

# Zweischleifenkorrekturen zum leptonischen Zerfall des $Z$ -Bosons

**Dissertation**

zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik  
der Johannes-Gutenberg-Universität  
in Mainz

**Markus Michael Knodel**

geboren in Karlsruhe

Mainz, 2005



## Belsazar

Die Mitternacht zog näher schon;  
In stummer Ruh' lag Babylon.

Nur oben in des Königs Schloß,  
Da flackert's, da lärmt des Königs Troß.

Dort oben in dem Königssaal  
Belsazar hielt sein Königsmahl.

Die Knechte saßen in schimmernden Reihn  
Und leerten die Becher mit funkelndem Wein.

Es klirrten die Becher, es jauchzten die Knecht';  
So klang es dem störrigen Könige recht.

Des Königs Wangen leuchten Glut;  
Im Wein erwuchs ihm kecker Mut.

Und blindlings reißt der Mut ihn fort;  
Und er lästert die Gottheit mit sündigem Wort.

Und er brüstet sich frech, und lästert wild;  
Der Knechtenschar ihm Beifall brüllt.

Der König rief mit stolzem Blick;  
Der Diener eilt und kehrt zurück.

Er trug viel gülden Gerät auf dem Haupt;  
Das war aus dem Tempel Jehovahs geraubt.

Und der König ergriff mit frevler Hand  
Einen heiligen Becher, gefüllt bis am Rand.

Und er leert ihn hastig bis auf den Grund  
Und rufet laut mit schäumendem Mund:

„Jehovah! dir künd ich auf ewig Hohn –  
Ich bin der König von Babylon!“

Doch kaum das grause Wort verklang,  
Dem König ward's heimlich im Busen bang.

Das gellende Lachen verstummte zumal;  
Es wurde leichenstill im Saal.

Und sieh! und sieh! an weißer Wand  
Da kam's hervor wie Menschenhand;

Und schrieb, und schrieb an weißer Wand  
Buchstaben von Feuer, und schrieb und schwand.

Der König stieren Blicks da saß,  
Mit schlotternden Knien und totenblaß.

Die Knechtenschar saß kalt durchgraut,  
Und saß gar still, gab keinen Laut.

Die Magier kamen, doch keiner verstand  
Zu deuten die Flammenschrift an der Wand.

Belsazar ward aber in selbiger Nacht  
Von seinen Knechten umgebracht.

*Heinrich Heine*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Vergleich Experiment und Theorie</b>	<b>7</b>
1.1 Experimenteller Status . . . . .	8
1.1.1 LEP-Experimente auf der $Z^0$ -Resonanz . . . . .	8
1.1.2 Meßgrößen und SM-Parameter . . . . .	8
1.2 Stand der Theorie . . . . .	10
1.2.1 Korrekturen zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ . . . . .	10
1.2.2 Zweischleifenkorrekturen, $\mathcal{O}(\alpha^2)$ . . . . .	10
<b>2 Effektive Kopplungen, planare Topologie</b>	<b>13</b>
2.1 Extraktion von $g_V^l$ und $g_A^l$ aus $Z \rightarrow l\bar{l}$ . . . . .	14
2.1.1 Lorentzstruktur, Projektoren . . . . .	14
2.1.2 $\gamma_5$ -Schema . . . . .	14
2.1.3 Massen und Kopplungskonstanten . . . . .	15
2.2 Extraktion von $\Delta g_V$ und $\Delta g_A$ in $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$ . . . . .	15
2.2.1 Planare Leitertopologie . . . . .	15
2.2.2 Geladene und ungeladene Ströme . . . . .	16
2.2.3 Anwendung der Projektoren . . . . .	18
<b>3 Parallelraum/Orthogonalraum-Methode</b>	<b>19</b>
3.1 Ruhesystem des Zerfallsteilchens . . . . .	20
3.1.1 Impulse in P/O-Komponenten . . . . .	20
3.1.2 Die kovariante Darstellung der Zerlegung in P/O-Komponenten . .	21
<b>4 Tensorreduktion</b>	<b>23</b>
4.1 Ausgangspunkt . . . . .	24
4.1.1 Motivation . . . . .	25
4.2 Benötigte Topologien . . . . .	25
4.2.1 Vorbemerkungen . . . . .	26
4.3 Propagatorenkürzen bei der planaren Topologie . . . . .	26
4.3.1 Kürzen der Mischungen von Orthogonalraumkomponenten von $k$ und $l$	27
4.3.2 Kürzen der Komponenten von $k$ . . . . .	28

4.3.3	Kürzen der Komponenten von $l$ . . . . .	30
4.3.4	Zusammenfassung der Kürzungsverfahren . . . . .	31
4.4	Gedrehte reduzierte planare Topologie, Version $\mathcal{R}^-$ . . . . .	33
4.4.1	Zusammenfassung des Kürzens . . . . .	35
4.5	Gedrehte reduzierte planare Topologie, Version $\mathcal{R}^+$ . . . . .	36
4.5.1	Zusammenfassung des Kürzens . . . . .	38
4.6	Tests . . . . .	39
4.7	Koeffizienten der reduzierten Basisintegrale für die Korrekturen zu den effektiven Kopplungen . . . . .	40
<b>5</b>	<b>UV–Divergenzen und Abzugsverfahren</b> . . . . .	<b>41</b>
5.1	UV–Divergenzen . . . . .	42
5.1.1	Divergenzgrade . . . . .	42
5.2	Abzugsverfahren . . . . .	43
5.2.1	Idee . . . . .	43
5.2.2	Erzeugung der Abzugsterme . . . . .	43
5.2.3	Weinberg–Theorem . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Integration der Masterintegrale</b> . . . . .	<b>47</b>
6.0.4	Benötigte Integrale . . . . .	48
6.1	Planare Topologie . . . . .	49
6.1.1	Abzugsprozedur . . . . .	49
6.1.2	Integration . . . . .	51
6.2	Gedrehte reduzierte planare Topologien . . . . .	64
6.2.1	Abzugsprozedur . . . . .	65
6.2.2	Integration . . . . .	67
6.2.3	Symmetrien der Integrale . . . . .	79
6.3	Schnitte und Landau–Singularitäten . . . . .	80
6.4	Numerischer Grenzübergang . . . . .	83
6.5	Verschwindende Integrationsgebiete . . . . .	85
6.5.1	Planare Topologie . . . . .	85
6.5.2	Gedrehter reduzierter planarer Fall . . . . .	86
6.5.3	Masselose Endzustände . . . . .	87
6.5.4	Zusammenfassung . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Numerische Integration</b> . . . . .	<b>89</b>
7.1	Vergleiche mit Literaturwerten . . . . .	90
7.2	Integrale mit Abzugsterm . . . . .	90
7.2.1	Vergleich von analytischem mit numerischer Grenzübergang . . . . .	90
7.3	Landau–Singularitäten und Schnitte . . . . .	103
7.3.1	Motivation . . . . .	103
7.3.2	Beispiel einer Zweischleifendreibunktfunktion mit Abzugparameter . . . . .	105
7.3.3	Untersuchung der Integranden . . . . .	107

7.3.4	Schnitte und P/O-Raum, Zusammenfassung . . . . .	113
7.4	Zusammenfassung . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Verbleibende Beiträge</b>	<b>115</b>
8.1	Zweischleifen-Vertexfunktionen mit Zweipunkt-Subgraph . . . . .	116
8.2	Effektive Zweischleifen-Zweipunktfunktionen . . . . .	116
8.3	Faktorisierende Topologien . . . . .	116
8.4	Effektive Kopplungen bei Zerfallsmasse Null . . . . .	117
<b>9</b>	<b>Implementation, Ergebnisse</b>	<b>119</b>
9.1	Implementation der Algorithmen . . . . .	120
9.1.1	Programmschema . . . . .	122
9.2	Teilergebnisse — Definition . . . . .	125
9.3	Einfache Beispiele . . . . .	128
9.4	Zwischenergebnisse für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$ . . . . .	129
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Lorentzstruktur und Projektoren</b>	<b>141</b>
A.1	Extraktion von $g_V^l$ und $g_A^l$ aus $Z \rightarrow l\bar{l}$ . . . . .	142
A.1.1	Lorentzstruktur . . . . .	142
A.1.2	Kontraktionen zur Extraktion der Beiträge . . . . .	143
A.1.3	Diskussion der impulsabhängigen Terme . . . . .	145
<b>B</b>	<b><math>\gamma_5</math>-Schemata</b>	<b>147</b>
B.1	$\gamma_5$ -Problematik in D Dimensionen . . . . .	148
B.2	Naives $\gamma_5$ -Schema . . . . .	148
B.3	Breitenlohner-Maison-Schema . . . . .	149
B.4	Kreimer-Schema . . . . .	149
<b>C</b>	<b>Spezielle Kontraktionen bei Anomalien</b>	<b>153</b>
C.1	Vierdimensionaler metrischer Tensor . . . . .	154
C.2	Kontraktionen . . . . .	154
<b>D</b>	<b>Effektive Kopplungen, Integrale und Koeffizienten</b>	<b>157</b>
D.1	Koeffizienten der Tensorintegrale . . . . .	158
D.2	Korrekturen bei ungeladenen Strömen . . . . .	158
D.2.1	Beitragende Graphen . . . . .	158
D.2.2	Korrektur zu $g_V$ . . . . .	159
D.2.3	Korrektur zu $g_A$ . . . . .	161
D.3	Korrekturen bei geladenen Strömen . . . . .	162
D.3.1	Beitragende Graphen . . . . .	163
D.3.2	Fermionrichtung entgegen Uhrzeigersinn . . . . .	163
D.3.3	Fermionrichtung im Uhrzeigersinn . . . . .	165

<b>E</b>	<b>Basisintegrale</b>	<b>167</b>
E.1	Parameter . . . . .	168
E.2	Trennung von Real- und Imaginärteil . . . . .	168
E.2.1	Wurzel und Schnitte . . . . .	168
E.2.2	Sokhotsky–Plemelj–Relationen . . . . .	170
E.3	Bekanntes Basisintegral . . . . .	171
E.3.1	s-Integration . . . . .	171
E.3.2	Integration der vier Basisintegrale in $t$ . . . . .	174
E.4	Neue Basisintegrale, Einführung . . . . .	188
E.5	Basisintegral $\mathcal{S}_{0,0}$ . . . . .	188
E.5.1	Integrationsergebnis . . . . .	189
E.5.2	Separation der Divergenzen . . . . .	189
E.6	Basisintegrale $\mathcal{T}_j$ . . . . .	191
E.6.1	Berechnung des Integrals $\mathcal{T}_0$ . . . . .	191
E.6.2	Berechnung der Integrale $\mathcal{T}_{1,2}$ . . . . .	194
E.7	Zusammenfassung . . . . .	210
E.7.1	Zu implementierende Integralanteile . . . . .	210
E.8	Abzugsterme im zweiten Schleifenimpuls . . . . .	212
<b>F</b>	<b>Gebiete der numerischen Integration</b>	<b>213</b>
F.1	Planare Topologie . . . . .	214
F.2	Gedrehte reduzierte planare Topologie $\mathcal{R}^+$ . . . . .	215
F.3	Gedrehte reduzierte planare Topologie $\mathcal{R}^-$ . . . . .	217
<b>G</b>	<b>Integrationsmethoden</b>	<b>219</b>
G.1	VEGAS . . . . .	220
G.2	Gaußsches Integrationsverfahren . . . . .	220
G.3	Beschreibung der CUBA–Integrationsroutinen . . . . .	220
G.3.1	CUBA–VEGAS . . . . .	220
G.3.2	Suave . . . . .	221
G.3.3	Divonne . . . . .	221
G.3.4	Cuhre . . . . .	221
<b>H</b>	<b>Vergleiche mit Literaturwerten</b>	<b>223</b>
H.1	Vergleich mit Czarnecki, Kreimer, Kilian . . . . .	224
H.2	Vergleich mit Fleischer, Tarasov . . . . .	225
H.3	Vergleich mit Frink, Kniehl, Kreimer, Riesselmann . . . . .	226
H.4	Vergleich mit Passarino, Uccirati . . . . .	228
<b>I</b>	<b>Landau–Gleichungen</b>	<b>233</b>
I.1	Herleitung und Einschleifen–Beispiele . . . . .	234
I.1.1	Allgemeine Darstellung von Feynmanintegralen . . . . .	234
I.1.2	Singularitäten komplexer Integrale . . . . .	234



I.1.3	Herleitung der Landau-Gleichungen . . . . .	235
I.1.4	Landau-Gleichungen . . . . .	238
I.1.5	Allgemeine Formel . . . . .	239
I.1.6	Massensingularitäten . . . . .	239
I.1.7	Physikalische Interpretation . . . . .	245
I.2	Landau-Gleichungen für Zweischleifenintegrale . . . . .	246
I.2.1	Landau-Gleichungen für Zweischleifen-Zweipunkt-Topologien . . .	246
I.2.2	Landau-Gleichungen für Zweischleifen-Dreipunkt-Topologien . . .	250
I.3	Schnitte bei den Masterintegralen . . . . .	256
I.3.1	Zweiteilchenschnitte . . . . .	257
I.3.2	Dreiteilchenschnitte . . . . .	261
I.3.3	Zusammenfassung . . . . .	265
<b>J</b>	<b>Andere Methoden zur Evaluation von Vertexintegralen</b>	<b>267</b>
J.1	Methode Ghinculov <i>et al.</i> . . . . .	268
J.2	Methode Passarino/Uccirati <i>et al.</i> . . . . .	269
J.3	Methode Remiddi/Bonciani <i>et al.</i> . . . . .	270
J.4	Bemerkungen . . . . .	271
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>273</b>



# Einleitung

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (SM) beschreibt auf hervorragende Art und Weise nahezu alle heute bekannten Phänomene aus der Welt der Elementarteilchen [Bö01, We95, Ho00, Ho04]. Insbesondere zeigen die Meßwerte bei den technisch bisher möglichen Energien eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit den von der Theorie berechneten Werten, wie sie in anderen Bereichen der Naturwissenschaften höchst selten anzutreffen ist. Das Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung ist eine Eichtheorie. Die zugrundeliegende Eichgruppe ist die Gruppe  $SU(2) \times U(1)$ . Die sich daraus ergebenden Eichfelder sind das (masselose) Photon, das ungeladene massive  $Z^0$ -Boson sowie die massiven, geladenen  $W^\pm$ -Bosonen. Diese Eichfelder vermitteln die Wechselwirkung zwischen den Fermionen. Die Fermionen treten bei den Experimenten als beobachtete Anfangs- und Endzustände auf.

Die Präzisionsexperimente bei LEP/CERN und anderen Beschleunigern wie z.B. SLC/SLAC, TEVATRON/Fermilab und HERA/DESY haben eine Genauigkeit erreicht, welche die Erwartungen deutlich übertroffen haben. Dies trifft insbesondere auf Elektron-Positron-Beschleuniger zu. Bei den zukünftigen Beschleunigern wird sowohl beim LHC als auch vor allem beim Internationalen Linearbeschleuniger ILC [Te01] mit weiteren deutlichen Verbesserungen gerechnet.

Allerdings war es aufgrund experimenteller Gegebenheiten noch nicht möglich, alle Vorhersagen zu testen, insbesondere weil man nicht in die zu weiteren Untersuchungen nötigen Regionen hoher Energie vordringen konnte. Der bisher zugängliche energetische Bereich erstreckt sich bis zu einigen hundert GeV, dies aber auch nur bei Hadronbeschleunigern, bei denen aufgrund der Fülle der Untergrundereignisse die Analyse lediglich eingeschränkt möglich ist. Die Präzision der Messungen ist bei Elektron-Positron-Beschleunigern in den meisten Fällen deutlich höher als bei Hadronbeschleunigern. Bei den Elektron-Positron-Beschleunigern konnte man bei dem heutigen Stand der Technik Energien von nur bis zu etwa 200 GeV erreichen. Diese Energien wurden bei LEP (Elektron-Positron-Collider) am CERN erzeugt [Le04]. Der LEP-Collider mußte aber abgeschaltet werden, und bis zum möglichen Bau des Internationalen Linearbeschleunigers ILC wird noch viel Zeit vergehen. Der einzige Beschleuniger weltweit, der zur Zeit für die Hochenergiephysik wichtige Daten liefert, ist der Tevatron-Collider (Proton-Antiproton-Collider) am Fermilab. Es ist aber unwahrscheinlich, daß durch ihn das letzte noch zu verifizierende Teilchen des SM, das Higgs-Teilchen, entdeckt werden kann. Dieser Nachweis wird für den LHC am CERN erwartet, welcher aber erst in einigen Jahren (voraussichtlich 2007) den Betrieb aufnehmen wird.

Gleichwohl können aus den bereits vorhandenen Daten wichtige Schlüsse gezogen werden. Denn durch die Experimente ist es nicht nur möglich, Aussagen über direkt nachgewiesene Teilchen zu treffen, sie lassen auch indirekte Aussagen über weitere Physik zu. Insbesondere können aus den Daten Schranken für die Masse des noch nicht entdeckten Higgs-Bosons abgeleitet werden. So kann die Masse auf den Bereich zwischen 114 GeV und ca. 1 TeV eingeschränkt werden. Weiter können Aussagen über möglicherweise vorhandene „Neue Physik“ getroffen werden. Es können Einschränkungen bezüglich Erweiterungen des Standardmodells um neue Teilchen gemacht werden.

Nur ein weitergehendes Detailverständnis wird es gestatten, die experimentellen Ergebnisse

ganz auszuschöpfen. Die Voraussetzung hierfür ist, daß die Genauigkeit der theoretischen Berechnungen die experimentelle Genauigkeit erreicht oder übertrifft. Dies ist zum jetzigen Zeitpunkt vielfach nur unzureichend gegeben.

Die Präzision der theoretischen Vorhersagen entspricht der bei Elektron–Positron–Beschleunigern erzielten experimentellen Genauigkeit nur in wenigen Fällen. Dies ist im Gegensatz zum Fall von Hadronbeschleunigern, bei denen die experimentelle Genauigkeit meist der limitierende Faktor ist. Um die Gültigkeit des Standardmodells zu testen und Aussagen über „Neue Physik“ treffen zu können, bedarf es eines Fortschritts in den Methoden der Theorie und ihrer Anwendung.

Bei LEP konnten mit hoher Genauigkeit Messungen zum Streuprozeß  $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$  ( $l^\pm$ : geladene Leptonen) durchgeführt werden. Die Fehler hierbei lagen z.B. für die leptoni-sche Zerfallsbreite des  $Z^0$ -Bosons größenordnungsmäßig bei  $\mathcal{O}(10^{-4})$  [Le04]. Dies erfordert entsprechend genaue theoretische Vorhersagen im Rahmen des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung. Die theoretischen Vorhersagen werden im Rahmen der Störungstheorie getroffen. Viele Terme in höheren Ordnungen sind bisher nicht bekannt, was vor allem auf die Komplexität der Berechnung der Feynmangraphen zurückzuführen ist, die mit zunehmender Schleifenanzahl rapide anwächst. In zweiter Ordnung konnten bisher nur wenige Meßgrößen berechnet werden. Es existiert noch keine Methode, welche die (semi-)automatische Evaluierung von beliebigen Prozessen in dieser Ordnung ermöglicht.

Von besonderer Bedeutung sind die Präzisionsmessungen auf der  $Z^0$ -Resonanz. Die effektiven Vektor- und Axialvektorkopplungskonstanten der Leptonen,  $g_V^{\text{lept}}$  und  $g_A^{\text{lept}}$ , konnten mit sehr großer Genauigkeit vermessen werden. Aus diesen Meßgrößen berechnet sich unmittelbar der schwache leptoni-sche Mischungswinkel  $\sin^2 \theta^{\text{lept}}$ . Der Fehler der bisher bekannten theoretischen Rechnungen ist größer [Ho00, Ho04]. Insbesondere ist beim ILC [Te01] im Rahmen des GigaZ-Projekts [He00] mit weiteren deutlichen Verbesserungen der experimentellen Ergebnisse zu rechnen, sodaß in jedem Fall weitere theoretische Fortschritte notwendig sind.

In zweiter Ordnung müssen mehrere tausend Zweischleifendiagramme berechnet werden. Besonders wichtig sind Diagramme mit einer Fermionschleife. Diese treten  $N_f$ -fach auf (wobei  $N_f$  die Fermionenzahl bedeutet). Die zuerst zu berechnenden Korrekturen zu  $g_V^{\text{lept}}$  und  $g_A^{\text{lept}}$  sind deshalb von der Ordnung  $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$ . Man bezeichnet sie deshalb auch als fermionische Korrekturen im Gegensatz zu den bosonischen, welche keine geschlossene Fermion-schleife enthalten. Durch die Berechnung dieser Korrekturen ist es möglich, den effektiven schwachen leptoni-schen Mischungswinkel  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$  genauer zu bestimmen [Ho00, Ho04]. Bisher existieren keine vollständigen Berechnungen zur zweiten Ordnung des Zerfalls  $Z^0 \rightarrow l^+l^-$ . In unserem Projekt sollen die Zweischleifen-Vertexkorrekturen zu  $Z^0 \rightarrow l^+l^-$  berechnet werden. Dabei sollen Methoden entwickelt werden, welche nicht nur zur Evaluierung dieses Prozesses geeignet sind, sondern welche auch zur semiautomatischen Berechnung ähnlicher Prozesse verwendet werden können. Zu den fermionischen Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$  wurden vor wenigen Monaten von Awramik *et al.* Ergebnisse veröffentlicht [Aw04a]. Damit übereinstimmende Ergebnisse wurden kürzlich auch von Hollik *et al.* publiziert [Ho05]. Gleichwohl ist unsere Arbeit schon allein deshalb weiterhin relevant, weil

die vorliegenden Methoden nicht allein für die Evaluierung von Korrekturen zu speziellen Größen wie  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$  entwickelt wurden, sondern auch für beliebige massive Zweischleifen–Vertexintegrale. Den Berechnungen von Awramik *et al.* lagen sehr spezielle Methoden zugrunde, welche nicht im allgemeinen massiven Fall angewendet werden können. Die Entwicklung von allgemeinen Prinzipien ist hingegen auch Gegenstand der Arbeiten von Passarino *et al.* [Pa01b, Ac04]. Auf diesen Methoden basiert die Publikation von Hollik *et al.* Gleichwohl ist es sinnvoll, mit unseren Methoden eine Vergleichsmöglichkeit im allgemeinen Fall zu schaffen. Denn es ist methodische Arbeit für die Evaluierung solcher Integrale notwendig. Für den ILC müssen in den nächsten Jahren, ehe dort die Experimente starten, aufgrund der zu erwartenden Präzision weitere elektroschwache Korrekturen in zweiter Ordnung zu den Meßgrößen berechnet werden.

Zwar gibt es seit langem Methoden, mit denen sich Schleifenkorrekturen höherer Ordnung im masselosen Fall von QED und QCD zuverlässig evaluieren lassen [Ha98]. Dies trifft jedoch nicht auf massive Mehrschleifenrechnungen zu. Einen groben Überblick über bisher vorhandene Berechnungen und Methoden gibt z.B. [He04].

Im Fall von Tensorintegralen (das sind Integrale mit Schleifenimpulskomponenten im Zähler) kann lediglich die Evaluierung von Zweischleifen–Zweipunktfunktionen mit beliebiger Zählerstruktur als methodisch abgeschlossen gelten [Ba94a, Ba94b]. Im Fall von Dreipunktfunktionen trifft dies nur noch auf Integrale mit einem trivialen Zähler zu [Cz94, Fr96c, Fr97].

In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Methode entwickelt, mit deren Hilfe sich massive Zweischleifen–Dreipunkt–Tensorintegrale berechnen lassen, wie sie für die Berechnung der Korrekturen zur zweiten Ordnung des schwachen leptonischen Mischungswinkels  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$  notwendig sind. Die in Computerprogrammform festgehaltenen Algorithmen sollen auch für allgemeinere Prozesse in das  $\chi\text{loops}$ –GiNaC–Projekt der Mainzer Arbeitsgruppe ThEP einfließen [Ba01a, Fr97]. Deshalb wurden sie soweit möglich für verallgemeinerte Prozesse ausgelegt. Mit dem  $\chi\text{loops}$ –GiNaC–Projekt soll die Berechnung von Einschleifen– und Zweischleifen–Feynmangraphen automatisiert werden.

In Kapitel 1 der vorliegenden Arbeit wird quantitativ der Stand des Experiments dargelegt werden, um diesen sodann mit dem Stand der theoretischen Rechnungen zu vergleichen. Weiter werden die in der Ordnung  $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$  auftretenden Vertex–Graphen bestimmt. Die dabei auftretenden Topologien lassen sich als planare Zweischleifen–Dreipunkt–Leitertopologie sowie Zweischleifen–Dreipunktfunktionen mit Zweipunkt–Subgraph klassifizieren. Für die Feynmanintegrale mit Zweipunktsubgraph existieren bewährte Evaluationsmethoden [Ba94a, Ba94b, Po97]. Die schwierigste der auftretenden Topologien ist die planare Leitertopologie. Es treten keine nicht–planaren Topologien auf. Nicht–planare Topologien werden deshalb in dieser Arbeit nicht diskutiert, für den Fall mit trivialem Zähler siehe [Fr96a].

In Kapitel 2 werden in der Amplitude des Prozesses  $Z^0 \rightarrow l^+ l^-$  die aufgrund der Lorentzkovarianz auftretenden effektiven Vektor– und Axialvektorkopplungen identifiziert. Es werden Projektoren bestimmt, mit deren Hilfe sich diese Größen aus einem beliebigen zu diesem Prozeß beitragenden Feynmangraphen extrahieren lassen. Mit Hilfe der Projektoren werden die auftretenden Tensorintegrale mit planarer Zweischleifen–Vertextopologie auf Integrale mit Skalarprodukten ohne freie Lorentzindizes im Zähler abgebildet.

In Kapitel 3 wird gezeigt, wie die lorentzinvarianten Skalarprodukte der Impulse im Minkowski-Raum in Parallel/Orthogonalraum-Variable dargestellt werden. Die Impulse werden dabei in Komponenten zerlegt, die parallel bzw. orthogonal zu den externen Impulsen sind. Die dadurch definierten Variablen werden P/O-Variable genannt. Die Zerlegung wird als P/O-Transformation bezeichnet. Die Integrale können dadurch unter Ausnutzung der Lorentzinvarianz der Feynmanintegrale im Ruhesystem des Zerfallsteilchens berechnet werden, was zu wesentlichen Vereinfachungen im Rechenweg führt.

In Kapitel 4 wird für die planare sowie die gedrehten reduzierten planaren Zweischleifen-Vertexfunktionen eine Tensorreduktion entwickelt, durch welche die Integrale, welche anfangs eine beliebige Zählerstruktur aufweisen können, auf einen eindeutig definierten und stark eingeschränkten Satz von Basisintegralen zurückgeführt werden. Bei Mehrschleifen-Mehrpunktfunktionen kann oft nicht der gesamte Zähler gegen Nennerfaktoren gekürzt werden. Die nach Tensorreduktion entstehenden Integrale lassen sich klassifizieren als:

- „Echte“ Zweischleifen-Dreipunktfunktionen, d.h. solche ohne Zweipunkt-Subgraph, mit einer eingeschränkten Tensorstruktur,
- Zweischleifen-Dreipunktfunktionen mit Zweipunkt-Subgraph,
- effektive Zweischleifen-Zweipunktfunktionen sowie
- das Produkt von Einschleifenintegralen.

In Kapitel 5 wird das Endpunkt-Divergenzverhalten von Feynmanintegralen diskutiert. Es wird dargelegt, wie bei UV-divergenten Zweischleifen-Dreipunktintegralen ein Integral abgezogen werden kann, welches dasselbe UV-Verhalten aufweist, aber einfacher zu berechnen ist, sodaß der schwierige, endliche Anteil in vier Dimensionen konvergent ist und mit der Parallel/Orthogonalraum-Methode evaluiert werden kann. Die Abzugsterme werden so gewählt, daß sie einen Zweipunkt-Subgraphen besitzen und getrennt mit bekannten Methoden ausgewertet werden können [Ba94a, Ba94b, Po97]. Das Weinberg-Theorem belegt, daß die Masterintegrale nach der Abzugsprozedur keine Endpunktsingularitäten mehr aufweisen.

Im zentralen Kapitel 6 wird die Methode vorgestellt, mit deren Hilfe sich der nach Tensorreduktion verbleibende Satz der Masterintegrale mit „echter“ Zweischleifen-Dreipunkt-topologie im allgemeinen Massenfall mit einer numerischen Zweifachintegration berechnen läßt. Die schwierigen Masterintegrale sind in unserem Fall diejenigen mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie. Die dazu nötigen analytischen Integrationsschritte werden ausführlich dargelegt und begründet. Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Methodik läßt sich leicht auf die gekreuzte Topologie übertragen.

Die Singularitäten der Feynmanintegrale werden als Landau-Singularitäten [La59] bezeichnet. Sie treten im Allgemeinen nur für spezielle Werte der externen Impulse auf. Einige dieser Singularitäten treten jedoch unabhängig von den externen Impulsen auf. Da sie immer mit verschwindenden Massen in Beziehung stehen, werden sie allgemein als Massensingularitäten bezeichnet. Die Landau-Singularitäten spiegeln sich bei Verwendung der P/O-Methode direkt in den Parametern wider, die im Verlauf der Integration auftreten. Da bis auf die beiden letzten Integrationsschritte alle Integrationen analytisch durchgeführt werden, können die Integranden der Feynmangraphen direkt und sehr anschaulich (auch bei Parametervariationen) mit den Singularitäten im zweidimensionalen Raum vor der nu-

merischen Integration in Bezug gesetzt werden. Es werden die im Falle der Zweischleifen-Vertexintegrale möglichen Schnitte identifiziert und mit den Integrationsparametern in Beziehung gesetzt.

In Kapitel 7 wird diese Integrationsmethode auf konkrete Fälle mit verschiedenen Massen und Tensorstrukturen angewendet, um die Zuverlässigkeit des Algorithmus bzw. seiner Implementation zu demonstrieren. Für triviale Zählerstruktur werden die numerischen Ergebnisse der Programme mit aus der Literatur bekannten Werten verglichen. Die Übereinstimmung liegt im Promillebereich. Für die Tensorintegrale werden ausführliche numerische Tests durchgeführt. Wir haben zusätzlich zu Vergleichszwecken einen Algorithmus ausgearbeitet, in welchem etliche Rechenschritte numerisch statt analytisch durchgeführt werden. Dieser Algorithmus führt die Integrale weitgehend auf vom skalaren Fall bekannte Integrale zurück. Die Übereinstimmung der Ergebnisse der verschiedenen Methoden im Rahmen der Fehler belegt ihre Glaubwürdigkeit. Schließlich wird das Verhalten der Feynmanintegrale im Fall von Singularitäten unter Zuhilfenahme von zwei- und dreidimensionalen Graphiken der Integranden demonstriert.

In Kapitel 8 werden die Beiträge aufgeführt, die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt wurden, da für ihre Auswertung bereits bewährte Algorithmen existieren. Es wird gezeigt, welche bekannten Methoden dafür verwendet werden können.

In Kapitel 9 wird die Implementation des Algorithmus in Computerprogrammform kurz skizziert und dargelegt, wie die verschiedenen Bestandteile des Algorithmus programmtechnisch verknüpft wurden. Es werden die Zwischenergebnisse zu den Korrekturen der effektiven Kopplungen, wie sie mit dem von uns ausgearbeiteten Algorithmus entstehen, aufgezeigt.

Wir beschließen die vorliegende Arbeit in Kapitel 10 mit der Zusammenfassung der erarbeiteten Resultate und mit einem Ausblick auf weitere mögliche Anwendungsbereiche der in dieser Arbeit entwickelten Methoden und Computerprogramme.

In den Anhängen werden dargestellt:

- Anhang A: Eine Herleitung der Lorentzstruktur des Matrixelements von  $Z^0 \rightarrow l^+l^-$  sowie von Projektoren zur Extraktion der effektiven Kopplungen.
- Anhang B: Die Vorstellung verschiedener  $\gamma_5$ -Schemata.
- Anhang C: Die Herleitung von Darstellungen für spezielle Zählerstrukturen im P/O-Raum, wie sie aufgrund von Anomalien entstehen.
- Anhang D: Die Koeffizienten der Tensorintegrale mit Leitertopologie im Minkowskiraum nach Anwendung der Projektoren.
- Anhang E: Die analytische Berechnung der für diese Arbeit notwendigen Basisintegrale.
- Anhang F: Eine Betrachtung der Integrationsbereiche der numerischen Zweifachintegration für die planare Topologie und die gedrehten reduzierten planaren Topologien.
- Anhang G: Eine kurze Erläuterung der verwendeten numerischen Integrationsprogramme.
- Anhang H: Vergleiche mit Literaturwerten für triviale Zähler.
- Anhang I: Einer Herleitung der Landau-Gleichungen sowie deren Lösungen für die vorkommenden Topologien.
- Anhang J: Zugänge anderer Arbeitsgruppen zur Evaluation von massiven Zweischleifen-Mehrpunktfunktionen.



# Kapitel 1

## Vergleich Experiment und Theorie

## 1.1 Experimenteller Status

### 1.1.1 LEP–Experimente auf der $Z^0$ –Resonanz

Die Genauigkeit der experimentellen Messungen von LEP–Observablen erfordert eine entsprechende Präzision der theoretischen Vorhersagen im Rahmen des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung.

Der Streuprozess  $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$  hat in Bornscher Näherung die Amplitude

$$A(e^+e^- \rightarrow l^+l^-) = A_\gamma + A_Z = \begin{array}{c} e^+ \\ \swarrow \\ \gamma \\ \searrow \\ e^- \end{array} \begin{array}{c} l^- \\ \swarrow \\ \gamma \\ \searrow \\ l^+ \end{array} + \begin{array}{c} e^+ \\ \swarrow \\ Z^0 \\ \searrow \\ e^- \end{array} \begin{array}{c} l^- \\ \swarrow \\ Z^0 \\ \searrow \\ l^+ \end{array} \quad (1.1)$$

Auf der  $Z^0$ –Resonanz ist dabei der Kanal  $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow l^+l^-$  dominant. Da der Prozeß  $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$  mit besonders hoher Genauigkeit meßbar ist, sind auch entsprechend genaue theoretische Berechnungen notwendig, was die Evaluierung auch von höheren Ordnungen der Störungsreihe verlangt. Bisher existieren aber keine vollständigen Berechnungen zur zweiten Ordnung des Zerfalls des  $Z^0$ –Bosons in geladene Leptonen.

### 1.1.2 Meßgrößen und SM–Parameter

In niedrigster Ordnung ist die Amplitude für den Zerfall des  $Z^0$ –Bosons in ein Fermionpaar  $f\bar{f}$ :

$$A^{Z^0 \rightarrow f\bar{f}} = \begin{array}{c} f(p_1) \\ \swarrow \\ Z^0(p) \\ \searrow \\ \bar{f}(p_2) \end{array} = e \bar{u}(p_1) \not{\epsilon} \left[ g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right] v(p_2) \quad (1.2)$$

Dabei wird das Positron durch den Spinor  $v(p_2)$ , das Elektron durch den Spinor  $\bar{u}(p_1)$ , sowie das  $Z^0$ –Boson durch den Polarisationsvektor  $\epsilon^\mu$  repräsentiert, welcher in obiger Formel bereits mit einer Dirac–Matrix  $\gamma_\mu$  kontrahiert ist. Die Vektor– und Axialvektorkopplungskonstanten  $g_V$  und  $g_A$  sind im Standardmodell durch den schwachen Mischungswinkel  $\cos \theta_W = M_W/M_Z$  festgelegt. In niedrigster Ordnung gilt für die Kopplung des  $Z^0$ –Bosons an ein Fermion  $f$  mit der elektrischen Ladung  $Q_f$  und schwachem Isospin  $I_{w,f}^3$ :

$$g_V^f = \frac{I_{w,f}^3 - 2 \sin^2 \theta_W Q_f}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W}$$

$$g_A^f = \frac{I_{w,f}^3}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} \quad (1.3)$$

Durch Terme höherer Ordnung in der Störungsreihe wird der Zusammenhang von  $g_V^f$  und  $g_A^f$  mit  $\sin^2 \theta_W$  modifiziert. Die genaueste Bestimmung von  $g_V$  und  $g_A$  aus experimentellen Tests war für die Kopplungen an geladene Leptonen  $e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm$  möglich [Le04], vgl.

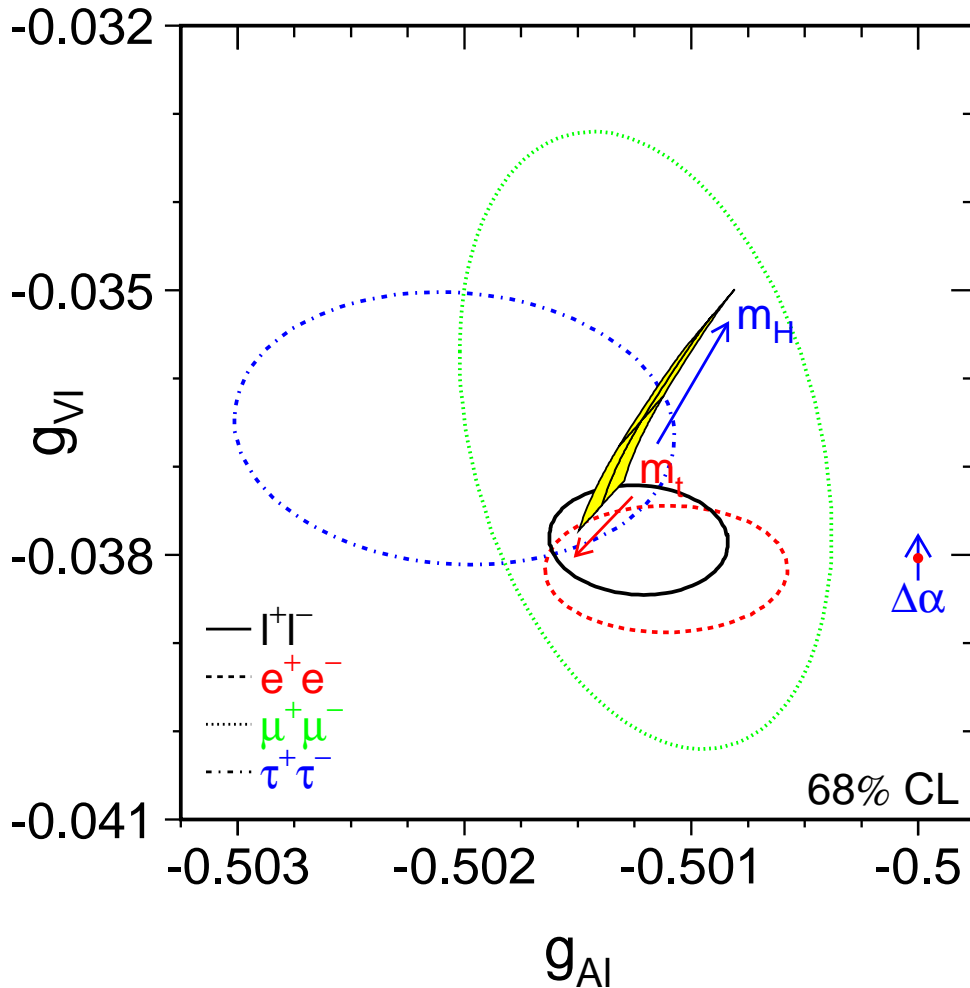


Abbildung 1.1: Vektor- und Axialvektorkopplungen der Leptonen. Die Linien beschreiben die Grenzen der 68%-Wahrscheinlichkeiten in der  $(g_V^l, g_A^l)$ -Ebene, wie sie aus den Messungen bei LEP und SLD extrahiert wurden [Le04]. Die durchgezogene Linie stammt von einem Fit an die LEP- und SLD-Daten, bei denen Lepton-Universalität angenommen wurde. Der schattierte Bereich korrespondiert mit der Standardmodell-Vorhersage für  $m_t = 178.0 \pm 4.3$  GeV und  $m_H = 300_{-186}^{+700}$  GeV. Die Pfeile zeigen die Richtungen an, in welche sich die Werte bei wachsenden Werten von  $m_t$  und  $m_H$  bewegen. Die Variation der hadronischen Vakuumpolarisation durch  $\Delta\alpha_{had}^{(5)}(M_Z) = 0.02761 \pm 0.00036$  führt zu einer weiteren Unsicherheit bei der Standardmodell-Vorhersage, welche durch den korrespondierenden Pfeil angedeutet wird. Der experimentelle Fehler liegt für die Vektorkopplungen im Prozent- und für die Axialvektorkopplungen im Promillebereich.

Abbildung 1.1. Der experimentelle Fehler liegt im Promillebereich. Deshalb sind höhere Ordnungen in der theoretischen Rechnung notwendig [Ba01b, Ho04].

## 1.2 Stand der Theorie

### 1.2.1 Korrekturen zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$

Die Korrekturen erster Ordnung werden durch Einschleifen-Feynmangraphen beschrieben. Für den Zerfall des  $Z^0$ -Bosons treten folgende Typen auf:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} \text{Z}^0, \gamma \\ \text{Z}^0, \gamma \end{array} & \begin{array}{c} \text{Z}^0, \gamma, W^\pm \\ l, \nu_l \end{array} & \begin{array}{c} \text{Z}^0 \\ \text{Z}^0 \end{array} & \begin{array}{c} \gamma \\ \gamma \end{array} & \begin{array}{c} \nu \\ \bar{\nu} \\ W^- \end{array} & \begin{array}{c} W^- \\ W^+ \\ \nu \end{array} \\
 \end{array} \tag{1.4}$$

Die erreichte experimentelle Genauigkeit erfordert die Berechnung von Zweischleifenbeiträgen [Ba01b, Ho04].

### 1.2.2 Zweischleifenkorrekturen, $\mathcal{O}(\alpha^2)$

Die Anwendung eines Graphengenerators wie z.B. FeynArts [Ha00] zeigt, daß in zweiter Ordnung mehrere tausend Feynmangraphen berechnet werden müssen. Besonders wichtig sind Diagramme mit einer Fermionschleife. Diese treten  $N_f$ -fach auf, mit  $N_f$  der Anzahl aller Fermionen, welche sich — die unterschiedlichen Fermionmassen spielen für diese Abschätzung lediglich eine vernachlässigbare Rolle — berechnet zu:

$$\begin{array}{rcccl}
 N_f = & 2 \cdot 3 & + & 2 \cdot 3 \cdot 3 & = 21 \\
 & \text{Leptonen} & & \text{Quarks (3 Farben)} & \\
 & e \quad \mu \quad \tau & & u \quad c \quad t & \\
 & \nu_e \quad \nu_\mu \quad \nu_\tau & & d \quad s \quad b & 
 \end{array} \tag{1.5}$$

Eine grobe Abschätzung läßt für diese Korrekturen (da  $\alpha(M_Z) \approx 1/128$  [Pd05]) die Größenordnung

$$\mathcal{O}(N_f \alpha^2) \simeq N_f \cdot 6 \cdot 10^{-5} \simeq \mathcal{O}(0.001) \tag{1.6}$$

erwarten. Dies ist im Promillebereich, also genau in dem Bereich, in welchem sich der experimentelle Fehler bewegt [Le04].

Die Zweischleifen-Propagatorkorrekturen mit einer Fermionschleife sind bekannt. In unserem Projekt sollen die Zweischleifen-Vertexkorrekturen zu  $Z^0 \rightarrow l^+ l^-$  berechnet werden:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} l^- \\ \text{Z, W, } \gamma \\ f \\ \text{Z, W, } \gamma \\ l, \nu_l \\ f \\ \text{Z, W, } \gamma \\ l^+ \end{array} & \begin{array}{c} l^- \\ \text{Z, W, } \gamma \\ f' \\ \text{Z, W, } \gamma \\ l, \nu_l \\ f \\ \text{Z, W, } \gamma \\ l^+ \end{array} & \begin{array}{c} l^- \\ \text{Z, W, } \gamma \\ l, \nu_l \\ f \\ \text{Z, W, } \gamma \\ l, \nu_l \\ f' \\ \text{Z, W, } \gamma \\ l^+ \end{array} \\
 \end{array} \tag{1.7}$$

Die inneren Bosonen werden in dieser Arbeit auf  $Z^0$  und  $W^\pm$  beschränkt, da die Feynmanintegrale mit Photonen zur QED gerechnet werden.

Ein vollständiges Ergebnis für  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$  zur Ordnung  $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$  wurde vor wenigen Monaten von Awramik *et al.* veröffentlicht [Aw04a]. Die dabei verwendeten Evaluationsmethoden sind aber andere als die in dieser Arbeit verwendeten und im allgemeinen Massenfall nicht anwendbar.

Weiter wurde kürzlich basierend auf Methoden von Passarino *et al.* [Ac04], vgl. Anh. J.2, mit [Aw04a] übereinstimmende Ergebnisse publiziert [Ho05].

Da der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit aber auf der Entwicklung neuer Algorithmen liegt und die Berechnungen zur Korrektur von  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$  lediglich ein wichtiges Anwendungsbeispiel darstellen, besitzen die in dieser Dissertation ausgearbeiteten Methoden weiterhin ohne Einschränkung Relevanz.



## **Kapitel 2**

# **Effektive Kopplungen, planare Topologie**

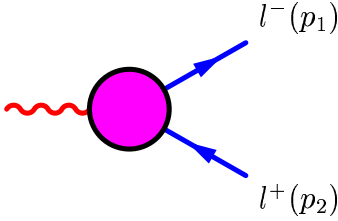
## 2.1 Extraktion von $g_V^l$ und $g_A^l$ aus $Z \longrightarrow l\bar{l}$

### 2.1.1 Lorentzstruktur, Projektoren

Wie im Anhang A gezeigt wird, besitzt der Prozeß  $Z^0 \longrightarrow l^+l^-$  im Falle von masselosen auslaufenden Fermionen die Lorentzstruktur

$$\mathcal{T}^\mu = ie\bar{u}(p_1)\gamma^\mu [g_V - g_A\gamma_5]v(p_2) \quad (2.1)$$

Dabei benennen wir den Impuls des Zerfallsteilchens mit  $p^\mu$  und die Impulse der Endzustandsteilchen mit  $p_1^\mu$  und  $p_2^\mu$ . Es gilt  $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ . Graphisch lässt sich der Zerfall darstellen als:

$$\mathcal{T}^\mu \equiv Z^0(p)^\mu \text{  } \quad (2.2)$$

Dies ist unabhängig von der Schleifenordnung oder der Topologie und gilt sowohl insgesamt als auch für jeden beitragenden Graphen. Durch Kontraktion mit dem Polarisationsvektor des  $Z^0$ -Bosons ergibt sich das Matrixelement dieses Prozesses zu

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu \mathcal{T}^\mu = ie\bar{u}(p_1)\not{\epsilon} [g_V - g_A\gamma_5]v(p_2) \quad (2.3)$$

Die effektiven Kopplungen  $\Delta g_V$  und  $\Delta g_A$  werden, wie in Anhang A gezeigt, mit Hilfe der Projektoren gemäß den Formeln

$$g_V = \frac{\sum_{\text{spins}} \mathcal{T}^\mu \mathcal{V}_\mu}{4ie(p_1 \cdot p_2)(2-D)} \quad \text{mit} \quad \mathcal{V}^\mu = \bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \quad (2.4)$$

$$g_A = \frac{\sum_{\text{spins}} \mathcal{T}^\mu \mathcal{A}_\mu}{4ie(p_1 \cdot p_2)(2-D)} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}^\mu = \bar{v}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu u(p_1)$$

extrahiert. Dabei ist  $D$  die Dimension, in welcher die Feynmanintegrale zu berechnen sind.

### 2.1.2 $\gamma_5$ -Schema

Im Anhang B werden verschiedene  $\gamma_5$ -Schemata dargestellt. Es zeigt sich die Notwendigkeit einer eindeutigen Definition, welches Schema verwendet wird.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird das  $\gamma_5$ -Schema von D. Kreimer („DK-Schema“) [Ko91] verwendet werden, welches auch in GiNaC [Ba00] implementiert ist.



### 2.1.3 Massen und Kopplungskonstanten

Beim vorgegebenen Prozeß des Zerfalls eines  $Z^0$ -Bosons in geladene Leptonen werden diese stets als masselos angenommen.

$$p_i^2 = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

Deshalb gilt

$$p^2 = M_Z^2 \quad \Longrightarrow \quad (p_1 \cdot p_2) = \frac{M_Z^2}{2} \quad (2.6)$$

Die elektromagnetische Kopplungskonstante ist

$$e \equiv e_{\text{QED}} \quad (2.7)$$

Die Vektor- und Axialvektorkopplungen von Fermionen an ein  $Z^0$ -Boson berechnen sich in niedrigster Ordnung gemäß (1.3).

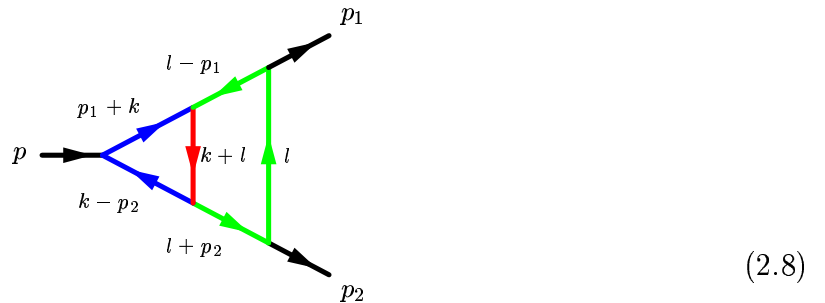
## 2.2 Extraktion von $\Delta g_V$ und $\Delta g_A$ in $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$

Die Korrekturen zur Ordnung  $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$  zu  $g_V$  und  $g_A$  wollen wir im Folgenden als  $\Delta g_V$  und  $\Delta g_A$  bezeichnen.

### 2.2.1 Planare Leitertopologie

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden von den drei Topologien aus (1.7) ausschließlich die erste, die sogenannte planare „Leitertopologie“, betrachtet, weil sie die schwierigste der zu behandelnden Topologien darstellt. Für sie wurde bisher im Gegensatz zu den Graphen, welche einen Zweipunktsubloop enthalten [Ba94a, Ba94b, Po97], außer von Passarino *et al.* [Ac04] keine Methode publiziert, mit welcher sich im allgemeinen Massenfall Tensorintegrale zuverlässig evaluieren lassen. Zu den neuen Methoden von Passarino *et al.* vgl. Anhang J.

Die planare Leitertopologie hat die Struktur (die Pfeile in den Linien stellen den Impulsfluß dar):



Die Propagatorindizierung und der innere Impulsfluß folgt der Definition:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (k + p_1)^2 - m_1^2 + i\eta \\
 P_2 &= (k - p_2)^2 - m_2^2 + i\eta \\
 P_3 &= (k + l)^2 - m_3^2 + i\eta \\
 P_4 &= (l - p_1)^2 - m_4^2 + i\eta \\
 P_5 &= (l + p_2)^2 - m_5^2 + i\eta \\
 P_6 &= l^2 - m_6^2 + i\eta
 \end{aligned} \tag{2.9}$$



Bei dieser Topologie besitzt die geschlossene Fermionschleife eine Dreiecksstruktur. Wir wollen mit Hilfe der Feynmanregeln die Matrixelemente, welche ein fermionisches Dreieck enthalten, für diese Topologie bestimmen.

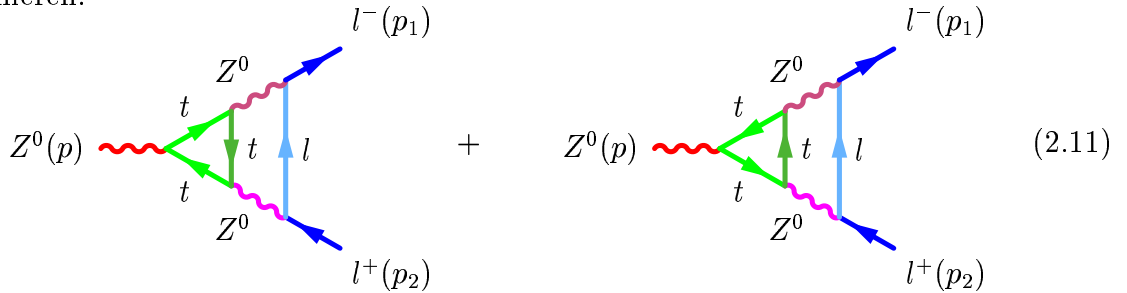
## 2.2.2 Geladene und ungeladene Ströme

Die Graphen, welche zum leptonenischen Zerfall des  $Z^0$ -Bosons beitragen und deren Topologie die „Leitertopologie“ ist, lassen sich in solche mit geladenen inneren Strömen und solche mit ungeladenen inneren Strömen einteilen. Im Fall von geladenen Strömen sind die im Feynmangraph ausgetauschten Bosonen  $W^\pm$ -Bosonen, im Fall von ungeladenen Strömen werden  $Z^0$ -Bosonen ausgetauscht.

Weiter müssen Beiträge nach verschiedenen Fermionrichtungen im inneren fermionischen Dreieck berücksichtigt werden.

### 2.2.2.1 Ungeladene Ströme

Um die Integrale mit zwei inneren  $Z^0$ -Bosonen zu berechnen, sind im Falle, daß die Fermionen des inneren Dreiecks top-Quarks sind, zwei Graphen mit verschiedenem Umlaufsinn zu summieren:

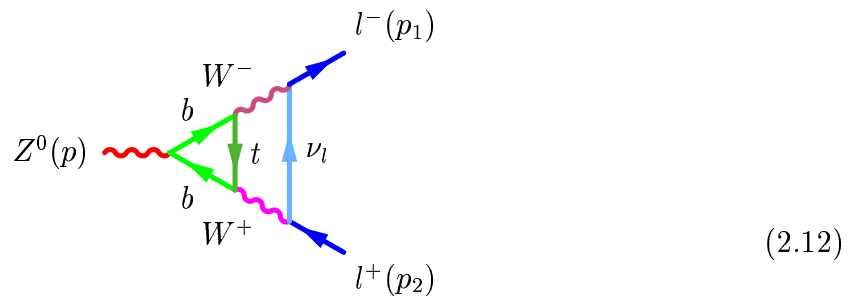


Sind die inneren Fermionen masselos, erhält man das Ergebnis hierfür sofort, wenn man die Massen der inneren Fermionen zu Null setzt,  $m_t \rightarrow 0$ , und bei den Kopplungen der top-Quarks an den Vertizes die schwachen Isospins und die elektischen Ladungen durch die Werte der betrachteten Fermionen ersetzt. Zum Endergebnis tragen natürlich alle Graphen mit den verschiedenen inneren Fermionen bei. Analoges gilt im Folgenden bei den geladenen Strömen.

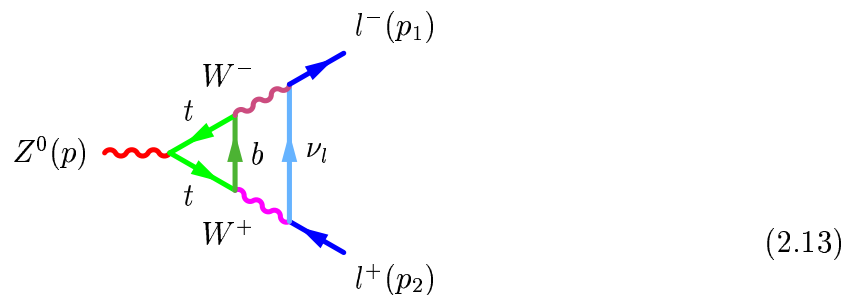
### 2.2.2.2 Geladene Ströme

Bei geladenen Strömen sind die inneren Bosonen  $W^\pm$ -Bosonen. Der Ladungserhaltung wegen tritt jeweils nur eine Fermionrichtung auf.

Für den Fermionenfluß im Uhrzeigersinn ist folgender Graph zu betrachten:



Für den Fermionenfluß entgegen dem Uhrzeigersinn ist zu betrachten:



Hier sind für andere innere Fermionen als die eingezeichneten top- und bottom-Quarks sowohl die Massen als auch die Werte der Kopplungskonstanten am Vertex des zerfallenden  $Z^0$  durch die jeweils korrespondierenden Werte zu ersetzen, wenn man die anderen Beiträge berechnet. Da die Massen und Kopplungen aber als GiNaC-Symbole in die Berechnung der Koeffizienten eingehen, ist dies technisch sehr einfach durchzuführen.

### 2.2.3 Anwendung der Projektoren

Wendet man auf obige Matricelemente  $T^\mu$  die Projektoren (2.4) an, so erhält man die Größen  $\Delta g_{V,A}$  für die Beiträge der Leitertopologie.

Die effektiven Kopplungen berechnen sich dann gemäß der Formel

$$\Delta g_{V,A} = H \sum_{T=NC,CC} B^T \int d^D k d^D l \frac{\sum_i C_i^T(p_{1,2}) N_i^T(k, l)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (2.14)$$

Die darin auftretenden Koeffizienten werden im Folgenden definiert:  
Der allgemeine Vorfaktor ist

$$H = (\mu^{4-D})^2 e^4 \frac{1}{2(2-D)} \frac{1}{M_Z^2} \frac{1}{(2\pi)^{2D}} = \alpha^2 (\mu^{4-D})^2 \frac{2}{(2-D)} \frac{(2\pi)^{2-2D}}{M_Z^2} \quad (2.15)$$

Im Falle von ungeladenen Strömen ist

$$B^{NC} = 1 \quad (2.16)$$

Im Falle von geladenen Strömen gilt

$$B^{CC} = \left( \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \right)^4 \quad (2.17)$$

Die Zählerfaktoren  $C_i^T, N_i^T$  sind in Anhang D angegeben.

Die Massen der Fermionen können dabei außer für das top-Quark  $t$  stets zu Null angenommen werden,  $m_b = m_f = 0$ , was den analytischen Teil der Rechnungen vereinfacht [Fr99]. Die in Anhang D angegebenen Koeffizienten beziehen sich hierauf. Mit der von uns durchgeführten Implementation der Spurberechnung kann jedoch problemlos die Evaluationen mit von Null verschiedener Masse des bottom-Quarks,  $m_b \neq 0$ , durchgeführt werden. In Computerprogrammform liegen auch die Zähler der Integrale diesbezüglich vor.

Zur Berechnung der Korrekturen zu den effektiven Kopplungen müssen natürlich jeweils die Beiträge von allen inneren Fermionen summiert werden.

# Kapitel 3

## Parallelraum/Orthogonalraum- Methode

### 3.1 Ruhesystem des Zerfallsteilchens

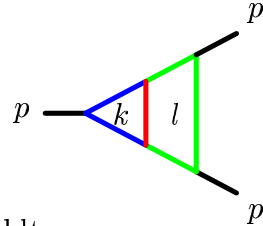
Per Definition wird der Parallelraum eines Feynmanintegrals durch die äußeren Impulse aufgespannt. Die Dimension des Parallelraums entspricht aufgrund der Impulserhaltung der Anzahl der äußeren Linien minus eins. Die übrigen Komponenten des  $D$ -dimensionalen Raums, in welchem die Feynmanintegrale berechnet werden müssen, befinden sich im Orthogonalraum. In diesem treten nur die entsprechenden Anteile der Schleifenimpulse auf. Beim Berechnen von Feynmangraphen kann die Lorentzinvarianz dieser Integrale ausgenutzt werden. Sie werden direkt in dem Bezugssystem, in welchem das Zerfallsteilchen in Ruhe ist, evaluiert. Die Impulse der Tensorintegrale im Minkowskiraum müssen dazu im Parallel-/Orthogonalraum dargestellt werden.

Die Koeffizienten der Integrale der effektiven Kopplungen nach Umrechnung der Impulse in das Ruhesystem des  $Z^0$  werden nicht explizit aufgeführt, sie sind aber in Programmform vorhanden.

Die Regeln für das Umrechnen werden im Folgenden dargestellt. Lediglich einige sehr spezielle Tensorstrukturen mit Kontraktionen mit 4-dimensionalen metrischen Tensoren, wie sie aufgrund der Anomalien, die sich rechentechnisch in  $\gamma_5$ -Beiträgen widerspiegeln, entstehen, müssen gesondert betrachtet werden. Die Regeln hierfür werden in Anhang C hergeleitet.

#### 3.1.1 Impulse in P/O-Komponenten

Für die planare Topologie



$$(3.1)$$

werden die externen Impulse gewählt zu

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} e_1 \\ q_z \\ \vec{0}_2 \end{pmatrix}, \quad p_2^\mu = \begin{pmatrix} e_2 \\ -q_z \\ \vec{0}_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

mit

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = \begin{pmatrix} e \\ \vec{0}_3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Dabei sind die  $e_i$ ,  $i = 1, 2$ , die Energien der Endzustandsteilchen und  $q_z$  der räumliche Impuls<sup>1</sup> dieser Zustände. Die Masse des Zerfallsteilchens wird mit  $e$  bezeichnet. Weiter verwenden wir:

$$\vec{0}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Die räumliche Komponente wird wie in [Cz94] als  $z$ -Komponente bezeichnet.

Die Schleifenimpulse sind

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vec{k}_\perp \end{pmatrix}, \quad l^\mu = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vec{l}_\perp \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Als weitere Vereinfachung wird zur Darstellung der Orthogonalraumkomponenten verwendet:

$$\vec{k}_\perp = k_\perp \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{l}_\perp = l_\perp \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \gamma) \\ \sin(\alpha + \gamma) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Definieren wir

$$z = \cos \gamma \quad (3.7)$$

so können wir schreiben:

$$\vec{k}_\perp^2 \equiv k_\perp^2 \equiv s \quad \vec{l}_\perp^2 \equiv l_\perp^2 \equiv t \quad \vec{k}_\perp \cdot \vec{l}_\perp \equiv k_\perp l_\perp z \quad (3.8)$$

Das Integrationsmaß transformiert sich zu

$$\int d^4 k d^4 l \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dl_0 dk_0 dl_1 dk_1 \int_0^{\infty} ds dt \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Die kovariante Darstellung der Zerlegung in P/O-Komponenten

Die P/O-Komponenten lassen sich auch durch Lorentzinvarianten ausdrücken. Hierzu konstruiert man eine Basis im Minkowskiraum. Setze

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{p^2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0}_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} e_1 &= \tilde{p} \cdot p_1 \\ e_2 &= \tilde{p} \cdot p_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Setze auch

$$q = p_1 - \tilde{p} (\tilde{p} \cdot p_1) = \begin{pmatrix} e_1 \\ q_z \\ \vec{0}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vec{0}_2 \end{pmatrix} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_z \\ \vec{0}_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

und

$$\tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{-q^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vec{0}_2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Es gilt ebenfalls

$$p_2 - \tilde{p}(\tilde{p} \cdot p_2) = -q \quad (3.14)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} k_0 &= k \cdot \tilde{p} \\ k_1 &= -k \cdot \tilde{q} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{k}_\perp \end{pmatrix} &= k - \tilde{p}(k \cdot \tilde{p}) + \tilde{q}(k \cdot \tilde{q}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Analoges gilt für  $l$ . Es ergibt sich damit z.B.

$$(k_\perp l_\perp z) = \vec{k}_\perp \cdot \vec{l}_\perp = [k - \tilde{p}(k \cdot \tilde{p}) + \tilde{q}(k \cdot \tilde{q})] \cdot [l - \tilde{p}(l \cdot \tilde{p}) + \tilde{q}(l \cdot \tilde{q})] \quad (3.16)$$



# Kapitel 4

## Tensorreduktion

## 4.1 Ausgangspunkt

Im allgemeinen Fall der Leitertopologie



(4.1)

wählen wir den Impulsfluß der Propagatoren wie in (2.9) auf S. 16 definiert, wobei

$$p = p_1 + p_2 \quad \text{und} \quad p^2 > 0 \quad (4.2)$$

und  $p$  einlaufend, während  $p_1, p_2$  auslaufend angenommen werden. Die zu evaluierenden Tensorintegrale haben die Form

The diagram shows a triangle with an incoming line  $p$  on the left. The top-right side is labeled  $p_1$  and the bottom-right side is labeled  $p_2$ . Internal lines are labeled with momenta:  $k$  (top-left),  $l$  (vertical),  $k+l$  (bottom-left),  $l-p_1$  (top-right), and  $l+p_2$  (bottom-right).

$$\mathcal{T}_{abcdefgnr} = p \int d^D k d^D l \frac{k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (4.3)$$

Zur Definition der Propagatorfaktoren  $P_i$  siehe (2.9). Für den von uns betrachteten Prozeß finden wir für die Exponenten:

$$\begin{aligned} a, b &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ f, g, r &\in \{0, 1, 2\} \\ c, n &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &\leq a + b + 2c + r \leq 3 \\ 1 &\leq f + g + 2n + r \leq 2 \\ 1 &\leq a + b + 2c + f + g + 2n + 2r \leq 4 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Da eine automatisierte Kürzungsprozedur aufgrund der vielen auftretenden verschiedenen Zählerstrukturen nötig ist, sollen für alle Exponenten beliebige positive Werte zugelassen werden.

### 4.1.1 Motivation

Um die Integrale in eine Form zu bringen, in welcher wir soweit wie möglich auf bekannte Methoden zurückgreifen können, wollen wir die Integrale einer Tensorreduktion unterziehen. Durch diese wird ein großer Teil der Integrale auf Integrale mit entweder einer einfacheren Zählerstruktur und/oder weniger Propagatoren reduziert. Für viele der dadurch erzeugten Basisintegrale gibt es bewährte Evaluationsmethoden. Für die fehlenden wollen wir neue entwickeln.

Bei Einschleifenintegralen kann immer der ganze Zähler gekürzt werden [Pa78]. Bei Zweischleifenintegralen trifft dies im Allgemeinen nicht mehr zu, da oft nicht genügend Propagatoren zur Verfügung stehen, um alle auftretenden Zählerkomponenten gleichzeitig entfernen zu können.

Bei der Leitertopologie können im Schleifenimpuls  $l$  noch alle Zählerfaktoren gekürzt werden. Im Impuls  $k$  ist dies nicht mehr möglich. Es gibt eine Zählerkombination mehr, als Propagatoren zur Verfügung stehen.

Unser Ziel ist, die Reduktion so durchzuführen, daß die verbleibende Zählerstruktur dergestalt ist, daß die durchzuführenden Integrationen möglichst ähnlich zu denjenigen gestaltet werden können, wie sie im Fall mit trivialem Zähler bereits erfolgreich verwendet werden [Cz94].

Hier wollen wir kurz die wichtigsten Schritte aufzeigen. Die Integrationsmethode wird in Kapitel 6 ausführlich dargestellt. Vor der Integration werden die Schleifenimpulse transformiert:

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 - k_1 \\ l'_0 &= l_0 - l_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dadurch werden die Propagatoren in  $k_1$  und  $l_1$  linear, da sich die  $k_1^2, l_1^2$ -Beiträge kürzen. In  $k_1, l_1$  wird die Anwendung des Residuensatzes möglich, während in  $k'_0, l'_0$  nach analytischen Integrationen in allen weiteren Schleifenimpulskomponenten numerisch integriert wird. Es ist ersichtlich, daß Zählerkomponenten der Form

$$(k_0 - k_1)^i \quad (4.7)$$

lediglich die numerische Integration modifizieren, die analytische Integration aber wie vorher vonstatten geht. Wir wollen deshalb die Integrale (4.3) auf Integrale mit dieser Zählerstruktur sowie Integrale mit einfacherer Topologie zurückführen.

Die Möglichkeit der unveränderten Anwendung der analytischen Integrations Schritte wie im trivialen Fall trifft allerdings bei Zählern mit Faktoren der Form (4.7) nur so lange zu, wie keine UV-Divergenzen vorliegen. Im Falle von UV-Divergenzen muß die Integration der Masterintegrale modifiziert werden. Die Tensorreduktion ist aber auch in diesem Falle dieselbe.

## 4.2 Benötigte Topologien

Durch das Propagatorenkürzen entstehen auch andere Topologien als die planarare Dreipunktfunktion. Deshalb muß zuerst geklärt werden, welche anderen Zweischleifen-Topolo-

gien noch auftreten können, die mit ähnlichen Methoden wie die planare Topologie behandelbar sind. Es sind dies die gedrehten reduzierten planaren Topologien, welche wir wie folgt definieren:

$$\mathcal{R}^+ = \text{Diagram (4.8)} \tag{4.8}$$

und

$$\mathcal{R}^- = \text{Diagram (4.9)} \tag{4.9}$$

### 4.2.1 Vorbemerkungen

Die im Folgenden aufgeführten Methoden des Propagatorenkürzens sind so lange iterativ auf die jeweiligen Terme anzuwenden, bis einfachere Topologien entstehen. Diese Integrale sind entweder faktorisierende Graphen, Zweischleifen–Dreipunktfunktionen mit Zweipunkt–Subloop oder effektive Zweipunktfunktionen. Diese Graphen sollten dann einer anderen Behandlung zugeführt werden.

Bei den nun folgenden Erklärungen wird neben der Darstellung der jeweils exakten Formeln auch versucht werden, die jeweiligen Prozeduren anschaulich verständlich zu machen. Die hierfür verwendeten Graphiken sind schematisch zu verstehen und lediglich als Verständnishilfe gedacht.

Es gibt weiter vielfach mehrere Linearkombinationen von Propagatoren und externen Impulsen sowie Massen, durch welche ein Schleifenimpuls gekürzt werden kann. Auch kann die Reihenfolge der Reduktion teilweise modifiziert werden. Wir haben im Folgenden jeweils nur diejenigen Methoden notiert, welche als Standardeingabewerte in unserem Programm eingebaut sind. Dort haben wir aber auch weitere Möglichkeiten implementiert, welche wir in separaten Dokumentationen darstellen. Diese Alternativen können durch Variation der Eingabeparameter aufgerufen werden. Damit hat man weitere Testmöglichkeiten für das Endergebnis.

## 4.3 Propagatorenkürzen bei der planaren Topologie



$$\text{Diagram (4.10)} \tag{4.10}$$

### 4.3.1 Kürzen der Mischungen von Orthogonalraumkomponenten von $k$ und $l$

Zuerst werden die Orthogonalraumkomponenten gekürzt, und davon zuerst Mischungs-  
terme von  $k$  und  $l$ , d.h. es werden Integrale der Art

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_\perp l_\perp z)^r f(k_0, k_1, k_\perp^2, l_0, l_1, l_\perp^2)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (4.11)$$

betrachtet. Es gilt in Parallel-/Orthogonalraum-Komponenten:

$$k_\perp l_\perp z = \frac{1}{2} (-P_3 + \mathfrak{E}) \quad (4.12)$$

mit (da die  $i\eta$ -Beiträge im Zähler unerheblich sind, werden sie beim Kürzen nicht notiert)

$$\mathfrak{E} = k_0^2 - k_1^2 - k_\perp^2 + l_0^2 - l_1^2 - l_\perp^2 + 2k_0 l_0 - 2k_1 l_1 - m_3^2 \quad (4.13)$$

Iterativ angewendet ergibt sich

$$(k_\perp l_\perp z)^r = - \sum_{i=1}^r \frac{\mathfrak{E}^{i-1}}{2^i} (k_\perp l_\perp z)^{r-i} P_3 + \left(\frac{\mathfrak{E}}{2}\right)^r \quad (4.14)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int d^D k d^D l \frac{(k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} &= - \sum_{i=1}^r \frac{1}{2^i} \int d^D k d^D l \frac{\mathfrak{E}^{i-1} (k_\perp l_\perp z)^{r-i}}{P_1 P_2 P_4 P_5 P_6} \\ &\quad + \frac{1}{2^r} \int d^D k d^D l \frac{\mathfrak{E}^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Man beachte, daß in  $D = 4$  gilt:

$$\int d^4 k d^4 l \frac{\mathfrak{E}^{i-1} (k_\perp l_\perp z)^{r-i}}{P_1 P_2 P_4 P_5 P_6} = \begin{cases} 0, & \text{falls } r-i \text{ ungerade} \\ \text{faktorisierend,} & \text{falls } r-i \text{ gerade} \end{cases} \quad (4.16)$$

Ersteres gilt, da

$$\int_{-1}^1 dz \frac{z^a}{\sqrt{1-z^2}} = 0, \quad a \text{ ungerade} \quad (4.17)$$

weil das Integral dann in  $z$  ungerade ist (vgl. (3.9)).

Die faktorisierenden Terme<sup>1</sup> sind das Produkt von zwei Einschleifen-Graphen. Die Graphen mit

$$\int d^D k d^D l \frac{\mathfrak{E}^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (4.18)$$

---

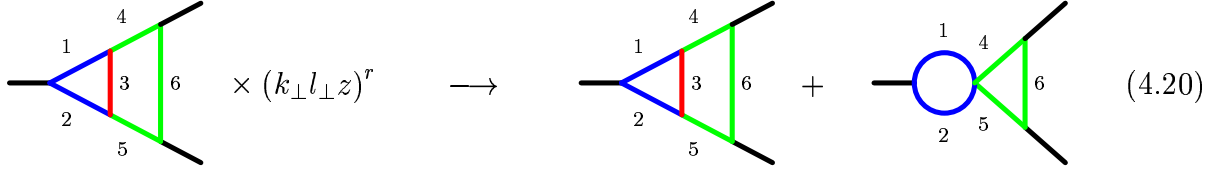
<sup>1</sup>Dies sind die Graphen, die keinen in den Schleifenimpulsen mischenden Propagator mehr im Nenner enthalten.

haben weiterhin die planare Topologie mit neuer Zählerstruktur.

Zusätzliche Faktoren in den weiteren Schleifenimpulsvariablen führen auf ein analoges Ergebnis:

$$\int d^4 k d^4 l \frac{\mathfrak{E}^{i-1} f(k_0, k_1, k_\perp^2, l_0, l_1, l_\perp^2) (k_\perp l_\perp z)^{r-i}}{P_1 P_2 P_4 P_5 P_6} = \begin{cases} 0, & \text{falls } r - i \text{ ungerade} \\ \text{faktorisierend,} & \text{falls } r - i \text{ gerade} \end{cases} \quad (4.19)$$

Schematisch geschieht bei Kürzen der Mischungen in den Schleifenimpulsvariablen das Folgende:



$$\text{Diagram} \times (k_\perp l_\perp z)^r \longrightarrow \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (4.20)$$

Nach dem Kürzen der Mischungskomponenten ist es unerheblich, in welchem Schleifenimpuls man mit der Kürzungsprozedur fortfährt. In jedem Fall beginne man jeweils mit einer der Orthogonalraumkomponenten.

### 4.3.2 Kürzen der Komponenten von $k$

#### 4.3.2.1 Kürzen von $k_\perp^2$

In P/O-Komponenten ergibt sich

$$k_\perp^2 = -P_1 + \mathfrak{A} \quad (4.21)$$

mit

$$\mathfrak{A} = k_0^2 - k_1^2 + 2k_0 e_1 - 2k_1 q_z + e_1^2 - q_z^2 - m_1^2 \quad (4.22)$$

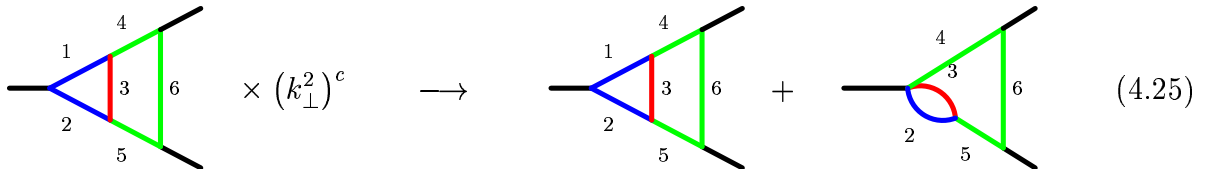
Iterativ angewendet gilt

$$(k_\perp^2)^c = - \sum_{i=1}^c (k_\perp^2)^{c-i} \mathfrak{A}^{i-1} P_1 + \mathfrak{A}^c \quad (4.23)$$

Es gilt folglich

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_\perp^2)^c}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} = - \sum_{i=1}^c \int d^D k d^D l \frac{(k_\perp^2)^{c-i} \mathfrak{A}^{i-1}}{P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} + \int d^D k d^D l \frac{\mathfrak{A}^c}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (4.24)$$

Schematisch:



$$\text{Diagram} \times (k_\perp^2)^c \longrightarrow \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (4.25)$$

Nach Kürzen der Orthogonalraumkomponenten werden die Parallelraumkomponenten geeignet vereinfacht und nach Möglichkeit gekürzt.

### 4.3.2.2 Behandlung der $k_1$ -Faktoren

Man entwickelt

$$k_1^b = \sum_{i=0}^b \binom{b}{i} (k_1 - k_0)^{b-i} k_0^i \quad (4.26)$$

Damit gilt

$$\int d^D k d^{D_l} \frac{k_1^b}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} = \sum_{i=0}^b \binom{b}{i} \int d^D k d^{D_l} \frac{(k_1 - k_0)^{b-i} k_0^i}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (4.27)$$

wobei die  $k_0$ -Komponenten im nächsten Schritt noch zu kürzen sind. Die Faktoren der Form

$$(k_0 - k_1)^i \quad (4.28)$$

werden nicht weiter verändert.

### 4.3.2.3 Kürzen von $k_0$

Mit

$$\mathfrak{S} = -p_1^2 + p_2^2 + m_1^2 - m_2^2 \quad (4.29)$$

gilt in P/O-Komponenten

$$k_0 = \frac{1}{2e} (P_1 - P_2 + \mathfrak{S}) \quad (4.30)$$

Unter Verwendung von (3.2) und (3.3)

$$e = e_1 + e_2 \quad (4.31)$$

ergibt die iterative Anwendung von (4.30)

$$k_0^a = \sum_{i=1}^a \frac{\mathfrak{S}^{i-1}}{(2e)^i} k_0^{a-i} (P_1 - P_2) + \left( \frac{\mathfrak{S}}{2e} \right)^a \quad (4.32)$$

$$\times k_0^a \longrightarrow \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (4.33)$$

Nach Vollendung dieser Prozedur kann in  $k$  nicht weiter gekürzt werden.

### 4.3.3 Kürzen der Komponenten von $l$

#### 4.3.3.1 Kürzen von $l_{\perp}^2$

Es gilt im P-/O-Raum

$$l_{\perp}^2 = -P_6 + \mathfrak{Z} \quad (4.34)$$

mit

$$\mathfrak{Z} = l_0^2 - l_1^2 - m_6^2 \quad (4.35)$$

Iterativ angewendet gilt

$$(l_{\perp}^2)^n = - \sum_{i=1}^n (l_{\perp}^2)^{n-i} \mathfrak{Z}^{i-1} P_6 + \mathfrak{Z}^n \quad (4.36)$$

$$\times (l_{\perp}^2)^n \longrightarrow \quad (4.37)$$

In den folgenden Schritten müssen, nachdem die Orthogonalraumkomponenten von  $l$  gekürzt sind, die Parallelraumkomponenten gekürzt werden. Im Gegensatz zum Schleifenimpuls  $k$  stehen bei der planaren Topologie genügend Terme im Nenner zur Verfügung, um *alle* Parallelraumkomponenten von  $l$  zu kürzen.

#### 4.3.3.2 Kürzen der $l_1$ -Komponenten

Anders als bei der Behandlung von  $k_1$ , s. Kapitel 4.3.2.2, können diese Faktoren gekürzt werden, ohne Nachteil für das Kürzen in  $l_0$ . Es gilt mit

$$\mathfrak{L}_4 = 2l_0 e_1 - m_6^2 - p_1^2 + m_4^2 \quad (4.38)$$

$$l_1 = \frac{1}{2q_z} [(P_4 - P_6) + \mathfrak{L}_4] \quad (4.39)$$

$$l_1^g = \sum_{i=1}^g \frac{\mathfrak{L}_4^{i-1}}{(2q_z)^i} l_1^{g-i} (P_4 - P_6) + \left( \frac{\mathfrak{L}_4}{2q_z} \right)^g \quad (4.40)$$

$$\times (l_1)^g \longrightarrow \quad (4.41)$$



4.3.3.3 Kürzen von  $l_0$

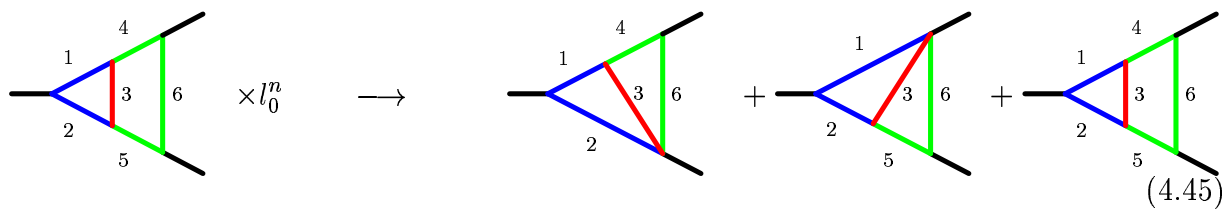
Mit

$$\mathfrak{F} = p_1^2 - p_2^2 - m_4^2 + m_5^2 \tag{4.42}$$

gilt

$$l_0 = \frac{1}{2e} (P_5 - P_4 + \mathfrak{F}) \tag{4.43}$$

$$l_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{\mathfrak{F}^{i-1}}{(2e)^i} l_0^{n-i} (P_5 - P_4) + \left(\frac{\mathfrak{F}}{2e}\right)^n \tag{4.44}$$



4.3.4 Zusammenfassung der Kürzungsverfahren

Schematisch verläuft die Kürzungsverfahren folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{abcfgnr} &= \int d^D k d^D l \frac{k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \\
 &= \text{Diagram} \times k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r \\
 &\rightarrow \text{Diagram} \times \sum_{i=0}^{\kappa} (k_0 - k_1)^i \\
 &+ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &+ \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\
 &+ \text{Diagram 6}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

mit

$$\kappa = b + 2c + 2r \tag{4.47}$$

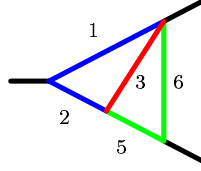
wobei im Falle  $\kappa > 1$  aufgrund des dann divergenten Verhaltens des Integrals noch eine Abzugsprozedur durchlaufen werden muß. Dies ist Gegenstand der Kapitel 5 bzw. 6.

In der Graphik sind wieder eventuell auftretende Koeffizienten der reduzierten Graphen nicht angegeben.

Nach Durchführung der Kürzungsprozedur auf Integrale der Form (4.3) haben alle Beiträge, die noch die planare Topologie besitzen, die Form

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^i}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \tag{4.48}$$

## 4.4 Gedrehte reduzierte planare Topologie, Version $\mathcal{R}^-$



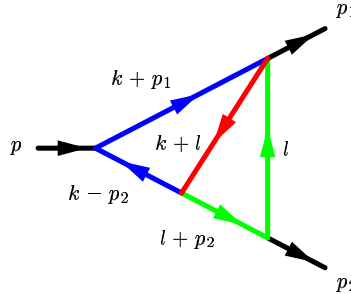
(4.49)

Bei dem von uns betrachteten Prozeß treten keine Graphen mit geschlossener Fermion-schleife auf, welche eine der beiden gedrehten reduzierten planaren Topologie besitzen. Solche entstehen hier erst durch das Kürzen des Propagators  $P_4$  bzw.  $P_5$  bei der planaren Topologie. Dann enthalten sie allerdings keine Mischungen im Orthogonalraum. Wir betrachten zuerst den Graphen, in welchen  $P_4$  gekürzt wurde.

Da im Standardmodell bei rein bosonischen Prozessen auch reduzierte planare Topologien auftreten können, sollen alle möglichen Tensorstrukturen betrachtet werden. Die Integrale sind dann:

$$\mathcal{V}_{abcfgr} = \int d^D k d^D l \frac{k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \quad (4.50)$$

wobei wir die Propagatorennummerierung wie bei der planaren Topologie belassen wollen, siehe (2.9), nur daß  $P_4$  „fehlt“. Dadurch bleibt die Herkunft von der planaren Topologie weiter deutlich. Der Impulsfluß ist also:



(4.51)

Hier wird die „Standard“-Linearisierungstransformation (4.6) (wie bei der planaren Topologie) für  $k_1$  und  $l_1$  gewählt werden.

Die meisten Schritte laufen analog zur planaren Topologie, nur die Behandlung der Parallelraumkomponenten von  $l$  muß modifiziert werden, weil im Gegensatz zur planaren Topologie hier auch in  $l$  nicht genügend Propagatoren zur Verfügung stehen, um *alle* Zählerkomponenten zu kürzen. Wir notieren im Folgenden nur die Schritte, die von der planaren Topologie abweichen. Die Reihenfolge ist wie dort zu wählen.

### 4.4.0.1 Behandlung der $l_1$ -Komponenten

Anders als im Falle der planaren Topologie stehen hier nach Kürzen von  $l_\perp^2$  nicht genügend Terme im Nenner zur Verfügung, um sowohl  $l_0$  als auch  $l_1$  zu kürzen. Deshalb wollen wir analog zur Behandlung von  $k_1$  vorgehen und  $l_1$ -Beiträge in Faktoren der Form  $(l_0 - l_1)^j$

sowie noch zu kürzende Faktoren mit  $l_0$ -Komponenten umformen, um nach Kürzen der  $l_0$ -Komponenten am Ende im Zähler an  $l$ -Komponenten nur noch Faktoren der Form

$$(l_0 - l_1)^j \quad (4.52)$$

zu haben, damit die analytischen Integrationen nach Linearisierung (4.6) in den Propagatoren nicht durch den Zähler modifiziert werden (solange keine UV-Divergenzen vorliegen). Mit

$$l_1^g = \sum_{j=0}^g \binom{g}{j} (l_1 - l_0)^{g-j} l_0^j \quad (4.53)$$

gilt

$$\int d^D k d^D l \frac{l_1^g}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} = \sum_{j=0}^g \binom{g}{j} \int d^D k d^D l \frac{(l_1 - l_0)^{g-j} l_0^j}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \quad (4.54)$$

#### 4.4.0.2 Kürzen von $l_0$

Hier muß ein vom Fall der planaren Topologie abweichendes Verfahren angewendet werden. Mit

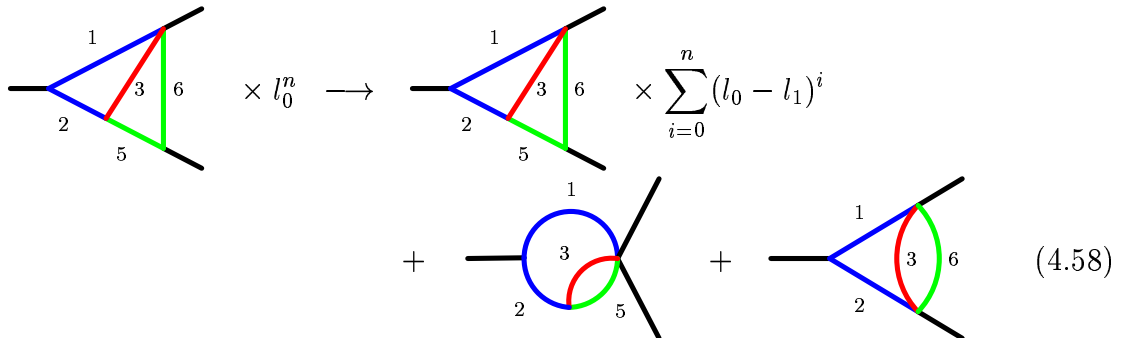
$$\mathfrak{W} = -p_2^2 + m_5^2 - m_6^2 \quad (4.55)$$

können wir umformen

$$l_0 = \frac{1}{2(e_2 + q_z)} [P_5 - P_6 + 2q_z(l_0 - l_1) + \mathfrak{W}] \quad (4.56)$$

Iterativ angewendet folgt

$$l_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{[2q_z(l_0 - l_1) + \mathfrak{W}]^{i-1}}{(2(e_2 + q_z))^i} l_0^{n-i} (P_5 - P_6) + \left( \frac{2q_z(l_0 - l_1) + \mathfrak{W}}{2(e_2 + q_z)} \right)^n \quad (4.57)$$



$$\times l_0^n \longrightarrow \times \sum_{i=0}^n (l_0 - l_1)^i + \dots + \dots \quad (4.58)$$

### 4.4.1 Zusammenfassung des Kürzens

Nach vollendeter Kürzungsprozedur besitzen die verbleibenden Integrale dieser Topologie die Form

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^i (l_0 - l_1)^j}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \quad (4.59)$$

Die Kürzungsprozedur liefert schematisch

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{abcfgr} &= \int d^D k d^D l \frac{k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \\ &= \text{Diagram 1} \times k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r \\ &\rightarrow \text{Diagram 1} \times \sum_{i=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{\lambda} (k_0 - k_1)^i (l_0 - l_1)^j \\ &+ \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\ &+ \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\ &+ \text{Diagram 6} \end{aligned} \quad (4.60)$$

mit

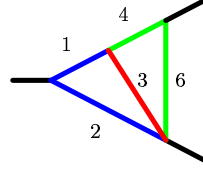
$$\kappa = b + 2c + 2r \quad \text{und} \quad \lambda = f + g + 2n + 2r \quad (4.61)$$

wobei im Falle  $\kappa > 1$  und/oder  $\lambda > 1$  aufgrund des dann divergenten Verhaltens des Integrals noch eine Abzugsprozedur durchlaufen werden muß, ebenso für

$$\kappa = 1 = \lambda \quad (4.62)$$

da hier eine logarithmische globale Divergenz vorliegt.

## 4.5 Gedrehte reduzierte planare Topologie, Version $\mathcal{R}^+$

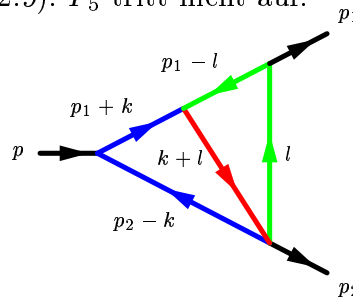


(4.63)

Ebenso wie bei der Version  $\mathcal{R}^-$  der reduzierten planaren Topologie wollen wir bei dieser Version alle möglichen Tensor kombinationen betrachten.

$$\mathcal{U}_{abcfgr} = \int d^D k d^D l \frac{k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \quad (4.64)$$

mit den Propagatoren wie in (2.9).  $P_5$  tritt nicht auf.



(4.65)

Bis auf das Kürzen von  $l_1$  und  $l_0$  und das Umformen in  $k_1$  geht alles genauso wie bei der planaren Topologie. Man wählt allerdings für die Linearisierung in  $k_1$  und  $l_1$  eine andere Transformation. Dadurch entstehen im Falle  $q_1^2 = 0$  beim Kürzen in  $l_0$  Vorteile. Es empfiehlt sich die Linearisierung

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 + k_1 \\ l'_0 &= l_0 + l_1 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Das Vorzeichen bei der Transformation von  $k_0$  und  $l_0$  muß dabei dasselbe sein, da ansonsten die Integrationsmethodik, wie sie in [Cz94] begründet wurde, nicht mehr angewendet werden kann. Dies bedeutet, daß eine Linearisierung der Form

$$k'_0 = k_0 \pm k_1 \quad l'_0 = l_0 \mp l_1 \quad (4.67)$$

wie bei [Fr00] vorgeschlagen, nicht möglich ist.

Wir führen im Folgenden lediglich die Schritte aus, die vom planaren Fall abweichen. Die Behandlung der Komponenten in  $l$  muß ähnlich wie bei der gedrehten reduzierten Topologie  $\mathcal{R}^-$  durchgeführt werden.

### 4.5.0.1 Behandlung der $k_1$ -Faktoren

Nach Kürzen von  $k_1^2$  sind die  $k_1$ -Faktoren zu vereinfachen. Leicht modifiziert zum planaren Fall ist es das Ziel, an  $k$ -Komponenten bei dieser Topologie am Ende an  $k$ -Komponenten nur Faktoren der Form

$$(k_0 + k_1)^i \quad (4.68)$$

zu haben und alle anderen Faktoren zu kürzen. Mit

$$k_1^b = \sum_{i=0}^b (-1)^i \binom{b}{i} (k_1 + k_0)^{b-i} k_0^i \quad (4.69)$$

berechnet man

$$\int d^D k d^D l \frac{k_1^b}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} = \sum_{i=0}^b (-1)^i \binom{b}{i} \int d^D k d^D l \frac{(k_1 + k_0)^{b-i} k_0^i}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \quad (4.70)$$

wobei die Faktoren der Form  $(k_1 + k_0)^i$  nicht weiter verändert werden.

#### 4.5.0.2 Behandlung der $l_1$ -Komponenten

Wie im Falle der gedrehten reduzierten planaren Topologie  $\mathcal{R}^-$  stehen auch hier nicht genügend Propagatoren in  $l$  zur Verfügung, um alle Parallelraumkomponenten von  $l$  zu kürzen. Deshalb wollen wir hier die Parallelraumstruktur so reduzieren, daß am Ende an  $l$ -Komponenten nur noch Faktoren der Form

$$(l_0 + l_1)^j \quad (4.71)$$

im Zähler auftreten. Mit

$$l_1^g = \sum_{j=0}^g \binom{g}{j} (-1)^j (l_1 + l_0)^{g-j} l_0^j \quad (4.72)$$

gilt

$$\int d^D k d^D l \frac{l_1^g}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} = \sum_{j=0}^g \binom{g}{j} (-1)^j \int d^D k d^D l \frac{(l_1 + l_0)^{g-j} l_0^j}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \quad (4.73)$$

#### 4.5.0.3 Kürzen von $l_0$

Hier wollen wir ähnlich zum Fall der Topologie  $\mathcal{R}^-$  vorgehen. Mit

$$\mathfrak{A} = p_1^2 - m_4^2 + m_6^2 \quad (4.74)$$

könnten wir umformen

$$l_0 = \frac{1}{2(e_1 - q_z)} [P_6 - P_4 + 2q_z(l_1 - l_0) + \mathfrak{A}] \quad (4.75)$$

Das Problem ist, daß für

$$p_1^2 \longrightarrow 0 \quad \iff \quad q_z \longrightarrow e_1 \quad (4.76)$$

die so erzeugten Terme divergieren. Stattdessen wählen wir

$$l_0 = \frac{1}{2(e_1 + q_z)} [P_6 - P_4 + 2q_z(l_1 + l_0) + \mathfrak{B}] \quad (4.77)$$

wodurch alle Faktoren konvergent bleiben, auch im Grenzfall  $p_1^2 = 0$ . Hierin liegt der Grund für die Verwendung des anderen Vorzeichens bei der Linearisierung (4.66) im Vergleich zur planaren und gedrehten reduzierten planaren Topologie  $\mathcal{R}^-$  (4.6) in beiden Schleifenimpulsen. Iterativ angewendet folgt

$$l_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{[2q_z(l_1 + l_0) + \mathfrak{B}]^{i-1}}{(2(e_1 + q_z))^i} l_0^{n-i} (P_6 - P_4) + \left( \frac{2q_z(l_1 + l_0) + \mathfrak{B}}{2(e_1 + q_z)} \right)^n \quad (4.78)$$

$$\times l_0^n \longrightarrow \times \sum_{i=0}^n (l_0 + l_1)^i + \quad (4.79)$$

Nach Vollendung dieser Prozedur kann in  $l$  nicht weiter gekürzt werden.

### 4.5.1 Zusammenfassung des Kürzens

Nach Anwendung der oben beschriebenen Kürzungsprozedur haben die verbleibenden Masterintegrale, welche weiterhin die gedrehte reduzierte planare Topologie  $\mathcal{R}^+$  besitzen, die Form

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 + k_1)^i (l_0 + l_1)^j}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \quad (4.80)$$



Die Kürzungsprozedur läßt sich symbolisch darstellen als:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{abcfgnr} &= \int d^D k d^D l \frac{k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \\
 &= \text{Diagram 1} \times k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r \\
 &\rightarrow \text{Diagram 1} \times \sum_{i=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{\lambda} (k_0 + k_1)^i (l_0 + l_1)^j \\
 &+ \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\
 &+ \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\
 &+ \text{Diagram 6}
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

mit

$$\kappa = b + 2c + 2r \quad \text{und} \quad \lambda = f + g + 2n + 2r \tag{4.82}$$

wobei im Falle  $\kappa > 1$  und/oder  $\lambda > 1$  aufgrund des dann divergenten Verhaltens des Integrals noch eine Abzugsprozedur durchlaufen werden muß. Darüber hinaus muß auch im Fall

$$\kappa = 1 = \lambda \tag{4.83}$$

eine Abzugsprozedur durchgeführt werden, da hier eine globale Divergenz vorliegt, die bei naivem Potenzzählen („Powercounting“) in den einzelnen Schleifenimpulsen nicht erkannt wird.

## 4.6 Tests

Um die Zuverlässigkeit des Programms zu testen, haben wir verschiedene Implementierungen vorgenommen.

Bei der ersten Implementation werden indizierte, sich selbst aufrufende, GiNaC-Funktionen verwendet, wodurch die Reduktion vollständig automatisiert vor sich geht. Dabei wird in jedem Evaluationsschritt lediglich eine Potenz eines Schleifenimpulses reduziert. Es ist für dieses Programm lediglich vonnöten, die Darstellung eines Schleifenimpulses in Propagatorfaktoren und Massen zu kennen. Die oben ausgearbeiteten Summenformeln werden nicht benötigt. Der Nachteil dieses Programmes ist allerdings, daß der Speicherbedarf schnell so ansteigt, daß es damit nicht möglich war, die kompletten Ausdrücke für die Korrekturen zu den effektiven Kopplungen automatisiert zu zerlegen.

Deshalb haben wir in einer weiteren Implementation die Summenformeln für beliebige Potenzen von Schleifenimpulsen implementiert. Mit diesem Programm können sehr effektiv auch große Ausdrücke verarbeitet werden.

Nachdem wir eine große Anzahl von Hand reduzierbarer Tensorstrukturen berechnet hatten, haben wir diese Ergebnisse zuerst mit den Ergebnissen der beiden Implementationen verglichen. Es zeigten sich keine Abweichungen.

Weiter haben wir, soweit dies die Speicherkapazität zuließ, auch höhere Potenzen und größere Ausdrücke mit beiden Programmen evaluiert und automatisiert verglichen. Die Ergebnisse stimmten stets überein.

## 4.7 Koeffizienten der reduzierten Basisintegrale für die Korrekturen zu den effektiven Kopplungen

Die Koeffizienten der tensorreduzierten Basisintegrale, wie sie nach Anwendung der Projektoren und Umrechnung in P/O-Raum-Variable entstanden, liegen in Programmform vor. Sie sollen aufgrund ihres Umfangs nicht explizit in dieser Arbeit dargestellt werden. Sie finden sich im Internet unter

<http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/~mknodel/coeffs/>

Die Datei `Z_dV.ps.gz` enthält die Koeffizienten der Korrekturen zu  $\Delta_{g_V}$  für ungeladene Ströme, `Z_dA.ps.gz` die Korrekturen zu  $\Delta_{g_A}$  für ungeladene Ströme. Die Koeffizienten für geladene Ströme finden sich in `W1_dV1b.ps.gz` im Fall von zwei inneren top-Quarks, d.h. mit Fermionrichtung entgegen den Uhrzeigersinn, sowie in `W2_dV1a.ps.gz` für ein inneres top-Quark, d.h. für Fermionenrichtung im Uhrzeigersinn. Die Korrekturen sind bei geladenen Strömen gleich für  $\Delta_{g_V}$  und  $\Delta_{g_A}$ . Die Größen für andere innere Fermionen erhält man sofort, wenn man  $m_t \rightarrow 0$  setzt.

# Kapitel 5

## UV-Divergenzen und Abzugsverfahren

## 5.1 UV-Divergenzen

### 5.1.1 Divergenzgrade

Ein beliebiges Zweischleifenintegral läßt sich schreiben als

$$T = \int d^D k d^D l \frac{Z^{(z_k, z_l)}}{N_k M N_l} \quad (5.1)$$

wobei  $N_k$  dem Produkt aller  $n_k$  Propagatoren ist, die an Schleifenimpulsen nur  $k$  enthalten,  $N_l$  das Produkt aller  $n_l$  Propagatoren, welche nur  $l$  enthalten, sowie  $M$  das Produkt aller  $m$  Propagatoren, die sowohl  $k$  als auch  $l$  enthalten.  $Z^{(z_k, z_l)}$  ist ein Monom mit  $z_k$  Komponenten in  $k$  und  $z_l$  Komponenten in  $l$ .

Hier sollen lediglich UV-Divergenzen behandelt werden. Die Behandlung von Infrarot-Divergenzen (IR-Divergenzen) ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Daß solche im Rahmen dieser Arbeit nicht auftreten, beweist man leicht unter Verwendung der in Anhang I.1.6 hergeleiteten Bedingungen für Massensingularitäten:

- Infrarotsingularitäten können nur auftreten, wenn eine innere Linie mit Masse Null zwei benachbarte Linien enthält, welche jeweils dieselbe Masse aufweisen wie die an den Verbindungsvertizes mit der masselosen Linie auftretenden äußeren Teilchen, vgl. (I.46) und (I.47) sowie Abbildung I.1.
- Kollineare Singularitäten können nur auftreten, wenn zwei benachbarte Massen und die äußere Masse, welche am Verbindungsvertex koppelt, gleichzeitig Null werden, vgl. (I.55), (I.67) und (I.68) sowie Abbildung I.2.

Keine dieser Bedingungen tritt auf die von uns betrachteten Graphen, welche in Kapitel 2 (prinzipiell) und in Anhang D (ausführlich) dargestellt sind, zu. Zur Berechnung von infrarot divergenten skalaren Zweischleifen-Vertexfunktionen verweisen wir auf [Fl97, Fr00]. Im Fall von IR-Divergenzen können im Fall einer allgemeinen Zählerstruktur in [Ha98] dargestellte Methoden verwendet werden.

Bei den von uns betrachteten Integralen können durch Endpunktsingularitäten im ultravioletten Integrationsbereich UV-Divergenzen in einem oder in beiden Schleifenimpulsen sowie globale Divergenzen auftreten.

Es gibt drei verschiedene UV-Divergenzgrade in  $D$  Dimensionen: Es sind dies die Divergenzgrade  $\omega_k$  und  $\omega_l$  in den einzelnen Schleifenimpulsen sowie der globale Divergenzgrad  $\omega$ , welche sich mit Potenzzählung, was man üblicherweise als „Powercounting“ bezeichnet, berechnen lassen gemäß

$$\begin{aligned} \omega_k &= 2(n_k + m) - z_k - D \\ \omega_l &= 2(n_l + m) - z_l - D \\ \omega &= 2(n_k + n_l + m) - (z_k + z_l) - 2D \end{aligned} \quad (5.2)$$

Das Zweischleifenintegral ist divergent in  $D$  Dimensionen, wenn mindestens einer der Divergenzgrade  $\omega_k$ ,  $\omega_l$  oder  $\omega$  Null (logarithmische Divergenz) oder negativ ist.

Offenkundig kann man den globalen Divergenzgrad auch berechnen zu

$$\omega = \omega_k + \omega_l - 2m \quad (5.3)$$

## 5.2 Abzugsverfahren

### 5.2.1 Idee

Das Ziel ist [Fr00], von

$$T = \int d^D k d^D l \frac{Z^{(z_k, z_l)}}{N_k M N_l} \quad (5.4)$$

alle Divergenzen durch Abzugsterme, die sich mit „einfacheren“ Methoden berechnen lassen (da sie eine einfachere Topologie besitzen sollen, insbesondere nicht eine der drei im vorigen Kapitel behandelten), zu subtrahieren,

$$T = T - T_{div} + T_{div} \quad \longrightarrow \quad T_{konv} = T - T_{div} \quad (5.5)$$

wodurch  $T_{konv}$  in 4 Dimensionen konvergent ist und mit ähnlichen Methoden wie die entsprechenden skalaren Integrale berechnet werden kann. Der (subtrahierte und wieder addierte) divergente Teil  $T_{div}$  wird getrennt berechnet. Die divergenten Anteile sollen sich dadurch auszeichnen, daß sie eine Topologie besitzen, für welche bereits bewährte Evaluationsmethoden existieren.

Der einfachste Fall wäre der, daß in  $T_{div}$  alle Impulse und alle Massen zu Null gesetzt werden. Dieses für Zweischleifen-Zweipunkt-Funktionen im Rahmen der P/O-Methode angewendete Abzugsverfahren [Kr93b] sollte hier nicht ohne einige Modifikationen angewendet werden, da sonst unter Umständen künstliche IR-Divergenzen eingeführt würden.

### 5.2.2 Erzeugung der Abzugsterme

In allen von uns benötigten Fällen lassen sich die Komponenten des Nenners schreiben als

$$\begin{aligned} N_k &= \prod_{i=1}^{n_k} [(k + p_{k,i})^2 - m_{k,i}^2 + i\eta] \\ M &= [(k + l)^2 - m_3^2 + i\eta] \\ N_l &= \left\{ \prod_{i=1}^{n_l} [(l + p_{l,i})^2 - m_{l,i}^2 + i\eta] \right\} (l^2 - m_6^2 + i\eta) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dabei sind die äußeren Impulse und die inneren Massen aus den Mengen:

$$p_{k,i}, p_{l,i} \in \{\pm p_1, \pm p_2\} \quad m_{k,i} \in \{m_1, m_2\}, m_{l,i} \in \{m_4, m_5\} \quad (5.7)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} N_{k,r} &= \prod_{i=1}^{n_k} [(k + \kappa_r p_{k,i})^2 - m_{k,i,r}^2 + i\eta] \\ N_{l,r} &= \prod_{i=1}^{n_l} [(l + \lambda_r p_{l,i})^2 - m_{l,i,r}^2 + i\eta] \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei

$$0 < \kappa_r < 1 \quad \wedge \quad 0 < \lambda_r < 1 \quad \forall r$$

Wir wählen die Abzugsmassen  $m_{s,i,r}$ ,  $s = k, l$ , aus technischen Gründen alle voneinander und von den physikalischen Massen verschieden. Weiterhin sollen sie nicht Null sein, um das Einführen künstlicher Infrarotdivergenzen zu vermeiden. Man wählt dann  $j_k$  und/oder  $j_l$  so, daß gilt

$$\begin{aligned} \omega + j_k + j_l &> 0 \\ \omega_k + j_k &> 0 \\ \omega_l + j_l &> 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit  $j_k, j_l \in \mathbb{N}_0^+$ . Definiert man

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(j_k)} &= \prod_{r=1}^{j_k} \left(1 - \frac{N_k}{N_{k,r}}\right) \\ \mathcal{L}^{(j_l)} &= \prod_{r=1}^{j_l} \left(1 - \frac{N_l}{N_{l,r}}\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

so sind die Divergenzgrade des Produkts

$$\int d^D k d^D l \frac{Z^{(z_k, z_l)}}{N_k M N_l} \mathcal{K}^{(j_k)} \mathcal{L}^{(j_l)} \quad (5.11)$$

- um  $j_k$  in  $\omega_k$  und im globalen Divergenzgrad  $\omega$
- um  $j_l$  in  $\omega_l$  sowie im globalen Divergenzgrad  $\omega$

verbessert, d.h. das Integral (5.11) besitzt die Divergenzgrade

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k &= \omega_k + j_k \\ \tilde{\omega}_l &= \omega_l + j_l \\ \tilde{\omega} &= \omega + j_k + j_l \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dies gilt für beliebige  $\kappa_r, \lambda_r, m_{i,r}$ . Den Beweis dafür führt man am besten durch konkretes Nachrechnen. Wir werden dies bei der Evaluation der benötigten Masterintegrale in Kapitel 6 jeweils zeigen.

Ziel ist es, diese neuen Parameter so zu wählen, daß die Abzugsterme mit einfacheren Methoden behandelt werden können. Dies bedeutet, daß insbesondere der divergente Anteil der Abzugsterme analytisch bestimmt werden kann. Dazu wird für sämtliche Parameter  $\kappa_r, \lambda_r$  ein Grenzübergang gegen Null durchgeführt, die neuen Massen aber endlich belassen, um das Einführen künstlicher IR-Divergenzen zu vermeiden.

Führt man die Grenzübergänge

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{K}}^{(j_k)} &= \lim_{\kappa_r \rightarrow 0} \mathcal{K}^{(j_k)} & \forall r \\ \bar{\mathcal{L}}^{(j_l)} &= \lim_{\lambda_r \rightarrow 0} \mathcal{L}^{(j_l)} & \forall r\end{aligned}\quad (5.13)$$

durch, so kann man den konvergenten Anteil des Integrals mittels eines Grenzübergangs

$$\begin{aligned}T_{konv} &= \lim_{\kappa_r, \lambda_r \rightarrow 0} \int d^D k d^D l \frac{Z^{(z_k, z_l)}}{N_k M N_l} \mathcal{K}^{(j_k)} \mathcal{L}^{(j_l)} \\ &= \lim_{\kappa_r, \lambda_r \rightarrow 0} \int d^4 k d^4 l \frac{Z^{(z_k, z_l)}}{N_k M N_l} \bar{\mathcal{K}}^{(j_k)} \bar{\mathcal{L}}^{(j_l)}\end{aligned}\quad (5.14)$$

berechnen, während im divergenten Anteil die Impulse direkt zu Null gesetzt werden können:

$$T_{div} = \int d^D k d^D l \frac{Z^{(z_k, z_l)}}{N_k M N_l} (1 - \bar{\mathcal{K}}^{(j_k)} \bar{\mathcal{L}}^{(j_l)})\quad (5.15)$$

Der divergente Anteil soll hier nicht weiter betrachtet werden, da dies Integrale mit einem Zweipunkt-Subloop sind, für welche bewährte Evaluationsmethoden existieren [Ba94a, Ba94b, Po97]. Die Summe aus konvergentem Term plus Abzugsintegral muß von den Abzugsmassen unabhängig sein. Dies ist jeweils zu prüfen.

Daß durch das Verringern der Divergenzgrade mit obiger Prozedur die Integrale UV-konvergent sind, beweist man ferner durch Anwendung des Weinberg-Theorems:

### 5.2.3 Weinberg-Theorem

Wir wählen die Darstellung aus [Co84], wobei zu beachten ist, daß dort die Divergenzgrade mit umgekehrtem Vorzeichen im Vergleich zu unserer Darstellung definiert wurden. Wir übersetzen dieses Vorzeichen in unsere Darstellung. Wir betrachten nur Punkt (1) des Theorems. Es gilt:

**Wenn ein einteilchen-irreduzibler Graph G und alle seine Subgraphen positiven Divergenzgrad aufweisen, dann ist der Graph endlich. Daß die Divergenzgrade des Graphen und seiner Subgraphen positiv sind bedeutet, daß keine Divergenz auftritt, wenn alle oder einige der Schleifenimpulse zusammen gegen Unendlich gehen, während alle anderen Impulse endlich sind.**

Da die Divergenzgrade in den einzelnen Schleifenimpulsen sowie der globale Divergenzgrad nach Anwendung der Abzugsmultiplikatoren in hinreichender Potenz positiv sind, kann aufgrund des Weinberg-Theorems geschlossen werden, daß die Integrale nach Anwendung obi-

ger Abzugsprozedur UV-konvergent sind. Weitere mögliche Quellen für UV-Divergenzen, welche durch Powercounting nicht erkannt werden können, schließt dieses Theorem aus.



# Kapitel 6

## Integration der Masterintegrale

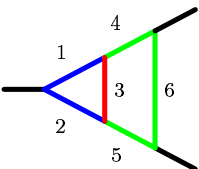
### 6.0.4 Benötigte Integrale

Betrachtet werden sollen Integrale mit der planaren Topologie sowie Integrale der gedrehten reduzierten planaren Topologien.

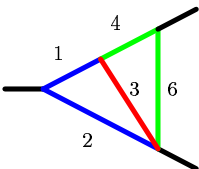
In Feynmangraphen, wie sie in physikalischen Prozessen zu berechnen sind, können beliebige Tensorstrukturen im Zähler (in P/O-Komponenten) auftauchen.

Ein direktes Berechnen solcher Integrale mit beliebiger Zählerstruktur ist aber mit Schwierigkeiten verbunden [Fr00], die sich vermeiden lassen, wenn man die Integrale vorher einer Tensorreduktionsprozedur unterzieht. Teile der Tensorfaktoren führen beim Propagatorenkürzen auf Integrale mit einfacheren Topologien, die nicht Gegenstand dieser Beschreibung sind. Nach erfolgter Tensorreduktion, wie sie in Kapitel 4 ausführlich dargelegt wurde, sind die folgenden Integrale mit einer der genannten Topologien zu berechnen:

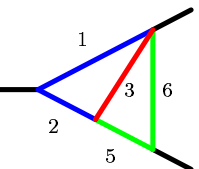
Die zu betrachtenden Integrale mit planarer Topologie haben die Form

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} = \text{Diagram} \times (k_0 - k_1)^\alpha \quad (6.1)$$


Die Integrale mit reduzierter gedrehter planarer Topologie Version  $\mathcal{R}^+$  haben die Form

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} = \text{Diagram} \times (k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta \quad (6.2)$$


Die Integrale mit reduzierter gedrehter planarer Topologie Version  $\mathcal{R}^-$  haben die Form

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} = \text{Diagram} \times (k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta \quad (6.3)$$


Diese Integrale gilt es für den allgemeinen massiven, zeitartigen Fall in beliebigen Dimensionen  $D$  zu lösen, um auch Divergenzen automatisch zu regularisieren.

Da die Methode der Berechnung der Integrale im P/O-Raum bevorzugt auf Integrale im vierdimensionalen Raum anzuwenden ist und im  $D$ -dimensionalen Raum Schwierigkeiten zu erwarten sind, wollen wir die Divergenzen, die im  $D$ -dimensionalen Raum auftreten, separieren und getrennt berechnen, da sich die eigentlichen Divergenzen meist sehr einfach berechnen lassen. Der schwierige, endliche Anteil kann dann im vierdimensionalen Raum evaluiert werden.

Als **Masterintegrale** wollen wir den endlichen Anteile der drei soeben betrachteten Integrale bezeichnen. Dabei ist „endlicher Anteil“ in dem Sinne zu verstehen, als daß die Masterintegrale diejenigen Integrale sind, welche sich aus den Integralen (6.1), (6.2) und

(6.3) ergeben, wenn die Integranden mit den im vorigen Kapitel definierten Abzugsmultiplikatoren in der jeweils notwendigen Potenz versehen wurden.

Wir wollen die drei Topologien einzeln betrachten. Dabei sollen auch die Abzugsterme abhängig von der Topologie und dem Tensorgrad bestimmt werden.

## 6.1 Planare Topologie

### 6.1.1 Abzugsprozedur

Hier treten im Zähler nach vollendeter Kürzungsprozedur nur noch Komponenten der Form

$$(k_0 - k_1)^\alpha \quad (6.4)$$

auf:

$$\mathcal{T}_\alpha = \int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} = \text{Diagram} \times (k_0 - k_1)^\alpha \quad (6.5)$$

Die Massendimension dieser Integrale ist in  $D = 4$  Dimensionen:

$$\dim_{\text{mass}} = \alpha - 4 \quad (6.6)$$

Die Divergenzgrade berechnen sich mit den stets gleichen Größen

$$n_k = 2 \quad m = 1 \quad n_l = 3 \quad z_l = 0 \quad (6.7)$$

und der „einzigsten Variablen“

$$z_k = \alpha \quad (6.8)$$

wie folgt für  $D = 4$ :

$$\begin{aligned} \omega_k &= 2 - \alpha \\ \omega_l &= 4 \\ \omega &= 4 - \alpha \end{aligned} \quad (6.9)$$

Da stets gilt

$$\omega_l = 4 > 0 \quad (6.10)$$

sind Subdivergenzen in  $l$  bei dieser Topologie nach durchlaufener Kürzungsprozedur nicht möglich. Die relevanten Größen sind lediglich Subdivergenzen in  $k$  und globale Divergenzen. Eine Subdivergenz in  $k$  ist hier immer „schlimmer“ als eine gleichzeitige globale Divergenz. Ein Subtrahieren dieser Subdivergenz beseitigt damit erst recht die globale Divergenz. Der Abzugsparameter in  $l$  kann stets zu Null gewählt werden.

$$j_l \equiv 0 \quad \forall \alpha \quad (6.11)$$

Es treten Divergenzen dann auf, wenn

$$\omega_k = 2 - \alpha \leq 0 \quad \iff \quad \alpha \geq 1 \quad (6.12)$$

Dann ist

$$j_k = \alpha - 1 \quad (6.13)$$

zu wählen, damit

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k &= \omega_k + j_k > 0 \\ \tilde{\omega} &= \omega + j_k + j_l > 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

gilt.

### 6.1.1.1 Abzugsmultiplikator

Der Abzugsmultiplikator berechnet sich für Integrale der Form (6.5) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(j_k)} &= \prod_{i=1}^{j_k} \left( 1 - \frac{N_k}{N_{k,i}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{j_k} \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_1^i \bar{P}_2^i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{j_k} \left( 1 - \frac{[(k+p_1)^2 - m_1^2][(k-p_2)^2 - m_2^2]}{[(k+\kappa_i p_1)^2 - m_{1,i}^2][(k-\kappa_i p_2)^2 - m_{2,i}^2]} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{j_k} \frac{\mathcal{Z}_k^i(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i})}{[(k+\kappa_i p_1)^2 - m_{1,i}^2][(k-\kappa_i p_2)^2 - m_{2,i}^2]} \end{aligned} \quad (6.15)$$

mit

$$\mathcal{Z}_k^i(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i}) = \bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i} - P_1 P_2 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i (q_i \cdot k)^i \quad (6.16)$$

wobei die  $q_i$  Linearkombinationen von externen Impulsen sind. In den Zählerfaktoren  $\mathcal{Z}_k^i$  verbleiben an Schleifenimpulsbeiträgen in  $k^\mu$  insgesamt maximal Beiträge in der dritten Potenz (6.16). Die  $k^4$ -Beiträge heben sich auf. Übrig bleiben nur Beiträge bis zur Ordnung  $k^3$ . Jeder Faktor von  $\mathcal{K}^{(j_k)}$  reduziert den Divergenzgrad des Integrals in  $k$  um 1, da im Nenner die  $k^4$ -Anteile in der entwickelten Summe verbleiben. Der Divergenzgrad wird durch Anwendung von  $\mathcal{K}^{(j_k)}$  um  $j_k$  erniedrigt. Die konvergenten Integrale in 4 Dimensionen sind:

$$\mathcal{P}_\alpha = \int d^4 k d^4 l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \prod_{i=1}^{j_k} \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}} \right) \quad (6.17)$$

Neben den in (2.9), S. 16, definierten Propagatorfaktoren kommen folgende hinzu:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1,i} &= (k + \kappa_i p_1)^2 - m_{1,i}^2 \\ \bar{P}_{2,i} &= (k - \kappa_i p_2)^2 - m_{2,i}^2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Die Massen der Abzugsterme können beliebig gewählt werden. Das Endergebnis muß nach Aufsummation der konvergenten und der divergenten Integralanteile  $T = T_{konv} + T_{div}$  von der speziellen Wahl der numerischen Werte der Abzugsmassen unabhängig sein. Die Werte der Abzugsmassen müssen lediglich aus technischen Gründen von Null und alle voneinander verschieden sein. Um keine neuen Schwellen einzuführen, sollten sie über der Zerfallsmasse liegen, aber auch der numerischen Stabilität wegen nicht zu groß gewählt werden.

## 6.1.2 Integration

Das Ziel ist es, die Integrationen in den Winkeln, den Orthogonalraumvariablen und in  $k_1$  und  $l_1$  analytisch und die verbleibenden beiden Integrationen in  $k_0, l_0$  numerisch durchzuführen analog zur planaren Topologie mit trivialer Zählerstruktur [Cz94]. In den folgenden Schritten folgen wir soweit möglich der Darstellung von [Fr96a], S. 13 ff., Kap. 1.5.3.

### 6.1.2.1 Analytische Integration in $z$ , Linearisierung der Propagatoren

Die Integrationsvariable  $z$  tritt nur in  $P_3$  auf. Der Mischungsterm in  $k$  und  $l$  hat vor allen Integrationen in P/O-Variablen die Form

$$P_3 = (k_0 + l_0)^2 - (k_1 + l_1)^2 - k_\perp^2 - l_\perp^2 - 2k_\perp l_\perp z - m_3^2 + i\eta \quad (6.19)$$

Im ersten Schritt werden die Propagatoren in  $k_1$  und  $l_1$  linearisiert. Nach der Linearisierung in  $k_1$  und  $l_1$

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 - k_1 \\ l'_0 &= l_0 - l_1 \end{aligned} \quad (6.20)$$

und der Definition

$$k_\perp^2 = s \quad l_\perp^2 = t \quad (6.21)$$

erhält der Mischungsterm die Form (für  $k'_0$  und  $l'_0$  schreiben wir im Folgenden wieder  $k_0$  und  $l_0$ )

$$P'_3 = A + Bz + i\eta \quad (6.22)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 2(k_1 + l_1)(k_0 + l_0) - (s + t) + \mathcal{W} \\ B &= -2\sqrt{s}\sqrt{t} \end{aligned} \quad (6.23)$$

wobei

$$\mathcal{W} = (k_0 + l_0)^2 - m_3^2 \quad (6.24)$$

nur von einer Masse sowie  $k_0, l_0$  abhängt.

Da der Integrand von  $\alpha$  unabhängig ist (siehe Kap. 3.1.1), ergibt sich für das Integrationsmaß

$$\int d^4k d^4l \longrightarrow \pi \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dl_1 \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} dt \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad (6.25)$$

Das Integral in  $z$  wird berechnet zu [Cz94, Ki96, Fr96a, Fr96c]

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \frac{1}{A+Bz+i\eta} = \frac{\pi}{\sqrt[{\epsilon}]{(A+i\eta)^2 - B^2}} \quad (6.26)$$

Die  $\sqrt[{\epsilon}]{z}$ -Wurzel ist die Wurzel, deren Schnitt entgegen der sonst üblichen Konvention entlang der positiven reellen Achse liegt. Bei der später folgenden Residuenintegration in  $k_1$  und  $l_1$  dürfen keine Schnitte dieser Wurzel überschritten werden. Die Wurzel hat aber solche Schnitte in der komplexen  $k_1$  bzw.  $l_1$ -Ebene. Sie läßt sich zerlegen zu

$$\sqrt[{\epsilon}]{(A+i\eta)^2 - B^2} = \sqrt[{\epsilon}]{A+B+i\eta} \sqrt[{\epsilon}]{A-B+i\eta} \quad (6.27)$$

Man muß nur die Schnitte von  $A \pm B + i\eta$  in der komplexen Ebene bestimmen. Die Schnitte in  $k_1$  ergeben sich aus der Bedingung

$$A \pm B + i\eta = x \in \mathbb{R}^+ \quad (6.28)$$

Daraus folgt

$$k_1^{cut} = \frac{x + (s+t) - \mathcal{W} \mp B}{2(k_0 + l_0)} - l_1 - i \frac{\eta}{2(k_0 + l_0)} \quad (6.29)$$

Bei der Residuenintegration darf kein Punkt, dessen Imaginärteil gleich dem Imaginärteil von  $k_1^{cut}$  ist, auf dem Integrationsweg liegen. Es ergibt sich als Bedingung aus der Residuenintegration in  $k_1$

$$k_0 + l_0 > 0 \quad \text{oder} \quad k_0 + l_0 < 0 \quad (6.30)$$

Ist  $k_0 + l_0 > 0$ , d.h.  $\text{Im}(k_1^{cut}) < 0$ , so ist die Kontur in der oberen  $k_1$ -Halbebene zu schließen. Ist  $k_0 + l_0 < 0$ , so ist die Kontur in der unteren  $k_1$ -Halbebene zu schließen.

Der Wurzelfaktor hat vor Residuenintegration die Form

$$\frac{1}{\sqrt[{\epsilon}]{((k_1 + l_1)\mathcal{V} - (s+t) + \mathcal{W} + i\eta)^2 - 4st}} \quad (6.31)$$

mit

$$\mathcal{V} = 2(k_0 + l_0) \quad (6.32)$$

### 6.1.2.2 Zähler- und Nennerstruktur der $k$ -Faktoren

Der Teil des Nenners, der an Schleifenimpulsen nur  $k$  enthält, hat die Form

$$\mathcal{N}_k = P_1 P_2 \prod_{i=1}^{j_k} (\bar{P}_1^i \bar{P}_2^i) \quad (6.33)$$

Nach der Linearisierung nehmen alle Propagatorfaktoren in  $k$ ,

$$P_k \in \{P_1, P_2, \bar{P}_{1,i}, \bar{P}_{2,i}\} \quad (6.34)$$

die Form

$$P_k \longrightarrow P'_k = k_1 \gamma_k - s + \xi_k + i\eta \quad (6.35)$$

an. Dabei sind  $\gamma_k, \xi_k$  nur von  $k'_0$  von Massen und von externen Impulsen sowie Grenzübergangparametern abhängig. Die Propagatorfaktoren lauten explizit *nach* Linearisierung:

$$\begin{aligned} P'_1 &= (k_0 + e_1)^2 + 2k_1(k_0 - q_z + e_1) - q_z^2 - s - m_1^2 + i\eta \\ P'_2 &= (k_0 - e_2)^2 + 2k_1(k_0 - q_z - e_2) - q_z^2 - s - m_2^2 + i\eta \\ \bar{P}'_{1,i} &= (k_0 + \kappa_i e_1)^2 + 2k_1(k_0 + \kappa_i(-q_z + e_1)) - \kappa_i^2 q_z^2 - s - m_{1,i}^2 + i\eta \\ \bar{P}'_{2,i} &= (k_0 - \kappa_i e_2)^2 + 2k_1(k_0 - \kappa_i(q_z + e_2)) - \kappa_i^2 q_z^2 - s - m_{2,i}^2 + i\eta \end{aligned} \quad (6.36)$$

Nach der Linearisierung nimmt der Nenner in  $k$  die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathfrak{N}_k &= (k_1 \gamma_1 - s + \xi_1 + i\eta) (k_1 \gamma_2 - s + \xi_2 + i\eta) \\ &\quad \prod_{i=1}^{j_k} [(k_1 \gamma_{1,i} - s + \xi_{1,i} + i\eta) (k_1 \gamma_{2,i} - s + \xi_{2,i} + i\eta)] \end{aligned} \quad (6.37)$$

an. Die Zählerfaktoren lassen sich mit den neu definierten Variablen umschreiben zu<sup>1</sup>

$$\mathcal{Z}_k^{i,i'}(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i}) = (k_1 \gamma_{1,i} - s + \xi_{1,i})(k_1 \gamma_{2,i} - s + \xi_{2,i}) - (k_1 \gamma_1 - s + \xi_1)(k_1 \gamma_2 - s + \xi_2) \quad (6.38)$$

Neben der in (6.31) notierten Wurzel ergeben sich folgende für die Residuenintegration in  $k_1$  relevanten Faktoren:

$$\frac{\mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{N}_k} = \frac{1}{P'_1 P'_2} \prod_{i=1}^{j_k} \frac{\mathcal{Z}_k^{i,i'}(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i})}{\bar{P}'_{1,i} \bar{P}'_{2,i}} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(k_1 \gamma_1 - s + \xi_1 + i\eta) (k_1 \gamma_2 - s + \xi_2 + i\eta)} \\ &\quad \prod_{i=1}^{j_k} \frac{\mathcal{Z}'_k(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i})}{(k_1 \gamma_{1,i} - s + \xi_{1,i} + i\eta) (k_1 \gamma_{2,i} - s + \xi_{2,i} + i\eta)} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Diese enthalten Pole in  $k_1$ . Durch Umschreiben der Indizes und Variablenumbenennung

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \gamma_1 & \Xi_1 &= \xi_1 \\ \Gamma_2 &= \gamma_2 & \Xi_2 &= \xi_2 \\ \Gamma_{2i+1} &= \gamma_{1,i} & \Xi_{2i+1} &= \xi_{1,i} \\ \Gamma_{2i+2} &= \gamma_{2,i} & \Xi_{2i+2} &= \xi_{2,i} \end{aligned} \quad i = 1, \dots, j_k \quad (6.41)$$

wird es im Folgenden möglich, einige Rechenschritte kompakter zu formulieren. Es ergibt sich neben dem Wurzelfaktor als Integrand

$$\frac{\mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{N}_k} = \frac{\prod_{i=1}^{j_k} \mathcal{Z}'_k(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i})}{\prod_{i=1}^{2j_k+2} [k_1 \Gamma_i - s + \Xi_i + i\eta]} = \frac{\prod_{i=1}^{j_k} \mathcal{Z}'_k(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i})}{\prod_{i=1}^{2j_k+2} \left\{ \Gamma_i \left[ k_1 + \frac{-s + \Xi_i + i\eta}{\Gamma_i} \right] \right\}} \quad (6.42)$$

<sup>1</sup>Im Zähler sind die  $i\eta$ -Terme ohne Bedeutung. Deshalb werden sie hier und im Folgenden nicht notiert.

Die Zählerfaktoren nehmen in den neuen Variablen die Form

$$\mathcal{L}_k^{i,l} = (k_1 \Gamma_{2i+1} - s + \Xi_{2i+1})(k_1 \Gamma_{2i+2} - s + \Xi_{2i+2}) - (k_1 \Gamma_1 - s + \Xi_1)(k_1 \Gamma_2 - s + \Xi_2) \quad (6.43)$$

an.

### 6.1.2.3 Allgemeine Vorbemerkung zu allen Residuenintegrationen

Symbolisch deuten wir die Residuenintegration stets durch „ $\longrightarrow$ “ an. Dabei entsteht durch die Anwendung des Residuensatzes jeweils ein Vorfaktor  $2\pi i$ . Diesen notieren wir in den Zwischenrechnungen nicht. Er wird im Endergebnis zusammen mit den anderen Faktoren von  $\pi$ , welche durch die Winkelintegrationen entstanden sind, aufgeführt. Insgesamt entsteht so ein Vorfaktor  $-4\pi^4$ .

Der Pol, welcher das jeweilige Residuum in der Integrationsvariable verursacht, wird dabei als Index „ $\xrightarrow{n}$ “ bzw. „ $\xrightarrow{m}$ “ angegeben, er bezieht sich auf den jeweiligen Schleifenimpuls von  $k_1$  bzw.  $l_1$  an der  $n$ -ten bzw.  $m$ -ten Stelle im Nenner, in welchem sich der korrespondierende Pol befindet.

### 6.1.2.4 Residuenintegration in $k_1$

Die Residuenintegration in  $k_1$

$$k_1 \xrightarrow{n} -\frac{-s + \Xi_n + i\eta}{\Gamma_n} \quad (6.44)$$

führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{N}_k} &\longrightarrow \frac{1}{\prod_{i=1}^{2j_k+2} \Gamma_i} \sum_{n=1}^{2j_k+2} \mathfrak{B}_n^k \frac{\prod_{i=1}^{j_k} \mathcal{L}_k^{i,l(n)}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} \left[ -\frac{-s + \Xi_n + i\eta}{\Gamma_n} + \frac{-s + \Xi_i + i\eta}{\Gamma_i} \right]} \\ &= \sum_{n=1}^{2j_k+2} \mathfrak{B}_n^k \frac{\Gamma_n^{2j_k} \prod_{i=1}^{j_k} \mathcal{L}_k^{i,l(n)}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [s(\Gamma_i - \Gamma_n) + (\Xi_i \Gamma_n - \Xi_n \Gamma_i) - i\eta(\Gamma_i - \Gamma_n)]} \\ &= S + A \end{aligned} \quad (6.45)$$

mit

$$\mathfrak{B}_n^k = \theta(k_0 + l_0)\theta(-\Gamma_n) - \theta(-(k_0 + l_0))\theta(\Gamma_n) \quad (6.46)$$

Die  $\mathfrak{B}_n^k$  bestimmen sich dadurch, dass nur dann ein Beitrag erfolgen kann, wenn ein Residuum innerhalb der zu schließenden Kontur gefunden wird. Dies ist nur dann der Fall, wenn der Imaginärteil von  $k_1$ , welches das Residuum verursacht, in der Halbebene liegt, in welcher die Kontur geschlossen wird. Da bei der Residuenintegration im  $n$ -ten Nennerterm der



Pol in  $k_1$  mit (6.44) berechnet wird, muß gelten: Wird die Kontur in der oberen Halbebene geschlossen, dann trägt das Residuum bei, falls  $\text{Im}(k_1) > 0$ , d.h.  $\Gamma_n < 0$ . Wird die Kontur in der unteren Halbebene geschlossen, dann trägt das Residuum bei, falls  $\text{Im}(k_1) < 0$ , d.h.  $\Gamma_n > 0$ . Zusammen mit der Bedingung für den Konturschluß, die aus der Wurzel folgt, ergibt sich

$$\Gamma_n < 0 \quad \text{und} \quad k_0 + l_0 > 0 \quad (6.47)$$

oder

$$\Gamma_n > 0 \quad \text{und} \quad k_0 + l_0 < 0 \quad (6.48)$$

Im zweiten Fall ergibt sich durch das umgekehrte Schließen der Kontur ein umgekehrtes Vorzeichen.

Der Zähler hat die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k^{i,(n)} &= \frac{1}{\Gamma_n^2} [s(\Gamma_{2i+1} - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_{2i+1} - \Gamma_{2i+1} \Xi_n)] [s(\Gamma_{2i+2} - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_{2i+2} - \Gamma_{2i+2} \Xi_n)] \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma_n^2} [s(\Gamma_1 - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_1 - \Gamma_1 \Xi_n)] [s(\Gamma_2 - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_2 - \Gamma_2 \Xi_n)] \end{aligned} \quad (6.49)$$

Wir wollen den Teil, der vom ursprünglichen Integral herrührt und weitgehend (bis auf die  $k_0^\alpha$  im Zähler) mit dem skalaren Fall übereinstimmt ( $n = 1, 2$ ) und den Teil, der von den Abzugstermen herrührt, getrennt betrachten.

Der Beitrag, welcher bereits im Falle des skalaren Integrals ohne Abzugsterme auftritt, ist

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1,2} \mathfrak{B}_n^k \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 [s(\Gamma_i - \Gamma_n) + (\Xi_i \Gamma_n - \Xi_n \Gamma_i) - i\eta(\Gamma_i - \Gamma_n)]} \\ &= \sum_{n=1,2} \mathfrak{B}_n^k \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 [(\Gamma_i - \Gamma_n)(s + s_{0,i,n} - i\eta)]} \end{aligned} \quad (6.50)$$

mit

$$s_{0,i,n} = \frac{-\Xi_n \Gamma_i + \Xi_i \Gamma_n}{\Gamma_i - \Gamma_n} \quad (6.51)$$

Hier ist  $i, n \in \{1, 2\}$ . Es tritt nur ein  $s_0 = s_{0,1,2}$  auf, da  $s_{0,i,n}$  symmetrisch in  $i, n$  ist. Da, wie wir sehen werden, alle anderen  $s_{0,i,n}$  nicht benötigt werden, definieren wir

$$s_0 \equiv s_{0,1,2} = \frac{-\Xi_2 \Gamma_1 + \Xi_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \quad (6.52)$$

Die Beiträge von den Abzugstermen haben die Form

$$\begin{aligned}
A = & - \sum_{n=3}^{2j_k+2} \mathfrak{B}_n^k \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [s(\Gamma_i - \Gamma_n) + (\Xi_i \Gamma_n - \Xi_n \Gamma_i) - i\eta(\Gamma_i - \Gamma_n)]} \\
& \prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} \{ [s(\Gamma_{2i+1} - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_{2i+1} - \Gamma_{2i+1} \Xi_n)] \\
& \quad \cdot [s(\Gamma_{2i+2} - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_{2i+2} - \Gamma_{2i+2} \Xi_n)] \\
& \quad - [s(\Gamma_1 - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_1 - \Gamma_1 \Xi_n)] [s(\Gamma_2 - \Gamma_n) + (\Gamma_n \Xi_2 - \Gamma_2 \Xi_n)] \}
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Im Grenzfall verschwindender Grenzübergangsparameter

$$\kappa_i \rightarrow 0 \quad \forall i \tag{6.54}$$

werden alle  $\Gamma_i$  gleich für alle  $i > 2$ :

$$\Gamma_i = \Gamma_j = 2k_0 \quad \forall i, j > 2 \tag{6.55}$$

Wir definieren deshalb

$$\Upsilon \equiv \Gamma_i = 2k_0 \quad i \geq 3 \tag{6.56}$$

Damit vereinfacht sich obiger Beitrag zu

$$A = - \sum_{n=3}^{2j_k+2} \mathfrak{B}_n^k \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\Upsilon^{2j_k-1}} \prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} (\mathcal{X}s^2 + \mathcal{Y}_n s + \mathcal{Z}_{i,n}) \tag{6.57}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= -(\Gamma_1 - \Upsilon)(\Gamma_2 - \Upsilon) \\
\mathcal{Y}_n &= (\Upsilon - \Gamma_1)(\Upsilon \Xi_2 - \Gamma_2 \Xi_n) + (\Upsilon - \Gamma_2)(\Upsilon \Xi_1 - \Gamma_1 \Xi_n) \\
\mathcal{Z}_{i,n} &= \Upsilon^2 [(\Xi_{2i+1} - \Xi_n)] [(\Xi_{2i+2} - \Xi_n)] - (\Upsilon \Xi_1 - \Gamma_1 \Xi_n)(\Upsilon \Xi_2 - \Gamma_2 \Xi_n)
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Mit

$$\prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} (\mathcal{X}s^2 + \mathcal{Y}_n s + \mathcal{Z}_{i,n}) = \sum_{a=0}^{2j_k-2} X_{a,n} s^a \quad n = 3, 4, \dots, 2j_k + 2 \tag{6.59}$$

ergibt die Residuenintegration in den reinen  $k$ -Faktoren, also die Summe von  $S + A$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{N}_k} \longrightarrow & \sum_{n=1,2} \mathfrak{B}_n^k \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{1}{s + s_0 - i\eta} \\ & - \sum_{n=3}^{2j_k+2} \sum_{a=0}^{2j_k-2} \mathfrak{B}_n^k \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\Upsilon^{2j_k-1}} X_{a,n} s^a \end{aligned} \quad (6.60)$$

Die Wurzel (6.31) wird durch die Residuenintegration auf die Form

$$\sqrt{\dots} \xrightarrow{n} \sqrt{\left[ \left( -\frac{-s + \Xi_n + i\eta}{\Gamma_n} + l_1 \right) \mathcal{V} - (s+t) + \mathcal{W} + i\eta \right]^2 - 4st} \quad (6.61)$$

gebracht.

### 6.1.2.5 Residuenintegration in $l_1$

In  $l$  gehen die analytischen Integrationen analog zum skalaren Fall: Es ist an reinen  $l$ -Termen (vor Linearisierung (6.20)) zu integrieren

$$\frac{1}{P_4 P_5 P_6} \quad (6.62)$$

Nach der Linearisierung (6.20) ergibt sich

$$\begin{aligned} P_4' &= (l_0 - e_1)^2 + 2l_1(l_0 + q_z - e_1) - q_z^2 - t - m_4^2 + i\eta \\ P_5' &= (l_0 + e_2)^2 + 2l_1(l_0 + q_z + e_2) - q_z^2 - t - m_5^2 + i\eta \\ P_6' &= l_0^2 + 2l_0 l_1 - t - m_6^2 + i\eta \end{aligned} \quad (6.63)$$

Alle Propagatorfaktoren nehmen die Form

$$P_i \longrightarrow P_i' = l_1 \rho_i - t + \chi_i + i\eta \quad i = 4, 5, 6 \quad (6.64)$$

an. Die von  $P_3$  herrührende Wurzel hat nach der Residuenintegration in  $k_1$  die in (6.61) bestimmte Form. Der Imaginärteil des Schnitts in  $l_1$  berechnet sich zu

$$\frac{\text{Im}(l_1^{cut})}{\eta} = -\frac{1}{2(k_0 + l_0)} + \frac{1}{\Gamma_n} \quad (6.65)$$

Bei der  $k_1$ -Integration ergab sich, daß das Vorzeichen von  $(k_0 + l_0)$  entgegengesetzt zum Vorzeichen von  $\Gamma_n$  sein muß, vgl. (6.46) bzw. (6.47) und (6.48). (6.65) liefert für die  $l_1$ -Integration dieselbe Bedingung, daß nämlich das Vorzeichen von  $\Gamma_n$  entgegengesetzt zu

demjenigen von  $(k_0 + l_0)$  sein muß. Damit muß die Kontur in beiden Fällen in der gleichen Richtung geschlossen werden. Ein eventuelles Vorzeichen, das von der Richtung des Integrationswegs herrührt, hebt sich auf.

Der für die Residuenintegration notwendige Nenner in  $l$  hat die Form

$$\mathfrak{N}_l = \prod_{i=4}^6 P_i' = \prod_{i=4}^6 (l_1 \rho_i - t + \chi_i + i\eta) \quad (6.66)$$

Es ist an reinen  $l$ -Termen der Residuenintegration zuzuführen

$$\frac{1}{\mathfrak{N}_l} = \frac{1}{\prod_{i=4}^6 \rho_i} \frac{1}{\prod_{i=4}^6 \left( l_1 + \frac{-t + \chi_i + i\eta}{\rho_i} \right)} \quad (6.67)$$

Residuenintegration in  $l_1$  ergibt wegen

$$l_1 \xrightarrow{m} -\frac{-t + \chi_m + i\eta}{\rho_m} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{N}_l} &\longrightarrow \frac{1}{\prod_{i=4}^6 \rho_i} \sum_{m=4}^6 \mathfrak{B}_m^l \frac{1}{\prod_{\substack{i=4 \\ i \neq m}}^6 \left[ -\frac{-t + \chi_m + i\eta}{\rho_m} + \frac{-t + \chi_i + i\eta}{\rho_i} \right]} \\ &= \sum_{m=4}^6 \mathfrak{B}_m^l \frac{1}{\prod_{\substack{i=4 \\ i \neq m}}^6 (t + t_{0,i,m} - i\eta)} \frac{\rho_m}{\prod_{\substack{i=4 \\ i \neq m}}^6 (\rho_i - \rho_m)} \end{aligned} \quad (6.69)$$

mit

$$t_{0,i,m} = \frac{-\rho_i \chi_m + \rho_m \chi_i}{\rho_i - \rho_m} \quad (6.70)$$

Bei der Residuenintegration im  $m$ -ten Nennerterm von  $l$  wurde  $l_1$  gemäß (6.68) ersetzt. Deshalb berechnet sich  $\mathfrak{B}_m^l$  zu

$$\mathfrak{B}_m^l = \theta(k_0 + l_0) \theta(-\rho_m) - \theta(-(k_0 + l_0)) \theta(\rho_m) \quad (6.71)$$

Die Bedingungen aus der  $l_1$ -Integration sind

$$k_0 + l_0 > 0 \quad \text{und} \quad \rho_m < 0 \quad (6.72)$$

oder

$$k_0 + l_0 < 0 \quad \text{und} \quad \rho_m > 0 \quad (6.73)$$

Durch eine Partialbruchzerlegung erhält man Terme der Form

$$\frac{1}{\prod_{\substack{i=4 \\ i \neq m}}^6 (t + t_{0,i,m} - i\eta)} = \sum_{\substack{i=4 \\ i \neq m}}^6 \frac{Y_{i,m}}{t + t_{0,i,m} - i\eta} \quad (6.74)$$

Für die Wurzel ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\dots} &\xrightarrow{m} \sqrt[3]{\left[ \left( \frac{-s + \Xi_n + i\eta}{\Gamma_n} + \frac{-t + \chi_m + i\eta}{\rho_m} \right) \mathcal{V} - (s+t) + \mathcal{W} + i\eta \right]^2 - 4st} \\ &= \sqrt[3]{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st} \end{aligned} \quad (6.75)$$

Das soeben Ausgeführte gilt nur für massive auslaufende Teilchen. Für masselose auslaufende Teilchen entstehen in der  $l$ -Integration aufgrund der speziellen Propagatorstruktur keine neuen Integrale, wenn man den Grenzübergang analytisch durchführt. Aber (6.69) kann nicht verwendet werden, da in diesem Fall  $\rho_4 = \rho_6$  gilt. Wir wollen den Fall, daß das erste auslaufende Teilchen masselos ist,

$$p_1^2 = 0 \quad (6.76)$$

untersuchen. In diesem müssen einige der obigen Schritte modifiziert werden, da ansonsten divergente Faktoren auftreten. Denn für

$$q_z = e_1 \quad (6.77)$$

gilt

$$\rho_4 = \rho_6 \equiv \Phi \quad (6.78)$$

weshalb  $t_{0,4,6}$  divergieren würde. Deshalb müssen Parameter, welche die Indexkombination  $i, n \in \{4, 6\}$  enthalten, gesondert behandelt werden. Unter Berücksichtigung von (6.78) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{N}_l} &\longrightarrow \frac{1}{(\Phi - \rho_5)(\chi_6 - \chi_4)} \left[ - \frac{\mathfrak{B}_4^l}{t + t_{0,4,5} - i\eta} \right. \\ &\quad + \mathfrak{B}_5^l \left( \frac{1}{t + t_{0,4,5} - i\eta} - \frac{1}{t + t_{0,5,6} - i\eta} \right) \\ &\quad \left. + \frac{\mathfrak{B}_6^l}{t + t_{0,5,6} - i\eta} \right] \end{aligned} \quad (6.79)$$

Wird das zweite äußere Teilchen masselos

$$p_2^2 = 0 \quad (6.80)$$

so verursacht dies keine künstlichen Divergenzen.

### 6.1.2.6 Zusammenfassung der Residuenintegration

Die UV-endlichen Masterintegrale lassen sich graphisch darstellen als:

$$\mathcal{P}_\alpha = \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] \times (k_0 - k_1)^\alpha \quad (6.81)$$

The diagram shows two Feynman-like diagrams. The first diagram on the left has an incoming line 'p' from the left, which splits into two lines labeled 'm1' and 'm2'. 'm1' goes up to a vertex with 'm4' and 'm3'. 'm2' goes down to a vertex with 'm5' and 'm6'. From 'm4', a line goes up to 'P1'. From 'm3', a line goes down to 'm6'. From 'm5', a line goes down to 'P2'. From 'm6', a line goes down to 'P2'. The second diagram on the right is similar but has a dashed loop between 'm3' and 'm5' labeled 'mij'.

Die Koeffizienten  $f_{i,j}$  bestimmen sich aus (6.17) im Limes  $\kappa_j \rightarrow 0$  für alle  $j = 1, \dots, j_k$ . Sie werden für die Berechnung des divergenten Anteils  $\mathcal{T}_{div}$  benötigt.

Nach den Residuenintegrationen in  $k_1$  und  $l_1$  haben die endlichen Masterintegrale die Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha &= \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \mathcal{K}^{(j_k)} \\ &= -4\pi^4 \sum_{n=1,2} \sum_{m=4}^6 \sum_{\substack{r=4 \\ r \neq m}}^6 \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,m}^{kl} Y_{r,m} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{\rho_m}{\prod_{\substack{j=4 \\ j \neq m}}^6 (\rho_j - \rho_m)} \\ &\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{s+s_0-i\eta} \frac{1}{t+t_{0,r,m}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\ &+ 4\pi^4 \sum_{n=3}^{2j_k+2} \sum_{m=4}^6 \sum_{a=0}^{2j_k-2} \sum_{\substack{r=4 \\ r \neq m}}^6 \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,m}^{kl} X_{a,n} Y_{r,m} \frac{\rho_m}{\prod_{\substack{j=4 \\ j \neq m}}^6 (\rho_j - \rho_m)} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\Gamma^{2j_k-1}} \\ &\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{s^a}{t+t_{0,r,m}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \end{aligned} \quad (6.82)$$

wobei sich die  $X_{a,n}$  nach (6.59) und die  $Y_{r,m}$  nach (6.74) berechnen. Weiter gilt:

$$s_0 = \frac{-\Xi_2 \Gamma_1 + \Xi_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \quad (6.83)$$

und

$$t_{0,r,m} = \frac{-\rho_r \chi_m + \rho_m \chi_r}{\rho_r - \rho_m} \quad (6.84)$$

sowie

$$\begin{aligned}
a_m &= 2 \frac{(k_0 + l_0)}{\rho_m} - 1 \\
b_{n,m} &= \mathcal{W} - 2(k_0 + l_0) \left( \frac{\Xi_n}{\Gamma_n} + \frac{\chi_m}{\rho_m} \right) \\
c_n &= 2 \frac{(k_0 + l_0)}{\Gamma_n} - 1
\end{aligned} \tag{6.85}$$

und

$$\Upsilon = \Gamma_i \quad i = 3, 4, \dots, 2j_k + 2 \tag{6.86}$$

$$\mathcal{W} = (k_0 + l_0)^2 - m_3^2 \tag{6.87}$$

Die  $\Gamma_n, \Xi_n, \chi_m, \rho_m$  berechnen sich unter Verwendung von (6.35), (6.36), (6.41) bzw. (6.63), (6.64). Da  $(k_0 + l_0)$  und  $\Gamma_n$  bzw.  $\rho_n$  aufgrund von (6.47), (6.48) bzw. (6.72), (6.73) im Integrationsbereich stets entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, ergibt sich sofort:

$$a_m < 0 \quad c_n < 0 \quad \text{und} \quad 1 - a_m c_n < 0 \quad \forall n, m \tag{6.88}$$

Da aus dem gleichen Grund folgt, daß

$$\text{Im}(b_{n,m}) > 0 \quad \forall \{n, m\} \tag{6.89}$$

haben wir den infinitesimalen Imaginärteil von  $b_{n,m}$  nicht notiert. Er kann in das bereits vorhandene  $+i\eta$  absorbiert werden.

Die Integrationsgrenzen sind festgelegt durch

$$\mathcal{B}_{n,m}^{kl} = \mathcal{B}_n^k \mathcal{B}_m^l = \theta(k_0 + l_0) \theta(-\Gamma_n) \theta(-\rho_m) + \theta(-(k_0 + l_0)) \theta(\Gamma_n) \theta(\rho_m) \tag{6.90}$$

Diese Bedingungen beschreiben Dreiecke in der  $k_0, l_0$ -Ebene. Die konkret beitragenden Integrationsgebiete sind in Anhang F formelmäßig notiert.

Wir zeigen in Fig. 6.1 graphisch, welche Integrationsgebiete zu welchen Propagatorfaktorpaaren gehören, durch die jeweils die Residuenintegration verursacht wird.

Im Falle, dass das erste auslaufende Teilchen masselos ist, d.h.  $p_1^2 = 0$ , erhalten wir mit  $\Phi = \rho_4 = \rho_6$  als Endformel:

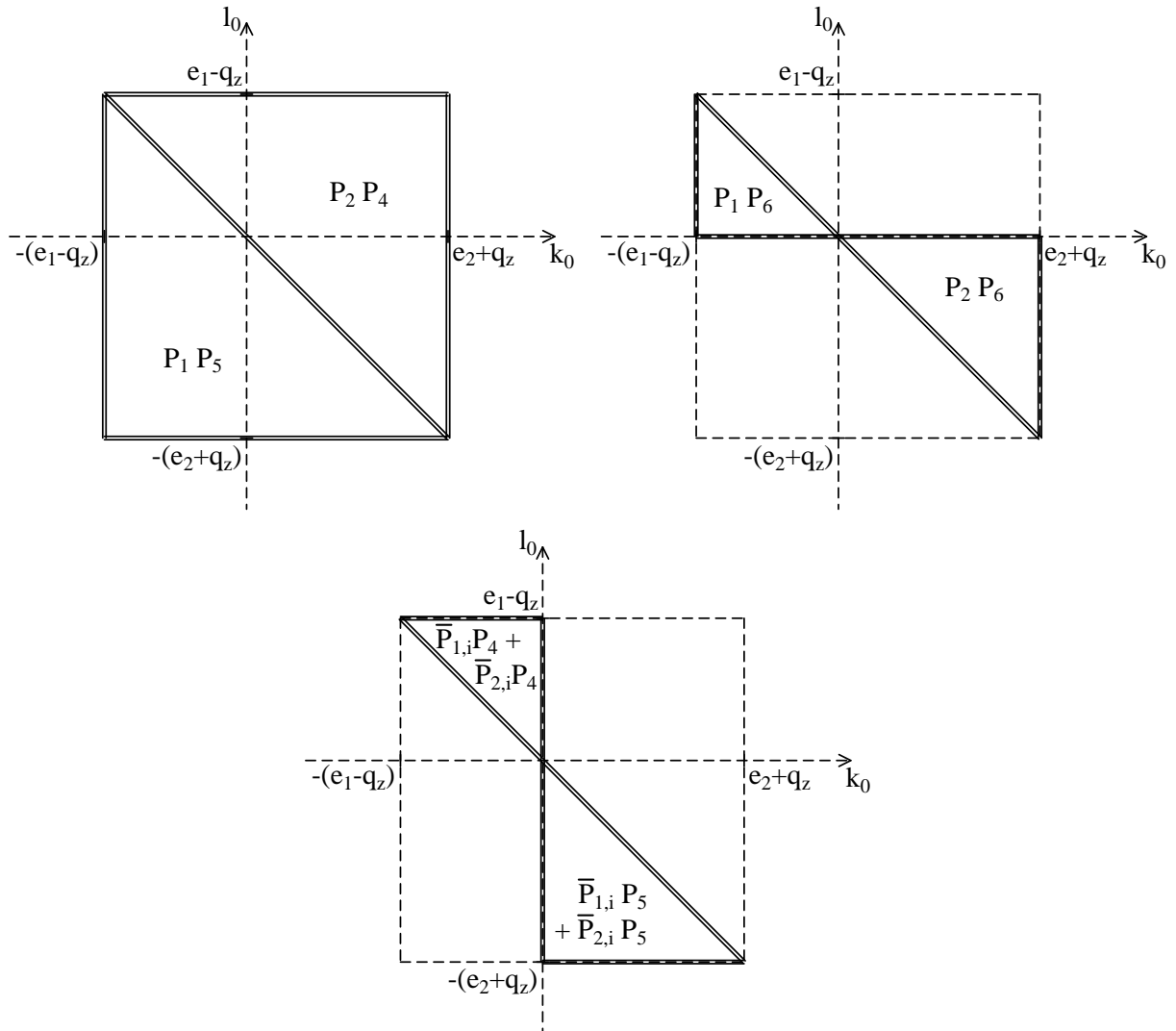


Abbildung 6.1: Gebiete der numerischen Integration im Fall der planaren Topologie



$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\alpha &= \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \mathcal{K}^{(j_k)} \\
&= +4\pi^4 \sum_{n=1,2} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,4}^{kl} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{1}{(\Phi - \rho_5)(\chi_6 - \chi_4)} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{s+s_0-i\eta} \frac{1}{t+t_{0,4,5}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a_m t + b_{n,4} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&-4\pi^4 \sum_{n=3}^{2j_k+2} \sum_{a=0}^{2j_k-2} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,4}^{kl} X_{a,n} \frac{1}{(\Phi - \rho_5)(\chi_6 - \chi_4)} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\Upsilon^{2j_k-1}} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{s^a}{t+t_{0,4,5}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a_m t + b_{n,4} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&-4\pi^4 \sum_{n=1,2} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,5}^{kl} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{1}{(\Phi - \rho_5)(\chi_6 - \chi_4)} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{s+s_0-i\eta} \left( \frac{1}{t+t_{0,4,5}-i\eta} - \frac{1}{t+t_{0,5,6}-i\eta} \right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a_m t + b_{n,5} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&+4\pi^4 \sum_{n=3}^{2j_k+2} \sum_{a=0}^{2j_k-2} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,5}^{kl} X_{a,n} \frac{1}{(\Phi - \rho_5)(\chi_6 - \chi_4)} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\Upsilon^{2j_k-1}} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds s^a \left( \frac{1}{t+t_{0,4,5}-i\eta} - \frac{1}{t+t_{0,5,6}-i\eta} \right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a_m t + b_{n,5} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&-4\pi^4 \sum_{n=1,2} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,6}^{kl} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{1}{(\Phi - \rho_5)(\chi_6 - \chi_4)} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{s+s_0-i\eta} \frac{1}{t+t_{0,5,6}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a_m t + b_{n,6} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&+4\pi^4 \sum_{n=3}^{2j_k+2} \sum_{a=0}^{2j_k-2} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,6}^{kl} X_{a,n} \frac{1}{(\Phi - \rho_5)(\chi_6 - \chi_4)} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\Upsilon^{2j_k-1}} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{s^a}{t+t_{0,5,6}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a_m t + b_{n,6} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}}
\end{aligned} \tag{6.91}$$

Der Fall, dass  $p_2^2 = 0$  ist, muß nicht gesondert betrachtet werden. Er ist sowohl im allgemeinen Fall als auch im obigen Spezialfall enthalten.

### 6.1.2.7 Basisintegrale für die Integration in $s$ und $t$

Die Integration in  $s$  und  $t$  erfordert die Evaluierung von zwei Typen von elementaren Integralen. Bereits vom Fall mit trivialem Zähler bekannt [Cz94, Ki96, Fr96a] ist das Integral

$$\mathcal{H}(a, b, c, s_0, t_0) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{s + s_0 - i\eta} \frac{1}{t + t_0 - i\eta} \frac{1}{\sqrt{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (6.92)$$

Sind Abzugsterme notwendig, so muß man weiter berechnen:

$$\mathcal{T}_j(a, b, c, s_0) = \lim_{\Lambda_s \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda_t \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{s^j}{t + t_0 - i\eta} \frac{1}{\sqrt{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (6.93)$$

Das Integral  $\mathcal{T}_j$  wird benötigt für

$$j = 0, 1, 2, \dots, 2j_k - 2 \quad (6.94)$$

Die Berechnung der Basisintegrale  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{T}_j$  wird in Anhang E beschrieben. Es sei hier lediglich erwähnt, dass die Integrale  $\mathcal{T}_j$  divergent sind und nur in Summen auftreten, die endlich sind. In Anhang E wird mit Hilfe von Abschneideparametern (cutoffs) die Konvergenz und cutoff-Unabhängigkeit der Summen der  $\mathcal{T}_j$  im Limes divergierender cutoffs bewiesen. Die cutoff-abhängigen Anteile werden abgespalten und getrennt summiert. Der verbleibende endliche Teil, welcher für die numerische Integration benötigt wird, wurde separiert und implementiert.

## 6.2 Gedrehte reduzierte planare Topologien

Zu betrachten sind Integrale der Form:

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} = \text{Diagram} \times (k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta \quad (6.95)$$

sowie

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} = \text{Diagram} \times (k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta \quad (6.96)$$

Die zu behandelnden Integrale können zusammengefaßt werden zu

$$\mathcal{R}_{\alpha, \beta}^\pm = \int d^D k d^D l \frac{(k_0 \pm k_1)^\alpha (l_0 \pm l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_x P_6} \quad x = 4, 5 \quad (6.97)$$

Die Massendimension dieser Integrale ist in  $D = 4$  Dimensionen:

$$\dim_{\text{mass}} = \alpha + \beta - 2 \quad (6.98)$$

### 6.2.1 Abzugsprozedur

Da die Struktur der Propagatoren  $P_1$  und  $P_2$  in  $k$  dieselbe ist wie im Falle der planaren Topologie, ändert sich bei reinen  $k$ -Abzugstermen im Vergleich zur planaren Topologie nichts. Es ist allerdings darauf zu achten, daß die Linearisierung nur für die Version  $\mathcal{R}^-$  (mit  $P_5$ ) analog zur planaren Topologie durchgeführt wird:

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 - k_1 \\ l'_0 &= l_0 - l_1 \end{aligned} \quad (6.99)$$

Im Falle der Version  $\mathcal{R}^+$  (mit  $P_4$ ) muß aufgrund der anderen Zählerstruktur, wie wir sie durch die Tensorreduktion erhalten haben, mit umgekehrtem Vorzeichen linearisiert werden:

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 + k_1 \\ l'_0 &= l_0 + l_1 \end{aligned} \quad (6.100)$$

Die Divergenzgrade berechnen sich in beiden Fällen nach (5.2) in  $D = 4$  Dimensionen zu

$$\begin{aligned} \omega_k &= 2 - \alpha \\ \omega_l &= 2 - \beta \\ \omega &= 2 - \alpha - \beta \end{aligned} \quad (6.101)$$

Den Grad der Abzugsparameter berechnet man aufgrund von (5.9) zu

$$\begin{aligned} 2 - \alpha - \beta + j_k + j_l &> 0 \\ 2 - \alpha + j_k &> 0 \\ 2 - \beta + j_l &> 0 \end{aligned} \quad (6.102)$$

Die Wahl von  $j_k, j_l$  ist u.U. nicht eindeutig. Man muß beachten, dass bei diesen Topologien nicht nur einzelne Subdivergenzen, sondern auch gemischte Subdivergenzen oder reine globale Divergenzen sowie Subdivergenzen und globale Divergenzen auftreten können. In manchen Fällen ist die Wahl der Abzugsmultiplikatoren nicht eindeutig festgelegt. Die Multiplikationsterme in  $k$  sind für beide Topologien analog zur planaren Topologie. Die gesamten Berechnungen für Abzugsterme in  $k$  verlaufen analog zum planaren Fall, ebenso sämtliche Integrationen. Wir verweisen deshalb zur Beschreibung der  $k$ -Integration auf Kap. 6.1.2. Die wenigen Schritte, welche im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^+$  hiervon durch die Linearisierung (6.100) im Detail abweichen, werden wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts skizzieren. Die Behandlung der Terme mit  $k$ , ebenso die der Mischungsterme, kann deshalb sehr knapp gehalten werden. Diesbezüglich sei auf die Behandlung der planaren Topologie in Kap. 6.1.2 verwiesen. Die Abzugsterme in  $l$  und die Integration in diesem Schleifenimpuls führen hingegen zu neuen Beiträgen.

### 6.2.1.1 Abzugsmultiplikatoren in $k$

Wie erwähnt, gelten die Gleichungen (6.15) bis (6.17), wie sie von der planaren Topologie bekannt sind, auch hier.

### 6.2.1.2 Abzugsmultiplikatoren in $l$

Die Abzugsterme in  $l$  sind von einfacherer Struktur als die in  $k$ . Es liegt jeweils nur ein Propagatorfaktor in  $l$  vor, der äußere Impulse enthält.  $P_4$  und  $P_5$  haben die gleiche Struktur. Es kommt entweder nur der eine oder der andere dieser Propagatorfaktoren im Nenner der benannten Topologien vor. Beide lassen sich schreiben zu (mit  $x = 4, 5$ )

$$\begin{aligned} P_x &= (l + p_x)^2 - m_x^2 + i\eta \\ &= (l_0 + e_x)^2 - (l_1 \pm q_z)^2 - t - m_x^2 + i\eta \end{aligned} \quad (6.103)$$

Hingegen ist  $P_6$  von externen Impulsen unabhängig.

Die Multiplikationsterme für die Abzugsprozedur in  $l$  haben die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(j_i)} &= \prod_{r=1}^{j_i} \left( 1 - \frac{N_l}{N_{l,r}} \right) \\ &= \prod_{r=1}^{j_i} \left( 1 - \frac{P_x}{\bar{P}_{x,r}} \right) \\ &= \prod_{r=1}^{j_i} \left( 1 - \frac{(l + p_x)^2 - m_x^2}{(l + p_x \lambda_r)^2 - m_{x,r}^2} \right) \\ &= \prod_{r=1}^{j_i} \frac{\mathcal{Z}_l(\lambda_r, m_{x,r})}{(l + p_x \lambda_r)^2 - m_{x,r}^2} \end{aligned} \quad (6.104)$$

mit

$$\mathcal{Z}_l(\lambda_r, m_{x,r}) = \bar{P}_x^r - P_x = (l q_1) + (q_2 q_3) l \alpha + \beta \quad (6.105)$$

wobei die  $q_i$  Linearkombinationen von externen Impulsen sind. Da der Nenner Terme bis zur Ordnung  $l^2$  enthält, wird durch jeden Faktor von  $\mathcal{L}^{(j_i)}$  das UV-Verhalten des Integrals in  $l$  um 1 verbessert, insgesamt also um  $j_i$ .

### 6.2.1.3 Konvergente Integrale

Die Integrale, die in 4 Dimensionen zu berechnen sind, haben nach Multiplikation mit den Abzugstermen die Form

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^{\pm} = \int d^4 k d^4 l \frac{(k_0 \pm k_1)^\alpha (l_0 \pm l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_x P_6} \prod_{i=1}^{j_k} \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}} \right) \prod_{r=1}^{j_l} \left( 1 - \frac{P_x}{\bar{P}_{x,r}} \right) \quad (6.106)$$

wobei im Fall  $x = 4$  die Topologie  $\mathcal{R}^+$  vorliegt, im Fall  $x = 5$  die Topologie  $\mathcal{R}^-$ .

Zusätzlich zu den Propagatorfaktoren in (2.9) und (6.18) treten hier im Fall  $\mathcal{R}^+$  die Propagatorfaktoren

$$\bar{P}_{4,r} = (l - \lambda_r p_1)^2 - m_{4,r}^2 \quad (6.107)$$

auf, wobei  $P_5$  nicht vorkommt. Im Fall  $\mathcal{R}^-$  sind die neuen Propagatorfaktoren

$$\bar{P}_{5,r} = (l + \lambda_r p_2)^2 - m_{5,r}^2 \quad (6.108)$$

Hier tritt  $P_4$  nicht auf.

## 6.2.2 Integration

### 6.2.2.1 Integration in den Winkeln und in $k_1$

Im Falle der Version  $\mathcal{R}^-$  verläuft hier alles analog zur planaren Topologie. Nicht so für die Version  $\mathcal{R}^+$ . Aber auch im Falle der Version  $\mathcal{R}^+$  sind die Unterschiede nicht prinzipieller Natur. Sie äußern sich lediglich in einigen Details. Fassen wir kurz die Unterschiede im Fall der Version  $\mathcal{R}^+$  bei der Integration in  $k$  zusammen:

Für die Mischungsterme gilt vor der Linearisierung in beiden Fällen für  $P_3$  der Ausdruck (6.19). Da die Linearisierung bei der Version  $\mathcal{R}^+$  mit anderem Vorzeichen vor sich geht, nimmt  $P_3$  danach die Form

$$P_3' = \tilde{A} + Bz + i\eta \quad (6.109)$$

an mit

$$\tilde{A} = -2(k_0 + l_0)(k_1 + l_1) - (s + t) + \mathcal{W} \quad (6.110)$$

wobei  $B$  wie in (6.23) und  $\mathcal{W}$  wie in (6.24) definiert ist. (6.22) und (6.23) gelten nicht mehr. Die Transformation des Integrationsmaßes, die Integration über  $z$  und die Zerlegung der Wurzel, die bei dieser Integration entsteht (jetzt mit  $\tilde{A}$  statt mit  $A$ ), geht wie bekannt vonstatten, vgl. (6.25) bis (6.27). Die Schnitte der Wurzel werden durch folgende Parameterdarstellung beschrieben:

$$k_1^{cut} = -\frac{x - (s + t) + \mathcal{W} \mp B}{2(k_0 + l_0)} - l_1 + i\frac{\eta}{2(k_0 + l_0)} \quad (6.111)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^+$ . Die Kontur muß für  $(k_0 + l_0) > 0$  in der unteren Halbebene geschlossen werden, für  $(k_0 + l_0) < 0$  in der oberen Halbebene. Dies ist genau umgekehrt zum planaren Fall. Der Wurzelfaktor hat vor Residuenintegration die Form

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(-(k_1 + l_1)\mathcal{V} - (s + t) + \mathcal{W} + i\eta)^2 - 4st}} \quad (6.112)$$

wobei  $\mathcal{V}$  in (6.32) definiert wurde. Für die Zählerstruktur in  $k$  gelten die Gleichungen (6.38) und (6.43). Die Propagatorfaktoren nehmen weiterhin die Form (6.35) an. Allerdings ändert

sich die explizite Struktur der einzelnen Propagatoren. Statt (6.36) gilt jetzt:

$$\begin{aligned}
P'_1 &= (k_0 + e_1)^2 - 2k_1(k_0 + e_1 + q_z) - q_z^2 - s - m_1^2 + i\eta \\
P'_2 &= (k_0 - e_2)^2 - 2k_1(k_0 - e_2 + q_z) - q_z^2 - s - m_2^2 + i\eta \\
\bar{P}'_{1,i} &= (k_0 + \kappa_i e_1)^2 - 2k_1(k_0 + \kappa_i(e_1 + q_z)) - \kappa_i^2 q_z^2 - s - m_{1,i}^2 + i\eta \\
\bar{P}'_{2,i} &= (k_0 - \kappa_i e_2)^2 - 2k_1(k_0 - \kappa_i(e_2 - q_z)) - \kappa_i^2 q_z^2 - s - m_{2,i}^2 + i\eta
\end{aligned} \tag{6.113}$$

Dies ist ohne Auswirkungen auf den weiteren Algorithmus, weswegen dieser den Gleichungen (6.37) bis (6.45) und (6.49) bis (6.60) entnommen werden kann. Lediglich die  $\theta$ -Funktionen sind anders:  $\mathfrak{B}_n^k$ , im planaren Fall in (6.46) definiert, lautet nun:

$$\mathfrak{B}_n^k = -\theta(k_0 + l_0)\theta(\Gamma_n) + \theta(-(k_0 + l_0))\theta(-\Gamma_n) \tag{6.114}$$

und ist in Gleichung (6.60) einzusetzen. (6.44) bleibt gültig, nun aber gilt aufgrund der Bedingungen, die sich aus der Wurzelintegration ergeben: Die Kontur muß für  $(k_0 + l_0) < 0$  in der oberen Halbebene geschlossen werden. Dann trägt das Residuum von  $k_1$  aber nur bei, falls gleichzeitig  $\text{Im}(k_1) < 0$  gilt. Für  $(k_0 + l_0) > 0$  wird die Kontur in der unteren Halbebene geschlossen, es ergibt sich ein Beitrag, falls  $\text{Im}(k_1) > 0$  gilt. Das bedeutet

$$\Gamma_n < 0 \quad \text{und} \quad (k_0 + l_0) < 0 \tag{6.115}$$

oder

$$\Gamma_n > 0 \quad \text{und} \quad (k_0 + l_0) > 0 \tag{6.116}$$

Die Wurzel wird durch die Residuenintegration in  $k_1$ , wenn der Pol vom  $n$ -ten Propagatorfaktor im Nenner herrührt, zu

$$\sqrt{\dots} \xrightarrow{n} \sqrt[3]{\left[ - \left( - \frac{-s + \Xi_n + i\eta}{\Gamma_n} + l_1 \right) \mathcal{V} - (s + t) + \mathcal{W} + i\eta \right]^2 - 4st} \tag{6.117}$$

Dies gilt nur für Version  $\mathcal{R}^+$  mit der umgekehrten Linearisierung im Vergleich zum planaren Fall. Außerdem ist zu beachten, daß statt Gleichung (6.56)

$$\Upsilon = -2k_0 \tag{6.118}$$

zu verwenden ist im Gegensatz zur planaren Topologie und zum Fall mit der reduzierten Topologie  $\mathcal{R}^-$ .

### 6.2.2.2 Zähler- und Nennerstruktur in $l$

Die Residuenintegration in  $l_1$  ist, da hier die Struktur im Vergleich zum planaren Fall aufgrund der möglichen Zählerstruktur anders ist, komplizierter als dort und ähnlich der Integration in  $k_1$ .

Der Nenner der reinen  $l$ -Terme hat vor der Linearisierung die Form

$$\mathcal{N}_l = P_x P_6 \prod_{r=1}^{j_l} \bar{P}_{x,r} \quad x = 4, 5 \quad (6.119)$$

Nach der Linearisierung

$$l_0 \longrightarrow l'_0 = l_0 \pm l_1 \quad (6.120)$$

(„+“ für  $x = 4$ , „-“ für  $x = 5$ ) ergibt sich für

$$P_l \in \{P_x, \bar{P}_{x,r}, P_6\} \quad x \in \{4, 5\} \quad (6.121)$$

$$P_l \longrightarrow P'_l = l_1 \rho_l - t + \chi_l + i\eta \quad (6.122)$$

wobei die  $\rho_l, \chi_l$  von  $l_1$  und  $t$  unabhängig sind. Explizit lauten die linearisierten Propagatoren im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^+$  — hier gilt  $x = 4$ :

$$\begin{aligned} P'_4 &= (l_0 - e_1)^2 - 2l_1(l_0 - (e_1 + q_z)) - q_z^2 - t - m_4^2 \\ \bar{P}'_{4,r} &= (l_0 - \lambda_r e_1)^2 - 2l_1(l_0 - \lambda_r(e_1 + q_z)) - \lambda_r^2 q_z^2 - t - m_{4,r}^2 \\ P'_6 &= l_0^2 - 2l_1 l_0 - t - m_6^2 \end{aligned} \quad (6.123)$$

Im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^-$  lauten sie mit  $x = 5$ :

$$\begin{aligned} P'_5 &= (l_0 + e_2)^2 + 2l_1(l_0 + (e_2 + q_z)) - q_z^2 - t - m_5^2 \\ \bar{P}'_{5,r} &= (l_0 + \lambda_r e_2)^2 + 2l_1(l_0 + \lambda_r(e_2 + q_z)) - \lambda_r^2 q_z^2 - t - m_{5,r}^2 \\ P'_6 &= l_0^2 + 2l_1 l_0 - t - m_6^2 \end{aligned} \quad (6.124)$$

Damit wird (in beiden Fällen)

$$\mathcal{N}_l \longrightarrow \mathfrak{N}_l = (l_1 \rho_x - t + \chi_x + i\eta)(l_1 \rho_6 - t + \chi_6) \prod_{r=1}^{j_l} (l_1 \rho_{x,r} - t + \chi_{x,r} + i\eta) \quad (6.125)$$

Die Zählerfaktoren lassen sich schreiben zu

$$\mathcal{Z}'_l(\lambda_r, m_{x,r}) \equiv \mathcal{Z}'^{l,r} = (l_1 \rho_{x,r} - t + \chi_{x,r}) - (l_1 \rho_x - t + \chi_x) \quad (6.126)$$

Für die Residuenintegration muß

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{N}_l} &= \frac{1}{P'_x P'_6} \prod_{r=1}^{j_l} \frac{\mathcal{Z}'_l(\lambda_r, m_{x,r})}{\bar{P}'_{x,r}} \\ &= \frac{1}{(l_1 \rho_x - t + \chi_x + i\eta)(l_1 \rho_6 - t + \chi_6 + i\eta)} \prod_{r=1}^{j_l} \frac{\mathcal{Z}'^{l,r}}{l_1 \rho_{x,r} - t + \chi_{x,r} + i\eta} \end{aligned} \quad (6.127)$$

betrachtet werden. Umschreiben der Indizes und Variablenumbenennung führt auf

$$\frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{N}_l} = \frac{\prod_{r=1}^{j_l} \mathcal{Z}_l^{l,r}}{\prod_{r=1}^{j_l+2} [l_1 \Phi_r - t + \Psi_r + i\eta]} = \frac{1}{\prod_{r=1}^{j_l+2} \Phi_r} \frac{\prod_{r=1}^{j_l} \mathcal{Z}_l^{l,r}}{\prod_{r=1}^{j_l+2} \left[ l_1 + \frac{-t + \Psi_r + i\eta}{\Phi_r} \right]} \quad (6.128)$$

Setze dabei

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \rho_x & \Psi_1 &= \chi_x \\ \Phi_2 &= \rho_6 & \Psi_2 &= \chi_6 \\ \Phi_{r+2} &= \rho_{x,r} & \Psi_{r+2} &= \chi_{x,r} \end{aligned} \quad r = 1, \dots, j_l \quad (6.129)$$

Der Zähler wird dann zu

$$\mathcal{Z}_l^{l,r} = (l_1 \Phi_{r+2} - t + \Psi_{r+2}) - (l_1 \Phi_1 - t + \Psi_1) \quad (6.130)$$

Es gilt deshalb

$$\frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{N}_l} = \frac{\prod_{r=1}^{j_l} [(l_1 \Phi_{r+2} - t + \Psi_{r+2}) - (l_1 \Phi_1 - t + \Psi_1)]}{\prod_{r=1}^{j_l+2} \left\{ \prod_{r=1}^{j_l+2} \Phi_r \left[ l_1 + \frac{-t + \Psi_r + i\eta}{\Phi_r} \right] \right\}} \quad (6.131)$$

Die Schnitte der Wurzel, die nicht überschritten werden dürfen, sind im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^-$  dieselben wie bei der planaren Topologie, vgl. (6.61) und (6.65) sowie Kapitel 6.1.2.5. Die Kontur muß in derselben Halbebene wie bei  $k_1$  geschlossen werden. Die Schnitte in  $l_1$  ergeben sich bei der Topologie  $\mathcal{R}^+$  aufgrund von (6.117) zu:

$$\frac{\text{Im}(l_1^{cut})}{\eta} = \frac{1}{2(k_0 + l_0)} + \frac{1}{\Gamma_n} \quad (6.132)$$

Da das Vorzeichen von  $\Gamma_n$  im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^+$  stets das gleiche Vorzeichen sein muß wie dasjenige von  $(k_0 + l_0)$  (vgl. (6.115) und (6.116)), ist diese Bedingung redundant. Sie folgt bereits aus den Bedingungen der  $k_1$ -Integration. Auch hier hebt sich ein eventuelles Vorzeichen, das aus der Richtung des Integrationsweges herrühren kann, durch das zweimalige Schließen in der jeweils gleichen Halbebene auf.

### 6.2.2.3 Residuenintegration in $l_1$

Durch die Residuenintegration in  $l_1$  haben wir, wenn der Pol vom  $m$ -ten Propagatorfaktor stammt

$$l_1 \xrightarrow{m} - \frac{-t + \Psi_m + i\eta}{\Phi_m} \quad (6.133)$$

Aufgrund des Imaginärteils von  $l_1^{cut}$  erhalten wir im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^+$  einen Beitrag, wenn gilt: Wird in der oberen Halbebene geschlossen, so muß

$$k_0 + l_0 < 0 \quad \text{und} \quad \Phi_m < 0 \quad (6.134)$$



sein. In der unteren Halbebene gilt entsprechend

$$k_0 + l_0 > 0 \quad \text{und} \quad \Phi_m > 0 \quad (6.135)$$

Der Mischungsterm transformiert sich im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^+$  zu

$$\begin{aligned} \sqrt{\dots} &\xrightarrow{m} \sqrt[{}^c]{\left[ - \left( -\frac{-s + \Xi_n + i\eta}{\Gamma_n} - \frac{-t + \Psi_m + i\eta}{\Phi_m} \right) \mathcal{V} - (s+t) + \mathcal{W} + i\eta \right]^2 - 4st} \\ &= \sqrt[{}^c]{(a_m t + b_{n,m} + c_n s)^2 - 4st} \end{aligned} \quad (6.136)$$

Im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^-$  gilt: Wird in der oberen Halbebene geschlossen, so muß für einen Beitrag

$$k_0 + l_0 > 0 \quad \text{und} \quad \Phi_m < 0 \quad (6.137)$$

sein. Wird in der unteren Halbebene geschlossen, so muß gelten:

$$k_0 + l_0 < 0 \quad \text{und} \quad \Phi_m > 0 \quad (6.138)$$

Die Wurzel wird

$$\begin{aligned} \sqrt{\dots} &\xrightarrow{m} \sqrt[{}^c]{\left[ \left( -\frac{-s + \Xi_n + i\eta}{\Gamma_n} - \frac{-t + \Psi_m + i\eta}{\Phi_m} \right) \mathcal{V} - (s+t) + \mathcal{W} + i\eta \right]^2 - 4st} \\ &= \sqrt[{}^c]{(a_m t + b_{n,m} + c_n s)^2 - 4st} \end{aligned} \quad (6.139)$$

Die reinen Terme in  $l$  transformieren sich in jedem Fall (man beachte, dass die  $\Psi_r$ , die  $\Phi_r$  sowie die  $a_i$  von der Topologie abhängig zu berechnen sind) wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{N}_l} &\rightarrow \frac{1}{\prod_{r=1}^{j_l+2} \Phi_r} \sum_{m=1}^{j_l+2} \mathfrak{B}_m^l \frac{\prod_{r=1}^{j_l} \left[ \left( -\frac{-t + \Psi_m + i\eta}{\Phi_m} \Phi_{r+2} - t + \Psi_{r+2} \right) - \left( -\frac{-t + \Psi_m + i\eta}{\Phi_m} \Phi_1 - t + \Psi_1 \right) \right]}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{j_l+2} \left[ -\frac{-t + \Psi_m + i\eta}{\Phi_m} + \frac{-t + \Psi_r + i\eta}{\Phi_r} \right]} \\ &= \sum_{m=1}^{j_l+2} \mathfrak{B}_m^l \frac{1}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{j_l+2} [t(\Phi_r - \Phi_m) - \Phi_r \Psi_m + \Phi_m \Psi_r - i\eta(\Phi_r - \Phi_m)]} \\ &\quad \prod_{r=1}^{j_l} \{ [t(\Phi_{r+2} - \Phi_m) + (\Psi_{r+2} \Phi_m - \Psi_m \Phi_{r+2})] \\ &\quad - [t(\Phi_1 - \Phi_m) + (\Psi_1 \Phi_m - \Psi_m \Phi_1)] \} \end{aligned} \quad (6.140)$$

Wie man an (6.123) bzw. (6.124) ersieht, werden im Limes verschwindender Grenzübergangsparameter

$$\lambda_r \equiv 0 \quad \forall \quad r = 1, 2, \dots, j_l \quad (6.141)$$

außer dem von  $P_4$  bzw.  $P_5$  herrührenden  $\Phi_1$  alle anderen  $\Phi_i$  gleich (für  $\Phi_2 = \rho_6$  ist dies unabhängig von den Grenzübergangsparametern, da in  $P_6$  keine äußeren Impulse vorkommen):

$$\Omega \equiv \Phi_i = \Phi_j \quad \forall \quad i, j = 2, 3, \dots, j_l + 2 \quad (6.142)$$

Im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^+$  gilt

$$\Omega = -2l_0 \quad (6.143)$$

Im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^-$  gilt

$$\Omega = +2l_0 \quad (6.144)$$

Weiteres Umformen der residuenintegrierten reinen Terme in  $l$  führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{N}_l} \longrightarrow & \mathfrak{B}_1^l \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} \frac{1}{t + t_{0,2,1} - i\eta} \\ & + \mathfrak{B}_2^l \frac{1}{\Phi_1 - \Phi_2} \frac{1}{t + t_{0,1,2} - i\eta} \\ & + \mathfrak{B}_2^l \frac{\prod_{r=1}^{j_l} \{[\Omega(\Psi_{r+2} - \Psi_2)] - [t(\Phi_1 - \Omega) + (\Psi_1\Omega - \Psi_2\Phi_1)]\} - \Omega^{j_l} \prod_{r=3}^{j_l+2} [-\Psi_2 + \Psi_r]}{\Omega^{j_l} [t(\Phi_1 - \Omega) + (-\Phi_1\Psi_2 + \Omega\Psi_1)] \prod_{r=3}^{j_l+2} [-\Psi_2 + \Psi_r]} \\ & - \sum_{m=3}^{j_l+2} \mathfrak{B}_m^l \frac{\prod_{\substack{r=1 \\ r+2 \neq m}}^{j_l} \{[(\Psi_{r+2}\Omega - \Psi_m\Omega)] - [t(\Phi_1 - \Omega) + (\Psi_1\Omega - \Psi_m\Phi_1)]\}}{\Omega^{j_l} \prod_{\substack{r=2 \\ r \neq m}}^{j_l+2} [-\Psi_m + \Psi_r]} \end{aligned} \quad (6.145)$$

wobei

$$t_{0,r,m} = \frac{-\Phi_r \Psi_m + \Phi_m \Psi_r}{\Phi_r - \Phi_m} \quad (6.146)$$

Da nur

$$t_0 \equiv t_{0,1,2} = \frac{-\Phi_1 \Psi_2 + \Phi_2 \Psi_1}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{-\Phi_1 \Psi_2 + \Omega \Psi_1}{\Phi_1 - \Omega} \quad (6.147)$$

benötigt wird, schreibt sich das Ergebnis mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (\Omega - \Phi_1) \\
\mathcal{B}_{m,r} &= \Omega(\Psi_{r+2} - \Psi_m) - (\Psi_1\Omega - \Psi_m\Phi_1) \\
&= \Omega(\Psi_{r+2} - \Psi_m) + \mathcal{C}_m \\
\mathcal{C}_m &= (\Phi_1\Psi_m - \Omega\Psi_1)
\end{aligned} \tag{6.148}$$

unter Verwendung der Parameter  $Y_{b,m}$ , die sich bestimmen gemäß

$$\frac{\prod_{r=1}^{j_l} [\mathcal{A}t + \mathcal{B}_{2,r}] - \Omega^{j_l} \prod_{r=3}^{j_l+2} [\Psi_r - \Psi_2]}{[\mathcal{A}t + \mathcal{C}_2]} = \sum_{b=0}^{j_l-1} Y_{b,2} t^b \tag{6.149}$$

und

$$\left[ \prod_{\substack{r=1 \\ r+2 \neq m}}^{j_l} (\mathcal{A}t + \mathcal{B}_{m,r}) \right] = \sum_{b=0}^{j_l-1} Y_{b,m} t^b \quad \text{für } m = 3, 4, \dots, j_l + 2 \tag{6.150}$$

zu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{N}_l} &\longrightarrow \sum_{m=1}^2 \mathfrak{B}_m^l \frac{1}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^2 (\Phi_r - \Phi_m)} \frac{1}{t + t_0 - i\eta} \\
&\quad - \sum_{m=2}^{j_l+2} \mathfrak{B}_m^l \frac{1}{\Omega^{j_l}} \frac{1}{\prod_{\substack{r=2 \\ r \neq m}}^{j_l+2} [\Psi_r - \Psi_m]} \sum_{b=0}^{j_l-1} Y_{b,m} t^b
\end{aligned} \tag{6.151}$$

(6.151) gilt auch, falls eine oder beide auslaufenden Massen verschwinden, falls also

$$p_i^2 = 0 \quad \text{für } i = 1 \quad \text{oder } i = 2 \tag{6.152}$$

gilt. Die  $\mathfrak{B}_m^l$  hängen von der Topologie ab. Für die Topologie  $\mathcal{R}^+$  gilt aufgrund von (6.134) und (6.135):

$$\mathfrak{B}_m^l = \theta(-(k_0 + l_0))\theta(-\Phi_m) - \theta(k_0 + l_0)\theta(\Phi_m) \tag{6.153}$$

Für die Topologie  $\mathcal{R}^-$  ergibt sich wegen (6.137) und (6.138):

$$\mathfrak{B}_m^l = \theta(k_0 + l_0)\theta(-\Phi_m) - \theta(-(k_0 + l_0))\theta(\Phi_m) \tag{6.154}$$

## 6.2.2.4 Zusammenfassung der Residuenintegrationen

Graphisch können die konvergenten Masterintegrale dargestellt werden als:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^+ \\
 = & \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right] \times (k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta
 \end{aligned}
 \tag{6.155}$$

The equation (6.155) shows the decomposition of the master integral  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^+$  into four diagrams. The first diagram is a triangle with vertices  $p$ ,  $p_1$ , and  $p_2$ , and internal masses  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ . The second diagram is a triangle with vertices  $p$ ,  $p_1$ , and  $p_2$ , and internal masses  $m_3, m_4, m_5, m_6$ , with a dashed circle around the top vertex  $p$  and mass  $m_4$ . The third diagram is a triangle with vertices  $p$ ,  $p_1$ , and  $p_2$ , and internal masses  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ , with a dashed circle around the top vertex  $p$  and mass  $m_4$ . The fourth diagram is a circle with vertices  $m_{i,j}$ ,  $m_3$ , and  $m_{4,r}$ .

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^- \\
 = & \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right] \times (k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta
 \end{aligned}
 \tag{6.156}$$

The equation (6.156) shows the decomposition of the master integral  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^-$  into four diagrams. The first diagram is a triangle with vertices  $p$ ,  $p_1$ , and  $p_2$ , and internal masses  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ . The second diagram is a triangle with vertices  $p$ ,  $p_1$ , and  $p_2$ , and internal masses  $m_3, m_4, m_5, m_6$ , with a dashed circle around the top vertex  $p$  and mass  $m_4$ . The third diagram is a triangle with vertices  $p$ ,  $p_1$ , and  $p_2$ , and internal masses  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ , with a dashed circle around the top vertex  $p$  and mass  $m_4$ . The fourth diagram is a circle with vertices  $m_{i,j}$ ,  $m_3$ , and  $m_{5,r}$ .

Dabei jeweils über gleiche Indizes bei „Produkten“ von Massen mit Koeffizienten zu summieren. Die Koeffizienten bestimmen sich aus (6.106) im Limes verschwindender  $\kappa_i, \lambda_r$  für alle  $i, r$ .

Nach den Residuenintegrationen in  $k_1$  und  $l_1$  lauten die Integrale

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\alpha\beta j_k j_l}^{\pm} &= \int d^4 k d^4 l \frac{(k_0 \pm l_0)^\alpha (l_0 \pm l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_4 P_x P_6} \mathcal{K}^{(j_k)} \mathcal{L}^{(j_l)} \\
&= -4\pi^4 \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha l_0^\beta \sum_{n=1,2} \sum_{m=1}^2 \mathfrak{B}_{n,m}^{kl} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{1}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^2 (\Phi_r - \Phi_m)} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{s+s_0-i\eta} \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&+ 4\pi^4 \sum_{n=3}^{2j_k+2} \sum_{m=1}^2 \sum_{a=0}^{2j_k-2} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha l_0^\beta \mathfrak{B}_{n,m}^{kl} X_{a,n} \frac{1}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^2 (\Phi_r - \Phi_m)} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\Upsilon^{2j_k-1}} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{s^a}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&+ 4\pi^4 \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha l_0^\beta \sum_{n=1,2} \sum_{m=2}^{j_l+2} \mathfrak{B}_{n,m}^{kl} \sum_{b=0}^{j_l-1} Y_{b,m} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^2 (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{1}{\Omega^{j_l}} \frac{1}{\prod_{\substack{r=2 \\ r \neq m}}^{j_l+2} [\Psi_r - \Psi_m]} \\
&\quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{t^b}{s+s_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \\
&- 4\pi^4 \sum_{n=3}^{2j_k+2} \sum_{m=2}^{j_l+2} \sum_{a=0}^{2j_k-2} \sum_{b=0}^{j_l-1} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha l_0^\beta \mathfrak{B}_{n,m}^{kl} X_{a,n} Y_{b,m} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \frac{1}{\prod_{\substack{r=2 \\ r \neq m}}^{j_l+2} [\Psi_r - \Psi_m]} \\
&\quad \frac{1}{\Upsilon^{2j_k-1}} \frac{1}{\Omega^{j_l}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{s^a t^b}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}}
\end{aligned} \tag{6.157}$$

wobei sich die  $Y_{b,m}$  nach (6.149) und (6.150) bestimmen, die  $X_{a,n}$  nach (6.59). Die  $\Gamma_i, \Xi_i$  bestimmen sich aus (6.35), (6.36) bzw. (abhängig von der Topologie) (6.113) sowie (6.41). Die  $\Phi_r, \Psi_r$  berechnen sich mit (6.122), (6.123) bzw. (6.124), sowie (6.129).

Es gilt im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^+$ :

$$\begin{aligned}
a_m &= - \left( 1 + \frac{2(k_0 + l_0)}{\Phi_m} \right) \\
b_{n,m} &= \mathcal{W} + 2(k_0 + l_0) \left( \frac{\Xi_n}{\Gamma_n} + \frac{\Psi_m}{\Phi_m} \right) \\
c_n &= - \left( 1 + \frac{2(k_0 + l_0)}{\Gamma_n} \right)
\end{aligned} \tag{6.158}$$

sowie im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^-$ :

$$\begin{aligned} a_m &= -1 + \frac{2(k_0 + l_0)}{\Phi_m} \\ b_{n,m} &= \mathcal{W} - 2(k_0 + l_0) \left( \frac{\Xi_n}{\Gamma_n} + \frac{\Psi_m}{\Phi_m} \right) \\ c_n &= -1 + \frac{2(k_0 + l_0)}{\Gamma_n} \end{aligned} \quad (6.159)$$

wobei

$$\mathcal{W} = (k_0 + l_0)^2 - m_3^2 \quad (6.160)$$

und

$$\Upsilon = \Gamma_i \quad i = 3, 4, \dots, 2j_k + 2 \quad (6.161)$$

$$\Omega = \Phi_r \quad r = 2, 3, \dots, j_l + 2 \quad (6.162)$$

In allen Fällen gilt (6.88). Weiter gilt

$$s_0 = \frac{-\Xi_2 \Gamma_1 + \Xi_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \quad t_0 = \frac{-\Phi_1 \Psi_2 + \Omega \Psi_1}{\Phi_1 - \Omega} \quad (6.163)$$

Die Theta-Funktionen, die die Grenzen der numerischen Integrationen festlegen, bestimmen sich zu

$$\mathfrak{B}_{n,m}^{kl} = \theta(k_0 + l_0) \theta(\Gamma_n) \theta(\Phi_m) + \theta(-(k_0 + l_0)) \theta(-\Gamma_n) \theta(-\Phi_m) \quad (6.164)$$

im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^+$  sowie

$$\mathfrak{B}_{n,m}^{kl} = \theta(k_0 + l_0) \theta(-\Gamma_n) \theta(-\Phi_m) + \theta(-(k_0 + l_0)) \theta(\Gamma_n) \theta(\Phi_m) \quad (6.165)$$

im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^-$ . Die beitragenden Integrationsgebiete finden sich in Anhang F. Wie im Fall der planaren Topologie setzen sie sich aus Dreiecken zusammen. Hier zeigen wir die Dreiecke graphisch. Die Beiträge im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^+$  sind in Abbildung 6.2 aufgeführt, die Beiträge der Topologie  $\mathcal{R}^-$  in Abbildung 6.3.

### 6.2.2.5 Basisintegrale für die Integration in $s$ und $t$

Die Basisintegrale in  $s$  und  $t$ , welche in nichtverschwindenden Integrationsgebieten auftreten, sind dieselben wie die im Fall der planaren Topologie zu berechnenden, (6.92) und (6.93). Dabei wird  $\mathcal{T}_j$  aus (6.93) bei Abzugstermen in  $k$  wie im Fall der planaren Topologie benötigt für

$$j = 0, 1, 2, \dots, 2j_k - 2 \quad (6.166)$$

Wird in  $l$  abgezogen, so muß man lediglich anstatt  $\mathcal{T}_j(a, b, c, s_0)$  das Integral  $\mathcal{T}_j(c, b, a, t_0)$  verwenden. Die Integrale  $\mathcal{T}_j$  werden hier für

$$j = 0, 1, 2, \dots, j_l - 1 \quad (6.167)$$

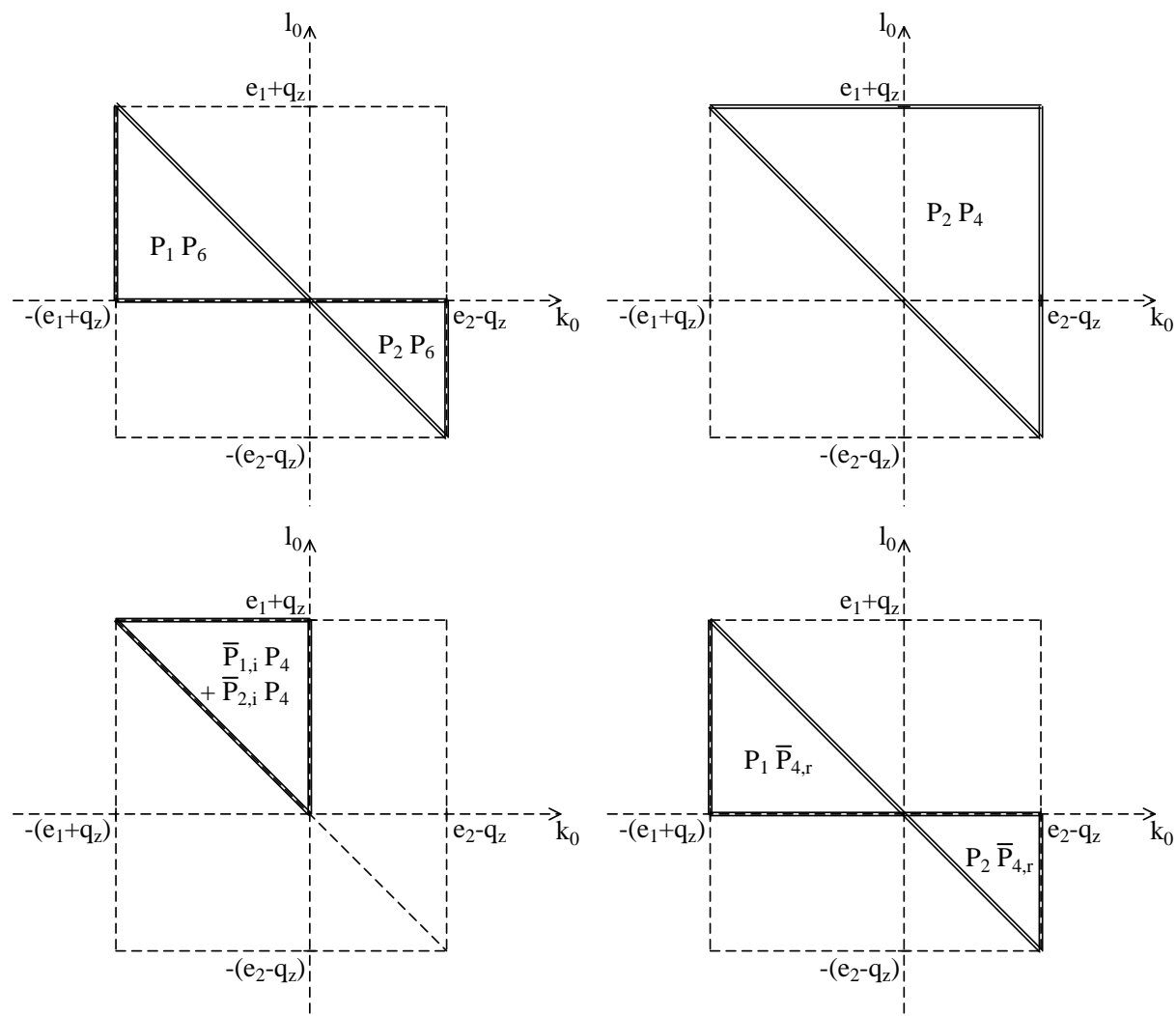
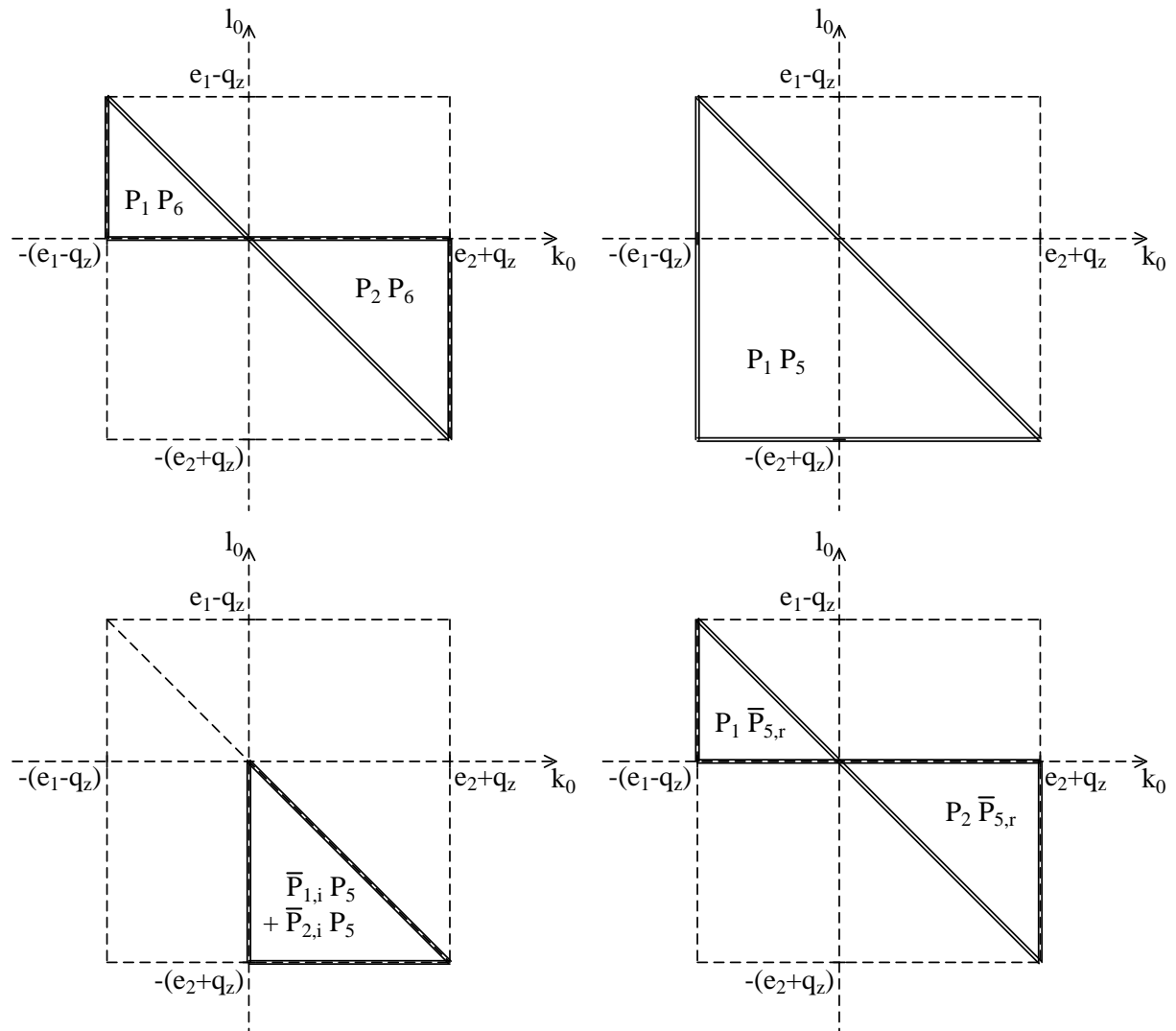


Abbildung 6.2: Gebiete der numerischen Integration im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^+$

Abbildung 6.3: Gebiete der numerischen Integration im Fall der Topologie  $\mathcal{R}^-$



benötigt. Die Integrale

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta} = \lim_{\Lambda_s \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda_t \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{s^\alpha t^\beta}{\sqrt{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (6.168)$$

treten nur in Integrationsgebieten auf, die im Limes verschwindender Grenzübergangsparameter nicht mehr beitragen. In Abschnitt 6.5 beweisen wir, daß hierbei die Integranden in  $k_0, l_0$  endlich bleiben.

### 6.2.3 Symmetrien der Integrale

Die UV-endlichen Integrale mit reduzierter planarer Topologie haben ursprünglich die Form:

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^+ = \int d^4k d^4l \frac{(k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \prod_{i=1}^{j_k} \left(1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}}\right) \prod_{r=1}^{j_l} \left(1 - \frac{P_4}{\bar{P}_{4,r}}\right) \quad (6.169)$$

bzw.

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^- = \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \prod_{i=1}^{j_k} \left(1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}}\right) \prod_{r=1}^{j_l} \left(1 - \frac{P_5}{\bar{P}_{5,r}}\right) \quad (6.170)$$

Linearisiert werden die beiden Integrale mit umgekehrtem Vorzeichen, und zwar im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^+$ , in welcher  $P_5$  gekürzt ist, mit

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 + k_1 \\ l'_0 &= l_0 + l_1 \end{aligned} \quad (6.171)$$

Im Falle der Topologie  $\mathcal{R}^-$ , in welcher  $P_4$  gekürzt ist, wird mit

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 - k_1 \\ l'_0 &= l_0 - l_1 \end{aligned} \quad (6.172)$$

linearisiert. Durch diese Umformungen sind die Faktoren im Zähler nach Linearisierung in beiden Fällen gleich, nämlich

$$(k'_0)^\alpha (l'_0)^\beta \quad (6.173)$$

Transformiert man nun in  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,j_k,j_l}^+$

$$k'_0 \longrightarrow -k'_0 \quad l'_0 \longrightarrow -l'_0 \quad (6.174)$$

und

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_4 \\ m_{1,i} \\ m_{2,i} \\ m_{4,r} \\ e_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} m_2 \\ m_1 \\ m_5 \\ m_{2,i} \\ m_{1,i} \\ m_{5,r} \\ e_2 \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, j_k, \quad \forall r = 1, \dots, j_l \quad (6.175)$$

(wobei die Reihenfolge der  $i, r$  weiter beliebig vertauscht werden kann, wenn man auch die  $\kappa_i, \lambda_r$  entsprechend umordnet), so erhält man bis auf ein eventuelles Vorzeichen das Integral  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta, j_k, j_l}^-$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int d^4k d^4l \frac{(k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \prod_{i=1}^{j_k} \left(1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}}\right) \prod_{r=1}^{j_l} \left(1 - \frac{P_4}{\bar{P}_{4,r}}\right) \\ = & (-1)^{\alpha+\beta} \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \prod_{i=1}^{j_k} \left(1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}}\right) \prod_{r=1}^{j_l} \left(1 - \frac{P_5}{\bar{P}_{5,r}}\right) \end{aligned} \quad (6.176)$$

Dies erkennt man beim genauen Betrachten der expliziten Form der Propagatorfaktoren nach Linearisierung, wenn man weiter

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_4 \\ \bar{P}_{1,i} \\ \bar{P}_{2,i} \\ \bar{P}_{4,i} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \\ P_5 \\ \bar{P}_{2,i} \\ \bar{P}_{1,i} \\ \bar{P}_{5,i} \end{pmatrix} \quad (6.177)$$

transformiert. Dadurch ergeben sich Testmöglichkeiten für die numerischen Untersuchungen. Wir werden diese Symmetrien anhand konkreter Beispiele in Kapitel 7 demonstrieren.

### 6.3 Schnitte und Landau–Singularitäten

Bei der Integration von Feynmanintegralen kann der Integrand im Integrationsgebiet Singularitäten aufweisen. Unter Umständen wird das Integral dann divergent. Ein Beispiel hierfür sind *Endpunktsingularitäten*, das sind Singularitäten am Rand des Integrationsgebiets. Das Integrationsgebiet ist im Falle von Feynmanintegralen unbeschränkt, der Rand befindet sich sozusagen im Unendlichen. Die Endpunktsingularitäten können bei Feynmanintegralen UV–Divergenzen verursachen, vgl. Kap. 5. Mit Hilfe der dimensional Regularisierung werden diese Singularitäten und die daraus folgenden Divergenzen rechentechnisch behandelt und bei der Renormierung beseitigt.

Es können aber auch innerhalb des Integrationsgebiets Singularitäten des Integranden auftreten, welche in manchen Fällen zu weiteren Divergenzen der Feynmanintegrale führen können. Diese können in manchen Fällen nicht regularisiert werden, da es sich um echte physikalische Divergenzen handelt.

Mit Hilfe der *Landau–Gleichungen* [La59] kann für ein beliebiges Feynmanintegral untersucht werden, ob dieses Integral Divergenzen enthält und welcher Art sie sind.

Wir leiten die Landau–Gleichungen Darstellungen von [La59, Bö01] folgend in Anhang I her. Wir untersuchen dort auch, welche Singularitäten in den für uns relevanten Integralen auftreten können. Hier wollen wir die wichtigsten Ergebnisse zusammenfassen.

Dabei werden wir insbesondere Massensingularitäten untersuchen. Das sind Singularitäten, die nur durch die auftretenden Massen, nicht aber durch die Richtungen der Impulse bestimmt werden.

Die wichtigsten Massensingularitäten sind diejenigen, welche durch *Schnitte* der Feynman-graphen beschrieben werden. Anschaulich treten dann Singularitäten auf, wenn beim Zerschneiden eines Graphen die Energien ausreichen, damit innere Teilchen reell und damit erzeugt werden können. Diese Schnitte können durch Anwendung der Cutkosky-Regeln sehr einfach bestimmt werden [Cu60]. Eine ausführliche und verständliche Erläuterung der Cutkosky-Regeln findet man z.B. in [Fr96a].

Wir wollen die in Anhang I hergeleiteten Schnitte und Landau-Singularitäten der in diesem Kapitel behandelten Masterintegrale mit den Parametern im P/O-Raum in Beziehung setzen. Insbesondere wollen wir dabei untersuchen, welche Zweiteilchen- und Dreiteilchenschnitte auftreten können.

Wir setzen die Zweiteilchen- und Dreiteilchenschnitte mit den Parametern  $b_{n,m}$ ,  $s_0$ ,  $t_0$ , welche Basisparameter der Endformeln für die Masterintegrale sind, vgl. die Abschnitte 6.1.2.6 und 6.2.2.4, in Beziehung. Die hierzu notwendigen Berechnungen werden in Anhang I.3 durchgeführt. Hier wollen wir lediglich kurz die Ergebnisse zusammenfassen. Wie wir in Anhang I.3 zeigen, stehen Schwellen immer in Bezug damit, daß mindestens einer der Parameter  $b_{n,m}$ ,  $s_0$ ,  $t_0$  im Integrationsgebiet Null wird. Ein Imaginärteil geht im Fall der von uns betrachteten Masterintegrale immer mit negativem  $s_0$ , negativem  $t_0$  oder positivem  $b$  einher. Dies ersieht man an der Herleitung der analytisch berechneten Basisintegrale in  $s$  und  $t$  in Anhang E. Alle Beiträge zum Imaginärteil enthalten einen Faktor  $\theta(-s_0)$ ,  $\theta(-t_0)$  oder  $\theta(b)$ . Besonders leicht ersichtlich zeigt sich dies an den analytischen Endformeln der cutoff-unabhängigen Anteile der neuen Basisintegrale, welche von den Abzugstermen herrühren, da diese eine geschlossene Form aufweisen, vgl. Anhang E.7.

Die von uns im Folgenden gewählte Darstellung basiert darauf, in die jeweiligen Feynman-graphen die Schnitte einzuzichnen. An die Schnitte werden dabei jeweils auf der einen Seite die Massenkombinationen, bei welchen diese Schnitte auftreten, notiert. Auf der anderen Seite werden die damit in Bezug stehenden Parameter des P/O-Raums notiert. Diese Parameter nehmen in Teilen des Integrationsgebiets die entsprechenden Vorzeichen an, welche ebenfalls notiert sind. In diesen Fällen entstehen Imaginärteile der Integranden. Wie die Analyse in Anhang I.3 zeigt, korrespondieren bei den Massen wie in Abbildung 6.4 notiert die Zweiteilchenschnitte mit den Parametern wie in Abbildung 6.5 und die Dreiteilchenschnitte mit den Parametern wie in Abbildung 6.6 notiert. Der Abzugsterm setzt sich nach Partialbruchzerlegung zusammen aus Topologien der Form wie in Abbildung 6.7 dargestellt. Wir wählen dabei den Beitrag mit Masse  $m_{1,1}$ , alle anderen Abzugsterme der planaren Topologie haben eine analoge Form. Die Zweiteilchenschnitte der Abzugsterme in den Fällen

$$p^2 > (m_4 + m_5)^2 \quad \text{bzw.} \quad p_1^2 > (m_4 + m_6)^2 \quad \text{bzw.} \quad p_2^2 > (m_5 + m_6)^2 \quad (6.178)$$

sind dabei analog zum planaren Fall mit den jeweiligen

$$t_0 = 0 \quad (6.179)$$

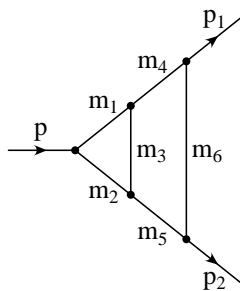


Abbildung 6.4: Massen- und Impulsindizierung bei der planaren Topologie

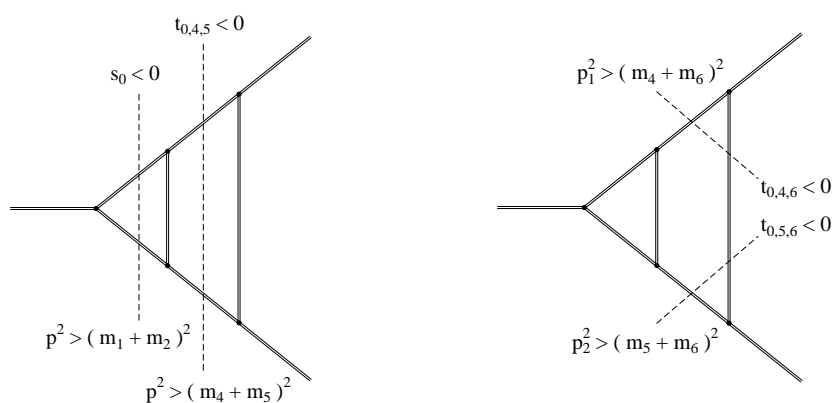


Abbildung 6.5: Zweiteilchenschnitte der planaren Topologie

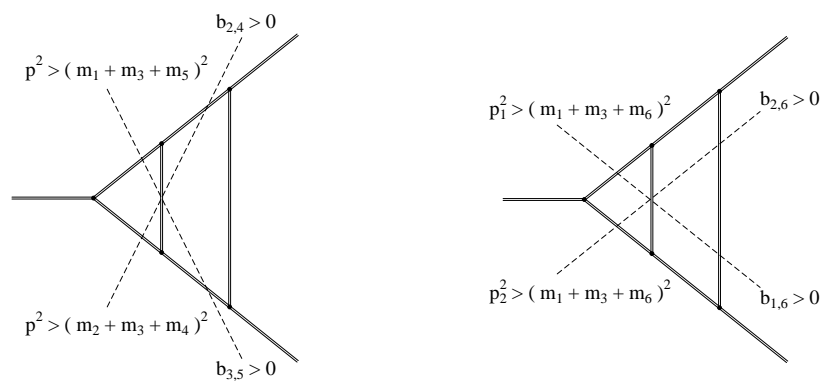


Abbildung 6.6: Dreiteilchenschnitte der planaren Topologie

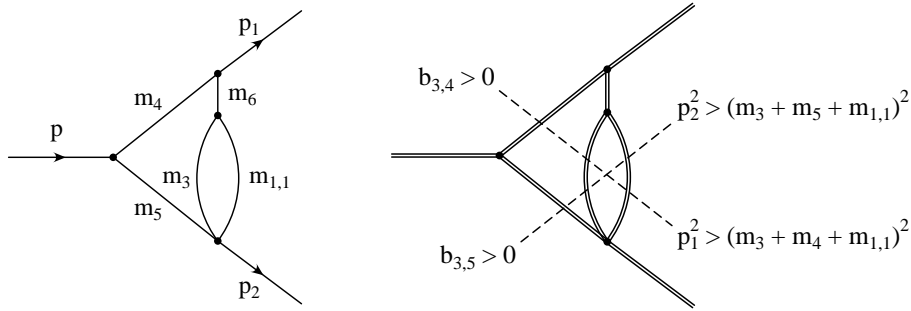


Abbildung 6.7: Generischer Abzugsterm für die planare Topologie, Schnittstruktur

Zur graphischen Darstellung siehe die Abbildungen vom planaren Fall. Andere Zweiteilchenschwellen ( $s_0 = 0$ ) existieren hier nicht, da  $s_0$  kein Parameter der Abzugsintegrale ist. Bei den Abzugstermen korrespondieren die neu hinzu kommenden Dreiteilschnitte mit den Parametern wie in Abbildung 6.7 notiert. In dieser Abbildung ist zu beachten, daß der Index 3 bei  $b_{3,4/5}$  nicht von  $m_3$  herrührt, sondern von der Ummummerierung der Indizes in (6.41), also mit  $m_{1,1}$  korrespondiert. Bei einem Dreiteilschnitt ist  $m_3$  immer relevant, da  $m_3$  in alle  $b_{i,j}$  als Parameter eingeht. Alle anderen Beiträge, die von Abzugstermen in  $k$  herrühren, haben dieselbe Schnittstruktur.

Bei den reduzierten Topologien ändert sich nichts Wesentliches, auch nicht bei Abzugstermen in  $l$ , weil bereits der Propagator  $P_6$  dieselbe Impulsstruktur besitzt wie Abzugsterme in  $l$ . Die Schnitte lassen sich durch Partialbruchzerlegung topologisch immer auf diese Form bringen. Aufgrund dessen, dass ein Propagatorfaktor gekürzt ist, gibt es allerdings weniger Schnittmöglichkeiten. Wir wollen auf die graphische Darstellung hierzu aufgrund ihrer Trivialität verzichten.

Die anderen Landau-Singularitäten, welche von den führenden Singularitäten der weiteren Subgraphen der planaren Topologie (mit mehr als drei Propagatoren) herrühren, werden in Anhang I berechnet.

## 6.4 Numerischer Grenzübergang

Zu Vergleichszwecken haben wir die in diesem Kapitel behandelten Masterintegrale auch mit endlichen  $\kappa_i, \lambda_r$  evaluiert und durch einen numerischen Grenzübergang die Werte bei  $\kappa_i, \lambda_r = 0$  bestimmt. Numerische Vergleiche für Integrale, wie sie mit dem analytischen Grenzübergang berechnet wurden, finden sich im nächsten Kapitel.

Der Algorithmus des numerischen Grenzübergangs unterscheidet sich von den oben beschriebenen insbesondere dadurch, daß als einziges Basisintegral in  $s, t$  (6.92) auftritt. Die Integrale (6.93) treten hier nicht auf. Alle Basisintegrale in  $s, t$  sind wohldefiniert.

Weiter sind die Grenzen der Integrationsgebiete teilweise von den Grenzübergangsparametern abhängig. Es gibt einige Beiträge, welche im Limes verschwindender Grenzübergangsparameter zu Punkten degenerieren.

Wir wollen auf eine ausführliche Darstellung des Algorithmus verzichten. Das Endergebnis lautet für die planare Topologie

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\alpha &= \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \mathcal{K}^{(j_k)} \\
&= -4\pi^4 \sum_{n=1}^{2j_k+2} \sum_{m=4}^6 \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha \mathcal{B}_{n,m}^{kl} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{\rho_m}{\prod_{\substack{j=4 \\ i \neq m}}^6 (\rho_j - \rho_m)} \\
&\quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} \sum_{\substack{j=4 \\ i \neq m}}^6 X_{i,n} Y_{j,m} \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{s+s_{0,i,n}-i\eta} \frac{1}{t+t_{0,j,m}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}}
\end{aligned} \tag{6.180}$$

wobei sich die  $X_{i,n}$  aus einer Partialbruchzerlegung bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\prod_{i=1}^{j_k} [(s+s_{0,2i+1,n})(s+s_{0,2i+2,n})(\Gamma_{2i+1}-\Gamma_n)(\Gamma_{2i+2}-\Gamma_n) - (s+s_{0,1,n})(s+s_{0,2,n})(\Gamma_1-\Gamma_n)(\Gamma_2-\Gamma_n)]}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} (s+s_{0,i,n}-i\eta)} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} \frac{X_{i,n}}{s+s_{0,i,n}-i\eta}
\end{aligned} \tag{6.181}$$

Die  $Y_{r,m}$  sind wie im analytischen Fall, vgl. (6.74).

Für die reduzierten planaren Topologien ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\alpha\beta j_k j_l}^\pm &= \int d^4k d^4l \frac{(k_0 \pm l_0)^\alpha (l_0 \pm l_1)^\beta}{P_1 P_2 P_4 P_x P_6} \mathcal{K}^{(j_k)} \mathcal{L}^{(j_l)} \\
&= -4\pi^4 \sum_{n=1}^{j_k} \sum_{m=1}^{j_l} \int dk_0 dl_0 k_0^\alpha l_0^\beta \mathcal{B}_{n,m}^{kl} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} (\Gamma_i - \Gamma_n)} \frac{1}{\prod_{\substack{r=1 \\ i \neq m}}^{j_l+2} (\Phi_r - \Phi_m)} \\
&\quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} \sum_{\substack{r=1 \\ i \neq m}}^{j_l+2} X_{i,n} Y_{r,m} \int ds dt \frac{1}{s+s_{0,i,n}-i\eta} \frac{1}{t+t_{0,i,m}-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}}
\end{aligned} \tag{6.182}$$

wobei sich die  $Y_{r,m}$  in diesem Fall bestimmen aus

$$\frac{\prod_{r=1}^{j_l} [(\Phi_1 - \Phi_m)(t + t_{0,1,m}) - (\Phi_{r+2} - \Phi_m)(t + t_{0,r+2,m})]}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{j_l+2} [t + t_{0,r,m} - i\eta]} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{j_l+2} \frac{Y_{r,m}}{t + t_{0,r,m} - i\eta} \tag{6.183}$$

Die Integrationsgebiete finden sich für alle drei Topologien in Anhang F.

## 6.5 Verschwindende Integrationsgebiete

Im Limes  $\kappa \rightarrow 0$  und/oder  $\lambda \rightarrow 0$  degenerieren einige der beitragenden Integrationsgebiete zu Punkten. Gleiches gilt in den Fällen  $p_1^2 \rightarrow 0$  sowie  $p_2^2 \rightarrow 0$ . In diesen Fällen muß untersucht werden, ob diese Grenzübergänge erlaubt sind. Es muß sichergestellt werden, daß die Integranden nicht gleichzeitig divergieren. Dies kann durch geeignete Transformationen vor dem Grenzübergang nachgewiesen werden. Im Fall von verschwindenden Grenzübergangsparametern gehen wir von den Darstellungen für den numerischen Grenzübergang in (6.180) bzw. (6.182) aus.

### 6.5.1 Planare Topologie

Unter Verwendung der Darstellung

$$\kappa_i = d_i \kappa \quad (6.184)$$

mit  $d_i > 0$  konstant und positiv transformieren wir für die planare Topologie in (6.180) gleichzeitig

$$\begin{aligned} k_0 &\rightarrow k'_0 = k_0 \kappa \\ l_0 &\rightarrow l'_0 = l_0 \kappa \end{aligned} \quad (6.185)$$

mit

$$\kappa \rightarrow 0 \quad (6.186)$$

Im Grenzfall verschwindenden Grenzübergangsparametern  $\kappa_i$  divergieren die  $s_{0,i,n}$ , wenn man nicht vorher die Transformation (6.185) durchführt. Durch (6.185) werden die  $s_{0,i,n}$  endlich.

Weiter divergieren in (6.180) ohne die Transformation (6.185) die Faktoren der Form

$$\frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} (\Gamma_i - \Gamma_n)} \quad (6.187)$$

Sie verhalten sich wie

$$\frac{1}{\kappa^{2j_k-1}} \quad (6.188)$$

Durch die Anwendung von (6.185) werden auch diese Faktoren im Produkt mit der speziellen Zählerstruktur der Masterintegrale endlich. Denn: Setzt man (6.185) überall ein, so wird ersichtlich, dass keine divergierenden Komponenten mehr auftreten, falls

$$j_k \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 4 \quad (6.189)$$

gilt, also bis zu quadratischen UV-Subdivergenzen in  $k$ . Die Ursache hierfür liegt in der speziellen Zählerstruktur der Masterintegrale, durch welche im Zähler zusätzliche Faktoren der Form

$$k_0^{j_k-1} l_0 \kappa^{3-j_k} \quad (6.190)$$

entstehen, sodaß wir insgesamt für die Summanden mit  $n > 2$  und  $m = 6$  als Vorfaktor

$$\kappa^{3-j_k} \quad (6.191)$$

erhalten, was für  $j_k \leq 3$  konvergent ist, für  $j_k > 3$  aber divergiert. Die anderen Summanden sind analog zum skalaren Fall und unproblematisch.

Der oben ausgearbeitete Algorithmus kann in jedem Fall angewendet werden für die in unserem Fall auftretenden Divergenzen, welche maximal linear sind, d.h.  $\alpha \leq 3$ .

Es zeigt sich aber auch, daß für UV-Divergenzen höheren als quadratischen Grades weitere Untersuchungen vonnöten sind, falls der Algorithmus weiterhin angewendet werden soll. Da dies an dieser Stelle und bei allen innerhalb des SM notwendigen Berechnungen zur zweiten Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , wenn man in Feynman-Eichung rechnet, aber nicht benötigt wird, haben wir dies nicht näher betrachtet.

### 6.5.2 Gedrehter reduzierter planarer Fall

Der Beweis verläuft hier nahezu wie im vorigen Abschnitt. Der Unterschied liegt lediglich darin, daß nun das Verschwinden von Integrationsgebieten durch gleichzeitige Grenzübergänge

$$\kappa_i, \lambda_r \rightarrow 0 \quad (6.192)$$

verursacht werden kann. Dabei gibt es leichte Veränderungen in den Vorfaktoren der vom Schleifenimpuls  $l$  herrührenden Beiträge. Unser Ausgangspunkt ist (6.182).

Setzen wir

$$\kappa_i = x_i \epsilon \quad \lambda_r = y_r \epsilon \quad (6.193)$$

mit  $x_i, y_i$  paarweise verschieden, aber positiv und fest, und  $\epsilon = 0_+$ , so erhalten wir nach den Transformationen

$$k_0 \rightarrow k_0 \epsilon \quad (6.194)$$

$$l_0 \rightarrow l_0 \epsilon \quad (6.195)$$

die relevanten Vorfaktoren zu

$$\mathcal{C}_1 = \epsilon^{\alpha+\beta-2j_k+1}, \quad (6.196)$$

$$\mathcal{C}_2 = \epsilon^{\alpha+\beta-2j_k+1-j_i} \quad (6.197)$$

$$\mathcal{C}_3 = \epsilon^{\alpha+\beta-j_i} \quad (6.198)$$

wobei die  $\mathcal{C}_1$  von der Kombination  $n > 2, m \leq 2$ , die  $\mathcal{C}_2$  von der Kombination  $n \leq 2, m \geq 2$  sowie die  $\mathcal{C}_3$  von der Kombination  $n > 2, m \geq 2$  herrühren. Die Beiträge mit  $m = 2$  können in Terme aufgespalten werden, welche teilweise zu den vom skalaren Fall bekannten Anteilen beitragen, sowie in solche, die von den Abzugstermen herrühren, vgl. Kap. 6.2.2.3. Deswegen trägt  $m = 2$  sowohl zum skalaren Anteil als auch zu den Abzugstermen bei.

Zu berechnen sind jeweils nur diejenigen  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , welche konkret auftreten. Ist ein Abzugsterm in einem Schleifenimpuls für einen bestimmten Schleifenimpuls nicht vorhanden, macht die Berechnung von  $\mathcal{C}_i$  diesbezüglich keinen Sinn.



Das jeweils ungünstigste Verhalten desjenigen  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , welches auftritt, bestimmt die Grenzen der Anwendung unseres Algorithmus. Sind alle  $\mathcal{C}_i$  konvergent, kann der Algorithmus angewendet werden, divergiert einer, sind eingehendere Untersuchungen notwendig, ob der Algorithmus trotzdem angewendet werden kann.

Eine Untersuchung aller von uns benötigten Fälle ergibt, daß die Abzugsprozedur bei allen Masterintegralen, wie sie in SM-Rechnungen bei Verwendung der Feynman-Eichung auftreten können, keine neuen Divergenzen im Limes  $\kappa, \lambda \rightarrow 0$  verursacht.

Das Konvergenzverhalten der durch (6.193) definierten  $\epsilon$  durch Abzugsterme in  $l$  günstiger beeinflußt. Insgesamt können wir festhalten, daß, wenn wir nach Möglichkeit in  $l$  abziehen, Integrale mit Zählerfaktoren in  $k$  bis zur Potenz  $\alpha = 3$  durch die in Kapitel 5 entwickelten Abzugsprozedur regularisiert werden, ohne daß in Teilbeiträgen künstliche Divergenzen eingeführt werden. Für Zählerfaktoren in  $l$  gibt es keine Begrenzung. Diese Aussage gilt auch für das gleichzeitige Auftreten von Zählerfaktoren in  $k$  und  $l$ .

Die maximalen möglichen Tensorgrade der planaren Topologie im Standardmodell bei Berechnungen in der Feynman-Eichung sind  $k^3l^4$ , was sich für die reduzierten gedrehten planaren Topologien durch die Tensorreduktion zu  $k^3l^3$  verringert. Für die Graphen mit (gedrehter oder nicht-gedrehter) reduzierter planarer Topologie ist der maximal mögliche Tensorgrad im SM bei Verwendung der Feynman-Eichung ebenfalls  $k^3l^3$ . Damit entstehen bei SM-Rechnungen maximal Beiträge mit

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & \beta & j_k & j_l & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon^3 \end{array} \quad (6.199)$$

denn die Divergenzgrade einer (gedrehten) reduzierten planaren Topologie mit dem Zähler  $k^3l^3$  betragen ohne Regularisierung durch Abzugsprozedur nach (5.2)

$$\begin{array}{rcl} \omega_k & = & -1 \\ \omega_l & = & -1 \\ \omega & = & -4 \end{array} \quad (6.200)$$

Nach Abzugsprozedur mit  $j_k = 2$ ,  $j_l = 3$  ergibt sich, daß (5.9) nun erfüllt ist:

$$\begin{array}{rcl} \omega + j_k + j_l & = & 1 > 0 \\ \omega_k + j_k & = & 1 > 0 \\ \omega_l + j_l & = & 2 > 0 \end{array} \quad (6.201)$$

Dabei bleiben alle  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , konvergent.

### 6.5.3 Masselose Endzustände

Für diese Untersuchungen können wir von den durch analytischen Grenzübergang erzeugten Formeln in Kap. 6.1.2.6 und 6.2.2.4 ausgehen. Die möglichen Quellen für divergierende Parameter oder Faktoren sind dieselben wie im vorausgegangenen Abschnitt. Die Probleme, welche in diesem Grenzfall auftreten können, treten bereits beim skalaren Fall auf

[Cz94]. Durch das Auftreten von Abzugstermen entstehen im Vergleich zum skalaren Fall keine neuen Schwierigkeiten, da dann die Quellen für mögliche Divergenzen der  $s_0$ ,  $t_0$  bzw. der Vorfaktoren der Nenner durch Differenzen der  $\Gamma_{1,2}$ , der  $\rho_{4,5}$  bzw. der  $\Psi_1$  zu suchen sind, diese aber bei analytischen Grenzübergang im jeweiligen Schleifenimpuls in den Abzugstermen verschwinden. Die Grenzübergänge

$$p_1^2 \longrightarrow 0 \quad \text{und/oder} \quad p_2^2 \longrightarrow 0 \quad (6.202)$$

sind daher jeweils im Wesentlichen analog zum skalaren Fall. Um die dadurch auftretenden Schwierigkeiten im Grenzfall masseloser Endzustände zu vermeiden, haben wir für den planaren Fall eine dahingehend angepasste Darstellung ausgearbeitet, vgl. Kap. 6.1.2.6. Diese erweist sich sofort als konvergent.

Die Formeln für die gedrehten reduzierten planaren Topologien enthalten, bedingt durch die Impulstransformationen (6.99) bzw. (6.100), bereits keinerlei problematische Faktoren mehr, sodaß auch hier das Verschwinden von Gebieten die Konvergenz des Integranden nicht beeinträchtigt.

#### 6.5.4 Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, daß im Falle von verschwindenden Integrationsbereichen im Limes verschwindender Grenzübergangsparameter und/oder Endzustandsmassen die Konvergenz der Integranden in den von uns benötigten Fällen stets gewährleistet ist.

Es hat sich aber auch gezeigt, daß für höhere Tensorgrade diesbezüglich beim jetzigen Kenntnisstand keine Aussage getroffen werden kann. Wenn derartige Integrale mit unserer Abzugsprozedur reguliert werden sollen, dann müssen zuerst weitere Untersuchungen durchgeführt werden. Obige Beweisführung legt allerdings nahe, daß unser Algorithmus zur Berechnung der UV-endlichen Anteile der Masterintegrale ab gewissen Tensorgraden und/oder bestimmten Abzugsmultiplikatoren zumindest in der vorliegenden Form nicht mehr verwendet werden darf.

Die im Standardmodell bei Verwendung der Feynman–Eichung maximal möglichen Tensorgrade des Zählers der planaren Topologie sind

$$k^3 l^4 \quad (6.203)$$

Für die die gedrehten reduzierten planaren Topologien, wie sie nach Tensorreduktion entstehen können, reduziert sich dies auf maximal

$$k^3 l^3 \quad (6.204)$$

Diese Tensorgrade sind auch die größtmöglichen bei (gedrehten) reduzierten planaren Graphen, die direkt im SM bei Verwendung der Feynman–Eichung entstehen.

Alle diese Beiträge können mit unserer Methode uneingeschränkt evaluiert werden, ohne daß Probleme aufgrund verschwindender Integrationsgebiete zu befürchten sind.

# Kapitel 7

## Numerische Integration

Die numerischen Integrationen werden mit dem Monte–Carlo Integrationsprogramm VEGAS [Le80, Kr97] und teilweise zu Vergleichszwecken mit dem Programm Divonne aus der Programmbibliothek CUBA [Ha04] durchgeführt. Eine kurze Beschreibungen aller, teilweise lediglich zu Testzwecken verwendeten, Programme haben wir in Anhang G zusammengestellt. Die von uns nach Tests verschiedenster Integrationsroutinen zur weiteren Verwendung favorisierten Programme sind insbesondere VEGAS sowie Divonne. Zu einer Darstellung der Berechnung der Fehlerabschätzung von Monte–Carlo–Integrationsmethoden siehe z.B. [Kl05].

## 7.1 Vergleiche mit Literaturwerten

Für skalare Integrale mit trivialem Zähler können wir mit Literaturwerten vergleichen. Wir werden uns hier auf die Zusammenfassung der Ergebnisse beschränken und in Anhang H für sämtliche uns bekannten Ergebnisse aus der Literatur Vergleichswerte vorlegen. Die Abweichungen lagen im Rahmen der numerischen Fehler, wie sie für numerische Integrationen zu erwarten sind, im Realteil und meist auch im Imaginärteil im Promillebereich und besser. Selten kamen Abweichungen im Bereich von bis zu einem Prozent vor. Wir haben für die planare Topologie verglichen mit:

- In [Cz94] werden keine Werte angegeben, sondern Graphiken. Wir reproduzieren die Abbildungen 6, 7, 8 und 9 von [Cz94]. Wir konnten darüber hinaus mit einem Programm von A. Frink [Fr01] eine Auswahl von vielen einzelnen Punkten dieser Abbildungen erfolgreich (d.h. mit Abweichungen im Promillebereich) vergleichen.
- Die Werte aus [Fl94b, Fl94a] konnten wir, wie bereits von [Cz94] durchgeführt, nochmals erfolgreich nachrechnen.
- Die in [Fr96b] zu findenden Integrale für die planaren und gedrehten reduzierten planaren Topologien konnten bestätigt werden.
- Es konnten die in [Fe04] berechneten Integrale der Klasse  $V^{231}$  (das ist die planare Topologie), welche zeitartige Zerfallsteilchen aufweisen, d.h. die in [Fe04] auf S. 60 aufgeführten Integrale für  $Z^* \rightarrow b\bar{b}$ ,  $Z^* \rightarrow t\bar{t}$  und  $H^* \rightarrow b\bar{b}$ , erfolgreich getestet werden.

## 7.2 Integrale mit Abzugsterm

### 7.2.1 Vergleich von analytischem mit numerischer Grenzübergang

Zu Testzwecken und um die Stabilität der numerischen Evaluation der Masterintegrale zu demonstrieren, werden in den folgenden Beispielen numerische Grenzübergänge mit analytischen verglichen. Es werden Integrale abhängig von den Grenzübergangsparametern,

welche gegen Null gehen, inklusive Fehlerbalken, dargestellt. Die Werte, die durch analytisch berechnete Grenzwerte erzeugt werden, werden in die Graphiken als Horizontale eingezeichnet. Die Fehlerbalken der analytischen Ergebnisse werden äquidistant eingezeichnet. Diese sind von den Grenzübergangsparametern unabhängig und sind nur deshalb mehrere Male vermerkt, damit der Leser sie mit den Fehlerbalken des numerischen Grenzübergangs vergleichen kann.

Es sei noch vermerkt, daß eine durchgezogene Linie in den folgenden Graphiken von VEGAS herrührt, eine gestrichelte von Divonne.

### 7.2.1.1 Beiträge zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$

Im Hinblick auf die Anwendungen auf den  $Z^0$ -Zerfall wählen wir für die Massen in diesem Abschnitt folgende Werte [Pd05]:

$$M_Z = 91.1876 \text{ GeV} \quad M_W = 80.426 \text{ GeV} \quad m_t = 178 \text{ GeV} \quad m_f = m_b = 0 \text{ GeV} \quad (7.1)$$

Wir können zwar technisch bei der Integration die Masse des  $b$ -Quarks von Null verschieden wählen. Da wir bei der Spurberechnung aber bereits  $m_b = 0$  angenommen haben, was nach [Fr99] erlaubt ist, wollen wir dies in diesem Abschnitt verwenden.

Wir werden folgende Integrale untersuchen:

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^2}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \simeq \text{Diagram (7.2)} \times (k_0 - k_1)^2 \quad (7.2)$$

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^3}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \simeq \text{Diagram (7.3)} \times (k_0 - k_1)^3 \quad (7.3)$$

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 + k_1)^2 (l_0 + l_1)^1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \simeq \text{Diagram (7.4)} \times (k_0 + k_1)^2 (l_0 + l_1) \quad (7.4)$$

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 + k_1)^2 (l_0 + l_1)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \simeq \text{Diagram (7.5)} \times (k_0 + k_1)^2 (l_0 + l_1) \quad (7.5)$$

$$\int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)(l_0 - l_1)}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \simeq \text{Diagram (7.6)} \times (k_0 - k_1)(l_0 - l_1) \quad (7.6)$$

Jedes dieser Integrale tritt bei der Berechnung eines der Feynmandiagramme auf, die für den  $Z^0$ -Zerfall benötigt werden.

Diese Integrale enthalten UV-Divergenzen. Wir verwenden die Abzugsprozedur

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{conv}} + \mathcal{T}_{\text{div}} \quad (7.7)$$

nach Kapitel 5 und Kapitel 6 und berechnen die konvergenten Anteile nach Kapitel 6. Dabei wählen wir Abzugsmassen, welche insbesondere das Einführen möglicher neuer Singularitäten verhindern. Die Summe von konvergentem Integral und den Abzugstermen muß unabhängig von der Wahl der Abzugsmassen sein. Dies ist zu testen, sobald die bekannten Integrationsmethoden zur Integration von Zweischleifenvertexfunktionen mit Zweipunkt-subloop implementiert sind [Ba94a, Ba94b, Po97], was in einem Folgeprojekt durchgeführt werden soll und nicht Teil dieser Arbeit ist. In allen Fällen gilt:

$$\sqrt{p^2} = M_Z \quad \sqrt{p_1^2} = \sqrt{p_2^2} = m_f = 0 \text{ GeV} \quad (7.8)$$

wobei wir bei den numerischen Grenzübergängen die Massen aus technischen Gründen geringfügig von Null verschieden wählen, was sich aber hinsichtlich der Ergebnisse im Nullpunkt der Parameter  $\kappa, \lambda$  als im Rahmen der Standardabweichungen verträglich erweist. Wir wählen die Massen zwischen 0.1 GeV und 1 GeV, da teilweise bei zu kleinen Massen Instabilitäten sehr nahe bei Null auftreten können, welche sich bei näherer Untersuchung als durch Rundungsfehler verursacht erweisen.

### 7.2.1.2 Planare Topologie

Als erstes Beispiel berechnen wir das nach Abzugsprozedur konvergente Integral

$$\mathcal{P}_2^{tttZZ} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^2}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,1}(\kappa) \bar{P}_{2,1}(\kappa)} \right) \\ \simeq \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] \times (k_0 - k_1)^2 \quad (7.9)$$

Die physikalischen Massen sind

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_t \quad m_4 = m_5 = M_Z \quad m_6 = m_f \quad (7.10)$$

Die Abzugsmassen wählen wir zu

$$m_{1,1} = 150 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 160 \text{ GeV} \quad (7.11)$$

Wir berechnen das Integral in 50 Punkten für verschiedene (dimensionslose) Grenzübergangparameter  $\kappa \in (0, 0.5]$  und nähern die so entstandene Kurve durch Polynome möglichst niedrigen Grades an, um den so in Null extrapolierten Grenzwert mit dem Integral zu vergleichen, bei welchem wir analytisch  $\kappa = 0$  gesetzt haben.

Der Imaginärteil ist bei diesem Integral Null, da keine Schwellen auftreten.

$$\text{Im}(\mathcal{P}_2^{tttZZ}) \equiv 0 \quad (7.12)$$

Graphisch stellen wir den Realteil in Abbildung 7.1 dar. Die Integrationsergebnisse sind in  $\text{GeV}^{-2}$  angegeben.

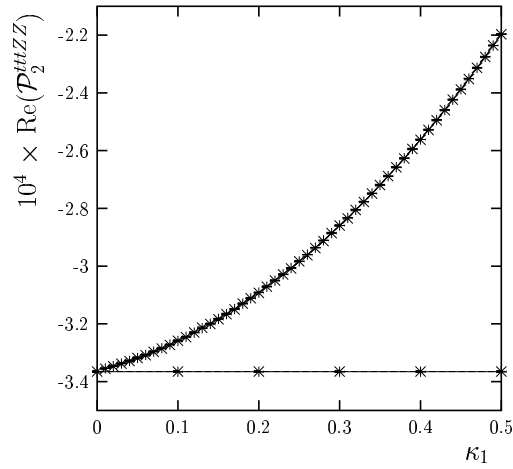


Abbildung 7.1: Realteil von  $\mathcal{P}_2^{ttZZ}$  in  $\text{GeV}^{-2}$  als Funktion von  $\kappa = \kappa_1$ . Die durchgezogenen Linien sind von VEGAS, die gestrichelten Linien sind von Divonne. Da sich die Kurven überlappen und die Fehlerbalken relativ klein sind, sind die durch VEGAS bzw. Divonne erzeugten Linien graphisch hier nicht unterscheidbar.

Wir erhalten als Extrapolationswert für polynomiale Fits mit verschiedenen Polynomgraden die Grenzwerte:

Bei VEGAS-Integration

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$
0	$-2.941141 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^7$
1	$-3.484637 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-9}$	$3.8 \cdot 10^5$
2	$-3.361064 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^1$
3	$-3.361950 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^0$
4	$-3.361836 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^0$
5	$-3.361884 \cdot 10^{-4}$	$8.6 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^0$
6	$-3.361693 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^0$

(7.13)

Bei Integration mit Divonne:

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$
0	$-2.812493 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^4$
1	$-3.528422 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^2$
2	$-3.361106 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$
3	$-3.362654 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$
4	$-3.363009 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$
5	$-3.362942 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$
6	$-3.362093 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-7}$	$7.1 \cdot 10^{-2}$

(7.14)

Führen wir den Grenzübergang analytisch durch, so erhalten wir bei Integration mit VEGAS:

$$\mathcal{P}_2^{tttZZ} = -3.365555 \cdot 10^{-4} \pm 7.2 \cdot 10^{-9} \quad (7.15)$$

und mit Divonne

$$\mathcal{P}_2^{tttZZ} = -3.3652 \cdot 10^{-4} \pm 3.3 \cdot 10^{-7} \quad (7.16)$$

Der Wert des Integrals wird durch das Polynom zweiten Grades bereits sehr gut angenähert. Dort ist auch  $\frac{\chi^2_{\text{Red}}}{n-1}$  bereits größenordnungsmäßig eins. Das erste Beispiel zeigt, daß die beiden Methoden innerhalb der Fehler gleiche Ergebnisse liefern. Da sich dies auch in den folgenden Beispielen als zutreffend erweist, kann von der Richtigkeit des Algorithmus und seiner Implementation ausgegangen werden.

Als „Faustregel“ für eine sinnvolle Näherung der Kurven, wie wir sie durch den numerischen Grenzübergang erhalten, durch Polynome  $n$ -ten Grades kann man das Ziel angeben, das Optimum der Kombination aus möglichst kleinem Polynomgrad mit einem Wert von  $\frac{\chi^2}{n-1}$  möglichst nahe bei 1 zu erreichen. Eine verbindliche mathematische Vorschrift ist ohne weitere Annahmen nicht möglich. Wir werden bei den folgenden Fits auch nur noch jeweils ein oder zwei Fitergebnisse angeben. Unser Ziel ist, die Konsistenz des analytischen Grenzübergangs zu demonstrieren. Dieser zeichnet sich insbesondere dadurch aus, daß hier nur *ein* Integral berechnet werden muß im Gegensatz zum Berechnen und Fitten im Fall des numerischen Grenzübergangs, wo ist eine Vielzahl von Integralen zu berechnen ist. Praktische Rechnungen können damit kaum durchgeführt werden.

Der divergente Abzugsterm, der getrennt zu berechnen ist, hat die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{div} &= \frac{1}{m_{2,1}^2 - m_{1,1}^2} \left[ \int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^2}{\bar{P}_{1,1}(\kappa = 0) P_3 P_4 P_5 P_6} - \int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)^2}{\bar{P}_{2,1}(\kappa = 0) P_3 P_4 P_5 P_6} \right] \\ &\simeq \frac{1}{m_{2,1}^2 - m_{1,1}^2} \left[ \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \right] \times (k_0 - k_1)^2 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die Abzugsterme sind Zweischleifen–Dreipunktfunktionen mit Zweipunktsubloop. Sie werden hier nicht betrachtet, da für ihre Evaluation bewährte Rechenverfahren existieren [Ba94b, Ba94a, Po97].

Als weiteres Beispiel betrachten wir ein linear divergentes Integral, welches zwei Abzugsterme benötigt. Wieder setzen wir beim analytischen Grenzübergang die Masse der leichten Fermionen zu 0, beim numerischen Grenzübergang belassen wir sie bei 1 GeV. Die Massen der inneren Linien sind:

$$m_1 = m_2 = m_f \quad m_3 = m_t \quad m_4 = m_5 = M_W \quad m_6 = m_f \quad (7.18)$$

$$m_{1,1} = 150 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 160 \text{ GeV} \quad m_{1,2} = 170 \text{ GeV} \quad m_{2,2} = 180 \text{ GeV} \quad (7.19)$$

Die Grenzübergangparameter wählen wir im Verhältnis

$$\kappa_2 = 0.4 \cdot \kappa_1 \quad (7.20)$$



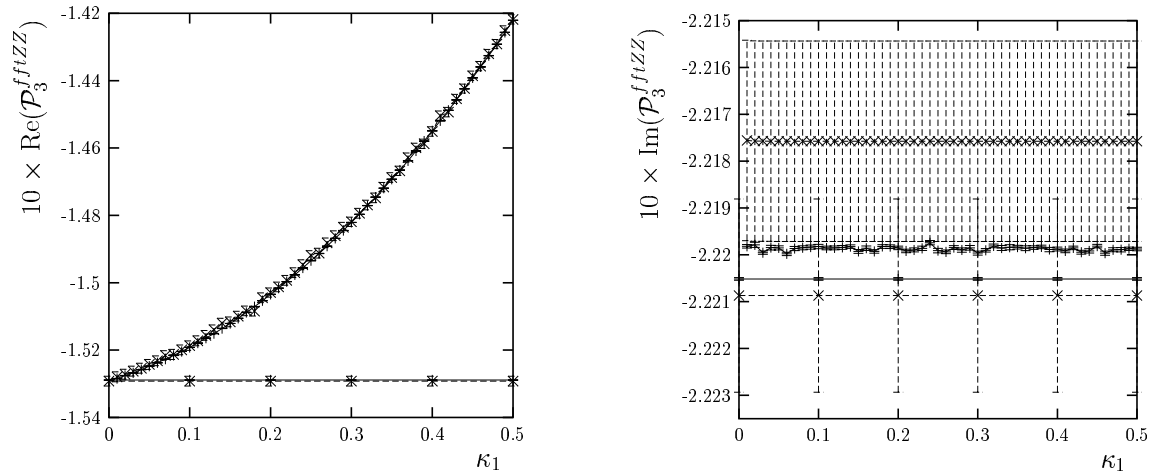


Abbildung 7.2: Real- und Imaginärteil von  $\mathcal{P}_3^{fftWW}$  in  $\text{GeV}^{-1}$  als Funktion von  $\kappa_1$  mit  $\kappa_2 = 0.4 \cdot \kappa_1$ . Die durchgezogenen Linien und Fehlerbalken sind von VEGAS, die gestrichelten von Divonne. Beim Imaginärteil ist die oberste Linie vom numerischen Grenzübergang mit Divonne, die zweitoberste Linie vom numerischen Grenzübergang mit VEGAS, die dritte von oben vom analytischen Grenzübergang mit VEGAS und die vierte vom analytischen Grenzübergang mit Divonne.

und evaluieren das Integral

$$\mathcal{P}_3^{fftWW} = \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^3}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \prod_{i=1}^2 \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i}(\kappa_i) \bar{P}_{2,i}(\kappa_i)} \right) \quad (7.21)$$

In Abbildung 7.2 sind die Integrationsergebnisse in  $\text{GeV}^{-1}$  graphisch dargestellt.

Der Imaginärteil ist in diesem Fall von den Abzugsparametern unabhängig und konstant. Der Grund hierfür ist, daß der Abzugsterm mangels Schwellen keinen Beitrag zum Imaginärteil liefern kann, der Imaginärteil folglich von  $\kappa$  unabhängig sein muß. Deshalb geben wir für den Fit des Imaginärteils den Fit an eine Konstante an, für den Realteil den Fit nach der oben gegebenen Regel.

Die Fehlerbalken der verschiedenen Methoden überschneiden sich in Abbildung 7.2 bei Verwendung von Divonne auch beim Imaginärteil. Obgleich sich beim Imaginärteil für VEGAS in derselben Abbildung die Fehlerbalken der durch die beiden Methoden erzeugten Kurven nicht überschneiden, beträgt die relative Abweichung im Falle von VEGAS lediglich  $2.9 \cdot 10^{-4}$  beim Fit des numerischen Grenzübergangs mit einer Konstanten. Da der Imaginärteil konstant ist, fällt dies besonders auf, ist aber kein Grund zur Besorgnis, zumal die Fermionmassen so gewählt wurden, daß sie sich geringfügig unterscheiden, beim numerischen Grenzübergang zu  $m_f = 1/3 \text{ GeV}$  und beim analytischen Grenzübergang zu  $0 \text{ GeV}$ . Wir haben uns Plots mit verschiedenen  $m_f \simeq 0$  angeschaut und festgestellt, dass sich, je näher  $m_f$  zu  $0$  geht, der Wert dem Wert, den wir analytisch festgestellt haben,

nähert. Wird  $m_f$  aber kleiner als der hier benutzte Wert, so kommt es für kleines  $\kappa_1$  zu numerischen Instabilitäten.

Die Integration mit VEGAS ergibt

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
0	$-1.488739 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-7}$	$8.8 \cdot 10^5$	$-2.219872 \cdot 10^{-1}$	$5.9 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^0$
2	$-1.529101 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^0$	$-2.219873 \cdot 10^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^0$

(7.22)

Divonne ergibt

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
0	$-1.484358 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^2$	$-2.217574 \cdot 10^{-1}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$
3	$-1.528725 \cdot 10^{-1}$	$8.9 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$-2.217568 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-7}$

(7.23)

Bei analytischem Grenzübergang erhalten wir mit VEGAS:

$$\mathcal{P}_3^{fftWW} = (-1.528898 \cdot 10^{-1} \pm 2.1 \cdot 10^{-6}) + (-2.220516 \cdot 10^{-1} \pm 2.9 \cdot 10^{-6})i \quad (7.24)$$

und mit Divonne

$$\mathcal{P}_3^{fftWW} = (-1.5292 \cdot 10^{-1} \pm 1.4 \cdot 10^{-4}) + (-2.2208 \cdot 10^{-1} \pm 2.1 \cdot 10^{-4})i \quad (7.25)$$

Die Ergebnisse sind in  $\text{GeV}^{-1}$  angegeben.

### 7.2.1.3 Gedrehte reduzierte planare Topologien

Wir betrachten den konvergenten Teil verschiedener gedrehter reduzierter planaren Topologien. Als erstes Beispiel untersuchen wir das Integral

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,1,0,1}^- &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)(l_0 - l_1)}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \left( 1 - \frac{P_5}{\bar{P}_{5,1}(\lambda)} \right) \\ &\simeq \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] \times (k_0 - k_1)(l_0 - l_1) \end{aligned} \quad (7.26)$$

The diagrams show two planar topologies. The first diagram has vertices  $z^0$ ,  $z^+$ , and  $z^-$ . The second diagram has vertices  $z^0$ ,  $m_{5,1}$ ,  $z^+$ , and  $z^-$ . Both diagrams feature internal lines labeled  $f$ .

Die Massen sind:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_f \quad m_5 = M_Z \quad m_6 = m_f \quad m_{5,1} = 110 \text{ GeV} \quad (7.27)$$

Die Kurven werden in Abbildung 7.3 als Funktion des Abzugsparameters in  $l$ ,  $\lambda$ , dargestellt. Das Integrationsergebnis ist dimensionslos.

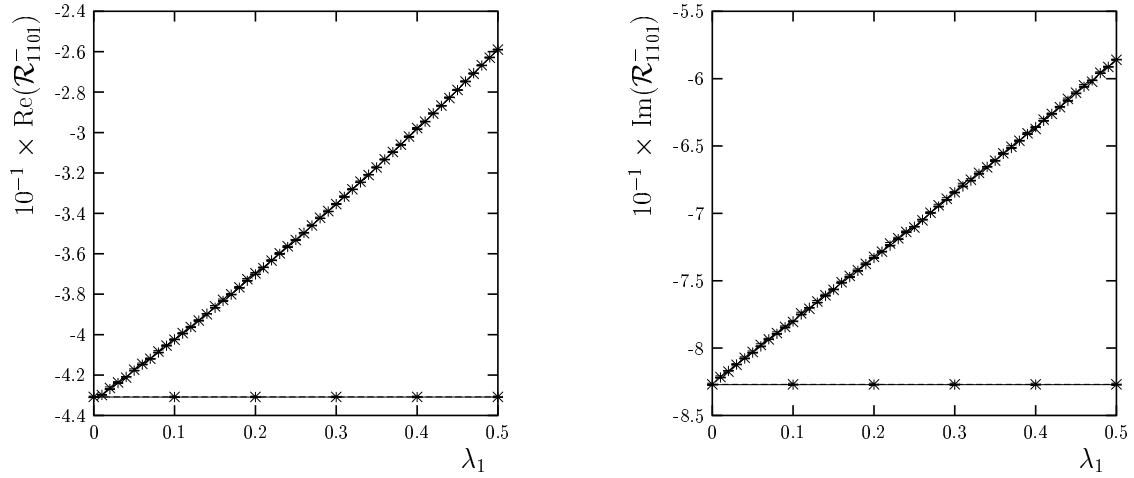


Abbildung 7.3: Real- und Imaginärteil von  $\mathcal{R}_{1,1,0,1}^{-1}$  als Funktion von  $\lambda_1 = \lambda$ . Die durchgezogenen Linien und Fehlerbalken sind von VEGAS, die gestrichelten von Divonne. Die Linien überlappen sich, sodaß sie auf dieser Skala nicht getrennt werden können. Auch der Imaginärteil konvergiert sehr gut für verschwindenden Grenzübergangsparameter.

Polynomial-Extrapolation ergibt bei VEGAS:

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
2	$-4.326478 \cdot 10^1$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-1}$	$-8.258715 \cdot 10^1$	$1.13 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^0$
5	$-4.327644 \cdot 10^1$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$7.0 \cdot 10^{-1}$	$-8.263458 \cdot 10^1$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^0$

(7.28)

und bei Divonne:

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
2	$-4.324439 \cdot 10^1$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$5.4 \cdot 10^{-1}$	$-8.258589 \cdot 10^1$	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$9.1 \cdot 10^{-1}$
6	$-4.325626 \cdot 10^1$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-1}$	$-8.268207 \cdot 10^1$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	$8.8 \cdot 10^{-1}$

(7.29)

Das mit analytischem Grenzübergang erhaltene Ergebnis ist mit VEGAS:

$$\mathcal{R}_{1,1,0,1}^{-1} = (-4.3091 \cdot 10^1 \pm 1.1 \cdot 10^{-2}) + (-8.2711 \cdot 10^1 \pm 2.7 \cdot 10^{-2})i \quad (7.30)$$

mit Divonne

$$\mathcal{R}_{1,1,0,1}^{-1} = (-4.3081 \cdot 10^1 \pm 4.2 \cdot 10^{-2}) + (-8.2692 \cdot 10^1 \pm 8.2 \cdot 10^{-2})i \quad (7.31)$$

Das durch analytischen Grenzübergang erzeugte Ergebnis wollen wir im Folgenden stets als Endergebnis bezeichnen.

Der Abzugsterm ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{div} &= \frac{1}{m_6^2 - m_{5,1}^2} \left[ \int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)(l_0 - l_1)}{P_1 P_2 P_3 \bar{P}_{5,1}(\lambda = 0)} - \int d^D k d^D l \frac{(k_0 - k_1)(l_0 - l_1)}{P_1 P_2 P_3 P_6} \right] \\
&\simeq \frac{1}{m_6^2 - m_{5,1}^2} \left[ \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \right] \times (k_0 - k_1)(l_0 - l_1)
\end{aligned} \tag{7.32}$$

und muß gesondert berechnet werden.

Als nächsten Fall betrachten wir eine gemischte Zählerstruktur mit globaler linearer Divergenz. Wir werden diese durch je einen Abzugsterm in beiden Schleifenimpulsen regularisieren<sup>1</sup>. Die Massen sind

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_f \quad m_4 = M_W \quad m_6 = m_f \tag{7.33}$$

und

$$m_{1,1} = 200 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 300 \text{ GeV} \quad m_{4,1} = 110 \text{ GeV} \tag{7.34}$$

Wir wählen als Verhältnis der Grenzübergangparameter

$$\kappa_1 = 0.7 \cdot \lambda_1 \tag{7.35}$$

und berechnen

$$\mathcal{R}_{2,1,1,1}^+ = \int d^4 k d^4 l \frac{(k_0 + k_1)^2 (l_0 + l_1)^1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,1}(\kappa_1) \bar{P}_{2,1}(\kappa_1)} \right) \left( 1 - \frac{P_4}{\bar{P}_{4,1}(\lambda_1)} \right) \tag{7.36}$$

Die Integrationsergebnisse, welche in GeV angegeben werden, sind in Abbildung 7.4 als Funktion von  $\lambda_1$  dargestellt.

Die Polynomextrapolation der VEGAS-Resultate ergibt:

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
2	$2.710150 \cdot 10^3$	$3.0 \cdot 10^{-1}$	$8.5 \cdot 10^{-1}$	$6.670793 \cdot 10^3$	$7.7 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^0$

(7.37)

Bei Verwendung von Divonne erhalten wir

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
2	$2.709377 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^0$	$4.4 \cdot 10^{-1}$	$6.669101 \cdot 10^3$	$2.7 \cdot 10^0$	$3.7 \cdot 10^{-1}$
6	$2.708011 \cdot 10^3$	$3.2 \cdot 10^0$	$4.3 \cdot 10^{-1}$	$6.671788 \cdot 10^3$	$8.1 \cdot 10^0$	$3.5 \cdot 10^{-1}$

(7.38)

Das Endergebnis ist mit VEGAS:

$$\mathcal{R}_{2,1,1,1}^+ = (2.71125 \cdot 10^3 \pm 7.0 \cdot 10^{-1}) + (6.6703 \cdot 10^3 \pm 1.7 \cdot 10^0)i \tag{7.39}$$

<sup>1</sup>Man kann sie auch durch einen doppelten Abzugsterm im linken Schleifenimpuls regularisieren.

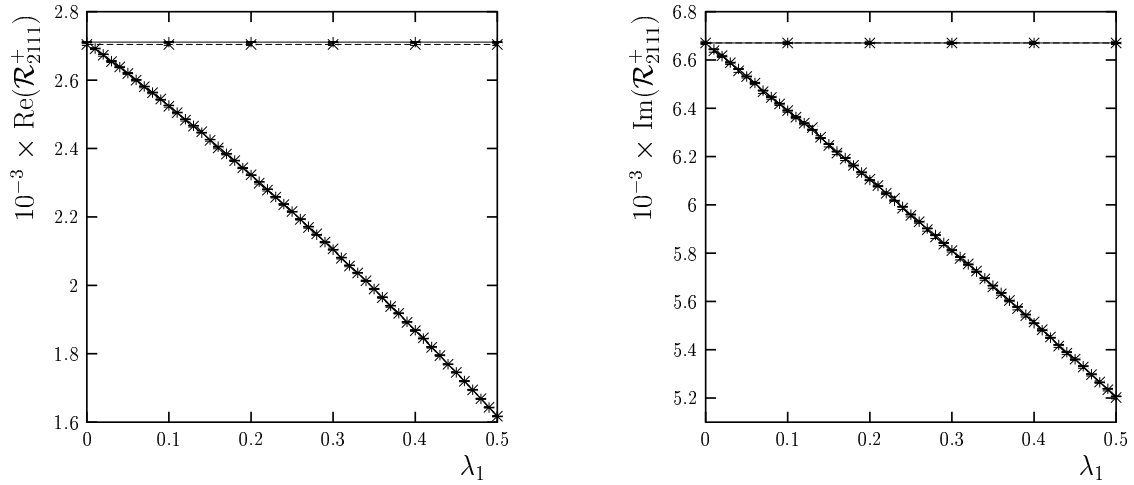


Abbildung 7.4: Real- und Imaginärteil von  $\mathcal{R}_{2,1,1,1}^+$  in GeV als Funktion von  $\lambda_1$  mit  $\kappa_1 = 0.7 \cdot \lambda_1$ . Die durchgezogenen Linien und Fehlerbalken sind von VEGAS, die gestrichelten von Divonne. Bei genauer Betrachtung kann man erkennen, daß die Linien des Realteils insbesondere beim Endergebnis innerhalb der Fehler leicht voneinander abweichen.

und mit Divonne

$$\mathcal{R}_{2,1,1,1}^+ = (2.7042 \cdot 10^3 \pm 2.6 \cdot 10^0) + (6.6735 \cdot 10^3 \pm 6.6 \cdot 10^0)i \quad (7.40)$$

Als letztes Beispiel für die Untergraphen des  $Z^0$ -Zerfalls betrachten wir eine gemischte Zählerstruktur mit globaler linearer Divergenz. Wir werden diese durch zwei Abzugsterme im Schleifenimpuls  $k$  beseitigen. Alternativ dazu könnte man sie auch wie im vorigen Beispiel durch je einen Abzugsterm in beiden Schleifenimpulsen regularisieren.

Die Massen sind

$$m_1 = m_2 = m_t \quad m_3 = m_f \quad m_4 = M_W \quad m_6 = m_f \quad (7.41)$$

$$m_{1,1} = 200 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 300 \text{ GeV} \quad m_{1,2} = 150 \text{ GeV} \quad m_{2,2} = 130 \text{ GeV} \quad (7.42)$$

Die Abzugsparameter wählen wir im Verhältnis

$$\kappa_1 = 0.7 \cdot \kappa_2 \quad (7.43)$$

und berechnen

$$\mathcal{R}_{2120}^+ = \int 4^D k d^4 l \frac{(k_0 + k_1)^2 (l_0 + l_1)^1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \prod_{i=1}^2 \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i}(\kappa_i) \bar{P}_{2,i}(\kappa_i)} \right) \quad (7.44)$$

Graphisch sind die Ergebnisse in Abbildung 7.5 dargestellt. Die Einheit der Ergebnisse ist GeV.

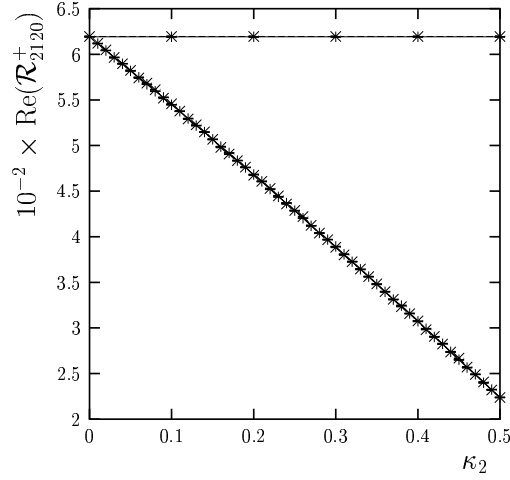


Abbildung 7.5: Realteil von  $\mathcal{R}_{2,1,2,0}^+$  in GeV als Funktion von  $\kappa_2$  mit  $\kappa_1 = 0.7 \cdot \kappa_2$ . Die durchgezogenen Linien und Fehlerbalken sind von VEGAS, die gestrichelten von Divonne.

Polynom-Extrapolation ergibt bei VEGAS:

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	(7.45)
2	$6.190992 \cdot 10^2$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^0$	

und bei Divonne:

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	(7.46)
2	$6.196907 \cdot 10^2$	$2.3 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^0$	

Das Endergebnis ist mit VEGAS:

$$\mathcal{R}_{2120}^+ = 6.1909 \cdot 10^2 \pm 2.9 \cdot 10^{-1} \quad (7.47)$$

und mit Divonne

$$\mathcal{R}_{2120}^+ = 6.1958 \cdot 10^2 \pm 6.1 \cdot 10^{-1} \quad (7.48)$$

Der Imaginärteil ist konstant 0, da keine Schwellen vorhanden sind.

Zum Vergleich geben wir noch das VEGAS-Ergebnis der gespiegelten Topologie an (alle Massen und Impulse gespiegelt)

$$\mathcal{R}_{2120}^- = \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^2 (l_0 - l_1)^1}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \prod_{i=1}^2 \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}} \right) = -6.1907 \cdot 10^2 \pm 2.7 \cdot 10^{-1} \quad (7.49)$$

welches im Rahmen der Fehler mit dem vorigen bis auf das Vorzeichen (vgl. Kap. 6.2.3) mit der relativen Abweichung von  $6.5 \cdot 10^{-4}$  übereinstimmt.

### 7.2.1.4 Allgemeiner Massenfall

Um die Zuverlässigkeit im allgemeinen Massenfall, d.h. insbesondere auch für auslaufende Teilchen mit von Null verschiedener Masse, zu demonstrieren, führen wir noch Beispiele mit willkürlich gewählten Massen auf, welche darüber hinaus etliche Schwellen aufweisen. Wir betrachten als erstes Beispiel die planare Topologie mit den äußeren Massen

$$\sqrt{p^2} = 505 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_1^2} = 60 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_2^2} = 20 \text{ GeV} \quad (7.50)$$

den inneren Massen

$$\begin{aligned} m_1 &= 420 \text{ GeV} & m_2 &= 80 \text{ GeV} & m_3 &= 100 \text{ GeV} \\ m_4 &= 120 \text{ GeV} & m_5 &= 200 \text{ GeV} & m_6 &= 300 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (7.51)$$

sowie den Abzugsmassen

$$m_{1,1} = 100 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 200 \text{ GeV} \quad m_{1,2} = 350 \text{ GeV} \quad m_{2,2} = 450 \quad (7.52)$$

Für den numerischen Grenzübergang verwenden wir

$$\kappa_2 = 0.6 \cdot \kappa_1 \quad (7.53)$$

und integrieren

$$\mathcal{P}_3 = \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^3}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \prod_{i=1}^2 \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i}(\kappa_i) \bar{P}_{2,i}(\kappa_i)} \right) \quad (7.54)$$

Graphisch stellen wir die Ergebnisse in  $\text{GeV}^{-1}$  in Abbildung 7.6 dar.

Die Polynomextrapolation mit VEGAS für den numerischen Grenzübergang ergibt

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
5	$9.374567 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^0$	$-9.251787 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^0$

(7.55)

Das Endergebnis ist mit VEGAS:

$$\mathcal{V}_3 = (9.3737 \cdot 10^{-1} \pm 1.9 \cdot 10^{-4}) + i(-9.2559 \cdot 10^{-1} \pm 1.9 \cdot 10^{-4}) \quad (7.56)$$

und mit Divonne

$$\mathcal{V}_3 = (9.3689 \cdot 10^{-1} \pm 9.2 \cdot 10^{-4}) + i(-9.2522 \cdot 10^{-1} \pm 9.0 \cdot 10^{-4}) \quad (7.57)$$

Zur Demonstration, daß wir mit Hilfe unseres Algorithmus alle im SM möglichen Integrale, wie sie bei Verwendung der Feynman-Eichung entstehen können, berechnen können, betrachten wir ein letztes Beispiel mit willkürlich gewählten Massen. Es ist dies ein Masterintegral, welches den maximalen Grad in beiden Schleifenimpulsen aufweist, wie es durch

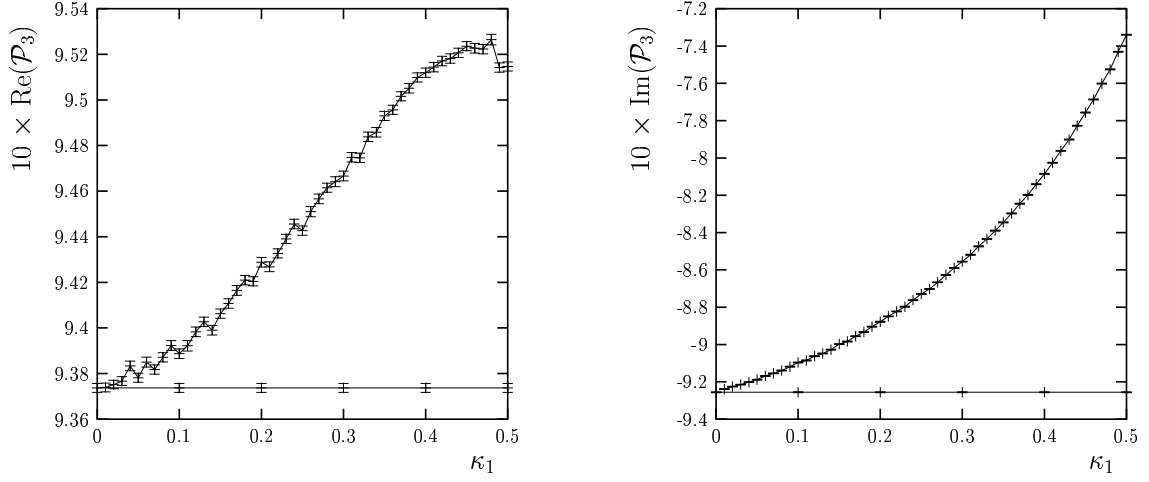


Abbildung 7.6: Real- und Imaginärteil von  $\mathcal{P}_3$  mit VEGAS als Funktion von  $\kappa_1$  mit  $\kappa_2 = 0.6 \cdot \kappa_1$  in  $\text{GeV}^{-1}$ .

unsere Tensorreduktion aus (planaren) Graphen des SM oder durch SM-Graphen direkt entstehen kann, wenn man die Feynman-Eichung verwendet. Wir berechnen

$$\mathcal{R}_{3,3,2,3}^+ = \int d^4k d^4l \frac{(k_0 + k_1)^3 (l_0 + l_1)^3}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_6} \prod_{i=1}^2 \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{P_{1,i}(\kappa_i) P_{2,i}(\kappa_i)} \right) \prod_{r=1}^3 \left( 1 - \frac{P_4}{P_{4,r}(\lambda_r)} \right) \quad (7.58)$$

mit den äußeren Impulsen

$$\sqrt{p^2} = 100 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_1^2} = 35 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_2^2} = 60 \text{ GeV} \quad (7.59)$$

den inneren Massen

$$m_1 = 20 \text{ GeV} \quad m_2 = 5 \text{ GeV} \quad m_3 = 40 \text{ GeV} \quad m_4 = 20 \text{ GeV} \quad m_6 = 10 \text{ GeV} \quad (7.60)$$

sowie den Abzugsmassen im Schleifenimpuls  $k$ , die wir wählen zu

$$m_{1,1} = 110 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 120 \text{ GeV} \quad m_{1,2} = 130 \text{ GeV} \quad m_{2,2} = 140 \text{ GeV} \quad (7.61)$$

und den Abzugsmassen im Schleifenimpuls  $l$ , welche gesetzt werden als

$$m_{4,1} = 150 \text{ GeV} \quad m_{4,2} = 160 \text{ GeV} \quad m_{4,3} = 170 \text{ GeV} \quad (7.62)$$

Für den numerischen Grenzübergang wählen wir die Verhältnisse

$$\kappa_1 = 0.7 \cdot \kappa_2 \quad \lambda_1 = 0.1 \cdot \kappa_2 \quad \lambda_2 = 0.6 \cdot \kappa_2 \quad \lambda_3 = 0.8 \cdot \kappa_2 \quad (7.63)$$



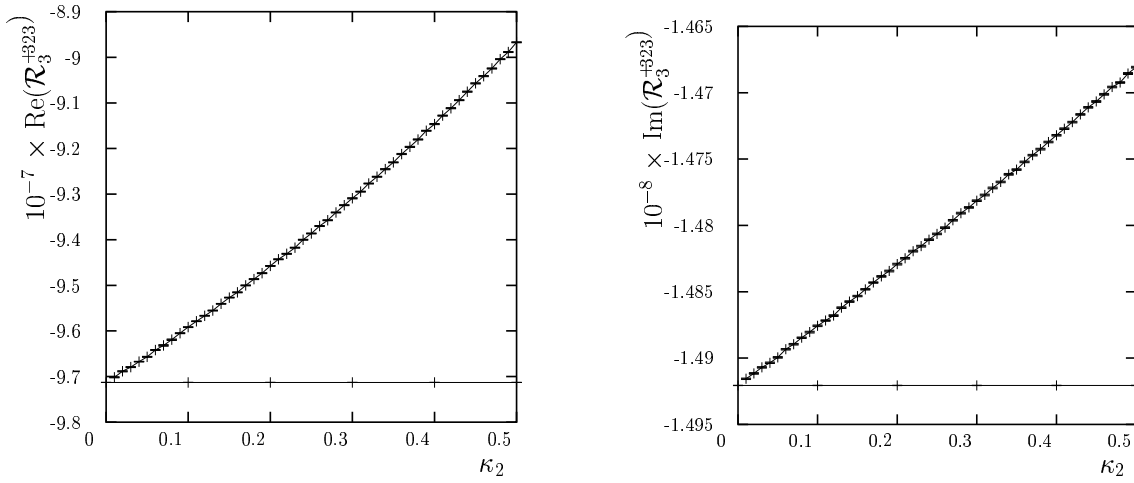


Abbildung 7.7: Real- und Imaginärteil der mit VEGAS erzeugten Integrationsergebnisse von  $\mathcal{R}_{3,3,2,3}^+$  als Funktion von  $\kappa_2$  in  $\text{GeV}^4$ . Die Verhältnisse zu den übrigen Grenzübergangsparameter finden sich in (7.63).

und zeigen die mit VEGAS erzeugten Kurven in  $\text{GeV}^4$  als Funktion von  $\kappa_2$  in Abbildung 7.7.

Die Polynomapproximation ergibt mit VEGAS:

Grad	Re	$\sigma_{\text{Re}}$	$\frac{\chi_{\text{Re}}^2}{n-1}$	Im	$\sigma_{\text{Im}}$	$\frac{\chi_{\text{Im}}^2}{n-1}$
1	$-9.744320 \cdot 10^7$	$3.1 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^2$	$-1.492395 \cdot 10^8$	$1.7 \cdot 10^3$	$7.3 \cdot 10^0$
2	$-9.712891 \cdot 10^7$	$4.8 \cdot 10^3$	$8.7 \cdot 10^{-1}$	$-1.492047 \cdot 10^8$	$2.5 \cdot 10^3$	$5.9 \cdot 10^{-1}$

(7.64)

Durch analytischen Grenzübergang erhalten wir mit VEGAS

$$\mathcal{R}_{+3,3,2,3} = (-9.71282 \cdot 10^7 \pm 1.3 \cdot 10^3) + i(-1.492064 \cdot 10^8 \pm 1.0 \cdot 10^3) \quad (7.65)$$

und mit Divonne

$$\mathcal{R}_{+3,3,2,3} = (-9.7197 \cdot 10^7 \pm 9.8 \cdot 10^4) + i(-1.4928 \cdot 10^8 \pm 1.4 \cdot 10^5) \quad (7.66)$$

## 7.3 Landau-Singularitäten und Schnitte

### 7.3.1 Motivation

Bei Feynmandiagrammen mit Schleifenintegralen können Singularitäten auftreten. Ein Beispiel ergibt sich für den Fall einer planaren Topologie:

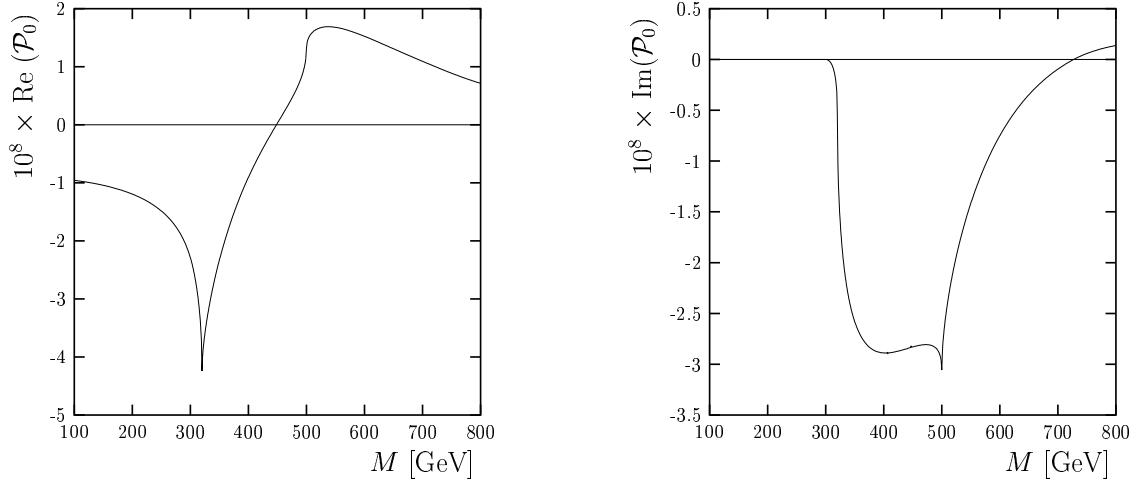


Abbildung 7.8: Real- und Imaginärteil der mit VEGAS erzeugten Integrationsergebnisse von  $\mathcal{P}_0$  als Funktion von  $M$  in  $\text{GeV}^{-4}$ .



(7.67)

Die Wurzeln der Impulsquadrate und die Massen der Linien haben wir an den jeweiligen Propagatoren notiert. Die Zerfallsmasse  $M$  variieren wir zwischen 100 und 800 GeV:

$$\sqrt{p^2} = M \in [100 \text{ GeV}, 800 \text{ GeV}] \quad (7.68)$$

Die Impulsquadrate und die Endzustandsmassen sind wie im zu Abbildung 7.6 gehörigen Beispiel gewählt. Die Massen finden sich neben der graphischen Darstellung in (7.67) formelmäßig in (7.51), die invarianten Massen der Endzustandsteilchen sind:

$$\sqrt{p_1^2} = 60 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_2^2} = 20 \text{ GeV} \quad (7.69)$$

Wir berechnen das skalare Integral mit trivialem Zähler

$$\mathcal{P}_0(M) = \int d^4k d^4l \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} = \text{Diagramm} \quad (7.70)$$

Die numerische Integration mit den in Kapitel 6 dargelegten Mitteln stellen wir in Abbildung 7.8 in  $\text{GeV}^{-4}$  dar. Es sind in Abbildung 7.8 mehrere auffällige Punkte bei verschiedenen Zerfallsmassen zu beobachten:

- Für  $M > 300 \text{ GeV}$  entsteht ein von Null verschiedener Imaginärteil.

- Der Realteil ist bei  $M = 320$  GeV nicht differenzierbar.
- Der Imaginärteil ist bei  $M = 500$  GeV nicht differenzierbar.

Die Ursache für diese Besonderheiten ist in *Schnitten* der Feynmangraphen zu suchen, welche physikalisch mit *Schwellen* in Bezug stehen. Ist die Energie hinreichend groß, daß beim Zerschneiden eines Feynmangraphen in zwei Teile die inneren Teilchen massiv werden können, so befindet man sich auf oder über einer Schwelle. Besitzt ein Feynmangraph Schwellen, so ist im Allgemeinen sein Imaginärteil von Null verschieden. Diese Schwellen bzw. die Schnitte, durch welche diese Schwellen verursacht werden, stehen in Bezug zu Singularitäten des Integranden des Feynmanintegrals. Dies haben wir bereits in Kapitel 6.3 dargelegt. Mit Hilfe der Landau-Gleichungen [La59] kann bestimmt werden, ob ein Graph Singularitäten enthält. Da die Singularitäten immer mit Massen und Impulsen in Bezug stehen, werden sie allgemein als Landau-Singularitäten bezeichnet. Sind diese Singularitäten nur von Massen abhängig, spricht man von Massensingularitäten. Eine allgemeine Darstellung sowie Herleitung der Landau-Gleichungen haben wir in Anhang I niedergeschrieben. Die Schnitte können äquivalent auch mit Hilfe der Cutcosky-Regeln [Cu60] sehr anschaulich bestimmt werden. In Kapitel 6.3 haben wir dargelegt, wie die Schnitte der Masterintegrale mit den Parametern des P/O-Raums in Beziehung stehen. Im vorliegenden Beispiel sind die Schnitte durch folgende Propagatorkombinationen für die entsprechenden Schwellen verantwortlich, in welchen die Zerfallsmasse der Summe der Massen der geschnittenen Linien, welche mit den entsprechenden Propagatorfaktoren im Nenner korrespondieren, entspricht:

Schnitt	Propagatoren	$M$	$M^2$	
Dreiteilchen-Schnitt	(2 3 4)	300 GeV	$(m_2 + m_3 + m_4)^2$	(7.71)
Zweiteilchen-Schnitt	(4 5)	320 GeV	$(m_4 + m_5)^2$	
Zweiteilchen-Schnitt	(1 2)	500 GeV	$(m_1 + m_2)^2$	

Mit Hilfe der Landau-Gleichungen, die wir im im Anhang I herleiten und der in Kapitel 6.3 graphisch dargestellten Schnittstrukturen werden diese Schwellen verständlich.

### 7.3.2 Beispiel einer Zweischleifendreipunktfunktion mit Abzugsparameter

Als weiteres Beispiel zur Motivation der Notwendigkeit des Verständnisses der Landau-Gleichungen betrachten wir das Integral

$$\mathcal{A} = \int d^4k d^4l \frac{1}{\bar{P}_{1,1}(\kappa_1) \bar{P}_{2,1}(\kappa_1) P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (7.72)$$

unter Variation des Abzugsparameters  $\kappa_1$ . Die Impulsquadrate wählen wir zu

$$\sqrt{p^2} = 91 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_1^2} = 0.1 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_2^2} = 0.1 \text{ GeV} \quad (7.73)$$

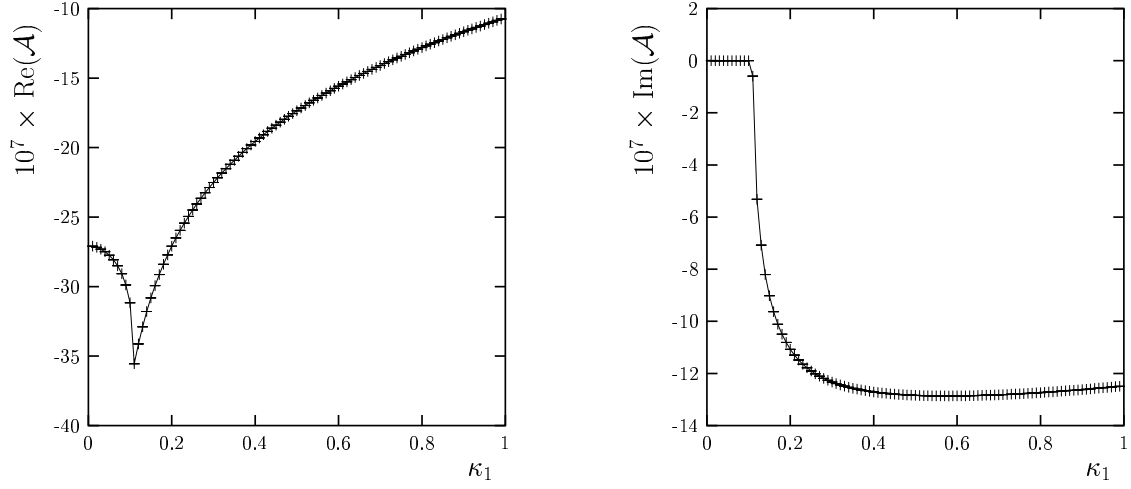


Abbildung 7.9: Real- und Imaginärteil der mit VEGAS erzeugten Integrationsergebnisse von  $\mathcal{A}$  als Funktion von  $\kappa_1$  in  $\text{GeV}^{-4}$ . Im Falle von (7.77) tritt eine Zweiteilchenschwelle auf.

die Massen zu

$$m_{1,1} = m_{2,1} = 5 \text{ GeV} \quad m_3 = 175 \text{ GeV} \quad m_4 = m_5 = 80 \text{ GeV} \quad m_6 = 0.1 \text{ GeV} \quad (7.74)$$

Die Propagatorfaktoren sind:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1,1} &= (k + \kappa_1 p_1)^2 - m_{1,1}^2 \\ \bar{P}_{2,1} &= (k - \kappa_1 p_2)^2 - m_{2,1}^2 \\ P_3 &= (k + l)^2 - m_3^2 \\ P_4 &= (l - p_1)^2 - m_4^2 \\ P_5 &= (l + p_2)^2 - m_5^2 \\ P_6 &= l^2 - m_6^2 \end{aligned} \quad (7.75)$$

Man beachte, daß dies kein physikalisches Integral ist, sondern lediglich ein Abzugsterm mit trivialem Zähler. Wir betrachten das Ergebnis der Integration bei Variation von  $\kappa_1$  graphisch in Abbildung 7.9.

Die offenkundige Singularität ist eine Zweiteilchenschwellensingularität nach (I.55). Denn es gilt:

$$\begin{aligned} (q_1 - q_2)^2 &= (\kappa_1(p_1 + p_2))^2 = (\kappa_1 p)^2 = \kappa_1^2 (91 \text{ GeV})^2 \\ &\stackrel{!}{=} (m_{1,1} + m_{2,1})^2 = (10 \text{ GeV})^2 \end{aligned} \quad (7.76)$$

Die Lösung

$$\kappa_1 = \frac{10}{91} \quad (7.77)$$

ist, wie man bei genauer Betrachtung von Abbildung 7.9 sofort erkennt, der Punkt der Singularität.

### 7.3.3 Untersuchung der Integranden

Die Landau-Singularitäten [La59] haben ihren Ursprung in den Singularitäten der Integranden der Feynmanintegrale. Da wir bei der Berechnung der Masterintegrale im Rahmen der P/O-Methode bis auf die beiden letzten Integrationen alle Integrations Schritte analytisch durchführen können, wollen wir das Verhalten der Masterintegrale bzw. ihrer Integranden studieren. Dazu betrachten wir im Folgenden zweidimensionale und dreidimensionale Graphiken der Integranden im zweidimensionalen Integrationsraum, in welchem numerisch zu integrieren ist. Wir werden die Singularitäten und die Imaginärteile der Integranden mit Parametern des P/O-Raums in Bezug setzen. Dabei demonstrieren wir die in Kapitel 6.3 schematisch dargestellten und in Anhang I.3 formelmäßig hergeleiteten Zusammenhänge zwischen den Parametern des P/O-Raums und den Schwellen sowie den durch die Schwellen verursachten Imaginärteilen. Wir zeigen, daß im Falle von Schwellen die Realteile der Integranden an bestimmten Linien logarithmisch divergieren. Die Integration von solchen Integranden ist mit VEGAS numerisch stabil durchführbar. Die Imaginärteile weisen Unstetigkeitsstellen im Integrationsgebiet auf. Diese Unstetigkeitsstellen liegen dort, wo die Realteile entweder divergent oder zumindest nicht differenzierbar sind. Die Linien, in welchen die Realteile divergent oder nicht differenzierbar sind und die Imaginärteile unstetig oder zumindest nicht differenzierbar, lassen sich mit Hilfe der in Kapitel 6.3 aufgezeigten und in Anhang I.3 hergeleiteten Beziehungen erklären.

Die P/O-Raum-Parameter, deren Vorzeichen darüber entscheidet, ob Imaginärteile vorliegen oder nicht, sind die Variablen  $s_0, t_0$  und  $b_{n,m}$ . Ihre Definition findet sich abhängig von der Topologie in Kapitel 6.1.2.6 bzw. Kapitel 6.2.2.4.

#### 7.3.3.1 Skalares Integral

Wir wollen für das Beispiel der skalaren planaren Topologie  $\mathcal{P}_0(M)$  aus (7.70) das Verhalten des Integranden an Schwellen studieren.

Den Integranden, welcher mit einer numerischen Zweifachintegration zu integrieren ist, wollen wir im Folgenden mit  $S(M)$  bezeichnen:

$$S(M) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dl_1 \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} dt \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (7.78)$$

Dies bedeutet, daß

$$\int dk_0 dl_0 S(M) = \mathcal{P}_0(M) \quad (7.79)$$

gilt. In Kapitel 6.1.2.6 haben wir nachgewiesen, daß die Grenzen des endlichen Integrationsgebiets in  $k_0, l_0$  im Falle der planaren Topologie ein Quadrat definieren und festgelegt

sind durch

$$-(e_1 - q_z) < k_0 < (e_2 + q_z) \quad - (e_2 + q_z) < l_0 < (e_1 - q_z) \quad (7.80)$$

### 7.3.3.2 Dreiteilchenschwelle

Wir betrachten als erstes die Real- und Imaginärteile des Integranden von  $\mathcal{P}_0(M)$  für  $M = 305$  GeV. Diese Massen- und Impulskonfiguration befindet sich direkt über der Dreiteilchenschwelle.

Der Real- und Imaginärteil in Abbildung 7.10 wird als dreidimensionale Graphik dargestellt. Der Integrand wird im Integrationsgebiet über  $k_0$  und  $l_0$  vor der numerischen Integration dargestellt. Wir zeigen dazu aus derselben Perspektive den Teil des nach Kapitel 6.3 bzw. Anhang I.3 für den Imaginärteil verantwortlichen Parameters  $b_{2,4}$ , der beim Auftreten eines Imaginärteils des Integranden positiv wird. Wir beschränken uns in der Graphik von  $b_{2,4}$  auf das Darstellen des positiven Teils von  $b_{2,4}$ . Für negatives  $b_{2,4} < 0$  wird aus Skalierungsgründen (weil sonst der positive Bereich nicht mehr ersichtlich ist) der Wert zu Null gesetzt. Der Imaginärteil ist für  $b_{2,4} < 0$  identisch Null. Der Realteil zeigt auch signifikantes Verhalten, jedoch keine Divergenzen, wie eine genauere Untersuchung der Basisintegrale in  $s, t$  zeigt, vgl. Anh. E. Wie Abbildung 7.10 zeigt, ist der Imaginärteil stetig, aber nicht differenzierbar, da die Beiträge des Imaginärteils mit  $\theta(b)$  als Vorfaktor auftreten.

### 7.3.3.3 Zweiteilchenschwelle

Bei Zweiteilchenschwellen ist im Allgemeinen der Imaginärteil unstetig und der Realteil divergiert logarithmisch. Wir betrachten in Abbildung 7.11 einen zweidimensionalen Schnitt für den Real- und den Imaginärteil des Integranden  $S(M)$  von  $\mathcal{P}_0(M)$  für  $M = 505$  GeV. Durch diese Wahl der Zerfallsmasse befinden wir uns unmittelbar über einer Zweiteilchenschwelle. Diese Zweiteilchenschwelle entsteht durch den Schnitt durch die mit den Propagatorfaktoren  $P_1$  und  $P_2$  korrespondierenden Linien. Es ist unbedeutend, welches  $l_0$  wir wählen, da  $s_0$ , welches für diese Schwelle verantwortlich ist und beim Auftreten der Schwelle einen Vorzeichenwechsel aufweist, von  $l_0$  unabhängig ist. Wir können, wie in Anhang I.3 gezeigt, die Stellen des Vorzeichenwechsels in  $s_0$  analytisch bestimmen. Dies ist zwar bezüglich des vorigen Beispiels auch bei den  $b_{n,m}$  möglich, kann aber nur für jeweils einen festen Parameter ausgewertet werden, da die  $b_{n,m}$  von  $k_0$  und  $l_0$  abhängen, vgl. Anhang I.3. Wir wählen den der VEGAS-Variablen 1/2 entsprechenden  $l_0$ -Wert<sup>2</sup>  $l_0 = -245.36$  und betrachten  $s_0$ , den Real- und Imaginärteil des Integranden auf diesem Querschnitt. Wir zeigen graphisch lediglich den Abschnitt, in welchem  $s_0$  negativ wird. Die Nullstellen von  $s_0$  in  $k_0$  befinden sich nach (I.158) bei

$$k_{0_1} = 387.47 \quad k_{0_2} = 439.884 \quad (7.81)$$

---

<sup>2</sup>Bei der VEGAS-Integration wird das Integrationsgebiet stets auf das Einheitsquadrat abgebildet.

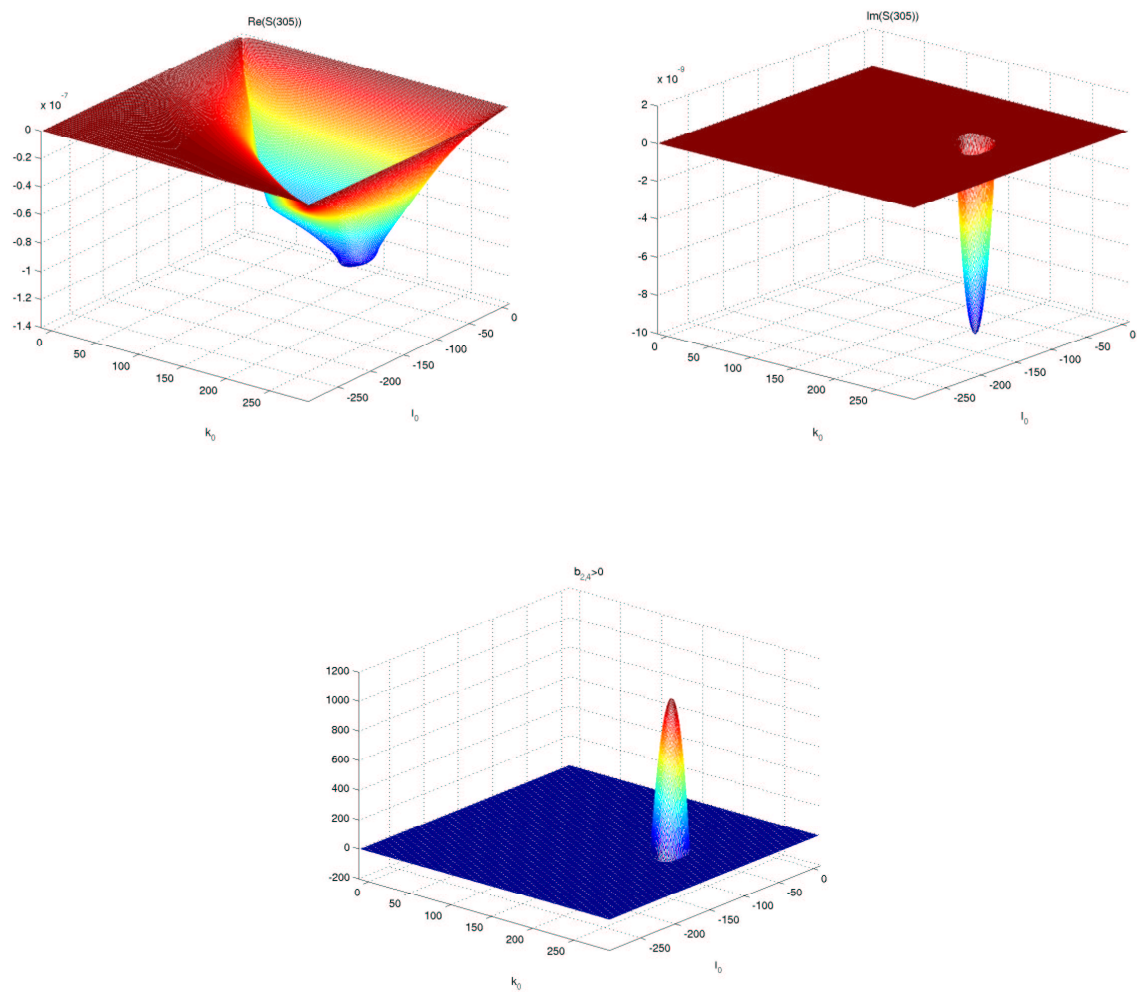


Abbildung 7.10: Real- und Imaginärteil des Integranden  $S(M)$  von  $\mathcal{P}_0(M)$  für  $M = 305$  GeV über  $k_0, l_0$ . Dazu der Parameter  $b_{2,4}$  für positives  $b_{2,4}$ . Nur für  $b_{2,4} > 0$  tritt ein Imaginärteil auf.

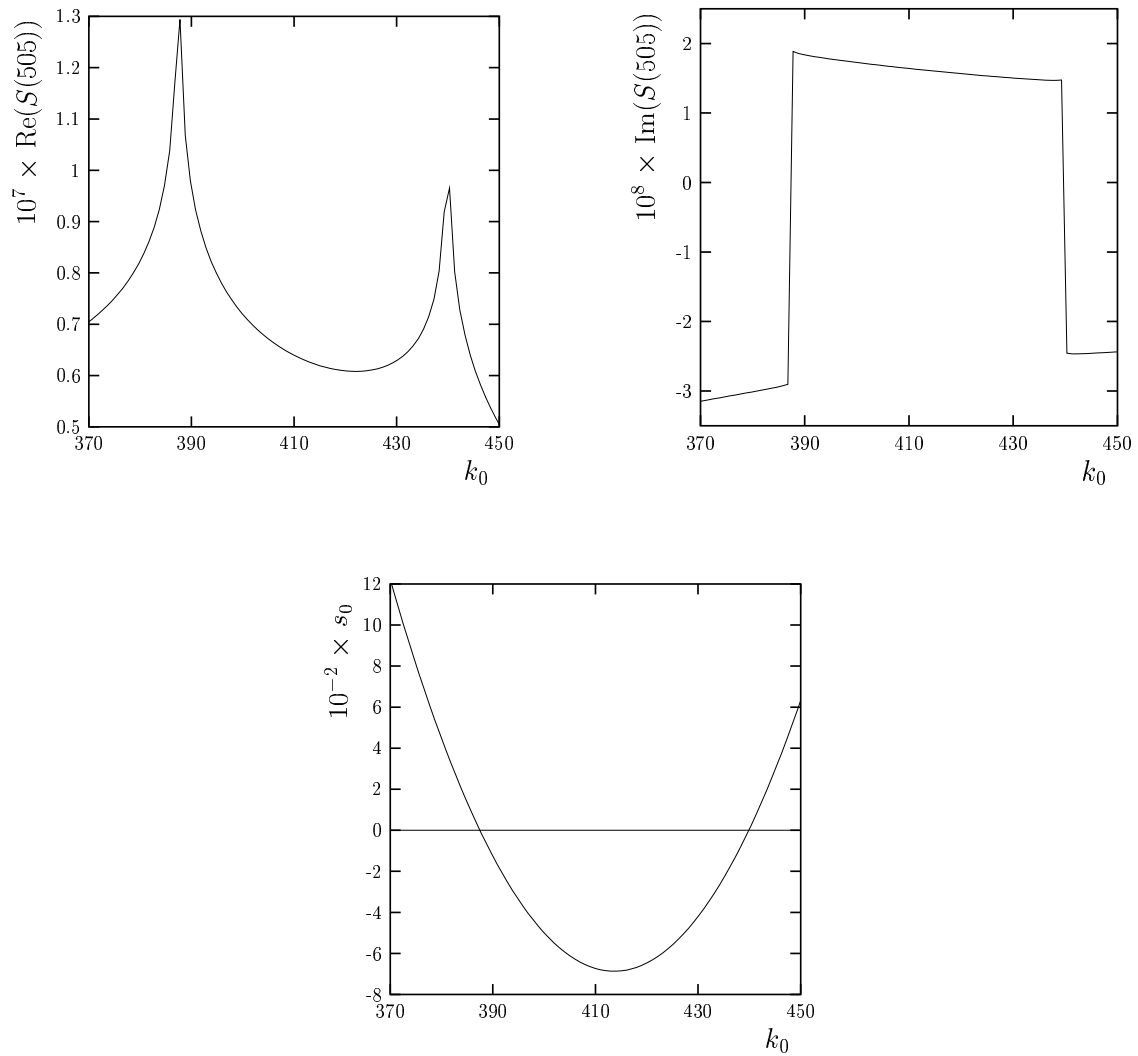


Abbildung 7.11: Real- und Imaginärteil des Integranden  $S(M)$  von  $\mathcal{P}_0(M)$  für  $M = 505$  GeV als Funktion von  $k_0$  für festes  $l_0 = -245.36$ . Dazu der Parameter  $s_0$ . Beim Vorzeichenwechsel von  $s_0$  wird der Imaginärteil unstetig, der Realteil logarithmisch divergent.



Die Abbildung 7.11 zeigt, daß die Vorzeichenwechsel in  $s_0$  mit Singularitäten des Integranden einhergehen. Beim analytischen Untersuchen des Integranden erkennt man, daß diese Singularitäten durch Logarithmen verursacht werden.

### 7.3.3.4 Schwellen im Abzugsterm

Auch bei Integralen mit Abzugsterm ändert sich, was die Evaluierung von Graphen mit Schwellen anbelangt, nichts Prinzipielles.

Wir zeigen diesbezüglich die dreidimensionale Graphik des Integranden des Integrals  $\mathcal{P}_2$  über  $k_0, l_0$ :

$$\mathcal{P}_2 = \int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^2}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,1} \bar{P}_{2,1}} \right) \quad (7.82)$$

Dieses Integral wäre ohne Abzugsterm logarithmisch divergent. Den Integranden in  $k_0, l_0$  wollen wir als  $V_2$  bezeichnen:

$$V_2 = \pi \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dl_1 \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} dt \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \frac{(k_0 - k_1)^2}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,1} \bar{P}_{2,1}} \right) \quad (7.83)$$

Dies bedeutet

$$\int dk_0 dl_0 V_2 = \mathcal{P}_2 \quad (7.84)$$

Wir wählen die äußeren Impulsquadrate zu

$$\sqrt{p^2} = 6 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_1^2} = 5 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_2^2} = 0.5 \text{ GeV} \quad (7.85)$$

die inneren Massen zu

$$\begin{array}{lll} m_1 = 12 \text{ GeV} & m_2 = 13 \text{ GeV} & m_3 = 14 \text{ GeV} \\ m_4 = 2 \text{ GeV} & m_5 = 15 \text{ GeV} & m_6 = 1 \text{ GeV} \end{array} \quad (7.86)$$

und die Abzugsmassen zu

$$m_{1,1} = 20 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 19 \text{ GeV} \quad (7.87)$$

Das Integrationsgebiet in  $k_0, l_0$  haben wir in (7.80) notiert. Die numerischen Werte sind bei den gewählten Parametern

$$(e_1 - q_z) = 4.26946 \quad (e_2 + q_z) = 1.73054 \quad (7.88)$$

Das Integral  $\mathcal{P}_2$  weist bei obiger Massenwahl sowohl im Abzugsterm als auch im eigentlichen Integral eine Schwelle auf. Es entsteht eine Zweiteilchenschwelle durch den Schnitt durch die mit den Propagatorfaktoren  $P_4$  und  $P_6$  korrespondierenden Linien, da

$$(m_4 + m_6)^2 < p_1^2 \quad (7.89)$$

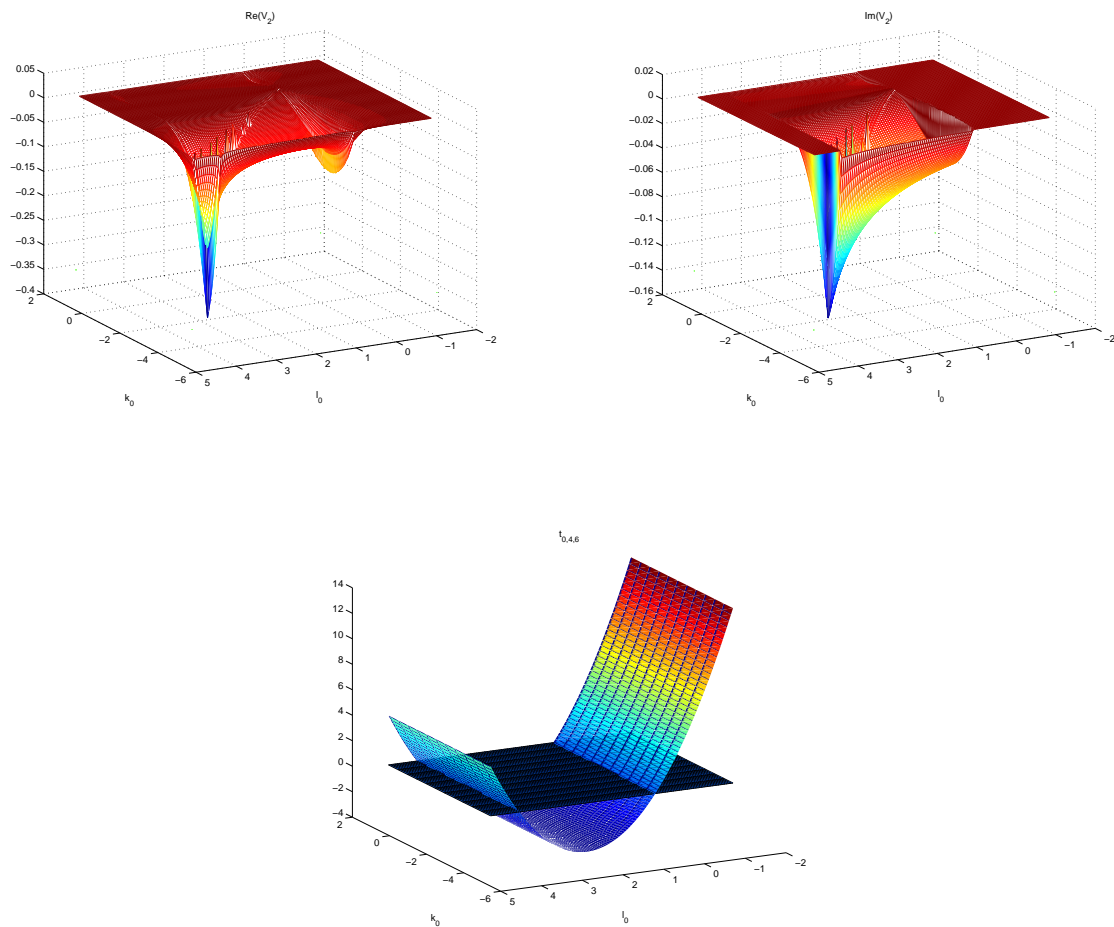


Abbildung 7.12: Real- und Imaginärteil des Integranden  $V_2$  von  $\mathcal{P}_2$  als Funktion von  $k_0, l_0$ . Dazu der Parameter  $t_{0,4,6}$  aus derselben Perspektive. Beim Vorzeichenwechsel von  $t_{0,4,6}$  wird der Imaginärteil unstetig von Null verschieden, der Realteil logarithmisch divergent.

gilt. Dies spiegelt sich nach (I.168) im Parameter  $t_{0,4,6} < 0$  wieder. Die Integrationsergebnisse in  $\text{GeV}^{-2}$  sind mit VEGAS:

$$\mathcal{P}_2 = (-1.611609 \cdot 10^{-2} \pm 7.0 \cdot 10^{-7}) + i(-1.156760 \cdot 10^{-2} \pm 5.9 \cdot 10^{-7}) \quad (7.90)$$

und mit Divonne

$$\mathcal{P}_2 = (-1.6114 \cdot 10^{-2} \pm 1.5 \cdot 10^{-5}) + i(-1.1563 \cdot 10^{-2} \pm 1.1 \cdot 10^{-5}) \quad (7.91)$$

In Abbildung 7.12 zeigen wir den Real- und Imaginärteil des Integranden  $V_2$  über  $k_0, l_0$ . Dazu zeigen wir in der gleichen Abbildung aus derselben Perspektive den Parameter  $t_{0,4,6}$ . In die Graphik von  $t_{0,4,6}$  zeichnen wir zusätzlich die Nullebene ein.

Der Parameter  $t_{0,4,6}$  ist nach (I.167) nur von  $l_0$  abhängig. Die Vorzeichenwechsel von  $t_{0,4,6}$  treten an zwei Geraden für jeweils festes  $l_0$  auf. Die Werte von  $l_0$  an diesen Stellen lassen sich

mit (I.168) berechnen. Für  $t_{0,4,6} < 0$  tritt ein Imaginärteil auf. Dies wird nach (I.168) durch die Zweiteilchenschwelle verursacht. Wir erhalten die numerischen Werte der Nullstellen von  $t_{0,4,6}$  nach Gleichung (I.168) zu:

$$l_{0_1} = 3.55185 \quad l_{0_2} = 0.205283 \quad (7.92)$$

Diese Werte kann man den Nullstellen von  $t_{0,4,6}$  in Abbildung 7.12 zweifelsfrei zuordnen. Man erkennt in Abbildung 7.12 das Zusammentreffen der Singularitäten im Realteil des Integranden und das Auftreten eines Imaginärteils beim Vorzeichenwechsel von  $t_{0,4,6}$ : Der Realteil divergiert an den Stellen der Vorzeichenwechsel logarithmisch. Der Imaginärteil wird stufenfunktionsartig von Null verschieden bzw. verschwindet ebenso wieder.

### 7.3.4 Schnitte und P/O–Raum, Zusammenfassung

Im Rahmen der P/O–Methode lassen sich die Singularitäten der Feynmanintegrale bzw. ihrer Integranden sehr anschaulich untersuchen. Dies ist sehr hilfreich beim Testen der Programme auf ihre Richtigkeit. Insbesondere ist es für die numerische Stabilität von Vorteil, daß sich Real- und Imaginärteil analytisch trennen lassen, vgl. Anhang E.

## 7.4 Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, daß unsere neue Methode zur Evaluierung der Masterintegrale mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Zweischleifenvertextopologie und nichttrivialem Zähler numerisch stabil ist. Da der numerische Grenzübergang aufgrund der Vielzahl der zu berechnenden Integrale sehr zeitaufwändig ist, ist es für praktische Berechnungen geboten, die benötigten Integrale mit Hilfe des analytischen Grenzübergangs zu evaluieren.

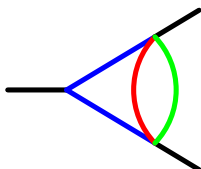
Für die Abzugsterme sowie die anderen Basisintegrale, für die hier keine numerischen Ergebnisse angegeben werden, haben wir bekannte und zuverlässige Methoden angegeben, sodaß mit Hilfe dieser neuen Methode Korrekturen zweiter Ordnung zu Einteilchenzerfällen in zwei Teilchen, also physikalische Prozesse, im allgemeinen Massenfall für alle nicht–gekreuzten Topologien berechnet werden können. Die diesbezüglich verbleibenden Aufgaben schildern wir in Kapitel 8.



# Kapitel 8

## Verbleibende Beiträge

## 8.1 Zweischleifen–Vertexfunktionen mit Zweipunkt–Subgraph

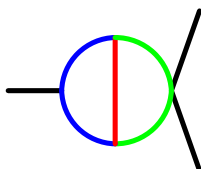


Für die Zweischleifen–Dreipunktfunktionen mit Zweipunkt–Subgraph (üblicherweise als Zweipunkt–Subloop bezeichnet) müssen im letzten Schritt bereits bekannte Methoden, [Ba94a, Ba94b, Po97], in Programmform implementiert werden. Diese Topologien sind sowohl für die Abzugsterme als auch für Integrale, wie sie nach Tensorreduktion entstehen, und ebenso für Beiträge, die direkt aus Feynman–Graphen in der Ordnung  $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$  entstehen, notwendig.

Die zur Evaluation dieser Topologien zu verwendenden Methoden [Ba94a, Ba94b, Po97] basieren auf der Anwendung von Dispersionsrelationen. Der UV–endliche Anteil wird mit Hilfe einer eindimensionalen numerischen Integration berechnet. Der UV–divergente Anteil, d.h. insbesondere der Koeffizient des  $1/\epsilon$ –Terms, der bei Verwendung der dimensional Regularisierung in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen entsteht, kann analytisch bestimmt werden.

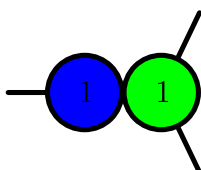
## 8.2 Effektive Zweischleifen–Zweipunktfunktionen

Die effektiven Zweipunktfunktionen



können mit den Standard–Methoden für Zweischleifen–Zweipunkt–Funktionen mit eindimensionalem Parallelraum [Do03] berechnet werden. Sie sind bereits in *χloops*–GiNaC implementiert [Do03]. Da die von uns berechneten Koeffizienten im zweidimensionalen Parallelraum berechnet wurden, der Parallelraum von Zweipunktfunktionen aber eindimensional ist, muß bei der Evaluation noch eine Parallelraumreduktion durchgeführt werden [Fr00].

## 8.3 Faktorisierte Topologien



Für die Produkte von Einschleifenintegralen können vorhandene Routinen aus *xloops-GiNaC* verwendet werden. Alternativ bietet sich die Verwendung des Programmpaketes SANC [An04] oder auch vieler anderer Programmpakete an.

## 8.4 Effektive Kopplungen bei Zerfallsmasse Null

Um die renormierten Werte der Korrekturen zu den Kopplungskonstanten bestimmen zu können, reicht es aus, die Graphen bei Zerfallsmasse Null  $M_Z \rightarrow 0$  auszuwerten und die Differenz mit den von uns betrachteten Ergebnissen bei der Zerfallsmasse  $M_Z$  zu berechnen, da die Werte bei Null und die Renormierung separat berechnet wurden [Fr99, FrPr]. Die Graphen bei Zerfallsmasse Null sind allesamt Vakuumgraphen. Sie können z.B. mit den Methoden von [Gr98, Gr99, Gr04] evaluiert werden.





# Kapitel 9

## Implementation, Ergebnisse

## 9.1 Implementation der Algorithmen

Wir haben alle in den vorigen Kapiteln beschriebenen Algorithmen in einem Programmpaket, welches in der Programmiersprache C++ verfaßt ist, festgehalten. Dabei verwenden wir, was die analytischen Berechnungen anbelangt, das Programmpaket GiNaC [Ba00], wodurch die Einheitlichkeit des Programms und damit letztlich auch die Überprüfung der einzelnen Programmteile erleichtert wird.

Die Programme sind in Module zerteilt, sodaß jeder separate Algorithmusanteil, d.h. die Spurberechnung, die Transformation von Minkowski- auf P/O-Variable, die Tensorreduktion sowie die Integration der Masterintegrale getrennt geprüft und angewendet werden kann. Dadurch können auch ganze Teile durch andere Programme ersetzt werden.

Die einzelnen Algorithmen sind zu einem Gesamtprogramm zusammengefaßt. Die gesamten Berechnungen können durch ein kurzes Hauptprogramm gesteuert werden. In diesem Hauptprogramm werden zuerst die Zähler berechnet. In unserem Fall geschieht dies durch die Evaluation der Spuren für die Korrekturen zu den effektiven Kopplungen,  $g_V$  und  $g_A$ . Diese Ergebnisse werden einer Klasse übergeben, welche die Tensorreduktion durchführt. Diese Klasse gibt hernach die Koeffizienten der Basisintegrale zurück. Die Koeffizienten der Basisintegrale nach Tensorreduktion können durch Funktionen, deren Parameter eine Liste ist, ausgegeben und nach Topologien sortiert werden. Der Eingabeparameter ist eine Liste mit sechs Einträgen. Jede dieser Einträge repräsentiert einen Propagatorfaktor. Die Reihenfolge der Indizierung der Propagatorfaktoren geschieht in der Notation der planaren Topologie, vgl. (2.9). Eine Eins als Parameter bedeutet, daß der korrespondierende Propagatorfaktor noch vorhanden ist, eine Null, daß er gekürzt wurde. Diese Koeffizienten können dann in Verbindung mit der indizierten Topologie von weiteren Integrationsroutinen verwendet werden, um ein Gesamtergebnis zu erzeugen.

Bereits implementiert haben wir die Integrationsroutinen zur Berechnung der schwierigsten Masterintegrale. Das sind jene mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie. Bei der Tensorreduktion werden die Koeffizienten der Masterintegrale der planaren und reduzierten planaren Topologien getrennt nach Potenzen der verbleibenden Schleifenimpulse im Zähler berechnet. Für diese existieren dann weitere Funktionen zur Ausgabe dieser Koeffizienten.

Wir haben eine Klasse implementiert, mit deren Hilfe die von uns ausgearbeiteten Masterintegrale evaluiert werden und zu einem eindeutig definierten Teilergebnis aufsummiert werden. Dieses Teilergebnis ist die Summe der endlichen Anteile aller nach Tensorreduktion verbleibenden Masterintegrale mit planarer Topologie sowie den gedrehten reduzierten planaren Topologien. Es ist noch von der Wahl der Abzugsmassen abhängig. Wir werden im Folgenden nochmals spezifizieren, aus welchen Beiträgen sich dieses Teilergebnis zusammensetzt. Zur mathematischen Definition dieses Teilergebnisses unter Zuhilfenahme auch von graphischen Darstellungen siehe Kap. 9.2.

Dieses Teilergebnis kann dadurch berechnet werden, daß die nach Tensorreduktion entstehenden Masterintegrale einzeln integriert werden und dann die Summe dieser Integrale gebildet wird. Aufgrund der effektiveren Quadratur bevorzugen wir jedoch die ebenfalls implementierte Methode, vor Integration *einen* Integranden aus der Summe der Integranden

der Masterintegrale zu bilden, um diesen dann numerisch zu integrieren. Die Koeffizienten der Basisintegrale, die durch die Tensorreduktion entstehen, werden als Vorfaktoren bei der Summation der Basisintegrale bzw. der Basisintegranden in beiden Fällen berücksichtigt. Der Grund für die bessere Effizienz der gemeinsamen Integration liegt darin, daß die Standardabweichung bei getrennter Integration von  $n$  Basisintegralen und nachfolgender Summation bei gleicher Punktezahl pro Integralevaluation wie im Fall der Integration des Gesamtintegranden trotzdem um einen Faktor  $\sqrt{n}$  größer zu erwarten ist als bei Quadratur des Gesamtintegranden. Denn es gilt: Der Erwartungswert  $\mathbf{E}$  eines Integrals einer Funktion  $g(x)$  ist bei Verwendung von  $N$  Integrationspunkten definiert als

$$\mathbf{E}(\langle g \rangle_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(x_k) = \langle g \rangle \quad (9.1)$$

Die Varianz von  $\langle g \rangle_N$  berechnet sich zu

$$\mathbf{V}(\langle g \rangle_N) = \mathbf{E}(\langle g \rangle_N^2) - \mathbf{E}(\langle g \rangle_N)^2 = \frac{\langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2}{N} \quad (9.2)$$

Die relative Varianz ist

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{(\mathbf{E} \langle g \rangle_N)^2} \quad (9.3)$$

Die Standardabweichung berechnet sich als Wurzel der Varianz

$$\sigma_N = \sqrt{\mathbf{V}(\langle g \rangle_N)} \quad (9.4)$$

Die relative Standardabweichung berechnet sich zu:

$$\tilde{\sigma}_N = \sqrt{\frac{\sigma_N}{N}} \quad (9.5)$$

Sei  $\mathbf{V}_i$  die absolute Varianz eines jeden Teilintegrals  $\int dx f_i(x)$  und  $\mathbf{V}$  die absolute Varianz des Gesamtintegrals  $\int dx \sum_i f_i(x)$ . Nehmen wir an, daß die relativen Varianzen in allen Fällen gleich seien:

$$\tilde{\mathbf{V}}_i = \tilde{\mathbf{V}} \quad (9.6)$$

Die Varianz einer Summe von Integralen berechnet sich als Summe der einzelnen Varianzen. Entsprechend berechnet sich die relative Standardabweichung bei separater Integration zu

$$\tilde{\sigma}_{sep} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2} = \sqrt{n \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{N}} = \sqrt{n} \sqrt{\frac{\tilde{\mathbf{V}}}{N}} = \sqrt{n} \tilde{\sigma}_{tog} \quad (9.7)$$

wobei der Index „*sep*“ für „separate“ und „*tog*“ für „together“ verwendet wird.

Es ist zu erwarten, daß, wenn man bei separater Integration und nachfolgender Summation gleichviele Punkte verwendet wie bei der Quadratur des Gesamtintegranden, trotz

der effektiv höheren Punktezahl der Fehler um einen Faktor  $\sqrt{n}$  größer ist. Die von uns betrachteten Beispiele bestätigen diese Voraussagen. Eine verständliche Darstellung bekannter und neuerer Ergebnisse bezüglich Monte-Carlo-Integrationen findet sich z.B. in [Ha01].

Die Teilergebnisse, welche wir durch die Summation der Masterintegrale mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie mit den beiden verschiedenen Methoden erhalten, sind numerisch stabil bei Verwendung einer hinreichend hohen Punktezahl.

Bis auf die massenabhängigen Abzugsterme können damit die wichtigsten Anteile der massiven planaren und gedrehten reduzierten planaren Zweischleifen-Vertexintegrale mit nicht-trivialer Tensorstruktur, wie sie nach der Tensorreduktion vorliegen, zuverlässig evaluiert werden. Die Abzugsterme haben einen Zweipunkt-Subloop. Da durch die Tensorreduktion weitere Basisintegrale entstehen, welche einen Zweipunktsubloop besitzen, stellt die Evaluation der Abzugstermen aber keinen zusätzlichen größeren (noch fehlenden) Projektteil dar. Vielmehr können sie nach der in jedem Fall noch durchzuführenden Implementation der Integrale mit Zweipunkt-Subloop mit den diesbezüglich ohnehin notwendigen Programmen evaluiert werden.

Die noch fehlenden Routinen zur Evaluierung aller notwendigen Basisintegrale können in unser Gesamtprogramm eingebaut werden. Die Koeffizienten aller auftretenden Basisintegrale können wir bereits zum jetzigen Zeitpunkt bestimmen.

Noch zu programmieren sind die Routinen zur Integration der Topologien mit Zweipunkt-Subloop. Algorithmen zur Evaluierung von Einschleifenintegralen mit zwei und drei äußeren Linien sowie von Zweischleifen-Zweipunktfunktionen sind bereits in *χloops* implementiert. Zu diesen müssen lediglich noch Schnittstellen bereitgestellt werden, um die Integration der (faktorisierenden) Einschleifenbeiträge sowie der effektiven Zweischleifen-Zweipunktfunktionen durchführen zu können.

Das Endergebnis ist auf die Unabhängigkeit von der Wahl der Abzugsmassen im Rahmen der numerischen Fehler zu untersuchen.

In der Summe mit den bereits implementierten Masterintegralen können dann die Korrekturen zweiter Ordnung mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie zu beliebigen Dreiteilchenprozessen semi-automatisch berechnet werden.

### 9.1.1 Programmschema

Die von uns implementierten Algorithmen lassen sich in mehrere unabhängige Teilbereiche einteilen. Entsprechend ist auch die Implementation in Teilbereiche aufgeteilt. Alle für sich abgeschlossenen Algorithmen befinden sich jeweils in einem eigenen Unterverzeichnis:

- Der erste Aufgabenteil des Projekts ist die **Zählerberechnung**. Dies geschieht im Fall der effektiven Kopplungen durch **Spurberechnung** mittels Anwendung der Projektoren auf die Feynmangraphen mit freien Lorentzindizes zur Erzeugung von Integralen ohne freie Indizes im Minkowskiraum. Sie ist im Gegensatz zu den anderen Programmteilen nicht für den allgemeinen Massenfall konzipiert. Diese Prozedur erzeugt die Zähler der Integrale mit planarer Topologie. Die Eingabeparameter sind

die Fermionmassen und die Vektor- und Axialvektorkopplungen an den 5 Vertizes. Die Ausgabeparameter sind die Zähler der für den spezifischen Graphen entstehenden Korrekturen zu den Vektor- und Axialvektorkopplungen. Diese können sowohl für jeweils nur eine Fermionrichtung als auch in der Summe der beiden Fermionrichtungen berechnet werden. Die Ein- und Ausgabeparameter sind sogenannte GiNaC-expressions. Für die Kopplungen wurde eine eigene Klasse zur Repräsentation implementiert, welche ebenso GiNaC-expressions verwendet.

- Die **Transformation der Zähler vom Minkowskiraum in den P/O-Raum** benötigt kein eigenes Unterverzeichnis und kann aufgrund der Knappheit der durchzuführenden Substitutionen im Hauptprogramm durchgeführt werden.
- Die **Tensorreduktion** kann für beliebige Zähler im P/O-Raum durchgeführt werden. Die Zähler können sich sowohl auf die planare Topologie als auch auf die gedrehten reduzierten planaren Topologien beziehen. Technisch wird zuerst die planare Topologie evaluiert und die zu den gedrehten reduzierten planaren Topologien beitragenden Anteile zu den ursprünglichen Koeffizienten dieser Topologien addiert, bevor diese Topologien reduziert werden. Die Koeffizienten der restlichen Basisintegrale werden aus der Summe aller Koeffizienten gebildet, wie sie durch die Reduktion der drei Ausgangsintegrale entstehen. Die Klasse, die für die Tensorreduktion verantwortlich ist, ist unabhängig von den vorigen Schritten und kann für allgemeine Prozesse verwendet werden. Die Eingabeparameter für die Impulse und Massen basieren auf GiNaC-expressions, die Ausgabeparameter sind GiNaC-expressions. Für die Darstellung der Schleifenimpulse sowie der äußeren Impulse und der Massen wurden eigene Klassen entwickelt, welche GiNaC-expressions verwendet.
- Die semi-analytische (numerische) **Integration der endlichen Masterintegrale** mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie kann mit beliebigen äußeren und inneren Massen durchgeführt werden. Die Impulse müssen dabei lediglich dergestalt sein, daß der Zerfallsprozeß kinematisch erlaubt ist. Die in dem hierzu korrespondierenden Unterverzeichnis zu findenden Programme erlauben die Integration einzelner Integrale mit fester Potenz der verbleibenden Zählerstruktur. Die Eingabeparameter sind Fließkommazahlen für die inneren Massen (auch der Abzugsmassen) sowie die äußeren Massen (diese in P/O-Variablen) sowie Ganzzahlen zur Indizierung der Schleifenimpulspotenz und der Abzugsgrade. Die verschiedenen Massenarten werden dabei als Vektoren übergeben, um ein übersichtlicheres Programmieren zu ermöglichen.
- Die **gemeinsame Integration** der von uns beschriebenen Masterintegrale **für eine beliebige Zählerstruktur** (in kovarianter Darstellung oder in P/O-Raum-Darstellung) wird durch eine Klasse gesteuert, die sich im Hauptverzeichnis findet, in welchem sich als Unterverzeichnisse die soeben beschriebenen Algorithmen finden. Dieser Klasse wird zum einen die Klasse vom Typ Tensorreduktion übergeben, welche die tensorreduzierten Koeffizienten enthält. Weiter werden ihr sämtliche Massen als

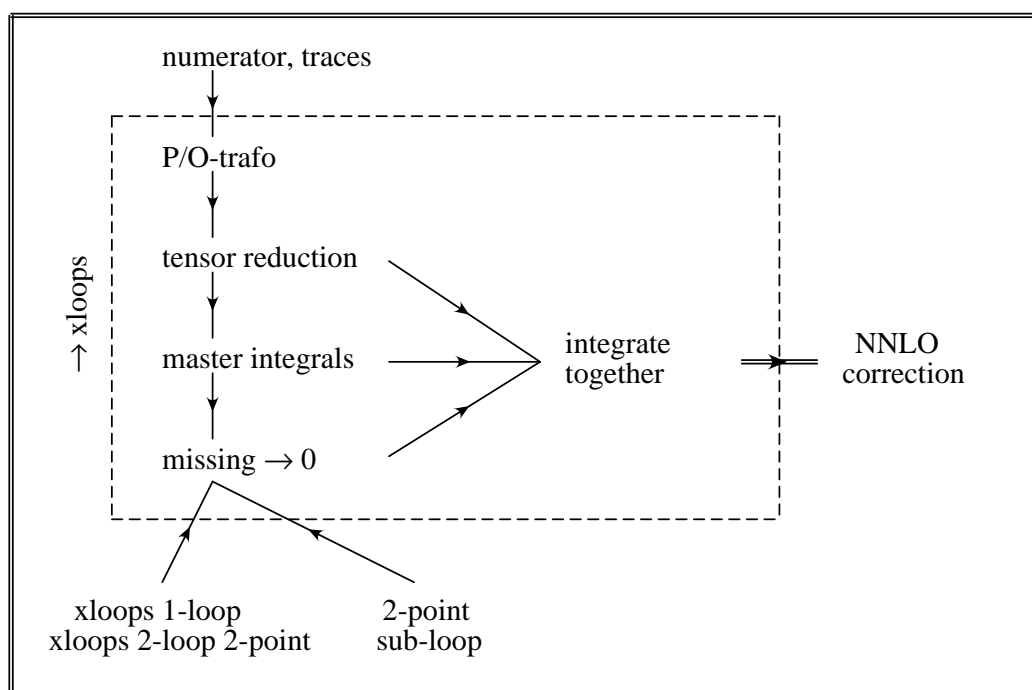


Abbildung 9.1: Implementation der verschiedenen Programmteile. Im (gestrichelt eingerahmten) Inneren die in  $\chi$ loops zu integrierenden Routinen.

Parameter übergeben, technisch wie im Fall zur Integration der endlichen Masterintegrale. Zudem müssen den Symbolen, aus welchen sich die Vorfaktoren der Integrale nach Tensorreduktion aufbauen, Werte zugewiesen werden. Dies geschieht mit Hilfe einer sogenannten C++ – Map.

- Die **fehlenden Anteile** — Zweipunkt–Subloop, Links zu  $\chi$ loops–Routinen — können problemlos in die zusammenfassende Klasse eingearbeitet werden bzw. sollten in Unterverzeichnissen separat entwickelt und dann verknüpft werden. Im Moment werden sie zu Null angenommen.

Die Klassen für die Tensorreduktion und die numerische Integration der Masterintegrale mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie (inklusive der zusammenfassenden Klasse) sind nicht an einen bestimmten Prozeß gebunden und können deshalb in  $\chi$ loops implementiert werden.

Schematisch setzen sich die einzelnen Programmteile wie in Abbildung 9.1 dargestellt zusammen. Durch diese Programme können nach Implementation der noch fehlenden Routinen die Korrekturen zweiter Ordnung zu den effektiven Kopplungen und ähnlichen Größen berechnet werden. Man bezeichnet die Korrekturen zweiter Ordnung auch als „next-to-next-to-leading-order“ (NNLO)–Korrekturen. Die Routinen im inneren (gestrichelten) Teil von Abbildung 9.1 sollen in  $\chi$ loops integriert werden. Die Routinen am unteren Rand sind bereits Teil von  $\chi$ loops bzw. müssen noch implementiert werden.

## 9.2 Teilergebnisse — Definition

In Feynmangraphen dargestellt gehen wir von einer planaren Topologie mit beliebigem Zähler im Minkowskiraum aus. Es ist unerheblich, ob die Zähler in der kovarianten Darstellung oder im P/O–Raum definiert sind. Beide Darstellungen sind nach Kapitel 3 äquivalent bzw. lassen sich leicht ineinander transformieren. Die Transformation von Zählern in kovarianter Darstellung in P/O–Variable ist implementiert. Die Zähler sind als GiNaC–expression anzugeben. Im Fall der effektiven Kopplungen wird der Zähler durch implementierte Funktionen automatisiert erzeugt. Der Ausgangspunkt für die Tensorreduktion sind Integrale der Form

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &= \sum_{abc} \sum_{fgn} \sum_r \int d^D k d^D l \frac{k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \\
 &= \sum_{abc} \sum_{fgn} \sum_r \text{Diagram} \times k_0^a k_1^b (k_\perp^2)^c l_0^f l_1^g (l_\perp^2)^n (k_\perp l_\perp z)^r \quad (9.8)
 \end{aligned}$$

Wir führen im nächsten Programmschritt die Tensorreduktion auf einen wohldefinierten Satz von Masterintegralen durch. Die Tensorreduktion liefert die Koeffizienten aller Basisintegrale, wie sie durch die Reduktion der planaren und reduzierten gedrehten planaren Topologien durch Anwendung des in Kapitel 4 dargelegten Algorithmus entstehen. Durch die Tensorreduktion entstehen unter Anderem eine Vielzahl von faktorisierenden Einschleifenbeiträgen. Diese symbolisieren wir in der nachfolgenden graphischen Darstellung in (9.9) durch einen einzigen Graphen. Im Programm werden auch die Koeffizienten der faktorisierenden Beiträge getrennt berechnet.

Unser Programm integriert dann die abzugsbehandelten Masterintegrale mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie, welche die spezifizierte Zählerstruktur aufweisen. Es können Listen der numerischen Werte der Einzelintegrale in Dateien ausgegeben werden.

Die Tensorreduktion liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} \longrightarrow & \text{Diagram 1} \times \sum_{i_1} (k_1 - k_0)^{i_1} \\
 + & \text{Diagram 2} \times \sum_{i_2} \sum_{j_2} (k_1 + k_0)^{i_2} (l_1 + l_0)^{j_2} \\
 + & \text{Diagram 3} \times \sum_{i_3} \sum_{j_3} (k_1 - k_0)^{i_3} (l_1 - l_0)^{j_3} \\
 + & \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
 + & \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \\
 + & \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} \\
 + & \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} \\
 + & \text{Diagram 14}
 \end{aligned}
 \tag{9.9}$$



Unser Programm integriert:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha} \left[ \text{Diagram 1} - f_{i,j} \text{Diagram 2} \right] \times (k_0 - k_1)^\alpha \\
 & + \sum_{\alpha\beta} \left[ \text{Diagram 3} - x_{i,j} \text{Diagram 4} - y_r \text{Diagram 5} + z_{i,j,r} \text{Diagram 6} \right] \times (k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta \\
 & + \sum_{\alpha\beta} \left[ \text{Diagram 7} - x_{i,j} \text{Diagram 8} - y_r \text{Diagram 9} + z_{i,j,r} \text{Diagram 10} \right] \times (k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta \\
 & = \mathcal{F} \tag{9.10}
 \end{aligned}$$

Dem Programm noch hinzuzufügen sind folglich die Abzugsterme sowie alle anderen nicht in dieser Arbeit ausgearbeiteten Basisintegrale, welche aber großteils (bis auf die Integrale mit Zweipunkt-Subloop, die Abzugsterme sind hierzu zu rechnen) bereits in  $\chi$ loops implementiert sind, sodaß diesbezüglich lediglich noch Schnittstellen herzustellen sind.

Die Koeffizienten der Abzugsterme berechnen sich aus den Koeffizienten der UV-endlichen Masterintegrale und aus den weiteren Faktoren, welche durch die Abzugsprozedur bzw. die Entwicklung und Partialbruchzerlegung der reinen Abzugsterme entstehen.

Formelmäßig berechnet unser Programm  $\mathcal{F}$ . Was noch fehlt ist

$$\mathcal{M} = \mathcal{T} - \mathcal{F} - \mathcal{A} \tag{9.11}$$

wenn wir unter  $\mathcal{A}$  die Summe der Abzugsterme verstehen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & \sum_{\alpha} \left[ f_{i,j} \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Triangle with external momenta } p, p_1, p_2 \text{ and internal masses } m_3, m_4, m_5, m_6, m_{i,j} \end{array} \right] \times (k_0 - k_1)^\alpha \\
& + \sum_{\alpha\beta} \left[ x_{i,j} \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Triangle with external momenta } p, p_1, p_2 \text{ and internal masses } m_3, m_4, m_6, m_{i,j} \end{array} + y_r \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Triangle with external momenta } p, p_1, p_2 \text{ and internal masses } m_1, m_2, m_3, m_{4,r} \end{array} - z_{i,j,r} \begin{array}{c} \text{Diagram 4: Bubble with internal masses } m_3, m_{4,r} \end{array} \right] \times (k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta \\
& + \sum_{\alpha\beta} \left[ x_{i,j} \begin{array}{c} \text{Diagram 5: Triangle with external momenta } p, p_1, p_2 \text{ and internal masses } m_3, m_5, m_6, m_{i,j} \end{array} + y_r \begin{array}{c} \text{Diagram 6: Triangle with external momenta } p, p_1, p_2 \text{ and internal masses } m_1, m_2, m_3, m_{5,r} \end{array} - z_{i,j,r} \begin{array}{c} \text{Diagram 7: Bubble with internal masses } m_3, m_{5,r} \end{array} \right] \times (k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta
\end{aligned} \tag{9.12}$$

### 9.3 Einfache Beispiele

Wir zeigen Beispiele von Feynmanintegralen mit einfacher Zählerstruktur, für die wir die mit  $\mathcal{F}$  benannten Teilergebnisse, also die Summe der in den Kapiteln 6 und 7 beschriebenen endlichen Masterintegrale, als Funktion der Abzugsmassen präsentieren.

Wir betrachten den oben beschriebenen Anteil  $\mathcal{F}$  des Integrals mit planarer Topologie

$$\mathcal{T} = \int d^D k d^{D_l} l \frac{(kl)(p_1 k)(p_2 l) + (kl)(p_1 k)(p_2 k)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \tag{9.13}$$

mit den äußeren Massen

$$\sqrt{p^2} = 500 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_1^2} = 60 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_2^2} = 20 \text{ GeV} \tag{9.14}$$

den inneren Massen

$$\begin{aligned}
m_1 &= 420 \text{ GeV} & m_2 &= 80 \text{ GeV} & m_3 &= 100 \text{ GeV} \\
m_4 &= 120 \text{ GeV} & m_5 &= 200 \text{ GeV} & m_6 &= 300 \text{ GeV}
\end{aligned} \tag{9.15}$$

und den Abzugsmassen, die wir unter Variation des Massenparameters  $m_0$  im Bereich

$$m_0 \in [0 \text{ GeV}, 200 \text{ GeV}] \tag{9.16}$$

wie folgt definieren:

$$m_{1,1} = 5 \text{ GeV} + m_0 \quad m_{2,1} = 15 \text{ GeV} + m_0 \quad m_{1,2} = 25 \text{ GeV} + m_0 \quad m_{2,2} = 35 \text{ GeV} + m_0 \tag{9.17}$$

Die Integration ergibt mit 260000 VEGAS–Punkten je Abzugsmassenpunkt die in Abbildung 9.2 dargestellten Kurven in  $\text{GeV}^2$ . Wir zeigen dabei sowohl die Linien, die bei gemeinsamer Integration entstehen, als auch die Linien, welche bei separater Integration und nachfolgender Aufsummation erzeugt werden.

Da wir uns aufgrund der Wahl der Zerfallsmasse von 500 GeV direkt auf der Schwelle befinden, ist die Stabilität bei der separaten Integration bei der gewählten Integrationspunktzahl nicht zufriedenstellend. Die gemeinsame Integration ist trotz der effektiv geringeren Punktzahl stabiler, insbesondere beim Imaginärteil. Die auffallend starken Variationen verschieben sich bei verschiedenen VEGAS–Durchläufen. Sie haben ihre Ursache in statistischen Fluktuationen, wie sie aufgrund der Monte–Carlo–Integration auftreten können [Kl05]. Beim Imaginärteil wird der Fehler bei der separaten Integration unterschätzt. Das Problem, den Fehler zu unterschätzen, tritt bei VEGAS oft auf. Es liegt daran, daß VEGAS eine Monte–Carlo–Integrationsmethode ist und es kein objektives Maß für den Fehler gibt, sondern lediglich eine Abschätzung vorgenommen werden kann [Kl05].

Zur Demonstration, daß die beiden Methoden im Allgemeinen, wenn man sich nicht direkt auf Schwellen befindet, stabile Ergebnisse mit vergleichbaren Fehlerbalken liefert, betrachten wir ein letztes Beispiel. Wir berechnen den Anteil  $\mathcal{F}$  des Integrals

$$\mathcal{T} = \int d^D k d^D l \frac{(kl)(p_1 k)(p_2 k)(p_2 l) + (p_1 l)^3 (p_2 k)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (9.18)$$

Die äußeren Massen wählen wir zu

$$\sqrt{p^2} = 325 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_1^2} = 60 \text{ GeV} \quad \sqrt{p_2^2} = 20 \text{ GeV} \quad (9.19)$$

Die inneren Massen wählen wir wie in (9.15). Wir befinden uns damit direkt über, aber nicht auf, einer Zweiteilchenschwelle. Die Abzugsmassen im Schleifenimpuls  $k$  variieren wir wie in (9.17). Die Abzugsmassen im Schleifenimpuls  $l$  variieren wir gemäß:

$$m_{4/5,1} = 10 \text{ GeV} + m_0 \quad m_{4/5,2} = 20 \text{ GeV} + m_0 \quad m_{4/5,3} = 30 \text{ GeV} + m_0 \quad (9.20)$$

In Abbildung 9.3 zeigen wir die Kurven in  $\text{GeV}^4$ , die sich mit den verschiedenen Integrationsmethoden ergeben.

Die numerische Integration ist in allen vier Graphiken, Real– und Imaginärteil, sowohl bei getrennter als auch bei gemeinsamer Integration, stabil.

## 9.4 Zwischenergebnisse für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$

Für die Korrekturen zu den effektiven Kopplungen geben wir die oben definierten Teilergebnisse  $\mathcal{F}$ , also die Summe aller endlichen Masterintegrale mit planarer und reduzierter planarer Topologie, an. Dabei geben wir die Teilergebnisse für jeden der beitragenden Graphen für die fermionischen Korrekturen mit planarer Topologie einzeln an. Diese Teilergebnisse müssen lediglich noch um die Summe der einfacheren Basisintegrale, deren Koeffizienten

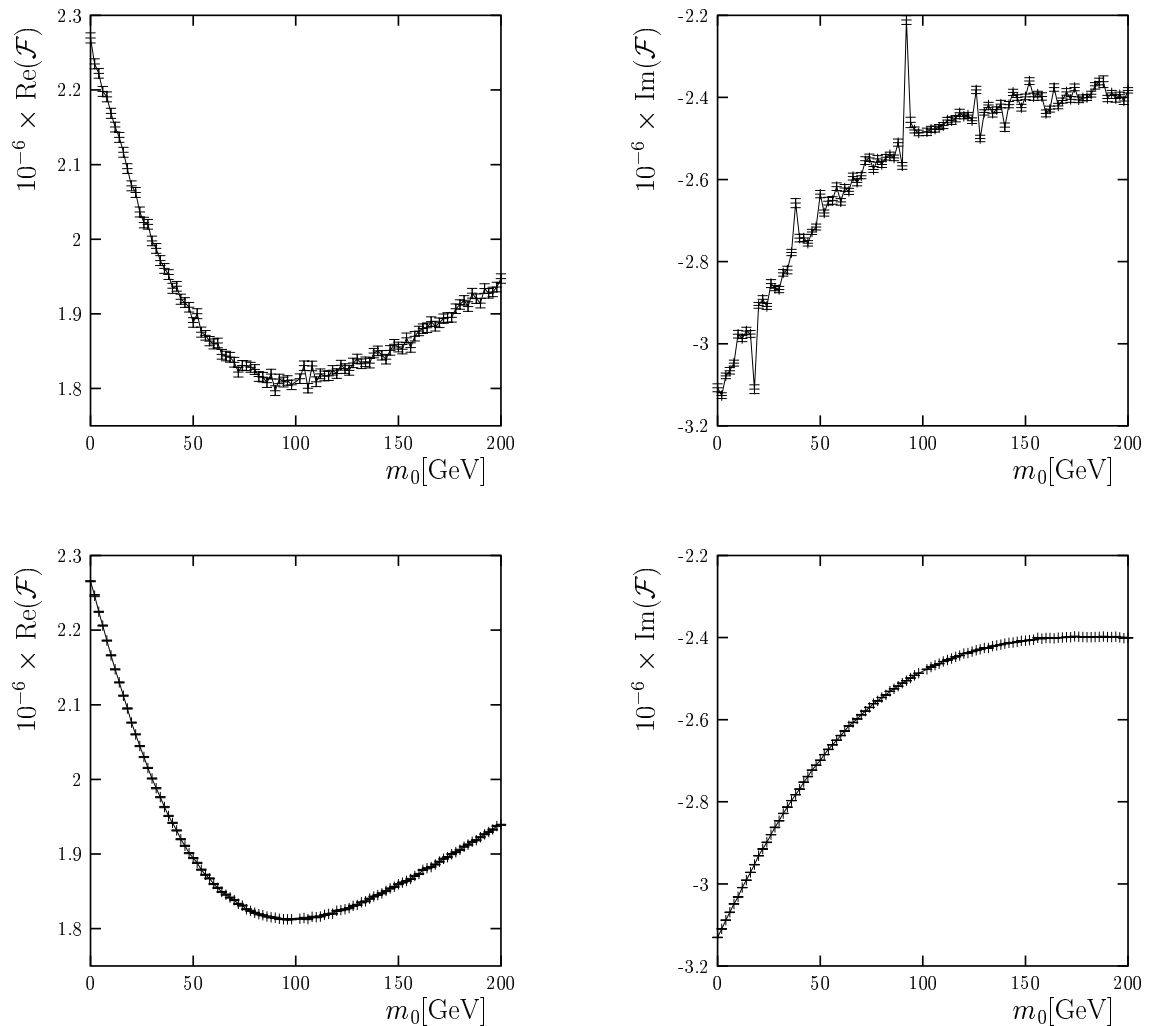


Abbildung 9.2: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) der mit VEGAS erzeugten Integrationsergebnisse des zu (9.13) gehörigen Teilergebnisses  $\mathcal{F}$  als Funktion des für die Abzugmassenvariation verantwortlichen Parameters  $m_0$  auf der Zweiteilchenschwelle  $M = \sqrt{p^2} = 500$  GeV. Dabei sind die Graphiken oben durch getrennte Integration und nachfolgende Summation der Masterintegrale, die Graphiken unten durch Konstruktion des Gesamtintegranden mit nachfolgender gemeinsamer Integration erzeugt.

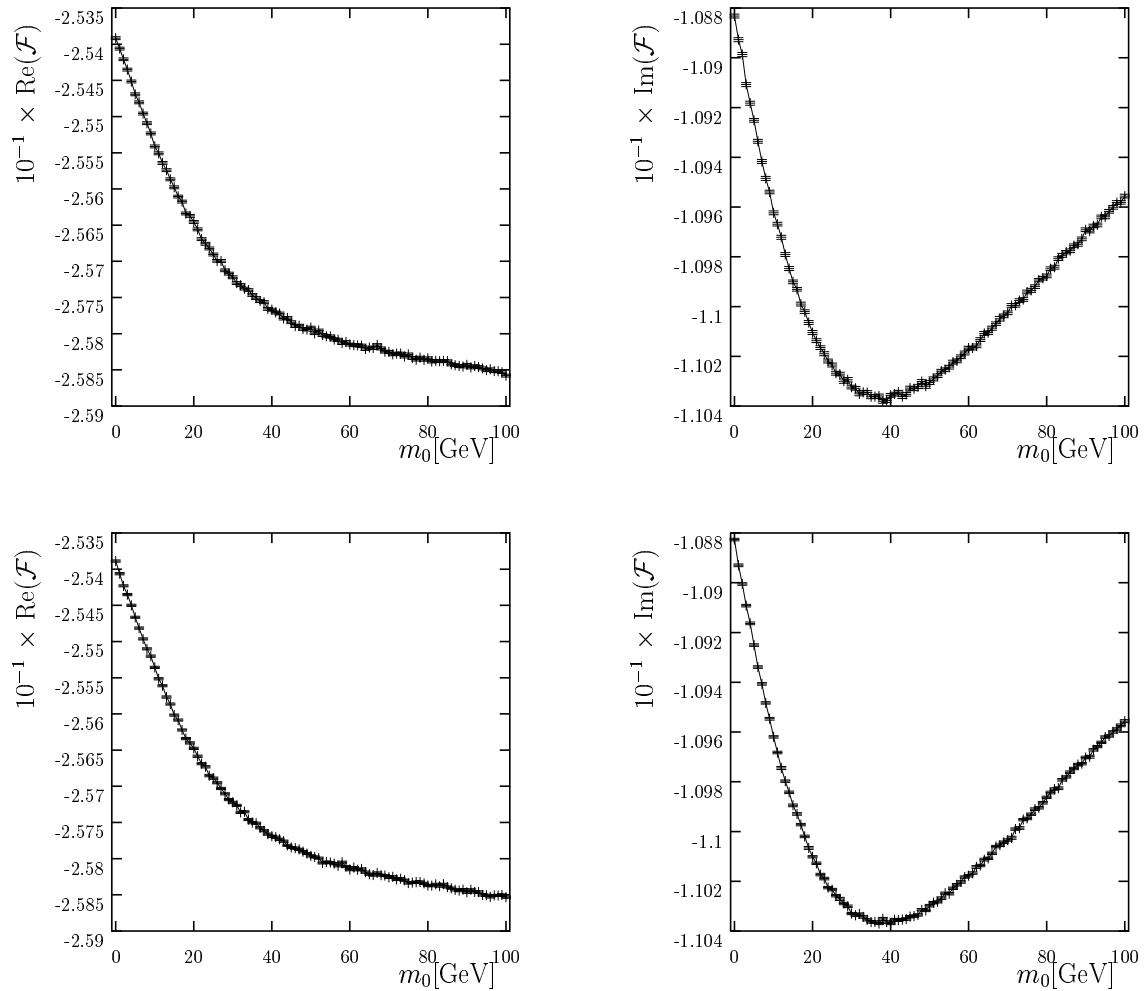


Abbildung 9.3: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) der mit VEGAS erzeugten Integrationsergebnisse des zu (9.18) gehörigen Teilergebnisses  $\mathcal{F}$  als Funktion des für die Abzugmassenvariation verantwortlichen Parameters  $m_0$ . Dabei sind die Graphiken oben durch getrennte Integration und nachfolgende Summation der Masterintegrale, die Graphiken unten durch Konstruktion des Gesamtintegranden mit nachfolgender gemeinsamer Integration erzeugt.

in Computerprogrammform vorliegen, sowie um die Summe der Abzugsterme, erweitert werden, um die fermionischen Korrekturen zweiter Ordnung zu  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lep}t}$  zu erhalten, die durch die Graphen mit planarer Topologie entstehen.

Wir werden für alle beitragenden Graphen vier Werte für Real- und Imaginärteil angeben, jeweils in der Reihenfolge:

- VEGAS, separate Integration
- VEGAS, gemeinsame Integration
- Divonne, separate Integration
- Divonne, gemeinsame Integration

In der ersten Spalte geben wir jeweils die inneren Teilchen an. Die Abzugsmassen für diese Teilergebnisse, in obiger Notation  $\mathcal{F}$  genannt, wählen wir zu:

$$m_{1,1} = 150 \text{ GeV} \quad m_{2,1} = 160 \text{ GeV} \quad m_{1,2} = 170 \text{ GeV} \quad m_{2,2} = 180 \text{ GeV} \quad (9.21)$$

$$m_{4/5,1} = 110 \text{ GeV} \quad (9.22)$$

Die physikalischen Massen wählen wir wie in (7.1) definiert. Allerdings geben wir auch die Ergebnisse an, in welchen wir die Masse des bottom-Quarks statt wie in (7.1) definiert in allen Rechenschritten von Null verschieden zu

$$m_b = 4.85 \text{ GeV} \quad (9.23)$$

wählen [Pd05]. Die Feinstrukturkonstante  $\alpha$  und den experimentellen schwachen Mischungswinkel, welche wir als Parameter verwenden, entnehmen wir [Pd05] zu:

$$\alpha = \frac{1}{137} \quad \sin^2 \theta = 0.23108 \quad (9.24)$$

Wir verwenden für jede Integration 260000 VEGAS-Punkte. Bei Divonne verwenden wir den Standardwert der Zielvorgabe einer relativen Präzision von  $10^{-3}$ .

In Tabelle 9.1 betrachten wir die Korrekturen zu  $\Delta g_V$  für ungeladene Ströme. Die Korrekturen zu den Axialkomponenten stellen wir in Tabelle 9.2 dar. In Tabelle 9.3 betrachten wir die Korrekturen im Fall geladener Ströme mit Fermionrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn. Für die Fermionrichtung im Uhrzeigersinn erhalten wir die Tabelle 9.4. Bei geladenen Strömen gibt es jeweils nur eine Größe, vgl. Anhang D.3.

Wie man aus den Werten ersieht, stimmen die Integrationsergebnisse, die wir mit den verschiedenen Methoden erhalten, im Rahmen der Fehler, die sich im Promillebereich bewegen, überein. In diesen Fällen sind keine signifikanten Unterschiede in den Fehlerbalken ersichtlich, unabhängig davon, wie man integriert.

Zu diesen Werten müssen noch die fehlenden Basisintegrale, deren Koeffizienten wir bestimmt haben, sowie die Abzugsterme, addiert werden.

Teilchen	$\text{Re}(\mathcal{F}(\Delta g_V))$	$\sigma_{\text{Re}}$	$\text{Im}(\mathcal{F}(\Delta g_V))$	$\sigma_{\text{Im}}$
<i>tttZZl</i>	$2.830063 \cdot 10^{-7}$	$8.4 \cdot 10^{-12}$	0	0
	$2.830138 \cdot 10^{-7}$	$7.6 \cdot 10^{-12}$	0	0
	$2.829725 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-10}$	0	0
	$2.829196 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-10}$	0	0
<i>uuuZZl</i>	$-1.479008 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-11}$	$-4.482192 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-10}$
	$-1.478716 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-11}$	$-4.481237 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$
	$-1.478582 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$-4.484930 \cdot 10^{-7}$	$5.7 \cdot 10^{-10}$
	$-1.480046 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$-4.484741 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-10}$
<i>bbbZZl</i>	$2.831026 \cdot 10^{-7}$	$7.1 \cdot 10^{-11}$	$7.339083 \cdot 10^{-7}$	$9.1 \cdot 10^{-11}$
	$2.831467 \cdot 10^{-7}$	$7.8 \cdot 10^{-11}$	$7.340885 \cdot 10^{-7}$	$9.6 \cdot 10^{-11}$
	$2.834610 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$7.347500 \cdot 10^{-7}$	$9.4 \cdot 10^{-10}$
	$2.830221 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-10}$	$7.339751 \cdot 10^{-7}$	$7.2 \cdot 10^{-10}$
<i>dddZZl</i>	$2.498357 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-11}$	$7.574867 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-10}$
	$2.497772 \cdot 10^{-7}$	$6.2 \cdot 10^{-11}$	$7.570039 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$
	$2.498165 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$7.577597 \cdot 10^{-7}$	$9.7 \cdot 10^{-10}$
	$2.497965 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	$7.573693 \cdot 10^{-7}$	$7.4 \cdot 10^{-10}$
<i>lllZZl</i>	$1.043694 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-11}$	$3.162111 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$
	$1.042694 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-11}$	$3.161924 \cdot 10^{-7}$	$8.7 \cdot 10^{-11}$
	$1.043076 \cdot 10^{-7}$	$8.4 \cdot 10^{-11}$	$3.163927 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
	$1.043810 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	$3.156985 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-10}$
<i>νννZZl</i>	$-4.104064 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	$-1.243347 \cdot 10^{-6}$	$3.7 \cdot 10^{-10}$
	$-4.103171 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	$-1.243761 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-10}$
	$-4.101827 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-10}$	$-1.244193 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-9}$
	$-4.106092 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$	$-1.243524 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 9.1: Teilergebnisse für die Korrekturen zu  $\Delta g_V$  für ungeladene Ströme.

Das Verwenden einer von Null verschiedenen Masse des bottom-Quarks ändert die Werte maximal im Bereich von etwa 10 Prozent. Da es sich aber um Korrekturen zur zweiten Ordnung handelt, welche sich im Vergleich zu den Werten ohne Schleifenkorrekturen bereits im Promillebereich befinden, ist nicht zu erwarten, daß sich dies wesentlich auf den mit dem Experiment durchzuführenden Vergleich auswirkt, weil sich die heutige experimentelle Genauigkeit, wie in Kapitel 1 gezeigt, im Promillebereich bewegt. Für die Experimente bei GigaZ [He00] könnten diese Korrekturen jedoch Relevanz gewinnen.

Teilchen	$\text{Re}(\mathcal{F}(\Delta g_A))$	$\sigma_{\text{Re}}$	$\text{Im}(\mathcal{F}(\Delta g_A))$	$\sigma_{\text{Im}}$
<i>tttZl</i>	$1.880326 \cdot 10^{-6}$	$5.6 \cdot 10^{-11}$	0	0
	$1.880512 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-11}$	0	0
	$1.880240 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-9}$	0	0
	$1.881661 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	0	0
<i>uuuZl</i>	$-9.826130 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	$-2.978004 \cdot 10^{-6}$	$9.7 \cdot 10^{-10}$
	$-9.826353 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-10}$	$-2.979456 \cdot 10^{-6}$	$8.4 \cdot 10^{-10}$
	$-9.836230 \cdot 10^{-7}$	$7.7 \cdot 10^{-10}$	$-2.976257 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-9}$
	$-9.828810 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-10}$	$-2.976130 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$
<i>bbbZl</i>	$1.881763 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-10}$	$4.879041 \cdot 10^{-6}$	$6.4 \cdot 10^{-10}$
	$1.881547 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-10}$	$4.877583 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-10}$
	$1.883486 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$4.882123 \cdot 10^{-6}$	$6.2 \cdot 10^{-9}$
	$1.883822 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$4.876973 \cdot 10^{-6}$	$4.8 \cdot 10^{-9}$
<i>dddZl</i>	$1.660091 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-10}$	$5.033350 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$
	$1.660873 \cdot 10^{-6}$	$3.9 \cdot 10^{-10}$	$5.032368 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$
	$1.661898 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$5.028590 \cdot 10^{-6}$	$6.4 \cdot 10^{-9}$
	$1.660369 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$5.035939 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-9}$
<i>lllZl</i>	$6.928503 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$2.100513 \cdot 10^{-6}$	$6.5 \cdot 10^{-10}$
	$6.928854 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$2.101943 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-10}$
	$6.939041 \cdot 10^{-7}$	$5.4 \cdot 10^{-10}$	$2.099622 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$
	$6.926498 \cdot 10^{-7}$	$6.8 \cdot 10^{-10}$	$2.100366 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-9}$
<i>vvvZl</i>	$-2.725446 \cdot 10^{-6}$	$6.8 \cdot 10^{-10}$	$-8.257623 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$
	$-2.725798 \cdot 10^{-6}$	$6.4 \cdot 10^{-10}$	$-8.263209 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$
	$-2.728730 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$-8.256621 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$
	$-2.724845 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$-8.258009 \cdot 10^{-6}$	$8.2 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 9.2: Teilergebnisse für die Korrekturen zu  $\Delta g_A$  für ungeladene Ströme.



Teilchen	$\text{Re}(\mathcal{F}(\Delta g_V))$	$\sigma_{\text{Re}}$	$\text{Im}(\mathcal{F}(\Delta g_V))$	$\sigma_{\text{Im}}$
$ttbWW\nu$	$-4.574219 \cdot 10^{-6}$	$8.8 \cdot 10^{-10}$	0	0
	$-4.573071 \cdot 10^{-6}$	$6.7 \cdot 10^{-10}$	0	0
	$-4.569780 \cdot 10^{-6}$	$5.2 \cdot 10^{-9}$	0	0
	$-4.576068 \cdot 10^{-6}$	$4.4 \cdot 10^{-9}$	0	0
$tt dWW\nu$	$-4.595413 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	0	0
	$-4.596088 \cdot 10^{-6}$	$9.2 \cdot 10^{-10}$	0	0
	$-4.595914 \cdot 10^{-6}$	$5.6 \cdot 10^{-9}$	0	0
	$-4.593911 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$	0	0
$uudWW\nu$	$1.920868 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$-3.544738 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$
	$1.920293 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-10}$	$-3.544781 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$
	$1.919586 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$-3.543879 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-9}$
	$1.919650 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$-3.543443 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-9}$
$\nu\nu lWW\nu$	$2.776021 \cdot 10^{-6}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$	$-5.123495 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$
	$2.775717 \cdot 10^{-6}$	$4.2 \cdot 10^{-10}$	$-5.122300 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$
	$2.774396 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$-5.122001 \cdot 10^{-6}$	$5.1 \cdot 10^{-9}$
	$2.776924 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$-5.122550 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 9.3: Teilergebnisse für die Korrekturen zu  $\Delta g_V = \Delta g_A$  für geladene Ströme mit Fermionrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn.

Teilchen	$\text{Re}(\mathcal{F}(\Delta g_V))$	$\sigma_{\text{Re}}$	$\text{Im}(\mathcal{F}(\Delta g_V))$	$\sigma_{\text{Im}}$
$bbtWW\nu$	$-3.512857 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$-3.627167 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-10}$
	$-3.512763 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-10}$	$-3.627002 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-10}$
	$-3.513465 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$-3.627938 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$
	$-3.513616 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$-3.632409 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$
$ddtWW\nu$	$-3.459747 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$-3.647849 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$
	$-3.459728 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-10}$	$-3.647865 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-10}$
	$-3.459402 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$	$-3.647964 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$
	$-3.458909 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$-3.648079 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$
$dduWW\nu$	$8.877590 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-9}$	$2.590723 \cdot 10^{-5}$	$9.3 \cdot 10^{-9}$
	$8.878058 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$2.589655 \cdot 10^{-5}$	$7.7 \cdot 10^{-9}$
	$8.872101 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$2.589200 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-8}$
	$8.869609 \cdot 10^{-6}$	$8.8 \cdot 10^{-9}$	$2.592667 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$
$ll\nu WW\nu$	$5.642974 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-9}$	$1.646395 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-9}$
	$5.643178 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$1.646641 \cdot 10^{-5}$	$5.3 \cdot 10^{-9}$
	$5.640747 \cdot 10^{-6}$	$6.8 \cdot 10^{-9}$	$1.646174 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
	$5.638882 \cdot 10^{-6}$	$5.6 \cdot 10^{-9}$	$1.647339 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 9.4: Teilergebnisse für die Korrekturen zu  $\Delta g_V = \Delta g_A$  für geladene Ströme mit Fermionrichtung im Uhrzeigersinn.



# **Kapitel 10**

## **Zusammenfassung und Ausblick**

Wir haben die Feynmangraphen bestimmt, welche die fermionischen Korrekturen in zweiter Ordnung zu den Vektor- und Axialvektorkopplungen des Zerfalls  $Z^0 \rightarrow l^+l^-$  und damit zum schwachen Mischungswinkel  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$  verursachen. Wir haben für den schwierigsten Graphen, für denjenigen mit planarer Zweischleifen-Vertextopologie, die zu berechnenden Feynmanintegrale mit Hilfe von Projektoren auf Integrale ohne freie Indizes im Minkowski-Raum abgebildet. Die Zähler dieser Integrale haben wir in P/O-Variable umgerechnet. Wir haben eine Tensorreduktion für beliebige massive planare und gedrehte reduzierte planare Zweischleifen-Vertexgraphen entwickelt und auf die Integrale für die fermionischen Korrekturen zu  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$  angewendet. Die Koeffizienten der Basisintegrale wurden bestimmt. Für die wichtigsten Masterintegrale haben wir einen Algorithmus zur semi-analytischen Evaluation im allgemeinen Massenfall entwickelt und seine Zuverlässigkeit demonstriert. Die Masterintegrale werden nach der analytischen Berechnung von sechs der acht durchzuführenden Integrationsschritte einer numerischen Zweifachintegration unterzogen, welche sich als stabil erwiesen hat. Für die anderen Basisintegrale haben wir bewährte Methoden zur Evaluation angegeben, welche zum großen Teil bereits in  $\chi\text{loops}$  implementiert sind.

Es wurden Methoden entwickelt, mit deren Hilfe im Rahmen der P/O-Methode Prozesse mit massiven planaren Zweischleifen-Dreipunktfunktionen berechnet werden können. Mit Hilfe dieser Methoden können alle im SM bei Verwendung der Feynman-Eichung möglichen infrarotendlichen Integrale evaluiert werden, welche eine nicht-gekreuzte Zweischleifen-Vertextopologie aufweisen. Alle Tensorstrukturen im Zähler, die so entstehen können, können mit unserem Algorithmus behandelt werden. Die entstandenen Programme werden in das  $\chi\text{loops}$ -GiNaC-Projekt einfließen.

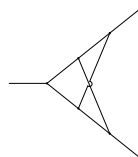
Die Methoden der Tensorreduktion und der semi-analytischen Integration wurden auf die Integrale des Prozesses  $Z^0 \rightarrow l^+l^-$  angewendet.

Es war nicht Teil dieser Arbeit, alle Integrale, wie sie nach Tensorreduktion entstehen, zu berechnen. So müssen noch die Methoden für Zweischleifen-Dreipunktfunktionen mit Zweipunkt-Subgraph implementiert werden.

Die Ergebnisse sind zuletzt noch zu renormieren. Dazu genügt es aber, die effektiven Kopplungen für Zerfallsmasse Null zu evaluieren und die Differenz zu berechnen, da das renormierte Ergebnis bei Null unabhängig bekannt ist [Fr99, FrPr].

Nach Durchführung der verbleibenden Projektteile wird ein Vergleich mit [Aw04a, Ho05] möglich werden. Dadurch kann die Zuverlässigkeit des Algorithmus bestätigt werden.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methoden können auf die gekreuzte Dreipunktfunktion ausgeweitet werden,



(10.1)

wodurch die Evaluation auch der bosonischen Korrekturen zum schwachen leptonicen Mischungswinkel in zweiter Ordnung ermöglicht wird.

Bei LHC kann allerdings nicht mit einer verbesserten experimentellen Genauigkeit der effektiven Vektor- und Axialvektorkopplungen gerechnet werden. Erst beim ILC kann im

Rahmen des GigaZ-Projekts aufgrund einer höheren Statistik die Präzision dieses Experiments nochmals verbessert werden.

Darüber hinaus können mit den hier entwickelten Methoden nach der geplanten Erweiterung des Algorithmus auf die gekreuzte Zweischleifen-Vertextopologie die Korrekturen zweiter Ordnung für weitere beliebige SM-Prozesse mit drei externen Teilchen evaluiert werden. Bereits jetzt können alle infrarotkonvergenten Beiträge mit planaren Topologien mit unserem Algorithmus berechnet werden. Für Präzisionsexperimente an zukünftigen Beschleunigern wie dem ILC werden die Korrekturen zweiter Ordnung bei vielen Prozessen relevant sein, da mit steigender Energie auch die Beiträge der Strahlungskorrekturen zu Meßgrößen mehr und mehr wichtig werden.

Aus diesem Grund behalten die in dieser Arbeit ausgearbeiteten und implementierten Algorithmen und Methoden trotz der in [Aw04a, Ho05] bereits berechneten fermionischen Korrekturen zum schwachen Mischungswinkel ihre Relevanz. Die neuen Methoden zur Berechnung von massiven planaren Zweischleifen-Vertexintegralen mit beliebiger Tensorstruktur haben wir auch in [Gr05] dargelegt.



# Anhang A

## Lorentzstruktur und Projektoren

## A.1 Extraktion von $g_V^l$ und $g_A^l$ aus $Z \longrightarrow l\bar{l}$

### A.1.1 Lorentzstruktur

Der Prozeß  $Z^0 \rightarrow l^+l^-$  besitzt unabhängig von der Schleifenordnung schematisch die Form

$$\mathcal{T}^\mu \quad \equiv \quad Z^0(p)^\mu \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} l(p_1) \\ \bar{l}(p_2) \end{array} \quad (\text{A.1})$$

Durch Kontraktion mit dem Polarisationsvektor  $\epsilon_\mu(p)$  des  $Z^0$ -Bosons wird das Matrixelement berechnet. Da  $\mu$  der Index einer äußeren Linie ist, ist er physikalisch und somit gilt

$$\mu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{A.2})$$

d.h.  $\mathcal{T}^\mu$  ist eine manifest vierdimensionale Größe. Bei Berechnungen in  $D$  Dimensionen ist daher stets allein der vierdimensionale Anteil von  $\mathcal{T}^\mu$  relevant und gegebenenfalls durch Anwendung eines Projektors auf die vier physikalischen Dimensionen heraus zu projizieren. Wir wollen den Vektor  $\mathcal{T}^\mu$  in einer Basis von Lorentzkovarianten entwickeln. Folgende Vorüberlegungen sind dazu notwendig: Aus den Produkten von  $\gamma$ -Matrizen ist es möglich, 16 linear unabhängige  $4 \times 4$ -Matrizen zu konstruieren, die oft in der Dirac-Theorie vorkommen [Bj64]. Diese lassen sich mit der Definition von

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{A.3})$$

darstellen als:

$$\Gamma^S = \mathbb{1} \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu \quad \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} \quad \Gamma^P = \gamma_5 \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_5 \gamma_\mu \quad (\text{A.4})$$

Aufgrund der Lorentz-Kovarianz des Vektors  $\mathcal{T}^\mu$  muß  $\mathcal{T}^\mu$  die Form

$$\mathcal{T}^\mu = ie\bar{u}(p_1)\mathcal{F}^\mu v(p_2) \quad (\text{A.5})$$

annehmen mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\mu &= a\gamma^\mu + b\gamma^\mu\gamma_5 \\ &\quad + cp_1^\mu + dp_2^\mu + ep_1^\mu\gamma_5 + fp_2^\mu\gamma_5 \\ &\quad + gi\sigma_{\mu\nu}p_1^\nu + hi\sigma_{\mu\nu}p_2^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

wobei die  $a, b, c, d, e, f, g, h$  Funktionen von  $M_Z$  und  $m_l$  sind. Aufgrund der *Gordon-Identität*

$$\begin{aligned} m\bar{u}(k)\gamma^\alpha &= \bar{u}(k)(k^\alpha + i\sigma_{\alpha\beta}k^\beta) \\ -m\gamma^\alpha v(k) &= (k^\alpha - i\sigma_{\alpha\beta}k^\beta)v(k) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$



lassen sich die  $i\sigma_{\mu\nu}p_{1/2}^\nu$  - Terme, d.h.  $g$  und  $h$ , in die  $p_{1/2}^\mu$  sowie  $\gamma_\mu$  - Terme absorbieren. Damit nimmt  $\mathcal{F}^\mu$  die allgemeine Form

$$\mathcal{F}^\mu = g_V \gamma^\mu - g_A \gamma^\mu \gamma_5 + k p_1^\mu + l p_2^\mu + m \gamma_5 p_1^\mu + n \gamma_5 p_2^\mu \quad (\text{A.8})$$

an, wobei  $g_V, g_A$  sowie  $k, l, m, n$  jeweils Funktionen von  $m_l$  und  $M_Z$  sind. Es gilt

$$g_V = g_V(m_l, M_Z) \quad g_A = g_A(m_l, M_Z) \quad (\text{A.9})$$

Da wir nur am vierdimensionalen physikalischen Anteil interessiert sind, ist der entscheidende Anteil von  $\mathcal{F}$ :

$$\bar{\mathcal{F}}^\mu = g_V \bar{\gamma}^\mu - g_A \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 + k p_1^\mu + l p_2^\mu + m \gamma_5 p_1^\mu + n \gamma_5 p_2^\mu \quad (\text{A.10})$$

mit  $\bar{\gamma}^\mu$  dem vierdimensionalen Anteil von  $\gamma^\mu$  wie in Anhang B.3 definiert. Wir können das physikalische  $\mathcal{T}$  damit schreiben als

$$\bar{\mathcal{T}}^\mu = ie \bar{u}(p_1) \bar{\mathcal{F}}^\mu v(p_2) \quad (\text{A.11})$$

### A.1.2 Kontraktionen zur Extraktion der Beiträge

Die folgende Rechnung wird für

$$m_l \equiv 0 \quad (\text{A.12})$$

durchgeführt. Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\mu &\equiv \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \\ \mathcal{A}^\mu &\equiv \bar{v}(p_2) \gamma_5 \gamma^\mu u(p_1) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Kontrahiere nun  $\mathcal{T}^\mu$  mit den soeben definierten Vektoren (wobei  $\mathcal{V}^\mu$  offenkundig einen Lorentzvektor darstellt und  $\mathcal{A}^\mu$  einen Axialvektor) und summiere über alle Spins. Daraus lassen sich die Vektor- und Axialvektor-Komponenten gewinnen (für  $m_l = 0$ ).

Diese Vektoren können a priori in  $D$  Dimensionen definiert werden. Da wir aber von  $\mathcal{T}^\mu$  nur an den physikalischen Komponenten in vier Dimensionen interessiert sind, wollen wir auch für  $\mathcal{V}^\mu$  und  $\mathcal{A}^\mu$  nur Komponenten in den vier physikalischen Dimensionen zulassen. Deshalb werden wir bei Berechnungen in höheren Ordnungen Kontraktionen mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{V}}^\mu &\equiv \bar{v}(p_2) \bar{\gamma}^\mu u(p_1) \\ \bar{\mathcal{A}}^\mu &\equiv \bar{v}(p_2) \gamma_5 \bar{\gamma}^\mu u(p_1) \end{aligned}$$

durchführen. Dennoch können wir ohne Verlust an Allgemeinheit zunächst einmal mit  $D$ -dimensionalen  $\mathcal{T}^\mu, \mathcal{V}^\mu, \mathcal{A}^\mu$  einige Berechnungen durchführen und später daraus problemlos die Ergebnisse für 4 Dimensionen ableiten.

**A.1.2.1 Extraktion von  $g_V$** 

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} \mathcal{T}^\mu \mathcal{V}_\mu &= ie \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p_1) \mathcal{F}^\mu v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \\ &= 4ie(2-D) (p_1 \cdot p_2) g_V \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

**A.1.2.2 Extraktion von  $g_A$** 

Da  $p_{1/2}$  physikalische Impulse sind, leben sie nur in 4 Dimensionen. Bei Verwendung der  $\gamma_5$ -Schemata sowohl von Breitenlohner-Maison [Br77] wie auch bei Verwendung des DK-Schemas [Ko91] gilt deshalb<sup>1</sup>:

$$\{ \not{p}_i, \gamma_5 \} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.15})$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} \mathcal{T}^\mu \mathcal{A}_\mu &= ie \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p_1) \mathcal{F}^\mu v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma_5 \gamma_\mu u(p_1) \\ &= 4ie(2-D) (p_1 \cdot p_2) g_A \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

**A.1.2.3 Zusammenfassung für  $g_V, g_A$** 

Man kann die Vektor- und Axialvektorkopplungen berechnen mit:

$$\begin{aligned} g_V &= \frac{\sum_{\text{spins}} \mathcal{T}^\mu \mathcal{V}_\mu}{4ie (p_1 \cdot p_2) (2-D)} \\ g_A &= \frac{\sum_{\text{spins}} \mathcal{T}^\mu \mathcal{A}_\mu}{4ie (p_1 \cdot p_2) (2-D)} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

**A.1.2.4 Extraktion der impulsabhängigen Beiträge**

Zur Berechnung der impulsabhängigen Parameter  $k, l, n, m$  definieren wir folgende Größen:

$$E = \bar{v}(p_2) \mathbb{1} u(p_1) \quad \text{und} \quad F = \bar{v}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \quad (\text{A.18})$$

---

<sup>1</sup>Vergleiche diesbezüglich die Ausführungen in Anhang B.

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
k &= \frac{p_2^\mu \sum_{\text{spins}} \mathcal{T}_\mu E}{4ie (p_1 \cdot p_2)^2} \\
l &= \frac{p_1^\mu \sum_{\text{spins}} \mathcal{T}_\mu E}{4ie (p_1 \cdot p_2)^2} \\
n &= -\frac{p_2^\mu \sum_{\text{spins}} \mathcal{T}_\mu F}{4ie (p_1 \cdot p_2)^2} \\
m &= -\frac{p_1^\mu \sum_{\text{spins}} \mathcal{T}_\mu F}{4ie (p_1 \cdot p_2)^2}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

### A.1.3 Diskussion der impulsabhängigen Terme

Wie man anhand von (A.19) bei genauerem Betrachten der einzelnen konkret zu berechnenden Graphen, (1.7), einsehen kann, entstehen dabei jeweils Spuren, welche für verschwindende Leptonmassen (in allen äußeren wie auch inneren Linien) jeweils eine ungerade Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen enthalten und damit verschwinden.

Folglich treten in der Näherung verschwindender Leptonmassen  $m_l = 0$  bei den von uns betrachteten Graphen die impulsabhängigen Kopplungen  $k, l, n, m$  aus (A.8) nicht auf.

Für nichtverschwindende Leptonmassen entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die einzelnen Terme  $k, l, n, m$  berechnen könnte. Da diese Größen aber aufgrund dessen, daß sie aus den geschilderten Gründen sehr klein sind, experimentell nicht betrachtet werden, haben wir kein derartiges Gleichungssystem aufgestellt.



# Anhang B

## $\gamma_5$ -Schemata

## B.1 $\gamma_5$ -Problematik in D Dimensionen

Die Matrix  $\gamma_5$  ist in  $D = 4$  Dimensionen definiert zu

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\sigma \quad (\text{B.1})$$

mit  $\epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}$  dem *vierdimensionalen* total anti-symmetrischen Levi-Civita-Tensor vierter Stufe. Wir verwenden stets die Konvention, daß dieser Tensor den Anteil der vier physikalischen Dimensionen des Minkowskiraums herausprojiziert. Manches Mal wird dieser Tensor deshalb auch als  $\epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}^{0123}$  bezeichnet. Da es aber in unseren Anwendungen zu keinen Mehrdeutigkeiten kommen kann, verwenden wir

$$\epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma} \equiv \epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}^{0123} \quad (\text{B.2})$$

Die Matrix  $\gamma_5$  erfüllt die Relationen:

$$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0 \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{B.3})$$

und

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\sigma) = i \epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma} \text{Tr}(\mathbf{1}) = 4i \epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma} \quad (\text{B.4})$$

Es ist nicht möglich,  $\gamma_5$  in beliebiger Dimensionszahl so zu definieren, daß es weiterhin die beiden Bedingungen (B.3) und (B.4) erfüllt, vgl. z.B. [Co84].

Es gibt verschiedene Ansätze, dieses Problem trotzdem so zu lösen, daß die Evaluierung von physikalischen Größen möglich wird [Je01]. Wir werden einige dieser Ansätze im Folgenden kurz vorstellen:

## B.2 Naives $\gamma_5$ -Schema

Es gilt weiterhin

$$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0 \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots, D \quad (\text{B.5})$$

Es folgt dann allerdings, daß

$$(4 - D) \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\sigma) = 0 \quad (\text{B.6})$$

gilt. Dies führt zu Inkonsistenzen. Allerdings lassen sich mit diesem Schema trotzdem manche Berechnungen konsistent durchführen. In [Fr99] wurde bewiesen, daß die Berechnungen zu den Zweischleifenkorrekturen zum Myon-Zerfall und die Zweischleifenkorrekturen zu den effektiven Kopplungen des  $Z^0$ -Zerfalls mit diesem Schema durchgeführt werden können und die Anomalie richtig behandelt wird. Gleichwohl haben wir unsere Berechnungen nicht in diesem Schema durchgeführt.

### B.3 Breitenlohner–Maison–Schema

In diesem Schema werden die  $\gamma$ -Matrizen und die Impulse in einen vierdimensionalen Anteil  $\bar{p}^\mu$ ,  $\bar{\gamma}_\mu$  und einen  $(D - 4)$ -dimensionalen Anteil  $\hat{p}^\mu$ ,  $\hat{\gamma}_\mu$  aufgespalten [Br75, Br76, Br77].

$$p^\mu = \bar{p}^\mu + \hat{p}^\mu \quad \gamma_\mu = \bar{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu \quad (\text{B.7})$$

Es gilt

$$\{\gamma_5, \bar{\gamma}_\mu\} = 0 \quad [\gamma_5, \hat{\gamma}_\mu] = 0 \quad (\text{B.8})$$

Diese Definition ist konsistent. Praktische Berechnungen sind damit aber sehr aufwändig.

### B.4 Kreimer–Schema

Die Definition der Impulse und  $\gamma$ -Matrizen sowie die Clifford–Algebra der  $\gamma$ -Matrizen wird bei diesem Schema [Ko91, Kr92a, Kr93b] wie im naiven Schema beibehalten. Insbesondere gilt

$$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0 \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, D \quad (\text{B.9})$$

Es gilt weiterhin

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1} \quad (\text{B.10})$$

Die Spur wird durch ein lineares Funktional ersetzt, welches lediglich in  $D = 4$  Dimensionen mit der gewöhnlichen Spur übereinstimmt. Die Eigenschaften dieses Spurfunktionals erlauben es, das  $\gamma_5$ -Problem auf eine konsistente und doch einfache Art zu lösen. Die Auswertung des Spurfunktionals erlaubt es aber nicht mehr, alle bekannten Regeln der Spurbildung anzuwenden, sondern nur noch einen eingeschränkten Satz hiervon. Insbesondere ist die Spur bzw. das entsprechende Funktional im Allgemeinen nicht mehr zyklisch, wenn eine ungerade Anzahl von  $\gamma_5$ -Matrizen vorliegt.

Zwecks der Definition der Eigenschaften des Spurfunktionals betrachten wir eine beliebige Kette von  $\gamma$ -Matrizen gemäß der Form

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\equiv \mathbb{1} \\ \Gamma_{2k} &\equiv \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_{2k}} \\ \Gamma_{2k+1} &\equiv \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_{2k+1}} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Wir können eine solche Kette anhand der in (A.4) definierten Basis, welche die Identiät sowie die antisymmetrischen Produkte von  $\gamma$ -Matrizen beinhaltet, entwickeln. Dazu verwenden wir folgende Darstellung des antisymmetrischen  $\wedge$ -Produkts:

$$\gamma_{\mu_1} \wedge \gamma_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \gamma_{\mu_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\text{perm}} \text{sign}(\text{perm}) \gamma_{\text{perm}(\mu_1)} \cdots \gamma_{\text{perm}(\mu_k)} \quad (\text{B.12})$$

wobei die Summe über alle Permutationen von  $\mu_1, \dots, \mu_k$  durchzuführen ist. In dieser Darstellung haben wir insbesondere

$$\sigma_{\mu\nu} = i\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \quad (\text{B.13})$$

und

$$\gamma_{\mu_1} \wedge \gamma_{\mu_2} \wedge \gamma_{\mu_3} \wedge \gamma_{\mu_4} = i \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_5 \quad (\text{B.14})$$

bzw.

$$\gamma_5 = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \quad (\text{B.15})$$

Da ein beliebiges Element  $A$  einer  $n$ -dimensionalen komplexen Clifford-Algebra  $\mathcal{G}^c(1, n-1)$  immer in einer externen Grassmann-Basis entwickelt werden kann gemäß

$$A = a_0 \mathbb{1} + a_1^\mu \gamma_\mu + a_2^{\mu\nu, \mu < \nu} \gamma_\mu \gamma_\nu + \dots + a_n \gamma_0 \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \quad (\text{B.16})$$

haben wir im Fall der Grassmann-Algebra der Dirac-Matrizen von (A.4) die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \Gamma_{2k} &\equiv (a_{2k}^0) \mathbb{1} + (a_{2k}^2)^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + (a_{2k}^4) \gamma_5 + \dots \\ \Gamma_{2k+1} &\equiv (a_{2k}^1) \gamma_\mu + (a_{2k}^3) \epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

mit  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$  dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor dritter Stufe. In  $D = 4$  Dimensionen sind keine weiteren als die explizit dargestellten Beiträge möglich. Für höhere Dimensionen sind weitere antisymmetrisierte Beiträge notwendig.

Als Erweiterung der Spurdefinition im vierdimensionalen Raum wird das Spurfunktional  $\mathcal{T}r$  in  $D$  Dimensionen folgendermaßen definiert: Die Spur über eine ungerade Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen ist wie zuvor Null.

$$\mathcal{T}r(\Gamma_{2k+1}) = 0 \quad (\text{B.18})$$

Das Spurfunktional projiziert stets den Koeffizienten der Identität heraus:

$$\mathcal{T}r(\Gamma_{2k}) = (a_{2k}^0) \mathcal{T}r(\mathbb{1}) \quad (\text{B.19})$$

Wird die Kette einer geraden Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen folglich mit einer  $\gamma_5$ -Matrix multipliziert, projiziert das Spurfunktional den Koeffizienten des  $\gamma_5$ -Terms heraus:

$$\mathcal{T}r(\gamma_5 \Gamma_{2k}) = (a_{2k}^4) \mathcal{T}r(\mathbb{1}) \quad (\text{B.20})$$

Praktisch stellt sich dieses Schema so dar, daß man bei der Evaluation der Spur alle  $\gamma_5$ -Matrizen unter Verwendung von (B.9) nach links antikommutieren muß.  $\gamma_5$  wird dann ersetzt gemäß (B.1), wodurch das zu berechnende Spurfunktional  $\mathcal{T}r$  von  $\gamma_5$  unabhängig wird und wie die gewöhnliche vierdimensionale Spur  $\text{Tr}$  evaluiert werden kann. Für eine beliebige Kette  $S$  von  $\gamma$ -Matrizen haben wir die Evaluationsregeln

$$\begin{aligned} \mathcal{T}r(S) &= \text{Tr}(S) \\ \mathcal{T}r(\gamma_5 S) &= -\frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\sigma S) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Die Spurbildung muß immer am gleichen Punkt begonnen werden, dem sogenannten „reading point“. Die Bestimmung des reading points erfordert bei anomalen Graphen im Fall von Theorien mit anomalen Axialvektorströmen, daß die Spur an einem Axialvektorvertex



begonnen werden muß. Im Fall von mehreren Axialvektor–Vertizes muß der reading point unter Beachtung von zusätzlichen Symmetrieargumenten bestimmt werden.

Die ausführliche Beschreibung der Eigenschaften des Spurfunktionals finden sich in [Ko91, Kr92a, Kr93b]. Anomalien werden durch dieses Schema immer richtig behandelt. Deshalb haben wir unsere Berechnungen in diesem Schema durchgeführt, zumal diese Methode auch in GiNaC implementiert ist [Ba04].



## Anhang C

# Spezielle Kontraktionen bei Anomalien

## C.1 Vierdimensionaler metrischer Tensor

Treten bei Feynman–Diagrammen Anomalien auf, so kann es vorkommen, daß Impulse nicht nur mit dem gewöhnlichen  $D$ –dimensionalen metrischen Tensor, sondern auch mit dem vierdimensionalen metrischen Tensor kontrahiert werden müssen. Die Ursache hierfür ist, daß  $\gamma_5$ –Matrizen nach Anhang B auf den vierdimensionalen total antisymmetrischen Tensor  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  zurückzuführen sind. Vergleiche hierzu insbesondere (B.1) und den Abschnitt B.4. Werden aufgrund der Spurbildung bei Verwendung des DK–Schemas zwei total antisymmetrischen Tensoren miteinander kontrahiert, so erhält man vierdimensionale metrische Tensoren:

$$\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4} = 2(g_{\alpha_3\beta_3}^4 g_{\alpha_4\beta_4}^4 - g_{\alpha_3\beta_4}^4 g_{\alpha_4\beta_3}^4) \quad (\text{C.1})$$

## C.2 Kontraktionen

Enthalten die Zähler von Feynmanintegralen Kontraktionen von Schleifenimpulskomponenten mit vierdimensionalen metrischen Tensoren, dann sind die Integrale nicht mehr skalar. Feynmanintegrale werden aber wenn möglich vor Evaluation immer auf skalare Integrale, d.h. auf solche mit Zählern ohne freie Indizes, zurückgeführt. Wie sich in Anhang D zeigt, muß für Integrale der Form

$$\int d^D k d^D l \frac{k^\mu l^\nu}{\prod_i P_i} \quad (\text{C.2})$$

bzw.

$$\int d^D k d^D l \frac{k^\mu k^\nu}{\prod_i P_i} \quad (\text{C.3})$$

eine Darstellung für Kontraktionen von Zählerstrukturen mit dem vierdimensionalen metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}^4$  hergeleitet werden. Dazu werden wir in den P/O–Raum gehen, weil es sich zeigen wird, daß dort die Zähler besonders einfach dargestellt werden können.

Eine Kovariantenzerlegung liefert im Minkowskiraum im Falle eines Parallelraums mit der Dimension

$$J = 2 \quad (\text{C.4})$$

(die Impulse werden wie in Kap. 3 benannt) die Darstellung

$$\int d^D k d^D l \frac{k^\mu l^\nu}{\prod_i P_i} = g^{\mu\nu} A + p_1^\mu p_1^\nu B + p^\mu p^\nu C + p_1^\mu p_1^\nu E + p^\mu p_1^\nu F + \epsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu} p^\alpha p_1^\beta G \quad (\text{C.5})$$

Der metrische Tensor im Orthogonalraum hat die Form

$$g_{\perp}^{\mu\nu} = \text{diag}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_J, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{D-J}) \quad (\text{C.6})$$

Durch Kontraktion mit dem metrischen Tensor im Orthogonalraum und nachfolgend dem Einsetzen der Werte des metrischen Tensors im Parallelraum für einzelne Indizes werden

die Variablen  $A, B, C, E, F, G$  sukzessive bestimmt, es ist kein lineares Gleichungssystem zu lösen. Die Koeffizienten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{D-2} \int d^D k d^D l \frac{k_{\perp} l_{\perp} z}{\prod_i P_i} \\
B &= \frac{1}{q_z^2} \int d^D k d^D l \frac{1}{\prod_i P_i} \left( k_1 l_1 + \frac{k_{\perp} l_{\perp} z}{2-D} \right) \\
C &= \frac{1}{e^2} \int d^D k d^D l \frac{1}{\prod_i P_i} \left[ k_0 l_0 + \frac{e_1^2}{q_z^2} k_1 l_1 + \frac{k_{\perp} l_{\perp} z}{2-D} \frac{e_1^2 - q_z^2}{q_z^2} - \frac{e_1}{q_z} (k_1 l_0 + k_0 l_1) \right] \\
E &= \frac{1}{e q_z} \int d^D k d^D l \frac{1}{\prod_i P_i} \left[ k_1 l_0 - \frac{e_1}{q_z} \left( k_1 l_1 + \frac{k_{\perp} l_{\perp} z}{2-D} \right) \right] \\
F &= \frac{1}{e q_z} \int d^D k d^D l \frac{1}{\prod_i P_i} \left[ k_0 l_1 - \frac{e_1}{q_z} \left( k_1 l_1 + \frac{k_{\perp} l_{\perp} z}{2-D} \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Kontraktion mit

$$g_{\mu\nu}^4 = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_J, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{4-J}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{D-4}) \tag{C.8}$$

liefert

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}^4 \int d^D k d^D l \frac{k^{\mu} l^{\nu}}{\prod_i P_i} &= \int d^D k d^D l \frac{1}{\prod_i P_i} (k_0 l_0 - k_1 l_1 - \frac{2}{D-2} k_{\perp} l_{\perp} z) \\
g_{\mu\nu}^4 \int d^D k d^D l \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{\prod_i P_i} &= \int d^D k d^D l \frac{1}{\prod_i P_i} (k_0^2 - k_1^2 - \frac{2}{D-2} k_{\perp}^2) \\
g_{\mu\nu}^4 \int d^D k d^D l \frac{l^{\mu} l^{\nu}}{\prod_i P_i} &= \int d^D k d^D l \frac{1}{\prod_i P_i} (l_0^2 - l_1^2 - \frac{2}{D-2} l_{\perp}^2)
\end{aligned} \tag{C.9}$$



## Anhang D

# Effektive Kopplungen, Integrale und Koeffizienten

Dieses Kapitel schließt unmittelbar an Kapitel 2 an. Es sollen die Koeffizienten der Integrale für die Korrekturen der effektiven Kopplungen, wie sie mit Hilfe der Projektoren im Minkowskiraum extrahiert wurden, aufgeführt werden.

## D.1 Koeffizienten der Tensorintegrale

Aus allen beitragenden Feynmangraphen lassen sich die mit Hilfe der Projektoren extrahierten Korrekturen zu den effektiven Kopplungen nach Kapitel 2.2.3 gemäß der Formel

$$\Delta g_{V,A} = H \sum_T B^T \int d^D k d^{D_l} \frac{\sum_i C_i^T(p_{1,2}) N_i^T(k, l)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{D.1})$$

ausdrücken. Im Folgenden werden die hierbei auftretenden Koeffizienten für die einzelnen Beiträge bestimmt werden. Bezüglich der Benennung von Indizes und der Konventionen verweisen wir auf Kapitel 2.2.3.

Bei der Notation der Koeffizienten verwenden wir der Übersichtlichkeit wegen die zusätzliche Vereinfachung, daß wir bei Kopplungen an einzelnen Vertizes anstatt  $g_V^f$  und  $g_A^f$  die Ersatzschreibweise  $V_f$  und  $A_f$  verwenden.

Die bei diesen Berechnungen auftretenden Spuren wurden mit GiNaC [Ba00] sowie unter Zuhilfenahme des Mathematica-Pakets TRACER [Ja91] ausgewertet. Bei GiNaC ist das DK- $\gamma_5$ -Schema [Ko91] standardmässig eingebaut. Im Fall von TRACER haben wir das Antikommutieren aller  $\gamma_5$ -Matrizen nach links, wie im DK-Schema gefordert, von Hand durchgeführt, danach die Spur automatisch ausgewertet und mit dem automatisch erzeugten GiNaC-Ergebnis mit Hilfe von Maple [WaMa] (um unabhängig zu testen) verglichen. Die Kopplungen, welche in den inneren Linien bei Kopplung an ein  $Z^0$  bzw.  $W^\pm$  auftauchen, berechnen sich für beliebige innere Fermionen sortiert nach Stömen wie im Folgenden notiert. Die Graphen, in welchen die inneren Fermionen des fermionischen Dreiecks Masse Null haben, ergeben sich dabei aus den notierten Formeln sofort, wenn man darin die Masse des top-Quarks zu Null setzt  $m_t = 0$ . Deshalb müssen wir jeweils nur die Beiträge im Falle von inneren top-Quarks notieren. Die Beiträge ohne top müssen mit der Anzahl der masselosen Fermionen gewichtet werden, wobei weiter nach den schwachen Isospins und den elektrischen Ladungen unterschieden werden muß. Diese Unterscheidung braucht an dieser Stelle aber nicht getroffen zu werden, da wir die Kopplungen an den inneren Vertizes generisch als  $V_f$  und  $A_f$  notieren.

## D.2 Korrekturen bei ungeladenen Strömen

### D.2.1 Beitragende Graphen

Die Graphen, welche bei ungeladenen Strömen berücksichtigt werden müssen, sind zum einen die Graphen mit top-Quarks im inneren Dreieck



$$(D.2)$$

zum anderen die Beiträge mit masselosen Fermionen im Dreieck:

$$(D.3)$$

Bei den Korrekturen mit ungeladenen Strömen setzen wir die Propagatormassen zu

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_t \quad m_4 = m_5 = M_Z \quad m_6 = 0 \quad (D.4)$$

Wir verwenden dabei die Konvention, daß für die äußeren Fermionen  $f$  als Index der Kopplungen (1.3)  $le$  (für „leptons“) geschrieben wird. Die äußeren Fermionen sind Leptonen. Da im inneren Dreieck Quarks auftreten können, werden die Kopplungen des inneren Dreiecks mit  $tr$  (für „triangle“) indiziert. Sind die inneren Linien auch leptonisch, müssen für sie lediglich in späteren Rechenschritten die Werte für leptonische Kopplungen eingesetzt werden. Wir erleiden durch diese Indizierung keinen Verlust an Allgemeinheit. Ähnliches gilt für die Massenindizierung sowie die Werte der Massen, vgl. das hierzu das in Anhang D.1 Gesagte. Sind die Fermionen im inneren Dreieck masselos, so muß  $m_t \rightarrow 0$  gesetzt werden.

### D.2.2 Korrektur zu $g_V$

Die Berechnung von  $\Delta g_V$  erfolgt im Falle von drei  $t$ -Quarks und zwei inneren  $Z^0$  gemäß der Formel:

$$\Delta g_V^{NC} = HB^{NC} \int d^D k d^D l \frac{\sum_i C_i^{V,NC}(p_{1,2}) N_i^{V,NC}(k, l)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (D.5)$$

Die Zählerkoeffizienten sind

$i$	$N_i^{V,NC}$	$C_i^{V,NC}$
1	$(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)^2 (192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 + 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D) + (p_1 p_2) (-128 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 128 A_{le} V_{le} A_{tr}^3) m_t^2$
2	$(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} k^\beta)$	$(p_1 p_2)^2 (192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 + 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D) + (p_1 p_2) (-384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 384 A_{le} V_{le} A_{tr}^3) m_t^2$
3	$(p_2 l)$	$-256 (p_1 p_2) A_{le} V_{le} A_{tr}^3 m_t^2 + 256 (p_1 p_2) A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 m_t^2$
4	$(p_2 l) (k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2) (-192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D + 768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 - 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D)$
5	$(p_2 k) (l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2) (192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 + 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D)$

6	$(p_1 l)$	$256(p_1 p_2) A_{le} V_{le} A_{tr}^3 m_t^2 - 256(p_1 p_2) A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 m_t^2$
7	$(p_1 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2$ $- 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 + 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D)$
8	$(p_1 l)(p_2 l)$	$(-256 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3) m_t^2$ $+ (p_1 p_2)(-384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 128 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D)$
9	$(p_1 l)(p_2 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} k^\beta)$	$1536 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 512 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
10	$(p_1 l)(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(-192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D)$ $+ (-384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 384 A_{le} V_{le} A_{tr}^3) m_t^2$
11	$(p_1 l)(p_2 k)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-1536 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 512 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
12	$(p_1 l)(p_2 k)(p_2 l)$	$-192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D$
13	$(p_1 l)(p_2 k)^2$	$-768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
14	$(p_1 l)^2(p_2 k)$	$-192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D$
15	$(p_1 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D + 768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2$ $+ 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 - 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D)$
16	$(p_1 k)(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D - 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D)$ $+ (-384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 384 A_{le} V_{le} A_{tr}^3) m_t^2$
17	$(p_1 k)(p_2 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-1536 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 512 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
18	$(p_1 k)(p_2 l)^2$	$192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D + 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D$
19	$(p_1 k)(p_2 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$1536 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 512 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
20	$(p_1 k)(p_2 k)(p_2 l)$	$768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
21	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 l)$	$192 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 D + 64 A_{le} V_{le} A_{tr}^3 D$
22	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 k)$	$-768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
23	$(p_1 k)^2(p_2 l)$	$768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
24	$l^2$	$(p_1 p_2)^2(768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
25	$l^2(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
26	$l^2(p_1 k)$	$(p_1 p_2)(-768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
27	$k^2(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 128 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
28	$k^2(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 128 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
29	$k^2(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
30	$k^2(p_1 l)$	$(p_1 p_2)(768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
31	$k^2(p_1 l)(p_2 l)$	$-768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
32	$k^2(p_1 l)(p_2 k)$	$384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 128 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
33	$k^2(p_1 k)(p_2 l)$	$384 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 128 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
34	$(kl)$	$(p_1 p_2)^2(768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
35	$(kl)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
36	$(kl)(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
37	$(kl)(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
38	$(kl)(p_1 l)$	$(p_1 p_2)(768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
39	$(kl)(p_1 l)(p_2 k)$	$768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$
40	$(kl)(p_1 k)$	$(p_1 p_2)(-768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 - 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3)$
41	$(kl)(p_1 k)(p_2 l)$	$768 A_{le} V_{le} A_{tr} V_{tr}^2 + 256 A_{le} V_{le} A_{tr}^3$

### D.2.3 Korrektur zu $g_A$

Die Berechnung von  $\Delta g_A$  folgt der Formel

$$\Delta g_{A,NC} = HB^{NC} \int d^D k d^D l \frac{\sum_i C_i^{A,NC}(p_{1,2}) N_i^{A,NC}(k, l)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (D.6)$$

Die Zählerkoeffizienten sind

$i$	$N_i^{A,NC}$	$C_i^{A,NC}$
1	$(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)^2 (-128 A_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 384 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D - 384 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) + (p_1 p_2) (64 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 64 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 64 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 64 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) m_t^2$
2	$(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)^2 (-128 A_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 384 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D - 384 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) + (p_1 p_2) (192 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 192 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 192 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 192 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) m_t^2$
3	$(p_2 l)$	$128 (p_1 p_2) V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 m_t^2 + 128 (p_1 p_2) A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 m_t^2 - 128 (p_1 p_2) V_{le}^2 A_{tr}^3 m_t^2 - 128 (p_1 p_2) A_{le}^2 A_{tr}^3 m_t^2$
4	$(p_2 l) (k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(128 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D + 384 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D + 384 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) (p_1 p_2)$
5	$(p_2 k) (l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2) (-128 A_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 384 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D - 384 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
6	$(p_1 l)$	$-128 (p_1 p_2) V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 m_t^2 - 128 (p_1 p_2) A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 m_t^2 + 128 (p_1 p_2) V_{le}^2 A_{tr}^3 m_t^2 + 128 (p_1 p_2) A_{le}^2 A_{tr}^3 m_t^2$
7	$(p_1 l) (k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2) (-128 A_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 84 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 + 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D - 384 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
8	$(p_1 l) (p_2 l)$	$(128 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 128 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 128 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) m_t^2 + (p_1 p_2) (-64 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 192 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 192 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 64 A_{le}^2 A_{tr}^3 D)$
9	$(p_1 l) (p_2 l) (k^\alpha g_4^{\alpha\beta} k^\beta)$	$256 A_{le}^2 A_{tr}^3 + 768 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 256 V_{le}^2 A_{tr}^3 + 768 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
10	$(p_1 l) (p_2 k)$	$(p_1 p_2) (-32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D) + (192 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 192 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 192 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 192 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) m_t^2$
11	$(p_1 l) (p_2 k) (k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-256 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 768 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 256 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 768 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
12	$(p_1 l) (p_2 k) (p_2 l)$	$-32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D$
13	$(p_1 l) (p_2 k)^2$	$-128 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 384 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 384 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
14	$(p_1 l)^2 (p_2 k)$	$-32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D$
15	$(p_1 k) (l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(128 A_{le}^2 A_{tr}^3 - 32 V_{le}^2 A_{tr}^3 D + 384 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 96 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 96 V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 128 V_{le}^2 A_{tr}^3 - 32 A_{le}^2 A_{tr}^3 D + 384 A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2) (p_1 p_2)$

16	$(p_1 k)(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-32V_{le}^2 A_{tr}^3 D - 96A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 96V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D - 32A_{le}^2 A_{tr}^3 D) + (192A_{le}^2 A_{tr}^3 - 192V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 192V_{le}^2 A_{tr}^3 - 192A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)m_t^2$
17	$(p_1 k)(p_2 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-256A_{le}^2 A_{tr}^3 - 768V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 256V_{le}^2 A_{tr}^3 - 768A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
18	$(p_1 k)(p_2 l)^2$	$32V_{le}^2 A_{tr}^3 D + 96A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 96V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 32A_{le}^2 A_{tr}^3 D$
19	$(p_1 k)(p_2 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$256A_{le}^2 A_{tr}^3 + 768V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 256V_{le}^2 A_{tr}^3 + 768A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
20	$(p_1 k)(p_2 k)(p_2 l)$	$128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
21	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 l)$	$32V_{le}^2 A_{tr}^3 D + 96A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 96V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 D + 32A_{le}^2 A_{tr}^3 D$
22	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 k)$	$-128A_{le}^2 A_{tr}^3 - 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 128V_{le}^2 A_{tr}^3 - 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
23	$(p_1 k)^2(p_2 l)$	$128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
24	$l^2$	$(p_1 p_2)^2(128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
25	$l^2(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
26	$l^2(p_1 k)$	$(p_1 p_2)(-128A_{le}^2 A_{tr}^3 - 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 128V_{le}^2 A_{tr}^3 - 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
27	$k^2(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-64A_{le}^2 A_{tr}^3 - 192V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 64V_{le}^2 A_{tr}^3 - 192A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
28	$k^2(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(64A_{le}^2 A_{tr}^3 + 192V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 64V_{le}^2 A_{tr}^3 + 192A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
29	$k^2(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-128A_{le}^2 A_{tr}^3 - 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 128V_{le}^2 A_{tr}^3 - 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
30	$k^2(p_1 l)$	$(p_1 p_2)(128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
31	$k^2(p_1 l)(p_2 l)$	$-128A_{le}^2 A_{tr}^3 - 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 128V_{le}^2 A_{tr}^3 - 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
32	$k^2(p_1 l)(p_2 k)$	$64A_{le}^2 A_{tr}^3 + 192V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 64V_{le}^2 A_{tr}^3 + 192A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
33	$k^2(p_1 k)(p_2 l)$	$64A_{le}^2 A_{tr}^3 + 192V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 64V_{le}^2 A_{tr}^3 + 192A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
34	$(kl)$	$(p_1 p_2)^2(128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
35	$(kl)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
36	$(kl)(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-128A_{le}^2 A_{tr}^3 - 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 128V_{le}^2 A_{tr}^3 - 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
37	$(kl)(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
38	$(kl)(p_1 l)$	$(p_1 p_2)(128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
39	$(kl)(p_1 l)(p_2 k)$	$128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$
40	$(kl)(p_1 k)$	$(p_1 p_2)(-128A_{le}^2 A_{tr}^3 - 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 - 128V_{le}^2 A_{tr}^3 - 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2)$
41	$(kl)(p_1 k)(p_2 l)$	$128A_{le}^2 A_{tr}^3 + 384V_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2 + 128V_{le}^2 A_{tr}^3 + 384A_{le}^2 A_{tr} V_{tr}^2$

### D.3 Korrekturen bei geladenen Strömen

Falls die beiden inneren Bosonen  $W$ -Bosonen sind, gilt (wie man leicht zeigt)

$$\Delta g_V = \Delta g_A \quad (\text{D.7})$$

Es müssen aber abhängig von der Fermionrichtung verschiedene Beiträge betrachtet werden. Beide Beiträge berechnen sich nach der Formel

$$\Delta g_{V,A} = \Delta g_{CC} = HB^{CC} \int d^D k d^{D_l} \frac{\sum_i C_i^{CC}(p_{1,2}) N_i^{CC}(k, l)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{D.8})$$

Die Massen der Propagatoren sind abhängig vom Graphen. Im Fall, dass der Fermionfluß im Uhrzeigersinn ist, haben wir

$$m_1 = m_2 = 0 \quad m_3 = m_t \quad m_4 = m_5 = M_W \quad m_6 = 0 \quad (\text{D.9})$$

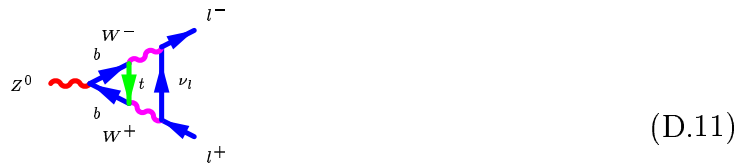
im Fall, der Fermionfluß entgegen dem Uhrzeigersinn ist, haben wir

$$m_1 = m_2 = m_t \quad m_3 = 0 \quad m_4 = m_5 = M_W \quad m_6 = 0 \quad (\text{D.10})$$

Die Kopplungen des jeweiligen Fermions an das zerfallende  $Z^0$  schreiben wir, da nur ein solcher Vertex auftritt, als  $V, A$ . Für die Kopplungen  $V, A$  sind die Kopplungen desjenigen Fermions einzusetzen, welches an das zerfallende  $Z^0$  koppelt.

### D.3.1 Beitragende Graphen

Ist der Fermionfluß in Richtung des Uhrzeigersinns, so erhalten wir für nichtverschwindende Masse des top-Quarks den Beitrag



Für masselose innere Fermionen ergibt sich



Ist der Fermionfluß entgegen dem Uhrzeigersinn, so ergeben sich für innere top-Quarks die Beiträge



Sind die inneren Fermionen masselos, so erhalten wir



### D.3.2 Fermionrichtung entgegen Uhrzeigersinn

Der Prozeß mit zwei  $t$  und einem  $b$  liefert für

$$\Delta g_{CC,ac} = HB^{CC} \int d^D k d^D l \frac{\sum_i C_i^{CC,ac}(p_{1,2}) N_i^{CC,ac}(k, l)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{D.15})$$

die Koeffizienten

$i$	$N_i^{CC,ac}$	$C_i^{CC,ac}$
1	$(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(128A - 128V)m_t^2$ $+(p_1 p_2)^2(-64VD + 384A + 384V - 64AD)$
2	$(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(128A - 128V)m_t^2$ $+(p_1 p_2)^2(-64VD + 384A + 384V - 64AD)$
3	$(p_2 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(64VD - 384A - 384V + 64AD)$
4	$(p_2 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-64VD + 384A + 384V - 64AD)$
5	$(p_1 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-64VD + 384A + 384V - 64AD)$
6	$(p_1 l)(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(512VD - 2048A - 2048V + 512AD)$ $+(128VD + 512A - 512V - 128AD)m_t^2$
7	$(p_1 l)(p_2 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} k^\beta)$	$512A + 512V$
8	$(p_1 l)(p_2 k)$	$(64VD + 256A - 256V - 64AD)m_t^2 +$ $+(p_1 p_2)(256VD - 1024A - 1024V + 256AD)$
9	$(p_1 l)(p_2 k)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-512A - 512V$
10	$(p_1 l)(p_2 k)(p_2 l)$	$256VD - 1024A - 1024V + 256AD$
11	$(p_1 l)(p_2 k)^2$	$128VD - 512A - 512V + 128AD$
12	$(p_1 l)^2(p_2 k)$	$256VD - 1024A - 1024V + 256AD$
13	$(p_1 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(64VD - 384A - 384V + 64AD)$
14	$(p_1 k)(p_2 l)$	$(64VD + 256A - 256V - 64AD)m_t^2 +$ $+(p_1 p_2)(256VD - 1024A - 1024V + 256AD)$
15	$(p_1 k)(p_2 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-512A - 512V$
16	$(p_1 k)(p_2 l)^2$	$-256VD + 1024A + 1024V - 256AD$
17	$(p_1 k)(p_2 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$512A + 512V$
18	$(p_1 k)(p_2 k)(p_2 l)$	$-128VD + 512A + 512V - 128AD$
19	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 l)$	$-256VD + 1024A + 1024V - 256AD$
20	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 k)$	$128VD - 512A - 512V + 128AD$
21	$(p_1 k)^2(p_2 l)$	$-128VD + 512A + 512V - 128AD$
22	$l^2$	$(p_1 p_2)^2(-192VD + 640A + 640V - 192AD)$ $+(p_1 p_2)(-192VD - 384A + 384V + 192AD)m_t^2$
23	$l^2(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(-192VD + 640A + 640V - 192AD)$
24	$l^2(p_1 k)$	$(p_1 p_2)(192VD - 640A - 640V + 192AD)$
25	$l^2(p_1 k)(p_2 k)$	$512A + 512V$
26	$k^2(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-128A - 128V)$
27	$k^2(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(128A + 128V)$
28	$k^2(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(128VD - 512A - 512V + 128AD)$

29	$k^2(p_1l)$	$(p_1p_2)(-128VD + 512A + 512V - 128AD)$
30	$k^2(p_1l)(p_2l)$	$-128VD - 128AD$
31	$k^2(p_1l)(p_2k)$	$64VD - 256A - 256V + 64AD$
32	$k^2(p_1k)(p_2l)$	$64VD - 256A - 256V + 64AD$
33	$k^2l^2$	$(p_1p_2)(192VD - 640A - 640V + 192AD)$
34	$(kl)$	$(p_1p_2)^2(-192VD + 640A + 640V - 192AD)$ $+(p_1p_2)(-192VD - 384A + 384V + 192AD)m_t^2$
35	$(kl)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1p_2)(256A + 256V)$
36	$(kl)(p_2l)$	$(p_1p_2)(192VD - 640A - 640V + 192AD)$
37	$(kl)(p_2k)$	$(p_1p_2)(-128VD + 512A + 512V - 128AD)$
38	$(kl)(p_1l)$	$(p_1p_2)(-192VD + 640A + 640V - 192AD)$
39	$(kl)(p_1l)(p_2k)$	$128VD + 128AD$
40	$(kl)(p_1k)$	$(p_1p_2)(128VD - 512A - 512V + 128AD)$
41	$(kl)(p_1k)(p_2l)$	$128VD + 128AD$
42	$(kl)(p_1k)(p_2k)$	$1024A + 1024V$
43	$(kl)k^2$	$(p_1p_2)(64VD - 384A - 384V + 64AD)$
44	$(kl)^2$	$(p_1p_2)(-128VD + 256A + 256V - 128AD)$

### D.3.3 Fermionrichtung im Uhrzeigersinn

Der Prozeß mit zwei  $b$  und einem  $t$  liefert für

$$\Delta g_{CC,wc} = H_{ch} \int d^D k d^{D_l} l^i \frac{\sum C_i^{CC,wc}(p_{1,2}) N_i^{CC,wc}(k, l)}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{D.16})$$

die Koeffizienten

$i$	$N_i^{CC,wc}$	$C_i^{CC,wc}$
1	$(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1p_2)^2(192VD - 896A - 896V + 192AD)$
2	$(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1p_2)^2(192VD - 896A - 896V + 192AD)$
3	$(p_2l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1p_2)(-192VD + 896A + 896V - 192AD)$
4	$(p_2k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1p_2)(192VD - 896A - 896V + 192AD)$
5	$(p_1l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1p_2)(192VD - 896A - 896V + 192AD)$
6	$(p_1l)(p_2l)$	$(p_1p_2)(-768VD + 2048A + 2048V - 768AD)$
7	$(p_1l)(p_2l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} k^\beta)$	$512A + 512V$
8	$(p_1l)(p_2k)$	$(p_1p_2)(-384VD + 1024A + 1024V - 384AD)$
9	$(p_1l)(p_2k)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-512A - 512V$
10	$(p_1l)(p_2k)(p_2l)$	$-384VD + 1024A + 1024V - 384AD$

166 ANHANG D. EFFEKTIVE KOPPLUNGEN, INTEGRALE UND KOEFFIZIENTEN

11	$(p_1 l)(p_2 k)^2$	$-128VD - 128AD$
12	$(p_1 l)^2(p_2 k)$	$-384VD + 1024A + 1024V - 384AD$
13	$(p_1 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-192VD + 896A + 896V - 192AD)$
14	$(p_1 k)(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-384VD + 1024A + 1024V - 384AD)$
15	$(p_1 k)(p_2 l)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$-512A - 512V$
16	$(p_1 k)(p_2 l)^2$	$384VD - 1024A - 1024V + 384AD$
17	$(p_1 k)(p_2 k)(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$512A + 512V$
18	$(p_1 k)(p_2 k)(p_2 l)$	$128VD + 128AD$
19	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 l)$	$384VD - 1024A - 1024V + 384AD$
20	$(p_1 k)(p_1 l)(p_2 k)$	$-128VD - 128AD$
21	$(p_1 k)^2(p_2 l)$	$128VD + 128AD$
22	$l^2$	$(p_1 p_2)^2(192VD - 128A - 128V + 192AD)$
23	$l^2(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(192VD - 128A - 128V + 192AD)$
24	$l^2(p_1 k)$	$(p_1 p_2)(-192VD + 128A + 128V - 192AD)$
25	$l^2(p_1 k)(p_2 k)$	$-512A - 512V$
26	$k^2(l^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(-128A - 128V)$
27	$k^2(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(128A + 128V)$
28	$k^2(p_2 l)$	$(-128VD - 128AD)(p_1 p_2)$
29	$k^2(p_1 l)$	$(p_1 p_2)(128VD + 128AD)$
30	$k^2(p_1 l)(p_2 l)$	$128VD - 512A - 512V + 128AD$
31	$k^2(p_1 l)(p_2 k)$	$-64VD + 512A + 512V - 64AD$
32	$k^2(p_1 k)(p_2 l)$	$-64VD + 512A + 512V - 64AD$
33	$k^2 l^2$	$(p_1 p_2)(-192VD + 640A + 640V - 192AD)$
34	$(kl)$	$(p_1 p_2)^2(192VD - 128A - 128V + 192AD)$
35	$(kl)(k^\alpha g_4^{\alpha\beta} l^\beta)$	$(p_1 p_2)(256A + 256V)$
36	$(kl)(p_2 l)$	$(p_1 p_2)(-192VD + 128A + 128V - 192AD)$
37	$(kl)(p_2 k)$	$(p_1 p_2)(128VD + 128AD)$
38	$(kl)(p_1 l)$	$(p_1 p_2)(192VD - 128A - 128V + 192AD)$
39	$(kl)(p_1 l)(p_2 k)$	$-128VD + 512A + 512V - 128AD$
40	$(kl)(p_1 k)$	$(-128VD - 128AD)(p_1 p_2)$
41	$(kl)(p_1 k)(p_2 l)$	$-128VD + 512A + 512V - 128AD$
42	$(kl)(p_1 k)(p_2 k)$	$-1024A - 1024V$
43	$(kl)k^2$	$(p_1 p_2)(-64VD + 384A + 384V - 64AD)$
44	$(kl)^2$	$(p_1 p_2)(128VD - 256A - 256V + 128AD)$



# Anhang E

## Basisintegrale

In Kapitel 6 haben wir für die Masterintegrale eine Darstellung für eine numerische Zweifachintegration hergeleitet. Diesbezüglich ist es, wie in Kapitel 6 gezeigt, notwendig, die in (6.92), (6.93) und (6.168) definierten Basisintegrale in  $s$  und  $t$  analytisch durch eine zweidimensionale Integration zu evaluieren. Bevor wir mit der Evaluation beginnen, wollen wir einige grundlegende Vorbemerkungen treffen.

## E.1 Parameter

Die in den Integranden auftretenden Basisparameter unterliegen den Bedingungen

$$a, b, c, s_0, t_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{E.1})$$

und dabei gilt stets

$$a, c < 0 \quad \text{und} \quad 1 - ac < 0 \quad (\text{E.2})$$

Die Darstellung der Parameter in der Variablen für die numerische Integration,  $k_0, l_0$ , sowie die Begründungen für die Einschränkungen der Wertebereiche finden sich in Kapitel 6.

## E.2 Trennung von Real- und Imaginärteil

Bei der Berechnung der Basisintegrale können der Real- und der Imaginärteil vollständig analytisch separiert und getrennt berechnet werden.

Die Unterscheidung, ob ein Imaginärteil auftritt und welches Vorzeichen dieser ggf. hat, hängt u.a. vom infinitesimalen Parameter

$$\eta = 0_+ \quad (\text{E.3})$$

ab, der gegen Null geht, aber in den Integranden auftritt und erst nach analytischen Evaluationen zu Null gesetzt werden kann.

Es gibt zwei Quellen für einen Imaginärteil: Erstens der immer auftretende Faktor der Wurzel mit Schnitt auf der positiven reellen Achse. Die zweite Quelle sind Singularitäten in gebrochen rationalen Polynome, welche aufgrund der  $i\eta$ -Vorschrift im Komplexen liegen.

### E.2.1 Wurzel und Schnitte

Es tritt in allen zu betrachtenden Integranden die Wurzel

$$\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st} \quad (\text{E.4})$$

auf. Diese Wurzel ist so definiert, daß ihr ihr Schnitt auf der positiven reellen Achse liegt [Kr92b]. Unser Ziel ist es, diese Wurzel analytisch in Real- und Imaginärteil zu trennen, sodaß der infinitesimale Parameter  $\eta$  nicht weiter in die Berechnung mit einfließt und der Schnitt in der neuen Darstellung wie sonst üblich auf der negativen reellen Achse liegt, während die Argumente positiv sind.

Wir folgen zur Darstellung der Wurzel der Argumentation von [Fr96a]. Da wir hier die in [Fr96a] beschriebenen Sachverhalte nur kurz zusammenfassen, empfehlen wir, zum Verständnis ggf. die dortige Darstellung nachzulesen.

Das Argument der Wurzel, der Radikand, ist

$$\bar{R}(s, t) = (at + b + i\eta + cs)^2 - 4st \quad (\text{E.5})$$

Er besitzt die Nullstellen

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{t(2 - ac) - bc \pm 2\sqrt{t((1 - ac)t - bc)}}{c^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ \sqrt{t} \pm \sqrt{t(1 - ac) - bc} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Die Gleichung

$$R(s, t) = (at + b + cs)^2 - 4st \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{E.7})$$

definiert die Grenze zwischen positivem und negativem Realteil des Radikanden in der reellen Ebene. (E.7) beschreibt eine Ellipse in der  $s$ - $t$ -Ebene.

Im Fall  $b < 0$  liegt diese Ellipse im dritten Quadranten, in welchem  $s$  und  $t$  negativ sind. Sie wird mithin bei der Integration, welche innerhalb des ersten Quadranten stattfindet, nicht tangiert. Da nur innerhalb der Ellipse der Realteil des Radikanden negativ ist, entsteht somit im Fall  $b < 0$  durch die Wurzel kein Imaginärteil. Lediglich das Vorzeichen der Wurzel mit Schnitt auf der negativen Achse, in welche (E.4) umgeschrieben werden soll, muß noch in Abhängigkeit von  $\eta$  bestimmt werden. Dies geschieht analog zum Fall  $b > 0$ . Im Fall  $b > 0$  berührt die Ellipse, welche dann im ersten Quadranten liegt, die positiven Koordinatenachsen. Innerhalb der Ellipse ist der Realteil des Arguments immer negativ. Außerhalb der Ellipse ist es positiv, das Vorzeichen der Wurzel mit Schnitt auf der negativen Achse ist abhängig von  $\eta$  zu bestimmen. Dieser Fall ist in Abbildung E.1 gezeigt. Das Vorzeichen der Wurzel mit negativem Schnitt bestimmt sich außerhalb der Ellipse stets abhängig vom Vorzeichen des Imaginärteils des Radikanden

$$\bar{R}(s, t) = (at + b + cs)^2 - 4st + 2i(at + b + cs)\eta \quad (\text{E.8})$$

das heißt abhängig vom Vorzeichen von  $(at + b + cs)$ . Da  $a, c$  negativ, ist das Vorzeichen der Wurzel im Fall  $b < 0$  im Integrationsgebiet negativ. Im Fall  $b > 0$  ist es oberhalb der durch die Gleichung

$$(at + b + cs) = 0 \quad (\text{E.9})$$

definierten Linie negativ, da es für  $s, t \rightarrow \infty$  nicht mehr von  $b$  abhängig ist, unterhalb positiv. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen sind die Berührungspunkte der Ellipse mit den Achsen. Sie befinden sich für  $t = 0$  bei  $s = -b/c$  und für  $s = 0$  bei  $t = -b/a$ . Im Fall  $b < 0$  ist das Vorzeichen des Imaginärteils stets negativ.

Die Regeln zur Umwandlung der komplexen Wurzel in gewöhnliche Wurzeln mit positiven reellen Zahlen als Argumenten übernehmen wir wörtlich aus [Fr96a]. Dabei wird die Wurzel in den verschiedenen Gebieten der Ellipse von Abbildung E.1 wie folgt aufgelöst:

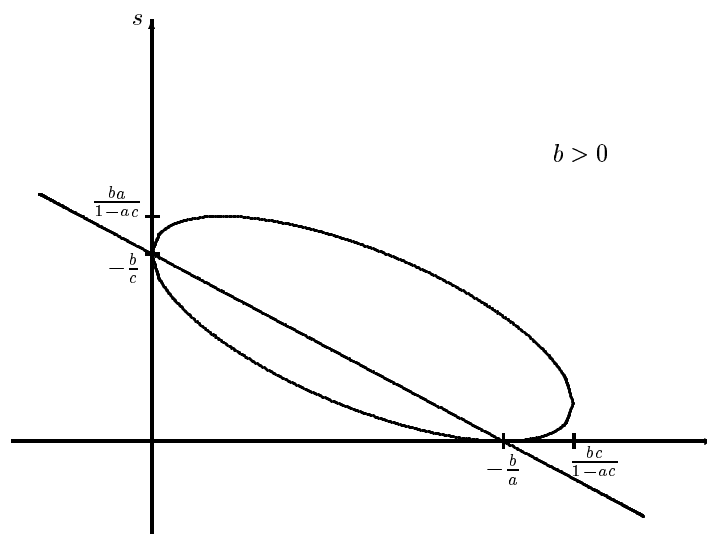


Abbildung E.1: Ellipse, auf welcher der Radikand der Wurzel im Falle von positivem  $b$  Null wird.

- Rechts und oberhalb der Geraden  $at + b + cs = 0$  und außerhalb der Ellipse ist der Realteil positiv und der Imaginärteil negativ. Es ist die negative reelle Wurzel zu ziehen:

$$\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st} \rightarrow -\sqrt{(at + b + cs)^2 - 4st} \quad (\text{E.10})$$

Für  $b < 0$  ist nur dieser Fall relevant.

- Links und unterhalb der Geraden  $at + b + cs = 0$  und außerhalb der Ellipse ist der Realteil und der Imaginärteil positiv. Es ist die positive reelle Wurzel zu ziehen.

$$\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st} \rightarrow +\sqrt{(at + b + cs)^2 - 4st} \quad (\text{E.11})$$

- Innerhalb der Ellipse ist der Realteil negativ, es ist die positive imaginäre Wurzel zu verwenden. Das Vorzeichen des Imaginärteils ist unerheblich.

$$\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st} \rightarrow +i\sqrt{-[(at + b + cs)^2 - 4st]} \quad (\text{E.12})$$

## E.2.2 Sokhotsky–Plemelj–Relationen

Treten gebrochen rationale Polynome mit  $i\eta$ -Beiträgen im Nenner auf, dann werden die Real- und Imaginärteile bei der Integration mit Hilfe der Sokhotsky–Plemelj–Relationen

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{1}{x + x_0 \pm i\eta} f(x) dx = \mathcal{PV} \int_a^b \frac{1}{x + x_0} f(x) dx \mp i\pi \int_a^b \delta(x + x_0) f(x) dx \quad (\text{E.13})$$

getrennt, wobei  $\mathcal{PV}$  den Cauchyschen Hauptwert („principal value“) des Integrals bezeichnet.

## E.3 Bekanntes Basisintegral

Als ersten Fall betrachten wir das bereits vom skalaren Fall mit trivialem Zähler bekannte Basisintegral

$$\mathcal{H}(a, b, c, s_0, t_0) = \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt \frac{1}{(s + s_0 - i\eta)} \frac{1}{(t + t_0 - i\eta)} \frac{1}{\sqrt{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (\text{E.14})$$

welches bereits von [Ki96, Cz94, Fr96a] bekannt ist und dessen Herleitung dort skizziert wurde. Wir folgen der Vorgehensweise dieser Berechnungen und verzichten auf eine geschlossene Darstellung des Integrationsergebnisses. Es sollen die für die analytische Integration notwendigen Beiträge in  $s$  (vollständig) und in  $t$  (prinzipiell) notiert werden.

### E.3.1 s-Integration

Unter Verwendung der Parameter

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{c} > 0 \\ B &= 2 \frac{a(b - cs_0) + 2s_0}{c^2} \\ C &= \left( \frac{b}{c} - s_0 \right)^2 \\ D &= s_0 + \frac{b}{c} \\ \tau_{1/2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A^2C}}{2A^2} \\ R_0(t) &= \frac{(at + b - cs_0)^2 + 4s_0t}{c^2} \\ &= (At)^2 + Bt + C \\ &= A^2(t - \tau_1)(t - \tau_2) \\ \sqrt{R_0(t)} &= A\sqrt{(t - \tau_1)(t - \tau_2)} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

wobei  $A, B, C, D$  offenkundig reell sind, ergeben sich nach Integration in  $s$  folgende noch in  $t$  zu integrierende Beiträge (sortiert nach den auftretenden Fallunterscheidungen):

#### E.3.1.1 Fall $b < 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{c} \left[ -\int_0^\infty dt \frac{1}{t + t_0 - i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2 + Bt + C}} \log \left| \frac{At + D + \sqrt{(At)^2 + Bt + C}}{At + D - \sqrt{(At)^2 + Bt + C}} \right| \right. \\ &\quad \left. - i\pi\theta(-s_0) \int_0^\infty dt \frac{1}{t + t_0 - I\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2 + Bt + C}} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

**E.3.1.2 Fall  $b > 0$** 

Der Maximalwert der Ellipse aus Abbildung E.1 wird in

$$s = \sigma_2^{max} = \frac{ab}{1-ac} \quad (\text{E.17})$$

angenommen. Desweiteren benötigt man die Höhe der Ellipse an deren rechten Ende, d.h. bei

$$t = \frac{bc}{1-ac} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{t=bc/(1-ac)} \equiv \sigma_{re} = \frac{b}{(1-ac)c} \quad (\text{E.18})$$

Dann sind die Integrale im

Fall  $b > 0, -s_0 < 0$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{c} \left[ \int_0^\infty dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \log \left| \frac{At+D+\sqrt{(At)^2+Bt+C}}{At+D-\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right| \right. \\ \left. -i\pi \int_0^{bc/(1-ac)} dt \frac{1}{t+t_0-I\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right] \quad (\text{E.19})$$

Fall  $b > 0, 0 > \sigma_2^{max} > -s_0$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{c} \left[ -\int_0^\infty dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \log \left| \frac{At+D+\sqrt{(At)^2+Bt+C}}{At+D-\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right| \right. \\ \left. -i\pi \int_{bc/(1-ac)}^\infty dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right] \quad (\text{E.20})$$

Fall  $b > 0, 0 < -s_0 < \sigma_{re} < \sigma_2^{max}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & -\frac{1}{c} \left[ -\int_0^{\tau_1} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \log \left| \frac{At+D+\sqrt{(At)^2+Bt+C}}{At+D-\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right| \right. \\
& -\int_{\tau_2}^{\infty} \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \log \left| \frac{At+D+\sqrt{(At)^2+Bt+C}}{At+D-\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right| \\
& -i\pi \int_{bc/(1-ac)}^{\infty} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \\
& +\int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{-R_0(t)}} \arctan \left( \frac{At+D}{\sqrt{-R_0(t)}} \right) \\
& +\pi \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{-R_0(t)}} \\
& \left. -2i\pi \int_{\tau_2}^{bc/(1-ac)} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right] \tag{E.21}
\end{aligned}$$

Fall  $b > 0, 0 < \sigma_{re} < -s_0 < \sigma_2^{max}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & -\frac{1}{c} \left[ -\int_0^{\tau_1} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \log \left| \frac{At+D+\sqrt{(At)^2+Bt+C}}{At+D-\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right| \right. \\
& -\int_{\tau_2}^{\infty} \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \log \left| \frac{At+D+\sqrt{(At)^2+Bt+C}}{At+D-\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \right| \\
& -i\pi \int_{bc/(1-ac)}^{\infty} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(At)^2+Bt+C}} \\
& +\int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{-R_0(t)}} \arctan \left( \frac{At+D}{\sqrt{-R_0(t)}} \right) \\
& \left. +\pi \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{-R_0(t)}} \right] \tag{E.22}
\end{aligned}$$

### E.3.2 Integration der vier Basisintegrale in $t$

Man erkennt an den Funktionen, die nach Integration in  $s$  noch in  $t$  zu integrieren sind, vier Basisintegrale in  $t$ , auf die sich alle auftretenden Beiträge zurückführen lassen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \log \left| \frac{s_0 + \frac{at+b}{c} + \sqrt{R_0}}{s_0 + \frac{at+b}{c} - \sqrt{R_0}} \right| \\
 \mathcal{T}_2 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan \left( \frac{s_0 + \frac{at+b}{c}}{\sqrt{-R_0}} \right) \\
 \mathcal{T}_3 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \\
 \mathcal{T}_4 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{-R_0}}
 \end{aligned} \tag{E.23}$$

Wir spalten mit Hilfe der Sokhotsky–Plemelj–Relationen die Anteile ab, welche mit trivial durchzuführenden Integrationen mit Delta–Funktionen zum Imaginärteil beitragen. Zum Realteil tragen dann folgende Hauptwertintegrale bei:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}'_1 &= \mathcal{P}\mathcal{V} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \log \left| \frac{s_0 + \frac{at+b}{c} + \sqrt{R_0}}{s_0 + \frac{at+b}{c} - \sqrt{R_0}} \right| \\
 \mathcal{T}'_2 &= \mathcal{P}\mathcal{V} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan \left( \frac{s_0 + \frac{at+b}{c}}{\sqrt{-R_0}} \right) \\
 \mathcal{T}'_3 &= \mathcal{P}\mathcal{V} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \\
 \mathcal{T}'_4 &= \mathcal{P}\mathcal{V} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}}
 \end{aligned} \tag{E.24}$$

Im Folgenden wird in diesem Abschnitt unter Integration immer Hauptwertintegration verstanden, auch wenn  $\mathcal{P}\mathcal{V}$  nicht mehr explizit notiert wird. Die Berechnung der Hauptwertanteile dieser vier Basisintegrale in  $t$  in allgemeinen Grenzen soll im Folgenden geschehen. Dabei werden bei jeder Fallunterscheidung die Integrale zerlegt, aber nicht wieder zusammen gefügt.



**E.3.2.1 Typ  $\mathcal{T}_1$** 

$$\begin{aligned}
T'_1 &= \mathcal{PV} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \log \left| \frac{s_0 + \frac{at+b}{c} + \sqrt{R_0}}{s_0 + \frac{at+b}{c} - \sqrt{R_0}} \right| \\
&= \mathcal{PV} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{(At)^2 + Bt + C}} \log \left| \frac{At + D + \sqrt{(At)^2 + Bt + C}}{At + D - \sqrt{(At)^2 + Bt + C}} \right|
\end{aligned} \tag{E.25}$$

Als Grenzen werden nur

$$(t_1, t_2) = \begin{cases} (0, \infty) \\ (0, \tau_1) \\ (\tau_2, \infty) \end{cases} \tag{E.26}$$

benötigt, wobei

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty \tag{E.27}$$

gilt (falls die  $\tau_i$  als Integrationsgrenzen benötigt werden, d.h. falls sie positiv reell sind). Wir formen um

$$\begin{aligned}
T'_1 &= T'_{1a} - T'_{1b} \\
T'_{1a} &= \mathcal{PV} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{(At)^2 + Bt + C}} \log \left| At + D + \sqrt{(At)^2 + Bt + C} \right| \\
T'_{1b} &= \mathcal{PV} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{(At)^2 + Bt + C}} \log \left| At + D - \sqrt{(At)^2 + Bt + C} \right|
\end{aligned} \tag{E.28}$$

Für  $T'_{1a}$  verwenden wir die 1. Variante der 1. Euler-Substitution:

$$\sqrt{(At)^2 + Bt + C} = u - At \tag{E.29}$$

$$\begin{aligned}
u(t_{1/2}) &= \sqrt{(At_{1/2})^2 + Bt_{1/2} + C} + At_{1/2} \\
u(\tau_{1/2}) &= A\tau_{1/2} \\
u(0) &= \sqrt{C} \\
u(\infty) &= \infty
\end{aligned} \tag{E.30}$$

Dann wird

$$T'_{1a} = 2\mathcal{PV} \int_{u_1}^{u_2} du \frac{\log |u + D|}{u^2 + \mathfrak{b}u + \mathfrak{g}} \tag{E.31}$$

mit

$$\mathfrak{b} = 2At_0 \quad \mathfrak{g} = t_0B - C \quad (\text{E.32})$$

Für  $T'_{1b}$  verwenden wir die 2. Variante der 1. Euler-Substitution:

$$\sqrt{(At)^2 + Bt + C} = u + At \quad (\text{E.33})$$

$$\begin{aligned} u(t_{1/2}) &= \sqrt{(At_{1/2})^2 + Bt_{1/2} + C} - At_{1/2} \\ u(\tau_{1/2}) &= -A\tau_{1/2} \\ u(0) &= \sqrt{C} \\ u(\infty) &= \frac{B}{2A} \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

was

$$\begin{aligned} T'_{1b} &= 2\mathcal{PV} \int_{u_1}^{u_2} du \frac{\log|-u + D|}{u^2 - \mathfrak{b}u + \mathfrak{g}} \\ &= -2\mathcal{PV} \int_{v_1}^{v_2} dv \frac{\log|v + D|}{v^2 + \mathfrak{b}v + \mathfrak{g}} \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

ergibt mit

$$\mathfrak{b} = 2At_0, \quad \mathfrak{g} = t_0B - C \quad (\text{E.36})$$

$$\begin{aligned} v(t_{1/2}) &= At_{1/2} - \sqrt{(At_{1/2})^2 + Bt_{1/2} + C} \\ v(\tau_{1/2}) &= A\tau_{1/2} \\ v(0) &= -\sqrt{C} \\ v(\infty) &= -\frac{B}{2A} \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

### Basisintegrale

$\mathcal{T}_{1a}$  und  $\mathcal{T}_{1b}$  lassen sich auf Integrale des Typs

$$I = \mathcal{PV} \int dx \frac{\log|x + D|}{x^2 + \mathfrak{b}x + \mathfrak{g}} \quad (\text{E.38})$$

zurückführen.

Es sind 3 Fälle zu unterscheiden. Wir benötigen

$$\Delta = \mathfrak{b}^2 - 4\mathfrak{g} = 4(A^2t_0^2 - t_0B + C) = 4R_0(-t_0) \quad <, =, > 0 \quad (\text{E.39})$$

was sich in den Ausgangsparametern schreibt zu:

$$\Delta = 4 \frac{b^2 + c^2 s_0^2 + 2acs_0 t_0 - 2b(cs_0 + at_0) + t_0(-4s_0 + a^2 t_0)}{c^2} \quad (\text{E.40})$$

Fall 1:  $\Delta < 0$

Wir formen um

$$\begin{aligned} x^2 + \mathfrak{b}x + \mathfrak{g} &= (x + \gamma)^2 + \delta^2 \\ \gamma &= \frac{\mathfrak{b}}{2} \\ \delta &= \sqrt{\mathfrak{g} - \frac{\mathfrak{b}^2}{4}} > 0 \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

und erhalten als Basisintegral

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\log|x + D|}{(x + \gamma)^2 + \delta^2} \quad (\text{E.42})$$

was sich mit Hilfe von [Le81] (beachte  $\delta \neq 0$ ) evaluieren läßt:

$$\int dt \frac{\log|t + \alpha|}{(t + \gamma)^2 + \delta^2} = \frac{1}{2\delta} (\theta \log(\delta^2 + (\alpha - \gamma)^2) - \text{Cl}_2(2\theta + 2\phi) - \text{Cl}_2(\pi - 2\theta)) \quad (\text{E.43})$$

mit:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\gamma + t}{\delta} \\ \tan \phi &= \frac{\alpha - \gamma}{\delta} \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

Fall 2:  $\Delta = 0$

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} x^2 + \mathfrak{b}x + \mathfrak{g} &= \left(x + \frac{\mathfrak{b}}{2}\right)^2 = (x + \gamma)^2 \\ \gamma &= \frac{\mathfrak{b}}{2} \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

Elementares Integrieren ergibt [Fr96a]

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\log|x + D|}{(x + \gamma)^2} = \left[ \frac{\log\left|\frac{x+D}{x+\gamma}\right|}{\gamma - D} - \frac{\log|x + D|}{x + \gamma} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (\text{E.46})$$

Fall 3:  $\Delta > 0$ 

Da hier der Radikand positiv ist, kann eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden:

$$I_3 = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\log|x+D|}{x^2 + \mathfrak{b}x + \mathfrak{g}} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\log|x+D|}{x + \gamma_1} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\log|x+D|}{x + \gamma_2} \right) \quad (\text{E.47})$$

$$\gamma_{1/2} = -\frac{-\mathfrak{b} \pm \sqrt{\mathfrak{b}^2 - 4\mathfrak{g}}}{2} \quad (\text{E.48})$$

Zu integrieren ist

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\log|x+\alpha|}{x+\gamma} \quad (\text{E.49})$$

Es gibt zwei mögliche Fälle:

*Fall 3a:*  $\gamma = \alpha$ : elementares Integrieren [Fr96a] ergibt

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\log|x+\alpha|}{x+\alpha} = \frac{1}{2} \log^2|x+\alpha| \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (\text{E.50})$$

*Fall 3b:*  $\gamma \neq \alpha$ : mit Hilfe von [Le81] kann integriert werden

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\log|x+\alpha|}{x+\gamma} \\ = & \log|\gamma - \alpha| \log \left| \frac{x_2 + \gamma}{x_1 + \gamma} \right| - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{x_2 + \gamma}{\gamma - \alpha} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{x_1 + \gamma}{\gamma - \alpha} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

Diese Integrale sind für  $x_2 \rightarrow \infty$  divergent. In (E.47) treten sie aber immer nur als Differenz von zwei Beiträgen der gleichen Form auf. Mit Hilfe von Abschneideparametern zeigt man, daß die Grenzwertbildung im Fall von divergierenden Grenzen aufgrund der Summation über beide Beiträge, wie sie nach Partialbruchzerlegung entstanden sind, auf ein endliches Ergebnis führt [Fr96a]. Da der Beweis sehr einfach ist, führen wir ihn hier nicht aus.

**E.3.2.2 Typ  $\mathcal{T}_2$** 

Das zweite Basisintegral ist

$$T_2' = \mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan \left( \frac{s_0 + \frac{at+b}{c}}{\sqrt{-R_0}} \right) = \mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan \left( \frac{At+D}{\sqrt{-R_0}} \right) \quad (\text{E.52})$$

Wir definieren

$$\tilde{t} = -\frac{D}{A} \quad (\text{E.53})$$

Hier gilt  $R_0 < 0$ , da  $\tau_{1/2}$  immer reell und positiv sein muß, damit diese Funktion beitragen kann. Der Integrand muß in mehreren Schritten zerlegt und transformiert werden.

### Erste Transformation des Integranden

Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden:

Fall I:  $\tilde{t} < \tau_1$

Fall II:  $\tau_1 < \tilde{t} < \tau_2$

Fall III:  $\tilde{t} > \tau_2$

Es gilt

$$\arctan\left(\frac{At+D}{\sqrt{-R_0}}\right) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\sqrt{-R_0}}{At+D}\right) - \frac{\pi}{2} & \text{falls } At+D < 0 \\ -\arctan\left(\frac{\sqrt{-R_0}}{At+D}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{falls } At+D > 0 \end{cases} \quad (\text{E.54})$$

Fall I:  $At+D > 0$

$$T_2' = -\mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan\left(\frac{\sqrt{-R_0}}{At+D}\right) + \frac{\pi}{2} \mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.55})$$

Fall II:  $At+D < 0$ , falls  $\tau_1 < t < -\frac{D}{A}$ , und  $At+D > 0$ , falls  $-\frac{D}{A} < t < \tau_2$

$$\begin{aligned} T_2' &= -\mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tilde{t}} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan\left(\frac{\sqrt{-R_0}}{At+D}\right) - \frac{\pi}{2} \mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tilde{t}} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \\ &\quad - \mathcal{PV} \int_{\tilde{t}}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan\left(\frac{\sqrt{-R_0}}{At+D}\right) + \frac{\pi}{2} \mathcal{PV} \int_{\tilde{t}}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

Fall III:  $At+D < 0$

$$T_2' = -\mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan\left(\frac{\sqrt{-R_0}}{At+D}\right) - \frac{\pi}{2} \mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.57})$$

Zur Berechnung von  $\int dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}}$  siehe (E.111) auf S. 187 im Abschnitt E.3.2.5. Entscheidend ist die Berechnung des Integrals

$$\tilde{I} = -\mathcal{PV} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \arctan\left(\frac{\sqrt{-R_0}}{At+D}\right) \quad (\text{E.58})$$

Die 3. Euler-Substitution auf  $\tilde{I}$  angewendet

$$\sqrt{A^2(t - \tau_1)(\tau_2 - t)} = v(t - \tau_1) \quad (\text{E.59})$$

$$v(t) = A\sqrt{\frac{\tau_2 - t}{t - \tau_1}}$$

$$v(\tau_1) = \infty$$

$$v(\tau_2) = 0$$

$$v(\tilde{t}) = A\sqrt{-\frac{A\tau_2 + D}{A\tau_1 + D}} \equiv \tilde{v} \quad (\text{E.60})$$

ergibt

$$\tilde{I} = 2 \int_{v_1}^{v_2} dv \frac{\arctan\left(\frac{v}{Xv^2 + Y}\right)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} \quad (\text{E.61})$$

mit

$$X = \frac{\tau_1 A + D}{A^2(\tau_2 - \tau_1)} \quad Y = \frac{A\tau_2 + D}{\tau_2 - \tau_1} \quad (\text{E.62})$$

### E.3.2.3 Zweite Transformation des Integranden

Es gilt allgemein:

$$\arctan(x_1 v + y_1) + \arctan(x_2 v + y_2) = \arctan\left(\frac{(x_1 + x_2)v + (y_1 + y_2)}{1 - x_1 x_2 v^2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)v - y_1 y_2}\right) + k\pi \quad (\text{E.63})$$

mit  $k = 0, \pm 1$ , was sich berechnet mittels

$$k = 0 \iff (x_1 v + y_1)(x_2 v + y_2) < 1$$

$$k = 1 \iff x_1 v + y_1 > 0 \wedge (x_1 v + y_1)(x_2 v + y_2) > 1$$

$$k = -1 \iff x_1 v + y_1 < 0 \wedge (x_1 v + y_1)(x_2 v + y_2) > 1 \quad (\text{E.64})$$

Wir können die zu transformierende Funktion schreiben als

$$\arctan\left(\frac{v}{Xv^2 + Y}\right) \quad (\text{E.65})$$

mit

$$X = -\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \quad Y = \frac{1 - y_1 y_2}{x_1 + x_2} \quad (\text{E.66})$$

Wir müssen die  $X, Y$  fallabhängig bestimmen.

Fall a:  $1 + 4XY > 0$ : Die Lösung ist dann

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4XY}}{2Y} \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 + 4XY}}{2Y} \\ y_{1/2} &= 0 \end{aligned} \tag{E.67}$$

Fall b:  $1 + 4XY < 0$ : Die Lösung ist

$$\begin{aligned} x_1 &= -2X \\ x_2 &= -2X \\ y_1 &= \sqrt{-(1 + 4XY)} \\ y_1 &= -\sqrt{-(1 + 4XY)} \end{aligned} \tag{E.68}$$

Angewendet auf  $\tilde{I}$  erhalten wir

$$1 + 4XY = 1 + 4 \frac{(\tau_1 A + D)(\tau_2 A + D)}{A^2(\tau_2 - \tau_1)^2} = \left( \frac{A(\tau_1 + \tau_2) + 2D}{A(\tau_2 - \tau_1)} \right)^2 \geq 0 \tag{E.69}$$

Folglich ist nur Fall a relevant.

$$\arctan(x_1 v) + \arctan(x_2 v) = \arctan \left( \frac{(x_1 + x_2)v}{1 - x_1 x_2 v^2} \right) + k\pi \tag{E.70}$$

Da im Fall a  $y_{1,2} = 0$  ist, schreibt sich (E.64) mit  $k = 0, \pm 1$  zu:

$$\begin{aligned} k = 0 &\iff x_1 x_2 v^2 < 1 \\ k = 1 &\iff x_1 v > 0 \wedge x_1 x_2 v^2 > 1 \\ k = -1 &\iff x_1 v < 0 \wedge x_1 x_2 v^2 > 1 \end{aligned} \tag{E.71}$$

Da  $1 + 4XY > 0$ , lösen sich die Parameter zu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4XY}}{2Y} \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 + 4XY}}{2Y} \end{aligned} \tag{E.72}$$

Für Fall I und III gilt ( da  $-\frac{D}{A} < \tau_1 < t$  bzw.  $t < \tau_2 < -\frac{D}{A}$  ):

$$1 - x_1 x_2 v^2 = 1 + \underbrace{\frac{\tau_1 A + D}{A^2(A\tau_2 + D)}}_{>0} v^2 > 0 \quad (\text{E.73})$$

In den Fällen I und III ist deshalb  $k = 0$  zu wählen.

Im Fall II gilt:

$$1 + \frac{\tau_1 A + D}{A^2(A\tau_2 + D)} \tilde{v}^2 = 0 \quad (\text{E.74})$$

Wir erhalten eine nochmalige Fallunterscheidung aufgrund von

$$1 - x_1 x_2 v^2 = 1 + \underbrace{\frac{\tau_1 A + D}{A^2(A\tau_2 + D)}}_{<0} v^2 \begin{cases} > 0, & v < \tilde{v}, t > \tilde{t}, \text{ Fall IIb} \\ < 0, & v > \tilde{v}, t < \tilde{t}, \text{ Fall IIa} \end{cases} \quad (\text{E.75})$$

Da weiter gilt

$$x_1 v + y_1 = \underbrace{\frac{\tau_2 - \tau_1}{A\tau_2 + D}}_{>0} \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + \sqrt{1 + 4XY}\right)}_{>0} \underbrace{v}_{>0} > 0 \quad (\text{E.76})$$

folgt  $k = 0$  im Fall IIb und  $k = +1$  im Fall IIa. Das Integral wird dann

$$\tilde{I} = 2 \int_{v_1}^{v_2} dv \frac{\arctan(x_1 v) + \arctan(x_2 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} - 2k\pi \int_{v_1}^{v_2} dv \frac{1}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} \quad (\text{E.77})$$

Es gilt (Rücktransformation)

$$2 \int_{v_1}^{v_2} dv \frac{1}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t + t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.78})$$

Wir erhalten

$$\tilde{I} = 2 \int_{v_1}^{v_2} dv \frac{\arctan(x_1 v) + \arctan(x_2 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} + k\pi \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t + t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.79})$$

Daraus folgt mit

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 4XY} &= \left| \frac{A(\tau_1 + \tau_2) + 2D}{A(\tau_2 - \tau_1)} \right| \\ x_1 &= \frac{A(\tau_2 - \tau_1) + |A(\tau_1 + \tau_2) + 2D|}{2A(A\tau_2 + D)} \\ x_2 &= \frac{A(\tau_2 - \tau_1) - |A(\tau_1 + \tau_2) + 2D|}{2A(A\tau_2 + D)} \end{aligned} \quad (\text{E.80})$$



das Endergebnis für die verschiedenen Fälle:

Fall I:  $At + D > 0$

$$T_2' = -2 \left( \int_0^\infty dv \frac{\arctan(x_1 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} + \int_0^\infty dv \frac{\arctan(x_2 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} \right) + \frac{\pi}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t + t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.81})$$

Fall II:  $At + D < 0$ , falls  $\tau_1 < t < -\frac{D}{A}$ , und  $At + D > 0$ , falls  $-\frac{D}{A} < t < \tau_2$

$$T_2' = -2 \left( \int_0^\infty dv \frac{\arctan(x_1 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} + \int_0^\infty dv \frac{\arctan(x_2 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} \right) + \frac{\pi}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t + t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.82})$$

Fall III:  $At + D < 0$

$$T_2' = -2 \left( \int_0^\infty dv \frac{\arctan(x_1 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} + \int_0^\infty dv \frac{\arctan(x_2 v)}{v^2(\tau_1 + t_0) + A^2(\tau_2 + t_0)} \right) - \frac{\pi}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t + t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.83})$$

Für alle Integrale wird folgendes **Basisintegral** benötigt:

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty dv \frac{\arctan(xv)}{v^2 + \xi} \quad (\text{E.84})$$

wobei gilt

$$x = x_{1/2} \quad \xi = \frac{\tau_2 + t_0}{\tau_1 + t_0} A^2 \quad (\text{E.85})$$

Bei der Evaluation dieses Basisintegrals treten wiederum verschiedene Fälle auf:

Fall 1:  $\xi > 0$

Fall 2:  $\xi < 0$

Fall 3:  $\xi = 0$

Fall 1:  $\xi = f^2 > 0, f > 0$  oBdA

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_0^{\infty} dv \frac{\arctan(xv)}{v^2 + f^2} \\
 &= \frac{1}{f} \int_0^{\pi/2} \arctan(xf \tan \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2f} \left\{ \operatorname{Li}_2 \left[ (1 + xf) \sin \theta, \frac{1}{2}\pi - \theta \right] - \operatorname{Li}_2 \left[ (1 - xf) \sin \theta, \frac{1}{2}\pi - \theta \right] \right\} \Big|_0^{\pi/2} \quad (\text{E.86})
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \theta(\infty) &= \arctan \frac{v}{f} \Big|_{v \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{2} \quad (f > 0) \\
 \theta(0) &= \arctan \frac{v}{f} \Big|_{v=0} = 0
 \end{aligned}$$

Die Herleitung folgt [Le81] mit  $x = f \tan \theta$

$$\int \frac{\arctan(bx)}{x^2 + f^2} dx = \frac{1}{f} \int \arctan(bf \tan \theta) d\theta \quad (\text{E.87})$$

Es gilt [Le81]

$$\int_0^{\theta} \arctan(c \tan \theta) d\theta = \frac{1}{2} \left( \operatorname{Li}_2 \left[ (1 + c) \sin \theta, \frac{1}{2}\pi - \theta \right] - \operatorname{Li}_2 \left[ (1 - c) \sin \theta, \frac{1}{2}\pi - \theta \right] \right) \quad (\text{E.88})$$

Damit wird, da  $\operatorname{Li}_2(0, \alpha) = 0$  (mit beliebigem  $\alpha$ ) und  $\operatorname{Li}_2(z, 0) = \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(z))$

$$\mathcal{A} = \int_0^{\infty} dv \frac{\arctan xv}{v^2 + f^2} = \frac{1}{2f} [\operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(1 + xf)) - \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(1 - xf))] \quad (\text{E.89})$$

Fall 2:  $\xi < 0$

In diesem Fall ist eine Partialbruchzerlegung möglich.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\sqrt{-\xi}} \left( \int_0^{\infty} dv \frac{\arctan(xv)}{v - \sqrt{-\xi}} - \int_0^{\infty} dv \frac{\arctan(xv)}{v + \sqrt{-\xi}} \right) \quad (\text{E.90})$$

Es folgt mit [Le81]

$$\int_{c_1}^x dx \frac{\arctan(bx)}{c+x} = \theta \log \left| \frac{\sin(\phi + \theta)}{\cos \theta} \right| + \frac{1}{2} \text{Cl}_2(2\phi + 2\theta) + \frac{1}{2} \text{Cl}_2(\pi - 2\theta) + c_2 \quad (\text{E.91})$$

wobei

$$\begin{aligned} bx &= \tan \theta \\ bc &= \tan \phi \end{aligned}$$

und  $c_1, c_2$  Konstanten sind. Diese Integrale sind divergent, falls  $x \rightarrow \infty$ . Verwendet man Abschneideparameter und berechnet die Differenz der beiden Beiträge aus (E.90) im Limes divergierender Abschneideparameter, dann ergibt sich als Endergebnis das Integral

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\sqrt{-\xi}} (\text{Cl}_2(2\phi) + \text{Cl}_2(\pi - 2\phi)) \quad (\text{E.92})$$

wobei  $\phi = \arctan(x\sqrt{-\xi})$ .

Fall 3:  $\xi = 0$

Dieser Fall sollte nicht auftreten, denn

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty dv \frac{\arctan(xv)}{v^2} \quad (\text{E.93})$$

erzeugt eine logarithmische Divergenz [Br91]:

$$\int dy \frac{\arctan \frac{y}{a}}{y^2} = -\frac{1}{y} \arctan \frac{y}{a} - \frac{1}{2a} \log \frac{a^2 + y^2}{y^2} \quad (\text{E.94})$$

also

$$\int_0^\infty dv \frac{\arctan(xv)}{v^2} = \left[ -\frac{1}{v} \arctan(xv) - \frac{x}{2} \log \frac{\frac{1}{x^2} + v^2}{v^2} \right]_0^\infty \quad (\text{E.95})$$

#### E.3.2.4 Typ $\mathcal{T}_3$

$$\mathcal{T}'_3 = \mathcal{PV} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{t+t_0} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \quad (\text{E.96})$$

Es gilt:

$$\mathcal{T}'_3 = \frac{1}{A} S^{01}(t_1, t_2, t_0, \tau_1, \tau_2) \quad (\text{E.97})$$

mit

$$S^{01}(s_1, s_2, s_0, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{PV} \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{s + s_0} \frac{1}{\sqrt{(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)}} \quad (\text{E.98})$$

Nach Anwendung der 1. Euler-Transformation

$$\sqrt{(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)} = u - s \quad (\text{E.99})$$

ergeben sich die transformierten Grenzen zu

$$u_{1,2} = \sqrt{s_{1,2}^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)s_{1,2} + \sigma_1\sigma_2} + s_{1,2} \quad (\text{E.100})$$

also

$$\begin{aligned} u(0) &= \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \\ u(\sigma_1) &= \sigma_1 \\ u(\sigma_2) &= \sigma_2 \\ u(\infty) &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{E.101})$$

damit gilt

$$S^{01}(s_1, s_2, s_0, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{PV} \int_{u(s_1)}^{u(s_2)} du \frac{2}{u^2 + 2s_0u - s_0(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2} \quad (\text{E.102})$$

Das Integrationsergebnis ist

$$S^{01}(s_1, s_2, s_0, \sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} \left[ \frac{2}{\sqrt{-(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \arctan \left( \frac{u + s_0}{\sqrt{-(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \right) \right]_{u(s_1)}^{u(s_2)} \\ \text{falls } \sigma_1 < -s_0 < \sigma_2 \\ - \left[ \frac{1}{\sqrt{(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \log \left| \frac{u + s_0 + \sqrt{(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}}{u + s_0 - \sqrt{(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \right| \right]_{u(s_1)}^{u(s_2)} \\ \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{E.103})$$

### E.3.2.5 Typ $\mathcal{T}_4$

$$\mathcal{T}'_4 = \mathcal{PV} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \frac{1}{t + t_0} \frac{1}{\sqrt{-R_0}} \quad (\text{E.104})$$

wobei nur  $\tau_{1,2}$ , wie in (E.15) definiert, als Integrationsgrenzen benötigt werden. Es gilt:

$$\mathcal{T}'_4 = \frac{1}{A} S^{02}(t_1, t_2, t_0, \tau_1, \tau_2) \quad (\text{E.105})$$

mit

$$S^{02}(s_1, s_2, s_0, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{PV} \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{s + s_0} \frac{1}{\sqrt{-(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)}} \quad (\text{E.106})$$

Nach Anwendung der 3. Euler-Transformation

$$\sqrt{-(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)} = u(s - \sigma_1) \quad (\text{E.107})$$

ergeben sich die transformierten Grenzen zu

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{\sigma_2 - s_{1,2}}{s_{1,2} - \sigma_1}} \quad (\text{E.108})$$

also

$$u(\sigma_1) \rightarrow \infty \quad u(\sigma_2) = 0 \quad (\text{E.109})$$

damit gilt

$$S^{02}(s_1, s_2, s_0, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{PV} \int_{u(s_1)}^{u(s_2)} du \frac{-2}{u^2(s_0 + \sigma_1) + s_0 + \sigma_2} \quad (\text{E.110})$$

das Endergebnis ist

$$S^{02}(s_1, s_2, s_0, \sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{\sqrt{-(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \log \left| \frac{(s_0 + \sigma_1)u + \sqrt{-(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}}{(s_0 + \sigma_1)u - \sqrt{-(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \right| \right]_{u(s_1)}^{u(s_2)} \\ \text{falls } \sigma_1 < -s_0 < \sigma_2 \\ - \left[ \frac{2}{\sqrt{(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \arctan \left( \frac{(s_0 + \sigma_1)u}{\sqrt{(s_0 + \sigma_1)(s_0 + \sigma_2)}} \right) \right]_{u(s_1)}^{u(s_2)} \\ \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{E.111})$$

## E.4 Neue Basisintegrale, Einführung

Die neu zu berechnenden Integraltypen sind

$$\mathcal{T}_\alpha = \lim_{\Lambda_s \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda_t \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{s^\alpha}{t + t_0 - i\eta} \frac{1}{\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (\text{E.112})$$

und

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta} = \lim_{\Lambda_s \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda_t \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{s^\alpha t^\beta}{\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (\text{E.113})$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ . Diese Integrale sind einzeln divergent. Sie treten aber lediglich in Linearkombinationen auf, die endlich sind. Zur Regularisierung werden Abschneideparameter (cutoffs) eingeführt und die Summen hinsichtlich ihrer cutoff-Abhängigkeit überprüft.

Die Integrale  $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$  treten bei der numerischen Integration der Masterintegrale nur in Integrationsgebieten auf, welche im Limes verschwindender Grenzübergangsparemeter nicht beitragen. Sie müssen folglich nicht explizit ausgewertet werden. Da aber anhand des Integrals

$$\mathcal{S}_{0,0} = \lim_{\Lambda_s \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda_t \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{1}{\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (\text{E.114})$$

die Methodik der Integration, Separation und Summation der Divergenzen, welche bei der Evaluation der neuen Basisintegrale in  $s, t$  auftreten, besonders einfach studiert werden kann, werden wir zuerst an diesem Integral beispielhaft unser Vorgehen demonstrieren, bevor wir uns mit den tatsächlich benötigten, komplexeren Integralen befassen.

Für SM-Berechnungen in Feynman-Eichung werden die Integrale  $\mathcal{T}_\alpha$  für  $\alpha = 0, 1, 2$  benötigt. Im Folgenden werden wir bei der Auswertung der Integrale auf die Limesbildung

$$\lim_{\Lambda_s \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda_t \rightarrow \infty} \quad (\text{E.115})$$

verzichten und diese erst bei den Linearkombinationen, in welchen diese Integrale zu den Integranden der Masterintegrale beitragen, ausführen. Die Benennung der Integrale werden wir dabei aber nicht verändern.

## E.5 Basisintegral $\mathcal{S}_{0,0}$

Anhand des Basisintegrals

$$\mathcal{S}_{0,0} = \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{1}{\sqrt[3]{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (\text{E.116})$$

lassen sich aufgrund der besonders symmetrischen Struktur die Integration und die Eigenschaften der cutoff-Unabhängigkeit der Summation besonders einfach zeigen.

### E.5.1 Integrationsergebnis

Nach Durchführung aller Integrationsschritte erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{0,0} &= \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{1}{\sqrt{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \\
&= \frac{b}{-1 + ac} \log \frac{|b|}{2(ac - 1)^2} \\
&\quad + \frac{\Lambda_t}{c} \log \left| \frac{cb - 2\Lambda_t + ac\Lambda_t + c^2\Lambda_s - c\Theta}{2(cb - \Lambda_t + ac\Lambda_t)} \right| \\
&\quad + \frac{\Lambda_s}{a} \log \left| \frac{ab - 2\Lambda_s + ac\Lambda_s + a^2\Lambda_t - a\Theta}{2(ab - \Lambda_s + ac\Lambda_s)} \right| \\
&\quad - \frac{b}{ac - 1} \log \left| \Lambda_t + \frac{bc}{-1 + ac} \right| \\
&\quad - \frac{b}{ac - 1} \log \left| \Lambda_s + \frac{ab}{-1 + ac} \right| \\
&\quad + \frac{b}{ac - 1} \log |b + abc + (-1 + ac)(c\Lambda_s + a\Lambda_t - \Theta)| \\
&\quad + i\pi\theta(b) \frac{b}{1 - ac}
\end{aligned} \tag{E.117}$$

mit

$$\Theta = \sqrt{(a\Lambda_t + b + c\Lambda_s)^2 - 4\Lambda_s\Lambda_t} \tag{E.118}$$

### E.5.2 Separation der Divergenzen

Im nächsten Schritt müssen die divergenten Terme von den konvergenten getrennt werden. Die Integrale treten in (6.157) in der Form

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=2}^3 \mathcal{S}_{0,0}(b_{n,m}) (-1)^{(n+m)} \tag{E.119}$$

auf. Die  $b_{n,m}$  aus Kapitel 6.2.2.4 können generisch geschrieben werden als

$$b_{n,m} = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} \left( \frac{\Xi_n}{\Upsilon} + \frac{\Psi_m}{\Omega} \right) \tag{E.120}$$

Über die divergenten Beiträge von  $\mathcal{S}_{0,0}$  bilden wir analytisch die Summe mit den Koeffizienten gemäß (E.119). Diese Summe darf nicht mehr divergent sein. Die konvergenten Beiträge müssen numerisch aufsummiert werden. Wir trennen dazu das Integral in einen

cutoff-abhängigen Anteil, welchen wir als divergenten Anteil bezeichnen wollen, und einen cutoff-unabhängigen Beitrag, welchen wir als konvergenten Anteil bezeichnen wollen, auf:

$$\mathcal{S}_{0,0} = \mathcal{S}_{0,0}|_{conv} + \mathcal{S}_{0,0}^{div} \quad (\text{E.121})$$

mit

$$\mathcal{S}_{0,0}|_{conv} = \frac{b}{-1+ac} \log \frac{|b|}{2(ac-1)^2} + i\pi\theta(b) \frac{b}{1-ac} \quad (\text{E.122})$$

Wir setzen weiter

$$\begin{aligned} \Lambda_s &\rightarrow \frac{\mathfrak{s}}{\epsilon} \\ \Lambda_t &\rightarrow \frac{\mathfrak{t}}{\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{E.123})$$

mit  $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$  beliebig positiv, aber fest, um dann die Summe der divergenten Anteile um  $\epsilon = 0_+$  zu entwickeln. Es ergibt sich mit Mathematica [Math]

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=2}^3 \mathcal{S}_{0,0}(b_{n,m})|_{div} (-1)^{(n+m)} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{E.124})$$

Aus der Gleichung

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=2}^3 (-1)^{(n+m)} b_{n,m} = 0 \quad (\text{E.125})$$

folgt

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=2}^3 (-1)^{(n+m)} \frac{b_{n,m}}{-1+ac} \log |2(-1+ac)^2| = 0 \quad (\text{E.126})$$

Dies bedeutet, daß sich auch Teile der cutoff-unabhängigen Beiträge in der Linearkombination zu Null addieren. Wir können deshalb weitere Terme für die Implementation der konvergenten Anteile weglassen.

### E.5.2.1 Zu implementierende Anteile

Falls das Integral  $S_{0,0}$  in einem endlichen Integrationsgebiet zu den Integranden der Masterintegrale Beiträge liefern würde, dann wären folgende Anteile zu implementieren:

$$\mathcal{S}_{0,0}|_{impl} = \frac{b}{-1+ac} \log |b| + i\pi\theta(b) \frac{b}{1-ac} \quad (\text{E.127})$$



## E.6 Basisintegrale $\mathcal{T}_j$

Analog wie im Falle des Integrals  $\mathcal{S}_{0,0}$  berechnen wir die Integrale

$$\mathcal{T}_j = \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{s^j}{t + t_0 - i\eta} \frac{1}{\sqrt{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \quad (\text{E.128})$$

für  $j = 0, 1, 2$  und separieren und summieren die cutoff-abhängigen Anteile. Wir beweisen, daß die Linearkombinationen, in welchen diese Integrale auftreten, cutoff-unabhängig sind.

### E.6.1 Berechnung des Integrals $\mathcal{T}_0$

Nach beiden Integrationen ergibt sich unter Verwendung der

#### E.6.1.1 Parameterkombinationen

$$\begin{aligned} \Theta &= \sqrt{(a\Lambda_t + b + c\Lambda_s)^2 - 4\Lambda_s\Lambda_t} \\ e &= ac \\ f &= 2c^2(-2\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s)) \\ h &= -2 + ac \\ k &= c(b + c\Lambda_s) \\ \aleph &= 2c^2(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s)) \\ \chi &= \frac{\aleph + 2|bc|}{2(-1 + ac)} \\ \psi &= \frac{\aleph - 2|bc|}{2(-1 + ac)} \\ \rho &= \frac{c(-2\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))}{a} \\ \delta &= \sqrt{b^2 + 2bc\Lambda_s + c^2\Lambda_s^2 - 2abt_0 + 4\Lambda_s t_0 - 2ac\Lambda_s t_0 + a^2 t_0^2} \\ \kappa &= c\delta + act_0 \\ \lambda &= -c\delta + act_0 \end{aligned} \quad (\text{E.129})$$

das

**E.6.1.2 Endergebnis**

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(at+b+i\eta+cs)^2-4st}} \\
&= \frac{1}{c} \left\{ \log |2(1-ac)| \log |t_0| + \log |c| \log |t_0| - \log |1-ac| \log |-c| + \log |a| \log |-c| \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \log^2 |t_0| + \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] - \frac{\pi^2}{2} \theta(-t_0) \right\} \\
&\quad + i \frac{\pi}{c} \left\{ -\theta(-t_0) \log |2(1-ac)| - \theta(-t_0) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right| + \theta(b) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right\} \\
&\quad + \frac{1}{c} \left\{ -\log |2(1-ac)| \log |\Lambda_t + t_0| - \frac{1}{2} \log^2 |\Lambda_t + t_0| - \log |c| \log |\Lambda_t + t_0| \right. \\
&\quad - \log |1-ac| \left[ \log \left| \Theta - a\Lambda_t - \frac{\rho}{c} \right| - \log \left| \Lambda_s + \frac{bc+\rho}{c^2} \right| \right] \\
&\quad - [\log |\chi - \rho| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \rho| - \log |\chi - \rho| \log |c(b+c\Lambda_s) + \rho|] \\
&\quad - [\log |\psi - \rho| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \rho| - \log |\psi - \rho| \log |c(b+c\Lambda_s) + \rho|] \\
&\quad + \log |a| \left[ \log \left| \Theta - a\Lambda_t - \frac{\rho}{c} \right| - \log \left| \Lambda_s + \frac{bc+\rho}{c^2} \right| \right] \\
&\quad + \left[ \frac{1}{2} (\log^2 |-c\Theta + ac\Lambda_t + \rho| - \log^2 |c(b+c\Lambda_s) + \rho|) \right] \\
&\quad + \log |1-ac| \left[ \log \left| \Theta - a\Lambda_t - \frac{\lambda}{c} \right| - \log \left| \Lambda_s + \frac{bc+\lambda}{c^2} \right| \right] \\
&\quad + [\log |\chi - \lambda| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \lambda| - \log |\chi - \lambda| \log |c(b+c\Lambda_s) + \lambda|] \\
&\quad + [\log |\psi - \lambda| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \lambda| - \log |\psi - \lambda| \log |c(b+c\Lambda_s) + \lambda|] \\
&\quad - \log |a| \left[ \log \left| \Theta - a\Lambda_t - \frac{\lambda}{c} \right| - \log \left| \Lambda_s + \frac{bc+\lambda}{c^2} \right| \right] \\
&\quad - [\log |\rho - \lambda| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \lambda| - \log |\rho - \lambda| \log |c(b+c\Lambda_s) + \lambda|] \\
&\quad + \log |1-ac| \left[ \log \left| \Theta - a\Lambda_t - \frac{\kappa}{c} \right| - \log \left| \Lambda_s + \frac{bc+\kappa}{c^2} \right| \right] \\
&\quad + [\log |\chi - \kappa| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \kappa| - \log |\chi - \kappa| \log |c(b+c\Lambda_s) + \kappa|] \\
&\quad + [\log |\psi - \kappa| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \kappa| - \log |\psi - \kappa| \log |c(b+c\Lambda_s) + \kappa|] \\
&\quad - \log |a| \left[ \log \left| \Theta - a\Lambda_t - \frac{\kappa}{c} \right| - \log \left| \Lambda_s + \frac{bc+\kappa}{c^2} \right| \right] \\
&\quad - [\log |\rho - \kappa| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \kappa| - \log |\rho - \kappa| \log |c(b+c\Lambda_s) + \kappa|] \left. \right\} \\
&\hspace{15em} (\rightarrow)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c} \left\{ - \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{\Lambda_t + t_0} \right) \right] \right. \\
& \quad - \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \rho}{\rho - \chi} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \rho}{\rho - \chi} \right) \right) \right] \\
& \quad - \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \rho}{\rho - \psi} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \rho}{\rho - \psi} \right) \right) \right] \\
& \quad + \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \lambda}{\lambda - \chi} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \lambda}{\lambda - \chi} \right) \right) \right] \\
& \quad + \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \lambda}{\lambda - \psi} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \lambda}{\lambda - \psi} \right) \right) \right] \\
& \quad - \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \lambda}{\lambda - \rho} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \lambda}{\lambda - \rho} \right) \right) \right] \\
& \quad + \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \kappa}{\kappa - \chi} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \kappa}{\kappa - \chi} \right) \right) \right] \\
& \quad + \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \kappa}{\kappa - \psi} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \kappa}{\kappa - \psi} \right) \right) \right] \\
& \quad \left. - \left[ - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \kappa}{\kappa - \rho} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \kappa}{\kappa - \rho} \right) \right) \right] \right\} \\
& + i \frac{\pi}{c} \theta(-t_0) \log \left| \sqrt{e^2 t_0^2 - f t_0 + k^2 - h t_0 + k} \right|
\end{aligned} \tag{E.130}$$

### E.6.1.3 Separation der Divergenzen

Der manifest endliche (d.h. cutoff-unabhängige) Anteil ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0|_{conv} &= \frac{1}{c} \left\{ \log |2(1-ac)| \log |t_0| + \log |c| \log |t_0| - \log |1-ac| \log |-c| \right. \\
& \quad \left. + \log |a| \log |-c| + \frac{1}{2} \log^2 |t_0| + \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] - \frac{\pi^2}{2} \theta(-t_0) \right\} \\
& + i \frac{\pi}{c} \left\{ -\theta(-t_0) \log |2(1-ac)| - \theta(-t_0) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right| + \theta(b) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right\}
\end{aligned} \tag{E.131}$$

Die Differenz von zwei cutoff-abhängigen Basisintegralen (also der weiteren Integralanteile) mit verschiedenen  $t_0$ , wie sie im Fall von einem Abzugsterm auftritt, ist von der Ordnung

$\mathcal{O}(\epsilon)$ . Unter Verwendung von

$$\Lambda_s = \frac{\mathfrak{S}}{\epsilon} \quad \Lambda_t = \frac{\mathfrak{T}}{\epsilon} \quad (\text{E.132})$$

mit  $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$  beliebig positiv, aber fest, erhält man

$$\mathcal{T}_0(b_1)|_{div} - \mathcal{T}_0(b_2)|_{div} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{E.133})$$

#### E.6.1.4 Zu implementierende Anteile

Im Fall von nur einem Abzugsterm fallen weitere endliche Beiträge bei der Differenzbildung weg, es muß zur Implementation lediglich verwendet werden

$$\mathcal{T}_0|_{impl} = \frac{1}{c} \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] + i \frac{\pi}{c} \left[ -\theta(-t_0) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right| + \theta(b) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right] \quad (\text{E.134})$$

Diese Beiträge sind auch im Fall von zwei Abzugstermen hinreichend. Dort sind andere Summationen gemäß (E.147) durchzuführen, zum Nachweis siehe Anhang E.6.2.

### E.6.2 Berechnung der Integrale $\mathcal{T}_{1,2}$

Als Endergebnis nach beiden Integrationen der beiden Integrale  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  mit  $\eta \rightarrow 0_+$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{s}{t + t_0 - i\eta} \frac{1}{\sqrt{(at + b + i\eta + cs)^2 - 4st}} \\ &= -\frac{a}{c^2} \Lambda_t + \frac{t_0 a - b}{c^2} \log |\Lambda_t + t_0| - \frac{t_0 a - b}{c^2} \log |t_0| \\ &\quad - \frac{(2-ac)}{c^3} (\log 2 + \log |1-ac|) \Lambda_t \\ &\quad - \frac{(2-ac)}{c^3} \left[ \left( \Lambda_t - \frac{bc}{1-ac} \right) \log \left| \Lambda_t - \frac{bc}{1-ac} \right| - \Lambda_t + \frac{bc}{1-ac} \log \left| \frac{bc}{1-ac} \right| \right] \\ &\quad + \frac{(2-ac)}{c^3} \left( \frac{bc}{2-ac} + t_0 \right) (\log 2 + \log |1-ac|) \log |\Lambda_t + t_0| \\ &\quad - \frac{(2-ac)}{c^3} \left( \frac{bc}{2-ac} + t_0 \right) (\log 2 + \log |1-ac|) \log |t_0| \end{aligned} \quad (\rightarrow)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{t_0(2-ac) + bc}{c^3} \left[ \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{\Lambda_t + t_0} \right) \right] + \frac{1}{2} \log^2 |\Lambda_t + t_0| \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \log^2 |t_0| - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right) + \frac{\pi^2}{2} \theta(-t_0) \right] \\
& + \mathcal{V}_{g21} [(-c\Theta + ac\Lambda_t) - c(b + c\Lambda_s)] \\
& + \mathcal{V}_{g22} [\log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| - \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}|] \\
& + \mathcal{V}_{g23} \left[ -\frac{1}{(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}} + \frac{1}{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}} \right] \\
& + \mathcal{V}_{g24} [\log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{k}| - \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}|] \\
& + \mathcal{V}_{g25} [\log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{l}| - \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}|] \\
& + \frac{2}{c^3} \left[ \frac{1}{2ac} - \frac{1}{4} \right] \\
& \quad [((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u}) \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u}| - (-c\Theta + ac\Lambda_t) \\
& \quad - (c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u}) \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u}| + c(b + c\Lambda_s)] \\
& + \frac{2}{c^3} \left[ \frac{1}{2ac} - \frac{1}{4} \right] \\
& \quad [((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}) \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}| - (-c\Theta + ac\Lambda_t) \\
& \quad - (c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}) \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}| + c(b + c\Lambda_s)] \\
& - \frac{2}{c^3} \left[ \frac{1}{2ac} - \frac{1}{4} \right] \\
& \quad [((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}) \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| - (-c\Theta + ac\Lambda_t) \\
& \quad - (c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}) \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| + c(b + c\Lambda_s)] \\
& + \mathcal{V}_{g26} [\log |\mathfrak{u} - \mathfrak{h}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}| - \log |\mathfrak{u} - \mathfrak{h}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{u}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{u}} \right) \right)] \\
& + \mathcal{V}_{g26} [\log |\mathfrak{m} - \mathfrak{h}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}| - \log |\mathfrak{m} - \mathfrak{h}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{m}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{m}} \right) \right)] \\
& - \mathcal{V}_{g26} \left[ \frac{1}{2} (\log^2 |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}| - \log^2 |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}|) \right] \\
& - \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{a}}{4a^3c} \left\{ -\frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u}| \\
& \quad + \frac{1}{\mathfrak{h} - \mathfrak{u}} [\log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u})| - \log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})| \\
& \quad \left. - \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u})| + \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})|] \right\}
\end{aligned}$$

(→)

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{a}}{4a^3c} \left\{ -\frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}| \\
& \quad + \frac{1}{\mathfrak{h} - \mathfrak{m}} [\log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m})| - \log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})| \\
& \quad \quad \left. - \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m})| + \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})|] \right\} \\
& + \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{a}}{4a^3c} \left[ -\frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \right] \\
& + \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} [\log |\mathfrak{v} - \mathfrak{k}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}| - \log |\mathfrak{v} - \mathfrak{k}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{v}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{v}} \right) \right)] \\
& + \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} [\log |\mathfrak{v} - \mathfrak{l}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}| - \log |\mathfrak{v} - \mathfrak{l}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{v}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{v}} \right) \right)] \\
& + \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} [\log |\mathfrak{m} - \mathfrak{k}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}| - \log |\mathfrak{m} - \mathfrak{k}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{m}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{m}} \right) \right)] \\
& + \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} [\log |\mathfrak{m} - \mathfrak{l}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}| - \log |\mathfrak{m} - \mathfrak{l}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{m}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{m}} \right) \right)] \\
& - \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} [\log |\mathfrak{h} - \mathfrak{k}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}| - \log |\mathfrak{h} - \mathfrak{k}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{h}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{h}} \right) \right)] \\
& - \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} [\log |\mathfrak{h} - \mathfrak{l}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}| - \log |\mathfrak{h} - \mathfrak{l}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{h}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{h}} \right) \right)] \\
& \hspace{15em} (\rightarrow)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i\theta(b)\frac{\pi}{c^3}(2-ac)\left[\frac{bc}{1-ac}-\left(\frac{bc}{2-ac}+t_0\right)\log\left|\frac{\frac{bc}{1-ac}+t_0}{t_0}\right|\right] \\
& -i\pi\frac{1}{c}\theta(-t_0)\left[\frac{-at_0+b}{c}-\frac{\sqrt{e^2t_0^2-ft_0+g}}{c^2}\right. \\
& \quad \left.+\frac{-t_0(2-ac)-bc}{c^2}\left(\log 2+\log\left|-t_0-\frac{bc}{1-ac}\right|+\log|1-ac|\right.\right. \\
& \quad \left.\left.-\log\left|\sqrt{e^2t_0^2-ft_0+k^2}-ht_0+k\right|\right)\right]
\end{aligned} \tag{E.135}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2 &= \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{s^2}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(at+b+i\eta+cs)^2-4st}} \\
&= -\frac{3(2-ac)a}{4c^4}\Lambda_t^2 \\
& \quad -\frac{3(2-ac)a}{2c^4}(-t_0+\xi)\Lambda_t \\
& \quad -\frac{3(2-ac)a}{2c^4}\sigma\log|\Lambda_t+t_0|+\frac{3(2-ac)a}{2c^4}\sigma\log|t_0| \\
& \quad -\frac{\zeta}{2c^5}(\log 2+\log|1-ac|)\Lambda_t^2 \\
& \quad -\frac{\zeta}{c^5}(-t_0+\mu)(\log 2+\log|1-ac|)\Lambda_t \\
& \quad -\frac{\zeta}{c^5}\varsigma(\log 2+\log|1-ac|)\log|\Lambda_t+t_0|+\frac{\zeta}{c^5}\varsigma(\log 2+\log|1-ac|)\log|t_0| \\
& \quad -\frac{\zeta}{c^5}\left[\frac{1}{2}\Lambda_t^2\log\left|\Lambda_t-\frac{bc}{1-ac}\right|-\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{1-ac}\right)^2\log\left|\Lambda_t-\frac{bc}{1-ac}\right|\right. \\
& \quad \left.-\frac{1}{4}\Lambda_t^2-\frac{1}{2}\Lambda_t\frac{bc}{1-ac}+\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{1-ac}\right)^2\log\left|\frac{bc}{1-ac}\right|\right] \\
& \quad -\frac{\zeta}{c^5}(-t_0+\mu)\left[\left(\Lambda_t-\frac{bc}{1-ac}\right)\log\left|\Lambda_t-\frac{bc}{1-ac}\right|-\Lambda_t+\frac{bc}{1-ac}\log\left|\frac{bc}{1-ac}\right|\right] \\
& \quad (\rightarrow)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3 \left[ \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{\Lambda_t + t_0} \right) \right] + \frac{1}{2} \log^2 |\Lambda_t + t_0| \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \log^2 |t_0| - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0}{t_0 + \frac{bc}{1-ac}} \right) \right) + \frac{\pi^2}{2} \theta(-t_0) \right] \\
& + \mathcal{W}_{g401} \frac{1}{2} [(-c\Theta + ac\Lambda_t)^2 - c^2(b + c\Lambda_s)^2] \\
& + \frac{\mathfrak{A}}{c^6} \left[ \frac{1}{2} (-c\Theta + ac\Lambda_t)^2 \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u}| - \frac{1}{2} \mathfrak{u}^2 \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u}| \right. \\
& \quad - \frac{1}{4} (-c\Theta + ac\Lambda_t)^2 + \frac{1}{2} (-c\Theta + ac\Lambda_t) \mathfrak{u} - \frac{1}{2} c^2 (b + c\Lambda_s)^2 \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u}| \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathfrak{u}^2 \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u}| + \frac{1}{4} c^2 (b + c\Lambda_s)^2 - \frac{1}{2} c(b + c\Lambda_s) \mathfrak{u} \right] \\
& + \frac{\mathfrak{A}}{c^6} \left[ \frac{1}{2} (-c\Theta + ac\Lambda_t)^2 \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}| - \frac{1}{2} \mathfrak{m}^2 \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}| \right. \\
& \quad - \frac{1}{4} (-c\Theta + ac\Lambda_t)^2 + \frac{1}{2} (-c\Theta + ac\Lambda_t) \mathfrak{m} - \frac{1}{2} c^2 (b + c\Lambda_s)^2 \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}| \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathfrak{m}^2 \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}| + \frac{1}{4} c^2 (b + c\Lambda_s)^2 - \frac{1}{2} c(b + c\Lambda_s) \mathfrak{m} \right] \\
& - \frac{\mathfrak{A}}{c^6} \left[ \frac{1}{2} (-c\Theta + ac\Lambda_t)^2 \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| - \frac{1}{2} \mathfrak{h}^2 \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| \right. \\
& \quad - \frac{1}{4} (-c\Theta + ac\Lambda_t)^2 + \frac{1}{2} (-c\Theta + ac\Lambda_t) \mathfrak{h} - \frac{1}{2} c^2 (b + c\Lambda_s)^2 \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathfrak{h}^2 \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| + \frac{1}{4} c^2 (b + c\Lambda_s)^2 - \frac{1}{2} c(b + c\Lambda_s) \mathfrak{h} \right] \\
& + \mathcal{W}_{g402} [(-c\Theta + ac\Lambda_t) - c(b + c\Lambda_s)] \\
& + \mathcal{W}_{g403} [((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u}) \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{u}| - (-c\Theta + ac\Lambda_t) \\
& \quad - (c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u}) \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{u}| + c(b + c\Lambda_s)] \\
& + \mathcal{W}_{g403} [((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}) \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}| - (-c\Theta + ac\Lambda_t) \\
& \quad - (c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}) \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}| + c(b + c\Lambda_s)] \\
& - \mathcal{W}_{g403} [((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}) \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| - (-c\Theta + ac\Lambda_t) \\
& \quad - (c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}) \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| + c(b + c\Lambda_s)] \\
& + \mathcal{W}_{g404} [\log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| - \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}|] \\
& + \mathcal{W}_{g405} \left[ -\frac{1}{(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}} + \frac{1}{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}} \right] \\
& + \mathcal{W}_{g406} \left[ -\frac{1}{2((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})^2} + \frac{1}{2(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})^2} \right] \\
& + \mathcal{W}_{g407} [\log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{k}| - \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}|]
\end{aligned}$$

(→)



$$\begin{aligned}
& +\mathcal{W}_{g408} [\log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{l}| - \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}|] \\
& +\mathcal{W}_{g409} [\log |\mathfrak{v} - \mathfrak{h}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}| - \log |\mathfrak{v} - \mathfrak{h}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{v}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{v}} \right) \right)] \\
& +\mathcal{W}_{g410} \left\{ -\frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{v}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{v}| \\
& \quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{h} - \mathfrak{v}} [\log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{v})| - \log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})| \right. \\
& \quad \quad \left. - \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{v})| + \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})|] \right\} \\
& + \frac{1}{c^6} \frac{\mathfrak{E}}{a^6} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})^2} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{v}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})^2} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{v}| \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathfrak{h} - \mathfrak{v})^2} [\log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{v})| - \log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})| \\
& \quad \quad - \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{v})| + \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})|] \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{h} - \mathfrak{v}} \left[ \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} - \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \right] \right\} \\
& + \frac{\mathfrak{G}}{c^6} [\log |\mathfrak{v} - \mathfrak{k}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}| - \log |\mathfrak{v} - \mathfrak{k}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{v}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{v}} \right) \right)] \\
& + \frac{\mathfrak{L}}{c^6} [\log |\mathfrak{v} - \mathfrak{l}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}| - \log |\mathfrak{v} - \mathfrak{l}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{v}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{v}} \right) \right)] \\
& +\mathcal{W}_{g409} [\log |\mathfrak{m} - \mathfrak{h}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}| - \log |\mathfrak{m} - \mathfrak{h}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{m}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - \mathfrak{m}} \right) \right)] \\
& +\mathcal{W}_{g410} \left\{ -\frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}| \\
& \quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{h} - \mathfrak{m}} [\log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m})| - \log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})| \right. \\
& \quad \quad \left. - \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m})| + \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})|] \right\}
\end{aligned}
\tag{\(\rightarrow\)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c^6} \frac{\mathfrak{E}}{a^6} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})^2} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})^2} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m}| \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathfrak{h} - \mathfrak{m})^2} [\log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{m})| - \log |((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})| \\
& \quad \quad - \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{m})| + \log |(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})|] \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{h} - \mathfrak{m}} \left[ \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} - \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \right] \right\} \\
& + \frac{\mathfrak{G}}{c^6} [\log |\mathfrak{m} - \mathfrak{k}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}| - \log |\mathfrak{m} - \mathfrak{k}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{m}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{m}} \right) \right)] \\
& + \frac{\mathfrak{L}}{c^6} [\log |\mathfrak{m} - \mathfrak{l}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}| - \log |\mathfrak{m} - \mathfrak{l}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{m}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{m}} \right) \right)] \\
& - \mathcal{W}_{g409} \left[ \frac{1}{2} (\log^2 |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{h}| - \log^2 |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}|) \right] \\
& - \mathcal{W}_{g410} \left[ -\frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})} + \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})} \right] \\
& - \frac{1}{c^6} \frac{\mathfrak{E}}{a^6} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})^2} \log |(-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h}| \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})^2} \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h}| \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} \frac{1}{((-c\Theta + ac\Lambda_t) + \mathfrak{h})^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{h})^2} \right] \\
& - \frac{\mathfrak{G}}{c^6} [\log |\mathfrak{h} - \mathfrak{k}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}| - \log |\mathfrak{h} - \mathfrak{k}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{h}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{k}}{\mathfrak{k} - \mathfrak{h}} \right) \right)] \\
& - \frac{\mathfrak{L}}{c^6} [\log |\mathfrak{h} - \mathfrak{l}| \log |-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}| - \log |\mathfrak{h} - \mathfrak{l}| \log |c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}| \\
& \quad - \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{-c\Theta + ac\Lambda_t + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{h}} \right) \right) + \operatorname{Re} \left( \operatorname{Li}_2 \left( \frac{c(b + c\Lambda_s) + \mathfrak{l}}{\mathfrak{l} - \mathfrak{h}} \right) \right)] \\
& \hspace{15em} (\rightarrow)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i\theta(b)\frac{\pi}{c^5}\zeta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{bc}{1-ac} \right)^2 + (\mu - t_0) \frac{bc}{1-ac} + (t_0^2 - \mu t_0 + \nu) \log \left| \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right| \right] \\
& -i\pi \frac{1}{c} \theta(-t_0) \left[ \frac{3 - t_0(2 - ac) - bc - at_0 + b}{2c^2} \frac{bc}{c} \right. \\
& \quad - \left( \frac{\Lambda_s}{2} + \frac{3 - t_0(2 - ac) - bc}{2c^2} \right) \frac{\sqrt{e^2 t_0^2 - f t_0 + k^2}}{c^2} \\
& \quad + \frac{\gamma - \delta t_0 + \zeta t_0^2}{c^4} \left( \log 2 + \log \left| -t_0 - \frac{bc}{1-ac} \right| + \log |1 - ac| \right. \\
& \quad \quad \left. - \log \left| \sqrt{e^2 t_0^2 - f t_0 + k^2} - h t_0 + k \right| \right) \left. \right]
\end{aligned} \tag{E.136}$$

Bei der Notierung der Integrationsergebnisse von  $\mathcal{T}_{1,2}$  verwenden wir folgende

### E.6.2.1 Parameter und Abkürzungen

$$\begin{aligned}
e &= ac \\
f &= 2c^2(-2\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s)) \\
h &= -2 + ac \\
k &= c(b + c\Lambda_s)
\end{aligned} \tag{E.137}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= b^2 c^2 \\
\delta &= 2bc(-3 + ac) \\
\zeta &= (6 - 6ac + a^2 c^2) \\
\mu &= \frac{2bc(-3 + ac)}{6 - 6ac + a^2 c^2} \\
\nu &= \frac{b^2 c^2}{6 - 6ac + a^2 c^2} \\
\xi &= \frac{2b(-1 + ac)}{a(-2 + ac)} \\
\sigma &= \frac{(b - at_0)(bc + (2 - ac)t_0)}{a(-2 + ac)} \\
\varsigma &= \frac{b^2 c^2 - 2bc(-3 + ac)t_0 + (6 - 6ac + a^2 c^2)t_0^2}{6 - 6ac + a^2 c^2} \\
\vartheta &= c(-2\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa &= -(c^2(b^2 + 2b(c\Lambda_s - at_0) + \Lambda_s(c^2\Lambda_s + 4t_0 - 2act_0))) \\
v &= c^2(-(b^2(2 + ac)) + c^2(-2 + ac)\Lambda_s^2) \\
\varphi &= c^4(b^4(6 + 6ac + a^2c^2) + 4ab^3c^2\Lambda_s - 2b^2c^2(-2 + a^2c^2)\Lambda_s^2 \\
&\quad - 4abc^4\Lambda_s^3 + c^4(6 - 6ac + a^2c^2)\Lambda_s^4) \\
\chi &= 4abc^4(b^2(3 + ac) + 2bc\Lambda_s + c^2(3 - ac)\Lambda_s^2) \\
\psi &= 2(3b^2c^2(-2 + a^2c^2) + 2abc^4\Lambda_s - c^4(6 - 6ac + a^2c^2)\Lambda_s^2) \\
\omega &= 4abc^2(-3 + ac)
\end{aligned} \tag{E.138}$$

$$\Theta = \sqrt{(a\Lambda_t + b + c\Lambda_s)^2 - 4\Lambda_s\Lambda_t} \tag{E.139}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n} &= 2c^2(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s)) \\
\mathfrak{v} &= \frac{\mathfrak{n} + 2|bc|}{2(-1 + ac)} \\
\mathfrak{m} &= \frac{\mathfrak{n} - 2|bc|}{2(-1 + ac)}
\end{aligned} \tag{E.140}$$

$$\mathfrak{H} = \sqrt{b^2 + 2bc\Lambda_s + c^2\Lambda_s^2 - 2abt_0 + 4\Lambda_s t_0 - 2ac\Lambda_s t_0 + a^2 t_0^2} \tag{E.141}$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{c\Lambda_s(\Lambda_s - a(b + c\Lambda_s))}{a^2} \\
n &= \frac{[(2\mathfrak{H}\Lambda_s + a^2(2b + \mathfrak{H} + 2c\Lambda_s)t_0 - a^3t_0^2 - a(b^2 + b(\mathfrak{H} + 2c\Lambda_s) \\
&\quad + \Lambda_s(c\mathfrak{H} + c^2\Lambda_s + 4t_0)))]}{1} \\
p &= \frac{\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))}{a(2\Lambda_s - a(b + \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)} \\
q &= \frac{[-(2\mathfrak{H}\Lambda_s + a^2(-2b + \mathfrak{H} - 2c\Lambda_s)t_0 + a^3t_0^2 + a(b^2 - b(\mathfrak{H} - 2c\Lambda_s) \\
&\quad + \Lambda_s(-c\mathfrak{H}) + c^2\Lambda_s + 4t_0)))]}{1} \\
r &= \frac{\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))}{a(2\Lambda_s - a(b - \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)}
\end{aligned} \tag{E.142}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= 4c^2(-2 + ac)\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s)) \\
\mathbf{c} &= 2c(4\Lambda_s + a^2c^2\Lambda_s - 2a(b + 2c\Lambda_s)) \\
\mathbf{d} &= 2ac(-(bc) - 2t_0 + act_0) \\
\mathbf{e} &= (4c(-2 + ac)\Lambda_s(ab - \Lambda_s + ac\Lambda_s)) \\
\mathbf{g} &= -2\Lambda_s + a(b + \sqrt{b^2 + c^2\Lambda_s^2 - 2abt_0 + a^2t_0^2 + \Lambda_s(2bc + 4t_0 - 2act_0) + c\Lambda_s}) - a^2t_0 \\
\mathbf{h} &= \frac{c(-2\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))}{a} \\
\mathbf{j} &= -2\Lambda_s + a(b - \sqrt{b^2 + c^2\Lambda_s^2 - 2abt_0 + a^2t_0^2 + \Lambda_s(2bc + 4t_0 - 2act_0) + c\Lambda_s}) - a^2t_0 \\
\mathbf{k} &= c\left(-\sqrt{b^2 + c^2\Lambda_s^2 - 2abt_0 + a^2t_0^2 + \Lambda_s(2bc + 4t_0 - 2act_0) + at_0}\right) \\
\mathbf{l} &= c\left(\sqrt{b^2 + c^2\Lambda_s^2 - 2abt_0 + a^2t_0^2 + \Lambda_s(2bc + 4t_0 - 2act_0) + at_0}\right) \\
\mathbf{m} &= -2\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s) \\
\mathbf{n} &= (c(-2 + ac)\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))) \\
\mathbf{p} &= -4c^3(-2 + ac)\Lambda_s^2(\Lambda_s - a(b + c\Lambda_s))^2 \\
\mathbf{q} &= 4\Lambda_s + a^2c^2\Lambda_s - 2a(b + 2c\Lambda_s) \\
\mathbf{r} &= 2c^2\Lambda_s(-4\Lambda_s^2 + a^3c^2\Lambda_s(b + c\Lambda_s) + 2a\Lambda_s(3b + 4c\Lambda_s) - a^2(2b^2 + 6bc\Lambda_s + 5c^2\Lambda_s^2)) \\
\mathbf{s} &= \left[-2\mathbb{H}\Lambda_s - a^2(2b + \mathbb{H} + 2c\Lambda_s)t_0 + a^3t_0^2 + a(b^2 + b(\mathbb{H} + 2c\Lambda_s) + \Lambda_s(c\mathbb{H} + c^2\Lambda_s + 4t_0))\right] \\
&\quad \frac{c(bc + (2 - ac)t_0)}{(-2\Lambda_s + a(b + \mathbb{H} + c\Lambda_s) - a^2t_0)} \\
\mathbf{t} &= \frac{2c\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))(bc + (2 - ac)t_0)}{-2\Lambda_s + a(b + \mathbb{H} + c\Lambda_s) - a^2t_0} \\
\mathbf{U} &= \frac{(-2 + ac)\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))}{a^2(2\Lambda_s - a(b + \mathbb{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)} \\
\mathbf{v} &= \frac{4c^2(-2 + ac)\Lambda_s^2(\Lambda_s - a(b + c\Lambda_s))^2}{a^2(2\Lambda_s - a(b + \mathbb{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)} \\
\mathbf{w} &= \frac{c(bc + (2 - ac)t_0)}{-2\Lambda_s + a(b - \mathbb{H} + c\Lambda_s) - a^2t_0} \\
&\quad \left[2\mathbb{H}\Lambda_s + a^2(-2b + \mathbb{H} - 2c\Lambda_s)t_0 + a^3t_0^2 + a(b^2 - b(\mathbb{H} - 2c\Lambda_s) + \Lambda_s(-(c\mathbb{H}) + c^2\Lambda_s + 4t_0))\right] \\
\mathbf{x} &= \frac{2c\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))(bc + (2 - ac)t_0)}{-2\Lambda_s + a(b - \mathbb{H} + c\Lambda_s) - a^2t_0} \\
\mathbf{y} &= \frac{(-2 + ac)\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))}{a^2(2\Lambda_s - a(b - \mathbb{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)} \\
\mathbf{z} &= \frac{4c^2(-2 + ac)\Lambda_s^2(\Lambda_s - a(b + c\Lambda_s))^2}{a^2(2\Lambda_s - a(b - \mathbb{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{6 - 6ac + a^2c^2}{4a^2c} \\
\mathfrak{B} &= \frac{(-36\Lambda_s + a^3c^2(-b + 3c\Lambda_s) + 18a(b + 3c\Lambda_s) - 6a^2c(b + 4c\Lambda_s))}{4a^3} \\
\mathfrak{C} &= -[c(36\Lambda_s^2 + a^4c^4\Lambda_s^2 - 36a\Lambda_s(b + 2c\Lambda_s) - 4a^3c^2\Lambda_s(2b + 3c\Lambda_s) \\
&\quad + 6a^2(b^2 + 6bc\Lambda_s + 8c^2\Lambda_s^2))] \\
\mathfrak{D} &= -4c^2(-2 + ac)\Lambda_s[-6\Lambda_s^2 + a^3c^2\Lambda_s(b + c\Lambda_s) + 3a\Lambda_s(3b + 4c\Lambda_s) \\
&\quad - a^2(3b^2 + 9bc\Lambda_s + 7c^2\Lambda_s^2)] \\
\mathfrak{E} &= -4c^3(6 - 6ac + a^2c^2)\Lambda_s^2(\Lambda_s - a(b + c\Lambda_s))^2 \\
\mathfrak{F} &= [24\Lambda_s - 6a(2b - \mathfrak{H} + 6c\Lambda_s) + 2a^2(-3c\mathfrak{H} + 8c^2\Lambda_s - 3t_0) - a^4c^2t_0 \\
&\quad + a^3c(2bc + c\mathfrak{H} - 2c^2\Lambda_s + 6t_0)] \\
&\quad \frac{1}{4a^3} \\
\mathfrak{G} &= \frac{[(2c(b^2c^2 - 2bc(-3 + ac)t_0 + (6 - 6ac + a^2c^2)t_0^2)(2\Lambda_s^2 - 2a\Lambda_s(b + \mathfrak{H} + c\Lambda_s) \\
&\quad - a^3(2b + \mathfrak{H} + 2c\Lambda_s)t_0 + a^4t_0^2 + a^2(b^2 + b(\mathfrak{H} + 2c\Lambda_s) + \Lambda_s(c\mathfrak{H} + c^2\Lambda_s + 4t_0)))]}{1} \\
&\quad \frac{1}{(2\Lambda_s - a(b + \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)^2} \\
\mathfrak{H} &= \frac{[(-4c\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))(18\Lambda_s^2 - 6a\Lambda_s(3b + 2\mathfrak{H} + 6c\Lambda_s) - a^5c^3\Lambda_s t_0 \\
&\quad + 3a^2(2b^2 + 2b(\mathfrak{H} + 4c\Lambda_s) + \Lambda_s(6c\mathfrak{H} + 9c^2\Lambda_s + 4t_0)) \\
&\quad + a^4c(b(c^2\Lambda_s + 3t_0) + c\Lambda_s(c\mathfrak{H} + c^2\Lambda_s + 8t_0)) - a^3(3b^2c + b(3c\mathfrak{H} + 10c^2\Lambda_s + 6t_0) \\
&\quad + c\Lambda_s(8c\mathfrak{H} + 9c^2\Lambda_s + 18t_0)))]}{1} \\
&\quad \frac{1}{(a^3(2\Lambda_s - a(b + \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)^2)} \\
\mathfrak{I} &= \frac{(4c^2(6 - 6ac + a^2c^2)\Lambda_s^2(\Lambda_s - a(b + c\Lambda_s))^2)}{(a^3(2\Lambda_s - a(b + \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0))} \\
\mathfrak{K} &= [24\Lambda_s - 6a(2b + \mathfrak{H} + 6c\Lambda_s) + 2a^2(3c\mathfrak{H} + 8c^2\Lambda_s - 3t_0) - a^4c^2t_0 \\
&\quad + a^3c(2bc - c\mathfrak{H} - 2c^2\Lambda_s + 6t_0)] \\
&\quad \frac{1}{4a^3} \\
\mathfrak{L} &= \frac{[(2c(b^2c^2 - 2bc(-3 + ac)t_0 + (6 - 6ac + a^2c^2)t_0^2)(2\Lambda_s^2 - 2a\Lambda_s(b - \mathfrak{H} + c\Lambda_s) \\
&\quad + a^3(-2b + \mathfrak{H} - 2c\Lambda_s)t_0 + a^4t_0^2 + a^2(b^2 - b(\mathfrak{H} - 2c\Lambda_s) \\
&\quad + \Lambda_s(-c\mathfrak{H}) + c^2\Lambda_s + 4t_0)))]}{1} \\
&\quad \frac{1}{(2\Lambda_s - a(b - \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} &= [(-4c\Lambda_s(-\Lambda_s + a(b + c\Lambda_s))(18\Lambda_s^2 - 6a\Lambda_s(3b - 2\mathfrak{H} + 6c\Lambda_s) - a^5c^3\Lambda_s t_0 \\
&\quad + 3a^2(2b^2 - 2b(\mathfrak{H} - 4c\Lambda_s) + \Lambda_s(-6c\mathfrak{H} + 9c^2\Lambda_s + 4t_0)) \\
&\quad + a^4c(b(c^2\Lambda_s + 3t_0) + c\Lambda_s(-(c\mathfrak{H}) + c^2\Lambda_s + 8t_0)) \\
&\quad - a^3(3b^2c + b(-3c\mathfrak{H} + 10c^2\Lambda_s + 6t_0) \\
&\quad + c\Lambda_s(-8c\mathfrak{H} + 9c^2\Lambda_s + 18t_0)))] \\
&\quad \frac{1}{(a^3(2\Lambda_s - a(b - \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0)^2)} \\
\mathfrak{N} &= \frac{(4c^2(6 - 6ac + a^2c^2)\Lambda_s^2(\Lambda_s - a(b + c\Lambda_s))^2)}{(a^3(2\Lambda_s - a(b - \mathfrak{H} + c\Lambda_s) + a^2t_0))} \\
\mathfrak{Z} &= \frac{(b^2c^2 - 2bc(-3 + ac)t_0 + (6 - 6ac + a^2c^2)t_0^2)}{c^5}
\end{aligned} \tag{E.144}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{g21} &= \left[ \frac{1}{2c^3} - \log|c| \frac{2}{c^3} \left( \frac{1}{2ac} - \frac{1}{4} \right) + \frac{2}{c^3} \left( \frac{1}{2ac} - \frac{1}{4} \right) (\log(ac - 1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{V}_{g22} &= \left[ \frac{2(p+r)}{c^2} + \log|c| \frac{2}{c^3} \left( \frac{\mathfrak{c}}{4a^2c} + \frac{\mathfrak{e}}{4a^2c\mathfrak{g}} + \frac{\mathfrak{e}}{4a^2c\mathfrak{j}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{c^3} \left( \frac{\mathfrak{c}}{4a^2c} + \frac{\mathfrak{e}}{4a^2c\mathfrak{g}} + \frac{\mathfrak{e}}{4a^2c\mathfrak{j}} \right) (\log(ac - 1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{V}_{g23} &= \left[ \frac{2m}{c^2} + \log|c| \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{a}}{4a^3c} - \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{a}}{4a^3c} (\log(ac - 1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{V}_{g24} &= \left[ \frac{2n}{c^2} - \log|c| \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} + \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} (\log(ac - 1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{V}_{g25} &= \left[ \frac{2q}{c^2} - \log|c| \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} + \frac{2}{c^3} \frac{\mathfrak{d}}{4ac} (\log(ac - 1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{V}_{g26} &= -\frac{2}{c^3} \left( \frac{\mathfrak{c}}{4a^2c} + \frac{\mathfrak{e}}{4a^2c\mathfrak{g}} + \frac{\mathfrak{e}}{4a^2c\mathfrak{j}} \right)
\end{aligned} \tag{E.145}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{g401} &= \left[ -\frac{3}{2c^5} \frac{-2 + ac}{4ac} - \log|c| \frac{\mathfrak{A}}{c^6} + \frac{\mathfrak{A}}{c^6} (\log(ac - 1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{W}_{g402} &= \left[ \frac{\Lambda_s}{4c^3} + \frac{3}{2c^5} \left( -\frac{(-2 + ac)\mathfrak{m}}{4a^2} - \frac{\mathfrak{q}}{2a^2} + (-bc) - 2t_0 + act_0 \right) + \mathfrak{U} + \eta \right] \\
&\quad - \log|c| \frac{1}{c^6} (\mathfrak{B} + \mathfrak{F} + \mathfrak{K}) + \frac{1}{c^6} (\log(ac - 1) - \log(-a)) (\mathfrak{B} + \mathfrak{F} + \mathfrak{K})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{g403} &= \frac{1}{c^6} (\mathfrak{B} + \mathfrak{F} + \mathfrak{K}) \\
\mathcal{W}_{g404} &= \left[ \frac{(p+r)\Lambda_s}{c^2} + \frac{3}{2c^5} \left( -2\frac{\mathfrak{n}}{a^3} + \frac{\mathfrak{t}}{a} + \frac{\mathfrak{r}}{a} \right) - \log|c| \frac{1}{c^6} \left( \frac{\mathfrak{C}}{a^4} + \frac{\mathfrak{H}}{a} + \frac{\mathfrak{M}}{a} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{c^6} \left( \frac{\mathfrak{C}}{a^4} + \frac{\mathfrak{H}}{a} + \frac{\mathfrak{M}}{a} \right) (\log(ac-1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{W}_{g405} &= \left[ \frac{m\Lambda_s}{c^2} + \frac{3}{2c^5} \left( -\frac{\mathfrak{r}}{a^4} + \frac{\mathfrak{v}}{a^2} + \frac{\mathfrak{z}}{a^2} \right) - \log|c| \frac{1}{c^6} \left( \frac{\mathfrak{D}}{a^5} + \frac{\mathfrak{J}}{a^2} + \frac{\mathfrak{N}}{a^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{c^6} \left( \frac{\mathfrak{D}}{a^5} + \frac{\mathfrak{J}}{a^2} + \frac{\mathfrak{N}}{a^2} \right) (\log(ac-1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{W}_{g406} &= \left[ \frac{3}{2c^5} \frac{\mathfrak{p}}{a^5} - \log|c| \frac{1}{c^6} \frac{\mathfrak{E}}{a^6} + \frac{1}{c^6} \frac{\mathfrak{E}}{a^6} (\log(ac-1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{W}_{g407} &= \left[ \frac{n\Lambda_s}{c^2} - \frac{3\mathfrak{s}}{2c^5} - \log|c| \frac{\mathfrak{G}}{c^6} + \frac{\mathfrak{G}}{c^6} (\log(ac-1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{W}_{g408} &= \left[ \frac{q\Lambda_s}{c^2} - \frac{3\mathfrak{w}}{2c^5} - \log|c| \frac{\mathfrak{L}}{c^6} + \frac{\mathfrak{L}}{c^6} (\log(ac-1) - \log(-a)) \right] \\
\mathcal{W}_{g409} &= \frac{1}{c^6} \left( \frac{\mathfrak{C}}{a^4} + \frac{\mathfrak{H}}{a} + \frac{\mathfrak{M}}{a} \right) \\
\mathcal{W}_{g410} &= \frac{1}{c^6} \left( \frac{\mathfrak{D}}{a^5} + \frac{\mathfrak{J}}{a^2} + \frac{\mathfrak{N}}{a^2} \right)
\end{aligned} \tag{E.146}$$

### E.6.2.2 Separation der cutoff-abhängigen Beiträge

Dazu teilen wir die Integrale auf in einen Anteil, der frei von cutoffs ist und in einen, in welchem die Terme cutoffs enthalten. Folgende Beiträge sind aufgrund (6.82) bzw. (6.157) zu summieren und müssen im Limes divergierender cutoffs konvergent sein:

$$\sum_{n=3}^{2j_k+2} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \int_0^{\Lambda_t} dt \int_0^{\Lambda_s} ds \frac{\left[ \prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} (\mathcal{X}s^2 + \mathcal{Y}_n s + \mathcal{Z}_{i,n}) \right]}{(t + t_{0,r,m} - i\eta) \sqrt{(a_m t + b_{n,m} + i\eta + c_n s)^2 - 4st}} \tag{E.147}$$

wobei die  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}_n, \mathcal{Z}_{i,n}$  nach (6.58) bestimmt werden. Da die Divergenzen unabhängig von der Summation über  $m$  verschwinden müssen, können wir generisch

$$b_n = \tilde{\mathcal{W}} - \tilde{b} \frac{\Xi_n}{\Upsilon} \tag{E.148}$$



verwenden. Aus analogem Grund reicht es weiter, *ein*  $t_0$  zu wählen. Aufsummiert werden müssen im Fall von zwei Abzugstermen, was  $j_k = 2$  entspricht, die Beiträge

$$\sum_{n=3}^{2j_k+2} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} (\mathcal{X}\mathcal{T}_2(b_n) + \mathcal{Y}_n\mathcal{T}_1(b_n) + \mathcal{Z}_{i,n}\mathcal{T}_0(b_n)) \right] \quad (\text{E.149})$$

bzw. die cutoff-abhängigen Anteile davon. Wir setzen

$$\Lambda_s = \frac{\mathfrak{G}}{\epsilon} \quad \Lambda_t = \frac{\mathfrak{T}}{\epsilon} \quad (\text{E.150})$$

mit  $\mathfrak{G}, \mathfrak{T}$  beliebig positiv, aber fest. Wir stellen mit Hilfe von Mathematica [Math] fest, daß für die divergenten<sup>1</sup> Anteile der Integrale gilt:

$$\sum_{n=3}^{2j_k+2} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} (\mathcal{X}\mathcal{T}_2(b_n)|_{div} + \mathcal{Y}_n\mathcal{T}_1|_{div}(b_n) + \mathcal{Z}_{i,n}\mathcal{T}_0(b_n)|_{div}) \right] = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{E.151})$$

Wir bemerken noch, daß im Fall von zwei Abzugstermen das Produkt trivial ist, es treten keine Produkte von Integralen auf. Dies natürlich auch nicht im Fall höherer Abzugsterme, dann aber sind höhere Potenzen als  $s^2$  im Zähler zu berücksichtigen, und die Produktbildung, welche vor Integration durchzuführen ist, führt auf weitere Integrale mit höheren Potenzen in  $s$  im Zähler.

### E.6.2.3 Endliche Anteile

Der endliche Anteil der Integrale  $\mathcal{T}_{1,2}$  lautet:

---

<sup>1</sup>Per Konvention benennen wir die cutoff-abhängigen Anteile derart, obgleich Teilbeiträge hiervon bereits vor Summation im Limes divergierender cutoffs verschwinden.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1|_{conv} = & -\frac{t_0 a - b}{c^2} \log |t_0| - \frac{(2 - ac)}{c^3} \frac{bc}{(1 - ac)} \log \left| \frac{bc}{(1 - ac)} \right| \\
& - \frac{(2 - ac)}{c^3} \left( \frac{bc}{(2 - ac)} + t_0 \right) (\log 2 + \log |ac - 1|) \log |t_0| \\
& + \frac{(2 - ac)}{c^3} \left( \frac{bc}{(2 - ac)} + t_0 \right) \left\{ -\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{1}{2} \log^2 |t_0| + \frac{\pi^2}{2} \theta(-t_0) - \mathcal{V}_{g_{21}} cb + \frac{2}{c^3} \left( \frac{1}{2ac} - \frac{1}{4} \right) cb \\
& + i\theta(b) \left[ \frac{\pi}{c^3} (2 - ac) \left( \frac{bc}{(1 - ac)} - \left( \frac{bc}{(2 - ac)} + t_0 \right) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right) \right] \\
& - i\frac{\pi}{c} \theta(-t_0) \left[ \frac{-at_0 + b}{c} \right. \\
& \quad \left. + \frac{-t_0(2 - ac) - bc}{c^2} \left( \log 2 + \log \left| t_0 + \frac{bc}{1 - ac} \right| + \log |1 - ac| \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.152}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2|_{conv} = & \frac{3(2 - ac)a}{(2c^4)} \sigma \log |t_0| \\
& + 3 (\log 2 + \log |ac - 1|) \log |t_0| \\
& - \frac{\zeta}{(c^5)} \frac{1}{2} \left( \frac{bc}{1 - ac} \right)^2 \log \left| \frac{bc}{1 - ac} \right| - \frac{\zeta}{(c^5)} \frac{(-t_0 + \mu)bc}{1 - ac} \log \left| \frac{bc}{1 - ac} \right| \\
& - 3 \left\{ -\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] - \frac{1}{2} \log^2 |t_0| + \frac{\pi^2}{2} \theta(-t_0) \right\} \\
& - \mathcal{W}_{g_{401}} \frac{1}{2} b^2 c^2 \\
& + i\theta(b) \left[ \frac{\pi}{c^5} \zeta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{bc}{1 - ac} \right)^2 + \frac{(\mu - t_0)bc}{(1 - ac)} + (t_0^2 - \mu t_0 + \nu) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right) \right] \\
& - i\pi \frac{1}{c} \theta(-t_0) \left[ \frac{3 - t_0(2 - ac) - bc - at_0 + b}{2} \frac{1}{c^2} \frac{1}{c} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma - \delta t_0 + \zeta t_0^2}{(c^4)} \left( \log 2 + \log \left| t_0 + \frac{(bc)}{(1 - ac)} \right| + \log |1 - ac| \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.153}$$

**E.6.2.4 Zu implementierende Anteile**

Da sich weitere (endliche) Beiträge bei der Summation gemäß (E.147) aufheben, reicht es für die Implementation zu verwenden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1|_{impl} = & -\frac{(2-ac)}{c^2} \frac{b}{(1-ac)} \log|b| \\
& -\frac{(2-ac)}{c^3} \left( \frac{bc}{(2-ac)} + t_0 \right) \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] \\
& +i\theta(b) \frac{\pi}{c^3} (2-ac) \left[ \frac{bc}{(1-ac)} - \left( \frac{bc}{(2-ac)} + t_0 \right) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right] \\
& -i \frac{\pi}{c^3} \theta(-t_0) (-t_0(2-ac) - bc) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right|
\end{aligned} \tag{E.154}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2|_{impl} = & -\frac{\zeta}{(c^3)} \frac{1}{2} \left( \frac{b}{1-ac} \right)^2 \log|b| \\
& -\frac{\zeta}{(c^4)} \frac{(-t_0 + \mu)b}{1-ac} \log|b| + 3 \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] \\
& +i\theta(b) \frac{\pi}{c^5} \zeta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{bc}{1-ac} \right)^2 + \frac{(\mu - t_0)bc}{(1-ac)} + (t_0^2 - \mu t_0 + \nu) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right] \\
& -i\pi \frac{1}{c^5} \theta(-t_0) (\gamma - \delta t_0 + \zeta t_0^2) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right|
\end{aligned} \tag{E.155}$$

Es wurde analytisch und numerisch bestätigt, daß diese Beiträge in der Summation hinreichend sind. Alle anderen Beiträge heben sich auf. Wir halten für

$$j_k = 2 \tag{E.156}$$

folgende Identitäten fest:

$$\sum_{n=3}^{2j_k+2} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} \mathcal{Z}_{i,n} \right] = 0 \tag{E.157}$$

$$\sum_{n=3}^{2j_k+2} \frac{1}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ 2i+1 \neq n \\ 2i+2 \neq n}}^{j_k} \mathcal{Y}_n b_n \right] = 0 \quad (\text{E.158})$$

$$\sum_{n=3}^{2j_k+2} \frac{b_n}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} = 0 \quad (\text{E.159})$$

$$\sum_{n=3}^{2j_k+2} \frac{b_n^2}{\prod_{\substack{i=3 \\ i \neq n}}^{2j_k+2} [(\Xi_i - \Xi_n)]} = 0 \quad (\text{E.160})$$

## E.7 Zusammenfassung

Alle Basisintegrale wurden gründlich numerisch getestet. Analytisch und auch numerisch nachgeprüft wurde, daß die Summationen cutoff-unabhängig sind bei Wahl großer cutoffs.

### E.7.1 Zu implementierende Integralanteile

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0|_{impl} &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt{(at+b+i\eta+cs)^2-4st}} \Big|_{impl} \\ &= \frac{1}{c} \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] + i \frac{\pi}{c} \left[ -\theta(-t_0) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right| + \theta(b) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right] \end{aligned} \quad (\text{E.161})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1|_{impl} &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{s}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt[3]{(at+b+i\eta+cs)^2-4st}} \Big|_{impl} \\
&= -\frac{(2-ac)}{c^2} \frac{b}{(1-ac)} \log|b| \\
&\quad -\frac{(2-ac)}{c^3} \left( \frac{bc}{(2-ac)} + t_0 \right) \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] \\
&\quad + i\theta(b) \frac{\pi}{c^3} (2-ac) \left[ \frac{bc}{(1-ac)} - \left( \frac{bc}{(2-ac)} + t_0 \right) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right] \\
&\quad - i \frac{\pi}{c^3} \theta(-t_0) (-t_0(2-ac) - bc) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right|
\end{aligned} \tag{E.162}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2|_{impl} &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{s^2}{t+t_0-i\eta} \frac{1}{\sqrt[3]{(at+b+i\eta+cs)^2-4st}} \Big|_{impl} \\
&= -\frac{\zeta}{(c^3)} \frac{1}{2} \left( \frac{b}{1-ac} \right)^2 \log|b| \\
&\quad -\frac{\zeta}{(c^4)} \frac{(-t_0+\mu)b}{1-ac} \log|b| + 3 \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{t_0 + \frac{bc}{1-ac}}{t_0} \right) \right] \\
&\quad + i\theta(b) \frac{\pi}{c^5} \zeta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{bc}{1-ac} \right)^2 + \frac{(\mu-t_0)bc}{(1-ac)} + (t_0^2 - \mu t_0 + \nu) \log \left| \frac{\frac{bc}{1-ac} + t_0}{t_0} \right| \right] \\
&\quad - i\pi \frac{1}{c^5} \theta(-t_0) (\gamma - \delta t_0 + \zeta t_0^2) \log \left| t_0 + \frac{bc}{1-ac} \right|
\end{aligned} \tag{E.163}$$

Das Integral

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{0,0}|_{impl} &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \frac{1}{\sqrt[3]{(at+b+i\eta+cs)^2-4st}} \Big|_{impl} \\
&= \frac{b}{-1+ac} \log|b| + i\pi\theta(b) \frac{b}{1-ac}
\end{aligned} \tag{E.164}$$

trägt nicht bei, da das Gebiet, in welchem es auftritt, im Limes verschwindender Grenzübergangsparameter zu einem Punkt degeneriert. Siehe diesbezüglich Kapitel 6.

Die freien Parameter der zur Implementation benötigten Integralanteile sind

$$a, b, c, t_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{E.165})$$

und erfüllen lediglich

$$a, c < 0 \quad \text{und} \quad 1 - ac < 0 \quad (\text{E.166})$$

Zusammengesetzte Parameter sind:

$$\begin{aligned} \gamma &= b^2 c^2 \\ \delta &= 2bc(-3 + ac) \\ \zeta &= (6 - 6ac + a^2 c^2) \\ \mu &= \frac{2bc(-3 + ac)}{6 - 6ac + a^2 c^2} \\ \nu &= \frac{b^2 c^2}{6 - 6ac + a^2 c^2} \\ \mathfrak{z} &= \frac{(b^2 c^2 - 2bc(-3 + ac)t_0 + (6 - 6ac + a^2 c^2)t_0^2)}{c^5} \end{aligned} \quad (\text{E.167})$$

## E.8 Abzugsterme im zweiten Schleifenimpuls

Analog zu den obigen Beweisen für Abzugsterme in  $k$  konnten wir für Abzugsterme in  $l$  nachweisen, daß die zu implementierenden Integralanteile die kurze Form haben, welche wir soeben notiert haben. Die von uns evaluierten Integrale reichen aus, um für gedrehte reduzierte planare Topologien Integrale bis zur Ordnung

$$\mathcal{R}_{3,3,2,3}^{\pm} = \int d^4 k d^4 l \frac{(k_0 \pm k_1)^3 (l_0 \pm l_1)^3}{P_1 P_2 P_3 P_x P_6} \prod_{i=1}^2 \left( 1 - \frac{P_1 P_2}{\bar{P}_{1,i} \bar{P}_{2,i}} \right) \prod_{r=1}^3 \left( 1 - \frac{P_x}{\bar{P}_{x,r}} \right) \quad (\text{E.168})$$

zu berechnen. Es ist dabei  $x = 4$  für die Topologie  $\mathcal{R}^+$  und  $x = 5$  für die Topologie  $\mathcal{R}^-$  zu verwenden. Die Tensorstruktur in (E.168) besitzt die höchste Ordnung, wie sie bei SM-Rechnungen in Feynman-Eichung auftreten kann.

# Anhang F

## Gebiete der numerischen Integration

Die Masterintegrale, deren Integrationsschritte in Kapitel 6 skizziert sind, werden nach der analytischen Durchführung von sechs der acht durchzuführenden Integrationsschritte einer numerischen Zweifachintegration unterzogen. Die Gebiete, in welchen die Integranden von Null verschieden sind, werden im Folgenden, für die jeweiligen Topologien spezifiziert, aufgeführt.

Die beitragenden Integrationsgebiete besitzen im Falle der planaren und gedrehten reduzierten planaren Topologien stets die Form von Dreiecken. Die einschränkenden Bedingungen ergeben sich aus den Residuenintegrationen in  $k_1$  und  $l_1$ . Wir benennen zuerst die Bedingungen im Fall von nichtverschwindenden  $\kappa_i, \lambda_r$  und zeigen dann, welche Gebiete beim Grenzübergang übrig bleiben. Ebenso zeigen wir, welche Gebiete im Fall von verschwindenden Endzustandsmassen verbleiben.

## F.1 Planare Topologie

Die Integrale haben die Form:

$$\int d^4k d^4l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha \prod_{i=1}^{j_k} \mathcal{L}_k(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i})}{P_1 P_2 \prod_{i=1}^{j_k} [\bar{P}_1^i \bar{P}_2^i] P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{F.1})$$

Unter Verwendung von (6.90) folgen die Dreiecke, die nach Residuenintegration Beiträge liefern:

	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$p_1^2 = 0$
$P_1 P_5$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > 0$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$
$P_1 P_6$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > 0$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > 0$	
$P_2 P_4$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < e_1 - q_z$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < e_1 - q_z$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$
$P_2 P_6$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$



$$\begin{aligned}
\bar{P}_1^i P_4 \quad & 0 < k_0 + l_0 & 0 < k_0 + l_0 \\
& k_0 < \kappa_i(q_z - e_1) & k_0 < 0 \\
& l_0 < e_1 - q_z & l_0 < e_1 - q_z \\
\bar{P}_1^i P_5 \quad & 0 > k_0 + l_0 & 0 > k_0 + l_0 & 0 > k_0 + l_0 \\
& k_0 > \kappa_i(q_z - e_1) & k_0 > 0 & k_0 > 0 \\
& l_0 > -(e_2 + q_z) & l_0 > -(e_2 + q_z) & l_0 > -(e_2 + q_z) \\
\bar{P}_1^i P_6 \quad & 0 > k_0 + l_0 \\
& k_0 > \kappa_i(q_z - e_1) \\
& l_0 > 0 \\
\bar{P}_2^i P_4 \quad & 0 < k_0 + l_0 & 0 < k_0 + l_0 \\
& k_0 < \kappa_i(e_2 + q_z) & k_0 < 0 \\
& l_0 < e_1 - q_z & l_0 < e_1 - q_z \\
\bar{P}_2^i P_5 \quad & 0 > k_0 + l_0 & 0 > k_0 + l_0 & 0 > k_0 + l_0 \\
& k_0 > \kappa_i(e_2 + q_z) & k_0 > 0 & k_0 > 0 \\
& l_0 > -(e_2 + q_z) & l_0 > -(e_2 + q_z) & l_0 > -(e_2 + q_z) \\
\bar{P}_2^i P_6 \quad & 0 < k_0 + l_0 \\
& k_0 < \kappa_i(e_2 + q_z) \\
& l_0 < 0
\end{aligned}$$

Bei allen anderen als den aufgeführten Beiträgen ergänzen sich die  $\theta$ -Funktionen aus (6.90) in den  $\mathcal{B}_{n,m}^{kl}$  so, daß die Gebiete verschwinden.

## F.2 Gedrehte reduzierte planare Topologie $\mathcal{R}^+$

Die Integrale haben die Form

$$\int d^4 k d^4 l \frac{(k_0 + k_1)^\alpha (l_0 + l_1)^\beta \prod_{i=1}^{j_k} \mathcal{L}_k(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i}) \prod_{r=1}^{j_l} \mathcal{L}_l(\lambda_r, m_{4,r})}{P_1 P_2 \prod_{i=1}^{j_k} [\bar{P}_1^i \bar{P}_2^i] P_3 P_4 \prod_{r=1}^{j_l} \bar{P}_4^r P_6} \quad (\text{F.2})$$

Die Residuenintegrationen liefern aufgrund von (6.164) folgende Dreiecke:

Falls  $\lambda_i < \kappa_r$ , trägt bei:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_1^i \bar{P}_4^r \quad & 0 > k_0 + l_0 \\
& k_0 > -\kappa_i(e_1 + q_z) \\
& l_0 > \lambda_r(e_1 + q_z)
\end{aligned}$$

Falls  $\lambda_i > \kappa_r$ , trägt hingegen

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^i \bar{P}_4^r & 0 < k_0 + l_0 \\ & k_0 < -\kappa_i(e_1 + q_z) \\ & l_0 < \lambda_r(e_1 + q_z) \end{aligned}$$

bei. Im Limes  $\kappa, \lambda = 0$  verschwinden diese Dreiecke, während die Integranden regulär bleiben, wie wir in Kap. 6.5 gezeigt haben. In jedem Fall tragen folgende Dreiecke bei:

	$\kappa > 0, \lambda > 0$	$\kappa = \lambda = 0$	$p_2^2 = 0$
$P_1 P_6$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > -(e_1 + q_z)$ $l_0 > 0$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > -(e_1 + q_z)$ $l_0 > 0$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > -(e_1 + q_z)$ $l_0 > 0$
$P_2 P_4$	$l_0 + k_0 > 0$ $k_0 < (e_2 - q_z)$ $l_0 < (e_1 + q_z)$	$l_0 + k_0 > 0$ $k_0 < (e_2 - q_z)$ $l_0 < (e_1 + q_z)$	$l_0 + k_0 > 0$ $k_0 < 0$ $l_0 < (e_1 + q_z)$
$P_2 P_6$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 - q_z)$ $l_0 < 0$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 - q_z)$ $l_0 < 0$	
$P_1 \bar{P}_4^r$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > -(e_1 + q_z)$ $l_0 > \lambda_r(e_1 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > -(e_1 + q_z)$ $l_0 > 0$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > -(e_1 + q_z)$ $l_0 > 0$
$\bar{P}_1^i P_4$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < -\kappa_i(e_1 + q_z)$ $l_0 < (e_1 + q_z)$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < 0$ $l_0 < (e_1 + q_z)$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < 0$ $l_0 < (e_1 + q_z)$
$\bar{P}_2^i P_4$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < \kappa_i(e_2 - q_z)$ $l_0 < (e_1 + q_z)$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < 0$ $l_0 < (e_1 + q_z)$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < 0$ $l_0 < (e_1 + q_z)$

$$\begin{array}{l}
P_2 \bar{P}_4^r \quad 0 < k_0 + l_0 \quad 0 < k_0 + l_0 \\
\quad \quad k_0 < (e_2 - q_z) \quad k_0 < (e_2 - q_z) \\
\quad \quad l_0 < \lambda_r (e_1 + q_z) \quad l_0 < 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\bar{P}_2^i \bar{P}_4^r \quad 0 < k_0 + l_0 \\
\quad \quad k_0 < \kappa_i (e_2 - q_z) \\
\quad \quad l_0 < \lambda_r (e_1 + q_z)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\bar{P}_1^i P_6 \quad 0 > k_0 + l_0 \\
\quad \quad k_0 > -\kappa_i (e_1 + q_z) \\
\quad \quad l_0 > 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\bar{P}_2^i P_6 \quad 0 < k_0 + l_0 \\
\quad \quad k_0 < \kappa_i (e_2 - q_z) \\
\quad \quad l_0 < 0
\end{array}$$

### F.3 Gedrehte reduzierte planare Topologie $\mathcal{R}^-$

Die Integrale haben die Form

$$\int d^4 k d^4 l \frac{(k_0 - k_1)^\alpha (l_0 - l_1)^\beta \prod_{i=1}^{j_k} \mathcal{L}_k(\kappa_i, m_{1,i}, m_{2,i}) \prod_{r=1}^{j_l} \mathcal{L}_l(\lambda_r, m_{5,r})}{P_1 P_2 \prod_{i=1}^{j_k} [\bar{P}_1^i \bar{P}_2^i] P_3 P_5 \prod_{r=1}^{j_l} \bar{P}_5^r P_6} \quad (\text{F.3})$$

Anwendung der Bedingungen der Residuenintegrationen, (6.165), führt auf die zu betrachtenden Dreiecke.

Eine Propagatorkombination trägt nur für endliches  $\lambda, \kappa$  bei, und zwar:

Für  $\kappa_i < \lambda_r$  erhalten wir durch die Kombination der Propagatorfaktoren von 2 mit 5 das Gebiet

$$\begin{array}{l}
\bar{P}_2^i \bar{P}_5^r \quad 0 > k_0 + l_0 \\
\quad \quad k_0 > \kappa_i (e_2 + q_z) \\
\quad \quad l_0 > -\lambda_r (e_2 + q_z)
\end{array}$$

während für  $\kappa_i > \lambda_r$  ein anderes Gebiet entsteht:

$$\begin{array}{l}
\bar{P}_2^i \bar{P}_5^r \quad 0 < k_0 + l_0 \\
\quad \quad k_0 < \kappa_i (e_2 + q_z) \\
\quad \quad l_0 < -\lambda_r (e_2 + q_z)
\end{array}$$

In jedem Fall trägt bei:

	$\kappa > 0, \lambda > 0$	$\kappa = \lambda = 0$	$p_1^2 = 0$
$P_1 P_5$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > 0$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$
$P_1 P_6$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > 0$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > 0$	
$P_2 P_6$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$
$\bar{P}_1^i P_5$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > \kappa_i (q_z - e_1)$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > 0$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > 0$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$
$P_1 \bar{P}_5^r$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > -\lambda_r (e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > (q_z - e_1)$ $l_0 > 0$	
$\bar{P}_1^i \bar{P}_5^r$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > \kappa_i (q_z - e_1)$ $l_0 > -\lambda_r (e_2 + q_z)$		
$\bar{P}_2^i P_5$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > \kappa_i (e_2 + q_z)$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > 0$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > 0$ $l_0 > -(e_2 + q_z)$
$P_2 \bar{P}_5^r$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < -\lambda_r (e_2 + q_z)$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$
$\bar{P}_1^i P_6$	$0 > k_0 + l_0$ $k_0 > \kappa_i (q_z - e_1)$ $l_0 > 0$		
$\bar{P}_2^i P_6$	$0 < k_0 + l_0$ $k_0 < \kappa_i (e_2 + q_z)$ $l_0 < 0$		

# Anhang G

## Integrationsmethoden

Wir wollen kurz die verschiedenen Methoden, welche wir zur zweidimensionalen numerischen Integration getestet haben sowie die dabei erzielten Erfahrungen darstellen.

## G.1 VEGAS

Diese Integrationsmethode [Le80], wir verwenden die Implementation [Kr97], basiert darauf, daß die Integrationspunkte durch ein Monte-Carlo-Verfahren unter Zuhilfenahme von Pseudozufalls-Zahlen bestimmt werden, wobei im Verlauf der Anwendung in mehreren adaptiven Stufen ein Gitter bestimmt wird. VEGAS bestimmt die Integrationspunkte durch importance sampling sowie stratified sampling. Eine Darstellung der Methoden der Fehlerabschätzung bei Monte-Carlo-Integrationen findet sich in [Kl05].

VEGAS ist die Standard-Integrationsmethode bei numerischen Quadraturen in der Hochenergiephysik.

## G.2 Gaußsches Integrationsverfahren

Beim Verfahren von Gauß handelt es sich um ein sehr altes Verfahren der Quadratur. Für ein Polynom beliebigen, aber festen Grades werden Abszissen und Gewichte nach der Gauß-Legendre-Methode berechnet. Der Integrand wird an diesen Stützpunkten ausgewertet und gewichtet summiert.

Wir haben basierend auf Algorithmen aus [Pr92] sowohl eine adaptive als auch eine nicht-adaptive Implementation dieses Verfahrens durchgeführt. Diese Methode ist aber im Fall von zwar integrierbaren, aber divergenten Integranden (so auch in unserem) vielfach nicht anwendbar.

## G.3 Beschreibung der CUBA-Integrationsroutinen

Um die mit VEGAS erzielten Ergebnisse zu testen, wurden die Integrale teilweise auch mit Routinen aus dem Programmpaket CUBA [Ha04] berechnet. Diese sollen kurz beschrieben werden.

### G.3.1 CUBA-VEGAS

Der Unterschied bei VEGAS in CUBA zu VEGAS [Le80] in der Implementation von [Kr97] liegt darin, daß anstelle von Pseudozufallszahlen Sobol-Quasizufallszahlen verwendet werden. CUBA-VEGAS verwendet im Gegensatz zu VEGAS [Kr97] lediglich importance sampling, nicht aber stratified sampling.

Da sich diese Methode nur unwesentlich von VEGAS [Le80] unterscheidet, haben wir sie nur sehr selten angewendet.

### G.3.2 Suave

Suave verwendet wie VEGAS importance sampling, kombiniert dies aber mit einer global adaptiven Subdivisions-Methode, welche auch von Miser [Pr90] verwendet wird und als rekursives stratified sampling bezeichnet wird. Im ersten Schritt wird importance sampling verwendet, um im nächsten Schritt in dem Sektor, der den größten absoluten Fehler hat, dieselbe Methode anzuwenden. Das Verfahren stoppt, wenn die gewünschte absolute Genauigkeit erreicht ist oder die Zahl der Iterationen ein gewisses Maximum übersteigt. Die Bestimmung der Integrationspunkte geschieht wie bei VEGAS durch Sobol-Zufallszahlen. Diese Methode haben wir, da sie sich sowohl im Algorithmus als auch in der Praxis nicht sehr stark von VEGAS unterscheidet, ebenfalls nur selten angewendet.

### G.3.3 Divonne

Zur Varianzreduktion verwendet Divonne stratified sampling. Die Art der Wahl der Integrationspunkte kann sowohl deterministisch als auch nicht-deterministisch geschehen. Es können auch Punkte angegeben werden, in denen Maxima vermutet werden. Darüber hinaus kann bestimmt werden, wie weit entfernt vom Rand die Punkte mindestens sein müssen, da Divonne sonst in jedem Fall auch Punkte direkt auf dem Rand wählt.

Da Divonne besonders zum Auffinden und Integrieren von divergenten Integranden entwickelt wurde, eignet es sich besonders gut zum Vergleichen der Ergebnisse mit VEGAS. Wir verwenden diese Methode deshalb neben VEGAS standardmäßig, um durch einen anderen Algorithmus eine von VEGAS unabhängige Testmethode für unsere Integrale verwenden zu können.

### G.3.4 Cuhre

Cuhre ist ein deterministischer Algorithmus, welcher ein globales adaptives Subdivisions-Schema verwendet. Die Festlegung der Integrationspunkte geschieht deterministisch mit Hilfe der Regeln von Genz und Malik [Ge83]. Der Subdivisions-Algorithmus selbst funktioniert ähnlich wie bei Suave. Die Probleme sind ähnlich wie bei Gauß, weswegen dieser Algorithmus nur eingeschränkt für unsere Integranden verwendet werden kann.

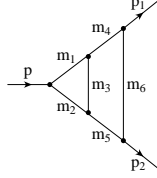




# Anhang H

## Vergleiche mit Literaturwerten

Für die skalare planare Zweischleifen-Vertexfunktion mit trivialem Zähler konnten wir erfolgreiche Vergleiche mit allen uns bekannten Literaturwerten durchführen. Wir vergleichen insbesondere für die planare Topologie



sowie für einige Fälle mit gedrehter reduzierter planarer Topologie. Wir übersetzen jeweils die in der Literatur abweichenden Notationen in unsere Konventionen.

## H.1 Vergleich mit Czarnecki, Kreimer, Kilian

Da die Ergebnisse in [Cz94] nur in graphischer Form angegeben sind, wollen wir dasselbe tun. Auf die Angabe der Werte der mit Hilfe von [Fr01] erzeugten numerischen Vergleichspunkte wollen wir hier verzichten, da dieses Programm bezüglich der planaren Topologie mit trivialem Zähler methodisch im Wesentlichen mit unserer Implementation übereinstimmt. Lediglich technisch sind Unterschiede vorhanden. Es werden in [Cz94] zwei Beispiele von Integralen der Form

$$I(q^2) = -\frac{10^9}{\pi^4} \int d^4k d^4l \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{H.1})$$

unter Variation der Zerfallsmasse durch Veränderung des generischen Impusquadrats  $q^2$  bestimmt. Im ersten Beispiel berechnen sich die internen Massen zu

$$m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = m_6 = M = 150 \text{ GeV} \quad (\text{H.2})$$

sowie

$$m_3 = 10^{-3} \cdot M, M, 2 \cdot M \quad (\text{H.3})$$

wobei die drei verschiedenen Massenwahlen für  $m_3$  durch verschiedene Linien graphisch repräsentiert werden. Die externen Massen sind:

$$p^2 = \frac{q^2}{M^2} \quad p_1^2 = p_2^2 = 0 \text{ GeV} \quad (\text{H.4})$$

Graphisch ergibt sich im ersten Beispiel die Abbildung H.1.

Im Falle des zweiten Beispiels von [Cz94] werden die inneren Massen gewählt zu

$$m_3 = m_6 = M_Z \quad (\text{H.5})$$

sowie

$$m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = M = 150 \text{ GeV}, 174 \text{ GeV} \quad (\text{H.6})$$

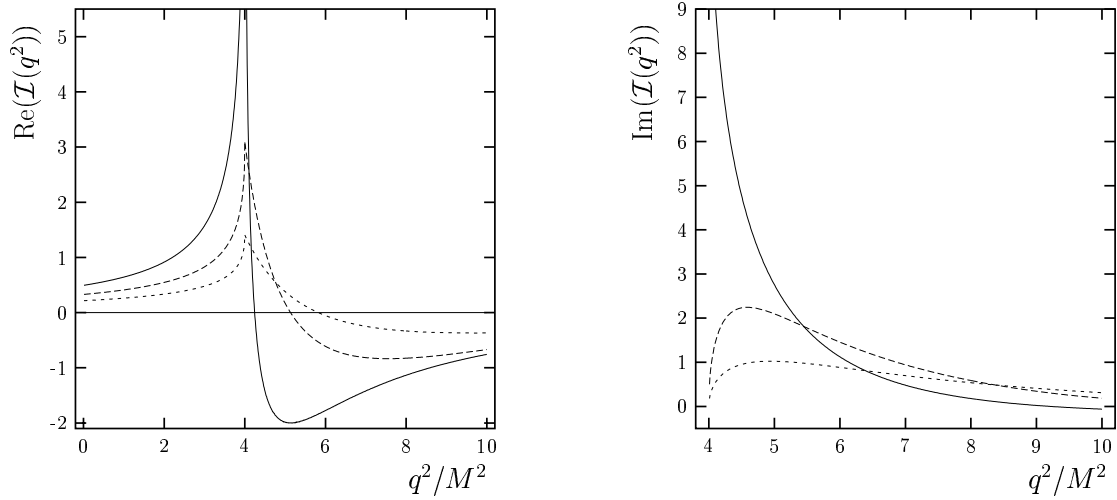


Abbildung H.1: Real- und Imaginärteil von  $\mathcal{I}(q^2)$  für Figur 6 und 7 aus [Cz94]. Die Impulse und Massen berechnen sich mit (H.2), (H.3) und (H.4). Die durchgezogene Linie bezieht sich jeweils auf die Wahl  $m_3 = 0$  GeV, die gestrichelte Linie mit langen Strichen auf  $m_3 = M$ , die gestrichelte Linie mit kurzen Strichen auf  $m_3 = 2M$ .

Die beiden verschiedenen Wahlen von  $M$  spiegeln sich graphisch in zwei verschiedenen Linien wider. Die äußeren Massen werden gewählt zu:

$$p^2 = \frac{q^2}{M^2} \quad p_1^2 = p_2^2 = M \quad (\text{H.7})$$

Graphisch ergibt sich im zweiten Beispiel die Abbildung H.2.

Alle unsere Abbildungen stimmen mit den Abbildungen von [Cz94] überein.

## H.2 Vergleich mit Fleischer, Tarasov

Wir vergleichen mit den Ergebnissen von [F194b], welche in [F194a] teilweise nochmals wiederholt werden. Wir geben ausschließlich die mit der dort Methode [14/14]<sup>1</sup> bezeichneten Ergebnisse an, da bei diesen Ergebnissen alle von den Autoren berechneten Padé-Koeffizienten summiert wurden. Berechnet wird unter Variation des generischen Impulsquadrats  $q^2$  das Integral

$$\mathcal{I}(q^2) = -\frac{10^9}{\pi^4} \int d^4k d^4l \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{H.8})$$

Die in [F194b] verwendeten Parameter sind die inneren Massen

$$m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = m_6 = M = 150 \text{ GeV} \quad (\text{H.9})$$

<sup>1</sup>Diese Zahlen beziehen sich auf die Ordnung, in welcher die Taylerreihe der Padé-Approximation entwickelt wird. Genaueres diesbezüglich siehe [F194b].

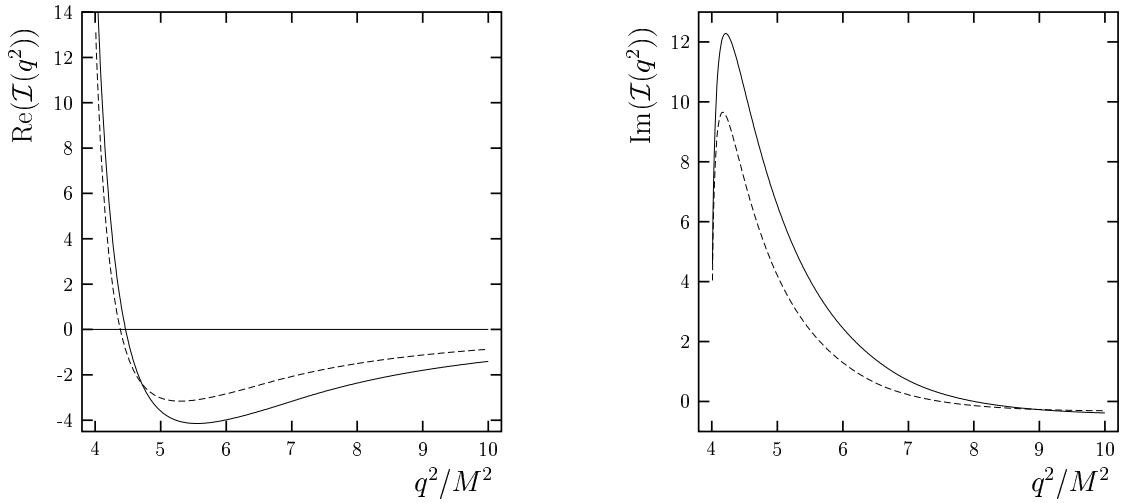


Abbildung H.2: Real- und Imaginärteil von  $\mathcal{I}(q^2)$  für Figur 8 und 9 aus [Cz94]. Die Impulse und Massen berechnen sich mit (H.5), (H.6) und (H.7). Die durchgezogene Linie bezieht sich jeweils auf die Wahl  $M = 150$  GeV, die gestrichelte Linie auf die Wahl  $M = 174$  GeV.

und

$$m_3 = 0 \text{ GeV} \quad (\text{H.10})$$

Die äußeren Massen haben unter Variation des Parameters  $q^2$  die Werte

$$p^2 = \frac{q^2}{M^2} \quad p_1^2 = p_2^2 = 0 \text{ GeV} \quad (\text{H.11})$$

Wir wählen für die numerische Integration die innere Masse  $m_3$  analog zu [Cz94] gemäß

$$m_3 = 10^{-3} \cdot M \quad (\text{H.12})$$

Dadurch werden numerische Instabilitäten, die sich aufgrund der Pseudoschwellen, welche durch mehrere unphysikalische Schnitte entstehen, vermieden. Wir führen die Resultate der verschiedenen Evaluationsmethoden getrennt nach Real- und Imaginärteil in Tabelle H.1 und Tabelle H.2 auf. Die Ergebnisse stimmen im Rahmen der Fehler überein.

### H.3 Vergleich mit Frink, Kniehl, Kreimer, Riesselmann

Die in [Fr96b] angegebenen Werte für die planaren und gedrehten reduzierten planaren Topologien konnten bestätigt werden. Die dortigen Massen sind lediglich 0 und 1. Wir stellen die Graphen wie in [Fr96b] in Bildform dar und repräsentieren dabei Masse 1 GeV durch einen durchgezogenen Strich und Masse 0 GeV durch gestrichelte Linien. Es werden

$q^2/M^2$	[F194a]	VEGAS	$\sigma_{\text{VEG}}$	Divonne	$\sigma_{\text{Div}}$
3.0	1.575225597	1.57539	0.00034	1.5756	0.0015
3.9	5.992981757	5.9922	0.0011	5.9995	0.0058
3.99	13.6486	13.6392	0.0026	13.6625	0.013
4.01	11.935	11.9464	0.0067	11.947	0.011
4.05	5.1952	5.1949	0.0057	5.1947	0.0052
4.1	2.66245	2.6607	0.0049	2.6639	0.0026
4.2	0.516039	0.5160	0.0039	0.51097	0.00061
4.5	-1.42315097	-1.42377	0.0027	-1.42193	0.0014
5.0	-1.985804823	-1.9845	0.0019	-1.9842	0.0020
6.0	-1.774053979	-1.7733	0.0012	-1.7727	0.0017
7.0	-1.419240377	-1.41931	0.00094	-1.4165	0.0014
8.0	-1.134185262	-1.13444	0.00067	-1.1317	0.0011
10	-0.7569432708	-0.75665	0.00051	-0.75657	0.00075
40	-0.04585278	-0.045827	0.000031	-0.045894	0.000045
400	+0.0000819	0.00008174	0.00000068	instabil	

Tabelle H.1: Realteil von  $\mathcal{I}(q^2)$  aus (H.8). Vergleich der mit VEGAS und Divonne erzielten Ergebnisse mit [F194a].

$q^2/M^2$	[F194a]	VEGAS	$\sigma_{\text{VEG}}$	Divonne	$\sigma_{\text{Div}}$
4.01	12.699	12.71005	0.0024	12.702	0.012
4.05	10.484	10.4848	0.0021	10.484	0.010
4.1	9.0955	9.0938	0.0016	9.0946	0.0088
4.2	7.401640	7.4010	0.0016	7.4192	0.0073
4.5	4.776510003	4.7780	0.0011	4.7757	0.063
5.0	2.758626375	2.7597	0.0011	2.7504	0.0027
6.0	1.123249363	1.12165	0.00066	1.1206	0.0011
7.0	0.4807938045	0.48156	0.00070	0.4804	0.0011
8.0	0.1784687866	0.17856	0.00049	0.17842	0.00017
10	-0.0615483234	-0.06193	0.00037	-0.07494	0.000067
40	-0.0645672604	-0.064557	0.000054	-0.064819	0.000068
400	- 0.002167	-0.00216772	0.00000096	-0.002185	0.000018

Tabelle H.2: Imaginärteil von  $\mathcal{I}(q^2)$  aus (H.8). Vergleich der mit VEGAS und Divonne erzielten Ergebnisse mit [F194a].

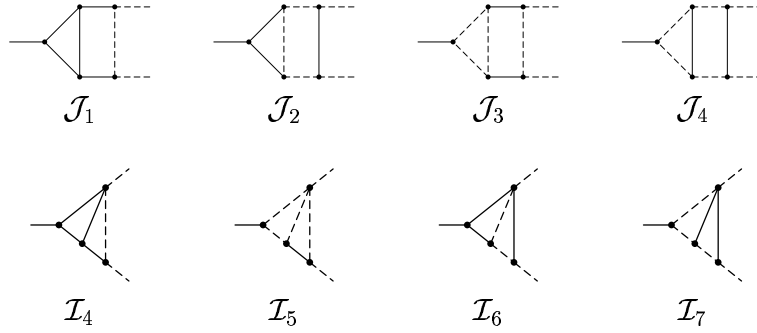


Tabelle H.3: Massenzuordnungen zu den Integralen von (H.13) und (H.14). Eine durchgezogene Linie repräsentiert die Masse 1 GeV, eine gestrichelte Linie die Masse 0 GeV.

jeweils vier Integrale mit planarer und gedrehter reduzierter planarer Topologie berechnet. Sie werden durch die Topologie und einen Index  $i$  unterschieden. Im Fall der planaren Topologie werden sie mit  $\mathcal{J}_i$  benannt, im Fall der gedrehten reduzierten planaren Topologie werden sie mit  $\mathcal{I}_i$  benannt. Die Zuordnungen der Massen zu den Integralen von [Fr96b] geschieht wie in Tabelle H.3 dargestellt. Die Normierung der Integrale geschieht jeweils mit einem Vorfaktor  $-1/\pi^4$ . Die Integrale, deren Massenverteilung den Indizes  $i$  in Tabelle H.3 zugeordnet werden, werden im Fall der planaren Topologie benannt zu

$$\mathcal{J}_i = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4k d^4l \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{H.13})$$

und im Fall der gedrehten reduzierten planaren Topologie zu

$$\mathcal{I}_i = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4k d^4l \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_5 P_6} \quad (\text{H.14})$$

Wir vergleichen – getrennt nach Real- und Imaginärteil – die Integrale von [Fr96b] mit den von uns mit VEGAS und Divonne erzielten in Tabelle H.4 und Tabelle H.5.

## H.4 Vergleich mit Passarino, Uccirati

Wir vergleichen für die planare Topologie mit den Werten von [Fe04], S. 56 Tabelle 4 und S. 60 Tabelle 9. Wir übersetzen dabei die Massen der inneren Linien in unsere Notation. Wir geben in den Tabellen, in welchen wir die Integrationsergebnisse vergleichen, jeweils die Zerfallsmassen, die auslaufenden Massen und die inneren Massen an. Die numerischen Werte der von [Fe04] verwendeten Massen sind:

$$M_W = 80.38 \text{ GeV} \quad M_Z = 91.1875 \text{ GeV} \quad m_b = 4 \text{ GeV} \quad m_t = 174.3 \text{ GeV} \quad M_H = 150 \text{ GeV}$$

Der berechnete Graph ist

$$V^{231} = \frac{1}{\pi^4} \int d^4k d^4l \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6} \quad (\text{H.15})$$

	[Fr96b]	VEGAS	$\sigma_{\text{VEG}}$	Divonne	$\sigma_{\text{Div}}$
$\mathcal{J}_1$	0.4826363(5)	0.4826268	0.0000096	0.48269	0.00047
$\mathcal{J}_2$	0.0504866(10)	0.05066	0.00015	0.050506	0.000050
$\mathcal{J}_3$	-0.829866(5)	-0.83021	0.00045	-0.83029	0.00085
$\mathcal{J}_4$	-3.890156(5)	-3.890151	0.000014	-3.8902	0.0012
$\mathcal{I}_4$	-1.280380(5)	-1.280409	0.000035	-1.2799	0.0012
$\mathcal{I}_5$	-1.352904(5)	-1.35309	0.00038	-1.3516	0.0013
$\mathcal{I}_6$	-1.921491(5)	-1.92134	0.00042	-1.9194	0.0019
$\mathcal{I}_7$	-2.137588(5)	-2.137594	0.000050	-2.1388	0.0020

Tabelle H.4: Realteil der  $\mathcal{J}_i$  und  $\mathcal{I}_i$  aus Tabelle H.3. Vergleich der mit VEGAS und Divonne erzielten Ergebnisse mit [Fr96b].

	[Fr96b]	VEGAS	$\sigma_{\text{VEG}}$	Divonne	$\sigma_{\text{Div}}$
$\mathcal{J}_1$	0	0		0	
$\mathcal{J}_2$	2.38803(6)	2.38773	0.00055	2.3882	0.0023
$\mathcal{J}_3$	5.55450(3)	5.5570	0.0019	5.5543	0.0055
$\mathcal{J}_4$	1.67552(3)	1.675487	0.000037	1.6756	0.0015
$\mathcal{I}_4$	0	0		0	
$\mathcal{I}_5$	-7.55273(3)	-7.5504	0.0020	-7.5559	0.0073
$\mathcal{I}_6$	0	0		0	
$\mathcal{I}_7$	-3.02109(3)	-3.021106	0.000031	-3.0202	0.0027

Tabelle H.5: Imaginärteil der  $\mathcal{J}_i$  und  $\mathcal{I}_i$  aus Tabelle H.3. Vergleich der mit VEGAS und Divonne erzielten Ergebnisse mit [Fr96b].

$\sqrt{p^2}, \sqrt{p_1^2}, \sqrt{p_2^2}$ $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$	[Fe04]	VEGAS Divonne	$\sigma_{\text{VEG}}$ $\sigma_{\text{Div}}$
200, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	$-4.913523 \cdot 10^{-10}$	$-4.913551 \cdot 10^{-10}$ $-4.914685 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-14}$ $4.6 \cdot 10^{-13}$
350, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	$-1.552182 \cdot 10^{-9}$	$-1.5549496 \cdot 10^{-9}$ $-1.5551797 \cdot 10^{-9}$	$9.9 \cdot 10^{-14}$ $1.5 \cdot 10^{-12}$
400, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	$5.554 \cdot 10^{-10}$	$5.46233 \cdot 10^{-10}$ $5.46062 \cdot 10^{-10}$	$7.3 \cdot 10^{-14}$ $5.3 \cdot 10^{-13}$
500, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	$7.56 \cdot 10^{-10}$	$7.541763 \cdot 10^{-10}$ $7.544002 \cdot 10^{-10}$	$4.7 \cdot 10^{-14}$ $7.4 \cdot 10^{-13}$
100, $m_b, m_b$ $m_b, m_b, m_b, M_Z, M_Z, m_b$	$5.021 \cdot 10^{-8}$	$5.021446 \cdot 10^{-8}$ $5.030627 \cdot 10^{-8}$	$5.2 \cdot 10^{-13}$ $4.7 \cdot 10^{-11}$
200, $m_b, m_b$ $m_b, m_b, m_b, M_Z, M_Z, m_b$	$9.84 \cdot 10^{-9}$	$9.8255424 \cdot 10^{-9}$ $9.8286823 \cdot 10^{-9}$	$3.5 \cdot 10^{-13}$ $9.4 \cdot 10^{-12}$
$\sqrt{8}m_t, m_t, m_t$ $m_t, m_t, m_t, M_Z, M_Z, m_t$	$1.487 \cdot 10^{-9}$	$1.49309 \cdot 10^{-9}$ $1.49150 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-13}$ $1.4 \cdot 10^{-12}$
$\sqrt{20}m_t, m_t, m_t$ $m_t, m_t, m_t, M_Z, M_Z, m_t$	$1.69 \cdot 10^{-10}$	$1.668493 \cdot 10^{-10}$ $1.669846 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-14}$ $1.6 \cdot 10^{-13}$

Tabelle H.6: Realteil von  $V^{231}$  aus (H.15). Die Massen sind bei den jeweiligen Resultaten vermerkt. Vergleich der mit VEGAS und Divonne erzielten Ergebnisse mit [Fe04].

In Tabelle H.6 geben wir die Realteile an, in Tabelle H.7 die Imaginärteile. Wir geben dabei in der ersten Vergleichszeile jeweils den VEGAS-Wert an, in der zweiten den Divonne-Wert. Die äußeren und inneren Massen geben wir in der ersten Spalte übereinander an. Dies soll jedoch nicht bedeuten, daß die äußeren Massen in besonderem Zusammenhang mit VEGAS und die inneren im besonderen Zusammenhang mit Divonne stehen. Bei Vergleichen der Werte der Tabellen H.6 und H.7 kann man in einigen Fällen Abweichungen im Prozentbereich feststellen. Die signifikantesten Fälle sind die Realteile beim dritten sowie beim letzten Beispiel. Für den Realteil des letzten Beispiels hat einer der Autoren inzwischen ein neues Ergebnis vorgelegt [Uc04]. Dort wird der Wert mit  $0.1675 \cdot 10^{-8}$  angegeben, wobei sich der Autor hier vermutlich um eine Zehnerpotenz geirrt hat, da der Wert sonst auch von seine eigenen Angaben unverhältnismäßig abweichen würde. Nehmen wir als Referenzwert  $0.1675 \cdot 10^{-9}$  an, so stimmt dieses Resultat mit unserem Wert bereits hinreichend überein. Die Abweichung des Realteils im dritten Beispiel konnte nicht hinreichend ausgeräumt werden. Allerdings liefert [Fr01] einen unserem Wert sehr ähnliches Ergebnis von

$$\text{Re}(V^{231}) = 5.46883 \cdot 10^{-10} \pm 5.7 \cdot 10^{-13} \quad (\text{H.16})$$



$\sqrt{p^2}, \sqrt{p_1^2}, \sqrt{p_2^2}$ $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$	[Fe04]	VEGAS Divonne	$\sigma_{\text{VEG}}$ $\sigma_{\text{Div}}$
200, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	0	0 0	
350, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	$-2.039 \cdot 10^{-9}$	$-2.0420613 \cdot 10^{-9}$ $-2.0443031 \cdot 10^{-9}$	$9.1 \cdot 10^{-14}$ $2.0 \cdot 10^{-12}$
400, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	$-1.544 \cdot 10^{-9}$	$-1.550775 \cdot 10^{-9}$ $-1.550731 \cdot 10^{-9}$	$9.8 \cdot 10^{-14}$ $1.5 \cdot 10^{-12}$
500, $m_b, m_b$ $M_H, M_H, m_t, m_t, m_t, M_W$	$-3.29 \cdot 10^{-10}$	$-3.275404 \cdot 10^{-10}$ $-3.275559 \cdot 10^{-10}$	$5.9 \cdot 10^{-14}$ $3.3 \cdot 10^{-13}$
100, $m_b, m_b$ $m_b, m_b, m_b, M_Z, M_Z, m_b$	$-1.633 \cdot 10^{-8}$	$-1.6353903 \cdot 10^{-8}$ $-1.6370156 \cdot 10^{-8}$	$8.3 \cdot 10^{-13}$ $1.5 \cdot 10^{-11}$
200, $m_b, m_b$ $m_b, m_b, m_b, M_Z, M_Z, m_b$	$5.45 \cdot 10^{-9}$	$5.43466 \cdot 10^{-9}$ $5.44187 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-13}$ $5.3 \cdot 10^{-12}$
$\sqrt{8}m_t, m_t, m_t$ $m_t, m_t, m_t, M_Z, M_Z, m_t$	$1.357 \cdot 10^{-10}$	$1.354669 \cdot 10^{-10}$ $1.352826 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$ $1.3 \cdot 10^{-13}$
$\sqrt{20}m_t, m_t, m_t$ $m_t, m_t, m_t, M_Z, M_Z, m_t$	$1.85 \cdot 10^{-10}$	$1.86645 \cdot 10^{-10}$ $1.86790 \cdot 10^{-10}$	$4.2 \cdot 10^{-14}$ $1.8 \cdot 10^{-13}$

Tabelle H.7: Imaginärteil von  $V^{231}$  aus (H.15). Die Massen sind bei den jeweiligen Resultaten vermerkt. Vergleich der mit VEGAS und Divonne erzielten Ergebnisse mit [Fe04].



# Anhang I

## Landau–Gleichungen

## I.1 Herleitung und Einschleifen-Beispiele

Wir folgen bei dieser Herleitung den Darstellungen von [La59, B001].

### I.1.1 Allgemeine Darstellung von Feynmanintegralen

Ein beliebiges Feynmanintegral hat die Form

$$F_G(p_j, m_n) = \int \left( \prod_{l=1}^L d^4 k_l \right) N(p_j, k_l, m_n) \prod_{i=1}^I \frac{i}{q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon} \quad (\text{I.1})$$

Dabei verwenden wir folgende Konventionen:

- Es treten  $E$  äußere Impulse  $p_j$  auf.
- Die Anzahl der Schleifenimpulse  $k_l$  ist  $L$ .
- Die inneren Massen werden mit  $m_i$  bezeichnet.
- Die Propagatorimpulse  $q_i$  sind Linearkombinationen der Schleifenimpulse  $k_l$  und der äußeren Impulse  $p_j$  mit Koeffizienten  $\pm 1$ .

### I.1.2 Singularitäten komplexer Integrale

Wir wollen untersuchen, welche Singularitäten bei allgemeinen komplexen Integralen auftreten können und welche davon für unsere Fragestellung wichtig sind. Endpunkt-Singularitäten, das sind UV-Singularitäten, sollen nicht betrachtet werden. Diese treten für  $k_i \rightarrow \infty$  auf und werden mit dimensionaler Regularisierung behandelt. Es sollen nur Singularitäten auf dem Integrationsweg betrachtet werden. Diese haben ihre Ursache in Polen der Propagatoren. Es gibt zwei Typen von Singularitäten in der komplexen Ebene. Eine Singularität liegt vor, falls

- die Funktion oder
- irgendeine Ableitung der Funktion

nicht stetig oder divergent ist. Eine komplexe Funktion  $f(z)$  wird als analytisch oder holomorph in einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  bezeichnet [MaWo], falls sie in jedem Punkt  $z \in G$  komplex differenzierbar ist. Komplexe Differenzierbarkeit bedeutet, daß  $f(z)$  für jedes  $z \in G$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt und daß alle partiellen Ableitungen von  $f(z)$  stetig sind.

Manche Funktionen wie Logarithmus und Wurzel sind in der komplexen Ebene nicht eindeutig definiert. Die Ursache hierfür liegt in den Verzweigungspunkten und Schnitten dieser Funktionen in der komplexen Ebene. Verzweigungspunkt und Schnitt sind wie folgt definiert [MaWo]:

- Ein *Verzweigungspunkt* einer analytischen Funktion ist ein Punkt in der komplexen Ebene, dessen komplexes Argument von einem einzelnen Punkt im Definitionsgebiet auf mehrere Punkte im Bildbereich abgebildet werden kann.

- Ein *Schnitt* ist eine Kurve in der komplexen Ebene, entlang der eine mehrwertige analytische Funktion unstetig ist. Die Enden der Kurve können offen, geschlossen oder halboffen sein.

Feynmanintegrale sind Konturintegrale in  $\mathbb{C}$ . In vielen Fällen können Integrationswege über Pole durch Deformation der Integrationskontur vermieden werden. Hierbei nutzt man Cauchy's Theorem aus:

### Cauchy's Theorem:

Sei  $D$  ein beschränktes Gebiet mit stückweise glatten Grenzen. Falls  $f(z)$  eine analytische Funktion auf  $D$  ist, welche stetig auf dem Rand  $\partial D$  fortgesetzt werden kann, dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0 \quad (\text{I.2})$$

Es gibt nur zwei Fälle, in denen Pole nicht umgangen werden können:

Betrachte eine allgemeine Funktion  $I(z)$  mit  $z \in \mathbb{C}$ . Die Integration sei entlang der Kontur  $C$  in der komplexen  $\omega$  Ebene mit festen Endpunkten  $\omega_a, \omega_b$ .

$$I(z) = \int_{C(\omega_a, \omega_b)} d\omega f(\omega, z) \quad (\text{I.3})$$

Falls  $f(\omega, z)$  analytisch in  $\omega, z$  ist außer für Singularitäten, die in  $\omega = \omega_s(z)$  liegen, dann bleibt  $I(z)$  analytisch, auch wenn  $\omega_s(z) \in C$ , solange die Kontur deformiert werden kann.  $C$  kann nicht deformiert werden, falls

- für  $z \rightarrow z_0$  gilt:  $\omega_s(z) \rightarrow \omega_{a,b}$ . In diesem Fall tritt eine *Endpunktsingularität* auf. Es liegen UV-Divergenzen vor. Diese werden mit dimensionaler Regularisierung behandelt und deshalb hier nicht betrachtet.
- für  $z \rightarrow z_0$  die Kontur zwischen zwei Singularitäten  $\omega_{1,2}$  eingeschlossen wird, die sich der Kontur von zwei Seiten nähern und übereinstimmen. Das sind „Pinch“-Singularitäten.

Das Auftreten von Pinch-Singularitäten werden wir im Folgenden analysieren.

### I.1.3 Herleitung der Landau-Gleichungen

Betrachte ein Feynmanintegral mit Zähler  $N$

$$F_G(p_i, m_j) = \int \frac{Nd^4k d^4l \dots}{A_1 A_2 A_3 \dots} \quad (\text{I.4})$$

mit

$$A_i = q_i^2 - m_i^2 \quad (\text{I.5})$$

Wir führen die Feynman-Parametrisierung ein. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x+y-1) \frac{1}{(xA+yB)^2}
\end{aligned} \tag{I.6}$$

Vollständige Induktion führt auf

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} \\
&= (n-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \delta(1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n))}{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n)^n}
\end{aligned} \tag{I.7}$$

Der Nenner  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n$  ist ein Polynom zweiten Grades in den Integrationsvariablen  $k, l, \dots$ . Die Terme, welche bezüglich  $k, l, \dots$  linear sind, können immer mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung und Transformation der Integrationsvariablen beseitigt werden. Wir erhalten dann

$$\mathcal{D} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = \phi + K(k', l', \dots) \tag{I.8}$$

Dabei ist  $K(k', l', \dots)$  eine homogene quadratische Form in den neuen Integrationsvariablen  $k', l', \dots$  mit Koeffizienten, die lediglich von den Parametern  $\lambda_i$  abhängen.  $\phi$  ist eine von den Schleifenimpulsen unabhängige heterogene quadratische Form der Vektoren  $p_i$ , welche die freien Enden des betrachteten Graphen beschreiben. Diese Transformation ist immer möglich, betrachte den Einschleifen-Fall:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \tag{I.9}$$

Weil (wir benennen die zu den Propagatorimpulsen  $q_i$  gehörigen externen Impulse mit  $P_i$ )

$$\begin{aligned}
A_i &= q_i^2 - m_i^2 \\
&= (k + P_i)^2 - m_i^2 \\
&= k^2 + 2kP_i + P_i^2 - m_i^2
\end{aligned} \tag{I.10}$$

gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (k^2 + 2kP_i + P_i^2 - m_i^2) \\
&= k^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=1} + 2k \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i^2 - m_i^2) \\
&= \left(k + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i^2 - m_i^2) \\
&= \underbrace{(k')^2}_{K(k')} + \underbrace{\left[-\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i^2 - m_i^2)\right]}_{\phi}
\end{aligned} \tag{I.11}$$

wobei

$$k' = k + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \tag{I.12}$$

Analoges gilt für mehrere Integrationsimpulse.

Notwendige Bedingung für das Auftreten einer Singularität ist, daß der Nenner

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \tag{I.13}$$

Null, also minimal, wird. Da  $K$  eine quadratische Form der Variablen  $k', l', \dots$  ist, muß  $\phi$  der Wert der Funktion  $\mathcal{D}$  im Minimum bezüglich der Variation der Schleifenimpulse sein. Die Bedingung, daß  $\mathcal{D}$  Null wird, ist folglich äquivalent zur Bedingung, daß  $\phi$  Null wird. Im Minimum von  $\mathcal{D}$  gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k'} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial l'} = \dots = 0 \tag{I.14}$$

Weil sich  $k$  von  $k'$  nur durch einen konstanten Vektor unterscheidet, ist dies äquivalent zu

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial l} = \dots = 0 \tag{I.15}$$

Man erhält (unabhängig von der Anzahl der Schleifenimpulse)

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial A_i}{\partial k} = 0 \tag{I.16}$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial l} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial A_i}{\partial l} = 0 \tag{I.17}$$

und ebenso für alle anderen Integrationsimpulse aufgrund der Form der Propagatorfaktoren

$$A_i = (q_i^2 - m_i^2) \quad (\text{I.18})$$

schließlich die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i \frac{\partial q_i}{\partial k_l} = 0, \quad l = 1, \dots, L \quad (\text{I.19})$$

Da die inneren Impulse Linearkombinationen der externen Impulse und der Schleifenimpulse mit Koeffizienten  $\pm 1$  sind und weil diejenigen inneren Impulse, die vom Schleifenimpuls  $k_l$  abhängig sind, auf einer einzelnen Schleife  $\mathcal{L}_l$  liegen, kann (I.19) geschrieben werden als

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = 0 \quad (\text{I.20})$$

für jede einzelne Schleife mit Integrationsimpuls  $k_l$ . Das ist die „Zweite Landau-Gleichung“. Da  $\phi$  der Wert von  $\mathcal{D}$  im Minimum ist, muß es auch bezüglich Variation aller  $\lambda_i$  minimal sein. Dies wird erfüllt, falls entweder

$$\lambda_i = 0 \quad (\text{I.21})$$

für ein (oder mehrere)  $i$ , oder falls

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (\text{I.22})$$

gilt. Wir erhalten damit

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \lambda_i} + \dots \quad (\text{I.23})$$

Weil nach (I.15)  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k} = 0$  gilt, erhalten wir im Fall, daß  $\lambda_i \neq 0$  gilt, die Gleichung

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \lambda_i} = A_i \quad (\text{I.24})$$

Im Minimum ist folglich stets eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\lambda_i = 0 \quad \text{oder} \quad A_i = 0 \quad \forall i \quad (\text{I.25})$$

Das ist die „Erste Landau-Gleichung“.

### I.1.4 Landau-Gleichungen

Zusammenfassend sind die beiden Landau-Gleichungen:

$$\lambda_i (q_i^2 - m_i^2) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I \quad (\text{I.26})$$



und

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = 0 \quad (\text{I.27})$$

für jede einzelne Schleife, d.h. für jede geschlossene Impulslinie im Inneren eines Feynmangraphen. Eine Landau-Singularität wird *führend* genannt, falls alle  $\lambda_i \neq 0$ , alle anderen werden als *nicht-führend* bezeichnet.

### I.1.5 Allgemeine Formel

Wir wollen die allgemeine Form der Landau-Gleichungen angeben, wie sie im Fall entstehen, wenn auch Endpunktsingularitäten betrachtet werden.

Verwende  $\mathbf{w} = (w_i)$ ,  $\mathbf{z} = (z_j)$  komplexe Variable, betrachte

$$I(\mathbf{z}) = \int_H \left( \prod_i d\omega_i \right) \quad (\text{I.28})$$

Die Grenzen der Hyperkontur  $H$  seien spezifiziert durch einen Satz analytischer Funktionen  $\bar{S}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = 0$ . Die Singularitäten des Integranden sollen sich auf analytischen Mannigfaltigkeiten  $S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = 0$  befinden. Dann ist das Integral singulär, falls die Hyperkontur  $H$  zwischen zwei oder mehreren Hyperflächen von Singularitäten „gepincht“ („eingeklemmt“) wird oder wenn die Singularität auf einer Randfläche auftritt.

Es gibt folglich einen Satz komplexer Parameter  $\lambda_s$ ,  $\bar{\lambda}_r$ , welche nicht alle Null sind, sodaß gleichzeitig

$$\lambda_s S_s(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \quad \forall s \quad (\text{I.29})$$

$$\bar{\lambda}_r \bar{S}_r(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \quad \forall r \quad (\text{I.30})$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} \left[ \sum_s \lambda_s S_s(\mathbf{w}, \mathbf{z}) + \sum_r \bar{\lambda}_r \bar{S}_r(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \right] \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_0, \mathbf{z}=\mathbf{z}_0} = 0 \quad \forall i \quad (\text{I.31})$$

gilt.

### I.1.6 Massensingularitäten

Massensingularitäten stellen einen Spezialfall der Lösungen der Landau-Gleichungen dar. Sie sind nicht nur Ursache für Verzweigungspunkte, sondern auch für Divergenzen.

Die Singularitäten werden Massensingularitäten genannt, wenn die Singularität nur von den äußeren und inneren Massen abhängt, *nicht* aber von den Richtungen der äußeren Impulse.

Wir wollen Beispiele im Einschleifenfall (ohne quadrierte Propagatoren) betrachten.

$$F_G(p_j, m_n) = \int d^4 k N(p_j, k, m_n) \prod_{i=1}^I \frac{i}{q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon} \quad (\text{I.32})$$

$$q_i = k + \sum_{n=1}^{i-1} p_n = k + P_i \quad (\text{I.33})$$

Die Landau-Gleichungen sind

$$\lambda_i(q_i^2 - m_i^2) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I \quad (\text{I.34})$$

$$\sum_{i=1}^I \lambda_i q_i = 0 \quad (\text{I.35})$$

Die Lösungen sollen keine Skalarprodukte von verschiedenen Impulsen enthalten. Deshalb muß für jeden Propagatorimpuls  $q_i$  entweder ein spezielles  $j$  existieren mit

$$q_i^2 \propto p_j^2 \quad (\text{I.36})$$

oder es muß

$$q_i^2 = 0 \quad (\text{I.37})$$

gelten. Dies kann für maximal drei benachbarte Propagatoren erfüllt werden. Die Voraussetzungen für das Erfüllen dieser Bedingungen lassen sich schematisch wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} q_1 &= k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ -p_1, & k = -p_1 \end{cases} \\ q_2 &= k + p_1 = \begin{cases} p_1, & k = 0 \\ 0, & k = -p_1 \end{cases} \\ q_3 &= k + p_1 + p_2 = \begin{cases} p_1 + p_2, & k = 0 \\ p_2, & k = -p_1 \\ p_1, & k = -p_2 \end{cases} \\ q_4 &= k + p_1 + p_2 + p_3 = \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3, & k = 0 \\ p_2 + p_3, & k = -p_1 \\ p_1 + p_3, & k = -p_2 \\ p_1 + p_2, & k = -p_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

Für einen Propagator ist die Erfüllung der Bedingung trivial. Für zwei Propagatoren gibt es zwei Möglichkeiten: Im Fall  $k = 0$  wird  $q_1^2 = 0$  und  $q_2^2 = p_1^2$ , im Fall  $k = -p_1$  wird  $q_1^2 = p_1^2$  und  $q_2^2 = 0$ . Falls drei Propagatoren beitragen, bleibt nur noch die Möglichkeit  $k = -p_1$ . Der Fall von mehr als drei Propagatoren ist die *gleichzeitige* Erfüllung der Bedingungen von entweder (I.36) oder (I.37) für *alle* Propagatoren nicht mehr möglich.

Wir wollen einige Spezialfälle betrachten, in welchen die Bedingungen für eine definierte Anzahl von Propagatoren erfüllt werden.

**I.1.6.1 Spezialfall: Landau–Singularität durch *einen* Propagator**

Sei  $\lambda_r \neq 0$  für ein spezielles  $r$ , aber  $\lambda_i = 0 \forall i \neq r$ . Transformiere  $k \rightarrow k - P_r$ , dann gilt

$$q_i = k + P_i - P_r \quad (\text{I.39})$$

Wähle

$$m_r = 0 \quad q_r = k \quad (\text{I.40})$$

dann verhält sich das Integral  $F_G(p_j, m_n)$  aus (I.32) wie

$$\int d^4k \frac{1}{k^2} \quad (\text{I.41})$$

was nicht divergent ist für  $k \rightarrow 0$ , aber falls

$$(P_i - P_r)^2 = m_i^2 \quad (\text{I.42})$$

dann gilt

$$q_i^2 - m_i^2 = k^2 + 2k(P_i - P_r) \quad (\text{I.43})$$

Dies erhöht den Grad der Divergenz um eins für jedes  $i$ , da dann

$$\int d^4k \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\text{I.44})$$

mit  $\alpha$  der Zahl der entsprechenden Propagatoren, gilt. Dies soll winkelunabhängig sein, kann also nur erfüllt werden für  $r - 1$  und  $r + 1$ . Dann ist

$$\int d^4k \frac{1}{k^4} \quad (\text{I.45})$$

für  $k \rightarrow 0$  logarithmisch divergent. Es tritt folglich eine *Infrarot–Divergenz* (IR–Divergenz) in  $F_G(p_j, m_n)$  aus (I.32) auf, falls

$$m_r = 0 \quad (\text{I.46})$$

und

$$\begin{aligned} p_{r-1}^2 &= (P_r - P_{r-1})^2 = m_{r-1}^2 \\ p_r^2 &= (P_r - P_{r+1})^2 = m_{r+1}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

gilt. In Abbildung I.1 ist dieses Szenario dargestellt. Diese Singularität tritt typischerweise für Photon– oder Gluon–Austausch zwischen externen Teilchen auf. Sie verursacht Divergenzen proportional zu  $\log m_r$  für  $m_r \rightarrow 0$ .

Die IR–Singularität tritt nicht auf, falls der Pol durch den Zähler gekürzt wird.

$$\frac{\cancel{k}}{k^2} \quad (\text{I.48})$$

Deshalb führen masselose Neutrinos nicht zu IR–Singularitäten.

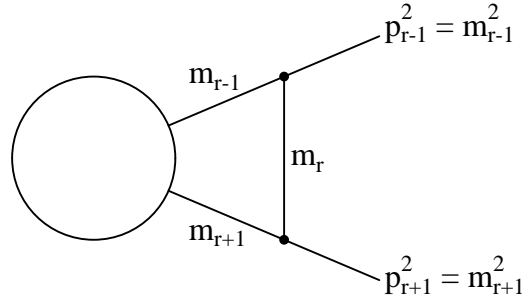


Abbildung I.1: Diagramm, das zu einer IR-Singularität führt.

### I.1.6.2 Zweiteilchen-Schwellen

Sei  $\lambda_r \neq 0$ ,  $\lambda_s \neq 0$ ,  $\lambda_i = 0 \forall i \neq r, s$  in  $F_G(p_j, m_n)$  aus (I.32). Die Landau-Gleichungen lauten dann

$$q_r^2 - m_r^2 = 0, \quad q_s^2 - m_s^2 = 0 \quad (\text{I.49})$$

$$\lambda_r q_r + \lambda_s q_s = 0 \quad (\text{I.50})$$

was auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_r q_r^2 + \lambda_s q_r q_s &= 0 \\ \lambda_r q_r q_s + \lambda_s q_s^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

führt. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} q_r^2 - m_r^2 & q_r q_s \\ q_r q_s & q_s^2 - m_s^2 \end{vmatrix} \quad (\text{I.52})$$

muß Null werden. Daraus folgt

$$m_r^2 m_s^2 = (q_r q_s)^2 \quad (\text{I.53})$$

was gelöst wird durch

$$q_r = \pm \frac{m_r}{m_s} q_s \quad (\text{I.54})$$

Dies führt auf

$$(q_r - q_s)^2 = (m_r \pm m_s)^2 \quad (\text{I.55})$$

was nur dann winkelunabhängig ist, falls  $r = s \pm 1$  benachbart sind. Dies sind Verzweigungspunkte für Zweiteilchenschwellen. Um zu untersuchen, ob Divergenzen vorliegen, verwenden wir die Sudakov-Zerlegung für die Impulse [Su56]. Setze

$$s = r + 1 \quad q_r = k \quad q_{r+1} = k + p_r \quad (\text{I.56})$$

Dann ergibt sich

$$p_r^\mu = \begin{pmatrix} p_r \\ 0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (\text{I.57})$$

$$n^\mu = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad n^2 = 0 \quad (\text{I.58})$$

$$k_\perp^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{k}_\perp \end{pmatrix} \quad (\text{I.59})$$

Damit gilt

$$p_r n \neq 0, \quad p_r k_\perp = 0 = n k_\perp \quad (\text{I.60})$$

Der Schleifenimpuls schreibt sich dann zu

$$k^\mu = y p_r^\mu + z n^\mu + k_\perp^\mu \quad (\text{I.61})$$

mit

$$y \in (-\infty, \infty), \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (\text{I.62})$$

$$\vec{k}_\perp = k_\perp \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad k_\perp \in [0, \infty), \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (\text{I.63})$$

Verwende

$$k_\perp^2 = s \quad (\text{I.64})$$

dann wird das Integrationsmaß zu

$$\int d^4 k = \pi |p_r n| \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty dz \int_{-\infty}^\infty dy \quad (\text{I.65})$$

Der entscheidende Teil des Integrals  $F_G(p_j, m_n)$  aus (I.32) ist

$$\begin{aligned} & \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - m_r^2)[(k + p_r)^2 - m_{r+1}^2]} \\ &= \pi |p_r n| \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty dz \int_{-\infty}^\infty dy \frac{1}{p_r^2 y^2 + 2p_r n y z - s - m_r^2} \\ & \quad \frac{1}{p_r^2 (1+y)^2 + 2p_r n (1+y)z - s - m_{r+1}^2} \end{aligned} \quad (\text{I.66})$$

Setze

$$p_r^2 = (q_{r+1} - q_r)^2 = 0 \quad (\text{I.67})$$

$$m_r^2 = 0 = m_{r+1}^2 \quad (\text{I.68})$$

Schematisch können wir nun (I.66) umschreiben zu

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty dz \frac{1}{az - s + \alpha} \frac{1}{bz - s + \beta} \\ &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dz \frac{1}{az - s + \alpha} \frac{1}{bz - s + \beta} + \int_0^\infty ds \int_0^\infty dz \frac{1}{az + s - \alpha} \frac{1}{bz + s - \beta} \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

Da

$$\alpha, \beta \propto m_r^2, m_{r+1}^2, p_r^2 \quad (\text{I.70})$$

divergiert das Integral logarithmisch für  $s, z \rightarrow 0$ , denn für beliebiges festes  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty ds \int_0^x dz \frac{1}{az - s + \alpha} \frac{1}{bz - s + \beta} \\ &= \int_0^\infty ds \int_0^x dz \frac{1}{(b-a)z + (\beta - \alpha)} \left( \frac{1}{az - s + \alpha} - \frac{1}{bz - s + \beta} \right) \\ &= \int_0^x dz \frac{1}{(b-a)z + (\beta - \alpha)} \left[ \log \left| \frac{az - s + \alpha}{bz - s + \beta} \right| \right]_0^\infty \\ &= \int_0^x dz \frac{1}{(b-a)z + (\beta - \alpha)} \log \left| \frac{az + \alpha}{bz + \beta} \right| \\ &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{I.71})$$

weil  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ . Für  $s, z \rightarrow 0$  wird

$$k \longrightarrow yp_r \quad (\text{I.72})$$

Falls der Integrationsimpuls proportional zum äußeren Impuls wird,  $k \sim p_r$ , tritt eine *kollineare Singularität* auf. Diese führt auf Terme der Form

$$\log m = \{ \log m_r, \log m_{r+1}, \log \sqrt{|p_r^2|} \} \quad (\text{I.73})$$

Notwendig hierfür sind drei masselose Linien. In Abbildung I.2 stellen wir dieses Szenario graphisch dar.

Auch möglich ist das Überlappen von infraroten und kollinearen Singularitäten.

### I.1.6.3 Dreipunktfunktion mit $\lambda_i \neq 0 \forall i = 1, 2, 3$

Die Landau-Gleichungen sind im Fall der Einschleifen-Vertexfunktion, die in Abbildung I.3 dargestellt ist,

$$q_1^2 - m_1^2 = k^2 - m_1^2 = 0 \quad (\text{I.74})$$

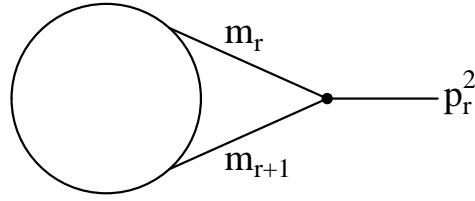


Abbildung I.2: Diagramm, das zu einer kollinearen Singularität führt.

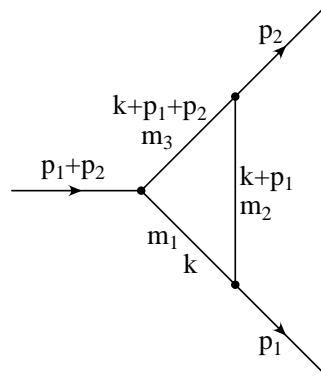


Abbildung I.3: Einschleifen-Vertexfunktion

$$q_2^2 - m_2^2 = (k + p_1)^2 - m_2^2 = 0 \quad (\text{I.75})$$

$$q_3^2 - m_3^2 = (k + p_1 + p_2)^2 - m_3^2 = 0 \quad (\text{I.76})$$

$$\lambda_1 q_1^\mu + \lambda_2 q_2^\mu + \lambda_3 q_3^\mu = 0 \quad (\text{I.77})$$

Die Multiplikation der zweiten Landau-Gleichung mit den drei auftretenden Impulsen führt auf drei Gleichungen für  $\lambda_i$ . Die Determinante wird zu Null gesetzt, dann ist die Bedingung für eine Singularität

$$1 + 2\mu_1\mu_2\mu_3 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0 \quad (\text{I.78})$$

mit

$$\mu_i = \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_i^2 - p_i^2)m_i}{2m_1m_2m_3} \quad (\text{I.79})$$

### I.1.7 Physikalische Interpretation

Die Analyse kann zu höheren Schleifen fortgesetzt werden. Dann ist es nicht immer möglich, gleichzeitig alle  $\lambda_i = 0$  für alle  $i$  zu setzen.

Massensingularitäten rühren nicht nur von Schleifenintegralen her, sondern auch von Integrationen im Phasenraum der physikalischen Teilchen. Massensingularitäten in Phasenraumintegralen können durch das optische Theorem aufgrund der Cutkosky-Regeln [Cu60] mit dem Imaginärteil von Schleifenintegralen in Beziehung gebracht werden. Beziehungen

zwischen Massensingularitäten führen zum Aufheben von Divergenzen zwischen reellen und virtuellen Beiträgen, wenn diese addiert werden. Deshalb treten z.B. in der QED bei physikalischen Wirkungsquerschnitten keine Divergenzen auf. Der physikalische Ursprung der Massensingularitäten liegt im Falle der IR-Singularitäten daran, daß die Zustände eines geladenen Teilchens mit einer beliebigen Anzahl von weichen Photonen beinahe degeneriert sind. Da jeder Detektor aber nur eine endliche Energieauflösung besitzt, sind diese Teilchen ununterscheidbar. Im Falle von kollinearen Singularitäten sind die Zustände von lichtartigen Teilchen degeneriert, da der Detektor nur eine endliche Winkelauflösung besitzt.

In physikalischen Observablen tragen alle Zustände gleichzeitig bei, die Singularitäten heben sich weg. Das Kinoshita–Lee–Nauenberg Theorem [Ki62, Le64] besagt, daß als eine Konsequenz der Unitarität die Übergangsamplituden endlich sind, wenn über alle degenerierten Zustände im Anfangs- und Endzustand summiert wird. Dies trifft in der Störungstheorie für jede Ordnung zu. Für das Wegfallen der IR-Singularitäten in der QED mit endlichen Fermionmassen ist es hinreichend, über alle degenerierten Endzustände zu summieren, d.h. über alle Zustände mit beliebiger Anzahl von Photonen im Endzustand. Dies besagt das **Bloch–Nordsieck Theorem** [Bl37].

## I.2 Landau–Gleichungen für Zweischleifenintegrale

Die Landau-Singularitäten eines Feynmanintegrals können sowohl im Graphen selber als auch in allen seinen Subgraphen auftreten. Wir berechnen im Folgenden die nicht-führenden Singularitäten, d.h. die Singularitäten der Subgraphen, der planaren Topologie und folgen dabei abgesehen vom Fall der Sunset-Topologie Ausführungen von Passarino *et al.* [Pa01a, Fe04]. Für die führende Singularität verweisen wir auf [Fe04].

### I.2.1 Landau–Gleichungen für Zweischleifen–Zweipunkt–Topologien

#### I.2.1.1 Sunset – Topologie

Bei der Sunset-Topologie<sup>1</sup> mit dem Impulsfluß sowie den Massen

$$(I.80)$$

lauten die Landau-Gleichungen

---

<sup>1</sup>manches Mal auch als Sunrise-Topologie bezeichnet



$$\lambda_1((k+p)^2 - m_1^2) = 0 \quad (\text{I.81})$$

$$\lambda_2((k+l)^2 - m_2^2) = 0 \quad (\text{I.82})$$

$$\lambda_3(l^2 - m_3^2) = 0 \quad (\text{I.83})$$

$$(\text{I.84})$$

sowie

$$\lambda_1(k+p)^\mu + \lambda_2(k+l)^\mu = 0 \quad (\text{I.85})$$

$$\lambda_2(k+l)^\mu + \lambda_3 l^\mu = 0 \quad (\text{I.86})$$

Für die führende Singularität, die Dreiteilchenschwelle, gilt

$$\lambda_i \neq 0 \quad \forall i \quad (\text{I.87})$$

Es ergeben sich durch Multiplikationen von (I.85) und (I.86) mit  $k^\mu, l^\mu, p^\mu$  folgende Gleichungen:

$$\lambda_1(k^2 + pk) + \lambda_2(k^2 + kl) = 0 \quad (\text{I.88})$$

$$\lambda_1(kl + pl) + \lambda_2(kl + l^2) = 0 \quad (\text{I.89})$$

$$\lambda_1(kp + p^2) + \lambda_2(kp + lp) = 0 \quad (\text{I.90})$$

$$\lambda_2(k^2 + kl) + \lambda_3 kl = 0 \quad (\text{I.91})$$

$$\lambda_2(kl + l^2) + \lambda_3 l^2 = 0 \quad (\text{I.92})$$

$$\lambda_2(kp + lp) + \lambda_3 lp = 0 \quad (\text{I.93})$$

Diese Gleichungen (wir geben nur das Endergebnis an) werden für die führende Singularität, die Dreiteilchenschwelle

$$\lambda_i \neq 0 \quad \forall i \quad (\text{I.94})$$

gelöst durch

$$p^2 = (m_1 \pm m_2 \pm m_3)^2 \quad (\text{I.95})$$

Die verschiedenen „ $\pm$ “ sind dabei nicht korreliert.

### I.2.1.2 Weitere Zweipunktfunktionen, Vorbemerkungen

Wir folgen bei allen folgenden Zweipunkttopologien der Darstellung von Passarino *et al.* [Pa01a]. Die Propagatoren haben die Form

$$P_i = q_i^2 + m_i^2 \quad (\text{I.96})$$

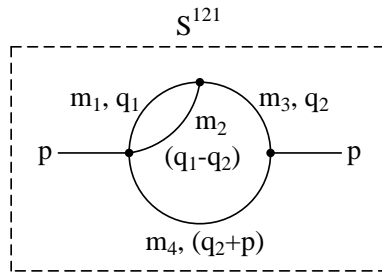
Die Schleifenimpulse sind  $q_{1,2}$ . Zum Impulsfluß der äußeren einfließenden Impulse  $p_1, p_2$ ,  $-P = p_1 + p_2$  siehe die jeweiligen Skizzen. Passarino *et al.* verwenden bei ihren Berechnungen die euklidische Metrik. Wir schließen uns im Folgenden dieser Vorgehensweise an.

Die Ergebnisse wie sie bei Verwendung der Minkowski–Metrik entstehen erhält man jeweils sofort, wenn man alle Impulse  $p$  durch

$$p \rightarrow ip \quad \Longrightarrow \quad p^2 \rightarrow -p^2 \quad (\text{I.97})$$

ersetzt. Die Darstellung des inneren Impulsflusses ist für die Massensingularitäten unerheblich, deshalb folgen wir der Wahl von [Pa01a], auch wenn diese teilweise von der unsrigen abweicht. Wir fügen aber jeweils Grafiken bei, sodaß die Umsetzung in unsere Indizierung insbesondere der Schleifenimpulsmassen trivial ist. Dies gilt auch für die Berechnung der Landau–Singularitäten für die Dreipunktfunktionen in Anhang I.2.2, welche den Berechnungen für die Singularitäten der Zweipunktfunktionen folgen. Alle Zweischleifen–Zweipunktfunktionen werden von Passarino *et al.* mit  $S^{ijk}$ , alle Zweischleifen–Dreipunktfunktionen mit  $V^{ijk}$  bezeichnet. Dabei beziehen sich die Indizes  $i, j, k$  auf die Anzahl der Propagatorfaktoren mit jeweils nur einem Schleifenimpuls ( $i \leftrightarrow q_1, j \leftrightarrow q_2$ ) sowie auf die Anzahl der Propagatorfaktoren, in welchen beide Schleifenimpulse auftreten ( $k \leftrightarrow (q_1 \pm q_2)$ )

### I.2.1.3 Landau–Gleichungen für $S^{121}$



(I.98)

Die Landau–Gleichungen sind mit den Schleifenimpulsen  $q_{1,2}$  und dem äußeren Impuls  $p$ :

$$\alpha_1(q_1^2 + m_1^2) = 0 \quad (\text{I.99})$$

$$\alpha_2((q_1 - q_2)^2 + m_2^2) = 0 \quad (\text{I.100})$$

$$\alpha_3(q_2^2 + m_3^2) = 0 \quad (\text{I.101})$$

$$\alpha_4((q_2 + p)^2 + m_4^2) = 0 \quad (\text{I.102})$$

sowie

$$\alpha_1 q_1^\mu + \alpha_2 (q_1 - q_2)^\mu = 0 \quad (\text{I.103})$$

$$\alpha_2 (q_2 - q_1)^\mu + \alpha_3 q_2^\mu + \alpha_4 (q_2 + p)^\mu = 0 \quad (\text{I.104})$$

Durch Multiplikation von (I.103) und (I.104) mit  $q_1^\mu, q_2^\mu, p^\mu$  entstehen weitere Gleichungen, welche wir direkt oder in Verbindung mit (I.99), (I.100), (I.101), (I.102) anwenden können. Der Lösungsweg von [Pa01a] kann im Wesentlichen direkt nachvollzogen werden, es werden dort lediglich einige zusätzliche Vorzeichen nicht angegeben, welche wir hier mit anzeigen.

Die Lösung verlangt

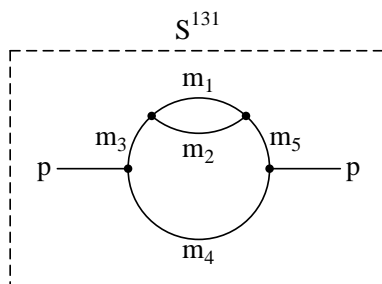
$$p^2 = -(m_1 \pm_a m_2 \pm_b m_4)^2 \tag{I.105}$$

Das globale Vorzeichen in (I.105) liegt in der in [Pa01a] verwendeten Metrik begründet. Die Verwendung der Indizes  $a$  und  $b$  bei „ $\pm_a$ “ und „ $\pm_b$ “ soll lediglich die Unabhängigkeit der beiden „ $\pm$ “ verdeutlichen. Weitere Bedingung ist

$$m_3^2 = (m_1 \pm_a m_2)^2 \tag{I.106}$$

Diese beiden Gleichungen (I.105) und (I.106) bestimmen die führende Landau-Singularität von  $S^{121}$ . Wenn man (I.105) vom euklidischen Raum in den Minkowski-Raum umrechnet, dann erkennt man, daß die Lösungen der Landau-Gleichungen in dem Fall der Topologie  $S^{121}$  den Lösungen vom Fall der Sunset-Topologie von (I.95) mit der zusätzlichen Bedingung (I.106) entsprechen.

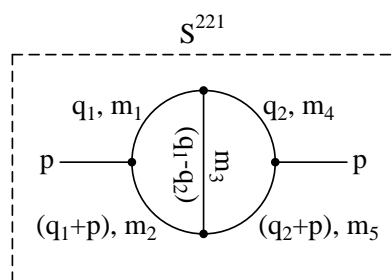
**I.2.1.4 Landau-Gleichungen für  $S^{131}$  im Falle  $m_3 = m_5$**



(I.107)

Die Landau-Gleichungen schreiben sich in diesem Fall wie im Fall von  $S^{121}$ , nur daß  $\alpha_3$  für die führende Singularität durch  $\alpha_3 + \alpha_5$  ersetzt werden muß. Die Bedingungsgleichungen sind analog zu (I.106) und (I.105).

**I.2.1.5 Landau-Gleichungen für  $S^{221}$**



(I.108)

Die ersten Landau-Gleichungen sind

$$\alpha_1(q_1^2 + m_1^2) = 0 \tag{I.109}$$

$$\alpha_2((q_1 + p)^2 + m_2^2) = 0 \tag{I.110}$$

$$\alpha_3((q_1 - q_2)^2 + m_3^2) = 0 \tag{I.111}$$

$$\alpha_4(q_2^2 + m_4^2) = 0 \tag{I.112}$$

$$\alpha_5((q_2 + p)^2 + m_5^2) = 0 \tag{I.113}$$

Die zweiten Landau-Gleichungen sind:

$$\alpha_1 q_1^\mu + \alpha_2 (q_1 + p)^\mu + \alpha_3 (q_1 - q_2)^\mu = 0 \quad (\text{I.114})$$

$$\alpha_3 (q_2 - q_1)^\mu + \alpha_4 q_2^\mu + \alpha_5 (q_2 + p)^\mu = 0 \quad (\text{I.115})$$

Unter Verwendung der Källen-Funktion

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + xz) \quad (\text{I.116})$$

ist die Lösung

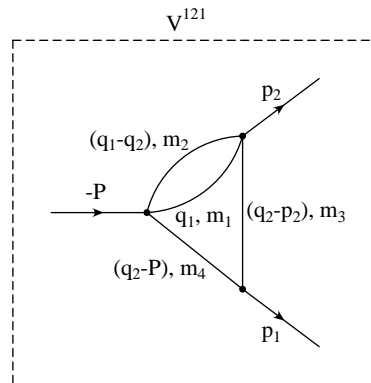
$$p^2 = \frac{1}{2m_3^2} \left[ ((m_1^2 - m_4^2)(m_2^2 - m_5^2) - m_3^2(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 + m_4^2 + m_5^2)) \right. \\ \left. \pm \sqrt{\lambda(m_3^2, m_1^2, m_4^2)\lambda(m_3^2, m_2^2, m_5^2)} \right] \quad (\text{I.117})$$

Damit haben wir alle Landau-Gleichungen für die in [Pa01a] zu findenden Zweischleifen-zweipunktfunktionen nachgerechnet.

## I.2.2 Landau-Gleichungen für Zweischleifen-Dreipunkt-Topologien

Wir folgen auch im Folgenden den Berechnungen von Passarino *et al.* [Fe04] und ergänzen diese teilweise. Die Metrik ist wiederum die euklidische, vgl. die Bemerkungen von Anhang I.2.1.2 auf S. 247. Zur Definition der Benennung der Topologien  $V^{ijk}$  siehe ebenso Anhang I.2.1.2. Wir wählen den inneren Impulsfluß wie in [Fe04], der teilweise von unserem abweicht, was aber unerheblich ist, da Massensingularitäten davon unberührt bleiben. Ebenso ist die Wahl der Nummerierung unbedeutend für die Evaluierung der Gleichungen und kann auch am Ende der Evaluationen einer anderen angepasst werden. Die Integrationsimpulse sind jeweils wieder  $q_1, q_2$ .

### I.2.2.1 Landau-Gleichungen für $V^{121}$



(I.118)

Die ersten Landau–Gleichungen hierfür sind

$$\begin{aligned}\alpha_1(q_1 + m_1^2) &= 0 \\ \alpha_2((q_1 - q_2)^2 + m_2^2) &= 0 \\ \alpha_3((q_2 - p_2)^2 + m_3^2) &= 0 \\ \alpha_4((q_2 - P)^2 + m_4^2) &= 0\end{aligned}\tag{I.119}$$

Die zweiten Landau–Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\alpha_1 q_1^\mu + \alpha_2 (q_1 - q_2)^\mu &= 0 \\ \alpha_2 (q_2 - q_1)^\mu + \alpha_3 (q_2 - p_2)^\mu + \alpha_4 (q_2 - P)^\mu &= 0\end{aligned}\tag{I.120}$$

Nach unseren Berechnungen wurden in [Fe04] nicht alle Bedingungen, wie sie sich aus den Gleichungen ergeben, ausgewertet. Multiplizieren der zweiten Gleichungen mit  $q_1^\mu, q_2^\mu, p_2^\mu, P^\mu$  führt auf die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} q_1^2 & q_1(q_1 - q_2) \\ q_1 q_2 & q_2(q_1 - q_2) \\ q_1 p_2 & p_2(q_1 - q_2) \\ q_1 P & P(q_1 - q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0\tag{I.121}$$

$$\begin{pmatrix} q_1(q_2 - q_1) & q_1(q_2 - p_2) & q_1(q_2 - P) \\ q_2(q_2 - q_1) & q_2(q_2 - p_2) & q_2(q_2 - P) \\ p_2(q_2 - q_1) & p_2(q_2 - p_2) & p_2(q_2 - P) \\ P(q_2 - q_1) & P(q_2 - p_2) & P(q_2 - P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0\tag{I.122}$$

Die Determinante der ersten beiden Zeilen von (I.121) zu Null gesetzt ergibt

$$q_2 p_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 - (m_1 \pm m_2)^2 + m_3^2)\tag{I.123}$$

Setzt man dies in die erste oder zweite Gleichung dieser Matrix ein und löst nach  $\alpha_1$  auf, so ergibt sich

$$\alpha_1 = \pm \frac{m_2}{m_1} \alpha_2\tag{I.124}$$

Setzt man dieses Verhältnis in die beiden verbleibenden Gleichungen dieser Matrix ein, dann ergeben sich

$$\begin{aligned}q_1 p_2 &= \frac{m_1}{2(m_1 \pm m_2)}(p_2^2 - (m_1 \pm m_2)^2 + m_3^2) \\ q_1 P &= \frac{m_1}{2(m_1 \pm m_2)}(P^2 - (m_1 \pm m_2)^2 + m_4^2)\end{aligned}\tag{I.125}$$

Die Determinante der 2., 3., und 4. Zeile der zweiten Matrix der zweiten Landau–Gleichung zu Null gesetzt führt, wenn man sie nach  $p_1 p_2$  auflöst (man hat vorher überall  $P \rightarrow p_1 + p_2$  eingesetzt und die daraus folgenden Skalarprodukte verwendet), auf

$$p_1 p_2 = \frac{1}{4m_3^2} \left[ (-p_2^2 - (m_1 \pm m_2)^2 + m_3^2)(-p_1^2 + m_3^2 - m_4^2) \pm \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right]\tag{I.126}$$

mit

$$\lambda_1 = \lambda(-p_1^2, m_3^2, m_4^2) \quad \lambda_2 = \lambda(-p_2^2, (m_1 \pm m_2)^2, m_3^2) \quad (\text{I.127})$$

mit  $\lambda$  der Källen-Funktion (I.116). Es ist noch zu berücksichtigen, daß das Vorzeichen von  $\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$  von demjenigen von  $(m_1 \pm m_2)$  unabhängig ist. Das Bestimmen von  $\alpha_{2,3}$  in Abhängigkeit von  $\alpha_4$  (nachdem man  $P^2$  bzw.  $p_1 p_2$  eingesetzt hat) aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} q_2(q_2 - q_1) & q_2(q_2 - p_2) & q_2(q_2 - P) \\ p_2(q_2 - q_1) & p_2(q_2 - p_2) & p_2(q_2 - P) \\ P(q_2 - q_1) & P(q_2 - p_2) & P(q_2 - P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.128})$$

und einsetzen dieser Werte in die erste Zeile der zweiten Matrixgleichung der zweiten Landau-Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= q_1(q_2 - q_1)\alpha_2 + q_1(q_2 - p_2)\alpha_3 + q_1(q_2 - P)\alpha_4 \\ &= \alpha_4 \frac{m_1((m_1 \pm m_2)^2 + m_3^2 + p_2^2)}{2(m_1 \pm m_2)} \end{aligned} \quad (\text{I.129})$$

Diese Bedingung wird bei [Fe04] nicht weiter verwendet. Der Koeffizient von  $\alpha_4$

$$\frac{m_1((m_1 \pm m_2)^2 + m_3^2 + p_2^2)}{2(m_1 \pm m_2)} \quad (\text{I.130})$$

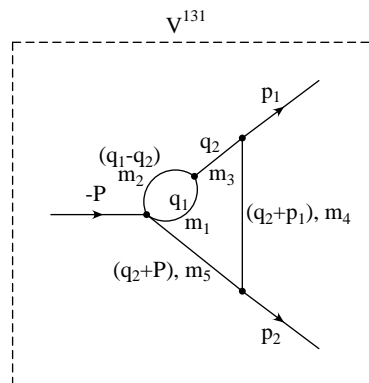
muß aber Null sein, damit alle Gleichungen erfüllt sind. Dies wird von [Fe04] nicht bedacht. Wir folgern daraus, daß

$$p_2^2 = -((m_1 \pm m_2)^2 + m_3^2) \quad (\text{I.131})$$

gelten muß. Das globale negative Vorzeichen hat seine Ursache wiederum in der von Passarino *et al.* verwendeten euklidischen Metrik. Bei Verwendung der Minkowski-Metrik tritt es nicht auf. Dies in Verbindung mit (I.126) ergibt schließlich die bei [Fe04] nicht zu findende Lösung

$$p_1 p_2 = \pm \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{4m_3^2} \quad (\text{I.132})$$

### I.2.2.2 Landau-Gleichungen für $V^{131}$



$$(\text{I.133})$$

Die ersten Landau-Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(q_1^2 + m_1^2) &= 0 \\
 \alpha_2((q_1 - q_2)^2 + m_2^2) &= 0 \\
 \alpha_3(q_2^2 + m_3^2) &= 0 \\
 \alpha_4((q_2 + p_1)^2 + m_4^2) &= 0 \\
 \alpha_5((q_2 + P)^2 + m_5^2) &= 0
 \end{aligned} \tag{I.134}$$

Die zweiten sind

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 q_1^\mu + \alpha_2 (q_1 - q_2)^\mu &= 0 \\
 \alpha_2 (q_2 - q_1)^\mu + \alpha_3 q_2^\mu + \alpha_4 (q_2 + p_1)^\mu + \alpha_5 (q_2 + P)^\mu &= 0
 \end{aligned} \tag{I.135}$$

Multiplikation mit  $q_1^\mu, q_2^\mu, p_1^\mu, P^\mu$  führt auf die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} q_1^2 & q_1(q_1 - q_2) \\ q_1 q_2 & q_2(q_1 - q_2) \\ q_1 p_1 & p_1(q_1 - q_2) \\ q_1 P & P(q_1 - q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{I.136}$$

$$\begin{pmatrix} q_1(q_2 - q_1) & q_1 q_2 & q_1(q_2 + p_1) & q_1(q_2 + P) \\ q_2(q_2 - q_1) & q_2^2 & q_2(q_2 + p_1) & q_2(q_2 + P) \\ p_1(q_2 - q_1) & p_1 q_2 & p_1(q_2 + p_1) & p_1(q_2 + P) \\ P(q_2 - q_1) & P q_2 & P(q_2 + p_1) & P(q_2 + P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = 0 \tag{I.137}$$

Das Berechnen der Determinante

$$\det \begin{vmatrix} q_1^2 & q_1(q_1 - q_2) \\ q_1 q_2 & q_2(q_1 - q_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{I.138}$$

ergibt

$$m_3^2 = (m_1 \pm m_2)^2 \tag{I.139}$$

Auflösen von

$$\begin{pmatrix} q_1^2 & q_1(q_1 - q_2) \\ q_1 q_2 & q_2(q_1 - q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{I.140}$$

ergibt

$$\alpha_1 = \pm \frac{m_2}{m_1} \alpha_2 \tag{I.141}$$

Einsetzen in

$$\begin{pmatrix} q_1 p_1 & p_1(q_1 - q_2) \\ q_1 P & P(q_1 - q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{I.142}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
q_1 p_1 &= \frac{m_1}{2(m_1 \pm m_2)} (-p_1^2 + (m_1 \pm m_2)^2 - m_4^2) \\
q_1 P &= \frac{m_1}{2(m_1 \pm m_2)} (-P^2 + (m_1 \pm m_2)^2 - m_5^2)
\end{aligned} \tag{I.143}$$

Es wird wieder  $P \rightarrow p_1 + p_2$  in allen Skalarprodukten ersetzt und

$$\frac{1}{((m_1 \pm m_2)^2 - m_3^2)} \det \begin{pmatrix} q_1(q_2 - q_1) & q_1 q_2 & q_1(q_2 + p_1) & q_1(q_2 + P) \\ q_2(q_2 - q_1) & q_2^2 & q_2(q_2 + p_1) & q_2(q_2 + P) \\ p_1(q_2 - q_1) & p_1 q_2 & p_1(q_2 + p_1) & p_1(q_2 + P) \\ P(q_2 - q_1) & P q_2 & P(q_2 + p_1) & P(q_2 + P) \end{pmatrix} = 0 \tag{I.144}$$

nach  $p_1 p_2$  aufgelöst. Es darf nicht (I.139) verwendet werden, ansonsten ist die Determinante sofort Null, aufgrund des globalen Vorfaktors, der nur durch die Division durch denselben entfernt werden kann. Nur so ergibt sich das Ergebnis von [Fe04] nach Auflösung nach  $p_1 p_2$ :

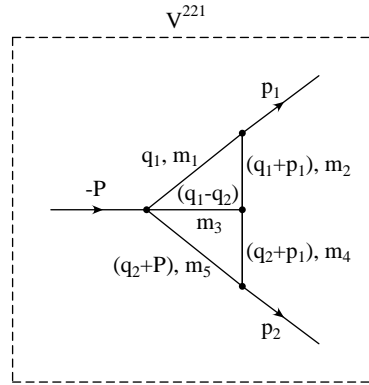
$$p_1 p_2 = -\frac{1}{4m_3^2} \left[ (-p_1^2 + (m_1 \pm m_2)^2 - m_4^2)(-P^2 + (m_1 \pm m_2)^2 - m_5^2) \pm \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right] \tag{I.145}$$

mit

$$\lambda_1 = \lambda(-p_1^2, m_3^2, m_4^2) \quad \lambda_2 = \lambda(-P^2, m_3^2, m_5^2) \tag{I.146}$$

### I.2.2.3 Landau-Gleichungen für $V^{221}$

Die nichtgedrehte reduzierte planare Topologie



(I.147)

hat als Landau-Gleichungen:

Die ersten Landau-Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (q_1^2 + m_1^2) &= 0 \\
\alpha_2 ((q_1 + p_1)^2 + m_2^2) &= 0 \\
\alpha_3 ((q_1 - q_2)^2 + m_3^2) &= 0 \\
\alpha_4 ((q_2 + p_1)^2 + m_4^2) &= 0 \\
\alpha_5 ((q_2 + P)^2 + m_5^2) &= 0
\end{aligned} \tag{I.148}$$



Die zweiten Landau-Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\alpha_1 q_1^\mu + \alpha_2 (q_1 + p_1)^\mu + \alpha_3 (q_1 - q_2)^\mu &= 0 \\ \alpha_3 (q_2 - q_1)^\mu + \alpha_4 (q_2 + p_1)^\mu + \alpha_5 (q_2 + P)^\mu &= 0\end{aligned}\quad (\text{I.149})$$

Multiplikation mit  $q_1^\mu, q_2^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu$  führt auf die Matrixgleichungen

$$\begin{pmatrix} q_1^2 & q_1^2 + q_1 p_1 & q_1^2 - q_1 q_2 \\ q_1 q_2 & q_1 q_2 + q_2 p_1 & q_1 q_2 - q_2^2 \\ q_1 p_1 & q_1 p_1 + p_1^2 & q_1 p_1 - q_2 p_1 \\ q_1 p_2 & q_1 p_2 + p_1 p_2 & q_1 p_2 - q_2 p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.150})$$

$$\begin{pmatrix} q_1 q_2 - q_1^2 & q_1 q_2 + q_1 p_1 & q_1 q_2 + q_1 P \\ q_2^2 - q_1 q_2 & q_2^2 + q_2 p_1 & q_2^2 + q_2 P \\ q_2 p_1 - q_1 p_1 & q_2 p_1 + p_1^2 & q_2 p_1 + P p_1 \\ q_2 p_2 - q_1 p_2 & q_2 p_2 + p_1 p_2 & q_2 p_2 + P p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.151})$$

Die sich aus den ersten drei Linien von (I.150) ergebende Determinantengleichung liefert eine quadratische Gleichung für  $q_2 p_1$ . Die Lösung hiervon berechnet sich zu:

$$q_2 p_1 = -p_1^2 + \frac{1}{4m_2^2} \left[ (m_2^2 - m_3^2 + m_4^2)(m_1^2 - m_2^2 + p_1^2) \pm_a \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right] \quad (\text{I.152})$$

mit

$$\lambda_1 = \lambda(m_2^2, m_3^2, m_4^2) \quad \lambda_2 = \lambda(-p_1^2, m_1^2, m_2^2) \quad \lambda_3 = \lambda(-p_2^2, m_4^2, m_5^2) \quad (\text{I.153})$$

Das  $a$  beim Vorzeichen „ $\pm_a$ “ wird eingeführt, weil später noch andere, damit nicht korrelierte, „ $\pm$ “ auftreten.

Zur Bestimmung von  $q_1 p_2$  betrachten wir (I.151). Die Kombination der Determinante der 1., 2. und 4. Zeile plus Determinante der 1., 3. und 4. Zeile minus der Determinante der 2., 3. und 4. Zeile zu Null gesetzt ergibt ein Gleichungssystem 2. Grades in  $q_1 p_2$ . Es enthält kein  $q_2 p_1$  mehr. Als mit [Fe04] übereinstimmende Lösung ergibt sich:

$$q_1 p_2 = -p_1 p_2 + \frac{1}{4m_4^2} \left[ (-p_2^2 + m_4^2 - m_5^2)(m_2^2 - m_3^2 + m_4^2) \pm_b \sqrt{\lambda_1 \lambda_3} \right] \quad (\text{I.154})$$

Der in [Fe04] angegebene Lösungsweg diesbezüglich führt nicht zum dort angegebenen Ergebnis, vermutlich liegt eine Verwechslung vor.

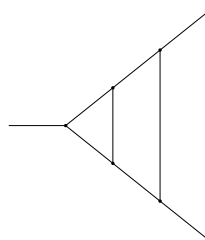
Im nächsten Schritt bestimmen wir  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  in Abhängigkeit von  $\alpha_3$ . Dazu setzen wir in die ersten drei Zeilen von (I.150) die Lösungen (I.152) und (I.154) ein. Es ergeben sich dann vier verschiedene Möglichkeiten.

Diesen Zusammenhang setzten wir in die letzte Zeile von (I.150) ein. Wir erhalten dann jeweils eine (insgesamt vier, welche aber strukturell identisch sind) lineare Gleichung für  $p_1 p_2$ , deren Nenner wir nach  $p_1 p_2$  auflösen müssen. Nach einigen Umformungen erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
p_1 p_2 = & -\frac{1}{8m_2^2 m_4^2} \left[ (m_2^2 - m_3^2 + m_4^2)(p_1^2 + m_1^2 - m_2^2)(-p_2^2 + m_4^2 - m_5^2) \right. \\
& \pm_a \pm_b (m_2^2 - m_3^2 + m_4^2) \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} + \pm_b (p_1^2 + m_1^2 - m_2^2) \sqrt{\lambda_1 \lambda_3} \\
& \left. + \pm_a (-p_2^2 + m_4^2 - m_5^2) \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right]
\end{aligned}
\tag{I.155}$$

### I.2.2.4 Landau-Gleichungen für $V^{231}$

Zuletzt suchen wir die führende Singularität der planaren Topologie.



(I.156)

Da auch diese Lösungen in [Fe04] bereits bestimmt wurden, sind aus dem nochmaligen Lösen dieser Gleichung keine neuen Erkenntnisse zu erwarten. Wir verweisen diesbezüglich auf die bei [Fe04] berechneten Lösungen.

## I.3 Schnitte bei den Masterintegralen

Nachdem wir in den vorangegangenen Abschnitten die Landau-Gleichungen allgemein hergeleitet und die Lösungen für eine Vielzahl von Graphen angegeben haben, wollen wir in diesem Abschnitt untersuchen, wie die Lösungen der Landau-Gleichungen, die sich in den Zwei- und Dreiteilchenschnitten der planaren Topologie und der gedrehten reduzierten planaren Topologien widerspiegeln, mit den Parametern des P/O-Raums in Beziehung stehen. In den Kapiteln 6.1.2.6 und 6.2.2.4 haben wir die Darstellungen der Masterintegrale vor der numerischen Zweifachintegration zusammengefaßt. Diese Darstellungen beruhen auf der Zurückführung der Masterintegrale auf einen Satz von Basisintegralen in den Integrationsvariablen des Orthogonalraums,  $s$  und  $t$ . Die analytische Evaluation der in (6.92) und (6.93) definierten Basisintegrale in  $s$  und  $t$  wird in Anhang E beschrieben. Da bei der Evaluation von Feynmanintegralen Schnitte und das Auftreten von Imaginärteilen in direktem Zusammenhang stehen gilt es, die Bedingungen für das Auftreten eines Imaginärteils in den Basisintegralen in  $s$  und  $t$  mit dem Auftreten von Schwellen der Feynmanintegrale in Beziehung zu setzen. Aus den Ausführungen in Anhang E ergibt sich, daß Imaginärteile in den Basisintegralen immer mit negativem  $s_0, t_0$  oder positivem  $b$  einhergehen. Die Definitionen der  $s_0, t_0$  sowie der  $b$ , welche zur Darstellung der Masterintegrale noch mit Indizes versehen werden müssen, weil verschiedene  $b_{n,m}$  auftreten, finden sich in den Kapiteln

6.1.2.6 und 6.2.2.4. Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie sich die die Zweiteilchen- und Dreiteilchenschnitte der planaren Topologie in diesen Parametern widerspiegeln. Die Schnitte der gedrehten reduzierten Topologien sind eine Untermenge hiervon. Weiter wollen wir die Schnitte der Abzugsterme bestimmen. Die Zweiteilchenschnitte sind die Lösungen der Landau-Gleichungen gemäß (I.55), die Dreiteilchenschnitte sind die Lösungen gemäß (I.95). Da die Imaginärteile der Basisintegrale in  $s$  und  $t$  insbesondere mit den Vorzeichen der  $s_0, t_0$  bzw. der  $b_{n,m}$  in Beziehung stehen, muß ein Vorzeichenwechsel in diesen Parametern in direktem Bezug mit Schwellen stehen. Die Parameter  $s_0, t_0$  bzw.  $b_{n,m}$  sind Funktionen der Integrationsvariablen  $k_0, l_0$ , in welchen numerisch zu integrieren ist. Ein Vorzeichenwechsel der Parameter  $s_0, t_0$  bzw.  $b_{n,m}$  findet, wie sich im Folgenden zeigt, auf gewissen Linien im Integrationsraum der  $k_0, l_0$  statt.

### I.3.1 Zweiteilchenschnitte

Die Zweiteilchenschnitte spiegeln sich in  $s_0, t_0 = 0$  wider. Im Fall der planaren Topologie ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

#### I.3.1.1 Schwelle für $s_0 = 0$

Der Parameter  $s_0$  ist eine Funktion von  $k_0, l_0$ . Wir wollen die Nullstellen von  $s_0$  in der  $k_0, l_0$ -Ebene bestimmen. Wir erhalten aus (6.83):

$$\begin{aligned}
 s_0 &= \frac{-\Xi_2 \Gamma_1 + \Xi_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \\
 &= \frac{\left[ e_2 m_1^2 - q_z m_2^2 - q_z e_1^2 + q_z^2 e_2 + q_z m_1^2 - e_2 e_1^2 + e_1 m_2^2 + q_z^2 e_1 + q_z e_2^2 - e_2^2 e_1 \right. \\
 &\quad \left. + (e_1^2 + m_2^2 - 2q_z e_1 - m_1^2 - 2q_z e_2 - e_2^2) k_0 + (e_2 + e_1) k_0^2 \right]}{1} \\
 &\quad \frac{1}{(e_2 + e_1)} \tag{I.157}
 \end{aligned}$$

Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel in  $k_0$ , da der Vorfaktor von  $k_0^2$  positiv ist. Der Parameter ist von  $l_0$  unabhängig. Damit ein Imaginärteil in den Basisintegralen in  $s$  und  $t$  auftreten kann, muß  $s_0$  negativ werden. Wir bestimmen die Nullstellen des Zählers von  $s_0$  in  $k_0$ . Wir erhalten

$$k_{0,1/2} = \frac{(-e_1^2 + e_2^2 + m_1^2 - m_2^2 + 2e_1 q_z + 2e_2 q_z) \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2(e_1 + e_2)} \tag{I.158}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= e_1^4 + 4e_1^3 e_2 + 6e_1^2 e_2^2 + 4e_1 e_2^3 + e_2^4 - 2e_1^2 m_1^2 - 4e_1 e_2 m_1^2 - 2e_2^2 m_1^2 \\
 &\quad + m_1^4 - 2e_1^2 m_2^2 - 4e_1 e_2 m_2^2 - 2e_2^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 + m_2^4 \tag{I.159}
 \end{aligned}$$

Berechnen wir

$$\mathcal{S} = (p^2 - (m_1 + m_2)^2)(p^2 - (m_1 - m_2)^2) \quad (\text{I.160})$$

und verwenden

$$p^2 = (e_1 + e_2)^2 \quad (\text{I.161})$$

so zeigt sich, daß gilt

$$\mathcal{S} = \mathcal{D} \quad (\text{I.162})$$

Nullstellen in  $s_0$  und damit Bereiche mit negativem  $s_0$  in der  $k_0, l_0$ -Ebene sind im Falle von

$$\mathcal{S} = (p^2 - (m_1 + m_2)^2)(p^2 - (m_1 - m_2)^2) > 0 \quad (\text{I.163})$$

gegeben. Dies ist entweder dann der Fall, wenn

$$(p^2 - (m_1 + m_2)^2) > 0 \quad \text{und} \quad (p^2 - (m_1 - m_2)^2) > 0 \quad (\text{I.164})$$

gilt, oder wenn

$$(p^2 - (m_1 + m_2)^2) < 0 \quad \text{und} \quad (p^2 - (m_1 - m_2)^2) < 0 \quad (\text{I.165})$$

gilt. Im Fall von (I.164) liegt eine physikalische Schwelle vor. Die Ursache der physikalischen Schwelle in (I.164) liegt an der Bedingung

$$(p^2 - (m_1 + m_2)^2) > 0 \quad (\text{I.166})$$

Die zweite Gleichung in (I.164),  $(p^2 - (m_1 - m_2)^2) > 0$ , ist automatisch erfüllt, wenn (I.166) erfüllt ist. Im Fall von (I.165) haben wir eine unphysikalische Schwelle. In diesem Fall liegen die negativen  $s_0$  aber außerhalb des Integrationsgebiets bzw. die Imaginärteile sowie die logarithmischen Divergenzen der Realteile heben sich in der Summe über verschiedene Beiträge auf.

### I.3.1.2 Schwellen für $t_0 = 0$

Es treten im Fall der planaren Topologie drei verschiedene  $t_0$  auf. Im Fall der gedrehten reduzierten planaren Topologien gibt es jeweils nur ein  $t_0$ , was aber jeweils mit einem vom planaren Fall bereits bekannten übereinstimmt. Im Fall der Version  $\mathcal{R}^+$  ändern sich einige Vorzeichen, aber die Struktur des Bezugs der Schwellen zu den Parametern bleibt davon

unberührt. Es gilt aufgrund von (6.84) für die planare Topologie:

$$\begin{aligned}
t_{0,4,5} &= \frac{[m_4^2 e_2 - q_z e_1^2 + q_z^2 e_2 + q_z m_4^2 - e_2 e_1^2 + q_z^2 e_1 + m_5^2 e_1 + q_z e_2^2 - e_2^2 e_1 - m_5^2 q_z \\
&\quad + (-e_1^2 + 2q_z e_1 + m_4^2 + 2q_z e_2 - m_5^2 + e_2^2)l_0 + (e_2 + e_1)l_0^2]}{1} \\
&\quad \frac{1}{(e_2 + e_1)} \\
t_{0,4,6} &= \frac{m_6^2 q_z - m_6^2 e_1 + (e_1^2 - q_z^2 - m_4^2 + m_6^2)l_0 + (-q_z - e_1)l_0^2}{(q_z - e_1)} \\
t_{0,5,6} &= \frac{m_6^2 q_z + m_6^2 e_2 + (-q_z^2 + m_6^2 - m_5^2 + e_2^2)l_0 + (-q_z + e_2)l_0^2}{(q_z + e_2)}
\end{aligned} \tag{I.167}$$

Die  $t_0$  sind von der Integrationsvariablen  $k_0$  unabhängig. Damit ein Imaginärteil in den Basisintegralen auftreten kann, muß ein  $t_0$  negativ werden. In allen Fällen ist  $t_0$ , wie man erkennt, eine nach oben geöffnete Parabel in  $l_0$ . Deshalb müssen die Nullstellen der Zähler gesucht werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
l_{0,4,5,1/2} &= \frac{e_1^2 - e_2^2 - m_4^2 + m_5^2 - 2e_1 q_z - 2e_2 q_z \pm \sqrt{\mathcal{D}_{45}}}{2(e_1 + e_2)} \\
l_{0,4,6,1/2} &= \frac{e_1^2 - m_4^2 + m_6^2 - q_z^2 \pm \sqrt{\mathcal{D}_{46}}}{2(e_1 + q_z)} \\
l_{0,5,6,1/2} &= \frac{-e_2^2 + m_5^2 - m_6^2 + q_z^2 \pm \sqrt{\mathcal{D}_{56}}}{2(e_2 - q_z)}
\end{aligned} \tag{I.168}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{45} &= e_1^4 + 4e_1^3 e_2 + 6e_1^2 e_2^2 + 4e_1 e_2^3 + e_2^4 - 2e_1^2 m_4^2 - 4e_1 e_2 m_4^2 - 2e_2^2 m_4^2 \\
&\quad + m_4^4 - 2e_1^2 m_5^2 - 4e_1 e_2 m_5^2 - 2e_2^2 m_5^2 - 2m_4^2 m_5^2 + m_5^4 \\
\mathcal{D}_{46} &= (e_1^2 - m_4^2 + m_6^2 - q_z^2)^2 + 4m_6^2 (-e_1^2 + q_z^2) \\
\mathcal{D}_{56} &= (e_2^2 - m_5^2 + m_6^2 - q_z^2)^2 + 4m_6^2 (-e_2^2 + q_z^2)
\end{aligned} \tag{I.169}$$

Wir finden mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{45} &= (p^2 - (m_4 + m_5)^2)(p^2 - (m_4 - m_5)^2) \\
\mathcal{T}_{46} &= (p_1^2 - (m_4 + m_6)^2)(p_1^2 - (m_4 - m_6)^2) \\
\mathcal{T}_{56} &= (p_2^2 - (m_5 + m_6)^2)(p_2^2 - (m_5 - m_6)^2)
\end{aligned} \tag{I.170}$$

daß gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{45} &= \mathcal{D}_{45} \\ \mathcal{T}_{46} &= \mathcal{D}_{46} \\ \mathcal{T}_{56} &= \mathcal{D}_{56}\end{aligned}\tag{I.171}$$

Analog zum Fall von  $s_0$  können dann Imaginärteile auftreten, wenn

$$p^2 - (m_4 + m_5)^2 > 0 \quad \text{und} \quad (p^2 - (m_4 - m_5)^2) > 0 \tag{I.172}$$

oder

$$p^2 - (m_4 + m_5)^2 < 0 \quad \text{und} \quad (p^2 - (m_4 - m_5)^2) < 0 \tag{I.173}$$

bzw.

$$(p_1^2 - (m_4 + m_6)^2) > 0 \quad \text{und} \quad (p_1^2 - (m_4 - m_6)^2) > 0 \tag{I.174}$$

oder

$$(p_1^2 - (m_4 + m_6)^2) < 0 \quad \text{und} \quad (p_1^2 - (m_4 - m_6)^2) < 0 \tag{I.175}$$

bzw.

$$(p_2^2 - (m_5 + m_6)^2) > 0 \quad \text{und} \quad (p_2^2 - (m_5 - m_6)^2) > 0 \tag{I.176}$$

oder

$$(p_2^2 - (m_5 + m_6)^2) < 0 \quad \text{und} \quad (p_2^2 - (m_5 - m_6)^2) < 0 \tag{I.177}$$

Die jeweils zweite Möglichkeit, in welchen die Differenzen von Impulsquadrat und Massen negativ sind, haben ihre Ursachen in Pseudoschwellen. In der Summation der verschiedenen Beiträge heben sich aber die in Zwischenschritten auftretenden Imaginärteile im Endergebnis auf. Die jeweils erste Möglichkeit (welche analog zum Fall der  $s_0$  bereits durch das Erfüllen der ersten der beiden Ungleichungen gegeben ist) bestimmt die Zweiteilchenschnitte:

$$p^2 - (m_4 + m_5)^2 > 0 \quad \longleftrightarrow \quad t_{0,4,5} < 0 \tag{I.178}$$

und

$$(p_1^2 - (m_4 + m_6)^2) > 0 \quad \longleftrightarrow \quad t_{0,4,6} < 0 \tag{I.179}$$

sowie

$$(p_2^2 - (m_5 + m_6)^2) > 0 \quad \longleftrightarrow \quad t_{0,5,6} < 0 \tag{I.180}$$

### I.3.1.3 Zusammenfassung der Zweiteilchenschnitte

Die Zweiteilchenschnitte lassen sich sofort mit der intuitiven Methode des Schneidens mit Hilfe der Cutkosky-Regeln [Cu60] an den Graphen ablesen. Sie entsprechen den Lösungen der Landaugleichungen für zwei Propagatoren. In P/O-Raum-Variablen zeigen sie sich in negativen  $s_0, t_0$ . Abzugsterme können zu keinen neuen Zweiteilchenschnitten führen.

### I.3.2 Dreiteilchenschnitte

Die Dreiteilchenschnitte entsprechen anschaulich dem Zerschneiden aller Untergraphen, welche eine Sunset-Topologie, vgl. (I.80), aufweisen. Die Landau-Gleichungen für die führende Singularität der Sunset-Topologie haben die Dreiteilchenschwellen als Lösung.

Die Nenner der  $b_{n,m}$  aus (6.85) sind Polynome 2. Grades in  $k_0, l_0$ . Damit von  $b$  ein Imaginärteil zu den Basisintegralen in  $s, t$  beitragen kann, muß  $b$  positiv werden. Wir untersuchen deshalb, wann bei  $b$  ein Vorzeichenwechsel auftritt.

Es reicht, die Singularitäten für die planare Topologie mit Abzugsterm zu bestimmen, da bei den Graphen mit reduzierter Topologie (inklusive Abzug) keine neue Propagatorstrukturen auftreten, weil  $P_6$  bereits die Form der neuen Propagatoren besitzt, es muß bei den Parametern dann nur noch  $m_6$  durch die Abzugsmasse ersetzt werden.

Wir lösen die Gleichungen

$$b_{n,m} = 0 \quad (\text{I.181})$$

mit den  $b_{n,m}$  wie in (6.85) definiert für alle Beiträge der planaren Topologie mit Abzugsterm. Es reicht im Fall der Abzugsterme in  $k$  dabei, einen einzelnen Abzugsgraphen zu betrachten, da aufgrund der gleichen Nennerstruktur der Abzugsterme in Bezug auf die möglichen Schnitte die Bestimmung der Schnitte bei allen Abzugstermen gleich vonstatten geht.

Wir betrachten die verschiedenen, sich strukturell unterscheidenden Parameter  $b_{n,m}$  im Folgenden einzeln:

Da der Parameter

$$b_{1,4} = 0 \quad (\text{I.182})$$

nur in verschwindenden Integrationsgebieten auftritt, befassen wir uns als erstes mit dem

#### I.3.2.1 Fall $b_{1,5} = 0$

$$b_{1,5}(k_0, l_0) = \frac{\bar{b}_{1,5}(k_0, l_0)}{f(k_0, l_0)} \quad (\text{I.183})$$

mit dem Zähler

$$\bar{b}_{1,5}(k_0, l_0) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 k_0^i l_0^j r_{i,j} \quad (\text{I.184})$$

Wir werden die explizite Form von  $b$  aufgrund der Größe der Terme nicht aufschreiben, halten aber fest, daß

$$r_{2,2} = 0 \quad (\text{I.185})$$

gilt. Wir bestimmen als erstes die Nullstellen des Zählers von  $\bar{b}_{1,5}$  in  $l_0$ , was einfach ist, da

$$\bar{b}_{1,5}(l_0) = \alpha l_0^2 + \beta l_0 + \gamma \quad (\text{I.186})$$

eine quadratische Gleichung in  $l_0$  ist (analoges gilt in  $k_0$ ). Es läßt sich die Linie zwischen positivem und negativem  $b$  analytisch bestimmen. Wir erhalten

$$l_{0,1/2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{D}}{2\alpha} \quad (\text{I.187})$$

mit der Diskriminante

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad (\text{I.188})$$

Sollen die Nullstellen in  $l_0$  reell sein, muß die Diskriminante positiv sein. Wie sich durch explizites Berechnen zeigt, ist die Diskriminante ein Polynom vierten Grades in  $k_0$ .

$$D = \sum_{i=0}^4 k_0^i \nu_i \quad (\text{I.189})$$

wobei

$$\nu_4 = (e_1 + e_2)^2 \quad (\text{I.190})$$

weshalb die Diskriminante eine nach oben geöffnete Kurve in  $k_0$  ist. Da Polynome 4. Grades analytisch gelöst werden können, suchen wir die Nullstellen dieses Polynoms in  $k_0$  und schreiben

$$D = N \prod_{i=1}^4 (k_0 - n_i) \quad (\text{I.191})$$

Die mit Hilfe von Mathematica [Math] gefundenen Nullstellen zeigen, daß  $D$  in zwei quadratische Gleichungen faktorisiert, da gilt

$$\begin{aligned} n_{1/2} &= \frac{\zeta \pm \sqrt{G_a}}{2(e_1 + e_2)} \\ n_{3/4} &= \frac{\eta \pm \sqrt{G_b}}{2(e_1 + e_2)} \end{aligned} \quad (\text{I.192})$$

mit

$$\begin{aligned} G_a &= (p^2 - (m_1 + m_3 + m_5)^2)(p^2 - (m_1 - m_3 - m_5)^2) \\ G_b &= (p^2 - (m_1 + m_3 - m_5)^2)(p^2 - (m_1 - m_3 + m_5)^2) \end{aligned} \quad (\text{I.193})$$

Falls die Nullstellen der Diskriminante reell sind, schneidet die Diskriminante auf jeden Fall viermal die Nullachse in  $k_0$ . Dies ist nach [Fr96a] notwendige Bedingung für das Auftreten einer Schwelle. In [Fr96a] wird am Beispiel von Dreiteilchenschwellen der gekreuzten Dreipunktfunktion gezeigt, daß das Vorhandensein von 4 Nullstellen in der Diskriminante Voraussetzung dafür ist, daß der Bereich mit positivem  $b$  im Integrationsgebiet liegt. Wir wollen den Beweis hier nicht wiederholen. Das Gewünschte trifft zu, falls gilt

$$G_a = (p^2 - (m_1 + m_3 + m_5)^2)(p^2 - (m_1 - m_3 - m_5)^2) > 0 \quad (\text{I.194})$$

und

$$G_b = (p^2 - (m_1 + m_3 - m_5)^2)(p^2 - (m_1 - m_3 + m_5)^2) > 0 \quad (\text{I.195})$$

Diese Gleichungen sind alle erfüllt, falls gilt:



$$p^2 > (m_1 + m_3 + m_5)^2 \quad (\text{I.196})$$

Dies ist aber genau die Bedingung für die Dreiteilchenschwelle, welche durch den Schnitt in den Propagatoren 1,3,5 entsteht.

Die andere Möglichkeit, daß die beiden Diskriminanten  $G_{a,b}$  negativ sind, sind unphysikalisch, im Integrationsbereich ist  $b$  dann negativ, die positiven Beiträge sind außerhalb.

### I.3.2.2 Fall $b_{1,6} = 0$

Der gleiche Algorithmus wie im vorigen Kapitel ergibt dieses Mal

$$\nu_4 = (e_1 + q_z)^2 \quad (\text{I.197})$$

$$G_a = (p_1^2 - (m_1 + m_3 + m_6)^2)(p_1^2 - (m_1 - m_3 - m_6)^2) > 0 \quad (\text{I.198})$$

und

$$G_b = (p_1^2 - (m_1 + m_3 - m_6)^2)(p_1^2 - (m_1 - m_3 + m_6)^2) > 0 \quad (\text{I.199})$$

Diese Gleichungen sind alle erfüllt, falls gilt:

$$p_1^2 > (m_1 + m_3 + m_6)^2 \quad (\text{I.200})$$

### I.3.2.3 Fall $b_{2,4} = 0$

Analog zum Fall  $b_{1,5}$  erhalten wir

$$\nu_4 = (e_1 + e_2)^2 \quad (\text{I.201})$$

$$G_a = (p^2 - (m_2 + m_3 + m_4)^2)(p^2 - (m_2 - m_3 - m_4)^2) > 0 \quad (\text{I.202})$$

und

$$G_b = (p^2 - (m_2 + m_3 - m_4)^2)(p^2 - (m_2 - m_3 + m_4)^2) > 0 \quad (\text{I.203})$$

Diese Gleichungen sind alle erfüllt, falls gilt:

$$p^2 > (m_2 + m_3 + m_4)^2 \quad (\text{I.204})$$

Da  $b_{2,5} = 0$  nur in verschwindenden Integrationsgebieten auftritt, fahren wir fort mit dem

**I.3.2.4 Fall  $b_{2,6} = 0$** 

Analog zu  $b_{1,6}$  ergibt sich

$$\nu_4 = (e_2 - q_z)^2 \quad (\text{I.205})$$

$$G_a = (p_2^2 - (m_2 + m_3 + m_6)^2)(p_2^2 - (m_2 - m_3 - m_6)^2) > 0 \quad (\text{I.206})$$

und

$$G_b = (p_2^2 - (m_2 + m_3 - m_6)^2)(p_2^2 - (m_2 - m_3 + m_6)^2) > 0 \quad (\text{I.207})$$

Diese Gleichungen sind alle erfüllt, falls gilt:

$$p_2^2 > (m_2 + m_3 + m_6)^2 \quad (\text{I.208})$$

**I.3.2.5 Fall  $b_{3,4} = 0$** 

Wir erhalten

$$\nu_4 = (e_1 + q_z)^2 \quad (\text{I.209})$$

In diesem Fall sind die Diskriminanten

$$G_a = (p_1^2 - (m_{1,1} + m_3 + m_4)^2)(p_1^2 - (m_{1,1} - m_3 - m_4)^2) > 0 \quad (\text{I.210})$$

$$G_b = (p_1^2 - (m_{1,1} - m_3 + m_4)^2)(p_1^2 - (m_{1,1} + m_3 - m_4)^2) > 0 \quad (\text{I.211})$$

was erfüllt ist für

$$p_1^2 > (m_{1,1} + m_3 + m_4)^2 \quad (\text{I.212})$$

**I.3.2.6 Fall  $b_{3,5} = 0$** 

Hier gilt

$$\nu_4 = (e_2 - q_z)^2 \quad (\text{I.213})$$

Als Diskriminanten erhalten wir

$$G_a = (p_2^2 - (m_{1,1} + m_3 + m_5)^2)(p_2^2 - (m_{1,1} - m_3 - m_5)^2) > 0 \quad (\text{I.214})$$

$$G_b = (p_2^2 - (m_{1,1} - m_3 + m_5)^2)(p_2^2 - (m_{1,1} + m_3 - m_5)^2) > 0 \quad (\text{I.215})$$

was erfüllt ist für

$$p_2^2 > (m_{1,1} + m_3 + m_5)^2 \quad (\text{I.216})$$

**I.3.2.7 Andere  $b = 0$** 

Alle anderen lassen sich entweder durch Umbenennung der Massen auf die benannten zurückführen, oder sie treten nur in Gebieten auf, die beim Grenzübergang verschwinden. Insbesondere erhält man durch Ersetzung der Abzugsmassen im Fall der anderen Abzugsterme in  $k$  sofort die Lösungen für die Schwellen.

Über die Abzugsterme in  $l$  gilt das bereits Erwähnte. Ihre Behandlung verläuft analog zum Fall der  $b_{i,6}$ , da ihre Struktur dieselbe ist. Man muß hier lediglich die Masse  $m_6$  durch die jeweiligen Abzugsmassen ersetzen, um die Bedingungen für Schwellen zu erhalten.

**I.3.2.8 Zusammenfassung der Dreiteilchenschnitte**

Treten Dreiteilchenschnitte auf, so ist dies jeweils mit positivem  $b_{n,m}$  verbunden. Der vom Propagatorfaktor  $P_3$  herrührende Linie ist immer im Dreiteilchenschnitt inbegriffen. Die Indizes  $n$  beziehen sich jeweils auf den Index des Propagators im Schleifenimpuls  $k$  nach Indextransformation in  $n$  gemäß (6.41). Der Index  $m$  bezieht sich im Fall der planaren Topologie auf die Propagatornummer des jeweiligen Propagators in  $l$ , im Fall der gedrehten reduzierten planaren Topologien muß noch die Indextransformation (6.129) berücksichtigt werden.

**I.3.3 Zusammenfassung**

Zusammenfassend gilt, daß die Schnitte, wie man sie entweder aus den Cutcosky-Regeln [Cu60] oder aus den Landau-Gleichungen herleitet, sich direkt in den Parametern widerspiegeln, die im Verlauf der P/O-Integration auftreten. Schnitte und Imaginärteile treten auf, wenn die entsprechenden Parameter Null werden bzw. ein entsprechender Vorzeichenwechsel auftritt.



## **Anhang J**

### **Andere Methoden zur Evaluation von Vertexintegralen**

Wir skizzieren im Folgenden kurz die Zugänge anderer Arbeitsgruppen zur Evaluation von massiven Zweischleifen–Vertexfunktionen. Dabei geben wir am Ende der jeweiligen Darstellung eine Liste der wichtigsten Veröffentlichungen dieser Gruppen hinsichtlich der Berechnungen von massiven Zweischleifen–Vertexfunktionen an.

## J.1 Methode Ghinculov *et al.*

Der Ausgangspunkt ist ein beliebiges  $n$ -Punkt–Zweischleifen–Tensorintegral der Form

$$\int d^D k d^D l \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_n} l^{\nu_1} \dots l^{\nu_m}}{\prod_{i=1}^a [(k+p_i)^2 - m_i^2]^{\alpha_i} \prod_{j=1}^b [(l+p_j)^2 - m_j^2]^{\beta_j} \prod_{n=1}^c [(k+l+p_n)^2 - m_n^2]^{\gamma_n}}$$

Feynmanparametrisierung führt auf Integrale der Form

$$\int dX \int d^D k_E d^D l_E \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_n} l^{\nu_1} \dots l^{\nu_m}}{[(k+p)^2 + m_1^2]^x [l^2 + m_2^2]^y [(k+l)^2 + m_3^2]^z}$$

wobei  $p$  und die  $m_i$  von den Feynmanparametern (und den externen Impulsen sowie internen Massen) abhängig sind. Die Schleifenimpulse sind jetzt euklidisch, die Wick–Rotationen wurden durchgeführt. Die Anzahl der Feynmanparameter ist im Allgemeinen die Zahl der Propagatornennern minus 3.

Im nächsten Schritt werden die Terme im Zähler auf den Parallelraum und skalare Funktionen reduziert, es wird verwendet

$$k^\mu = k_\perp^\mu + \frac{p \cdot k}{p^2} p^\mu \quad l^\mu = l_\perp^\mu + \frac{p \cdot l}{p^2} p^\mu$$

Dann erhält man Integrale der Form

$$\int dX \int d^D k_E d^D l_E \frac{k_\perp^{\mu_1} \dots k_\perp^{\mu_n} l_\perp^{\nu_1} \dots l_\perp^{\nu_m} (k \cdot p)^a (l \cdot p)^b}{[(k+p)^2 + m_1^2]^x [l^2 + m_2^2]^y [(k+l)^2 + m_3^2]^z}$$

Da die Parallelraumkomponenten immer nur in gerader Anzahl im Zähler vorkommen können (ansonsten verschwindet das Integral), lassen sich schließlich (durch Kovariantenzerlegung und Lösen eines linearen Gleichungssystems) die Integrale weiter umformen zu Integralen der Form

$$P_{xyz}^{ab}(m_1, m_2, m_3, p^2) = \int dX \int d^D k_E d^D l_E \frac{(k \cdot p)^a (l \cdot p)^b}{[(k+p)^2 + m_1^2]^x [l^2 + m_2^2]^y [(k+l)^2 + m_3^2]^z}$$

Diese Integrale lassen sich mittels Rekursionsrelationen analytisch (Differentiationen, Summenbildungen u.ä.) auf einen begrenzten Satz von Integralen zurückführen. Für renormierbare Theorien sind 10 Basisintegrale nötig. Sie werden mit  $P_{211}^{00} \dots P_{211}^{ij}$  (mit  $i+j \leq 3$ )

benannt. Durch weitere Linearkombinationen werden diese durch 10 äquivalente Basisintegrale  $H_i$ ,  $i = 1 \dots 10$ , ausgedrückt.

Diese  $H_i(m_1, m_2, m_3, p^2)$  werden dann integriert. Der UV-divergente Anteil läßt sich analytisch darstellen. Der UV-endliche Anteil wird durch 10 weitere Funktionen  $h_i$  dargestellt. Diese 10  $h_i(m_1, m_2, m_3, p^2)$  sind durch eine eindimensionale numerische Integration zu berechnen (also in jedem Punkt, der für die numerische Integration über die Feynmanparameter evaluiert wird). Für diese Integration müssen vier weitere Basisfunktionen in verschiedenen Kombinationen numerisch integriert werden. Gegebenenfalls sind auch (wegen den durch Rekursionsrelationen bei der Reduktion nötig gewordenen Ableitungen) Integrationen von Ableitungen dieser Funktionen nötig. Die Ableitungen können aber analytisch berechnet werden.

Bei der numerischen Integration der  $h_i$  ist darauf zu achten, daß der Integrationsweg im Allgemeinen im Komplexen gewählt werden muß, um (analytisch bestimmbare) Singularitäten zu umgehen.

Insgesamt berechnet sich die Zahl der numerisch durchzuführenden Integrationen auf: Zahl der Propagatorenner minus 2.

Die Methode wurde neben etlichen Anwendungen für Zweipunktfunktionen auch an Dreipunktfunktionen getestet. Berechnet wurden damit die Graphen, die für  $Z^0 \rightarrow b\bar{b}$  in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s g^2)$  benötigt werden und mindestens eine innere Linie mit top-Quark enthalten. Konkrete Ergebnisse für Vertexintegrale mit mehreren Massenskalen wurden allerdings bisher nicht publiziert.

Literatur: [Gh94, Gh95, Gh97, Gh00a, Gh00b, Gh01]

## J.2 Methode Passarino/Uccirati *et al.*

Zur Berechnung der Zweischleifenintegrale werden nach allen möglichen Tensorreduktionen Feynmanparameter im Subloop mit den meisten Propagatoren eingeführt. Danach wird in diesem die Schleifenintegration ausgeführt. Hernach werden auch für den Rest Feynmanparameter eingeführt und dann die Schleifenintegration des zweiten Impulses durchgeführt. Es wird eine Laurent-Entwicklung um  $D = 4 - \epsilon$  durchgeführt. Die Integration der Feynmanparameter der divergenten Anteile kann analytisch durchgeführt werden.

Der endliche Anteil ist numerisch zu berechnen. Die zu integrierenden Funktionen sind Polynome und Logarithmen von Polynomen, die mit negativem Grad auftreten. Da dies zu numerischen Instabilitäten führen kann, wird mit Hilfe der Bernstein-Tkachov-Identität [Tk97, Be66]

$$P(x, \partial) \prod_i V_i^{\mu_i+1}(x) = B \prod_i V_i^{\mu_i}(x)$$

versucht, den Grad zu erhöhen. Dies geschieht im Falle von Ableitungen durch partielle Integration. Allgemeine Lösungen für  $P$  sind aber nur für den Fall quadratischer Polynome bekannt. Diese lassen sich lediglich auf Einschleifen-Graphen anwenden. Deshalb wird der Formalismus im Fall von Zweischleifenintegralen so auf die feynmanparameter-abhängigen Funktionen angewendet, daß nur der größte Subloop betrachtet wird. Denn

die zu integrierenden Funktionen haben, betrachtet man sie als Funktionen lediglich der Feynmanparameter, die für einen Subloop verwendet werden, wieder die vom Einloop-Fall bekannte Struktur. Dann wird im größten Subloop der Formalismus angewendet. Unter Umständen führt man dabei aber auf der Integrationskontur analytisch bestimmbare neue Singularitäten ein. Diese müssen durch eine Transformation der Feynmanparameter umgangen werden. Dies trifft im Schwellenbereich zu. Da aber zumeist Singularitäten auf dem reellen Integrationsweg verbleiben, ist der Integrationsweg analog zu Ghinculov ins Komplexe zu verschieben. Auf diesem muß dann numerisch in den Feynmanparameter integriert werden. Die erreichte Präzision liegt bei bis zu  $10^{-5}$ .

Die Autoren haben die Methode sowohl an massiven Zweischleifen-Zweipunkt-Funktionen mit verschiedenen Massen und Impulsen erfolgreich getestet, als auch an Dreipunktfunktionen. Auch Tensorintegrale können reduziert und evaluiert werden. Die Präzision ihrer Ergebnisse der Integration der Vertexintegrale mit trivialem Zähler ist beeindruckend, insbesondere was die Möglichkeit von extrem verschiedenen Skalen anbelangt.

Mit ihrer Methode wurden inzwischen auch die fermionischen NNLO-Korrekturen zum schwachen leptonischen Mischungswinkel evaluiert [Ho05].

Literatur: [Pa01a, Pa01b, Fe04, Ac04]

### J.3 Methode Remiddi/Bonciani *et al.*

Diese Arbeitsgruppe behandelt insbesondere die Spezialfälle von QED-Korrekturen mit massiven Elektronen sowie von QCD-Korrekturen mit schweren Quarks zu elektroschwachen Formfaktoren. Es werden auch elektroschwache Formfaktoren berechnet, dann aber mit degenerierten Massen der  $Z^0$ ,  $W^\pm$ -Bosonen sowie des Higgs-Bosons. Die Berechnung von allgemeinen massiven Zweischleifendreipunkt-Funktionen ist nicht Gegenstand der Publikationen dieser Gruppe. Die Berechnungen werden vollständig analytisch durchgeführt. Zuerst werden mit Hilfe von Identitäten, die sich durch partielle Integration, Lorentzinvarianz und Symmetrierelationen durch Verschieben von Schleifenimpulsen ergeben, die auftretenden Integrale auf einen Satz von Masterintegralen reduziert. Diese Reduktion erfordert das Aufstellen und Lösen von linearen Gleichungssystemen.

Die verbleibenden Masterintegrale müssen dann berechnet werden. Sie wurden möglichst einfach gewählt. Die Wahl ist nicht zwingend. Man kann sie sowohl so wählen, daß sie keine Zählerstruktur enthalten, oder aber auch mit skalarer Zählerstruktur. Sind nicht genügend Propagatoren zum Kürzen aller skalaren Terme im Nenner vorhanden, kann ein Hilfsdiagramm mit mehr Propagatoren eingeführt werden. Durch Linearkombinationen von skalaren Integralen (ohne Zähler) können dann alle Integrale mit Zähler durch solche ohne Zähler ausgedrückt werden.

Durch Differentiation in den äußeren Impulsen erhält man für die Masterintegrale nach Einführen von Mandelstam-Variablen Differentialgleichungen, die nach einer Laurent-Entwicklung in  $\epsilon = 4 - D$  Ordnung für Ordnung mit Hilfe der Eulerschen Variationsmethode analytisch gelöst werden. Die dabei auftretenden Funktionen sind Harmonische Polylogarithmen.



Mit der gleichen Methode werden Masterintegrale für einen inneren massiven Propagator und ein massives äußeres Teilchen für Zweischleifen–Dreipunkt–Funktionen berechnet.

Weitere ähnlich gelagerte Vertexfunktionen wurden neuerdings berechnet, aber immer nur mit wenigen Massenskalen.

Darüber hinaus wurden für die Sunrise–Topologie für beliebige Massen durch numerisches Lösen der Differentialgleichungen Ergebnisse für spezielle Massen berechnet.

Literatur: [Ag03, Ag04, Be04a, Be04b, Bo03a, Bo04, Bo03c, Bo03b, Ca98, Ca02a, Ca02b, Ca02c, Ma02b, Ma02a, Re97]

## J.4 Bemerkungen

Die Berechnungen der fermionischen NNLO–Korrekturen zum schwachen leptonischen Mischungswinkels wurden für Graphen ohne top–Quark bei [Aw04a] mit den Methoden von Remiddi, Bonciani *et al.* durchgeführt.

Da neben Passarino/Uccirati *et al.* keine weiteren Gruppen wesentliche Fortschritte in der Evaluation allgemeiner massiver Vertexgraphen mit Tensorstruktur aufweisen können, ist unsere Methode weiterhin von Bedeutung, da dadurch eine vollständig unabhängige Methode geschaffen wird und teilweise bereits existiert, welche ebenso das Ziel hat, allgemeine massive Vertexgraphen mit hoher numerischer Präzision zu berechnen. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit lassen vermuten, daß dieses Ziel mit den von uns verwendeten Methoden erreichbar ist. Die Präzision, mit welcher wir die vorliegenden Masterintegrale berechnen konnten, kann als deutlicher Hinweis dafür betrachtet werden. Ein Vorteil unserer Methode liegt auch darin, daß wir Real– und Imaginärteil analytisch separieren können, vgl. Anhang E. Dadurch werden auch eventuelle „doppelte“ Imaginärteile analytisch zum Realteil gezählt.



# Literaturverzeichnis

- [Ac04] S. Actis, A. Ferroglia, G. Passarino, M. Passera und S. Uccirati, Nucl. Phys. B **703** (2004) 3 [arXiv:hep-ph/0402132].
- [Ag03] U. Aglietti und R. Bonciani, Nucl. Phys. B **668** (2003) 3 [arXiv:hep-ph/0304028].
- [Ag04] U. Aglietti und R. Bonciani, Nucl. Phys. B **698** (2004) 277 [arXiv:hep-ph/0401193].
- [An04] A. Andonov *et al.*, arXiv:hep-ph/0411186.
- [Ar05] A. B. Arbuzov *et al.*, arXiv:hep-ph/0507146.
- [Aw04a] M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas und G. Weiglein, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 201805 [arXiv:hep-ph/0407317].
- [Aw04b] M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas und G. Weiglein, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **135** (2004) 119 [arXiv:hep-ph/0408207].
- [Aw04c] M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas und G. Weiglein, arXiv:hep-ph/0409142.
- [Ba94a] S. Bauberger, F. A. Berends, M. Böhm und M. Buza, Nucl. Phys. B **434** (1995) 383 [arXiv:hep-ph/9409388].
- [Ba94b] S. Bauberger, M. Böhm, G. Weiglein, F. A. Berends und M. Buza, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **37B** (1994) 95 [arXiv:hep-ph/9406404].
- [Ba00] C. Bauer, A. Frink und R. Kreckel, arXiv:cs.sc/0004015.
- [Ba01a] C. Bauer und H.S. Do, Comput. Phys. Commun. **144** (2002) 154 [arXiv:hep-ph/0102231].
- [Ba04] C. Bauer, Dissertation, Universität Mainz, 2004
- [Ba01b] D.Y. Bardin, J. Phys. G **29** (2003) 75 [arXiv:hep-ph/0101295].
- [Be66] L.N. Bernstein, Functional Analysis and its Application **6** (1972) 66
- [Be04a] W. Bernreuther, R. Bonciani, T. Gehrmann, R. Heinesch, T. Leineweber, P. Mastrolia und E. Remiddi, Nucl. Phys. B **706** (2005) 245 [arXiv:hep-ph/0406046].

- [Be04b] W. Bernreuther, R. Bonciani, T. Gehrmann, R. Heinesch, T. Leineweber, P. Mastrolia und E. Remiddi, Nucl. Phys. B **712** (2005) 229 [arXiv:hep-ph/0412259].
- [Bj64] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill, Inc. 1964
- [Bl37] F. Bloch und A. Nordsieck, Phys. Rev. **52** (1937) 54.
- [Bö01] M. Böhm, A. Denner, H. Joos, Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interactions, Teubner 2001
- [Bo03a] R. Bonciani, P. Mastrolia und E. Remiddi, Nucl. Phys. B **676** (2004) 399 [arXiv:hep-ph/0307295].
- [Bo03b] R. Bonciani, P. Mastrolia und E. Remiddi, Nucl. Phys. B **661** (2003) 289 [Erratum-ibid. B **702** (2004) 359] [arXiv:hep-ph/0301170].
- [Bo03c] R. Bonciani, P. Mastrolia und E. Remiddi, Nucl. Phys. B **690** (2004) 138 [arXiv:hep-ph/0311145].
- [Bo04] R. Bonciani, A. Ferroglia, P. Mastrolia, E. Remiddi und J. J. van der Bij, Nucl. Phys. B **701** (2004) 121 [arXiv:hep-ph/0405275].
- [Br75] P. Breitenlohner und D. Maison, Commun. Math. Phys. **52** (1977) 39.
- [Br76] P. Breitenlohner und D. Maison, Commun. Math. Phys. **52** (1977) 55.
- [Br77] P. Breitenlohner und D. Maison, Commun. Math. Phys. **52** (1977) 11.
- [Br91] Bronstein–Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Teubner 1991
- [Ca98] M. Caffo, H. Czyz, S. Laporta und E. Remiddi, Nuovo Cim. A **111** (1998) 365 [arXiv:hep-th/9805118].
- [Ca02a] M. Caffo, H. Czyz und E. Remiddi, Nucl. Phys. B **634** (2002) 309 [arXiv:hep-ph/0203256].
- [Ca02b] M. Caffo, H. Czyz und E. Remiddi, Nucl. Instrum. Meth. A **502** (2003) 613 [arXiv:hep-ph/0211171].
- [Ca02c] M. Caffo, H. Czyz und E. Remiddi, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **116** (2003) 422 [arXiv:hep-ph/0211178].
- [Co84] J. Collins, Renormalization, Cambridge 1984
- [Cu60] R. E. Cutkosky, J. Math. Phys. **1** (1960) 429.
- [Cz94] A. Czarnecki, U. Kilian und D. Kreimer, Nucl. Phys. B **433** (1995) 259 [arXiv:hep-ph/9405423].

- [Dj93] A. Djouadi, M. Spira und P. M. Zerwas, Phys. Lett. B **311** (1993) 255 [arXiv:hep-ph/9305335].
- [Do03] H.S. Do, Dissertation, Universität Mainz, 2003
- [Fe04] A. Ferroglia, M. Passera, G. Passarino und S. Uccirati, Nucl. Phys. B **680** (2004) 199 [arXiv:hep-ph/0311186].
- [Fl94a] J. Fleischer und O. V. Tarasov, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **37B** (1994) 115 [arXiv:hep-ph/9407235].
- [Fl94b] J. Fleischer und O. V. Tarasov, Z. Phys. C **64** (1994) 413 [arXiv:hep-ph/9403230].
- [Fl97] J. Fleischer, V. A. Smirnov, A. Frink, J. G. Körner, D. Kreimer, K. Schilcher und J. B. Tausk, Eur. Phys. J. C **2** (1998) 747 [arXiv:hep-ph/9704353].
- [Fr96a] A. Frink, Diplomarbeit, Universität Mainz, 1996
- [Fr96b] A. Frink, B. A. Kniehl, D. Kreimer und K. Riesselmann, Phys. Rev. D **54** (1996) 4548 [arXiv:hep-ph/9606310].
- [Fr96c] A. Frink, U. Kilian und D. Kreimer, Nucl. Phys. B **488** (1997) 426 [arXiv:hep-ph/9610285].
- [Fr97] A. Frink, J. G. Körner und J. B. Tausk, Proc. Joint Particle Physics Meeting (Ouranoupolis, Greece, May 1997), p.175-200. [arXiv:hep-ph/9709490]
- [Fr99] A. Freitas, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 1999
- [FrPr] A. Freitas, private Kommunikation
- [Fr00] A. Frink, Dissertation, Universität Mainz, 2000
- [Fr01] A. Frink, Programm in C++ zur Evaluation von planaren Integralen mit trivialer Zählerstruktur, dankenswerterweise zur Verfügung gestellt
- [Fr05] A. Freitas, M. Awramik und M. Czakon, arXiv:hep-ph/0507159.
- [Ge83] A. Genz, A. Malik, *SIAM J Numer. Anal.* **20** (1983) 580.
- [Gh94] A. Ghinculov und J. J. van der Bij, Nucl. Phys. B **436** (1995) 30 [arXiv:hep-ph/9405418].
- [Gh95] A. Ghinculov, Nucl. Phys. B **455** (1995) 21 [arXiv:hep-ph/9507240].
- [Gh97] A. Ghinculov und Y. P. Yao, Nucl. Phys. B **516** (1998) 385 [arXiv:hep-ph/9702266].
- [Gh00a] A. Ghinculov und Y. P. Yao, Mod. Phys. Lett. A **15** (2000) 1967 [arXiv:hep-ph/0004201].

- [Gh00b] A. Ghinculov und Y. P. Yao, Phys. Rev. D **63** (2001) 054510 [arXiv:hep-ph/0006314].
- [Gh01] A. Ghinculov und Y. P. Yao, in *Proc. of the 5th International Symposium on Radiative Corrections (RADCOR 2000)* ed. Howard E. Haber, arXiv:hep-ph/0106020.
- [Gr98] S. Groote, J. G. Körner und A. A. Pivovarov, Nucl. Phys. B **542** (1999) 515 [arXiv:hep-ph/9806402].
- [Gr99] S. Groote, J. G. Körner und A. A. Pivovarov, Eur. Phys. J. C **11** (1999) 279 [arXiv:hep-ph/9903412].
- [Gr04] S. Groote, J. G. Körner und A. A. Pivovarov, Eur. Phys. J. C **36** (2004) 471 [arXiv:hep-ph/0403122].
- [Gr05] S. Groote und M. M. Knodel, arXiv:hep-ph/0508173.
- [Ha98] R. Harlander und M. Steinhauser, Prog. Part. Nucl. Phys. **43** (1999) 167 [arXiv:hep-ph/9812357].
- [Ha01] A. F. W. van Hameren, arXiv:hep-ph/0101094.
- [Ha00] T. Hahn, Comput. Phys. Commun. **140** (2001) 418 [arXiv:hep-ph/0012260].
- [Ha04] T. Hahn, arXiv:hep-ph/0404043.
- [He00] S. Heinemeyer und G. Weiglein, arXiv:hep-ph/0012364.
- [He04] S. Heinemeyer, arXiv:hep-ph/0408269.
- [Ho00] W. Hollik, G. Duckeck, “Electroweak Precision Tests at LEP”, Springer 2000
- [Ho04] W. Hollik *et al.*, Acta Phys. Polon. B **35** (2004) 2533 [arXiv:hep-ph/0501246].
- [Ho05] W. Hollik, U. Meier und S. Uccirati, arXiv:hep-ph/0507158.
- [Ja91] M. Jamin und M. E. Lautenbacher, Comput. Phys. Commun. **74** (1993) 265.
- [Je01] F. Jegerlehner, Eur. Phys. J. C **18** (2001) 673 [arXiv:hep-th/0005255].
- [Ki62] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.
- [Kl05] R. H. Kleiss und A. Lazopoulos, arXiv:hep-ph/0504085.
- [Kr91] D. Kreimer, Phys. Lett. B **273** (1991) 277.
- [Kr92a] D. Kreimer, Dissertation, Universität Mainz, 1992
- [Kr92b] D. Kreimer, Phys. Lett. B **292** (1992) 341.

- [Kr92c] D. Kreimer, Phys. Atom. Nucl. **56** (1993) 1546 [arXiv:hep-ph/9212254].
- [Kr93a] D. Kreimer, Mod. Phys. Lett. A **9** (1994) 1105 [arXiv:hep-ph/9312223].
- [Kr93b] D. Kreimer, arXiv:hep-ph/9401354.
- [Ko91] J. G. Körner, D. Kreimer und K. Schilcher, Z. Phys. C **54** (1992) 503.
- [Ki96] U. Kilian, Dissertation, Universität Mainz, 1996
- [Kr97] R. Kreckel: Parallelization of adaptive MC Integrators; MZ-TH/97-30; physics/9710028; Comp. Phys. Comm., 106, 258-266
- [Kr98] R. Kreckel, D. Kreimer und K. Schilcher, Eur. Phys. J. C **6** (1999) 693 [arXiv:hep-ph/9804333].
- [La59] L. D. Landau, Nucl. Phys. **13** (1959) 181.
- [Le64] T. D. Lee und M. Nauenberg, Phys. Rev. **133** (1964) B1549.
- [Le80] G. P. Lepage, CLNS-80/447
- [Le81] L.D. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*. North Holland, Amsterdam, 1981.
- [Le04] [LEP Collaborations], Report No. LEPEWWG/2004-01, CERN-PH-EP/2004-069 (Dec 2004), arXiv:hep-ex/0412015.
- [Ma02a] P. Mastrolia und E. Remiddi, Nucl. Phys. B **657** (2003) 397 [arXiv:hep-ph/0211451].
- [Ma02b] P. Mastrolia und E. Remiddi, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **116** (2003) 412 [arXiv:hep-ph/0211210].
- [Math] **Mathematica**. Computer Algebra System. WOLFRAM RESEARCH Inc.. <http://www.wolfram.com/>
- [MaWo] Mathworld, WOLFRAM RESEARCH Inc.. <http://mathworld.wolfram.com/>
- [Mu98] T. Muta, World Sci. Lect. Notes Phys. **57** (1998) 1.
- [Pa78] G. Passarino und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **160** (1979) 151.
- [Pa01a] G. Passarino und S. Uccirati, Nucl. Phys. B **629** (2002) 97 [arXiv:hep-ph/0112004].
- [Pa01b] G. Passarino, Nucl. Phys. B **619** (2001) 257 [arXiv:hep-ph/0108252].
- [Pd05] Electroweak model and constraints on new physics (Rev.), <http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/stanmodelrpp.pdf>

- [Po96] P. Post und J.B. Tausk, *Mod. Phys. Lett. A* **11** (1996) 2115 [arXiv:hep-ph/9604270].
- [Po97] P. Post, Dissertation, Universität Mainz, 1997
- [Po00] P. Post und K. Schilcher, *Nucl. Phys. B* **599** (2001) 30 [arXiv:hep-ph/0007095].
- [Pr90] W.H. Press, G.R. Farrar, *Comp. in Phys.* **4** (1990) 190.
- [Pr92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press 1992
- [Re97] E. Remiddi, *Nuovo Cim. A* **110** (1997) 1435 [arXiv:hep-th/9711188].
- [Su56] V. V. Sudakov, *Sov. Phys. JETP* **3** (1956) 65 [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30** (1956) 87].
- [Te01] TESLA. The Superconducting Electron-Positron Linear Collider with an Integrated X-Ray Laser Laboratory. Technical Design Report. DESY 2001-011, ECFA 2001-209, TESLA Report 2001-23, TESLA-FEL 2001-05, March 2001
- [Tk97] F.V. Tkatchov, *Nucl.Instrum.Meth. A* **389** (1997) 309
- [Uc04] S. Uccirati, *Acta Phys. Polon. B* **35** (2004) 2573 [arXiv:hep-ph/0410332].
- [WaMa] **Maple**. Computer Algebra System. Waterloo Maple Software.  
<http://www.maplesoft.com/>
- [We95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge 1995
- [We03] G. Weiglein, *Eur. Phys. J. C* **33** (2004) S630 [arXiv:hep-ph/0312314].
- [We04] G. Weiglein *et al.* [LHC/LC Study Group], arXiv:hep-ph/0410364.