

**Anwendung der geoelektrischen 3D-Tomographie für die Analyse  
thermisch induzierter Strömungen im Labor**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Chemie, Pharmazie und Geowissenschaften  
der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

von Dipl. Geophys. Melanie Bock

geboren in Lutherstadt Wittenberg

Mainz, 2008

Dekan:

1. Berichterstatter:

2. Berichterstatter:

Tag der mündlichen Prüfung: 12.12.2008

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von 2005 bis 2008 im Rahmen des Graduiertenkollegs „Stoffbestand und Entwicklung von Kruste und Mantel“, welches vom Institut für Geowissenschaften der Johannes-Gutenberg-Universität und dem Max-Planck-Institut für Chemie in Mainz getragen wurde. Die Finanzierung des Graduiertenkollegs und damit auch meiner Arbeit erfolgte durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft und das Land Rheinland-Pfalz, wofür ich mich auf diesem Wege bedanke.

Die Schott AG stellte mir den Versuchsaufbau und den Laborraum für die Anfertigung der Doktorarbeit auf dem Gelände des Hauptwerks in Mainz zur Verfügung. Für die Übernahme dieser Kosten sowie für die Unterstützung in Form eines Stipendiums nach dem Auslaufen der Finanzierung des Graduiertenkollegs bedanke ich mich ebenfalls bei der Schott AG.

Mein Dank gilt besonders meinem Doktorvater, der mir dieses interessante Thema anvertraut und mich trotz der großen Entfernung von Australien aus weiterhin betreut hat.

Der Zweitgutachterin bin ich für die Erstellung des Gutachtens und die Abnahme der Doktorprüfung ebenfalls dankbar.

Des Weiteren danke ich meinen beiden Betreuern von der Schott AG Mainz, die mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite standen und wesentlich zur Lösung der technischen Probleme am Versuchsaufbau beigetragen haben.

Besonders herzlich möchte ich mich bei dem Entwickler des Inversionsprogramms bedanken. Ohne die Bereitstellung des Programms und die Einweisung in dessen Anwendung sowie die Hilfe bei der umfangreichen Suche nach den Fehlern in der Messapparatur wäre die Anfertigung dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Mein Dank gilt außerdem dem Sprecher des Graduiertenkollegs sowie dem fachfremden Prüfer von der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz für die Abnahme der Doktorprüfung.

Überdies möchte ich allen bisher nicht genannten Mitarbeitern der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz sowie der Schott AG Mainz, die mir bei meiner Arbeit zur Seite standen, meinen Dank aussprechen.

Schließlich bedanke ich mich ganz herzlich bei meinem Lebenspartner, meiner Familie und meinen Freunden für das Interesse an meiner Arbeit und das Verständnis für die teilweise recht wenige Zeit, die ich für sie aufbringen konnte.

# Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung .....	1
2. Stand von Forschung und Technik - Zielstellung .....	2
2.1. Erforschung des Erdmantels.....	2
2.2. Temperaturmessverfahren.....	6
2.3. Geoelektrische Temperaturmessung .....	10
2.4. Ziel der Forschungsarbeit.....	11
3. Physikalische Grundlagen.....	12
3.1. Geodynamik .....	12
3.2. Impedanztomographie.....	18
4. Mess- und Inversionsmethoden.....	24
4.1. Versuchsaufbau und Funktionsweise der Anlage .....	24
4.2. Fehlerquellen und Datenqualität .....	29
4.2.1. Digitalisierung und zeitlich begrenzte Datenerfassung.....	29
4.2.2. Störsignale und elektrochemische Effekte .....	32
4.3. Digitale Filter .....	36
4.4. Inversionsverfahren.....	44
5. Durchführung der Experimente.....	50
5.1. Versuchsflüssigkeit .....	50
5.2. Bestimmung der Parameter der VFT-Gleichung .....	56
5.3. Erzeugung von Strömungen im Versuchsbecken.....	61
5.4. Aufnahme der Messwerte.....	64
5.5. Auswertung der Messungen.....	71
6. Ergebnisse .....	78
6.1. Geodynamische Größen .....	79
6.2. Generierung eines langsam absinkenden Plumes.....	83
6.3. Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung 1 .....	85
6.3.1. Experimente mit dem PEG-VE-Wasser-Gemisch .....	85
6.3.2. Experimente mit dem Gemisch aus PEG, VE-Wasser und Leitungswasser.....	88
6.4. Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung 2 .....	91
6.4.1. Experimente ohne wärmeleitende Bodenplatte.....	91
6.4.2. Experimente mit wärmeleitender Bodenplatte.....	98
7. Modellierungen .....	107
7.1. Veränderung der Füllstände .....	107
7.2. Einfluss der Verdunstung.....	110
7.3. Räumliches Auflösungsvermögen.....	114
7.4. Räumliches Auflösungsvermögen bei erhöhter Datenanzahl .....	119



8. Diskussion .....	123
9. Zusammenfassung .....	131
10. Abstract .....	133
Anhang .....	135
A.1. Entwurf nichtrekursiver Filter .....	135
A.2. Plan für die Pinbelegung in der SCB 100 - Box.....	138
A.3. Positionen der Elektroden und Thermoelemente .....	139
A.3.1. Positionen der Thermoelemente .....	139
A.3.2. Positionen der Elektroden .....	140
Abbildungsverzeichnis .....	143
Tabellenverzeichnis.....	148
Literaturverzeichnis.....	150

# 1. Einleitung

Sowohl in der Natur als auch in der Industrie existieren thermisch induzierte Strömungen. Von Interesse für diese Forschungsarbeit sind dabei die Konvektionen im Erdmantel sowie in den Glasschmelzwannen. Der dort stattfindende Materialtransport resultiert aus Unterschieden in der Dichte, der Temperatur und der chemischen Konzentration innerhalb des konvektierenden Materials. Um das Verständnis für die ablaufenden Prozesse zu verbessern, werden von zahlreichen Forschergruppen numerische Modellierungen durchgeführt. Die Verifikation der dafür verwendeten Algorithmen erfolgt meist über die Analyse von Laborexperimenten.

Im Vordergrund dieser Forschungsarbeit steht die Entwicklung einer Methode zur Bestimmung der dreidimensionalen Temperaturverteilung für die Untersuchung von thermisch induzierten Strömungen in einem Versuchsbecken. Eine direkte Temperaturmessung im Inneren des Versuchsmaterials bzw. der Glasschmelze beeinflusst allerdings das Strömungsverhalten. Deshalb wird die geodynamisch störungsfrei arbeitende Impedanztomographie verwendet. Die Grundlage dieser Methode bildet der erweiterte Arrhenius-Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischer elektrischer Leitfähigkeit.

Während der Laborexperimente wird ein zähflüssiges Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch in einem Becken von unten her erhitzt. Die auf diese Weise generierten Strömungen stellen unter Berücksichtigung der Skalierung ein Analogon sowohl zu dem Erdmantel als auch zu den Schmelzwannen dar. Über mehrere Elektroden, die an den Beckenwänden installiert sind, erfolgen die geoelektrischen Messungen. Nach der sich anschließenden dreidimensionalen Inversion der elektrischen Widerstände liegt das Modell mit der Verteilung der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit im Inneren des Versuchsbeckens vor. Diese wird mittels der erweiterten Arrhenius-Formel in eine Temperaturverteilung umgerechnet.

Zum Nachweis der Eignung dieser Methode für die nichtinvasive Bestimmung der dreidimensionalen Temperaturverteilung wurden mittels mehrerer Thermoelemente an den Beckenwänden zusätzlich direkte Temperaturmessungen durchgeführt und die Werte miteinander verglichen. Im Wesentlichen sind die Innentemperaturen gut rekonstruierbar, wobei die erreichte Messgenauigkeit von der räumlichen und zeitlichen Auflösung der Gleichstromgeoelektrik abhängt.

## **2. Stand von Forschung und Technik - Zielstellung**

### ***2.1. Erforschung des Erdmantels***

Da die Strömungsvorgänge im Erdmantel Auswirkungen auf die Prozesse in der Lithosphäre haben, besteht an der Erforschung des Mantels ein starkes wissenschaftliches Interesse. Angetrieben durch Unterschiede in der Temperatur, der Dichte und der Konzentration existieren zwei verschiedene Arten der Mantelkonvektion. Der dominierende Typ ist mit der Plattentektonik verknüpft, während die zweite Form der Konvektion die Bildung von Mantelplumes beinhaltet.

Mit verschiedenen Methoden wird das Wissen über den Erdmantel permanent erweitert. Die Untersuchung der Topographie der Erde sowie der Bewegung und Verformung der Lithosphäre liefert erste Hinweise auf die Prozesse im Erdmantel. Geodätische Messungen aus dem Orbit der Erde ermöglichen eine weltweit bis auf  $10^{-3}$  m genaue Kartierung von zyklischen erdbebenbezogenen Bewegungen, episodischen Deformationsereignissen sowie kontinuierlichen Bewegungen krustaler Blöcke an den Plattengrenzen von Subduktionszonen. Einige Forschergruppen wie FEIGL et al. (2006) und PAVEZ et al. (2006) werten deshalb die Daten aus, die mit der satellitengestützten Radarinterferometrie (InSAR) und dem Globalen Positionsbestimmungssystem (GPS) in Kombination mit kontinuierlichen Stationen auf der Erdoberfläche sowie der Aerofotogrammetrie aus dem Flugzeug heraus gewonnen werden.

Mit der Bathymetrie und der marinen Seismik kann die Topographie des Meeresbodens einschließlich der Versätze, die von Erdbeben herrühren, erkundet werden (z. B. GÜNTHER et al., 2008 und KHERROUBI et al., 2008). Die Seismik erlaubt zudem tiefe Einblicke sowohl in die kontinentale als auch in die ozeanische Kruste und sogar in den Erdmantel. Auf diese Weise konnten zum Beispiel BOHNHOFF et al. (2001) und YOON et al. (2008) eine abtauchende Subduktionszunge lokalisieren und deren Umgebung analysieren.

Die geodynamischen Prozesse in der Erde verursachen Spannungen, die sich durch Erdbeben im festen Bereich der Lithosphäre abbauen. Über die Berechnung der Lage der Hypozentren lässt sich ebenfalls der Verlauf einer Subduktionszunge bestimmen (z. B. ABERS et al., 2006 und CHOU et al., 2006). Die Seismologie bietet allerdings noch eine weitere Möglichkeit, Erkenntnisse über das Erdinnere zu erhalten. Da die seismische Ausbreitungsgeschwindigkeit unter anderem von der Temperatur abhängt, können mit den Daten auch aufsteigende Mantelplumes (z. B. NOLET et al., 2007 und XUE et al., 2007) oder sehr tief abtauchende Subduktionszungen (z. B. QI et al., 2007 und VIGNAROLI et al., 2008) erfasst werden.

Mantelplumes sind wärmer und damit weniger dicht als der umgebende Mantel, wogegen Subduktionszungen kälter und dichter als das umliegende Material sind. Aus diesem Grund eignen sich auch gravimetrische Messungen für die Erkundung des Erdmantels. Gemeinsam mit den aus anderen geophysikalischen und geologischen Verfahren erlangten Kenntnissen über die Geometrie der Kruste konnten beispielsweise JIMÉNEZ-MUNT et al. (2008) und TASSARA et al. (2007) die gravimetrischen Daten für eine verfeinerte und damit verbesserte Rekonstruktion der Verhältnisse im Untergrund nutzen.

Informationen über den Ablauf geodynamischer Prozesse liefert die Anwendung der Magnetik. Sobald das eisenhaltige Magma an die Oberfläche der Erde tritt, werden die magnetischen Dipole, die sich entsprechend dem vorherrschenden Erdmagnetfeld ausgerichtet haben, beim Unterschreiten der Curie-Temperatur fest „eingefroren“. Da sich das Magnetfeld innerhalb von geologischen Zeiträumen verändert und sich sogar umpolen kann, ist bei einem immer wiederkehrenden Magmenaustritt mittels magnetischer Methoden eine Altersdatierung möglich. GERNIGON et al. (2008) bzw. AYARZA et al. (2007) setzten die Magnetik in Kombination mit weiteren geophysikalischen Verfahren erfolgreich für die Analyse der frühen Geschichte eines Spreizungszentrums bzw. für die Erkundung von Aufwölbungen bestehend aus erkaltetem Magma ein.

Ein zusätzlicher temperatur- und materialabhängiger Parameter ist durch die spezifische elektrische Leitfähigkeit gegeben. Mit magnetotellurischen Messungen können dementsprechend Aussagen bis in den oberen Erdmantel hinein getroffen werden. Durch die gemeinsame Interpretation der magnetotellurischen und der seismischen Daten grenzten ICHIKI et al. (2006) die wahrscheinliche Temperatur und den möglichen Wassergehalt des Mantels oberhalb einer Subduktionszunge deutlich ein. SEAMA et al. (2007) zogen mit der Magnetotellurik ebenfalls Rückschlüsse auf die chemische Zusammensetzung und die starke Änderung des Temperaturgradienten unterhalb der Kruste des Philippinischen Meeres.

Der Wärmefluss an der Erdoberfläche ist an den Mittelozeanischen Rücken am stärksten und steht damit offensichtlich in direktem Zusammenhang mit den geodynamischen Prozessen im Mantel. Allerdings sind Wärmeflussmessungen nur punktuell möglich. Bereits 1993 fassten POLLACK et al. alle derartigen Untersuchungen zusammen, schätzten den Wärmefluss zwischen den einzelnen Messpunkten unter Berücksichtigung der Gesteinsarten sowie der hydrothermalen Zirkulation in den Ozeanen ab und erstellten eine globale Wärmeflusskarte. SHAPIRO et al. (2004) extrapolierten die Wärmeflussdaten in die Antarktis. Da in dieser Region keine Messung des Wärmeflusses durchführbar ist, stützten sie sich dabei auf die Erkenntnisse über die Struktur der Kruste und des oberen Mantels aus einem globalen seismischen Modell.

Petrologische Untersuchungen bieten zusätzliche Einblicke in die geochemischen und geodynamischen Vorgänge im Erdinneren. Gesteine, die bei Hochdruck- und Ultrahochdruckbedingungen sowie bei relativ niedrigen Temperaturen metamorph überprägt wurden, sind typisch für viele orogene Gebirgsgürtel. Diese blauschiefer- und eklogitfaziellen Gesteine weisen darauf hin, dass sie subduziert wurden und in Tiefen zwischen 30 und 300 km der Metamorphose unterlagen. Durch die sich anschließende Exhumation während der aktiven Subduktion sind die Analyse dieser Gesteine und die Rekonstruktion des Subduktionsprozesses möglich (z. B. BRUN et al., 2008 und GUILLOT et al., 2008).

Partielles Schmelzen und der reaktive Transport der Schmelze können die Zusammensetzung, die Mikrostruktur und die physikalischen Eigenschaften der Mantelgesteine beeinflussen. Das hat wiederum Auswirkungen auf die Entwicklung des subkontinentalen lithosphärischen Mantels. Beispielsweise konzentrieren sich TOMMASI et al. (2008) bei ihren petrologischen Untersuchungen besonders auf die Beziehung zwischen dem reaktiven Transport der Schmelze und der Deformation. Die Petrologie erlaubt mittels der Verwendung der Olivin-Thermometrie sogar Rückschlüsse auf Mantelplumes. Da sich primitive ozeanische Mantelbasalte mit dem Olivin an ihrem Ursprungsort im Gleichgewicht befinden, können die Temperaturen aus den temperaturabhängigen chemischen Zusammensetzungen der primitiven Flüssigkeit und des ebenfalls existierenden Olivins zum Zeitpunkt der Entstehung abgeschätzt werden. PUTIRKA et al. (2007) berechneten mit den Informationen aus der Olivin-Thermometrie beispielsweise eine neue Konvektionsgeotherme für den oberen Mantel.

Trotz der vielen geologischen und geophysikalischen Untersuchungen reichen die auf diese Weise erlangten Erkenntnisse nicht aus, um die im Erdmantel ablaufenden Prozesse vollständig zu erklären. Aus diesem Grund werden zunehmend numerische Modellierungen mit unterschiedlichen Schwerpunkten durchgeführt. Beispielsweise fokussieren ANDREWS et al. (2007) und CAPITANIO et al. (2007) ihre Modellierungen auf die Effekte in der Subduktionszunge, wogegen DUBUFFET et al. (1999) und LASSAK et al. (2007) ihr Augenmerk auf die gesamte dreidimensionale Konvektion richten. Für die Verifizierung der Ergebnisse aus den Modellierungen sind Laborexperimente jedoch unerlässlich.

Die Mehrzahl der Experimente simuliert die Subduktion und die dazugehörige Konvektion (z. B. FUNICIELLO et al., 2003, HEURET et al., 2007 und JACOBY, 1976). Der zweite Typ der Mantelkonvektion, der sich durch das aktive Aufströmen von Mantelplumes auszeichnet, wurde bereits 1975 von WHITEHEAD et al. experimentell nachgestellt. Dazu verwendeten sie viskose Flüssigkeiten mit unterschiedlichen Dichten bei gleichbleibender Temperatur. Im Jahr 1990 veröffentlichten GRIFFITHS et al. die Ergebnisse zu erstmals thermisch erzeugten Plumes im Labor.

---

Ein Problem aller Laborexperimente besteht in der Bestimmung der dreidimensionalen Verteilung der für die Analysen wichtigen Parameter wie beispielsweise das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld. Durch die Zugabe von Tracern können mittels der „Particle Image Velocimetry“ (PIV) auf optischem Wege die Geschwindigkeiten im Versuchsbecken gemessen werden (z. B. VIDAL, 2005). Die Visualisierung von thermisch induzierten Plumes und deren Temperaturen gelang unter anderem KUMAGAI et al. (2007) mit thermochromen Polymeren. Im folgenden Kapitel werden dieses und verschiedene andere Verfahren zur nichtinvasiven Temperaturmessung kurz vorgestellt.

## 2.2. Temperaturmessverfahren

In der Industrie und der Wissenschaft spielt die Temperaturmessung eine wichtige Rolle, weil der thermodynamische Zustand eines Systems die physikalischen und chemischen Eigenschaften der verwendeten Materialien beeinflusst. So ist beispielsweise die Bestimmung der Temperaturverteilung besonders während der zuvor beschriebenen Laborexperimente zur Analyse von thermisch induzierten Strömungen in Flüssigkeiten ein wesentlicher Bestandteil der Untersuchungen. Da Temperaturmessungen mit thermischem Kontakt zur Flüssigkeit die Bewegungen am Ort der Messung behindern, sind berührungslose Messverfahren notwendig. Diese Verfahren nutzen die Temperaturabhängigkeit verschiedener physikalischer Materialeigenschaften aus und ermöglichen sogar die Bestimmung von flächigen oder volumenbezogenen Temperaturverteilungen, worauf in den folgenden Abschnitten näher eingegangen wird.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  einer akustischen Longitudinalwelle ist in Gasen und Flüssigkeiten mit dem adiabatischen Kompressionsmodul  $K$  und der Dichte  $\rho$  wie folgt verknüpft:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad . \quad (2.1)$$

Da sich diese Parameter mit der Temperatur ändern, ist mittels der Bestimmung der seismischen Geschwindigkeiten der Rückschluss auf die Temperatur im Inneren möglich. Über Laufzeitmessungen in Flüssigkeiten ergibt sich – bei genauer Kenntnis der Objektgeometrie – die Geschwindigkeit der ausgesandten Ultraschallwelle, woraus wiederum die mittlere Temperatur entlang des Strahlweges berechnet werden kann (z. B. BECKER et al., 2001). Ein anderes seismisches Verfahren dient der Temperaturbestimmung an der Grenzfläche zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper, wozu der entsprechende temperaturabhängige Reflexionskoeffizient ermittelt werden muss (z. B. GREENWOOD et al., 1999). Gasblasen und Änderungen in der Zusammensetzung erhöhen den Störfaktor dieser Methoden allerdings erheblich.

Daher werden optische Verfahren für die nichtinvasive Temperaturmessung weitaus häufiger eingesetzt. Trifft eine Lichtwelle auf die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen, ändert sich ihre Ausbreitungsrichtung. Der Winkel der Ablenkung resultiert aus den temperaturabhängigen Brechungsindizes der beiden beteiligten Materialien. Die Bestimmung der Brechungsindizes erfolgt mit Refraktometern oder Interferometern. Refraktometer messen die Temperaturverteilung am Rand der Flüssigkeit und Interferometer die mittlere Temperatur entlang des Strahlweges.

Bei der Anwendung spektroskopischer Verfahren wird das Spektrum des Lichtes nach der Wechselwirkung mit der Materie untersucht. Liegt das Augenmerk dabei auf der Beobachtung der Absorptions- oder der Emissionsspektren des infraroten Lichtes, handelt es sich um die Infrarot-Spektroskopie. Durch die Energieaufnahme bei der Absorption werden Molekülschwingungen angeregt. Die Moleküle gehen daraufhin in den Schwingungs-Anregungs-Zustand über. Die spezifischen Schwingungsfrequenzen sowie die Linienbreite und die Linienform des Spektrums sind aus den Absorptionsbanden ersichtlich und ermöglichen einen Rückschluss auf die Molekülstruktur und die Temperatur. (SCHRADER, 1997)

Das bei der Raman-Spektroskopie verwendete monochromatische Laserlicht liegt in der Regel im sichtbaren Spektralbereich und wird unelastisch an den Molekülen gestreut. Während dieses Prozesses verringert (Stokes-Raman-Streuung) oder erhöht (Anti-Stokes-Raman-Streuung) sich die Energie des gestreuten Photons um den Betrag der temperaturabhängigen Schwingungsenergie des Moleküls. Aufgrund dessen verändert sich ebenfalls die Frequenz der zu messenden Strahlung um einen spezifischen Wert, woraus wiederum die Temperatur und die Struktur der Moleküle bestimmt werden können. Diese Methode ist beispielsweise von HUPPRICH (2001) erfolgreich für die Temperaturmessung an Glasproben eingesetzt worden.

Die Fluoreszenz-Spektroskopie nutzt dagegen die Absorption des sichtbaren monochromatischen Lichtes aus. Durch die Energieaufnahme befinden sich die Moleküle anschließend in einem Schwingungs-Anregungs-Zustand. Der sofort darauf folgende Übergang in einen Zustand niedrigerer Energie erfolgt durch die Emission von Licht. Ein Teil der absorbierten Energie verbleibt dabei jedoch im Molekül, weshalb das fluoreszierte Licht eine niedrigere Frequenz aufweist als das zuvor absorbierte Licht. Da die Frequenz des emittierten Lichtes von der Temperatur abhängt, ist auch mit diesem Verfahren die Temperaturbestimmung möglich. Auf diese Weise konnten zum Beispiel ROBINSON et al. (2008) die zweidimensionale Temperaturverteilung in einer Wasserlösung ermitteln.

Neben spektroskopischen Verfahren werden in der Praxis ebenfalls Strahlungsthermometer – auch Pyrometer genannt – verwendet. Strahlungsthermometer messen berührungslos die Wärmestrahlung eines Körpers, die von seiner Temperatur und der physikalisch-chemischen Beschaffenheit seiner strahlenden Oberfläche abhängt. Da die Auswertung der pyrometrischen Messungen auf dem Vergleich von Strahldichten oder spektralen Strahldichten, die unter verschiedenen Bedingungen ermittelt werden, basiert, erfolgen zusätzlich Referenzmessungen bei bekannter Temperatur. Für den Einsatz von Pyrometern bei Temperaturen unterhalb von 600°C ist die genaue Kenntnis des Emissionskoeffizienten der strahlenden Oberfläche notwendig. (EDER, 1981)



Eder (2004) entwickelte beispielsweise ein Strahlungsthermometer, mit dem die Temperatur in Flüssigkeiten mit unbekannter Zusammensetzung durch eine Behälterwand hindurch messbar ist. Diese Methode eignet sich für Flüssigkeitstemperaturen im Bereich von 20 bis 100°C und für verschieden transparente Behältermaterialien.

Ein wesentlicher Vorteil der Temperaturmessung mittels thermochromer Flüssigkristalle ist die Möglichkeit, die Temperaturverteilung in Flüssigkeiten dreidimensional zu bestimmen. Die thermochromen Flüssigkristalle liegen innerhalb eines spezifischen Temperaturbereiches in einem Zustand zwischen flüssiger und kristalliner Phase vor. In dieser Mesophase reagieren die cholesterischen Flüssigkristalle auf Variationen der Temperatur durch Änderung ihrer optischen Eigenschaften. Die stäbchenförmigen Moleküle im Inneren dieser Polymere sind in parallelen nematischen Schichten angeordnet, wobei sich die Vorzugsrichtung der Moleküle von Ebene zu Ebene kontinuierlich ändert und sie somit die Struktur einer Helix bilden. Der Abstand zweier gleichgerichteter Schichten wird als Ganghöhe  $p$  der Helix bezeichnet und vergrößert sich mit der Zunahme der Temperatur  $T$ . Da die einzelnen Ebenen jeweils die gleichen Abstände zueinander aufweisen, tritt die selektive Bragg-Reflexion in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha$  des Lichtes zur Achse der Helix sowie vom Brechungsindex  $n$  auf:

$$\lambda = n p(T) \cos \alpha \quad . \quad (2.2)$$

Die Wellenlängen  $\lambda$  des reflektierten Lichtes werden während der Experimente erfasst und so die Ganghöhen bzw. die Temperaturen an den entsprechenden Positionen bestimmt. Ein weiterer Vorteil dieser Methode ist die Tatsache, dass die thermochromen Flüssigkristalle gleichzeitig als Tracer für die Untersuchung von Geschwindigkeitsfeldern mittels der „Particle Image Velocimetry“ (PIV) eingesetzt werden können. Verschiedene Forschergruppen, wie beispielsweise PEHL (2004) und VIDAL (2005), erzielten mit derartig analysierten Konvektionsexperimenten gute Ergebnisse. FUJISAWA et al. (2005) und DAVAILLE et al. (2007) geben sogar Messunsicherheiten von maximal 0,1 K an. Da die mikroverkapselten Flüssigkristalle nur Durchmesser von 10 bis 20  $\mu\text{m}$  aufweisen und sie in einer sehr niedrigen Konzentration von  $10^{-3}$  bis  $10^{-1}$  Vol.-% benötigt werden, sind die Auswirkungen auf die physikalischen Eigenschaften der meisten Versuchsflüssigkeiten und auf das Strömungsverhalten vernachlässigbar gering. Allerdings koagulieren und sedimentieren die Polymere schon nach einer relativ kurzen Zeit, so dass die Suspension nach etwa zwei bis drei Tagen unbrauchbar sein kann. (DETERS et al., 2005)

Für einige Aufgabenstellungen kommt eine Verwendung von thermochromen Flüssigkristallen jedoch nicht in Frage. Beispielsweise eignen sich für die Durchführung der „GeoFlow“-Experimente aufgrund des starken elektrischen Feldes keine Tracer, da diese sich entsprechend dem Kraftfeld ausrichten würden. (FUTTERER et al., 2005) In dem Forschungsprojekt „GeoFlow“ wird die thermisch induzierte Mantelkonvektion der Erde in einem beheizbaren Kugelspalt nachgestellt und die Temperaturverteilung über optische Messverfahren in Kombination mit numerischen Modellierungen ermittelt. Um den Einfluss der im Labor einseitig gerichteten Schwerkraft zu umgehen, findet das Experiment in der Raumstation ISS statt. Mittels eines radialen Hochspannungsfeldes in der rotierenden Kugel erfolgt die Simulation der Erdanziehungskraft.

Die Modellflüssigkeit im Kugelspalt wird von einem weiteren Glaskugelspalt mit einer kühlenden Flüssigkeit bekannter Temperatur umschlossen. Im Zentrum befindet sich dagegen eine verspiegelte Kugel mit einer wärmenden Flüssigkeit, deren Temperatur ebenfalls einstellbar und messbar ist. Auf diese Weise existieren definierte Bedingungen an der inneren und äußeren Grenze der entstehenden Konvektionszellen. Die drei für die Messungen verwendeten optischen Verfahren nutzen die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex aus, wobei das Schatten- und das Schlierenverfahren eine qualitative und die Wollaston-Schlieren-Interferometrie eine quantitative Aussage ermöglichen. Das mit einem Wollaston-Prisma erzeugte polarisierte Licht interferiert und bildet je nach Größe des Brechungsindexgradienten ein bestimmtes Interferenzmuster, aus dem wiederum der Temperaturgradient berechenbar ist. Da diese drei Methoden jedoch nur die Änderung des Brechungsindex entlang des Strahlweges liefern, müssen die gemessenen Interferogramme mit numerisch simulierten Interferogrammen verglichen und die berechneten Temperaturfelder entsprechend angepasst werden. (FUTTERER et al., 2005)

### 2.3. Geoelektrische Temperaturmessung

Neben den im vorherigen Kapitel beschriebenen Methoden zur berührungslosen Temperaturmessung bietet die Anwendung der gleichstromgeoelektrischen Impedanztomographie eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der dreidimensionalen Temperaturverteilung in einer Flüssigkeit. Grundlage dafür bildet der Arrhenius-Zusammenhang zwischen der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  und der absoluten Temperatur  $T$ :

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right), \quad (2.3)$$

wobei  $\sigma_0$  einen Skalierungsfaktor,  $E_a$  die Aktivierungsenergie und  $k$  die Boltzmann-Konstante kennzeichnet. Entsprechend der Formeln von VOGEL (1921), FULCHER (1925) und TAMMANN et al. (1926) wird ein zusätzlicher Parameter  $T_0$  eingeführt, der die Temperatur skaliert:

$$\sigma = \sigma_{VFT} \exp\left(-\frac{E_{VFT}}{k(T - T_0)}\right). \quad (2.4)$$

Für den dekadischen Logarithmus ergibt sich demnach folgende Gleichung:

$$\log \sigma = A + \frac{B}{T - T_0} \quad (2.5)$$

mit den spezifischen Parametern  $A$ ,  $B$  und  $T_0$ .

In dieser Forschungsarbeit wird ein Gemisch aus Polyethylenglykol und Wasser verwendet, das zum einen je nach Wassergehalt beliebig viskos einstellbar ist und zum anderen schon bei geringen Temperaturvariationen deutliche Änderungen in der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit hervorruft. Damit eignet sich das Gemisch sowohl aus geodynamischer als auch aus geoelektrischer Sicht gut für die durchzuführenden Experimente.

Die viskose Flüssigkeit befindet sich in einem Versuchsbecken und wird von unten her erhitzt. Dadurch entstehen thermisch induzierte Strömungen und entsprechende Temperatur- sowie Leitfähigkeitsunterschiede, die mittels der gleichstromgeoelektrischen Impedanztomographie erfasst werden. Das Ergebnis der Tomographie ist ein Modell über die dreidimensionale Verteilung der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit im Versuchsbecken zum Zeitpunkt der geoelektrischen Messung. Die Umrechnung in die Temperaturverteilung erfolgt mit Gleichung (2.5). Dazu wird zunächst die elektrische Leitfähigkeit bei verschiedenen Temperaturen an einer kleinen Probe der Versuchsflüssigkeit gemessen. Die Kurvenanpassung liefert dann die spezifischen Parameter  $A$ ,  $B$  und  $T_0$  für die Gleichung (2.5).

### ***2.4. Ziel der Forschungsarbeit***

Um die Strömungsverhältnisse in der Natur sowie in industriellen Anlagen zu simulieren, werden Konvektionen bei Experimenten im Labor erzeugt. Da es sich im Erdmantel und in Glasschmelzwannen in erster Linie um thermisch induzierte Bewegungen in viskosen Flüssigkeiten handelt, spielt die Kenntnis der Temperaturverteilung eine bedeutende Rolle für die Analyse der Prozesse. So kann beispielsweise regulierend in den Schmelzvorgang eingegriffen und eine maximale Homogenisierung der Glasschmelze bei kleinstmöglicher Wärmezufuhr erreicht werden.

Um das Strömungsmuster in der Versuchsflüssigkeit im Labor sowie in der Glasschmelze nicht zu beeinflussen, ist eine berührungslose dreidimensionale Temperaturmessung notwendig. Zur dreidimensionalen Untersuchung von geodynamischen Prozessen im Labormaßstab werden unter anderem Tracer in Verbindung mit optischen Verfahren erfolgreich eingesetzt. Allerdings ist eine Verunreinigung durch Tracerpartikel im Glas während der Produktion nicht möglich. Deswegen muss die Temperaturbestimmung auf eine andere Art und Weise erfolgen.

Das primäre Ziel dieser Forschungsarbeit besteht in der Entwicklung und Verifizierung einer Methode zur nichtinvasiven Temperaturmessung in viskosen Flüssigkeiten unter Anwendung der gleichstromgeoelektrischen Impedanztomographie. Dafür ist zunächst der Aufbau einer Anlage, bestehend aus einem Versuchsbecken, Heizern und der Messtechnik für die direkte Temperaturmessung sowie für die Geoelektrik, erforderlich. Durch die indirekte Bestimmung der Temperaturen mittels Impedanztomographie und den Vergleich mit den direkt am Rand gemessenen Temperaturen für verschiedene Temperaturverteilungen soll anschließend der Beweis für die Funktionalität dieser Methode erbracht werden.

Ein weiteres Ziel ist die Beurteilung der Anwendbarkeit der geoelektrischen Temperaturmessung zum einen für den Betrieb an der Schmelzwanne und zum anderen für die Simulation von Plumes und Subduktionen im Versuchsbecken. Dazu sind insbesondere Modellierungen zum räumlichen Auflösungsvermögen der Impedanztomographie sowie eine Abschätzung der zusätzlichen Störeinflüsse an der Schmelzwanne und deren Auswirkungen auf die Messergebnisse notwendig.

## 3. Physikalische Grundlagen

### 3.1. Geodynamik

Konvektionen im Erdmantel äußern sich durch geologische Phänomene an der Erdoberfläche und sind daher von besonderem Interesse für die Geowissenschaften. Durch geophysikalische Messungen, Gesteinsanalysen, numerische Modellierungen und Laborexperimente wird das Wissen über die geodynamischen Prozesse im Erdinneren permanent erweitert. So haben die bisherigen Kenntnisse beispielsweise zu verschiedenen Einteilungen der einzelnen Erdschalen geführt.

Der Erdaufbau aus mineralogischer Sicht richtet sich nach der Materialzusammensetzung. Danach wird die Erde von einer Kruste umschlossen, die sich in der Zusammensetzung deutlich von den darunter liegenden Schichten unterscheidet und entweder eine weniger dichte kontinentale Kruste oder eine etwas dichtere ozeanische Kruste bildet. Die kontinentale Kruste ist durchschnittlich 35 km mächtig und die ozeanische Kruste weist eine Dicke von im Mittel 6 km auf. Bis in eine Tiefe von etwa 350 km schließt sich die Peridotit-Zone an. Zwischen dieser Schicht und der in etwa 750 km Tiefe beginnenden Perowskit-Zone befindet sich die entsprechende Übergangszone, in der aufgrund von den dort vorherrschenden Druckverhältnissen die Phasentransformation von dem olivin- und pyroxenreichen Peridotit in dichtere Minerale des Perowskits erfolgt. In einer Tiefe von 2889 km bis zum Mittelpunkt in 6370 km Tiefe befindet sich der eisen- und nickelhaltige Erdkern, der oberhalb von 5154 km flüssig und unterhalb fest ist. (DAVIES, 1999)

Der Erdaufbau aus geodynamischer Sicht ist anhand von physikalischen Eigenschaften in verschiedene Schichten unterteilt. Wie beim mineralologisch definierten Erdaufbau besteht das Zentrum der Erde aus einem festen inneren und einem flüssigen äußeren Kern. Die Kruste und der darunter liegende mechanisch stabilere und kältere Bereich der Peridotit-Zone kennzeichnen die Lithosphäre, die zwischen 10 und 100 km mächtig ist. Zwischen Lithosphäre und Kern befindet sich der Erdmantel, der in einer Tiefe von etwa 660 km in den oberen und den unteren Mantel unterteilt wird. Der Erdmantel verhält sich bei Krafteinwirkungen mit Periodendauern der Größenordnung von 1 bis  $10^4$  Sekunden elastisch, aber bei Periodendauern von  $10^{11}$  bis  $10^{17}$  Sekunden wie eine viskose Flüssigkeit und ist somit ein viskoelastisches Material. Ein viskoelastischer Maxwell-Körper wird auch als Newtonsche Flüssigkeit bezeichnet und reagiert linear viskos auf angelegte Spannungen, das heißt, die Verformungsrate ist linear proportional zur aufgewendeten Kraft. (DAVIES, 1999, TURCOTTE et al., 2002)

Die langsamen Bewegungen im Erdmantel erfolgen jedoch über Kriechprozesse, die nachstehenden Zusammenhang zwischen der Verformungsrate  $\dot{\epsilon}$  und der Spannung  $\sigma$  aufweisen:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = A \left( \frac{\sigma}{G} \right)^n \left( \frac{b}{d} \right)^m \exp \left( -\frac{E_a + pV_a}{RT} \right), \quad (3.1)$$

wobei  $A$  eine Konstante,  $G$  das elastische Schermodul,  $d$  die Korngröße,  $b$  der Kristallgitterabstand,  $E_a$  die Aktivierungsenergie pro Mol,  $V_a$  das Aktivierungsvolumen pro Mol,  $p$  der Druck,  $R$  die universelle Gaskonstante und  $T$  die absolute Temperatur ist. Die Parameter  $m$  und  $n$  hängen von der jeweiligen Kriechart ab. Im Mantel existieren die zwei wesentlichen Deformationsmechanismen Diffusionskriechen und Dislokationskriechen. Beim Diffusionskriechen bewegen sich Atome oder deren Fehlstellen durch das Kristallgitter und die Spannungsabhängigkeit ist linear ( $n=1$ ). Allerdings ist diese Verformung mit dem Parameter  $m=2,5$  stark von der Korngröße abhängig. Beim Dislokationskriechen bewegen sich die schon vorhandenen Störungen in der Kristallstruktur, die beispielsweise durch zusätzliche Atome im regulären Gitter hervorgerufen werden können, durch die Körner hindurch. Dieser Kriechprozess ist zwar nichtlinear ( $n=3,5$ ), aber dafür unabhängig von der Korngröße ( $m=0$ ). (DAVIES, 1999, TURCOTTE et al., 2002)

Im Erdmantel existieren beide Kriecharten. Das Diffusionskriechen dominiert eher bei geringen Temperaturen und geringen Spannungen und das Dislokationskriechen bei hohen Temperaturen und hohen Spannungen. Für beide Arten lässt sich die Viskosität  $\eta$  wie folgt berechnen:

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{G}{A} \right) \left( \frac{d}{b} \right)^m \left( \frac{\sigma}{G} \right)^{1-n} \exp \left( \frac{E_a + pV_a}{RT} \right) = \eta_r \exp \left[ \frac{E_a + pV_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right) \right], \quad (3.2)$$

wobei  $\eta_r$  die Viskosität bei der Referenztemperatur  $T_r$  ist.

Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität haben einen deutlich größeren Einfluss auf das Fließverhalten als der Exponent der Spannung. Der relativ große Temperaturgradient beim Übergang von der Lithosphäre in den oberen Mantel bewirkt bei dem dagegen relativ kleinen Druckgradienten eine starke Verringerung der Viskosität. Auf diese Weise wird die Kopplung zwischen Lithosphäre und Mantel ebenfalls herabgesetzt. Mit zunehmender Tiefe steigt die Viskosität wieder geringfügig an, da die Druckerhöhung einen etwas größeren Effekt besitzt als die Temperaturerhöhung. (DAVIES, 1999, TURCOTTE et al., 2002)

Der Erdmantel erwärmt sich zum einen durch den radioaktiven Zerfall in seinem Inneren und zum anderen durch die Wärmeabgabe vom Kern an den Mantel. Infolge von Konvektion und in geringen Maßen durch Konduktion gelangt diese Wärme an die Erdoberfläche. Die Lithosphäre entspricht annähernd der kalten thermischen Grenzschicht des Mantels. Über der Kern-Mantel-Grenze bildet sich dagegen eine heiße thermische Grenzschicht. (DAVIES, 1999)

Wegen der großen Temperaturunterschiede zwischen den jeweiligen Grenzschichten und dem Mantel entstehen auch deutliche Viskositäts- und Dichteunterschiede. Der Zusammenhang zwischen Dichte  $\rho$  und Temperatur  $T$  stellt sich wie folgt dar:

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \gamma (T - T_0) \quad , \quad (3.3)$$

mit  $\gamma$  für den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten und  $\rho_0$  für die Dichte bei der Referenztemperatur  $T_0$ .

Die Dichteunterschiede bewirken an der oberen thermischen Grenzschicht eine negative und an der unteren thermischen Grenzschicht eine positive Auftriebskraft. Übersteigen diese Auftriebskräfte die entgegengesetzt gerichtete Kraft der viskosen Reibung, so beginnt entweder die Subduktion der kalten ozeanischen Lithosphäre oder der säulenförmige Aufstieg eines heißen Mantelplumes. (DAVIES, 1999)

Diese beiden Strömungsarten stellen damit die beiden existierenden Konvektionstypen im Erdmantel dar. Beim Plattentyp ist die absinkende Lithosphäre der aktive Bestandteil der Konvektionszelle. Auf der gegenüberliegenden Seite der abtauchenden Platte entsteht ein Spreizungszentrum, durch welches Mantelmaterial an die Oberfläche gelangt und neue ozeanische Kruste bildet. Da während des Abtauchens der Lithosphäre angrenzendes Mantelmaterial mitgezogen wird, entsteht ein Massendefizit, das zu einem passiven Aufsteigen von heißem Mantelmaterial unter dem Spreizungszentrum führt. Beim Plumetyp verursacht die thermische Grenzschicht den Aufwärtsstrom eines schmalen Plumes. Die breite langsamere Abwärtsströmung ist der passive Bestandteil dieser Konvektionszelle. Damit bewirken Mantelplumes den Transport der Wärme aus dem Erdkern in den oberen Mantel und die Platten die Abkühlung des Mantels. Der dominierende tektonische Mechanismus der Erde ist die Plattentektonik, aber den zweiten wichtigen Mechanismus stellen die Plumes dar. (DAVIES, 1999)

Die physikalischen Gesetze, die der thermischen Konvektion zugrunde liegen, sind die Kontinuitätsgleichung (3.4), die Impulserhaltung (3.5) und die Energieerhaltung (3.6). Die nachfolgenden Gleichungen gelten für Newtonsche, inkompressible Flüssigkeiten:

$$\nabla(\rho v_i) = 0 \quad (3.4)$$

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 v_i + \rho B_i = 0 \quad (3.5)$$

$$a \nabla^2 T - v_i \nabla T = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{H}{\rho c} \quad , \quad (3.6)$$

wobei  $\rho$  die Dichte,  $v_i$  die Geschwindigkeit,  $p$  der Druck,  $\eta$  die Viskosität,  $B_i$  die Auftriebskraft pro Einheitsmasse,  $a$  die Temperaturleitfähigkeit,  $T$  die Temperatur,  $t$  die Zeit,  $H$  die Wärmeproduktion und  $c$  die spezifische Wärmekapazität ist. Um den hydrostatischen Druck, der mit der Referenzdichte  $\rho_0$  verknüpft ist, aus der Formel (3.5) zu eliminieren, wird der Parameter  $P$  wie folgt eingeführt:

$$P = p - \rho_0 g x_3 \quad . \quad (3.7)$$

Dabei definiert  $x_3$  die vertikale Koordinate und  $g$  die Erdanziehungskraft.

Auf diese Weise ergibt sich mit Gleichung (3.3) folgender Zusammenhang für die Impulserhaltung:

$$-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \nabla^2 v_i - \gamma \rho_0 B_i (T - T_0) = 0 \quad . \quad (3.8)$$

Die einzige Komponente von  $B_i$ , die nicht Null wird, ist die vertikale Komponente mit  $B_3 = g$ . Damit stellt der dritte Term der Gleichung (3.8) die Auftriebskraft pro Einheitsvolumen dar. (RANALLI, 1995, DAVIES, 1999)

Wann eine Konvektion beginnt, hängt jedoch nicht nur von der Auftriebskraft sondern auch von der dagegen wirkenden viskosen Widerstandskraft und der Temperaturleitfähigkeit ab. Über die dimensionslose Rayleigh-Zahl  $Ra$  werden diese Größen zueinander ins Verhältnis gesetzt:

$$Ra = \frac{g \rho_0 \gamma \Delta T h^3}{\eta a} \quad , \quad (3.9)$$

wobei  $h$  die Höhe der Schicht ist, in welcher die Konvektion stattfindet. Die Temperatur im Mantel nimmt mit der Tiefe allerdings auch aufgrund der adiabatischen Kompression zu. Für die Berechnung der Rayleigh-Zahl interessiert jedoch nur die Temperaturdifferenz, die nach dem Abzug des adiabatischen Temperaturgradienten von dem gesamten Temperaturverlauf noch verbleibt. Dieser so bestimmte Temperaturgradient wird auch superadiabatischer Temperaturgradient genannt.

Eine Konvektion tritt immer dann auf, wenn die Rayleigh-Zahl größer ist als der kritische Wert  $Ra_c$ , der von den Randbedingungen und der Wellenlänge der horizontalen Störung der thermischen Grenzschicht abhängt. In den meisten Fällen weist die kritische Rayleigh-Zahl



eine Größenordnung von  $10^3$  auf. Da im Erdmantel überwiegend Rayleigh-Zahlen der Größenordnungen von  $10^6$  bis  $10^7$  vorliegen, finden dort heftige Konvektionen statt. Eine Möglichkeit zur Berechnung der kritischen Rayleigh-Zahl bietet die Berücksichtigung der kritischen Grenzsichtdicke  $\delta_c$ :

$$Ra_c = \frac{g\rho_0\gamma\Delta T\delta_c^3}{2\eta a} \quad (3.10)$$

So wächst beispielsweise die untere Grenzsicht  $\delta$  im Erdmantel durch die fortwährende Wärmeaufnahme aus dem Kern mit der Zeit  $t$  folgendermaßen an:

$$\delta = 2,32\sqrt{at} \quad (3.11)$$

Aus den Gleichungen (3.10) und (3.11) ergibt sich somit nachstehender Zusammenhang für die Zeit  $t_c$ , die vergehen muss, bis die Grenzsicht aufbrechen und ein Plume aufsteigen kann:

$$t_c = \frac{1}{5,38a} \left[ \frac{2\eta a Ra_c}{g\rho_0\gamma\Delta T} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (3.12)$$

(TURCOTTE et al., 2002, RANALLI, 1995)

Neben der Rayleigh-Zahl existieren noch andere dimensionslose Größen wie beispielsweise die Prandtl-Zahl, die Péclet-Zahl und die Nusselt-Zahl. Die Prandtl-Zahl  $Pr$  setzt die durch innere Reibung erzeugte Wärme zur abgeführten Wärme in einer Strömung über Viskosität und Temperaturleitfähigkeit ins Verhältnis:

$$Pr = \frac{\eta}{\rho a} \quad (3.13)$$

und beträgt im Erdmantel etwa  $10^{24}$ .

Dagegen gibt die Péclet-Zahl  $Pe$  die relative Bedeutung von Konvektion und Konduktion an:

$$Pe = \frac{vh}{a} \quad (3.14)$$

mit  $v$  für die charakteristische Geschwindigkeit und  $h$  für die charakteristische Länge des Konvektionssystems. Im Erdmantel beträgt die Péclet-Zahl etwa  $10^3$ .

Die Nusselt-Zahl  $Nu$  ermöglicht die direkte Bestimmung der Effizienz der Konvektion als Wärmetransportmechanismus relativ zur Konduktion und hat im Erdmantel die Größenordnung  $10^2$ :

$$Nu = \frac{q}{q_K} = \frac{\Delta T_K}{\Delta T} \quad . \quad (3.15)$$

Die Parameter  $q_K$  und  $\Delta T_K$  repräsentieren dabei den Wärmefluss und die Temperaturdifferenz durch die Schicht, wenn nur Konduktion aber keine Konvektion auftreten würde. Der Wärmefluss  $q$  und die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  stehen dagegen für den gesamten Wärmefluss bzw. den tatsächlichen Temperaturverlauf in der Gegenwart einer Konvektionszelle. Rayleigh-Zahl und Nusselt-Zahl sind proportional zueinander:

$$Nu \sim Ra^{\frac{1}{3}} = (4)^{\frac{1}{3}} \frac{h}{\delta} \quad . \quad (3.16)$$

Auf diese Weise ist über die Höhe  $h$  der Konvektionsschicht und der Dicke  $\delta$  der thermischen Grenzschicht die Abschätzung der Größenordnung der Nusselt-Zahl möglich. Der Quotient aus der Höhe  $h$  und der Dicke  $\delta$  stellt wiederum einen dimensionslosen Skalierungsfaktor dar.

Für die Bestimmung der charakteristischen Zeit  $t$  des Konvektionsprozesses gilt folgende Gleichung:

$$t = \frac{h^2}{a} Ra^{-\frac{2}{3}} \quad . \quad (3.17)$$

(RANALLI, 1995, DAVIES, 1999)

Aus der Aufstiegszeit  $t_p$  und der Aufstiegshöhe  $h$  eines Plumes kann seine Aufstiegs-  
geschwindigkeit  $v_p$  berechnet werden. Ein Mantelplume besteht aus einem annähernd  
sphärischen Kopf und einem schmalen langen Schwanz, während er aufsteigt. Unter der  
Annahme, dass der Plumekopf eine Kugel mit dem Radius  $R$  ist, ergibt sich für die  
Aufstiegs-  
geschwindigkeit  $v_p$  nach dem Stokesschen-Gesetz nachstehender Zusammenhang:

$$v_p = \frac{h}{t_p} = \frac{g\rho\gamma\Delta TR^2}{3\eta} \quad . \quad (3.18)$$

In Gleichung (3.18) beziehen sich die Dichte  $\rho$ , der thermische Volumenausdehnungs-  
koeffizient  $\gamma$  und die Viskosität  $\eta$  auf die Flüssigkeit, durch die der Plume aufsteigt.  
(DAVIES, 1999, TURCOTTE et al., 2002)

Laborversuche sollen das Verständnis über die beschriebenen Prozesse im Erdmantel  
verbessern. Mithilfe der zahlreichen dimensionslosen Größen ist die Skalierung der in  
Experimenten simulierten Mantelkonvektionen und damit der Rückschluss auf die Natur  
möglich.

### 3.2. Impedanztomographie

Die geoelektrische Impedanztomographie ist ein bildgebendes Verfahren zur Bestimmung der Verteilung der spezifischen elektrischen Widerstände im Untersuchungsobjekt durch das Messen von Strömen und Spannungen an dessen Oberfläche. Es eignet sich besonders dann gut, wenn deutliche Leitfähigkeitsunterschiede zwischen den einzelnen Schichten vorhanden sind.

Die Berechnungsgrundlage für die künstlich erzeugten sowie die natürlich entstandenen elektromagnetischen Felder, die durch die Wechselwirkung mit dem Untersuchungsobjekt beeinflusst werden, bilden die vier Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \quad (3.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \quad (3.22)$$

Sie verknüpfen das elektrische Feld  $\mathbf{E}$ , das magnetische Feld  $\mathbf{H}$ , die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  und die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  miteinander und mit den Quellen der Felder, also mit der Ladungsdichte  $q$  und der Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Über die folgenden Gleichungen wird der Einfluss der Materialparameter magnetische Permeabilität  $\mu$ , Dielektrizität  $\varepsilon$  und spezifische elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  auf die oben genannten Größen beschrieben:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.25)$$

Durch die Verwendung quasistationärer Ströme für die geoelektrische Impedanztomographie bleiben die Induktionsvorgänge nach Formel (3.19) vernachlässigbar klein, denn die Ladungsdichte und die magnetische Flussdichte können als zeitlich konstante Größen betrachtet werden. Demnach ergibt sich aus der Gleichung (3.19) mit dem Satz von Stokes folgende Formel:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (3.26)$$

nach welcher das elektrische Feld der negative Gradient des skalaren elektrischen Potentials  $\varphi$  ist.

Durch das Einsetzen dieser Formel in Gleichung (3.25) und das Bilden der Divergenz entsteht eine elliptische partielle Differenzialgleichung, die Poisson-Gleichung:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad . \quad (3.27)$$

Ist die spezifische elektrische Leitfähigkeit bekannt und das Strommuster gegeben, kann aus der Poisson-Gleichung die Potenzialverteilung im Medium bestimmt werden. Diese Berechnung stellt das direkte oder Vorwärtsproblem der geoelektrischen Impedanztomographie dar. Das Ziel geoelektrischer Messungen ist jedoch der Rückschluss auf eine zunächst unbekannte Leitfähigkeitsverteilung, was durch Inversionsrechnungen (Kapitel 4.4.) realisiert wird. (FRIEDEL, 2000)

Der über eine Punktelektrode in ein homogenes Medium eingespeiste Strom breitet sich gleichmäßig nach allen Seiten aus, wenn die Gegenelektrode ausreichend weit entfernt ist. Elektroden können als Punktelektroden betrachtet werden, wenn ihre Abmessungen gegenüber ihren gegenseitigen Abständen und der Erkundungstiefe vernachlässigbar klein sind. In diesem Fall ist die Stromdichte radial gerichtet und beträgt in einem Abstand  $r$  von der Punktelektrode im Vollraum

$$\mathbf{j} = \frac{I \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad . \quad (3.28)$$

Die zugeführte Stromstärke  $I$  fließt als Faktor in die Gleichung (3.28) ein. Nach dem Einsetzen von (3.28) in (3.26) und dem Lösen der Poisson-Gleichung ergibt sich für die Berechnung des Potentials für einen bestimmten Abstand  $r$  zur Speiseelektrode im Vollraum folgender Zusammenhang:

$$\varphi = \frac{\rho I}{4\pi r} \quad . \quad (3.29)$$

Bei der geoelektrischen Impedanztomographie werden die Potentialdifferenzen zwischen zwei Elektroden, die sich jeweils an verschiedenen Positionen an der Oberfläche des Objektes befinden, erfasst. Für Untersuchungen an der Erdoberfläche halbiert sich der Betrag des nach Gleichung (3.29) bestimmten Potentials. (KNÖDEL et al., 1997; MILITZER et al., 1985)

Wie F. Wenner bereits 1916 feststellte, sollten zur Minimierung des Einflusses der Übergangswiderstände Vierelektrodenanordnungen (Abbildung 3.1) verwendet werden. Die Positionen der stromeinspeisenden Elektroden ( $A$  und  $B$  bzw.  $C_1$  und  $C_2$ ) sind nach dem Reziprozitätsprinzip mit denen der Potentialsonden ( $M$  und  $N$  bzw.  $P_1$  und  $P_2$ ) vertauschbar. Demzufolge ist der Quotient aus Spannung und Stromstärke trotz beliebiger Leitfähigkeitsverteilung in beiden Fällen gleich groß. (KNÖDEL et al., 1997; MILITZER et al., 1985)

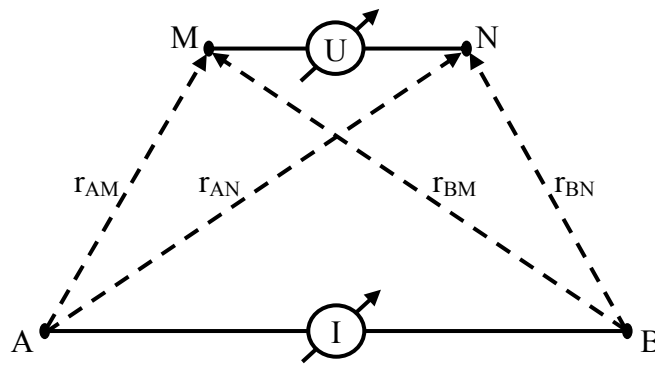


Abb. 3.1: Schematische Darstellung einer Vierelektrodenanordnung.

Da die Sonden  $M$  und  $N$  im Einflussbereich beider Stromelektroden  $A$  und  $B$  liegen, summieren sich die entsprechenden Potenzialanteile nach dem Superpositionsprinzip wie folgt:

$$U_{MN} = \varphi_A(M) - \varphi_A(N) + \varphi_B(M) - \varphi_B(N) \quad . \quad (3.30)$$

Durch das Einsetzen von (3.29) in (3.30) ergibt sich unter Berücksichtigung von  $I_B = -I_A$  nachstehende Formel:

$$U_{MN} = \frac{\rho I_A}{2\pi} \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BM}} + \frac{1}{r_{BN}} \right) \quad , \quad (3.31)$$

wobei  $r_{AM}$ ,  $r_{AN}$ ,  $r_{BM}$  bzw.  $r_{BN}$  der jeweilige Abstand der Elektroden  $A$ ,  $B$ ,  $M$  bzw.  $N$  zueinander ist. Gleichung (3.31) kann mithilfe des Konfigurationsfaktors  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BM}} + \frac{1}{r_{BN}}} \quad (3.32)$$

folgendermaßen vereinfacht werden:

$$U = \frac{\rho I}{k} \quad . \quad (3.33)$$

Da die Gleichungen (3.31) und (3.32) nur für den Halbraum gelten, aber die geoelektrischen Untersuchungen dieser Arbeit in einem Versuchsbecken stattfinden, müssen die Konfigurationsfaktoren wesentlich aufwendiger aus den modellierten Potenzialfeldern berechnet werden (siehe Kapitel 4.4). (KNÖDEL et al., 1997; MILITZER et al., 1985)

In inhomogenen Medien beeinflussen die Bereiche mit verschiedenen spezifischen elektrischen Widerständen die Ausbreitung des Stromes und verursachen damit eine Veränderung der Potenzialverteilung gegenüber der Verteilung in homogenen Medien.

Demnach resultieren die registrierten Spannungen aus der Überlagerung von Signalanteilen aus den verschiedenen Leitfähigkeitsbereichen und es ist lediglich der scheinbare spezifische elektrische Widerstand  $\rho_s$  bestimmbar:

$$\rho_s = k \frac{U}{I} \quad . \quad (3.34)$$

Die mit der Gleichung (3.34) ermittelten Werte werden dem jeweiligen Mittelpunkt der Elektroden-Sonden-Konfigurationen zugeordnet. In Abhängigkeit von der Elektrodenkonfiguration und der Aufstellungsweite ergeben sich Unterschiede für den Tiefenbereich mit der höchsten Stromdichte. Diese sogenannte Erkundungstiefe ist umso größer, je weiter die Elektroden voneinander entfernt sind. Dementsprechend besitzen die Signale aus den verschiedenen Bereichen im Untersuchungsobjekt durch die Variation der Aufstellungsgeometrien jeweils unterschiedlich starke Anteile am scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstand. Je mehr Messungen mit voneinander abweichenden Elektrodenpositionen durchgeführt werden, desto größer ist die Überdeckung und desto genauer kann die Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung mittels Inversion erfolgen. (KNÖDEL et al., 1997; MILITZER et al., 1985)

Wie gut Inhomogenitäten im zu untersuchenden Objekt aufgelöst werden können, hängt ebenfalls von den Sensitivitäten der verwendeten Messanordnungen ab. Die Sensitivität ist ein Maß für die Empfindlichkeit des gemessenen elektrischen Potentials gegenüber Leitfähigkeitsunterschieden. Ausgehend von dem Theorem nach GESELOWITZ (1971) ergibt sich für die Berechnung der Sensitivität  $S_{ij}$  für jede Zelle  $i$  und jeden Messwert  $j$  nachstehende Gleichung:

$$S_{ij} = \frac{\delta \rho_{sj}}{\delta \rho_i} = \frac{k}{\rho_0 \rho_i I^2} \int \nabla \varphi_{(AB)j} \cdot \nabla \varphi'_{(MN)j} d\Omega \quad (3.35)$$

mit  $\varphi_{(AB)j}$  - Potential im Volumen  $d\Omega_i$  bei Einspeisung an den Elektroden  $A$  und  $B$  für  $\rho_i = \rho_0$

$\varphi'_{(MN)j}$  - Potential im Volumen  $d\Omega_i$  bei Einspeisung an den Elektroden  $M$  und  $N$  für  $\rho_i = \rho_0 + \delta\rho_i$

Dabei beschreibt  $\delta\rho_{sj}$  die Änderung des  $j$ -ten gemessenen scheinbaren spezifischen Widerstandes bzw.  $\delta\rho_i$  die Änderung des spezifischen Widerstandes der  $i$ -ten Zelle jeweils gegenüber dem Wert des homogenen Halbraumes  $\rho_0$  in  $\rho_{sj} = \rho_0 + \delta\rho_{sj}$  bzw.  $\rho_i = \rho_0 + \delta\rho_i$ . Die Formeln für die Potentiale  $\varphi_{(AB)j}$  und  $\varphi'_{(MN)j}$  für den Halbraum lauten:

$$\varphi_{(AB)j} = \left( \frac{I \rho_0}{2\pi} \right) \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (3.36)$$

$$\varphi'_{(MN)j} = \left( \frac{I \rho_{sj}}{2\pi} \right) \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right) \quad (3.37)$$

Bei Annahme schwacher Leitfähigkeitskontraste können die Potenzialgleichungen näherungsweise für den homogenen Fall, für den  $\rho_{sj} = \rho_i = \rho_0$  gilt, angewendet werden. Damit geht aus Gleichung (3.35) für den Halbraum folgender Zusammenhang hervor:

$$S_{ij} = \frac{\delta \rho_{sj}}{\delta \rho_i} = \frac{k \rho_{sj}}{4\pi^2 \rho_i} \int \nabla \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \cdot \nabla \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right) d\Omega \approx \frac{\Delta \rho_{sj}}{\Delta \rho_i} \quad (3.38)$$

Wird dieser Differenzialquotient dagegen aus den logarithmischen Werten gebildet, so entsteht nach der Kettenregel eine Sensitivität  $S_{ij}^*$ , die nur noch von der Geometrie abhängt:

$$S_{ij}^* = \frac{\delta \ln(\rho_{sj})}{\delta \ln(\rho_i)} = \frac{\rho_i}{\rho_{sj}} S_{ij} = \frac{k}{4\pi^2} \int \nabla \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \cdot \nabla \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right) d\Omega \quad (3.39)$$

Einige von FRIEDEL (2000) berechnete Sensitivitätsverteilungen sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Sensitivität weist sowohl positive als auch negative Werte auf, wobei sich die positiven Bereiche immer zwischen je zwei Stromelektroden bzw. je zwei Potenzialsonden befinden. Zwischen einer Strom- und einer Potentialelektrode existiert dagegen stets ein Gebiet negativer Sensitivität. Das bedeutet, dass an jeder Elektrode ein Grenzübergang zwischen positiver und negativer Sensitivität liegt und dass in ihrer unmittelbaren Umgebung Maxima und Minima vorhanden sind. Eine höherohmige Störung bewirkt im Bereich positiver Sensitivität eine Erhöhung des scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstandes, während sie in einem Bereich negativer Sensitivität zu einer Verringerung des gemessenen Widerstandes führt. Da der Betrag der Sensitivität mit zunehmender Entfernung von den Elektroden abnimmt, sinkt auch die Auflösbarkeit und Rekonstruierbarkeit von Inhomogenitäten mit zunehmender Tiefe bzw. Abstand von der Messanordnung. (FRIEDEL, 2000)

Um ein Maß für die Auflösbarkeit des Modellnullraumes zu erhalten, kann der Überdeckungsgrad  $\ddot{U}_i$  einer Zelle  $i$  wie folgt berechnet werden:

$$\ddot{U}_i = \sum_{j=1}^N |S_{ij}| \quad (3.40)$$

Sein Analogon in der Strahltomographie gibt dabei an, wie viele Strahlen die entsprechende Zelle treffen. Je größer der Überdeckungsgrad eines geoelektrischen Experiments ist, desto häufiger liegt die Zelle in einem Bereich starker Sensitivität. (FRIEDEL, 2000)

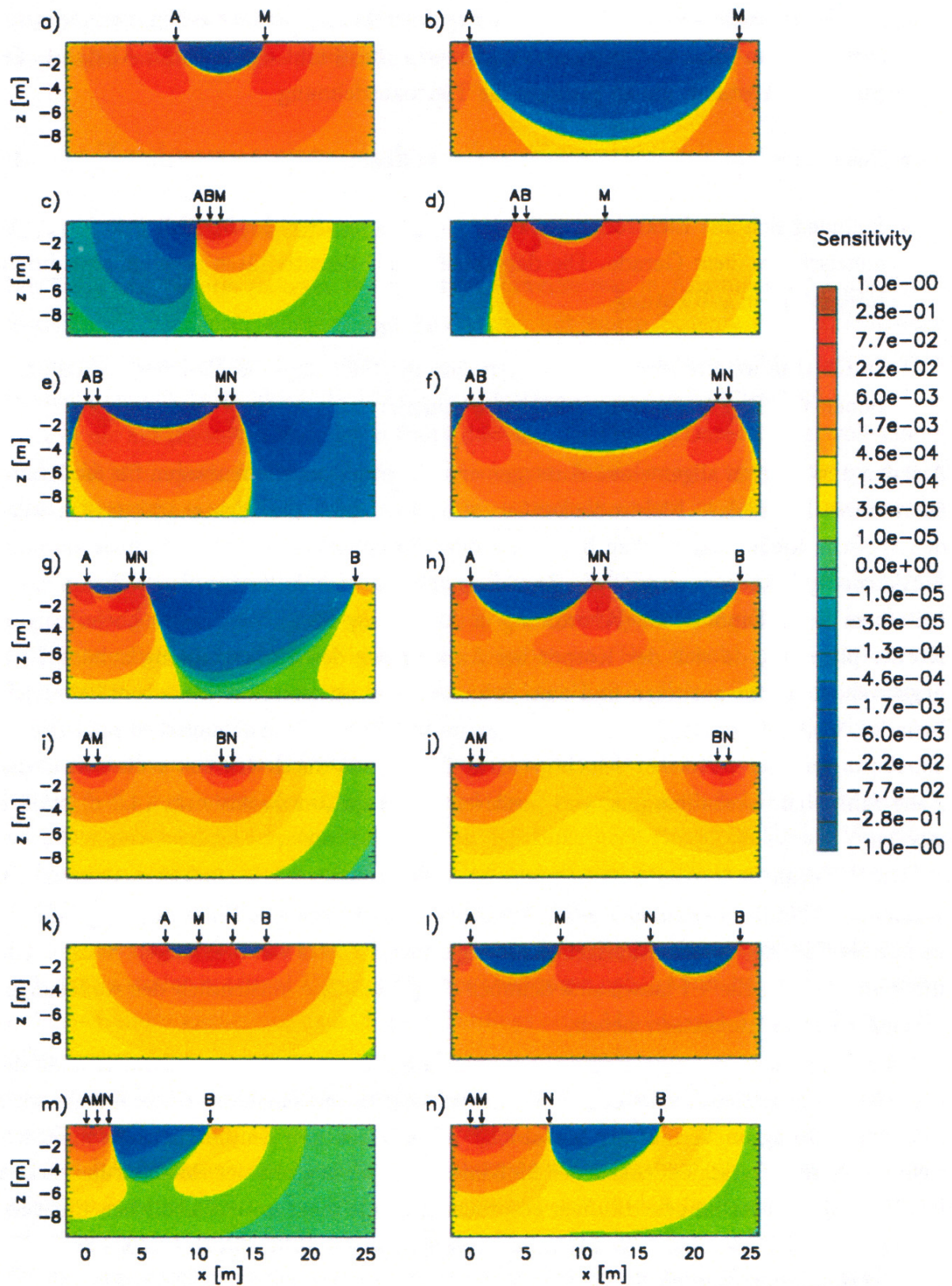


Abb. 3.2: Beispiele für 2D-Sensitivitätsverteilungen im homogenen Halbraum für verschiedene Elektrodenanordnungen. Alle Abbildungen sind auf das Maximum des Betrages normiert. (FRIEDEL, 2000)



## **4. Mess- und Inversionsmethoden**

### ***4.1. Versuchsaufbau und Funktionsweise der Anlage***

Die Untersuchung von thermisch induzierten Strömungen erfolgt in einem Becken, in welchem sich ein zähflüssiges Material befindet. Je nach Viskosität der Versuchsflüssigkeit sowie der Intensität und Position der Wärmequellen bilden sich verschiedene Strömungsmuster wie beispielsweise Konvektionszellen aus. Die Bereiche der Aufwärtsströmung sind dabei durch höhere Temperaturen gekennzeichnet als die Bereiche der Abwärtsströmung. Über den Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Temperatur kann aus der mittels Impedanztomographie bestimmten Leitfähigkeitsverteilung auf die Temperaturverteilung im Becken und daraus wiederum auf die Strömungsvorgänge geschlossen werden.

Während der geoelektrischen Messungen fließt zwischen jeweils zwei Elektroden ein Strom, aufgrund dessen sich im Versuchsbecken ein Potenzialfeld ausbildet. Die Erfassung der Potenzialdifferenzen zwischen den Elektroden am Beckenrand bei verschiedenen Einspeisepositionen ermöglicht über einen Inversionsalgorithmus die Berechnung der dreidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung. Um die so bestimmten Temperaturen zu überprüfen, werden diese zusätzlich am Beckenrand direkt gemessen.

Der dafür verwendete Versuchsaufbau ist in Abbildung 4.1 sowie schematisch in Abbildung 4.2 dargestellt. Neben dem Becken mit 36 Elektroden und 29 Temperatursonden besteht die Apparatur aus sechs Heizern, einem Potenziometer zur Regulierung der Heizleistung, einem Computer zur geoelektrischen Datenerfassung, zwei Anschlussboxen für digitale und analoge Signale, einer Konstantstromquelle, einem Steckbrett zur Elektrodenauswahl, einem Schaltkasten mit einer SPS-Steuerung, einem Computer zur Erfassung der direkt gemessenen Randtemperaturen sowie sieben Modulen für die Temperaturmessung. Die Beschreibung der einzelnen Bestandteile und deren Funktionsweise erfolgt in den nächsten Absätzen.

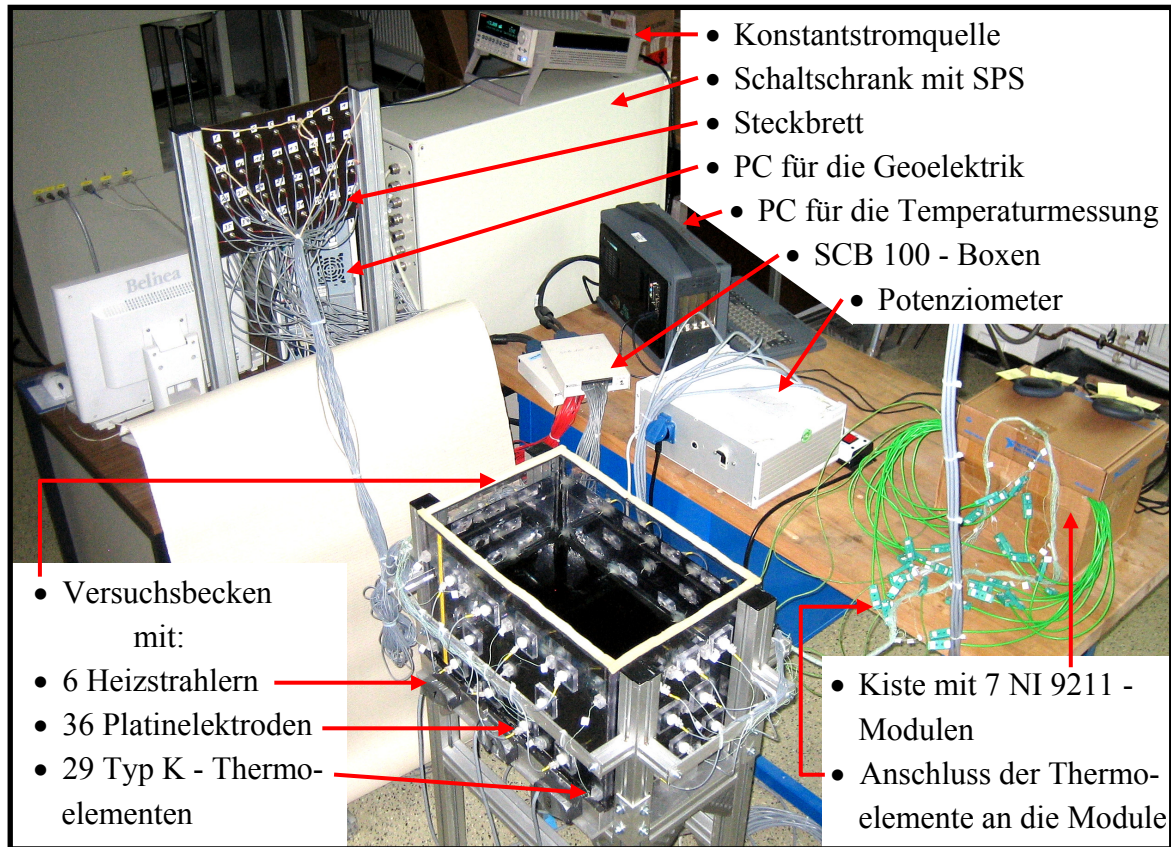


Abb. 4.1: Versuchsaufbau.

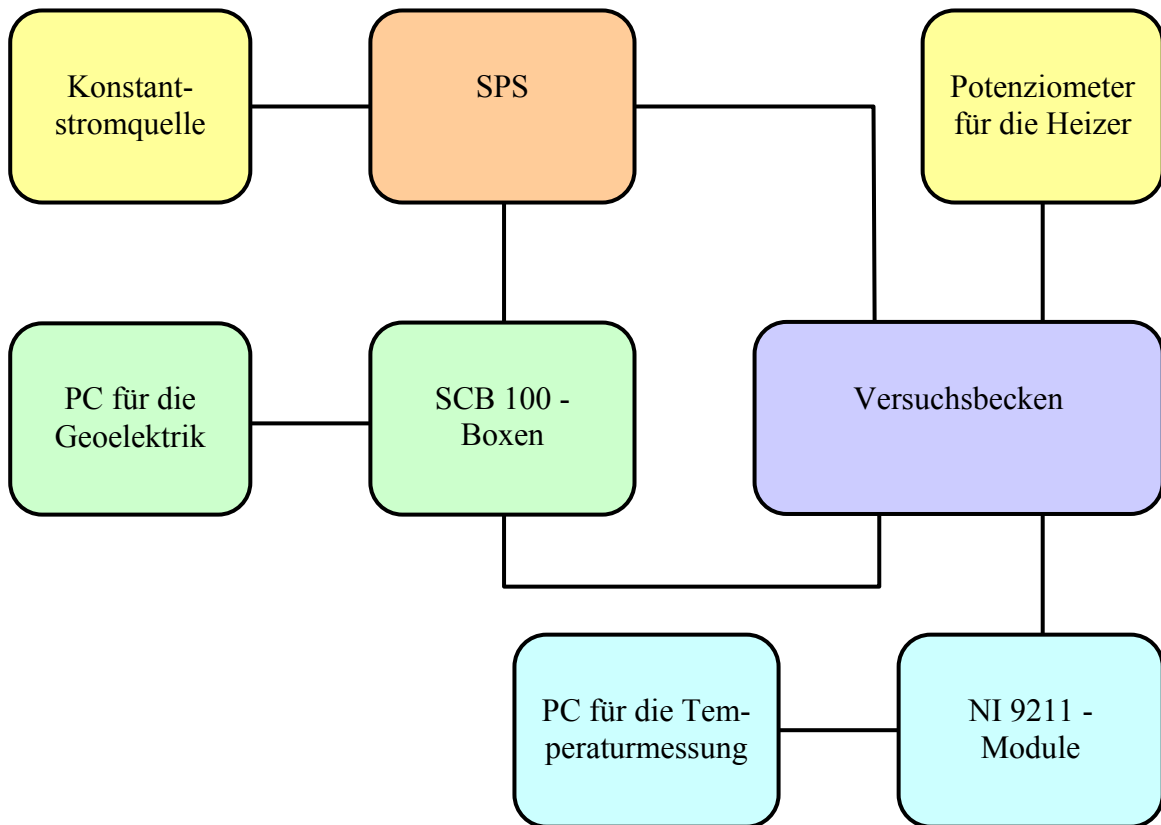
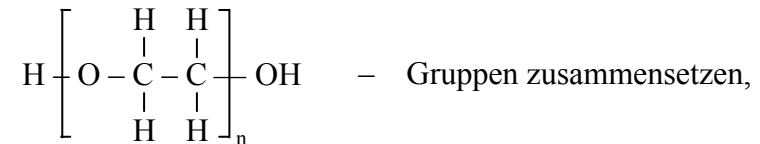


Abb. 4.2: Schematischer Versuchsaufbau.

Die Versuchsflüssigkeit ist ein Gemisch aus Polyethylenglykol (PEG) mit einer Molaren Masse von 35.000 g/mol und Wasser, wobei sich mit zunehmendem Wasseranteil die Viskosität des Gemisches verringert (siehe Kapitel 5.1.). Da sich der Zerfall der langkettigen PEG-Moleküle, die sich aus



im Laufe der Zeit sowie mit steigender Temperatur trotz Stabilisatoren verstärkt, wird die Versuchsflüssigkeit mit den sechs separat oder gleichzeitig nutzbaren Infrarotheizstrahlern der Firma Ego-HiLight nur geringfügig erwärmt. Die Heizer befinden sich unter dem Beckenboden und besitzen einen Innendurchmesser von 140 mm. Die Leistung der Heizer ist stufenlos über ein Potenziometer einstellbar und beträgt maximal 1200 Watt. Weil Ceran® für die ausgesandte Infrarotstrahlung sehr gut durchlässig ist und zugleich eine geringe Wärmeleitfähigkeit aufweist, besteht der Boden des Versuchsbeckens aus einer Ceranplatte. Für den Rand des innen 480 mm langen, 300 mm breiten und 300 mm hohen Beckens wird der durchsichtige und relativ leicht zu bearbeitende Kunststoff Makrolon® mit einer Dicke von 10 mm verwendet.

In den vier Seitenteilen befinden sich insgesamt sowohl 29 Bohrungen mit einem Durchmesser von 3,2 mm für die Temperatursonden als auch 36 Bohrungen mit einem Durchmesser von 11 mm für die Elektroden. Bei der Wahl der Positionen für die Elektroden und Temperatursonden musste auf die Materialeigenschaften des Polycarbonates Makrolon Rücksicht genommen werden. Durch Bohrungen im Makrolon treten mechanische Spannungen auf, die zu Rissen in den Seitenwänden führen können. Deshalb sollte laut dem Hersteller Bayer MaterialScience zwischen den Zentren zweier Bohrungen ein Mindestabstand in Höhe der Summe der jeweils doppelten Bohrdurchmesser bzw. mindestens 12 mm eingehalten werden.

Um eine mögliche Polarisierung des Makrolons beim Einspeisen von Strömen zu verhindern, stecken die von einem Schrumpfschlauch umgebenen Elektroden in mittig durchbohrten Kunststoffschrauben. Damit die Gewinde für die Schrauben keine Risse im Beckenrand verursachen können, enthalten nur die 45 mm langen, 45 mm breiten und 10 mm dicken auf die Seitenwände aufgeklebten Makrolonquader die benötigten Gewinde. Die gewindelosen 15 x 15 x 10 mm großen Makrolonquader an den 29 kleineren Bohrungen dienen der mechanischen Stabilisierung der Temperatursonden.

Die Elektroden für die Impedanztomographie bestehen aus dem sehr korrosionsbeständigen Platin und besitzen einen Durchmesser von 6 mm sowie eine Dicke von 0,6 mm. Auf der Rückseite der Elektroden befindet sich außerdem ein 40 mm langer Platindraht mit einer Lüsterklemme.

Geschirmte Leitungen verbinden die 36 Elektroden zunächst mit einem Steckbrett. Für die geoelektrische 3D-Tomographie stehen allerdings nur 29 Messleitungen zur Verfügung, von denen lediglich zehn spezielle Leitungen für die Stromeinspeisung verwendet werden können. Vor den Messungen erfolgt durch die Wahl der Leitungssteckplätze auf der vom Becken abgewandten Seite des Steckbrettes die Festlegung der Konfigurationen.

Ein LabView-Programm steuert den Ablauf der Messungen. Dabei erfasst, filtert und speichert es die Spannungswerte. Zunächst werden die Messparameter wie die Abtastrate, die Messdauer und die Filterparameter des Butterworthfilters, bestehend aus dem Filtertyp (Hochpass, Tiefpass oder Bandpass) sowie dessen Ordnung und Grenzfrequenzen, eingestellt (siehe Kapitel 4.3. und 5.4.). Mit dem Beginn der Messungen sendet der Rechner ein Startsignal an die Speicherprogrammierbare Steuerung (SPS) S7-300 von der Firma Siemens. Entsprechend ihrer Programmierung verschaltet sie zwei der zehn möglichen Speiseelektroden mit der Konstantstromquelle Keithley 6221, die die zuvor festgelegte Stromstärke und Frequenz des Speisestromes während der Messung konstant hält. Nach Ablauf der Messverzögerungszeit sendet die SPS ein Signal an den Messrechner, welcher daraufhin die Spannungen zwischen der Referenzelektrode und den 26 anderen Elektroden misst, mit dem Bandpass filtert und aufzeichnet. Das bedeutet, dass für einen Versuch die Verschaltungszeit mindestens so groß sein muss wie die Summe aus der Messverzögerungszeit und der Messdauer. Die entsprechenden Zeiten werden vor Beginn des Experiments an dem OP5, dem Bedienteil der SPS, eingestellt. Der beschriebene Ablauf wiederholt sich für alle möglichen 45 Verschaltungen, die sich aus den verschiedenen Kombinationen der 10 Speiseelektroden ergeben. Am Ende einer geoelektrischen Messung liegen 1170 Spannungswerte für die Inversion vor.

Für die Kontrolle der über die geoelektrische 3D-Tomographie ermittelten Temperaturen und die Beobachtung der zeitlichen Temperaturschwankungen werden während des gesamten Experiments die Randtemperaturen mit einer Abtastfrequenz von 0,1 Hz aufgezeichnet. Dafür befinden sich am Beckenrand die 29 Typ K - Thermoelemente der Firma TC Mess- und Regeltechnik GmbH. Die Vorteile von Thermoelementen sind ihre kurzen Ansprechzeiten und die punktgenaue Temperaturmessung, bei der der so genannte Seebeck-Effekt ausgenutzt wird.

Bei einem Thermoelement sind zwei verschiedene, thermoelektrisch wirksame, homogene Leiter an der Messstelle elektrisch miteinander verbunden. Die entstehende Thermospannung entspricht der Temperaturdifferenz zwischen der Vergleichsstelle am Ende der beiden gegeneinander isolierten Leitungen und dem Messpunkt. Die Höhe der Spannung hängt dabei von der Materialkombination in den beiden Leitungen ab. Ein Typ K - Thermoelement besteht aus einer Nickel-Chrom-Leitung und einer Nickelleitung. Um aus der Thermospannung die Temperatur am Messpunkt berechnen zu können, muss die Temperatur an der Vergleichsstelle bekannt sein.

Diese wird über je einen Sensor innerhalb der sieben National Instruments NI 9211 - Module registriert. Da an der Klemme eines Moduls Anschlüsse für maximal vier Thermoelemente vorhanden sind, ist eine kontinuierliche Temperaturmessung während der Experimente nur an insgesamt 28 Thermoelementen möglich. Die Messung der Thermospannung erfolgt mittels der NI 9211 - Module über einen hochohmigen Widerstand von  $20\text{ M}\Omega$  und einen Analog-Digital-Wandler mit einer Auflösung von 24 Bit. Auf dem dazugehörigen Computer befindet sich der VI-Logger von National Instruments, der die 28 Temperaturen aus den Spannungen berechnet und speichert. Die Temperatur an dem 29. Thermoelement wird nur vor und nach jeder geoelektrischen Messung mit dem Gerät TastoTherm der Firma INFRAPOINT Messtechnik GmbH bestimmt.

## 4.2. Fehlerquellen und Datenqualität

Wie zuvor beschrieben, erfolgt die Ermittlung des Temperaturfeldes im Versuchsbecken über die Messung elektrischer Spannungen am Beckenrand. Diese Spannungen können von Störsignalen überlagert und von elektrochemischen Effekten beeinflusst werden, wodurch sich die Datenqualität verringert. Je exakter die Messwerte sind, desto genauer kann die dreidimensionale Temperaturverteilung im Versuchsbecken bestimmt werden. Um den Störungen entgegenzuwirken und somit die Messgenauigkeit zu erhöhen, müssen zunächst deren Ursachen bekannt sein (siehe Kapitel 4.2.2.).

Der Einfluss der Digitalisierung sowie der zeitlich beschränkten Datenerfassung auf die Messgenauigkeit wird im folgenden Kapitel erläutert.

### 4.2.1. Digitalisierung und zeitlich begrenzte Datenerfassung

Die Digitalisierung der Spannungen zwischen den Potenzialsonden erfolgt über die PCI - 6031E - Steckkarte der Firma National Instruments. Der Analog-Digital-Wandler dieser Steckkarte wandelt die in gleichen Zeitabständen abgetasteten analogen Messwerte in eine binäre Zahlenfolge um. Da die Steckkarte mit einem 16 Bit Analog-Digital-Wandler arbeitet, stehen  $2^{16} = 65.536$  mögliche digitale Werte für den eingestellten Messbereich von -10 V bis +10 V zur Verfügung. (NATIONAL INSTRUMENTS, 2007) Damit ergibt sich für die Genauigkeit des Analog-Digital-Wandlers, die auch als Quantisierungsfehler  $Q$  bezeichnet wird, ein Wert von

$$Q = \frac{+10\text{V} - (-10\text{V})}{2^{16}} = 305\mu\text{V} \quad . \quad (4.1)$$

Für die Signalverarbeitung liegen anschließend die diskreten Werte  $u_n$  anstelle der kontinuierlichen Funktion  $u(t)$  vor. Da die Abtastung in gleichen Zeitabständen  $\Delta t$  erfolgt, kann ein Signal  $u(t)$  nach dem Abtasttheorem nur dann exakt rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz  $f_s$  größer als das Doppelte der höchsten Frequenzkomponente  $F$  des Signals ist:

$$2F < \frac{1}{\Delta t} = f_s \quad . \quad (4.2)$$

Bei einer Abtastung in größeren Zeitabständen tritt der Aliasingeffekt in Form von Rückfaltungen auf. Das bedeutet, dass die Frequenzen, die größer als die Hälfte der Abtastfrequenz – der so genannten Nyquistfrequenz – sind, auf niedrigere Frequenzen übertragen werden. Demnach sind die Auswirkungen dieses Effekts auf die Messwerte umso größer, je kleiner die Abtastfrequenz ist.

Um den spektralen Inhalt einer Zeitreihe  $g(t)$  abbilden zu können, ist zunächst die Fourier-Transformierte  $G(f)$  wie folgt zu berechnen:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') e^{-2\pi i f t'} dt' \quad . \quad (4.3)$$

Die nachstehende Formel ermöglicht dann die Rücktransformation in den Zeitbereich:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{2\pi i f t} df \quad . \quad (4.4)$$

Die Funktion in Gleichung (4.5) stellt schließlich das Leistungsspektrum dar:

$$|G(f)|^2 = G(f) \bar{G}(f) \quad . \quad (4.5)$$

Allerdings wird meist nur das Quadrat des Absolutwertes als Spektrum bezeichnet und für Analysen herangezogen. (HAMMING, 1987)

Da die Messzeit  $t = 2T$  pro Konfiguration begrenzt ist, entsprechen die registrierten Zeitreihen  $g_1(t)$  den unendlichen Signalen  $g(t)$ , die mit der so genannten Boxcar-Funktion  $p(t)$  zeitlich multipliziert wurden:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (4.6)$$

$$g_1(t) = 2T g(t) p(t) \quad . \quad (4.7)$$

Laut dem Faltungstheorem ist das Produkt zweier Funktionen gerade die Faltung der Fourier-Transformierten dieser beiden Funktionen. Die Berechnung der Fourier-Transformierten von  $p(t)$  liefert folgendes Ergebnis:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t') e^{-2\pi i f t'} dt' = \frac{1}{2T\pi f} \sin(2\pi f T) \quad . \quad (4.8)$$

Für die Fourier-Transformierte  $G_1(f)$  gilt somit die nachstehende Formel

$$G_1(f) = 2T \int_{-\infty}^{\infty} G(f_1) \frac{\sin[2\pi T(f_1 - f)]}{2\pi T(f_1 - f)} df_1, \quad (4.9)$$

wobei  $f_1$  die Integrationsvariable ist. In Gleichung (4.9) wird deutlich, dass eine endliche Messzeit die Faltung der Fourier-Transformierten  $G(f)$  des unendlichen Signals mit der Fourier-Transformierten  $P(f)$  der Boxcar-Funktion zur Folge hat.

Die einzelnen Spektrallinien verbreitern sich dementsprechend mittels einer Funktion vom Typ  $\sin f/f$  (Abbildung 4.3) und „verschmieren“ das Spektrum. Dabei gilt: Je länger die Messdauer ist, desto besser sind benachbarte Spektrallinien auflösbar und desto geringer werden die Beträge der Seitenmaxima. (HAMMING, 1987)

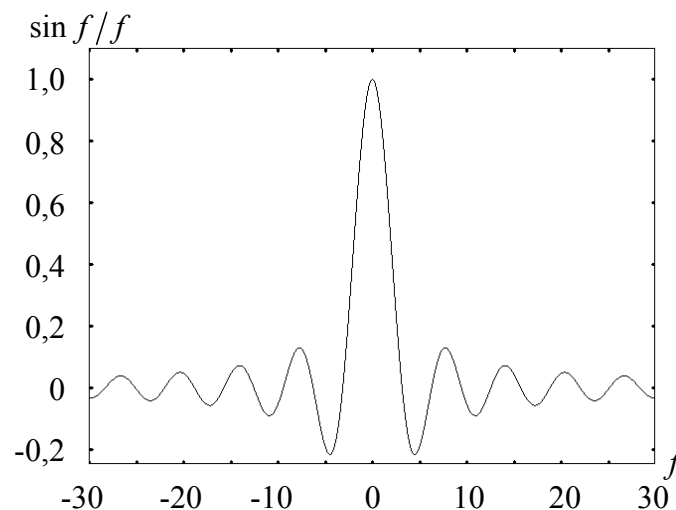


Abb. 4.3: Veranschaulichung der Funktion  $\sin f/f$ .

Die Messdauer sollte allerdings so lang wie nötig und so kurz wie möglich sein, damit zum einen die Einschwingdauer des digitalen Filters (siehe Kapitel 4.3.) genügend überschritten wird und zum anderen die zeitlichen Veränderungen während der Strömungsprozesse im Versuchsbecken so gut wie möglich aufgelöst werden können.



### 4.2.2. Störsignale und elektrochemische Effekte

In die Auswertung der geoelektrischen Messungen gehen die Höhe der eingespeisten Stromstärke  $I$ , die registrierte Spannung  $U$  sowie die geometrische Größe  $k$ , die die Abmessungen des Versuchsbeckens und die Positionen der verwendeten Elektroden beinhaltet, ein. Da alle Parameter eine gewisse Messungenauigkeit aufweisen, ergibt sich für den scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstand  $\rho_s$  laut Gleichung (3.34) folgender relativer Fehler für eine Einzelmessung:

$$\left| \frac{\Delta \rho_s}{\rho_s} \right| \leq \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right| + \left| \frac{\Delta k}{k} \right| . \quad (4.10)$$

Der Fehler der Stromstärke ist wegen der Stabilisierung des Speisestromes durch die Konstantstromquelle relativ gering. Auch die Maße des Versuchsbeckens und die Elektrodenpositionen konnten auf einen Millimeter genau bestimmt werden. Allerdings arbeitet das Inversionsprogramm mit der Annahme von Punktelektroden (siehe Kapitel 4.4.), obwohl die Platinelektroden eine kreisförmige Fläche mit einem Durchmesser von 6 mm besitzen. Um den Einfluss dieser und anderer systematischer Fehler auf die Inversionsergebnisse zu eliminieren, wurde vor jedem Versuch zunächst eine geoelektrische Referenzmessung im ungeheizten Becken durchgeführt. Durch die Quotientenbildung der Widerstände aus der Referenzmessung und den einzelnen Messungen während eines Versuches sowie die anschließende Inversion der Quotienten sind auch diese Fehler gegenüber den auftretenden Fehlerquellen bei der Registrierung der Spannungen relativ gering.

So stellen die potenzialführenden Leitungen der einspeisenden und messenden Elektroden die geladenen „Platten“ von Kondensatoren dar. Durch Verschiebungsströme auf den Leitungen bei Änderungen der Ladungen in den Leitungen kann zwischen ihnen eine kapazitive Kopplung auftreten. Aus diesem Grund wurden geschirmte Leitungen verwendet, wodurch die kapazitiven genauso wie die induktiven Kopplungen vermindert werden konnten. Da mit einer Verringerung der Frequenz auch die Stärke der elektromagnetischen Induktionen abnimmt, wäre bei der relativ niedrigen Frequenz des eingespeisten sinusförmigen Stromes von 8,333 Hz ohnehin nur ein geringer Einfluss zu erwarten.

Das Übersprechen der Kanäle aufgrund des Kondensators auf der PCI - 6031E - Steckkarte erweist sich als eine deutlich größere Fehlerquelle. Die Eingangsimpedanz der Karte setzt sich aus dem ohmschen Widerstand von 100 G $\Omega$  und dem sich in Parallelschaltung befindlichen Kondensator mit einer Kapazität von 100 pF zusammen. Während der Messung werden die Spannungszeitreihen mehrerer Kanäle annähernd gleichzeitig erfasst, indem die Kanäle wiederholt in der gleichen Reihenfolge nacheinander je einmal abgetastet werden. Je größer der spezifische elektrische Widerstand der Versuchsflüssigkeit ist, desto schlechter kann sich

die Spannung in dem Kondensator wieder abbauen (siehe Kapitel 5.1.). Dementsprechend kann es vorkommen, dass sich der Kondensator bei der Erfassung eines Messwerts auflädt und sich bei der Erfassung der folgenden Spannung noch innerhalb seines Entladevorganges befindet. Da sich die Reihenfolge der Kanalabtastung nicht ändert, ergibt sich für einen Kanal immer wieder ein höherer bzw. niedrigerer Wert, wenn der vorhergehende Kanal eine deutlich höhere bzw. niedrigere Spannung aufweist. Deswegen wurden zum einen die beiden jeweils einspeisenden Elektroden, die zu diesem Zeitpunkt eine sehr hohe Spannung besitzen, durch Relais von der SCB 100 - Box getrennt und zum anderen jede Leitung zweimal direkt nacheinander erfasst. Dadurch entlädt sich der größte Anteil des Kondensators während der ersten Abtastung einer Leitung. Die eigentliche Erfassung des Messwerts bei der anschließenden zweiten Abtastung der gleichen Leitung ist damit weniger fehlerhaft. Da der spezifische elektrische Widerstand des PEG-Wasser-Gemisches jedoch temperaturabhängig ist, können die Effekte, die diese annähernd systematischen Fehler hervorrufen, nicht restlos durch die Inversion der Widerstandsquotienten eliminiert werden.

Um den Einfluss einer Gleichspannung auf die Daten abzuschätzen, wurden Testmessungen mit nicht-alternierenden Gleichströmen durchgeführt. Dabei hat sich gezeigt, dass sich die Beckenwände, die aus dem Polycarbonat Makrolon® bestehen und eine Dielektrizitätszahl von  $\epsilon_r = 3$  besitzen, durch Verschiebungs- und Orientierungsströme polarisieren. Bei einer Messung wurde über zwei Elektroden  $A$  und  $B$  ein konstanter Strom eingespeist und die Potenzialdifferenz zwischen zwei anderen Elektroden  $M$  und  $N$  registriert. Die Elektroden  $A$ ,  $B$  und  $M$  befanden sich an der gleichen Beckenwand. Die Entfernung zwischen den Elektroden  $A$  und  $M$  betrug zehn Zentimeter und zwischen den Elektroden  $B$  und  $M$  neun Zentimeter. Wie in Abbildung 4.4 ersichtlich, verändern sich die Ladungsverteilungen allein durch die Berührung der Beckenwand sprunghaft. Demnach können durch Lade- und Entladevorgänge in der Beckenwand und deren Kopplung mit der Versuchsflüssigkeit driftende Messspannungen an einigen Potenzialelektroden hervorgerufen werden.

Die zu registrierenden Potenzialdifferenzen werden auch aufgrund von elektrochemischen Vorgängen in dem PEG-Wasser-Gemisch bzw. an den Elektroden durch Offset und Drift überlagert. Die Verwendung von Platinelektroden verhindert elektrochemische Potenziale infolge von Korrosion. Durch das Anlegen einer Spannung zwischen zwei Elektroden fließt ein Strom und die Elektrolyse der Versuchsflüssigkeit beginnt. Die Verwendung eines niederfrequenten Wechselstroms vermindert die Effekte von Elektrolyse und Polarisationen. Den verbleibenden Offset und die verbleibende Drift kann ein Hochpassfilter aus den Messwerten eliminieren. Da jedoch auch höherfrequente Störungen auftreten, werden die registrierten Spannungen mit einem digitalen Bandpass gefiltert (siehe Kapitel 4.3.).

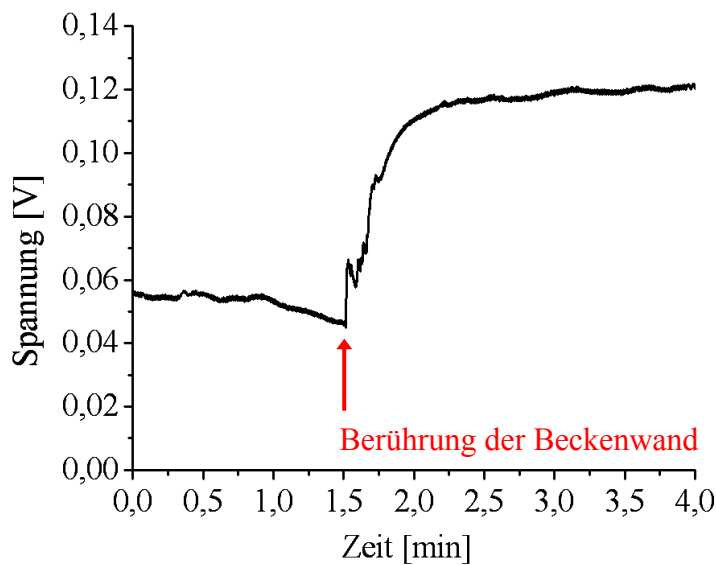


Abb. 4.4: Polarisierung der Beckenwand durch Einspeisen eines konstanten Stroms über zwei Elektroden  $A$  und  $B$  und die Auswirkungen auf die Ladungen durch die Berührung der Beckenwand, gemessen von zwei Elektroden  $M$  und  $N$ .

Die elektrochemische Zersetzung des Polyethylenglykols und das Verdunsten von Wasser verändern allerdings auch die Beträge der Parameter, die den Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischer elektrischer Leitfähigkeit definieren. Deshalb wird vor jedem Experiment eine Probe des PEG-Wasser-Gemisches entnommen und die Parameter  $A$ ,  $B$  und  $T_0$  für die VFT-Gleichung (2.5) neu bestimmt.

Den größten Anteil der industriellen Störfelder trägt die Netzfrequenz von 50 Hz bei. Das Netzrauschen ist durch das Zuschalten von Verbrauchern, starke Transienten und Oberschwingungen durch asymmetrische Lasten allerdings nicht stationär. Deutlich geringer sind die Störungen, die durch das Bahnnetz bei  $16\frac{2}{3}$  Hz hervorgerufen werden.

Die natürlichen elektromagnetischen Störungen werden entsprechend ihrer Periodendauer in Variationen, Pulsationen, Mikropulsationen und extrem kurzperiodische Transienten unterteilt. Tellurische Variationen sind langperiodische Schwankungen des Erdmagnetfeldes mit Perioden von mehr als zehn Minuten. Dabei induzieren diese zeitlich veränderlichen Magnetfelder, die aus Strömen in der Ionosphäre und Magnetosphäre entstehen, elektrische Ströme im Untergrund, deren Stärke von der Frequenz sowie von der elektrischen Leitfähigkeit abhängt. Die Magnetfeldschwankungen der Pulsationen besitzen dagegen Periodendauern von 0,2 bis 600 s.

---

Hochfrequente elektromagnetische Störungen werden überwiegend von Gewittern erzeugt. Die Wirkung naher Gewitter spiegelt sich durch starke transiente Impulse in den Spannungszeitreihen wider. Dagegen kennzeichnen die Schumann-Resonanzen mit Frequenzen von etwa 8, 14 und 21 Hz die ersten Eigenschwingungen globaler Gewitter, für deren elektromagnetische Wellen die Erde und die Ionosphäre eine Art Hohlraumresonator darstellen. Die natürlichen Störfelder wirken sich jedoch kaum auf die Messungen in der Versuchsflüssigkeit aus und werden zudem weitestgehend durch den digitalen Bandpass minimiert. (FRIEDEL, 2000)

### 4.3. Digitale Filter

Während der geoelektrischen 3D-Tomographie speist die Konstantstromquelle über zwei Elektroden einen sinusförmigen Strom mit einer Frequenz von weniger als 50 Hz ein, um ein quasistationäres elektromagnetisches Potenzialfeld zu erzeugen. Höher- und niederfrequenter Störsignale, deren Ursachen auszugsweise in Kapitel 4.2.2. beschrieben sind, überlagern die aufzuzeichnenden Sinuskurven und verfälschen somit die Messspannungen.

Filter minimieren diese Störeinflüsse. Als Filter wird in der Elektrotechnik ein System bezeichnet, das den spektralen Inhalt eines Eingangssignals nur in einem angegebenen Frequenzband passieren lässt. Die frequenzabhängige Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  des Filters ist der Quotient aus dem gefilterten Signal und dem Eingangssignal. Es existieren die vier grundlegenden Filtertypen Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperre, deren idealisierte Amplitudencharakteristiken in Abbildung 4.5 dargestellt sind. (STEARNS et al., 1994)

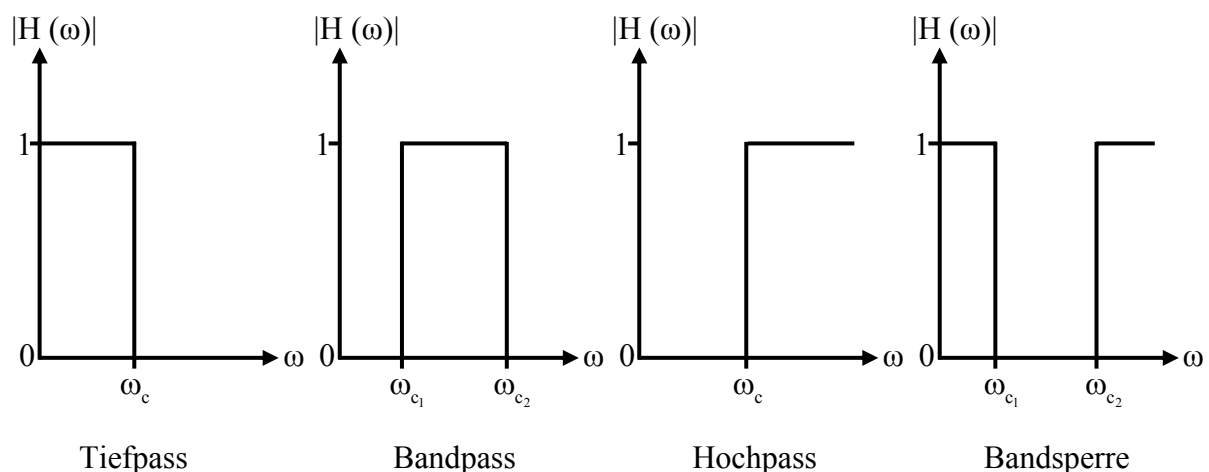


Abb. 4.5: Idealisierte Amplitudencharakteristiken mit  $\omega_c$  als Grenzfrequenzen.

Die Realisierung der gewünschten Übertragungsfunktion kann sowohl über analoge Filter mittels linearer Schaltelemente als auch über digitale Filter erfolgen. Nachteile analoger Filter sind beispielsweise die Leistungsverluste in den Schaltelementen sowie die Probleme bei der Isolierung zwischen den einzelnen Stufen. Deshalb werden für diese Arbeit die weniger rauschempfindlichen digitalen Filter verwendet. In der digitalen Signalverarbeitung stellen lineare Operatoren, mit denen ein digitales Signal zum Beispiel differenziert, integriert, geglättet oder mit denen der Rauschanteil verringert werden kann, ein „digitales Filter“ dar. (STEARNS et al., 1994; HAMMING, 1987)

Digitale Filter umfassen sowohl rekursive als auch nichtrekursive Filter. Nichtrekursive Filter werden auch als „finite response filter“ (FIR-Filter) bezeichnet und durch die Gleichung

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_{n-k} \quad (4.11)$$

definiert. Demnach ergeben sich aus der Faltung der Eingangsdaten  $u_{n-k}$  mit den Filterkoeffizienten  $c_k$  die Filterausgangssignale  $y_n$ . Das Vorgehen für den Entwurf eines nichtrekursiven Filters wird im Anhang A.1. beschrieben.

Fließen in die Berechnung der Ausgangswerte zusätzlich zurückliegende Werte des Ausgangssignals  $y_n$  ein, so handelt es sich um ein rekursives Filter, für welches folgende Gleichung gilt:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_{n-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k y_{n-k} \quad , \quad (4.12)$$

wobei  $c_k$  und  $d_k$  Konstanten sind. Der Begriff „infinite impulse response filter“ (IIR-Filter) ist eine weitere Bezeichnung für ein rekursives Filter. Da die Koeffizienten jeweils als Konstanten definiert sind, stellen beide Filterarten zeitinvariante Filter dar. (HAMMING, 1987)

Ein endliches rekursives Filter wird abweichend von Gleichung (4.12) über nachstehende Formel definiert:

$$y_n = \sum_{k=0}^M c_k u_{n-k} + \sum_{k=1}^N d_k y_{n-k} \quad . \quad (4.13)$$

Die größere der beiden Zahlen  $M$  und  $N$  bezeichnet dabei die Ordnung des Filters. Mit den Substitutionen:

$$u_n = A_I e^{2\pi i f n} \quad \text{und} \quad y_n = A_0 e^{2\pi i f n} \quad (4.14)$$

ergibt sich für die Übertragungsfunktion eines rekursiven Filters folgende allgemeine Formel:

$$\tilde{H}(f) = \frac{A_0}{A_I} = \frac{\sum_{k=0}^M c_k e^{-2\pi i f k}}{1 - \sum_{k=1}^N d_k e^{-2\pi i f k}} \quad . \quad (4.15)$$

Daraus ist ersichtlich, dass rekursive Filter neben der Einbeziehung der vorangegangenen Ausgangssignale  $y_n$  eine schmale Übergangszone zwischen Durchlass- und Sperrbereich ermöglichen. Je kleiner der Nenner der Gleichung (4.15) ist, desto steiler sind die Flanken des Filters. (HAMMING, 1987)

Die Auswahl des gewünschten Filtertyps erfolgt unter Berücksichtigung der geforderten Eigenschaften bezüglich der Welligkeit im Durchlassbereich, der Welligkeit im Sperrbereich, der Steilheit beim Übergang vom Durchlass- zum Sperrbereich sowie der Eignung zur Impulsübertragung usw.. Relativ häufig werden Butterworth-, Bessel-, Tschebyscheff- und Cauer-Filter verwendet. Die Amplitudengänge ihrer jeweiligen Tiefpässe sind für verschiedene Ordnungen  $N$  in Abbildung 4.6 dargestellt. Ein Cauer-Filter besitzt zwar sowohl im Durchlass- als auch im Sperrbereich eine Welligkeit, weist aber dafür eine hohe Flankensteilheit auf. Ein ebenfalls relativ steiler Übergang vom Durchlass- zum Sperrbereich kann mit Tschebyscheff-Filtern erreicht werden. Dabei hat ein solches Filter entweder im Durchlassbereich (Typ 1) oder im Sperrbereich (Typ 2) eine Welligkeit mit definierter maximaler Amplitude. Bei Butterworth- und Bessel-Filtern tritt kein Überschwingen auf. Allerdings ist bei diesen Filtern die Flankensteilheit geringer als bei den beiden anderen Filterarten, wobei der Amplitudengang beim Bessel-Filter weniger steil abfällt als beim Butterworth-Filter. Die digitale Verarbeitung der Messspannungen, die mit dem in Kapitel 4.1. erläuterten Versuchsaufbau registriert wurden, erfolgte aufgrund der zuvor beschriebenen Eigenschaften mit Butterworth-Filtern. (SCHRÜFER, 1992)

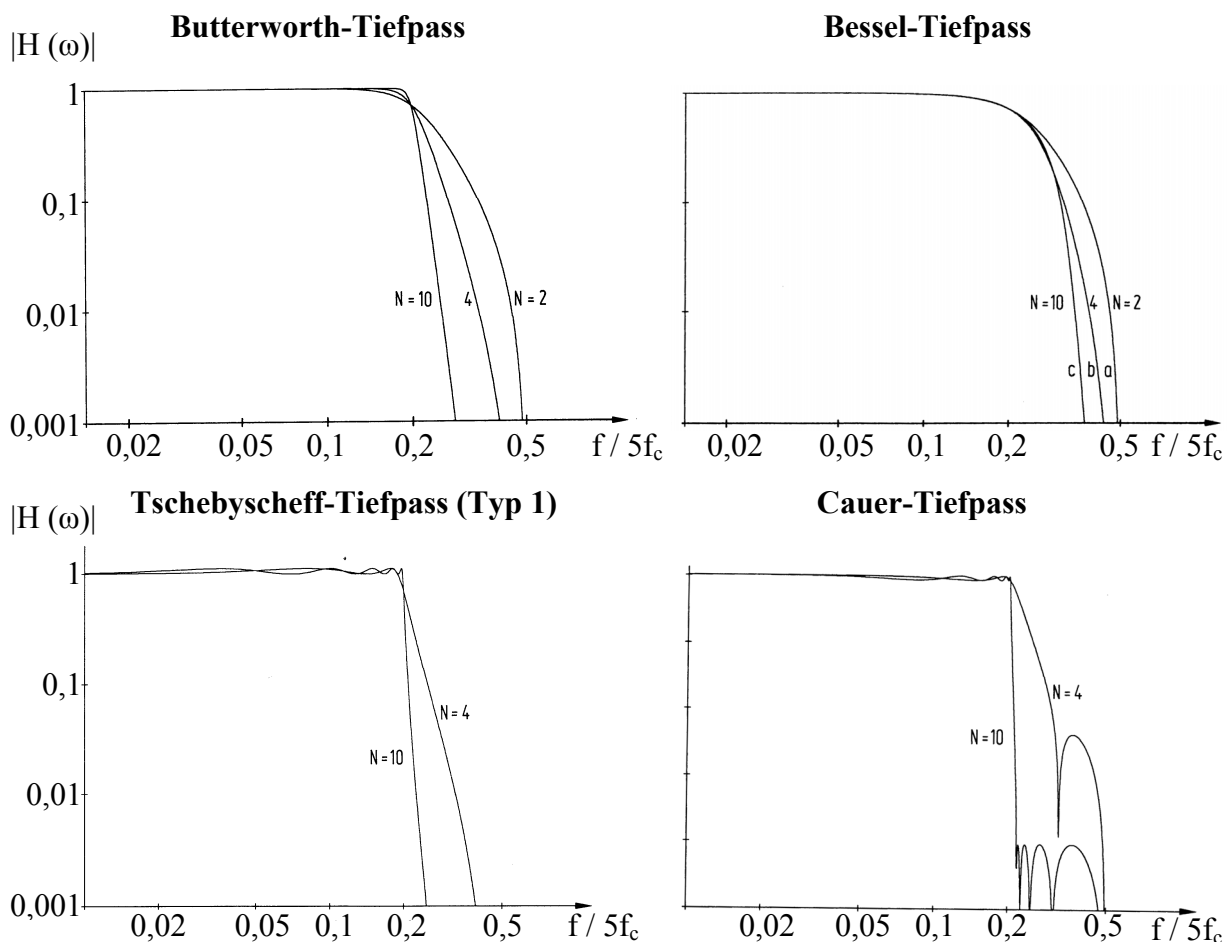


Abb. 4.6: Amplitudengänge für Butterworth-, Bessel-, Tschebyscheff- und Cauer-Tiefpässe mit verschiedenen Ordnungen. (SCHRÜFER, 1992)

Butterworth-Filter – auch Potenzfilter genannt – entsprechen monotonen nichtrekursiven Filtern (siehe Anhang A.1). Um eine reelle rationale Übertragungsfunktion mit einem Sinus-Anteil und einem Kosinus-Anteil zu erhalten, wird die bilineare  $z$ -Transformation der Frequenz wie folgt vorgenommen:

$$|z| = \left| e^{2\pi i f} \right| = \left| \frac{1+iw}{1-iw} \right| \leq 1 \quad . \quad (4.16)$$

Die Variable  $w$  kann dabei Werte von Null bis  $+\infty$  für  $f$  von Null bis  $\frac{1}{2}$  bzw. von Null bis  $-\infty$  für  $f$  von Null bis  $-\frac{1}{2}$  annehmen. Ein digitales Filter ist aber nur dann stabil, wenn eine begrenzte Folge von Eingangswerten auch eine begrenzte Anzahl gefilterter Werte liefert. Dies ist allerdings nur der Fall, wenn für die zu potenzierende Größe  $z$  die in Gleichung (4.16) definierte Bedingung gilt. Dementsprechend befinden sich alle Werte von  $z$  im Inneren bzw. bei reellen  $f$  auf dem Rand des Einheitskreises. Bei  $z = 0$  zeigt sich, dass nur die Nullstellen der rechten Hälfte des Einheitskreises während des Entwurfs eines Butterworth-Filters zu berechnen sind, da  $w$  den Wert  $+i$  annimmt. (HAMMING, 1987)

Durch die Multiplikation der Übertragungsfunktion  $\tilde{H}(f)$  mit ihrer komplexen Konjugierten  $\tilde{H}(-f)$  entfällt der Imaginärteil und somit auch die Phasenverschiebung zwischen dem ungefilterten und dem gefilterten Signal. Dabei verdoppelt sich jedoch die Anzahl der Nullstellen im Nenner. Die nachstehende rationale Funktion  $\tilde{H}(f)\tilde{H}(-f)$  bildet die allgemeine Formel für den Butterworth-Filter:

$$\tilde{H}(f)\tilde{H}(-f) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{w}{w_h} \right]^{2N}} \quad . \quad (4.17)$$

Die Berechnung der Entwurfparameter  $N$  und  $w_h$  erfolgt durch das Festlegen der Beträge für die in Abbildung 4.7 dargestellten Variablen  $\varepsilon$ ,  $A$ ,  $w_c$  und  $w_s$  sowie durch das Aufstellen der beiden Bedingungen für die Kanten des Übergangsbereichs:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2} = \frac{1}{1 + \left[ \frac{w_c}{w_h} \right]^{2N}} \quad , \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{1 + A^2} = \frac{1}{1 + \left[ \frac{w_s}{w_h} \right]^{2N}} \quad . \quad (4.19)$$

Dabei kennzeichnet die Grenzfrequenz  $w_c$  die obere Grenze des Durchlassbereichs und  $w_s$  den Beginn des Sperrbereichs.



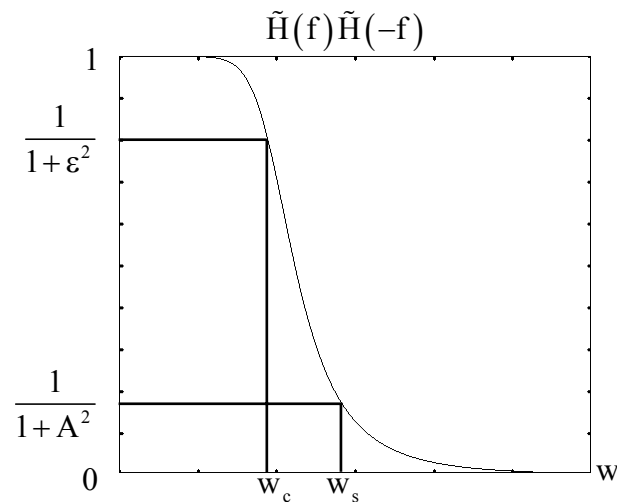


Abb. 4.7: Schema eines Butterworth-Tiefpasses.

Werden die reziproken Werte der Gleichungen (4.18) und (4.19) miteinander dividiert, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\left[ \frac{w_c}{w_s} \right]^{2N} = \frac{\epsilon^2}{A^2} \quad (4.20)$$

Demnach gilt für die Ordnung  $N$ :

$$N = \frac{\log\left(\frac{\epsilon}{A}\right)}{\log\left(\frac{w_c}{w_s}\right)} \quad (4.21)$$

und für  $w_h$ :

$$w_h = \frac{w_c}{(\epsilon)^{1/N}} \quad (4.22)$$

Um aus dem so bestimmten Produkt  $\tilde{H}(f)\tilde{H}(-f)$  eine geeignete Übertragungsfunktion  $\tilde{H}(f)$  zu erhalten, sind die Nullstellen des Nenners für die rechte Hälfte des Einheitskreises zu ermitteln:

$$\left[ \frac{w}{w_h} \right]^{2N} = -1 = e^{\pi i + 2\pi i k} \quad (4.23)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{w}{w_h} = e^{\pi i(2k+1)/2N} \quad (\text{für } k = 0, \dots, N-1) \quad (4.24)$$

Anschließend werden diese Nullstellen paarweise von den Enden her zusammengefasst, d. h.  $k$  wird mit  $N - k - 1$  gepaart:

$$\left[ \frac{w}{w_h} - e^{\pi i(2k+1)/2N} \right] \left[ \frac{w}{w_h} - e^{\pi i(2N-2k-1)/2N} \right] . \quad (4.25)$$

Mit

$$e^{\pi i(2N/2N)} = e^{\pi i} = -1 \quad (4.26)$$

entsteht daraus folgende Gleichung:

$$\left[ \frac{w}{w_h} - e^{\pi i(2k+1)/2N} \right] \left[ \frac{w}{w_h} + e^{-\pi i(2k+1)/2N} \right] = \left[ \frac{w}{w_h} \right]^2 - 2i \sin \left\{ \frac{\pi(2k+1)}{2N} \right\} \left[ \frac{w}{w_h} \right] - 1 . \quad (4.27)$$

Die Rücktransformation von  $w$  in die  $z$ -Ebene gemäß der Gleichung (4.16) führt zu den nachstehenden quadratischen Faktoren:

$$\left[ \frac{-(1/w_h^2)(1-z)^2 + 2 \sin \{ \pi(2k+1)/2N \} [1-z^2] [1/w_h] - (1+z)^2}{(1+z)^2} \right] . \quad (4.28)$$

Die reellen quadratischen Faktoren entsprechen den beiden jeweils linearen, konjugiert komplexen Faktoren. Es existieren  $N/2$  dieser Faktoren. Wenn  $N$  ungerade ist, dann entfällt ein Faktor

$$\left[ \frac{w}{w_h} - e^{\pi i/2} \right] = \left[ \frac{w}{w_h} - i \right] , \quad (4.29)$$

der nach der Rücktransformation in die  $z$ -Ebene folgenden Wert annimmt:

$$i \left[ \frac{(1/w_h)(1-z) - (1+z)}{1+z} \right] . \quad (4.30)$$

Die quadratischen Faktoren und ein linearer Faktor, falls er bei der Rekonstruktion des Polynoms aus seinen Nullstellen auftritt, befinden sich im Nenner der Übertragungsfunktion:

$$\tilde{H}(f) = \prod \frac{(1+z)^2}{\{\text{quadratische Faktoren}\}} . \quad (4.31)$$

Da das Tiefpass-Filter an der Stelle  $f = 0$  die Verstärkung Eins aufweisen soll, müssen der Wert  $-1$  in jedem quadratischen Faktor und das  $i$  im linearen Faktor weggelassen werden.

Die Übertragungsfunktion  $\tilde{H}(f)$  des Filters ist schließlich das Produkt (Kaskade) von Übertragungsfunktionen  $\tilde{H}_K(f)$  zweiter Ordnung und gegebenenfalls einer Funktion erster Ordnung:

$$\tilde{H}_K(f) = \frac{w_h^2 [z^2 + 2z + 1]}{z^2 \left[ w_h^2 - 2w_h \sin \left\{ \frac{\pi(2k+1)}{2N} \right\} + 1 \right] + z \left[ 2 - 2w_h^2 \right] + \left[ w_h^2 - 2w_h \sin \left\{ \frac{\pi(2k+1)}{2N} \right\} - 1 \right]} \quad (4.32)$$

mit  $z = e^{2\pi i f}$ .

Am Beispiel eines rekursiven Filters zweiter Ordnung gemäß Gleichung (4.13)

$$y_n = c_0 u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} \quad (4.33)$$

und der dazugehörigen Übertragungsfunktion entsprechend Gleichung (4.15)

$$\tilde{H}_K(f) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{z^2 - b_1 z - b_2} \quad (4.34)$$

ist zu erkennen, dass die Koeffizienten der Übertragungsfunktion mit den Koeffizienten des gewünschten digitalen Filters identifiziert werden können. Für einen Butterworth-Filter mit der Ordnung  $N$  durchlaufen die Ausgangsdaten des Filters zweiter Ordnung entsprechend oft weitere Filter zweiter Ordnung und eventuell auch einen Filter erster Ordnung. (HAMMING, 1987)

Um aus den sinusförmigen Messspannungen mit der Frequenz  $f_0$  nicht nur die hoch- sondern auch die niederfrequenten Störsignale zu eliminieren, werden Bandpassfilter verwendet. Damit das eigentliche Messsignal keiner Dämpfung unterliegt, erfolgt die Auswahl der beiden Grenzfrequenzen  $f_{c_1}$  und  $f_{c_2}$  unter Berücksichtigung von Gleichung (4.35).

$$f_0 = \sqrt{f_{c_1} f_{c_2}} \quad \text{bzw.} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{c_1} \omega_{c_2}} \quad . \quad (4.35)$$

Das Leistungsspektrum der Übertragungsfunktion  $\tilde{H}(f)$  in Gleichung (4.17) enthält den Parameter  $w_h$ . Bei einem Bandpass-Filter tritt an dessen Stelle die Bandbreite  $w'_h$ :

$$w'_h = w_{c_2} - w_{c_1} \quad , \quad (4.36)$$

wobei  $w_{c_2}$  und  $w_{c_1}$  die transformierten Frequenzen  $f_{c_2}$  und  $f_{c_1}$  sind. (STEARNS et al., 1994)

Ein Bandpass kann durch die so genannte Tiefpass-Bandpass-Transformation aus einem Tiefpass gewonnen werden. Die Vorschrift für diese Transformation lautet:

$$\omega \rightarrow \frac{\omega^2 - \omega_1 \omega_2}{\omega} \quad . \quad (4.37)$$

Daraus ergibt sich für das Leistungsspektrum der Übertragungsfunktion  $\tilde{H}_B(f)$  eines Butterworth-Bandpasses anstelle von Gleichung (4.17) nachstehende Formel:

$$\tilde{H}_B(f) \tilde{H}_B(-f) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\omega^2 - \omega_{c_1} \omega_{c_2}}{\omega'_h \omega} \right]^{2N}} \quad . \quad (4.38)$$

Die Polstellen  $w_B$  für die Rekonstruktion der Übertragungsfunktion  $\tilde{H}_B(f)$  berechnen sich aus den Polstellen  $w_T$  des ursprünglichen Tiefpassfilters wie folgt:

$$w_T = \frac{\omega_B^2 - \omega_{c_1} \omega_{c_2}}{\omega_B} \quad (4.39)$$

$$\omega_B = \frac{1}{2} \left( w_T \pm \sqrt{w_T^2 + 4\omega_{c_1} \omega_{c_2}} \right) \quad . \quad (4.40)$$

Abschließend wird die Übertragungsfunktion des Bandpasses – wie zuvor beim Tiefpass – als Kaskade dargestellt. (STEARNS et al., 1994)

Da das Butterworth-Filter ein unsymmetrisches Filter ist, existieren zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal des Filters frequenzabhängige Phasenverschiebungen. Falls eine zweimalige Anwendung des Filters in jeweils entgegengesetzter Richtung bezüglich der Reihenfolge der Eingangswerte möglich ist, hebt sich die Phasenverschiebung wieder auf. Allerdings quadriert sich dadurch die Übertragungsfunktion. (HAMMING, 1987)

Ein Problem rekursiver Filter ist ihre Einschwingdauer, da die ersten Ausgangssignale  $y_n$  nicht bekannt sind und sie deshalb oftmals gleich Null gesetzt werden. Sehr wahrscheinlich dauern die Abklingzeiten für die Einschwingvorgänge umso länger, je effektiver ein Filter arbeitet. (HAMMING, 1987)

#### **4.4. Inversionsverfahren**

Für die Interpretation der während der geoelektrischen 3D-Tomographie gemessenen Widerstände ist die Berechnung der dreidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung im Versuchsbecken notwendig. Allerdings besteht zwischen den geoelektrischen Messdaten und den gesuchten Modellparametern ein nichtlinearer Zusammenhang, der gewöhnlich iterativ gelöst wird.

Die Inversion der Daten dieser Arbeit erfolgte mit der von C. Rücker und T. Günther entwickelten Drei-Gitter-Technik, die durch die Verwendung von unregelmäßigen Tetraedern eine flexible Parametrisierung und eine gute Nachbildung topographischer Geometrien ermöglicht. Durch die lokale Netzverfeinerung an Materialübergängen oder Quellsingularitäten treten bei dieser Methode zudem weniger numerische Fehler auf als bei anderen Inversionsmethoden. Die Generierung der drei benötigten Gitter (Abbildung 4.8) wird vor der eigentlichen Inversion mit dem nichtkommerziellen Netzgenerator TetGen (SI, 2003) durchgeführt.

Das Parameternetz ist ein unstrukturiertes Tetraedergitter, in welchem die Zellen der zu bestimmenden spezifischen elektrischen Widerstände sowie die Topographie des Messgebietes enthalten sind. Dabei ist die Größe der einzelnen Elemente flexibel variierbar. Die Kantenlängen der kleinsten Tetraeder in der Nähe der Elektroden betragen das 0,5- bis 1,0-fache der Elektrodenabstände. Mit zunehmender Tiefe vergrößern sich die Elemente des Gitters bis auf mehrere Elektrodenabstände.

Um die Diskretisierungsdichte des Parameternetzes und damit die Genauigkeit der Vorwärtsrechnung zu erhöhen, wird aus diesem Netz das durch nach außen verschobene Giterränder räumlich vergrößerte und im Bereich der Elektroden verfeinerte Sekundärfeldgitter generiert. Da allerdings bei Inversionen für das Versuchsbecken alle Grenzen fest vorgegeben sind, entfällt hier die Ausdehnung des Sekundärfeldgitters. Dieses Gitter wird bei jeder Iteration neu berechnet.

In dem Primärfeldgitter, welches sich durch eine weitere Verfeinerung im Umkreis der Elektroden und damit durch eine größere Diskretisierungsdichte auszeichnet, erfolgt die Bestimmung des für den Vorwärtsoperator notwendigen Primärpotenzials bei einer konstanten Leitfähigkeit von  $1 \text{ S m}^{-1}$ . Dieses Potenzial wird durch Interpolation des Primärfeldgitters in das Sekundärfeldgitter übertragen. Handelt es sich bei dem Untersuchungsgebiet jedoch um einen ebenen Erdhalbraum, fallen die Berechnung des Primärfeldgitters und dementsprechend die in Abbildung 4.9 rot markierten Schritte weg, da die Primärpotenziale analytisch bestimmt werden. (GÜNTHER et al., 2006; RÜCKER et al., 2006)

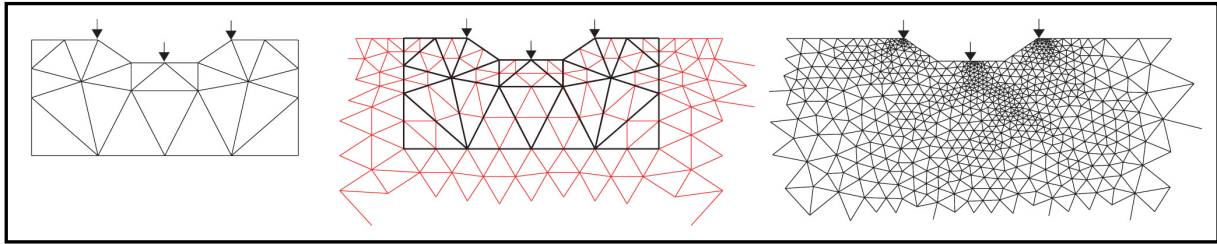


Abb. 4.8: Die drei Gitter für die Inversion dargestellt für eine 2D-Diskretisierung: Parameternetz (links), Sekundärfeldgitter (Mitte) und Primärfeldgitter (rechts). (GÜNTHER et al., 2006)

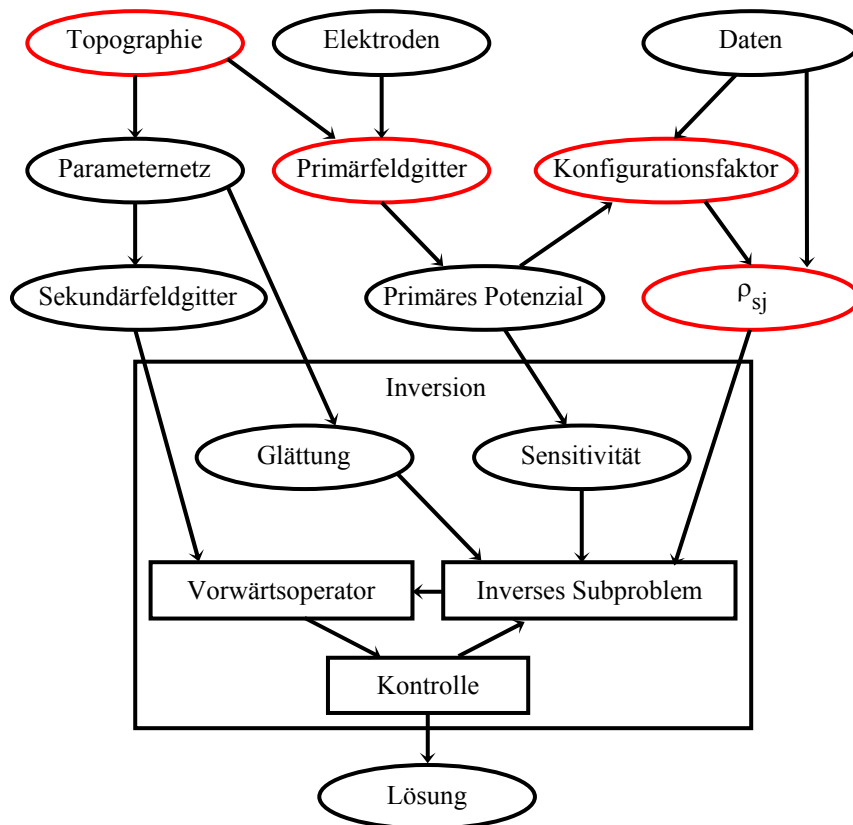


Abb. 4.9: Schema der Drei-Gitter-Inversion nach GÜNTHER et al. (2006) mit  $\rho_{sj}$  für die scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstände.

Der Drei-Gitter-Inversion liegt ein Gauß-Newton-Algorithmus mit einer globalen Regularisierung zugrunde, die auf Tetraeder angepasst ist.

Die  $M$  einzelnen Modellparameter  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)^T$  geben die physikalischen Eigenschaften der Tetraeder folgendermaßen an:

$$m_i = \log \rho_i \quad . \quad (4.41)$$

Nicht nur die spezifischen elektrischen Widerstände  $\rho_i$  sondern auch die  $N$  gemessenen scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstände  $\rho_{s_j}$  des Datenvektors  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)^T$  werden für die Inversion logarithmiert:

$$d_j = \log \rho_{s_j} \quad . \quad (4.42)$$

Allerdings weist jeder Messwert  $d_j$  einen Fehler  $\varepsilon_j$  auf, mit dem der durch die Inversion zu minimierende Misfit zwischen den Daten  $d_j$  und den Modellantworten  $\mathbf{f}_j(m_i)$  gewichtet wird. Das Datenfunktional  $\Phi_d(\mathbf{m})$  stellt dabei eine  $L_2$ -Norm dar:

$$\Phi_d(\mathbf{m}) = \sum_{j=1}^N \left| \frac{d_j - \mathbf{f}_j(\mathbf{m})}{\varepsilon_j} \right|^2 = \|\mathbf{D}(\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))\|_2^2 \quad (4.43)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{D} = \text{diag} \left( \frac{1}{\varepsilon_j} \right) \quad . \quad (4.44)$$

Um das Inversionsergebnis zu verbessern, wird zusätzlich das mit dem Regularisierungsparameter  $\lambda$  gewichtete Modellfunktional  $\Phi_m$  berücksichtigt. Das letztlich bei der Inversion mit der Drei-Gitter-Technik zu minimierende Funktional  $\Phi$  lautet dementsprechend:

$$\Phi = \Phi_d + \lambda \Phi_m \rightarrow \min \quad (4.45)$$

$$\text{mit} \quad \Phi_m = \|\mathbf{C}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)\|_2^2 \quad . \quad (4.46)$$

Bei dem Modellfunktional  $\Phi_m$  handelt es sich um die quadrierte  $L_2$ -Norm des Produkts der Glättungsmatrix  $\mathbf{C}$  und der Differenz zwischen dem Modell  $\mathbf{m}$  und dem Referenzmodell  $\mathbf{m}_0$ . (GÜNTHER et al., 2006)

Die Glättungsmatrix  $\mathbf{C}$  ist eine quadratische Matrix, über welche die nächsten Nachbarn der unstrukturierten Gitterelemente in die Inversionsrechnung einbezogen werden. Zwei Tetraeder  $i$  und  $j$  stellen Nachbarn dar, wenn sie eine gemeinsame Dreiecksfläche  $f$  besitzen. Für jede Fläche  $f$  gilt dann:  $\mathbf{C}_{fj} = -1$  und  $\mathbf{C}_{fi} = +1$  .

Über das nachstehende iterative Schema erfolgt die Bestimmung des neuen Modellvektors  $\mathbf{m}_{k+1}$ :

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + r_k \Delta \mathbf{m}_k \quad . \quad (4.47)$$

Dabei wird der Line-Search-Parameter  $r_k$  durch lineare Interpolation zwischen der alten Modellantwort  $\mathbf{f}(\mathbf{m}_k)$  und der neuen  $\mathbf{f}(\mathbf{m}_k + \Delta \mathbf{m}_k)$  berechnet. (GÜNTHER et al., 2006)

Die Anwendung des Gauß-Newton-Algorithmus für die Minimierung des Funktionals  $\Phi$  aus Gleichung (4.45) ergibt dann nach GÜNTHER et al. (2006) bzw. PARK et al. (1991) folgenden Zusammenhang:

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{J} + \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \Delta \mathbf{m}_k = \mathbf{J}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}_k)) - \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_0) \quad . \quad (4.48)$$

Dabei entspricht die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  der Sensitivität  $\mathbf{S}_{ij}^*$ , die analog Gleichung (3.39) nach GESELOWITZ (1971) berechnet wird:

$$\mathbf{J} = \frac{\delta d_j}{\delta m_i} = \frac{\delta f_j(\mathbf{m}_k)}{\delta m_i} = \mathbf{S}_{ij}^*(\mathbf{m}_k) \quad . \quad (4.49)$$

Das Inversionsprogramm löst Gleichung (4.48) mittels der Methode der Konjugierten Gradienten für jeden Iterationsschritt  $k$ .

Der Regularisierungsparameter  $\lambda$  wird mithilfe des L-Kurven-Kriteriums als optimaler Kompromiss zwischen der Datenanpassung und der Rauigkeit des Modells bestimmt, denn je größer  $\lambda$  ist, desto glatter ist das berechnete Modell. Für eine Folge von Parametern  $\lambda_n$  wird jeweils der Daten-Misfit  $\Phi_d$  gegenüber der Modellrauigkeit  $\Phi_m$  aufgetragen. Dabei entsteht meist eine L-förmige Kurve. Die maximale Krümmung dieser bei allen Iterationen neu konstruierten L-Kurve nach HANSEN et al. (1993) ergibt dann den Wert für den gesuchten Regularisierungsparameter  $\lambda$ . Das Programm bietet aber auch die Möglichkeit, den Regularisierungsparameter vor der Inversion auf einen festen Wert einzustellen. (GÜNTHER et al., 2006)

Das Problem der Vorwärtsmodellierung liegt in der Anwendung der Deltafunktion  $\delta$  bei der Bestimmung der Quellstromdichte  $\mathbf{j}$ , da sie zur Berechnung von unendlich hohen Strömen  $I$  an den Elektroden  $\mathbf{r}_s$  führen kann:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad . \quad (4.50)$$



Für die Beseitigung dieser Singularitäten wird das Potenzial  $\varphi$  in einen primären und einen sekundären Teil zerlegt  $\varphi = \varphi_p + \varphi_s$ . Das primäre Potenzial  $\varphi_p$  kennzeichnet den Anteil des elektrischen Feldes, der durch eine Singularität in einem homogenen Messobjekt der Leitfähigkeit  $\sigma_p$  entsteht. Durch dessen sehr genaue Berechnung entweder als analytische Lösung einer Punktquelle in einem Halbraum oder als Potenzial des Primärfeldgitters unter Berücksichtigung der Topographie sind diese numerischen Fehler im Totalpotenzial nicht mehr enthalten. Befinden sich dagegen Anomalien  $\sigma_s$  in der Leitfähigkeitsverteilung, so resultiert aus diesen Anteilen des Potenzialfeldes das sekundäre Potenzial  $\varphi_s$ :

$$\sigma_s = \sigma - \sigma_p \quad . \quad (4.51)$$

Damit ergeben sich für das Sekundärpotenzial die beiden folgenden Randwertprobleme:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi_s) = \nabla \cdot ((\sigma_p - \sigma) \nabla \varphi_p) \quad \text{im Inneren} \quad (4.52)$$

$$\sigma \left( \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} + \alpha \varphi_s \right) = (\sigma_p - \sigma) \left( \frac{\partial \varphi_p}{\partial n} + \alpha \varphi_p \right) \quad \text{am Rand,} \quad (4.53)$$

mit  $\mathbf{n}$  als nach außen gerichtete Flächennormale auf dem Rand. Die singuläre Stromdichte  $\mathbf{j}$  ist nun nicht mehr in den Formeln enthalten. Für das Versuchsbecken gelten die Neumann-Randbedingungen mit  $\alpha = 0$ , weil durch den gesamten Beckenrand keine Ströme fließen. (RÜCKER et al., 2006)

Da die gesuchte Lösungsfunktion nur an diskreten Knotenpunkten berechenbar ist, muss die kontinuierliche Näherungsfunktion  $\tilde{\varphi}_s$  in einen diskreten Vektor  $\boldsymbol{\varphi}_s$  umgewandelt werden. Die Knotenpunkte fungieren dabei als Eck- oder Schnittpunkte für die Tetraeder des unregelmäßigen Modellgitters. Für jeden Knoten ist während der Vorwärtsmodellierung eine Gleichung zu lösen, deren Linearkombination zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$\mathbf{A}(\sigma) \boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b} = -\mathbf{A}(\sigma_s) \boldsymbol{\varphi}_p \quad , \quad (4.54)$$

wobei  $\mathbf{b}$  der Quellvektor und  $\mathbf{A}$  eine positiv definite, symmetrische Matrix linearer Gleichungen ist. Sie werden für das einmalig zu bestimmende primäre Potenzial mit der Methode der konjugierten Gradienten unter Anwendung einer unvollständigen Cholesky Vorkonditionierung und für das sekundäre Potenzial mit direkten Gleichungslösern nach DUFF et al. (1986) – den sogenannten multifrontalen Algorithmen – bei jedem Iterationsschritt gelöst. (RÜCKER, 2003; RÜCKER et al., 2006)

Der Inversionsprozess wird beendet, wenn sich das Funktional  $\Phi$  in Gleichung (4.45) nicht mehr ändert oder die Datenanpassung nach Formel (4.43) mit einem Wert von  $\chi^2 = \frac{\Phi_d}{N} \approx 1$  erreicht ist. (GÜNTHER et al., 2006)

Die folgende Liste zeigt den generellen Ablaufplan des Inversionsprogramms:

1. Einlesen der Daten, Fehler und Geometrie
  2. Triangulation der topographischen Oberfläche
  3. Erstellen des Parameternetzes unter Abschätzung der Auflösung
  4. Erstellen des Sekundärfeldgitters mit globaler Verfeinerung und Vergrößerung der Ausdehnung
  5. Erstellen des Primärfeldgitters
  6. Berechnen der Primärpotenziale für  $\sigma = 1 \text{ S m}^{-1}$  und deren Interpolation in die Knoten des Sekundärfeldgitters
  7. Berechnen der Konfigurationsfaktoren und der scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstände
  8. Auswählen eines Startmodells und der Nebenbedingungen
  9. Abschätzen der Jacobi-Matrix aus den Potenzialen
  10. Berechnen des Vektors für das Nachfolgemodell durch die Lösung der Gleichung (4.48) und Anwenden des L-Kurven-Kriteriums für die Bestimmung des Regularisierungsparameters  $\lambda$  für den ersten Schritt
  11. Bestimmen der Schrittweite durch den Line-Search-Parameter  $r_k$
  12. Nachfolgemodell und Vorwärtsrechnung
  13. Wiederholen der letzten vier Schritte bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums
- (GÜNTHER et al., 2006)

## 5. Durchführung der Experimente

### 5.1. Versuchsflüssigkeit

Für die Durchführung der Experimente wurde ein zähflüssiges Gemisch aus Polyethylenglykol (PEG) und Wasser verwendet (siehe Kapitel 4.1.). Dabei gilt: Je geringer der Wassergehalt ist, desto höher sind die Viskosität und der spezifische elektrische Widerstand sowie dessen Änderungen infolge von Temperaturschwankungen. Das für die Versuche verwendete langkettige Polyethylenglykol mit einer Molaren Masse von  $35.000 \text{ g mol}^{-1}$  zerfällt trotz der Stabilisatoren bei steigenden Temperaturen zunehmend in Moleküle mit kürzeren Ketten, wodurch sich die Viskosität auf chemischem Wege verringert. Deshalb werden – ausgehend von der Zimmertemperatur zu Beginn – während der Experimente nur Temperaturunterschiede von etwa 10 bis 25 K innerhalb der Flüssigkeit erzeugt.

Damit eine Simulation der Konvektionen im Erdmantel und in den Glasschmelzwannen möglich ist, erfolgte die Wahl der vom Wassergehalt abhängigen Viskosität der Versuchsflüssigkeit unter Berücksichtigung der für die Skalierung in Kapitel 3.1. genannten dimensionslosen Größen. Beispielsweise spielt für die Berechnung der Rayleigh-Zahl  $Ra$  neben dem Füllstand  $h$  im Becken und der Temperaturdifferenz  $\Delta T$  die dynamische Viskosität  $\eta$  eine entscheidende Rolle. Durch das Umstellen von Gleichung (3.9) ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\eta = \frac{g\rho_0\gamma\Delta Th^3}{a Ra} \quad . \quad (5.1)$$

Bei einer dem Erdmantel entsprechenden Rayleigh-Zahl  $Ra$  von etwa  $10^6$  bis  $10^7$ , einer Füllhöhe  $h$  von 0,252 m, einer Temperaturdifferenz  $\Delta T$  von 20 K, der Schwerebeschleunigung  $g$  von  $9,81 \text{ m s}^{-2}$ , einer Dichte  $\rho_0$  von  $1,058 \text{ g cm}^{-3}$  bei  $23^\circ\text{C}$ , einem thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  von ca.  $0,47 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  und einer Temperaturleitfähigkeit  $a$  von  $0,126 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  liegt die Viskosität  $\eta$  zwischen 1,2 und 12 Pa s. Aus diesem Grund wurden zunächst PEG-Wasser-Gemische mit verschiedenen Wassergehalten angerührt und die Viskosität bei  $23^\circ\text{C}$  mit dem Rotationsviskosimeter HBDV-III Ultra der Firma Brookfield Engineering Laboratories gemessen. Das Viskosimeter dreht einen kegelförmigen Körper, der sich innerhalb des jeweiligen Gemisches befindet und an einem Draht befestigt ist. Anhand der viskositätsabhängigen Stärke der Drahtverdrillung erfolgt die Bestimmung des Drehmomentes. Gemeinsam mit der exakten Geometrie des Kegels und der Drehgeschwindigkeit wird daraus anschließend die dynamische Viskosität berechnet.

Die in Abbildung 5.1 über den prozentualen Massenanteil von Polyethylenglykol aufgetragenen dynamischen Viskositäten sind die Mittelwerte aus den jeweils zehn Viskosimetermessungen. Die Standardabweichungen lagen dabei unter 0,5 % und wurden deshalb nicht in der Grafik dargestellt. Die Viskosität eines Gemisches, welches zu 45 % aus Polyethylenglykol und zu 55 % aus Wasser besteht, beträgt ca. 6 Pa s und entspricht damit in etwa dem Mittelwert aus dem zuvor berechneten Maximum und dem Minimum der benötigten Viskosität. Deshalb wurden für die Durchführung der Experimente Gemische mit einer derartigen Zusammensetzung verwendet.

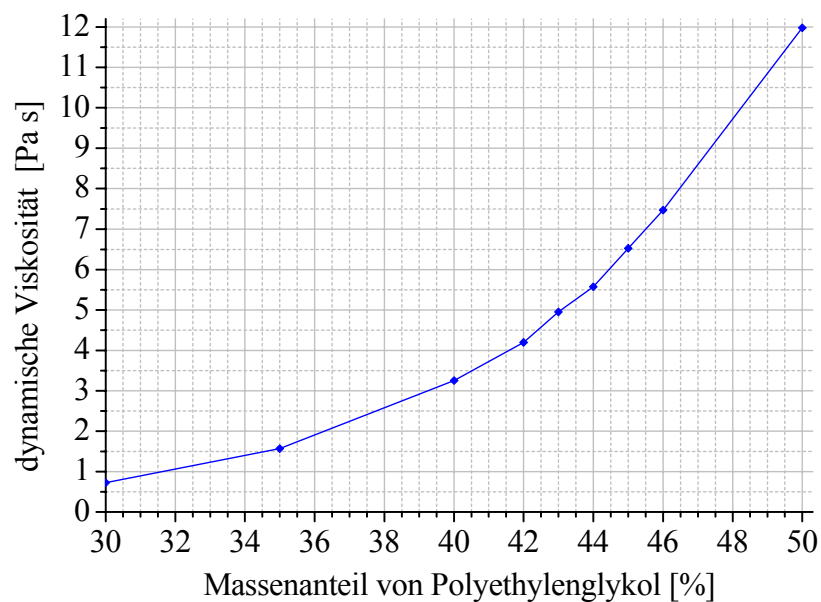


Abb. 5.1: Zusammenhang zwischen Polyethylenglykolgehalt und Viskosität von PEG-Wasser-Gemischen.

Zwischen der Viskosität  $\eta$  und der Temperatur  $T$  der Versuchsflüssigkeit besteht – wie im Erdmantel und bei geschmolzenem Glas auch – ein Arrhenius-Zusammenhang:

$$\eta = \eta_0 \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right), \quad (5.2)$$

wobei  $\eta_0$  einen Skalierungsfaktor,  $E_a$  die Aktivierungsenergie und  $k$  die Boltzmann-Konstante kennzeichnet. Das bedeutet, dass sich mit steigender Temperatur die Viskosität erheblich verringert. In Abbildung 5.2 ist für eine Probe der Versuchsflüssigkeit die dynamische Viskosität gegenüber der Temperatur dargestellt.

Wie bereits in Kapitel 2.3. für die spezifische elektrische Leitfähigkeit beschrieben, verbessert sich die Kurvenanpassung für die Viskosität ebenfalls, wenn entsprechend VOGEL (1921), FULCHER (1925) und TAMMANN et al. (1926) ein zusätzlicher Parameter  $T_0$  in die Formel eingefügt wird:

$$\eta = A \exp\left(-\frac{B}{T - T_0}\right) \quad (5.3)$$

Dabei sind  $A$  und  $B$  wiederum spezifische Parameter.

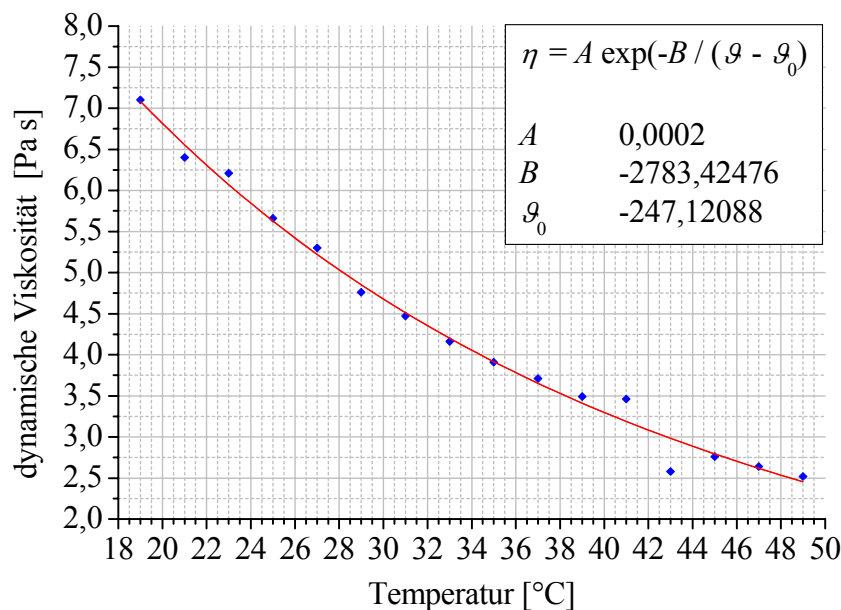


Abb. 5.2: Zusammenhang zwischen Temperatur und Viskosität der Versuchsflüssigkeit.

Dagegen ist die Dichte mit der Temperatur über Gleichung (3.3) linear verknüpft und reagiert dementsprechend weniger stark auf Temperaturänderungen. So beträgt die Dichte  $1,058 \text{ g cm}^{-3}$  bei einer Temperatur von  $23^\circ\text{C}$  und verringert sich bei einer Temperaturerhöhung auf  $33^\circ\text{C}$  um nur  $0,005 \text{ g cm}^{-3}$ .

Der für die geoelektrische Temperaturmessung wichtigste temperaturabhängige Parameter der Versuchsflüssigkeit ist der spezifische elektrische Widerstand  $\rho$ . Allerdings verringert er sich mit zunehmender Ionenanzahl. In Abbildung 5.3 sind die spezifischen elektrischen Widerstände von Leitungswasser und drei verschiedenen PEG-Wasser-Gemischen gegenüber der Temperatur dargestellt. Diese drei Gemische besitzen einen Polyethylenglykolgehalt von jeweils 45 %. Der Unterschied besteht lediglich in der Ionenanzahl des verwendeten Wassers. Die erste Probe wurde mit Leitungswasser und die zweite mit vollentsalztem (VE-) Wasser angerührt. Das Wasser für die dritte Probe bestand zu 44 % aus Leitungswasser und zu 56 % aus VE-Wasser.

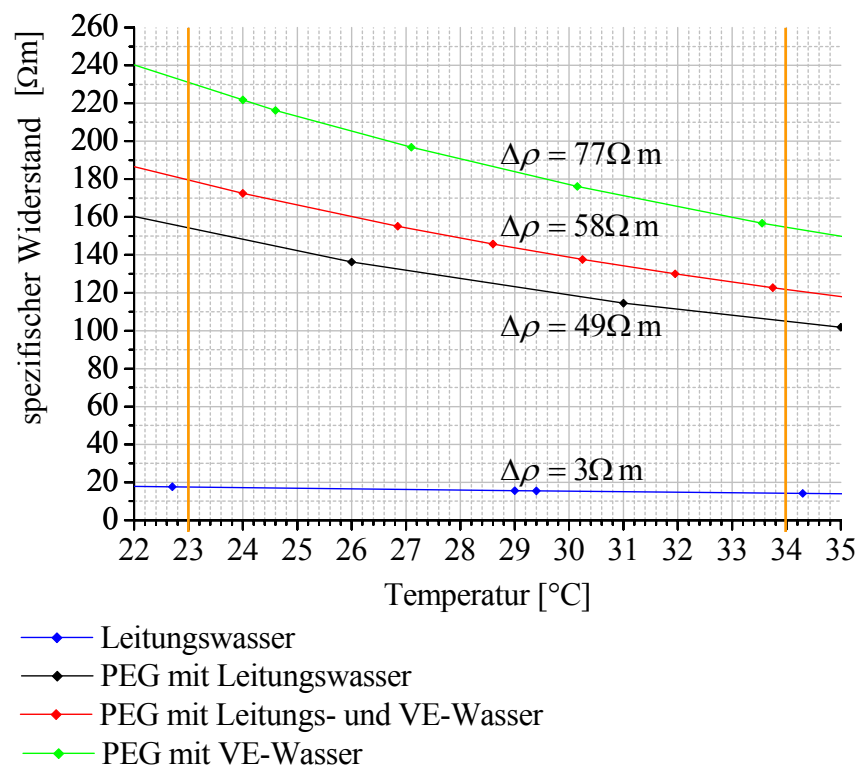


Abb. 5.3: Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischem elektrischem Widerstand für Leitungswasser und für drei PEG-Wasser-Gemische, die mit Wasser unterschiedlicher Ionenanzahl angerührt wurden.

Wie in Abbildung 5.3 ersichtlich, sind die Widerstandsänderungen bei einem Temperaturanstieg umso deutlicher, je größer der spezifische elektrische Widerstand zu Beginn der Erwärmung ist. Demzufolge sollte ein PEG-VE-Wasser-Gemisch auch sensitiver für die geoelektrische Temperaturmessung sein. Andererseits verstärkt sich das Übersprechen der Kanäle mit zunehmendem spezifischem elektrischem Widerstand, wodurch sich wiederum die Messgenauigkeit verringert. Wie bereits in Kapitel 4.2.2. beschrieben, werden im Verlauf der geoelektrischen Messungen mehrere Kanäle gleichzeitig erfasst, indem sie bei gleichbleibender Reihenfolge wiederholt während einer Einspeisung nacheinander abgetastet werden. Aufgrund des Kondensators mit einer Kapazität von 100 pF auf der PCI - 6031E - Steckkarte, der sich in Parallelschaltung zu einem ohmschen Widerstand von 100 GΩ befindet, entlädt sich die Karte zwischen den einzelnen Abtastungen nicht vollständig und bewirkt eine Verfälschung der jeweils darauffolgenden Messspannungen.

Um diesen Effekt zu verringern, wurde jede Elektrode zweimal direkt nacheinander abgetastet. Dadurch bleibt dem Kondensator zum einen mehr Zeit, um sich zu entladen, und zum anderen sind die Ladezustände des Kondensators zwischen dem ersten und dem zweiten Kanal jeder Elektrode durch die gleichen Beträge der Messspannungen annähernd gleich groß. Für die Auswertung wurden dann nur die Spannungen der jeweiligen zweiten Erfassung genutzt. Die Tabelle mit der dafür notwendigen Pinbelegung in der SCB 100 - Box befindet sich im Anhang A.2..

Trotz der doppelten Abtastung der Elektroden können die Auswirkungen infolge des Übersprechens der Kanäle nicht vollständig eliminiert werden. Abbildungen 5.4 und 5.5 zeigen die Stärke des Übersprechens anhand von zwei Konfigurationen A und B in Abhängigkeit vom spezifischen elektrischen Widerstand der Flüssigkeit im Versuchsbecken. Dafür wurden die Stromstärke und die Spannung zunächst während der einzelnen Datenerfassung an den beiden Potzialektroden und anschließend während der Abtastung gemeinsam mit allen vorhandenen Potzialektroden gemessen. Die Differenz der beiden so bestimmten Widerstände (Abb. 5.4) sowie die relative Widerstandsdifferenz bezüglich des Widerstandes bei der einzelnen Abtastung (Abb. 5.5) verringern sich mit der Abnahme des spezifischen elektrischen Widerstandes.

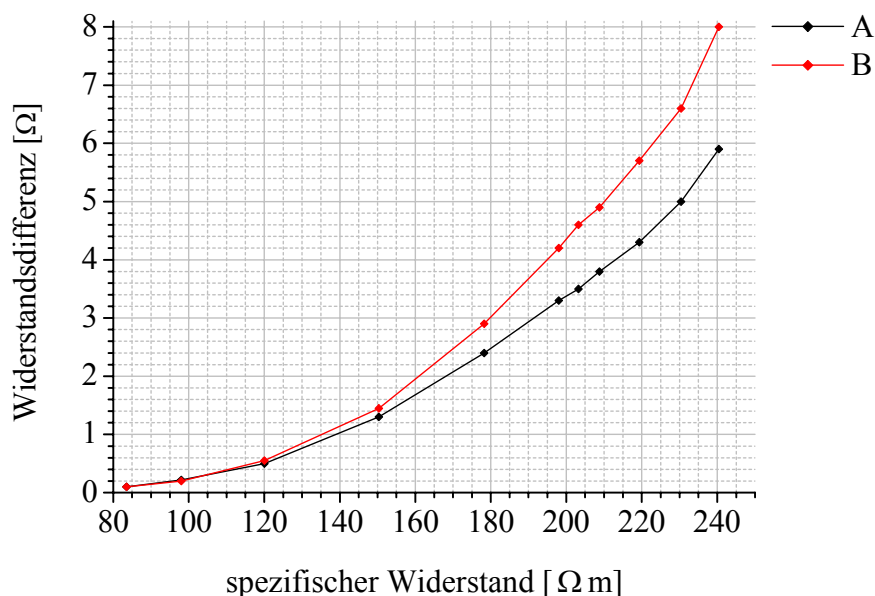


Abb. 5.4: Absoluter Betrag des Übersprechens der Kanäle in Abhängigkeit vom spezifischen elektrischen Widerstand der Flüssigkeit anhand von zwei Konfigurationen A und B.

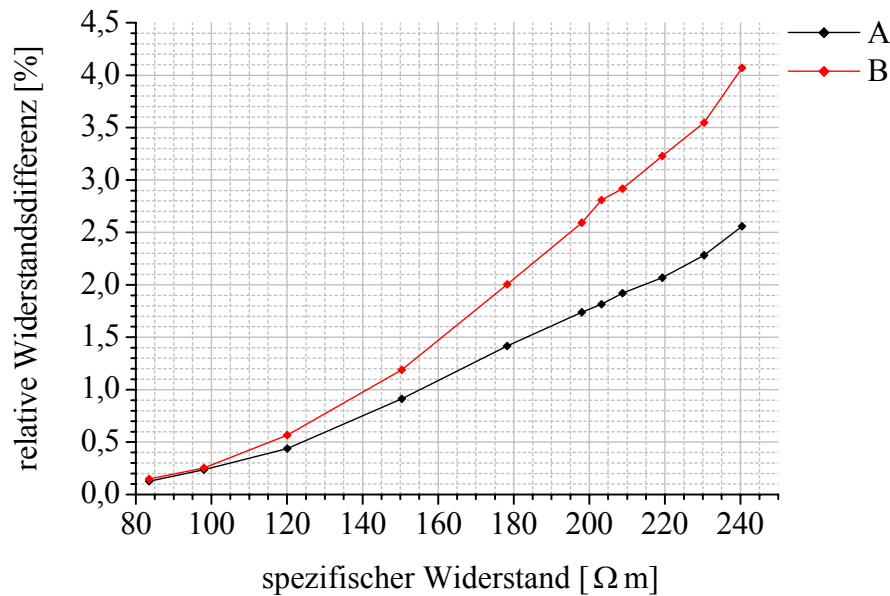


Abb. 5.5: Relativer Betrag des Übersprechens der Kanäle in Abhängigkeit vom spezifischen elektrischen Widerstand der Flüssigkeit anhand von zwei Konfigurationen A und B.

Für die Auswahl der Wasserart in der Versuchsflüssigkeit müssen demnach zwei Kriterien beachtet werden: Zum einen sollte der spezifische elektrische Widerstand der Versuchsflüssigkeit so groß wie möglich sein, um stärkere Effekte bei der Veränderung der Temperatur zu erhalten und zum anderen sollte er so gering wie möglich sein, um die negativen Auswirkungen auf die Messgenauigkeit durch das Übersprechen der Kanäle zu minimieren. Deshalb wurden nur die ersten zwei Experimente mit einem PEG-VE-Wasser-Gemisch und alle weiteren Experimente mit einem Gemisch aus 45 % Polyethylenglykol, 24 % Leitungswasser und 31 % VE-Wasser durchgeführt.

Bei einer Temperaturerhöhung von 23°C auf 34°C verringert sich laut Abbildung 5.3 der spezifische elektrische Widerstand der Versuchsflüssigkeit für die beiden ersten Experimente zwar um 77  $\Omega$  m und bei dem Gemisch für die nachfolgenden Versuchen nur noch um 49  $\Omega$  m, aber das Übersprechen der Konfiguration B verringert sich bei dem PEG-VE-Wasser-Gemisch um 5  $\Omega$  bzw. 2,3 % und bei dem sonst verwendeten Gemisch nur noch um 2,4  $\Omega$  bzw. 1,4 %. Da bei der Inversion der Widerstandsquotienten jedoch lediglich die systematischen Fehler herausgerechnet werden können, bewirkt eine stärkere Verringerung des Übersprechens der Kanäle bei zunehmender Erwärmung auch eine stärkere Vergrößerung des Widerstandsfehlers.



## 5.2. Bestimmung der Parameter der VFT-Gleichung

Die während eines Experiments aufgenommenen geoelektrischen Messdaten werden anschließend invertiert und liefern auf diese Weise ein Modell der dreidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung im Versuchsbecken. Gleichung (2.5), die sich durch die Einführung eines zusätzlichen Parameters  $T_0$  entsprechend VOGEL (1921), FULCHER (1925) und TAMMANN et al. (1926) aus der Arrhenius-Formel (2.3) ergibt, dient der darauf folgenden Umrechnung der Inversionsergebnisse in Temperaturwerte. Um die spezifischen Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $T_0$  der VFT(Vogel-Fulcher-Tammann)-Gleichung (2.5) zu bestimmen, wird vor jedem Experiment eine Probe der Versuchsflüssigkeit entnommen und darin bei verschiedenen Temperaturen die spezifische elektrische Leitfähigkeit gemessen. In Abbildung 5.6 ist der dafür verwendete Versuchsaufbau dargestellt.

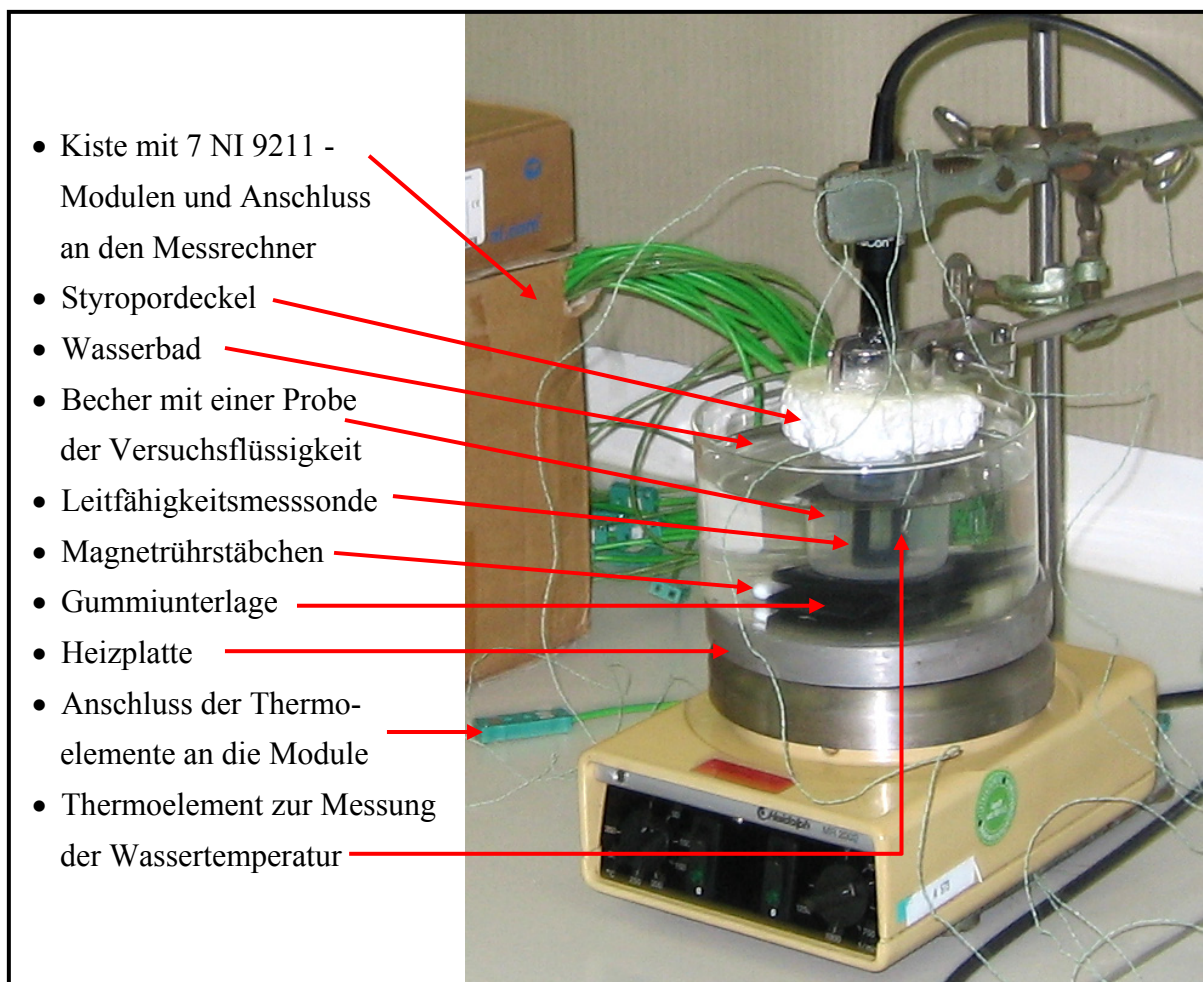


Abb. 5.6: Versuchsaufbau für die Bestimmung der Parameter der VFT-Gleichung.

Etwa 40 ml des Polyethylenglykol-Wasser-Gemisches befinden sich in dem Kunststoffbecher innerhalb des Wasserbades. Die Temperatur des Wassers wird über die Heizplatte des Gerätes MR 2002 der Firma Heidolph reguliert und mittels eines Typ K - Thermoelements überwacht. Damit sich die Probe im Becher gleichmäßig von allen Seiten her erwärmt, erfolgt eine Durchmischung des Wasserbades mit dem Magnetührstäbchen. Die Gummiunterlage zwischen dem Kunststoffbecher und dem Glasboden des Wasserbehälters schützt die Versuchsflüssigkeit während des Heizens vor einer unkontrollierten Erwärmung von unten. Mit dem Leitfähigkeitsmessgerät Cond 315i und der dazugehörigen Sonde TetraCon 325 – jeweils von der Firma WTW – werden die spezifische elektrische Leitfähigkeit und die entsprechende Temperatur der Probe erfasst.

Um den Einfluss der Verdunstung und der Zimmertemperatur auf das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch zu verringern, befindet sich auf dem Becher ein mit Frischhaltefolie abgedichteter Styropordeckel. Dennoch stellt sich bei größeren Temperaturunterschieden zwischen der Probe und dem Laborraum ein vertikaler Temperaturgradient von bis zu 0,8 K innerhalb der Versuchsflüssigkeit ein. Dieser kann allerdings nicht durch ein Verrühren der Probe ausgeglichen werden, weil die dabei entstehenden Blasen die Leitfähigkeitsmessungen beeinträchtigen würden. Da die Spannungs- und die Stromelektrode der Sonde etwa einen Zentimeter tiefer in die Versuchsflüssigkeit eintauchen als der Temperaturmessfühler, erfolgt über ein in Höhe der Elektroden angebrachtes Typ K - Thermoelement eine zusätzliche Temperaturmessung. Auf diese Weise verringern sich die infolge des Gradienten auftretenden Fehler.

Die Temperaturen an den Thermoelementen in der Probe und im Wasserbad können sowohl durch das Ablesen am Gerät TastoTherm der Firma INFRAPOINT Messtechnik GmbH als auch durch das kontinuierliche Aufzeichnen mit einem NI 9211 - Modul in Verbindung mit dem Rechner bestimmt werden. Für die Aufnahme der meist acht Wertepaare für die VFT-Kurve müssen jedoch gleiche Bedingungen zwischen dem Thermoelement am Rand und den Elektroden im Inneren der Sonde vorliegen. Deshalb werden die spezifische elektrische Leitfähigkeit und die Temperatur erst dann erfasst, wenn beide Messwerte mindestens zwanzig Minuten lang konstant sind.

Nach dem Auftragen der dekadisch logarithmierten elektrischen Leitfähigkeit über die Temperatur erfolgt die nichtlineare Kurvenanpassung durch die Variation der Parameter  $A$ ,  $B$  und  $\mathcal{G}_0$  der VFT-Gleichung (2.5). Dabei ist eine Kurvenanpassung umso besser, je geringer die Differenzen zwischen der theoretischen Kurve und den experimentell ermittelten Punkten sind. Abbildung 5.7 zeigt eine derartige Kurve und das Ergebnis ihrer Anpassung.

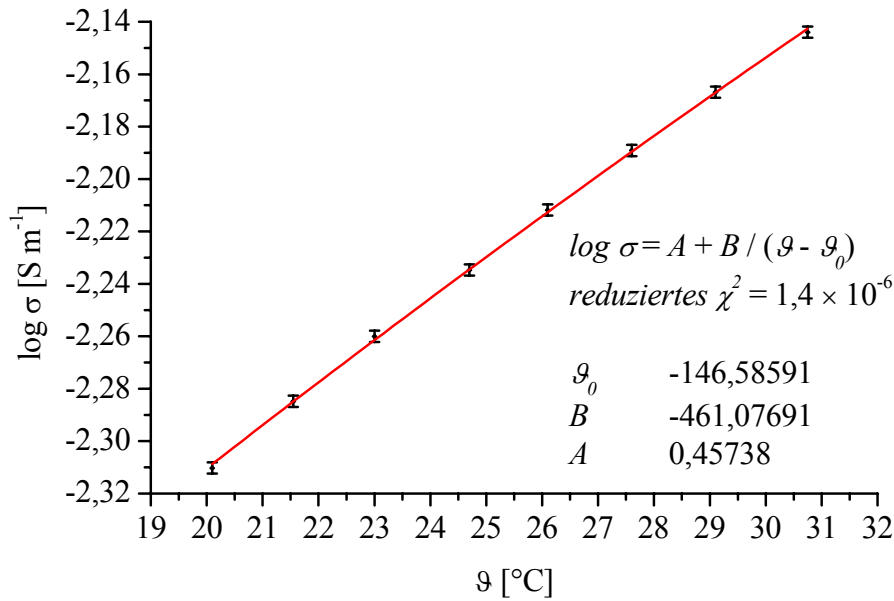


Abb. 5.7: Kurve zur Bestimmung der Parameter der VFT-Gleichung und das Ergebnis der Kurvenanpassung.

Mit der Gleichung  $f(x_i; A; B; \vartheta_0)$  (2.5) sowie der Standardabweichung  $\sigma_i$  für jedes der  $N$  gemessenen Wertepaare  $(x_i, y_i)$  mit  $i = 1 \dots N$  ergibt sich für die mittlere Abweichung  $\chi^2$  zwischen den Messpunkten und der Modellkurve folgender Ausdruck:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - f(x_i; A; B; \vartheta_0)}{\sigma_i} \right)^2 . \quad (5.4)$$

Für die nichtlineare Kurvenanpassung wird dann das Minimum von  $\chi^2$  durch das Lösen der mit Null gleichgesetzten und nach jedem der drei Parameter partiell abgeleiteten Gleichungen ermittelt. Gleichung (5.5) zeigt eine partielle Ableitung am Beispiel des Parameters  $A$ :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - f(x_i; A; B; \vartheta_0)] \left[ \frac{\partial f(x_i; A; B; \vartheta_0)}{\partial A} \right] = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - f(x_i; A; B; \vartheta_0)}{\sigma_i^2} = 0 . \quad (5.5)$$

Das daraus resultierende Gleichungssystem kann jedoch nicht explizit gelöst werden, weshalb ein iterativer Prozess für die  $\chi^2$ -Minimierung verwendet wird. Die dafür eingesetzte Methode basiert auf einem Levenberg-Marquardt-Algorithmus und kombiniert somit das Gauß-Newton-Verfahren mit einer Regularisierungsmethode, die absteigende Funktionswerte erzwingt (steepest decent).

Zu Beginn der Rechnung werden Werte für die Parameter  $A$ ,  $B$  und  $\mathcal{G}_0$  als Startmodell vorgegeben. Während der zuvor beschriebenen iterativen Prozedur zur Anpassung der Parameterwerte erfolgt für jeden Iterationsschritt die Angabe des aktuellen Wertes für das reduzierte  $\chi^2$ :

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{N - P} \quad , \quad (5.6)$$

mit  $P = 3$  für die Anzahl der Parameter. Wenn sich der Betrag des reduzierten  $\chi^2$  nicht mehr oder nur noch unwesentlich verändert, sind  $A$ ,  $B$  und  $\mathcal{G}_0$  bestmöglich bestimmt und können für die VFT-Gleichung (2.5) genutzt werden.

Die Umrechnung der Inversionsergebnisse in Temperaturen mittels Gleichung (2.5) ist jedoch mit Fehlern, die bei der Bestimmung der Parameter  $A$ ,  $B$  und  $\mathcal{G}_0$  auftraten, behaftet. Um die Höhe der zufälligen Fehler  $\Delta\mathcal{G}_z$  abzuschätzen, wird für jede gemessene Temperatur die theoretische spezifische elektrische Leitfähigkeit berechnet und von dem gemessenen Wert subtrahiert. Mit dieser Leitfähigkeitsdifferenz  $\Delta\sigma$  gilt für den Fehler  $\Delta\mathcal{G}_z$ :

$$\Delta\mathcal{G}_z = \left| \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\sigma} \right| \Delta\sigma = \left| \frac{B}{(\log\sigma - A)^2} \frac{1}{\sigma \ln 10} \right| \Delta\sigma \quad . \quad (5.7)$$

Der Gesamtfehler  $\Delta\mathcal{G}$  der VFT-Gleichung (2.5) setzt sich aus dem zufälligen Fehler  $\Delta\mathcal{G}_z$  nach Gleichung (5.7) und einem systematischen Fehler  $\Delta\mathcal{G}_s$  wie folgt zusammen:

$$\Delta\mathcal{G} = \Delta\mathcal{G}_z + \Delta\mathcal{G}_s \quad . \quad (5.8)$$

Da der zufällige Fehler in den meisten Fällen bei etwa 0,1 K liegt und für den systematischen Fehler ein Wert von ebenfalls ca. 0,1 K angenommen wird, ergibt sich für den Gesamtfehler ein Betrag von rund 0,2 K.

Die Ursachen für die systematischen Fehler in der VFT-Gleichung (2.5) sind vielfältig. Neben der Verdunstung, die durch die Abdeckung des Probenbehälters vernachlässigbar gering sein sollte, und dem vertikalen Temperaturgradienten in der Probe, der durch die zusätzliche Temperaturmessung in Höhe der Sondenelektroden ebenfalls keinen größeren Effekt verursachen sollte, kann die oberflächennahe Probenahme eine weitere Fehlerquelle sein. Deshalb wurde das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch vor jedem Experiment sehr vorsichtig verrührt, um störende Einflüsse aufgrund von aufsteigenden Blasen während der Versuche zu vermeiden. Da sich innerhalb der Probe zunächst zahlreiche Blasen befanden, begannen die Messungen für die VFT-Kurve frühestens zwölf Stunden nach der Probenahme. Allerdings kann sich in dieser Zeit durch den zwar nur geringen Dichteunterschied zwischen Polyethylenglykol und Wasser von etwa  $0,2 \text{ g cm}^{-3}$  ein chemischer Gradient im Probenbehälter eingestellt haben.

Eine weitere Ursache für einen systematischen Fehler kann in der Leitfähigkeitssonde selbst liegen. Während der Leitfähigkeitsmessungen wird über zwei Elektroden Strom eingespeist und über zwei andere Elektroden die Spannung gemessen. Für die Bestimmung des spezifischen elektrischen Widerstandes bzw. dessen Reziprokwertes, die spezifische elektrische Leitfähigkeit, gilt Gleichung (3.34). Das bedeutet, dass der Geometriefaktor der Sonde möglichst genau bekannt sein muss. Schon geringe Abweichungen in der Form der Sonde bewirken einen systematischen Fehler in den Messwerten.

Außerdem ist zu berücksichtigen, dass die Messfrequenz der Sonde 1 kHz aber die verwendete Frequenz bei der geoelektrischen Impedanztomographie 8,333 Hz beträgt. Um zu prüfen, ob die Versuchsflüssigkeit für verschiedene Frequenzen den gleichen Wert liefert, wurde an der Universität Leipzig mit dem Gerät SIP Fuchs der Firma RADIC RESEARCH eine spektrale Analyse des spezifischen elektrischen Widerstandes durchgeführt. Das dort untersuchte Gemisch bestand zu 45 % aus Polyethylenglykol und zu 55 % aus Leitungswasser. Wie aus Abbildung 5.8 ersichtlich, hängt der spezifische elektrische Widerstand der Versuchsflüssigkeit nicht von der Messfrequenz ab. Der bei der Frequenz von 1500 Hz etwas abweichende Wert weist einen deutlich größeren Fehlerbalken auf und stellt somit einen Ausreißer dar. Das bedeutet, dass die mittels der Sonde TetraCon 325 aufgenommenen Werte für die Bestimmung der Parameter der VFT-Gleichung und diese wiederum für die Umrechnung der Inversionsergebnisse in Temperaturen verwendet werden können.

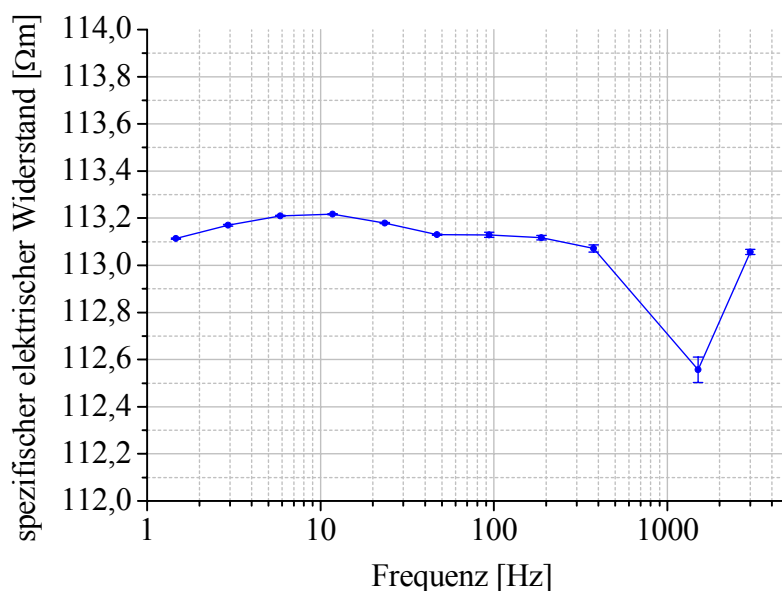


Abb. 5.8: Spektraler spezifischer elektrischer Widerstand eines Gemisches aus 45 % Polyethylenglykol und 55 % Leitungswasser.

### ***5.3. Erzeugung von Strömungen im Versuchsbecken***

Um inhomogene Temperaturverteilungen im Versuchsbecken zu generieren und diese geoelektrisch zu erfassen, wurde die viskose Flüssigkeit mit den sechs separat oder gleichzeitig nutzbaren Infrarotheizstrahlern der Firma Ego-HiLight von unten her erwärmt. Abbildung 5.9 zeigt einen der sechs Heizer, deren maximale Leistung 1200 W beträgt. Die Bodenplatte des Versuchsbeckens besteht aus vier Millimeter dickem Ceran® und besitzt damit eine sehr hohe Durchlässigkeit für Infrarotstrahlung sowie eine sehr geringe Wärmeleitfähigkeit. Deshalb erwärmt sich das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch zunächst nur lokal über einem eingeschalteten Heizer. Die erhitzte Flüssigkeit beginnt aufgrund der geringeren Dichte und Viskosität gegenüber dem umgebenden Material zur Oberfläche aufzusteigen und sich dort horizontal auszubreiten. Befindet sich der Makrolondeckel zum Schutz vor der Verdunstung auf dem Becken, so kühlt sich das heißere Material an der Oberfläche kaum ab und erwärmt von oben nach unten allmählich die gesamte Flüssigkeit. Einzelne Experimente wurden deshalb zum einen ohne Deckel und zum anderen mit einem stark gekühlten Stahldeckel durchgeführt, wodurch sich verschiedene Strömungsmuster in dem Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch einstellen.

Die Strömungen im Versuchsbecken wurden außerdem durch die unterschiedliche Nutzung der sechs Heizstrahler unter dem Beckenboden variiert. In Abbildung 5.10 sind die Größe und die Positionen der Heizer skizziert. Die 25 mm dicke Umrandung der Heizfläche dient dem thermischen und elektrischen Schutz der Umgebung. Damit ist gewährleistet, dass die Wärme nur senkrecht zur Heizfläche mit einem Durchmesser von 140 mm abgestrahlt wird. Mittels eines Potenziometers ist die Leistung der Heizer einstellbar. Allerdings kann aufgrund geringfügig abweichender Widerstände trotz einer gleichen Potenziometereinstellung die Strahlungsintensität der einzelnen Heizer verschieden sein. Während der Durchführung der Experimente wurden effektive Spannungen von etwa 16 V bis 41 V an die Heizer angelegt. Bei einem ohmschen Widerstand von etwa  $43 \Omega$  ergeben sich demnach elektrische Leistungen von ca. 6 W bis 40 W. Obwohl Verluste infolge der Erwärmung der 22 mm hohen Luftschicht zwischen dem Beckenboden und den Heizern auftreten, ist diese Leistung für die Experimente immer noch ausreichend.

Um die natürlichen Gegebenheiten an der Kern-Mantel-Grenze im Erdinneren genauer zu simulieren, ist die Realisierung eines nahezu gleichmäßig warmen Bodens notwendig. Deshalb wurde für derartige Experimente zunächst eine 14 mm dicke Quarzalplatte mit einer Wärmeleitfähigkeit von ca.  $0,9 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  auf den Ceranboden gelegt. Da sich der Bereich zwischen den Heizflächen zweier Strahler aufgrund dessen nicht genügend erwärmte, befand sich während der letzten drei Versuche zusätzlich eine mit Folie elektrisch isolierte und 2 mm dicke Stahlplatte mit einer Wärmeleitfähigkeit von ca.  $50 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  in dem Becken.



Abb. 5.9: Infrarotheizstrahler für die Erwärmung der Flüssigkeit im Versuchsbecken.

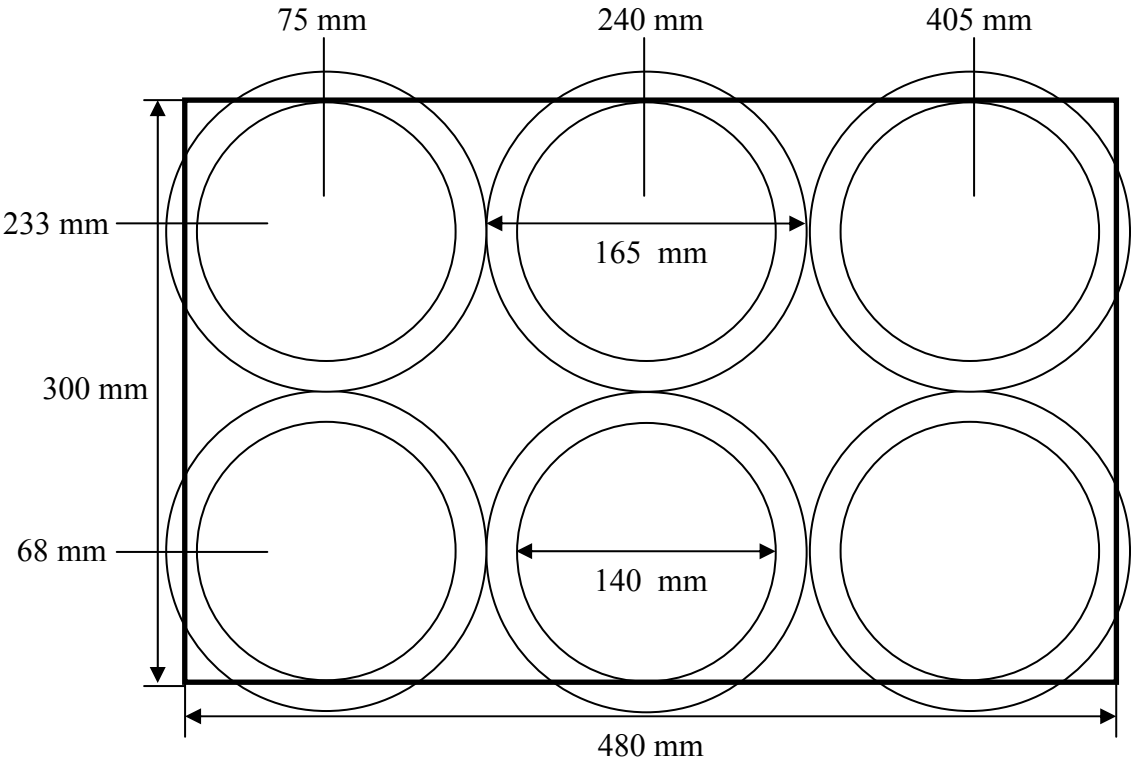


Abb. 5.10: Anordnung der Heizer unter dem Beckenboden.



Ein Teil der Wärme, die das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch während des Heizens absorbiert, wird über die zehn Millimeter dicken Makrolonwände trotz der relativ geringen Wärmeleitfähigkeit von  $0,20 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  wieder abgegeben. Folglich stellt sich ein Temperaturgradient in der randnahen Flüssigkeit ein. Aus diesem Grund müssen die Thermoelemente mindestens zehn bis zwanzig Millimeter tief in die Versuchsflüssigkeit hineinragen (siehe Anhang A.3.1).

Für das Erzeugen herabsinkender Plumes ist das Abführen von Wärme an der Oberfläche der Flüssigkeit notwendig. Da sich bei einem offenen Deckel durch die Verdunstung jedoch die elektrischen Eigenschaften des Polyethylenglykol-Wasser-Gemisches verändern, wurden nur zwei derartig gekühlte Experimente durchgeführt. Je nach Füllstand des Versuchsbeckens befand sich eine 39 bis 54 mm hohe Luftschicht zwischen dem Deckel und der Flüssigkeitsoberfläche. Während der ersten Experimente sollte lediglich eine inhomogene Temperaturverteilung zum Test der Anlage erzeugt werden und die Wärmeabfuhr spielte noch keine Rolle. Deshalb genügte die Verwendung eines Makrolondeckels. Das Ziel der späteren Versuche war jedoch die Simulation von Strömungen analog zum Erdmantel und zum flüssigen Glas in den Schmelzwannen. Wie in Abbildung 5.11 ersichtlich, wurde aus diesem Grund ein Stahlkasten als Deckel eingesetzt, der auf einer Seite offen ist. Indem das Klimagerät dem Kasten kalte Luft durch die Öffnung zuführte, konnte die Temperatur des Deckels auf bis zu  $13^\circ\text{C}$  verringert werden. Die Wärmeabfuhr an der Flüssigkeitsoberfläche erfolgte ohne den Verlust von Wasser über die Zirkulation der eingeschlossenen Luft im Versuchsbecken. Die Wellpappe zwischen dem Klimagerät und dem Becken diente dem Schutz der randnahen Flüssigkeit hinter der wärmeleitenden Makrolonwand vor einer Abkühlung durch die kalte Luft.

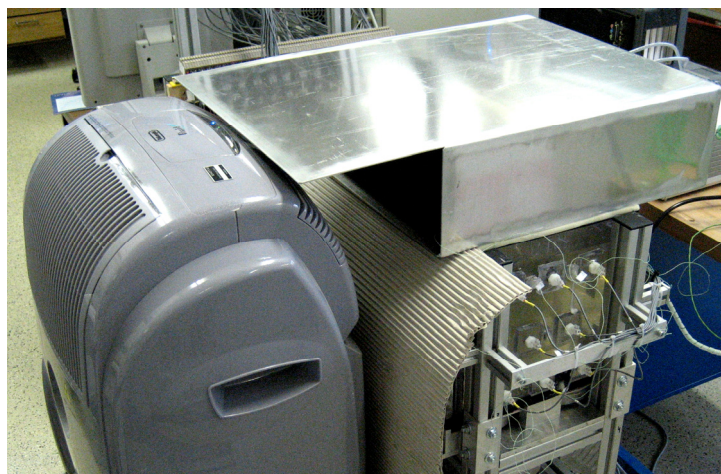


Abb. 5.11: Versuchsaufbau mit Metalldeckel und Klimagerät.



#### ***5.4. Aufnahme der Messwerte***

Bevor ein Experiment durch das in Kapitel 5.3. beschriebene Erzeugen von Strömungen beginnen kann, erfolgen zunächst das vorsichtige Verrühren der Versuchsflüssigkeit und die Aufnahme eines geoelektrischen Referenzdatensatzes. Diese Daten beinhalten den homogenen Ausgangszustand inklusive der systematischen Fehler und dienen somit der Verbesserung der Ergebnisse, weil aus ihnen und den gemessenen Widerständen während des Experiments der Quotient für die Inversion gebildet wird. Das bedeutet, dass der Inversion nur die Veränderungen gegenüber dem Anfangszustand zugrunde liegen und die in den Kapiteln 4.2. und 5.1. genannten systematischen Fehler keinen Einfluss mehr auf das Ergebnis haben.

Vor und nach jeder geoelektrischen Messung werden zudem die Temperaturen an den 29 Typ K - Thermoelementen am Beckenrand mit dem Gerät Tasto therm direkt erfasst, um die Inversionsergebnisse zu überprüfen. Bei der Durchführung der ersten Experimente hat sich jedoch gezeigt, dass teilweise starke Temperaturschwankungen während der Impedanztomographie auftraten. Deshalb wurden die Temperaturen bei den späteren Versuchen zusätzlich mit sechs Werten pro Minute mittels der sieben National Instruments NI 9211 - Module und dem Rechner registriert. Um aus der Thermospannung eines Typ K - Thermoelements die Temperatur am Messpunkt berechnen zu können, muss die Temperatur an der Vergleichsstelle bekannt sein. Diese wird über je einen Sensor innerhalb der sieben National Instruments NI 9211 - Module registriert.

Da an der Klemme eines Moduls teilweise etwas andere Temperaturen vorliegen als im Inneren weisen die Messwerte ein Offset auf. Schwankungen der Lufttemperatur können dementsprechend sogar Schwankungen in den Messwerten hervorrufen. Um derartige Effekte durch auftretende Zugluft zu vermeiden, befinden sich die NI 9211 - Module in einer mit Schaumstoff gepolsterten Kiste. Allerdings stellt sich infolge von Wärmeproduktion während des Betriebs der Module erst nach etwa 1,5 Stunden eine relativ konstante Temperatur in der Kiste ein. Deshalb werden die Experimente erst dann begonnen, wenn die Messwerte keiner Drift mehr unterliegen. Die zusätzliche Temperaturmessung mit dem Gerät Tasto therm vor und nach jeder Impedanztomographie dient damit der Bestimmung des individuellen Offsets und ermöglicht so die Verwendung der Temperaturzeitreihen. Mit den sieben National Instruments NI 9211 – Modulen können aufgrund der jeweils vier vorhandenen Anschlüsse allerdings nur 28 der 29 Randtemperaturen kontinuierlich abgetastet werden. Im Anhang A.3.1. befinden sich die Positionen der 29 Thermoelemente.

Abbildung 5.12 zeigt vier der insgesamt 28 Temperaturzeitreihen eines Experiments. Da sich das Thermoelement Nr. 20 oberhalb des Heizers befindet, ist schon 25 Minuten nach dem Einschalten des Infrarotstrahlers ein deutlicher Temperaturanstieg zu erkennen. Außerdem treten dort die stärksten Temperaturschwankungen auf. Die sechs 15-minütigen Störungen, die sich in unterschiedlicher Stärke auf allen Kanälen widerspiegeln, werden von den Stromspeisungen während der sechs geoelektrischen Messungen verursacht.

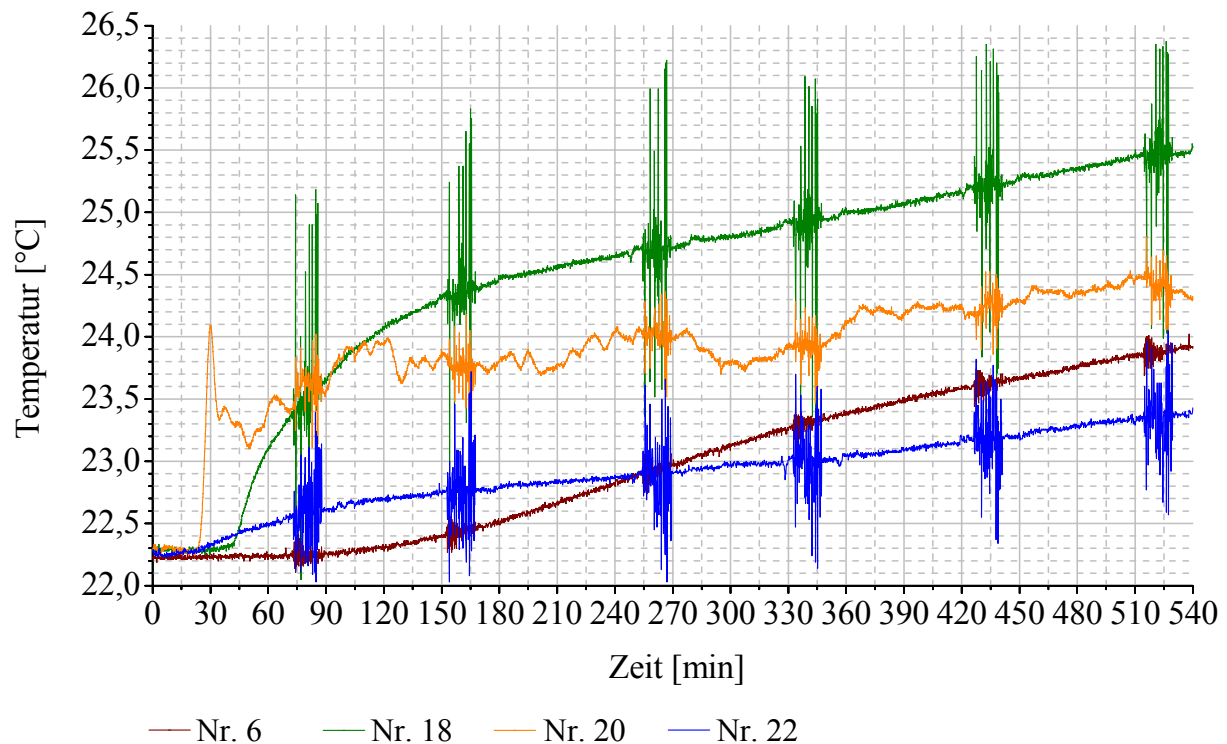


Abb. 5.12: Vier Temperaturzeitreihen während eines Experiments.

Eine Beschreibung über den prinzipiellen Ablauf der Impedanztomographie erfolgte bereits in Kapitel 4.1.. Über jeweils zwei Elektroden wird ein sinusförmiger Strom eingespeist, dessen Amplitude während der beiden Experimente mit dem höherohmigen PEG-VE-Wassergemisch 1,4 mA und sonst 3,0 mA betrug. Für die Wahl der Arbeitsfrequenz ist zu berücksichtigen, dass sich bei einer Verkleinerung der Frequenz zwar die Effekte aufgrund von Induktionsvorgängen verringern, sich aber dafür die Messdauer erhöhen muss. Entsprechend anderer Geoelektrik-Apparaturen, die in der Forschung und der Wirtschaft eingesetzt werden, betrug die Speisefrequenz für die Versuche 8,333 Hz.

Für die Dauer der Verschaltung zweier Elektroden fließt der Strom und eine temperaturabhängige Potenzialverteilung stellt sich in der Versuchsflüssigkeit ein. Über das Bedienteil OP5 der Speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) wurde die Verschaltungszeit auf zwanzig Sekunden und die Messverzögerungszeit auf zwei Sekunden festgesetzt. Nach Ablauf der Messverzögerungszeit liefert die Konstantstromquelle annähernd den gewünschten Strom und durch das Senden eines Signals von der SPS an den Rechner beginnt die Aufzeichnung der Spannungswerte. Da sich das Übersprechen der Kanäle verringert, wenn nicht alle Potenzialelektroden gleichzeitig erfasst werden, erfolgte die Abtastung in zwei Blöcken nacheinander. Mit einer Messdauer für jeden Kanal von 8,4 Sekunden, einer Messverzögerungszeit von zwei Sekunden sowie einer Bearbeitungszeit von etwa einer Sekunde für die Filterung der Daten des ersten Blocks ergibt sich die benötigte Verschaltungszeit von zwanzig Sekunden.

Die Spannungswerte weisen jedoch Messfehler auf (siehe Kapitel 4.2.), die teilweise herausgefiltert werden können. Wie bereits in Kapitel 4.3. erläutert, benötigt jedes Filter eine bestimmte Zeit für seinen Einschwingvorgang. Um auch Spannungswerte nach Ablauf der Zeit für das Einstellen des Speisestroms durch die Konstantstromquelle und nach Ablauf der Einschwingzeit des digitalen Filters zu erhalten, wurde die Messdauer mit 8,4 Sekunden relativ großzügig gewählt. Damit diese beiden Effekte in den Daten keine Rolle mehr spielen, ersetzt das LabView-Programm die Spannungswerte der ersten 3,6 Sekunden nach der Filterung durch Null. Auch diese Zeitwahl beinhaltet einen großen Sicherheitsbereich, denn wie in Abbildung 5.13 ersichtlich, beträgt die Einschwingdauer des für die Experimente verwendeten Butterworth-Bandpasses nur etwa 1,5 Sekunden. Das simulierte rauschfreie Spannungssignal im Teil A) der Abbildung 5.13 besitzt eine Frequenz von 8,333 Hz und eine Wechselspannung mit der Amplitude von 0,05 V. Je größer das Offset der Spannungszeitreihe ist, desto größer werden die Amplituden des gefilterten Signals im Bereich der Einschwingzeit des Filters. Wie aus Teil B) der Abbildung 5.13. hervorgeht, ergeben sich bei einem Offset von 0,6 V nach dem Filtern etwa um 0,02 V zu große Spannungsamplituden. Bei einem Offset von 1,0 V verdoppelt sich die Amplitude des gefilterten Signals während der Einschwingzeit sogar.

Doch auch die Flankensteilheit des Filters beeinflusst die Dauer der Einschwingzeit. Je besser ein Filter ist, desto mehr Zeit benötigt es zum Einschwingen. Für die Experimente wurde ein Butterworth-Bandpass dritter Ordnung mit den beiden Grenzfrequenzen 7,5069 Hz und 9,25 Hz verwendet. Die Übertragungsfunktion dieses Filters ist in Abbildung 5.14 dargestellt. Störsignale mit Frequenzen unterhalb von 7 Hz bzw. oberhalb von 10 Hz werden offensichtlich schon stark gedämpft aber erst bei Frequenzen unter 5 Hz und über 13 Hz fast vollständig unterdrückt. Allerdings sind keine deutlichen Störungen im Frequenzbereich zwischen 5 und 13 Hz zu erwarten.

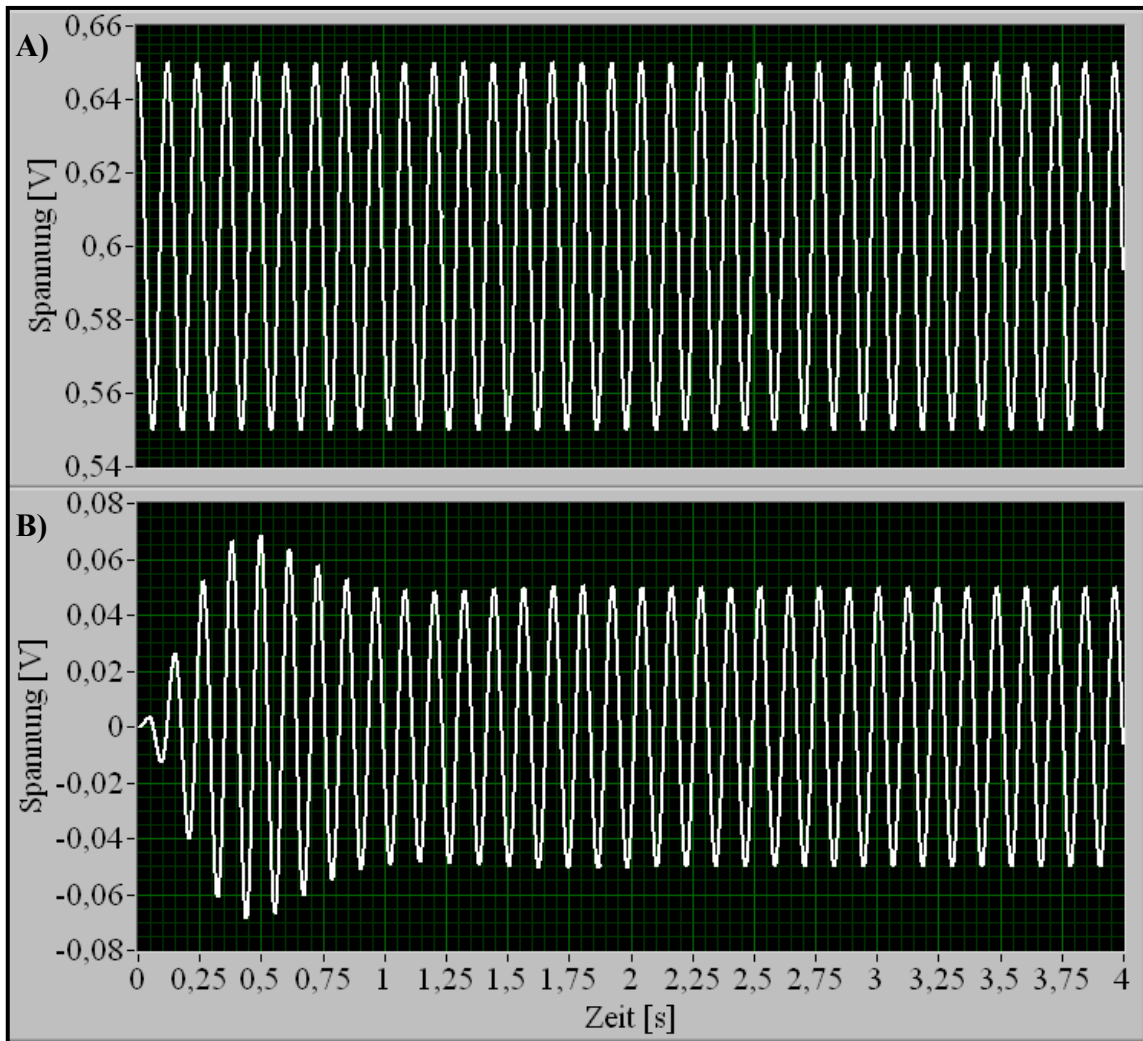


Abb. 5.13: Auswirkungen der Einschwingzeit des verwendeten Filters auf das Signal.

- A) Unverraushtes, simuliertes Sinus-Signal mit einem Offset von 0,6 V
- B) Gefiltertes Sinus-Signal.

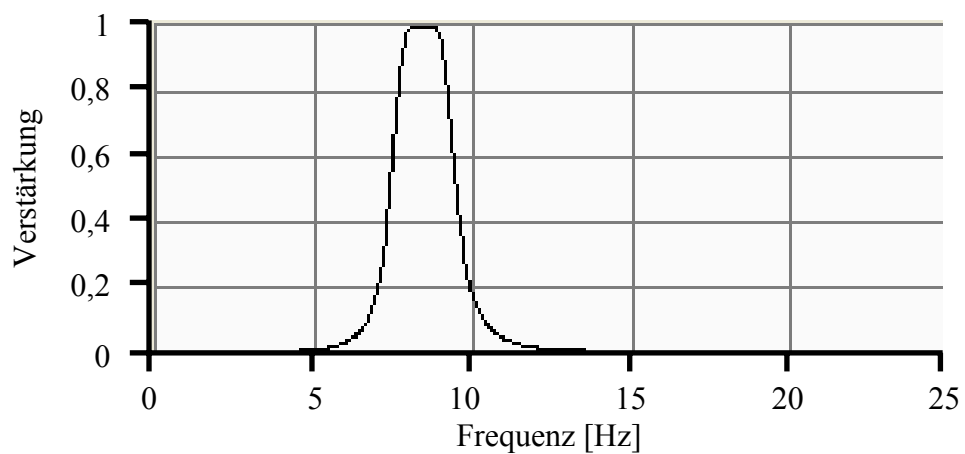


Abb. 5.14: Übertragungsfunktion des für die Filterung verwendeten Butterworth-Bandpasses.

Für die Messgenauigkeit der Spannungswerte ist die Wahl der Abtastrate ebenfalls entscheidend, denn je häufiger ein Signal abgetastet wird, desto geringer sind die Aliasingeffekte (siehe Kapitel 4.2.1.) und desto besser kann es rekonstruiert werden. Eine der größten Abtastfrequenzen, die bei gleichzeitiger Erfassung mehrerer Kanäle mit der PCI - 6031E - Steckkarte der Firma National Instruments möglich ist, beträgt 1250 Hz. Dieser Wert entspricht etwa dem 150-fachen der Frequenz des zu messenden Signals und wurde bei der Durchführung aller Experimente verwendet.

Während einer geoelektrischen Messung registriert, filtert und speichert das LabView-Programm die Spannungen und stellt die Zeitreihen sowie die bearbeiteten Daten dar. Abbildung 5.15 zeigt einen Bildschirmausschnitt des Programms. Im oberen Graphen sind die ungefilterten Zeitreihen aller Kanäle während einer Einspeisung aufgetragen. Die vereinzelt auftretenden Ausreißer resultieren aus den Störungen, die während des Betriebs der Heizer verursacht werden. Direkt über diesem Graphen befinden sich auf der linken Hälfte die Felder für die Eingabe des Filtertyps, der Filterordnung und der beiden Grenzfrequenzen. Nachdem die Abtastung der Kanäle eines Blocks abgeschlossen ist, filtert das Programm die Zeitreihen jeweils gemäß diesen Angaben.

In dem Feld, welches sich unterhalb des zweiten Graphen auf der linken Seite befindet, wurde zuvor die Anzahl der nach dem Filtern mit Null zu ersetzenden Daten eingetragen. Auf diese Weise bleiben der Einschwingvorgang des Filters und die Einstellzeit der Stromquelle in den gefilterten Zeitreihen unberücksichtigt. Für die Experimente wurde ein Wert von 4500 angesetzt, was bei einer Abtastfrequenz von 1250 Hz genau 3,6 Sekunden entspricht. Nachdem auf Nullsetzen der ersten 4500 gefilterten Messwerte sortiert das Programm die Daten für jede Zeitreihe nach der Größe der Werte und stellt das Ergebnis anschließend in dem zweiten Graphen dar. Aufgrund der großen Datenmenge werden pro Kanal nur jeweils der kleinste und der größte Wert gespeichert.

Vor jeder geoelektrischen Messung erfolgt zudem die Eingabe der Abtastfrequenz und der Anzahl der Werte pro Kanal in den beiden obersten Feldern auf der linken Seite der Bedienoberfläche des LabView-Programms. Die daraus resultierende Messdauer pro Kanal und die etwa doppelt so große gesamte Messzeit für die Erfassung beider Blöcke einer Einspeisung wird automatisch berechnet und in den zwei darunter liegenden Feldern angezeigt.

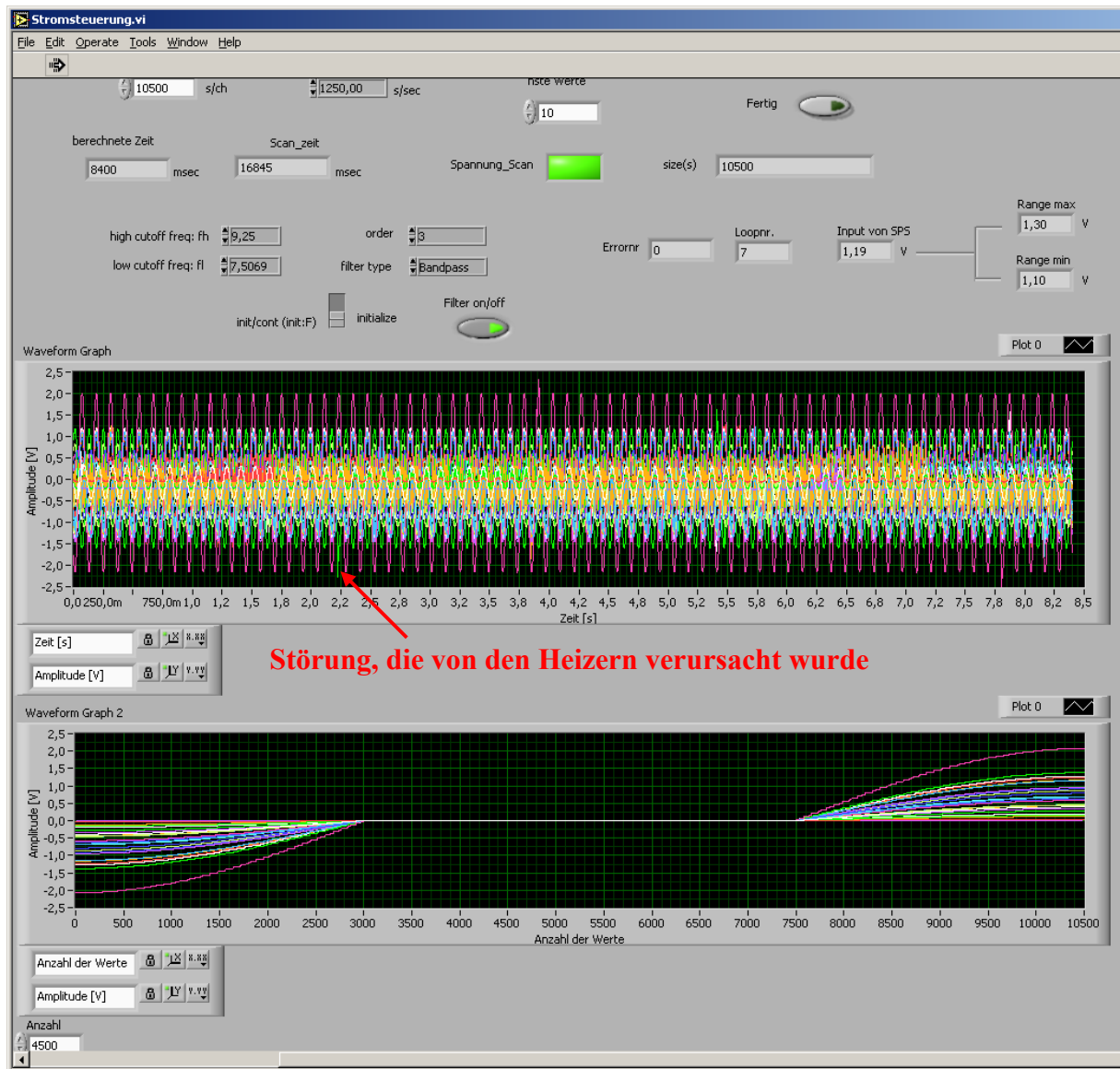


Abb. 5.15: Bildschirmausschnitt des LabView-Programms zur Steuerung der geoelektrischen Messungen sowie zur Aufnahme und Filterung der Spannungen.

Auf der rechten Seite über dem oberen Graphen befindet sich ein Feld namens „Input von SPS“, in welchem die von der SPS ausgesandte Spannung dargestellt ist. Mit jeder Verschaltung erhöht sich nach Ablauf der Messverzögerungszeit der Spannungswert der SPS um 0,2 V. Auf diese Weise signalisiert die SPS dem LabView-Programm, dass die Datenerfassung beginnen soll. Da dieses Spannungssignal ebenfalls verrauscht sein kann, sind in dem LabView-Programm für jede Verschaltung die entsprechende obere und untere Grenze des zu erwartenden Spannungswertes festgelegt. Diese beiden Beträge werden in den zwei Feldern rechts von der gemessenen SPS-Spannung angezeigt. Das Feld links davon gibt die Nummer der Einspeisung an.

---

Insgesamt stehen jedoch nur 29 der 36 Elektroden für die Impedanztomographie zur Verfügung. Aus den verschiedenen Kombinationen der 10 vorhandenen Speiseelektroden ergeben sich 45 mögliche Verschaltungen, die während einer geoelektrischen Messung alle realisiert werden. Mit der Verwendung einer Elektrode als Referenzelektrode liegen demzufolge am Ende einer Messung 1170 Spannungswerte für die weitere Bearbeitung und die Inversion vor. Die Positionen der 36 Platinelektroden und der Verschaltungsplan der 10 Speiseelektroden sowie die beiden verschiedenen Pläne über die Art der Verwendung der jeweils 29 gewählten Elektroden befinden sich im Anhang A.3.2..

### ***5.5. Auswertung der Messungen***

Nach Abschluss eines Experiments liegen neben den direkt gemessenen Temperaturwerten mehrere Datensätze mit je 1170 minimalen und maximalen Spannungswerten vor. Deshalb wird zunächst der Mittelwert aus dem Betrag des Minimums und des Maximums der jeweiligen Spannung gebildet. Allerdings beinhalten die Daten noch verschiedene Messfehler, die beispielsweise aus dem Übersprechen der Kanäle resultieren können. Bei der Berechnung der scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstände multiplizieren sich die Spannungen laut Gleichung (3.34) mit dem Konfigurationsfaktor. Einige Konfigurationsfaktoren können aufgrund einer ungünstigen Anordnung der Elektroden relativ hohe Werte annehmen. In diesen Fällen werden sehr kleine Spannungen mit dementsprechend größeren relativen Fehlern registriert. Deshalb bleiben alle Vierpunktanordnungen, die einen Konfigurationsfaktor von mehr als zwei Metern aufweisen, bei der Auswertung unberücksichtigt. Nach dem Auswählen der Spannungsdaten unter der Berücksichtigung der Größe der von dem Inversionsprogramm berechneten und ausgegebenen Konfigurationsfaktoren stehen noch ca. 800 Messwerte für die Inversion zur Verfügung.

Wie bereits in den vorherigen Kapiteln beschrieben, werden die Quotienten aus den Widerständen der einzelnen Messungen während des Experiments und den Widerständen der Referenzmessung invertiert, um die Effekte systematischer Fehler zu verringern. Damit das Inversionsprogramm die Quotientenbildung korrekt durchführen kann, erfolgt die Benennung des Referenzdatensatzes und der anderen Datensätze in dessen Eingabeoberfläche. Die Datensätze müssen die Elektrodenkoordinaten und die Art der jeweiligen Elektrodenkombination zu Vierpunktanordnungen in der gleichen Reihenfolge sowie die Spannungswerte und die Widerstände enthalten. Die Widerstände werden zuvor aus der eingestellten Stromstärke an der Konstantstromquelle und den jeweiligen Messspannungen berechnet. Die Spannungswerte dienen dem Programm zur Bestimmung der Fehlergrenzen, bis zu denen die Minimierung des Misfits zwischen gemessenen und modellierten Daten entsprechend den Gleichungen (4.43) und (4.45) stattfinden muss. Dazu wurden in der Eingabeoberfläche des Inversionsprogramms ein maximaler absoluter Fehler von acht Millivolt und ein maximaler relativer Fehler von einem Prozent eingetragen.

Neben den Maßen für die Grundfläche des Versuchsbeckens und dem Füllstand der Flüssigkeit benötigt das Programm die Angabe eines Wertes für den Regularisierungsparameter  $\lambda$ . Dabei gilt, je größer  $\lambda$  ist, desto glatter ist das berechnete Modell. Da die Inversionen mit einem Regularisierungsparameter von 20 meist die sinnvollsten Ergebnisse lieferten, wurde dieser Betrag für alle Auswertungen angesetzt.



Die Festlegung der Tetraedergröße für das Parameternetz ist ebenfalls von Bedeutung. Je feiner das Netz ist, umso gleitender sind die Übergänge zwischen den Bereichen unterschiedlicher Leitfähigkeit, aber umso länger ist auch die Rechenzeit. Für die Inversion der Datensätze wurde ein sehr feines Parameternetz mit einem Zellvolumen von maximal  $2 \text{ cm}^3$  gewählt. In Abbildung 5.16 sind das Parameternetz und die Positionen der Elektroden für die anfangs verwendete Elektrodenbelegung aus Tabelle A.3.4 A) bei einem Füllstand von 252 mm dargestellt. Dieses Netz besteht aus 36.175 Tetraedern und 6.838 Knotenpunkten.

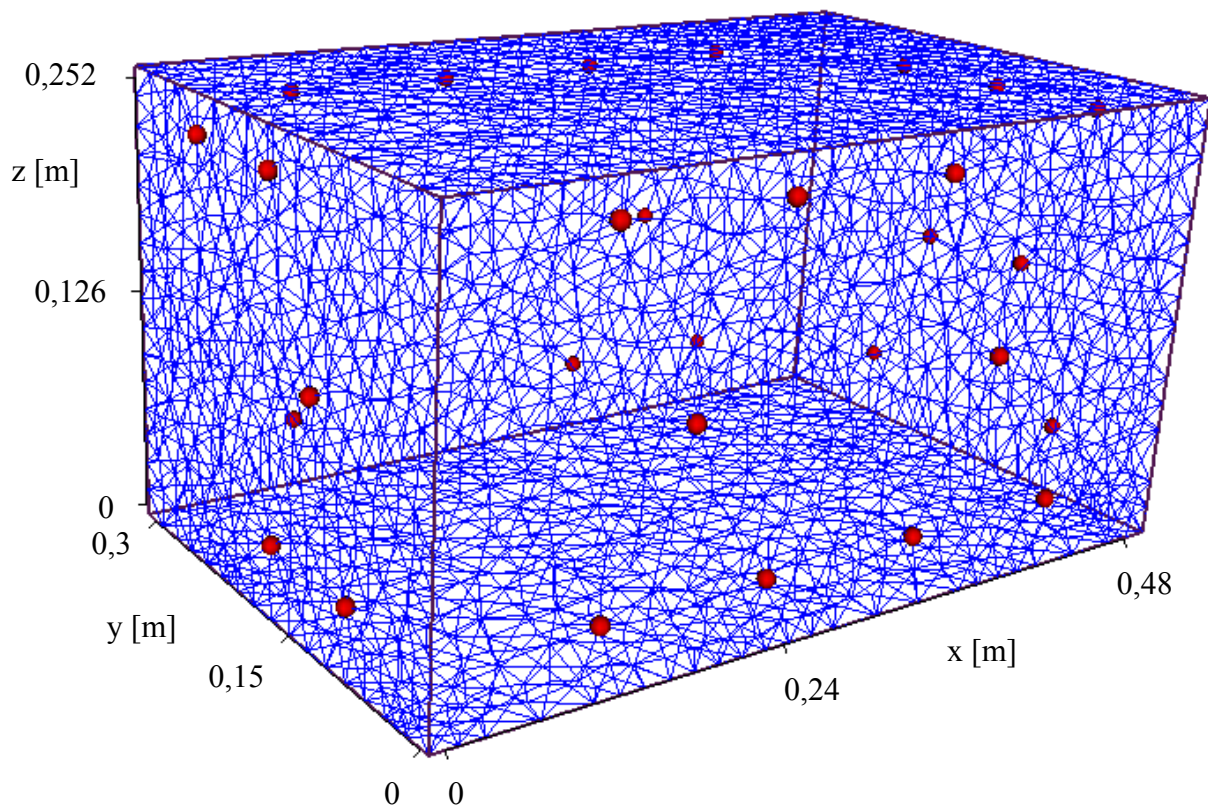


Abb. 5.16: Parameternetz und die Elektroden der Belegung Nr. 1.

Wie in Kapitel 4.4. erläutert, wird aus dem Parameternetz bei jedem Iterationsschritt das verfeinerte Sekundärfeldgitter neu berechnet. Abbildung 5.17 zeigt das Sekundärfeldgitter für das Beispiel aus Abbildung 5.16. Durch die Verfeinerung besitzt dieses Gitter schon 52.098 Knotenpunkte. Für jeden Knotenpunkt ist während der Vorwärtsmodellierung eine Gleichung zu lösen, so dass sich ein relativ umfangreiches Gleichungssystem nach Formel (4.54) ergibt.

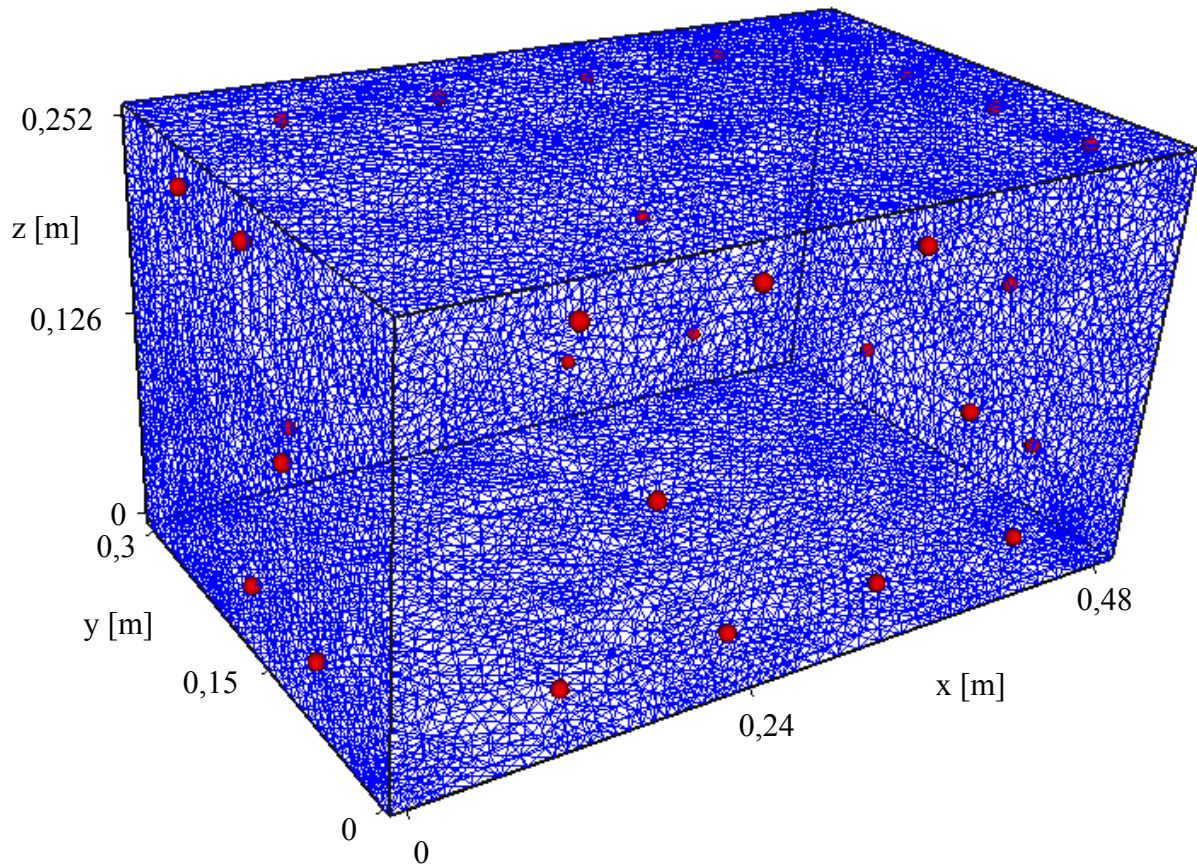


Abb. 5.17: Sekundärfeldgitter und die Elektroden der Belegung Nr. 1.

Das Primärfeldgitter zeichnet sich besonders in der Nähe der Elektroden durch eine weitere Erhöhung der Diskretisierungsdichte aus. Damit ist eine genauere Bestimmung der Primärpotenziale bei der Vorwärtsrechnung möglich. In Abbildung 5.18 befindet sich das Primärfeldgitter für das bisher betrachtete Beispiel. Es weist sogar 106.540 Knotenpunkte auf.

Für die Inversion der Messdaten benötigt das Programm in der Regel nur eine Iteration. Nach Abschluss der Rechnungen liegt für jeden Datensatz ein Modell über die dreidimensionale Leitfähigkeitsverteilung für den Zeitraum der jeweiligen geoelektrischen Messung im Versuchsbecken vor. Die Modelle bestehen aus dem Parameternetz, in welchem jeder Zelle ein Wert für den spezifischen elektrischen Widerstand zugeordnet ist. Zusätzlich gibt das Inversionsprogramm die nach Gleichung (3.40) bestimmten Überdeckungen aus. Allerdings wurden diese Werte für einen besseren Vergleich auf das jeweilige Zellvolumen normiert. Durch das sehr geringe Volumen von maximal  $2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$  ergeben sich für die normierten Überdeckungen relativ hohe Werte. Deshalb wurden die dekadischen Logarithmen der normierten Überdeckungen berechnet und in den Abbildungen 5.19 und 5.20 für beide verwendete Elektrodenbelegungen bei einem Füllstand von 252 mm dargestellt.

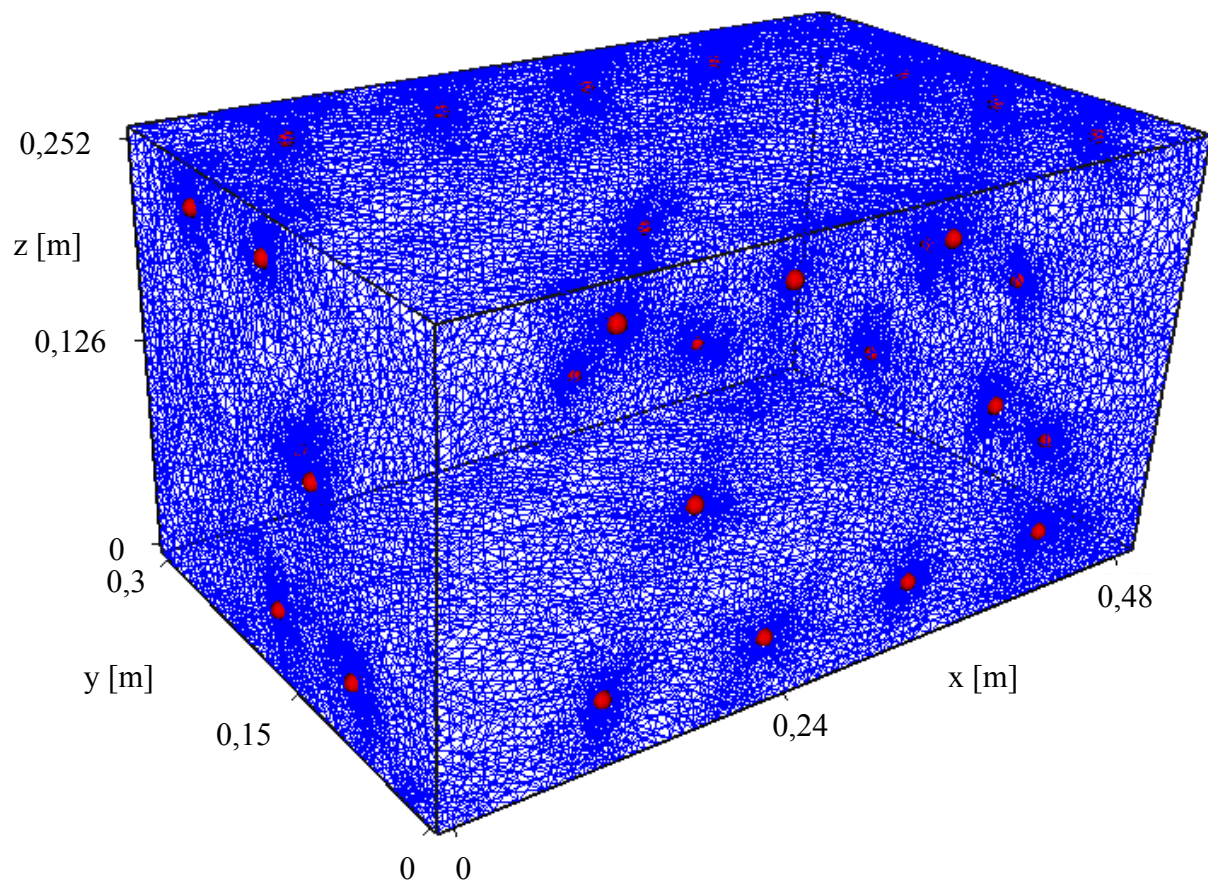


Abb. 5.18: Primärfeldgitter und die Elektroden der Belegung Nr. 1.

Im Bereich von häufig genutzten Elektroden ist die Überdeckung folglich am größten. Deshalb korrelieren die hohen Beträge in den Abbildungen 5.19 und 5.20 mit den Positionen von Elektroden. In Abbildung 5.20 befindet sich das offensichtlich am besten überdeckte Gebiet etwa in der Mitte der Frontseite des Versuchsbeckens genau an der Stelle der Referenzelektrode, weil diese Elektrode bei der Aufnahme aller Datensätze genutzt werden muss. Die Regionen mit der geringsten Überdeckung und dementsprechend mit der schlechtesten Auflösung treten in den Ecken des Versuchsbeckens auf. Die minimalen Werte der logarithmierten und normierten Überdeckungen betragen für die anfangs verwendete Elektrodenbelegung nur 2,71 aber für die spätere Belegung schon 2,96. Demzufolge sollten sich auch die Inversionsergebnisse der Belegung Nummer zwei gegenüber denen der Belegung Nummer eins geringfügig verbessern.

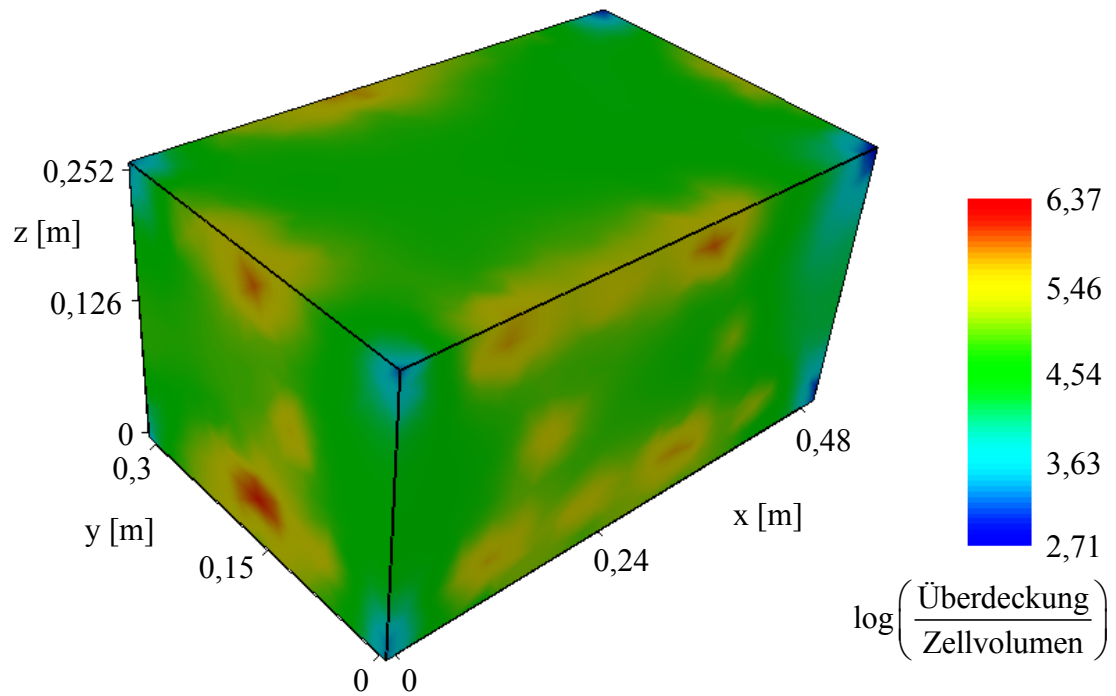


Abb. 5.19: Verteilung der durch die Zellvolumen normierten und dekadisch logarithmierten Überdeckung für die Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung Nr. 1.

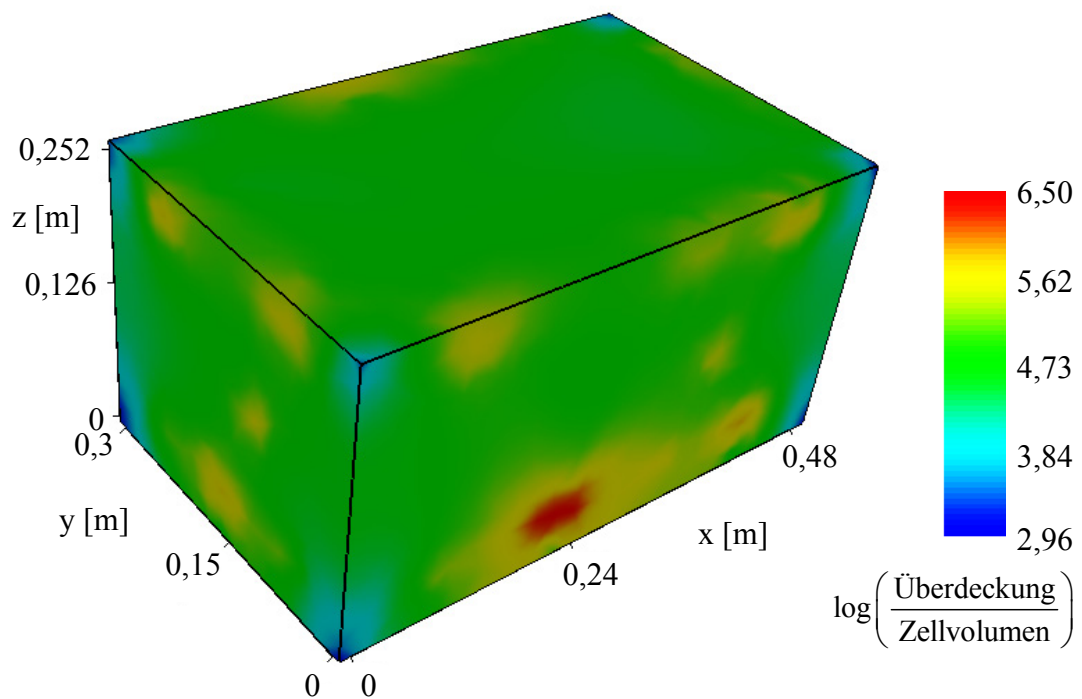


Abb. 5.20: Verteilung der durch die Zellvolumen normierten und dekadisch logarithmierten Überdeckung für die Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung Nr. 2.



Die Inversionsergebnisse werden mit der VFT-Gleichung (2.5) in dreidimensionale Temperaturverteilungen umgerechnet und anschließend mit dem Programm ParaView 2.0 der Firma Kitware Inc. dargestellt. Für die Validierung der mit der Impedanztomographie indirekt bestimmten Temperaturen ist jedoch der Vergleich mit den am Rand direkt gemessenen Temperaturen notwendig. Dazu werden an den Positionen der jeweiligen Typ K - Thermoelemente die Temperaturwerte des Modells ausgelesen. Um möglichst realistische Temperaturen zu erhalten, bietet das Inversionssoftwarepaket die Möglichkeit, interpolierte Werte für jede geforderte Position auszugeben. Dafür berechnet dieses Programm zunächst die spezifischen elektrischen Widerstände an den vier Knotenpunkten eines Tetraeders, indem es jeweils die volumengewichteten Mittelwerte aus den Daten aller an einem Knoten anliegenden Zellen bildet. Anschließend wird innerhalb des benötigten Tetraeders zwischen den Knotenpunkten linear interpoliert und der Wert für die Koordinaten des Thermoelements gespeichert.

Die Temperaturen aus der Impedanztomographie sollten Werte zwischen den mit dem Gerät Tasto therm vor und nach einer geoelektrischen Messung direkt ermittelten Temperaturen aufweisen. Für eine bessere Veranschaulichung der Ergebnisse wurden diese jeweils drei Temperaturen in der Reihenfolge entsprechend der Nummerierung der Thermoelemente aus Tabelle A.3.1 in einem Graphen dargestellt (siehe Abbildung 6.5). Da die Temperaturen an einzelnen Thermoelementen größeren Schwankungen unterliegen können, fand für diese Messwerte zusätzlich der Abgleich mit den über die NI 9211 - Module und dem Rechner registrierten Temperaturzeitreihen statt. Dazu wurden für die Dauer einer geoelektrischen Messung gegebenenfalls der minimale und der maximale Wert aus der Zeitreihe bestimmt und für die weitere Auswertung verwendet.

Um einen objektiven Vergleich zwischen den drei Kurven eines Graphen durchzuführen, erfolgte die Berechnung des Korrelationskoeffizienten  $r_{xy}$  nach Pearson. Diese Produkt-Moment-Korrelation zwischen den Temperaturen des geoelektrischen Modells  $y_i$  und den an den  $n = 29$  Thermoelementen direkt gemessenen Temperaturen  $x_i$  berechnet sich wie folgt:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{29} (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{29} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{29} (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (5.9)$$

wobei  $\bar{x}$  den Mittelwert aus den direkt gemessenen Temperaturen und  $\bar{y}$  den Mittelwert aus den Temperaturen der Impedanztomographie kennzeichnet. Liegt der Wert aus dem geoelektrischen Modell zwischen den direkt gemessenen Temperaturen, so wird  $x_i$  durch  $y_i$  ersetzt. Andernfalls geht diejenige direkt bestimmte Temperatur  $x_i$  in die Berechnung nach Gleichung (5.9) ein, die eine geringere Differenz zu dem indirekt gemessenen Wert aufweist.

Ein weiterer objektiver Ausdruck über die Qualität der geoelektrischen Temperaturbestimmung ist durch die Standardabweichung  $\sigma$  wie folgt definiert:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{28} \sum_{i=1}^{29} (x_i - y_i)^2} \quad . \quad (5.10)$$

Die Normierung resultiert aus der Division dieser Standardabweichung durch den Mittelwert der 29  $x_i$  aus Gleichung (5.9) und wird ebenfalls für die Datenanalyse verwendet.

## 6. Ergebnisse

Um die Eignung der geoelektrischen Impedanztomographie für eine berührungslose Temperaturmessung besser beurteilen zu können, wurden mehrere Versuchsreihen mit unterschiedlichen Parametern durchgeführt. So erfolgten beispielsweise die geoelektrischen Messungen mit zwei verschiedenen Elektrodenbelegungen (siehe Tabelle A.3.4 im Anhang A.3.2.). Außerdem befand sich zunächst ein Gemisch aus Polyethylenglykol und VE-Wasser im Versuchsbecken, welches aber für die späteren Experimente durch ein Gemisch aus Polyethylenglykol, VE-Wasser und Leitungswasser ersetzt wurde. Infolge der daraus resultierenden Erhöhung der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit der Flüssigkeit verringerte sich jedoch nicht nur die Höhe des Übersprechens der Kanäle sondern auch die Sensitivität der elektrischen Leitfähigkeit gegenüber Temperaturänderungen (Kapitel 5.1.). Da die beiden Gemische jeweils den gleichen Massenanteil an Polyethylenglykol besaßen, blieb die Viskosität unverändert und variierte während der einzelnen Experimente lediglich aufgrund differierender Ausgangstemperaturen.

Für die Erzeugung unterschiedlicher Strömungsmuster in der Flüssigkeit wurden die Infrarotstrahler während eines Versuches entweder einzeln oder gemeinsam verwendet. Damit sich eine annähernd stationäre Temperaturverteilung einstellen konnte, erfolgte die Erwärmung der Flüssigkeit zunächst durch nur einen permanent aktiven Heizer. Diese anfänglichen Experimente wurden mit insgesamt drei verschiedenen Heizerpositionen und – zum Schutz vor der Verdunstung des Wassers – mit einem Makrolondeckel durchgeführt. Während der späteren Versuche erwärmte sich die viskose Flüssigkeit durch den gleichzeitigen Betrieb aller Heizer von unten her und kühlte sich durch das Entfernen des Makrolondeckels bzw. durch die Verwendung eines Klimagerätes und eines Metalldeckels von oben her ab. Dabei befanden sich zunächst eine Quarzplatte und später darüber hinaus noch eine elektrisch isolierte Metallplatte auf dem Beckenboden, um mittels der hohen Wärmeleitfähigkeiten dieser Materialien eine gleichmäßigere Beheizung zu gewährleisten.

In diesem Kapitel wird unter anderem auf die Inversionsergebnisse und auf deren Vergleiche mit den am Rand direkt gemessenen Temperaturen eingegangen. Um zudem geodynamische Größen bestimmen zu können, sind Informationen über die Geometrie, die Parameter der Versuchsflüssigkeit und die Temperaturen während eines Experiments erforderlich. Deshalb wurden zunächst Testmessungen mit zwei weiteren Thermoelementen am Beckenboden sowie an der Flüssigkeitsoberfläche jeweils oberhalb des aktiven Heizers durchgeführt. Im Kapitel 6.1. erfolgt zunächst die Betrachtung der daraus ermittelten geodynamischen Größen.

### **6.1. Geodynamische Größen**

Ein Ziel dieser Forschungsarbeit ist die Bestimmung geodynamischer Größen, um das Strömungsverhalten in der Versuchsflüssigkeit mit den Prozessen im Erdmantel vergleichen zu können. In die Berechnungen fließen neben der Flüssigkeitshöhe und den spezifischen Parametern des Polyethylenglykol-Wasser-Gemisches auch die Temperaturen innerhalb und außerhalb des generierten Plumes sowie seine Aufstiegszeit ein. Da während der eigentlichen Experimente jedoch keine direkte Temperaturerfassung im Inneren der Flüssigkeit stattfinden sollte, wurden anfänglich Testmessungen mit zwei zusätzlichen Thermoelementen im beheizten Versuchsbecken durchgeführt. Diese beiden Typ K - Thermoelemente befanden sich dabei etwa einen Zentimeter über dem Beckenboden sowie an der Flüssigkeitsoberfläche jeweils über dem aktiven Infrarotstrahler. Die Temperaturen im Bereich der aufsteigenden Plumes wurden mit einer Abtastfrequenz von 0,1 Hz erfasst und ermöglichten somit gleichzeitig die Messung der Aufstiegszeiten.

Abbildung 6.1 zeigt den Temperaturverlauf an den beiden zusätzlichen Thermoelementen. Nach dem Einschalten des Infrarotstrahlers erwärmte dieser mit einer Leistung von 13 W die Versuchsflüssigkeit kontinuierlich von unten. Etwa zwanzig Minuten nach dem Starten des Heizvorgangs erreichte die Temperatur nahe dem Beckenboden ein erstes Maximum und der Aufstieg eines Plumes begann. Die Ankunft des Plumes an der Oberfläche äußerte sich 350 Sekunden später in einem deutlichen Temperaturanstieg an dem zweiten Thermoelement.

Die geodynamischen Größen wurden jedoch nicht nur für diesen Plume sondern auch für die beiden nummerierten Plumes in Abbildung 6.2 berechnet. Die Erhöhung der Heizleistung von den anfänglichen 100 W auf 208 W während dieses zweiten Tests bewirkte die Generierung von zunehmend schnelleren Plumes, die außerdem in immer kürzeren Zeitabständen auftraten. Nach dem Abschalten des Infrarotstrahlers verringerten sich die Amplitude der Temperaturschwankungen sowie die Temperaturunterschiede zwischen den Plumes und der Umgebung. Deshalb nahm die Aufstiegs geschwindigkeit ebenfalls wieder massiv ab.

Die geodynamischen Größen, die mit den Gleichungen aus Kapitel 3.1. für die drei Plumes aus den Abbildungen 6.1 und 6.2 bestimmt wurden, sind in Tabelle 6.1 den Werten des Erdmantels zum Vergleich gegenübergestellt. Den Berechnungen lagen die in Kapitel 5.1. bereits genannten spezifischen Parameter für das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch zugrunde.



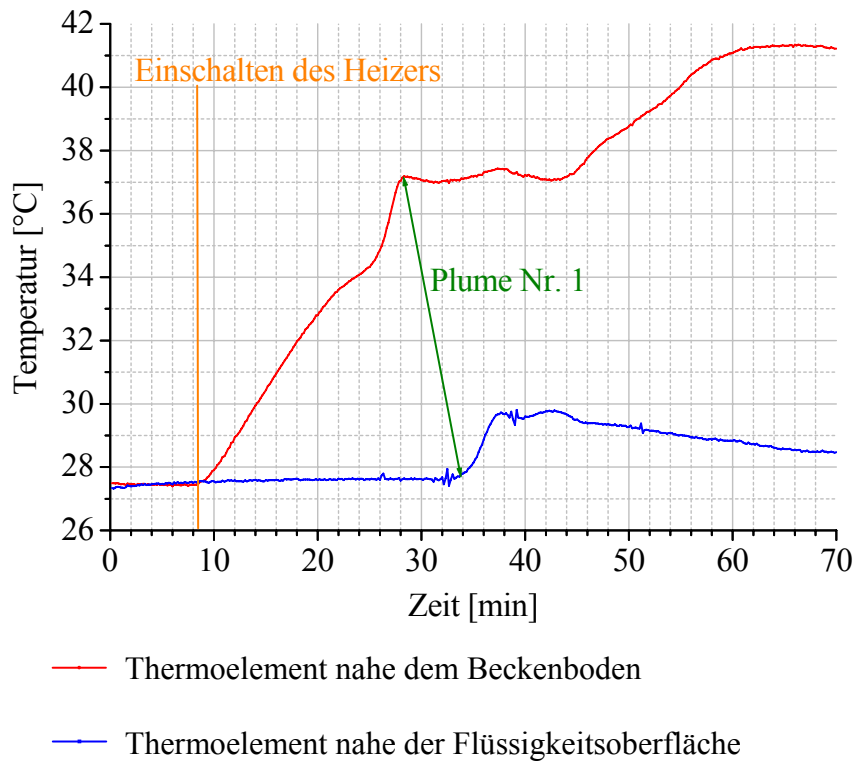


Abb. 6.1: Temperaturverlauf an den beiden zusätzlichen Thermoelementen oberhalb des Infrarotstrahlers. Die Heizleistung betrug während des gesamten Experiments 13 W.

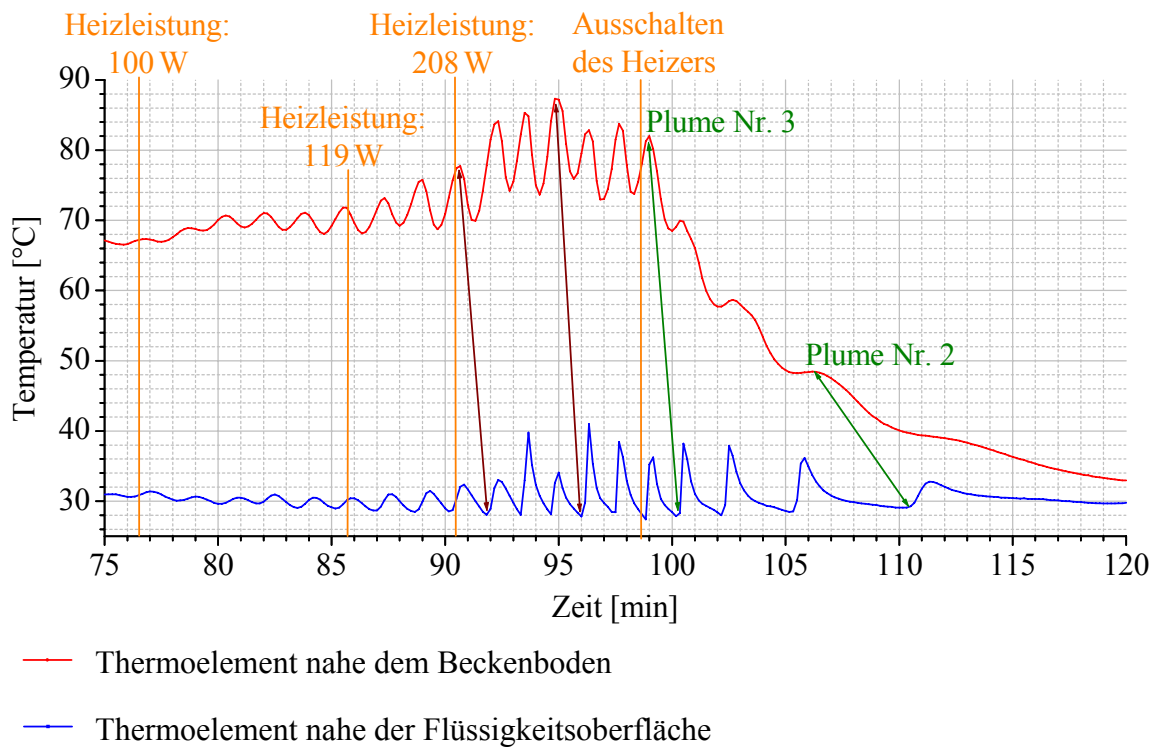


Abb. 6.2: Temperaturverlauf an den beiden zusätzlichen Thermoelementen oberhalb des Infrarotstrahlers. Die Heizleistung wurde während des Experiments von 100 W auf 208 W erhöht.

Parameter	Erde	Plume Nr. 1	Plume Nr. 2	Plume Nr. 3
Temperaturdifferenz $\Delta T$ zwischen Plume und Umgebung	100 - 300 K	9,6 K	19,4 K	53,7
Aufstiegszeit $t_p$ des Plumes	$\approx 10^1 - 10^2$ Mio. a	350 s	260 s	80 s
Aufstiegsweg $h$ des Plumes	$\approx 2900$ km	0,252 m	0,250 m	0,250 m
Dynamische Viskosität $\eta$ des umgebenden Materials	$\approx 10^{21} - 10^{22}$ Pa s	$\approx 4,8$ Pa s	$\approx 4,8$ Pa s	$\approx 4,8$ Pa s
Temperaturleitfähigkeit $a$ des umgebenden Materials	$\approx 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s	$0,126 \cdot 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s	$0,126 \cdot 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s	$0,126 \cdot 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
Rayleigh-Zahl $Ra$ , Gleichung (3.9)	$\approx 10^6 - 10^7$	$1,2 \cdot 10^6$	$2,5 \cdot 10^6$	$6,8 \cdot 10^6$
Prandtl-Zahl $Pr$ , Gleichung (3.13)	$\approx 10^{24}$	$3,6 \cdot 10^4$	$3,6 \cdot 10^4$	$3,6 \cdot 10^4$
Péclet-Zahl $Pe$ , Gleichung (3.14)	$\approx 10^3$	1440	1908	6200
Nusselt-Zahl $Nu$ , Gleichung (3.16)	$\approx 10^2$	$\approx 10^2$	$\approx 10^2$	$\approx 10^2$
Grenzschichtdicke $\delta$ , Gleichung (3.16)	$\approx 10^1 - 10^2$ km	3,7 mm	2,9 mm	2,1 mm
Radius $R$ des Plumekopfes, Gleichung (3.18)	$\approx 10^2 - 10^3$ km	1,48 cm	1,21 cm	1,31 cm

Tab. 6.1: Geodynamische Größen für die Erde und die durchgeführten Laborexperimente.

Die drei dimensionslosen Größen Rayleigh-Zahl, Péclet-Zahl und Nusselt-Zahl weisen für alle drei Laborplumes ähnliche Werte wie im Erdmantel auf. Das bedeutet, dass im Laborversuch auch erdmantelähnliche Strömungen erzeugt werden können. Allerdings ergeben sich für die Prandtl-Zahlen aufgrund der deutlichen Viskositätsunterschiede zwischen dem Mantelmaterial und dem Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch Werte, die in einer Größenordnung von etwa  $10^{20}$  voneinander abweichen. Da die Prandtl-Zahl für die Experimente mit einem Betrag von  $Pr = 3,6 \cdot 10^4$  noch relativ groß ist, können sich demzufolge stationäre Strömungen in Form von Konvektionszellen ausbilden.

Die Leistung der verwendeten Infrarotheizstrahler lag während der in den nachfolgenden Kapiteln betrachteten Experimente lediglich zwischen 6 W und 40 W. Deshalb repräsentiert nur der Plume Nummer eins die tatsächlichen Bedingungen zum Zeitpunkt der Versuche, die ohne zusätzliche Kühlung der Flüssigkeitsoberfläche stattfanden. Demnach stiegen die Plumes in etwa sechs Minuten auf. Die Messdauer der Impedanztomographie beträgt dagegen 15 Minuten. Aufgrund dieser geringen zeitlichen Auflösung ist die Erfassung eines einzelnen Plumes nicht möglich.

Die nur annähernd vier Millimeter hohe Grenzschicht konnte durch die geoelektrischen Messungen räumlich nicht mehr aufgelöst werden. In Kapitel 7. befinden sich unter anderem die Ergebnisse für die mittels Vorwärtsmodellierung und anschließender Inversion der Daten bestimmte räumliche Auflösung von Plumes mit einem Radius von 1,5 Zentimetern.

## 6.2. Generierung eines langsam absinkenden Plumes

Wie bereits in Kapitel 6.1. dargelegt, ist die Registrierung eines einzelnen, aufwärts strömenden, heißen Plumes mit den für die Versuche verwendeten Parametern aufgrund der relativ großen Aufstiegs geschwindigkeit nicht möglich. Deshalb wurde während eines Experiments gezielt ein langsam absinkender Plume erzeugt und mittels geoelektrischer Impedanztomographie erfasst. Damit ein derartiger Plume entstehen kann, muss sich eine kühlere und somit dichtere Schicht oberhalb einer wärmeren und somit leichteren Schicht befinden. Zu diesem Zweck wurde die Flüssigkeit zunächst durch den Infrarotstrahler vorn links erwärmt. Das über dem Heizer aufsteigende heiße Material breitete sich an der Oberfläche aus und konnte sich durch den aufliegenden Makrolondeckel kaum abkühlen. Demzufolge erwärmte sich die Versuchsflüssigkeit allmählich von oben her. Abbildung 6.3 zeigt die dreidimensionale Temperaturverteilung, die nach einer Heizdauer von etwa vier Stunden im Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch vorlag und mit der Methode der geoelektrischen Temperaturmessung bestimmt wurde. Die pulsierenden Aufwärtsströmungen zeichnen sich unter anderem infolge der Mittelung über mehrere Plumes während der Aufnahme eines Datensatzes nur durch einen Bereich mit einer geringfügig höheren Temperatur über dem aktiven Heizer ab.

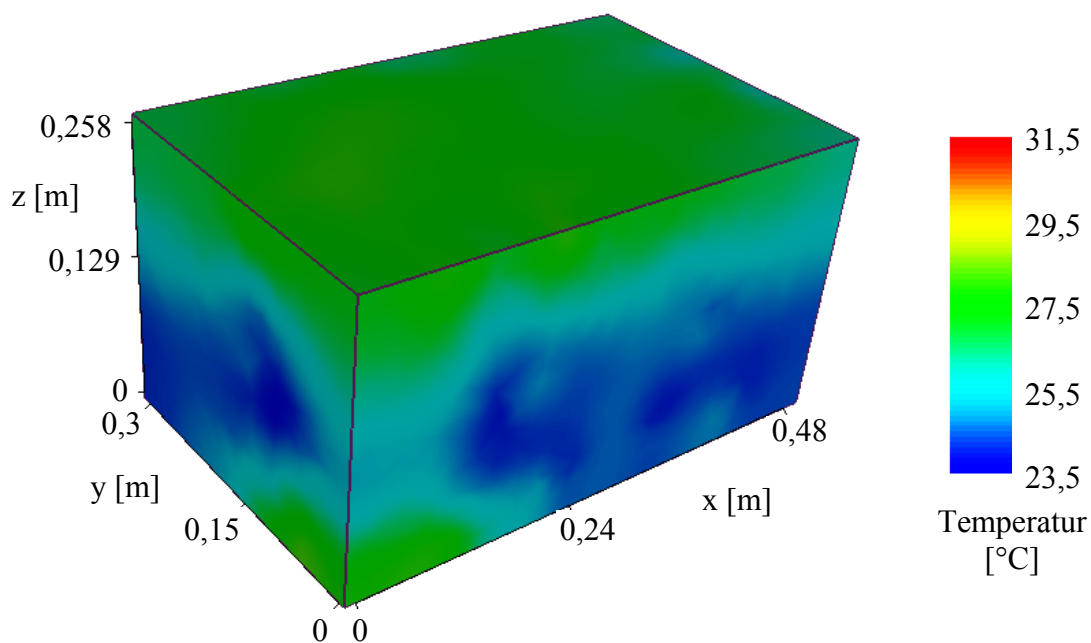


Abb. 6.3: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mittels geoelektrischer Impedanztomographie etwa vier Stunden nach dem Einschalten des Heizers aufgenommenen Daten.

Direkt nach der zuvor beschriebenen geoelektrischen Messung wurde der Deckel entfernt und ein weiterer Heizer vorn rechts eingeschaltet. Daraufhin kühlte das von der linken und der rechten Beckenseite aufsteigende heiße Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch an der Oberfläche so stark ab, dass es eine größere Dichte als die erwärmte darunterliegende Flüssigkeit besaß. Dementsprechend bildete sich ein absinkender Plume mittig der beiden aktiven Infrarotstrahler aus. Da dieser Abstrom fortwährend von oben her mit dichterem Material gespeist wurde, drang er sogar bis in die kühleren Bereiche des Polyethylenglykol-Wasser-Gemisches vor, wo er sich dann leicht nach links krümmte und anschließend stagnierte. In Abbildung 6.4 ist der Plume, der etwa 1,5 Stunden nach dem Entfernen des Deckels durch die geoelektrische Messung erfasst wurde, deutlich zu erkennen. Die Temperaturunterschiede zwischen dem Abstrom und der Umgebung sind in dem Inversionsergebnis jedoch nur sehr gering, weshalb zur Verbesserung der Visualisierung die Temperaturwerte kleiner als  $26,1^{\circ}\text{C}$  durchscheinend dargestellt sind.

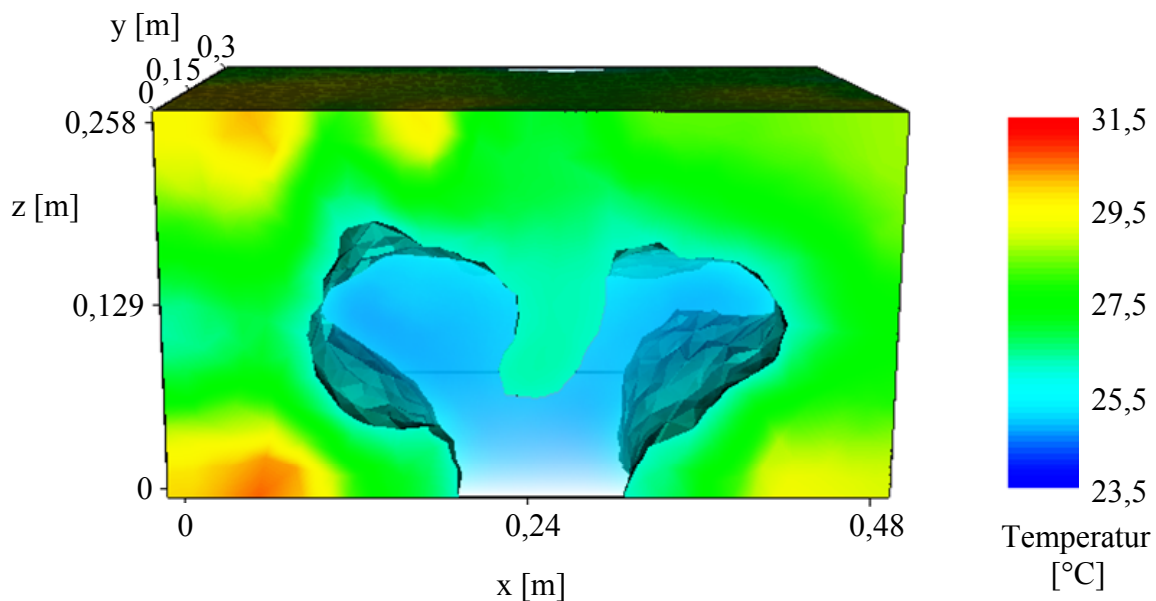


Abb. 6.4: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mittels geoelektrischer Impedanztomographie etwa 1,5 Stunden nach dem Entfernen des Deckels aufgenommenen Daten. Zur Verdeutlichung des in der Mitte absinkenden Plumes sind die Temperaturen mit Werten kleiner als  $26,1^{\circ}\text{C}$  durchscheinend dargestellt.

### **6.3. Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung 1**

#### **6.3.1. Experimente mit dem PEG-VE-Wasser-Gemisch**

Zur Bewertung der Anwendbarkeit der Impedanztomographie für die nichtinvasive dreidimensionale Temperaturbestimmung ist der Vergleich mit den direkt gemessenen Randtemperaturen notwendig. Während der Experimente wurden deshalb vor und nach jeder geoelektrischen Messung mit dem Gerät TastoTherm die Temperaturen an den 29 Typ K – Thermoelementen erfasst. Eine kontinuierliche Abtastung der Thermoelemente erfolgte erst für die späteren Versuchsreihen mit der Elektrodenbelegung Nummer zwei (siehe Tabelle A.3.4 im Anhang A.3.2.).

Da bei den zwei Experimenten mit dem PEG-VE-Wasser-Gemisch nur der Infrarotstrahler vorn links verwendet wurde und sich der Makrolondeckel auf dem Becken befand, stellte sich eine ähnliche Temperaturverteilung in der Flüssigkeit ein wie zu Beginn des in Kapitel 6.2. beschriebenen Versuchs. Die Inversionsergebnisse ähneln dementsprechend auch der Darstellung in Abbildung 6.3. Nach den geoelektrischen Referenzmessungen wurden während der Heizvorgänge der beiden in diesem Kapitel beschriebenen Experimente insgesamt je vier weitere Impedanztomographien in einem zeitlichen Abstand von etwa einer Stunde durchgeführt. Die dreidimensionale Inversion der Widerstandsquotienten lieferte die Leitfähigkeitsverteilungen und über die Anwendung der VFT-Gleichung (2.5) ebenfalls die Temperaturverteilungen im PEG-VE-Wasser-Gemisch zum Zeitpunkt der jeweiligen Messung.

Für den Vergleich mit den direkt bestimmten Temperaturen vor und nach jeder Impedanztomographie wurden diese Werte gemeinsam mit den durch die Geoelektrik ermittelten Temperaturen in der Reihenfolge der im Anhang A.3.1. aufgelisteten 29 Thermoelemente aufgetragen. In Abbildung 6.5 ist eine der daraus resultierenden Grafiken dargestellt. Dabei handelt es sich um die zweite geoelektrische Messung des zweiten Experiments. Die in Kapitel 5.2. erläuterten Genauigkeiten von 0,1 K für die direkte und 0,2 K für die indirekte Temperaturbestimmung sind durch die Fehlerbalken in Abbildung 6.5 gekennzeichnet. Theoretisch müsste die Kurve der Inversionsergebnisse genau zwischen den beiden Kurven der direkten Temperaturmessung liegen. Allerdings gibt es Abweichungen, die sogar die Fehlergrenzen überschreiten. Die Thermoelemente 1, 5, 10, 19 und 24 befinden sich in den Ecken des Versuchsbeckens. Wie in Abbildung 5.19 im Kapitel 5.5. gezeigt, sind dies allerdings die schlechter überdeckten und damit ungenaueren Bereiche.

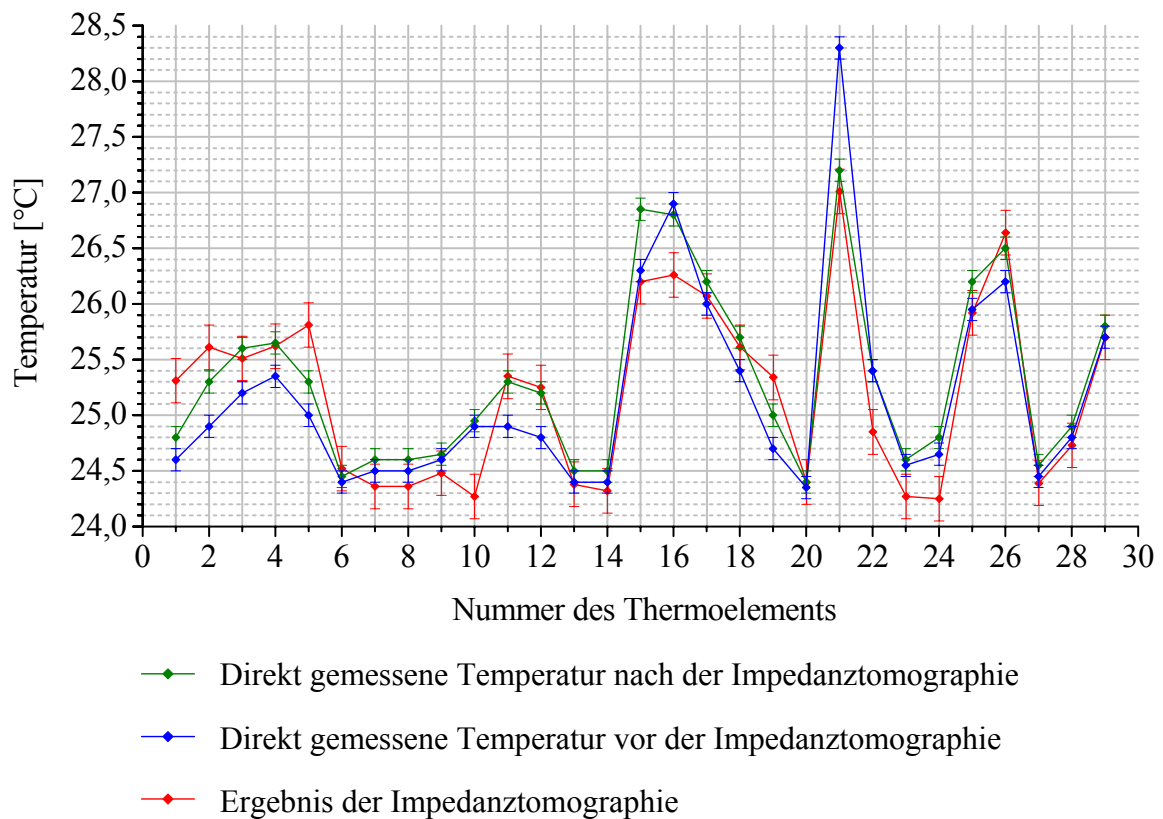


Abb. 6.5: Vergleich der vor und nach der geoelektrischen Impedanztomographie direkt an den 29 Thermoelementen gemessenen Temperaturen mit den Temperaturen des Inversionsergebnisses für die zweite Impedanztomographie des zweiten Experiments.

Die Abweichungen an den Thermoelementen 16, 21 und 22 stehen offensichtlich mit dem Heizvorgang in Verbindung, da sich zwischen den bodennahen Thermoelementen 21 und 22 der aktive Infrarotstrahler befindet und die Nummer 16 im Bereich der an der Oberfläche ankommenden Plumes liegt. Durch die fehlende kontinuierliche Abtastung der Temperaturen an den Thermoelementen werden die aus den pulsierend aufsteigenden Plumes resultierenden Temperaturschwankungen während der Impedanztomographie nicht in den Grafiken berücksichtigt. Eine weitere Ursache für die Abweichungen könnte das in Kapitel 7.3. diskutierte räumliche Auflösungsvermögen für einen Plume sein.

Für die objektive Bewertung der Inversionsergebnisse werden die Korrelationskoeffizienten zwischen den zuvor beschriebenen Kurven nach Gleichung (5.9) und die normierten Standardabweichungen nach Gleichung (5.10) für jede Impedanztomographie berechnet. Die Tabellen 6.2 und 6.3 enthalten neben diesen Werten zusätzlich die Zeiten der geoelektrischen Messungen, gerechnet ab dem Einschalten des Infrarotstrahlers.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	53 - 68	0,98	0,6
2	125 - 140	0,94	1,5
3	184 - 199	0,94	1,7
4	245 - 260	0,96	1,1

Tab: 6.2: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die vier Messungen des ersten Experiments.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	54 - 69	0,97	0,7
2	116 - 131	0,94	1,1
3	192 - 207	0,95	1,1
4	280 - 295	0,95	1,0

Tab: 6.3: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die vier Messungen des zweiten Experiments.

Sowohl aus den Korrelationskoeffizienten als auch aus den normierten Standardabweichungen ist ersichtlich, dass die Inversionsergebnisse sehr gut mit den direkt gemessenen Temperaturen übereinstimmen. Auffällig ist jedoch, dass die Abweichungen zunächst ansteigen, sich aber nach mehr als vier Stunden Heizen wieder deutlich verringern. Eine Erklärung dafür ist die zunehmende Erwärmung der gesamten Flüssigkeit aufgrund der nur geringen Abkühlung des heißen Materials an der Oberfläche. Dadurch verringert sich die Rayleigh-Zahl und die Strömungsvorgänge werden weniger heftig. Das bedeutet, dass sich die Dauer zwischen der Generierung zweier Plumes sowie die Aufstiegszeiten der Plumes erhöhen, wodurch wiederum die zeitliche Auflösung zunimmt. Außerdem können die Plumes durch ihre größeren Radien auch räumlich besser aufgelöst werden. Auf diese Weise verringern sich die Abweichungen zwischen den direkt gemessenen und den geoelektrisch ermittelten Temperaturen ab einem bestimmten Zeitpunkt allmählich.



### 6.3.2. Experimente mit dem Gemisch aus PEG, VE-Wasser und Leitungswasser

Um das in Kapitel 5.1. beschriebene Übersprechen der Kanäle während der Erfassung der Spannungswerte zu verringern, wurden alle weiteren Versuche mit dem leitfähigeren Gemisch aus Polyethylenglykol, VE-Wasser und Leitungswasser durchgeführt. Die Impedanztomographien der drei in diesem Kapitel dokumentierten Experimente erfolgten vorerst mit der Elektrodenbelegung Nummer eins. Für den dritten und vierten Versuch wurde der Heizer vorn links und für den fünften Versuch der Heizer vorn rechts verwendet, wobei die Leistung des aktiven Infrarotstrahlers jeweils 23,6 W betrug.

Da keine kontinuierliche Abtastung der Typ K - Thermoelemente stattfand, stehen für die Auswertung nur die vor und nach jeder geoelektrischen Tomographie mit dem Gerät Tasto therm bestimmten Temperaturen ohne die Berücksichtigung von kurzzeitigen Temperaturschwankungen zur Verfügung. Damit sich der Einfluss der Zimmertemperatur auf die direkte Temperaturmessung in der randnahen Versuchsflüssigkeit aufgrund der wärmeleitenden Beckenwand verringert, wurden alle Versuche nach dem vierten Experiment mit zehn Millimeter tieferen Thermoelementen durchgeführt (Anhang A.3.1.).

Während der Experimente befand sich der Makrolondeckel auf dem Becken und verhinderte die Abkühlung des aufsteigenden heißen Materials. Dementsprechend bildete sich für die Versuche drei und vier in der Flüssigkeit eine ähnliche Temperaturverteilung wie in Abbildung 6.3 aus. Für das fünfte Experiment ergibt sich durch die veränderte Position des aktiven Infrarotstrahlers folglich eine seitenverkehrte Verteilung. In Abbildung 6.6 wird das Inversionsergebnis für die zweite Impedanztomographie dieses Versuches gezeigt. Daraus ist ersichtlich, dass sich die Flüssigkeit wiederum von oben her erwärmt. Um einen Einblick in das Innere des Polyethylenglykol-Wasser-Gemisches zu erhalten, sind die Temperaturen mit Werten kleiner als 26,7°C durchscheinend dargestellt. Die dadurch erkennbare Struktur in dem Bereich oberhalb des aktiven Infrarotstrahlers kennzeichnet den räumlichen und zeitlichen Mittelwert der zum Zeitpunkt der geoelektrischen Messung aufgestiegenen Plumes.

Für den Vergleich der mittels der Impedanztomographie bestimmten Temperaturen mit den zuvor und anschließend direkt gemessenen Temperaturen wurden die drei Kurven – wie in Abbildung 6.5 gezeigt – jeweils in einem Graphen gegenübergestellt. Größere Abweichungen traten erneut in den Bereichen niedriger Überdeckung sowie in der Nähe der generierten Plumes auf. Die für die Kurven berechneten Korrelationskoeffizienten und die normierten Standardabweichungen sowie die Messzeiten für das dritte, vierte und fünfte Experiment befinden sich in den Tabellen 6.4, 6.5 und 6.6.

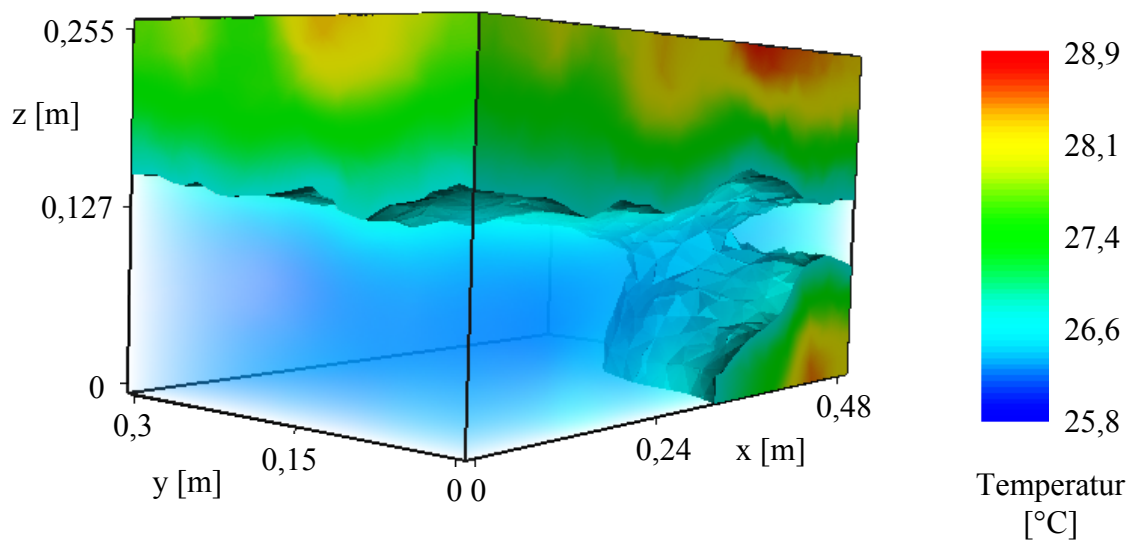


Abb. 6.6: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der zweiten geoelektrischen Impedanztomographie des fünften Experiments. Die Temperaturen mit Werten kleiner als  $26,7^{\circ}\text{C}$  sind durchscheinend dargestellt.

Während des dritten Versuchs erfolgten insgesamt vier geoelektrische Messungen in Zeitintervallen von etwa einer Stunde. Für die beiden späteren Experimente wurden größere Zeitabstände zwischen den Impedanztomographien gewählt und nur noch jeweils drei Messungen durchgeführt. Wie bereits in Kapitel 6.3.1. festgestellt, nehmen die Abweichungen zwischen den direkt und den indirekt gemessenen Temperaturen mit fortschreitender Zeit infolge der Durchwärmung der Flüssigkeit und der Verringerung der Rayleigh-Zahl ab.

Zwischen den berechneten Korrelationskoeffizienten und den normierten Standardabweichungen der Experimente in dem Polyethylenglykol-VE-Wasser-Gemisch und den in den Tabellen 6.4, 6.5 und 6.6 aufgelisteten Werten ist allerdings kein wesentlicher Unterschied zu erkennen. Demzufolge bewirkte die Verringerung des Übersprechens der Kanäle durch die Veränderung der Versuchsflüssigkeit keine deutliche Verbesserung der Ergebnisse. Allerdings traten aufgrund der damit verbundenen Verminderung der Sensitivität des spezifischen elektrischen Widerstands in Bezug auf Temperaturänderungen auch keine Verschlechterungen der Ergebnisse auf. Für alle fünf Versuche ergeben sich relativ gute Korrelationskoeffizienten von mindestens 0,92 und relativ geringe normierte Standardabweichungen von höchstens 1,5 %.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	59 - 74	0,92	1,2
2	118 - 133	0,97	1,0
3	181 - 196	0,96	1,1
4	253 - 268	0,96	1,3

Tab: 6.4: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die vier Messungen des dritten Experiments.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	49 - 64	0,96	1,1
2	131 - 146	0,94	1,5
3	261 - 276	0,98	0,8

Tab: 6.5: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die drei Messungen des vierten Experiments.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	59 - 74	0,97	0,5
2	147 - 162	0,94	1,1
3	229 - 244	0,96	0,9

Tab: 6.6: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die drei Messungen des fünften Experiments.

## **6.4. Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung 2**

### **6.4.1. Experimente ohne wärmeleitende Bodenplatte**

Da der Beckenboden aus dem gut wärmedurchlässigen aber schlecht wärmeleitenden Ceran besteht, erfolgte die direkte Erwärmung der viskosen Flüssigkeiten während der ersten zehn Versuche nur lokal oberhalb der jeweils aktiven Infrarotstrahler. Erst mit dem Beginn der letzten fünf Experimente befanden sich eine Quarzal- bzw. eine Stahlplatte mit größeren Wärmeleitfähigkeiten auf dem Boden, um eine gleichmäßigere Beheizung zu erzielen (Kapitel 6.4.2.). Die in diesem Kapitel beschriebenen Versuche mit den Nummern sechs bis zehn wurden mit dem Gemisch aus Polyethylenglykol, VE-Wasser und Leitungswasser durchgeführt, wobei die Impedanztomographien mit der Elektrodenbelegung Nummer zwei stattfanden (Tabelle A.3.4 im Anhang A.3.2.).

Der einzige Unterschied zwischen dem sechsten und dem in Kapitel 6.3.2. erläuterten fünften Experiment bestand lediglich in der Wahl der verwendeten Elektroden. Deshalb stellte sich während der beiden Versuche eine ähnliche Temperaturverteilung in der Flüssigkeit ein (siehe Abbildung 6.6). Der Vergleich der Ergebnisse dieser zwei Experimente ermöglicht somit eine Abschätzung des Einflusses der Elektrodenbelegung auf die Qualität der geoelektrischen 3D-Tomographie. Wie aus Tabelle 6.7 ersichtlich, scheinen sich die Inversionsergebnisse für die Belegung Nummer zwei deutlich zu verschlechtern. Der Grund dafür ist die stichprobenartige direkte Temperaturmessung vor und nach jeder Impedanztomographie. Auf diese Weise können die Temperaturschwankungen oberhalb des Heizers mit den Thermoelementen 19 und 24 nicht in ihrer vollen Amplitude erfasst werden.

Während die Temperaturänderungen zwischen den jeweils zwei direkten Messungen am Thermoelement 24 für die erste und die zweite Impedanztomographie des sechsten Versuches nur bei 1,0 K und 1,5 K liegen, beträgt der Wert für die dritte Impedanztomographie schon 7,4 K. Da sich die Flüssigkeit aber von oben her aufgrund des Makrolondeckels erwärmte und infolgedessen die Strömungen weniger heftig wurden, handelt es sich bei den erfassten Temperaturänderungen für die beiden ersten geoelektrischen Messungen nicht um die tatsächlich vorhandenen Minimal- und Maximalwerte. Dementsprechend können die Abweichungen zwischen den mit dem Gerät Tasto therm und den mit der Geoelektrik bestimmten Temperaturen zu große Beträge annehmen. Aus diesem Grund ergeben sich für die beiden ersten geoelektrischen Messungen relativ schlechte und für die dritte Messung relativ gute Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	66 - 81	0,78	3,9
2	122 - 137	0,76	3,8
3	239 - 254	0,96	1,2

Tab. 6.7: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die drei Messungen des sechsten Experiments.

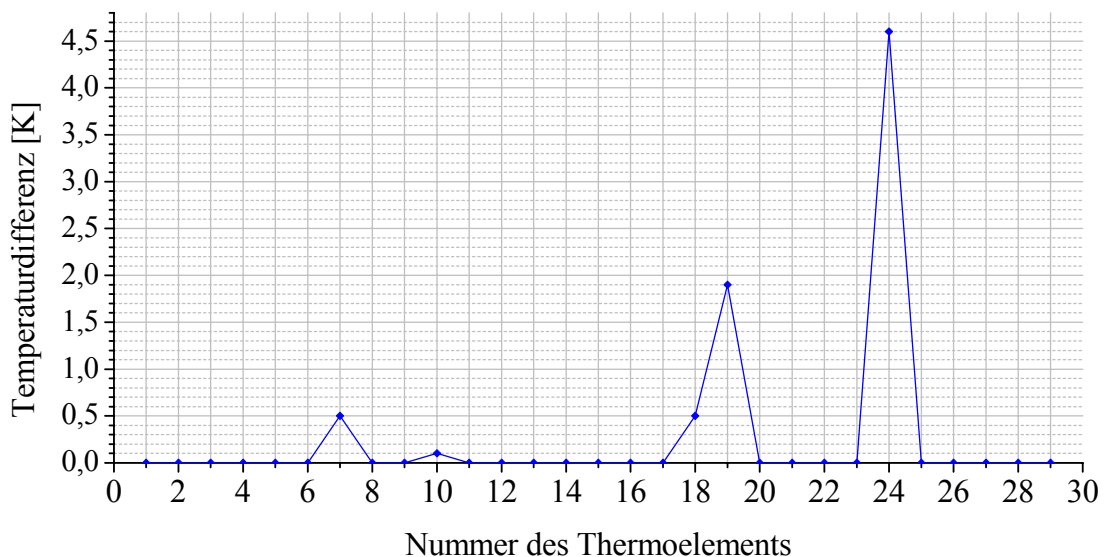


Abb. 6.7: Die Fehlergrenzen übersteigenden maximalen Abweichungen zwischen den direkt gemessenen Temperaturen und den mittels geoelektrischer Impedanztomographie bestimmten Temperaturen für die drei Messungen des sechsten Experiments.

In Abbildung 6.7 sind für die drei Messungen des sechsten Experiments die maximalen Abweichungen zwischen den direkt und indirekt bestimmten Temperaturen nach Abzug der Fehlergrenzen von insgesamt 0,3 K über jedes Thermoelement aufgetragen. Die stärksten Abweichungen treten in der Nähe der aufsteigenden Plumes an den Thermoelementen 18, 19 und 24 auf. Die Thermoelemente 7 und 10 befinden sich laut Abbildung 5.20 in den schwächer überdeckten Gebieten des Versuchsbeckens und weisen deshalb ebenfalls Abweichungen auf.

Um einen Vergleich zwischen dem fünften und dem sechsten Experiment durchzuführen, bei dem die großen Abweichungen infolge der fehlenden Erfassung der kompletten Temperaturschwankungen unberücksichtigt bleiben, wurden die Korrelationskoeffizienten und die normierten Standardabweichungen nochmals ohne die Werte an den Thermoelementen 19 und 24 berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.8 aufgelistet und zeigen ähnlich gute Werte für beide Experimente. Demnach ist kein wesentlicher Unterschied durch die Veränderung der Elektrodenbelegung nachweisbar.

Für die Versuche sieben bis zehn wurde der Infrarotstrahler verwendet, der sich mittig im vorderen Teil des Beckens befindet. Trotz einer relativ starken Heizleistung von 23,6 W und einer ebenfalls fehlenden kontinuierlichen Temperaturmessung ergeben sich vergleichsweise gute Korrelationskoeffizienten von mindestens 0,93 und normierte Standardabweichungen von maximal 1,0 % für die drei Impedanztomographien des siebenten Experiments. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.9 eingetragen.

Nummer der geoelektrischen Messung	Korrelationskoeffizient 5. Experiment	Korrelationskoeffizient 6. Experiment	Normierte Standardabweichung 5. Experiment [%]	Normierte Standardabweichung 6. Experiment [%]
1	0,96	0,94	0,5	0,7
2	0,96	0,95	0,8	1,0
3	0,96	0,97	0,9	0,9

Tab. 6.8: Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die drei Messungen des fünften und des sechsten Experiments ohne Berücksichtigung der Werte an den Thermoelementen 19 und 24.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	71 - 86	0,93	1,0
2	122 - 137	0,97	0,9
3	246 - 261	0,99	0,7

Tab. 6.9: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die drei Messungen des siebenten Experiments.

Ab dem achten Versuch wurden die Randtemperaturen mit einer Frequenz von 0,1 Hz abgetastet und Experimente von deutlich größerer Dauer durchgeführt. Da die Heizleistung während des achten Versuchs nur noch 13 W betrug, traten weniger heftige Strömungen auf und die Ergebnisse verbesserten sich gegenüber denen der bisherigen Experimente. Wie aus Tabelle 6.10 ersichtlich, lagen die Korrelationskoeffizienten nach Ablauf der ersten vier Stunden schon bei mindestens 0,97 und die normierten Standardabweichungen bei höchstens 0,9%.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	72 - 87	0,90	0,8
2	152 - 167	0,93	1,1
3	253 - 268	0,97	0,9
4	332 - 347	0,98	0,6
5	425 - 440	0,98	0,6
6	514 - 529	0,98	0,7

Tab. 6.10: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die sechs Messungen des achten Experiments.

In Abbildung 6.8 sind die maximalen Abweichungen zwischen den direkt bestimmten Temperaturen und den Temperaturen des Inversionsmodells nach Abzug der Fehlergrenzen von insgesamt 0,3 K für die sechs geoelektrischen Messungen des achten Versuches über die Thermoelemente aufgetragen. Daraus geht hervor, dass die Abweichungen nur an den beiden Thermoelementen 18 und 20 auftreten. Diese Temperaturfühler befinden sich in der Nähe des aufwärtsströmenden Plumes und weisen höhere Werte auf als die Temperaturen aus dem Inversionsmodell. Durch die explizite Auflistung der Temperaturabweichungen an den Thermoelementen 18 und 20 in Tabelle 6.11 ist erkennbar, dass sich zu Beginn des Experiments die Fehler zunächst erhöhen. Infolge der abnehmenden Rayleigh-Zahl während des Durchwärmens der Flüssigkeit verringern sich die Temperaturschwankungen sowie die Abweichungen ab der dritten Impedanztomographie. Zum Zeitpunkt der letzten geoelektrischen Messungen liegen alle Werte schon innerhalb der Fehlergrenzen. Auf diese Weise minimieren sich ebenfalls die normierten Standardabweichungen und die Korrelationskoeffizienten erhöhen sich mit der Zeit.

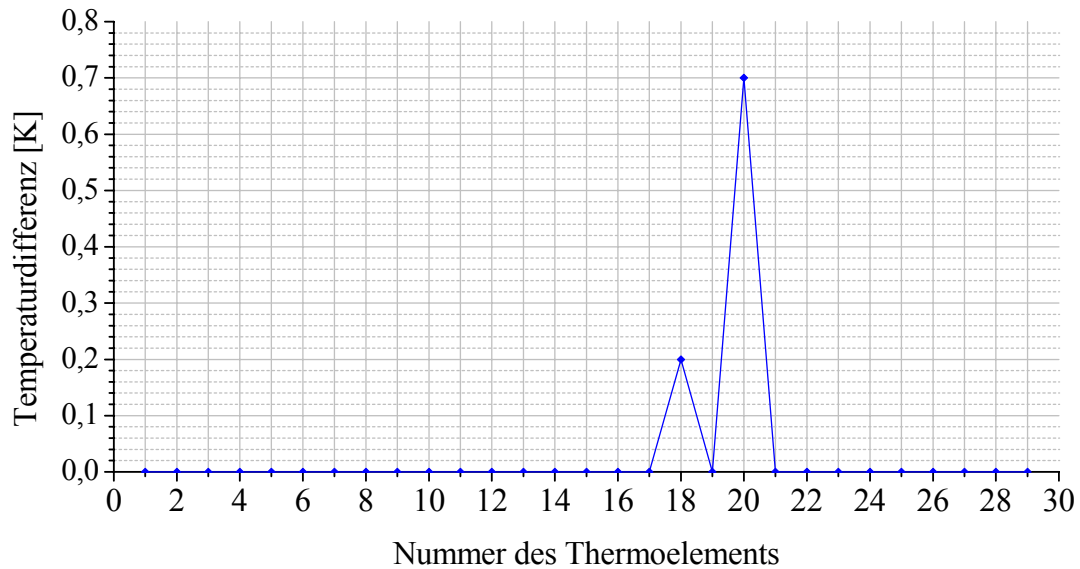


Abb. 6.8: Die Fehlergrenzen übersteigenden maximalen Abweichungen zwischen den direkt gemessenen Temperaturen und den mittels geoelektrischer Impedanztomographie bestimmten Temperaturen für die sechs Messungen des achten Experiments.

Nummer der geoelektrischen Messung	Abweichungen am Thermoelement 18	Abweichungen am Thermoelement 20
1	0,0	0,5
2	0,2	0,7
3	0,1	0,5
4	0,0	0,2
5	0,0	0,2
6	0,0	0,0

Tab. 6.11: Die Fehlergrenzen übersteigenden Abweichungen zwischen den direkt gemessenen Temperaturen und den mittels geoelektrischer Impedanztomographie bestimmten Temperaturen an den beiden Thermoelementen 18 und 20 in der Nähe des generierten Plumes für die sechs Messungen des achten Experiments.



Für das sich anschließende neunte Experiment wurde zwar der gleiche Infrarotstrahler wie bei dem achten Versuch verwendet, aber die Heizleistung auf 18 W erhöht. Die Ergebnisse in Tabelle 6.12 zeigen aufgrund der heftigeren Strömungsvorgänge etwas höhere Beträge für die normierten Standardabweichungen als bei dem achten Experiment. Außerdem verschlechtern sich die Werte ab der vierten Impedanztomographie. Eine Ursache dafür könnte die thermische Ausdehnung der Versuchsflüssigkeit sein. Die deutlich größere Wärmemenge bewirkte infolge der Durchwärmung eine stärkere Verringerung der Dichte und die sichtbare Zunahme des Volumens um etwa einen Millimeter. Da für die Quotienteninversion die Werte aller Datensätze durch die Werte der Referenzmessung dividiert werden, ergeben sich aufgrund der voneinander abweichenden Füllstände zunehmende systematische Fehler. Die Auswirkungen der Füllstandsänderungen auf die Inversionsergebnisse werden in Kapitel 7.1. analysiert.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	80 - 95	0,87	1,4
2	183 - 198	0,98	1,0
3	259 - 274	0,99	1,0
4	357 - 372	0,99	1,3
5	459 - 474	0,98	1,3
6	551 - 566	0,98	1,3

Tab. 6.12: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die sechs Messungen des neunten Experiments.

Die Abweichungen zwischen den direkt gemessenen und den mittels Impedanztomographie bestimmten Temperaturen treten bei dem neunten Experiment wiederum in den relativ gering überdeckten Bereichen an den Thermoelementen 7 und 10 auf. Außerdem weisen die Temperaturen des Inversionsmodells am Boden links und rechts neben dem aktiven Heizer an den Thermoelementen 22 und 23 zu hohe Werte und in der Umgebung der aufsteigenden Plumes an den Thermoelementen 18 und 20 erneut zu niedrige Werte auf.

Zu Beginn des zehnten Versuches erwärmten die beiden Infrarotstrahler vorn links und hinten rechts das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch mit einer Leistung von 13 W. Nach der zweiten Impedanztomographie wurde die Leistung auf 39,5 W erhöht und der Makrolondeckel entfernt. Auf diese Weise nahmen sowohl die Energiezufuhr als auch die Energieabgabe des Systems und damit ebenfalls die Rayleigh-Zahl zu. Die heftigen Strömungsvorgänge bewirkten infolge der zu geringen zeitlichen und räumlichen Auflösung der Impedanztomographie deutlich größere Abweichungen zwischen dem Inversionsmodell und den direkt bestimmten Randtemperaturen als bei den beiden ersten geoelektrischen Messungen. In Tabelle 6.13 sind die Korrelationskoeffizienten und die normierten Standardabweichungen für die sechs Messungen des zehnten Experiments aufgelistet.

Die Verschlechterung der Inversionsergebnisse nach dem Entfernen des Makrolondeckels wurde in geringem Maße auch durch die Verdunstung des Wassers in der oberflächennahen warmen Schicht verursacht. Mit der Verringerung des Massenanteils von Wasser in dem Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch erhöht sich der spezifische elektrische Widerstand der Flüssigkeit und die Parameter der VFT-Gleichung (2.5) verändern sich. Der Einfluss der Verdunstung auf die Inversionsergebnisse wird in Kapitel 7.2. mittels Modellrechnungen untersucht.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	55 - 70	0,92	0,8
2	167 - 182	0,94	1,0
3	255 - 270	0,80	2,8
4	320 - 335	0,78	2,9
5	400 - 415	0,77	2,8
6	502 - 517	0,75	2,9

Tab. 6.13: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die sechs Messungen des zehnten Experiments.

### 6.4.2. Experimente mit wärmeleitender Bodenplatte

Damit sich das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch nicht nur lokal über den aktiven Infrarotstrahlern erwärmt, befand sich während der Versuche 11 bis 15 eine Quarzalplatte mit einer Wärmeleitfähigkeit von etwa  $0,9 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  auf dem Ceranboden. Im Verlauf des elften Experiments erfolgte die Beheizung zunächst nur mit dem Strahler, der im vorderen Bereich des Beckens mittig installiert ist. Die Heizleistung betrug 13 W. Abbildung 6.9 zeigt die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt der dritten Impedanztomographie des elften Versuches. Die Flüssigkeit erwärmte sich wegen des aufliegenden Makrolondeckels und der damit verbundenen relativ geringen Abkühlung des aufgestiegenen heißen Plumematerials allmählich von oben her. Die Temperaturen mit Werten kleiner als  $22,9^\circ\text{C}$  sind durchscheinend dargestellt. Auf diese Weise ist erkennbar, dass sich die warme Zone über dem Infrarotstrahler immer noch auf eine relativ kleine Fläche beschränkte und die Wärmeleitfähigkeit des Quarzals nicht ausreichte.

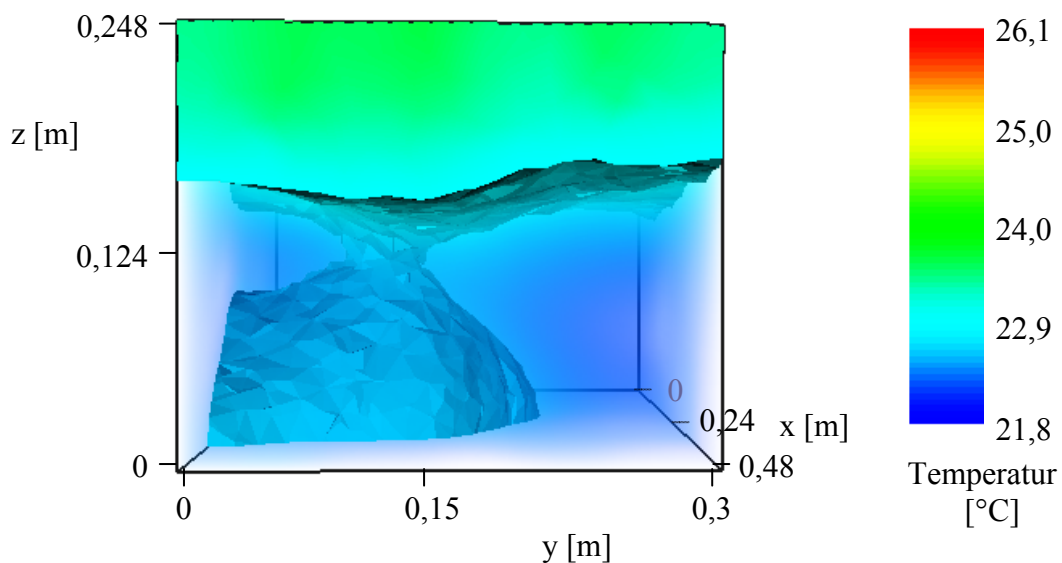


Abb. 6.9: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der dritten Impedanztomographie des elften Experiments aufgenommenen Daten. Die Temperaturen mit Werten kleiner als  $22,9^\circ\text{C}$  sind durchscheinend dargestellt.

Die Ergebnisse sowie die Messzeiten der fünf Impedanztomographien des elften Versuches sind in Tabelle 6.14 aufgelistet. Die normierten Standardabweichungen liefern ähnlich gute Werte wie beim neunten Experiment, allerdings sind die Korrelationen geringfügig schlechter. Größere Abweichungen treten wiederum in den weniger stark überdeckten Gebieten sowie in den Bereichen nahe dem Plume auf. Im Gegensatz zu den Ergebnissen des neunten Versuches weisen die Werte des Inversionsmodells beim elften Experiment an den Thermoelementen rechts und links vom aktiven Heizer zu geringe Temperaturen auf.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	64 - 79	0,90	0,7
2	145 - 160	0,93	1,1
3	238 - 253	0,93	1,2
4	330 - 345	0,93	1,2
5	422 - 437	0,91	1,4

Tab. 6.14: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die fünf Messungen des elften Experiments.

Der zwölfte Versuch wurde komplett ohne Deckel durchgeführt. Außerdem erfolgte die Beheizung mit allen sechs Infrarotstrahlern bei einer Leistung von jeweils 13 W. Aufgrund der Abkühlung der warmen Flüssigkeit an der Oberfläche und der größeren Energiezufuhr erhöhte sich die Rayleigh-Zahl des Systems und die Konvektionen intensivierten sich. Durch die zu geringe zeitliche und räumliche Auflösung der Impedanztomographie ergeben sich mit normierten Standardabweichungen von mindestens 3,4 % und mit Korrelationskoeffizienten von höchstens 0,69 vergleichsweise schlechte Werte für die vier geoelektrischen Messungen. In Tabelle 6.15 befinden sich die Ergebnisse des zwölften Experiments.

Nummer der geoelektrischen Messung	Messzeit, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [min]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	78 - 93	0,66	5,1
2	168 - 183	0,61	4,6
3	269 - 284	0,69	3,6
4	398 - 413	0,61	3,4

Tab. 6.15: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die vier Messungen des zwölften Experiments.

Um eine gleichmäßigere Beheizung der Flüssigkeit zu erzielen, wurde auf die Quarzalplatte zusätzlich noch eine Stahlplatte mit einer sehr hohen Wärmeleitfähigkeit von etwa  $50 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  gelegt. Zu Beginn des 15. Versuches erwärmte nur der Infrarotstrahler, der sich mittig im vorderen Bereich des Beckens befindet, das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch mit einer Leistung von 13 W. Der aufliegende Metalldeckel wurde durch das Klimagerät anfangs zwar noch nicht gekühlt, bewahrte aber die Flüssigkeit vor einer signifikanten Verdunstung sowie vor einer intensiven Abkühlung.

Abbildung 6.10 zeigt die Temperaturverteilung für die zweite geoelektrische Messung des 15. Experiments, wobei die Temperaturen mit Werten kleiner als  $25,3^\circ\text{C}$  durchscheinend dargestellt sind. Die sich im unteren Bereich des Beckens abzeichnende wärmere Zone ist deutlich breiter als das Gebiet in Abbildung 6.9. Das bedeutet, dass bei der Verwendung mehrerer Infrarotstrahler durch die Metallplatte eine einheitlichere Wärmezufuhr realisiert werden kann. Ausgehend von der heißen Oberfläche durchwärmte sich die Flüssigkeit zudem allmählich.

Etwa sechs Stunden nach dem Einschalten des Infrarotstrahlers wurde das Klimagerät aktiviert. Dadurch kühlte sich das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch von oben her über den Metalldeckel und die konvektierende Luftschicht zwischen dem Deckel und der Flüssigkeitsoberfläche wieder ab. In Abbildung 6.11 sind die Temperaturverläufe während des 15. Versuches am Beispiel von vier Thermoelementen dargestellt. Alle vier Temperaturfühler befinden sich auf der linken Beckenseite, wobei die Nummern 25 und 26 oberflächennah, die Nummer 27 mittig und die Nummer 28 bodennah installiert sind. Die neun geoelektrischen Impedanztomographien spiegeln sich dabei durch 15-minütige Störungen in den Temperaturzeitreihen wider.

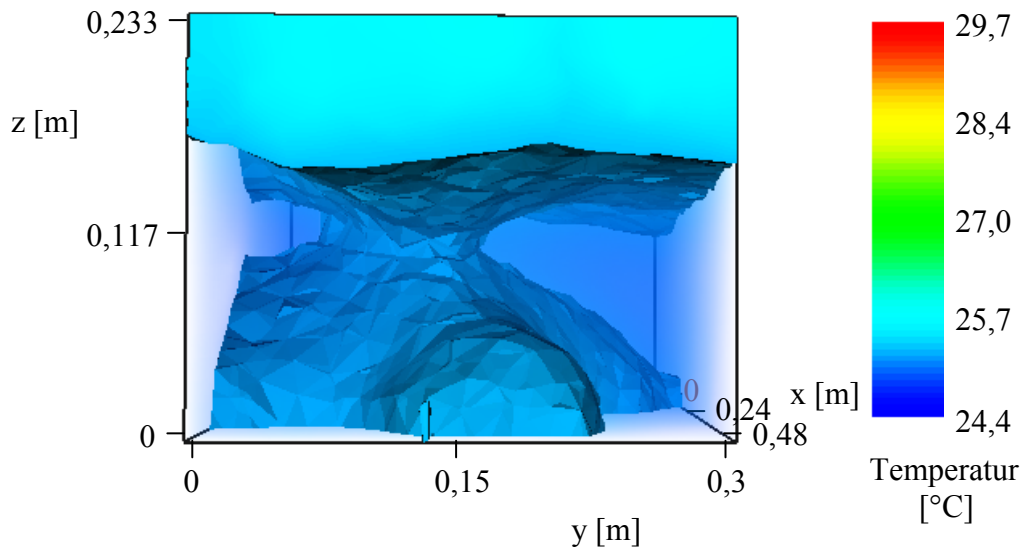


Abb. 6.10: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der zweiten Impedanztomographie des 15. Experiments aufgenommenen Daten. Die Temperaturen mit Werten kleiner als  $25,3^{\circ}\text{C}$  sind durchscheinend dargestellt.

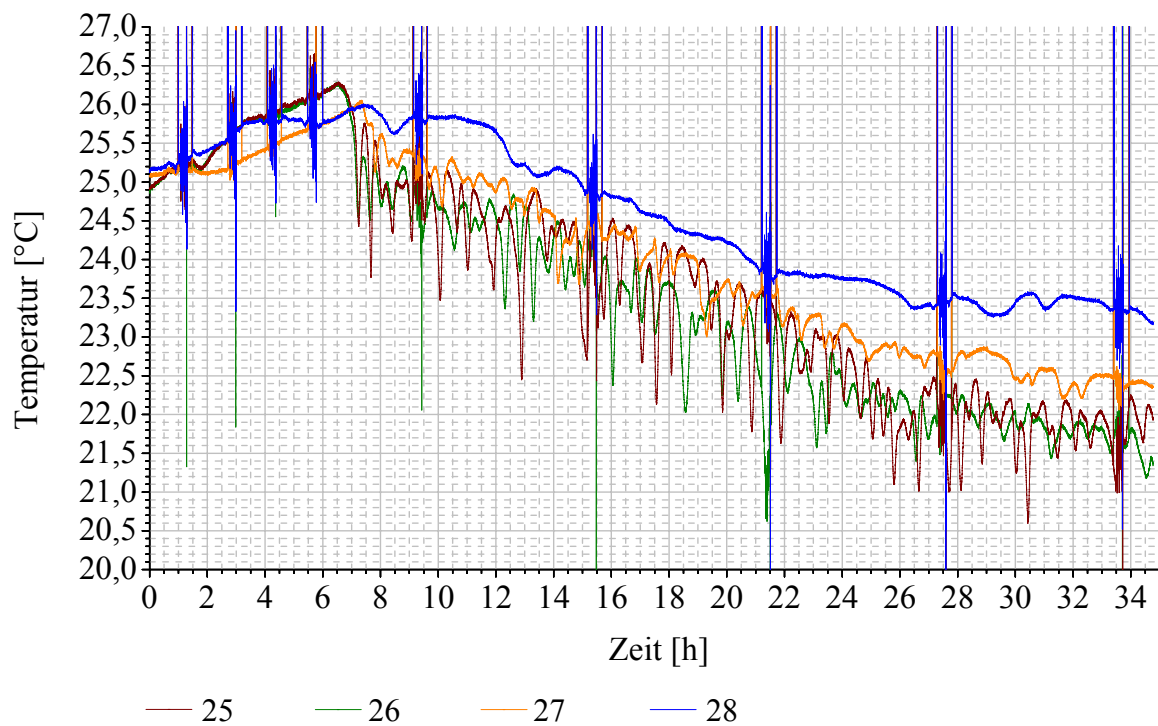


Abb. 6.11: Vier Temperaturzeitreihen während des 15. Experiments.

Aus Abbildung 6.11 geht weiterhin hervor, dass sich zu Beginn des 15. Experiments die Temperaturen langsam erhöhten und währenddessen kaum Schwankungen existierten. Erst ab dem Zeitpunkt, an dem das Klimagerät eingeschaltet wurde, verringerten sich die Temperaturen und es traten bis zum Ende des Versuches deutliche Temperaturfluktuationen auf. Die Ursache dafür liegt in der Erhöhung der Rayleigh-Zahl und der damit verbundenen Intensivierung der Konvektionen. Die stärksten Schwankungen wurden dabei an den oberflächennahen Thermoelementen und die schwächsten Fluktuationen im unteren Bereich des Beckens registriert.

Nummer der geoelektrischen Messung	Zeitpunkt der 3D-Tomographie, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [h]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	1	0,81	1,0
2	3	0,71	1,8
3	4	0,70	1,7
4	5,5	0,81	1,5
5	9,5	0,39	2,9
6	15,5	0,36	2,8
7	21,5	0,37	3,1
8	27,5	0,47	3,7
9	33,5	0,58	3,5

Tab. 6.16: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die neun Messungen des 15. Experiments.

Wie aus den Ergebnissen für die neun geoelektrischen Messungen des 15. Experiments in Tabelle 6.16 ersichtlich ist, erhöhten sich nach dem Einschalten der Kühlung die normierten Standardabweichungen auf mindestens 2,8 % und die Korrelationskoeffizienten verringerten sich entsprechend auf höchstens 0,58. Diese deutliche Verschlechterung der Werte wurde wiederum durch die zu geringe zeitliche und räumliche Auflösung der Impedanztomographie verursacht.

Wesentlich bessere Ergebnisse lieferten dagegen die ersten vier Messungen des 15. Versuches. Allerdings liegen die normierten Standardabweichungen mit Werten von bis zu 1,8 % noch etwas über denen des elften Experiments und die Korrelationen mit Beträgen von mindestens 0,7 signifikant unter denen des elften Experiments. Die Ursache dafür ist die Metallplatte, die aufgrund ihrer hohen elektrischen Leitfähigkeit die Potenzialverteilungen in der Flüssigkeit beeinflusste. Um die Platte elektrisch zu isolieren, wurde sie zwar mit einer Folie beschichtet, aber ein Teil der Versuchsflüssigkeit konnte während der Durchführung der Versuche 13 bis 15 dennoch bis zum Metall vordringen.

Durch die Inversion der Quotienten aus den Werten der einzelnen Datensätze und denen der Referenzmessung minimierten sich die Auswirkungen der infolge der defekten Beschichtung des Metalls aufgetretenen Fehler. Da die Potenzialverteilung jedoch von der jeweiligen Temperatur- bzw. Leitfähigkeitsverteilung abhängt, können aufgrund der Temperaturänderungen während eines Experiments die demzufolge ebenfalls variierenden Effekte der Metallplatte durch die Quotienteninversion nicht vollständig eliminiert werden. Deshalb existieren für die ersten vier Messungen des 15. Versuches etwas größere Abweichungen zwischen den direkt gemessenen und den mittels Impedanztomographie bestimmten Temperaturen als für die geoelektrischen Messungen des elften Versuches.

Bereits zu Beginn der Experimente 13 und 14 wurde das Klimagerät aktiviert. Während des 13. Versuches betrug die Leistung aller Heizer durchgehend 9,4 W. Da sich die Temperaturen im Verlauf dieses Experiments um etwa fünf Kelvin erhöhten, war die Wärmezufuhr offensichtlich zunächst größer als die Wärmeabgabe. Nach etwa 25 Stunden blieben die Temperaturen im Mittel zwar relativ konstant, aber die Schwankungen ließen aufgrund der heftigen Konvektionsvorgänge nicht nach.

Das Inversionsergebnis der elften Impedanztomographie des 13. Versuches ist in Abbildung 6.12 dargestellt. Da die Temperaturen mit Werten kleiner als 28,6°C durchscheinend sind, ist die wärmere Struktur im Zentrum sichtbar. Demnach steigt das erhitzte Material in einem breiten Strom in der Mitte des Versuchsbeckens zur Oberfläche auf und sinkt an den Rändern durch kleinere, räumlich und zeitlich nicht mehr aufzulösende Plumes und Schlieren wieder auf den Boden. Allerdings könnten auch kleinere aufsteigende Plumes existieren, die aufgrund der geringen Auflösung in den Inversionsergebnissen nicht mehr abgebildet werden können. Infolge der heftigen Strömungen treten wieder größere Abweichungen zwischen den Temperaturen aus den Inversionsmodellen und den direkt gemessenen Temperaturen auf. Dementsprechend ergeben sich laut Tabelle 6.17 für die elf Impedanztomographien des 13. Experiments nur relativ geringe Korrelationskoeffizienten von maximal 0,5 und vergleichsweise hohe normierte Standardabweichungen von mindestens 3,1 %.



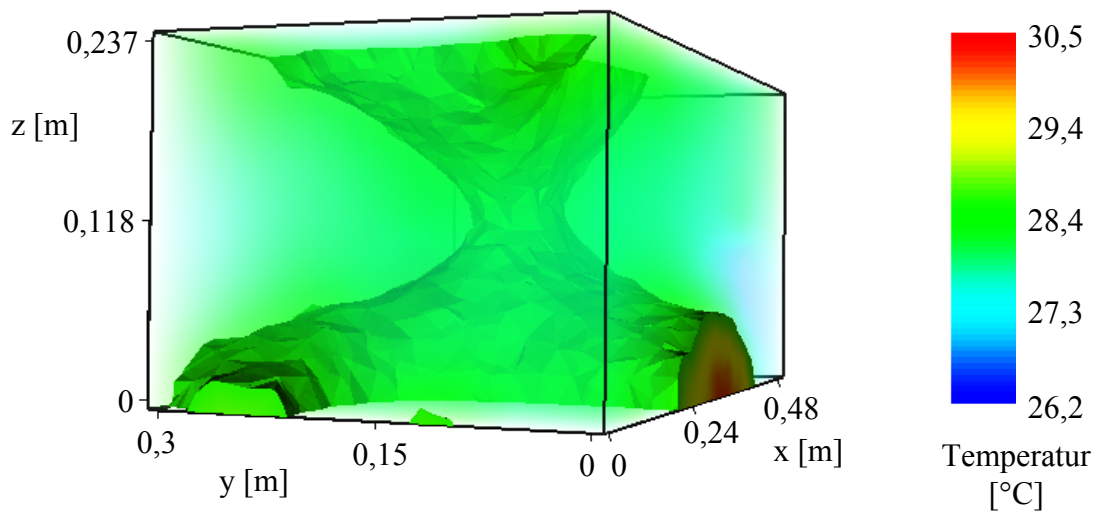


Abb. 6.12: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der elften Impedanztomographie des 13. Experiments aufgenommenen Daten. Die Temperaturen mit Werten kleiner als  $28,6^{\circ}\text{C}$  sind durchscheinend dargestellt.

Nummer der geoelektrischen Messung	Zeitpunkt der 3D-Tomographie, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [h]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	3,5	0,50	5,1
2	10	0,42	4,7
3	15,5	0,48	4,0
4	21,5	0,46	4,1
5	27,5	0,50	3,3
6	34	0,26	3,6
7	39,5	0,47	3,5
8	45	0,40	3,7
9	51,5	0,43	3,1
10	57,5	0,39	3,6
11	63,5	0,35	4,1

Tab. 6.17: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die elf Messungen des 13. Experiments.

Der 14. Versuch wurde zwar mit Kühlung von oben aber ohne Beheizung von unten begonnen. Deshalb nahm die Temperatur in der Flüssigkeit zunächst um etwa drei Kelvin ab. Obwohl die Wellpappe einen Großteil der kalten Luftströmungen von der Frontseite des Beckens abschirmen konnte, reichte der Schutz jedoch offensichtlich nicht aus. Wie aus der Abbildung 6.13 hervorgeht, ist der kühlere Bereich deshalb auf der vorderen Seite des Versuchsbeckens stärker ausgeprägt als auf der Rückseite.

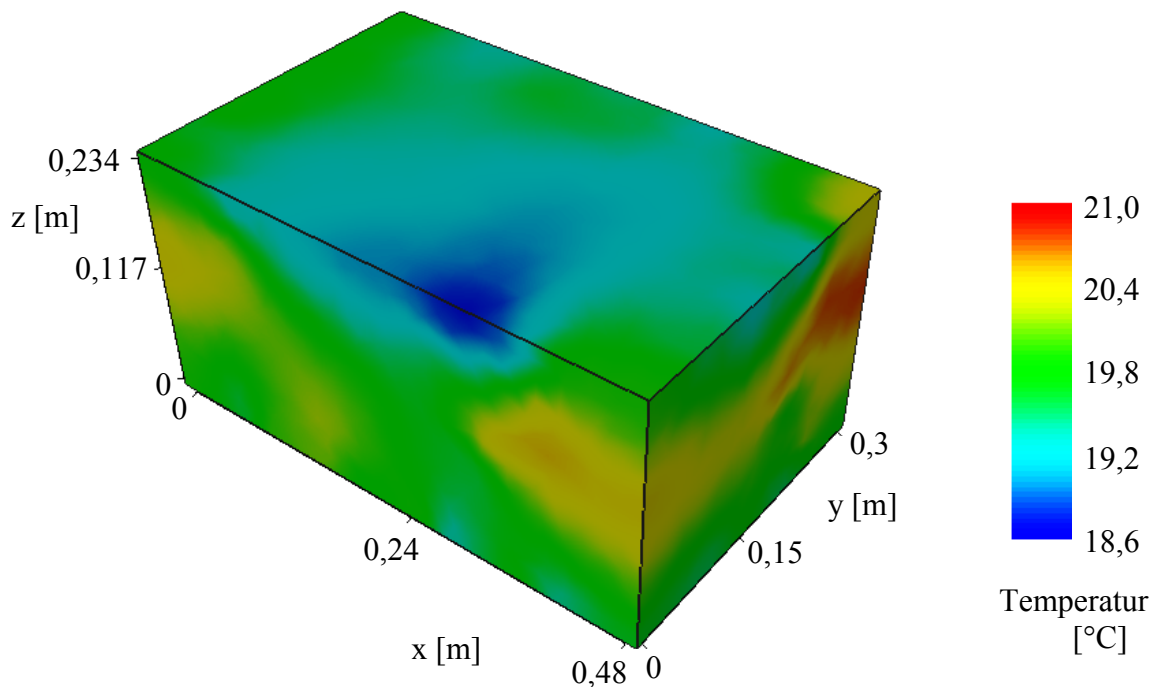


Abb. 6.13: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der siebenten Impedanztomographie des 14. Experiments aufgenommenen Daten.

Nach etwa 39,5 Stunden wurden alle Infrarotstrahler aktiviert. Die Heizleistung betrug bis zum Ende des 14. Versuchs 6 W. Aufgrund der permanenten Kühlung traten während des gesamten Experiments starke Temperaturschwankungen auf. Wie bei den zuvor beschriebenen Versuchen stimmten infolge der heftigen Konvektionen die mittels Impedanztomographie ermittelten Temperaturen relativ schlecht mit den direkt am Rand gemessenen Temperaturen überein. In Tabelle 6.18 sind die Ergebnisse für die 13 geoelektrischen Messungen des 14. Experiments aufgelistet. Für die Tomographien, die vor dem Einschalten der Infrarotstrahler durchgeführt wurden, betragen die normierten Standardabweichungen maximal 3,2 % und die Korrelationskoeffizienten mindestens 0,52. Die Ergebnisse verschlechterten sich jedoch mit dem Beginn des Heizens infolge der Erhöhung der Rayleigh-Zahl. Somit liegen die normierten Standardabweichungen bei bis zu 5,0 %. Die Werte für die Korrelationskoeffizienten bleiben allerdings in etwa gleich groß.

Nummer der geoelektrischen Messung	Zeitpunkt der 3D-Tomographie, gerechnet ab dem Einschalten des Heizers [h]	Korrelationskoeffizient (Gleichung (5.9))	Normierte Standardabweichung (Gleichung (5.10)) [%]
1	3	0,75	1,0
2	9	0,55	1,8
3	15	0,66	2,1
4	21	0,71	2,2
5	27	0,55	2,8
6	33	0,68	2,0
7	39	0,52	3,2
8	45	0,65	5,0
9	51	0,76	4,6
10	57	0,61	4,2
11	64	0,67	4,5
12	70	0,74	4,4
13	76	0,72	4,4

Tab. 6.18: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die 13 Messungen des 14. Experiments.

Die Ergebnisse der insgesamt 15 Experimente zeigen deutlich, dass die dreidimensionalen Temperaturverteilungen prinzipiell relativ gut über die geoelektrischen Impedanztomographien ermittelbar sind. Sobald allerdings heftige Strömungen in der Flüssigkeit stattfinden, reicht die zeitliche und räumliche Auflösung dieser Methode nicht aus. Die Untersuchungen zu dem räumlichen Auflösungsvermögen und zu den Einflüssen der temperaturabhängigen Volumenausdehnung sowie der Verdunstung von Wasser werden in Kapitel 7. näher betrachtet.

## 7. Modellierungen

### 7.1. *Veränderung der Füllstände*

Während der Experimente wurde das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch mithilfe der Infrarotstrahler erwärmt. Infolgedessen verringerte sich die Dichte der Flüssigkeit und das Volumen nahm zu. Um den Einfluss von systematischen Fehlern auf die Ergebnisse der geoelektrischen Messungen zu verringern, wurden die Quotienten aus den Impedanzen der Referenzmessung und den Werten der anschließend registrierten Datensätze invertiert. Variiert allerdings die Höhe der Flüssigkeit im Verlauf der Experimente, stimmen schon aufgrund der Geometrieänderungen die Potenzialverteilungen zwischen zwei Messungen nicht mehr überein. Folglich ergeben sich neue systematische Fehler, die sich wiederum negativ auf die Inversionsergebnisse auswirken. Anhand von Modellierungen kann das Ausmaß der daraus resultierenden Abweichungen ermittelt werden.

Die Zunahme der Füllstände beträgt für das folgende Beispiel einen Millimeter und entspricht damit einer homogenen Temperaturerhöhung von 8,4 K. Für die Berechnung dieser Temperaturänderung wurde Gleichung (3.3) verwendet und der thermische Volumenausdehnungskoeffizient  $\gamma$  sowie die Dichte  $\rho_0$  des Polyethylenglykol-Wasser-Gemisches bei 23°C laut Kapitel 5.1. angesetzt.

Um den Einfluss der Veränderung der Flüssigkeitshöhe auf die Ergebnisse bestimmen zu können, erfolgte mittels Vorwärtsrechnung für die zweite Elektrodenbelegung zunächst die Bereitstellung der beiden simulierten Datensätze für die zwei Füllstände von 0,252 m und 0,253 m. In der Versuchsflüssigkeit sollte dabei jeweils eine homogene Widerstandsverteilung von 180  $\Omega$ m vorliegen. Der Datensatz für die niedrigere Füllhöhe wurde als Referenzmessung festgelegt. Die Grundlage für die Umrechnung des Ergebnisses der Quotienteninversion in Temperaturen bildete die VFT-Kurve des achten Experiments.

Theoretisch sollte das Inversionsmodell einen einheitlichen spezifischen elektrischen Widerstand von 180  $\Omega$ m bzw. eine homogene Temperaturverteilung von 23,2°C besitzen. Wie jedoch aus Abbildung 7.1. ersichtlich, treten nahe der Oberfläche bis zu 0,6 K zu hohe Temperaturen und in mittlerer Höhe der Flüssigkeit bis zu 0,5 K zu geringe Werte auf. Während der Experimente erwärmte sich das Polyethylenglykol-Wasser-Gemisch jedoch nicht gleichmäßig um 8,4 K sondern laut der Berechnung der Mittelwerte aus den Temperaturen des gesamten Flüssigkeitsvolumens höchstens um etwa die Hälfte dieses Betrages. Damit halbieren sich die Einflüsse aufgrund der Veränderung der Füllstände ebenfalls.

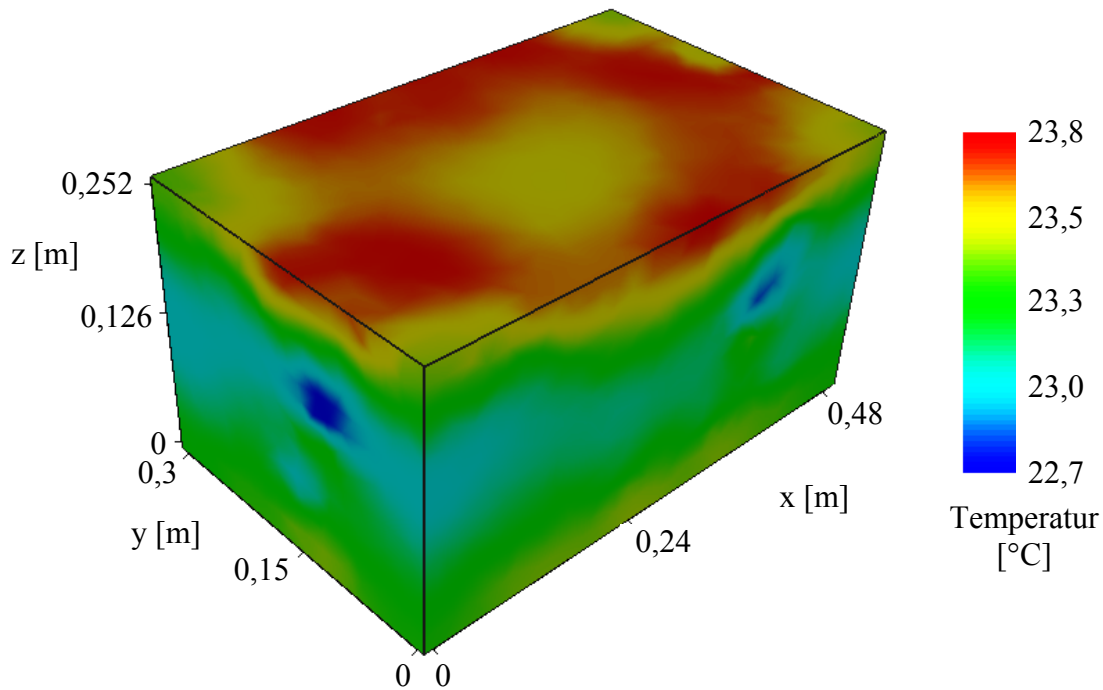


Abb. 7.1: Dreidimensionales Temperaturmodell, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit den um einen Millimeter abweichenden Füllständen berechnet wurde.

In Abbildung 7.2 sind die Differenzen zwischen der theoretischen Temperatur von  $23,2^{\circ}\text{C}$  und der Temperatur aus dem Inversionsmodell über die Nummer des jeweiligen Thermoelements aufgetragen. Daraus geht wiederum hervor, dass in dem mittleren Bereich der Flüssigkeit an den Thermoelementen 6, 13, 20 und 27 zu geringe Temperaturen und sonst zu hohe Temperaturen ermittelt werden würden. Die größten Abweichungen treten dabei an den Thermoelementen nahe der Oberfläche auf.

Die Analyse des Einflusses der Veränderung der Füllstände während eines Experiments hat somit ergeben, dass besonders in den oberen Bereichen der Flüssigkeit relativ starke Abweichungen verursacht werden können. Dabei gilt: Je größer durch Wärmezufuhr und Wärmeabgabe die Energieänderung des Systems ist, desto stärker ändert sich das Volumen und desto deutlicher sind die negativen Effekte auf die Inversionsergebnisse der geoelektrischen Messungen. Dies könnte ein weiterer Grund für die Zunahme der Abweichungen zwischen den direkt bestimmten und den mittels Impedanztomographie bestimmten Temperaturen bei der Erhöhung der Heizleistung bzw. der Erhöhung der Anzahl der aktiven Infrarotstrahler oder bei der Verwendung des stark gekühlten Metalldeckels sein.

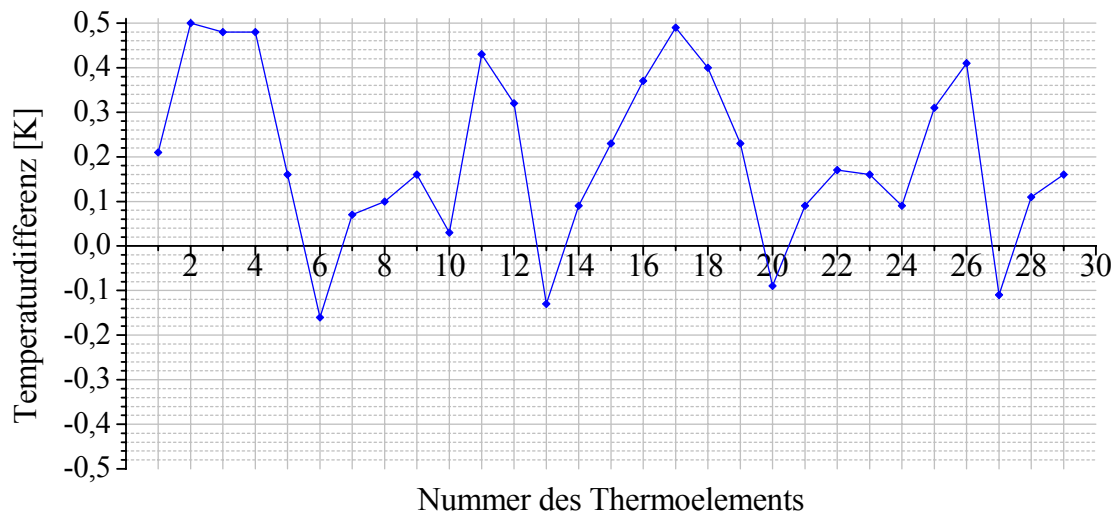


Abb. 7.2: Temperaturdifferenzen zwischen dem theoretischen Wert von  $23,2^{\circ}\text{C}$  und dem Ergebnis, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit den um einen Millimeter abweichenden Füllständen berechnet wurde.

## 7.2. Einfluss der Verdunstung

Die Verdunstung wurde während der Experimente durch einen aufliegenden Deckel weitestgehend verhindert und spielte deshalb lediglich im Verlauf des zehnten und des zwölften Versuchs, die beide ohne einen Deckel auf dem Becken stattfanden, eine Rolle. Je höher die Temperatur der Flüssigkeit ist, desto größer ist auch die Verdunstungsrate des Wassers. Durch den Prozess der Verdunstung verringert sich aufgrund des Entzugs der Verdunstungswärme die thermische Energie des Systems. Außerdem verursacht die Abnahme des Wasseranteils in der oberen Schicht des Polyethylenglykol-Wasser-Gemisches einen Anstieg des spezifischen elektrischen Widerstandes.

Um die Stärke der Verdunstung und der Veränderung der Leitfähigkeit abschätzen zu können, wurden 44,1 g von dem Gemisch aus Polyethylenglykol, VE-Wasser und Leitungswasser entnommen und mit dem in Abbildung 5.6 dargestellten Versuchsaufbau kontrolliert erwärmt. Damit das Wasser dabei verdunsten konnte, befand sich allerdings keine Abdeckung auf dem Kunststoffbecher. Die Temperatur der Probe lag für einen Zeitraum von 9,5 Stunden zwischen 30°C und 35°C. Über die Flüssigkeitsoberfläche von etwa 15 cm<sup>2</sup> verdunsteten währenddessen 2,0 g Wasser. Demzufolge erhöhte sich der Massenanteil des Polyethylenglykols in der Probe von 45 % auf 47,1 %.

Anschließend wurde für die Flüssigkeit, die der Verdunstung unterlag, und für die Flüssigkeit ohne den Einfluss der Verdunstung jeweils der spezifische elektrische Widerstand bei verschiedenen Temperaturen bestimmt. Die beiden Kurven sind in Abbildung 7.3. dargestellt und zeigen infolge des relativ starken Wasserverlustes einen signifikanten Unterschied zwischen den Widerständen der beiden Proben. Demnach würde die Umrechnung des spezifischen elektrischen Widerstandes von beispielsweise 160  $\Omega$  m in eine Temperatur für die Verdunstungsschicht nur einen Wert von 23,0°C anstelle von 26,2°C ergeben. Dadurch wären die mittels Impedanztomographie rekonstruierten Temperaturen innerhalb dieser Schicht deutlich zu niedrig.

Um die Auswirkungen zu analysieren, die die Ausbildung einer einen Zentimeter dicken höherohmigen Schicht auf die Inversionsergebnisse hat, wurden geoelektrische Modellierungen durchgeführt. In dem folgenden Beispiel betragen die spezifischen elektrischen Widerstände für die homogene Flüssigkeit 180  $\Omega$  m und für die Verdunstungsschicht 195  $\Omega$  m. Laut Abbildung 7.3 würde der Wert für die Probe, die der Verdunstung ausgesetzt war, bei noch deutlich höheren 204  $\Omega$  m liegen. Zunächst erfolgte mittels Vorwärtsrechnung für die zweite Elektrodenanordnung die Bereitstellung zweier Datensätze. Der Datensatz mit der komplett homogenen Leitfähigkeitsverteilung wurde als Referenzmessung definiert. Der zweite Datensatz enthält dagegen die zuvor beschriebene Verdunstungsschicht.

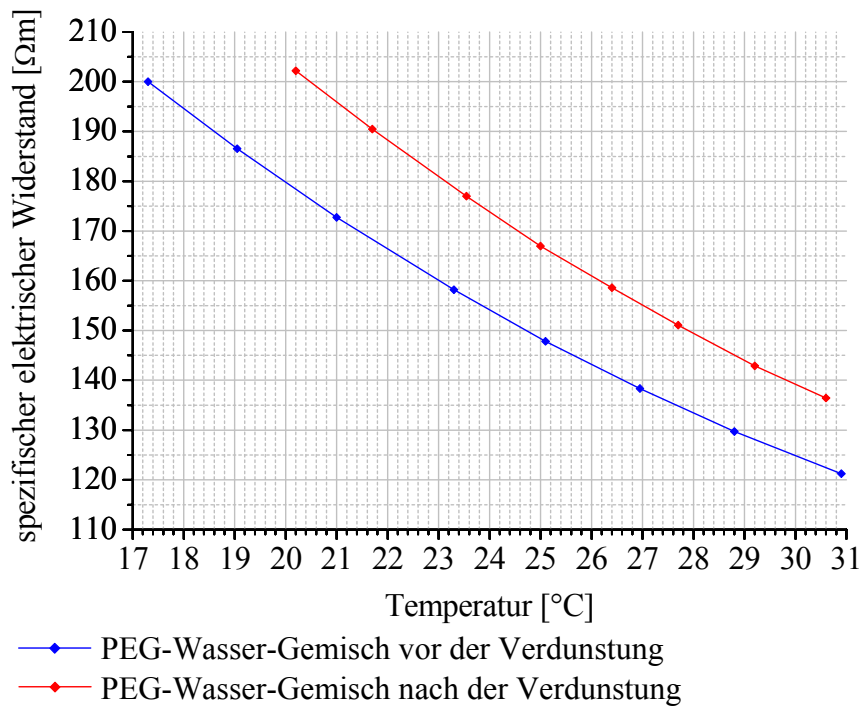


Abb. 7.3: Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischem elektrischem Widerstand für die beiden PEG-Wasser-Gemische vor und nach der Verdunstung.

Nach der Inversion der Impedanzquotienten aus den beiden simulierten Datensätzen wurde das dreidimensionale Leitfähigkeitsmodell mit der VFT-Kurve für den achten Versuch in Temperaturen umgerechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 7.4 dargestellt und enthält die für die Vorwärtsrechnung verwendete Modellgeometrie, die anhand der einen Zentimeter hohen schwarzen Umrandung an der Oberfläche der Flüssigkeit gekennzeichnet ist. Theoretisch sollte die Temperatur in der Flüssigkeit bei  $23,2^{\circ}\text{C}$  und in der oberflächennahen Schicht mit einem spezifischen elektrischen Widerstand von  $195 \Omega\text{m}$  bei  $21,1^{\circ}\text{C}$  liegen. Infolgedessen würden Temperaturabweichungen von bis zu  $2,1 \text{ K}$  auftreten. Offensichtlich reicht das räumliche Auflösungsvermögen der Methode jedoch nicht aus, um die Leitfähigkeit in der einen Zentimeter dicken Schicht in ihrer vollen Amplitude zu rekonstruieren. Trotzdem ergeben sich aufgrund der Veränderung der Materialzusammensetzung für diesen Fall noch um bis zu  $0,5 \text{ K}$  zu geringe Temperaturen.



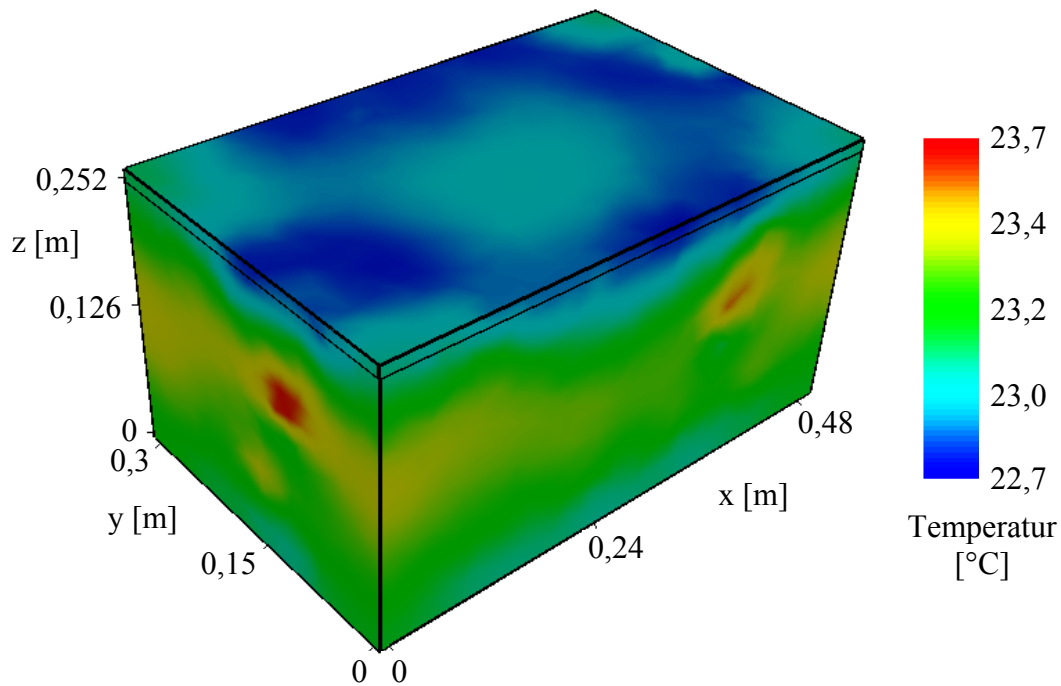


Abb. 7.4: Dreidimensionales Temperaturmodell, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit und ohne die einen Zentimeter dicke Verdunstungsschicht berechnet wurde.

Das simulierte Inversionsergebnis zur Variation der Füllhöhe in Abbildung 7.1 zeigt eine ähnliche Temperaturverteilung wie in Abbildung 7.4. Die Abweichungen gegenüber der zu erwartenden Temperatur von  $23,2^{\circ}\text{C}$  weisen zwar einen annähernd gleichen Betrag aber konträre Vorzeichen auf. Besonders deutlich treten die beiden Flächen hervor, die sich jeweils in der Mitte der linken Beckenwand sowie auf der rechten Seite der vorderen Beckenwand befinden. Wie in Abbildung 5.20 ersichtlich, zeichnen sich dort die gleichen Flächen durch eine etwas größere Überdeckung ab. Diese Bereiche reagieren demnach sensibler auf Veränderungen als ihre Umgebung. Allerdings befinden sich die Zentren dieser beiden stärker überdeckten Gebiete in jeweils etwa zwei Zentimeter geringerer Tiefe als die zuvor beschriebenen Flächen in den Abbildungen 7.1 und 7.4.

Um die Auswirkungen der Verdunstung an den Positionen der Thermoelemente zu verdeutlichen, sind die Abweichungen der Temperaturen des Inversionsergebnisses gegenüber der homogenen Temperatur von  $23,2^{\circ}\text{C}$  in Abbildung 7.5 über die Nummern der Thermoelemente aufgetragen. Diese Differenzen unterscheiden sich von denen in Abbildung 7.2 im Wesentlichen nur durch das Vorzeichen. Infolge der Verdunstung besitzt das Inversionsmodell an den mittleren Thermoelementen mit den Nummern 6, 13, 20 und 27 demnach etwas zu hohe Temperaturen, während für alle anderen Thermoelemente zu geringe Werte rekonstruiert wurden. Dabei treten die größten Abweichungen wiederum an der Oberfläche auf.

Die in diesem Kapitel beschriebenen Modellierungen haben gezeigt, dass die Versuchsfüssigkeit durch die Verwendung eines Deckels unbedingt vor der Verdunstung geschützt werden sollte und dass sich die Abweichungen während des zehnten und des zwölften Experiments aufgrund der zuvor erläuterten Effekte noch zusätzlich vergrößerten. Am Beispiel der sechsten Impedanztomographie des zehnten Versuches erfolgte deshalb eine Korrektur der Inversionsergebnisse mit den in Abbildung 7.5 dargestellten Temperaturdifferenzen. Auf diese Weise verringerte sich die normierte Standardabweichung von 2,9 % auf 2,8 % und der Korrelationskoeffizient erhöhte sich von 0,75 auf 0,79. Die verbleibenden Abweichungen sind letztlich auf die heftigen, nicht mehr auflösbaren Konvektionen zurückzuführen.

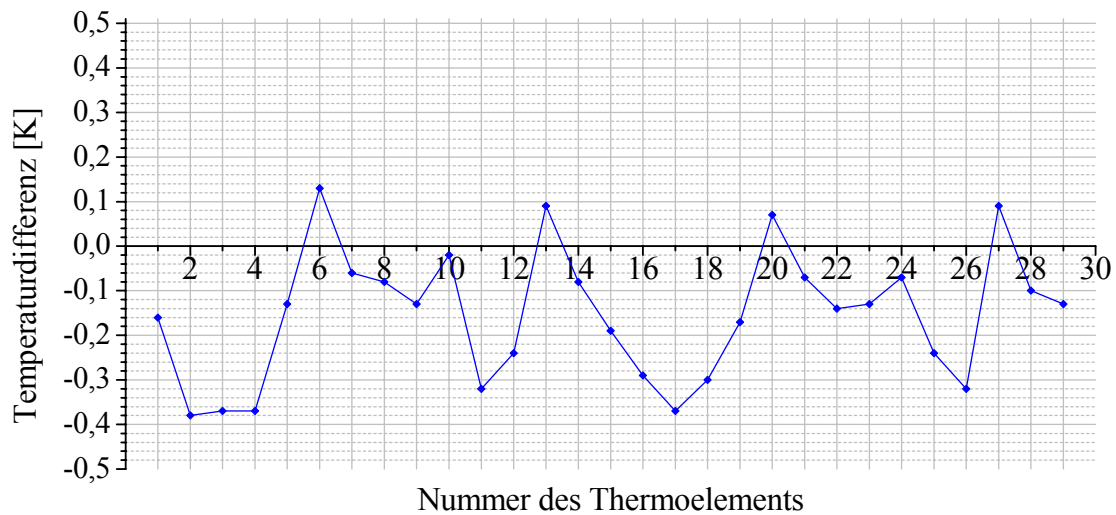


Abb. 7.5: Temperaturdifferenzen zwischen dem theoretischen Wert von  $23,2^{\circ}\text{C}$  und dem Ergebnis, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit und ohne die einen Zentimeter dicke Verdunstungsschicht berechnet wurde.

### 7.3. Räumliches Auflösungsvermögen

In Kapitel 6.1. wurde dargelegt, dass mit den verwendeten geodynamischen Parametern aufsteigende Plumes mit einem Durchmesser von etwa drei Zentimetern während der Versuche entstehen. Aufgrund ihrer Aufstiegszeiten von etwa sechs Minuten und der deutlich größeren Messdauer für die geoelektrische Impedanztomographie von 15 Minuten sind einzelne Plumes zeitlich nicht auflösbar. Da gerade oberhalb der aktiven Infrarotstrahler größere Abweichungen zwischen den direkt gemessenen und den durch die Geoelektrik bestimmten Temperaturen auftraten, erfolgte durch Modellierungen die Untersuchung des räumlichen Auflösungsvermögens von Plumes.

Um realistische Datensätze zu simulieren, wurden die ohmschen Impedanzen nach der Vorwärtsrechnung noch zufällig verrauscht. Der dafür benötigte Größtfehler  $e_G$  ergibt sich aus nachstehender Formel:

$$e_G = \left| \frac{dU}{U_0} \right| + \frac{e_p}{100} \quad , \quad (7.1)$$

wobei  $U_0$  die simulierte Messspannung,  $dU$  den absoluten Spannungsfehler von maximal acht Millivolt und  $e_p$  den relativen Spannungsfehler von bis zu einem Prozent definiert. Die verrauschten Impedanzen  $R_e$  berechnen sich aus den unverrauschten Widerständen  $R_0$  und dem mit je einer Zufallszahl  $Z$  gewichteten Größtfehler  $e_G$  wie folgt:

$$R_e = R_0 [(Z \cdot e_G) + 1] \quad . \quad (7.2)$$

Dabei liegt für die Zufallszahlen  $Z$  eines Datensatzes eine Gaußverteilung vor.

In den in diesem Kapitel vorgestellten Modellen befindet sich jeweils ein Plume in Form von einem Zylinder mit einem Durchmesser von drei Zentimetern und einer Höhe von 0,252 m an verschiedenen Positionen im Versuchsbecken. Er weist einen spezifischen elektrischen Widerstand von 170  $\Omega$  m auf, was laut der VFT-Kurve für das achte Experiment einer Temperatur von 24,76°C entspricht. Das umgebende Material sowie die homogene Flüssigkeit für die zu simulierende Referenzmessung besitzen einen spezifischen elektrischen Widerstand von 180  $\Omega$  m und damit eine Temperatur von 23,22°C. Der Füllstand beträgt für alle Modelle 0,252 m. In Abbildung 7.6 ist ein derartiges Modell für die Vorwärtsrechnung mit einem Plume im Zentrum des Beckens dargestellt.

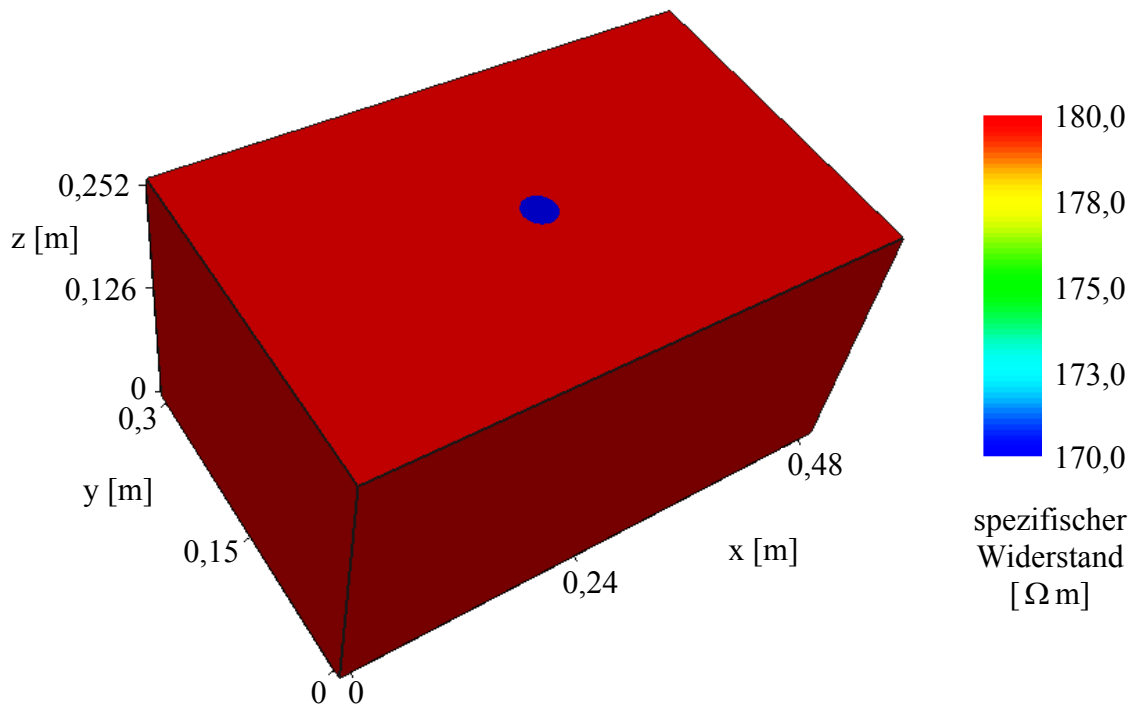


Abb. 7.6: Modell für die Vorwärtsrechnung mit einem Zylinder im Zentrum des Beckens für die Simulation eines  $0,252\text{ m}$  hohen Plumes mit einem Durchmesser von drei Zentimetern und einem um  $10\ \Omega\text{ m}$  geringeren spezifischen elektrischen Widerstand als die Umgebung.

Die Inversion der Quotienten aus den nach Gleichung (7.2) verausachteten Impedanzen für das in Abbildung 7.6 gezeigte Modell und den verausachteten Widerständen für das entsprechende Referenzmodell liefert die in Abbildung 7.7 dargestellte Widerstandsverteilung. Die Vorwärtsrechnungen erfolgten dabei für die zweite Elektrodenbelegung laut Tabelle A.3.4 B) im Anhang A.3.2.. Obwohl sich im Zentrum der Flüssigkeit der niederohmige Bereich deutlich abzeichnet, sind die spezifischen elektrischen Widerstände für den Plume mit  $179,6\ \Omega\text{ m}$  viel zu groß. Statt der  $24,76^\circ\text{C}$ , die für den Zylinder im Modell für die Vorwärtsrechnung festgelegt wurden, können demnach nur Temperaturen in Höhe von bis zu  $23,27^\circ\text{C}$  rekonstruiert werden. Das niederohmige Gebiet weist außerdem einen signifikant zu großen Durchmesser von etwa  $15\text{ cm}$  auf. Das bedeutet, dass die räumliche Auflösung für die Registrierung eines Plumes mit einem Durchmesser von drei Zentimetern nicht ausreicht. Der Wert von  $179,6\ \Omega\text{ m}$  entspricht folglich dem Maximum des über das 25-fache des ursprünglich vorgegebenen Volumens gewichteten Mittelwerts. Die Durchführung verschiedener Modellierungen hat ergeben, dass Plumes erst ab einem Durchmesser von  $15\text{ cm}$  korrekt rekonstruiert werden können.

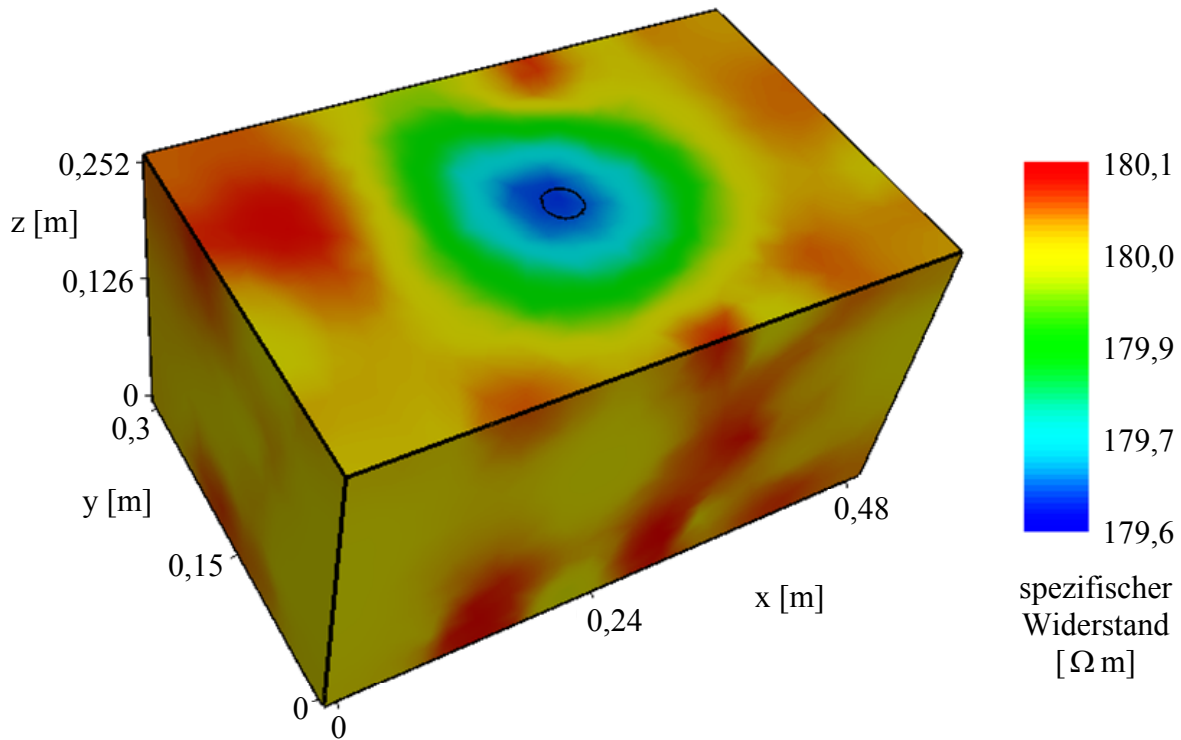


Abb. 7.7: Die aus der Quotienteninversion der simulierten verrauschten Datensätze für das in Abbildung 7.6 dargestellte Beispiel resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes im Zentrum des Beckens ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.

Der aufsteigende Plume befand sich während der meisten Versuche oberhalb des mittleren Infrarotstrahlers nahe der vorderen Beckenwand. Deshalb wurden für diesen Fall ebenfalls Modellierungen durchgeführt. Das Ergebnis der Quotienteninversion der für die zweite Elektrodenbelegung simulierten und nach Gleichung (7.2) verrauschten Datensätze ist in den Abbildungen 7.8 und 7.9 dargestellt. Die maximal rekonstruierte Temperatur für den Plume beträgt laut dem spezifischen elektrischen Widerstand von  $179,3 \Omega m$  gerade  $23,32^\circ C$  und verbessert sich damit geringfügig gegenüber dem Wert, der für den Plume im Zentrum der Flüssigkeit berechnet wurde. Allerdings verschiebt sich die Position des Zylinders in Richtung der Beckenwand. Besonders deutlich ist dies in der Abbildung 7.9 anhand der Isoohme von  $179,5 \Omega m$  ersichtlich, denn im oberen Bereich der Flüssigkeit befindet sich das niederohmige Gebiet nicht mehr innerhalb des Zylinders sondern nur noch an der Beckenwand. Demzufolge liegen die für die Experimente mittels geoelektrischer Impedanztomographie bestimmten Temperaturen geringfügig über den tatsächlich am Rand existierenden Temperaturen. Reichen die Typ K - Thermoelemente allerdings bis in den aufsteigenden Plume hinein, so weisen die indirekt ermittelten Temperaturen aufgrund der zu schwach rekonstruierten Amplituden deutlich geringere Werte auf als die direkt gemessenen Temperaturen.

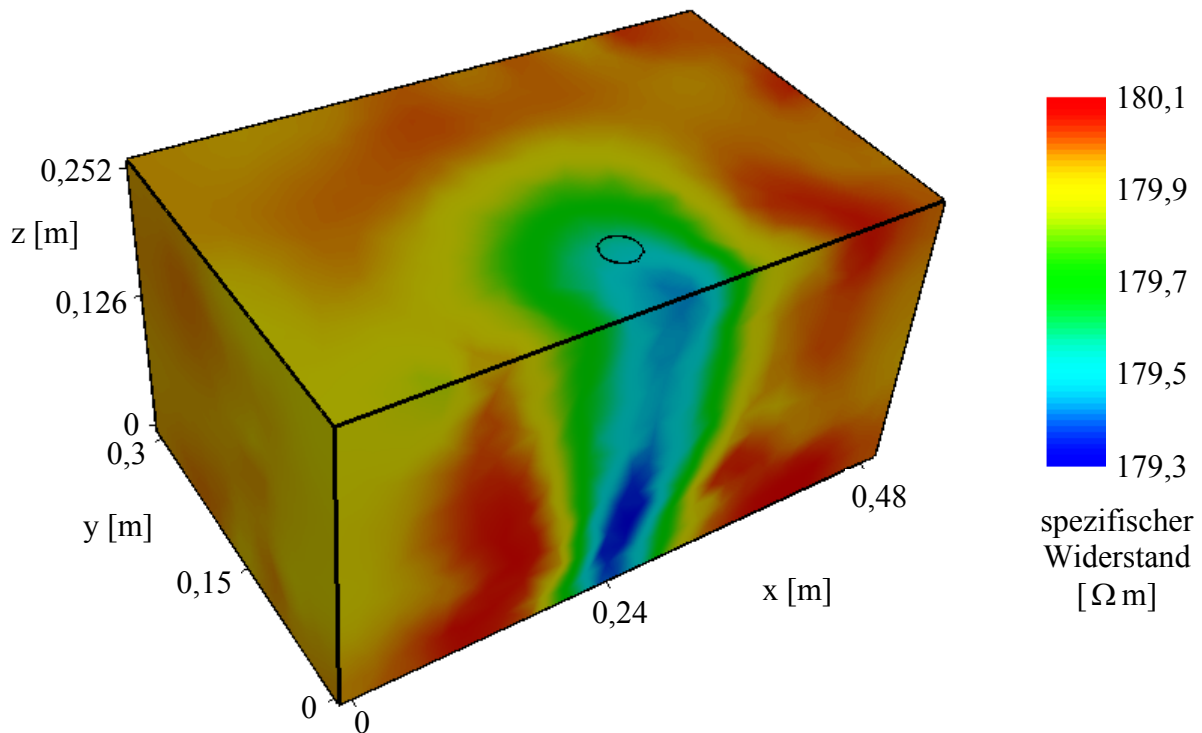


Abb. 7.8: Die aus der Quotienteninversion der simulierten verrauschten Datensätze resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.

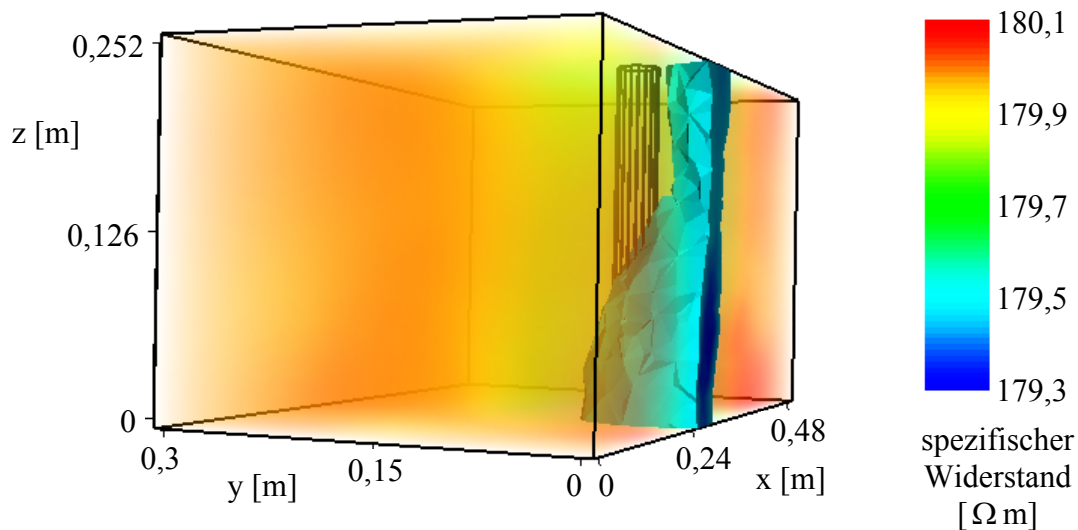


Abb. 7.9: Die aus der Quotienteninversion der simulierten verrauschten Datensätze resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch den schwarzen Zylinder gekennzeichnet. Die spezifischen elektrischen Widerstände mit Werten größer als  $179,5 \Omega \text{ m}$  sind durchscheinend dargestellt.

Die weiteren Modellierungen wurden für beide Elektrodenbelegungen und mit einem Plume entweder über dem Infrarotstrahler vorn rechts oder über dem Heizer vorn links durchgeführt. Sowohl für unverrauschte als auch für verrauschte simulierte Datensätze ergaben sich ähnliche Effekte wie bereits zuvor beschrieben. Das heißt, der spezifische elektrische Widerstand für den Zylinder wird mit einem deutlich zu großen Wert im Inversionsergebnis wiedergegeben und dadurch die Höhe der tatsächlichen Temperatur des aufsteigenden Plumes nicht erreicht. Außerdem verbreitert sich der niederohmige Bereich und dessen Mittelpunkt verschiebt sich in Richtung der Beckenwände.

Aus den Modellierungen geht demnach hervor, dass die Impedanztomographie an den Thermoelementen oberhalb der aktiven Infrarotstrahler signifikant geringere Werte liefert als die direkt gemessenen Temperaturen. Wie aus den in Kapitel 6.3. und 6.4. erläuterten Ergebnissen der Experimente ersichtlich, trat dieser Effekt im Bereich der aufsteigenden Plumes auf und verursachte gewöhnlich die größten Abweichungen, die zwischen den direkt und den indirekt bestimmten Randtemperaturen existierten. Dagegen wurden in der Umgebung der Plumes durch das Verschmieren der niederohmigen Strukturen etwas zu hohe Temperaturen rekonstruiert. Ein Beispiel dafür ist durch das in Kapitel 6.4.1. beschriebene neunte Experiment gegeben. Die bodennahen Thermoelemente 22 und 23 befinden sich jeweils neben dem aktiven Heizer und weisen zu hohe Werte auf, weil das warme Gebiet über dem Infrarotstrahler auf ein offensichtlich zu großes Volumen abgebildet wird.

Die wesentliche Ursache für die Fehler im Bereich der aufsteigenden Plumes ist demnach die zu geringe räumliche Auflösung. Die generelle, dreidimensionale Temperaturverteilung sowie größere Strukturen können mit der geoelektrischen Impedanztomographie dagegen relativ gut rekonstruiert werden. Durch die Erhöhung der Datenanzahl sollte sich die Auflösbarkeit der Plumes verbessern. Die Ergebnisse der dazu durchgeführten Modellierungen werden im folgenden Kapitel erläutert.

#### ***7.4. Räumliches Auflösungsvermögen bei erhöhter Datenanzahl***

Das räumliche Auflösungsvermögen, das aus dem verwendeten Versuchsaufbau und den für die Inversion zur Verfügung stehenden Messwerten resultiert, reicht für die Analyse von Plumes mit einem Durchmesser von drei Zentimetern nicht aus. Um das Auflösungsvermögen zu verbessern, ist eine Erhöhung der Elektrodendichte und der Datenanzahl notwendig. Wie bereits in Kapitel 4.1. beschrieben, bestehen die Wände des Versuchsbeckens aus dem durchsichtigen Polycarbonat Makrolon®. Damit sich aufgrund von mechanischen Spannungen keine Risse in den Beckenwänden bilden, muss der Mindestabstand zwischen den Bohrungen eingehalten werden. Deshalb ist das Installieren weiterer Platinelektroden in diesem Versuchsbecken nicht mehr möglich.

Erfolgen die geoelektrischen Messungen jedoch mit einem handelsüblichen Gerät für die Impedanztomographie, kann die Anzahl der registrierten Daten bei einer gleichbleibenden Messdauer von 15 Minuten deutlich erhöht werden. Ein derartiges Gerät arbeitet mit einem Lock-In-Verstärker, welcher unter störungsarmen Bedingungen für die Aufnahme eines Werts weniger als eine Sekunde benötigt. Außerdem können während einer Einspeisung bis zu acht Kanäle gleichzeitig verwendet werden. Weiterhin ist über die Erstellung eines Ablaufplans eine gezielte Erfassung von verschiedenen, für die Impedanztomographie günstigen Konfigurationen möglich. Demnach bräuchten nur noch die Messwerte mit einem relativ kleinen Konfigurationsfaktor registriert zu werden (siehe Kapitel 5.5.). Auf diese Weise könnte sich die Anzahl der für die Inversion genutzten Messwerte mindestens um den Faktor 5 erhöhen.

Dementsprechend wurden zu den 824 bisher verwendeten Elektrodenanordnungen noch 3444 weitere Konfigurationen für die im Folgenden erläuterten Modellierungen hinzugefügt. Die zusätzlichen Anordnungen weisen nur Konfigurationsfaktoren mit Werten kleiner als 0,167 m auf, beinhalten dabei aber alle 36 vorhandenen Elektrodenpositionen und gelten für eine beliebige Auswahl von Speise- und Potenzialelektroden. Die Modellierungen erfolgten analog der in Kapitel 7.3. beschriebenen Vorgehensweise. Allerdings wurden die simulierten Datensätze während der Vorwärtsrechnung nicht verrauscht.



Befindet sich der Plume wie in Abbildung 7.6 im Zentrum des Beckens, so ergibt sich nach der Quotienteninversion die in Abbildung 7.10 dargestellte Widerstandsverteilung. Der niederohmige Bereich ist aufgrund des nicht durchgeführten Verrauschens der berechneten Impedanzen etwas konzentrischer um den festgelegten Plume angeordnet als in Abbildung 7.7. Dementsprechend liefert die Inversion der Quotienten aus den jeweils nur 824 unverrauschten Werten auch eine annähernd gleiche Widerstandsverteilung wie in Abbildung 7.10. Die Unterschiede sind sogar derart gering, dass sich die spezifischen elektrischen Widerstände des Plumes durch die Erhöhung der Datenmenge um nicht mehr als  $0,01 \Omega \text{ m}$  verbesserten.

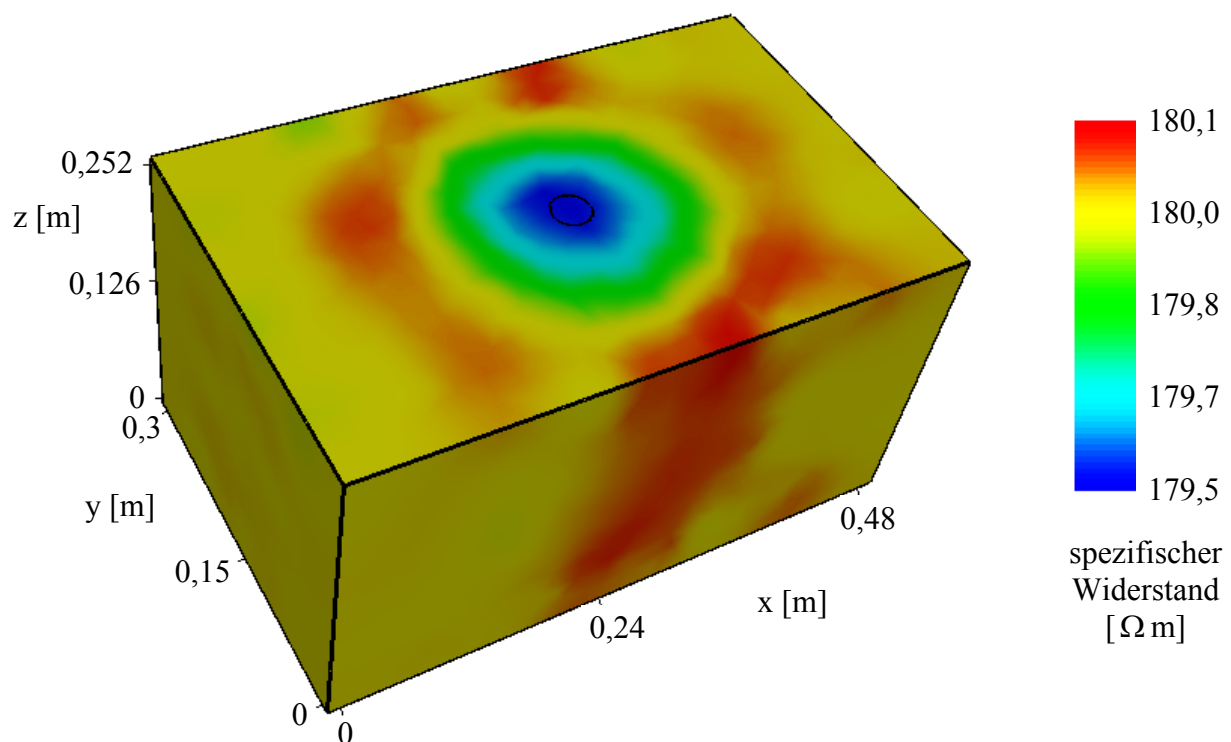


Abb. 7.10: Die aus der Quotienteninversion der jeweils 4268 simulierten unverrauschten Daten resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes im Zentrum des Beckens ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.

Die Ergebnisse der Modellierungen, die mit einer fünffachen Datenanzahl für einen Plume in der Mitte des vorderen Beckenbereichs erfolgten, sind in den Abbildungen 7.11 und 7.12 dargestellt. Die Abweichungen zwischen diesen Widerstandsverteilungen und jenen in den Abbildungen 7.8 und 7.9 resultieren im Wesentlichen aus dem Einfluss des Verrauschens. Deshalb wurde abermals auf die Darstellung der Modellierungsergebnisse für die unverrauschten 824 Impedanzen verzichtet.

Anhand der Isoohme von  $179,5 \Omega \text{ m}$  in Abbildung 7.12 ist ersichtlich, dass infolge des nicht durchgeführten Verrauschens der simulierten Daten die Verschiebung des niederohmigen Gebiets in Richtung Beckenwand weniger stark ist. Gegenüber dem Ergebnis für die Modellierungen mit den 824 unverrauschten Werten verbessert sich der spezifische elektrische Widerstand für die Modellierungen mit den 4268 Daten lediglich um  $0,03 \Omega \text{ m}$ .

Trotz der Erhöhung der Datenanzahl um den Faktor 5 vergrößerte sich die Auflösung fast gar nicht. Um das Auflösungsvermögen signifikant zu steigern, müsste die Menge der Messwerte noch gravierend zunehmen. Dadurch würde sich jedoch die Messzeit deutlich verlängern und die zeitliche Auflösung weiter verringern. Auch die Installation zusätzlicher Elektroden sollte das Auflösungsvermögen verbessern. Allerdings müssten dafür die Beckenwände und der Beckenboden aus einem Material bestehen, welches weniger empfindlich auf mechanische Spannungen reagiert.

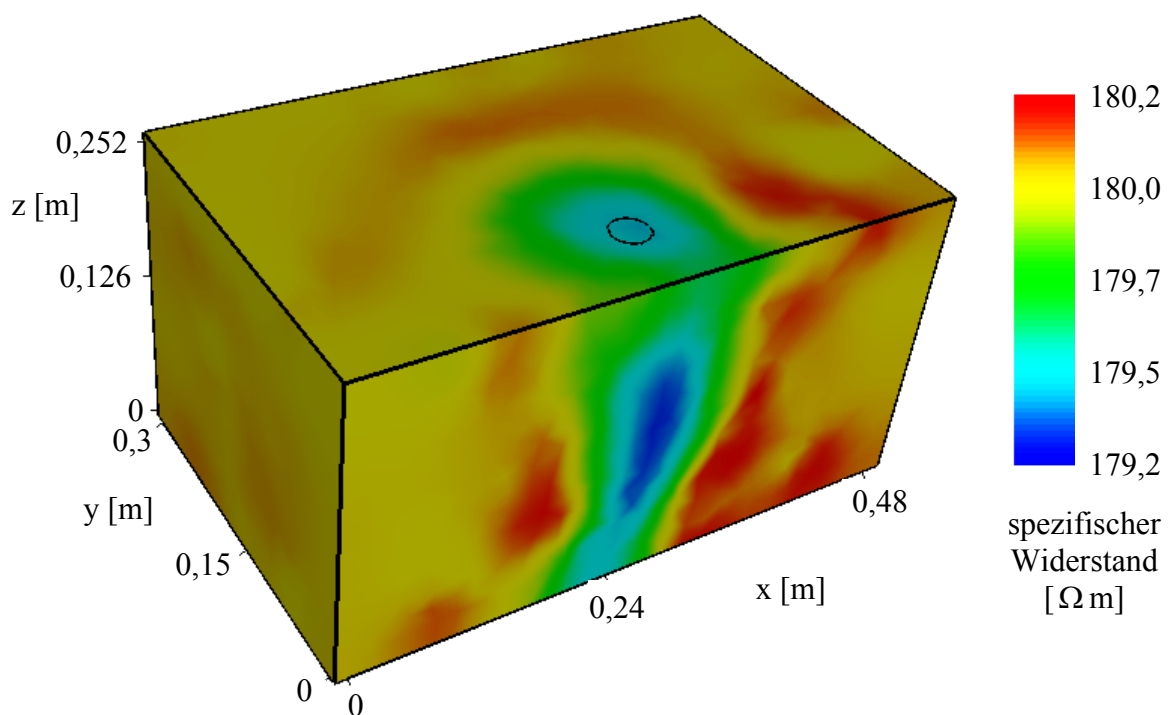


Abb. 7.11: Die aus der Quotienteninversion der jeweils 4268 simulierten unverrauschten Daten resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.

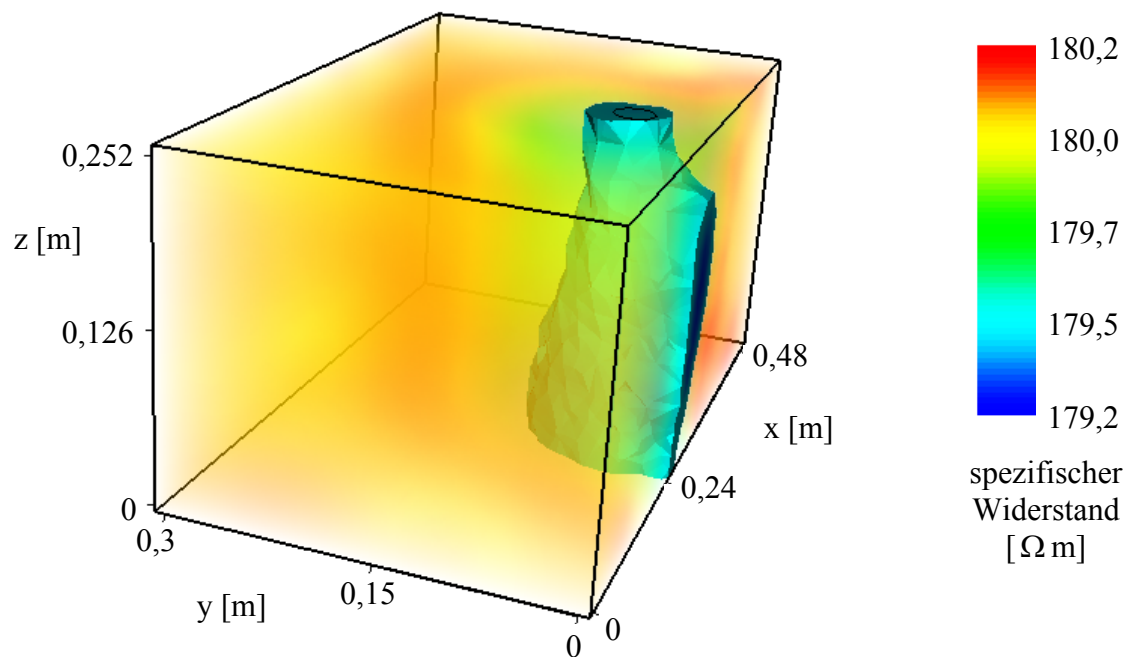


Abb. 7.12: Die aus der Quotienteninversion der jeweils 4268 simulierten unverrauschten Daten resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch den schwarzen Zylinder gekennzeichnet. Die spezifischen elektrischen Widerstände mit Werten größer als  $179,5 \Omega m$  sind durchscheinend dargestellt.

## 8. Diskussion

Das Ziel dieser Forschungsarbeit war das Generieren thermisch induzierter Strömungen in einer viskosen Flüssigkeit im Labor und die Entwicklung einer Methode zur berührungslosen Messung der sich einstellenden Temperaturverteilung. Da sich die spezifische elektrische Leitfähigkeit mit der Temperatur ändert, wurde dafür die geoelektrische Impedanztomographie eingesetzt. Die mittels dreidimensionaler Inversion rekonstruierte Verteilung des spezifischen elektrischen Widerstands in der Versuchsflüssigkeit konnte über die VFT-Gleichung (2.5) in Temperaturen umgerechnet werden. Um die Anwendbarkeit der Impedanztomographie für die Temperaturbestimmung beurteilen zu können, erfolgten für einen Vergleich zusätzliche direkte Temperaturmessungen über die 29 Typ K - Thermoelemente an den Beckenrändern.

Wie in Kapitel 6.1. dargelegt wurde, entsprechen die meisten dimensionslosen geodynamischen Größen für die Experimente – wie beispielsweise die Rayleigh-Zahl – in etwa den Werten für die Mantelkonvektion. Deshalb bildeten sich sowohl aufsteigende als auch absinkende Plumes aus. Da die Dauer der geoelektrischen Messungen mit 15 Minuten deutlich größer ist als die etwa 6-minütige Aufstiegszeit eines Plumes, konnten diese Strukturen zeitlich nicht aufgelöst werden. Erst die gezielte Generierung eines langsam absinkenden Plumes ermöglichte seine Registrierung mittels der Impedanztomographie (siehe Kapitel 6.2.). Die Besonderheiten und die Ergebnisse der sich anschließenden insgesamt 15 Versuche sind in Tabelle 8.1 aufgelistet.

In der letzten Spalte der Tabelle befinden sich die Werte für die normierten Standardabweichungen zwischen den gemessenen Daten und den Modellantworten des Inversionsergebnisses (siehe Kapitel 4.4.). Im Wesentlichen beträgt dieser Daten-Misfit etwa 0,3 bis 0,5 Prozent. Nur für die Experimente mit dem Polyethylenglykol-VE-Wasser-Gemisch liegen die Werte bei deutlich höheren 0,68 bzw. 0,75 Prozent. Die Ursache dafür ist die schlechtere Datenqualität aufgrund des höheren spezifischen elektrischen Widerstands der Versuchsflüssigkeit und dem damit verbundenen stärkeren Übersprechen der Kanäle (Kapitel 5.1.). Infolge der höheren Sensitivität des spezifischen elektrischen Widerstands in Bezug auf Temperaturänderungen äußert sich dieser Effekt jedoch nicht in den Korrelationskoeffizienten und den normierten Standardabweichungen zwischen den direkt und den indirekt bestimmten Temperaturen.

Nr. des Versuchs	Dauer des Versuchs [h]	Anzahl der Impedanztomographien	Nummer der Elektrodenbelegung	Besonderheiten der Temperaturmessung	Besonderheiten des PEG-Wassergemisches	Anzahl der Heizer	Leistung der Heizer [W]	Abdeckung des Beckens	Besonderheiten	Korrelationskoeffizienten Gleichung (5.9)	Normierte Standardabweichung (5.10) [%]	Datenmisfit [%]
1	4,5	4	1	nur manuell	ohne Leitungswasser	1	16,5 - 22	Makrolondeckel	-	0,94 - 0,98	0,6 - 1,7	0,75
2	5	4	1	nur manuell	ohne Leitungswasser	1	20	Makrolondeckel	-	0,94 - 0,97	0,7 - 1,1	0,68
3	4,5	4	1	nur manuell	mit Leitungswasser	1	23,6	Makrolondeckel	-	0,92 - 0,97	1,0 - 1,3	0,36
4	5	3	1	nur manuell	mit Leitungswasser	1	23,6	Makrolondeckel	-	0,94 - 0,98	0,8 - 1,5	0,35
5	4	3	1	nur manuell	mit Leitungswasser	1	23,6	Makrolondeckel	-	0,94 - 0,97	0,5 - 1,1	0,35
6	4,5	3	2	nur manuell	mit Leitungswasser	1	23,6	Makrolondeckel	-	0,76 - 0,96	1,2 - 3,9	0,36
7	4,5	3	2	nur manuell	mit Leitungswasser	1	23,6	Makrolondeckel	-	0,93 - 0,99	0,7 - 1,0	0,33
8	9	6	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	1	13	Makrolondeckel	-	0,90 - 0,98	0,6 - 1,1	0,40
9	9,5	6	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	1	18	Makrolondeckel	-	0,87 - 0,99	1,0 - 1,4	0,38
10	9	6	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	2	13 - 39,5	ohne Deckel	-	0,75 - 0,94	0,8 - 2,9	0,36
11	7,5	5	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	1	13	Makrolondeckel	Quarzalplatte	0,90 - 0,93	0,7 - 1,4	0,51
12	7	4	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	6	13	ohne Deckel	Quarzalplatte	0,61 - 0,69	3,4 - 5,1	0,36
13	63,5	11	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	6	9,4	Metalldeckel	Klimagerät, Quarzalplatte und Stahlplatte	0,26 - 0,50	3,1 - 5,1	0,46
14	76	13	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	6	6	Metalldeckel	Klimagerät, Quarzalplatte und Stahlplatte	0,52 - 0,76	1,0 - 5,0	0,46
15	33,5	9	2	manuell und kontinuierlich	mit Leitungswasser	1	13	Metalldeckel	Klimagerät, Quarzalplatte und Stahlplatte	0,36 - 0,81	1,0 - 3,7	0,44

Tab. 8.1: Übersicht über die Besonderheiten und Ergebnisse der Versuche.

Die Inversionsergebnisse der Experimente, die mit nur einem aktiven Infrarotstrahler durchgeführt wurden, zeigen im Allgemeinen eine gute Übereinstimmung mit den am Rand direkt gemessenen Temperaturen. Nur in der Nähe des eingeschalteten Heizers und im Bereich der aufsteigenden Plumes treten größere Abweichungen auf. Ein Grund dafür sind die in diesen Gebieten vorkommenden zeitlichen Temperaturschwankungen, die durch die manuelle Messung der Randtemperaturen je einmal vor und nach einer Impedanztomographie nicht erfasst werden können. Deshalb ergeben sich relativ schlechte Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für den sechsten Versuch. Um die Temperaturschwankungen an den Thermoelementen bei der Auswertung berücksichtigen zu können, wurden die Temperaturen ab dem achten Versuch zusätzlich kontinuierlich abgetastet. Allerdings verbesserten sich die Ergebnisse dadurch kaum.

Aus den Modellierungen in Kapitel 7.3. geht hervor, dass das räumliche Auflösungsvermögen für die Plumes mit einem Durchmesser von etwa drei Zentimetern nicht ausreicht. Die Amplitude wird über das 25-fache des eigentlichen Plumevolumens gemittelt und ist in den Ergebnissen demzufolge viel zu gering. Das Zentrum der randnahen Strukturen verschiebt sich sogar in Richtung der entsprechenden Beckenwand. Deshalb sind die Abweichungen zwischen den aus der Geoelektrik gewonnenen Temperaturen und den durch direkte Messungen bestimmten Temperaturen in den Bereichen der Plumes und in der Nähe der aktiven Heizer relativ groß. Erst ein Plume mit einem Durchmesser von etwa 15 Zentimetern kann korrekt rekonstruiert werden.

Doch auch andere Faktoren können negative Auswirkungen auf die Ergebnisse haben. Wird die Flüssigkeit zu stark erwärmt oder gekühlt, so verändert sich ihr Volumen und damit auch der Füllstand. Da der Inversion nur die Quotienten aus den Widerständen der Referenzmessung und den Widerständen der nachfolgend aufgenommenen Datensätze zugrunde liegen, treten durch die Änderung der Füllhöhe systematische Fehler auf (siehe Kapitel 7.1.). Bei Experimenten, die ohne Deckel durchgeführt werden, verursacht die Verdunstung des Wassers Abweichungen durch die lokale Erhöhung des spezifischen elektrischen Widerstands (siehe Kapitel 7.2.). In beiden Fällen treten die größten Fehler nahe der Oberfläche mit Beträgen von bis zu 0,5 K auf.

Ist die Energieaufnahme und / oder -abgabe des Systems verhältnismäßig groß, so erhöht sich die Rayleigh-Zahl der Flüssigkeit und die Strömungen werden heftiger. Infolge des dafür zu geringen zeitlichen und räumlichen Auflösungsvermögens der Impedanztomographie ergeben sich für die Experimente, die mit sechs Heizern und / oder dem Klimagerät bzw. ohne Deckel durchgeführt wurden, relativ geringe Korrelationskoeffizienten und vergleichsweise hohe normierte Standardabweichungen. Befindet sich außerdem eine gut wärmeleitende Platte auf dem Beckenboden, bildet sich eine flächendeckende thermische Grenzschicht aus und es

entstehen an mehreren, teilweise zeitlich variierenden Positionen zahlreiche Plumes. Da diese Plumes Durchmesser von etwa drei Zentimetern besitzen, können sie mit der Impedanztomographie folglich nicht vollständig rekonstruiert werden. Dementsprechend treten Abweichungen an nahezu allen Thermoelementen auf.

Um Plumes mit einem Durchmesser von 15 Zentimetern zu generieren, müsste sich die Viskosität um den Faktor 25 erhöhen. Gleichzeitig würde sich die Rayleigh-Zahl um fast zwei Größenordnungen verkleinern und es könnten sich keine erdmantelähnlichen Strömungsmuster mehr einstellen. Durch eine Verringerung des Massenanteils von Wasser in der Versuchsflüssigkeit erhöht sich zwar die Viskosität des Gemisches, aber das Polyethylenglykol löst sich nur dann vollständig, wenn der Anteil des Wassers bei mindestens 50 Prozent liegt. Wie aus Abbildung 5.1 ersichtlich, beträgt die maximal erreichbare Viskosität demnach nur 12 Pa s. Damit hätte sich die Viskosität lediglich verdoppelt.

Das zeitliche und räumliche Auflösungsvermögen könnte zudem durch schnellere Messungen mit einer größeren Datenanzahl und mehr Elektroden verbessert werden. Es existieren Geräte, die die Aufnahme der etwa 800 für die Inversion verwendeten Werte innerhalb von etwa zwei bis drei Minuten ermöglichen. Bei gleich bleibender Messdauer für die Impedanztomographie würde sich die Datenanzahl folglich mindestens um den Faktor fünf erhöhen. Allerdings haben die Ergebnisse der Modellierungen in Kapitel 7.4. gezeigt, dass sich die räumliche Auflösung dadurch fast gar nicht verbessert. Eine weitere signifikante Zunahme der Datenanzahl hätte jedoch eine deutliche Verlängerung der Messdauer zur Folge. Auch die Installation zusätzlicher Elektroden kann für diesen Versuchsaufbau nicht erfolgen. Dazu müsste das Becken aus einem weniger empfindlichen Material bestehen.

Für die Rekonstruktion größerer Strukturen und die Bestimmung der generellen dreidimensionalen Temperaturverteilung in der Flüssigkeit eignet sich die Methode sehr gut. In diesen Fällen liefern die geoelektrischen Messungen Temperaturwerte mit einer Genauigkeit von etwa 0,2 K. Wie aus Tabelle 8.1 für den ersten Teil der Experimente mit nur einem aktiven Heizer hervorgeht, ergeben sich unabhängig von der Wahl der Elektrodenbelegung sehr hohe Korrelationsfaktoren von meist 0,90 bis 0,99 und sehr geringe normierte Standardabweichungen von in der Regel 0,5 bis 1,7 Prozent. Die darin enthaltenen Fehler traten im Wesentlichen im Bereich der aufsteigenden Plumes auf.

Da sich die geoelektrische Impedanztomographie gut für die berührungslose Temperaturmessung in viskosen Flüssigkeiten eignet, wurde die Laborapparatur modifiziert und für Testmessungen in einer Glasschmelzwanne verwendet. Durch die Strömungen in der Wanne vermischen sich die geschmolzenen Rohstoffe des Glases. Ist die dreidimensionale Temperaturverteilung der Schmelze bekannt, kann die benötigte Energiezufuhr so geregelt werden, dass eine optimale Homogenisierung des Glases bei einer minimalen Heizleistung stattfindet. Deshalb sollten neben der direkten Temperaturmessung mit den Temperaturfühler am Wannenrand zusätzlich nichtinvasive dreidimensionale Temperaturbestimmungen erfolgen.

An der Schmelzwanne für die ersten Tests des Messverfahrens sind sowohl Brenner für die fossile Beheizung von oben als auch Elektroden für die mittelfrequente elektrische Beheizung von unten installiert. Außerdem befinden sich insgesamt 18 Temperaturfühler in den Seitenwänden und am Boden der Wanne. Diese können gleichzeitig als Elektroden für die 3D-Tomographie genutzt werden. Da sich in Bezug auf den Laboraufbau die Elektrodenanzahl verringert aber das Volumen etwa um den Faktor 45 steigt, verschlechtert sich auch die räumliche Auflösung deutlich. Außerdem nehmen die Störungen der Messspannungen durch den Betrieb der Schmelzwanne ebenfalls zu. Die analogen Tiefpassfilter schirmen die Messtechnik für die Impedanztomographie im Wesentlichen von den mittelfrequenten Störspannungen der elektrischen Beheizung ab. Allerdings verursachen die 50 Hz - Störungen der kleineren Heizkreise deutliche Fehler in den benötigten Messspannungen. Diese kann der digitale Butterworth-Bandpass nicht im ausreichenden Maße unterdrücken, da die Speisefrequenz zur Vermeidung von elektrochemischen Effekten im Glas auf 19 Hz erhöht wurde. Die geoelektrischen Testmessungen fanden deshalb bei deaktivierten 50 Hz - Heizkreisen statt.

Ein weiterer Grund für die Verschlechterung der Ergebnisse ist der fehlende Referenzdatensatz für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung, da bei den hohen Temperaturen in der Glasschmelze keine gleichmäßige Verteilung existieren kann. Demzufolge ist es nicht möglich, die Auswirkungen von systematischen Fehlern durch die Inversion der Quotienten zu eliminieren. Sind die Abmessungen der Heizelektroden und der Elektroden für die Impedanztomographie sowie das Ausmaß des Wannenverschleißes zum Zeitpunkt der Messungen bekannt, so können diese Angaben bei der Inversion berücksichtigt und genauere Ergebnisse erzielt werden.

Während der Einspeisung des Stroms stellt sich eine Potenzialverteilung in der Glasschmelze ein, die von der Temperatur bzw. von der Leitfähigkeit abhängt. Da aber je zwei der Elektroden für die elektrische Beheizung über einen Transformator kurzgeschlossen sind, verändert sich das Potenzialfeld und die gemessenen Spannungen werden deutlich geringer.



Die daraus resultierenden kleineren Widerstände spiegeln sich in den Inversionsergebnissen nach der Umrechnung mit Gleichung (2.5) als höhere Temperaturen in der Wanne wider. Demzufolge lagen die Inversionsergebnisse um etwa 200 K höher als die direkt gemessenen Randtemperaturen. Deshalb wurden zwei Messungen bei abgeklemmten Heizelektroden durchgeführt. Auf diese Weise verringerten sich die Abweichungen zwischen den direkt und den indirekt bestimmten Temperaturen auf maximal 50 K. Infolge der fehlenden elektrischen Wärmeerzeugung sank die Temperatur während der Impedanztomographie jedoch stark ab und die Inversionsergebnisse stellen lediglich ein zeitliches Mittel dar.

Ein Teil der verbleibenden Fehler resultiert aus der hohen spezifischen elektrischen Leitfähigkeit der Wannenzwand. Während der geoelektrischen Untersuchungen befand sich zudem eine relativ schlecht leitende Glassorte in der Schmelzwanne. Dadurch war die spezifische elektrische Leitfähigkeit in der Wannenzwand höher als in der Glasschmelze. Um die daraus folgenden Effekte sowie die Kurzschlüsse durch die Heizelektroden rechnerisch zu eliminieren, erweiterte C. Rücker den in Kapitel 4.4. beschriebenen Inversionsalgorithmus.

Für einen Test des angepassten Inversionsprogramms wurden zunächst Untersuchungen im Labor durchgeführt. Während dieser geoelektrischen Messungen befand sich eine annähernd homogene Leitfähigkeitsverteilung im Versuchsbecken. Neben der Referenzmessung erfolgte die Durchführung einer weiteren Impedanztomographie, bei der die zwei gegenüberliegenden Elektroden 17 und 34 kurzgeschlossen waren. Durch die Berechnung der Quotienten aus den Ergebnissen der beiden einzeln invertierten Datensätze ergibt sich die in Abbildung 8.1 dargestellte dreidimensionale Verteilung der relativen spezifischen elektrischen Widerstände. Die beiden Elektroden, die für die Erzeugung des Kurzschlusses verwendet wurden, sind durch weiße Kugeln mit einem fünffach vergrößerten Radius gekennzeichnet. Da sich aufgrund des Kurzschlusses die Messspannungen verringern, sind nach der Division durch die höheren Werte der Referenzmessung nur relative spezifische elektrische Widerstände mit Werten kleiner als 100 Prozent vorhanden. Der Kurzschluss zwischen zwei Elektroden erzeugt laut Abbildung 8.1 Abweichungen zwischen etwa drei bis sechs Prozent. Diese Abweichungen treten über das gesamte Volumen verteilt auf.

Werden die Kurzschlüsse durch entsprechende Vorwärtsmodellierungen während der Inversion des zweiten Datensatzes berücksichtigt und die Ergebnisse anschließend abermals durch die spezifischen elektrischen Widerstände der Referenzmessung dividiert, so treten deutlich geringere Abweichungen mit Werten zwischen 0,1 und 0,2 Prozent auf. In Abbildung 8.2 ist die entsprechende Verteilung der relativen spezifischen elektrischen Widerstände dargestellt. Die verbleibenden Abweichungen können aus Spannungsfehlern von maximal vier Millivolt resultieren und liegen demnach noch unterhalb der Fehlergrenze von acht Millivolt.

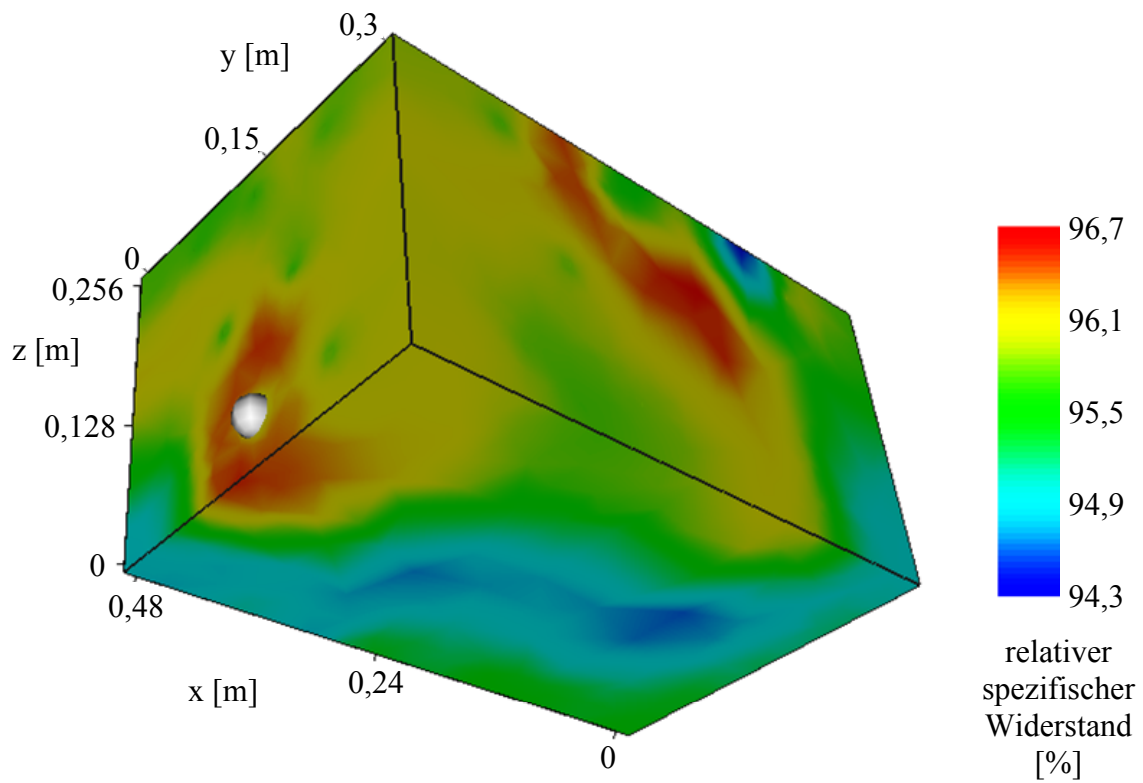


Abb. 8.1: Verteilung der relativen spezifischen elektrischen Widerstände, die durch die Inversion ohne Berücksichtigung des Kurzschlusses gewonnen wurden.

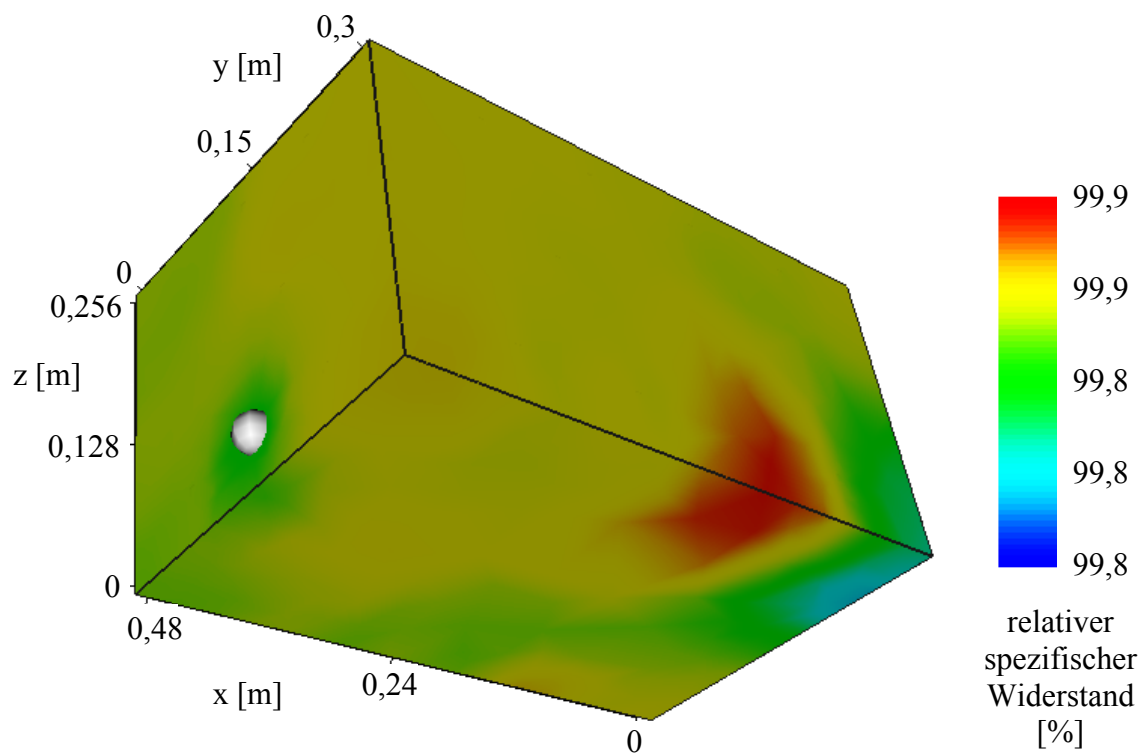


Abb. 8.2: Verteilung der relativen spezifischen elektrischen Widerstände, die durch die Inversion mit Berücksichtigung des Kurzschlusses gewonnen wurden.

Obwohl der auf die Berücksichtigung von Kurzschlüssen angepasste Inversionsalgorithmus für den Test im Versuchsbecken sehr gute Ergebnisse lieferte, konnten die Effekte der kurzgeschlossenen Heizelektroden und der leitfähigen Wände nicht restlos während der Inversion der Schmelzwannendaten eliminiert werden. Ein wesentlicher Grund dafür ist die Annahme einer einheitlichen Wandleitfähigkeit für die Vorwärtsrechnungen. Allerdings weisen die Wände der Schmelzwanne zum einen durch lokales Kühlen der Messfühler eine ungleichmäßige Temperaturverteilung und demzufolge auch eine inhomogene Leitfähigkeitsverteilung auf und zum anderen bestehen sie aus einzelnen Platten an deren Rändern ebenfalls Unstetigkeiten in der Leitfähigkeit auftreten.

Um die geoelektrische Impedanztomographie für die Temperaturmessung in dieser Schmelzwanne anwenden zu können, muss zunächst eine genaue Analyse der zu erwartenden Leitfähigkeitsverteilung in der Wannenwand erfolgen. Die Resultate könnten dann mit größerem Aufwand für die Vorwärtsrechnung während der Inversion berücksichtigt werden und sollten bessere Ergebnisse liefern.

In einer rein fossil beheizten Schmelzwanne mit einer Glassorte, die eine deutlich höhere Leitfähigkeit als die Wannenwand aufweist, treten keine negativen Auswirkungen aufgrund von Kurzschlüssen mehr auf. Allerdings müsste die Anzahl der Elektroden für eine bessere räumliche Auflösung noch deutlich erhöht werden. Das ist aber nur in begrenztem Maße möglich. Auch die Datenanzahl kann nicht ausreichend stark erhöht werden, da sich aufgrund dessen die Messdauer signifikant verlängern würde. Demzufolge ist trotz der relativ guten Ergebnisse der Impedanztomographie im Versuchsbecken nach dem jetzigen Stand der Technik der Einsatz dieses Messverfahrens für die Temperaturbestimmung in Glasschmelzwannen nicht geeignet.

## 9. Zusammenfassung

Aufgrund von Unterschieden in der Temperatur, der Dichte und der chemischen Konzentration treten Materialbewegungen in Fluiden auf. Thermisch induzierte Strömungen existieren beispielsweise im Erdmantel sowie in Glasschmelzwannen. Wissenschaftliche Untersuchungen sollen das Verständnis für die dabei ablaufenden Prozesse verbessern. Dazu werden in zunehmendem Maße geodynamische Modellierungen durchgeführt. Mittels Labor-experimenten erfolgt die Verifizierung der dafür verwendeten Algorithmen.

Ein wesentlicher Parameter für die numerische Modellierung von Konvektionen ist die Temperatur. Deshalb entwickeln verschiedene Forschergruppen Methoden für die Bestimmung der Temperaturverteilung innerhalb der Versuchsflüssigkeiten. Da Temperaturfühler die thermisch induzierten Bewegungen des viskosen Materials beeinflussen, wird ein Verfahren zur berührungslosen dreidimensionalen Temperaturmessung benötigt. Befinden sich in der Flüssigkeit zusätzlich thermochrome Polymere, ermöglichen optische Methoden die Bestimmung der Temperatur. Da sich die Zugabe von Tracern durch die daraus folgende Verunreinigung des Glases für die Anwendung in Glasschmelzwannen nicht eignet, sollte im Rahmen dieser Doktorarbeit ein weiteres Verfahren zur nichtinvasiven Temperaturmessung auf der Grundlage der geoelektrischen Impedanztomographie entwickelt werden.

Infolge der Stromeinspeisung zwischen zwei Elektroden bildeten sich während einer geoelektrischen Messung Potenzialfelder in der von unten beheizten und elektrisch leitfähigen Versuchsflüssigkeit aus. Über weitere am Beckenrand installierte Elektroden wurden die Potenzialdifferenzen erfasst und anschließend invertiert. Auf diese Weise erfolgte die Rekonstruktion der dreidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung in dem Versuchsbecken. Da die spezifische elektrische Leitfähigkeit über die VFT-Gleichung mit der Temperatur verknüpft ist, konnten die Inversionsergebnisse in Temperaturen umgerechnet werden. Für die Validierung dieser Methode fanden zusätzlich direkte Temperaturmessungen über die Thermoelemente am Beckenrand statt.

Der Vergleich zwischen den direkt und den indirekt ermittelten Randtemperaturen zeigte in der Regel sehr gute Übereinstimmungen. Das bedeutet, dass mittels der Impedanztomographie die generelle dreidimensionale Temperaturverteilung in der Versuchsflüssigkeit auf etwa 0,2 K genau gemessen werden kann. Größere Abweichungen traten allerdings im Bereich der Plumes auf. Ein Grund dafür ist die zu geringe zeitliche Auflösung, da die Messdauer für die Impedanztomographie mehr als doppelt so lang war wie die Aufstiegszeit eines Plumes.

Die entscheidende Ursache für die Abweichungen ist jedoch das ebenfalls zu geringe räumliche Auflösungsvermögen. Die geoelektrischen Modellierungen haben ergeben, dass der Durchmesser der erzeugten Plumes etwa um den Faktor 5 größer sein sollte, damit diese korrekt rekonstruiert werden können. Für eine signifikante Verbesserung der räumlichen Auflösung müsste eine deutliche Erhöhung der Datenanzahl erfolgen, wodurch sich aber die Messdauer wesentlich verlängern würde. Demzufolge eignet sich das entwickelte Verfahren für die nichtinvasive dreidimensionale Temperaturmessung nur dann, wenn die zu analysierenden Strukturen eine ausreichende Größe aufweisen.

Ein weiteres Ziel dieser Doktorarbeit war der Test der Methode an einer Glasschmelzwanne. Durch die Vergrößerung des Flüssigkeitsvolumens und die Verringerung der Elektrodenanzahl verschlechterte sich das räumliche Auflösungsvermögen. Trotz Anpassung der Messtechnik an die Bedingungen, die während des Betriebs der Schmelzwanne vorliegen, waren die Abweichungen zwischen den am Rand direkt gemessenen Temperaturen und den mittels Geoelektrik bestimmten Temperaturen deutlich zu groß. Die über einen Transformator kurzgeschlossenen Elektroden für die elektrische Beheizung verursachten eine starke Verringerung der Messspannungen. Diese Effekte können während der Inversion aber herausgerechnet werden. Da die für die Tests verwendete Glassorte zudem einen höheren spezifischen elektrischen Widerstand besaß als die Wände der Schmelzwanne, erfolgten die Auswertungen ebenfalls mit der Berücksichtigung der daraus resultierenden Messfehler. Aufgrund der inhomogenen Leitfähigkeit der Wannenwand ist eine vollständige Eliminierung der Abweichungen jedoch nicht möglich.

Die Anwendung der Impedanztomographie für die Temperaturmessung an rein fossil beheizten Schmelzwannen mit wesentlich leitfähigerem Glas müsste demnach eine Verbesserung der Inversionsergebnisse zur Folge haben. Allerdings genügt die räumliche Auflösung für die Analyse der dreidimensionalen Temperaturverteilung in dem geschmolzenen Glas nicht den festgelegten Anforderungen. Die Erhöhung der Elektroden- und Datenanzahl für die Vergrößerung der Auflösung ist jedoch nicht in ausreichendem Maße möglich. Damit eignet sich dieses Verfahren nach dem jetzigen Stand der Technik nicht für den Einsatz an Glasschmelzwannen.

## 10. Abstract

Many natural bodies such as the Earth's mantle, as well as materials inside industrial installations like molten glass inside furnaces, exchange matter through convection resulting from differences in temperature, density and chemical concentration. In Earth Sciences the analysis of plumes and convection inside the Earth's mantle is a classical area for numerical modelling. However, experimental methods in the laboratory help as analogue models to verify the validity of computer models. The inherent problem of such analogue experiments is the visualisation of the flows and the determination of the parameters of interest as for example temperature. In nature and in industrial installations it is difficult to measure the temperature inside the object of interest directly. Therefore, the goal of this research study was the development of a new method for temperature measurements that allows temperature data acquisition without influencing the flow pattern in the laboratory simulation of Earth's convection. Contrary to the three-dimensional optical techniques used by some of the scientist, DC-goelectrical 3-D tomography works without tracers inside fluids. This is the precondition for the determination of temperatures inside molten glass, that has to remain uncontaminated. The basis for the use of DC-goelectrical 3-D tomography is the adjusted Arrhenius temperature dependence of the electrical conductivity.

In order to verify the applicability of the method, thermally driven flows were generated in a viscous material. Therefore, dissolved polymer polyethylene glycol was heated in a tank with a base of 48 x 30 cm and a height of 30 cm. During each goelectrical measurement, two electrodes supplied a current into the tank to generate an electrical field. The further 26 electrodes, placed on the sides of the tank, contemporaneously recorded the voltages between themselves and the reference electrode. Finally, the voltages were inverted using a 3-D inversion program. The model of the three-dimensional distribution of electrical conductivities obtained was converted into temperatures. In order to verify the validity of the method these temperatures were compared with the temperatures recorded by the 29 thermocouples on the sides of the tank.

There were high positive correlations between the temperatures measured directly and the temperatures determined by goelectrical 3-D tomography. This, as well as the low root mean square deviations normalised to the mean of the temperatures of the respective goelectrical model demonstrates the success of the new method presented in this thesis. It should be noted that small-sized structures such as hot plumes with a diameter of 3 cm possess lower temperatures in the reconstructed models than in reality because of the relatively low spatial resolution. This means that goelectrical 3-D tomography can be used for the measurement of the general distribution of temperature, but not for analysis of small structures.

---

A goal for the glass industry is to control flows in furnaces, because the molten basic elements for glass production have to be ideally homogenised with low energy usage. For this purpose the determination of the three-dimensional distribution of temperature is a basic prerequisite. However, the high temperature of the glass itself makes it impractical to measure the properties of the flows in situ. Therefore, the glass industry is interested in this non-invasive method and first measurements were carried out in a smelting furnace. The glass temperatures determined by geoelectrical 3-D tomography strongly diverged from the temperatures of the thermocouples on the sides of the furnace. Although the removal of the highest proportion of the electrical disturbances improved the results of inversion, a substantial error still remained. Furthermore, the spatial resolution was relatively low. In order to increase the resolution more data and additional electrodes on the walls would be required, however the geoelectrical measurements would take significantly longer. In addition, there is a limit to the number of electrodes that can be installed. Due to the low spatial resolution and the remaining substantial errors, geoelectrical tomography is unsuitable for application at glass smelting furnaces with the present state of technology.

# Anhang

## A.1. Entwurf nichtrekursiver Filter

Abbildung A.1 zeigt einen schematischen Ablaufplan für den Entwurf von nichtrekursiven Filtern am Beispiel eines Tiefpassfilters. Zunächst wird eine beliebig geformte Übertragungsfunktion  $\tilde{H}(f)$  festgelegt (Teil a der Abbildung A.1). Diese Funktion ist für die vier Filterarten Tiefpass, Hochpass, Bandpass sowie Bandsperre symmetrisch, weshalb für die Filterkoeffizienten  $c_k$  folgender Zusammenhang gilt:

$$c_k = c_{-k} \quad . \quad (\text{A.1.1})$$

Das führt bei der Entwicklung der Übertragungsfunktion als Fourier-Reihe:

$$\tilde{H}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(2\pi k f) + b_k \sin(2\pi k f) \right] \quad (\text{A.1.2})$$

zum Auslöchen der Fourier-Koeffizienten  $b_k$  während die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  durch Integration bestimmt werden:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H(\omega) \cos(k\omega) d\omega = 4 \int_0^{1/2} \tilde{H}(f) \cos(2\pi k f) df \quad . \quad (\text{A.1.3})$$

Für einen Tiefpassfilter mit einem Durchlassbereich von Null bis  $f_s$  und einem Sperrbereich von  $f_s$  bis  $1/2$  – gemessen in  $f$  Perioden – ergibt sich nachstehende Gleichung:

$$\tilde{H}(f) = 2f_s + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[ \frac{2}{\pi k} \sin(2\pi k f_s) \right] \cos(2\pi k f) \quad . \quad (\text{A.1.4})$$

Mit Gleichung (A.1.4) ist somit eine direkte Berechnung aller Filterkoeffizienten  $c_k$  möglich (Teil b der Abbildung A.1). Diese Koeffizienten werden jedoch nach einem bestimmten Index  $N$  abgebrochen (Teil c), um die für die Praxis notwendigen endlichen Filter zu erhalten. Allerdings verursacht das Abbrechen einer Fourier-Reihe immer das so genannte Gibbs'sche Phänomen im Frequenzbereich, welches sich durch ein Überschwingen in der Übertragungsfunktion äußert (Teil d). Cornelius LANZOS (1956) stellte fest, dass die Welligkeit in der Summe einer abgebrochenen Fourier-Reihe entweder die Periode des ersten vernachlässigten oder des letzten beibehaltenen Gliedes der Reihe aufweist. Laut LANZOS (1956) kann diese Welligkeit durch eine Glättung der Teilsumme mittels der Integration über diese Periode deutlich verringert werden. Die Anwendung dieses rechteckigen Faltungsfensters auf die Übertragungsfunktion führt zu einer Multiplikation der Fourier-Koeffizienten mit den Sigma-Faktoren nach LANZOS (1956) (Teil e der Abbildung A.1):



$$\tilde{H}(f) = 2f_s + \sum_{k=1}^N \sigma(N, k) \left[ \frac{2}{\pi k} \sin(2\pi k f_s) \right] \cos(2\pi k f) \quad (\text{A.1.5})$$

mit  $\sigma(N, k) = \frac{\sin(\pi k/N)}{\pi k/N}$  . (A.1.6)

Daraus resultiert eine geglättete Übertragungsfunktion (Teil f), die jedoch den Durchlassbereich nicht mehr exakt vom Sperrbereich abtrennt, sondern durch eine Übergangszone gekennzeichnet ist. Wird anstelle des Rechteckfensters nach LANCZOS (1956) beispielsweise das von-Hann-Fenster oder das Hamming-Fenster für die Glättung verwendet, so minimieren sich zwar die restlichen Schwingungen in der Übertragungsfunktion weitestgehend, aber die Breite der Übergangszone verdoppelt sich. (HAMMING, 1987)

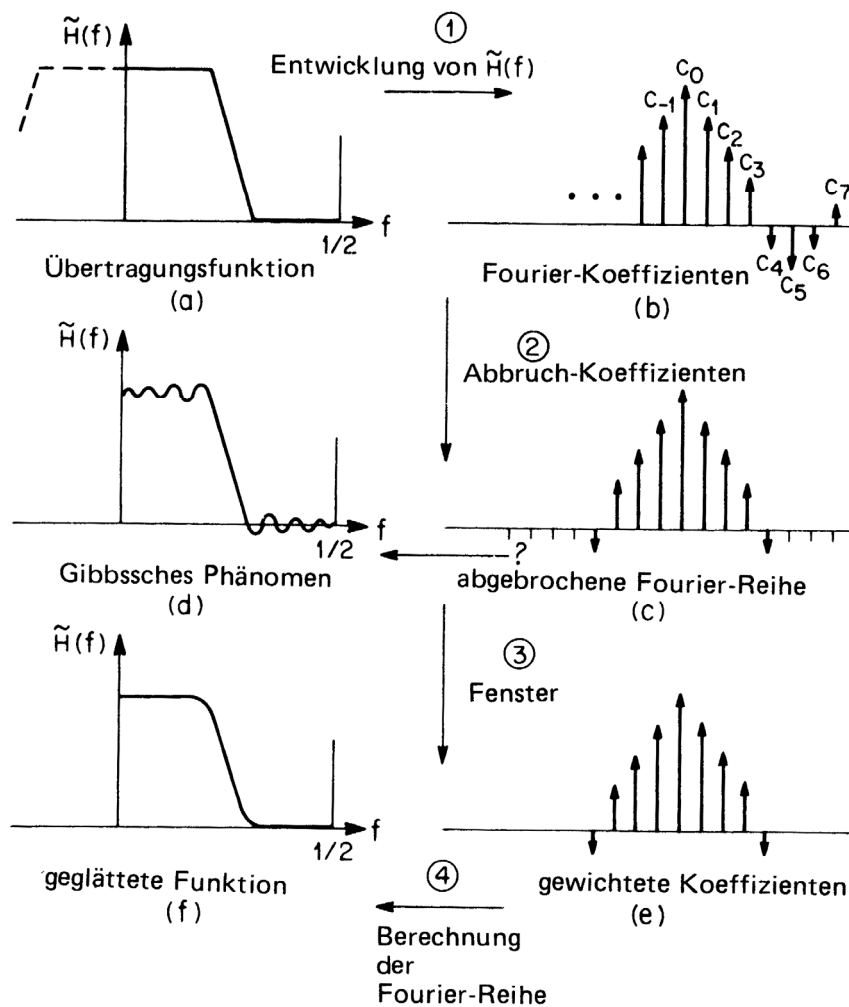


Abb. A.1: Schematischer Ablaufplan für den Entwurf eines nichtrekursiven Filters am Beispiel eines Tiefpassfilters. (HAMMING, 1987)

Es existieren allerdings auch nichtrekursive Filter, deren Übertragungsfunktionen über große Bereiche des Frequenzbandes monoton verlaufen. Bei diesen monotonen Filtern wird die Fourier-Reihe aus einer Potenzreihe entwickelt. Grundlage dafür bildet nachstehender Zusammenhang:

$$\cos(2\pi k f) + i \sin(2\pi k f) = e^{i2\pi k f} = \left[ e^{i2\pi f} \right]^k = \left[ \cos(2\pi f) + i \sin(2\pi f) \right]^k \quad . \quad (\text{A.1.7})$$

Aus der Gleichung

$$\tilde{H}(f) = \sum_{k=0}^N b_k \left[ \cos(2\pi f) \right]^k \quad (\text{A.1.8})$$

folgt mit

$$\cos(2\pi f) = t \quad (\text{A.1.9})$$

das Polynom  $\tilde{H}(f)$

$$\tilde{H}(f) = \sum_{k=0}^N b_k t^k \quad (\text{A.1.10})$$

als äquivalente Übertragungsfunktion. Da  $f$  Werte von Null bis  $\frac{1}{2}$  annimmt, liegen die Werte von  $t$  laut Gleichung (A.1.9) zwischen 1 und -1. Diese Transformation bewirkt allerdings eine nichtlineare Streckung der Frequenzachse. Die Intervallenden der nach Gleichung (A.1.10) zu ermittelnden Übertragungsfunktionen werden mit Hilfe von Tangenten angepasst und so die Grenzfrequenzen der Filter festgelegt. Die glatte Form der Übertragungsfunktion der Potenzreihe bleibt bei der Rücktransformation in eine Fourier-Reihe erhalten. (HAMMING, 1987)

### ***A.2. Plan für die Pinbelegung in der SCB 100 - Box***

Um die Auswirkungen des Übersprechens der Kanäle auf die Messspannungen zu verringern, werden alle Elektroden doppelt abgetastet. Das bedeutet, dass die Messleitung jeder Elektrode an zwei Pins in der SCB 100 - Box angeschlossen ist. Jeder Pin hat in der Datenerfassungssoftware eine bestimmte Kanalnummer. In der folgenden Tabelle A.2.1 sind die Leitungsnummern der Elektroden, die beiden Kanalnummern der Software und die entsprechenden Pinnummern der SCB 100 - Box aufgelistet. Die Elektrode an der Leitung 28 ist die Referenzelektrode und damit in der Erfassungssoftware nicht mit einer Kanalnummer definiert.

Leitung	Kanal	PIN
1	8	4
1	9	6
2	0	3
2	1	5
3	10	8
3	11	10
4	2	7
4	3	9
5	12	12
5	13	14
6	4	11
6	5	13
7	14	16
7	15	18
8	6	15
8	7	17
9	24	52
9	25	54
10	16	51
10	17	53
11	26	56
11	27	58
12	18	55
12	19	57
13	28	60
13	29	62
14	20	59
14	21	61
15	30	64
15	31	66
16	22	63
16	23	65

Leitung	Kanal	PIN
17	40	68
17	41	70
18	32	67
18	33	69
19	42	72
19	43	74
20	34	71
20	35	73
21	44	78
21	45	80
22	36	77
22	37	79
23	46	82
23	47	84
24	38	81
24	39	83
25	52	93
25	53	95
26	48	85
26	49	87
27	54	97
27	55	99
28		19
28		75
29	56	86
29	57	88

Tab. A.2.1: Pinbelegungsplan der SCB 100 - Box für die doppelte Abtastung der Elektroden.

### A.3. Positionen der Elektroden und Thermoelemente

#### A.3.1. Positionen der Thermoelemente

An den vier Seitenwänden des Versuchsbeckens befinden sich insgesamt 29 Typ K - Thermoelemente, deren Messwerte dem Vergleich mit den aus der Impedanztomographie ermittelten Temperaturen dienen. Während der ersten vier Experimente ragten die Thermoelemente nur 10 mm in die Versuchsflüssigkeit hinein. Die Koordinaten der Thermoelemente in Tabelle A.3.1 beziehen sich auf die späteren Experimente mit 20 mm tiefen Temperaturmessfühlern. Durch die Vergrößerung des Abstandes zur Beckenwand wurde der Einfluss der Zimmertemperatur auf die Temperaturmessung in der randnahen Flüssigkeit aufgrund der Wärmeleitfähigkeit des Makrolons minimal verringert.

Nr. des Thermoelementes	x [mm]	y [mm]	z [mm]
1	460	280	232
2	355	280	232
3	240	280	232
4	124	280	231
5	20	280	231
6	241	280	130
7	460	280	21
8	325	280	21
9	155	280	21
10	20	280	21
11	460	113	232
12	460	188	231
13	460	149	132
14	460	185	21
15	20	20	232
16	125	20	232
17	240	20	231
18	355	20	231
19	460	20	231
20	241	20	131
21	20	20	20
22	156	20	20
23	325	20	20
24	460	20	20
25	20	185	231
26	20	110	232
27	20	150	131
28	20	185	20
29	20	110	21

Tab. A.3.1: Positionen der Typ K - Thermoelemente.

### A.3.2. Positionen der Elektroden

Die insgesamt 36 Platinelektroden für die Impedanztomographie befinden sich ebenfalls an den vier Seitenwänden des Versuchsbeckens. Die Positionen der Elektroden sind in Tabelle A.3.2 aufgelistet. Über ein Steckbrett werden die ausgewählten Elektroden mit den 29 zur Verfügung stehenden und nummerierten Leitungen verbunden. In Tabelle A.3.3 befindet sich der Plan über die Verschaltungsreihenfolge der 10 Leitungen für die Stromeinspeisung.

Nr. der Elektrode	x [mm]	y [mm]	z [mm]
1	389	300	232
2	291	300	231
3	189	300	231
4	90	300	231
5	340	300	132
6	139	300	130
7	390	300	40
8	289	300	41
9	190	300	40
10	91	300	40
11	480	73	232
12	480	148	231
13	480	225	230
14	480	113	131
15	480	188	129
16	480	74	40
17	480	148	40
18	480	226	40
19	90	0	232
20	190	0	231
21	291	0	231
22	391	0	230
23	140	0	130
24	339	0	130
25	91	0	40
26	191	0	40
27	290	0	40
28	390	0	40
29	0	226	231
30	0	150	230
31	0	75	232
32	0	185	130
33	0	110	132
34	0	226	40
35	0	150	41
36	0	75	40

Tab. A.3.2: Positionen der Platinelektroden.

Nummer der Verschaltung	Leitung A	Leitung B
1	5	1
2	5	8
3	5	13
4	5	14
5	5	19
6	5	25
7	5	22
8	5	20
9	5	29
10	1	8
11	1	13
12	1	14
13	1	19
14	1	25
15	1	22
16	1	20
17	1	29
18	8	13
19	8	14
20	8	19
21	8	25
22	8	22
23	8	20
24	8	29
25	13	14
26	13	19
27	13	25
28	13	22
29	13	20
30	13	29
31	14	19
32	14	25
33	14	22
34	14	20
35	14	29
36	19	25
37	19	22
38	19	20
39	19	29
40	25	22
41	25	20
42	25	29
43	22	20
44	22	29
45	20	29

Tab. A.3.3: Verschaltungsplan der 10 Leitungen für die Stromeinspeisung.

Um einen Vergleich über die Auswirkungen einer unterschiedlichen Elektrodenwahl auf die Ergebnisse durchführen zu können, fanden die anfänglichen Experimente mit einer anderen Elektrodenbelegung statt als der zweite Teil der Versuche. In Tabelle A.3.4 sind beide Belegungspläne aufgelistet. Über die Farbe der Kanäle ist zudem die Verwendungsform der einzelnen Elektroden ersichtlich. Leitung 28 war immer durch die Referenzelektrode belegt und ist blau gekennzeichnet. Die 10 rot markierten Leitungen konnten als Speise- und Potenzialelektroden eingesetzt werden. Die 18 anderen Kanäle dienten ausschließlich der Potenzialmessung.

A)		B)	
Nr. der Leitung	Nr. der Elektrode	Nr. der Leitung	Nr. der Elektrode
1	3	1	3
2	1	2	1
3	2	3	2
4	4	4	5
5	7	5	9
6	5	6	7
7	8	7	8
8	12	8	13
9	11	9	10
10	13	10	11
11	14	11	12
12	15	12	15
13	16	13	18
14	19	14	19
15	18	15	16
16	20	16	17
17	23	17	21
18	24	18	24
19	21	19	22
20	25	20	28
21	26	21	25
22	27	22	29
23	28	23	27
24	29	24	33
25	30	25	31
26	33	26	34
27	36	27	36
28	10	28	26
29	35	29	35

Tab. A.3.4: Plan über die Wahl der Elektroden und deren Verwendung (schwarz: Potenzialelektrode; blau: Referenzelektrode; rot: Speise- und Potenzialelektrode)

A) Für die ersten Experimente

B) Für die restlichen Experimente.

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 3.1: Schematische Darstellung einer Vierelektrodenanordnung .....	20
Abb. 3.2: Beispiele für 2D-Sensitivitätsverteilungen im homogenen Halbraum für verschiedene Elektrodenanordnungen. Alle Abbildungen sind auf das Maximum des Betrages normiert. (FRIEDEL, 2000).....	23
Abb. 4.1: Versuchsaufbau.....	25
Abb. 4.2: Schematischer Versuchsaufbau.....	25
Abb. 4.3: Veranschaulichung der Funktion $\sin f/f$ .....	31
Abb. 4.4: Polarisierung der Beckenwand durch Einspeisen eines konstanten Stroms über zwei Elektroden A und B und die Auswirkungen auf die Ladungen durch die Berührung der Beckenwand, gemessen von zwei Elektroden M und N.....	34
Abb. 4.5: Idealisierte Amplitudencharakteristiken mit $\omega_c$ als Grenzfrequenzen.....	36
Abb. 4.6: Amplitudengänge für Butterworth-, Bessel-, Tschebyscheff- und Cauer-Tiefpässe mit verschiedenen Ordnungen. (SCHRÜFER, 1992).....	38
Abb. 4.7: Schema eines Butterworth-Tiefpasses.....	40
Abb. 4.8: Die drei Gitter für die Inversion dargestellt für eine 2D-Diskretisierung: Parameternetz (links), Sekundärfeldgitter (Mitte) und Primärfeldgitter (rechts). (GÜNTHER et al., 2006) .....	45
Abb. 4.9: Schema der Drei-Gitter-Inversion nach GÜNTHER et al. (2006) mit $\rho_{s,j}$ für die scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstände.....	45
Abb. 5.1: Zusammenhang zwischen Polyethylenglykolgehalt und Viskosität von PEG-Wasser-Gemischen.....	51
Abb. 5.2: Zusammenhang zwischen Temperatur und Viskosität der Versuchsflüssigkeit.....	52
Abb. 5.3: Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischem elektrischem Widerstand für Leitungswasser und für drei PEG-Wasser-Gemische, die mit Wasser unterschiedlicher Ionenanzahl angerührt wurden.....	53
Abb. 5.4: Absoluter Betrag des Übersprechens der Kanäle in Abhängigkeit vom spezifischen elektrischen Widerstand der Flüssigkeit anhand von zwei Konfigurationen A und B.....	54
Abb. 5.5: Relativer Betrag des Übersprechens der Kanäle in Abhängigkeit vom spezifischen elektrischen Widerstand der Flüssigkeit anhand von zwei Konfigurationen A und B.....	55
Abb. 5.6: Versuchsaufbau für die Bestimmung der Parameter der VFT-Gleichung .....	56



Abb. 5.7: Kurve zur Bestimmung der Parameter der VFT-Gleichung und das Ergebnis der Kurvenanpassung.....	58
Abb. 5.8: Spektraler spezifischer elektrischer Widerstand eines Gemisches aus 45 % Polyethylenglykol und 55 % Leitungswasser.....	60
Abb. 5.9: Infrarotstrahler für die Erwärmung der Flüssigkeit im Versuchsbecken.....	62
Abb. 5.10: Anordnung der Heizer unter dem Beckenboden.....	62
Abb. 5.11: Versuchsaufbau mit Metalldeckel und Klimagerät.....	63
Abb. 5.12: Vier Temperaturzeitreihen während eines Experiments.....	65
Abb. 5.13: Auswirkungen der Einschwingzeit des verwendeten Filters auf das Signal. A) Unverraushtes, simuliertes Sinus-Signal mit einem Offset von 0,6 V B) Gefiltertes Sinus-Signal.....	67
Abb. 5.14: Übertragungsfunktion des für die Filterung verwendeten Butterworth-Bandpasses.....	67
Abb. 5.15: Bildschirmausschnitt des LabView-Programms zur Steuerung der geoelektrischen Messungen sowie zur Aufnahme und Filterung der Spannungen.....	69
Abb. 5.16: Parameternetz und die Elektroden der Belegung Nr. 1.....	72
Abb. 5.17: Sekundärfeldgitter und die Elektroden der Belegung Nr. 1.....	73
Abb. 5.18: Primärfeldgitter und die Elektroden der Belegung Nr. 1.....	74
Abb. 5.19: Verteilung der durch die Zellvolumen normierten und dekadisch logarithmierten Überdeckung für die Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung Nr. 1.....	75
Abb. 5.20: Verteilung der durch die Zellvolumen normierten und dekadisch logarithmierten Überdeckung für die Impedanztomographie mit der Elektrodenbelegung Nr. 2.....	75
Abb. 6.1: Temperaturverlauf an den beiden zusätzlichen Thermoelementen oberhalb des Infrarotstrahlers. Die Heizleistung betrug während des gesamten Experiments 13 W.....	80
Abb. 6.2: Temperaturverlauf an den beiden zusätzlichen Thermoelementen oberhalb des Infrarotstrahlers. Die Heizleistung wurde während des Experiments von 100 W auf 208 W erhöht.....	80
Abb. 6.3: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mittels geoelektrischer Impedanztomographie etwa vier Stunden nach dem Einschalten des Heizers aufgenommenen Daten.....	83

---

Abb. 6.4: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mittels geoelektrischer Impedanztomographie etwa 1,5 Stunden nach dem Entfernen des Deckels aufgenommenen Daten. Zur Verdeutlichung des in der Mitte absinkenden Plumes sind die Temperaturen mit Werten kleiner als $26,1^{\circ}\text{C}$ durchscheinend dargestellt. ....	84
Abb. 6.5: Vergleich der vor und nach der geoelektrischen Impedanztomographie direkt an den 29 Thermoelementen gemessenen Temperaturen mit den Temperaturen des Inversionsergebnisses für die zweite Impedanztomographie des zweiten Experiments.....	86
Abb. 6.6: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der zweiten geoelektrischen Impedanztomographie des fünften Experiments. Die Temperaturen mit Werten kleiner als $26,7^{\circ}\text{C}$ sind durchscheinend dargestellt. ....	89
Abb. 6.7: Die Fehlergrenzen übersteigenden maximalen Abweichungen zwischen den direkt gemessenen Temperaturen und den mittels geoelektrischer Impedanztomographie bestimmten Temperaturen für die drei Messungen des sechsten Experiments.....	92
Abb. 6.8: Die Fehlergrenzen übersteigenden maximalen Abweichungen zwischen den direkt gemessenen Temperaturen und den mittels geoelektrischer Impedanztomographie bestimmten Temperaturen für die sechs Messungen des achten Experiments.....	95
Abb. 6.9: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der dritten Impedanztomographie des elften Experiments aufgenommenen Daten. Die Temperaturen mit Werten kleiner als $22,9^{\circ}\text{C}$ sind durchscheinend dargestellt. ....	98
Abb. 6.10: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der zweiten Impedanztomographie des 15. Experiments aufgenommenen Daten. Die Temperaturen mit Werten kleiner als $25,3^{\circ}\text{C}$ sind durchscheinend dargestellt. ....	101
Abb. 6.11: Vier Temperaturzeitreihen während des 15. Experiments. ....	101
Abb. 6.12: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der elften Impedanztomographie des 13. Experiments aufgenommenen Daten. Die Temperaturen mit Werten kleiner als $28,6^{\circ}\text{C}$ sind durchscheinend dargestellt. ....	104
Abb. 6.13: In Temperaturen umgerechnetes dreidimensionales Inversionsergebnis der mit der siebenten Impedanztomographie des 14. Experiments aufgenommenen Daten.....	105

---

Abb. 7.1: Dreidimensionales Temperaturmodell, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit den um einen Millimeter abweichenden Füllständen berechnet wurde.....	108
Abb. 7.2: Temperaturdifferenzen zwischen dem theoretischen Wert von 23,2°C und dem Ergebnis, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit den um einen Millimeter abweichenden Füllständen berechnet wurde.....	109
Abb. 7.3: Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischem elektrischem Widerstand für die beiden PEG-Wasser-Gemische vor und nach der Verdunstung.....	111
Abb. 7.4: Dreidimensionales Temperaturmodell, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit und ohne die einen Zentimeter dicke Verdunstungsschicht berechnet wurde.....	112
Abb. 7.5: Temperaturdifferenzen zwischen dem theoretischen Wert von 23,2°C und dem Ergebnis, welches mittels Inversion der Quotienten aus den beiden simulierten Datensätzen mit und ohne die einen Zentimeter dicke Verdunstungsschicht berechnet wurde.....	113
Abb. 7.6: Modell für die Vorwärtsrechnung mit einem Zylinder im Zentrum des Beckens für die Simulation eines 0,252 m hohen Plumes mit einem Durchmesser von drei Zentimetern und einem um 10 $\Omega$ m geringeren spezifischen elektrischen Widerstand als die Umgebung.....	115
Abb. 7.7: Die aus der Quotienteninversion der simulierten verrauschten Datensätze für das in Abbildung 7.6 dargestellte Beispiel resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes im Zentrum des Beckens ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.....	116
Abb. 7.8: Die aus der Quotienteninversion der simulierten verrauschten Datensätze resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.....	117
Abb. 7.9: Die aus der Quotienteninversion der simulierten verrauschten Datensätze resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch den schwarzen Zylinder gekennzeichnet. Die spezifischen elektrischen Widerstände mit Werten größer als 179,5 $\Omega$ m sind durchscheinend dargestellt.....	117
Abb. 7.10: Die aus der Quotienteninversion der jeweils 4268 simulierten unverrauschten Daten resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes im Zentrum des Beckens ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.....	120

---

Abb. 7.11: Die aus der Quotienteninversion der jeweils 4268 simulierten unverrauschten Daten resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch die schwarze Umrandung an der Oberfläche gekennzeichnet.....	121
Abb. 7.12: Die aus der Quotienteninversion der jeweils 4268 simulierten unverrauschten Daten resultierende Widerstandsverteilung. Die Position des Plumes in der Mitte des vorderen Bereichs der Flüssigkeit ist durch den schwarzen Zylinder gekennzeichnet. Die spezifischen elektrischen Widerstände mit Werten größer als $179,5 \Omega \text{ m}$ sind durchscheinend dargestellt. ....	122
Abb. 8.1: Verteilung der relativen spezifischen elektrischen Widerstände, die durch die Inversion ohne Berücksichtigung des Kurzschlusses gewonnen wurden.....	129
Abb. 8.2: Verteilung der relativen spezifischen elektrischen Widerstände, die durch die Inversion mit Berücksichtigung des Kurzschlusses gewonnen wurden.....	129
Abb. A.1: Schematischer Ablaufplan für den Entwurf eines nichtrekursiven Filters am Beispiel eines Tiefpassfilters. (HAMMING, 1987).....	136

## Tabellenverzeichnis

Tab. 6.1:	Geodynamische Größen für die Erde und die durchgeführten Labor- experimente.....	81
Tab. 6.2:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die vier Messungen des ersten Experiments.....	87
Tab. 6.3:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die vier Messungen des zweiten Experiments.....	87
Tab. 6.4:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die vier Messungen des dritten Experiments.....	90
Tab. 6.5:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die drei Messungen des vierten Experiments.....	90
Tab. 6.6:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die drei Messungen des fünften Experiments.....	90
Tab. 6.7:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die drei Messungen des sechsten Experiments.....	92
Tab. 6.8:	Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die drei Messungen des fünften und des sechsten Experiments ohne Berücksichtigung der Werte an den Thermoelementen 19 und 24.....	93
Tab. 6.9:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die drei Messungen des siebenten Experiments.....	93
Tab. 6.10:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die sechs Messungen des achten Experiments.....	94
Tab. 6.11:	Die Fehlergrenzen übersteigenden Abweichungen zwischen den direkt gemessenen Temperaturen und den mittels geoelektrischer Impedanz- tomographie bestimmten Temperaturen an den beiden Thermoelementen 18 und 20 in der Nähe des generierten Plumes für die sechs Messungen des achten Experiments.....	95
Tab. 6.12:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die sechs Messungen des neunten Experiments.....	96
Tab. 6.13:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die sechs Messungen des zehnten Experiments.....	97
Tab. 6.14:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die fünf Messungen des elften Experiments.....	99
Tab. 6.15:	Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standard- abweichungen für die vier Messungen des zwölften Experiments.....	100

---

Tab. 6.16: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die neun Messungen des 15. Experiments.....	102
Tab. 6.17: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die elf Messungen des 13. Experiments. ....	104
Tab. 6.18: Messzeiten, Korrelationskoeffizienten und normierte Standardabweichungen für die 13 Messungen des 14. Experiments. ....	106
Tab. 8.1: Übersicht über die Besonderheiten und Ergebnisse der Versuche.....	124
Tab. A.2.1: Pinbelegungsplan der SCB 100 - Box für die doppelte Abtastung der Elektroden. ....	138
Tab. A.3.1: Positionen der Typ K - Thermoelemente. ....	139
Tab. A.3.2: Positionen der Platinelektroden.....	140
Tab. A.3.3: Verschaltungsplan der 10 Leitungen für die Stromeinspeisung.....	141
Tab. A.3.4: Plan über die Wahl der Elektroden und deren Verwendung (schwarz: Potenzialelektrode; blau: Referenzelektrode; rot: Speise- und Potenzialelektrode) A) Für die ersten Experimente B) Für die restlichen Experimente. ....	142

## Literaturverzeichnis

- ABERS, G. A., VAN KEKEN, P. E., KNELLER, E. A., FERRIS, A. & STACHNIK, J. C. (2006): The thermal structure of subduction zones constrained by seismic imaging: Implications for slab dehydration and wedge flow, *Earth and Planetary Science Letters*, **241**, 387 - 397.
- ANDREWS, E. R. & BILLEN, M. I. (2007): Rheologic controls on the dynamics of slab detachment, *Tectonophysics*, doi: 10.1016/j.tecto.2007.09.004.
- AYARZA, P. & MARTÍNEZ CATALÁN, J. R. (2007): Potential field constraints on the deep structure of the Lugo gneiss dome (NW Spain), *Tectonophysics*, **439**, 67 - 87.
- BECKER, T., MITZSCHERLING, M. & DELGADO, A. (2001): Ultrasonic Velocity – A Noninvasive Method for the Determination of Density during Beer Fermentation, *Engineering in Life Sciences*, **1**, 61 - 67.
- BOHNHOFF, M., MAKRIS, J., PAPANIKOLAOU, D. & STAVRAKAKIS, G. (2001): Crustal investigation of the Hellenic subduction zone using wide aperture seismic data, *Tectonophysics*, **343**, 239 - 262.
- BRUN, J.-P. & FACCENNA, C. (2008): Exhumation of high-pressure rocks driven by slab rollback, *Earth and Planetary Science Letters*, doi: 10.1016/j.epsl.2008.02.038.
- CAPITANIO, F. A., MORRA, G. & GOES, S. (2007): Dynamic models of downgoing plate-buoyancy driven subduction: Subduction motions and energy dissipation, *Earth and Planetary Science Letters*, **262**, 284 - 297.
- CHOU, H.-C., KUO, B.-Y., HUNG, S.-H., CHIAO, L.-Y., ZHAO, D. & WU, Y.-M. (2006): The Taiwan-Ryukyu subduction-collision complex: Folding of a viscoelastic slab and the double seismic zone, *Journal of Geophysical Research*, **111**, B04410, doi: 10.1029/2005JB003822.
- DAVAILLE, A., LIMARE, A., VIDAL, V., VATTEVILLE, J., LE BARS, M., CARBONNE, C. & BIENFAIT, G. (2007): Imaging isotherms and velocity fields in convective viscous fluid, *Geophysical Research Abstracts*, **9**, 10258.

- DAVIES, G. F. (1999): *Dynamic Earth: Plates, Plumes and Mantle Convection*, Cambridge University Press, Cambridge.
- DETERS, T., GLIEMANN, S. & EGBERS, C. (2005): Particle-Image-Velocimetry unter Einsatz von thermochromen Flüssigkristallen, *Fachtagung „Lasermethoden in der Strömungstechnik“*, Technische Universität Cottbus.
- DUBUFFET, F., YUEN, D. A. & RABINOWICZ, M. (1999): Effects of a realistic mantle thermal conductivity on the patterns of 3-D convection, *Earth and Planetary Science Letters*, **171**, 401 - 409.
- DUFF, I. S., ERISMAN, A. M. & REID, J. K. (1986): *Direct methods for sparse matrices*, Oxford University Press, Oxford.
- EDER F. (1981): *Arbeitsmethoden der Thermodynamik, Band 1 Temperaturmessung*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- EDER K. (2004): *Berührungslose Temperaturmessung an Flüssigkeiten in geschlossenen Behältern*, Dissertation, Technische Universität München.
- FEIGL, K. L. & THATCHER, W. (2006): Geodetic observations of post-seismic transients in the context of the earthquake deformation cycle, *C. R. Geoscience*, **338**, 1012 - 1028.
- FRIEDEL, S. (2000): *Über Abbildungseigenschaften der geoelektrischen Impedanztomographie unter Berücksichtigung von endlicher Anzahl und endlicher Genauigkeit der Meßdaten*, Dissertation, Universität Leipzig.
- FUJISAWA, N. FUNATANI, S. & KATO, N. (2005): Scanning liquid-crystal thermometry and stereo velocimetry for simultaneous three-dimensional measurement of temperature and velocity field in a turbulent Rayleigh-Bénard convection, *Experiments in Fluids*, **38**, 291 - 303.
- FULCHER, G. S. (1925): Analysis of recent measurements of the viscosity of glasses, *Journal of the American Ceramic Society*, **8**, 339 - 355, doi: 10.1111/j.1151-2916.1925.tb16731.x.



- FUNICIELLO, F., FACCENNA, C., GIARDINI, D. & REGENAUER-LIEB, K. (2003): Dynamics of retreating slabs: 2. Insights from three-dimensional laboratory experiments, *Journal of Geophysical Research*, **108** (B4), 2207, doi: 10.1029/2001JB000896.
- FUTTERER, B., GELLERT, M. & EGBERS, C. (2005): Das GeoFlow-Experiment auf der ISS: Simulation optischer Messverfahren für die thermische Konvektion im Kugelspalt, *Fachtagung „Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik“*, Brandenburgische Technische Universität Cottbus.
- GERNIGON, L., OLESEN, O., EBBING, J., WIENECKE, S., GAINA, C., MOGAARD, J. O., SAND, M. & MYKLEBUST, R. (2008): Geophysical insights and early spreading history in the vicinity of the Jan Mayen Fracture Zone, Norwegian-Greenland Sea, *Tectonophysics*, doi: 10.1016/j.tecto.2008.04.025.
- GESELOWITZ, D. B. (1971): An application of electrocardiographic lead theory to impedance plethysmography, *IEEE transaction on Bio-medical Eng.*, **BME - 18**, 38 - 41.
- GREENWOOD, M. S., SKORPIK, J. R., BAMBERGER, J. A. & HARRIS, R. V. (1999): On-line ultrasonic density sensor for process control of liquids and slurries, *Ultrasonics*, **37**, 159 - 171.
- GRIFFITHS, R. W. & CAMPBELL, I. H. (1990): Stirring and structure in mantle starting plumes, *Earth and Planetary Science Letters*, **99**, 66 - 78.
- GUILLOT, S., MAHÉO, G., DE SIGOYER, J., HATTORI, K. H. & PÊCHER, A. (2008): Tethyan and Indian subduction viewed from the Himalayan high- to ultrahigh-pressure metamorphic rocks, *Tectonophysics*, **451**, 225 - 241.
- GÜNTHER, R., KLEMPERER, S. L. & GOODLIFFE, A. M. (2008): Modeling sideswipe in 2D oceanic seismic surveys from sonar data: Application to the Mariana arc, *Tectonophysics*, **420**, 333 - 343.
- GÜNTHER, T., RÜCKER, C. & SPITZER, K. (2006): Three-dimensional modelling and inversion of dc resistivity data incorporating topography – II. Inversion, *Geophysical Journal International*, **166**, 506 - 517.
- HAMMING, R. W. (1987): *Digitale Filter*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim.

- HANSEN, P. C. & O'LEARY, D. P. (1993): The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, *SIAM J. Sci. Comput.*, **14**, 1487 - 1503.
- HEURET, A., FUNICIELLO, F., FACCENNA, C. & LALLEMAND S. (2007): Plate kinematics, slab shape and back-arc stress: A comparison between laboratory models and current subduction zones, *Earth and Planetary Science Letters*, **256**, 473 - 483.
- HUPPRICH, T. (2001): *Raman-spektroskopische Untersuchungen an Alkali- und Erdalkalisilicatgläsern bei hohen Temperaturen*, Dissertation, Universität Mainz.
- ICHIKI, M., BABA, K., OBAYASHI, M. & UTADA, H. (2006): Water content and geotherm in the upper mantle above the stagnant slab: Interpretation of electrical conductivity and seismic P-wave velocity models, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **155**, 1 - 15.
- JACOBY, W. R. (1976): Paraffin model experiment of plate tectonics, *Tectonophysics*, **35**, 103 - 113.
- JIMÉNEZ-MUNT, I., FERNÁNDEZ, M., VERGÉS, J. & PLATT, J. P. (2008): Lithosphere structure underneath the Tibetan Plateau inferred from elevation, gravity and geoid anomalies, *Earth and Planetary Science Letters*, **267**, 276 - 289.
- KHERROUBI, A., DÉVERCHÈRE, J., YELLES, A., MERCIER DE LÉPINAY, B., DOMZIG, A., CATTANEO, A., BRACÈNE, R., GAULLIER, V. & GRAINDORGE, D. (2008): Recent and active deformation pattern off the easternmost Algerian margin, Western Mediterranean Sea: New evidence for contractional tectonic reactivation, *Marine Geology*, doi: 10.1016/j.margeo.2008.05.016.
- KNÖDEL, K., KRUMMEL, H. & LANGE, G. (1997): *Geophysik, Band 3*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- KUMAGAI, I., DAVAILLE, A. & KURITA, K. (2007): On the fate of thermally buoyant mantle plumes at density interfaces, *Earth and Planetary Science Letters*, **254**, 180 - 193.
- LASSAK, T. M., MCNAMARA, A. K. & ZHONG, S. (2007): Influence of thermochemical piles on topography at Earth's core-mantle boundary, *Earth and Planetary Science Letters*, **261**, 443 - 455.

- LANCZOS, C. (1956): *Applied Analysis*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.
- MILITZER, H. & WEBER, F. (1985): *Angewandte Geophysik, Band 2*, Springer-Verlag Wien / Akademie-Verlag Berlin.
- NATIONAL INSTRUMENTS (2007): Manual „DAQ E Series – E Series Manual“.
- NOLET, G., ALLEN, R. & ZHAO, D. (2007): Mantle plume tomography, *Chemical Geology*, **241**, 248 - 263.
- PARK, S. K. & VAN, G. P. (1991): Inversion of pole-pole data for 3-d resistivity structure beneath arrays of electrodes, *Geophysics*, **56**, 951 - 960.
- PAVEZ, A., REMY, D., BONVALOT, S., DIAMENT, M., GABALDA, G., FROGER, J.-L., JULIEN, P., LEGRAND, D. & MOISSET, D. (2006): Insight into ground deformations at Lascar volcano (Chile) from SAR interferometry, photogrammetry and GPS data: Implications on volcano dynamics and future space monitoring, *Remote Sensing of Environment*, **100**, 307 - 320.
- PEHL, M. (2004): *In-situ Diagnose thermofluidodynamischer Vorgänge in komprimierten Flüssigkeiten*, Dissertation, Technische Universität München.
- POLLACK, H. N., HURTER, S. J. & JOHNSON, J. R. (1993): Heat flow from the Earth's interior: analysis of the global data set, *Reviews of Geophysics*, **31**, 3, 267 - 280.
- PUTIRKA, K. D., PERFIT, M., RYERSON, F. J. & JACKSON, M. G. (2007): Ambient and excess mantle temperatures, olivine thermometry, and active vs. passive upwelling, *Chemical Geology*, **241**, 177 - 206.
- QI, C., ZHAO, D. & CHEN, Y. (2007): Search for deep slab segments under Alaska, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **165**, 68 - 82.
- RANALLI, G. (1995): *Rheology of the Earth: Second Edition*, Chapman & Hall, London.
- ROBINSON, G. A., LUCHT, R. P. & LAURENDEAU, N. M. (2008): Two-color planar laser-induced fluorescence thermometry in aqueous solutions, *Applied Optics*, **47**, 2852 - 2858.

- RÜCKER, C. (2003): 3D-FEM Widerstandsmodellierung unter Verwendung von unstrukturierten Tetraederdiskretisierungen. In: *20. Kolloquium Königstein/Sächsische Schweiz, Band 20 der Reihe Elektromagnetische Tiefenforschung*. Deutsche Geophysikalische Gesellschaft, A. Hördt and J.B. Stoll.
- RÜCKER, C., GÜNTHER, T. & SPITZER, K. (2006): Three-dimensional modelling and inversion of dc resistivity data incorporating topography – I. Modelling, *Geophysical Journal International*, **166**, 495 - 505.
- SCHRADER, B. (1997): Die Möglichkeiten der Raman-Spektroskopie im Nah-Infrarot-Bereich, Teil 1, *Chemie in unserer Zeit*, **31**, 229 - 234.
- SCHRÜFER, E. (1992): *Signalverarbeitung: Numerische Verarbeitung digitaler Signale*, Carl Hanser Verlag, München Wien.
- SEAMA, N., BABA, K., UTADA, H., TOH, H., TADA, N., ICHIKI, M. & MATSUNO, T. (2007): 1-D electrical conductivity structure beneath the Philippine Sea: Results from an ocean bottom magnetotelluric survey, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **162**, 2 - 12.
- SHAPIRO, N. M. & RITZWOLLER, M. H. (2004): Inferring surface heat flux distributions guided by a global seismic model: particular application to Antarctica, *Earth and Planetary Science Letters*, **223**, 213 - 224.
- SI, H. (2003): TETGEN: A 3d delaunay tetrahedral mesh generator, <http://tetgen.berlios.de>.
- STEARNS, S. D. & HUSH, D. R. (1994): *Digitale Verarbeitung analoger Signale*, R. Oldenbourg Verlag, München Wien.
- TAMMANN, G. & HESSE, W. (1926): Die Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur bei unterkühlten Flüssigkeiten, *Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie*, **156**, 245 - 257.
- TASSARA, A., SWAIN, C., HACKNEY, R. & KIRBY, J. (2007): Elastic thickness structure of South America estimated using wavelets and satellite-derived gravity data, *Earth and Planetary Science Letters*, **253**, 17 - 36.

- TOMMASI, A., VAUCHEZ, A. & IONOV, D. A. (2008): Deformation, static recrystallization, and reactive melt transport in shallow subcontinental mantle xenoliths (Tok Cenozoic volcanic field, SE Siberia), *Earth and Planetary Science Letters*, doi: 10.1016/j.epsl.2008.04.020.
- TURCOTTE, D. L., SCHUBERT G. (2002): *Geodynamics: Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge.
- VIDAL, V. (2005): *Interaction des différentes échelles de convection dans le manteau terrestre*, Dissertation, Institut de Physique du Globe de Paris.
- VIGNAROLI, G., FACCENNA, C., JOLIVET, L., PIROMALLO, C. & ROSSETTI, F. (2008): Subduction polarity reversal at the junction between the Western Alps and the Northern Apennines, Italy, *Tectonophysics*, **450**, 34 - 50.
- VOGEL, H. (1921): Temperaturabhängigkeitsgesetz der Viskosität von Flüssigkeiten, *Physikalische Zeitschrift*, **22**, 645 - 646.
- WHITEHEAD, J. A. & LUTHER, D. S. (1975): Dynamics of laboratory diapir and plume models, *Journal of Geophysical Research*, **80**, B5, 705 - 717.
- XUE, M. & ALLEN, R. M. (2007): The fate of the Juan de Fuca plate: Implications for a Yellowstone plume head, *Earth and Planetary Science Letters*, **264**, 266 - 276.
- YOON, M., BUSKE, S., SHAPIRO, S. A. & WIGGER, P. (2008): Reflection Image Spectroscopy across the Andean subduction zone, *Tectonophysics*, doi: 10.1016/j.tecto.2008.03.014.

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit „Anwendung der geoelektrischen 3D-Tomographie für die Analyse thermisch induzierter Strömungen im Labor“ selbst angefertigt und alle benutzten Hilfsmittel in der Arbeit angegeben habe.

Die Dissertation hat in gleicher oder anderer Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Außerdem hatte ich weder diese Dissertation noch Teile davon bei einer anderen Fakultät bzw. einem anderen Fachbereich als Dissertation eingereicht.

Mainz, 09.10.2008

# Lebenslauf

## Präsentationen

**Bock, M.**, Regenauer-Lieb, K., Lotze, M., Wilke, T., Lentes, F.-T. & Siedow, N. (2006): Untersuchung von Konvektionsströmungen im Laborversuch mit Hilfe der geoelektrischen 3D-Tomographie. 66. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, Bremen.

**Bock, M.**, Regenauer-Lieb, K., Lotze, M., Wilke, T., Lentes, F.-T., Siedow, N. & Rücker, C. (2006): Analysis of convections in viscous materials in laboratory by DC-geolectrical 3D-tomography. Final Colloquium des Graduiertenkollegs "Stoffbestand und Entwicklung von Kruste und Mantel", Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz.

**Bock, M.**, Regenauer-Lieb, K., Lotze, M., Wilke, T., Lentes, F.-T., Siedow, N. & Rücker, C. (2007): Untersuchung von Konvektionen im Laborversuch mit Hilfe der geoelektrischen 3D-Tomographie. 67. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, Aachen.

**Bock, M.**, Regenauer-Lieb, K., Lotze, M., Wilke, T., Lentes, F.-T., Siedow, N. & Rücker, C. (2007): Analysis of convections in laboratory by geoelectrical 3D-tomography. Subduction Zone Geodynamics Conference, Montpellier / France.

**Bock, M.**, Regenauer-Lieb, K., Lotze, M., Wilke, T. & Rücker, C. (2008): Anwendung der geoelektrischen 3D-Tomographie für die Analyse thermisch induzierter Strömungen im Labor. 68. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, Freiberg.

**Bock, M.**, Regenauer-Lieb, K., Lotze, M., Wilke, T. & Rücker, C. (2008): Analysis of thermally induced flows in the laboratory by geoelectrical 3-D tomography. European Geosciences Union General Assembly 2008, Vienna / Austria.