



**Ein, zwei Punkte zu
Nichtkommutativer Geometrie
und
Quantenfeldtheorie auf diskreten Räumen**

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz
Christian Pösel
geb. in Flörsheim
Mainz, 2002

mündliche Prüfung: 27. Juni 2002

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | NKG und Diskretisierung auf zwei Punkte | 5 |
| 2.1 | Diskretisierung auf zwei Punkte | 5 |
| 2.2 | Die Algebra | 8 |
| 2.2.1 | Grundlegendes zur Algebra | 8 |
| 2.2.2 | Differenziale | 10 |
| 2.2.3 | Normen | 13 |
| 2.2.4 | Graduierung | 16 |
| 2.2.5 | Integrale | 17 |
| 2.3 | Zwischenbilanz | 18 |
| 3 | Yang-Mills-Theorie auf zwei Punkten | 19 |
| 3.1 | Das spektrale Tripel | 19 |
| 3.2 | Die Yang-Mills-Wirkung | 21 |
| 3.3 | Deformierte Eichtransformationen | 24 |
| 3.4 | Zwischenbilanz | 28 |
| 4 | Eine Yang-Mills-Theorie für zwei Raum-Zeit-Punkte | 29 |
| 4.1 | Die Produktalgebra | 31 |
| 4.2 | Die Differenzialalgebra | 33 |
| 4.3 | Yang-Mills-Wirkung auf zwei Raum-Zeit-Punkten | 35 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.4 | Eichtransformationen auf zwei Raum-Zeit-Punkten | 39 |
| 5 | Quantenfeldtheorie auf zwei Punkten | 43 |
| 5.1 | Freie Propagatoren | 46 |
| 5.2 | Das volle Modell | 48 |
| 6 | Ein spontan gebrochenes Modell | 59 |
| 6.1 | Diagrammatik | 61 |
| 6.2 | Renormierung | 64 |
| 7 | Zusammenfassung und Ausblick | 73 |
| A | Abel'sches Higgs-Modell in der NKG | 79 |
| B | Konvergenz des Wirkungsfunktional | 83 |
| C | Elemente aus der Graphentheorie | 85 |
| D | Dyson-Schwinger-Gleichungen | 89 |
| E | Zur Notation von Ableitungen | 95 |
| F | Bemerkungen zur Renormierung | 99 |
| G | Programme | 105 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Schematischer Aufbau der Arbeit. | 2 |
| 2.1 | Diskretisierung des Kontinuums. | 6 |
| 3.1 | Der Zwei-Punkte-Raum; Der Raum der inneren Struktur. | 21 |
| 3.2 | Das deformierte Potenzial für $\mu = g = 1$ und $c = 0.8$ | 24 |
| 3.3 | Das undeformierte Potenzial für $\mu = g = 1$ und $c = 1$ | 24 |
| 3.4 | Das Minimum des deformierten Potenzials für $\mu = g = 1$ bei verschiedenen Werten von c | 25 |
| 3.5 | Der Schnitt bei $y = 0$ sieht für alle Potenziale gleich aus. Higgs-Masse μ und Masselosigkeit des Goldstone-Bosons sind unabhängig von der Deformation. | 25 |
| 3.6 | Die deformierten unitären Transformationen für $c = 0.875$ | 27 |
| 4.1 | Die Zwei-Punkte-Raum-Zeit, die an jedem <i>Raum-Zeit</i> -Punkt einen inneren Zwei-Punkte-Raum angeheftet hat. | 30 |
| 5.1 | Krawatten-Graph in elfter Schleifenordnung. | 57 |
| 6.1 | Schnitt 1 mit $\mu = g = \xi_1 = 1$ für das klassische Higgs-Potenzial. | 67 |
| 6.2 | Schnitt der Wirkung in der x_1 - x_2 -Ebene | 70 |
| 6.3 | Schnitt der Wirkung in der x_1 - y_1 -Ebene | 71 |
| 7.1 | Schematischer Aufbau der Arbeit. | 75 |
| C.1 | Isomere Alkohole. | 87 |
| F.1 | Eine etwas andere Zwei-Punkte-Symmetrie. | 99 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Multiplikationstabelle der Basiselemente. | 32 |
| 5.1 | Die Quantenzahlen aller vorkommenden Felder. | 46 |
| 5.2 | Der Indexschlüssel für das große Modell. | 54 |
| 6.1 | Der Indexschlüssel für das spontan gebrochene Modell. | 60 |
| 6.2 | Die 16 Renormierungsbedingungen. | 66 |
| 6.3 | Die unrenormierte Wirkung an den Renormierungspunkten. | 67 |
| C.1 | Beispiele zur Euler'schen Formel. | 88 |

Das Mögliche ist beinahe unendlich, das Wirkliche streng begrenzt, weil doch nur eine von allen Möglichkeiten zur Wirklichkeit werden kann. Das Wirkliche ist nur ein Sonderfall des Möglichen und deshalb auch anders denkbar. Daraus folgt, dass wir das Wirkliche umzudenken haben, um ins Mögliche vorzustoßen.

Dr. h. c. Isaak Kohler in *Justiz* von Friedrich Dürrenmatt

Kapitel 1

Einleitung

Über viele Jahre hinweg wurden wieder und wieder Argumente angeführt, die diskreten Räumen gegenüber kontinuierlichen Räumen eine fundamentalere Rolle zusprechen. Viele Ansätze basieren auf der vierdimensionalen Raum-Zeit, die ab einer bestimmten Längenskala eine granulare Struktur aufweist und gewissen Vertauschungsrelationen entspricht [22]. Es gab Überlegungen zu klassischer und Quantenfeldtheorie [31], [42], [48] auf diskreten Räumen [47]. Die Endlichkeit der Entropie eines schwarzen Lochs veranlasste 't Hooft, über diskrete Strukturen der Raum-Zeit bei der Planck-Skala nachzudenken. Zur Diskretheit von Raum und Zeit existieren viele interessante Ideen, wie zum Beispiel in [21], [6], [1], [3], [45], [39], [29], [34]. Diskretisierungen in Form von Gittertheorien wurden durch eine bestimmte Deformation des gewöhnlichen Kalküls von Differenzialformen in Kontinuumstheorien überführt [12], [13, 18], [40].

Unser Zugang zur diskreten Welt wird durch neuere Überlegungen der Nichtkommutativen Geometrie (NKG) bestimmt [10], [33], [24]. Seit ca. 15 Jahren gibt es Anstrengungen und auch Fortschritte, Physik mit Hilfe von Nichtkommutativer Geometrie besser zu verstehen. Nur eine von vielen Möglichkeiten ist die Reformulierung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik [9], [11], [41]. Unter anderem gelingt es, auch den Higgs-Mechanismus [25], [28] geometrisch zu beschreiben. Das Higgs-Feld wird in der NKG in Form eines Zusammenhangs auf einer zweielementigen Menge beschrieben.

Aufbauend auf der Arbeit von R. Häußling [26] wollen wir in dieser Arbeit verschiedene Ziele verfolgen: Es soll die Quantisierung einer nulldimensionalen „Raum-Zeit“ untersucht werden [36]. Unter dem Prototyp einer Raum-Zeit verstehen wir zwei Punkte, die es ermöglichen, von einem Zusammenhang zu sprechen und die es vor allem gestatten, Eichfelder einzubauen. Ein weiteres Ziel wird es sein, Feynman-Graphen in einer nulldimensionalen Theorie abzuzählen und entsprechende Feynman-Regeln zum Berechnen von Diagrammen aufzustellen. Eine besondere Rolle werden Termini, die in der Quantenfeldtheorie ihren Ursprung haben, gewidmet. Eine der

Eigenschaften der Quantenfeldtheorie in Null Dimensionen ist die Endlichkeit der relevanten Größen. In diesem Rahmen werden wir in der Lage sein, Begriffe frei von Komplikationen, die durch etwaige Divergenzen oder Schwierigkeiten technischer Natur verursacht werden könnten, zu diskutieren. Dazu gehören unter anderem Eichfixierungen, Geistbeiträge, Slavnov-Taylor-Identität und sogar das Herz einer jeden Quantenfeldtheorie: Die Renormierung.

Den Aufbau der vorliegenden Arbeit wollen wir anhand des folgenden Schemas veranschaulichen:

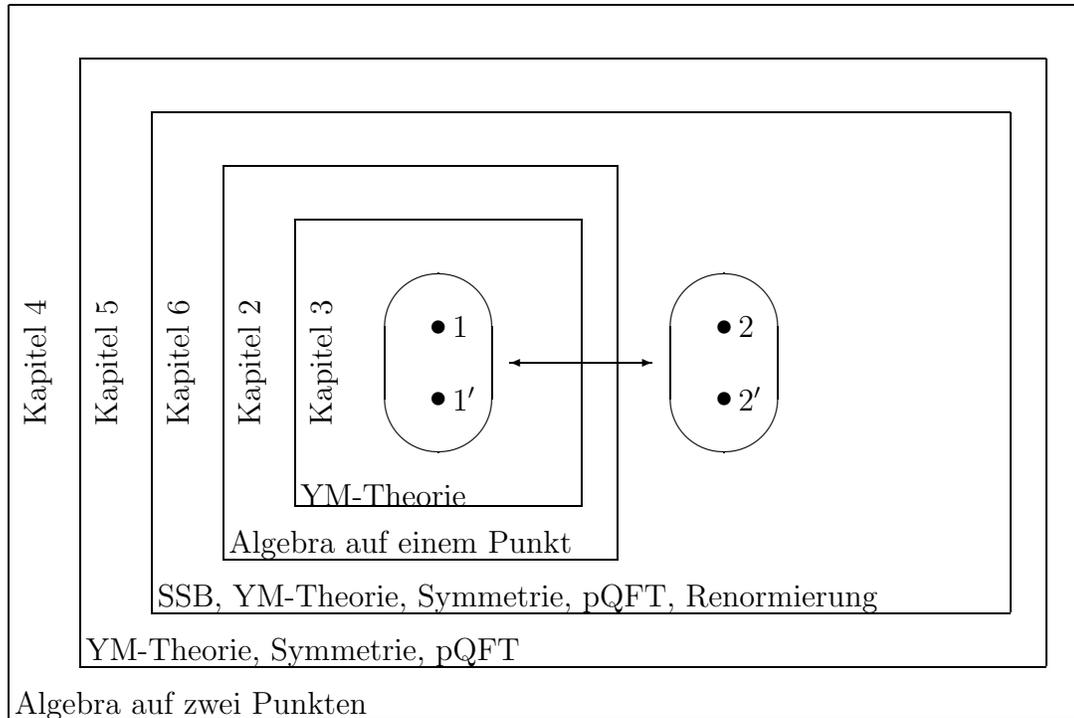


Abbildung 1.1: Schematischer Aufbau der Arbeit.

Zu Beginn der Arbeit werden wir den Aspekt der Beschreibung des Higgs-Feldes als Zusammenhang erneut aufgreifen und die Algebra auf einem Zwei-Punkte-Raum genau studieren. Im zweiten Kapitel stellen wir allgemeine Anforderungen, die sowohl den Ansprüchen von Gitteransätzen als auch der Nichtkommutativen Geometrie genügen. Eine Folge der Untersuchungen wird es sein, dass das Produkt der Algebra durch einen Parameter bestimmt wird, der mit einer deformierten Symmetrie in Verbindung gebracht werden kann. Nachdem wir eine Differentialalgebra aufgebaut haben, werden wir diese im dritten Kapitel dazu verwenden, um mit Hilfe eines verallgemeinerten Vektorpotenzials eine Yang-Mills-Theorie zu konstruieren. Die auf diese Weise bestimmte Wirkung zeichnet sich durch eben diese deformierte Symmetrie aus. Die Probleme im Zusammenhang mit der Anwesenheit masseloser Goldstone-Moden treten zwar schon an dieser Stelle auf, eine ausführliche Diskussion wird aber auf ein nachfolgendes Kapitel

verschoben. Vielmehr wollen wir uns der Antwort auf die Frage nach der Quantenfeldtheorie auf einer Zwei-Punkte-Raum-Zeit zuwenden. Dazu werden wir im vierten Kapitel die algebraischen Grundlagen der Formulierung einer solchen Raum-Zeit schaffen. Wir werden dann wieder ein verallgemeinertes Vektorpotenzial, das dann neben den Higgs-Feldern auch Eichfelder beinhaltet, verwenden. Dieses Vektorpotenzial als Zusammenhang aufgefasst ist der wesentliche Baustein zur Konstruktion einer Yang-Mills-Wirkung. In diesem Rahmen wird es möglich sein, kinetische Terme und auch Eichfelder in das Konzept aufzunehmen. Die Herleitung einer Wirkung auf einer Zwei-Punkte-Raum-Zeit ist Gegenstand von Kapitel 5. Sie wird eine Folgerung sein, die aus rein nichtkommutativen Überlegungen herrührt. Um auf dieser Raum-Zeit Quantenfeldtheorie betreiben zu können, müssen die Probleme masseloser Moden behoben werden. Dies geschieht durch adäquates Hinzufügen einer Eichfixierung, eines Faddeev-Popov-Anteils und externer Felder. Dabei wird die Symmetrie, als definierendes Element der Theorie, von einer lokalen Eichsymmetrie zu einer BRS-Symmetrie erweitert werden müssen. Auf funktionalem Niveau wird diese BRS-Symmetrie durch eine Slavnov-Taylor-Identität repräsentiert. Nach der Bestimmung der freien Feynman-Propagatoren und dem Studium der zugrundeliegenden Symmetrie der Zwei-Punkte-Raum-Zeit werden wir uns der perturbativen Lösung des Erzeugendenfunktional der Green's-Funktionen widmen. Die Vorgehensweise zum Lösen der Dyson-Schwinger-Gleichungen wird bestimmt durch:

$$Z \rightarrow w \rightarrow \Gamma, \quad (1.1)$$

also dem Übergang vom Erzeugendenfunktional der allgemeinen Green's-Funktionen $Z(\hat{\rho})$ über das der zusammenhängenden Green's-Funktionen $w(\hat{\rho})$ zu dem Erzeugendenfunktional der Ein-Punkt-irreduziblen (Ein-PI) Green's-Funktionen. An den somit gewonnenen Ein-PI-n-Punkt-funktionen werden wir einfache Feynman-Regeln testen. In der angesprochenen Untersuchung der Symmetrie werden wir feststellen, dass eine der Symmetrien im vorliegenden Modell eine versteckte Symmetrie sein wird. In Kapitel 6 werden wir diese Eigenschaft ausnutzen und die Symmetrie explizit brechen. Anhand des dann spontan gebrochenen Modells werden wir zu Beginn dieses sechsten Kapitels verschiedene Begriffe wiederholen: Die Angabe der Feynman-Propagatoren gehört ebenso dazu, wie der Vergleich der Feynman-Regeln auf Feynman-Diagrammen mit den Ergebnissen für die Ein-PI-n-Punktfunktionen aus der Dyson-Schwinger-Prozedur. Der wesentliche Vorteil der spontan gebrochenen Symmetrie liegt in der Vereinfachung vieler Ergebnisse. Dies hat zur Folge, dass wir dann in der Lage sind, den Renormierungsprozess in Abwesenheit von Komplikationen, wie sie in der vierdimensionalen Theorie auftreten könnten, zu studieren. Es wird sich an vielen Stellen herausstellen, dass sich die Verfahren automatisieren lassen. Wir werden auf diesen Aspekt an den entsprechenden Stellen zurückkommen. Im letzten Kapitel, dem Kapitel 7, werden wir alle Ergebnisse noch einmal zusammenfassen und einen Ausblick auf weitere Fragestellungen geben. Doch nun erst einmal zurück zum Anfang dieser Arbeit: Der Diskretisierung auf zwei Punkte.

Kapitel 2

Nichtkommutative Geometrie und Diskretisierung auf zwei Punkte

Ein Ausgangspunkt der Nichtkommutativen Geometrie ist es, Räume durch Algebren zu ersetzen. Im Allgemeinen hat man nur Kenntnisse über die Algebra selbst, es gibt jedoch keinerlei Analogon zum Raum. Wir wollen in diesem Kapitel die benötigten Begriffe zu Algebren von Funktionen auf Räumen klären. Die Anforderungen an die für das zu diskutierende Modell zu Grunde liegende Algebra werden durch zum Teil physikalisch motivierte Eigenschaften gestellt. Es handelt sich hierbei um eine Algebra auf einer zweielementigen Menge, die einen Zwei-Punkte-Raum widerspiegelt. Zwei-Punkte-Räume gewannen spätestens nach den Arbeiten von A. Connes an Popularität [9, 10], in denen ein solcher Zwei-Punkte-Raum Y an die gewohnte vierdimensionale Raum-Zeit Mannigfaltigkeit M heran multipliziert wurde, und das Higgs-Feld, interpretiert als Zusammenhang, in den geometrischen Sprachgebrauch aufgenommen wurde. In unseren Überlegungen gibt es zwei Leitbilder, die das Studium der Zwei-Punkte-Räume interessant machen: Zum einen die schon erwähnte Möglichkeit, Higgs-Felder in einer konsistenten geometrischen Formulierung beschreiben zu können und zum anderen den Zwei-Punkte-Raum als Prototyp einer Diskretisierung des Kontinuums. Daher stellen wir uns zunächst die Aufgabe, das allgemeinste kommutative, assoziative Produkt auf einer zweielementigen Menge herzuleiten.

2.1 Diskretisierung auf zwei Punkte

Ausgangspunkt dieser Überlegung ist eine Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die durch kontinuierliche Koordinaten „aufgespannt“ wird. Nimmt man an, dass bei sehr kleinen Abständen das Raum-Zeit-Kontinuum eine granulare Struktur besitzt, so stellt sich die Frage nach einer

adäquaten Übersetzungsvorschrift auf diesen diskreten Raum. Der puristischste diskrete Raum ist der Ein-Punkt-Raum¹, der in der Habilitationsschrift von R. Häußling [26] diskutiert wurde. Ist man im nächsten Schritt an Wechselwirkungen, die Ableitungen enthalten, interessiert, so ist die nächste Erweiterungsstufe der Zwei-Punkte-Raum. Als Vorstellung dient hier folgendes Bild:

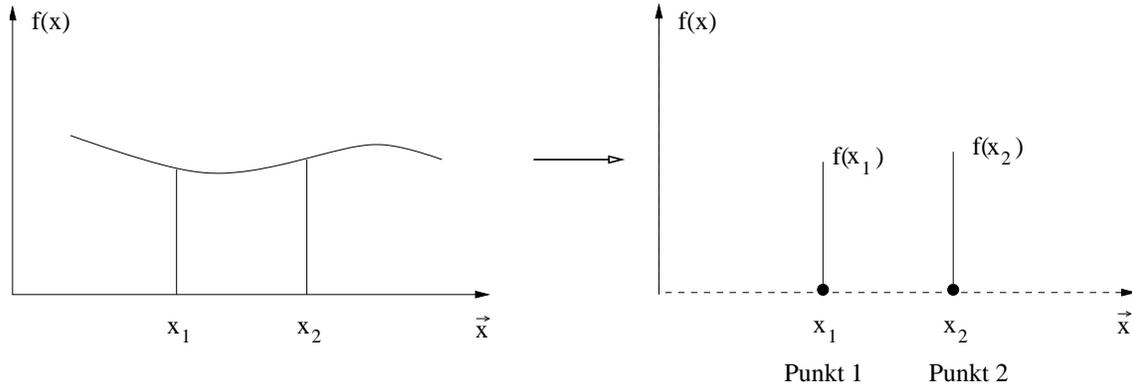


Abbildung 2.1: Diskretisierung des Kontinuums.

Einige wenige elementare Forderungen an eine Diskretisierungsvorschrift auf zwei Punkte stellen schon große Einschränkungen an den allgemeinsten Ansatz. Der allgemeinste Diskretisierungsansatz auf zwei Punkte schließt ad hoc Nichtlokalitäten nicht aus. Für die Diskretisierung eines Produktes von zwei Feldern wählen wir zunächst die allgemeinst mögliche Vorschrift, wobei die Indizierung den Punkt angibt, auf dem die Felder X und Y ausgewertet werden sollen,

$$\begin{aligned} [XY]_1 &= c_1 X_1 Y_1 + c_2 X_1 Y_2 + c_3 X_2 Y_1 + c_4 X_2 Y_2 \\ [XY]_2 &= d_1 X_2 Y_2 + d_2 X_2 Y_1 + d_3 X_1 Y_2 + d_4 X_1 Y_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

oder, im Vorgriff auf den späteren Gebrauch in Matrizenschreibweise

$$\hat{X} \square \hat{Y} = \gamma_1 \hat{X} \hat{Y} - \gamma_2 \hat{X} \eta \hat{Y} \eta - \gamma_3 \eta \hat{X} \eta \hat{Y} + \gamma_4 \eta \hat{X} \eta \eta \hat{Y} \eta,$$

wo

$$\eta = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} c_j & 0 \\ 0 & d_j \end{pmatrix} \quad i^2 = -1, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

¹Wer sich keinen Punkt denken kann, der ist einfach zu faul dazu.

Mathematiklehrer Brennecke in *Eduards Traum* von Wilhelm Busch (1832-1908)

und

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}.$$

Das \square -Produkt übernimmt hierbei die Diskretisierungsoperation. Das Vorkommen der nichtlokalen Beiträge erscheint im ersten Moment gewöhnungsbedürftig. Das Auftreten und die Rolle dieser Terme wird aber im Verlauf der Rechnungen deutlich werden.

Im Weiteren sollen nun aufgrund von Eigenschaften, die auf jeden Fall in der Vorschrift realisiert sein sollen, Einschränkungen für die konstanten Koeffizienten $\{c_i, d_j\}$ gefunden werden.

Kommutativität: Seien die Felder in der Kontinuumswelt skalare Felder und daher kommutativ. In unserer diskreten Welt möge diese Eigenschaft weiterhin gelten. Aus der Kommutativität

$$[XY]_j = [YX]_j \quad (2.2)$$

folgt ohne Rechnung sofort, dass

$$c_2 = c_3 \quad \text{und} \quad d_2 = d_3 \quad (2.3)$$

sein müssen.

„Konstante Felder“: Angenommen ein Feld sei konstant, d. h. ein Feld nehme auf beiden Punkten den selben Wert an, dann sollte sich die Diskretisierung lediglich auf das verbleibende Feld beschränken. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O. B. d. A.) sei $Y = Y_1 = Y_2 = 1$, dann folgt

$$\begin{aligned} [X1]_1 &= [X]_1 = (c_1 + c_2)X_1 + (c_2 + c_4)X_2 = X_1 \\ [X1]_2 &= [X]_2 = (d_1 + d_2)X_2 + (d_2 + d_4)X_1 = X_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Damit ergeben sich für die Konstanten die Bedingungen

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 & c_2 + c_4 &= 0 \\ d_1 + d_2 &= 1 & d_2 + d_4 &= 0. \end{aligned}$$

Fassen wir kurz zusammen: Die Diskretisierung ist eine konvexe Kombination von lokalen und nichtlokalen Termen:

$$\begin{aligned} [XY]_1 &= c_1 X_1 Y_1 + (1 - c_1)(X_1 Y_2 + X_2 Y_1 - X_2 Y_2) \\ [XY]_2 &= d_1 X_2 Y_2 + (1 - d_1)(X_2 Y_1 + X_1 Y_2 - X_1 Y_1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Assoziativität: Beginnen wir hier mit einer kurzen Bemerkung. Die Reihenfolge, in der die Forderungen an eine vernünftige Diskretisierungsvorschrift abgearbeitet werden, ist beliebig. Es zeigt sich jedoch, dass der hier eingeschlagene Weg schneller zu den Ergebnissen führt als Andere. Mit der vorgezogenen Betrachtung der Eigenschaft „konstanter Felder“ erspart man sich bei der Untersuchung der Assoziativität nicht nur eine Vielzahl von Fallunterscheidungen, sondern mit den bisher erarbeiteten Regeln wird die Assoziativität

$$[(XY)Z]_i = [X(YZ)]_i \quad (2.6)$$

automatisch respektiert.

An dieser Stelle angelangt, wäre der nächste Schritt die korrekte Behandlung von Ableitungen, d. h. es wird die Antwort auf die Frage nach der richtigen Übersetzung von Ableitungen aus einem Kontinuumsraum zu einem diskreten Raum gesucht. Im Hinblick auf eine Interpretation im nichtkommutativen Sinn wollen wir nicht den Weg der Gitterfachleute einschlagen und Ableitungen durch schlichte Differenzen ersetzen. Zu dieser Methodik werden wir weiter unten noch eine Bemerkung nachtragen. Vielmehr wollen wir die Grammatik der Nichtkommutativen Geometrie verwenden. Es stellt sich also die Frage nach der Differenzialalgebra. Um aber über eine solche sprechen zu können, sollten wir die zugrundeliegende Algebra genauer bestimmen. Dazu holen wir ein bisschen weiter aus und reformulieren die Resultate in algebraischer Sprache.

2.2 Die Algebra

Im Folgenden wird die Algebra \mathcal{A} eine Algebra über den komplexen Zahlen \mathbf{C} sein, d. h. \mathcal{A} ist ein Vektorraum über \mathbf{C} , so dass Objekte wie $\alpha a + \beta b$ mit $a, b \in \mathcal{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ wohldefiniert sind. Außerdem existiert ein Produkt auf der Algebra

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (a, b) &\mapsto a \square b, \end{aligned} \quad (2.7)$$

das distributiv bzgl. der Addition ist. Im Allgemeinen ist dieses Produkt nicht kommutativ, im vorliegenden Fall soll es aber diese Eigenschaft besitzen.

2.2.1 Grundlegendes zur Algebra

Der hier zugrundeliegende Raum $\mathcal{M} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ ist isomorph zu den diagonalen Matrizen $M_2^d(\mathbf{C})$. \mathcal{A} ist die Algebra von Funktionen auf \mathcal{M} . Für die Algebra führen wir die Basisfunktionen e_1

und e_2 gemäß

$$\begin{aligned} e_1(1) &= e_2(2) = 1 \\ e_1(2) &= e_2(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ein. Es gilt $e_1 + e_2 = \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ das Unital der Algebra ist und es folgt $\mathbf{1}(1) = \mathbf{1}(2) = 1$.

Die diskretisierungsimitierende Multiplikation, \square , in der Algebra ist punktweise definiert:

$$f \square h = \gamma_1 f h + (\gamma_1 - 1) (f \eta h \eta + \eta f \eta h + \eta f \eta \eta h \eta), \quad (2.9)$$

wo

$$f, h \in M_2^d(\mathbf{C}) \quad \text{und} \quad \eta = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt hat folgende Eigenschaften auf der Algebra, die schon weiter oben besprochen wurden,

| | |
|--|----------------------------|
| $f \square h = h \square f$ | kommutativ |
| $(\lambda f) \square h = f \square (\lambda h) = \lambda(f \square h)$ | \mathbf{R} – linear |
| $(f \square g) \square h = f \square (g \square h)$ | assoziativ |
| $f \square (g + h) = f \square g + f \square h$ | distributiv bzgl. Addition |
| $(f + g) \square h = f \square h + g \square h$ | |
| $f \square \mathbf{1} = \mathbf{1} \square f = f$ | Unitaleigenschaft. |

Wertet man das Produkt auf den zwei Punkten aus, so erhält man

$$\begin{aligned} (f \square h)(1) &= c_1 f_1 h_1 + (1 - c_1)(f_1 h_2 + f_2 h_1 - f_2 h_2) \\ (f \square h)(2) &= d_1 f_2 h_2 + (1 - d_1)(f_2 h_1 + f_1 h_2 - f_1 h_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit Hilfe des Produkts kann man die algebradefinierenden Relationen angeben:

$$\begin{aligned} e_1 \square e_1 &= \gamma_1 \mathbf{1} - e_2 \\ e_1 \square e_2 &= (1 - \gamma_1) \mathbf{1} \\ e_2 \square e_2 &= \gamma_1 \mathbf{1} - e_1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Funktionen auf der Algebra können mit den Basisfunktionen geschrieben werden, $f = f_1 e_1 + f_2 e_2$.

Die Algebra besitzt also nicht nur eine Einheit, nämlich das Element $\mathbf{1}$, sondern ist auch als $*$ -Algebra zu verstehen, wenn wir die komplexe Konjugation als antilineare Involution $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f^{**} &= f, \\ (f \sqcup g)^* &= g^* \sqcup f^*, \\ (\alpha f + \beta g)^* &= \bar{\alpha} f^* + \bar{\beta} g^* \end{aligned} \tag{2.12}$$

auffassen.

2.2.2 Differenziale

Im Hinblick auf physikalisch interessante Modelle wird es sinnvoll sein, eine normierbare Algebra zu haben. Bevor wir uns aber diesem Punkt widmen, möchten wir einen weiteren, wichtigen Punkt vorziehen. Es handelt sich dabei um den Ableitungsbegriff aus der Kontinuumstheorie, den wir in algebraischer Formulierung in der Differentialalgebra wiederfinden. Konstruieren wir daher im nächsten Schritt die zugehörige Differentialalgebra $\Omega(\mathcal{A}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Omega^r(\mathcal{A})$, wo $\Omega^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, mit Hilfe eines linearen Operators

$$d : \quad \Omega^r(\mathcal{A}) \longrightarrow \Omega^{r+1}(\mathcal{A}) \tag{2.13}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} d\mathbf{1} &= 0, \\ d^2 &= 0, \\ d(\omega \sqcup \omega') &= (d\omega) \sqcup \omega' + (-)^r \omega \sqcup (d\omega'), \end{aligned} \tag{2.14}$$

wo ω und ω' r - bzw. r' -Formen sind.

Bisher beschränken sich unsere Kenntnisse auf die Algebra $\mathcal{A} = M_2^d(\mathbf{C})$ und den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, wo wir $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbf{C}$ gewählt haben. Die Darstellung einer Funktion auf der Algebra ist dann:

$$f \in \mathcal{A} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}.$$

Die in der Nichtkommutativen Geometrie benutzten spektralen Tripel beinhalten neben einer Algebra und einem Hilbertraum den Dirac-Operator. Betrachten wir nun den Dirac-Operator D . Mit dem oben gewählten Hilbertraum ist der Dirac-Operator eine 2×2 -Matrix mit der

folgenden Zusammensetzung:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus der Vertauschungsrelation des Dirac-Operators mit den Algebraelementen heraus müssen $D_{11} = D_{22} = 0$ gewählt werden, also

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

wo $D_{12} = D_{21}^*$ und D_{21} eine lineare Abbildung von \mathcal{H}_1 nach \mathcal{H}_2 ist. Hier sei $D_{12} = D_{21} = 1$, d. h. $D \equiv -i\eta$.

Differenziale werden in diesem Sinn mit Hilfe des Dirac-Operators gebaut²

$$df = [D, f]_{g, \square} = D \square f - (-)^{\partial f} f \square D \quad \text{mit } f \in \Omega(\mathcal{A}). \quad (2.16)$$

Soll nun die Leibnizregel $d(\omega \square \omega') = (d\omega) \square \omega' + (-)^r \omega \square (d\omega')$ erfüllt sein, dann folgt nach einer kurzen Rechnung, dass dies nur der Fall ist, wenn

$$c_1 = d_1 \quad (2.17)$$

gilt. Dies entspricht gleichzeitig der Forderung, dass die Welt von überall gleich aussieht (2.10).

Unter Verwendung der algebradefinierenden Relationen kann für die Basisfunktionen die folgende Darstellung gewählt werden:

$$\pi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In dieser Darstellung folgt mit den angegebenen Regeln die Einsform

$$\pi(d e_1) = [D, \pi(e_1)]_{\square} = D \square e_1 - e_1 \square D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

²Bei dem vorliegenden graduierten Kommutator verstehen wir unter dem Grad von f , ∂f , angelehnt an die weiter unten definierte Graduierung Γ

$$\begin{aligned} [f, \Gamma]_{\square} = 0 &\leftrightarrow \partial f = 0 &\leftrightarrow f \text{ gerade} \\ \{f, \Gamma\}_{\square} = 0 &\leftrightarrow \partial f = 1 &\leftrightarrow f \text{ ungerade} \quad \text{für } f \in M_2(\mathbf{C}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Differenzialalgebra ist dann durch

$$\begin{aligned}
d e_1 &= -d e_2 \\
d(e_1 \boxtimes e_1) &= e_1 \boxtimes d e_1 + d e_1 \boxtimes e_1 = d e_1 \\
d(e_2 \boxtimes e_2) &= e_2 \boxtimes d e_2 + d e_2 \boxtimes e_2 = d e_2 \\
d(e_1 \boxtimes e_2) &= e_1 \boxtimes d e_2 + d e_1 \boxtimes e_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

festgelegt.

Für das Differenzial einer beliebigen Funktion gilt:

$$\begin{aligned}
d f &= d(f_1 e_1 + f_2 e_2) \\
&= f_1 d e_1 + f_2 d e_2 \\
&= (f_1 - f_2) d e_1 \\
&= 2 e_1 \boxtimes d e_1 (f_1 - f_2) \\
&= -2 e_1 \boxtimes d e_2 (f_1 - f_2) \\
&= (e_2 \boxtimes d e_1 - e_1 \boxtimes d e_2) (f_1 - f_2) \\
&= \sum_{i,j;i \neq j} e_i \boxtimes d e_j (f_j - f_i).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Das Differenzial einer Funktion auf einem Zwei-Punkte-Raum ist also die Differenz der Funktionswerte auf den beiden Punkten. Dieses Objekt lebt allerdings in der Differenzialalgebra und nicht in der Algebra, wie man es von Gitteransätzen [5] her vermuten könnte.

Würde man nämlich, wie manche Gitterexperten, die Ableitungen, angelehnt an Differenzenquotienten, durch³

$$\begin{aligned}
(\partial_z X)_1 &= \frac{1}{r} (X_1 - X_2) \\
(\partial_z X)_2 &= \frac{1}{r} (X_2 - X_1)
\end{aligned}$$

ersetzen [38], [43], [44], dann kommt man im Vergleich zu unseren Überlegungen zu einem restriktiveren Ergebnis. r trägt hier die Rolle einer Gitterkonstanten. Um nun aber die Leibnizregel, d. h. die Produktregel erfüllen zu können, müssen nicht nur c_1 und d_1 wieder gleich sein, sondern sie werden auch auf $c_1 = d_1 = \frac{3}{4}$ festgelegt. Dieser Wert hat aber für unseren

³Der allgemeinere Ansatz

$$\begin{aligned}
(\partial_z X)_1 &= r_{11} X_1 + r_{12} X_2 \\
(\partial_z X)_2 &= r_{21} X_1 + r_{22} X_2
\end{aligned}$$

führt im wesentlichen zu den selben Ergebnissen.

Ansatz katastrophale Folgen, denn genau bei dieser Wahl bricht die oben konstruierte Differentialalgebra zusammen. Es existieren dann keine höheren Formen als Einsformen. Da wir aber physikalische Theorien aus Yang-Mills-Theorien bauen wollen, ist der Fall $c = \frac{3}{4}$ auch aufgrund der nichtexistenten Krümmung, die ja bekanntermaßen eine Zweiform ist, ausgeschlossen.

2.2.3 Normen

Kommen wir nun zu der Frage nach einer genormten Algebra zurück. Eine genormte Algebra \mathcal{A} ist eine Algebra mit einer Norm $\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq 0, & \|f\| = 0 &\Leftrightarrow f = 0 \\ \|\alpha f\| &= |\alpha| \|f\|, \\ \|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\|, \\ \|f \square g\| &\leq \|f\| \|g\|, \end{aligned} \tag{2.20}$$

für $f, g \in \mathcal{A}$ und $\alpha \in \mathbf{C}$. Es scheint nun nicht weiter schwierig zu sein, Normen anzugeben.

Beispiel 1: Wählen wir

$$\|F\|_1 = \sup\{F_{ij}\}, \quad F = (F_{ij}) \in M_2(\mathbf{C}), \tag{2.21}$$

dann ist für $c \leq 1$ $\|\cdot\|_1$ eine Norm. Die Einschränkung an c leitet sich aus der Produktungleichung ab, denn aus⁴

$$cf_2g_2 + (1-c)(f_2g_1 + f_1g_2 - f_1g_1) \leq f_2g_2 \tag{2.22}$$

folgt sofort

$$c - 1 \leq 0. \tag{2.23}$$

$\|\cdot\|_1$ ist also für $\frac{3}{4} < c \leq 1$ eine Norm.

Beispiel 2: Eine weitere mögliche Wahl der Norm ist

$$\|f\| = \sqrt{\sup\{\sigma(f^* \square f)\}}, \tag{2.24}$$

also die Wurzel aus dem größten Eigenwert von $f^* \square f$. Erinnern wir uns, dass

$$f^* \square f = \begin{pmatrix} c|f_1|^2 + (1-c)(2\operatorname{Re}f_1f_2 - |f_2|^2) & 0 \\ 0 & c|f_2|^2 + (1-c)(2\operatorname{Re}f_1f_2 - |f_1|^2) \end{pmatrix},$$

wo $f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$ mit $f_j \in \mathbf{C}$, (2.25)

⁴O. B. d. A. können $|f_1| < |f_2|$ und $|g_1| < |g_2|$ gewählt werden.

so stellen wir fest, dass $\|f\|$ auch mit Hilfe eines Skalarproduktes beschrieben werden kann als

$$\|f\| = \sqrt{\langle \hat{f}^* | \hat{f} \rangle}, \quad \text{wo } \hat{f} = (f_1, f_2). \quad (2.26)$$

Das Skalarprodukt selbst ist definiert als

$$\langle \hat{f}^* | \hat{f} \rangle \doteq : \hat{f}^\dagger : g : \hat{f} : \quad (2.27)$$

mit der Metrik

$$g = \begin{pmatrix} c-1 & 1-c \\ 1-c & c \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

und dem geordneten Vektor \hat{f}

$$: \hat{f} : := \begin{cases} (f_1, f_2) & \text{falls } |f_1| \leq |f_2| \\ (f_2, f_1) & \text{falls } |f_1| > |f_2|. \end{cases} \quad (2.29)$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist tatsächlich ein Skalarprodukt, denn

1. $\langle \cdot | f \rangle$ und $\langle f^* | \cdot \rangle$ sind in beiden Argumenten linear, also ist $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sesquilinear,
2. $\langle f^* | g \rangle = \langle g^* | f \rangle^*$, d.h. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist symmetrisch und
3. $\langle f^* | f \rangle > 0$ für $f \neq 0$, ist also positiv definit.

Da in der Definition der Norm jetzt aber auch das Produkt der Algebra vorkommt, müssen die Eigenschaften sorgsam nachgeprüft werden. Die Positivität wollen wir gleich zeigen. Wieder ist o. B. d. A. $|f_1| \leq |f_2|$ und wir schreiben $|f_1| = \kappa |f_2|$, mit $0 < \kappa < 1$. Unter Benutzung von $f_j = |f_j| e^{i\varphi_j}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{c|f_2|^2 + (1-c)(2\operatorname{Re}f_1f_2 - |f_1|^2)} \\ &= |f_2| \sqrt{c + (1-c)(2\kappa \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \kappa^2)} \\ &\geq |f_2| \sqrt{c + (c-1)(2\kappa + \kappa^2)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Damit $\|f\| \geq 0$ ist, muss also

$$c > (1-c)(2\kappa + \kappa^2) \quad (2.31)$$

gelten. Dies ist aber unter der Nebenbedingung $0 < \kappa < 1$ nur der Fall, wenn $c > \frac{3}{4}$ ist. Soweit $c > \frac{3}{4}$ gilt

$$\|f\| > 0, \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0. \quad (2.32)$$

Um nun aber zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist, müssen neben der Positivität, die ja schon gezeigt wurde, auch

1. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ und
2. die Dreiecksungleichung $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

gelten.

Die Homogenitätsrelation ist mit der Sesquilinearität des Skalarproduktes trivial und der Beweis der Dreiecksungleichung $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ist mit Hilfe der Cauchy-Schwartz'schen Ungleichung schnell gezeigt. Betrachten wir dazu nur das Quadrat

$$\begin{aligned}
 (\|f\| + \|g\|)^2 &= \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\
 &\geq \|f\|^2 + 2\langle f^*|g \rangle + \|g\|^2 \\
 &= \|f + g\|^2.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Der Beweis der Cauchy-Schwartz'schen Ungleichung $|\langle f^*|g \rangle| \leq \|f\|\|g\|$ ist auch schnell nachgereicht: Für $g = 0$ ist er trivial. Sei $g \neq 0$. Setze $\xi \doteq \frac{\langle f^*|g \rangle}{\|g\|^2} \in \mathbf{R}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle f^* - \xi^* g^* | f - \xi g \rangle \\
 &= \langle f^* | f \rangle - \xi^* \langle f^* | g \rangle - \xi \langle g^* | f \rangle + |\xi|^2 \langle g^* | g \rangle \\
 &= \|f\|^2 - \frac{|\langle f^* | g \rangle|^2}{\|g\|^2}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Also $|\langle f^* | g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$, d. h. $|\langle f^* | g \rangle| \leq \|f\|\|g\|$.

Die letzte Eigenschaft, die eine normierte Algebra noch erfüllen muss, ist die Produktungleichung, nämlich

$$\|f \square g\| \leq \|f\|\|g\|. \tag{2.35}$$

Unter welchen Umständen diese Bedingung erfüllt ist, ist am Einfachsten zu verstehen, wenn wir sowohl f als auch g wie oben in Polardarstellung schreiben und berücksichtigen, dass die Produktungleichung für alle $f, g \in \mathbf{C}$ gelten muss. Schreiben wir $f_j = |f_j|e^{i\phi_j}$ und $g_j = |g_j|e^{i\psi_j}$ und setzen wir wieder o. B. d. A. $|f_1| = \kappa_1|f_2| \leq |f_2|$ und $|g_1| = \kappa_2|g_2| \leq |g_2|$ mit $0 < \kappa_1, \kappa_2 \leq 1$ voraus, so muss

$$\mathcal{K}(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, \kappa_1, \kappa_2) \doteq \|f\|\|g\| - \|f \square g\| \geq 0 \tag{2.36}$$

für jede beliebige Wahl von $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, \kappa_1$ und κ_2 gelten. Aus

$$\mathcal{K}(\phi_1 = \phi_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0, \kappa_1, \kappa_2 = 1 - \kappa_1) = (c - 1)(2 - \kappa_1)(1 - \kappa_1)\kappa_1(1 + \kappa_1) \geq 0$$

folgt, dass c nur ≤ 1 sein darf. Mit der oben gefunden Einschränkung also: $\frac{3}{4} < c \leq 1$.

Aus

$$\mathcal{K}(\phi_1 = \phi_2 = \psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \kappa_1, \kappa_2 = 1 - \kappa_1) \geq 0 \tag{2.37}$$

lässt sich zeigen, dass c nur genau 1 sein kann, wenn eine Norm auf der Algebra existieren soll.

Also ist die zweite vorgeschlagene Norm nur dann eine Norm, wenn die Multiplikation auf der Algebra die gewöhnliche Matrizenmultiplikation ist.

Sind wir an einer Topologie interessiert, so könnten wir diese sogenannte Norm- oder uniforme Topologie, wie der Name schon verrät, über die Norm definieren. Die entsprechenden Umgebungen eines Elements $f \in \mathcal{A}$ sind durch

$$U(f, \epsilon) = \{g \in \mathcal{A} \mid \|f - g\| < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0 \quad (2.38)$$

gegeben.

Eine Banach-Algebra ist eine genormte Algebra, die unter der uniformen Topologie vollständig ist.

Eine Banach-* -Algebra ist eine genormte *-Algebra, die vollständig ist und

$$\|f^*\| = \|f\|, \quad \forall f \in \mathcal{A} \quad (2.39)$$

erfüllt.

Möchte man über C^* -Algebren sprechen, dann spricht man über Banach-* -Algebren, die zusätzlich die Eigenschaft

$$\|f^* \square f\| = \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{A} \quad (2.40)$$

besitzen.

Eine Untersuchung der C^* -Eigenschaft zeigt auf, dass das Produkt der Algebra dann nur die gewöhnliche Matrizenmultiplikation, d. h. $c = 1$ sein kann.

2.2.4 Graduierung

Soll nun auch eine Graduierung realisiert sein, d. h. ein Operator, der die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Gamma \square a - a \square \Gamma &= 0 & \forall a \in \mathcal{A} \\ \Gamma \square D + D \square \Gamma &= 0 \\ \text{und } \Gamma^2 = \Gamma \square \Gamma &= 1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

erfüllt, so führt eine kurze Rechnung mit dem spurlosen, diagonalen Ansatz $\text{diag}(z, -z)$ zu

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{4c-3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anhand des Koeffizienten $\frac{1}{\sqrt{4c-3}}$ zeigt sich auch, dass $c > \frac{3}{4}$ sein muss.

2.2.5 Integrale

Die Integration über den Zwei-Punkte-Raum kann mit Hilfe des Zustandsbegriffs interpretiert werden. Unter einem Zustand auf der Algebra verstehen wir ein lineares Funktional

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}, \quad (2.42)$$

das positiv und auf 1 normiert ist, d. h.

$$\begin{aligned} \phi(a^*a) &\geq 0, & \forall a \in \mathcal{A} \\ \|\phi\| &= 1. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die Norm sei hier durch $\|\phi\| = \sup\{|\phi(a)| \mid \|a\| \leq 1\}$ definiert. Die Menge der Zustände $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ von \mathcal{A} ist ein konvexer Raum

$$p\phi_1 + (1-p)\phi_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2.44)$$

Alle Zustände, die nicht als konvexe Kombination dargestellt werden können, nennen wir reine Zustände. In unserem Fall sind e_1 und e_2 die reinen Zustände. Neben der Interpretation des Integrals als Zustand kann man alternativ das Integral über die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \cong M_2^d(\mathbf{C})$ als Spur über die Dichtematrix

$$\rho = p e_1 e_1^t + (1-p) e_2 e_2^t, \quad (2.45)$$

also

$$\int_{\mathcal{M}} = \text{Tr}(\rho M) \quad (2.46)$$

auffassen. Da wir bei der Wahl von p nicht eingeschränkt sind, können wir $p = \frac{1}{2}$ wählen und für das Integral die Spur über die diagonalen Matrizen verwenden

$$\int_{\mathcal{M}} = \text{Tr}(M) \quad M \in M_2^d(\mathbf{C}). \quad (2.47)$$

Die Wahl $p = \frac{1}{2}$ spiegelt auch gleichzeitig wider, dass die Welt von überall gleich aussieht. Die gewöhnliche Spur über Matrizen ist in diesem Fall auch die Dixmier-Spur, die in der Nichtkommutativen Geometrie als das Integral interpretiert wird.

2.3 Zwischenbilanz

Fassen wir die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnitts noch einmal zusammen:

Die allgemeinste assoziative, kommutative, genormte Algebra auf einer zweielementigen Menge, mit der zudem auch eine Differenzialalgebra konstruiert werden kann, schließt nichtlokale Terme zunächst nicht aus. Das Produkt auf der Algebra ist dann durch

$$f \square h = c f h + (c - 1)(f \eta h \eta + \eta f \eta h + \eta f \eta \eta h \eta) \quad (2.48)$$

bzw. auf den Elementen selbst durch

$$\begin{aligned} (f \square h)(1) &= c f_1 h_1 + (1 - c)(f_1 h_2 + f_2 h_1 - f_2 h_2) \\ (f \square h)(2) &= c f_2 h_2 + (1 - c)(f_2 h_1 + f_1 h_2 - f_1 h_1) \end{aligned} \quad (2.49)$$

gegeben. Die gewöhnliche Matrizenmultiplikation ist im Spezialfall $c = 1$ enthalten und entspricht der *naiven* Diskretisierung.

Weiterhin können auch Algebren, die ein von c abhängiges Produkt besitzen, normiert werden. Nur für den Fall $c = 1$ ist die Algebra zusätzlich noch eine C^* -Algebra. Nach dem Gel'fand-Naimark-Theorem existiert eine vollständige Äquivalenz zwischen der Kategorie von lokal kompakten Hausdorff-Räumen und stetigen Abbildungen sowie der Kategorie von kommutativen C^* -Algebren und $*$ -Homomorphismen. Verzichtet man jedoch auf das Pendant auf der Hausdorff-Raum-Seite, so steht Modellen, die auf einer Algebra mit nicht weiter bestimmtem Parameter c im Produkt beruhen, nichts im Weg.

Differenziale sind Einsformen, die proportional zu der Differenz der Funktionswerte auf den beiden Punkten sind, d. h.

$$d f = \sum_{i,j;i \neq j} e_i \square d e_j (f_j - f_i). \quad (2.50)$$

Und das Integral ist als Dixmier-Spur, die hier der gewöhnlichen Spur über Matrizen entspricht,

$$\int_{\mathcal{M}} = \text{Tr} (M) \quad M \in M_2^d(\mathbf{C}), \quad (2.51)$$

zu verstehen.

Kapitel 3

Yang-Mills-Theorie auf zwei Punkten

3.1 Das spektrale Tripel

In diesem Abschnitt wollen wir die Yang-Mills-Theorie auf zwei Punkten ausarbeiten. Ziel ist es, zunächst die hier relevanten geometrischen Begriffe des Zusammenhangs und der Krümmung einzuführen, um dann im Sinn von Yang und Mills eine Wirkung zu konstruieren und zu diskutieren. Die Algebra \mathcal{A} ist weiterhin die direkte Summe $\mathcal{A} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$, versehen mit dem \square -Produkt. Jedes Element $f \in \mathcal{A}$ ist ein Paar von komplexen Zahlen (f_1, f_2) mit $f_i = f(i)$ dem Wert von f am Punkt i . Die Bausteine des null-dimensionalen geraden spektralen Tripels $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, \Gamma)$ sind im Wesentlichen schon genannt. Der endlich dimensionale Hilbert-Raum \mathcal{H} ist eine direkte Summe $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ und wir wählen der Einfachheit halber $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbf{C}$. Algebraelemente von \mathcal{A} werden durch diagonale Matrizen

$$\mathcal{A} \ni f \mapsto \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (3.1)$$

vertreten. Als Darstellung für die Basis der Algebra e_1 und e_2 , behalten wir nach wie vor

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Operator D kann als 2×2 nichtdiagonale Matrix geschrieben werden, da jedes Diagonalelement durch die Kommutationseigenschaft mit jedem Element aus \mathcal{A} herausfallen würde

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_{21}^* \\ D_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{21} \in \text{Lin}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

und da hier $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbf{C}$, wählen wir

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\eta. \quad (3.2)$$

Um von einem geraden Tripel sprechen zu können, bedarf es noch der Graduierung

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{4c-3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Für dieses spektrale Tripel ist die Dixmier-Spur - bis auf einen Proportionalitätsfaktor - lediglich die übliche Spur über Matrizen.

Eine Realitätsstruktur J ist durch

$$J \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \bar{\chi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \bar{\chi}_1 \end{pmatrix}, \quad (\chi_1, \chi_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \quad (3.4)$$

gegeben. Es lassen sich leicht die Voraussetzungen $J^2 = J \square J = \mathbf{1}$, $\Gamma \square J + J \square \Gamma = 0$, $D \square J - J \square D = 0$ nachprüfen. Auf die Eigenschaften, die die opposite-Algebra betreffen, wollen wir hier nicht näher eingehen.

Konstruieren wir im nächsten Schritt die korrespondierende Differenzialalgebra. Das Differenzial wird wieder mit Hilfe des Dirac-Operators D gebildet und für die Einsformen folgt

$$d e_1 = [D, e_1]_{\square} = -i [\eta, e_1]_{\square} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -d e_2. \quad (3.5)$$

Dadurch lässt sich eine Basis der Einsformen angeben:

$$e_1 \square d e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1-2c \\ 2-2c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 \square d e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2-2c \\ 1-2c & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Eine allgemeine Einsform α ist dann durch

$$\alpha = \lambda_1 e_1 \square d e_1 + \lambda_2 e_2 \square d e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2c(\lambda_1 + \lambda_2) \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 - 2c(\lambda_1 + \lambda_2) & \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

wiedergegeben. Für die Darstellung von Zweiformen erhalten wir

$$d e_1 \square d e_1 = d e_2 \square d e_2 = (3-4c)\mathbf{1}, \quad (3.8)$$

oder in Termen einer möglichen Basis

$$e_1 \square d e_1 \square d e_1 = (3 - 4c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 \square d e_2 \square d e_2 = (3 - 4c) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $d\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2)(3 - 4c)\mathbf{1}$ ist. Hieraus lesen wir ab, dass es keine Ausschuss-Einsformen (Junk-Einsformen) gibt.¹ Dies stimmt mit den Erfahrungen aus dem Kontinuum überein, wo Ausschuss-Einsformen erst ab Stufe zwei auftreten können. Gerade Formen werden als diagonale Matrizen und ungerade Formen als nichtdiagonale Matrizen dargestellt.

3.2 Die Yang-Mills-Wirkung

Gehen wir nun zu den Eichtheorien über [32]. Wie wir wissen, gibt es keine Ausschuss-Formen. Es ist daher nicht notwendig, die Differenzialalgebra durch Abdivision des Ausschusses zu kurieren, d. h. $\Omega_D \mathcal{A} = \pi(\Omega \mathcal{A})$. Betrachten wir den einfachen Fall eines trivialen ein-dimensionalen Bündels über dem Zwei-Punkte-Raum $Y = \{1, 1'\}$ und nehmen daher $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ als Modul von Schnitten.

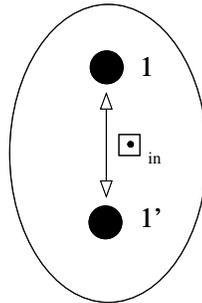


Abbildung 3.1: Der Zwei-Punkte-Raum; Der Raum der inneren Struktur.

¹ Genau genommen folgt die Nichtexistenz von Junk-Einsformen mit dem Argument

$$\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1 - 2c)\lambda_1 + 2(1 - c)\lambda_2 = 0 \\ 2(1 - c)\lambda_1 + (1 - 2c)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

1. Fall: $c = 1$: $\alpha = 0 \Leftrightarrow \{\lambda_1 = \lambda_2 = 0\} \Rightarrow d\alpha = -(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{1} = 0$

2. Fall: $c \neq 1$: $\alpha = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$ oder $\{\lambda_1 = \lambda_2 = 0\} \Rightarrow d\alpha = 0$

Ein Vektorpotenzial, also der Zusammenhang, ist dann ein selbstadjungiertes Element $A \in \Omega_D^1 \mathcal{A}$ und wird durch eine komplexe Zahl $\varphi \in \mathbf{C}$ charakterisiert:

$$A = \frac{g}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi} \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind g und μ zwei beliebige und vielleicht etwas unmotiviert eingeführte Konstanten, die aber später einer Masse μ und einer Kopplungskonstanten g entsprechen werden. Transformieren wir jetzt die oben angegebene Basis auf

$$b_1 = \frac{2c-1}{3-4c} e_1 \square d e_1 + \frac{2-2c}{3-4c} e_2 \square d e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \frac{2-2c}{3-4c} e_1 \square d e_1 + \frac{2c-1}{3-4c} e_2 \square d e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann können wir den Zusammenhang A auch schreiben als

$$\begin{aligned} A &= \frac{g}{\mu} (\bar{\varphi} b_1 + \varphi b_2) \\ &= \frac{g}{\mu(3-4c)} [((2c-1)\bar{\varphi} + (2-2c)\varphi) e_1 \square d e_1 + ((2-2c)\bar{\varphi} + (2c-1)\varphi) e_2 \square d e_2]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Zusammenhangs bauen wir die Krümmung, $\mathcal{F} = dA + A \square A$,

$$\mathcal{F} = [\mu(\varphi + \bar{\varphi}) + g(1-c)(\varphi^2 + \bar{\varphi}^2) + g(2c-1)\varphi\bar{\varphi}] \frac{g}{\mu^2} \mathbf{1}, \quad (3.10)$$

wo

$$\begin{aligned} dA &= (\varphi + \bar{\varphi}) \frac{g}{\mu} \mathbf{1} \quad \text{und} \\ A \square A &= ((1-c)(\varphi^2 + \bar{\varphi}^2) + (2c-1)\varphi\bar{\varphi}) \frac{g^2}{\mu^2} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dies führt zu der Yang-Mills-Wirkung

$$\begin{aligned} \text{YM}(A) = S &= \frac{\mu^4}{2g^2} \text{Tr}(\mathcal{F} \square \mathcal{F}) \\ &= (\mu(\varphi + \bar{\varphi}) + g(1-c)(\varphi^2 + \bar{\varphi}^2) + g(2c-1)\varphi\bar{\varphi})^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

bzw. mit den komplexen Feldern in kartesischer Darstellung, $\varphi = x + iy$, $\bar{\varphi} = x - iy$,

$$S = (x(2\mu + gx) + g(4c-3)y^2)^2. \quad (3.13)$$

Diese Wirkung hat also die Gestalt des Higgs-Potenzials, allerdings in Richtung des imaginären Feldanteils mit dem Faktor $(4c - 3)$ skaliert. φ ist das Higgs-Feld, das im Minimum des Potentials angreift. In dieser Formulierung ist das Higgs-Feld φ als Zusammenhang, also als rein geometrisches Objekt, zu interpretieren. Für den Spezialfall $c = 1$ erhalten wir

$$S(c = 1) = \left(g \left| \varphi + \frac{\mu}{g} \right|^2 - \frac{\mu^2}{g} \right)^2 = (\mu(\varphi + \bar{\varphi}) + g\varphi\bar{\varphi})^2. \quad (3.14)$$

Dies entspricht exakt dem Flaschenbodenpotential, das beim Higgs-Mechanismus verwendet wird [9]. Aber auch in der deformierten Wirkung bleiben die für die Physik relevanten Aussagen erhalten: Die Higgs-Masse μ bleibt unverändert und das Goldstone-Boson bleibt masselos. g ist die Kopplungskonstante, die die Selbstwechselwirkung bestimmt. Das Potenzial beschreibt für $c > \frac{3}{4}$, $c \neq 1$ allerdings den Flaschenboden eines Bocksbeutels. Über die Existenz und Ausprägung einer solchen Deformation des Potentials lässt sich an dieser Stelle keine Aussage treffen.

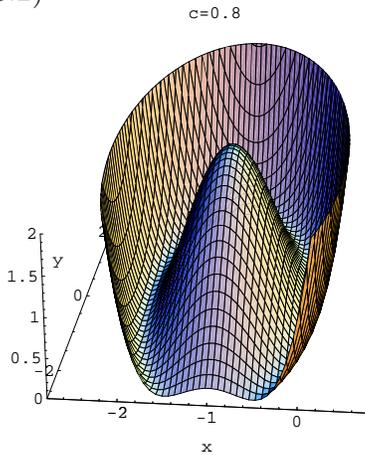
In den Arbeiten von A. Connes wurde der Higgs-Mechanismus in einer geometrischen Interpretation durch das Anheften eines diskreten Raums Y an die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M verstanden. Der diskrete Raum entsprach einem Zwei-Punkte-Raum, der durch eine C^* -Algebra beschrieben wurde. Hier wird deutlich, dass auch Algebren ohne C^* -Eigenschaft die gleiche Physik liefern können. Dies ist der Anlass, die größere Klasse von Algebren, die hier zusätzlich auch noch die C^* -Algebra enthält, genauer zu studieren.

Diskutieren wir nun die Wirkung aus der Gleichung (3.12). Zunächst einmal ist auffällig, dass nicht jeder Wert für c eine stabile Wirkung S , im Sinn von nach unten beschränkt und somit zu einer konvergenten Zustandsfunktion führen würde, ergibt. Eine Betrachtung des Stabilitätskriteriums aus dem Anhang B zeigt auf, dass $c > \frac{3}{4}$ sein muss, sonst sind, wie bereits gesagt, die Wirkungen nicht stabil. Der Fall $c = \frac{3}{4}$ ist ein Entartungsfall. Hier lässt sich die Wirkung auf nur eine Variable transformieren. Es ist demnach nur der Parameterbereich in dem auch eine Graduierung existiert, also $c > \frac{3}{4}$, von Interesse. Im Bereich $\frac{3}{4} < c < 1$ findet in y -Richtung eine Streckung und im Bereich $c > 1$ eine Stauchung in y -Richtung statt.

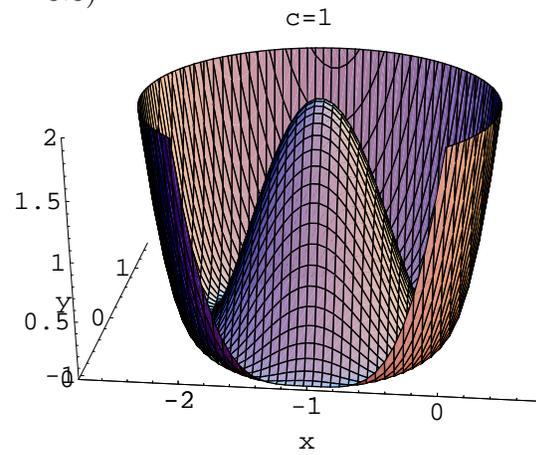
Das Minimum (x_0, y_0) bleibt immer noch entartet, weist aber eine c -Abhängigkeit auf und stellt damit ein wichtiges Resultat dar:

$$\left(x_0 + \frac{\mu}{g} \right)^2 + (4c - 3) y_0^2 = \frac{\mu^2}{g^2}. \quad (3.15)$$

3.2)

Abbildung 3.2: Das deformierte Potenzial für $\mu = g = 1$ und $c = 0.8$.

3.3)

Abbildung 3.3: Das undeformierte Potenzial für $\mu = g = 1$ und $c = 1$.

3.3 Deformierte Eichtransformationen

Chen Ning Yang und Robert Mills entwickelten 1954 eine neue Klasse von Theorien, die sogenannten „Eichtheorien“. Obwohl es zu dieser Zeit noch nicht klar war, schufen diese Theorien die Basis des heutigen Standard-Modells. Eichtransformationen und Symmetrien² spielen eine herausragende Rolle in der heutigen Physik. In unserem Beispiel ist die Entartung des Minimums ein Indiz für eine Symmetrie des Modells. Untersuchen wir daher die Eichtransformationen genauer.

Betrachten wir jetzt die Wirkung der Eichgruppe $U = U(1) \times U(1)$ auf den Raum der Vektorpotenziale, gegeben durch

$$\gamma_u(A) = u \lrcorner du^* + u \lrcorner A \lrcorner u^*. \quad (3.16)$$

Schreiben wir so dann ein Element der Eichgruppe als $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, dann transformiert das Vektorpotenzial gemäß

$$\gamma_u(A) = (u_1 e_1 + u_2 e_2) \lrcorner (\bar{u}_1 d e_1 - \bar{u}_2 d e_1) + (u_1 e_1 + u_2 e_2) \lrcorner (\bar{\varphi} b_1 + \varphi b_2) \lrcorner (\bar{u}_1 e_1 + \bar{u}_2 e_2).$$

²Symmetrie: Von der seltsamen Ordnung der Natur waren schon die Naturforscher des Altertums fasziniert. Der griechische Bildhauer Poly Kleitos war 500 v. Chr. der Erste, der für diese spezielle Formensprache den Begriff „sum metria“ - Gleichmaß - prägte.

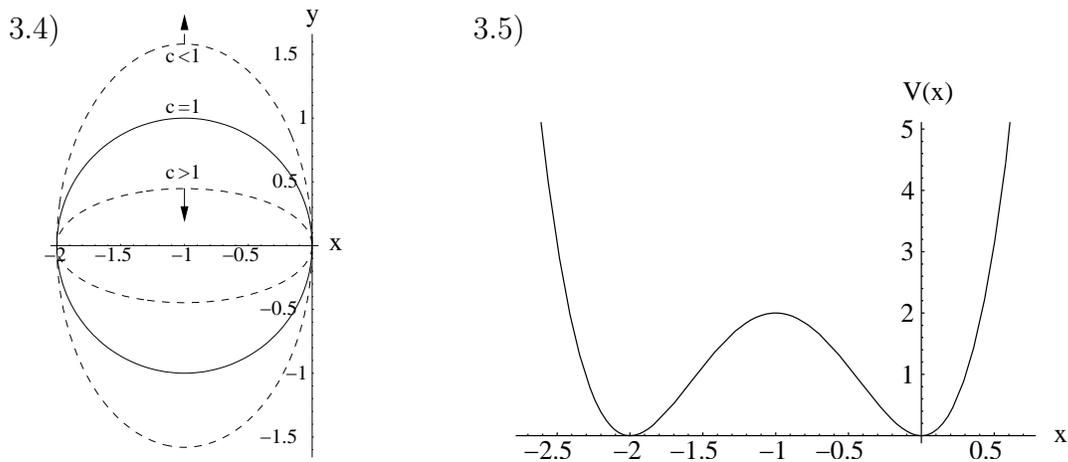


Abbildung 3.4: Das Minimum des deformierten Potentials für $\mu = g = 1$ bei verschiedenen Werten von c . Für $\frac{3}{4} < c < 1$ findet eine Streckung und für $c > 1$ eine Stauchung statt.

Abbildung 3.5: Der Schnitt bei $y = 0$ sieht für alle Potentiale gleich aus. Higgs-Masse μ und Masselosigkeit des Goldstone-Bosons sind unabhängig von der Deformation.

Ein typischer Vertreter $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ wird durch die Relation $u \square u^* = \mathbf{1}$ auf

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{\sqrt{c + (c-1)(1 - 2\cos(\theta_1 - \theta_2))}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \\
 \theta_1=0, \theta_2=\theta & \frac{1}{\sqrt{c + (c-1)(1 - 2\cos(\theta))}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

festgelegt.

Wir haben dabei bereits eine der beiden Phasen unter Ausnutzung der Multiplikationsfreiheit mit einer globalen Phase fixiert. Man beachte, dass unter der Wahl von $c = 1$ die unitäre Transformation genau der gewöhnlichen lokalen $U(1)$ -Transformation

$$u(c = 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

entspricht. Der für $c \neq 1$ θ -abhängige Skalenfaktor veranlasst uns, diese Transformation eine deformierte unitäre Transformation zu nennen.

Untersuchen wir die Wirkung der unitären Transformationen auf das Vektorpotenzial A

$$\gamma_u(A) = \frac{\mu}{g} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi}' \\ \varphi' & 0 \end{pmatrix},$$

dann erhalten wir nach einer kurzen Rechnung, in der wir für die Phase $e^{i\theta}$ die Euler'sche Darstellung $\cos \theta + i \sin \theta$ gewählt haben, folgenden Term:

$$\bar{\varphi}' = \frac{g(2(c-1) - (2c-1)\cos\theta + i(2c-1)\sin\theta)\bar{\varphi} - 2ig(c-1)\sin\theta\varphi + \mu(3-4c)(\cos\theta-1) + i\mu\sin\theta}{\mu(1-2c+2(c-1)\cos\theta)}.$$

Ein Blick auf die transformierten Felder verrät uns, dass

$$\begin{aligned} x_0 &\mapsto x'_0 = \frac{((2c-1)gx_0 + (4c-3)\mu)(1-\cos\theta) - gx_0 + (4c-3)gy_0\sin\theta}{\mu(1-2c+2(c-1)\cos\theta)} \\ y_0 &\mapsto y'_0 = \frac{-gy_0(1+(1-2c)(1-\cos\theta)) - (gx_0 + \mu)\sin\theta}{\mu(1-2c+2(c-1)\cos\theta)} \end{aligned}$$

auch die definierende Gleichung der Vakuumerwartungswerte

$$\left(x_0 + \frac{\mu}{g}\right)^2 + (4c-3)y_0^2 = \left(x'_0 + \frac{\mu}{g}\right)^2 + (4c-3)y_0'^2 = \frac{\mu^2}{g^2} \quad (3.19)$$

erfüllt.

Die Invarianz der Wirkung selbst erkennen wir, wenn wir uns daran erinnern, dass die Wirkung proportional zur Spur aus dem Quadrat der Krümmung ist. Da nun die Krümmung proportional zu $\mathbf{1}$ ist und

$$u \square \mathbf{1} \square u^* = \mathbf{1} \square u \square u^* = \mathbf{1}, \quad (3.20)$$

ist die Yang-Mills-Wirkung (3.12) unter der oben genannten Eichtransformation $u \in U = U(1) \times U(1)$ sicherlich invariant.

Diese Invarianz unter unitären Transformationen wird besonders schön durch die Vektorfelder der infinitesimalen Transformationen $\theta \ll 1$,

$$\begin{aligned} \delta_\theta x_0 &= -(4c-3)y_0\theta \\ \delta_\theta y_0 &= \left(x_0 + \frac{\mu}{g}\right)\theta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

veranschaulicht. Die Transformation transportiert entlang von Äquipotenziallinien.

Die Physik ist nur durch ihre Symmetrie definiert und die hergeleitete Yang-Mills-Wirkung ist nur eine von vielen Wirkungen, die diese Symmetrie besitzen. In funktionaler Sprechweise wird die Symmetrie durch die Ward-Takahashi-Identität

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\Gamma}{\delta y}\delta y = 0 \quad (3.22)$$

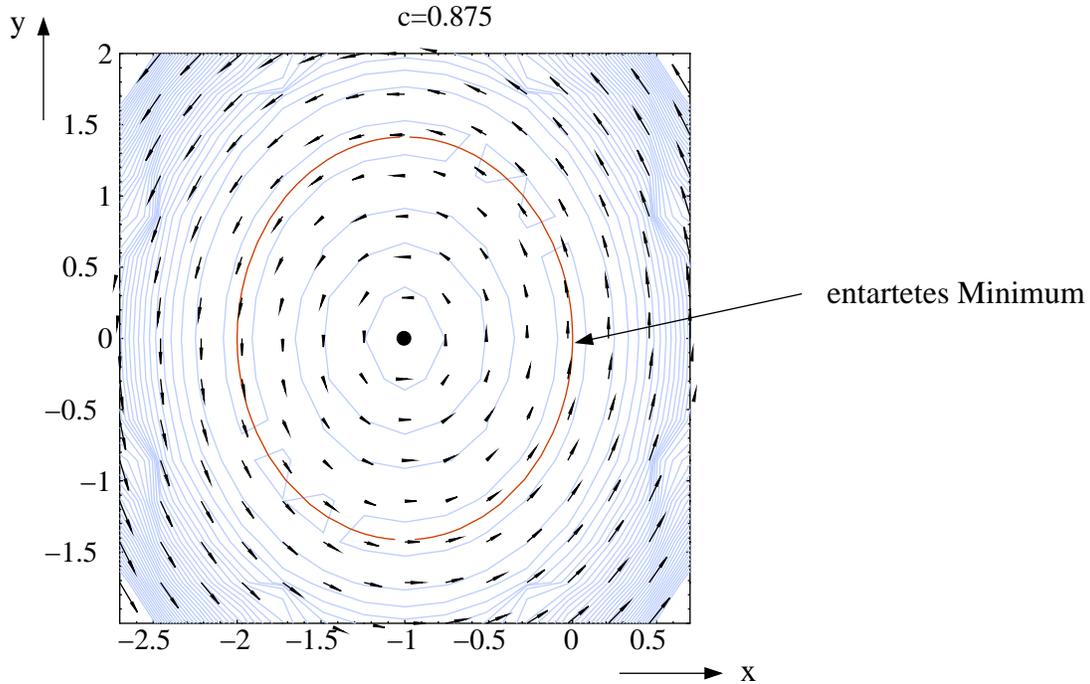


Abbildung 3.6: Die deformierten unitären Transformationen für $c = 0.875$. Vektorfeld der infinitesimalen Transformationen.

ausgedrückt. Man überzeugt sich wiederum leicht davon, dass nicht nur die bisher diskutierte Yang-Mills-Wirkung diese Gleichung erfüllt, sondern auch

$$S = \frac{\mu^4}{2g^2} \text{Tr} (\mathcal{F} \square \mathcal{F} + \gamma \mathcal{F}) \quad (3.23)$$

Der zu γ proportionale Term ändert also die Physik nicht. Dieser Aspekt wurde in einer Arbeit von H. Hüffel [30] explizit angegeben. Im vorliegenden Fall ist es möglich, den γ -Term durch eine Redefinition des Higgs-Feldes zu absorbieren. Aus diesem Grund büßt die von uns diskutierte Wirkung, in der $\gamma = 0$ gewählt wurde, nicht an Allgemeinheit ein.

Weiterhin wird aus der Gestalt der Ward-Takashi-Identität klar, dass es sich bei dem Deformationsparameter c im Ein-Punkt-Modell nicht um einen physikalischen Parameter handeln kann, da er durch Reskalierung des y -Feldes heraustransformiert werden kann. So lange man über den diskreten Zwei-Punkte-Raum separat und ohne eine Anbindung an einen anderen Raum spricht, spielt der Parameter c keine Rolle.

3.4 Zwischenbilanz

Wir haben gezeigt, dass eine geometrische Interpretation des Higgs-Feldes nicht unbedingt die Forderung nach C^* -Algebren stellt. Mit anderen Worten: Auch Banach- $*$ Algebren, die die C^* -Eigenschaft nicht besitzen, können zur selben Physik führen. Zur Beschreibung eines komplexen Higgs-Feldes sind zwei Punkte erforderlich.

Ausgehend von der Yang-Mills-Wirkung wäre es nun möglich, über den Pfadintegralformalismus Quantenfeldtheorie zu betreiben [23]. Allerdings wurde die Quantenfeldtheorie in Null Dimensionen mit dem undeforinierten Potenzial schon in der Habilitationsschrift von R. Häußling ausgiebig untersucht [26]. In dieser Arbeit findet man unter anderem eine störungstheoretische Lösung für die angegebene Wirkung.

Ob aber die Deformation Auswirkungen auf messbare Größen hat, kann erst in einem *realistischeren* Modell entschieden werden. Für gewöhnlich wird dieser Zwei-Punkte-Raum Y als innere Struktur aufgefasst und an jeden Punkt der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M geklebt. Bei Modellen, in denen von Quantenfeldtheorie auf einem Punkt in Null Dimensionen die Rede ist, wird die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M durch einen einzigen Punkt wiedergegeben. Eingangs sprachen wir von einem diskreten Zwei-Punkte-Raum als Prototyp eines Gitters. Unter einem *realistischeren* Modell wollen wir daher eine abstrahierte Raum-Zeit auf zwei Punkten betrachten. Bei zwei Raum-Zeit-Punkten werden dann auch Eichfelder involviert sein. Da jeder Raum-Zeit-Punkt einen inneren Raum angeheftet bekommen hat, wird man auch Wechselwirkungen von Higgs-Feldern an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten diskutieren können. Dieses Modell wird Gegenstand des nun folgenden Kapitels sein.

Kapitel 4

Eine Yang-Mills-Theorie für zwei Raum-Zeit-Punkte

Wie wir nun wissen, lässt sich mit Hilfe eines inneren Zwei-Punkte-Raums den Higgs-Feldern eine geometrische Natur zusprechen. Das Higgs-Feld wird als Zusammenhang eines diskreten Raums aufgefasst. Die vierdimensionale Raum-Zeit M wollen wir in dieser Arbeit in einer sehr abstrahierten Version abbilden: Wieder ein Zwei-Punkte-Raum. An jedem dieser beiden Raum-Zeit-Punkte tensorieren wir einen inneren Zwei-Punkte-Raum. Dadurch sind wir in der Lage, zwei Higgs-Felder zu beschreiben.

In der Sprache der Nichtkommutativen Geometrie werden das spektrale Tripel der Raum-Zeit-Struktur $(\mathcal{A}_{rz}, \mathcal{H}_{rz}, D_{rz}, \Gamma_{rz})$ und das spektrale Tripel der inneren Struktur $(\mathcal{A}_{in}, \mathcal{H}_{in}, D_{in}, \Gamma_{in})$ miteinander zu einem Produkt-Tripel verknüpft. Das Produkt-Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, \Gamma)$ ist dann wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_{rz} \otimes \mathcal{A}_{in} \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_{rz} \otimes \mathcal{H}_{in} \\ D &= \zeta D_{rz} \otimes \mathbf{1} + \Gamma_{rz} \otimes D_{in} \\ \Gamma &= \Gamma_{rz} \otimes \Gamma_{in}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dabei unterscheidet der Parameter ζ Raum-Zeit Differenziationen von Differenziationen, die von der inneren Struktur herrühren. Die Potenz von ζ gibt damit auch an, wie oft auf der Raum-Zeit differenziert wurde. Alle wesentlichen Eigenschaften des Dirac-Operators bleiben davon ungeändert.

Aus der Definition des Dirac-Operators D und der Eigenschaft, dass D_{rz} mit Γ_{rz} antikommutiert,

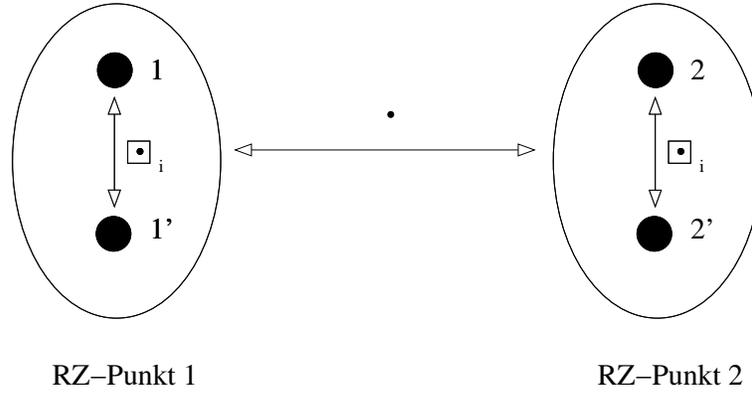


Abbildung 4.1: Die Zwei-Punkte-Raum-Zeit, die an jedem *Raum-Zeit*-Punkt einen inneren Zwei-Punkte-Raum angeheftet hat.

folgt auch die wichtige Eigenschaft

$$\begin{aligned}
 D^2 &= \frac{1}{2}\{D, D\} \\
 &= \zeta^2(D_{\text{rz}})^2 \otimes \mathbf{1} + (\Gamma_{\text{rz}})^2 \otimes (D_{\text{in}})^2 + \frac{\zeta}{2}\{D_{\text{rz}}, \Gamma_{\text{rz}}\} \otimes D_{\text{in}} \\
 &= \zeta^2(D_{\text{rz}})^2 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (D_{\text{in}})^2.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Diese Definition des Dirac-Operators hat den Vorteil, dass sich in Modellen, in denen die beiden spektralen Tripel eine von Null verschiedene Dimension haben, die Dimensionen aufsummieren. Hat nämlich D_j die Dimension n_j , d. h. ist $|D_j|^{-1}$ ein Infinitesimal der Ordnung $1/n_j$, $j \in \{1, 2\}$, dann ist D von der Dimension $n_1 + n_2$, d. h. das $|D|^{-1}$ ein Infinitesimal der Ordnung $1/(n_1 + n_2)$ ist.

Da die Zwei-Punkte-Raum-Zeit der Rest aus unserer ursprünglichen vierdimensionalen Raum-Zeit sein soll, und damit eine Interpretation als Raum erhalten bleibt, ist es notwendig, für \mathcal{A}_{rz} eine C^* -Algebra zu wählen. Dadurch ist das Produkt von \mathcal{A}_{rz} als Matrizenmultiplikation identifiziert. Das Produkt für Elemente aus \mathcal{A}_{in} ist weiterhin das \square -Produkt.

4.1 Die Produktalgebra

Seien e_\uparrow und e_\downarrow die Basiselemente der inneren Struktur und e_1 und e_2 die Basiselemente der Raum-Zeit-Struktur, so gilt

$$\begin{aligned} e_\uparrow(j) = e_\downarrow(j') = 1 & & e_1(1) = e_2(2) = 1 \\ e_\uparrow(j') = e_\downarrow(j) = 0 & \quad \text{und} & e_1(2) = e_2(1) = 0 \quad , \quad \text{mit } j \in \{1, 2\}. \\ \mathbf{1}(j) = \mathbf{1}(j') = 1 & & \mathbf{1}(1) = \mathbf{1}(2) = 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Es gilt $e_\uparrow + e_\downarrow = \mathbf{1}$ und $e_1 + e_2 = \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ das Einselement der jeweiligen Konstituenten-Algebra ist.

Die Multiplikation, \square , in der Algebra ist punktweise definiert. Für die Raum-Zeit-Algebra ist es die Matrizenmultiplikation

$$(fg)(j) = f(j)g(j) \quad \text{mit } j \in \{1, 2\} \quad (4.4)$$

und für die Algebra der inneren Struktur

$$f \square g = c f g + (c - 1)(f \eta g \eta + \eta f \eta g + \eta f \eta \eta g \eta), \quad \text{wo } \eta = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

bzw. auf den Punkten:

$$(f \square g)(k) = c f_k g_k + (1 - c)(f_k g_j + f_j g_k - f_j g_j) \quad k \neq j \in \{1, 1'\} \quad \text{bzw.} \quad \{2, 2'\}. \quad (4.6)$$

Die schönen Eigenschaften dieses Produkts sind von Kapitel 2 bekannt und können dort gegebenenfalls nachgeschlagen werden.

Wählen wir daher für die Basis der Produktalgebra

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= e_1 \otimes e_\uparrow & \epsilon_3 &= e_2 \otimes e_\uparrow \\ \epsilon_2 &= e_1 \otimes e_\downarrow & \epsilon_4 &= e_2 \otimes e_\downarrow. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Um später eine Darstellung für die ϵ_i angeben zu können, entscheiden wir uns wieder für die schon verwendeten Darstellungen der e_i ,

$$e_1 = e_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 = e_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

| \odot | ϵ_1 | ϵ_2 | ϵ_3 | ϵ_4 |
|--------------|---|---|---|---|
| ϵ_1 | $c_{\text{in}}\epsilon_1 + (c_{\text{in}} - 1)\epsilon_2$ | $(1 - c_{\text{in}})(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ | 0 | 0 |
| ϵ_2 | $(1 - c_{\text{in}})(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ | $c_{\text{in}}\epsilon_2 + (c_{\text{in}} - 1)\epsilon_1$ | 0 | 0 |
| ϵ_3 | 0 | 0 | $c_{\text{in}}\epsilon_3 + (c_{\text{in}} - 1)\epsilon_4$ | $(1 - c_{\text{in}})(\epsilon_3 + \epsilon_4)$ |
| ϵ_4 | 0 | 0 | $(1 - c_{\text{in}})(\epsilon_3 + \epsilon_4)$ | $(c_{\text{in}} - 1)\epsilon_3 + c_{\text{in}}\epsilon_4$ |

Tabelle 4.1: Multiplikationstabelle der Basiselemente.

Dabei treffen wir die folgende Konvention für das Tensorprodukt \otimes :

$$(a_{ij}) \otimes (b_{kl}) = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{kl}) & a_{12}(b_{kl}) & \dots \\ a_{21}(b_{kl}) & a_{22}(b_{kl}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Das Produkt auf der Algebra, \odot , sei

$$(\alpha_1 \otimes \beta_1) \odot (\alpha_2 \otimes \beta_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \otimes (\beta_1 \square_{\text{in}} \beta_2). \quad (4.8)$$

Dieses Produkt ist für die Algebraelemente wieder ein kommutatives, assoziatives und auch distributives Produkt.

Für das Produkt der vier Basiselemente gilt obige Tabelle.

Das \odot -Produkt stellt also die Kommunikation zwischen Punkt 1 und 1' bzw. 2 und 2' her.

Die Definition des Dirac-Operators lässt erkennen, dass wir vor der Diskussion der Differenzialalgebra die Graduierung angeben müssen. Mit den Graduierungen der Konstituentenalgebren

$$\Gamma_{\text{rz}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Gamma_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{4c_{\text{in}} - 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

erhalten wir:

$$\Gamma = \Gamma_{\text{rz}} \otimes \Gamma_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{4c_{\text{in}} - 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Bezüglich der Graduierung Γ nennen wir $f \in M_4(\mathbf{C})$ gerade bzw. ungerade, wenn gilt:

$$\begin{aligned} [f, \Gamma]_{\odot} = 0 &\Leftrightarrow \partial f = 0 &\Leftrightarrow f \text{ gerade} \\ \{f, \Gamma\}_{\odot} = 0 &\Leftrightarrow \partial f = 1 &\Leftrightarrow f \text{ ungerade.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2 Die Differenzialalgebra

Jetzt sind wir so weit, dass wir die zugehörige Differenzialalgebra $\Omega(\mathcal{A}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Omega^r(\mathcal{A})$, wo $\Omega^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, mit dem Dirac-Operator

$$D = D_{\text{rz}} \otimes \mathbf{1} + \Gamma_{\text{rz}} \otimes D_{\text{in}} \quad (4.12)$$

Stufe für Stufe aufbauen können. Dabei ist $d \cdot = [D, \cdot]_g$ wieder ein linearer Operator

$$d: \quad \Omega^r(\mathcal{A}) \longrightarrow \Omega^{r+1}(\mathcal{A}), \quad (4.13)$$

der Elemente aus der r -ten Stufe in die Stufe $r + 1$ der Differenzialalgebra abbildet. Er erfüllt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} d\mathbf{1} &= 0, & d^2 &= 0 \\ d(\omega \odot \omega') &= (d\omega) \odot \omega' + (-)^r \omega \odot (d\omega'), \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei ω und ω' r - und r' -Formen sind. Sprich: Das Differenzial von Konstanten verschwindet, das Differenzialkalkül schließt und die Leibnizregel ist erfüllt. Die Eigenschaft $d^2 = 0$ folgt direkt aus den Eigenschaften von d_1 und d_2 ($d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$). Von der Gültigkeit der Leibnizregel überzeugt man sich durch Nachrechnen.

Das Differenzial wirkt also wie folgt auf die Algebraelemente

$$d(\alpha \otimes \beta) = [D, \alpha \otimes \beta]_g = D \odot (\alpha \otimes \beta) - (-1)^{\partial(\alpha \otimes \beta)} (\alpha \otimes \beta) \odot D. \quad (4.15)$$

Man beachtet noch die Eigenschaft, dass sich für die bei dem Differenzial in d_{in} auftretenden graduierten Kommutatoren eine Vereinfachung ergibt. Diese Vereinfachung rührt daher, dass das \square -Produkt dem gewöhnlichen Matrizenprodukt äquivalent ist, wenn mit η multipliziert wird, also $\alpha \square \eta = \alpha \cdot \eta$ bzw. $\eta \square \alpha = \eta \cdot \alpha$. Es gilt daher auch:

$$[\eta, \alpha]_{g, \square} = \eta \square \alpha - (-1)^{\partial \alpha} \alpha \square \eta = \eta \cdot \alpha - (-1)^{\partial \alpha} \alpha \cdot \eta = [\eta, \alpha]_{g, \cdot}. \quad (4.16)$$

Für die Einsformen der Algebra erhalten wir mittels Differenziation der Nullformen:

$$\begin{aligned} d\epsilon_1 &= \zeta d\epsilon_1 \otimes e_{\uparrow} + e_1 \otimes d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 &= \zeta d\epsilon_1 \otimes e_{\downarrow} + e_1 \otimes d\epsilon_1 \\ d\epsilon_3 &= \zeta d\epsilon_2 \otimes e_{\uparrow} - e_2 \otimes d\epsilon_1 \\ d\epsilon_4 &= \zeta d\epsilon_2 \otimes e_{\downarrow} - e_2 \otimes d\epsilon_1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Differenziale sind aber nicht linear unabhängig, denn

$$\sum_i d\epsilon_i = d \sum_i \epsilon_i = d\mathbf{1}_4 = 0. \quad (4.18)$$

Um nun die allgemeinste Einsform angeben zu können, ist es notwendig, die Basiseinsformen zu bestimmen. Diese sind

$$\begin{aligned} b_1 &= \epsilon_1 \odot d\epsilon_1 = \zeta e_1 d e_1 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} e_\uparrow + e_1 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} d e_\uparrow \\ b_2 &= \epsilon_2 \odot d\epsilon_1 = \zeta e_1 d e_1 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} e_\uparrow + e_1 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} d e_\uparrow \\ b_3 &= \epsilon_3 \odot d\epsilon_1 = \zeta e_2 d e_1 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} e_\uparrow \\ b_4 &= \epsilon_4 \odot d\epsilon_1 = \zeta e_2 d e_1 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} e_\uparrow \\ b_5 &= \epsilon_1 \odot d\epsilon_2 = \zeta e_1 d e_1 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} e_\downarrow + e_1 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} d e_\downarrow \\ b_6 &= \epsilon_2 \odot d\epsilon_2 = \zeta e_1 d e_1 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} e_\downarrow + e_1 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} d e_\downarrow \\ b_7 &= \epsilon_3 \odot d\epsilon_2 = \zeta e_2 d e_1 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} e_\downarrow \\ b_8 &= \epsilon_4 \odot d\epsilon_2 = \zeta e_2 d e_2 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} e_\downarrow \\ b_9 &= \epsilon_1 \odot d\epsilon_3 = \zeta e_1 d e_2 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} e_\uparrow \\ b_{10} &= \epsilon_2 \odot d\epsilon_3 = \zeta e_1 d e_2 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} e_\uparrow \\ b_{11} &= \epsilon_3 \odot d\epsilon_3 = \zeta e_2 d e_2 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} e_\uparrow - e_2 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} d e_\uparrow \\ b_{12} &= \epsilon_4 \odot d\epsilon_3 = \zeta e_2 d e_2 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} e_\uparrow - e_2 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} d e_\uparrow. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die vorgenannten zwölf Elemente sind wieder linear abhängig und nach einer kurzen Rechnung stellen wir fest, dass die Basis der Einsformen wie folgt gewählt werden kann:

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= e_1 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} \eta & \hat{b}_2 &= e_1 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} \eta \\ \hat{b}_3 &= e_2 \otimes e_\uparrow \square_{\text{in}} \eta & \hat{b}_4 &= e_2 \otimes e_\downarrow \square_{\text{in}} \eta \\ \hat{b}_5 &= \zeta e_1 \eta \otimes e_\uparrow & \hat{b}_6 &= \zeta e_2 \eta \otimes e_\uparrow \\ \hat{b}_7 &= \zeta e_1 \eta \otimes e_\downarrow & \hat{b}_8 &= \zeta e_2 \eta \otimes e_\downarrow. \end{aligned}$$

Jede Einsform lässt sich dann mit dieser Basis

$$\omega = \sum_{j=1}^8 y_j \hat{b}_j = -i \begin{pmatrix} 0 & y_1 & \zeta y_5 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & \zeta y_7 \\ \zeta y_6 & 0 & 0 & y_3 \\ 0 & \zeta y_8 & y_4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } y_j \in \mathbb{C} \quad (4.20)$$

darstellen.

4.3 Yang-Mills-Wirkung auf zwei Raum-Zeit-Punkten

Betrachten wir die Struktur der allgemeinsten Einsform und führen wir uns die Gestalt des Tensorprodukts vor Augen,

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{Felder am Punkt 1} & \text{„irgendetwas“ zwischen den Punkten} \\ \hline \text{„irgendetwas“ zwischen den Punkten} & \text{Felder am Punkt 2} \end{array} \right), \quad (4.21)$$

dann liegt es nahe, neben den zu erwartenden Higgs-Feldern zusätzliche Felder in den Zusammenhang einzubauen. Diese zusätzlichen Felder interpretieren wir als komplexe Eichfelder. Der Zusammenhang als selbstadjungiertes Element von $\Omega_D^1(\mathcal{A})$ kann dann als

$$\mathcal{A} = \frac{g}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 & \zeta A_1 & 0 \\ \bar{\varphi}_1 & 0 & 0 & \zeta A_2 \\ \zeta \bar{A}_1 & 0 & 0 & \varphi_2 \\ 0 & \zeta \bar{A}_2 & \bar{\varphi}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

geschrieben werden. In kartesischer Darstellung der komplexen Felder erhalten wir

$$\mathcal{A} = \frac{g}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & x_1 + iy_1 & \zeta(A_{1,\text{re}} + iA_{1,\text{im}}) & 0 \\ x_1 - iy_1 & 0 & 0 & \zeta(A_{2,\text{re}} + iA_{2,\text{im}}) \\ \zeta(A_{1,\text{re}} - iA_{1,\text{im}}) & 0 & 0 & -x_2 - iy_2 \\ 0 & \zeta(A_{2,\text{re}} - iA_{2,\text{im}}) & -x_2 + iy_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier sind φ_1 und φ_2 wieder die Higgs-Felder an den Punkten 1 und 2. An dieser Stelle ist noch völlig unklar, ob die komplexen Felder A_j tatsächlich als Eichfelder interpretiert werden können, aber dies wird sich im Folgenden herauskristallisieren.

Wir konstruieren im nächsten Schritt wieder aus dem Zusammenhang die Krümmung, die auch selbstadjungiert ist,

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \odot \mathcal{A}, \quad \text{wo } \mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger. \quad (4.23)$$

In der Diskussion des Zwei-Punkte-Modells stellten wir fest, dass die Yang-Mills-Wirkung neben dem zu $\text{Tr } \mathcal{F} \odot \mathcal{F}$ Beitrag zusätzlich noch einen zu $\text{Tr } \mathcal{F}$ proportionalen Term haben kann, der die Symmetrie der Wirkung erhält, d. h. eichinvariant ist:

$$S = \frac{\mu^4}{4g^2} (\text{Tr} \langle \mathcal{F}^\dagger, \mathcal{F} \rangle_\odot + \text{Tr} \mathcal{F}). \quad (4.24)$$

Um eine genauere Kontrolle über die einzelnen Anteile der Wirkung zu haben, werden wir den Parameter ζ verwenden. Der Parameter ζ ist ein Maß dafür, wie oft der Dirac-Operator der Raum-Zeit angewendet wurde. Er ist also die einzige Erinnerung an Differenzialformen dx^μ aus der vierdimensionalen Kontinuumstheorie. Gemäß der Orthogonalität der Formen im Kontinuum wollen wir eine entsprechende Konvention im Diskreten treffen und nur Tensoren gleicher Stufe, also mit gleicher Anzahl von ζ 's multiplizieren. Dies ist mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\odot$ gemeint. Genauer gesagt heißt das:

$$S = \frac{\mu^4}{4g^2} \text{Tr} \left(r_0 \mathcal{F}^{(0)} \odot \mathcal{F}^{(0)} + r_1 \mathcal{F}^{(1)} \odot \mathcal{F}^{(1)} + r_2 \mathcal{F}^{(2)} \odot \mathcal{F}^{(2)} + r_3 \mathcal{F}^{(0)} + r_4 \mathcal{F}^{(1)} + r_5 \mathcal{F}^{(2)} \right).$$

Nach der Skalarproduktbildung verliert ζ seine Bedeutung und kann zum Beispiel in den Koeffizienten r_j absorbiert werden. Er wurde sozusagen nur zur Buchhaltung eingeführt. Die Koeffizienten r_j sind frei wählbar und wir werden sie als Kontrollgrößen unterschiedlicher Wirkungsbausteine verwenden:

r_0 : Higgs-Potenzial,

r_1 : Beiträge, die von Einsformen abstammen,

r_2 : Beiträge, die von Zweiformen herkommen. Aufgrund auftretender A^4 -Terme, könnte man QCD-ähnliche Modelle mit Eichfeldselbstwechselwirkung formulieren. Wir interessieren uns allerdings nicht für diese Beiträge und setzen daher $r_2 = 0$,

r_3 : fügt einen Term hinzu, der das Higgs-Potenzial anders skaliert. Das Minimum wird dabei verschoben, die Dynamik wird allerdings nicht verändert. Dies erkennt man daran, dass man durch reine Redefinition der Parameter und Felder den Parameter r_3 absorbieren kann,

r_4 : ist nur der Vollständigkeit halber aufgenommen und irrelevant, da $\text{Tr} \mathcal{F}^{(1)}$ verschwindet und

r_5 : enthält nur A -Felder und kann als kinetischer Term für die Eichfelder interpretiert werden.

Wir wollen später Quantenfeldtheorie betreiben und eine perturbative Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichungen erarbeiten. Dazu ist es aber notwendig, dass das Vakuum der Theorie stabil bleibt. Der zu r_3 proportionale Anteil der Wirkung verschiebt aber gerade das Minimum des Higgs-Potenzials. Es wäre daher notwendig, das von r_3 abhängige Minimum anzugeben bzw. die Higgs-Felder zu redefinieren. Um diesen, für die Symmetrie der Wirkung nicht weiter relevanten Schritt zu vermeiden, setzen wir $r_3 = 0$ und die Minima bleiben bei $\langle \varphi \rangle = \frac{\mu}{g}$.

Die Wirkung, die für unsere Zwecke interessant ist, ist also von r_0 , r_1 und r_5 abhängig. Ohne jetzt die volle Wirkung angeben zu wollen, möchten wir einen speziellen Fall ansprechen. In einer

Theorie, in der es möglich ist, z. B. durch Symmetriebrechung die Eichfelder so zu wählen, dass eines der Eichfelder verschwindet und das andere rein imaginär ist, erhalten wir eine Wirkung, die einer Diskretisierung des Nambu-Goldstone-Modells entspricht. Man überzeugt sich leicht von dieser Feststellung, wenn man die Wirkung für $A_{1,\text{re}} = A_{1,\text{im}} = A_{2,\text{re}} = 0$ und $c_{\text{in}} = 1$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{2}r_0g^2 \left(\left(x_1 \left(x_1 - 2\frac{\mu}{g} \right) + y_1^2 \right)^2 + \left(x_2 \left(x_2 - 2\frac{\mu}{g} \right) + y_2^2 \right)^2 \right) \\
& + \frac{1}{2}r_1g^2 \left(A_{2,\text{im}}^2 \left(2\frac{\mu^2}{g^2} + \left(x_1 - 2\frac{\mu}{g} \right) x_1 + \left(x_2 - 2\frac{\mu}{g} \right) x_2 + y_1^2 + y_2^2 \right) \right. \\
& \quad \left. - 4A_{2,\text{im}}\mu g \left(y_1 \left(x_2 - \frac{\mu}{g} \right) - y_2 \left(x_1 - \frac{\mu}{g} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + 2\frac{\mu^2}{g^2} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right) \\
& + r_5\mu^2 A_{2,\text{im}}^2
\end{aligned} \tag{4.25}$$

mit der Wirkung des Nambu-Goldstone-Modells vergleicht, wie sie sich zum Beispiel aus dem nichtkommutativ geometrischen Mainz-Marseille Modell (A.11) unter Berücksichtigung naiver Diskretisierungsregeln

| | | |
|---------------|-----------------------|---------------------|
| Integrale: | $\int dz x(z)$ | $\mapsto x_1 + x_2$ |
| Produkte: | $[x(z)y(z)]_1$ | $\mapsto x_1y_1$ |
| | $[x(z)y(z)]_2$ | $\mapsto x_2y_2$ |
| Differenzial: | $[\partial_z x(z)]_1$ | $\mapsto x_1 - x_2$ |
| | $[\partial_z x(z)]_2$ | $\mapsto x_2 - x_1$ |

ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{\hat{r}_5}{4g^2} F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} + \frac{\hat{r}_5}{4g^2} F_{L\mu\nu} F_L^{\mu\nu} + \frac{\hat{r}_1}{2} (\partial_\mu x)(\partial^\mu x) + \frac{r_1}{2} (\partial_\mu y)(\partial^\mu y) \\
& - 2\hat{r}_1\sqrt{2}L_\mu (y\partial^\mu x - x\partial^\mu y - \frac{\mu}{g}\partial^\mu y) + \hat{r}_1 4L^2 (x^2 + y^2 + 2\frac{\mu}{g}x + \frac{\mu^2}{g^2}) \\
& + \hat{r}_0 \left(2\mu^2 x^2 + 2\mu g x^3 + 2\mu g x y^2 + \frac{1}{2}g^2 x^4 + g^2 x^2 y^2 + \frac{1}{2}g^2 y^4 \right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Wenn man das Eichfeld $L(z)$ der Kontinuumswirkung bei der Diskretisierung als

$$L_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} A_{2,\text{im}} = -L_2 \tag{4.27}$$

übersetzt und die konstanten Koeffizienten $\{\hat{r}_0, \hat{r}_1, \hat{r}_5\}$ nach $\{r_0, r_1, r_5\}$ anpasst, dann sind beide Wirkungen identisch. Das Eichfeld $L(z)$ wird zu einer Verknüpfungsvariablen („Link“-Variable),

wie sie in der Gittertheorie auftritt. Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir das andere komplexe Eichfeld A_2 identisch Null und das verbleibende rein imaginär wählen. Das heißt, die Wirkungen, die wir erhalten, wenn wir

$$A_{2,\text{re}} = A_{2,\text{im}} = A_{1,\text{re}} = 0$$

oder

$$A_{2,\text{re}} = A_{2,\text{im}} = A_{1,\text{re}} = 0$$

wählen, sind diskrete Versionen der Nambu-Golstone-Kontinuumswirkung.

Trifft man die Wahl $c_{\text{in}} = 1$ nicht und schränkt auch die komplexen Eichfelder A_1 und A_2 nicht ein, dann arbeitet man mit einer größeren Klasse von Wirkungen, die als Untermenge die diskrete Nambu-Goldstone-Wirkung enthält.

Als weiteres Argument, das unsere Diskretisierungsvermutung festigt, wollen wir an dieser Stelle noch die Diskretisierung unter globaler Eichinvarianz anführen. In global eichinvarianten Modellen sind Eichfelder nicht notwendig. Wenn wir nun in unserer Herleitung alle Eichfelder $A_1 = A_2 = 0$ setzen und c beliebig lassen, erhalten wir

$$\begin{aligned} S |_{A_1=A_2=0} &= \frac{1}{2} r_0 g^2 \left(\left(x_1 \left(x_1 - 2\frac{\mu}{g} \right) + (4c_{\text{in}} - 3)y_1^2 \right)^2 + \left(x_2 \left(x_2 - 2\frac{\mu}{g} \right) + (4c_{\text{in}} - 3)y_2^2 \right)^2 \right) \\ &\quad + r_1 \mu^2 \left((x_1 - x_2)^2 + (4c_{\text{in}} - 3)(y_1 - y_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

An dieser Gleichung lässt sich noch viel schneller ablesen, dass es sich hier wieder um die Diskretisierung von

$$S = (\partial_z \tilde{\varphi})^2 - \mu^2 \tilde{\varphi}^2 + \frac{g^2}{2} \tilde{\varphi}^4 + \frac{\mu^4}{2g^2}, \quad (4.29)$$

handelt, wobei $\tilde{\varphi} = \varphi + \sqrt{\frac{\mu^2}{g^2}}$ das unverschobene Higgs-Feld ist.

Außerdem stellen wir fest, dass die „Kommunikation“ der beiden Punkte nur durch den kinetischen Term und die Eichfelder hergestellt wird und nicht über etwaige nichtlokale Wechselwirkungen.

Eine Besonderheit ist trotzdem zu beachten: In unserem Modell handelt es sich um zwei skalare, komplexe Eichfelder, die zu einer lokal eichinvarianten Theorie führen. Im gewöhnlichen Nambu-Goldstone-Modell handelt es sich aber um ein skalares, reelles Eichfeld. Es ist hier auch nicht sichergestellt, dass eine sinnvolle Symmetriebrechung existiert, die diese besondere Eichfeldkonfiguration erlaubt. Dazu müssen wir die Eichsymmetrie des Modells genauer studieren.

4.4 Eichtransformationen auf zwei Raum-Zeit-Punkten

Untersuchen wir jetzt also die lokale Eichinvarianz der vorliegenden Theorie. Diesbezüglich müssen wir verstehen, wie sich die physikalischen Felder, die die Theorie beinhaltet, unter unitären Transformationen ändern. Bevor wir dieses Verhalten der Felder genau angeben können, müssen wir die Eichgruppe von \mathcal{A} spezifizieren. Die Eichgruppe \mathcal{U} ist die Gruppe der unitären Elemente von $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{rz}} \otimes \mathcal{A}_{\text{in}}$, nämlich die Gruppe

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{rz}} \times \mathcal{U}_{\text{in}}. \quad (4.30)$$

Die Elemente $u \in \mathcal{U}$ erfüllen eine Unitaritätsrelation, die durch das \odot -Produkt

$$u \odot u^* = \mathbf{1}_4 \quad (4.31)$$

definiert ist.

Nach einer kurzen Rechnung lässt sich zeigen, dass diese unitären Elemente auch als¹

$$u = \frac{1}{\sqrt{c_{\text{in}} + (c_{\text{in}} - 1)(1 - 2 \cos \psi_1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\psi_1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{c_{\text{in}} + (c_{\text{in}} - 1)(1 - 2 \cos \psi_2)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\psi_3} & 0 \\ 0 & e^{-i(\psi_2 + \psi_3)} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

dargestellt werden können. Bei festem c_{in} sind es also drei Parameter, die für die Darstellung einer deformierten unitären Matrix benötigt werden. Diese drei Freiheitsgrade spiegeln in gewisser Weise die Symmetrien wieder. Zum einen sind es die beiden Rotationen der inneren Symmetrie (auf jedem Raum-Zeit-Punkt eine) und zum anderen ist es die Rotation auf der Raum-Zeit selbst. Wie sich nun aber die einzelnen Felder des Vektorpotenzials

$$\mathcal{A} = \frac{g}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi}_1 & \zeta A_1 & 0 \\ \varphi_1 & 0 & 0 & \zeta A_2 \\ \zeta \bar{A}_1 & 0 & 0 & \bar{\varphi}_2 \\ 0 & \zeta \bar{A}_2 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

unter Eichtransformationen ändern, folgt aus dem unitär transformierten Zusammenhang

$$\gamma_u(\mathcal{A}) = \mathcal{A}' = u \odot d u^* + u \odot \mathcal{A} \odot u^*. \quad (4.34)$$

¹Es wurde bereits die Freiheit der Multiplikation mit einer globalen Phase ausgenutzt.

Wir sehen von einer Angabe der expliziten Rechnung zu dieser Gleichung ab und referieren die Ergebnisse durch Nennung der infinitesimalen Transformationen der Felder:

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= -(4c_{\text{in}} - 3)\psi_1 y_1 \\
\delta y_1 &= \psi_1 \left(x_1 - \frac{\mu}{g} \right) \\
\delta x_2 &= -(4c_{\text{in}} - 3)\psi_2 y_2 \\
\delta y_2 &= \psi_2 \left(x_2 - \frac{\mu}{g} \right) \\
\delta A_{1,\text{re}} &= -\psi_3 A_{1,\text{im}} + (c_{\text{in}} - 1)(\psi_1 - \psi_2)(A_{2,\text{im}} - A_{1,\text{im}}) \\
\delta A_{1,\text{im}} &= \psi_3 \left(A_{1,\text{re}} - \frac{\mu}{g} \right) + (c_{\text{in}} - 1)(\psi_1 - \psi_2)(A_{1,\text{re}} - A_{2,\text{re}}) \\
\delta A_{2,\text{re}} &= -\psi_3 A_{2,\text{im}} - (\psi_1 - \psi_2)((c_{\text{in}} - 1)A_{1,\text{im}} - c_{\text{in}}A_{2,\text{im}}) \\
\delta A_{2,\text{im}} &= \psi_3 \left(A_{2,\text{re}} - \frac{\mu}{g} \right) + (\psi_1 - \psi_2) \left((c_{\text{in}} - 1)A_{1,\text{re}} + \frac{\mu}{g} - c_{\text{in}}A_{2,\text{re}} \right). \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Betrachten wir die Gleichungen etwas genauer, so stellen wir fest, dass der Transformationsparameter ψ_3 nur bei den Eichfeldern auftritt und eine gesonderte Symmetrie widerspiegelt. Dreht man sozusagen in der komplexen Ebene das Eichfeld A_1 um den Winkel ψ_3 , so muss man simultan das Eichfeld A_2 nachdrehen, um die lokale Eichinvarianz weiterhin gewährleisten zu können. Nach unserem Schaubild leben die Eichfelder selbst nicht auf den Raum-Zeit-Punkten, sondern gewissermaßen zwischen ihnen. Es ist daher zu erwarten, dass sie mit der Raum-Zeit-Symmetrie eng verbunden sind, so dass wir die Drehung mit ψ_3 als unitäre Transformation der Raum-Zeit-Struktur interpretieren. Zum anderen transformieren die Higgs-Felder jeweils nur mit einer lokalen Phase ψ_1 bzw. ψ_2 , wie wir es naiv auch von der Kontinuumstheorie erwartet hätten. Interessant an dieser Stelle ist allerdings, dass auch hier die Eichfelder mit $\psi_1 - \psi_2$ transformieren. Dies steht im Einklang mit der diskreten Version der infinitesimalen Transformation des reellen Eichfeldes in der Kontinuumstheorie

$$[\partial_\mu \psi(z)]_1 \xrightarrow{\text{Diskretisierung}} \psi_1 - \psi_2.$$

Wirft man einen Blick auf die in unserer Herleitung der Wirkung auftretenden Terme, die Eichfelder enthalten, dann ist auffällig, dass die Variationen der linear unabhängigen Eichfeldkombinationen weder aus dem r_1 -, noch aus dem r_5 -Anteil der Wirkung von der Phase ψ_3 abhängen. Dieses scheinbar eigenartige Verhalten wird klar, wenn man die Wirkung in die Beiträge aufteilt, die nur Higgs-Felder $V(\hat{x})$ bzw. nur Eichfelder $\tilde{S}(\hat{A})$, sowie den gemischten Anteil $\check{S}(\hat{A})\check{V}(\hat{x})$ enthalten:

$$S \equiv r_0 V(\hat{x}) + r_1 \tilde{S}(\hat{A})\check{V}(\hat{x}) + r_5 \tilde{S}(\hat{A}). \quad (4.36)$$

Die Variation muss für jeden Summanden separat verschwinden. D. h. aus

$$\delta(\check{S}\check{V}) = (\delta\check{S})\check{V} + \check{S}\delta(\check{V}) = 0 \quad (4.37)$$

folgt direkt, dass \tilde{S} nicht mit ψ_3 variieren kann. Die Aussage für den r_5 -Anteil, $\delta\tilde{S} = 0$, bestätigt man am expliziten Ausdruck:

$$\begin{aligned}\tilde{S} \propto & 4(1 - c_{\text{in}})(A_{1,\text{im}}A_{2,\text{im}} + A_{1,\text{re}}A_{2,\text{re}}) - 2\mu(A_{1,\text{re}} + A_{2,\text{re}}) \\ & + g(2c_{\text{in}} - 1)(A_{1,\text{re}}^2 + A_{1,\text{im}}^2 + A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2).\end{aligned}$$

Die ψ_3 -Drehung scheint eine Symmetrie der Theorie zu sein, deren Brechung keinerlei wahrnehmbare Auswirkung auf die von uns hergeleitete Wirkung hat.

Die infinitesimalen Transformationen der komplexen Eichfelder verraten, dass sie durch eine Fixierung zum Verschwinden gebracht werden können. Dadurch können die Eichfelder auch so gewählt werden, dass sie bestimmte Werte annehmen. Diese Phasenfixierung ist eine echte Symmetriebrechung. Bei der Wahl $c_{\text{in}} = 1$ und $\psi_3 = 0$ verschwinden die Variationen des Eichfelds A_1 , d. h. von den anfangs vier unabhängigen Eichfeldern sind lediglich zwei physikalisch. Analogien dieser Art kennt man in der Physik genügend:

- Elektrodynamik: Das Photon hat nur zwei physikalische Freiheitsgrade.
- Elektroschwache Ww: W_{\pm} -Bosonen
- Gravitation: Eichfixierung des metrischen Tensors usw.

Die Invarianz der Wirkung unter den angegebenen Eichtransformationen folgt im Vergleich zum obigen Fall nicht wie im vorhergehenden Modell einfach aus der Proportionalität der Krümmung zur Einheitsmatrix, sondern muss hier nachgerechnet werden. Berechnet man nämlich mit dem eichtransformierten Vektorpotenzial die transformierte Krümmung

$$\mathcal{F}' = d\mathcal{A}' + \mathcal{A}' \odot \mathcal{A}' \quad (4.38)$$

und daraus wiederum die Wirkung

$$S' = \text{Tr} \langle \mathcal{F}'^\dagger, \mathcal{F}' \rangle_{\odot} = \text{Tr} \langle u \odot \mathcal{F}'^\dagger \odot u^*, u \odot \mathcal{F}' \odot u^* \rangle_{\odot} = \text{Tr} \langle \mathcal{F}'^\dagger, \mathcal{F}' \rangle_{\odot} = S, \quad (4.39)$$

dann folgt die Identität unmittelbar, wenn man sich vom Transformationsverhalten der Krümmung

$$\mathcal{F}' = u \odot \mathcal{F} \odot u^* \quad (4.40)$$

überzeugt hat. Dies folgt aber aus einer Nebenrechnung, wenn man mit dem transformierten Vektorpotenzial $\mathcal{A}' = u \odot du^* + u \odot \mathcal{A} \odot u^*$ die transformierte Krümmung ausrechnet und die Unitaritätsrelation $u \odot u^* = \mathbf{1}_4$ (und daraus durch Differenziation wiederum hergeleitet $u \odot du^* = -du \odot u^*$) verwendet:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}' &= d\mathcal{A}' + \mathcal{A}' \odot \mathcal{A}' \\ &= du \odot du^* + du \odot \mathcal{A} \odot u^* + u \odot d\mathcal{A} \odot u^* - u \odot \mathcal{A} \odot du^* + u \odot du^* \odot u \odot du^* \\ &\quad + u \odot du^* \odot u \odot \mathcal{A} \odot u^* + u \odot \mathcal{A} \odot u^* \odot u \odot du^* + u \odot \mathcal{A} \odot u^* \odot u \odot \mathcal{A} \odot u^* \\ &= u \odot d\mathcal{A} \odot u^* + u \odot \mathcal{A} \odot \mathcal{A} \odot u^* = u \odot \mathcal{F} \odot u^*.\end{aligned} \quad (4.41)$$

Damit ist gezeigt, dass die Wirkung unter den unitären Transformationen u invariant bleibt.

Auf funktionalem Niveau wird diese Symmetrie unter lokalen Eichtransformationen durch die Ward-Takahashi-Identität wiedergegeben:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\delta\Gamma}{\delta x_j} \delta x_j + \frac{\delta\Gamma}{\delta y_j} \delta y_j + \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{j,\text{re}}} \delta A_{j,\text{re}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{j,\text{im}}} \delta A_{j,\text{im}} = 0. \quad (4.42)$$

Im weiteren Verlauf wollen wir uns mit Quantenfeldtheorie beschäftigen und uns einerseits mit dem Abzählen von Feynman-Graphen in einer nulldimensionalen Theorie und andererseits mit einigen elementaren Begriffen, wie Slavnov-Taylor-Identität, Eichfixierung, Geistbeiträgen, Renormierung, Wick-Rotation usw. beschäftigen.

Kapitel 5

Quantenfeldtheorie auf zwei Punkten

Um eine sinnvolle Entwicklung im Sinne einer Störungstheorie betreiben zu können ist es notwendig, genau zu wissen, wie sich das Minimum charakterisiert. Nur eine Entwicklung im Minimum kann den Ansprüchen einer stabilen Störungstheorie genügen.

Untersucht man die Symmetrie des Minimums, so stellt man fest, dass das Minimum der diskreten Wirkung unter der vollen Eichsymmetrie invariant ist. Diese Untersuchung kann zum Beispiel mit Hilfe der Positivität aller Subdeterminanten der Hesse-Matrix stattfinden (siehe Anhang B). Wir stellen nach einer hier nicht weiter ausgeführten Rechnung fest, dass das weiterhin entartete Minimum folgender Gleichung genügt:

$$g(x_i^2 + (4c_{\text{in}} - 3)y_i^2) + 2\mu x_i = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = x_2. \quad (5.1)$$

Das Minimum ist also tatsächlich unter der vollen Eichsymmetrie invariant.

Um sich dem ersten Ziel, nämlich dem Abzählen von Feynman-Graphen zu nähern, müssen zunächst einmal die freien Propagatoren der Theorie gefunden werden. Allerdings stellen wir gleich zu Beginn fest, dass nicht alle Felder der manifest nichtkommutativen Wirkung massiv sind. Wohingegen in der Kontinuumswirkung der Propagator für das Goldstone-Feld $y(z)$ noch infrarot divergent war, existiert in der diskretisierten Wirkung zumindest ein y -Propagator, nämlich der für den $(y_1 - y_2)$ -Mode. Dies liest man beispielsweise an den quadratischen Termen der Wirkung

$$\int (\partial_\mu y)(\partial^\mu y) \longrightarrow r_1(y_1 - y_2)^2 \quad (5.2)$$

ab. Die angesprochene Infrarot-Divergenz in der diskreten Wirkung ergibt sich, wenn man den Parameter r_1 im Limes gegen Null betrachtet und sich der Interpretation von r_1 als inversen Abstand bewusst wird.

Des weiteren existieren bestimmte Propagatoren der Eichfelder nicht, was wieder an der Anzahl der linear unabhängigen, quadratischen Monome der Wirkung, welche die Anzahl der massiven Felder wiedergibt, zum Ausdruck kommt. Das bloße Hinzufügen von Massentermen bricht bekanntermaßen die lokale Eichsymmetrie. Die Symmetrie wird aber als fundamentale, sozusagen als definierende Eigenschaft einer Theorie aufgefasst. Daher wollen wir die Symmetrie nicht so leicht aufgeben. Eine Möglichkeit, die in der Quantenfeldtheorie auch ihre Anwendung findet, ist nun, die lokale Eichsymmetrie durch die von Becchi, Rouet und Stora eingeführte BRS-Symmetrie zu ersetzen.

Hierbei werden die kontinuierlichen Transformationsparameter ψ_i durch Graßmann-wertige Geistfelder ersetzt, $\psi_i \mapsto c_i$. Die BRS-Transformation s der Felder ist dann definiert durch:

$$\begin{aligned}
s x_1 &= -(4c_{\text{in}} - 3)c_1 y_1 \\
s y_1 &= c_1 \left(x_1 - \frac{\mu}{g} \right) \\
s x_2 &= -(4c_{\text{in}} - 3)c_2 y_2 \\
s y_2 &= c_2 \left(x_2 - \frac{\mu}{g} \right) \\
s A_{1,\text{re}} &= -c_3 A_{1,\text{im}} + (c_{\text{in}} - 1)(c_1 - c_2)(A_{2,\text{im}} - A_{1,\text{im}}) \\
s A_{1,\text{im}} &= c_3 \left(A_{1,\text{re}} - \frac{\mu}{g} \right) + (c_{\text{in}} - 1)(c_1 - c_2)(A_{1,\text{re}} - A_{2,\text{re}}) \\
s A_{2,\text{re}} &= -c_3 A_{2,\text{im}} - (c_1 - c_2)((c_{\text{in}} - 1)A_{1,\text{im}} - c_{\text{in}}A_{2,\text{im}}) \\
s A_{2,\text{im}} &= c_3 \left(A_{2,\text{re}} - \frac{\mu}{g} \right) + (c_1 - c_2) \left((c_{\text{in}} - 1)A_{1,\text{re}} + \frac{\mu}{g} - c_{\text{in}}A_{2,\text{re}} \right). \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Die BRS-Transformation der Geister selbst verschwindet,

$$s c_i = 0. \tag{5.4}$$

Zusätzlich werden korrespondierende Antigeistfelder und Nakanishi-Lautrup-Felder B_i auftreten, deren Transformationsverhalten durch

$$s \bar{c}_i = B_i \quad \text{und} \quad s B_i = 0 \tag{5.5}$$

definiert ist.

Die angesprochenen Nakanishi-Lautrup-Felder B_i sind nur Hilfsfelder und haben in der Eichfixierung ihren Platz. Mit Hilfe dieser Hilfsfelder ist es uns möglich, Massenterme hinzuzufügen, ohne die (BRS-)Symmetrie zu brechen. Genau genommen benötigen wir für unser Modell nur eines dieser Hilfsfelder: B_1 . Der Grund dafür liegt im kinetischen Term, der nach der Diskretisierung einen Massenterm für den $y_1 - y_2$ -Mode generiert. In [26] gibt es weder einen kinetischen Term noch ein Eichfeld A , so dass dort wiederum auch nur ein Eichfeld benötigt wird, um

das y -Feld massiv werden zu lassen. Würden wir mehr B -Felder involvieren, so ließen sich die unphysikalischen B -Propagatoren nicht vermeiden. Wir wählen daher die Eichfixierung

$$S_{g.f.} = \frac{1}{4}B_1^2 + \frac{1}{2}\xi_1\mu B_1 y_1. \quad (5.6)$$

Wir könnten zwar an dieser Stelle das B -Feld über seine Bewegungsgleichung $\delta_{B_1}S = 0$ eliminieren und die Betrachtung etwas vereinfachen, müssten dafür aber einen gewissen Preis zahlen. Die dann vorliegende Theorie wäre dann nicht mehr ohne weiteres renormierbar, denn die BRS-Transformation des B -Feldes schlosse so nicht mehr, $s^2 B_1 \neq 0$.

Um die BRS-Symmetrie zu erhalten, wird ein entsprechender Faddeev-Popov-Geistterm hinzugefügt

$$S_{\phi\pi} = -\frac{1}{2}\xi_1\mu\bar{c}_1 s y_1 = -\frac{1}{2}\xi_1\bar{c}_1\mu \left(x_1 - \frac{\mu}{g}\right) c_1. \quad (5.7)$$

Weil nun einige der BRS-Transformationen in den klassischen Feldern bilinear sind und in der vollen Quantentheorie die klassischen Felder zu nichttrivialen Operatoren werden, ist es notwendig, die nichtlinearen BRS-Transformationen an äußere Quellen zu koppeln. Daher fügen wir einen zusätzlichen Anteil $S_{\text{ext.F.}}$, der von äußeren Quellen abhängt, zur Wirkung

$$\begin{aligned} S_{\text{ext.F.}} = & X_1(s y_1) + Y_1(s x_1) + X_2(s y_2) + Y_2(s x_2) \\ & + V_1(s A_{1,\text{im}}) + U_1(s A_{1,\text{re}}) + V_2(s A_{2,\text{im}}) + U_2(s A_{2,\text{re}}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

hinzu.

Insgesamt setzt sich die klassische Wirkung nun aus den aufgeführten Anteilen zusammen:

$$\Gamma_{\text{cl.}} = S + S_{\text{GF+FP}} + S_{\text{ext.F.}}. \quad (5.9)$$

Es ist nicht nur $\Gamma_{\text{cl.}}$ BRS-invariant, d. h. $s\Gamma_{\text{cl.}} = 0$, sondern jeder Baustein selbst ist es auch:

$$s S = 0, \quad s S_{\text{GF+FP}} = 0 \quad \text{und} \quad s S_{\text{ext.F.}} = 0. \quad (5.10)$$

Zur Vollständigkeit geben wir noch die Kenngrößen der auftretenden Felder in Form einer Tabelle (Dimension, Faddeev-Popov-Ladung und Verhalten bei Ladungskonjugation) in Tab. 5.1 an.

Wir sprachen davon, die lokale Eichsymmetrie durch BRS-Symmetrie ersetzen zu wollen. Auf funktionalanalytischem Niveau entsprach die lokale Eichsymmetrie der Ward-Takahashi-Identität. Das Pendant in der BRS-Symmetrie ist die sogenannte Slavnov-Taylor-Identität, die sich für die hier zugrunde liegende Symmetrie wie folgt darstellt:

| | neutrale Felder | | | | | Geister | | ext. Felder | | | |
|-----------------|-----------------|-------|-------------------|-------------------|-------|---------|-------------|-------------|-------|-------|-------|
| | x_i | y_i | $A_{i,\text{re}}$ | $A_{i,\text{im}}$ | B_i | c_i | \bar{c}_i | X_i | Y_i | V_i | U_i |
| dim | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Q_{FP} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| C | + | - | + | - | - | - | - | - | + | - | + |

Tabelle 5.1: Die Quantenzahlen aller vorkommenden Felder.

$$\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta x_j} s x_j + \frac{\delta\Gamma}{\delta y_j} s y_j + \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{j,\text{re}}} s A_{j,\text{re}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{j,\text{im}}} s A_{j,\text{im}} \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}_k} s \bar{c}_k = 0. \quad (5.11)$$

In dieser Differentialgleichung ist die gesamte Symmetrie der Theorie codiert. Diese Schlüsselgleichung wird in den noch kommenden Überlegungen, wie zum Beispiel in der Renormierung, eine zentrale Rolle spielen.

5.1 Freie Propagatoren

Bevor wir die Dyson-Schwinger-Gleichungen herleiten, bestimmen wir die freien Propagatoren des Modells. Das Wirkungsfunktional $Z(\hat{\rho})$ der allgemeinen Green's-Funktionen erhalten wir, wenn wir die Theorie an äußere Quellen $\hat{\rho} = (\rho_1, \tau_2, j_{1,\text{re}}, j_{1,\text{im}}, \rho_2, \tau_2, j_{2,\text{re}}, j_{2,\text{im}})$ koppeln und über alle möglichen Pfade aufsummieren:

$$Z(\hat{\rho}) = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} (S(\hat{x}) + \hat{\rho} \cdot \hat{x}) \right\}.$$

Bei den Integrationen handelt es sich um gewöhnliche Integrationen, da wir uns in einer null-dimensionalen Theorie befinden. Die \hbar -Faktoren wollen wir explizit beibehalten, um später eine Schleifenentwicklung durchführen zu können.¹ Die wohldefinierte Normierungskonstante \mathcal{N} wird durch die Bedingung

$$Z(\hat{\rho} = 0) = 1 \quad (5.12)$$

fixiert. Von der Vielzahl von Möglichkeiten, nun die freien Feynman-Propagatoren Δ_F auszurechnen, wählen wir die Folgende: Wir betrachten dazu den bilinearen Anteil der klassischen Wirkung und die Ankopplung an die äußeren Ströme.

¹Die Lichtgeschwindigkeit wird durch die ganze Arbeit hinweg auf Eins gesetzt.

Wir lösen dann das durch Differenziation des bilinearen Anteils der Wirkung entstehende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} S_{\text{bil}} = \rho_1, \quad \partial_{y_1} S_{\text{bil}} = \tau_1, \quad \partial_{A_{1,\text{re}}} S_{\text{bil}} = j_{1,\text{re}}, \quad \partial_{A_{1,\text{im}}} S_{\text{bil}} = j_{1,\text{im}}, \\ \partial_{x_2} S_{\text{bil}} = \rho_2, \quad \partial_{y_2} S_{\text{bil}} = \tau_2, \quad \partial_{A_{2,\text{re}}} S_{\text{bil}} = j_{2,\text{re}}, \quad \partial_{A_{2,\text{im}}} S_{\text{bil}} = j_{2,\text{im}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

nach den Feldern $x_1, y_1, A_{1,\text{re}}, A_{1,\text{im}}, x_2, y_2, A_{2,\text{re}}$ und $A_{2,\text{im}}$ auf. Mit den Feldern und ihrer impliziten Abhängigkeit von den Quellen können dann die freien Propagatoren mittels Differenziation nach den Quellen berechnet werden. Zum Beispiel lässt sich der freie Propagator $\Delta_{x_1 x_1}$ durch das Auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \Gamma_{\text{bil}}^{(0)} &= 2\mu^2(2r_0 x_1 + r_1(x_1 - x_2)) = \rho_1(x_1, x_2) \\ \partial_{x_2} \Gamma_{\text{bil}}^{(0)} &= 2\mu^2(2r_0 x_2 + r_1(x_2 - x_1)) = \rho_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.14)$$

nach den Feldern in Abhängigkeit der äußeren Quellen

$$\begin{aligned} x_1(\rho_1, \rho_2) &= \frac{2r_0 \rho_1 + r_1(\rho_1 + \rho_2)}{8r_0(r_0 + r_1)\mu^2} \\ x_2(\rho_1, \rho_2) &= \frac{2r_0 \rho_2 + r_1(\rho_1 + \rho_2)}{8r_0(r_0 + r_1)\mu^2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

und gemäß der Definition des freien Propagators $\Delta_{x_1 x_1}^F = \hbar \partial_{\rho_1} x_1(\rho_1, \rho_2)$ zu

$$\Delta_{x_1 x_1} = \hbar \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} \quad (5.16)$$

bestimmen. Für die anderen Propagatoren mit verschwindender Faddeev-Popov-Ladung gelten entsprechende Relationen. Die freien Propagatoren für die x_j -Felder entkoppeln, wie wir sehen konnten, vollständig von den restlichen Feldern:

$$\begin{aligned} \Delta_{x_1 x_1} = \Delta_{x_2 x_2} &= \hbar \frac{2r_0 + r_1}{8\mu^2 r_0 (r_0 + r_1)}, \\ \Delta_{x_1 x_2} = \Delta_{x_2 x_1} &= \hbar \frac{r_1}{8\mu^2 r_0 (r_0 + r_1)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die Propagatoren der Eichfeldrealteile sind

$$\begin{aligned} \Delta_{A_{1,\text{re}} A_{1,\text{re}}} = \Delta_{A_{2,\text{re}} A_{2,\text{re}}} &= \hbar \frac{(4c_{\text{in}} - 3)r_1 + (2c_{\text{in}} - 1)r_5}{2(4c_{\text{in}} - 3)r_5(2r_1 + r_5)\mu^2}, \\ \Delta_{A_{1,\text{re}} A_{2,\text{re}}} = \Delta_{A_{2,\text{re}} A_{1,\text{re}}} &= \hbar \frac{(4c_{\text{in}} - 3)r_1 + 2(c_{\text{in}} - 1)r_5}{2(4c_{\text{in}} - 3)r_5(2r_1 + r_5)\mu^2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Für die verbleibenden Propagatoren ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta_{B_1 B_1} &= \Delta_{B_1 A_{1,\text{im}}} = \Delta_{B_1 A_{2,\text{im}}} = 0, & \Delta_{B_1 y_1} &= \Delta_{B_1 y_2} = \hbar \frac{2}{\mu \xi_1}, \\
\Delta_{y_1 y_1} &= \Delta_{y_1 y_2} = -\hbar \frac{2}{\mu^2 \xi_1^2}, & \Delta_{y_2 y_2} &= \hbar \frac{4(3 - 4c_{\text{in}})r_1 r_5 + (2r_1 + r_5)\xi_1^2}{2(4c_{\text{in}} - 3)r_1 r_5 \mu^2 \xi_1^2}, \\
\Delta_{y_1 A_{1,\text{im}}} &= \Delta_{y_1 A_{2,\text{im}}} = 0, & \Delta_{y_2 A_{1,\text{im}}} &= -\Delta_{y_2 A_{2,\text{im}}} = \frac{\hbar}{2(3 - 4c_{\text{in}})r_5 \mu^2}, \\
\Delta_{A_{1,\text{im}} A_{1,\text{im}}} &= \Delta_{A_{2,\text{im}} A_{2,\text{im}}} = \hbar \frac{1 - 2c_{\text{in}}}{2(3 - 4c_{\text{in}})r_5 \mu^2}, \\
\Delta_{A_{1,\text{im}} A_{2,\text{im}}} &= \hbar \frac{c_{\text{in}} - 1}{(4c_{\text{in}} - 3)r_5 \mu^2}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Alle anderen Propagatoren verschwinden.

Auf analoge Weise erhalten wir aus dem in den Geistfeldern bilinearen Anteil der Wirkung

$$S_{\phi\pi}^{\text{bil}} = \frac{1}{2} \xi_1 \frac{\mu^2}{g} \bar{c}_1 c_1 \tag{5.20}$$

das entsprechende Gleichungssystem

$$\partial_{c_1} S_{\text{bil}} = \bar{\eta}_1, \quad \text{bzw.} \quad \partial_{\bar{c}_1} S_{\text{bil}} = -\eta_1. \tag{5.21}$$

Nach dem selben Strickmuster ergibt sich der einzige Geistpropagator

$$\Delta_{\bar{c}_1 c_1} = \hbar \frac{2g}{\xi_1 \mu^2}. \tag{5.22}$$

Alle Propagatoren sind somit endlich, wenn wir von gewissen Limites, z. B. $r_i \rightarrow 0$, $i \in \{0, 1, 5\}$, absehen.

5.2 Das volle Modell

Bisher haben wir den einen oder anderen Begriff, der uns in der Quantenfeldtheorie mit komplizierteren Begleiterscheinungen begegnet, mit Hilfe der Theorie in null Dimensionen in vereinfachter Form wiederfinden können. Dieses Kapitel widmet sich dem vollen Modell. Unter dem vollen Modell wollen wir die quantenfeldtheoretische Diskussion der hergeleiteten Wirkung in all ihren Feldern verstehen. Wir werden jedoch schnell feststellen können, dass das volle Modell so umfangreich ist, und eine umfassende Diskussion sehr viel Platz in Anspruch nehmen würde. Um aus Gründen der Vollständigkeit nicht auf die Ergebnisse des vollen Modells verzichten zu müssen, setzen wir uns lediglich das Abzählen der Feynman-Graphen als Ziel. Wir

werden Regeln finden, die es erlauben, verschiedene Topologien von Feynman-Graphen einfach auszurechnen.

Betrachten wir als nächstes das Erzeugendenfunktional der Green's-Funktionen

$$Z(\hat{\rho}) = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} e^{\frac{1}{\hbar}(-\Gamma_{\text{cl.}} + \hat{\rho} \cdot \hat{x})} \quad (5.23)$$

mit den äußeren Quellen

$$\hat{\rho} = (\rho_1, \tau_1, j_{1,\text{re}}, j_{1,\text{im}}, \rho_2, \tau_2, j_{2,\text{re}}, j_{2,\text{im}}, l_1, \eta_1, \bar{\eta}_1)$$

und den dazugehörigen Feldern

$$\hat{x} = (x_1, y_1, A_{1,\text{re}}, A_{1,\text{im}}, x_2, y_2, A_{2,\text{re}}, A_{2,\text{im}}, B_1, \bar{c}_1, c_1).$$

Die Geistfelder c_1 und \bar{c}_1 sind ebenso Grassmann-wertig, wie auch die korrespondierenden Quellterme $\bar{\eta}_1$ und η_1 ($Q_{\text{FP}}(\eta_1) = +1$; $Q_{\text{FP}}(\bar{\eta}_1) = -1$).

Die Bewegungsgleichung eines jeden Feldes ist eine Differenzialgleichung, die sich störungstheoretisch berechnen lässt. Da jedem Feld eine Differenzialgleichung entspricht, müssen elf (!) Gleichungen gelöst werden, um das Modell vollständig bestimmen zu können. Wir wollen uns dennoch von dem pädagogischen Charakter dieses Modells überzeugen und wählen exemplarisch die Differenzialgleichung, die das Feld x_1 beschreibt.

Sehen wir dazu auf die Differenzialgleichung, eine Dyson-Schwinger-Gleichung, die das Wirkungsfunktional $Z(\hat{\rho})$ erfüllen muss:

$$0 = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} \frac{\partial}{\partial x_1} e^{\frac{1}{\hbar}(-\Gamma_{\text{cl.}} + \hat{\rho} \cdot \hat{x})}. \quad (5.24)$$

Unter Ausnutzung der Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} x_1^n e^{\frac{1}{\hbar}(-\Gamma_{\text{cl.}} + \hat{\rho} \cdot \hat{x})} = \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} e^{\frac{1}{\hbar}(-\Gamma_{\text{cl.}} + \hat{\rho} \cdot \hat{x})} \quad (5.25)$$

führt dies zu einer gewöhnlichen gekoppelten Differenzialgleichung dritter Ordnung für $Z(\hat{\rho})$

$$\begin{aligned}
\rho_1 Z = & \hbar^3 \left[4f_1 \frac{\partial^3 Z}{\partial^3 \rho_1} + 2f_2 \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 \tau_1} + f_3 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_2 \partial j_{1,\text{re}} \partial j_{2,\text{im}}} - \frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_2 \partial j_{2,\text{re}} \partial j_{1,\text{im}}} \right) \right. \\
& + f_4 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{1,\text{im}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{1,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{re}}} \right. \\
& \quad \left. \left. - 2 \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{im}} \partial j_{1,\text{im}}} - 2 \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{re}} \partial j_{1,\text{re}}} \right) \right. \\
& + f_5 \left(2 \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial j_{1,\text{im}} \partial j_{2,\text{im}}} + 2 \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial j_{1,\text{re}} \partial j_{2,\text{re}}} - \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{1,\text{im}}} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{2,\text{im}}} - \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{1,\text{re}}} - \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{2,\text{re}}} \right) \right] \\
& - \hbar^2 \left[f_6 \left(3 \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \rho_1} + (4c_{\text{in}} - 3) \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \tau_1} \right) + f_8 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \tau_2 \partial j_{1,\text{im}}} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau_2 \partial j_{2,\text{im}}} \right) \right. \\
& + f_7 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial j_{1,\text{re}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial j_{2,\text{re}}} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_2 \partial j_{1,\text{re}}} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{re}}} \right) + f_{10} \frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \eta_1} \\
& + f_9 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{1,\text{im}}} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{1,\text{im}} \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{1,\text{re}}} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{1,\text{re}} \partial j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{re}}} \right) \left. \right] \\
& + \hbar \left(f_{11} \frac{\partial Z}{\partial \rho_1} - f_{12} \frac{\partial Z}{\partial \rho_2} - X_1 \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_1} \right) \tag{5.26}
\end{aligned}$$

mit den Vertexfaktoren

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{g^2 r_0}{2}, & f_2 &= (4c_{\text{in}} - 3)g^2 r_0, & f_3 &= 2(3 - 4c_{\text{in}})r_1 g^2, & f_4 &= (2c_{\text{in}} - 1)r_1 g^2, \\
f_5 &= 2(1 - c_{\text{in}})r_1 g^2, & f_6 &= 2g\mu r_0, & f_7 &= 2r_1 g\mu, & f_8 &= 2(4c_{\text{in}} - 3)r_1 g\mu, \\
f_9 &= (4c_{\text{in}} - 3)r_1 g\mu, & f_{10} &= \frac{1}{2}\xi_1 \mu, & f_{11} &= 2\mu^2(2r_0 + r_1) \quad \text{und} \quad f_{12} = 2r_1 \mu^2. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

An eine geschlossene analytische Lösung der partiellen Differenzialgleichungen ist nicht zu denken. Dies bestätigte sich leider schon an einfacheren Systemen, wie sie in [26] untersucht worden sind. Es ist jedoch möglich, diese Gleichung mit Hilfe einer unendlichen Reihe störungstheoretisch zu lösen. Die Entwicklung in \hbar ist dann gleich einer Schleifenentwicklung, wie sie in der Quantenfeldtheorie vorliegt.

In erster Linie sind wir an den Ein-Punkt-irreduziblen Diagrammen (Ein-PI Diagrammen) und dem Erzeugendenfunktional Γ der Ein-PI Diagramme interessiert. Die Definition von Ein-Teilchen-irreduzibel ist die Folgende: Allgemein treten im Funktional $w(\hat{\rho})$ Graphen auf, die durch Zerschneiden einer Linie in zwei unzusammenhängende Teile zerfallen. So zerschneidbare Linien nennt man Ein-PI-Trennlinien. Graphen, in denen nur die an die externen Quellen $\hat{\rho}$ koppelnden Linien Ein-PI-Trennlinien sind, heissen Ein-Teilchen-irreduzibel. Um die Ein-PI Diagramme bestimmen zu können, müssen wir in einem ersten Schritt den Übergang vom Er-

zeugendenfunktional $Z(\hat{\rho})$ zum Erzeugendenfunktional $w(\hat{\rho})$ der zusammenhängenden Green's-Funktionen via

$$w = \hbar \ln Z \quad (5.28)$$

vollziehen. Dabei beachten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen, wobei ρ_j und ρ_k zwei beliebige Quellen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \rho_j} &= \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_j} \right) Z \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \rho_j} &= \left[\frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_j} + \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_j} \right)^2 \right] Z \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_j \partial \rho_k} &= \left[\frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_j \partial \rho_k} + \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_j} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_k} \right) \right] Z \\ \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_k \partial \rho_i \partial \rho_j} &= \left[\frac{1}{\hbar^3} \frac{\partial w}{\partial \rho_k} \frac{\partial w}{\partial \rho_i} \frac{\partial w}{\partial \rho_j} + \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial w}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_i \partial \rho_j} + \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial w}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_j \partial \rho_k} + \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial w}{\partial \rho_j} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_i \partial \rho_k} + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_i \partial \rho_j \partial \rho_k} \right] Z \\ \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_k \partial^2 \rho_i} &= \left[\frac{1}{\hbar^3} \frac{\partial w}{\partial \rho_k} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_i} \right)^2 + \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial w}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_i} + \frac{2}{\hbar^2} \frac{\partial w}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_i \partial \rho_k} + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^3 w}{\partial^2 \rho_i \partial \rho_k} \right] Z \\ \frac{\partial^3 Z}{\partial^3 \rho_k} &= \left[\frac{1}{\hbar^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_k} \right)^3 + \frac{3}{\hbar^2} \frac{\partial w}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_k} + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^3 w}{\partial^3 \rho_k} \right] Z. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Für die Differenzialgleichung, die das Erzeugendenfunktional $w(\hat{\rho})$ erfüllen muss, folgt dann:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \hbar^2 \left[4f_1 \frac{\partial^3 w}{\partial^3 \rho_1} + 2f_2 \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_1 \partial^2 \tau_1} + f_3 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \tau_2 \partial j_{1,\text{re}} \partial j_{2,\text{im}}} - \frac{\partial^3 w}{\partial \tau_2 \partial j_{2,\text{re}} \partial j_{1,\text{im}}} \right) \right. \\ &\quad + f_4 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{1,\text{im}}} + \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{1,\text{re}}} + \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{re}}} \right. \\ &\quad \quad \left. \left. - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{im}} \partial j_{1,\text{im}}} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{re}} \partial j_{1,\text{re}}} \right) \right. \\ &\quad + f_5 \left(2 \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_1 \partial j_{1,\text{im}} \partial j_{2,\text{im}}} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_1 \partial j_{1,\text{re}} \partial j_{2,\text{re}}} - \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{1,\text{im}}} \right. \\ &\quad \quad \left. \left. - \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{2,\text{im}}} - \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{1,\text{re}}} - \frac{\partial^3 w}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{2,\text{re}}} \right) \right] \\ &\quad - \hbar \left[\frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_1} (3f_6 - 12f_1 \frac{\partial w}{\partial \rho_1}) + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \tau_1} ((4c_{\text{in}} - 3)f_6 - 2f_2 \frac{\partial w}{\partial \rho_1}) - 4f_2 \frac{\partial w}{\partial \tau_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial \tau_1} \right. \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_2 \partial j_{1,\text{im}}} (f_8 + f_3 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}}) - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_2 \partial j_{2,\text{im}}} (f_8 + f_3 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}}) + f_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \eta_1} \\ &\quad - f_3 \left(\frac{\partial w}{\partial \tau_2} \frac{\partial^2 w}{\partial j_{1,\text{re}} \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \frac{\partial^2 w}{\partial j_{1,\text{re}} \partial \tau_2} - \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} \frac{\partial^2 w}{\partial j_{2,\text{re}} \partial \tau_2} - \frac{\partial w}{\partial \tau_2} \frac{\partial^2 w}{\partial j_{2,\text{re}} \partial j_{1,\text{im}}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial j_{1,\text{re}}} \left(f_7 - 2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} - 2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial j_{2,\text{re}}} \left(f_7 - 2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} - 2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2 \partial j_{1,\text{re}}} \left(f_7 - 2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} - 2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{re}}} \left(f_7 - 2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} - 2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} \right) \right] \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 j_{1,\text{im}}} \left(f_9 - f_4 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} + f_5 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial j_{1,\text{im}} \partial j_{2,\text{im}}} \left(2f_9 - 2f_4 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} + 2f_5 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} \right) \\
& + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 j_{2,\text{im}}} \left(f_9 - f_4 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} + f_5 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 j_{1,\text{re}}} \left(f_9 - f_4 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} + f_5 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} \right) \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial j_{1,\text{re}} \partial j_{2,\text{re}}} \left(2f_9 - 2f_4 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} + 2f_5 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 j_{2,\text{re}}} \left(f_9 - f_4 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} + f_5 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} \right) \\
& + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2 \partial j_{1,\text{im}}} \left(2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} + 2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{im}}} \left(2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} + 2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} \right) \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial j_{1,\text{im}}} \left(2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} + 2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial j_{2,\text{im}}} \left(2f_4 \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} + 2f_5 \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} \right) \Big] \\
& - f_8 \frac{\partial w}{\partial \tau_2} \left(\frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} - \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \right) - f_3 \frac{\partial w}{\partial \tau_2} \left(\frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} - \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \right) \\
& - 2 \left(f_4 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} - f_5 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \right) - f_7 \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_1} - \frac{\partial w}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} + \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} \right) \\
& - (f_5 x_2 - f_4 x_1) \left(\left(\frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \right)^2 \right) - f_{10} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}_1} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1} \right) \\
& - f_9 \left(\left(\frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{re}}} - \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{re}}} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial j_{1,\text{im}}} - \frac{\partial w}{\partial j_{2,\text{im}}} \right)^2 \right) + f_{11} \frac{\partial w}{\partial \rho_1} - f_{12} \frac{\partial w}{\partial \rho_2} \\
& + 4f_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_1} \right)^3 + 2f_2 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau_1} \right)^2 - f_6 \left(3 \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_1} \right)^2 + (4c_{\text{in}} - 3) \left(\frac{\partial w}{\partial \tau_1} \right)^2 \right) + X_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}_1}. \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Nun trennt uns nur noch ein Schritt von dem Erzeugendenfunktional $\Gamma(\hat{x})$ für die Ein-PI-Green's-Funktionen. Wie wir wissen, wird die Beziehung zwischen den zusammenhängenden Green's-Funktionen und den Ein-PI-Green's-Funktionen durch die Legendre-Transformation hergestellt,

$$\Gamma(\hat{x}) + w(\hat{\rho}; X_i) + \hat{x} \cdot \hat{\rho} = 0 \quad (5.31)$$

mit

$$x_i = \frac{\partial w}{\partial \rho_i}, \quad y_i = \frac{\partial w}{\partial \tau_i}, \quad A_{i,\text{re}} = \frac{\partial w}{\partial j_{i,\text{re}}}, \quad A_{i,\text{im}} = \frac{\partial w}{\partial j_{i,\text{im}}}, \quad c_1 = \frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}_1} \quad \text{und} \quad \bar{c}_1 = -\frac{\partial w}{\partial \eta_1}. \quad (5.32)$$

Die X_i entsprechen hier den an die externen Felder koppelnden Quellen. Es gilt nun die zweiten und dritten Ableitungen von w in der Differenzialgleichung (5.30) durch die entsprechenden Ableitungen von Γ zu ersetzen. Dazu müssen lineare Gleichungssysteme gefunden werden, die dann invertiert werden können. Es ist dabei nützlich, folgenden Zerlegungstrick anzuwenden: Aufgrund der Quantenzahlen der Felder ($\phi\pi$ und Ladungskonjugation) und des Abel'schen Charakters der Grassmann-Felder (die Quadrate der Felder verschwinden) kann jede Ordnung der Schleifenentwicklung von Γ als Zerlegung

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Gamma_1(\hat{x}) + \Gamma_2(\hat{x})\bar{c}_1 c_1 + \Gamma_3(\hat{x})c_1 X_1 + \Gamma_4(\hat{x})c_1 Y_1 \\
&\quad + \Gamma_5(\hat{x})c_1 U_1 + \Gamma_6(\hat{x})c_1 V_1 + \Gamma_7(\hat{x})c_1 U_2 + \Gamma_8(\hat{x})c_1 V_2
\end{aligned}$$

angegeben werden. Hierbei ist \hat{x} ein Container für die neun geistneutralen Felder $x_i, y_i, A_{i, \text{re}}, A_{i, \text{im}}$ ($i \in \{1, 2\}$) und B_1 . Für die geistneutralen Felder selbst existieren wiederum analoge Zerlegungen, wie z. B.

$$\begin{aligned} x_1(\hat{\rho}; \hat{X}) &= x_1(\hat{\rho}) + x_2(\hat{\rho})\eta_1\bar{\eta}_1 + x_3(\hat{\rho})\bar{\eta}_1 X_1 + x_4(\hat{\rho})\bar{\eta}_1 Y_1 \\ &\quad + x_5(\hat{\rho})\bar{\eta}_1 U_1 + x_6(\hat{\rho})\bar{\eta}_1 V_1 + x_7(\hat{\rho})\bar{\eta}_1 U_2 + x_8(\hat{\rho})\bar{\eta}_1 V_2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die benötigten Gleichungen erhalten wir beispielsweise aus der Differenziation von x_1 aus der Gleichung (5.33) nach x_1 selbst:

$$\frac{\partial x_1(\hat{\rho}; \hat{X})}{\partial x_1} = 1. \quad (5.34)$$

Einerseits ergibt sich offensichtlich aus der Differenziation die Zahl 1, andererseits werden zu den Termen der nullten Grassmann-Stufe Terme aus der zweiten Grassmann-Stufe beigemischt. Weitere Gleichungen dieser Art erhalten wir, wenn wir (5.33) nach den restlichen Feldern differenzieren. Entwirrt man diese Gleichungen, dann kann man sich davon überzeugen, dass die gesuchten zweiten Ableitungen von Γ sehr eng mit den zweiten Ableitungen von w verknüpft sind. Dieser Zusammenhang lässt sich unter Ausnutzung der Relationen aus der Legendre-Transformation durch

$$H_{\Gamma}(\hat{x}) \cdot H_w(\hat{\rho}) = \mathbf{1}_9 \quad (5.35)$$

am Elegantesten wiedergeben. H ist hierbei jeweils eine Hesse-Matrix, z.B.

$$H_{\Gamma_1}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x_1 \partial A_{1, \text{re}}} & \cdots & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x_1 \partial B_1} \\ \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y_1 \partial A_{1, \text{re}}} & \cdots & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y_1 \partial B_1} \\ \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial A_{1, \text{re}} \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial A_{1, \text{re}} \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial A_{1, \text{re}}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial A_{1, \text{re}} \partial B_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial B_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial B_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial B_1 \partial A_{1, \text{re}}} & \cdots & \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial B_1^2} \end{pmatrix}_{9 \times 9}. \quad (5.36)$$

Durch die Invertierung dieser Hesse-Matrix sind zumindest die zweiten Ableitungen, die nur an geistneutrale Felder koppelnde äußere Quellen enthalten, bestimmt. Die bis hier noch unbekanntes zweiten Ableitungen, in denen nach Grassmann-Variablen abgeleitet wird, bekommen wir durch eine ganz ähnliche Überlegung.

Ableitungen des Typs $\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \rho_j}$ können durch entsprechende Differenziation von

$$\eta_1(\hat{x}) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{c}_1} = \Gamma_2(\hat{x})c_1 \quad (5.37)$$

und anschließendem Lösen des Gleichungssystems zu zweiten Ableitungen von Γ , die einen Geist enthalten, übersetzt werden. Die zweiten Ableitungen von Γ , die einen Antigeist enthalten, gewinnen wir nach dem gleichen Prinzip, indem wir die entsprechenden Relationen für $\bar{\eta}_1(\dots)$ nach den Feldern differenzieren.

Die in unserem vorliegenden Fall noch fehlende zweite Ableitung $\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \eta_1}$ werden wir im Folgenden wieder etwas ausführlicher behandeln. Die hierfür benötigte Gleichung (5.37) ist bereits bestimmt. Diesmal differenzieren wir allerdings nicht nach den geistneutralen Feldern, sondern nach der Grassmann-Variable selbst. Aus der Differenziation von (5.37) nach η_1 folgt:

$$1 = \mathcal{G} + \Gamma_2 \frac{\partial c_1}{\partial \eta_1} = \mathcal{G} + \Gamma_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \eta_1}. \quad (5.38)$$

Dabei ist \mathcal{G} selbst wieder von Geistfeldern abhängig. Wir interessieren uns allerdings nur für den von den Geistfeldern unabhängigen Anteil. Damit folgt sofort:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \eta_1} = \frac{1}{\Gamma_2} + c\text{-abhängiger Teil} = -\frac{2g}{\mu \xi_1 (gx_1 - \mu)} + \text{höhere Ordnungen}. \quad (5.39)$$

Wir sind nun in der Lage, die auftretenden zweiten Ableitungen von w durch zweite Ableitungen in Γ zu ersetzen. Bei der Ersetzung der dritten Ableitungen ist die Verfahrensweise vorbestimmt. Im Prinzip werden die durch Differenziation bei den zweiten Ableitungen gewonnenen Gleichungen ein weiteres Mal nach den Feldern abgeleitet. Dabei entsteht eine Vielzahl neuer Kombinationsmöglichkeiten. Bei den dritten Ableitungen, die nur geistneutrale Felder beinhalten, entstehen so $\sum_{i=1}^9 i = 45(!)$ verschiedene dritte Ableitungen. Ein Verfahren, das die dritten Ableitungen liefert, ist im Anhang E aufgeführt. Das Prinzip ist damit klar, und wir wollen uns an dieser Stelle mit den Einschleifenergebnissen zufrieden geben.

Im weiteren Verlauf benutzen wir für die zweiten Ableitungen die entsprechenden Einträge aus der Hesse-Matrix $[H_{\Gamma_1}^{-1}]_{j,k}^{(0)}$ als Abkürzungen. Über die Entschlüsselung der Indizes informiert folgende Tabelle:

| | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------------------|-------------------|-------|-------|-------------------|-------------------|-------|
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | x_1 | y_1 | $A_{1,\text{re}}$ | $A_{1,\text{im}}$ | x_2 | y_2 | $A_{2,\text{re}}$ | $A_{2,\text{im}}$ | B_1 |

Tabelle 5.2: Der Indexschlüssel für das große Modell.

Die Dyson-Schwinger-Gleichung in erster Ordnung lesen wir aus (5.30) ab²

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{x_1}^{(1)} &= [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,1}^{(0)} (3f_6 - 12f_1x_1) + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{2,2}^{(0)} ((4c_{\text{in}} - 3)f_6 - 2f_2x_1) - 4f_2y_1 [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,2}^{(0)} \\
&\quad + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{6,4}^{(0)} (f_8 + f_3A_{2,\text{re}}) - [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{6,8}^{(0)} (f_8 + f_3A_{1,\text{re}}) - f_{10} \frac{2g}{\mu\xi_1(gx_1 - \mu)} \\
&\quad - f_3 \left(y_2 [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{3,8}^{(0)} + A_{2,\text{im}} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{3,6}^{(0)} - A_{1,\text{im}} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{7,6}^{(0)} - y_2 [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{7,4}^{(0)} \right) \\
&\quad + \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,3}^{(0)} - [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{5,7}^{(0)} \right) (f_7 - 2f_4A_{1,\text{re}} - 2f_5A_{2,\text{re}}) \\
&\quad + \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,7}^{(0)} - [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{5,3}^{(0)} \right) (f_7 - 2f_4A_{2,\text{re}} - 2f_5A_{1,\text{re}}) \\
&\quad + \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{3,3}^{(0)} + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{4,4}^{(0)} + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{7,7}^{(0)} + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{8,8}^{(0)} \right) (f_9 - f_4x_1 + f_5x_2) \\
&\quad - \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{3,7}^{(0)} + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{4,8}^{(0)} \right) (2f_9 - 2f_4x_2 + 2f_5x_1) \\
&\quad + \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{5,4}^{(0)} - [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,8}^{(0)} \right) (2f_5A_{1,\text{im}} + 2f_4A_{2,\text{im}}) \\
&\quad + \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{5,8}^{(0)} - [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,4}^{(0)} \right) (2f_4A_{1,\text{im}} + 2f_5A_{2,\text{im}}). \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Diese hochgradig nichtlineare Differenzialgleichung lässt sich am effektivsten mit Computeralgebra weiterverarbeiten. Mit den angegebenen Zwischenergebnissen erhalten wir mit GiNaC- und Mathematica-Routinen [4], die im Anhang E erläutert werden, für den Korrekturterm der unrenormierten Wirkung in erster Schleifenordnung:³

$$\Gamma_{x_1}^{(1)} = -\frac{g}{\mu} \left(1 + \frac{3(2r_0 + r_1)}{4r_0(r_0 + r_1)} - \frac{2r_1}{r_5} + \frac{2r_1(r_1 + r_5)}{r_5(2r_1 + r_5)} - \frac{4(4c_{\text{in}} - 3)}{\xi_1^2} \right). \tag{5.41}$$

Es ist bekannt, dass das Abzählen von Feynman-Graphen in vierdimensionalen Theorien ohne spontane Symmetriebrechung mit dem Ergebnis der nulldimensionalen Theorie identisch ist. Diese Analogie wurde in [26] auch an einer nulldimensionalen Quantenfeldtheorie mit spontan gebrochener Symmetrie auf einem Punkt bestätigt. In der vorliegenden Arbeit, in der wir explizit Wechselwirkungen zwischen den Raum-Zeit-Punkten erlauben, steht dieser Nachweis noch aus. Ohne auf die Möglichkeit einzugehen, die freien Feynman-Propagatoren durch eine spezielle Wahl der vorhandenen Parameter auf Eins zu normieren, wollen wir jetzt als Beispiel die Ein-Punkt-Funktion des Higgs-Feldes x_1 anführen:

²Wir treffen hier die Konvention: $\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}$.

³Wir berechnen dabei n -Punktfunktion in m -ter Schleifenordnung, $\Gamma_n^{(\leq m)}$, indem wir zunächst Γ bis Ordnung m bestimmen, dann das Ergebnis n -mal differenzieren und anschließend alle Felder auf Null setzen.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{x_1}^{(1)} = & 3f_6 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + (4c_{\text{in}} - 3)f_6 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + f_8 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} \\
& -f_8 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + f_9 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + f_9 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + f_9 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + f_9 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} \\
& + f_9 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} - 2f_9 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} - 2f_9 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + f_{10} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} + c_1 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ x_1 \end{array} \\
= & -\frac{g}{\mu} \left(1 + \frac{3(2r_0 + r_1)}{4r_0(r_0 + r_1)} - \frac{2r_1}{r_5} + \frac{2r_1(r_1 + r_5)}{r_5(2r_1 + r_5)} - \frac{4(4c_{\text{in}} - 3)}{\xi_1^2} \right) \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass die Ein-Schleifen-Näherung der Ein-Punkt-Higgs-Funktion in nulldimensionaler Theorie durch die Summe aller Ein-PI-Feynman-Diagramme gegeben ist.

Feynman-Regel: Der Wert eines Feynman-Diagramms ist durch das Produkt des Symmetriefaktors, der aus dem Wick'schen Theorem herrührt, dem Vertexfaktor und den involvierten freien Propagatoren des Diagramms bestimmt.

Mit diesen sehr einfachen Regeln ist es also möglich, sehr komplizierte Feynman-Diagramme auszurechnen. Man muss nicht mehr tun, als alle möglichen Topologien mit ihren Vertex- und Gewichtsfaktoren zu multiplizieren und aufzusummieren. Die Anzahl der Graphen nimmt aber sehr schnell sehr große Ausmaße an. Mit dieser Methode lassen sich n-Punkt-Funktionen in beliebiger Ordnung bestimmen. Man muss lediglich wissen, welche Feynman-Diagramme zu einer gegebenen Schleifenordnung beitragen. Von der Einfachheit der Feynman-Regel überzeugt man sich am Besten anhand eines Beispiels. Einer der Beiträge der 4-Punkt-Funktion in elfter Schleifenordnung, der nur x_1 -Felder beinhaltet, ist durch den folgenden Graphen gegeben:

$$= f_1^4 f_6^{16} \Delta_{x_1 x_1}^{30} = \frac{g^{24} (2r_0 + r_1)^{30}}{4^{39} \mu^{44} r_0^{10} (r_0 + r_1)^{30}}.$$

Abbildung 5.1: Krawatten-Graph in elfter Schleifenordnung.

Im Allgemeinen wird es mit zunehmender Ordnung schwieriger, die Dyson-Schwinger-Gleichungen zu lösen. Dies liegt an der komplizierter werdenden Bestimmung der $[H^{-1}]_{k,l}$ und $[T]_{k,l,m}$ in der jeweiligen Schleifenordnung.⁴ Im Wesentlichen handelt es sich hierbei nur um die Algebra von unendlichen Reihen. Es treten Produkte bzw. Quotienten von Reihenentwicklungen in \hbar auf, aus denen wiederum die entsprechende Ordnung herausgefiltert werden muss. Für unendliche Reihen gilt:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \hbar^j \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \hbar^k \quad \text{mit } b_0 = a_0^n, b_m = \frac{1}{m a_0} \sum_{k=1}^m (k n - m + k) a_k b_{m-k}.$$

Für den n -ten Koeffizienten eines Produkts von Reihen gilt:

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \hbar^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \hbar^l \right) \right)_{(n)} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m \hbar^m \right)_{(n)} = c_n \quad \text{mit } c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} b_i.$$

Für die Division von unendlichen Reihen gilt:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k \hbar^k}{\sum_{l=0}^{\infty} a_l \hbar^l} = \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{\infty} c_i \hbar^i \quad \text{mit } c_n = b_n - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n c_{n-k} a_k.$$

Mit diesen einfachen Regeln ist es möglich, die Bestimmung höherer Schleifenordnungen zu automatisieren.

Wie wir an der nicht verschwindenden Ein-Punkt-Funktion in Ein-Schleifen-Näherung gesehen haben, wird es notwendig sein, die Theorie zu renormieren. Außerdem ist aufgrund der Vielzahl von kombinatorischen Möglichkeiten, die sich aus den Vertexfaktoren ergeben, eine übersichtliche Wiedergabe der Ergebnisse nur beschränkt möglich. Im nun folgenden Kapitel wollen wir uns mit einem Modell mit einer weiteren Symmetriebrechung beschäftigen und die Renormierung genauer studieren.

⁴ $[T]_{k,l,m}$ ist ein Akronym für die dritten Ableitungen (s. Anhang E).

Kapitel 6

Ein spontan gebrochenes Modell

Bisher haben wir das Modell in all seinen Freiheiten besprochen. Die fortlaufende Diskussion könnte sich jetzt weiterhin mit dem vollen Modell beschäftigen, jedoch besteht unser Modell in null Dimensionen den Vergleich mit der vierdimensionalen Theorie nur begrenzt. Der Hauptunterschied zur realen Theorie besteht in der Art und Anzahl der Eichfelder. Den zwei komplexen Eichfeldern in der nulldimensionalen Theorie ist ein Eichfeld in der vierdimensionalen Theorie gegenübergestellt. Zudem sind die Eichfelder in jenem Modell nicht notwendig, um lokale Eichinvarianz herzustellen. Dennoch besitzen die Eichfelder ein ähnliches Transformationsverhalten wie im Kontinuum. Betrachtet man die infinitesimalen Transformationen, d. h. die Symmetrie, in unserer Herleitung, dann sehen wir, dass die Variationen durch bestimmte Phasenwahlen zum Verschwinden gebracht werden können. In einem Modell, in dem $c_{\text{in}} = 1$ gilt und die Phase $\psi_3 = 0$ ist, verschwinden die Variationen für das Eichfeld A_1 . Die Fixierung der Phase ψ_3 ist eine echte Symmetriebrechung.¹

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= -\psi_1 y_1 \\ \delta y_1 &= \psi_1 \left(x_1 - \frac{\mu}{g}\right) \\ \delta x_2 &= -\psi_2 y_2 \\ \delta y_2 &= \psi_2 \left(x_2 - \frac{\mu}{g}\right) \\ \delta A_{1,\text{re}} &= 0 \\ \delta A_{1,\text{im}} &= 0 \\ \delta A_{2,\text{re}} &= -(\psi_2 - \psi_1) A_{2,\text{im}} \\ \delta A_{2,\text{im}} &= (\psi_2 - \psi_1) \left(A_{2,\text{re}} - \frac{\mu}{g}\right).\end{aligned}\tag{6.1}$$

¹Die ψ_3 -Invarianz ist eine sozusagen versteckte Symmetrie des Modells, da sie nicht explizit in der Variation der konstruierten Wirkung auftritt.

Obwohl in diesem spontan gebrochenen Modell ein komplexes Eichfeld übrig bleibt und es damit noch immer einen Freiheitsgrad zu viel trägt², wollen wir an ihm, neben der Wiederholung einiger Ergebnisse, vor allem die Notwendigkeit und den Prozess der Renormierung genauer untersuchen.

Bei der Wiederholung beschränken wir uns ausschließlich auf die Feynman-*diagrammatikalischen* Resultate aus dem vorangegangenen Kapitel. Um uns noch einmal vom Abzählargument von Feynman-Graphen zu überzeugen, müssen wir die Dyson-Schwinger-Gleichungen unter den Bedingungen $c_{\text{in}} = 1$ und $\psi_3 = 0$ aufs Neue untersuchen. Wir verzichten auf die Details der Rechnung und verweisen auf den Anhang D. Dass sich die Gleichungen im Vergleich zum ungebrochenen Modell stark vereinfachen, sehen wir, wenn wir die Dyson-Schwinger-Gleichung für das Feld x_1 exemplarisch herausgreifen.

Das Erzeugendenfunktional der Green's-Funktionen erfüllt die Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
\rho_1 Z = & \hbar^3 g^2 \left[r_1 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_0 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial^3 \rho_1} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 \tau_1} \right) \right] \\
& - \hbar^2 g \mu \left[r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{re}} \partial \rho_1} - \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{re}} \partial \rho_2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{im}} \partial \tau_2} \right) \right] \\
& + 2r_0 \left(3 \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \rho_1} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \tau_1} \right) + \frac{1}{2} \xi_1 \frac{1}{g} \frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \eta_1} \\
& + \hbar \mu^2 \left[4r_0 \frac{\partial Z}{\partial \rho_1} + 2r_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho_1} - \frac{\partial Z}{\partial \rho_2} \right) + X_1 \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_1} \right]. \tag{6.2}
\end{aligned}$$

Um in der selben Notation wie im vorangegangenen Kapitel zu bleiben, müssen wir den geänderten Indexschlüssel angeben:

| | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------------------|-------------------|-------|
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | x_1 | y_1 | x_2 | y_2 | $A_{2,\text{re}}$ | $A_{2,\text{im}}$ | B_1 |

Tabelle 6.1: Der Indexschlüssel für das spontan gebrochene Modell.

Nachdem wir die Differenzialgleichung für das Erzeugendenfunktional der zusammenhängenden Green's-Funktionen hinter uns gelassen haben, können wir nach einer Legendre-Transformation

²Wir bemerkten schon im Abschnitt 4.3 bei der Herleitung der Yang-Mills-Wirkung auf zwei Raum-Zeit-Punkten die Übereinstimmung mit der diskretisierten Nambu-Goldstone-Wirkung unter einer speziellen Eichfeldwahl.

wieder die Differentialgleichung für die Ein-PI-Green's-Funktionen angeben³:

$$\begin{aligned}
\rho_1 = & \hbar^2 g^2 \left[r_1 \left([T_{\Gamma_1}]_{1,5,5}^{(n-2)} + [T_{\Gamma_1}]_{1,6,6}^{(n-2)} \right) + 2r_0 \left([T_{\Gamma_1}]_{1,1,1}^{(n-2)} + [T_{\Gamma_1}]_{1,2,2}^{(n-2)} \right) \right] \\
& - \hbar g^2 \left[r_1 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{5,5}^{(n-1)} + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{6,6}^{(n-1)} \right) \right. \\
& \quad + 2r_0 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{2,2}^{(n-1)} + 3 [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,1}^{(n-1)} \right) \\
& \quad + 2r_1 \left(\left(\frac{\mu}{g} - A_{2,\text{re}} \right) [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,5}^{(n-1)} - \frac{\mu}{g} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{3,5}^{(n-1)} - \frac{\mu}{g} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{4,6}^{(n-1)} - A_{2,\text{im}} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,6}^{(n-1)} \right) \\
& \quad \left. - 4r_0 y_1 \left[H_{\Gamma_1}^{-1} \right]_{1,2}^{(n-1)} - \frac{1}{g(gx_1 - \mu)} \right] \\
& + g^2 r_1 x_1 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) + 2g^2 r_0 x_1 (x_1^2 + y_1^2) - g\mu (r_1 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) \\
& + 2r_1 (A_{2,\text{re}}(x_1 - x_2) - A_{2,\text{im}}y_2) + 2r_0 (3x_1^2 + y_1^2)) + \mu^2 (4r_0 x_1 + 2r_1 (x_1 - x_2)) \\
& - \frac{1}{2} \xi_1 \mu \bar{c}_1 c_1 - X_1 c_1. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

In erster Ordnung der Schleifenentwicklung sind nur Beiträge linear in \hbar zu berücksichtigen, und wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x_1} = & -g^2 \left[r_1 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{5,5}^{(0)} + [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{6,6}^{(0)} \right) + 2r_0 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) \left([H_{\Gamma_1}^{-1}]_{2,2}^{(0)} + 3 [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,1}^{(0)} \right) \right. \\
& + 2r_1 \left(\left(\frac{\mu}{g} - A_{2,\text{re}} \right) [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,5}^{(0)} - \frac{\mu}{g} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{3,5}^{(0)} - \frac{\mu}{g} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{4,6}^{(0)} - A_{2,\text{im}} [H_{\Gamma_1}^{-1}]_{1,6}^{(0)} \right) \\
& \left. - 4r_0 y_1 \left[H_{\Gamma_1}^{-1} \right]_{1,2}^{(0)} - \frac{1}{g(gx_1 - \mu)} \right]. \tag{6.4}
\end{aligned}$$

6.1 Diagrammatik

Es gibt jetzt keine Vertizes mehr, die ein A_1 -Feld enthalten könnten, weil dieses Eichfeld nach der Symmetriebrechung nicht mehr variiert und damit auch konstant Null gewählt werden kann. Auch die Anzahl der freien Propagatoren reduziert sich auf

$$\begin{aligned}
\Delta_{x_1 x_1} = \Delta_{x_2 x_2} &= \hbar \frac{2r_0 + r_1}{8\mu^2 r_0 (r_0 + r_1)}, \\
\Delta_{x_1 x_2} = \Delta_{x_2 x_1} &= \hbar \frac{r_1}{8\mu^2 r_0 (r_0 + r_1)}. \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Der Propagator des Eichfeldrealteils ist jetzt

$$\Delta_{A_{2,\text{re}} A_{2,\text{re}}} = \hbar \frac{1}{2(r_1 + r_5)\mu^2}. \tag{6.6}$$

³Der Exponent (n) gibt die Schleifenordnung an.

Betrachten wir die Graphen, dann stellen wir die Ähnlichkeit zu den Ergebnissen für ein amputiertes äußeres x_1 -Beinchen fest. Der Unterschied ergibt sich lediglich aus dem fehlenden Beitrag des Geistpropagators und des verschwindenden $y_1 A_{2,\text{im}}$ -Propagators.

Für ein amputiertes $A_{2,\text{re}}$ -Beinchen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{A_{2,\text{re}}}^{(1)} = & -g\mu r_1 \begin{array}{c} \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} A_{2,\text{re}} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} + 2g\mu r_1 \begin{array}{c} \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} A_{2,\text{re}} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} - g\mu r_1 \begin{array}{c} \text{---} x_2 \text{---} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} A_{2,\text{re}} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\
 & -g\mu r_1 \begin{array}{c} \text{---} y_1 \text{---} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} y_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} A_{2,\text{re}} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} + 2g\mu r_1 \begin{array}{c} \text{---} y_1 \text{---} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} y_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} A_{2,\text{re}} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} - g\mu r_1 \begin{array}{c} \text{---} y_2 \text{---} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} y_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} A_{2,\text{re}} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\
 = & -\frac{g(r_0(r_1 + r_5) + r_1(r_1 + 2r_5))}{2(r_0 + r_1)r_5\mu}. \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

Bei den verbleibenden Ein-Punkt-Funktionen überzeugt man sich leicht durch Abzählen, dass diese verschwinden. Mit anderen Worten: Man kann mit den zur Verfügung stehenden Vertextoren und freien Propagatoren keine erlaubten Graphen zeichnen:

$$\Gamma_{y_1}^{(1)} = \Gamma_{y_2}^{(1)} = \Gamma_{A_{2,\text{im}}}^{(1)} = 0.$$

Für die Selbstenergie des Higgs-Teilchens erhalten wir in erster Ordnung der Schleifenentwicklung den Beitrag

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{x_1 x_1}^{(1)} = & 6g^2 r_0 \begin{array}{c} x_1 \text{---} \text{---} x_1 \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} + 2g^2 r_0 \begin{array}{c} y_1 \text{---} \text{---} y_1 \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} + g^2 r_1 \begin{array}{c} A_{2,\text{re}} \text{---} \text{---} A_{2,\text{re}} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\
 & + g^2 r_1 \begin{array}{c} A_{2,\text{im}} \text{---} \text{---} A_{2,\text{im}} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} - 72g^2 \mu^2 r_0^2 \begin{array}{c} x_1 \text{---} \text{---} x_1 \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} - 2g^2 \mu^2 r_1^2 \begin{array}{c} A_{2,\text{re}} \text{---} \text{---} A_{2,\text{re}} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \text{---} x_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} A_{2,\text{re}} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4g^2\mu^2r_1^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \quad +8g^2\mu^2r_1^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \quad -4g^2\mu^2r_1^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \\
& \quad \quad \quad A_{2,\text{re}} \quad A_{2,\text{re}} \quad \quad \quad A_{2,\text{re}} \quad A_{2,\text{re}} \quad \quad \quad A_{2,\text{re}} \quad A_{2,\text{re}} \\
& \quad \quad \quad x_1 \quad x_1 \quad \quad \quad x_1 \quad x_2 \quad \quad \quad x_2 \quad x_2 \\
& -8g^2\mu^2r_0^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \quad -4g^2\mu^2r_1^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \quad -4g^2\mu^2r_1^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \\
& \quad \quad \quad y_1 \quad y_1 \quad \quad \quad y_2 \quad y_2 \quad \quad \quad A_{2,\text{im}} \quad y_2 \\
& \quad \quad \quad y_1 \quad y_1 \quad \quad \quad A_{2,\text{im}} \quad A_{2,\text{im}} \quad \quad \quad y_2 \quad A_{2,\text{im}} \\
& +10g^2\mu^2r_1^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \quad -4g^2\mu^2r_1^2 \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \quad -\frac{\xi_1^2\mu^2}{2} \quad x_1 \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} x_1 \\
& \quad \quad \quad A_{2,\text{im}} \quad y_2 \quad \quad \quad A_{2,\text{im}} \quad A_{2,\text{im}} \quad \quad \quad \bar{c}_1 \quad c_1 \\
& \quad \quad \quad A_{2,\text{im}} \quad A_{2,\text{im}} \quad \quad \quad A_{2,\text{im}} \quad A_{2,\text{im}} \quad \quad \quad c_1 \quad \bar{c}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{x_1 x_1}^{(1)} = & -\frac{g^2}{8\mu^2} \left(11 + \frac{3r_0(7r_0 + 4r_1)}{(r_0 + r_1)^2} + \frac{4r_1^2}{r_5^2} + \frac{4r_1}{r_5} + \frac{4r_1^2}{(r_1 + r_5)^2} \right. \\
& \left. - \frac{4(r_0 - r_1)r_1}{(r_0 + r_1)(r_1 + r_5)} + \frac{256r_0^2}{\xi_1^4} + \frac{32(r_0r_5 - r_1^2)}{r_5\xi_1^2} \right).
\end{aligned}$$

Obwohl alle Größen wohldefiniert und endlich sind, wird die unvermeidliche Notwendigkeit der Renormierung sichtbar. Wir lesen an den Ergebnissen z. B. der ersten Schleifenordnung ab, dass der Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes x_1 nicht stabil bleibt, aber auch die Selbstwechselwirkung des Higgs-Feldes Strahlungskorrekturen bekommt. Der Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes x_1 , $\langle x_1 \rangle = \Gamma_{x_1}^{(0)}$ wurde aber gerade so konstruiert, dass er auf klassischem Niveau verschwindet. Würde er jetzt Korrekturen aus höheren Ordnungen unterliegen, dann würde dies eine Katastrophe für die Störungstheorie bedeuten. Die störungstheoretische Entwicklung wäre, nach einmal festgelegtem Entwicklungspunkt, durch das Wandern des Minimums nicht mehr stabil.

6.2 Renormierung

Die bisherige Diskussion schließt also nur die unrenormierte Wirkung ein. Wenn wir davon ausgehen, dass unser Modell eine physikalische Bedeutung haben soll, dann müssen wir die in unserem Modell vorkommenden Parameter mit Messgrößen, wie z. B. der physikalischen Kopplungskonstanten g_{phys} oder physikalischen Higgs-Masse m_{phys} , in Verbindung setzen. Es müssen

also geeignete Korrekturen gefunden werden, die den Abweichungen aus der unrenormierten Theorie entgegenwirken. Die renormierten Massen und Kopplungen sind die beobachtbaren Größen in einem Experiment. Es werden also Renormierungsparameter q_j gesucht, deren Potenzen von \hbar

$$q_j = q_j^{(0)} + \hbar q_j^{(1)} + \hbar^2 q_j^{(2)} + \dots \quad (6.11)$$

so gewählt werden müssen, dass sie in jeder Ordnung der Störungstheorie die feldtheoretischen Korrekturen an den Renormierungspunkten annullieren. Damit werden g_{phys} und m_{phys} zu beobachtbaren Größen. Wieviele Renormierungsparameter, d. h. wieviele Renormierungsbedingungen notwendig sind, um das Modell vollständig zu fixieren, wird von der zugrundeliegenden Symmetrie diktiert. Die BRS-Symmetrie wird durch die Slavnov-Taylor-Identität ausgedrückt. Um alle Freiheitsgrade zu erfassen, müssen wir die allgemeinste klassische Lösung $\Gamma_{\text{cl}}^{\text{gen}}$ der Slavnov-Taylor-Identität herleiten. Wir wollen an dieser Stelle auf die Angabe der Zwischenschritte verzichten und verweisen auf den Anhang F. Die einzige Einschränkung, die wir an den Ansatz stellen, ist, dass er $\phi\pi$ -neutral, unter Ladungskonjugation invariant und durch die maximale Dimension 4 eingeschränkt ist. Mit dieser Beschränkung sind jedoch, wie im Anhang F ausgeführt, 125 freie Parameter u_j , $j \in \{1, \dots, 125\}$, unbestimmt. Außerdem werden die Felder selbst Renormierungsparameter mit sich tragen. Dies wiederum führt zu 9 weiteren freien Parametern q_j , $j \in \{1, \dots, 9\}$, die sich direkt auf die Variationen und damit auf die Slavnov-Taylor-Identität auswirken. Die Variationen mit den 9 Renormierungsparametern lauten:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -q_3 q_1 c_1 y_1 \\ \delta x_2 &= -q_6 q_2 c_2 y_2 \\ \delta y_1 &= q_3 c_1 (q_4 x_1 - q_5) \\ \delta y_2 &= q_6 c_2 (q_7 x_2 - q_5) \\ \delta A_{2,\text{re}} &= q_8 A_{2,\text{im}} (q_3 c_1 - q_6 c_2) \\ \delta A_{2,\text{im}} &= (q_5 - q_9 A_{2,\text{re}}) (q_3 c_1 - q_6 c_2). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Wendet man nun die Slavnov-Taylor-Identität auf den allgemeinsten Ansatz an, dann stellt man fest, dass nur 16 der anfangs $134 = 125 + 9$ Parameter unbestimmt sind. Diese 16 Parameter werden nicht durch die BRS-Symmetrie beschrieben und müssen durch geeignete Bedingungen fixiert werden. Fassen wir die Renormierungsparameter jetzt als unendliche Reihen auf, dann ist es möglich, in jeder Ordnung bestimmte Forderungen zu erfüllen, so dass z. B. das Minimum stabil bleibt, oder die Strahlungskorrekturen der Masse des Higgs-Feldes x_1 auf die physikalische Masse angepasst werden. Gesucht werden also 16 Renormierungsbedingungen. Einige der 16 Renormierungspunkte sind so gewählt, dass bestimmte Messgrößen zu allen Ordnungen fixiert bleiben. Der Rest der Renormierungspunkte muss so gewählt werden, dass

alle Renormierungsparameter festgelegt werden können. Bei der Auswahl des Rests haben wir eine gewisse Freiheit und wir entscheiden uns für die folgenden 16 Renormierungsbedingungen, die in allen Ordnungen beibehalten werden:

| | | r_0, r_1, r_5 beliebig | $r_0 = r_1 = r_5 = 1$ | | | r_0, r_1, r_5 beliebig | $r_0 = r_1 = r_5 = 1$ |
|--------------------------|-------------------------------|---------------------------|-----------------------|-------------------------------------|--------------------|--------------------------|-----------------------|
| Renormierungsbedingungen | Γ_{x_1} | $= 0$ | $= 0$ | $\Gamma_{x_1 A_{2, \text{re}}}$ | $= 0$ | $= 0$ | $= 0$ |
| | Γ_{x_2} | $= 0$ | $= 0$ | $\Gamma_{c_1 V_2}$ | $= \frac{\mu}{g}$ | $= \frac{\mu}{g}$ | $= \frac{\mu}{g}$ |
| | $\Gamma_{A_{2, \text{re}}}$ | $= -\frac{2r_5 \mu^3}{g}$ | $= -\frac{2\mu^3}{g}$ | $\Gamma_{c_2 V_2}$ | $= -\frac{\mu}{g}$ | $= -\frac{\mu}{g}$ | $= -\frac{\mu}{g}$ |
| | $\Gamma_{x_1^2}$ | $= 2(2r_0 + r_1)\mu^2$ | $= 6\mu^2$ | $\Gamma_{x_1^4}$ | $= 12g^2 r_0$ | $= 12g^2$ | $= 12g^2$ |
| | $\Gamma_{x_2^2}$ | $= 2(2r_0 + r_1)\mu^2$ | $= 6\mu^2$ | $\Gamma_{x_2^4}$ | $= 12g^2 r_0$ | $= 12g^2$ | $= 12g^2$ |
| | $\Gamma_{A_{2, \text{re}}^2}$ | $= 2(r_1 + r_5)\mu^2$ | $= 4\mu^2$ | $\Gamma_{A_{2, \text{re}}^4}$ | $= 0$ | $= 0$ | $= 0$ |
| | $\Gamma_{x_1 x_2}$ | $= -2r_1 \mu^2$ | $= -2\mu^2$ | $\Gamma_{x_2^2 A_{2, \text{im}}^2}$ | $= 2g^2 r_1$ | $= 2g^2$ | $= 2g^2$ |
| | $\Gamma_{y_2^2}$ | $= 2r_1 \mu^2$ | $= 2\mu^2$ | $\Gamma_{y_1^4}$ | $= 12g^2 r_0$ | $= 12g^2$ | $= 12g^2$ |

Tabelle 6.2: Die 16 Renormierungsbedingungen.

In der Tabelle ist eine Spalte für den Fall $r_0 = r_1 = r_5 = 1$ aufgelistet. Wir werden uns im weiteren Verlauf auf diese Wahl der Parameter beschränken, denn man kann sich lebhaft vorstellen, dass man im Allgemeinen mit wachsender Anzahl der äußeren amputierten Felder und besonders in höheren \hbar -Ordnungen rasch wachsende Ausdrücke für n -Punkt-Funktionen erhält. Von der Notwendigkeit der Renormierung ist man dadurch in keiner Weise entbunden. Eine feste Wahl der Parameter beschert zwar einerseits eine Vereinfachung der Ergebnisse, andererseits wird es dann aber auch nicht mehr möglich sein, auf die unterschiedlichen Bausteine der Wirkung zuzugreifen. Insbesondere wird man das Higgs-Potenzial nicht mehr separieren können. Es ist nach der Wahl von $r_0 = r_1 = r_5 = 1$ mit dem kinetischen Term untrennbar verschmolzen. Das reine Higgs-Potenzial liesse sich nur durch die Wahl $r_1 = 0$ visualisieren. In einem Schnitt durch die x_1 - x_2 -Ebene, in dem alle anderen Felder verschwinden, sieht das Higgs-Potenzial in 0-ter Ordnung der \hbar -Entwicklung wie in Abbildung 6.1. aus.

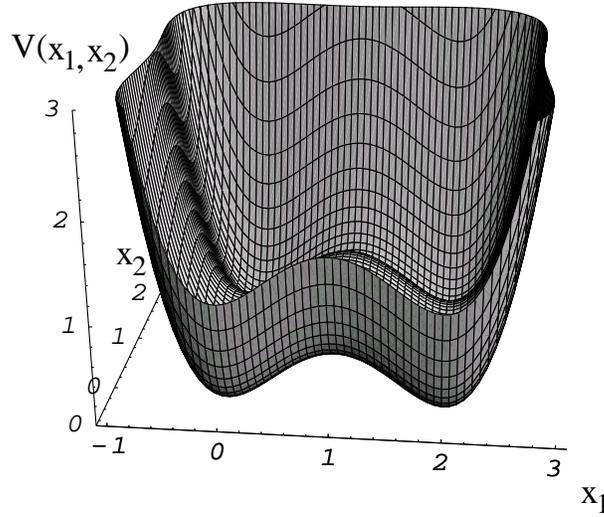


Abbildung 6.1: Schnitt 1 mit $\mu = g = \xi_1 = 1$ für das klassische Higgs-Potenzial.

Zu gleicher, fester Eichfeldkonfiguration $A_2 = 0$ zerfällt die klassische Wirkung in die Summe zweier identischer Teile, die jeweils das Higgs-Potenzial eines Raum-Zeit-Punktes widerspiegeln. Mit anderen Worten: Ohne den kinetischen Term fällt man zu fester Wahl der Eichfelder auf die Dynamik des Ein-Punkt-Modells aus [26] zurück. Man erkennt unter anderem deutlich, wie sich die Wirkung unter Hinzunahme des kinetischen Terms deformiert.

Starten wir mit der unrenormierten Wirkung, wie wir sie hergeleitet haben, so erhalten wir für die n -Punkt-Funktionen aus der Tabelle von oben:

| | |
|--|--|
| $\Gamma_{x_1}^{(1)} = -\frac{g}{\mu} \left(\frac{15}{8} - \frac{4}{\xi_1^2} \right)$ | $\Gamma_{x_1 A_{2,\text{re}}}^{(1)} = \frac{21g^2}{16\mu^2}$ |
| $\Gamma_{x_2}^{(1)} = -\frac{g}{\mu} \left(\frac{31}{8} - \frac{4}{\xi_1^2} \right)$ | $\Gamma_{c_1 V_2}^{(1)} = \frac{\mu}{g}$ |
| $\Gamma_{A_{2,\text{re}}}^{(1)} = -\frac{5g}{4\mu}$ | $\Gamma_{c_2 V_2}^{(1)} = -\frac{\mu}{g}$ |
| $\Gamma_{x_1^2}^{(1)} = -\frac{g^2}{\mu^2} \left(\frac{113}{32} + \frac{32}{\xi_1^4} \right)$ | $\Gamma_{x_1^4}^{(1)} = -\frac{g^4}{\mu^4} \left(\frac{9699}{256} + \frac{12288}{\xi_1^8} - \frac{384}{\xi_1^4} - \frac{72}{\xi_1^2} \right)$ |
| $\Gamma_{x_2^2}^{(1)} = -\frac{g^2}{\mu^2} \left(\frac{305}{32} + \frac{32}{\xi_1^4} - \frac{48}{\xi_1^2} \right)$ | $\Gamma_{x_2^4}^{(1)} = -\frac{g^4}{\mu^4} \left(\frac{200163}{256} + \frac{12288}{\xi_1^8} - \frac{36864}{\xi_1^6} + \frac{32640}{\xi_1^4} - \frac{9384}{\xi_1^2} \right)$ |
| $\Gamma_{A_{2,\text{re}}^2}^{(1)} = -\frac{g^2}{\mu^2} \left(\frac{5}{4} + \frac{4}{\xi_1^2} \right)$ | $\Gamma_{A_{2,\text{re}}^4}^{(1)} = -\frac{g^4}{\mu^4} \left(\frac{201}{32} + \frac{96}{\xi_1^4} - \frac{24}{\xi_1^2} \right)$ |
| $\Gamma_{x_1 x_2}^{(1)} = -\frac{g^2}{\mu^2} \left(-\frac{107}{32} + \frac{32}{\xi_1^4} + \frac{12}{\xi_1^2} \right)$ | $\Gamma_{x_2^2 A_{2,\text{im}}^2}^{(1)} = -\frac{g^4}{\mu^4} \left(-\frac{1815}{64} + \frac{256}{\xi_1^6} - \frac{328}{\xi_1^4} + \frac{567}{4\xi_1^2} \right)$ |
| $\Gamma_{y_2^2}^{(1)} = -\frac{g^2}{\mu^2} \left(-\frac{13}{4} + \frac{6}{\xi_1^2} \right)$ | $\Gamma_{y_1^4}^{(1)} = -\frac{g^4}{\mu^4} \left(\frac{27}{8} + \frac{216}{\xi_1^4} + \frac{24}{\xi_1^2} \right)$ |

Tabelle 6.3: Die unrenormierte Wirkung an den Renormierungspunkten.

Wir brauchen also Korrekturterme, die die Abweichungen aus der unrenormierten Theorie

auf eichinvariante Weise zurückziehen. Diese Aufgabe überlassen wir einem Computer. Bis einschließlich erster Schleifenordnung erhalten wir für die Renormierungsparameter:

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1 + \hbar \left(1 + \frac{g^2}{\mu^4} \left(\frac{799}{8192} - \frac{128}{\xi_1^8} + \frac{5}{4\xi_1^4} - \frac{3}{4\xi_1^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
q_2 &= 1 + \hbar \left(1 + \frac{g^2}{\mu^4} \left(\frac{492319}{8192} - \frac{128}{\xi_1^8} - \frac{3072}{\xi_1^6} + \frac{11013}{4\xi_1^4} - \frac{3059}{4\xi_1^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
q_3 &= 1 + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
q_4 &= 1 + \hbar \left(1 - \frac{g^2}{\mu^4} \left(\frac{10981}{8192} + \frac{640}{\xi_1^8} - \frac{105}{4\xi_1^4} - \frac{13}{4\xi_1^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
q_5 &= \frac{\mu}{g} + \hbar \left(\frac{\mu}{g} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
q_6 &= 1 \\
q_8 &= 1 + \hbar \left(1 - \frac{g^2}{\mu^4} \left(\frac{5315}{6144} + \frac{512}{\xi_1^8} - \frac{13}{\xi_1^4} - \frac{10}{3\xi_1^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_2 &= -\hbar \frac{g}{\mu} \left(\frac{31}{8} - \frac{4}{\xi_1^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_3 &= -\frac{2\mu^3}{g} - \hbar \left(\frac{5g}{4\mu} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_4 &= 3\mu^2 - \frac{g^2}{\mu^2} \hbar \left(\frac{113}{64} + \frac{16}{\xi_1^4} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_5 &= 3\mu^2 - \hbar \frac{g^2}{\mu^2} \left(\frac{305}{64} + \frac{16}{\xi_1^4} - \frac{24}{\xi_1^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_6 &= 2\mu^2 - \frac{g^2}{\mu^2} \hbar \left(\frac{5}{8} + \frac{2}{\xi_1^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_7 &= -2\mu^2 + \hbar \frac{g^2}{\mu^2} \left(\frac{107}{32} - \frac{12}{\xi_1^2} - \frac{32}{\xi_1^4} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_8 &= \hbar \frac{21g^2}{16\mu^2} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_9 &= \hbar \frac{g^2}{\mu^2} \left(\frac{561861}{2048} + \frac{2560}{\xi_1^8} - \frac{12544}{\xi_1^6} + \frac{11231}{\xi_1^4} - \frac{12835}{4\xi_1^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_{67} &= \frac{g^2}{2} + \hbar \frac{g^4}{\mu^4} \left(\frac{1815}{256} - \frac{64}{\xi_1^6} + \frac{82}{\xi_1^4} - \frac{567}{16\xi_1^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
u_{95} &= \frac{g^2}{2} - \hbar \frac{g^4}{\mu^4} \left(\frac{9}{64} + \frac{9}{\xi_1^4} + \frac{1}{\xi_1^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2). \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen für die Renormierungsparameter ist die entsprechende Gegenwirkung festgelegt. Dazu müssen wir lediglich in den im Anhang F aufgeführten Ansatz (ansatz₁) gehen und die korrespondierende Ordnung in \hbar herausgreifen. Die renormierte Wirkung lässt sich dann kurz schreiben als:

$$S_{\text{ren.}} = S_{\text{unren.}} + S_{\text{gegen.}} \tag{6.14}$$

Sind wir an einer graphischen Darstellung der Renormierungsergebnisse interessiert, d. h. wollen wir die renormierte Wirkung mit der klassischen Wirkung bildlich vergleichen, so können wir dies nur tun, indem wir entsprechende Schnitte wählen. In erster Linie sind wir an dem renormierten Higgs-Feldanteil interessiert. Wir entscheiden uns daher für zwei Schnitte, bei denen die Eichfelder $A_{2, \text{re}}$ und $A_{2, \text{im}}$ verschwinden:

Schnitt 1: x_1 - x_2 -Ebene und alle anderen Felder identisch Null.

Schnitt 2: x_1 - y_1 -Ebene und alle anderen Felder identisch Null.

Das Vorgehen ist ein wenig mühsam, wenn man bedenkt, dass wir bisher nur die Reihenentwicklung der Renormierungsparameter erarbeitet haben, und in der Wirkung die Abhängigkeiten von diesen nicht trivial sind. Hat man es aber wieder geschafft, die Wirkung entlang dieser Schnitte nach Potenzen von \hbar zu sortieren, dann erhalten wir die Abbildungen auf den folgenden beiden Seiten.

Bei den Abbildungen handelt es sich wohlgerne immer um Schnitte der Wirkung und nicht um das Higgs-Potenzial selbst. Der Unterschied zum Higgs-Potenzial bei abgeschalteten Eichfeldern A_j ist durch den kinetischen Term der Wirkung, der proportional zu r_1 ist, bestimmt. Nachdem wir aber den Parameter r_1 einmal festgelegt haben, ist es nicht mehr möglich, das Higgs-Potenzial separat darzustellen. An den Graphen erkennt man deutlich die Abweichung der renormierten von der unrenormierten Wirkung. Alle Aussagen beschränken sich auf eine kleine Umgebung um den Entwicklungspunkt

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = A_{1, \text{re}} = A_{1, \text{im}} = A_{2, \text{re}} = A_{2, \text{im}} = 0. \quad (6.15)$$

Das Verhalten der renormierten zur unrenormierten Wirkung ist genau wie in der Arbeit von R. Häußling [26]. Der von uns gewählte Wert des Entwicklungsparameters $\hbar = \frac{1}{137}$ ist unrealistisch groß und Ähnlichkeiten mit bekannten Zahlenverhältnissen sind rein zufällig. Die Korrekturen für realistische Werte von \hbar sind jedoch so klein, dass sie graphisch nicht entsprechend wiedergegeben werden können.

Wie weit diese Entwicklung aussagekräftig bleibt, würde uns der Konvergenzradius mitteilen. Dieser wurde aber in der vorliegenden Arbeit ebensowenig wie die Konvergenz des renormierten Wirkungsintegrals untersucht.

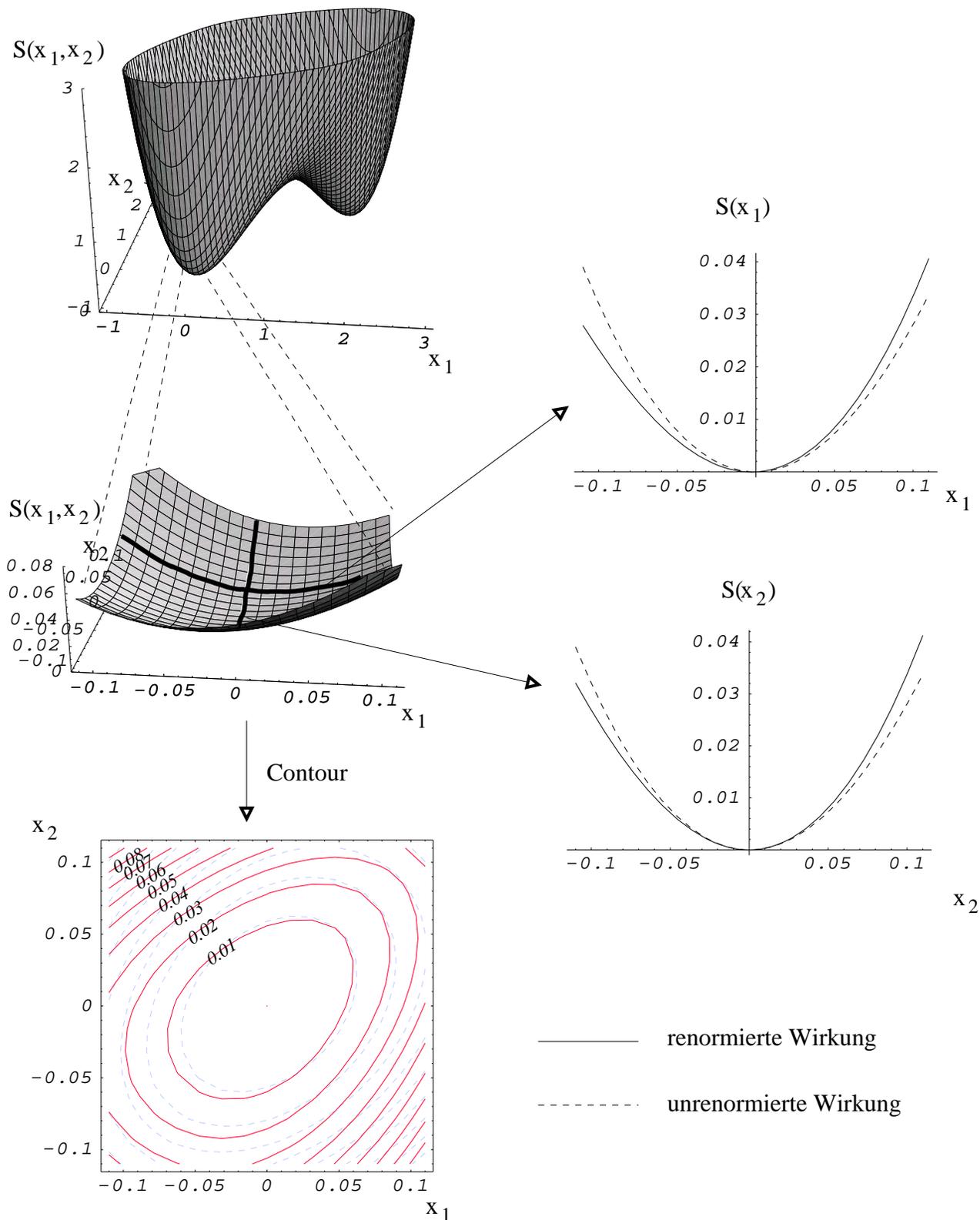


Abbildung 6.2: Schnitt in der x_1 - x_2 -Ebene für die spezielle Wahl der verbleibenden Parameter $\mu = g = \xi_1 = 1$, $\hbar = \frac{1}{137}$. Ausgehend von der Ausschnittsvergrößerung um den Entwicklungspunkt $\vec{0}$, lassen sich durch Schnitte bzw. Projektionen die renormierte und die unrenormierten Wirkung verbildlichen.

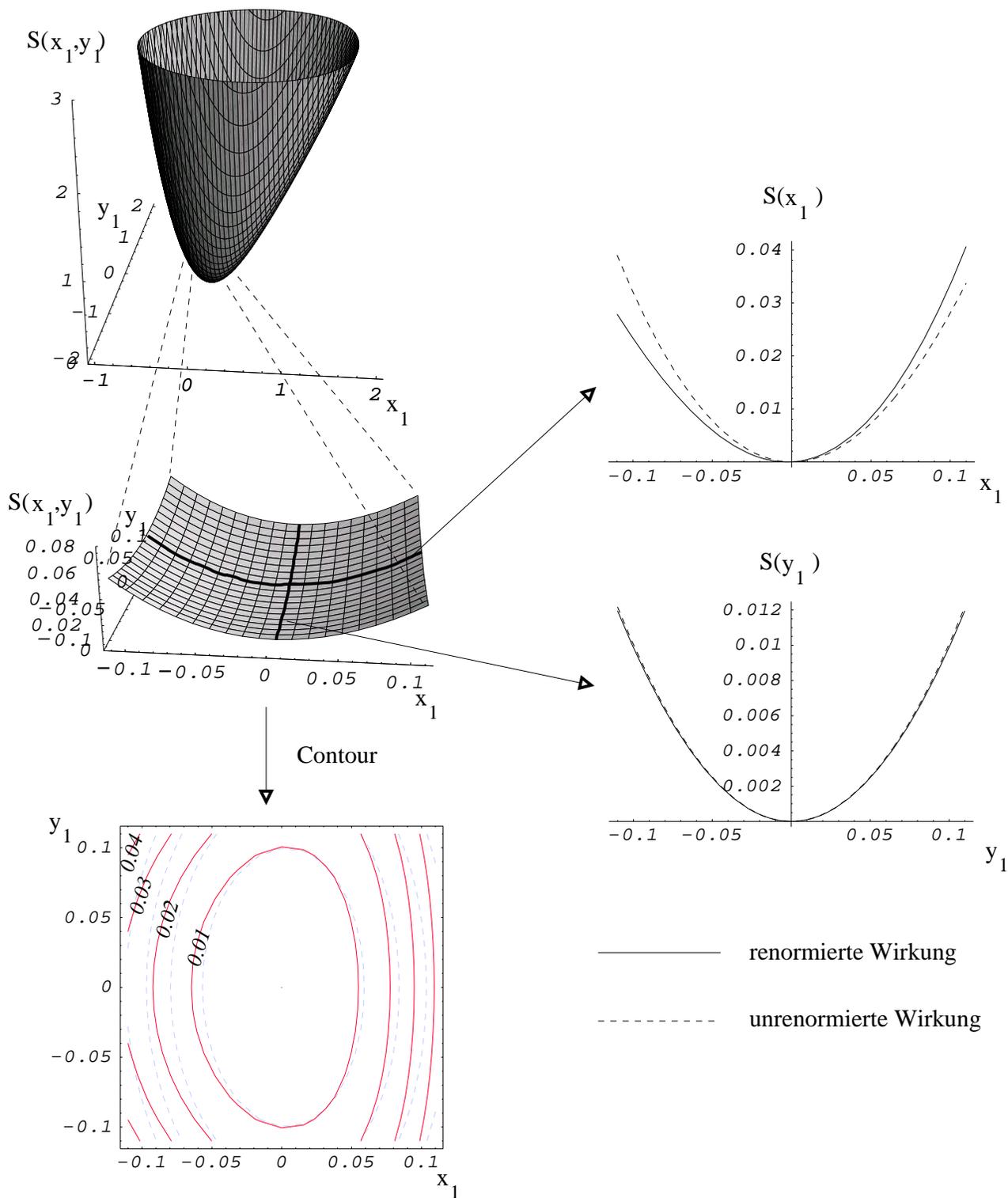


Abbildung 6.3: Die Systematik der Darstellung ist die selbe wie in Abb. 6.2 diesmal jedoch indem ein Schnitt 2 mit $\mu = g = \xi_1 = 1$, $\hbar = \frac{1}{137}$ angesetzt wurde.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Wiederholen wir zunächst die Ausgangsfragestellung: Wir fragten uns, ob es möglich ist, die quantenfeldtheoretischen Untersuchungen aus der Arbeit von R. Häußling [26] derart zu erweitern, dass wir auch lokal eichinvariante Symmetrien diskutieren können. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um die Erweiterung der Raum-Zeit um einen zusätzlichen Punkt auf zwei Raum-Zeit-Punkte. Die zugrunde liegende „Raum-Zeit“ musste notwendigerweise aus mindestens zwei Punkten bestehen, denn sonst wäre die Notation eines Zusammenhangs (Eichfelder) bedeutungslos geworden. Neben den dann auftretenden kinetischen Termen und Eichfeldern, konnten so auch Ableitungskopplungen der Eichfelder berücksichtigt werden.

Unser Ausgangspunkt wurde durch die Nichtkommutative Geometrie bestimmt. Eine zweiseitige Betrachtungsweise gewisser Anforderungen an eine Diskretisierung führte sowohl mit der räumlichen als auch mit der algebraischen Interpretation zu einer bestimmten Algebra auf zwei Punkten. Die allgemeinste, kommutative, assoziative, normierbare Algebra mit zwei Elementen besitzt eine Verknüpfung, die sich auf der Darstellungsebene von der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation unterscheidet. Nur in dem Fall, in dem wir eine räumliche Interpretation der zweielementigen Punktmenge haben möchten, werden wir aufgrund des Gelfand-Naimark-Theorems auf die gewöhnliche Matrizenmultiplikation beschränkt. Nach der Ausarbeitung der Algebra in Kapitel 2 konstruierten wir eine manifest nichtkommutative Yang-Mills-Wirkung in Kapitel 3. Diese Konstruktion führten wir in aller Allgemeinheit und ohne eine Wahl der räumlichen Auslegung durch. Als Resultat sahen wir, dass die zugrunde liegende Symmetrie eine Deformation trägt, deren Grad durch den in der Verknüpfung auftretenden Parameter c bestimmt ist. Weiter stellten wir fest, dass mögliche Messgrößen nicht von einer derartigen Deformation abhängen, so lange man diese Zwei-Punkte-Welt separat betrachtet. Die konstruierte Yang-Mills-Wirkung entsprach dem Muster, wie es für das Potenzial des Higgs-Feldes in der spontanen Symmetriebrechung vorliegt. Wie schon in anderen auf Nichtkommutativer Geometrie beruhenden Arbeiten, behält das Higgs-Feld auch in dieser Beschreibung die geometrische

Interpretation eines Zusammenhangs.

Nach der Ausarbeitung des Verhaltens auf einen Raum-Zeit-Punkt erweiterten wir die Untersuchung auf zwei identische Raum-Zeit-Punkte, indem wir jedem der beiden Raum-Zeit-Punkte einen inneren Zwei-Punkte-Raum anhefteten. Die beiden Zwei-Punkte-Algebren unterschieden sich lediglich durch die Wahl des Produkts. Unserer Auffassung nach ist es nicht zwingend, den angehefteten, inneren Zwei-Punkte-Räumen eine räumliche Interpretation zuzusprechen. Auf diese Art und Weise wurde eine konsistente Diskretisierung eingeführt. In Kapitel 4 bauten wir zunächst wieder das mathematische Gerüst, das später die Yang-Mills-Wirkung tragen sollte. Eine Untersuchung der Differenzialalgebra ermöglichte es uns, neben den Higgs-Feldern zusätzliche Felder, nämlich Eichfelder, einzubauen. Die Vermutung, dass es sich bei den Extrafeldern tatsächlich um Eichfelder handelte, wurde durch spezielle Feldkonfigurationen in einer nach dem Muster einer Yang-Mills-Theorie konstruierten Wirkung gefestigt. Der Unterschied von unserem Modell zum gewohnten Modell beruht auf der Art und Anzahl der Eichfelder (zwei komplexe Felder bzw. ein reelles Feld). Die auf nichtkommutativem Weg konstruierte Wirkung war der Ausgangspunkt für alle weiteren quantenfeldtheoretischen Überlegungen. Begriffe aus der Quantenfeldtheorie konnten ohne die Komplikationen, wie sie in vier Dimensionen auftreten, diskutiert werden.

Ausgehend von einer Symmetrie, die durch die Wirkung realisiert wurde, studierten wir die Eichtransformationen des Modells. Um die Frage nach einem Abzählargument von Feynman-Diagrammen beantworten zu können, war es notwendig, die freien Propagatoren zu bestimmen (Kapitel 5). Allerdings war dies in unserem Modell unter Beibehaltung der Symmetrie nur zu bewerkstelligen, weil wir die lokale Eichinvarianz durch BRS-Invarianz ersetzt haben. Auf funktionaler Ebene entsprach dies einer Ersetzung der Ward-Takahashi-Identität durch die Slavnov-Taylor-Identität. Diese Substitution gestattete es uns, Eichfixierungsterme, Faddeev-Popov-Terme und einen Anteil externer Felder symmetrieeerhaltend hinzuzufügen. Derartige Terme sind selbst in einer nulldimensionalen Theorie unvermeidbar. Nur so wurde es möglich, die freien Propagatoren der Theorie, die alle wohldefiniert waren, anzugeben. Anschließend näherten wir uns den Ein-PI-n-Punkt-Funktionen, indem wir die Dyson-Schwinger-Gleichungen perturbativ lösten. Durch einen Konsistenzcheck, d. h. durch die Berechnung der Ein-PI-n-Punkt-Funktionen, unter Berücksichtigung aller beitragenden Feynman-Diagramme, aus dem Wick-Theorem stammender, kombinatorischer Gewichtsfaktoren und möglicher Symmetriefaktoren, stellten wir die perfekte Übereinstimmung der Ergebnisse fest. Das Abzählargument behielt also auch in einer nulldimensionalen Theorie mit etwaigen kinetischen Termen und Eichfeldern, die sich durch spontane Symmetriebrechung auszeichnet, seine Gültigkeit. Der Vergleich mit dem Abzählen von Feynman-Graphen in einer korrespondierenden vierdimensionalen Theorie fand in dieser Arbeit nicht statt. Der Grund lag dabei in der Unkenntnis über ein Pendant zur Raum-Zeit-Dimension 4, das der Art und Anzahl der Eichfelder in unserer diskreten

Version genügte. Wir stellten weiterhin fest, dass alle Ergebnisse nicht durch Unendlichkeiten beeinträchtigt werden, da in der nulldimensionalen Theorie keine Divergenzen existieren.

Des Weiteren erwies sich nach dem Studium der Symmetrie eine der drei möglichen Symmetrietransformationen als eine versteckte. Das nur implizite Auftreten dieser Symmetrie veranlasste uns, diese zu brechen und damit eine bestimmte Eichfeldkonstellation zu fixieren. In dieser spontan gebrochenen Symmetrie wiederholten wir zunächst einige der Ergebnisse. Mit Hinblick auf eine physikalische Deutung des Modells wurde deutlich, dass es auch hier notwendig ist, die Wirkung zu renormieren. Unter Angabe eines Renormierungsschemas und den zugehörigen Ergebnissen beendeten wir die vorliegende Arbeit. Fragen nach der Existenz von BRS-Symmetrie und Renormierung konnten wir auch in der vorliegenden nulldimensionalen Formulierung positiv beantworten. Um die Ergebnisse noch einmal bildhaft Revue passieren zu lassen, wiederholen wir den in der Einleitung dargestellten Aufbau der Arbeit:

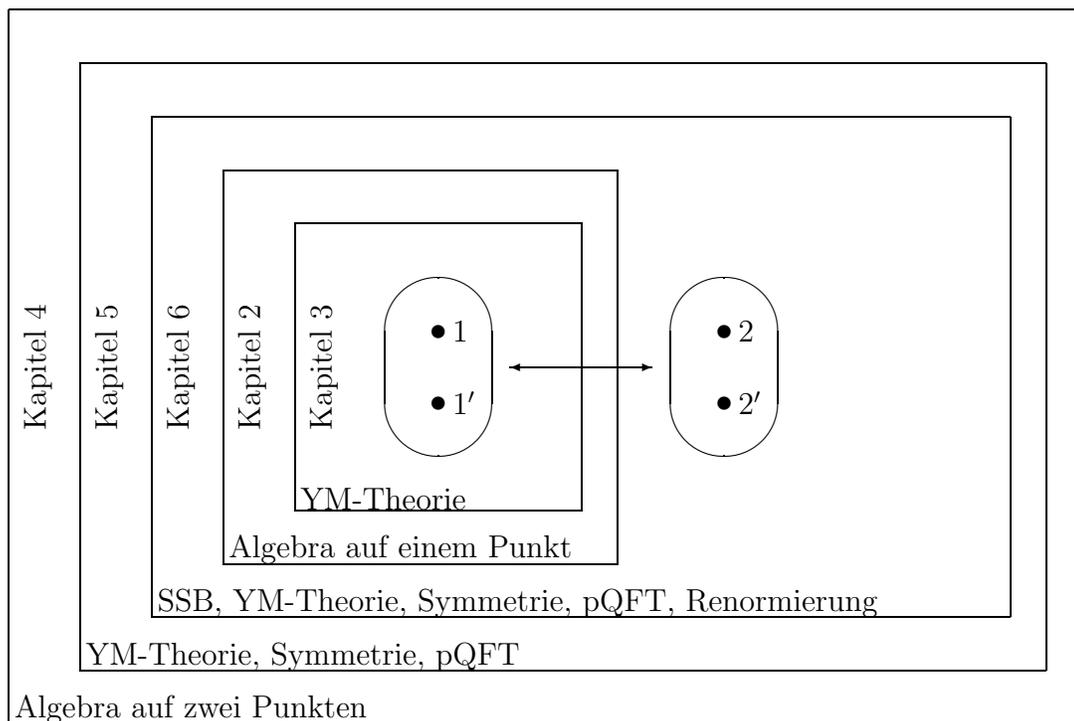


Abbildung 7.1: Schematischer Aufbau der Arbeit.

Gleichzeitig ist der Versuch der Beantwortung der Frage nach der Quantenfeldtheorie auf einem Zwei-Punkte-Raum der Beginn vieler neuer Fragestellungen in diesem Zusammenhang:

Eine saubere Definition der Theorie verlangte es, Eichfixierungs-, Faddeev-Popov-, sowie externe Feld-Anteile hinzuzufügen. Um von einer vollständig nichtkommutativen Quantisierung sprechen zu können, wäre es wichtig, den korrekten Einbau dieser Terme in nichtkommutativer

Sprache und nicht, wie hier, per Hand zu verstehen.

Außerdem kann man sich fragen, ob es eine Alternative beim Einbau der Eichfelder gibt, die nur ein reelles Eichfeld erlaubt. In Anlehnung an das Mainz-Marseille-Modell ist dies unter Umständen durch das Hinzufügen einer zusätzlichen Graduierung (Formengrad) möglich.

Bisher bezogen sich die Ergebnisse auf eine $U(1) \times U(1)$ Symmetrie. Es wäre auch interessant zu wissen, wie sich Modelle verhalten, die dieser $U(1)$ Eichgruppe nicht unterliegen. Wir denken dabei zum Beispiel an eine $U(1) \times SU(2)$ Eichgruppe, wie sie im Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung realisiert ist.

Der eingangs über das Produkt der inneren Algebra eingeführte Deformationsparameter c wurde im Verlauf der Arbeit zu Gunsten einer klareren Darstellung der Ergebnisse auf Eins gesetzt. Die Rolle dieses Parameters ist also gänzlich unbekannt. Es wäre somit auch interessant zu wissen, ob er eine Deutung als physikalischer Freiheitsgrad in wechselwirkenden Theorien besitzt. Möglicherweise kann die Vermessung des Higgs-Potenzials, z. B. mit TESLA [46], diese Frage beantworten.

Wir stellten in unserer Arbeit bei der Berechnung der Ein-PI-n-Punkt-Funktionen eine Äquivalenz der Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichung und der graphentheoretischen Methode fest. Die Vorgehensweise bei höheren Schleifenordnungen seitens der Dyson-Schwinger-Gleichungen ist bekannt und wird zunehmend schwieriger. Zieht man andererseits die Feynman-Graphen zur Berechnung heran, dann setzt dies die Kenntnis aller erlaubten Topologien von Graphen in dieser Ordnung voraus [2], [8]. Das Problem der algebraischen Kombinatorik lässt sich sicherlich mit Methoden aus der Polya-Theorie besser verstehen. Möglicherweise gewinnt man dadurch mehr Kenntnisse über die Klassifizierung von Feynman-Topologien und kann diese mit Hopf-Algebra-Strukturen in Verbindung setzen.

Eine weitere Frage könnte sich an eine Verallgemeinerung auf mehrere Punkte richten. Wir abstrahierten die Raum-Zeit bisher durch eine zweielementige Menge. Wie sieht aber die Quantenfeldtheorie auf einer Kette (n-Punkte) solcher Punkte, $\mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{C}_2 \longrightarrow \mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{C}_n$, oder einer speziellen Gitterkonfiguration aus? Sind interessante Ergebnisse für Quantenfeldtheorien auf Gittern zu erwarten?

Die Beantwortung einer Frage birgt in der Regel das Aufkommen vieler neuer Fragen. Dennoch stimmen uns die bisherigen Ergebnisse sehr zuversichtlich, einen Schritt in Richtung nichtkommutativer Quantisierung gemacht zu haben. Neben der Frage, wie weit wir von diesem Ziel noch entfernt sind, eröffnet sich eine Vielzahl physikalischer Fragestellungen, deren Beantwortung auf zukünftige Forschungen verschoben werden muss.

Alle Wahrheiten sind einfach zu verstehen, wenn sie aufgedeckt wurden; der Punkt ist sie aufzudecken.

Galileo Galilei

Anhang A

Abel'sches Higgs-Modell in der NKG

In diesem Anhang wollen wir einen Teil der Mainz-Marseille-Konstruktion des nichtkommutativen Abel'schen Higgs-Modells wiederholen. Das wesentliche nichtkommutative Objekt im Mainz-Marseille-Zugang [11], [41] ist ein verallgemeinertes Eichpotenzial, das in komplizierteren physikalischen Theorien eine Vereinigung gewöhnlicher Eichfelder und Higgs-Felder zu einem einzigen matrixwertigen Objekt darstellt. In dieser Arbeit ist das Eichpotenzial

$$\mathcal{A} = i \begin{pmatrix} \hat{A} & \frac{1}{\mu} \hat{\varphi} \\ \frac{1}{\mu} \bar{\varphi} & \hat{B} \end{pmatrix} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1, \quad (\text{A.1})$$

mit der Zerlegung in gerade und ungerade Matrizen, \mathcal{A}_0 und \mathcal{A}_1 . $\hat{\varphi}$ entspricht den verschobenen Higgs-Feldern (Formengrad 0), und die Felder \hat{A} und \hat{B} sind Eichfelder, die den Formengrad 1 tragen. Der totale Grad setzt sich aus der Summe des Formengrades und des Matrixgrades zusammen, so dass das Eichpotenzial insgesamt vom totalen Grad 1 ist.

Die Differenziation besteht aus zwei Anteilen. Zum einen aus einer Matrixderivation und zum anderen aus der gewöhnlichen Cartanableitung. Die Matrixableitung ist definiert als:

$$\begin{aligned} d_M \mathcal{A} &= [\eta, \mathcal{A}]_g = [\eta, \mathcal{A}_0] + i\{\eta, \mathcal{A}_1\} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{A} - \hat{B} \\ \hat{B} - \hat{A} & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{\mu} (\hat{\varphi} + \bar{\varphi}) \mathbf{1}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Insgesamt ergibt sich damit die Derivation des Zusammenhangs als

$$d\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A} - \hat{B} \\ \hat{B} - \hat{A} & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{\mu} (\hat{\varphi} + \bar{\varphi}) \mathbf{1}_2 + i \begin{pmatrix} d_c \hat{A} & 0 \\ 0 & d_c \hat{B} \end{pmatrix} - \frac{i}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & d_c \hat{\varphi} \\ d_c \bar{\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Um die Krümmung angeben zu können, muss neben dem soeben bestimmten $d\mathcal{A}$ -Anteil auch das Quadrat $\mathcal{A}\hat{\circ}\mathcal{A}$ angegeben werden:

$$\mathcal{A}\hat{\circ}\mathcal{A} = -i \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^2}\hat{\varphi}\bar{\varphi} & \frac{i}{\mu}(\hat{A} - \hat{B})\hat{\varphi} \\ \frac{i}{\mu}(\hat{B} - \hat{A})\bar{\varphi} & \frac{1}{\mu^2}\hat{\varphi}\bar{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Hierbei wurde schon $\hat{A} \wedge \hat{A} = \hat{B} \wedge \hat{B} = 0$ ausgenutzt. Damit kann für die Krümmung

$$\mathcal{F} = -i \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}(\hat{\varphi} + \bar{\varphi}) + \frac{1}{\mu^2}\hat{\varphi}\bar{\varphi} - d_c\hat{A} & \frac{i}{\mu}(\hat{A} - \hat{B})(\hat{\varphi} + \mu) + \frac{1}{\mu}d_c\hat{\varphi} \\ \frac{i}{\mu}(\hat{B} - \hat{A})(\bar{\varphi} + \mu) + \frac{1}{\mu}d_c\bar{\varphi} & \frac{1}{\mu}(\hat{\varphi} + \bar{\varphi}) + \frac{1}{\mu^2}\hat{\varphi}\bar{\varphi} - d_c\hat{B} \end{pmatrix} = -\mathcal{F}^\dagger \quad (\text{A.5})$$

geschrieben werden. Wie man dieser Funktion ansieht, ist sie, genau wie das Vektorpotenzial, selbstadjungiert. Durch Quadrieren dieses Ausdrucks und anschließender Spurbildung ergibt sich die Yang-Mills-Wirkung:

$$\begin{aligned} S = \text{Tr} \langle \mathcal{F}^\dagger, \mathcal{F} \rangle &= 2\hat{r}_0 \left(\frac{1}{\mu}(\hat{\varphi} + \bar{\varphi}) + \frac{1}{\mu^2}\hat{\varphi}\bar{\varphi} \right)^2 + \langle d_c\hat{A}, d_c\hat{A} \rangle + \langle d_c\hat{B}, d_c\hat{B} \rangle \\ &\quad - \frac{2}{\mu^2} \langle (\hat{A} - \hat{B})(\hat{\varphi} + \mu) - i d_c\hat{\varphi}, (\hat{B} - \hat{A})(\bar{\varphi} + \mu) - i d_c\bar{\varphi} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Führt man Redefinitionen der Felder gemäß

$$\begin{aligned} \hat{R} &\doteq \hat{A} + \hat{B} & \hat{A} &\doteq \frac{1}{2}(\hat{R} + \hat{L}) \\ \hat{L} &\doteq \hat{A} - \hat{B} & \hat{A} &\doteq \frac{1}{2}(\hat{R} - \hat{L}) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

durch, definiert

$$D\hat{\varphi} \doteq d_c\hat{\varphi} + i\hat{L}(\hat{\varphi} + \mu)$$

und überzeugt sich anhand einer kurzen Zwischenrechnung, dass auch

$$\langle d_c\hat{A}, d_c\hat{A} \rangle + \langle d_c\hat{B}, d_c\hat{B} \rangle = \frac{1}{2}\langle d_c\hat{R}, d_c\hat{R} \rangle + \frac{1}{2}\langle d_c\hat{L}, d_c\hat{L} \rangle$$

gilt, dann lässt sich die Wirkung auch als

$$\begin{aligned} S &= \text{Tr} \langle \mathcal{F}^\dagger, \mathcal{F} \rangle = \frac{1}{2}\langle d_c\hat{R}, d_c\hat{R} \rangle + \frac{1}{2}\langle d_c\hat{L}, d_c\hat{L} \rangle \\ &\quad + \hat{r}_0 \frac{2}{\mu^4} (\mu(\hat{\varphi} + \bar{\varphi}) + \hat{\varphi}\bar{\varphi})^2 + \frac{2}{\mu^2} \langle D\hat{\varphi}, \bar{D}\hat{\varphi} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

schreiben. Beachtet man jetzt noch, dass für das Skalarprodukt von Eins- und Zweiformen

$$\begin{aligned} \langle dx^\mu, dx^\nu \rangle &= \frac{\hat{r}_1}{\mu^2} g^{\mu\nu} \\ \langle dx^\mu \wedge dx^\nu, dx^\sigma \wedge dx^\tau \rangle &= \frac{\hat{r}_5}{2\mu^4} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} - g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

gilt, dann folgt mit $F_{\hat{R}}^{\mu\nu} \doteq \partial^\mu \hat{R}^\nu - \partial^\nu \hat{R}^\mu$ und einer Reskalierung der Felder gemäß

$$\varphi \doteq \frac{\hat{\varphi}}{g}, \quad \bar{\varphi} \doteq \frac{\bar{\hat{\varphi}}}{g}, \quad 2\sqrt{2}R \doteq \hat{R}, \quad 2\sqrt{2}L \doteq \hat{L}, \quad (\text{A.9})$$

dass sich die Wirkung schreiben lässt als

$$\begin{aligned} S &= \frac{\hat{r}_5}{4g^2} F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} + \frac{\hat{r}_5}{4g^2} F_{L\mu\nu} F_L^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\hat{r}_1}{2} \left(\partial_\mu \bar{\varphi} - i2\sqrt{2}L_\mu (\bar{\varphi} + \frac{\mu}{g}) \right) \left(\partial^\mu \varphi + i2\sqrt{2}L^\mu (\varphi + \frac{\mu}{g}) \right) \\ &\quad + \frac{\hat{r}_0}{2} (\mu(\varphi + \bar{\varphi}) + g\varphi\bar{\varphi})^2. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Unter Verwendung der Gauß'schen Darstellung für die komplexen Felder, $\varphi = x + iy$, ist dies gleichbedeutend mit der im Hauptteil zum Vergleich herangezogenen Wirkung:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\hat{r}_5}{4g^2} F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} + \frac{\hat{r}_5}{4g^2} F_{L\mu\nu} F_L^{\mu\nu} + \frac{\hat{r}_1}{2} (\partial_\mu x)(\partial^\mu x) + \frac{\hat{r}_1}{2} (\partial_\mu y)(\partial^\mu y) \\ &\quad - \hat{r}_1 2\sqrt{2}L_\mu (y\partial^\mu x - x\partial^\mu y - \frac{\mu}{g}\partial^\mu y) + \hat{r}_1 4L^2 (x^2 + y^2 + 2\frac{\mu}{g}x + \frac{\mu^2}{g^2}) \\ &\quad + \hat{r}_0 \left(2\mu^2 x^2 + 2\mu g x^3 + 2\mu g x y^2 + \frac{1}{2}g^2 x^4 + g^2 x^2 y^2 + \frac{1}{2}g^2 y^4 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Anhang B

Konvergenz des Wirkungsfunktional

Um die Konvergenz des Wirkungsfunktional $Z = e^{-\frac{1}{\hbar}S_d}$ zu garantieren, muss die diskretisierte Wirkung S_d mindestens ein lokales Minimum x^* besitzen. $S : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ist mindestens auf einer Umgebung U des Punktes x^* erklärt. Es sei $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Definition: Die Funktion S besitzt genau dann im Punkt x^* ein lokales Minimum, wenn es eine Umgebung V von x^* gibt mit

$$S(x^*) \leq S(x) \quad \forall x \in V.$$

Ist $S(x^*) < S(x) \quad \forall x \in V$ mit $x \neq x^*$, dann sprechen wir von einem strengen lokalen Minimum.

Notwendige Bedingung: Ist S vom Typ \mathcal{C}^1 und besitzt S im Punkt x^* ein lokales Minimum, dann gilt $S'(x^*) = 0$. Das ist äquivalent zu $\partial_j S(x^*) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}$.

Hinreichende Bedingung: Ist S vom Typ \mathcal{C}^2 mit $S'(x^*) = 0$, dann besitzt S in x^* ein strenges lokales Minimum, wenn gilt:

(D) Die Matrix $S''(x^*)$ der zweiten partiellen Ableitungen von S im Punkt x^* besitzt nur positive Eigenwerte.

Die Bedingung (D) ist äquivalent zu der Aussage, dass alle Hauptunterdeterminanten

$$\det(\partial_j \partial_k S(x^*)), \quad j, k \in \{1, \dots, m\} \quad \text{für } m = 1, \dots, n$$

positiv sind.

Veranschaulichen wir uns diese Definition mit Hilfe eines kleinen Beispiels:

Beispiel: Sei eine fiktive Wirkung S von zwei Variablen x_1 und x_2 abhängig sowie durch $S(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1^3$ bestimmt, dann besitzt diese Wirkung in $x^* = (0, 0)$ ein strenges lokales Minimum, denn

$$\partial_1 S = x_1 + 3x_1^2, \quad \partial_2 S = x_2, \quad \partial_1^2 S(0, 0) = \partial_2^2 S(0, 0) = 1 \quad \text{und} \quad \partial_1 \partial_2 S(0, 0) = 0.$$

Es folgen

$$\partial_1 S(0, 0) = \partial_2 S(0, 0) = 0, \quad \partial_1^2 S(0, 0) > 0,$$

sowie

$$\det \begin{pmatrix} \partial_1^2 S(0, 0) & \partial_1 \partial_2 S(0, 0) \\ \partial_1 \partial_2 S(0, 0) & \partial_2^2 S(0, 0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Anhang C

Elemente aus der Graphentheorie

In einer Arbeit über Quantenfeldtheorie ist es naheliegend, mit Hilfe von Feynman-Diagrammen Ergebnisse zu veranschaulichen. Diese Feynman-Diagramme sind ebenso Graphen, die mit Hilfe der Graphentheorie charakterisiert werden können. Die Graphentheorie als eigenständiges Forschungsgebiet ist eine recht junge Disziplin, dennoch reichen einige ihrer Wurzeln mehr als 250 Jahre zurück. Mitte des 19. Jahrhunderts bekam sie aus den sich zu jener Zeit stark entwickelnden Naturwissenschaften einen starken Impuls. Grundlegende Resultate der Graphentheorie wurden durch Kirchhoffs Arbeit über elektrische Netzwerke, 1847 und Cayleys Anzahluntersuchungen von chemischen Verbindungen in den Siebziger und Achtziger Jahren des 19. Jahrhunderts geschaffen. Das Wort „Graph“ als Abkürzung für graphische Darstellung, wie sie z. B. in der Chemie benutzt wird, wurde erstmalig in der Arbeit *Chemistry and Algebra*, 1878 von James Joseph Sylvester erwähnt. Eine der ersten graphentheoretischen Arbeiten überhaupt war Leonard Eulers *Solutio problematis ad geometriam situs perinatis*, 1736, in der er das Königsberger Brückenproblem studiert und löst. Eine der ersten Monographien über die Anfänge der *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* hat der ungarische Mathematiker Dénes König (1884-1944) Mitte der Dreissiger Jahre des Zwanzigsten Jahrhunderts geschrieben. Noch heute zählt die Graphentheorie zu den schnell wachsenden Teilgebieten in der Mathematik. Mit dem Einzug des Computers erfuhr die Graphentheorie eine rasante Entwicklung: Zum einen hatte man das Bestreben nach einer Diskretisierung unserer Welt und zum anderen neue Möglichkeiten der Optimierung. Unsere Arbeit verbindet beide Aspekte, die aber bisher noch nicht genauer untersucht wurden.

Aus kombinatorischen Überlegungen heraus können Relationen für (Feynman-)Graphen angeführt werden, die Beziehungen zwischen eingeschlossenen Flächen (*Schleifen*), Kanten und

Knoten (*Vertizes*) herstellen:

| | |
|-----------------|----------------------------------|
| Linientheorem 1 | $L_a = A$ |
| Linientheorem 2 | $2(L_i + L_a) = A + 3V_3 + 4V_4$ |
| Flächentheorem | $F = L_i - V_3 - V_4 + (d - 1)$ |

mit der Notation

| | | | | | | | | |
|-------|---|------------------|-------|---|------------------|-------|---|-----------------|
| A | = | # äußere Punkte, | V_3 | = | # 3 - Vertizes, | V_4 | = | # 4 - Vertizes, |
| L_a | = | # äußere Linien, | L_i | = | # innere Linien, | F | = | # Flächen und |
| d | = | Dimension. | | | | | | |

Die Beweise gehen auf die

Euler'sche Formel: Sei G ein verbundener, planarer Graph mit V Knoten, L Kanten und F Flächen. Dann gilt : $V - L + F = 2$.

zurück. Für diese Formel gibt es in der Literatur eine große Sammlung origineller Beweise. Eine besonders schöne Ansammlung von - stattlichen - siebzehn verschiedenen Beweisen findet man in *The Geometry Junkyard* von David Eppstein [19]. Aus diesem Grund referieren wir lediglich die Geschichte des Satzes.

Euler erwähnte die Formel erstmals 1750 in einem Brief an seinen Freund Goldbach (Goldbach'sche Vermutung: Jede gerade ganze Zahl größer zwei ist darstellbar als die Summe zweier Primzahlen.), damals hatte er noch keinen Beweis. 1752 veröffentlichte er einen Beweis, der allerdings unvollständig war [20]. Erstmals vollständig bewiesen wurde die Formel von Legendre 1794 [37], [35]. Beachtenswert ist die Formel, wenn man bedenkt, dass weder Archimedes noch Descartes diesen Zusammenhang bemerkten, obwohl sie sich ausführlich mit Polyedern befassten.

Tragen jetzt die Kanten (Vertizes) an ihren Enden verschiedene Merkmale (Felder), wie es bei den Feynman-Graphen üblich ist, denn die Kanten repräsentieren schliesslich Propagatoren, dann müssen zusätzlich kombinatorische Aspekte berücksichtigt werden. In diesem Fall ist man im Gebiet der Polya-Theorie gelandet. Polya hat ursprünglich seinen Polya'schen Hauptsatz zur Aufzählung der Anzahlen isomerer Kohlenwasserstoffverbindungen benutzt. Betrachten wir z. B. Alkohole der Summenformel $C_nH_{2n+1}OH$. Man kennt Alkohole gleicher Summen-, aber unterschiedlicher Strukturformel, wie z. B. bei der Summenformel C_3H_7OH die beiden strukturverschiedenen Propylalkohole

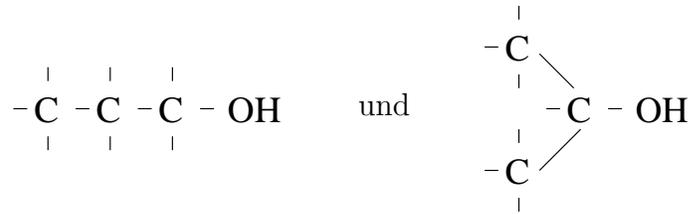


Abbildung C.1: Isomere Alkohole.

In unserem Fall wird es notwendig sein, ähnliche Überlegungen anzustellen, um erlaubte Feynman-Graphen in einer vorgegebenen Topologie bestimmen zu können. Die Ergebnisse werden sich wahrscheinlich mit den Symmetriefaktoren aus dem Wick'schen Theorem in Verbindung setzen lassen.

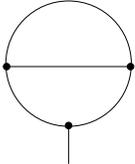
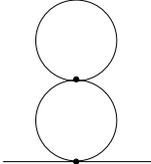
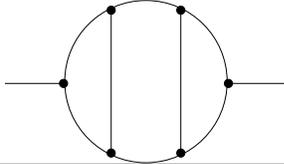
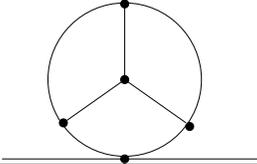
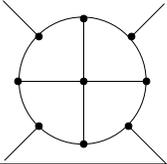
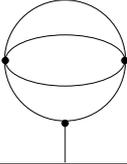
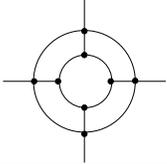
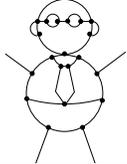
| Beispiele ebener Diagramme: | | | | | | | | | | | |
|---|---|-------|-------|-------|---|--|----|-------|-------|-------|---|
| | F | L_i | V_3 | V_4 | A | | F | L_i | V_3 | V_4 | A |
|  | 2 | 4 | 3 | 0 | 1 |  | 2 | 3 | 0 | 2 | 2 |
|  | 3 | 8 | 6 | 0 | 2 |  | 3 | 7 | 4 | 1 | 2 |
|  | 4 | 12 | 8 | 1 | 4 |  | 3 | 5 | 1 | 2 | 1 |
|  | 5 | 12 | 4 | 4 | 4 |  | 11 | 30 | 16 | 4 | 4 |

Tabelle C.1: Beispiele zur Euler'schen Formel.

Anhang D

Die Dyson-Schwinger-Gleichungen der spontan gebrochenen Symmetrie

Die Dyson-Schwinger-Gleichungen des spontan gebrochenen Modells aus dem Hauptteil wollen wir in diesem Anhang detaillierter untersuchen. Die Fixierung der Phase $\psi_3 = 0$ und die Wahl $c_{\text{in}} = 1$ vereinfacht die zuvor gemachten allgemeinen Überlegungen beträchtlich. Wir verzichten auf die Wiedergabe der Zwischenrechnungen und listen lediglich die Ergebnisse für die teilnehmenden Felder auf.

Für das Erzeugendenfunktional der allgemeinen Green's-Funktionen muss der Realteil des ersten Higgs-Feldes, x_1 die folgende Differenzialgleichung, erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 Z = & \hbar^3 g^2 \left[r_1 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_0 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial^3 \rho_1} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_1 \partial^2 \tau_1} \right) \right] \\
 & - \hbar^2 g \mu \left[r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{re}} \partial \rho_1} - \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{re}} \partial \rho_2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{im}} \partial \tau_2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + 2r_0 \left(3 \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \rho_1} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \tau_1} \right) + \frac{1}{2} \xi_1 \frac{1}{g} \frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \eta_1} \right] \\
 & + \hbar \mu^2 \left[4r_0 \frac{\partial Z}{\partial \rho_1} + 2r_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho_1} - \frac{\partial Z}{\partial \rho_2} \right) + X_1 \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_1} \right]
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Nach dem Zwischenschritt über die Differenzialgleichung, die die zusammenhängenden Green's-Funktionen erfüllen muss, erhalten wir nach einer Legendre-Transformation die Gleichung, der

das Funktional der Ein-PI-Greens-Funktionen in der Variable x_1 Rechnung tragen muss:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial x_1} &= \hbar^2 g^2 \left[r_1 \left([T]_{1,5,5}^{(n-2)} + [T]_{1,6,6}^{(n-2)} \right) + 2r_0 \left([T]_{1,1,1}^{(n-2)} + [T]_{1,2,2}^{(n-2)} \right) \right] \\
&\quad - \hbar g^2 \left[r_1 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) \left([H]_{5,5}^{(n-1)} + [H]_{6,6}^{(n-1)} \right) + 2r_0 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) \left([H]_{2,2}^{(n-1)} + 3 [H]_{1,1}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2r_1 \left(\left(\frac{\mu}{g} - A_{2,\text{re}} \right) [H]_{1,5}^{(n-1)} - \frac{\mu}{g} [H]_{3,5}^{(n-1)} - \frac{\mu}{g} [H]_{4,6}^{(n-1)} - A_{2,\text{im}} [H]_{1,6}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - 4r_0 y_1 \left[[H]_{1,2}^{(n-1)} - \frac{1}{g(gx_1 - \mu)} \right] \right] \\
&\quad + g^2 r_1 x_1 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) + 2g^2 r_0 x_1 (x_1^2 + y_1^2) - g\mu (r_1 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) \\
&\quad + 2r_1 (A_{2,\text{re}}(x_1 - x_2) - A_{2,\text{im}}y_2) + 2r_0 (3x_1^2 + y_1^2)) + \mu^2 (4r_0 x_1 + 2r_1 (x_1 - x_2)) \\
&\quad - \frac{1}{2} \xi_1 \mu \bar{c}_1 c_1 + X_1 c_1. \tag{D.2}
\end{aligned}$$

Ebenso berechnen wir aus dem Wirkungsfunktional, dass der Realteil des zweiten Higgs-Feldes, x_2 , die Gleichung

$$\begin{aligned}
\rho_2 Z &= \hbar^3 g^2 \left[r_1 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_0 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial^3 \rho_2} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \rho_2 \partial^2 \tau_2} \right) \right] \\
&\quad - \hbar^2 g \mu \left[r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{re}} \partial \rho_2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{re}} \partial \rho_1} + \frac{\partial^2 Z}{\partial j_{2,\text{im}} \partial \tau_1} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2r_0 \left(3 \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \rho_2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \tau_2} \right) \right] \\
&\quad + \hbar \mu^2 \left[4r_0 \frac{\partial Z}{\partial \rho_2} + 2r_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho_2} - \frac{\partial Z}{\partial \rho_1} \right) + X_2 \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_2} \right] \tag{D.3}
\end{aligned}$$

erfüllen muss und nach den anschließenden Transformationen folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial x_2} &= \hbar^2 g^2 \left[r_1 \left([T]_{3,5,5}^{(n-2)} + [T]_{3,6,6}^{(n-2)} \right) + 2r_0 \left([T]_{3,3,3}^{(n-2)} + [T]_{3,4,4}^{(n-2)} \right) \right] \\
&\quad - \hbar g^2 \left[r_1 \left(\frac{\mu}{g} - x_2 \right) \left([H]_{5,5}^{(n-1)} + [H]_{6,6}^{(n-1)} \right) + 2r_0 \left(\frac{\mu}{g} - x_2 \right) \left([H]_{4,4}^{(n-1)} + 3 [H]_{3,3}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2r_1 \left(\left(\frac{\mu}{g} - A_{2,\text{re}} \right) [H]_{3,5}^{(n-1)} - \frac{\mu}{g} [H]_{1,5}^{(n-1)} + \frac{\mu}{g} [H]_{2,6}^{(n-1)} - A_{2,\text{im}} [H]_{3,6}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - 4r_0 y_2 [H]_{4,3}^{(n-1)} \right] \\
&\quad + g^2 r_1 x_2 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) + 2g^2 r_0 x_2 (x_2^2 + y_2^2) - g\mu (r_1 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) \\
&\quad + 2r_1 (A_{2,\text{re}}(x_2 - x_1) + A_{2,\text{im}}y_1) + 2r_0 (3x_2^2 + y_2^2)) + \mu^2 (4r_0 x_2 + 2r_1 (x_2 - x_1)) \\
&\quad + X_2 c_2. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhalten wir für den Imaginärteil des ersten Higgs-Feldes, y_1 , die Dyson-

Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\tau_1 Z &= \hbar^3 g^2 \left[r_1 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_1 \partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_1 \partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_0 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_1 \partial^2 \rho_1} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^3 \tau_1} \right) \right] \\
&\quad - \hbar^2 \mu g \left[2r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau_1 \partial j_{2,\text{re}}} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau_2 \partial j_{2,\text{re}}} \right) + 4r_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial \tau_1} \right] \\
&\quad + \hbar \mu^2 r_1 2 \left(\frac{\partial Z}{\partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial Z}{\partial \tau_1} - \frac{\partial Z}{\partial \tau_2} \right) + \hbar \frac{1}{2} \xi_1 \mu \frac{\partial Z}{\partial l_1} - \hbar Y_1 \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_1}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

oder wiederum für das Funktional Γ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial y_1} &= \hbar^2 g^2 \left[r_1 \left([T]_{2,5,5}^{(n-2)} + [T]_{2,6,6}^{(n-2)} \right) + 2r_0 \left([T]_{2,1,1}^{(n-2)} + [T]_{2,2,2}^{(n-2)} \right) \right] \\
&\quad - \hbar g^2 \left[2r_1 \left(\frac{\mu}{g} [H]_{6,3}^{(n-1)} - \frac{\mu}{g} [H]_{5,4}^{(n-1)} + \left(\frac{\mu}{g} - A_{2,\text{re}} \right) [H]_{5,2}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - y_1 r_1 \left([H]_{5,5}^{(n-1)} + [H]_{6,6}^{(n-1)} \right) - 2r_1 A_{2,\text{im}} [H]_{6,2}^{(n-1)} \right. \\
&\quad \quad \left. + 4r_0 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) [H]_{1,2}^{(n-1)} - 2r_0 y_1 \left(3 [H]_{2,2}^{(n-1)} + [H]_{1,1}^{(n-1)} \right) \right] \\
&\quad + g^2 r_1 y_1 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) - \mu g (2r_1 (A_{2,\text{im}} x_2 + A_{2,\text{re}} (y_1 - y_2)) + 4r_0 x_1 y_1) \\
&\quad + g^2 2r_0 y_1 (x_1^2 + y_1^2) + 2\mu^2 r_1 (A_{2,\text{im}} + y_1 - y_2) + \frac{1}{2} \xi_1 \mu B_1 - Y_1 c_1.
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Der Imaginärteil des zweiten Higgs-Feldes, y_2 , gehorcht den Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
\tau_2 Z &= \hbar^3 g^2 \left[r_1 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_2 \partial^2 j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_2 \partial^2 j_{2,\text{im}}} \right) + 2r_0 \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial \tau_2 \partial^2 \rho_2} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^3 \tau_2} \right) \right] \\
&\quad - \hbar^2 \mu g \left[-2r_1 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial j_{2,\text{im}}} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau_2 \partial j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau_1 \partial j_{2,\text{re}}} \right) + 4r_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_2 \partial \tau_2} \right] \\
&\quad + \hbar \mu^2 r_1 2 \left(-\frac{\partial Z}{\partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial Z}{\partial \tau_2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau_1} \right) - \hbar Y_2 \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_2}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial y_2} &= \hbar^2 g^2 \left[r_1 \left([T]_{4,5,5}^{(n-2)} + [T]_{4,6,6}^{(n-2)} \right) + 2r_0 \left([T]_{4,3,3}^{(n-2)} + [T]_{4,4,4}^{(n-2)} \right) \right] \\
&\quad - \hbar g^2 \left[-2r_1 \left(\frac{\mu}{g} [H]_{1,6}^{(n-1)} + \frac{\mu}{g} [H]_{2,5}^{(n-1)} - \left(\frac{\mu}{g} - A_{2,\text{re}} \right) [H]_{4,5}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - y_2 r_1 \left([H]_{5,5}^{(n-1)} + [H]_{6,6}^{(n-1)} \right) - 2r_1 A_{2,\text{im}} [H]_{6,4}^{(n-1)} \right. \\
&\quad \quad \left. + 4r_0 \left(\frac{\mu}{g} - x_2 \right) [H]_{3,4}^{(n-1)} - 2r_0 y_2 \left(3 [H]_{4,4}^{(n-1)} + [H]_{3,3}^{(n-1)} \right) \right] \\
&\quad + g^2 r_1 y_2 (A_{2,\text{re}}^2 + A_{2,\text{im}}^2) + \mu g 2 (r_1 (A_{2,\text{im}} x_1 + A_{2,\text{re}} (y_1 - y_2)) - 2r_0 x_2 y_2) \\
&\quad + g^2 2r_0 y_2 (x_2^2 + y_2^2) + 2\mu^2 r_1 (y_2 - y_1 - A_{2,\text{im}}) - Y_2 c_2.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Für das einzige in der spontan gebrochenen Symmetrie verbleibende Eichfeld A_2 können die Rechnungen direkt nachgebildet werden und es gilt für den Realteil, $A_{2,\text{re}}$:

$$\begin{aligned}
j_{2,\text{re}}Z &= \hbar^3 g^2 r_1 \left[\frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \rho_1 \partial j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \tau_1 \partial j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \rho_2 \partial j_{2,\text{re}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \tau_2 \partial j_{2,\text{re}}} \right] \\
&\quad - \hbar^2 \mu g r_1 \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \rho_1} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \rho_2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \tau_1} + \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 \tau_2} \right. \\
&\quad \quad \left. - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial j_{2,\text{re}}} + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{re}}} \right] \\
&\quad + \hbar \mu^2 2(r_1 + r_5) \frac{\partial Z}{\partial j_{2,\text{re}}} - \hbar V_2 \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_1} - \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_2} \right) - 2 \frac{\mu^3}{g} r_5
\end{aligned} \tag{D.9}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial A_{2,\text{re}}} &= \hbar^2 g^2 r_1 \left[[T]_{5,1,1}^{(n-2)} + [T]_{5,2,2}^{(n-2)} + [T]_{5,3,3}^{(n-2)} + [T]_{5,4,4}^{(n-2)} \right] \\
&\quad - \hbar g^2 r_1 \left[\left(\frac{\mu}{g} - A_{2,\text{re}} \right) \left([H]_{1,1}^{(n-1)} + [H]_{2,2}^{(n-1)} + [H]_{3,3}^{(n-1)} + [H]_{4,4}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - 2y_1 [H]_{2,5}^{(n-1)} - 2y_2 [H]_{4,5}^{(n-1)} \right. \\
&\quad \quad \left. + 2 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) [H]_{1,5}^{(n-1)} + 2 \left(\frac{\mu}{g} - x_2 \right) [H]_{3,5}^{(n-1)} - 2 \frac{\mu}{g} [H]_{2,4}^{(n-1)} - 2 \frac{\mu}{g} [H]_{1,3}^{(n-1)} \right] \\
&\quad + g^2 r_1 A_{2,\text{re}} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) - \mu g r_1 \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2A_{2,\text{re}}(x_1 + x_2) \right) \\
&\quad + 2\mu^2 (r_1 + r_2) A_{2,\text{re}} - 2 \frac{\mu^3}{g} r_5 - V_2 (c_1 - c_2).
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Letztendlich folgt auch noch der Teil, der den Imaginärteil des Eichfeldes, $A_{2,\text{im}}$, behandelt:

$$\begin{aligned}
j_{2,\text{im}}Z &= \hbar^3 g^2 r_1 \left[\frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \rho_1 \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \tau_1 \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \rho_2 \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^3 Z}{\partial^2 \tau_2 \partial j_{2,\text{im}}} \right] \\
&\quad - 2\hbar^2 \mu g r_1 \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_2 \partial j_{2,\text{im}}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_2 \partial \tau_1} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho_1 \partial \tau_2} \right] \\
&\quad + \hbar \mu^2 2(r_1 + r_5) \frac{\partial Z}{\partial j_{2,\text{im}}} + \hbar 2\mu^2 r_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau_1} - \frac{\partial Z}{\partial \tau_2} \right) + \hbar U_2 \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_1} - \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_2} \right)
\end{aligned} \tag{D.11}$$

und wiederum:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial A_{2,\text{im}}} &= \hbar^2 g^2 r_1 \left[[T]_{6,1,1}^{(n-2)} + [T]_{6,2,2}^{(n-2)} + [T]_{6,3,3}^{(n-2)} + [T]_{6,4,4}^{(n-2)} \right] \\
&\quad - \hbar g^2 r_1 \left[2 \left(\frac{\mu}{g} - x_1 \right) [H]_{1,6}^{(n-1)} + 2 \left(\frac{\mu}{g} - x_2 \right) [H]_{3,6}^{(n-1)} \right. \\
&\quad \quad \left. - A_{2,\text{im}} \left([H]_{1,1}^{(n-1)} + [H]_{2,2}^{(n-1)} + [H]_{3,3}^{(n-1)} + [H]_{4,4}^{(n-1)} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - 2y_1 [H]_{2,6}^{(n-1)} - 2y_2 [H]_{4,6}^{(n-1)} + 2 \frac{\mu}{g} \left([H]_{2,3}^{(n-1)} - [H]_{1,4}^{(n-1)} \right) \right] \\
&\quad + g^2 r_1 A_{2,\text{im}} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) - 2\mu g r_1 (A_{2,\text{im}}(x_1 + x_2) + x_2 y_1 - x_1 y_2) \\
&\quad + 2\mu^2 (r_1 + r_5) A_{2,\text{im}} + 2\mu^2 r_1 (y_1 - y_2) + U_2 (c_1 - c_2). \tag{D.12}
\end{aligned}$$

Das einzige in der Wirkung vorkommende Nakanishi-Lautrup-Feld erfüllt eine Differentialgleichung, die in allen Ordnungen der \hbar -Entwicklung ihre Gültigkeit behält. Nachdem man die Gleichung für die allgemeinen Green's-Funktionen

$$l_1 Z = \hbar \left(\frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial l_1} + \frac{1}{2} \xi_1 \mu \frac{\partial Z}{\partial \tau_1} \right) \tag{D.13}$$

auf die Gleichung für die Ein-PI-Green's-Funktionen

$$l_1 = \frac{\partial \Gamma}{\partial B_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial l_1} + \frac{1}{2} \xi_1 \mu \frac{\partial w}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{2} \xi_1 \mu y_1 \tag{D.14}$$

überführt hat, ist dies Eigenschaft augenscheinlich.

Jetzt fehlen nur noch zwei Gleichungen, um ein vollständiges System von Differentialgleichungen zu haben. Die letzten beiden Felder sind die Geistfelder. Unter Berücksichtigung der Eigenschaft von Ableitungen mit Grassmann-wertigen Feldern erhalten wir für das Geistfeld c_1 :

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_1 Z &= \hbar^2 \frac{1}{2} \xi_1 \mu \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta_1 \partial \rho_1} - \hbar \frac{\mu^2}{2g} \xi_1 \frac{\partial Z}{\partial \eta_1} + \hbar X_1 \frac{\partial Z}{\partial \rho_1} - \hbar Y_1 \frac{\partial Z}{\partial \tau_1} \\
&\quad + \hbar U_2 \frac{\partial Z}{\partial j_{2,\text{im}}} - \hbar V_2 \frac{\partial Z}{\partial j_{2,\text{re}}} - \frac{\mu}{g} X_1 + \frac{\mu}{g} V_2 \tag{D.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_1 &= \hbar \frac{1}{2} \xi_1 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_1 \partial \rho_1} + \frac{1}{2} \xi_1 \mu \bar{c}_1 x_1 - \frac{\mu^2}{g} \xi_1 \bar{c}_1 \\
&\quad + X_1 \left(x_1 - \frac{\mu}{g} \right) - Y_1 y_1 + U_2 A_{2,\text{im}} - V_2 (A_{2,\text{re}} - \frac{\mu}{g}) = \frac{\partial \Gamma}{\partial c_1}. \tag{D.16}
\end{aligned}$$

Der Finalist in dieser Auflistung von Differentialgleichungen sind die beiden kurzen Gleichungen, die das Antigeistfeld \bar{c}_1 beschreiben:

$$\eta_1 Z = -\hbar^2 \frac{1}{2} \xi_1 \mu \frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \rho_1} + \hbar \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{g} \xi_1 \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_1} \tag{D.17}$$

$$\eta_1 = -\hbar \frac{1}{2} \xi_1 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\eta}_1 \partial \rho_1} - \frac{1}{2} \xi_1 \mu c_1 \left(x_1 - \frac{\mu}{g} \right) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{c}_1}. \tag{D.18}$$

Anhang E

Zur Notation von Ableitungen

Beim Übergang zu den Dyson-Schwinger-Gleichungen der 1 PI Green's-Funktionen war es nicht möglich, die aus den zweiten bzw. dritten Ableitungen in w resultierenden zweiten bzw. dritten Ableitungen in Γ in übersichtlicher Weise anzugeben. Wir wählten daher eine abkürzende Notation. In den Matrizen $[H^{-1}]$ waren die gesuchten zweiten und in den $[T]$ die dritten Ableitungen codiert. Die Schwierigkeit der expliziten Angabe dieser Terme, liegt in den schnell wachsenden Ausdrücken bei der Invertierung von Matrizen mit nichtnumerischen Einträgen. Welche Absicht sich hinter der Notation verbirgt, lässt sich am einfachsten anhand eines Beispiels zeigen.

Seien daher x_1 und x_2 die einzigen dynamischen Felder, ρ_1 und ρ_2 die zugehörigen, äußeren Quellen und sei $w(\rho_1, \rho_2)$ als bekannt vorausgesetzt. Das Funktional $\Gamma(x_1, x_2)$ sei dann wieder via Legendre-Transformation definiert:

$$\Gamma + w - x_1\rho_1 - x_2\rho_2 = 0 \quad \text{mit} \quad x_{1,2} = \frac{\partial w}{\partial \rho_{1,2}} \quad \text{bzw.} \quad \rho_{1,2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{1,2}}.$$

Um die zweiten Ableitungen richtig zu ersetzen, betrachten wir folgendes Gleichungssystem, das sich aus der Differenziation von x_1 nach x_1 und x_2 ergibt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_1} = \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} \quad \text{mit} \quad x_1 = x_1(\rho_1(\hat{x}), \rho_2(\hat{x})) \quad \text{wo} \quad \hat{x} = (x_1, x_2) \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \rho_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir die erste Matrix mit H ,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix},$$

dann gilt es H^{-1} zu bestimmen und nach $\frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_1}$ aufzulösen. Es folgt

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \rho_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2 \partial \rho_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (\text{E.2})$$

Dasselbe Differenzierungsmuster für die Variable x_2 führt insgesamt zu:

$$H H^{-1} = \mathbf{1}_2. \quad (\text{E.3})$$

Wie man der Gleichung (E.2) ansieht, sind wir an den Einträgen von $[H^{-1}]$ interessiert.

Bei den dritten Ableitungen geht man im Prinzip sehr ähnlich vor. Im Allgemeinen werden wir n verschiedene Felder bzw. Quellen in dem Modell vorfinden.

Zweite Ableitungen:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (\text{E.4})$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \rho_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_n} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_1} & \cdots & \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial \rho_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_n \partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho_n} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (\text{E.5})$$

Es gilt also $H H^{-1} = \mathbf{1}_n$.

Dritte Ableitungen:

Wiederholtes Ableiten führt zu:

$$\frac{d}{d x_1} (H H^{-1}) = \frac{d}{d x_1} \mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n = \left(\frac{d H}{d x_1} \right) H^{-1} + H \left(\frac{d H^{-1}}{d x_1} \right) \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{d H}{d x_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial^2 x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x_1 \partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial^3 x_1} & \cdots & \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial^2 x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial^2 x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial^2 x_n \partial x_1} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned}
\frac{dH^{-1}}{dx_1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{dx_1}{dx_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{dx_n}{dx_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \rho_n} \frac{dx_1}{dx_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \rho_n} \frac{dx_n}{dx_1} \end{pmatrix}_{n \times n} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} + \cdots + \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_1} + \cdots + \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_1} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \rho_n} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_n} + \cdots + \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_n} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \rho_n} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_n} + \cdots + \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_n} \right) \end{pmatrix}_{n \times n} \\
&= \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \rho_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial \rho_1^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \rho_1 \partial \rho_n} & \cdots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial \rho_1 \partial \rho_n} \end{pmatrix}_{n \times n} + \cdots + \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \rho_1 \partial \rho_n} & \cdots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial \rho_1 \partial \rho_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \rho_n^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial \rho_n^2} \end{pmatrix}_{n \times n} \\
&= \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} T_1 + \cdots + \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} T_n. \tag{E.8}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow -H^{-1} \left(\frac{dH}{dx_1} \right) H^{-1} = \frac{dH^{-1}}{dx_1} = \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} T_1 + \cdots + \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} T_n. \tag{E.9}$$

Analog für die n anderen Differenzierungen $\frac{d}{dx_j}$, wo $2 \leq j \leq n$, ergibt sich insgesamt

$$- \begin{pmatrix} H^{-1} \left(\frac{dH}{dx_1} \right) H^{-1} \\ \vdots \\ H^{-1} \left(\frac{dH}{dx_n} \right) H^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} \mathbf{1}_n & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \mathbf{1}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x_n} \mathbf{1}_n & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial x_n} \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = H_{\text{big}} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} \tag{E.10}$$

und es muss lediglich H_{big} invertiert werden, um auf die gesuchten T_1, \dots, T_n schließen zu können.

Anhang F

Bemerkungen zur Renormierung

Dieser Anhang dient als Ergänzung der Bemerkungen zur Renormierung. Wir wollen die wesentlichen Schritte und Ergebnisse der Überlegungen in komprimierter Form darstellen. Ausgangspunkt der Renormierungsuntersuchung ist die Symmetrie der Theorie. Die Symmetrie als solche definiert alle erlaubten Modelle. Alle Funktionale, die die Symmetrie des Modells

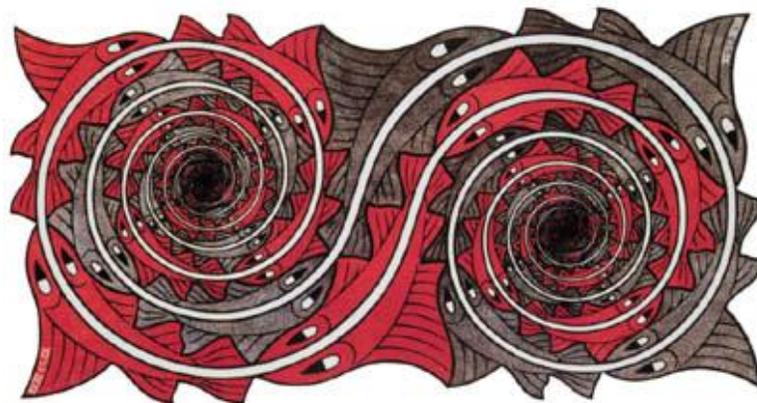


Abbildung F.1: Eine etwas andere Zwei-Punkte-Symmetrie. Maurits Cornelis Escher.

nicht verletzen, sind erlaubte Wirkungen. Die im Kapitel 4 aufgestellte Wirkung ist, wie wir schon bemerkten, nur ein bestimmtes, symmetrieehaltendes Funktional. Um nun aber die allgemeinste, symmetrieehaltende Wirkung zu erlangen, müssen wir den Ansatz der definierenden Symmetrie genau studieren. Bisweil kennen wir die infinitesimalen Transformationen der dynamischen Felder. Im Allgemeinen wird es aber nun so sein, dass diese Felder anders skaliert, d. h. (re-)normiert werden können, ohne die zu Grunde liegende Symmetrie zu beeinträchtigen.

Wir wollen die Renormierungsfunktionen der Felder mit q_j bezeichnen:

$$\begin{aligned}
y_1 &\mapsto q_1 y_1 & y_2 &\mapsto q_2 y_2 \\
x_1 &\mapsto q_4 x_1 & x_2 &\mapsto q_7 y_2 \\
A_{2,\text{re}} &\mapsto q_9 A_{2,\text{re}} & A_{2,\text{im}} &\mapsto q_8 A_{2,\text{im}} \\
c_1 &\mapsto q_3 c_1 & c_2 &\mapsto q_6 c_2.
\end{aligned} \tag{F.1}$$

Bedenken wir, wie sich der Vakkumerwartungswert des unverschobenen Higgs-Feldes ableitet, dann ist es plausibel, dass dieser auch einen Renormierungsfreiheitsgrad bildet:

$$\frac{\mu}{g} \mapsto q_5. \tag{F.2}$$

Der allgemeinste Ansatz für die Variationen ist dann durch

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= -q_3 q_1 c_1 y_1 \\
\delta x_2 &= -q_6 q_2 c_2 y_2 \\
\delta y_1 &= q_3 c_1 (q_4 x_1 - q_5) \\
\delta y_2 &= q_6 c_2 (q_7 x_2 - q_5) \\
\delta A_{2,\text{re}} &= q_8 A_{2,\text{im}} (q_3 c_1 - q_6 c_2) \\
\delta A_{2,\text{im}} &= (q_5 - q_9 A_{2,\text{re}}) (q_3 c_1 - q_6 c_2)
\end{aligned} \tag{F.3}$$

gegeben.

Die symmetriedefinierende Slavnov-Taylor-Identität behält natürlich ihre Struktur und lautet weiterhin:

$$\text{ST}(\Gamma) = \sum_{j=1}^2 \left(\delta x_j \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} + \delta y_j \frac{\partial \Gamma}{\partial y_j} \right) + \delta A_{2,\text{re}} \frac{\partial \Gamma}{\partial A_{2,\text{re}}} + \delta A_{2,\text{im}} \frac{\partial \Gamma}{\partial A_{2,\text{im}}} + B_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{c}_1}. \tag{F.4}$$

Jetzt sind wir soweit, dass wir uns Gedanken über die allgemeinste Lösung dieser Differenzialgleichung machen können. Die einzigen Einschränkungen, die wir an einen Ansatz machen, sind:

- Faddeev-Popov-Neutralität
- Invarianz unter Ladungskonjugation C und
- Beschränkung auf maximale Dimension 4.

Damit erhalten wir einen Ansatz, ansatz₁, der 109 erlaubte Beiträge haben kann:

$$\begin{aligned}
\text{ansatz}_1 = & u_1x_1 + u_2x_2 + u_3A_{2,\text{re}} + \\
& u_4x_1^2 + u_5x_2^2 + u_6A_{2,\text{re}}^2 + u_7x_1x_2 + u_8x_1A_{2,\text{re}} + u_9x_2A_{2,\text{re}} + \\
& u_{10}y_1^2 + u_{11}y_2^2 + u_{12}A_{2,\text{im}}^2 + u_{13}y_1y_2 + u_{14}y_1A_{2,\text{im}} + u_{15}y_2A_{2,\text{im}} + \\
& u_{16}x_1^3 + u_{17}x_1^2x_2 + u_{18}x_1^2A_{2,\text{re}} + u_{19}x_1x_2^2 + u_{20}x_1x_2A_{2,\text{re}} + u_{21}x_1A_{2,\text{re}}^2 + u_{22}x_2^3 + \\
& u_{23}x_2^2A_{2,\text{re}} + u_{24}x_2A_{2,\text{re}}^2 + u_{25}A_{2,\text{re}}^3 + u_{26}x_1y_1^2 + u_{27}x_1y_2^2 + u_{28}x_1A_{2,\text{im}}^2 + u_{29}x_1y_1y_2 \\
& + u_{30}x_1y_1A_{2,\text{im}} + u_{31}x_1y_2A_{2,\text{im}} + u_{32}x_2y_1^2 + u_{33}x_2y_2^2 + u_{34}x_2A_{2,\text{im}}^2 + u_{35}x_2y_1y_2 \\
& + u_{36}x_2y_1A_{2,\text{im}} + u_{37}x_2y_2A_{2,\text{im}} + u_{38}A_{2,\text{re}}y_1^2 + u_{39}A_{2,\text{re}}y_2^2 + u_{40}A_{2,\text{re}}A_{2,\text{im}}^2 + u_{41}A_{2,\text{re}}y_1y_2 \\
& + u_{42}A_{2,\text{re}}y_1A_{2,\text{im}} + u_{43}A_{2,\text{re}}y_2A_{2,\text{im}} + u_{44}x_1^4 + u_{45}x_1^3x_2 + u_{46}x_1^3A_{2,\text{re}} + u_{47}x_1^2x_2^2 \\
& + u_{48}x_1^2x_2A_{2,\text{re}} + u_{49}x_1^2A_{2,\text{re}}^2 + u_{50}x_1x_2^3 + u_{51}x_1x_2^2A_{2,\text{re}} + u_{52}x_1x_2A_{2,\text{re}}^2 + u_{53}x_1A_{2,\text{re}}^3 \\
& + u_{54}x_2^4 + u_{55}x_2^3A_{2,\text{re}} + u_{56}x_2^2A_{2,\text{re}}^2 + u_{57}x_2A_{2,\text{re}}^3 + u_{58}A_{2,\text{re}}^4 + u_{59}x_1^2y_1^2 + u_{60}x_1^2y_2^2 \\
& + u_{61}x_1^2A_{2,\text{im}}^2 + u_{62}x_1^2y_1y_2 + u_{63}x_1^2y_1A_{2,\text{im}} + u_{64}x_1^2y_2A_{2,\text{im}} + u_{65}x_2^2y_1^2 + u_{66}x_2^2y_2^2 \\
& + u_{67}x_2^2A_{2,\text{im}}^2 + u_{68}x_2^2y_1y_2 + u_{69}x_2^2y_1A_{2,\text{im}} + u_{70}x_2^2y_2A_{2,\text{im}} + u_{71}A_{2,\text{re}}^2y_1^2 + u_{72}A_{2,\text{re}}^2y_2^2 \\
& + u_{73}A_{2,\text{re}}^2A_{2,\text{im}}^2 + u_{74}A_{2,\text{re}}^2y_1y_2 + u_{75}A_{2,\text{re}}^2y_1A_{2,\text{im}} + u_{76}A_{2,\text{re}}^2y_2A_{2,\text{im}} + u_{77}x_1x_2y_1^2 \\
& + u_{78}x_1x_2y_2^2 + u_{79}x_1x_2A_{2,\text{im}}^2 + u_{80}x_1x_2y_1y_2 + u_{81}x_1x_2y_1A_{2,\text{im}} + u_{82}x_1x_2y_2A_{2,\text{im}} + \\
& u_{83}x_1A_{2,\text{re}}y_1^2 + u_{84}x_1A_{2,\text{re}}y_2^2 + u_{85}x_1A_{2,\text{re}}A_{2,\text{im}}^2 + u_{86}x_1A_{2,\text{re}}y_1y_2 + u_{87}x_1A_{2,\text{re}}y_1A_{2,\text{im}} \\
& + u_{88}x_1A_{2,\text{re}}y_2A_{2,\text{im}} + u_{89}x_2A_{2,\text{re}}y_1^2 + u_{90}x_2A_{2,\text{re}}y_2^2 + u_{91}x_2A_{2,\text{re}}A_{2,\text{im}}^2 + u_{92}x_2A_{2,\text{re}}y_1y_2 \\
& + u_{93}x_2A_{2,\text{re}}y_1A_{2,\text{im}} + u_{94}x_2A_{2,\text{re}}y_2A_{2,\text{im}} + u_{95}y_1^4 + u_{96}y_1^3y_2 + u_{97}y_1^3A_{2,\text{im}} + u_{98}y_1^2y_2^2 \\
& + u_{99}y_1^2y_2A_{2,\text{im}} + u_{100}y_1^2A_{2,\text{im}}^2 + u_{101}y_1y_2^3 + u_{102}y_1y_2^2A_{2,\text{im}} + u_{103}y_1y_2A_{2,\text{im}}^2 \\
& + u_{104}y_1A_{2,\text{im}}^3 + u_{105}y_2^4 + u_{106}y_2^3A_{2,\text{im}} + u_{107}y_2^2A_{2,\text{im}}^2 + u_{108}y_2A_{2,\text{im}}^3 + u_{109}A_{2,\text{im}}^4. \quad (\text{F.5})
\end{aligned}$$

Es muss

$$\text{ST}(\text{ansatz}_1) = 0 \quad (\text{F.6})$$

gelten. Es ist klar, dass nicht alle Koeffizienten u_j verschwinden können. Eine etwas aufwendigere Rechnung ergibt, dass auf der Seite der u_j neun Koeffizienten unbestimmt bleiben. Wir haben uns bei diesen 9 Größen für

$$u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{67} \quad \text{und} \quad u_{95}$$

entschieden. Zusätzlich stellt sich heraus, dass es zwei Relationen bei den q_j gibt, die zusätzlich erfüllt werden müssen:

$$q_8q_9 = q_2q_7 = q_1q_4. \quad (\text{F.7})$$

Wie man nachrechnen kann, erfüllt der zur Vollständigkeit führende folgende Satz von Koeffizienten die Slavnov-Taylor-Identität:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{2q_5 u_4}{q_4} + \frac{4q_2^2 q_5^3 u_{67}}{q_1^3 q_4^2} - \frac{q_2 q_5 q_8 u_9}{q_1^2 q_4} + \frac{8q_5^3 u_{95}}{q_1^2 q_4}, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10} = \frac{q_1 u_4}{q_4} - \frac{4q_5^2 u_{95}}{q_1 q_4}, \\
u_{11} &= -\frac{q_2 u_2}{2q_5} + \frac{2q_2^2 q_5^2 u_{67}}{q_1^2 q_4^2} - \frac{q_2 q_8 u_9}{2q_1 q_4}, u_{12} = -\frac{q_8 u_3}{2q_5} + \frac{2q_2^2 q_5^2 u_{67}}{q_1^2 q_4^2} - \frac{q_2 q_8 u_9}{2q_1 q_4}, \\
u_{13} &= -\frac{4q_2^2 q_5^2 u_{67}}{q_1^2 q_4^2} + \frac{q_2 q_8 u_9}{q_1 q_4}, u_{14} = \frac{4q_2^2 q_5^2 u_{67}}{q_1^2 q_4^2} - \frac{q_2 q_8 u_9}{q_1 q_4}, u_{15} = -\frac{4q_2^2 q_5^2 u_{67}}{q_1^2 q_4^2} + \frac{q_2 q_8 u_9}{q_1 q_4}, \\
u_{16} &= -\frac{4q_4 q_5 u_{95}}{q_1}, u_{17} = -\frac{2q_2 q_5 u_{67}}{q_1} - \frac{4q_4 u_7}{2q_5} + \frac{q_4 q_8 u_9}{2q_1 q_5}, u_{18} = -\frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1^2 q_8} - \frac{q_4 u_8}{2q_5} + \frac{q_2 q_4 u_9}{2q_1 q_5}, \\
u_{19} &= -\frac{2q_5 u_{67}}{q_1} - \frac{q_1 q_4 u_7}{2q_2 q_5} + \frac{q_4 q_8 u_9}{2q_2 q_5}, u_{20} = \frac{4q_2 q_5 u_{67}}{q_1 q_8} - \frac{q_4 u_9}{q_5}, u_{21} = -\frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1 q_8^2} - \frac{q_1 q_4 u_8}{2q_5 q_8} + \frac{q_2 q_4 u_9}{2q_5 q_8}, \\
u_{22} &= -\frac{q_1^2 q_4^2 u_2}{2q_2^2 q_5^2} - \frac{q_1 q_4 u_5}{q_2 q_5} + \frac{2q_5 u_{67}}{q_2} - \frac{q_1 q_4 q_8 u_9}{2q_2^2 q_5}, u_{23} = -\frac{2q_5 u_{67}}{q_8}, u_{24} = -\frac{2q_2 q_5 u_{67}}{q_8^2}, \\
u_{25} &= -\frac{q_1^2 q_4^2 u_3}{2q_5^2 q_8^2} - \frac{q_1 q_4 u_6}{q_5 q_8} + \frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_8^3} - \frac{q_1 q_2 q_4 u_9}{2q_5 q_8^2}, u_{26} = -\frac{4q_5 u_{95}}{q_1}, \\
u_{27} &= -\frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1^2 q_4} - \frac{q_2 u_7}{2q_5} + \frac{q_2 q_8 u_9}{2q_1 q_5}, u_{28} = -\frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1^2 q_4} - \frac{q_8 u_8}{2q_5} + \frac{q_2 q_8 u_9}{2q_1 q_5}, u_{29} = 0, u_{30} = 0, \\
u_{31} &= \frac{4q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1^2 q_4} - \frac{q_2 q_8 u_9}{q_1 q_5}, u_{32} = -\frac{2q_2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4} - \frac{q_1 u_7}{2q_5} + \frac{q_8 u_9}{2q_5}, \\
u_{33} &= -\frac{q_1 q_4 u_2}{2q_5^2} - \frac{q_2 u_5}{q_5} + \frac{2q_2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4} - \frac{q_8 u_9}{2q_5}, u_{34} = -\frac{2q_2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4}, u_{35} = 0, u_{36} = -\frac{4q_2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4} + \frac{q_8 u_9}{q_5}, \\
u_{37} &= 0, u_{38} = -\frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4 q_8} - \frac{q_1 u_8}{2q_5} + \frac{q_2 u_9}{2q_5}, u_{39} = -\frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4 q_8}, u_{40} = -\frac{q_1 q_4 u_3}{2q_5^2} - \frac{q_8 u_6}{q_5} + \frac{2q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4 q_8} - \frac{q_2 u_9}{2q_5}, \\
u_{41} &= \frac{4q_2^2 q_5 u_{67}}{q_1 q_4 q_8} - \frac{q_2 u_9}{q_5}, u_{42} = 0, u_{43} = 0, u_{44} = \frac{q_4^2 u_{95}}{q_1^2}, u_{45} = 0, u_{46} = 0, u_{47} = \frac{q_4 u_{67}}{q_1} + \frac{q_1 q_4^2 u_7}{4q_2 q_5^2} - \frac{q_4^2 q_8 u_9}{4q_2 q_5^2}, \\
u_{48} &= 0, u_{49} = \frac{q_2^2 q_4 u_{67}}{q_1 q_8^2} + \frac{q_1 q_4^2 u_8}{4q_5^2 q_8} - \frac{q_2 q_4^2 u_9}{4q_5^2 q_8}, u_{50} = 0, u_{51} = 0, u_{52} = 0, u_{53} = 0, \\
u_{54} &= \frac{q_1^3 q_4^3 u_2}{8q_2^3 q_5^3} + \frac{q_1^2 q_4^2 u_5}{4q_2^2 q_5^2} - \frac{q_1 q_4 u_{67}}{2q_2^2} + \frac{q_1^2 q_4^2 q_8 u_9}{8q_2^3 q_5^2}, u_{55} = 0, u_{56} = \frac{q_1 q_4 u_{67}}{q_8^2}, u_{57} = 0, \\
u_{58} &= \frac{q_1^3 q_4^3 u_3}{8q_5^3 q_8^3} + \frac{q_1^2 q_4^2 u_6}{4q_5^2 q_8^2} - \frac{q_1 q_2^2 q_4 u_{67}}{2q_8^4} + \frac{q_1^2 q_2 q_4^2 u_9}{8q_5^2 q_8^3}, u_{59} = \frac{2q_4 u_{95}}{q_1}, u_{60} = \frac{q_2^2 u_{67}}{q_1^2} + \frac{q_2 q_4 u_7}{4q_5^2} - \frac{q_2 q_4 q_8 u_9}{4q_1 q_5^2}, \\
u_{61} &= \frac{q_2^2 u_{67}}{q_1^2} + \frac{q_4 q_8 u_8}{4q_5^2} - \frac{q_2 q_4 q_8 u_9}{4q_1 q_5^2}, u_{62} = 0, u_{63} = 0, u_{64} = 0, u_{65} = u_{67} + \frac{q_1^2 q_4 u_7}{4q_2 q_5^2} - \frac{q_1 q_4 q_8 u_9}{4q_2 q_5^2}, \\
u_{66} &= \frac{q_1^2 q_4^2 u_2}{4q_2 q_5^3} + \frac{q_1 q_4 u_5}{2q_5^2} - u_{67} + \frac{q_1 q_4 q_8 u_9}{4q_2 q_5^2}, u_{67}, u_{68} = 0, u_{69} = 0, u_{70} = 0, u_{71} = \frac{q_2^2 u_{67}}{q_8^2} + \frac{q_1^2 q_4 u_8}{4q_5^2 q_8} - \frac{q_1 q_2 q_4 u_9}{4q_5^2 q_8}, \\
u_{72} &= \frac{q_2^2 u_{67}}{q_8^2}, u_{73} = \frac{q_1^2 q_4^2 u_3}{4q_5^3 q_8} + \frac{q_1 q_4 u_6}{2q_5^2} - \frac{q_2^2 u_{67}}{q_8^2} + \frac{q_1 q_2 q_4 u_9}{4q_5^2 q_8}, u_{74} = 0, u_{75} = 0, u_{76} = 0, u_{77} = 0, u_{78} = 0, \\
u_{79} &= 0, u_{80} = 0, u_{81} = 0, u_{82} = 0, u_{83} = 0, u_{84} = 0, u_{85} = 0, u_{86} = 0, u_{87} = 0, u_{88} = 0, u_{89} = 0, \\
u_{90} &= 0, u_{91} = 0, u_{92} = 0, u_{93} = 0, u_{94} = 0, u_{95}, u_{96} = 0, u_{97} = 0, u_{98} = \frac{q_2^2 u_{67}}{q_1 q_4} + \frac{q_1 q_2 u_7}{4q_5^2} - \frac{q_2 q_8 u_9}{4q_5^2}, \\
u_{99} &= 0, u_{100} = \frac{q_2^2 u_{67}}{q_1 q_4} + \frac{q_1 q_8 u_8}{4q_5^2} - \frac{q_2 q_8 u_9}{4q_5^2}, u_{101} = 0, u_{102} = 0, u_{103} = 0, u_{104} = 0, \\
u_{105} &= \frac{q_1 q_2 q_4 u_2}{8q_5^3} + \frac{q_2^2 u_5}{4q_5^2} - \frac{q_2^2 u_{67}}{2q_1 q_4} + \frac{q_2 q_8 u_9}{8q_5^2}, u_{106} = 0, u_{107} = \frac{q_2^2 u_{67}}{q_1 q_4}, u_{108} = 0, \\
u_{109} &= \frac{q_1 q_4 q_8 u_3}{8q_5^3} + \frac{q_8^2 u_6}{4q_5^2} - \frac{q_2^2 u_{67}}{2q_1 q_4} + \frac{q_2 q_8 u_9}{8q_5^2}.
\end{aligned}$$

Der entsprechende Ansatz für den Faddeev-Popov- und den Eichfixierungsterm lautet:

$$\begin{aligned}
\text{ansatz}_2 &= \frac{1}{4} B_1^2 + \frac{1}{2} \xi_1 \mu B_1 y_1 + u_{110} c_1 \bar{c}_1 + u_{111} x_1 c_1 \bar{c}_1 + u_{112} x_2 c_1 \bar{c}_1 + u_{113} A_{2,\text{re}} c_1 \bar{c}_1 \\
&\quad + c_1 \bar{c}_1 \left(u_{114} x_1^2 + u_{115} x_2^2 + u_{116} A_{2,\text{re}}^2 + u_{117} x_1 x_2 + u_{118} x_1 A_{2,\text{re}} + u_{119} x_2 A_{2,\text{re}} \right. \\
&\quad \left. + u_{120} y_1^2 + u_{121} y_2^2 + u_{122} A_{2,\text{im}}^2 + u_{123} y_1 y_2 + u_{124} y_1 A_{2,\text{im}} + u_{125} y_2 A_{2,\text{im}} \right). \quad (\text{F.8})
\end{aligned}$$

Hier sind bis auf

$$u_{110} = -\frac{1}{2} q_3 q_5 \mu \xi_1 \quad \text{und} \quad u_{111} = \frac{1}{2} q_3 q_4 \mu \xi_1 \quad (\text{F.9})$$

alle $u_j \equiv 0$.

Der Ansatz, der die Kopplung an äußere Felder beschreibt, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu

$$S_{\text{ext.Felder}} = X_1 \delta y_1 + Y_1 \delta x_1 + X_2 \delta y_1 + Y_2 \delta x_2 + V_2 \delta A_{2,\text{im}} + U_2 \delta A_{2,\text{re}} \quad (\text{F.10})$$

gewählt werden.

Beachtet man jetzt noch, dass das Geistfeld c_2 nur indirekt in der zu renormierenden Wirkung auftritt und von daher renormiert werden kann, aber nicht werden muss, setzen wir $q_6 \equiv 1$.

Insgesamt bleiben also 16 u_i und q_j unbestimmt und da für jede beliebige Wahl dieser restlichen Parameter die Slavnov-Taylor-Identität erfüllt ist, kann man nun folgenden Trick anwenden: Man entwickelt einfach die u_i und q_j in einer \hbar -Reihe

$$u_i = \sum_k u_i^{(k)} \hbar^k \quad \text{und} \quad q_i = \sum_k q_i^{(k)} \hbar^k. \quad (\text{F.11})$$

Um die 16 Parameter in jeder Ordnung festzulegen, müssen 16 entsprechende Bedingungen gestellt werden. In nullter Ordnung werden die $u_j^{(0)}$ und $q_i^{(0)}$ gerade so eingerichtet, dass sie die hergeleitete Wirkung ergeben. Im Sinne der \hbar -Entwicklung, die bei den Dyson-Schwinger-Gleichungen angewendet wird, ist es nun möglich, in jeder beliebigen Ordnung entsprechende „Korrekturpolynome“ hinzu zu addieren, die mit den oben erwähnten Bedingungen verträglich sind. Die 16 Bedingungen sind also Renormierungsbedingungen, denn sie korrigieren das, was durch das naive Lösen der Dyson-Schwinger-Gleichungen verändert wird. Die hier gewählten Bedingungen sind

$$\begin{aligned} \Gamma_{x_1} &= -\frac{2q_5 u_4}{q_4} + \frac{4q_2^2 q_5^3 u_{67}}{q_1^3 q_4^2} - \frac{q_2 q_5 q_8 u_9}{q_1^2 q_4} + \frac{8q_5^3 u_{95}}{q_1^2 q_4}, \\ \Gamma_{x_2} &= u_2, \quad \Gamma_{A_{2,\text{re}}} = u_3, \quad \Gamma_{x_1^2} = 2u_4, \quad \Gamma_{x_1 x_2} = u_7, \quad \Gamma_{x_2^2} = 2u_5, \\ \Gamma_{y_2^2} &= -\frac{q_2 u_2}{q_5} + 4 \frac{q_2^2 q_5^2 u_{67}}{q_1^2 q_4^2} - \frac{q_2 q_8 u_9}{q_1 q_4}, \\ \Gamma_{A_{2,\text{re}}^2} &= 2u_6, \quad \Gamma_{x_1 A_{2,\text{re}}} = u_8, \quad \Gamma_{c_1 V_2} = q_3 q_5, \quad \Gamma_{c_2 V_2} = -q_5 q_6, \quad \Gamma_{x_1^4} = 24 \frac{q_4^2 u_{95}}{q_1^2}, \\ \Gamma_{x_2^4} &= \frac{3q_1^3 q_4^3 u_2}{q_2^3 q_5^3} - \frac{12q_1 q_4 u_{67}}{q_2^2} + \frac{6q_1^2 q_4^2 u_5}{q_2^2 q_5^2} + \frac{3q_1^2 q_4^2 q_8 u_9}{q_2^3 q_5^2}, \\ \Gamma_{y_1^4} &= 24u_{95}, \\ \Gamma_{A_{2,\text{re}}^4} &= \frac{3q_1^3 q_4^3 u_3}{q_5^3 q_8^3} - \frac{12q_1 q_4 q_2^2 u_{67}}{q_8^4} + \frac{6q_1^2 q_4^2 u_6}{q_5^2 q_8^2} + \frac{3q_1^2 q_4^2 q_2 u_9}{q_5^2 q_8^3}, \\ \Gamma_{x_2^2 A_{2,\text{im}}^2} &= 4u_{67}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Neben trivialen Countertermbestimmungen, wie z. B. $\Gamma_{x_2}^{(1)} = u_2^{(1)}$ ist es für so manch andere Bedingung für höhere Ordnungen mit sehr viel mehr Aufwand verbunden. Betrachtet man den in $\Gamma_{x_1}^{(1)}$ vorkommenden Term

$$\left(\frac{q_5 u_4}{q_4} \right)^{(1)} = \frac{q_5^{(1)} u_4^{(0)} q_4^{(0)} + q_5^{(0)} u_4^{(1)} q_4^{(0)} + q_5^{(0)} u_4^{(0)} q_4^{(1)}}{q_4^{(0)2}}, \quad (\text{F.13})$$

dann überzeugt man sich sehr leicht, dass man die Aufgabe, den entsprechenden Counterterm herauszufinden, besser einem Computer überlässt.

Anhang G

Programme

In Mathematica ist es nicht vorgesehen, mit Grassmann-wertigen Variablen rechnen zu können. Dazu ist es notwendig, dem Programm zusätzliche Rechenregeln beizubringen [27], [7]. Im nun folgenden Modul wird eine Formen-Algebra definiert, die herangezogen werden kann, um auch nach Grassmann-Variablen zu differenzieren:

```
Off[General::"spell", General::"spell1", Remove::"rmnsm",
     ParametricPlot::"pptr", ParametricPlot3D::"pplr"];
ClearAll["Global'*"]; Remove["Global'*"]; Unprotect[In, Out]; Clear[In, Out];
Protect[In, Out]; $ Line = 0;

FormDegree[x_Plus] := FormDegree[x[[1]]];
FormDegree[x_Times] := Plus@@FormDegree/@List@@x;
FormDegree[x_Wedge] := Plus@@FormDegree/@List@@x;
FormDegree[d[x_]] := FormDegree[d[x]] = 1 + FormDegree[x];
FormDegree[x_] := 0;

Forms[i_] = {};
AllScalForms = {};

HeadList = {};
OneIdentHeadList = {d, Symbol, Times, Plus, Power};

DeclareForms[xl_] :=
Module[{h, x = {{xl}}}, While[Head[x[[1]][[1]]] === List, x = x[[1]];
  Do[xi = x[[i]]; rxi = Rest[xi]; Forms[xi[[1]]] = Union[Forms[xi[[1]]], rxi];
  AllScalForms = Union[AllScalForms, rxi];
  Do[h = Head[rxi[[j]]];
```

```

If[h===Symbol,FormDegree[rxl[[j]]]=xi[[1]],FormDegree[_h]=xi[[1]],
  {j,Length[rxl]},{i,Length[x]}];
HeadList=Complement[Union[Head/@AllScalForms},{Symbol}];
OneIdentHeadList=Union[HeadList,{d,t,Symbol,Times,Plus,Power}];
];

BasicFormQ[x_]:=Head[x]==d||MemberQ[AllScalForms,x]||MemberQ[HeadList,Head[x]]

SetAttributes[d,{Listable}];d[x_Plus]:=d/@x;
d[x_^y_]:=d[x]^y+(-1)^FormDegree[x]x^d[Wedge[y]];
d[x_*y_]:=d[x]^y+(-1)^FormDegree[x]x^d[y];
d[x_/;NumericQ[x]||Head[x]==d]:=0;d[Power[y_,n_]]:=n y^(n-1)
d[y]+y^n Log[y]d[n];
d[Wedge[x_/;MemberQ[OneIdentHeadList,Head[x]]]]:=d[x];
d[g_[y_]]:=Sum[(Derivative[Sequence@@RotateRight[Append[
  Table[0,{Length[{y}]-1],1],i]]g[y])d[{y}[[i]]],{i,Length[{y}]}]//;
  FormDegree[g[y]]===0&&!NumberQ[g[y] [[1]]];

Default[Wedge]:=1;SetAttributes[Wedge,{Flat,OneIdentity}];
Wedge[x+y_,z_]:=Wedge[x,z]+Wedge[y,z];
Wedge[x_,y+z_]:=Wedge[x,y]+Wedge[x,z];Wedge[x_,_,0,y_]=0;
Wedge[u_,Times[x_,y_]]:=Times[x,Wedge[u,y]]//NumericQ[x]||FormDegree[x]==0;
Wedge[Times[x_,y_],z_]:=Times[x,Wedge[y,z]]//NumericQ[x]||FormDegree[x]==0;
x_^n_.^y_:=x^n*y//FormDegree[x]==0;
y_^x_.^n_:=x^n*y//FormDegree[x]==0;
Wedge[x_,y_,_,x_]:=0//OddQ[FormDegree[x]];
x_^y_:=(-1)^(FormDegree[x]*FormDegree[y])*y^x//
  BasicFormQ[x]&&BasicFormQ[y]&&(FormDegree[x]>FormDegree[y]||
  (FormDegree[x]==FormDegree[y]&&!OrderedQ[x,y]));

simpRules = {X_.Cos[z_]^2+X_.Sin[z_]^2 -> X};
varList = {};

diff[x+y_,z_]:=diff[x,z]+diff[y,z];
diff[x_*y_,z_]:=x*diff[y,z]//NumericQ[x]||FormDegree[x]==0;
diff[HoldPattern[x_.^y_.^z_.],y_]:=(-1)^FormDegree[x]x^z;
diff[x_Wedge,w_]:=0//!MemberQ[List@@x,w];
diff[x_d,y_d]:=If[x===y,1,0];diff[x_,y_]:=0//FormDegree[x]==0;

coll[x_]:=Collect[x,_Wedge,Factor];

```

```

SetAttributes[reWrite,{Listable}];
reWrite[x_]:=
  If[FormDegree[x]>0,
    Collect[coll[x]//.simpRules,{_Wedge,u_/;BasicFormQ[u]},bestFacRul],
    bestFacRul[x//.simpRules]];

```

```
bestFacRul[x_] := If[varList==={},minFacRul[x],varFacRul[x]];
```

```
minFacRul[x_] := Factor[Expand[x] /. simpRules] /. simpRules;
```

```
varFacRul[x_] := Collect[Expand[x] /. simpRules, varList, Factor] /. simpRules;
```

Wir wollen die Regeln in ihrer kompakten Notation belassen und nicht durch eine Kommentierung dehnen. Vielmehr wollen wir die meist selbsterklärende Wirkung der Anweisungen und Befehle anhand von Beispielen demonstrieren:

Beispiel 1: Elementare \wedge -, d- und diff-Operationen

```
Aform = A1 d[x] + A2 d[y] + A3 d[z];
```

```
Bform = B1 d[x] + B2 d[y] + B3 d[z];
```

```
Aform + Bform
```

```
A1 d[x] + B1 d[x] + A2 d[y] + B2 d[y] + A3 d[z] + B3 d[z]
```

```
reWrite[%]
```

```
(A1 + B1) d[x] + (A2 + B2) d[y] + (A3 + B3) d[z]
```

```
Aform^Bform
```

```
-A2 B1 d[x]^d[y] + A1 B2 d[x]^d[y] - A3 B1 d[x]^d[z] +
```

```
A1 B3 d[x]^d[z] - A3 B2 d[y]^d[z] + A2 B3 d[y]^d[z]
```

```
reWrite[%]
```

```
(-A2 B1 + A1 B2) d[x]^d[y] + (-A3 B1 + A1 B3) d[x]^d[z] + (-A3 B2 + A2 B3) d[y]^d[z]
```

```
d[Aform]
```

```
d[A1]^d[x] + d[A2]^d[y] + d[A3]^d[z]
```

```
A1 = a[x, y, z]; A2 = b[x, y, z]; A3 = c[x, y, z];
reWrite[d[Aform]]
```

```
d[y]^d[z] (-b^(0,0,1)[x,y,z]+c^(0,1,0)[x,y,z])+
d[x]^d[y] (-a^(0,1,0)[x,y,z]+b^(1,0,0)[x,y,z])+
d[x]^d[z] (-a^(0,0,1)[x,y,z]+c^(1,0,0)[x,y,z])
```

```
Cform=C1 d[x]^d[y]^d[z];
Dform=D1 d[x]^d[z];
```

```
diff[Cform+Dform,d[x]]
```

```
C1 d[y]^d[z]+D1 d[z]
```

```
diff[Cform+Dform,d[y]]
```

```
-C1 d[x]^d[z]
```

Beispiel 2: Der Umgang mit DeclareForms

```
DeclareForms[1, q[_]]
```

Alle $q[i]$ werden jetzt als Einsformen behandelt.

```
aform = Sum[a[i] q[i], {i, 0, 3}]
```

```
a[0] q[0] + a[1] q[1] + a[2] q[2] + a[3] q[3]
```

```
bform = Sum[b[i] q[i], {i, 0, 3}]
```

```
b[0] q[0] + b[1] q[1] + b[2] q[2] + b[3] q[3]
```

aform + bform

$$a[0] q[0] + b[0] q[0] + a[1] q[1] + b[1] q[1] + a[2] q[2] + b[2] q[2] + a[3] q[3] + b[3] q[3]$$

reWrite[%]

$$(a[0] + b[0]) q[0] + (a[1] + b[1]) q[1] + (a[2] + b[2]) q[2] + (a[3] + b[3]) q[3]$$

aform^bform

$$-a[1] b[0] q[0] \wedge q[1] + a[0] b[1] q[0] \wedge q[1] - a[2] b[0] q[0] \wedge q[2] + a[0] b[2] q[0] \wedge q[2] - a[3] b[0] q[0] \wedge q[3] + a[0] b[3] q[0] \wedge q[3] - a[2] b[1] q[1] \wedge q[2] + a[1] b[2] q[1] \wedge q[2] - a[3] b[1] q[1] \wedge q[3] + a[1] b[3] q[1] \wedge q[3] - a[3] b[2] q[2] \wedge q[3] + a[2] b[3] q[2] \wedge q[3]$$

reWrite[%]

$$(-a[1] b[0] + a[0] b[1]) q[0] \wedge q[1] + (-a[2] b[0] + a[0] b[2]) q[0] \wedge q[2] + (-a[3] b[0] + a[0] b[3]) q[0] \wedge q[3] + (-a[2] b[1] + a[1] b[2]) q[1] \wedge q[2] + (-a[3] b[1] + a[1] b[3]) q[1] \wedge q[3] + (-a[3] b[2] + a[2] b[3]) q[2] \wedge q[3]$$

FormDegree[%]

2

d[aform]

$$a[0] d[q[0]] + a[1] d[q[1]] + a[2] d[q[2]] + a[3] d[q[3]] + d[a[0]] \wedge q[0] + d[a[1]] \wedge q[1] + d[a[2]] \wedge q[2] + d[a[3]] \wedge q[3]$$

Man kann beliebige, aber konsistente, Definitionen für $d[q[i]]$ verwenden:

$$d[q[0]] = 0; d[q[1]] = q[2] \wedge q[3]; d[q[2]] = q[3] \wedge q[1]; d[q[3]] = q[1] \wedge q[2]; \%$$

```
d[a[0]]^q[0] + d[a[1]]^q[1] + d[a[2]]^q[2] +
  d[a[3]]^q[3] + a[3] q[1]^q[2] - a[2] q[1]^q[3] + a[1] q[2]^q[3]
```

```
d[%]
```

```
0
```

Viele der Resultate der Arbeit wurden mit Mathematica-Routinen erzeugt. Der Algorithmus besteht aus den Definitionen der zugrundeliegenden Größen, wie z. B. dem Produkt auf der Algebra, diversen Matrizen, usw., die auf die üblichen Pakete von Mathematica zurückgreifen. Bei der Berechnung von höheren Schleifenbeiträgen der Dyson-Schwinger-Gleichung stößt man mit Mathematica an Grenzen. Dies war der Anlass, sich auch mit einer weiteren Mainzer Entwicklung zu beschäftigen: GiNaC. GiNaC is not a CAS. GiNaC wurde zur Entwicklung von integrierten Systemen, die neben symbolische Manipulation auch rechenintensive numerische Anwendungen, graphische Anbindungen beinhalten, konzipiert. Die Transparenz von GiNaC wird, im Gegensatz zu handelsüblichen Systemen, durch die GNU general public license (GPL) sichergestellt. Das Design von GiNaC ist gewissermaßen revolutionär, in dem Sinn, dass es auf eine gegebene Sprache (C++) zurückgreift und durch algebraische Fähigkeiten erweitert wird. Dadurch ergibt sich unter anderem die Möglichkeit, das Invertieren von symbolischen Matrizen, die einen hohen Rang besitzen, mit unterschiedlichen Routinen durchzuführen. Außerdem wurde durch ein effizientes Speichermanagement die Performance des Codes bemerkbar positiv beeinflusst. Wir verzichten auf die seitenfüllende Wiedergabe des Quellcodes und verweisen auf die beiliegende CD oder den interaktiven Aufruf einer Webseite mit den angesprochenen Programmen:

Programme. <http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/~poeselt/math.html>

Literaturverzeichnis

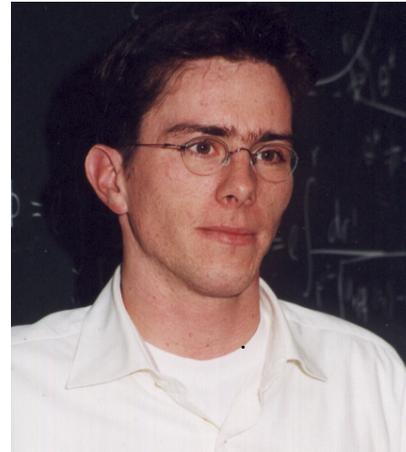
- [1] V. Ambarzumian, D. Iwanenko, Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons, *Z. Phys.* **64** (1930) 563
- [2] C. Aneziris, Topology and Statistics in Zero Dimensions, *Int. J. of Theor. Physics*, Vol. 33, No. 3 (1994) 535-552
- [3] E. Atzmon, Distances on a one-dimensional lattice from noncommutative geometry, *hep-th/9507002v2*
- [4] C. Bauer, A. Frink, R. Kreckel, GiNaC, www.ginac.de
- [5] L. M. A. Bettencourt, S. Habib, G. Lythe, Controlling One-Dimensional Langevin Dynamics on the Lattice, *hep-lat/9903007*
- [6] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer und R. D. Sorkin, Space-time as a causal set, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 521
- [7] S. Bonanos, Grassmannalgebren in Mathematica, <http://www.demokritos.gr/people/sbonanos.html>
- [8] P. Cvitanovic, B. Lautrup, R. B. Pearson, Number and weights of Feynman diagrams, *Phys. Rev D* **18**, No. 6 (1978) 1939-1949
- [9] A. Connes, Noncommutative Geometry. Academic Press, San Diego, 1994
- [10] A. Connes, Essay on physics and non-commutative geometry *The Interface of Mathematics and Particle Physics* ed D. Quillen, G. Segal und S. Tsou (Oxford: Oxford University Press, 1990), S. 9
- [11] R. Coquereaux, G. Esposito-Farèse und F. Scheck, Non Commutative Geometry and Graded Algebras in Electroweak Interactions, *J. of Mod. Phys. A* **7**, No. 26 (1992) 6555-6593
- [12] J. Dai, X-C Song, Dirac-Connes Operator on Discrete Abelian Groups and Lattices, *hep-th/0101111v2*

- [13] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *Discrete Differential Calculus, Graphs, Topologies and Gauge Theory*, *hep-th/9404112*
- [14] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, Differential Calculus and Discrete Structures, *hep-th/9401150*
- [15] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, Differential calculus and gauge theory on finite sets, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) 3159-3178
- [16] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, Quantum mechanics on a lattice and q -deformations, *Phys. Lett B* **295** (1992) 242-248
- [17] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, T. Striker, From continuum to lattice theory via deformation of the differential calculus, *Phys. Lett. B* **300** (1993) 141-144
- [18] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, T. Striker, Umbral Calculus, Discretization, and Quantum Mechanics on a Lattice, *hep-th/9509014*
- [19] D. Eppstein, www.ics.uci.edu/~eppstein/, The Geometry Junkyard
- [20] L. Euler, *Elementa doctrinae solidorum. — Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, *Novi comment acad. sc. imp. Petropol.*, 4, 1752-3, 109-140-160.
- [21] R. P. Feynman, Simulating physics with computers, *Int. J. Theor. Phys.* **21** (1982) 467
- [22] D. Finkelstein, Space-time code, *Phys. Rev.* **184** (1969) 1261-1271
- [23] M. Hale, Path Integral Quantisation of Finite Noncommutative Geometries, *hep-th/0007005v2*
- [24] M. P. Gracia-Bondia, J. C. Varilly, H. Figueroa, Elements of Noncommutative Geometry, *Birkhäuser Advanced Texts*, 2001
- [25] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), S. 585
- [26] R. C. M. Häußling, Quantum field theory on a discrete space and noncommutative geometry, *hep-th/0109161*
- [27] J. W. Helton, M. Stankus und R. L. Miller, *NCAAlgebra*, <http://math.ucsd.edu/~ncalg>
- [28] P. W. Higgs, Broken Symmetries, massless Particles and Gauge Fields, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132-133

- [29] Liangzhong Hu, $U(1)$ gauge theory over discrete space-time and phase transitions, *hep-th/0001148*
- [30] H. Hüffel, Quantizing Yang-Mills Theory on a 2-Point Space, *hep-th/0109134v1*
- [31] C. Itzykson, J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw, 1980
- [32] T. Kugo, Eichtheorie, *Springer-Verlag*, 1997
- [33] G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries*, LNP m51, Springer-Verlag, 1997
- [34] C.-Y. Lee und D. S. Hwang, BRST Quantization of Gauge Theory in Noncommutative Geometry: Matrix Derivative Approach, *hep-th/9512215*, 1995
- [35] A. M. Legendre, *Elements de geometrie*, Paris, 1794
- [36] A. P. C. Malbouisson, R. Portugal, N. F. Svaiter, A Non-perturbative Solution of the Zero-Dimensional $\lambda\varphi^4$ Field Theory, *hep-th/9909175*
- [37] J. Malkevitch, *The first proof of Euler's formula*, Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Heft 165, Teil III (Coxeter Festschrift), 77-82.
- [38] I. Muntvay, G. Münster, Quantum Fields on the lattice. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1994
- [39] S. Majid, T. Schücker, $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ Lattice as a Connes-Lott-Quantum Group Model, *hep-th/0101217*
- [40] T. Nakajima, The Continuum Limit of One-Dimensional Quantum Regge Calculus with Massive Bosons, *hep-th/9602002*
- [41] N. A. Papadopoulos, J. Plass, F. Scheck, Models of electroweak interactions in non-commutative geometry: a comparison, *Phys. Lett. B* **324** (1994) 380-386
- [42] M. Peskin, D. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley, 1995
- [43] C. Rebbi, Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulations, *World Scientific*, 1983
- [44] H. J. Rothe, Lattice Gauge Theories, *World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 59*, *World Scientific*, 1997
- [45] H. S. Snyder, Quantized Space-Time, *Phys. Rev.* **71** (1947) 38-42
- [46] TESLA, Technicl Design Report, <http://www.desy.de/~lcnotes/tdr>

- [47] H. Yamamoto, Quantum field theory on discrete spacetime, *Phys. Rev.* **30** (1984) 1727;
Quantum field theory on discrete spacetime II, *Phys. Rev.* **32** (1985) 2659
H. Yamamoto, A. Hayashi, T. Hashimoto und M. Horibe, Towards a canonical formalism
of field theory on discrete spacetime *Preprint* (Fukui, Japan)
- [48] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, *International Series of
Monographs on Physics 85, Oxford Science Publications*, 1994

Lebenslauf



Name: Christian Pösel
Dienstliche Adresse: Institut für Physik
Staudingerweg 7
Johannes Gutenberg-Universität
D-55099 Mainz
Geburtsdatum: 22.09.1972
Geburtsort: Flörsheim
Eltern: Armin Pösel
Waltraud Pösel, geb. Kroneder
Geschwister: Stefan Pösel
Familienstand: ledig
Nationalität: deutsch

10.93-03.99 Studium der Physik an der Johannes Gutenberg-Universität, Mainz
03.99 Diplom in Physik
Betreuer: Prof. Dr. F. Scheck
04.99 Beginn der Promotion an der Johannes Gutenberg-Universität, Mainz
06.02 Doktorprüfung
Doktorvater: Prof. Dr. F. Scheck