

Die Faktorisierungsmethode für die elektrische Impedanztomographie im Halbraum

Dissertation zur Erlangung des Grades
"Doktor der Naturwissenschaften"

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Birgit Schappel

geboren in Frankfurt am Main

Mainz 2005

Datum der mündlichen Prüfung: 8. April 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Gewichtete Sobolev-Räume	5
2.1	Bezeichnungen und erste Eigenschaften	5
2.2	Kompakte Einbettungen	8
2.3	Spursätze	10
2.4	Poincaré-Ungleichungen	12
2.5	Relationen zwischen den gewichteten Sobolev-Räumen $H^{1,\alpha}$ und $H_0^{1,\alpha}$. .	14
2.6	Greensche Formel	20
3	Das direkte Problem	23
3.1	Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen	23
3.2	Klassische Lösungen der Laplace-Gleichung im Halbraum	27
3.2.1	Der dreidimensionale Fall	27
3.2.2	Der zweidimensionale Fall	35
3.3	Diffraktionsprobleme	43
3.3.1	Ein Lösungsverfahren für Diffraktionsprobleme mit stückweise konstanter Leitfähigkeit	49
3.3.2	Isolatoren	57
4	Charakterisierung von Einschlüssen	59
4.1	Die Neumann-Dirichlet-Abbildung	59
4.2	Die Faktorisierung von $\Lambda - \tilde{\Lambda}$	62
4.2.1	Mehrere Einschlüsse und Isolatoren	72
4.3	Charakterisierung des Bildraumes im Fall beschränkter Meßbereiche . . .	73
4.3.1	Der Bildraum von $ \tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda} ^{1/2}$	74
4.4	Der Bildraum von L	76
4.4.1	Der zweidimensionale Fall	76
4.4.2	Der dreidimensionale Fall	78
4.5	Nichtkonstante Leitfähigkeiten	80
5	Numerische Ergebnisse	81
5.1	Implementierung	81
5.1.1	Das Vorwärtsproblem	81
5.1.2	Das inverse Problem	83
5.2	Rekonstruktionen im zweidimensionalen Fall	88
5.3	Rekonstruktionen im dreidimensionalen Fall	92

A Einige Beweise zu den Eigenschaften gewichteter Sobolev-Räume	101
Literatur	119

1 Einleitung

Im Mittelpunkt der elektrischen Impedanztomographie (EIT) steht die Frage, ob man die elektrische Leitfähigkeit im Inneren eines Gebietes dadurch rekonstruieren kann, daß man Strom an der Oberfläche des Gebietes einspeist und die resultierenden Spannungen ebenfalls an der Oberfläche mißt. Die mathematische Formulierung des Problems geht auf Caldéron [17] zurück, der für ein beschränktes Gebiet Ω das folgende inverse Randwertproblem betrachtet: Ist die ortsabhängige Leitfähigkeit σ in der elliptischen Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.1)$$

durch die Neumann- und die Dirichlet-Randwerte aller Lösungen u - d.h. aller stationären elektrischen Potentiale - auf dem Rand $\partial\Omega$ eindeutig bestimmt, und wie kann man gegebenenfalls den Koeffizienten aus diesen Daten bestimmen? Im Gegensatz zum inversen Problem bezeichnet man in diesem Zusammenhang die Aufgabe, zu gegebenen Neumann-Daten und bei bekannter Leitfähigkeit das Potential u zu bestimmen, als direktes Problem oder auch als Vorwärtsproblem. Das inverse Problem ist nichtlinear und schlecht gestellt, d.h. die Rekonstruktionen der Leitfähigkeit sind sehr empfindlich gegenüber Störungen in den gemessenen Daten.

Anwendungsmöglichkeiten für die elektrische Impedanztomographie wurden zunächst vor allem in der Medizin gesehen [10]. In der Zwischenzeit sind zahlreiche weitere Anwendungsmöglichkeiten unter anderem im Bereich der nichtdestruktiven Prüfmethode und auch der Geophysik (siehe z.B. [41] und die dort zitierte Literatur) hinzugekommen. Die mathematische Beschreibung von geoelektrischen Anwendungen der Impedanztomographie unterscheidet sich von der durch Caldéron betrachteten vor allem darin, daß man nicht mehr auf der gesamten Oberfläche eines Gebietes Randdaten zur Verfügung hat und der Meßbereich im Vergleich zur Oberfläche des Gebietes sehr klein ist. Zudem kann man das Gebiet Ω als unbeschränkt annehmen. Auch das inverse Problem in der Geoelektrik ist schlecht gestellt.

Viele Arbeiten haben sich mit der Frage beschäftigt, ob und wie man für beschränkte Gebiete Ω die Leitfähigkeit aus den Neumann- und Dirichlet-Daten rekonstruieren kann. Zum einen sei hier stellvertretend das Buch von Isakov [34] genannt, das einen umfassenden Überblick über Eindeutigkeits- und Stabilitätsaussagen auch für weitere verwandte Probleme bietet. Zudem wird in diesem Buch kurz auf einige numerische Methoden zur Rekonstruktion der Leitfähigkeit eingegangen. Zum anderen verweisen wir auf den Übersichtsartikel von Borcea [5] und das zugehörige Addendum [6] mit einer aktuellen Zusammenfassung der bekannten Eindeutigkeitsaussagen und Rekonstruktionsverfahren für die elektrische Impedanztomographie. Für die Identifizierbarkeit im Falle unbeschränkter Gebiete sind vor allem zwei Artikel von Druskin [23, 24] für den unteren Halbraum zu nennen, in denen er die Rekonstruierbarkeit unter der Annahme beweist, daß sich der

Halbraum in endlich viele Gebiete mit stückweise glattem Rand zerlegen läßt, in denen die Leitfähigkeit konstant ist.

Für die geoelektrischen Anwendungen der Impedanztomographie wurden bereits verschiedene iterative Rekonstruktionsalgorithmen angegeben (siehe z.B. die Doktorarbeit von Lukeschewitsch [40, 41] und die dortigen Literaturangaben). Lukeschewitsch untersucht in seiner Arbeit Tikhonov-Regularisierungsmethoden zur Rekonstruktion der Leitfähigkeit in der geoelektrischen Impedanztomographie auf sogenannten geophysikalischen Gebieten. Diese Gebiete entsprechen im wesentlichen dem unteren Halbraum mit topologischen Deformationen auf einem beschränkten Teil des Randes.

Wir werden in dieser Arbeit einen nicht-iterativen Rekonstruktionsalgorithmus herleiten, der nicht der Rekonstruktion der Leitfähigkeit selbst, sondern der Erkennung von Abweichungen von einem homogenen Referenzzustand dient. Ziel ist es Einschlüsse zu finden, in denen die Leitfähigkeit gegenüber der Hintergrundleitfähigkeit erhöht oder erniedrigt ist. Diese Problemstellung wurde von Brühl in [12] für den Fall beschränkter Gebiete mit Hilfe der sogenannten Faktorisierungsmethode gelöst. Diese geht zurück auf eine Methode von Kirsch [36] zur Charakterisierung von Hindernissen durch Vergleich von an den Hindernissen gestreuten Wellen mit ungestreuten Wellen in der inversen Streutheorie.

In der vorliegenden Arbeit übertragen wir die Methode von Brühl [12] auf das Problem der Erkennung von Einschlüssen in der elektrischen Impedanztomographie auf unbeschränkten Gebieten, wobei wir als Modell für ein solches Gebiet mit glattem Rand die obere Halbebene bzw. den oberen Halbraum betrachten. Wie auch schon Brühl in seiner Arbeit müssen wir voraussetzen, daß die Einschlüsse im Vergleich zum Hintergrund alle eine niedrigere oder alle eine höhere Leitfähigkeit haben, wobei der erste Fall elektrisch isolierende Einschlüsse beinhaltet.

Die Gliederung der Arbeit ist wie folgt: Im zweiten Kapitel führen wir gewichtete Sobolev-Räume als Abschluß von C^∞ bzw. C_0^∞ -Funktionen ein, zeigen die Existenz von (kompakten) Spuroperatoren und die Gültigkeit von Poincaré-Ungleichungen. Mittels dieser Ungleichungen beweisen wir einige Aussagen über die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen gewichteten Sobolev-Räumen. Gegenstand des dritten Kapitels ist die Existenz und die Eindeutigkeit schwacher Lösungen des direkten Problems in den gewichteten Sobolev-Räumen. Für schwache Lösungen des Neumann-Problems für die Laplace-Gleichung im Halbraum bzw. der Halbebene beweisen wir die Gültigkeit einer Integraldarstellung. Für den Spezialfall stückweise konstanter Leitfähigkeiten leiten wir mittels eines Einschichtpotentialansatzes eine Lösungsmethode für das direkte Problem her. Das vierte Kapitel widmet sich der Faktorisierungsmethode zur Charakterisierung von Einschlüssen mit gegenüber dem Hintergrund sprunghaft erniedrigter oder erhöhter Leitfähigkeit. Dazu führen wir die Neumann-Dirichlet-Abbildung ein und leiten ähnlich wie Brühl in [12] - allerdings unter Verwendung der schwachen Formulierung aller auftretenden Randwertprobleme - die Existenz einer Faktorisierung für die Differenz der Neumann-Dirichlet-Abbildungen zur Leitfähigkeit σ und zur homogenen Leitfähigkeit $\sigma \equiv 1$ her. Da man in der Praxis nur auf einem beschränkten Teil des Randes Strom in den Halbraum bzw. die Halbebene einspeisen und die resultierenden Spannungen messen kann, gehen wir im nächsten Schritt zu lokalen Neumann-Dirichlet-Abbildungen über und weisen die Existenz einer Faktorisierung für diese nach. Wir betrachten dann die Randwerte geeigneter Funktionen mit einer Singularität in einem Testpunkt und zeigen, daß der Testpunkt genau

dann im Einschluß liegt, wenn die Randwerte im Bildraum eines Operators enthalten sind, der sich aus der Faktorisierung der Neumann-Dirichlet-Abbildung ergibt. Im abschließenden fünften Kapitel leiten wir aus der gezeigten Charakterisierung der Einschlüsse ein numerisches Rekonstruktionsverfahren her, beschreiben dessen Implementierung und stellen für den zwei- und den dreidimensionalen Fall Rekonstruktionsergebnisse vor. Im Anhang dieser Arbeit finden sich einige Beweise für die im zweiten Kapitel angegebenen Eigenschaften gewichteter Sobolev-Räume.

2 Gewichtete Sobolev-Räume

Will man die Existenz schwacher Lösungen elliptischer Randwertprobleme 2. Ordnung auf unbeschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, untersuchen, kann man den üblichen Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ nicht als Lösungsraum verwenden, da die klassischen Lösungen im allgemeinen nicht quadratisch integrierbar sind über Ω . Dies zeigt das folgende Beispiel (vgl. [41]):

Beispiel 2.1 Sei $\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ der obere Halbraum im \mathbb{R}^3 , ν der äußere Normalenvektor auf $\mathbb{R}^2 = \partial\mathbb{R}_+^3$ und $f(s) = (1 + |s|^2)^{-3/2}$ für $s \in \mathbb{R}^2$, wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^3 bezeichne. Dann ist durch $u(x) = |x + e_3|^{-1}$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_+^3, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^2$$

gegeben. Diese Lösung ist nicht quadratisch integrierbar über \mathbb{R}_+^3 .

Um dennoch schwache Lösungen solcher Randwertaufgaben auf unbeschränkten Gebieten untersuchen zu können, führen wir *gewichtete Sobolev-Räume* ein. Ein entscheidender Vorteil dieser Räume ist zum einen, daß bei geeigneter Wahl der Gewichte kompakte Einbettungen in gewichtete L^2 -Räume existieren und zum anderen, daß diese Räume eine einfache Möglichkeit bieten, das Verhalten der Lösung im Unendlichen zu bestimmen. Außerdem kann man für die gewichteten Sobolev-Räume Varianten der für beschränkte Gebiete gültigen Poincaré-Friedrichs-Ungleichungen beweisen.

Gewichtete Sobolev-Räume werden unter anderem in Arbeiten von T.Z. Boulmezaoud ([7], [8], [9]), B. Hanouzet ([31]), R. Janßen ([35]) und M. Lukaschewitsch ([40], [41]) sowie in den Büchern von Dautray und Lions ([21]) und Triebel ([46]) zur Untersuchung elliptischer Randwertprobleme auf unbeschränkten Gebieten verwendet.

In diesem Kapitel wollen wir einige wesentliche Resultate über gewichtete Sobolev-Räume zusammenstellen, wobei sich der hier vorgestellte Ansatz weitestgehend an der Arbeit von Janßen orientiert.

2.1 Bezeichnungen und erste Eigenschaften

Mit \mathbb{R}^n werde der euklidische Raum der Dimension n bezeichnet, mit \mathbb{R}_+^n der offene Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ und mit $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ dessen Abschluß. Wir werden uns in dieser Arbeit auf die für die spätere Anwendung relevanten Raumdimensionen $n = 2$ bzw. $n = 3$ beschränken.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets eine offene Menge mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Mit $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ und $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die folgenden Mengen unendlich oft differenzierbarer Funktionen:

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &:= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ unendlich oft differenzierbar auf } \Omega\} \\ C_0^\infty(\Omega) &:= \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ kompakt}\} \\ C_0^\infty(\overline{\Omega}) &:= \{u|_\Omega : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

Die in dieser Arbeit verwendeten Gewichtsfunktionen sind gegeben durch

$$\rho_\alpha(x) = (1 + |x|)^\alpha, \quad \alpha \geq 0,$$

wobei die Wahl von α vom Kontext abhängt und $|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, stets die euklidische Norm im \mathbb{R}^n bezeichne. Diese Funktionen sind strikt positiv und beschränkt auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n . Im Unendlichen sind sie äquivalent zum Gewicht $|x|^\alpha$, auf beschränkten Mengen zum Gewicht Eins.

Mittels der Gewichtsfunktion definieren wir den gewichteten L^2 -Raum $L^{2,\alpha}(\Omega)$ durch

$$L^{2,\alpha}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ meßbar, } \int_\Omega \rho_\alpha^{-2} |u|^2 dx < \infty \right\}.$$

Vorsehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^{2,\alpha}} = \int_\Omega \rho_\alpha^{-2} uv dx$$

ist dieser Raum ein Hilbertraum, dessen durch das Skalarprodukt induzierte Norm wir mit $\|\cdot\|_{L^{2,\alpha}}$ bezeichnen werden.

Um die gewichteten Sobolev-Räume definieren zu können, betrachten wir auf $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{1,\alpha,\Omega} := \int_\Omega \rho_\alpha^{-2} uv dx + \int_\Omega \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx, \quad u, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{1,\alpha,\Omega}$. Den Index für die Menge Ω werden wir weglassen, wenn aus dem Kontext klar ist, um welche Menge es sich handelt.

Definition 2.2

Mit den obigen Bezeichnungen werden die gewichteten Sobolev-Räume $H^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ durch

$$\begin{aligned} H^{1,\alpha}(\Omega) &:= \overline{\left\{ u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{1,\alpha} < \infty \right\}}^{\|\cdot\|_{1,\alpha}} \\ H_0^{1,\alpha}(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,\alpha}} \end{aligned}$$

definiert, wobei der Abschluß als Abschluß in $L^{2,\alpha}(\Omega)$ zu verstehen ist.

Bei der Definition von $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ ist zu beachten, daß der Index Null bedeutet, daß die dem Abschluß zugrunde liegenden C^∞ -Funktionen kompakten Träger in \mathbb{R}^n haben und somit im Unendlichen verschwinden, nicht jedoch, daß sie Randwerte Null auf Γ haben. Zu beachten ist bei der Definition auch, daß - im Unterschied zu den in den Arbeiten von Hanouzet ([31]), Boulmezaoud ([9]) und den Büchern von Dautray und Lions ([21]) sowie Triebel ([46]) eingeführten gewichteten Sobolev-Räumen - lediglich die Funktionen selbst mit einem Gewicht versehen werden, nicht aber ihre Gradienten.

Man erhält unmittelbar die folgende Eigenschaften von $H^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$:

- Es gilt die Relation $H_0^{1,\alpha}(\Omega) \subset H^{1,\alpha}(\Omega)$.
- Im Fall eines beschränkten Gebietes Ω ist $H^{1,\alpha}(\Omega)$ gerade der klassische Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$, d.h. lokal haben die Funktionen in $H^{1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ die gleichen Eigenschaften wie die Funktionen in $H^1(\Omega)$.
- Gemäß [40, Theorem A.1.15] kann man den Raum $H^{1,\alpha}(\Omega)$ auch durch

$$H^{1,\alpha}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ meßbar, } \rho_\alpha^{-1}u \in L^2(\Omega), \text{ grad } u \in L^2(\Omega)^n\} \quad (2.1)$$

definieren, wobei die auftretenden partiellen Ableitungen im distributionellen Sinne zu verstehen sind. Aus dieser Charakterisierung ergibt sich eine weitere, sehr nützliche Darstellung des Raumes $H^{1,\alpha}(\Omega)$:

$$H^{1,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) : \|u\|_{1,\alpha} < \infty \right\}. \quad (2.2)$$

Für den Raum $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt hingegen zunächst nur

$$H_0^{1,\alpha}(\Omega) \subset \left\{ u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) : \|u\|_{1,\alpha} < \infty \right\}. \quad (2.3)$$

- Man hat offensichtlich die stetige Einbettung

$$H^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{2,\alpha}(\Omega).$$

In dieser Arbeit werden wir vor allem die Mengen

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}^n \setminus \overline{D} \text{ sowie } \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D} \quad (2.4)$$

betrachten, wobei die Menge D in die Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften

- (1) D_1, \dots, D_N sind beschränkt
- (2) D_1, \dots, D_N haben lokal einen Lipschitz-Rand
- (3) $\overline{D_j} \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $\overline{D_j} \subset \mathbb{R}_+^n$ für alle $j = 1, \dots, N$
- (4) $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$ für $i \neq j$

zerfalle. Ist Ω eine der Mengen aus (2.4), so werden wir in Abschnitt 2.5 unter anderem beweisen, daß man für $0 \leq \alpha \leq 1$ Gleichheit von $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H^{1,\alpha}(\Omega)$ erhält. Mittels der in Abschnitt 2.4 gezeigten Varianten der Poincaré-Ungleichung werden wir darüber hinaus noch weitere Identitäten für die gewichteten Sobolev-Räume $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H^{1,\alpha}(\Omega)$ herleiten können.

2.2 Kompakte Einbettungen

Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, daß die im vorherigen Abschnitt eingeführten gewichteten Sobolev-Räume für gewisse Exponenten α der Gewichtsfunktion kompakt in ebenfalls gewichtete L^2 -Räume eingebettet werden können. Aussagen zu kompakten Einbettungen finden sich auch in den Arbeiten von Janßen [35] und Lukaschewitsch [40]. Dort werden die gewichteten Sobolev-Räume mittels eines Multiplikationsoperators kompakt in L^2 eingebettet, während wir in dieser Arbeit kompakte Einbettung in *gewichtete* L^2 -Räume untersuchen. Als Hauptresultat für die Räume $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 2.3

Sei $\alpha > n/2$, $n = 2, 3$. Dann ist die Einbettung $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ injektiv, stetig und kompakt.

Den Beweis dieses Satzes und die hierzu nötigen Hilfsergebnisse (unter anderem eine Variante des Satzes von Riesz zur Charakterisierung präkompakter Mengen in gewichteten L^2 -Räumen) finden sich in Anhang A.

Für den Raum $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir darüber hinaus:

Satz 2.4

Sei $\alpha > 1$, $n = 2, 3$. Dann ist die Einbettung $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ injektiv, stetig und kompakt.

Dieser Satz folgt für $n = 2$ unmittelbar aus Satz 2.3, während man für $n = 3$ die Aussage zunächst nur für $\alpha > 3/2$ erhält. Der Beweis für $n = 3$ und $\alpha > 1$ steht in Anhang A.

Existiert für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, und $H(\Omega) \in \{H^{1,\alpha}(\Omega), H_0^{1,\alpha}(\Omega)\}$ ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator $F : H(\Omega) \rightarrow H(\mathbb{R}^n)$ mit $(Fu)|_\Omega = u$ für alle $u \in H(\Omega)$, so folgt aus den obigen Sätzen für die dort angegebenen Exponenten α , daß die Einbettung $H(\Omega) \hookrightarrow L^{2,\alpha}(\Omega)$ injektiv, stetig und kompakt ist. Für den Fall $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, $n = 2, 3$, können wir den Fortsetzungsoperator gemäß der Methode von Hestenes (siehe [1]) explizit angeben:

Satz 2.5

Für $\alpha \geq 0$ und $n = 2, 3$ existiert ein stetiger und linearer Fortsetzungsoperator von $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ nach $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ bzw. von $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ nach $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

Wir geben den Beweis für den Fall $n = 3$ an.

Für $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3}) \cap H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^3})$ setzen wir mit $x = (x', y) \in \mathbb{R}_+^3$, $x' \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}_+$,

$$(Fu)(x) = \begin{cases} u(x', y), & \text{falls } y \geq 0 \\ 3u(x', -y) - 2u(x', -2y), & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Wie man leicht nachprüft, ist $Fu \in C^1(\mathbb{R}^3) \cap H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ bzw. $Fu \in C^1(\mathbb{R}^3) \cap H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Wir zeigen nun noch die Stetigkeit von F . Sei $\mathbb{R}_-^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |(Fu)(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_-^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |3u(x', -y) - 2u(x', -2y)|^2 dy dx' \\ &\leq \|u\|_{1,\alpha}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}_-^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |3u(x', -y)|^2 dy dx' + 2 \int_{\mathbb{R}_-^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |2u(x', -2y)|^2 dy dx' \\ &= \|u\|_{1,\alpha}^2 + 18 \int_{\mathbb{R}_+^3} \rho_\alpha^{-2}(x', -t) |u(x', t)|^2 dt dx' + 4 \int_{\mathbb{R}_+^3} \rho_\alpha^{-2}(x', -\frac{t}{2}) |u(x', t)|^2 dt dx'. \end{aligned}$$

Wegen

$$(1 + |(x', \frac{t}{2})|)^{2\alpha} \geq (1 + |(\frac{1}{2}x', \frac{t}{2})|)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha} (2 + |(x', t)|)^{2\alpha} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha} (1 + |(x', t)|)^{2\alpha}$$

folgt

$$\rho_\alpha^{-2}(x', -t/2) \leq 2^{2\alpha} \rho_\alpha^{-2}(x', -t),$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |(Fu)(x)|^2 dx \leq c \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}_+^3}^2.$$

Ebenso erhält man

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\text{grad}(Fu)(x)|^2 dx \leq c \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}_+^3}^2.$$

Da $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ dicht in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ und nach [40, Lemma A.1.22] auch $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ dicht in $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ ist, läßt sich F stetig auf $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ fortsetzen. \square

Wir benötigen die Existenz eines solchen Fortsetzungsoperators aber auch für den folgenden Fall:

Satz 2.6

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, $n = 2, 3$ und sei $D \subset \Omega$ eine Teilmenge von Ω , die in die Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Abschnitt 2.1 zerfalle. Sei ferner H einer der beiden Räume $H^{1,\alpha}$ bzw. $H_0^{1,\alpha}$. Dann existiert ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator F von $H(\Omega \setminus \overline{D})$ nach $H(\Omega)$ mit

$$Fu|_{\Omega \setminus \overline{D}} = u \text{ für alle } u \in H(\Omega \setminus \overline{D}).$$

Der Beweis dieser Aussage findet sich in Anhang A.

Aus den Sätzen 2.5 und 2.6 ergibt sich noch folgendes Korollar:

Korollar 2.7

Sei $D \subset \mathbb{R}_+^n$ eine Teilmenge von \mathbb{R}_+^n , $n = 2, 3$, die in die Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Abschnitt 2.1 zerfalle, und H einer der beiden Räume $H^{1,\alpha}$ bzw. $H_0^{1,\alpha}$. Dann existiert ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator F von $H(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ nach $H(\mathbb{R}^n)$ mit

$$Fu|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} = u \text{ f\"ur alle } u \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}).$$

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar durch Hintereinanderausfuehrung der Fortsetzungsoperatoren aus den Sätzen 2.6 und 2.5. □

2.3 Spursätze

Für die spätere Untersuchung von schwachen Lösungen elliptischer Randwertaufgaben benötigen wir Einschränkungen von Funktionen aus $H^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}_+^3$ bzw. $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, auf den Rand $\partial\Omega$. Die entsprechenden Spursätze finden sich bei Janßen ([35, Theorem 4.6]) und Lukaschewitsch ([40, Theorem 3.4.1]), deren Beweise man auf die Voraussetzung $\alpha \geq 0$ statt $\alpha > 1$ ausweiten kann. Wir geben den Beweis im Anhang an, da sich für den speziellen Fall $\Omega \in \{\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+^3\}$ viele der Formeln im Originalbeweis vereinfachen und weil wir die Beweisidee benötigen, um das sich an diesen Spursatz anschließende Korollar zu zeigen.

Satz 2.8

(a) Sei $\alpha \geq 0$, $n = 2, 3$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator $\gamma : H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, so daß für alle $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \cap H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ gilt:

$$(\gamma u)(x') = u(x', 0), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Ist $\alpha > n/2$, so ist dieser Spuroperator kompakt.

(b) Sei $\alpha \geq 0$, $n = 2, 3$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator $\gamma : H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, so daß für alle $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ gilt:

$$(\gamma u)(x') = u(x', 0), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Ist $\alpha > 1$, so ist dieser Spuroperator kompakt.

Beweis:

Siehe Anhang A. □

Korollar 2.9

Ist $D \subset \mathbb{R}_+^n$, $n = 2, 3$ eine Teilmenge von \mathbb{R}_+^n , die in die Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Abschnitt 2.1 zerfällt, so gelten für $\Omega = \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ folgende Aussagen:

- (i) Sei $\alpha \geq 0$, $n = 2, 3$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator $\gamma : H^{1,\alpha}(\Omega) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, so daß für alle $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt:

$$(\gamma u)(x') = u(x', 0), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Ist $\alpha > n/2$, so ist dieser Spuroperator kompakt.

- (ii) Sei $\alpha \geq 0$, $n = 2, 3$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator $\gamma : H_0^{1,\alpha}(\Omega) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, so daß für alle $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ gilt:

$$(\gamma u)(x') = u(x', 0), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Ist $\alpha > 1$, so ist dieser Spuroperator kompakt.

- (iii) Für $n = 2, 3$ existiert ein linearer und stetiger Operator $\gamma : H^{1,\alpha}(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$, so daß für alle $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt:

$$\gamma u = u|_{\partial D}.$$

- (iv) Für $n = 2, 3$ existiert ein stetiger linearer Operator $\gamma : H_0^{1,\alpha}(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$, so daß für alle $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ gilt:

$$\gamma u = u|_{\partial D}.$$

Besteht die Menge D aus mehr als einer Zusammenhangskomponente, so ist der Raum $H^{1/2}(\partial D)$ als Produktraum $H^{1/2}(\partial D) = H^{1/2}(\partial D_1) \times \cdots \times H^{1/2}(\partial D_N)$ aufzufassen.

Beweis:

Die Aussagen (i) und (ii) folgen unmittelbar aus dem Beweis von Satz 2.8, da wegen der Beschränktheit von D und wegen $\overline{D} \subset \mathbb{R}_+^n$ der Abstand $\text{dist}(D, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = d > 0$ ist. Daher kann man den Beweis von Satz 2.8 übernehmen, wenn man $\beta < d$ voraussetzt.

Weiter existiert wegen der Beschränktheit von D ein $r > 0$, so daß der Abschluß von D in der Kugel $B_r(0)$ mit Radius r um den Nullpunkt enthalten ist. Ist $H(\Omega)$ einer der beiden Räume $H^{1,\alpha}(\Omega)$, $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ und $u \in H(\Omega)$, so liegt u nach (2.2) bzw. (2.3) in dem klassischen Sobolev-Raum $H^1(B_r(0) \cap \Omega)$. Nach dem Spursatz für diesen klassischen Sobolev-Raum existiert ein stetiger Operator $\gamma : H^1(B_r(0) \cap \Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$ mit $u \mapsto u|_{\partial D}$. Da der Einschränkungoperator

$$E : H(\Omega) \rightarrow H^1(B_r(0) \cap \Omega), \quad u \mapsto u|_{B_r(0) \cap \Omega}$$

linear und stetig ist, sind auch (iii) und (iv) gezeigt. □

Damit haben wir die Existenz stetiger und kompakter Spuroperatoren gezeigt, was in späteren Kapiteln noch von Interesse sein wird. Der Raum $L^{2,\alpha}$ ist jedoch als Spurraum nicht optimal in dem Sinne, daß er keine Aussage mehr über die Glattheit der Randeinschränkung zuläßt und zudem das Verhalten der Randeinschränkung für $|x| \rightarrow \infty$ nicht präzise wiedergibt, wie man anhand der Spursätze in der Arbeit von Hanouzet ([31]) feststellen kann. Für unsere Zwecke ist der Raum $L^{2,\alpha}$ als Spurraum jedoch ausreichend.

2.4 Poincaré-Ungleichungen

Um die Existenz schwacher Lösungen elliptischer Randwertprobleme in den gewichteten Sobolev-Räumen $H_0^{1,\alpha}$ und $H^{1,\alpha}$ untersuchen zu können benötigen wir noch Varianten des für beschränkte Gebiete gültigen Lemmas von Poincaré (vgl. [47, Satz 7.7]). Wir geben solche Varianten zunächst für $\alpha > n/2$, $n = 2, 3$, in den Räumen $H^{1,\alpha}(\Omega)$ an (vgl. [40, Theorem 3.5.2 (i)]). Dazu führen wir den Begriff eines normalisierenden Funktionals ein:

Definition 2.10

Sei \mathcal{W} ein Funktionenraum mit $1 \in \mathcal{W}$, wobei mit 1 die konstante Funktion mit dem Wert 1 bezeichnet wird. Ein stetiges lineares Funktional $\ell : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\ell(1) \neq 0$ heißt normalisierend.

Satz 2.11

Sei Ω eine der Mengen aus (2.4) und $\alpha > n/2$, $n = 2, 3$. Ist ℓ ein normalisierendes Funktional auf $H^{1,\alpha}(\Omega)$, so existiert eine Konstante $c_\alpha > 0$, so daß

$$\|u\|_{1,\alpha}^2 \leq c_\alpha \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + (\ell(u))^2 \right) \quad (2.5)$$

für alle $u \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt.

Beweis:

siehe [40, Theorem 3.5.2].

Wegen $H_0^{1,\alpha} \subset H^{1,\alpha}$ ergibt sich:

Korollar 2.12

Sei $\alpha > n/2$ und Ω und ℓ wie in Satz 2.11 gegeben. Dann gilt

$$\|u\|_{1,\alpha}^2 \leq c_\alpha \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + (\ell(u))^2 \right)$$

für alle $u \in H_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Bemerkung 2.13

- (i) Wegen der Stetigkeit des normalisierenden Funktionals ℓ auf $H^{1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt auch

$$\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + (\ell(u))^2 \leq C_\alpha \|u\|_{1,\alpha}^2,$$

so daß man durch

$$|u|_\ell^2 := \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + (\ell(u))^2$$

auf $H^{1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ eine zur Norm $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ äquivalente Norm definieren kann.

- (ii) Für $\alpha > n/2$ ist $Q_0 := \text{Span}\{\mathbf{1}\}$ wegen der L^2 -Integrierbarkeit der Gewichtsfunktion ρ_α^{-1} ein Unterraum von $H^{1,\alpha}(\Omega)$. Durch die Seminorm

$$|u|^2 := \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx \quad (2.6)$$

ist dann auf den Quotientenräumen $H^{1,\alpha}(\Omega)/Q_0$ eine zur Norm

$$\|u\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)/Q_0} = \inf_{q \in Q_0} \|u + q\|_{1,\alpha}$$

äquivalente Norm gegeben:

Offensichtlich gilt $\|u\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)/Q_0} \geq |u|$. Ist ℓ ein normalisierendes Funktional auf $H^{1,\alpha}(\Omega)$, so liefert Satz 2.11 die Existenz einer Konstanten $c_\alpha > 0$, so daß für beliebiges $q \in \mathbb{R}$ und $u \in H^{1,\alpha}(\Omega)/Q_0$

$$\|u\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)/Q_0}^2 \leq \|u + q\|_{1,\alpha}^2 \leq c_\alpha \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + (\ell(u) + q\ell(\mathbf{1}))^2 \right)$$

gilt. Wählt man $q = -\ell(u)/\ell(\mathbf{1})$, ergibt sich

$$\|u\|_{H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)/Q_0}^2 \leq c_\alpha \int_{\mathbb{R}_+^n} |\text{grad } u|^2 dx = c_\alpha |u|^2.$$

Im Folgenden geben wir einige Beispiele für normalisierende Funktionale auf $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ bzw. $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ an, die in den nächsten Kapiteln benötigt werden:

Sei $\alpha > n/2$ und $\Omega \in \{\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}\}$. Dann gilt $\in H^{1,\alpha}(\Omega)$ und die folgenden Abbildungen definieren normalisierende Funktionale auf $H^{1,\alpha}(\Omega)$:

$$\ell_1(u) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\gamma u)(x') \rho_\alpha^{-2}(x', 0) dx' \quad (2.7)$$

$$\ell_2(u) := \int_S (\gamma u)(x') dx', \quad S \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ beschränkt.} \quad (2.8)$$

Die Linearität und die Normalisierungseigenschaft dieser Funktionale sind sofort einsichtig, die Stetigkeit folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und aus der Stetigkeit des Spuroperators.

Im dreidimensionalen Fall können wir darüber hinaus noch zeigen, daß die Seminorm $|\cdot|$ für $\alpha \geq 1$ auf $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ ein zur Norm $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ äquivalente Norm ist. Der Beweis findet sich in Anhang A.

Satz 2.14

Sei Ω eine der Menge aus (2.4), wobei der Rand der Zusammenhangskomponenten von D zusätzlich von der Klasse C^1 sei. Dann sind für $\alpha \geq 1$ die Normen

$$\|u\|_{1,\alpha}^2 = \int_{\Omega} \rho_\alpha^{-2} u^2 dx + \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx$$

und

$$|u|^2 := \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx$$

auf $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ äquivalent.

Aus der Äquivalenz der beiden Normen $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ und $|\cdot|$ folgt auch, daß die konstante Funktion $\mathbf{1}$ bezüglich der $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ -Norm nicht durch Funktionenfolgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\overline{\Omega})$ approximiert werden kann. Da die Räume $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ für wachsendes α aufsteigend ineinander enthalten sind, gilt also $\mathbf{1} \notin H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha \geq 0$.

Im zweidimensionalen Fall hingegen liegen die konstanten Funktionen für $\alpha > 1$ nicht nur in $H^{1,\alpha}(\Omega)$, sondern auch in $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$, wie das folgende Lemma zeigt. Somit kann die Seminorm $|\cdot|$ keine Norm auf $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ sein.

Lemma 2.15

Sei $n = 2$, $\alpha > 1$ und Ω eine der Mengen aus (2.4). Dann gilt $\mathbf{1} \in H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ und durch $|\cdot|$ ist auf dem Quotientenraum $H_0^{1,\alpha}(\Omega)/Q_0$ eine zur Norm $\|\cdot\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)/Q_0}$ äquivalente Norm gegeben.

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung nur für $\Omega = \mathbb{R}^2$, alle anderen Beweis verlaufen analog. Offensichtlich gilt $\|\mathbf{1}\|_{1,\alpha} < \infty$ für $\alpha > 1$. Die Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ sei durch

$$\varphi_k(r) := \begin{cases} 1, & |r| \leq k \\ 2 - \frac{\log|r|}{\log k}, & k < |r| < k^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Setzt man $u_k(x) := \varphi_k(|x|)$, so gilt $u_k \in H^1(\mathbb{R}^2)$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und

$$\begin{aligned} \|u_k - \mathbf{1}\|_{1,\alpha}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|)^{2\alpha}} |u_k(x) - 1|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\text{grad}(u_k - 1)|^2 dx \\ &= 2\pi \int_k^\infty \frac{1}{(1+r)^{2\alpha}} \underbrace{|\varphi_k(r) - 1|^2}_{\leq 1} r dr + 2\pi \int_k^{k^2} |\varphi_k'(r)|^2 r dr \\ &\leq 2\pi \int_k^\infty \frac{r}{(1+r)^{2\alpha}} dr + 2\pi \int_k^{k^2} \frac{r}{r^2 \log^2(k)} dr \\ &= 2\pi \int_k^\infty \frac{r}{(1+r)^{2\alpha}} dr + 2\pi \frac{1}{\log(k)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\alpha > 1$ ist. Damit ist $\mathbf{1} \in H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ gezeigt. Die Äquivalenz der Normen folgt wie in Bemerkung 2.13. \square

Mit den in diesem Abschnitt gezeigten Normäquivalenzen können wir nun einige Identitäten für die gewichteten Sobolev-Räume $H^{1,\alpha}$ und $H_0^{1,\alpha}$ beweisen.

2.5 Relationen zwischen den gewichteten Sobolev-Räumen $H^{1,\alpha}$ und $H_0^{1,\alpha}$

Wir wollen zunächst analog zu einem Dichtheitsresultat von Hanouzet ([31, Theorem 1.1]) zeigen, daß für die Mengen Ω aus (2.4) und $0 \leq \alpha \leq 1$ die Räume $H^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ übereinstimmen, indem wir die Dichtheit von $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ in $H^{1,\alpha}(\Omega)$ nachweisen.

Satz 2.16

Seien $n = 2, 3$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und Ω eine der Mengen aus (2.4). Dann liegt $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^{1,\alpha}(\Omega)$.

Beweis:

Sei $u \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ und u habe einen kompakten Träger. Dann ist $u \in H^1(\Omega)$ und es existiert eine Folge $(\psi_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\overline{\Omega})$, so daß die Träger von u und ψ_l , $l \in \mathbb{N}$, in einem festen Kompaktum $K \subset \overline{\Omega}$ liegen und so daß $\lim_{l \rightarrow \infty} \|\psi_l - u\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \|\psi_l - u\|_{1,\alpha} = 0$ ist.

Daher genügt es, für ein beliebiges $u \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ zu konstruieren, die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{1,\alpha} = 0$$

erfüllt.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\varphi_k(x) := \varphi(\frac{x}{k})$ und definiere für $u \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ die Funktion u_k durch $u_k := \varphi_k u$. Dann ist u_k in $H^1(\Omega)$ und es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{1,\alpha} = 0$:

$$\|u_k - u\|_{1,\alpha} = \left(\underbrace{\int_{\Omega} \rho_{\alpha}^{-2} |u_k - u|^2 dx}_{=: I_1} + \underbrace{\int_{\Omega} |\text{grad}(u_k - u)|^2 dx}_{=: I_2} \right)^{1/2}.$$

Für I_1 erhält man

$$I_1 = \int_{\Omega} \rho_{\alpha}^{-2} |\varphi_k - 1|^2 |u|^2 dx = \int_{\{x: |x| \geq k\} \cap \Omega} \rho_{\alpha}^{-2} |\varphi_k - 1|^2 |u|^2 dx.$$

Aus $|\varphi_k - 1| \leq 1$ und der L^2 -Integrierbarkeit von $\rho_{\alpha}^{-1} u$ auf Ω folgt, daß der Term I_1 für $k \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Für I_2 ergibt sich

$$I_2 = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} u + (\varphi_k - 1) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe lassen sich durch

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} u + (\varphi_k - 1) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} u \right|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |\varphi_k - 1|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ & = \left(\int_{\{x: k \leq |x| \leq 2k\} \cap \Omega} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right|^2 |u|^2 dx \right)^{1/2} + \underbrace{\left(\int_{\{x: |x| \geq k\} \cap \Omega} |\varphi_k - 1|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

abschätzen. Für die partiellen Ableitungen von φ_k gilt

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \left(\frac{x}{k} \right).$$

Da die partiellen Ableitungen von φ beschränkt sind, erhält man für das erste Integral auf der rechten Seite

$$\begin{aligned} \int_{\{x: k \leq |x| \leq 2k\} \cap \Omega} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right|^2 |u|^2 dx &\leq c \int_{\{x: k \leq |x| \leq 2k\} \cap \Omega} \frac{1}{k^2} |u|^2 dx \\ &= c \int_{\{x: k \leq |x| \leq 2k\} \cap \Omega} \rho_\alpha^2 \rho_\alpha^{-2} \frac{1}{k^2} |u|^2 dx \\ &\leq c \int_{\{x: k \leq |x| \leq 2k\} \cap \Omega} (1+2k)^{2\alpha} \frac{1}{k^2} \rho_\alpha^{-2} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha \in [0, 1]$, so daß der Quotient $(1+2k)^{2\alpha}/k^2$ beschränkt ist und man das Integral weiter durch

$$\int_{\{x: k \leq |x| \leq 2k\} \cap \Omega} |u|^2 \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq c \int_{\{x: k \leq |x| \leq 2k\} \cap \Omega} \rho_\alpha^{-2} |u|^2 dx$$

abschätzen kann, wobei die rechte Seite für $k \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Damit ist insgesamt die Behauptung $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{1,\alpha} = 0$ gezeigt. \square

Korollar 2.17

Das Gebiet Ω sei wie in Satz 2.16 gegeben. Dann liegt für $\alpha \geq 0$ der Raum $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $L^{2,\alpha}(\Omega)$.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Beweis von Satz 2.16, da die Einschränkung $\alpha \in [0, 1]$ erst bei der Untersuchung des Anteils der Norm einen Rolle spielt, in dem der Gradient auftritt. \square

Aus Satz 2.16 erhalten wir für $0 \leq \alpha \leq 1$ und die dort angegebenen Mengen zusammen mit (2.2) auch noch die Charakterisierung

$$H_0^{1,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) : \|u\|_{1,\alpha} < \infty \right\} \tag{2.9}$$

des Raumes $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Betrachtet man auf $H^{1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > n/2$, die Norm $|\cdot|_\ell$, so ist diese nach Bemerkung 2.13 äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{1,\alpha}$. Für $\alpha > n/2$ kann man also $H^{1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ auch als Abschluß von $C^\infty(\Omega)$ bzw. $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ bezüglich der Norm $|\cdot|_\ell$ definieren. Wählt man als Funktional zum Beispiel

$$\ell(u) = \int_{\mathcal{O}} u dx$$

mit einer beliebigen offenen und beschränkten Teilmenge \mathcal{O} von Ω , so ist dieses unabhängig von der Gewichtsfunktion ρ_α , was dann auch für die Norm $|\cdot|_\ell$ gilt. Daher sind die Räume $H^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ jeweils für alle $\alpha > n/2$ gleich.

Im dreidimensionalen Fall erhalten wir unter den Voraussetzungen von Satz 2.14 darüber hinaus, daß man die Räume $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ auch als Abschluß des Raumes $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ bezüglich der Norm

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx$$

definieren kann. Insbesondere sind die Räume $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha \geq 1$ gleich. Diese Ergebnisse halten wir in dem folgenden Korollar fest.

Korollar 2.18

Sei $n = 2, 3$ und Ω eine der Mengen aus (2.4). Dann gilt

- (i) $H^{1,\alpha_1}(\Omega) = H^{1,\alpha_2}(\Omega)$ bzw. $H_0^{1,\alpha_1}(\Omega) = H_0^{1,\alpha_2}$ für alle $\alpha_1, \alpha_2 > n/2$
- (ii) Ist $n = 3$ und erfüllt Ω die Voraussetzungen von Satz 2.14, so gilt $H_0^{1,1}(\Omega) = H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha \geq 1$.

Im zweidimensionalen Fall können wir sogar zeigen, daß $H_0^{1,\alpha}(\Omega) = H^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha \geq 0$ gilt, es also keine Rolle spielt, ob man $C^\infty(\Omega)$ oder $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ abschließt.

Lemma 2.19

Sei $n = 2$ und Ω eine der Mengen aus (2.4). Dann gilt für alle $\alpha \geq 0$

$$H_0^{1,\alpha}(\Omega) = H^{1,\alpha}(\Omega).$$

Beweis:

Für $0 \leq \alpha \leq 1$ wurde die Behauptung schon in Satz 2.16 gezeigt. Sei deshalb $\alpha > 1$.

Wir setzen $\hat{\rho}(x) = (1 + |x|) \log(2 + |x|)$ und definieren

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{\hat{\rho}}} \\ \hat{H}(\Omega) &:= \overline{\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{\hat{\rho}} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{\hat{\rho}}} \end{aligned}$$

bezüglich der durch

$$\|u\|_{\hat{\rho}}^2 := \|\hat{\rho}^{-1}u\|_{L^2}^2 + \|\text{grad } u\|_{L^2}^2$$

gegebenen Norm. Dabei ist der Abschluß als Abschluß in

$$L^{2,\hat{\rho}}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ meßbar, } \|\hat{\rho}^{-1}u\|_{L^2} < \infty\}$$

zu verstehen. Offensichtlich sind alle Funktionen in $\hat{H}_0(\Omega)$ und $\hat{H}(\Omega)$ lokal H^1 -Funktionen. Für die Räume $\hat{H}_0(\Omega)$ und $\hat{H}(\Omega)$ werden wir die beiden folgenden Aussagen beweisen

- (1) $\hat{H}(\Omega) = \hat{H}_0(\Omega)$
- (2) Für jedes normalisierende Funktional ℓ auf $\hat{H}(\Omega) = \hat{H}_0(\Omega)$ ist durch $\|\cdot\|_{\ell}$ eine äquivalente Norm auf diesen Räumen gegeben.

Mittels dieser beiden Aussagen ergibt sich die Behauptung des Lemmas wie folgt:

Sei \mathcal{O} eine beliebige offene und beschränkte Teilmenge von Ω . Das normalisierende Funktional ℓ auf $\hat{H}(\Omega) = \hat{H}_0(\Omega)$ sei durch $\ell(u) = \int_{\mathcal{O}} u \, dx$ gegeben. Dann ist ℓ auch ein normalisierendes Funktional auf $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H^{1,\alpha}(\Omega)$. Da $\alpha > 1$ ist, ist $\|\cdot\|_{\ell}$ nach Satz 2.11 auch eine äquivalente Norm auf $H^{1,\alpha}(\Omega)$ und $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Somit sind $\hat{H}_0(\Omega)$ und $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ bzw. $\hat{H}(\Omega)$ und $H^{1,\alpha}(\Omega)$ jeweils Abschlüsse der gleichen Grundräume bezüglich äquivalenter Normen und daher gleich, womit

$$H_0^{1,\alpha}(\Omega) = \hat{H}_0(\Omega) = \hat{H}(\Omega) = H^{1,\alpha}(\Omega)$$

gezeigt und die Behauptung bewiesen ist.

Beweisen wir zunächst die Aussage (1). Offensichtlich ist $\hat{H}_0(\Omega)$ in $\hat{H}(\Omega)$ enthalten und wir müssen nur noch zeigen, daß sich jedes Element in $\hat{H}(\Omega)$ als Grenzwert einer Funktionenfolge aus $\hat{H}_0(\Omega)$ darstellen läßt (siehe auch den Beweis von Satz 2.16). Sei $u \in \hat{H}(\Omega)$. Wie im Beweis von Lemma 2.15 seien die Funktionen φ_k , $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, durch

$$\varphi_k(r) := \begin{cases} 1, & |r| \leq k \\ 2 - \frac{\log|r|}{\log k}, & k < |r| < k^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Wir setzen $\phi_k(x) = \varphi_k(|x|)$ und $u_k := \phi_k u$. Dann gilt offensichtlich $u_k \in \hat{H}_0(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} \|u - u_k\|_{\hat{\rho}}^2 &= \int_{\Omega} \hat{\rho}^{-2} |u - u_k|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\text{grad}(u - u_k)|^2 \, dx \\ &= \int_{\{x: |x| > k\} \cap \Omega} \hat{\rho}^{-2} |u|^2 \underbrace{|\phi_k - 1|^2}_{\leq 1} \, dx \\ &\quad + \int_{\{x: |x| > k\} \cap \Omega} |u \text{ grad } \phi_k + (\phi_k - 1) \text{ grad } u|^2 \, dx \\ &\leq \underbrace{\int_{\{x: |x| > k\} \cap \Omega} \hat{\rho}^{-2} |u|^2 \, dx}_{\rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty} + 2 \underbrace{\int_{\{x: |x| > k\} \cap \Omega} |\text{grad } u|^2 \underbrace{|\phi_k - 1|^2}_{\leq 1} \, dx}_{\rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty} \\ &\quad + 2 \int_{\{x: k < |x| < k^2\} \cap \Omega} |u|^2 |\text{grad } \phi_k|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Für das letzte Integral auf der rechten Seite gilt weiter

$$\begin{aligned} \int_{\{x: k < |x| < k^2\} \cap \Omega} |u|^2 |\text{grad } \phi_k|^2 \, dx &= \int_{\{x: k < |x| < k^2\} \cap \Omega} \frac{|u|^2}{\log^2(k) |x|^2} \, dx \\ &\leq c \int_{\{x: k < |x| < k^2\} \cap \Omega} \frac{|u|^2}{\log^2(2 + |x|)(1 + |x|)^2} \, dx. \end{aligned}$$

Da u in $\hat{H}(\Omega)$ liegt, konvergiert auch dieses Integral für $k \rightarrow \infty$ gegen Null, so daß

$$\|u - u_k\|_{\hat{\rho}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

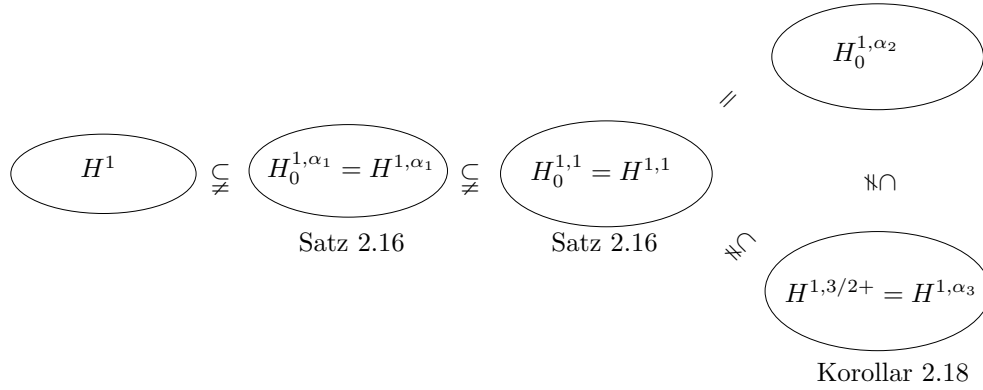


Abbildung 2.2: Relation der gewichteten Sobolev-Räume im Fall $n = 3$

2.6 Greensche Formel

Zum Abschluß dieses einführenden Kapitels wollen wir uns noch mit der Gültigkeit der Greenschen Formel in (gewichteten) Sobolev-Räumen befassen. Sei Ω' eine offene und beschränkte Menge im \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, mit einem Lipschitz-stetigen Rand Γ und ν der äußere Normalenvektor auf Γ . Wir definieren den Raum $H(\text{div}, \Omega')$ durch

$$H(\text{div}, \Omega') := \{v \in L^2(\Omega')^n : \text{div } v \in L^2(\Omega')\}.$$

Dann ist $C_0^\infty(\overline{\Omega'})^n$ dicht in $H(\text{div}, \Omega')$ und es gilt der folgende Satz (siehe [29, Kapitel 1, §2]):

Satz 2.20

Die auf $C_0^\infty(\overline{\Omega'})^n$ definierte Abbildung

$$\gamma_\nu : v \mapsto v \cdot \nu|_\Gamma$$

kann zu einer linearen und stetigen Abbildung von $H(\text{div}, \Omega')$ nach $H^{-1/2}(\Gamma)$ fortgesetzt werden. Zudem gilt für alle $v \in H(\text{div}, \Omega')$ und für alle $\phi \in H^1(\Omega')$ die Greensche Formel

$$\int_{\Omega'} v \cdot \text{grad } \phi \, dx + \int_{\Omega'} \text{div } v \phi \, dx = \int_\Gamma (v \cdot \nu) \phi \, ds. \quad (2.10)$$

Für $u \in H^1(\Omega')$ mit $\Delta u \in L^2(\Omega')$ folgt daraus, daß $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$ liegt und daß u für alle $v \in H^1(\Omega')$ die Gleichung

$$\int_{\Omega'} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = - \int_{\Omega'} \Delta u v \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds \quad (2.11)$$

erfüllt.

Die Greensche Formel erhalten wir aus der Arbeit [9] von Boulmezaoud auch für den gewichteten Sobolev-Raum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$:

Satz 2.21

Für $u \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ mit $(1+|x|)\Delta u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ und für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ gilt die Greensche Formel

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \Delta u v \, dx = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds. \quad (2.12)$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus [9, Korollar 1 in Abschnitt 1], da wegen der Äquivalenz der Gewichtsfunktionen $\sqrt{1+|x|^2}$ und $(1+|x|)$ (siehe dazu (A.16)), der Charakterisierung (2.1) von $H^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ und der Gleichheit von $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ und $H^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$

$$H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n) : (1+|x|^2)^{-1/2} v \in L^2(\Omega), \text{grad } v \in L^2(\Omega)^n \right\}$$

gilt.

Sei D eine Teilmenge des \mathbb{R}_+^n , die in die Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Abschnitt 2.1 zerfalle. Hat D zusätzlich einen Lipschitz-stetigen Rand, so kann man den Beweis von (2.12) aus der Arbeit von Boulmezaoud unter Verwendung von Satz 2.20 auf den Raum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ übertragen, und erhält das folgende Korollar:

Korollar 2.22

Sei D eine Teilmenge des \mathbb{R}_+^n , die in Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Abschnitt 2.1 zerfalle und zusätzlich einen Lipschitz-stetigen Rand habe. Dann gilt für $u \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ mit $(1+|x|)\Delta u \in L^2(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ und für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ die Greensche Formel

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \Delta u v \, dx = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds. \quad (2.13)$$

Im Fall $n = 3$ haben wir wegen Korollar 2.18 damit die Greensche Formel in $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$, $\Omega \in \{\mathbb{R}_+^3, \mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}\}$, für alle $\alpha \geq 1$.

Die nun zur Verfügung gestellten Hilfsmittel werden wir im folgenden Kapitel benötigen, um die (eindeutige, schwache) Lösbarkeit des in der elektrischen Impedanztomographie auftretenden Neumann-Randwertproblems zu zeigen.

3 Das direkte Problem

Bevor wir uns mit dem inversen Problem der elektrischen Impedanztomographie beschäftigen können, müssen wir uns mit dem Vorwärtsproblem auseinandersetzen. Wir werden dieses in schwacher Form angeben und auf Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in den im vorhergehenden Kapitel eingeführten gewichteten Sobolev-Räumen untersuchen. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden wir anhand einer expliziten Lösungsformel für die Laplace-Gleichung in der Halbebene bzw. im Halbraum diskutieren, welche gewichteten Sobolev-Räume wir in dieser Arbeit vorrangig als Lösungsraum verwenden wollen. Im dritten Abschnitt gehen wir auf den Spezialfall stückweise konstanter Leitfähigkeiten ein, der auf ein Diffraktionsproblem führt. Hierfür geben wir ein Lösungsverfahren an und untersuchen die Zugehörigkeit der so erhaltenen (schwachen) Lösung zu den gewichteten Sobolev-Räumen.

3.1 Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Im folgenden sei das zu betrachtende Gebiet stets der obere Halbraum \mathbb{R}_+^n im \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, mit dem Rand \mathbb{R}^{n-1} . Untersucht werden soll die Neumannsche Randwertaufgabe

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^n \quad (3.1a)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1}. \quad (3.1b)$$

Dabei bezeichne ν den bezüglich \mathbb{R}_+^n äußeren Normalenvektor auf \mathbb{R}^{n-1} . Der Leitfähigkeitskoeffizient σ sei aus $L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ und es gelte

$$\underline{\sigma} := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}_+^n} \sigma(x) > 0, \quad (3.2)$$

so daß die Differentialgleichung (3.1a) elliptisch ist.

Um auch unstetige Leitfähigkeiten σ und unstetige Stromflüsse f betrachten zu können, wollen wir den schwachen Lösungsbegriff für das Problem (3.1) verwenden, suchen also Lösungen in den in Kapitel 2 eingeführten gewichteten Sobolev-Räumen. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir die Randwerte einer Funktion $v \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ bzw. $v \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ statt mit γv kurz mit v selbst bezeichnen.

Sei $H(\mathbb{R}_+^n)$ einer der beiden Räume $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$. Die schwache Formulierung der Aufgabe (3.1) lautet dann:

Bestimme zu $f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ ein $u \in H(\mathbb{R}_+^n)$ so, daß

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v \, ds \quad (3.3)$$

für alle $v \in H(\mathbb{R}_+^n)$ gilt.

Die Vorgabe $f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ bedeutet, daß das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |s|)^{2\alpha} f^2 ds$$

existiert, f also eine L^2 -integrierbare Funktion sein muß, etwa mit einem Abklingverhalten der Form $O(|s|^{-\alpha-1-\varepsilon})$ im dreidimensionalen und $O(|s|^{-\alpha-1/2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, im zweidimensionalen Fall für $|s| \rightarrow \infty$. Dies ist in der Praxis keine relevante Einschränkung an den Randstrom f , da f typischerweise einen beschränkten Träger hat und die Forderung somit immer erfüllt ist (siehe dazu auch Abschnitt 4.3).

Zunächst wollen wir die Lösbarkeit von (3.3) im Raum $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ untersuchen.

Satz 3.1

Sei $Q_0 = \text{Span} \{ \cdot \}$.

- (i) Ist $\alpha > 3/2$ und $f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$, so existiert genau dann eine Lösung u in $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ von (3.3), wenn das Randintegral $\int_{\mathbb{R}^2} f ds$ verschwindet. Diese Lösung ist eindeutig bis auf eine additive Konstante und es gilt

$$\|u\|_{H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0} \leq c_\alpha \|f\|_{L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)}.$$

- (ii) Ist $\alpha > 1$ und $f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$, so existiert genau dann eine Lösung u in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ von (3.3), wenn das Randintegral $\int_{\mathbb{R}} f ds$ verschwindet. Diese Lösung ist eindeutig bis auf eine additive Konstante und es gilt

$$\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)/Q_0} \leq c_\alpha \|f\|_{L^{2,-\alpha}(\mathbb{R})}.$$

Beweis:

Wir beweisen nur die Aussage (i).

Die Voraussetzung $\alpha > 3/2$ impliziert die L^2 -Integrierbarkeit von ρ_α^{-1} und liefert deshalb $Q_0 \subset H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$. Nach Bemerkung 2.13 existiert eine Konstante $\tilde{c}_\alpha > 0$, so daß für alle $v \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0$ die Abschätzung

$$\|v\|_{H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0}^2 \leq \tilde{c}_\alpha \int_{\mathbb{R}_+^3} |\text{grad } v|^2 dx \tag{3.4}$$

gilt.

Sei nun u eine Lösung von (3.3) und

$$a(u, v) := \int_{\mathbb{R}_+^3} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx.$$

Dann gilt für $v \equiv \mathbf{1}$

$$0 = a(u, \mathbf{1}) = \int_{\mathbb{R}^2} f ds,$$

so daß f notwendigerweise verschwindendes Integralmittel auf \mathbb{R}^2 haben muß.

Andererseits ist $F(v) := \int_{\mathbb{R}^2} f v ds$ wegen der Voraussetzungen $f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ und $\int_{\mathbb{R}^2} f ds = 0$ sowie des Spursatzes 2.8 ein wohldefiniertes lineares und stetiges Funktional auf $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0$. Ferner liefert der Spursatz noch

$$|F(v)| \leq c \|v\|_{1,\alpha} \|f\|_{L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)}.$$

Damit bleibt zu zeigen, daß die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ die Voraussetzungen des Theorems von Lax-Milgram (vgl. [43, Theorem 8.14]) erfüllt, d.h. man muß zeigen, daß sie stetig und koerziv ist.

Da in $a(\cdot, \cdot)$ nur Ableitungen erster Ordnung auftreten, ist $a(\cdot, \cdot)$ eine wohldefinierte und offensichtlich stetige Bilinearform auf $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0$. Desweiteren gilt mit (3.4)

$$a(u, u) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \sigma |\text{grad } u|^2 dx \geq \underline{\sigma} \|\text{grad } u\|_{L^2}^2 \geq \underline{\sigma} \tilde{c}_\alpha^{-1} \|u\|_{H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0}^2,$$

womit auch die Koerzivität nachgewiesen ist. Somit sind die Voraussetzungen des Theorems von Lax-Milgram erfüllt und die Behauptung ist gezeigt. \square

Nach Korollar 2.18 sind die Räume $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ jeweils für alle $\alpha > 3/2$ bzw. alle $\alpha > 1$ gleich. Damit hängen die in Satz 3.1 gefundenen Lösungen nicht vom Exponenten α der Gewichtsfunktion ab, d.h. unabhängig von der Wahl des Exponenten α existiert eine schwache Lösung u von (3.3), die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

Definiert man

$$L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}) := \left\{ f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}) : \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f ds = 0 \right\},$$

so besagt obiger Satz, daß für $\alpha > 3/2$ bzw. $\alpha > 1$ ein stetiger Lösungsoperator von $L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ nach $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0$ bzw. von $L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ nach $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)/Q_0$ existiert, der die vorgegebenen Neumann-Randwerte f auf die zugehörige Klasse von schwachen Lösung $u + q$, $q \in \mathbb{R}$, von (3.3) abbildet.

Wie aus dem Beweis hervorgeht, ist die Lösung in dem Raum

$$H_\ell^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3) := \{v \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3) : \ell(v) = 0\} \quad \text{bzw.} \quad (3.5)$$

$$H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2) := \{v \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2) : \ell(v) = 0\} \quad (3.6)$$

mit einem normalisierenden Funktional ℓ eindeutig bestimmt. Es existiert also ein stetiger Lösungsoperator von $L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ nach $H_\ell^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. von $L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ nach $H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$.

Wir wollen nun noch die Existenz schwacher Lösungen von (3.3) in dem Raum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ untersuchen. In diesem Fall entfällt die Bedingung, daß die Neumann-Randwerte f verschwindendes Integralmittel auf dem Rand \mathbb{R}^2 haben müssen, da die konstanten Funktionen nicht in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ enthalten sind.

Satz 3.2

Für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ existiert genau eine Lösung $u \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ von (3.3) und es gilt

$$\|u\|_{1,1} \leq c \|f\|_{L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)}.$$

Beweis:

Für $u, v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ definieren wir die Bilinearform $a(u, v)$ durch

$$a(u, v) := \int_{\mathbb{R}_+^3} \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx.$$

Diese Bilinearform ist stetig auf $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3) \times H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$.

Nach Satz 2.14 existiert eine Konstanten $c > 0$, so daß

$$\|v\|_{1,1}^2 \leq c \int_{\mathbb{R}_+^3} |\operatorname{grad} v|^2 \, dx$$

für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ gilt. Deshalb erhält man

$$a(u, u) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \sigma |\operatorname{grad} u|^2 \, dx \geq \underline{\sigma} \cdot \|\operatorname{grad} u\|_{L^2}^2 \geq \underline{\sigma} \cdot c^{-1} \cdot \|u\|_{1,1}^2,$$

d.h. die Bilinearform ist koerziv. Da wegen der Voraussetzung $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ das Funktional $F(v) := \int_{\mathbb{R}^2} f v \, ds$ wohldefiniert und linear auf $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ sowie wegen des Spursatzes 2.8 auch stetig ist und die Abschätzung

$$|F(v)| \leq c \|v\|_{1,1} \|f\|_{L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)}$$

erfüllt, liefert das Theorem von Lax-Milgram die Behauptung. \square

Dieser Satz besagt auch, daß ein stetiger Lösungsoperator von $L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ nach $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ existiert, der die Randwerte f auf die zugehörige schwache Lösung des Problems (3.3) abbildet.

Abbildung 3.1 veranschaulicht für den Fall $n = 3$, in welcher Relation zueinander die Räume für die Randvorgaben f und die zugehörigen schwachen Lösungen u von (3.3) aus den Sätzen 3.1 und 3.2 stehen.

An dieser Stelle kehren wir zurück zu unserem Beispiel aus Kapitel 2, das die Einführung gewichteter Sobolev-Räume motivierte:

Durch $u(x) = |x + e_3|^{-1}$ ist eine klassische Lösung der Laplace-Gleichung auf \mathbb{R}_+^3 mit Neumann-Randwerten $f(s) = (1 + |s|^2)^{-3/2}$ gegeben. Wir zeigen jetzt, daß f in $L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ und u in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ liegen und daß u auch die schwache Lösung gemäß (3.3) für $\sigma \equiv \mathbf{1}$ ist.

Um zu zeigen, daß $(1 + |s|)f$ quadratisch integrierbar ist auf dem Rand \mathbb{R}^2 , beachten wir die Abschätzung (A.16) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |s|)^2 f^2(s) \, ds &\stackrel{\text{(A.16)}}{\leq} c \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |s|^2)(1 + |s|^2)^{-3} \, ds = c \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |s|^2)^{-2} \, ds \\ &= c \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1 + r^2)^{-2} r \, d\theta \, dr < \infty, \end{aligned}$$

definierte Funktion u in dem gewichteten Sobolev-Raum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ liegt und eine schwache Lösung der Laplace-Gleichung im Sinne von (3.3) mit $\sigma \equiv 1$ ist. Ist f zusätzlich stetig, so folgt, daß die klassische Lösung zugleich die schwache Lösung in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ ist. Als Hilfsmittel benötigen wir die Kelvin-Transformation, die den oberen Halbraum \mathbb{R}_+^3 auf das Innere einer Kugel abbildet. Für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{-e_3\}$ ist diese Abbildung durch

$$I : \mathbb{R}^3 \setminus \{-e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{-e_3\}, \quad x \mapsto -e_3 + \frac{1}{|x + e_3|^2}(x + e_3),$$

gegeben. Sie ist eine Inversion an der Kugel $B(-e_3, 1)$ mit Mittelpunkt $-e_3$ und Radius Eins (siehe Abbildung 3.2). Sie ist bijektiv auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{-e_3\}$ mit $I = I^{-1}$ und der obere Halbraum \mathbb{R}_+^3 wird durch die Kelvin-Transformation bijektiv auf den Kugel $B := B(-1/2e_3, 1/2)$ mit Radius $1/2$ um $-1/2e_3$ abgebildet. Ferner gilt $I(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \partial B \setminus \{-e_3\}$ (siehe z.B. [20, Kapitel 2, §2]). Für die Jacobi-Matrix von I gilt

$$I'(x) = \frac{1}{|x + e_3|^2}(E_{3 \times 3} - \frac{2}{|x + e_3|^2}(x + e_3)(x + e_3)^T).$$

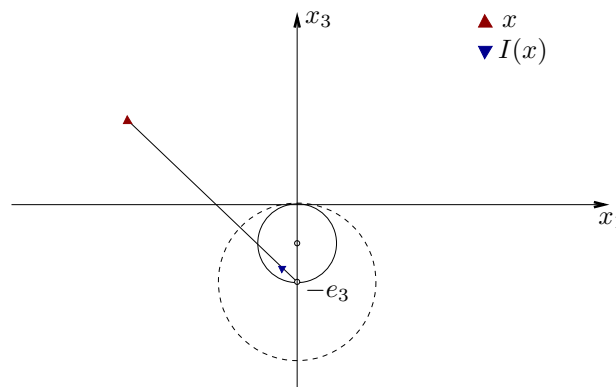


Abbildung 3.2: Die Kelvin-Transformation; Schnitt durch die Ebene $x_2 = 0$

Für eine Funktion u ist die Kelvin-Transformierte Hu durch

$$(Hu)(x) := \frac{1}{|x + e_3|}u(Ix)$$

definiert. Dann gilt $H^2u = u$.

Neben der Randwertaufgabe (3.7) auf dem Halbraum betrachten wir auch noch das Problem

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } B, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} + v = g \quad \text{auf } \partial B \tag{3.9}$$

auf der Kugel B , wobei zunächst die Randvorgaben in beiden Problemen hinreichend glatt seien. Ist u eine Lösung von (3.7), so ist $v := Hu$ harmonisch auf B und hat die Robin-Randwerte

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(y) + v(y) = \frac{1}{|y + e_3|^3}f(Iy) = \frac{1}{|y + e_3|^2}(Hf)(y),$$

löst also (3.9) mit Robin-Randwerten $\frac{1}{|y+e_3|^2}(Hf)(y)$.

Ist umgekehrt v eine Lösung von (3.9), so ist $u := Hv$ harmonisch auf \mathbb{R}_+^3 und hat die Neumann-Randwerte

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{1}{|x+e_3|^2} \left(H \frac{\partial v}{\partial \nu} \right)(x) + \frac{1}{|x+e_3|^2} (Hv)(x) = \frac{1}{|x+e_3|^2} (Hg)(x),$$

ist also eine Lösung von (3.7) mit $f(x) = \frac{1}{|x+e_3|^2} (Hg)(x)$.

Gilt für die Robin-Randwerte von v speziell

$$g(y) = H(|\cdot + e_3|^2 f)(y) \tag{3.10}$$

für $y \in \partial B \setminus \{-e_3\}$, so ist

$$(Hg)(x) = |x+e_3|^2 f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \tag{3.11}$$

d.h. u hat bei dieser Wahl von g gerade die Neumann-Randwerte f .

Den Nachweis, daß für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ durch (3.8) eine schwache Lösung des Neumann-Problems auf \mathbb{R}_+^3 in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ gegeben ist, d.h. daß u für alle $w \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ die Variationsgleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} \text{grad } u \cdot \text{grad } w \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f w \, ds$$

erfüllt, erbringen wir in drei Schritten:

- 1.) Für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ ist die durch (3.10) definierte Funktion g eine Funktion in $L^2(\partial B)$.
- 2.) Für $g \in L^2(\partial B)$ ist durch

$$v(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{|y-\tilde{y}|} g(\tilde{y}) \, ds_{\tilde{y}} \tag{3.12}$$

eine schwache Lösung des Robin-Problems auf B gegeben, d.h. v liegt in $H^1(B)$ und erfüllt

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dy + \int_{\partial B} v w \, ds = \int_{\partial B} g w \, ds$$

für alle $w \in H^1(B)$.

- 3.) Für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ seien $g \in L^2(\partial B)$ durch (3.10) und v durch (3.12) gegeben. Dann hat $u := Hv$ die Darstellung (3.8), liegt in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ und ist eine schwache Lösung des Neumann-Problems auf \mathbb{R}_+^3 .

Wir beginnen mit der ersten Aussage.

Lemma 3.3

Sei $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ und $g := H(|\cdot + e_3|^2 f)$. Dann liegt g in $L^2(\partial B)$.

Beweis:

Für $y \in \partial B \setminus \{-e_3\}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $y = I(x, 0)^T$, so daß wir eine Parametrisierung von ∂B über \mathbb{R}^2 haben. Dann ist das Oberflächenelement ds_y gemäß [18, Abschnitt 2.1] durch $ds_y = \sqrt{d} ds_x$ mit

$$d = \left| \frac{\partial I}{\partial x_1} \right|^2 \left| \frac{\partial I}{\partial x_2} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial I}{\partial x_1}, \frac{\partial I}{\partial x_2} \right\rangle^2 = \frac{1}{|(x, 0)^T + e_3|^8}$$

gegeben. Für die L^2 -Norm von g gilt deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} g^2 ds_y &= \int_{\partial B} \frac{1}{|y + e_3|^2} |Iy + e_3|^4 f^2(Iy) ds_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \frac{1}{|Ix + e_3|^2} |x + e_3|^4 f^2(x) \frac{1}{|x + e_3|^4} ds_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} |x + e_3|^2 f^2(x) ds_x \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} (1 + |x|)^2 f^2(x) ds_x = \|f\|_{L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

Damit ist $g \in L^2(\partial B)$ bewiesen. □

Ist $\Phi(x, y)$ eine Funktion, die

$$\Delta_y \Phi(x, y) = \delta(x - y)$$

auf B löst, so hat jede auf B harmonische Funktion v die Darstellung

$$v(x) = \int_{\partial B} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) v(y) ds_y - \int_{\partial B} \Phi(x, y) \frac{\partial v}{\partial \nu_y}(y) ds_y.$$

Löst v das Robin-Problem (3.9), so gilt weiter

$$v(x) = \int_{\partial B} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) v(y) ds_y - \int_{\partial B} \Phi(x, y) (g(y) - v(y)) ds_y.$$

Wenn wir die Funktion Φ so bestimmen können, daß sie die Randbedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) + \Phi(x, y) = 0 \quad \text{für } y \in \partial B$$

erfüllt, so gilt für v

$$v(x) = - \int_{\partial B} \Phi(x, y) g(y) ds_y.$$

Für die Kugel $B(x_0, r_0)$ ist eine solche Funktion für $x \in B(x_0, r_0) \setminus \{y\}$, $y \neq x_0$, durch

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{\left| \frac{|y-x_0|}{r_0}(x - x_0) - \frac{r_0}{|y-x_0|}(y - x_0) \right|} \right)$$

gegeben. Mit $x_0 = -1/2e_3$ und $r_0 = 1/2$ folgt für $y \in \partial B$

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x - y|} \quad \text{für } x \neq y.$$

Dies liefert uns die Darstellung (3.12) von v .

Lemma 3.4

Sei $g \in L^2_\diamond(B)$ und

$$v(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{|y - \tilde{y}|} g(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}}, \quad y \in B.$$

Dann liegt v in $H^1(B)$ und erfüllt $\Delta v = 0$ in B sowie

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w dy + \int_{\partial B} v w ds_y = \int_{\partial B} g w ds_y$$

für alle $w \in H^1(B)$. Ferner gilt noch

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + v = g$$

im L^2 -Sinn.

Beweis:

Nach [19, Theorem 1] ist v in $H^1(B)$, da v gerade das Zweifache des Einschichtpotentials für die Kugel B ist.

Das Einschichtpotential

$$\tilde{v}(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{|x - y|} \varphi(y) ds_y$$

ist genau dann eine Lösung des Robin-Problems (3.9), wenn φ eine Lösung der Randintegralgleichung

$$S\varphi + K\varphi + \frac{1}{2}\varphi = g$$

mit

$$\begin{aligned} S\varphi(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{|x - y|} \varphi(y) ds_y \\ K\varphi(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - y|} \varphi(y) ds_y \end{aligned}$$

ist. Die Dichte $\varphi = 2g$ ist eine Lösung dieser Randintegralgleichung, da die Summe der Kernfunktionen von S und K identisch Null ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - y|} + \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - y|} &= \frac{1}{|x - y|^3} (|x - y|^2 - \left\langle x - y, 2\left(x + \frac{1}{2}e_3\right) \right\rangle) \\ &= \frac{1}{|x - y|^3} \langle x - y, x - y - 2x - e_3 \rangle \\ &= -\frac{1}{|x - y|^3} \left\langle \left(x + \frac{1}{2}e_3\right) - \left(y + \frac{1}{2}e_3\right), x + \frac{1}{2}e_3 + y + \frac{1}{2}e_3 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{|x - y|^3} (|x + \frac{1}{2}e_3|^2 - |y + \frac{1}{2}e_3|^2) = 0, \end{aligned}$$

da x und y auf dem Rand von B liegen. Also gilt $\tilde{v} = v$. Nach [37, Theorem 8.24] erfüllt v für alle $w \in H^1(B)$ die Gleichung

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dy = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (2g + K(2g))w \, ds_y.$$

Wegen

$$2g + K(2g) = 2g + \underbrace{S(2g) + K(2g) - S(2g)}_{=0} = 2(g - Sg) = 2(g - v)$$

folgt daraus

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dy = \int_{\partial B} gw \, ds_y - \int_{\partial B} vw \, ds_y$$

für alle $w \in H^1(B)$. Also ist v eine schwache Lösung des Robin-Problems auf B . Als Einschichtpotential ist v harmonisch auf B . Nach Satz 2.20 hat v Neumann-Randwerte in $H^{-1/2}(\partial B)$ und es gilt

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dy = \int_{\partial B} \frac{\partial v}{\partial \nu} w \, ds_y \quad \forall w \in H^1(B).$$

Dies bedeutet aber gerade, daß $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ mit $g - v|_{\partial B}$ übereinstimmt und deshalb in $L^2(\partial B)$ liegt. Dies liefert schließlich $\frac{\partial v}{\partial \nu} + v|_{\partial B} = g$. \square

Satz 3.5

Für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ seien $g \in L^2(\partial B)$ durch (3.10) und v durch (3.12) gegeben. Dann hat $u := Hv$ die Darstellung

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \frac{f(\tilde{x})}{|\tilde{x} - x|} d\tilde{x},$$

liegt in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ und ist eine schwache Lösung des Neumann-Problems auf \mathbb{R}_+^3 . Ist f zusätzlich noch stetig, so ist u auch eine klassische Lösung des Neumann-Problems (3.7).

Beweis:

Für $u = Hv$ gilt unter Verwendung der Parametrisierung von ∂B über \mathbb{R}^2 aus dem Beweis von Lemma 3.3:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{|x + e_3|} \int_{\partial B} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|Ix - y|} g(y) \, ds_y \\ &= \frac{1}{|x + e_3|} \int_{\partial B} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|Ix - y|} \frac{1}{|y + e_3|} |Iy + e_3|^2 f(Iy) \, ds_y \\ &= \frac{1}{|x + e_3|} \int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|Ix - I\tilde{x}|} \frac{1}{|\tilde{x} + e_3|} f(\tilde{x}) \, d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Für $|Ix - I\tilde{x}|$ gilt

$$|Ix - I\tilde{x}|^2 = \left| \frac{1}{|x + e_3|^2} (x + e_3) - \frac{1}{|\tilde{x} + e_3|^2} (\tilde{x} + e_3) \right|^2 = \frac{1}{|x + e_3|^2 |\tilde{x} + e_3|^2} |x - \tilde{x}|^2.$$

Dies liefert für u

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \frac{1}{|x - \tilde{x}|} f(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

was gerade die gewünschte Darstellung ist.

Nach Lemma 3.4 ist für $g \in L^2(\partial B)$ durch (3.12) eine Funktion in $H^1(B)$ gegeben. Insbesondere ist dann $u = Hv$ in $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^3)$. Um nachzuweisen, daß u in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ liegt, müssen wir noch die Existenz der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} (1 + |x|^2)^{-1} u^2 dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}_+^3} |\text{grad } u|^2 dx \quad (3.13)$$

zeigen. Wir beginnen mit der gewichteten L^2 -Norm von u . Da für die Determinante der Jacobi-Matrix von I

$$|\det I'(y)| = \frac{1}{|y + e_3|^6}$$

gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^3} (1 + |x|^2)^{-1} u^2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{1}{1 + |x|^2} \frac{1}{|x + e_3|^2} v^2(Ix) dx \\ &= \int_B \frac{1}{1 + |Iy|^2} \frac{1}{|Iy + e_3|^2} v^2(y) \frac{1}{|y + e_3|^6} dy. \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung $|e_3 + z|^2 \leq 2(1 + |z|^2)$ folgt $|e_3 + Iy|^2 \leq 2(1 + |Iy|^2)$. Wegen $|e_3 + Iy|^2 = |y + e_3|^{-2}$ liefert dies

$$\frac{1}{1 + |Iy|^2} \leq 2|y + e_3|^2$$

und deshalb

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{1}{1 + |x|^2} u^2(x) dx \leq c \int_B v^2(y) \frac{1}{|y + e_3|^2} dy.$$

Nach [19, Theorem 1 ff.] ist $v \in H^{3/2}(B)$ und deshalb nach [1, Theorem 7.57] auch in $L^r(B)$ für alle $2 \leq r < \infty$. Wendet man auf das Integral auf der rechten Seite die Hölder-Ungleichung mit $p = 5/4$ und $q = 5$ an, so erhält man

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{1}{1 + |x|^2} u^2(x) dx \leq c \left(\int_B \left(\frac{1}{|y + e_3|^2} \right)^{5/4} dy \right)^{4/5} \left(\int_B (v^2)^5 dy \right)^{1/5}.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite existieren, da v in $L^{10}(B)$ und $|y + e_2|^{-1}$ in $L^{3-\varepsilon}(B)$, $\varepsilon > 0$, liegen. Als nächstes untersuchen wir die L^2 -Norm des Gradienten. Wegen $u(x) = \frac{1}{|x+e_3|} v(Ix)$ gilt nach der Kettenregel

$$\text{grad } u(x) = -\frac{1}{|x + e_3|^3} (x + e_3) v(Ix) + \frac{1}{|x + e_3|} (\text{grad } v)(Ix) I'(x),$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^3} |\text{grad } u|^2 dx &\leq 2 \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{1}{|x + e_3|^4} v^2(Ix) dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{1}{|x + e_3|^2} |(\text{grad } v)(Ix)|^2 \|I'(x)\|_2^2 dx. \end{aligned}$$

Für die Spektralnorm von I' erhalten wir wegen der Symmetrie von I'

$$\|I'(x)\|_2^2 = \rho(I'^*(x)I'(x)) = \rho(I'^2(x)) = \rho\left(\frac{1}{|x + e_2|^4} E_{3 \times 3}\right) = \frac{1}{|x + e_3|^4}.$$

Dies liefert uns für die L^2 -Norm des Gradienten

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^3} |\text{grad } u|^2 dx \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{1}{|x + e_3|^4} v^2(Ix) dx + \int_{\mathbb{R}_+^3} |(\text{grad } v)(Ix)|^2 \frac{1}{|x + e_3|^6} dx \right) \\ &= c \left(\int_B \frac{1}{|Iy + e_3|^4} v^2(y) |\det I'(y)| dy + \int_B |\text{grad } v(y)|^2 \frac{1}{|Iy + e_3|^6} |\det I'(y)| dy \right) \\ &= c \left(\int_B \frac{1}{|y + e_3|^2} v^2(y) dy + \int_B |\text{grad } v|^2 dy \right). \end{aligned}$$

Die Existenz des ersten Integrals auf der rechten Seite wurde oben bereits gezeigt, das zweite Integral existiert, da v in $H^1(B)$ liegt.

Als letztes müssen wir noch zeigen, daß u für alle $w \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} \text{grad } u \cdot \text{grad } w dx = \int_{\mathbb{R}^2} fw ds$$

erfüllt. Sei also $w \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ beliebig. Für $x \in \mathbb{R}_+^3$ und $y \in \mathbb{R}^2$ ist die Kernfunktion in der Darstellung (3.8) von u eine C^∞ -Funktion, so daß Differentiation und Integration auch für Funktionen $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ vertauscht werden dürfen. Deshalb gilt wie für stetige Randwerte $\Delta u = 0$ auf \mathbb{R}_+^3 . Da u zudem in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ liegt, folgt aus der Greenschen Formel und Lemma 3.4

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^3} \text{grad } u \cdot \text{grad } w dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} w ds_x = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial \nu} (Hv)w ds_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x + e_3|^2} H\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + v\right)w ds_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x + e_3|^2} (Hg)w ds_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} fw ds_x. \end{aligned}$$

Also ist u die schwache Lösung des Neumann-Problems in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$.

Ist f zusätzlich stetig, so ist u gemäß [20, Kapitel 2, §4] eine klassische Lösung von (3.7). Damit sind alle Aussagen des Satzes bewiesen. \square

Im nächsten Abschnitt werden wir die Beziehung zwischen klassischen und schwachen Lösungen der Laplace-Gleichung zu vorgegebenen Neumann-Randwerten für den zweidimensionalen Fall untersuchen.

3.2.2 Der zweidimensionale Fall

Ist f eine stetige Funktion auf \mathbb{R} mit

$$\int_{\mathbb{R}} \log(1 + \tilde{x}_1^2) |f(\tilde{x}_1)| d\tilde{x}_1 < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 = 0$$

so ist nach [20, Kapitel 2, §4] durch

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_1) \log((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2) d\tilde{x}_1 \quad (3.14)$$

die eindeutig bestimmte klassische Lösung u von

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \quad (3.15)$$

mit $\lim_{x_2 \rightarrow \infty} u(x_1, x_2) = 0$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ und beschränkter partieller Ableitung nach der zweiten Variablen gegeben.

Wir werden in diesem Abschnitt beweisen, daß für $f \in L_{\diamond}^{2,-1}(\mathbb{R})$ durch (3.14) eine schwache Lösung des Neumann-Problems auf \mathbb{R}_+^2 in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ gegeben ist, d.h. daß u für alle $w \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ die Variationsgleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \text{grad } u \cdot \text{grad } w \, dx = \int_{\mathbb{R}} f w \, ds$$

erfüllt. Wir werden dies wie im dreidimensionalen Fall mit Hilfe der Kelvin-Transformation zeigen. Diese ist für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{-e_2\}$ durch

$$I : \mathbb{R}^2 \setminus \{-e_2\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{-e_2\}, \quad x \mapsto -e_2 + \frac{1}{|x + e_2|^2} (x + e_2),$$

definiert und ist eine Inversion am Kreis $B(-e_2, 1)$ mit Mittelpunkt $-e_2$ und Radius Eins (siehe Abbildung 3.3). Sie ist bijektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{-e_2\}$ mit $I = I^{-1}$. Die obere Halbebene \mathbb{R}_+^2 wird durch die Kelvin-Transformation bijektiv auf den Kreis $B := B(-1/2e_2, 1/2)$ mit Radius $1/2$ um $-1/2e_2$ abgebildet. Ferner gilt $I(\mathbb{R} \times \{0\}) = \partial B \setminus \{-e_2\}$ (siehe z.B. [20, Kapitel 2, §2]).

Wir betrachten die beiden Neumann-Randwertprobleme (3.15) und

$$\Delta v = 0 \quad \text{in} \quad B, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = g \quad \text{auf} \quad \partial B \quad (3.16)$$

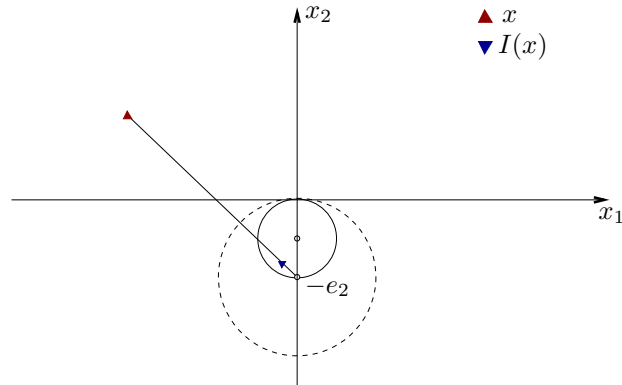


Abbildung 3.3: Die Kelvin-Transformation

auf der Halbebene \mathbb{R}_+^2 bzw. dem Kreis B mit hinreichend glatten Funktionen f und g . Ist u eine Lösung von (3.15), so ist $v(y) := u(Iy)$ harmonisch auf B und hat die Neumann-Randwerte

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{1}{|y + e_2|^2} f(Iy),$$

löst also (3.16) mit den Randwerten $\frac{1}{|y + e_2|^2} f(Iy)$.

Ist umgekehrt v eine Lösung von (3.16), so ist $u(x) := v(Ix)$ harmonisch auf \mathbb{R}_+^2 und hat die Neumann-Randwerte

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{1}{|x + e_2|^2} g(Ix),$$

ist also eine Lösung von (3.15) mit $f(x) = \frac{1}{|x + e_2|^2} g(Ix)$.

Gilt

$$g(y) = |Iy + e_2|^2 f(Iy) \tag{3.17}$$

für $y \in \partial B \setminus \{-e_2\}$, so ist

$$g(Ix) = |I^2x + e_2|^2 f(I^2x) = |x + e_2|^2 f(x), \quad x \in \mathbb{R} \times \{0\},$$

d.h. u hat bei dieser Wahl von g gerade die Neumann-Randwerte f .

Daß für $f \in L_\diamond^{2,-1}(\mathbb{R})$ durch (3.14) eine schwache Lösung des Neumann-Problems für die Laplace-Gleichung in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ gegeben ist, zeigen wir nun, indem wir die folgenden Aussagen beweisen:

1.) Für $f \in L_\diamond^{2,-1}(\mathbb{R})$ ist die durch (3.17) definierte Funktion g eine Funktion in $L_\diamond^2(\partial B)$.

2.) Für $g \in L_\diamond^2(\partial B)$ ist durch

$$v(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \log |y - \tilde{y}|^2 g(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}} + c, \quad y \in B, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{3.18}$$

eine schwache Lösung des Neumann-Problems auf B gegeben, d.h. v liegt in $H^1(B)$ und erfüllt

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dy = \int_{\partial B} gw \, ds$$

für alle $w \in \overline{H^1(B)}$.

- 3.) Für $g \in L^2_\diamond(\partial B)$ ist die durch (3.18) gegebene Funktion v Hölder-stetig auf jedem beschränkten Gebiet G , das ∂B in seinem Inneren enthält.
- 4.) Für $f \in L^{2,-1}_\diamond(\mathbb{R})$ seien $g \in L^2_\diamond(\partial B)$ durch (3.17) und v durch (3.18) gegeben. Dann hat $u(x) := v(Ix)$ die Darstellung

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_1) \log((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2) \, d\tilde{x}_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log(1 + \tilde{x}_1^2) f(\tilde{x}_1) \, d\tilde{x}_1 + c.$$

Wählt man die Konstante c in (3.18) so, daß $v(-e_2) = 0$ gilt, so hat u die Gestalt (3.14).

- 5.) Für $f \in L^{2,-1}_\diamond(\mathbb{R})$ seien $g \in L^2_\diamond(\partial B)$ durch (3.17) und v durch (3.18) mit $v(-e_2) = 0$ gegeben. Dann liegt $u(x) := v(Ix)$ in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ und ist eine schwache Lösung des Neumann-Problems auf \mathbb{R}_+^2 .

Wir beginnen mit der ersten Aussage:

Lemma 3.6

Sei $f \in L^{2,-1}_\diamond(\mathbb{R})$ und $g(y) := |Iy + e_2|^2 f(Iy)$. Dann liegt g in $L^2_\diamond(\partial B)$.

Beweis:

Für $y \in \partial B \setminus \{-e_2\}$ gilt

$$y = I \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_2 + \frac{1}{1+x_1^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \gamma(x_1), \tag{3.19}$$

d.h. wir haben eine Parametrisierung von $\partial B \setminus \{-e_2\}$ über \mathbb{R} . Für die Norm der Ableitung gilt

$$|\gamma'(x_1)| = \frac{1}{1+x_1^2}.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} g(y)^2 \, ds_y &= \int_{\partial B} |Iy + e_2|^4 f^2(Iy) \, ds_y \\ &= \int_{\mathbb{R}} |(x_1, 0)^T + e_2|^4 f^2(x_1) \frac{1}{1+x_1^2} \, dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x_1^2 + 1| f^2(x_1) \, dx_1 \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}} (|x_1| + 1)^2 f^2(x_1) \, dx_1 = c \|f\|_{L^{2,-1}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

d.h. g ist eine L^2 -Funktion. Es bleibt noch zu zeigen, daß g verschwindendes Integralmittel auf ∂B hat:

$$\int_{\partial B} g(y) ds_y = \int_{\partial B} |Iy + e_2|^2 f(Iy) ds_y = \int_{\mathbb{R}} f(x_1) dx_1 = 0,$$

d.h. für $f \in L^2_{\diamond}{}^{-1}(\mathbb{R})$ liegt g in $L^2_{\diamond}(\partial B)$. \square

Für den Kreis $B(x_0, r_0)$ ist die Neumannsche Funktion $N(x, y)$ für $x \in B(x_0, r_0) \setminus \{y\}$ durch

$$N(x, y) = - \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\log|x-y| + \log \left| \frac{|y-x_0|}{r_0}(x-x_0) - \frac{r_0}{|y-x_0|}(y-x_0) \right| \right), & y \neq x_0 \\ \frac{1}{2\pi} \log(r_0|x-y|), & y = x_0 \end{cases}$$

gegeben. Für hinreichend glattes g hat die Lösung v der Neumann-Randwertaufgabe auf $B(x_0, r_0)$ die Darstellung

$$v(y) = \int_{\partial B} N(y, \tilde{y})g(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}} + c, \quad y \in B,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Für $x_0 = -1/2e_2$ und $r_0 = 1/2$ erhalten wir gerade die Darstellung (3.18).

Lemma 3.7

Sei $g \in L^2_{\diamond}(B)$ und

$$v(y) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \log|y-\tilde{y}|^2 g(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}} + c, \quad y \in B,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dann liegt v in $H^1(B)$ und erfüllt

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w dy = \int_{\partial B} gw ds$$

für alle $w \in H^1(B)$,

Beweis:

Nach [19, Theorem 1] ist v in $H^1(B)$, da v gerade das Zweifache des Einschichtpotentials für den Kreis B ist. Die Dichte g ist eine Lösung der Randintegralgleichung

$$\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \log|x-y| \varphi(y) ds_y = g,$$

da die Kernfunktion $\frac{\partial}{\partial \nu_x} \log|x-y|$ auf ∂B konstant Eins ist und der Integraloperator deshalb durch

$$(K\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial B} \varphi(y) ds_y$$

gegeben ist. Wegen $g \in L^2_{\diamond}(\partial B)$ folgt $Kg = 0$, so daß $\varphi = g$ die Randintegralgleichung löst. Nach [37, Theorem 8.24] erfüllt dann v für alle $w \in H^1(B)$ die Gleichung

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } w dy = \int_{\partial B} gw ds_y$$

und die Behauptung des Lemmas ist gezeigt. \square

Lemma 3.8

Sei G ein beschränktes Gebiet, das den Rand ∂B in seinem Inneren enthält und sei $g \in L^2(\partial B)$. Dann ist

$$v(y) := \int_{\partial B} \log |y - \tilde{z}| g(\tilde{z}) ds_{\tilde{z}}$$

für alle $\alpha \in (0, 1/2]$ in $C^{0,\alpha}(G)$ und es gilt

$$\|v\|_{\alpha} := \sup_{y \in G} |v(y)| + \sup_{\substack{y_1, y_2 \in G, \\ y_1 \neq y_2}} \frac{|v(y_1) - v(y_2)|}{|y_1 - y_2|^{\alpha}} \leq C_{\alpha} \|g\|_{L^2(B)}.$$

Beweis:

Nach [19, Theorem 1 ff.] ist

$$g \mapsto \int_{\partial B} \log |\cdot - \tilde{z}| g(\tilde{z}) ds_{\tilde{z}}$$

eine stetige Abbildung von $L^2(\partial B)$ nach $H_{\text{loc}}^{3/2}(\mathbb{R}^2)$, insbesondere ist v also für jedes beschränkte Gebiet G in $H^{3/2}(G)$. Nach [46, Theorem 4.6.1] kann $H^{3/2}(G)$ für alle $\alpha \in (0, 1/2]$ stetig in den Raum $C^{0,\alpha}(G)$ der Hölder-stetigen Funktionen mit Exponent α eingebettet werden. Dies liefert die Behauptung. \square

Lemma 3.9

Für $f \in L_{\diamond}^{2,-1}(\mathbb{R})$ seien $g \in L_{\diamond}^2(\partial B)$ durch (3.17) und v durch (3.18) gegeben. Dann hat $u(x) := v(Ix)$ die Darstellung

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_1) \log((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2) d\tilde{x}_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log(1 + \tilde{x}_1^2) f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 + c.$$

Wählt man die Konstante c in (3.18) so, daß $v(-e_2) = 0$ gilt, so hat u die Gestalt (3.14).

Beweis:

Für $u = v \circ I$ gilt unter Verwendung der Parametrisierung (3.19) von ∂B über \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \log |Ix - \tilde{y}|^2 |I\tilde{y} + e_2|^2 f(I\tilde{y}) ds_{\tilde{y}} + c \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log |Ix - I(\tilde{x}_1, 0)^T|^2 |\tilde{x}_1^2 + 1| f(\tilde{x}_1) \frac{1}{\tilde{x}_1^2 + 1} d\tilde{x}_1 + c \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log |Ix - I(\tilde{x}_1, 0)^T|^2 f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 + c. \end{aligned}$$

Für das Argument des Logarithmus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 |Ix - I(\tilde{x}_1, 0)^T|^2 &= \left| \frac{1}{|x + e_2|^2} (x + e_2) - \frac{1}{\tilde{x}_1^2 + 1} (\tilde{x}_1, 1)^T \right|^2 \\
 &= \frac{1}{|x + e_2|^2} + \frac{1}{1 + \tilde{x}_1^2} - 2 \frac{1}{|x + e_2|^2 (1 + \tilde{x}_1^2)} (x + e_2)(\tilde{x}_1, 1)^T \\
 &= \frac{(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2}{|x + e_2|^2 (1 + \tilde{x}_1^2)}.
 \end{aligned}$$

Dies liefert für die Darstellung von u

$$\begin{aligned}
 u(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2) f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 + \frac{1}{2\pi} \log|x + e_2|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1}_{=0} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \log(1 + \tilde{x}_1^2) f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1}_{\text{existiert, da } f \in L^{2,-1}(\mathbb{R})} + c \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2) f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log(1 + \tilde{x}_1^2) f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 + c.
 \end{aligned}$$

Ist die Konstante c in der Definition von v durch

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \log|\tilde{y} + e_2|^2 g(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}}$$

gegeben, so erfüllt v offensichtlich $v(-e_2) = 0$. Die Konstante läßt sich mittels der Parametrisierung (3.19) auch als

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \log|\tilde{y} + e_2|^2 g(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \log|\tilde{y} + e_2|^2 |I\tilde{y} + e_2|^2 f(I\tilde{y}) ds_{\tilde{y}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log|I(\tilde{x}_1, 0)^T + e_2|^2 f(\tilde{x}_1) \frac{(1 + \tilde{x}_1^2)^2}{1 + \tilde{x}_1^2} d\tilde{x}_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log(1 + \tilde{x}_1^2) f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1
 \end{aligned}$$

schreiben, so daß wir für $u = v \circ I$ in diese Fall

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2) f(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1$$

erhalten, was gerade die Darstellung (3.14) ist. □

Satz 3.10

Für $f \in L_{\diamond}^{2,-1}(\mathbb{R})$ seien $g \in L_{\diamond}^2(\partial B)$ durch (3.17) und v durch (3.18) mit $v(-e_2) = 0$ gegeben. Dann liegt $u(x) := v(Ix)$ in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ und ist eine schwache Lösung des Neumann-Problems auf \mathbb{R}_+^2 .

Ist f zusätzlich noch stetig, so ist u auch eine klassische Lösung des Neumann-Problems (3.15).

Beweis:

Nach Lemma 3.7 ist für $g \in L^2_\diamond(\partial B)$ durch (3.18) eine Funktion in $H^1(B)$ gegeben. Insbesondere ist dann $u(x) := v(Ix)$ in $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$. Um nachzuweisen, daß die durch (3.14) gegebene Funktion u in $H^{1,1}_0(\mathbb{R}^2_+)$ liegt, müssen wir noch die Existenz der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} (1 + |x|^2)^{-1} u^2 dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^2_+} |\text{grad } u|^2 dx \quad (3.20)$$

nachweisen. Wir beginnen mit der L^2 -Norm des Gradienten. Wegen $u(x) = v(Ix)$ gilt nach der Kettenregel

$$\text{grad } u(x) = (\text{grad } v)(Ix)I'(x),$$

wobei $I'(x)$ die durch

$$I'(x) = \frac{1}{|x + e_2|^2} (E_{2 \times 2} - \frac{2}{|x + e_2|^2} (x + e_2)(x + e_2)^T)$$

gegebene Jacobi-Matrix von I ist. Deshalb gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} |\text{grad } u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2_+} |(\text{grad } v)(Ix)|^2 \|I'(x)\|_2^2 dx.$$

Für die Spektralnorm von I' erhalten wir wegen der Symmetrie von I'

$$\|I'(x)\|_2^2 = \rho(I'^*(x)I'(x)) = \rho(I'^2(x)) = \rho\left(\frac{1}{|x + e_2|^4} E_{2 \times 2}\right) = \frac{1}{|x + e_2|^4}.$$

Dies liefert uns für die L^2 -Norm des Gradienten

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2_+} |\text{grad } u|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2_+} |(\text{grad } v)(Ix)|^2 \frac{1}{|x + e_2|^4} dx \\ &= \int_B |\text{grad } v(y)|^2 \frac{1}{|Iy + e_2|^4} |\det I'(y)| dy. \end{aligned}$$

Es gilt

$$|\det I'(y)| = \frac{1}{|y + e_2|^4},$$

wir erhalten also

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} |\text{grad } u|^2 dx \leq \int_B |\text{grad } v|^2 dy.$$

Das Integral auf der rechten Seite existiert, da v in $H^1(B)$ liegt.

Als nächstes untersuchen wir die Existenz der gewichteten L^2 -Norm von u :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2_+} (1 + |x|^2)^{-1} u^2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2_+} (1 + |x|^2)^{-1} v^2(Ix) dx \\ &= \int_B (1 + |Iy|^2)^{-1} v^2(y) \frac{1}{|y + e_2|^4} dy. \end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung $|e_2 + z|^2 \leq 2(1 + |z|^2)$ und somit auch $|e_2 + Iy|^2 \leq 2(1 + |Iy|^2)$. Wegen $|e_2 + Iy|^2 = |y + e_2|^{-2}$ folgt dann

$$\frac{1}{1 + |Iy|^2} \leq 2|y + e_2|^2$$

und deshalb

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (1 + |x|^2)^{-1} u^2(x) dx \leq c \int_B v^2(y) \frac{1}{|y + e_2|^2} dy.$$

Nach Lemma 3.8 ist v Hölder-stetig mit Exponent $\alpha \in (0, 1/2]$. Zudem gilt $v(-e_2) = 0$, so daß wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} (1 + |x|^2)^{-1} u^2(x) dx &\leq c \int_B |y + e_2|^{2\alpha-2} dy \leq c \int_{B(-e_2,1)} |y + e_2|^{2\alpha-2} dy \\ &= c \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{r^{2-2\alpha}} dr d\theta = 2\pi \frac{c}{2\alpha} \end{aligned}$$

erhalten. Also existieren die beiden Integrale in (3.20) und u aus (3.14) liegt in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$. Als letztes müssen wir noch zeigen, daß u für alle $w \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \text{grad } u \cdot \text{grad } w dx = \int_{\mathbb{R}} fw ds$$

erfüllt. Wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ und der Stetigkeit der Operatoren

$$w \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^2} \text{grad } u \cdot \text{grad } w dx \quad \text{bzw.} \quad w \mapsto \int_{\mathbb{R}} fw ds$$

auf $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ genügt es, die Gültigkeit der Gleichung für $w \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ nachzuweisen. Sei also $w \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ beliebig. Dann existiert ein $\tilde{w} \in C_0^\infty(\overline{B})$ mit $w(x) = \tilde{w}(Ix)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} \text{grad } u \cdot \text{grad } w dx &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \text{grad } v(Ix) \cdot \text{grad } \tilde{w}(Ix) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{|x + e_2|^4} (\text{grad } v)(Ix) \cdot (\text{grad } \tilde{w})(Ix) dx \\ &= \int_B \frac{1}{|Iy + e_2|^4} \text{grad } v \cdot \text{grad } \tilde{w} |\det I'(y)| dy \\ &= \int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } \tilde{w} dy. \end{aligned}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} g\tilde{w} ds_y &= \int_{\partial B} |Iy + e_2|^2 f(Iy)\tilde{w}(y) ds_y = \int_{\mathbb{R}} (s^2 + 1)f(s)\tilde{w}(I(s,0)^T) \frac{1}{s^2 + 1} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} fw ds. \end{aligned}$$

Da nach Lemma 3.7

$$\int_B \text{grad } v \cdot \text{grad } \tilde{w} \, dy = \int_{\partial B} g \tilde{w} \, ds_y$$

gilt, ist gezeigt, daß u eine schwache Lösung des Neumann-Problems mit den Randwerten f in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ ist.

Ist f zusätzlich stetig, so ist u gemäß [20, Kapitel 2, §4] eine klassische Lösung von (3.15). Damit sind alle Aussagen des Satzes bewiesen. \square

Nach Satz 3.1 existiert für $\alpha > 1$ in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ eine schwache Lösung von (3.3) mit $\sigma \equiv \mathbf{1}$. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.10 ist durch (3.14) eine solche schwache Lösung gegeben:

Korollar 3.11

Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.10 erfüllt und es gelte zusätzlich $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ für ein $\alpha > 1$. Dann ist durch

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x}_1) \log((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2) \, d\tilde{x}_1$$

eine schwache Lösung von (3.3) mit $\sigma \equiv \mathbf{1}$ in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ gegeben.

Beweis:

Für $\alpha > 1$ ist $L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ in $L_\diamond^{2,-1}(\mathbb{R})$ und $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ enthalten, also folgt aus dem Beweis von Satz 3.10 bereits $u \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$. Wir müssen lediglich noch nachrechnen, daß u die Gleichung (3.3) für alle $v \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ erfüllt. Da der Raum $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ auch in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ dicht liegt, ergibt sich dies wie im Beweis von Satz 3.10. \square

3.3 Diffraktionsprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem für Kapitel 4 wichtigen Spezialfall stückweise konstanter Leitfähigkeiten σ beschäftigen, d.h. wir gehen von folgenden Voraussetzungen aus:

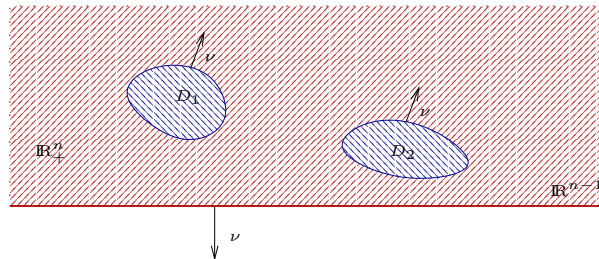


Abbildung 3.4: Halbraum \mathbb{R}_+^n mit Einschlüssen D_1 und D_2

Sei $D \subset \mathbb{R}_+^n$ eine Teilmenge, die in die Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Abschnitt 2.1 zerfalle. Zudem seien die Ränder ∂D_j hinreichend glatt. Mit ∂D bezeichnen wir die Vereinigung $\bigcup_{j=1}^N \partial D_j$ und mit ν jeweils den bezüglich \mathbb{R}_+^n bzw. D äußeren Normalenvektor auf \mathbb{R}^{n-1} und ∂D . Für die Leitfähigkeitsverteilung σ auf \mathbb{R}_+^n gelte

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa_j & \text{für } x \in D_j, \quad j = 1, \dots, N, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}, \end{cases} \quad (3.21)$$

mit positiven, von Eins verschiedenen Konstanten κ_j . Dies bedeutet, daß der obere Halbraum bis auf die *Einschlüsse* D_1, \dots, D_N ein bezüglich der Leitfähigkeit σ homogenes Gebiet ist.

Randwertprobleme mit stückweise glatten Koeffizienten heißen *Diffractionsprobleme*. Unter geeigneten Glattheitsforderungen an ∂D und die Neumann-Randvorgabe f kann man eine starke Form solcher Randwertprobleme herleiten (siehe zum Beispiel Abschnitt V.4 über Diffractionsprobleme in [38]).

Als erstes wollen wir eine Beziehung zwischen der inneren und der äußeren Normalenableitung von Lösungen u des Problems (3.3) für stückweise konstante Leitfähigkeiten beweisen.

Lemma 3.12

Die Teilmenge $D \subset \mathbb{R}_+^n$, $n = 2, 3$ erfülle die Voraussetzungen dieses Abschnittes und für die Leitfähigkeit σ gelte entweder $\sigma = \mathbf{1}$ oder (3.21). Ferner sei entweder

(i) $n = 3$, $\alpha > 3/2$, $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$,

(ii) $n = 3$, $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ oder

(iii) $n = 2$, $\alpha > 1$, $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$.

Dann gilt für die Normalenableitung einer Lösung u von (3.3) auf den Rändern der Einschlüsse

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \kappa_j \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

wobei mit $\frac{\partial u^+}{\partial \nu}$ bzw. $\frac{\partial u^-}{\partial \nu}$ die Normalenableitung von $u|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}}$ bzw. $u|_D$ gemeint ist und $\kappa_j = 1$ zu setzen ist, falls $\sigma = \mathbf{1}$.

Beweis:

O.B.d.A. bestehe D nur aus einer Zusammenhangskomponente, so daß die Leitfähigkeit von der Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa, & x \in D \\ 1, & x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D} \end{cases}$$

ist mit einer positiven Konstante κ . Wir zeigen die Behauptung unter der Voraussetzung (i).

Sei v aus $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ mit beschränktem Träger $\text{supp}(v) \subset \mathbb{R}_+^3$ und $\overline{D} \subset \text{supp}(v)$ beliebig. Wähle $U \subset \mathbb{R}_+^3$ so, daß U einen hinreichend glatten Rand hat und $\text{supp}(v)$ enthält. Setzt

man v durch Null auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \text{supp}(v)$ fort, so gilt

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} f v \, ds = \int_{\mathbb{R}_+^3} \sigma \, \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx \\
 &= \int_{U \setminus \overline{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx + \kappa \int_D \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx \\
 &= \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds - \int_{\partial D} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} v \, ds + \kappa \int_{\partial D} \frac{\partial u^-}{\partial \nu} v \, ds \\
 &= - \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) v \, ds,
 \end{aligned}$$

da u nach dem Weylschen Lemma harmonisch auf $U \setminus \overline{D}$ und in D ist. Somit ist $\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = 0$ gezeigt. \square

Im Zusammenhang mit stückweise konstanten Leitfähigkeiten σ werden in Kapitel 4 außer dem schon bekannten und untersuchten Variationsproblem (3.3) noch weitere Variationsgleichungen auftreten, für die wir die Existenz von Lösungen benötigen. Dazu führen wir den Raum

$$H_\diamond^{-1/2}(\partial D) = H_\diamond^{-1/2}(\partial D_1) \times \dots \times H_\diamond^{1/2}(\partial D_N)$$

ein, wobei

$$H_\diamond^{-1/2}(\partial D_j) = \left\{ \phi \in H^{-1/2}(\partial D_j) : \int_{\partial D_j} \phi \, ds = 0 \right\}$$

ist.

Nach [11, Abschnitt 2.1] kann $H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ mit dem Dualraum $(H_\diamond^{1/2}(\partial D))'$ von $H_\diamond^{1/2}(\partial D)$ bezüglich der von $L^2(\partial D)$ induzierten Topologie identifiziert werden. Da $H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ und $H_\diamond^{1/2}(\partial D)$ Hilberträume und deshalb reflexiv sind, bedeutet dies zugleich die Identifizierbarkeit von $(H_\diamond^{-1/2}(\partial D))'$ und $H_\diamond^{1/2}(\partial D)$. Mit $\langle \phi, \psi \rangle_{L^2(\partial D)} = \int_{\partial D} \phi \psi \, ds$ werden wir im folgenden nicht nur das Innenprodukt in $L^2(\partial D)$ sondern auch die duale Paarung $\langle H_\diamond^{-1/2}(\partial D), H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rangle$ bezeichnen.

Wir betrachten nun das Variationsproblem

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v \, ds - \int_{\partial D} \varphi v \, ds, \quad (3.22)$$

dessen Lösung eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ mit vorgegebenen Neumann-Randwerten f und φ auf \mathbb{R}^{n-1} bzw. ∂D ist.

Lemma 3.13

Die Teilmenge $D \subset \mathbb{R}_+^n$, $n = 2, 3$ erfülle die Voraussetzungen dieses Abschnittes. Ferner sei $Q_0 = \text{Span} \{ \mathbf{1} \}$.

- (i) Ist $\alpha > 3/2$, $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$, so hat (3.22) eine Lösung $u \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$. Diese Lösung ist eindeutig bis auf eine additive Konstante und es gilt

$$\|u\|_{H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})/Q_0} \leq c_\alpha (\|f\|_{L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial D)}).$$

(ii) Ist $\alpha > 1$, $f \in L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ und $\varphi \in H_{\diamond}^{-1/2}(\partial D)$, so hat (3.22) eine Lösung $u \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$. Diese Lösung ist eindeutig bis auf eine additive Konstante und es gilt

$$\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})/Q_0} \leq c_{\alpha}(\|f\|_{L^{2,-\alpha}(\mathbb{R})} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial D)}).$$

(iii) Für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ besitzt das Problem (3.22) genau eine Lösung $u \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ und es gilt

$$\|u\|_{1,1} \leq c(\|f\|_{L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial D)}).$$

Dieses Lemma wird wie die Sätze 3.1 und 3.2 bewiesen. Wir wollen aber auch noch zeigen, daß für eine Lösung u von (3.22) durch f und φ gerade die Neumann-Randwerte von u auf \mathbb{R}^{n-1} bzw. ∂D gegeben sind.

Für den Fall $n = 3$ und den Lösungsraum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ folgt dies aus der Greenschen Formel, denn die Lösung u von (3.22) ist nach dem Weylschen Lemma harmonisch auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}$ und deshalb gilt für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f v \, ds - \int_{\partial D} \varphi w \, ds = \int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds.$$

Insbesondere folgt für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ mit $v|_{\mathbb{R}^2} = 0$

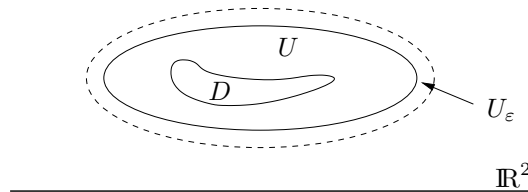
$$\int_{\partial D} \varphi v \, ds = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds,$$

d.h. φ ist die äußere Normalenableitung von u auf ∂D . Daraus folgt dann auch

$$\int_{\mathbb{R}^2} f v \, ds = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds$$

d.h. f ist die Normalenableitung von u auf \mathbb{R}^2 .

Im Fall der Lösungsräume $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ und $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$ müssen wir etwas anders argumentieren. Wir führen dies für $n = 3$ vor. Wir betrachten eine beschränkte Umgebung U von D mit $\overline{D} \subset U \subset \mathbb{R}_+^3$ und hinreichend glattem Rand ∂U , so daß ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_{\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}_+^3 : \text{dist}(U, x) < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}_+^3$. Sei v eine beliebige Funktion aus $H^1(U \setminus \overline{D})$. Diese setzen wir zu einer Funktion $v \in H^1(U_{\varepsilon} \setminus \overline{D})$ mit $v|_{\partial U_{\varepsilon}} = 0$ und dann zu einer Funktion $v \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ mit $v \equiv 0$ auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus U_{\varepsilon}$ fort.



Da u wiederum nach dem Weylschen Lemma auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}$ harmonisch ist, gilt mit der Greenschen Formel für beschränkte Gebiete und mit (3.22)

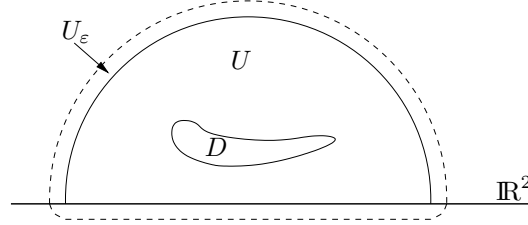
$$\begin{aligned}
 - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds &= \int_{U \setminus \overline{D}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \\
 &= \int_{U_\varepsilon \setminus \overline{D}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx - \int_{U_\varepsilon \setminus U} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx - \int_{U_\varepsilon \setminus U} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f v \, ds - \int_{\partial D} \varphi v \, ds - \int_{\partial U_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds.
 \end{aligned}$$

Da $v|_{\mathbb{R}^2} = 0$ und $v|_{\partial U_\varepsilon} = 0$ ist, folgt

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds = \int_{\partial D} \varphi v \, ds,$$

d.h. φ ist die äußere Normalenableitung von u auf ∂D .

Sei nun $r > 0$ beliebig mit $\overline{D} \subset B_r(0) \cap \mathbb{R}_+^3 =: U$. Ferner sei $v \in H^1(U \setminus \overline{D})$ beliebig. Wir setzen v zu einer Funktion $v \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ fort, indem wir zunächst eine Fortsetzung auf $H^1(U_\varepsilon \setminus \overline{D})$ mit $v|_{\partial U_\varepsilon} = 0$ bilden, diese Fortsetzung wiederum durch Null auf $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ fortsetzen und dann die Einschränkung auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}$ betrachten.



Dann gilt mit (3.22)

$$\int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f v \, ds - \int_{\partial D} \varphi v \, ds = \int_{|s| < r + \varepsilon} f v \, ds - \int_{\partial D} \varphi v \, ds.$$

Andererseits erhalten wir mit der Greenschen Formel für beschränkte Gebiete

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx &= \int_{(U_\varepsilon \setminus \overline{D}) \cap \mathbb{R}_+^3} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \\
 &= \int_{\partial(U_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^3)} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds \\
 &= \int_{|s| < r + \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds - \int_{\partial D} \varphi v \, ds.
 \end{aligned}$$

Da $r > 0$ beliebig war, ist f die Normalenableitung von u auf \mathbb{R}^2 .

Eine weitere Variationsgleichung, die in Kapitel 4 eine Rolle spielen wird, ist die folgende:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v \, ds - \int_{\partial D} \varphi v \, ds. \quad (3.23)$$

Im Gegensatz zum vorherigen Problem (3.22) suchen wir jetzt eine Lösung auf dem ganzen Halbraum bzw. der ganzen Halbebene. Das nächste Lemma macht eine Aussage über die Lösbarkeit von (3.23).

Lemma 3.14

Die Teilmenge $D \subset \mathbb{R}_+^n$, $n = 2, 3$ erfülle die Voraussetzungen dieses Abschnittes. Die Leitfähigkeit σ sei von der Form (3.21) oder es gelte $\sigma = \mathbf{1}$. Ferner sei $Q_0 = \operatorname{Span} \{\mathbf{1}\}$.

- (i) Sei $\alpha > 3/2$. Für $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ existiert eine Lösung $u \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ von (3.23). Diese Lösung ist bis auf eine additive Konstante eindeutig und es gilt

$$\|u\|_{H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)/Q_0} \leq c_\alpha (\|f\|_{L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial D)}).$$

- (ii) Sei $\alpha > 1$. Für $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ und $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ existiert eine Lösung $u \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ von (3.23). Diese Lösung ist bis auf eine additive Konstante eindeutig und es gilt

$$\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)/Q_0} \leq c_\alpha (\|f\|_{L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial D)}).$$

- (iii) Für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ existiert genau eine Lösung $u \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ von (3.23) und es gilt

$$\|u\|_{1,1} \leq c (\|f\|_{L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial D)}).$$

Auch diese Aussagen lassen sich wie die Aussagen der Sätze 3.1 und 3.2 beweisen. Eine Lösung des Variationsproblems (3.23) ist nach dem Weylschen Lemma harmonisch in $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ und in D und hat auf dem Rand \mathbb{R}^{n-1} die Neumann-Randwerte f . Die Neumann-Ableitung auf dem Rand des Einschlusses D multipliziert mit σ springt um φ , wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 3.15

Die Teilmenge $D \subset \mathbb{R}_+^n$, $n = 2, 3$ erfülle die Voraussetzungen dieses Abschnittes. Für die Leitfähigkeit σ gelte $\sigma = \mathbf{1}$ oder (3.21). Ferner sei entweder

- (i) $n = 3$, $\alpha > 3/2$, $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$,
- (ii) $n = 3$, $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ oder
- (iii) $n = 2$, $\alpha > 1$, $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ und $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$.

Dann gilt für die Normalenableitung der Lösungen u von (3.23) auf den Rändern der Einschlüsse

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \kappa_j \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = \varphi|_{D_j} \quad \text{auf } \partial D_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

wobei mit $\frac{\partial u^+}{\partial \nu}$ bzw. $\frac{\partial u^-}{\partial \nu}$ die Normalenableitung von $u|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}}$ bzw. $u|_D$ gemeint ist und $\kappa_j = 1$ zu setzen ist, falls $\sigma = \mathbf{1}$ gilt.

Beweis:

O.B.d.A. bestehe D nur aus einer Zusammenhangskomponente und die Leitfähigkeit σ sei von der Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa, & x \in D \\ 1, & x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D} \end{cases}$$

mit einer positiven Konstanten κ . Wir zeigen die Behauptung unter der Voraussetzung (i).

Sei $v \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ mit beschränktem Träger $\text{supp}(v) \subset \mathbb{R}_+^3$ und $\bar{D} \subset \text{supp}(v)$ beliebig. Wähle $U \subset \mathbb{R}_+^3$ so, daß U einen hinreichend glatten Rand hat und $\text{supp}(v)$ enthält. Dann folgt aus (3.23)

$$\begin{aligned} - \int_{\partial D} \varphi v \, ds &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \, \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= \int_{U \setminus \bar{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx + \kappa \int_D \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds + \int_{\partial D} \left(\kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right) v \, ds \\ &= \int_{\partial D} \left(\kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right) v \, ds \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = \varphi|_{\partial D}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

3.3.1 Ein Lösungsverfahren für Diffraktionsprobleme mit stückweise konstanter Leitfähigkeit

Wir gehen in diesem Abschnitt zunächst davon aus, daß der Einschluß D nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht. Wie in der Arbeit von B. Hofmann (siehe [33]) versuchen wir, die Lösung u des Diffraktionsproblems mit stückweise konstanter Leitfähigkeit σ als Summe der Lösung u der Laplace-Gleichung auf \mathbb{R}_+^3 bzw. \mathbb{R}_+^2 zu den Neumann-Randwerten f und eines modifizierten Einschichtpotentials u_s zu konstruieren, dessen Dichte die Lösung einer Randintegralgleichung auf dem Rand des Einschusses D ist.

Sei $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ bzw. $f \in L_{\diamond}^{2,-1}(\mathbb{R})$. Dann ist gemäß Abschnitt 3.2 die eindeutige (schwache) Lösung u mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ der Laplace-Gleichung durch

$$u_{\mathbf{1}}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(s) \log|x-s|^2 \, ds, \quad x \in \mathbb{R}_+^2,$$

bzw. durch

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(s)}{|x-s|} \, ds, \quad x \in \mathbb{R}_+^3,$$

gegeben.

Als Kernfunktionen für die Einschichtoperatoren verwenden wir statt der Fundamentallösungen der Laplace-Gleichung die folgenden um einen Spiegelterm erweiterten Funktionen:

$$G_N(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}(\log|x-y| + \log|x-y'|) & \text{im 2-dimensionalen Fall} \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{|x-y'}\right) & \text{im 3-dimensionalen Fall} \end{cases}. \quad (3.24)$$

Dabei ist y' der an der Ebene $\mathbb{R} \times \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gespiegelte Punkt y . Mit diesen Kernfunktionen definieren wir die Integraloperatoren S und K^* durch

$$(S\varphi)(x) := \int_{\partial D} G_N(x, y)\varphi(y) ds_y, \quad \varphi \in C(\partial D), \quad x \in \mathbb{R}_+^3, \quad (3.25)$$

$$(K^*\varphi)(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial G_N}{\partial \nu_x}(x, y)\varphi(y) ds_y, \quad \varphi \in C(\partial D), \quad x \in \partial D. \quad (3.26)$$

Da die Differenz der modifizierten Fundamentallösung und der Fundamentallösung in beiden Variablen harmonisch auf $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ bzw. $\mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3$ ist, bleiben die für den Einschichtoperator bekannten Sprungrelationen (siehe u.a. [18, Kapitel 2]) erhalten. Setzen wir $u_s := S\varphi$, so ist u_s daher harmonisch auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \partial D$ und stetig auf ∂D . Zudem gilt $\frac{\partial u_s}{\partial \nu} = 0$ auf \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R} , da $\frac{\partial G_N}{\partial \nu_x}$ auf dem Rand von \mathbb{R}_+^3 bzw. \mathbb{R}_+^2 wegen des Spiegelterms verschwindet.

Das nächste Lemma zeigt, daß u_s in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ liegt und die Variationsgleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad } u_s \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\partial D} \varphi v \, ds \quad (3.27)$$

löst. Mit Lemma 3.14 erhalten wir darüber hinaus, daß u_s im dreidimensionalen Fall auch die eindeutige Lösung dieses Problems ist. Im zweidimensionalen Fall ist es die eindeutige Lösung, die die Bedingung $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_s(x) = 0$ erfüllt.

Lemma 3.16

(i) Sei $n = 3$ und $\varphi \in C(\partial D)$. Dann liegt u_s in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ und löst die Variationsgleichung (3.27) für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$.

(ii) Sei $n = 2$, $\varphi \in C(\partial D)$ mit $\int_{\partial D} \varphi \, ds_x = 0$ und $\alpha \geq 1$. Dann liegt u_s in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ und löst die Variationsgleichung (3.27) für alle $v \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$.

Beweis:

Wir beginnen mit dem dreidimensionalen Fall und zeigen als erstes, daß u_s in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ liegt. Nach [19] ist $u_s = S\varphi \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^3)$, so daß man nur noch zeigen muß, daß $\|u_s\|_{1,1}$ existiert. Dies folgt aber aus der Tatsache, daß

$$|u_s(x)| = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{und} \quad |\text{grad } u_s(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow \infty$$

gilt. Sei nun $v \in H^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ beliebig. Da $\Delta u_s = 0$ auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \bar{D}$ bzw. auf D gilt, erhalten wir aus den Greenschen Formel auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \bar{D}$ und D

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^3} \text{grad } u_s \cdot \text{grad } v \, dx &= \int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus \bar{D}} \text{grad } u_s \cdot \text{grad } v \, dx + \int_D \text{grad } u_s \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\frac{\partial u_s}{\partial \nu}}_{=0} v \, ds_x - \int_{\partial D} \frac{\partial u_s^+}{\partial \nu} v \, ds_x + \int_{\partial D} \frac{\partial u_s^-}{\partial \nu} v \, ds_x \\ &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u_s^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u_s^+}{\partial \nu} \right) v \, ds_x. \end{aligned}$$

Für die Normalenableitung von u_s auf ∂D gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s^-}{\partial \nu_x}(x) &= \int_{\partial D} \frac{\partial G_N}{\partial \nu_x}(x, y) \varphi(y) \, ds_y + \frac{1}{2} \varphi(x), \\ \frac{\partial u_s^+}{\partial \nu_x}(x) &= \int_{\partial D} \frac{\partial G_N}{\partial \nu_x}(x, y) \varphi(y) \, ds_y - \frac{1}{2} \varphi(x), \end{aligned}$$

so daß

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} \text{grad } u_s \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\partial D} \varphi v \, ds_x$$

für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ gezeigt ist.

Kommen wir nun zum zweidimensionalen Fall. Wiederum nach [19] ist $u_s = S\varphi \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^2)$, so daß man nur noch zeigen muß, daß $\|u_s\|_{1,\alpha}$ existiert. Es genügt, dies für $\alpha = 1$ zu zeigen.

Sei r_0 so groß, daß $D \subset B_{r_0}(0)$ gilt. Sei $R > 4r_0$ und $\Omega_R := \mathbb{R}_+^2 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_R$

$$\begin{aligned} u_s(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} (\log|x-y|^2 + \log|x-y'|^2) \varphi(y) \, ds_y \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\log \frac{|x-y|^2}{|x|^2} + \log \frac{|x-y'|^2}{|x|^2} \right) \varphi(y) \, ds_y - \frac{1}{2\pi} 2 \log|x|^2 \underbrace{\int_{\partial D} \varphi(y) \, ds_y}_{=0} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\log\left(1 + \frac{|y|^2 - 2\langle x, y \rangle}{|x|^2}\right) + \log\left(1 + \frac{|y'|^2 - 2\langle x, y' \rangle}{|x|^2}\right) \right) \varphi(y) \, ds_y. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_R$ und $y \in B_{r_0}(0)$ sei $q(x, y) := \frac{|y|^2 - 2\langle x, y \rangle}{|x|^2}$. Dann gilt

$$|q(x, y)| = \frac{1}{|x|^2} \left| |y|^2 - 2\langle x, y \rangle \right| \leq \frac{1}{|x|^2} (|y|^2 + 2|x||y|) \leq \frac{r_0^2}{|x|^2} + \frac{2r_0}{|x|}.$$

Dies liefert einerseits

$$q(x, y) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty$$

und andererseits wegen $|x| > 4r_0$

$$|q(x, y)| \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{2} < 1.$$

Da y' der an $\mathbb{R} \times \{0\}$ gespiegelte Punkt y ist, gilt ebenso $q(x, y') = O(1/|x|)$ und $|q(x, y')| < 1$. Für $|x| \rightarrow \infty$ gilt deshalb für die Kernfunktion von $S\varphi$

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \frac{|y|^2 - 2\langle x, y \rangle}{|x|^2}\right) &= q(x, y) + O(q^2) = q(x, y) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \\ \log\left(1 + \frac{|y'|^2 - 2\langle x, y' \rangle}{|x|^2}\right) &= q(x, y') + O(q^2) = q(x, y') + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \end{aligned}$$

und somit

$$u_s(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Ist $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_R$, so gilt für den Gradienten von u_s :

$$\text{grad } u_s(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{1}{|x-y|^2}(x-y) + \frac{1}{|x-y'|^2}(x-y') \right) \varphi(y) ds_y.$$

Für $|x-y|^{-2}$ gilt

$$\frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{|x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2} = \frac{1}{|x|^2} \frac{1}{1 + \frac{|y|^2 - 2\langle x, y \rangle}{|x|^2}} = \frac{1}{|x|^2} \frac{1}{1 - (-q(x, y))},$$

und analog

$$\frac{1}{|x-y'|^2} = \frac{1}{|x|^2} \frac{1}{1 - (-q(x, y'))}.$$

Wie wir bereits gezeigt haben, sind $|q(x, y)|$ und $|q(x, y')|$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_R$ kleiner Eins, so daß wir mit der geometrischen Reihe für $|x| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-y|^2} &= \frac{1}{|x|^2} (1 + O(q)) = \frac{1}{|x|^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \quad \text{und} \\ \frac{1}{|x-y'|^2} &= \frac{1}{|x|^2} (1 + O(q)) = \frac{1}{|x|^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \end{aligned}$$

erhalten. Dies liefert

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|x-y|^2} (x_i - y_i) \varphi(y) ds_y \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|x|^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) (x_i - y_i) \varphi(y) ds_y \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\frac{x_i}{|x|^2} \int_{\partial D} \varphi(y) ds_y}_{=0} - \frac{1}{|x|^2} \int_{\partial D} y_i \varphi(y) ds_y + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|x-y'|^2} (x_1 - y_1) \varphi(y) ds_y &= \frac{1}{|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \\ -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|x-y'|^2} (x_2 + y_2) \varphi(y) ds_y &= \frac{1}{|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \end{aligned}$$

Für den Gradienten von u_s ergibt das die Abschätzung

$$|\text{grad } u_s(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Damit ist die Existenz von $\|u_s\|_{1,1}$ bewiesen und es bleibt zu zeigen, daß u_s die Variationsgleichung (3.27) für alle $v \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ löst. Da $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ dicht in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ liegt, genügt es (3.27) für beliebiges $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ zu beweisen, was wie der Nachweis von (3.27) im dreidimensionalen Fall funktioniert. \square

Setzen wir $u := u_1 + u_s$, so ist u harmonisch auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \partial D$. Da u_1 eine schwache Lösung der Laplace-Gleichung mit den Neumann-Randwerten f ist, folgt unter den Voraussetzungen von Lemma 3.16 aus der Greenschen Formel auf D und der Sprungrelation der Normalenableitung von u_s auf ∂D

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx + (\kappa - 1) \int_D \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v ds_x + \int_{\partial D} \varphi v ds_x + (\kappa - 1) \int_D \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v ds_x + \int_{\partial D} \left(\frac{1}{2}(\kappa + 1)\varphi + (\kappa - 1) \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + (\kappa - 1)K^* \varphi \right) v ds \end{aligned}$$

für alle $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. $v \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$. Deshalb ist u genau dann eine schwache Lösung des Diffraktionsproblems, wenn die Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ die Integralgleichung

$$\left(2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} K^* + I \right) \varphi = -2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial D} \quad (3.28)$$

auf ∂D löst und im zweidimensionalen Fall noch $\int_{\partial D} \varphi ds_x = 0$ erfüllt.

Das nächste Lemma zeigt, daß eine solche Lösung φ von (3.28) existiert. Dabei ist zu beachten, daß die rechte Seite von (3.28) stetig ist, da der Abschluß des Einschusses D in \mathbb{R}_+^n enthalten ist, also $\text{dist}(\partial D, \partial \mathbb{R}_+^n) > 0$ gilt. Deshalb ist für $x \in \partial D$ die Kernfunktion in der Definition von u_1 eine C^∞ -Funktion und somit $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}$ für einen Einschluß mit hinreichend glattem Rand ∂D (etwa C^2) eine stetige Funktion auf ∂D . Da u_1 harmonisch ist auf \mathbb{R}_+^n , gilt zudem $\int_{\partial D} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} ds_x = 0$, so daß die rechte Seite von (3.28) alle Voraussetzungen des nun folgenden Lemmas erfüllt.

Lemma 3.17

Sei $n = 2, 3$ und $D \subset \mathbb{R}_+^n$ eine beschränkte, einfach zusammenhängende Teilmenge mit einem C^2 -Rand, deren Abschluß in \mathbb{R}_+^n enthalten ist. Sei ferner $g \in C(\partial D)$ und $\kappa \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Im zweidimensionalen Fall gelte zusätzlich $\int_{\partial D} g ds_x = 0$. Dann hat die Randintegralgleichung

$$\left(2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}K^* + I\right)\varphi = -2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}g \quad (3.29)$$

im dreidimensionalen Fall genau eine Lösung $\varphi \in C(\partial D)$ und im zweidimensionalen Fall genau eine Lösung $\varphi \in C_\diamond(\partial D)$, wobei

$$C_\diamond(\partial D) := \left\{ \varphi \in C(\partial D) : \int_{\partial D} \varphi ds_x = 0 \right\}$$

sei.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den zweidimensionalen Fall und zeigen, daß jede Lösung $\varphi \in C(\partial D)$ von (3.29) mit einer rechten Seite $g \in C_\diamond(\partial D)$ ebenfalls in $C_\diamond(\partial D)$ liegt. Zur Abkürzung setzen wir $c := 2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ und integrieren $K^*\varphi$ über den Rand des Einschlusses.

$$\begin{aligned} c \int_{\partial D} (K^*\varphi)(x) ds_x &= c \int_{\partial D} \int_{\partial D} \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \log|x-y| \varphi(y) ds_y ds_x \\ &\quad + c \int_{\partial D} \int_{\partial D} \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \log|x-y'| \varphi(y) ds_y ds_x \\ &=: c(I_1 + I_2). \end{aligned}$$

Für das zweite Integral gilt

$$I_2 = \int_{\partial D} \varphi(y) \int_{\partial D} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \log|x-y'|^{-1} ds_x ds_y.$$

Das innere Integral ist identisch Null, da die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2\pi} \log|x-y'|^{-1}$ harmonisch auf \mathbb{R}_+^2 ist. Für das erste Integral erhalten wir

$$I_1 = \int_{\partial D} \varphi(y) \int_{\partial D} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \log|x-y|^{-1} ds_x ds_y.$$

Das innere Integral hat nach [37, Example 6.14] den Wert $-1/2$, so daß insgesamt

$$c \int_{\partial D} (K^*\varphi)(x) ds_x = -\frac{1}{2}c \int_{\partial D} \varphi(y) ds_y$$

gilt. Nach Voraussetzung gilt $\int_{\partial D} g ds_x = 0$. Durch Integration der Randintegralgleichung über den Rand ∂D erhalten wir also

$$0 = -c \int_{\partial D} g ds_x = c \int_{\partial D} (K^*\varphi)(x) ds_x + \int_{\partial D} \varphi(y) ds_y = \left(-\frac{1}{2}c + 1\right) \int_{\partial D} \varphi(y) ds_y.$$

Da für alle $\kappa \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{1}{2}c = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \neq 0$$

gilt, ist damit gezeigt, daß φ verschwindendes Integralmittel auf ∂D hat.

Wir wollen nun mittels der Fredholm-Alternative beweisen, daß die Randintegralgleichung genau eine Lösung in $C(\partial D)$ bzw. $C_\diamond(\partial D)$ besitzt. Sei dazu $\varphi \in C(\partial D)$ bzw. $\varphi \in C_\diamond(\partial D)$ eine Lösung der homogenen Randintegralgleichung und sei v das zugehörige Einschichtpotential

$$v(x) = \int_{\partial D} G_N(x, y) \varphi(y) ds_y.$$

Dann ist v nach Lemma 3.16 die schwache Lösung von

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad } v \cdot \text{grad } w dx = \int_{\partial D} \varphi w ds_x$$

in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ bzw. $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ mit $\alpha \geq 1$ und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad } v \cdot \text{grad } w dx &= \int_{\partial D} \varphi w ds_x + (\kappa - 1) \int_{\partial D} \frac{\partial v^-}{\partial \nu} w ds_x \\ &= \int_{\partial D} w \left(\varphi + (\kappa - 1) \left(K^* \varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \right) ds_x \\ &= \int_{\partial D} w \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\kappa + 1) \varphi + (\kappa - 1) K^* \varphi \right)}_{=0} ds_x = 0, \end{aligned}$$

d.h. v löst zudem die Variationsgleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad } v \cdot \text{grad } w dx = 0.$$

Diese Variationsgleichung hat auch die Lösung $\tilde{v} \equiv 0$. Da für $n = 3$ die Lösung in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ eindeutig ist, folgt $v \equiv 0$ im dreidimensionalen Fall. Für $n = 2$ und ein festes $\alpha > 1$ ist diese Variationsgleichung bis auf eine additive Konstante eindeutig lösbar in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$, es gilt also $v \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Da $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0$ ist, folgt auch für den zweidimensionalen Fall $v \equiv 0$.

Aus den Sprungbedingungen für die Normalenableitung von v auf dem Rand ∂D erhalten wir dann

$$\int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} G_N(x, y) ds_y + \frac{1}{2} \varphi(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} G_N(x, y) ds_y - \frac{1}{2} \varphi(x)$$

und somit $\varphi \equiv 0$. Damit ist $\mathcal{N}(2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} K^* + I) = \{0\}$ gezeigt.

Da D eine C^2 -Rand hat, besitzt der Operator K^* einen schwach singulären Kern und ist somit ein kompakter Operator von $C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ und somit auch von $C_\diamond(\partial D) \rightarrow C_\diamond(\partial D)$ (vergleiche u.a. [37, Theorem 6.15 und folgendes]). Mit der Fredholm-Alternative folgt die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung in diesen Räumen. \square

Die Ergebnisse dieses Abschnittes fassen wir in einem Satz zusammen:

Satz 3.18

Sei $n = 2, 3$ und $D \subset \mathbb{R}_+^n$ eine einfach zusammenhängende beschränkte Teilmenge mit C^2 -Rand, deren Abschluß in \mathbb{R}_+^n enthalten ist. Der Leitfähigkeitskoeffizient sei durch (3.21) gegeben.

- (i) Sei $\alpha \geq 1$, $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ und u_1 die durch (3.14) gegebene Lösung der Laplace-Gleichung zu den Randwerten f . Setzt man $u_s := S\varphi$, wobei $\varphi \in C(\partial D)$ die Lösung der Randintegralgleichung (3.28) und S der modifizierte Einschichtoperator aus (3.25) ist, so ist

$$u := u_1 + u_s$$

die schwache Lösung von (3.3) in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

- (ii) Sei $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ und u_1 die durch (3.8) gegebene Lösung der Laplace-Gleichung. Setzt man $u_s := S\varphi$, wobei $\varphi \in C(\partial D)$ die Lösung der Randintegralgleichung (3.28) und S der modifizierte Einschichtoperator aus (3.25) ist, so ist durch

$$u := u_1 + u_s$$

die schwache Lösung von (3.3) in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ gegeben.

Zerfällt D in die beschränkten Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N , die jeweils einen C^2 -Rand haben, deren Abschlüsse in \mathbb{R}_+^n enthalten sind und die paarweise leeren Schnitt haben, so kann man diese Situation auf den obigen Fall zurückführen.

Die Lösung u des Diffraktionsproblems ist dann durch

$$u = u_1 + \sum_{j=1}^N S_j \varphi_j$$

gegeben, wobei $S_j \varphi_j$ das Einschichtpotential aus (3.25) zum Rand ∂D_j ist und die Dichtefunktionen $\varphi_j \in C(\partial D_j)$ das Integralgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 K_1^* & c_1 \partial S_2 / \partial \nu_1 & \cdots & c_1 \partial S_N / \partial \nu_1 \\ c_2 \partial S_1 / \partial \nu_2 & c_2 K_2^* & \cdots & c_2 \partial S_N / \partial \nu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N \partial S_1 / \partial \nu_N & c_N \partial S_2 / \partial \nu_N & \cdots & c_N K_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_1 \partial u_1 / \partial \nu_1 \\ c_2 \partial u_1 / \partial \nu_2 \\ \vdots \\ c_N \partial u_1 / \partial \nu_N \end{pmatrix}.$$

lösen. Dabei sind die Konstanten c_j durch $c_j := 2(\kappa_j - 1)/(\kappa_j + 1)$ definiert, ν_j ist der äußere Normalenvektor auf ∂D_j und K_j^* ist der Integraloperator aus (3.26) auf dem Rand ∂D_j . Mit $\frac{\partial S_i}{\partial \nu_j}$, $i \neq j$, bezeichnen wir den Operator

$$\frac{\partial S_i}{\partial \nu_j} : C(\partial D_i) \rightarrow C(\partial D_j), \quad \left(\frac{\partial S_i}{\partial \nu_j} \varphi \right)(x) := \int_{\partial D_i} \frac{\partial G_N}{\partial \nu_j(x)}(x, y) \varphi(y) ds_y, \quad x \in \partial D_j.$$

Für die Lösbarkeit dieses Integralgleichungssystems erhält man eine zu Lemma 3.17 analoge Aussage. Dabei ist zu beachten, daß alle auftretenden Integraloperatoren kompakt auf dem jeweils zugehörigen Raum $C(\partial D_j)$ der stetigen Funktionen sind, da die Kernfunktionen entweder schwach singulär oder stetig sind.

3.3.2 Isolatoren

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir noch den Spezialfall, daß die Leitfähigkeit in den Einschlüssen Null ist, d.h. es handelt sich bei den Einschlüssen um elektrisch isolierende Einschlüsse, kurz um *Isolatoren*. In diesem Fall kann innerhalb von D kein Strom fließen, d.h. der Fluß $\frac{\partial u^+}{\partial \nu}$ über den Rand ∂D muß Null sein. Also muß das Potential u die Variationsgleichung

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v \, ds \quad (3.30)$$

lösen. Aus Lemma 3.13 erhalten wir unmittelbar die folgenden Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen dieses Variationsproblems:

Korollar 3.19

Sei $Q_0 = \text{Span} \{1\}$.

- (i) Ist $\alpha > 3/2$ und $f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$, so existiert genau dann eine Lösung u in $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ von (3.30), wenn das Randintegral $\int_{\mathbb{R}^2} f \, ds$ verschwindet. Diese Lösung ist eindeutig bis auf eine additive Konstante und es gilt

$$\|u\|_{H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})/Q_0} \leq c_\alpha \|f\|_{L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)}.$$

- (ii) Ist $\alpha > 1$ und $f \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$, so existiert genau dann eine Lösung u in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$ von (3.30), wenn das Randintegral $\int_{\mathbb{R}} f \, ds$ verschwindet. Diese Lösung ist eindeutig bis auf eine additive Konstante und es gilt

$$\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})/Q_0} \leq c_\alpha \|f\|_{L^{2,-\alpha}(\mathbb{R})}.$$

- (iii) Für $f \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ existiert genau eine Lösung $u \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ von (3.30) und es gilt

$$\|u\|_{1,1} \leq c \|f\|_{L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)}.$$

4 Charakterisierung von Einschlüssen

In der elektrischen Impedanztomographie kann bei gegebener Leitfähigkeit σ und gegebenem Randstrom f das zugehörige Spannungspotential u nur am Rand des Gebietes \mathbb{R}_+^n gemessen werden, d.h. man mißt die Dirichletwerte von u und beobachtet die sogenannte *Neumann-Dirichlet-Abbildung*

$$\Lambda : f \mapsto u|_{\mathbb{R}^{n-1}},$$

die eine Verknüpfung des Lösungsoperators $f \mapsto u$ und des Spuroperators $u \mapsto u|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ ist. In diesem Kapitel wollen wir mittels dieser Abbildung eine explizite Charakterisierung der Einschlüsse D angeben. Wir benutzen dazu die Faktorisierungsmethode, wie sie unter anderem von Kirsch in [36] im Zusammenhang mit inversen Streuproblemen und von Brühl in [11] und [12] im Zusammenhang mit der elektrischen Impedanztomographie auf beschränkten Gebieten verwendet wird.

In Abschnitt 4.1 geben wir einige Eigenschaften der Neumann-Dirichlet-Abbildung an. In Abschnitt 4.2 betrachten wir den Fall stückweise konstanter Leitfähigkeiten und leiten eine Faktorisierung des Differenzoperators $\Lambda - \Lambda_1$ der Form

$$\Lambda - \Lambda_1 = LFL'$$

her, wobei Λ_1 die Neumann-Dirichlet-Abbildung zur Leitfähigkeit $\sigma = \mathbf{1}$ ist, L und L' zueinander duale Operatoren sind und F ein zu sich selbst dualer Isomorphismus ist. Anschließend untersuchen wir den Fall beschränkter Meßbereiche, d.h. der Randstrom f wird nur auf einem beschränkten Teil des Randes angelegt und das resultierende Potential wird auch nur auf diesem Bereich gemessen. Dies führt auf die sogenannte *lokale Neumann-Dirichlet-Abbildung* $\tilde{\Lambda}$, die man mittels eines Projektionsoperators P auch als $\tilde{\Lambda} = P\Lambda P'$ schreiben kann. Für diese lokale Neumann-Dirichlet-Abbildung zeigen wir in Abschnitt 4.3.1, daß die Bildräume von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}$ und von PL gleich sind. In Abschnitt 4.4 geben wir schließlich explizit Funktionen an, die im Bildraum von PL liegen und mit deren Hilfe wir die Einschlüsse charakterisieren können. Zum Abschluß des Kapitels erweitern wir die Ergebnisse auf nichtkonstante Leitfähigkeiten.

4.1 Die Neumann-Dirichlet-Abbildung

Wir betrachten das Variationsproblem

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v \, ds \quad (4.1)$$

aus Kapitel 3. Die Leitfähigkeit σ sei in $L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ und erfülle

$$\underline{\sigma} := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}_+^n} \sigma(x) > 0. \quad (4.2)$$

In Kapitel 3 haben wir gesehen, daß die bekannte Integraldarstellung von Lösungen des Neumann-Problems für die Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Fall auch die schwache Lösung in dem gewichteten Sobolev-Raum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ liefert. Deshalb werden wir uns im Dreidimensionalen zunächst auf den Lösungsraum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3)$ beschränken. Die Neumann-Dirichlet-Abbildung ist dann als Verknüpfung des Lösungs- und des Spurooperators für $\alpha \geq 1$ ein Operator auf folgenden Räumen:

$$\Lambda : \begin{cases} L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2), \\ f \mapsto g := \Lambda f = u|_{\mathbb{R}^2}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ist $\alpha > 1$, so ist Λ wegen der Kompaktheit des Spurooperators (siehe Satz 2.8) ebenfalls kompakt.

Im zweidimensionalen haben wir als Lösungsraum den Raum $H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$, $\alpha > 1$, mit einem normalisierenden Funktional ℓ (siehe (3.6)). Wählt man für ℓ eines der beiden Funktionale (2.7), (2.8), so liegen die Dirichletwerte der Lösung des Variationsproblems (4.1) im Raum

$$L_\ell^{2,\alpha}(\mathbb{R}) := \{g \in L^{2,\alpha}(\mathbb{R}) : \ell g = 0\},$$

so daß die Neumann-Dirichlet-Abbildung als Verknüpfung des Lösungsoperators $f \mapsto u$ und des Spurooperators $u \mapsto u|_{\mathbb{R}}$ durch

$$\Lambda : \begin{cases} L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}) \rightarrow L_\ell^{2,\alpha}(\mathbb{R}), \\ f \mapsto g := \Lambda f = u|_{\mathbb{R}} \end{cases} \quad (4.4)$$

gegeben ist. In den angegebenen Räumen ist Λ ein stetiger linearer Operator. Wegen der Kompaktheit des Spurooperators ist Λ sogar kompakt.

Bemerkung 4.1

Der Raum $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ ist ein Hilbertraum und daher reflexiv, d.h. zu jedem stetigen Funktional A auf $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ existiert ein $f \in L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $A(g) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho_\alpha^{-2} f g ds$. Definiert man $\tilde{f} := \rho_\alpha^{-2} f$ so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho_\alpha^2 \tilde{f}^2 ds = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho_\alpha^2 \rho_\alpha^{-4} f^2 ds = \|f\|_{L^{2,\alpha}}^2 < \infty,$$

d.h. \tilde{f} ist ein Element von $L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Umgekehrt definiert jedes $\tilde{f} \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ durch $g \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f} g ds$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, d.h. wir können $L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $(L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}))'$ identifizieren.

Der Raum $L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, also selbst wieder ein Hilbertraum und daher reflexiv, d.h. zu jedem stetigen Funktional A auf $L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ existiert ein $f \in L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $A(g) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho_\alpha^{-2} f g ds$. Definiert man $\tilde{f} := \rho_\alpha^{-2} f$, so ist \tilde{f} wie eben gezeigt in $L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ und erfüllt zudem

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f} ds = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho_\alpha^{-2} f ds = 0,$$

ist also sogar ein Element von $L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Umgekehrt definiert jedes $\tilde{f} \in L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ durch $g \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}g \, ds$ ein stetiges lineares Funktional auf $L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, d.h. wir können $L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $(L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}))'$ ebenfalls identifizieren.

Im folgenden verwenden wir deshalb - soweit nicht anders angegeben - stets das normalisierende Funktional ℓ_1 .

Das folgende Lemma gibt einige wichtige Eigenschaften der Neumann-Dirichlet-Abbildung Λ an (vgl. auch [12, Lemma 2.1]). Dabei bezeichnen wir mit

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi \varphi \, ds$$

nicht nur das Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ sondern wegen Bemerkung 4.1 auch die duale Paarung $\langle L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}), L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}) \rangle$.

Lemma 4.2

Seien $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ beschränkte Leitfähigkeiten mit der Eigenschaft (4.2). Ferner gelte entweder

(i) $n = 2, \alpha > 1$ und $0 \neq f, \tilde{f} \in L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$, oder

(ii) $n = 3$ und $0 \neq f, \tilde{f} \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$,

und es seien $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ die zugehörige Neumann-Dirichlet-Abbildungen. Dann gilt:

(a) $\langle f, \Lambda \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle \Lambda f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$

(b) $\langle f, \Lambda f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} > 0$

(c) Ist $\sigma_1 \leq \sigma_2, \sigma_1 \neq \sigma_2$, so gilt $\langle f, \Lambda_1 f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \geq \langle f, \Lambda_2 f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$.

Beweis:

Wir zeigen die Aussagen (a)-(c) unter der Voraussetzung (i).

Seien $u, \tilde{u} \in H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)$ die Lösungen von (4.1) zu den Randwerten f bzw. \tilde{f} . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \tilde{u} \, dx &= \int_{\mathbb{R}} f \tilde{u} \, ds = \int_{\mathbb{R}} f(\Lambda \tilde{f}) \, ds \\ \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma \operatorname{grad} \tilde{u} \cdot \operatorname{grad} u \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} u \, ds = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\Lambda f) \, ds, \end{aligned}$$

so daß (a) gezeigt ist. Mit $f = \tilde{f}$ ergibt sich

$$\langle f, \Lambda f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f u \, ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u \, dx = \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma |\operatorname{grad} u|^2 \, dx > 0,$$

da $f \neq 0$ und somit $u \neq \text{const}$. Damit ist (b) gezeigt.

Nach [21, Kapitel VII, §1] kann u auch als die eindeutige Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{v \in H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma |\text{grad } v|^2 dx - \langle f, v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right\}$$

charakterisiert werden. Der Wert des Minimums ist $-\frac{1}{2} \langle f, \Lambda f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Seien u_1, u_2 die Lösungen von (4.1) zu den Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2 . Dann ergibt sich folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_1 f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma_1 |\text{grad } u_1|^2 dx - \langle f, u_1 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma_1 |\text{grad } u_2|^2 dx - \langle f, u_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma_2 |\text{grad } u_2|^2 dx - \langle f, u_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= -\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_2 f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Damit ist auch (c) bewiesen. □

In Abschnitt 3.3.2 haben wir auch den Fall betrachtet, daß Einschlüsse D existieren, in denen die Leitfähigkeit Null ist. Unter den Voraussetzungen von Korollar 3.19 ist der Lösungsoperator $f \mapsto u$ auch bei isolierenden Einschlüssen ein stetiger Operator in den dort angegebenen Räumen. Die in Lemma 4.2 gezeigten Eigenschaften der Neumann-Dirichlet-Abbildung bleiben ebenfalls erhalten. Beim Beweis der Monotonieeigenschaft muß man das Minimierungsproblem lediglich durch

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} |\text{grad } u|^2 dx - \langle f, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \right\}$$

ersetzen.

4.2 Die Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda$

Wir betrachten zunächst die Situation stückweise konstanter Leitfähigkeiten σ und eines einzigen Einschlusses D . Der Einschluß D sei beschränkt und einfach zusammenhängend mit hinreichend glattem Rand. Ferner sei $\overline{D} \subset \mathbb{R}_+^n$ und für die Leitfähigkeitsverteilung σ auf \mathbb{R}_+^n gelte

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa, & x \in D \\ 1, & x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D} \end{cases}$$

mit einer positiven, von Eins verschiedenen Konstanten κ . Mit Λ bezeichnen wir die im vorherigen Abschnitt eingeführte Neumann-Dirichlet-Abbildung zur Leitfähigkeit σ und

mit Λ_1 die Neumann-Dirichlet-Abbildung zur homogenen Leitfähigkeit $\sigma = 1$. Ziel ist es nun wie in [11], [12] eine Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_1$ der Form

$$\Lambda - \Lambda_1 = LFL'$$

anzugeben, wobei L und L' zueinander duale Operatoren und F ein zu sich selbst dualer Isomorphismus ist.

Die Operatoren L und F in der Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_1$ werden implizit durch die Lösungen geeigneter Randwertprobleme festgelegt. Den Operator L definieren wir mittels der Lösung des Variationsproblems

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dx = - \int_{\partial D} \varphi w \, ds. \quad (4.5)$$

Lemma 3.13 besagt, daß

- für $n = 3$ und $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ eine eindeutige Lösung v von (4.5) in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$,
- und für $n = 2$, $\alpha > 1$ und $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ eine eindeutige Lösung v von (4.5) in $H_{0,\ell_1}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$

existiert. Den Operator L definieren wir dann als Verknüpfung des Lösungs- und des Spuroperators durch

$$L : \begin{cases} H_\diamond^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2), & n = 3, \quad \alpha \geq 1 \\ H_\diamond^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}), & n = 2, \quad \alpha > 1 \end{cases}, \quad \varphi \mapsto v|_{\mathbb{R}^{n-1}}. \quad (4.6)$$

Der Operator L bildet also die auf dem inneren Rand - d.h. dem Rand ∂D des Einschlusses - vorgegebenen Neumann-Randwerte auf die Dirichletwerte der Lösung von (4.5) auf dem äußeren Rand, d.h. dem Rand \mathbb{R}^{n-1} , ab. Insbesondere hängt L nicht von der Leitfähigkeit im Inneren des Einschlusses ab.

Als nächstes bestimmen wir den zu L dualen Operator L' . Dazu betrachten wir das Variationsproblem

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad } v' \cdot \text{grad } w \, dx = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi' w \, ds. \quad (4.7)$$

Aus Lemma 3.13 erhalten wir wiederum, daß

- für $n = 3$ und $\varphi' \in L^{2,-1}(\mathbb{R}^2)$ eine eindeutige Lösung v' in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$,
- und für $n = 2$, $\alpha > 1$ und $\varphi' \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ eine eindeutige Lösung v' in $H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$

existiert, wobei das normalisierende Funktional ℓ durch $\ell(w) = \int_{\partial D} w \, ds$ gegeben sei. Der durch

$$L' : \begin{cases} L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\partial D), & \varphi' \mapsto v'|_{\partial D} - \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} v' \, ds, & n = 3, \quad \alpha \geq 1 \\ L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\partial D), & \varphi' \mapsto v'|_{\partial D}, & n = 2, \quad \alpha > 1 \end{cases}, \quad (4.8)$$

definierte Operator ist der zu L duale Operator. Wir weisen das exemplarisch für den zweiten Fall nach. Sei v die Lösung von (4.5) und v' die Lösung von (4.7). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \varphi', L\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi' v \, ds = - \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D}} \text{grad } v' \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= \int_{\partial D} \varphi v' \, ds = \langle L'\varphi', \varphi \rangle_{L^2(\partial D)}. \end{aligned}$$

Der Operator L' bildet die auf dem äußeren Rand gegebenen Neumann-Werte auf die Dirichlet-Werte der Lösung von (4.7) auf dem Rand des Einschlusses ab.

Der Operator L ist injektiv, denn die Lösung v von (4.5) zu gegebenem $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ hat nach Abschnitt 3.3 verschwindende Neumann-Randwerte auf \mathbb{R}^{n-1} . Ist nun $L\varphi = v|_{\mathbb{R}^2} = 0$, so hat die harmonische Funktion v verschwindende Cauchy-Daten auf \mathbb{R}^{n-1} . Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Cauchy-Problems auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ (vgl. [20, Kapitel 2, §2]) folgt $v \equiv 0$ und somit auch $\varphi = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial D} = 0$, d.h. L ist injektiv.

Auch der duale Operator L' ist injektiv. Sei dazu φ' in $L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ bzw. $L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ und v' die Lösung von (4.7). Dann hat v' nach Abschnitt 3.3 verschwindende Neumann-Randwerte auf ∂D . Ist $L'\varphi' = 0$, so ist $v'|_{\partial D} \equiv \text{const}$. Aus der eindeutigen Lösbarkeit des Cauchy-Problems folgt $v' \equiv \text{const}$ auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ und somit $\varphi' = \frac{\partial v'}{\partial \nu}|_{\mathbb{R}^{n-1}} = 0$.

Das folgende Lemma liefert die gewünschte Zerlegung von $\Lambda - \Lambda_1$.

Lemma 4.3

Sei $\kappa \neq 1$. Dann gilt $\Lambda - \Lambda_1 = LFL'$, wobei L und L' durch (4.6) und (4.8) gegeben sind und $F : H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ ein Isomorphismus mit $F' = F$ ist.

Beweis:

Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}) := \begin{cases} L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2), & n = 3, \alpha \geq 1 \\ L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}), & n = 2, \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad H(\mathbb{R}_+^n) := \begin{cases} H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3), & n = 3 \\ H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2), & n = 2, \alpha > 1 \end{cases}.$$

Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1})$ fest, $u \in H(\mathbb{R}_+^n)$ die Lösung von (4.1) und $u_1 \in H(\mathbb{R}_+^n)$ die Lösung des Problems für die homogene Leitfähigkeit $\sigma = \mathbf{1}$.

Der Beweis des Lemmas erfolgt in vier Schritten:

- (i) Wir zeigen als erstes, daß die Differenz $(u - u_1)|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}}$ eine Lösung von (4.5) mit $\varphi = \frac{\partial(u-u_1)^+}{\partial \nu}|_{\partial D}$ ist, wobei mit $\frac{\partial(u-u_1)^+}{\partial \nu}|_{\partial D}$ die Normalenableitung von $(u - u_1)|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}}$ auf ∂D gemeint ist. Dies liefert uns den Zusammenhang

$$L\left(\frac{\partial(u - u_1)^+}{\partial \nu}\Big|_{\partial D}\right) = (u - u_1)|_{\mathbb{R}^{n-1}} = (\Lambda - \Lambda_1)f \tag{4.9}$$

zwischen L und $\Lambda - \Lambda_1$.

(ii) Definiert man die Operatoren

$$G : \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H_{\diamond}^{-1/2}(\partial D), \quad f \mapsto \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}, \quad (4.10)$$

bzw.

$$G_1 : \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H_{\diamond}^{-1/2}(\partial D), \quad f \mapsto \frac{\partial u_1^+}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}, \quad (4.11)$$

so erhalten wir die Faktorisierung $\Lambda - \Lambda_1 = L(G - G_1)$. Unser nächster Schritt besteht darin, den Operator $G - G_1$ näher zu untersuchen. Dazu werden die dualen Operatoren G' und G_1' bestimmt.

(iii) Im dritten Schritt definieren wir den Operator F und weisen nach, daß $(G - G_1)' = LF$ gilt.

(iv) Wenn wir schließlich gezeigt haben, daß F ein Isomorphismus mit $F = F'$ ist, ergibt sich $G - G_1 = FL'$ und damit die gewünschte Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_1$.

Wir beginnen mit dem Beweis des Zusammenhangs (4.9) zwischen L und $\Lambda - \Lambda_1$. Sei $w \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ beliebig. Wir schreiben w als Summe zweier Funktionen w_1 und w_2 , wobei w_1 einen beschränkten Träger U mit hinreichend glattem Rand sowie verschwindende Randwerte auf \mathbb{R}^{n-1} habe und $w_2|_{\partial D} = 0$ gelte. Setzt man w_2 durch Null auf D fort, erhält man eine Funktion $w_2 \in H(\mathbb{R}_+^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad}(u - u_1) \cdot \text{grad} w \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad}(u - u_1) \cdot \text{grad} w_1 \, dx + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad}(u - u_1) \cdot \text{grad} w_2 \, dx \\ &= \int_U \text{grad}(u - u_1) \cdot \text{grad} w_1 \, dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad} u \cdot \text{grad} w_2 \, dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad} u_1 \cdot \text{grad} w_2 \, dx. \end{aligned}$$

Da u und u_1 Lösungen von (4.1) sind, ist

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad} u \cdot \text{grad} w_2 \, dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad} u_1 \cdot \text{grad} w_2 \, dx = 0.$$

Da u und u_1 nach dem Weylschen Lemma harmonisch auf U sind, folgt mit der Greenschen Formel

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad}(u - u_1) \cdot \text{grad} w \, dx = \int_{\partial U} \frac{\partial(u - u_1)}{\partial \nu} w_1 \, ds = - \int_{\partial D} \frac{\partial(u - u_1)^+}{\partial \nu} w \, ds,$$

da $w|_{\partial D} = w_1|_{\partial D}$ ist und w_1 auf dem anderen Teil des Randes von $U = \text{supp}(w_1)$ verschwindende Randwerte hat. Also löst die Differenz $u - u_1$ das Problem (4.5) mit $\varphi = \frac{\partial(u - u_1)^+}{\partial \nu} \Big|_{\partial D} \in H^{-1/2}(\partial D)$. Wir müssen nun noch zeigen, daß φ verschwindendes Integralmittel auf ∂D hat. Sei dazu $v \in H(\mathbb{R}_+^n)$ mit $v \equiv 1$ auf D , $v|_{\mathbb{R}^{n-1}} = 0$ und

beschränktem Träger $U = \text{supp}(v)$ mit hinreichend glattem Rand. Dann gilt einerseits nach der Greenschen Formel auf $U \setminus \bar{D}$

$$\int_{U \setminus \bar{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, ds = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds - \int_{\partial D} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} v \, ds = - \int_{\partial D} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \, ds$$

und andererseits wegen (4.1) und $v|_{\mathbb{R}^{n-1}} = 0$

$$\int_{U \setminus \bar{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, ds = \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f v \, ds = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß $\frac{\partial u^+}{\partial \nu}$ verschwindendes Integralmittel auf ∂D hat. Ebenso zeigt man dies für $\frac{\partial u_1^+}{\partial \nu}$, so daß $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ folgt und somit der Zusammenhang (4.9) zwischen den Operatoren $\Lambda - \Lambda_1$ und L gezeigt ist. Damit ist Teil (i) bewiesen.

Definiert man die Operatoren G und G_1 wie in (4.10) bzw. (4.11), so haben wir die Faktorisierung $\Lambda - \Lambda_1 = L(G - G_1)$. Der zweite Schritt des Beweises besteht nun darin, den zu G bzw. G_1 dualen Operator zu bestimmen. Wir führen dies für G durch, da dies den Spezialfall G_1 enthält.

Sei $\psi \in H^{1/2}(\partial D)$ und $\hat{w} \in H^1(D)$ die eindeutige schwache Lösung des Dirichletproblems

$$\int_D \text{grad } \hat{w} \cdot \text{grad } v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(D), \quad \hat{w}|_{\partial D} = -\psi, \quad (4.12)$$

auf D mit den Randwerten $-\psi$. Dann hat \hat{w} Neumann-Randwerte $\frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu}$ in $H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$. Mit diesen Neumann-Randwerten betrachten wir das Variationsproblem

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad } \tilde{w} \cdot \text{grad } v \, dx = -\kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} v \, ds, \quad (4.13)$$

das nach Lemma 3.14 eine eindeutig bestimmte Lösung $\tilde{w} \in H(\mathbb{R}_+^n)$ hat. Wir setzen \hat{w} durch Null auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}$ fort (beachte, daß diese Fortsetzung nicht in $H(\mathbb{R}_+^n)$ liegt) und definieren w durch $w = \hat{w} + \tilde{w}$. Dann gilt $w|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} = \tilde{w}|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D})$ und $w|_D \in H^1(D)$. Wir zeigen nun, daß durch

$$G' : \begin{cases} H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2), & n = 3, \quad \alpha \geq 1 \\ H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rightarrow L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}), & n = 2, \quad \alpha > 1 \end{cases}, \quad \psi \mapsto w|_{\mathbb{R}^{n-1}}, \quad (4.14)$$

der zu G duale Operator gegeben ist.

Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $\psi \in H_\diamond^{1/2}(\partial D)$. Dann gilt mit (4.1) und (4.13)

$$\begin{aligned} \langle f, G'\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f w \, ds = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \tilde{w} \, ds = \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } \tilde{w} \, dx \\ &= -\kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} u \, ds. \end{aligned}$$

Die Greensche Formel angewandt auf die in D harmonischen Funktionen u und \hat{w} liefert

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \hat{w} \, ds = \int_D \text{grad } u \cdot \text{grad } \hat{w} \, dx = \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} u \, ds,$$

wobei $\frac{\partial u^-}{\partial \nu}$ die Normalenableitung von $u|_D$ auf ∂D ist. Also erhalten wir zusammen mit $\hat{w}|_{\partial D} = -\psi$ weiter

$$\langle f, G'\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \kappa \int_{\partial D} \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \psi \, ds.$$

Nun ist u eine Lösung von (4.1), daher gilt nach Lemma 3.12

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = 0.$$

Dies liefert uns schließlich

$$\langle f, G'\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\partial D} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \psi \, ds = \langle Gf, \psi \rangle_{L^2(\partial D)}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Operatoren G aus (4.10) und G' aus (4.14) zueinander dual sind. Damit ist Schritt (ii) erledigt.

Als nächstes zeigen wir, daß $w|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}}$ das Problem (4.5) mit $\varphi = \frac{\partial w^+}{\partial \nu}$ löst. Dies liefert uns dann den Zusammenhang

$$L\left(\frac{\partial w^+}{\partial \nu}\Big|_{\partial D}\right) = w|_{\mathbb{R}^{n-1}} = G'\psi,$$

also wegen der Linearität von L

$$L\left(\frac{\partial(w-w^+)}{\partial \nu}\Big|_{\partial D}\right) = (w-w^+)|_{\mathbb{R}^{n-1}} = (G' - G')\psi. \quad (4.15)$$

Sei $v \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D})$ beliebig. Dann kann v zu einer Funktion in $H(\mathbb{R}_+^n)$ fortgesetzt werden und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \text{grad } w \cdot \text{grad } v \, dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \text{grad } \tilde{w} \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad } \tilde{w} \cdot \text{grad } v \, dx - \kappa \int_D \text{grad } \tilde{w} \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= -\kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} v \, ds - \kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial \nu} v \, ds \\ &= -\kappa \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} v \, ds + \int_{\partial D} \frac{\partial (w - \hat{w})^-}{\partial \nu} v \, ds \right) \\ &= -\kappa \int_{\partial D} \frac{\partial w^-}{\partial \nu} v \, ds. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.15 gilt

$$\frac{\partial \tilde{w}^+}{\partial \nu} - \kappa \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial \nu} = \kappa \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu}.$$

Da $\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu} = 0$ ist, folgt

$$\frac{\partial w^+}{\partial \nu} = \kappa \frac{\partial w^-}{\partial \nu}. \quad (4.16)$$

Da w harmonisch auf D ist, hat $\frac{\partial w^-}{\partial \nu}$ verschwindendes Integralmittel auf ∂D . Mit obiger Beziehung zwischen der äußeren und der inneren Normalenableitung von w auf ∂D gilt das auch für $\frac{\partial w^+}{\partial \nu}$. Also löst $w|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}}$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \text{grad } w \cdot \text{grad } v \, dx = - \int_{\partial D} \frac{\partial w^+}{\partial \nu} v \, ds \quad (4.17)$$

für alle $v \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D})$. Dies ist gerade das Variationsproblem (4.5) mit $\varphi = \frac{\partial w^+}{\partial \nu}$. Damit ist der Zusammenhang (4.15) zwischen L und G' gezeigt.

Den Operator F definieren wir schließlich durch die Zuordnung

$$F : H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\partial D), \quad \psi \mapsto \frac{\partial(w - w_1)^+}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}. \quad (4.18)$$

Dann ist $LF = (G - G_1)'$ und Teil (iii) des Beweises gezeigt.

Die Aussagen in (iv) zeigen wir im folgenden Lemma und erhalten so die gewünschte Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_1$. \square

Lemma 4.4

Für $\kappa \neq 1$ ist der durch (4.18) definierte Operator F ein Isomorphismus von $H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ mit $F = F'$.

Beweis:

Zur Abkürzung setzen wir wieder

$$H(\mathbb{R}_+^n) := \begin{cases} H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3), & n = 3 \\ H_{0,\ell_1}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2), & n = 2, \quad \alpha > 1 \end{cases}.$$

Wir wollen als erstes die Surjektivität von F zeigen. Dazu müssen wir zu einem beliebigen $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ eine Funktion $\psi \in H_\diamond^{1/2}(\partial D)$ finden mit $F\psi = \varphi$. Die Konstruktion eines solchen ψ findet in mehreren Schritten statt.

Sei $W \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D})$ die nach Lemma 3.13 eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \text{grad } W \cdot \text{grad } v \, dx = - \int_{\partial D} \varphi v \, ds \quad \forall v \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}).$$

Dann hat W auf ∂D die Normalenableitung $\frac{\partial W^+}{\partial \nu} = \varphi$ und die Randwerte $\omega := W|_{\partial D}$. Im Einschluß D sei W die schwache Lösung des Dirichlet-Problems mit den Randwerten ω , so daß W nach Lemma A.5 in $H(\mathbb{R}_+^n)$ ist. Schließlich setzen wir noch

$$\phi := \varphi - \kappa \frac{\partial W^-}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}.$$

Dann ist $\phi \in H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$, da φ nach Voraussetzung aus $H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ ist und W als harmonische Funktion auf D Neumann-Randwerte in $H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ hat.

Auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ sei weiter $w_1 \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ die eindeutige Lösung von

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad } w_1 \cdot \text{grad } v \, dx = - \int_{\partial D} \frac{1}{\kappa - 1} \phi v \, ds \quad \forall v \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$$

und auf D eine Lösung von

$$\int_D \text{grad } w_1 \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\partial D} \frac{1}{\kappa - 1} \phi v \, ds \quad \forall v \in H^1(D).$$

Auf D ist w_1 nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, deshalb fordern wir

$$\int_{\partial D} w_1^- \, ds = \int_{\partial D} w_1^+ \, ds, \quad (4.19)$$

wobei w_1^- und w_1^+ die Randwerte von $w_1|_D$ bzw. $w_1|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}}$ auf ∂D sind. Unsere gesuchte Funktion ψ definieren wir durch $\psi := [w_1]_{\partial D} = w_1^+ - w_1^-$. Wegen der Forderung (4.19) ist ψ aus $H_\diamond^{1/2}(\partial D)$. Außerdem setzen wir noch $w = w_1 + W$.

Sei $\hat{w} \in H^1(D)$ die eindeutige schwache Lösung des Dirichletproblems (4.12) auf D mit den Randwerten $-\psi$. Wir setzen \hat{w} durch Null auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ fort. Wenn wir gezeigt haben, daß $w - \hat{w}$ und $w_1 - \hat{w}$ Lösungen des Variationsproblems (4.13) sind, so folgt

$$F\psi = \frac{\partial(w - w_1)^+}{\partial\nu} \Big|_{\partial D} = \frac{\partial W^+}{\partial\nu} \Big|_{\partial D} = \varphi$$

und die Surjektivität von F ist gezeigt.

Aus der Definition von \hat{w} folgt, daß $w_1 - \hat{w}$ aus $H(\mathbb{R}_+^n)$ ist, da $(w_1 - \hat{w})|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}}$ in $H(\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D})$ und $(w_1 - \hat{w})|_D$ in $H^1(D)$ liegen und gleiche Randwerte auf D haben:

$$\begin{aligned} (w_1 - \hat{w})^+ \Big|_{\partial D} &= w_1^+ \\ (w_1 - \hat{w})^- \Big|_{\partial D} &= w_1^- + \psi = w_1^- + w_1^+ - w_1^- = w_1^+. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch, daß $w - \hat{w} = W + w_1 - \hat{w}$ in $H(\mathbb{R}_+^n)$ liegt. Wir müssen noch zeigen, daß $w - \hat{w}$ und $w_1 - \hat{w}$ für alle $v \in H(\mathbb{R}_+^n)$ die Variationsprobleme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \text{grad}(w - \hat{w}) \cdot \text{grad } v \, dx &= -\kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial\nu} v \, ds \quad \text{bzw.} \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad}(w_1 - \hat{w}) \cdot \text{grad } v \, dx &= - \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial\nu} v \, ds \end{aligned}$$

lösen. Wir untersuchen als erstes $w_1 - \hat{w}$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^n} \text{grad}(w_1 - \hat{w}) \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}} \text{grad } w_1 \cdot \text{grad } v \, dx + \int_D \text{grad } w_1 \cdot \text{grad } v \, dx - \int_D \text{grad } \hat{w} \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= - \int_{\partial D} \frac{1}{\kappa - 1} \phi v \, ds + \int_{\partial D} \frac{1}{\kappa - 1} \phi v \, ds - \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial\nu} v \, ds \\ &= - \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial\nu} v \, ds. \end{aligned}$$

Für $w - \hat{w} = W + w_1 - \hat{w}$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}_+^n} \sigma \operatorname{grad}(w - \hat{w}) \cdot \operatorname{grad} v \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \operatorname{grad} W \cdot \operatorname{grad} v \, dx + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \operatorname{grad} w_1 \cdot \operatorname{grad} v \, dx + \int_D \kappa \operatorname{grad} W \cdot \operatorname{grad} v \, dx \\
 & \quad + \int_D \kappa \operatorname{grad} w_1 \cdot \operatorname{grad} v \, dx - \int_D \kappa \operatorname{grad} \hat{w} \cdot \operatorname{grad} v \, dx \\
 &= - \int_{\partial D} \varphi v \, ds - \int_{\partial D} \frac{1}{\kappa - 1} \phi v \, ds + \kappa \int_{\partial D} \frac{\partial W^-}{\partial \nu} v \, ds + \kappa \int_{\partial D} \frac{1}{\kappa - 1} \phi v \, ds \\
 & \quad - \kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} v \, ds \\
 &= - \int_{\partial D} \varphi v \, ds + \kappa \int_{\partial D} \frac{\partial W^-}{\partial \nu} v \, ds + \int_{\partial D} \phi v \, ds - \kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} v \, ds.
 \end{aligned}$$

Nach Definition von ϕ gilt

$$\phi = \varphi - \kappa \frac{\partial W^-}{\partial \nu},$$

so daß sich alle Terme bis auf $-\kappa \int_{\partial D} \frac{\partial \hat{w}^-}{\partial \nu} v \, ds$ aufheben. Damit ist dann auch für $w - \hat{w}$ die Behauptung und damit die Surjektivität von F gezeigt.

Als nächstes zeigen wir, daß F zu sich selbst dual ist. Für $\psi_1, \psi_2 \in H_\diamond^{1/2}(\partial D)$ und die Leitfähigkeit σ seien $\hat{w}_1, \hat{w}_2 \in H^1(D)$ die eindeutigen schwachen Lösungen des Dirichlet-Problems (4.12) mit den Randwerten $-\psi_1$ bzw. $-\psi_2$ auf D . Mit \tilde{w}_1 und \tilde{w}_2 bezeichnen wir die eindeutigen Lösungen in $H(\mathbb{R}_+^n)$ des Variationsproblems (4.13) mit $\hat{w} = \hat{w}_1$ bzw. $\hat{w} = \hat{w}_2$. Wir definieren $w_1 = \tilde{w}_1 + \hat{w}_1$ und $w_2 = \tilde{w}_2 + \hat{w}_2$, wobei wir \hat{w}_1 und \hat{w}_2 durch Null auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}$ fortsetzen. Dann gilt

$$\int_{\partial D} \frac{\partial w_1^+}{\partial \nu} \psi_2 \, ds = \int_{\partial D} \frac{\partial w_1^+}{\partial \nu} w_2^+ \, ds - \int_{\partial D} \frac{\partial w_1^+}{\partial \nu} w_2^- \, ds.$$

Nach (4.17) löst $w_i|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}}$, $i = 1, 2$, das Variationsproblem

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \operatorname{grad} w_i \cdot \operatorname{grad} v \, dx = - \int_{\partial D} \frac{\partial w_i^+}{\partial \nu} v \, ds$$

für alle $v \in H(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D})$. Nach (4.16) gilt zudem

$$\frac{\partial w_i^+}{\partial \nu} = \kappa \frac{\partial w_i^-}{\partial \nu}.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} \frac{\partial w_1^+}{\partial \nu} \psi_2 \, ds &= - \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \operatorname{grad} w_1 \cdot \operatorname{grad} w_2 \, dx - \int_{\partial D} \kappa \frac{\partial w_1^-}{\partial \nu} w_2^- \, ds \\
 &= - \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}} \operatorname{grad} w_1 \cdot \operatorname{grad} w_2 \, dx - \kappa \int_D \operatorname{grad} w_1 \operatorname{grad} w_2 \, dx.
 \end{aligned}$$

Da die rechte Seite symmetrisch in w_1 und w_2 ist, erhalten wir

$$\int_{\partial D} \frac{\partial w_1^+}{\partial \nu} \psi_2 \, ds = \int_{\partial D} \frac{\partial w_2^+}{\partial \nu} \psi_1 \, ds.$$

Dies kann genauso für die Leitfähigkeit $\sigma \equiv \mathbf{1}$ gezeigt werden. Deshalb folgt

$$\langle F\psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2(\partial D)} = \langle \psi_1, F\psi_2 \rangle_{L^2(\partial D)},$$

d.h. F ist symmetrisch im Dualsystem $\langle H_\diamond^{-1/2}(\partial D), H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rangle$, es gilt also $F = F'$. Wegen der schon gezeigten Surjektivität von F gilt zusammen mit der Selbstdualität

$$H_\diamond^{-1/2}(\partial D) = \mathcal{R}(F) = \overline{\mathcal{R}(F)} = \mathcal{N}(F')^\perp = \mathcal{N}(F)^\perp,$$

so daß $\mathcal{N}(F) = \{0\}$ gelten muß. Also ist F auch injektiv und damit ein bijektiver linearer und beschränkter Operator von $H_\diamond^{1/2}(\partial D) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$. Nach dem Satz von der stetigen Inversen ist dann auch die Umkehrabbildung $F^{-1} : H_\diamond^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\partial D)$ beschränkt. \square

Das Schaubild 4.1 veranschaulicht die Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_1$ für die verschiedenen untersuchten Fälle.

$$\begin{array}{ccc} H_\diamond^{1/2}(\partial D) & \xrightarrow{F} & H_\diamond^{-1/2}(\partial D) \\ \uparrow L' & & \downarrow L \\ L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\Lambda - \Lambda_1} & L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_\diamond^{1/2}(\partial D) & \xrightarrow{F} & H_\diamond^{-1/2}(\partial D) \\ \uparrow L' & & \downarrow L \\ L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\Lambda - \Lambda_1} & L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}) \end{array}$$

(a) Faktorisierung für $n = 3$, den Lösungsraum $H_0^{1,1}$ und $\alpha \geq 1$

(b) Faktorisierung für $n = 2$ und $\alpha > 1$

Abbildung 4.1: Die Faktorisierungen von $\Lambda - \Lambda_1$

Als letztes wollen wir in diesem Abschnitt noch zeigen, daß $\pm F$ positiv ist, wobei wir das Vorzeichen gemäß des Vorzeichens der Differenz $1 - \kappa$ wählen. Für $0 \neq \psi \in \mathcal{R}(L') \subset H_\diamond^{1/2}(\partial D)$, d.h. $\psi = L'\varphi$ mit $\varphi \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ bzw. $\varphi \in L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$, gilt unter Verwendung der Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_1$ und Lemma 4.2

$$\begin{aligned} \langle F\psi, \psi \rangle_{L^2(\partial D)} &= \langle FL'\varphi, L'\varphi \rangle_{L^2(\partial D)} = \langle LFL'\varphi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &= \langle (\Lambda - \Lambda_1)\varphi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \begin{cases} \geq 0 & \text{für } 0 < \kappa < 1 \\ \leq 0 & \text{für } \kappa > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Der Operator L ist injektiv, daher gilt

$$\overline{\mathcal{R}(L')} = \mathcal{N}(L)^\perp = \{0\}^\perp = H_\diamond^{1/2}(\partial D),$$

der Bildraum von L' ist also dicht in $H_\diamond^{1/2}(\partial D)$. Deshalb erhalten wir für alle $\psi \in H_\diamond^{1/2}(\partial D)$

$$\langle F\psi, \psi \rangle_{L^2(\partial D)} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } 0 < \kappa < 1 \\ \leq 0 & \text{für } \kappa > 1. \end{cases}$$

Damit ist die Positivität von $\pm F$ gezeigt.

Bemerkung 4.5

Im dreidimensionalen Fall hatten wir in Abschnitt 3.1 als Lösungsraum für das Variationsproblem (4.1) auch den Raum $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$, $\alpha > 3/2$, betrachtet. In diesem Raum war die Lösung u von (4.1) für $f \in L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Unter Verwendung des normalisierenden Funktional ℓ_1 aus (2.7) existiert eine eindeutige Lösung in $H_{\ell_1}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$. Die Neumann-Dirichlet-Abbildung Λ ist dann eine Abbildung von $L_\diamond^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ nach $L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ und man kann zeigen, daß die Differenz $\Lambda - \Lambda_1$ ebenfalls eine Faktorisierung der Form $\Lambda - \Lambda_1 = LFL'$ hat, wobei die Operatoren L , L' und F wie im zweidimensionalen für den Lösungsraum $H_{0,\ell_1}^{1,\alpha}$ zu definieren sind.

4.2.1 Mehrere Einschlüsse und Isolatoren

Wir wollen nun die Faktorisierung auf den Fall verallgemeinern, daß man nicht nur einen sondern endlich viele voneinander getrennte Einschlüsse hat, wir uns also in der Situation von Abschnitt 3.3 befinden.

Der Operator L wird wieder mittels der Lösung v des Variationsproblems (4.5) durch

$$L : \begin{cases} H_\diamond^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2), & n = 3, \quad \alpha \geq 1 \\ H_\diamond^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}), & n = 2, \quad \alpha > 1 \end{cases}, \quad \varphi \mapsto v|_{\mathbb{R}^{n-1}},$$

definiert, dessen Lösbarkeit in Abschnitt 3.3 auch für den Fall mehrerer Einschlüsse untersucht wurde. Die Sobolev-Räume $H_\diamond^{\pm 1/2}(\partial D)$ auf dem Rand der Einschlüsse sind dabei wie in Abschnitt 3.3 zu verstehen. Dann haben wir wieder den Zusammenhang (4.9) zwischen L und $\Lambda - \Lambda_1$, denn die Differenz $u - u_1$ der Lösungen u und u_1 von (4.1) zu den Leitfähigkeiten σ und $\mathbf{1}$ ist eine Lösung von (4.5) mit $\varphi = \frac{\partial(u-u_1)^+}{\partial\nu} \in H^{-1/2}(\partial D)$.

Da u und u_1 harmonisch in D sind, liegen $\frac{\partial u^-}{\partial\nu} \Big|_{\partial D_j}$ und $\frac{\partial u_1^-}{\partial\nu} \Big|_{\partial D_j}$ in $H_\diamond^{-1/2}(\partial D_j)$. Wegen der in Lemma 3.12 gezeigten Sprungrelationen der Normalenableitung auf dem Rand der Einschlüsse gilt dies auch für $\frac{\partial u^+}{\partial\nu} \Big|_{\partial D_j}$ und $\frac{\partial u_1^+}{\partial\nu} \Big|_{\partial D_j}$, so daß φ in $H_\diamond^{-1/2}(\partial D)$ liegt und der Zusammenhang (4.9) zwischen L und $\Lambda - \Lambda_1$ weiterhin gilt.

Um den zu L dualen Operator L' zu bestimmen, betrachten wir wie bisher das Variationsproblem (4.7), dessen Lösbarkeit in Abschnitt 3.3 auch für den Fall mehrerer Einschlüsse untersucht wurde. Bei der Definition des dualen Operators müssen wir jetzt aufpassen,

denn im allgemeinen wird es keine Lösung geben, die gleichzeitig alle Normalisierungsbedingungen $\int_{\partial D_j} v' ds = 0$, $j = 1, \dots, N$, erfüllt. Es stellt sich deshalb heraus, daß wir die Randwerte $v'|_{\partial D_j}$ unabhängig voneinander normalisieren müssen. Ist v' eine Lösung des Problems (4.7), so setzen wir $c_j = (\int_{\partial D_j} v' ds) / (\int_{\partial D_j} ds)$. Der duale Operator von L ist dann durch

$$L' : \begin{cases} L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_{\diamond}^{1/2}(\partial D), & n = 3, \quad \alpha \geq 1 \\ L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_{\diamond}^{1/2}(\partial D), & n = 2, \quad \alpha > 1 \end{cases}, \quad \varphi' \mapsto (v'|_{\partial D_1} - c_1, \dots, v'|_{\partial D_N} - c_N),$$

gegeben.

Die Beweise der Faktorisierung in Lemma 4.3 und Lemma 4.4 bleiben dann auch für die Situation mehrerer Einschlüsse gleich, wenn man die Randbedingungen auf ∂D komponentenweise auffaßt.

Setzen wir zusätzlich voraus, daß die Leitfähigkeitskonstanten κ_j aus (3.21) zwar verschieden sein dürfen, jedoch alle größer oder alle kleiner als Eins sind, so daß das Vorzeichen von $1 - \kappa_j$ für alle Komponenten gleich ist, bleibt der Operator $\pm F$ positiv, was für die folgenden Abschnitte wichtig ist.

Wir wollen auch noch den Fall eines Isolators - d.h. $\kappa = 0$ in D - betrachten. Die Differenz $\Lambda - \Lambda_1$ ist dann weiterhin positiv, wie wir in Abschnitt 4.1 gesehen haben. Wir müssen also lediglich zeigen, daß eine Faktorisierung wie in Lemma 4.3 existiert. Dazu geben wir hier kurz die an dem Beweis vorzunehmenden Änderungen an.

Die Operatoren L und L' sind wie bisher mittels der Randwertprobleme (4.5) und (4.7) wie in (4.6) und (4.8) gegeben. Da die Lösung u von (3.30) verschwindende Neumann-Randwerte auf ∂D hat, gilt für den im Beweis von Lemma 4.3 eingeführten Operator G :

$$Gf = \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \Big|_{\partial D} = 0,$$

d.h. $(G - G_1)f = -G_1f = -\frac{\partial u_1^+}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}$. Dementsprechend erhält man auch $F\psi = -\frac{\partial w_1^+}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}$ mit w_1 wie in Lemma 4.3 definiert. Der Beweis der Isomorphie von F wird für den Isolator-Fall sogar deutlich einfacher, da beim Nachweis der Surjektivität die Konstruktion einer Lösung W entfällt. Also haben wir auch für den Isolator-Fall die Faktorisierung $\Lambda - \Lambda_1 = LFL'$ mit bijektivem F .

4.3 Charakterisierung des Bildraumes im Fall beschränkter Meßbereiche

In der Praxis wird man nicht in der Lage sein, auf dem gesamten Rand \mathbb{R}^{n-1} einen Randstrom f vorzugeben und das zugehörige Potential zu messen. Stattdessen hat man es mit einem beschränkten, offenen, nichtleeren Bereich $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ zu tun, auf dem man Strom einspeisen und Spannungen messen kann. In diesem Fall beobachten wir die sogenannte lokale Neumann-Dirichlet-Abbildung, die den auf Γ_0 vorgegebenen Randstrom f auf die Dirichlet-Werte des zugehörigen Potentials auf Γ_0 abbildet. Um diese Situation

beschreiben zu können, führen wir den Projektionsoperator P ein:

$$P : \begin{cases} L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\Gamma_0), & g \mapsto g|_{\Gamma_0}, & n = 3, & \alpha \geq 1 \\ L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R}) \rightarrow L_{\diamond}^2(\Gamma_0), & g \mapsto g|_{\Gamma_0} - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} g \, ds, & n = 2, & \alpha > 1 \end{cases}, \quad (4.20)$$

wobei

$$L_{\diamond}^2(\Gamma_0) := \left\{ h \in L^2(\Gamma_0) : \int_{\Gamma_0} h \, ds = 0 \right\}$$

ist. Der Operator P ist linear und stetig. Der duale Operator ist durch

$$P' : \begin{cases} L^2(\Gamma_0) \rightarrow L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2), & n = 3, & \alpha \geq 1 \\ L_{\diamond}^2(\Gamma_0) \rightarrow L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R}), & n = 2, & \alpha > 1 \end{cases}, \quad f \mapsto P'f = \begin{cases} f & \text{auf } \Gamma_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.21)$$

gegeben. Dabei ist zu beachten, daß man nach Bemerkung 4.1 den Dualraum von $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ mit $L^{2,-\alpha}(\mathbb{R}^2)$ und den Dualraum von $L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R})$ mit $L_{\diamond}^{2,-\alpha}(\mathbb{R})$ identifizieren kann. Ebenso gilt dies für $L^2(\Gamma_0)$ und $(L^2(\Gamma_0))'$ bzw. für $L_{\diamond}^2(\Gamma_0)$ und $(L_{\diamond}^2(\Gamma_0))'$. Exemplarisch wollen wir für den zweiten Fall nachrechnen, daß P' der duale Operator von P ist. Sei $f \in L_{\diamond}^2(\Gamma_0)$ und $g \in L_{\ell_1}^{2,\alpha}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle Pg, f \rangle_{L^2(\Gamma_0)} &= \int_{\Gamma_0} f(g|_{\Gamma_0} - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} g \, ds') \, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P'fg \, ds - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} g \, ds' \underbrace{\int_{\Gamma_0} f \, ds}_{=0} = \langle g, P'f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Mittels dieser beiden Operatoren ist die lokale Neumann-Dirichlet-Abbildung dann durch

$$\tilde{\Lambda} = PAP'$$

gegeben, d.h. der Randstrom f wird zunächst durch Null auf den gesamten Rand fortgesetzt und dann die Randwerte des zugehörigen Potentials auf Γ_0 gemessen. Der lokale Neumann-Dirichlet-Operator ist linear, stetig, kompakt, selbstadjungiert und positiv. Die Differenz $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ hat die Faktorisierung

$$\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1 = PLFL'P'.$$

Im nächsten Abschnitt wollen wir den Bildraum von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}$ mit Hilfe des Bildraumes von L charakterisieren.

4.3.1 Der Bildraum von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}$

Als letzten Schritt der Faktorisierungsmethode wollen wir nun zeigen, daß

$$\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) = \mathcal{R}(PL)$$

gilt. Dazu gehen wir wie in der Arbeit [28, Beweis von Theorem 3.1] vor.

Wir betrachten die Isometrie

$$\iota : H_{\diamond}^{1/2}(\partial D) \rightarrow H_{\diamond}^{-1/2}(\partial D), \quad \langle \iota\phi, \cdot \rangle_{L^2(\partial D)} := (\phi, \cdot)_{H^{1/2}(\partial D)} \quad \forall \phi \in H_{\diamond}^{1/2}(\partial D),$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\partial D)}$ wie bisher die duale Paarung auf $H_{\diamond}^{-1/2}(\partial D) \times H_{\diamond}^{1/2}(\partial D)$ bezeichnet und mit $(\cdot, \cdot)_{H^{1/2}(\partial D)}$ das Skalarprodukt in $H^{1/2}(\partial D)$ gemeint ist.

Setzt man $\tilde{F} = \iota^{-1}F : H_{\diamond}^{1/2}(\partial D) \rightarrow H_{\diamond}^{1/2}(\partial D)$, so ist \tilde{F} bijektiv, da ι und F bijektiv sind, und selbstadjungiert, denn für $\phi, \psi \in H_{\diamond}^{1/2}(\partial D)$ gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{F}\phi, \psi)_{H^{1/2}(\partial D)} &= (\iota^{-1}F\phi, \psi)_{H^{1/2}(\partial D)} = \langle F\phi, \psi \rangle_{L^2(\partial D)} = \langle F\psi, \phi \rangle_{L^2(\partial D)} \\ &= (\iota^{-1}F\psi, \phi)_{H^{1/2}(\partial D)} = (\phi, \tilde{F}\psi)_{H^{1/2}(\partial D)}, \end{aligned}$$

da F selbstdual ist. Bezeichnen wir mit $|F|$ den Operator $\text{sign}(1 - \kappa)F$, so ist $|F|$ positiv. Dies gilt auch für $|\tilde{F}|$, denn

$$(\tilde{F}\phi, \phi)_{H^{1/2}(\partial D)} = (\iota^{-1}F\phi, \phi)_{H^{1/2}(\partial D)} = \langle F\phi, \phi \rangle_{L^2(\partial D)}.$$

Nach [44, Theorem 12.33] besitzt $|\tilde{F}|$ eine positive, selbstadjungierte Wurzel $|\tilde{F}|^{1/2}$. Für die Faktorisierung von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|$ bedeutet dies

$$|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1| = |PLFL'P'| = PL\iota|\tilde{F}|L'P' = PL\iota|\tilde{F}|^{1/2}|\tilde{F}|^{1/2}L'P'.$$

Definieren wir $\tilde{L} := PL\iota : H_{\diamond}^{1/2}(\partial D) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ bzw. $\tilde{L} := PL\iota : H_{\diamond}^{1/2}(\partial D) \rightarrow L_{\diamond}^2(\Gamma_0)$, so gilt $\tilde{L}^* = L'P'$, denn für $\phi \in H_{\diamond}^{1/2}(\partial D)$ und $f \in L^2(\Gamma_0)$ bzw. $f \in L_{\diamond}^2(\Gamma_0)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}\phi, f \rangle_{L^2(\Gamma_0)} &= \langle PL\iota\phi, f \rangle_{L^2(\Gamma_0)} = \langle f, PL\iota\phi \rangle_{L^2(\Gamma_0)} = \langle \iota\phi, L'P'f \rangle_{L^2(\partial D)} \\ &= (\phi, L'P'f)_{H^{1/2}(\partial D)}. \end{aligned}$$

Somit lautet die Faktorisierung wegen $|\tilde{F}|^{1/2} = (|\tilde{F}|^{1/2})^*$

$$|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1| = \tilde{L}|\tilde{F}|^{1/2}(|\tilde{F}|^{1/2})^*\tilde{L}^*,$$

so daß auch $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|$ selbstadjungiert und positiv ist und somit eine selbstadjungierte Quadratwurzel besitzt.

Ist A eine Abbildung zwischen zwei Hilberträumen, so gilt nach [25, Proposition 2.18] $\mathcal{R}((A^*A)^{1/2}) = \mathcal{R}(A^*)$. In unserem Fall liefert dies

$$\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) = \mathcal{R}(\tilde{L}|\tilde{F}|^{1/2}) = \mathcal{R}(PL\iota|\tilde{F}|^{1/2}) = \mathcal{R}(PL),$$

da ι und $|\tilde{F}|^{1/2}$ bijektiv sind. Wir können also den Bildraum von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}$ durch den Bildraum von PL charakterisieren. Diese Charakterisierung fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Satz 4.6

Mit dem Operator L aus (4.6) und dem Projektionsoperator P aus (4.20) gilt für den Bildraum von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_\sigma|^{1/2}$ die Aussage

$$\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) = \mathcal{R}(PL).$$

4.4 Der Bildraum von L

Die Operatoren L und L' aus der Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_1$ hängen nur von dem Gebiet D , nicht aber vom dort herrschenden Leitfähigkeitskoeffizienten ab. Dies ermöglicht zusammen mit der Gleichheit der Bildräume $\mathcal{R}(PL)$ und $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}'|^{1/2})$ eine Charakterisierung von D ohne Kenntnis von σ in D .

Aus der Definition der Operatoren P und L folgt, daß eine Funktion g genau dann in $\mathcal{R}(PL)$ liegt, falls eine auf $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$ harmonische Funktion v existiert, die auf Γ_0 die Dirichlet-Randwerte g und verschwindende Neumann-Randwerte auf \mathbb{R}^{n-1} hat, also das Cauchy-Problem

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}, \quad v = g \text{ auf } \Gamma_0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^{n-1} \quad (4.22)$$

löst.

In diesem Fall gilt $PL\left(\frac{\partial v^+}{\partial \nu}\Big|_{\partial D}\right) = v|_{\Gamma_0} = g$. Daher lautet das nächste Ziel, ein Funktion g zu konstruieren, anhand derer man die Lösbarkeit des Cauchy-Problems leicht entscheiden kann. Dabei müssen wir zwischen dem zwei- und dem dreidimensionalen Fall unterscheiden.

4.4.1 Der zweidimensionale Fall

Wir betrachten die modifizierte Fundamentallösung der Laplace-Gleichung (siehe (3.24))

$$G_N(x, z) := -\frac{1}{2\pi}(\log(|x - z|) + \log(|x - z'|))$$

mit $x, z \in \mathbb{R}^2$, $x \neq z$ und z' der an der Ebene $\mathbb{R} \times \{0\}$ gespiegelte Punkt z . Für $z \in \mathbb{R}_+^2$ ist die Funktion $G_N(\cdot, z)$ harmonisch auf $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{z\}$ und die Normalenableitung auf \mathbb{R} ist identisch Null. Die Funktion liegt aber nicht in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus \{z\})$, da der Gradient für $|x| \rightarrow \infty$ nicht schnell genug fällt, um L^2 -integrierbar auf \mathbb{R}_+^2 zu sein. Deshalb betrachten wir für einen beliebigen Richtungsvektor $d \in \mathbb{R}^2$ der Länge Eins die Richtungsableitung von $G_N(\cdot, z)$ und definieren

$$N_{z,d}(x) := \frac{\partial G_N}{\partial_z d}(x, z) + c(z), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{z\},$$

mit einer von z abhängigen Konstanten $c(z)$. Dann ist $N_{z,d}$ für $x \neq z$ unendlich oft differenzierbar und für $z \in \mathbb{R}_+^2$ harmonisch auf $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{z\}$. Zudem hat auch $N_{z,d}$ verschwindende Neumann-Randwerte auf \mathbb{R} und somit insbesondere auch auf Γ_0 . Außerdem liegt $N_{z,d}$ für $z \in D$ und $\alpha > 1$ in dem Raum $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$, da für diese Exponenten die Gewichtsfunktion selbst L^2 -integrierbar ist und $N_{z,d}(x) = c(z) + O_{|x| \rightarrow \infty}(1/|x|)$ sowie $|\text{grad } N_{z,d}(x)| = O_{|x| \rightarrow \infty}(1/|x|^2)$ gilt. Wählt man die Konstante $c(z)$ so, daß $\int_{\Gamma_0} N_{z,d} ds = 0$ ist, so liegen die Randwerte von $N_{z,d}$ auf Γ_0 in $L_\diamond^2(\Gamma_0)$ und $N_{z,d}$ löst das Cauchy-Problem (4.22) mit

$$g(x) = N_{z,d}(x)|_{\Gamma_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\langle (x - z), d \rangle}{|x - z|^2} \Big|_{\Gamma_0} + c(z).$$

Wir erhalten dann die folgende Charakterisierung des Einschlusses D :

Satz 4.7

Für eine beliebige Richtung $d \in \mathbb{R}^2$ mit $|d| = 1$ und für $z \in \mathbb{R}_+^2$ sei

$$g_{z,d}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\langle (x-z), d \rangle}{|x-z|^2} \Big|_{\Gamma_0} + c(z)$$

mit einer Konstanten $c(z)$ so, daß $\int_{\Gamma_0} g_{z,d} ds = 0$ erfüllt ist. Dann gilt für $\kappa \neq 1$

$$g_{z,d} \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn } z \in D.$$

Beweis:

Nach den Überlegungen zu Beginn des Abschnittes 4.4 ist die Behauptung des Satzes äquivalent zu der Aussage, daß das Cauchy-Problem (4.22) für $g = g_{z,d}$ genau dann eine Lösung $v \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$ besitzt, wenn $z \in D$ gilt. Wir haben schon gesehen, daß $N_{z,d}$ für $z \in D$ die Lösung des Cauchy-Problem (4.22) mit $g = g_{z,d}$ in dem Raum $H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$ ist, wobei das normalisierende Funktional ℓ durch $\ell u = \int_{\Gamma_0} u ds$ gegeben ist.

Sei nun $z \notin D$. Wir nehmen an, daß eine Lösung $v \in H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$ des Cauchy-Problems (4.22) mit $g = g_{z,d}$ existiert. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems muß

$$v = N_{z,d}$$

in $\mathbb{R}_+^2 \setminus (\overline{D} \cup \{z\})$ gelten. Wegen $|\text{grad } N_{z,d}| = O_{x \rightarrow z}(1/|x-z|^2)$ ist aber der Gradient für $z \notin D$ nicht mehr L^2 -integrierbar auf $\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D}$. Also kann das Cauchy-Problem in diesem Fall keine Lösung in $H_{0,\ell}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{D})$ haben. \square

Abbildung 4.2 zeigt für einen Punkt $z \in \mathbb{R}_+^2$ die Testfunktion $g_{z,d}$. Die dickere schwarze Linie stellt den Meßbereich Γ_0 dar und P ist die orthogonale Projektion des Testpunktes auf $\mathbb{R} \times \{0\}$.

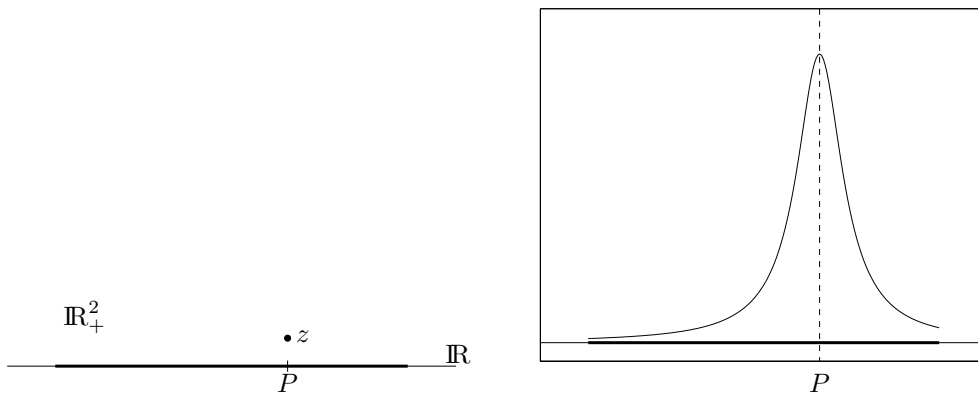


Abbildung 4.2: Punkt $z \in \mathbb{R}_+^2$ (links) und zugehörige Testfunktion $g_{z,d}$ mit nach unten weisender Dipolrichtung $d = -e_2$ (rechts)

4.4.2 Der dreidimensionale Fall

Auch im dreidimensionalen Fall betrachten wir die modifizierte Fundamentallösung der Laplace-Gleichung aus (3.24)

$$G_N(x, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - z|} + \frac{1}{|x - z'|} \right)$$

mit $x, z \in \mathbb{R}^3$, $x \neq z$ und z' der an der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gespiegelte Punkt z . Für $z \in \mathbb{R}_+^3$ ist die Funktion $G_N(\cdot, z)$ harmonisch auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \{z\}$ und die Normalenableitung auf \mathbb{R}^2 ist identisch Null. Zudem ist $G_N(\cdot, z)$ für $z \in D$ unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}$ und liegt wegen $G_N(x, z) = O_{|x| \rightarrow \infty}(1/|x|)$ und $|\text{grad}_x G_N(x, z)| = O_{|x| \rightarrow \infty}(1/|x|^2)$ dann in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$. Definieren wir weiter

$$g_z(x) := G_N(x, z)|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x - z|} \Big|_{\Gamma_0}$$

so ist $G_N(\cdot, z)$ für $z \in D$ die Lösung des Cauchy-Problems (4.22) in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ mit $g = g_z$.

Damit erhalten wir die folgende Charakterisierung des Einschlusses D :

Satz 4.8

Für $z \in \mathbb{R}_+^3$ sei

$$g_z(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x - z|} \Big|_{\Gamma_0}.$$

Dann gilt für $\kappa \neq 1$

$$g_z \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in D.$$

Beweis:

Die Behauptung ist nach den Überlegungen zu Beginn des Abschnittes 4.4 äquivalent zu der Aussage, daß das Cauchy-Problem (4.22) für $g = g_z$ genau dann eine Lösung $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ besitzt, wenn $z \in D$ gilt. Wir haben bereits gesehen, daß $G_N(\cdot, z)$ für $z \in D$ die Lösung des Cauchy-Problem (4.22) mit $g = g_z$ in dem Raum $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ ist. Sei nun $z \notin D$. Wir nehmen an, daß eine Lösung $v \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ des Cauchy-Problems (4.22) mit $g = g_z$ existiert. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems muß

$$v = G_N(\cdot, z)$$

in $\mathbb{R}_+^3 \setminus (\overline{D} \cup \{z\})$ gelten. Wegen $|\text{grad}_x G_N(\cdot, z)| = O_{x \rightarrow z}(1/|x - z|^2)$ ist aber der Gradient für $z \notin D$ nicht mehr L^2 -integrierbar auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D}$. Also kann das Cauchy-Problem in diesem Fall keine Lösung in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ haben. \square

Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall mußten wir nicht auf die Randwerte von Richtungsableitungen der modifizierten Fundamentallösung zurückgreifen, da die Fundamentallösung selbst schon in den entsprechenden gewichteten Sobolev-Räumen liegt. Wir können aber auch für den dreidimensionalen Fall Richtungsableitungen betrachten:

Für einen Richtungsvektor $d \in \mathbb{R}^3$ der Länge Eins definieren wir

$$N_{z,d}(x) := \frac{\partial G_N}{\partial z d}(x, z), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z\}.$$

Dann ist $N_{z,d}$ für $x \neq z$ unendlich oft differenzierbar und für $z \in \mathbb{R}_+^3$ harmonisch auf $\mathbb{R}_+^3 \setminus \{z\}$. Zudem hat $N_{z,d}$ verschwindende Neumann-Randwerte auf \mathbb{R}^2 . Für $z \in D$ ist $N_{z,d}$ ein Element aus $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$, da $N_{z,d}(x) = O_{|x| \rightarrow \infty}(1/|x|^2)$ sowie $|\text{grad } N_{z,d}(x)| = O_{|x| \rightarrow \infty}(1/|x|^3)$ gilt und $N_{z,d}$ in $C^\infty(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$ liegt.

Die Funktion $N_{z,d}$ erfüllt die Cauchy-Randbedingungen in (4.22) mit

$$g(x) = g_{z,d}(x) := N_{z,d}(x)|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle (x-z), d \rangle}{|x-z|^3} \Big|_{\Gamma_0}.$$

Für $z \in D$ löst $N_{z,d}$ dann das Cauchy-Problem (4.22) mit $g = g_{z,d}$ in $H_0^{1,1}(\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{D})$.

Wir erhalten in diesem Fall die folgende Charakterisierung des Einschlusses D , die man genau wie Satz 4.8 beweist:

Korollar 4.9

Für eine beliebige Richtung $d \in \mathbb{R}^3$ mit $|d| = 1$ und für $z \in \mathbb{R}_+^3$ sei

$$g_{z,d}(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle (x-z), d \rangle}{|x-z|^3} \Big|_{\Gamma_0}.$$

Dann gilt für $\kappa \neq 1$

$$g_{z,d} \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_s - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in D.$$

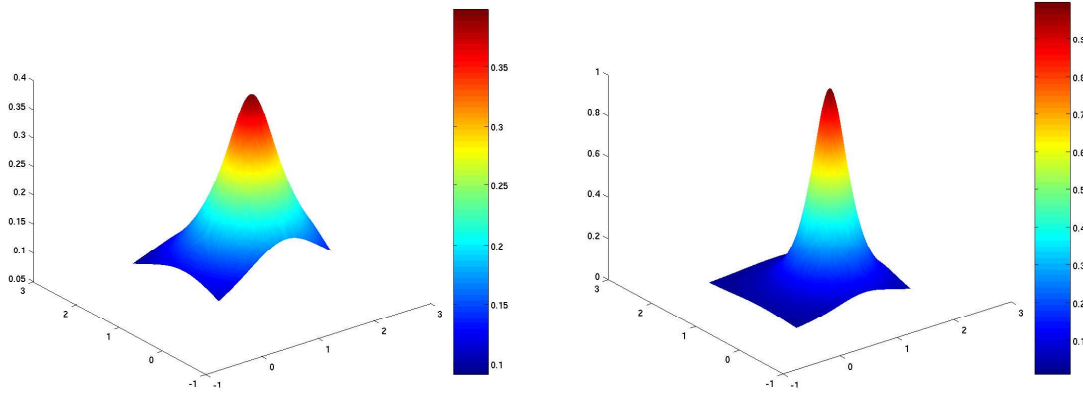


Abbildung 4.3: Die Testfunktionen g_z (links) und $g_{z,d}$ (rechts) für den Punkt $z = (1.2, 0.8, 0.4)$ und die Dipolrichtung $d = -e_3$

Abbildung 4.3 zeigt für den Punkt $z = (1.2, 0.8, 0.4) \in \mathbb{R}_+^3$ die Testfunktionen g_z und $g_{z,d}$, $d = -e_3$, ausgewertet auf dem Meßbereich $\Gamma_0 = [0, 2] \times [0, 2]$. Man sieht, daß die Testfunktion ihr Maximum im Punkt $(1.2, 0.8)$ annimmt. Zudem ist der Peak der Funktion $g_{z,d}$ an dieser Stelle deutlicher ausgeprägt als der der Funktion g_z .

4.5 Nichtkonstante Leitfähigkeiten

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir mit einer Idee aus [12] noch angeben, wie man die bisher erzielten Ergebnisse auf die Situation von Einschlüssen mit nichtkonstanten Leitfähigkeiten übertragen kann.

Die Leitfähigkeit $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ sei von der Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa(x) & \text{für } x \in D \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D}, \end{cases}$$

wobei entweder $\kappa(x) \geq 1 + \varepsilon$ oder $0 \leq \kappa(x) \leq 1 - \varepsilon$ für $x \in D$ und ein $\varepsilon > 0$ gelte. Wir betrachten hier nur die Situation $\kappa(x) \geq 1 + \varepsilon$, der anderen Fall kann analog behandelt werden. Da die Leitfähigkeit σ beschränkt ist, existiert eine Konstante c_σ mit $\sigma(x) \leq c_\sigma$ für alle $x \in \Omega$. Wir setzen

$$\underline{\sigma}(x) = \begin{cases} 1 + \varepsilon, & x \in D \\ 1, & x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D} \end{cases} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}(x) = \begin{cases} c_\sigma, & x \in D \\ 1, & x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \bar{D} \end{cases}$$

so daß wir unsere eigentliche Leitfähigkeit σ zwischen $\underline{\sigma}$ und $\bar{\sigma}$ einschließen können. Wegen der Monotonie der Neumann-Dirichlet-Abbildung gilt

$$\Lambda_{\bar{\sigma}} - \Lambda_{\mathbf{1}} \leq \Lambda_\sigma - \Lambda_{\mathbf{1}} \leq \Lambda_{\underline{\sigma}} - \Lambda_{\mathbf{1}} \leq 0, \quad (4.23)$$

wobei die Anordnung der Operatoren im Sinne von positiver Semidefinitheit wie in Lemma 4.2 zu verstehen ist.

Verwenden wir nun das Hilfsresultat, daß für einen selbstadjungierten und injektiven Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ in einem Hilbertraum X gilt

$$y \in \mathcal{R}(A) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sup_{0 \neq x \in \mathcal{D}(A)} \frac{\langle y, x \rangle}{\|Ax\|} < \infty,$$

(siehe [11, Lemma 4.10]), so erhalten wir für $y \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2})$ zusammen mit (4.23)

$$\sup_{0 \neq x \in X} \frac{\langle y, x \rangle_{L^2(\Gamma_0)}}{\left\| |\tilde{\Lambda}_{\bar{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2} x \right\|_{L^2(\Gamma_0)}} \leq \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\langle y, x \rangle_{L^2(\Gamma_0)}}{\left\| |\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2} x \right\|_{L^2(\Gamma_0)}} < \infty,$$

d.h. $y \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\bar{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2})$. Dabei ist der Hilbertraum X im zweidimensionalen der Raum $L_\diamond^2(\Gamma_0)$ und im dreidimensionalen der Raum $L^2(\Gamma_0)$. Wir haben also

$$\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2}) \subset \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\bar{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2}).$$

Ebenso können wir

$$\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\underline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2}) \subset \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2})$$

zeigen. Da aber

$$\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\underline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2}) = \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\bar{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2}) = \mathcal{R}(PL)$$

gilt, muß auch der Bildraum $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbf{1}}|^{1/2})$ mit $\mathcal{R}(PL)$ übereinstimmen. Damit gelten auch für Inhomogenitäten mit nichtkonstanter Leitfähigkeit die Charakterisierungen aus Abschnitt 4.4.

5 Numerische Ergebnisse

Zum Abschluß dieser Arbeit wollen wir die bisher erzielten Ergebnisse in ein numerisches Verfahren zur Rekonstruktion von Einschlüssen D aus gegebenen Neumann- und gemessenen bzw. simulierten Dirichletdaten umsetzen. Wir beschränken uns dabei auf den für die Praxis relevanten und in Abschnitt 4.3 vorgestellten Fall beschränkter Meßbereiche. Zudem werden die vorgegebenen Leitfähigkeiten immer stückweise konstant sein.

Im ersten Abschnitt geben wir an, wie wir das direkte Problem unter Verwendung der Randintegralgleichung aus Abschnitt 3.3.1 numerisch lösen. Anschließend beschäftigen wir uns mit der Umsetzung der in Kapitel 4 erzielten Charakterisierungen der Einschlüsse in ein numerisches Verfahren (siehe dazu auch [13]) und demonstrieren in den letzten beiden Abschnitten an ausgewählten Beispielen mit simulierten Daten die Leistungsfähigkeit des Rekonstruktionsverfahrens sowohl im zweidimensionalen als auch im dreidimensionalen Fall. Alle im folgenden aufgeführten numerischen Methoden wurden in MATLAB implementiert.

5.1 Implementierung

5.1.1 Das Vorwärtsproblem

Nach Abschnitt 3.3.1 können wir für stückweise konstante Leitfähigkeiten die Lösung u des Diffraktionsproblems als Summe der Lösung der Laplace-Gleichung und eines Einschichtpotentials schreiben (siehe Satz 3.18). Für einen vorgegebenen Randstrom f gilt deshalb

$$(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1)f = (u_1 + u_s - u_1)|_{\Gamma_0} = S\varphi|_{\Gamma_0}.$$

Um also zu vorgegebenen Randströmen f die Differenz $(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1)f$ der Dirichletrandwerte berechnen zu können, müssen wir lediglich die Randintegralgleichung (3.28) für die Dichte φ des Einschichtpotentials numerisch lösen und anschließend das Einschichtpotential auf dem Meßbereich Γ_0 auswerten.

Die rechte Seite der zu lösenden Randintegralgleichung (3.28) ist bis auf einen von der Leitfähigkeit abhängenden Faktor gerade die Normalenableitung der Lösung u_1 der Laplace-Gleichung auf dem Rand des Einschlusses, also durch

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x) \Big|_{\partial D} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_0} f(s) \frac{\langle x-s, \nu_x \rangle}{|x-s|^2} ds, & n = 2 \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} f(s) \frac{\langle x-s, \nu_x \rangle}{|x-s|^3} ds, & n = 3 \end{cases}$$

gegeben. Um die Normalenableitung von u_1 auf ∂D auszuwerten, wurde das Integral im zweidimensionalen Fall mittels der zusammengesetzten Trapezformel und im dreidimen-

sionalen Fall mittels der Produkt-Gauß-Formel berechnet, da der Integrand für $x \in \partial D$ keine Singularität hat.

Im zweidimensionalen Fall lösen wir die Randintegralgleichung numerisch durch die Nyström-Methode (siehe z.B. [37, Kapitel 12]) basierend auf der zusammengesetzten Trapezformel.

Als Meßbereich Γ_0 haben wir das Intervall $[-\pi, \pi]$ gewählt und als Strommuster verwenden wir die trigonometrischen Basisfunktionen

$$\{f_k\}_{k=1}^{255} := \{\cos jt : j = 1, \dots, 128\} \cup \{\sin jt : j = 1, \dots, 127\} \quad (5.1)$$

von $L^2_\diamond(\Gamma_0)$. Für diese Neumanndaten lösen wir die Randintegralgleichung und projizieren anschließend die Randwerte $S\varphi_k|_{\Gamma_0}$ des Einschichtpotentials $L^2(\Gamma_0)$ -orthogonal auf die trigonometrische Basis (5.1). Auf diese Weise erhalten wir als Approximation für $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ eine 255×255 -Matrix A , in deren k -ter Spalte die Entwicklungskoeffizienten der Differenz $(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1)f_k$ bezüglich der Basis (5.1) stehen.

Im dreidimensionalen Fall lösen wir die Randintegralgleichung numerisch durch eine Kollokationsmethode mit globalen Basisfunktionen, wie sie von Ganesh, Graham und Sivaloganathan in [27] vorgeschlagen wurde. Allerdings schränkt uns diese Methode auf die Vereinigung von Einschlüssen D ein, für die eine bijektive, glatte Abbildung auf die Einheitskugel existiert, so daß der Rand der Einheitskugel als Parametrisierung für den Rand der Einschlüsse genutzt und somit die Integralgleichung auf den Rand der Einheitskugel transformiert und dort gelöst werden kann.

Als Meßbereich Γ_0 haben wir das zweidimensionale Intervall $[0, 2] \times [0, 2]$ gewählt. Als Strommuster verwenden wir Haarwavelets. Im eindimensionalen sind die Skalierungsfunktion $\tilde{\phi}$ und das Haar-Wavelet $\tilde{\psi}$ durch

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 1/2) \\ 1, & x \in [1/2, 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Die drei zweidimensionalen Wavelets $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ und $\psi^{(3)}$ ergeben sich als Tensorprodukte von $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$ durch

$$\psi^{(1)}(x, y) = \tilde{\phi}(x)\tilde{\psi}(y), \quad \psi^{(2)}(x, y) = \tilde{\psi}(x)\tilde{\phi}(y) \quad \text{und} \quad \psi^{(3)}(x, y) = \tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}(y)$$

(siehe Abbildung 5.1). Für $j \in \mathbb{Z}$ seien die Funktionenräume W_j durch

$$W_j := \left\langle \psi_{j,k,l}^{(1)}, \psi_{j,k,l}^{(2)}, \psi_{j,k,l}^{(3)} : (k, l) \in \mathbb{Z} \right\rangle$$

mit

$$\begin{aligned} \psi_{j,k,l}^{(1)}(x, y) &= 2^j \tilde{\phi}(2^j x - k) \tilde{\psi}(2^j y - l), & \psi_{j,k,l}^{(2)}(x, y) &= 2^j \tilde{\psi}(2^j x - k) \tilde{\phi}(2^j y - l), \\ \psi_{j,k,l}^{(3)}(x, y) &= 2^j \tilde{\psi}(2^j x - k) \tilde{\psi}(2^j y - l) \end{aligned}$$

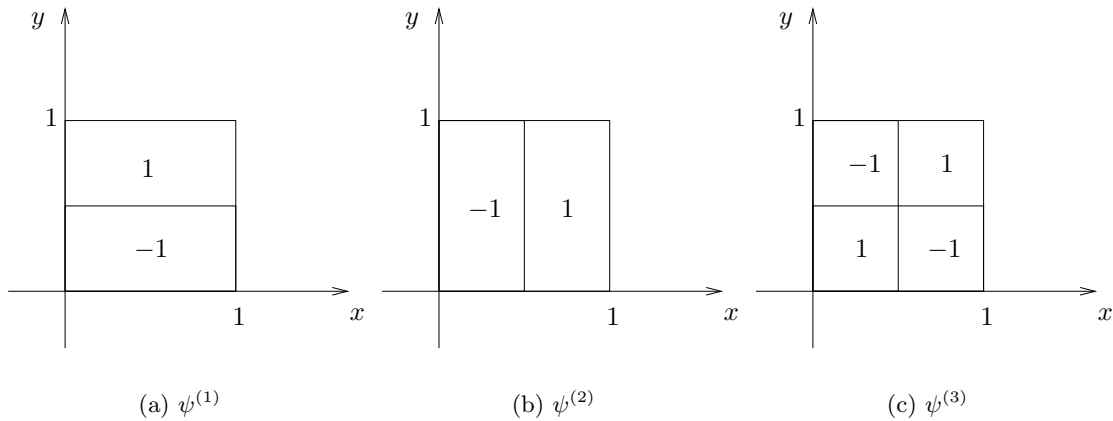


Abbildung 5.1: Haarwavelets

gegeben. Als Randströme werden nun diejenigen Funktionen aus

$$W_{-1} \cup W_0 \cup \dots \cup W_3$$

gewählt, deren Träger in $\Gamma_0 = [0, 2] \times [0, 2]$ liegen. Da

$$\text{supp}(\psi_{j,k,l}^{(i)}) = [k/2^j, (k+1)/2^j] \times [l/2^j, (l+1)/2^j], \quad i = 1, 2, 3,$$

gilt, sind das gerade die Funktionen

$$\{f_\mu\}_{\mu=1}^{1023} := \left\{ \psi_{j,k,l}^{(i)} : j = -1, \dots, 3, k, l = 0, \dots, 2^{j+1} - 1, i = 1, 2, 3 \right\}. \quad (5.2)$$

Wir verwenden also 1023 Basisfunktionen, wobei die Basisfunktionen aus W_3 den kleinsten Träger (Intervalle der Größe $1/8 \times 1/8$) haben. Alle Basisfunktionen liegen in $L^2(\Gamma_0)$ und sind bezüglich des L^2 -Innenproduktes orthogonal zueinander. Für diese Neumanndaten lösen wir die Randintegralgleichung und projizieren anschließend die Randwerte $S\varphi_\mu|_{\Gamma_0}$ des Einschichtpotentials $L^2(\Gamma_0)$ -orthogonal auf die Basis (5.2). Auf diese Weise erhalten wir als Approximation für $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ eine 1023×1023 -Matrix A , in deren μ -ter Spalte die Entwicklungskoeffizienten der Differenz $(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1)f_\mu$ bezüglich der Basisfunktionen (5.2) stehen.

An dieser Stelle sei ausdrücklich erwähnt, daß wir das Vorwärtsproblem nur lösen, um die Neumann-Dirichlet-Abbildung zu simulieren. Für das Verfahren zur numerischen Lösung des inversen Problems benötigen wir keine Lösungen des Vorwärtsproblems - im Gegensatz zu dem in [41] untersuchten, auf der Tikhonov-Regularisierung basierenden Rekonstruktionsverfahren.

5.1.2 Das inverse Problem

Aus den Sätzen 4.7 und 4.8 sowie Korollar 4.9 wissen wir, daß die Testfunktionen g_z bzw. $g_{z,d}$ genau dann in $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_\sigma|^{1/2})$ liegen, wenn der Punkt z im Einschluß D liegt. Nun ist

aber der Operator $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1 : L^2_\diamond(\Gamma_0) \rightarrow L^2_\diamond(\Gamma_0)$ bzw. $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1 : L^2(\Gamma_0) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ kompakt, selbstadjungiert, injektiv und positiv bzw. negativ, falls $\kappa < 1$ bzw. $\kappa > 1$. Somit besitzt $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ eine Spektralzerlegung

$$\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \cdot, v_j \rangle_{L^2(\Gamma_0)} v_j$$

mit Eigenfunktionen v_j zu den Eigenwerte $\lambda_j > 0$ bzw. $\lambda_j < 0$. Die Eigenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis von $L^2_\diamond(\Gamma_0)$ bzw. von $L^2(\Gamma_0)$. Für $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}$ haben wir dann die Spektralzerlegung

$$|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{1/2} \langle \cdot, v_j \rangle_{L^2(\Gamma_0)} v_j.$$

Wegen der Injektivität von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ ist auch seine Quadratwurzel injektiv, so daß

$$\mathcal{N}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) = \mathcal{N}(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1) = \{0\}$$

gilt. Mit $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|$ ist auch seine Quadratwurzel selbstadjungiert und positiv, so daß wir

$$\overline{\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2})} = \mathcal{N}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2})^\perp = \{0\}^\perp$$

erhalten. Also liegt der Bildraum von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}$ dicht in $L^2_\diamond(\Gamma_0)$ bzw. $L^2(\Gamma_0)$. In diesem Fall besagt das Picard-Kriterium (siehe z.B. [25, Theorem 2.8]):

$$g \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle g, v_j \rangle_{L^2(\Gamma_0)}^2}{|\lambda_j|} < \infty.$$

Die Grundlage für die numerische Implementierung des inversen Problems bildet damit die folgende Charakterisierung der Einschlüsse D :

$$z \in D \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle g_{z,[d]}, v_j \rangle_{L^2(\Gamma_0)}^2}{|\lambda_j|} < \infty. \quad (5.3)$$

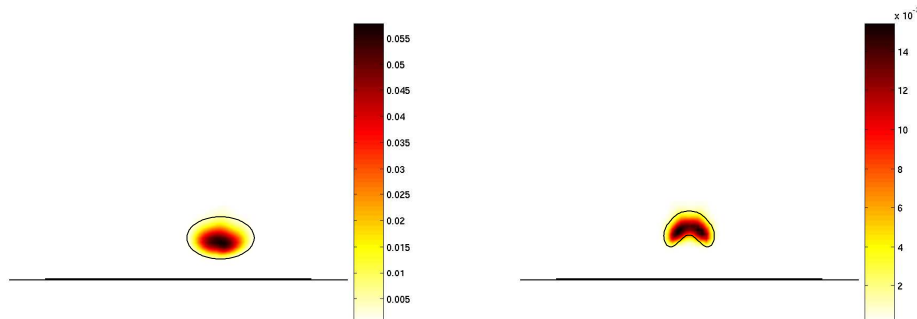
Mit der Notation $g_{z,[d]}$ bezeichnen wir dabei in Abhängigkeit von der Raumdimension die Testfunktion $g_{z,d}$ im zweidimensionalen und im dreidimensionalen wahlweise die Testfunktion g_z oder $g_{z,d}$.

Um die Konvergenz der Reihe in (5.3) numerisch zu testen, benötigen wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$. Diese approximieren wir durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A aus Abschnitt 5.1.1. Damit stehen uns aber für den Konvergenztest nur endlich viele Eigenwerte und Eigenvektoren zur Verfügung, nämlich höchstens so viele wie wir Strommuster verwendet haben. Für den Konvergenztest können wir demnach nur die endliche Reihe

$$h_J(z) := \sum_{j=1}^J \frac{\langle g_{z,[d]}, v_j \rangle_{L^2(\Gamma_0)}^2}{|\lambda_j|}$$

heranziehen, wobei v_j und λ_j jetzt die Eigenvektoren und die Eigenwerte der Matrix A sind. Zudem wird man die numerisch berechneten Eigenwerte und Eigenvektoren nur dann verwenden können, solange sie nicht zu stark durch Rechenungenauigkeiten und Meßfehler (bzw. in unserem Fall durch die Diskretisierungsfehler bei der Simulation des Vorwärtsproblems) gestört sind. Auch dies beeinflußt die Wahl des Abbruchindex J für den Konvergenztest.

Hat man einen Abbruchindex J gewählt, bleibt das Problem der Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz der Reihe in (5.3). Man wird erwarten, daß für hinreichend großes J der Wert $h_J(z)$ für $z \in D$ kleiner ist als für $z \in \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{D}$. Da die Reihenwerte mit wachsendem J schnell groß werden ist es sinnvoll, statt $h_J(z)$ den Kehrwert $1/h_J(z)$ zu betrachten. Wir erwarten dann, daß dieser für Punkte z im Einschluß größer ist als für Punkte z außerhalb des Einschusses. Dies legt als erstes Konvergenzkriterium nahe, die Funktion $h_J(z)$ für eine Menge von Testpunkten auszuwerten, einen Schwellenwert M festzusetzen und die Inhomogenität durch die Menge $\{z \in \mathbb{R}_+^n : 1/h_J(z) \geq M\}$ zu approximieren. Schon in seiner Doktorarbeit [11] hat Brühl jedoch angemerkt, daß dies ein ungeeignetes Kriterium ist. Die Aussage von Satz 4.7 bleibt nämlich gültig, wenn man die Testfunktion $g_{z,d}$ mit beliebigen, von z abhängigen Konstanten $c(z)$ multipliziert. Also ist das Kriterium $h_J(z) \leq 1/M$ ungeeignet, weil es von Umskalierungen der Testfunktionen abhängt. Um dieses Problem zu umgehen, charakterisieren wir stattdessen die Inhomogenität durch die Menge $\{z \in \mathbb{R}_+^n : 1/(h_J(z)/\|g_{z,d}\|_{L^2(\Gamma_0)}^2) \geq M\}$. Die Schwierigkeit liegt jetzt in der Festlegung des Schwellenwertes M . Dieser ist zum einen stark abhängig von der Wahl des Abbruchindex J und variiert zudem mit Lage und Art des Einschusses.



(a) $1/(h_J(z)/\|g_{z,d}\|_{L^2(\Gamma_0)}^2)$ für $J = 22$ und $d = (1, 0)$; der zu rekonstruierende Einschluß ist die eingezeichnete Ellipse mit Halbachsen 0.8 und 0.5

(b) $1/(h_J(z)/\|g_{z,d}\|_{L^2(\Gamma_0)}^2)$ für $J = 16$ und $d = (1, 0)$; der zu rekonstruierende Einschluß ist das eingezeichnete nierenförmige Gebiet

Abbildung 5.2: Rekonstruktionen mittels des reziproken Reihenwertes

Wie man anhand der Abbildungen 5.2(a) und 5.2(b) erkennen kann, lassen sich die Zentren der Einschüsse mittels dieses Verfahrens recht gut rekonstruieren, eine Aussage über den Rand der Inhomogenitäten ist jedoch nur schwer zu treffen. Für die Rekonstruktionen

wurde ein äquidistantes Gitter mit der Gitterweite 0.1 auf dem Intervall $[-4, 4] \times [0.2, 5]$ verwendet. Die dickere schwarze Linie markiert dabei den Meßbereich Γ_0 .

In [13] und [30] haben Brühl und Hanke eine andere Vorgehensweise für den Konvergenztest vorgeschlagen. Die unendliche Reihe in (5.3) konvergiert, wenn die Quadrate der Entwicklungskoeffizienten $\langle g_{z[,d]}, v_j \rangle$ bezüglich der Eigenbasis von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ hinreichend schneller abklingen als die Eigenwerte $|\lambda_j|$. Für den Einheitskreis und ein radialsymmetrisches Diffraktionsproblem hat Brühl in [11] gezeigt, daß die Quadrate der Entwicklungskoeffizienten und die Eigenwerte im wesentlichen ein geometrisches Abklingverhalten haben. Das Abklingverhalten der Werte im Zähler wird dann mit dem Abklingverhalten der Daten im Nenner dadurch verglichen, daß die logarithmierten Zähler bzw. Nenner durch eine Ausgleichsgerade im Kleinste-Quadrate-Sinn approximiert werden. Man erhält damit

$$\log |\lambda_j| \approx c + j \log q \quad \text{und} \quad \log \langle g_{z[,d]}, v_j \rangle^2 \approx \gamma_z + j \log \rho_{z[,d]}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (5.4)$$

Dies liefert uns für die Picard-Reihe

$$\sum_j \frac{\langle g_{z[,d]}, v_j \rangle^2}{|\lambda_j|} \approx \tilde{c} \sum_j \left(\frac{\rho_{z[,d]}}{q} \right)^j, \quad \tilde{c} = e^{\gamma_z - c}.$$

Dann können wir den Einschluß D durch die Menge $\{z \in \mathbb{R}_+^n : \rho_{z[,d]} < q\}$ approximieren.

Bei dem genannten Beispiel des radialsymmetrischen Diffraktionsproblems im Einheitskreis treten die Eigenwerte immer paarweise auf. Deshalb schlagen Brühl und Hanke in [13] eine Modifikation des Konvergenztestes vor. Dabei wird jedes der Eigenwertpärchen $(|\lambda_{2j-1}|, |\lambda_{2j}|)$ durch sein geometrisches Mittel $\sqrt{|\lambda_{2j-1} \lambda_{2j}|}$ und die zugehörigen Eigenkoeffizienten $\langle g_{z[,d]}, v_{2j-1} \rangle^2, \langle g_{z[,d]}, v_{2j} \rangle^2$ durch ihre Summe ersetzt. Dieses Verfahren lieferte für alle untersuchten numerischen Beispiele die besseren Rekonstruktionen.

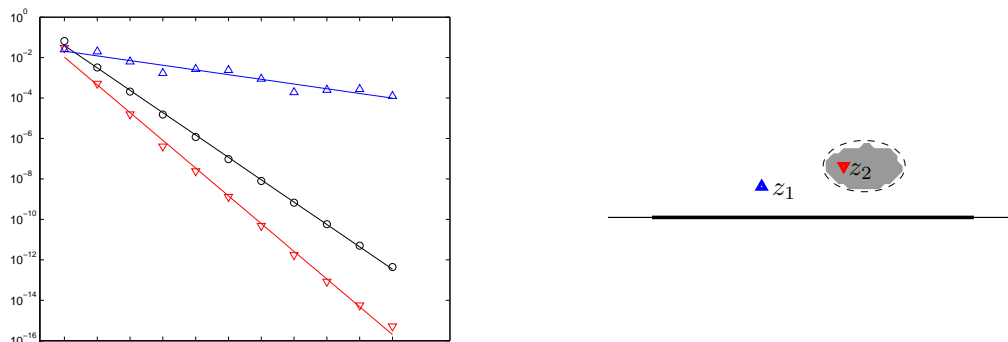


Abbildung 5.3: Ausgleichsgeraden durch die gemittelten Eigenwerte und die quadrierten Entwicklungskoeffizienten zweier Testpunkte

Im Fall der Halbebene treten die Eigenwerte bei allen untersuchten Beispielen im wesentlichen ebenfalls als Pärchen auf, weshalb wir das Vorgehen der Mittelung übernehmen und die Ausgleichsgeraden zu den gemittelten Daten berechnen.

Abbildung 5.3 zeigt die Ausgleichsgeraden durch die quadrierten Entwicklungskoeffizienten für zwei Testpunkte z_1 und z_2 außer- bzw. innerhalb des zu rekonstruierenden Einschlusses. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Ausgleichsgerade für den Testpunkt z_1 weniger steil und die für den Testpunkt z_2 steiler ist als die Ausgleichsgerade für die Eigenwerte. Die grau schattierte Fläche im rechten Bild zeigt die Rekonstruktion des Einschlusses, die wir erhalten, wenn wir das Kriterium auf alle Testpunkte des äquidistanten Gitters auf $[-4, 4] \times [0.2, 5]$ mit Gitterweite 0.1 anwenden.

Im dreidimensionalen Fall muß man das Kriterium abändern. Betrachtet man ein radialsymmetrisches Diffraktionsproblem in der Einheitskugel, so kann man nachrechnen, daß die Eigenfunktionen der Neumann-Dirichlet-Abbildung gerade die Kugelfunktionen sind (siehe [42]) und daß die Eigenwerte nicht mehr als Pärchen sondern als Gruppen auftreten, deren Stärke gerade der Anzahl der Kugelfunktionen der zugehörigen Ordnung entsprechen. Da die konstanten Funktionen als Neumann-Randwerte auf beschränkten Gebieten nicht zugelassen sind, erhält man als erste Eigenfunktionen die drei Kugelfunktionen erster Ordnung, also eine Dreiergruppe von gleichen Eigenwerten. Es folgt eine Fünfergruppe (Kugelfunktionen 2. Ordnung), eine Siebenergruppe (Kugelfunktionen 3. Ordnung) u.s.w. Dies beobachtet man im Halbraum ebenfalls, wenn der Einfluß eine Kugel ist, deren Mittelpunkt über dem Mittelpunkt der Meßebe Γ_0 liegt (siehe Abbildung 5.4; der dunkelblau eingefärbte Bereich in der linken Abbildung ist der Meßbereich Γ_0 , die rechte Abbildung zeigt die ersten 50 Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$).

Für allgemeinere Konstellationen konnten wir in den numerischen Simulationen lediglich eine gewisse Päckchenbildung bei den Eigenwerten beobachten, so daß wir für den dreidimensionalen Fall diese Päckchen heuristisch bestimmen und alle Eigenwerte eines solchen Päckchens mitteln sowie die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten aufsummieren. Dieses Vorgehen liefert gute numerische Ergebnisse, wie wir in Abschnitt 5.3 sehen werden.

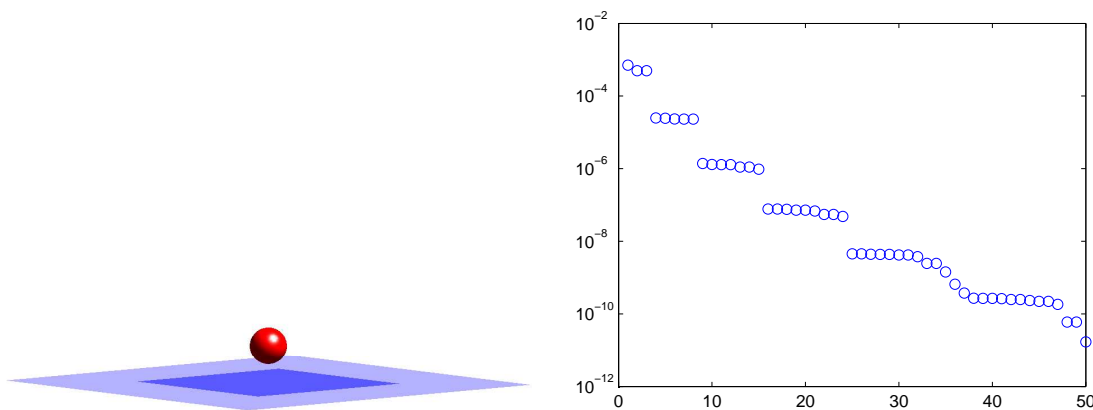


Abbildung 5.4: Eigenwerte der Neumann-Dirichlet-Abbildung für einen kugelförmigen Einfluß

5.2 Rekonstruktionen im zweidimensionalen Fall

Für die in Abschnitt 4.3.1 hergeleitete Charakterisierung der Einschlüsse spielt der tatsächliche Wert der Leitfähigkeit innerhalb der Einschlüsse keine Rolle. Diese wichtige Eigenschaft hat auch der aus der theoretische Charakterisierung entwickelte Rekonstruktionsalgorithmus, was numerisch schon durch die in den Arbeiten von Brühl ([11] und [13]) und Brunk ([16]) untersuchten Beispielen bestätigt wurde. Wir betrachten hier exemplarisch den ellipsenförmigen Einschluß aus dem vorangegangenen Abschnitt. Abbildung 5.5 zeigt die Rekonstruktionen für die Leitfähigkeiten $\kappa = 0.01$, $\kappa = 0.5$ und $\kappa = 0.99$. Als Dipolrichtung für die Testfunktion wurde in allen drei Fällen der erste Einheitsvektor genommen. Man erkennt, daß alle drei Rekonstruktionen von vergleichbarer Qualität sind.

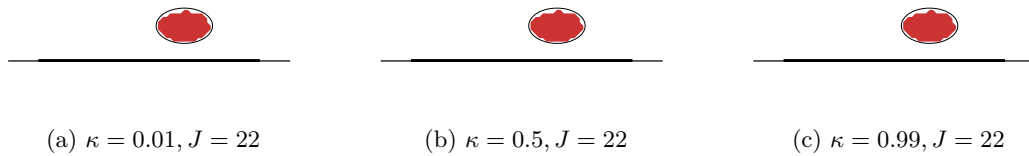


Abbildung 5.5: Rekonstruktionen für verschiedene Leitfähigkeiten

In allen untersuchten Beispielen hingen die Rekonstruktionen von der Wahl der Dipolrichtung d für die Testfunktion ab, wie Abbildung 5.6 für einen nierenförmigen Einschluß mit Leitfähigkeit $\kappa = 0.5$ zeigt.

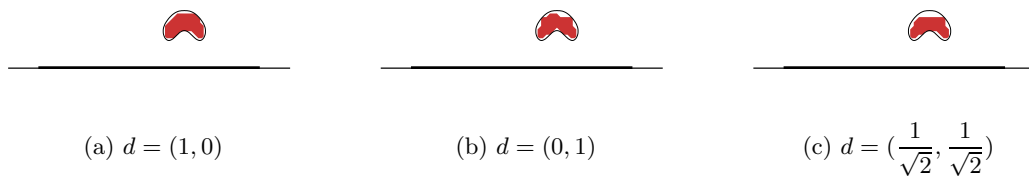


Abbildung 5.6: Rekonstruktionen für verschiedene Dipolrichtungen

Ein bessere Vorgehensweise zur Rekonstruktion der Einschlüsse besteht deshalb darin, für jeden Gitterpunkt nicht nur eine Testfunktion zu einem festen Dipol zu berechnen, sondern stattdessen zehn verschiedene Testfunktionen mit den Dipolrichtungen

$$d_k = (\cos(2\pi k/10), \sin(2\pi k/10)), \quad k = 0, \dots, 9, \quad (5.5)$$

zu betrachten. Der Rechenaufwand dafür ist vernachlässigbar, da man für ein vorgegebenes Gitter mit Testpunkten ein einziges Mal die Entwicklungskoeffizienten der Testfunktionen g_{z,e_1} und g_{z,e_2} bezüglich der Basis (5.1) berechnen und abspeichern muß. Die

Entwicklungskoeffizienten für die Testfunktion g_{z,d_k} ergeben sich aus diesen durch Linearkombination. Für jede der Testfunktionen haben wir die Steigung der Ausgleichsgeraden durch die quadrierten Entwicklungskoeffizienten berechnet und mit der Steigung der Ausgleichsgeraden durch die Eigenwerte verglichen. In Abbildung 5.7(a) erkennt man einen inneren Bereich des Einschlusses, in dem alle Testfunktionen das Kriterium $\rho_{z,d} < q$ erfüllen. Zum Rand des Einschlusses hin gibt es hingegen Testpunkte, für die einige Testfunktionen das Kriterium nicht mehr erfüllen. In Abbildung 5.7(b) haben wir als Approximation des Einschlusses die Menge aller Testpunkte genommen, für die mindestens vier der zehn Testfunktionen dem Kriterium $\rho_{z,d} < q$ genügen. Dieses Kriterium lieferte in den meisten untersuchten Beispielen die beste Rekonstruktion. Alle weiteren Rekonstruktionen, die wir in diesem Abschnitt zeigen, haben wir durch dieses Verfahren erhalten.

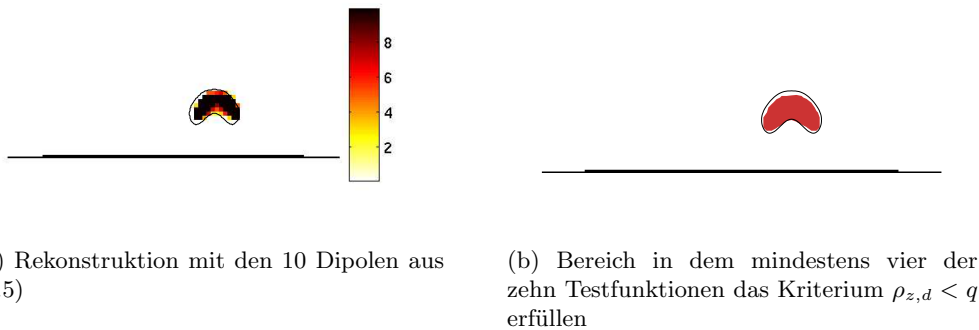


Abbildung 5.7: Rekonstruktionen mit mehreren Dipolen

Wir kommen noch einmal zurück zu dem Beispiel eines nierenförmigen Einschlusses. Dieser Einschluß ist nicht konvex. Solange die „nicht-konvexe Seite“ des Einschlusses der Meßebeine zugewandt ist, kann sie sehr gut rekonstruiert werden, wie das linke Bild in Abbildung 5.8 zeigt. Liegt der „nicht-konvexe Part“ auf der der Meßebeine abgewandten Seite, ist eine Rekonstruktion nicht möglich, man erhält jedoch eine gute konvexe Approximation des Einschlusses (siehe rechtes Bild in Abbildung 5.8). Dieses Ergebnis deckt sich mit numerischen Resultaten, die man erhält, wenn man auf einem beschränkten Gebiet nur auf einem Teil des Randes die Neumann- und Dirichlet-Daten hat (siehe [30]).



Abbildung 5.8: Rekonstruktion nicht-konvexer Einschlüsse

Als nächstes beschäftigen wir uns mit dem Fall zweier Inhomogenitäten, einem nieren- und einem ellipsenförmigen Einschuß (siehe Abbildung 5.9). Die Leitfähigkeitsvorgaben für die beiden Komponenten sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$, $\kappa_1 = 0.1$ und $\kappa_2 = 0.9$ bzw. $\kappa_1 = 0.9$ und $\kappa_2 = 0.1$. In allen drei Fällen ist deutlich zu erkennen, daß zwei getrennte Teilgebiete rekonstruiert werden. Im zweiten und im dritten Fall wird jedoch jeweils der Einschuß, in dem die Leitfähigkeit näher an der Hintergrundleitfähigkeit liegt, etwas verkleinert wiedergegeben.

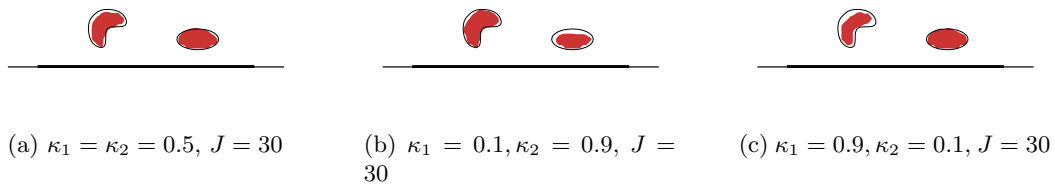


Abbildung 5.9: Rekonstruktion von zwei Inhomogenitäten

Als weiteres Beispiel wollen wir den Fall betrachten, daß eine der beiden Inhomogenitäten nicht mehr oberhalb des Meßbereiches liegt. Dazu wählen wir wieder einen nieren- und einen ellipsenförmigen Einschuß jeweils mit Leitfähigkeit $\kappa = 0.5$, wobei der ellipsenförmige Einschuß rechts vom Meßbereich liegt (siehe Abbildung 5.10). In der rechten Abbildung haben wir alle Testpunkte rot markiert, bei denen für mindestens einen der zehn Dipole aus (5.5) die Steigung ρ_{z,d_k} der Ausgleichsgerade durch die quadrierten Entwicklungskoeffizienten kleiner war als die Steigung q der Ausgleichsgeraden durch die Eigenwerte. Man erkennt deutlich, daß der oberhalb der Meßebe liegende nierenförmige Einschuß nach wie vor sehr gut rekonstruiert wird. Die ellipsenförmige Inhomogenität wirft einen Schatten auf den Bereich rechts der Meßebe, wohingegen der Teil des Randes, der dem Meßbereich zugewandt ist, noch recht gut rekonstruiert wird. Markiert man hingegen nur diejenigen Testpunkte, bei denen für mindestens vier der zehn Dipole das Testkriterium $\rho_{z,d_k} < q$ erfüllt ist, verschwindet die Schattenbildung und man erhält eine überraschend gute Rekonstruktion der ellipsenförmigen Inhomogenität (siehe linkes Bild in Abbildung 5.10). Für dieses Beispiel haben wir als Testpunkte das äquidistanten Gitter über $[-6, 6] \times [0.2, 5]$ mit Gitterweite 0.1 gewählt. Der Abbruchindex J war hier $J = 20$.



Abbildung 5.10: Rekonstruktion eines Einschlusses außerhalb des Meßbereiches

Ebenso interessant ist es zu untersuchen, wie sich die Rekonstruktion eines Einschlusses mit wachsender Höhe über dem Meßbereich verändert. Dazu greifen wir das Beispiel des nieren- und des ellipsenförmigen Einschlusses mit den Leitfähigkeiten $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$ aus Abbildung 5.9 auf und verschieben den Mittelpunkt der Ellipse in e_2 -Richtung immer weiter von der Meßebene weg.

Abbildung 5.11 zeigt die erhaltenen Rekonstruktionen, wenn man all die Testpunkte rot markiert, für die mindestens vier der zehn Testfunktionen dem Kriterium $\rho_{z,d} < q$ genügen. Während der nierenförmige Einschuß gleichbleibend gut rekonstruiert wird, wird die Rekonstruktion des ellipsenförmigen Einschlusses wie zu erwarten mit zunehmender Höhe schlechter. Er bleibt jedoch als zweiter Einschuß zu erkennen und auch seine Lage und sein Mittelpunkt werden weiterhin gut rekonstruiert.

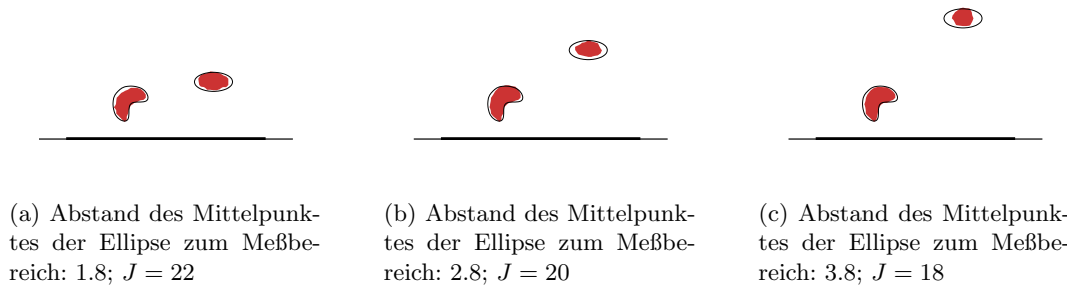


Abbildung 5.11: Rekonstruktion eines Einschlusses in zunehmender Höhe über dem Meßbereich

Als letztes wollen wir noch die Empfindlichkeit des Verfahrens gegenüber Störungen in den Daten untersuchen. Dazu betrachten wir das Beispiel eines ellipsenförmigen Einschlusses mit Leitfähigkeit $\kappa = 0.5$ und addieren normalverteiltes Rauschen zu den simulierten Differenzdaten $(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1)f_k$ hinzu.

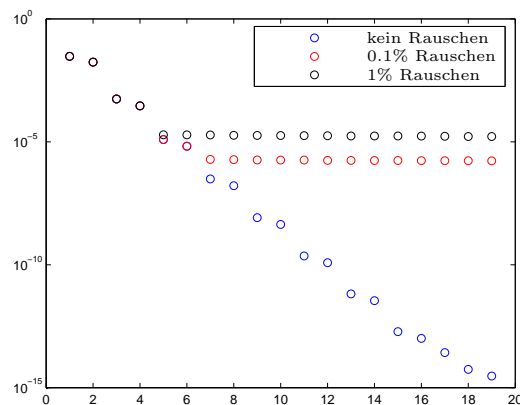


Abbildung 5.12: Einfluß von Störungen auf die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$

Abbildung 5.12 zeigt die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ für die ungestörten Daten (blaue Kreise), die Daten mit 0.1% Rauschen (rote Kreise) und 1% Rauschen (schwarze Kreise). Man erkennt deutlich, daß das exponentielle Abfallverhalten der Eigenwerte zusammenbricht, sobald die Eigenwerte in der Größenordnung des Rauschens liegen. Insbesondere sind umso weniger Eigenwerte für die Rekonstruktion verwendbar je größer der Rauschpegel ist.

Abbildung 5.13 zeigt schließlich die für die verschiedenen Rauschpegel erzielten Rekonstruktionen. Sowohl bei einem Rauschpegel von 0.1% also auch von 1% ist das Zentrum des Einschlusses noch gut zu erkennen, die Auflösung des Randes wird jedoch mit zunehmendem Rauschpegel schlechter.

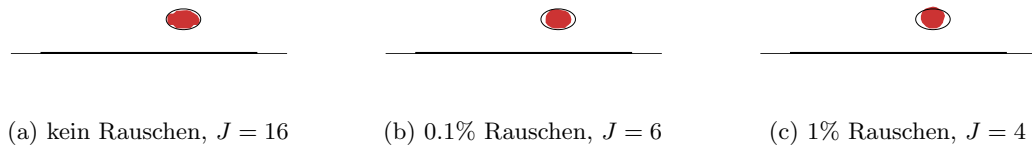


Abbildung 5.13: Rekonstruktion bei gestörten Daten

5.3 Rekonstruktionen im dreidimensionalen Fall

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir auch für den dreidimensionalen Fall noch einige Rekonstruktionen präsentieren. Nach Abschnitt 4.4.2 können wir als Testfunktion sowohl den Monopol g_z als auch den Dipol $g_{z,d}$ benutzen. In allen untersuchten Beispielen stellte sich jedoch heraus, daß man mit den Dipol-Funktionen die besseren Rekonstruktionen erzielt. Um dies zu zeigen, betrachten wir exemplarisch eine ellipsoide Inhomogenität mit Mittelpunkt $P = (1.2, 0.8, 0.4)$, Radien $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.15$ und $r_3 = 0.1$ wie in Abbildung 5.14 gezeigt. Die Inhomogenität hat die Leitfähigkeit $\kappa = 0.5$.

In Abbildung 5.14(b) sind die ersten 50 Eigenwerte von $|\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1|$ zu sehen (blaue Kreise). Rot markiert sind die ersten 29 Eigenwerte, die größer oder gleich 10^{-10} sind und die für die im folgenden gezeigten Rekonstruktionen verwendet wurden.

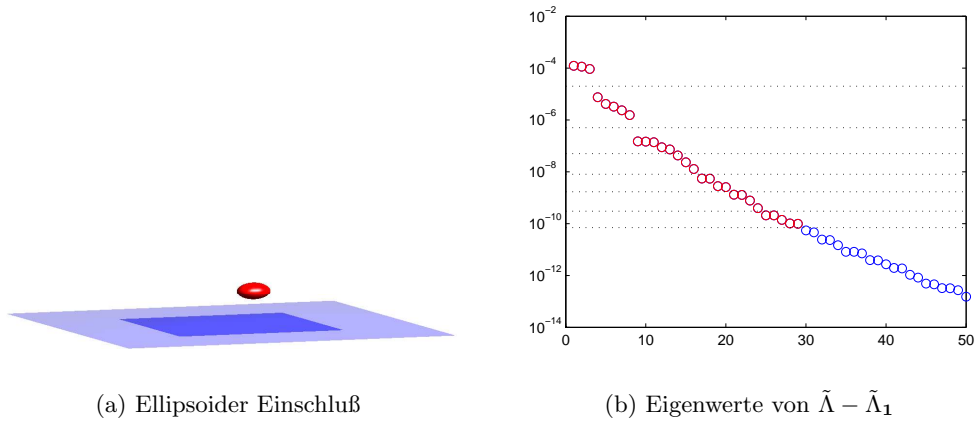


Abbildung 5.14: Ellipsoider Einschluß mit Leitfähigkeit $\kappa = 0.5$

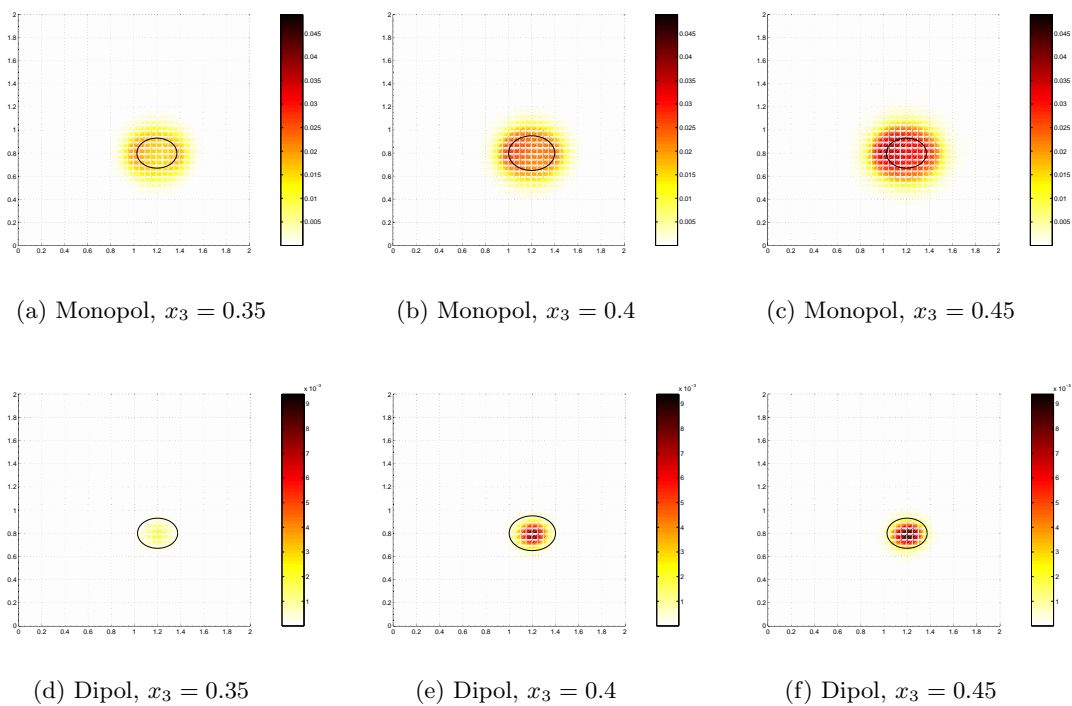


Abbildung 5.15: Reziproker Wert der Picard-Reihe für 29 Eigenwerte in verschiedenen x_3 -Ebenen

Für die drei verschiedenen Ebenen $x_3 = 0.35$, $x_3 = 0.4$ und $x_3 = 0.45$ haben wir für ein äquidistantes Gitter auf $[0, 2] \times [0, 2] \times \{x_3\}$ mit Gitterweite 0.05 den reziproken Reihenwert $1/(h_J(z)/\|g_{z,d}\|_{L^2(\Gamma_0)}^2)$ für $J = 29$ Eigenwerte einmal für die Testfunktion g_z und einmal für die Testfunktion $g_{z,d}$ mit Dipol $d = e_1$ berechnet (siehe Abbildung 5.15). Der Rand des

Schnitts des Einschlusses mit der jeweiligen Ebene ist schwarz eingezeichnet. Die Lage des Einschlusses wird mit beiden Testfunktionen gut rekonstruiert, die Größe des Einschlusses ist jedoch mit der Dipol-Testfunktion besser zu erkennen. Alle weiteren Rekonstruktionen dieses Abschnittes wurden deshalb mit Dipol-Testfunktionen gemacht.

Wie schon in Abschnitt 5.1.2 angesprochen ist bei den Eigenwerten von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_\sigma$ im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall keine eindeutige Gruppierung mehr zu erkennen. Am Beispiel der ellipsoiden Inhomogenität in Abbildung 5.14 sieht man zwar - wie in Abbildung 5.4 - eine Dreier- und eine Fünfergruppe von Eigenwerten, weitere Gruppierungen sind jedoch nicht zu erkennen. Deshalb mitteln wir die Eigenwerte in diesem Fall heuristisch und geben die Mittelung für jedes untersuchte Beispiel an. Für den ellipsoiden Einschuß aus Abbildung 5.14(a) trennen die in Abbildung 5.14(b) eingezeichneten Linien die einzelnen Eigenwertgruppen voneinander, d.h. wir haben Eigenwertgruppen der Größe 3, 5, 5, 3, 4, 4, 5 betrachtet.

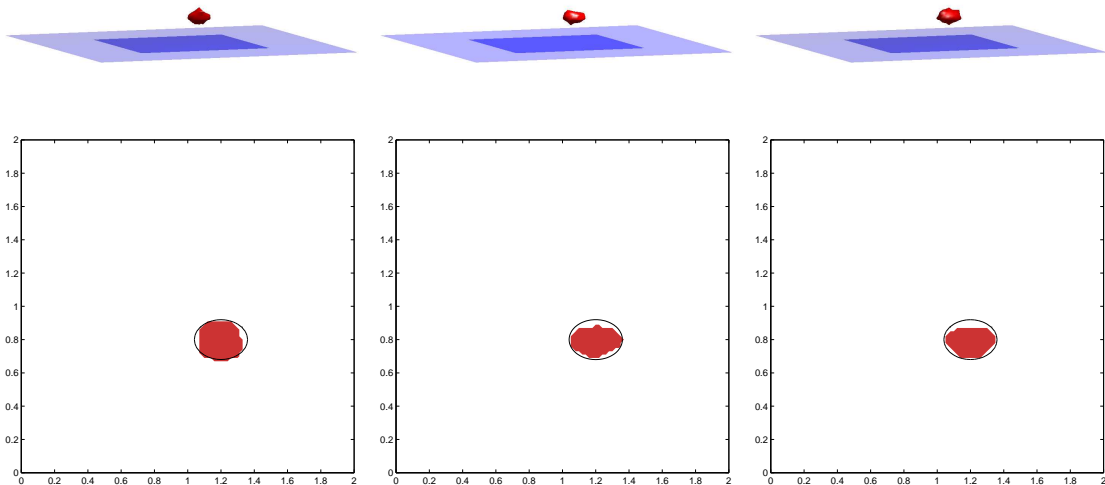


Abbildung 5.16: Rekonstruktionen mit den Dipolrichtungen $d = (0, 0, 1)$, $d = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Die obere Reihe in Abbildung 5.16 zeigt die Rekonstruktionen für die drei Dipole $d = (0, 0, 1)$, $d = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Wie schon im zweidimensionalen Fall sieht man, daß die Rekonstruktion von der Wahl der Dipolrichtung abhängt, wenngleich bei allen drei Dipolen Form und Lage des Einschlusses gut rekonstruiert werden. Als Testpunkte wurde ein äquidistantes Gitter auf $[0, 2] \times [0, 2] \times [0.1, 0.7]$ mit Gitterweite 0.05 verwendet. Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit des Rekonstruktionsergebnisses von der Wahl der Dipolrichtung zeigt die untere Reihe in Abbildung 5.16 die Rekonstruktion für die Ebene $x_3 = 0.46$. In dieser Ebene wurde ein äquidistantes Gitter auf $[0, 2] \times [0, 2]$ mit Gitterweite 0.02 verwendet.

Um die Abhängigkeit von der Wahl des Dipols zu umgehen, berechnen wir im weiteren wie

auch schon im zweidimensionalen Fall für jeden Testpunkt nicht nur eine Testfunktion zu einem festen Dipol sondern stattdessen neun verschiedene Testfunktionen mit den Dipolrichtungen

$$d_1 = (0, 0, 1), \quad d_{k,l} = (\cos \varphi_k \sin \theta_l, \sin \varphi_k \sin \theta_l, \cos \theta_l), \quad \varphi_k = \frac{k\pi}{2}, \quad \theta_l = \frac{l\pi}{4}, \quad (5.6)$$

für $k = 0, \dots, 3$ und $l = 1, 2$.

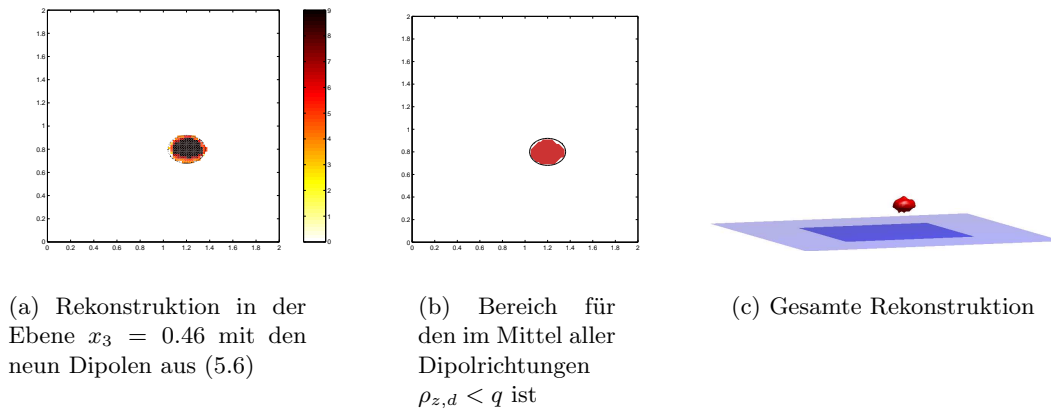


Abbildung 5.17: Rekonstruktionen mit mehreren Dipolrichtungen

In Abbildung 5.17(a) erkennt man, daß es einen inneren Bereich des Einschusses gibt, in dem alle neun Testfunktionen das Konvergenzkriterium $\rho_{z,d} < q$ erfüllen. Im Randbereich gibt es hingegen Dipolrichtungen, für die das Testkriterium nicht mehr erfüllt ist. Außerhalb der Inhomogenität gilt wie erwartet für alle Testfunktionen $\rho_{z,d} > q$. Wieder erhält man gute Rekonstruktionen, wenn man wie im zweidimensionalen Fall einen Testpunkt als im Einschluß liegend markiert, wenn für mindestens vier der neun Dipolrichtungen die Steigung $\rho_{z,d}$ der Ausgleichsgerade durch die quadrierten Entwicklungsquotienten kleiner ist als die Steigung q der Ausgleichsgerade durch die Eigenwerte. Allerdings liefert der von uns benutzte Matlab-Befehl `isosurface` zur Erzeugung dreidimensionaler Darstellungen der Rekonstruktionen bessere Ergebnisse, wenn man jedem Testpunkt den Mittelwert aller neun Quotienten $q/\rho_{z,d_k}$, $k = 1, \dots, 9$, zuordnet und die Inhomogenität durch die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{R}_+^3 : \frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 \frac{q}{\rho_{z,d_k}} > 1 \right\}.$$

approximiert. Die so erhaltene Rekonstruktion in der Ebene $x_3 = 0.46$ zeigt Abbildung 5.17(b), die gesamte Rekonstruktion ist in Abbildung 5.17(c) zu sehen.

Dieses Vorgehen ist natürlich auch auf den zweidimensionalen Fall anwendbar und liefert ebenso gute Rekonstruktionen wie die in Abschnitt 5.2 gezeigten.

Als nächsten Beispiel wollen wir die Rekonstruktion zweier Inhomogenitäten untersuchen. Dazu betrachten wir einen ellipsoiden Einschluß mit Mittelpunkt $(0.4, 0.4, 0.4)$ und Radien

$r_1 = r_2 = 0.2$ und $r_3 = 0.1$ sowie einen nierenförmigen Einschuß mit Mittelpunkt in $(1.2, 1.2, 0.8)$, dessen „nicht-konvexe Seite“ der Meßebeine zugewandt ist (siehe Abbildung 5.18(a)). In Abbildung 5.18(b) sind die ersten 50 Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ zu sehen. Die gepunkteten Linien trennen wieder die einzelnen Eigenwertgruppen voneinander, d.h. die hier gewählte Gruppierung war 3, 3, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 3, 3, 5, 3, 3, so daß wir 43 Eigenwerte für die Rekonstruktion verwendet haben.

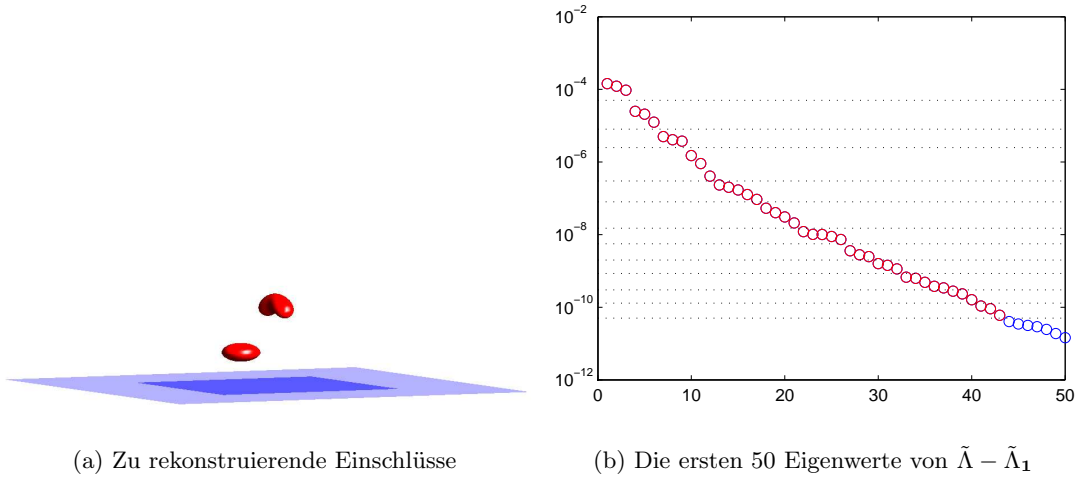


Abbildung 5.18: Zwei Inhomogenitäten mit Leitfähigkeit $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$

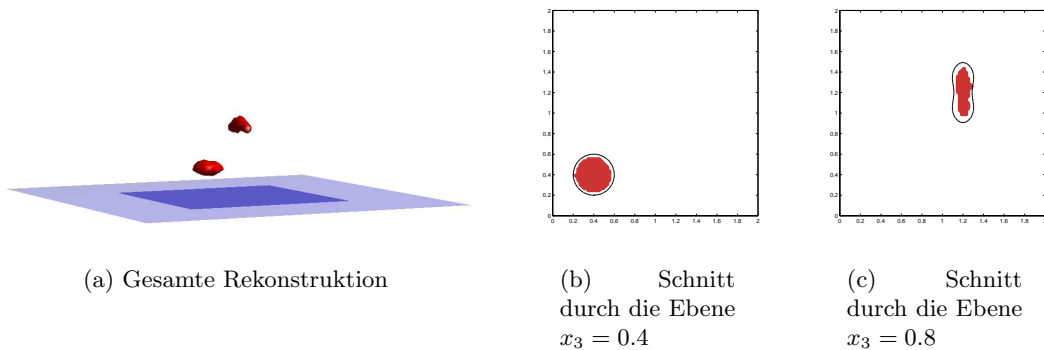


Abbildung 5.19: Rekonstruktion der zwei Inhomogenitäten aus Abbildung 5.18

In Abbildung 5.19 sind die erhaltenen Rekonstruktionen zu sehen. Anhand des linken Bildes erkennt man, daß auch die Rekonstruktion nicht konvex ist, die Form des nierenförmigen Einschlusses wird gut angenähert. Die Rekonstruktion wurde auf einem äquidistanten Gitter auf $[0, 2] \times [0, 2] \times [0.1, 1.05]$ mit Gitterweite 0.05 berechnet. Anhand der beiden Schnittbilder durch die Mittelpunkte der beiden Inhomogenitäten sieht man, daß auch die Lage der beiden Einschlüsse gut rekonstruiert wird. Allerdings wird der nierenförmige

Einschluß verkleinert wiedergegeben. Die Schnittbilder wurden auf einem äquidistanten Gitter auf $[0, 2] \times [0, 2] \times \{x_3\}$ mit der Gitterweite 0.02 berechnet.

Im nächsten Beispiel haben wir den nierenförmigen Einschluß so gedreht, daß seine „nicht-konvexe Seite“ nicht mehr auf der der Meßebene zugewandten Seite liegt (siehe Abbildung 5.20(a)). Abbildung 5.20(b) zeigt die ersten 50 Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ und die gewählte Gruppierung 3, 3, 3, 3, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 3 der Eigenwerte, d.h. wir verwenden 43 Eigenwerte für die Rekonstruktion.

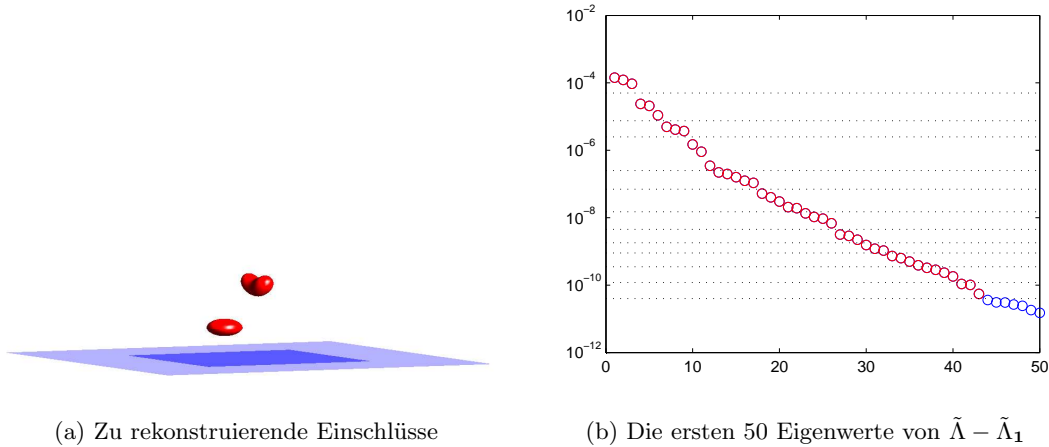


Abbildung 5.20: Zwei Inhomogenitäten mit Leitfähigkeit $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$

In Abbildung 5.21 sind die erhaltenen Rekonstruktionen zu sehen. Anhand der linken Abbildung erkennt man, daß der ellipsoide Einschluß nach wie vor sehr gut rekonstruiert wird. Der zweite Einschluß ist deutlich als zweiter Einschluß zu erkennen, jedoch kann die Form nicht mehr aufgelöst werden, was sich mit den Ergebnissen für den zweidimensionalen Fall deckt. Die gesamte Rekonstruktion wurde auf demselben Gitter wie die Rekonstruktion in Abbildung 5.19 berechnet.

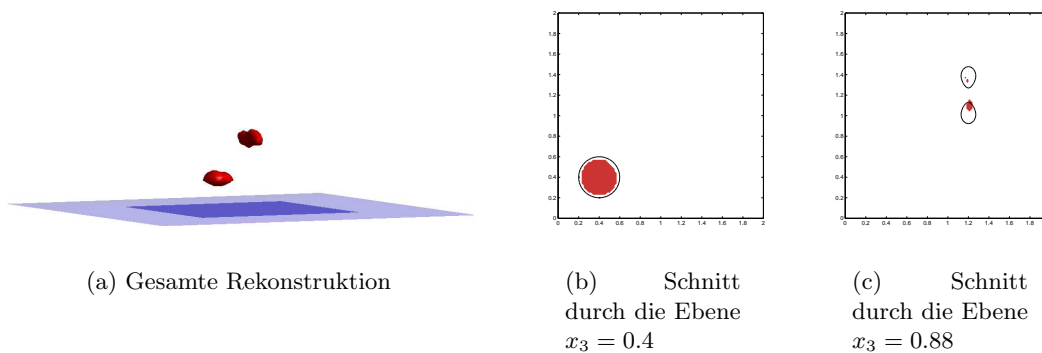


Abbildung 5.21: Rekonstruktion der zwei Inhomogenitäten aus Abbildung 5.20

Das Schnittbild durch die Ebene $x_3 = 0.4$ bestätigt, daß die Ellipse in Lage, Größe

und Form gut rekonstruiert wird. Der Schnitt durch die Ebene $x_3 = 0.88$ zeigt, daß der nicht-konvexe Teil der nierenförmigen Inhomogenität nicht mehr korrekt aufgelöst werden kann. Wie schon im zuvor betrachteten Beispiel wurden die Schnittbilder wieder auf einem feineren Gitter berechnet.

Auch im Dreidimensionalen wollen wir untersuchen, wie ein Einschuß rekonstruiert wird, der nicht mehr oberhalb der Meßebe liegt. Dazu betrachten wir die Situation in Abbildung 5.22(a) mit einem ellipsoiden Einschuß links des Meßbereichs und einem nierenförmigen Einschuß oberhalb des Meßbereiches jeweils mit Leitfähigkeit $\kappa = 0.5$. Abbildung 5.22(b) zeigt die ersten 50 Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ und die verwendeten Eigenwertgruppen der Größe 4, 5, 5, 5, 3, 6, 4.

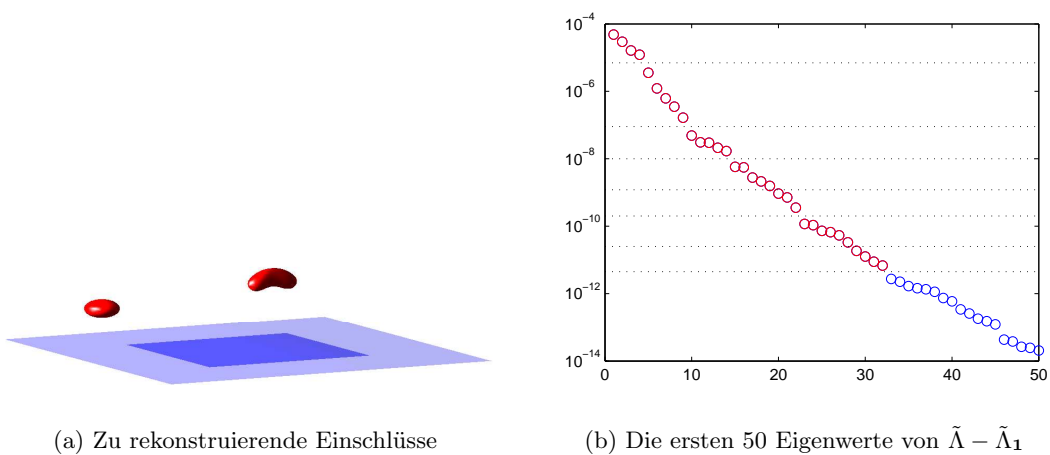


Abbildung 5.22: Zwei Inhomogenitäten mit Leitfähigkeit $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$

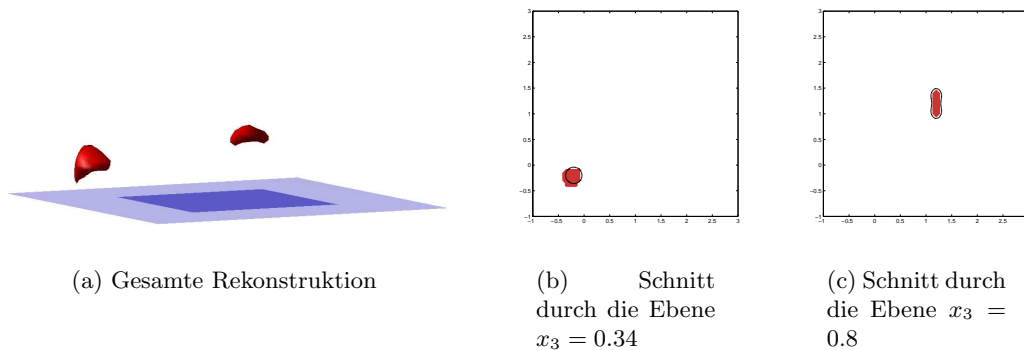


Abbildung 5.23: Rekonstruktion der zwei Inhomogenitäten aus Abbildung 5.22

Das linke Bild in Abbildung 5.23 zeigt die gesamte Rekonstruktion der beiden Einschlüsse, erzeugt durch ein äquidistantes Gitter von Testpunkten auf $[-1, 3] \times [-1, 3] \times [0.1, 1.05]$ mit Gitterweite 0.1 in x_1 - und x_2 -Richtung sowie 0.05 in x_3 -Richtung. Das mittlere und das

rechte Bild zeigen die Schnitte durch die Ebenen $x_3 = 0.34$ und $x_3 = 0.8$, erzeugt durch das äquidistante Gitter von Testpunkten auf $[-1, 3] \times [-1, 3] \times x_3$ mit Gitterweite 0.05. Wie erwartet wirft der nicht mehr oberhalb der Meßebene liegende ellipsoide Einschuß einen Schatten, seine Position wird jedoch richtig rekonstruiert. Der nierenförmige Einschuß oberhalb der Meßebene ist weiterhin gut zu erkennen.

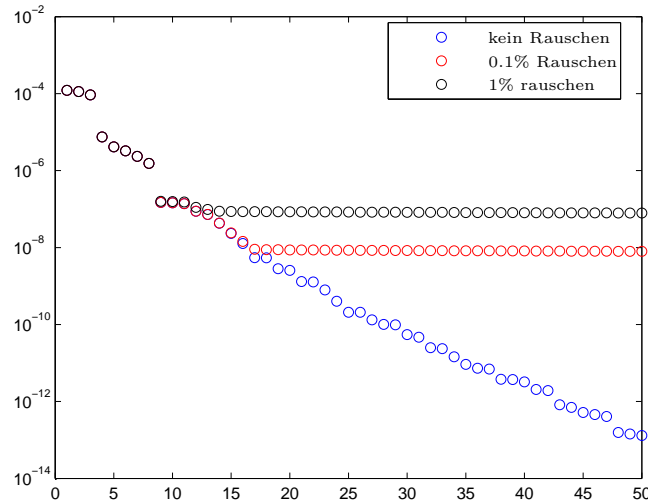


Abbildung 5.24: Einfluß von Störungen in den Daten auf die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$

Zum Abschluß wollen wir auch im Dreidimensionalen die Empfindlichkeit des Rekonstruktionsverfahrens gegenüber Störungen in den Daten untersuchen. Wir betrachten dazu noch einmal das Beispiel des ellipsoiden Einschlusses aus Abbildung 5.14 und addieren zu den simulierten Daten normalverteiltes Rauschen hinzu. Abbildung 5.24 zeigt die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}_1$ für die verschiedenen untersuchten Rauschpegel: Die blauen Kreise markieren die Eigenwerte für die ungestörten Daten, die roten Kreise die Eigenwerte für die Daten mit 0.1% Rauschen und die schwarzen Kreise die Eigenwerte für 1% Rauschen. Wie auch bei dem betrachteten Beispiel im zweidimensionalen Fall sind umso weniger Eigenwerte für die Rekonstruktion verwendbar je höher der Rauschpegel ist. Bei einem Rauschpegel von 0.1% sind nur noch 16 Eigenwerte verwendbar, dementsprechend wurden die ersten vier Eigenwertgruppen der Größe 3, 5, 5, 3 für die Rekonstruktion herangezogen. Bei einem Rauschpegel von 1% verbleiben noch 13 Eigenwerte, so daß für die Rekonstruktion die drei Eigenwertgruppen der Größe 3, 5, 5 herangezogen wurden. Abbildung 5.25 zeigt die Rekonstruktion für die verschiedenen Rauschpegel. Sowohl bei 0.1% Rauschen als auch bei 1% Rauschen wird die Position des Einschlusses noch gut erkannt, Form und Größe der Inhomogenität sind hingegen weniger gut zu erkennen. In Abbildung 5.26 sind zusätzlich noch die Rekonstruktionen für die Ebene $x_3 = 0.48$ angegeben.

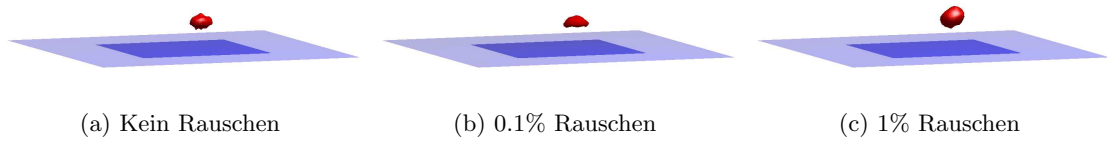


Abbildung 5.25: Rekonstruktion bei gestörten Daten

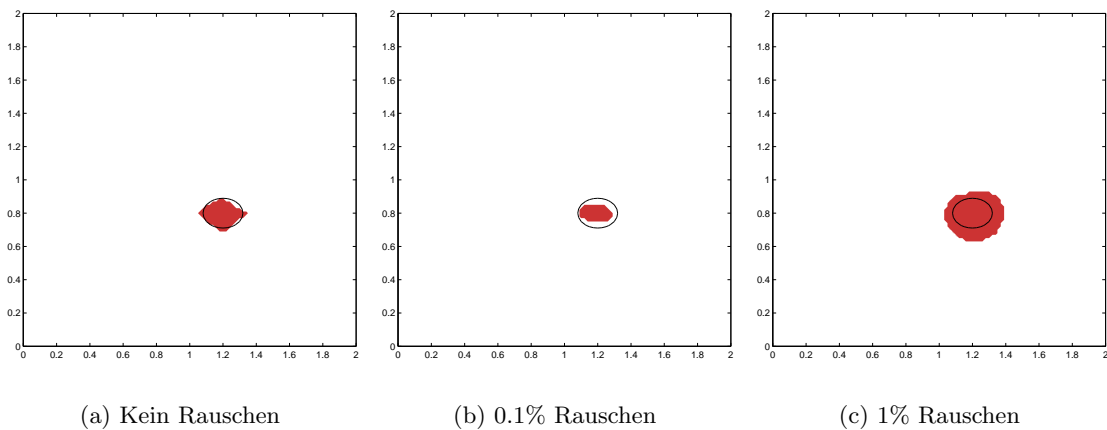


Abbildung 5.26: Schnitt durch die Rekonstruktion bei gestörten Daten für $x_3 = 0.48$

Die in diesem Kapitel untersuchten Beispiele zeigen sowohl für den zwei- als auch den dreidimensionalen Fall, daß der vorgestellte Algorithmus zur Rekonstruktion von Einschlüssen mit gegenüber dem Hintergrund sprunghaft erhöhter oder erniedrigter Leitfähigkeit gute Ergebnisse liefert. Insbesondere hat die Methode als nicht-iteratives Verfahren einen geringen Rechenaufwand, der sich auch dann nicht signifikant erhöht, wenn man wie in dieser Arbeit vorgeschlagen nicht nur eine, sondern mehrere Testfunktionen gleichzeitig zur Bestimmung des Einschlusses heranzieht, was die Qualität der Rekonstruktionen verbessert.

A Einige Beweise zu den Eigenschaften gewichteter Sobolev-Räume

Um die Aussagen der Sätze 2.3 und 2.4 über die kompakte Einbettbarkeit der gewichteten Sobolev-Räume in gewichtete L^2 -Räume beweisen zu können, benötigen wir zunächst eine zum Satz von Riesz (vgl. [2, Satz 2.15]) analoge Charakterisierung präkompakter Mengen in gewichteten L^2 -Räumen. Zur Vorbereitung dieser Charakterisierung müssen Faltungen von Funktionen aus gewichteten L^2 -Räumen mit C_0^∞ -Funktionen untersucht werden (vgl. [40, Lemma A.1.9] und [2, Satz 2.12]).

Lemma A.1

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, $\alpha \geq 0$ und $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, so daß

$$\sup_{h \in \text{supp}(\varphi)} \|f(\cdot + h, \cdot)\|_{L^{2,\alpha}} < \infty$$

gilt. Dabei bezeichnet $f(\cdot + h, \cdot)$ die Funktion $x \mapsto f(x + h, x)$.

Dann definiert die Faltung

$$\varphi * f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) f(x, y) dy \quad (\text{A.1})$$

eine Funktion in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|\varphi * f\|_{L^{2,\alpha}} \leq (1 + 2S)^\alpha \|\varphi\|_{L^1} \sup_{h \in \text{supp}(\varphi)} \|f(\cdot + h, \cdot)\|_{L^{2,\alpha}}, \quad (\text{A.2})$$

wobei $S > 0$ so gewählt ist, daß $\text{supp}(\varphi) \subset B_S(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < S\}$.

Ist f unabhängig vom ersten Argument und $f \in L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\varphi * f\|_{L^{2,\alpha}} \leq (1 + 2S)^\alpha \|\varphi\|_{L^1} \|f\|_{L^{2,\alpha}}. \quad (\text{A.3})$$

Beweis:

Der Beweis kann genau wie der Beweis von [40, Lemma A.1.9] geführt werden, da die dortige Voraussetzung $\alpha > 1$ nicht notwendig ist, es reicht die hier gemachte Voraussetzung $\alpha \geq 0$. Aus Gründen der Vollständigkeit geben wir den Beweis an dieser Stelle für den Fall $n = 3$ an:

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$|\varphi * f(x)| \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x - y)| dy \right)^{1/2}}_{=\|\varphi\|_{L^1}^{1/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x - y)| |f(x, y)|^2 dy \right)^{1/2},$$

falls das zweite Integral auf der rechten Seite existiert. Mit dem Satz von Fubini erhält man im Falle der Existenz

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |\varphi * f(x)|^2 dx \\
 & \leq \|\varphi\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x-y)| |f(x,y)|^2 dy dx \\
 & = \|\varphi\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_\alpha^2(y)}{\rho_\alpha^2(x)} |\varphi(x-y)| \rho_\alpha^{-2}(y) |f(x,y)|^2 dx dy \\
 & = \|\varphi\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_\alpha^2(y)}{\rho_\alpha^2(x+y)} |\varphi(x)| \rho_\alpha^{-2}(y) |f(x+y,y)|^2 dx dy, \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

falls das Integral auf der rechten Seite existiert.

Sei nun $S > 0$ so groß, daß $\text{supp}(\varphi) \subset B_S(0)$. Dann gilt für $|y| < 2S$

$$\frac{\rho_\alpha^2(y)}{\rho_\alpha^2(x+y)} = \frac{(1+|y|)^{2\alpha}}{(1+|x+y|)^{2\alpha}} \leq (1+2S)^{2\alpha}$$

und für $|y| \geq 2S$, $x \in B_S(0)$

$$0 < |y| - S < |y| - |x| < |x+y|$$

und somit

$$\frac{\rho_\alpha^2(y)}{\rho_\alpha^2(x+y)} \leq \frac{(1+|y|)^{2\alpha}}{(1+|y|-S)^{2\alpha}} = \left(1 + \frac{S}{1+|y|-S}\right)^{2\alpha} \leq (1+S)^{2\alpha},$$

so daß auch für $|y| \geq 2S$ und $x \in B_S(0)$ die Abschätzung

$$\frac{\rho_\alpha^2(y)}{\rho_\alpha^2(x+y)} \leq (1+2S)^{2\alpha}$$

gilt. In (A.4) kann man daher weiter durch

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |(\varphi * f)(x)|^2 dx \leq \|\varphi\|_{L^1} (1+2S)^{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(y) |f(x+y,y)|^2 dy dx$$

abschätzen. Also existieren alle bisher betrachteten Integrale und die Abschätzungen (A.2) und (A.3) sind bewiesen.

Falls f nicht von x abhängt, so folgen die Stetigkeit von $\varphi * f$ und die Existenz der partiellen Ableitungen $D_i(\varphi * f) = (D_i\varphi) * f$ in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^3$ durch dominierte Konvergenz (siehe z.B. [39, Kapitel VIII, §2]), falls man für $\varphi(x-\cdot)f$ und $(D_i\varphi)(x-\cdot)f$ zeigen kann, daß sie gleichmäßig für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$ durch ein $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$ beschränkt sind. Dies ist offensichtlich der Fall, da $f \in L^2(K)$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^3$ ist und somit auch $f \in L^1(K)$ gilt. Per Induktion folgt dann $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. \square

Zum Beweis der Variante des Satzes von Riesz für gewichtete L^2 -Räume benötigen wir noch ein weiteres Hilfsresultat, das sich mit der Voraussetzung $\alpha > 1$ in [40, Lemma A.1.11] findet. Wir geben hier einen Beweis für dieses Resultat an, der für alle $\alpha \geq 0$ gültig ist.

Lemma A.2

Sei $\alpha \geq 0$ und $f \in L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$. Dann gilt $\|f(\cdot + h) - f\|_{L^{2,\alpha}} \rightarrow 0$ für $|h| \rightarrow 0$.

Beweis:

Wir geben den Beweis für $n = 3$ an, für $n = 2$ läßt sich die Behauptung analog zeigen. Wähle zu $f \in L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ eine Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\|f - f_j\|_{L^{2,\alpha}} \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^{2,\alpha}} &\leq \|f(\cdot + h) - f_j(\cdot + h)\|_{L^{2,\alpha}} + \\ &\quad \|f - f_j\|_{L^{2,\alpha}} + \|f_j(\cdot + h) - f_j\|_{L^{2,\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Für den ersten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f_j(\cdot + h)\|_{L^{2,\alpha}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-2\alpha} |f(x + h) - f_j(x + h)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x - h|)^{-2\alpha} |f(x) - f_j(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Definiere $c(h) := 1/(1 - |h|)$ für $|h| < 1$. Dann gilt $c(h) \rightarrow 1$ für $|h| \rightarrow 0$, insbesondere ist $c(h) \in (1, 2]$ für alle $|h| \leq 1/2$. Daher erhält man für die Gewichtsfunktion die Abschätzung

$$\begin{aligned} 1 = c(h)(1 - |h|) &\leq c(h)(1 - |h|) + |x|(c(h) - 1) = c(h) + c(h)(|x| - |h|) - |x| \\ &\leq c(h)(1 + |x - h|) - |x| \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{1}{1 + |x - h|} \leq c(h) \frac{1}{1 + |x|} \leq \frac{2}{1 + |x|} \quad \text{für } |h| \leq 1/2.$$

Der erste Summand in (A.5) kann für $|h| \leq 1/2$ demnach durch

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f_j(\cdot + h)\|_{L^{2,\alpha}}^2 &\leq 2^{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-2\alpha} |f(x) - f_j(x)|^2 dx \\ &= 2^{2\alpha} \|f - f_j\|_{L^{2,\alpha}}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

abgeschätzt werden. Für den letzten Summanden in (A.5) gilt

$$\begin{aligned} \|f_j(\cdot + h) - f_j\|_{L^{2,\alpha}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |f_j(x + h) - f_j(x)|^2 dx \\ &= \int_{\text{supp}(f_j) \cup \text{supp}(f_j(\cdot + h))} \rho_\alpha^{-2}(x) |f_j(x + h) - f_j(x)|^2 dx \\ &\leq \|f_j(\cdot + h) - f_j\|_\infty^2 \cdot \left\| \chi_{\text{supp}(f_j(\cdot + h) - f_j)} \right\|_{L^{2,\alpha}}^2. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^{2,\alpha}} &\leq (2^\alpha + 1) \underbrace{\|f - f_j\|_{L^{2,\alpha}}}_{\rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty} \\ &\quad + \|f_j(\cdot + h) - f_j\|_\infty \cdot \left\| \chi_{\text{supp}(f_j(\cdot + h) - f_j)} \right\|_{L^{2,\alpha}} \end{aligned}$$

für $|h| \leq 1/2$. Da jedes f_j gleichmäßig stetig ist, konvergiert der zweite Summand für alle j gegen 0, falls $|h| \rightarrow 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Nun können wir die Variante des Satzes von Riesz für gewichtete L^2 -Räume beweisen.

Satz A.3

Sei $\alpha \geq 0$. Eine Menge $A \subset L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, ist genau dann präkompakt, wenn

$$(i) \sup_{f \in A} \|f\|_{L^{2,\alpha}} \leq C$$

$$(ii) \sup_{f \in A} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^{2,\alpha}} \rightarrow 0 \text{ für } |h| \rightarrow 0$$

$$(iii) \sup_{f \in A} \|f\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty, \text{ wobei } B_R(0) \text{ die Kugel mit Radius } R \text{ um } 0 \text{ ist.}$$

Beweis:

Wir zeigen den Beweis für $n = 3$.

Sei $A \subset L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ präkompakt. Dann existieren zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Funktionen $f_i \in L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(f_i)$. Sei nun $f \in A$ beliebig. Dann existiert ein $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$\|f\|_{L^{2,\alpha}} \leq \varepsilon + \|f_{i_0}\|_{L^{2,\alpha}} \leq \varepsilon + \max_{i=1,\dots,m} \|f_i\|_{L^{2,\alpha}},$$

womit (i) gezeigt ist.

Weiterhin gilt zusammen mit (A.6) für $|h| < 1/2$

$$\begin{aligned} & \|f(\cdot + h) - f\|_{L^{2,\alpha}} \\ & \leq \|f(\cdot + h) - f_{i_0}(\cdot + h)\|_{L^{2,\alpha}} + \|f_{i_0}(\cdot + h) - f_{i_0}\|_{L^{2,\alpha}} + \|f - f_{i_0}\|_{L^{2,\alpha}} \\ & \leq (2^\alpha + 1) \|f - f_{i_0}\|_{L^{2,\alpha}} + \|f_{i_0}(\cdot + h) - f_{i_0}\|_{L^{2,\alpha}} \\ & \leq (2^\alpha + 1)\varepsilon + \max_{i=1,\dots,m} \|f_i(\cdot + h) - f_i\|_{L^{2,\alpha}}. \end{aligned}$$

Mit Lemma A.2 folgt, daß der zweite Summand für $|h| \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert, so daß (ii) gezeigt ist. Auch (iii) ist wegen

$$\|f\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0))} \leq \varepsilon + \max_{i=1,\dots,m} \|f_i\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0))}$$

sofort einsichtig.

Seien nun umgekehrt (i) bis (iii) erfüllt, $\delta > 0$, $R_\delta > \delta$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\varphi \geq 0$, $\text{supp } \varphi \subset B_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi dx = 1$. Definiere $\varphi_\delta(x) := \delta^{-3} \varphi(\frac{x}{\delta})$. (Beachte: Für den Beweis im zweidimensionalen Fall ändert sich der Faktor δ^{-3} in der Definition von φ_δ zu δ^{-2} .) Dann ist $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\text{supp } \varphi_\delta \subset B_\delta(0)$ und für $f \in A$ ist

$$(T_\delta f)(x) := \left(\varphi_\delta * (\chi_{B_{R_\delta}(0)} f) \right) (x) = \int_{B_{R_\delta}(0)} \varphi_\delta(x - y) f(y) dy$$

nach Lemma A.1 in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& (T_\delta f - f)(x) \\
&= \int_{B_{R_\delta}(0)} \varphi_\delta(x-y) f(y) dy - f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(x-y) \chi_{B_{R_\delta}(0)}(y) f(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(x-y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(x-y) \chi_{B_{R_\delta}(0)}(y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(x-y) (1 - \chi_{B_{R_\delta}(0)}(y)) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(x-y) \chi_{B_{R_\delta}(0)}(y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(y) (1 - \chi_{B_{R_\delta}(0)}(x-y)) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(x-y) \chi_{B_{R_\delta}(0)}(y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{R_\delta}(x)} \varphi_\delta(y) dy.
\end{aligned}$$

Definiert man die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{f}(x, y) := \chi_{B_{R_\delta}(0)}(y)(f(y) - f(x))$, schreibt sich das erste Integral auch als

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\delta(x-y) \chi_{B_{R_\delta}(0)}(y) (f(y) - f(x)) dy = (\varphi_\delta * \tilde{f})(x)$$

im Sinne der Definition (A.1). Mit der Abschätzung (A.2) aus Lemma A.1 gilt dann

$$\|\varphi_\delta * \tilde{f}\|_{L^{2,\alpha}} \leq c \sup_{h \in \text{supp}(\varphi_\delta)} \|\tilde{f}(\cdot + h, \cdot)\|_{L^{2,\alpha}} \leq c \sup_{|h| < \delta} \|f - f(\cdot + h)\|_{L^{2,\alpha}}.$$

Außerhalb der Kugel $B_\delta(0)$ ist $\varphi_\delta \equiv 0$, so daß das zweite Integral für $|x| < R_\delta - \delta$ verschwindet: Sei $|x| < R_\delta - \delta$ und $y \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_\delta}(x)$. Dann gilt:

$$|y| \geq |y-x| - |x| > R_\delta - (R_\delta - \delta) = \delta,$$

also $y \notin B_\delta(0)$.

Insgesamt erhalten wir also für $\|T_\delta f - f\|_{L^{2,\alpha}}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|T_\delta f - f\|_{L^{2,\alpha}} &\leq c(\sup_{|h| < \delta} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^{2,\alpha}} + \|f\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus B_{R_\delta - \delta}(0))}) \\
&\leq c(\sup_{|h| < \delta} \sup_{g \in A} \|g(\cdot + h) - g\|_{L^{2,\alpha}} + \sup_{g \in A} \|g\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus B_{R_\delta - \delta}(0))}) \\
&=: K_\delta.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Nach (ii) und (iii) folgt $K_\delta \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$, falls $R_\delta \rightarrow \infty$ für $\delta \rightarrow 0$.

Wiederum nach Lemma A.1 gilt $T_\delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und wegen $\text{supp}(T_\delta f) \subset B_{R_\delta+\delta}(0)$ sogar $T_\delta f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} |T_\delta f(x)| &= \left| \int_{B_{R_\delta}(0)} \varphi_\delta(x-y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_\delta(x-y)| |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha(y) |\varphi_\delta(x-y)| \rho_\alpha^{-1}(y) |f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^2(y) |\varphi_\delta(x-y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(y) |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq c(\delta) \|f\|_{L^{2,\alpha}} \stackrel{(i)}{\leq} c'(\delta). \end{aligned}$$

Also gilt $\|T_\delta f\|_\infty \leq c'(\delta)$. Ebenso erhält man $\|\text{grad} T_\delta f\|_\infty \leq c'(\delta)$, so daß $T_\delta f$ für $f \in A$ beschränkt ist im Raum $C^{0,1}(\overline{B_{R_\delta+\delta}(0)})$ der Lipschitz-stetigen Funktionen. Damit ist $A_\delta := \{T_\delta f : f \in A\}$ eine beschränkte Teilmenge in $C^{0,1}(\overline{B_{R_\delta+\delta}(0)})$, also insbesondere auch eine Menge von gleichgradig stetigen Funktionen (vgl. [2, Bemerkung zu Satz 2.11]). Sei nun $\tilde{\delta} > 0$. Dann existieren nach dem Satz von Arzela-Ascoli (vgl. [2, Satz 2.11]) Funktionen g_i , $i = 1, \dots, m(\delta, \tilde{\delta})$, in $C^0(\overline{B_{R_\delta+\delta}(0)})$, so daß

$$A_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{m(\delta, \tilde{\delta})} B_{\tilde{\delta}}(g_i) \quad \text{bezüglich der Maximumnorm in } C^0.$$

Da die $L^{2,\alpha}$ -Norm auf $B_{R_\delta+\delta}(0)$ durch die Maximumnorm abschätzbar ist, folgt

$$A_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{m(\delta, \tilde{\delta})} B_{\hat{\delta}}(g_i) \quad \text{bezüglich der } L^{2,\alpha}\text{-Norm,}$$

wobei $\hat{\delta} = \tilde{\delta} \|\mathbf{1}\|_{L^{2,\alpha}(B_{R_\delta+\delta}(0))}$ ist. Fassen wir die Funktionen g_i als Elemente von $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ auf, indem wir sie außerhalb von $B_{R_\delta+\delta}(0)$ durch Null fortsetzen, ergibt sich zusammen mit (A.7)

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m(\delta, \tilde{\delta})} B_{\hat{\delta}+K_\delta}(g_i) \quad \text{bezüglich der } L^{2,\alpha}\text{-Norm.}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählt man dann δ und $\tilde{\delta}$ so klein, daß $K_\delta < \varepsilon/2$ und $\hat{\delta} < \varepsilon/2$ gilt, so erhält man

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m(\delta, \tilde{\delta})} B_\varepsilon(g_i) \quad \text{bezüglich der } L^{2,\alpha}\text{-Norm}$$

und die Präkompaktheit von A ist gezeigt. \square

Die im obigen Satz angegebene Charakterisierung präkompakter Mengen in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, läßt sich sehr einfach auf beliebige Lebesgue-meßbare Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ übertragen:

Korollar A.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ eine Lebesgue-meßbare Teilmenge und $A \subset L^{2,\alpha}(\Omega)$. Ferner sei $F : L^{2,\alpha}(\Omega) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ der Fortsetzungsoperator mit

$$F : f \mapsto \begin{cases} f & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dann ist die Menge A genau dann präkompakt in $L^{2,\alpha}(\Omega)$, falls $F(A) \subset L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ die Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz A.3 erfüllt.

Beweis:

Sei $A \subset L^{2,\alpha}(\Omega)$ präkompakt in $L^{2,\alpha}(\Omega)$. Wegen der Stetigkeit des Fortsetzungsoperators F ist dann $F(A)$ präkompakt in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und erfüllt die Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz A.3.

Sei nun umgekehrt A eine Teilmenge von $L^{2,\alpha}(\Omega)$, so daß $F(A)$ die Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz A.3 erfüllt. Dann ist $F(A)$ präkompakt in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Mit E bezeichnen wir den Einschränkungsoperator

$$E : L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{2,\alpha}(\Omega), \quad f \mapsto f|_{\Omega}.$$

Dieser ist stetig und es gilt $E(F(A)) = A$, also ist A in $L^{2,\alpha}(\Omega)$ präkompakt. \square

Nun sind wir in der Lage, Satz 2.3 über die kompakte Einbettbarkeit von $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, zu zeigen. Der Beweis lehnt sich an den Beweis des Theorems 3.9 in [35] an.

Beweis von Satz 2.3:

Im folgenden sei zunächst $n = 3$. An den Stellen des Beweises, die sich nicht ohne weiteres auf den zweidimensionalen Fall übertragen lassen, geben wir die entsprechenden Änderungen an.

Sei $\iota : H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ der Einbettungsoperator. Die Injektivität und Stetigkeit dieses Operators sind klar.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| > 2$. Die Abbildung $M_\varphi : H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) \rightarrow H^{1,\alpha}(B_2(0)) \cong H^1(B_2(0))$, $u \mapsto \varphi u$, ist stetig. Aus den Einbettungssätzen für die klassischen Sobolev-Räume auf beschränkten Gebieten erhält man, daß die Einbettung $H^1(B_2(0)) \hookrightarrow L^2(B_2(0))$ kompakt ist. Daraus folgt die Kompaktheit des Operators

$$\iota \circ M_\varphi : H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(B_2(0)) \subset L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3).$$

Definieren wir weiter $\psi(x) := 1 - \varphi(x)$, so ist die Abbildung $M_\psi : H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) \rightarrow H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0))$, $u \mapsto \psi u$, stetig, da $\text{supp } \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \subset \overline{B_2(0)} \setminus B_1(0)$ und da das Gewicht ρ_α auf dieser kompakten Menge nach oben und unten beschränkt ist.

Wegen $\iota = \iota \circ M_\psi + \iota \circ M_\varphi$ ist noch die Kompaktheit von $\iota \circ M_\psi$ zu untersuchen. Dazu zeigen wir, daß der Abschluß des Bildes der Einheitskugel

$$K := \left\{ u \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) : \|u\|_{1,\alpha} < 1 \right\} \subset H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$$

unter $\iota \circ M_\psi$ kompakt in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ist. Da $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ein Banachraum ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $(\iota \circ M_\psi)(K)$ präkompakt in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ist. Dies zeigen wir durch Nachweis der Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz A.3.

Nach der Definition von ψ gilt $0 \leq \psi(x) \leq 1$, so daß man

$$\|(\iota \circ M_\psi)u\|_{L^{2,\alpha}} = \|M_\psi u\|_{L^{2,\alpha}} \leq \|u\|_{L^{2,\alpha}} \leq \|u\|_{1,\alpha} \leq 1$$

für alle $u \in K$ erhält. Damit ist die Eigenschaft (i) unmittelbar klar. Wir zeigen zunächst (iii), indem wir Polarkoordinaten in \mathbb{R}^3 einführen.

Sei $x = T(r, \theta, \varphi)$, $T : \mathbb{R}_0^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Für die Determinante der Jacobi-Matrix gilt dann

$$\det J_T(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta.$$

Für $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap M_\psi(K)$ definieren wir $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) := (u \circ T)(r, \theta, \varphi)$. Wegen $\text{supp } u \subset \mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ gilt $\tilde{u}(1, \theta, \varphi) = 0$ für alle $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ und damit für $r > 1$:

$$|\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 = \left| \int_1^r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) dt \right|^2 \leq \int_1^\infty \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|^2 t^2 dt \int_1^r t^{-2} dt.$$

Für die partielle Ableitung von \tilde{u} nach der ersten Variablen erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|^2 &= \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i}(T(t, \theta, \varphi)) \frac{\partial T_i}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(T(t, \theta, \varphi)) \right)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial T_i}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right)^2}_{=1 \quad \forall (t, \theta, \varphi)}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta \\ &\leq \int_1^r t^{-2} dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|^2 t^2 dt \sin \theta d\varphi d\theta \\ &\leq \int_1^r t^{-2} dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(T(t, \theta, \varphi)) \right)^2 \right) t^2 \sin \theta dt d\varphi d\theta \\ &= \int_1^r t^{-2} dt \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)} |\text{grad } u(x)|^2 dx \\ &\leq c \int_1^r t^{-2} dt, \end{aligned}$$

da $M_\psi(K)$ eine beschränkte Menge in $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ist. Für $R > 1$ erhalten wir daraus zusammen mit $(\rho_\alpha \circ T)(r, \theta, \varphi) = (1+r)^\alpha$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \rho_\alpha^{-2}(x) |u(x)|^2 dx &= \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 \sin \theta \frac{r^2}{(1+r)^{2\alpha}} d\varphi d\theta dr \\
&\leq c \int_R^\infty \frac{r^2}{(1+r)^{2\alpha}} \underbrace{\int_1^r t^{-2} dt}_{\in(0,1)} dr \\
&< c \int_R^\infty \frac{r^2}{r^{2\alpha}} dr \\
&= cR^{3-2\alpha} \longrightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty, \text{ da } \alpha > 3/2.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Diese Abschätzung gilt gleichmäßig für alle $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap M_\psi(K)$ und läßt sich gleichmäßig für alle $u \in M_\psi(K)$ fortsetzen, womit (iii) gezeigt ist.

Zum Beweis von (ii) sei wieder $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap M_\psi(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot + h) - u\|_{L^{2,\alpha}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |u(x+h) - u(x)|^2 \rho_\alpha^{-2}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) \left| \int_0^1 \langle \text{grad } u(x+th), h \rangle dt \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) \int_0^1 |\langle \text{grad } u(x+th), h \rangle|^2 dt dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2}(x) \int_0^1 |\text{grad } u(x+th)|^2 |h|^2 dt dx \\
&\leq |h|^2 \int_0^1 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} |\text{grad } u(x+th)|^2 dx}_{\leq c} dt \\
&\leq c|h|^2.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung läßt sich wiederum gleichmäßig für alle $u \in M_\psi(K)$ fortsetzen, so daß

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^{2,\alpha}} \leq c|h| \longrightarrow 0 \text{ für } |h| \rightarrow 0$$

für alle $u \in M_\psi(K)$ gezeigt ist. Damit ist der Beweis des Satzes für den dreidimensionalen Fall abgeschlossen.

Der Beweis der Eigenschaften (i) und (ii) kann für den zweidimensionalen Fall übernommen werden. Der Beweis für die Eigenschaft (iii) läuft völlig analog bis zur Abschätzung (A.9), die nun

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} \rho_\alpha^{-2}(x) |u(x)|^2 dx \leq c \int_R^\infty \frac{r}{(1+r)^{2\alpha}} \int_1^r t^{-1} dt dr = c \int_R^\infty \frac{r \ln r}{(1+r)^{2\alpha}} dr$$

lautet. Ab hier muß man wie folgt argumentieren: Da $\alpha > 1$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $1 + \delta < \alpha$. Zu diesem δ existiert ein $R_\delta > 0$, so daß $\ln r < r^\delta$ für alle $r > R_\delta$ gilt. Indem

wir $R > R_\delta$ wählen, können wir weiter abschätzen durch

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} \rho_\alpha^{-2}(x) |u|^2 dx \leq \int_R^\infty r^{1-2\alpha+\delta} dr = cR^{2-2\alpha+\delta} \longrightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

□

Nun zeigen wir noch, daß wir den gewichteten Sobolev-Raum $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ schon für $\alpha > 1$ kompakt in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ einbetten können:

Beweis von Satz 2.4:

Die Linearität, Injektivität und Stetigkeit des Einbettungsoperators $\iota : H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ sind klar.

Wie im Beweis von Satz 2.3 zeigen wir, daß das Bild der Einheitskugel

$$K := \left\{ u \in H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) : \|u\|_{1,\alpha} < 1 \right\} \subset H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$$

unter ι präkompakt in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ist, indem wir die Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz A.3 nachweisen.

Die Eigenschaft (i) ist sofort klar. Wir zeigen zunächst (iii):

Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\|u\|_{1,\alpha} < 1$. Wie im Beweis von Satz 2.3 verwenden wir Polarkoordinaten im \mathbb{R}^3 und definieren $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) := (u \circ T)(r, \theta, \varphi)$. Für $r \geq R > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 &= \left| \int_r^\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) dt \right|^2 \leq \int_r^\infty \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|^2 t^2 dt \int_r^\infty t^{-2} dt \\ &\leq \frac{1}{r} \int_R^\infty \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|^2 t^2 dt. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Hieraus ergibt sich zusammen mit der Abschätzung (A.8)

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \int_R^\infty \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|^2 t^2 dt \sin \theta d\varphi d\theta \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(T(t, \theta, \varphi)) \right)^2 \right) t^2 \sin \theta dt d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |\text{grad } u(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Wegen $(\rho_\alpha \circ T)(r, \theta, \varphi) = (1+r)^\alpha$ erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \rho_\alpha^{-2}(x) |u(x)|^2 dx &= \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 \sin \theta \frac{r^2}{(1+r)^{2\alpha}} d\varphi d\theta dr \\
&\leq \int_R^\infty \frac{1}{r} \frac{r^2}{(1+r)^{2\alpha}} dr \\
&< \int_R^\infty \frac{r}{r^{2\alpha}} dr \\
&= \frac{1}{2\alpha-2} R^{2-2\alpha} \longrightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty, \text{ da } \alpha > 1.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt gleichmäßig für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\|u\|_{1,\alpha} < 1$ und läßt sich gleichmäßig für alle $u \in K \cap H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ fortsetzen, womit (iii) gezeigt ist.

Die Eigenschaft (ii) läßt sich wie im Beweis von Satz 2.3 zeigen. Damit folgt wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ in $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ die Behauptung des Satzes. \square

Bevor wir für die in Satz 2.6 angegebenen Gebiete die Existenz von stetigen Fortsetzungsoperatoren beweisen, geben wir ein Hilfsresultat an, das besagt, daß man H^1 -Funktionen auf zwei Gebieten mit gemeinsamem Rand zu einer H^1 -Funktion auf dem gesamten Gebiet zusammensetzen kann, falls die Randwerte auf dem gemeinsamen Rand übereinstimmen.

Lemma A.5

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $D \subset \Omega$ eine Teilmenge von Ω , die in die Zusammenhangskomponenten D_1, \dots, D_N mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Abschnitt 2.1 zerfalle. Sei $u_1 \in H^1(D)$ und $u_2 \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$. Haben u_1 und u_2 die gleiche Spur in $H^{1/2}(\partial D)$, so ist

$$u := \begin{cases} u_1 & \text{auf } D \\ u_2 & \text{auf } \Omega \setminus D \end{cases}$$

ein Element aus $H^1(\Omega)$.

Beweis:

Wegen der Voraussetzungen an die Mengen D_1, \dots, D_N hat D lokal einen Lipschitz-Rand. Damit besitzt nach [1, Bemerkung zu 4.5] die Menge D die starke lokale Lipschitz-Eigenschaft und somit nach [1, 4.7], auch die gleichmäßige Kegeleigenschaft. Dann kann u_1 nach [47, Satz 5.4] zu einer Funktion $v \in H^1(\Omega)$ mit $v|_D = u_1$ fortgesetzt werden. Wegen der Gleichheit der Spur von u_1 und u_2 auf ∂D gilt dann

$$w := u_2 - v|_{\Omega \setminus \overline{D}} \in \{w \in H^1(\Omega \setminus \overline{D}) : w|_{\partial D} = 0\}.$$

Setzt man w durch Null auf D fort, so erhält man nach [47, Lemma 3.4] eine Funktion in $H^1(\Omega)$. Damit hat man $v + w \in H^1(\Omega)$, wobei $v + w$ gerade durch

$$v + w = \begin{cases} u_1 & \text{auf } D \\ u_2 & \text{auf } \Omega \setminus D \end{cases} = u$$

gegeben ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir Satz 2.6 über die Existenz stetiger Fortsetzungsoperatoren recht einfach beweisen.

Beweis von Satz 2.6:

Wir zeigen die Behauptung für den Fall $n = 3$ und $\Omega = \mathbb{R}^3$, alle anderen Fälle lassen sich analog behandeln.

Die Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ ist beschränkt, es existiert also ein $r > 0$, so daß der Abschluß von D in der Kugel $B_r(0)$ mit Radius r um die Null enthalten ist. Wegen der Voraussetzungen an die Mengen D_1, \dots, D_N hat $G := B_r(0) \setminus \overline{D}$ lokal einen Lipschitz-Rand. Damit besitzt diese Menge die gleichmäßige Kegeleigenschaft (vgl. Beweis von Lemma A.5). Nach [47, Satz 5.4] existiert ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator \tilde{F} von $H^1(G)$ nach $H^1(B_r(0))$ mit $\tilde{F}u|_G = u$ für alle $u \in H^1(G)$.

Sei nun $u \in H(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$, $H(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \in \{H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}), H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})\}$. Dann ist $u|_G$ in $H^1(G)$, so daß nach obigen Überlegungen eine Fortsetzung $\tilde{u} = \tilde{F}(u|_G) \in H^1(B_r(0))$ existiert mit $\tilde{u}|_G = u|_G$. Den gesuchten Fortsetzungsoperator $F : H(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \rightarrow H(\mathbb{R}^3)$ definieren wir durch

$$u \mapsto Fu = \begin{cases} u & \text{auf } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r(0)} \\ \tilde{u} & \text{auf } \overline{B_r(0)}. \end{cases}$$

Da die Spur von \tilde{u} und u in $H^{1/2}(\partial B_r(0))$ übereinstimmt, folgt mit $u \in H(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r(0)})$ und Lemma A.5, daß Fu in $H(\mathbb{R}^3)$ liegt.

Wir müssen nun noch die Stetigkeit des Fortsetzungsoperators F nachweisen (die Linearität von F ist klar). Diese folgt aus der Beschränktheit der Gewichtsfunktion und der Stetigkeit des Fortsetzungsoperators von $H^1(B_r(0) \setminus \overline{D})$ nach $H^1(B_r(0))$:

$$\begin{aligned} & \|Fu\|_{1,\alpha,\mathbb{R}^3} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{-2} (Fu)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\text{grad}(Fu)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r(0)}} \rho_\alpha^{-2} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r(0)}} |\text{grad } u|^2 dx + \int_{B_r(0)} \rho_\alpha^{-2} \tilde{u}^2 dx + \int_{B_r(0)} |\text{grad } \tilde{u}|^2 dx \\ &\leq \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}}^2 + \int_{B_r(0)} \rho_\alpha^{-2} \tilde{u}^2 dx + \int_{B_r(0)} |\text{grad } \tilde{u}|^2 dx \\ &\leq \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}}^2 + c \|\tilde{u}\|_{H^1(B_r(0))}^2 \leq \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}}^2 + c \|u\|_{H^1(B_r(0) \setminus \overline{D})}^2 \\ &\leq c \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}}^2. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator von $H(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ nach $H(\mathbb{R}^3)$ existiert. \square

Als nächstes geben wir den Beweis des Spursatzes 2.8 an.

Beweis von Satz 2.8:

Wir zeigen Teil (a) für den Fall $n = 3$, alle anderen Aussagen lassen sich völlig analog beweisen.

Sei $\beta > 0$ fest, $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3}) \cap H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ beliebig und $(y', z) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \beta]$. Dann gilt

$$u(y', 0) = u(y', z) - \int_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(y', s) ds$$

und somit

$$|u(y', 0)|^2 \leq 2|u(y', z)|^2 + 2 \left| \int_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(y', s) ds \right|^2 \leq 2|u(y', z)|^2 + 2\beta \int_0^\beta \left| \frac{\partial u}{\partial z}(y', s) \right|^2 ds.$$

Multiplikation mit $0 < \rho_\alpha^{-2}(y', 0) \leq 1$ liefert:

$$\frac{|u(y', 0)|^2}{\rho_\alpha^2(y', 0)} \leq c \frac{|u(y', z)|^2}{\rho_\alpha^2(y', z)} + 2\beta \int_0^\beta \left| \frac{\partial u}{\partial z}(y', s) \right|^2 ds.$$

Durch Integration über y' und z erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(y', 0)|^2}{\rho_\alpha^2(y', 0)} dy' \\ &= \int_0^\beta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(y', 0)|^2}{\rho_\alpha^2(y', 0)} dy' dz \\ &\leq c \int_0^\beta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(y', z)|^2}{\rho_\alpha^2(y', z)} dy' dz + 2\beta \int_0^\beta \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\beta \left| \frac{\partial u}{\partial z}(y', s) \right|^2 ds dy' dz \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}_+^3} \rho_\alpha^{-2}(x) u^2(x) dx + 2\beta^2 \int_{\mathbb{R}_+^3} |\text{grad } u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Somit hat man für alle $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3}) \cap H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ die Abschätzung

$$\left\| u|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \right\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq c \left(2\beta \|\text{grad } u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \frac{1}{\beta} \|u\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)}^2 \right) \leq c \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}_+^3}^2 \quad (\text{A.12})$$

gezeigt. Wegen der Dichtheit von $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3}) \cap H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ in $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ (siehe [40, Lemma A.1.22]) folgt daraus die Existenz und die Stetigkeit des Spuoperators.

Der Raum $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ ist ein Hilbertraum, also reflexiv. Damit besitzt jede beschränkte Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ eine schwach konvergente Teilfolge. Für den Kompaktheitsbeweis starten wir daher o.B.d.A. mit einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ mit $u_j \rightharpoonup g \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$, wobei o.B.d.A. $g = 0$ angenommen wird. Zu zeigen ist nun $\gamma u_j \rightarrow \gamma 0 = 0$ für $j \rightarrow \infty$.

Wegen der Dichtheit von $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3}) \cap H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ in $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ gilt (A.12) für alle $u \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$, so daß man die Abschätzung

$$\|\gamma u_j\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq c \left(2\beta \int_{\mathbb{R}_+^3} |\text{grad } u_j(x)|^2 dx + \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}_+^3} \rho_\alpha^{-2}(x) |u_j(x)|^2 dx \right)$$

erhält. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2.3 ist für $\alpha > 3/2$ die Einbettung von $H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ in $L^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+^3)$ kompakt, also existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ so daß $\|u_j\|_{L^{2,\alpha}} < \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$ ist. Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, existiert ein $\tilde{c} > 0$ mit $\|\text{grad } u_j\|_{L^2} < \tilde{c}$ für alle $j \geq j_0$. Wählt man nun $\beta = \varepsilon$, so gilt für $j \geq j_0$

$$\|\gamma u_j\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq c(2\beta\tilde{c}^2 + \frac{\varepsilon^2}{\beta}) = \varepsilon c(2\tilde{c}^2 + 1).$$

Also konvergiert $\|\gamma u_j\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)}$ für $j \rightarrow \infty$ gegen Null. \square

Wir geben nun den Beweis des Satzes 2.14 über die Äquivalenz von $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ und $|\cdot|$ auf $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ an. Zum Beweis des Satzes für den Fall $\alpha > 1$ und $\Omega \in \{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+^3\}$ vergleiche auch [40, Korollar A.1.6].

Beweis von Satz 2.14:

Wir zeigen die Behauptung nur für $\Omega = \mathbb{R}^3$ bzw. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, da der Beweis für die anderen Fälle analog verläuft.

Sei $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$. Dann gilt offensichtlich

$$|u| \leq \|u\|_{1,\alpha}.$$

Es genügt also die Existenz einer Konstanten $c = c(\alpha) > 0$ zu zeigen, so daß die Abschätzung

$$\|u\|_{L^{2,\alpha}} \leq c |u| \tag{A.13}$$

für alle $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ gilt.

Da die Menge D beschränkt ist, existiert ein $r_0 > 0$, so daß der Abschluß von D in der Kugel $B_{r_0}(0)$ mit Radius r_0 um Null enthalten ist. Falls $\Omega = \mathbb{R}^3$ ist, setzen wir $r_0 = 0$. Sei zunächst $\alpha > 1$. Wie im Beweis von Satz 2.3 verwenden wir Polarkoordinaten im \mathbb{R}^3 : Sei $x = T(r, \theta, \varphi)$, $T : \mathbb{R}_0^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta$$

Wir setzen $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) := (u \circ T)(r, \theta, \varphi)$. Für $r \geq R > r_0$ gilt mit der Abschätzung (A.11) unter Beachtung von $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega \setminus B_{r_0}(0)})$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta &\stackrel{(A.11)}{\leq} \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |\text{grad } u(x)|^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{r} \int_\Omega |\text{grad } u(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Dies liefert wegen $(\rho_\alpha \circ T)(r, \theta, \varphi) = (1+r)^\alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{r_0}(0)} \rho_\alpha^{-2}(x) |u(x)|^2 \, dx &= \int_{r_0}^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 \sin \theta \frac{r^2}{(1+r)^{2\alpha}} \, d\varphi \, d\theta \, dr \\ &\leq \int_{r_0}^\infty \frac{1}{r} \frac{r^2}{(1+r)^{2\alpha}} \int_\Omega |\text{grad } u(x)|^2 \, dx \, dr \\ &= \int_\Omega |\text{grad } u(x)|^2 \, dx \underbrace{\int_{r_0}^\infty \frac{r}{(1+r)^{2\alpha}} \, dr}_{=: c}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^3$, also $r_0 = 0$, ist damit (A.13) schon gezeigt und somit die Äquivalenz der Normen im Fall $\alpha > 1$ bewiesen. Für $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ müssen wir noch

$$\int_{B_{r_0}(0) \setminus \overline{D}} \rho_\alpha^{-2} u^2 dx \leq c \int_\Omega |\text{grad } u|^2 dx$$

zeigen. Die Einschränkung von u auf $B_{r_0}(0) \setminus \overline{D}$ liegt in $H^1(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})$. Nach [45, Satz 5.3] existiert ein linearer und stetiger Spuroperator von $H^1(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})$ nach $L^2(\partial B_{r_0}(0))$, so daß durch

$$F : u \mapsto \int_{\partial B_{r_0}(0)} u ds$$

ein stetiges Funktional auf $H^1(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})$ gegeben ist. Nach [45, Satz 28.2] über äquivalente Normen auf H^1 erhalten wir die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})} \leq c \left(\|\text{grad } u\|_{H^1(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})} + |Fu| \right)$$

und wegen der Beschränktheit der Gewichtsfunktion erst recht

$$\left(\int_{B_{r_0}(0) \setminus \overline{D}} \rho_\alpha^{-2} u^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\|\text{grad } u\|_{H^1(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})} + |Fu| \right).$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$|Fu| \leq c \|u\|_{L^2(\partial B_{r_0}(0))},$$

so daß sich die Abschätzung

$$\left(\int_{B_{r_0}(0) \setminus \overline{D}} \rho_\alpha^{-2} u^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\|\text{grad } u\|_{L^2(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})} + \|u\|_{L^2(\partial B_{r_0}(0))} \right)$$

ergibt. Da der Spuroperator von $H_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{r_0}(0)})$ nach $L^2(\partial B_r(0))$ ebenfalls stetig ist, gilt weiter

$$\left(\int_{B_{r_0}(0) \setminus \overline{D}} \rho_\alpha^{-2} u^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\|\text{grad } u\|_{L^2(B_{r_0}(0) \setminus \overline{D})} + \|u\|_{1,\alpha,\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{r_0}(0)}} \right).$$

Zusammen mit der Abschätzung (A.14) folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{r_0}(0) \setminus \overline{D}} \rho_\alpha^{-2} u^2 dx \right)^{1/2} &\leq c \left(\|\text{grad } u\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})} + \|\text{grad } u\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{r_0}(0)})} \right) \\ &\leq c \|\text{grad } u\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})}. \end{aligned}$$

Damit ist die Normäquivalenz (A.13) auch für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ gezeigt.

Bevor wir die Behauptung für den Fall $\alpha = 1$ zeigen können, brauchen wir zunächst einen Spezialfall einer Ungleichung von Hardy ([32, Theorem 330]), den wir im folgenden Lemma angeben.

Lemma A.6

Sei $p \in (1, \infty)$ und f eine positive meßbare Funktion definiert auf $[0, \infty)$, so daß

$$\int_0^\infty |f(r)|^p r^p dr < \infty.$$

Definiert man

$$F(r) := \int_r^\infty f(t) dt,$$

so gilt folgende Ungleichung:

$$\int_0^\infty |F(r)|^p dr \leq p^p \int_0^\infty |f(r)|^p r^p dr.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun die Behauptung aus Satz 2.14 für den Fall $\alpha = 1$ beweisen.

Beweis (Fortsetzung des Beweises von Satz 2.14):

Sei nun $\alpha = 1$. Für $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ und $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) := (u \circ T)(r, \theta, \varphi)$ gilt für $r \geq r_0$

$$|\tilde{u}(r, \theta, \varphi)| = \left| \int_r^\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) dt \right| \leq \int_r^\infty \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right| dt. \quad (\text{A.15})$$

Für $z \in \mathbb{R}^m$ gilt die Abschätzung

$$(1 + |z|)^{-1} \leq (1 + |z|^2)^{-1/2} \leq \sqrt{2}(1 + |z|)^{-1}. \quad (\text{A.16})$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{r_0}(0)} (1 + |x|)^{-2} |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{r_0}^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r)^{-2} |\tilde{u}(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &\stackrel{(\text{A.15}), (\text{A.16})}{\leq} c \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty (1 + r^2)^{-1} r^2 \left(\int_r^\infty \underbrace{\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, \theta, \varphi) \right|}_{:=f(t)} dt \right)^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ &\leq c \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty \left(\int_r^\infty f(t) dt \right)^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Setzen wir $f(t) = 0$ für $0 \leq t < r_0$, so liefert Lemma A.6 mit $p = 2$ die Abschätzung

$$\int_0^\infty \left(\int_r^\infty f(t) dt \right)^2 dr \leq c \int_0^\infty r^2 (f(r))^2 dr = c \int_{r_0}^\infty r^2 (f(r))^2 dr$$

so daß (A.17) weiter durch

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{r_0}(0)} (1 + |x|)^{-2} |u(x)|^2 dx \\
& \leq c \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty r^2 \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \right|^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\
& \stackrel{(A.8)}{\leq} c \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty r^2 \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(T(r, \theta, \varphi)) \right|^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\
& = c \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{r_0}(0)}} |\text{grad } u(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

abgeschätzt werden kann. Damit ist (A.13) auch für den Fall $\alpha = 1$ gezeigt, da die Abschätzung

$$\int_{B_{r_0}(0) \setminus \overline{D}} (1 + |x|)^{-2} |u(x)|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx$$

wie im Fall $\alpha > 1$ folgt. □

Literaturverzeichnis

- [1] R. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, INC., 1975.
- [2] H. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, dritte Auflage, 1999.
- [3] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroire, Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in \mathbb{R}^n , *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **73**, 579–606, 1994.
- [4] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroire, Dirichlet and Neumann exterior problems for the n -dimensional Laplace operator - an approach in weighted Sobolev spaces, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **76**, 55–81, 1997.
- [5] L. Borcea, Electrical Impedance Tomography, *Inverse Problems* **18**, 99–136, 2002.
- [6] L. Borcea, Addendum to 'Electrical Impedance Tomography', *Inverse Problems* **19**, 997–998, 2003.
- [7] T. Boulmezaoud, *Études des champs de Beltrami dans des domaines de \mathbb{R}^3 bornés et non-bornés et applications en astrophysique*, Doktorarbeit, Université Paris VI, 1998.
- [8] T. Boulmezaoud, Espaces de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace, *Comptes Rendues de L'Académie des Sciences, Série I, Mathématiques* **328**(3), 221–226, 1999.
- [9] T. Boulmezaoud, On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space: An approach using weighted spaces, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **26**, 633–669, 2003.
- [10] B. Brown, D. Barber, A. Seagar, Applied potential tomography: possible clinical applications, *Clin. Phys. Physiol. Meas.* **6**(2), 109–121, 1985.
- [11] M. Brühl, *Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie*, Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, 1999.
- [12] M. Brühl, Explicit Characterization of inclusions in electrical impedance tomography, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **32**(6), 1327–1341, 2001.
- [13] M. Brühl, M. Hanke, Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography, *Inverse Problems* **16**, 1029–1042, 2000.
- [14] M. Brühl, M. Hanke, M. Pidcock, Crack detection using electrostatic measurements, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **35**(3), 595–605, 2001.

- [15] M. Brühl, M. Hanke, M. S. Vogelius, A direct impedance tomography algorithm for locating small inhomogeneities, *Numerische Mathematik* **93**(4), 635–654, 2003.
- [16] M. Brunk, *Implementierung eines Verfahrens für die Impedanztomographie in drei Raumdimensionen*, Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2004.
- [17] A. Caldéron, On an inverse boundary value problem, in: W. Meyer, M. Raupp, Hrsg., *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics*, 67–73, Soc. Brasil Mat., Rio de Janeiro, 1980.
- [18] D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Krieger Publishing Company, 1992.
- [19] M. Costabel, Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains, *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **19**, 613–626, 1988.
- [20] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 1: Physical Origins and Classical Methods*. Springer-Verlag, 2000.
- [21] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 2: Functional and Variational Methods*. Springer-Verlag, 2000.
- [22] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 4: Integral Equations and Numerical Methods*. Springer-Verlag, 2000.
- [23] V. Druskin, The unique solution of the inverse problem in electrical surveying and electric well-logging for piecewise-continuous conductivity, *Izvestiya Earth Physics* **18**(1), 51–53, 1982.
- [24] V. Druskin, On the uniqueness of inverse problems from incomplete boundary data, *Siam J. Appl. Math.* **58**(5), 1591–1603, 1998.
- [25] H. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Press, 2000.
- [26] M. Ganesh, I. Graham, A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions, *Journal of Computational Physics* **198**(1), 211–242, 2004.
- [27] M. Ganesh, I. Graham, J. Sivaloganathan, A new spectral boundary integral collocation method for three-dimensional potential problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **35**(2), 778–805, 1998.
- [28] B. Gebauer, The Factorization Method for Real Elliptic Problems, submitted.
- [29] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

-
- [30] M. Hanke, M. Brühl, Recent Progress in Electrical Impedance Tomography, *Inverse Problems* **19**, 65–90, 2003.
- [31] B. Hanouzet, Espaces de Sobolev avec poids - Application au problème de Dirichlet dans un demi espace, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **XLVI**, 227–272, 1971.
- [32] G. Hardy, J. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*. Cambridge University Press, 1952.
- [33] B. Hofmann, Approximation of the inverse electrical impedance tomography problem by an inverse transmission problem, *Inverse Problems* **14**, 1171–1187, 1998.
- [34] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1998.
- [35] R. Janßen, Elliptic Problems on Unbounded Domains, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **17**(6), 1370–1389, November 1986.
- [36] A. Kirsch, Characterization of the shape of the scattering obstacle using the spectral data of the far field operator, *Inverse Problems* **14**, 1489–1512, 1998.
- [37] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Bd. 82 von *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1989.
- [38] O. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Bd. 49 von *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1985.
- [39] S. Lang, *Real and Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1993.
- [40] M. Lukaschewitsch, *Inversion of geoelectric boundary data, a non-linear ill-posed problem*, Doktorarbeit, Universität Potsdam, Juni 1999.
- [41] M. Lukaschewitsch, P. Maass, M. Pidcock, Tikhonov regularization for electrical impedance tomography on unbounded domains, *Inverse Problems* **19**, 585–610, 2003.
- [42] M. Pidcock, M. Kuzuoglu, K. Leblebicioglu, Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: II. Three-dimensional problems, *Physiol. Meas.* **16**, 91–110, 1995.
- [43] M. Renardy, R. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Bd. 13 von *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [44] W. Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New-York, 1973.
- [45] H. Triebel, *Höhere Analysis*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [46] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland, 1978.
- [47] J. Wloka, *Partielle Differentialgleichungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Faktorisierungsmethode zur Erkennung von Inhomogenitäten der Leitfähigkeit in der elektrischen Impedanztomographie auf unbeschränkten Gebieten - speziell der Halbebene bzw. dem Halbraum - untersucht. Als Lösungsräume für das direkte Problem, d.h. die Bestimmung des elektrischen Potentials zu vorgegebener Leitfähigkeit und zu vorgegebenem Randstrom, führen wir gewichtete Sobolev-Räume ein. In diesen wird die Existenz von schwachen Lösungen des direkten Problems gezeigt und die Gültigkeit einer Integraldarstellung für die Lösung der Laplace-Gleichung, die man bei homogener Leitfähigkeit erhält, bewiesen. Mittels der Faktorisierungsmethode geben wir eine explizite Charakterisierung von Einschlüssen an, die gegenüber dem Hintergrund eine sprunghaft erhöhte oder erniedrigte Leitfähigkeit haben. Damit ist zugleich für diese Klasse von Leitfähigkeiten die eindeutige Rekonstruierbarkeit der Einschlüsse bei Kenntnis der lokalen Neumann-Dirichlet-Abbildung gezeigt.

Die mittels der Faktorisierungsmethode erhaltene Charakterisierung der Einschlüsse haben wir wie in der Arbeit [13] in ein numerisches Verfahren umgesetzt und sowohl im zwei- als auch im dreidimensionalen Fall mit simulierten, teilweise gestörten Daten getestet. Im Gegensatz zu anderen bekannten Rekonstruktionsverfahren benötigt das hier vorgestellte keine Vorabinformation über Anzahl und Form der Einschlüsse und hat als nicht-iteratives Verfahren einen vergleichsweise geringen Rechenaufwand.

Es stellte sich heraus, daß die erhaltenen Rekonstruktionen von der Wahl der Dipolrichtung für die Testfunktion abhängen. Um diese Abhängigkeit zu umgehen, berechnen wir für jeden Testpunkt nicht nur die Testfunktion zu einem festen, sondern zu mehreren verschiedenen Dipolen. Die sich daraus ergebenden Approximationen der Einschlüsse sind in allen untersuchten Beispielen besser als die Rekonstruktion basierend auf einer Testfunktion mit fester Dipolrichtung. Der Mehraufwand für dieses Verfahren ist vernachlässigbar, da man für ein vorgegebenes Gitter vorab die Testfunktionen mit den Einheitsvektoren als Dipolrichtungen auswerten kann und sich die Werte aller Testfunktionen mit anderen Dipolrichtungen daraus durch Linearkombination ergeben.