>[191]; eine sehr gute Einführung findet sich bei Hagedorn [114].

ein lineares Dämpfungsglied besitzt. Erste quantitative theoretische Berechnungen des Einflusses, den das Dämpfungsglied auf die instabilen Bereiche im Strutt-Diagramm hat, wurden von Kotowski [160] durchgeführt. Wie im Unterabschnitt 8.2.4 gezeigt wird ist die gedämpfte Mathieusche DGL der richtige Ansatz, um ein nichtlineares, parametrisch angeregtes, schwingungsfähiges System sowohl quantitativ als auch qualitativ zu erfassen. Das wichtigste qualitative Ergebnis ist, dass das lineare Dämpfungsglied die Instabilitätsbereiche verkleinert und zwar derart, dass die Instabilität erst oberhalb bestimmter Schwellenwerte, die u. a. von der Anregungsamplitude der äußeren periodischen Erregung abhängen, eintritt. Bevor jedoch dieser hier nur kurz angedeutete Sachverhalt ausführlich theoretisch ausgeleuchtet wird, soll im folgenden Unterabschnitt zunächst einmal auf die experimentellen Beobachtungen eingegangen werden.

### 8.2.1 Aufnahme eines axialen Anregungsspektrums und Auflösung von Subharmonischen zur $2\omega_z$ -Resonanz

Die nun vorgestellten Messungen wurden an gespeicherten Elektronen durchgeführt. Der experimentelle Aufbau entspricht somit demjenigen, der zur Aufnahme der Elektronen-Zyklotronresonanz verwendet wurde, mit lediglich zwei Modifikationen: Zum einen sieht der Messzyklus zur Aufnahme eines Datenpunktes einfacher aus, da es bei diesem Experiment nicht relevant ist, die kinetische Energie der Elektronen zu minimieren. Das bedeutet, dass bei einem höheren Kühlpotential gearbeitet werden konnte. Um ein definiertes Potential zu haben, das eine Bestimmung der axialen Frequenz der Elektronen ermöglichte, wurden Einschuss- und Kühlpotential auf gleichen Wert gesetzt. Zum anderen musste die parametrische Anregung in die Penningfalle eingekoppelt werden. Hierzu wurde einer der nichtverwendeten Ofendrähte benutzt. Da die Ofendrähte über eine Masseverbindung des Nachweisschwingkreises sowohl mit der oberen als auch mit der unteren Kalotte verbunden sind, wird die axiale Bewegung der Elektronen in einer Quadrupolanordnung parametrisch angeregt. Das Steuerprogramm ermöglichte es, den hierzu verwendeten Frequenzgenerator in der Frequenz durchzustimmen und somit ein axiales Anregungsspektrum aufzunehmen. Außerdem konnte die Amplitude der Erregung variiert werden, so dass Frequenzbereiche, in denen Resonanzen zu beobachten waren, in Abhängigkeit von der Anregungsamplitude untersucht werden konnten. Die Abb. 8.3 zeigt ein Anregungsspektrum bei einer Amplitude der Erregung von  $+18.1dBm$ . Man erkennt eine verwirrend große Anzahl von breiten und schmalen, starken und schwachen Einbrüchen. Der sehr breite Einbruch bei ca.  $40MHz$  ist die axiale Eigenfrequenz der gespeicherten Elektronen. Der experimentell beobachtete Wert von  $\omega_z$  weicht vom theoretischen Wert, der sich bei einem Speicherpotential von  $U = +40V$  ergibt, ab. Die experimentell bestimmten Frequenzen sind um einige  $MHz$  zu niedrigeren Frequenzen hin verschoben.



**Abb. 8.3:** Axiales Anregungsspektrum. Man sieht die gebrochenen Resonanzen bis zur Ordnung  $n = 10$ . Die mit einem Fragezeichen versehenen Signaleinbrüche sind zusätzlich beobachtete Resonanzen, für die es noch keine Theorie gibt.

Grund hierfür ist die relativistische Massenzunahme, die die Elektronen in der Penningfalle wegen der hohen kinetischen Energie, die sie besitzen, erfahren. Weiterhin führt die Raumladung wegen der großen Elektronenwolke zu einer Absenkung des Speicherpotentials und somit ebenfalls zu einer Erniedrigung der axialen Frequenz. Nimmt man die Lage der  $\omega_z$ -Resonanz als Referenzpunkt, so lassen sich viele Einbrüche quantitativ zuordnen. Man beobachtet<sup>10</sup> gebrochene Resonanzen bei  $\frac{2}{3}\omega_z$ ,  $\frac{1}{2}\omega_z$ ,  $\frac{2}{5}\omega_z$ ,  $\frac{1}{3}\omega_z$ ,  $\frac{2}{7}\omega_z$ ,  $\frac{1}{4}\omega_z$ ,  $\frac{2}{9}\omega_z$  und  $\frac{1}{5}\omega_z$ , allgemein bei  $\omega = \frac{2\omega_z}{n}$ , wobei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ist. In Abb. 8.3 sind diese gebrochenen Resonanzen mit  $n = 2, 3, 4, \dots, 10$  gekennzeichnet. Die Resonanz höchster Ordnung für  $n = 1$  wurde ebenfalls beobachtet, wird aber gesondert behandelt, weil bei ihrer Bestimmung interessante Effekte auftauchen. Außer den Subharmonischen zu  $2\omega_z$  tauchen Resonanzen auf, für die es nach der Theorie, die im Unterabschnitt 8.2.4 vorgestellt wird, keine Erklärung gibt. Diese Einbrüche wurden wiederholt an unterschiedlichen Tagen gemessen, so dass äußere, hauptsächlich elektronische Störungen ausgeschlossen werden konnten. Diese Resonanzen sind in Abb. 8.3 mit einem Fragezeichen versehen. Lediglich die Ursache des breiten Einbruches bei ca.  $13\text{MHz}$  konnte geklärt werden. Und zwar ist dies die Frequenz, mit der

<sup>10</sup>dies zum ersten Mal an gespeicherten Elektronen in einem Penningkäfig bei einem starken Magnetfeld von  $B = 2.87T$

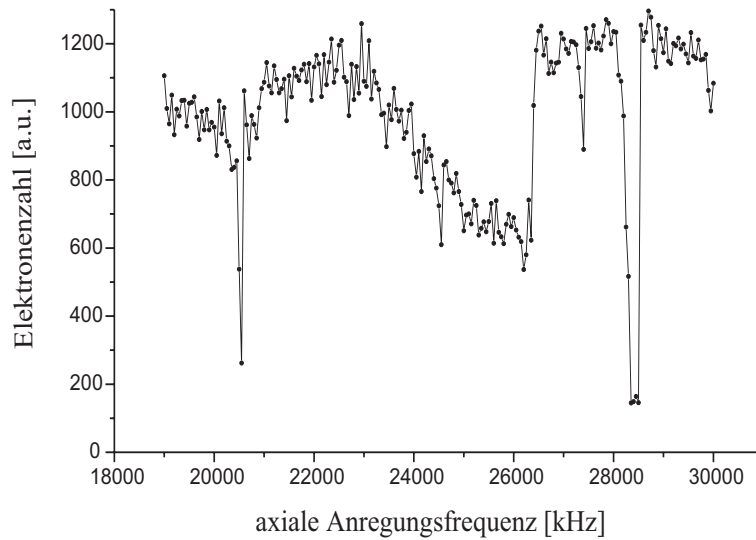
der Elektronen-Nachweisschwingkreis angeregt wird<sup>11</sup>. Diese 'Resonanz des Nachweises' wirkte sich dadurch störend aus, dass in ihrer niederfrequenten Flanke die Subharmonischen  $n = 7$  und  $n = 8$  lagen. Die Störung konnte zwar nicht beseitigt, doch zumindest eingeschränkt werden: Einerseits wurde die Anregungsamplitude des Nachweises soweit reduziert, dass die Breite der Resonanz minimiert wurde. Andererseits wurde durch Wahl des Speicherpotentials von  $U = +40V$  sichergestellt, dass die meisten gebrochenen Resonanzen auf der höherfrequenten Seite der Nachweisresonanz lagen.

### 8.2.2 Die individuelle und die kollektive Bewegung im axialen Anregungsspektrum

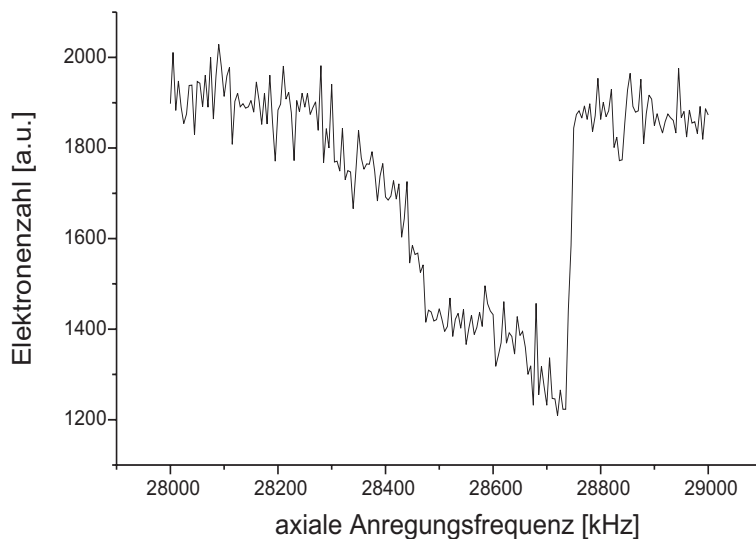
Wie bereits erwähnt erfolgt die parametrische Anregung in Form einer Quadrupolanregung, d. h. die mit einem Frequenzgenerator erzeugte periodische Kraft liegt gleichphasig an beiden Endkappen des Penningkäfigs. Die Quadrupolanordnung bewirkt, dass die  $2\omega_z$ -Resonanz am stärksten angeregt wird. Um mit geringeren Anregungsamplituden im Bereich von nur einigen dBm arbeiten zu können, wurde für die folgenden Messungen das Speicherpotential auf  $U = +3V$  herabgesenkt. Die Frequenz der  $2\omega_z$ -Resonanz lag bei  $\approx 25MHz$  und somit weit genug weg von der axialen Nachweisfrequenz des Verstärkers. Abb. 8.4 zeigt ein Anregungsspektrum, das im Frequenzbereich von  $18 - 30MHz$  um den theoretisch berechneten Wert herum aufgenommen wurde. Man sieht zunächst eine breite asymmetrische Resonanzkurve ( $\Delta\omega \approx 3MHz$ ) und eine zusätzliche schmale Resonanz auf der höherfrequenten Seite ( $\Delta\omega \approx 200kHz$ ). Die asymmetrische Linienform mit einem parabelähnlichen Anstieg auf der niederfrequenten Flanke und einem sprunghaften Abfall auf der höherfrequenten Flanke, die nicht nur bei der breiten Resonanz auftritt (siehe Abb. 8.5), ist charakteristisch für einen parametrisch angeregten, anharmonischen Oszillator. Die Ursache für die zusätzliche Resonanz, die auf der niederfrequenten Flanke auftritt, ist ungeklärt. Da sie an unterschiedlichen Tagen beobachtet wurde, kann eine Störung ausgeschlossen werden, zumal sich diese Resonanz, bei Variation der Anregungsamplitude, ähnlich wie die  $2\omega_z$ -Resonanz verhält (siehe Abb. 8.6 und 8.7). Die Theorie, die die beobachtete Linienform erklärt, ist seit langem bekannt und wird z. B. bei Landau und Lifschitz [175] beschrieben. Diese Theorie macht keine Aussagen über das Auftreten von zwei Resonanzen, die sich durch die Breite unterscheiden. Außerdem erscheint die schmale Resonanz, wenn die Anzahl der gespeicherten Elektronen eine kritische Teilchendichte überschreitet. Dieses Phänomen wurde 1965 von Rettinghaus<sup>12</sup> an gespeicherten  $N_2^+$ -Molekülen in einer Paulfaule beobachtet. Bestätigt durch spätere Untersuchungen von Jungmann et al. an gespeicherten  $Ho^+$ - und  $Er^+$ -Ionen

<sup>11</sup>Die exakte Frequenz des Nachweises lag bei  $\nu_z^{exc} = 13,176MHz$  mit einer Anregungsamplitude von  $A_{exc} = 132mV$ .

<sup>12</sup>Promotion, Universität Bonn. Der Hinweis findet sich in [4].



**Abb. 8.4:**  $2\omega_z$ -Resonanz mit Kollektivbewegung. Der zusätzliche Signaleinbruch auf der niederfrequenten Seite der individuellen Resonanz wurde wiederholt beobachtet. Die Ursache dieser zusätzlichen Resonanz ist jedoch ungeklärt. Interessant ist, dass diese Resonanz auch ein Schwellenverhalten aufweist (siehe hierzu die Abb. 8.6 und 8.7).



**Abb. 8.5:** Vergrößerte Aufnahme der zur  $2\omega_z$ -Resonanz zugehörigen Kollektivbewegung.

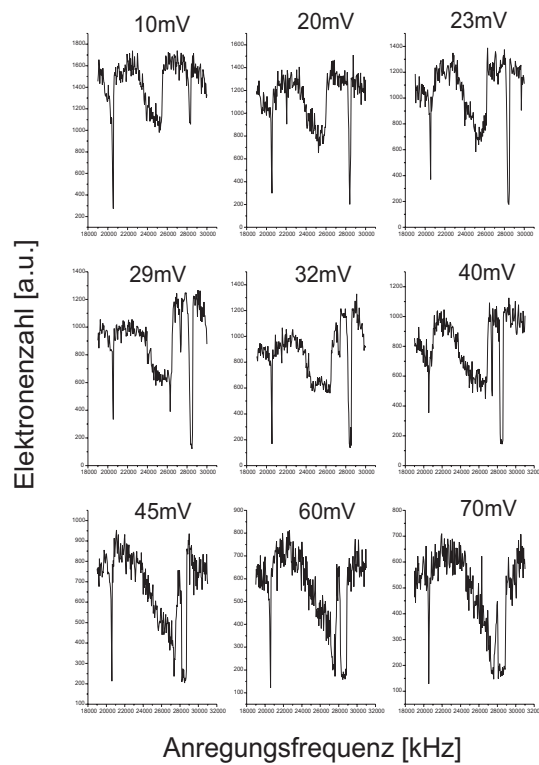
[142] und von Vedel et al. an gespeicherten  $N^+$ -Ionen [308], deutete Rettinghaus die Beobachtung als „synchrone Schwingung“ der Teilchen. Anders ausgedrückt, handelt es sich bei der schmalen Resonanz um eine parametrische Anregung der Schwerpunktsbewegung der Elektronenwolke. Die gespeicherte Teilchenwolke verhält sich wie ein kollektives Ensemble, das unter dem Einfluss der axialen Anregung anharmonisches, instabiles Verhalten zeigt. Aus diesem Grund spricht man von der *Kollektivbewegung*. Die breite Resonanz dagegen hat ihre Ursache in der inkohärenten Bewegung der individuellen Elektronen in der Wolke. Da jedes einzelne Elektron das Raumladungspotential der anderen Elektronen, die sich in der Nähe befinden, spürt, ist die Lage dieser *individuellen Bewegung* abhängig von der Anzahl der gespeicherten Teilchen. Die kollektive Bewegung hingegen ist wegen der sehr schwachen Ion-Ion-Wechselwirkung weitestgehend unabhängig von der Raumladung und somit keiner Frequenzverschiebung bei Änderung der Teilchenzahl unterworfen. Dieser Sachverhalt wurde von Alheit et al. [4] experimentell bestätigt.

Die Beobachtung von kollektiven Resonanzen ist auch in Penningfallen nichts Neues. Erste Indizien, die zur Annahme eines solchen Phänomens führten, stammen von Wineland und Dehmelt, die aus Messungen an gespeicherten Elektronen hervorgegangen sind [327]. Detailliertere Untersuchungen wurden später von Paasche et al.<sup>13</sup> ebenfalls an Elektronen durchgeführt mit ähnlichen Ergebnissen wie bei den Messungen in den Paulfallen. Sowohl die Messungen von Wineland et al. als auch von Paasche et al. wurden hierbei bei einem vergleichsweise schwachen Magnetfeld durchgeführt<sup>14</sup>. Das Schwache Magnetfeld wirkte sich insofern als Nachteil aus, als Vielfache der Magnetronfrequenz und der reduzierten Zyklotronfrequenz im selben Frequenzbereich wie die gebrochenen Frequenzen der  $2\omega_z$ -Resonanz lagen. Somit überlagerten diese starken Resonanzen – da sie Eigenfrequenzen des Systems sind – die Subharmonischen. Da in unserem Experiment das Magnetfeld  $2.87T$  betrug, lagen die Frequenzen der radialen Eigenbewegungen entweder weit unterhalb bzw. weit oberhalb des MHz-Bereichs. Aufgrund dieser günstigen Bedingungen konnten zum ersten Mal in der Penningfalle die kollektiven Bewegungen auch bei den Ordnungen  $n = 2$  und  $n = 6$  der Subharmonischen beobachtet werden, deren Form Ähnlichkeiten mit der in Abb. 8.5 dargestellten Kurve aufwies. Es sei am Rande erwähnt, dass das Phänomen der kollektiven Bewegung gespeicherter Teilchen in Ionenkäfigen Parallelen zu den *Plasma-Oszillationen*, wie sie in einem neutralen Plasma vorzufinden sind, aufweist. Schermann [261] beschreibt, dass ab bestimmten kritischen Teilchendichten das System Plasma-Eigenschaften erwirbt, in dem Größen wie die Debyelänge  $\lambda_D = \sqrt{\frac{k \cdot T}{\epsilon_0 \cdot n \cdot e^2}}$  und die Plasmafrequenz  $\omega_p = \sqrt{\frac{q^2 \cdot n}{\epsilon_0 \cdot m}}$  eine wichtige Rolle spielen.

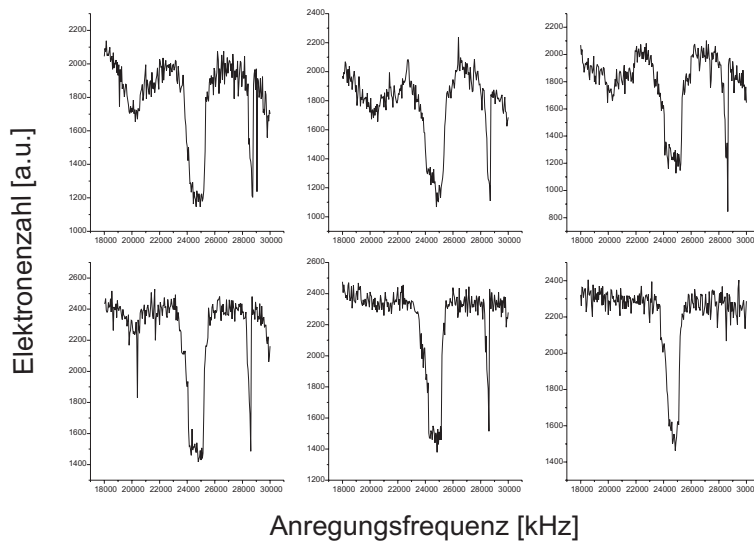
Variiert man nun die Amplitude der quadrupolähnlichen axialen Erre-

<sup>13</sup>eingereicht an Eur. Phys. J. **D**

<sup>14</sup>Bei Wineland:  $B \approx 800mT$ ; bei Paasche:  $B \leq 10mT$ .



**Abb. 8.6:** Untersuchung der  $2\omega_z$ -Resonanz bei unterschiedlichen Amplituden der parametrischen Anregung. Man sieht, dass mit zunehmender Anregungsamplitude die individuelle Resonanz breiter und asymmetrischer wird, bis sie mit der kollektiven Resonanz verschwimmt.



**Abb. 8.7:** Untersuchung der  $2\omega_z$ -Resonanz mit Kollektivbewegung bei abnehmender Amplitude der parametrischen Anregung. Die zusätzlich sichtbare Resonanz weist ebenfalls das Schwellenverhalten auf.

gung, so beobachtet man zum einen, wie sich sowohl die individuelle als auch die kollektive Resonanz bei Erhöhung der Anregungsamplitude verstärken, wobei die Breite der kollektiven Resonanz im Verhältnis zur individuellen Resonanz wesentlich schneller zunimmt. Zum anderen erhält man die Erkenntnis, dass ein bestimmter, kritischer *Schwellenwert* der Amplitude der parametrischen Erregung nötig ist, um sowohl die individuelle als auch die kollektive Resonanz sichtbar werden zu lassen, wie sich etwa aus Messungen der Resonanzbreite bei unterschiedlichen Anregungsamplituden ergibt (siehe Abb. 8.10). Diese Schwelle wächst mit zunehmender Ordnung der gebrochenen Resonanzen an. Während die erste Beobachtung fast schon intuitiv einsichtig ist, so ist letztere a priori nicht zu verstehen. Rein experimentalphysikalisch interpretiert legt die beschriebene Beobachtung den Schluss nahe, dass dieses Schwellenverhalten die Existenz eines *Dämpfungsmechanismus*, der auf die Elektronenwolke einwirkt, fordert, so dass eine Mindestamplitude der Anregung erforderlich ist, um diese Dämpfung zu überwinden.

Bevor jedoch diese Annahme im folgenden Unterabschnitt ausführlicher dargelegt wird, soll zum Abschluss dieses Teilabschnittes eine kurze theoretische Überlegung vorgestellt werden, mit deren Hilfe es möglich ist, auf der Grundlage der gemessenen Resonanzen in den Abb. 8.4 und 8.5, quantitative Aussagen über die Größe der Entwicklungskoeffizienten höherer Ordnung von Ausdruck (2.18) zu machen, die eine Abweichung des Speicherpotentials vom idealen Quadrupolpotential beschreiben. Betrachtet werden nur die Legendre-Koeffizienten  $C_4$  und  $C_6$ . Die bestimmten Werte sind jedoch mit Vorsicht zu betrachten, wegen der sehr einfachen Annahme, die in die Berechnung einfließen wird.

Wie bereits gesagt, wird die axiale Elektronenbewegung durch ein äußeres angelegtes periodisches Wechselfeld parametrisch angetrieben, in diesem Falle bei der Frequenz:

$$\omega_d = 2(\omega_z + \varepsilon), \quad (8.28)$$

wobei  $\varepsilon \ll \omega_z$  die Anregung darstellt. Für die Bewegungsgleichung kann man folgenden Ansatz machen, der sowohl für die individuelle als auch für die kollektive Bewegung formal ähnlich ist:

$$\ddot{z} + \gamma_z \dot{z} + \omega_z^2 z + \lambda_4 \omega_z^2 z^3 + \lambda_6 \omega_z^2 z^5 = k \omega_z^2 \cos \omega_d t \quad (8.29)$$

$\gamma_z$  bezeichnet hierbei die axiale Dämpfungskonstante und  $k$  die parametrische Anregungsamplitude. Weiterhin stehen  $\lambda_4$  und  $\lambda_6$  in folgendem Zusammenhang mit den oben erwähnten Entwicklungskoeffizienten [89, 90]:

$$\lambda_4 = \frac{2C_4}{1 + C_2} \quad \text{und} \quad \lambda_6 = \frac{3C_6}{1 + C_2} \quad (8.30)$$

Man kann  $C_2 = 1$  setzen, da dieser Koeffizient im Ausdruck des Speicherpotentials als Legendre-Reihe (siehe Glg. (2.18)) den reinen Quadrupolanteil darstellt. Startet man in (8.29) mit einer schwachen axialen Anregung, d. h.



$z \ll 1$ , so können die nichtlinearen Glieder vernachlässigt werden und man erhält die gewöhnliche Mathieusche DGL mit Dämpfung. In der Nähe der Resonanz bei  $2(\omega_z + \varepsilon)$  wächst die Antwortfunktion des angeregten Systems exponentiell an, wenn die Amplitude  $k$  eine kritische Schwelle  $k_{thr}$  überschreitet, die gegeben ist durch [290, 303]:

$$k_{thr} = \frac{2\gamma_z}{\omega_z} \quad (8.31)$$

Für einen festen Wert  $k > k_{thr}$  befindet sich die parametrische Anregung in einem Frequenzintervall  $\varepsilon_- < \varepsilon < \varepsilon_+$  mit wohldefinierten scharfen Kanten:

$$\varepsilon_{\pm} = \pm \frac{\omega_z}{4} \sqrt{k^2 - k_{thr}^2} \quad (8.32)$$

Die nichtlinearen Terme  $\lambda_4 \omega_z^2 z^3$  und  $\lambda_6 \omega_z^2 z^5$  bewirken nun, dass die exponentiell anwachsende angeregte Bewegung beschränkt bleibt und ein stationärer Zustand erreicht wird. Mit dem Ansatz

$$z(t) = A(t) \cos((\omega_z + \varepsilon)t + \varphi(t)) \quad (8.33)$$

– wobei angenommen wird, dass die Amplitude  $A(t)$  und die Phase  $\varphi(t)$ , die sich zwischen der Anregung und der Antwortfunktion des Systems ergibt, zeitlich nur schwachveränderliche Größen sind – erhält man mit den Bedingungen  $\varepsilon \ll \omega_z$  und  $\gamma_z \ll \omega_z$  aus (8.29) folgende zwei gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\gamma_z}{2} A \left\{ 1 - \frac{k}{k_{thr}} \sin(2\varphi) \right\} \quad (8.34)$$

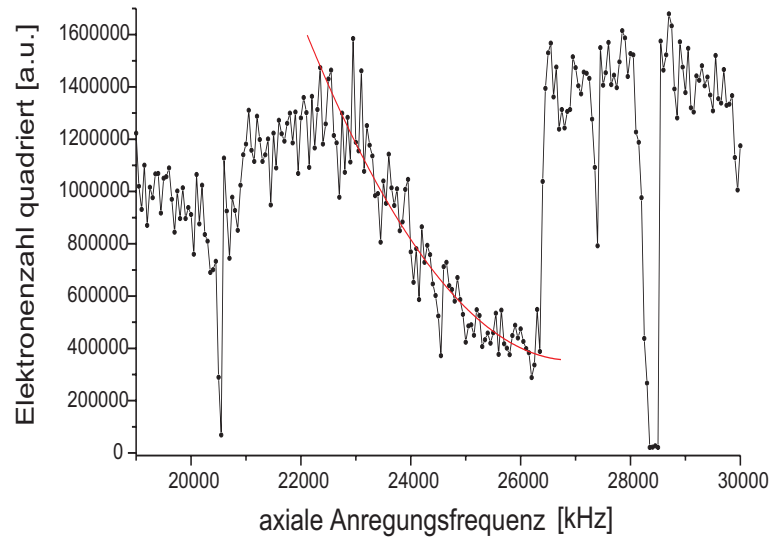
$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon + \frac{1}{4} h \omega_z \cos(2\varphi) + \frac{3}{8} \lambda_4 \omega_z A^2 + \frac{5}{16} \lambda_6 \omega_z A^4 \quad (8.35)$$

Die Lösungen für die Bewegung im stationären Zustand ergeben sich, wenn in den Differentialgleichungen die Zeitableitungen verschwinden. Wir erhalten somit:

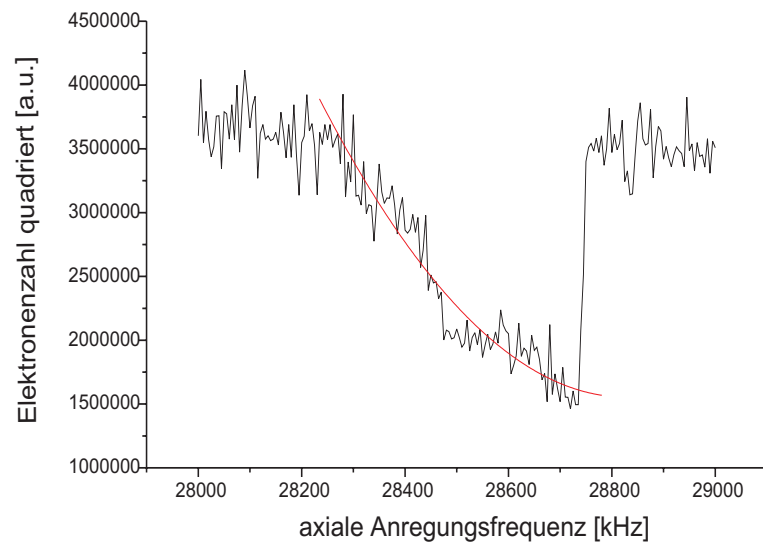
$$\sin(2\varphi) = \frac{k_{thr}}{k} \quad (8.36)$$

$$\frac{5\lambda_6 \omega_z A^4}{16} + \frac{3\lambda_4 \omega_z A^2}{8} + (\varepsilon_+ - \varepsilon) = 0 \quad (8.37)$$

wobei die Beziehung  $\cos(2\varphi) = \sqrt{1 - \sin^2(2\varphi)}$  und Gl. (8.32) verwendet wurden. Aus Gl. (8.36) lässt sich die Bistabilität der Phase ablesen, da man wegen Gl. (8.28) zwei Lösungen erhält, die sich gerade um  $180^\circ$  unterscheiden. Weiterhin kann man aus Gl. (8.37) die Koeffizienten  $\lambda_4$  und  $\lambda_6$  bzw.  $C_4$  und  $C_6$  gewinnen, wenn man an die parametrische Linienform der



**Abb. 8.8:** Die  $2\omega_z$ -Resonanz mit Kollektivbewegung dargestellt mit quadrierter relativer Elektronenzahl.



**Abb. 8.9:** Höher aufgelöste Darstellung der Kollektivbewegung mit quadrierter relativer Elektronenzahl.

$2\omega_z$ -Resonanzen eine parabelförmige Funktion ‚anfittet‘. Man erhält aus den Graphen in den Abb. 8.8 und 8.9 für die individuelle Resonanz

$$\begin{aligned} C_4 &\approx -9,8 \cdot 10^{-3} \\ C_6 &\approx 3,8 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

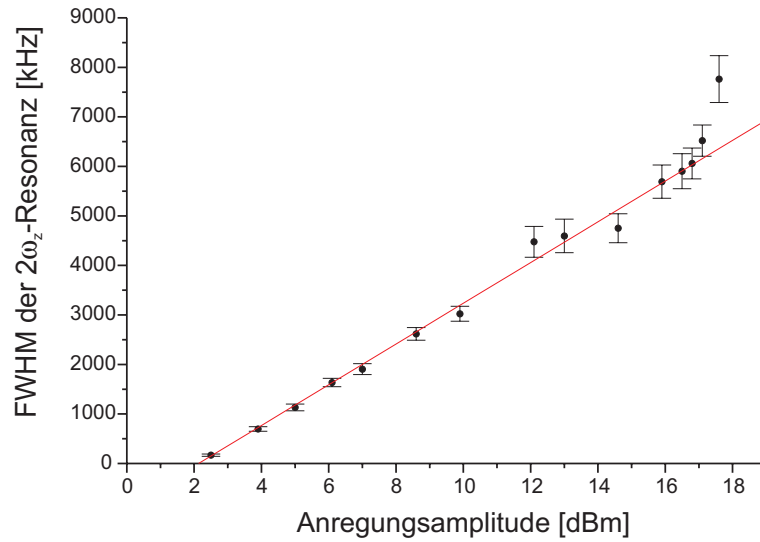
und für die kollektive Resonanz

$$\begin{aligned} C_4 &\approx -7,5 \cdot 10^{-2} \\ C_6 &\approx 2,8 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

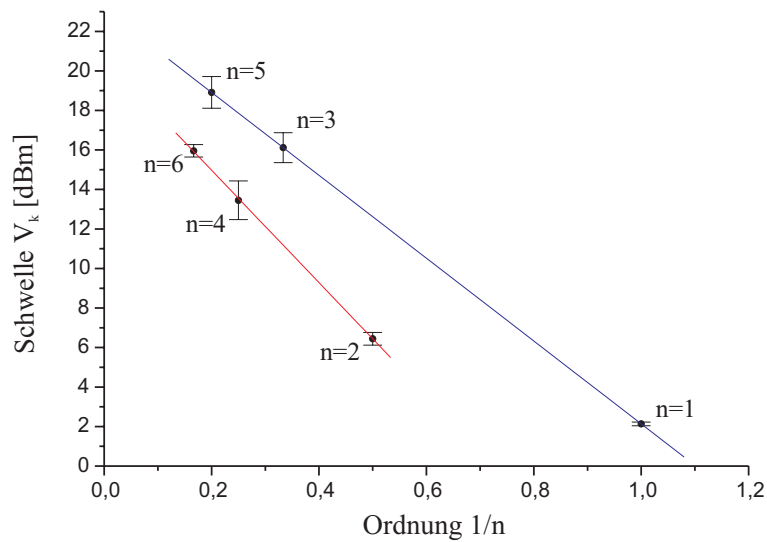
Es sei bemerkt, dass die Werte im Falle der kollektiven Resonanz um eine Größenordnung größer sind als diejenigen der individuellen Resonanz. Dies lässt sich vermutlich darauf zurückführen, dass sich bei der stochastischen inkohärenten Bewegung der Elektronenwolke die axialsymmetrischen Störungen, die die Elektronen spüren, überlagert sind vom Coulombpotential der nächsten Nachbarn. Die Elektronen sind besser abgeschirmt gegen die Störung, zumal diese Störung teilweise durch das Potential, das aus der Coulomb-Wechselwirkung erwächst, kompensiert werden kann. Bewegen sich die Teilchen jedoch als ein kollektives Ensemble, so spürt das „kollektive Ion“ die Abweichungen des Speicherpotentials vom idealen Quadrupolpotential deutlicher. Außerdem ist die Coulomb-Wechselwirkung nicht mehr vorhanden.

### 8.2.3 Schwellenverhalten bei Anregung der $2\omega_z$ -Resonanz und der Subharmonischen

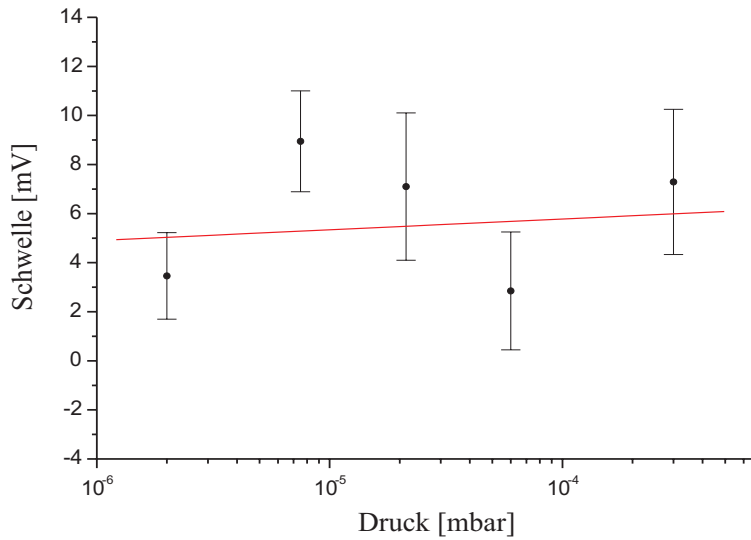
Unter Zuhilfenahme des Anregungsspektrums in Abb. 8.3, das die Information über die Position der einzelnen Subharmonischen im Frequenzspektrum lieferte, wurde außer für  $n = 1$  das Schwellenverhalten für die Ordnungen  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  untersucht und ähnliche Kurven, wie in Abb. 8.10 dargestellt, aufgenommen. Unter der Annahme eines in erster Ordnung linearen Zusammenhangs zwischen Amplitude der Anregungsfrequenz und Halbwertsbreite der gebrochenen Resonanzen (wobei die Anregungsamplitude logarithmisch aufgetragen ist, d. h. man hat eine halb-logarithmische Darstellung), wurde ein linearer Fit durch die Messpunkte gelegt. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Abszissenachse (d. h. bei Extrapolation auf verschwindende Halbwertsbreite) bildet den sogenannten Schwellenwert, oberhalb welchem die Resonanz im Anregungsspektrum sichtbar wird. Trägt man anschließend den reziproken Wert der Ordnung  $n$  gegen den logarithmischen Wert der Schwelle  $V_k$  auf, so erhält man die in Abb. 8.11 dargestellte Graphik. Man kann somit für die Resonanzen gerader und ungerader Ordnung folgenden funktionalen Zusammenhang angeben, der in Landau und Lifschitz



**Abb. 8.10:** Graphische Darstellung der Halbwertsbreite der  $2\omega_z$ -Resonanz in Abhängigkeit von der Anregungsamplitude. Der Schnittpunkt der durchgelegten Gerade mit der x-Achse ergibt den Schwellenwert, ab dem die Resonanz im Spektrum sichtbar wird.



**Abb. 8.11:** Graphische Darstellung der Abhängigkeit der Schwelle von der Ordnung der Resonanzen. Man sieht, dass eine Differenzierung nach gerader und ungerader Ordnung vorhanden ist.



**Abb. 8.12:** Graphische Darstellung der Aufnahme der  $2\omega_z$ -Resonanz bei unterschiedlichen Puffergasdrücken. Als Puffergas wurde hierbei  $N_2$  verwendet. Man sieht, dass auch bei einer Variation des Druckes über mehrere Größenordnungen keine signifikante Änderung des Schwellenwertes zu beobachten ist.

[175] ohne Herleitung angeben wird<sup>15</sup>:

$$V_k \propto \gamma^{1/n} \quad (8.38)$$

wobei  $\gamma$  eine konstante lineare Dämpfung des Systems bezeichnet. Beide Kurven reproduzieren sehr gut den Zusammenhang in (8.38). Was jedoch verwunderlich ist, ist die Tatsache, dass die Resonanzen *gerader* und *ungerader* Ordnung unterschiedliche Schwellenwerte besitzen, wobei diese Werte um einige Größenordnungen voneinander differieren. Dieses Phänomen wurde bereits in einer Paulfalle an gespeicherten  $N_2^+$ - und  $H_2^+$ -Molekülen beobachtet [239]. Eine Erklärung für dieses, wie es bezeichnet wurde, *even-odd-staggering* konnte bisher nicht gefunden werden. Auch Erklärungsversuche über die Natur bzw. die Ursache des Dämpfungsmechanismus' blieben weitestgehend unvollständig und ließen noch Fragen offen. Alheit et al. schlugen als mögliche Erklärung für die Dämpfung des Systems die Kollision der gespeicherten Teilchen mit dem Restgas vor [4]. Jedoch zeigt sich im Falle von gespeicherten Elektronen keine signifikante Abhängigkeit des Schwellenwertes vom Puffergasdruck (siehe Abb. 8.12). Hierzu wurde  $N_2$  über ein vorhandenes Dosierventil in die Vakuumapparatur eingelassen und der Druck über zwei Größenordnungen variiert. Somit fallen die dissipativen Stoßprozesse mit Stickstoffmolekülen als Erklärung für die Dämpfung der axialen

<sup>15</sup>Eine Herleitung mit Hilfe der asymptotischen Näherung für kleine Werte des charakteristischen Parameters  $q$  findet sich bei Bogoljubow [27].

Elektronenbewegung aus. Die Ursache der Dämpfung muss somit in der Bewegung der Elektronen selber liegen, die im abgeschlossenen System der Penningfalle mit dem an den Endkappen angeschlossenen Nachweisschwingkreis wechselwirken. Die Elektronen, die in axialer Richtung eine oszillatorische Bewegung vollführen, induzieren auf beide Endkappen alternierend Spiegel Ladungen [90, 43]. Diese erzeugen ihrerseits einen Wechselstrom  $I^{16}$ , der über einen im Nachweisschwingkreis vorhandenen Widerstand  $R$  abfließt. Somit wird eine Spannung  $U_I = R \cdot I$  zwischen Kalotten und Ringelektrode induziert, deren Potential im Fallenzentrum ein axiales elektrisches Feld der Größe

$$\vec{E}_I = \kappa \frac{I \cdot R}{2z_0} \hat{e}_z \quad (8.39)$$

erzeugt, wobei  $2z_0$  den Abstand der beiden Endkappen darstellt und  $\kappa$  eine dimensionslose Konstante ist. Diese Konstante berücksichtigt die Abweichung der Endelektroden von zwei planparallelen Platten und die Anwesenheit der Ringelektrode. Würden sich die Elektronen in einem Plattenkondensator befinden, so wäre  $\kappa = 1$ . Das elektrische Feld in (8.39) impliziert wiederum eine axiale Kraft, die der Bewegung der gespeicherten Teilchen entgegenwirkt:

$$\vec{F}_I = -\kappa \frac{e \cdot I \cdot R}{2z_0} \hat{e}_z \quad (8.40)$$

Somit verringert sich die Energie der Elektronen mit einer Rate von  $\dot{z} \cdot F_I$ , d. h. die Bewegung wird gedämpft. Diese Energie wird über den Widerstand  $R$  dissipiert:

$$-\dot{z} \cdot F_I = I^2 \cdot R. \quad (8.41)$$

Einsetzen der Kraft aus (8.40) in (8.41) liefert:

$$I = \kappa \frac{e}{2z_0} \cdot \dot{z} \quad (8.42)$$

Man erhält also einen induzierten Strom, der proportional zur Geschwindigkeit der Elektronen ist. Somit ist die in (8.40) ausgedrückte Kraft dissipativ. Definiert man als neue Größe die axiale Dämpfungskonstante  $\gamma_z$  [43]:

$$\gamma_z = \left( \frac{\kappa e}{2z_0} \right)^2 \frac{R}{m} \quad (8.43)$$

lässt sich Glg. (8.40) umschreiben zu:

$$\vec{F}_I = -m\gamma_z \dot{z} \hat{e}_z \quad (8.44)$$

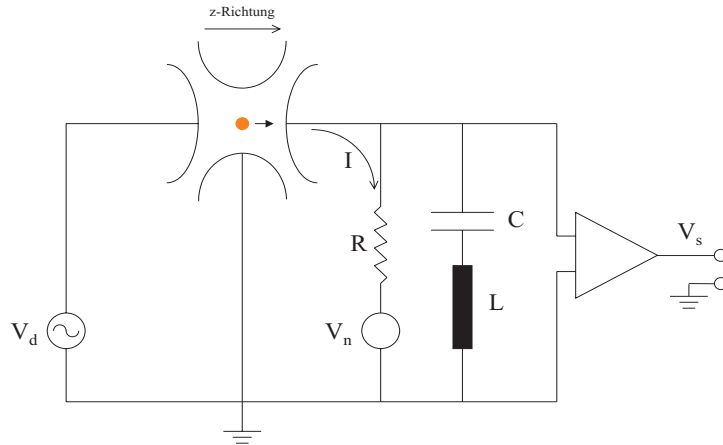
---

<sup>16</sup>Bereits Ende der 40er Jahre fanden Shockley (J. appl. Phys. **9**, 635 (1938)) und Ramo (Proc. I. R. E. **27**, 584 (1939)) heraus, dass bewegte Ladungen Ströme induzieren. Eine alternative Herleitung dieser in der sog. Shockley-Ramo-Gleichung implizierten Beobachtung, basierend auf Energiebetrachtungen, findet sich bei Sirkis [273].

Abschließend soll noch die parametrische Anregung in dieser Betrachtung berücksichtigt werden. In Abb. 8.13 ist dieser Effekt durch  $V_d$  dargestellt. Ausgangspunkt ist die gedämpfte axiale Bewegungsgleichung der Elektronen:

$$m \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \gamma_z \frac{d}{dt} + \omega_z^2 \right\} z(t) = F(t) \quad (8.45)$$

$F(t)$  stellt die nicht-dissipative Kraft dar, die auf die Elektronen einwirkt,



**Abb. 8.13:** Elektronischer Schaltkreis zur Veranschaulichung des Dämpfungsmechanismus' bei der Elektronenbewegung verursacht durch Spiegelladung.

und lässt sich analog zur Glg. (8.40) schreiben als:

$$F(t) = \frac{\kappa e}{2z_0} (V_d - V_n) \quad (8.46)$$

Weiterhin ist das Signal, das man als demoduliertes Spannungssignal zwischen Ring und Kalotten detektiert, gegeben durch:

$$V_s = V_n + R \cdot I = V_n + \frac{e\kappa}{2z_0} R \cdot \dot{z} \quad (8.47)$$

Aus (8.46) folgt dann:

$$F(t) = \frac{e\kappa}{2z_0} (V_d - V_s - \frac{e\kappa}{2z_0} R \cdot \dot{z}) \quad (8.48)$$

Man ist nun daran interessiert, wie das Signal, die sog. Antwortfunktion, im Frequenzbereich aussieht. Hierzu bildet man, wie es in der Regelungstechnik üblich ist, die Fouriertransformierte der Differentialgleichung in (8.45). Man erhält somit für die Lösung im Frequenzbereich:

$$z(\omega) = \left( \frac{e\kappa}{2z_0 m} \right) \frac{V_d(\omega) - V_n(\omega)}{\omega_z^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_z} \quad (8.49)$$

bzw. für das demodulierte Spannungssignal:

$$V_s(\omega) = \frac{(\omega_z^2 - \omega^2)V_n(\omega) - i\omega\gamma_z V_d(\omega)}{\omega_z^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_z} \quad (8.50)$$

Bei Variation der parametrischen Anregung  $V_d(\omega)$  ergibt sich eine Lorentz-ähnliche Antwortfunktion, deren Halbwertsbreite gleich der axialen Dämpfungskonstante ist. Außerdem erkennt man, dass im Resonanzfall  $\omega = \omega_z$  das Rauschen im Nachweissignal reduziert wird.<sup>17</sup> Eine detailliertere Beschreibung dieses axialen Rauschens, dessen Ursache das thermische Nyquist-Johnson Rauschen  $V_n$  des ohmschen Widerstandes  $R$  ist, findet sich im 'Geonium-paper' von Brown und Gabrielse [43]. Für eine Vertiefung dieses Sachverhaltes wird somit auf die eben erwähnte Veröffentlichung verwiesen.

### 8.2.4 Theoretische Erklärung des Schwelleneffektes

Die Mathiesche Differentialgleichung (MDG) wurde von E. Mathieu eingeführt, als besagter die Schwingungen einer elliptisch geformten Membrane untersuchte [208]. Die Standardform ist durch folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (8.51)$$

Seit ihrer Veröffentlichung im Jahre 1868 ist die MDG sehr ausführlich beschrieben und analysiert worden. Standardwerke, die sich ausschließlich mit der MDG befassen sind die Bücher von McLachlan [212] und Meixner/Schäfer [213]. Als Spezialfall der Hill'schen Differentialgleichung<sup>18</sup> findet die MDG in vielen sowohl mechanischen als auch elektrischen Beispielen ihre Verwendung [213]. Die Anwendung wird jedoch häufig dadurch erschwert, dass die Lösungen durch mathematische Näherungsverfahren bestimmt werden müssen, die dann nur für bestimmte Bereiche der charakteristischen Parameter  $a$  und  $q$  gültig sind. Dieses Manko bemerkten bereits Whittaker [325] („their actual analytical determination presents great difficulties“) und Sips [272] („les fonctions de Mathieu restent d'un emploi difficile, principalement par suite de l'impossibilité de les représenter analytiquement d'une manière simple et maniable“).

Im Folgenden wird kurz die Lösung von Gl. (8.51) für kleine Werte des Parameters  $q$  dargestellt. Für den Wert  $q = 0$  und  $a = r^2$  ergeben sich die

<sup>17</sup>Dieser „short-out,, oder „noise-shorting“, wie Wineland und Dehmelt [328] diesen Effekt nannten, lässt sich erklären, wenn man die axiale Bewegung der Teilchen in Analogie zu einem seriellen Schwingkreis mit ohmschem Widerstand betrachtet, der die beiden Endkappen verbindet. Im Resonanzfall heben sich die Kapazität und die Induktivität dieses Schwingkreises auf und die Endkappen werden sozusagen kurzgeschlossen.

<sup>18</sup>G. W. Hill „On the part of motion of the lunar perigee, which is a function of the mean of the sun and the moon“, Acta Math. **8**, 1 (1886). Eine ausführliche Einführung in die Hill'sche Differentialgleichung findet sich bei Whittaker/Watson [325] und McLachlan [212].



trivialen Lösungen  $y_1 = \cos(rz)$  und  $y_2 = \sin(rz)$ . Aus diesem Grund ist es sinnvoll für Gl. (8.51) folgenden Ansatz zu wählen:

$$ce_r(z, q) = \cos(rz) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(r)}(z)q^k \quad \textit{kosinus-elliptisch} \quad (8.52)$$

$$se_r(z, q) = \sin(rz) + \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{(r)}(z)q^k \quad \textit{sinus-elliptisch} \quad (8.53)$$

wobei  $c_0 = \cos(rz)$  und  $s_0 = \sin(rz)$  festgesetzt werden mit  $r \in \mathbb{R}_0^+$ . Die charakteristischen Werte  $a$  (für  $ce_r$ ) und  $b$  (für  $se_r$ ) kann man somit auch als Reihe beschreiben:

$$a_r \equiv a_r(ce_r) = r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(r)} q^k \quad (8.54)$$

$$b_r \equiv b_r(se_r) = r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(r)} q^k \quad (8.55)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_k^{(r)}$  und  $\beta_k^{(r)}$  ergeben sich aus der Forderung, dass die elliptischen Funktionen  $ce_r(z, q)$  und  $se_r(z, q)$  periodisch in  $z$  sein sollen. Da die Mathieuschen Funktionen darüberhinaus eine  $\pi$ - und  $2\pi$ -Periodizität aufweisen, muss  $r$  auf die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  beschränkt werden. Setzt man die Gleichungen (8.52), (8.53) und (8.54), (8.55) in die MDG (8.51) ein, so erhält man Differentialgleichungen für die Koeffizienten  $c_k$  und  $s_k$ :

$$\frac{d^2 c_k}{dz^2} + r^2 c_k - 2 \cos(2z) c_{k-1} + \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{k-l} c_l = 0 \quad (8.56)$$

$$\frac{d^2 s_k}{dz^2} + r^2 s_k - 2 \cos(2z) s_{k-1} + \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{k-l} s_l = 0 \quad (8.57)$$

wobei  $k \geq 1$  gilt. O. B. d. A. kann man folgenden Lösungsansatz für (8.56) machen [88]:

$$c_k = \sum_{i=-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} A_{\xi_i}^k \cos(r + \xi_i)z \quad (8.58)$$

mit  $\xi_i \equiv 4i - 2k + 4\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ , wobei  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \equiv \max\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda \leq \frac{k}{2}\}$  die nächstkleinere ganze Zahl zu  $\frac{k}{2}$  ist. Geht man mit diesem Ansatz in (8.56), so ergibt sich

durch Koeffizientenvergleich für  $A_{\xi_i}^k$ :

$$A_{2i}^k = \begin{cases} \frac{1}{4i(r+1)} \left( -A_{2i+2}^{k-1} - A_{2i-2}^{k-1} + \sum_{j=1}^{\frac{k+1-|r+i|}{2}} \alpha_{2j-1} A_{2i-2r}^{k-2j+1} + \sum_{j=1}^{\frac{k-|i|}{2}} \alpha_{2j} A_{2i}^{k-2j} \right), & r \text{ gerade} \\ \frac{1}{4i(r+1)} \left( -A_{2i+2}^{k-1} - A_{2i-2}^{k-1} + \sum_{j=1}^{\frac{k-|i|}{2}} \alpha_{2j} A_{2i}^{k-2j} \right), & r \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8.59)$$

wobei  $|i| \leq k$  und  $k \geq 1$  ist. Für  $|i| > k$  wird  $A_{2i}^k = 0$  gesetzt, da in diesem Fall die Koeffizienten außerhalb des Indexbereiches von (8.58) liegen. Für den speziellen Fall  $i = k$  bzw.  $i = -k$  erhält man folgende nicht-rekursive Formeln:

$$A_{2k}^k = \frac{(-1)^k}{4^k k!} \cdot \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+k)} \quad (8.60)$$

$$A_{-2k}^k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{4^k k!} \cdot \frac{\Gamma(1-r)}{\Gamma(1-r+k)} & k < r \wedge r \text{ ungerade} \\ 0 & k > r \wedge r \text{ gerade} \end{cases} \quad (8.61)$$

Da der Nenner in (8.59) für  $i = 0$  und  $i = -r$  verschwindet, können die Koeffizienten  $A_0^k$  und  $A_{-2r}^k$  frei gewählt werden<sup>19</sup>. Durch analoge Rechnung für  $s_k$  mit dem Ansatz:

$$s_k = \sum_{i=-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} B_{\xi_i}^k \sin(r + \xi_i)z \quad (8.62)$$

erhält man entsprechende rekursive Gleichungen für die Koeffizienten  $B_{\xi_i}^k$ :

$$B_{2i}^k = \begin{cases} \frac{1}{4i(r+1)} \left( -B_{2i+2}^{k-1} - B_{2i-2}^{k-1} + \sum_{j=1}^{\frac{k+1-|r+i|}{2}} \beta_{2j-1} B_{2i-2r}^{k-2j+1} + \sum_{j=1}^{\frac{k-|i|}{2}} \beta_{2j} B_{2i}^{k-2j} \right), & r \text{ gerade} \\ \frac{1}{4i(r+1)} \left( -B_{2i+2}^{k-1} - B_{2i-2}^{k-1} + \sum_{j=1}^{\frac{k-|i|}{2}} \beta_{2j} B_{2i}^{k-2j} \right), & r \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8.63)$$

wobei  $B_{2i}^k = 0$  für  $|i| > k$  ist,  $B_0^k = B_{-2r}^k = 0$  und  $B_0^0 = 1$ . Man sieht, dass für  $i = k$   $B_{2i}^k$  gleich  $A_{2i}^k$  ist. Um eine Lösung der DGL in (8.56) und (8.57) angeben zu können, müssen noch die Werte für  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  bestimmt werden. Hierzu setzt man (8.58) bzw. (8.62) in die Gleichungen (8.56) bzw. (8.57)

<sup>19</sup>McLachlan [212] benutzt z. B. die Konvention  $A_0^k = A_{-2r}^k = 0$ .

ein. Unter der Voraussetzung, dass die Lösungen der MDG periodisch sein müssen, erhält man für ungerade und gerade  $\alpha_k$ :

$$\alpha_{2j-1} = \begin{cases} A_{2-2r}^{2j-2} + A_{-2-2r}^{2j-2}, & r \text{ ungerade} \\ 0, & r \text{ gerade} \end{cases} \quad (8.64)$$

$$\alpha_{2j} = \begin{cases} A_2^{2j-1} + A_{-2}^{2j-1} + A_{2-2r}^{2j-1} + A_{-2-2r}^{2j-1}, & r \neq 0 \text{ gerade} \\ A_2^{2j-1} + A_{-2}^{2j-1}, & r \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8.65)$$

und entsprechend für ungerade und gerade  $\beta_k$ :

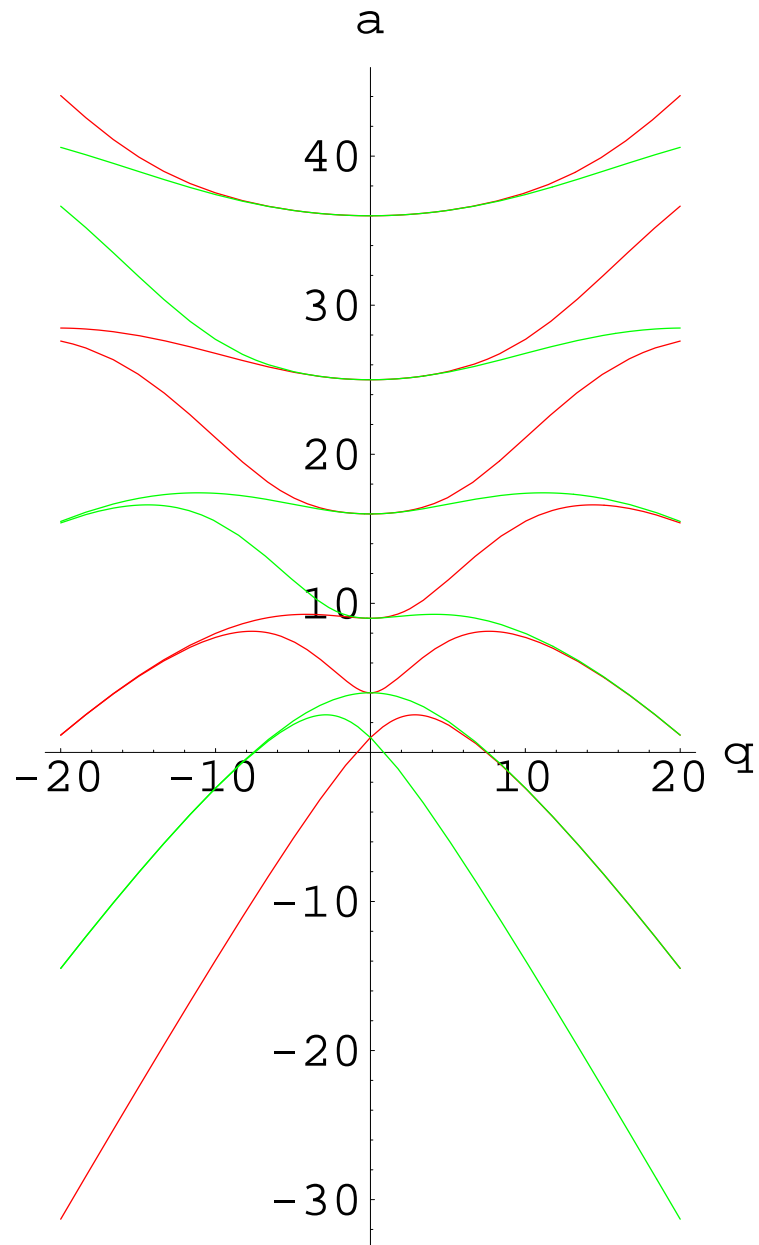
$$\beta_{2j-1} = \begin{cases} -B_{2-2r}^{2j-2} - B_{-2-2r}^{2j-2}, & r \text{ ungerade} \\ 0, & r \text{ gerade} \end{cases} \quad (8.66)$$

$$\beta_{2j} = \begin{cases} B_2^{2j-1} + B_{-2}^{2j-1} - B_{2-2r}^{2j-1} - B_{-2-2r}^{2j-1}, & r \neq 0 \text{ gerade} \\ B_2^{2j-1} + B_{-2}^{2j-1}, & r \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8.67)$$

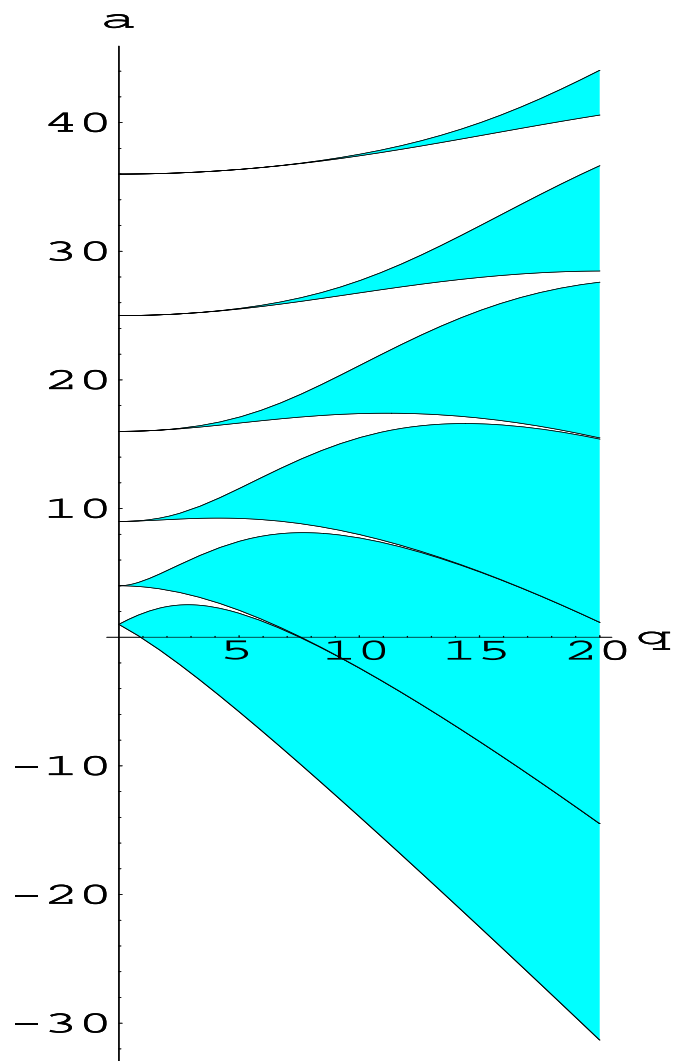
Man sieht an den Lösungen für  $\alpha_k$  und  $\beta_k$ , dass für  $r$  ungerade  $a_r(-q) = b_r(q)$  ist. Weiterhin ist für  $r$  gerade  $a_r(-q) = a_r(q)$  und  $b_r(-q) = b_r(q)$ . Diese Beziehungen sind wichtig bei der graphischen Darstellung der charakteristischen Kurven.

Zur Behandlung von (8.51) für große Werte von  $q$  gibt es zwei Entwicklungsverfahren, die sich bewährt haben. Das eine Verfahren basiert auf der asymptotischen Entwicklung von trigonometrischen Funktionen und das andere Verfahren auf der asymptotischen Entwicklung von parabolischen Zylinderfunktionen. Um die Geduld des Lesers nicht unnötig zu strapazieren wird für diese Berechnungen auf die ausführlichen Beschreibungen in [88, 212] verwiesen.

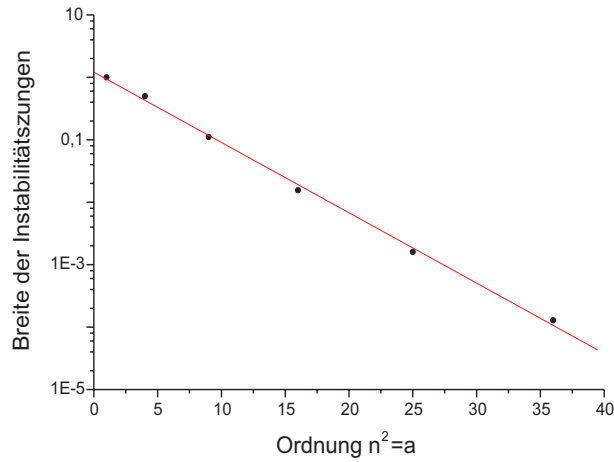
Man erhält das sog. *Struttsche Diagramm* für die charakteristischen Kurven  $a_r(q) \equiv a_r(ce_r(z, q))$  und  $b_r(q) \equiv b_r(se_r(z, q))$ , das in Abb. 8.14 graphisch dargestellt ist. Die grünen Kurven beziehen sich hierbei auf  $b_r(q)$  und die roten Kurven auf  $a_r(q)$ . Physikalisch sinnvoll sind nur positive  $q$ -Werte. Die  $(a, q)$ -Ebene weist weiterhin stabile bzw. instabile Bereiche auf, d. h. Bereiche, in denen die Lösungen der MDG beschränkt und periodisch bzw. divergent und unperiodisch sind. Dies hängt vom charakteristischen Exponenten ab, der sich aus dem Floquetschen Theorem [213] ergibt. In Abb. 8.15 sind die instabilen Bereiche mit blauer Farbe hervorgehoben. In diesen Zonen ist der charakteristische Exponent  $\mu \in \mathbb{C}$  und die Lösung der MDG divergiert gegen  $\pm\infty$  für  $z \rightarrow +\infty$ . Mit Hilfe der in Abramowitz [1] angegebenen



**Abb. 8.14:** Strutt-Diagramm für positive und negative  $q$ -Werte. Die grünen Kurven beziehen sich auf  $b_r(q)$  und die roten Kurven auf  $a_r(q)$



**Abb. 8.15:** Strutt-Diagramm für positive  $q$ -Werte. Die blaugefärbten Bereiche repräsentieren instabile Bereiche, d. h. für diese Wertepaare  $(a, q)$  besitzt die MDG divergente unperiodische Lösungen. Der zugehörige charakteristische Exponent  $\mu$  ist komplex.



**Abb. 8.16:** Relative Breite der Instabilitätszungen bis zur Ordnung  $n = 6$  im Falle der ungedämpften MDG.

Beziehung

$$a_r - b_r = \mathcal{O}\left(\frac{q^r}{r^r - 1}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

kann man die relative Änderungen der Instabilitätszungen mit zunehmendem  $r$  bestimmen. Die Abb. 8.16 gibt dieses Ergebnis graphisch wieder.

Zur theoretischen Auswertung der in Abschnitt 8.2.3 dargestellten Ergebnisse ist es von großem Interesse zu analysieren, wie sich diese Instabilitätsbereiche unter dem Einfluss einer konstanten Dämpfung verhalten. Diesbezüglich wird die sog. gedämpfte Mathiesche Differentialgleichung betrachtet, die gegenüber (8.51) ein lineares Dämpfungsglied besitzt:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \gamma \frac{dy}{dz} + (a - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (8.68)$$

Mit der einfachen Substitution  $y(z) = e^{-\frac{\gamma}{2}z}u(z)$  lässt sich (8.68) in die Standardform der MDG überführen

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\tilde{a} - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (8.69)$$

mit dem modifizierten Parameter  $\tilde{a} \equiv a - \frac{\gamma^2}{4}$ . Man sieht hieran, dass die Dämpfung zum einen die Anfangsposition der Instabilitätszungen bei  $q = 0$  auf der  $a$ -Achse verschiebt. Zum anderen, wie im Folgenden gezeigt wird, verkleinert die lineare Dämpfung diese Instabilitätsbereiche und zwar derart, dass die Instabilität erst oberhalb bestimmter Schwellenwerte eintritt. Zusätzliche nichtlineare Glieder  $\delta \cdot y^3$  bzw. quadratische Dämpfungsglieder  $\lambda \cdot \dot{y}^2 \text{sgn}(\dot{y})$ , die die Glg. (8.68) erweitern zu

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \delta \cdot y^3 + \lambda \cdot \dot{y}^2 \text{sgn}(\dot{y}) + (a - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (8.70)$$

haben in erster Ordnung keinen Einfluss auf die Begrenzung der Instabilitätsbereiche, wie aus den Arbeiten von Bogoljubow und Mitropolski [27] und Hagedorn [113] hervorgeht. Somit beschränken sich die nachfolgenden Berechnungen auf die DGL in (8.68) bzw. auf die formal ähnliche Standardform in (8.51). Ziel ist es, sog.  $\mu$ -Isokurven im Instabilitätsbereich des Struttischen Diagramms zu bestimmen, d. h. die Menge aller komplexen charakteristischen Exponenten  $\mu$ , die zum gleichen Wert der Dämpfung  $\gamma$  gehören. Eine elegante numerische Methode bietet die Berechnung von  $\mu$  mit Hilfe der Hillschen Determinante. Ausgangspunkt ist eine verallgemeinerte Differentialgleichung, die sog. Hillsche DGL:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left( \theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos 2nz \right) u = 0 \quad (8.71)$$

Die MDG ergibt sich als Spezialfall hieraus mit den expliziten Koeffizienten  $\theta_0 = a$ ,  $\theta_1 = -q$  und  $\theta_n = 0 \forall n \geq 2$ . Die  $\theta_n$  sind i. A. bekannte konstante Größen und es lässt sich zeigen, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$  absolut konvergiert [212]. Wählt man o. B. d. A.  $\theta_{-n} = \theta_n$ , so kann man folgenden Ansatz machen:

$$u(z) = e^{\mu z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2nzi} \quad (8.72)$$

Einsetzen in (8.71) ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mu + 2ni)^2 b_n e^{(\mu+2ni)z} + \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n e^{2niz} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{(\mu+2ni)z} \right) = 0 \quad (8.73)$$

bzw. umgeformt

$$-(i\mu - 2n)^2 b_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m b_{n-m} = 0 \quad \text{für } n = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (8.74)$$

Eliminiert man nun die Koeffizienten  $b_n \neq 0$ , indem man durch  $(\theta_0 - 4n^2)$  dividiert, so erhält man die bekannte Hillsche Determinante

$$\Delta(i\mu) = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \frac{(i\mu+4)^2}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0} & \dots \\ \dots & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(i\mu+2)^2}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0} & \dots \\ \dots & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{(i\mu)^2}{0^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0} & \dots \\ \dots & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(i\mu-2)^2}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dots \\ \dots & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{(i\mu-4)^2}{4^2-\theta_0} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{vmatrix} \quad (8.75)$$







lösen. Für Determinanten bis  $l = 3$  erhält man z. B. die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 1 + \frac{2q^2}{(4-a)a} \\ \Delta_2 &= \frac{2q^2 \left(1 - \frac{q^2}{(4-a)(16-a)}\right)}{(4-a)a} + \left(1 - \frac{q^2}{(4-a)(16-a)}\right)^2 \\ \Delta_3 &= \frac{2q^2 \left(1 - \frac{q^2}{(16-a)(36-a)}\right) \left(1 - \frac{q^2}{(4-a)(16-a)} - \frac{q^2}{(16-a)(36-a)}\right)}{(4-a)a} \\ &\quad + \left(1 - \frac{q^2}{(4-a)(16-a)} - \frac{q^2}{(16-a)(36-a)}\right)^2\end{aligned}$$

Bevor man nun die Isokurven  $f(a, q, l) = \Delta_l \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\right)$  ausrechnen kann, muss der Ausdruck  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}i\mu\right)$  bestimmt werden. Hierzu ist für den charakteristischen Exponenten der Ansatz  $\mu = (\gamma + i \cdot n)$  sinnvoll, wobei  $\gamma$  die Dämpfung und  $n \in \mathbb{N}$  sind. Nach Anwendung des trigonometrischen Additionstheorems für die sin-Funktion erhält man:

$$\sin\left(i\frac{\pi}{2}(\gamma + i \cdot n)\right) = i \sinh\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \cosh\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (8.86)$$

An dieser Stelle muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Für den Fall  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , *gerade* ergibt sich:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) &= \cos(\pi m) = (-1)^m \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) &= \sin(\pi m) = 0,\end{aligned}$$

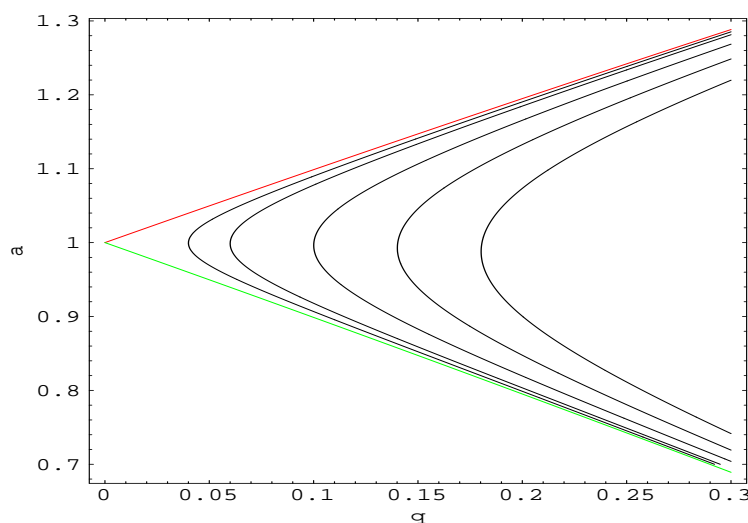
sodass

$$\Delta_l \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\right) = -\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) \quad (8.87)$$

folgt. Für den Fall  $n = 2m + 1$  *ungerade* erhält man durch analoge Rechnung:

$$\Delta_l \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\right) = \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) \quad (8.88)$$

Bei Vorgabe eines Wertes für die Dämpfung  $\gamma$  lässt sich eine eindeutige Kurve  $f(a, q)$  für eine beliebige Genauigkeit  $l$  der Hill-Determinante berechnen. Die Abb. 8.17 bis 8.22 zeigen exemplarisch solche Isokurven für fünf unterschiedliche Dämpfungswerte für Ordnungen der charakteristischen Kurven  $n = 1, \dots, 6$ , wobei  $n^2 = a$  gilt mit  $a$  dem charakteristischen Wert des Strutt-Diagramms. Die Dämpfungswerte lagen im Falle der dargestellten Graphen zwischen  $\gamma = 0.02$  und  $\gamma = 0.09$ . Durch Bildung der Tangente am Wendepunkt der Isokurven zu gleichem Dämpfungswert kann man den zugehörigen Schwellenwert bestimmen. Die Abb. 8.23 und 8.24 zeigen das Ergebnis der Berechnungen für unterschiedliche Werte der Dämpfung, wobei der quantitativ bestimmte Schwellenwert auf einer logarithmischen Skala

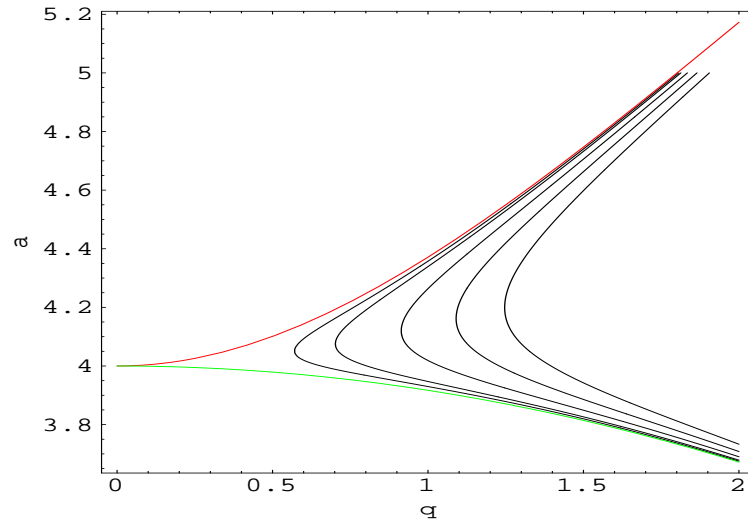


**Abb. 8.17:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGL für den zu  $n = 1$  gehörigen Instabilitätsbereich. Die fünf eingezeichneten Isokurven, die auch in den Abbildungen 8.18 bis 8.22 zu sehen sind, beziehen sich, nach aufsteigenden  $q$ -Werten geordnet, auf folgende Werte für die Dämpfung: 0.02, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09.

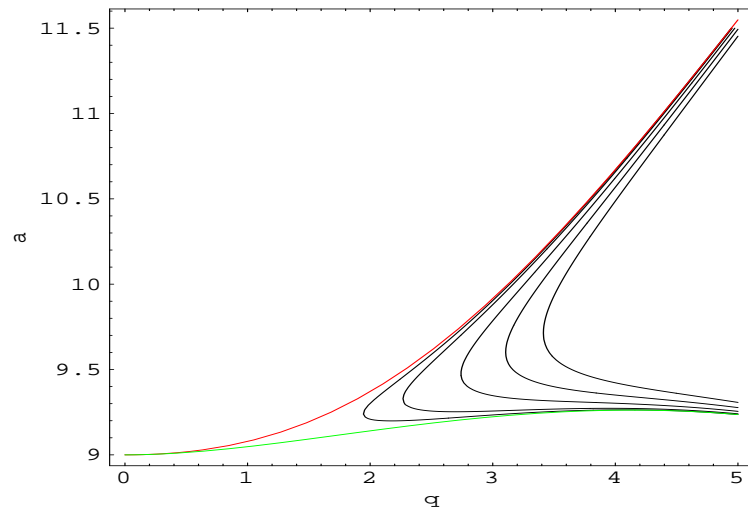
aufgetragen wurde. Man sieht dass bei kleinen Dämpfungen (in Abb. 8.23 ist  $\gamma = 10^{-4}$ ) ein even-odd-staggering auftaucht, wie es auch experimentell bereits beobachtet wurde. Erhöht man den Dämpfungswert, so erhöhen sich die Schwellenwerte und die Kurven zu gerader und ungerader Ordnung verschmelzen zu einer exponentiell abfallenden Kurve (siehe Abb. 8.24). Dies kann man in gewisser Weise auch intuitiv einsehen, wenn man bedenkt, dass für größere Dämpfungen die  $\mu$ -Isokurven immer weiter nach außen zu größeren  $q$ -Werten gedrängt werden. In diesem Bereich haben die Kurven der Stabilitätsgrenzen der ungedämpften MDG in etwa die gleiche Steigung, d. h. die individuelle Form der Instabilitätszungen, wie man sie bei kleinen  $q$ -Werten beobachtet, verschwindet immer mehr. Collings und Douglas [58] haben ähnliche Untersuchungen an Ionen in einer linearen Paulfalle unternommen. Sie beobachteten ebenfalls das Schwellenverhalten sahen aber nicht das even-odd-staggering. Vermutlich weil die Ionen in der Paulfalle stärker gedämpft waren, sprich das schwingungsfähige System eine höhere Dämpfung besaß.

Vergleicht man die Simulationen mit den experimentell bestimmten Daten, die in Abb. 8.11 zu sehen sind, so stellt man als Erstes fest, dass die simulierten Werte nicht auf einer Geraden liegen. Dies bedeutet, dass der Zusammenhang in (8.38) nur als eine erste Näherung betrachtet werden muss.

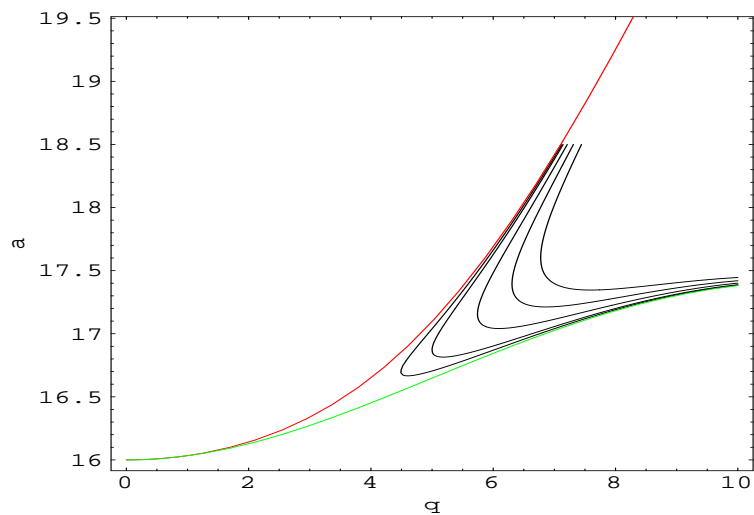
Die Berechnungen wurden unter der einfachsten Annahme einer konstanten linearen Dämpfung als dissipative Störung durchgeführt. Diese Annahme ist zwar in erster Ordnung gerechtfertigt. Da man es mit einer realen Falle



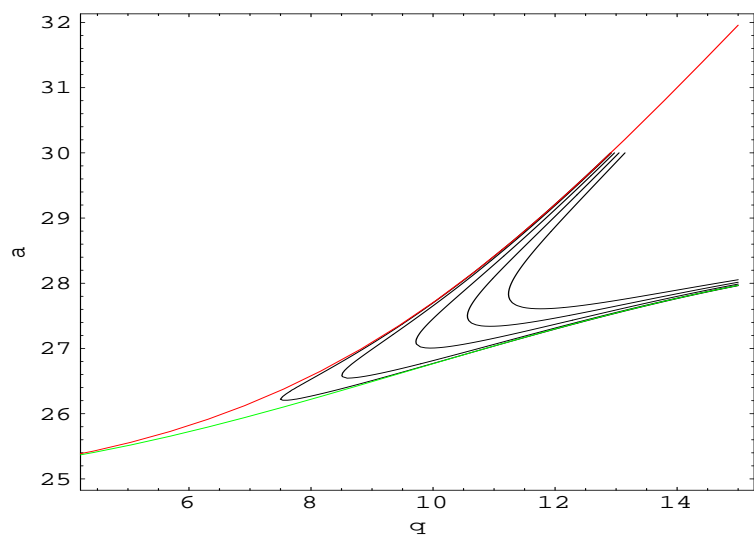
**Abb. 8.18:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGl für den zu  $n = 2$  gehörigen Instabilitätsbereich.



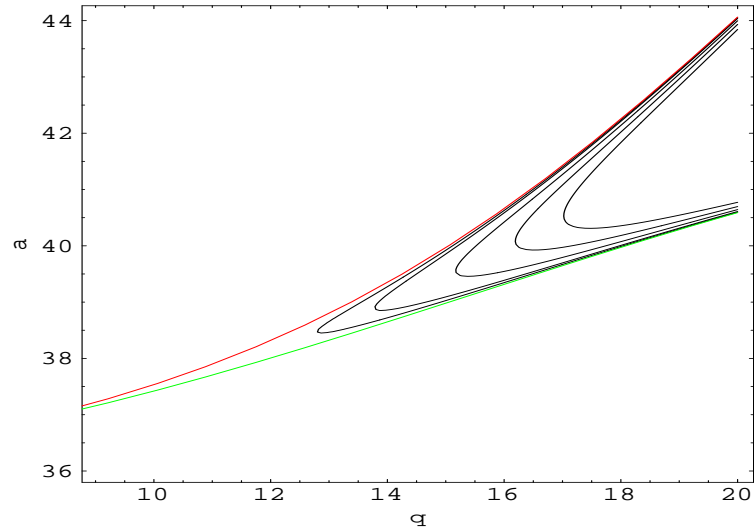
**Abb. 8.19:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGl für den zu  $n = 3$  gehörigen Instabilitätsbereich.



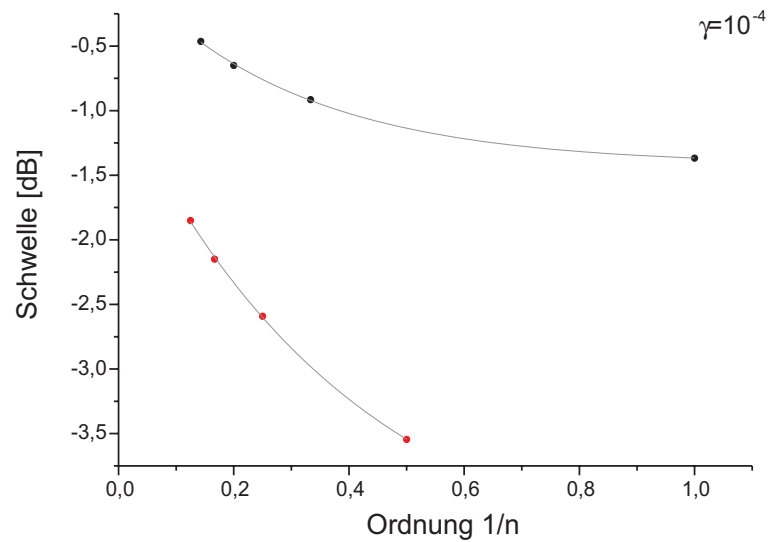
**Abb. 8.20:** Isokurven der gedämpften Mathieschen DGl für den zu  $n = 4$  gehörigen Instabilitätsbereich.



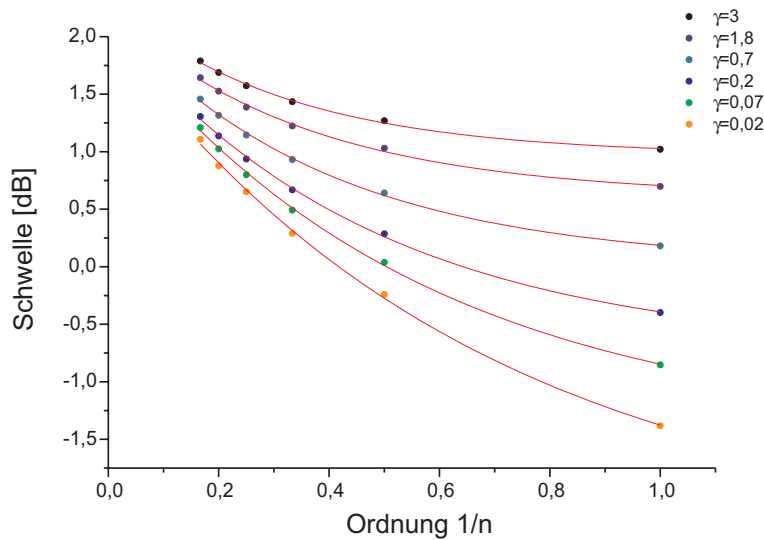
**Abb. 8.21:** Isokurven der gedämpften Mathieschen DGl für den zu  $n = 5$  gehörigen Instabilitätsbereich.



**Abb. 8.22:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGI für den zu  $n = 6$  gehörigen Instabilitätsbereich.



**Abb. 8.23:** Theoretisch berechnetes Schwellenverhalten für  $\gamma = 10^{-4}$ . Die  $y$ -Achse ist logarithmisch. Aufgetragen sind die Ordnungen  $n = 1$  bis  $n = 8$ .



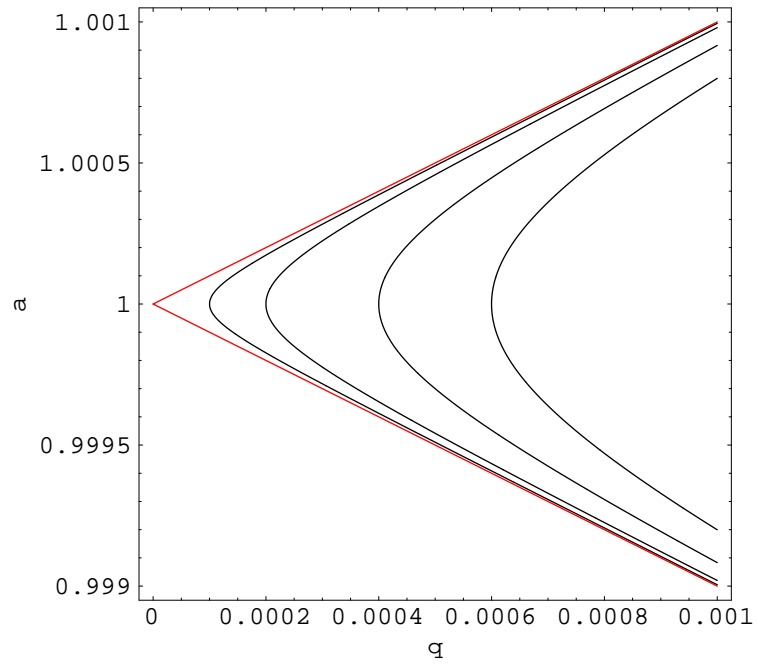
**Abb. 8.24:** Theoretisch berechnetes Schwellenverhalten für unterschiedliche Dämpfungen  $\gamma = 0.02$  bis  $\gamma = 3$ . Die  $y$ -Achse ist logarithmisch. Aufgetragen sind die Ordnungen  $n = 1$  bis  $n = 6$ .

zu tun hat, sind nichtlineare Glieder und quadratische Dämpfungsglieder bei einer realistischeren Betrachtung des schwingungsfähigen Systems ebenfalls zu berücksichtigen.

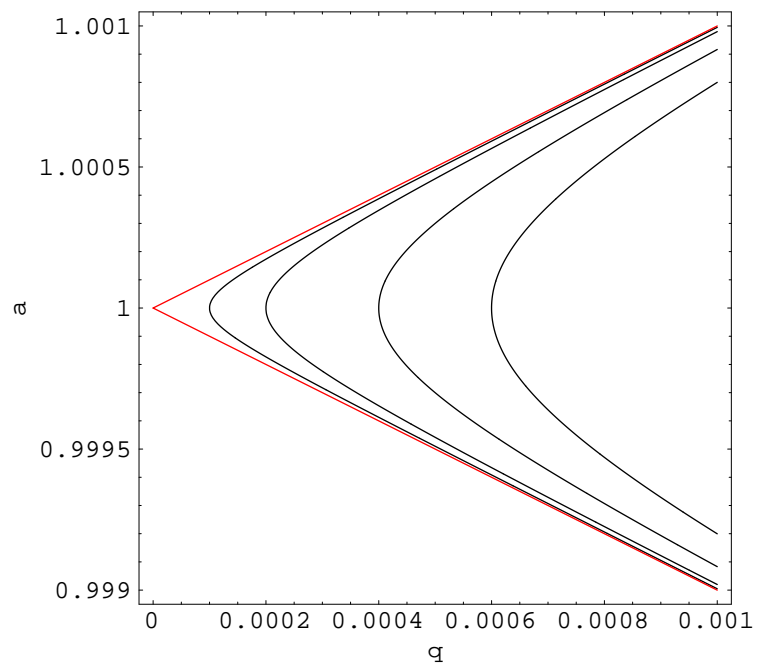
Abschließend sollen noch einige Betrachtungen zur Genauigkeit der Berechnungen angestellt werden. Streng genommen gelten die hergeleiteten Beziehungen in (8.87) und (8.88) für  $l \rightarrow \infty$ . Praktisch muss man natürlich die Determinante irgendwo abschneiden. Diesbezüglich wurde beobachtet, dass für große Dämpfungswerte - in diesem Fall liegen die  $\mu$ -Isokurven bei großen  $q$ -Werten - bereits kleine Ordnungen von  $l^\dagger$  der Hill-Determinante ausreichend sind, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. D.h. es wurde solange die Dimension der Determinante erhöht, bis die berechneten Isokurven innerhalb der Stabilitätsgrenzen der ungedämpften MDG lagen und sich nicht mehr änderten (siehe Abb. 8.25 und 8.26). Mit zunehmend kleiner werdendem Dämpfungswert musste die Dimension der Matrix auf  $l = 30^\ddagger$  erhöht werden. Die Isokurven lagen jedoch immer noch außerhalb der Stabilitätsgrenzen der ungedämpften MDG. Die Abb. 8.27 und 8.28 stellen den speziellen Fall  $a = n^2 = 9$  für Ordnungen der Hill-Determinante von  $l = 6, 8, 10$  und  $12$  dar. Die zusätzlich eingezeichneten farbigen Kurven sind die Stabilitätsgrenzen der ungedämpften MDG, wie sie mit dem in MATHEMATICA<sup>®</sup> implementierten Code beliebig genau bestimmt werden können.

<sup>†</sup>Die Dimension der Hill-Determinante beträgt  $(2l + 1) \times (2l + 1) = 13 \times 13$ .

<sup>‡</sup>Dies wurde beschränkt durch die Rechenkapazität des zur Verfügung stehenden Computers.

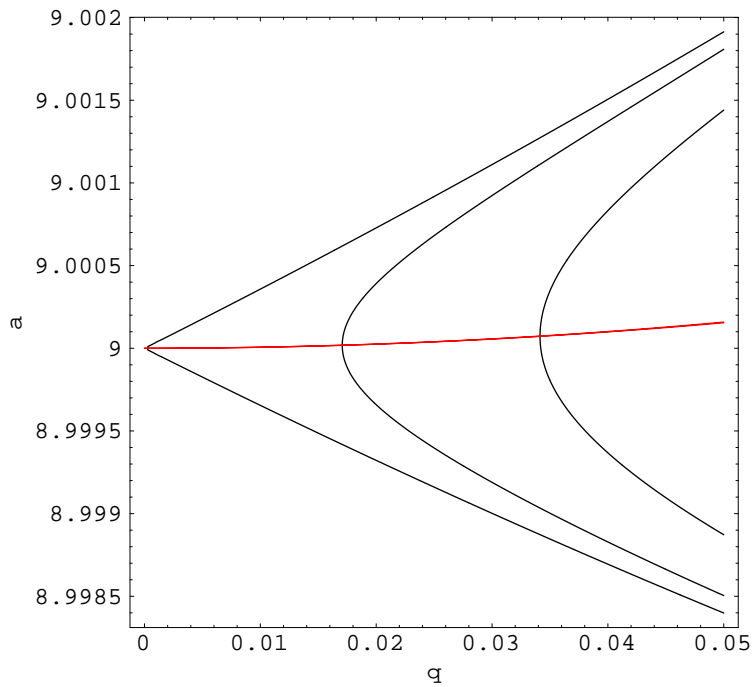
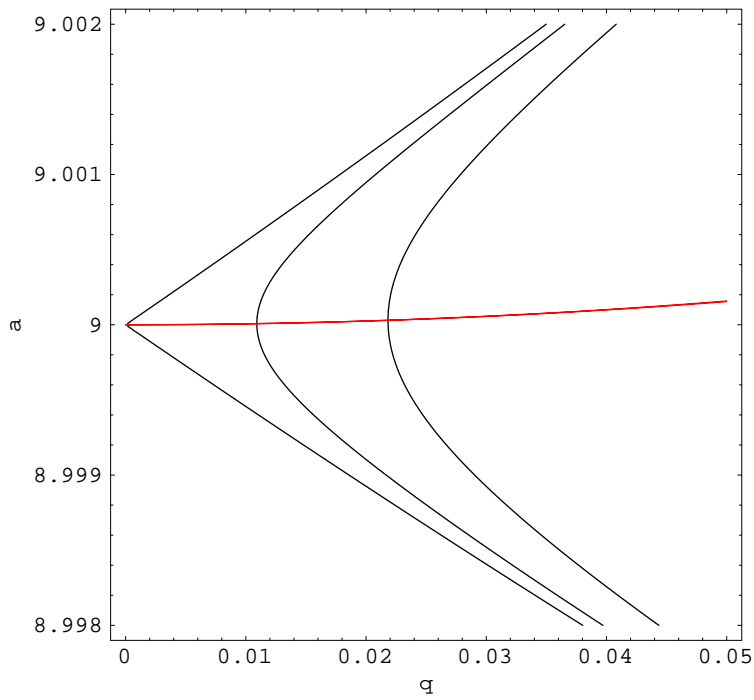


**Abb. 8.25:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGl für den zu  $n = 1$  gehörigen Instabilitätsbereich bei einer Dimension der Hill-Determinante von  $l = 6$ .

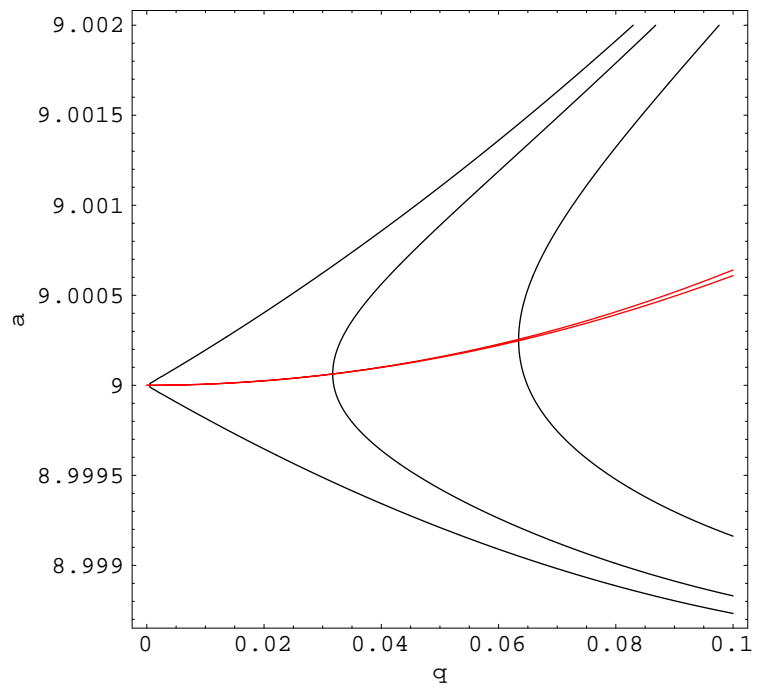
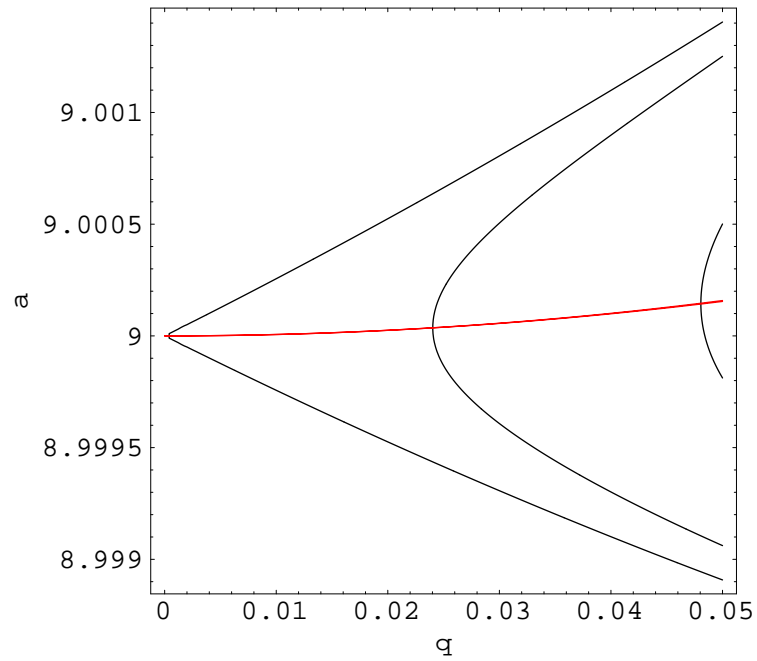


**Abb. 8.26:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGl für den zu  $n = 1$  gehörigen Instabilitätsbereich bei einer Dimension der Hill-Determinante von  $l = 12$ .





**Abb. 8.27:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGl für den zu  $n = 3$  gehörigen Instabilitätsbereich bei einer Dimension der Hill-Determinante von  $l = 6$  und  $l = 8$ . Die spitz zulaufende Isokurve stellt den Fall  $\gamma = 0$  dar und verdeutlicht somit die Diskrepanz zu den Stabilitätsgrenzen, wie sie in Abb. 8.14 dargestellt sind.



**Abb. 8.28:** Isokurven der gedämpften Mathieuschen DGL für den zu  $n = 3$  gehörigen Instabilitätsbereich bei einer Dimension der Hill-Determinante von  $l = 10$  und  $l = 12$ . Die spitz zulaufende Isokurve stellt den Fall  $\gamma = 0$  dar und verdeutlicht somit die Diskrepanz zu den Stabilitätsgrenzen, wie sie in Abb. 8.14 dargestellt sind.

## Kapitel 9

# Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorgestellten wissenschaftlichen Abhandlung konnte der Leser sich davon überzeugen, welche wichtige Rolle der Penningfalle als außergewöhnlichem Werkzeug in der Atom- und Teilchenphysik zukommt. Mit diesem 'Teilchencontainer' ist man zum einen in der Lage, physikalische Größen mit sehr hoher Präzision zu bestimmen. Diese Genauigkeit, die bis in den ppb-Bereich hineinragt, erlaubt u. a. fundamentale physikalische Theorien, wie z. B. die QED, auf den Prüfstein zu stellen. Zum anderen kann der Ionenkäfig als 'schwingungsfähiges System' bestehend aus gekoppelten quantenmechanischen Oszillatoren betrachtet werden, das uns Zutritt zum Gebiet des „Chaos“ bzw. der „nichtlinearen Dynamik“ verschafft. Beide Einsatzmöglichkeiten wurden in der vorliegenden Arbeit genutzt.

Im ersten Teil der durchgeführten Experimente wurde mit der in der Atomphysik etablierten Methode der optischen Mikrowellen-Doppelresonanz Spektroskopie der elektronische Landé-Faktor des Grundzustandes vom ionischen  $Ca^+$ -System bestimmt. Der numerische Wert kann mit einer Genauigkeit von  $4 \cdot 10^{-8}$  angegeben werden zu

$$g_J(4^2S_{1/2}, Ca^+) = (-)2,002\,256\,64(9)$$

Die erzielte Genauigkeit ist vergleichbar mit früheren Messungen am schwereren erdalkali-ähnlichen  $Ba^+$ -System, das bis dato die präziseste Messung des elektronischen  $g_J$ -Faktors in einem gebundenen System darstellt, welcher mit Hilfe der Mikrowellenspektroskopie bestimmt wurde. Es konnte somit eine weitere Lücke in der Bestimmung der Landé- $g_J$ -Faktoren der Grundzustände von erdalkali-ähnlichen Ionen geschlossen werden. Die Reihe wäre mit  $Sr^+$  (Hauptquantenzahl  $n = 5$ ) und  $Ra^+$  (Hauptquantenzahl  $n = 7$ ) komplett. Beim Auftragen der  $g_J$ -Faktoren von  $He^+$ ,  $Be^+$ ,  $Mg^+$ ,  $Ca^+$  und  $Ba^+$  gegen die zugehörigen Hauptquantenzahl hat sich jedoch bereits ein Zusammenhang ergeben, der von der trivialen Annahme einer linearen Abhängigkeit

abweicht. Es wäre in dieser Hinsicht interessant, theoretische Modellierungen durchzuführen, um herauszufinden, ob die Entwicklung des Landé- $g_J$ -Faktors mit zunehmender Ordnungszahl bzw. Hauptquantenzahl der isoelektrischen Reihe der II. Hauptgruppe im Periodensystem einem tiefgreifenden Gesetz folgt. Hierzu könnte man im Rahmen des angenommenen theoretischen Modells Vorhersagen für die  $g_J$ -Faktoren von  $Sr^+$  und  $Ra^+$  machen und diese Daten mit Doppelresonanzexperimenten an den jeweiligen Isotopen vergleichen.

Hinsichtlich der Untersuchungen zur nichtlinearen Dynamik von parametrisch angeregten gespeicherten Elektronen konnten interessante Phänomene studiert werden, die teilweise auch theoretisch verstanden sind. Mit zunehmender Ordnung auf der  $a$ -Achse des Struttischen Diagramms wird nicht nur die Schwelle größer, ab der instabiles Verhalten sichtbar wird, – was bedeutet, dass der charakteristische Exponent für das  $(a, q)$ -Paar imaginär wird – sondern dieses Schwellenverhalten ist bei kleinem Wert der Dämpfung nach gerader und ungerader Ordnung  $n$  differenziert. Bei höheren Dämpfungen verschwindet dieses 'even-odd-staggering' und alle Ordnungen liegen auf einer Kurve. Das bereits in Messungen an gespeicherten  $N_2^+$ - und  $H_2^+$ -Molekülen in einer Paulfalle beobachtete even-odd-staggering konnte somit als ein bei der quadrupolähnlichen parametrischen Anregung eines schwingungsfähigen Systems vorhandenes Charakteristikum bei kleinen Dämpfungen bestätigt werden. Darüberhinaus konnte dieses Phänomen, wie schon erwähnt, durch eine detaillierte Analyse der Lösungen der gedämpften Mathieuschen Differentialgleichung auch theoretisch begründet werden.

Schließlich wurden die theoretischen Grundlagen gelegt, auf die bei den geplanten Doppelresonanz-Experimenten zur Bestimmung sowohl des Landé- $g_J$ -Faktors des geraden Blei-Isotops  $^{208}Pb^+$  als auch des Kern- $g_I$ -Faktors von  $^{207}Pb^+$  zurückgegriffen werden kann. Die durchgeführten Simulationen der Zeemanspektren sowohl der Feinstruktur (im Falle von Blei-208) als auch der Hyperfeinstruktur (im Falle von Blei-207) sowie die Herleitung von analytischen Ausdrücken zur Bestimmung des Kern- $g$ -Faktors, bei Kenntnis der Übergangsfrequenz und des  $g_J$ -Faktors, sind als Hilfe zu den experimentellen Durchführungen im Labor zu betrachten. Eine wesentliche Voraussetzung für die Doppelresonanzmessungen, nämlich die Speicherung von Blei-Ionen im Penningkäfig über einen Zeitraum von mindestens 24h, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geschaffen werden, obwohl zwei generell unterschiedliche Methoden bei der Ionenerzeugung angewandt wurden. Mögliche Gründe, die vermutlich rein technischer Natur<sup>1</sup> sind, bleiben vorwiegend Spekulation und können nur durch weitere modifizierte Anläufe geklärt werden. Als eine Hauptaufgabe bleibt zu klären, wie sich nicht gleichmäßiges Heizen der Rhe-

---

<sup>1</sup>Die Frage bei der Silicagel-Methode ist z. B., ob die Temperatur, die zum Austritt der Blei-Ionen aus der Glasmatrix nötig ist, vom Mengenverhältnis zwischen Blei-Lösung und Matrix selber abhängt.

niumbänder auf die Emission von  $Pb^+$ -Ionen auswirkt und welchen Einfluss hierbei die Menge an gelöster ionischer Bleilösung in der Silicagel-Matrix hat.



## Kapitel 10

# Nachwort

Im Laufe der Forschungsarbeit stellt uns jede neue Erkenntnis vor neue Fragen. Der Mensch – in diesem Fall der Naturwissenschaftler – muss immer wieder feststellen, dass sich ihm jeweils nur ein Teil der materiellen Wirklichkeit erschließt. Es ist als wäre unser 'Erkenntnishorizont' durch den Schein einer Laterne gegeben, die jeder von uns in sich trägt. Man erleuchtet immer nur den Teil des dunklen Raumes, in dem man sich befindet, vermag aber nicht die Dunkelheit des ganzen Raumes zu durchdringen. Man könnte nun aber mit etwas Geduld schrittweise den Raum mit der Laterne abtasten und sich so, am Ende der Mühe, ein Gesamtbild des Raumes machen. Der Mensch stellt jedoch recht bald fest, dass der Raum komplexer ist als er gedacht hat und dass er sich schwertut, die gesammelten Bruchstücke zu einem einheitlichen Ganzen zusammenzufügen. Er könnte zum Schluss gelangen, dass der Raum womöglich keine Grenzen hat und dass die Erfassung des ganzen Raumes in eine unerreichbare Ferne rückt. Die Frage, die sich natürlich dem Menschen stellt, ist, ob es trotzdem einen Sinn hat, sich auf ein solches Unterfangen einzulassen.

Die Antwort hierauf muss 'ja' lauten, denn auch wenn unser Wissen stets Stückwerk sein wird, so liegt das Bedürfnis, Antworten auf die ihn drängenden Fragen zu finden und nach dem Unendlichen zu greifen in der Physiologie des Menschen. Gerade in diesem Streben begreift sich der Mensch als solcher. Gerade dieses Streben unterscheidet ihn vom Tier.

*Considerate la vostra semenza:  
Fatti non foste a viver come bruti,  
Ma per seguir virtute e canoscenza.<sup>‡</sup>*

---

<sup>‡</sup>Dante Alighieri, „La Divina Commedia“, Inferno, Canto XXVI: „Bedenket welchem Samen ihr entsprossen:// Man schuf euch nicht zu leben wie die Tiere, // sondern zu streben nach Tugend und Wissen.“





## Anhang A

# Technisches Datenblatt der verwendeten Komponenten

### Ionenkäfig<sup>‡</sup>

Material der Hyperboloide	sauerstofffreies Kupfer (OFHC)
Montagestangen	Kupfer-Beryllium Legierung
Isolationsmaterial	MACOR
Geometrie des Ionenkäfigs	$z_0 = 9mm; r_0 = 12.7mm$
Bohrung für Laserstrahl	$\varnothing 3mm (\varnothing 4mm)$
Transmission der oberen Kalotte	$T \approx 72\%$
Linsen in der oberen Kalotte	plankonvex aus Kronglas $\varnothing 30mm, f = 23mm$ $(\varnothing 50mm, f = 24mm)$

### Ionenquelle $Ca^+$

Ofenmaterial	zylindrische Oxidkeramik, $\varnothing 5mm$ mit 4 Löchern, $\varnothing 1mm$
Ofendraht	Rheniumdraht $\varnothing 0.15mm$
Strom zur Ionenerzeugung	$I = [1.5 \dots 2.3]A$
Form des Isotopes	metallisches Calcium, Reinheit 99,97% $^{40}Ca$

### Ionenquelle $Pb^+$

Ofenmaterial	Stahlfüße auf einer
--------------	---------------------

Ofendraht	MACOR-Scheibe montiert Rheniumbänder
Strom zur Ionenerzeugung	$l \times b \times d = 5 \times 2 \times 0.015 \text{ mm}^3$
Form des Isotopes	$I = [4 \dots 7] \text{ A}$ metallisches Blei (natürliches Gemisch) Reinheit 99,999% $^{208}\text{Pb}$

### Elektronenquelle

Glühdraht	thorierter Wolfram, $\varnothing 0.1 \text{ mm}$
Heizstrom	W: 99.4%, Th: 0.6%
Entfernung von der unteren Kalotte	$I = [1.1 \dots 1.4] \text{ A}$ 15cm (10cm)

### elektronischer Nachweis für Elektronen und Ionen

Nachweisfrequenz für Elektronen	$\nu_z \approx 11.9 \text{ MHz}$
Nachweisfrequenz für Ionen	$\nu_z \approx [62 \dots 97] \text{ kHz}$
Frequenzgenerator für Nachweisverstärker	Rhode & Schwarz SMY 01
Frequenzgenerator für Seitenbandanregung	DS340, Stanford Research

### Optischer Nachweis

Photomultiplier	Hamamatsu R943-02
Material der Photokathode	GaAs(Cs)
Verstärkung der Multipliers	$V \approx 10^7$
Quanteneffizienz bei 866nm	$\approx 10\%$
Photomultiplierspannung	$U = -1750 \text{ V}$
Dunkelzählrate	4 – 7cps
Erfasster Raumwinkel	8.8 – 10% von $4\pi$
Abstand der Photokathode vom Fallenzentrum	$l \approx 1.6 \text{ m}$
Interferenzfilter	$\lambda = (866 \pm 15) \text{ nm}$ $T_{max} = 37.5\%$
Gesamteffizienz der optischen	

Abbildung 1.5%

### Mikrowellenanlage für 40GHz

Reflexklystron	OKI 40V10
Frequenzbereich	(38 – 42)GHz
max. Leistung	20mW
Synchrinator	DS – 30, Schomandl
Mikrowellen-Synthesizer	1720B, Systron Donner
Frequenzbereich	(2 – 18)GHz
	kleinste Schrittweite 0.1Hz
Rubidium-Standard	FRK, Efratom
DCF77-Empfänger	EFR, Efratom

### Mikrowellenanlage für 80GHz

Reflexklystron	VRB-2111A, Varian
Frequenzbereich	(80.25 – 82.5)GHz
max. Leistung	300mW

### supraleitender Magnet (SUMA)

Modell	MAGNEX Scientific
max. Flussdichte	$B \approx 6.99T$
verwendete Magnetfelder	$B \approx 1.4342T$ und $B \approx 2.8736T$
Inhomogenität	$< 1 \cdot 10^{-7} cm^{-3}$ bei $\varnothing 3mm$ und $l = 10mm$
zeitliche Drift	$< 10^{-10}/h$
Raumtemperaturbohrung	$\varnothing 89mm, l = 90cm$
Kühlmittelverbrauch:	
flüssiger Stickstoff	$\approx 14l$ pro Tag
flüssiges Helium	$\approx 8l$ pro Woche

### Lasersystem für $Ca^+$

(1) Pumplaser	Coherent Innova 200
---------------	---------------------

Laserart	Argon-Ionen Laser, cw
max. Leistung des Pumplasers	15W
(2) Laser	Coherent 899-21
Laserart	Titan Saphir Laser, cw
Verdopplungskristall	$LiJO_3$
max. Leistung bei 397nm	3mW
spektrale Bandbreite	< 1MHz

### Laser Intensity Stabilizer

Modell	LS-PRO
Abmessungen	11" × 3,5" × 4,25" inch
Spannungsversorgung	18V AC, 500mA
Maximaler Input an Laserleistung	25mW
Apertur für Laserstrahl	∅ 2mm
optische Transmission bei	
325nm	60%
442nm	68%
minimale Transmission	< 5% der optischen Transmission
DC Stabilität	< 0,025% rms über 8h
AC Rauschuntergrund	-132dB/√Hz relativ zu einem 10mW He-Ne-Laserstrahl

---

<sup>‡</sup>Die Daten beziehen sich auf die für die Messungen an  $Ca^+$  verwendete Falle. In runden Klammern stehen bei Abweichung die Daten, die sich auf die 'Pb<sup>+</sup>-Falle' beziehen.

## Anhang B

# Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Im Folgenden sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zur Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse bei den Übergängen im  $Ca^+$ -Niveauschema berechnet. Die Tabelle, die dieser Rechnung zugrunde liegt findet sich z. B. bei Condon und Shortley [60]. Lediglich folgende Umbenennungen der Parameter sind bei einem eventuellen Vergleich vorzunehmen:

$$\begin{aligned} J &\Leftrightarrow j_1; & J' &\Leftrightarrow j; & \lambda &\Leftrightarrow j_2 \\ m_J &\Leftrightarrow m_1; & m'_J &\Leftrightarrow m; & q &\Leftrightarrow m_2 \end{aligned}$$

Ausgangspunkt ist die von Wigner berechnete Tabelle für Dipolübergänge (siehe Tabelle B.1), d. h.  $\lambda = 1$ .

### Der $4^2P_{1/2} \longrightarrow 4^2S_{1/2}$ -Übergang

Feste Parameter sind  $J = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$ ,  $J' = \frac{1}{2}$  und  $m_J = -\frac{1}{2}$ . Dann folgt für die eingezeichneten Übergänge:

(a) für  $m'_J = \frac{1}{2}$ ,  $q = 1$

$$\Rightarrow \langle \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = -\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}{2 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$J'$	$q = 1$	$q = 0$	$q = -1$
$J + 1$	$\sqrt{\frac{(J+m'_J)(J+m'_J+1)}{(2J+1)(2J+2)}}$	$\sqrt{\frac{(J-m'_J)(J+m'_J+1)}{(2J+1)(J+1)}}$	$\sqrt{\frac{(J-m'_J)(J-m'_J+1)}{(2J+1)(2J+2)}}$
$J$	$-\sqrt{\frac{(J+m'_J)(J-m'_J+1)}{2J(J+1)}}$	$\frac{m'_J}{\sqrt{J(J+1)}}$	$\sqrt{\frac{(J-m'_J)(J+m'_J+1)}{2J(J+1)}}$
$J - 1$	$\sqrt{\frac{(J-m'_J)(J-m'_J+1)}{2J(2J+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(J-m'_J)(J+m'_J)}{J(2J+1)}}$	$\sqrt{\frac{(J+m'_J+1)(J+m'_J)}{2J(2J+1)}}$

**Tab. B.1:** Von Wigner hergeleitete Clebsch-Gordan-Koeffizienten  $\langle J, 1, m_J, q | J', m'_J \rangle$  für Dipolübergänge.

$$(b) \text{ für } m'_J = -\frac{1}{2}, q = 0 \\ \Rightarrow \langle \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Hieraus ergibt sich für das Verzweigungsverhältnis:

$$a : b = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{a : b = 2 : 1}$$

### Der $4^2P_{1/2} \longrightarrow 3^2D_{3/2}$ -Übergang

Feste Parameter sind  $J = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$ ,  $J' = \frac{3}{2}$  und  $m_J = -\frac{1}{2}$ . Dann folgt für die eingezeichneten Übergänge:

$$(a) \text{ für } m'_J = \frac{1}{2}, q = 1 \\ \Rightarrow \langle \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1 | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)}{(2\cdot\frac{1}{2}+1)(2\cdot\frac{1}{2}+2)}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(b) \text{ für } m'_J = -\frac{1}{2}, \\ q = 0 \\ \Rightarrow \langle \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0 | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}{(2\cdot\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+1)}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(c) \text{ für } m'_J = -\frac{3}{2}, q = -1 \\ \Rightarrow \langle \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -1 | \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}+\frac{3}{2})(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+1)}{(2\cdot\frac{1}{2}+1)(2\cdot\frac{1}{2}+2)}} = \sqrt{\frac{3}{3}}$$

Hieraus ergibt sich für das Verzweigungsverhältnis:

$$a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : \frac{3}{3} \Leftrightarrow \boxed{a : b : c = 1 : 2 : 3}$$

### Der $3^2D_{3/2} \longrightarrow 4^2S_{1/2}$ -Übergang

$$(a) \text{ für } m'_J = \frac{1}{2}, m_J = \frac{3}{2}, q = -1 \\ \Rightarrow \langle \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}, -1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1)(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})}{2\cdot\frac{3}{2}(2\cdot\frac{3}{2}+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \text{ für } m'_J = \frac{1}{2}, m_J = \frac{1}{2}, q = 0 \\ \Rightarrow \langle \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = -\sqrt{\frac{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}(2\cdot\frac{3}{2}+1)}} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(c) \text{ für } m'_J = \frac{1}{2}, m_J = -\frac{1}{2}, q = 1 \\ \Rightarrow \langle \frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}{2\cdot\frac{3}{2}(2\cdot\frac{3}{2}+1)}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$(d) \text{ für } m'_J = -\frac{1}{2}, m_J = \frac{1}{2}, q = -1$$

$$\Rightarrow \langle \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, -1 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})}{2 \cdot \frac{3}{2}(2 \cdot \frac{3}{2}+1)}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$(e) \text{ für } m'_J = -\frac{1}{2}, m_J = -\frac{1}{2}, q = 0$$

$$\Rightarrow \langle \frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}(2 \cdot \frac{3}{2}+1)}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(f) \text{ für } m'_J = -\frac{1}{2}, m_J = -\frac{3}{2}, q = 1$$

$$\Rightarrow \langle \frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 1 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1)}{2 \cdot \frac{3}{2}(2 \cdot \frac{3}{2}+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Hieraus folgt für die Verhältnisse der beiden Verzweigungsgruppen:

$$a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} \Leftrightarrow \boxed{a : b : c = 3 : 2 : 1} \quad \text{und}$$

$$d : e : f = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{d : e : f = 1 : 2 : 3}$$





## Anhang C

# Theoretische Beschreibung der Seitenbandstruktur im Zeeman-Resonanzspektrum

Das Wiener-Khintchine-Theorem besagt, dass die sog. spektrale Leistungsdichte  $P(\omega, \omega_0)$  durch Fouriertransformation der Korrelationsfunktion  $G_{qp}(\tau)$  folgt:

$$P(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{qp}(\tau) e^{i\omega_0\tau} d\tau \quad (\text{C.1})$$

mit

$$\omega_0 \equiv \frac{E_q - E_p}{\hbar}$$

die Mikrowellen-Resonanzfrequenz des induzierten Zeemanüberganges. Die Korrelationsfunktion in (C.1) ist definiert durch:

$$G_{qp}(\tau) \equiv A_{qp} \langle \mathfrak{H}(t + \tau) \mathfrak{H}(t) \rangle \quad (\text{C.2})$$

$\mathfrak{H}(t)$  ist das Mikrowellenfeld und  $A_{qp}$  ist eine Konstante, die die Matrixelemente der magnetischen Dipolmomente der gespeicherten Ionen beschreibt. Anschaulich kann man sich die in (C.2) definierte Korrelationsfunktion folgendermaßen plausibel machen: Man schaut sich zwei Momentaufnahmen in der Bewegung der Ionen an, die zeitlich um  $\tau$  versetzt sind und fragt dann, wie diese beiden Momente zusammenhängen, miteinander korreliert sind.

Aufgrund der speziellen Geometrie der Penningfalle bildet sich das Mikrowellenfeld als zylindrische  $TE_{01n}$  Mode aus, wobei  $n = 3$  ist [263]. Die axiale und die radiale Komponente des Mikrowellenfeldes hat dann folgende Form [197]:

$$H_z = H_1 \cdot J_0(k_1 \cdot r) \cos(k_3 \cdot z) \cos \omega t \quad (\text{C.3})$$

$$H_r = \tilde{H}_1 \cdot J_1(k_1 \cdot r) \sin(k_3 \cdot z) \cos \omega t \quad (\text{C.4})$$

Hierbei sind  $J_0, J_1$  die Besselfunktionen 1. Art mit ganzem Index [104]

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

und  $k_1$  bzw.  $k_3$  stehen in Beziehung zu den geometrischen Abmessungen der sich im Innern des Käfigs ausgebildeten Mikrowellen-cavity  $r_c$  und  $z_c$ , die sich aus den Randbedingungen des stehenden Mikrowellenfeldes ergeben:

$$k_1 = \frac{x_0}{r_c} \quad \text{und} \quad k_3 = \frac{3\pi}{2z_c}$$

mit  $x_0$  die erste Nullstelle von  $J_1(x)$ .

Das Mikrowellenfeld folgt dann als Superposition des axialen und des radialen Anteiles:

$$\mathfrak{H}(t) = H_z + H_r \quad (\text{C.5})$$

Die Bewegung der Ionen ist gegeben durch die bereits in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Beziehungen:

$$z = |A_z| \{ \cos(\omega_z t) + \sin(\omega_z t) \} \quad (\text{C.6})$$

und

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{|A_+|^2 + |A_-|^2 + 2|A_+||A_-| \cos[(\omega_+ - \omega_-)t]} \quad (\text{C.7})$$

wobei o. B. d. A.  $\varphi_+ \equiv \varphi_- \equiv 0$  gewählt wurde. Mit diesen Vorgaben erhält man für die Korrelationsfunktion in (C.2)

$$G_{qp} = A_{qp} \int_0^{|A_+|} d|A_+| \int_0^{|A_-|} d|A_-| \int_{-|A_z|}^{|A_z|} d|A_z| \mathfrak{H}(t) \mathfrak{H}(t + \tau) \eta(|A_+|, |A_-|, |A_z|) \quad (\text{C.8})$$

Da man annimmt, dass nach einer endlichen Speicherzeit die Ionen im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung sind, wird für  $\eta$  die Maxwell-Boltzmann-Verteilung angesetzt:

$$\eta(|A_+|, |A_-|, |A_z|) = \eta_0 \cdot \exp \left[ -\frac{1}{kT} \left( \frac{m(\omega_+ - \omega_-)^2}{2} + \frac{eV_r}{r_0^2} \right) (|A_+|^2 + |A_-|^2) + \left( \frac{m\omega_z^2}{2} + \frac{eV_z}{z_0^2} \right) |A_z|^2 \right]$$

Bevor nun die Fouriertransformierte berechnet wird, werden die Ausdrücke

in (C.3) und (C.4) mit Hilfe des Neumannschen Additionstheorems [109]

$$\begin{aligned}
J_0(k_1 \cdot r) &= J_0(k_1 \cdot |A_+|)J_0(k_1 \cdot |A_-|) \\
&\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_1 \cdot |A_+|)J_n(k_1 \cdot |A_-|) \cdot \cos[n(\omega_+ - \omega_-)t] \\
J_1(k_1 \cdot r) &= J_1(k_1 \cdot |A_+|)J_1(k_1 \cdot |A_-|) \\
&\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_1 \cdot |A_+|)J_{n+1}(k_1 \cdot |A_-|) \cdot \sin[(n+1)(\omega_+ - \omega_-)t]
\end{aligned}$$

und der Darstellung der trigonometrischen Funktionen als Fourier-Bessel-Reihen [104, 109]

$$\begin{aligned}
\cos(k_3|A_z| \sin \omega_z t) &= J_0(k_3|A_z|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(k_3|A_z|) \cos(2n\omega_z t) \\
\sin(k_3|A_z| \sin \omega_z t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \sin((2n-1)\omega_z t) \\
\cos(k_3|A_z| \cos \omega_z t) &= J_0(k_3|A_z|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_3|A_z|) \cos(2n\omega_z t) \\
\sin(k_3|A_z| \cos \omega_z t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \cos((2n-1)\omega_z t)
\end{aligned}$$

umgeschrieben. Es folgt dann für den axialen bzw. radialen Anteil des Mikrowellenfeldes:

$$\begin{aligned}
H_z &= H_1 \left\{ J_0(k_1 \cdot |A_+|)J_0(k_1 \cdot |A_-|) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_1 \cdot |A_+|)J_n(k_1 \cdot |A_-|) \cdot \cos[n(\omega_+ - \omega_-)t] \right\} \\
&\times \left\{ \left[ J_0(k_3|A_z|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_3|A_z|) \cos(2n\omega_z t) \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[ J_0(k_3|A_z|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(k_3|A_z|) \cos(2n\omega_z t) \right] \\
&\quad - \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \cos((2n-1)\omega_z t) \right] \\
&\quad \left. \cdot \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \sin((2n-1)\omega_z t) \right] \right\} \cdot \cos \omega t
\end{aligned} \tag{C.9}$$

und

$$\begin{aligned}
H_r = \tilde{H}_1 & \left\{ J_1(k_1 \cdot |A_+|) J_1(k_1 \cdot |A_-|) \right. \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_1 \cdot |A_+|) J_{n+1}(k_1 \cdot |A_-|) \cdot \sin[(n+1)(\omega_+ - \omega_-)t] \left. \right\} \\
& \times \left\{ \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3 |A_z|) \cos((2n-1)\omega_z t) \right] \right. \\
& \cdot \left[ J_0(k_3 |A_z|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(k_3 |A_z|) \cos(2n\omega_z t) \right] \\
& + \left[ J_0(k_3 |A_z|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_3 |A_z|) \cos(2n\omega_z t) \right] \\
& \cdot \left. \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(k_3 |A_z|) \sin((2n-1)\omega_z t) \right] \right\} \cdot \cos \omega t
\end{aligned} \tag{C.10}$$

O. B. d. A. kann man in Gl. (C.8)  $t \equiv 0$  wählen. Weiterhin ist es ausreichend nur das Integral über  $\tau$  auszuführen, da man lediglich an den Positionen der Seitenbänder im Frequenzspektrum interessiert ist. Aus Gl. (C.1) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
P(\omega, \omega_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{|A_+|} d|A_+| \int_0^{|A_-|} d|A_-| \int_{-|A_z|}^{|A_z|} d|A_z| \mathfrak{H}(0) \eta \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{|A_+|} d|A_+| \int_0^{|A_-|} d|A_-| \int_{-|A_z|}^{|A_z|} d|A_z| \mathfrak{H}(0) \eta \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( H_1 J_0(k_1 |A_+|) J_0(k_1 |A_-|) J_0(k_3 |A_z|) \right. \right. \\
&\quad + 2 H_1 J_0(k_1 |A_+|) J_0(k_1 |A_-|) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_3 |A_z|) \cos(2n\omega_z \tau) \\
&\quad + 2 J_0(k_3 |A_z|) \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_1 |A_+|) J_n(k_1 |A_-|) \cos(n(\omega_+ - \omega_-)\tau) \left. \right) \\
&\quad \cdot \left( J_0(k_3 |A_z|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_3 |A_z|) \cos(2n\omega_z \tau) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4H_1 J_0(k_1|A_+|)J_0(k_1|A_-|) \\
 & \times \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|)J_{2m-1}(k_3|A_z|) \cos((2n-1)\omega_z\tau) \sin((2m-1)\omega_z\tau) \\
 & - 8 \sum_{n,m,l=1}^{\infty} J_n(k_1|A_+|)J_n(k_1|A_-|)J_{2m-1}(k_3|A_z|)(-1)^{m-1} J_{2l-1}(k_3|A_z|) \\
 & \quad \cdot \cos(n(\omega_+ - \omega_-)\tau) \cos((2m-1)\omega_z\tau) \sin((2l-1)\omega_z\tau) \\
 & + 2\tilde{H}_1 J_1(k_1|A_+|)J_1(k_1|A_-|)J_0(k_3|A_z|) \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \cos((2n-1)\omega_z\tau) \\
 & + 4\tilde{H}_1 J_1(k_1|A_+|)J_1(k_1|A_-|) \\
 & \times \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|)J_{2m}(k_3|A_z|) \cos((2n-1)\omega_z\tau) \cos(2m\omega_z\tau) \\
 & + 4J_0(k_3|A_z|) \sum_{n,m=1}^{\infty} J_n(k_1|A_+|)J_{n+1}(k_1|A_-|)(-1)^{m-1} J_{2m-1}(k_3|A_z|) \\
 & \quad \cdot \sin((n+1)(\omega_+ - \omega_-)\tau) \cos((2m-1)\omega_z\tau) \\
 & + 8 \sum_{n,m,l=1}^{\infty} J_n(k_1|A_+|)J_{n+1}(k_1|A_-|)(-1)^{m-1} J_{2m-1}(k_3|A_z|)J_{2l}(k_3|A_z|) \\
 & \quad \cdot \sin((n+1)(\omega_+ - \omega_-)\tau) \cos((2m-1)\omega_z\tau) \cos(2l\omega_z\tau) \\
 & + 2J_0(k_3|A_z|) \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \sin((2n-1)\omega_z\tau) \\
 & + 4 \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_3|A_z|)J_{2m-1}(k_3|A_z|) \cos(2n\omega_z\tau) \sin((2m-1)\omega_z\tau) \Big\} \cdot \cos(\omega\tau) \cdot e^{i\omega_0\tau} d\tau
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Bezeichnet  $F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(x)]$  die Fouriertransformierte einer Funktion  $f(x)$  so lassen sich die Fouriertransformationen der trigonometrischen Funktionen in (C.11) mit Hilfe der folgenden Hilfsformeln berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\sin(a \cdot x)] &= \mathcal{F} \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sin(a \cdot x) e^{-\beta x} \right] \\
 &= \frac{a}{\pi(a^2 - \omega^2)} =: \delta_a(\omega) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \delta(\omega)
 \end{aligned}$$

bzw. hieraus folgend

$$\mathcal{F}[e^{icx}] = \sqrt{2\pi} \delta(\omega + c) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R},$$

und man erhält schließlich mit der Definition

$$A := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{|A_+|} d|A_+| \int_0^{|A_-|} d|A_-| \int_{-|A_z|}^{|A_z|} d|A_z| \mathfrak{H}(0) \eta$$

das Endergebnis:

$$\begin{aligned} P(\omega, \omega_0) = & A \left[ H_1 J_0(k_1|A_+|) J_0(k_1|A_-|) J_0 \left\{ (J_0(k_3|A_z|))^2 \delta(\omega - \omega_0) \right. \right. \\ & + \left( 2J_0(k_3|A_z|) \sum_{n=1}^{\infty} J_{4n}(k_3|A_z|) + 4 \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n}(k_3|A_z|) J_{2m}(k_3|A_z|) \right. \\ & \left. \left. - 4 \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|) J_{2m-1}(k_3|A_z|) \right\} \delta(\omega - (\omega_0 \pm 2n\omega_z)) \right] \\ & + 2(J_0(k_3|A_z|))^2 \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_1|A_+|) J_{2n}(k_1|A_-|) \\ & \quad \times \delta(\omega - (\omega_0 \pm n(\omega_+ - \omega_-))) \\ & + \left\{ 4J_0(k_3|A_z|) \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_n(k_1|A_+|) J_n(k_1|A_-|) J_{4m}(k_3|A_z|) \right. \\ & + 8 \sum_{n,m,l=1}^{\infty} J_n(k_1|A_+|) J_n(k_1|A_-|) (-1)^m J_{2m}(k_3|A_z|) J_{2l}(k_3|A_z|) \\ & \left. - 8 \sum_{n,m,l=1}^{\infty} J_n(k_1|A_+|) J_n(k_1|A_-|) (-1)^{m-1} J_{2m-1}(k_3|A_z|) J_{2l-1}(k_3|A_z|) \right\} \\ & \times \left( \delta(\omega - (\omega_0 \pm n(\omega_+ - \omega_-) \pm 2n\omega_z)) + \delta(\omega - (\omega_0 \mp n(\omega_+ - \omega_-) \pm 2n\omega_z)) \right) \\ & + 2J_0(k_3|A_z|) \left\{ \tilde{H}_1 J_1(k_1|A_+|) J_1(k_1|A_-|) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(k_3|A_z|) \right\} \delta(\omega - (\omega_0 \pm (2n-1)\omega_z)) \\ & + \left\{ 4\tilde{H}_1 J_1(k_1|A_+|) J_1(k_1|A_-|) \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(k_3|A_z|) J_{2m}(k_3|A_z|) \right. \\ & \quad \left. + 4 \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n}(k_3|A_z|) J_{2m-1}(k_3|A_z|) \right\} \\ & \times \left( \delta(\omega - (\omega_0 \pm (2(n+m)-1)\omega_z)) + \delta(\omega - (\omega_0 \mp (2(n+m)-1)\omega_z)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4J_0(k_3|A_z|) \sum_{n,m=1}^{\infty} J_n(k_1|A_+|)J_{n+1}(k_1|A_-|)(-1)^{m-1}J_{2m-1}(k_3|A_z|) \\
 & \times \left( \delta(\omega - (\omega_0 \pm (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \pm (2m-1)\omega_z)) \right. \\
 & \quad \left. + \delta(\omega - (\omega_0 \mp (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \pm (2m-1)\omega_z)) \right) \\
 & + 8 \sum_{n,m,l=1}^{\infty} J_n(k_1|A_+|)J_{n+1}(k_1|A_-|)(-1)^{m-1}J_{2m-1}(k_3|A_z|)J_{2l}(k_3|A_z|) \\
 & \times \left\{ \delta(\omega - (\omega_0 \pm (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \pm (2(m+l)-1)\omega_z)) \right. \\
 & \quad + \delta(\omega - (\omega_0 \mp (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \pm (2(m+l)-1)\omega_z)) \\
 & \quad + \delta(\omega - (\omega_0 \mp (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \mp (2(m-l)-1)\omega_z)) \\
 & \quad + \delta(\omega - (\omega_0 \mp (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \mp (2(m+l)-1)\omega_z)) \\
 & \quad + \delta(\omega - (\omega_0 \pm (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \mp (2(m-l)-1)\omega_z)) \\
 & \quad + \delta(\omega - (\omega_0 \pm (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \pm (2(m-l)-1)\omega_z)) \\
 & \quad \left. + \delta(\omega - (\omega_0 \pm (n+1)(\omega_+ - \omega_-) \mp (2(m+l)-1)\omega_z)) \right\} \\
 & \hspace{15em} \text{(C.12)}
 \end{aligned}$$

Die wichtigen Terme, auf die man in der Lösung (C.12) das Augenmerk richten sollte, sind die  $\delta$ -Distributionen. Nach Zusammenfassung der redundanten Ausdrücke, erhält man als Ergebnis für die Positionen der im Mikrowellenspektrum auftretenden Seitenbänder folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & \omega = \omega_0 \pm 2n\omega_z \\
 [2] \quad & \omega = \omega_0 \pm (2n-1)\omega_z \\
 [3] \quad & \omega = \omega_0 \pm n(\omega_+ - \omega_-) \\
 [4] \quad & \omega = \omega_0 \pm n(\omega_+ - \omega_-) \pm 2m\omega_z \\
 [5] \quad & \omega = \omega_0 \mp n(\omega_+ - \omega_-) \pm 2m\omega_z \\
 [6] \quad & \omega = \omega_0 \pm n(\omega_+ - \omega_-) \pm (2m-1)\omega_z \\
 [7] \quad & \omega = \omega_0 \mp n(\omega_+ - \omega_-) \pm (2m-1)\omega_z \\
 & \text{mit } n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}
 \end{aligned}$$





## Anhang D

# Herleitung der Bewegungsgleichung für die Kollektivbewegung einer Elektronenwolke in einer realen Penningfalle

Im Folgenden wird die Bewegungsgleichung eines Ensembles von gespeicherten Elektronen in einem realen Penningkäfig betrachtet, in Anwesenheit einer parametrischen Anregung gegeben durch eine periodische sich auf die axiale Schwingung auswirkende Kraft. Das elektrostatische Potential, das die Elektronen in einer realen Penningfalle erfahren, kann als Multipolentwicklung einer Legendre-Reihe angesetzt werden:

$$\Phi(|\vec{r}|) = U_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left( \frac{r}{r_0} \right)^k P_k(\cos \theta) \quad (\text{D.1})$$

wobei  $U_0 > 0$  ist, da negative Teilchen gespeichert werden. Das Speicherpotential unterscheidet sich gegenüber dem in Glg. (2.18) insofern, als dass nun auch ungeradzahlige Ordnungen zum Quadrupol-Speicherpotential berücksichtigt werden. Bricht man nach dem Oktupol-Anteil ab, so folgt für die Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{F}_D + \vec{F}_Q + \vec{F}_H + \vec{F}_O \equiv \vec{F} \quad (\text{D.2})$$

wobei die Indizes respektive für die Dipol- ('D'), Quadrupol- ('Q'), Hexapol- ('H') und Oktupol-Anteile ('O') stehen. Nach einiger Rechnung erhält man

für die einzelnen Anteile die nachfolgenden Ausdrücke:

$$\vec{F}_D = -eU_0 \frac{C_1}{r_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$\vec{F}_Q = -eU_0 \frac{C_2}{r_0^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$\vec{F}_H = -3eU_0 \frac{C_3}{r_0^3} \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z^2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$\vec{F}_O = -4eU_0 \frac{C_4}{r_0^4} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}xz^2 - \frac{3}{8}x(x^2 + y^2) \\ \frac{3}{2}yz^2 - \frac{3}{8}y(x^2 + y^2) \\ \frac{3}{2}z(x^2 + y^2) - z^3 \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Fügt man nun noch die äußere Anregung  $V_0 \cos \omega t$  zur statischen Speicher-  
spannung  $U_0$  hinzu, so erhält man mit der üblichen Transformation  $\tau = \frac{\omega t}{2}$   
folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \left( \frac{a}{2} - q \cos 2\tau \right) \left\{ r_0 C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2C_2 \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \\ -z \end{pmatrix} \right. \\ &+ \frac{1}{r_0} 3C_3 \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z^2 \end{pmatrix} \\ &\left. + \frac{1}{r_0} 4C_4 \begin{pmatrix} \frac{3}{2}xz^2 - \frac{3}{8}x(x^2 + y^2) \\ \frac{3}{2}yz^2 - \frac{3}{8}y(x^2 + y^2) \\ \frac{3}{2}z(x^2 + y^2) - z^3 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

wobei folgende dimensionslose Parameter eingeführt wurden:

$$a := -\frac{8eU_0}{m\omega^2 r_0^2}; \quad q := \frac{4eV_0}{m\omega^2 r_0^2} \quad (\text{D.8})$$

Diese Gleichung bezieht sich nur auf ein *einzelnes* Elektron. Bei einem En-  
semble aus  $N$  Teilchen muss noch die Coulomb-Wechselwirkung berücksich-  
tigt werden:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{r_0^3} \quad (\text{D.9})$$

Es ergibt sich also für die vollständige Differentialgleichung, die die Bewe-  
gung von  $N$  Elektronen in einem realen Quadrupolkäfig beschreibt, wobei als

Störung zum idealen Quadrupolpotential die Ordnungen  $k = 3$  und  $k = 4$  berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \left( \frac{a}{2} - q \cos 2\tau \right) \left\{ r_0 C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2C_2 \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \\ -z \end{pmatrix} \right. \\ &\quad + \frac{1}{r_0} 3C_3 \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z^2 \end{pmatrix} \\ &\quad \left. + \frac{1}{r_0} 4C_4 \begin{pmatrix} \frac{3}{8}xz^2 - \frac{3}{8}x(x^2 + y^2) \\ \frac{3}{8}yz^2 - \frac{3}{8}y(x^2 + y^2) \\ \frac{3}{2}z(x^2 + y^2) - z^3 \end{pmatrix} \right\} + \alpha \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

mit der Definition  $\alpha := \frac{e^2}{m\omega^2\pi\epsilon_0 r_0^3}$ . Will man nun zusätzlich Dämpfungen berücksichtigen, so kommen in erster Linie drei Terme in Frage:

- (1) Lineare Dämpfung:  $\gamma \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$
- (2) Nichtlineares Glied:  $\delta \begin{pmatrix} x_i^3 \\ y_i^3 \\ z_i^3 \end{pmatrix}$
- (3) Quadratische Dämpfung:  $\eta \begin{pmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{y}^2 \\ \dot{z}^2 \end{pmatrix} \text{sgn} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Nach Hagedorn [113] hat das nichtlineare Glied keinen Einfluss auf die Breite der Instabilitätsbereiche, während die lineare Dämpfung die Instabilitätsbereiche verkleinert, und zwar derart, dass die Instabilität erst oberhalb eines bestimmten Schwellenwertes eintritt. Weiterhin hat die quadratische Dämpfung in erster Ordnung ebenfalls keinen Einfluss auf die Begrenzung der Instabilitätsbereiche der Mathieuschen Differentialgleichung.

Für die weitere Rechnung wollen wir uns auf die Schwerpunktsbewegung, d. h. die Kollektivbewegung der gespeicherten Elektronen beschränken. Weiterhin betrachten wir nur die axiale Bewegung (d. h.  $X = Y = 0$ ). Die Schwerpunktskoordinaten der Teilchenwolke ist definiert als:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

die mit den Relativkoordinaten in folgender Beziehung stehen:

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \vec{r}_i - \vec{R} \quad (\text{D.12})$$

Definitionsgemäß ist

$$\sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{D.13})$$

Bei Betrachtung der Kollektivbewegung verschwindet der Coulomb-Wechselwirkungsterm. Aus Gl. (D.10) ergibt sich somit, wenn man die radiale Abmessung der Penningfalle  $r_0$  als Einheitsmaß nimmt:

$$\begin{aligned} \ddot{Z} + \lambda \dot{Z} = \left( \frac{a}{2} - q \cos 2\tau \right) & \left\{ C_1 - 2C_2 Z + \frac{3}{2} C_3 \langle \rho^2 \rangle - 3C_3 \langle z^2 \rangle \right. \\ & \left. + 6C_4 \langle z \rho^2 \rangle - 4C_4 \langle z^3 \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

wobei folgende Abkürzungen bzw. Definitionen eingeführt wurden:

$$\langle \rho^2 \rangle := \langle x_i^2 + y_i^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \quad (\text{D.15})$$

$$\langle z \rho^2 \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \rho_i^2 \quad (\text{D.16})$$

$$\langle z^2 \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^2 \quad (\text{D.17})$$

$$\langle z^3 \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^3 \quad (\text{D.18})$$

Führt man nun die sog. rms-Radien der Elektronenwolke in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung mit Hilfe der Relativkoordinaten in (D.12) ein

$$r_x^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (\text{D.19})$$

$$r_y^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \quad (\text{D.20})$$

$$r_z^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i^2 \quad (\text{D.21})$$

wobei

$$r_x^2 + r_y^2 \equiv r_\rho^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (\text{D.22})$$

so können die Gleichungen (D.15)–(D.18) umgeschrieben werden:

$$\langle \rho^2 \rangle = r_\rho^2 \quad (\text{D.23})$$

$$\langle z\rho^2 \rangle = Z r_\rho^2 + \sum_{i=1}^N \zeta_i \xi_i^2 + \sum_{i=1}^N \zeta_i \eta_i^2 \quad (\text{D.24})$$

$$\langle z^2 \rangle = Z^2 + r_z^2 \quad (\text{D.25})$$

$$\langle z^3 \rangle = Z^3 + 3Z r_z^2 + \sum_{i=1}^N \zeta_i^3 \quad (\text{D.26})$$

Um die Glg. (D.24) und (D.26) weiter umzuformen sollen folgende Annahmen gemacht werden: Zum einen soll die Elektronenwolke symmetrisch genug sein, dass

$$\sum_{i=1}^N \zeta_i^3 \equiv 0$$

gilt. Zum anderen sei die Bewegung der Teilchen in allen drei Raumrichtungen unkorreliert, d. h. die Relativbewegung der Elektronen in der Wolke soll in radialer und axialer Richtung unabhängig sein:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \zeta_i = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \eta_i = \sum_{i=1}^N \zeta_i^2 \xi_i = \sum_{i=1}^N \zeta_i^2 \eta_i = \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \xi_i = \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \zeta_i = 0$$

Somit erhält man für die Glg. (D.14), wenn man nach Potenzen von  $Z$  ordnet:

$$\begin{aligned} \ddot{Z} + \lambda \dot{Z} = & \left( \frac{a}{2} - q \cos 2\tau \right) \left\{ C_1 + 3C_3 \left( \frac{r_\rho^2}{2} - r_z^2 \right) \right. \\ & \left. - \left( 2C_2 - 12C_4 \left( \frac{r_\rho^2}{2} - r_z^2 \right) \right) Z - 3C_3 Z^2 - 4C_4 Z^3 \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Aufgrund der geometrischen Form der im Experiment verwendeten Penningfalle und dem sich hieraus ergebenden Quadrupolpotential lassen sich folgende Annahmen machen:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 1 \\ r_z &= \frac{r_\rho}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

so dass man als Endergebnis für die Bewegungsgleichung der Kollektivbewegung in axialer Richtung angeben kann:

$$\ddot{Z} + \lambda \dot{Z} = \left( \frac{a}{2} - q \cos 2\tau \right) \{ -2Z - 3C_3 Z^2 - 4C_4 Z^3 \} \quad (\text{D.28})$$

Man erkennt, dass sich bei Vernachlässigung der nichtlinearen Terme in  $Z$  die gedämpfte gewöhnliche Mathieusche Differentialgleichung ergibt:

$$\ddot{Z} + \lambda \dot{Z} = (-a + 2q \cos 2\tau) Z \quad (\text{D.29})$$

wobei mit den Definitionen  $\omega_z^2 := -\frac{2eU_0}{mr_0^2}$  und  $F := \frac{eV_0}{mr_0^2}$  für die Parameter  $a$  und  $q$

$$a = \left( \frac{2\omega_z}{\omega} \right)^2 \quad \text{und} \quad q = \frac{2F}{\omega^2}$$

folgt.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. ABRAMOWITZ AND I. A. STEGUN  
„*Handbook of Mathematical Functions*, 10<sup>th</sup> Ed.“  
Dover Publications, Inc., NY (1972), chapter 20, pp. 721-746
- [2] R. ALHEIT  
„*Optische Bestimmung der Hyperfeinstrukturaufspaltung des Grundzustandes  $6^2P_{1/2}$  und des ersten angeregten Zustandes  $6^2P_{3/2}$  des  $^{207}\text{Pb}^+$* “  
Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Mainz (1990)
- [3] R. ALHEIT, X. FENG, G. Z. LI, R. SCHREINER AND G. WERTH  
„*Hyperfine structure of the  $6P_{1/2}-6P_{3/2}$  magnetic dipole resonance transition in electrodynamically confined  $^{207}\text{Pb}^+$* “  
Journal of Mod. Op. **39**(2), 411 (1992)
- [4] R. ALHEIT, X. Z. CHU, M. HOEFER, M. HOLZKI, G. WERTH AND R. BLÜMEL  
„*Nonlinear collective oscillations of an ion cloud in a Paul trap*“  
Phys. Rev. **A56**(5), 4023 (1997)
- [5] R. W. W. ALHEIT  
„*Speicherung und laserinduzierte Photodissoziation von  $\text{H}_2^+$  in einer Paulfalle*“  
Dissertation, Inst. f. Phys., Mainz (1997)
- [6] M. A. ALI AND Y.-K. KIM  
„*Electric quadrupole and magnetic dipole transition probabilities in the potassium isoelectronic sequence*“  
Phys. Rev. **A38**, 3992 (1988)
- [7] J. ANDRÉ  
„*Étude théorique de l'influence des collisions élastiques sur un gaz dilué de particules chargées, confinées par un champ de radio-fréquence a symétrie quadrupolaire*“  
J. de Phys. **37**, 719 (1976)
- [8] F. ARBES, M. BENZING, T. GUDJONS, F. KURTH AND G. WERTH  
„*Improved lifetime measurements of the  $3D_{3/2}$  and  $3D_{5/2}$  metastable states of  $\text{CaII}$* “  
Z. Phys. **D29**, 159 (1994)

- [9] E. ARIMONDO, M. INGUSCIO AND P. VIOLINO  
„*Experimental Determinations of the Hyperfine Structure in the Alkali Atoms*“  
Rev. Mod. Phys. **49**, 31 (1977)
- [10] L. ARMSTRONG, JR.  
„*Theory of the Hyperfine Structure of Free Atoms*“  
Wiley-Interscience, New York (1971)
- [11] L. ARMSTRONG, JR.  
„*Relativistic Effects in Many-Body Systems*“  
Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Atomic Physics in Göteborg, Eds. I. Lindgren, A. Rosén and S. Svanberg  
Plenum Press, p. 129, NY and London (1982)
- [12] R. BLATT, H. SCHNATZ AND G. WERTH  
„*Precise Determination of the  $^{171}\text{Yb}^+$  Ground State Hyperfine Separation*“  
Z. Phys. **A312**, 143 (1983)
- [13] E. V. BAKLANOV, V. P. CHEBOTAYEV AND E. A. TITOV  
„*Optical Absorption Resonances of Trapped Particles*“  
Appl. Phys. **25**, 81 (1981)
- [14] D. J. BATE, K. DHOLOKIA, R. C. THOMPSON AND D. C. WILSON  
„*Ion Oscillation Frequencies in a Combined Trap*“  
J. of Mod. Opt. **39**, 305 (1991)
- [15] T. J. BEAHN AND F. D. BEDARD  
„*Measurement of  $g_J(^{87}\text{Rb})/g_J(^{39}\text{K})$  by spin-exchange optical pumping*“  
Phys. Rev. **A15**, 203 (1977)
- [16] T. J. BEAHN AND F. D. BEDARD  
„*Measurement of the ground-state  $g_J$  factor of  $^{23}\text{Na}$* “  
Phys. Rev. **A16**, 2203 (1977)
- [17] E. C. BEATY  
„*Calculated electrostatic properties of ion traps*“  
Phys. Rev. **A33**(6), 3645 (1986)
- [18] T. BEIER  
„*The  $g_J$  Factor of a Bound Electron and the Hyperfine Structure Splitting in Hydrogenlike Ions*“  
Physics Reports **339**, 79  
Elsevier Science, Amsterdam (2000)
- [19] BERGMANN/SCHÄFER  
„*Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 4 - Teilchen*“  
Walter de Gruyter, Berlin (1992)
- [20] G. BLANCH  
„*On the computation of Mathieu functions*“  
J. Math. Phys. **25**, 1 (1946)



- [21] F. BLOCH AND S. SIEGERT  
„*Magnetic Resonance for Nonrotating Fields*“  
Phys. Rev. **57**, 522 (1940)
- [22] F. BLOCH  
„*Experiments of the g-factor of the electron*“  
Physica XIX, 821 (1953)
- [23] S. A. BLUNDELL, W. R. JOHNSON AND J. SAPIRSTEIN  
„*High-order many-body perturbation-theory calculations of energy levels in cesium*“  
Phys. Rev. **A38**(10), 4961 (1988)
- [24] S. A. BLUNDELL, W. R. JOHNSON, Z. W. LIU AND J. SAPIRSTEIN  
„*Relativistic all-order equations for helium*“  
Phys. Rev. **A39**(8), 3768 (1989)
- [25] S. A. BLUNDELL, W. R. JOHNSON, Z. W. LIU AND J. SAPIRSTEIN  
„*Relativistic all-order calculations of energies and matrix elements for Li and Be<sup>+</sup>*“  
Phys. Rev. **A40**(5), 2233 (1989)
- [26] R. BLÜMEL  
„*Nonlinear Dynamics of Trapped Ions*“  
Physica Scripta **T59**, 369 (1995)
- [27] N. N. BOGOLJUBOW UND J. A. MITROPOLSKI  
„*Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen*“  
Akademie-Verlag, Berlin (1965)  
Originalausgabe: Н. Н. Боголюбов и Ю. Митрополский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur, Moskau, (1963)
- [28] G. BOLLEN, R. B. MOORE, G. SAVARD AND H. STOLZENBERG  
„*The accuracy of heavy-ion mass measurements using time-of-flight ion cyclotron resonance in a Penning trap*“  
Appl. Phys. **68**, 4355 (1990)
- [29] J. J. BOLLINGER, J. M. GILLIGAN, W. M. ITANO, F. L. MOORE AND D. J. WINELAND  
„*Precise Measurements of the g<sub>J</sub>-Factor of Mg<sup>+</sup>*“  
Bull. Am. Phys. Soc. **37**(3), 1117 (1992)
- [30] R. A. BONHAM AND T. G. STRAND  
„*Diamagnetic Nuclear Shielding Constants for Neutral Atoms*“  
J. Chem. Phys. **40**, 3447 (1964)
- [31] S. BOUAZZA, Y. GUERN AND J. BAUCHE  
„*Isotope shift and hyperfine structure in low-lying levels of PbII*“  
J. Phys. **B19**, 1881 (1986)

- [32] G. BREIT  
 „Possible Effects of Nuclear Spin on X-Ray Terms“  
 Phys. Rev. **35**, 1447 (1930)
- [33] G. BREIT  
 „Derivation of Hyperfine Structure Formulas for one electron spectra“  
 Phys. Rev. **37**, 51 (1931)
- [34] G. BREIT AND I. I. RABI  
 „Measurement of Nuclear Spin“ (Letter to the Editor)  
 Phys. Rev. **38**, 2082 (1931)
- [35] B. H. BRANSDEN AND C. J. JOACHAIN  
 „Physics of the atoms and molecules“  
 Longman Scientific & Technical, Essex (1992)
- [36] H. BROER AND C. SIMÓ  
 „Resonance Tongues in Hill's Equations: A Geometric Approach“  
 Jour. of Diff. Eq. **166**, 290 (2000)
- [37] I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL AND H. MÜHLIG  
 „Taschenbuch der Mathematik“ 3. Überarb. Auflage  
 Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main (1997)
- [38] J. BROSSEL AND F. BITTER  
 „A New ‚Double Resonance‘ Method for Investigating Atomic Energy Levels.  
 Application to Hg  $^3P_1^*$ “  
 Phys. Rev. **86**(3), 308 (1952)
- [39] G. E. BROWN AND D. G. RAVENHALL  
 „On the interaction of two electrons“  
 Proc. Roy. Soc. (London) Series **A208**(1092), 552 (1951)
- [40] L. S. BROWN  
 „Line Shape for a Precise Measurement of the Electron's Magnetic Moment“  
 Phys. Rev. Lett. **52**, 2013 (1984)
- [41] L. S. BROWN  
 „Geonium Lineshape“  
 Annals of Physics **159**, 62 (1985)
- [42] L. S. BROWN, G. GABRIELSE, K. HELMERSON AND J. TAN  
 „Cyclotron Motion in a Microwave Cavity: Possible Shifts of the Measured  
 Electron  $g$  factor“  
 Phys. Rev. Lett. **55**, 44 (1985)
- [43] L. S. BROWN AND G. GABRIELSE  
 „Geonium Theory: Physics of a Single Electron or Ion in a Penning Trap“  
 Rev. Mod. Phys. **58**(1), 233 (1986)
- [44] K. A. BRUECKNER AND C. A. LEVINSON  
 „Approximate Reduction of the Many-Body Problem for Strongly Interacting  
 Particles to a Problem of Self-Consistent Fields“  
 Phys. Rev. **97**, 1344 (1955)

- [45] K. A. BRUECKNER  
„*Many-Body Problem for Strongly Interacting Particles. II. Linked Cluster Expansion*“  
Phys. Rev. **100**, 36 (1955)
- [46] C. BRUNNÉE UND H. VOSHAGE  
„*Massenspektrometrie*“  
Verlag Karl Thiemig KG, München (1964)
- [47] H. C. BURGER UND H. B. DORGELO  
„*Beziehung zwischen inneren Quantenzahlen und Intensitäten von Mehrfachlinien*“  
Zeits. f. Phys. **23**, 258 (1924)
- [48] J. BYRNE AND P. S. FARAGO  
„*On the production of polarized electron beams by spin exchange collisions*“  
Proc. Phys. Soc. **86**, 801 (1965)
- [49] A. E. CAMERON, D. H. SMITH AND R. L. WALKER  
„*Mass Spectrometry of Nanogram-Size Samples of Lead*“  
Analytical Chemistry **41**(3), 525 (1969)
- [50] G. A. CAMPBELL AND R. M. FOSTER  
„*Fourier Integrals for Practical Applications*“  
D. Van Nostrand Company Inc., New York (1948)
- [51] H. B. C. CASIMIR  
„*On the interaction between Atomic Nuclei and Electrons*“  
Freeman, San Francisco (1936)
- [52] K. T. CHENG AND M. H. CHEN  
„*Relativistic configuration-interaction calculations for the  $2s - 2p_{3/2}$  transition energies of uranium ions*“  
Phys. Rev. **A53**(4), 2206 (1996)
- [53] O. CHUN-SING AND H. A. SCHUESSLER  
„*Ion Storage in a Radio-frequency Trap with Semi-spherical electrodes*“  
Int. Jour. of Mass Spectrom. and Ion Phys. **35**, 305 (1980)
- [54] W. J. CHILDS  
„*Fine and Hyperfine Structure of Free Atoms*“  
Notes for a series of lectures delivered at the 'Institut für Angewandte Physik der Universität Bonn', Oct. 1972 - July 1973
- [55] C. COHEN-TANNOUJDI, B. DIU AND F. LALÖE  
„*Quantum Mechanics*“, Volume one and two  
John Wiley & Sons, NY (1977)
- [56] C. COHEN-TANNOUJDI AND S. REYNAUD  
„*Dressed-atom description of resonance fluorescence and absorption spectra of a multi-level atom in an intense laser beam*“  
J. Phys. B:Atom. Molec. Phys. **10**(3), 345 (1977)

- [57] C. COHEN-TANNOUDJI AND S. REYNAUD  
„Dressed-Atom Approach to Resonance Fluorescence“  
in ‚Atoms in Electromagnetic Fields‘, Ed. Cohen-Tannoudji  
World Scientific, p. 310, Singapore (1994)
- [58] B. A. COLLINGS AND D. J. DOUGLAS  
„Observation of Higher Order Quadrupole Excitation Frequencies in a Linear Ion Trap“  
Jour. of the Amer. Soc. Mass Spectrom. **11**, 1016 (2000)
- [59] F. COMBLEY, F. J. M. FARLEY, J. H. FIELD AND E. PICASSO  
„ $g - 2$  Experiments as a Test of Special Relativity“  
Phys. Rev. Lett. **21**(42), 1383 (1979)
- [60] E. U. CONDON AND G. H. SHORTLEY  
„The Theory of Atomic Spectra“  
Cambridge University Press (1977). First printed in 1935
- [61] R. D. COWAN  
„The Theory of Atomic Structure and Spectra“  
University of California Press (1981)
- [62] L. S. CUTLER, R. P. GIFFARD AND M. D. MCGUIRE  
„Thermalization of  $^{199}\text{Hg}$  Ion Macromotion by a Light Background Gas in an RF Quadrupole Trap“  
Appl. Phys. **B36**, 137 (1985)
- [63] L. S. CUTLER, C. A. FLORY, R. P. GIFFARD AND M. D. MCGUIRE  
„Doppler Effects due to Thermal Macromotion of Ions in an rf Quadrupole Trap“  
Appl. Phys. **B39**, 251 (1986)
- [64] H. G. DEHMELT  
„Radiofrequency Spectroscopy of Stored Ions“  
Adv. Atom. Molec. Phys. **3**, 53 (1967)
- [65] H. G. DEHMELT AND F. L. WALLS  
„Bolometric Technique for the rf Spectroscopy of Stored Ions“  
Phys. Rev. Lett. **21**, 127 (1968)
- [66] H. D. DEHMELT  
„Experiments with an isolated subatomic particle at rest“  
Rev. Mod. Phys. **62**(3), 525 (1990)
- [67] A. J. DEMPSTER  
„A new method of positive ray analysis“  
Phys. Rev. **11**, 316 (1918)
- [68] W. DEMTRÖDER  
„Laserspektroskopie - Grundlagen und Techniken“ 3. Auflage  
Springer Verlag, Berlin (1993)

- [69] R. H. DICKE  
„*The Effect of Collisions upon the Doppler Width of Spectral Lines*“  
Phys. Rev. **89**(2), 472 (1953)
- [70] W. C. DICKINSON  
„*Hartree Computation of the Internal Diamagnetic Field for Atoms*“  
Phys. Rev. **80**, 563 (1950)
- [71] R. B. DINGLE AND H. J. W. MÜLLER  
„*Asymptotic expansions of Mathieu functions and their characteristic numbers*“  
J. Reine Angew. Math. **211**, 11 (1962)
- [72] P. A. M. DIRAC  
„*Principles of Quantum Mechanics*“ 4<sup>th</sup> Edition  
Clarendon Press, Oxford (1958).  
1<sup>st</sup> Edition 1930.
- [73] H. B. DORGELO  
„*Die Intensität mehrfacher Spektrallinien*“  
Zeits. f. Phys **22**, 170 (1924)
- [74] G. DUFFING  
„*Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*“  
Vieweg & Sohn, Braunschweig (1918)
- [75] R. S. VAN DYCK JR., P. B. SCHWINGBERG AND H. G. DEHMELT  
„*New high-precision comparison of electron and positron g factors*“  
Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987)
- [76] M. I. DYKMAN, C. M. MALONEY, V. N. SMELYANSKIY AND M. SILVERSTEIN  
„*Fluctuational phase-flip transitions in parametrically driven oscillators*“  
Phys. Rev. **E57**(5), 5202 (1998)
- [77] V. A. DZUBA, V. V. FLAMBAUM, P. G. SILVESTROV AND O. P. SUSHKOV  
„*Many-body perturbation-theory calculations in atoms with open shells*“  
Phys. Rev. **A44**(5), 2828 (1991)
- [78] P. EKSTROM AND D. J. WINELAND  
„*The Isolated Electron*“  
Scientific American **8**, 91 (1980)
- [79] A. ERDÉLYI  
„*Über die freien Schwingungen in Kondensatorkreisen mit periodisch veränderlicher Kapazität*“  
Ann. d. Physik **19**, 585 (1934)
- [80] F. D. FEIOCK AND W. R. JOHNSON  
„*Relativistic Evaluation of Internal Diamagnetic Fields for Atoms and Ions*“  
Phys. Rev. Lett. **21**, 785 (1968)

- [81] F. D. FEIOCK AND W. R. JOHNSON  
„*Atomic Susceptibilities and Shielding Factors*“  
Phys. Rev. **187**, 39 (1969)
- [82] X. FENG, G. Z. LI, R. ALHEIT AND G. WERTH  
„*Hyperfine-structure measurements on trapped PbII*“  
Phys. Rev. **A46**(1), 327 (1992)
- [83] X. FENG, G. Z. LI AND G. WERTH  
„*High precision hyperfine spectroscopy in M1-M1 double resonance transitions on trapped  $^{207}\text{Pb}^+$* “  
Phys. Rev. **A46**(5), 2959 (1992)
- [84] X. FENG  
„*High Resolution Laser and Microwave Spectroscopy on Electrodynamically Trapped  $^{207}\text{Pb}^+$  Ions*“  
Dissertation, Inst. f. Physik, Mainz (1993)
- [85] E. FERMI  
„*Über die magnetischen Momente der Atomkerne*“  
Zeits. f. Phys. **60**, 320 (1930)
- [86] A. L. FETTER, J. D. WALECKA  
„*Quantum Theory of Many-Particle Systems*“  
McGraw-Hill, NY (1971)
- [87] R. B. FIRESTONE  
„*Table of Isotopes*“, 8<sup>th</sup> Ed., Vol. II  
Wiley & Sons, New York (1996)
- [88] D. FRENKEL AND R. PORTUGAL  
„*Algebraic Methods to Compute Mathieu Functions*“  
J. Phys. A: Math. and Gen. **34**, 3541 (2001)
- [89] G. GABRIELSE  
„*Relaxation calculation of the electrostatic properties of compensated Penning traps with hyperbolic electrodes*“  
Phys. Rev. **A27**, 2277 (1983)
- [90] G. GABRIELSE  
„*Detection, damping, and translating the center of the axial oscillation of a charged particle in a Penning trap with hyperbolic electrodes*“  
Phys. Rev. **A29**, 462 (1984)
- [91] G. GABRIELSE AND H. DEHMELT  
„*Observation of Inhibited Spontaneous Emission*“  
Phys. Rev. Lett. **55**, 67 (1985)
- [92] G. GABRIELSE, H. DEHMELT AND W. WELLS  
„*Observation of a Relativistic, Bistable Hysteresis in the Cyclotron Motion of a Single Electron*“  
Phys. Rev. Lett. **54**, 537 (1985)

- [93] A. GALLAGHER  
„*Oscillator Strengths of CaII, SrII, and BaII*“  
Phys. Rev. **157**(1), 24 (1967)
- [94] R. GAMBILL AND J. HALE  
„*Subharmonic and Ultraharmonic Solutions for Weakly Nonlinear Systems*“  
Journal of Rational Mechanical Analysis **5**, 353 (1956)
- [95] R. H. GARSTANG  
„*Transition Probabilities of Forbidden Lines*“  
J. Res. of the Nat. Bur. of Stand. **68A**, 61 (1964)
- [96] G. GÄRTNER  
„*Direktmessung des Proton-Elektron-Massenverhältnisses*“  
Dissertation, Inst. f. Physik, Mainz (1977)
- [97] C. GERZ  
„*Über den Penning-Käfig als hochauflösendes Massenspektrometer*“  
Dissertation, Inst. f. Physik, Mainz (1989)
- [98] P. K. GHOSH  
„*Ion Traps*“  
International Series of Monographs on Physics  
Clarendon Press, Oxford (1995)
- [99] H. M. GIBBS, B. CHANG AND R. C. GREENHOW  
„*Polarization of Pb Vapor. I. Orientation of the  $^3P_0$  Ground State of  $Pb^{207}$* “  
Phys. Rev. **188**(1), 172 (1969)
- [101] H. M. GIBBS AND C. M. WHITE  
„*Polarization of Pb Vapor. II. Disorientation of the  $Pb^{207}$  Ground State and  $\mu_I(Pb^{207})/\mu_I(Hg^{199})$* “  
Phys. Rev. **188**(1), 180 (1969)
- [102] H. GIESLER UND W. GROTRIAN  
„*Zur Struktur des Bleibogenspektrums*“  
Zeits. f. Phys. **39**, 377 (1926)
- [103] J. GOLDSTONE  
„*Derivation of the Brueckner many-body theory*“  
Proc. Roy. Soc. (London), Series **A239**(1217), 267 (1957)
- [104] K.-H. GOLDBORN  
„*Mathematik für Physiker I-IV*“  
Vorlesungsskripte zu Mathematikvorlesungen an der Universität Mainz, Oktober 1992 - Juli 1994
- [105] C. GUET AND W. R. JOHNSON  
„*Relativistic many-body calculations of transition rates for  $Ca^+$ ,  $Sr^+$  and  $Ba^+$* “  
Phys. Rev. **A44**, 1531 (1991)

- [106] S. GOUDSMIT UND R. DE L. KRONIG  
 „Die Intensität der Zeemankomponenten“  
 Naturwiss. **13**, 90 (1925)
- [107] S. GOUDSMIT  
 „Theory of Hyperfine Structure Separations“  
 Phys. Rev. **37**(6), 663 (1931)
- [108] S. GOUDSMIT  
 „Nuclear Magnetic Moments“  
 Phys. Rev. **43**, 636 (1933)
- [109] I. S. GRADSHTEĪN AND I. M. RYZHIK  
 „Table of Integrals, Series and Products“ 5<sup>nd</sup> Edition  
 Academic Press, Boston (1994), pp. 961
- [110] G. GRÄFF UND E. KLEMP  
 „Messung der Zyklotronfrequenz freier Elektronen im Vierpolkäfing“  
 Z. Naturforsch. **22a**, 1960 (1967)
- [111] T. E. GUDJONS  
 „Laserpräparierte  $^{40}\text{Ca}^+$  Ionen in einer Paul-Falle für Präzisionsspektroskopie: Nicht lineare Dynamik, Laserkühlen und 'electron shelving“  
 Dissertation, Inst. f. Physik, Mainz (1996)
- [112] M. G. H. GUSTAVSSON AND A. - M. MÅRTENSSON-PENDRILL  
 „Need for remeasurements of nuclear magnetic dipole moments“  
 Phys. Rev. **A58**(5), 3611 (1998)
- [113] P. HAGEDORN  
 „Zum Instabilitätsbereich erster Ordnung der Mathiegleichung mit quadratischer Dämpfung“  
 Zeitschr. für Angew. Math. und Mech. **48**, T256 (1968)
- [114] P. HAGEDORN  
 „Nichtlineare Schwingungen“  
 Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1978)
- [115] CH. HAYASHI  
 „Forced Oscillations in Nonlinear Systems“  
 Nippon Printing Co., Osaka (1953)
- [116] R. A. HEGSTROM  
 „Magnetic moment of atomic lithium“  
 Phys. Rev. **A11**, 421 (1975)
- [117] J.-L. HEULLY, I. LINDGREN, E. LINDROTH AND A.-M. MÅRTENSSON-PENDRILL  
 „Comment on relativistic wave equations and negative-energy states“  
 Phys. Rev. **A33**(6), 4426 (1986)
- [118] MICHAEL H. HOLZSCHEITER  
 „A Brief History in Time of Ion Traps and their Achievements in Science“  
 Physica Scripta **T59**, 69 (1995)



- [119] H. HÖNL  
„Die Intensitäten der Zeemankomponenten“  
Zeits. f. Phys. **31**, 340 (1925)
- [120] M. HUBRICH  
„Präzise Bestimmung des Magnetfeldes im Penningkäfig“  
Diplomarbeit, Institut f. Physik, Mainz (1990)
- [121] V. W. HUGHES AND T. KINOSHITA  
„Anomalous  $g$  values of the electron and muon“  
Rev. Mod. Phys. **71**, 133 (1999)
- [123] M. E. HULTS  
„Interference Effect Between Magnetic-Dipole and Electric-Quadrupole Radiation in the Atomic Spectra of Lead“  
J. Opt. Soc. Am. **56**(10), 1298 (1966)
- [124] E. R. HUNT  
„Comment on a driven nonlinear oscillator“  
Phys. Rev. Lett. **49**, 1054 (1982)
- [125] E. L. INCE  
„Tables of the elliptic cylinder functions“  
Royal Society Edinburgh Proceedings **A Mathematics**, **52**, 355 (1932)
- [126] E. L. INCE  
„Zeros and turning points“  
Royal Society Edinburgh Proceedings **A Mathematics**, **52**, 424 (1932)
- [127] P. INDELICATO  
„Projection operators in multiconfiguration Dirac-Fock calculations: Application to the ground state of heliumlike ions“  
Phys. Rev. **A51**, 1132 (1995)
- [128] P. INDELICATO  
„Correlation and Negative Continuum Effects for the Relativistic  $M1$  Transition in Two-Electron Ions using the Multiconfiguration Dirac-Fock Method“  
Phys. Rev. Lett. **77**(16), 3323 (1996)
- [129] P. INDELICATO  
„Electron Correlation Effects in Few-Electron Atoms“  
from „Atomic Physics with Heavy Ions“, vol. 26, Eds. H. F. Beyer and V. P. Shevelko, chapter IV, p. 92, Springer Verlag (1999)
- [130] P. INDELICATO, A.-M. MÅRTENSSON-PENDRILL, W. QUINT AND J. P. DESCLAUX  
„Correlation and relativistic effects on Landé  $g_J$  factors of atomic ions“  
Contribution to APAC2001, 2<sup>nd</sup> Euroconference on Atomic Physics at Accelerators: Stored Particles and Fundamental Physics, Aarhus (2001)
- [131] P. INDELICATO ET AL.  
„Relativistic Calculations for Trapped Ions“  
Hyperfine Interactions **132**, 347 (2001)

- [132] W. M. ITANO, J. C. BERGQUIST, J. J. BOLLINGER AND D. J. WINELAND  
 „Cooling Methods in Ion Traps“  
 Physica Scripta **T59**, 106 (1995)
- [133] J. B. JEFFRIES  
 „Ion Dynamics and Collision Measurements in a Penning Trap“  
 PhD Thesis, Colorado (1980)
- [134] J. B. JEFFRIES, S. E. BARLOW AND G. H. DUNN  
 „Theory of space-charge shift of ion cyclotron resonance frequencies“  
 Int. J. of Mass Spectrom. and Ion Proc. **54**, 169 (1983)
- [135] J. JIN AND D. A. CHURCH  
 „Precision Lifetimes for the  $Ca^+$   $4p\ ^2P$  Levels: Experiment Challenges Theory at the 1% Level“  
 Phys. Rev. Lett. **70**(21), 3213 (1993)
- [136] C. E. JOHNSON AND H. G. ROBINSON  
 „ $g_J$ -Factor of an Ion:  
 Determination of  $g_J(^4He^+, 1\ ^2S_{1/2})/g_J(^4He^+, 2\ ^3S_1)$ “  
 Phys. Rev. Lett. **45**(4), 250 (1980)
- [137] W. R. JOHNSON  
 „Relativistic Many-Body Calculations“  
 Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Atomic Physics in Göteborg, Eds. I. Lindgren, A. Rosén and S. Svanberg  
 Plenum Press, p. 149, NY and London (1982)
- [138] W. R. JOHNSON, D. KOLB AND K.-N. HUANG  
 „Electric-Dipole, Quadrupole, and Magnetic-Dipole Susceptibilities and Shielding Factors for Closed-Shell Ions of the He, Ne, Ar, Ni ( $Cu^+$ ), Kr,  $Pb^*$  and Xe Isoelectronic Sequences“  
 Atomic Data and Nuclear Data Tables **28**, 333 (1983)
- [139] W. R. JOHNSON, S. A. BLUNDELL, AND J. SAPIRSTEIN  
 „Finite basis sets for the Dirac equation constructed from B splines“  
 Phys. Rev. **A37**(2), 307 (1988)
- [140] W. R. JOHNSON, S. A. BLUNDELL, AND J. SAPIRSTEIN  
 „Many-body perturbation-theory calculations of energy levels along the lithium isoelectronic sequence“  
 Phys. Rev. **A37**(8), 2764 (1988)
- [141] D. W. JORDAN AND P. SMITH  
 „Nonlinear Ordinary Differential Equations“ 2<sup>nd</sup> Edition  
 Clarendon Press, Oxford (1987), chap. 7 and 9
- [142] K. JUNGSMANN, J. HOFFNAGLE, R. G. DEVOE AND R. G. BREWER  
 „Collective oscillations of stored ions“  
 Phys. Rev. **A36**(7), 3451 (1987)

---

\*Fehler im Titel. Nach den aufgelisteten Tabellen müsste es *Pd* heißen

- [143] A. E. KAPLAN  
„*Hysteresis in Cyclotron Resonance Based on Weak Relativistic-Mass Effects of the Electron*“  
Phys. Rev. Lett. **48**, 138 (1982)
- [144] H. KAUDERER  
„*Nichtlineare Mechanik*“  
Springer-Verlag, Berlin (1958), S. 473 ff.
- [145] H. P. KELLY  
„*Correlation Effects in Atoms*“  
Phys. Rev. **131**(2), 684 (1963)
- [146] A. KHINTCHINE  
„*Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse*“  
Math. Ann. **109**, 604 (1934)
- [147] T. KINOSHITA  
„*Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron - Numerical Approach*“  
in „*Quantum Electrodynamics*“ from Advanced Series on Directions in High Energy Physics, p. 218, World Scientific, Singapore (1990)
- [148] T. KINOSHITA  
„*The fine structure constant*“  
Rep. Prog. Phys. **59**, 1459 (1996)
- [149] T. KINOSHITA  
„*Fine-Structure Constant Obtained from an Improved Calculation of the Electron  $g - 2$* “  
IEEE Trans. Instrum. Measur. **46**, 108 (1997)
- [150] H. KLEINPOPPE AND J. D. SCHUMANN  
„*Ein statisches Vierpolfeld zur dreidimensionalen Stabilisierung von Elektronen*“  
Zeitschrift für angewandte Physik **22**, 152 (1967)
- [151] R. D. KNIGHT AND M. H. PRIOR  
„*Laser scanning measurement of the density distribution of confined  ${}^6\text{Li}^+$  ions*“  
J. Appl. Phys. **50**(5), 3044 (1979)
- [152] R. D. KNIGHT  
„*The general form of the quadrupole ion trap potential*“  
Int. J. of Mass Spectrom. and Ion Phys. **51**, 127 (1983)
- [153] M. KNOOP, M. VEDEL AND F. VEDEL  
„*Lifetime, collisional-quenching, and  $j$ -mixing measurements of the metastable 3D levels of  $\text{Ca}^+$* “  
Phys. Rev. **A** 52(5), 3763 (1995)

- [154] S. KOHLER, R. UTTERMAN, P. HÄNGGI AND T. DITTRICH  
 „Coherent and incoherent chaotic tunneling near singlet-doublet crossings“  
 Phys. Rev. E**58**, 7219 (1998)
- [155] D. KOLB, W. R. JOHNSON AND P. SHORER  
 „Electric and magnetic susceptibilities and shielding factors for closed-shell  
 atoms and ions of high nuclear charge“  
 Phys. Rev. A**26**, 19 (1982)
- [156] H. KOPFERMANN  
 „Über den Kerndrehimpuls der Bleisotope“  
 Naturwiss. **19**, 400 (1931)
- [157] H. KOPFERMANN  
 „Über die Kernmomente von Caesium und Blei“  
 Naturwiss. **19**, 675 (1931)
- [158] H. KOPFERMANN  
 Zeits. f. Phys. **75**, 363 (1932)
- [159] H. KOPFERMANN  
 „Nuclear Moments“  
 Academic Press Inc. Publ., NY (1958);  
 Übersetzung der deutschen Ausgabe „Kernmomente“  
 Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig (1940)
- [160] G. KOTOWSKI  
 „Lösungen der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung mit periodi-  
 scher Störfunktion beliebiger Frequenz (mit besonderer Berücksichtigung der  
 Resonanzlösungen)“  
 Zeitschr. für angew. Math. und Mech. **23**, 213 (1943)
- [161] M. KRETZSCHMAR  
 „A Theory of Anharmonic Perturbations in a Penning Trap“  
 Z. Naturforsch. **45a**, 965 (1990)
- [162] M. KRETZSCHMAR  
 „Single Particle Motion in a Penning Trap: Description in the Classical Ca-  
 nonical Formalism“  
 Physica Scripta **46**(6), 544 (1992)
- [163] M. KRETZSCHMAR  
 „Excitation of Particle Motions in a Penning Trap: Description in the Clas-  
 sical Canonical Formalism“  
 Physica Scripta **46**(6), 555 (1992)
- [164] M. KRETZSCHMAR  
 „A Quantum Mechanical Model of Rabi oscillations between two Interacting  
 Harmonic Oscillator Modes and the Interconversion of Modes in a Penning  
 Trap“  
 in ‚Trapped Charged Particles and Fundamental Physics‘, Ed. D. H. E. Dubin  
 and D. Schneider, AIP Conference Proceedings **457**, 242, Woodbury (1999)

- [165] R. DE L. KRONIG  
„Über die Intensität der Mehrfachlinien und ihrer Zeemankomponenten“  
Zeits. f. Phys. **31**, 885 (1925)
- [166] R. DE L. KRONIG  
„Über die Intensität der Mehrfachlinien und ihrer Zeemankomponenten. II.“  
Zeits. f. Phys. **33**, 261 (1925)
- [167] N. M. KRYLOW UND N. N. BOGOLJUBOW  
„Einführung in die nichtlineare Mechanik“  
Verlag der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR (1937)  
Originalausgabe: Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов · Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР
- [168] H. G. KUHN  
„Atomic Spectra“ 2<sup>nd</sup> Edition  
Longmans, London (1969)
- [169] N. V. KUKHTAREV, V. B. MARKOV, S. G. ODULOV, M. S. SOSKIN AND  
V. L. VINETSKII  
„Holographic storage in electro-optic crystals. I. steady state“  
Ferroelectrics **22**, 949 (1979)
- [170] F. KURTH  
„Optische Spektroskopie an elektrodynamisch gespeicherten  $^{40}\text{Ca}^+$ -Ionen zur  
Bestimmung der Lebensdauer des metastabilen  $3^2D_{5/2}$ -Niveaus“  
Diplomarbeit, Institut f. Physik, Mainz (1992)
- [171] C. H. KWAK AND E.-H. LEE  
„Parametric Instability Boundaries for Spatial Subharmonics in Photorefractive  
Moving Gratings: Theory and Experiments“  
Electr. & Telecomm. Res. Inst. Jour. **16**(4), 13 (1995)
- [172] H. S. LAKKARAJU AND H. A. SCHUESSLER  
„Motional side-band resonances in the microwave spectrum of stored ions“  
J. Appl. Phys. **53**(6), 3967 (1982)
- [173] W. E. LAMB, JR.  
„Internal Diamagnetic Fields“  
Phys. Rev. **60**, 817 (1941)
- [174] L. LANDAU AND E. LIFSHITZ  
„The Classical Theory of Fields“  
Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts (1951)
- [175] L. D. LANDAU UND E. M. LIFSCHITZ  
„Lehrbuch der theoretischen Physik - Bd. I Mechanik“  
Hrsg. von G. Heber  
Akademie-Verlag, Berlin (1969)  
Originalausgabe: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц·Механика  
Erschienen im Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur, Moskau (1957)

- [176] L. D. LANDAU UND E. M. LIFSCHITZ  
 „Lehrbuch der theoretischen Physik - Bd. IV Quantenelektrodynamik“  
 Hrsg. von A. Kühnel  
 Akademie-Verlag, Berlin (1991)  
 Originalausgabe: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц·Квантовая  
 Электродинамика  
 Erschienen im Verlag Nauka, Moskau (1989)
- [177] I. LANGMUIR AND K. H. KINGDON  
 „Thermionic Effects caused by Vapours of Alkali Metals“  
 Proc. Roy. Soc. of London Series A **107**, 61 (1925)
- [178] O. LAPORTE  
 „Absorption Coefficients for Thermal Neutron“  
 (Remarks on the Preceding Paper of C. T. Zahn [335])  
 Phys. Rev. **52**, 72 (1937)
- [179] L. J. LAPIDUS, D. ENZER AND G. GABRIELSE  
 „Stochastic Phase Switching of a Parametrically Driven Electron in a Pen-  
 ning Trap“  
 Phys. Rev. Lett. **83**(5), 899 (1999)
- [180] S. LEFSCHETZ  
 „Differential Equations: Geometric Theory“ 2<sup>nd</sup> Edition  
 Interscience Publishers, New York (1957), chapters IV and XII
- [181] W. R. LEO  
 „Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments“ 2<sup>nd</sup> revised  
 Edition  
 Springer Verlag, Berlin (1994)
- [182] G. Z. LI, P. ZHANG, X. FENG AND G. WERTH  
 „Collisional relaxation measurements on  $Pb^+$  hyperfine levels“  
 Z. Phys. D**25**, 103 (1993)
- [183] S.-S. LIAW  
 „Ab initio calculation of the lifetimes of 4p and 3d levels of  $Ca^+$ “  
 Phys. Rev. A**51**(3), R1723 (1995)
- [184] CH. LICHTENBERG  
 „Seitenbandkühlung an  $Ba^+$ -Ionen in einem Penningkäfig“  
 Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Mainz (1997)
- [185] CH. LICHTENBERG, G. MARX, G. TOMMASEO, P. N. GHOSH AND  
 G. WERTH  
 „Axialization, Quenching and Cooling of Barium Ions in a Penning Trap“  
 Eur. Phys. J. D**2**, 29 (1998)
- [186] I. LINDGREN AND J. MORRISON  
 „Atomic Many-Body Theory“ 2<sup>nd</sup> Edition  
 Series on Atoms and Plasmas  
 Springer Verlag, Berlin (1986)

- [187] E. LINDROTH  
„Numerical solution of the relativistic pair equation“  
Phys. Rev. **A37**(2), 316 (1988)
- [188] E. LINDROTH, A.-M. MÅRTENSSON-PENDRILL, A. YNNERMAN AND P. ÖSTER  
„Self-consistent treatment of the Breit interaction, with application to the electric dipole moment in thallium“  
J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **2**, 2447 (1989)
- [189] E. LINDROTH  
„Ab Initio Calculations of  $g_j$  factors for  $Li$ ,  $Be^+$  and  $Ba^+$ “  
Phys. Rev. **A47**(2), 961 (1993)
- [190] P. S. LINSAY  
„Period Doubling and Chaotic Behaviour in a Driven Anharmonic Oscillator“  
Phys. Rev. Lett. **47**, 1349 (1981)
- [191] A. M. LJAPUNOW  
„Das allgemeine Problem der Stabilität einer Bewegung“  
Onti (1935)  
Originalausgabe: A. M. Ляпунов · Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ
- [192] P. LORRAIN, D. R. CORSON AND F. LORRAIN  
„Electromagnetic Fields and Wave“ 3<sup>rd</sup> Edition  
W. H. Freeman and Co., New York (1988)
- [193] A. LURIO, M. MANDEL AND R. NOVICK  
„Second-Order Hyperfine and Zeeman Corrections for an ( $sl$ ) Configuration“  
Phys. Rev. **126** (5), 1758 (1962)
- [194] O. LUTZ AND G. STRICKER  
„The magnetic moment of  $^{207}Pb$  and the shielding of lead ions by water“  
Phys. Lett. **35A** (6), 397 (1971)
- [195] M. LUTZKY  
„Noether's theorem and the time-dependent harmonic oscillator“  
Phys. Lett. **68A**, 3 (1978)
- [196] F. G. MAJOR AND H. G. DEHMELT  
„Exchange-Collision Technique for the rf Spectroscopy of Stored Ions“  
Phys. Rev. **170**, 91 (1968)
- [197] F. G. MAJOR ET J. L. DUCHÈNE  
„Les structures des raies de résonance hyperfine d'ions oscillant harmoniquement dans un champ électrique“  
Journal de Physique **36**, 953 (1975)
- [198] G. MALLI AND S. FRAGA  
„Physical Properties of Many-Electron Atomic Systems Evaluated from Analytical Hartree-Fock Functions. I. Nuclear Magnetic Shielding Constants“  
Theor. Chim. Acta **5**, 275 (1966)

- [199] G. MALLI AND S. FRAGA  
„*Physical Properties of Many-Electron Atomic Systems Evaluated from Analytical Hartree-Fock Functions. I. Diamagnetic Susceptibilities*“  
Theor. Chim. Acta **5**, 284 (1966)
- [200] L. MANDELSTAM UND N. PAPALEXI  
„*Über Resonanzerscheinungen bei Frequenzteilung*“  
Zeitschr. f. Phys. **73**, 223 (1932)
- [201] L. MANDELSTAM, N. PAPALEXI, A. ANDRONOV, A. WITT ET S. CHAIKIN  
„*Exposé des recherches recentes sur les oscillations nonlinéaires*“  
J. Tech. Phys. (U.S.S.R.) **2**, 81 (1934)
- [202] M. MAREK AND I. SCHREIBER  
„*Chaotic Behaviour of Deterministic Dissipative Systems*“  
Cambridge University Press, Cambridge (1991)
- [203] A.-M. MÅRTENSSON-PENDRILL, L. PENDRILL, S. SALOMONSON, A. YNNERMANN AND H. WARSTON  
„*Reanalysis of the isotope shift and nuclear charge radii in radioactive potassium isotopes*“  
J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **23**, 1749 (1990)
- [204] G. MARX, G. TOMMASEO AND G. WERTH  
„*Precise  $g_J$ - and  $g_I$ -factor measurements of  $Ba^+$  isotopes*“  
Eur. Phys. J. D**4**, 279 (1998)
- [205] R. E. MARCH AND R. J. HUGHES  
„*Quadrupole Storage Mass Spectrometry*“  
John Wiley & Sons, NY (1989)
- [206] R. E. MARCH  
„*An Introduction to Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometry*“  
J. of Mass Spectrom. **32**, 351 (1997)
- [207] A. G. MARSHALL AND S. GUAN  
„*Observation, Manipulation and Uses for Magnetron Motion in Ion Cyclotron Resonance Mass Spectrometry*“  
Physica Scripta **T59**, 155 (1995)
- [208] É. MATHIEU  
„*Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*“  
Jour. de Math. Pures et Appliquées **13**, 137 (1868)
- [209] T. MAYER-KUCKUK  
„*Atomphysik*“  
B. G. Teubner, Stuttgart (1977)
- [210] M. D. MCGUIRE, R. PETSCH AND G. WERTH  
„*Precision determination of the ground-state hyperfine separation in  $^{199}\text{Hg}^+$  using the ion-storage technique*“  
Phys. Rev. A**17**, 1999 (1978)



- [211] N. W. MCLACHLAN  
„*Computation of the solution of Mathieu's equation*“  
Phil. Mag. **36**, 403 (1945)
- [212] N. W. MCLACHLAN  
„*Theory and Applications of Mathieu Functions*“  
Oxford University Press, New York (1947)
- [213] J. MEIXNER UND F. W. SCHÄFKE  
„*Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*“  
Springer-Verlag, Berlin (1954)
- [214] B. W. SHORE AND D. H. MENZEL  
„*Principles of Atomic Spectra*“  
John Wiley & Sons, NY (1968)
- [215] M. MINKORSKY  
„*Parametric Excitation*“  
J. of Appl. Phys. **22**(1), 49 (1951)
- [216] M. MINKORSKY  
„*Nonlinear Oscillations*“  
D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey (1962)
- [217] P. J. MOHR, G. PLUNIER AND G. SOFF  
„*QED corrections in heavy atoms*“  
Phys. Rep. **293**, 227 (1998)
- [218] P. M. MORSE AND H. FESHBACH  
„*Methods of Theoretical Physics*“  
McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1953), Part I, pp. 556-568
- [219] S. MROZOWSKI  
„*Hyperfine Structure of the Quadrupole Line 2815Å*“  
Phys. Rev. **57**, 207 (1940)
- [220] S. MROZOWSKI  
„*Hyperfine Structure and Intensities of the  
Forbidden Lines of PbI*“  
Phys. Rev. **58**, 1086 (1940)
- [221] S. MROZOWSKI  
„*Forbidden Lines in the Laboratory*“  
Rev. Mod. Phys. **16**, 153 (1944)
- [222] NBS-Tables  
„*National Bureau of Standards*“  
Tables relating to Mathieu functions  
Columbia University Press, New York (1951)
- [223] N. H. NAYFEH AND D. T. MOOK  
„*Nonlinear Oscillations*“  
Wiley & Sons, New York (1979), pp. 338-348

- [224] W. NEUHAUSER, M. HOHENSTATT, P. E. TOSCHEK AND H. G. DEHMELT  
 „Virtual Observation and Optical Cooling of Electrodynamically Contained Ions“  
 Appl. Phys. **17**, 123 (1978)
- [225] G. NICOLIS AND I. PRIGOGINE  
 „Self-Organization in Nonequilibrium Systems“  
 Wiley & Sons, New York (1977), Part II, pp. 63-220
- [226] W. OPECHOWSKI  
 Zeits. f. Phys. **109**, 485 (1938)
- [227] L. S. ORNSTEIN AND H. C. BURGER  
 „Strahlungsgesetz und Intensität von Mehrfachlinien“  
 Zeits. f. Phys. **24**, 41 (1924)
- [228] L. S. ORNSTEIN AND H. C. BURGER  
 „Intensitäten der Komponenten im Zeemaneffekt“  
 Zeits. f. Phys. **28**, 135 (1924);  
 „Nachschrift zu der Arbeit Intensität der Komponenten im Zeemaneffekt“  
 Zeits. f. Phys. **29**, 241 (1924)
- [229] L. S. ORNSTEIN AND H. C. BURGER  
 „Intensität von Multiplettlinien“  
 Zeits. f. Phys. **31**, 355 (1925)
- [230] C. E. PEARSON  
 „Handbook of Applied Mathematics - Selected Results and Methods“  
 Van Nostrand Reinhold Company, New York (1974)
- [231] F. PENNING  
 „Die Glimmentladung bei niedrigem Druck zwischen koaxialen Zylindern in einem axialen Magnetfeld“  
 Physica **III**, 873 (1936)
- [232] T. PFEIL  
 „ $g_J$ -Faktor Bestimmung an Calcium Ionen in einer Penning-Falle durch Anwendung des Doppelresonanzprinzips“  
 Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Mainz (2001)
- [233] J. R. PIERCE  
 „Theory and Design of Electron Beams“ 2<sup>nd</sup> Edition  
 D. van Nostrand Co., New York (1954). First published in 1949.
- [234] W. G. PROCTOR  
 „On the Magnetic Moments of  $Tl^{203}$ ,  $Tl^{205}$ ,  $Sn^{115}$ ,  $Sn^{117}$ ,  $Sn^{119}$ ,  $Cd^{111}$ ,  $Cd^{113}$  and  $Pb^{207}$ “  
 Phys. Rev. **79**(1), 35 (1950)
- [235] I. I. RABI  
 „Space Quantization in an Gyating Magnetic Field“  
 Phys. Rev. **51**, 652 (1937)

- [236] N. F. RAMSEY  
„*Nuclear Moments*“  
Wiley & Sons, New York (1953)
- [237] N. F. RAMSEY  
„*Molecular Beams*“  
Oxford University Press, London (1955)
- [238] P. RAGHAVAN  
„*Table of Nuclear Moments*“  
Atomic Data and Nuclear Data Tables **42**, 282 (1989)
- [239] M. A. N. RAZVI, X. Z. CHU, R. ALHEIT, G. WERTH AND R. BLÜMEL  
„*Fractional frequency collective parametric resonances of an ion cloud in a Paul trap*“  
Phys. Rev. A **58**, R34 (1998)
- [240] J. REZENDE  
„*Quantum systems with time-dependent harmonic part and the Morse index*“  
J. Math. Phys. **25**, 3264 (1984)
- [241] G. C. RODRIGUES, M. A. OURDANE, J. BIEROÑ, P. INDELICATO AND E. LINDROTH  
„*Relativistic and many-body effects on total binding energies of cesium ions*“  
Phys. Rev. A **63**, 012510 (2001)
- [242] M. E. ROSE  
„*Relativistic Electron Theory*“  
John Wiley & Sons, NY (1961)
- [243] J. L. ROSE AND L. P. GRANATH  
„*The Hyperfine Structure of Lead*“  
Phys. Rev. **40**, 760 (1932)
- [244] J. E. ROSENTHAL AND G. BREIT  
„*The isotope shift in hyperfine structure*“  
Phys. Rev. **41**, 459 (1932)
- [245] A. ROTH  
„*Bestimmung der radiativen Lebensdauer des  $6p^2P_{3/2}$ -Niveaus des  $Pb^+$  und Messung der Hyperfeinstrukturaufspaltung des Grundzustandes des  $^{207}Pb^+$* “  
Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Mainz (1988)
- [246] A. ROTH AND G. WERTH  
„*Measurement of the ground state hyperfine splitting in  $^{207}PbII$* “  
Z. Phys. D **9**, 265 (1988)
- [247] A. ROTH, CH. GERZ, D. WILSDORF AND G. WERTH  
„*Lifetime of the metastable  $6P_{3/2}$  level of  $PbII$* “  
Z. Phys. D **11**, 283 (1989)
- [248] H. RUBIN  
„*Anecdote on power series expansions of Mathieu functions*“  
J. Math. Phys. **43**, 339 (1964)

- [249] A. RUBINOWICZ  
 „Zeemaneffekt der Quadrupollinien“  
 Zeits. f. Phys. **61**, 338 (1930)
- [250] A. RUBINOWICZ  
 „Über Intensitäten und Summenregeln in normalen Quadrupolmultipletts“  
 Zeits. f. Phys. **65**, 662 (1930)
- [251] J. J. SAKURAI  
 „Advanced Quantum Mechanics“  
 Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1967)
- [252] J. J. SAKURAI  
 „Modern Quantum Mechanics“ Revised Edition  
 Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1994)
- [253] B. E. A. SALEH AND M. C. TEICH  
 „Fundamentals of Photonics“  
 John Wiley & Sons, New York (1991)
- [254] S. SALOMONSON AND P. ÖSTER  
 „Relativistic all-order pair functions from a discretized single-particle Dirac Hamiltonian“  
 Phys. Rev. **A40**(10), 5548 (1989)
- [255] S. SALOMONSON AND P. ÖSTER  
 „Numerical solution of the coupled-cluster single- and double-excitation equations with application to Be and Li<sup>-</sup>“  
 Phys. Rev. **A41**(9), 4670 (1990)
- [256] J. P. SANTOS, J. P. MARQUES, F. PARENTE, E. LINDROTH, S. BOUCARD AND P. INDELICATO  
 „Multiconfiguration Dirac-Fock Calculation of  $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$  transition energies in highly ionized bismuth, thorium and uranium“  
 Eur. Phys. J **D**(1), 149 (1998)
- [257] G. SAVARD, S. BECKER, G. BOLLEN, H. J. KLUGE, R. B. MOORE, T. OTTO, L. SCHWEIKHARD, H. STOLZENBERG AND U. WIESS  
 „A new cooling technique for heavy ions in a Penning Trap“  
 Phys. Lett. **A158**, 247 (1991)
- [258] H. SCHAAF, U. SCHMELING AND G. WERTH  
 „Trapped Ion Density Distribution in the Presence of He-Buffer Gas“  
 Appl. Phys. **25**, 249 (1981)
- [259] B. SCHÄFER  
 „Untersuchung gebrochen rationaler parametrischer Bewegungsresonanzen in einer Paul-Falle“  
 Diplomarbeit, Inst. f. Phys., Mainz (1999)
- [260] F. W. SCHÄFKE  
 „Über die Stabilitätskarte der Mathieschen Differentialgleichung“  
 Math. Nachr. **4**, 175 (1950)

- [261] J. P. SCHERMANN AND F. G. MAJOR  
„*Characteristics of Electron-Free Plasma Confinement in an rf Quadrupole Field*“  
Appl. Phys. **16**, 225 (1978)
- [262] R. SCHREINER  
„*Optische Bestimmung der Hyperfeinstrukturaufspaltung des  $6^2P_{1/2}$ -Grundzustandes und des  $6^2P_{3/2}$ -Zustandes von  $^{207}\text{Pb}$* “  
Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Mainz (1991)
- [263] H. A. SCHUESSLER, E. N. FORTSON AND H. G. DEHMELT  
„*Hyperfine Structure of the Ground State of  $^3\text{He}^+$  by the Ion-Storage Exchange-Collision Technique*“  
Phys. Rev. **187**, 5 (1969)
- [264] H. A. SCHUESSLER  
„*The effect of the ion motion on the radio frequency spectrum of stored free ions*“  
Appl. Phys. Lett. **18**(4), 117 (1971)
- [265] J. SCHWINGER  
„*On Nonadiabatic Processes in Inhomogenous Fields*“  
Phys. Rev. **51**, 648 (1937)
- [266] J. SCHWINGER  
„*Quantum Mechanics - Symbolism of Atomic Measurements*“  
Edited by B.-G. Englert  
Springer Verlag, Berlin (2001)
- [267] P. SEELIG ET AL.  
„*Ground State Hyperfine Splitting of Hydrogenlike  $^{207}\text{Pb}^{81+}$  by Laser Excitation of a Bunched Ion Beam in the GSI Experimental Storage Ring*“  
Phys. Rev. Lett. **81** (22), 4824 (1998)
- [268] A. DE-SHALIT AND I. TALMI  
„*Nuclear Shell Theory*“  
Academic Press, NY and London (1963)
- [269] G. H. SHORTLEY  
„*The Computation of Quadrupole and Magnetic Dipole Transition Probabilities*“  
Phys. Rev. **57**, 225 (1940)
- [270] A. E. SIEGMANN  
„*Lasers*“  
University Science Books, Mill Valley, California (1986)
- [271] K. S. SINGWI AND A. SJÖLANDER  
„*Resonance Absorption of Nuclear Gamma Rays and the Dynamics of Atomic Motions*“  
Phys. Rev. **120**, 1093 (1960)

- [272] R. SIPS  
„*Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions d'onde sphéroïdales*“  
Trans. Am. Math. Soc. **66**, 93 (1949)
- [273] M. D. SIRKIS AND N. HOLONYAK, JR.  
„*Currents Induced by Moving Charges*“  
Am. J. Phys. **34**, 943 (1966)
- [274] C. P. SLICHTER  
„*Principles of Magnetic Resonance*“  
Harper & Row, NY (1963), pp. 127-142
- [275] W. W. SMITH AND A. GALLAGHER  
„*Radiative Lifetime of the First  $^2P_{3/2}$  State of Ionized Calcium and Magnesium by the Hanle Effect*“  
Phys. Rev. **145**(1), 26 (1966)
- [276] I. N. SNEDDON  
„*The Use of Integral Transforms*“  
Tata McGraw-Hill Publishing Comp. Ltd, New Delhi (1974)
- [277] I. I. SOBEL'MAN  
„*Introduction to the theory of atomic spectra*“  
Pergamon Press, Oxford (1972)
- [278] I. I. SOBEL'MAN  
„*Atomic spectra and relative transitions*“ 2<sup>nd</sup> Edition  
Springer Verlag, Berlin (1996)
- [279] L. SPITZER JR.  
„*Physics of fully ionized gases*“ 2<sup>nd</sup> revised Edition  
Interscience Publishers, NY (1962), chap. 5
- [280] S. K.-H. STAHL  
„*Aufbau eines Experimentes zur Bestimmung elektronischer g-Faktoren einzelner wasserstoffähnlicher Ionen*“  
Dissertation, Institut für Physik, Mainz (1998)
- [281] A. F. STEVENSON  
„*On the Theory of the Magnetic Resonance Method of Determining Nuclear Moments*“  
Phys. Rev. **58**, 1061 (1940)
- [282] J. A. STRATTON, P. M. MORSE, L. J. CHU AND R. A. HUTNER  
„*Elliptic cylinder and spherical wave functions*“  
John Wiley & Sons, Inc., New York (1941)
- [283] M. J. O. STRUTT  
„*Der Verlauf der Grenzkurven zwischen labilen und stabilen Lösungsgebieten der Mathieuschen Differentialgleichung*“  
Math. Ann. **99**, 625 (1928)

- [284] M. J. O. STRUTT  
„Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik“  
Ergebn. Math. und Grenzgeb., Bd. **I** Heft 3  
Springer-Verlag, Berlin (1980), S. 199
- [285] J. SUCHER  
„Foundations of the relativistic theory of many-electron atoms“  
Phys. Rev. **A22**, 348 (1980)
- [286] O. P. SUSHKOV, V. V. FLAMBAUM AND I. B. KHRIPLOVICH  
„Theory of hyperfine structure of heavy atoms“  
Opt. Spectrosc. (USSR) **44**(1), 2 (1978)
- [287] T. TAMIR  
„Characteristic exponents of Mathieu equations“  
Math. Comp. **116**, 77 (1962)
- [288] J. TAN AND G. GABRIELSE  
„One electron in an orthogonalized cylindrical Penning trap“  
Appl. Phys. Lett. **55**, 2144 (1989)
- [289] J. TAN AND G. GABRIELSE  
„Synchronization of Parametrically Pumped Electron Oscillators with Phase Bistability“  
Phys. Rev. Lett. **67**(22), 3090 (1991)
- [290] J. TAN AND G. GABRIELSE  
„Parametrically pumped electron oscillators“  
Phys. Rev. **A48**(4), 3105 (1993)
- [291] B. S. TANENBAUM  
„Plasma Physics“  
McGraw-Hill Book Company, New York (1967)
- [292] J. H. TAYLOR AND K. S. NARENDRA  
„Stability Regions for the Damped Mathieu Equation“  
SIAM J. on Appl. Math. **17**(2), 343 (1969)
- [293] J. TESTA, J. PÉREZ AND C. JEFFRIES  
„Evidence for Universal Chaotic Behaviour of a Driven Nonlinear Oscillator“  
Phys. Rev. Lett. **48**, 714 (1982)
- [294] J. S. TIEDEMAN AND H. G. ROBINSON  
„Determination of  $g_J$  ( $^1H, 1^2S_{1/2}$ )/ $g_s(e)$ : Test of Mass-Independent Corrections“  
Phys. Rev. Lett. **39**(10), 602 (1977)
- [295] M. THORWART, P. REIMANN AND P. HÄNGGI  
„Iterative algorithm versus analytic solutions of the parametrically driven dissipative quantum harmonic oscillator“  
Phys. Rev. **E62**(4), 5808 (2000)

- [296] J. F. J. TODD, G. LAWSON AND R. F. BONNER  
„*Quadrupole Ion Traps*“, Chapter VIII, p. 181  
from „*Quadrupole Mass Spectrometry and its applications*“, P. H. Dawson  
Ed.,  
Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam (1976)
- [297] W. TODT  
MPI Chemie, Mainz (2001), private Mitteilung
- [298] M. TOMASELLI ET AL.  
„*Hyperfine splittings of hydrogenlike ions and the dynamics-correlation model  
for one-hole nuclei*“  
Phys. Rev. C**58**(3), 1524 (1998)
- [299] G. TOMMASEO  
„*Versuche zur Signalverbesserung bei g-Faktoren Messungen an gespeicherten  
Barium Ionen in einer Penningfalle: Frequenzverdopplung eines MOPA-  
Lasersystems und Anwendung des Puffergaskühlens mit Seitenbandanregung*“  
Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Mainz (1997)
- [300] H. C. TORREY  
„*Notes on Intensities of Radiofrequency Spectra*“  
Phys. Rev. **59**, 293 (1941)
- [301] C. H. TOWNES AND A. L. SCHAWLOW  
„*Microwave Spectroscopy*“  
McGraw-Hill Book Company, New York (1955)
- [302] S. TRAPP  
„*Doppelresonanzmessung an in einer Penningfalle gespeicherter Europium-  
Ionen zur Bestimmung des Kern-g-Faktors*“  
Dissertation, Inst. f. Physik, Mainz (2000)
- [303] C. H. TSENG AND G. GABRIELSE  
„*One-electron parametric oscillator*“  
Appl. Phys. **B60**, 95 (1995)
- [304] C. H. TSENG, D. ENZER, G. GABRIELSE AND F. L. WALLS  
„*1-bit memory using one electron: Parametric oscillations in a Penning trap*“  
Phys. Rev. **A59**(3), 2094 (1999)
- [305] L. VÁLYI  
„*Atom and Ions Sources*“  
John Wiley & Sons, London (1977)
- [306] F. VEDEL, J. ANDRÉ, M. VEDEL AND G. BRINCOURT  
„*Computed energy and spatial statistical properties of stored ions cooled by a  
buffer gas*“  
Phys. Rev. **A27**(5), 2321 (1983)
- [307] F. VEDEL AND J. ANDRÉ  
„*Influence of space charge on the computed statistical properties of stored*



- ions cooled by a buffer gas in a quadrupole rf trap*  
Phys. Rev. A **29**(4), 2098 (1984)
- [308] F. VEDEL AND M. VEDEL  
„Nonlinear effects in the detection of stored ions“  
Phys. Rev. A **41**, 2348 (1990)
- [309] L. VESETH  
„Many-body calculations of atomic properties: I.  $g_J$  factors“  
J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **16**, 2891 (1983)
- [310] S. F. WATANABE AND H. G. ROBINSON  
„Motional narrowing of Zeeman resonance lineshapes  
I. Theoretical development“  
J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **10**, 931 (1977)
- [311] G. N. WATSON  
„A Treatise on the Theory of Bessel Functions“ 2<sup>nd</sup> Edition  
Cambridge at the University Press, (1944), chapter XI
- [312] J. WATSON  
„Introduction to mass spectrometry“ 2<sup>nd</sup> Edition  
Raven Press, New York (1985)
- [313] E. W. WEBER, H. ACKERMANN, N. S. LAULAINEN AND G. ZU PUTLITZ  
„Optical Pumping of Ions in Buffer Gases - II. Spin Depolarization of the  
 $5^2S_{1/2}$  Ground State of  $Sr^+$  ( $I=0$ ) in Collisions with Rare Gas Atoms“  
Z. Phys. **259**, 371 (1973)
- [314] E. W. WEBER, H. ACKERMANN, N. S. LAULAINEN AND G. ZU PUTLITZ  
„Optical Pumping of Ions in Buffer Gases - III. Depolarization of the  $5^2P_{3/2}$   
Excited State of  $Sr^+$  ( $I=0$ ) in Collisions with Rare Gas Atoms“  
Z. Phys. **260**, 341 (1973)
- [315] M. R. WEHR AND J. A. RICHARDS, JR.  
„Physics of the atoms“ 2<sup>nd</sup> Edition  
Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1972)
- [316] S. WEINBERG  
„Precision Tests of Quantum Mechanics“  
Phys. Rev. Lett. **62**(5), 485 (1989)
- [317] U. WEISS  
„Quantum Dissipative Systems“ 2<sup>nd</sup> Edition  
World Scientific, Singapore (1999). First edition 1993
- [318] N. WIENER  
„Generalized Harmonic Analysis“  
Acta Math. **55**, 117 (1930)
- [319] K. WIESENFELD AND P. HADLEY  
„Attractor Crowding in Oscillator Arrays“  
Phys. Rev. Lett. **62**(12), 1335 (1989);

- L. FABINY AND K. WIESENFELD  
 „Clustering behavior of oscillator arrays“  
 Phys. Rev. A **43**(6), 2640 (1991)
- [320] R. G. WILSON AND G. R. BREWER  
 „Ion Beams With Applications to Ion Implantation“  
 R. E. Krieger Publishing Company, Inc. Krieger Drive Malabar, Florida  
 (1973)  
 Reprint edition published by Wiley & Sons, NY (1979)
- [321] G. WERTH  
 „Hyperfine Structure and  $g$ -Factor Measurements in Ion Traps“  
 Physica Scripta T **59**, 206 (1995)
- [322] F. A. WHITE AND G. M. WOOD  
 „Mass Spectrometry-Applications in Science and Engineering“  
 John Wiley & Sons, New York (1986)
- [323] H. E. WHITE AND A. Y. ELIASON  
 „Relative Intensity Tables for Spectrum Lines“  
 Phys. Rev. **44**, 753 (1933)
- [324] E. T. WHITTAKER  
 „On the general solution of Mathieu's equation“  
 Proc. Edinburgh Math. Soc. **32**, 75 (1914)
- [325] E. T. WHITTAKER AND G. N. WATSON  
 „A Course of Modern Analysis“ 4<sup>th</sup> Edition, reprinted  
 Cambridge at the University Press (1958), chapter XIX (1<sup>st</sup> Edition 1902)
- [326] D. WINELAND AND H. DEHMELT  
 „Electrostatic Frequency Shifts and Broadening in a Penning trap“  
 Bull. Amer. Phys. Soc. **19**, 642 (1974)
- [327] D. WINELAND AND H. DEHMELT  
 „Line shifts and widths of axial, cyclotron and  $G-2$  resonances in tailored,  
 stored electron (ion) cloud“  
 Int. J. of Mass Spectrom. and Ion Phys. **16**, 338 (1975)
- [328] D. WINELAND AND H. DEHMELT  
 „Principles of the stored ion calorimeter“  
 J. Appl. Phys. **46**, 919 (1975)
- [329] D. J. WINELAND, J. J. BOLLINGER AND W. M. ITANO  
 „Laser-Fluorescence Mass Spectroscopy“  
 Phys. Rev. Lett. **50**, 628 (1983) und 1333E (1983) (Erratum-Blatt)
- [330] D. J. WINELAND, W. M. ITANO AND R. S. VAN DYCK JR.  
 „High-Resolution Spectroscopy of Stored Ions“  
 Adv. Atomic & Mol. Phys. **19**, 135 (1983)

- [331] S. WOLFRAM  
„Das MATHEMATICA® Buch - die offizielle Dokumentation“  
3. Auflage, Mathematica Version 3  
Addison Wesley Longman Verlag, Bonn (1987)
- [332] A. YARIV  
„Quantum Electronics“ 2<sup>nd</sup> Edition  
Wiley & Sons, New York (1967)
- [333] A. YARIV  
„Introduction to Optical Electronics“ 2<sup>nd</sup> Edition  
Holt, Rinehart & Winston, New York (1976)
- [334] J. YU, M. DESAINTFUSCIEN AND F. PLUMELLE  
„Ion Density Limitation in a Penning Trap due to the Combined Effect of Asymmetry and Space Charge“  
Appl. Phys. **B48**, 51 (1989)
- [335] C. T. ZAHN  
„Absorption Coefficients for Thermal Neutrons“  
Phys. Rev. **52**, 67 (1937)
- [336] S. J. ZAROODNY  
„An elementary review of the Mathieu-Hill equation of real variable based on numerical solutions“  
Ballistic Research Laboratory Memorandum Report 878, Aberdeen Proving Ground, Md. (1955)
- [337] H. ZHANG  
„Ion Sources“  
Science Press, Beijing and Springer-Verlag, Berlin (1999)
- [338] L. A. VIEHLAND AND E. A. MASON  
„Gaseous Ion Mobility in Electric Fields of Arbitrary Strength“  
Ann. of Phys. **91**, 499 (1975)
- [339] E. W. MCDANIEL AND E. A. MASON  
„The Mobility and Diffusion of Ions in Gases“  
Wiley & Sons, New York (1973)
- [340] H. W. ELLIS, R. Y. PAI, E. W. MCDANIEL, E. A. MASON AND L. A. VIEHLAND  
„Transport properties of gaseous ions over a wide energy range“  
Atomic Data and Nuclear Data Tables **17**, 177 (1976)
- [341] H. W. ELLIS, E. W. MCDANIEL, D. L. ALBRITTON, L. A. VIEHLAND, S. L. LIN AND E. A. MASON  
„Transport properties of gaseous ions over a wide energy range. Part II“  
Atomic Data and Nuclear Data Tables **22**, 179 (1978)

*Soll ich  
einen Gedanken gefangennehmen,  
abführen in eine erleuchtete Satzstelle?  
Aug und Ohr verköstigen  
mit Worthappen erster Güte?  
erforschen die Libido eines Vokals,  
ermitteln die Liebhaberwerte unserer Konsonanten?*

*Muß ich  
mit dem verhagelten Kopf,  
mit dem Schreibkrampf in dieser Hand,  
unter dreihundertnächtigem Druck  
einreißen das Papier,  
wegfegen die angezettelten Wortopern,  
vernichtend so: ich du und er sie es*

*wir ihr?*

*(Soll doch. Sollen die anderen.)*

*Mein Teil, es soll verloren gehen.<sup>a</sup>*

---

<sup>a</sup>Auszug aus „Keine Delikatessen“ (1963) von Ingeborg Bachmann.  
Aus: Ingeborg Bachmann Sämtliche Gedichte, Piper Verlag, München  
(2002), S. 182.

## Curriculum vitae et studiorum

<b>Name</b>	Giovanni Tommaseo
<b>Geburtsdatum/-ort</b>	4. April 1972, in Mainz
<b>Staatsangehörigkeit</b>	italienisch
<b>Adresse</b>	Wallstrasse 59, 55122 Mainz
<b>Schulbildung</b>	1978-1982 Besuch der Eisgrubschule (Grundschule) 1982-1984 Besuch der Anne-Frank Realschule 1984-1991 Besuch des staatlichen, neusprachlichen, naturwissenschaftlichen Gymnasiums Mainz-Gonsenheim (GyGo), Abitur am 3. Juni 1991
<b>Sprachkenntnisse</b>	italienisch, französisch, englisch
<b>Studium</b>	WS92/93 Immatrikulation an der Johannes Gutenberg Universität, Studiengang Physik 21. Oktober 1994 Bestehen der Diplom-Vorprüfung 12. Dezember 1997 Bestehen der Diplom-Hauptprüfung, Titel der Diplomarbeit: „ <i>Versuche zur Signalverbesserung bei g-Faktoren Messungen an gespeicherten Barium Ionen in einer Penningfalle: Frequenzverdopplung eines MOPA-Lasersystems und Anwendung des Puffergaskühlens mit Seitenbandanregung</i> “
<b>Wissenschaftliche Tätigkeit</b>	Ab 1. Oktober 1998 Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Johannes Gutenberg Universität, Beginn der Promotion in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. G. Werth. WS97/98 Assistent in der Kursvorlesung „ <i>Theoretische Physik VI</i> “ ( <i>Höhere Quantenmechanik und Quantenelektrodynamik</i> ) SS98–SS99 Assistent im Anfängerpraktikum für Naturwissenschaftler WS99/00–WS01/02 Assistent im Fortgeschrittenenpraktikum