

# **Ausbreitung einer Infektion durch ein System Brownscher Bewegungen**

Dissertation zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und  
Informatik der Johannes  
Gutenberg-Universität in Mainz

Felix Schneider  
geboren in Mainz

Mainz 2011

ii

Datum der mündlichen Prüfung: 22.Juni 2011

### Zusammenfassung/Abstract

In dieser Arbeit werden wir ein Modell untersuchen, welches die Ausbreitung einer Infektion beschreibt. Bei diesem Modell werden zunächst Partikel gemäß eines Poissonschen Punktprozesses auf der reellen Achse verteilt. Links eines gewissen Punktes auf der reellen Achse sind alle Partikel von einer Infektion befallen. Während sich nicht infizierte Partikel nicht bewegen, folgen die infizierten Partikel den Pfaden von voneinander unabhängigen Brownschen Bewegungen und verbreiten die Infektion dabei an den Orten, welche sie betreten. Wenn sie dabei auf ein nicht infiziertes Partikel treffen, ist dieses von diesem Moment an auch infiziert und beginnt ebenfalls, dem Pfad einer Brownschen Bewegung zu folgen und die Infektion auszubreiten. Auf diese Art verschiebt sich nun der am weitesten rechts liegende Ort  $R_t$ , an dem die Infektion bereits verbreitet wurde. Wir werden mit Hilfe des subadditiven Ergodensatzes zeigen, dass sich dieser Ort asymptotisch linear fortbewegt. Ferner werden wir eine obere und eine untere Schranke für die Ausbreitungsgeschwindigkeit angeben. Danach werden wir zeigen, dass der Prozess Regenerationszeiten hat, nämlich solche zufällige Zeiten, zu denen er eine Art Neustart unter speziellen Startbedingungen durchführt. Wir werden diese für eine weitere Charakterisierung der Ausbreitungsgeschwindigkeit nutzen. Ferner erhalten wir durch die Regenerationszeiten auch einen Zentralen Grenzwertsatz für  $R_t$  und können zeigen, dass die Verteilung der infizierten Partikel aus Sicht des am weitesten rechts liegenden infizierten Ortes gegen eine invariante Verteilung konvergiert.

In this thesis we will study a model which describes the spread of an infection. Therefore, we assume that there are particles spread out on the real axis, and that their positions are given by a Poisson point process. Left of a certain point, these particles are carrying an infection. While the noninfected particles do not move, the infected particles follow the paths of independent Brownian motions and spread the infection at all places they visit. Should an infected particle arrive at the position of a noninfected particle, it will pass on the disease and the newly infected particle will also start following the path of a Brownian motion and spreading the infection. This way the rightmost infected place  $R_t$  on the real axis moves on with time. Using the subadditive ergodic theorem, we will show that asymptotically this rightmost position moves linearly, and we will give bounds for its speed. Having done this, we will show that the process admits the definition of regeneration times. At these random times, the process behaves like started anew under certain special conditions. We can use these regeneration times to give another characterization of the speed, at which the infection is spread. Furthermore, they allow us to prove a central limit theorem for  $R_t$ . Finally, we will show convergence of the distribution of infected particles seen from  $R_t$  to an invariant distribution.



# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vii
<b>1 Das kontinuierliche Froschmodell und der subadditive Ergodensatz</b>	<b>1</b>
1.1 Konstruktion des Prozesses . . . . .	1
1.2 Anwendung des subadditiven Ergodensatzes . . . . .	6
1.3 Eine obere Schranke für die Geschwindigkeit . . . . .	12
<b>2 Regenerationszeiten</b>	<b>19</b>
2.1 Zwei Hilfsprozesse . . . . .	19
2.2 Regenerationszeiten . . . . .	23
<b>3 Technische Details</b>	<b>33</b>
3.1 Schranken für $U^H$ . . . . .	33
3.2 Schranken für $V$ . . . . .	44
3.3 Schranken für $W$ und $D^H$ . . . . .	45
3.4 Schranken für Treffzeiten von $R_t$ . . . . .	49
3.5 Abschätzungen für $J_t$ und Partikeldichten . . . . .	57
<b>4 Regeneration und Grenzwertsätze</b>	<b>69</b>
4.1 Die Regenerationsstruktur . . . . .	69
4.2 Grenzwertsätze . . . . .	79
<b>5 Simulation</b>	<b>91</b>
<b>A Verschiedene Lemmata</b>	<b>95</b>
<b>B Algorithmus</b>	<b>101</b>



# Einleitung

Die Ausgangssituation für diese Arbeit war die folgende: Wir betrachten einen Poissonschen Punktprozess (PPP) auf  $\mathbb{R}$  und nehmen an, dass sich in jedem der Punkte zur Zeit 0 ein Partikel befindet. Wir wollen weiter annehmen, dass bis zu einem gewissen Punkt auf der reellen Achse alle Partikel von einer Infektion befallen sind. Die Partikel sollen nun den Pfaden von voneinander unabhängigen Brownschen Bewegungen folgen. Immer wenn ein infiziertes Partikel an einen Ort kommt, an dem sich die Infektion noch nicht ausgebreitet hat, verbreitet es sie dort, auch, wenn sich dort zur gleichen Zeit keine anderen Partikel aufhalten. Kommt ein nicht infiziertes Partikel an einen Ort, an dem die Infektion verbreitet wurde, so trägt es ab diesem Moment ebenfalls die Infektion und verbreitet sie von nun an ebenfalls weiter. Auf diese Art verschiebt sich nun der am weitesten rechts liegende Ort  $N_t$  (die „Marke“), an dem die Infektion bereits verbreitet wurde. Ziel war nun, das Verhalten des Prozesses  $N_t$  zu untersuchen. Insbesondere sollte gezeigt werden, dass

$$\liminf \frac{N_t}{t} > 0. \quad (0.1)$$

Diese Vermutung ist naheliegend: So hat Goldammer in ihrer Diplomarbeit [12] ein analoges Modell mit dem Namen „dirty feet model“ untersucht, bei dem statt Brownscher Bewegungen zeitstetige, einfache symmetrische Irrfahrten auf  $\mathbb{Z}$  eine Infektion verbreiten. Es lässt sich leicht zeigen, dass sich die Infektion in diesem Modell schneller ausbreitet, als in dem Modell, welches Kesten und Sidoravicius in [11] untersuchen. Dort wird die Infektion nicht an *Orten* verbreitet, sondern nur an andere nicht infizierte *Partikel* weitergegeben, und zwar dann, wenn diese sich am gleichen Ort aufhalten, wie ein infiziertes Partikel. Ist  $\tilde{N}_t$  der am weitesten rechts gelegene Aufenthaltsort eines infizierten Partikels zur Zeit  $t$ , so zeigen Kesten und Sidoravicius, dass es in diesem Falle Konstanten  $0 < c < C < \infty$  gibt, so dass f.s.

für große  $t$  die Ungleichung  $c < \frac{\tilde{N}_t}{t} < C$  gilt. Insbesondere folgt damit auch (0.1) für das diskrete Modell auf  $\mathbb{Z}$ . Leider ließ sich weder dieses Ergebnis, noch die in [11] benutzten Methoden auf den Brownschen Fall übertragen. Der nächste Zugang sollte über das sogenannte „frog model“ erfolgen, welches von von Alves, Machado, Popov in [9] bzw. zusammen mit Ravishankar in [15], sowie von Ramirez und Sidoravicius in [10] untersucht wurde. In [9] ist die Ausgangssituation der  $\mathbb{Z}^d$ , in dem sich an jeder Stelle ein Partikel befindet. Diese Partikel „schlafen“ alle bis auf eines, welches sich beispielsweise in der 0 befindet. Das in der 0 befindliche Partikel beginnt nun, sich entlang einer zeitdiskreten, symmetrischen einfachen Irrfahrt zu bewegen. Wenn ein „wachses“ Partikel nun auf einen Punkt springt, an dem sich ein schlafendes Teilchen befindet, so wacht dieses auf und folgt ebenfalls einer von den anderen Irrfahrten unabhängigen, zeitdiskreten, symmetrischen einfachen Irrfahrt. Alves, Machado und Popov zeigen nun, dass für diesen Prozess ein sogenanntes „shape theorem“, eine Art Gesetz großer Zahlen für zufällige Mengen, gilt. Das heißt, dass es eine nicht leere, konvexe Menge  $\mathcal{A}$  gibt, so dass für jedes  $\varepsilon > 0$  für die Menge  $\bar{\xi}_n = \{y + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d \mid y \in \xi_n\}$ , wobei  $\xi_n$  die Menge aller von wachen Teilchen bis zur Zeit  $n$  besuchten Punkte ist, f.s. gilt:

$$(1 - \varepsilon)\mathcal{A} \subset \frac{\bar{\xi}_n}{n} \subset (1 + \varepsilon)\mathcal{A}.$$

Solche shape theorems finden sich für viele Arten von Prozessen, wie z.B. für den Kontaktprozess (siehe z.B. [5]), first passage percolation (wie in [4]) oder für DLA (in [6]). Zusammen mit Ravishankar erhalten Alves, Machado und Popov dann in [15] ein weiteres shape theorem, wobei sich hier im Gegensatz zu der Situation in [9] zu Beginn in jedem Punkt von  $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  nicht genau ein Partikel, sondern zufällig viele Partikel befinden, wobei die Anzahlen der zufälligen Partikel an den verschiedenen Punkten u.i.v. sind. In [10] beweisen Ramírez und Sidoravicius eine ähnliche, aber weitreichendere Aussage über das „frog model“. Dieses ist hierbei definiert wie in [9], nur dass die Irrfahrten hier nicht zeitdiskret, sondern zeitkontinuierlich sind. Zentral in allen drei Arbeiten ist dabei der subadditive Ergodensatz, der zunächst von Kingman in [2] formuliert und später durch Liggett in [3] verbessert wurde. Die Arbeiten verwenden den subadditiven Ergodensatz, indem sie für eine vorgegebene Raumrichtung  $x \in \mathbb{Z}^d$  Zufallsvariablen  $T_{m,n}$  definieren, wobei  $T_{m,n}$  die Zeit ist, die vergeht, bis zum ersten Mal ein wa-



ches Partikel den Ort  $n \cdot x$  betritt, wenn das System mit nur einem wachen Partikel in  $m \cdot x$  und sonst nur schlafenden Partikeln gestartet wurde.

Für den Fall  $d = 1$  benutzen Comets, Quastel und Ramírez in [16] eine gänzlich andere Methode: Sie verwenden sogenannte *Regenerationszeiten*  $\kappa_i$ , mit der Eigenschaft, dass kein Partikel, welches sich zur Zeit  $\kappa_i$  links der Marke der weitesten Ausbreitung befindet, nach  $\kappa_i$  jemals wieder diese Marke erreicht. Zu diesen Zeiten verhält sich der Prozess, als wäre er frisch mit einer sehr einfachen Ausgangskonfiguration neu gestartet worden, er „regeneriert“ gewissermaßen. Comets, Quastel und Ramírez können mit dieser Methode sogar einen zentralen Grenzwertsatz und eine invariante Verteilung von Partikeln links der Marke formulieren.

Wir wollen nun für  $d = 1$  ein entsprechendes Modell im kontinuierlichen Raum betrachten. Die Irrfahrten ersetzen wir hierbei wieder durch Brownsche Bewegungen, während die Startkonfiguration genau wie im ursprünglichen Problem durch einen PPP bestimmt sein soll. Durch diese Variante des ursprünglichen Problems können wir nun sowohl den subadditiven Ergodensatz anwenden, als auch die Methode der Regenerationszeiten übertragen, was für die Brownsche Variante des dirty feet models beides nicht möglich gewesen wäre: Der subadditive Ergodensatz wäre aufgrund fehlender Subadditivität des Modells zum Scheitern verurteilt, während sich die Methode der Regenerationszeiten aufgrund der sich verändernden Verteilung von Partikeln rechts der Marke nicht anwenden ließe.

Hauptteil dieser Arbeit ist also eine Analyse des eben beschriebenen raumkontinuierlichen Froschmodells.

In Kapitel 1 werden wir dazu zunächst das Froschmodell formal einführen und den subadditiven Ergodensatz anwenden. Wir werden ebenfalls konkrete untere (Satz 1.2.5) und obere Schranken (Satz 1.3.2) für die Geschwindigkeit der Marke berechnen.

In Kapitel 2 werden wir uns der Regenerationsstruktur widmen. Dazu werden wir zunächst zwei Hilfsprozesse einführen (Abschnitt 2.1.), um dann in Abschnitt 2.2. diverse Funktionale und Stoppzeiten, und mit deren Hilfe schließlich die Regenerationszeiten zu definieren.

Mit Kapitel 3 folgt der umfangreichste Teil der Arbeit. Hier werden wir diverse Abschätzungen für die Funktionale und Stoppzeiten aus Abschnitt 2.2. finden. Weitere technische Details allgemeiner Natur werden später in Anhang A geklärt werden.

## Hauptergebnisse

In Kapitel 4 sind die wesentlichen Aussagen der Arbeit vereint. Zunächst zeigen wir in Abschnitt 4.1., dass die zuvor definierten Regenerationszeiten fast sicher endlich sind (Satz 4.1.1) und endliche erste und zweite Momente haben (Satz 4.1.3). Danach beweisen wir, dass die Regenerationszeiten ihren Namen auch verdienen und dem Prozess in gewisser Weise zu einem Neustart verhelfen (Sätze 4.1.10 bzw. 4.1.11). In Abschnitt 4.2. werden wir schließlich sehen, dass für das Froschmodell ein Gesetz der großen Zahlen (Satz 4.2.1) sowie ein zentraler Grenzwertsatz (Satz 4.2.2) gelten, und dass es ein invariantes Maß gibt, gegen das die Verteilung von Partikeln links der Marke konvergiert (Satz 4.2.9).

Zuletzt werden wir uns noch einmal der Ausgangsfrage bezüglich des dirty feet model zuwenden, indem wir in Kapitel 5 eine Computersimulation beider Modelle betrachten, die nahelegt, dass sich die Infektion im dirty feet model schneller ausbreitet als im Froschmodell.

# Kapitel 1

## Das kontinuierliche Froschmodell und der subadditive Ergodensatz

In diesem Kapitel soll zunächst das kontinuierliche Froschmodell formal definiert werden, um dann den subadditiven Ergodensatz darauf anwenden zu können. Wir werden die Marke der weitesten Ausbreitung der Infektion im Froschmodell mit  $R_t$  bezeichnen und mit Hilfe des subadditiven Ergodensatzes zeigen, dass

$$v := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} > 0 \quad (1.1)$$

existiert und eine Charakterisierung für  $v$  erhalten. Danach werden wir noch eine obere Schranke für  $v$  bestimmen.

### 1.1 Konstruktion des Prozesses

Wir wollen zunächst den Raum definieren, auf dem unser Prozess leben wird.

#### 1.1.1 Definition

Sei  $\vartheta > 0$ . Der *Raum der Konfigurationen wacher Partikel* zum Parameter  $\vartheta$  sei gegeben durch

$$\mathbb{S}_\vartheta := \left\{ (x, r) : r \geq 0, x \in (-\infty, r]^I : I \text{ abzählbar}, 0 < \sum_{i \in I} e^{\vartheta(x(i)-r)} < \infty \right\}. \quad (1.2)$$

Ein Element  $(x, r) \in \mathbb{S}_\vartheta$  besteht aus einer *Markenposition*  $r$  und aus *Partikelpositionen*  $x(i), i \in I$  wacher Partikel mit Indexmenge  $I$ .

### 1.1.2 Bemerkung

Wir werden für unseren Prozess nur Startkonfigurationen  $(x, r) \in \mathbb{S}_\vartheta$  verwenden, welche  $r = \sup_{i \in I} \{x(i)\}$  erfüllen. Diese Einschränkung ist nicht unbedingt notwendig, erleichtert uns aber an einigen Stellen das Leben (siehe z.B. Definition 1.1.3).

Wir wollen nun die Dynamik des Prozesses beschreiben. Wir definieren dazu zu einer gegebenen Startkonfiguration  $(x, r) \in \mathbb{S}_\vartheta$  mit Indexmenge  $I_0$  eine Familie  $(E_i, i \in \mathbb{N})$  unabhängiger  $\exp_1$ -verteilter Zufallsvariablen und setzen

$$\eta_n := r + \sum_{i=1}^n E_i.$$

Die Zufallsvariablen  $\eta_n$  sollen die Orte beschreiben, an denen sich schlafende Partikel befinden. Sei weiter  $(B^{(i)}, i \in I_0 \cup \mathbb{N})$  eine unabhängige Familie Brownscher Bewegungen. Dann setzen wir für  $i \in I_0$  und  $t \geq 0$ :

$$X_t^{(i)} := x(i) + B_t^{(i)}$$

und nennen  $X^{(i)} := (X_t^{(i)})_{t \geq 0}$  den *Pfad des in  $x(i)$  gestarteten Partikels*.

Sei nun  $\tau_1$  der Zeitpunkt, an dem zum ersten Mal ein wacher Partikel den Ort  $\eta_1$  erreicht und das in  $\eta_1$  startende Partikel weckt. Dieses soll dann fortan als wach gelten und dem Pfad  $\eta_1 + B_{t-\tau_1}^{(1)}$  folgen. Wir bezeichnen die Menge, welche die Partikelpfade der zur Zeit  $t$  wachen Partikel indiziert, mit  $I_t$  und definieren rekursiv:

$$\tau_n := \tau(0, n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0, \\ \min \left\{ t \mid \exists i \in I_t : X_t^{(i)} = \eta_n \right\} & \text{für } n > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

und

$$X_t^{(n)} := \begin{cases} \eta_n + B_{t-\tau_n}^{(n)}, & t \geq \tau_n \\ \eta_n, & 0 \leq t < \tau_n. \end{cases} \quad (1.4)$$

Das Minimum, welches in der Definition von  $\tau_n$  verwendet wird, existiert, da die Summierbarkeitsbedingung in (1.2) dafür sorgt, dass fast sicher zu jeder Zeit  $T > 0$  nur endlich viele Partikelpfade den Punkt  $\eta_n$  erreicht haben.

Wir wollen nun das raumkontinuierliche Froschmodell definieren. Es ist handlicher und für unsere Zwecke ausreichend, wenn wir uns bei der Beschreibung des Prozesses auf die wachen Partikel konzentrieren.

### 1.1.3 Definition

Es sei

$$X_t := \left( X_t^{(i)} : i \in I_t \right).$$

Wir bezeichnen dann  $(X_t)_{t \geq 0}$  als den *Partikelprozess des raumkontinuierlichen Froschmodells*. Ferner ist

$$R_t := \sup \left\{ X_s^{(i)} \mid s \leq t, i \in I_t \right\}$$

der äußerste rechte Ort, der bis zur Zeit  $t$  jemals von einem wachen Partikel des Prozesses besucht wurde. Wir nennen  $(R_t)_{t \geq 0}$  den *Markenprozess des raumkontinuierlichen Froschmodells*. Dementsprechend wollen wir  $(X_t, R_t)_{t \geq 0}$  als das *raumkontinuierliche Froschmodell* bezeichnen.

### 1.1.4 Lemma

Ist  $(X_0, R_0) \in \mathbb{S}_\vartheta$ , so ist der Prozess  $(X_t, R_t)_{t \geq 0}$  ein auf  $\mathbb{S}_\vartheta$  lebender starker Markovprozess.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass  $R_t < \infty$  und  $\sum_{i \in I_t} e^{\vartheta(X_t^{(i)} - R_t)} < \infty$  für alle  $t > 0$  gilt (für  $t = 0$  ist dies nach Voraussetzung erfüllt). Aus Lemma 1.3.2 (welches wir später noch zeigen werden) folgt  $R_t < \infty$  direkt.

Weiter stellen wir fest, dass die Prozesse  $\exp(\vartheta X_t^{(i)} - \frac{\vartheta^2}{2}t)$  für  $i \in I_0$  und  $\exp(\vartheta X_t^{(i)} - 0 \wedge \frac{\vartheta^2}{2}(t - \tau_i))$  für  $i \in \mathbb{N}$  Martingale sind (siehe auch Lemma A.3). Aufgrund des Satzes über monotone Konvergenz können wir somit folgern, dass auch  $\sum_{i \in I_0} \exp(\vartheta X_t^{(i)} - \frac{\vartheta^2}{2}t)$  ein Martingal ist. Da  $R_t < \infty$  und zwei benachbarte schlafende Partikel jeweils einen  $\exp_1$ -verteilten Abstand haben, werden bis zur Zeit  $t$  nur endlich viele zusätzliche Partikel geweckt. Sei  $n_t$  diese Anzahl, dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{i \in I_t} e^{\vartheta(X_t^{(i)} - R_t)} \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i \in I_0} e^{\vartheta(X_t^{(i)} - R_t)} \right] + \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^{n_t} e^{\vartheta(X_t^{(i)} - R_t)} \right] \\ &\leq e^{\frac{\vartheta^2}{2}t} \left( \sum_{i \in I_0} e^{\vartheta(X_0^{(i)} - R_t)} + \sum_{j=1}^{n_t} e^{\vartheta(\eta_j - R_t)} \right) < \infty, \end{aligned}$$

woraus wiederum  $\sum_{i \in I_t} \exp(\vartheta(X_t^{(i)} - R_t)) < \infty$  folgt.

Die starke Markoveigenschaft gilt, da der Prozess ein Ensemble von Brownschen Bewegungen mit deren gemeinsamen Maximum ist.  $\square$

### 1.1.5 Definition

Wir erhalten aus  $X_t$  für alle  $t \geq 0$  den Punktprozess

$$\tilde{X}_t := \sum_{i \in I_t} \delta_{X_t^{(i)}}.$$

Der Prozess  $(\tilde{X}_t, R_t)_{t \geq 0}$  erfüllt ebenfalls die starke Markoveigenschaft.

Wir können diese Maße benutzen, um eine Metrik auf  $\mathbb{S}_\vartheta$  zu definieren:

### 1.1.6 Definition

Die Metrik  $d : \mathbb{S}_\vartheta \times \mathbb{S}_\vartheta \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$\begin{aligned} d((x_1, r_1), (x_2, r_2)) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| + |r_1 - r_2| \\ &:= \int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)^+ + \int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)^- + |r_1 - r_2|, \end{aligned}$$

wobei wir die für signierte Maße gebräuchliche Schreibweise  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  verwendet haben.

Nun werden wir für jedes  $m \in \mathbb{N}$  einen weiteren Prozess  $({}^m X_t)_{t \geq 0}$  an den Partikelprozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  koppeln. Zur Definition verwenden wir dabei zunächst die gleiche Startkonfiguration  $X_0$ , sowie die gleichen Familien  $(E_i : i \in \mathbb{N})$  und  $(B^{(i)} : i \in I_0 \cup \mathbb{N})$  wie im Ursprungsprozess, wecken dann aber direkt zur Zeit 0 die ersten  $m$  schlafenden Partikel. Wir konstruieren nun genau wie im Ursprungsprozess iterativ die Partikelpfade  ${}^m X^{(i)}$  und Stoppzeiten  $\tau(m, n)$ . Während sich die Pfade derer Partikel, die auch im Ursprungsprozess zur Zeit  $t = 0$  wach sind, nicht ändern, erhalten wir für  $n \in \mathbb{N}$ :

$${}^m X_t^{(n)} := \begin{cases} \eta_n + B_{t-\tau(m,n)}^{(n)} & \text{für } t \geq \tau(m, n) \\ \eta_n & \text{für } 0 \leq t < \tau(m, n) \end{cases} \quad (1.5)$$

und

$$\tau(m, n) := \begin{cases} \min \left\{ t \mid \exists i \in {}^m I_t : {}^m X_t^{(i)} = \eta_n \right\} & \text{für } n > m, \\ 0 & \text{für } n \leq m, \end{cases}$$

wobei  ${}^m I_t$  die zur Zeit  $t$  im gekoppelten Prozess wachen Partikel indiziert. Man beachte, dass die Definition der  $\tau(m, n)$  für  $m = 0$  mit der Definition der  $\tau_n$  in (1.3) identisch ist. Wir wollen den so definierten Prozess als *raumkontinuierliches Froschmodell* ab  $\eta_m$  bezeichnen.

Wie in der Einleitung bereits angedeutet, interessieren wir uns bezüglich der zu Beginn wachen Partikel hauptsächlich für die folgende, zufällige Ausgangssituation: Es sei  $\eta_0 := 0$  und  $Y$  ein homogener Poissonscher Punktprozess auf  $\mathbb{R}_-$  mit Intensität 1. Die Startpunkte unserer wachen Partikel seien nun gegeben durch

$$\{\dots < \eta_{-2} < \eta_{-1} < \eta_0\} := \{x \in \mathbb{R} : Y(x) = 1\} \cup \{0\}.$$

Wir haben also zu den Partikeln, die wir durch  $Y$  erhalten, an  $\eta_0$  ein zusätzliches Partikel gesetzt. Wir wollen diese zufällige Ausgangskonfiguration mit  $(\eta, 0)$  bezeichnen.

### 1.1.7 Lemma

Für alle  $\vartheta > 0$  gilt  $(\eta, 0) \in \mathbb{S}_\vartheta$  fast sicher.

BEWEIS. Die Punkte  $\eta_z, z < 0$  sind durch den PPP  $Y$  gegeben. Folglich ist

$$\sum_{z \leq 0} e^{\vartheta \eta_z} = e^{\vartheta \eta_0} + \int_{(-\infty, 0)} e^{\vartheta x} Y(dx) = 1 + \int_{(-\infty, 0)} e^{\vartheta x} dx < \infty. \quad \square$$

### 1.1.8 Bemerkung

Nach Konstruktion gilt  $\eta_z - \eta_{z-1} \sim \exp_1$  für alle  $z \in \mathbb{Z}$ . Wenn man also die Startpositionen der wachen und der schlafenden Partikel in dieser speziellen Ausgangssituation betrachtet, so sind deren Positionen verteilt wie ein PPP  $Y'$  auf ganz  $\mathbb{R}$  mit Intensität 1, der darauf bedingt ist, dass  $Y'(0) = 1$ .

### 1.1.9 Bemerkung

Später werden wir an einigen Stellen eine feste Nummerierung benötigen, an der wir ablesen können, welcher von jeweils zwei Partikelpfaden weiter rechts bzw. links gestartet ist. Im Folgenden soll deshalb  $X_t$  für  $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$  stets die Form  $X_t := \left( \dots, X_t^{(-1)}, X_t^{(0)}, \dots, X_t^{(n)} \right)$  haben, wobei  $X_0^{(z)} \leq X_0^{(z+1)}$  für alle  $z \in \mathbb{Z}$  gelten soll.  $X^{(0)}$  ist somit immer der Pfad des am weitesten rechts startenden zu Beginn bereits wachen Partikels. Die dazugehörigen Brownschen Bewegungen bezeichnen wir dementsprechend mit  $B^{(z)}, z \in \mathbb{Z}$ .

Wir wollen nun den subadditiven Ergodensatz auf das raumkontinuierliche Froschmodell mit Startkonfiguration  $(\eta, 0)$  anwenden.

## 1.2 Anwendung des subadditiven Ergodensatzes

Der subadditive Ergodensatz ist bei Liggett in [3] wie folgt formuliert:

### 1.2.1 Satz (Subadditiver Ergodensatz)

Sei  $\{X_{m,n}\}$  eine Menge von Zufallsvariablen und es seien die folgenden Eigenschaften gegeben:

- i.  $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$  für  $0 < m < n$ .
- ii. Für  $m \geq 0$  ist die gemeinsame Verteilung von  $\{X_{m+1,m+k+1}, k \geq 1\}$  die selbe wie die von  $\{X_{m,m+k}, k \geq 1\}$ .
- iii. Die Prozesse  $\{X_{nk,(n+1)k}, n \geq 1\}$  sind stationär für alle  $k \geq 1$ .
- iv. Für alle  $n$  ist  $\mathbb{E}|X_{0,n}| < \infty$  und  $\mathbb{E}X_{0,n} \geq -cn$  für eine Konstante  $c$ .
- v. Die Prozesse aus iii. sind ergodisch.

Wenn die  $X_{m,n}$  die Eigenschaften i. bis iv. erfüllen, so gilt:

- a)  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}X_{0,n} = \inf_n \frac{1}{n} \mathbb{E}X_{0,n}$ .
- b) Der Limes  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n}$  existiert fast sicher und in  $\mathcal{L}_1$ .
- c)  $\mathbb{E}X = \gamma$ .

Erfüllen die  $X_{m,n}$  zusätzlich v., so gilt weiter

- d)  $X = \gamma$  f.s.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Zufallsvariablen  $\tau(m, n)$  im Falle der Startkonfiguration  $(\eta, 0)$  alle Voraussetzungen erfüllen, um den subadditiven Ergodensatz anwenden zu können.

### 1.2.2 Lemma

Es gilt

$$\tau(0, n) \leq \tau(0, m) + \tau(m, n) \text{ für } 0 < m < n.$$



BEWEIS. Direkt aus der Konstruktion der Prozesse sehen wir, dass

$${}^m X_t^{(l)} = X_{\tau_l+t}^{(l)} \text{ für } l \leq m.$$

Insbesondere folgt somit die Ungleichung

$$\begin{aligned} \tau(m, m+1) &= \inf \left\{ t : {}^m X_t^{(k)} = \eta_{m+1}, k \leq m \right\} \\ &= \inf \left\{ t : X_{\tau_k+t}^{(k)} = \eta_{m+1}, k \leq m \right\} \\ &= \inf \left\{ t - \tau_k : X_t^{(k)} = \eta_{m+1}, k \leq m \right\} \geq \tau_{m+1} - \tau_m \end{aligned}$$

und damit auch die Behauptung für  $n = m + 1$ . Vergleichen wir weiter (1.4) und (1.5), so liefert dies

$${}^m X_t^{(m+1)} = X_{\tau_{m+1}-\tau(m, m+1)+t}^{(m+1)}.$$

Nach obiger Ungleichung ist  $\tau_{m+1} - \tau(m, m+1) \leq \tau_m$  und wir erhalten wie dort induktiv die Behauptung.  $\square$

### 1.2.3 Lemma

Sei  $(X_0, R_0) = (\eta, 0)$  und  $\tau_k(n) := \tau(nk, (n+1)k)$ . Dann ist der Prozess  $(\tau_k(n))_{n \geq 0}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ergodisch.

BEWEIS. Wir zeigen, dass die Prozesse  $(\tau_k(n))_{n \geq 0}$  stark mischend sind, denn dann sind sie insbesondere ergodisch (siehe z.B. [13, Bemerkung 20.26]). Zu diesem Zwecke müssen wir zeigen, dass für alle Borelschen Teilmengen  $A, B \subset (0, \infty]$  die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [\tau_k(n) \in A, \tau_k(0) \in B] = \mathbb{P} [\tau_k(0) \in A] \mathbb{P} [\tau_k(0) \in B]$$

gilt. Es genügt, dies für Mengen  $A, B$  aus einem schnittstabilen Erzeuger der Borelschen  $\sigma$ -Algebra zu zeigen. Konkret wollen wir also nachweisen, dass für alle  $s, t, \varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$|\mathbb{P} [\tau_k(n) \leq s, \tau_k(0) \leq t] - \mathbb{P} [\tau_k(0) \leq s] \mathbb{P} [\tau_k(0) \leq t]| < \varepsilon \quad (1.6)$$

für alle  $n \geq n_0$  erfüllt ist.

Dazu wollen wir zunächst für  $n > 0$  die Zufallsvariablen  $\tau_k(0)$  und  $\tau_k(n)$  entkoppeln. Nach Definition hängt  $\tau_k(0)$  nur von den Pfaden  $(X_t^{(z)})_{t \geq 0}$  mit

$z \leq k$  ab und  $\tau_k(n)$  von den Pfaden  $({}^{nk}X_t^{(z)})_{t \geq 0}$  mit  $z \leq (n+1)k$ . Wir betrachten das Ereignis

$$A_t^{n,k} := \{\nexists z \leq k, t' \leq t : X_{t'}^{(z)} = \eta_{nk}\}.$$

$A_t^{n,k}$  beschreibt also das Ereignis, dass kein Partikel, welches links von  $\eta_k$  startet, in weniger als Zeit  $t$  den Punkt  $\eta_{nk}$  erreicht. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_k(n) \leq s, \tau_k(0) \leq t] &= \mathbb{P}\left[\{\tau_k(n) \leq s, \tau_k(0) \leq t\} \cap A_t^{n,k}\right] \\ &+ \mathbb{P}\left[\{\tau_k(n) \leq s, \tau_k(0) \leq t\} \cap (A_t^{n,k})^c\right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Da beim raumkontinuierlichen Froschmodell ab  $\eta_{nk}$  alle Partikel mit Startpunkt links von  $\eta_{nk}$  bereits zur Zeit  $t = 0$  wach sind, ist  $\tau_k(n)$  somit bei Eintreten des Ereignisses  $A_t^{n,k}$  nur noch von den Pfaden  $({}^{nk}X_t^{(z)})_{t \geq 0}$  mit  $k < z \leq (n+1)k$  und somit allein von den Brownschen Bewegungen  $B_t^{(z)}$  mit  $k < z \leq (n+1)k$  abhängig. Da diese Brownschen Bewegungen wiederum unabhängig von den Brownschen Bewegungen  $B_t^{(z)}$  mit  $z \leq k$  sind, sind die Ereignisse  $B_1 := \{\tau_k(n) \leq s\}$  und  $B_2 := \{\tau_k(0) \leq t\}$  bedingt auf  $A_t^{n,k}$  unabhängig und wir erhalten:

$$\mathbb{P}\left[B_1 \cap B_2 \cap A_t^{n,k}\right] = \frac{\mathbb{P}\left[B_1 \cap A_t^{n,k}\right] \mathbb{P}\left[B_2 \cap A_t^{n,k}\right]}{\mathbb{P}\left[A_t^{n,k}\right]}. \quad (1.8)$$

Wir können den Zähler wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left[B_1 \cap A_t^{n,k}\right] \mathbb{P}\left[B_2 \cap A_t^{n,k}\right] \\ &= \left(\mathbb{P}[B_1] - \mathbb{P}\left[B_1 \cap (A_t^{n,k})^c\right]\right) \left(\mathbb{P}[B_2] - \mathbb{P}\left[B_2 \cap (A_t^{n,k})^c\right]\right) \\ &= \mathbb{P}[B_1] \mathbb{P}[B_2] - \mathbb{P}\left[B_1 \cap (A_t^{n,k})^c\right] \mathbb{P}[B_2] \\ &\quad - \mathbb{P}[B_1] \mathbb{P}\left[B_2 \cap (A_t^{n,k})^c\right] + \mathbb{P}\left[B_1 \cap (A_t^{n,k})^c\right] \mathbb{P}\left[B_2 \cap (A_t^{n,k})^c\right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Schätzen wir den Betrag der letzten drei Summanden in (1.9) sowie den zweiten Summanden in (1.7) jeweils nach oben gegen  $\mathbb{P}\left[(A_t^{n,k})^c\right]$  ab, so

erhalten wir aus (1.9) zusammen mit (1.7) und (1.8) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{P} [\tau_k(n) \leq s, \tau_k(0) \leq t] - \mathbb{P} [\tau_k(n) \leq s] \mathbb{P} [\tau_k(0) \leq t]| \\
& \leq \frac{4 \cdot \mathbb{P} [(A_t^{n,k})^c]}{1 - \mathbb{P} [(A_t^{n,k})^c]} + \left( \frac{1}{1 - \mathbb{P} [(A_t^{n,k})^c]} - 1 \right) \mathbb{P} [\tau_k(n) \leq s] \mathbb{P} [\tau_k(0) \leq t] \\
& \leq 5 \cdot \mathbb{P} [(A_t^{n,k})^c] \left( 1 - \mathbb{P} [(A_t^{n,k})^c] \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Wir wollen nun  $\mathbb{P} [(A_t^{n,k})^c]$  nach oben abschätzen. Aufgrund der starken Markoveigenschaft des PPP  $Y'$  (siehe Bemerkung 1.1.8) gilt

$$\mathbb{P} [(A_t^{n,k})^c] = \mathbb{P} [\exists z \leq 0, t' \leq t : X_{t'}^{(z)} = \eta_{(n-1)k}], \tag{1.11}$$

weswegen wir zunächst für  $y > 0$  die Wahrscheinlichkeit  $P_{x,t,y}$ , dass eine in  $x \leq 0$  gestartete Brownsche Bewegung bis zur Zeit  $t$  den Punkt  $y$  erreicht, benötigen werden. Diese ist wegen des Spiegelungsprinzips gerade

$$P_{x,t,y} = 2 \cdot \mathcal{N}_{0,t}([y-x, \infty)). \tag{1.12}$$

Insbesondere ist

$$P_{0,t,y} = 2\Phi\left(-\frac{y}{\sqrt{t}}\right), \tag{1.13}$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Nun definieren wir weiter für feste  $y, t > 0$  auf  $(-\infty, 0)$  einen inhomogenen PPP  $Y_{t,y}$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu(dx) = P_{x,t,y}dx$  und betrachten die Menge  $\{\eta_z : z < 0, \exists 0 \leq s \leq t : X_s^{(z)} \geq y\}$  jener Partikelstartpunkte  $\eta_z < 0$ , für die die dazugehörigen Partikelpfade  $X^{(z)}$  den Punkt  $y$  vor der Zeit  $t$  erreichen. Nach dem Färbungssatz (zu finden z.B. in [13, Seiten 517-518]) sind die Punkte dieser Menge dann wie die Punkte des PPP  $Y_{t,y}$  verteilt. Mittels

$$\mathbb{P} [Y_{t,y}((-\infty, 0)) = 0] = \exp\left(-2 \int_{-\infty}^0 \mathcal{N}_{0,t}([y-x, \infty)) dx\right) \tag{1.14}$$

erhalten wir somit die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Partikel mit Startpunkt  $\eta_z < 0$  bis zur Zeit  $t$  den Punkt  $y$  erreicht. Sei also  $N_t \sim \mathcal{N}_{0,t}$ , dann

erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
2 \int_{-\infty}^0 \mathcal{N}_{0,t}([y-x, \infty)) dx &= 2 \int_0^{\infty} \mathbb{P}[N_t \geq y+x] dx \\
&= 2 \int_0^{\infty} \mathbb{P}[(N_t - y) \cdot \mathbf{1}_{\{N_t \geq y\}} > x] dx \\
&= 2\mathbb{E}[(N_t - y) \cdot \mathbf{1}_{\{N_t \geq y\}}] \\
&\leq 2\mathbb{E}[N_t \cdot \mathbf{1}_{\{N_t \geq y\}}] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_y^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2t}}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Sei nun  $B$  das Ereignis, dass das in  $\eta_0$  gestartete den Punkt  $y$  nicht bis zur Zeit  $t$  erreicht. Dann folgt für  $A_t^y := \{Y_{t,y}((-\infty, 0)) = 0\} \cap B$  aus (1.15) zusammen mit (1.13) und (1.14) die Ungleichung

$$\mathbb{P}[(A_t^y)^c] \leq 1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\right) \cdot \left(2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1\right). \tag{1.16}$$

Mit Hilfe von (1.11) können wir nun für alle  $y > 0$  folgern, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[(A_t^{n,k})^c] &\leq \mathbb{P}[(A_t^{n,k})^c \cap \{\eta_{(n-1)k} > y\}] + \mathbb{P}[\eta_{(n-1)k} \leq y] \\
&\leq \mathbb{P}[(A_t^y)^c] + \mathbb{P}[\eta_{(n-1)k} \leq y]
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Für gegebenes  $\varepsilon$  können wir nun wegen (1.16) erst  $y$  und abhängig davon  $n_0$  so wählen, dass

$$\mathbb{P}[(A_t^y)^c] + \mathbb{P}[\eta_{(n_0-1)k} \leq y] < \frac{\varepsilon}{4 + \varepsilon},$$

womit dann wegen (1.10) und (1.17) auch (1.6) folgt und somit die Ergodizität der Prozesse  $\tau_k(n)$  gezeigt ist.  $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass  $\mathbb{E}[|\tau(0, n)|] < \infty$  ist. Dabei erhalten wir zugleich noch eine untere Schranke für die Geschwindigkeit, mit der sich der Marke des Prozesses fortbewegt.

**1.2.4 Lemma**

Sei  $(X_0, R_0) = (\eta, 0)$ . Dann gilt

$$\mathbb{E} [\tau_1] = \pi \text{ und } \mathbb{E} [\tau_n] \leq n\pi.$$

BEWEIS. Wir wollen die Ausgangskonfiguration betrachten, in der wir zwar die Startpositionen der Partikel aus einem PPP  $Y$  gewinnen, aber darauf verzichten, einen zusätzlichen Punkt  $\eta_0 = 0$  hinzuzufügen. Sei  $\tilde{\tau}_0$  die Zeit, zu der unter diesen Startbedingungen erstmalig ein waches Partikel den Ort 0 erreicht. Nach Konstruktion ist dann  $\tilde{\tau}_0 \sim \tau_1$ .

Wir wollen also  $\mathbb{E} [\tilde{\tau}_0]$  berechnen. Mit  $P_{x,t,0}$  wie in (1.12) definieren wir dazu für alle  $t > 0$  auf  $(-\infty, 0)$  inhomogene PPPe  $Y_t$  mit Intensitätsmaß  $\mu(dx) = P_{x,t,0}dx$ . Wie in Lemma 1.2.3 sind nun diejenigen Punkte aus  $Y$  deren zugehörige Brownsche Bewegungen bis zur Zeit  $t$  den Wert 0 annehmen, verteilt wie  $Y_t$ . Folglich ist

$$\mathbb{P} [\tilde{\tau}_0 > t] = \mathbb{P} [Y_t((-\infty, 0)) = 0] = \exp \left( -2 \int_{-\infty}^0 \mathcal{N}_{0,t}([-x, \infty)) dx \right).$$

Damit können wir nun  $\mathbb{E} [\tau_1]$  berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\tau_1] &= \mathbb{E} [\tilde{\tau}_0] = \int_0^\infty \mathbb{P} [\tilde{\tau}_0 > t] dt \\ &= \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_{-\infty}^0 \mathcal{N}_{0,t}([-x, \infty)) dx \right) dt. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Für  $N_t \sim \mathcal{N}_{0,t}$  gilt weiter

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \mathcal{N}_{0,t}([-x, \infty)) dx &= \int_0^\infty \mathbb{P} [N_t \geq x] dx \\ &= \mathbb{E} [N_t \mathbb{1}_{\{N_t \geq 0\}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (1.18) ein, so erhalten wir weiter

$$\mathbb{E} [\tau_1] = \int_0^\infty e^{-\sqrt{\frac{2t}{\pi}}} dt \stackrel{x=\sqrt{\frac{2t}{\pi}}}{=} \pi \int_0^\infty x e^{-x} dx = \pi.$$

Die zweite Aussage folgt aus Lemma 1.2.2, denn  $\tau_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \tau(i, i+1)$  und  $\tau(i, i+1) \sim \tau_1$  für alle  $i \geq 0$ .  $\square$

Wir haben nun alle Voraussetzungen beisammen, um den subadditiven Ergodensatz anwenden zu können.

### 1.2.5 Satz

Sei  $(X_0, R_0) = (\eta, 0)$ . Dann gibt es ein  $\tau \in [0, \pi]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau(0, n)}{n} = \tau$  f.s..

BEWEIS. Da wir mit einem homogenen Poissonprozess gestartet sind und die Partikel überall der gleichen Dynamik folgen, ist das raumkontinuierliche Froschmodell translationsinvariant unter Translationen, die einen der Punkte  $\eta_z, z \in \mathbb{Z}$ , in die 0 schieben. Aus diesem Grunde folgen auch direkt die Voraussetzungen *ii* und *iii* aus Satz 1.2.1. Die restlichen Bedingungen wurden in den Lemmata 1.2.2, 1.2.3 und 1.2.4 nachgewiesen. Der Limes existiert dann nach Teil b) von Satz 1.2.1. Weiter ist nach Teil d) von Satz 1.2.1 fast sicher  $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\tau(0, n)]}{n}$ . Die Einschränkung  $\tau \in [0, \pi]$  folgt dann dank der Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\tau(0, n)]}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}[\tau(0, n)]}{n} \leq \mathbb{E}[\tau(0, 1)] = \pi.$$

für die wir Teil a) von Satz 1.2.1 und Lemma 1.2.4 verwendet haben.  $\square$

Wir können nun (1.1) zeigen und sogar eine untere Schranke für  $v$  angeben.

### 1.2.6 Korollar

Sei  $(X_0, R_0) = (\eta, 0)$ . Dann gibt es ein  $v \geq \frac{1}{\pi}$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} = v$  fast sicher. Insbesondere folgt (1.1).

BEWEIS. Sei  $n_t := \max\{n : \eta_n \leq R_t\}$ , dann gilt  $\frac{\eta_{n_t}}{\tau_{n_t+1}} \leq \frac{R_t}{t} \leq \frac{\eta_{n_t+1}}{\tau_{n_t}}$  für alle  $t \geq 0$ . Nun gilt fast sicher nach dem starken Gesetz der großen Zahlen für die Zufallsvariablen  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  und Satz 1.2.5:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta_{n_t}}{\tau_{n_t+1}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{\tau_{n+1}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n \cdot n^{-1}}{\tau_{n+1} \cdot n^{-1}} = \tau^{-1} \geq \frac{1}{\pi}.$$

Genauso erhält man  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \leq \tau^{-1}$ .  $\square$

## 1.3 Eine obere Schranke für die Geschwindigkeit

Wir wissen nun, dass sich die Marke  $R_t$  im raumkontinuierlichen Froschmodell mit Ausgangskonfiguration  $(\eta, 0)$  mit mindestens linearer Geschwindig-

keit ausbreitet. Um zu zeigen, dass diese Ausbreitung nicht schneller als linear verläuft, wollen wir nun eine obere Schranke für  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t}$  angeben. Wir benötigen hierfür zunächst die folgende Definition:

**1.3.1 Definition**

Sei  $z \in \mathbb{Z}$  und  $X^{(z)}$  ein Partikelpfad des raumkontinuierlichen Froschmodells. Die Ahnenlinie  $Y^{(z)} := \left( Y_t^{(z)} \right)_{t \geq 0}$  von  $X^{(z)}$  sei wie folgt rekursiv definiert:

$$Y_t^{(z)} := X_t^{(z)}, \text{ falls } z \leq 0$$

und

$$Y_t^{(z)} := \begin{cases} Y_t^{(k_z)} & \text{für } 0 \leq t < \tau_z \\ X_t^{(z)} & \text{für } t \geq \tau_z \end{cases}, \text{ falls } z > 0,$$

wobei  $k_n$  das f.s. eindeutige  $z < n$  mit  $X_{\tau_n}^{(z)} = \eta_n$  ist.

Die f.s.-Eindeutigkeit liegt vor, da sich abzählbar viele unabhängige Brownsche Bewegungen fast sicher nicht zur selben Zeit an einem festen gemeinsamen Ort befinden. Aufgrund dieser f.s.-Eindeutigkeit und der Tatsache, dass es nur abzählbar viele Stoppzeiten  $\tau_z$  gibt, ist  $Y_t^{(z)}$  fast sicher für alle  $z \in \mathbb{Z}$  wohldefiniert.

Jede Ahnenlinie startet in einem Punkt, in dem sich zur Zeit 0 bereits ein waches Partikel befunden hat, im Falle der Ausgangskonfiguration  $(\eta, 0)$  also in einem der Punkte  $\{\eta_z, z \leq 0\}$ . Die Grundidee ist es nun, für feste  $c$  und  $z \leq 0$  die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass es eine Ahnenlinie gibt, die ihren Ursprung in  $\eta_z$  hat, und die bis zur Zeit  $t$  die Grenze  $ct$  überschritten hat. Man verwendet dann diese Wahrscheinlichkeiten, um mit Hilfe des Färbungssatzes zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens ein  $z \leq 0$  mit dieser Eigenschaft gibt, für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 geht, solange  $c$  hinreichend groß ist.

Das Problem ist nun, dass sich diese Wahrscheinlichkeiten nicht so einfach berechnen bzw. abschätzen lassen, wie es zunächst scheint, denn die Ahnenlinien sind, obwohl sie Brownschen Pfaden folgen, in Verteilung keine Brownschen Bewegungen. Der Grund hierfür ist, dass jeweils nur das Partikel, welches als erstes einen der Orte  $\eta_n, n \in \mathbb{N}$  erreicht, dort ein schlafendes Partikel weckt. Die Ahnenlinie sieht somit nur die Partikel, die sich am schnellsten nach rechts bewegt haben. Um dieses Problem auszugleichen, wollen wir das raumkontinuierliche Froschmodell an einen Prozess  $Z$  kop-

peln, der sich im Wesentlichen wie das Froschmodell verhält, bei dem sich aber an jedem der Orte  $\eta_n$  *unendlich* viele schlafende Partikel befinden und *jedes* Partikel an jedem der Orte  $\eta_n$ , die sich rechts von seiner Startposition befinden, ein neues Partikel weckt. Zwar erhält man auf diese Weise deutlich mehr wache Partikel und damit eine schnellere Ausbreitung nach rechts, man weiß aber, dass die Ahnenlinien aller dieser Partikel Brownsche Bewegungen sind, was zu einer besseren Berechenbarkeit führt.

Wir wollen nun  $Z$  konstruieren. Dazu erstellen wir zunächst für  $z \leq 0$  Partikelpfade  $Z^{(z)}$ , indem wir

$$\left( Z_t^{(z)} \right)_{t \geq 0} := \left( X_t^{(z)} \right)_{t \geq 0},$$

setzen und definieren mit

$$\mathcal{Z}_0 := \left\{ Z^{(z)}, z \leq 0 \right\}$$

die Menge aller Pfade der 0-ten Generation. Die Pfade in  $\mathcal{Z}_0$  entsprechen also gerade den Pfaden der zu Beginn wachen Partikel im Froschmodell. Weiter definieren wir für alle  $\zeta \in \mathcal{Z}_0$  mit

$$\tau_1^\zeta := \inf \{ t : \zeta_t = \eta_1 \}$$

den ersten Zeitpunkt, an dem der Pfad  $\zeta$  den Ort  $\eta_1$  erreicht. Wir wollen den Pfad des von  $\zeta$  beim Erreichen von  $\eta_1$  geweckten Partikels mit  $Z^{1,\zeta}$  bezeichnen. Nun gilt  $\tau_1 = \tau_1^{Z^{(k_1)}}$ , denn nach Definition von  $k_1$  ist  $Z^{(k_1)}$  der erste Pfad (eines wachen Partikels), der im Froschmodell  $\eta_1$  erreicht. Wir wollen die Bezeichnung

$$Z^{(1)} := Z^{1,Z^{(k_1)}}$$

verwenden und definieren den Pfad

$$\left( Z_t^{(1)} \right)_{t \geq 0} := \left( X_t^{(1)} \right)_{t \geq 0}.$$

Für die restlichen Pfade der Form  $Z^{1,\zeta}$  mit  $\zeta \neq Z^{(k_1)}$  definieren wir

$$Z_t^{1,\zeta} := \begin{cases} \eta_1 + B_{t-\tau_1^\zeta}^{1,\zeta} & \text{für } t \geq \tau_1^\zeta, \\ \eta_1 & \text{für } 0 \leq t < \tau_1^\zeta, \end{cases}$$



wo die Prozesse  $B^{1,\zeta}$  unabhängige Brownsche Bewegungen sind. Iterativ definieren wir für  $n \geq 1$  die Mengen

$$\mathcal{Z}_n := \mathcal{Z}_{n-1} \cup \left\{ Z^{n,\zeta}, \zeta \in \mathcal{Z}_{n-1} \right\}$$

aller Partikelpfade der höchstens  $n$ -ten Generation, indem wir für  $\zeta \in \mathcal{Z}_{n-1}$

$$\tau_n^\zeta := \inf \{ t : \zeta_t = \eta_n \}$$

setzen und den Pfad des von  $\zeta \in \mathcal{Z}_{n-1}$  beim ersten Erreichen des Punktes  $\eta_n$  geweckten Partikels mit  $Z^{n,\zeta}$  bezeichnen. Wie eben ist  $\tau_n = \tau_n^{Z^{(k_n)}}$ , da  $Z^{(k_n)}$  der erste Pfad (eines wachen Partikels) ist, welcher im Froschmodell  $\eta_n$  erreicht. Wir schreiben

$$Z^{(n)} := Z^{n,Z^{k_n}}$$

und setzen

$$\left( Z_t^{(n)} \right)_{t \geq 0} := \left( X_t^{(n)} \right)_{t \geq 0}.$$

Für alle anderen Pfade der Form  $Z^{n,\zeta}$  mit  $\zeta \neq Z^{(k_n)}$  definieren wir wieder unabhängige Brownsche Bewegungen  $B^{n,\zeta}$  und setzen

$$Z_t^{n,\zeta} := \begin{cases} \eta_n + B_{t-\tau_n^\zeta}^{n,\zeta} & \text{für } t \geq \tau_n^\zeta, \\ \eta_n & \text{für } 0 \leq t < \tau_n^\zeta. \end{cases}$$

Durch diese Konstruktion findet man nun alle Pfade  $X^{(z)}$  aus dem Froschmodell in Form der Pfade  $Z^{(z)}$  in  $Z$  wieder. Wir können nun analog zu Definition 1.3.1 auch für die Prozesse  $\zeta \in \mathcal{Z}_n, n \in \mathbb{N}$  Ahnenlinien  $Y^\zeta$  definieren. Nach Konstruktion ist dann  $Y_t^{Z^{(k)}} = Y_t^{(k)}$  für alle  $t \geq 0$ .

### 1.3.2 Satz

Es sei  $(X_0, R_0) = (\eta, 0)$ . Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \leq 2.$$

BEWEIS. Direkt aus der Konstruktion der Prozesse erhalten wir

$$\mathbb{P} [R_t \geq ct] = \mathbb{P} \left[ \sup_{z: \eta_z < ct} Y_t^{(z)} \geq ct \right] \leq \mathbb{P} \left[ \sup_{(n,\zeta): \zeta \in \mathcal{Z}_n, \eta_n < ct} Y_t^\zeta \geq ct \right]. \quad (1.19)$$

Wir wollen nun den Färbungssatz anwenden, indem wir jedem Punkt  $x \leq 0$  die Wahrscheinlichkeit zuordnen, dass ein Nachfahre eines in  $x$  gestarteten Partikels bis zur Zeit  $t$  den Punkt  $ct$  erreicht hat. Wir definieren dazu die Menge

$$\mathcal{Z}_{n,x} := \left\{ \zeta \in \mathcal{Z}_n : Y_0^\zeta = x \right\}$$

aller Partikel von höchstens  $n$ -ter Generation, deren Ahnenlinie in  $x$  startet. Sei weiter  $n_{ct} := \max \{n : \eta_n < ct\}$ . Dann gilt  $n_{ct} \sim \text{Poi}_{ct}$  und  $|\mathcal{Z}_{n,\eta_z}| = 2^{n_{ct}}$  für alle  $z \leq 0$ . Da die Ahnenlinien unabhängigen Brownschen Bewegungen folgen, erhalten wir aufgrund des Spiegelungsprinzips:

$$\begin{aligned} P_{x,t} &:= \mathbb{P} \left[ \sup_{(n,\zeta): \zeta \in \mathcal{Z}_{n,x}: \eta_n \leq ct} Y_t^\zeta \geq ct \right] \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j 2\Phi \left( -\frac{ct-x}{\sqrt{t}} \right) \mathbb{P} [n_{ct} = j] \\ &= 2e^{-ct} \Phi \left( -\frac{ct-x}{\sqrt{t}} \right) \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{(ct)^j}{j!} = 2e^{ct} \Phi \left( -\frac{ct-x}{\sqrt{t}} \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Nun können wir den Färbungssatz anwenden und erhalten zusammen mit (1.19) und (1.20) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [R_t \geq ct] &\leq 1 - \exp \left( - \int_{-\infty}^0 P_{x,t} dx \right) + P_{0,t} \\ &\leq 1 - \exp \left( - \int_{-\infty}^0 2e^{ct} \Phi \left( -\frac{ct-x}{\sqrt{t}} \right) dx \right) + P_{0,t}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

wobei wir den Term  $P_{0,t}$  benötigen, da deterministisch  $\eta_0 = 0$  gilt. Sei wieder  $N_t \sim \mathcal{N}_{0,t}$ , dann erhalten wir wie in (1.15) die Ungleichung

$$\begin{aligned} 2e^{ct} \int_{-\infty}^0 \Phi \left( -\frac{ct-x}{\sqrt{t}} \right) dx &= 2e^{ct} \int_0^{\infty} \mathbb{P} \left[ N_1 \geq \frac{ct+x}{\sqrt{t}} \right] dx \\ &= 2e^{ct} \int_0^{\infty} \mathbb{P} [N_t \geq ct+x] dx \\ &\leq 2e^{ct} \mathbb{E} [N_t \cdot \mathbf{1}_{\{N_t \geq ct\}}] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-\frac{c^2 t - 2ct}{2}}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (1.21) liefert dies wiederum die Ungleichung

$$\mathbb{P}[R_t \geq ct] \leq 1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-\frac{c^2 t - 2ct}{2}}\right) + P_{0,t},$$

deren rechte Seite genau dann für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 geht, wenn  $c > 2$  gilt (für  $P_{0,t}$  sieht man dies mittels (1.20) und (A.6) ein).  $\square$

### 1.3.3 Korollar

Sei  $(X_0, R_0) = (\eta, 0)$ . Dann gilt:

$$\pi^{-1} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \leq 2.$$

BEWEIS. Dies fasst lediglich Korollar 1.2.6 und Satz 1.3.2 zusammen.  $\square$



# Kapitel 2

## Regenerationszeiten

Wir wollen nun eine andere Methode verwenden, um die Markenbewegung weiter zu untersuchen. Auf diese Weise werden wir nicht nur eine andere Charakterisierung der Markengeschwindigkeit  $v$  erhalten, sondern auch einen Zentralen Grenzwertsatz und eine Aussage über die invariante Verteilung der Partikel links der Marke. Die Methode besteht darin, sogenannte *Regenerationszeiten* zu definieren, welche die Eigenschaft haben, dass sich der Prozess  $R_t$  beim Erreichen einer solchen Regenerationszeit verhält, als wäre er mit einer bestimmten Startkonfiguration und bedingt auf ein bestimmtes Ereignis frisch gestartet. Um die Methode sinnvoll nutzen zu können, müssen wir zeigen, dass diese Zeiten endliche erste und zweite Momente haben. Dazu wird es nötig sein, die folgenden Hilfsprozesse zu definieren und an den eigentlich zu untersuchenden Prozess zu koppeln.

### 2.1 Zwei Hilfsprozesse

#### 2.1.1 Definition (Erster Hilfsprozess)

Wir beziehen uns in der Notation auf den in Abschnitt 1.1 konstruierten Prozess. Für ein fest gewähltes  $M \in \mathbb{N}$  sei

$$\nu_1 := \inf \left\{ t : X_t^{(0)} = \eta_1 \right\}$$

und allgemeiner

$$\nu_n := \inf \left\{ t : \eta_k + B_t^{(k)} = \eta_n \text{ für ein } k \text{ mit } \max \{0, n - M\} \leq k < n \right\},$$

sowie  $\nu^{(0)} := 0$  und  $\nu^{(k)} := \sum_{j=1}^k \nu_j$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir definieren die *Marke des ersten Hilfsprozesses* über

$$\tilde{R}_t := \sup \left\{ \eta_k + B_{s-\nu^{(n)}}^{(k)}, \nu^{(n)} \leq s \leq t, \max \{0, n - M\} \leq k \leq n \right\}$$

für  $\nu^{(n)} \leq t < \nu^{(n+1)}$ .

Diesen Prozess kann man sich wie folgt vorstellen: Solange der Pfad  $X^{(0)}$  den Punkt  $\eta_1$  noch nicht erreicht hat, verfolgt  $\tilde{R}_t$  das Maximum von  $X_t^{(0)}$ . Sobald das zum Pfad  $X^{(0)}$  gehörige Partikel den Punkt  $\eta_1$  erreicht hat, beginnt es, den gleichen Weg in  $\eta_0$  startend von vorn zu laufen. Ferner wacht das Partikel im Punkt  $\eta_1$  und folgt dem gleichen Pfad  $X^{(1)}$ , dem es auch im ursprünglichen Prozess folgt, allerdings zeitlich um  $\tau_1 - \nu_1$  versetzt. Sobald eines der  $M$  zuletzt geweckten Partikel die Position  $\eta_n$  erreicht, werden alle Partikel wieder auf ihre Ausgangsposition gesetzt und beginnen, ihre Pfade wieder von vorn zu laufen. Ferner wird das Partikel im Punkt  $\eta_n$  geweckt, welches, wie alle anderen Partikel auch, zeitlich versetzt dem Pfad folgt, den es auch im Ursprungsprozess geht. Die Marke  $\tilde{R}$  beschreibt hierbei zur Zeit  $t$  den am weitesten rechts gelegenen Ort, der in diesem Prozess bis zur Zeit  $t$  jemals von einem der Partikel besucht wurde.

Wenn wir auch den ersten Hilfsprozess später für Abschätzungen verwenden werden, so können wir gewisse Stoppzeiten mit ihm nicht so definieren, dass diese gewisse gewünschte Messbarkeitsbedingungen erfüllen. Den eigentlichen Prozess  $R_t$  können wir hierfür ebenfalls nicht verwenden, da uns dann gewisse Unabhängigkeitseigenschaften fehlen würden. Wir definieren daher noch den folgenden zweiten Hilfsprozess.

### 2.1.2 Definition (Zweiter Hilfsprozess)

Der *zweite Hilfsprozess*  $(X_t^+, R_t^+)$  sei der Prozess, den man erhält, wenn man im Froschmodell die gleichen Familien  $(E_n : n \in \mathbb{N})$  und  $(B^{(z)} : z \in \mathbb{Z})$  verwendet, aber alle Partikel aus der Startkonfiguration löscht, die sich zur Zeit 0 nicht in  $R_0$  befinden.

Die Marke  $R_t^+$  verfolgt also den Weg, den  $R_t$  verfolgen würde, wenn sich zur Zeit  $t = 0$  nur im Punkte  $x = 0$  Partikel befänden. Wir werden  $R_t^+$  später in Definition 2.2.9 verwenden. Die Unabhängigkeit der dort definierten Stoppzeiten wäre durch eine analoge Definition mittels  $R_t$  nicht gegeben. Würden wir statt  $R_t^+$  dort  $\tilde{R}_t$  verwenden, so wäre hingegen die Messbarkeit in Lemma 4.1.7 nicht gegeben.

Die folgenden Aussagen über die verschiedenen Markenprozesse werden wir im späteren Verlauf für diverse Abschätzungen benötigen.

**2.1.3 Lemma**

Es gilt  $\tilde{R}_t \leq R_t^+ \leq R_t$  für alle  $t \geq 0$ .

BEWEIS. Dies folgt direkt aus der Konstruktion der Prozesse.  $\square$

Der nächste Satz verwendet ein technisches Lemma, welches wir direkt im Anschluss beweisen werden.

**2.1.4 Satz**

Ist  $M \geq 3$ , so gibt es ein  $0 < \alpha \leq 2$ , so dass f.s. die Gleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}_t}{t} = \alpha$$

gilt.

BEWEIS. Nach Konstruktion und da  $M \geq 3$  vorausgesetzt wurde, ist die Menge  $\{\nu_{M+j} : j \geq 0\}$  nach Lemma 2.1.5 eine Menge von identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert. Nach Konstruktion liegt zudem Ergodizität vor, weswegen die Konvergenz gegen ein  $\alpha > 0$  aus dem Ergodensatz folgt. Aus Lemma 2.1.3 und Satz 1.3.2 folgt schließlich  $\alpha \leq 2$ .  $\square$

**2.1.5 Lemma**

Es seien  $W^1, W^2$  und  $W^3$  voneinander unabhängige Brownsche Bewegungen. Es sei weiter  $T_y^i$  die Zeit des ersten Eintreffens von  $W^i$  im Punkt  $y \in \mathbb{R}$  und  $T_y := \min \{T_y^i, 1 \leq i \leq 3\}$ . Ist nun  $Y \sim \Gamma_{n,1}$ , so gilt

$$\mathbb{E}[T_Y] \leq 3(n^2 + n).$$

BEWEIS. Sei zunächst  $y$  fest. Es ist  $\mathbb{E}[T_y] = y^2 \mathbb{E}[T_1]$  nach Brownscher Skalierung. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_1] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[T_1 > t] dt \\ &= \int_0^\infty (\mathbb{P}[T_1^1 > t] \mathbb{P}[T_1^2 > t] \mathbb{P}[T_1^3 > t]) dt \\ &= \int_0^\infty (\mathbb{P}[T_1^1 > t])^3 dt. \end{aligned}$$

Mit dem Spiegelungsprinzip sieht man nun

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_1^1 > t] &= 1 - \mathbb{P}[T_1^1 < t] \\ &= 1 - 2 \cdot \mathbb{P}[B_t^1 \geq 1] \\ &= 1 - 2 \cdot (1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Obige Rechnung lässt sich also wie folgt fortsetzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_1] &= \int_0^\infty \left(2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1\right)^3 dt \\ &= \int_0^1 \left(2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1\right)^3 dt + \int_1^\infty \left(2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1\right)^3 dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Der erste Summand ist offenbar  $\leq 1$ . Den zweiten formen wir mittels Substitution um zu:

$$\int_1^\infty \left(2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1\right)^3 dt = 2 \int_0^1 t^{-3} (2\Phi(t) - 1)^3 dt.$$

Nun gilt für alle  $t \geq 0$  die Ungleichung

$$2\Phi(t) - 1 \leq t, \tag{2.3}$$

da  $\Phi'(t) < \frac{1}{2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $2\Phi(0) - 1 = 0$ . Damit gilt aber wiederum

$$2 \int_0^1 t^{-3} (2\Phi(t) - 1)^3 dt \leq 2.$$

Verbinden wir die Ungleichungen für die beiden Summanden aus (2.2), so erhalten wir:

$$\mathbb{E}[T_y] = y^2 \mathbb{E}[T_1] \leq 3y^2.$$

Für ein  $\Gamma_{n,1}$ -verteiltes  $Y$  ergibt sich demnach

$$\mathbb{E}[T_Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[T_Y|Y]] \leq 3\mathbb{E}[Y^2] = 3(\mathbb{E}[Y]^2 + \text{Var}[Y]) = 3(n^2 + n),$$

und wir sind fertig. □



**2.1.6 Korollar**

Sei  $\gamma_j = \nu_j - \frac{1}{\alpha}$  für  $j \geq 0$ . Dann sind für  $0 \leq i \leq M-1$  die Zufallsvariablen  $\{\gamma_{kM+i}, k \geq 1\}$  u.i.v. und für alle  $j \geq M$  gilt  $\mathbb{E}[\gamma_j] = 0$ .

BEWEIS. Dies folgt aus der Konstruktion des ersten Hilfsprozesses und aus Satz 2.1.4.  $\square$

**2.2 Regenerationszeiten**

Wir werden nun die Regenerationszeiten des kontinuierlichen Froschmodells definieren. Wir werden dies mit Hilfe verschiedener Stoppzeiten tun. Die Grundidee hierbei ist, dass zu gewissen „guten“ (Stopp-)Zeiten  $S_k$  geprüft wird, ob in Zukunft nochmal eine „schlechte“ (Stopp-)Zeit  $D_k$  auftreten wird. Ist  $D_k < \infty$ , so springt man weiter zu  $S_{k+1}$ . Ist hingegen  $D_k = \infty$ , so hat der Prozess einen Regenerationspunkt erreicht. Dementsprechend werden wir die erste Regenerationszeit  $\kappa$  als den ersten Zeitpunkt  $S_K < \infty$  definieren, zu dem  $D_K = \infty$  gilt. Um die an der Konstruktion beteiligten Stoppzeiten definieren zu können, erfordert es etwas Vorarbeit. Für die folgenden Überlegungen wählen wir zunächst  $\vartheta, \alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  so, dass

$$0 < \frac{\vartheta}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}_t}{t} \quad (2.4)$$

sowie

$$\log(1 + \vartheta) - \frac{\vartheta^2}{2\alpha_1} > 0 \quad (2.5)$$

gilt.

**2.2.1 Lemma**

Es gibt zu gegebenem  $\alpha_1 > 0$  ein  $\vartheta > 0$ , welches (2.4) und (2.5) erfüllt.

BEWEIS. Wähle  $\vartheta := \frac{\sqrt{1+2\alpha_1}-1}{2}$ . Die Funktion  $\log(1+x) - \frac{x^2}{2\alpha_1}$  hat eine Nullstelle bei  $x=0$  und bei  $x_h := -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha_1}$  einen Hochpunkt. Da offenbar  $0 < \vartheta < x_h$  gilt, ist (2.5) erfüllt. Weiterhin ist  $\sqrt{1+2\alpha_1} > 1$  und folglich auch  $\alpha_1 > \frac{\sqrt{1+2\alpha_1}-1}{2} = \vartheta$ , weswegen insbesondere (2.4) gilt.  $\square$

Für die folgenden Definitionen sei noch einmal an Bemerkung 1.1.9 erinnert.

### 2.2.2 Definition

Wir bezeichnen für  $t \geq 0$  mit

$$\eta_{t,0} := \max \{ \eta_k : \eta_k \leq R_t \}$$

den letzten Startpunkt eines Partikelpfads links von der Markenposition zur Zeit  $t$ . Ist  $\eta_{t,0} = \eta_m$ , so sei weiter

$$\eta_{t,z} := \eta_{m+z}$$

für  $z \in \mathbb{Z}$  und wir bezeichnen den Pfad  $X^{(m+z)}$  mit  $X^{(t,z)}$ . Weiter sei für  $n \in \mathbb{N}$  durch

$$\tau_{t,n} := \inf \{ s : R_s = \eta_{t,n} \}$$

die Stoppzeit gegeben, zu der die Marke den Punkt  $\eta_{t,n}$  erreicht.

Die in dieser Definition auftauchenden Punkte  $\eta_z, z \leq 0$  sind nur für die zufällige Startkonfiguration  $(\eta, 0)$  definiert. Für deterministische Startkonfigurationen denke man sich diese Punkte durch die Startpunkte der Pfade  $X^{(z)}, z \leq 0$  ersetzt (falls vorhanden,  $X^{(z)}$  im Sinne von Bemerkung 1.1.9).

### 2.2.3 Bemerkung

*Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit wieder mit deterministischen Startkonfigurationen  $\chi := (x, r) \in \mathbb{S}_\vartheta$  arbeiten (siehe Definition 1.1.1) und einige Aussagen für diese deterministische Startkonfigurationen von wachen Partikeln zeigen. Ist dies erledigt, folgen diese Aussagen nach Lemma 1.1.7 auch für die zufällige Startkonfiguration  $(\eta, 0)$  aus Abschnitt 1.1.*

Die folgende Definition wird uns eine Kontrollmöglichkeit darüber geben, wie nahe weit links gestartete Partikel zu einem festen Zeitpunkt  $t$  der Marke  $R_t$  sind.

### 2.2.4 Definition

Wir definieren für eine Startkonfiguration  $\chi$  die *exponentielle Partikeldichte* mit Parametern  $s$  und  $z$  zur Zeit  $t \geq 0$  mit

$$\Psi_{s,z}(t) = \Psi_{s,z}(t, \chi) := \sum_{i \leq z} e^{\vartheta(X_t^{(s,i)} - R_t)}. \quad (2.6)$$

Weiter schreiben wir  $\Psi_z := \Psi_{0,z}$ .

Wir werden später die exponentielle Partikeldichte bei der Definition der Regenerationszeiten noch in einer etwas abgewandelten Form verwenden.

### 2.2.5 Definition

Für  $t \leq s$  und  $z \leq z'$  sei

$$M_{z,z'}^t(s) := \sum_{j=z+1}^{z'} \mathbb{1}_{\{\eta_{t,z} < X_s^{(t,j)} \leq \eta_{t,z'}\}}$$

die Anzahl der Partikelpfade  $X^{(t,j)}$  mit  $z+1 \leq j \leq z'$ , die sich zur Zeit  $s$  noch zwischen  $\eta_{t,z}$  und  $\eta_{t,z'}$  aufhalten. Für  $t=0$  wollen wir nur  $M_{z,z'}(s)$  schreiben.

Auch hier sind je nach Wahl von  $t$  für deterministische Ausgangskonfigurationen nicht alle Punkte  $\eta_{t,z}$  definiert. Es wäre allerdings nicht sinnvoll wie eben für  $z \leq 0$  die Punkte  $\eta_z$  durch die Startpunkte der Pfade  $X^{(z)}$  zu ersetzen. Wir werden uns mit diesem Problem beschäftigen, wenn es zum ersten Mal im weiteren Verlauf auftaucht.

Die folgende Definition ist technischer Natur. Die Wahlen von  $M$  und  $L$  mögen daher zunächst kryptisch erscheinen, werden sich aber im späteren Verlauf noch mit Sinn füllen.

### 2.2.6 Definition

Im Folgenden sei  $M \geq 22$  eine feste natürliche Zahl und  $0 < q < 1$  fest. Sei weiter  $L$  so, dass  $\frac{L^{\frac{1}{4}}}{2} \in \mathbb{N}$  gilt und die Ungleichung

$$L^{\frac{1}{4}} \geq M \tag{2.7}$$

erfüllt ist. Wir setzen ferner

$$\mathbb{S}_{\vartheta,L} := \{\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta} : \Psi_{-L}(0, \chi) \leq q\}.$$

Offenbar gilt dabei

$$\mathbb{S}_{\vartheta,L} \subseteq \mathbb{S}_{\vartheta,L'} \text{ für } L \leq L'. \tag{2.8}$$

Im weiteren Verlauf werden wir oft die Voraussetzung

$$\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta,L} \tag{2.9}$$

benötigen. Wir können  $L$  nicht so wählen, dass f.s.  $(\eta, 0) \in \mathbb{S}_{\vartheta,L}$  ist. Es gilt aber das folgende Lemma.

**2.2.7 Lemma**

- a) Für jedes  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$  gibt es ein  $L$ , so dass  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta,L}$ .
- b) Für fast jede Realisierung  $\chi$  von  $(\eta, 0)$  gibt es ein  $L$ , so dass  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta,L}$ .

BEWEIS. Teil a) folgt direkt aus der Definition von  $\mathbb{S}_\vartheta$ , während Teil b) eine Konsequenz von Lemma 1.1.7 ist.  $\square$

**2.2.8 Bemerkung**

Obwohl wir  $L$  zunächst fest wählen, werden wir zu einem späteren Zeitpunkt noch die Möglichkeit benötigen,  $L$  zu vergrößern. Die Inklusion (2.8) stellt sicher, dass wir dabei nicht rückwirkend an irgendeiner Stelle Voraussetzung (2.9) verletzen.

Wir wollen nun Stoppzeiten definieren, mit deren Hilfe wir Regenerationszeiten konstruieren können. Die Idee hinter den Regenerationszeiten soll sein, dass keines der Partikel, die sich zur Regenerationszeit links der Marke befinden, in Zukunft die Marke noch einmal berührt. Dies ist sicherlich erfüllt, wenn wir wissen, dass sich die Marke in Zukunft zu jedem Zeitpunkt rechts von der Barriere  $\alpha_2 t$  aufhält, während sich die „alten“ Partikel links von der Barriere  $\alpha_1 t$  befinden (siehe (2.4)). Die nun folgende Definition spiegelt diese Überlegung wider.

**2.2.9 Definition**

Wir definieren die folgenden Stoppzeiten:

- a)  $U := \inf \{t \geq 0 : R_t^+ - R_0 < \alpha_2 t\}$ .
- b)  $V := \inf \left\{ t \geq 0 : \max_{-L < z < 0, X_0^{(z)} \neq R_0} X_t^{(z)} > R_0 + \alpha_1 t \right\}$ .
- c)  $W := \inf \{t \geq 0 : \Psi_{-L}(t) = e^{\vartheta(\alpha_1 t - (R_t - R_0))}\}$ .
- d)  $D =: \min \{U, V, W\}$ .

Wir werden überall o.B.d.A.  $R_0 = 0$  annehmen können und dies auch an vielen Stellen tun.

Die Stoppzeit  $U$  tritt dann ein, wenn sich die Marke „zu langsam“ bewegt (siehe Definition 2.1.2 und Lemma 2.1.3) und deshalb nach links hinter die Barriere  $\alpha_2 t$  zurückfällt. Auf der anderen Seite bilden  $V$  und  $W$  zusammen eine untere Schranke für den ersten Zeitpunkt, zu dem ein altes Partikel die Barriere  $\alpha_1 t$  nach rechts hin überquert: Ist  $V = \infty$ , so wissen wir, dass die

rechts von  $\eta_{-L}$  und links von  $\eta_0$  gestarteten Partikel nie wieder diese Grenze erreichen werden. Ist  $W = \infty$ , so wissen wir das gleiche über die Pfade  $X^{(z)}$  mit  $z \leq -L$ . Diese Aufteilung wird uns nachher dabei helfen, Abschätzungen für  $D$  zu finden:  $V$  ist einfach zu kontrollieren, da es sich hier nur um endlich viele Partikel handelt und  $W$  kann mit Hilfe der exponentiellen Partikeldichte und einem Martingalargument abgeschätzt werden. Dafür ist es aber wichtig, dass die exponentielle Partikeldichte zu Beginn klein genug ist, weswegen wir die Partikel, die rechts von  $\eta_{-L}$  gestartet sind, separat in  $V$  behandeln müssen.

### 2.2.10 Lemma

*Die Stoppzeiten  $U, V$  und  $W$  sind unabhängige Zufallsvariablen.*

BEWEIS. Die Unabhängigkeit liegt vor, weil die Stoppzeiten nach Definition nicht von gemeinsamen Partikelpfaden abhängen (bzgl.  $R^+$  siehe auch Definition 2.1.2) und die zu den Pfaden gehörigen Brownschen Bewegungen  $B^{(z)}$  unabhängig gewählt wurden. Die Gleichung in der Definition von  $W$  erscheint dabei wegen des Terms  $\exp(-\vartheta R_t)$  zunächst verdächtig, schreibt man aber  $\Psi_{-L}(t)$  aus, so sieht man, dass sie zur Gleichung

$$\sum_{z \leq -L} e^{\vartheta X_t^{(z)}} = e^{\vartheta(\alpha_1 t + R_0)}$$

äquivalent ist. □

Wir werden die Stoppzeiten aus Definition 2.2.9 auch in der Form benötigen, dass wir zu einem Zeitpunkt  $s \neq 0$  das *nächste* Eintreten der Stoppzeit  $D$  (bzw.  $U$  etc.) *nach*  $s$  betrachten wollen. Dazu dient die folgende Definition.

### 2.2.11 Definition

Sei  $(\Omega := \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{S}_\vartheta), \mathcal{A}, \mathbb{P})$  der dem Prozess  $(X, R)$  via

$$(X_t, R_t)(\omega) := \omega(t) \in \mathbb{S}_\vartheta$$

zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum und  $s \geq 0$ . Der *zeitliche Verschiebungsoperator*  $\theta_s : \Omega \rightarrow \Omega$  sei dann gegeben durch

$$(X_t, R_t) \circ \theta_s = (X_{t+s}, R_{t+s}).$$

Nun sind  $U \circ \theta_s, V \circ \theta_s$  und  $W \circ \theta_s$  die Stoppzeiten aus Definition 2.2.9 angewendet auf den verschobenen Prozess (was der Verwendung der Pfade  $X^{(s,z)}$

statt  $X^{(z)}$ , sowie der Partikeldichte  $\Psi_{s,-L}$  statt  $\Psi_{-L}$  entspricht). Schließlich ist noch  $D \circ \theta_s := \min \{U \circ \theta_s, V \circ \theta_s, W \circ \theta_s\}$ .

### 2.2.12 Bemerkung

*Obige Definition würde rein formal zu einer Veränderung der in Bemerkung 1.1.9 angegebenen Nummerierung führen. Da dies aber an späterer Stelle zu Problemen führen würde, wollen wir bei zeitlichen Verschiebungen die ursprüngliche Nummerierung beibehalten.*

Die Definition von  $U$  bringt leider noch ein Problem mit sich: Das Verhalten der Marke  $R_t^+$  ist schwer zu kontrollieren, weswegen es schwierig ist, Abschätzungen für  $U$  zu finden. Um diesem Problem zu entgehen, wollen wir die folgenden, vom ersten Hilfsprozess (siehe Definition 2.1.1) abhängigen Stoppzeiten definieren, die bessere Kontrollmöglichkeiten bieten.

### 2.2.13 Definition

Es sei  $U^H := \min \{U_1^H, U_2^H\}$ , wobei

$$U_1^H := \inf \left\{ t \geq 0 : \tilde{R}_t < \alpha_2 t \right\} \text{ und}$$

$$U_2^H := \inf \left\{ t \geq 0, t \in \left\{ \nu^{(k)}, k \in \mathbb{N} \right\} : \tilde{R}_t < \alpha_3 t \right\},$$

sowie  $D^H := \min \{U^H, V, W\}$ .

Wie in Definition 2.2.11 erhalten wir weiter  $U^H \circ \theta_s$  und  $D^H \circ \theta_s$ .

Im Gegensatz zur Stoppzeit  $U$  wird  $U^H$  in die zwei Stoppzeiten  $U_1^H$  und  $U_2^H$  aufgeteilt. Diese Aufteilung ist ein technisches Hilfsmittel, das wir für Abschätzungen im folgenden Kapitel benötigen werden. Es gilt das folgende elementare Lemma.

### 2.2.14 Lemma

*Es ist  $U^H \leq U$  und  $D^H \leq D$ .*

BEWEIS. Das folgt aus der Definition der Stoppzeiten und Lemma 2.1.3.  $\square$

Die Stoppzeiten  $D \circ \theta_s$  sind die in der Einleitung dieses Abschnittes angedeuteten „schlechten Zeiten“. Wir wollen nun die „guten Zeiten“ definieren. Gute Zeiten sollen solche Zeiten sein, bei denen die Chancen gut stehen, dass keine schlechte Zeit auf sie folgt. Wir verlangen dazu von den guten Zeiten, dass die alten Partikel insgesamt weit von der Marke entfernt sind, d.h. eine geringe exponentielle Partikeldichte (siehe Definition 2.2.4) haben,

und dass von den zuletzt geweckten Partikeln noch viele in der Nähe der Marke sind. Tritt die erste Bedingung ein, so werden es die alten Partikel schwerer haben, die  $\alpha_1$ -Barriere nach rechts zu überwinden, tritt auch die zweite Bedingung ein, so bestehen gute Chancen darauf, dass die Marke zügig vorankommt und rechts vor der  $\alpha_2$ -Barriere bleibt. Wir wollen hierbei nur in bestimmten Momenten prüfen, ob eine gute Zeit vorliegt oder nicht, nämlich immer dann, wenn die Marke weitere  $L$  Partikel geweckt hat.

### 2.2.15 Definition

Sei  $t \geq 0$ . Wir setzen für  $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$ :

$$J_t := \inf \left\{ j \geq 1 : \Psi_{\tau_n, (j-1)L}(\tau_{n+jL}) \leq q \text{ und } M_{jL-L^{\frac{1}{4}}, jL}^{\tau_n}(\tau_{n+jL}) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2} \right\}.$$

Hat also die Marke zur Zeit  $t$  den Ort  $\eta_n$  bereits passiert, aber noch nicht  $\eta_{n+1}$  erreicht, so gibt  $J_t$  an, wie oft die Marke jeweils  $L$  weitere Partikel wecken muss, bis man bei der nächsten guten Zeit angekommen ist. Wir werden später sehen, dass fast sicher  $J_t < \infty$  gilt.

Wie in der Einleitung dieses Abschnittes angedeutet wollen wir nun die soeben definierten „guten“ und „schlechten“ Zeiten miteinander in Verbindung bringen. Dazu lassen wir zunächst die Marke vom Punkte 0 aus so lange jeweils  $L$  Partikelstartpunkte nach rechts wandern, bis zum ersten Mal die in Definition 2.2.15 formulierten Bedingungen erfüllt sind. Dieser Zeitpunkt soll dann die erste „gute“ Zeit  $S_1$  sein. Tritt danach die Stoppzeit  $D \circ \theta_{S_1}$  ein, so bezeichnen wir diesen Zeitpunkt als die erste „schlechte“ Zeit  $D_1$ . Die weiteren schlechten Zeiten  $D_k$  sollen genauso auf die entsprechenden guten Zeiten  $S_k$  folgen, die wir wiederum wie folgt mit Hilfe der Stoppzeiten aus Definition 2.2.13 erhalten.

### 2.2.16 Definition

Die Familien  $\{S_k, k \geq 0\}$  und  $\{D_k^H, k \geq 0\}$  von Stoppzeiten seien wie folgt definiert:  $S_0 := 0, D_0^H := 0$  und für  $k \geq 0$  setzen wir

$$S_{k+1} := \begin{cases} \tau_{D_k^H, J_{D_k^H} L}, & \text{falls } D_k^H < \infty \\ \infty, & \text{falls } D_k^H = \infty \end{cases},$$

sowie

$$D_{k+1}^H := S_{k+1} + D^H \circ \theta_{S_{k+1}}.$$

Für  $k \geq 1$  sei ferner  $U_k := S_k + U \circ \theta_{S_k}$  und  $U_k^H, V_k, W_k$  entsprechend. Genauso definieren wir auch  $D_k$  über  $D_k := S_k + D \circ \theta_{S_k}$ .

Wir werden die Zeitpunkte  $S_k$  später dazu nutzen, den Prozess neu zu starten. War  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta_L}$  die Ausgangskonfiguration, so galt bisher  $\chi = (X_0, R_0)$ . Nach einem solchen Neustart ist dies nicht mehr gegeben, die dabei entstehenden neuen Startkonfigurationen werden Voraussetzung (2.9) aber dennoch erfüllen:

**2.2.17 Lemma**

Sei  $\omega \in \Omega$  mit  $S_k(\omega) < \infty$ . Dann ist  $(X_0, R_0)(\theta_{S_k}(\omega)) \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$ .

BEWEIS. Das ist eine direkte Konsequenz aus Bemerkung 2.2.12 und den Definitionen 2.2.15 und 2.2.16.  $\square$

Wir haben bei der Konstruktion der  $D_k$  die  $S_k$  verwendet, die mit Hilfe der  $D_k^H$  konstruiert wurden und nicht eine analog zu den  $S_k$  mit Hilfe der  $D_k$  erstellte Folge  $S'_k$ , da nur so die Regenerationszeiten, die wir gleich in 2.2.18 und 2.2.19 definieren werden, miteinander verglichen werden können.

**2.2.18 Definition (Regenerationszeiten)**

Sei  $K := \inf \{k \geq 1 : S_k < \infty, D_k = \infty\}$ . Dann sei

$$\kappa := \kappa_1 := \begin{cases} S_K & \text{falls } K < \infty, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

die *erste Regenerationszeit* des Prozesses  $(X_t, R_t)$ . Für  $n \geq 2$  definieren wir die *n-te Regenerationszeit*  $\kappa_n$  über

$$\kappa_n := \begin{cases} \kappa_{n-1} + \kappa' \circ \theta_{\kappa_{n-1}} & \text{falls } \kappa_{n-1} < \infty, \\ \infty & \text{falls } \kappa_{n-1} = \infty, \end{cases}$$

wobei  $\kappa'$  genau wie  $\kappa$  definiert ist, nur dass wir bei der Definition statt  $\Psi_{s,z}(t)$  die Funktion

$$\Psi'_{s,z}(t) := \sum_{i \leq z, X_0^{(s,i)} \geq R_0} e^{\vartheta(X_t^{(s,i)} - R_t)}$$

verwenden.

Die hier definierten Partikeldichten zählen also nur Partikel, die nach der jeweils letzten Regenerationszeit noch einmal Einfluss auf die Fortbewegung



der Marke haben könnten. Wir werden uns im weiteren Verlauf immer nur auf  $\Psi$  beziehen, sämtliche Aussagen, die hierbei getroffen werden gelten aber analog auch für die Situationen nach Regenerationszeiten mit der neuen, „abgeschnittenen“ Partikeldichte  $\Psi'$ .

Weiter haben wir zur Definition der  $S_k$  die Stoppzeiten  $D_k^H$  verwendet, obwohl für  $\kappa = S_k$  die Bedingung  $\{D_k = \infty\}$  und nicht  $\{D_k^H = \infty\}$  erfüllt sein muss. Dies ist aber sinnvoll, wie wir gleich sehen werden.

### 2.2.19 Definition

Sei  $K^H := \inf \{k \geq 1 : S_k < \infty, D_k^H = \infty\}$ . Dann sei

$$\kappa^H := \begin{cases} S_{K^H} & \text{für } K^H < \infty, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

die *Hilfsregenerationszeit* des Prozesses  $(X_t, R_t)$ .

Wir werden  $\kappa^H$  nicht direkt für die Regenerationsstruktur verwenden können, da wir für diese die Aussage aus Lemma 4.1.7 benötigen werden, welche für  $U$  gilt, aber nicht für  $U^H$ . Wir können  $\kappa^H$  aber dazu benutzen, die Momente von  $\kappa$  nach oben abzuschätzen, wie das nächste Lemma zeigt.

### 2.2.20 Lemma

*Es gilt  $\kappa \leq \kappa^H$ .*

BEWEIS. Zusammen mit Lemma 2.2.14 folgt dies aus der Konstruktion.  $\square$

Das nächste Ziel wird nun also sein, Abschätzungen für  $D^H$  und  $S_k$  zu finden, um damit zu zeigen, dass die ersten zwei Momente von  $\kappa^H$  und somit auch die ersten zwei Momente von  $\kappa$  beschränkt sind.



# Kapitel 3

## Technische Details

In diesem Kapitel wollen wir uns damit beschäftigen, Abschätzungen für die bei der Definition der Regenerationszeit beteiligten Stoppzeiten und Zufallsvariablen zu finden. Um sicherzustellen, dass  $\kappa$  erste und zweite Momente hat, zeigen wir zwei Typen von Aussagen: Zum ersten zeigen wir, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit  $D^H = \infty$  gilt, und dass  $D^H$  im Falle  $D^H < \infty$  früh eintritt. Anders ausgedrückt: Wenn schon eine weitere schlechte Zeit kommt, dann kommt sie zumindest bald. Zum zweiten werden wir sehen, dass es bei gegebenen Rahmenbedingungen nicht zu lange dauert, bis gewisse Punkte von der Marke erreicht werden, und dass  $J_{D^H}$  eher klein ist. Diese Abschätzungen werden uns dann zeigen, dass wir nach einer schlechten Zeit nicht allzu lange auf die nächste gute Zeit werden warten müssen.

### 3.1 Schranken für $U^H$

Wir wollen mit den Abschätzungen für die Wartezeiten bis zum Eintreten von schlechten Zeiten beginnen. Dazu zeigen wir in diesem Abschnitt zunächst, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit  $U^H = \infty$  sein kann, und dass im Falle  $U^H < \infty$  zumindest  $U^H$  klein ist. Um  $U^H$  abzuschätzen zu können, benötigen wir noch eine Aussage über die Momente der beim ersten Hilfsprozess beteiligten Stoppzeiten  $\nu_n$  (siehe Definition 2.1.1).

#### 3.1.1 Lemma

Für alle  $1 \leq p < \frac{M}{2}$  gibt es ein  $C_p < \infty$ , so dass für alle  $j \geq M$  gilt:

$$\mathbb{E}[|\nu_j|^p] < C_p.$$

BEWEIS. Da  $j \geq M$  ist, hängt  $\nu_j$  von  $M$  Partikelpfaden ab. Nach Definition gilt

$$\nu_j = \min \{ \tau_{\eta_i, \eta_j} : j - M \leq i \leq j - 1 \},$$

wo  $\tau_{x,y}$  die Zeit ist, die eine in  $x$  gestartete Brownsche Bewegung benötigt, um  $y$  zu erreichen. Wie in (2.1) und (2.3) gilt weiter

$$\mathbb{P} [\tau_{x,y} > t] = 2\Phi \left( \frac{|x-y|}{\sqrt{t}} \right) - 1 \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{t}}$$

und folglich wegen der Unabhängigkeit der Partikelpfade auch

$$\mathbb{P} [\nu_j > t | \eta_j - \eta_{j-M} = x] \leq x^M t^{-\frac{M}{2}}.$$

Wir setzen  $X := \eta_j - \eta_{j-M}$ . Wegen  $\nu_j \geq 0$  gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\nu_j|^p] &= \mathbb{E} [\nu_j^p] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} [\nu_j^p | X] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{P} [\nu_j > t | X] dt \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ X^M p \int_1^\infty t^{p-1} t^{-\frac{M}{2}} dt \right] + p. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $p - 1 - \frac{M}{2} < -1$  existiert das Integral in obiger Gleichung und hat den Wert  $C < \infty$ , und es gilt

$$\mathbb{E} [|\nu_j|^p] \leq p (C \mathbb{E} [X^M] + 1) =: C_p < \infty,$$

da  $X \sim \Gamma_{M,1}$ . □

Wir zeigen nun, dass die Wahrscheinlichkeit, dass  $t < U^H < \infty$  ist, schnell in  $t$  abfällt und somit  $U^H$  eher klein ist, wenn es endlich ist. Die Idee für die dabei verwendeten Abschätzungen ist diese: Wir prüfen, ob die Marke des ersten Hilfsprozess  $\tilde{R}_t$  zu den Zeitpunkten  $\nu^{(k)}$ , zu denen sie Punkte  $\eta_k$  erreicht, links hinter die Position  $\alpha_3 \nu^{(k)}$  zurückgefallen ist. Dann schauen wir, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  links hinter  $\alpha_2 t$  zurückfällt, vorausgesetzt, sie befindet sich zu den Zeitpunkten  $\nu^{(k)}$  rechts von  $\alpha_3 \nu^{(k)}$ .

**3.1.2 Lemma**

Ist  $1 \leq p < \frac{M}{2}$ , so gibt es eine Konstante  $C < \infty$ , so dass für alle  $t > 0$  die Ungleichung

$$\mathbb{P} [t < U^H < \infty] \leq Ct^{-\frac{p}{2}}$$

erfüllt ist.

BEWEIS. Es sei o.E.  $R_0 = 0$  und

$$A := \left\{ \nu^{(M)} \leq \frac{\eta_M}{\alpha_3} \right\}$$

das Ereignis, dass die Marke des ersten Hilfsprozesses den Ort  $\eta_M$  erreicht, bevor die Barriere  $\alpha_3 t$  dort angekommen ist. Für  $n_t := \max \{n : \nu^{(n)} < t\}$  seien weiter

$$B'_{1,t} := \bigcup_{n > n_t} \left\{ \nu^{(n)} > \frac{\eta_n}{\alpha_3} \right\}, B_{2,t} := \bigcup_{s > t} \left\{ \tilde{R}_s < \alpha_2 s \right\}$$

die Ereignisse, dass sich die Marke des Hilfsprozesses nach der Zeit  $t$  beim Erreichen einer der Partikelstartpunkte links von der  $\alpha_3$ -Barriere bzw. zu einem Zeitpunkt dazwischen links von der  $\alpha_2$ -Barriere aufhält. Nach Definition von  $U^H$  gilt für alle  $k \geq 0$

$$\left\{ \frac{\eta_k}{\alpha_3} < t < U^H \right\} \subseteq \left\{ t > \nu^{(k)} \right\} \quad (3.1)$$

und somit auch

$$\left\{ t \leq \nu^{(k)}, t < U^H \right\} \subseteq \left\{ t \leq \frac{\eta_k}{\alpha_3} \right\}.$$

Hieraus und aus der Definition von  $n_t$  folgern wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ n_t < \left\lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \right\rfloor, t < U^H \right] &= \mathbb{P} \left[ t \leq \nu^{(\lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor)}, t < U^H \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \eta_{\lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor} \geq \alpha_3 t \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Setzen wir in (3.1)  $k = M$ , so erhalten wir

$$\left\{ \frac{\eta_M}{\alpha_3} < t < U^H \right\} \subseteq \left\{ U^H > \nu^{(M)} \right\} \subseteq A. \quad (3.3)$$

Wir fahren fort mit der Abschätzung

$$\mathbb{P} [t < U^H < \infty] \leq \mathbb{P} [\alpha_3 t \leq \eta_M] + \mathbb{P} [t < U^H < \infty, \alpha_3 t > \eta_M]. \quad (3.4)$$

Wir erhalten für den zweiten Summanden in (3.4) nach Definition von  $U^H$  und mit (3.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [\eta_M \alpha_3^{-1} < t < U^H < \infty] &\leq \mathbb{P} [A \cap (B'_{1,t} \cup B_{2,t})] \\ &= \mathbb{P} [A \cap B'_{1,t}] + \mathbb{P} [A \cap B_{2,t} \cap (B'_{1,t})^c]. \end{aligned}$$

Sei nun  $B_{1,t} := \bigcup_{n \geq \lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor} \{\nu^{(n)} > \eta_m \alpha_3^{-1}\}$ . Offenbar gilt auf  $\{n_t \geq \lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor\}$  die Inklusion  $B'_{1,t} \subseteq B_{1,t}$ . Insbesondere folgt somit

$$\mathbb{P} [A \cap B'_{1,t}] \leq \mathbb{P} [A \cap B_{1,t}] + \mathbb{P} \left[ \eta_{\lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor} \geq \alpha_3 t \right],$$

wobei wir (3.2) verwendet haben. Fassen wir nun alles zusammen, erhalten wir, dass der Ausdruck

$$\mathbb{P} [\alpha_3 t \leq \eta_M] + \mathbb{P} \left[ \eta_{\lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor} \geq \alpha_3 t \right] + \mathbb{P} [A \cap B_{1,t}] + \mathbb{P} [A \cap B_{2,t} \cap (B'_{1,t})^c] \quad (3.5)$$

die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P} [t < U^H < \infty]$  nach oben abschätzt. Wir wollen nun für die einzelnen Summanden Abschätzungen finden. Für den ersten Summanden ist das einfach: Da  $\eta_M \sim \Gamma_{M,1}$ , gilt

$$\mathbb{P} [\alpha_3 t \leq \eta_M] = e^{-\alpha_3 t} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{(\alpha_3 t)^j}{j!}. \quad (3.6)$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir dank Lemma A.7 die Abschätzung

$$\mathbb{P} \left[ \eta_{\lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor} \geq \alpha_3 t \right] \leq e^{-C_1 t}.$$

Wir wollen für den Rest des Beweises  $N_t := \lfloor \frac{\alpha_3}{2} t \rfloor$  schreiben. Für den dritten Summanden ergibt sich dann:

$$\mathbb{P} [A \cap B_{1,t}] \leq \mathbb{P} \left[ \bigcup_{n \geq N_t} \left\{ \nu^{(n)} - \nu^{(M)} > \frac{\eta_m - \eta_M}{\alpha_3} \right\} \right] \quad (3.7)$$

Wir setzen weiter  $\gamma_j := \nu_j - \frac{1}{\alpha}$  (siehe Korollar 2.1.6) und schreiben obige

Ungleichung um zu

$$\mathbb{P}[A \cap B_{1,t}] \leq \mathbb{P} \left[ \bigcup_{n \geq N_t} \left\{ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\eta_n - \eta_M}{\alpha_3} - \frac{n-M}{\alpha} \right\} \right] \quad (3.8)$$

Wir wollen nun das Ereignis  $D_t := \{\forall n > N_t : (\eta_n - \eta_M) \geq \frac{\alpha + \alpha_3}{2\alpha} (n - M)\}$  betrachten. Da weiter

$$\left\{ (\eta_n - \eta_M) \geq \frac{\alpha + \alpha_3}{2\alpha} (n - M) \right\} = \left\{ \frac{\eta_n - \eta_M}{\alpha_3} - \frac{n - M}{\alpha} \geq \frac{\alpha - \alpha_3}{2\alpha_3\alpha} (n - M) \right\}$$

gilt, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \bigcup_{n \geq N_t} \left\{ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\eta_n - \eta_M}{\alpha_3} - \frac{n - M}{\alpha} \right\} \cap D_t \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ \bigcup_{n \geq N_t} \left\{ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\alpha - \alpha_3}{2\alpha_3\alpha} (n - M) \right\} \cap D_t \right]. \end{aligned}$$

Damit können wir (3.8) fortsetzen zu

$$\mathbb{P}[A \cap B_{1,t}] \leq \mathbb{P} \left[ \bigcup_{n \geq N_t} \left\{ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\alpha - \alpha_3}{2\alpha_3\alpha} (n - M) \right\} \right] + \mathbb{P}[D_t^c]. \quad (3.9)$$

Setzen wir nun  $\beta := \frac{\alpha - \alpha_3}{2\alpha_3\alpha} > 0$  (nach Wahl in (2.4)), so sehen wir, dass der linke Summand kleiner ist als

$$\sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{P} \left[ \sup_{n \geq N_t} \frac{1}{(n - M)} \sum_{j=M+1, j=kM+i}^n \gamma_j > \beta \right]. \quad (3.10)$$

Nach Korollar 2.1.6 sind für festes  $i \in \{1, \dots, M-1\}$  die Zufallsvariablen  $\{\gamma_{kM+i}, k \geq 1\}$  u.i.v. mit endlichem Erwartungswert. Für zentrierte u.i.v. Zufallsvariablen  $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$  gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon \right] & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \sup_{2^k N \leq n \leq 2^{k+1} N} \frac{1}{2^k N} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon \right] \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^k N \varepsilon)^{-p} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^{2^{k+1} N} X_i \right|^p \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

wobei die zweite Ungleichung die Doobsche  $\mathcal{L}^p$ -Ungleichung ist. Ist nun  $p \geq 2$  und  $\mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty$ , so gibt es nach Lemma A.2 ein  $C_2 < \infty$  mit

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^{2^{k+1}N} X_i \right|^p \right] \leq C_2 \left( 2^{k+1}N \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (3.12)$$

Nach Lemma 3.1.1 erfüllen die  $\gamma_j$  die Voraussetzungen von Lemma A.2 und wir können (3.11) und (3.12) auf (3.10) anwenden, um ein  $C_3 < \infty$  zu erhalten, so dass der linke Summand von (3.9) kleiner wird als  $C_3 \beta^{-p} t^{-\frac{p}{2}}$ .

Für den rechten Summanden können wir genauso vorgehen. Wir setzen dazu  $\delta_j := (\eta_j - \eta_{j-1}) - 1$ . Nach Definition sind auch die  $\delta_j$  u.i.v. mit Erwartungswert 0. Weiter ist nach Definition von  $D_t$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[D_t^c] &\leq \mathbb{P} \left[ \inf_{n > N_t} \frac{1}{n - M} \sum_{j=M+1}^n \delta_j < \frac{\alpha + \alpha_3}{2\alpha} - 1 \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \sup_{n > N_t} \frac{1}{n - M} \sum_{j=M+1}^n -\delta_j > 1 - \frac{\alpha + \alpha_3}{2\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Nun können wir genauso wie eben Lemma A.2 und die Doobsche Ungleichung anwenden ( $1 - \frac{\alpha + \alpha_3}{2\alpha} > 0$ ) und erhalten ein  $C_4$ , so dass die rechte Seite von (3.9) beschränkt ist durch  $C_4 \beta^{-p} t^{-\frac{p}{2}}$ . Damit gibt es also ein  $C_5$  mit

$$\mathbb{P}[A \cap B_{1,t}] \leq C_5 t^{-\frac{p}{2}}. \quad (3.13)$$

Schließlich betrachten wir den vierten Summanden  $\mathbb{P}[A \cap B_{2,t} \cap (B'_{1,t})^c]$ . Im schlimmsten Fall verharrt hierbei der Prozess für  $n \geq n_t$  jeweils bis zur Zeit  $\alpha_3^{-1} \eta_{n+1}$  im Punkt  $\eta_n$ . Somit können wir obige Wahrscheinlichkeit dagegen abschätzen, dass für ein  $n \geq n_t$  die Ungleichung  $\alpha_2^{-1} \eta_n < \alpha_3^{-1} \eta_{n+1}$  erfüllt ist. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cap B_{2,t} \cap (B'_{1,t})^c] &\leq \sum_{n=n_t}^{\infty} \mathbb{P}[\alpha_2^{-1} \eta_n < \alpha_3^{-1} \eta_{n+1}] \\ &= \sum_{n=n_t}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \eta_{n+1} - \eta_n > \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2} \eta_n \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sei nun  $c := \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2} > 0$ ,  $T \sim \exp_1$  und  $\gamma_{n,1}(s)$  die Dichte der  $\Gamma_{n,1}$ -Verteilung,



dann folgt weiter mit wiederholter partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} [A \cap B_{2,t} \cap (B'_{1,t})^c] &\leq \sum_{n=n_t}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbb{P} [T > c \cdot s] \gamma_{n,1}(s) ds \\
&= \sum_{n=n_t}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-cs} \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} ds \\
&= \sum_{n=n_t}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} s^{n-1} e^{-(c+1)s} ds \\
&= \sum_{n=n_t}^{\infty} \frac{1}{(c+1)^n} = \frac{p^{n_t}}{1-p},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

wobei  $p := \frac{1}{c+1} < 1$ . Somit erhalten wir  $C_6, C_7 > 0$ , so dass

$$\mathbb{P} [A \cap B_{2,t} \cap (B'_{1,t})^c] \leq C_6 e^{-C_7 t}. \tag{3.16}$$

Zusammen mit (3.5),(3.6),(3.7) und (3.13) folgt nun

$$\mathbb{P} [t < U^H < \infty] \leq e^{-t} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{t^j}{j!} + C_5 t^{-\frac{p}{2}} + C_6 e^{-C_7 t} \leq C t^{-\frac{p}{2}}. \quad \square$$

Nachdem wir gesehen haben, dass  $U^H$  im Falle des Eintretens eher klein ist, wollen wir nun zeigen, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit  $U^H = \infty$  gilt. Die dabei verwendete und im weiteren Verlauf wieder auftauchende Bedingung  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$  (siehe Definition 1.1.5) scheint zunächst überflüssig, da sie nach Wahl der möglichen Ausgangskonfigurationen automatisch erfüllt ist (siehe hierzu Bemerkung 1.1.2). Wir wollen aber später die starke Markov-eigenschaft des Prozesses nutzen, um den Prozess zu den Zeiten  $S_k$  neu zu starten. Da die Marke nach Definition zu jeder dieser Zeiten ein schlafendes Partikel weckt, ist die Bedingung dann ebenfalls erfüllt.

### 3.1.3 Lemma

Sei  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$ . Dann ist

$$\mathbb{P} [U^H < \infty] < 1.$$

BEWEIS. Sei o.E.  $R_0 = 0$ . Die Idee des Beweises ist diese: Ist die Marke erst einmal eine Weile unterwegs, so genügt es zu zeigen, dass sie alle noch rechts liegenden Punkte  $\eta_n$  vor der Barriere  $\alpha_3 t$  erreicht und gleichzeitig die Barriere  $\alpha_3 t$  bei  $\eta_{n+1}$  ankommt, bevor die  $\alpha_2$ -Barriere  $\eta_n$  erreicht hat. So fällt die Marke nach dem Erreichen von  $\eta_n$  insbesondere nie wieder links hinter  $\alpha_2 t$  zurück. Diese Argumentation kann man nicht direkt zur Zeit 0 anwenden, da die  $\alpha_2$ -Barriere in  $\eta_0 = 0$  startet und die  $\alpha_3$ -Barriere zur Zeit 0 noch nicht  $\eta_1$  erreicht haben kann. Wir werden deshalb den Prozess zunächst bis zu einer gewissen Zeit laufen lassen und zeigen, dass sich die Marke bis zu dieser Zeit mit positiver Wahrscheinlichkeit rechts der  $\alpha_2$ -Barriere befindet. Ist diese Zeit groß genug gewählt, werden wir dann mit einem Argument, welches ähnlich dem obigen ist, zeigen können, dass sich die Marke auch nach dieser Zeit mit positiver Wahrscheinlichkeit stets rechts von  $\alpha_2 t$  aufhält. Wir zeigen zunächst, dass das Ereignis  $A := \{U_2^H = \infty\}$ , bei dem sich die Marke des Hilfsprozesses zu allen Zeitpunkten  $\eta^{(k)}$  rechts von der  $\alpha_3$ -Barriere befindet, positive Wahrscheinlichkeit hat. Es gilt

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} \left\{ \nu^{(k)} \leq \frac{\eta_k}{\alpha_3} \right\}\right].$$

Es seien  $B^{(k)}$  die Brownschen Bewegungen aus Abschnitt 1.1. Wir definieren für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\widehat{B}_t^{(k)} := \sup \{B_s^{(k)}, 0 \leq s \leq t\}$  und  $\varepsilon < \frac{1}{\alpha_3}$  die Ereignisse

$$A_1 := \left\{ \bigcap_{0 \leq k \leq n} \left\{ \widehat{B}_{\varepsilon(\eta_{k+1} - \eta_k)}^{(k)} \geq \eta_{k+M} - \eta_k \right\} \right\} \text{ und}$$

$$A_2 := \left\{ \bigcap_{k=M+n+1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=M+n+1}^k \nu_j \leq \frac{1}{\alpha_3} \eta_k - \varepsilon \eta_{M+n} \right\} \right\}.$$

Tritt das Ereignis  $A_1$  ein, so laufen die Partikel  $X^{(k)}, 0 \leq k \leq n$  alle bis zur Zeit  $\varepsilon(\eta_{k+1} - \eta_k)$  nach ihrer Entstehung  $M$  Partikel nach rechts. Insbesondere gilt dann nach Wahl von  $\varepsilon$  die Ungleichung  $\nu_k < \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\alpha_3}$  und damit auch  $\nu^{(k)} < \frac{\eta_k}{\alpha_3}$  für alle  $k \leq M+n$  und wir erhalten aufgrund der Unabhängigkeit der Ereignisse  $A_1$  und  $A_2$ :

$$\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[A_1] \mathbb{P}[A_2]. \quad (3.17)$$

Offenbar ist  $\mathbb{P}[A_1] > 0$  für  $n < \infty$ . Wir wollen zeigen, dass auch  $\mathbb{P}[A_2] > 0$  gilt. Dazu betrachten wir das Gegenereignis. Nach Definition ist

$$\mathbb{P}[A_2^c] \leq \sum_{k=M+n+1}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+n+1}^k \nu_j \geq \frac{1}{\alpha_3} \eta_k - \varepsilon \eta_{M+n} \right]. \quad (3.18)$$

Für die einzelnen Summanden erhält man mit  $c := \frac{2\alpha}{\alpha+\alpha_3} > 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+n+1}^k \nu_j \geq \frac{1}{\alpha_3} \eta_k - \varepsilon \eta_{M+n} \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+n+1}^k \nu_j \geq \frac{1}{\alpha_3} \eta_k - 2\varepsilon(M+n) \right] + \mathbb{P}[\eta_{M+n} > 2(M+n)] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+n+1}^k \nu_j \geq \frac{k}{c\alpha_3} - 2\varepsilon(M+n) \right] + \mathbb{P}[\eta_{M+n} > 2(M+n)] \\ & + \mathbb{P} \left[ \exists k \geq M+n+1 : \frac{\eta_k}{\alpha_3} < \frac{k}{c\alpha_3} \right]. \end{aligned}$$

Nach Lemma A.7 ist  $\mathbb{P}[\eta_{M+n} > 2(M+n)]$  exponentiell fallend in  $n$ , während

$$\mathbb{P} \left[ \exists k \geq M+n+1 : \frac{\eta_k}{\alpha_3} < \frac{k}{c\alpha_3} \right] = \mathbb{P} \left[ \exists k \geq M+n+1 : c < \frac{k}{\eta_k} \right] \leq C_1 n^{-\frac{p}{2}}$$

wie in Lemma 3.1.2 gezeigt werden kann (siehe dort: Ereignis  $D_t^c$ ). Der erste Summand lässt sich ebenfalls wie in 3.1.2 abschätzen. Hierzu setzt man  $\beta := \frac{1}{c\alpha_3} - \frac{1}{\alpha} > 0$ ,  $\gamma_j := \nu_j - \frac{1}{\alpha}$  und  $\varepsilon := \frac{\beta}{2(M+n)}$  (die Forderung  $\varepsilon < \frac{1}{\alpha_3}$  ist dabei erfüllt). Dann erhält man für  $p < \frac{M}{2}$  wie in (3.11) und (3.12):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+n+1}^k \nu_j \geq \frac{k}{c\alpha_3} - 2\varepsilon(M+n) \right] & \leq \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+n+1}^k \gamma_j \geq (k-1)\beta \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=M+n+1}^k \gamma_j \right)^p \right] ((k-1)\beta)^{-p} \\ & \leq C_2 k^{-\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Da  $M > 5$  ist, kann man  $p$  also so groß wählen, dass die Reihe in (3.18) konvergiert, und dann  $n \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\mathbb{P}[A_2^c] < 1$  aus (3.18) folgt.

Wegen (3.17) gilt dann auch  $\mathbb{P}[A] > 0$ . Wir definieren nun die Trefferzeit

$$T_a^j := \inf \left\{ t : B_t^{(j)} = a \right\}$$

und setzen  $\nu_n^* := \sum_{j=0}^{n-1} T_{\eta_{j+1}-\eta_j}^j$ . Weiter sei dann

$$X_t^* := \max \left\{ \eta_k + \widehat{B}_s^{(k)}, 0 \leq k \leq n \right\} \text{ für } \nu_n^* \leq t < \nu_{n+1}^*$$

der Prozess der das Maximum des jeweils zuletzt geweckten Partikels verfolgt, wenn immer nur dieses weitere Partikel wecken kann.  $X_t^*$  ist dann der Maximumprozess einer Brownschen Bewegung und es gilt

$$\widetilde{R}_t \geq X_t^* \text{ für alle } t \geq 0. \quad (3.19)$$

Für  $T > 0$  sei  $n_T := \max \{n : \nu_n^* < T\} + 1$ . Ähnlich wie bei der Definition des ersten Hilfsprozesses setzen wir

$$\nu_{T,n} := \inf \left\{ t : \eta_k + B_t^{(k)} = \eta_n \text{ für ein } k \text{ mit } \max \{n_T, n - M\} \leq k < n \right\}$$

und  $\nu_T^{(k)} := \nu_{n_T}^* + \sum_{j=n_T+1}^k \nu_j$ . Dann ist  $\nu_T^{(k)} - \nu_{n_T}^*$  die Zeit, die ein in  $\eta_{n_T}$  mit nur einem wachen Partikel (in  $\eta_{n_T}$ ) neu gestarteter erster Hilfsprozess benötigt, um  $\eta_k$  zu erreichen. Sei nun noch für  $t \geq \nu_{n_T}^*$

$$\widetilde{R}_{T,t} := \sup \left\{ \eta_k + B_{s-\nu_T^{(n)}}^{(k)}, \nu_T^{(n)} \leq s \leq t < \nu_T^{(n+1)}, \max \{n_T, n - M\} \leq k \leq n \right\},$$

der analog zu Definition 2.1.1 definierte Markenprozess, dann gilt

$$\widetilde{R}_t \geq \widetilde{R}_{T,t} \text{ für alle } t \geq \nu_{n_T}^*. \quad (3.20)$$

Wir definieren das Ereignis

$$B_{1,T} := \left\{ X_t^* \geq \alpha_3 t \text{ für } t \leq \nu_{n_T}^* \right\}.$$

Tritt nun  $B_{1,T}$  ein, so gilt nach (3.19) die Ungleichung

$$\widetilde{R}_{\nu_{n_T}^*} - \alpha_2 \nu_{n_T}^* \geq (\alpha_3 - \alpha_2)T$$

und wir erhalten mit (3.20):

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} [U^H = \infty] \\ & \geq \mathbb{P} \left[ B_{1,T} \cap \left\{ \tilde{R}_{T,t} - \eta_{n_T} \geq \alpha_2(t - \nu_{n_T}^*) - (\alpha_3 - \alpha_2)T, t \geq \nu_{n_T}^* \right\} \right] \quad (3.21) \\ & = \mathbb{P} [B_{1,T}] \mathbb{P} \left[ \tilde{R}_{T,t} - \eta_{n_T} \geq \alpha_2(t - \nu_{n_T}^*) - (\alpha_3 - \alpha_2)T, t \geq \nu_{n_T}^* \right], \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $(\tilde{R}_{T,t})$  nach Definition von  $\nu_T^{(k)}$  nicht von den Brownschen Bewegungen  $\{B^{(n)}, n < n_T\}$  abhängt. Um den zweiten Faktor nach unten abschätzen zu können, definieren wir weiter

$$\begin{aligned} A_T & := \bigcap_{k=n_T+1}^{\infty} \left\{ \nu_T^{(k)} - \nu_{n_T}^* \leq \frac{\eta_k - \eta_{n_T}}{\alpha_3} \right\} \text{ und} \\ B_{2,T} & := \left\{ \alpha_2^{-1}((\alpha_3 - \alpha_2)T + \eta_n - \eta_{n_T}) \geq \alpha_3^{-1}(\eta_{n+1} - \eta_{n_T}) \text{ für alle } n \geq n_T \right\} \end{aligned}$$

und setzen (3.21) fort zu

$$\mathbb{P} [U^H = \infty] \geq \mathbb{P} [B_{1,T} \cap B_{2,T} \cap A_T] = \mathbb{P} [B_{1,T}] \mathbb{P} [B_{2,T}|A_T] \mathbb{P} [A_T]. \quad (3.22)$$

Nach Lemma A.4 ist der erste Faktor für  $T < \infty$  strikt positiv. Sei weiter

$$B'_{2,T} := \left\{ \alpha_2^{-1}((\alpha_3 - \alpha_2)T + \eta_n) \geq \alpha_3^{-1}\eta_{n+1} \text{ für alle } n \geq 0 \right\}.$$

Für alle  $0 < T < \infty$  folgt nun aus der Konstruktion, dass wir (3.22) fortsetzen können zu

$$\mathbb{P} [U^H = \infty] \geq \mathbb{P} [B_{1,T}] \mathbb{P} [B_{2,T}|A_T] \mathbb{P} [A_T] = \mathbb{P} [B_{1,T}] \mathbb{P} [B'_{2,T}|A] \mathbb{P} [A]. \quad (3.23)$$

Nun gilt aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen für u.i.v.  $\exp_1$ -verteilte Zufallsvariablen, dass

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{T>0} (B'_{2,T})^c \right] = 0,$$

und damit auch

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{T>0} (B'_{2,T})^c \middle| A \right] = 0,$$

da  $\mathbb{P} [A] > 0$ . Da für  $t < t'$  die Inklusion  $(B'_{2,t'})^c \subseteq (B'_{2,t})^c$  gilt, folgt

insbesondere

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P} [(B'_{2,T})^c | A] \longrightarrow 0,$$

und wir können  $T$  so groß wählen, dass  $\mathbb{P} [B'_{2,T} | A] > 0$  ist. Da auch  $\mathbb{P} [B_{1,T}] > 0$  und  $\mathbb{P} [A] > 0$  gilt, folgt mit (3.23) die Behauptung.  $\square$

### 3.2 Schranken für $V$

Wir wollen in diesem Abschnitt Abschätzungen für  $V$  angeben, die analog zu denen sind, die wir im vorigen Abschnitt für  $U^H$  gefunden haben.

#### 3.2.1 Lemma

Für alle  $t \geq 1$  gilt

$$P [t < V < \infty] \leq \frac{2(L-1)}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha_1^2 t}{2}},$$

wobei  $L$  in Definition 2.2.6 gewählt wurde.

BEWEIS. Sei o.B.d.A.  $X_0^{(0)} = R_0 = 0$ . Dann ist

$$A_t := \left\{ \exists -L < z < 0, s > t : X_0^{(z)} \neq 0 \text{ und } X_s^{(z)} \geq \alpha_1 s \right\}$$

das Ereignis, dass einer der Partikelpfade, deren Startpunkte rechts von  $X_0^{(-L)}$  aber links von  $X_0^{(0)}$  liegen, jemals nach der Zeit  $t$  die Grenze  $\alpha_1 s$  nach rechts hin überschreitet (zur Definition von  $X^{(z)}$  für  $z \leq 0$  siehe Bemerkung 1.1.9). Dann ist

$$\mathbb{P} [t < V < \infty] \leq \mathbb{P} [A_t].$$

Letztere Wahrscheinlichkeit können wir wiederum abschätzen gegen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses im Sonderfall, dass alle beteiligten Partikel zur Zeit 0 im Punkte 0 sind. Da wir höchstens  $(L-1)$  Partikelpfade betrachten, folgt die Behauptung direkt aus Lemma A.5.  $\square$

Wir zeigen nun, dass  $V$  mit positiver Wahrscheinlichkeit niemals eintreten wird.

#### 3.2.2 Lemma

Für jedes  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$  gilt

$$\mathbb{P} [V < \infty] < 1.$$

BEWEIS. Sei o.E.  $R_0 = 0$ . Das Ereignis  $\{V = \infty\}$  ist jenes, bei dem für keiner der Partikelpfade  $X^{(z)}$  mit  $-L < z < 0$  und  $X_0^{(z)} \neq 0$  jemals zu einer Zeit  $t$  die Grenze  $\alpha_1 t$  überschreitet. Sei

$$x_{\max} := \max \left\{ X_0^{(z)}, -L < z < 0, X_0^{(z)} \neq 0 \right\},$$

dann starten diese Partikel im schlimmsten Falle alle in  $x_{\max}$ . Nach (A.5) und aufgrund der Unabhängigkeit der beteiligten Brownschen Bewegungen gilt somit

$$\mathbb{P}[V = \infty] \geq (1 - e^{-2\alpha_1 x_{\max}})^{L-1} > 0, \quad (3.24)$$

und wir sind fertig.  $\square$

Im Falle der zufälligen Ausgangskonfiguration  $(\eta, 0)$  haben wir das Problem, dass  $x_{\max}$  eine Zufallsvariable ist. Wir können hier aber  $\varepsilon > 0$  wählen, dann ist  $\mathbb{P}_\varepsilon := \mathbb{P}[x_{\max} < -\varepsilon] > 0$  und wir erhalten statt (3.24) die Abschätzung

$$\mathbb{P}[V = \infty] \geq \mathbb{P}_\varepsilon (1 - e^{-2\alpha_1 \varepsilon})^{L-1} > 0.$$

### 3.3 Schranken für $W$ und $D^H$

Wir werden zunächst Abschätzungen für  $W$  finden, die analog sind zu denen, die wir in den vorangegangenen Abschnitten für  $U^H$  und  $V$  gefunden haben. Danach können wir die Aussagen über  $U^H, V$  und  $W$  zu Abschätzungen für  $D^H$  zusammenfassen.

#### 3.3.1 Lemma

Es gibt ein  $C < \infty$ , so dass für alle  $t \geq 0$  und alle Startkonfigurationen  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$  die Ungleichung

$$\mathbb{P}[t < W < \infty] \leq C \Psi_{-L}(0, \chi) e^{-\mu t} \quad (3.25)$$

erfüllt ist, wobei  $\mu := \alpha_1 \vartheta - \frac{\vartheta^2}{2} > 0$  nach (2.4).

BEWEIS. Aufgrund der Stetigkeit Brownscher Bewegungen ist auch die Funk-

tion  $\Psi_{-L}$  stetig. Somit ist nach Definition

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[t < W < \infty] &\leq \mathbb{P}\left[\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\mathbb{Q}\ni s\geq t} \left\{\Psi_{-L}(s) \geq e^{\vartheta(\alpha_1 s - R_s)} - \varepsilon\right\}\right] \\ &\leq \inf_{\varepsilon>0} \mathbb{P}\left[\bigcup_{\mathbb{Q}\ni s\geq t} \left\{\sum_{i\leq -L} e^{\vartheta(X_s^{(i)} - R_s)} \geq e^{\vartheta(\alpha_1 s - R_s)} - \varepsilon\right\}\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\geq\lceil t\rceil}} \left\{\sum_{i\leq -L} e^{\vartheta\widehat{X}_{n+1}^{(i)}} \geq e^{\vartheta\lfloor\alpha_1 n\rfloor}\right\}\right], \end{aligned}$$

wobei  $\widehat{X} := \sup\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[t < W < \infty] &\leq \sum_{n=\lceil t\rceil}^{\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i\leq -L} e^{\vartheta\widehat{X}_{n+1}^{(i)}} \geq e^{\vartheta\lfloor\alpha_1 n\rfloor}\right] \\ &= \sum_{n=\lceil t\rceil}^{\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i\leq -L} e^{\vartheta\widehat{X}_{n+1}^{(i)} - \vartheta\lfloor\alpha_1 n\rfloor} \geq 1\right] \\ &\leq \sum_{n=\lceil t\rceil}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i\leq -L} e^{\vartheta\widehat{X}_{n+1}^{(i)} - \vartheta\lfloor\alpha_1 n\rfloor}\right] \\ &= \sum_{n=\lceil t\rceil}^{\infty} e^{-\vartheta\lfloor\alpha_1 n\rfloor} \sum_{i\leq -L} \mathbb{E}\left[e^{\vartheta\widehat{X}_{n+1}^{(i)}}\right]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Wir wollen die Orte  $X_0^{(i)}$  mit  $x_i$  bezeichnen. Das Spiegelungsprinzip und Lemma A.3 liefern dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\vartheta\widehat{X}_t^{(i)}}\right] &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left[e^{\vartheta\widehat{X}_t^{(i)}} \geq x\right] dx \\ &\leq e^{\vartheta x_i} + \int_{e^{\vartheta x_i}}^{\infty} \mathbb{P}\left[e^{\vartheta\widehat{X}_t^{(i)}} \geq x\right] dx \\ &\leq e^{\vartheta x_i} + 2 \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left[e^{\vartheta X_t^{(i)}} \geq x\right] dx \\ &= e^{\vartheta x_i} + 2\mathbb{E}\left[e^{\vartheta X_t^{(i)}}\right] \\ &= e^{\vartheta x_i} + 2e^{\vartheta(x_i + \frac{\vartheta^2}{2}t)} \leq 3e^{\frac{\vartheta^2}{2}t} e^{\vartheta x_i}. \end{aligned} \tag{3.27}$$



Zusammen mit (3.26) ergibt sich folglich:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[t < W < \infty] &\leq \sum_{n=\lfloor t \rfloor}^{\infty} 3e^{\frac{\vartheta^2}{2}(n+1)} e^{-\vartheta\lfloor\alpha_1 n\rfloor} \sum_{i \leq -L} e^{\vartheta x_i} \\ &= 3\Psi_{-L}(0, \chi) \sum_{n=\lfloor t \rfloor}^{\infty} e^{\frac{\vartheta^2}{2}(n+1)} e^{-\vartheta\lfloor\alpha_1 n\rfloor}, \end{aligned}$$

wobei die Summe bis auf eine Konstante durch  $e^{-(\alpha_1\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2})t}$  beschränkt ist.  $\square$

### 3.3.2 Lemma

Für  $t \geq 0$  sei der Prozess  $N_z(t)$  gegeben durch

$$N_z(t) := e^{\vartheta R_t - \frac{\vartheta^2}{2}t} \Psi_z(t).$$

Dann ist  $N_z$  für  $z \leq 0$  und  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$  ein Martingal.

BEWEIS.  $N_z(t)$  lässt sich auch schreiben als

$$N_z(t) = \sum_{z' \leq z} e^{\vartheta X_t^{(z')} - \frac{\vartheta^2}{2}t}.$$

Da  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$  ist  $\Psi_z(0, \chi) < \infty$ . Im Beweis von Lemma 1.1.4 haben wir bereits gesehen, dass dieser Prozess dann ein Martingal ist.  $\square$

### 3.3.3 Lemma

Für alle Startkonfigurationen  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  (siehe Definition 2.2.6) gilt:

$$\mathbb{P}[W < \infty] < 1.$$

BEWEIS. Aufgrund der Wahl von  $\vartheta$  in (2.4) ist  $\alpha_1\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2} > 0$ . Da auch  $W \geq 0$  ist, gilt

$$\mathbb{P}[W < \infty] \leq \mathbb{E} \left[ e^{(\alpha_1\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2})W} \mathbf{1}_{\{W < \infty\}} \right]. \quad (3.28)$$

Da die Pfade Brownscher Bewegungen stetig sind, folgt aufgrund der Definitionen von  $W$  und  $\Psi$  die Gleichung

$$e^{\vartheta(\alpha_1 W - R_W)} = \Psi_{-L}(W).$$

Zusammen mit (3.28) gilt also

$$\mathbb{P}[W < \infty] \leq \mathbb{E} \left[ e^{\vartheta R_W - \frac{\vartheta^2}{2} W} \Psi_{-L}(W) \mathbf{1}_{\{W < \infty\}} \right] = \mathbb{E} [N_{-L}(W) \mathbf{1}_{\{W < \infty\}}]. \quad (3.29)$$

Da für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung

$$\mathbb{E} [N_{-L}(n \wedge W)] = \mathbb{E} [N_{-L}(W) \mathbf{1}_{\{W < n\}} + N_{-L}(n) \mathbf{1}_{\{W \geq n\}}]$$

gilt, folgt nun, dass  $\mathbb{E} [N_{-L}(W) \mathbf{1}_{\{W < n\}}] \leq \mathbb{E} [N_{-L}(n \wedge W)]$  ist, und somit erhalten wir mit Fatous Lemma und dem Optional Stopping Theorem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N_{-L}(W) \mathbf{1}_{\{W < \infty\}}] &\leq \mathbb{E} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} N_{-L}(n \wedge W) \right] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [N_{-L}(n \wedge W)] = N_{-L}(0) \leq q < 1, \end{aligned}$$

wobei es sich um das  $q$  aus Definition 2.2.6 handelt. Wegen (3.29) folgt nun die Behauptung.  $\square$

Das folgende Korollar enthält die Hauptaussage der letzten drei Unterkapitel. Diese stellt einen wesentlichen Teil der Gesamtkonstruktion dar: Nur weil wir sicherstellen können, dass die „schlechten Zeiten“  $D^H$  schnell oder gar nicht eintreten, werden wir später erste und zweite Momente für die Regenerationszeiten erhalten.

### 3.3.4 Korollar

Es sei  $\mu := \alpha_1 \vartheta - \frac{\vartheta^2}{2}$ , dann gilt für Startkonfigurationen  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  und  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$ :

- a) Für  $M' < M$  gibt es ein  $C$  mit  $\mathbb{P}[t < D^H < \infty] \leq Ct^{-\frac{M'}{4}} + LCe^{-\mu t}$ .
- b)  $\mathbb{P}[D^H < \infty] < 1$ .

BEWEIS. Da  $\frac{\alpha_1^2}{2} > \mu$  folgt Teil a) direkt aus den Lemmata 3.1.2, 3.2.1 und 3.3.1. Aus der Unabhängigkeit von  $U^H$ ,  $V$  und  $W$  (siehe Lemma 2.2.10) folgt

$$\mathbb{P}[D^H < \infty] = 1 - \mathbb{P}[U^H = \infty] \mathbb{P}[V = \infty] \mathbb{P}[W = \infty],$$

und mit den Lemmata 3.1.3, 3.2.2 und 3.3.3 somit auch Teil b).  $\square$

### 3.4 Schranken für Treffzeiten von $R_t$

Wir werden uns im Folgenden um die „guten“ Zeiten kümmern. Damit es schnell zu einer guten Zeit kommen kann, muss zunächst dafür Sorge getragen werden, dass die Marke selbst schnell genug vorankommt. Das nächste Lemma gibt uns Abschätzungen dafür, wie lange es dauert, bis die Marke weitere Partikel produziert. Zuvor wollen wir noch eine spezielle Startkonfiguration definieren.

#### 3.4.1 Definition

Wir bezeichnen im Folgenden mit  $\delta_0$  jene Startkonfiguration wacher Partikel, welche lediglich ein waches Partikel in 0 besitzt und sonst keine weiteren. Die Startkonfiguration  $2\delta_0$  soll genauso aussehen, allerdings mit zwei statt einem wachen Partikel in 0.

Wir wollen beim folgenden Lemma zunächst nur an die zufällige Ausgangskonfiguration  $(\eta, 0)$  bzw an solche Konfigurationen denken, die beim Neustart des Prozesses zu guten Zeiten  $S_k$  entstehen, da in beiden Fällen die Abstände der Startpositionen der im Beweis betrachteten Partikelpfade  $\exp_1$ -verteilt sind und wir diese Tatsache im Beweis verwenden werden. Im Kontext des Neustarts in  $S_k$  ergibt auch die Voraussetzung an  $M_{z,z'}$  (siehe Definition 2.2.5) in Teil b) erst Sinn: Zur Zeit 0 ist sie eigentlich automatisch erfüllt, da  $M_{z,z'}$  noch deterministisch ist. Verschiebt man den Prozess aber zeitlich (um  $S_k$ ), so wird  $M_{z,z'}$  zufällig, da die in Definition 2.2.5 verwendeten Startpunkte  $\eta_z$  nicht durch die Zeitverschiebung verändert werden (im Gegensatz zu den Punkten  $X_0^{(z)}$ ).

#### 3.4.2 Lemma

Sei  $0 < \beta < \alpha$  (siehe (2.4)). Dann gibt es ein  $0 < C < \infty$ , so dass gilt:

a) Wenn  $\widetilde{X}_0(0) \geq 1$ , dann ist  $\mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{2n}{\beta} \right] \leq Cn^{-\frac{1}{2}}$ .

b) Ist  $M_{-L^{\frac{1}{4}}, 0}(0) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}$ , so folgt für  $0 \leq k < M$ :

$$\mathbb{P} \left[ \tau_{n+k} - \tau_k > \frac{2n}{\beta} \right] \leq Cn^{-\frac{M-1}{4}} + \left( \frac{CL^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}}.$$

c) Ist  $k \geq M$ , so gilt  $\mathbb{P} \left[ \tau_{n+k} - \tau_k > \frac{2n}{\beta} \right] \leq Cn^{-\frac{M-1}{4}}$ .

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{2n}{\beta} \right] &= \mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{2n}{\beta}, 2n \geq \eta_n \right] + \mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{2n}{\beta}, 2n < \eta_n \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{\eta_n}{\beta} \right] + \mathbb{P} [\eta_n > 2n]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nach Lemma A.6 fällt der zweite Summand exponentiell in  $n$ . Wir müssen obige Aussagen also nur für  $\mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{\eta_n}{\beta} \right]$  nachweisen.

a) Aufgrund der Konstruktion des Prozesses und der Definition von  $\delta_0$  ist

$$\mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{\eta_n}{\beta} \right] \leq \mathbb{P}_{\delta_0} \left[ \tau_n > \frac{\eta_n}{\beta} \right],$$

und nach Definition 2.1.1 folgt weiter

$$\mathbb{P}_{\delta_0} \left[ \tau_n > \frac{\eta_n}{\beta} \right] \leq \mathbb{P} \left[ \nu^{(n)} > \frac{\eta_n}{\beta} \right].$$

Sei nun  $\beta < \beta' < \alpha$ . Da  $\nu_1$  alle  $\nu_j$  für  $j \geq 2$  stochastisch dominiert, erhalten wir für  $n \geq M + 1$  die Abschätzung

$$\mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{\eta_n}{\beta} \right] \leq M \mathbb{P} \left[ \nu_1 > \frac{\eta_n}{M} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} \right) \right] + \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+1}^n \nu_j > \frac{\eta_n}{\beta'} \right], \quad (3.31)$$

Sei nun  $K := \frac{1}{M} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} \right)$ . Wir formen den ersten Summanden um zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [\nu_1 > \eta_n K] &\leq \mathbb{P} [\nu_1 > (\eta_n - \eta_1) K] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \nu_1 > \frac{n-1}{2} K \right] + \mathbb{P} \left[ \eta_n - \eta_1 < \frac{n-1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Da  $\nu_1$  die Zeit ist, in der eine in 0 gestartete Brownsche Bewegung einen  $\text{exp}_1$ -verteilten Punkt erreicht, erhalten wir wie in (2.1) und (2.3):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \nu_1 > \frac{n-1}{2} K \right] &= \int_0^\infty \mathbb{P} \left[ \nu_1 > \frac{n-1}{2} K \mid \eta_1 = s \right] e^{-s} ds \\ &\leq \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{(n-1)K}} s e^{-s} ds = \sqrt{\frac{2}{(n-1)K}}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand in (3.32) fällt nach Lemma A.6 exponentiell, folglich

erhalten wir für den ersten Summanden in (3.31) und ein geeignetes  $C_1$  die Abschätzung

$$MP[\nu_1 > \eta_n K] \leq C_1 n^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

Wir wollen nun den zweiten Summanden in (3.31) abschätzen. Wie in Korollar 2.1.6 setzen wir dazu  $\gamma_j := \nu_j - \frac{1}{\alpha}$ . Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+1}^n \nu_j > \frac{\eta_n}{\beta'} \right] &= \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\eta_n}{\beta'} - \frac{n-M}{\alpha} \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\eta_n}{\beta'} - \frac{n}{\alpha} \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\alpha + \beta'}{2\alpha\beta'} n - \frac{n}{\alpha} \right] + \mathbb{P} \left[ \eta_n < \frac{\alpha + \beta'}{2\alpha} n \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \frac{\alpha - \beta'}{2\alpha\beta'} n \right] + \mathbb{P} \left[ \eta_n < \frac{\alpha + \beta'}{2\alpha} n \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Weiter gilt  $\beta'' := \frac{\alpha - \beta'}{2\alpha\beta'} > 0$  und wir können den ersten Summanden in (3.34) umformen zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=M+1}^n \gamma_j > \beta'' \right] &\leq \sum_{i=1}^M \mathbb{P} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-i}{M} \rfloor} \gamma_{kM+i} > \frac{\beta''}{M} \right] \\ &\leq \left( \frac{\beta''}{M} \right)^{-\frac{M-1}{2}} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-i}{M} \rfloor} \gamma_{kM+i} \right| \right]^{\frac{M-1}{2}}, \end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt die Markovungleichung verwendet haben. In Korollar 2.1.6 wurde gezeigt, dass die Mengen  $\{\gamma_{kM+i} : k \geq 1\}$  für alle  $0 \leq i < M$  die Voraussetzungen für Lemma A.2 erfüllen. Da der rechte Summand in (3.34) wegen  $\frac{\alpha + \beta'}{2\alpha} < 1$  exponentiell schnell fällt, gilt deshalb für geeignetes  $C_2$  dank Lemma A.2:

$$\mathbb{P} \left[ \sum_{j=M+1}^n \nu_j > \frac{\eta_j}{\beta'} \right] \leq C_2 n^{\frac{M-1}{4}}.$$

Zusammen mit (3.33) und (3.31) ergibt sich somit die Behauptung.

b) Wir nehmen zunächst  $k = 0$  an. Es bezeichne  $T$  den ersten Zeitpunkt, zu dem eine von  $\frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}$  unabhängigen in  $\eta_{-L^{\frac{1}{4}}}$  gestarteten Brownschen Bewegungen den Punkt  $\eta_{L^{\frac{1}{4}}}$  erreicht. Dann ist ähnlich wie eben

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{\eta_n}{\beta} \right] &\leq \mathbb{P} \left[ \tau_{L^{\frac{1}{4}}} > \eta_n \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} \right) \right] + \mathbb{P} \left[ \tau_n - \tau_{L^{\frac{1}{4}}} > \frac{\eta_n}{\beta'} \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ T > \eta_n \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} \right) \right] + \mathbb{P} \left[ \sum_{j=L^{\frac{1}{4}}}^n \nu_j > \frac{\eta_n}{\beta'} \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nach (2.7) ist  $L^{\frac{1}{4}} \geq M$  und es gilt wie in a) die Ungleichung

$$\mathbb{P} \left[ \sum_{j=L^{\frac{1}{4}}}^n \nu_j > \frac{\eta_n}{\beta'} \right] \leq C_2 n^{-\frac{(M-1)}{4}}.$$

Sei  $\gamma := \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} \right)$ . Wegen der Unabhängigkeit der Brownschen Bewegungen und mit (2.1) und (2.3) erhalten wir nach Brownscher Skalierung:

$$\mathbb{P} [T > \eta_n \gamma] \leq \left( \frac{\sqrt{32} L^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\gamma n}} \right)^{\frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}} + \mathbb{P} \left[ \eta_n < \frac{n}{2} \right] + \mathbb{P} \left[ \eta_{L^{\frac{1}{4}}} - \eta_{-L^{\frac{1}{4}}} > 4L^{\frac{1}{4}} \right].$$

Zusammen mit (3.35) und den Lemmata A.6 und A.7 liefern diese beiden Abschätzungen die Behauptung. Für  $0 < k < M$  funktioniert der Beweis genauso.

c) Analog wie in b), nur dass hier bei (3.35) der erste Summand wegfällt.  $\square$

### 3.4.3 Bemerkung

Wir können das vorangegangene Lemma auch für deterministische Startkonfigurationen zeigen, indem wir die (für deterministische Startkonfigurationen ohnehin nicht definierte) Bedingung an  $M_{-L^{\frac{1}{4}}, 0}$  durch eine Bedingung der Form

$$\widetilde{X}_0 \left( \left[ -kL^{\frac{1}{4}}, 0 \right] \right) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}$$

ersetzen. Man erhält dann je nach Wahl von  $k$  in der letzten Abschätzung des Beweises eine andere Konstante, da man statt  $\eta_{L^{\frac{1}{4}}} - \eta_{-L^{\frac{1}{4}}}$  den Abstand  $\eta_{L^{\frac{1}{4}}} - kL^{\frac{1}{4}}$  betrachtet.

Das folgende Lemma beschreibt, in welchem Maße sich die Marke „zu schnell“ fortbewegen kann. Nach Satz 1.3.2 wissen wir, dass sich die Marke asymptotisch höchstens mit Geschwindigkeit 2 fortbewegt. Wir werden die dort benutzte Beweismethode nun wiederverwenden um zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine feste höhere Durchschnittsgeschwindigkeit exponentiell in der Zeit abfällt.

#### 3.4.4 Lemma

Sei  $0 < \vartheta < 2$  und  $c > 2$ . Dann gibt es Konstanten  $0 < C_1, C_2 < \infty$ , so dass für  $\chi = (x, r) \in \mathbb{S}_\vartheta$  die Ungleichung

$$\mathbb{P}[R_t \geq ct] \leq C_1 e^{-C_2 t}$$

für alle  $t \geq 0$  erfüllt ist.

BEWEIS. Sei o.E.  $r = 0$ . Wir wollen die Aussage beweisen, indem wir  $R_t$  nach oben gegen die Marke des Prozesses aus Abschnitt 1.3 abschätzen und zeigen, dass die Aussage auch für dessen Marke zutrifft. Für gegebenes  $c > 0$  hatten wir in Satz 1.3.2 die Wahrscheinlichkeit, dass ein Partikel, dessen Ahnenlinie im Punkt  $x$  beginnt, bis zur Zeit  $t$  den Punkt  $ct$  erreicht hat, mit  $P_{x,t}$  bezeichnet und in (1.20) die Ungleichung

$$P_{x,t} \leq 2e^{ct} \Phi\left(-\frac{ct-x}{\sqrt{t}}\right)$$

gezeigt. Hierbei sei darauf hingewiesen, dass wir in Satz 1.3.2 keine deterministische Startkonfiguration vorausgesetzt hatten, sondern eine zufällige, die es fast sicher unmöglich gemacht hat, dass zwei wache Partikel im gleichen Punkt starten. Dies ist hier nicht ausgeschlossen, weswegen wir eigentlich die Wahrscheinlichkeiten  $P_{x,t}$  nicht mit Punkten  $x \in \mathbb{R}$ , sondern durch die zu Beginn wachen Partikel indizieren müssten. Um unübersichtliche Notation zu vermeiden und da sich am Beweis dadurch nichts Wesentliches ändern wird, wollen wir aber ohne Einschränkung davon ausgehen, dass keine zwei wachen Partikel im gleichen Punkt starten. Da sich in der Startkonfiguration lediglich links der 0 wache Partikel befinden, starten auch alle Ahnenlinien in Punkten  $x \leq 0$ . Folglich interessiert uns nur der Fall  $x \leq 0$ . Wir setzen nun obige Abschätzung fort zu

$$2e^{ct} \Phi\left(-\frac{ct-x}{\sqrt{t}}\right) \leq 2e^{ct} \frac{\sqrt{t}}{ct-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ct-x)^2}{2t}} \leq \frac{\sqrt{t}}{-x} e^{ct} e^{-\frac{(ct-x)^2}{2t}}, \quad (3.36)$$

wobei wir unter anderem  $ct > 0$  und (A.6) benutzt haben. Insgesamt erhalten wir wegen  $e^{-\frac{x^2}{2t}} < 1$  die Ungleichung

$$P_{x,t} \leq \frac{\sqrt{t}}{|x|} e^{(2-c)ct} e^{cx}. \quad (3.37)$$

Die Wahl von  $\chi$  gibt uns auch die (nach Voraussetzung abzählbare) Menge  $\{x(i) : i \in I_0\}$  aller Startpunkte wacher Partikel vor. Da (3.37) keine sinnvolle Abschätzung für  $x = 0$  liefert, schreiben wir  $I'_0 := \{x(i) : i \in I_0, x(i) \neq 0\}$  und erhalten

$$\mathbb{P}[R_t \geq ct] \leq \sum_{i \in I'_0} P_{x(i),t} + P_{0,t} \quad (3.38)$$

Der Summand  $P_{0,t}$  taucht auf, da sich nach Voraussetzung im Punkt 0 zu Beginn ein waches Partikel befindet. Die erste Abschätzung in (3.36) zeigt, dass  $P_{0,t}$  für  $c > 2$  exponentiell schnell fällt. Wir wollen nun die Summe abschätzen. Sei dazu  $C_0 := \min\{|x(i)| : i \in I'_0\}$ . Aus den Voraussetzungen  $c > 2$  und  $\vartheta < 2$  folgt  $\vartheta < c$  und mit (3.37) deshalb auch

$$\sum_{i \in I'_0} P_{x(i),t} \leq \frac{\sqrt{t}}{C_0} e^{(2-c)ct} \sum_{i \in I'_0} e^{cx(i)} \leq \frac{\sqrt{t}}{C_0} e^{(2-c)ct} \sum_{i \in I'_0} e^{\vartheta x(i)}.$$

Wegen  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$  und  $c > 2$  liefert (3.38) dann die Behauptung.  $\square$

Wir wissen bereits, dass die „schlechten“ Stoppzeiten aus den Definitionen 2.2.9 und 2.2.13 eher klein sind. Zusammen mit Lemma 3.4.4 können wir nun zeigen, dass auch die Position der Marke zu diesen Zeitpunkten eher klein ist.

### 3.4.5 Lemma

Sei  $0 < \vartheta < 2$  und  $c > 2$ . Dann gibt es  $0 < C, C' < \infty$ , so dass für  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta,L}$  und für alle  $t > 0$  gilt:

$$a) \mathbb{P}[R_{D^H} > ct, D^H < \infty] \leq Ct^{-\frac{(M-1)}{4}} + LCe^{-C't}.$$

$$b) \mathbb{P}[R_{U^H} > ct, U^H < \infty] \leq Ct^{-\frac{(M-1)}{4}}.$$

$$c) \mathbb{P}[R_{V \wedge W} > ct, V \wedge W < \infty] \leq LCe^{-C't}.$$



BEWEIS. a) Sei  $c > 2$ . Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [R_{D^H} > ct, D^H < \infty] &\leq \mathbb{P} [R_{D^H} > ct, D^H \leq t] + \mathbb{P} [t < D^H < \infty] \\ &\leq \mathbb{P} [R_t > ct] + \mathbb{P} [t < D^H < \infty] \\ &\leq LCe^{-C't} + Ct^{-\frac{(M-1)}{4}}, \end{aligned}$$

wobei der erste Summand mittels Lemma 3.4.4 und der zweite mittels Korollar 3.3.4 abgeschätzt wurde.

b) und c) genauso unter Verwendung der Lemmata 3.1.2, 3.2.1 und 3.3.1.  $\square$

Die Zeit, die zwischen einer schlechten Zeit und der nächsten guten Zeit vergeht, hängt von zwei Faktoren ab: Zum einen von der Zeit, die die Marke benötigt, um  $L$  weitere Partikel zu wecken und zum anderen, wie oft man diese  $L$  Partikel voranschreiten muss, bis man bei einer guten Zeit angekommen ist.

### 3.4.6 Definition

Auf der Menge  $\{U^H < \infty\}$  sei

$$\sigma_n := \tau_{D^H, Ln} - D^H.$$

Die  $\sigma_n$  beschreiben also gerade die Zeit, die die Marke nach einer schlechten Zeit benötigt, um  $nL$  weitere Partikel zu wecken. Wir wollen zum Abschluss dieses Abschnittes Abschätzungen für diese Größen erhalten.

### 3.4.7 Lemma

Ist  $0 < \beta < \alpha$  und  $0 < \vartheta < 2$ , so gibt es  $C, C' < \infty$ , so dass für  $n \geq 1$ ,  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  und unter der Voraussetzung  $M_{-L^{\frac{1}{4}}, 0}(0) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}$  gilt:

$$\mathbb{P} \left[ \sigma_n > \frac{2Ln}{\beta}, D^H < \infty \right] \leq \left( CnL^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1} + LCe^{-C'nL^{\frac{3}{4}}}.$$

BEWEIS. Mit (3.30) und Lemma A.6 genügt es, wie in Lemma 3.4.2 die Abschätzung

$$\mathbb{P} \left[ \sigma_n > \frac{\eta_{D^H, Ln} - \eta_{D^H, 0}}{\beta}, D^H < \infty \right] \leq \left( CnL^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1} + LCe^{-C'nL^{\frac{3}{4}}}$$

zu zeigen. Es ist  $\mathbb{P} \left[ \sigma_n > \frac{\eta_{D^H, Ln} - \eta_{D^H, 0}}{\beta}, D^H < \infty \right]$  kleiner als die Summe

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{L^{\frac{3}{4}}n} \mathbb{P} \left[ \sigma_n > \frac{\eta_{D^H, Ln} - \eta_{D^H, 0}}{\beta}, \eta_l < R_{D^H} \leq \eta_{l+1}, D^H < \infty \right] \\ & + \mathbb{P} \left[ R_{D^H} > \frac{1}{2} L^{\frac{3}{4}}n, D^H < \infty \right] + \mathbb{P} \left[ \frac{1}{2} L^{\frac{3}{4}}n > \eta_{L^{\frac{3}{4}}n} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Für  $D^H < \infty$ , erhalten wir nun wegen  $\tau_{D^H, 0} \leq D^H$  die Ungleichung

$$\sigma_n \leq \tau_{D^H, Ln} - \tau_{D^H, 0}.$$

Weiter ist dann

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \sigma_n > \frac{\eta_{D^H, Ln} - \eta_{D^H, 0}}{\beta}, \eta_l < R_{D^H} \leq \eta_{l+1}, D^H < \infty \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ \tau_{l+Ln} - \tau_l > \frac{\eta_{l+Ln} - \eta_l}{\beta} \right] \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4.2 c) ist dieser Ausdruck für  $l \geq M$  kleiner als  $C_1 (nL)^{-\frac{(M-1)}{4}}$  für ein geeignetes  $C_1 < \infty$ . Ist hingegen  $0 \leq l < M$ , so folgt mit 3.4.2 b):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \tau_{l+Ln} - \tau_l > \frac{\eta_{l+Ln} - \eta_l}{\beta} \right] & \leq \left( \frac{C_2 L^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{nL}} \right)^{\frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}} + C_2 (nL)^{-\frac{(M-1)}{4}} \\ & \leq \left( C'_2 n L^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{L^{\frac{1}{4}}}{4}} + C_2 (nL)^{-\frac{(M-1)}{4}}. \end{aligned}$$

Da wir in (2.7) die Wahl  $L^{\frac{1}{4}} \geq M$  getroffen haben, gilt für ein geeignetes  $C_3$

$$\sum_{l=0}^{L^{\frac{3}{4}}n} \mathbb{P} \left[ \sigma_n > \frac{\eta_{D^H, Ln} - \eta_{D^H, 0}}{\beta}, \eta_l < R_{D^H} \leq \eta_{l+1}, D^H < \infty \right] \leq \left( C_3 L^{\frac{3}{4}}n \right)^{1 - \frac{M-1}{4}}.$$

Wenden wir nun Lemma 3.4.5 auf den zweiten Summanden von (3.39) an, so erhalten wir als Abschätzung

$$\mathbb{P} \left[ R_{D^H} > \frac{1}{2} L^{\frac{3}{4}}n, D^H < \infty \right] \leq \left( C_4 L^{\frac{3}{4}}n \right)^{-\frac{M-1}{4}} + LCe^{-C'nL^{\frac{3}{4}}},$$

und sind fertig, indem wir Lemma A.6 auf den dritten Summanden von (3.39) anwenden.  $\square$

### 3.5 Abschätzungen für $J_t$ und Partikeldichten

Wir wissen nun also darüber Bescheid, wie schnell die Marke von einer schlechten Zeit aus  $L$  Partikel voranschreitet. Jedes Mal, wenn sie dies tut, erhalten wir einen Kandidaten für eine gute Zeit. In diesem Abschnitt wollen wir also noch klären, wie viele Kandidatenzeiten man benötigt, bis man tatsächlich bei einer guten Zeit angekommen ist. Eine der beiden Bedingungen für eine gute Zeit ist, dass die exponentielle Partikeldichte  $\Psi$  (siehe Definition 2.2.4) alter Partikel gering genug ist. Im nächsten Lemma sowie im darauf folgenden Korollar werden wir den Erwartungswert von  $\Psi_{R_{D^H}}(D^H)$  abschätzen.

#### 3.5.1 Lemma

Sei  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$ . Dann gilt  $\mathbb{P}$ -f.s. auf dem Ereignis  $\{D^H < \infty\}$  die Ungleichung

$$\Psi_{-L}(D^H) \leq 1.$$

BEWEIS. Nach Definition von  $U^H$  ist

$$R_t \geq \tilde{R}_t \geq \alpha_2 t \text{ für } t \leq U^H.$$

Somit gilt für  $t \leq U^H$  die Ungleichung  $\alpha_1 t - R_t \leq -(\alpha_2 t - \alpha_1 t) \leq 0$ . Da f.s.  $D^H \leq U^H$  ist, gilt also insbesondere

$$\alpha_1 D^H - R_{D^H} \leq 0 \text{ f.s.} \quad (3.40)$$

Genauso ist aber f.s.  $D^H \leq W$ , weswegen wir

$$\Psi_{-L}(D^H) \leq e^{\vartheta(\alpha_1 D^H - R_{D^H})} \text{ f.s.}$$

erhalten. Zusammen mit (3.40) liefert dies die Behauptung.  $\square$

#### 3.5.2 Korollar

Sei  $0 < \vartheta < 2$ . Dann gibt es ein  $0 < C < \infty$ , so dass für  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  gilt:

$$\mathbb{E} \left[ \Psi_{R_{D^H}}(D^H) \mathbf{1}_{\{D^H < \infty\}} \right] < LC.$$

BEWEIS. Im schlimmsten Falle befinden sich alle zur Zeit  $D^H$  wachen Partikelpfade  $X^{(z)}$  mit  $z > -L$  zur Zeit  $D^H$  in  $R_{D^H}$ . Das liefert die Abschätzung

$$\Psi_{R_{D^H}}(D^H) \leq \Psi_{-L}(D^H) + \Lambda_{R_{D^H}} + L, \quad (3.41)$$

wobei  $\Lambda_{R_{D^H}}$  die zufällige Anzahl von Partikeln mit Startpunkt echt zwischen  $R_0$  und  $R_{D^H}$  ist. Nun ist

$$\mathbb{E} \left[ \Lambda_{R_{D^H}} \mathbf{1}_{\{D^H < \infty\}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \Lambda_{R_{U^H}} \mathbf{1}_{\{U^H < \infty\}} \right] + \mathbb{E} \left[ \Lambda_{R_{V \wedge W}} \mathbf{1}_{\{V \wedge W < \infty\}} \right].$$

Da  $V \wedge W$  unabhängig von den Partikeln ist, die rechts von  $R_0$  starten, ist  $\Lambda_{R_{V \wedge W}}$  Poisson-verteilt mit Parameter  $R_{V \wedge W}$ . Da die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $\{U^H < t\}$  mit steigender Partikelzahl zwischen  $\eta_0$  und  $\alpha_2^{-1}t$  sinkt, kann man  $\Lambda_{R_{U^H}}$  ebenfalls gegen eine Poissonanzahl mit Parameter  $R_{U^H}$  abschätzen und erhält

$$\mathbb{E} \left[ \Lambda_{R_{D^H}} \mathbf{1}_{\{D^H < \infty\}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ R_{U^H} \mathbf{1}_{\{U^H < \infty\}} \right] + \mathbb{E} \left[ R_{V \wedge W} \mathbf{1}_{\{V \wedge W < \infty\}} \right]$$

Somit ist in Gleichung (3.41) der erste Summand dank Lemma 3.5.1 kleiner als 1 und Anwenden von Lemma 3.4.5 auf den rechten Summand liefert mit  $M \geq 6$  die Behauptung.  $\square$

Wir geben nun eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass  $\Psi$  große Werte annimmt.

### 3.5.3 Lemma

Für alle  $s \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  und  $t > 0$  gilt:

- a)  $\mathbb{P}[\Psi_0(\tau_m) > \lambda, \tau_m < t] \leq 3\lambda^{-1}\Psi_0(0, \chi) e^{\frac{\vartheta^2}{2}t - \log(1+\vartheta)m}$  für  $m \geq 1$ .
- b)  $\mathbb{P}[\Psi_k(\tau_m) - \Psi_{k-L}(\tau_m) > \lambda, \tau_m - \tau_k < t] \leq 3\lambda^{-1}L e^{\frac{\vartheta^2}{2}t - \log(1+\vartheta)(m-k)}$ , falls  $m \geq k \geq 1$ .

BEWEIS. a) Nach Definition ist

$$\Psi_0(\tau_m) = e^{-\vartheta\eta_m} \sum_{i \leq 0} e^{\vartheta X_{\tau_m}^{(i)}}.$$

Für  $\tau_m < t$  und  $\widehat{X}_t := \sup\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$  ist  $e^{\vartheta X_{\tau_m}^{(i)}} \leq e^{\vartheta \widehat{X}_{\tau_m}^{(i)}} \leq e^{\vartheta \widehat{X}_t^{(i)}}$ . Wir

erhalten also

$$\mathbb{E} [\Psi_0(\tau_m) \mathbf{1}_{\{\tau_m < t\}}] \leq \mathbb{E} \left[ e^{-\vartheta \eta_m} \sum_{i \leq 0} e^{\vartheta \widehat{X}_t^{(i)}} \right] = \mathbb{E} [e^{-\vartheta \eta_m}] \mathbb{E} \left[ \sum_{i \leq 0} e^{\vartheta \widehat{X}_t^{(i)}} \right].$$

Wie in (3.27) sieht man nun, dass der rechte Faktor beschränkt ist durch

$$\sum_{i \leq 0} \left( 1 + 2e^{\frac{\vartheta^2}{2} t} \right) e^{\vartheta X_0^{(i)}} \leq 3\Psi_0(0, \chi) e^{\frac{\vartheta^2}{2} t}.$$

Weiter ist  $\mathbb{E} [e^{-\vartheta \eta_m}] = (1 + \vartheta)^{-m}$  und wir erhalten a) mit der Markovungleichung.

b) Hier können wir vorgehen, wie in Teil a), nur dass wir nicht über alle  $i \leq 0$  summieren, sondern über  $k - L < i < k$ . Die Behauptung folgt dann dank der starken Markoveigenschaft des Prozesses und mit Hilfe der Abschätzung  $\Psi_k(\tau_k) - \Psi_{k-L}(\tau_k) \leq L$ , die wir wegen der für alle  $i \leq k$  gültigen Ungleichung  $e^{-\vartheta \eta_k} e^{\vartheta X_{\tau_k}^{(i)}} \leq 1$  erhalten.  $\square$

Für den nächsten Korollar sei an Definition 3.4.6 erinnert. Wir benötigen vorher auch noch die folgende Definition.

### 3.5.4 Definition

Für  $y \in \mathbb{R}$  sei der *räumlichen Verschiebungsoperator*  $\varsigma_y : \mathbb{S}_\vartheta \longrightarrow \mathbb{S}_\vartheta$  gegeben durch

$$\varsigma_y((x, r)) = (x + y, r + y),$$

wo wir in der ersten Komponente  $y$  als Abbildung  $y \in (-\infty, r + y)^I$  mit  $y(i) \equiv y$  verstehen.

### 3.5.5 Korollar

Sei  $0 < \vartheta < 2$ . Dann gibt es ein  $C < \infty$ , so dass für jedes  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$ ,  $\lambda > 0$  und  $n \geq 1$  die Ungleichung

$$\mathbb{P} [\Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, nL}) > \lambda, \sigma_n < 2\alpha_3^{-1} nL, D^H < \infty] \leq \lambda^{-1} C L e^{-nL \left( \log(1+\vartheta) - \frac{\vartheta^2}{\alpha_3} \right)}$$

erfüllt ist.

BEWEIS. Die Konfiguration schlafender Partikel ist bezüglich Translationen, die einen der Punkte  $\eta_z, z > 0$  in die 0 schieben, translationsinvariant. Deshalb und wegen der starken Markoveigenschaft gleicht die linke Seite dem

Ausdruck

$$\mathbb{E} \left[ \mathbb{P}_{\varsigma_{-R_{DH}}((X_{DH}, R_{DH}))} \left[ \Psi_0(\tau_{nL}) > \lambda, \tau_{nL} < 2\alpha_3^{-1}nL \right] \mathbf{1}_{\{D^H < \infty\}} \right].$$

Wenden wir nun zunächst Lemma 3.5.3a) mit  $m = nL$  und  $t = 2nL\alpha_3^{-1}$  an, so sehen wir, dass obiger Term durch

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ 3\lambda^{-1} \Psi_{R_{DH}}(D^H) e^{-nL(\log(1+\vartheta) - \frac{\vartheta^2}{\alpha_3})} \mathbf{1}_{\{D^H < \infty\}} \right] \\ &= 3\lambda^{-1} e^{-nL(\log(1+\vartheta) - \frac{\vartheta^2}{\alpha_3})} \mathbb{E} \left[ \Psi_{R_{DH}}(D^H) \mathbf{1}_{\{D^H < \infty\}} \right] \end{aligned}$$

beschränkt ist. Nach Voraussetzung dürfen wir nun Korollar 3.5.2 auf den Erwartungswert anwenden und erhalten so die Behauptung.  $\square$

Das nächste Lemma beschäftigt sich mit der anderen Bedingung für eine gute Zeit: Es müssen genügend viele junge Partikel in der Nähe der Marke sein. Wir zeigen, dass die Chancen gut stehen, dass dieser Fall eintritt.

### 3.5.6 Lemma

Sei  $0 < \vartheta < 2$ . Auf  $\{D^H < \infty\}$  gibt es dann  $0 < C, C' < \infty$ , so dass gilt:

a) Ist  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$ , so ist  $\mathbb{P} \left[ M_{0,n}(\tau_n) < \frac{n}{2} \right] \leq Cn^{-\frac{1}{2}}$  für alle  $n \geq 1$ .

b) Weiter gilt für  $n^{\frac{1}{4}} \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{P} \left[ M_{n-n^{\frac{1}{4}},n}^{D^H}(\tau_{D^H,n}) < \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2} \right] \leq Cn^{-\frac{(M-1)}{8(M+3)}} + LCe^{-C'n^{\frac{1}{2(M+3)}}}$$

BEWEIS. a) Sei  $0 < \beta < \alpha$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ M_{0,n}(\tau_n) < \frac{n}{2} \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ M_{0,n}(\tau_n) < \frac{n}{2}, \tau_n \leq \frac{2n}{\beta} \right] + \mathbb{P} \left[ \tau_n > \frac{2n}{\beta} \right] \end{aligned} \tag{3.42}$$

Tritt nun das Ereignis im ersten Summanden ein, so muss insbesondere eines der Partikel  $X^{(j)}$  mit  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq j \leq n$  bis zur Zeit  $\frac{2n}{\beta}$  den Ort 0 erreicht haben. Somit können wir den ersten Summanden in obiger Ungleichung

folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ M_{0,n}(\tau_n) < \frac{n}{2}, \tau_n \leq \frac{2n}{\beta} \right] &\leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \mathbb{P} \left[ \widehat{B}_{2n\beta^{-1}} \geq \eta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right] \\ &\leq n \mathbb{P} \left[ B_{2n\beta^{-1}} \geq \eta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right], \end{aligned}$$

wobei  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung ist,  $\widehat{B}_t := \sup \{B_s, 0 \leq s \leq t\}$  und in der letzten Ungleichung das Spiegelungsprinzip verwendet wurde. Dies lässt sich nun wiederum nach oben abschätzen durch

$$n \left( \Phi \left( -\sqrt{\frac{n\beta}{32}} \right) + \mathbb{P} \left[ \eta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{n}{4} \right] \right). \quad (3.43)$$

Schließlich können wir mit Lemma 3.4.2 a) den zweiten Summanden von (3.42) gegen  $Cn^{-\frac{1}{2}}$  abschätzen und erhalten so die Behauptung, da (3.43) sogar exponentiell fällt (siehe Lemma A.6).

b) Es gilt für jedes  $m \geq 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left[ M_{n-n^{\frac{1}{4}},n}^{D^H}(\tau_{D^H,n}) < \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^m \mathbb{P} \left[ M_{n-n^{\frac{1}{4}},n}^{D^H}(\tau_{D^H,n}) < \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2}, \eta_k \leq R_{D^H} < \eta_{k+1} \right] \\ &\quad + \mathbb{P} [R_{D^H} > \eta_m, D^H < \infty] \\ &\leq \sum_{k=0}^m \mathbb{P} \left[ M_{k+n-n^{\frac{1}{4}},k+n}(\tau_{k+n}) < \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2} \right] \\ &\quad + \mathbb{P} [R_{D^H} > 2m, D^H < \infty] + \mathbb{P} [\eta_m > 2m]. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der starken Markoveigenschaft und Teil a) für den ersten Summanden, Lemma 3.4.5 für den zweiten, sowie Lemma A.7 für den dritten Summanden, können wir dies für geeignete  $0 < C, C' < \infty$  abschätzen gegen  $Cmn^{-\frac{1}{8}} + Cm^{-\frac{M-1}{4}} + LCe^{-C'm}$ . Wählt man nun  $m = n^{\frac{1}{2(M+3)}}$ , so folgt die Behauptung.  $\square$

Wir fassen nun die bisher in diesem Kapitel gesammelten Erkenntnisse zusammen, um eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass eine der beiden Bedingungen für eine gute Zeit nicht eintritt. Bezüglich der im weiteren Verlauf wieder auftauchenden Bedingung  $M_{-L^{\frac{1}{4}},0}(0) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}$  sei

noch einmal an die Bemerkung vor Lemma 3.4.2 und an Bemerkung 3.4.3 erinnert.

### 3.5.7 Korollar

Sei  $0 < \vartheta < 2$ . Dann gibt es  $0 < C, C' < \infty$ , so dass für alle  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  unter den Voraussetzungen  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$  und  $M_{-L^{\frac{1}{4}}, 0}(0) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \left\{ \Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, L}) > q \right\} \cup \left\{ M_{L-L^{\frac{1}{4}}}^{D^H}(\tau_{D^H, L}) < \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2} \right\}, D^H < \infty \right] \\ & \leq q^{-1} C L e^{-L(\log(1+\vartheta) - \frac{\vartheta^2}{\alpha_3})} + \left( C^{-1} L^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1} + C L^{-\frac{(M-1)}{8(M+3)}} \\ & \quad + L C e^{-C' L^{\frac{1}{2(M+3)}}} \end{aligned}$$

BEWEIS. Offenbar ist

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \left\{ \Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, L}) > q \right\} \cup \left\{ M_{L-L^{\frac{1}{4}}}^{D^H}(\tau_{D^H, L}) < \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2} \right\}, D^H < \infty \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ \Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, L}) > q, D^H < \infty \right] \tag{3.44} \\ & \quad + \mathbb{P} \left[ M_{L-L^{\frac{1}{4}}}^{D^H}(\tau_{D^H, L}) < \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}, D^H < \infty \right]. \end{aligned}$$

Den ersten Summanden schätzen wir weiter ab durch

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, L}) > q, D^H < \infty \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ \Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, L}) > q, \sigma_1 < 2\alpha_3^{-1}L, D^H < \infty \right] + \mathbb{P} \left[ \sigma_1 > 2\alpha_3^{-1}L \right]. \end{aligned}$$

Wenden wir nun Korollar 3.5.5 für  $n = 1$  und  $\lambda = q$  auf den ersten und Lemma 3.4.7 auf den zweiten Summanden an, liefert dies

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, L}) > q, D^H < \infty \right] \\ & \leq q^{-1} C L e^{-L(\log(1+\vartheta) - \frac{\vartheta^2}{\alpha_3})} + \left( C^{-1} L^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1} + L C e^{-C' L^{\frac{3}{4}}} \tag{3.45} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$  können wir Teil b) von Lemma 3.5.6 auf den zweiten Summanden in (3.44) anwenden und sind fertig.  $\square$

Nach einer schlechten Zeit  $D^H$  muss die Marke  $J_{D^H}$ -mal (siehe Definition 2.2.15)  $L$  Partikel weiterlaufen, bis man bei der nächsten guten Zeit angekommen ist. Wir werden nun zeigen, dass  $J_{D^H}$  eher klein ist, und dass sich



der Ort, an dem sich diese gute Zeit abspielt, eher nahe bei  $R_{D^H}$  ist. Zusammen mit der Tatsache, dass auch schlechte Zeiten schnell oder gar nicht eintreten (siehe Korollar 3.3.4 und Lemma 3.4.5) wird uns dies die Endlichkeit der ersten und zweiten Momente der Regenerationszeiten liefern.

### 3.5.8 Lemma

Sei  $0 < \vartheta < 2$ . Dann gibt es ein  $0 < C < \infty$  und ein  $L_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für  $L \geq L_0$  und  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  die folgenden Aussagen erfüllt sind:

a) Ist  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$  und  $M_{-L^{\frac{1}{4}}, 0}(0) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2}$ , so gilt für jedes  $t \geq 0$

$$\mathbb{P} \left[ \eta_{D^H, J_{D^H} L} - R_{D^H} > Lt, D^H < \infty \right] < Ct^{3 - \frac{M-1}{4}}$$

b) Ist  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$ , so gilt für jedes  $t \geq 0$ :

$$\mathbb{P} [\eta_{J_0 L} > Lt, U = \infty] < Ct^{3 - \frac{M-1}{4}}.$$

BEWEIS. a) Wir stellen zunächst fest, dass

$$\mathbb{P} \left[ \eta_{D^H, J_{D^H} L} - R_{D^H} > 2Ln \right] \leq \mathbb{P} [\eta_{D^H, nL} - R_{D^H} > 2Ln] + \mathbb{P} [J_{D^H} > n]$$

und dass der erste Summand exponentiell in  $n$  fällt (nach Lemma A.7). Wir interessieren uns also für den zweiten Summanden. Um diesen abzuschätzen zu können, definieren wir die Ereignisse

$$B_n := \bigcap_{i=1}^n \left\{ \Psi_{D^H, (i-1)L} (\tau_{D^H, iL}, X_{D^H}) > q \right\} \cup B'_i, \text{ wobei}$$

$$B'_i := \left\{ M_{iL - L^{\frac{1}{4}}, iL}^{D^H} (\tau_{D^H, iL}) < \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2} \right\}.$$

$B_n$  ist also das Ereignis, dass bei den ersten  $n$  Kandidaten für eine gute Zeit nach  $D^H$  jeweils eines der beiden Kriterien nicht erfüllt war. Es ist damit

$$\mathbb{P} [J_{D^H} > n, D^H < \infty] = \mathbb{P} [B_n, D^H < \infty] \quad (3.46)$$

Sei weiter

$$\Delta_k := \Psi_{D^H, kL} - \Psi_{D^H, (k-1)L},$$

dann ist  $\Psi_{D^H, (n-1)} = \Psi_{D^H, 0} + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k$ . Setzen wir weiter für  $1 \leq k \leq n-1$

$$A_0^n := \left\{ \Psi_{D^H, 0}(\tau_{D^H, nL}) > \frac{q}{2^{n-1}} \right\} \text{ und } A_k^n := \left\{ \Delta_k(\tau_{D^H, nL}) > \frac{q}{2^{n-k}} \right\},$$

so erhalten wir  $\left\{ \Psi_{D^H, (n-1)L}(\tau_{D^H, nL}) > q \right\} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k^n$  und damit insbesondere

$$B_n \subset B_{n-1} \cap \left( B_n' \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k^n \right).$$

Wir erhalten also die Ungleichung

$$\mathbb{P}[B_n, D^H < \infty] \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[A_k^n, B_{n-1}, D^H < \infty] + \mathbb{P}[B_n', B_{n-1}, D^H < \infty]. \quad (3.47)$$

Wir wollen im Folgenden die Abkürzung  $\tau^k := \tau_{D^H, kL}$  verwenden. Aufgrund der starken Markoveigenschaft gilt nun auf  $\{D^H < \infty\}$  für  $1 \leq k \leq n-1$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$\mathbb{P}\left[\tau^n - \tau^k \geq \lambda \mid \mathcal{F}_{\tau^{k-1}}\right] = \mathbb{P}_{(X_{\tau^{k-1}}, R_{\tau^{k-1}})}\left[\tau_{(n-k+1)L} - \tau_L \geq \lambda\right],$$

auf die wir nun Teil c) von Lemma 3.4.2 anwenden können, um

$$\mathbb{P}\left[\tau^n - \tau^k \geq \frac{2(n-k)L}{\alpha_3} \mid \mathcal{F}_{\tau^{k-1}}\right] \leq C((n-k)L)^{-\frac{M-1}{4}} \quad (3.48)$$

zu erhalten. Eine weitere Anwendung der starken Markoveigenschaft liefert zusammen mit Teil b) von 3.5.3:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left[\Delta_k(\tau^n) > \frac{q}{2^{n-k}}, \tau^n - \tau^k < \frac{2(n-k)L}{\alpha_3} \mid \mathcal{F}_{\tau^{k-1}}\right] \\ & \leq 3q^{-1} 2^{n-k} L e^{-(n-k)L \left( \log(1+\vartheta) - \frac{2\vartheta^2}{\alpha_3} \right)}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Nach Definition der  $A_k^n$  und mit (3.48) und (3.49) erhalten wir also für  $n \geq 2$  und  $1 \leq k \leq n-1$  die Abschätzung

$$\mathbb{P}[A_k^n \mid \mathcal{F}_{\tau^{k-1}}] \leq 3q^{-1} 2^{n-k} L e^{-(n-k)L \left( \log(1+\vartheta) - \frac{2\vartheta^2}{\alpha_3} \right)} + C((n-k)L)^{-\frac{M-1}{4}}. \quad (3.50)$$

Weiter erhalten wir wie in Korollar 3.5.7 mit Hilfe von Lemma 3.4.7 und

Korollar 3.5.5 mit  $\lambda = 2^{-(n-1)}q$  für  $n \geq 2$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [A_0^n, D^H < \infty] &\leq \frac{2^{n-1}}{q} C L e^{-nL \left( \log(1+\vartheta) - \frac{\vartheta^2}{\alpha_3} \right)} + \left( C^{-1} n L^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1} \\ &\quad + L C e^{-C'(nL)^{\frac{1}{2(M+3)}}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Schließlich folgt noch für  $n \geq 2$  mit Teil a) von Lemma 3.5.6 und der starken Markoveigenschaft

$$\mathbb{P} [B'_n | \mathcal{F}_{\tau^{n-1}}] \leq C L^{-\frac{1}{8}} \leq C L^{-\frac{M-1}{8(M+3)}}. \quad (3.52)$$

Wir möchten nun Lemma A.1 verwenden. Dazu definieren Folgen

$$\begin{aligned} a_1 &:= 3 C L^{-\frac{M-1}{8(M+3)}}, a_n := 4 \left( C^{-1} (n-1) L^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1}, n \geq 2 \text{ und} \\ c_n &:= \mathbb{P} [B_n, D < \infty], n \geq 1, \end{aligned}$$

wobei wir das  $C$  aus Korollar 3.5.7 verwenden. Nun gibt es ein  $L_0$ , so dass für alle  $L \geq L_0$  wegen  $M \geq 10$  die Ungleichung  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$  gilt und für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichungen

$$C L \left( \frac{2^{n+1}}{q} e^{-nL \left( \log(1+\vartheta) - \frac{\vartheta^2}{\alpha_3} \right)} + e^{-C'(nL)^{\frac{1}{2(M+3)}}} \right) \leq \left( C^{-1} n L^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1} \quad (3.53)$$

und

$$\left( C^{-1} L^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{M-1}{4}+1} \leq C L^{-\frac{M-1}{8(M+3)}} \quad (3.54)$$

erfüllt sind, wobei wir bei der ersten (2.5) und bei der zweiten  $M \geq 6$  benutzt haben (dies ist die in Bemerkung 2.2.8 angekündigte Stelle, an der wir  $L$  möglicherweise vergrößern müssen). Wir wollen nun die Voraussetzungen von Lemma A.1 prüfen. Wir müssen also zeigen, dass

$$c_n \leq a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} c_k, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (3.55)$$

In Korollar 3.5.7 wurde  $c_1$  abgeschätzt. Diese Abschätzung zusammen mit

(3.53) und dann (3.54) liefert  $c_1 \leq a_1$ . Da für  $n \geq 2$  das Ereignis  $B'_n$  unabhängig von  $\mathcal{F}_{\tau^{n-1}}$  und  $B_{n-1}$  ist, gilt weiter mit (3.52):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [B'_n, B_{n-1}, D^H < \infty] &\leq CL^{-\frac{M-1}{8(M+3)}} \mathbb{P} [B_{n-1}, D^H < \infty] \\ &\leq a_1 \mathbb{P} [B_{n-1}, D^H < \infty]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Die Abschätzung (3.51) zusammen mit (3.53) liefert  $\mathbb{P} [A_0^n, D^H < \infty] \leq \frac{a_n}{2}$ , während wir durch (3.50) und (3.53) die Ungleichung  $\mathbb{P} [A_1^n, D^H < \infty] \leq \frac{a_n}{2}$  erhalten. Zusammen gilt also für  $n \geq 2$ :

$$\mathbb{P} [A_0^n, B_{n-1}, D < \infty] + \mathbb{P} [A_1^n, B_{n-1}, D < \infty] \leq a_n. \quad (3.57)$$

Genauso erhalten wir durch (3.50) und (3.53) für  $2 \leq k \leq n-2$  die Ungleichung  $\mathbb{P} [A_k^n | \mathcal{F}_{\tau^{k-1}}] \leq a_{n-k+1}$ . Da für solche  $k$  weiter  $B_{n-1} \subset B_{k-1}$  gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [A_k^n, B_{n-1}, D^H < \infty] &\leq \mathbb{P} [A_k^n, B_{k-1}, D^H < \infty] \\ &\leq a_{n-k+1} \mathbb{P} [B_{k-1}, D^H < \infty] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Auf die gleiche Art ergibt sich schließlich für  $n \geq 3$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [A_{n-1}^n, B_{n-1}, D^H < \infty] &\leq \mathbb{P} [A_{n-1}^n, B_{n-2}, D^H < \infty] \\ &\leq a_2 \mathbb{P} [B_{n-2}, D^H < \infty]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Insgesamt erhalten wir nun (3.55) für  $n \geq 2$ , indem wir die Abschätzungen (3.56), (3.57), (3.58) und (3.59) in (3.47) einsetzen. Somit können wir Lemma A.1 anwenden, das zusammen mit (3.46) und  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{M-1}{4}-3} a_n < \infty$  liefert, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{M-1}{4}-3} \mathbb{P} [J_{D^H} > n, D^H < \infty] < \infty.$$

Insbesondere ist somit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{M-1}{4}-3} \mathbb{P} [J_{D^H} > n, D^H < \infty] = 0$  und wir finden ein  $C < \infty$ , so dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\mathbb{P} [J_{D^H} > n, D^H < \infty] \leq C n^{3-\frac{M-1}{4}}$$

erfüllt ist. Da  $\mathbb{P} [J_{D^H} > t, D^H < \infty]$  monoton in  $t$  fällt, folgt die Behauptung auch für  $t \in \mathbb{R}$ .

b) kann genauso bewiesen werden, indem man die gleiche Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  wie

in Teil a) und

$$\mathbb{P}[J_0 > n, U = \infty] = \mathbb{P}[B_n, U = \infty] =: c_n$$

verwendet, wobei man

$$B_n := \bigcap_{i=1}^n \{ \Psi_{(i-1)L}(\tau_{iL}) > p \} \cup B'_i$$

und

$$B'_n := \left\{ M_{iL-L\frac{1}{4}, iL}(\tau_{iL}) < \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2} \right\}$$

setzt. Die Voraussetzung

$$M_{-L\frac{1}{4}, 0}(0) \geq \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2} \quad (3.60)$$

wird in Teil a) nur benötigt, um Lemma 3.4.7 und damit Korollar 3.5.7 bzw. (3.51) anwenden zu können. Statt  $\mathbb{P}[\sigma_n > \frac{2nL}{\alpha_3}]$  (wie in Lemma 3.4.7) müssen wir hier aber  $\mathbb{P}[\tau_{nL} > \frac{2nL}{\alpha_3}]$  abschätzen. Da wir nach Definition von  $U$  und mit Lemma A.7

$$\mathbb{P}\left[\tau_{nL} > \frac{2nL}{\alpha_3}, U = \infty\right] \leq \mathbb{P}[\eta_{nL} > 2nL] \leq e^{-CnL}$$

und somit eine noch bessere Abschätzung als in Lemma 3.4.7 erhalten, können wir auf (3.60) verzichten. Die Behauptung folgt dann wie eben aus Lemma A.1.  $\square$

### 3.5.9 Korollar

a) Sei  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  derart, dass es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\chi$  die Bedingung aus Bemerkung 3.4.3 für  $k$  und für ein hinreichend großes  $L' \geq L$  erfüllt. Dann gilt

$$J_0 < \infty \text{ f.s..}$$

b) Dies gilt auch für  $\chi = (\eta, 0)$  und auf  $\{U = \infty\}$ .

BEWEIS. a) Wie in Bemerkung 3.4.3 erwähnt, kann man Lemma 3.4.2 b) auch für deterministische Startkonfigurationen zeigen, indem man Voraussetzung (3.60) durch die dort angegebene Bedingung ersetzt. Je nach Wahl von  $k$  können sich dann die Konstante in der letzten Abschätzung des Be-

weises und damit auch die Konstanten in Lemma 3.4.7 und letztlich Korollar 3.5.7 ändern. Wir können dann dennoch genau wie in Lemma 3.5.8a) (mit den Modifikationen aus Lemma 3.5.8b)) zeigen, dass es für  $0 < \vartheta < 2$  ein  $0 < C < \infty$  und ein  $L_0$  gibt, so dass für alle  $L \geq L_0$  und  $\chi \in \mathbb{S}_{\vartheta, L}$  mit  $\widetilde{X}_0(R_0) \geq 1$ , die die Bedingung aus Bemerkung 3.4.3 für ein  $L \geq L_0$  erfüllen, die Abschätzung

$$\mathbb{P}[J_0 > t] \leq C_t^{3 - \frac{M-1}{4}} \quad (3.61)$$

gilt. Im Beweis muss hierbei lediglich beachtet werden, dass möglicherweise die Konstante in der Definition der  $a_n$  und damit auch  $L_0$  angepasst werden muss. Ist  $L' \geq L_0$ , so gilt folglich (3.61) und damit auch die Behauptung.

b) Das sind direkte Folgerungen aus Lemma 3.5.8a) bzw. b).  $\square$

Zum Abschluss stellen wir noch fest, dass immer gute Zeiten folgen (zur Definition von  $S_k$  und  $D_k^H$  siehe Definition 2.2.16).

### 3.5.10 Korollar

*In den in Korollar 3.5.9 beschriebenen Situationen gilt:*

$$S_1 < \infty \text{ f.s.}$$

*und für  $k \geq 2$  gilt*

$$S_k < \infty \text{ f.s. auf der Menge } \{D_{k-1}^H < \infty\}.$$

BEWEIS. Die erste Behauptung ist eine direkte Folgerung aus Korollar 3.5.9 und aus  $\{S_1 < \infty\} = \{J_0 < \infty\}$ . Die zweite Behauptung folgt mit Teil a) von Lemma 3.5.8 und  $\{S_k < \infty, D_{k-1}^H < \infty\} = \{J_{D_k^H} < \infty, D_{k-1}^H < \infty\}$ .  $\square$

# Kapitel 4

## Regeneration und Grenzwertsätze

### 4.1 Die Regenerationsstruktur

In diesem Abschnitt zeigen wir die zentralen Aussagen der Arbeit. Zunächst werden wir nachweisen, dass die zuvor in den Definitionen 2.2.18 und 2.2.19 definierten Regenerationszeiten endliche erste und zweite Momente haben, wenn man auf  $\{U = \infty\}$  (siehe Definition 2.2.9) bedingt. Danach werden wir sehen, dass der Prozess zu diesen Zeiten in gewisser Weise einen Neustart durchführt. Wir wollen zunächst zeigen, dass die Regenerationszeiten überhaupt endlich sind.

#### 4.1.1 Satz

*In den Situationen aus Korollar 3.5.9 gilt  $\mathbb{P}_\chi$  - f.s., dass  $\kappa < \infty$ .*

BEWEIS. Aus Korollar 3.5.10 und Lemma 2.2.20 folgt, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\mathbb{P}[\kappa = \infty] \leq \mathbb{P}[\kappa^H = \infty] \leq \mathbb{P}[D_k^H < \infty]$$

erfüllt ist. Nach Lemma 2.2.17 sind nun für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Voraussetzungen von Korollar 3.3.4 erfüllt und wir erhalten dank der starken Markoveigenschaft

$$\mathbb{P}[\kappa = \infty] \leq (1 - \delta)^k.$$

Der Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  liefert nun die Behauptung.  $\square$

Die Idee beim Beweis des folgenden Lemma ist einfach: Wir haben zuvor gesehen, dass sowohl der Weg zum Ort der nächsten schlechten, als auch der Weg zum Ort der nächsten guten Zeit eher kurz ist. Bedingt man nun noch darauf, dass  $U = \infty$  ist, also darauf, dass die Marke zügig vorankommt, so ist auch die Regenerationszeit eher klein.

#### 4.1.2 Lemma

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $M$  aus Definition 2.2.6. Dann gibt es ein  $0 < C < \infty$  mit

$$\mathbb{P}_{2\delta_0} [\kappa > t | U = \infty] \leq Ct^{3 - \frac{M-1}{4} + \varepsilon}.$$

BEWEIS. Aus Lemma 2.2.20 und Satz 4.1.1 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{2\delta_0} [\kappa > t | U = \infty] &\leq \mathbb{P}_{2\delta_0} [\kappa^H > t | U = \infty] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_{2\delta_0} [S_k > t, K^H = k | U = \infty], \end{aligned}$$

wobei es sich um  $K^H$  aus Definition 2.2.19 handelt. Die starke Markoveigenschaft angewendet auf die Stoppzeiten  $S_j, j \geq 1$  liefert zusammen mit Korollar 3.3.4 für  $k \geq 1$ :

$$\mathbb{P} [S_k > t, K^H = k | U = \infty] \leq \mathbb{P} [D_1^H < \infty, \dots, D_{k-1}^H < \infty] \leq (1 - \delta)^{k-1}$$

Somit ist also für jedes  $l > 0$ :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} [\kappa > t | U = \infty] \\ &\leq \sum_{k=1}^l \mathbb{P} [S_k > t, K^H = k | U = \infty] + \sum_{k=l+1}^{\infty} \mathbb{P} [S_k > t, K^H = k | U = \infty] \\ &\leq \sum_{k=1}^l \mathbb{P} [t < S_k < \infty | U = \infty] + \delta^{-1} (1 - \delta)^l. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Damit die  $k$ -te gute Zeit  $S_k$  groß werden kann, muss nun mindestens ein Weg  $R_{D_j} - R_{S_j}$  bis zur nächsten schlechten Zeit oder ein Weg  $\eta_{D_j, J_{D_j} L} - R_{D_j}$  bis zur nächsten guten Zeit für ein  $j < k$  groß sein. Wir wollen diese Aussage formalisieren indem wir  $D_0 := 0$  setzen,  $c > 2$  fest wählen und für  $0 < \gamma < 1$



die Ereignisse

$$A_k := \{R_{D_1} - R_{S_1} < ct^\gamma, \dots, R_{D_{k-1}} - R_{S_{k-1}} < ct^\gamma, S_k < \infty\} \text{ und}$$

$$B_k := \{\eta_{D_0, J_{D_0}L} - R_{D_0} < Lt^\gamma, \dots, \eta_{D_{k-1}, J_{D_{k-1}}L} - R_{D_{k-1}} < Lt^\gamma, S_k < \infty\}$$

definieren. Tritt nun  $A_k \cap \{U = \infty\}$  ein, so ist

$$\alpha_2 S_k \leq R_{S_k} \leq kct^\gamma + \sum_{j=0}^{k-1} (\eta_{D_j, J_{D_j}L} - R_{D_j}).$$

Weiter sieht man, dass beim Eintreten des Ereignisses  $A_k \cap B_k \cap \{U = \infty\}$  die Ungleichung

$$\alpha_2 S_k \leq kt^\gamma (c + L)$$

gilt. Für alle  $t$  mit

$$t > \frac{lt^\gamma (c + L)}{\alpha_2} \quad (4.2)$$

und für alle  $k \leq l$  gilt folglich

$$\mathbb{P}[t < S_k < \infty, A_k, B_k | U = \infty] = 0$$

und damit auch die Ungleichung

$$\mathbb{P}[t < S_k < \infty | U = \infty] \leq \mathbb{P}[A_k^c, S_k < \infty | U = \infty] + \mathbb{P}[B_k^c, S_k < \infty | U = \infty]. \quad (4.3)$$

Für den ersten Summanden von (4.3) erhalten wir nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_k^c, S_k < \infty | U = \infty] &\leq \mathbb{P}[U = \infty]^{-1} \mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^{k-1} \{R_{D_j} - R_{S_j} > ct^\gamma\}\right] \\ &\leq \mathbb{P}[U = \infty]^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}[\{R_{D_j} - R_{S_j} > ct^\gamma\}] \\ &\leq (k-1) Ct^{-\gamma \frac{M-1}{4}}, \end{aligned}$$

wobei wegen Lemma 3.1.3  $\mathbb{P}[U = \infty] > 0$  ist und die letzte Ungleichung aus Teil a) von Lemma 3.4.5 folgt. Mit einer entsprechenden Rechnung erhalten

wir für den zweiten Summanden von (4.3) die Ungleichung

$$\mathbb{P}[B_k^c, S_k < \infty | U = \infty] \leq kCt^{\gamma(3-\frac{M-1}{4})},$$

wobei wir Lemma 3.5.8 angewendet haben. Wir müssen nun für jedes  $t$  den Parameter  $l$  klein genug wählen, dass der erste Summand von Abschätzung (4.1) nicht zu langsam in  $t$  fällt und dass Bedingung (4.2) für hinreichend große  $t$  erfüllt ist. Auf der anderen Seite müssen wir es so groß wählen, dass der zweite Summand in (4.1) schnell genug fällt, wenn  $t$  größer wird. Wir wählen dazu

$$l_t := \left(\frac{M-1}{4} - 3\right) \left(\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\right)^{-1} \log(t).$$

Weiter können wir nun für gegebenes  $\varepsilon > 0$  den Parameter  $\gamma_\varepsilon < 1$  so groß wählen, dass

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lceil l_t \rceil} (\mathbb{P}[A_k^c, S_k < \infty | U = \infty] + \mathbb{P}[B_k^c, S_k < \infty | U = \infty]) + \delta^{-1}(1-\delta)^{l_t} \\ & \leq C' (\log(t))^2 \left( Ct^{-\gamma_\varepsilon \frac{M-1}{4}} + Ct^{\gamma_\varepsilon(3-\frac{M-1}{4})} \right) + \delta^{-1} t^{\gamma_\varepsilon(3-\frac{M-1}{4})} \\ & \leq C'' (\log(t))^2 t^{\gamma_\varepsilon(3-\frac{M-1}{4})} \leq C''' t^{3-\frac{M-1}{4}+\varepsilon}, \end{aligned}$$

Da  $\gamma_\varepsilon < 1$  gilt, gibt es ferner ein  $t_0$ , so dass für alle  $t \geq t_0$  Bedingung (4.2) erfüllt ist und wir sind fertig.  $\square$

Die erste unserer beiden Hauptaussagen folgt nun direkt:

#### 4.1.3 Satz

*Unter der Anfangsbedingung  $2\delta_0$  gilt für  $\kappa$  und  $R_\kappa$ :*

$$\mathbb{E}_{2\delta_0}[\kappa^2 | U = \infty] < \infty \text{ und } \mathbb{E}_{2\delta_0}[R_\kappa^2 | U = \infty] < \infty$$

BEWEIS. Sei  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ . Aus Lemma 4.1.2 folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{2\delta_0}[\kappa^2 | U = \infty] &= 2 \int_0^\infty t \mathbb{P}[\kappa > t] dt \\ &\leq C \int_0^\infty t^{(4+\varepsilon)-\frac{M-1}{4}} dt < \infty, \end{aligned}$$

da wir  $M \geq 22$  vorausgesetzt haben. Für die zweite Aussage nehmen wir für fest gewähltes  $c > 2$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[R_\kappa > ct] &\leq \mathbb{P}[R_\kappa > ct, \kappa \leq t] + \mathbb{P}[\kappa > t] \\ &\leq \mathbb{P}[R_t > ct] + \mathbb{P}[\kappa > t] \end{aligned}$$

vor und erhalten die Aussage genauso aus den Lemmata 3.4.4 und 4.1.2.  $\square$

Um die Regenerationsstruktur präzise angeben zu können, benötigen wir noch die folgenden Definitionen.

#### 4.1.4 Definition

Wir bezeichnen (mit Hilfe der Notation aus Definition 2.1.2) mit

$$X_{\cdot, s}^+(\omega) := (X^+ \circ \theta_s)(\omega)$$

den Partikelprozess derer Partikel, die sich zur Zeit  $s$  rechts oder auf der Marke befunden haben, ab der Zeit  $s$ .

#### 4.1.5 Definition

Sei  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  die natürliche Filtration des Prozesses  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Wir definieren

$$\mathcal{G}_n := \overline{\sigma(\{\kappa_n \leq t_n\} \cap A_{t_n}, A_{t_n} \in \mathcal{F}_{t_n})}$$

und setzen  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1$ .

Sei ferner  $(\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}$  die natürliche Filtration des Prozesses  $X^{+n}$ , der entsteht, wenn man zu den ersten  $n$  Regenerationszeiten jeweils alle Partikel links der Marke entfernt.  $X^{+n}$  ist also gegeben durch

$$X_t^{+n} := \begin{cases} X_t & \text{für } t < \kappa_1, \\ X_{t-\kappa_n, \kappa_n}^+ & \text{für } \kappa_n \leq t \text{ und} \\ X_{t-\kappa_i, \kappa_i}^+ & \text{für } \kappa_i \leq t < \kappa_{i+1} \text{ und } 1 \leq i < n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Wir definieren  $\mathcal{G}'_n$  genauso wie  $\mathcal{G}_n$ , nur, dass wir in der Definition  $\mathcal{F}_t$  durch  $\mathcal{F}_t^n$  ersetzen und es gilt  $\mathcal{G}' := \mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}$ .

Wir wollen bei  $\mathcal{G}_n$  an Ereignisse vor der Zeit  $\kappa_n$  denken. Nun können wir die Regenerationsstruktur beschreiben: Erreicht man eine Regenerationszeit, so verhalten sich die Partikel, die sich zu diesem Zeitpunkt auf der Marke oder

rechts davon befinden, genauso, wie sich die Partikel in einem neu gestarteten System verhalten würden, in dem anfänglich nur zwei Partikel auf der Marke starten, und dass darauf bedingt ist, dass sich die Marke immer rechts von der  $\alpha_2$ -Barriere befinden wird. Die formale Beschreibung für die erste Regenerationszeit liefert der folgende Satz. Dort und im Folgenden bezeichnen wir wieder mit  $\varsigma_x$  den räumlichen Verschiebungsoperator aus Definition 3.5.4 bezeichnen. Um die Notation übersichtlich zu halten, wollen wir dabei  $\varsigma_x X_t$  statt  $\varsigma_x(X_t, R_t)$  schreiben.

#### 4.1.6 Satz

Sei  $A \subset \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{S}_\vartheta)$  eine Borelmenge und  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}_\chi [\varsigma_{-R_\kappa} X_{\cdot, \kappa}^+ \in A | \mathcal{G}] = \mathbb{P}_{2\delta_0} [X \in A | U = \infty].$$

BEWEIS. Es ist für alle  $B \in \mathcal{G}$  zu zeigen:

$$\mathbb{P}_\chi [B \cap \{\varsigma_{-R_\kappa} X_{\cdot, \kappa}^+ \in A\}] = \mathbb{P}_\chi [B] \mathbb{P}_{2\delta_0} [X \in A | U = \infty].$$

Nach Satz 4.1.1 erhalten wir die Umformung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\chi [B \cap \{\varsigma_{-R_\kappa} X_{\cdot, \kappa}^+ \in A\}] &= \mathbb{P}_\chi [B \cap \{\kappa < \infty, \varsigma_{-R_\kappa} X_{\cdot, \kappa}^+ \in A\}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi [B \cap \{S_k < \infty, D_k = \infty, \varsigma_{-R_\kappa} X_{\cdot, \kappa}^+ \in A\}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi [B \cap \{R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty, D_k = \infty, \varsigma_{-\eta_z} X_{\cdot, S_k}^+ \in A\}], \end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung den Umstand genutzt haben, dass es nach Konstruktion von  $S_k$  stets ein  $z \in \mathbb{N}$  gibt mit  $R_{S_k} = \eta_z$ . Nach Definition von  $\mathcal{G}$  ist  $\{\kappa = S_k\} \cap B \in \mathcal{G}$ , weswegen wir ein  $B_k \in \mathcal{F}_{S_k}$  mit  $\{\kappa = S_k\} \cap B = \{\kappa = S_k\} \cap B_k$  finden können. Wir fahren fort mit

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi [B \cap \{R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty, D_k = \infty, \varsigma_{-\eta_z} X_{\cdot, S_k}^+ \in A\}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{E}_\chi [\mathbb{1}_{B_k \cap \{R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty\}} \mathbb{P}_\chi [D_k = \infty, \varsigma_{-\eta_z} X_{\cdot, S_k}^+ \in A | \mathcal{F}_{S_k}]]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Da aus  $D_k = \infty$  folgt, dass keines der Partikel, die sich zur Zeit  $S_k$  links der Marke befinden, nach der Zeit  $S_k$  jemals wieder Einfluss auf die Marke haben wird, hängt  $X_{\cdot, S_k}^+$  nicht von diesen Partikeln ab und ist somit unabhängig von  $V_k \wedge W_k$ . Ferner sind  $U_k$  und  $V_k \wedge W_k$  bedingt auf  $\mathcal{F}_{S_k}$  unabhängig. Mit Hilfe der starken Markoveigenschaft sehen wir somit, dass auf der Menge  $\{S_k < \infty\} \cap \{R_{S_k} = \eta_z\}$  die Umformung

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\chi \left[ D_k = \infty, \varsigma_{-\eta_z} X_{\cdot, S_k}^+ \in A \mid \mathcal{F}_{S_k} \right] \\
&= \mathbb{P}_\chi \left[ U_k = \infty, V_k \wedge W_k = \infty, \varsigma_{-\eta_z} X_{\cdot, S_k}^+ \in A \mid \mathcal{F}_{S_k} \right] \\
&= \mathbb{P}_\chi \left[ U_k = \infty, \varsigma_{-\eta_z} X_{\cdot, S_k}^+ \in A \mid \mathcal{F}_{S_k} \right] \mathbb{P}_\chi [V_k \wedge W_k = \infty \mid \mathcal{F}_{S_k}] \\
&= \mathbb{P}_{2\delta_0} [U = \infty, X_\cdot \in A] \mathbb{P}_\chi [V_k \wedge W_k = \infty \mid \mathcal{F}_{S_k}].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

gilt, wobei wir benutzt haben, dass sich auf  $\{S_k < \infty\} \cap \{R_{S_k} = \eta_z\}$  zur Zeit  $S_k$  f.s. genau zwei Partikel in  $\eta_z$  befinden. Setzen wir dies nun in die Rechnung aus (4.5) und (4.6) ein, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\chi [B \cap \{\varsigma_{-R_\kappa} X_{\cdot, \kappa}^+ \in A\}] \\
&= \mathbb{P}_{2\delta_0} [U = \infty, X_\cdot \in A] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi [B_k \cap \{V_k \wedge W_k = \infty, R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty\}]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

und für  $A = \mathcal{D}([0, \infty); \mathbb{S}_\vartheta)$  gilt dann

$$\mathbb{P}_\chi [B] = \mathbb{P}_{2\delta_0} [U = \infty] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi [B_k \cap \{V_k \wedge W_k = \infty, R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty\}] \tag{4.9}$$

Gleichsetzen von (4.8) und (4.9) liefert schließlich die Behauptung.  $\square$

Die Aussage gilt nicht nur für die erste Regenerationszeit. Um dies zeigen zu können, werden wir allerdings noch die folgenden Lemmata benötigen.

#### 4.1.7 Lemma

*Unter der Startbedingung  $\chi = 2\delta_0$  gilt  $\{U = \infty\} \in \mathcal{G}'$ .*

BEWEIS. Unter der Startbedingung  $\chi = 2\delta_0$  gilt  $R_t^+ = R_t$  (siehe Definition 2.1.2). Angenommen, es wäre  $\kappa < U < \infty$ , dann würde nach Definition auch  $U_K < \infty$  folgen. Dies steht aber im Widerspruch zu  $\kappa = S_K$ , also ist entweder  $U < \kappa$  oder  $U = \infty$ . Da ersteres  $\mathcal{G}'$ -messbar ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**4.1.8 Lemma**

Auf  $\{K = k'\}$  gilt  $\{V_k \wedge W_k < \infty\} \in \mathcal{G}'$  für alle  $k < k'$ .

BEWEIS. Nach Definition der Stoppzeiten  $V$  und  $W$  sieht man direkt, dass

$$\{S_k < V_k \wedge W_k < \infty\} \subset \{V_{k+1} \wedge W_{k+1} < \infty\}.$$

Wie in Lemma 4.1.7 folgt dann, dass für  $k < k'$  entweder  $V_k \wedge W_k < \kappa$  oder  $V_k \wedge W_k = \infty$  gelten muss.  $\square$

**4.1.9 Lemma**

Sei  $A \subset \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{S}_\vartheta)$  eine Borelmenge. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dann

$$\mathbb{P}_\chi [\varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A | \mathcal{G}_n] = \mathbb{P}_\chi [\varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A | \mathcal{G}'_n].$$

BEWEIS. Da  $\mathcal{G}'_n \subseteq \mathcal{G}_n$  gilt, müssen wir zeigen, dass  $\mathbb{P}_\chi [\varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A | \mathcal{G}_n]$  messbar bezüglich  $\mathcal{G}'_n$  ist. Das Verhalten von  $\varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+$  hängt lediglich von der Markenbewegung und den Brownschen Bewegungen, welche den Partikeln zugeordnet sind, die sich zur Zeit  $\kappa_n$  rechts oder auf der Marke befinden, ab. Die Messbarkeit folgt deshalb aus der Konstruktion der Regenerationszeiten, da kein Partikel, welches sich zu einer Regenerationszeit links der Marke befindet, jemals wieder Einfluss auf die Bewegung der Marke haben wird und  $\mathcal{G}'_n$  somit alle Informationen über die Marke enthält.  $\square$

Nun können wir Satz 4.1.6 für alle Regenerationszeiten zeigen.

**4.1.10 Satz**

Sei  $A \subset \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{S}_\vartheta)$  eine Borelmenge. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\chi [\varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A | \mathcal{G}_n] = \mathbb{P}_{2\delta_0} [X. \in A | U = \infty].$$

BEWEIS. Dank Lemma 4.1.9 genügt es zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}_\chi [\varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A | \mathcal{G}'_n] = \mathbb{P}_{2\delta_0} [X. \in A | U = \infty]$$

gilt. Der Beweis hierfür folgt durch Induktion nach  $n$ , wo Satz 4.1.6 bereits den Induktionsanfang liefert. Sei also die Aussage für  $n$  gezeigt. Wir

definieren die Abbildung  $\varrho : \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{S}_\vartheta) \rightarrow \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{S}_\vartheta)$  über

$$\varrho(\omega)(\cdot) := \varsigma_{-R_\kappa} \omega(\kappa(\omega) + \cdot).$$

Sei  $B' \in \mathcal{G}'_{n+1}$ . Nach Definition wird  $\mathcal{G}'_{n+1}$  als  $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}$  und  $\varrho^{-1}(\mathcal{G}''_n)$  erzeugt, wo wir  $\mathcal{G}''_n$  genauso erhalten wie  $\mathcal{G}'_n$ , nur dass wir in der Definition statt des Prozesses  $X^{+n}$  den Prozess verwenden, den wir erhalten, wenn wir in (4.4) in der ersten Zeile  $X_t$  durch  $X_t^+$  ersetzen. Insbesondere ist damit  $\mathcal{G}''_n \subseteq \mathcal{G}'_n$ . Weiter sind  $\mathcal{G}$  und  $\varrho^{-1}(\mathcal{G}''_n)$  nach Konstruktion unabhängig. Es genügt die Aussage für einen schnittstabilen Erzeuger von  $\mathcal{G}'_{n+1}$  zu zeigen, wir können also o.E.  $B' = B \cap B''$  annehmen, wo  $B \in \mathcal{G}$  und  $B'' \in \varrho^{-1}(\mathcal{G}''_n)$ . Wie in Satz 4.1.6 wollen wir zeigen, dass

$$\mathbb{P}_\chi \left[ B' \cap \left\{ \varsigma_{-R_{\kappa_{n+1}}} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \right] = \mathbb{P}_\chi [B'] \mathbb{P}_{2\delta_0} [X. \in A | U = \infty].$$

Wir betrachten die Gleichung

$$\mathbb{P}_\chi \left[ B' \cap \left\{ \varsigma_{-R_{\kappa_{n+1}}} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \right] = \mathbb{P}_\chi \left[ B \cap B'' \cap \left\{ \varsigma_{-R_{\kappa_{n+1}}} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \right]$$

und gehen nun wie in Satz 4.1.6 vor. Wir schreiben  $\varsigma^{n,z} := \varsigma_{-\eta_z} \varsigma_{-(R_{\kappa_{n+1}} - R_\kappa)}$  und erhalten so statt (4.6) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi \left[ B' \cap \left\{ R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty, D_k = \infty, \varsigma^{n,z} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{E}_\chi \left[ \mathbb{1}_{B_k \cap \{R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty\}} \mathbb{P}_\chi \left[ B'' \cap \left\{ D_k = \infty, \varsigma^{n,z} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \middle| \mathcal{F}_{S_k} \right] \right]. \end{aligned}$$

Da  $B''$  von  $\mathcal{G}$  unabhängig ist, ist  $B''$  aufgrund der in Lemma 4.1.8 gezeigten  $\mathcal{G}$ -Messbarkeit von  $V_k \wedge W_k$  auch unabhängig von  $V_k \wedge W_k$  und wir erhalten wie in (4.7) auf der Menge  $\{S_k < \infty\} \cap \{R_{S_k} = \eta_z\}$  dank der starken Markoveigenschaft die Umformung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\chi \left[ B'' \cap \left\{ D_k = \infty, \varsigma^{n,z} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \middle| \mathcal{F}_{S_k} \right] \\ &= \mathbb{P}_{2\delta_0} \left[ \varrho(B'') \cap \left\{ U = \infty, \varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A \right\} \right] \mathbb{P}_\chi [V_k \wedge W_k = \infty | \mathcal{F}_{S_k}]. \end{aligned}$$

Es gilt schließlich ähnlich wie bei (4.8) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\chi \left[ B' \cap \left\{ \varsigma_{-R_{\kappa_{n+1}}} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \right] \\ &= \mathbb{P}_{2\delta_0} \left[ \varrho(B'') \cap \left\{ U = \infty, \varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A \right\} \right] \\ & \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi \left[ B_k \cap \left\{ V_k \wedge W_k = \infty, R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty \right\} \right], \end{aligned}$$

und statt (4.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\chi [B'] &= \mathbb{P}_{2\delta_0} \left[ \varrho(B'') \cap \{U = \infty\} \right] \\ & \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}_\chi \left[ B_k \cap \left\{ V_k \wedge W_k = \infty, R_{S_k} = \eta_z, S_k < \infty \right\} \right]. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\chi \left[ B' \cap \left\{ \varsigma_{-R_{\kappa_{n+1}}} X_{\cdot, \kappa_{n+1}}^+ \in A \right\} \right] \\ &= \mathbb{P}_\chi [B'] \mathbb{P}_{2\delta_0} \left[ \varsigma_{-R_{\kappa_n}} X_{\cdot, \kappa_n}^+ \in A \mid \varrho(B'') \cap \{U = \infty\} \right]. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.1.7 ist für die Startbedingung  $\chi = 2\delta_0$  das Ereignis  $\{U = \infty\}$  messbar bezüglich  $\mathcal{G}'$  und somit ist  $\varrho(B'') \cap \{U = \infty\} \in \mathcal{G}'_n$ , weswegen wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können.  $\square$

Wir können nun die zweite zentrale Aussage formulieren, die uns dann zusammen mit der Endlichkeit der ersten und zweiten Momente von  $\kappa$  und  $R_\kappa$  Grenzwertsätze liefern wird.

#### 4.1.11 Satz (Regenerationsstruktur)

Sei  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- i. Unter  $\mathbb{P}_\chi$  sind die Zufallszeiten  $\{\kappa_1, \kappa_i - \kappa_{i-1} : i \geq 2\}$  unabhängig. Ferner sind die Differenzen  $\{\kappa_i - \kappa_{i-1} : i \geq 2\}$  identisch wie  $\kappa_1$  unter dem Maß  $\mathbb{P}_{2\delta_0}[\cdot \mid U = \infty]$  verteilt.
- ii. Unter  $\mathbb{P}_\chi$  sind die Zufallsvariablen  $\{R_{\cdot \wedge \kappa_1}, R_{(\kappa_{i-1}^+ \cdot) \wedge \kappa_i} - \kappa_{i-1} : i \geq 2\}$  unabhängig. Ferner sind die Differenzen  $\{R_{(\kappa_{i-1}^+ \cdot) \wedge \kappa_i} - \kappa_{i-1} : i \geq 2\}$  identisch wie  $R_{\cdot \wedge \kappa_1}$  unter dem Maß  $\mathbb{P}_{2\delta_0}[\cdot \mid U = \infty]$  verteilt.

BEWEIS. Das folgt direkt aus Satz 4.1.10. Wichtig ist hierbei, dass wir in Definition 2.2.18  $\Psi'_{s,z}(t)$  und nicht  $\Psi_{s,z}(t)$  verwendet haben.  $\square$



## 4.2 Grenzwertsätze

In diesem Kapitel werden wir die Regenerationsstruktur aus dem vorherigen Abschnitt verwenden, um ein Gesetz der großen Zahlen, einen Zentralen Grenzwertsatz und einen Satz über Konvergenz der Partikelkonfiguration links der Marke gegen eine invariante Verteilung zu zeigen. Obwohl die folgenden Aussagen für alle in Korollar 3.5.9 beschriebenen Ausgangssituationen gelten, wollen wir im Folgenden grundsätzlich  $\chi = (\eta, 0)$  betrachten.

### 4.2.1 Satz (Starkes Gesetz der großen Zahlen)

Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} = v := \frac{\mathbb{E}_{2\delta_0} [R_{\kappa_1} | U = \infty]}{\mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_1 | U = \infty]}$$

BEWEIS. Nach Satz 4.1.1 ist  $\kappa_1 < \infty$  f.s. und nach Konstruktion von  $(\eta, 0)$  gilt f.s.  $(\eta, 0) \in \mathbb{S}_\vartheta$  (Lemma 1.1.7). Nach Satz 4.1.11 erhalten wir also f.s.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_n}{n} = \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_1 | U = \infty] \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{\kappa_n}}{n} = \mathbb{E}_{2\delta_0} [R_{\kappa_1} | U = \infty]. \quad (4.10)$$

Wir setzen  $\kappa_0 := 0$  und für  $t \geq 0$  definieren wir

$$n_t := \sup \{n \geq 0 : \kappa_n \leq t\}. \quad (4.11)$$

Wegen (4.10) ist  $n_t < \infty$  f.s. und wir erhalten wegen  $\frac{R_{\kappa_{n_t}}}{\kappa_{n_t+1}} \leq \frac{R_{\kappa_{n_t}}}{t} \leq \frac{R_{\kappa_{n_t}}}{\kappa_{n_t}}$  und  $\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  die Gleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_{\kappa_{n_t}}}{t} = v. \quad (4.12)$$

Schließlich ist wegen obiger Gleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|R_t - R_{\kappa_{n_t}}|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|R_{\kappa_{n_t+1}} - R_{\kappa_{n_t}}|}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_{\kappa_{n_t+1}} - R_{\kappa_{n_t}}}{t} = 0.$$

Zusammen mit (4.12) folgt nun die Behauptung.  $\square$

### 4.2.2 Satz (Zentraler Grenzwertsatz)

Für  $t \geq 0$  sei

$$B_t^\varepsilon := \sqrt{\varepsilon} (R_{\varepsilon^{-1}t} - \varepsilon^{-1}vt).$$

Dann konvergiert  $B_t^\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in Verteilung gegen eine Brownsche Bewegung mit Varianz

$$\sigma^2 := \frac{\mathbb{E}_{2\delta_0} \left[ (R_{\kappa_1} - \kappa_1 v)^2 \mid U = \infty \right]}{\mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_1 \mid U = \infty]}.$$

BEWEIS. Wir wollen das Donskersche Invarianzprinzip anwenden (siehe z.B. [13]). Sei dazu  $\bar{B}_m := \sum_{j=1}^m \Delta_j$ , wobei

$$\Delta_j := R_{\kappa_{j+1}} - R_{\kappa_j} - (\kappa_{j+1} - \kappa_j) v.$$

Die Summe beginnt nicht bei  $j = 0$ , da  $\kappa_1$  nur dann die gleiche Verteilung hat wie  $\kappa_j - \kappa_{j-1}$ , wenn  $\chi = 2\delta_0$ . Wir definieren  $n_t$  wie in (4.11) und erhalten für festes  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} & \left| B_t^\varepsilon - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{B}_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor}} \right| \\ & \leq \sqrt{\varepsilon} \left( \left| R_{\frac{t}{\varepsilon}} - R_{\kappa_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor + 1}}} \right| + R_{\kappa_1} + v \left| \frac{t}{\varepsilon} - \kappa_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor + 1}} \right| + v \kappa_1 \right) \\ & \leq \sqrt{\varepsilon} \left( \left| R_{\kappa_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor + 1}}} - R_{\kappa_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor}} \right| + R_{\kappa_1} + v \left| \kappa_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor + 1}} - \kappa_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor}} \right| + v \kappa_1 \right) \end{aligned}$$

und somit für  $0 \leq t \leq T < \infty$

$$\begin{aligned} & \left| B_t^\varepsilon - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{B}_{n_{\lfloor \varepsilon^{-1} t \rfloor}} \right| \\ & \leq 2\sqrt{\varepsilon} \left( \sup_{0 \leq n \leq n_{\lfloor \varepsilon^{-1} T \rfloor}} (R_{\kappa_{n+1}} - R_{\kappa_n}) + v \sup_{0 \leq n \leq n_{\lfloor \varepsilon^{-1} T \rfloor}} (\kappa_{n+1} - \kappa_n) \right). \end{aligned}$$

Nach Satz 4.1.3 gilt weiter für  $u > 0$ , dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_{2\delta_0} \left[ \sup_{0 \leq n \leq n_{\lfloor \varepsilon^{-1} T \rfloor}} \sqrt{\varepsilon} (\kappa_{n+1} - \kappa_n) > u \right] = 0.$$

Folglich gilt

$$\sup_{0 \leq n \leq n_{\lfloor \varepsilon^{-1} T \rfloor}} \sqrt{\varepsilon} (\kappa_{n+1} - \kappa_n) \rightarrow 0$$

stochastisch. Genauso erhalten wir auch

$$\sup_{0 \leq n \leq n_{\lfloor \varepsilon^{-1} T \rfloor}} \sqrt{\varepsilon} (R_{\kappa_{n+1}} - R_{\kappa_n}) \rightarrow 0$$

stochastisch. Für kompakte Mengen von  $t$  erhalten wir folglich gleichmäßige stochastische Konvergenz von  $B_t^\varepsilon - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{B}_{n_{\varepsilon^{-1}t}}$  gegen 0. Wir können nun aufgrund der Sätze 4.1.3 und 4.1.11 das Donskersche Invarianzprinzip auf die Zufallsvariablen  $\Delta_j$  anwenden. Setzen wir den Prozess  $\bar{B}$  durch lineare Interpolation auf ganz  $\mathbb{R}^+$  fort, konvergiert demnach der Prozess

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_{2\delta_0} \left[ (R_{\kappa_1} - \kappa_1 v)^2 \middle| U = \infty \right]^{-\frac{1}{2}} \bar{B}_{\frac{\cdot}{\varepsilon}}$$

in Verteilung gegen eine Brownsche Bewegung. Zusammen mit der stochastischen Konvergenz von  $(B_t^\varepsilon)$  gegen  $(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{B}_{n_{\varepsilon^{-1}t}})$  und der Tatsache, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_1 | U = \infty]}$$

ist, folgt schließlich mit Brownscher Skalierung die Behauptung.  $\square$

Noch ist nicht klar, dass  $\sqrt{\varepsilon}$  tatsächlich die richtige Skala für den Zentralen Grenzwertsatz ist, da wir nicht ausgeschlossen haben, dass  $\sigma^2 = 0$  gilt. Dazu dient der folgende Satz.

#### 4.2.3 Satz

Sei  $\sigma^2$  wie in Satz 4.2.2. Dann gilt  $\sigma^2 > 0$ .

BEWEIS. Wir wollen zeigen, dass

$$\mathbb{E}_{2\delta_0} \left[ (R_{\kappa_1} - \kappa_1 v)^2 \middle| U = \infty \right] > 0.$$

Dazu genügt es wiederum

$$\mathbb{P}_{2\delta_0} [R_{\kappa_1} = \eta_L, \eta_L < \kappa_1 v] > 0$$

zu zeigen. Wir wollen die Pfade der beiden zu Beginn wachen Partikel mit  $X^{(-1)}$  und  $X^{(0)}$  bezeichnen (siehe Bemerkung 1.1.9). Die Idee ist nun, die Marke ab der Zeit  $\tau_1$  nur noch vom Partikelpfad  $X^{(1)}$  vorantreiben zu lassen und dabei allen anderen Partikeln möglichst wenig Spielraum zu geben, damit  $\tau_L$  eine gute Zeit wird (die Bedingungen dafür sind bei Definition 2.2.15 zu finden). Sei  $\varepsilon := \min \{\eta_n - \eta_{n-1}, 1 \leq n \leq L\}$ . Wir definieren die

Ereignisse

$$A_1 := \left\{ \alpha_3 t \leq X_t^{(0)}, 0 \leq t \leq \tau_1 \right\} \cap \left\{ \alpha_3 t \leq X_t^{(1)} < vt, \tau_1 \leq t \leq \tau_L \right\},$$

$$A_2 := \left\{ \left| X_t^{(z)} - X_0^{(z)} \right| < \varepsilon \text{ für } 0 \leq t \leq \tau_L \text{ und } 2 \leq z \leq L-1 \right\}$$

und

$$A_3 := \left\{ e^{\vartheta X_{\tau_L}^{(-1)}} + e^{\vartheta X_{\tau_L}^{(0)}} < q e^{\vartheta \eta_L} \right\},$$

wobei  $q$  aus Definition 2.2.6 bzw. Definition 2.2.15 stammt. Tritt jetzt  $A_1$  ein, so gibt es keine schlechte Zeit, bevor wir  $\eta_L$  erreichen.  $A_2$  und  $A_3$  liefern, dass  $\tau_L$  eine gute Zeit ist. Ferner folgt aus  $A_1, A_2$  und  $A_3$ , dass  $\eta_L < \tau_L v$  ist. Zusammen ergibt sich also

$$\mathbb{P}_{2\delta_0} [R_{\kappa_1} = \eta_L, \eta_L < \kappa_1 v] \geq \mathbb{P}_{2\delta_0} [A_1, A_2, A_3, D \circ \theta_{\tau_L} = \infty] > 0. \quad \square$$

Um eine Aussage über eine invariante Verteilung links der Marke zu treffen, müssen wir zunächst noch etwas Vorarbeit leisten.

#### 4.2.4 Lemma

Sei  $d : \mathbb{S}_\vartheta \times \mathbb{S}_\vartheta \rightarrow \mathbb{R}$  die in Definition 1.1.6 gegebene Metrik auf  $\mathbb{S}_\vartheta$ . Dann gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  und  $T > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass es für zwei Startkonfigurationen  $(x, r)$  und  $(x', r)$  mit  $d((x, r), (x', r)) < \delta$  eine Stoppzeit  $\tau$  und für  $0 \leq t \leq \tau$  eine Kopplung zweier Kopien  $(X_t, R_t)$  und  $(X'_t, R'_t)$  des raumkontinuierlichen Froschmodells gibt, so dass gilt:

- i.  $\bar{\mathbb{P}}[\tau < T] < \varepsilon$ ,
- ii.  $\bar{\mathbb{E}}[d((X_t, R_t), (X'_t, R'_t)) \mathbf{1}_{\tau > t}] < \varepsilon$ ,
- iii.  $\bar{\mathbb{P}}[R_0 = R'_0 = r, X_0 = x, X'_0 = x'] = 1$ .

Hierbei ist  $\bar{\mathbb{P}}$  das Kopplungsmaß und  $\bar{\mathbb{E}}$  der dazugehörige Erwartungswert.

BEWEIS. Sei o.E.  $r = 0$ . Wir betrachten den Prozess

$$\left( \tilde{Y}_t \right)_{t \geq 0} := \left( \tilde{X}_t - \tilde{X}'_t \right)_{t \geq 0}.$$

Nach Voraussetzung ist  $\int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d|\tilde{Y}_0| < \delta$ . Somit können wir für jeden Wert  $y \geq 0$  ein  $\delta$  finden, so dass

$$\tilde{Y}_0(x) = 0 \text{ für alle } x \leq -y. \quad (4.13)$$

Wir koppeln die Prozesse  $(X_t)_{t \geq 0}$  und  $(X'_t)_{t \geq 0}$  wie folgt: Gilt zu einem Zeitpunkt  $t \geq 0$  für zwei noch nicht verkoppelte Pfade  $X_t^{(k)} = X_t^{(l)}$ , so koppeln wir diese, indem wir sie ab der Zeit  $t$  den gleichen Weg laufen lassen. Wir führen diese Kopplung bis zur ersten Zeit  $s$  durch, zu der ein noch nicht verkoppelter Pfad auf  $R_s$  (bzw. auf  $R'_s$ ) trifft. Diese zufällige Zeit bezeichnen wir mit  $\tau$  und folglich gilt  $R_t = R'_t$  für  $t < \tau$ . Da wir durch Wahl von  $\delta$  in (4.13) beliebig große Werte für  $y$  erhalten, können wir i. erfüllen.

Nach Definition von  $\tau$  gilt nun für  $t < \tau$ :

$$d((X_t, R_t), (X'_t, R'_t)) = \int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d|\tilde{Y}_t|.$$

Setzen wir weiter  $(\bar{Y}_t) := (\tilde{X}_t + \tilde{X}'_t)_{t \geq 0}$ , so erhalten wir die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d|\tilde{Y}_t| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d\bar{Y}_t.$$

Wie im Beweis von Lemma 1.1.4 sieht man nun, dass  $e^{-\frac{\vartheta^2}{2}t} \int_{\mathbb{R}} e^{\vartheta x} d\bar{Y}_t$  für  $t < \tau$  ein Martingal ist. Wählt man  $\delta$  klein genug, ist somit auch ii. erfüllt.  $\square$

#### 4.2.5 Satz

Sei  $\chi \in \mathbb{S}_\vartheta$  und  $g$  eine beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion auf  $\mathbb{S}_\vartheta$ . Dann ist für alle  $t \geq 0$  auch

$$P_t g(\chi) := \mathbb{E}_\chi [g(X_t, R_t)]$$

eine beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion.

BEWEIS. Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $g$  gleichmäßig stetig ist, gibt es ein  $\varepsilon' > 0$ , so dass

$$|g(\chi) - g(\chi')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.14)$$

falls  $d(\chi, \chi') < \varepsilon'$ .

Da  $g$  beschränkt ist, gibt es ein  $C$  mit  $|g(\chi)| < C$ . Nach Lemma 4.2.4 gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass es für  $d((X_0, R_0), (X'_0, R'_0)) < \delta$  eine Stoppzeit  $\tau$  gibt, so dass

$$\bar{\mathbb{P}} [d((X_t, R_t), (X'_t, R'_t)) > \varepsilon', \tau > t] < \frac{\varepsilon}{6C} \quad (4.15)$$

und

$$\bar{\mathbb{P}}[\tau < t] < \frac{\varepsilon}{6C}. \quad (4.16)$$

Insgesamt ist dann mit (4.14), (4.15) und (4.16)

$$\begin{aligned} & |P_t g(X_t, R_t) - P_t g(X'_t, R'_t)| \\ & \leq \bar{\mathbb{E}}[|g(X_t, R_t) - g(X'_t, R'_t)| \mathbb{1}_{\tau > t}] + 2C\mathbb{P}[\tau < t] \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6C}2C + \frac{\varepsilon}{6C}2C = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist  $P_t g$  gleichmäßig stetig. Die Beschränktheit folgt aus der Beschränktheit von  $g$  zusammen mit Lemma 1.1.4.  $\square$

Wir wollen nun Konvergenz der Partikelverteilung links der Marke gegen ein invariantes Maß erhalten. Sei dazu  $\mu_t$  die Verteilung von Partikeln links der Marke, also von  $\varsigma_{-R_t}(X_t, R_t) \in \mathbb{S}_\vartheta^0$ , wobei

$$\mathbb{S}_\vartheta^0 := \{(x, r) \in \mathbb{S}_\vartheta : r = 0\}.$$

Wir benötigen einen Kandidaten, gegen den  $\mu_t$  für  $t \rightarrow \infty$  konvergieren soll.

#### 4.2.6 Definition

Eine Funktion  $f : \mathbb{S}_\vartheta^0 \rightarrow \mathbb{R}$  heiße *lokal*, wenn es ein  $y(f)$  gibt, so dass  $f(x, r)$  nur von den  $x(i)$  mit  $x(i) \geq y(f)$  abhängt.

#### 4.2.7 Definition

Sei  $f$  eine beschränkte, stetige, lokale Funktion auf  $\mathbb{S}_\vartheta^0$ . Wir definieren  $\mu_\infty$  über

$$\int_{\mathbb{S}_\vartheta^0} f d\mu_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_\vartheta^0} f d\mu_{n,\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{2\delta_0} \left[ \int_{\kappa_n}^{\kappa_{n+1}} f(\varsigma_{-R_s} X_s) ds \mid U = \infty \right]}{\mathbb{E}[\kappa_1 \mid U = \infty]}.$$

Der Limes existiert, da für fast alle  $\omega \in \Omega$  ein  $N(\omega) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $\int_{\mathbb{S}_\vartheta^0} f d\mu_{n,\infty} = \int_{\mathbb{S}_\vartheta^0} f d\mu_{m,\infty}$  für alle  $n, m \geq N(\omega)$  (nämlich das  $N$ , so dass die Funktion  $f$  zur Zeit  $\kappa_N$  keine Partikel mehr „sieht“, die bereits zu Beginn wach waren).

Wir wollen nun zeigen, dass die Maße  $\mu_t$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\mu_\infty$  konvergieren, indem wir den Beweis aus [16] imitieren. Dort wird dazu der folgende Satz aus [8] zitiert, den wir hier nicht beweisen werden:

**4.2.8 Satz**

Es seien  $X_1, X_2, \dots > 0$  u.i.v., von  $S_0 \geq 0$  unabhängige Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert. Sei ferner  $S_n := S_0 + X_1 + \dots + X_n$  und für eine gegebene Borelmenge  $B$  sei  $\nu(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{S_k \in B}$ . Gibt es nun ein  $r \geq 1$  und eine nicht negative, messbare Funktion  $m$  mit  $\int_{\mathbb{R}} m(x) dx > 0$  und  $\mathbb{P}[X_1 + \dots + X_r \in A] \geq \int_A m(x) dx$  für alle Borelmengen  $A$ , so gilt für alle  $h \in [0, \infty)$  und  $B \subset [0, h]$ :

$$\mathbb{E}[\nu(t + B)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{|B|}{\mathbb{E}[X_1]},$$

wobei  $|B|$  das Lebesguemaß von  $B$  bezeichnet.

Wir werden diese Aussage im Beweis des folgenden Satzes verwenden.

**4.2.9 Satz**

$\mu_{\infty}$  ist invariant unter dem raumkontinuierlichen Froschmodell und es gilt

$$\mu_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu_{\infty}.$$

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [16]: Sei  $f$  eine beschränkte, stetige, lokale Funktion auf  $\mathbb{S}_y^0$ . Nach Definition von  $\mu_t$  erhalten wir für festes  $N \in \mathbb{N}$  die Zerlegung

$$\int_{\mathbb{S}_y^0} f d\mu_t = \mathbb{E}[\kappa_{N+1} \leq t, f(\varsigma_{-R_t} X_t)] + \mathbb{E}[\kappa_{N+1} > t, f(\varsigma_{-R_t} X_t)]. \quad (4.17)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  verschwindet der zweite Term der Zerlegung. Wir müssen uns also um den ersten Summanden kümmern. Dafür definieren wir zunächst für  $k \geq 1$  die Ereignisse

$$A_{N,k} := \{(\alpha_2 - \alpha_1)(\kappa_{N+k} - \kappa_k) > l(f)\}.$$

Tritt  $A_{N,k}$  ein, so wirken sich die Positionen der Partikel, die zur Zeit  $\kappa_k$  links der Marke waren, zu Zeitpunkten  $t \geq \kappa_{N+k}$  nicht mehr auf den Wert von  $f$  aus. Für die Startkonfiguration  $2\delta_0$  definieren wir  $A_{N,0}$  entsprechend

und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [\kappa_{N+1} \leq t, f(\varsigma_{-R_t} X_t)] \\
&= \sum_{k \geq 1, z \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} [\kappa_{N+k} \leq t < \kappa_{N+k+1}, R_{\kappa_k} = \eta_z, f(\varsigma_{-R_t} X_t)] \\
&= \sum_{k \geq 1, z \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} [R_{\kappa_k} = \eta_z, \mathbb{E} [\kappa_{N+k} \leq t < \kappa_{N+k+1}, f(\varsigma_{-R_t} X_t) | \mathcal{G}_k]] \\
&\leq \sum_{k \geq 1, z \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} [R_{\kappa_k} = \eta_z, \mathbb{E} [\kappa_{N+k} \leq t < \kappa_{N+k+1}, f(\varsigma_{-R_t} X_{t-\kappa_k}^+) \mathbf{1}_{A_{N,k}} | \mathcal{G}_k]] \\
&+ \sum_{k \geq 1, z \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} [R_{\kappa_k} = \eta_z, \mathbb{E} [\kappa_{N+k} \leq t < \kappa_{N+k+1}, \|f\|_\infty \mathbf{1}_{A_{N,k}^c} | \mathcal{G}_k]],
\end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei wir die umgekehrte Abschätzung erhalten, wenn wir auf den zweiten Summanden verzichten. Satz 4.1.10 und Satz 4.1.11 liefern nun weiter

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [R_{\kappa_k} = \eta_z, \mathbb{E} [\kappa_{N+k} \leq t < \kappa_{N+k+1}, f(\varsigma_{-R_t} X_{t-\kappa_k}^+) \mathbf{1}_{A_{N,k}} | \mathcal{G}_k]] \\
&= \int_0^t \mathbb{P} [R_s = \eta_z, \kappa_k \in ds] \\
&\quad \cdot \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_N \leq t-s < \kappa_{N+1}, f(\varsigma_{-R_{t-s}} X_{t-s}) \mathbf{1}_{A_{N,0}} | U = \infty] \\
&= \int_0^t \mathbb{P} [R_{t-u} = \eta_z, t - \kappa_k \in du] \\
&\quad \cdot \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_N \leq u < \kappa_{N+1}, f(\varsigma_{-R_u} X_u) \mathbf{1}_{A_{N,0}} | U = \infty],
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [R_{\kappa_k} = \eta_z, \mathbb{E} [\kappa_{N+k} \leq t < \kappa_{N+k+1}, \|f\|_\infty \mathbf{1}_{A_{N,k}^c} | \mathcal{G}_k]] \\
&= \int_0^t \mathbb{P} [R_s = \eta_z, \kappa_k \in ds] \|f\|_\infty \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_N \leq t-s < \kappa_{N+1}, \mathbf{1}_{A_{N,0}^c} | U = \infty] \\
&= \int_0^t \mathbb{P} [R_{t-u} = \eta_z, t - \kappa_k \in du] \|f\|_\infty \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_N \leq u < \kappa_{N+1}, \mathbf{1}_{A_{N,0}^c} | U = \infty],
\end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt jeweils die Substitution  $u = t - s$  vorgenommen haben. Wir setzen

$$\nu_t([b, a]) := \sum_{k \geq 1} \mathbb{P} [\kappa_k \in [t-a, t-b]]$$



und

$$F_f^+(u) := \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_N \leq u < \kappa_{N+1}, f(\varsigma_{-R_u} X_u) \mathbb{1}_{A_{N,0}} | U = \infty] \\ + \|f\|_\infty \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_N \leq u < \kappa_{N+1}, \mathbb{1}_{A_{N,0}^c} | U = \infty],$$

sowie

$$F_f^-(u) := \mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_N \leq u < \kappa_{N+1}, f(\varsigma_{-R_u} X_u) \mathbb{1}_{A_{N,0}} | U = \infty].$$

Zusammen mit (4.18) gilt nun

$$\int_0^t F_f^-(u) \nu_t(du) \leq \mathbb{E}[\kappa_{N+1} \leq t, f(\varsigma_{-R_t} X_t)] \leq \int_0^t F_f^+(u) \nu_t(du). \quad (4.19)$$

Wir wollen nun Satz 4.2.8 anwenden, indem wir  $S_0 := \kappa_1$  und  $X_j := \kappa_{j+1} - \kappa_j$  setzen. Dazu müssen wir noch die prüfen, ob die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Sei dazu  $r = 1$ ,  $\frac{1}{3} > \varepsilon > 0$  und  $0 < s_1 < s_2 < \frac{2L}{\alpha_3}$ . Sei o.E.  $X_{\tau_1}^{(0)} = \eta_1$ . Wir betrachten die Brownsche Bewegung

$$X'_t := \begin{cases} X_t^{(0)}, & 0 \leq t \leq \tau_1 \\ X_t^{(1)}, & t > \tau_1 \end{cases}$$

und setzen ähnlich zu 4.2.3

$$A_1 := \{2L \leq \eta_L \leq 2L + \varepsilon\} \cap \{|\eta_n - n| < \varepsilon \text{ für } 1 \leq n < L\}, \\ A_2 := \left\{ \left| X_t^{(z)} - X_0^{(z)} \right| < \varepsilon \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{2L + \varepsilon}{\alpha_3} \text{ und } 2 \leq z < L \right\}, \\ A_3 := \left\{ \max_{0 \leq t \leq \frac{2L + \varepsilon}{\alpha_3}} \{X_t^{(-1)}, X_t^{(0)}\} < 1 + \varepsilon \right\}, \\ A_4 := \left\{ e^{\vartheta X_t^{(-1)}} + e^{\vartheta X_t^{(0)}} < qe^{\vartheta t}, 0 \leq t \leq \frac{2L + \varepsilon}{\alpha_3} \right\} \text{ und} \\ A_5 := \left\{ X'_t \geq \alpha_3 t, 0 \leq t \leq \frac{2L + \varepsilon}{\alpha_3} \right\},$$

wobei  $q$  aus Definition 2.2.6 bzw. Definition 2.2.15 stammt. Es gilt hierbei

$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{i=1}^5 A_i \right] > 0$  (zu  $A_5$  siehe Lemma A.4). Jetzt ist

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} [\kappa_2 - \kappa_1 \in (s_1, s_2)] \\ &= \mathbb{P}_{2\delta_0} [\kappa_1 \in (s_1, s_2) | U = \infty] \\ &\geq \mathbb{P}_{2\delta_0} \left[ T_L \in (s_1, s_2), A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, D \circ \theta_{\frac{2L+\varepsilon}{\alpha_3}} = \infty \right] \\ &\geq \mathbb{P}_{2\delta_0} [T_L \in (s_1, s_2), A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, D^* = \infty] \end{aligned}$$

wo  $D^*$  die Stoppzeit  $D$  unter den speziellen Startbedingungen  $X_0^{(z)} = -\varepsilon$  für  $2 \leq z < L$  und  $\exp(\vartheta X_0^{(-1)}) + \exp(\vartheta X_0^{(0)}) = q$  ist und  $T_L$  die erste Zeit, zu der die Brownsche Bewegung den Punkt  $\eta_L$  erreicht. Wir erhalten

$$\mathbb{P} [\kappa_2 - \kappa_1 \in (s_1, s_2)] = \mathbb{P} [D^* = \infty] \int_{s_1}^{s_2} f(u) du,$$

wobei  $f$  die Dichte von  $T_L$  bedingt auf  $\bigcap_{i=1}^5 A_i$  ist. Die Sätze 4.1.3 und 4.1.11 liefern die restlichen Voraussetzungen. Wir können Satz 4.2.8 anwenden und erhalten für in abgeschlossenen Intervallen enthaltene Borelmengen  $B$ :

$$\nu_t(B) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{|B|}{\mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_1 | U = \infty]}.$$

Insgesamt gilt also mit (4.17) und (4.19):

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{S}_\vartheta^0} f d\mu_t - \int_{\mathbb{S}_\vartheta^0} f d\mu_{N,\infty} \right| \\ &\leq 2 \|f\|_\infty \frac{\mathbb{E}_{2\delta_0} [|\kappa_{N+1} - \kappa_N| \mathbb{1}_{A_{N,0}^c} | U = \infty]}{\mathbb{E}_{2\delta_0} [\kappa_1 | U = \infty]} + \mathbb{E} [\kappa_{N+1} > t, f(\zeta_{-R_t} X_t)] \\ &= 2 \|f\|_\infty \mathbb{E}_{2\delta_0} [\mathbb{1}_{A_{N,0}^c} | U = \infty] + \mathbb{E} [\kappa_{N+1} > t, f(\zeta_{-R_t} X_t)], \end{aligned}$$

wobei wir Satz 4.1.11 ausgenutzt haben. Da  $\mathbb{P}_{2\delta_0} [\mathbb{1}_{A_{N,0}^c} | U = \infty] \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ , folgt die schwache Konvergenz von  $\mu_t$  gegen  $\mu_\infty$ . Nach Satz 4.2.5 bildet der Prozess die Menge der beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen in sich selbst ab. Da diese Menge Maße trennt, folgt auch die

Invarianz von  $\mu_\infty$ , denn für eine solche Funktion  $f$  gilt

$$P_t \mu_\infty(f) = \mu_\infty(P_t f) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu_s(P_t f) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu_{t+s}(f) = \mu_\infty(f),$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit die Stetigkeit von  $P_t f$  nach Satz 4.2.5 benutzt haben.  $\square$



## Kapitel 5

# Simulation

Wir wollen noch einmal zurück zur ursprünglichen Frage kommen: Bewegt sich das dirty feet model fast sicher mit positiver Geschwindigkeit vorwärts, und wenn ja, wie schnell? Um eine Idee für die Geschwindigkeit des dirty feet model zu bekommen, wurde es deshalb zusammen mit dem Froschmodell unter Verwendung von R mit Hilfe von einfachen symmetrischen Irrfahrten simuliert. Statt  $\exp_1$ -verteilter Abstände zwischen den zu Beginn schlafenden Partikeln wurden hierbei geometrisch zum Parameter  $\frac{1}{5}$  verteilte Abstände verwendet. Um die Prozesse vergleichen zu können, wurden jeweils die gleichen Irrfahrten verwendet und die Prozesse so aneinander gekoppelt. Nun wurde bei beiden Prozessen nach 2500 Schritten gemessen, wie weit beide Prozesse vorangekommen sind und die Endpunkte miteinander verglichen. Der Algorithmus mit dessen Hilfe dies bewerkstelligt wurde findet sich in Anhang B. Anhand der Simulation konnten auch die Geschwindigkeiten der Marken geschätzt werden: Da die geometrisch verteilten Abstände den  $\exp_1$ -verteilter Abständen entsprechen sollen, entsprechen umgekehrt 5 diskrete Schritte nach rechts einer Bewegung um 1 nach rechts. Demzufolge ist dann nach 2500 Schritten die kontinuierliche Zeit  $t = \frac{2500}{25} = 100$  vergangen. Als durchschnittliche Position der Marke im dfm ergab sich bei der Simulation nach 50000 Durchläufen ungefähr 329 (bei einer Standardabweichung von etwa 63). Als Geschwindigkeit erhalten wir somit ungefähr

$$\hat{v}_{dfm} = \frac{329}{500} \approx 0,66.$$

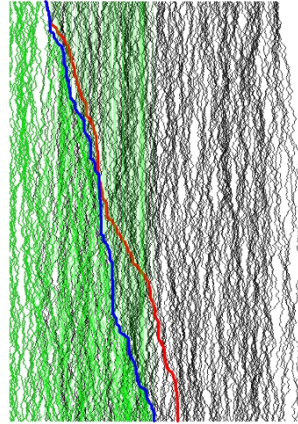
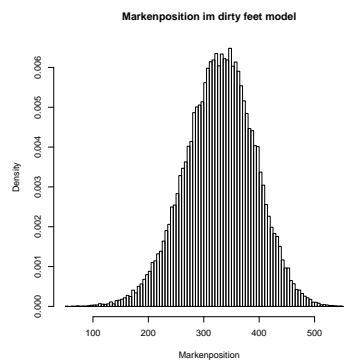


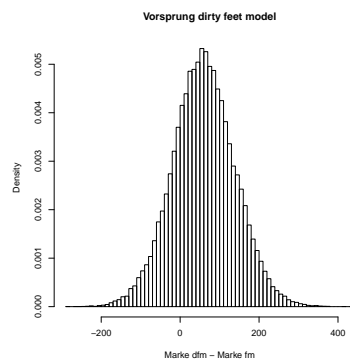
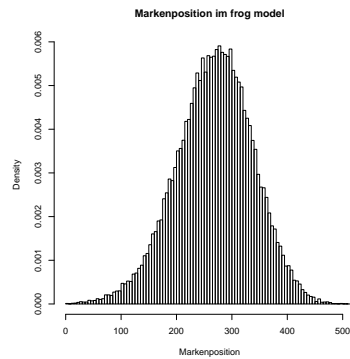
Abbildung 5.1: Ein typischer Durchlauf: Die schwarzen Linien markieren hierbei die Partikelpfade im dfm, die grünen Linien die Partikelpfade im Froschmodell. Die rote Linie stellt die Bewegung der Marke im dfm dar, die blaue Linie die der Marke im Froschmodell.

Für das Froschmodell ergab sich ein mittlerer Wert von etwa 269 (mit Standardabweichung etwa 69). Als Geschwindigkeit erhalten wir also etwa

$$\hat{v}_{Frosch} = \frac{269}{500} \approx 0,54,$$

was sich auch mit den Abschätzungen aus Korollar 1.3.3 verträgt. Nach 50000 Durchläufen ergaben sich ferner für die Markenpositionen der Prozesse, sowie für die Differenz der Marken der gekoppelten Prozesse die folgenden Histogramme:





Die Daten legen einen systematischen Vorsprung des dfm vor dem Froschmodell nahe: Im Mittel befand sich die Marke des dfm etwa 60 Schritte rechts von der Marke des Froschmodells (was einem durchschnittlichen Vorsprung von 5,2 zur Zeit  $t = 100$  entspricht). Da die Daten näherungsweise normalverteilt waren, wurde noch ein  $t$ -Test durchgeführt:

#### One Sample t-test

```
data: fussfrosch[, 1] - fussfrosch[, 2]
t = 169.7126, df = 49999, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is greater than 0
95 percent confidence interval:
 59.6071      Inf
sample estimates:
mean of x
 60.19048
```

Die Simulation legt somit nahe, dass (0.1) erfüllt ist.





# Anhang A

## Verschiedene Lemmata

Zum Abschluss sei noch eine Sammlung allgemeinerer Lemmata angeführt, die keinen direkten Bezug zur Problemstellung hatten, aber in verschiedenen Abschätzungen verwendet wurden.

### A.1 Lemma

Sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, für die  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < 1$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} k^p a_k < \infty$  gilt. Sei weiter  $(c_m)_{m \geq 1}$  eine Folge mit  $c_1 \leq a_1$  und mit

$$c_m \leq a_m + \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-k} c_k \quad (\text{A.1})$$

für  $m \geq 2$ . Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} k^p c_k < \infty$ .

BEWEIS. Wir übernehmen den Beweis aus [16, Lemma 15] und wenden Induktion über  $p'$ ,  $0 \leq p' \leq p$  an. Sei dazu

$$A_{p'} := \sum_{k=1}^{\infty} k^{p'} a_k$$

und

$$C_{p'} := \sum_{k=1}^{\infty} k^{p'} c_k.$$

Nach Voraussetzung ist  $A_0 < 1 < \infty$ . Wir zeigen zunächst, dass damit auch  $C_0 < \infty$  gilt. Sei  $n \geq 2$ . Summieren wir beide Seiten von (A.1) von  $m = 2$  bis  $n$  auf, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n c_k \leq A_0 + \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-j} c_j. \quad (\text{A.2})$$

Wir vertauschen die Summationsreihenfolge in der Doppelsumme:

$$\sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-j} c_j = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{j < k\}} a_{k-j} c_j = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n a_{k-j} c_j = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-j} a_k c_j. \quad (\text{A.3})$$

Einsetzen der vertauschten Doppelsumme in (A.2) und Umstellen liefert dann

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^{n-k} a_j \right) c_k \leq A_0 - c_n \leq A_0.$$

Lassen wir nun  $n \rightarrow \infty$  gehen, erhalten wir  $(1 - A_0) C_0 \leq A_0$  und wegen  $A_0 < 1$  folgt

$$C_0 \leq \frac{A_0}{1 - A_0} < \infty$$

und wir haben den Induktionsanfang gezeigt. Für den Induktionsschritt gehen wir im Wesentlichen genauso vor. Sei dazu also  $C_{p'-1} < \infty$  für ein  $1 \leq p' \leq p$ . Wir wollen  $C_{p'} < \infty$  zeigen. Dazu summieren wir erneut für  $n \geq 2$  die beiden Seiten von (A.1) von  $m = 2$  bis  $n$  auf, diesmal multiplizieren wir die einzelnen Summanden aber vorher mit  $m^{p'}$ . Somit erhalten wir

$$\sum_{m=1}^n m^{p'} c_m \leq A_{p'} + \sum_{m=2}^n \sum_{k=1}^{m-1} m^{p'} a_{m-k} c_k. \quad (\text{A.4})$$

Wir ersetzen nun in der Doppelsumme auf der rechten Seite von (A.4)  $m^{p'}$  durch  $\sum_{i=0}^{p'} \binom{p'}{i} (m-k)^i k^{p'-i}$  und vertauschen genau wie in (A.3) die Summationsreihenfolge:

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^n \sum_{k=1}^{m-1} m^{p'} a_{m-k} c_k &= \sum_{m=2}^n \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{p'} \binom{p'}{i} (m-k)^i k^{p'-i} a_{m-k} c_k \\ &= \sum_{i=0}^{p'} \binom{p'}{i} \sum_{k=1}^{n-1} k^{p'-1} c_k \sum_{m=1}^{n-k} m^i a_m. \end{aligned}$$

Bringen wir nun in (A.4) den Term für  $i = 0$  auf die linke Seite, liefert dies

$$c_1 + \sum_{m=2}^{n-1} m^{p'} c_m \left( 1 - \sum_{j=1}^{n-m} a_j \right) + n^{p'} c_n \leq A_{p'} + \sum_{i=1}^{p'} \binom{p'}{i} \sum_{k=1}^{n-1} k^{p'-1} c_k \sum_{m=1}^{n-k} m^i a_m.$$

Nun können wir wie im Induktionsanfang  $n \rightarrow \infty$  gehen lassen und erhalten

schließlich dank der Induktionsvoraussetzung und wegen  $A_0 < 1$ :

$$C_{p'} \leq \frac{A_{p'} + \sum_{i=1}^{p'} \binom{p'}{i} C_{p'-i} A_i}{1 - A_0} < \infty. \quad \square$$

### A.2 Lemma

Seien  $p \geq 2$  eine natürliche Zahl und  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_j] = 0$  und  $\mathbb{E}[|X_j|^p] < \infty$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Sei weiter  $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}[|S_n|^p] \leq F_p n^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^p],$$

mit

$$F_n := \frac{p(p-1)}{2} \max\{1, 2^{p-3}\} \left(1 + 2p^{-1} D_{\frac{p-2}{2m}}\right),$$

wobei  $D_{2m} := \sum_{r=1}^m \frac{r^{2m-1}}{(r-1)!}$  und  $m = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ .

BEWEIS. Das Lemma wird später in geringerem Detailgrad benötigt. Man findet es als [1, Satz 2].  $\square$

### A.3 Lemma

Ist  $B_t$  eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt  $B_0$ , so gilt

$$\mathbb{E}\left[e^{\vartheta B_t}\right] = e^{\vartheta B_0 + \frac{\vartheta^2}{2}t}$$

BEWEIS. Es ist

$$\mathbb{E}\left[e^{\vartheta B_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\vartheta(B_t - B_0)}\right] e^{B_0}.$$

Nun ist  $B_t - B_0 \sim \mathcal{N}_{0,t}$  und wir erhalten die Aussage, indem wir die charakteristische Funktion der Normalverteilung an der Stelle  $-i\vartheta$  auswerten (siehe hierzu z.B. [13, Satz 15.12]).  $\square$

### A.4 Lemma

Sei  $B_t$  eine Brownsche Bewegung mit  $B_0 = 0$  und  $\widehat{B}_t := \max_{0 \leq s \leq t} \{B_s\}$  deren Maximumsprozess. Sei ferner  $0 < c < \infty$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left[\inf\left\{t : \widehat{B}_t < ct\right\} > 0\right] = 1.$$

BEWEIS. Wir setzen  $\tilde{B}_t := \hat{B}_{2^{-n_t}}$ , wobei  $n_t \in \mathbb{N}$  durch  $2^{-n_t} \leq t < 2^{-(n_t-1)}$  gegeben sei. Sei weiter  $N \sim \mathcal{N}_{0,1}$ , dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \tilde{B}_t < 2^{1-n_t} c \right] &= \mathbb{P} \left[ \hat{B}_{2^{-n_t}} < 2^{1-n_t} c \right] \\ &= 1 - 2\mathbb{P} \left[ N \geq 2^{1-\frac{n_t}{2}} c \right] \\ &= 2\Phi \left( 2^{1-\frac{n_t}{2}} c \right) - 1 \leq \frac{c}{2^{\frac{n_t}{2}-1}}, \end{aligned}$$

wobei wir das Spiegelungsprinzip und Ungleichung (2.3) verwendet haben. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2^{\frac{n}{2}-1}} < \infty,$$

gibt es nach Konstruktion von  $\tilde{B}_t$  und laut dem Lemma von Borel-Cantelli fast sicher nur endlich viele  $n$ , so dass  $\hat{B}_t < ct$  für ein  $2^{-n} \leq t < 2^{1-n}$ .  $\square$

### A.5 Lemma

Sei  $X_t := B_t + \mu t$  eine Brownsche Bewegung mit  $X_0 = 0$  und Drift  $\mu < 0$  und  $A_t := \{\exists s > t : X_s \geq 0\}$ . Dann ist für alle  $t \geq 1$  die Ungleichung

$$\mathbb{P} [A_t] < -\frac{2}{\mu} e^{-\frac{\mu^2 t}{2}}$$

erfüllt.

BEWEIS. Für  $x \in \mathbb{R}$  sei mit  $\tau_x := \inf \{t : X_t \geq x\}$  die Treffzeit des Prozesses  $(X_t)$  für das Niveau  $x$  definiert. Es gilt

$$\mathbb{P} [\tau_x < \infty] = e^{2\mu x} \tag{A.5}$$

(siehe z.B. [7, I.9]). Sei nun  $Y \sim \mathcal{N}_{-\mu t, t}$ , dann ist weiter  $\mathbb{P} [A_t] = \mathbb{P} [\tau_Y < \infty]$ . Sei  $\varphi$  die Dichte der Standardnormalverteilung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [A_t] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P} [\tau_x < \infty] \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi \left( \frac{x + \mu t}{\sqrt{t}} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi \left( \frac{x + \mu t}{\sqrt{t}} \right) dx + \int_0^{\infty} e^{2\mu x} \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi \left( \frac{x + \mu t}{\sqrt{t}} \right) dx. \end{aligned}$$

Formen wir die beiden Summanden separat weiter um, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_t] &= \Phi(\mu\sqrt{t}) + \int_{-\infty}^0 e^{-2\mu x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\left(\frac{x^2}{2t} - \mu x + \frac{\mu^2}{2}t\right)} dx \\ &= \Phi(\mu\sqrt{t}) + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\left(\frac{x^2}{2t} + \mu x + \frac{\mu^2}{2}t\right)} dx \\ &= 2\Phi(\mu\sqrt{t}) = 2\left(1 - \Phi(-\mu\sqrt{t})\right) < \frac{2}{-\mu\sqrt{t}} e^{-\frac{\mu^2 t}{2}},\end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt die Ungleichung

$$1 - \Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ für } x > 0 \quad (\text{A.6})$$

verwendet haben (siehe z.B. [13, Satz 21.19]).  $\square$

### A.6 Lemma

Es gibt ein  $C > 0$ , so dass

$$\mathbb{P}\left[\eta_n \leq \frac{n}{2}\right] \leq e^{-Cn}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

BEWEIS. Sei  $Y_n \sim \text{Poi}_{\frac{n}{2}}$ , dann ist

$$\mathbb{P}\left[\eta_n \leq \frac{n}{2}\right] = \mathbb{P}[Y_n \geq n].$$

Wir wenden die Markovungleichung mit  $f(x) = e^x$  an und erhalten

$$\mathbb{P}[Y_n \geq n] \leq e^{-n} \mathbb{E}[e^{Y_n}] = e^{\left(\frac{e-1}{2}-1\right)n}.$$

Da  $\frac{e-1}{2} - 1 < 0$ , folgt die Behauptung.  $\square$

### A.7 Lemma

Es gibt ein  $C > 0$ , so dass

$$\mathbb{P}[\eta_n \geq 2n] \leq e^{-Cn}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

BEWEIS. Nach Konstruktion ist  $\eta_n$  die Summe von unabhängigen  $\exp_1$ -verteilten Zufallsvariablen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Die Markovungleichung mit  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$  liefert dann:

$$\mathbb{P}[\eta_n \geq 2n] \leq e^{-n} \mathbb{E} \left[ e^{\frac{1}{2}\eta_n} \right] = e^{-n} \mathbb{E} \left[ e^{\frac{1}{2}\gamma_1} \right]^n = \left( \frac{2}{e} \right)^n = e^{(\log(2)-1)n}. \quad \square$$

In einem etwas abstrakterem Rahmen folgen die letzten beiden Lemmata auch aus dem Prinzip großer Abweichungen (LDP) für exponentialverteilte bzw. Poisson-verteilte Zufallsvariablen.

Man kann zeigen, dass es LDPs für diese Art von Zufallsvariablen gibt, und dass man die Ratenfunktionen  $I(x) = x - 1 - \log(x)$  für  $\exp_1$ -verteilte und  $I(x) = x - 1 - x \log(x)$  für  $\text{Poi}_1$ -verteilte Zufallsvariablen erhält (siehe hierzu zum Beispiel auch [17, Satz 5.7] und [17, Beispiel 5.10]).

## Anhang B

# Algorithmus

In Kapitel 5 wurde der folgende Algorithmus verwendet.

```
froesche<-function(draw=FALSE,zahlf=150, dichte=1/5,
drawdetail=FALSE,schritte=2500, vorlauf=25){

#startpos enthaelt die Startpositionen der Partikel. vorlauf gibt an, wie viele
#Partikel zu Beginn links von der Marke sind, zahlf ist die Zahl an Partikeln
#rechts der Marke. Beide Parameter sollten groß genug gewählt werden, um das
#Modell nicht zu verfälschen. Die exp-verteilten Abstände werden hier durch
#geometrische verteilte Abstände simuliert.

startpos<-numeric(zahlf+vorlauf)
for (i in (vorlauf-1):1)
  {startpos[i]<-startpos[i+1]-1-rgeom(1,dichte)}
for (i in (vorlauf+1):(zahlf+vorlauf))
  {startpos[i]<-startpos[i-1]+1+rgeom(1,dichte)}

#dynmatrix beschreibt die Dynamik der Partikel, welche durch einfache
#symmetrische Irrfahrten simuliert wird. Der Eintrag i,j dieser Matrix gibt an,
#ob Partikel j bei Schritt i nach rechts (+1) oder nach links (-1) geht.

dynmatrix<-matrix(nrow=zahlf+vorlauf,ncol=schritte,
sample(size=(zahlf+vorlauf)*schritte,c(-1,1),
replace=TRUE))
```

```
#Zum Plotten.
```

```
if (draw|drawdetail){plot (type="n", axes=FALSE,
c(-(2*vorlauf), 1.5*(zahlf+vorlauf)*(1/dichte)),
c(schritte, 0), xlab="", ylab="")}
```

```
#Wir legen als nächstes die Matrix pos an, die die Positionen der Partikel
#speichern wird.
```

```
pos<-matrix(nrow=zahlf+vorlauf, ncol=schritte)
```

```
#Mit Hilfe von dynmatrix werden die Positionen der Partikel j zu den Zeiten i
#errechnet und in pos eingetragen. Falls drawdetail=TRUE, werden die Pfade
#der Brownschen Bewegungen als schwarze Linien eingetragen.
```

```
for (i in 1:(zahlf+vorlauf))
{pos[i,]=startpos[i]+cumsum(dynmatrix[i,])
if (drawdetail){lines(pos[i,], Schritte:1, lwd=0.2)}}
```

```
#Saub gibt an, welche Partikel sauber sind, Schmu gibt an, welche Partikel
#schmutzig sind.
```

```
Saub<-(vorlauf+1):(zahlf+vorlauf)
Schmu<-1:vorlauf
```

```
#Die Positionen der Marke. Dazu wird zunächst in jedem Schritt bestimmt,
#welche Partikel davor schmutzig waren. Dann wird die Marke verschoben,
#falls ein schmutziges Partikel nach rechts gelaufen ist.
```

```
marke<-numeric(schritte)
marke[1]<-max(0, pos[vorlauf, 1])
for (i in 2:(zahlf+vorlauf))
{if (pos[i, 1]<=marke[1])
{Saub<-setdiff(Saub, i)
Schmu<-c(Schmu, i)
}
```



```

}
for (j in 2:schritte)
{marke[j]<-max(marke[j-1],pos[Schmu,j])
  for(i in Saub)
  {if (pos[i,j]<=marke[j])
    {Saub<-setdiff(Saub,i)
      Schmu<-c(Schmu,i)
    }
  }
}
}

#Falls draw=TRUE, wird der Weg der Marke in rot eingetragen.

if(draw){lines(marke,schritte:1,col="red",lwd=3)}

#Nun zur Dynamik im Froschmodell. Wir wollen die Prozesse sowieso
#gekoppelt betrachten und können daher sorglos die gleichen Irrfahrten
#verwenden, wie oben. Posfrog gibt die Positionen der Partikel an,
#markefrog die Position der Marke, und zahlinf gibt an, wie viele
#Partikel infiziert sind.

posfrog<-matrix(nrow=zahlf+vorlauf,ncol=schritte)
for(i in 1:vorlauf)
{posfrog[i,]<-pos[i,]}
markefrog<-numeric(schritte)
zahlinf<-vorlauf

#Wir bestimmen den Weg der Marke, indem wir sie in jedem Schritt auf die
#am weitesten rechts befindliche Position setzen, auf der sich ein
#infiziertes Partikel befindet, und dann schauen, ob dadurch ein neues
#Partikel infiziert wurde.

markefrog[1]<-max(0,pos[1:vorlauf,1])
if(is.element(markefrog[1],
  startpos[(vorlauf+1):(zahlf+vorlauf)]))
{zahlinf<-vorlauf+1

```

```

    posfrog[vorlauf+1,] <- startpos[vorlauf+1]+
    cumsum(c(0, dynmatrix[vorlauf+1, 1:(schritte-1)]))}

for (j in 2:(schritte-1))
  {markefrog[j] <- max(markefrog[j-1], posfrog[1:zahlinf, j])
  if (zahlinf < zahlf+vorlauf){
    if (is.element(markefrog[j],
    startpos[(1+zahlinf):(zahlf+vorlauf)]))
    {zahlinf <- zahlf+1
    posfrog[zahlinf,] <- startpos[zahlinf]+cumsum(
    c(numeric(j), dynmatrix[zahlinf, 1:(schritte-j)]))
  }}
}
markefrog[schritte] <- max(markefrog[schritte-1],
posfrog[1:zahlinf, schritte])

#Zum Plotten. Die grünen Linien sind die Wege der am Ende infizierten
#Partikel, die blaue Linie gibt den Weg der Marke an.

if(drawdetail){
for (i in 1:zahlinf)
{lines(posfrog[i,], schritte:1, col="green", lwd=0.2)}
if(draw){lines(markefrog, schritte:1, col="blue", lwd=3)}

#Wir übergeben die Daten aus diesem einmaligen Durchlauf.

result <- c(marke[schritte], markefrog[schritte],
marke[schritte]-markefrog[schritte])
}

```

# Literaturverzeichnis

- [1] S.W.Dharmadhikari, K.Jogdeo: *Bounds on Moments of Certain Random Variables*, Ann.Math.Statist.40,No.4,1506-1508. (1969)
- [2] J.F.C. Kingman : *Subadditive ergodic theory*, Ann.Probab. 1, 883-909. (1973)
- [3] T.M.Liggett : *An improved subadditive ergodic theorem*, Ann.Probab. 13, 1279-1285 .(1985)
- [4] H.Kesten: *Aspects of First Passage Percolation*, Lecture Notes in Math., 1180, Springer, Berlin. (1986)
- [5] R.Durrett: *The contact process 1974-1989*, Mathematics of Random Media, Blacksburg, VA. (1989)
- [6] G.Lawler, M.Bramson, D.Griffeath: *Internal Diffusion Limited Aggregation*, Ann. Probab. 20, no. 4, 2117-2140. (1992)
- [7] L.C.G.Rogers, D.Williams: *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Cambridge University Press. (2000)
- [8] H.Thorisson: *Coupling, stationarity, and regeneration*, Probability and its Applications, Springer-Verlag. (2000)
- [9] O.S.Alves, F.P.Machado, S.Yu.Popov : *The shape theorem for the frog model*, The Annals of Applied Probability 2002, Vol.12, No.2, 533-546. (2002)
- [10] A.F.Ramírez, V.Sidoravicius : *Asymptotic behavior of a stochastic combustion growth process*, J.Eur.Math.Soc. 6, 1-42. (2004)

- [11] H.Kesten, V.Sidoravicius: *The spread of a rumor or infection in a moving population*, The Annals Of Probability 2005, Vol.33, No. 6, 2402-2462. (2005)
- [12] V. Goldammer: *Ausbreitung einer Infektion in einem System freier Irrfahrten*, Diplomarbeit im August 2006 an der Johannes-Gutenberg Universität in Mainz. (2006)
- [13] A.Klenke: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springerverlag. (2006)
- [14] F.Comets, J.Quastel, A.Ramírez: *Fluctuations of the front in a stochastic combustion model*, Ann.I.H.Poincaré - PR 43, 147-162. (2007)
- [15] O.S.Alves, F.P.Machado, S.Yu.Popov, K.Ravishankar : *The shape theorem for the frog model with random initial configuration*, arXiv:math/0110280v1. (2008)
- [16] F.Comets, J.Quastel, A.Ramírez: *Fluctuations of the front in a one dimensional model of  $X + Y \rightarrow 2X$* , Trans. Amer. Math. Soc. 361, 6165-6189. (2009)
- [17] A.Klenke: *Vorlesungsskript zur elementaren Stochastik*, Vorlesung an der Johannes Gutenberg-Universität. (2009)