

**Neuartige kryogene Penning-Falle
für den Nachweis von Spin-Übergängen eines Protons
und Bestimmung seines g -Faktors**

Dissertation zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik

der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

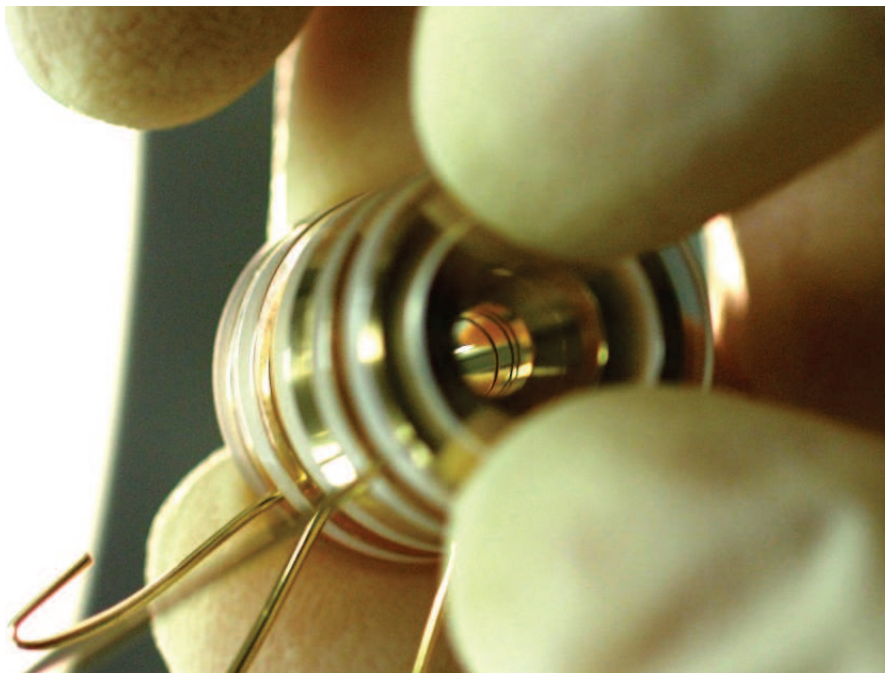
Crícia de Carvalho Rodegheri

geb. in Rio de Janeiro (Brasilien)

Mainz, den 17. Dezember 2013

Datum der mündlichen Prüfung: 31. Juli 2014

NEUARTIGE KRYOGENE PENNING-FALLE
FÜR DEN NACHWEIS VON SPIN-ÜBERGÄNGEN EINES PROTONS
UND BESTIMMUNG SEINES g -FAKTORS



Dissertation
Crícia de Carvalho Rodegheri

À minha família.

Abstract

This thesis presents the design, development, commissioning and characterization of a novel Penning trap in the framework of the experiment for the direct determination of the g -factor of a single proton. This trap is distinguished by the fact that the field lines of an external homogeneous magnetic field are distorted around the trap center by means of a ferromagnetic ring electrode. The inhomogeneous part of the resulting magnetic field, the so-called magnetic bottle, can be quantified by the coefficient $B_2 = 297(10) \text{ mT/mm}^2$ of the second-order term in the series expansion describing the field. Such an exceptionally strong field inhomogeneity is a fundamental prerequisite for the detection of the proton spin orientation via the continuous Stern-Gerlach effect. This effect is based upon the coupling of the spin degree of freedom of the trapped proton to one of its eigenfrequencies, which occurs in the presence of the inhomogeneous magnetic field. Thus, a transition between the spin states can be detected as a frequency jump. The measurable change in frequency is proportional to B_2 and to the extremely small ratio between its magnetic moment and its mass. The technical challenges due to the needed high magnetic inhomogeneity require a well-founded understanding and control of the properties of the Penning trap and experimental conditions.

The Penning trap developed in the present work allowed the first non-destructive detection of spin quantum jumps of a single trapped proton, which represented a breakthrough in the experiment for the direct determination of the g -factor with the aimed relative uncertainty of 10^{-9} . By means of a statistical method the Larmor and the cyclotron frequency of the proton could be measured in the inhomogeneous magnetic field of the trap, from which the g -factor could be determined with a relative uncertainty of $8,9 \times 10^{-6}$.

The experimental techniques and setup presented here can be transferred to an equivalent experiment for the determination of the g -factor of the antiproton in order to achieve the same relative uncertainty, thus tanking the first step towards a new stringent test of CPT symmetry in the baryonic sector.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird der Entwurf, der Aufbau, die Inbetriebnahme und die Charakterisierung einer neuartigen Penning-Falle im Rahmen des Experiments zur Bestimmung des g -Faktors des Protons präsentiert. Diese Falle zeichnet sich dadurch aus, dass die Magnetfeldlinien eines äußeren homogenen Magnetfeldes durch eine ferromagnetische Ringelektrode im Zentrum der Falle verzerrt werden. Der inhomogene Anteil des resultierenden Magnetfeldes, die sogenannte magnetische Flasche, lässt sich durch den Koeffizient $B_2 = 297(10) \text{ mT/mm}^2$ des Terms zweiter Ordnung der Ortsabhängigkeit des Feldes quantifizieren. Eine solche ungewöhnlich starke Feldinhomogenität ist Grundvoraussetzung für den Nachweis der Spinausrichtung des Protons mittels des kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effektes. Dieser Effekt basiert auf der im inhomogenen Magnetfeld entstehenden Kopplung des Spin-Freiheitsgrades des gefangenen Protons an eine seiner Eigenfrequenzen. Ein Spin-Übergang lässt sich so über einen Frequenzsprung detektieren. Dabei ist die nachzuweisende Änderung der Frequenz proportional zu B_2 und zum im Fall des Protons extrem kleinen Verhältnis zwischen seinem magnetischen Moment und seiner Masse. Die durch die benötigte hohe Inhomogenität des Magnetfeldes bedingten technischen Herausforderungen erfordern eine fundierte Kenntnis und Kontrolle der Eigenschaften der Penning-Falle sowie der experimentellen Bedingungen.

Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Penning-Falle ermöglichte den erstmaligen zerstörungsfreien Nachweis von Spin-Quantensprüngen eines einzelnen gefangenen Protons, was einen Durchbruch für das Experiment zur direkten Bestimmung des g -Faktors mit der angestrebten relativen Genauigkeit von 10^{-9} darstellte. Mithilfe eines statistischen Verfahrens ließen sich die Larmor- und die Zyklotronfrequenz des Protons im inhomogenen Magnetfeld der Falle ermitteln. Daraus wurde der g -Faktor mit einer relativen Genauigkeit von $8,9 \times 10^{-6}$ bestimmt.

Die hier vorgestellten Messverfahren und der experimentelle Aufbau können auf ein äquivalentes Experiment zur Bestimmung des g -Faktors des Antiprotons zum Erreichen der gleichen Messgenauigkeit übertragen werden, womit der erste Schritt auf dem Weg zu einem neuen zwingenden Test der CPT-Symmetrie im baryonischen Sektor gemacht wäre.

Inhaltsverzeichnis

	i
	iii
Abstract	v
Kurzfassung	vii
1. Einleitung und Motivation	1
2. Theoretische Grundlagen	7
2.1. Magnetisches Moment des Protons	7
2.2. Speicherung von geladenen Teilchen	9
2.2.1. Die ideale Penning-Falle	9
2.2.2. Die reale Penning-Falle	16
2.2.3. Das Speicherpotential einer fünfpoligen zylindrischen Penning-Falle	25
2.3. Nachweis geladener Teilchen in einer Penning-Falle	31
2.3.1. Ersatzschaltbild eines Ion-Falle Systems	31
2.3.2. Wechselwirkung eines Ions mit der externen Nachweisschaltung . .	34
2.3.3. Experimentelle Umsetzung und Anforderungen an das Nachweis-	
system	41
2.3.4. Elektronisches Feedback	43
2.4. Teilchenbewegung unter Einfluss elektromagnetischer Wechselfelder	44
2.4.1. Dipolare Anregung	45
2.4.2. Quadrupolare Anregung und Kopplung der Bewegungsmoden . . .	46
2.5. Die magnetische Flasche	48
2.5.1. Nachweis von Spin-Übergängen mittels magnetischer Flasche - der	
kontinuierliche Stern-Gerlach-Effekt	49
2.5.2. Auswirkungen der magnetischen Inhomogenität auf das optimale	
tuning ratio T_R	52
2.5.3. Spin-Übergangsrate und Linienformen in der magnetischen Flasche	53
2.6. Bestimmung des g -Faktors mithilfe eines Doppel-Penning-Fallen-Aufbaus .	58
3. Experimenteller Aufbau	63
3.1. Kryomechanischer Aufbau der Apparatur	64

3.2.	Die Fallenkammer	68
3.2.1.	Die zylindrische Doppel-Penning-Falle	68
3.2.2.	Die Elektronenquelle und Ionenerzeugung	71
3.2.3.	Die Spinflip-Spule	72
3.3.	Die Nachweissysteme	75
3.3.1.	Das Axial-Nachweissystem	75
3.3.2.	Das Zyklotron-Nachweissystem	77
3.4.	Verkabelung und Anschlussplan	78
3.4.1.	Die Hochspannungsleitungen	79
3.4.2.	Die Hochfrequenzleitungen	79
3.4.3.	Die Gleichspannungsleitungen	81
4.	Konzeption und Entwurf einer Penning-Falle	89
4.1.	Ausgangspunkte und Berechnungsmethoden	89
4.1.1.	Die analytische Berechnung - Vorschlag für ein neues Design der Präzisionsfalle	90
4.1.2.	Die numerische Berechnung	93
4.2.	Entwurf der Analysefalle	97
4.2.1.	Die magnetische Flasche	98
4.2.2.	Das elektrostatische Speicherpotential	102
4.3.	Experimentelle Methode zur Optimierung des elektrostatischen Potentials	104
5.	Experimentelle Messroutinen und Ergebnisse	111
5.1.	Präparation und Detektion eines einzelnen Protons	111
5.1.1.	Massenspektren	112
5.1.2.	Entfernung unerwünschter Ionen	112
5.1.3.	Präparation eines einzelnen Protons	115
5.2.	Messungen in der Präzisionsfalle	118
5.2.1.	Optimierung des Speicherpotentials - Anpassung von T_R	118
5.2.2.	Direkte Messung der axialen Frequenz	121
5.2.3.	Messung der Magnetronfrequenz mittels Seitenbandkopplung	123
5.2.4.	Messung der modifizierten Zyklotronfrequenz	125
5.2.5.	Überlegungen zur Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz	128
5.3.	Transport	129
5.4.	Messungen in der Analysefalle	133
5.4.1.	Nachweis eines einzelnen Protons	133
5.4.2.	Bestimmung der magnetischen Flasche	141
5.4.3.	Temperaturmessungen	144
5.4.4.	Stabilität der Axialfrequenz in der Analysefalle	145

5.4.5. Erstmaliger Nachweis von Spin-Übergängen eines Protons in einer Penning-Falle	151
5.4.6. Bestimmung des g -Faktors des Protons in der Analysefalle	157
6. Zusammenfassung und Ausblick	163
A. Bearbeitung der Elektrodenoberflächen der Penning-Fallen	167
B. Kapazitätsdioden	169
C. Designparameter einer Penning-Falle zylindrischer Geometrie	173

Abbildungsverzeichnis

1.1. Fundamentale Wechselwirkungen und vereinfachte Darstellung der entsprechenden Theorien der Physik.	2
2.1. Schematische Darstellung einer hyperbolischen Penning-Falle und das Quadrupolpotential.	11
2.2. Übersichtliche Darstellung der Bewegung eines geladenen Teilchens in einer idealen Penning-Falle.	14
2.3. Energieniveauschema eines geladenen Spin-1/2-Teilchens in einer idealen Penning-Falle.	16
2.4. Schematische Darstellung einer fünfpoligen zylindrischen Penning-Falle.	26
2.5. Veranschaulichung des Randwertproblems für eine fünfpolige Penning-Falle zylindrischer Geometrie (Querschnitt).	29
2.6. Schematische Darstellung des Nachweisprinzips.	33
2.7. Schematische Darstellung des Aufbaus zum Nachweis des vom geladenen Teilchen in den Fallenelektroden induzierten Signals.	35
2.8. Ersatzschaltung des Teilchen-Nachweis-Systems.	36
2.9. Vergleich der Peak- und Dip-Nachweismethoden.	38
2.10. Berechnete spektrale Rauschspannungsdichte für den Fall, dass die Bewegungsfrequenz des gespeicherten Teilchens gegenüber der Resonanzfrequenz des Nachweisschwingkreises verstimmt ist.	40
2.11. Veranschaulichung des elektronischen Rückkopplungsverfahrens.	44
2.12. Aufbau zur experimentellen Umsetzung der Rückkopplungsmethode.	45
2.13. Magnetische Flasche in der Analysefalle.	49
2.14. Beispiele von berechneten Linienformen der Larmorresonanz bzw. Spin-Übergangswahrscheinlichkeit im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle.	59
2.15. Veranschaulichung der Doppel-Penning-Fallen Methode zur Bestimmung des g -Faktors des Protons.	61
3.1. Entwurfszeichnung des experimentellen Aufbaus.	64
3.2. Fotografische Darstellung des Tieftemperaturmoduls des experimentellen Aufbaus.	66
3.3. Schematische Darstellung der Ultrahochvakuum-Fallenkammer.	69
3.4. Schritte für die Beschichtung der Elektroden der Analysefalle.	72

3.5. Schematische Darstellung des Aufbaus zum Umklappen des Spins eines in der Penning-Falle gespeicherten Protons.	73
3.6. Resonator zur Messung der Axialfrequenz des Protons.	76
3.7. Anschlussplan für die Nachweissysteme.	78
3.8. Anschlussplan für das gesamte Experiment.	80
3.9. 300 K-Filterplatine - Entwurf und Einbindung in den experimentellen Aufbau.	85
3.10. 70 K-Filterplatine - Entwurf und Einbindung in den experimentellen Aufbau.	85
3.11. 5 K-Filterplatine - Entwurf und Einbindung in den experimentellen Aufbau.	87
4.1. Beispiel zur partiellen Optimierung des Falldesigns bezüglich der Kompensation der Anharmonizität des Speicherpotentials unter Verwendung des analytischen Modells.	91
4.2. Ergebnisse des Optimierungsverfahrens zum Entwurf der Präzisionsfalle unter Verwendung der analytischen Berechnung.	92
4.3. Optimale geometrische Parameter zum Entwurf zylindrischer Penning-Fallen beliebiger Radien.	93
4.4. Vergleich der idealisierten und realen Geometrien der Präzisionsfalle.	94
4.5. Erstellung des Finite-Elemente-Netzes mit dem Programm (<i>COMSOL Multiphysics</i>) zur Berechnung des elektrostatischen Potentials einer gegebenen Elektrodengeometrie.	95
4.6. Veranschaulichung des Verfahrens zur numerischen Berechnung des elektrostatischen Potentials einer gegebenen Geometrie der Penning-Falle.	96
4.7. Beispiel zur Bestimmung der Optimierungsparameter Δ_{TR} und $D_2^{\nu z}$ einer gegebenen geometrischen Konfiguration.	96
4.8. Vergleich der Ergebnisse der analytischen und numerischen Berechnungen für den neuen Designvorschlag der Präzisionsfalle.	97
4.9. Definition der Designparameter der Ringelektrode der Analysefalle.	99
4.10. Beispiel der FEM-Berechnung des Magnetfeldes am Ort der Analysefalle.	100
4.11. Auswirkung der Winkelverteilung des ferromagnetischen Materials um das Fallenzentrum auf die magnetische Flasche.	101
4.12. Auswirkung der radialen Verteilung des ferromagnetischen Materials um das Fallenzentrum auf die magnetische Flasche.	101
4.13. Auswirkung des Parameters l_n auf die magnetische Flasche.	102
4.14. Vergleich der idealisierten und tatsächlichen Geometrie der Analysefalle.	103
4.15. Ergebnisse des Optimierungsverfahrens zum Entwurf der Analysefalle unter Verwendung der numerischen Berechnung.	104
4.16. Schema zum Anlegen von Offsetspannungen an die Elektroden der Analysefalle.	105

4.17. Untersuchung der Orthogonalität der Analysefalle vor der Asymmetriekompensation des Speicherpotentials.	106
4.18. Untersuchung der Symmetrie des Speicherpotentials der Analysefalle.	107
4.19. Ergebnisse der partiellen Asymmetriekompensation des Potentials durch Einstellung der Offsetspannungen an den Korrektorelektroden.	108
4.20. Partielle Minimierung des Absolutwerts des Koeffizienten $D_2^{\nu z}$ durch Einstellung der Offsetspannung an der Ringelektrode.	109
4.21. Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse zur Optimierung des elektrostatischen Potentials.	110
5.1. Vergleich der in der Präzisionsfalle aufgenommenen Massenspektren vor und nach der Entfernung unerwünschter Ionen.	113
5.2. Frequenzspektrum des gemäß der SWIFT-Methode erstellten Anregungssignals zur Entfernung unerwünschter Ionen aus der Präzisionsfalle.	114
5.3. Veranschaulichung des in der Analysefalle durchzuführenden Vorgangs zur Entfernung unerwünschter Ionen.	115
5.4. Auf der Anregung der modifizierten Zyklotronbewegung basierende Methode zur sukzessiven Reduktion der Anzahl der in der Präzisionsfalle gespeicherten Protonen.	116
5.5. Veranschaulichung des gezielten Anregungsverfahrens zur Präparation eines einzelnen Protons aus einem Ensemble von drei Teilchen.	117
5.6. Veranschaulichung der Ermittlung der Anzahl von gespeicherten Protonen durch Untersuchung der Linienbreite des Signals einer sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Axial-Detektor befindenden Wolke.	118
5.7. Optimierung des Spannungsverhältnisses T_R mittels der Untersuchung der Linienform des Protonsignals.	120
5.8. Optimierung des Spannungsverhältnisses T_R mittels der Untersuchung der axialen Frequenzverschiebung mit der Bewegungsenergie.	120
5.9. Veranschaulichung der zerstörungsfreien Bestimmung der Axialfrequenz eines einzelnen gespeicherten und sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Detektor befindlichen Protons.	121
5.10. Verfahren zur Charakterisierung der Frequenzstabilität des axialen Signals eines in der Präzisionsfalle gespeicherten Protons.	122
5.11. Untersuchung der Abhängigkeit der axialen Frequenzschwankung Ξ von der FFT-Mittelungszeit ΔT in der Präzisionsfalle.	123
5.12. Messung der Magnetronfrequenz mittels Seitenbandkopplung in der Präzisionsfalle.	124
5.13. Bestimmung der modifizierten Zyklotronfrequenz durch direkten Nachweis mit dem Zyklotron-Detektor in der Präzisionsfalle.	126

5.14. Messung der modifizierten Zyklotronfrequenz mittels Seitenbandkopplung in der Präzisionsfalle	128
5.15. Berechnete Koeffizienten B_2 und B_1 der inhomogenen Anteile des Magnetfeldes als Funktion des Abstandes zum Zentrum der Analysefalle.	130
5.16. Schematische Darstellung des Transportvorgangs im Doppel-Fallen-System.	131
5.17. Vergleich der Elektrodenanordnungen im Doppel-Fallen-System vor und nach der neuen Segmentierung der Transportstrecke.	132
5.18. Vergleich der elektrostatischen Eigenschaften der Präzisions- und Analysefalle.	134
5.19. Betriebsparameter T_R^{C4} und $V_0 = V_{res}$ für verschiedene Konfigurationen von Offsetspannungen an den Fallenelektroden.	135
5.20. Axiale Frequenzverteilung eines aus der Präzisionsfalle in die Analysefalle wiederholt transportierten Protons.	137
5.21. Veranschaulichung der Abhängigkeit des optimalen Spannungsverhältnisses T_R^{C4} von der Zyklotronenergie des Teilchens in der Analysefalle.	138
5.22. Beispiele von Massenspektren einer Wolke von Protonen in der Analysefalle.	139
5.23. Auffinden der Signatur eines einzelnen Protons im Rauschspektrum des Axial-Nachweissystems mithilfe parametrischer Resonanz.	142
5.24. Ermittlung der modifizierten Zyklotronfrequenz in der Analysefalle zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Flasche.	143
5.25. Experimentell bestimmter Magnetfeldverlauf entlang der axialen Richtung der Analysefalle.	144
5.26. Bestimmung der axialen Temperatur in der Analysefalle.	146
5.27. Optimierung der axialen Frequenzstabilität in der Analysefalle.	147
5.28. Zeitliche Entwicklung der Axialfrequenz in der Analysefalle nach den Optimierungsmaßnahmen.	149
5.29. Axiale Frequenzschwankung Ξ als Funktion der FFT-Mittelungszeit ΔT in der Analysefalle.	150
5.30. Axiale Frequenzschwankung als Funktion der radialen Energien in der Analysefalle.	152
5.31. Schematische Darstellung des Aufbaus zum Umklappen des Protonspins in der Analysefalle.	153
5.32. Messequenz für den statistischen Nachweis von Spin-Übergängen eines Protons in der Analysefalle.	154
5.33. Erstmaler Nachweis von Spin-Übergängen eines einzelnen Protons im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle.	156
5.34. Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle bei einer axialen Temperatur von $T_z = 9(1)$ K gemessene Larmorresonanz.	157

5.35. Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle bei einer axialen Temperatur von $T_z = 2,2(2)$ K gemessene Larmorresonanz	159
5.36. Ermittlung der modifizierten Zyklotronfrequenz im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle zur Bestimmung des g -Faktors des Protons.	161
A.1. Vergleich der Innenfläche der Elektroden vor und nach dem mechanischen Polierverfahren.	168
B.1. Testaufbau zur Untersuchung der Auswirkung verschiedener Kapazitätsdioden auf den Zyklotron-Resonator.	170
B.2. Ergebnisse des Vergleichs der Kapazitätsdioden.	172

Tabellenverzeichnis

2.1. Typische Eigenfrequenzen und Energien eines Quantensprungs in jeder Bewegungsmode eines Protons in der Doppel-Penning-Falle.	17
2.2. Parameter zur Charakterisierung der Nachweissysteme.	43
3.1. Charakteristische Parameter der Präzisionsfalle bzw. der neuen Analysefalle	70
3.2. Charakterisierung der zum Umklappen des Spins eines Protons im Fallenzentrum erreichbaren Feldamplituden.	74
3.3. Charakterisierung der Dämpfung des Tiefpassfilters der Gleichspannungsleitungen.	84
4.1. Charakteristische Parameter zum Vergleich zwischen dem derzeitigen Design der Präzisionsfalle und dem neuen Designvorschlag.	93
4.2. Mit dem numerischen Verfahren bestimmte charakteristische Parameter des neuen Designvorschlags der Präzisionsfalle und des derzeitig verwendeten Designs.	98
4.3. Mit dem numerischen Verfahren bestimmte charakteristische Designparameter der Analysefalle.	104
4.4. Charakteristische Parameter der Ausgangskonfiguration vor der Optimierung und der Konfigurationen, bei denen die Bedingungen zur Optimierung des Potentials erfüllt sind.	109
B.1. Herstellerangaben der untersuchten Kapazitätsdioden.	170
C.1. Optimale geometrische Parameter zum Entwurf zylindrischer Penning-Fallen beliebiger Radien.	173

1. Einleitung und Motivation

Das Proton, ein von E. Rutherford im Jahr 1919 entdecktes Teilchen, ist ein elektrisch positiv geladenes Hadron, also ein zusammengesetztes der starken Wechselwirkung unterworfenen Teilchen. Unter den Hadronen ist das Proton ein einen halbzahligen Spin besitzendes, aus Gluonen, zwei Up-Quarks und einem Down-Quark bestehendes Teilchen, also ein Baryon und darunter ein Nukleon. Das Proton ist das leichteste aller Baryonen und das einzige stabile freie Hadron. Das Proton, ein aus der Sicht der Atomphysik zu den grundsätzlichen Bausteine der gewöhnlichen Materie gehörendes Teilchen, stellt im Rahmen der Suche nach experimentellen Hinweisen, die auf eine Physik jenseits des Standardmodells hindeuten, einen wichtigen Gegenstand der Forschung dar.

Die Definition von vier fundamentalen Wechselwirkungen (starke Wechselwirkung, elektromagnetische Wechselwirkung, schwache Wechselwirkung und die Gravitation), welche vereinzelt oder vereint sämtlichen physikalischen Prozessen zugrunde liegen sollen, stammt aus der Mitte des 20. Jahrhunderts. Mit Ausnahme der Gravitation lassen sich, wie in Abbildung 1.1 veranschaulicht, diese sogenannten Grundkräfte der Physik jeweils anhand von derzeit etablierten Quantenfeldtheorien beschreiben. Im Jahr 1967 präsentierte Steven Weinberg zusammen mit Sheldon Lee Glashow und Abdus Salam eine theoretische Behandlung der Vereinheitlichung der elektromagnetischen mit der schwachen Wechselwirkung [1], welche 1973 anhand der Entdeckung der auf die vorausgesagten Z-Bosonen zurückzuführenden neutralen Ströme am CERN experimentell bestätigt wurde [2–4]. Im Jahr 1979 wurden die oben genannten Wissenschaftler für ihre Theorie mit dem Nobelpreis ausgezeichnet und in den 1980er Jahren gelang der direkte Nachweis des Z-Bosons. Die so entstandene Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung zusammen mit der Theorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik, bilden das umfassendere Standardmodell der Elementarteilchenphysik [5], welches die Dynamik der bekannten subatomaren Teilchen beschreibt.

Obwohl die vom Standardmodell gelieferten experimentellen Vorhersagen bislang immer bestätigt werden konnten, ist dieses im Sinne der Berücksichtigung der fundamentalen Wechselwirkungen unvollständig, da die durch die allgemeine Relativitätstheorie beschriebene Gravitation im Modell nicht einbezogen wird. Darüber hinaus lassen sich einige Phänomene der Teilchenphysik im Rahmen des Standardmodells nicht beschreiben und Fragen bleiben unbeantwortet. In diesem Zusammenhang zählen unter anderem das Hierarchieproblem, die Neutrinooszillation bzw. die von Null verschiedene Ruhemasse der Neutrinos, die Baryonenasymmetrie und die dunkle Materie bzw. dunkle Energie

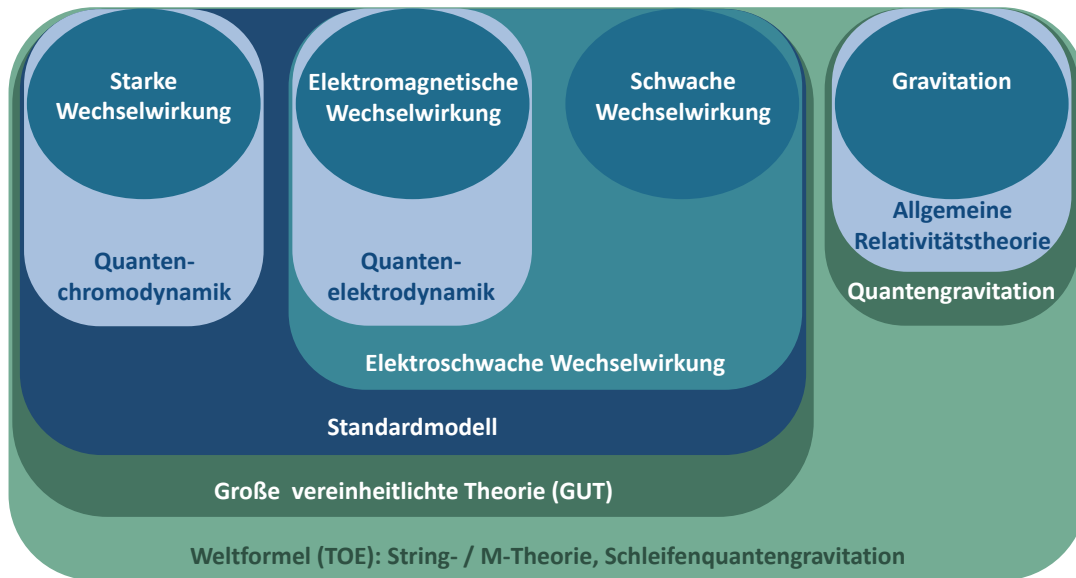


Abbildung 1.1.: Fundamentale Wechselwirkungen und vereinfachte Darstellung der entsprechenden Theorien der Physik. Die sich in einer frühen Phase der Entwicklung befindenden Modelle, GUT, Quantengravitation und TOE, sind in grün gekennzeichnet.

zu den Themenbereichen, welche auf Mängel des Modells hindeuten. Die heutige theoretische und experimentelle Forschung zielt auf eine Erweiterung des Standardmodells in Richtung einer umfassenderen Theorie, die Weltformel (*Theory of everything*), welche alle fundamentalen Wechselwirkungen berücksichtigt und alle physikalische Phänomene erklärt und miteinander vereinbart [6]. Bereits existierende sich noch in Entwicklung befindende theoretische Ansätze sind in Abbildung 1.1 in grün dargestellt. Dabei ist die Suche nach experimentellen Anhaltspunkten, welche auf den zu beschreitenden Weg weisen, von grundsätzlicher Bedeutung.

Eine fundamentale Voraussetzung des Standardmodells als Quantenfeldtheorie ist die Gültigkeit des CPT-Theorems, welches besagt, dass alle physikalischen Vorgänge unter gemeinsam stattfindender Ladungskonjugation (C), Raumspeglung (P) und Zeitumkehr (T) invariant sind [7]. Eine aus dieser zu erwartenden Symmetrie gezogene Schlussfolgerung ist, dass sich ein Teilchen einem Antiteilchen zuordnen lässt, welches die entgegengesetzte Ladung trägt jedoch den identischen Spin, die identische Masse und die identische Lebensdauer besitzt [8]. Eine Verletzung des CPT-Theorems konnte bislang nicht experimentell festgestellt werden [9]. Im Gegenteil wurde die CPT-Symmetrie anhand von experimentellen Vergleichen der Eigenschaften von Teilchen und Antiteilchen mit extrem hoher Genauigkeit bestätigt, wie im Fall der Massen des K-Mesons und seines Antiteilchens im Bereich von 10^{-18} [10] oder der gyromagnetischen Faktoren (g -Faktoren) des Elektrons und Positrons im Bereich von 10^{-12} [11] (siehe auch [12–14]).

Dennoch wird die CPT-Verletzung, welche eine Verletzung der Lorentz-Invarianz impliziert [12], im Rahmen von manchen Theorien jenseits des Standardmodells unterhalb dieser Genauigkeitsgrenze vorhergesagt [15–18].

Die Penning-Falle, ein aus der Überlagerung von elektrischen und magnetischen Feldern bestehendes System, ermöglicht die Speicherung sämtlicher geladenen Teilchen für faktisch unbegrenzte Speicherzeiten. Diese Art von Ionenkäfig, in dem sich die oszillatorische Bewegung einzelner Teilchen mit sehr hoher Genauigkeit erfassen und kontrollieren lässt, hat sich dank der Pionierarbeit von H. G. Dehmelt und der von ihm erzielten Fortschritten und Ergebnissen [11, 19–23] als Messinstrument für hochpräzise Messungen etabliert. In Penning-Fallen-Experimenten lassen sich fundamentale Eigenschaften, wie die Masse [24–30] oder der g -Faktor [11, 31–37], des gefangenen auf kryogene Temperaturen gekühlten Ions über die genaue Bestimmung seiner Bewegungsfrequenzen ermitteln. Im Rahmen solcher Experimente wird oft die zwingende Prüfung von fundamentalen Theorien angestrebt. Darunter ist der von R.S. Van Dyck et al. in [11] präsentierte Test der CPT-Symmetrie im leptonischen Sektor zu erwähnen, bei welchem die g -Faktoren des Elektrons und Positrons mit hoher Genauigkeit, $g_{e^-}/g_{e^+} = 1 + (0,5 \pm 2,1) \times 10^{-12}$, verglichen werden.

Im Rahmen des in dieser Arbeit präsentierten Experiments wird die Bestimmung des g -Faktors des Protons mit einer relativen Genauigkeit von $\Delta g_p/g_p < 10^{-9}$ in einer Penning-Falle angestrebt. Der gyromagnetische Faktor bezeichnet eine Proportionalitätskonstante, welche gemäß

$$\vec{\mu}_p = g \frac{e}{2m_p} \vec{S}$$

das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}_p$ und den Spin \vec{S} in Beziehung setzt. Im hier vorgestellten Ansatz [38–41] werden zwei Frequenzen des gefangenen Protons, die Zyklotron- und die Larmorfrequenz, in einem Doppel-Penning-Fallen-System [42] mittels nicht-destruktiver Methoden gemessen. Der g -Faktor lässt sich aus dem Verhältnis der beiden Frequenzen unmittelbar berechnen. Hiermit wird nicht nur auf eine Erhöhung der Genauigkeit von 10^{-8} des derzeit am genauesten gemessenen Wertes des g -Faktors des Protons [43] gezielt. Vielmehr stellt die Doppel-Penning-Fallen-Methode im Vergleich zu allen anderen bisher verwendeten Messverfahren [43–49] eine fortschrittliche Alternative dar. Der ausschlaggebende Unterschied ist dabei, dass die Messung unmittelbar und ausschließlich mit einem Teilchen, nämlich dem nicht im Atomkern gebundenen sondern einzeln gespeicherten Proton selbst, durchgeführt wird. Ferner ermöglichen experimentelle Techniken [50] die räumliche Einschränkung der Teilchenbewegung auf Amplituden von einigen Mikrometern mittels Reduktion der Bewegungsenergie in der kryogenen Umgebung. Darüber hinaus liefert die fundierte theoretische Kenntnis der Dynamik des gefangenen Teilchens sowie der Eigenschaften der Speicherfelder in einer Penning-Falle und deren hinsichtlich der Auswirkungen auf die Bewegungsfrequenz relevanten Aspekten [51–62]

die Grundlage für das Erzielen der optimalen experimentellen Bedingungen zur Gewährleistung hoher Messgenauigkeiten. Die durch die Größe und Struktur des Protons sowie Wechselwirkungen zwischen Teilchen bedingten Korrekturen sind bei diesem Messansatz also irrelevant.

Da keine Gründe ersichtlich sind, die gegen die Übertragung der zur Bestimmung des g -Faktors des Protons verwendeten Techniken auf ein äquivalentes Experiment zur Bestimmung des g -Faktors des Antiprotons sprechen [63, 64], und da die Speicherung von Antiprotonen in einer Penning-Falle bereits demonstriert wurde [65–67], trägt die Verwirklichung des hier vorgestellten Vorhabens zur Schaffung der Voraussetzungen für eine Erhöhung der bis heute erreichten Genauigkeit bei der Messung des g -Faktors des Antiprotons bei. Kürzlich wurde vom konkurrierenden Experiment die direkte Bestimmung des magnetischen Moments des Antiprotons mit einer Genauigkeit von 10^{-6} [68] unter Verwendung der gleichen Methode im Rahmen der Kollaboration *ATRAP* am CERN demonstriert. Zum gleichen Zweck wird gegenwärtig das in dieser Arbeit und in [69–71] vorgestellten Experiment mit den entsprechenden Anpassungen für die Speicherung und den Nachweis von Antiprotonen im Rahmen der Kollaboration *BASE* am CERN nachgebildet. Ein Vergleich der g -Faktoren des Protons und Antiprotons im Bereich von 10^{-9} würde zum zwingenden Test der CPT-Symmetrie im baryonischen Sektor mit einer vektoriellen Größe beitragen [72].

Die erste experimentelle Bestimmung des magnetischen Moments des Protons geht auf das Jahr 1933 zurück. Damals erhielt Otto Stern mithilfe der von ihm entwickelten Molekularstrahlmethode den Wert $\mu_p = 2,5\mu_k \pm 10\%$ [44, 45] als Ergebnis, wobei $\mu_k = \frac{e}{2m_p}\hbar$ das Kernmagneton bezeichnet, und widerlegte so mit verblüffender Deutlichkeit den von der Dirac-Theorie vorhergesagten Wert. Dafür wurde O. Stern mit dem Nobelpreis im Jahr 1943 ausgezeichnet. Diese Entdeckung ist als erstes Anzeichen für die heute bekannte im Rahmen der Quantenchromodynamik beschriebene interne Struktur des Protons aufzufassen. Im Laufe der Jahre ließ sich die Genauigkeit bei der Messung des magnetischen Moments in verschiedenen Experimenten unter Verwendung unterschiedlicher Methoden, wie die Molekularstrahl-Resonanz-Methode [46, 73, 74] und die Kernspinresonanz-Methode [47–49, 75, 76], fortwährend erhöhen.

Der derzeitig präzisest bekannte Wert des magnetischen Moments des Protons wurde im Jahr 1972 von P. F. Winkler et al. [43] mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-8} gemessen. Mittels eines in einem Magnetfeld betriebenen Wasserstoff-Masers ließ sich das Verhältnis $\mu_e(\text{H})/\mu_p(\text{H})$ im Grundzustand des Wasserstoffatoms aus der spektroskopischen Untersuchung von Hyperfeinstruktur-Übergängen in atomarem Wasserstoff gewinnen. Aus dem Verhältnis $\mu_e(\text{H})/\mu_p(\text{H})$ konnte der g -Faktor des freien Protons unter Berücksichtigung der durch die Bindung an das Wasserstoffatom bedingten theoretischen

Korrekturen [77, 78] berechnet werden. Es folgte [79]

$$\begin{aligned} \frac{g_e(\text{H})}{g_p(\text{H})} &= \frac{\mu_e(\text{H})}{\mu_p(\text{H})} = -658,210706(6) && \text{(Winkler et al.)} \\ \frac{\mu_p}{\mu_B} &= 1,521032181(15) \times 10^{-3} && \text{(Winkler et al.)} \\ g_p &= 5,585694706(56) && \text{(Karshenboim et al.)} \end{aligned}$$

wobei $g_i(\text{H})$ und $\mu_i(\text{H})$ der g -Faktor bzw. das magnetische Moment des gebundenen Teilchens und $\mu_B = \frac{e}{2m_e}\hbar$ das Bohrsche Magneton bezeichnen. Der im Vergleich zu den vorhergehenden oben erwähnten Experimenten erzielte Gewinn an Genauigkeit ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass das Proton im atomaren Wasserstoff statt in einer molekularen Umgebung untersucht wurde. In den auf Kernspinresonanz basierenden Experimenten wurden Protonenübergänge im Wasser oder in einem äquivalenten Medium beobachtet, was zu mit höheren Fehlern behafteten Ergebnissen aufgrund der benötigten nicht-trivialen theoretischen Korrekturen führte.

Nun wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit der Ansatz behandelt, sämtliche Bindungen des Protons mit weiteren Teilchen vollständig abzuschaffen und seinen Einschluss ausschließlich über die Lorentz-Kraft in einer Penning-Falle zu gewährleisten. Seine Energie und somit Bewegungsamplitude wird bei kryogenen Temperaturen so stark gesunken, dass quantenmechanische Vorgänge sich eindeutig nachweisen lassen. Die Zyklotronfrequenz des Protons wird über die von seiner eigenen Ladung in die Fallenelektroden induzierten Spiegelströme bestimmt. Es wird versucht, die Ausrichtung seines Spins zum Magnetfeld der Falle mittels eines Anregungsfeldes umzukehren. Aus seiner Antwort auf diesen Versuch wird die Schlussfolgerung darüber gezogen, inwieweit die Anregungsfrequenz seine Larmorfrequenz gleicht. Aus vielen solchen Versuchen bzw. Antworten wird die tatsächliche Larmorfrequenz des Protons genau ermittelt, um schließlich seinen g -Faktor zu berechnen.

Im Rahmen dieser Dissertation wird die Verwirklichung dieses Ansatzes präsentiert. Dabei steht die Methode im Mittelpunkt, mit deren Hilfe sich ein Spin-Übergang nachweisen lässt. Diese beruht auf dem von Dehmelt eingeführten sogenannten kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekt [23], welche die Kopplung des magnetischen Moments des Teilchens an eine seiner Bewegungsfrequenzen in einem inhomogenen Magnetfeld beschreibt. Während im Fall des Elektrons bzw. Positrons diese Methode zur Detektion der Spinorientierung in einer Penning-Falle bereits längst etabliert ist [11, 31–34, 80], stellt sie im Fall des Protons eine erhebliche Herausforderung dar. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass das Verhältnis μ_i/m_i , welches die Stärke des Effektes mitbestimmt, für das Proton eine Million Mal kleiner ist als das für das Elektron, weswegen eine viel stärkere magnetische Inhomogenität benötigt wird. Der Entwurf, Aufbau und die Charakterisierung einer speziellen Penning-Falle, welche der Erzeugung einer für die Bestimmung des g -Faktors des Protons optimalen magnetischen Inhomogenität dient, wird in dieser Arbeit präsentiert [41]. Spin-Übergänge eines einzelnen Protons konnten erstmalig in dieser

Falle nachgewiesen werden [81], was den größten Beitrag dieser Arbeit zum Experiment darstellt. Auch die Bestimmung des g -Faktors wurde im inhomogenen Magnetfeld der Falle mit einer relativen Genauigkeit von $\Delta g_p/g_p = 8,9 \times 10^{-6}$ durchgeführt [41]. Der gemessene Wert

$$g_p = 5,585696(50) \quad (\text{Rodegheri et al.})$$

stimmt sowohl mit den bisher am genauesten bekannten Wert des g -Faktors [43, 79] als auch mit dem im konkurrierenden Experiment aus Harvard [82] ermittelten Wert überein.

Im Folgenden werden die theoretischen Grundlagen zu den im Experiment verwendeten Techniken und Methoden in Kapitel 2 diskutiert. Diese umfassen die detaillierte Beschreibung der Eigenschaften einer Penning-Falle und der Dynamik des gespeicherten Teilchens, die Vorstellung des kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekts und der nicht-destruktiven Methode zur Bestimmung der Eigenfrequenzen des Teilchens sowie der Doppel-Fallen-Methode. In Kapitel 3 wird der experimentelle Aufbau in allen Einzelheiten beschrieben. Eine allgemeine Methode zum Entwurf einer fünfpoligen Penning-Falle, welche anhand der Beispiele beider in diesem Experiment verwendeten Fallen demonstriert wird, wird zusammen mit einem experimentellen Verfahren zur Optimierung des Speicherpotentials in Kapitel 4 präsentiert. In Kapitel 5 werden sämtliche experimentellen Messroutinen und Ergebnisse beschrieben und diskutiert. Schließlich wird in Kapitel 6 zusammengefasst und über die Zukunft des “Proton-Experiments” berichtet.

2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen präsentiert, die zum Verständnis der in dieser Arbeit verwendeten experimentellen Techniken erforderlich sind. Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einer idealen Penning-Falle wird zunächst diskutiert, gefolgt von Überlegungen über die wichtigsten Faktoren, die das Speicherpotential und somit die Eigenbewegungen des Ions in einer realen Penning-Falle im Vergleich zu denen in einer idealen Falle modifizieren. Unter diesen befinden sich Inhomogenitäten des Magnetfeldes und die Form des elektrostatischen Potentials einer Penning-Falle zylindrischer Geometrie, welches vom idealen Quadrupolfeld durchaus signifikant abweichen kann. Die daraus resultierenden Konsequenzen genau so wie die mögliche Maßnahmen zur Überwindung der Unvollkommenheiten, die die Präzision der Messung limitieren können, werden ebenfalls diskutiert. Als Nächstes wird das Prinzip des zerstörungsfreien Nachweises eines gespeicherten Ions erläutert. Ferner werden die Einzelheiten der Wechselwirkung des Teilchens mit der Nachweiselektronik und ihre Verwendung als Kühlmechanismus präsentiert. Schließlich wird ein Überblick über das Konzept zur Messung des magnetischen Moments eines in unserer Doppel-Penning-Falle gespeicherten Protons gegeben.

2.1. Magnetisches Moment des Protons

Der Spin ist eine quantenmechanische Eigenschaft, die neben der Masse und der Ladung, als Kennzeichnung eines Teilchens betrachtet werden kann und seinen Eigendrehimpuls darstellt. Im Fall eines Hadrons, oder generell eines zusammengesetzten Teilchens, wie ein Proton, kann der Spin als der Gesamtdrehimpuls, resultierend aus der Summe der Spin und Bahndrehimpulse seiner konstituierenden Elementarteilchen, aufgefasst werden. Die Spin-Eigenzustände erfüllen die Eigenwertgleichungen:

$$\hat{S}^2|s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, m_s\rangle \quad (2.1)$$

$$\hat{S}_z|s, m_s\rangle = \hbar m_s|s, m_s\rangle \quad , \quad (2.2)$$

in denen $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$ der Spinoperator, s und m_s die Spinquantenzahl bzw. die magnetische Spinquantenzahl sind. Die entlang einer gegebenen Richtung gemessene Spin-Komponente, angenommen die z-Komponente, darf nur bestimmte Werte annehmen, gemäß $m_s \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$. Da das Proton ein Spin-1/2-Teilchen ist, das heißt $s = \frac{1}{2}$, existieren für \hat{S}_z ausschließlich zwei Eigenwerte, nämlich $\hbar m_s = \pm \frac{\hbar}{2}$.

Jedes geladene Teilchen mit Spin \vec{S} besitzt ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$, welches über die Beziehung

$$\vec{\mu} = g_p \frac{e}{2m} \vec{S} \Rightarrow \mu_z = g \frac{e}{2m} \hbar m_s \quad (2.3)$$

mit dem Spin in Zusammenhang steht. Dabei ist die dimensionslose Größe g der gyromagnetische Faktor, e die Ladung und m die Masse des Teilchens. Über dieses magnetische Moment kann der Spin in Wechselwirkung mit einem externen magnetischen Feld treten und dabei mit der sogenannten Larmorfrequenz

$$\omega_L = g \frac{e}{2m} B \quad (2.4)$$

um die Magnetfeldrichtung präzedieren. Diese Frequenz kann als ein Maß für die Quantenenergie des Übergangs zwischen den Spinzuständen betrachtet werden. Da die potentielle Energie des magnetischen Dipols in einem äußeren Magnetfeld durch $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ gegeben ist, beträgt die Energieaufspaltung ΔU zwischen den beiden möglichen Spinorientierungen eines Spin-1/2-Teilchens, parallel oder antiparallel zu \vec{B}

$$\Delta U = g \frac{e\hbar}{2m} B = \hbar \omega_L \quad (2.5)$$

Neben der Larmorpräzession führt ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld eine gleichförmige Kreisbewegung aus. Auf eine mit Geschwindigkeit \vec{v} relativ zum Magnetfeld \vec{B} bewegte Ladung e wirkt senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung und zur Magnetfeldrichtung die Lorentzkraft $\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B})$. Bewegt sich das Teilchen in einer Ebene, die senkrecht zu \vec{B} steht, so wird dieses durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gelenkt. Da die Lorentzkraft als Zentripetalkraft in radialer Richtung wirkt, folgt $e v B = m v^2 / r$, wobei $r = \frac{v}{\omega}$ der Radius der Kreisbahn ist. Die entsprechende Kreisfrequenz oder Zyklotronfrequenz beträgt

$$\omega_c = \frac{e}{m} B \quad (2.6)$$

Der g -Faktor eines Protons, das unter den Einfluss eines homogenen Magnetfeldes gerät, kann also, nach Gleichungen (2.4) und (2.6), aus dem Verhältnis zweier Frequenzen gemäß

$$g = 2 \frac{\omega_L}{\omega_c} \quad (2.7)$$

bestimmt werden.

Eine Penning-Falle, in der sich ein einzelnes gefangenes Proton befindet, bietet sich für die Realisierung der direkten und zerstörungsfreien Messung beider zur Bestimmung des g -Faktors erforderlichen Frequenzen an und bildet demzufolge das Herzstück dieses Experiments. Eine relative Genauigkeit von mindestens 10^{-9} wird angestrebt. Dabei hängt der die Genauigkeit limitierende Faktor im Wesentlichen mit Abweichungen zwischen

den Eigenfrequenzen eines in einer realen Falle von denen eines in einer idealen Falle gespeicherten Protons zusammen. Ein fundiertes Verständnis der Funktionsweise einer Penning-Falle, der für die Optimierung ihrer Eigenschaften relevanten Aspekte sowie der zu Frequenzverschiebungen führenden Einflussfaktoren ist daher im Rahmen dieses Experimentes von wesentlicher Bedeutung. All diese Themen werden im Folgenden eingehend diskutiert.

2.2. Speicherung von geladenen Teilchen

Die Speicherung eines geladenen Teilchens in allen drei Raumrichtungen erfolgt durch die Überlagerung eines homogenen Magnetfeldes, welches die Bewegung des Teilchens auf der zu den Magnetfeldlinien senkrechten Ebene radial einschränkt, mit einem elektrostatischen Potential, welches verhindert, dass das Teilchen den Feldlinien folgt. Stattdessen schwingt es harmonisch um ein Potentialminimum entlang der axialen Richtung. Mithilfe einer geeigneten Anordnung leitender Elektroden, deren Achse mit der Magnetfeldrichtung übereinstimmt, kann das Potential für den axialen Einschluss des Teilchens erzeugt werden. Die radiale Speicherung ist gewährleistet, solange der Radius der durch das Magnetfeld verursachten schraubenförmigen Bewegung kleiner ist, als der innere Radius der Elektroden.

Eine solche Vorrichtung wurde von Hans Georg Dehmelt Penning-Falle genannt, nach Frans Michel Penning, auf dessen Beobachtungen von 1936 [83] die Grundlagen der Speicherung geladener Teilchen beruhen. Dieser stellte die Verlängerung der Trajektorie eines Elektrons zwischen zwei Elektroden unter Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes fest. Die Anwendung von hyperbolischen Elektroden in Kombination mit einem Magnetfeld zur Speicherung von Teilchen wurde von John Robinson Pierce [84] konzipiert. Auf diese Weise wurde die Penning-Falle in ihrer heutigen Form sozusagen erfunden. Dank der weiteren Entwicklungen und durchschlagenden Ergebnisse von H.G. Dehmelt [11, 19–23], die in seiner Auszeichnung mit dem Nobelpreis für Physik “für die Entwicklung der Ionenkäfingtechnik” im Jahr 1989 gipfelte, wurde die Penning-Falle als perfekt geeignetes System für hochpräzise Messungen etabliert¹.

2.2.1. Die ideale Penning-Falle

Der Einschluss geladener Teilchen beruht auf der Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = e \left[\vec{E}(\vec{\rho}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{\rho}, t) \right] \quad , \quad (2.8)$$

¹Ferner sind weitere umfangreiche Publikationen vorhanden, in denen die Ionenbewegung und entsprechende Linienformen in der Penning-Falle, sowohl ungestört im Idealfall als auch unter Einfluss von Störfeldern und resonanten Radiofrequenzfeldern, analysiert werden [53, 54, 60–62, 85]. Eine vollständige Herleitung der Theorie ist daher nicht im Anwendungsbereich der vorliegenden Arbeit. Stattdessen wird eine Zusammenfassung der relevantesten Aspekte gegeben.

die auf die Ladung e aufgrund des elektromagnetischen Feldes ausgeübt wird. Die Anordnung beziehungsweise Art der Felder muss so gewählt werden, dass die resultierende Kraft eine rücktreibende Wirkung, $\vec{F} \propto -\vec{\rho}$, auf die Bewegung des Teilchens aufweist. Nach den Maxwell-Gleichungen gilt für das elektrische Potentialfeld ϕ , welches durch das Vektorpotential \vec{A} , $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ definiert ist, die Beziehung:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad . \quad (2.9)$$

Dabei bezeichnet ρ_e die Ladungsdichte und ϵ_0 die Permittivität des Vakuums. Betrachtet man nun ein elektrostatisches Potential, also $\phi \neq \phi(t)$ und folglich $\vec{E} = \vec{E}(\vec{\rho}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{\rho})$, das zusätzlich noch rotationssymmetrisch in Bezug auf die z -Achse ist, das heißt $\phi \neq \phi(\varphi)$, so ergibt sich $\phi = \phi(\rho, z)$, wobei (ρ, φ, z) die Zylinderkoordinaten sind. Nimmt man ferner an, dass das gespeicherte Ion der einzige freie Ladungsträger innerhalb des Fallenvolumens ist, so folgt, dass das Potential $\phi = \phi(\rho, z)$ der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2\phi(\rho, z) = 0 \quad (2.10)$$

genügen muss und daher eine harmonische Funktion ist, die als solche im Innern des betrachteten Volumens keine Extrema aufweisen kann. Demzufolge ist es nicht möglich, mit einem reinen elektrostatischen Potential die Bedingung für den Einschluss in allen Raumrichtungen zu erfüllen. Dennoch ermöglicht das Hinzufügen eines magnetostatischen Feldes der Form

$$\vec{B} = B_0\hat{z} \quad (2.11)$$

die stabile dreidimensionale Speicherung des Teilchens.²

Die Lösung der Gleichung (2.10), die dem Potential einer sogenannten “idealen Penning-Falle” entspricht, beschreibt ein elektrostatisches Quadrupolpotential, dessen räumliche Abhängigkeit durch

$$\phi(\rho, z) = K_1 + K_2 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \quad (2.12)$$

gegeben ist. Dabei stehen K_1 und K_2 für noch zu bestimmende Konstanten. Eine mögliche geometrische Anordnung von Elektroden, mit denen ein solches Potential erzeugt werden kann, wird in Abbildung 2.1 anschaulich dargestellt. Diese Art des Aufbaus, bestehend aus drei Rotationshyperboloiden, deren Oberflächen mit den aus Gleichung (2.12) resultierenden Äquipotentialflächen übereinstimmen, wird als hyperbolische Penning-Falle bezeichnet. Eine ideale Geometrie der Falle besteht aus einer der Gleichung eines einschalen Hyperboloids, $z^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 - \rho_0^2)$, gehorchenden Ringelektrode und den Teilflächen

²Bei einem weiteren Konzept zur dreidimensionalen Speicherung von Ionen, der sogenannten Paul-Falle [86, 87], werden elektrische Wechselfelder, die im zeitlichen Mittel zu einem dreidimensionalen Potentialminimum führen, verwendet.

eines zweischaligen Hyperboloids, $z^2 = (z_0^2 + \frac{1}{2}\rho^2)$, als Endkappen. Wird nun eine Spannung V_0 zwischen Ring und Endkappen angelegt so lässt das Potential durch

$$\phi(\rho, z) = \frac{V_0}{2d^2} \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \quad (2.13)$$

geben, wobei der Koordinatenursprung im Zentrum der Falle liegt. Dabei sind $d^2 = \frac{1}{2} \left(z_0^2 + \frac{\rho_0^2}{2} \right)$ eine charakteristische Fallendimension und z_0 beziehungsweise ρ_0 die kürzesten Abstände zwischen den Elektrodenoberflächen und dem Fallenzentrum.

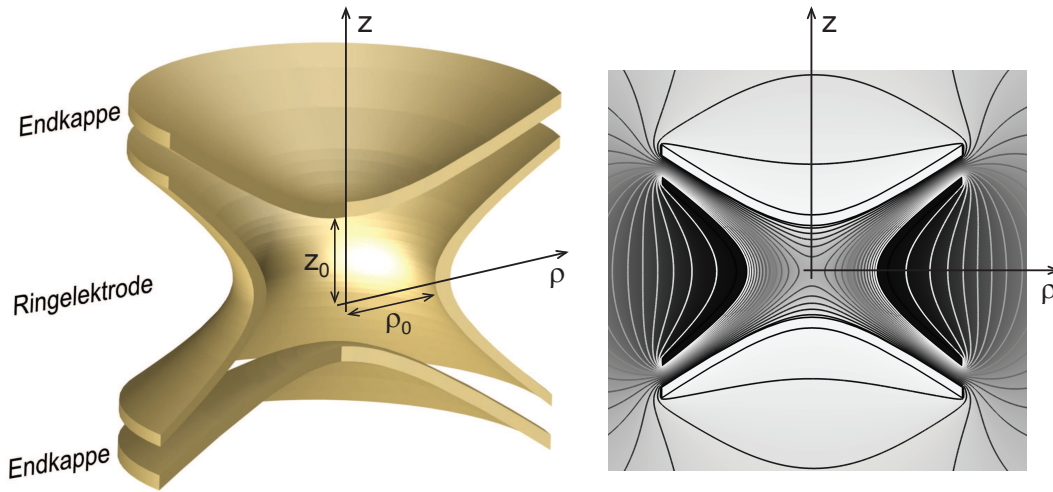


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung einer hyperbolischen Penning-Falle. Durch das Anlegen einer Spannung zwischen der Ringelektrode ($z^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 - \rho_0^2)$) und den Endkappen ($z^2 = (z_0^2 + \frac{1}{2}\rho^2)$) wird das rechts in der Abbildung gezeigte elektrische Potential erzeugt. Im Idealfall nimmt dieses die Form eines Quadrupolpotentials an.

Ionenbewegung und Eigenfrequenzen

Die Bewegung eines gespeicherten Teilchens in einer idealen Penning-Falle wird durch das Newtonsche Axiom $\vec{F} = m\vec{a}$, bei dem \vec{F} die Lorentzkraft (siehe Gleichung (2.8)) ist, vollständig beschrieben. In kartesischen Koordinaten folgt:

$$m\ddot{\vec{x}} = e \left[-\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right] = e \left[\frac{V_0}{2d^2} (x\hat{x} + y\hat{y} - 2z\hat{z}) + B_0 (\hat{y}\hat{x} - \hat{x}\hat{y}) \right] \quad (2.14)$$

Aus Gründen der Klarheit kann die Vektorgleichung (2.14) komponentenweise geschrieben werden:

$$\ddot{x} - \omega_c \dot{y} - \frac{\omega_z^2}{2} x = 0 \quad (2.15)$$

$$\ddot{y} + \omega_c \dot{x} - \frac{\omega_z^2}{2} y = 0 \quad (2.16)$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 \quad (2.17)$$

Hierbei bezeichnet $\omega_c = \frac{e}{m}B_0$ die freie Zyklotronfrequenz gemäß der Gleichung (2.6). Ferner wurde

$$\omega_z = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}} \quad (2.18)$$

eingeführt. Betrachtet man die Bewegungsgleichung für die z -Richtung (2.17), so erkennt man, dass diese der Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators entspricht, deren Lösung

$$z(t) = \sqrt{\frac{2E_z}{m\omega_z^2}} \sin(\omega_z t + \vartheta_z) \quad (2.19)$$

lautet. Demnach steht $\omega_z = 2\pi\nu_z$ für die Kreisfrequenz der harmonischen Schwingung des Teilchens entlang der z -Achse, die von nun an als *Axialfrequenz* bezeichnet wird. In Gleichung (2.19) stellt E_z die Energie des harmonischen Oszillators dar.

Wie deutlich aus den Bewegungsgleichungen (2.15), (2.16) und (2.17) zu erkennen ist, ist die Schwingung in der z -Richtung von den x - und y -Koordinaten unabhängig, während die Bewegung in der Radialebene durch ein System gekoppelter Differentialgleichungen beschrieben wird. Mit Hilfe der Koordinatentransformation [88]³:

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) & x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u_+ + iu_-) \\ & \implies & & \\ u_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y - ix) & y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u_- + iu_+) \end{aligned} \quad (2.20)$$

können die Gleichungen (2.15) und (2.16) entkoppelt werden. Somit erhält man

$$\ddot{u}_+ - i\omega_c \dot{u}_+ - \frac{\omega_z^2}{2} u_+ = 0 \quad (2.21)$$

$$\ddot{u}_- + i\omega_c \dot{u}_- - \frac{\omega_z^2}{2} u_- = 0 \quad , \quad (2.22)$$

welche den Gleichungen zweier gedämpfter harmonischer Schwingungen entsprechen, deren Dämpfungskonstanten ($\mp i\omega_c$) rein imaginär sind. Setzt man den Lösungsansatz $u_{\pm}(t) = e^{\xi t}$ in die Gleichungen (2.21) und (2.22) ein, so führt dies zu der charakteristischen Polynomfunktion für ξ :

$$\xi^2 \mp i\omega_c \xi - \frac{\omega_z^2}{2} = 0 \quad , \quad (2.23)$$

deren Wurzeln die Eigenfrequenzen der radialen Bewegungen liefern, nämlich

$$\xi_{\pm} = \pm i \left[\frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \right] = \pm i\omega_{\pm} \quad . \quad (2.24)$$

³Weitere mögliche Lösungsmethoden werden in [54, 59] in allen Einzelheiten präsentiert.

Dabei ist

$$\omega_+ = 2\pi\nu_+ = \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \quad (2.25)$$

die sogenannte *modifizierte Zyklotronfrequenz* und

$$\omega_- = 2\pi\nu_- = \frac{\omega_c}{2} - \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \quad (2.26)$$

die *Magnetronfrequenz*. Die Lösungen der Gleichungen (2.21) und (2.22) werden daher unmittelbar durch

$$u_+(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t} \quad (2.27)$$

$$u_-(t) = C_3 e^{-i\omega_+ t} + C_4 e^{-i\omega_- t} \quad (2.28)$$

gegeben, wobei C_1, C_2, C_3 und C_4 komplexe Konstanten sind. Schließlich erhält man mittels einer Rücktransformation gemäß (2.20) in kartesischen Koordinaten

$$x(t) = \rho_+ \sin(\omega_+ t + \vartheta_+) + \rho_- \sin(\omega_- t + \vartheta_-) \quad (2.29)$$

$$y(t) = \rho_+ \cos(\omega_+ t + \vartheta_+) + \rho_- \cos(\omega_- t + \vartheta_-) \quad (2.30)$$

Hierbei handelt es sich um die Überlagerung von zwei unabhängigen Kreisbewegungen, deren Frequenzen und Radien als ω_{\pm} beziehungsweise ρ_{\pm} bezeichnet werden. Die kombinierte Radialbewegung bildet eine Epizykloide in der xy -Ebene, die zusammen mit der durch die Gleichung (2.19) definierten axialen Schwingung die Bewegung eines geladenen Teilchens in einer idealen Penning Falle vollständig darstellt. Unter typische Betriebsbedingungen gilt [54]:

$$\omega_- \ll \omega_z \ll \omega_+ \quad (2.31)$$

Weitere nützliche Beziehungen zwischen den Eigenfrequenzen bzw. zwischen diesen und der freien Zyklotronfrequenz können direkt aus Gleichungen (2.25) und (2.26) abgeleitet werden:

$$\omega_z^2 = 2\omega_+ \omega_- \quad (2.32)$$

$$\omega_c = \omega_+ + \omega_- \quad (2.33)$$

$$\omega_c^2 = \omega_+^2 + \omega_-^2 + \omega_z^2 \quad (2.34)$$

Diese suggerieren, dass die freie Zyklotronfrequenz, die nicht als Eigenfrequenz auftritt, unmittelbar aus den messbaren Eigenfrequenzen berechnet werden kann. Diesbezüglich ist die Gleichung (2.34) besonders wichtig, da sie, im Gegensatz zu den anderen beiden, trotz einigen spezifischen Fallenfehlern gilt. Dies wird in Abschnitt 2.2.2 diskutiert.

Damit eine stabile Speicherung in allen Richtungen gewährleistet ist, müssen die aus Gleichungen (2.18), (2.25) bzw. (2.26) hervorgegangenen Bedingungen

$$\omega_c^2 > 2\omega_z^2 \Rightarrow \frac{|e|}{m} B_0^2 > 2 \frac{|V_0|}{d^2} \quad \text{und} \quad (2.35)$$

$$eV_0 > 0 \quad (2.36)$$

erfüllt werden.

in Abbildung 2.2 werden die Eigenbewegungen mit Hilfe einer nicht maßstabgetreuen Skizze veranschaulicht. Die axiale Bewegung ist vollkommen unabhängig vom Magnetfeld

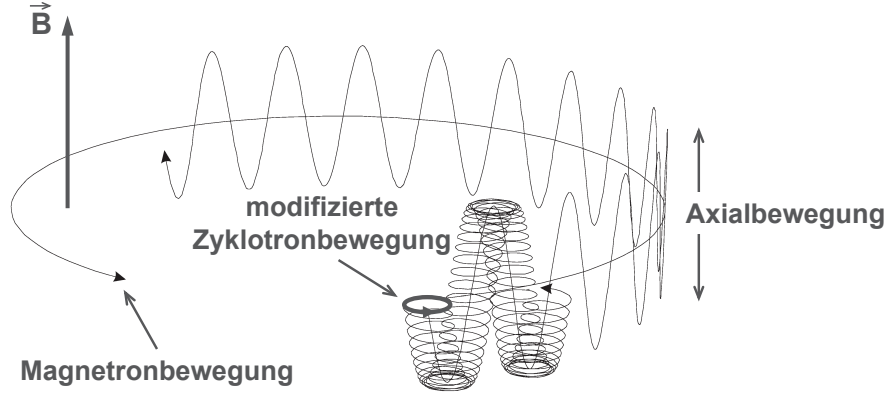


Abbildung 2.2.: Übersichtliche Darstellung der Bewegung eines geladenen Teilchens in einer idealen Penning-Falle. Diese resultiert aus der Überlagerung von drei voneinander entkoppelten Eigenbewegungen: eine harmonische Schwingung entlang der axialen Richtung, eine $\vec{E} \times \vec{B}$ langsame Driftbewegung oder Magnetronbewegung und die modifizierte Zyklotronbewegung. Die Verhältnisse in der Abbildung sind nicht maßstabgerecht.

und lässt sich auf die harmonische Oszillation des Teilchens in Anwesenheit des elektrostatischen Feldes $\vec{E}(z) = -\frac{V_0}{d^2}z\hat{z}$ zurückzuführen. Die Tiefe des Potentials und somit die Axialfrequenz hängt sowohl von den geometrischen Eigenschaften der Falle als auch von der an den Elektroden angelegten Spannung ab. Die radiale nach außen gerichtete Feldkomponente $\vec{E}(\rho) = \frac{V_0}{2d^2}\rho\hat{\rho}$ ⁴ bewirkt zum einen die Verringerung der Zyklotronfrequenz von ω_c auf ω_+ , woraus die modifizierte Zyklotronbewegung resultiert, und zum anderen die Entstehung einer $\vec{E} \times \vec{B}$ Driftbewegung, da das Teilchen aufgrund dieser Feldkomponente in Richtung der Ringelektrode gezogen wird, wodurch eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld entsteht. Dies führt zu der langsameren Magnetronbewegung, über deren Kreisbahn die modifizierte Zyklotronbewegung überlagert ist.

Die Energie der Eigenbewegungen setzt sich aus der kinetischen und der elektrostati-

⁴In Zylinderkoordinaten folgt:

$$\vec{E} = \frac{V_0}{d^2} \left(\frac{\rho}{2} \hat{\rho} - z \hat{z} \right) \quad \dot{\vec{\rho}} \times \vec{B} = B_0 (\rho \dot{\varphi} \hat{\rho} - \dot{\rho} \hat{\varphi}) \quad .$$

$$\text{da } \dot{\vec{\rho}} = (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z}) \text{ und } \ddot{\vec{\rho}} = [(\ddot{\rho} - r\dot{\varphi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{z}] \quad .$$

schen potentiellen Energie zusammen. Es folgt:

$$E_z = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad , \quad (2.37)$$

$$E_+ = \frac{1}{2}m\omega_+^2 \rho_+^2 - \frac{1}{4}m\omega_z^2 \rho_+^2 \quad , \quad (2.38)$$

$$E_- = \frac{1}{2}m\omega_-^2 \rho_-^2 - \frac{1}{4}m\omega_z^2 \rho_-^2 \quad . \quad (2.39)$$

Bei der axialen Oszillation findet ein dauernder Wechsel zwischen potentieller und kinetischer Energie statt, während, der Beziehung (2.31) und der Gleichung (2.38) zufolge, die Zyklotronenergie überwiegend aus kinetischer Energie besteht. Dementsprechend sind beide Bewegungen stabil, da eine Verringerung der Energie eine Abnahme der Bewegungsamplitude bewirkt. Bei der Magnetronbewegung hingegen besteht die Energie hauptsächlich aus potentieller Energie, was zur Folge hat, dass sich der Magnetronradius mit der Verringerung der Magnetronenergie erhöht. Die Magnetronbewegung kann durch eine Umlaufbahn um die Spitze eines Potentialbergs veranschaulicht werden. Dennoch ist diese metastabil. Werden sonstige Verlustquellen vermieden, so ist der Energieverlust aufgrund der Synchrotronstrahlung unerheblich, da die Dämpfungskonstante für die Magnetronbewegung, $\gamma_- = \frac{4e^2}{3mc^3} \frac{\omega_-^3}{\omega_+ - \omega_-}$ [54], einer Dämpfungszeit in der Größenordnung von 10^9 Jahren entspricht.

Unterschiedliche quantenmechanische Behandlungen des Problems der Bewegung eines geladenen Teilchens im idealen elektromagnetischen Feld einer Penning-Falle werden in [54, 60, 89–91] eingehend diskutiert. Da es sich bei der Bewegungsgleichungen im Wesentlichen um harmonische Oszillatoren handelt, die voneinander entkoppelt sind, folgt aus der quantenmechanischen Beschreibung

$$\begin{aligned} E &= E_+ + E_z + E_- + E_s \quad \Rightarrow \\ E &= \hbar\omega_+ \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega_- \left(n_- + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_L m_s \quad . \quad (2.40) \end{aligned}$$

Gleichung (2.40) liefert die Gesamtenergie des Systems, wobei der Spin im letzten Term mitberücksichtigt worden ist. Hierbei beschreiben die Quantenzahlen n_+ , n_z und n_- die Zyklotron-, Axial- bzw. Magnetron-Eigenzustände, während m_s die magnetische Spinquantenzahl und ω_L die Larmorfrequenz (siehe Gleichung (2.2) bzw. (2.4)) bezeichnen. Das entsprechende (nicht maßstabgerechte) Energieniveauschema ist in Abbildung 2.3 gezeigt.

Die experimentellen Werte für die Eigenfrequenzen und die Larmorfrequenz eines Protons in unserer Doppel-Penning-Falle⁵ sowie die Energie eines Quantensprungs jeweils in jeder Eigenbewegung werden in der Tabelle 2.1 zusammengefasst.

⁵Die Doppel-Penning-Falle, die in dieser Arbeit noch ausführlich beschrieben wird, besteht aus zwei räumlich von einander getrennten zylindrischen Penning-Fallen, die Analysefalle und die Präzisionsfalle.

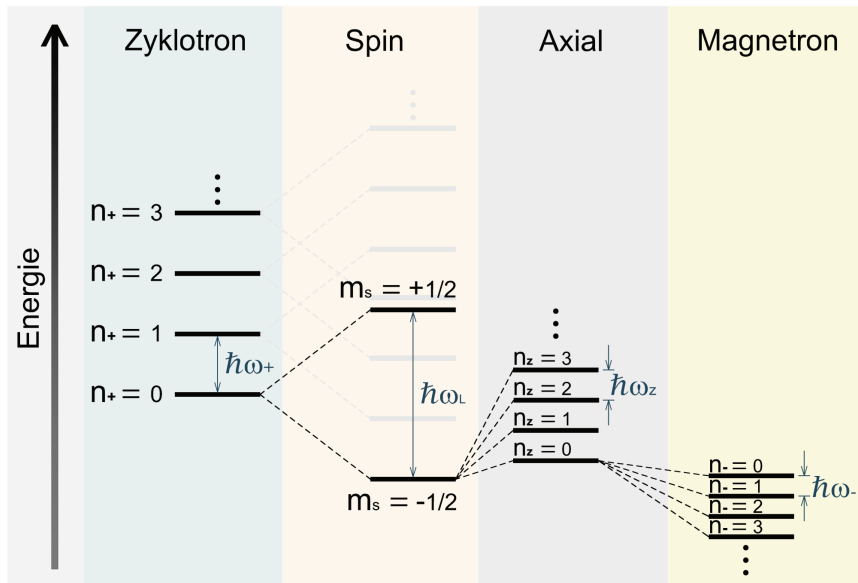


Abbildung 2.3.: Energieniveauschema eines geladenen Spin-1/2-Teilchens in einer idealen Penning-Falle. Die Abstände zwischen den Energieniveaus sind nicht maßstabgetreu. Zu beachten ist die umgekehrte Reihenfolge der Energieniveaus der Magnetronbewegung.

2.2.2. Die reale Penning-Falle

Die mathematische Beschreibung der Bewegung eines Teilchens in einer idealen Penning-Falle basiert auf Gleichungen (2.11) und (2.13), die ein homogenes Magnetfeld bzw. ein reines Quadrupolpotential voraussetzen. In der Praxis lässt sich eine solche Kombination von Feldern lediglich näherungsweise realisieren. Dies hängt unter anderem mit den unvermeidbaren mechanischen Fertigungstoleranzen bei der Herstellung realer aus Kupfer bestehender Elektroden zusammen, die verständlicherweise auch keine unendlich ausgedehnten und einwandfreien Oberflächen darstellen. Ferner werden geteilte Elektroden sowie Spalte zwischen den Elektroden benötigt, damit bestimmte Anregungen und Kopplungen der Eigenbewegungen durch Radiofrequenzfelder durchgeführt werden können. Überdies ist das äußere Magnetfeld, das von einem supraleitenden Magnet erzeugt wird, nicht vollkommen homogen. Beim Zusammenbau der Fallenelektroden treten zusätzlich noch Ausrichtungsfehlern der Elektrodenachsen sowohl relativ zueinander als auch zum externen Magnetfeld auf. Darüber hinaus müssen für eine vollständige und korrekte Beschreibung der Teilchenbewegung relativistische Effekte berücksichtigt werden.

Das elektrostatische Potential in einer realen Penning-Falle kann also bedeutend vom gewünschten harmonischen Potential der Gleichung (2.13) abweichen, was zusammen mit eventuellen Inhomogenitäten des Magnetfeldes dazu führt, dass die Eigenfrequenzen des Teilchens nun nicht nur von der Feldstärken sondern auch von den Bewegungsenergien abhängen. Die unterschiedlichen Fallenfehler lassen sich in vier Gruppen je nach ihren Auswirkungen auf die Messgenauigkeit bei der Bestimmung des g -Faktors unterteilen. Diese

Fälle	Moden	Frequenzen			Energieaufspaltungen		
PF	Zyklotron	ν_+	=	28.97 MHz	$\hbar\omega_+$	=	1.20×10^{-7} eV
PF	Axial	ν_z	=	694.37 kHz	$\hbar\omega_z$	=	2.87×10^{-9} eV
PF	Magnetron	ν_-	=	8.32 kHz	$\hbar\omega_-$	=	3.44×10^{-11} eV
PF	Spin	ν_L	=	80.92 MHz	$\hbar\omega_s$	=	3.35×10^{-7} eV
AF	Zyklotron	ν_+	=	17.91 MHz	$\hbar\omega_+$	=	7.41×10^{-8} eV
AF	Axial	ν_z	=	674.35 kHz	$\hbar\omega_z$	=	2.79×10^{-9} eV
AF	Magnetron	ν_-	=	12.90 kHz	$\hbar\omega_-$	=	5.33×10^{-11} eV
AF	Spin	ν_L	=	50.06 MHz	$\hbar\omega_s$	=	2.07×10^{-7} eV

Tabelle 2.1.: Typische Eigenfrequenzen und Energien eines Quantensprungs in jeder Bewegungsmode eines Protons in der Doppel-Penning-Falle (siehe Abschnitt 2.6). Hierbei steht PF für Präzisionsfalle und AF für Analysefalle, die beiden zylindrischen Penning-Fallen, die zur Bestimmung des g -Faktors benötigt werden.

sind: die *anharmonischen elektrischen Potentialanteile*, die *Magnetfeld-Inhomogenitäten*, die *Elliptizität des elektrostatischen Potentials* und die *Verkipfung der Achsen*. Die Abweichungen des elektrostatischen Feldes vom idealen Quadrupolfeld modifizieren die in Abbildung 2.3 gezeigte Energieaufspaltung, während inhomogene Magnetfeldkomponenten zur Limitierung der Messgenauigkeit führen können, da dies eine Erhöhung der Linibreite sowohl der Zyklotron- als auch der Larmorresonanz zur Folge hat. Die Elliptizität und die Verkipfung dagegen müssen nach dem am Ende dieses Abschnittes präsentierten Theorems, das die Invarianz der Gleichung (2.34) gegenüber solchen Fallenfehler besagt, bezüglich der Berechnung der freien Zyklotronfrequenz nicht berücksichtigt werden.

Das anharmonische Speicherpotential

Das reine Quadrupolpotential in Gleichung (2.13) kann nicht von realen Elektroden erzeugt werden. Um eine quantitative Beschreibung des Potentials zu erhalten, wird dieses durch eine Reihenentwicklung ausgedrückt, welche der für die zugehörigen Randbedingungen passenden Lösung der Laplace-Gleichung (2.10) entspricht [92]. Dabei wird das geeignete Koordinatensystem durch die Symmetrie der Randbedingungen bestimmt. Von nun an wird auf die auf einer hyperbolischen Geometrie beruhende Beschreibung verzichtet, da in dem hier beschriebenen Experiment stattdessen zylinderförmige Fallenelektroden verwendet werden. Damit die Äquivalenz zu der hyperbolischen Falle dennoch leicht hergestellt werden kann, wird eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen, wie ausführlich in [54, 57, 58] beschrieben, zunächst bevorzugt. Demnach kann das Potential nahe dem Fallenzentrum durch

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\substack{k=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \tilde{C}_k \left(\frac{r}{d}\right)^k P_k(\cos \theta) \quad (2.41)$$

gegeben werden. Dies entspricht der Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) , wenn Rotationssymmetrie um die z -Achse vorhanden ist. Dabei wird d genau so wie bei der hyperbolischen Falle durch $d^2 = \frac{1}{2} \left(z_0^2 + \frac{\rho_0^2}{2} \right)$ definiert, wobei abermals z_0 und ρ_0 den kürzesten Abstand zwischen dem Fallenzentrum und den Endkappen bzw. zwischen dem Fallenzentrum und der Ringelektrode bezeichnen. Ferner ist $r \ll d$, da das Teilchen üblicherweise auf einen kleinen Bereich um das Fallenzentrum beschränkt wird. Gleichung (2.41) hebt die direkte Vergleichbarkeit mit einer hyperbolischen Falle hervor, wie in [54, 57] (siehe auch [55, 56]) gezeigt wird. Darüber hinaus unterscheidet sich die folgende Analyse der Auswirkungen eines anharmonischen elektrischen Potentials auf die Eigenfrequenzen qualitativ nicht von derjenigen im Fall einer hyperbolischen Geometrie.

In Gleichung (2.41) stehen \tilde{C}_k für dimensionslose Koeffizienten, die den Beitrag der Legendre-Polynome P_k zum Potential quantifizieren. Dabei sind die Terme niedrigerer Ordnung am relevantesten, da $r \ll d$. Das ideale Quadrupolpotential wird durch ($\tilde{C}_2 = 1$ und $\tilde{C}_{k \neq 2} = 0$) wiedergegeben. Der Koeffizient \tilde{C}_0 stellt eine globale Konstante dar, die die Bewegung des Teilchens nicht beeinflusst. Demzufolge muss dieser nicht näher betrachtet werden. Der Koeffizient \tilde{C}_2 bestimmt den relativen Anteil des Quadrupols am Gesamtpotential. In einer realen Penning-Falle ist $\tilde{C}_2 < 1$. Betrachtet man nun die Entwicklung in Gleichung (2.41) zunächst entlang der z -Achse, so folgt, in Zylinderkoordinaten:

$$\phi(\rho = 0, z) = \frac{1}{2} V_0 \left[\tilde{C}_2 \left(\frac{z}{d} \right)^2 + \tilde{C}_4 \left(\frac{z}{d} \right)^4 + \tilde{C}_6 \left(\frac{z}{d} \right)^6 + \dots \right] \quad (2.42)$$

Die Bewegungsgleichung (2.17) in der axialen Richtung wird dementsprechend modifiziert gemäß

$$\begin{aligned} F_z &= -e \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \Rightarrow \\ \ddot{z} &= -\frac{eV_0}{m} z \left[\frac{\tilde{C}_2}{d^2} + \frac{2\tilde{C}_4}{d^4} \left(\frac{2d^2}{eV_0} E_z \right) + \frac{3\tilde{C}_6}{d^6} \left(\frac{2d^2}{eV_0} E_z \right)^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

wobei z^2 gemäß Gleichung (2.37) als Funktion der axialen Energie E_z dargestellt wird. In niedrigster Ordnung wird die axiale Frequenz in Gleichung (2.18) nun durch

$$\omega_z = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2} \tilde{C}_2} \quad (2.44)$$

gegeben. Die beiden nächsten geraden Potentialterme \tilde{C}_4 und \tilde{C}_6 sind am relevantesten, da diese eine höchst unerwünschte energieabhängige Frequenzverschiebung bewirken. Diese zusätzlichen nichtlinearen Terme stellen einen anharmonischen Beitrag zum Potential dar, wobei der Effekt von $\tilde{C}_6 \neq 0$ um einen Faktor $\left(\frac{r}{d}\right)^2$ weniger signifikant ist als der von $\tilde{C}_4 \neq 0$ für ein Teilchen nahe dem Fallenzentrum. Bei der axialen Schwingung führt dies zu einer Frequenzverschiebung gemäß [57]

$$\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = \frac{3}{2} \left[\frac{\tilde{C}_4}{\tilde{C}_2^2} + \frac{5}{2} \frac{\tilde{C}_6}{\tilde{C}_2^3} \left(\frac{E_z}{eV_0} \right) \right] \frac{E_z}{eV_0} \quad (2.45)$$

In der Regel werden Penning-Fallen für hochpräzise Messungen so entworfen, dass Spiegelsymmetrie bezüglich der ($z = 0$)-Ebene gewährleistet ist. Infolgedessen sind die Koeffizienten der ungeraden Terme $\tilde{C}_{k=1,3,5\dots}$ im Idealfall vernachlässigbar. Nichtsdestotrotz findet der Effekt von antisymmetrischen Potentialtermen niedrigerer Ordnung eine praktische Anwendung, da dies die Verschiebung der Gleichgewichtslage der Axialschwingung zur Folge hat. Dadurch kann die Position des Teilchens in der Falle variiert werden, was zur Bestimmung des räumlichen Magnetfeldverlaufs eingesetzt werden kann. Bricht man die Spiegelsymmetrie der Randbedingungen durch das Anlegen einer antisymmetrischen Spannung V_A an den Endkappen ($\frac{1}{2}V_A$ an die obere und $-\frac{1}{2}V_A$ an die untere Endkappe), so wird das Potential um dem Anteil

$$\Delta\phi(r, \theta) = V_A\varphi_A(r, \theta) = \frac{1}{2}V_A \sum_{\substack{k=0 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \tilde{c}_k \left(\frac{r}{z_0}\right)^k P_k(\cos\theta) \quad (2.46)$$

ergänzt. Dabei ist $\varphi_A(r, \theta)$ mit $\varphi_A(-z) = -\varphi_A(z)$ die Lösung der Laplace-Gleichung für die antisymmetrischen Randbedingungen. Der lineare Anteil des Potentials in Gleichung (2.46) bildet ein homogenes elektrisches Feld, was zu einer zusätzlichen auf das Teilchen wirkenden konstanten Kraft führt. Somit verschiebt sich das Zentrum der Axialschwingung um [54, 56–58]:

$$\Delta z = \left(\frac{d^2}{2z_0}\right) \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{C}_2} \left(\frac{V_A}{V_0}\right) \quad (2.47)$$

Das Hinzufügen eines antisymmetrischen Potentials bewirkt eine Frequenzverschiebung gemäß

$$\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = -\frac{3}{4} \left(\frac{d}{z_0}\right)^4 \tilde{c}_1 \tilde{c}_3 \left(\frac{V_A}{V_0}\right)^2 \quad (2.48)$$

und kann durch \tilde{c}_3 ebenfalls zu einer energieabhängigen Verschiebung der Axialfrequenz führen. Wird dieser Effekt berücksichtigt, so kann die Gleichung (2.45) zu

$$\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = \frac{3}{2} \left[\frac{\tilde{C}_4}{\tilde{C}_2^2} + \frac{5}{2} \frac{\tilde{C}_6}{\tilde{C}_2^3} \left(\frac{E_z}{eV_0}\right) - \frac{5}{4} \frac{\tilde{c}_3^2}{\tilde{C}_2^2} \left(\frac{V_A}{V_0}\right)^2 \right] \frac{E_z}{eV_0} \quad (2.49)$$

ergänzt werden. In [54] wird die Untersuchung der Auswirkung der dominierenden Störung, nämlich des elektrischen Oktupols der Form

$$\Delta\phi = \frac{1}{2}V_0\tilde{C}_4 \left(\frac{r}{d}\right)^4 P_4(\cos\theta) = \frac{1}{2}V_0\tilde{C}_4 \frac{(z^4 - 3z^2\rho^2 + 3\rho^4/8)}{d^4} \quad (2.50)$$

auf die Eigenfrequenzen verallgemeinert. Mithilfe eines auf Störungstheorie erster Ordnung basierten Vorgehens werden die Frequenzverschiebungen berechnet. Im klassischen

Grenzfall ⁶ gilt:

$$\begin{pmatrix} \Delta\omega_+/\omega_+ \\ \Delta\omega_z/\omega_z \\ \Delta\omega_-/\omega_- \\ \Delta\omega_L/\omega_L \end{pmatrix} = \frac{6\tilde{C}_4}{eV_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^4 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 & -\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 & \frac{1}{4} & 1 \\ -\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_z \\ E_- \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Eine solche Abhängigkeit der Eigenfrequenzen steht der Erfüllung der erforderlichen Voraussetzungen für hoch präzise Messungen entgegen. Die elektrostatische Störung in Gleichung (2.50) ist für die Zyklotronbewegung offensichtlich von geringerer Bedeutung als für die Axial- und Magnetronbewegungen. Wie im Laufe dieser Arbeit noch ersichtlich sein wird, ist besonders bei der axialen Bewegung von grundlegender Bedeutung, dass diese von allem, was die Stabilität der Axialfrequenz gefährden könnte, entkoppelt wird. Die axiale Frequenzverschiebung als Funktion der Energien der Eigenbewegungen wird nach der Gleichung (2.51) durch

$$\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = \frac{6\tilde{C}_4}{eV_0} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 E_+ + \frac{1}{4} E_z + E_- \right) \quad (2.52)$$

gegeben. Die Größe des Koeffizienten \tilde{C}_4 bestimmt also, wie empfindlich die zu messende Frequenz auf Energieänderungen reagiert wird. Daher ist dringend darauf zu achten, dass die anharmonischen Potentialterme möglichst vollständig unterdrückt werden. In Abschnitt 2.2.2 und in Kapitel 4 wird näher darauf eingegangen, wie in einer zylindrischen Penning-Falle erreicht werden kann, dass sowohl \tilde{C}_4 als auch \tilde{C}_6 eliminiert werden.

Inhomogenitäten des Magnetfeldes

Es gibt viele Gründe, die die Annahme rechtfertigen, dass das Magnetfeld am Ort des in einer realen Penning-Falle gespeicherten Teilchens vom idealen homogenen Feld gemäß Gleichung (2.11) abweicht. Obwohl die supraleitenden Magnete, die üblicherweise bei Penning-Fallen-Experimenten eingesetzt werden, hohe Feldhomogenitäten aufweisen, besitzt das erzeugte Magnetfeld sowohl eine Ortsabhängigkeit als auch eine radiale Komponente. Diesbezüglich wird in [88] eine sorgfältige Untersuchung durchgeführt, die auf der Berechnung des Magnetfeldes einer Spule endlicher Länge mit anschließender Modellierung des experimentellen Magnetfeldverlaufs der supraleitenden Spule basiert. Dennoch dominiert am Ort der Falle die Inhomogenität, die aufgrund der Magnetisierung der in den Magnet eingebrachten Fallenelektroden und sonstigen Komponenten entsteht.

⁶Nicht nur im Fall der Störung aufgrund der Anharmonizität des Potentials sondern auch von magnetischen Inhomogenitäten (Gleichung (2.60)) und relativistischen Korrekturen (Gleichung (2.61)) werden die hervorgerufenen Frequenzverschiebungen im klassischen Grenzfall betrachtet [54]. Dies wird dadurch gerechtfertigt, dass diese Verschiebungen sich in der Regel erst für große Quantenzahlen beobachten lassen.

Nach den Maxwell-Gleichungen gilt für das Magnetfeld innerhalb des Fallenvolumens die Beziehung $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, weswegen dieses als der Gradient eines magnetischen Skalarpotentials gemäß

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \phi_M(\vec{r}) \quad (2.53)$$

geschrieben werden kann. Da $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, erfüllt ϕ_M die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi_M(\vec{r}) = 0 \quad , \quad (2.54)$$

deren Lösung durch die Multipolentwicklung

$$\begin{aligned} \phi_M(r, \theta) &= \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} B_{i-1} r^i P_i(\cos \theta) \Rightarrow \\ \phi_M(\rho, z) &= B_0 z + B_1 \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4} \rho^2 \right) + B_2 \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z \rho^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.55)$$

gegeben werden kann⁷, vorausgesetzt, dass axiale Symmetrie vorliegt. Aus dem Gradient des Potentials in Gleichung (2.53) folgt [54]:

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} B_i r^i \left[P_i(\cos \theta) \hat{z} - (i+1)^{-1} P_i^1(\cos \theta) \hat{\rho} \right] \Rightarrow \\ B_\rho &= -B_1 \frac{1}{2} \rho - B_2 z \rho + \dots \quad , \\ B_\varphi &= 0 \quad , \\ B_z &= B_0 + B_1 z + B_2 \left(z^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) + \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.56)$$

wobei $P_i^1(\cos \theta) = \sin \theta \frac{dP_i(\cos \theta)}{d \cos \theta}$. Nimmt man nun an, dass die Feldinhomogenität aufgrund eines absichtlichen Einbringens von ferromagnetischem Material in das Magnetfeld zustande gekommen ist, und dass die Anordnung dieses Materials um das Fallenzentrum sowohl Rotationssymmetrie um die z -Achse als auch Spiegelsymmetrie bezüglich der ($z = 0$)-Ebene aufweist, so folgt, dass in Gleichung (2.56) $B_1 = 0$ ist. Somit wird der inhomogene Anteil des resultierenden Magnetfeldes durch den Term zweiter Ordnung

$$\vec{B}_F = B_2 \left[\left(z^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \hat{z} - z \rho \hat{\rho} \right] \quad (2.57)$$

gegeben. Dieser wird von nun an *magnetische Flasche* genannt. Auf der so entstandenen Inhomogenität des Magnetfeldes beruht, wie in Abschnitt 2.5 diskutiert, die Methode zur Bestimmung der Larmorfrequenz des Protons.

Wird dem idealen homogenen Magnetfeld in Gleichung (2.11) der inhomogene Anteil in Gleichung (2.57) zugefügt, so werden die Eigenfrequenzen entsprechend modifiziert.

⁷Dabei wurden die Beziehungen $r^2 = \rho^2 + z^2$, $\sin \theta = \rho/r$ und $\cos \theta = z/r$, die den Zusammenhang zwischen Kugel- und Zylinderkoordinaten darstellen, verwendet.

Ähnlich wie bei den anharmonischen Termen des elektrostatischen Potentials führt eine solche Inhomogenität des Magnetfeldes zu einer Energieabhängigkeit der Eigenfrequenzen. Die Auswirkung dieser Störung auf die Eigenbewegungen wurde in [54] eingehend untersucht. Demnach ergeben sich aus der Störungsrechnung erster Ordnung die Energieeigenzustände:

$$\begin{aligned} \Delta E(n_+, n_z, n_-, m_s) = & \\ = \frac{\hbar^2 \omega_+ B_2}{m \omega_z B_0} & \left\{ \left[n_z + \frac{1}{2} - \frac{\omega_z (n_+ + n_- + 1)}{2(\omega_+ - \omega_-)} \right] \left[n_+ + \frac{1}{2} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \left(n_- + \frac{1}{2} \right) \right] \right. \\ & - \frac{\omega_z \omega_c}{2\omega_+(\omega_+ - \omega_-)} \left[\left(n_+ + \frac{1}{2} \right) \left(n_- + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \right] \\ & \left. + \frac{g m_s}{2} \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+} \left[n_z + \frac{1}{2} - \frac{\omega_z}{\omega_+ - \omega_-} (n_+ + n_- + 1) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Die entsprechenden Frequenzverschiebungen lassen sich durch die Differenz benachbarter Energieniveaus ermitteln. Nimmt man als Beispiel die axiale Frequenz, so folgt aus $\hbar \delta \omega_z = \Delta E(n_+, n_z + 1, n_-, m_s) - \Delta E(n_+, n_z, n_-, m_s)$

$$\delta \omega_z(n_+, n_-, m_s) = \frac{\hbar \omega_+ B_2}{m \omega_z B_0} \left(n_+ + \frac{1}{2} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \left(n_- + \frac{1}{2} \right) + \frac{g m_s}{2} \right) . \quad (2.59)$$

Dabei wurde angenommen, dass $\omega_+ \gg \omega_-$. In Gegenwart einer magnetischen Flasche werden also sowohl der Spin als auch die Zyklotron- bzw. die Magnetronbewegung an die axiale Schwingung gekoppelt. Demzufolge macht sich ein Übergang zwischen den Energieniveaus der radialen Bewegungen sowie zwischen den Spineigenzuständen als ein Sprung in der axialen Frequenz bemerkbar. Wie diese Kopplung zustande kommt lässt sich durch die potentielle Energie $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, welche von den sowohl den radialen Bewegungen als auch dem Spin zuzuordnenden magnetischen Momenten hervorgerufen wird, erklären (siehe auch Abschnitt 2.5).

Im klassischen Grenzfall kann die Abhängigkeit der Frequenzverschiebungen von den Energien in einer magnetischen Flasche gemäß Gleichung (2.58) in der vereinfachten Form einer Matrix zusammengefasst werden [54]:

$$\begin{pmatrix} \Delta \omega_+ / \omega_+ \\ \Delta \omega_z / \omega_z \\ \Delta \omega_- / \omega_- \\ \Delta \omega_L / \omega_L \end{pmatrix} = \frac{B_2}{B_0} \frac{1}{m_p \omega_z^2} \begin{pmatrix} -\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_z \\ E_- \end{pmatrix} . \quad (2.60)$$

Relativistische Korrekturen

Die durch die Teilchengeschwindigkeit v bedingte relativistische Massenzunahme

$$\Delta m = m' - m = m \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] = \frac{E_{\text{Kin}}}{c^2} ,$$

wobei $v^2/c^2 \ll 1$ und E_{Kin} die kinetische Energie ist, führt zu Verschiebungen der Eigenfrequenzen des Teilchens in der Penning-Falle. So beträgt zum Beispiel die relativistische Verschiebung für den Fall der Zyklotronbewegung des Protons, deren Frequenz umgekehrt proportional zur Masse ist,

$$\frac{\Delta\omega_+}{\omega_+} \simeq -\frac{E_+}{m_p c^2} \quad .$$

Im klassischen Grenzfall lassen sich die von der speziellen Relativitätstheorie vorhergesagten Änderungen der Eigenbewegungen des Teilchens in der Form einer Matrix [54]

$$\begin{pmatrix} \Delta\omega_+/\omega_+ \\ \Delta\omega_z/\omega_z \\ \Delta\omega_-/\omega_- \\ \Delta\omega_L/\omega_L \end{pmatrix} = -\frac{1}{m_p c^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 \\ -\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 & -\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 & \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^4 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_z \\ E_- \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

zusammenfassen, wobei hier die Beziehung (2.31) zur Vereinfachung verwendet worden ist. Das Ausmaß der relativistischen Korrekturen lässt sich, im Gegensatz zu den Effekten von magnetischen Inhomogenitäten und der Anharmonizität des Speicherpotentials, experimentell nicht beeinflussen, sondern der Skalierungsfaktor $-\frac{1}{m_p c^2} \approx -7 \times 10^9 \text{ J}^{-1}$ stellt einen fest definierten Wert dar. Aufgrund des niedrigen Anteils kinetischer Energie in der Magnetronbewegung (siehe Gleichung 2.39), sind die entsprechenden Beiträge zu den Frequenzverschiebungen ausweislich des Verhältnisses $\left(\frac{\omega_z}{\omega_+}\right)^2$ sehr gering.

Das Invarianztheorem

Die am Anfang dieses Abschnittes aufgeführten Abweichungen von der idealen Penning-Falle können auf unterschiedliche Weise Verschiebungen der Bewegungsfrequenzen des Teilchens in der Falle hervorrufen. Da die Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz mit höchst möglicher Präzision angestrebt wird, müssen die Ursachen von Kopplungen zwischen den Bewegungsmoden als auch die von energieabhängigen Frequenzverschiebungen unterdrückt werden. Eine Methode zur Minimierung anharmonischer Anteile des elektrostatischen Potentials wird in Abschnitt 2.2.2 präsentiert.

Eine Doppel-Penning-Falle ermöglicht die Verwendung einer magnetischen Flasche zur Bestimmung der Spinorientierung, ohne dass die zu messenden Eigenfrequenzen von der Inhomogenität des Magnetfelds beeinflusst werden, wie in Abschnitt 2.5 diskutiert wird. Eine weitere Problemquelle wurde jedoch bisher noch nicht berücksichtigt, nämlich die Ausrichtung der Elektrodenachsen zueinander sowie die der Fallachse in Bezug auf die Magnetfeldrichtung. Zwangsläufig entstehen Verkippungen beim Stapeln der Elektroden und Einbringen des Fallturms in den supraleitenden Magnet. Außerdem führt die Brechung der Rotationssymmetrie aufgrund von Ausrichtungsfehlern, realen von der idealen Geometrie abweichenden Elektroden und eventuellen Kontaktspannungen auf den

Elektrodenoberflächen zu einer kleinen Verformung des Potentials, welche durch einen harmonischen asymmetrischen Quadrupolanteil dargestellt werden kann.

Brown und Gabrielse zeigen in [51] (siehe auch [54]), dass die Beziehung (2.34) auch gilt, wenn das elektrische und das magnetische Feld nicht dieselbe Symmetrieachse besitzen oder das elektrostatische Potential eine leicht elliptische Form aufweist. Die aufgrund solcher Abweichungen modifizierten Bewegungsgleichungen können, unter Berücksichtigung eines Potentials der Form

$$\phi(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} \left(z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\epsilon(x^2 - y^2) \right) \quad (2.62)$$

und des Magnetfeldes

$$\vec{B}(\theta, \varphi) = B(\sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}) \quad (2.63)$$

aufgestellt werden. Dabei quantifiziert der Elliptizitätsparameter ϵ die Stärke der harmonischen Korrektur, während θ und φ die Verkippungswinkeln bezeichnen. Aus dem Lösungsansatz für das erhaltene System gekoppelter linearer Differentialgleichungen folgt, unter anderem, die Beziehung:

$$\omega_c^2 = \tilde{\omega}_+^2 + \tilde{\omega}_z^2 + \tilde{\omega}_-^2 \quad . \quad (2.64)$$

Dabei sind $\tilde{\omega}_+ = 2\pi\tilde{\nu}_+$, $\tilde{\omega}_z = 2\pi\tilde{\nu}_z$ und $\tilde{\omega}_- = 2\pi\tilde{\nu}_-$ die experimentell zugänglichen Bewegungsfrequenzen in der betrachteten nicht idealen Falle. Die Gleichung (2.63) zeigt, dass die freie Zyklotronfrequenz aus der gemessenen Eigenfrequenzen exakt berechnet werden kann. Diese Beziehung wird *Invarianztheorem* genannt [51].

Aufgrund der Hierarchie der Eigenfrequenzen wird die absolute Genauigkeit bei der Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz hauptsächlich durch den Messfehler der modifizierten Zyklotronfrequenz bestimmt, da (siehe Gleichung (2.31) und Tabelle 2.1)

$$\begin{aligned} \Delta\nu_c &= \frac{\tilde{\nu}_+}{\nu_c} \Delta\tilde{\nu}_+ + \frac{\tilde{\nu}_z}{\nu_c} \Delta\tilde{\nu}_z + \frac{\tilde{\nu}_-}{\nu_c} \Delta\tilde{\nu}_- \\ &\simeq 0,99971\Delta\tilde{\nu}_+ + 0,02387\Delta\tilde{\nu}_z + 0,00029\Delta\tilde{\nu}_- \quad . \end{aligned} \quad (2.65)$$

Um die angestrebte relative Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} < 10^{-9}$ zu erreichen, genügt es, die modifizierte Zyklotronfrequenz mit einem Fehler $\Delta\tilde{\nu}_+ < 26$ mHz, die Axialfrequenz mit $\Delta\tilde{\nu}_z < 200$ mHz und die Magnetronfrequenz mit $\Delta\tilde{\nu}_- < 5$ Hz zu messen.

Die Abweichungen der Frequenzen in einer realen Falle mit $\epsilon \neq 0$ und $(\theta, \varphi) \neq 0$ von den Eigenfrequenzen in einer idealen Penning-Falle werden durch [51]

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_z^2 &\simeq \omega_z^2 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon \cos 2\varphi \right) \right] \quad \text{und} \\ \tilde{\omega}_- &\simeq \omega_- \sqrt{1 - \epsilon^2} \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon \cos 2\varphi \right) \right]^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.66)$$

beschrieben. In Bezug auf θ und ϵ gilt für kleine Verkippungswinkel und elliptische Korrekturen die Beziehung

$$\frac{\omega_c}{\tilde{\omega}_c} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\omega}_z}{\tilde{\omega}_c} \right)^2 + \frac{9}{16} \left(\frac{\tilde{\omega}_z}{\tilde{\omega}_c} \right)^4 \left(\theta^2 - \frac{2}{9} \epsilon^2 \right) , \quad (2.67)$$

welche die geringe Änderung der freien Zyklotronfrequenz aufgrund der Fallenelektroden beschreibt.

2.2.3. Das Speicherpotential einer fünfpoligen zylindrischen Penning-Falle

Gleichgültig, ob eine hyperbolische oder eine zylindrische Fallengeometrie verwendet wird, Herstellungs- und Ausrichtungsfehlern sowie jegliche Unregelmäßigkeiten auf den Elektrodenoberflächen führen dazu, dass die Fallenelektroden immer von der entsprechenden idealen Geometrie abweichen. Als Folge davon besitzt das elektrostatische Potential einer realen Penning-Falle anharmonischen Anteile (siehe Gleichung (2.41)), welche eine Abhängigkeit der Bewegungsfrequenzen von den Bewegungsamplituden bzw. den Bewegungsenergien hervorrufen. In dem Bestreben, das Potential auf das ideale Quadrupolpotential in Gleichung (2.13) zurückzuführen, wird eine fünfpolige Elektrodenanordnung verwendet. Im Wesentlichen werden zwei weitere Elektroden, die so genannten *Korrekturelektroden*, der aus einer Ringelektrode und zwei Endkappen bestehenden Einrichtung in Abbildung (2.1) zugefügt [55–58]. Ein solches Fallenkonzept ermöglicht die simultane Unterdrückung der beiden anharmonischen Potentialterme niedrigster Ordnung \tilde{C}_4 und \tilde{C}_6 durch Anlegen angemessener Spannungen an den zu diesem Zweck dimensionierten Ring- bzw. Korrektorelektroden. Diese Art von Optimierung wird von nun an als *Kompensation* des Speicherpotentials bezeichnet. Die Unabhängigkeit der Axialfrequenz von der Korrekturspannung kann ebenfalls durch eine geschickte Wahl der Elektrodendimensionen gewährleistet werden. Diese Eigenschaft der Falle wird *Orthogonalität* genannt.

Obwohl mit einer idealen hyperbolischen Falle im Prinzip ein harmonisches Potential über ein größeres Speichervolumen erzeugt werden könnte als mit idealen zylindrischen Elektroden, hat die zylindrische Geometrie entscheidende Vorteile, weshalb diese bei diesem Experiment bevorzugt worden ist. Die maschinelle Bearbeitung von zylindrischen Elektroden ist deutlich weniger aufwendig, was zur Folge hat, dass diese mit viel höherer Präzision in kürzerer Zeit und mit niedrigeren Kosten hergestellt werden können. Ferner werden die Endkappen als zwei offene Zylinder statt zwei Platten konzipiert [58]. Dies ermöglicht den direkten Zugang zum Innenbereich der Falle, womit zum einen sich das Vakuum in dem Fallenvolumen besser erzeugen lässt und zum anderen Ionen problemlos in die Falle geladen und zwischen den Fallen transportiert werden können.

Die Realisierung einer fünfpoligen zylindrischen Penning-Falle wird in Abbildung 2.4 veranschaulicht. Die elektrische Potentialverteilung innerhalb der Falle kann durch Verwendung von Standardverfahren zur Lösung elektrostatischer Randwertprobleme analytisch berechnet werden. Die Lösung eines Potentialproblems kann durch eine Entwick-

lung nach orthogonalen Funktionen, welche gemäß der Symmetrie der Randbedingungen ausgewählt werden, dargestellt werden. Ein möglicher Ansatz wurde bereits in Abschnitt 2.2.2 eingeführt. Demnach wird auf die Kenntnis des Potentials über das gesamten Fallenvolumen verzichtet, da das Teilchen typischerweise bei niedrigeren Energien bzw. geringen Amplituden und somit nahe dem Fallenzentrum gespeichert wird. In dieser beschränkten Region kann das Potential in eine Potenzreihe in (r/d) nach Legendre-Polynomen in Kugelkoordinaten entwickelt werden, vorausgesetzt, dass azimuthale Symmetrie vorhanden ist (siehe Gleichung (2.41)). Die charakteristischen Fallendimensionen z_0 und ρ_0 von $d^2 = \frac{1}{2} \left(z_0^2 + \frac{\rho_0^2}{2} \right)$ für die zylindrische Geometrie sowie die Randbedingungen sind in Abbildung 2.4 angegeben.

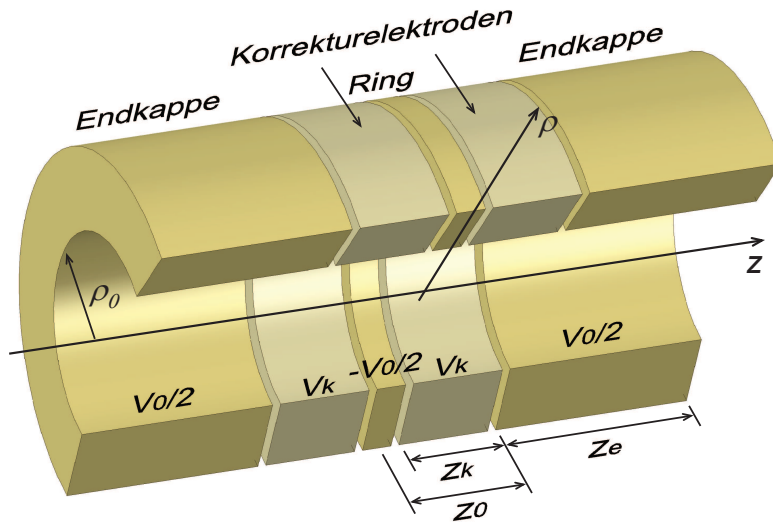


Abbildung 2.4.: Schematische Darstellung einer fünfpoligen zylindrischen Penning-Falle. Die zwischen der Ringelektrode und den Endkappen zusätzlich eingefügten Elektroden, die so genannten Korrektorelektroden, gestatten es, durch Verwendung geeigneter Spannungsverhältnisse die anharmonischen Potentialanteile niedrigster Ordnung zu eliminieren.

Die folgende Beschreibung über die elektrostatische Eigenschaften der in Abbildung 2.4 dargestellten Fallengeometrie basiert auf der in [58] präsentierten ausführlichen Diskussion. Wird ein Spannungsunterschied V_0 zwischen der Ringelektrode und den Endkappen und V_k an den Korrektorelektroden angelegt, so kann das Potential in der Falle durch

$$\phi(r, \theta) = V_0 \varphi_0(r, \theta) + V_k \varphi_k(r, \theta) \quad (2.68)$$

angegeben werden. Dabei sind φ_0 und φ_k Lösungen der Laplace-Gleichung unter Rota-

tionssymmetrie für die in Abbildung 2.4 veranschaulichten Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\rho_0, z) &= \begin{cases} -\frac{1}{2} & (0 \leq z \leq z_0 - z_k) \\ 0 & (z_0 - z_k \leq z \leq z_0) \\ \frac{1}{2} & (z_0 \leq z \leq z_0 + z_e) \end{cases} \quad \text{und} \\ \varphi_k(\rho_0, z) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq z \leq z_0 - z_k) \\ 1 & (z_0 - z_k \leq z \leq z_0) \\ 0 & (z_0 \leq z \leq z_0 + z_e) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.69)$$

mit $\varphi_0(-z) = \varphi_0(z)$ und $\varphi_k(-z) = \varphi_k(z)$. Es folgt:

$$\phi(r, \theta) = \frac{V_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_k \left(\frac{r}{d}\right)^k P_k(\cos \theta) + \frac{V_k}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{D}_k \left(\frac{r}{d}\right)^k P_k(\cos \theta) \quad . \quad (2.70)$$

Gleichung (2.70) beschreibt das Gesamtpotential nahe dem Fallenzentrum, welches die Superposition der Beiträge der Ringelektrode und der Korrektorelektroden darstellt. Vergleicht man die Gleichungen (2.41) und (2.70), so erhält man

$$\tilde{C}_k = \tilde{E}_k + \frac{V_k}{V_0} \tilde{D}_k \quad , \quad (2.71)$$

wobei das Spannungsverhältnis $T_R = \frac{V_k}{V_0}$ als *tuning ratio* bezeichnet wird. Nach der Gleichung (2.71) können die Koeffizienten \tilde{C}_k des Gesamtpotentials durch Anpassung des T_R unterdrückt werden. Ferner kann es durch eine geschickte Wahl der Elektrodendimensionen, die wiederum \tilde{E}_k bzw. \tilde{D}_k bestimmen, gewährleistet werden, dass \tilde{C}_4 und \tilde{C}_6 durch die Anwendung des gleichen T_R eliminiert werden. Jeder beliebigen Länge der Ringelektrode ist eine bestimmte Länge der Korrektorelektroden z_k zuzuordnen, womit die Bedingung $T_R(\tilde{C}_4 = 0) = T_R(\tilde{C}_6 = 0)$ erfüllt werden kann. Der Zusammenhang zwischen Axialfrequenz und *tuning ratio* wird hergestellt, indem \tilde{C}_2 in Gleichung (2.44) durch den aus Gleichung (2.71) erhaltenen äquivalenten Ausdruck ersetzt wird. Dies führt zu

$$\omega_z = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2} (\tilde{E}_2 + T_R \tilde{D}_2)} \quad . \quad (2.72)$$

Die axiale Frequenz wird demzufolge durch die Anpassung des T_R modifiziert, es sei denn, die Fallengeometrie ist so ausgelegt, dass $\tilde{D}_2 = 0$. In diesem Fall handelt es sich um eine *orthogonale* Falle. Die Unabhängigkeit der Axialfrequenz von T_R ist aus der Sicht der Handhabbarkeit bei der Optimierung des Potentials von großer Bedeutung, da die Festlegung des idealen T_R in der Praxis auf der Beobachtung des Frequenzsignals eines gespeicherten Protons basiert⁸. Jedem Fallradius ρ_0 ist eine Länge der Ringelektrode zuzuordnen, durch die die Orthogonalität der Falle gewährleistet wird.

Um die Koeffizienten in Gleichung (2.71) explizit als Funktion der Fallendimensionen zu erhalten, wird auf die Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten zugegriffen.

⁸Auf dieses experimentelle Verfahren wird in Kapitel 5 näher eingegangen.

Diese nimmt demgemäß die Form

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (2.73)$$

Verwendet man den Separationsansatz $\phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) Q(\varphi) Z(z)$ [92], so folgt:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \kappa^2 Z(z) = 0 \quad , \quad (2.74)$$

$$\frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} + n^2 Q(\varphi) = 0 \quad , \quad (2.75)$$

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \left(\kappa^2 + \frac{n^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0 \quad . \quad (2.76)$$

Dabei sind κ und n Separationskonstanten. Die Lösungen der Gleichungen (2.74) und (2.75) sind elementar und werden durch $Z(z) = e^{\pm i\kappa z}$ bzw. $Q(\varphi) = e^{\pm in\varphi}$ gegeben. Gleichung (2.76) stellt die so genannte modifizierte Besselsche Differentialgleichung dar, deren linear unabhängige Partillösungen $I_n(\kappa\rho)$ und $K_n(\kappa\rho)$ mit den Bessel-Funktionen durch

$$\begin{aligned} I_n(\kappa\rho) &= i^{-n} J_n(i\kappa\rho) && \text{und} \\ K_n(\kappa\rho) &= \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(i\kappa\rho) \end{aligned} \quad (2.77)$$

zusammenhängen. Dabei ist $J_n(\kappa\rho)$ die Bessel-Funktion erster Art der Ordnung n und $H_n^{(1)}(\kappa\rho)$ die Hankel-Funktion⁹, welche als eine Linearkombination von $J_n(\kappa\rho)$ und der Neumann-Funktion¹⁰ $N_n(\kappa\rho)$ gemäß $H_n^{(1)}(\kappa\rho) = J_n(\kappa\rho) + iN_n(\kappa\rho)$ definiert wird. Für eine ausführliche Diskussion über die Eigenschaften der Bessel-Funktionen und weitere Überlegungen zum oben beschriebenen Lösungsansatz wird auf [92] hingewiesen.

Aufgrund der Rotationssymmetrie der in Abbildung 2.4 dargestellten Fallengeometrie, verschwindet die Ableitung nach dem Azimutwinkel φ in Gleichung (2.73). Demnach wird die Lösung der Laplace-Gleichung (2.73) für die Randbedingungen in Gleichung (2.69) durch

$$\phi(\rho, z) = V_0 \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m J_0(i\tilde{\kappa}_m \rho) \cos(\tilde{\kappa}_m z) + V_k \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_m J_0(i\tilde{\kappa}_m \rho) \cos(\tilde{\kappa}_m z) \quad (2.78)$$

gegeben, wobei $\tilde{\kappa}_m = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{z_0+z_e}$. Werden die Gleichungen (2.70) und (2.78) entlang der z -Achse evaluiert und die Koeffizienten von z^k verglichen, so können \tilde{C}_k , \tilde{E}_k und \tilde{D}_k eindeutig bestimmt werden. Die Koeffizienten \tilde{A}_m und \tilde{B}_m lassen sich durch Inversion der Gleichung (2.78) berechnen. Die auf diese Weise in [58] erhaltenen Ausdrücke für die Koeffizienten der Legendre-Polynomen setzen voraus, dass die Endkappen unendlich lang und die Schlitz zwischen den Elektroden vernachlässigbar klein sind.

Ein allgemeinerer Ansatz für die analytische Berechnung der Potentialverteilung in einer fünfpoligen Penning-Falle unter Berücksichtigung der in Abbildung 2.5 dargestellten Randbedingungen wird in [88] verwendet. Demnach wird die Lösung der Laplace-

⁹Oder Bessel-Funktion dritter Art.

¹⁰Oder Bessel-Funktion zweiter Art.

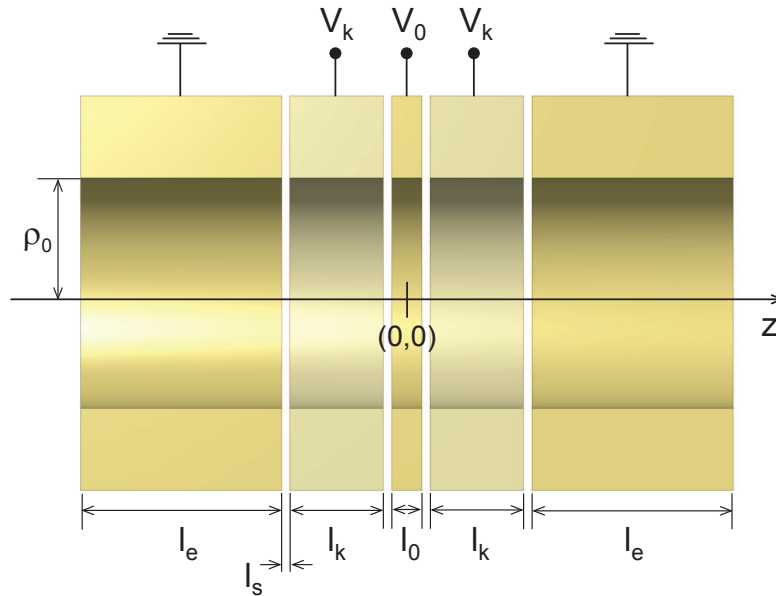


Abbildung 2.5.: Veranschaulichung des Randwertproblems für eine fünfpolige Penning-Falle zylindrischer Geometrie (Querschnitt).

Gleichung (2.10) in Form einer Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt $(\rho = 0, z = 0)$ gemäß

$$\begin{aligned} \phi(\rho, z) &= \phi_0 + \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \Big|_{(0,0)} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{(0,0)} + \frac{\rho^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \Big|_{(0,0)} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_{(0,0)} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k C_{i,k} \rho^i z^{k-i} \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

dargestellt, wobei

$$C_{i,k} = \binom{k}{i} \frac{\partial^{i+k} \phi}{\partial \rho^i \partial z^k} \Big|_{(0,0)} \quad (2.80)$$

Entlang der z -Achse wird das Potential in eine Potenzreihe in z nach den Koeffizienten $C_{0,k} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial z^k} \Big|_{(0,0)}$ entwickelt. Von nun an werden diese der Einfachheit halber als C_k bezeichnet. Es folgt, dass

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = C_0 + C_2 z^2 + C_4 z^4 + \dots \quad (2.81)$$

vorausgesetzt, dass Spiegelsymmetrie vorhanden ist. Werden die Gleichungen (2.81) und (2.42) verglichen, so lässt sich der Zusammenhang

$$\frac{\tilde{C}_k}{2d^k} = \frac{C_k}{V_0} = c_k \quad (2.82)$$

herstellen, wobei die Bezeichnung c_k für die normierten Koeffizienten eingeführt wurde. Gleichung (2.82) gestattet es, die in den vorangegangenen Abschnitten abgeleiteten Beziehungen unter Verwendung der Entwicklung in Gleichung (2.79) unzuschreiben.

Für die Randbedingungen in Abbildung 2.5 lautet die Entwicklung des Potentials nach den modifizierten Bessel-Funktionen:

$$\phi(\rho, z) = V_0 \sum_{m=1}^{\infty} [A_m + T_R B_m] I_0(\kappa_m \rho) \cos(\kappa_m z) \quad (2.83)$$

mit

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{8}{L l_s \kappa_m^2 I_0(\kappa_m \rho_0)} \sin\left(\frac{\kappa_m l_s}{2}\right) \sin\left(\frac{\kappa_m (l_s + l_0)}{2}\right) \\ B_m &= \frac{16}{L l_s \kappa_m^2 I_0(\kappa_m \rho_0)} \sin\left(\frac{\kappa_m l_s}{2}\right) \sin\left(\frac{\kappa_m (l_s + l_k)}{2}\right) \cos\left(\frac{\kappa_m (2l_s + l_0 + l_k)}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.84)$$

wobei $\kappa_m = \frac{m\pi}{L}$ mit $(m = 2n + 1, n \in \mathbb{N})$ und $L = 4l_s + 2l_e + 2l_k + l_0$ die Gesamtlänge der Falle bezeichnet. Das Potential $\phi(\rho, z)$ in Gleichung (2.83) ist in dem Bereich $D_\phi = \{\rho \in [0, \rho_0]; \varphi \in [0, 2\pi]; z \in [-L/2, L/2]\}$ definiert. Die Koeffizienten c_k lassen sich gemäß

$$c_k = \frac{1}{V_0} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \phi}{\partial z^k} \right|_{(0,0)} = \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{\infty} [A_m + T_R B_m] \left[\frac{\partial^k}{\partial z^k} \cos(\kappa_m z) \right]_{z=0} \quad (2.85)$$

berechnen, wobei $I_0(0) = 1$ ist. Die Ableitung auf der rechten Seite für $z = 0$ ist ungleich null nur für gerade k . Somit verschwinden alle ungeraden Koeffizienten, was der Erwartung für eine spiegelsymmetrische Elektrodenanordnung entspricht. Nach Gleichung (2.85) lassen sich die Koeffizienten c_k als die Summe

$$c_k = e_k + T_R d_k \quad (2.86)$$

mit

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{\infty} A_m (-1)^{\frac{k}{2}} \kappa_m^k \\ d_k &= \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{\infty} B_m (-1)^{\frac{k}{2}} \kappa_m^k \end{aligned} \quad (2.87)$$

darstellen, wodurch die Äquivalenz zur Gleichung (2.71) gezeigt wird. Demnach folgt für die Axialfrequenz

$$\omega_z = \sqrt{\frac{e}{m} 2V_0 (e_2 + T_R d_2)} \quad (2.88)$$

Gleichungen (2.83) bis (2.87) stellen ein analytisches Modell dar, mit dessen Hilfe die zur Erfüllung der Kompensations- bzw. Orthogonalitätsbedingung geeigneten Fallendimensionen (ρ_0, l_0, l_k) bestimmt werden können. Allerdings basiert die gesamte Beschreibung auf Symmetrieanahmen, die nicht unbedingt gewährleistet sind, wenn es sich um eine reale Falle handelt. Somit kann das Modell zwar zum Entwurf der Falle verwendet werden,

aber zur Beschreibung von experimentellen Fallenasymmetrien ist dieses nicht geeignet. Ferner weicht die Form des Fallenturms vom Konzept her unvermeidlich von der idealisierten Darstellung in Abbildung 2.5 ab. Im Allgemeinen sind technische Anpassungen an der äußeren Seite der Zylindern notwendig. Auf dem Bezugspunkt des gespeicherten Teilchens ist die Form der inneren Flächen der Elektroden von Relevanz. Dennoch wirken sich geometrische Abweichungen in der Region in der $\rho > \rho_0$ gilt, aufgrund der Schlitze auf das Potential aus. Für kleine Fallenturmradien ρ_0 ist dieser Effekt nicht vernachlässigbar. In Kapitel 4 wird näher auf diese Diskussion eingegangen, und eine numerische Methode zur Berechnung des Potentials jeder beliebigen Geometrie wird präsentiert.

2.3. Nachweis geladener Teilchen in einer Penning-Falle

Der Nachweis der in einer Penning-Falle gespeicherten Ionen lässt sich mit Hilfe einer *bolometrischen* Nachweismethode [21, 22] berührungs- und zerstörungsfrei realisieren. Es handelt sich dabei um ein rein elektronisches Verfahren, welches letztendlich auf der Wechselwirkung der Ladung eines oszillierenden Teilchens mit den an die Fallenelektroden angeschlossenen elektronischen Bauteilen beruht. Die Methode gestattet es, die Eigenfrequenzen des Teilchens unmittelbar zu ermitteln ohne, dass dieses dadurch aus der Falle entweicht oder vernichtet wird. Ferner erfolgt eine unwillkürliche Kühlung der Teilchenbewegung durch Energieabgabe an den ohmschen Widerstand der Nachweisschaltung.

Die folgenden Abschnitte widmen sich der Beschreibung des grundlegenden Prinzips der Nachweisteknik und deren experimenteller Umsetzung. Auf die Methode zur Ermittlung der Eigenfrequenzen ist das Experiment verständlicherweise in hohem Maße angewiesen. Der Entwurf und Aufbau eines Nachweissystems für hochpräzise Messungen stellt gewiss eine besondere Herausforderung dar. Die Einzelheiten der Entwicklung der in diesem Experiment verwendeten Nachweissysteme wurden in Rahmen der Dissertation von S. Ulmer [69] umfassend diskutiert. Daher wird sich hier auf eine zusammengefasste Darstellung der relevanten Konzepte und Eigenschaften der Detektoren beschränkt. Ferner wird für eine weitere ausführliche Betrachtung der Nachweiselektronik auf [93, 94] verwiesen.

2.3.1. Ersatzschaltbild eines Ion-Falle Systems

Zunächst wird das in Abbildung 2.6(b) vereinfachte Problem eines einzelnen zwischen zwei unendlich ausgedehnten, leitenden Platten gefangenen Ions betrachtet. Dabei wird vorausgesetzt, dass der axiale Einschluss durch eine auf das Teilchen wirkende Rückstellkraft gewährleistet ist. Die daraus folgende harmonische Schwingung des Ions führt zu einer Schwankung der von dessen Ladung e influenzierten Spiegelladungsdichte auf den Plattenoberflächen. Sind die Platten über eine externe Schaltung miteinander verbunden, so fließt ein Wechselstrom, dessen Frequenz der Oszillationsfrequenz des Teilchens ent-

spricht. Schwingt das Ion mit der Geschwindigkeit \dot{z} , so führt dieses in der Zeit $dt = D/\dot{z}$ eine Änderung der Ladung auf einer Platte um $dQ = e$ herbei, wobei D den Abstand zwischen den Platten bezeichnet. Wenn die Plattendimensionen groß im Vergleich zum Abstand D sind, so lässt sich der induzierte Strom durch [95]

$$I_{\text{ind}} = \frac{dQ}{dt} = \frac{e\dot{z}}{D} \quad (2.89)$$

ausdrücken. Seien nun die leitenden Platten eine idealisierte Darstellung der Fallenelektroden und ordnet man der periodischen Bewegung des Ions die durch Gleichungen (2.18) und (2.19) beschriebene Axialschwingung zu, so lautet die Bewegungsgleichung des Teilchens:

$$m\ddot{z} = -m\omega_z^2 z + \frac{eU(t)}{D} + F_s \quad . \quad (2.90)$$

In Gleichung (2.90) beschreibt der erste Term auf der rechten Seite die rücktreibende Kraft, die durch das Speicherpotential der Falle entsteht. Der zweite Term bezeichnet eine periodische Kraft, die das Teilchen aufgrund des elektrischen Wechselfeldes

$$\vec{E}(t) = \frac{U(t)}{D} \hat{z} \quad (2.91)$$

erfährt, wobei $U(t)$ die zwischen den Platten anliegende Wechselspannung ist. Der dritte Term, F_s , stellt eine zusätzliche Kraft dar, die durch die influenzierten Spiegelladungen auf das Ion ausgeübt wird. Diese ist jedoch für ein einzelnes Teilchen mit einer gegenüber dem Abstand D geringen Bewegungsamplitude vernachlässigbar [22]. Schreibt man z in Gleichung (2.90) als Funktion des induzierten Stroms gemäß Gleichung (2.89), so folgt

$$U(t) = m \frac{D^2}{e^2} \frac{d}{dt} I_{\text{ind}} + m \frac{D^2}{e^2} \omega_z^2 \int I_{\text{ind}} dt \quad . \quad (2.92)$$

Gleichung (2.92) beschreibt den Zusammenhang zwischen der an einem Reihenschwingkreis anliegenden Spannung und dem durch die Schaltung fließenden Strom. Dies deutet darauf hin, dass dem gespeicherten Teilchen die Ersatzgrößen

$$\begin{aligned} l_I &= \frac{mD^2}{e^2} \quad \text{und} \\ c_I &= \frac{e^2}{mD^2 \omega_z^2} \end{aligned} \quad (2.93)$$

zuzuordnen sind, wodurch dieses sich als Reihenschwingkreis, der parallel zu den beiden Platten geschaltet wird, erfassen lässt [22]. Dies wird in Abbildung 2.6 anschaulich dargestellt. Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{l_I c_I}} = \omega_z$ entspricht dabei der Axialfrequenz des Teilchens und seine Impedanz wird durch

$$Z_I(\omega) = i \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right) \quad (2.94)$$

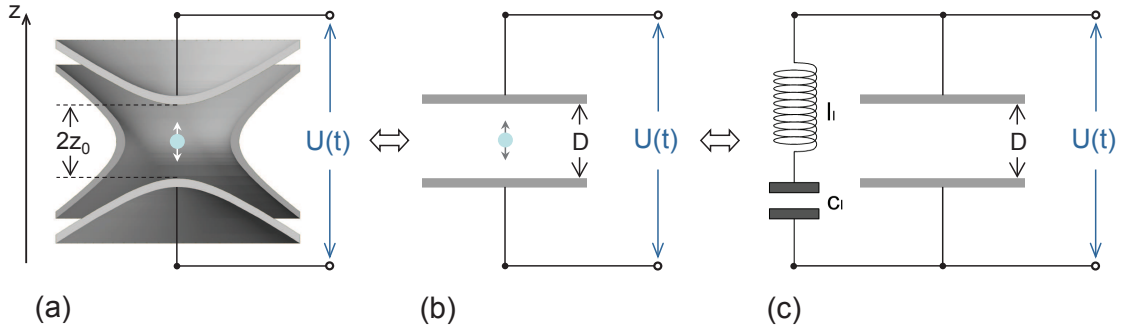


Abbildung 2.6.: Schematische Darstellung des Nachweisprinzips. (a) Das in einer Penning-Falle oszillierende Ion induziert einen Wechselstrom, der sich zwischen den beiden Endkappen beobachten lässt. Über einen Spannungsabfall an einem Widerstand (nicht dargestellt) kann das Ionensignal nachgewiesen werden. (b) Idealisierte Darstellung der Penning-Falle als Plattenkondensator. (c) Eine einfache Analyse des Modells zeigt, dass ein zwischen den beiden Platten schwingendes Teilchen sich als Reihenschwingkreis (l_I, c_I) beschreiben lässt.

gegeben. In [22] wird diese analytische Beschreibung für den Fall einer gespeicherten aus N Ionen bestehenden Wolke verallgemeinert. Demnach gelten die Beziehungen

$$I_N = N \frac{e}{D} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N \frac{z_j}{N} \right) \quad (2.95)$$

für den induzierten Strom und

$$l_I^{(N)} = \frac{l_I}{N} \quad \text{bzw.} \quad c_I^{(N)} = N c_I \quad (2.96)$$

für die Ersatzgrößen.

Handelt es sich um eine Penning-Falle hyperbolischer Geometrie und wird das Teilchensignal an den Endkappen abgegriffen, so ist das Feld im Zentrum der Falle in Abbildung 2.6(a) kleiner als das elektrische Feld des Plattenkondensators in Gleichung (2.91) mit $D = 2z_0$, unter der Bedingung, dass die gleiche Spannung $U(t)$ zwischen den Endkappen anliegt. In [22] (siehe auch [54]) wird ein geometrischer Korrekturfaktor κ definiert. Dieser beinhaltet den Effekt der Krümmung und der endlichen Abmessung der realen Elektroden auf das elektrische Feld in der Falle, so dass $\vec{E}(t) = \kappa \frac{U(t)}{2z_0} \hat{z}$, oder gleichwertig $D = \frac{2z_0}{\kappa}$, wobei $\kappa < 1$ ist.

Die idealisierte Darstellung der Falle als Plattenkondensator lässt sich dennoch auf jede Fallengeometrie bzw. Art des Abgriffes des Ionensignals durch das in [93] eingeführte Konzept des *effektiven Elektrodenabstandes* D übertragen. Dieser Parameter wird dadurch definiert, dass das elektrische Feld im Zentrum der tatsächlich verwendeten Elektrodenanordnung genau dem elektrischen Feld des fiktiven Plattenkondensators mit Abstand D entspricht. In [69] wird ein Modell zur analytischen Berechnung des effektiven Elektrodenabstandes hergeleitet. Dabei werden unterschiedliche Geometrien zum Abgriff des Teilchensignals verglichen. Für beide in diesem Experiment verwendeten Penning-Fallen wird einen Signalabgriff an den Korrektorelektroden bevorzugt [69].

Obwohl die bisherige Diskussion sich auf die axiale Schwingung bezieht, lassen sich die radialen Bewegungen durch die gleiche Methode nachweisen. Zu diesem Zweck wird eine in zwei Teile geteilte Elektrode verwendet, deren Hälften über einen Widerstand verbunden sind [54].

2.3.2. Wechselwirkung eines Ions mit der externen Nachweisschaltung

Wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt, kann der vom Teilchen influenzierte Spiegelstrom (siehe Gleichung (2.89)) über einen Spannungsabfall an einem Widerstand, welcher parallel zu den Abgriffelektroden geschaltet wird, nachgewiesen werden. In der Praxis werden, wie in Abbildung 2.7 dargestellt, keine rein ohmschen Widerstände sondern stattdessen Parallelschwingkreise als Detektoren verwendet. Ein Parallelschwingkreis stellt einen frequenzabhängigen Widerstand dar, der durch die Impedanz

$$Z_p(\omega) = \frac{1}{i\left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right) + \frac{1}{R_p}} \Rightarrow |Z_p(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right)^2 + \frac{1}{R_p^2}}} \quad (2.97)$$

charakterisiert ist.

Der Schwingkreis schwingt mit der Frequenz, bei der kapazitiver und induktiver Blindwiderstand dem Betrag nach gleich sind $|X_{C_p}(\omega_r)| = |X_{L_p}(\omega_r)|$. Der Frequenzverlauf des Scheinwiderstandes $|Z_p(\omega)|$ weist demzufolge ein Maximum bei der Resonanzfrequenz des Schwingkreises $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}}$ auf. Es gilt

$$\frac{1}{\omega_r C_p} = \omega_r L_p \Rightarrow |Z_p(\omega = \omega_r)| = R_p \quad . \quad (2.98)$$

Der Resonanzkurve des Schwingkreises ist die Breite $\Delta\omega$ zuzuordnen. Diese Breite geht aus dem Vorhandensein von Verlustmechanismen, unter anderem des ohmschen Widerstandes der Bauteile, hervor. Der so genannte *Gütefaktor* (oder *Resonanzschärfe*) Q wird als das Verhältnis zwischen Blind- und Wirkleistung, P_B bzw. P_W , bei der Resonanzfrequenz definiert und quantifiziert somit die Dämpfung des Systems. Für den Parallelschwingkreis in Abbildung 2.7 folgt

$$Q = \left| \frac{P_B}{P_W} \right| = \frac{R_p}{\omega_r L_p} = R_p \omega_r C_p \quad (2.99)$$

mit

$$P_B = \frac{U^2}{\omega_r L_p} = U^2 \omega_r C_p \quad \text{und} \quad P_W = \frac{U^2}{R_p} \quad , \quad (2.100)$$

wobei U die an dem Parallelschwingkreis anliegende Spannung ist. Als Funktion der Bandbreite $\Delta\omega$ lässt sich der Gütefaktor ebenfalls durch

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\nu_r}{\nu_2 - \nu_1} \quad (2.101)$$

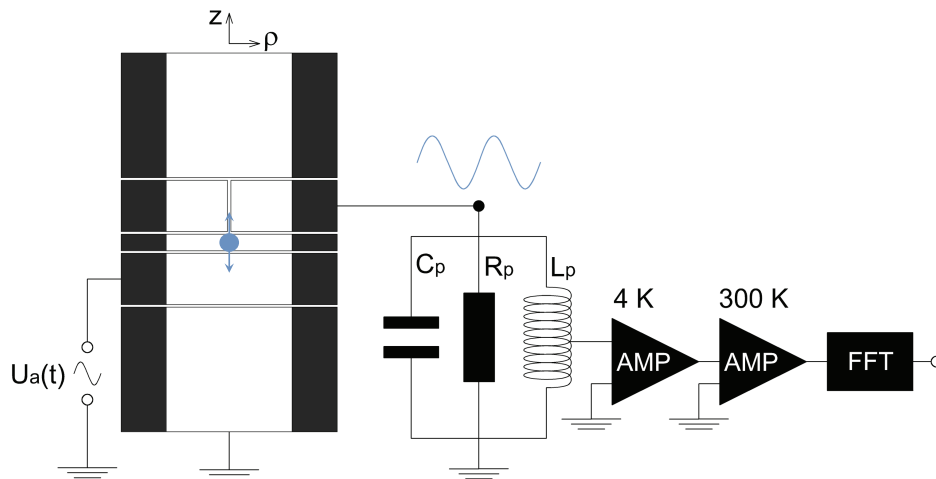


Abbildung 2.7.: Schematische Darstellung des Aufbaus zum Nachweis des vom geladenen Teilchen in den Fallenelektroden induzierten Signals. Das Nachweissystem besteht aus einem Parallelschwingkreis hoher Güte, einem rauscharmen bei kryogenen Temperaturen betriebenen Verstärker und einem Raumtemperatur-Verstärker. Das Frequenzspektrum des Ionensignals, welches an einer Korrektur- oder Fallenelektrode abgegriffen wird, lässt sich durch eine schnelle Fourier-Transformation (FFT) erstellen. Die Eigenbewegung des Teilchens kann durch die treibende Spannung $U_a(t)$ angeregt werden.

bestimmen. Dabei ist $\Delta\omega = 2\pi(\nu_2 - \nu_1)$ der Frequenzbereich, an dessen Grenzen die Spannung um 3 dB gegenüber dem Extremwert der Resonanzkurve fällt, wie in Abbildung 2.9(a) gekennzeichnet ist.

Entspricht die Resonanzfrequenz des Parallelschwingkreises exakt der zu messenden Eigenfrequenz des Teilchens ($\nu_r = \nu_0$), so ruft der vom Ion beeinflusste Strom den Spannungsabfall

$$U_{\text{ind}} = Z_p(\omega = \omega_r)I_{\text{ind}} = R_p I_{\text{ind}} = \omega_0 L_p Q I_{\text{ind}} \quad (2.102)$$

am Resonanzwiderstand des Schwingkreises hervor. Die Empfindlichkeit des Detektors hängt daher unmittelbar mit L_p und Q zusammen. Da I_{ind} typischerweise in der Größenordnung von fA liegt, wird das Teilchensignal mit Hilfe eines rauscharmen Tieftemperatur-Verstärkers und eines sich anschließenden Raumtemperatur-Verstärkers gemessen. Durch eine schnelle Fourier-Transformation (FFT) lässt sich das Frequenzspektrum der am Schwingkreis anliegenden Spannung erstellen, in welchem sich das Signal des Teilchens bei dessen Bewegungsfrequenz nachweisen lässt. In Abbildung 2.7 ist eine schematische Darstellung der Nachweisschaltung gezeigt. Der Parallelschwingkreis ist das Ersatzschaltbild eines Resonators, der aus einer in einem zylindrischen Gehäuse angebrachten Spule besteht, wie in Abschnitt 2.3.3 näher erläutert.

Um die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Detektor in Abbildung 2.7 quantitativ zu beschreiben, wird nun das im letzten Abschnitt für das Ion hergeleitete Ersatzschaltbild in Anspruch genommen. In [22,96] wird die Betrachtung des gespeicherten Teilchens

als idealer Reihenschwingkreis (siehe Abbildung 2.6(c)) durch das Hinzufügen eines zu c_I und l_I in Reihe geschalteten Dämpfungswiderstands r_I ergänzt. Im Fall einer aus N Ionen bestehen Wolke gilt $r_I^{(N)} = r_I/N$. Mit dem erweiterten Modell lassen sich experimentell beobachtete Erhöhungen der Linienbreite des Ionensignals, welche aufgrund von Schwankungen der Bewegungsfrequenz zustande kommen, gut beschreiben. Dennoch sind die tatsächlichen Ursachen solcher Schwankungen, wie die Anharmonizität des Speicherpotentials oder, im Fall einer Ionenwolke, die Wechselwirkung zwischen den Teilchen, keine dissipativen Effekte. Das Falle-Teilchen-System in Abbildung 2.7 wird also durch einen aus c_I , l_I und r_I bestehenden Reihenschwingkreis ersetzt. Dem effektiven Parallelwiderstand R_p ist ein thermisch bedingtes Rauschen zuzuordnen. Dies lässt sich als die Reihenschaltung des Widerstandes R_p und der Rauschspannung [97,98]

$$u_R = \sqrt{4k_B T B R_p} \quad (2.103)$$

darstellen. Dabei ist T die Temperatur des Widerstandes, B die spektrale Breite innerhalb derer das Rauschen gemessen wird und k_B die Boltzmann-Konstante. Die Wechselspannung $U_a(t)$ in Abbildung 2.7 dient zur Anregung der Schwingung des Teilchens. Auf diese Weise kann die Energie der Teilchenbewegung auf ein Niveau erhöht werden, das über der endlichen Energie der Elektronen im Widerstand liegt. Das vollständige Ersatzschaltbild ist in Abbildung 2.8 gezeigt. Die zu messende Spannung $U(t)$ setzt sich aus

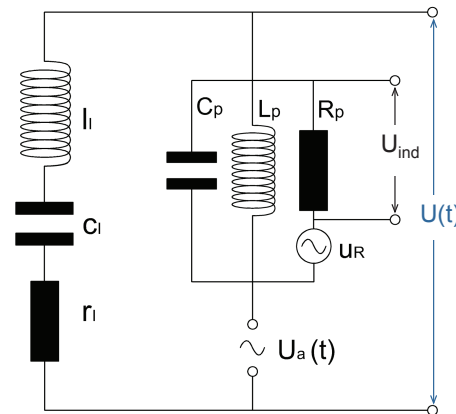


Abbildung 2.8.: Parallelschaltung des Reihenschwingkreises (c_I , l_I , r_I), der das gespeicherte Teilchen darstellt und des Nachweisschwingkreises (C_p , L_p , R_p). Bei der Resonanzfrequenz $\omega_r = 1/\sqrt{L_p C_p}$ ist die Impedanz des Parallelschwingkreises durch den effektiven Parallelwiderstand R_p gegeben. In Abwesenheit der treibenden Spannung U_a wird die Teilchenbewegung aufgrund der jouleschen Wärme ($P_{\text{ind}} = R_p I_{\text{ind}}^2$) gedämpft.

der durch das Ion induzierten Spannung U_{ind} , der Rauschspannung u_R und der externen Anregungsspannung U_a zusammen. Demgemäß folgt nach Gleichung (2.90)

$$m\ddot{z} + m\omega_z^2 z = \frac{e}{D} (-U_{\text{ind}} - u_R + U_a) \quad (2.104)$$

Der erste Term auf der rechten Seite stellt eine der Teilchenbewegung entgegenwirkende Kraft $F_{\text{ind}} = -eU_{\text{ind}}/D$ dar. Diese entsteht aufgrund des elektrischen Felds, welches durch die Spannung U_{ind} nahe dem Fallenzentrum erzeugt wird. Die entgegengesetzten Vorzeichen der Spannungen u_{R} und U_{a} ergeben sich aus der Tatsache, dass diese an in Bezug auf die ($z = 0$)–Ebene gegenüberliegenden Elektroden anliegen. Gemäß Gleichungen (2.89) und (2.102) kann die induzierte Spannung U_{ind} durch

$$U_{\text{ind}} = Z_p(\omega) \frac{e\dot{z}}{D} \quad (2.105)$$

gegeben werden. Gleichung (2.104) lässt sich also wie folgt umschreiben

$$\ddot{z} + Z_p(\omega) \frac{e^2}{mD^2} \dot{z} + \omega_z^2 z = \frac{e}{mD} (-u_{\text{R}} + U_{\text{a}}) \quad . \quad (2.106)$$

Gleichung (2.106) stellt die Differenzialgleichung einer erzwungenen Schwingung mit Dämpfungskonstante

$$\gamma_z = \frac{1}{\tau_z} = \frac{e^2}{mD^2} Z_p(\omega) \quad (2.107)$$

dar. Die Zeitkonstante τ_z steht über die Beziehung [22, 96]

$$\tau_z = \frac{l_I}{r_I} \quad \Rightarrow \quad r_I = Z_p(\omega) \quad (2.108)$$

in Zusammenhang mit dem Dämpfungswiderstand r_I . Ist die Frequenz der treibenden Spannung $U_{\text{a}}(t)$ gleich der Schwingungsfrequenz des Teilchens, so tritt Resonanz auf und die erhöhte Energie der Teilchenbewegung führt zu einem Peak, der im Rauschspektrum des Nachweisschwingkreises bei der Eigenfrequenz des Ions erscheint. Diese Art des Nachweises wird in Abbildung 2.9(b) gezeigt. Findet stattdessen keine Anregung statt ($U_{\text{a}} = 0$), so wird die Schwingung des Teilchens exponentiell mit der Zeitkonstante $\tau_z = 1/\gamma_z$ gedämpft. Dieser Vorgang wird *Widerstandskühlen* genannt. Die elektrische Leistung, die über den vom Strom I_{ind} durchflossenen ohmschen Widerstand des Schwingkreises in Wärmeleistung umgesetzt wird, entspricht der Energiemenge, die dem Teilchen pro Zeiteinheit entzogen wird. Wird die Schwingung des Teilchens in Resonanz mit dem Nachweisschwingkreis gebracht ($\omega_0 = \omega_r$), so gilt

$$P_{\text{ind}} = R_p I_{\text{ind}}^2 = \frac{dE}{dt} \quad . \quad (2.109)$$

Durch diesen Mechanismus sinkt die Energie der Eigenbewegung, bis deren Temperatur, im Sinne einer mittleren kinetischen Energie, der des Detektors entspricht. Im thermischen Gleichgewicht entsteht bei der Eigenfrequenz des Teilchens eine Verformung des Rauschspektrums des Nachweisschwingkreises. Das Teilchensignal erscheint als ein Minimum im Rauschspektrum, der sogenannte *Dip*, welcher in Abbildung 2.9(c) gezeigt wird. Um das quantitative Verständnis dieser Wechselwirkung, auf der die bolometrische

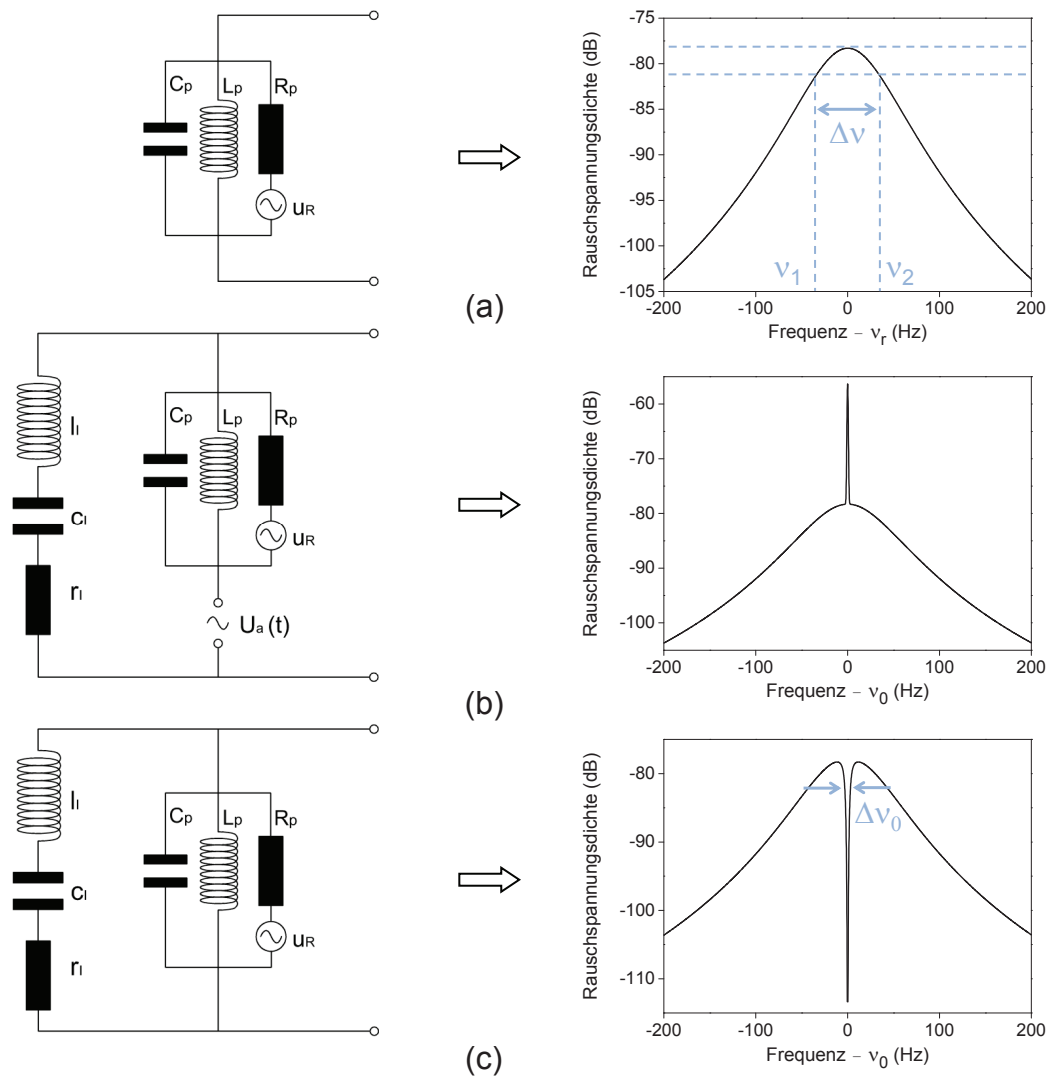


Abbildung 2.9.: Berechnete spektrale Rauschspannungsdichten: (a) des Nachweisschwingkreises, (b) des Nachweisschwingkreises in Wechselwirkung mit einem Teilchen, dessen Bewegung durch U_a angetrieben wird und (c) des Nachweis-Teilchen-Systems im thermischen Gleichgewicht. Das Ionensignal lässt sich entweder als ein Peak (b) oder ein Minimum (c) im Rauschspektrum nachweisen. Die Frequenz bei der der Extremwert auftritt entspricht der zu messenden Eigenfrequenz des Teilchens.

Nachweismethode im Wesentlichen beruht, zu erlangen, genügt es den komplexen Gesamtwiderstand $Z_{\text{ges}}(\omega)$ des in Abbildung 2.8 dargestellten Teilchen-Nachweis-Systems zu berechnen, um sodann die aufgrund dessen Realteil, $\text{Re}\{Z_{\text{ges}}(\omega)\}$, resultierende spektrale Rauschdichte zu bestimmen.

Betrachtet man die Parallelschaltung der Impedanz des Nachweisschwingkreises $Z_p(\omega)$ (siehe Gleichung (2.97)) und der Impedanz des Ion-Ersatzschaltbildes $Z_I^t(\omega) = r_I + Z_I(\omega)$

(siehe Gleichung (2.94)), so lässt sich die Gesamtimpedanz $Z_{\text{ges}}(\omega)$ durch

$$\frac{1}{Z_{\text{ges}}(\omega)} = \frac{1}{Z_p(\omega)} + \frac{1}{Z_I^t(\omega)} \Rightarrow$$

$$Z_{\text{ges}}(\omega) = \frac{\left[i \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right) + r_I \right] R_p}{R_p \left[1 - \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right) \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) + i r_I \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \right] + i \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right) + r_I} \quad (2.110)$$

beschreiben. Davon ist nur der Realteil für das Spannungsrauschen in Gleichung (2.103) von Relevanz

$$u_{R(\omega)} = \sqrt{4k_B T B \text{Re}\{Z_{\text{ges}}(\omega)\}} \quad . \quad (2.111)$$

Betrachtet man nun der Einfachheit halber das gespeicherte Teilchen als idealen Reihenschwingkreis, so gilt

$$Z_{\text{ges}}(\omega) = \frac{i \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right) R_p}{R_p \left[1 - \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right) \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \right] + i \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right)} \quad , \quad (2.112)$$

und es folgt

$$u_{R(\omega)} = \sqrt{4k_B T B} \sqrt{\frac{R_p}{1 + \frac{R_p^2 \left[1 - \left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right) \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \right]^2}{\left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right)^2}}} \quad . \quad (2.113)$$

Entspricht die Eigenfrequenz des Teilchens exakt der Resonanzfrequenz des Nachweisschwingkreises ($\omega_0 = \omega_r$, $Z_p(\omega_r) = R_p$), so vereinfacht sich Gleichung (2.113) zu

$$u_{R(\omega)} = \sqrt{4k_B T B} \sqrt{\frac{R_p}{1 + \frac{R_p^2}{\left(\omega l_I - \frac{1}{\omega c_I} \right)^2}}} = \sqrt{4k_B T B} \sqrt{\frac{R_p}{1 + R_p^2 \omega_0^2 c_I^2 \left(\frac{\omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2}} \quad . \quad (2.114)$$

Gleichung (2.114) zeigt, dass die Rauschdichte $u_R(\omega)$ ein Minimum bei der Frequenz des Teilchens $\omega = \omega_0$ aufweist. Ferner für de Fall $\omega_0 = \omega_r$ stimmt die Position des Minimums mit der Mitte der Schwingkreisresonanz überein (siehe Abbildung 2.9(c)). Ist die Frequenz des Teilchens gegenüber der Resonanzfrequenz des Nachweisschwingkreises hingegen verstimmt, so weist, wie in Abbildung 2.10 gezeigt, das Ionensignal eine “dispersive” Linienform auf.

Eine alternative mathematische Behandlung befindet sich in [54] (siehe auch [99]). Diese besteht darin, eine Fourier-Transformation der Gleichung (2.106) durchzuführen, um anschließend mit der für $z(\omega)$ erhaltenen Lösung die Stromdichte $I_{\text{ind}}(\omega)$ und die Spannungsichte $U(\omega)$ zu bestimmen.

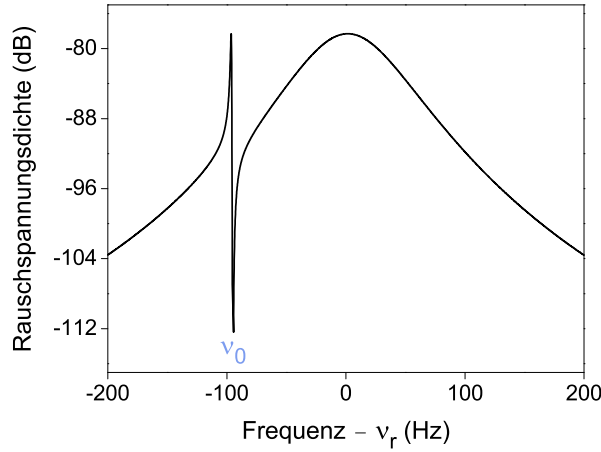


Abbildung 2.10.: Berechnete spektrale Rauschspannungsdichte für den Fall, dass die Bewegungsfrequenz des gespeicherten Teilchens ν_0 gegenüber der Resonanzfrequenz des Nachweisschwingkreises ν_r verstimmt ist. Die Lage des Minimums im Rauschspektrum entspricht der Frequenz des Teilchens ν_0 .

Dem Dip in Abbildung 2.9(c) ist eine Linienbreite $\Delta\nu_0$ zuzuordnen. Die Resonanzschärfe des aus der Reihenschaltung von l_I , c_I und r_I bestehenden Systems lässt sich als das Verhältnis zwischen Blind- und Wirkleistung, P_B bzw. P_W , bei der Resonanzfrequenz ω_0 definieren

$$Q_0 = \left| \frac{P_B}{P_W} \right| = \frac{I_{\text{ind}}^2 \omega_0 l_I}{I_{\text{ind}}^2 r_I} = \frac{\omega_0 l_I}{r_I} = \frac{\omega_0}{\gamma_z} \quad , \quad (2.115)$$

wobei die Beziehung in Gleichung (2.108) eingesetzt wurde. Gleichung (2.115) beschreibt den Gütefaktor eines gedämpften harmonischen Oszillators, durch den die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Nachweissystem in Abwesenheit einer Anregungsspannung in guter Näherung beschrieben werden kann ($U_a(t) = 0$ in Gleichung (2.106)). Wird Q_0 als Gütefaktor der Schwingung des Teilchens aufgefasst, so folgt

$$Q_0 = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta\nu_0 = \frac{\gamma_z}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau_z} \quad . \quad (2.116)$$

Für eine aus wenigen Teilchen bestehende Wolke ist die Breite des Dips proportional zur Teilchenzahl und wird durch

$$\Delta\nu_0(N) = N \frac{\gamma_z}{2\pi} = \frac{N}{2\pi\tau_z} \quad (2.117)$$

gegeben.

Die in diesem Abschnitt beschriebene Nachweismethode gestattet es, die Eigenfrequenz des Teilchens mit hoher Präzision zu messen. Gleichungen (2.110) bzw. (2.111) liefern die Linienform, die an das gemessene Rauschspektrum angepasst werden kann, um die Lage des Minimums im Frequenzspektrum zu ermitteln. Ferner findet die Widerstandskühlung

des betroffenen Bewegungsfreiheitsgrad in Abwesenheit einer treibenden Spannung statt, sodass die Eigenfrequenz des Teilchens bei niedriger kinetischer Energie bestimmt werden kann, vorausgesetzt, dass das Nachweissystem bei niedriger Temperatur betrieben wird. Die Einschränkung der Teilchenbewegung auf einen kleinen Raumbereich um das Fallenzentrum ist von großem Vorteil. Zum einen ist das Speicherpotential nahe dem Fallenzentrum näherungsweise harmonisch und zum anderen gilt, wie in Abschnitt 2.5.3 näher erläutert, im Fall des Vorhandenseins einer magnetischen Flasche, dass je geringer die Bewegungsamplitude ist, desto schmaler ist die Linienbreite der zu messenden Zyklotron- bzw. Larmorresonanz.

2.3.3. Experimentelle Umsetzung und Anforderungen an das Nachweissystem

Für die Messung der Eigenfrequenzen des in der Penning-Falle gespeicherten Protons werden zwei Nachweissysteme verwendet, das Zyklotron- und das Axial-Nachweissystem. Das vom Teilchen influenzierte Signal wird in beiden Fällen und in beiden Penning-Fällen (Präzisions- und Analysefälle) an einer Korrekturolektrode abgegriffen (siehe schematische Darstellung in Abbildung 2.7). Der Nachweis der Zyklotronbewegung erfolgt durch den Abgriff des vom Proton zwischen den beiden Hälften einer radial segmentierten Elektrode induzierten Signals. Die Magnetronbewegung lässt sich mithilfe der in Abschnitt 2.4.2 beschriebenen Technik an die axiale Schwingung koppeln, um sodann durch das Axial-Nachweissystem nachgewiesen zu werden.

Jedes Nachweissystem besteht aus einem Helix-Resonator [100] und zwei rauscharmen Verstärkern. Einer ist nahe der Falle bei Tieftemperaturen platziert und dient der Impedanzwandlung, während der andere außerhalb der Apparatur sitzt und bei Raumtemperatur betrieben wird. Der Resonator, welcher durch den Parallelschwingkreis in Abbildungen 2.7, 2.8 bzw. 2.9 dargestellt wird, setzt sich aus einer um einen Teflonkern¹¹ gewickelten Spule und einem zylindrischen leitenden Gehäuse zusammen, in das die Spule eingebracht wird. Die Kapazität C_p ergibt sich aus der parasitären Eigenkapazität der Spule und den Kapazitäten, die zwischen den Spulenwicklungen und dem Gehäuse entstehen. R_p ist der effektive Parallelwiderstand, der sich aus dem Serienverlustwiderstand bestimmen lässt. Der Verlustwiderstand setzt sich aus dem ohmschen Widerstand des Spulendrahtes, Verlusten im Resonatorgehäuse und dielektrischen Verlusten in der Drahtisolierung und im Spulenkörper zusammen. Die Materialien, woraus sowohl die Gehäuse als auch die Spulendrähte der Resonatoren bestehen, wurden, wie in [69] diskutiert, unter Berücksichtigung von deren resistiven Verlusten in den jeweiligen Frequenzbereichen ausgewählt. Dementsprechend bietet sich im niedrigen Frequenzbereich der axialen Schwingung mit $674 \text{ kHz} < \nu_z < 695 \text{ kHz}$ die Benutzung einer supraleitenden Legierung (NbTi) an, während im Bereich der modifizierten Zyklotronfrequenz, $\nu_+ \simeq 28.9 \text{ MHz}$,

¹¹Teflon[®] ist der Handelsname der Firma *DuPont* für Polytetrafluorethylen (PTFE).

sauerstofffreies Elektrolytkupfer (OFE-Kupfer) als Material besser geeignet ist. Die erste Verstärkereinheit wird bei Temperaturen zwischen 4 K und 8 K betrieben, weswegen diese aus tieftemperaturtauglichen GaAs-Feldeffekttransistoren besteht.

Gleichungen (2.99), (2.102), (2.103), (2.105) bzw. (2.107) deuten auf die unabdingbaren Voraussetzungen für den Entwurf eines hochempfindlichen Nachweissystems hin. Die Erhöhung der Empfindlichkeit des Systems beruht auf der Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnisses, auf dessen mathematische Herleitung hier verzichtet wird. Für eine vollständige Modellierung des Systems müssen die Eigenschaften der ersten Verstärkereinheit in Abbildung 2.7, nämlich das Eingangsrauschen, der Eingangswiderstand bzw. die Eingangskapazität mitberücksichtigt werden [22, 69, 101]. Grundsätzlich ist die Maximierung des Ionensignals gegenüber den Beiträgen aller Rauschquellen erwünscht. Im Fall des Nachweises durch die Dip-Methode ist der Vergleich zwischen dem Maximum des thermischen Rauschens und dem Eingangsrauschen des Verstärkers von Relevanz. Von entscheidender Bedeutung ist ohnehin das Erzielen eines großen Resonanzwiderstandes R_p , was durch die Maximierung des Gütefaktors bzw. der Induktivität der Nachweisschwingkreises erreicht werden kann. Neben der Eigenkapazität der Spule und der Kapazität der Falle, müssen zusätzliche parasitäre Kapazitäten minimiert werden, welche durch die Verkabelung und verlustbehaftete Bauteile entstehen können. Aus diesem Grund wird die erste Verstärkereinheit, deren Rauschen verständlicherweise gering gehalten werden muss, so nah wie möglich an den Fallenelektroden angebracht. Ferner werden die Signalleitungen der Detektoren möglichst weit entfernt von Anregungs- und Vorspannungsleitungen verlegt. Zudem wird besonders auf die Verwendung von Bauteilen und Materialien mit geringen Verlustfaktoren ($\tan \delta$) geachtet.

Darüber hinaus ermöglicht der Betrieb bei tiefen Temperaturen auf der einen Seite die Anwendung von supraleitenden Materialien, was zu einem höheren effektiven Parallelwiderstand R_p führen kann. Auf der anderen Seite ist das thermische Rauschen geringer je niedriger die Temperatur ist. Der effektive Elektrodenabstand wird so ausgewählt, dass die Linienbreite des Dips das bestmögliche Signal-Rausch-Verhältnis gestattet und die Zeitkonstante der Kühlung möglichst klein gehalten wird.

Für eine ausführliche Diskussion über die technischen Aspekte hinsichtlich der durchgeführten Optimierungsschritten wird auf [69, 102] verwiesen. In Tabelle 2.2 werden die wichtigsten Parameter zur Charakterisierung der beiden Nachweissysteme zusammengefasst. Die aufgelisteten Werte beziehen sich auf einen aus der Falle, den Resonatoren und den beiden Verstärkereinheiten bestehenden Aufbau bei Temperaturen zwischen 4 K und 10 K. Weitere Einzelheiten zum experimentellen Aufbau werden in Abschnitt 3.3 diskutiert.

Eigenschaften	Axial		Zyklotron
ν_0 (MHz)	0,680		28,969
L_p (μH)	1450		1,68
Q	2450 – 5800		750 – 1250
R_p (M Ω)	15 – 36		0,229 – 0,382
	PT	AT	
D (mm)	7,60	4,12	15,59
τ_0 (s)	0,248 – 0,105	0,073 – 0,031	69,1 – 41,4
$\Delta\nu_0$ (Hz)	0,64 – 1,52	2,18 – 5,17	0,002 – 0,004

Tabelle 2.2.: Parameter zur Charakterisierung des Axial- bzw. Zyklotron-Nachweissystems [69]. Dabei bezeichnet ν_0 die zu messende Eigenfrequenz des Teilchens, L_p , Q und R_p die Induktivität, die Güte bzw. den Resonanzwiderstand des Nachweissystems, D den effektiven Elektrodenabstand, τ_0 die Kühlzeitkonstante und $\Delta\nu_0$ die Linienbreite des Dips. Im Fall des Axial-Nachweissystems, unterscheiden sich die Parameter, die von der Geometrie der Falle abhängig sind, für die beiden im Experiment verwendeten Penning-Fallen, die Präzisions- (PT) und die Analysefalle (AT).

2.3.4. Elektronisches Feedback

Dieser Abschnitt widmet sich einer Technik zur Manipulation der effektiven Temperatur des gespeicherten Protons, welches sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Nachweisschwingkreis befindet. Die Methode beruht auf der Rückführung des am Schwingkreis gemessenen Signals auf das schwingende Teilchen [50, 69, 103]. Die konzeptionelle Realisierung dieser Rückkopplung (oder Feedback) wird in Abbildung 2.11 veranschaulicht. Dabei wird der Detektor durch den effektiven Parallelwiderstand R_p und dessen entsprechende Rauschspannung u_R (siehe Gleichung (2.103)) repräsentiert. Für die Falle wird die in Abschnitt 2.3.1 eingeführte idealisierte Darstellung als Plattenkondensator verwendet. Führt man die an der oberen Platte anliegende Spannung U auf die untere Platte zurück, wie in Abbildung 2.11(a) gezeigt, so wirkt sich dieses Rückkopplungssignal auf die Bewegung des Teilchens aus. Diese Auswirkung kann als eine vom Standpunkt des Protons aus gesehen modifizierte Schaltung aufgefasst werden. Diese wird in Abbildung 2.11(b) dargestellt, wobei G_R die Rückkopplungsverstärkung quantifiziert.

Zieht man nun in Betracht, dass der durch die Bewegung des Teilchens zwischen den Kondensatorplatten in Abbildung 2.11(b) induzierte Spannungsunterschied der gleiche ist, wie der in Abbildung 2.11(a), so folgt [50]

$$I_{\text{ind}}R_e = I_{\text{ind}}R_p - G_R I_{\text{ind}}R_p \quad \Rightarrow \quad R_e = R_p(1 - G_R) \quad . \quad (2.118)$$

Das thermische Rauschen, dem das Teilchen ausgesetzt wird, ist ebenfalls in beiden Fällen die Gleiche. Es folgt [50]

$$u_e = u_R - G_R u_R \quad \Rightarrow \quad T_e = T(1 - G_R) \quad . \quad (2.119)$$

Aus Gleichungen (2.118) bzw. (2.119) lässt sich die Invariante $T_e/R_e = T/R_p$ ableiten.

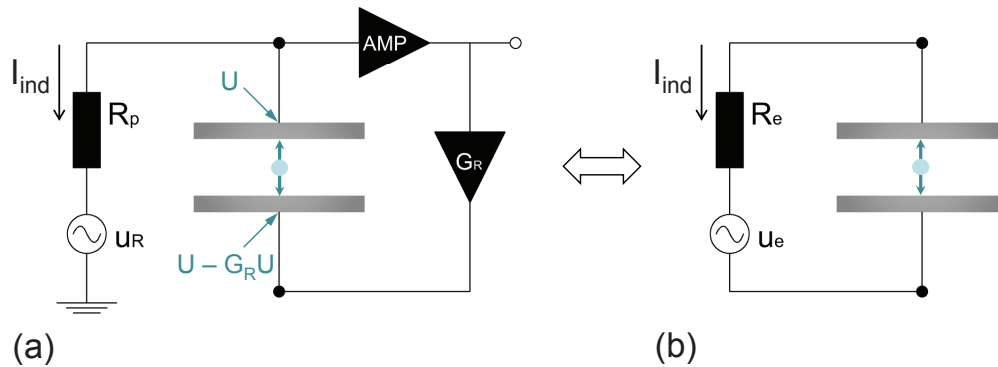


Abbildung 2.11.: Veranschaulichung des elektronischen Rückkopplungsverfahrens. (a) Die an der oberen Patte anliegende Spannung U wird auf das schwingende Teilchen zurückgekoppelt. (b) Für das Proton lässt sich der Effekt des Rückkopplungssignals durch einen sich bei einer modifizierten Temperatur befindenden ebenfalls modifizierten Widerstand R_e darstellen.

Gleichung (2.118) zeigt, dass der effektive Widerstand und somit die Dämpfungskonstante γ_z gemäß Gleichung (2.107) mit zunehmender Stärke der negativen Rückkopplung ($0 < G_R < 1$) genauso sinkt, wie die effektive Temperatur des Systems nach Gleichung (2.119). Zusätzliches Rauschen, welches durch das Rückkopplungsverfahren entsteht, beschränkt den erreichbaren niedrigsten Temperaturwert im Grenzfall $G_R \rightarrow 1$ auf $T_e > 0$ K. Eine positive Rückkopplung mit ($G_R < 0$) bewirkt hingegen eine Erhöhung der Temperatur bzw. der Dämpfungskonstante.

Die Kühlung durch negative Rückkopplung stellt für das in dieser Dissertation beschriebene Experiment eine unverzichtbare Technik dar. Wie im Laufe dieser Arbeit noch gezeigt wird, ist die Reduktion der Temperatur der Nachweissysteme, an welche die nachzuweisende Eigenbewegung gekoppelt ist, von entscheidender Relevanz. In Abbildung 2.12(a) wird der Aufbau zur experimentellen Umsetzung der Rückkopplungsmethode schematisch dargestellt. Die Stärke und Phase des Rückkopplungssignals lassen sich mithilfe eines Abschwächers bzw. Phasenschiebers einstellen. Die Auswirkung von unterschiedlichen Rückkopplungsverstärkungen bzw. Rückkopplungsphasen auf das Rauschspektrum des Axial-Nachweissystems wird in Abbildung 2.12(b) gezeigt.

2.4. Teilchenbewegung unter Einfluss elektromagnetischer Wechselfelder

Der Bewegungszustand eines in der Penning-Falle gefangenen Teilchens lässt sich mittels selektiver Hochfrequenzanregung kontrolliert beeinflussen. Dabei hängt die Auswirkung der Anregung von der Anregungsfrequenz und der Art des Radiofrequenzfeldes ab. Eine solche Manipulation der Teilchenbewegung ist für die Durchführung von hochpräzisen Messungen in Penning-Fallen von wesentlicher Bedeutung. Im Folgenden werden die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Anregungsmechanismen kurz zusammengefasst. Für

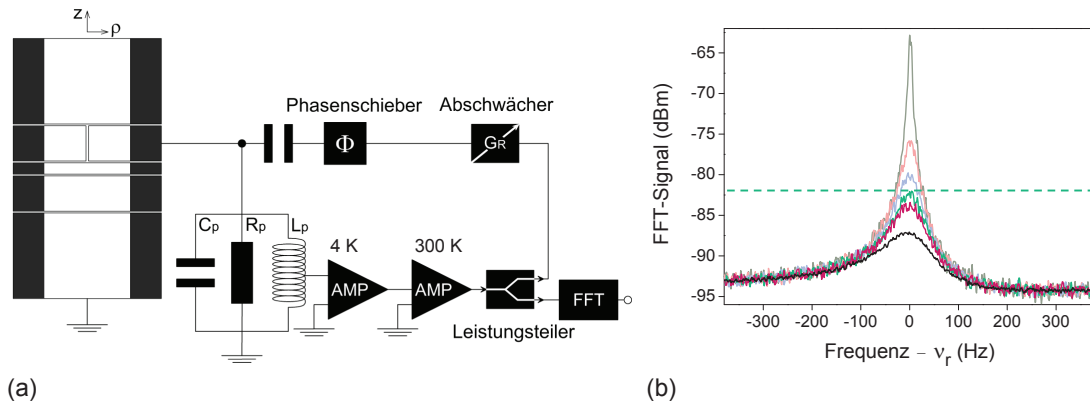


Abbildung 2.12.: (a) Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus zur Realisierung der Rückkopplungsmethode. Die Phase und Stärke der Rückkopplung wird mithilfe eines Phasenschiebers bzw. Abschwächers eingestellt. (b) Rauschspektrum des Axial-Nachweissystems unter Einfluss von unterschiedlichen Rückkopplungsverstärkungen bzw. Rückkopplungsphasen. Die horizontale Gerade kennzeichnet die Grenze zwischen positiver und negativer Rückkopplung. Die Kurven oberhalb dieser Linie entsprechen dem Ergebnis einer immer stärker werdenden positiven Rückkopplung, während die Daten unterhalb der Gerade die Auswirkung einer immer stärker werdenden negativen Rückkopplung darstellen.

eine umfassende Analyse der Teilchenbewegung unter Einfluss von elektromagnetischen Felder wird auf [54, 61, 62, 104] verwiesen.

2.4.1. Dipolare Anregung

Mittels einer dipolaren Anregung lassen sich alle drei Eigenbewegungen des gespeicherten Teilchens antreiben, vorausgesetzt, dass das Anregungssignal an die entsprechend geeignete Fallenelektrode angelegt wird. Ein Dipolfeld in der axialen bzw. radialen Richtung wird verwendet, um die Amplitude der axialen Schwingung und der radialen Bewegungen jeweils individuell zu ändern. Hiermit lässt sich das Ion gezielt auf größere Bewegungsradien zwingen, was Voraussetzung für den Nachweis des Signals des Teilchens über einen Peak im Rauschspektrum des Nachweisschwingkreises ist. Dieser Anregungsmechanismus wird für die Aufnahme von Massenspektren, für die Entfernung von Ionen aus der Falle und zum Teil für die Messung der Eigenfrequenzen eingesetzt.

Wird eine Wechselspannung mit der Frequenz $\omega_{\text{rf}} = 2\pi\nu_{\text{rf}}$ und Phase ϑ_{rf} an die Korrektorelektroden oder Endkappen der Falle angelegt (siehe Abbildungen 2.7 bzw. 3.8), so lässt sich ein Dipolfeld der Form

$$\vec{E}(t) = E_0 \hat{z} \cos(\omega_{\text{rf}} t + \vartheta_{\text{rf}}) \quad (2.120)$$

erzeugen, welches bei Erfüllung der Resonanzbedingung $\omega_{\text{rf}} = \omega_z$ die axiale Bewegung antreibt. Dabei bezeichnet E_0 die Feldamplitude. Wird die Wechselspannung nun an eine radial segmentierte Korrektorelektrode bzw. Endkappe angelegt, so wird das Dipolfeld

$$\vec{E}(t) = E_0 (\hat{x} + \hat{y}) \cos(\omega_{\text{rf}} t + \vartheta_{\text{rf}}) \quad (2.121)$$

generiert, welches bei Erfüllung der Resonanzbedingung $\omega_{\text{rf}} = \omega_+$ oder $\omega_{\text{rf}} = \omega_-$ die entsprechende radiale Bewegung antreibt.

2.4.2. Quadrupolare Anregung und Kopplung der Bewegungsmoden

Eine der vielseitigsten im Experiment verwendeten Techniken, die Seitenbandkopplung, basiert auf einer quadrupolaren Anregung, welche die Kopplung der Eigenbewegungen bewirkt. Die Technik wird für die Messung der Eigenfrequenzen, für die Kühlung der Bewegungsmoden, für Temperaturmessungen sowie für Energiekalibrierung bzw. Manipulation der Temperatur des Teilchens eingesetzt.

Durch das Anlegen einer Wechselspannung mit der Frequenz ω_{rf} an die radial segmentierte Korrektorelektrode bzw. Endkappe wird das oszillierende, bezüglich des elektrostatischen Feldes der Falle gekippte Quadrupolfeld [104]

$$\vec{E}(t) = \text{Re} \left(E_0 e^{i\omega_{\text{rf}} t} \right) (z\hat{x} + x\hat{z}) \quad (2.122)$$

hervorgerufen. Die Bewegungsgleichungen werden nun durch [104]

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = \text{Re} \left(\frac{e}{m_p} E_0 e^{i\omega_{\text{rf}} t} \right) x \quad (2.123)$$

$$\ddot{u} - i\omega_c \dot{u} - \frac{\omega_z^2}{2} u = \text{Re} \left(\frac{e}{m_p} E_0 e^{i\omega_{\text{rf}} t} \right) z \quad (2.124)$$

gegeben, wobei die Koordinatentransformation $u \equiv x + iy$ verwendet wurde (vergleiche Gleichungen (2.15), (2.16) bzw. (2.17)). Wie in [104] gezeigt, ist dieses System analog zu einem Zwei-Niveau-System, in welchem aufgrund einer resonanten Anregung Rabi-Oszillationen auftreten [73, 105]. Die Kopplung der Eigenbewegungen findet dann statt wenn die Anregungsfrequenz ω_{rf} der Summe oder der Differenz der Eigenfrequenzen zweier Moden entspricht. Die Kopplungsstärke in Frequenzeinheiten, welche sich mit der Rabi-Frequenz in Analogie bringen lässt, wird durch

$$\Omega_k = i \frac{eE_0}{4m_p \sqrt{\omega_z (\omega_+ - \omega_-)}} \quad (2.125)$$

bezeichnet.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird diese Technik der Seitenbandkopplung verwendet, um die radialen Bewegungsmoden an die axiale Mode zu koppeln. Erfolgt dies über das untere Seitenband $\omega_{\text{rf}} = \omega_+ - \omega_z$ bzw. über das obere Seitenband $\omega_{\text{rf}} = \omega_z + \omega_-$, so beschreiben die Lösungen des Systems von Gleichungen (2.123) und (2.124) eine zyklische phasenabhängige Modulation der betroffenen Bewegungsamplituden. Beide aneinander gekoppelte Eigenbewegungen werden nun einer durch $\cos(\Omega_k t + \vartheta_k)$ bedingten Amplitudenmodulation unterzogen, wobei die Phasenverschiebung zwischen den Moden $\Delta\vartheta_k = \pi/2$ beträgt. Für die axiale Bewegung folgt

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \cos(\Omega_k t + \vartheta_k) \sin(\omega_z t + \vartheta_z) \\ &= \frac{z_0}{2} \left\{ \sin[(\omega_z - \Omega_k)t + \vartheta_l] + \sin[(\omega_z + \Omega_k)t + \vartheta_r] \right\} . \end{aligned} \quad (2.126)$$

Eine Frequenzanalyse des durch Gleichung (2.126) gegebenen Zeitverlaufs der Axialbewegung ergibt zwei modifizierte Eigenfrequenzen,

$$\begin{aligned}\omega_l &= \omega_z - \Omega_k \\ \omega_r &= \omega_z + \Omega_k \quad ,\end{aligned}\tag{2.127}$$

welche sich als ein aufgespaltener Dip im Rauschspektrum des Axial-Nachweissystems erkennen lassen (siehe Abbildungen 5.12 bzw. 5.14). Ist die Kopplung nun nicht resonant mit

$$\omega_{\text{rf}} - (\omega_+ - \omega_z) = \delta \neq 0 \quad \text{bzw.}\tag{2.128}$$

$$\omega_{\text{rf}} - (\omega_z + \omega_-) = \delta \neq 0 \quad ,\tag{2.129}$$

so kann, wie in [104] diskutiert, die Lage der Frequenzkomponenten $\omega_{l,r}$ durch

$$\begin{aligned}\omega_l &= \omega_z - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4\Omega_k^2} \\ \omega_r &= \omega_z - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4\Omega_k^2}\end{aligned}\tag{2.130}$$

gegeben werden.

Sowohl die modifizierte Zyklotronfrequenz ω_+ als auch die Magnetronfrequenz ω_- lassen sich mithilfe der Seitenbandkopplung und über die Messung der daraus folgenden Frequenzkomponenten $\omega_{l,r}$ genau bestimmen. Wird die jeweilige radiale Bewegung an die Axialbewegung durch ein Anregungsfeld mit einer gegebenen Frequenz ω_{rf} gekoppelt, so lassen sich, wie in Abschnitten 5.2.3 und 5.2.4 gezeigt, die radialen Eigenfrequenzen ω_{\pm} über die sich aus Gleichungen (2.128), (2.129) und (2.130) ergebenden Beziehungen

$$\omega_l + \omega_r = 2\omega_z - \delta = \omega_z - \omega_{\text{rf}} + \omega_+\tag{2.131}$$

$$\omega_l + \omega_r = 2\omega_z - \delta = \omega_z + \omega_{\text{rf}} - \omega_-\tag{2.132}$$

berechnen.

Neben der Bestimmung der Eigenfrequenzen ermöglicht das Verfahren der Seitenbandkopplung die Manipulation der Energie der Bewegungsmoden. Insbesondere stellt diese Art der Kopplung eine Methode dar, mit deren Hilfe sich die sonst an keine externe Nachweisschaltung gekoppelte Magnetronbewegung über die Kopplung an die Axialbewegung dämpfen lässt. Diese Methode der Seitenbandkühlung wurde von Wineland und Dehmelt [106,107] vorgeschlagen und von Van Dyck, Schwinberg und Dehmelt [108] erstmals experimentell demonstriert.

Der Kühlmechanismus lässt sich anhand einer quantenmechanischen Betrachtung [54] einfach beschreiben. Ein sich anfänglich in einem durch die Quantenzahlen (n_z, n_-) bezeichneten Zustand befindendes System kann über die Interaktion mit einem Photon mit der Energie $\hbar(\omega_z + \omega_-)$ auf zwei verschiedene Weisen einen Übergang vollziehen. Wird

das Photon über den Übergang $(n_z, n_-) \rightarrow (n_z + 1, n_- - 1)$ absorbiert, so verringert sich die Magnetron-Quantenzahl und somit findet eine Kühlung der Magnetronmode statt. Dabei ist die Übergangsrate proportional zu $(n_z + 1)n_-$. Findet hingegen der Übergang $(n_z, n_-) \rightarrow (n_z - 1, n_- + 1)$ statt, so wird die Magnetronmode geheizt, wobei die Übergangsrate nun zu $n_z(n_- + 1)$ proportional ist. Solange $n_- > n_z$ dominiert die Kühlrate. Wird die Kopplung nun weiter angetrieben, so dauert die Kühlung bis die Bedingung der Gleichheit der Kühl- und Wärmeraten $n_z = n_-$ erfüllt ist fort. Da die Axialmode an eine externe Nachweisschaltung, welche als thermisches Bad bei der Temperatur T_z wirkt, gekoppelt ist, führt die Seitenbandkopplung zu keiner beständigen Veränderung der Energie des Axial-Freiheitsgrades. Das Gleichgewicht wird durch

$$\begin{aligned} \langle n_- \rangle &= \langle n_z \rangle \Rightarrow \\ \langle E_- \rangle &= -\frac{\omega_-}{\omega_z} \langle E_z \rangle = -\frac{\omega_-}{\omega_z} k_B T_z \end{aligned} \quad (2.133)$$

definiert, wobei die Beziehungen $E_z = \hbar\omega_z (n_z + \frac{1}{2})$ und $E_- = -\hbar\omega_- (n_- + \frac{1}{2})$ eingesetzt worden sind. Aus der analogen Betrachtung für den Fall der Kopplung der Zyklotronbewegung an die Axialbewegung ergibt sich

$$\langle E_+ \rangle = \frac{\omega_+}{\omega_z} \langle E_z \rangle = \frac{\omega_+}{\omega_z} k_B T_z \quad . \quad (2.134)$$

2.5. Die magnetische Flasche

Der Begriff *magnetische Flasche* bezeichnet den inhomogenen Anteil des Magnetfeldes, welcher durch Gleichung (2.57)

$$\vec{B}_F = B_2 \left[\left(z^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \hat{z} - z\rho\hat{\rho} \right]$$

gegeben wird. Eine solche Inhomogenität lässt sich, wie in Abbildung 2.13 veranschaulicht, mittels einer in die Analysefalle eingebrachten ferromagnetischen Ringelektrode erzeugen. Im Rahmen des Verfahrens zur Bestimmung des g -Faktors des Protons spielt die magnetische Flasche eine zentrale Rolle. Die durch Gleichung (2.4) gegebene Larmorfrequenz lässt sich über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Spin-Übergängen ermitteln, wenn diese durch ein äußeres Anregungsfeld mit der Frequenz $\nu_{\text{tf}} = \nu_L$ induziert werden. Voraussetzung ist dabei, dass das Umklappen des Protonspins nachgewiesen werden kann, was sich wiederum mittels der magnetischen Flasche realisieren lässt.

Der Entwurf der Analysefalle, welcher letztlich auf eine optimale Dimensionierung der Flasche abzielt, stellt einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar und wird in Kapitel 4 eingehend diskutiert. Im Folgenden wird zunächst die Methode zur Detektion der Spinausrichtung des Protons im inhomogenen Magnetfeld vorgestellt. Ferner wird auf die Auswirkungen der magnetischen Inhomogenität auf das zur Optimierung des elektrostatischen Potentials anzupassende Spannungsverhältnis T_R eingegangen. Schließlich werden

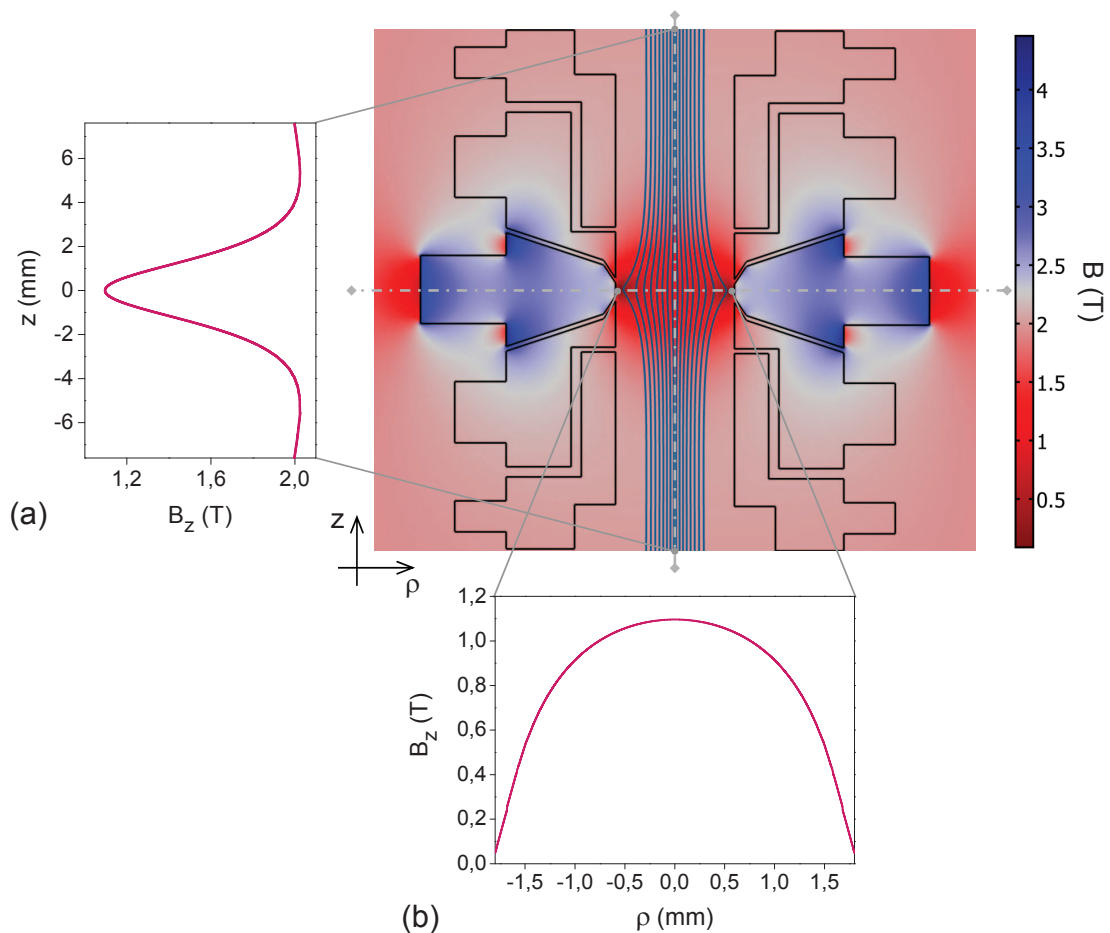


Abbildung 2.13.: Magnetische Flasche in der Analysefalle. Eine ferromagnetische Ringelektrode verzerrt die Magnetfeldlinien des äußeren homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0\hat{z}$ am Ort der Analysefalle. Die resultierende Inhomogenität lässt sich in erster Näherung durch Gleichung (2.57) beschreiben, wobei $B_2 = 297(10)$ mT/mm² beträgt. Magnetfeldverlauf entlang der (a) z -Achse bzw. (b) ρ -Achse. Der innere Radius der Analysefalle beträgt $\rho_0 = 1,8$ mm. Für Details siehe Kapitel 4.

die Linienformen der Larmor- bzw. Zyklotronresonanzkurve in Gegenwart einer magnetischen Flasche sowie die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Spineigenzuständen unter Einfluss eines äußeren Anregungsfeldes diskutiert.

2.5.1. Nachweis von Spin-Übergängen mittels magnetischer Flasche - der kontinuierliche Stern-Gerlach-Effekt

Im Gegensatz zur freien Zyklotronfrequenz ν_c des gefangenen Protons lässt sich die Präzessionsfrequenz ν_L seines Spins im äußeren Magnetfeld nicht direkt durch die Wechselwirkung einer oszillierenden Ladung mit der an die Fallenelektroden angeschlossenen Nachweisschaltung bestimmen. Die Ermittlung der Larmorfrequenz erfolgt unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Energieaufspaltung ΔU zwischen den beiden möglichen

Spinorientierungen gemäß Gleichung (2.5) proportional zu ν_L ist:

$$\Delta U = \hbar 2\pi \nu_L \quad .$$

Dementsprechend lassen sich Übergänge zwischen beiden Spineigenzuständen mittels eines Hochfrequenzfeldes induzieren, dessen Frequenz ν_{rf} nahe der Larmorfrequenz des in der Falle gespeicherten Protons liegt [105] (siehe auch Abschnitt 2.5.3). Typische Werte von ν_L in der Präzisions- bzw. Analysefalle sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. Wird nun die Wahrscheinlichkeit des Spin-Übergangs als Funktion der Anregungsfrequenz ν_{rf} gemessen, so kann ν_L aus der solcherweise gewonnenen Larmorresonanz genau ermittelt werden.

Die Bestimmung der Spinausrichtung erfolgt mithilfe der im inhomogenen Magnetfeld entstehenden Kopplung des magnetischen Moments des Protons an seine Axialfrequenz. Dieser auf dem sogenannten kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekt basierende Messansatz wurde von H. G. Dehmelt in [23] präsentiert. Im idealen homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ sind die vom Proton in einer Penning-Falle vollzogenen Eigenbewegungen voneinander unabhängig. Zwischen den Eigenbewegungen und der Spinausrichtung besteht ebenfalls keine Abhängigkeit. Wird nun der in Gleichung (2.57) gegebene inhomogene Anteil des Magnetfeldes einbezogen, so ergibt sich durch die Wechselwirkung der axialen Komponente des magnetischen Dipolmoments mit dem Magnetfeld

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} + \vec{B}_F \quad (2.135)$$

die magnetische potentielle Energie

$$U_M = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \Rightarrow \quad U_M = -\mu_z^t \left[B_0 + B_2 \left(z^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \right] \quad . \quad (2.136)$$

Dabei bezeichnet μ_z^t die axiale Komponente des gesamten magnetischen Moments, welches sich aus einem durch den Spindrehimpuls \vec{S} und einem durch den Bahndrehimpuls \vec{L} bedingten Anteil zusammensetzt

$$\vec{\mu}^t = \vec{\mu}^S + \vec{\mu}^L = \frac{e}{2m_p} \left(g\vec{S} + \vec{L} \right) \quad . \quad (2.137)$$

Die axiale Komponente des Bahndrehimpulses L_z lässt sich unter Verwendung der in Gleichungen (2.29), (2.30) und (2.19) gegebenen Lösungen für $x(t)$, $y(t)$ bzw. $z(t)$ unmittelbar berechnen

$$\begin{aligned} L_z &= \left(\vec{x} \times m_p \dot{\vec{x}} \right)_z = \\ &= -m_p \rho_+^2 \omega_+ - m_p \rho_-^2 \omega_- - m_p \rho_+ \rho_- \omega_c \cos [(\omega_+ - \omega_-) t + \Delta\vartheta] \quad . \quad (2.138) \end{aligned}$$

Der erste und der zweite Term in Gleichung (2.138) stellen die dem Zyklotron-, L_z^+ , bzw. dem Magnetron-Freiheitsgrad, L_z^- , zuzuordnenden Drehimpulse dar. Da der dritte Term eine periodische Funktion mit zeitlichem Mittelwert Null ist, trägt dieser zur

energieabhängigen Verschiebung der Bewegungsfrequenzen nicht bei. Somit folgt

$$\mu_z^t = \frac{e}{2m_p} \left[g\hbar m_s - 2 \left(\frac{E_+}{(\omega_+ - \omega_-)} + \frac{E_-}{(\omega_- - \omega_+)} \right) \right] , \quad (2.139)$$

wobei μ_z^S aus Gleichung (2.3) und ρ_+ bzw. ρ_- aus Gleichungen (2.38) und (2.39) zu entnehmen sind.

Der quadratische Term der Ortsabhängigkeit der magnetischen Flasche in Gleichung (2.136) führt zu einer zusätzlichen Kraftkomponente in der axialen Richtung, welche sich zur aus dem elektrostatischen Potential ergebenden Rückstellkraft addiert oder davon subtrahiert wird. Aus der Bewegungsgleichung (2.14) folgt demgemäß

$$\begin{aligned} m_p \ddot{z} &= -e \left[\vec{\nabla} \phi(\rho, z) \right]_z - \left[\vec{\nabla} U_M(\rho, z) \right]_z = -e2V_0c_2z + \mu_z^t 2B_2z \Rightarrow \\ \ddot{z} &= - \left[\frac{e2V_0c_2}{m_p} - \frac{\mu_z^t 2B_2}{m_p} \right] z \end{aligned} \quad (2.140)$$

für die axiale Richtung, wobei

$$\phi(\rho, z) = V_0c_2 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \quad (2.141)$$

das elektrostatische Quadrupolpotential einer idealen Penning-Falle mit Berücksichtigung der in Gleichung (2.82) definierten Notation darstellt. Die Axialfrequenz wird nun durch

$$\omega_z^2 = \frac{e2V_0c_2}{m_p} - \frac{\mu_z^t 2B_2}{m_p} = \omega_{z0}^2 \left(1 - \frac{\mu_z^t 2B_2}{m_p \omega_{z0}^2} \right) \quad (2.142)$$

beschrieben, wobei ω_{z0} die durch Gleichung (2.88) gegebene Axialfrequenz des Protons im homogenen Magnetfeld der Penning-Falle ist. Da $\frac{\mu_z^t 2B_2}{m_p \omega_{z0}^2} \ll 1$ gilt

$$\omega_z \approx \omega_{z0} \left(1 - \frac{\mu_z^t B_2}{m_p \omega_{z0}^2} \right) \stackrel{E_+ \rightarrow 0}{=} \stackrel{E_- \rightarrow 0}{=} \omega_{z0} \left(1 - m_s \frac{g\mu_N B_2}{m_p \omega_{z0}^2} \right) , \quad (2.143)$$

wobei $m_s = \pm \frac{1}{2}$ und $\mu_N = \frac{e}{2m_p} \hbar$ das Kernmagneton ist. Gleichung (2.143) besagt, dass die Axialfrequenz des Protons sich in Gegenwart einer magnetischen Flasche um zwei verschiedene durch die Spinorientierung bedingte Werte verschieben kann. Folglich ruft ein Übergang zwischen den Spineigenzuständen ($\Delta m_s = \pm 1$) einen Sprung in der Axialfrequenz hervor, welcher

$$\delta\nu_z^{SF} = \mp \frac{1}{2\pi^2} \frac{\mu_z^t B_2}{m_p \nu_z} \stackrel{E_+ \rightarrow 0}{=} \stackrel{E_- \rightarrow 0}{=} \mp \frac{1}{2\pi^2} \frac{g\mu_N B_2}{2 m_p \nu_z} \quad (2.144)$$

beträgt (vergleiche Gleichung (2.59)). Auf dieser Weise lässt sich ein Spin-Übergang letztendlich über den Vergleich zweier Messungen der axialen Frequenz ermitteln, vorausgesetzt, dass der Frequenzsprung $\delta\nu_z^{SF}$ detektiert werden kann. Die Messung der Axialfrequenz erfolgt wiederum mittels der zerstörungsfreien in Abschnitt 2.3 vorgestellten bolometrischen Nachweismethode.

Im Vergleich zu gleichartigen Experimenten zur Bestimmung des g -Faktors des Elektrons [31], des Positrons [11] und des in hochgeladenen Ionen gebundenen Elektrons [32–34, 80] stellt der Einsatz des kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekts im Fall des Protons eine Herausforderung dar. Die Schwierigkeit liegt in der Tatsache, dass das Verhältnis $\frac{\mu_{z,p}}{m_p}$ für das Proton eine Million Mal kleiner ist als das für das Elektron, $\frac{\mu_{z,p}}{m_p} \frac{m_e}{\mu_{z,e}} = 8 \times 10^{-7}$, was zur Folge hat, dass eine viel stärkere magnetische Flasche benötigt wird, um einen vergleichbar hohen Wert des Frequenzsprungs $\delta\nu_z^{SF}$ zu erzielen [63]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde, wie in Kapitel 4 präsentiert, ein neuartiges Design einer Penning-Falle entworfen. In dieser Falle konnte der durch eine ferromagnetische Ringelektrode hervorgerufene Koeffizient $B_2 = 297(10)$ mT/mm² erreicht werden (siehe Abbildung 2.13). Dies entspricht einem Frequenzsprung von $\delta\nu_z^{SF} = 186(7)$ mHz bei $\nu_z = 682(8)$ kHz. Auf die durch die ungewöhnlich starke Inhomogenität des Magnetfeldes bedingten experimentellen Hürden wird in Abschnitt 5.4 in allen Einzelheiten eingegangen.

2.5.2. Auswirkungen der magnetischen Inhomogenität auf das optimale tuning ratio T_R

Die technische Realisierung des oben vorgestellten Messvorgangs zum Nachweis von Spin-Übergängen bzw. Bestimmung der Spinausrichtung setzt eine hohe Stabilität der Axialfrequenz in der Penning-Falle voraus. Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle lassen sich die durch den Koeffizient B_2 bedingten energieabhängigen Frequenzverschiebungen (siehe Gleichung (2.60)) lediglich mittels der Minimierung bzw. genauen Einstellung der radialen Energie kontrollieren. Die gleiche Aussage gilt für die aus der speziellen Relativitätstheorie abgeleiteten in Gleichung (2.61) gezeigten Verschiebungen der Eigenfrequenzen. Im Fall von durch anharmonische Potentialanteile hervorgerufenen Frequenzverschiebungen lässt sich hingegen die Ursache der diesen zugrunde liegenden Kopplung durch die Eliminierung der Koeffizienten C_i (vergleiche Gleichungen (2.51) und (2.82)) unmittelbar bekämpfen. Wie in Abschnitt 2.2.3 erläutert, erfolgt die Unterdrückung der anharmonischen Potentialterme niedrigster Ordnung C_4 und C_6 durch die Anpassung des Verhältnisses der Spannungen an Ring- bzw. Korrektorelektroden, $T_R = \frac{V_k}{V_0}$, der Penning-Falle. In einem inhomogenen Magnetfeld besteht eine Abhängigkeit des optimalen Wertes von T_R von der radialen Energie. In [88] wird ein Modell zur Beschreibung dieser Abhängigkeit hergeleitet, dessen wesentliche Zusammenhänge im Folgenden diskutiert werden.

Wird der axiale Freiheitsgrad betrachtet, so ist dem in der Penning-Falle gespeicherten Proton die aus einem elektrischen und einem magnetischen Anteil bestehende potentielle

Energie

$$\begin{aligned}
 U &= U_E + U_M = e\phi(z) - \mu_z^t B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} eV_0 c_i z^i - \sum_{i=0}^{\infty} \mu_z^t B_i z^i \Rightarrow \\
 U &= \sum_{i=0}^{\infty} (eV_0 c_i - \mu_z^t B_i) z^i \equiv \sum_{i=0}^{\infty} c_i^M z^i
 \end{aligned} \tag{2.145}$$

zuzuordnen. Dabei ist das Magnetfeld analog zum elektrostatischen Potential in Gleichung (2.81) durch

$$B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i z^i \quad ; \quad B_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} B_z(\rho, z) \Big|_{(0, z_0)} \tag{2.146}$$

gegeben, wobei $z_0 = 0$ für die Analysefälle. Aus dem in Gleichung (2.145) gezeigten Zusammenhang und aus Gleichung (2.139) lässt sich der ‘‘verallgemeinerte’’ Koeffizient c_i^M definieren:

$$c_i^M = eV_0 e_i + eV_0 T_R d_i - \left(-\frac{e}{m_p} \frac{(E_+ - E_-)}{(\omega_+ - \omega_-)} + \frac{ge}{2m_p} \hbar m_s \right) B_i \quad , \tag{2.147}$$

wobei die in Gleichung (2.86) eingeführte Notation eingesetzt wurde. Gemäß Gleichung (2.147) ist also das Spannungsverhältnis $T_R^{C_i}$, mit welchem die Bedingung $c_i^M = 0$ erfüllt werden kann, für $B_i \neq 0$ eine Funktion der radialen Energie.

2.5.3. Spin-Übergangsrate und Linienformen in der magnetischen Flasche

Der Bestimmung der Larmorfrequenz des gespeicherten Protons liegt, wie in Abschnitt 2.5.1 erläutert, die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit eines Spin-Übergangs zugrunde, wenn das Teilchen einem Wechselfeld mit der Frequenz ν_{rf} ausgesetzt wird. Das Induzieren von Spin-Quantensprüngen beruht auf der Rabi-Methode [105], deren Prinzip sich anhand eines quantenmechanischen Zweizustandssystems, welches einer periodischen Störung unterzogen wird, erklären lässt.

Das System eines um die Achse des homogenen Magnetfeldes $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ mit der Frequenz ω_L präzedierenden Spins $\vec{S} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma}$ und eines zusätzlichen in der xy -Ebene rotierenden magnetischen Wechselfeldes

$$\vec{B}_{rf}(t) = b_{rf} (\hat{x} \cos \omega_{rf} t + \hat{y} \sin \omega_{rf} t) \tag{2.148}$$

wird betrachtet. Bei der idealisierten Beschreibung der Spin-Resonanz [109, 110] lässt sich die Spinbewegung durch den Hamiltonian [54]

$$\begin{aligned}
 H &= -g \frac{e}{2m_p} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot [\vec{B} + \vec{B}_{rf}(t)] = H_0 + H_1 \quad \text{mit} \\
 H_0 &= \hbar \omega_L \frac{1}{2} \sigma_z \\
 H_1 &= \frac{1}{2} \hbar (\omega_L - \omega_{rf}) \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \Omega_R (\sigma_x \cos \omega_{rf} t + \sigma_y \sin \omega_{rf} t)
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

beschreiben, wobei

$$\Omega_R = g \frac{eb_{\text{rf}}}{2m_p} = \frac{\omega_L b_{\text{rf}}}{B_0} \quad (2.150)$$

die Rabi-Frequenz bezeichnet. Im mitrotierenden Bezugssystem rotiert der Spin mit der Kreisfrequenz

$$\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + (\omega_L - \omega_{\text{rf}})^2} \quad (2.151)$$

um die Achse

$$\hat{n} = \frac{\Omega_R}{\Omega} \hat{x} + \frac{\omega_L - \omega_{\text{rf}}}{\Omega} \hat{z} \quad (2.152)$$

in der xy -Ebene. Entspricht die Frequenz des Anregungsfeldes nun genau der Larmorfrequenz, $\Delta\omega = \omega_L - \omega_{\text{rf}} = 0$, so präzediert der Spin um die x -Achse. Aus dem ruhenden Bezugssystem betrachtet kann ein sich bezüglich der z -Achse im anfänglichen Spin-Up-Zustand befindendes Teilchen ausschließlich in den Spin-Down-Zustand übergehen. Die Besetzungswahrscheinlichkeit des zweiten möglichen Zustandes ist durch

$$P(t) = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + (\omega_L - \omega_{\text{rf}})^2} \sin^2 \left(\left[\Omega_R^2 + (\omega_L - \omega_{\text{rf}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} t \right) \quad (2.153)$$

gegeben. Ein zeitlich oszillierender Wechsel der Besetzung der Zustände findet bei der Frequenz Ω_R statt.

Der oben vorgestellte Formalismus setzt ein homogenes Magnetfeld sowie eine kohärente Anregung voraus. Infolgedessen lässt sich dieser weder im Fall der Analysefalle noch der Präzisionsfalle (siehe [111]) zur Beschreibung der Spin-Übergangswahrscheinlichkeit unmittelbar anwenden. Unvermeidliche Schwankungen bewirken eine Streuung der Präzessionsfrequenz ω_L des gespeicherten Teilchens über einen Bereich $\delta\omega_L$, welche zur Zerstörung der kohärenten Anregung und zur Linienverbreiterung führt. Diese Schwankungen rühren von der Brownschen Bewegung der an eine externe Nachweisschaltung gekoppelten axialen Schwingung her und werden entweder über Inhomogenitäten des Magnetfeldes oder über die spezielle Relativitätstheorie an die Spinbewegung gekoppelt. In jedem Fall lassen sich diese de facto als Schwankungen im homogenen Magnetfeld betrachten.

In [52, 53] wurde die Theorie für die Herleitung der exakten Linienform sowohl der Larmor- als auch der Zyklotronresonanz im inhomogenen Magnetfeld einer magnetischen Flasche von L.S. Brown erstmals präsentiert. Die Motivation dabei war die fundierte mathematische Beschreibung der gemessenen Linienformen im Rahmen des Experimentes zur Bestimmung des magnetischen Moments des Elektrons bzw. Positrons [112, 113]. Wird die Messung des magnetischen Moments in Gegenwart einer magnetischen Flasche durchgeführt, so ist die genaue Kenntnis der betreffenden Linienformen zum Erzielen eines mit der inhärenten experimentellen Genauigkeit übereinstimmenden Messergebnisses unabdingbar.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der g -Faktor des Protons im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle bestimmt. Daraufhin werden die Larmor- und die Zyklotronfrequenz jeweils aus den Maxima der Spin-Übergangswahrscheinlichkeit bzw. der Zyklotronresonanz ermittelt. Im Folgenden werden daher anhand des Beispiels von Spin-Quantensprüngen die hierfür wesentlichen Resultate der oben erwähnten Theorie geschildert.

Schwingt das gespeicherte Teilchen mit der Amplitude A_z entlang der axialen Richtung im inhomogenen Magnetfeld der Flasche (siehe Abbildung 2.13(a)), so erfährt dieses gemäß Gleichungen (2.19) und (2.135) ein ortsabhängiges oder äquivalent zeitabhängiges Magnetfeld

$$B_z(t) = B_0 + B_2 A_z^2 \sin^2(\omega_z t) \quad . \quad (2.154)$$

Dies führt zur entsprechenden Orts- bzw. Zeitabhängigkeit sowohl der Larmor- als auch der Zyklotronfrequenz:

$$\omega_L(t) = \frac{ge}{2m_p} B_0 \left[1 + \frac{B_2}{B_0} z^2(t) \right] \quad (2.155)$$

$$\omega_c(t) = \frac{e}{m_p} B_0 \left[1 + \frac{B_2}{B_0} z^2(t) \right] \quad (2.156)$$

oder generell

$$\omega(t) = \omega_0 [1 + \epsilon z^2(t)] \quad , \quad (2.157)$$

wobei $\epsilon = \frac{B_2}{B_0}$ und ω_0 die entsprechende Frequenz im Zentrum der Falle bezeichnet. Ferner ist, wie in Abschnitt 2.3.2 diskutiert, die axiale Schwingung des Teilchens an eine sich bei der Temperatur T_z befindende externe Nachweisschaltung gekoppelt. Im thermischen Gleichgewicht gehorcht die axiale Energie also einer Boltzmann-Verteilung und es gilt

$$\frac{1}{2} m_p \omega_z^2 \langle z^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T_z \Rightarrow \langle z^2 \rangle = \frac{k_B T_z}{m_p \omega_z^2} \quad (2.158)$$

gemäß dem Gleichverteilungssatz. Somit lässt sich die durch den Parameter

$$\delta\omega = \omega_0 \epsilon \langle z^2 \rangle = \omega_0 \frac{B_2}{B_0} \frac{k_B T_z}{m_p \omega_z^2} \quad (2.159)$$

gegebene Linienbreite einführen, wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist.

Für die Berechnung der Spin-Übergangswahrscheinlichkeit wird nun die Störungstheorie erster Ordnung im Grenzfall einer sehr geringen Rabi-Frequenz Ω_R verwendet, wobei der ungestörte Hamiltonian H_0 die durch Gleichung (2.157) gegebene Schwankung beinhaltet [52–54],

$$\begin{aligned} H_0 &= \hbar\omega(t) \frac{1}{2} \sigma_z \quad \text{mit} \\ \omega(t) &= \omega_{L0} + \omega_{L0} \epsilon z^2(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.160)$$

und

$$H_1 = -g \frac{e \hbar}{2m_p} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}(t) \cdot \vec{B}_{\text{rf}}(t) \quad , \quad (2.161)$$

wobei die Zeitabhängigkeit von $\vec{\sigma}(t)$ durch H_0 bestimmt wird.

Die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Betragsquadrat des Übergangsmatrixelements

$$\left\langle - \left| \int_{t_1}^{t_2} -\frac{i}{\hbar} H_1(t) dt \right| + \right\rangle \quad , \quad (2.162)$$

wobei $|-\rangle$ und $|+\rangle$ die Spineigenzustände bezeichnen und $t_0 = t_2 - t_1$ die Anregungszeit ist. Zum Matrixelement in Gleichung (2.162) trägt nur die Komponente

$$\sigma_-(t) = \frac{1}{2} [\sigma_x(t) - i\sigma_y(t)] = \sigma_-(0) \exp \left[-i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \quad (2.163)$$

bei. Es folgt

$$P_{SF} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \exp \left[-\pi \Omega_R^2 t_0 \chi(\omega_{\text{rf}}) \right] \right\} \quad (2.164)$$

für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Spin-Quantensprüngen. Im Resonanzfall $\omega_{\text{rf}} = \omega_{L0}$ wird bei ausreichend langer Anregungszeit t_0 bzw. ausreichend hoher Amplitude des Anregungsfeldes b_{rf} die Sättigung mit einem maximalen Wert von $P_{SF} = \frac{1}{2}$ erreicht, was auf die Tatsache zurückzuführen ist, dass es sich dabei um einen inkohärenten Prozess handelt. In Gleichung (2.164) bezeichnet $\chi(\omega_{\text{rf}})$ die Linienform der Larmorresonanz, welche sich durch

$$\begin{aligned} \chi(\omega_{\text{rf}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega_{\text{rf}}t} \langle \exp[-i\vartheta_s(t)] \rangle \quad \text{mit} \\ \vartheta_s(t) &= \omega_{L0}t + \omega_{L0}\epsilon \int_0^t z^2(t') dt' \end{aligned} \quad (2.165)$$

beschreiben lässt, wobei $\vartheta_s(t)$ die der Spin-Präzession zuzuordnende Phase beschreibt. Die Winkelklammern bezeichnen den statistischen Mittelwert über die aufgrund der schwankenden axialen Position $z(t)$ entstehende Brownsche Bewegung. Wie in [53, 54] bewiesen, beschreibt die Linienform in Gleichung (2.165) ebenfalls die Zyklotronresonanz.

Wie durch Gleichung (2.106) veranschaulicht, lässt sich das System des in der Falle oszillierenden Teilchens in Wechselwirkung mit einer externen Nachweisschaltung durch eine erzwungene Schwingung beschreiben. Die externe Schaltung wirkt gleichzeitig als

thermisches Bad und Dämpfungsmechanismus, wobei die Dämpfungskonstante gemäß Gleichung (2.107) durch

$$\gamma_z = \frac{e^2}{m_p D^2} R_p$$

gegeben ist. Im Rahmen der Betrachtung der Linienform sind also zwei Parameter von Relevanz, die axiale Temperatur T_z , welche sich entsprechend Gleichung (2.159) durch den Linienbreite-Parameter $\delta\omega_L$ wiedergeben lässt, und die Dämpfungskonstante γ_z . In [53] wird der allgemeingültige Ausdruck für die Linienform

$$\chi(\omega_{\text{rf}}) = \frac{4}{\pi} \text{Re} \frac{\gamma' \gamma_z}{(\gamma' + \gamma_z)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma' - \gamma_z)^{2n} (\gamma' + \gamma_z)^{-2n}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \gamma' - \frac{1}{2} \gamma_z - i(\omega_{\text{rf}} - \omega_0)} \quad (2.166)$$

aus Gleichung (2.165) abgeleitet, wobei $\gamma' = \sqrt{\gamma_z^2 + 4i\gamma_z\delta\omega}$.

Gleichung (2.166) vereinfacht sich in zwei anhand der Parameter $\delta\omega$ und γ_z definierten Grenzfällen. Ist ($\gamma_z \gg \delta\omega$), so ist die axiale Bewegung stark an das thermische Bad gekoppelt und die Systemdynamik wird vom axialen Nachweisschwingkreis vorgegeben. Ist hingegen ($\gamma_z \ll \delta\omega$), so ist die Kopplung schwach. Werden nun die typischen in Tabellen 2.1 bzw. 2.2 aufgelisteten experimentellen Parameter bei einer axialen Temperatur von $T_z \approx 10$ K betrachtet, so folgt $\gamma_z \approx 21$ Hz und $\delta\omega_L \approx 370$ kHz in der Analysefalle, was dem Fall der schwachen Kopplung entspricht. In diesem Grenzfall bleibt die Amplitude der Axialbewegung während der für eine idealisierte Einzelmessung von ω_L benötigten Zeit $1/\delta\omega_L$ konstant. Die Linienform ergibt sich aus der Mittelung über eine Vielzahl solcher Einzelmessungen und lässt sich dementsprechend mittels der Faltung einer δ -Funktion mit der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie berechnen. Aus Gleichung (2.165) folgt

$$\begin{aligned} \chi(\omega_{\text{rf}}) &= \int_0^{\infty} dE_z \delta \left[\omega_{\text{rf}} - \omega_{L0} \left(1 + \frac{\epsilon E_z}{m_p \omega_z^2} \right) \right] k_B T_z e^{-E_z/k_B T_z} \\ &= \frac{\Theta(\omega_{\text{rf}} - \omega_{L0})}{\delta\omega} \exp \left[-\frac{\omega_{\text{rf}} - \omega_{L0}}{\delta\omega} \right], \end{aligned} \quad (2.167)$$

wobei $z^2(t)$ durch seinen Mittelwert über einen Schwingungszyklus, $\bar{z}^2 = \frac{E_z}{m_p \omega_z^2}$, ersetzt worden ist und $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion bezeichnet, welche $\Theta(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$ beträgt. Demgemäß ist für $\omega_{\text{rf}} < \omega_{L0}$ keine Antwort des Systems zu erwarten. Kommt nun die Anregungsfrequenz der Larmorfrequenz gleich $\omega_{\text{rf}} = \omega_{L0}$, so hat dies einen diskontinuierlichen Sprung in $\chi(\omega_{\text{rf}})$ zur Folge. Mit dann zunehmender Anregungsfrequenz $\omega_{\text{rf}} > \omega_{L0}$ sinkt $\chi(\omega_{\text{rf}})$ exponentiell. Die berechnete Linienform der Larmorresonanz ist Abbildung 2.14 zu entnehmen. Der Wert ω_{L0} lässt sich als die einer verschwindenden Amplitude der axialen Bewegung zuzuordnende Larmorfrequenz auffassen. Die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie spiegelt sich offenkundig in der Linienform wieder.

Wie in [69] gezeigt, lässt sich Gleichung (2.167) unter der Bedingung ($\gamma_z \ll \delta\omega$) ohne Beschränkung der Allgemeinheit in die Näherungsgleichung

$$\begin{aligned} \chi(\omega_{rf}) &= \frac{1}{\pi\delta\omega_L} \left[\arctan \left(\frac{\gamma_z \left(\omega_{rf} - \left(\omega_0 + \frac{\gamma_z}{2\text{Re}\tilde{\gamma}} \delta\omega_L \right) \right)}{2\text{Re}\tilde{\gamma}} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\ &\times \exp \left(-\frac{\omega_{rf} - \left(\omega_0 + \frac{\gamma_z}{2\text{Re}\tilde{\gamma}} \delta\omega_L \right)}{\delta\omega_L} \right) \end{aligned} \quad (2.168)$$

überführen.

Aus Gleichungen (2.164), (2.167) bzw. (2.168) lassen sich die Bedingungen für die optimale Ermittlung der Larmor-Frequenz im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle ableiten. Die ausschlaggebende Maßnahme ist das Erzielen der kleinstmöglichen axialen Temperatur T_z , was mittels des in Abschnitt 2.3.4 vorgestellten Verfahrens des elektronischen Feedbacks realisiert werden kann. Wie in Abbildung 2.14(a) gezeigt, führt die Senkung der Temperatur bei konstant bleibender Anregungsamplitude b_{rf} bzw. Anregungszeit t_0 zur Reduktion der Linienbreite der Resonanz, wie gemäß Gleichung (2.159) zu erwarten ist. Bei der minimal erreichbaren axialen Temperatur, welche $T_z = 2,22(19)$ K beträgt (siehe Abschnitt 5.4.3), ist die Sättigung der Resonanz durch eine geeignete Wahl von b_{rf} bzw. t_0 zu vermeiden, da andernfalls eine Erhöhung der Linienbreite zustande kommt, wie in Abbildung 2.14(c) veranschaulicht. Für eine Anregungsamplitude von $b_{rf} = 1\mu\text{T}$ ist die Wahrscheinlichkeit $P_{SF}(\omega_{L0})$ bei der Larmorfrequenz $\nu_{L0} = 50,065$ MHz als Funktion der Anregungszeit für verschiedene axiale Temperaturen in Abbildung 2.14(b) dargestellt. Die zum Erreichen einer Wahrscheinlichkeit von $P_{SF} = 45\%$ benötigten Feldstärken sind als Funktion der Anregungszeit für die axiale Temperatur von $T_z = 2,22$ K und $\nu_{L0} = 50,065$ MHz in Abbildung 2.14(d) gezeigt. Dabei wird $P_{SF} < 50\%$ gewählt, da die Resonanz beim Erreichen der maximalen Wahrscheinlichkeit immer eine leichte Sättigung aufweist.

2.6. Bestimmung des g -Faktors mithilfe eines Doppel-Penning-Fallen-Aufbaus

Die Bestimmung des g -Faktors beruht gemäß Gleichung (2.7)

$$\nu_L = \frac{1}{2\pi} g \frac{e}{2m_p} B \quad \boxed{g = 2 \frac{\nu_L}{\nu_c}} \quad \nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{e}{m_p} B$$

ausschließlich auf der Messung von zwei Frequenzen des in der Penning-Falle gespeicherten Protons. Die freie Zyklotronfrequenz ν_c wird über die Beziehung (2.64)

$$\nu_c = \sqrt{\nu_+^2 + \nu_z^2 + \nu_-^2}$$

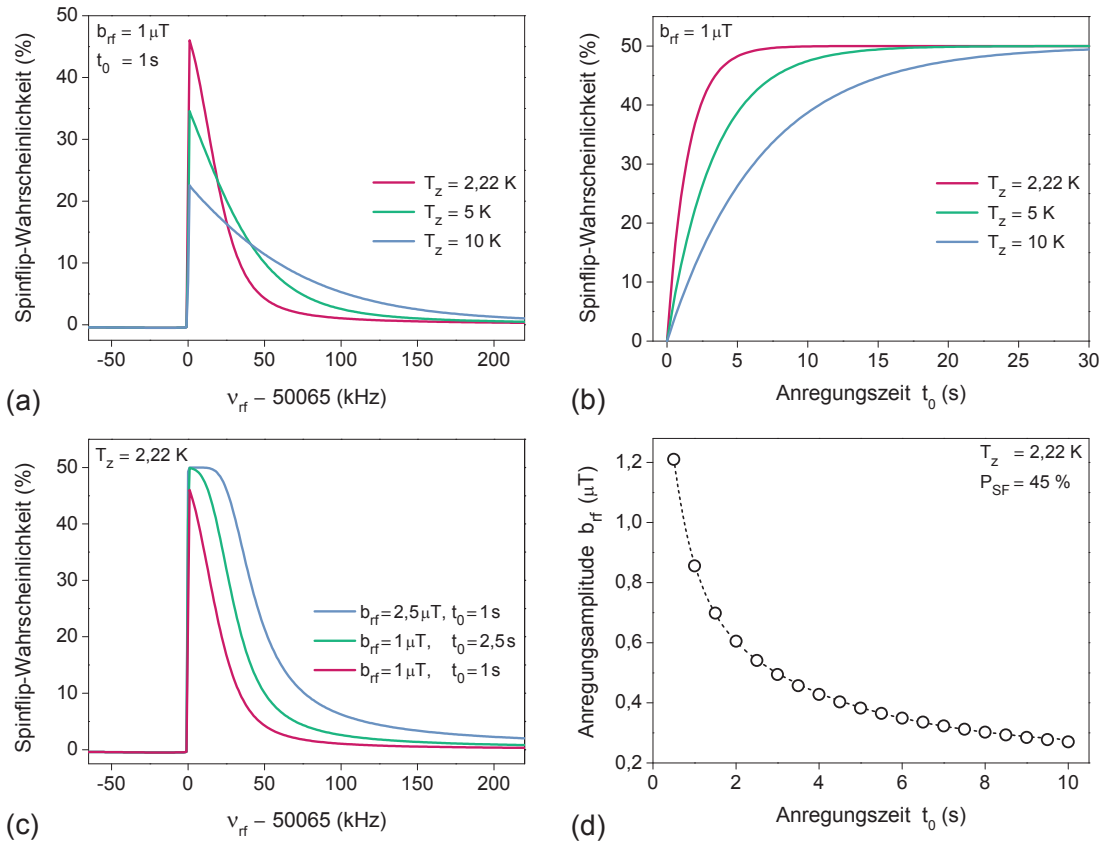


Abbildung 2.14.: Beispiele von berechneten Linienformen der Larmorresonanz bzw. Spin-Übergangswahrscheinlichkeit im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle. (a) Verlauf der Wahrscheinlichkeit P_{SF} als Funktion der Anregungsfrequenz ν_{rf} bei konstant bleibender Anregungsamplitude b_{rf} und Anregungszeit t_0 für verschiedene axiale Temperaturen T_z . (b) Wahrscheinlichkeit $P_{SF}(\omega_{L0})$ bei der Larmorfrequenz $\nu_{L0} = 50,065$ MHz als Funktion von t_0 für verschiedene Werte von T_z . (c) Veranschaulichung der Erhöhung der Linienbreite der Resonanz bei Erreichen der Sättigung für $T_z = 2,22$ K. (d) Zum Erreichen einer Wahrscheinlichkeit von $P_{SF} = 45\%$ benötigte Feldstärke als Funktion der Anregungszeit für die axiale Temperatur von $T_z = 2,22$ K und $\nu_{L0} = 50,065$ MHz.

aus den drei zerstörungsfrei gemessenen Eigenfrequenzen ν_+ , ν_z bzw. ν_- berechnet, während die Bestimmung der Larmorfrequenz ν_L über die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit von Spin-Quantensprüngen erfolgt.

Der auf dem Vorhandensein einer magnetischen Flasche basierenden kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekt stellt auf der einen Seite den ausschlaggebenden Messansatz im Rahmen der Bestimmung des g -Faktors des Protons dar. Auf der anderen Seite lässt sich die Anwendung von zwei räumlich getrennten Penning-Fallen zur Gewährleistung der angestrebten Genauigkeit genau darauf zurückzuführen.

Die magnetische Inhomogenität führt über den Koeffizient B_2 zu den in Gleichung (2.60) zusammengefassten systematischen energieabhängigen Frequenzverschiebungen,

welche für typische experimentelle Parameter und $B_2 = 297(10)$ mT/mm²

$$\begin{pmatrix} \Delta\nu_+ \\ \Delta\nu_z \\ \Delta\nu_- \\ \Delta\nu_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,98 & 2,10 \times 10^3 & 4,21 \times 10^3 \\ 7,92 \times 10^1 & 0,00 & -7,92 \times 10^1 \\ 3,03 & -1,52 & -3,03 \\ -8,34 & 5,88 \times 10^3 & 1,18 \times 10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_+ \\ T_z \\ T_- \end{pmatrix} \text{ Hz/K} \quad (2.169)$$

betragen, wobei $T_j = E_j/k_B$. Diese Verschiebungen spiegeln sich offenbar in der freien Zyklotronfrequenz ν_c und im g -Faktor wider. Die relative Verschiebung von ν_c lässt sich gemäß Gleichung (2.169) durch

$$\frac{\Delta\nu_c(E)}{\nu_c} = \frac{\sqrt{[\nu_+ + \Delta\nu_+(E)]^2 + [\nu_z + \Delta\nu_z(E)]^2 + [\nu_- + \Delta\nu_-(E)]^2} - \nu_c}{\nu_c} \quad (2.170)$$

berechnen. Aus Gleichungen (2.60), (2.169) bzw. (2.170) folgt

$$\begin{pmatrix} \Delta\nu_c/\nu_c \\ \Delta\nu_L/\nu_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,31 \times 10^{-10} & 1,17 \times 10^{-4} & 2,34 \times 10^{-4} \\ -1,67 \times 10^{-7} & 1,17 \times 10^{-4} & 2,35 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_+ \\ T_z \\ T_- \end{pmatrix} \text{ 1/K} \quad (2.171)$$

für die freie Zyklotronfrequenz bzw. die Larmorfrequenz. Die entsprechende systematische Verschiebung des g -Faktors wird durch

$$\frac{\Delta g(E)}{g} = \frac{1}{g} \left[2 \left(\frac{\nu_L + \Delta\nu_L(E)}{\nu_c + \Delta\nu_c(E)} \right) - g \right] \quad (2.172)$$

gegeben und beträgt

$$\left(\Delta g/g \right) = \left(-1,67 \times 10^{-7} \quad 1,66 \times 10^{-7} \quad 4,99 \times 10^{-7} \right) \begin{pmatrix} T_+ \\ T_z \\ T_- \end{pmatrix} \text{ 1/K} \quad (2.173)$$

im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle. Wird der g -Faktor in Gegenwart der magnetischen Flasche bestimmt, so ist mit energieabhängigen Verschiebungen des gemessenen Wertes in der Größenordnung von 10^{-7} 1/K zu rechnen. Im Hinblick auf das Bestreben, das magnetische Moment des Protons mit einer relativen Genauigkeit von mindestens 10^{-9} zu bestimmen, würde dies die Ermittlung des g -Faktors als Funktion der Energie und anschließende Extrapolation auf $E = 0$ zwangsläufig erfordern, was nicht nur die Messzeit sondern auch die Komplexität und Anfälligkeit der Messmethode beträchtlich erhöhen würde.

Ein viel eleganterer und effektiverer Ansatz wurde von H. Häffner und N. Hermanspahn eingeführt und im Rahmen des Experiments zur Bestimmung des magnetischen Moments des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff ($^{12}\text{C}^{5+}$) erstmals an der Universität Mainz demonstriert [32, 42, 99]. Dabei werden zwei Penning-Fallen zur Durchführung der Messung verwendet. In der Analysefalle ruft eine ferromagnetische Ringelektrode die magnetische Flasche hervor, mittels derer die Spinausrichtung des Teilchens detektiert werden kann. Weit genug vom Fallenzentrum entfernt wird die zweite Falle, die Präzisionsfalle, platziert. Durch eine geeignete Wahl des Abstands zwischen beiden Fallen

wäre möglich, wie in Abschnitt 5.2.5 diskutiert, die Auswirkung der ferromagnetischen Elektrode auf das Magnetfeld am Ort der Präzisionsfalle so stark zu verringern, dass die durch den in dieser Falle vorhandenen Koeffizient B_2 bedingten Frequenzverschiebungen unerheblich werden könnten. In der Analysefalle wird ausschließlich die Spinorientierung des Teilchens erfasst, während die Eigenfrequenzen im näherungsweise homogenen Magnetfeld der Präzisionsfalle bestimmt werden.

In Abbildung 2.15 ist der Doppel-Penningfalle-Aufbau des in dieser Arbeit vorgestellten Experiments gezeigt. Der Abstand zwischen den Fallenzentren beträgt 43,7 mm und

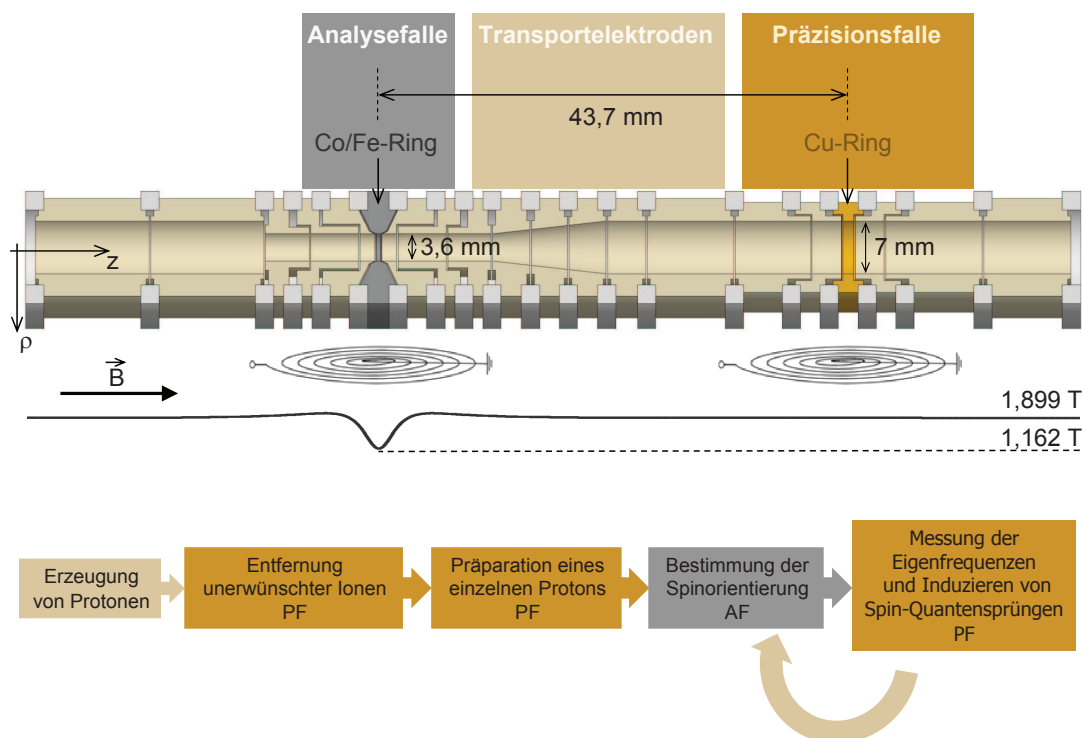


Abbildung 2.15.: Veranschaulichung der Doppel-Penning-Fallen Methode zur Bestimmung des g -Faktors des Protons. Das Fallen-System besteht aus zwei fünfpoligen zylindrischen Penning-Fallen, welche durch die Transportelektroden voneinander räumlich getrennt sind. Die spezielle Geometrie der Analysefalle zielt auf die Maximierung der magnetischen Flasche, welche durch eine ferromagnetische Ringelektrode aus Kobalt-Eisen hervorgerufen wird. Die Stärke der Flasche beträgt $B_2 = 297(10) \text{ mT/mm}^2$ in der Analysefalle und $B_2 = 4,538(7) \mu\text{T/mm}^2$ in der Präzisionsfalle. Der berechnete Magnetfeldverlauf entlang der axialen Richtung ist abgebildet. Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle wird die Spinausrichtung des Protons erfasst, während seine Eigenfrequenzen im näherungsweise homogenen Magnetfeld der Präzisionsfalle gemessen werden können. Das Teilchen lässt sich adiabatisch zwischen den beiden Fallen transportieren. Mittels der gezeigten Spiralspulen kann das zum Induzieren von Spin-Quantensprüngen benötigte magnetische Wechselfeld sowohl in der Analysefalle als auch in der Präzisionsfalle erzeugt werden. Der Messablauf ist schematisch dargestellt.

$B_2 = 4,538(7) \mu\text{T/mm}^2$ in der Präzisionsfalle¹² (siehe Abbildung 5.15). Die Elektroden,

¹²Diese hinsichtlich der Homogenität des Magnetfeldes nicht optimale Wahl der Länge der Transportstrecke wird in Abschnitt 5.3 diskutiert.

durch die die Fallen voneinander getrennt werden, bilden die Transportstrecke. Mittels einer sukzessiven Änderung der an die Elektroden angelegten Spannungen lässt sich, wie in Abschnitt 5.3 näher erläutert, das Teilchen von der einen in die andere Falle adiabatisch transportieren.

Der Messablauf ist in Abbildung 2.15 veranschaulicht. Die Erzeugung von Ionen erfolgt, wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, im Inneren des Doppel-Fallen-Systems. Die Ionenwolke wird in der Präzisionsfalle gespeichert und mittels der in Abschnitten 5.1.2 bzw. 5.1.3 vorgestellten Verfahren auf ein einzelnes Proton reduziert. Das in der Präzisionsfalle präparierte Teilchen wird in die Analysefalle transportiert, in welcher die Messsequenz dann mit der Bestimmung der Spinausrichtung beginnt. Diese lässt sich durch das Induzieren eines Spin-Übergangs und Ermittlung der Richtung des axialen Frequenzsprungs bzw. des Vorzeichens von $\delta_{\nu_z}^{SF}$ realisieren. Anschließend wird das Proton in die Präzisionsfalle transportiert, in welcher nun der Versuch unternommen wird, einen Spin-Übergang bei einer Anregungsfrequenz ν_{rf} nahe der voraussichtlichen Larmorfrequenz zu induzieren. Simultan dazu wird die freie Zyklotronfrequenz ν_c zur Erfassung des momentanen Magnetfeldes gemessen. Das Proton wird schließlich in die Analysefalle zurück transportiert, in der die Spinausrichtung nun erneut bestimmt wird, damit das etwaige Auftreten eines Spin-Übergangs festgestellt wird. Um die Spin-Übergangswahrscheinlichkeit bei einer gegebenen Anregungsfrequenz ν_{rf} zu evaluieren, wird diese Sequenz mehrere hundert Male wiederholt. Der gesamte Vorgang wird für verschiedene Werte der Anregungsfrequenz ν_{rf} durchgeführt. Daraus ergibt sich eine Larmorresonanz, deren Linienform durch die charakteristischen Parameter der Präzisionsfalle bestimmt ist. Aus der Resonanz lässt sich die Larmorfrequenz und anhand der zugleich gemessenen Zyklotronfrequenz der g -Faktor mit hoher Genauigkeit ermitteln.

Aufgrund von Schwankungen der Axialfrequenz in der Analysefalle und der daraus folgenden Unmöglichkeit diskrete Spin-Übergänge nachzuweisen, konnte der oben beschriebene Messansatz im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht verwirklicht werden. Nichtsdestotrotz ließen sich Spin-Übergänge eines einzelnen gefangenen Protons mit Hilfe einer statistischen Messmethode in der Analysefalle erstmalig nachweisen [81]. Ferner wurde das magnetische Moment des Protons in der Analysefalle bestimmt [41]. Die Detektion einzelner Spin-Übergängen [114] und die Demonstration der Doppel-Fallen-Methode [115] erfolgten im Rahmen der Doktorarbeiten von H. Kracke [70] und A. Mooser [71] in einem modifizierten experimentellen Aufbau, in welchem dennoch dieselben Fallen verwendet werden.

3. Experimenteller Aufbau

Die Umsetzung des bereits vorgestellten Messprinzips setzt einen komplexen experimentellen Aufbau voraus, dessen Entwurf und Konstruktion eine herausfordernde und zeitintensive Tätigkeit darstellen. Im Jahr 2004 begann mit den Arbeiten von S. Kreim [116] und S. Ulmer [117] die Konstruktion der Apparatur. Seitdem wurden zahlreiche Verbesserungen durchgeführt, die auf weiteren Entwicklungen und umfangreichen Untersuchungen beruhten [69, 111, 118, 119]. In der vorliegenden Arbeit wurden die letzten Messungen mit dem hier vorgestellten Aufbau durchgeführt. Dabei lassen sich die erste Beobachtung des Spin-Übergangs eines einzelnen Protons [81] und die darauffolgende Bestimmung seines g -Faktors mit einer Genauigkeit von $8,9 \times 10^{-6}$ [41] als Meilensteine bezeichnen. Aufgrund der Limitierung der Messgenauigkeit, welche zum Teil durch die mechanischen Eigenschaften des experimentellen Aufbaus bedingt war, wurden im Anschluss grundlegende Änderungen sowie Erweiterungen implementiert, welche auf der in den Experimenten gewonnenen Erfahrung basieren. Diese werden im Rahmen der Dissertationen von H. Kracke [70] und A. Mooser [71] eingehend diskutiert.

Zwei grundlegende Anforderungen an die Apparatur lassen sich insbesondere in Hinblick auf die angestrebte Messgenauigkeit stellen. Zum einen ist ein starkes homogenes Magnetfeld zur hochpräzisen Bestimmung der Larmor- bzw. Zyklotronfrequenz in der Penning-Falle unerlässlich. Zum anderen ist die Durchführung des Experiments bei tiefen Temperaturen unverzichtbar. Eine Tieftemperaturumgebung ermöglicht die Verwendung von supraleitenden Materialien und unterstützt das Erreichen einer hohen Empfindlichkeit der Nachweiselektronik. Ferner lässt sich durch den Kryopumpeffekt [66] ein Ultrahochvakuum in einer separaten, hermetisch abgedichteten Kammer erzeugen, in der die Doppel-Penning-Falle montiert ist. Dies ermöglicht wiederum eine nahezu unbegrenzte Speicherzeit des Protons in der Falle. Darüber hinaus führt das Absenken der Amplitude der Teilchenbewegung mit sinkender Temperatur zur Reduktion der Linienbreite der Larmor- und Zyklotronresonanz wie in Abschnitt 2.5.3 gezeigt wurde.

Dieses Kapitel befasst sich mit der Beschreibung der Funktionen und Eigenschaften der Hauptbestandteile des experimentellen Aufbaus. Der wichtigste Beitrag dieser Arbeit zum Experiment, der Entwurf einer neuen Penning-Falle zum Nachweis des Spin-Übergangs eines einzelnen Protons, wird in Kapitel 4 ausführlich vorgestellt.

3.1. Kryomechanischer Aufbau der Apparatur

Eine schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus ist in Abbildung 3.1 gezeigt. Ein supraleitender Magnet der Firma *Magnex Scientific* erzeugt das für die Speicherung des Teilchens erforderliche homogene Magnetfeld. Die Feldstärke ist auf $B_0 = 1,899$ T eingestellt. Eine Feldhomogenität von $\approx 5 \times 10^{-7}$ ist in einem Volumen von circa 1 cm^3 nahe dem geometrischen Zentrum des Magneten gewährleistet. Die Doppel-Penning-Falle wird in der horizontalen Bohrung des Magneten derart positioniert, dass die Präzisionsfalle im Zentrum des homogenen Feldbereiches platziert ist. Mit dem supraleitenden Magneten ist ein CF-200-Doppelkreuz über einen Edelstahl-Wellbalg verbunden, welcher die Justage der Position der Falle entlang der Magnetfeldachse ermöglicht. Auf der Oberseite des Doppelkreuzes wird ein zweistufiger Pulsrohrkühler der Firma *VeriCold* montiert, mit dessen Hilfe eine Tieftemperaturumgebung realisiert werden kann.

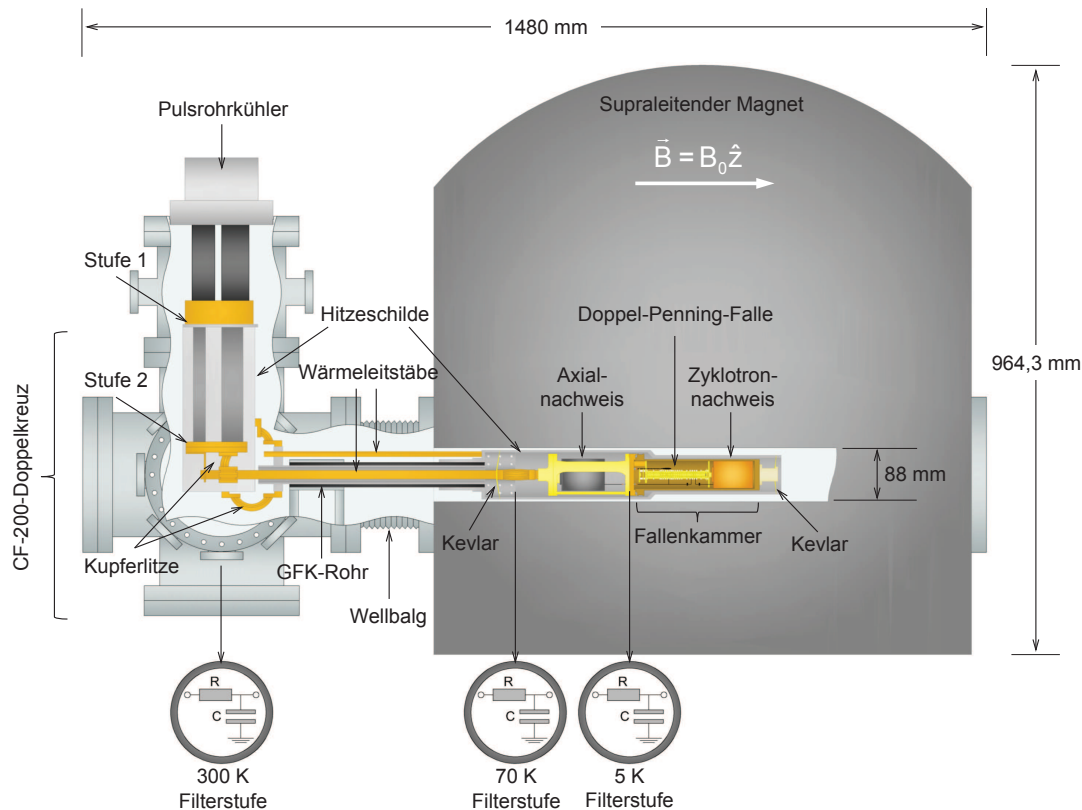


Abbildung 3.1.: Entwurfszeichnung des experimentellen Aufbaus. Zur Erzeugung von tiefen Temperaturen wird ein Pulsrohrkühler verwendet. Ein CF-200-Doppelkreuz verbindet den Kühler mit dem supraleitenden Magneten, in dessen horizontaler Bohrung das Doppel-Fallen-System platziert ist. Ein Magnetfeld der Stärke $B_0 = 1,899$ T ist am Ort der Präzisionsfalle gegeben. Mithilfe eines Wellbalgs wird die Präzisionsfalle im Zentrum des homogenen Feldbereiches positioniert. Die einzelnen Bestandteile werden im Text beschrieben.

Das Grundprinzip der Funktionsweise eines Pulsrohrkühlers, welches bereits 1963 von W. E. Gifford und R. C. Longworth [120] vorgestellt worden ist, beruht auf periodischen

Kompressionen- und Expansionen von Heliumgas im geschlossenen Kreislauf. Im Wesentlichen wird das Gas während eines Arbeitszyklus zunächst mithilfe eines Kompressors in Richtung eines Raumtemperatur-Wärmetauschers im Pulsrohr verschoben. Die dem Gas durch adiabatische Kompression zugeführte Wärme wird über den Wärmetauscher an die Umgebung abgeführt. Darauf folgt eine adiabatische Expansion des Gases, welches sich nun in die entgegengesetzte Richtung im Pulsrohr durch einen zweiten Wärmetauscher hindurch bewegt. Über diesen Tieftemperatur-Wärmetauscher wird die erzeugte Kälte dem an dieser Stelle thermisch angekoppelten Modul des Experimentes zugeführt. Eine ausführliche Beschreibung der Funktionsweise sowie Charakterisierung des in diesem Experiment verwendeten Pulsrohrkühlers findet sich in [117].

Die minimal erreichbare Temperatur hängt von der Wärmeleistung ab, die an den Wärmetauschern in jeder Stufe des Kühlers (Stufe 1 bzw. 2 in Abbildung 3.1) übertragen wird. Im unbelasteten Betrieb erreicht das in der ersten Stufe vorgekühlte Gas eine Temperatur von 45 K, welche sich bei einer Leistungsaufnahme von circa 7 W auf 77 K erhöht. In Stufe 2 wird eine Temperatur von 4 K bei circa 0,35 W erreicht [117].

Die Konstruktion einer horizontalen Halterung für das aus den Nachweissystemen und der Doppel-Penning-Falle bestehende Tieftemperaturmodul stellt eine technische Herausforderung dar. Zum einen muss die Halterung über eine Länge von 796 mm, die der Distanz zwischen der zweiten Stufe des Kühlers und dem Zentrum des Magneten entspricht, mechanisch stabil sein. Zum anderen muss beim Entwurf darauf geachtet werden, dass durch die gewählte Geometrie der Elemente und die verwendeten Materialien die an beiden Stufen des Kühlers übertragene Wärmeleistung minimiert wird. Zudem ist aufgrund der geringen Dimensionen der Magnetbohrung, deren Durchmesser 88 mm über eine Länge von 880 mm beträgt, ein platzsparender Aufbau erforderlich. Die Vorüberlegungen zum Entwurf der Kryomechanik sowie die Einzelheiten deren Realisierung sind in [117] beschrieben.

In kryotechnischer Hinsicht weist der experimentelle Aufbau eine schalenartige Struktur auf, die in drei Bereiche gegliedert ist. Der sich bei Raumtemperatur befindende äußerste Bereich stellt eine Vakuumkammer dar, welche sich aus dem CF-200-Doppelkreuz, dem Wellbalg und dem Magnetrohr zusammensetzt. In der vertikalen Öffnung des Doppelkreuzes wird auf der Oberseite der Pulsrohrkühler eingebracht und auf der unteren Seite eine Turbopumpe befestigt. Die horizontalen Öffnungen werden, wie in Abbildung 3.1 skizziert, entweder direkt durch Blindflansche oder über Adapterflansche zur Befestigung von CF-40-Durchführungsflanschen verschlossen. Die Magnetbohrung wird durch einen Fensterflansch verschlossen. Wird der Gesamtaufbau auf tiefe Temperaturen gekühlt, so lässt sich ein Isolationsvakuum von 10^{-8} mbar in der Kammer erzeugen.

Im innersten Bereich des experimentellen Aufbaus befindet sich das Tieftemperaturmodul, dessen Bestandteile in Abbildung 3.2 gezeigt sind. Dieses wird an der kalten Stufe (Stufe 2) des Kühlers thermisch angekoppelt. Die thermische Ankopplung erfolgt durch

einen ausgeglühten hochreinen Kupferstab mit 15 mm Durchmesser über eine Länge von 550 mm. Der Stab wird am Wärmetauscher der Stufe 2 über durch biegsame Kupferlitzen verbundene Kupferblöcke befestigt (siehe Abbildung 3.1). Die Kupferlitzen verhindern zum einen die Entstehung mechanischer Verspannungen aufgrund thermischer Kontraktionen unterschiedlicher Materialien. Zum anderen dienen sie der Entkopplung der durch den Kühler verursachten Vibrationen [119]. Aus diesem Grund wird zusätzlich am gegenüberliegenden Ende ein 42 mm langer Teil des Wärmeleitstabs durch Kupferlitzen ersetzt. Auf dieser Seite wird der Stab in einen Koppelflansch eingeschraubt. Ein sich anschließendes segmentiertes Kupferrohr verbindet den Koppelflansch mit der Fallenkammer. Im Kupferrohr werden der Axialresonator, welcher an dem Koppelflansch befestigt wird, die kryogene Verstärkerstufe für den Axialnachweis und die 5 K-Filterplatine montiert. In der Fallenkammer, die im nächsten Abschnitt näher beschrieben wird, befinden sich die Doppel-Falle und die Zyklotron-Detektionseinheit.

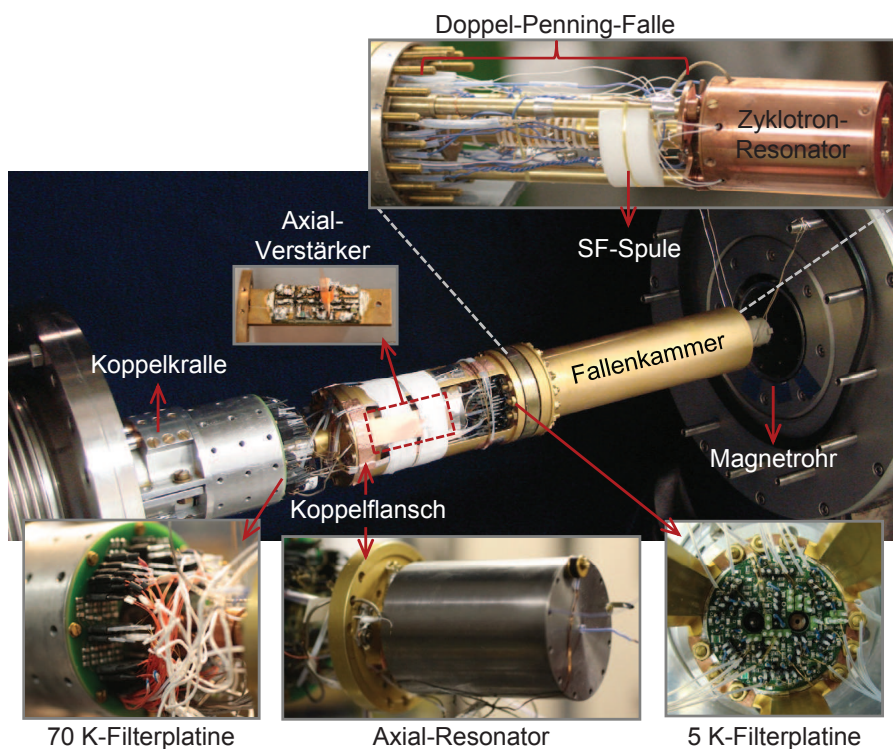


Abbildung 3.2.: Fotografische Darstellung des Tieftemperaturmoduls des experimentellen Aufbaus. Für Details siehe Text.

Zwischen dem Tieftemperaturmodul und dem Raumtemperaturbereich befindet sich ein aus drei Aluminiumhitzeschilden bestehender mittlerer Temperaturbereich, der an der ersten Stufe des Pulsrohrkühlers thermisch angekoppelt wird, um zur Abschirmung der Raumtemperaturstrahlung zu dienen. Der erste Hitzeschild wird unmittelbar an dem Wärmetauscher der ersten Stufe im Bereich des Doppelkreuzes befestigt und umgibt

die zweite Stufe bzw. die an deren Wärmetauscher angekoppelten Bestandteile über die gesamte vertikale Länge des Aufbaus. An diesem Schild werden der zweite Hitzeschild und drei Kupferstäbe über Kupferlitzen befestigt. Der zweite Schild umgibt den Wärmeleitstab des Tieftemperaturmoduls und verläuft zwischen diesem und einem Rohr aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK-Rohr), welches eine hohe Belastbarkeit bei geringer Wärmeleitfähigkeit aufweist. Dieses wird an einer massiven an dem Doppelkreuz verschweißten Edelstahlhalterung befestigt und gewährleistet somit die mechanische Stabilität der gesamten horizontalen Halterung. Der zweite Hitzeschild, die Kupferstäbe und das GFK-Rohr werden im Bereich der Magnetbohrung an einer aus Aluminium hergestellten Koppelkralle verankert. An dieser Kralle werden ebenfalls der dritte Hitzeschild, welcher in der Magnetbohrung über die gesamte Länge des Tieftemperaturmoduls verläuft, und die 70 K-Filterplatine angeschraubt. Wie in Abbildung 3.1 gekennzeichnet, wird das Tieftemperaturmodul an zwei Stellen über Kevlarfäden¹, welche geringe Wärmeleitung mit zugleich bemerkenswerter Zugfestigkeit kombinieren, am dritten Hitzeschild aufgehängt.

Jeder Hitzeschild sowie die Fallenkammer und das segmentierte Kupferrohr werden in mehreren Lagen aus Superisulationsfolie zur thermischen Abschirmung eingewickelt. Mit ausgereifter Konstruktion zur optimalen thermischen Ankopplung kann innerhalb von 12 Stunden eine Temperatur von ≈ 66 K am sich im Bereich der Magnetbohrung befindenden Hitzeschild bzw. $\approx 4,7$ K an der Fallenkammer erreicht werden.

Der entscheidende Vorteil der Verwendung eines Pulsrohrkühlers anstelle eines Helium-Bad-Kryostaten ist die entsprechende geringere Abkühl- und vor allem Aufwärmzeit des gesamten Systems. Dies erlaubt einen schnellen Zugriff auf den experimentellen Aufbau. Dennoch, obwohl der Kühler ausschließlich aus starren Teilen besteht, setzt der aus Kompression und Expansion bestehende Vorgang eines Kühlzykluses die Wärmetauscher in Bewegung. Diese Vibrationen werden zwangsläufig auf die Falle übertragen. In [119] wurden die Kühlervibrationen mit Hilfe einer tetra-lateralen positionsempfindlichen Photodiode mit circa $1 \mu\text{m}$ Ortsauflösung und eines HeNe-Lasers untersucht. Dabei wurden die Amplituden der Vibrationen in allen drei Raumrichtungen gemessen. Diese betragen $\approx 80 \mu\text{m}$ bzw. $\approx 15 \mu\text{m}$ in horizontaler und vertikaler Richtung in der ersten Stufe und $\approx 150 \mu\text{m}$ bzw. $\approx 35 \mu\text{m}$ in der zweiten Stufe. Der kombinierte Effekt der Bewegungen der beiden Wärmetauscher auf die Falle wurde mit dem zur Vibrationsentkopplung optimierten Aufbau in Abbildung 3.1 ebenfalls untersucht. Die Ergebnisse zeigen Amplituden von $\approx 15 \mu\text{m}$ bzw. $< 5 \mu\text{m}$ in horizontaler und vertikaler Richtung am Ort der Falle. Diese stellen den größten limitierenden Faktor der Messgenauigkeit dar. Die Auswirkung der Vibrationen auf die Zyklotronfrequenz lässt sich, wie in Abschnitt 5.2.4 gezeigt, in aller Deutlichkeit feststellen. Aufgrund dieser Tatsache wurde der Pulsrohrkühler kürzlich im Rahmen der Arbeiten von H. Kracke [70] und A. Mooser [71] durch

¹Kevlar[®] ist ein Warenzeichen der Firma *Du Pont* für ihre modernste Para-Aramid-Faser.

einen ^4He -Badkryostat ersetzt.

Die zeitliche Stabilität des Magnetfeldes, welche aus der Entwicklung der gemessenen Zyklotronfrequenz eines gespeicherten Protons als Funktion der Zeit bestimmt werden konnte [70, 71], beträgt $2,3 \times 10^{-6}$ T/Tag und weist eine Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur im Labor auf. Um den Effekt von kurzzeitigen Temperaturschwankungen zu verringern, wird eine Holzumhausung um den in Abbildung 3.1 dargestellten Aufbau errichtet. Für die Diskussion über eine aktive Temperaturstabilisierung im Inneren der Umhausung wird auf [70, 71] verwiesen.

3.2. Die Fallenkammer

Die in Abbildung 3.3 dargestellte Fallenkammer besteht aus einem vergoldeten zylindrischen Kupfergehäuse, das aus einem massiven (OFE) sauerstofffreien Elektrolytkupferstab hergestellt wird. Auf einer Seite wird die Kammer durch einen sogenannten unteren Montageflansch (UMF) aus OFE-Kupfer mit einer Indiumdichtung hermetisch verschlossen. Auf der Gegenseite befindet sich eine an die Fallenkammer angeschweißte Kupferrohre, durch welche die Kammer auf circa 1×10^{-6} mbar evakuiert wird, bevor die Röhre durch Kaltverschweißen mit einer sogenannten Pinch-Off-Technik luftdicht verschlossen wird. In der Kammer werden der Elektrodenturm, welcher die Doppel-Penning-Falle und die Elektronenquelle beinhaltet, sowie der Zyklotron-Resonator zusammen mit der ersten Verstärkerstufe des Zyklotron-Nachweissystems und die Spulen, mit deren Hilfe das magnetische Wechselfeld zum Induzieren eines Spin-Übergangs des Protons erzeugt wird, montiert. Zur Signalführung in die Fallenkammer wird der UMF mit angelöteten kryotauglichen Durchführungen (*KYOCERA Fineceramics*) versehen, deren Isolierung aus Aluminiumoxid besteht. Beim Abkühlen auf Temperaturen von etwa 4 K frieren mit Ausnahme von Helium jegliche in der Fallenkammer noch vorhandene Restgase aus. Bedingt durch diesen sogenannten Kryopumpeffekt kann ein Vakuumdruck von typischerweise $< 10^{-16}$ mbar in der Kammer erreicht werden [121], weswegen das Proton über mehrere Monate in der Falle gespeichert werden konnte. Die sich in der Fallenkammer befindenden Elemente werden im Folgenden eingehend beschrieben.

3.2.1. Die zylindrische Doppel-Penning-Falle

Das Doppel-Fallen-System ist ein Teilabschnitt des in Abbildung 3.3 dargestellten Elektrodenturms. Dieser besteht aus insgesamt 20 Elektroden, die mittels Abstandhaltern aus Saphir aufeinander gesetzt werden. Im Vergleich zu anderen Isolatoren weist Saphir (Al_2O_3 -Kristall) eine hohe Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen auf [122], und eignet sich somit hervorragend für die Anwendung. Drei massive in den UMF eingeschraubte Kupferstäbe bilden das Gerüst für die Befestigung des Elektrodenturms, welcher zwischen zwei an den Stäben befestigten gegenüberliegenden Kupferplatten zusammengedrückt wird. Die Festigkeit des Turms während des Kühlens auf 4 K wird auf-

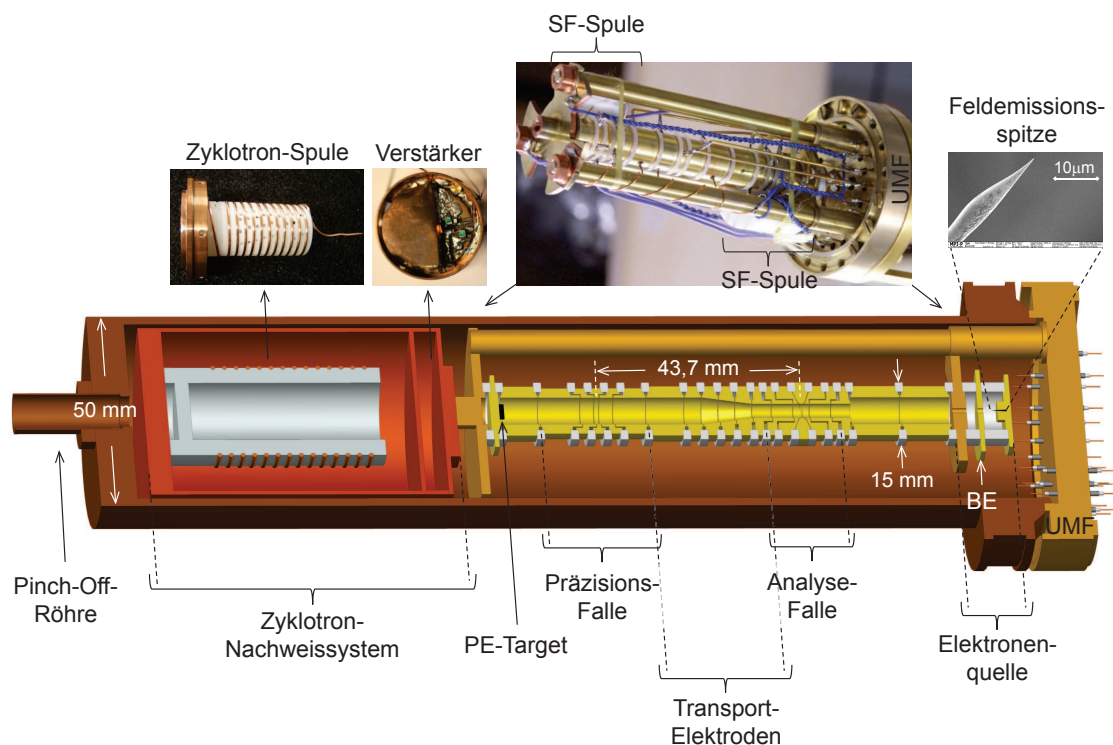


Abbildung 3.3.: Schematische Darstellung der Ultrahochvakuum-Fallenkammer. In der hermetisch abgedichteten Kammer wird durch den Kryopumpeneffekt ein Vakuumdruck von $< 10^{-16}$ mbar erreicht. Das Doppel-Fallen-System, die Elektronenquelle und die Zyklotron-Detektionseinheit befinden sich in der Kammer. Oben rechts: Photo der Feldemissionsspitze, das mit einem Rastertunnelmikroskop am Max-Planck-Institut für Polymerforschung in Mainz aufgenommen wurde.

grund des größeren thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Kupfer im Vergleich zu Saphir nicht beeinträchtigt. An den Enden des Elektrodenturms sind eine Elektronenkanone und ein leitfähiges schwarzes Polyethylentarget² („PE-Target“) montiert, welche, wie in Abschnitt 3.2.2 näher erläutert, der innerhalb des Fallensystems stattfindenden Erzeugung von Ionen dienen. Zwischen Elektronenkanone und Target befinden sich zwei aus jeweils fünf Elektroden bestehende Penning-Fallen (siehe auch Abschnitte 2.2.3 und 2.6), die Präzisions- und die Analysefalle. Diese werden räumlich durch die sogenannten Transportelektroden getrennt. Das Proton kann durch Anlegen geeigneter Spannungen an den Elektroden zwischen den beiden Fallen hin und her transportiert werden. Der Abstand zwischen den Zentren der Fallen beträgt in der beschriebenen Anordnung 43,7 mm. Die zusätzlichen Elektroden, welche zwischen Analysefalle und Elektronenkanone bzw. Präzisionsfalle und Target platziert sind, waren im ursprünglichen Entwurf Bestandteile der Transportstrecke [116]. Diese wurde jedoch verkürzt und anders segmentiert. Die verbliebenen Elektroden werden nun lediglich als Abstandhalter verwendet, welche an

²Polyethylen ($[-\text{CH}_2 - \text{CH}_2-]_n$) ist ein durch Polymerisation von Ethenmolekülen ($[\text{CH}_2 = \text{CH}_2]$) hergestellter thermoplastischer Kunststoff.

die Masse angeschlossen sind. Weitere Details werden in Abschnitt 5.3 diskutiert. Die inneren Oberflächen der gestapelten Elektroden stellen einen Hohlzylinder dar, der sich von 3,5 mm in der Präzisionsfalle auf 1,8 mm in der Analysefalle entlang der Transportstrecke verjüngt. Die Elektroden bzw. Saphirringe sind so entworfen, dass der Abstand zweier jeweils benachbarter Elektroden (l_s in Abbildung 2.5) 0,14 mm beträgt. Die charakteristischen Parameter beider Fallen sind in Tabelle 3.1 verglichen. Wie in Abschnitt 2.2.3 bereits diskutiert, basiert die Dimensionierung der Ring- bzw. Korrektorelektroden auf der Optimierung der elektrostatischen Eigenschaften der Falle in Bezug auf das Speicherpotential. In Kapitel 4 wird die Methode zum Entwurf einer Penning-Falle, mit deren Hilfe die in Tabelle 3.1 aufgelisteten Dimensionen festgelegt wurden, eingehend beschrieben.

Parameter	Präzisionsfalle	Analysefalle
Fallenradius (ρ_0)	3,5 mm	1,8 mm
Länge der Ringelektrode (l_0)	0,920 mm	0,386 mm
Länge der Korrektorelektroden (l_k)	2,850 mm	1,359 mm
Länge der Endkappen (l_e)	6,91/8,91 mm	4,478 mm
Material der Ringelektrode	OFE-Kupfer	CoFe
Betriebsspannung bei $\nu_z = 680$ kHz	-3,197 V	-0,814 V
Magnetfeld im Zentrum der Falle	1,899 T	1,162 T

Tabelle 3.1.: Charakteristische Parameter der Präzisionsfalle bzw. der neuen Analysefalle. Die Fertigungstoleranzen betragen $10 \mu\text{m}$ und $3 \mu\text{m}$ im Fall der Präzisions- bzw. Analysefalle.

Die Elektroden sind aus OFE-Kupfer gefertigt. Die Präzisionsfalle wurde in der mechanischen Werkstatt des *Instituts für Physik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz* mit einer Fertigungstoleranz von $10 \mu\text{m}$ hergestellt, während die Elektroden der Analysefalle von der Firma *Blum CNC-Technik* in Heidelberg mit einer Fertigungstoleranz von $3 \mu\text{m}$ hergestellt wurden. Die Fertigungstoleranz der Saphirringe beträgt $10 \mu\text{m}$. Aufgrund der kleinen Dimensionen der Analysefalle, ist es unentbehrlich, die höchstmögliche Übereinstimmung mit den für ein optimiertes Design berechneten Werten zu erreichen (siehe Tabelle 3.1), da andernfalls erhebliche Abweichungen vom gewünschten idealen Quadrupolpotential entstehen können. Darauf wird in Kapitel 4 näher eingegangen.

Alle Elektroden wurden mit einer Goldbeschichtung zum Schutz der Kupferoberflächen gegen Oxidation versehen. Um zu verhindern, dass die Goldschicht in das Kupfer hinein diffundiert, wird vor der Vergoldung eine Sperrschicht aus Silber oder Nickel auf die Elektrodenoberfläche aufgetragen. Da die Innenflächen der Elektroden Äquipotentialflächen darstellen sollen, ist es unerlässlich, homogene gleichmäßig mit einer geschlossenen Goldschicht überzogene Oberflächen zu erhalten. Befinden sich hingegen unterschiedlichen Materialien auf der Oberfläche, so entstehen aufgrund der ungleichmäßigen räumlichen Verteilung der Austrittsarbeit Kontaktpotentiale [123], die das Speicherpotential beein-

trächtigen können. Um beim galvanischen Vergoldungsverfahren ein optimales Ergebnis zu erhalten, ist eine Vorbehandlung der zu beschichtenden Oberflächen durch Reinigen und Polieren erforderlich. Für Details siehe Anhang A.

Die Elektroden der Präzisionsfalle wurden mit einer 15 μm dicken Sperrschicht aus Silber beschichtet. Anschließend wurden sie am *GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH* mit einer 1 μm dicken Schicht aus Feingold (99,99% Au) galvanisch beschichtet. Im Fall der Präzisionsfalle ist besonders darauf zu achten, dass keine ferromagnetischen Legierungen, die zur Verzerrung des Magnetfelds führen könnten, zur Beschichtung verwendet werden. Die Elektroden der Analysefalle wurden in Zusammenarbeit mit der Firma *R. SCHLIERHOLZ AG* zuerst chemisch mit einer Nickel-Phosphor-Legierung und dann galvanisch mit einer Gold-Kobaltlegierung (99,8% Au + 0,2% Co) beschichtet. Das chemische Verfahren erlaubt die Herstellung eines Nickelüberzugs mit durchgehend gleichmäßiger Schichtdicke, welche die Konturen beliebiger Oberflächenformen planparallel und mit einer Toleranz von 2 μm abdeckt. Dies ist insbesondere im Fall der Analysefalle relevant, da das Verhältnis ihrer Dimensionen möglichst konstant gehalten werden soll. Die Elektroden wurden mit einer 5 μm dicken Nickelschicht als Sperrschicht, gefolgt von einer ebenfalls 5 μm dicken Goldschicht versehen. Die insgesamt zusätzliche Schichtdicke von 10 μm war bei der Herstellung der Elektroden bereits berücksichtigt worden, so dass im Endergebnis die in Tabelle 3.1 aufgelisteten Abmessungen eingehalten werden konnten. Die Verwendung von Kobalt und Nickel ist aufgrund der ohnehin vorhandenen ferromagnetischen Ringelektrode in der Analysefalle unkritisch. In Abbildung 3.5 sind die Analysefallenelektroden nach der Vernickelung bzw. Vergoldung sowie die aufgebaute Falle gezeigt.

3.2.2. Die Elektronenquelle und Ionenerzeugung

Der Aufbau zur Erzeugung von Ionen innerhalb des Elektrodenturms ist in Abbildung 3.3 gezeigt. Die Ionenerzeugung erfolgt durch Kathodenzerstäubung (oder Sputtern) [124–126] des Targets und die sich anschließende Ionisierung der desorbierten Atome und Moleküle durch Elektronenstoß [127–129]. Das Target wird an einer OFE-Kupferscheibe befestigt, die auf der vom UMF aus gesehen letzten Elektrode montiert wird und schließt somit den Elektrodenturm auf einer Seite.

Die Erzeugung eines Elektronenstrahls beruht auf dem Prinzip der Feldemission, wonach Elektronen unter Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes durch den Tunneleffekt („Fowler-Nordheim-Tunneln“) [130] aus einem Metall austreten. Auf eine Diskussion über die Theorie der Feldemission wird in dieser Arbeit verzichtet und auf die zusammengefasste Beschreibung in [117] hingewiesen. Die in Abbildung 3.3 dargestellte Elektronenquelle setzt sich aus einer selbst hergestellten, an einer Kupferelektrode befestigten Feldemissionsspitze (FEP) und einer zweiten Elektrode, der sogenannten Beschleunigungselektrode („BE“) zusammen. Die Spitze, deren Krümmungsradius ≈ 25 nm

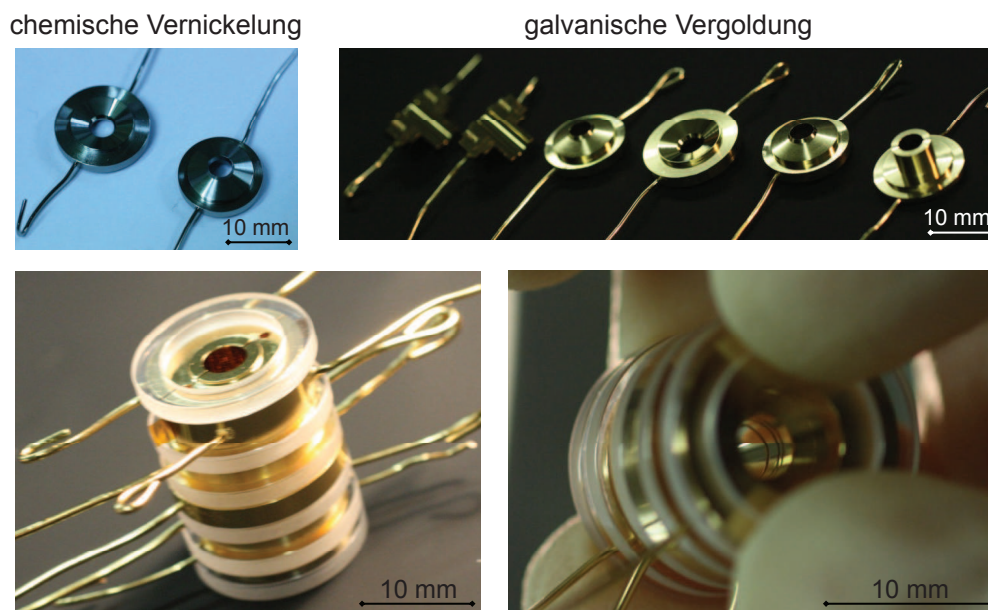


Abbildung 3.4.: Oben: Schritte für die Beschichtung der Elektroden der Analysefalle. Nach dem Polieren werden die Elektroden chemisch vernickelt und anschließend galvanisch vergoldet. Unten: aufgebaute Analysefalle.

beträgt, wird aus einem Wolframdraht mit $400\ \mu\text{m}$ Durchmesser gefertigt. Die Elektroden werden durch Abstandhalter aus MACOR voneinander isoliert und an einer mit dem UMF verbundenen Kupferplatten befestigt. Die Quelle schließt den Elektrodenturm auf der dem Target gegenüberliegenden Seite.

Legt man zwischen der Beschleunigungselektrode und der Feldemissionsspitze eine Hochspannung an, so werden Elektronen aus dem Metall emittiert und durch das elektrische Feld beschleunigt. Diese folgen den Magnetfeldlinien und treffen auf das Target. Die Intensität des Elektronenstrahls lässt sich durch die Stärke der Hochspannung steuern. An die Feldemissionsspitze wird eine negative Spannung von $V_{\text{FEP}} \approx -40\ \text{V}$ angelegt, wodurch die kinetische Energie der Elektronen definiert wird. Durch den Beschuss mit dem Elektronenstrahl werden Atome und Moleküle, unter anderem Wasserstoff, aus dem Target herausgelöst, die durch Elektronenstoß ionisiert werden. Die so produzierte Ionenwolke wird in der Präzisionsfalle gespeichert. Die Entfernung unerwünschter Ionen und die Präparation eines einzelnen Protons werden in Abschnitt 5.1 behandelt. Bei Spannungen zwischen $0,5\ \text{kV}$ und $1,5\ \text{kV}$ können Elektronenströme zwischen $10\ \text{nA}$ und $100\ \text{nA}$ am Target gemessen werden. In [116] werden die Eigenschaften der aus einer einzigen Feldemissionsspitze bestehenden Elektronenquelle näher untersucht und diskutiert.

3.2.3. Die Spinflip-Spule

Wie bereits in Abschnitt 2.5.3 diskutiert, wird zum Umklappen des Protonspins ein magnetisches Wechselfeld $\vec{B}_{\text{rf}}(t) = b_{\text{rf}}(\hat{x} \cos \omega_{\text{rf}}t + \hat{y} \sin \omega_{\text{rf}}t)$ benötigt, welches zum ho-

mogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ der Falle senkrecht steht und mit einer Frequenz ω_{rf} um die Larmorfrequenz ω_L oszilliert. Dieses wird mit Hilfe der in Abbildung 3.5 dargestellten Spiralspule erzeugt, welche aus einer konzentrischen Anordnung von 6 Windungen eines mit Polytetrafluorethylen (PTFE)³ isolierten Kupferdrahtes mit 0,5 mm Durchmesser besteht. Die Spule hat einen Durchmesser von 20 mm und ist in einer PTFE-Halterung fixiert. Die Halterung wird an den Kupferstäben, die in der Fallenkammer zur Halterung des Elektrodenturms dienen, mit Kevlarfäden befestigt, wie in Abbildungen 3.2 bzw. 3.3 gezeigt ist.

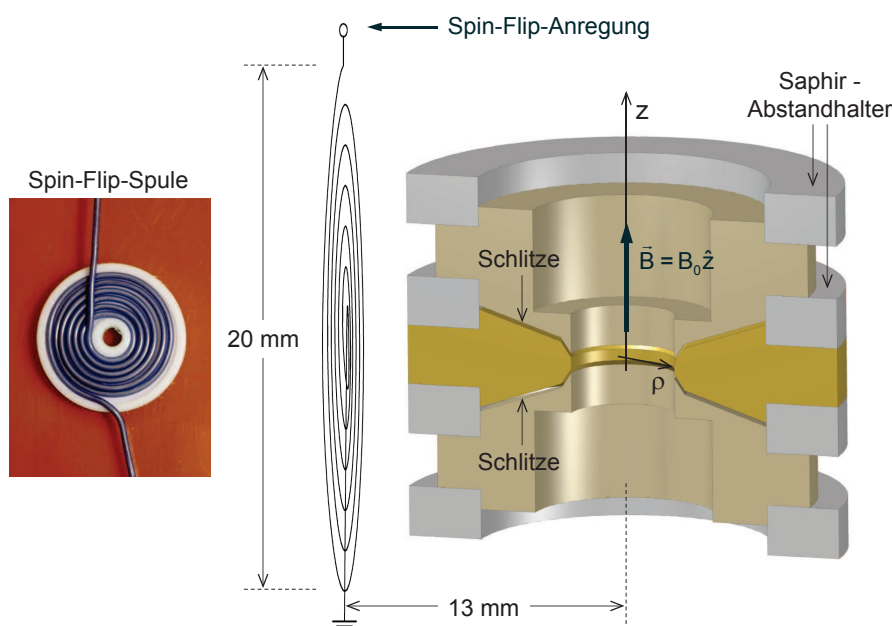


Abbildung 3.5.: Schematische Darstellung des Aufbaus zum Umklappen des Spins eines in der Penning-Falle gespeicherten Protons. Rechts: Ring- (zentrale Elektrode) und Korrektorelektroden der neuen Analysefalle im aufgestapelten Zustand. Durch die Schlitze zwischen den Elektroden gelangt das magnetische Wechselfeld ins Fallenzentrum, da die Saphirabstandhalter, im Gegensatz zu den Elektroden, das Feld nicht abschirmen. Links: Photo der Spiralspule.

Zwei solche Spulen, die von nun an als SF-Spulen (*Spinflip*-Spulen) bezeichnet werden, werden am Elektrodenturm auf der Höhe der Präzisions- bzw. Analysefalle angebracht. Der resultierende Abstand zum Fallenzentrum beträgt in beiden Fällen circa 13 mm. Die Spulen weisen eine geringe Güte auf ($Q \approx 80$), die absichtlich nicht optimiert worden ist, damit ein weiter Frequenzbereich mit ausreichender Feldstärke abgedeckt werden kann.

Das Umklappen des Spins eines Protons innerhalb einer gewünschten Zeit setzt, wie in Abschnitt 2.5.3 beschrieben, eine gewisse Stärke der magnetischen Wechselfeldamplituden im Fallenzentrum voraus. Bei dem in Abbildung 3.5 dargestellten Aufbau wird das eingestrahlte Wechselfeld durch die Fallenelektroden abgeschirmt. Da die Saphirabstandhalter jedoch nicht abschirmen, gelangt das Feld durch die Schlitze zwischen den

³Teflon®.

Elektroden ins Fallenzentrum. Dieses Anregungsverfahren wurde im Rahmen der Diplomarbeit von A. Mooser [111] und der Doktorarbeit von S. Kreim [116] für die derzeitige Geometrie der Präzisionsfalle und die ursprüngliche Geometrie der Analysefalle [131] eingehend untersucht. Zu diesem Zweck wurde das Feld am Ort des gespeicherten Protons für verschiedene Anregungsamplituden mithilfe einer Induktionsschleife bestimmt. Der Effektivwert der magnetischen Flussdichte kann gemäß der Beziehung

$$B_s = \frac{U_s}{A_s 2\pi\nu} \quad (3.1)$$

berechnet werden. Dabei ist U_s die zu messende in der kreisförmigen Leiterschleife induzierte Spannung, $A_s = 2,5 \text{ mm}^2$ die Fläche der Schleife und ν die Anregungsfrequenz. Die für die Wahrscheinlichkeit des Spin-Übergangs relevante Feldamplitude wird durch $b_{\text{rf}} = \frac{\hat{B}_s}{2}$ gegeben, wobei $\hat{B}_s = \sqrt{2}B_s$ der Spitzenwert des Wechselfeldes ist. In Tabelle 3.2 werden die in [111] ermittelte Feldamplitude im Zentrum der Präzisionsfalle, sowie die mit der neuen Analysefalle erhaltenen Ergebnisse für eine Anregungsamplitude von +10 dBm aufgelistet. Der Signalanteil, der über die Induktionsschleife detektiert wird, entspricht, ohne den abschirmenden Effekt der Fallen einer bereits um $\approx 60 \text{ dB}$ geringeren Leistung als die eingekoppelte Leistung.

Gemessene Größe	Präzisionsfalle	Analysefalle
Eingekoppelte Leistung	+10 dBm	+10 dBm
Anregungsfrequenz	80 MHz	35/42 MHz
Abschirmung aufgrund der Falle	-14,7 dB	-10 dB
Feldamplitude im Fallenzentrum (b_{rf})	0,07 μT	0,28/0,23 μT

Tabelle 3.2.: Charakterisierung der Feldamplituden zum Umklappen des Spins eines Protons, die durch Anlegen eines magnetischen Wechselfeldes von außerhalb des Elektrodenturms im Fallenzentrum erreicht werden können.

Die stärkere Abschirmung in der Präzisionsfalle lässt sich durch deren Geometrie erklären, bei der die Schlitz zwischen Ring- und Korrektorelektroden keinen direkten Durchgang des Signals zum Fallenzentrum ermöglichen (vergleiche Abbildung 3.3 oder 3.7). Wie in [111] diskutiert, werden in der Analysefalle um 3 Größenordnungen stärkere magnetische Wechselfeldamplituden als in der Präzisionsfalle zum Umklappen des Spins benötigt. Demzufolge wurde bei der Konstruktion der Analysefalle besonders darauf geachtet, dass die Geometrie einen ungehinderten Zugang zum Fallenzentrum erlaubt. Das Anregungssignal wird von einem RF-Signalgenerator (*Rohde & Schwarz SMY-02* oder *Rohde & Schwarz SML-01*) erzeugt, dessen Ausgang an einen Leistungsverstärker (*Rohde & Schwarz HVV10*) angeschlossen ist. Dabei beträgt die maximal erreichbare Anregungsamplitude circa 27 dBm, welche einer Feldamplitude von $b_{\text{rf}} \approx 1,4 \mu\text{T}$ bei $\nu_L = 50,065 \text{ MHz}$ im Zentrum der Analysefalle entspricht.

3.3. Die Nachweissysteme

Zur Messung der drei Eigenfrequenzen, ν_z , ν_- und ν_+ , des gespeicherten Protons werden zwei Detektionseinheiten benötigt, das Axial- und das Zyklotron-Nachweissystem. Diese wurden im Rahmen der Doktorarbeit von S. Ulmer [69] und der Diplomarbeit von H. Kracke [118] entwickelt. In diesem Abschnitt wird auf die wichtigsten technischen Aspekte hinsichtlich des experimentellen Aufbaus kurz eingegangen. In Tabelle 2.2 sind die charakteristischen Parameter der beiden Nachweissysteme aufgelistet. Der gesamte Aufbau zum Nachweis der Teilchenbewegung ist in Abbildung 3.7 schematisch dargestellt.

3.3.1. Das Axial-Nachweissystem

Die Detektionseinheit zum Nachweis der axialen Bewegung des Protons befindet sich in der horizontalen Bohrung des Magneten, wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Der Axial-Resonator besteht aus einer einlagigen Zylinderluftspule in einem zylindrischen Gehäuse. Der 75 μm dicken Spulendraht wird um einen Teflonkern gewickelt und einseitig am Gehäuse angeschraubt. Eine solche Konstruktion wird als Helix-Resonator bezeichnet [100]. Sowohl der Spulendraht als auch das Gehäuse bestehen aus einer NbTi-Legierung (Typ-II-Supraleiter mit einer Sprungtemperatur von $T_c \approx 9,5$ K und einer kritischen Feldstärke von $B_c \approx 14,5$ T). Auf der einen Seite wird der Resonator, wie in Abbildungen 3.1 bzw. 3.2 gezeigt, an den Koppelflansch angeschraubt. Die Distanz zwischen Gehäuse und Zentrum der Präzisionsfalle beträgt etwa 145 mm. Die erste Verstärkereinheit wird am segmentierten Kupferrohr nahe am Resonatorgehäuse befestigt (siehe Abbildung 3.2).

Die Axial-Spule besteht aus 300 Windungen eines mit FORMVAR isolierten Drahtes, dessen leitender Querschnitt $\approx 0,002$ mm² beträgt. Der Draht wird um den Teflonkern, welcher einen Durchmesser von 31 mm hat, über eine Länge von 30,5 mm gewickelt. Um einen guten thermischen Kontakt herzustellen, werden die Windungen mit Teflonband am Spulenkörper fixiert. Kupferdrähte mit 0,5 mm Durchmesser werden an die freien Enden des supraleitenden Drahtes gelötet und bilden somit die Anschlüsse der Spule. Wie in Abbildung 3.6 dargestellt, wird der Spulenkörper über eine Kupferplatte mit Messingschrauben im supraleitenden Gehäuse befestigt, dessen Innendurchmesser 52 mm über eine Innenlänge von 70,5 mm beträgt.

Der Axial-Resonator wird, wie in Abbildung 3.7 gezeigt, an beide Penning-Fallen angeschlossen. Das vom Proton induzierte Signal wird in beiden Fällen an einer Korrektur-elektrode abgegriffen. Über eine der am UMF vorhandenen Durchführungen wird der Resonator an die Elektrode A_4 der Analysefalle angeschlossen, welche über den Resonator mit einer Vorspannung versorgt wird. In der Fallenkammer wird A_4 über einen Blockkondensator von 440 pF mit der Korrektur-elektrode P_2 der Präzisionsfalle verbunden. Über einen Blockwiderstand von 100 M Ω wird P_2 an die Spannungsquelle angeschlossen. Mit dem Aufbau kann die höchste Resonatorgüte von $Q = 5800$ erreicht werden, was gemäß Gleichung (2.99) einem Resonanzwiderstand von $R_p \approx 36$ M Ω bei der In-

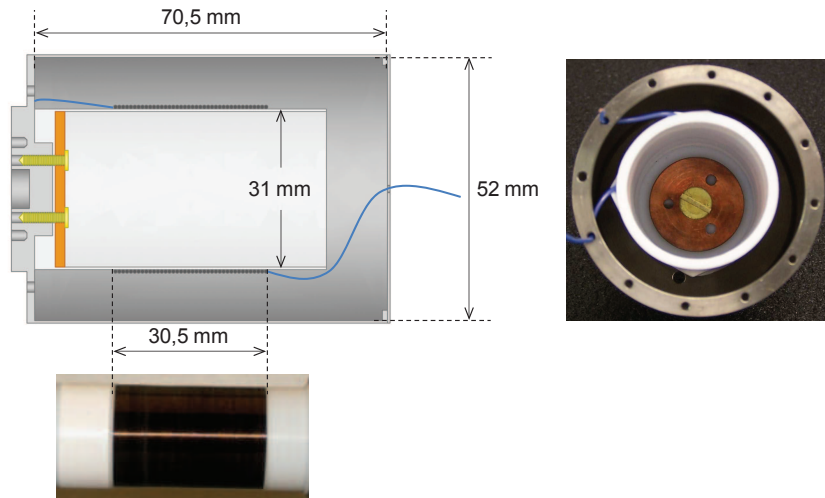


Abbildung 3.6.: Resonator zur Messung der Axialfrequenz des Protons. Oben links: schematische Darstellung. Unten links: Photo der supraleitenden Axial-Spule, welche in einem supraleitenden Gehäuse montiert wird (oben rechts).

duktivität von $L_p = 1,45$ mH und $\nu_z \approx 680$ kHz entspricht. Sowohl die Fallen als auch die Durchführungen und die gesamte Kabelführung tragen zur effektiven Parallelkapazität des Systems bei. Während dieser Arbeit wurde das Experiment aus verschiedenen Gründen mehrmals auseinander- und wieder zusammengebaut. Dabei sind gelegentlich geringfügige Änderungen an der Verkabelung oder Beschaltung aufgetreten, welche in der Folge zu entsprechenden Änderungen der effektiven Parallelkapazität führten. Dadurch wies die Resonanzfrequenz des Axial-Nachweissystems je nach Aufbau unterschiedliche Werte zwischen $\nu_z \approx 674$ kHz und $\nu_z \approx 695$ kHz auf. Die axiale Frequenz des Teilchens lässt sich in einem solchen Fall durch Variieren der an die Ringelektroden angelegten Spannungen gemäß Gleichung (2.18) entsprechend anpassen.

Die zweistufige kryogene Verstärkereinheit ist mit hochohmigen GaAs-Transistoren (*NEC-NE25139* und *Siemens-CF739*) aufgebaut. Das Basismaterial der verwendeten Leiterplatte (*Taconic TLC-Laminate*) besteht aus einem speziellen PTFE/Glasgewebe, das im Vergleich zu herkömmlichen wärmehärtenden Basismaterialien, wie z.B. FR4 (mit Epoxidharz getränkte Glasfasermatten), einen niedrigeren Verlustfaktor aufweist. Der Verstärker wird auf eine massive Kupferplatte gelötet, welche an das Tieftemperaturmodul des Experiments angekoppelt ist. Für die Einzelheiten der Konstruktion und den Schaltplan des Verstärkers wird auf [69] verwiesen.

Die zweite Verstärkerstufe besteht aus einem für das Experiment entwickelten rauscharmen Verstärker mit integriertem Abwärtsmischer (*Stahl Electronics HutAxa*). Dieser befindet sich im Raumtemperaturbereich und wird über einen der am Doppelkreuz vorhandenen CF-40-Durchführungsflansche mit dem Tieftemperatur-Verstärker verbunden. Zur Hochfrequenzabschirmung wird der Verstärker in einer Kupferbox montiert. Wie in

Abbildung 3.7 schematisch dargestellt, wird das Signal hinter der zweiten Verstärkerstufe durch einen Leistungsteiler auf zwei Ausgänge aufgeteilt. Der eine Ausgang wird direkt mit einem Spektrumanalysator (*Rohde & Schwarz FSP13*) verbunden, während das Signal des anderen Ausgangs über einen Frequenz-Abwärtsrichter in einen FFT-Spektrumanalysator (*Stanford Research Systems SR780*) geleitet wird (siehe auch Abbildung 2.7).

3.3.2. Das Zyklotron-Nachweissystem

Das Zyklotron-Nachweissystem wird, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, in der Fallenkammer unmittelbar auf dem Elektrodenturm montiert. Die Dimension des Resonators ist durch den verfügbaren Platz definiert. Der Innendurchmesser des Resonatorgehäuses ist auf 42 mm begrenzt, wodurch sich die anderen Dimensionen nach dem Helix-Resonator-Formalismus [100] festlegen lassen. Demzufolge beträgt die Innenlänge des Gehäuses 54 mm, der Außendurchmesser der Spule 23 mm und die Spulenlänge 32 mm. Die Zyklotron-Spule besteht aus 13 Windungen eines Kupferblankdrahtes mit einem Durchmesser von 1 mm. Der Spulenkörper ist wie beim Axial-Resonator aus Teflon. Das Resonatorgehäuse wird aus OFE-Kupfer hergestellt. Die Unterbringung des Zyklotron-Resonators in der Fallenkammer bezweckt die Reduktion von durch die Verkabelung entstehenden parasitären Parallelkapazitäten sowie Verlustwiderstände.

Das Protonensignal wird, wie in Abbildung 3.7 gezeigt, über einen Kondensator von 440 pF an einer radial segmentierten Korrektorelektrode der Präzisionsfalle, P_4 , abgegriffen. Aufgrund der durch Gleichung (2.60) beschriebenen energieabhängigen Frequenzverschiebungen in einer magnetischen Flasche, wird das Zyklotron-Nachweissystem nicht an die Analysefalle angeschlossen. Andernfalls könnte die dadurch entstehende Boltzmann-Verteilung der Energiezustände in der Zyklotronmode zur Instabilität der Axialfrequenz in der Analysefalle führen. Da die modifizierte Zyklotronfrequenz von der Magnetfeldstärke abhängig ist (siehe Gleichungen (2.6) und (2.25)), muss die Feinabstimmung bei der Resonanzfrequenz des Zyklotron-Resonators stattfinden, was mittels einer Kapazitätsdiode (*MACOM MA46H072*) realisiert wird. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Funktionsweise des Zyklotron-Resonators unter Verwendung verschiedener Kapazitätsdioden untersucht. In Anhang B wird näher darauf eingegangen. Die Kapazitätsdiode wird, wie in Abbildung 3.7 gezeigt, über einen Kondensator von $C_a = 4,7$ pF schwach an den Zyklotron-Resonator gekoppelt.

Mit dem endgültigen Aufbau kann die höchste Resonatorgüte von $Q = 1250$ bei einer Resonanzfrequenz von $\nu_+ \approx 28,97$ MHz erreicht werden. Dies entspricht einem Resonanzwiderstand von $R_p \approx 380$ k Ω bei einer Induktivität von $L_p = 1,68$ μ H. Die Resonanzfrequenz lässt sich mithilfe der parallel geschalteten Kapazitätsdiode um ± 500 kHz verstimmen.

Die erste Verstärkereinheit wird, wie in Abbildung 3.3 gezeigt, an einen Ende des Re-

sonatorgehäuses angeschraubt. Für die Konstruktion des Zyklotron-Verstärkers, welcher ebenfalls aus zwei GaAs-Transistoren (*NEC-NE25139* und *Avago-ATF35143*) besteht, gelten die gleichen Prinzipien wie beim Axial-Verstärker [69]. Als zweite Verstärkereinheit wird ein sich bei Raumtemperatur befindlicher kommerzieller Verstärker (*Minicircuits ZFL-500LN*) eingesetzt. Die weitere Signalverarbeitung erfolgt wie im bereits beschriebenen Fall des Axial-Nachweissystems (siehe Abbildung 3.7).

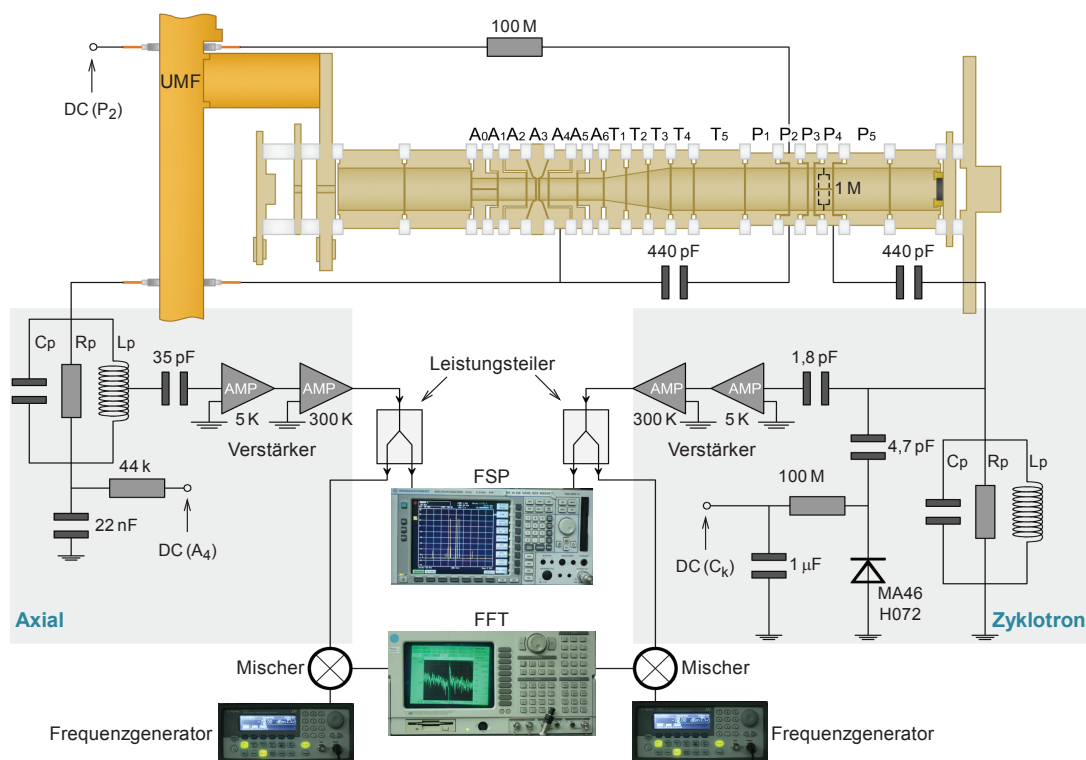


Abbildung 3.7.: Anschlussplan für die Nachweissysteme. Der Axial-Detektor wird an beide Fallen und der Zyklotron-Detektor nur an die Präzisionsfalle angeschlossen. Das vom Teilchen induzierte Signal wird über zwei Verstärkereinheiten, jeweils im Tief- und Raumtemperaturbereich, in einen Leistungsteiler geleitet. Darauf wird das Signal einmal direkt in einen Spektrumanalysator (FSP) und einmal über einen Frequenz-Abwärtswandler in einen FFT-Spektrumanalysator geleitet.

3.4. Verkabelung und Anschlussplan

Der Anschlussplan für das gesamte Experiment ist in Abbildung 3.8 gezeigt. Es werden ausschließlich SMD-Bauteile verwendet. Die Verkabelung lässt sich in drei Hauptgruppen von Leitungen unterteilen: Hochspannungsleitungen für die Elektronenquelle, Hochfrequenzleitungen für Anregung, Kopplung und Nachweis und Leitungen zur Spannungsversorgung der Elektroden und der Verstärkereinheiten. Die Leitungen werden von außerhalb des Experimentaufbaus, wo sich die Geräte (Spannungsquellen, Funktionsgeneratoren,

Spektrumanalysatoren usw.) befinden, bis zum Durchführungsflansch (UMF) geleitet. Somit durchlaufen sie alle drei Temperaturbereiche des Experiments und werden jeweils am Ort der Filterplatinen (siehe Abbildung 3.1) an die entsprechenden Temperaturstufen thermisch gekoppelt. Bei Raumtemperatur verbinden CF-40-Durchführungsflansche die Leitungen innerhalb der Raumtemperatur-Vakuumkammer mit der sich außerhalb des Experiments befindenden Elektronik. Jeder dieser Flansche ist mit einer Kupferummantelung zur Hochfrequenzabschirmung versehen. Die Leitungen werden in insgesamt sechs solcher Kupferboxen angeordnet: eine Axial- und eine Zyklotron-Nachweis-Box, eine HF-Box, eine Spinflip-Box, eine DC-Box für die Fallenelektroden und eine HV-Box. Die Materialien und Geometrien der verwendeten Leitungen hängen von der Anwendung ab. Innerhalb der Fallenkammer bestehen diese mit Ausnahme der Auskopplungsleitung und der Vorspannungsleitungen für das Zyklotron-Nachweissystem aus teflonisierten Kupferdrähten.

Praktisch alle Geräte werden durch ein *LabVIEW*-basiertes Kontrollsystem gesteuert, welches im Rahmen der Doktorarbeit von H. Kracke [70] entwickelt wurde. Ferner werden viele der in Kapitel 5 vorgestellten Messroutinen ebenfalls mithilfe dieses benutzerfreundlichen Kontrollsystems durchgeführt. Alle Frequenzgeneratoren, sowie Spektrumanalysatoren werden mit einem 10 MHz-Rubidium-Frequenzstandard (*Stanford Research FS725*) extern getaktet.

3.4.1. Die Hochspannungsleitungen

Für die in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Elektronenquelle werden zwei Leitungen benötigt. An die Beschleunigungselektrode werden Spannungen bis zu maximal 2 kV angelegt, während die Feldemissionspitze mit Spannungen zwischen -40 V und -50 V betrieben wird. Beide Leitungen bestehen aus teflonisierten Konstantandrähten⁴ mit 0,2 mm Durchmesser, welche eine geringe Wärmeleitfähigkeit aufweisen. Die Drähte werden von einem sich am Doppelkreuz befindenden Flansch mit HV-Durchführungen direkt bis zu den entsprechenden Durchführungen am UMF in zusätzlichen Teflonschläuchen verlegt. Am UMF ist eine separate HV-Durchführung mit einer Spannungsfestigkeit von 2 kV für die Beschleunigungselektrode vorhanden. Die Hochspannung wird von einem Präzisions-Hochspannungs-Netzgerät (*Knürr Heinzinger PNC-10000-6 UMP*) bereitgestellt, während die Feldemissionsspitze vom Netzgerät *LTRONIX power supply D605 B* versorgt wird.

3.4.2. Die Hochfrequenzleitungen

Insgesamt werden neun Hochfrequenzleitungen von den Raumtemperatur-Durchführungsflanschen bis in die Fallenkammer geführt (siehe Abbildung 3.8): zwei Signalleitungen für

⁴Konstantan: Handelsname für eine Legierung aus Kupfer (53 – 58%), Nickel (40 – 45%) und Mangan (0,5 – 1,2%)

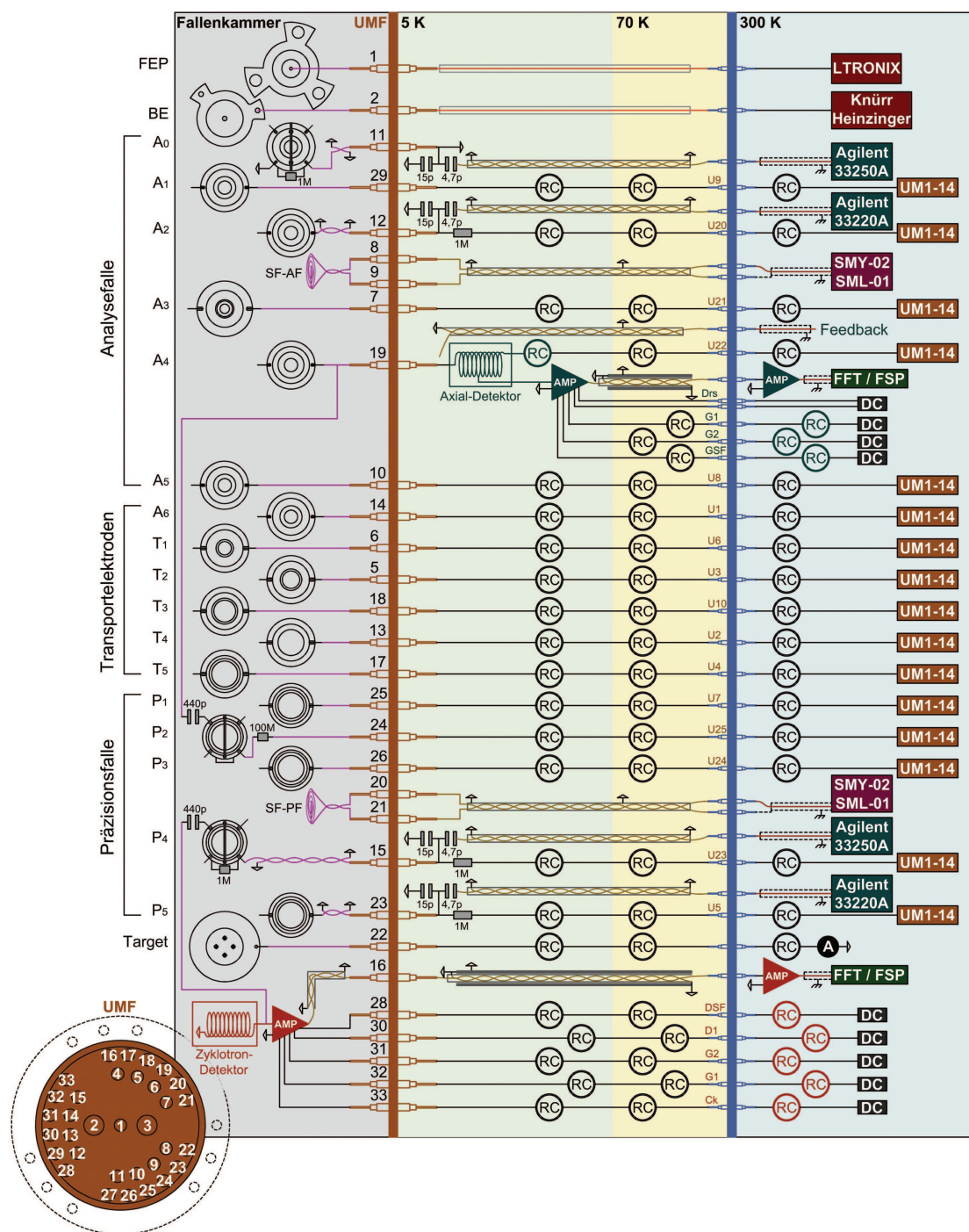


Abbildung 3.8.: Anschlussplan für das gesamte Experiment. Links unten: Anordnung der Durchführungen auf dem UMF. Die Nummerierung kennzeichnet die Verbindungen mit den entsprechenden Elektroden, welche in der Draufsicht dargestellt sind. Rechts sind die Geräte zur Spannungsversorgung, Anregung und zum Nachweis angegeben. Für Details siehe Text.

den Axial- bzw. Zyklotron-Detektor, zwei Leitungen für die Spinflip-Spulen, vier Anregeleitungen, die mit den Elektroden A_0 , A_2 , P_4 bzw. P_5 verbunden sind, und eine

Leitung für das Axial-Rückkopplungssignal. Diese bestehen aus kryotauglichen Koaxialkabeln, deren Innenleiter sich aus zwei miteinander verdrehten Messingdrähten mit jeweils 0,1 mm Durchmesser zusammensetzt. Eine gemeinsame PTFE-Isolierung trennt die Innenleiter vom aus geflochtenen Neusilberdrähten⁵ bestehenden Kabelschirm. Die Axial- bzw. Zyklotron-Signalleitungen werden noch zusätzlich in Neusilberrohren verlegt. Die Kabelschirme sind an die Masse der 70 K-Filterplatine angeschlossen, wodurch die thermische Ankopplung an diese mittlere Temperaturstufe ebenfalls gewährleistet ist.

Die vier Anregungsleitungen werden über einen kapazitiven Spannungsteiler an die Durchführungen angeschlossen. Dabei trennt ein 1 M Ω Blockwiderstand die HF- und Gleichspannungsleitungen, wie in Abbildung 3.8 gezeigt ist. Die Axial-Rückkopplungsleitung wird mit Teflonband am Anschluss des Axial-Resonators befestigt. Somit wird das gemessene Signal über eine lose Kopplung auf den Resonator zurückgeführt. Die Zyklotron-Rückkopplung erfolgt über die Anregungsleitung, die an die Endkappe P_5 der Präzisionsfalle angeschlossen ist.

Innerhalb der Fallenkammer bestehen die Anregungs- und Spinflip-Leitungen aus zwei miteinander verdrehten teflonisolierten Kupferdrähten (siehe Abbildungen 3.2 und 3.3). Die Signalleitung des Zyklotron-Nachweissystems besteht aus einem Koaxialkabel. Für die Anregung der Axialbewegung wird das Hochfrequenzsignal an die Endkappe P_5 der Präzisionsfalle bzw. an die Korrektur Elektrode A_2 der Analysefalle angelegt. Wie bereits in Abschnitt 2.4 diskutiert, kann auf diese Weise das nötige elektrische Dipolfeld in z -Richtung erzeugt werden. Zur Anregung der Zyklotron- bzw. Magnetrotbewegung werden die radial segmentierten Elektroden P_4 in der Präzisionsfalle und A_0 in der Analysefalle verwendet, mit deren Hilfe das erforderliche elektrische Dipolfeld in der xy -Ebene der Falle erzeugt wird. Über die gleichen Leitungen sollen auch die elektrischen Quadrupolfelder zur Kopplung der Bewegungen erzeugt werden. Um die Vorspannung an beide Elektrodenhälften anlegen zu können, werden diese jeweils über einen 1 M Ω Widerstand miteinander verbunden.

Auf der Außenseite der Raumtemperatur-Vakuumkammer werden die HF-Leitungen an 50 Ω -BNC-Buchsen gelötet, die an den Wänden der Kupferboxen montiert sind. Schließlich führen herkömmliche Koaxialkabel das Signal in die entsprechenden Geräte. Die Leitungen sind noch mit kommerziellen Trenntransformatoren zur Unterdrückung von Gleichtaktstörungen und Erdschleifen sowie mit Abschwächern versehen.

3.4.3. Die Gleichspannungsleitungen

Die Gleichspannungsleitungen umfassen alle Leitungen, die zur Spannungsversorgung der Fallenelektroden und der Tieftemperatur-Verstärker dienen, sowie eine Leitung zur Messung des Stroms am Target. Ein für das Experiment entwickeltes Präzisionsnetzteil (*Stahl Electronics UM1-14*) liefert die Spannungen für die Elektroden, während die Verstärker

⁵Neusilber ist eine Legierung aus Kupfer (47 – 64%), Nickel (10 – 25%) und Zink (15 – 42%)

von selbst gebauten Gleichspannungsnetzteilen versorgt werden. Zur Abschwächung von hochfrequenten Störsignalen durchlaufen die Leitungen vom Raumtemperaturbereich bis zum UMF drei Tiefpass-Filterstufen. Jede Filterstufe besteht aus einer selbst entwickelten Platine, auf der für jede Leitung ein RC-Glied vorhanden ist. Die Platinen werden an den in Abbildung 3.1 gekennzeichneten Stellen an der Apparatur befestigt und dabei über ihre Masseflächen mit dieser elektrisch verbunden. Dadurch erfolgt zusätzlich die thermische Ankopplung an die entsprechenden Temperaturstufen. Jede Platine verfügt zudem über Masseleitungen, die zur Masseverbindung der drei Filterstufen dienen. Im Präzisionsnetzteil wird die Signalmasse vom Gehäuse getrennt. Die Signalmasse wird zusätzlich über zwei hintereinander geschaltete Tiefpässe (jeweils in der 300 K- und 70 K-Filterplatine) in die UMF-Masse geleitet.

Für die Verkabelung zwischen den CF-40-Durchführungsflanschen und der 70 K-Filterplatine werden teflonisierte Konstantandrähte mit 0,2 mm Durchmesser verwendet, während für die Leitungen zwischen der 70 K- und der 5 K-Filterplatine lackisolierte Manganindrähte⁶ mit 0,1 mm Durchmesser genutzt werden. Diese enthalten einen geringeren Anteil an Nickel, welches ein ferromagnetisches Element ist, als die Konstantandrähte. Ferner ist aufgrund der kleineren Querschnittsflächen der Manganindrähte die auf die kalte Stufe übertragene Wärmeleistung entsprechend geringer. Zum mechanischen Schutz der Manganindrähte, werden diese in Gruppen gebündelt und je nach Realisierbarkeit entweder in Teflonschläuchen verlegt oder mit Teflonband umwickelt. Im Folgenden werden die relevanten Eigenschaften des Präzisionsnetzteils sowie die Einzelheiten des Entwurfs der Filterplatinen vorgestellt.

Das Präzisionsnetzteil

Die Axialfrequenz des Protons wird unter anderem durch die an die Ringelektrode angelegte Spannung V_0 gemäß Gleichung (2.18) definiert. Demzufolge spiegeln sich Spannungsfuktuationen entsprechend der Beziehung

$$\frac{d\nu_z}{dV_0} = \frac{d}{dV_0} \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}} \right) = \frac{\nu_z}{2V_0} \quad (3.2)$$

in dieser Bewegungsfrequenz wider. Eine Mindestanforderung an das Netzteil kann in Hinblick auf die Umsetzbarkeit der Methode zur Detektion eines Spin-Übergangs des Protons festgelegt werden. Wie in Abschnitt 2.5.1 diskutiert, beruht die Methode auf der Möglichkeit, einen axialen Frequenzsprung von $\delta_{\nu_z}^{SF} \approx 190$ mHz bei $\nu_z \approx 675$ kHz nachweisen zu können. Nach Gleichung (3.2) entspricht dies einer relativen Spannungsstabilität von mindestens $\frac{\delta V_0}{V_0} = 5,6 \times 10^{-7}$.

Daraufhin wird im Experiment das Präzisionsnetzgerät *UM1-14* der Firma *Stahl Electronics* verwendet. Diese verfügt über insgesamt sechzehn Spannungskanäle. Die Transportelektroden ($A_6, T_1 - T_5$) und die Endkappen (A_1, A_5, P_1, P_5) werden an die zehn

⁶Manganin: Handelsname für eine Legierung aus Kupfer (86%), Mangan (12%) und Nickel (2%).

vorhandenen 16-Bit-Kanäle angeschlossen, während die Ring- und Korrekturoelektroden der Fallen ($A_2 - A_4$, $P_2 - P_4$) von sechs 24-Bit-Präzisionskanälen versorgt werden. Die Kanäle können in zwei Modi betrieben werden. Im sogenannten *fast mode* liefern alle Kanäle Spannungen zwischen 0 V und -14 V. Messroutinen wie z.B. der Transport des Protons zwischen den Fallen oder die Präparation eines einzelnen Teilchens werden in diesem Modus ausgeführt. Lediglich die 24-Bit-Präzisionskanäle werden im sogenannten *precision mode* betrieben, in der Spannungen zwischen 0 V und -4 V bereitgestellt werden. Die hochpräzise Messung der Eigenfrequenzen sowie die Detektion eines Spin-Übergangs des Protons werden in diesem Modus durchgeführt.

Das Netzteil ist mit einer 37-poligen D-Sub-Buchse versehen und wird unmittelbar über einen D-Sub-Stecker an die Gleichspannungsleitungen angeschlossen. Zur Glättung von kurzzeitigen Temperaturschwankungen wird das Netzteil in einer massiven Kupferummantelung montiert. Diese wird ferner mittels eines kommerziellen PID-Reglers temperaturstabilisiert [70]. Unter diesen experimentellen Bedingungen kann eine relative Stabilität der Spannung an den Präzisionskanälen im *precision mode* zwischen $1,7 \times 10^{-7}$ und $1,95 \times 10^{-7}$ für Messzeiten zwischen 30 s und 600 s erreicht werden [69, 116].

Die Filterplatinen

Die Filterplatinen stellen für jede Gleichspannungsleitung, die in die Fallenkammer geleitet wird, ein Tiefpassfilter in ihrer jeweiligen Temperaturstufe zur Verfügung. Die räumliche Begrenztheit im experimentellen Aufbau stellt die größte Herausforderung beim Entwurf der Platinen dar. Die Filter bestehen im Fall der 70 K- und der 300 K-Platine aus zwei parallel geschalteten Widerständen von jeweils 820 k Ω und einem gegen Masse geschalteten Kondensator von 2,7 nF. Aufgrund des geringen am Ort der 4 K-Platine verfügbaren Raums, bestehen die Filter in diesem Fall aus einem Widerstand von 470 k Ω und demselben Kondensator. Die Bauteile sind oberflächenmontierte Bauelemente mit quaderförmiger Bauform der Größe 0805 ($2,0 \times 1,25$ mm). Metallisierte Polyphenylensulfid-Folienkondensatoren (*Panasonic ECHU*) mit einer Nennspannung von 50 V werden verwendet. Die Widerstände sind metallische Dünnschichtwiderstände (*Susumu RG series*).

Der Leiterplattenentwurf wurde mit Hilfe eines EDA⁷-Programms (*CadSoft EAGLE PCB Design Software*) im Rahmen dieser Arbeit erstellt. Die doppelseitigen durchkontaktierten Leiterplatten wurden von der Firma *M & V Leiterplatten Vertriebs GmbH* mit herkömmlichem Ätzverfahren gefertigt. Anschließend wurden diese manuell selbst bestückt. Im Fall der 70 K- und der 300 K-Platine besteht das Basismaterial der Leiterplatten aus FR4. Für die 5 K-Platine wird eine auf PTFE/Glasgewebe basierende Leiterplatte (*Taconic TLC-Laminate*) verwendet. Bei allen Platinen ist eine der Seiten als Massefläche konzipiert. Auf beiden Seiten werden sie mit Lötstopplack versehen.

Die Grenzfrequenz der Filter beträgt $\nu_g = 144$ Hz (bzw. $\nu_g = 125$ Hz im Fall der

⁷Electronic Design Automation

5 K-Platine). Für einen Butterworth-Filter erster Ordnung, dessen einfachste Variante aus einem RC-Glied besteht, wird die Dämpfung durch [132]

$$D[\text{dB}] = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\nu}{\nu_g} \right)^{2n} \right] \quad \text{mit } n = 1 \quad (3.3)$$

gegeben, wobei n für die Ordnung des Filters steht. In Tabelle 3.3 werden experimentell bestimmte Werte für die Filterdämpfung mit den idealen mittels Gleichung (3.3) berechneten Werten bei der Eigenfrequenzen (im Hochfrequenzbereich) und Larmorfrequenz des Protons im Doppel-Fallen-System verglichen. Die Messungen wurden in einem separa-

Falle	Moden	$\nu(\text{Hz})$	$D_{\text{theo}}(\text{dB})$	$D_{\text{exp}}(\text{dB})$
PF	Zyklotron	$2,9 \times 10^7$	106	85
PF	Axial	$6,8 \times 10^5$	73	73
PF	Spin	$8,1 \times 10^7$	115	59
AF	Zyklotron	$1,8 \times 10^7$	102	83
AF	Axial	$6,8 \times 10^5$	73	73
AF	Spin	$5,0 \times 10^7$	111	67

Tabelle 3.3.: Charakterisierung der Dämpfung des Tiefpassfilters der Gleichspannungsleitungen. Vergleich zwischen gemessenem und idealem Wert bei der Eigenfrequenzen und Larmorfrequenz des Protons.

ten Testaufbau mit der 300 K-Platine bei Raumtemperatur durchgeführt. Die Dämpfung wird mit Hilfe eines Netzwerkanalysators (*HP 3577A*) ermittelt. Obwohl Abweichungen vom erwarteten Verhalten festzustellen sind, die teilweise auf den Messaufbau aufgrund parasitärer kapazitiver Effekte im Hochfrequenzbereich zurückzuführen sind, erfüllen die Filter ihren Zweck. In diesem Fall wurde auf weitere Untersuchungen bzw. Optimierungen im Testaufbau verzichtet.

Die 300 K-Filterplatine wird, wie in Abbildung 3.9 gezeigt, außerhalb der Raumtemperatur-Vakuumkammer in einer der vorhandenen Kupferboxen (“DC-Box”) montiert. Die Platine wird über mit der Massefläche verbundene Durchgangslöcher an das Gehäuse angeschraubt. Die Filtereinträge werden mit einem in der Box eingebauten D-Sub-Stecker verbunden, an welchen das Präzisionsnetzteil angeschlossen wird. Die Filterausgänge werden über einen CF-40-Durchführungsflansch mit der nächsten Filterstufe verbunden.

Die sich anschließende 70 K-Filterplatine wird, wie in Abbildung 3.10 gezeigt, an die Koppelkralle (siehe auch Abbildung 3.2) angeschraubt. Da die HV-, HF- und die Gleichspannungsleitungen aus der 300 K-Filterstufe, sowie Thermometer und der Wärmeleitstab zur thermischen Ankopplung an die kalte Stufe (siehe Abbildung 3.1) durch die Platine hindurch geführt werden müssen, wird diese mit vier nicht durchkontaktierten Bohrungen versehen. Die zentrale Bohrung mit einem Durchmesser von 26 mm ist für den Wärmeleitstab, während die sich im unteren Bereich der Platinen befindenden Bohrungen mit Durchmessern von 10 mm für die Leitungen vorgesehen sind. In diesem unteren

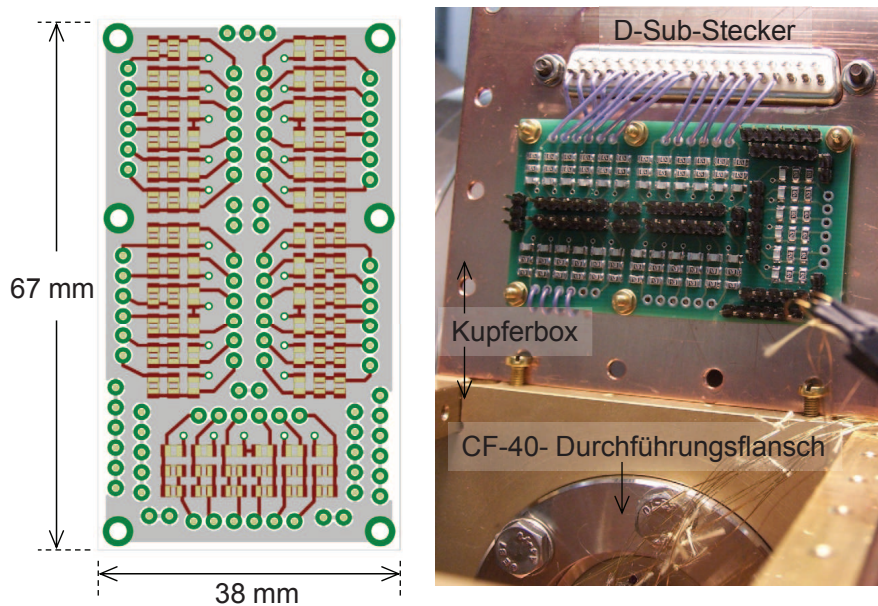


Abbildung 3.9.: 300 K-Filterplatine. Links: mit EAGLE erstellter Leiterplattenentwurf. Rechts: Photo der aufgebauten Platine. Diese wird in einer Kupferbox außerhalb der Raumtemperatur-Vakuumkammer montiert.

Bereich verfügt die Platine über Anschlüsse, die mit ihrer Massefläche verbunden sind. An diese werden die Kabelschirme der HF-Leitungen gelötet.

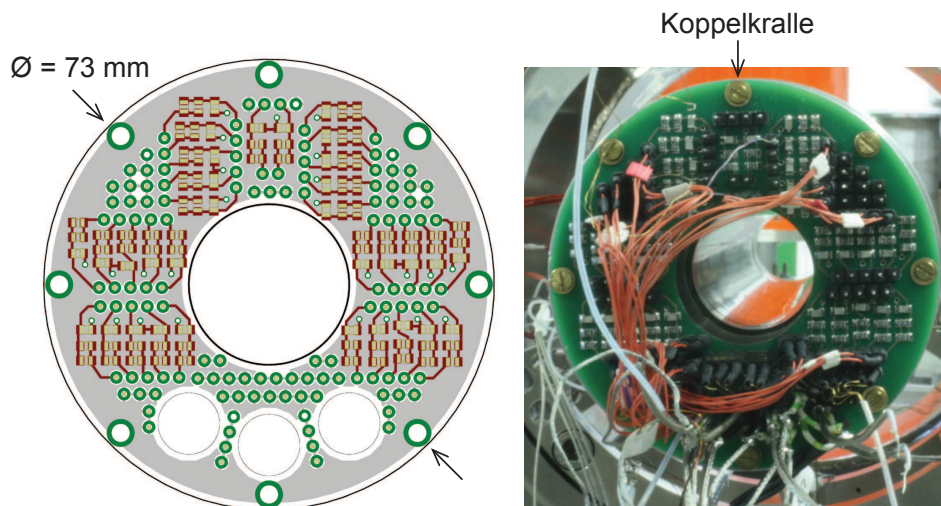


Abbildung 3.10.: 70 K-Filterplatine. Links: mit EAGLE erstellter Leiterplattenentwurf. Rechts: Die Platine wird im mittleren Temperaturbereich an die Koppelkralle angeschraubt. Durch vier nicht durchkontaktierte Bohrungen werden Leitungen (untere Bohrungen) und der Wärmeleitstab (mittlere Bohrung) durch die Platine hindurch in den Tieftemperaturbereich geführt.

Die letzte Filterstufe wird in Abbildung 3.11 dargestellt. Um die insgesamt 78 im Tief-

temperaturbereich notwendigen Bauteile unterzubringen, wurde eine Platine mit einer sehr speziellen Geometrie entworfen. Diese passt sich platzsparend an die Geometrie des UMF exakt an und wird unmittelbar auf diesem montiert. Zu diesem Zweck wird die Platine mit 33 nicht durchkontaktierten Bohrungen versehen, deren Anordnung der sich auf dem UMF befindenden Durchführungen genau entspricht. Somit gelangen die Durchführungen durch die Platine hindurch und werden dann, wie in Abbildung 3.11 gezeigt, mittels teflonisolierter Kupferdrähte an die entsprechenden Filterausgänge gelötet. Die zwei sich im zentralen Bereich der Platine befindenden Bohrungen mit 8 mm Durchmesser sind für die HV-Durchführungen vorgesehen. Für die anderen Durchführungen sind kleinere Bohrungen mit 2 mm Durchmesser vorhanden. Neben den Tiefpässen befinden sich auf der 5 K-Filterplatine die kapazitiven Spannungsteiler und Blockwiderstände für die HF-Leitungen. Die Massefläche der Platine wird an eine selbstgebaute, aus einer zurechtgeschnittenen Kupferfolie bestehende Halterung gelötet, welche an den UMF angeschraubt wird.

Sonstige Gleichspannungsverbindungen

Zwei zusätzliche Gleichspannungsverbindungen, die in Abbildung 3.8 nicht dargestellt sind, sollen noch erwähnt werden. Diese werden erst bei Bedarf zur Ausführung bestimmter Messroutinen eingebaut. Die eine Verbindung wird zum Entfernen unerwünschter Ionen in der Analysefalle benötigt. Zur Durchführung dieser in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten Methode muss die an die Ringelektrode A_3 angelegte Spannung bis zu -48 V verstimmt werden. Diese Spannungsgrenze entspricht der Nennspannung der verwendeten Kondensatoren. Zu diesem Zweck wird eine zusätzliche Gleichspannungsquelle (*HP 6629A System DC Power Supply*) über einen selbstgebauten Adapter in Reihe mit der *UM1-14* geschaltet.

Die zweite Verbindung ermöglicht den Anschluss eines zusätzlichen Präzisionsnetzteils (*Fluke 343A DC Voltage Calibrator*). Dieses wird mit der Endkappe A_1 der Analysefalle zur Durchführung der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Methode zur Optimierung des elektrostatischen Potentials verbunden. Durch Anlegen von individuell einstellbaren Offsetspannungen an die Elektroden erfolgt die Asymmetriekompensation des Speicherpotentials. Da bei Betrieb im *precision mode* lediglich der Ring und die Korrektorelektroden von der *UM1-14* versorgt werden, wird eine zweite Spannungsquelle für die Endkappe benötigt. Das zweite Netzteil kann Spannungen mit einer absoluten Genauigkeit von 2×10^{-5} bei einer relativen Stabilität von $5 \times 10^{-6}/\text{h}$ liefern.

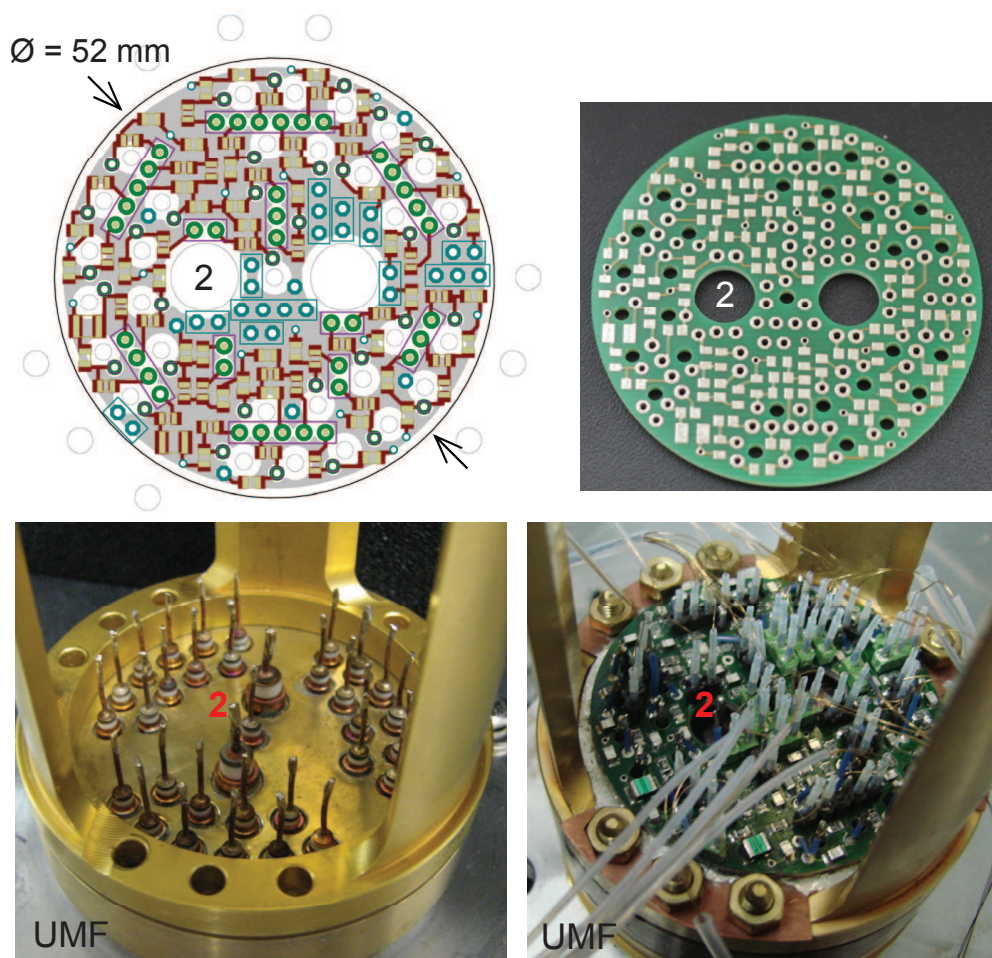


Abbildung 3.11.: 5 K-Filterplatine. Oben links: mit *EAGLE* erstellter Leiterplattenentwurf. Oben rechts: gefertigte und noch unbestückte Platine. Unten links: Mit 33 Durchführungen versehener UMF. Unten rechts: Die Platine ist exakt an die Geometrie des UMF angepasst. Zur Orientierung ist die Position der HV-Durchführung für die Beschleunigungselektrode (2) gekennzeichnet.

4. Konzeption und Entwurf einer Penning-Falle

Dieses Kapitel widmet sich der Beschreibung einer Methode zum Entwurf einer fünf-poligen Penning-Falle auf Grundlage der in Abschnitt 2.2.3 präsentierten Überlegungen. Zunächst werden zwei Berechnungsmethoden vorgestellt, ein auf der analytischen Lösung für das elektrostatische Potential in einer zylindrischen Penning-Falle basierendes Modell, und ein numerisches Verfahren, das auf der Methode der finiten Elemente (FEM) [133–136] beruht. Anhand des analytischen Modells wird ein neuer Entwurf für die Präzisionsfalle vorgeschlagen. Des Weiteren werden die Einzelheiten des mit Hilfe von FEM-Berechnungen erstellten Entwurfs einer speziellen Penning-Falle, der Analysefalle, beschrieben. In dieser Falle konnten Spin-Übergänge eines einzelnen Protons erstmals nachgewiesen (siehe Abschnitt 5.4.5 und [81]) und sein g -Faktor mit einer Genauigkeit von $8,9 \times 10^{-6}$ (siehe Abschnitt 5.4.6 und [41]) bestimmt werden. Schlussendlich wird ein Verfahren zur Optimierung des elektrostatischen Potentials der Analysefalle unter Verwendung des gespeicherten Protons vorgestellt.

4.1. Ausgangspunkte und Berechnungsmethoden

Die Anwendung einer Penning-Falle zur Durchführung hochpräziser Messungen setzt das Vorhandensein nahezu idealer durch Gleichungen (2.11) bzw. (2.13) gegebener Speicherfelder voraus. Zum Entwurf einer optimierten Fallengeometrie ist die genaue Kenntnis des elektrostatischen Potentials erforderlich. Die Potentialverteilung innerhalb einer Penning-Falle zylindrischer Geometrie lässt sich, wie in Abschnitt 2.2.3 gezeigt, analytisch berechnen. Die Lösung eignet sich, wie im Folgenden gezeigt wird, zwar hervorragend als Modell zur Dimensionierung der Präzisionsfalle, jedoch lassen sich im Fall der Analysefalle, welche einen kleineren Innenradius mit sehr speziellen Elektrodenformen kombiniert, signifikante Abweichungen zwischen den analytischen und den auf der exakten Fallengeometrie basierenden numerischen Berechnungen feststellen. Das numerische Verfahren stellt eine umfassendere Methode dar, mit deren Hilfe das elektrostatische Potential jeder beliebigen Elektrodengeometrie an jedem Punkt in einem vordefinierten in Strukturelemente zerlegten Raum berechnet werden kann. Zudem kann die durch eine ferromagnetische Ringelektrode hervorgerufene magnetische Flasche unter Verwendung der FEM-Berechnungen bestimmt werden, was die Konzeption einer optimal an die experimentellen Voraussetzungen angepassten Geometrie der Analysefalle ermöglicht. In

Rahmen dieser Arbeit wurden beide Berechnungsverfahren eingehend untersucht. Diese werden in diesem Abschnitt beschrieben und für die Präzisionsfalle miteinander verglichen.

4.1.1. Die analytische Berechnung - Vorschlag für ein neues Design der Präzisionsfalle

Die in Abbildung 2.5 dargestellte spiegelsymmetrische Anordnung von fünf Elektroden (eine fünfpolige Penning-Falle) ermöglicht die Unterdrückung anharmonischer Anteile des elektrostatischen Potentials durch Anlegen einer definierten Spannung an die zwei zu diesem Zweck konzipierten Korrektorelektroden. Mittels einer geeigneten Wahl der Fallengeometrie lassen sich mit der gleichen Korrekturspannung beide Koeffizienten der anharmonischen Terme niedrigster Ordnung, C_4 und C_6 , eliminieren. Der Grad dieser Kompensation der Anharmonizität des Speicherpotentials wird durch die Differenz

$$\Delta_{\text{TR}} = T_R^{C_4} - T_R^{C_6} \quad (4.1)$$

quantifiziert. Dabei ist $T_R^{C_i}$ das Verhältnis der an die Korrektur- und Ringelektrode angelegten Spannungen, $T_R = V_k/V_0$ (*tuning ratio*), bei welchem der jeweilige Koeffizient $C_i = 0$ ist. Diese idealen T_R lassen sich für einen gegebenen Satz von den in Abbildung 2.5 (siehe auch Abbildung 4.4(a)) definierten geometrischen Parametern ($\rho_0, l_0, l_k, l_e, l_s$) mit Hilfe der Gleichungen (2.83) bis (2.85) bestimmen. Die Unabhängigkeit der Axialfrequenz von der Korrekturspannung V_k kann ebenfalls durch eine geeignete Dimensionierung der Falle gewährleistet werden. Diese Eigenschaft zeichnet sich durch die Unterdrückung des Koeffizienten $D_2 = d_2 V_0$ in Gleichung (2.88) aus, und wird als Orthogonalität bezeichnet. Die Berechnung von D_2 erfolgt gemäß der Beziehung (2.86) bzw. (2.87). In Bezug auf die axiale Frequenz gilt nach Gleichung (2.88)

$$D_2^{\nu_z} \left[\frac{\text{Hz}}{\text{Unit}_{\text{TR}}} \right] = \frac{\partial \nu_z}{\partial T_R} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e}{m} 2V_0} \frac{d_2}{2\sqrt{e_2 + d_2 T_R}} \quad , \quad (4.2)$$

wobei Unit_{TR} für eine Änderung des Spannungsverhältnisses T_R um eine Einheit steht. Die gesuchte optimale Fallengeometrie besitzt die Dimensionen (ρ_0, l_0, l_k), mit welchen die Bedingungen

$$\Delta_{\text{TR}} = 0 \quad \text{und} \quad D_2^{\nu_z} = 0 \quad (4.3)$$

gleichzeitig erfüllt werden können. Die Breite der Schlitzes zwischen den Elektroden beträgt $l_s = 0.14$ mm und wird bei den vorliegenden Berechnungen nicht variiert. Für die analytische Berechnung wird angenommen, dass die Länge der Endkappen identisch und $l_e = 10$ mm ist. Die Endkappen sind nach den in Abbildung 2.5 dargestellten Randbedingungen geerdet.

Der erste Schritt im Design der Falle ist die Auswahl des Radius ρ_0 . Im Fall der Präzisionsfalle beruht diese überwiegend auf den Anforderungen an das Nachweissystem (siehe

Abschnitt 2.3.3). Das derzeitige Design der Präzisionsfalle, bei dem $\rho_0 = 3,5$ mm gewählt ist, wurde von [88,93] übernommen. Im Folgenden wird für diesen gegebenen Radius der Satz von Parametern (l_0, l_k) , mit welchem die Bedingungen (4.3) erfüllt werden können, eindeutig bestimmt. Zunächst wird für einen willkürlichen Anfangswert der Länge l_0 der Ringelektrode, die Länge l_k der Korrektorelektrode bestimmt, mit der der Absolutwert von Δ_{TR} minimiert werden kann. In Abbildung 4.1 wird dieses Verfahren beim gewählten Ausgangspunkt ($\rho_0 = 3,5$ mm, $l_0 = 0,92$ mm, l_k) veranschaulicht. Δ_{TR} wird, wie in Abbildung 4.1(a) illustriert, für unterschiedliche Werte von l_k berechnet. Demnach stellt das Paar $(l_0 = 0,92$ mm, $l_k = 2,743$ mm) die optimale gesuchte Konfiguration bezüglich der Kompensation dar. Dennoch ist die Orthogonalität der Falle bei dieser Konfiguration nicht gewährleistet, da gemäß der in Abbildung 4.1(b) gezeigten Ergebnisse, $D_2^{\nu z} = 10,8$ kHz/Unit_{TR} ist. Zu beachten ist, dass Δ_{TR} bzw. $D_2^{\nu z}$ als Funktion von l_k ein näherungsweise lineares Verhalten in einem Bereich ($\Delta l_k \approx 0,26$ mm) um die optimale Länge der Korrektorelektrode aufweisen. Diese Tatsache wird im Folgenden zur schnelleren Ermittlung der optimalen Dimensionen der Falle genutzt.

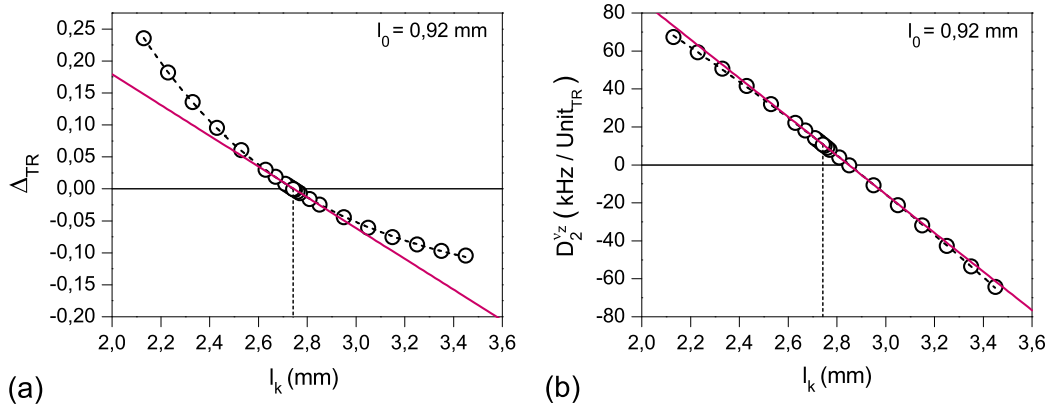


Abbildung 4.1.: Beispiel zur partiellen Optimierung des Fallendesigns bezüglich der Kompensation der Anharmonizität des Speicherpotentials unter Verwendung des analytischen Modells. Für einen festgelegten Fallenradius von $\rho_0 = 3,5$ mm und den Anfangsparameter $l_0 = 0,92$ mm werden die Eigenschaften der Fallengeometrie untersucht. (a) Der Grad der Kompensation wird für das jeweilige Paar $(l_0 = 0,92$ mm, $l_k)$ untersucht. $\Delta_{\text{TR}} = 0$ kennzeichnet die optimale Konfiguration ($l_0 = 0,92$ mm, $l_k = 2,743$ mm). (b) Für die gleichen Parameter wird $D_2^{\nu z}$ bei $V_0 = 1$ V berechnet. Die Orthogonalitätsbedingung, $D_2^{\nu z} = 0$, ist mit der zur Kompensation optimalen Konfiguration nicht erfüllt.

Jeder beliebigen Länge l_0 ist eine Länge l_k zuzuordnen, unter deren Verwendung die Kompensationsbedingung erfüllt wird. Allerdings gibt es für einen gegebenen Radius eine einzige Länge l_0 , mit der die Orthogonalitätsbedingung, $D_2^{\nu z} = 0$, ebenfalls erfüllt werden kann. Um diese zu bestimmen, wird die oben beschriebene Prozedur für unterschiedliche Werte von l_0 wiederholt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Die Paare (l_0, l_k) , welche die Kompensationsbedingung erfüllen, sind durch die Sterne gekennzeichnet. Diese weisen einen linearen Zusammenhang mit $D_2^{\nu z}$ auf, wie es in Abbildung 4.2(b)

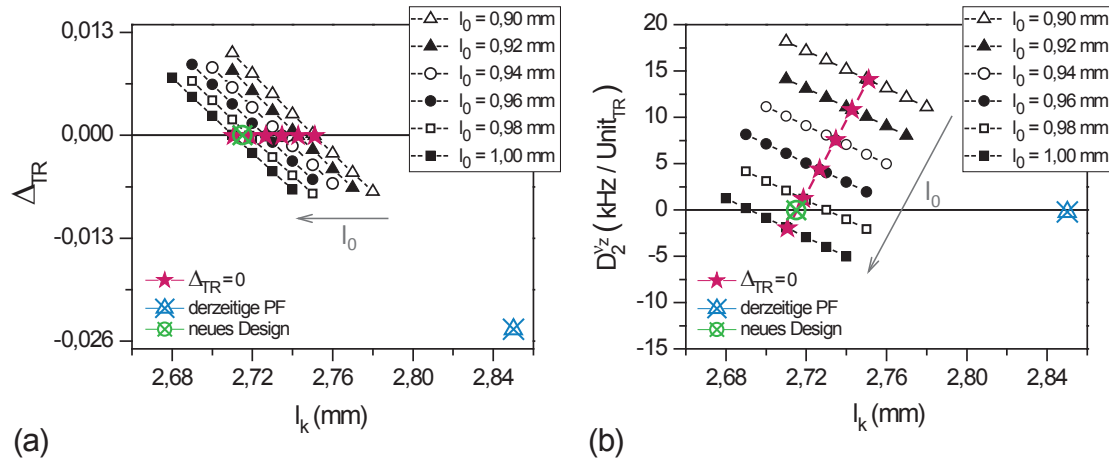


Abbildung 4.2.: Ergebnisse des Optimierungsverfahrens zum Entwurf der Präzisionsfalle unter Verwendung der analytischen Berechnung. Für einen Fallenradius von $\rho_0 = 3,5$ mm werden die Eigenschaften verschiedener geometrischer Konfigurationen (l_0 , l_k) untersucht. (a) Δ_{TR} als Funktion von l_k für verschiedene Werte von l_0 . Alle sich auf der Linie von Sternen befindenden Fallengeometrien erfüllen die Kompensationsbedingung $\Delta_{TR} = 0$. (b) $D_2^{\nu_z}$ bei $V_0 = 1$ V als Funktion von l_k für verschiedene Werte von l_0 . Die Punkte auf der Kompensationslinie weisen einen linearen Zusammenhang mit $D_2^{\nu_z}$ auf. Der gekreuzte Kreis stellt die gesuchte optimale Konfiguration dar ($l_0 = 0,988$ mm, $l_k = 2,715$ mm). Die gekreuzten Dreiecke stellen die Parameter der derzeitigen Geometrie der Präzisionsfalle dar.

zu erkennen ist. Folgt man nun der Linie von Sternen quer durch die unterschiedlichen Längen l_0 , so findet man einen einzigen Punkt, an dem beide Bedingungen in (4.3) erfüllt sind. Dieser ist in Abbildungen 4.2(a) bzw. (b) durch den gekreuzten Kreis gekennzeichnet und entspricht der gesuchten optimalen Konfiguration ($\rho_0 = 3,5$ mm, $l_0 = 0,988$ mm, $l_k = 2,715$ mm). Aus praktischen Gründen werden die berechneten optimalen Werte der geometrischen Parameter entsprechend der Annahme einer Fertigungstoleranz von $\pm 1 \mu\text{m}$ aufgerundet. Das gekreuzte Dreieck in Abbildungen 4.2(a) bzw. (b) stellt das derzeitige Design der Präzisionsfalle dar, mit welchem die Orthogonalitätsbedingung zwar erfüllt werden kann (siehe Abbildung 4.2(b)), aber die Kompensation des Potentials nicht vollständig gewährleistet ist (siehe Abbildung 4.2(a)). In Tabelle 4.1 werden die berechneten charakteristischen Parameter beider Fallengeometrien aufgelistet. Dabei ist $D_2^{\nu_z}$ bei der jeweiligen Betriebsspannung ($V_0 = V_{\text{res}}$) für $\nu_z = 674,4$ kHz angegeben.

Die in diesem Abschnitt präsentierte Methode kann zum Entwurf zylindrischer Penning-Fallen beliebiger Radien verwendet werden, vorausgesetzt, dass die Form der Elektroden nicht sehr stark von der in Abbildung 2.5 (siehe auch Abbildung 4.4(a)) dargestellten idealisierten Geometrie abweicht, wie in den nächsten Abschnitten diskutiert wird. In Abbildung 4.3(a) sind die optimalen Dimensionen (l_0 , l_k) zur Erfüllung der Bedingungen in Gleichung (4.3) für unterschiedliche Fallenradien ρ_0 gezeigt. Die entsprechenden Betriebsspannungen für $\nu_z = 674,4$ kHz sind in Abbildung 4.3(b) gegeben. In Tabelle C.1 in Anhang C sind die in Abbildung 4.3 aufgetragenen Werte explizit aufgelistet.

Geometrie	l_0 (mm)	l_k (mm)	V_{res} (V)	$D_2^{1/2}$ (V_{res}) (Hz/Unit _{TR})	$T_R^{C_4}$	Δ_{TR}
Neuer Designvorschlag	0,988	2,715	-3,059	-61,74150(1)	0,880964(1)	$2,40(14) \times 10^{-5}$
Derzeitiges Design	0,920	2,850	-3,233	-418,90717(7)	0,866913(1)	$-2,4520(1) \times 10^{-2}$

Tabelle 4.1.: Charakteristische Parameter zum Vergleich zwischen dem derzeitigen Design der Präzisionsfalle und dem neuen Designvorschlag. Die berechneten optimalen Werte der geometrischen Parameter sind entsprechend der Annahme einer Fertigungstoleranz von $\pm 1 \mu\text{m}$ aufgerundet.

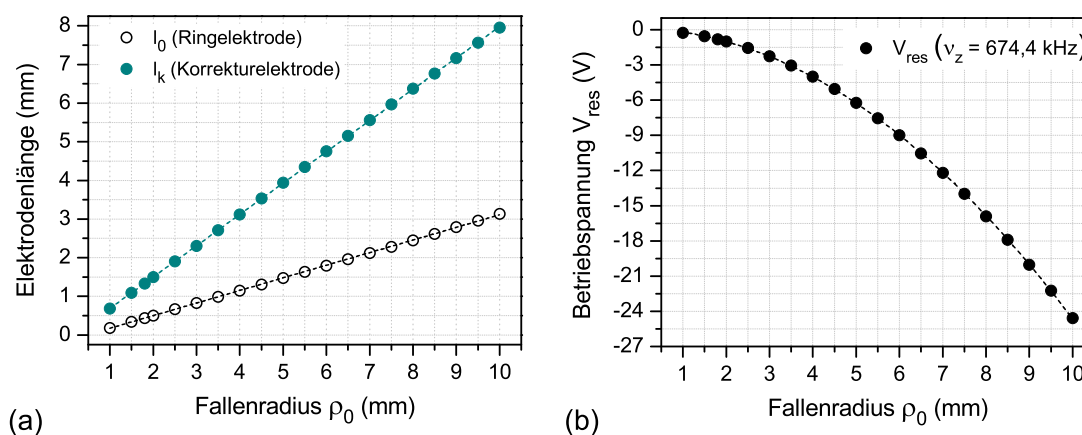


Abbildung 4.3.: Optimale unter Verwendung des analytischen Modells bestimmte geometrische Parameter zum Entwurf zylindrischer Penning-Fallen beliebiger Radien mit $l_e = 10 \text{ mm}$ und $l_s = 0,14 \text{ mm}$. (a) Optimale Länge der Ring- (l_0) bzw. Korrektorelektrode (l_k) für den jeweiligen Fallenradius ρ_0 . (b) Entsprechende Betriebsspannungen ($V_0 = V_{\text{res}}$) für eine axiale Frequenz von $\nu_z = 674,4 \text{ kHz}$.

4.1.2. Die numerische Berechnung

Die auf der analytischen Berechnung des elektrostatischen Potentials basierende Methode zum Entwurf einer Penning-Falle setzt die idealisierte in Abbildung 4.4(a) gezeigte zylindrische Geometrie voraus. Im Fall einer realen Penning-Falle weicht die Form der Elektroden jedoch gewöhnlich von dieser idealen Vorstellung ab. In Abbildung 4.4 wird die tatsächliche Geometrie der in diesem Experiment verwendeten Präzisionsfalle (b) seiner entsprechenden geometrischen Modellierung (a) gegenübergestellt. Die Innenflächen der Fallen bilden zwar den gleichen Hohlzylinder, aber der Verlauf der Schlitzes zwischen den Elektroden entlang der radialen Richtung unterscheidet sich voneinander. Der Grad der Auswirkung auf das elektrostatische Potential aufgrund einer solchen Abweichung von der idealisierten Geometrie hängt vom Fallenradius und von der Form der Elektroden ab. Für eine gegebene Geometrie und feste Schlitzbreite l_s ist der Effekt umso stärker, je kleiner der Radius ist. In diesem Abschnitt wird ein numerisches Verfahren

4.5 veranschaulicht, je nach Wichtigkeit des jeweiligen Bereiches des verwendeten CAD¹-Modells unterschiedlich definiert werden. Die maximale Größe der Elemente entlang der zu bestimmenden geometrischen Parameter (l_0, l_k) und der Fallachse wird auf $1 \mu\text{m}$ festgelegt. Die Berechnung erfolgt mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-6} . Der numerische Fehler wird hauptsächlich durch Anpassungsfehler bei der sich anschließenden Bearbeitung der numerischen Daten bestimmt.

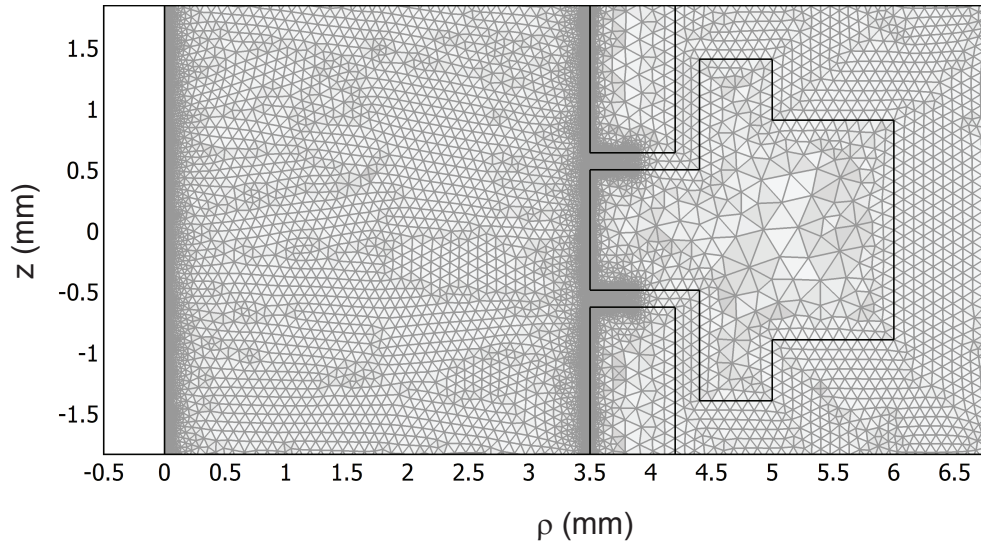


Abbildung 4.5.: Erstellung des Finite-Elemente-Netzes mit dem Programm (*COMSOL Multiphysics*) zur Berechnung des elektrostatischen Potentials einer gegebenen Elektrodengeometrie.

Der gesamte in Abbildung 3.3 gezeigte Fallenturm sowie die Fallenkammer werden in der numerischen Berechnung berücksichtigt. Für jede zu untersuchende Fallengeometrie werden das von der Ring- bzw. den Korrektorelektroden erzeugte Potential separat berechnet. Dabei wird eine Spannung von -1 V an die jeweilige Elektrode angelegt, während die anderen jeweils geerdet sind. Aus diesen “normierten” Potentials lässt sich das aus jeglicher Kombination von Spannungen (V_0 und $V_k = T_R V_0$) resultierende Gesamtpotential entlang der z -Achse gemäß

$$\phi(z) = T_R V_0 \phi_{P_2}(z) + V_0 \phi_0(z) + T_R V_0 \phi_{P_4}(z) \quad (4.4)$$

berechnen. Dabei sind $\phi_0(z)$ und $\phi_{P_i}(z)$ die Beiträge der Ring- bzw. Korrektorelektroden. Diese Prozedur ist in Abbildung 4.6 veranschaulicht. Durch die Anpassung der aus Gleichung (4.4) resultierenden numerischen Daten (siehe Abbildung 4.6(b)) mittels einer Polynomfunktion der Form

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} z^{2n} \quad (4.5)$$

¹Rechnerunterstützter Entwurf (*computer-aided design*)

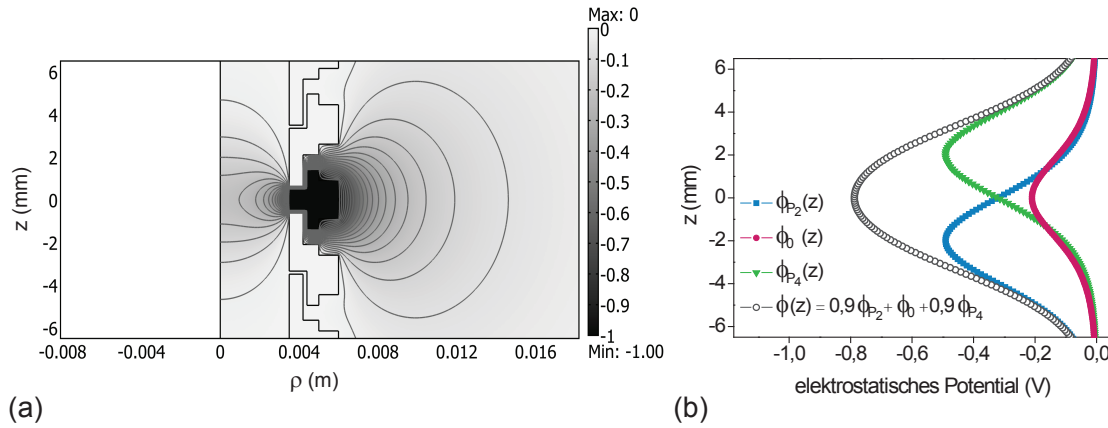


Abbildung 4.6.: Veranschaulichung des Verfahrens zur numerischen Berechnung des elektrostatischen Potentials einer gegebenen Geometrie der Penning-Falle. (a) FEM-Berechnung des elektrostatischen Potentials, welches durch Anlegung einer Spannung von $V_0 = -1$ V an die Ringelektrode erzeugt wird. (b) Beispiel zur auf den normierten Potentials $\phi_0(z)$ und $\phi_{P_i}(z)$ basierenden Berechnung des Gesamtpotentials $\phi(z)$ für $V_0 = -1$ V und $T_R = 0,9$.

nahe dem Fallenzentrum ($E_z \leq 1$ eV), werden die Koeffizienten C_2 , C_4 und C_6 ermittelt. Die idealen Spannungsverhältnisse $T_R^{C_4}$ und $T_R^{C_6}$ zur Eliminierung von C_4 bzw. C_6 werden, wie in Abbildung 4.7(a) gezeigt, aus dem Verlauf des jeweiligen Koeffizienten C_i als Funktion von T_R bestimmt, während $D_2^{\nu_z}$ die Steigung der in Abbildung 4.7(b) gezeigten Kurve ist, welche den Zusammenhang zwischen der axialen Frequenz ν_z und dem T_R beschreibt.

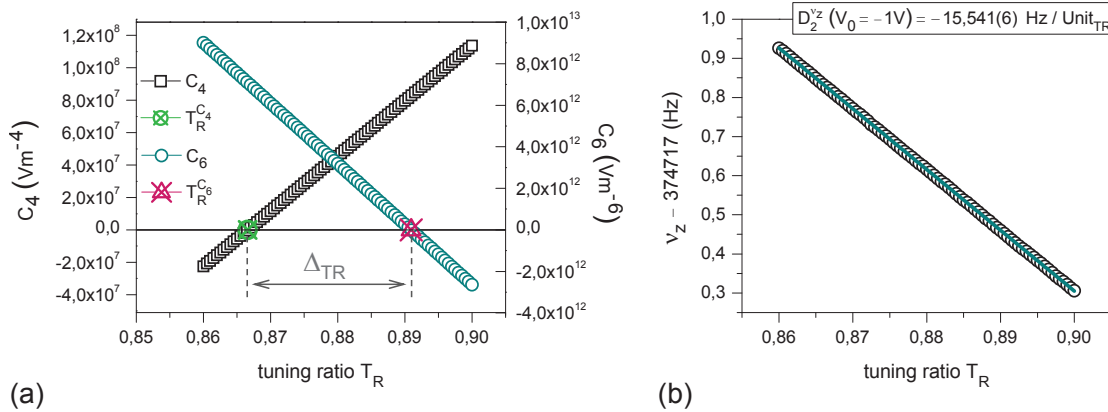


Abbildung 4.7.: Beispiel zur Bestimmung der Optimierungsparameter Δ_{TR} und $D_2^{\nu_z}$ einer gegebenen geometrischen Konfiguration ($\rho_0 = 3,5$ mm, $l_0 = 0,92$ mm und $l_k = 2,85$ mm). (a) $C_4(C_6)$ als Funktion von T_R . Das Spannungsverhältnis, für welches $C_i = 0$ ist jeweils gekennzeichnet. (b) Axiale Frequenz ν_z als Funktion von T_R . Die Steigung der Kurve, $D_2^{\nu_z}$, charakterisiert die Orthogonalität der Fallengeometrie.

Der optimale Satz von geometrischen Parametern (ρ_0 , l_0 , l_k) zur Erfüllung der Bedingungen (4.3) wird gemäß der im letzten Abschnitt beschriebenen Methode bestimmt.

Für einen Fallenradius von $\rho_0 = 3,5$ mm werden die idealen Dimensionen $l_0 = 0,988$ mm und $l_k = 2,715$ mm sowohl unter Verwendung der idealisierten zylindrischen Geometrie (Abbildung 4.4(a)) als auch unter Berücksichtigung der tatsächlichen Geometrie (Abbildung 4.4(b)) mit der numerischen Berechnung ermittelt. Dieses Endergebnis stimmt mit demjenigen aus der analytischen Berechnung überein. In Abbildung 4.8 werden die numerisch bestimmten Werte von Δ_{TR} und D_2^{Vz} gegen den Grad der Polynomfunktion (4.5) aufgetragen und mit den analytisch berechneten Werte verglichen. Demnach sollte ein Polynom mindestens 12. Grades zur Anpassung der numerischen Daten verwendet werden. Die schraffierten Toleranzbereiche um die analytisch berechnete Werte stellen jeweils die Streuung aufgrund einer Abweichung von $\pm 1 \mu\text{m}$ der geometrischen Parameter dar. Zu beachten ist, dass sich die Ergebnisse aus dem numerischen Verfahren für die in Abbildung 4.4 dargestellten Geometrieviationen voneinander praktisch nicht unterscheiden. Diese sind in Tabelle 4.2 explizit sowohl für den neuen Designvorschlag für die Präzisionsfalle als auch für die derzeitig verwendete Fallengeometrie aufgelistet. Im Fall der Präzisionsfalle sind also beide, die numerische und die analytische Methode, zur Untersuchung der elektrostatischen Eigenschaften geeignet.

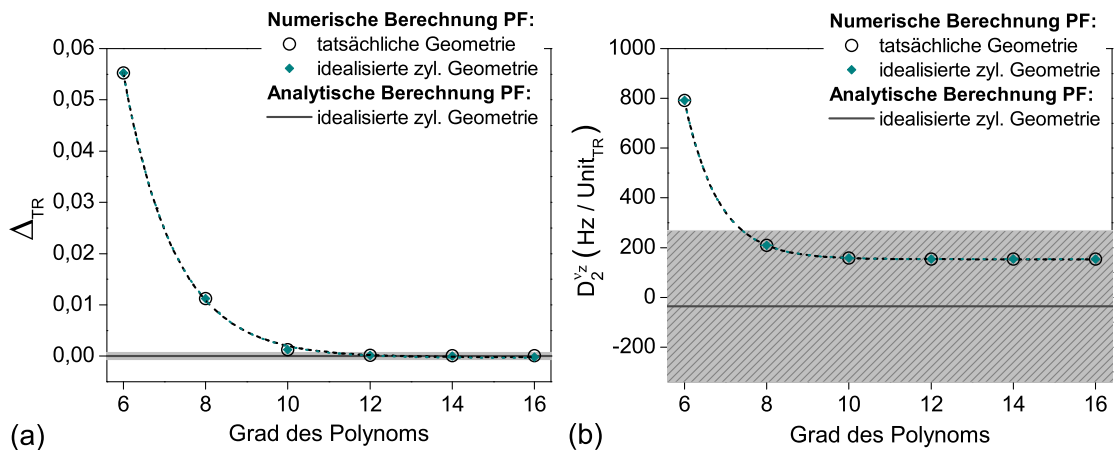


Abbildung 4.8.: Vergleich der Ergebnisse der analytischen und numerischen Berechnungen für den neuen Designvorschlag der Präzisionsfalle ($\rho_0 = 3,5$ mm, $l_0 = 0,988$ mm und $l_k = 2,715$ mm). Δ_{TR} (a) bzw. D_2^{Vz} (b) für verschiedene zur Anpassung der numerischen Daten verwendete Polynomfunktionen. Die schraffierten Toleranzbereiche um die analytisch berechneten Werte kennzeichnen jeweils die Ergebnisse bei einer Abweichung der geometrischen Parameter von $\pm 1 \mu\text{m}$.

4.2. Entwurf der Analysefalle

Der Nachweis des Spin-Übergangs eines einzelnen Protons mittels des kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekts stellt, wie in Abschnitt 2.5.1 diskutiert, eine Herausforderung dar. Die Methode erfordert eine starke magnetische Inhomogenität (magnetische Flasche), damit der nachzuweisende durch einen Übergang zwischen den Spin-Eigenzuständen in-

Geometrie	l_0 (mm)	l_k (mm)	V_{res} (V)	$D_2^{\nu_z}$ (V_{res}) (Hz/Unit _{TR})	$T_R^{C_4}$	Δ_{TR}
Neuer Designvorschlag						
Idealisierte	0,988	2,715	-3,07	269,59(1)	0,880688(2)	$1,5(3) \times 10^{-4}$
Tatsächliche	0,988	2,715	-3,07	269,07(1)	0,880687(1)	$1,6(2) \times 10^{-4}$
Derzeitiges Design						
Idealisierte	0,920	2,850	-3,24	-26,88(1)	0,866589(2)	$-2,428(3) \times 10^{-2}$
Tatsächliche	0,920	2,850	-3,24	-27,97(1)	0,866595(1)	$-2,434(2) \times 10^{-2}$

Tabelle 4.2.: Mit dem numerischen Verfahren bestimmte charakteristische Parameter des neuen Designvorschlags der Präzisionsfalle und des derzeitig verwendeten Designs. Im Fall der Präzisionsfalle mit $\rho_0 = 3,5$ mm unterscheiden sich die Ergebnisse für die idealisierte zylindrische und die tatsächliche Geometrie praktisch nicht.

duzierte Sprung in der axialen Frequenz $\delta_{\nu_z}^{SF} \propto B_2$ bei $\nu_z \approx 680$ kHz aufgelöst werden kann. Demzufolge ist die Maximierung der durch Einbringen einer ferromagnetischen Ringelektrode hervorgerufenen magnetischen Flasche das vornehmliche Ziel beim Entwurf der Analysefalle. Zudem sollen die Bedingungen (4.3) zur Optimierung des elektrostatischen Potentials idealerweise erfüllt werden. Starke Abweichungen vom idealen durch Gleichung (2.13) gegebenen Quadrupolpotential in Verbindung mit der starken magnetischen Inhomogenität können die Detektion des Protonsignals unmöglich machen. Mit dem vorherigen Design der Analysefalle [116, 131], welches eine toroidale Ringelektrode mit zylindrischen Korrektorelektroden bzw. Endkappen verband, konnte eine etwa um Faktor 2 stärkere magnetische Flasche als mit der jetzigen Geometrie erreicht werden. Diese stärkere Inhomogenität wurde jedoch auf Kosten der elektrostatischen Eigenschaften der Falle erzielt, was wiederum den effizienten Nachweis eines einzelnen Protons verhinderte. Dem Entwurf der neuen Analysefalle liegt die Idee einer Kombination von maximalem B_2 und optimalem elektrostatischen Potential zugrunde.

In diesem Abschnitt wird eine ausführliche auf numerische Berechnungen basierte Untersuchung zur Bestimmung der optimalen geometrischen Parameter der Falle präsentiert. Aufgrund der Anforderungen an die magnetische Flasche verbindet die Fallengeometrie, wie in Abschnitt 4.2.1 gezeigt, eine sehr spezielle Form der Ringelektrode mit einem kleinen Radius. Demzufolge eignet sich die in der analytischen Methode verwendete Modellierung der Falle zur akkuraten Berechnung des Potentials in diesem Fall nicht, wie in Abschnitt 4.2.2 diskutiert wird.

4.2.1. Die magnetische Flasche

Der durch Gleichung (2.57) beschriebene inhomogene Anteil des Magnetfeldes, welcher aufgrund der rotations- und spiegelsymmetrischen Anordnung von ferromagnetischem Material um das Fallenzentrum entsteht, soll maximiert werden. In [54] werden die Ko-

effizienten B_i der Gleichung (2.55) analytisch bestimmt. Nach der analytischen Lösung trägt hauptsächlich der nahe am Fallenzentrum platzierte Anteil des ferromagnetischen Materials bei einer bestimmten Winkelverteilung bedeutsam zu B_2 bei. Die in Abbildung 4.9 gezeigte Grundform der Ringelektrode der Analysefalle ist zur optimalen Positionierung des ferromagnetischen Materials um das Fallenzentrum konzipiert. Ferner soll die Geometrie der Falle, wie in Abschnitt 3.2.3 diskutiert, einen möglichst freien Durchgang des Anregungssignals zum Umklappen des Protonspins zum Fallenzentrum ermöglichen.

Die Stärke der durch das Einbringen einer Ringelektrode aus CoFe mit einer Sättigungsmagnetisierung von 2,35 T [137] im äußeren homogenen Magnetfeld von 1,899 T erzeugten magnetischen Flasche wird mit Hilfe von FEM-Berechnungen als Funktion der in Abbildung 4.9 gekennzeichneten Designparameter genau untersucht. Dabei werden die Parameter θ , ρ_0 , l_p und l_n einzeln variiert und der Koeffizient B_2 jeweils ermittelt. Für jede zu untersuchende Geometrie der Ringelektrode wird eine zweidimensionale

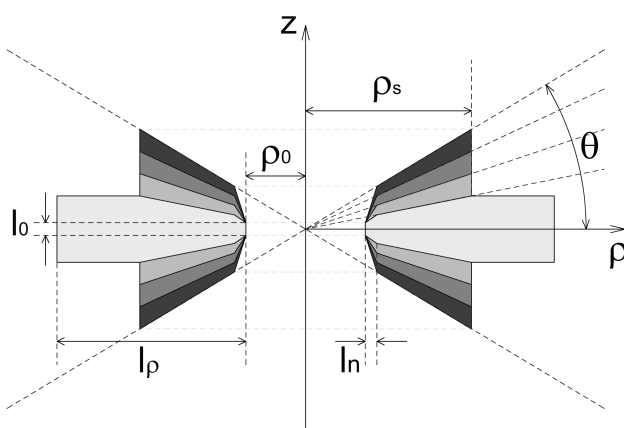


Abbildung 4.9.: Definition der Designparameter der Ringelektrode der Analysefalle. Für Details siehe Text.

Berechnung des Magnetfeldes durchgeführt. In Abbildung 4.10(a) wird das Ergebnis einer solchen Berechnung als Beispiel gezeigt. Aus der in Abbildung 4.10(b) dargestellten axialen Komponente des Magnetfeldes B_z entlang der z -Achse lässt sich B_2 durch eine Anpassung mittels einer Polynomfunktion 4. Grades an die numerischen Daten nahe dem Fallenzentrum ($\Delta z = \pm 0,3$ mm) bestimmen. Der Parameter $\rho_s = 5$ mm ist durch den Innenradius der Saphir-Abstandhalter vorgegeben und wird nicht variiert. Die Innenlänge der Ringelektrode l_0 wird, wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, zur Optimierung des elektrostatischen Potentials auf $l_0 = 0,386$ mm festgelegt und demzufolge ebenfalls nicht variiert.

Zu Beginn wird die Auswirkung der Winkelverteilung des ferromagnetischen Materials um das Fallenzentrum untersucht. Jeder Winkel θ entspricht einer Geometrie der Ringelektrode, für welche jeweils eine FEM-Berechnung durchgeführt wird. Dabei wird

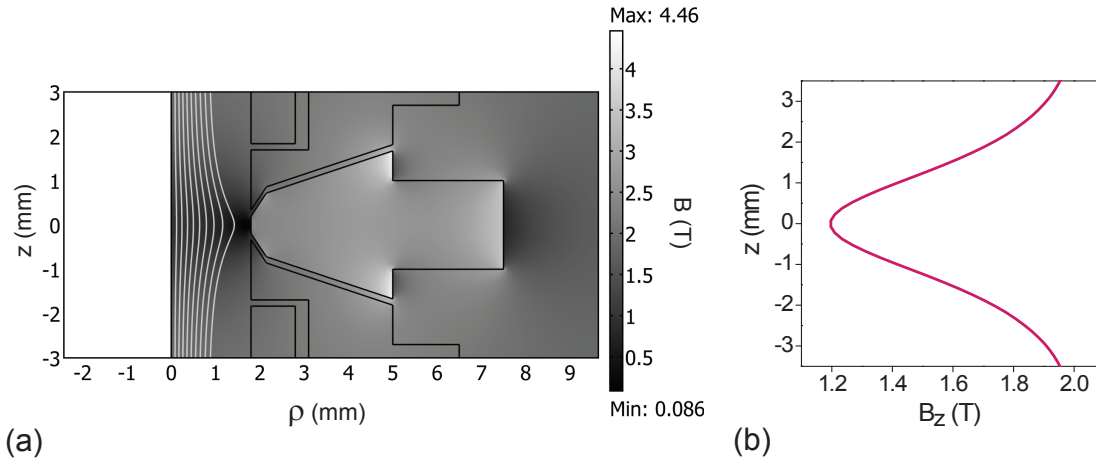


Abbildung 4.10.: Beispiel der FEM-Berechnung des Magnetfeldes am Ort der Analysefalle. (a) Magnetfeld in der $z\rho$ -Ebene und Magnetfeldlinien. Aufgrund der Rotationssymmetrie wird nur eine Hälfte der Analysefalle in Querschnittansicht gezeigt. (b) Axiale Komponente des Magnetfeldes entlang der z -Achse. Der Koeffizient B_2 kann durch eine Anpassung mittels einer Polynomfunktion 4. Grades an die Daten bestimmt werden.

θ variiert, während alle anderen Parameter konstant gehalten werden. Aus den in Abbildung 4.11 gezeigten Ergebnissen lässt sich ein optimaler Winkel von $\theta = 21,3(1,1)^\circ$ erkennen, mit welchem der höchste Wert für B_2 erreicht wird. Das heißt also, dass der Anteil des ferromagnetischen Materials, der sich in der Region zwischen $\theta \approx \pm 21^\circ$ (und selbstverständlich auch in der entsprechenden axialsymmetrischen Region) befindet, mit einem positiven Beitrag zur magnetischen Flasche beiträgt. In den Regionen, in denen $\theta < -21^\circ$ oder $\theta > 21^\circ$ gilt, haben die Beiträge zu B_2 das umgekehrte Vorzeichen, wodurch der Gesamtwert von B_2 verringert wird. Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem aus der in [54] hergeleiteten analytischen Lösung. Zur Wahl des Winkels θ für die endgültige Ringelektrode wurde die Geometrie der benachbarten Korrektorelektroden in Betracht gezogen. Um deren mechanische Stabilität nicht zu beeinträchtigen (siehe Abbildungen 4.10(a) und 4.14), wurde der Winkel auf $\theta = 18^\circ$ festgelegt, welcher einen nur 1,6% kleineren B_2 als das in Abbildung 4.11 dargestellte Maximum erzeugt.

In einem zweiten Schritt werden der Innenradius des Ringes ρ_0 und seine radiale Ausdehnung l_ρ variiert. In Abbildung 4.12(a) wird der Koeffizient B_2 gegen den Fallenradius ρ_0 aufgetragen. Die Stärke der magnetischen Flasche steigt rapide mit abnehmendem Radius an. Nichtsdestotrotz wurde $\rho_0 = 1,8$ mm festgelegt, was einem B_2 von circa 300 mT/mm^2 entspricht. Ein noch kleinerer Radius würde eine noch schmalere Innenlänge der Ringelektrode ($l_0 < 0,386$ mm) zur Optimierung des elektrostatischen Potentials implizieren (siehe Abbildung 4.3(a)), was die Herstellung der Elektroden mit hoher Präzision erschweren würde. Für $\rho_0 = 1,8$ mm wird nun die radiale Ausdehnung l_ρ variiert. Die in Abbildung 4.12(b) dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die Auswirkung des Parameters l_ρ auf die magnetische Flasche bedeutend geringer ist, als die des Innenradius.

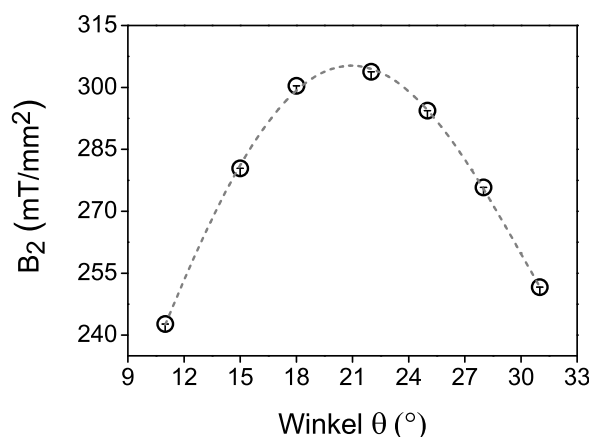


Abbildung 4.11.: Auswirkung der Winkelverteilung des ferromagnetischen Materials um das Fallenzentrum auf die magnetische Flasche. Jeder Winkel θ entspricht einer Geometrie der Ringelektrode. Der Koeffizient B_2 wird für verschiedene θ mit $\rho_0 = 1,8$ mm, $l_\rho = 5,7$ mm, $l_n = 0,35$ mm und $l_0 = 0,386$ mm berechnet. Die Kurve weist ein Maximum bei $\theta = 21,3(1,1)^\circ$ auf. Aus praktischen Gründen wird jedoch ein Winkel $\theta = 18^\circ$ für die endgültige Ringelektrode ausgewählt.

Folglich wird eine auf den Außendurchmesser des Saphir-Abstandhalters abgestimmte radiale Ausdehnung von $l_\rho = 5,7$ mm ausgewählt.

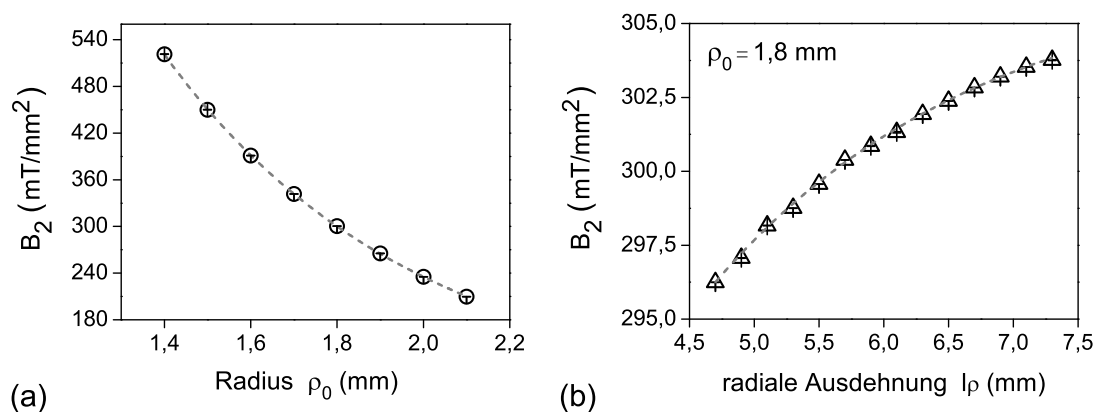


Abbildung 4.12.: Auswirkung der radialen Verteilung des ferromagnetischen Materials um das Fallenzentrum auf die magnetische Flasche. Aufgetragen ist der Koeffizient B_2 in (a) als Funktion der Fallradius ρ_0 für $\theta = 18^\circ$, $l_\rho = 5,7$ mm, $l_n = 0,35$ mm und $l_0 = 0,386$ mm. (b) Für den ausgewählten Radius von $\rho_0 = 1,8$ mm wird die radiale Ausdehnung l_ρ variiert. Die numerischen Fehler sind kleiner als die Symbole der Datenpunkte.

Schließlich wird die Auswirkung eines vierten Parameters auf die magnetische Flasche untersucht. Dieser wird als l_n ("Ringnase") in Abbildung 4.9 bezeichnet. In Abbildung 4.13 sind die berechneten Koeffizienten B_2 für verschiedene l_n aufgetragen. Dabei sind die Parameter θ , ρ_0 , l_ρ und l_0 konstant gehalten worden. Für gegebene θ und l_0 beschreibt der Parameter l_n die Steilheit der inneren Kante der Ringelektrode. Die Stärke

der magnetischen Flasche steigt mit abnehmender l_n an, was einer zunehmenden Menge ferromagnetischen Materials nahe dem Fallenzentrum entspricht. Um zu verhindern, dass die benachbarten Korrektorelektroden eine zu spitz zulaufende und mit hoher Präzision schwierig herzustellende Form aufweisen müssen, wird l_n auf 0,35 mm festgelegt.

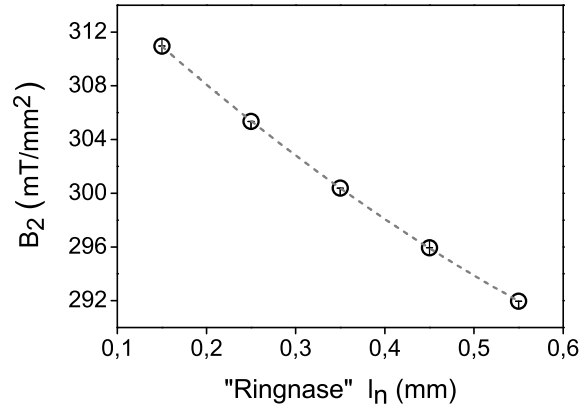


Abbildung 4.13.: Auswirkung des Parameters l_n auf die magnetische Flasche. Koeffizient B_2 als Funktion von l_n für $\theta = 18^\circ$, $\rho_0 = 1,8$ mm, $l_\rho = 5,7$ mm und $l_0 = 0,386$ mm.

Der mit der endgültigen optimierten Geometrie der Ringelektrode berechnete Koeffizient der magnetischen Flasche beträgt $B_2 = 300,3807(63)$ mT/mm² und entspricht einem durch einen Spin-Übergang hervorgerufenen Sprung in der axialen Frequenz von $\delta_{\nu_z}^{SF} = 188,1(2,2)$ mHz bei $\nu_z = 682(8)$ kHz. Dieser berechnete Wert für B_2 stimmt mit dem gemessenen Wert von $B_2 = 297(10)$ mT/mm² (siehe Abschnitt 5.4.2) gut überein.

4.2.2. Das elektrostatische Speicherpotential

Die Bestimmung der optimalen Parameter l_0 und l_k zur Erfüllung der in Gleichung (4.3) genannten Anforderungen an das elektrostatische Potential erfolgt im Fall der Analysefalle mittels der in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen numerischen Methode. Wie in Abbildung 4.14 veranschaulicht, weicht die Form der Elektroden, trotz zylindrischer Geometrie der Innenflächen, zu stark vom idealisierten in Abbildung 4.14(a) gezeigten zylindrischen Modell ab, um durch dieses zufriedenstellend beschrieben zu werden. Demzufolge unterscheiden sich die unter Verwendung der idealisierten zylindrischen Geometrie, sowohl mit der analytischen als auch mit der numerischen Methode, erhaltenen optimalen Werte für l_0 und l_k maßgeblich von denen, die unter Berücksichtigung der tatsächlichen Geometrie ermittelt werden. In diesem Abschnitt wird die numerische Methode verwendet, um diesen Effekt für den spezifischen Fall unserer Analysefalle mit $\rho_0 = 1,8$ mm und $l_s = 0,14$ mm zu quantifizieren.

Gemäß der in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Optimierungsprozedur wird das Paar (l_0 , l_k) ermittelt, mit welchem die Falle orthogonal ist ($D_2^{\nu_z} = 0$) und das gleichzeitig die Kompensation der Anharmonizität des Potentials bis zur sechsten Ordnung ($\Delta_{TR} = 0$)

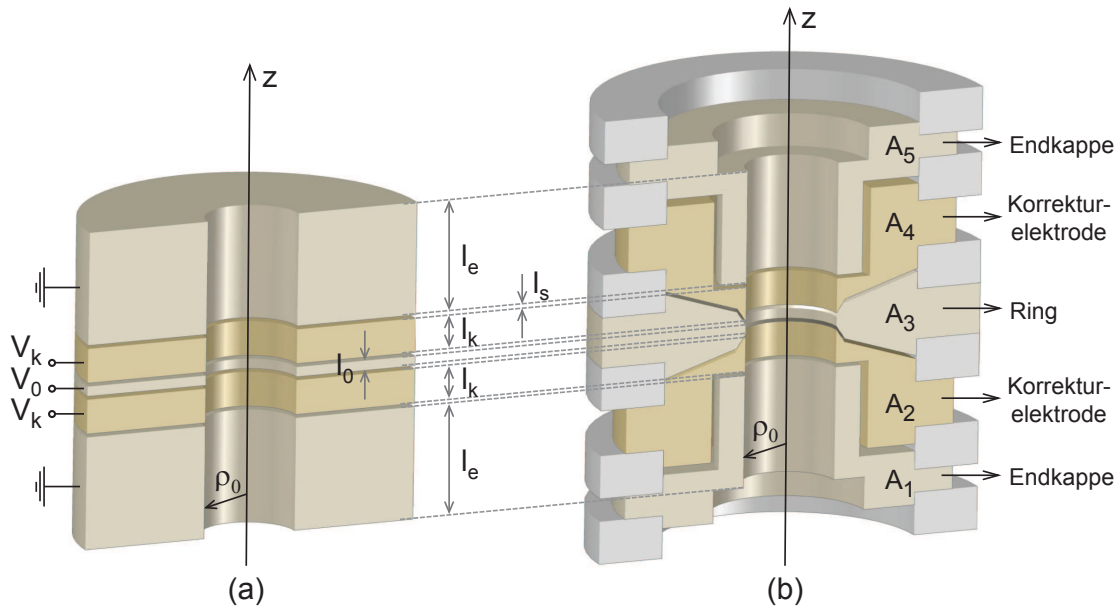


Abbildung 4.14.: Vergleich der idealisierten und tatsächlichen Geometrie der Analysefalle. (a) Modellierung der fünfpoligen Penning-Falle durch eine idealisierte zylindrische Geometrie. (b) Tatsächliche Geometrie der Analysefalle. Die Innenflächen der Fallen bilden den gleichen Hohlzylinder. Für Details siehe Text.

gestattet. Dabei wird das Potential jeder der zu untersuchenden geometrischen Konfigurationen entsprechend dem in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Verfahren numerisch berechnet. In Abbildung 4.15 sind die Ergebnisse des Designverfahrens für die tatsächliche Geometrie der Analysefalle (vergleiche Abbildung 4.14(b)) gezeigt. Der gekreuzte Kreis kennzeichnet den gesuchten optimalen Satz von geometrischen Parametern, $l_0^t = 0,386$ mm, $l_k^t = 1,359$ mm (siehe Tabelle 4.3, Reihe 1), für diese Geometrie. Verwendet man nun genau diese Parameter mit der in Abbildung 4.14(a) dargestellten idealisierten zylindrischen Geometrie, so erhält man die durch das gekreuzte Dreieck gekennzeichneten Ergebnisse (siehe Tabelle 4.3, Reihe 2).

Das in Abbildung 4.15 veranschaulichte Optimierungsverfahren wurde zum Vergleich zusätzlich für die idealisierte zylindrische Geometrie mittels der numerischen Berechnung durchgeführt. Das Ergebnis, $l_0^{zy} = 0,443$ mm, $l_k^{zy} = 1,33$ mm (siehe Tabelle 4.3, Reihe 3), ist innerhalb eines Toleranzbereiches von ± 2 μ m der geometrischen Parameter mit dem in Abbildung 4.3(a) gezeigten Ergebnis der analytischen Berechnung für $\rho_0 = 1,8$ mm konsistent. Die Diskrepanz zwischen den unter Verwendung der idealisierten und tatsächlichen Geometrie erhaltenen Ergebnissen hebt die Wichtigkeit der Berücksichtigung der exakten Elektrodenform zur Berechnung des Potentials im Fall der Analysefalle hervor. In Tabelle 4.3 werden die charakteristischen Parameter beider Geometrien jeweils unter Verwendung von beiden optimalen Sätzen (l_0^t, l_k^t) und (l_0^{zy}, l_k^{zy}) aufgelistet. Dabei ist $D_2^{\nu_z}$ bei der jeweiligen Betriebsspannung ($V_0 = V_{res}$) für $\nu_z = 674,4$ kHz angegeben. Für das

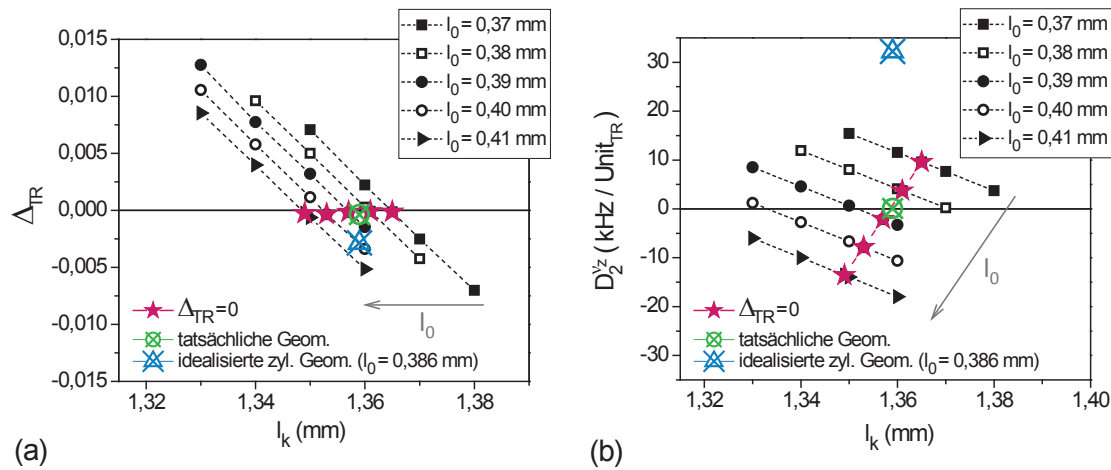


Abbildung 4.15.: Ergebnisse des Optimierungsverfahrens zum Entwurf der Analysefalle unter Verwendung der numerischen Berechnung und der tatsächlichen Geometrie mit $\rho_0 = 1,8$ mm. (a) Δ_{TR} als Funktion von l_k für verschiedene Werte von l_0 . Alle sich auf der Linie von Sternen befindenden Fallengeometrien erfüllen die Kompensationsbedingung $\Delta_{\text{TR}} = 0$. (b) D_2^{Vz} bei $V_0 = -1$ V als Funktion von l_k für verschiedene Werte von l_0 . Der gekreuzte Kreis stellt die gesuchte optimale Konfiguration dar ($l_0^t = 0,386$ mm, $l_k^t = 1,359$ mm). Das gekreuzte Dreieck kennzeichnet die unter Verwendung der idealisierten zylindrischen Geometrie mit den gleichen optimalen Parametern (l_0^t, l_k^t) erhaltenen Ergebnisse.

vorherige Design der Analysefalle [116,131] erhält man aus der numerischen Berechnung $D_2^{Vz}(V_{\text{res}} = -0.940 \text{ V}) = -616.82(32) \times 10^3 \text{ Hz/Unit}_{\text{TR}}$ und $\Delta_{\text{TR}} = -1.128(12) \times 10^{-1}$.

	Geometrie	l_0^t (mm)	l_k^t (mm)	V_{res} (V)	$D_2^{Vz}(V_{\text{res}})$ (Hz/Unit _{TR})	T_{R}^{C4}	Δ_{TR}
1	Tatsächliche	0,386	1,359	-0,814	65,117(9)	0,879702(1)	$-3,7(2) \times 10^{-4}$
2	Idealisierte zyl.	0,386	1,359	-0,823	29259,9(7)	0,871303(2)	$-2,85(4) \times 10^{-3}$
		l_0^{zy}	l_k^{zy}				
3	Idealisierte zyl.	0,443	1,33	-0,814	-316,96(1)	0,879654(1)	$6(2) \times 10^{-5}$
4	Tatsächliche	0,443	1,33	-0,806	-26704,5(6)	0,886078(2)	$2,53(4) \times 10^{-3}$

Tabelle 4.3.: Mit dem numerischen Verfahren bestimmte charakteristische Designparameter der Analysefalle. Die für die Optimierung der elektrostatischen Eigenschaften der idealisierten zylindrischen (Reihe 3) und der tatsächlichen Fallengeometrie (Reihe 1) geeigneten Dimensionen (l_0, l_k) mit $\rho_0 = 1,8$ mm unterscheiden sich substantiell voneinander.

4.3. Experimentelle Methode zur Optimierung des elektrostatischen Potentials

Ungeachtet der Tatsache, dass die Analysefalle derart entworfen wurde, dass sowohl ihre Orthogonalität als auch die Kompensation des elektrostatischen Potentials gewährleistet

sind, treten im Fall der realen, im Experimentaufbau untergebrachten Falle Abweichungen vom Idealfall unvermeidlich auf. Die an den Fallenelektroden angelegten Spannungen unterliegen undefinierten Offsets, welche aufgrund von Kontaktpotentialen und von durch Leckströmen hervorgerufenen Spannungsabfällen entstehen. Diese Offsetspannungen können einige hundert Millivolt erreichen und folglich, insbesondere im Fall der niedrigen Betriebsspannung der Analysefalle, das Speicherpotential merklich beeinträchtigen.

In diesem Abschnitt wird eine experimentelle Methode zur Asymmetriekompensation des elektrostatischen Potentials vorgestellt, welche unter Verwendung des gespeicherten Protons durchgeführt wird. Das Verfahren basiert, wie in Abbildung 4.16 angedeutet, auf dem Anlegen von individuell einstellbaren Offsetspannungen an die Fallenelektroden. Aufgrund der Spiegelsymmetrie bezüglich der $z = 0$ -Ebene stehen zur Manipulation der elektrostatischen Eigenschaften der Falle lediglich drei Parameter zur Verfügung: die Offsetspannung an der Ringelektrode $O_{\text{ff}A_3}$, die Offsetspannungen an den Korrektorelektroden ($O_{\text{ff}A_2}, O_{\text{ff}A_4}$) und die Offsetspannungen an den Endkappen ($O_{\text{ff}A_1}, O_{\text{ff}A_5}$).

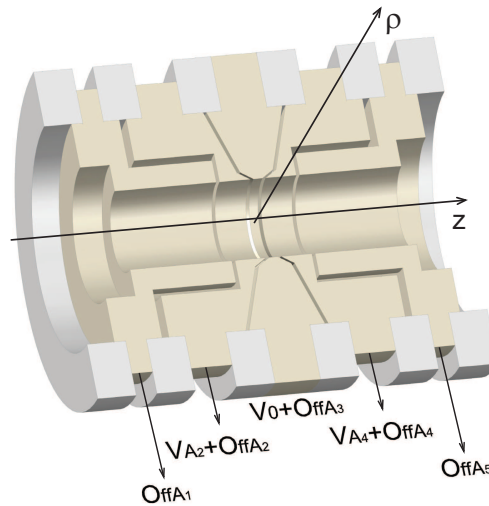


Abbildung 4.16.: Schema zum Anlegen von Offsetspannungen an die Elektroden der Analysefalle. Durch geeignetes Einstellen von $O_{\text{ff}A_1, A_5}$, $O_{\text{ff}A_2, A_4}$ bzw. $O_{\text{ff}A_3}$, erfolgt die systematische Asymmetriekompensation des elektrostatischen Potentials.

Für einen gegebenen Offset an den Endkappen $O_{\text{ff}A_1, A_5}$ wird die an die Korrektorelektroden anzulegende Offsetspannung $O_{\text{ff}A_2, A_4}$ ermittelt, welche am besten die Asymmetrie des Potentials kompensiert. Der Grad der Kompensation wird für jede zu betrachtende Konfiguration ($O_{\text{ff}A_1, A_5}, O_{\text{ff}A_2, A_4}$) durch Vergleich der axialen Frequenzvariationen $\Delta_\nu^{A_i} = d\nu_z/dV_{A_i}$ unter Veränderung der an der jeweiligen Korrektorelektrode angelegten Spannung (V_{A_i} , $i = 2, 4$ in Abbildung 4.16) evaluiert. Eine partielle Optimierung des Potentials wird mit einem gegebenen Satz von Offsetspannungen ($O_{\text{ff}A_1, A_5}, O_{\text{ff}A_2, A_4}$) erzielt, wenn die durch die gleiche Spannungsänderung ΔV_{A_i} bedingte Frequenzvariation für beide Korrektorelektroden identisch ist, $\Delta_\nu^{A_2} = \Delta_\nu^{A_4}$. Die gesuchte optimale

Endkonfiguration soll die Erfüllung der Bedingung $\Delta_\nu^{A_2} = \Delta_\nu^{A_4} = 0$ ermöglichen. Die Offsetspannung an der Ringelektrode $O_{\text{ff}A_3}$ wird zur Optimierung der Orthogonalität durch Minimierung des Absolutwerts von $D_2^{\nu z}$ eingestellt.

Um das Optimierungsverfahren durchzuführen, wird das Signal eines einzelnen Protons im thermischen Gleichgewicht mit dem Axial-Nachweissystem, der Protodip, benötigt (siehe Abschnitt 2.3.2). Zu Beginn werden die Orthogonalität der Falle und die Symmetrie des elektrostatischen Potentials für den Fall, in dem keine Offsetspannungen an die Elektroden angelegt werden, untersucht. In dieser Ausgangskonfiguration mit ($O_{\text{ff}A_1, A_5} = 0$, $O_{\text{ff}A_2, A_4} = 0$, $O_{\text{ff}A_3} = 0$) und $V_0 = -0,93$ V (siehe Tabelle 4.4), wird, wie in Abbildung 4.17(a) veranschaulicht, die axiale Frequenz für verschiedene Werte von T_R gemessen, um den Koeffizient $D_2^{\nu z}$, welcher der Steigung der in Abbildung 4.17(b) gezeigten Kurve entspricht, experimentell zu bestimmen. Der sich aus der Anpassung der Daten ergebende Wert, $D_2^{\nu z} = -6,43(10) \times 10^4$ Hz/Unit $_{TR}$, unterscheidet sich deutlich vom berechneten Wert, $D_2^{\nu z} = 6,5117(9) \times 10^1$ Hz/Unit $_{TR}$ (siehe Tabelle 4.3). Gemäß den in Abbildung 4.15 dargestellten Ergebnissen würde diese Diskrepanz in $D_2^{\nu z}$ einer Abweichung von ≈ 110 μm der Innenlänge der Ringelektrode entsprechen, was weit außerhalb der Fertigungstoleranz von 3 μm liegt. Dies deutet auf das Vorliegen von störenden Offsetspannungen oder Montagefehlern hin.

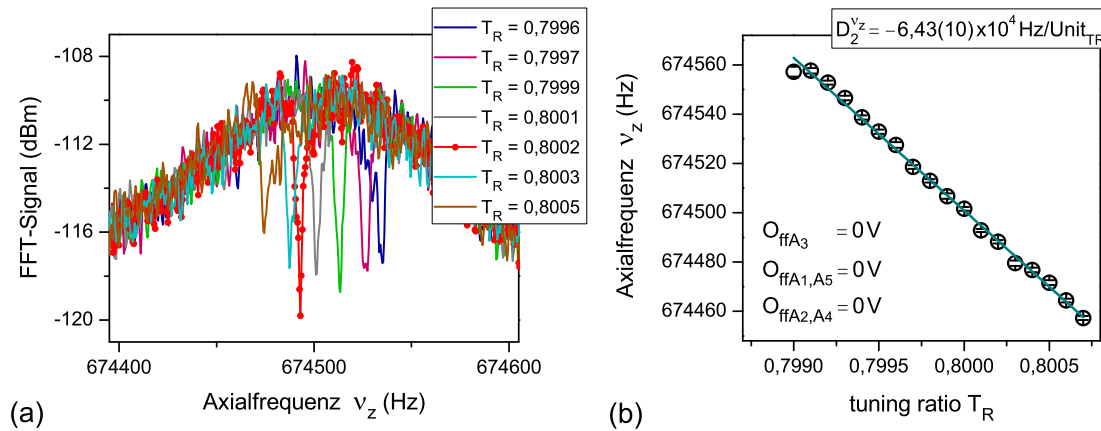


Abbildung 4.17.: Untersuchung der Orthogonalität der Analysefalle vor der Asymmetriekompensation des Speicherpotentials. (a) Für verschiedene Werte von T_R gemessenes Protonensignal. Das optimale T_R für diese Konfiguration ist durch die Kurve mit gefüllten Kreisen gekennzeichnet. Die Abhängigkeit der Axialfrequenz von T_R weist auf einen nicht verschwindenden Koeffizient $D_2^{\nu z}$ hin, welcher durch die Steigung der in (b) gezeigten Kurve gegeben wird.

Das optimale T_R für die Ausgangskonfiguration ($T_R = 0,8002$ in Abbildung 4.17(a)) wird ausgewählt. Wie in Abschnitt 2.2.2 diskutiert, führt ein nicht verschwindender Koeffizient C_4 zur Energieabhängigkeit der axialen Frequenz und somit zur Erhöhung der Linienbreite des axialen Signals. Demzufolge entspricht der schmalste und tiefste Dip² dem

²In Abschnitt 5.2.1 wird näher auf die experimentelle Methode zur Optimierung des Spannungsverhältnisses T_R eingegangen.

zur Eliminierung von C_4 geeigneten T_R . Im Anschluss wird die Symmetrie des elektrostatischen Potentials untersucht, indem die an jeder Korrekturolektrode angelegte Spannung (V_{A_2} und V_{A_4}) innerhalb eines Spannungsbereiches von 1,2 mV abgetastet wird und die dadurch hervorgerufenen Frequenzvariationen ($\Delta_\nu^{A_2}$ bzw. $\Delta_\nu^{A_4}$) miteinander verglichen werden. Das erwartete Frequenzverhalten in einer idealen, offsetfreien Penning-Falle wird durch die numerisch simulierten Daten in Abbildung 4.18(a) dargestellt. Demnach ist der Frequenzverlauf für beide Korrekturolektroden identisch und die gesamte Frequenzverschiebung im untersuchten Spannungsintervall nicht größer als 500 mHz. Stattdessen weisen die in Abbildung 4.18(b) gezeigten experimentellen Ergebnisse ein überaus unterschiedliches Profil auf. Dabei ist die Frequenzverschiebung bis zu 500 mal größer als im Idealfall. Die axiale Frequenz weist eine lineare Abhängigkeit von ΔV_{A_i} auf und die Steigungen $\Delta_\nu^{A_i} = d\nu_z/dV_{A_i}$ ($\Delta_\nu^{A_2} = 0,1965(13)$ Hz/ μ V und $\Delta_\nu^{A_4} = -0,1334(18)$ Hz/ μ V) stimmen für $O_{\text{ff}A_1, A_5} = O_{\text{ff}A_2, A_4} = 0$ V nicht überein.

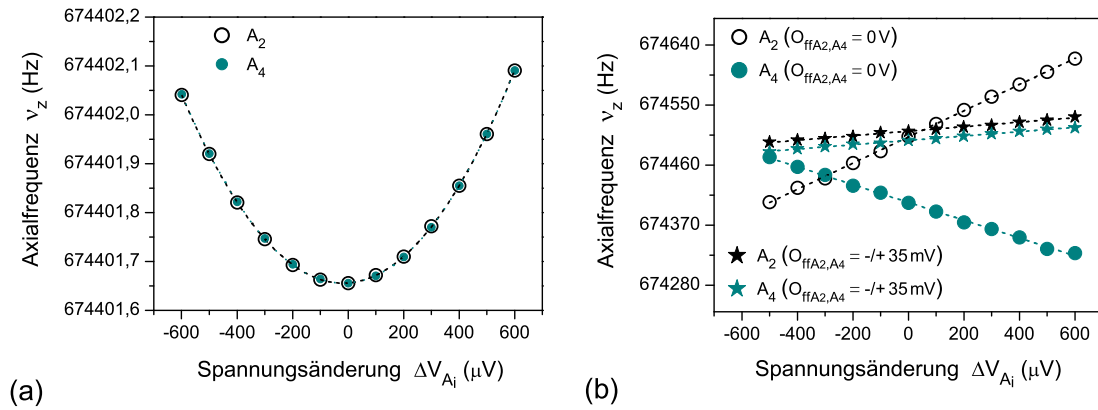


Abbildung 4.18.: Untersuchung der Symmetrie des Speicherpotentials der Analysefalle. (a) Numerische Simulation der axialen Frequenzvariation, welche durch das Abtasten der Spannungen (V_{A_2} und V_{A_4}) hervorgerufen wird. In einer idealen, offsetfreien Falle sind die Kurven für A_2 und A_4 identisch und die gesamte Frequenzverschiebung < 500 mHz. (b) Experimentelle Ergebnisse für $O_{\text{ff}A_1, A_5} = 0$. Für die Ausgangskonfiguration mit $O_{\text{ff}A_2, A_4} = 0$ werden die durch die Kreise gekennzeichnete Daten erhalten. Die offensichtliche Nichtübereinstimmung der Steigungen $\Delta_\nu^{A_2} = 0,1965(13)$ Hz/ μ V und $\Delta_\nu^{A_4} = -0,1334(18)$ Hz/ μ V deutet auf eine starke Asymmetrie des Potentials hin. Bei der durch die Sterne gekennzeichneten Konfiguration ($O_{\text{ff}A_2} = -35$ mV, $O_{\text{ff}A_4} = 35$ mV) ist die Asymmetrie mit $\Delta_\nu^{A_2} = 338,1(7,3) \times 10^{-4}$ Hz/ μ V und $\Delta_\nu^{A_4} = 326,7(5,2) \times 10^{-4}$ Hz/ μ V partiell kompensiert.

Dieses asymmetrische Verhalten wird durch Anlegen einer zusätzlichen Spannung V_{off} an die Korrekturolektroden zunächst partiell für $O_{\text{ff}A_1, A_5} = 0$ kompensiert. Die Offsetspannung wird immer gleichmäßig auf die Korrekturolektroden verteilt, da sich die Auswirkungen von $O_{\text{ff}A_4} = V_{\text{off}}$ und $\left(O_{\text{ff}A_2} = -\frac{V_{\text{off}}}{n}, O_{\text{ff}A_4} = \frac{V_{\text{off}}}{m}\right)$ mit $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1\right)$ auf die Größen $\Delta_\nu^{A_i}$ und $D_2^{\nu_z}$ experimentell voneinander nicht unterscheiden lassen. Die Offsetspannung V_{off} , mit welcher sich die Steigungen $\Delta_\nu^{A_2}$ und $\Delta_\nu^{A_4}$ angleichen, wird also ermittelt. In Abbildung 4.19(a) sind die experimentellen Ergebnisse für verschiedene Werte

von V_{off} gezeigt. Wie ersichtlich, wird die Bedingung $\Delta_{\nu}^{A_2} = \Delta_{\nu}^{A_4}$ zur partiellen Asymmetriekompensation bei der Spannung $V_{\text{off}} = 70$ mV ($O_{\text{ff}A_2} = -35$ mV und $O_{\text{ff}A_4} = 35$ mV) mit $\Delta_{\nu}^{A_2} = 338.1(7.3) \times 10^{-4}$ Hz/ μ V und $\Delta_{\nu}^{A_4} = 326.7(5.2) \times 10^{-4}$ Hz/ μ V erfüllt. In Abbildung 4.18(a) ist diese durch die Sterne gekennzeichnete Konfiguration der Ausgangskonfiguration gegenübergestellt. Da sich jedoch die gesamte Frequenzverschiebung mit $\Delta_{\nu}^{A_i} \neq 0$ noch vom Idealfall unterscheidet, muss das Verfahren zusätzlich zur Einstellung der Offsetspannung an den Endkappen durchgeführt werden. Der Koeffizient $D_2^{\nu z}$ wird für jede der untersuchten Offsetspannungen V_{off} gemessen. Wie in Abbildung 4.19(b) gezeigt, erhöht sich der Grad der Orthogonalität unwillkürlich mit der Asymmetriekompensation des Potentials.

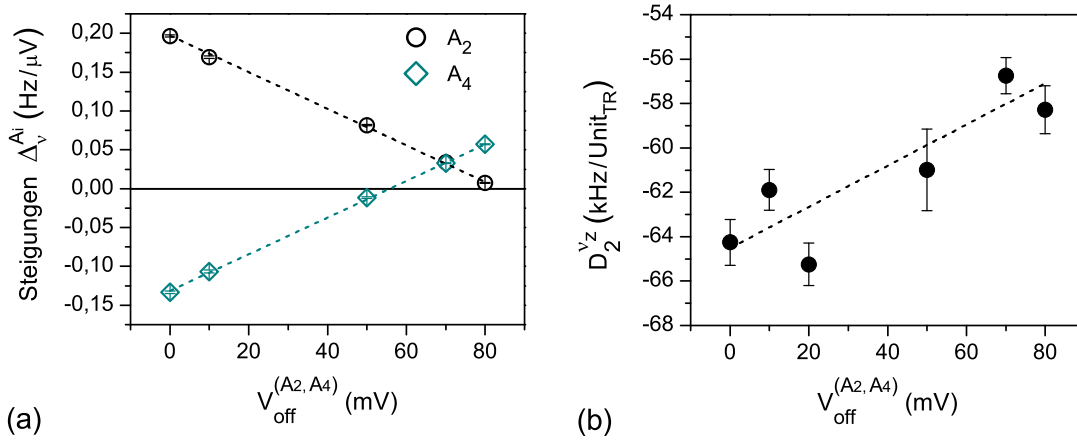


Abbildung 4.19.: Ergebnisse der partiellen Asymmetriekompensation des Potentials durch Einstellung der Offsetspannungen an den Korrektorelektroden mit $O_{\text{ff}A_1, A_5} = 0$ V. Die optimale Konfiguration, $V_{\text{off}} = 70$ mV ($O_{\text{ff}A_2} = -35$ mV, $O_{\text{ff}A_4} = 35$ mV), zeichnet sich durch die Angleichung der Steigungen $\Delta_{\nu}^{A_2}$ und $\Delta_{\nu}^{A_4}$ aus. (b) Gemessener Koeffizient $D_2^{\nu z}$ als Funktion von V_{off} . Der Grad der Orthogonalität wird mit der Asymmetriekompensation erhöht.

Zur Optimierung der Orthogonalität der Falle kann der Absolutwert des Koeffizienten $D_2^{\nu z}$ durch Anlegen einer Offsetspannung $O_{\text{ff}A_3}$ an die Ringelektrode minimiert werden. In Abbildung 4.20 wird dieses Verfahren für feste $O_{\text{ff}A_1, A_5}$ und $O_{\text{ff}A_2, A_4}$ veranschaulicht. Obwohl die im Fall von $O_{\text{ff}A_1, A_5} = 0$ V und $O_{\text{ff}A_2, A_4} = \mp 40$ mV dargestellten Ergebnisse auf eine lediglich partielle Optimierung hindeuten, entspricht die aus dem Datensatz bestimmte bestmögliche Offsetspannung dem endgültigen, an die Ringelektrode anzulegenden Offset $O_{\text{ff}A_3}$. Da $O_{\text{ff}A_3}$ unabhängig von $O_{\text{ff}A_1, A_5}$ und $O_{\text{ff}A_2, A_4}$ ist, muss diese Prozedur lediglich bei einer einzelnen beliebigen Konfiguration der Offsetspannungen an den Korrektorelektroden und Endkappen durchgeführt werden. Die Orthogonalitätsbedingung $D_2^{\nu z} = 0$ soll dann bei vollständiger Asymmetriekompensation des Potentials zwangsläufig eintreffen.

Um den experimentellen Vorgang zur Optimierung des elektrostatischen Potentials abzuschließen, muss die an die Endkappe A_1 anzulegende Offsetspannung $O_{\text{ff}A_1}$ bestimmt

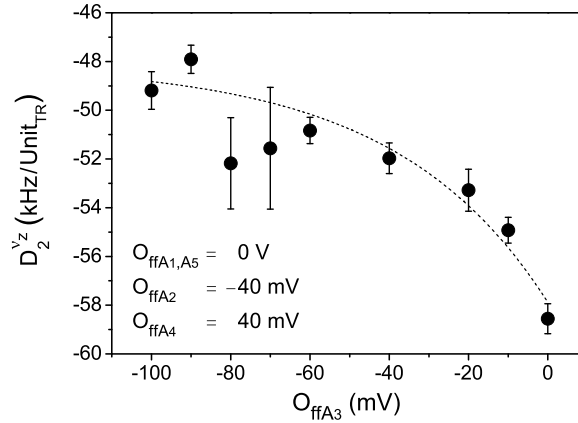


Abbildung 4.20.: Partielle Minimierung des Absolutwerts des Koeffizienten D_2^{Vz} durch Einstellung der Offsetspannung an der Ringelektrode. Die Prozedur muss lediglich einmal für eine beliebige Konfiguration von Offsetspannungen ($O_{ffA1,A5}$, $O_{ffA2,A4}$) durchgeführt werden. Bei vollständiger Asymmetriekompensation am Ende des gesamten Verfahrens soll der hierbei ermittelte Wert von $O_{ffA3} = -90$ mV die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung $D_2^{Vz} = 0$ ermöglichen.

werden. Aufgrund von experimentellen Einschränkungen war es nicht möglich, eine Offsetspannung an die Endkappe A_5 anzulegen. Für jeden Wert von O_{ffA1} müssen sowohl die für die partielle Asymmetriekompensation optimierten Offsets $O_{ffA2,A4}$ als auch das T_R und die Ringspannung V_0 erneut eingestellt werden. Abbildung 4.21 zeigt eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse. In Abbildung 4.21(a) sind die Steigungen Δ_V^{A2} und Δ_V^{A4} für verschiedene Werte von O_{ffA1} aufgetragen. Bei jedem der Datenpunkte ist die Asymmetrie des Potentials mit $\Delta_V^{A2} \approx \Delta_V^{A4}$ partiell kompensiert. Bei zwei Punkten, $O_{ffA1} = -448,56$ mV und $O_{ffA1} = 750$ mV, ist die Asymmetrie vollständig kompensiert und der Koeffizient $D_2^{Vz} \approx 0$, wie der Abbildung 4.21(b) entnommen werden kann. In Tabelle 4.4 werden die charakteristischen Parameter der Ausgangskonfiguration sowie der Konfigurationen, bei denen beide Bedingungen zur Optimierung des Potentials erfüllt sind, aufgelistet. Aufgrund des höheren Absolutwerts der Betriebsspannung V_0 wird die Konfiguration mit dem negativen Offset an A_1 bevorzugt.

	O_{ffA1} (mV)	O_{ffA3} (mV)	$O_{ffA2,A4}$ (mV)	V_0 (V)	T_R^{C4}	$D_2^{Vz}(V_0)$ (Hz/Unit _{TR})
1	0	0	0	-0,93	0,8002(1)	$-643(10) \times 10^2$
2	-448,56(1)	-90	$\mp 21,977$	-1,17	0,8961(1)	367(170)
3	750,00(1)	-90	$\mp 53,517$	-0,55	0,7631(1)	-368(235)

Tabelle 4.4.: Charakteristische Parameter der Ausgangskonfiguration vor der Optimierung (Reihe 1) und der Konfigurationen, bei denen die Bedingungen zur Optimierung des Potentials erfüllt sind (Reihen 2 und 3).

In Abbildung 4.21(b) werden die numerisch simulierten (gestrichelte Kurve) und expe-

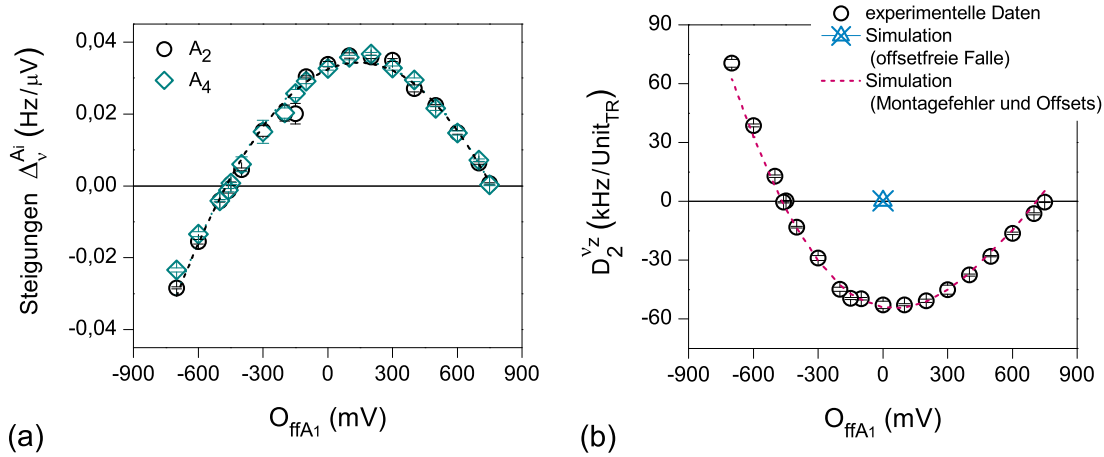


Abbildung 4.21.: Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse zur Optimierung des elektrostatischen Potentials. (a) Veranschaulichung der vollständigen Asymmetriekompensation. Entlang der Kurven ist die Asymmetrie des Potentials für jeden Satz von Offsetspannungen ($O_{\text{ff}A_1}, O_{\text{ff}A_2, A_4}$) mit $O_{\text{ff}A_3} = -90$ mV und $O_{\text{ff}A_5} = 0$ V partiell kompensiert ($\Delta_v^{A_2} \approx \Delta_v^{A_4}$). Es lassen sich zwei Punkte bestimmen, bei denen das Potential symmetrisch ist ($\Delta_v^{A_i} \approx 0$). (b) Die Messung des jeweiligen Koeffizienten D_2^{vz} zeigt, dass bei den gleichen Punkten die Orthogonalitätsbedingung ebenfalls erfüllt ist. Die experimentellen Ergebnisse können durch eine numerische Simulation reproduziert werden (gestrichelte Kurve). Das gekreuzte Dreieck kennzeichnet den für die ideale offsetfreie Falle berechneten Wert.

rimentellen Daten verglichen. Das experimentelle Ergebnis konnte unter Verwendung der FEM-Berechnungen nachvollzogen werden. Die numerische Methode ermöglicht die Simulation jeglicher geometrischer Abweichungen der Fallenelektroden, sowie Ausrichtungs- und Montagefehlern. Die Steigung der experimentellen, in Abbildung 4.21(b) gezeigten Kurve ist auf das Vorliegen von störenden Offsetspannungen zurückzuführen. Die vertikale Verschiebung der Kurve hingegen kann weder durch Anpassung der Offsets noch durch Berücksichtigung einer Fertigungstoleranz der Fallenelektroden bis zu $\pm 10 \mu\text{m}$ reproduziert werden. Die Ergebnisse der numerischen Simulation weisen auf einen Montagefehler hin, welcher durch um $20\text{--}40 \mu\text{m}$ breitere Schlitze zwischen dem Ring und den Korrektorelektroden bedingt sein muss. Kürzlich bei einem neuen Aufbau der Apparatur wurden die Saphir-Abstandhalter zwischen den Ring- und Korrektorelektroden durch ein neues Paar ersetzt, bei welchem sich die Dimensionen der Saphirringe um weniger als $\pm 2 \mu\text{m}$ unterscheiden. Vorläufige Ergebnisse mit dem neuen Aufbau zeigen eine Reduzierung der Verschiebung mit $D_2^{vz} = -120(533)$ Hz/Unit_{TR} für $O_{\text{ff}A_1} = 0$, $O_{\text{ff}A_2, A_4} = \mp 50$ mV and $O_{\text{ff}A_3} = -90$ mV [70, 71].

5. Experimentelle Messroutinen und Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die experimentellen Methoden und Messroutinen präsentiert, welche der Umsetzung der bereits vorgestellten Messprinzipien zugrunde liegen. Zunächst werden die Verfahrensweisen zur Präparation eines einzelnen Protons, ausgehend von einer im Doppel-Fallen-System erzeugten Ionenwolke, in Abschnitt 5.1 beschrieben. Abschnitt 5.2 widmet sich den Vorgängen zur Bestimmung der Eigenfrequenzen des Protons in der Präzisionsfalle. Nachfolgend wird auf den Transport des Teilchens zwischen der Präzisions- und Analysefalle in Abschnitt 5.3 eingegangen. Die Methoden zum Nachweis des Protonsignals in der Analysefalle, zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Flasche, zur Messung der Temperatur des Teilchens, zum Umklappen des Protonspins und zum statistischen Nachweis von Spin-Übergängen sowie die Bestimmung des g -Faktors eines einzelnen Protons im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle werden in Abschnitt 5.4 präsentiert. Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit sind in [41,81] veröffentlicht.

5.1. Präparation und Detektion eines einzelnen Protons

Die Erzeugung von freien Protonen erfolgt mittels einer Elektronenstoßionenquelle und eines Targets gemäß der in Abschnitt 3.2.2 dargelegten Beschreibung. Während der Erzeugung werden die berechneten in Tabelle 4.2 angegebenen Spannungswerte $V_0 = V_{res}$ und $V_k = V_0 T_R$ an die Elektroden der Präzisionsfalle angelegt, um das generierte Gemisch unterschiedlicher Ionen zu speichern. Protonen entstehen durch Elektronenstoßionisation von aus dem Target herausgeschlagenen Wasserstoffatomen. Hierzu muss die kinetische Energie der stoßenden Elektronen die Ionisierungsenergie von Wasserstoff von $e\phi_H = 13,598$ eV überschreiten. Die Ionisierungswahrscheinlichkeit weist ein Maximum bei einer Elektronenenergie zwischen $E_e = 3e\phi_H$ und $E_e = 4e\phi_H$ auf und sinkt dann stetig mit steigendem E_e [129]. Aufgrund dessen wird zum Laden der Falle eine negative Spannung von $V_{FEP} \approx -40$ V an die Feldemissionsspitze der Elektronenquelle angelegt. Die Zeitdauer, während der die Quelle aktiviert ist, beträgt typischerweise 10–20 s. Eine systematische Optimierung der Erzeugungsparameter, wie die Tiefe des Speicherpotentials, die Höhe des Elektronenstromes und die Elektronenenergie, zur Begünstigung der ausschließlichen Erzeugung von Protonen wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht durch-

geführt¹. Der Inhalt der Falle nach dem Laden kann, wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben, mit Hilfe von Massenspektren untersucht werden. Die Beseitigung unerwünschter Ionen und die Präparation eines einzelnen Protons erfolgt durch die in Abschnitte 5.1.2 bzw. 5.1.3 vorgestellten Methoden.

5.1.1. Massenspektren

In Abbildung 5.1 ist ein typisches nach dem Laden der Falle aufgenommenes Massenspektrum dargestellt. Durch eine sich mit der Zeit linear ändernde an die Ringelektrode anzulegende Spannung V_0 (mit entsprechenden Korrekturspannungen $V_k = V_0 T_R$) lassen sich die unterschiedlichen Ionensorten gemäß der Beziehung (2.88)

$$\omega_z^{\text{Ion}} = \sqrt{\frac{q_i}{m_i} 2c_2 V_0(t)} \quad (5.1)$$

nacheinander in Resonanz mit dem Axial-Nachweissystem ($\nu_z^{\text{Ion}} = \nu_r$) bringen. Dabei ist q_i/m_i das Verhältnis zwischen der Ladung und Masse des jeweiligen Ions und $V_0(t) = V_i + \frac{\Delta V}{\Delta t} t$. Mit dem in Abschnitt 3.4.3 beschriebenen Präzisionsnetzteil *UM1-14* wird eine Spannungsrampe von $V_0 = -14$ V auf $V_0 = -2$ V üblicherweise in $\Delta t = 30-60$ s durchgeführt. Kommt eine bestimmte Ionensorte in Resonanz mit dem Nachweissystem, so wird Leistung infolge der erhöhten Energie der Teilchenbewegung im ohmschen Widerstand des sich bei Tieftemperaturen befindenden Nachweis-Schwingkreises dissipiert (siehe Abschnitt 2.3.2). Unter Verwendung des in Abbildung 3.7 gezeigten experimentellen Aufbaus wird dieses vom Teilchen induzierte Signal mit einem Spektrumanalysator (FSP) aufgenommen und als ein Peak im Leistungsspektrum nachgewiesen [38]. Ionenwolken, die sich bereits mit dem Nachweissystem im thermischen Gleichgewicht befinden, können mittels einer Dipolanregung bei der Resonanzfrequenz ν_r ebenfalls durch Massenspektren detektiert werden.

Innerhalb des untersuchten Spannungsbereiches lassen sich, wie in Abbildung 5.1 gezeigt, sowohl Protonen (H^+) als auch molekulare Wasserstoffionen (H_2^+) bei den entsprechenden zum Verhältnis m_i/q_i proportionalen Ringspannungen $V_0 \propto m_i/q_i$ nachweisen. Mit Hilfe einer zusätzlichen Spannungsquelle, welche die Verwendung einer erweiterten Spannungsrampe von $V_0 = -60$ V auf $V_0 = -2$ V ermöglichte, wurde das Vorhandensein weiterer Ionensorten wie N^{2+} , N^+ und O^+ in der Falle festgestellt [69], deren Signaturen außerhalb des in Abbildung 5.1 gezeigten Spannungsbereiches liegen. Aufgrund der niedrigen kinetischen Energie der stoßenden Elektronen ist die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung hochgeladener Ionen unerheblich.

5.1.2. Entfernung unerwünschter Ionen

Für das Erzielen einer ausschließlich aus Protonen bestehenden Ionenwolke kommt prinzipiell die kontrollierte Anregung und daraus folgende Erhöhung der Amplituden der

¹Für eine weitere Diskussion siehe [116]

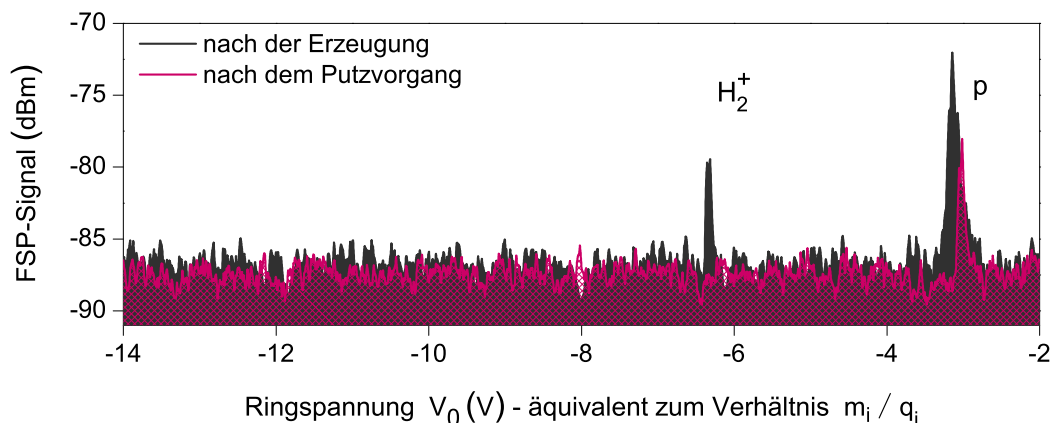


Abbildung 5.1.: Vergleich der in der Präzisionsfalle aufgenommenen Massenspektren vor und nach der Entfernung unerwünschter Ionen. Mittels einer Spannungsrampe werden die unterschiedlichen sich in der Falle befindenden Ionensorten in Resonanz mit dem Axial-Nachweissystem gebracht und als ein Peak im Leitungsspektrum detektiert.

Axial- sowie der Zyklotronbewegung der in der Falle gespeicherten unerwünschten Ionen in Betracht. Nach einer langen Reihe von Versuchen und empirischen Optimierungen hat sich ein in der *Präzisionsfalle* durchzuführender praktikabler “Putzvorgang” etabliert, welcher auf der Anregung des axialen Freiheitsgrades zur Entfernung von Teilchen aus der Falle basiert.

Nach der Erzeugung werden die Protonen in Resonanz mit dem Axial-Nachweissystem gehalten, was die Reduktion ihrer Bewegungsenergie durch Widerstandskühlen (siehe Abschnitt 2.3.2) zur Folge hat. Zu Beginn des Putzvorgangs wird eine Ziehspannung von -7 V an das Target angelegt. Die Ringsspannung wird dann auf $V_0 = -0,1$ V für kurze Zeit herabgesetzt, damit Teilchen höherer Energie angesichts der niedrigen Potentialtiefe die Falle verlassen. Nachfolgend wird über ein breitbandiges Frequenzspektrum der gesamte Bereich von Masse-zu-Ladungsverhältnissen $A/z > 1$ angeregt². Hierzu wird eine als SWIFT (engl. *Stored Waveform Inverse Fourier Transform*) bezeichnete Methode der resonanten Anregung verwendet. Diese zeichnet sich durch das Erzielen optimaler Eigenschaften des Anregungsspektrums, wie einer hohen Massenauflösung und homogenen Anregungsstärke, aus [138]. Grundsätzlich wird bei der SWIFT-Methode ein vorgegebenes gewünschtes Amplitudenspektrum einer definierten Phasenmodulation unterzogen. Durch eine inverse schnelle Fouriertransformation lässt sich die zeitliche Wellenform aus dem phasenmodulierten Amplitudenspektrum berechnen. Diese wird anschließend in ein analoges Signal umgewandelt. Auf eine Beschreibung der zur Erstellung des Anregungssignals verwendeten Algorithmen wird in dieser Arbeit verzichtet und auf [139–141] verwiesen. Das berechnete Signal wird von einem Frequenzgenerator (*Agilent 33250A*)

² A/z stellt eine dimensionslose Größe dar, welche durch das Verhältnis zwischen der Massenzahl eines Ions A und dessen Ladungszahl z gegeben wird. Für das Proton gilt $A/z = 1$.

ausgegeben und über einen Kerbfilter an die Endkappe P_5 der Präzisionsfalle angelegt (siehe Abbildung 3.8). Das hinter dem Kerbfilter aufgenommene Frequenzspektrum des zur Anregung der axialen Bewegung anzuwendenden Signals ist in Abbildung 5.2 gezeigt.

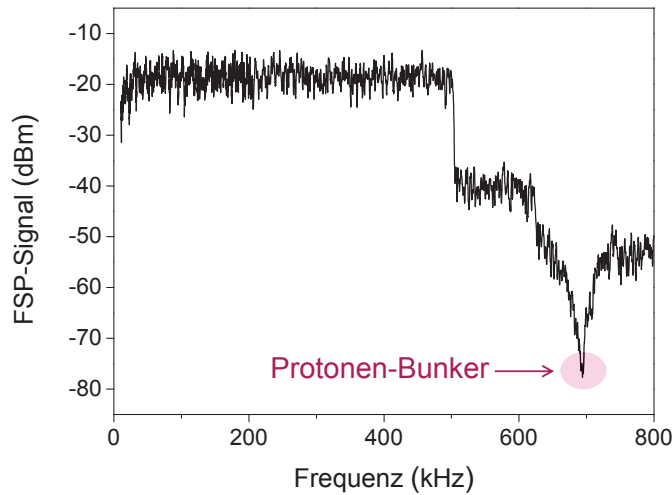


Abbildung 5.2.: Frequenzspektrum des gemäß der SWIFT-Methode erstellten Anregungssignals zur Entfernung unerwünschter Ionen aus der Präzisionsfalle. Die Axialfrequenz der Protonen wird auf die Frequenz des Kerbfilters, bei der das Spektrum ein Minimum aufweist, abgestimmt.

Durch eine geeignete Wahl der Ringspannung V_0 wird die Axialfrequenz der Protonen auf die Frequenz des Kerbfilters, $\nu_k = 695$ kHz, abgestimmt, bei welcher das Anregungssignal um ≈ 60 dB abgeschwächt wird. Mit Amplituden von typischerweise 10 – 15 dBm wird das Signal für 15 – 20 s an die Falle angelegt. Anschließend werden die Protonen zurück in Resonanz mit dem Nachweissystem gebracht und die Ringspannung erneut für kurze Zeit auf $V_0 = -0,1$ V eingestellt. Vor dem nächsten Schritt des Putzvorgangs wird die Energie der Zyklotronbewegung der Protonen durch die Wechselwirkung mit dem Zyklotron-Schwingkreis verringert. Der Magnetron-Freiheitsgrad wird mittels der in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Methode der Seitenbandkühlung ebenfalls gekühlt. Schließlich wird ein Sweep-Signal von 20 kHz auf 140 kHz mit einer Amplitude von 10 dBm in 120 s zur zusätzlichen Anregung schwerer Teilchen durchgeführt. Die Potentialtiefe wird nochmals kurzzeitig erniedrigt und anschließend werden die radialen Freiheitsgrade der Protonen erneut gekühlt. Der gesamte Putzvorgang wird mehrfach wiederholt. In Abbildung 5.1 ist ein nach einer solchen Routine aufgenommenes Massenspektrum gezeigt, worauf nur Protonen zu erkennen sind. In diesem Stadium kann das Signal des Ensembles von Protonen nach Anpassung des Spannungsverhältnis T_R (siehe Abschnitt 5.2.1) bereits als ein Dip im Rauschspektrum des Axial-Detektors nachgewiesen werden, vorausgesetzt, die Energie der radialen Bewegungen ist niedrig genug.

Die so präparierte Protonenwolke wird einem weiteren Putzvorgang in der *Analysefalle*

unterzogen, welcher idealerweise mit wenigen oder am besten mit einem einzelnen Proton durchgeführt werden sollte. Die Nicht-Erfüllung der durch Gleichung (2.35) gegebenen Bedingung zur stabilen Speicherung, $\nu_c > \sqrt{2}\nu_z$, liegt dieser Putzmethode zugrunde. Infolge ihrer geometrischen Eigenschaften ist der Koeffizient c_2 in der Analysefalle um circa einen Faktor vier größer als der in der Präzisionsfalle. Ferner beträgt das Magnetfeld im Zentrum der Analysefalle aufgrund der ferromagnetischen Ringelectroden lediglich $B_0^{\text{AF}} = 1,1621(1)$ T (siehe Abschnitt 5.4.2). Demzufolge genügt es, die Ringspannung auf $V_0 = -200$ V einzustellen, um die durch $\nu_c < \sqrt{2}\nu_z$ bedingte Instabilität der Speicherung und folglich den Verlust aller Ionen mit $A/z > 1$ hervorzurufen. Da die Nennspannung der Kondensatoren der verwendeten Tiefpass-Filter jedoch 50 V beträgt (siehe Abschnitt 3.4.3), wird die anzulegende Spannungsrampe auf $V_0 = -48$ V beschränkt³. Demgemäß sollen alle Ionen mit $A/z > 6$ aus der Falle entfernt werden. Dieses Verfahren ist in Abbildung 5.3 veranschaulicht.

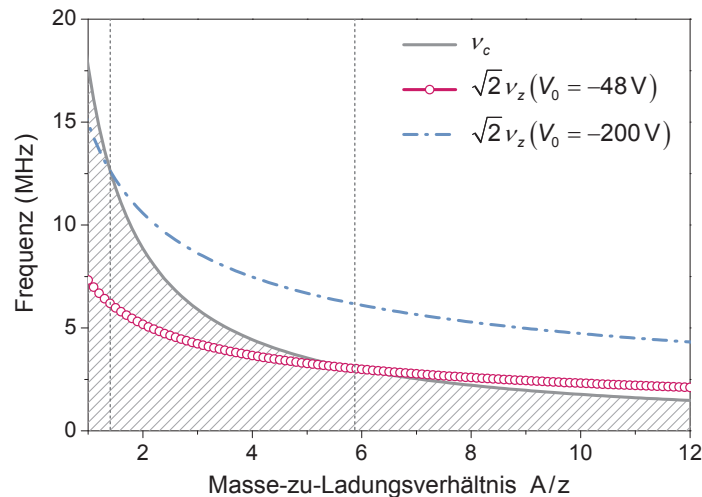


Abbildung 5.3.: Veranschaulichung des in der Analysefalle durchzuführenden Vorgangs zur Entfernung unerwünschter Ionen. Durch das Anlegen einer Spannung von $V_0 = -200$ V an die Ringelectrode überschreitet der Wert $\sqrt{2}\nu_z$ (blau gestrichelte Kurve) für alle Ionen mit $A/z > 1$ die freie Zyklotronfrequenz ν_c und eine stabile Speicherung ist nicht mehr gewährleistet. Aufgrund der Nennspannung der für die Tiefpass-Filter verwendeten Kondensatoren wird die an den Ring anzulegende Spannung auf $V_0 = -48$ V (rote Kreise) begrenzt. Auf diese Weise können Ionen mit $A/z > 6$, für welche dann $\nu_c < \sqrt{2}\nu_z$ gilt, aus der Falle entfernt werden.

5.1.3. Präparation eines einzelnen Protons

Die im vorangehenden Abschnitt vorgestellten Methoden zur Entfernung unerwünschter Teilchen können zugleich zur Reduktion der Anzahl der Protonen in der Falle führen. Gegebenenfalls lässt sich durch Verringerung der Ladezeit und Einstellung der Putzparame-

³Aufgrund dessen wurden beim kürzlich realisierten Neuaufbau der Apparatur [70, 71] Kondensatoren mit höherer Nennspannung eingesetzt.

ter bereits ein einzelnes Proton präparieren. Eine weitere, auf der Anregung des Freiheitsgrades der Zyklotronbewegung basierende Methode [38,67] gestattet die sukzessive Entfernung von Protonen aus der Präzisionsfalle. Hierzu wird die modifizierte Zyklotronbewegung zunächst mittels eines Sweep-Signals mit Amplituden von -50 dBm bis -35 dBm breitbandig in einem Frequenzbereich von $15 - 20$ kHz angeregt. Die Anregung führt zur Erhöhung der Zyklotronenergie und folglich zur Entstehung einer breiten Verteilung um die Zyklotronfrequenz der Protonen im Rauschspektrum des Zyklotron-Detektors, wie in Abbildung 5.4(a) gezeigt. Durch kurzzeitige Verringerung der Potentialtiefe verlassen

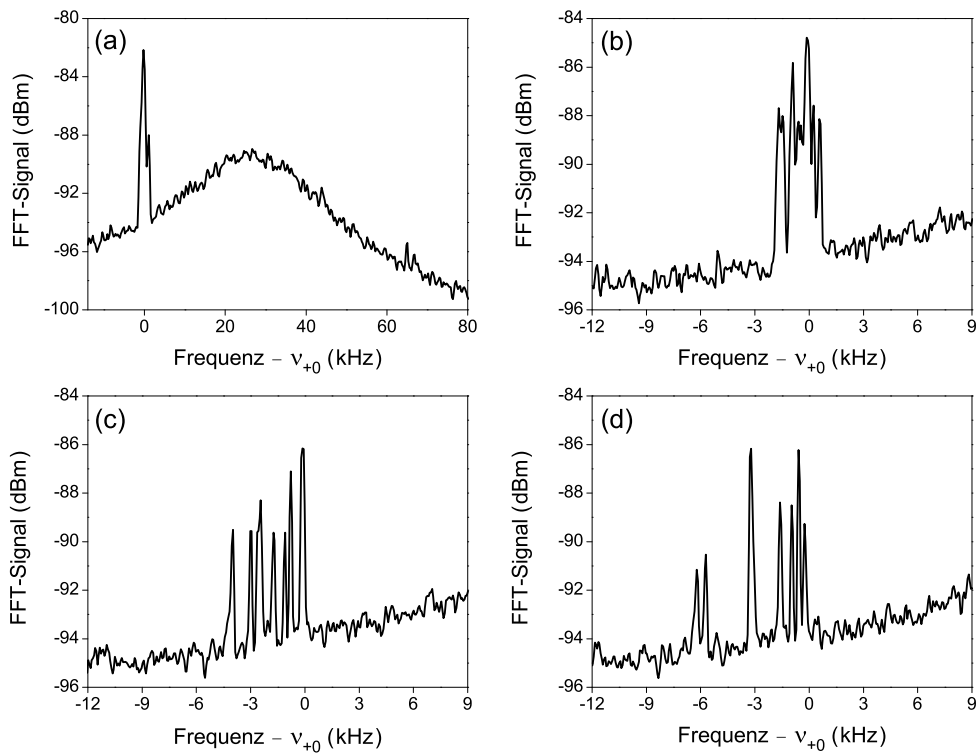


Abbildung 5.4.: Auf der Anregung der modifizierten Zyklotronbewegung basierende Methode zur sukzessiven Reduktion der Anzahl der in der Präzisionsfalle gespeicherten Protonen. (a) Signal eines Ensembles angeregter Protonen im Rauschspektrum des Zyklotron-Resonators. (b) Die wiederholte Anregung des radialen Freiheitsgrades gefolgt von kurzzeitiger Verringerung der Potentialtiefe führt zur Entfernung von Protonen aus der Falle. Das Signal einer aus wenigen Teilchen ($N < 20$) bestehenden Wolke spaltet sich aufgrund der Energieabhängigkeit der Zyklotronfrequenz in diskrete Protonenpeaks auf ((c) und (d)). Man beachte die Änderung der Achsenskalierung in (b)-(d).

Protonen höherer Energien die Falle. Nach mehrmaliger Wiederholung dieses Vorgangs zeichnen sich im Signal der resultierenden, aus wenigen Protonen ($N < 20$) bestehenden Wolke diskrete Protonenpeaks (siehe Sequenz in Abbildungen 5.4(b), (c) und (d)) ab. Diese Aufspaltung in Einzelpeaks spiegelt die Energieabhängigkeit der Zyklotronfrequenz ν_+ (E_+ , E_z , E_-) wider, welche durch Abweichungen von der idealen Feldgeometrie einer Penning-Falle sowie durch relativistische Korrekturen gemäß Gleichungen (2.51), (2.60)

bzw. (2.61) hervorgerufen werden können (siehe auch Abschnitt 5.2.4). Das Verfahren wird so lange durchgeführt, bis sich nur noch 2 bis 3 Teilchen in der Falle befinden (siehe Abbildung 5.5(a)). Schließlich wird ein Abwärts-Sweep mit Amplituden von -30 dBm bis -15 dBm gezielt über den Frequenzbereich der zu eliminierenden Protonen höherer Energien durchgeführt. Dabei wird, wie in Abbildung 5.5(a) veranschaulicht, das Proton, dessen Energie am niedrigsten ist, nicht angeregt. Gegebenenfalls wird die Potentialtiefe erneut kurzzeitig verringert. In Abbildung 5.5(b) ist das Signal eines einzelnen angeregten Protons im Rauschspektrum des Zyklotron-Nachweises gezeigt.

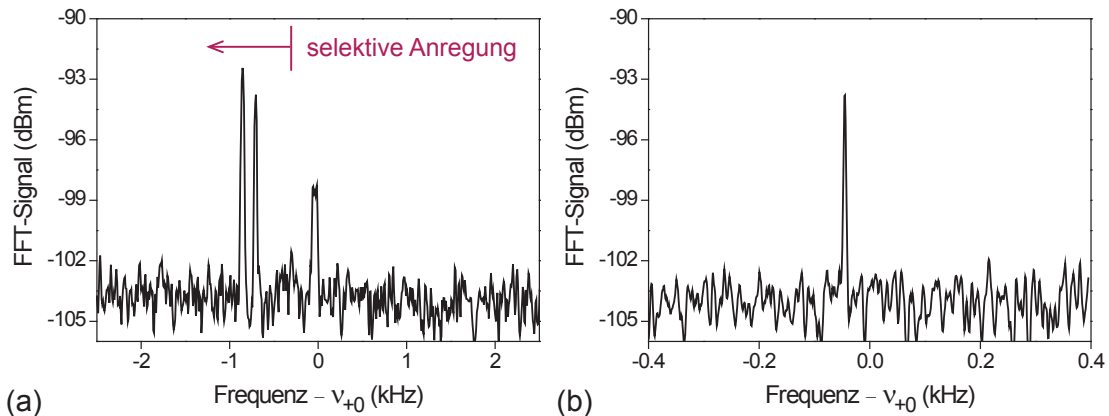


Abbildung 5.5.: Veranschaulichung des gezielten Anregungsverfahrens zur Präparation eines einzelnen Protons aus einem Ensemble von drei Teilchen. (a) Mittels eines Abwärts-Sweeps über den gekennzeichneten Frequenzbereich werden die Protonen höherer Energien stark angeregt und aus der Falle entfernt. (b) Signal eines einzelnen angeregten Protons im Rauschspektrum des Zyklotron-Detektors.

Die Anzahl der in der Falle gespeicherten Protonen lässt sich zusätzlich durch die Ermittlung der Linienbreite des Signals einer sich mit dem Axial-Detektor im Gleichgewicht befindenden Wolke ("Dip", siehe Abschnitt 2.3.2) gemäß Gleichung (2.114) bestimmen. Aus der Anpassung der durch Gleichung (2.111) gegebenen theoretischen Linienform an das gemessene Rauschspektrum ergibt sich, wie in Abbildung 5.6(a) verdeutlicht, die Breite des Dips. Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Linienbreite des Signals von der Anzahl der gespeicherten Teilchen wurde die Dipbreite von insgesamt 50 unterschiedlichen in einigen Erzeugungsvorgängen präparierten und aus wenigen Protonen bestehenden Wolken bei gleichbleibenden charakteristischen Parametern des Axial-Nachweissystems ermittelt. Das in Abbildung 5.6(b) gezeigte Ergebnis weist das erwartete lineare Verhältnis auf. Dabei stellen die Datenpunkte jeweils den Durchschnittswert der ermittelten Breiten der Einzelmessungen und die Fehlerbalken die jeweiligen Standardabweichungen dar. Bei einer gemessenen Resonatorgüte von $Q = 3868(70)$ und der Resonanzfrequenz von $\nu_{z0} = 684,233(40)$ kHz wurde ein Wert von $\Delta\nu_0 = 1,14(13)$ Hz für die Breite des durch ein einzelnes Proton hervorgerufenen Dips ermittelt, was gemäß Gleichung (2.113)

einer Kühlzeitkonstante $\tau_z = 1/(2\pi\Delta\nu_0) = 0,140(15)$ s entspricht. Diese Werte stimmten mit den unter Annahme der in Tabelle 2.2 aufgelisteten Parameter berechneten Werten von $\Delta\nu_0 = 1,020(19)$ Hz bzw. $\tau_z = 0,1561(29)$ s überein.

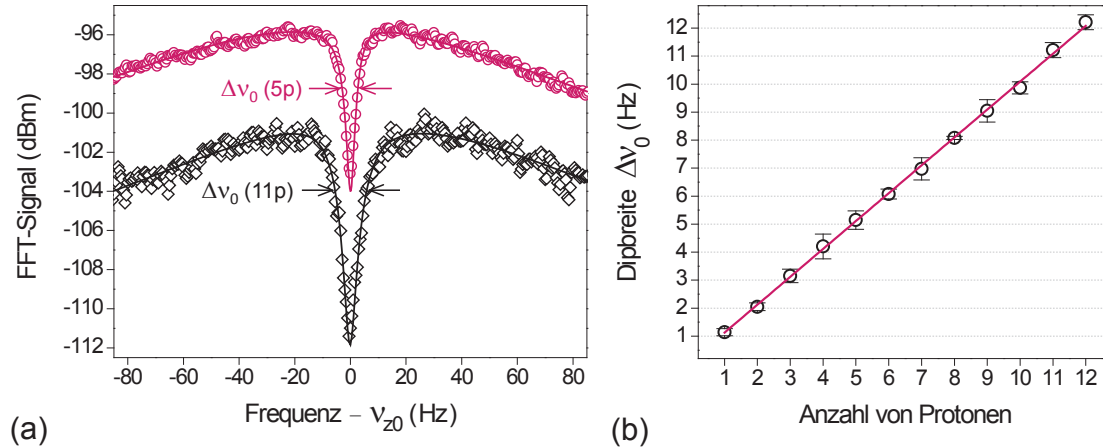


Abbildung 5.6.: Veranschaulichung der Ermittlung der Anzahl von gespeicherten Protonen durch Untersuchung der Linienbreite des Signals einer sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Axial-Detektor befindenden Wolke. (a) Ausgewählte gemessene Rauschspektren mit angepasster theoretischer Linienform (siehe Gleichung (2.111)). Aus der Anpassung lässt sich die Breite des Dips ermitteln. (b) Dipbreite als Funktion der Anzahl gespeicherter Protonen.

5.2. Messungen in der Präzisionsfalle

In diesem Abschnitt wird eine zusammengefasste Beschreibung der Methoden zur Messung der Eigenfrequenzen des Protons im homogenen Magnetfeld der Präzisionsfalle sowie eine Diskussion über die Einschränkungen der verwendeten Verfahren in unserem experimentellen Aufbau dargelegt. Wie in Abschnitt 2.6 erläutert, soll in der Präzisionsfalle die freie Zyklotronfrequenz des Teilchens mit der angestrebten Genauigkeit von mindestens 10^{-9} bestimmt werden. Die im Folgenden präsentierten Techniken sind im Rahmen von Penning-Falle-Experimenten zur hochpräzisen Bestimmung des g -Faktors hochgeladener Ionen teilweise bereits gut etabliert [32–35, 39, 42, 80, 142]. Für eine ausführliche Darstellung der Untersuchungen zur Charakterisierung der Eigenschaften der Präzisionsfalle und umfassende Vorstellung weiterer in der Falle erzielten Ergebnisse, Messmethoden und Optimierungsverfahren wird auf [116] bzw. [69, 143] verwiesen.

5.2.1. Optimierung des Speicherpotentials - Anpassung von T_R

Das Erzielen einer möglichst harmonischen Bewegung des in der Penning-Falle gespeicherten Protons ist Voraussetzung für die hochpräzise Bestimmung seiner Eigenfrequenzen. Ist das elektrostatische Speicherpotential anharmonisch und sind die Eigenfrequenzen folglich von den Bewegungsenergien abhängig, so führt dies zur Erhöhung der Lini-

enbreite des nachzuweisenden vom oszillierenden Teilchen hervorgerufenen Signals. Die unvermeidbaren durch die Wechselwirkung mit dem Axial- und Zyklotron-Resonator bedingten statistischen Schwankungen der Axial- bzw. Zyklotronenergie des Protons tragen in einem anharmonischen Potential zur Instabilität der Bewegungsfrequenzen und somit zur Begrenzung der erreichbaren Messgenauigkeit bei.

Die präzise Einstellung des in Abschnitt 2.2.3 definierten Spannungsverhältnisses T_R (*tuning ratio*) gestattet die unmittelbare Eliminierung des anharmonischen Potentialanteils niedrigster Ordnung ($C_4 = 0$) und stellt daher das grundlegende Verfahren zur Optimierung des elektrostatischen Potentials dar. Die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Methode zur Asymmetriekompensation des Potentials vervollständigt die Optimierungsprozedur und wird, wie in [69] beschrieben, in genau der gleichen Art und Weise wie in der Analysefalle auch in der Präzisionsfalle durchgeführt. Dabei ist, wie in Abschnitt 4.3 bereits erwähnt, die Neueinstellung des T_R in jedem Zwischenschritt erforderlich.

Zur Anpassung von T_R bieten sich sowohl die Beobachtung der Linienform des Teilchensignals als auch die Untersuchung der Frequenzverschiebungen unter Erhöhung der Bewegungsenergien für verschiedene Werte von T_R an [42, 88, 93, 99]. In Rahmen dieser Arbeit wird hierzu das Signal eines sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Axial-Schwingkreis befindenden Protons bevorzugt. Im Beispiel von Abbildung 5.7 wird das optimale Spannungsverhältnis T_R anhand des Vergleichs der in Abschnitt 2.3.2 gemäß Gleichung (2.116) definierten Güte der Schwingung des Teilchens Q_0 ermittelt. Die berechneten Gütefaktoren der in Abbildung 5.7(a) gezeigten Signale sind in Abbildung 5.7(b) gegen das jeweiligen T_R aufgetragen. Diese Methode stellt ein zügiges Verfahren dar, welches die Einstellung von T_R mit einer Genauigkeit von mindestens 3×10^{-4} ermöglicht.

Eine weitere Methode zur Bestimmung des optimalen Verhältnisses T_R mit höherer Genauigkeit wird im Beispiel von Abbildung 5.8 veranschaulicht. Hierbei wird die durch Gleichung (2.45) beschriebene Verschiebung der Axialfrequenz mit der axialen Energie des Teilchens als Maß für den Grad der Verstimmung des T_R aufgefasst. Bei einer optimalen Einstellung soll das Speicherpotential annähernd harmonisch mit $C_4 = 0$ und $C_6 = 0$ sein, mit dem Ergebnis, dass eine Erhöhung der Energie bzw. der Temperatur des Teilchens keine Auswirkung auf die Axialfrequenz hat. Zur systematischen Untersuchung dieses Effektes wird der Axial-Detektor weißem Rauschen unterworfen, welches zur Erhöhung der Rauschtemperatur des Nachweisschwingkreises und folglich zur Vergrößerung der Bewegungsamplitude des mit dem Detektor im thermischen Kontakt befindlichen Protons führt. In Abbildung 5.8(a) ist die gemessene Axialfrequenz als Funktion der eingestrahlten Leistung für verschiedene Werte von T_R dargestellt. In Abbildung 5.8(b) werden die gemessenen Frequenzen für den Fall ohne den Einsatz von weißem Rauschen (leere Kreise) und bei maximaler Leistung der Anregung (gefüllte Kreise) miteinander verglichen. Der Punkt, an dem sich die angepassten Geraden schneiden, entspricht im

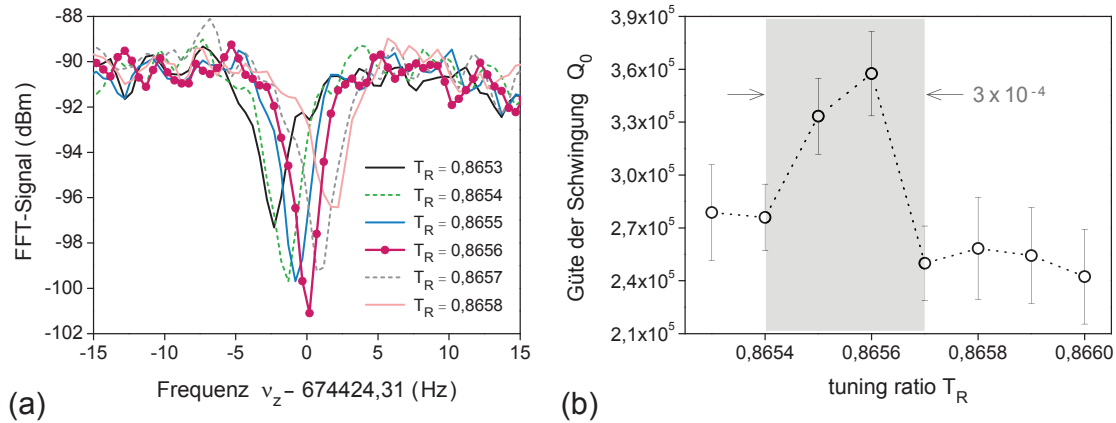


Abbildung 5.7.: Optimierung des Spannungsverhältnisses T_R mittels der Untersuchung der Linienform des Protonsignals. (a) Für verschiedene Werte von T_R aufgenommenes Signal eines Protons im Rauschspektrum des Axial-Nachweisschwingkreises. Die Abhängigkeit der Axialfrequenz von T_R deutet auf einen nicht verschwindenden Koeffizient $D_2^{\nu_z}$ hin. (b) Güte der Schwingung des Teilchens (siehe Gleichung (2.116)) als Funktion des verwendeten T_R . Der höchste Wert von Q_0 kennzeichnet den schmalsten und tiefsten Protondip und entspricht somit dem gesuchten zur Eliminierung des Koeffizienten C_4 optimalen Wert von T_R .

gezeigten Fall dem gesuchten optimalen Verhältnis $T_R = 0,866433(14)$. In [69] wird die vollständige Charakterisierung der Präzisionsfalle anhand der Methode zur Asymmetriekompensation des Potentials eingehend präsentiert.

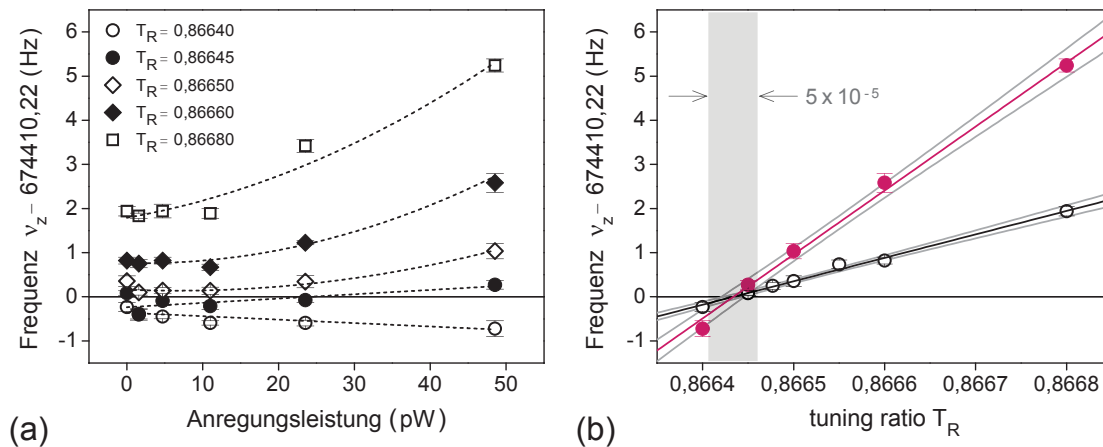


Abbildung 5.8.: Optimierung des Spannungsverhältnisses T_R mittels der Untersuchung der axialen Frequenzverschiebung mit der Bewegungsenergie. (a) Gemessene, durch die Erhöhung der Rauschtemperatur des Axial-Nachweisschwingkreises hervorgerufene Frequenzverschiebung für verschiedene Werte von T_R . (b) Axialfrequenz als Funktion des T_R für den Fall ohne Einsatz von weißem Rauschen (leere Kreise) und bei maximaler Leistung der Anregung (gefüllte Kreise). Das optimale Verhältnis T_R entspricht dem Punkt, an dem sich die angepassten Geraden schneiden. Die Konfidenzintervalle von 90 % sind jeweils gekennzeichnet. Bei der optimalen T_R -Einstellung ist die relative Verschiebung der Axialfrequenz $< 2 \times 10^{-7}$.

5.2.2. Direkte Messung der axialen Frequenz

Die Ermittlung der axialen Frequenz ν_z erfolgt direkt aus dem Minimum, welches durch ein einzelnes gespeichertes und sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Detektor befindliches Proton in der Spektralanalyse des Axial-Schwingkreissignals hervorgerufen wird. Dieses Messverfahren zeichnet sich dadurch aus, dass die Eigenfrequenz des Teilchens bei geringer Bewegungsenergie (entspricht der Bewegungsamplitude) bestimmt wird, womit Frequenzverschiebungen, die durch Anharmonizitäten des elektrostatischen Potentials hervorgerufen werden, vernachlässigt werden können. Die Amplitude der Axialbewegung lässt sich nach Gleichung (2.37) zu $30\sqrt{T_z} \mu\text{m}$ abschätzen, wobei $T_z = \langle E_z \rangle / k_B$ die dem axialen Freiheitsgrad zuzuordnende Temperatur in Kelvin ist. Diese beträgt $T_z = 9(1)$ K [69, 81] und kann unter Anwendung des in Abschnitt 2.3.4 beschriebenen Verfahrens des elektronischen Feedbacks auf einen effektiven Wert von $T_z = 2,22(19)$ K [41] herabgesetzt werden (siehe auch Abschnitt 5.4.3).

Analog zur Linienbreite lässt sich, wie in Abbildung 5.9 beispielhaft dargestellt, auch die Lage des Protonsignals im Frequenzspektrum durch die Anpassung der theoretischen Linienform (Gleichung (2.111)) an die gemessene Rauschspannungsdichte des Axial-Resonators ermitteln. Alternativ kann die Axialfrequenz durch die Anpassung des Protondips mittels einer Lorentzfunktion bestimmt werden, vorausgesetzt, die Eigenfrequenz des Teilchens entspricht der Resonanzfrequenz des Nachweisschwingkreises [88]. In beiden Fällen liegt die absolute Genauigkeit typischerweise bei $\Delta\nu_z = 10 - 20$ mHz. Im Beispiel von Abbildung 5.9 wird eine relative Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = 2,3 \times 10^{-8}$ bei der Messung erreicht.

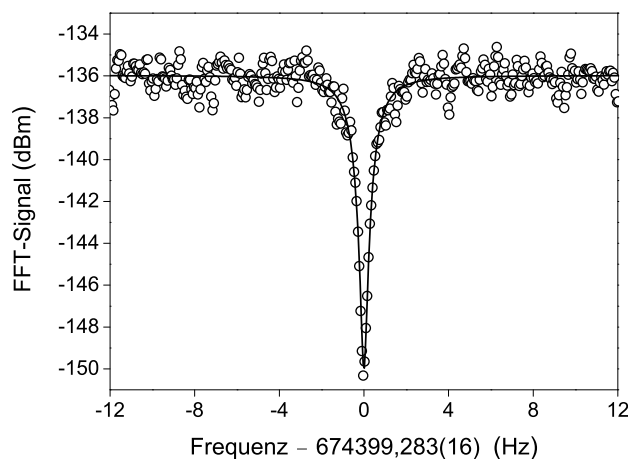


Abbildung 5.9.: Veranschaulichung der zerstörungsfreien Bestimmung der Axialfrequenz eines einzelnen gespeicherten und sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Detektor befindlichen Protons. Aus der Anpassung der theoretischen Linienform (durchgezogene Linie, siehe Gleichung (2.111)) an das gemessene Rauschspektrum (leere Kreise) lässt sich die Axialfrequenz mit hoher Genauigkeit ermitteln.

Zum Erzielen eines verbesserten Verhältnisses zwischen Signal und Rauschen des gemessenen Frequenzspektrums durch die Unterdrückung von Störungen statistischer Natur (z.B. weißes Rauschen) wird eine Mittelung der FFT-Spektren durchgeführt. Die Ermittlung der optimalen FFT-Mittelungszeit ΔT und die Charakterisierung der Frequenzstabilität des axialen Signals erfolgen anhand der durch

$$\Xi(\Delta T) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [\alpha_i(\Delta T) - \bar{\alpha}(\Delta T)]^2} \quad (5.2)$$

an dieser Stelle eingeführten Größe Ξ [41, 81], welche die axiale Frequenzschwankung quantifiziert. Diese wird als die Standardabweichung der Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Messungen der Axialfrequenz mit

$$\alpha_i(\Delta T) = \nu_z(t) - \nu_z(t - \Delta T) \quad (5.3)$$

definiert. In Abbildung 5.10 ist die Untersuchung der axialen Frequenzstabilität für eine FFT-Mittelungszeit von $\Delta T = 80$ s in der Präzisionsfalle veranschaulicht. Während eines Zeitraums von 33,8 Stunden wurde in Abständen von 80 Sekunden ein gemitteltetes Frequenzspektrum aufgenommen, aus dem die Axialfrequenz ν_z , wie im Beispiel von Abbildung 5.9 gezeigt, bestimmt wurde. Die so ermittelten Frequenzwerte sind in Abbildung 5.10(a) als Funktion der Zeit aufgetragen. Anschließend wurden aus diesem Datensatz die Frequenzdifferenzen $\alpha_i(\Delta T)$ gemäß Gleichung (5.3) berechnet und als Histogramm in Abbildung 5.10(b) dargestellt. Die in der Abbildung gekennzeichnete Standardabweichung $\Xi(\Delta T)$ beträgt $\Xi(80 \text{ s}) = 57(1) \text{ mHz}$ mit $N = 1518$.

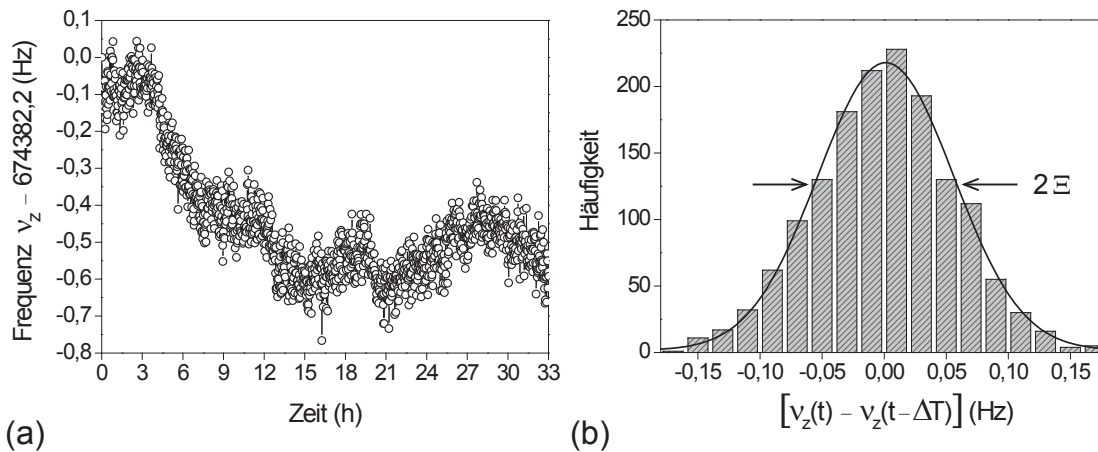


Abbildung 5.10.: Verfahren zur Charakterisierung der Frequenzstabilität des axialen Signals eines in der Präzisionsfalle gespeicherten Protons. (a) Axiale Frequenzverschiebung innerhalb eines Zeitraums von 33,8 Stunden. Jeder Datenpunkt entspricht einer Messung der Axialfrequenz nach einer FFT-Mittelungszeit von $\Delta T = 80$ s. (b) Darstellung der Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Frequenzmessungen in einem Histogramm. Die Standardabweichung $\Xi(\Delta T)$ quantifiziert die Frequenzschwankung und beträgt in diesem Fall $\Xi = 57(1) \text{ mHz}$.

Die Abhängigkeit der Standardabweichung Ξ von der FFT-Mittelungszeit ΔT wurde experimentell untersucht. In Abbildung 5.11 ist Ξ als Funktion von ΔT aufgetragen. Jeder Datenpunkt stellt das Ergebnis eines solchen oben erläuterten Verfahrens zur Ermittlung von Ξ für jeweils verschiedene Werte von ΔT dar. Für jede Mittelungszeit mit Ausnahme von $\Delta T = 120$ s wurden $N = 295$ Messungen der Axialfrequenz durchgeführt. Die Standardabweichung $\Xi(120 \text{ s})$ wurde aus einem Datensatz von $N = 150$ Messwerten bestimmt. Für kurze Messzeiten ist eine Abhängigkeit gemäß $\Xi(\Delta T) \propto 1/\sqrt{\Delta T}$ (gepunktete Linie) festzustellen [69], welche auf die Signal-Mittelwertbildung zurückzuführen ist. In der Präzisionsfalle wird der minimal erreichbare Wert für die Frequenzschwankung Ξ durch die relative Spannungsstabilität an den Präzisionskanälen des Netzgerätes *UM1-14* (siehe Abschnitt 3.4.3) beschränkt. In Abbildung 5.11 kennzeichnet die gestrichelte Linie die durch Spannungsfluktuationen gemäß Gleichung (3.2) hervorgerufene Frequenzschwankung. Die Ergebnisse deuten auf die Notwendigkeit einer FFT-Mittelungszeit von mindestens $\Delta T = 80$ s hin.

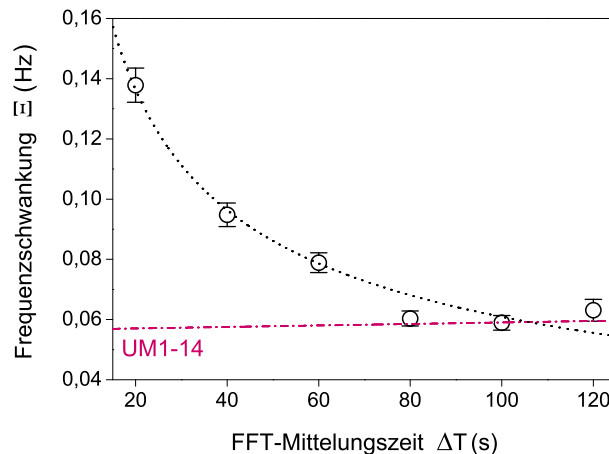


Abbildung 5.11.: Untersuchung der Abhängigkeit der axialen Frequenzschwankung Ξ von der FFT-Mittelungszeit ΔT in der Präzisionsfalle. Zum Erzielen der optimalen Messbedingungen soll die FFT-Mittelungszeit mindestens $\Delta T = 80$ s betragen. Der minimal erreichbare Wert für die Standardabweichung $\Xi(\Delta T)$ wird durch Spannungsfluktuationen an den Präzisionskanälen des Netzgerätes *UM1-14* (gestrichelte Linie) beschränkt.

5.2.3. Messung der Magnetronfrequenz mittels Seitenbandkopplung

Im Gegensatz zum Axial- bzw. Zyklotron-Freiheitsgrad ist für die Magnetronmode kein Detektor vorhanden, mit dem das Proton über die Magnetronbewegung direkt in Wechselwirkung treten kann. Die Bestimmung der Magnetronfrequenz erfolgt deshalb mit Hilfe der in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Methode der Seitenbandkopplung. Durch das Anlegen eines elektromagnetischen Wechselfeldes, dessen Frequenz ν_{rf} bei der Summe der Axial- und Magnetronfrequenz liegt, $\nu_{rf} = \nu_z + \nu_-$, wird die Magnetronbewegung

an die Axialbewegung gekoppelt. Mittels der Kopplung wird jede der beiden Eigenbewegungen einer Amplitudenmodulation unterzogen. Die Frequenzanalyse der folglich durch Gleichung (2.126) beschriebenen axialen Schwingung ergibt zwei modifizierte Eigenfrequenzen $\nu_{l,r} = \nu_{z0} \mp \Omega_k$, wobei Ω_k durch Gleichung (2.125) gegeben wird. Wie in Abbildung 5.12 gezeigt, erscheinen diese Frequenzkomponenten als ein aufgespalteter Protodip (“Doppel-Dip”) im Rauschspektrum des Axial-Resonators. Die tatsächliche Magnetronfrequenz lässt sich gemäß Gleichung (2.132) über die Beziehung

$$\nu_- = \nu_{rf} + \nu_{z0} - \nu_l - \nu_r \quad (5.4)$$

ermitteln. Dabei ist ν_{rf} die eingestrahlte Frequenz und $\nu_{l,r}$ sind die aus dem gemessenen Doppel-Dip-Signal bestimmten Frequenzen. Die Axialfrequenz ν_{z0} wird über einen Einzeldip (gestrichelte Kurve in Abbildung 5.12) in einer unabhängigen Messung ermittelt. Im Beispiel von Abbildung 5.12 mit $\nu_l = 691797,345(9)$ Hz, $\nu_r = 691809,48(2)$ Hz und $\nu_{z0} = 691809,48(2)$ Hz wird die Magnetronfrequenz mit einer relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_-}{\nu_-} = 3,6 \times 10^{-6}$, nämlich $\nu_- = 8260,42(3)$ Hz, bestimmt.

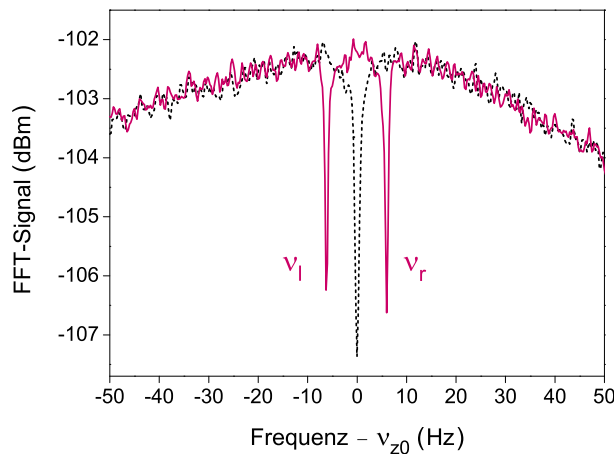


Abbildung 5.12.: Messung der Magnetronfrequenz mittels Seitenbandkopplung in der Präzisionsfalle. Die Kopplung der Magnetronbewegung an die Axialbewegung mittels eines elektromagnetischen Wechselfeldes bei der Frequenz $\nu_{rf} = \nu_z + \nu_-$ führt zur Amplitudenmodulation beider Eigenbewegungen (siehe auch Abschnitt 2.4.1). Im Rauschspektrum des Axial-Resonators zeichnet sich dies durch die Aufspaltung des axialen Signals in zwei Dips (durchgezogene Kurve) ab. Zur Bestimmung der tatsächlichen Magnetronfrequenz ist neben der Ermittlung der modifizierten Eigenfrequenzen $\nu_{l,r} = \nu_{z0} \mp \Omega$ noch eine unabhängige Messung der Axialfrequenz ν_{z0} über einen Einzeldip (gestrichelte Kurve) erforderlich. Für Details siehe Text.

Die Methode der Seitenbandkopplung ermöglicht die Bestimmung der Magnetronfrequenz bei geringer Bewegungsenergie. Wie bereits in Abschnitt 2.4.1 diskutiert, führt die Kopplung über das obere Seitenband $\nu_z + \nu_-$ zur Kühlung des Magnetron-Freiheitsgrades. Die Kühlgrenze liegt gemäß Gleichung (2.133) bei $T_- = -\frac{\nu_-}{\nu_z} T_z \approx 107$ mK für $T_z = 9$ K, wobei T_- für die der Magnetronmode zuzuordnende Temperatur steht. Nach Gleichung (2.39) lässt sich der Magnetronradius zu $4,57\sqrt{T_z} \mu\text{m} \approx 14 \mu\text{m}$ für $T_z = 9$ K abschätzen.

5.2.4. Messung der modifizierten Zyklotronfrequenz

Die hochpräzise Messung der modifizierten Zyklotronfrequenz ν_+ ist Voraussetzung für das Erreichen der angestrebten Genauigkeit bei der Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz ν_c , wie aus Gleichung (2.65) ersichtlich ist. Im hier beschriebenen Experiment kann die Ermittlung von ν_+ grundsätzlich auf zwei unterschiedlichen Verfahrensweisen beruhen. Entweder wird das Zyklotron-Signal direkt mit dem Zyklotron-Detektor nachgewiesen oder die modifizierte Zyklotronfrequenz wird analog zur Magnetronfrequenz mittels der Technik der Seitenbandkopplung bestimmt. Beide Methoden wurden im Rahmen dieser Arbeit untersucht und werden im Folgenden beschrieben. Die erreichbare Messgenauigkeit wird, wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, durch die mechanischen Vibrationen des verwendeten Pulsrohrkühlers limitiert. Diese Tatsache veranlasste die Ersetzung des Kühlers durch einen Helium-Bad-Kryostat beim kürzlich realisierten Neuaufbau der Apparatur [70, 71].

Zum direkten Nachweis der modifizierten Zyklotronfrequenz wird die Zyklotronenergie des gespeicherten Protons, ähnlich wie beim in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten Verfahren, mittels eines Frequenz-Sweeps erhöht, welcher schmalbandig über den Frequenzbereich des Protons durchgeföhren wird. Der von der Teilchenbewegung hervorgerufene Spannungsabfall am Nachweisschwingkreis zeichnet sich in einen Peak im Zyklotron-Frequenzspektrum ab. Die angeregte Zyklotronbewegung wird gemäß Gleichung (2.108) exponentiell mit der Zeitkonstante

$$\tau_+ = \frac{m_p D_+^2}{e^2 R_{p+}} \quad (5.5)$$

(analog zur Gleichung (2.107)) gedämpft. Die zeitliche Entwicklung des Zyklotron-Signals offenbart den Vorgang des Widerstandskühlens, welcher in Abbildung 5.13 veranschaulicht ist. Ein Frequenzspektrum wird in Abständen von 5 Sekunden aufgenommen und aus dem Zyklotron-Peak wird die modifizierte Zyklotronfrequenz ermittelt. In Abbildung 5.13(a) ist eine Auswahl solcher Spektren dargestellt und in Abbildung 5.13(b) sind die gemessenen Frequenzen als Funktion der Zeit aufgetragen. Die Signalhöhe ist proportional zur Zyklotronenergie, welche ausgehend vom Anfangswert $E_+^0(t = t_0)$ gemäß

$$E_+(t) = E_+^0 e^{-t/\tau_+} \quad (5.6)$$

sinkt, bis das thermische Gleichgewicht mit dem Nachweisschwingkreis erreicht wird. Die aus Abbildung 5.13 erkennbare Abhängigkeit der modifizierten Zyklotronfrequenz von der Zyklotronenergie lässt sich gemäß Gleichungen (2.51), (2.60) bzw. (2.61) durch

$$\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+^0} = (\alpha_E + \alpha_B + \alpha_R) E_+ \quad (5.7)$$

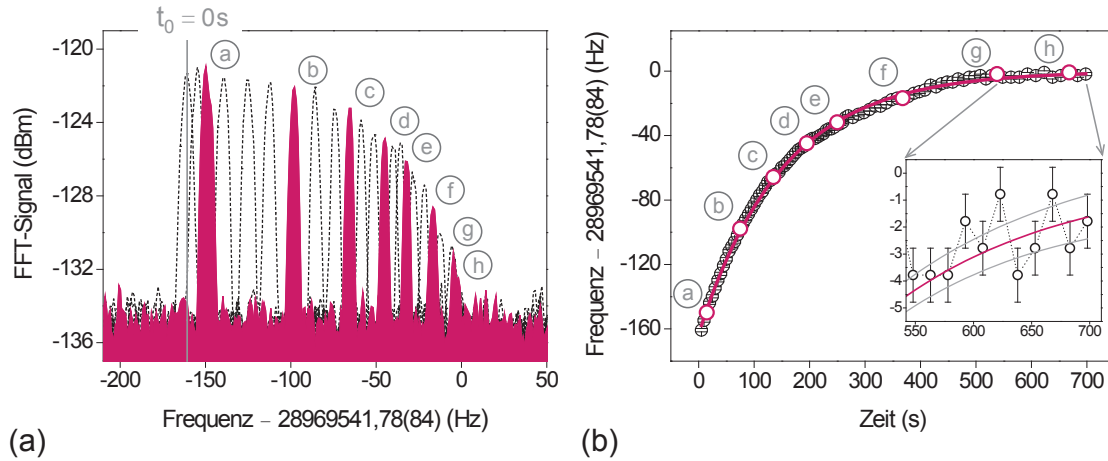


Abbildung 5.13.: Bestimmung der modifizierten Zyklotronfrequenz durch direkten Nachweis mit dem Zyklotron-Detektor in der Präzisionsfalle. (a) Ausschnitt aus dem Rauschspektrum des Zyklotron-Nachweisschwingkreises mit einer Auswahl von nacheinander gemessenen Signalen eines angeregten Protons. Aufgrund von Inhomogenitäten des Magnetfeldes führt die Erhöhung der Zyklotronenergie zur Verschiebung der Zyklotronfrequenz (Richtung ① → ②). Durch Widerstandskühlen sinkt die Energie exponentiell bis das thermische Gleichgewicht mit dem Nachweisschwingkreis erreicht wird und die Zyklotronfrequenz verschiebt sich entsprechend (Richtung ② → ①). (b) Zeitliche Entwicklung der modifizierten Zyklotronfrequenz. Aus der Anpassung der Daten mittels einer Exponentialfunktion (Gleichung (5.11)) lässt sich die modifizierte Zyklotronfrequenz für den Grenzfall des thermischen Gleichgewichts $\nu_+(t \rightarrow \infty)$ ermitteln.

mit

$$\alpha_E = \frac{3}{4eV_0} \frac{c_4}{c_z^2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^4 \quad (5.8)$$

$$\alpha_B = -\frac{B_2}{B_0} \frac{1}{m_p \omega_z^2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 \quad (5.9)$$

$$\alpha_R = -\frac{1}{m_p c^2} \quad (5.10)$$

beschreiben. Werden die in Abschnitten 5.2.1 bzw. 4.3 vorgestellten Verfahren zur Optimierung des elektrostatischen Potentials durchgeführt, so wird die durch anharmonische Potentialanteile bedingte Frequenzverschiebung vernachlässigbar, da in diesem Fall $|c_4| < 10^{-4} \text{ m}^{-4}$ und folglich $\alpha_E < 5 \times 10^{-2} \text{ J}^{-1}$ in der Präzisionsfalle ist. Inhomogenitäten des Magnetfeldes tragen hingegen am stärksten mit $\alpha_B \approx -5 \times 10^{10} \text{ J}^{-1}$ zur beobachteten Verschiebung der modifizierten Zyklotronfrequenz bei. Aus technischen Gründen ist, wie in Abschnitt 5.3 diskutiert, die Transportstrecke zwischen Präzisions- und Analysefalle gegenüber der des ursprünglichen Entwurfs [116] verkürzt worden. Mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten numerischen Berechnung lässt sich der Koeffizient B_2 der magnetischen Flasche, welche durch die ferromagnetische Ringelektrode der Analysefalle hervorgerufen wird, am Ort der Präzisionsfalle bestimmen. Wie in Abbildung 5.15 gezeigt, beträgt dieser beim Abstand von 43,74 mm zwischen den Fallenzentren

$B_2 = 4,538(7) \mu\text{T}/\text{mm}^2$. Relativistische Korrekturen haben mit $\alpha_B \approx -7 \times 10^9 \text{ J}^{-1}$ eine etwa um Faktor 10 geringere Frequenzverschiebung zur Folge.

Die in Abbildung 5.13(b) dargestellte zeitliche Entwicklung der Zyklotronfrequenz wird entsprechend Gleichungen (5.6) und (5.7) durch

$$\nu_+(t) = \nu_+^0 \left(1 - \alpha_+ E_+^0 e^{-t/\tau_+} \right) \quad (5.11)$$

gegeben, wobei $\alpha_+ = (\alpha_E + \alpha_B + \alpha_R)$ ist. Aus der Anpassung von Gleichung (5.11) an die gemessenen Daten wird die modifizierte Zyklotronfrequenz für den Grenzfall des thermischen Gleichgewichts $\nu_+(t \rightarrow \infty)$ sowie die Kühlzeitkonstante τ_+ gewonnen [67]. Zur besseren Visualisierung des Kühlvorgangs wurde im Beispiel von Abbildung 5.13 die Resonanzfrequenz des Zyklotron-Resonators gegenüber der Eigenfrequenz des Protons verstimmt. Dies führt zur Erhöhung der Zeitkonstante auf $\tau_+ = 152(1) \text{ s}$ im Vergleich zu den typischen Werten von $40 \text{ s} < \tau_+ < 67 \text{ s}$ [69, 116], die im Fall der Übereinstimmung beider Frequenzen gemessen werden. Die direkte Nachweismethode ermöglicht die Bestimmung der modifizierten Zyklotronfrequenz mit einer relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} = 2,9 \times 10^{-8}$. In Abbildung 5.13(b) ist eine vergrößerte Ansicht der letzten Datenpunkte dargestellt, aus der ersichtlich wird, dass die Zyklotronfrequenz um $\approx \pm 1,5 \text{ Hz}$ schwankt. Diese Fluktuation ist auf die Auswirkungen der auf die Falle übertragenen Vibrationen des Pulsrohrkühlers zurückzuführen, welche sich ebenfalls in der Breite der Zyklotronresonanz widerspiegeln [119]. Eine direkte Bestimmung der modifizierten Zyklotronfrequenz eines sich mit dem Zyklotron-Detektor im thermischen Gleichgewicht befindlichen Protons über einen Zyklotron-Dip, dessen erwartete Breite lediglich $\Delta\nu_0^+ \approx 4 \text{ mHz}$ beträgt (siehe Tabelle 2.2), ist, obwohl prinzipiell möglich, mit den besagten Vibrationen offenkundig nicht zu vereinbaren.

Eine weitere Möglichkeit zur Ermittlung der modifizierten Zyklotronfrequenz besteht darin, ähnlich wie beim Magnetron-Freiheitsgrad (siehe Abschnitt 5.2.3), die Zyklotronbewegung an die Axialbewegung zu koppeln und ν_+ über einen Zyklotron-Doppel-Dip zu bestimmen. Die Kopplung erfolgt in diesem Fall mit $\nu_{rf} = \nu_+ - \nu_z$ über das untere Seitenband, wobei ν_{rf} die Frequenz des eingestrahlten Wechselfeldes ist. Aus den beiden Frequenzkomponenten der amplitudenmodulierten Axialschwingung lässt sich die tatsächliche modifizierte Zyklotronfrequenz gemäß Gleichung (2.131) über die Beziehung

$$\nu_+ = \nu_{rf} - \nu_{z0} + \nu_l + \nu_r \quad (5.12)$$

bestimmen. Ein Beispiel für eine solche Messung ist in Abbildung 5.14 gezeigt. Die durch die Vibrationen bedingten Frequenzschwankungen drücken sich auf dem aufgenommenen Frequenzspektrum in einem "verschmierten" Doppel-Dip aus. Gemäß Gleichung (2.134) erfolgt die Messung bei einer Zyklotron-Temperatur von $T_+ = \frac{\nu_+}{\nu_z} T_z \approx 387 \text{ K}$ für $T_z = 9 \text{ K}$, was nach Gleichung (2.38) einem Zyklotronradius von $4,63\sqrt{T_z} \mu\text{m} \approx 14 \mu\text{m}$ für $T_z = 9 \text{ K}$ entspricht. Die Verbesserung des Signal-Rauschen-Verhältnisses erfordert eine

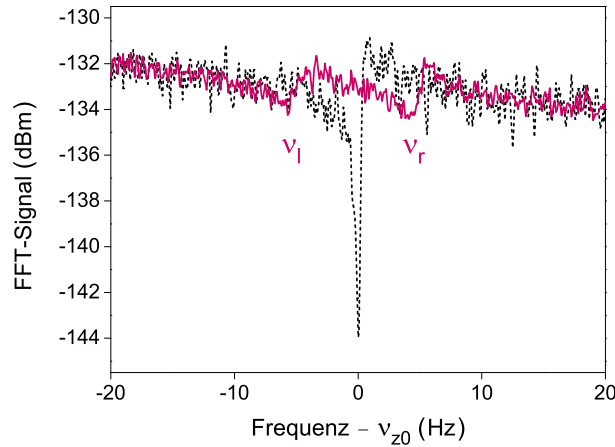


Abbildung 5.14.: Messung der modifizierten Zyklotronfrequenz mittels Seitenbandkopplung in der Präzisionsfalle. Die Kopplung der Zyklotronbewegung an die Axialbewegung erfolgt mittels eines elektromagnetischen Wechselfeldes bei der Frequenz $\nu_{r,f} = \nu_+ - \nu_z$. Aufgrund der mechanischen Vibrationen des Pulsrohrkühlers wird die Zyklotronresonanz verbreitert, was sich in einem “verschmierten” Doppel-Dip im Rauschspektrum des Axial-Nachweisschwingkreises ausdrückt. Für Details siehe Text.

längere FFT-Mittelungszeit. Ferner bietet sich zusätzlich die Anwendung von positivem Feedback (siehe Abschnitt 2.3.4) zur Erhöhung des Signal-Rausch-Verhältnisses an, was jedoch eine Steigerung der Temperatur des Teilchens zur Folge haben würde.

5.2.5. Überlegungen zur Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz

Eine der Voraussetzungen zur Bestimmung des g -Faktors des Protons mit der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode ist die genaue Kenntnis der freien Zyklotronfrequenz ν_c und dadurch des Magnetfeldes am Ort des Teilchens. Das Erreichen der angestrebten relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta g}{g} \leq 10^{-9}$ beruht auf der Gleichzeitigkeit der Bestimmung der Larmor- bzw. Zyklotronfrequenz. In der Praxis muss, wie in Abschnitt 2.6 diskutiert, während jedes Vorgangs zum Induzieren eines Spin-Übergangs zugleich eine Messung der freien Zyklotronfrequenz in der Präzisionsfalle durchgeführt werden, um somit den Effekt von durch Magnetfeldschwankungen bedingten systematischen Verschiebungen zu minimieren. Zur Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz mit Hilfe des Invarianztheorems $\nu_c^2 = \nu_+^2 + \nu_z^2 + \nu_-^2$ müssen wiederum alle drei Eigenfrequenzen des Protons gemessen werden, wobei die modifizierte Zyklotronfrequenz ν_+ am genauesten ermittelt werden muss (siehe Gleichung (2.65)). Hierzu wird die auf der Seitenbandkopplung basierende Methode aufgrund ihrer kurzen Messzeiten bevorzugt. Auf die erneute Messung der Magnetronfrequenz ν_- bei jedem Messzyklus kann verzichtet werden [88, 99], da diese lediglich auf circa 5 Hz genau bekannt sein muss.

In [143] wird eine erweiterte Anwendung der Technik der Seitenbandkopplung präsentiert, welche die gleichzeitige Kopplung beider radialen Bewegungen an die Axialbewe-

gung ermöglicht. Die Eigenfrequenzen lassen sich so aus einem gemittelten Frequenzspektrum, welches eine fünffache Struktur (“Fünffach-Dip”) aufweist, simultan ermitteln. Diese Methode ersetzt die nacheinander folgenden Messungen der Eigenfrequenzen, deren Dauer jeweils 80 – 100 s beträgt, durch eine einzige Messung. Auf diese Weise wird die Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz gegenüber sonst zwischen den nacheinander erfolgenden Messungen der Eigenfrequenzen eventuell eintretenden systematischen Verschiebungen unempfindlich.

Die in diesem Abschnitt präsentierten Ergebnissen offenbaren zwei limitierende Faktoren, die ausschließlich auf den experimentellen Aufbau zurückzuführen sind und zwar die mechanischen Vibrationen des Pulsrohrkühlers und die durch die ferromagnetische Ringelektrode der Analysefalle hervorgerufene magnetische Inhomogenität in der Präzisionsfalle. Vorläufige Messungen, die nach dem Einbau des Helium-Bad-Kryostates durchgeführt wurden, zeigen die Verschmälerung der Zyklotronresonanz infolge der Eliminierung der Vibrationen [70, 71]. Ferner wird die Möglichkeit der Bestimmung der modifizierten Zyklotronfrequenz über einen Zyklotron-Dip untersucht [70, 71]. Der Abstand zwischen der Präzisions- und Analysefalle wurde jedoch beim Neuaufbau der Apparatur nicht verändert, sodass der Koeffizient B_2 am Ort der Präzisionsfalle gleich geblieben ist. Diese Inhomogenität führt zu energieabhängigen Verschiebungen aller drei Eigenfrequenzen sowie der Larmorfrequenz gemäß Gleichung (2.60). Dies kann sich insbesondere im Hinblick auf eine weitere Erhöhung der Genauigkeit der Bestimmung des g -Faktors als gravierende dennoch nicht unlösbare Einschränkung erwiesen. In Abbildung 5.15 sind die berechneten Koeffizienten B_2 und B_1 der inhomogenen Anteile des Magnetfeldes als Funktion des Abstandes zum Zentrum der Analysefalle gezeigt. Die gekennzeichneten Bereiche stellen die jetzige Positionierung der Präzisionsfalle dar. Eine Verlängerung der Transportstrecke (siehe Abschnitt 5.3) um 30 mm würde eine Verringerung des Koeffizienten B_2 um einen Faktor 15 bzw. des Koeffizienten B_1 um einen Faktor 7 bewirken.

5.3. Transport

Die in Abschnitt 2.6 vorgestellte Methode zur Bestimmung des g -Faktors mithilfe eines Doppel-Penningfallen-Aufbaus setzt voraus, dass der wiederholte Transport des einzelnen Protons zwischen den beiden Fallen verlustfrei erfolgt. In Abbildung 5.16 ist der Vorgang des Teilchentransports von der Präzisionsfalle in die Analysefalle veranschaulicht. Durch eine allmähliche Änderung der an die einzelnen Elektroden angelegten Spannungen kann das Minimum des elektrostatischen Potentials, und mithin das gespeicherte Proton, sukzessiv verschoben werden. Die 13 Zwischenstufen des Vorgangs mit entsprechenden Spannungsconfigurationen sind in Abbildung 5.16 gezeigt. Zwei Spannungsrampen werden in $\Delta t = 10$ s jeweils zwischen den Stufen simultan durchgeführt. Ausgehend von der Anfangskonfiguration werden zum Beispiel die Elektroden P_4 und P_2 den Spannungsänderungen $V_{P_4}(t) = -1,4T_R(10 - t)$ bzw. $V_{P_2}(t) = -14T_R - 1,4(1 - T_R)t$ zum Erreichen

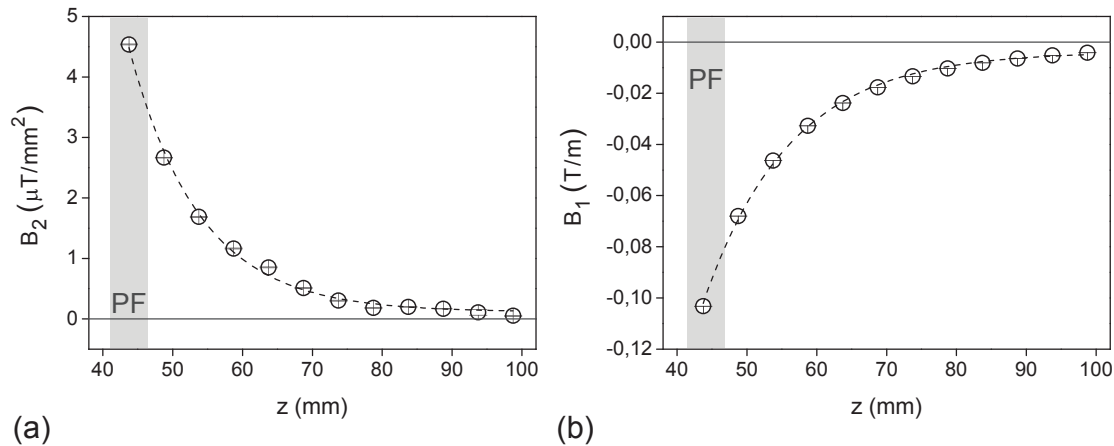


Abbildung 5.15.: Berechnete Koeffizienten B_2 (a) und B_1 (b) der inhomogenen Anteile des Magnetfeldes als Funktion des Abstandes zum Zentrum der Analysefalle. Die gekennzeichneten Bereiche stellen die jetzige Positionierung der Präzisionsfalle dar.

der nächsten Stufe ($V_{P_3} = -14$ V, $V_{P_2} = -14$ V) unterworfen. Die gesamte Transportdauer beträgt 120 s in eine Richtung. Mit dem in Abbildung 5.16 dargestellten Schema wird eine Effizienz von 100% beim Transport eines einzelnen Protons in das inhomogene Magnetfeld der Analysefalle und zurück in die Präzisionsfalle erreicht. Unter gewöhnlichen Umständen ist bei der einmaligen Durchführung dieses Verfahrens weder eine messbare Aufweitung des Zyklotron- noch des Magnetron-Bewegungsradius festzustellen. Bei mehrmaliger Wiederholung ist jedoch eventuell eine Kühlung des Magnetron-Freiheitsgrades erforderlich. Der Axial-Freiheitsgrad lässt sich durch Einstellen der jeweiligen Betriebsspannungen der Fallen (siehe Tabelle 3.1) innerhalb von maximal $3\tau_z^{PF} \approx 0,75$ s (siehe Tabelle 2.2) ins thermische Gleichgewicht mit dem Axial-Nachweisschwingkreis bringen.

Zur Verkürzung der Rampenzeit Δt ohne Verlust des Teilchens, ist eine durchdachte Auswahl der Zwischenstufen des Transportvorgangs zwingend. Eine Alternative zum in Abbildung 5.16 vorgestellten Transportschema besteht darin, die Tiefe des elektrostatischen Potentials bei einer auf 22 erhöhten Anzahl von Zwischenstufen und Rampenzeiten von jeweils $\Delta t = 1$ s durch geeignete Wahl der Spannungen an den Elektroden konstant zu halten. Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens wurde zwar mehrmals grundsätzlich nachgewiesen, dennoch wird eine ausführliche Untersuchung seiner Zuverlässigkeit benötigt.

Die Transportstrecke, deren Gesamtlänge 26,65 mm beträgt, setzt sich aus 6 Elektroden ($A_6, T_1 - T_5$) zusammen. Bei dieser Anordnung sind die Fallenzentren lediglich 43,74 mm voneinander entfernt, was dazu führt, dass eine magnetische Flasche der Stärke $B_2 = 4,538(7)$ $\mu\text{T}/\text{mm}^2$ am Ort der Präzisionsfalle vorhanden ist (siehe Abbildungen 5.15 und 5.16). Dieser Doppel-Fallen-Aufbau unterscheidet sich vom in Abbildung 5.17(a) gezeigten ursprünglichen System, bei welchem die Transportstrecke zwar auch aus 6 Elektroden ($T_1 - T_6$) bestand, allerdings mit einer Gesamtlänge von 52 mm. In dieser vorherigen Elektrodenanordnung betrug der Abstand zwischen den Fallenzentren

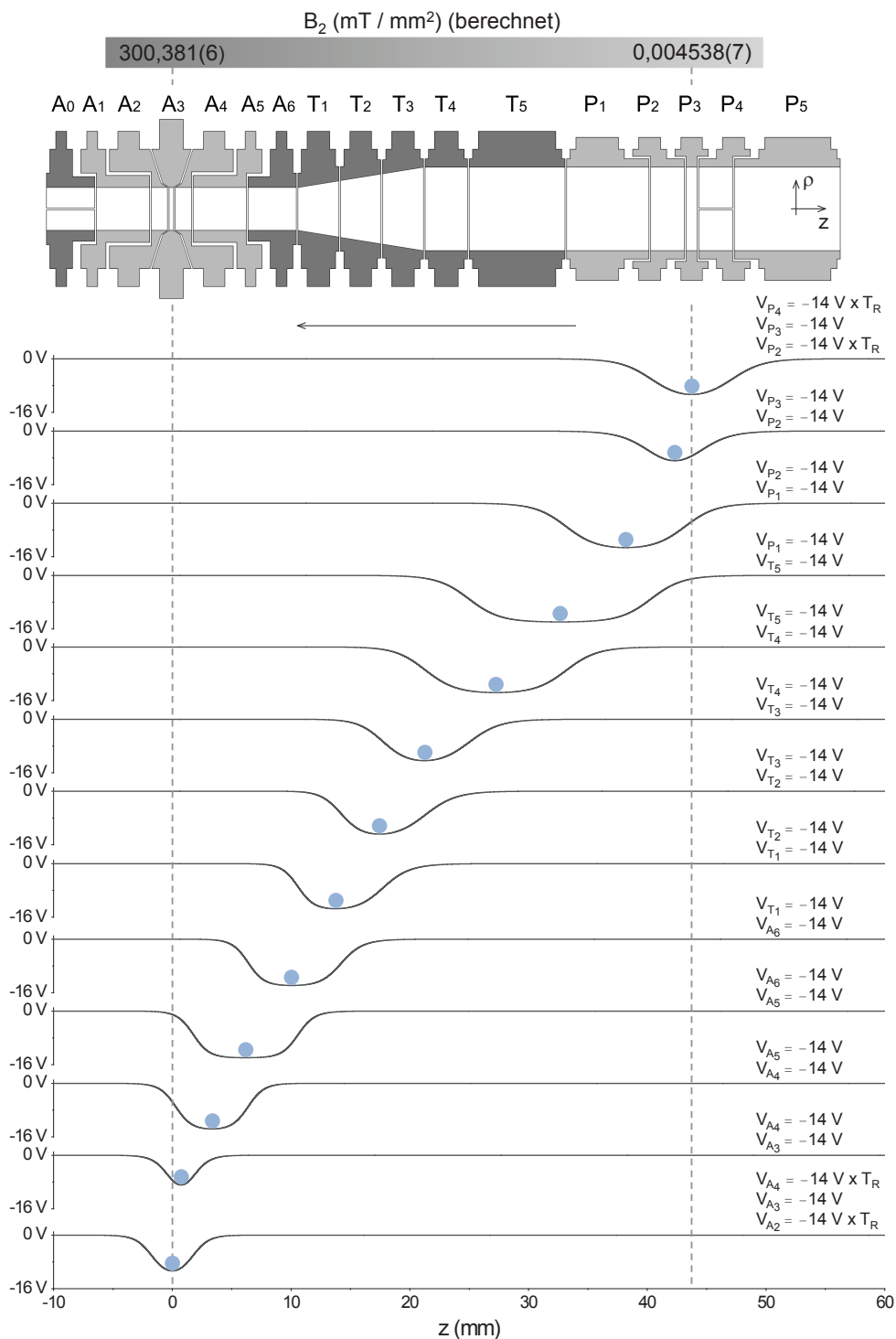


Abbildung 5.16.: Schematische Darstellung des Transportvorgangs im Doppel-Fallen-System. Durch eine allmähliche Änderung der an die einzelnen Elektroden angelegten Spannungen (siehe Auflistung rechts) wird das Minimum des elektrostatischen Potentials, und somit das gespeicherte Proton, sukzessiv verschoben. Der Übergang zwischen zwei aufeinander folgenden Stufen des Vorgangs erfolgt innerhalb von $\Delta t = 10$ s. Die Transportstrecke (Elektroden A₆, T₁ – T₅) hat eine Gesamtlänge von 26,65 mm und die Fallenzentren (Zentren der Elektroden A₃ und P₃) sind 43,74 mm voneinander entfernt. Die Stärke der magnetischen Flasche beträgt $B_2 = 4,538(7) \mu\text{T}/\text{mm}^2$ am Ort der Präzisionsfalle.

73,34 mm. Mit dem ehemaligen Hybrid-Analysefalle-Design [116, 131] (siehe Abbildung 5.17), mit welchem eine magnetische Flasche von $B_2 = 622,069(2)$ mT/mm² in der Analysefalle erzeugt werden konnte, betrug die Stärke der magnetischen Inhomogenität am Ort der Präzisionsfalle $B_2 = 0,354(7)$ μ T/mm². Nach unzähligen vergeblichen Versuchen, Teilchen in die Analysefalle über die in Abbildung 5.17(a) dargestellte Transportstrecke zu befördern, wurde diese entsprechend Abbildung 5.17(b) verändert. Ungeachtet der gewählten Transportparameter (Potentialtiefe, Rampenzeiten und Anzahl von Protonen) ist beim Übergang in den Streckenabschnitt mit kleinerem Durchmesser über die sich verjüngende Elektrode T_1 (mit $V_{A_i} = -V_i$, $V_{T_1} = -V_j$ und $V_{T_2} = 0$, $\forall V_i, V_j > 0$ in Abbildung 5.17(a)) ein vollständiger Verlust der Teilchen eingetreten. Die experimentellen Ergebnissen ließen darauf schließen, dass dieser auf eine Aufweitung des Magnetronradius in T_1 zurückzuführen war.

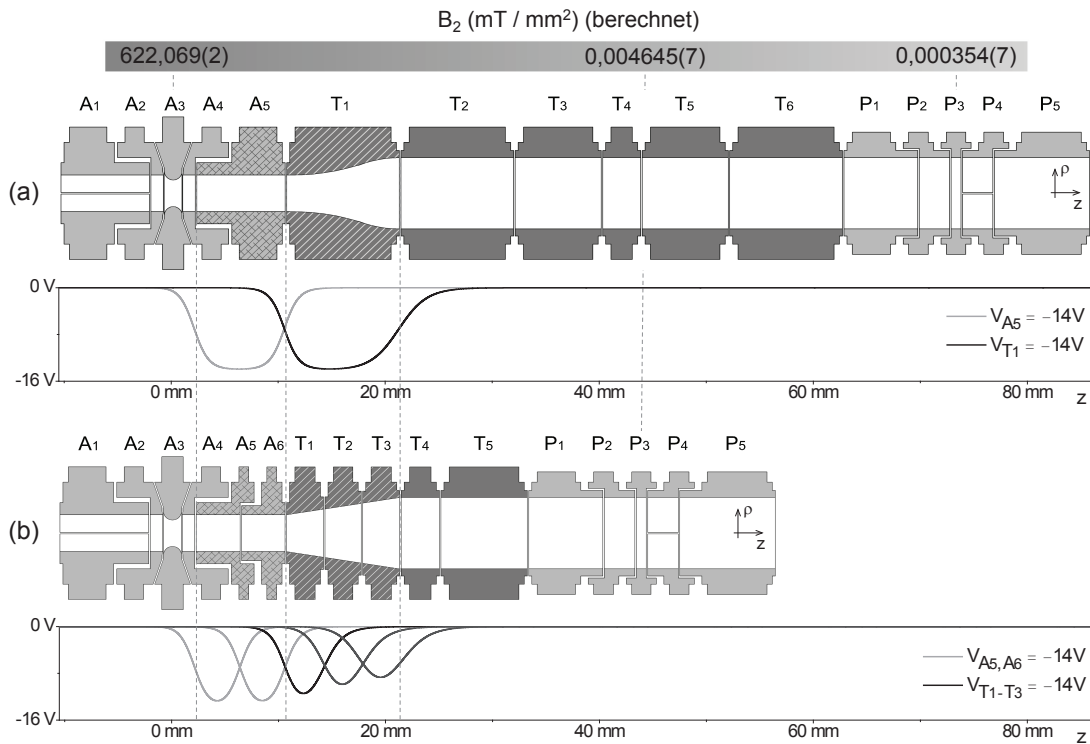


Abbildung 5.17.: Vergleich der Elektrodenanordnungen im Doppel-Fallen-System (a) vor und (b) nach der neuen Segmentierung der Transportstrecke. Die Elektroden T_1 und A_5 des ursprünglichen Entwurfs wurden jeweils durch mehrere kürzere Elektroden ersetzt. In der Beschichtung der Innenflächen dieser Elektroden waren gravierende Unregelmäßigkeiten festzustellen, die sich als möglicher Grund für den vollständigen Verlust der Teilchen beim Übergang in den Streckenabschnitt mit kleinerem Durchmesser ansehen lassen. Die neue Segmentierung ermöglicht obendrein eine besser kontrollierbare Einstellung der Transport-Potentiale. Zur Veranschaulichung werden die einzelnen Potentiale verglichen, die durch Anlegen einer Spannung von -14 V an der jeweiligen Elektrode generiert werden. Aufgrund der begrenzten Anzahl von Spannungskanälen des Präzisionsnetzteils musste die Transportstrecke verkürzt werden.

Ein analytisches Verständnis des effektiven Verlustmechanismus konnte anhand von *SIMION*[®]-Simulationsrechnungen nicht gewonnen werden, da sich die experimentellen Ergebnisse unter ausschließlicher Berücksichtigung der berechneten Felder nicht reproduzieren ließen. Unter der Annahme, dass infolge von eventuellen Unregelmäßigkeiten in der Beschichtung der Innenflächen der Elektroden das Teilchen beim Transport abrupten Potentialdifferenzen unterzogen worden sein könnte (siehe Abschnitt 3.2.1 und Anhang A), wurden die Elektroden T_1 und A_5 , wie in Abbildung 5.17 veranschaulicht, jeweils durch mehrere neu hergestellte, kürzere Elektroden ersetzt. Aufgrund der begrenzten Anzahl von Spannungskanälen des Präzisionsnetzteils (siehe Abschnitt 3.4.3) musste die Transportstrecke verkürzt werden. In Abbildung 5.17 sind die elektrostatischen Potentiale verglichen, welche von den einzelnen Elektroden bei gleicher angelegter Spannung generiert werden. Die neue Segmentierung der Transportstrecke ermöglichte eine besser kontrollierbare Einstellung der Potentiale und den erfolgreichen Transport von Protonen in die Analysefalle.

5.4. Messungen in der Analysefalle

Dieser Abschnitt widmet sich den experimentellen Verfahren zum Nachweis und zur Manipulation eines Protons im stark inhomogenen Magnetfeld der im Rahmen dieser Arbeit entworfenen Penning-Falle (siehe Abschnitt 4.2). Zunächst werden die durch die geometrischen bzw. elektrostatischen Eigenschaften der Falle in Kombination mit dem Vorhandensein einer magnetischen Flasche bedingten Herausforderungen diskutiert, welche selbst die anfängliche Einstellung der Betriebsparameter für die Beobachtung des Protonensignals im Rauschspektrum des Axial-Nachweissystems erschweren. Ferner werden die Messmethoden zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Flasche und der Temperatur des Teilchens [41] vorgestellt. Schließlich werden die Untersuchung der axialen Frequenzstabilität in der Analysefalle, die statistische Methode, welche die erstmalige Beobachtung von Spin-Übergängen eines einzelnen Protons ermöglichte [81], und die Bestimmung seines g -Faktors präsentiert [41].

5.4.1. Nachweis eines einzelnen Protons

Technische und physikalische herausfordernde Besonderheiten der Analysefalle

Trotz des in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Entwurfsverfahren zum theoretischen Erreichen von optimalen elektrostatischen Eigenschaften der Analysefalle, stehen insbesondere der anfänglichen experimentellen Anpassung der Betriebsparameter aufgrund der kleinen Fallendimensionen größere Schwierigkeiten als im Fall der Präzisionsfalle entgegen. Wie aus Abbildung 5.18 zu entnehmen, sind die Koeffizienten d_4 bzw. c_2 in der Analysefalle um circa einen Faktor 15 bzw. 4 größer als in der Präzisionsfalle, was zur Folge hat, dass der Koeffizient c_4 und die Axialfrequenz des Teilchens ν_z entsprechend Gleichungen

(2.86) und (2.88),

$$c_4 = e_4 + T_R d_4 \quad (5.13)$$

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e}{m} 2c_2 V_0} \quad , \quad (5.14)$$

stärker mit dem Spannungsverhältnis T_R bzw. mit der Ringspannung V_0 in der Analysefalle variieren. Das Auffinden des für die Eliminierung von c_4 geeigneten Spannungsverhältnisses $T_R^{C_4}$ und der Spannung $V_0 = V_{\text{res}}$, mit welcher die Teilchenschwingung sich in Resonanz mit dem Axial-Nachweisschwingkreis bringen lässt ($\nu_{z0} = \nu_{zr}$), wird also dadurch erschwert, dass diese Betriebsparameter, wie in Abbildung 5.18 skizziert, mindestens auf $\Delta T_R^{C_4} = \pm 5 \times 10^{-4}$ bzw. $\Delta V_{\text{res}} = \pm 2$ mV genau eingestellt werden müssen, damit sich das Protonensignal auf dem Rauschspektrum des Axial-Detektors innerhalb eines Frequenzbereiches von 1,6 kHz um die Resonanzfrequenz des Nachweisschwingkreises in einem Dip ausdrücken kann.

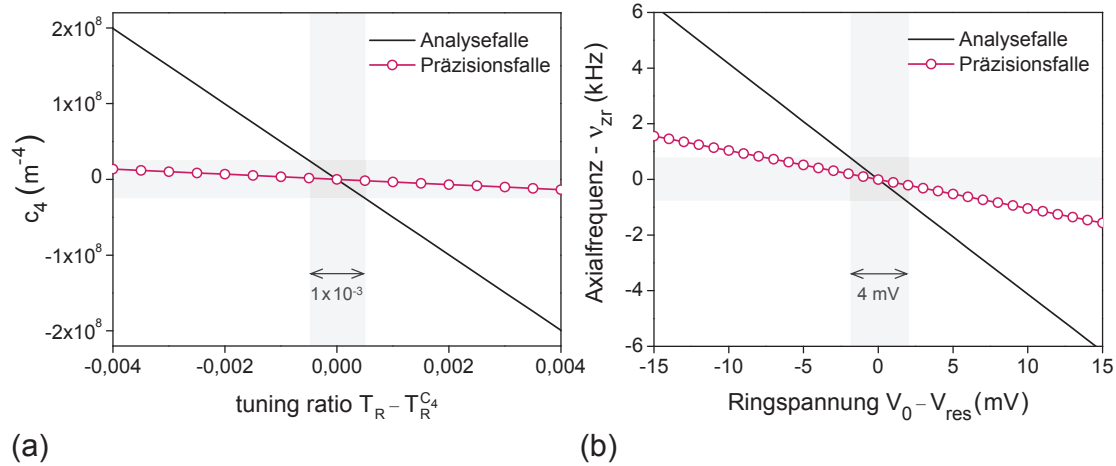


Abbildung 5.18.: Vergleich der elektrostatischen Eigenschaften der Präzisions- und Analysefalle. (a) Berechnete Werte des Koeffizienten $c_4 = e_4 + T_R d_4$ als Funktion von T_R . Das Spannungsverhältnis $T_R^{C_4}$ muss mindestens auf $\Delta T_R^{C_4} = \pm 5 \times 10^{-4}$ genau in der Analysefalle eingestellt werden, damit das Protonensignal in Form eines Minimums im Rauschspektrum des Axial-Detektors aufgelöst werden kann. (b) Axialfrequenz $\nu_z = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e}{m} 2V_0 c_2 \right)^{-1/2}$ als Funktion der Ringspannung V_0 . Zum Nachweis des Protonensignals innerhalb eines Frequenzbereiches von 1,6 kHz um die Resonanzfrequenz des axialen Nachweisschwingkreises muss die Ringspannung $V_0 = V_{\text{res}}$ auf zumindest $\Delta V_{\text{res}} = \pm 2$ mV genau in der Analysefalle eingestellt werden.

Darüber hinaus können, wie in Abschnitt 4.3 diskutiert, die an den Fallenelektroden angelegten Spannungen undefinierten Offsets von einigen hundert Millivolt unterliegen, was angesichts der berechneten geringen Betriebsspannung von $V_{\text{res}} = -0,814$ V (siehe Tabelle 4.3) zu äußerst unbestimmten experimentellen Anfangsbedingungen führen kann. In Abbildung 4.21 sind die Ergebnisse der Asymmetriekompensation des elektrostatischen Potentials präsentiert. Die dazugehörigen Betriebsparameter $T_R^{C_4}$ und V_0 für die jeweiligen Konfigurationen von Offsetspannungen ($O_{\text{ffA}1}, O_{\text{ffA}2} = -O_{\text{ffA}4}, O_{\text{ffA}3} = -90$ mV,

$O_{\text{ffA}5} = 0$ V) an den Fallenelektroden sind zur Veranschaulichung in Abbildung 5.19 gezeigt. Sind die Betriebsparameter für eine beliebige Kombination von Offsets erst einmal ermittelt, so lässt sich der gesamte Datensatz durch systematische Veränderungsschritte leicht gewinnen. Zum erstmaligen Auffinden von T_R^{C4} und $V_0 = V_{\text{res}}$ ist allerdings der in Abbildung 5.19 dargestellte ausgedehnte Wertebereich zu berücksichtigen.

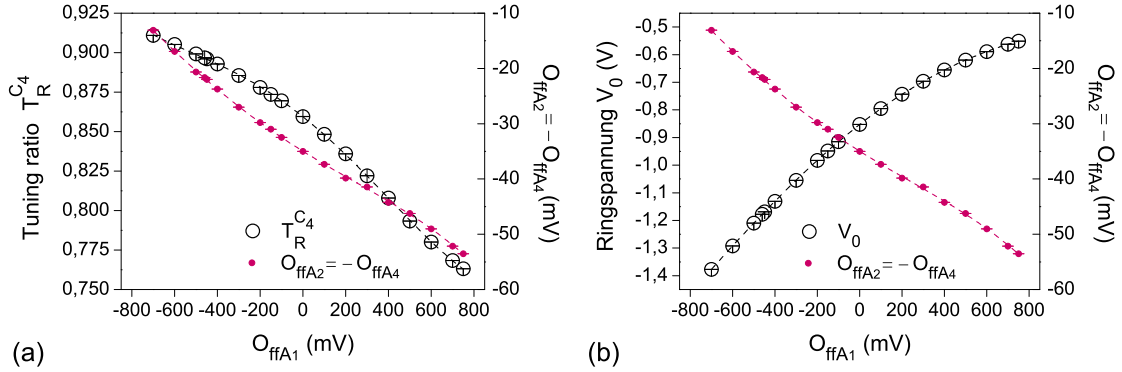


Abbildung 5.19.: Betriebsparameter (a) T_R^{C4} und (b) $V_0 = V_{\text{res}}$ für verschiedene Konfigurationen von Offsetspannungen ($O_{\text{ffA}1}$, $O_{\text{ffA}2} = -O_{\text{ffA}4}$, $O_{\text{ffA}3} = -90$ mV, $O_{\text{ffA}5} = 0$ V) an den Fallenelektroden. Das Vorhandensein von undefinierten Offsets kann zu äußerst unbestimmten experimentellen Anfangsbedingungen führen und somit das erstmalige Auffinden von T_R^{C4} und $V_0 = V_{\text{res}}$ beträchtlich erschweren.

Zusätzlich zu den oben genannten technischen Aspekten ruft die starke magnetische Flasche weitere experimentellen Schwierigkeiten in der Analysefalle hervor. Wie in Abschnitt 2.2.2 diskutiert, unterliegen die Eigenfrequenzen des Protons energieabhängigen Verschiebungen im inhomogenen Magnetfeld. Gemäß Gleichung (2.60) gilt

$$\frac{\Delta\nu_z}{(E_+ - E_-)} = \frac{B_2}{B_0} \frac{1}{4\pi^2 m_p \nu_z} = 5,7(2) \times 10^{24} \frac{\text{Hz}}{\text{J}} = 0,91(3) \frac{\text{Hz}}{\mu\text{eV}} = 79(3) \frac{\text{Hz}}{\text{K}} \quad (5.15)$$

für die Axialfrequenz ν_z . Demnach kann die axiale Frequenzstabilität bereits durch geringe Schwankungen in den Energien der radialen Bewegungen E_+ und E_- beeinträchtigt werden (siehe auch Abschnitt 5.4.4). Aufgrund dieser Tatsache wird auf eine direkte Verbindung des Zyklotron-Resonators mit der Analysefalle verzichtet. Dadurch, dass das Proton jedoch im thermischen Kontakt mit dem Zyklotron-Nachweissystem in der Präzisionsfalle präpariert wird, gehorcht seine Zyklotronenergie einer Boltzmann-Verteilung. Nach jedem Transportvorgang sind folglich die Betriebsparameter $V_0 = V_{\text{res}}$ sowie auch T_R^{C4} in der Analysefalle an E_+ anzupassen. Unter optimalen Bedingungen und ohne äußeren Einfluss⁴ sollte die Magnetronenergie E_- hingegen konstant bleiben. Um die Axialfrequenz $\nu_{z0}(V_{\text{res}}, E_+)$ eines aus der Präzisionsfalle in die Analysefalle transportierten Teilchens auf die Resonanzfrequenz des Axial-Detektors ν_{zT} abzustimmen, ist also

⁴Mittels Seitenbandkopplung lässt sich, wie in Abschnitten 2.4.1, 5.2.3 und 5.4.3 beschrieben, die Energie der Magnetronbewegung sowohl erhöhen als auch verringern.

die Ringspannung $V_0 = V_{\text{res}}$ entsprechend

$$\nu_{zr} = \nu_{z0}(V_{\text{res}}, E_+) \Rightarrow \nu_{zr} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e}{m} 2c_2 V_{\text{res}} + \Delta\nu_z(E_+)} \quad (5.16)$$

einzustellen. Eine höhere Zyklotronenergie E_+ führt zu einem niedrigeren Betrag der anzupassenden Ringspannung $|V_{\text{res}}|$. In Abbildung 5.20 ist die Ausdehnung des in der Analysefalle resultierenden Wertebereichs der Axialfrequenz des Teilchens für zwei verschiedenen effektiven Temperaturen $T_+ = \langle E_+ \rangle / k_B$ des an die Präzisionsfalle angeschlossenen Zyklotron-Nachweissystems gezeigt. Dabei wurde die Ringspannung $V_0 = V_{\text{res}}$ nach mehreren nacheinander folgenden Transportvorgängen jeweils im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle ermittelt. Die Frequenzverschiebungen $\Delta\nu_z$ lassen sich unter Verwendung des in einer unabhängigen Messung bestimmten Verhältnisses

$$\left(\frac{\partial \nu_z}{\partial V_0} \right)_{\text{AF}} = -488(53) \frac{\text{kHz}}{\text{V}} \quad (5.17)$$

aus den gemessenen Spannungen berechnen und in einem Histogramm darstellen. Die dazugehörigen mit Hilfe von Gleichung (5.15) bestimmten Zyklotronenergien $E_+(\Delta\nu_z)$ sind ebenfalls gezeigt. Wie aus Abbildung 5.20 ersichtlich, spiegelt die axiale Frequenzverteilung in der Analysefalle die Boltzmann-Verteilung der Zyklotronenergie wider. Unter Anwendung des in Abschnitt 2.3.4 beschriebenen Verfahrens des elektronischen Feedbacks lässt sich die effektive Zyklotron-Temperatur und mithin der abzudeckende Wertebereich der Axialfrequenz in der Analysefalle von circa 4 kHz (Abbildung 5.20(a)) auf circa 1,6 kHz (Abbildung 5.20(b)) herabsetzen.

Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle ist, wie in Abschnitt 2.5.2 diskutiert, nicht nur die axiale Frequenz sondern auch das optimale Spannungsverhältnis $T_R^{C_4}$ von der radialen Energie abhängig. Diese Abhängigkeit kommt entsprechend Gleichung (2.147)

$$c_4^{\text{M}} = eV_0(e_4 + T_R d_4) - \left(-\frac{e}{m_p} \frac{(E_+ - E_-)}{(\omega_+ - \omega_-)} + \frac{ge}{2m_p} \hbar m_s \right) B_4 \quad (5.18)$$

durch einen von Null verschiedenen Koeffizient $B_4 \neq 0$ zustande. Das Spannungsverhältnis $T_R^{C_4}$, mit welchem die Bedingung $c_4^{\text{M}} = 0$ erfüllt wird, lässt sich also nun durch

$$T_R^{C_4} = -\frac{e_4}{d_4} + \left(-\frac{e}{m_p} \frac{(E_+ - E_-)}{(\omega_+ - \omega_-)} + \frac{ge}{2m_p} \hbar m_s \right) \frac{B_4}{eV_0 d_4} \quad (5.19)$$

beschreiben, und folglich gilt

$$\frac{\partial T_R^{C_4}}{\partial E_+} = -\frac{e}{m_p} \frac{1}{(\omega_+ - \omega_-)} \frac{B_4}{(eV_0 d_4)} \quad (5.20)$$

In Abbildung 5.21 ist die experimentelle Beobachtung dieser Abhängigkeit des optimalen Spannungsverhältnisses $T_R^{C_4}$ von der Zyklotronenergie des Teilchens für zwei verschiedene Sätze von Offsetspannungen ($O_{\text{ffA}1}, O_{\text{ffA}2} = -O_{\text{ffA}4}, O_{\text{ffA}3} = -90 \text{ mV}, O_{\text{ffA}5} = 0 \text{ V}$)

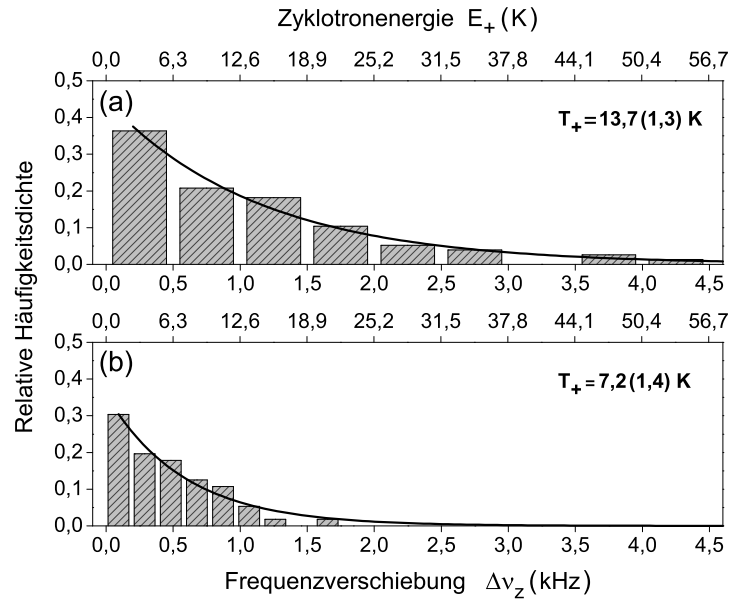


Abbildung 5.20.: Axiale Frequenzverteilung eines aus der Präzisionsfalle in die Analysefalle wiederholt transportierten Protons. Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle ist die Axialfrequenz des Teilchens von seiner Zyklotronenergie abhängig. Die gemessene Verteilung widerspiegelt die Boltzmann-Verteilung der Zyklotronenergie im Fall (a) ohne die Anwendung von elektronischem Feedback und (b) unter Anwendung von negativem Feedback zur Reduktion der effektiven Zyklotron-Temperatur T_+ .

an den Fallenelektroden gezeigt. Jede Konfiguration von Offsets entspricht einer unterschiedlichen Position entlang der axialen Richtung. In Folge der magnetischen Flasche erfährt, wie in Abbildung 5.25 dargestellt, das Teilchen in jeder Position ein anderes Magnetfeld und führt dementsprechend die modifizierte Zyklotronbewegung mit jeweils verschiedenen Frequenzen ν_+ aus. Aus der Anpassung der gemessenen Daten lässt sich die Größe $\partial T_R^{C4} / \partial V_{\text{res}}$ jeweils ermitteln, woraus wiederum $\partial T_R^{C4} / \partial E_+$ unter Verwendung der Beziehungen (5.17) bzw. (5.15) bestimmt werden kann. Hieraus ist der Koeffizient B_4 gemäß Gleichung (5.20) zu berechnen. Dieser beträgt $B_4 = -66,8(7,6) \text{ mT/mm}^4$ für den in Abbildung 5.21(a) bzw. $B_4 = -61,6(8,4) \text{ mT/mm}^4$ für den in Abbildung 5.21(b) dargestellten Fall. Diese experimentell ermittelten Werte stimmen mit dem numerisch berechneten Wert von $B_4^{\text{theo}} = -67,6924(18) \text{ mT/mm}^4$ überein, welcher nach der in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Methode für die gewählte Geometrie der Analysefalle zu erwarten ist.

Verfahren zum Auffinden des Protonsignals bei unbekanntem Anfangsbedingungen

Die vollständige Charakterisierung der Analysefalle ist Voraussetzung für die erfolgreiche Realisierung des auf einem Doppel-Fallen-System beruhenden Verfahrens zur Bestimmung des g -Faktors eines Protons. Die experimentellen Methoden zur Optimierung des elektrostatischen Potentials (Abschnitt 4.3), zur Bestimmung der magnetischen Flasche

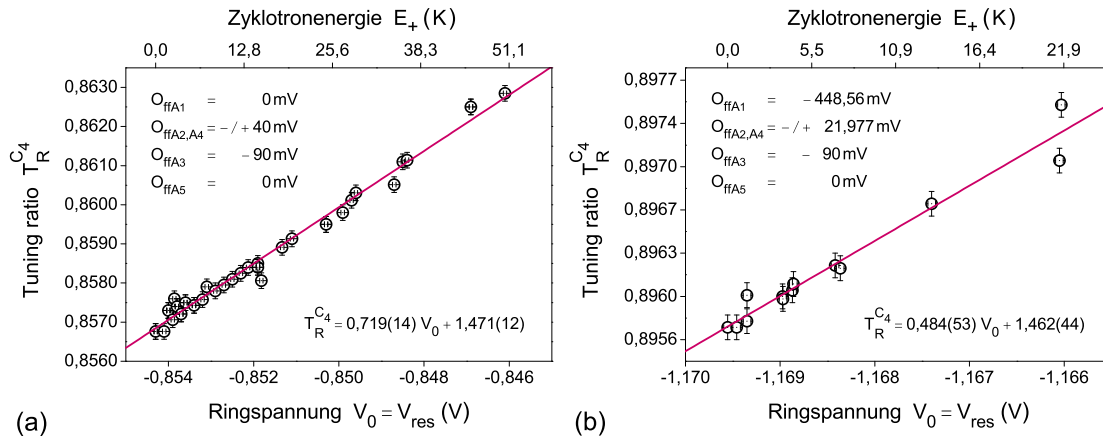


Abbildung 5.21.: Veranschaulichung der Abhängigkeit des optimalen Spannungsverhältnisses T_R^{C4} von der Zyklotronenergie des Teilchens in der Analysefalle für zwei verschiedene Sätze von Offsetspannungen (O_{ffA1} , $O_{ffA2} = -O_{ffA4}$, $O_{ffA3} = -90\text{ mV}$, $O_{ffA5} = 0\text{ V}$) an den Fallenelektroden. Diese Abhängigkeit ist auf einen von Null verschiedenen Koeffizient $B_4 \neq 0$ zurückzuführen, welcher sich aus den gemessenen Daten zu (a) $B_4 = -66,8(7,6)\text{ mT/mm}^4$ bzw. (b) $B_4 = -61,6(8,4)\text{ mT/mm}^4$ ermitteln lässt. Für Details siehe Text.

(Abschnitt 5.4.2), zu den Temperaturmessungen (Abschnitt 5.4.3) und zum Nachweis von Spin-Übergängen eines Teilchens (Abschnitt 5.4.5) benötigen die Signatur eines einzelnen Protons im Rauschspektrum des Axial-Nachweissystems, den Protondip. Wie zuvor diskutiert, ist es für wahrscheinlich zu halten, dass das erste Aufsuchen der passenden Betriebsparameter in der Analysefalle durch weitgehend undefinierte Anfangsbedingungen erschwert wird. Aufgrund der Boltzmann-Verteilung der Zyklotronenergie ist eine Streuung der Betriebsspannung $V_0 = V_{res}$ und des optimalen Spannungsverhältnisses T_R^{C4} über einen Wertebereich von bis zu $\Delta V_{res} = 8,2\text{ mHz}$ bzw. $\Delta T_R^{C4} = 6,1\text{ mUnit}_{TR}$ vorstellbar (siehe Abbildung 5.21). Ferner ist selbst bei gleichbleibender Zyklotronenergie infolge von eventuellen Offsetspannungen an den Fallenelektroden mit einer maßgeblichen Abweichung zwischen berechneten und tatsächlichen Werten der Betriebsparameter zu rechnen (vergleiche Tabelle 4.3 und Abbildung 5.19). Darüber hinaus lässt sich das Signal eines Protons erst bei genauer Einstellung von V_{res} und T_R^{C4} (siehe Abbildung 5.18) in Form eines Dips in der Analysefalle nachweisen.

Zur Eingrenzung der Wertebereiche der Betriebsparameter eignet sich zunächst die Aufnahme eines Massenspektrums (siehe Abschnitt 5.1.1) einer Protonen-Wolke in der Analysefalle. Die Protonen werden in der Präzisionsfalle präpariert. Dabei werden die Energien des Zyklotron- und Magnetron-Freiheitsgrades mittels Widerstandskühlen bzw. Seitenbandkühlung minimiert. Zur Veranschaulichung sind zwei solcher Massenspektren einer aus sechs bzw. sieben Teilchen bestehenden Wolke für unterschiedliche Werte von T_R in Abbildung 5.22 gezeigt. Die Spannungsrampe wird von $V_0 = -2\text{ V}$ auf $V_0 = -0,5\text{ V}$ durchgeführt, sodass die Teilchen mit niedrigeren Energien als erste der Anregung unterzogen und in Resonanz mit dem Axial-Nachweissystem gebracht werden. Der in Ab-

bildung 5.22 gekennzeichnete Spannungsbereich entspricht dem Wertebereich der gesuchten an die Ringelektrode anzulegenden Spannung V_{res} . Mit diesem Verfahren lässt sich die Betriebsspannung auf $\Delta V_0 \approx 50$ mHz eingrenzen (vergleiche Abbildung 5.19(b)). Im Gegensatz dazu können Protonen-Signale in einem ausgedehnten Wertebereich des Spannungsverhältnisses T_R von bis zu $\Delta T_R \approx 120$ mUnit $_{\text{TR}}$ mit dieser Methode nachgewiesen werden.

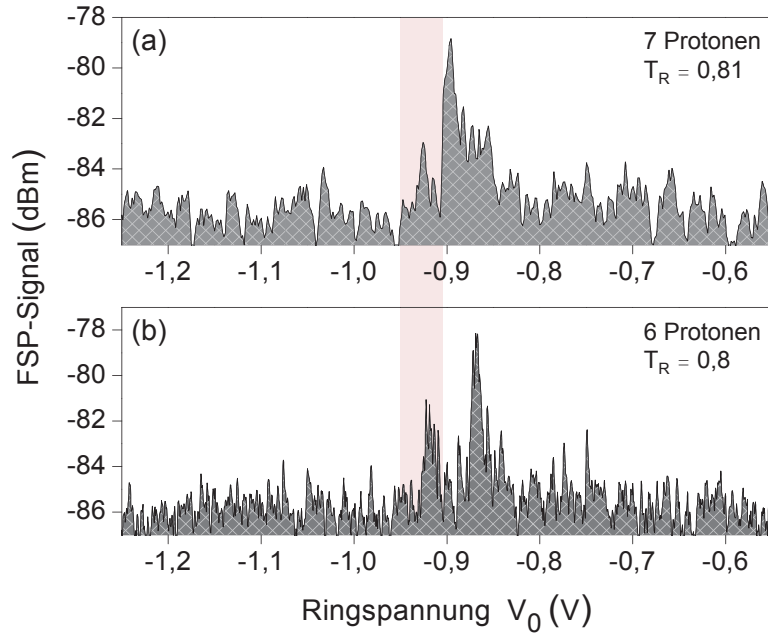


Abbildung 5.22.: Beispiele von Massenspektren einer aus (a) sieben und (b) sechs Protonen bestehenden Wolke für zwei unterschiedliche Werte des Spannungsverhältnisses T_R in der Analysefalle. Der gekennzeichnete Bereich ergibt sich aus zahlreichen Spektren in einem T_R -Bereich von $\Delta T_R \approx 120$ mUnit $_{\text{TR}}$ und stellt den Wertebereich der gesuchten Ringspannung V_{res} dar, mit welcher ein Proton, dessen radiale Freiheitsgrade gekühlt sind, sich in Resonanz mit dem Axial-Nachweisschwingkreis bringen lässt. Mit diesem Verfahren kann die Betriebsspannung zunächst auf $\Delta V_0 \approx 50$ mHz eingegrenzt werden.

Die genauere Bestimmung der Betriebsparameter der Analysefalle erfolgt unter Ausnutzung des Phänomens der parametrischen Resonanz [144–146], dessen Auftreten mit einem einzelnen Proton untersucht wird. Parametrische Resonanz zeichnet sich dadurch aus, dass einem schwingenden System Energie durch eine periodische Änderung seiner Parameter zugeführt wird. Im einfachsten Fall lässt sich die Bewegungsgleichung eines solchen Systems durch [144]

$$\ddot{z} + \omega^2(t)z = 0 \quad \text{mit} \quad \omega(t + T) = \omega(t) \quad (5.21)$$

beschreiben, wobei $T = 2\pi/\omega_a$ die Periode und ω_a die Frequenz des sich ändernden Parameters $\omega(t)$ sind. Das Auftreten einer parametrischen Resonanz ist auf eine instabile Ruhelage des Systems zurückzuführen, das heißt, auf die Existenz einer Lösung

der Gleichung (5.21), welche eine zeitliche durch eine schwache Störung der Ruhelage hervorgerufene exponentiell anwachsende Amplitude darstellt. Die von einer konstanten Funktion lediglich geringfügig abweichende Funktion $\omega(t)$ kann durch

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_a t)] \quad \text{mit} \quad h \ll 1 \quad , \quad (5.22)$$

gegeben werden, wobei ω_0 für die Eigenfrequenz des ungestörten Systems steht. Gleichung (5.21) stellt unter Berücksichtigung der Beziehung (5.22) eine sogenannte *Mathieusche Differentialgleichung* dar [147, 148]. Ist die Frequenz der Variation des Parameters $\omega(t)$ näherungsweise gleich der doppelten Eigenfrequenz ω_0 ,

$$\omega_a = 2\omega_0 + \epsilon \quad \text{mit} \quad \epsilon \ll 1 \quad , \quad (5.23)$$

so tritt die parametrische Resonanz am stärksten auf. Der Bereich der Instabilität der Gleichung (5.21) wird durch die Bedingung [144]

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \epsilon < \frac{h\omega_0}{2} \quad (5.24)$$

definiert.

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Verwendung einer parametrischen Anregung der axialen Schwingung eines Protons basiert auf den Schlussfolgerungen der in [145, 146] dargelegten Untersuchungen mit einer Wolke von in einer Penning-Falle gespeicherten Elektronen. Durch Anlegen einer elektrischen Wechselspannung mit einer Frequenz von $\omega_a \approx 2\omega_z$ zwischen der Ring- und der Korrekturolektrode A_2 (siehe Abbildung 3.8) wird eine Modulation des elektrostatischen Potentials der Falle, $V_0 \rightarrow V(t) = V_0 [1 + h \cos(\omega_a t)]$, hervorgerufen. Die Bewegungsgleichung (2.106) des aus einem Proton in Wechselwirkung mit dem Axial-Detektor bestehenden Systems unter zusätzlicher Berücksichtigung von anharmonischen Potentialanteile lässt sich nun zu [145, 146]

$$\ddot{z} + \gamma_z \dot{z} + \omega_z^2 [1 + h \cos(\omega_a t)] z + \alpha_{c_4} \omega_z^2 z^3 + \alpha_{c_6} \omega_z^2 z^5 = 0 \quad (5.25)$$

umschreiben, wobei $\alpha_{c_4} \propto c_4$ bzw. $\alpha_{c_6} \propto c_6$ und h die Anregungsamplitude sind. Die ungedämpfte Schwingung ($\gamma_z = 0$) eines in einem reinen Quadrupolpotential ($\alpha_{c_4} = \alpha_{c_6} = 0$) gespeicherten Teilchens gehorcht der Mathieuschen Differentialgleichung (5.21). In diesem Fall gälte für schwache Anregungen ($h \ll 1$) die Bedingung (5.24) und bei einer Anregungsfrequenz nahe $2\omega_z$ würde die Amplitude jeder beliebig kleinen Schwingung exponentiell und unbegrenzt steigen. In einer realen Penning-Falle führen elektrostatische Anharmonizitäten jedoch zu amplitudenabhängigen Verschiebungen der Schwingungsfrequenz des Teilchens (siehe Gleichungen (2.45) bzw. (2.52)), was den raschen Anstieg der Bewegungsamplitude beim Auftreten parametrischer Resonanz bremst und periodische Amplitudenschwankungen bewirkt [145]. Ferner konkurriert die Erhöhung der Amplitude mit dem Leistungsverlust am ohmschen Widerstand des Axial-Nachweisschwingkreises.

Somit wird bei der parametrisch angeregten gedämpften Schwingung eine stationäre Amplitude erreicht. Der Bereich der Instabilität wird nun durch [145]

$$-\frac{1}{2}\omega_z\sqrt{h^2 - h_g^2} < \epsilon < \frac{1}{2}\omega_z\sqrt{h^2 - h_g^2} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \omega_a - 2\omega_z \quad (5.26)$$

gegeben, wobei $h_g \equiv 2\gamma_z/\omega_z$ ein Schwellenwert der Anregungsamplitude ist, unterhalb dessen die parametrische Resonanz nicht auftritt. Die Breite des Resonanzbereiches wird also durch die Amplitude h bestimmt.

In Anbetracht dieser Eigenschaften wird zur Bestimmung der Betriebsparameter der Analysefalle das einzelne Proton einer parametrischen Anregung mit einer mäßigen Amplitude $h_g < h < 3h_g$ [69] und einer Frequenz $\omega_a = 2\omega_{zr}$ unterzogen, wobei ω_{zr} die Resonanzfrequenz des Axial-Nachweisschwingkreises ist. In einer *LabVIEW*-gesteuerten Messroutine werden die eingegrenzten Wertebereiche der Ringspannung V_0 und des Spannungsverhältnisses T_R in Schritten von $\Delta V_0 = 500\mu\text{V}$ bzw. $\Delta T_R = 1 \text{ mUnit}_{\text{TR}}$ abgetastet. Die Routine wird im *precision mode* des Präzisionsnetzteils durchgeführt und angehalten, sobald ein Peak im Rauschspektrum des Axial-Resonators nachgewiesen wird. Eventuell wird eine feine Optimierung zusätzlich manuell durchgeführt. In Abbildung 5.23(a) sind das Signal eines parametrisch angeregten Protons und der nach Ausschalten der Anregung entstandene Protodip gegenübergestellt. In Abbildung 5.23(b) ist das nach Durchführung des in Abschnitt 4.3 vorgestellten Optimierungsverfahrens erhaltene Protonensignal gezeigt. Bei einer gemessenen Resonatorgüte von $Q = 3868(70)$ und der Resonanzfrequenz von $\nu_{z0} = 674400,350(18)$ Hz beträgt die Breite des Dips in der Analysefalle $\Delta\nu_0 = 3,18(28)$ Hz, was gemäß Gleichung (2.113) einer Kühlzeitkonstante von $\tau_z = 1/(2\pi\Delta\nu_0) = 0,0501(44)$ s entspricht. Diese Werte stimmten mit den unter Annahme der in Tabelle 2.2 aufgelisteten Parameter berechneten Werten von $\Delta\nu_0 = 3,42(10)$ Hz bzw. $\tau_z = 0,0465(14)$ s gut überein.

5.4.2. Bestimmung der magnetischen Flasche

Der Magnetfeldverlauf entlang der axialen Richtung der Analysefalle und der Koeffizient B_2 der magnetischen Flasche lassen sich experimentell bestimmen. Über die freie Zyklotronfrequenz des einzelnen Protons kann das Magnetfeld gemäß Gleichung (2.6), $B = (m_p/e)\omega_c$, an verschiedenen Positionen auf der z -Achse der Falle ermittelt werden. Hierzu wird das Proton durch Anlegen antisymmetrischer Offsetspannungen an den Endkappen bzw. Korrektorelektroden verschoben. Mittels der in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Methode lässt sich die Verschiebung für einen gegebenen Satz von Offsets numerisch berechnen. An jeder Position werden die Eigenfrequenzen des Teilchens ν_z , ν_- und ν_+ gemessen und die freie Zyklotronfrequenz ν_c mithilfe des Invarianztheorems (2.64) bestimmt. Die Magnetronfrequenz ν_- muss in der Praxis lediglich an einer einzigen Position ermittelt werden, da die erwartete Frequenzvariation $\Delta\nu_- \approx 324$ Hz mit der Magnetfeldänderung im Vergleich zur entsprechenden Frequenzvariation $\Delta\nu_+ \approx 0,4$ MHz in einem

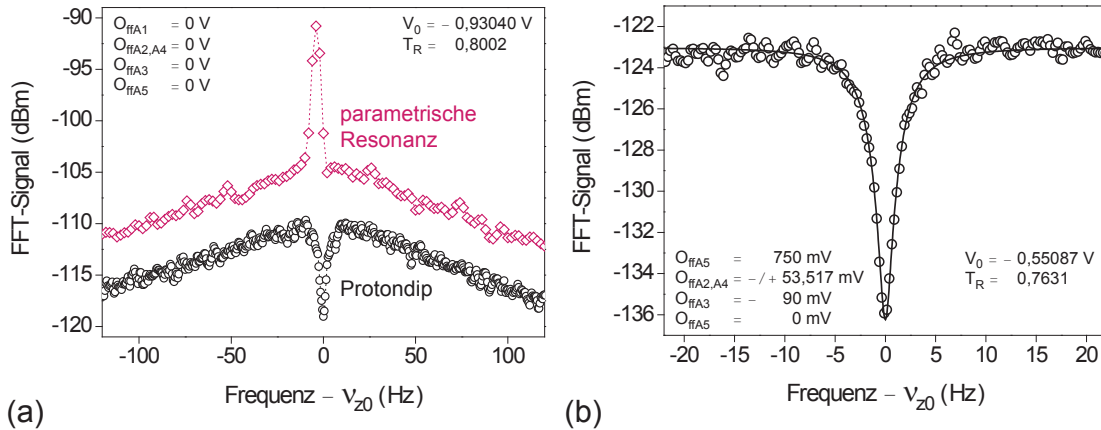


Abbildung 5.23.: Auffinden der Signatur eines einzelnen Protons im Rauschspektrum des Axial-Nachweissystems (“Dip”) mithilfe der parametrischen Resonanz. (a) Eine elektrische Wechselspannung mit einer Frequenz von $\omega_a = 2\omega_{zr}$ wird zwischen Ring- und Korrekturolektrode der Analysefalle angelegt. Die Wertebereiche der Ringspannung V_0 und des Spannungsverhältnisses T_R werden in Schritten von $\Delta V_0 = 500 \mu\text{V}$ bzw. $\Delta T_R = 1 \text{ mUnit}_{TR}$ verändert. Kommt das Proton in Resonanz mit dem Nachweissystem ($\omega_{z0} = \omega_{zr}$), so wird seiner axialen Schwingung Energie aufgrund der durch die Wechselspannung hervorgerufenen periodischen Änderung des Parameters $\omega_z^2 \rightarrow \omega_z^2 [1 + h \cos(\omega_a t)]$ zugeführt. In einer realen Penning-Falle wird bei der parametrisch angeregten gedämpften Schwingung eine stationäre Amplitude erreicht. Wird die Anregung ausgeschaltet, so lässt sich das Protonensignal als ein Minimum im Rauschspektrum nachweisen. (b) Protodip nach Durchführung des Verfahrens zur Optimierung des elektrostatischen Potentials. Aus der Anpassung der theoretischen Linienform (durchgezogene Linie, siehe Gleichung (2.111)) an das gemessene Rauschspektrum (leere Kreise) lässt sich die Axialfrequenz mit hoher Genauigkeit sowie die Breite des Dips ermitteln.

Bereich von $\Delta z = \pm 0,3 \text{ mm}$ um das Fallenzentrum (siehe Abbildung 5.25) vernachlässigbar ist (vergleiche Gleichungen (2.26) und (2.25)).

Die Messung der radialen Eigenfrequenzen erfolgt durch eine direkte Anregung des entsprechenden Freiheitsgrades mittels eines Hochfrequenzsignals (ein Burst-Signal mit 1000 Zyklen bei $\nu_+ \approx 18 \text{ MHz}$ bzw. $\nu_- \approx 13 \text{ kHz}$), welches an die radial segmentierte Elektrode A_0 der Analysefalle oder alternativ an die Spinflip-Spule (siehe Abbildung 3.8) angelegt wird. Stimmt die Anregungsfrequenz mit der jeweiligen radialen Bewegungsfrequenz überein, so wird Energie absorbiert. Die Erhöhung der radialen Energie führt wiederum zu einer Verschiebung der Axialfrequenz gemäß Gleichung (2.60) in der magnetischen Flasche. In Abbildung 5.24 ist dieses Verfahren zur Bestimmung der modifizierten Zyklotronfrequenz ν_+ an einer gegebenen Position auf der z -Achse der Analysefalle veranschaulicht. Dabei wird die Anregungsfrequenz in Schritten von 3 kHz variiert. Nach jedem Anregungspuls wird das axiale Frequenzspektrum über eine FFT-Mittelungszeit von $\Delta T = 60 \text{ s}$ gemittelt. Die gemessenen Axialfrequenzen sind als Funktion der Anregungsfrequenz in Abbildung 5.24(a) aufgetragen. Der abrupte Frequenzsprung deutet auf Energieabsorption im gekennzeichneten Frequenzbereich hin. Zur Bestimmung von ν_+ wird der Betrag der Differenz zwischen zwei nacheinander folgenden Frequenzmessungen

$|\nu_z^i - \nu_z^{i-1}|$ berechnet und gegen die Anregungsfrequenz aufgetragen (siehe Abbildung 5.24(b)). Diese Daten werden anschließend mittels einer Gaußfunktion angepasst, aus deren Maximalwert die modifizierte Zyklotronfrequenz abgelesen wird, wohingegen die Standardabweichung als Messfehler angenommen wird. Bei dieser Art der Auswertung wird die tatsächliche Linienform der Zyklotronresonanz, in welcher sich die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie widerspiegelt (siehe Abschnitt 2.5.2 und [53, 80, 121]), zwar nicht in Erwägung gezogen, jedoch ist dieses Verfahren trotz konservativ geschätzter Messfehler zur Bestimmung der magnetischen Flasche präzise genug. An jeder Position wird dieser Vorgang zur Messung der modifizierten Zyklotronfrequenz mindestens für zwei verschiedenen Anregungsamplituden wiederholt und der Mittelwert der Ergebnisse berechnet. Um die Linienbreite der Zyklotronresonanz zu verringern wird die axiale Temperatur des Teilchens durch Anwendung von elektronischem Feedback (siehe Abschnitte 2.3.4 und 5.4.3) während der Messung herabgesetzt.

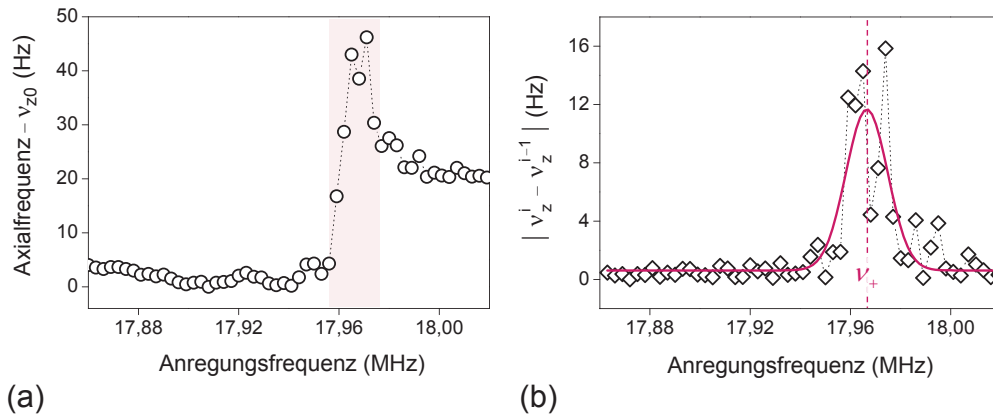


Abbildung 5.24.: Ermittlung der modifizierten Zyklotronfrequenz in der Analysefalle zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Flasche. (a) Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle ist die Axialfrequenz von den radialen Energien abhängig. Stimmt die Anregungsfrequenz mit der modifizierten Zyklotronfrequenz überein, so wird Energie absorbiert, was sich dann in einer abrupten Verschiebung der Axialfrequenz (gekennzeichnete Bereich) widerspiegelt. (b) Die modifizierte Zyklotronfrequenz wird der Anpassung einer Gaußfunktion an den Betrag der Differenz zwischen zwei nacheinander folgenden Frequenzmessungen $|\nu_z^i - \nu_z^{i-1}|$ als Funktion der Anregungsfrequenz entnommen. Obwohl die tatsächliche Linienform der Zyklotronresonanz bei der Auswertung nicht berücksichtigt wird, ist dieses Verfahren zur Bestimmung der magnetischen Flasche präzise genug.

Die Bestimmung der Magnetronfrequenz erfolgt mithilfe der gleichen oben beschriebenen Methode und wird ausschließlich im Zentrum der Analysefalle durchgeführt. Der ermittelte Wert von $\nu_- = 12,90(33)$ kHz wird zur Berechnung der freien Zyklotronfrequenz ν_c an den unterschiedlichen Positionen entlang der Magnetfeldachse eingesetzt. In Abbildung 5.25 ist der gemessene Magnetfeldverlauf dargestellt. Der Koeffizient $B_2 = 297(10)$ mT/mm² kann der Anpassung mittels einer Polynomfunktion 4. Grades an die Daten entnommen werden. Dies entspricht einem durch einen Spin-Übergang hervor-

gerufenen Sprung in der axialen Frequenz von $\delta_{\nu_z}^{SF} = 186(7)$ mHz bei $\nu_z = 682(8)$ kHz. Der experimentell bestimmte Wert stimmt mit dem numerisch berechneten Wert von $B_2 = 300,3807(63)$ mT/mm² (siehe Abschnitt 4.2.1) ausgezeichnet überein.

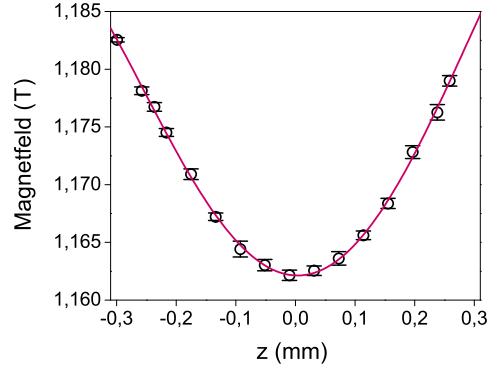


Abbildung 5.25.: Experimentell bestimmter Magnetfeldverlauf entlang der axialen Richtung der Analysefalle. Durch Anlegen antisymmetrischer Offsetspannungen an den Endkappen bzw. Korrektorelektroden wird das Proton auf der Magnetfeldachse verschoben. Über die freie Zyklotronfrequenz des Teilchens ν_c kann das Magnetfeld in verschiedenen Positionen bestimmt werden. Aus der Anpassung der Daten mittels einer Polynomfunktion 4. Grades lässt sich der Koeffizient $B_2 = 297(10)$ mT/mm² ermitteln.

5.4.3. Temperaturmessungen

Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle lässt sich, wie in Abbildung 5.20 gezeigt und in [42,99,121,149] diskutiert, die thermische Energieverteilung des Zyklotron-Freiheitsgrades eines Protons über die durch die magnetische Flasche hervorgerufenen energieabhängigen Verschiebungen seiner Axialfrequenz ermitteln. Das in der Präzisionsfalle präparierte Proton wird in Resonanz mit dem Zyklotron-Nachweisschwingkreis gebracht, was heißt, dass die Zyklotronbewegung des Teilchens an ein thermisches Bad gekoppelt wird. Im Gleichgewicht ist also eine Boltzmann-Verteilung der Energie des Zyklotron-Freiheitsgrades entsprechend

$$f_B(E) = \frac{1}{k_B T} e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad (5.27)$$

zu erwarten, wobei k_B die Boltzmann-Konstante und T die der endlichen Energie der Elektronen im Schwingkreis zuzuordnende Temperatur sind. In der magnetischen Flasche der Analysefalle spiegeln sich, wie in Abbildung 5.20 veranschaulicht, die Fluktuationen der Zyklotronenergie unmittelbar in Schwankungen der Axialfrequenz wider (siehe Gleichungen (2.60) bzw. (5.15)). Der Erwartungswert der Energie $\langle E \rangle$ kann durch

$$\langle E \rangle = \frac{1}{k_B T} \int_0^\infty E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE = k_B T \quad (5.28)$$

bestimmt werden. Demgemäß lässt sich aus der Anpassung der in Abbildung 5.20 dargestellten Daten mittels Gleichung (5.27) die Zyklotron-Temperatur $T_+ = \langle E_+ \rangle / k_B$ ermit-

teln. Alternativ kann $\langle E_+ \rangle = k_B T_+$ aus der Steigung des natürlichen Logarithmus der Häufigkeitsdichte als Funktion von ΔE_+ berechnet werden.

Nach Beziehung (2.60) besteht keine Abhängigkeit der Axialfrequenz von der axialen Energie im inhomogenen Magnetfeld. Infolgedessen wird zur Bestimmung der axialen Temperatur bzw. Festlegung der Magnetronenergie die Methode der Seitenbandkopplung in der Analysefalle verwendet [42, 99, 149]. Mittels eines elektromagnetischen Wechselfeldes, dessen Frequenz $\nu_{rf} = \nu_z + \nu_-$ beträgt, wird die Magnetronbewegung an die Axialbewegung gekoppelt, welche wiederum ähnlich der Zyklotronbewegung an ein thermisches Bad gekoppelt ist. Durch die Seitenbandkopplung entsteht ein Energieaustausch zwischen den beiden Moden. Wie in Abschnitt 2.4.2 diskutiert, ist das Gleichgewicht durch die Gleichheit der Quantenzahlen

$$n_- = n_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle E_- \rangle}{\omega_-} = \frac{\langle E_z \rangle}{\omega_z} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_-}{\nu_-} = \frac{T_z}{\nu_z} \quad (5.29)$$

definiert. Nach jedem Anregungspuls nimmt die Magnetronenergie einen neuen Wert entsprechend der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie an. Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle zeichnet sich dies, wie in Abbildung 5.26(a) veranschaulicht, durch Verschiebungen der Axialfrequenz ab. Dabei stellt die Frequenzverschiebung $\Delta\nu_z^i = \nu_z^i - \nu_z^{(0)}$ die Differenz zwischen der jeweiligen nach der Seitenbandkopplung gemessenen Axialfrequenz ν_z^i und dem niedrigsten vorkommenden Frequenzwert $\nu_z^{(0)}$ dar. Die dazugehörige Magnetronenergie ist gemäß Gleichung (5.15) durch $\Delta E_-^i = 4\pi^2 m_p \nu_z^{(0)} \frac{B_0}{B_2} \Delta\nu_z^i$ gegeben. In Abbildung 5.26(b) sind die ermittelten Verschiebungen in einem Histogramm dargestellt. Diese gehorchen erwartungsgemäß einer Boltzmann-Verteilung. Der Anpassung der Daten mittels Gleichung (5.27) kann $\langle E_- \rangle = k_B T_-$ entnommen werden. Die axiale Temperatur T_z ergibt sich entsprechend Gleichung (5.29) zu $T_z = \frac{\langle E_z \rangle}{k_B} = \frac{\langle E_- \rangle}{k_B} \frac{\nu_z}{\nu_-}$. Die in Abbildung 5.26 präsentierten Ergebnisse wurden unter Verwendung von negativem Feedback am Axial-Nachweissystem gewonnen. Somit wurde die minimal mit dem experimentellen Aufbau erreichbare axiale Temperatur zu $T_z = 2,22(19)$ K [41] bei einer physikalischen Temperatur des Detektors von $T_z = 9(1)$ K [69, 81] ermittelt.

Das oben vorgestellte Verfahren zur Messung der Temperatur des Teilchens erweist sich zugleich als Methode zur Energiekalibrierung. Unter Zugrundelegung der in Abbildungen 5.20 und 5.26(b) präsentierten Histogramme kann die Zyklotron- bzw. Magnetronenergie des einzelnen Protons kontrolliert eingestellt werden. Im Rahmen des Nachweises von Spin-Übergängen in der Analysefalle ist, wie in Abschnitt 5.4.4 näher betrachtet, die Minimierung der radialen Energie bei der Präparation des Teilchens unausweichlich.

5.4.4. Stabilität der Axialfrequenz in der Analysefalle

Der erfolgreiche Nachweis von Spin-Übergängen in der Analysefalle setzt, wie in Abschnitt 2.5.1 diskutiert, zum einen eine starke magnetische Inhomogenität zur Maximierung des durch einen Spin-Übergang hervorgerufenen axialen Frequenzsprungs $\delta_{\nu_z}^{SF}$

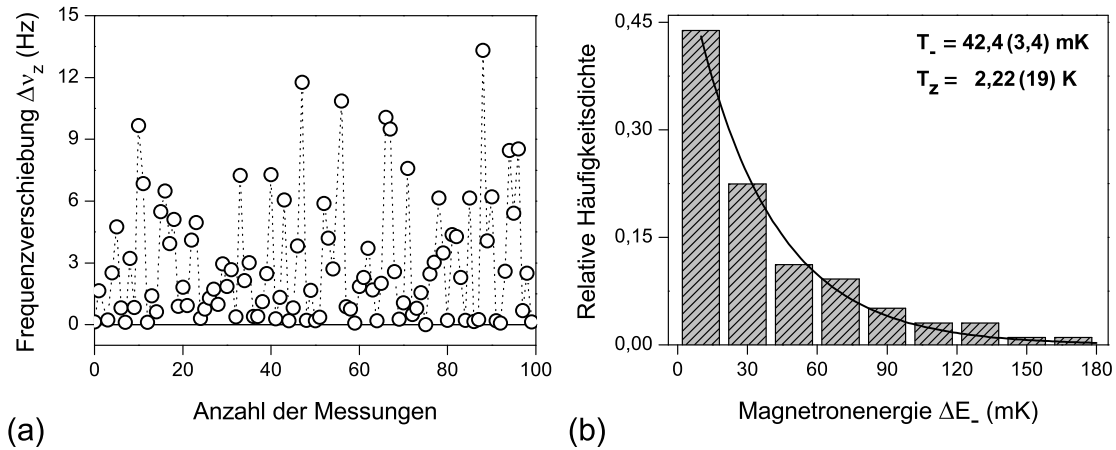


Abbildung 5.26.: Bestimmung der axialen Temperatur in der Analysefalle. Mittels Seitenbandkopplung wird die Magnetron- an die Axialbewegung gekoppelt und es entsteht ein Energieaustausch zwischen den beiden Moden. Nach jedem Anregungspuls mit der Frequenz $\nu_{r,f} = \nu_z + \nu_-$ nimmt die Magnetronenergie einen neuen Wert entsprechend der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie an, was sich im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle durch Verschiebungen der Axialfrequenz abzeichnet (a). Die Verschiebungen $\Delta\nu_z^i$ lassen sich in Magnetronenergie-Beträge ΔE_- ausdrücken, deren Verteilung wiederum die Energieverteilung des axialen Freiheitsgrades widerspiegelt (b). Aus der Anpassung der Daten mittels Gleichung (5.27) und mithilfe der Beziehung (5.29) werden die Axial- und Magnetron-Temperatur, T_z bzw. T_- unter Verwendung von negativem Feedback am Axial-Nachweissystem ermittelt.

voraus und zum anderen eine hohe Stabilität der Axialfrequenz, damit diese geringe axiale Frequenzdifferenz von $\delta_{\nu_z}^{SF} \approx 190$ mHz bei $\nu_z \approx 675$ kHz sich auflösen lässt. Die extreme Empfindlichkeit der Axialfrequenz bezüglich Schwankungen in der radialen Energie des gespeicherten Teilchens ist jedoch auf die starke magnetische Flasche mit $B_2 = 297$ mT/mm² über die Beziehung (5.15) (siehe auch Gleichung (2.60)) zurückzuführen. Auf Grund dessen stellt die Detektion von Spin-Übergängen die herausforderndste Messaufgabe im Rahmen des Experiments zur Bestimmung des g -Faktors des Protons dar.

Die Geschichte der Entwicklung der Frequenzstabilität eines in der in Abschnitt 4.2 und in [41] vorgestellten Penning-Falle gespeicherten Protons fängt mit dem erstmaligen Zusammenbau und der Integration der Falle in die in Kapitel 3 beschriebene Apparatur an und erstreckt sich über die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erzielten Resultate hinaus. In Abbildung 5.27 sind zwei Datensätze gegenübergestellt, welche die erreichten Fortschritte bei der Verringerung der Frequenzschwankung Ξ innerhalb eines Jahres veranschaulichen. In Abbildung 5.27(a) sind die aus dem Signal eines sich im Gleichgewicht mit dem axialen Nachweissystem befindenden Protons ermittelten Axialfrequenzen als Funktion der Zeit für einen Zeitraum von jeweils 11 Stunden aufgetragen. In Abbildung 5.27(b) sind die gemäß Gleichung (5.3) berechneten Frequenzdifferenzen α_i in einem Histogramm dargestellt und die dazugehörigen Standardabweichungen Ξ (siehe

Gleichung (5.2)) gekennzeichnet. Die in diesem Abschnitt diskutierten Maßnahmen zur Optimierung der Frequenzstabilität in der Analysefalle und die dabei gewonnenen Erkenntnisse erlaubten eine ansehnliche Verbesserung mit einer Reduzierung der gesamten Frequenzverschiebung von $\Delta\nu_z \approx 60$ Hz auf $\Delta\nu_z \approx 1,4$ Hz sowie der Frequenzschwankung von $\Xi = 1,55(5)$ Hz auf letztendlich $\Xi = 113(4)$ mHz. Nichtsdestotrotz liegt dieser kleinstmögliche Wert der Frequenzschwankung um einen Faktor zwei über dem in der Präzisionsfalle erreichbaren Wert (vergleiche Abbildung 5.10), welcher durch die relative Spannungsstabilität des Netzgerätes bedingt ist.

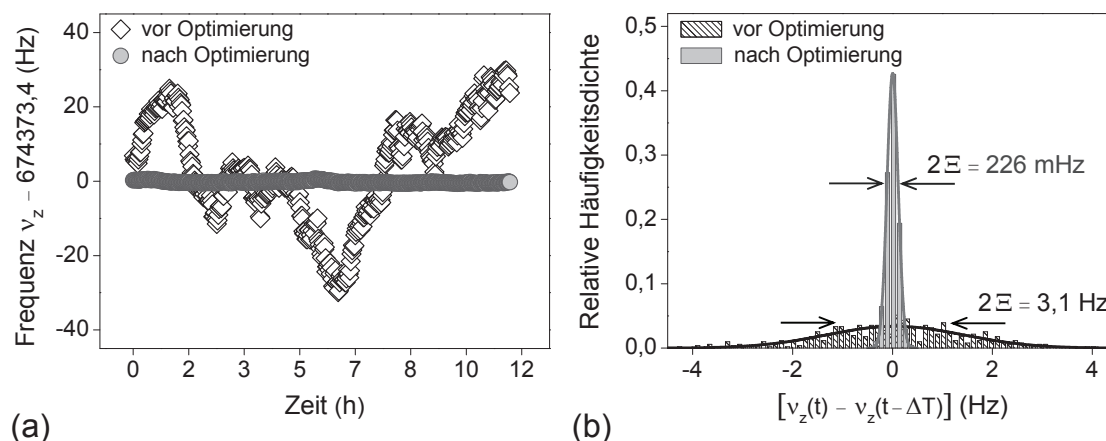


Abbildung 5.27.: Optimierung der axialen Frequenzstabilität in der Analysefalle. (a) Zeitliche Entwicklung der Axialfrequenz vor und nach den Optimierungsmaßnahmen in einem Zeitraum von jeweils 11 Stunden (siehe auch Abbildung 5.28). (b) Darstellung der Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Frequenzmessungen in einem Histogramm. Eine Reduzierung der gesamten Frequenzverschiebung von $\Delta\nu_z \approx 60$ Hz auf $\Delta\nu_z \approx 1,4$ Hz sowie der Frequenzschwankung von $\Xi = 1,55(5)$ Hz auf letztendlich $\Xi = 113(4)$ mHz bei den jeweiligen optimalen FFT-Mittelungszeiten ΔT wurde erzielt.

Diese untere Grenze für die axiale Frequenzschwankung in der Analyse-Falle ließ sich erst nach dem im Rahmen der Doktorarbeiten von A. Mooser [71] und H. Kracke [70] durchgeführten Neuaufbau der Apparatur unterschreiten. Die Änderungen umfassen das Ersetzen des Pulsrohrkühlers durch einen ^4He -Badkryostat zur Eliminierung der durch den Kühler hervorgerufenen Vibrationen (siehe Abschnitte 3.1 und 5.2.4), die Entwicklung eines neuen aus zwei Axial-Spulen toroidaler Geometrie bestehenden Axial-Nachweissystems mit höherem Signal-Rausch-Verhältnis sowie kleine Änderungen an der Beschaltung und Verkabelung [70, 71, 114]. Mittels dieser Maßnahmen erfolgte schließlich eine weitere Reduktion der axialen Frequenzschwankung auf $\Xi = 55$ mHz, was den erstmaligen Nachweis diskreter Spin-Übergänge eines Protons in der im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Penning-Falle ermöglichte [114].

Die in Abbildung 5.27 veranschaulichte Erhöhung der axialen Frequenzstabilität in der Analysefalle ist das Ergebnis von unterschiedlichen empirischen Untersuchungen sowie

systematischen Optimierungsverfahren. Hinsichtlich des Aufbaus der Apparatur erwiesen sich einige technische Maßnahmen, wie die Abschirmung und Filterung aller Verbindungsleitungen zwischen Experimentaufbau und Geräte im Außenbereich, Filterung der Gleichspannungsleitungen (siehe auch Abschnitt 3.4.3), Vermeidung von Masseschleifen, Erdung der externen offenen Anschlüsse für die Hochfrequenzleitungen oder sonstiger offenen Anschlüsse und das Trennen jeglicher erlässlicher Messgeräte und Kabel insbesondere der Hochspannungsleitungen während der Frequenzmessung als maßgeblich. Dabei sind das Nichtvorhandensein von Fremdteilchen in der Falle und ein harmonisches elektrostatisches Speicherpotential grundsätzliche Voraussetzungen für eine hohe Frequenzstabilität. Darüber hinaus hat es sich bewahrheitet, wie im folgenden Unterabschnitt näher betrachtet wird, dass die axiale Frequenzschwankung Ξ mit der radialen Energie (siehe Abbildung 5.30) in der Analysefalle steigt. Zwischenzeitlich auftretende Grenzen der axialen Frequenzstabilität mit Schwankungen von $\Xi \approx 180$ mHz und $\Xi \approx 150$ mHz ließen sich durch verbesserte Verfahren zum Entfernen unerwünschten Ionen in der Präzisionsfalle sowie die Umsetzung des in der Analysefalle durchzuführenden Putzvorgangs (siehe Abschnitt 5.1.2, Abbildung 5.3) bzw. durch die Präparation von Protonen mit Zyklotronenergien niedriger als 100 mK schließlich unterschreiten.

In Abbildung 5.28 ist die nach den Optimierungsverfahren gemessene zeitliche Entwicklung der Axialfrequenz von Abbildung 5.27(a) in einem anderen Maßstab dargestellt. Die gestrichelten Linien veranschaulichen die durch einen Spin-Übergang hervorgerufene nachzuweisende axiale Frequenzdifferenz $\delta_{\nu_z}^{SF}$. Es ist ersichtlich, dass sich bei der erreichbaren Frequenzstabilität die Detektion diskreter Spin-Übergänge nicht realisieren lässt. Nichtsdestotrotz wird in Abschnitt 5.4.5 ein Verfahren vorgestellt, mit dessen Hilfe das Auftreten von Spin-Übergängen statistisch über den Anstieg der Standardabweichung Ξ nachgewiesen werden kann.

Abhängigkeit der axialen Frequenzstabilität von der radialen Energien

Ähnlich wie in der Präzisionsfalle ist die für die Ermittlung der Frequenzschwankung optimale FFT-Mittelungszeit ΔT in der Analysefalle zu bestimmen. In Abbildung 5.29 stellen die leeren Kreise die mithilfe des in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Verfahren ermittelten Standardabweichungen $\Xi(\Delta T)$ der Frequenzdifferenzen $\alpha_i(\Delta T) = \nu_z(t) - \nu_z(t - \Delta T)$ für verschiedene Werte von ΔT dar. Für kurze Messzeiten ist die auf die Signal-Mittelwertbildung zurückzuführende Abhängigkeit $\Xi_{MW}(\Delta T) \propto 1/\sqrt{\Delta T}$ (gepunktete Linie) in der Analysefalle sowie in der Präzisionsfalle (vergleiche Abbildung 5.11) festzustellen. Für lange Messzeiten tritt jedoch ein stetiger Anstieg der Frequenzschwankung auf und der minimal erreichbare Wert von $\Xi(\Delta T)$ ist nicht durch die relative Spannungsstabilität des Netzgerätes *UM1-14* beschränkt. Der Anstieg der Frequenzschwankung mit ΔT deutet auf eine sich in der Präzisionsfalle nicht offenbarende Langzeitdrift hin. Eine plausible Annahme ist, dass dies auf die in der Analysefalle vorhandene starke magne-

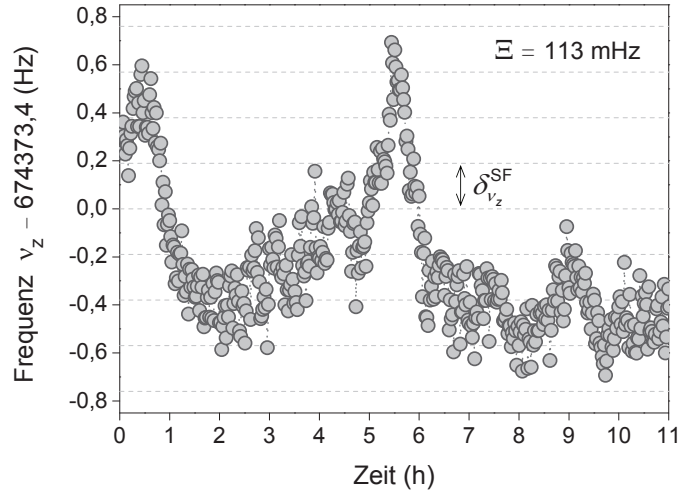


Abbildung 5.28.: Zeitliche Entwicklung der Axialfrequenz in der Analysefalle nach den im Text beschriebenen Optimierungsmaßnahmen. Der kleinstmögliche erreichbare Wert der Frequenzschwankung liegt um einen Faktor zwei über den in der Präzisionsfalle erreichbaren Wert, welcher durch die relative Spannungsstabilität des Netzgerätes UM1-14 bedingt ist. Bei der dargestellten erreichten Frequenzstabilität lässt sich die durch einen diskreten Spin-Übergang eines Protons hervorgerufene Frequenzdifferenz $\delta_{\nu_z}^{SF}$ nicht direkt nachweisen.

tische Inhomogenität zurückzuführen ist. Wie in Abschnitt 2.2.2 dargelegt, macht sich nicht nur ein Übergang zwischen den Spineigenzuständen sondern auch zwischen den Energieniveaus der radialen Bewegungen des Teilchens in der magnetischen Flasche als ein Sprung in der axialen Frequenz gemäß Gleichung (2.59) bemerkbar. Eine Änderung der Zyklotron-Quantenzahl um $\Delta n_+ = \pm 1$ führt zu einem axialen Frequenzsprung von $\delta_{\nu_z}^+ = \pm 68$ mHz, was einer Energieverschiebung von $\Delta E_+ = \pm 74$ neV entspricht. Angenommen, dass durch breitbandiges Rauschen Zyklotron-Quantensprünge während der Messung der Axialfrequenz induziert werden, dann ließe sich die Entwicklung der Frequenz durch eine Zufallsbewegung mit Standardabweichung [69, 114]

$$\Xi_+ \left(\Delta T, \frac{\delta n_+}{\delta t} \right) = \sqrt{\frac{\delta n_+}{\delta t} \Delta T (\delta_{\nu_z}^+)^2} \quad (5.30)$$

beschreiben, wobei $(\delta n_+/\delta t)$ die Zyklotron-Übergangsrate (Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit) ist. In Abbildung 5.29 stellen die blauen Kreuze das Ergebnis einer auf den oben genannten Annahmen beruhenden Simulation [69] dar. Die durchgezogene grüne Linie bildet die Quadratsumme der beiden genannten Effekte gemäß $\Xi \left(\Delta T, \frac{\delta n_+}{\delta t} \right) = \sqrt{\Xi_{\text{MW}}^2(\Delta T) + \Xi_+^2 \left(\Delta T, \frac{\delta n_+}{\delta t} \right)}$ ab, welche den Verlauf der gemessenen Daten weitgehend wiedergibt. Diese Tatsache deutet auf Zyklotron-Quantensprünge als etwaige Ursache für die beobachtete Frequenzschwankung in der Analysefalle hin, wobei an dieser Stelle das quantitative Verständnis der Verhaltensweise der Zyklotron-Übergangsrate noch benötigt wird. In Abbildung 5.29 ist ein zweiter Satz von Daten (gefüllte graue Krei-

se) aufgetragen. Bei der Messung dieser niedrigeren Frequenzschwankungen wies das Teilchen entsprechend der in Abbildung 5.20 gezeigten Energiekalibrierung eine geringere Zyklotron-Energie auf. Nach Gleichung (5.30) müsste diese Energieabhängigkeit von $\Xi(\Delta T)$ auf die Übergangsrate $\delta n_+/\delta t$ zurückzuführen sein.

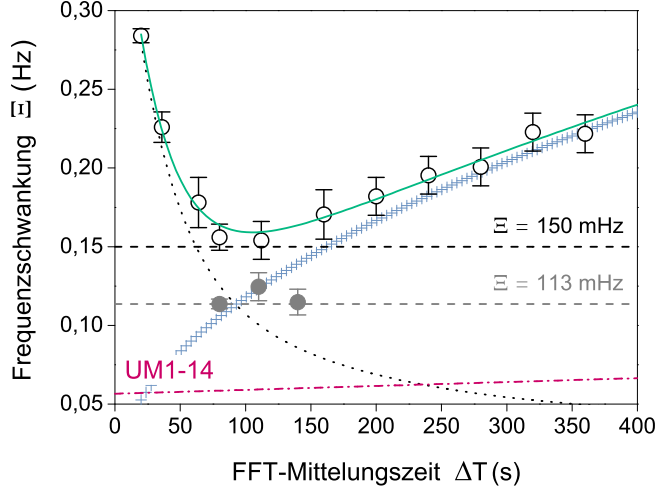


Abbildung 5.29.: Axiale Frequenzschwankung Ξ als Funktion der FFT-Mittelungszeit ΔT in der Analysefalle (leere Kreise). Für kurze Messzeiten ist die Abhängigkeit $\Xi_{\text{MW}}(\Delta T) \propto 1/\sqrt{\Delta T}$ (gepunktete Linie) festzustellen, welche auf die Signal-Mittelwertbildung zurückzuführen ist. Für lange Messzeiten tritt ein stetiger Anstieg der Frequenzschwankung auf, der sich durch das Auftreten von Zyklotron-Quantensprüngen erklären lässt. Die blauen Kreuze stellen das Ergebnis einer Simulation der Entwicklung der axialen Frequenzschwankung $\Xi_+(\Delta T, \frac{\delta n_+}{\delta t})$ unter der Annahme dar, dass durch breitbandiges Rauschen Zyklotron-Quantensprünge während der Messung der Axialfrequenz induziert werden. Die durchgezogene grüne Linie, welche den Verlauf der gemessenen Daten weitgehend wiedergibt, stellt die Summe $\Xi(\Delta T, \frac{\delta n_+}{\delta t}) = \sqrt{\Xi_{\text{MW}}^2(\Delta T) + \Xi_+^2(\Delta T, \frac{\delta n_+}{\delta t})}$ dar. Die gefüllte graue Kreise veranschaulichen die mit einem Teilchen, welches eine niedrigere Zyklotron-Temperatur aufwies, gemessenen Frequenzschwankungen.

In der Tat lässt sich entsprechend dem in [69] (siehe auch [114]) entwickelten Modell die Abhängigkeit der Zyklotron-Übergangsrate von der Zyklotron-Energie im Rahmen der Quantenmechanik ableiten. Betrachtet man das System des eindimensionalen harmonischen Oszillators, durch den der Zyklotron-Freiheitsgrad beschrieben wird, welches der Störung eines breitbandigen Rauschens mit Amplitude E_0 unterzogen wird, so kann nach Fermis Goldener Regel [150] die Zyklotron-Übergangsrate durch [69, 114]

$$\frac{\delta n_+}{\delta t} = \Delta^{\nu_+} \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_+) \Gamma_{i \rightarrow f}^2 \quad (5.31)$$

gegeben werden. Dabei wird angenommen, dass die Amplitude des Störfeldes innerhalb des Frequenzbereiches $\Delta^{\nu_+} = \frac{1}{2\pi} \omega_c \frac{B_2}{B_0} \langle z^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{e}{m_p} B_2 \frac{k_B T_z}{m_p \omega_z^2}$, welcher für die Linienbreite der Zyklotronresonanz steht [53] (siehe auch Abschnitt 2.5.2), konstant ist. In Gleichung

(5.31) ist $\rho(E_+)$ die Zustandsdichte bei der Energie E_+ und

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = eE_0 \sqrt{\frac{\hbar}{m_p \omega_+} \frac{n_+}{2}} \quad (5.32)$$

das zum Übergang vom Anfangszustand $i = |n_+\rangle$ zum Endzustand $f = |n_+ \pm 1\rangle$ für $n_+ \gg 1$ gehörende Matrixelement des Störoperators. Aus Gleichungen (5.31) und (5.32) folgt die lineare Abhängigkeit der Zyklotron-Übergangsrate von der Zyklotron-Energie mit

$$\frac{\delta n_+}{\delta t} \propto \Gamma_{i \rightarrow f}^2 \propto n_+ \propto E_+ \quad (5.33)$$

Nach Gleichung (5.30) führt dies zu einer Energieabhängigkeit der axialen Frequenzschwankung gemäß

$$\Xi_+(E_+) \propto \sqrt{E_+} \quad (5.34)$$

Der Anstieg der Frequenzschwankung mit der Zyklotronenergie wurde, wie in Abbildung 5.30(a) dargestellt, experimentell untersucht. Dabei wurde das Proton jeweils mit verschiedenen Zyklotronenergien in der Präzisionsfalle (siehe Abbildung 5.20) präpariert und in die Analysefalle transportiert, wo die Standardabweichungen $\Xi_+(E_+)$ ermittelt wurden. Der Verlauf der gemessenen Daten lässt sich mit dem aus Gleichungen (5.30), (5.31) und (5.32) bestehenden Modell gut beschreiben. In [70] und [71] wurden mit der neu aufgebauten Apparatur systematische Untersuchungen der Frequenzstabilität in der Analysefalle durchgeführt, welche die hier präsentierten Erkenntnisse untermauern. Ferner ließ sich aus den ermittelten Zyklotron-Übergangsraten als Funktion der Zyklotron-Energie die entsprechende Amplitude des Störfeldes, $E_0 = 7 \text{ nV/m}\sqrt{\text{Hz}}$ [114], bestimmen, was die beachtlich hohe Empfindlichkeit des aus einem im starken inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle gespeicherten Proton bestehenden Systems verdeutlicht.

Die Wirkung der Magnetronenergie auf die axiale Frequenzstabilität in der Analysefalle ist in Abbildung 5.30(b) veranschaulicht. Obwohl die Erhöhung der Magnetronenergie ebenfalls zum Anstieg der Frequenzschwankung Ξ führt, ist die Magnetronbewegung metastabil und somit sind Änderungen der Magnetron-Temperatur innerhalb der typischen Messzeiten vernachlässigbar. Entsprechend Gleichung (2.59) führt eine Änderung der Magnetron-Quantenzahl um $\Delta n_- = \pm 1$ zu einem axialen Frequenzsprung von $\delta \nu_z^- = \pm 49 \text{ } \mu\text{Hz}$, was einer Energieverschiebung von $\Delta E_- = \pm 53 \text{ peV}$ entspricht. Ferner lässt sich die Magnetronenergie, wie in Abbildung 5.26 dargestellt, mittels Seitenbandkopplung in der Analysefalle kontrolliert einstellen bzw. minimieren.

5.4.5. Erstmaliger Nachweis von Spin-Übergängen eines Protons in einer Penning-Falle

Trotz der in Abschnitt 5.4.4 präsentierten Maßnahmen zur Minimierung des auf die Fallenelektroden einwirkenden externen Rauschens ergab sich mit dem in Kapitel 3 vorgestellten experimentellen Aufbau eine Grenze für die Frequenzstabilität in der Analysefalle mit

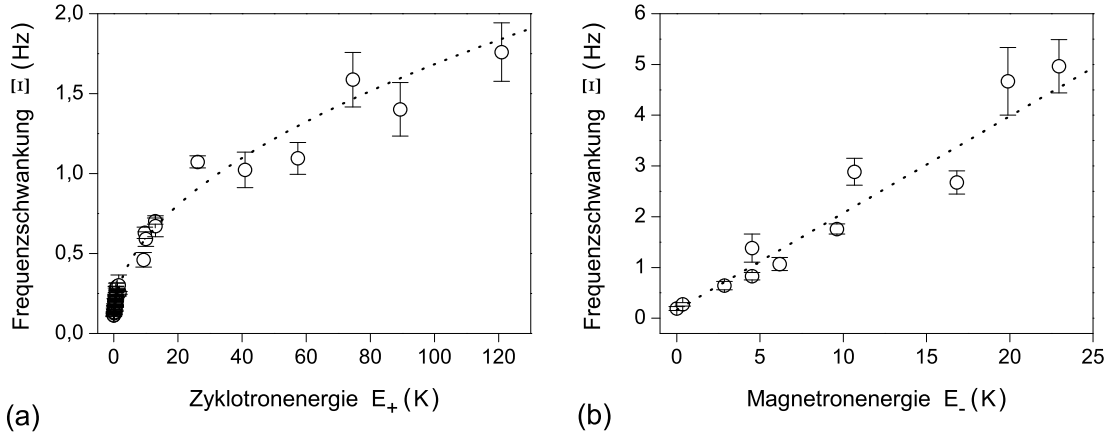


Abbildung 5.30.: Axiale Frequenzschwankung als Funktion der radialen Energien in der Analysefalle. (a) Treten Zyklotron-Quantensprünge während der Ermittlung der Frequenzschwankung Ξ auf, so lässt sich diese durch die Standardabweichung $\Xi_+ = \sqrt{\frac{\delta n_+}{\delta t} \Delta T (\delta \nu_z^+)^2}$ einer Zufallsbewegung beschreiben, wobei $\delta \nu_z^+ = \pm 68$ mHz, der durch eine Änderung der Zyklotron-Quantenzahl um $\Delta n_+ = \pm 1$ hervorgerufene axiale Frequenzsprung und $\frac{\delta n_+}{\delta t} \propto E_+$ die Zyklotron-Übergangsrate ist. (b) Eine Änderung der Magnetron-Quantenzahl um $\Delta n_- = \pm 1$ führt zu einem axialen Frequenzsprung von $\delta \nu_z^- = \pm 49$ μ Hz. Obwohl die Frequenzschwankung mit der Magnetron-Energie steigt, sind Änderungen der Magnetron-Temperatur innerhalb der typischen Messzeiten vernachlässigbar. Darüber hinaus kann die Magnetronenergie mittels Seitenbandkopplung in der Analysefalle minimiert werden.

einem minimal erreichbaren Wert der Frequenzschwankung von $\Xi = 113(4)$ mHz (siehe Abbildung 5.28). Im hypothetischen Idealfall einer verschwindenden Frequenzschwankung mit

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Hint}} &= \nu_z(t) - \nu_z(t - \Delta T) \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \\ \Xi_{\text{Hint}} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

würden sich Spin-Übergänge, die mittels eines magnetischen Wechselfeldes mit der Frequenz $\nu_{\text{rf}} = \nu_L$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen der Axialfrequenz induziert werden, durch das Auftreten von zwei verschiedenen Werten für die Frequenzdifferenz α_{ν_L} , nämlich

$$\alpha_{\nu_L}^{|\uparrow\rangle} = -\delta_{\nu_z}^{SF} \quad \text{und} \quad \alpha_{\nu_L}^{|\downarrow\rangle} = +\delta_{\nu_z}^{SF} \quad , \quad (5.36)$$

über eine solche in Abbildung 5.27(a) dargestellte Messsequenz bemerkbar machen. Auf dem in Abbildung 5.27(b) gezeigten dazugehörigen Histogramm würden sich dementsprechend zwei separate Maxima um $\alpha = 0$ ergeben. Nun setzt, wie in [70, 71] diskutiert, die Auflösung dieser Doppelstruktur eine Frequenzschwankung von maximal $\Xi_{\text{Hint}} = \delta_{\nu_z}^{SF} / 3$ voraus. Ist die Frequenzstabilität nicht ausreichend hoch, so zeichnet sich das Auftreten von Spin-Übergängen durch eine einzelne breitere Häufigkeitsverteilung ($\Xi_{\nu_L} > \Xi_{\text{Hint}}$) um $\alpha = 0$ ab. Obwohl diese Tatsache den Nachweis diskreter Spin-Übergänge unter

den Randbedingungen $150 \text{ MHz} \geq \Xi_{\text{Hint}} \geq 113 \text{ MHz}$ und $\delta_{\nu_z}^{SF} = 188(6) \text{ MHz}$ bei $\nu_z = 674,40(5) \text{ kHz}$ ausschließt, wird im Folgenden ein Verfahren vorgestellt, welches den erstmaligen zuverlässigen Nachweis von induzierten Spin-Übergängen über die gemessene statistische Erhöhung der Frequenzschwankung Ξ_{ν_L} ermöglichte [81].

Der Aufbau zur Durchführung des Messverfahrens ist in Abbildung 5.31 schematisch dargestellt. Wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben, wird das zum Umklappen des Protonspins benötigte magnetische Wechselfeld $\vec{B}_{\text{rf}}(t) = b_{\text{rf}} (\hat{x} \cos \omega_{\text{rf}} t + \hat{y} \sin \omega_{\text{rf}} t)$ mit Hilfe einer Spiralspule erzeugt. Das treibende Feld steht senkrecht zum homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ der Falle und gelangt durch die Schlitze zwischen den Elektroden ins Fallenzentrum. Das Anregungssignal des HF-Signalgenerators *Rohde & Schwarz SMY-02* bzw. *Rohde & Schwarz SML-01* wird über einen Leistungsverstärker (*Rohde & Schwarz HVV10*), ein HF-Relais und einen aus zwei Tiefpassfiltern *Mini-Circuits BLP-70+* und zwei Hochpassfiltern *Mini-Circuits BHP-50+* bestehenden Bandpass an die SF-Spule angeschlossen. Die Anregungsamplitude bei der Larmorfrequenz $\nu_{\text{rf}} = \nu_L$ beträgt 27 dBm. Die Filterkaskade dient der Unterdrückung unerwünschter Seitenbänder und insbesondere der Abschwächung des HF-Signals bei der Zyklotronfrequenz des Protons. Das Relais ermöglicht die Abtrennung bzw. Erdung der Hochfrequenzleitung nach jedem Anregungspuls zur Messung der Axialfrequenz.

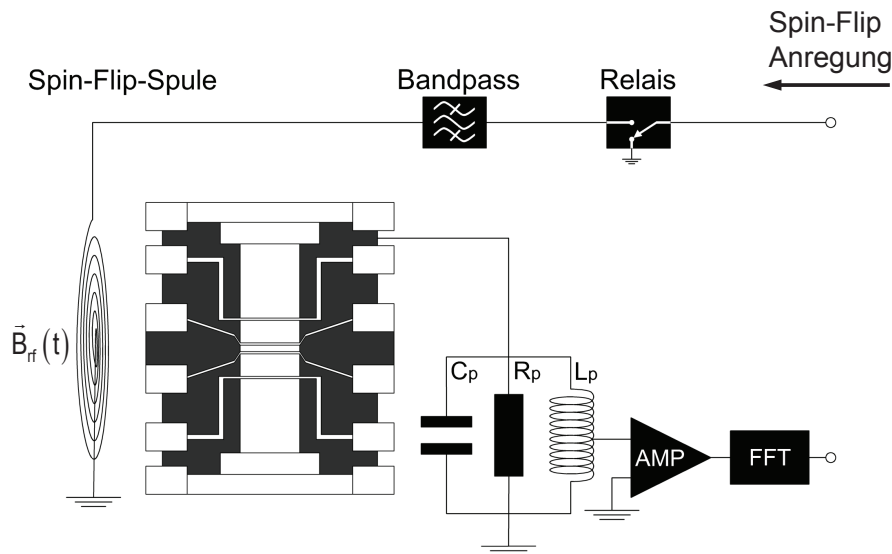


Abbildung 5.31.: Schematische Darstellung des Aufbaus zum Umklappen des Protonspins in der Analysefalle. Das Anregungssignal mit der Frequenz $\nu_{\text{rf}} = \nu_L$ wird über ein HF-Relais und einen Bandpass an die Spin-Flip-Spule angeschlossen. Die Spiralspule erzeugt das zum Umklappen des Spins erforderliche magnetische Wechselfeld $\vec{B}_{\text{rf}}(t) = b_{\text{rf}} (\hat{x} \cos \omega_{\text{rf}} t + \hat{y} \sin \omega_{\text{rf}} t)$. Das HF-Signal wird bei der Zyklotronfrequenz des Protons mittels eines Bandpasses abgeschwächt. Während der Messung der Axialfrequenz lässt sich die HF-Leitung mithilfe eines Relais abtrennen.

In Abbildung 5.32 ist der Messablauf veranschaulicht. Die Messsequenz beginnt mit der

Aufnahme der Axialfrequenz ($\nu_z^{i=0}$). Nach der Anregungszeit t_0 und der FFT-Mittelungszeit ΔT wird die Axialfrequenz erneut aufgenommen ($\nu_z^{i=1}$), ohne dass das HF-Signal an die SF-Spule angelegt worden ist (ν_{rf} aus). Dann wird ein Anregungssignal, dessen Frequenz weit unterhalb der erwarteten Larmorfrequenz liegt ($|\nu_{\text{Ref}} - \nu_L| > 150 \text{ kHz}$), für die Zeit $t = t_0$ angelegt und die Axialfrequenz ($\nu_z^{i=2}$) wieder gemessen. Letztlich erfolgt eine Anregung bei der vermuteten Larmorfrequenz ($\nu_{\text{rf}} = \nu_L$) und die anschließende Messung der Axialfrequenz ($\nu_z^{i=3}$). Diese Messsequenz wird mehrere hundert Mal

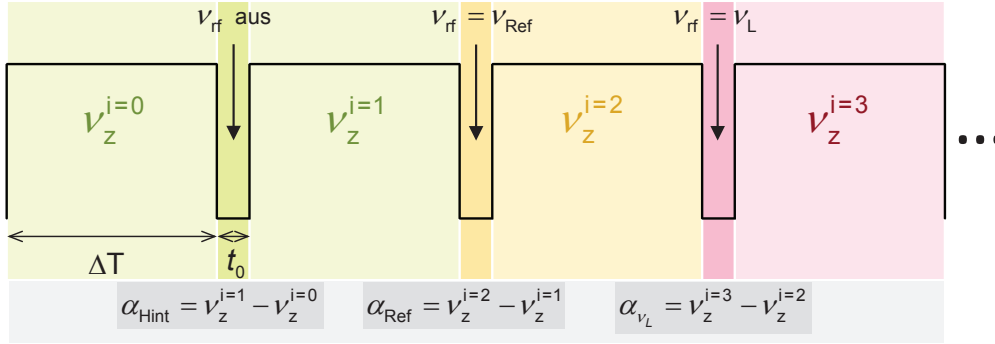


Abbildung 5.32.: Messsequenz für den statistischen Nachweis von Spin-Übergängen eines Protons in der Analysefall. Eine Sequenz besteht aus vier aufeinanderfolgenden Messungen der Axialfrequenz. Zwischen der ersten ($\nu_z^{i=0}$) und der zweiten ($\nu_z^{i=1}$) Frequenzaufnahme wird kein HF-Signal an die SF-Spule angelegt. Zwischen der dritten ($\nu_z^{i=2}$) und der zweiten ($\nu_z^{i=1}$) Frequenzaufnahme wird ein Anregungssignal mit einer Frequenz ν_{Ref} weit unterhalb der Larmorfrequenz an die SF-Spule angelegt. Die vierte Frequenzmessung erfolgt nach einer Anregung bei der vermuteten Larmorfrequenz ($\nu_{\text{rf}} = \nu_L$). Dabei ist ΔT die optimale FFT-Mittelungszeit und t_0 die Anregungszeit. Die Sequenz wird mehrere hundert Mal (N) wiederholt und aus den gemessenen Frequenzwerten lassen sich die Frequenzschwankungen für den Fall des Auftretens von Spin-Übergängen Ξ_{ν_L} sowie für den Fall des Nichtvorhandenseins von induzierten Übergängen Ξ_{Hint} und Ξ_{Ref} ermitteln.

(N) wiederholt. Aus den aufgenommenen Frequenzen lassen sich die Frequenzdifferenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen und die dazugehörigen Standardabweichungen für die drei möglichen Fälle gemäß

$$\alpha_{\text{Hint}}^{(n)} = \nu_z^{i=3n-2} - \nu_z^{i=3n-3} \quad \Rightarrow \quad \Xi_{\text{Hint}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left[\alpha_{\text{Hint}}^{(n)} - \bar{\alpha}_{\text{Hint}} \right]^2} \quad (5.37)$$

$$\alpha_{\text{Ref}}^{(n)} = \nu_z^{i=3n-1} - \nu_z^{i=3n-2} \quad \Rightarrow \quad \Xi_{\text{Ref}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left[\alpha_{\text{Ref}}^{(n)} - \bar{\alpha}_{\text{Ref}} \right]^2} \quad (5.38)$$

$$\alpha_{\nu_L}^{(n)} = \nu_z^{i=3n} - \nu_z^{i=3n-1} \quad \Rightarrow \quad \Xi_{\nu_L} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left[\alpha_{\nu_L}^{(n)} - \bar{\alpha}_{\nu_L} \right]^2} \quad (5.39)$$

ermitteln. Dabei stellt Ξ_{Hint} die durch das breitbandige Hintergrundrauschen hervorgerufene axiale Frequenzschwankung und Ξ_{ν_L} die nachzuweisende statistisch erhöhte Standardabweichung, welche die Frequenzschwankung beim Auftreten von Spin-Übergängen

charakterisiert, dar. Etwaige, durch das Rauschen des Signalgenerators bzw. des Leistungsverstärkers bedingte störende Schwankungen lassen sich mittels des Vergleichs der Größen Ξ_{Hint} und Ξ_{Ref} offenbaren.

Der statistischer Anstieg der Frequenzschwankung Ξ_{ν_L} aufgrund auftretender Spin-Übergänge beruht auf dem über die magnetische Flasche zum Spin-Übergang in Beziehung stehenden axialen Frequenzsprung $\delta_{\nu_z}^{SF}$. Treten nun während einer solchen oben beschriebenen Messreihe bei M von N Messungen Spin-Übergänge auf, so gilt

$$\Xi_{\nu_L} = \sqrt{\sum_{n=1}^M \frac{(\alpha_n \pm \delta_{\nu_z}^{SF} - \bar{\alpha})^2}{N-1} + \sum_{n=M}^N \frac{(\alpha_n - \bar{\alpha})^2}{N-1}} \approx \sqrt{\Xi_{\text{Hint}}^2 + P_{SF} (\delta_{\nu_z}^{SF})^2} \quad , \quad (5.40)$$

woraus folgt

$$P_{SF} \approx \frac{\Xi_{\nu_L}^2 - \Xi_{\text{Hint}}^2}{(\delta_{\nu_z}^{SF})^2} \quad . \quad (5.41)$$

Gleichung (5.41) deutet an, dass sich aus den experimentell ermittelten Werte Ξ_{ν_L} und Ξ_{Hint} die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Spin-Übergängen P_{SF} bei der Anregungsfrequenz $\nu_{\text{rf}} = \nu_L$ berechnen lässt. Wird nun der Messvorgang für verschiedene Anregungsfrequenzen im Bereich der Larmorfrequenz wiederholt, so lässt sich die durch Gleichung (2.164)

$$P_{SF} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \exp \left[-\pi \Omega_R^2 t_0 \chi(2\pi\nu_{\text{rf}}, B_2, T_z) \right] \right\}$$

gegebene Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den beiden Spineigenzuständen in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz aufzeichnen, welche die in Abschnitt 2.5.3 hergeleitete theoretische Linienform $\chi(2\pi\nu_{\text{rf}}, B_2, T_z)$ der Larmorresonanz im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle widerspiegelt.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der relative Fehler der Standardabweichung Ξ durch

$$\frac{\sigma_{\Xi}}{\Xi} = \frac{1}{\sqrt{2N-2}} \quad (5.42)$$

gegeben wird, wird die Auflösungsgrenze dieser Messmethode erreicht, wenn der Anstieg der Frequenzschwankung $\Delta\Xi = \Xi_{\nu_L} - \Xi_{\text{Hint}}$ und der Fehler

$$\sigma_{\Delta\Xi} = \sqrt{\left(\frac{\Xi_{\nu_L}}{\sqrt{2N-2}} \right)^2 + \left(\frac{\Xi_{\text{Hint}}}{\sqrt{2N-2}} \right)^2} \quad (5.43)$$

gleich groß sind.

In Abbildung 5.33 ist die Entwicklung der Standardabweichungen Ξ_{ν_L} und Ξ_{Ref} mit den Messzyklen für eine Anregungsfrequenz von $\nu_{\text{rf}} = 50,102245$ MHz, Anregungszeit von $t_0 = 10$ s und FFT-Mittelungszeit von $\Delta T = 80$ s gezeigt. Die Frequenzschwankungen konvergieren mit zunehmender Anzahl der Messungen jeweils gegen einen konstanten

Wert. Die beobachtete Differenz $\Delta\Xi = \Xi_{\nu_L} - \Xi_{\text{Ref}} = 47 \text{ mHz}$ ist auf das Auftreten von Spin-Übergängen zurückzuführen. Dabei stimmen die Werte von Ξ_{Hint} und Ξ_{Ref} überein. Gemäß Gleichung (5.41) beträgt die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit in diesem Fall $P_{SF} = 49(8)\%$.

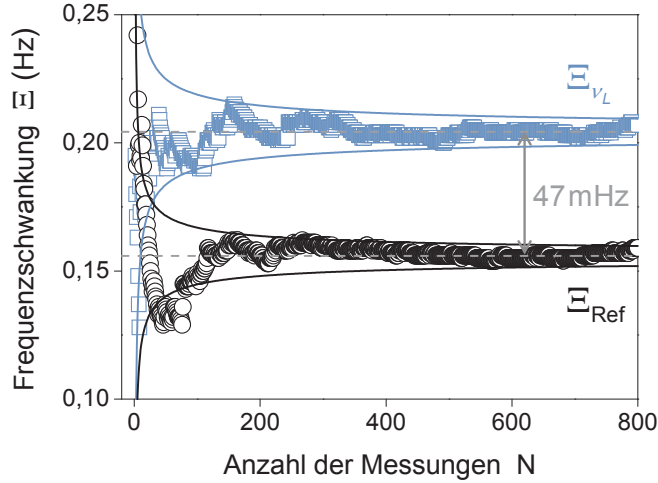


Abbildung 5.33.: *Erstmaliger Nachweis von Spin-Übergängen eines einzelnen Protons im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle. Die Datenpunkte (leere Quadrate bzw. Kreise) stellen die nach N Messzyklen ermittelten Frequenzschwankungen (Ξ_{ν_L} bzw. Ξ_{Ref}) dar. Mit zunehmender Anzahl der Messungen konvergieren beide Größen gegen einen konstanten Wert. Die durchgezogenen Linien kennzeichnen jeweils die Entwicklung von σ_{Ξ} . Die Differenz $\Delta\Xi = \Xi_{\nu_L} - \Xi_{\text{Ref}} = 47 \text{ mHz}$ ist auf das Auftreten von Spin-Übergängen zurückzuführen und entspricht einer Übergangswahrscheinlichkeit von $P_{SF} = 49(8)\%$.*

Die in Abbildung 5.33 gezeigte Messung wurde für verschiedene Werte der Anregungsfrequenz ν_{rf} in einem Frequenzbereich von $\Delta\nu_L = 215 \text{ kHz}$ um die Larmorfrequenz durchgeführt. Die in Gleichung (5.42) angegebene theoretische Linienform spiegelt das in Abbildung 5.34 dargestellte Ergebnis wider. Diese Tatsache lässt sich als eindeutiger Nachweis für die Richtigkeit des Messvorgangs und Interpretation der Beobachtungen auffassen. Die Anpassung der Daten mittels Gleichung (5.42) ist durch die durchgezogene Linie in Abbildung 5.34 veranschaulicht. Daraus ergibt sich eine axiale Temperatur von $T_z = 12(2) \text{ K}$, die in vollkommener Übereinstimmung mit der physikalischen Temperatur des Detektors von $T_z = 9(1) \text{ K}$ steht, und eine Feldamplitude von $b_{\text{rf}} = 0,86(5) \mu\text{T}$. Wie in Abschnitt 2.5.3 näher betrachtet, spiegelt die im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle aufgenommene Larmorresonanz die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie wider. Der scharfe Schwellenwert kennzeichnet die gesuchte, einer verschwindenden Schwingungsamplitude der Axialbewegung zuzuordnende Larmorfrequenz. Wird als Ungenauigkeit die Halbwertsbreite der Flanke angenommen, so lässt sich die Larmorfrequenz zu $\nu_L = 50,030(20) \text{ MHz}$ mit einer relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = 4 \times 10^{-4}$ bestimmen.

Die Breite der in Abbildung 5.34 gezeigte Larmorresonanz ist sowohl auf die axiale

Temperatur als auch auf eine leichte Sättigung der Resonanz zurückzuführen. In Abschnitt 5.4.6 wird ein zweiter Messvorgang vorgestellt, bei dem die zutreffenden Parameter gemäß der in Abschnitt 2.5.3 präsentierten Diskussion mit dem Ziel der Reduktion der Linienbreite optimiert worden sind.

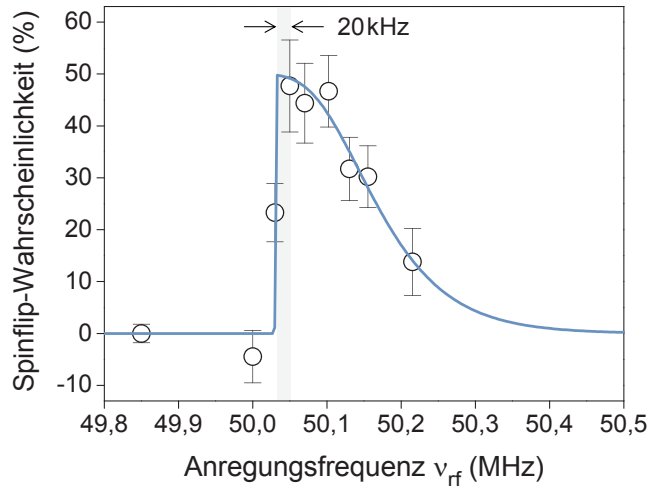


Abbildung 5.34.: Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle bei einer axialen Temperatur von $T_z = 12(2)$ K gemessene Larmorresonanz. Die Larmorfrequenz kann dem scharfen Schwellenwert mit einer relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = 4 \times 10^{-4}$ entnommen werden. Die durchgezogene Linie stellt die Anpassung der Daten mittels der theoretischen Linienform dar.

5.4.6. Bestimmung des g -Faktors des Protons in der Analysefalle

Die Verwendung der in Abschnitt 2.6 vorgestellten, auf einem Doppel-Penningfallen-Aufbau basierten Methode zur Bestimmung des g -Faktors des Protons ist eine unabdingbare Voraussetzung für das Erreichen der angestrebten relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta g}{g} \leq 10^{-9}$. Die Durchführung dieses Messvorgangs erfordert jedoch den verlässlichen und unzweideutigen Nachweis eines diskreten Spin-Übergangs in der Analysefalle, was sich im Rahmen der vorliegenden Arbeit aufgrund der durch den experimentellen Aufbau bedingten Einschränkungen nicht realisieren ließ. Dennoch wurde die Analysefalle vom Entwurf bis zur im vorherigen Abschnitt vorgestellten Messung einer Larmorresonanz vollkommen charakterisiert und das Verhalten eines einzelnen im inhomogenen Magnetfeld der Falle gespeicherten Protons in Abhängigkeit seiner Bewegungsenergien im Detail untersucht. Dies, zusammen mit der fundierten Kenntnis über die Ursachen der Schwankungen in der Axialfrequenz, bot die Möglichkeit der Bestimmung des g -Faktors des Protons mit einer relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta g}{g} = 8,9 \times 10^{-6}$ über die Messung der Larmor- und Zyklotronresonanz in der Analysefalle [41], wie im Folgenden beschrieben wird.

Bestimmung der Larmorfrequenz des Protons in der Analysefalle

Die Larmorfrequenz des Protons lässt sich, wie bereits dargelegt, einer solchen in Abbildung 5.34 gezeigten Larmorresonanz entnehmen. Allerdings führt die Schwingung des Teilchens entlang der axialen Richtung der Analysefalle im von einer starken Inhomogenität geprägten Magnetfeld (vergleiche Abbildung 5.25) zur Zeitabhängigkeit der Larmorfrequenz $\nu_L(B(t))$ gemäß Gleichung (2.155). Wird die axiale Schwingungsamplitude bzw. Temperatur reduziert, so verringert sich die Differenz der Magnetfeldamplituden, die das Teilchen abtastet, und folglich auch die Breite der letztendlich gemessenen Larmorresonanz. Mit dem Ziel der Erhöhung der Auflösung bei der Bestimmung des g -Faktors wird die axiale Temperatur also durch Anwendung des Verfahrens des elektronischen Feedbacks auf $T_z = 2,22(19)$ K herabgesetzt (siehe Abschnitte 2.3.4 und 5.4.3). In Anbetracht der beobachteten Sättigung der in Abbildung 5.34 präsentierten Resonanz wird ferner die Anregungszeit auf $t_0 = 1$ s verkürzt (siehe Abschnitt 2.5.3).

Mit den neuen oben genannten Einstellungen erfolgte nun die Messung einer schmalere Larmorresonanz. Der Messvorgang ist grundsätzlich identisch dem in Abschnitt 5.4.5 beschriebenen, lediglich mit dem Unterschied, dass während einer solchen in Abbildung 5.32 dargestellten Messsequenz nicht nur jeweils eine Anregung im Bereich der Larmorfrequenz $\nu_{\text{rf}} = \nu_L$ stattfindet, sondern der gesamte zu untersuchende Frequenzbereich mit 15 verschiedenen in zufälliger Reihenfolge gewählten aufeinanderfolgenden Anregungsfrequenzen $\nu_{\text{rf}} = \nu_{L,j}$, wobei $j = 1, \dots, 15$, abgetastet wird. Eine Messsequenz besteht also aus insgesamt 18 Messungen der Axialfrequenz, aus denen die Frequenzdifferenzen $\alpha_{\text{Hint}} = \nu_z^{i=1} - \nu_z^{i=0}$, $\alpha_{\text{Ref}} = \nu_z^{i=2} - \nu_z^{i=1}$, $\alpha_{\nu_{L,1}} = \nu_z^{i=3} - \nu_z^{i=2}$, ..., $\alpha_{\nu_{L,15}} = \nu_z^{i=17} - \nu_z^{i=16}$ ermittelt werden können. Die Sequenz wird mehrere hundert Mal (N) wiederholt, und die jeweiligen Standardabweichungen Ξ_{Hint} , Ξ_{Ref} bzw. $\Xi_{\nu_{L,j}}$ werden berechnet. Mit dieser Vorgehensweise lässt sich die Messzeit mit höchster Effizienz nutzen. Darüber hinaus kann der Effekt von etwaigen durch nicht nachvollziehbare kurzzeitige Schwankungen der radialen Energie hervorgerufenen systematischen Verschiebungen auf die ermittelte Resonanz minimiert werden. Während der Anregungszeit t_0 wird das Axial-Nachweissystem einem negativen Feedback unterzogen, welches anschließend während der FFT-Mittelungszeit wieder ausgeschaltet wird.

Bei einer über die Messzeit von insgesamt $N = 380$ Zyklen mit $\Delta T = 90$ s ermittelten axialen Frequenzschwankung von $\Xi_{\text{Hint}} = 138(5)$ mHz und absoluten Frequenzverschiebung von $\Delta\nu_z = \pm 3$ Hz ist die in Abbildung 5.35 gezeigte Larmorresonanz entstanden. Die durchgezogene Linie stellt die Anpassung der Daten mittels Gleichung (2.164) dar, wobei die Linienform $\chi(2\pi\nu_{\text{rf}}, B_2, T_z)$ durch Gleichung (2.168) gegeben wird. Der der Anpassung entnommene Wert von $T_z = 2,5(1,2)$ K für die axiale Temperatur stimmt mit dem gemäß der in Abschnitt 5.4.3 vorgestellten Methode ermittelten Wert von $T_z = 2,2(2)$ K überein. Die Larmorfrequenz lässt sich mit einer relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = 1,8 \times 10^{-6}$ bestimmen und beträgt $\nu_L = 50,064971(91)$ MHz.

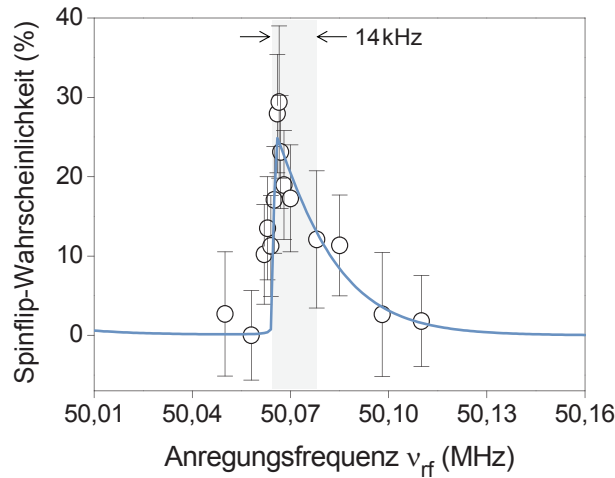


Abbildung 5.35.: Im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle bei einer axialen Temperatur von $T_z = 2,2(2)$ K gemessene Larmorresonanz. Die Larmorfrequenz lässt sich aus der Anpassung der Daten mittels der theoretischen Linienform mit einer relativen Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_L}{\nu_L} = 1,8 \times 10^{-6}$ bestimmen und beträgt $\nu_L = 50,064971(91)$ MHz.

Bestimmung der Zyklotronfrequenz des Protons in der Analysefalle

Neben der Ermittlung der Larmorfrequenz setzt die Bestimmung des g -Faktors die genaue Kenntnis der freien Zyklotronfrequenz voraus. Unter Anwendung der in Abschnitt 5.4.2 vorgestellten Methode zur Messung von ν_+ in der Analysefalle ließ sich die höchstmögliche relative Genauigkeit von $\frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} = 1,6 \times 10^{-4}$ bei der Bestimmung der modifizierten Zyklotronfrequenz erreichen. Das im Folgenden beschriebene alternative Messverfahren beruht auf einem ähnlichen Grundprinzip wie das des zur Bestimmung der Larmorfrequenz verwendeten Messvorgangs und ermöglichte die Erhöhung der Messgenauigkeit um mindestens eine Größenordnung.

Anstatt einer direkten Anregung bei der modifizierten Zyklotronfrequenz ν_+ wird das Teilchen einem HF-Signal mit der Frequenz $\nu_{\text{Kop}} = \nu_+ - \nu_z$ ausgesetzt, wodurch die Kopplung der Zyklotronbewegung an die Axialbewegung erfolgt. Die Seitenbandkopplung führt, wie in Abschnitt 2.4.2 diskutiert, zu einem Energieaustausch zwischen den beiden Eigenbewegungen. In der Analysefalle ist lediglich die Axialbewegung an das sich bei einer Temperatur von $T_z = 2,2$ K befindende Axial-Nachweissystem gekoppelt. Nach jedem Anregungspuls nimmt die Zyklotronenergie einen neuen Wert entsprechend der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie an. Im klassischen Grenzfall spiegeln sich die dadurch entstandenen Schwankungen der Zyklotronenergie in axialen Frequenzverschiebungen gemäß Gleichung (2.60) im inhomogenen Magnetfeld der Falle wider. Liegt nun die Anregungsamplitude, welche die Kopplungsstärke vorgibt [104] (siehe Gleichung (2.125)), bei einem Grenzwert, unterhalb dessen kein messbarer Effekt nachgewiesen werden kann, so bewirkt die Kopplung letztendlich einen statistischen Anstieg der durch

Zyklotron-Quantensprüngen bedingten axialen Frequenzschwankung Ξ , ohne erhebliche Erhöhung der Zyklotronenergie. Die Stärke dieses Anstiegs hängt von der Kopplungsfrequenz ν_{Kop} ab und weist ein Maximum im Resonanzfall $\nu_{\text{Kop}} - (\nu_+ - \nu_z) = 0$ auf.

Der Vorgang zur Bestimmung der Kopplungsfrequenz ν_{Kop} wird auf eine ähnliche Art und Weise wie bei der Messung der Larmorfrequenz und unmittelbar nach dieser durchgeführt. Der verwendete Messaufbau unterscheidet sich von dem in Abbildung 5.31 dargestellten Aufbau zum einen hinsichtlich der Mittelfrequenz des Bandpasses, welche in diesem Fall im Bereich der erwarteten Kopplungsfrequenz ν_{Kop} liegt und zum anderen darin, dass kein Relais eingesetzt wird. Das hochfrequente Anregungssignal wird vom Frequenzgenerator *Agilent 33250A* geliefert und über zwei 20 dB-Abschwächer und einen Trenntransformator an die SF-Spule angeschlossen. Die Anregungsfrequenz wird nicht in diskreten Schritten variiert, sondern innerhalb eines gegebenen Intervalls mittels eines Sweep-Signals kontinuierlich verändert. Der gesamte abzutastende Frequenzbereich wird in acht Teile unterteilt, welchen jeweils eine Mittenfrequenz ν_{Kop}^j und ein Sweep-Intervall zuzuordnen sind. In einer Messsequenz wird das Sweep-Signal mit der jeweiligen in zufälliger Reihenfolge ausgewählten Mittenfrequenz ν_{Kop}^j ein paar Dutzend mal an die SF-Spule angelegt. Nach jedem Anregungspuls wird die Axialfrequenz zweimal aufgenommen, und zwar unmittelbar nach der FFT-Mittelungszeit $\Delta T = 90$ s ab dem Ausschalten des Frequenzgenerators und dann erneut als Referenzmessung nach weiteren $t_0 + 90$ s, wobei t_0 für die Sweep-Zeit steht. Die Messsequenz wird so oft wiederholt, bis die aus der gemessenen Frequenzdifferenzen α_{Ref}^j und $\alpha_{\nu_{\text{Kop}}}^j$ ermittelten Standardabweichungen Ξ_{Ref}^j bzw. $\Xi_{\nu_{\text{Kop}}}^j$ gegen einen konstanten Wert konvergieren.

In Abbildung 5.36 ist der durch $\Delta \Xi_{\nu_{\text{Kop}}}^j = \Xi_{\nu_{\text{Kop}}}^j - \Xi_{\text{Ref}}^j$ gegebene Anstieg der Frequenzschwankung als Funktion der Anregungsfrequenz ν_{Kop}^j aufgetragen. Die horizontalen Balken stellen die Sweep-Intervalle dar. Der Versatz der Kurve ist auf das Hintergrundrauschen des Frequenzgenerators zurückzuführen, welches entsteht sobald der Frequenzgenerator an die HF-Leitung angeschlossen ist. Wie durch die durchgezogene Linie veranschaulicht, zeigt sich die charakteristische Linienform der Zyklotronresonanz im inhomogenen Magnetfeld in den Daten, woraus sich die Kopplungsfrequenz und folglich die modifizierte Zyklotronfrequenz $\nu_+ = 17,91344(16)$ MHz bestimmen lässt. Die freie Zyklotronfrequenz wird mithilfe des durch Gleichung (2.64) gegebenen Invarianztheorems berechnet und beträgt $\nu_c = 17,92613(16)$ MHz.

Aus den Messwerten für die Larmor- bzw. Zyklotronfrequenz lässt sich nun der g -Faktor des gespeicherten Protons über die Beziehung (2.7)

$$g = 2 \frac{\nu_L}{\nu_c}$$

bestimmen. Der erhaltene Wert von

$$g = 5,585696(50)$$

steht in vollkommener Übereinstimmung mit dem bisher am genauesten bestimmten Wert

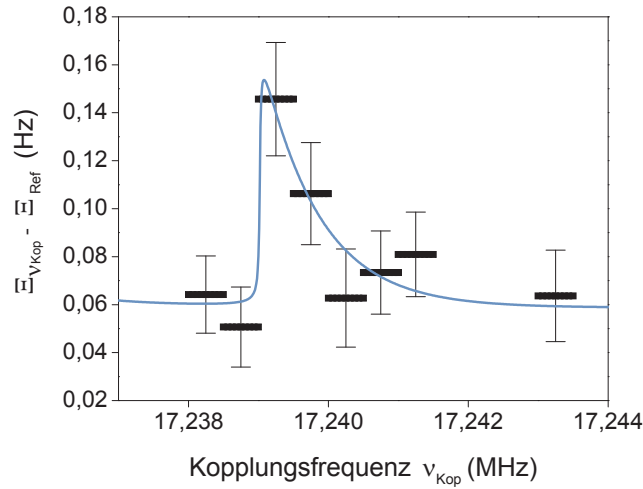


Abbildung 5.36.: Ermittlung der modifizierten Zyklotronfrequenz im inhomogenen Magnetfeld der Analysefalle zur Bestimmung des g -Faktors des Protons. Die modifizierte Zyklotronbewegung wird über das obere Seitenband mit $\nu_{\text{Kop}} = \nu_+ - \nu_z$ an die Axialbewegung gekoppelt. Die Anregung erfolgt durch ein Sweep-Signal mit der jeweiligen Mittenfrequenz ν_{Kop}^j . Die horizontalen Balken veranschaulichen die Sweep-Intervalle. Mit einer sehr geringen Stärke bewirkt die Kopplung einen durch $\Delta\Xi_{\nu_{\text{Kop}}}^j = \Xi_{\nu_{\text{Kop}}}^j - \Xi_{\text{Ref}}^j$ gegebenen statistischen Anstieg der axialen Frequenzschwankung, welcher im Resonanzfall $\nu_{\text{Kop}} - (\nu_+ - \nu_z) = 0$ den höchsten Wert aufweist. Aus der charakteristischen Linienform der Zyklotronresonanz (durchgezogene Linie) lässt sich die Kopplungsfrequenz und folglich die modifizierte Zyklotronfrequenz $\nu_+ = 17,91344(16)$ MHz bestimmen. Die freie Zyklotronfrequenz wird mithilfe des Invarianztheorems berechnet und beträgt $\nu_c = 17,92613(16)$ MHz.

des magnetischen Moments des Protons [43] sowie mit dem unter Verwendung der in der vorliegenden Arbeit und in [81] vorgestellten Technik im konkurrierenden Experiment an der Harvard Universität ermittelten Wert [82].

6. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden erstmalig Spin-Quantensprünge eines einzelnen in einer Penning-Falle gespeicherten Protons nachgewiesen. Als am schwersten zu überwindende Hürde stellte dieser Nachweis einen Durchbruch für das Experiment zur direkten Bestimmung des g -Faktors des Protons dar. Das magnetische Moment wurde mithilfe eines statistischen Messvorgangs im stark inhomogenen Magnetfeld der hier entworfenen Penning-Fallen zu $g = 5,585696(50)$ bestimmt. Dieser Wert steht in vollkommener Übereinstimmung mit den in [43] und [82] erhaltenen Werte.

Die Umsetzung der Idee, das magnetische Moment eines einzelnen, lediglich mittels der Überlagerung magnetischer und elektrischer Felder räumlich eingeschlossenen Protons mit extrem hoher Genauigkeit zu bestimmen, setzt ein lückenloses Verständnis seiner Eigenbewegungen und die Beherrschung aller Einflussfaktoren, die auf diese maßgeblich wirken können, voraus. Die Penning-Falle als konkretes Instrument zur Speicherung und Kühlung des geladenen Teilchens bildet den Kern der hier präsentierten Arbeit.

Das Bestreben, eine Penning-Falle in ein Messinstrument zu verwandeln, welches bezüglich der durch Spin-Übergänge bedingten, sich im Bereich von 0,3 ppm befindenden Frequenzverschiebungen empfindlich ist, wird in dieser Dissertation von der Konzeption über die Realisierung und Charakterisierung der Falle bis hin zu den erzielten Ergebnisse eingehend erörtert. Die Entwicklung und der erfolgreiche Betrieb einer neuartigen sogenannten Analysefalle stellen die wichtigsten Beiträge dieser Arbeit zum Gesamtexperiment dar.

Ein allgemeingültiges Verfahren zum Entwurf fünfpoliger Penning-Fallen, deren Eigenschaften hinsichtlich ihrer Orthogonalität und Kompensation des Speicherpotentials optimiert sind, wird vorgestellt und mittels zwei verschiedenen Berechnungsmethoden demonstriert. Zum einen wird ein Modell verwendet, welches auf der analytischen Lösung für das elektrostatische Potential in einer Falle zylindrischer Geometrie basiert, um mithilfe des oben erwähnten Verfahrens die bestmöglichen geometrischen Designparameter für die Präzisionsfalle zu ermitteln. Auf der Grundlage der Ergebnisse wird eine Empfehlung für einen neuen Entwurf der Präzisionsfalle abgeleitet. Zum anderen wird ein weiterer, umfassenderer, auf der Methode der finiten Elemente (FEM) beruhender Berechnungsvorgang vorgestellt, welcher den Entwurf von Penning-Fallen speziellerer Geometrien, wie die Analysefalle, unterstützt [41]. Analytische und numerische Berechnungsmethoden werden anhand der Präzisionsfalle verglichen und validiert. Darüber hinaus wird ein experimentelles Verfahren zur Asymmetriekompensation des elektrostatischen

Potentials unter Verwendung des in der Falle gespeicherten Protons präsentiert [41].

Ein ebenfalls auf FEM-Berechnungen basierendes Entwurfsverfahren zur Maximierung der durch eine ferromagnetische Ringelektrode in der Analysefalle hervorgerufenen magnetischen Inhomogenität wird entwickelt [41]. Die sich mit den ermittelten Designparametern ergebende Stärke der magnetischen Flasche wird experimentell bestätigt.

Die starke, durch den Koeffizient $B_2 = 297 \text{ mT/mm}^2$ charakterisierte Inhomogenität des Magnetfeldes, welche für den Nachweis von Spin-Quantensprüngen unabdingbar ist, stellt zugleich eine der größten experimentellen Herausforderungen dar. Das System eines einzelnen in der Analysefalle gespeicherten Protons ist nicht nur bezüglich des Auftretens von Spin-Übergängen extrem empfindlich, sondern auch bezüglich der Einflüsse der experimentellen Umgebung. Die Bekämpfung der dadurch hervorgerufenen Schwankungen der Axialfrequenz des gespeicherten Protons erforderte eine minutiöse in dieser Arbeit ausführlich geschilderte Untersuchung. Die eindeutige Identifizierung der auf das Teilchen wirkenden Einflussfaktoren und das Verständnis der betreffenden Mechanismen ermöglichten das Erreichen einer Frequenzstabilität, bei der Spin-Quantensprüngen eines einzelnen Protons mithilfe einer statistischen Messmethode zum ersten Mal nachgewiesen werden konnten [81]. Ferner wurde der g -Faktor des Protons über die Messung der Larmor- bzw. Zyklotronresonanz mit einer Genauigkeit von $\frac{\Delta g}{g} = 8,9 \times 10^{-6}$ in der Analysefalle bestimmt [41].

Weitere Entwicklungen und Zukunftsthemen

Auf der Grundlage der während der vorliegenden Arbeit erhaltenen Ergebnisse und durchgeführten Beobachtungen wurden entscheidende Änderungen im experimentellen Aufbau vorgenommen und weitere Entwicklungen getätigt, welche im Rahmen der Dissertationen von H. Kracke [70] und A. Mooser [71] in allen Einzelheiten beschrieben werden.

Die in dieser Arbeit dargelegte Interpretation der untersuchten Entwicklung der Frequenzschwankung in der Analysefalle zeigte das Auftreten von durch den Einfluss äußerst schwacher Störfelder ausgelösten Zyklotron-Quantensprüngen als Ursache für die remanente Instabilität der Axialfrequenz. In dieser Hinsicht wurde der Neuaufbau der Apparatur mit dem zentralen Ziel der weiteren Unterdrückung von auf die Falle einwirkendem externem Rauschen und von sonstigen etwaigen Störquellen realisiert. Zur Eliminierung der vom Pulsrohrkühler erzeugten mechanischen Vibrationen wurde dieser durch einen ^4He -Badkryostat ersetzt. Ein neues aus zwei Axial-Spulen toroidaler Geometrie bestehendes Axial-Nachweissystem mit höherem Signal-Rausch-Verhältnis wurde entwickelt. Ferner erfolgten kleine Änderungen an der Beschaltung und Verkabelung. Diese Maßnahmen ermöglichten die Eliminierung der durch den experimentellen Aufbau bedingten Einschränkungen. Dementsprechend ließ sich die mit dem vorhergehenden Aufbau erreichte untere Grenze der Frequenzschwankung letztendlich unterschreiten.

Als Folge konnten diskrete Spin-Übergänge eines einzelnen in der Analysefalle gespeicherten Protons erstmals nachgewiesen werden [114]. Schließlich ließ sich die auf einem Doppel-Penningfalle-Aufbau basierte Methode zur Bestimmung des g -Faktors erstmals demonstrieren [115].

Eine noch bevorstehende, hinsichtlich einer weiteren Erhöhung der Genauigkeit bei der Messung der Eigenfrequenzen des Protons in der Präzisionsfalle fundamentale Änderung des Aufbaus betrifft das Vergrößern des Abstands zwischen den beiden Fallen, was sich durch die Verlängerung der Transportstrecke realisieren lässt. Beim jetzigen Abstand von 43,74 mm zwischen den Fallenzentren beträgt der durch die ferromagnetische Ringelektrode der Analysefalle hervorgerufene Koeffizient $B_2 = 4,538(7) \mu\text{T}/\text{mm}^2$ am Ort der Präzisionsfalle. Dies führt, wie in der vorliegenden Arbeit eingehend diskutiert, zu einer Energieabhängigkeit der modifizierten Zyklotronfrequenz.

Im Rückblick auf die erzielten Erfolge und Durchbrüche lässt es sich als Fazit behaupten, dass alle Voraussetzungen zur Umsetzung des ursprünglichen experimentellen Ansatzes für die Bestimmung des g -Faktors des Protons mit der angestrebten Genauigkeit von $\frac{\Delta g}{g} = 10^{-9}$ nun erfüllt sind. Die Zukunft wird mit dem von der Kollaboration *BASE* begonnenen Aufbau eines äquivalenten Experiments zur Bestimmung des g -Faktors des Antiprotons [151] am CERN bereits gestaltet.

A. Bearbeitung der Elektrodenoberflächen der Penning-Fallen

Zur Verhinderung von Oxidation werden die Kupferelektroden der Fallen mit Gold beschichtet. Um die Gleichmäßigkeit der galvanischen Abscheidung zu gewährleisten, ist eine Vorbehandlung der Elektrodenoberflächen erforderlich. Besonders ist auf die Entfernung von Drehriefen zu achten. Diese stellen scharfe Innenwinkel dar, an denen es zur Verminderung oder sogar Unterdrückung der Abscheidung kommen kann. Die durch eine schlechte Beschichtung bedingte unregelmäßige Verteilung unterschiedlicher Materialien auf der Innenflächen der Elektroden ruft Kontaktpotentialen hervor, welche zu einer undefinierten Verzerrung des elektrostatischen Potentials der Falle führen können.

Aus diesem Grund wurden die Elektroden, nachdem die notwendigen Drahtanschlüsse mit bleifreiem Lot (*Sn90Ag10*) an diese angelötet worden sind, zunächst mit einem Gemisch aus Schwefelsäure und Wasserstoffperoxid zur Entfernung von Oxidschichten nachbehandelt. Anschließend wurden die Innenflächen der Elektroden mit einem schonenden Verfahren glatt poliert. Hierzu wurden Wattestäbchen (bzw. Pfeifenputzer im Fall der Analysefalle) und *Wiener Kalk*¹ verwendet. Die mit einer Mischung von *Wiener Kalk* und Wasser durchtränkten Wattestäbchen werden an einem Rotationswerkzeug befestigt. Die zu polierenden Oberflächen werden dann sanft gegen das rotierende Wattestäbchen gepresst. Aufgrund ihrer filigranen Geometrie (siehe Abbildung 3.5 und Kapitel 4) werden der Ring und die Korrektorelektroden der Analysefalle mit einer noch sanfteren Variante des Polierverfahrens behandelt. Die Elektroden werden zuerst aufeinander gestapelt und befestigt. Ein rotierender Pfeifenputzer wird entlang der Innenfläche des Elektrodenturms in vertikaler Richtung gleichmäßig hoch und runter bewegt bis die Oberflächen ausreichend glatt sind. Schließlich werden die Elektroden im Ultraschallbad mit Aceton gereinigt.

In Abbildung A.1 werden die Oberflächenprofile direkt nach deren Herstellung und nach dem Polieren verglichen. Die vor der Nachbehandlung sichtbaren Drehspuren (siehe Abbildung A.1(a)) konnten mit dem mechanischen Polierverfahren beseitigt werden.

¹Wiener Kalk ist ein reiner, feinstzermahlener, gebrannter Dolomitstein (ein natürlich vorkommendes Karbonat-Gestein).

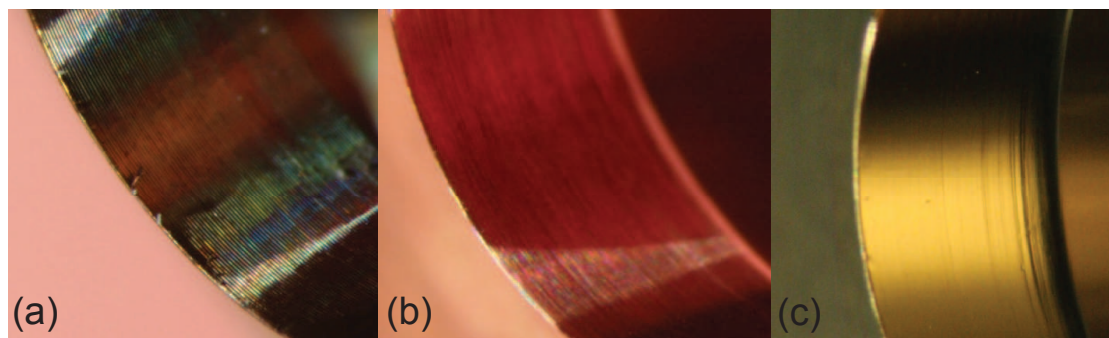


Abbildung A.1.: Vergleich der Innenfläche der Elektroden (a) vor und (b) nach dem mechanischen Polierverfahren. In (c) wird das Endergebnis nach der Vergoldung gezeigt.

B. Kapazitätsdioden

Eine Kapazitätsdiode ist ein elektronisches Halbleiter-Bauteil, welches mit einem speziellen pn-Übergang versehen ist. Die Diode wird in Sperrrichtung betrieben, wodurch eine Ladungsträgerverarmungszone am pn-Übergang entsteht. Diese isolierende Sperrschicht zwischen den Ladungsträgern kann als Dielektrikum eines Kondensators aufgefasst werden, während die Ladungsträger als Kondensatorplatten wirken. Mit steigender in Sperrrichtung gepolter Spannung verbreitert sich die ladungsfreie Zone und somit nimmt die Kapazität ab, da analog zu einem Kondensator, die Beziehung $C_k \propto \frac{A_k}{d_k}$ gilt. Dabei stellt d_k die Breite der Sperrschicht, A_k die Fläche der äquivalenten Kondensatorplatten und C_k die Kapazität dar. Die Kapazität als Funktion der angelegten Spannung V_k wird durch

$$C_k(V_k) = \frac{C_{k0}}{\left(1 + \frac{V_k}{\phi}\right)^{\gamma_k}} \quad (\text{B.1})$$

gegeben, wobei C_{k0} für die Nullspannungskapazität und ϕ für die Diffusionsspannung ($\phi = 1,2$ V für GaAs bei Raumtemperatur) stehen. Verschiedene Dotierungsverläufe in der Sperrschicht ergeben unterschiedliche Anstiege der Kapazitätskennlinie, die durch den Gradationsexponent γ_k charakterisiert werden. Bei einem *abrupten pn-Übergang* ($\gamma = 0,5$) ist die Dotierungsdichte entlang der Sperrschicht konstant. Ungleichmäßige Dotierungsverläufe werden zum Erreichen eines linearen Verhaltens zwischen Frequenz und Spannung eingesetzt. Unter diesen befinden sich die *hyperabrupten pn-Übergänge* ($\gamma > 0,5$), die sich dem linearen Verhalten nähern, und die *linearen pn-Übergänge* ($\gamma = 0,33$), die eine nahezu perfekt Linearität aufweisen.

Die Auswirkung der in Tabelle B.1 aufgelisteten GaAs-Kapazitätsdioden (*MACOM MA46 Series*) auf die Güte des Zyklotron-Resonators sowie die erreichbare maximale Verstimmbarkeit der Resonanzfrequenz wurden bei Raumtemperatur in einem separaten Testaufbau untersucht. Dieser wird in Abbildung B.1(a) schematisch dargestellt.

Die Kapazitätsdiode C_k wird über den Koppelkondensator C_a an den Zyklotron-Resonator angeschlossen. Die Vorspannungsschaltung besteht aus dem Kondensator $C_V = 100$ nF und dem Widerstand R_V , welche zusammen einen Tiefpass bilden. Die Resonanzfrequenz als Funktion der an die Kapazitätsdiode angelegten Sperrspannung V_k wird durch die Beziehung

$$\nu_k(V_k) = \frac{1}{\sqrt{L_p \left(C_p + \frac{C_a C_k(V_k)}{C_a + C_k(V_k)} \right)}} \quad (\text{B.2})$$

Modell	Kapazität (pF)		Q	γ_k
	(1 MHz, 4 V)		(50 MHz, 4 V)	
MA46H201	0,9	– 1,1	3000	1,13 – 1,38 (2 – 20 V)
MA46H202	2,7	– 3,3	2000	1,13 – 1,38 (2 – 20 V)
MA46H203	4,5	– 5,5	1500	1,13 – 1,38 (2 – 20 V)
MA46H204	9,0	– 11,0	1500	1,13 – 1,38 (2 – 20 V)
MA46H206	13,5	– 16,5	1500	1,13 – 1,38 (2 – 20 V)
MA46H070	0,5	– 0,7	4500	0,68 – 0,83 (0 – 20 V)
MA46H071	0,9	– 1,1	4500	0,68 – 0,83 (0 – 20 V)
MA46H072	2,7	– 3,3	3000	0,68 – 0,83 (0 – 20 V)

Tabelle B.1.: Herstellerangaben der untersuchten Kapazitätsdioden.

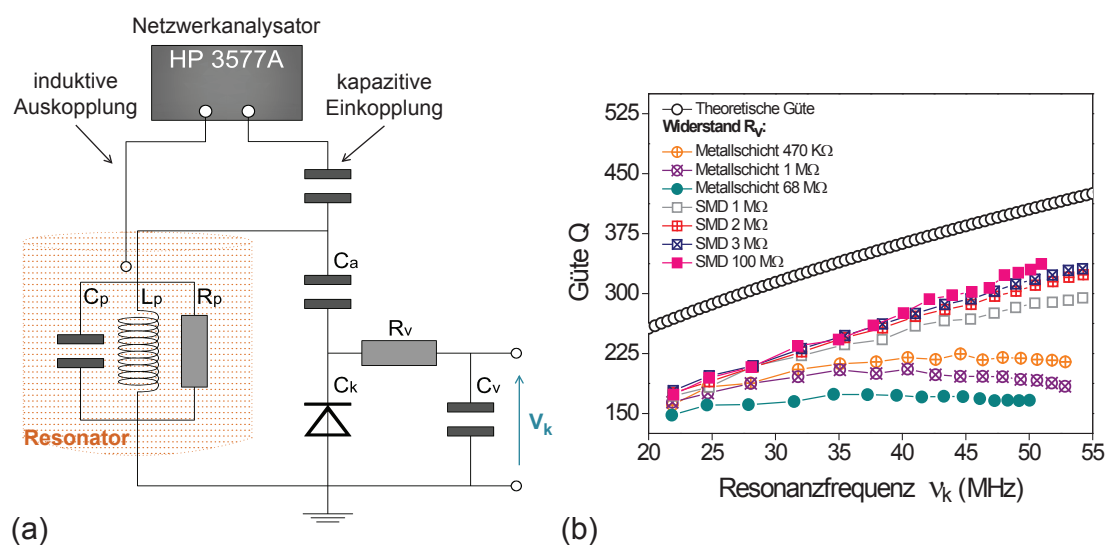


Abbildung B.1.: (a) Schematische Darstellung des Testaufbaus zur Untersuchung der Auswirkung verschiedener Kapazitätsdioden auf den Zyklotron-Resonator. (b) Effekt unterschiedlicher Bauformen des Widerstands R_V sowie der Widerstandstärke auf die Güte. Bei allen Messungen werden SMD-Kondensatoren ($C_a = 220 \text{ pF}$ und $C_V = 100 \text{ nF}$) und die Kapazitätsdiode MA46H206 verwendet. Anhand der Ergebnisse wurde die Konfiguration mit dem SMD-Widerstand von $R_V = 100 \text{ M}\Omega$ für die sich anschließenden Vergleichsmessungen der Kapazitätsdioden ausgewählt.

gegeben.

Im Hochfrequenzbereich, in dem die Messungen durchgeführt worden sind, ist das Erreichen eines stabilen und zuverlässigen Testaufbaus nicht trivial. Eine eindeutig definierte Masse, sowie die geeignete Auswahl der verwendeten Bauteile ist dabei ausschlaggebend. Oberflächenmontierte Bauelemente (SMD), die aufgrund ihrer kompakten Bauform bessere Hochfrequenzeigenschaften als die Bauelemente der Durchsteckmontage aufweisen, werden bevorzugt. Dies wird durch die in Abbildung B.1(b) gezeigten Ergebnisse veranschaulicht. Bei dieser Untersuchung des Testaufbaus wird die Kapazitätsdiode MA46H206 über einen SMD-Kondensator von $C_a = 220 \text{ pF}$ stark an den Resonator ge-

koppelt. Der Kondensator C_V ist ebenfalls ein SMD-Bauteil. Die Sperrspannung V_k wird in 1 V Schritten von 0 V bis 14 V variiert. Die Resonanzfrequenz ν_k sowie die Bandbreite $\Delta\nu$ der Resonanzkurve werden jeweils mit Hilfe eines Netzwerkanalysators (*HP 3577A*) ermittelt. Die Güte lässt sich gemäß Gleichung (2.101) durch $Q = \frac{\nu_k}{\Delta\nu}$ berechnen. Diese Prozedur wurde für unterschiedliche Bauformen und Stärken des Widerstandes R_V durchgeführt. In Abbildung B.1(b) wird die gemessene Güte als Funktion der Resonanzfrequenz für jede getestete Konfiguration aufgetragen und mit dem erwarteten Verlauf verglichen. Der Vorteil der Verwendung von SMD-Bauelementen ist deutlich festzustellen.

Die theoretische Güte des Resonators als Funktion der Frequenz kann gemäß der Beziehung [100]

$$Q_k = Q_0 \sqrt{\frac{\nu_k}{\nu_0}} \quad (\text{B.3})$$

berechnet werden, wobei Q_0 die Güte und ν_0 die Resonanzfrequenz des freien Resonators darstellen. Die Frequenzabhängigkeit der Güte lässt sich auf die Frequenzabhängigkeit des Verlustwiderstandes R_s der Spule zurückführen. Aus dem Skin-Effekt [92] folgt $R_s(\omega_k) \propto \sqrt{\omega_k}$. Betrachtet man nun, dass die Güte der Spule durch $Q = \frac{\omega L_p}{R_s}$ gegeben wird, so ergibt sich unmittelbar die Beziehung (B.3).

Unter Verwendung des optimierten Testaufbaus mit $R_V = 100 \text{ M}\Omega$ (SMD) und des oben beschriebenen Messablaufs, wurden die unterschiedlichen Kapazitätsdioden untersucht. Die Ergebnisse sind in Abbildung B.2 dargestellt. Dabei wird die Kapazität C_k nach Gleichung (B.2) berechnet. Für den in Abbildung 3.7 dargestellten endgültigen Aufbau des Zyklotron-Nachweissystems wurde, auf der Grundlage der Ergebnisse, die Kapazitätsdiode *MA46H072* ausgewählt. Obwohl die Kapazitätsdiode *MA46H206* ebenfalls zufriedenstellende Eigenschaften aufweist, handelt es sich dabei, nach Angabe des Herstellers, um ein überholtes Modell. Um ihre Auswirkung auf die Güte zu verringern, wird die Kapazitätsdiode über einen Kondensator von $C_a = 4,7 \text{ pF}$ schwach an den Zyklotron-Resonator gekoppelt, was jedoch eine Reduktion des Frequenzabstimmbereiches zur Folge hat.

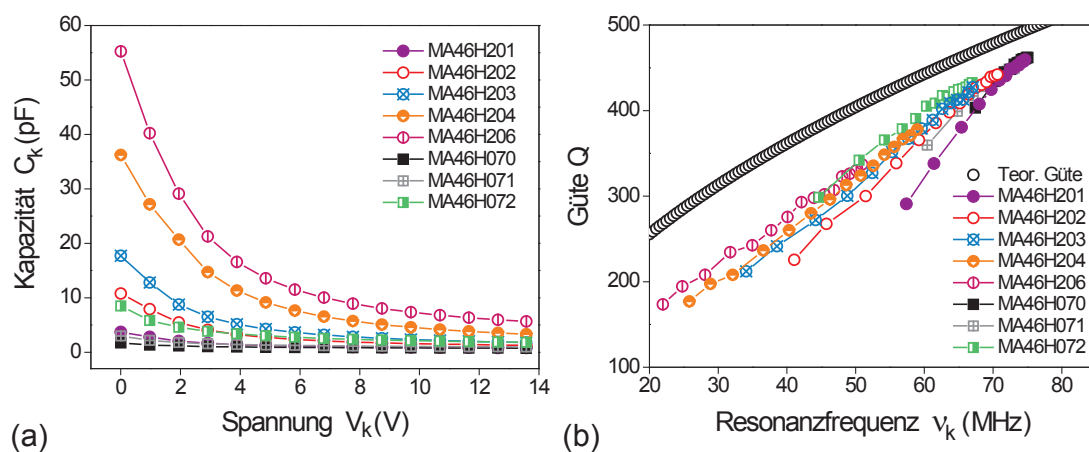


Abbildung B.2.: Ergebnisse des Vergleichs der Kapazitätsdioden. (a) Kapazität der Kapazitätsdioden als Funktion der angelegten Sperrspannung. (b) Resonatorgüte als Funktion der Resonanzfrequenz unter Einfluss der jeweiligen Kapazitätsdiode. Für den endgültigen Aufbau des Zyklotron-Nachweissystems wurde die Kapazitätsdiode *MA46H072* ausgewählt.

C. Designparameter einer Penning-Falle zylindrischer Geometrie

Unter Verwendung des in Abschnitt 2.2.3 präsentierten Modells zur analytischen Berechnung des elektrostatischen Potentials einer zylindrischen Penning-Falle und der in Abschnitt 4.1.1 vorgestellten Methode, lassen sich die optimalen Fallendimensionen bestimmen, mit welchen sowohl die Orthogonalitäts- ($D_2^{\nu_z} = 0$) als auch die Kompensationsbedingung ($\Delta_{\text{TR}} = 0$) erfüllt werden können. Die relevanten Parameter zum Entwurf und zur Charakterisierung einer zylindrischen Penning-Falle (siehe Abbildungen 2.5 und 4.4(a)) sind für verschiedene Fallenradien mit $l_e = 10$ mm und $l_s = 0,14$ mm in Tabelle C.1 aufgelistet. Dabei ist $D_2^{\nu_z}$ bei der jeweiligen Betriebsspannung ($V_0 = V_{\text{res}}$) für $\nu_z = 674,4$ kHz angegeben.

ρ_0 (mm)	l_0 (mm)	l_k (mm)	V_{res} (V)	$D_2^{\nu_z} (V_{\text{res}})$ (Hz/Unit _{TR})	$\mathbf{T}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{C}_4}$	Δ_{TR}
1,0	0,183	0,681	-0,252	-48,77663(9)	0,879057(1)	$3,250(14) \times 10^{-4}$
1,5	0,344	1,087	-0,564	-302,7627(3)	0,880148(1)	$-5,80(14) \times 10^{-5}$
1,8	0,440	1,331	-0,811	106,87512(7)	0,880412(1)	$7,0(1,4) \times 10^{-6}$
2,0	0,504	1,494	-1,001	248,3340(1)	0,880484(1)	$-4,80(14) \times 10^{-5}$
2,5	0,665	1,901	-1,562	213,47407(7)	0,880703(1)	$-3,10(14) \times 10^{-5}$
3,0	0,827	2,308	-2,249	-165,75859(4)	0,880863(1)	$-7,10(14) \times 10^{-5}$
3,5	0,988	2,715	-3,059	-61,74150(1)	0,880964(1)	$2,40(14) \times 10^{-5}$
4,0	1,149	3,122	-3,994	31,46770(1)	0,881039(1)	$1,090(14) \times 10^{-4}$
4,5	1,310	3,530	-5,056	-25,19255(2)	0,881012(1)	$-4,0(1,4) \times 10^{-6}$
5,0	1,471	3,937	-6,240	72,55945(2)	0,881053(1)	$6,50(14) \times 10^{-5}$
5,5	1,632	4,345	-7,550	59,71872(3)	0,881001(1)	$-4,80(14) \times 10^{-5}$
6,0	1,795	4,751	-8,981	-110,84381(3)	0,881061(1)	$-1,20(14) \times 10^{-5}$
6,5	1,957	5,157	-10,533	-17,63409(4)	0,881058(1)	$1,60(14) \times 10^{-5}$
7,0	2,119	5,563	-12,207	128,14573(4)	0,880993(1)	$-3,20(14) \times 10^{-5}$
7,5	2,281	5,968	-13,998	422,30750(5)	0,880904(1)	$-5,80(14) \times 10^{-5}$
8,0	2,444	6,371	-15,902	785,89834(6)	0,880824(1)	$-3,00(14) \times 10^{-5}$
8,5	2,619	6,768	-17,913	-43,80297(6)	0,880956(1)	$-1,70(14) \times 10^{-5}$
9,0	2,790	7,165	-20,031	-108,26890(7)	0,880927(1)	$-8,0(1,4) \times 10^{-6}$
9,5	2,962	7,560	-22,253	-15,74849(8)	0,880843(1)	$-2,20(14) \times 10^{-5}$
10,0	3,138	7,951	-24,570	-6,31020(9)	0,880778(1)	$-8,0(1,4) \times 10^{-6}$

Tabelle C.1.: Optimale geometrische Parameter zum Entwurf zylindrischer Penning-Fallen beliebiger Radien.

Literaturverzeichnis

- [1] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264, 1967.
- [2] F. J. Hasert *et al.* Search for elastic muon-neutrino electron scattering. *Phys. Lett. B*, 46 B:121, 1973.
- [3] F. J. Hasert *et al.* Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the Gargamelle neutrino experiment. *Phys. Lett. B*, 46 B:138, 1973.
- [4] F. J. Hasert *et al.* Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the Gargamelle neutrino experiment. *Nucl. Phys. B*, 73:1, 1974.
- [5] R. Mann. *An Introduction to Particle Physics and the Standard Model*. Crc Pr Inc.
- [6] S. L. Glashow. Towards a unified theory: Threads in a tapestry. *Rev. Mod. Phys.*, 52:539, 1980.
- [7] G. Lüders. Proof of the TCP theorem. *Ann. Phys.*, 2:1, 1957.
- [8] G. Lüders. Some consequences of TCP-invariance. *Phys. Rev.*, 106:385, 1957.
- [9] V. Alan Kostelecký and Neil Russell. Data tables for lorentz and CPT violation. *Rev. Mod. Phys.*, 83:11, 2011.
- [10] B. Schwingerheuer *et al.* CPT tests in the neutral kaon system. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4376–4379, 1995.
- [11] R. S. Van Dyck, Jr., P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt. New high-precision comparison of electron and positron g factors. *Phys. Rev. Lett.*, 59:26, 1987.
- [12] O. W. Greenberg. CPT violation implies violation of Lorentz invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 89:231602, 2002.
- [13] V. W. Hughes, M. Grosse Perdekamp, D. Kawall, W. Liu, K. Jungmann, and G. zu Putlitz. Test of CPT and Lorentz invariance from muonium spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 87:111804, 2001.
- [14] G. W. Bennett *et al.* Search for Lorentz and CPT violation effects in muon spin precession. *Phys. Rev. Lett.*, 100:091602, 2008.

- [15] T. Higuchi *et al.* Search for time-dependent CPT violation in hadronic and semi-leptonic b decays. *Phys. Rev. D*, 85:071105, 2012.
- [16] V. Alan Kostelecký and Richard J. Van Kooten. CPT violation and B -meson oscillations. *Phys. Rev. D*, 82:101702, 2010.
- [17] Don Colladay and V. Alan Kostelecký. CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, 55:6760–6774, 1997.
- [18] J. Bernabéu, N. Mavromatos, and J. Papavassiliou. Novel type of CPT violation for correlated Einstein-Podolsky-Rosen states of neutral mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 92:131601, 2004.
- [19] H. G. Dehmelt. Radio-frequency spectroscopy of stored ions. I. Storage. *Adv. At. Mol. Phys.*, 3:53, 1967.
- [20] H. G. Dehmelt. Radio-frequency spectroscopy of stored ions. II. Spectroscopy. *Adv. At. Mol. Phys.*, 5:109, 1969.
- [21] H. G. Dehmelt and F. L. Walls. Bolometric technique for the RF spectroscopy of stored ions. *Phys. Rev. Lett.*, 21:127, 1968.
- [22] D. J. Wineland and H. G. Dehmelt. Principles of the stored ion calorimeter. *J. Appl. Phys.*, 46:919, 1975.
- [23] H. G. Dehmelt. Continuous Stern-Gerlach effect: Principle and idealized apparatus. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 53:2291, 1986.
- [24] D. Lunney, J. M. Pearson, and C. Thibault. Recent trends in the determination of nuclear masses. *Rev. Mod. Phys.*, 75:1021, 2003.
- [25] G. Bollen. Traps for rare isotopes. *Lect. Notes Phys.*, 651:169, 2004.
- [26] K. Blaum. High-accuracy mass spectrometry with stored ions. *Phys. Rep.*, 425:1, 2006.
- [27] J. Ketelaer, K. Blaum, M. Block, K. Eberhardt, M. Eibach, R. Ferrer, S. George, F. Herfurth, J. Ketter, Sz. Nagy, J. Repp, L. Schweikhard, C. Smorra, S. Sturm, and S. Ulmer. Recent developments in ion detection techniques for Penning trap mass spectrometry at TRIGA-TRAP. *Eur. Phys. J. A*, 42:311, 2009.
- [28] K. Blaum, Yu. N. Novikov, and G. Werth. Penning traps as a versatile tool for precise experiments in fundamental physics. *Contemp. Phys.*, 51:149, 2010.
- [29] J. Repp, C. Böhm, J.R. Crespo López-Urrutia, A. Dörr, S. Eliseev, S. George, M. Goncharov, Y.N. Novikov, C. Roux, S. Sturm, S. Ulmer, and K. Blaum. PEN-TATRAP: a novel cryogenic multi-Penning-trap experiment for high-precision mass

- measurements on highly charged ions. *Appl. Phys. B*, DOI 10.1007/s00340-011-4823-6, 2012.
- [30] M. Redshaw, J. McDaniel, and E. G. Myers. Dipole moment of PH^+ and the atomic masses of ^{28}Si , ^{31}P by comparing cyclotron frequencies of two ions simultaneously trapped in a Penning trap. *Phys. Rev. Lett.*, 100:093002, 2008.
- [31] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 100:120801, 2008.
- [32] H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth. High-accuracy measurement of the magnetic moment anomaly of the electron bound in hydrogenlike Carbon. *Phys. Rev. Lett.*, 85:5308, 2000.
- [33] J. Verdú, S. Djekic, S. Stahl, T. Valenzuela, M. Vogel, G. Werth, T. Beier, H.-J. Kluge, and W. Quint. Electronic g Factor of hydrogenlike Oxygen $^{16}\text{O}^{7+}$. *Phys. Rev. Lett.*, 92:093002, 2004.
- [34] S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, J. Zatorski, Z. Harman, W. Quint, G. Werth, C. H. Keitel, and K. Blaum. g Factor of hydrogenlike $^{28}\text{Si}^{13+}$. *Phys. Rev. Lett.*, 107:023002, 2011.
- [35] B. Schabinger, S. Sturm, A. Wagner, J. Alonso W. Quint, G. Werth, and K. Blaum. Experimental g factor of hydrogenlike Silicon-28. *Eur. Phys. J. D*, 66:71, 2012.
- [36] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, and G. Gabrielse. Cavity control of a single-electron quantum cyclotron: Measuring the electron magnetic moment. *Phys. Rev. A*, 83:052122, 2011.
- [37] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Tenth-order QED contribution to the electron $g-2$ and an improved value of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 109:111807, 2012.
- [38] C. C. Rodegheri, K. Blaum, H. Kracke, S. Kreim, A. Mooser, C. Mrozik, W. Quint, S. Ulmer, and J. Walz. Developments for the direct determination of the g -factor of a single proton in a Penning trap. *Hyperfine Interact.*, 194:93, 2009.
- [39] K. Blaum, H. Kracke, S. Kreim, A. Mooser, C. Mrozik, W. Quint, C. C. Rodegheri, B. Schabinger, S. Sturm, S. Ulmer, A. Wagner, J. Walz, and G. Werth. g -factor experiments on simple systems in Penning traps. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 42:154021, 2009.
- [40] A. Mooser, K. Blaum, H. Kracke, S. Kreim, W. Quint, C. Rodegheri, S. Ulmer, and J. Walz. Towards a direct measurement of the g -factor of a single isolated proton. *Can. J. Phys.*, 165:140405, 2011.

- [41] C. C. Rodegheri, K. Blaum, H. Kracke, S. Kreim, A. Mooser, W. Quint, S. Ulmer, and J. Walz. An experiment for the direct determination of the g -factor of a single proton in a Penning trap. *New. J. Phys.*, 14:063011, 2012.
- [42] H. Häffner, T. Beier, S. Djekic, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, T. Valenzuela, and G. Werth. Double Penning trap technique for precise g factor determinations in highly charged ions. *Eur. Phys. J. D*, 22:163, 2003.
- [43] P. F. Winkler, D. Kleppner, T. Myint, and F. G. Walther. Magnetic moment of the proton in Bohr magnetons. *Phys. Rev. A*, 5:83, 1972.
- [44] R. Frisch and O. Stern. Über die magnetische Ablenkung von Wasserstoffmolekülen und das magnetische Moment des Protons I. *Z. Phys. A*, 85:4, 1933.
- [45] I. Estermann and O. Stern. Über die magnetische Ablenkung von Wasserstoffmolekülen und das magnetische Moment des Protons II. *Z. Phys. A*, 85:17, 1933.
- [46] J. M. B. Kellogg, I. I. Rabi, and N. F. Ramsey. The magnetic moment of the proton and the deuteron. The radiofrequency spectrum of H_2 in various magnetic fields. *Phys. Rev.*, 56:728, 1939.
- [47] F. Bloch, W. W. Hansen, and M. Packard. The nuclear induction experiment. *Phys. Rev.*, 70:474, 1946.
- [48] H. Sommer, H. A. Thomas, and J. A. Hipple. The measurement of e/m by cyclotron resonance. *Phys. Rev.*, 82:697, 1951.
- [49] D. J. Collington, A. N. Dellis, H. Sanders, and K. C. Turberfield. Magnetic moment of the proton. *Phys. Rev.*, 99:1622, 1955.
- [50] B. D'Urso, B. Odom, and G. Gabrielse. Feedback cooling of a one-electron oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 90:43001, 2003.
- [51] L. S. Brown and G. Gabrielse. Precision spectroscopy of a charged particle in an imperfect Penning trap. *Phys. Rev. A*, 25:2423, 1982.
- [52] L. S. Brown. Line shape for a precise measurement of the electron's magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, 52:2013, 1984.
- [53] L. S. Brown. Geonium lineshape. *Ann. Phys.*, 159:62, 1985.
- [54] L. S. Brown and G. Gabrielse. Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap. *Rev. Mod. Phys.*, 58:233, 1986.
- [55] G. Gabrielse. Relaxation calculation of the electrostatic properties of compensated Penning traps with hyperbolic electrodes. *Phys. Rev. A*, 27:2277, 1983.

- [56] G. Gabrielse. Detection, damping, and translating the center of the axial oscillation of a charged particle in a Penning trap with hyperbolic electrodes. *Phys. Rev. A*, 29:464, 1984.
- [57] G. Gabrielse and F. C. Mackintosh. Cylindrical Penning trap with orthogonalized anharmonicity compensation. *Int. J. Mass Spectrom. Ion Processes*, 57:1, 1984.
- [58] G. Gabrielse, L. Haarsma, and S. L. Rolston. Open-encap Penning traps for high precision experiments. *Int. J. Mass Spectrom. Ion Processes*, 88:319, 1989.
- [59] M. Kretzschmar. Particle motion in a Penning trap. *Eur. J. Phys.*, 12:240, 1991.
- [60] M. Kretzschmar. Single particle motion in a Penning trap: Description in the classical canonical formalism. *Physica Scripta*, 46:544, 1992.
- [61] M. Kretzschmar. Excitation of particle motions in a Penning trap: Description in the classical canonical formalism. *Physica Scripta*, 46:555, 1992.
- [62] M. Kretzschmar. A quantum mechanical model of Rabi oscillations between two interacting harmonic oscillator modes and the interconversion of modes in a Penning trap. *AIP Conf. Proc.*, 457:242, 1999.
- [63] W. Quint, J. Alonso, S. Djekic, H. J. Kluge, S. Stahl, T. Valenzuela, J. Verdú, M. Vogel, and G. Werth. Continuous Stern-Gerlach effect and the magnetic moment of the antiproton. *Nucl. Instr. Meth. B*, 214:207, 2004.
- [64] J. Verdú, S. Kreim, J. Alonso, K. Blaum, S. Djekic, W. Quint, S. Stahl, S. Ulmer, M. Vogel, J. Walz, and G. Werth. Penning trap measurement of the magnetic moment of the antiproton. *AIP Conf. Proc.*, 796:260, 2005.
- [65] G. Gabrielse, X. Fei, K. Helmerson, S. L. Rolston, R. Tjoelker, T. A. Trainor, H. Kalinowsky, J. Haas, and W. Kells. First capture of antiprotons in a penning trap: A kiloelectronvolt source. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2504–2507, 1986.
- [66] G. Gabrielse, X. Fei, L. A. Orozco, R. L. Tjoelker, J. Haas, H. Kalinowsky, T. A. Trainor, and W. Kells. Thousandfold improvement in the measured antiproton mass. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1317, 1990.
- [67] G. Gabrielse, D. Phillips, and W. Quint. Special relativity and the single antiproton: Fortyfold improved comparison of \bar{p} and p charge-to-mass ratios. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3544, 1995.
- [68] J. DiSciaccia, M. Marshall, K. Marable, G. Gabrielse, S. Eettenauer, E. Tardiff, R. Kalra, D. W. Fitzakerley, M. C. George, E. A. Hessels, C. H. Storry, M. Weel, D. Grzonka, W. Oelert, and T. Sefzick. One-particle measurement of the antiproton magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, 110:130801, 2013.

- [69] S. Ulmer. First observation of spin flips with a single proton stored in a cryogenic Penning trap. *Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg*, 2011.
- [70] H. Kracke. Detection of individual spin transitions of a single proton confined in a cryogenic Penning trap. *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 2012.
- [71] A. Mooser. *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, in Bearbeitung.
- [72] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, and N. Russel. CPT and Lorentz tests in Penning traps. *Phys. Rev. D*, 57:3932, 1998.
- [73] I. I. Rabi, S. Millman, P. Kusch, and J. R. Zacharias. The molecular beam resonance method for measuring nuclear magnetic moments. the magnetic moments of ${}^6_3\text{Li}$, ${}^7_3\text{Li}$ and ${}^{19}_9\text{F}$. *Phys. Rev.*, 55:526–535, 1939.
- [74] J. M. B. Kellogg, I. I. Rabi, and J. R. Zacharias. The gyromagnetic properties of the hydrogens. *Phys. Rev.*, 50:472–481, 1936.
- [75] F. Bloch and C. D. Jeffries. A direct determination of the magnetic moment of the proton in nuclear magnetons. *Phys. Rev.*, 80:305–306, 1950.
- [76] C. D. Jeffries. A direct determination of the magnetic moment of the protons in units of the nuclear magneton. *Phys. Rev.*, 81:1040–1055, 1951.
- [77] Peter J. Mohr, Barry N. Taylor, and David B. Newell. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006. *Rev. Mod. Phys.*, 80:633–730, 2008.
- [78] S G Karshenboim and V G Ivanov. The g factor in a light two-body atomic system: a determination of fundamental constants to test QED. *Can. J. of Phys.*, 80(11):1305–1312, 2002.
- [79] Saveliy G. Karshenboim and Vladimir G. Ivanov. The g factor of the proton. *Phys. Lett. B*, 566:27 – 34, 2003.
- [80] N. Hermanspahn, H. Häffner, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth. Observation of the continuous Stern-Gerlach effect on an electron bound in an atomic ion. *Phys. Rev. Lett.*, 84:427, 2000.
- [81] S. Ulmer, C. C. Rodegheri, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, W. Quint, and J. Walz. Observation of spin flips with a single trapped proton. *Phys. Rev. Lett.*, 106:253001, 2011.
- [82] J. DiSciaccia and G. Gabrielse. Direct measurement of the proton magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, 108(153001), 2012.

- [83] F. M. Penning. Die Glimmentladung bei niedrigem Druck zwischen koaxialen Zylindern in einem axialen Magnetfeld. *Physica*, 3:873, 1936.
- [84] J. R. Pierce. *Theory and Design of Electron Beams*. D. Van Nostrand Co.
- [85] F. Vedel and G. Werth. High Precision Mass Spectrometry in the Penning Trap. In *Practical Aspects of Ion Trap Mass Spectrometry II*. R. E. March and J. F. J. Todd (Ed.), CRC Press, New York, 237, 1995.
- [86] W. Paul and M. Raether. Das elektrische Massenfilter. *Z. Phys.*, 140:262, 1955.
- [87] W. Paul, H. P. Reinhard, and U. von Zahn. Das elektrische Massenfilter als Massenspektrometer und Isotopentrenner. *Z. Phys.*, 152:143, 1958.
- [88] J. Verdú. Ultrapräzise Messung des elektronischen g -Faktors in wasserstoffähnlichem Sauerstoff. *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 2003.
- [89] G. Gräff and E. Klempt. Messung der Zyklotronfrequenz freier Elektronen im Vierpolkäfig. *Z. Naturforsch.*, 22a:1960, 1967.
- [90] G. Gräff, E. Klempt, and G. Werth. Method for measuring the anomalous magnetic moment of free electrons. *Z. Phys.*, 222:201, 1969.
- [91] W. M. Itano and D. J. Wineland. Laser cooling of ions stored in harmonic and Penning traps. *Phys. Rev. A*, 25:35, 1982.
- [92] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons.
- [93] S. Stahl. Aufbau eines Experiments zur Bestimmung elektronischer g -Faktoren einzelner wasserstoffähnlicher Ionen. *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 1998.
- [94] S. Ulmer, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, W. Quint, C.C. Rodegheri, and J. Walz. A cryogenic detection system at 28.9 mhz for the non-destructive observation of a single proton at low particle energy. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 705(0):55 – 60, 2013.
- [95] W. Shockley. Currents to conductors induced by a moving point charge. *J. Appl. Phys.*, 9:635, 1938.
- [96] X. Feng, M. Charlton, M. Holzscheiter, R. A. Lewis, and Y. Yamazaki. Tank circuit model applied to particles in a Penning trap. *J. Appl. Phys.*, 79:8, 1996.
- [97] J. B. Johnson. Thermal agitation of electricity in conductors. *Phys. Rev.*, 32:97, 1928.

- [98] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32:110, 1928.
- [99] H. Häffner. Präzisionsmessung des magnetischen Moments des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff. *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 2000.
- [100] W. W. Macalpine and R. O. Schildknecht. Coaxial resonators with helical inner conductor. *Proc. IRE*, 47:2099, 1959.
- [101] S. R. Jefferts, T. Heavner, P. Hayes, and G. H. Dunn. Superconducting resonator and a cryogenic GaAs field-effect transistor amplifier as a single ion detection system. 64:737, 1993.
- [102] S. Ulmer, H. Kracke, K. Blaum, S. Kreim, A. Mooser, W. Quint, C. C. Rodegheri, and J. Walz. The quality factor of a superconducting rf resonator in a magnetic field. *Rev. Sci. Instrum.*, 80:123302, 2009.
- [103] H. G. Dehmelt, W. Nagourney, and J. Sandberg. Self-excited mono-ion oscillator. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 83:5761, 1986.
- [104] E. A. Cornell, R. M. Weisskoff, K. R. Boyce, and D. E. Pritchard. Mode coupling in a Penning trap: π pulses and a classical avoided crossing. *Phys. Rev. A*, 41:312, 1990.
- [105] I. I. Rabi, J. R. Zacharias, S. Millman, and P. Kusch. A New Method of Measuring Nuclear Magnetic Moment. 53:318, 1938.
- [106] D. Wineland and H. Dehmelt. Line shifts and widths of axial, cyclotron and G-2 resonances in tailored, stored electron (ion) cloud. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Physics*, 16(3):338 – 342, 1975.
- [107] D. Wineland and H. Dehmelt. Line shifts and widths of axial, cyclotron and G-2 resonances in tailored, stored electron (ion) cloud. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Physics*, 19(2):251 –, 1976.
- [108] S. Van Dyck, P. B. Schwinberg, and H. Dehmelt. In *New Frontiers in High-Energy Physics*. Plenum Press, 1978.
- [109] N. F. Ramsey. *Molecular Beams*. Oxford University Press.
- [110] I. I. Rabi, N. F. Ramsey, and J. Schwinger. Use of Rotating Coordinates in Magnetic Resonance Problems. *Rev. Mod. Phys.*, 26:167, 1954.
- [111] A. Mooser. Untersuchung des Magnetfelds zur Spinflipanregung eines Protons in einer Penning-Falle. *Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 2009.

- [112] R. S. Van Dyck, P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt. Precise measurements of axial, magnetron, cyclotron, and spin-cyclotron-beat frequencies on an isolated 1-mev electron. *Phys. Rev. Lett.*, 38:310, 1977.
- [113] P. B. Schwinberg, R. S. Van Dyck, and H. G. Dehmelt. New comparison of the positron and electron g factors. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1679, 1981.
- [114] A. Mooser, H. Kracke, K. Blaum, S. A. Bräuninger, K. Franke, C. Leiteritz, W. Quint, C. C. Rodegheri, S. Ulmer, and J. Walz. Resolution of single spin-flips of a single proton. *Phys. Rev. Lett.*, 110:140405, 2013.
- [115] A. Mooser, S. A. Bräuninger, K. Franke, H. Kracke, C. Leiteritz, C. C. Rodegheri, H. Nagahama, G. Schneider, C. Smorra, K. Blaum, Y. Matsuda, W. Quint, J. Walz, Y. Yamazaki, and S. Ulmer. Demonstration of the double Penning trap technique with a single proton. *Phys. Lett. B*, 723:78, 2013.
- [116] S. Kreim. Direct observation of a single proton in a Penning trap. *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 2009.
- [117] S. Ulmer. Entwicklung des experimentellen Aufbaus zur Messung des g -Faktors des Protons in einer Penning-Falle. *Diplomarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg*, 2006.
- [118] H. Kracke. Entwicklung der kryogenen Nachweis-Elektronik zur Bestimmung der axialen Frequenz des Protons in einer Penning-Falle. *Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 2007.
- [119] C. Mrozik. Weiterentwicklung und Verbesserung des experimentellen Aufbaus zur Messung des magnetischen Moments des Protons. *Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 2009.
- [120] W.E Gifford and R.C. Longworth. Pulse tube refrigeration. *Trans. ASME: J. of Eng. for Industry*, 86:264, 1964.
- [121] N. H. Hermanspahn. Das magnetische Moment des gebundenen Elektrons in wasserstoffartigem Kohlenstoff (C^{5+}). *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz*, 1999.
- [122] F. Pobell. *Matter and Methods at Low Temperatures*. Springer-Verlag.
- [123] J. B. Camp, T. W. Darling, and Ronald E. Brown. Macroscopic variations of surface potentials of conductors. *J. Appl. Phys.*, 69:7127, 1991.
- [124] R. Behrisch. *Sputtering by particle bombardment, Band 1*. Springer-Verlag.

- [125] P. Sigmund. Mechanisms and theory of physical sputtering by particle impact. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B*, 27:1, 1987.
- [126] R. Behrisch and W. Eckstein. *Sputtering by particle bombardment: Experiments and Computer Calculations from Threshold to MeV Energies*. Springer Berlin.
- [127] L.J. Kieffer and G.H. Dunn. Electron impact ionization cross-section data for atoms, atomic ions, and diatomic molecules: I. Experimental data. *Rev. Mod. Phys.*, 38:1, 1966.
- [128] T. D. Märk and G. H. Dunn. *Electron impact ionization*. Springer-Verlag.
- [129] I. G. Brown. *The Physics and Technology of Ion Sources*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
- [130] R. H. Fowler and L. Nordheim. Electron emission in intense electric fields. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 119:173, 1928.
- [131] J. Verdú, S. Kreim, K. Blaum, H. Kracke, W. Quint, S. Ulmer, and J. Walz. Calculation of electrostatic fields using quasi-Green's functions: application to the hybrid Penning trap. *New. J. Phys.*, 10:103009, 2008.
- [132] C. Bowick. *RF Circuit Design*. Newnes.
- [133] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, and C. W. Trowbridge. *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*. John Wiley & Sons Ltd.
- [134] M. N. O. Sadiku. *Numerical Techniques in Electromagnetics*. CRC Press.
- [135] P. B. Zhou. *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*. Springer-Verlag.
- [136] N. Ida and J. P. A. Bastos. *Electromagnetics and Calculation of Fields*. Springer.
- [137] R. M. Bozorth. *Ferromagnetism*. Wiley-IEEE Press.
- [138] A. G. Marshall, T.-C. L. Wang, and T. L. Ricca. Tailored excitation for Fourier transform ion cyclotron resonance mass spectrometry. *J. Am. Chem. Soc.*, 107:7893, 1985.
- [139] S. Guan. General phase modulation method for stored waveform inverse Fourier transform excitation for Fourier transform ion cyclotron resonance mass spectrometry. *J. Chem. Phys.*, 91:775, 1989.
- [140] L. Chen, T.-C. L. Wang, T. L. Ricca, and A. G. Marshall. Phase-modulated stored waveform inverse Fourier transform excitation for trapped ion mass spectrometry. *Anal. Chem.*, 59:449, 1987.

- [141] S. Guan and A. G. Marshall. Stored waveform inverse Fourier transform axial excitation / ejection for quadrupole ion trap mass spectrometry. *Anal. Chem.*, 65:1288, 1993.
- [142] J. Verdú, S. Djekic, S. Stahl, T. Valenzuela, M. Vogel, G. Werth, H.-J. Kluge, and W. Quint. Determination of the g-factor of single hydrogen-like ions by mode coupling in a Penning trap. *Physica Scripta*, T112:68, 2004.
- [143] S. Ulmer, K. Blaum, H. Kracke, A. Mooser, W. Quint, C. C. Rodegheri, and J. Walz. Direct measurement of the free cyclotron frequency of a single particle in a Penning trap. *Phys. Rev. Lett.*, 107:103002, 2011.
- [144] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, and P. Ziesche. *Lehrbuch der theoretischen Physik in zehn Bänden, Band 1: Mechanik: BD 1*. Harri Deutsch.
- [145] J. N. Tan. Cooperative behavior in cavity-cooled, parametrically-pumped electron oscillators. *Dissertation, Harvard University*, 1992.
- [146] J. Tan and G. Gabrielse. Synchronization of parametrically pumped electron oscillators with phase bistability. *Phys. Rev. Lett.*, 67(3090), 1991.
- [147] N. W. McLachlan. *Theory and Application of Mathieu Functions*. Dover Publications.
- [148] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications.
- [149] S. Djekic, J. Alonso, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, T. Valenzuela, J. Verdú, M. Vogel, and G. Werth. Temperature measurement of a single ion in a Penning trap. *Eur. Phys. J. D*, 31:451, 2004.
- [150] J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley.
- [151] S. Ulmer, Y. Yamazaki, K. Blaum, W. Quint, and J. Walz. Direct high-precision measurement of the g-factor of a single antiproton stored in a cryogenic Penning trap. *Scientific Committee Paper*, (CERN-SPSC-2012-019 ; SPSC-I-241), 2012.

