

Risikomaße in der Finanzmathematik

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften

am Fachbereich Physik, Mathematik
und Informatik

der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Abderrazak Eddari
geb. in Casablanca

Mainz, den 17. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
2	Risikomaße	6
3	Methoden zur Ermittlung des Value-at-Risk	10
3.1	Parametrische Modelle	10
3.1.1	Value-at-Risk mit dem Varianz-Kovarianz-Modell	10
3.1.2	Portfolio-Normal Value-at-Risk	11
3.1.3	Delta-Normal Value-at-Risk	11
3.1.4	Delta-Gamma-Normal Value-at-Risk	13
3.1.5	Vorteile der Varianz-Kovarianz-Methode	14
3.1.6	Nachteile der Varianz-Kovarianz-Methode	14
3.1.7	Schätzer des Value-at-Risk (VaR) in diskreter Zeit	15
3.1.8	Konfidenzintervalle bei bekannten Mittelwerten	17
3.1.9	Exakte und asymptotische Konfidenzintervalle	18
3.1.10	Vergleich der Konfidenzintervalle	20
3.2	Simulationsmodelle	26
3.2.1	Historische Simulation	26
3.2.1.1	Grundidee	26
3.2.1.2	Vorteile der historischen Simulation	27
3.2.1.3	Nachteile der historischen Simulation	27
3.2.2	Monte Carlo Simulation	28
3.2.2.1	Grundidee	28
3.2.2.2	Vorteile der Monte Carlo Simulation	29
3.2.2.3	Nachteile der Monte Carlo Simulation	30
3.3	Nichtparametrische Schätzer für Value-at-Risk	31
3.3.1	Schätzung des bedingten Erwartungswertes $m(y)$ und der bedingten Varianz $\sigma(y)$	33
3.3.2	Schätzung des α -Quantils $x_{(\alpha)}$ der bedingten Verteilung von (ϵM_{t-1})	34
3.3.3	Likelihood Methode	38
3.3.4	Momentenmethode	38
3.3.5	Methode des Probability Weighted Moments	38
3.4	Numerische Approximation vom Value-at-Risk	41
3.4.1	Ansatz von Fallon	41
3.4.2	Ansatz von Zangari	42
3.4.3	Ansatz von Britten Jones/Schaefer	42
3.4.4	Ansatz von Rouvinez	43

4	Optimale Portfolios und Value-at-Risk im Black-Scholes-Modell	44
4.1	Explizite Formeln	47
4.2	Der Value-at-Risk im Black-Scholes-Modell	48
4.3	Schranken des Value-at-Risk	50
4.4	Optimale Portfolios mit beschränktem Value-at-Risk	51
4.5	Optimale Portfolios mit beschränkter Varianz	53
4.6	Vergleich der beiden Methoden	55
4.7	Der optimale Nutzen aus dem Endvermögen mit beschränktem Value-at-Risk	56
4.8	Optimierung des Nutzens aus dem Endvermögen mit beschränkter Varianz	60
4.9	Motivation für das Tail Mean und den Expected Shortfall.	63
5	Alternativen zum Value-at-Risk	71
5.1	Kohärente Risikomaße	71
5.2	Optimale Portfolios mit dem Expected Shortfall	78
5.3	Numerische Approximation der optimalen Lösung mit dem Expected Shortfall	86
5.4	Vergleich der Methoden Optimal Portfolios mit dem Expected Shortfall und Value-at-Risk	94

Abbildungsverzeichnis

1	Graph des Polynoms $P(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t$ mit ($a_1 = 0,31938153; a_2 = -0,356563782; a_3 = 1,781477937; a_4 =$ $-1,821255978; a_5 = 1,330274429; c = 0,2316419$) ($t^* = \frac{1}{1+c(\sqrt{T}\epsilon^*-z_{E(\alpha)})}$)	89
2	Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0$ ($T=100; d=1; r=0,05;$ $b=0,15; \sigma = 0,2; \alpha = 0,05$)	90
3	Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0$ ($T=200; d=1; r=0,05;$ $b=0,15; \sigma = 0,2; \alpha = 0,05$)	91
4	Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0$ ($T=300; d=1; r=0,05;$ $b=0,15; \sigma = 0,2; \alpha = 0,05$)	92
5	Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0$ ($T=500; d=1; r=0,05;$ $b=0,15; \sigma = 0,2; \alpha = 0,05$)	93
6	Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon_2^*(T)) = 0$ ($T=500; T=300; T=200; T=100,$ $d=1; r=0,05; b=0,15; \sigma = 0,2; \alpha = 0,05$)	95
7	$\epsilon^*(T), T \in [100, 500]$ ($C=0.5; x=0,5; d=1; r=0,05; b=0,15; \sigma = 0,2$ $\alpha = 0,05$)	96

1 Einführung

In der Finanzwelt werden bewusst Risiken zur Ertragserzielung eingegangen. Dabei entwickelt sich die Fähigkeit eines Finanzunternehmens, Risiken umfassend zu messen, zu überwachen und zu steuern, zu einem entscheidenden Parameter seiner strategischen Positionierung im zunehmend global ausgerichteten Wettbewerb. In diesem Zusammenhang stellt der Value-at-Risk-Ansatz eines der zur Zeit wichtigsten Hilfsmittel dar. Der Value-at-Risk (kurz: VaR) ist ein Risikomaß, welches den maximal möglichen zukünftigen Verlust eines Portfolios innerhalb eines Zeithorizonts T bei gegebenem Konfidenzniveau α misst. Der VaR des Gesamtportfolios beschreibt das aggregierte Marktrisiko des Finanzunternehmens.

Damit ist der VaR einerseits eine Messgröße, die es ermöglicht Portfolios unterschiedlicher Unternehmen zu vergleichen. Andererseits ist er jedoch auch ein Standardbegriff, dessen Verwendung von der Bankenaufsicht gefordert wird, um die Höhe des Eigenkapitals zu berechnen, das notwendig ist, um auch unerwartete Verluste mit sehr hoher Sicherheit aufzufangen.

Um die Höhe dieser Eigenkapitalunterlegung festzulegen wird der VaR zusammen mit einem Backtestingverfahren verwendet. Dabei werden die täglichen Gewinne und Verluste mit den anhand des VaR-Verfahrens prognostizierten Werten verglichen. Darauf basierend wird anschließend ein unternehmensspezifischer Multiplikator festgelegt, der die Eigenkapitalquote bestimmt.

Der Vorteil des VaR liegt vor allem in seiner einfachen Interpretierbarkeit, da das Marktrisiko in einer einzigen Zahl zusammengefasst wird. Der größte Nachteil des VaR ist in der fehlenden Subadditivität zu sehen. Daher können die Effekte der Portfolio-Diversifikation nicht richtig beschrieben werden. Nachteilig ist auch, dass der linke Rand der Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht betrachtet wird. Darüber hinaus ist die Berechnung des VaR im allgemeinen schwierig, da Quantile nicht additiv sind. Dies gilt auch bei einer Normalverteilung, sobald sich nicht-lineare Produkte, wie Derivate im Portfolio befinden. So wird z.B. bei Diversifikation in zwei Güter die Verlustwahrscheinlichkeit erhöht, obwohl ein kohärentes Risikomaß diese als gut einstufen würde. Deswegen sollen auch Alternativen wie Expected Shortfall und Tail Conditional Expectation untersucht werden.¹

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 werden zunächst finanzielle Risikomaße eingeführt und einige ihrer grundlegenden Eigenschaften festgehalten. Kapitel 3 beschäftigt sich mit verschiedenen Methoden zur Ermittlung des Value-at-Risk. In Kapitel 4 geht es dann um optimale Portfolios im Black-Scholes-

¹vgl. Jorion, P.: Value-at-Risk, 1997.

Modell. Die Abschnitte 4.1–4.6 gehen auf Emmer, Korn und Klüppelberg zurück. Dabei dienen die Abschnitte 4.4 und 4.5 als Motivation für unsere Problemstellung in 4.7 und 4.8, wo wir ein ähnliches Optimierungsproblem wie in 4.4 und 4.5 untersuchen und lösen. In Kapitel 5 geht es um Alternativen zum Value-at-Risk. Wir verwenden dabei den Expected Shortfall anstelle des von Emmer, Korn und Klüppelberg (2001) betrachteten Value-at-Risk. Das resultierende Optimierungsproblem wird im Abschnitt 5.2 untersucht. Da die Lösung nur in impliziter Form gegeben ist, beschäftigen wir uns in Abschnitt 5.3 mit der numerischen Approximation der optimalen Lösung. Abschließend geben wir in Abschnitt 5.4 einen kurzen Vergleich unserer Methode (Expected Shortfall) mit derjenigen von Emmer, Korn und Klüppelberg (Value-at-Risk).

2 Risikomaße

(Ω, \mathcal{F}, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir bezeichnen die $\omega \in \Omega$ als Szenarien einer finanziellen Entwicklung.

Sei X eine Zufallsvariable, die eine finanzielle Position beschreibt.

$X(\omega)$ ist der Nettowert der Position am Ende der Handelsperiode, wenn das Szenario $\omega \in \Omega$ verwirklicht wird. Unser Ziel ist es, das Verlustrisiko durch ein quantitatives Maß zu bestimmen, in dem X zu einer Menge \mathcal{X} von (finanziellen Positionen) gehört. Dabei sei \mathcal{X} eine Menge von beschränkten Funktionen.²

Definition 2.1

Sei \mathcal{X} eine Menge von beschränkten Funktionen.

Die Funktion $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein *finanzielles Risikomaß* (monetary measure of risk) falls:

- 1) $\forall X, Y \in \mathcal{X}; X \leq Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y)$ (Monotonie)
- 2) $\forall m \in \mathbb{R}; \rho(X + m) = \rho(X) - m$ (Translationsinvarianz)

Hierbei bedeuten diese Eigenschaften

1) Monotonie: Das Risiko einer Position wird verringert (bzw. erhöht), wenn das Profitprofil erhöht (bzw. verringert) wird.

2) Die Translationsinvarianz gibt an, wieviel Kapital zur Position X hinzugefügt werden muss, damit die überwachende Agentur die Risikoposition akzeptiert.

Bemerkung 1

In einigen Modellen ist die Monotonie wie folgt definiert

$$X \in \mathcal{X}, X \geq 0 \implies \rho(X) \leq 0,$$

Lemma 2.1

Jedes finanzielle Risikomaß ist Lipschitz stetig bezüglich der Supremumsnorm $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|$ mit Lipschitzkonstante 1.

Definition 2.2

Ein finanzielles Risikomaß $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein *konvexes Maß*, wenn $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ gilt.

Bei einer Anlagestrategie sei λ der Anteil der Position X und $(1 - \lambda)$ der Anteil der anderen Position Y . Die Konvexität beschreibt, dass die Diversifikation nicht das Risiko erhöht.

Definition 2.3

Ein finanzielles Risikomaß $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein *positiv homogenes Maß*, falls $\forall \lambda \geq 0 \quad \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ gilt.

²Föllmer, H.; Schied, A.: Stochastic Finance, 2002.

Positive Homogenität bedeutet, dass bei Vervielfachung einer Position um λ , sich auch das Risiko um denselben Faktor erhöht.

Bemerkung 2

Die positive Homogenität wird gefordert, weil das Liquiditätsrisiko sehr oft eine Funktion der Ordergröße ist.³

Definition 2.4

Ein konvexes finanzielles Risikomaß heißt kohärent, falls es positiv homogen ist.

Bemerkung 3

Falls $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$, dann gelten

a) $\rho(0) = 0$

b) ρ ist konvex $\iff \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (Subadditivität)

$A_\rho := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$ ist die Akzeptanzmenge von ρ und stellt eine Menge von Positionen dar, die keine Kapitalrücklage als Sicherheit erfordern.

Einige Zusammenhänge der Eigenschaften des Risikomaßes ρ und dessen Akzeptanzmenge A_ρ sind in den folgenden Sätzen erwähnt.

Satz 2.1

Sei \mathcal{X} eine Menge von beschränkten Funktionen,

$\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ein finanzielles Risikomaß

und $A := A_\rho := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$, dann gilt

a) $A \neq \emptyset$, $\inf_m \{m \in \mathbb{R} | m \in A\} > -\infty$. (E_1)

b) $X \in A, Y \in \mathcal{X}, Y \geq X$ dann $Y \in A$. (E_2)

c) $\rho(X) = \inf_m \{m \in \mathbb{R} | m + X \in A\}$.

d) ρ ist konvex $\iff A$ ist konvex.

e) ρ ist positiv homogen $\iff A$ ist ein Kegel.

Insbesondere: ρ ist kohärent $\iff A$ ist ein konvexer Kegel.

Im Allgemeinen betrachten wir eine beliebige Teilmenge A von \mathcal{X} und definieren $\rho_A(X) := \inf_m \{m \in \mathbb{R} | m + X \in A\}$.

Satz 2.2

Sei \mathcal{X} eine Menge von beschränkten Funktionen,

A eine nichtleere Teilmenge von \mathcal{X} ,

$\rho_A(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} | m + X \in A\}$ mit (E_1) und (E_2), dann gilt:

a) ρ_A ist ein finanzielles Risikomaß.

b) Wenn A konvex ist, dann ist ρ_A konvex.

c) Wenn A ein Kegel ist, dann ist ρ_A positiv homogen.

Insbesondere wenn A ein konvexer Kegel ist, dann ist ρ_A kohärent.

³Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.-M.; Heath, D.: Cohertent Measure of Risk, 1999.

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Wir betrachten ein Modell, in dem eine Position akzeptabel ist, falls

$P(X < 0) \leq \alpha$ gilt. Das entsprechende finanzielle Risikomaß ist definiert durch

$$\rho_\alpha(X) := \inf_m \{m \in \mathbb{R} \mid P(m + X < 0) \leq \alpha\}$$

Definition 2.5

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und α eine Zahl in $]0, 1[$.

$x_{(\alpha)} = q_\alpha(X) = \inf_x \{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \geq \alpha\}$ heißt das untere α -Quantil von X .

$x^{(\alpha)} = q^\alpha(X) = \inf_x \{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] > \alpha\}$ heißt das obere α -Quantil von X .

Bemerkung 4

$$x^{(\alpha)} = q^\alpha(X) = \sup_x \{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \leq \alpha\}$$

Definition 2.6

Sei $\alpha \in]0, 1[$ ein Konfidenzniveau. Für eine finanzielle Position X , definieren wir den Value-at-Risk zum Niveau α als

$$VaR := \inf_m \{m \in \mathbb{R} \mid P(m + X < 0) \leq \alpha\} = -x^{(\alpha)}(X) = x_{(1-\alpha)}(-X)$$

Die Auswahl von α hängt von der ökonomischen Lage des Marktes und der Zeit ab. Daher ändern wir in der obigen Definition von Quantilen den deterministischen Parameter α zu einer Zufallsvariable und betrachten die folgenden Definitionen.

Definition 2.7

Seien $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha : \Omega \rightarrow]0, 1[$ zwei unabhängige Zufallsvariablen.

$x_{(\alpha)} = q_\alpha(X) = \inf_x \{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \geq E(\alpha)\}$ heißt das untere $E(\alpha)$ -Quantil von X .

$x^{(\alpha)} = q^\alpha(X) = \inf_x \{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] > E(\alpha)\}$ heißt das obere $E(\alpha)$ -Quantil von X .

Bemerkung 5

Sei $P_i(t)$ der Wert der Position i zur Zeit t und

$P(t) := \sum_{i=1}^n P_i(t)$ der Wert des Portfolios zur Zeit t .

Die absolute Wertänderung der Portfolios wird durch $\Delta P(t, T) := P(T) - P(t)$ gegeben.

Der Value-at-Risk $VaR(t, T, \alpha)$ eines Portfolios ist ein α -Quantil der Portfolio-Wertänderung $\Delta P(t, T)$. Für $\alpha \in]0, 1[$ entspricht ein α -Quantil der kleinsten Zahl x_α mit $F_{\Delta P}(x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} dF_{\Delta P(x)} \geq \alpha$, wobei F rechtsstetig ist.

Neben dem Value-at-Risk, definiert als Quantil der Portfolio-Wertänderung, kennt man andere Portfolio-Risikomaße wie Momente der Portfolio-Wertänderung, Lower Partial Moments der Portfolio-Wertänderung und das Maximum Loss ⁴

Definition 2.8

Das nicht-zentrale Moment der Ordnung r ($r \geq 1$ ganzzahlig) der Portfolio-Wertänderung mit Verteilungsfunktion $F_{\Delta P}$ wird im Falle der Existenz definiert durch $E((\Delta P)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF_{\Delta P(x)}$.

Definition 2.9

Lower Partial Moments (Downside Risiko) sind Momente, die sich auf den linken Rand der Wahrscheinlichkeitsverteilung beziehen. Für die Portfolio-Wertänderung mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{\Delta P}$ lautet das r -te Lower Partial Moment $LPM_r(t, \Delta P)$ bei kritischem Verlust t im Fall der Existenz:

$$LPM_r(t, \Delta P) = \int_{-\infty}^t (t - x)^r dF_{\Delta P(x)}$$

Bemerkung 6

LPM_0 wird Shortfall Wahrscheinlichkeit genannt.

Bei Vorgabe eines Ziels t ergibt sich die Shortfall -Wahrscheinlichkeit LPM_0 . Die Bestimmung des Value-at-Risk erfolgt umgekehrt, d.h. $LPM_0 = \alpha$ wird gegeben und dann wird der $VaR(t, T, \alpha)$ ermittelt:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{VaR(t, T, \alpha)} dF_{\Delta P(x)}$$

Definition 2.10

Eine Verallgemeinerung des Value-at-Risk ist der Value-at-Risk der Ordnung r VaR_r , definiert durch $LPM_r(VaR_r, \Delta P) = \int_{-\infty}^{VaR_r} x^r dF_{\Delta P(x)}$.

⁴Siehe Read, O.: Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk, 1998.

3 Methoden zur Ermittlung des Value-at-Risk

Der Value-at-Risk lässt sich anhand parametrischer und anhand nichtparametrischer Modellen berechnen. Zu den parametrischen Modellen gehören z.B. der Asset-Normal-VaR, der Delta-Normal-VaR (Delta-Approximation) und der Delta-Gamma-Normal-VaR (Delta-Gamma-Approximation). Zu den nichtparametrischen Modellen zählen z.B. Simulation mit totaler Schätzung (Monte Carlo VaR, Historical Simulation, Stress Scenarios) und Simulation mit Approximation, auch genannt Partial Monte Carlo-VaR (Delta-Approximation, Delta-Gamma-Approximation). Finanzielle Risiken lassen sich mit zwei Methoden erfassen, nämlich mit der analytischen Methode oder durch der Einsatz einer Simulation.

Voraussetzung für die Arbeit der analytischen Methode ist eine Verteilungsannahme, die einfachste Version ist ein Random Walk mit einer Normalverteilungsannahme. Ist ein Portfolio aus verschiedenen Vermögenspositionen zusammengesetzt muss für jede Vermögensposition ein eigener VaR-Betrag ermittelt werden, bevor diese einzelnen VaR-Beträge wieder zu einem einzigen Portfolio-VaR zusammengesetzt werden. Dabei ist zu beachten, dass zwischen den einzelnen Risikobeträgen Diversifikationseffekte bestehen. Daher bietet es sich an, statt einer einfachen Addition den einzelnen Risikobeträge zusätzlich einen Korrelationskoeffizienten einzubauen.^{5, 6}

3.1 Parametrische Modelle

Für die Portfolio-Wertänderung wird eine bestimmte parametrische Wahrscheinlichkeitsverteilung angenommen. Zur Ermittlung des Value-at-Risk müssen lediglich die Verteilungsparameter bekannt sein, am einfachsten legt man eine Normalverteilung zugrunde. Im Allgemeinen ist es schwierig, den VaR zu berechnen: Quantile sind im Allgemeinen nicht additiv.

Aufgrund fehlender Daten bereitet das Schätzen großer Risiken (kleiner Quantile) Schwierigkeiten. Daher basieren parametrische Modelle auf der Normalverteilungsannahme. Bei der Normalverteilungsmethode definiert man den Portfolio-Normal-VaR, den Asset-Normal-VaR, den Delta-Normal-VaR und den Delta Gamma-Normal-VaR.

3.1.1 Value-at-Risk mit dem Varianz-Kovarianz-Modell

Ausgangspunkt bei den Varianz-Kovarianz-Methoden ist die Annahme, dass die Wertänderungen aller Portfoliobestandteile bzw. aller Marktvariablen normalverteilt sind.

Die Wertänderung des Portfolios ist eine Linearkombination der Wertänderungen

⁵<http://www.riskbooks.de/risikomessung/vkm.htm>, vgl. HAGER, P.: Corporate Risk Management-Value-at-Risk und Cash Flow at Risk, 2004.

⁶vgl. Jorion, P.: Value-at-Risk, 1997.

der Portfoliobestandteile und somit ebenfalls normalverteilt.

Bei der Berechnung des VaR wird für jeden Portfoliobestandteil ein eigener Risikofaktor mit entsprechender Kovarianz (Korrelationen und Varianzen) ermittelt. Dem Vorteil schneller und einfacher Implementierung dieses Varianz-Kovarianz-Modells steht der Nachteil gegenüber, dass die zugrundeliegende Normalverteilung für alle Risikofaktoren oft nicht die Realität entspricht.

3.1.2 Portfolio-Normal Value-at-Risk

Die Portfolio-Wertänderung wird als normalverteilt vorausgesetzt,

d.h. $\Delta P \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $VaR(t, T, \alpha) = \mu + z_\alpha \sigma$,

wobei $\mu = E(\Delta P)$ und $\sigma = \sigma(\Delta P)$ und z_α das α -Quantil der Normalverteilung seien.

Bemerkung 7

1) Im Allgemeinen definiert man den Value-at-Risk als Linearfunktion des Quantils $Q_\alpha(X, T)$ der betrachteten Zufallsvariable

$$VaR(X, \alpha, T) = A(T) + B(T) Q_\alpha(X, T),$$

$A(T), B(T) : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen.

2) Der Value-at-Risk ist unabhängig von der Existenz des Moments der Ordnung r , $r > 1$. Dies ist ein Vorteil gegenüber der Varianz.

3.1.3 Delta-Normal Value-at-Risk

Analytische Modelle zur Ermittlung des VaR basieren häufig auf der Annahme einer Normalverteilung hinsichtlich der Marktrisikorenditen. Sind bei einem Portfolio alle Vermögenspositionen von den zugehörigen Risikofaktoren linear abhängig, erfordert die Ermittlung der Verteilung für das gesamte Portfolio und damit die Ermittlung des VaR nur wenig Aufwand. Tauchen im Portfolio im Vergleich zu den linearen Abhängigkeiten auf, kann man durch die Anwendung einer Taylor-Approximation erster Ordnung eine Linearisierung erreichen (sogenannte Delta-Normal-Methode). Machen jedoch nicht lineare Abhängigkeiten in einem Gesamtportfolio einen nicht geringen Anteil aus, muss man auf Linearität der Approximation verzichten. In einem solchen Fall können Taylor-Approximation höherer Ordnung zur Ermittlung von ΔP angewendet werden, wobei das Marktrisiko anhand des Einsatzes der jeweils zu beachtenden Risikofaktoren Wechselkurse, Aktienindizes, Volatilität der Größen, Zinssätze abgebildet werden kann.⁷

⁷Alois, L.J.; Geyer, S. P.: Aggregationsprobleme im Rahmen des Value at Risk, 1998.

Der folgende Satz beschreibt eine Methode, wie man der Value-at-Risk als Funktion von Risikofaktoren bestimmen kann.

Satz 3.1 ⁸

R_j ist der Wert des Risikofaktors j

$$q_j(t, T) := \frac{\Delta R_j}{R_j(t)} := \frac{R_j(T) - R_j(t)}{R_j(t)}, \quad j = 1, \dots, N \text{ und } t \geq 0, T > 0,$$

$$R := (R_1, \dots, R_N)'$$

$$\text{diag}(R) = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R_N \end{pmatrix}$$

$$P_j : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P = \sum_{j=1}^N P_j, \quad P \text{ sei ein Portfolio}$$

$$\Delta P = P(R(T)) - P(R(t)) = \sum_{j=1}^N P_j(R(T)) - P_j(R(t))$$

$$\delta'(t) = \left(\frac{\partial P}{\partial R_1} \Big|_{R(t)} \dots \frac{\partial P}{\partial R_N} \Big|_{R(t)} \right),$$

$$\Delta R = R(T) - R(t) = (\Delta R_1, \dots, \Delta R_N)',$$

Wir setzen $q(t, T) := (q_1(t, T) \dots q_N(t, T))'$ als die relativen Wertänderungen der N Risikofaktoren

$$\Delta R = \text{diag}(R) q$$

Es wird angenommen, dass $q \sim N(0, \Sigma(T-t))$. Daraus folgt

$$\Delta R \sim N(0, C), \quad (\text{bei gegebenem } R),$$

$$\Delta P = \delta'(t) \Delta R,$$

$$\text{und } \Delta P \sim N(0, d' \Sigma d(T-t))$$

$$\text{damit } d := \text{diag}(R) \delta(t),$$

⁸Read, O.: Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk, 1998.

$$C = \text{diag}(R) \Sigma \text{diag}(R) (T - t)$$

$$\text{und } d = \text{diag}(R) \delta(t).$$

Der Value-at-Risk ist dann durch

$$\text{VaR}(t, T, \alpha) = z_\alpha \sqrt{d' \Sigma d} \sqrt{T - t} \text{ gegeben.}$$

Beweis:

$$C = \text{Cov}(\Delta R)$$

$$= \text{Cov}(\text{diag}(R) q)$$

$$= \text{diag}(R) \Sigma (T - t) \text{diag}(R) \quad (\text{Cov}(q)) = \Sigma (T - t) = (\text{Cov}(q_i, q_j))_{1 \leq i, j \leq N}$$

$$\Delta P \sim N(0, d' \Sigma d (T - t)), \quad d = \text{diag}(R) \delta(t).$$

Daraus folgt

$$\text{VaR}(t, T, \alpha) = z_\alpha \sqrt{d' \Sigma d} \sqrt{T - t}. \quad \square$$

3.1.4 Delta-Gamma-Normal Value-at-Risk

Bei dem Delta-Gamma-Normal Value-at-Risk wird die Portfolio-Wertänderung durch die folgende Approximation bestimmt (Taylor 2. Ordnung):

$$\Delta P \approx \delta'(t) \Delta R + \frac{1}{2} \Delta R' \Gamma \Delta R$$

$$\Gamma = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial R_i \partial R_j} \Big|_{R(t)} \right)_{i,j} \text{ wobei } i, j \in 1, \dots, N$$

$$\Delta P = \sum_{i=1}^N \Delta P_i$$

$$\Delta P_i = P_i(R(T)) - P_i(R(t))$$

$$\delta'_i = \left(\frac{\partial P_i}{\partial R} \right) \Big|_{R(t)} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial R_1} (t) \Big|_{R(t)} \dots \frac{\partial P_i}{\partial R_N} \Big|_{R(t)} \right)$$

$$\Gamma_i = \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial R_i \partial R_j} \Big|_{R(t)} \right)_{i,j}$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \text{ und } \delta(t) = \sum_{i=1}^N \delta_i(t)$$

Diese ist eventuell besser als die Delta-Methode, da die Approximation von

höherer Ordnung ist.

Aber das Problem ist, dass die quadratische Form $\Delta R' \Gamma \Delta R$ nicht mehr wie bei der Delta-Normal-Approximation normalverteilt ist.

3.1.5 Vorteile der Varianz-Kovarianz-Methode

Ein Vorteil beim Einsatz der Varianz-Kovarianz-Methode ist, dass die Korrelationen und Varianzen zu den häufigsten Risikofaktoren in den Risk Metrics Daten von J. P. Morgan nachgeschlagen werden können. Das vereinfacht die Berechnung. So reicht zur Ermittlung des VaR bei zwei Risikofaktoren die Kenntnis von einer Korrelation und zwei Varianzen.⁹

3.1.6 Nachteile der Varianz-Kovarianz-Methode

Da die Varianz-Kovarianz-Methode davon ausgeht, dass die Risikofaktoren sich gemäß einem Random Walk bzw. einer geometrischen Brownschen Bewegung verhalten, kommt es zur Fat-Tail Problematik. Die Methode kann ungenau werden, da es mehrfach Näherungen wie lineare Approximation, δ -Approximation oder $\delta - \Gamma$ -Approximation benutzt.¹⁰

⁹Rank, J.: Value-at-Risk, 2003.

¹⁰Rank, J.: Value-at-Risk, 2003.

Im Falle einer Normalverteilung sollen wir bei unbekanntem Parametern nur VaR schätzen, indem wir die Volatilität oder den Mittelwert schätzen. Aber ein Verlust über der VaR-Schätzung kann außer durch einen zu hohen Tagesverlust auch durch eine zu niedrige VaR-Schätzung bedingt sein. Um den Fehler für diesen Fall möglichst gering zu halten, verwendet man statt Punktschätzungen Intervallschätzungen.¹¹

3.1.7 Schätzer des Value-at-Risk (VaR) in diskreter Zeit

In diesem Kapitel sollen verschiedene Methoden vorgestellt werden, den VaR auf Tagesbasis zu schätzen. Dies ist auch der von der Bankenaufsicht verlangte Vorgang. Es werden daher einige Methoden samt ihrer theoretischen Grundlagen kurz beschrieben und am Ende des Kapitels mittels numerischer Beispiele verglichen.

Seien k Anlagepositionen gegeben, von denen wir jeweils die festen Mengen b_1, \dots, b_k in einem Portfolio halten. Wir bezeichnen mit $p_{t,j}$ den Preis einer Einheit der Anlage j ($j = 1, \dots, k$) zum Zeitpunkt t ($t = 0, \dots, n + 1$), und mit $P(m)$ den Marktwert des Portfolios zur Zeit $t = m$, der bestimmt wird durch

$$P(m) = \sum_{j=1}^k b_j p_{m,j} \quad (m = 0, \dots, n + 1).$$

Wir definieren den Tagesverlust L_{n+1} ausgehend vom Tag $t = n$ bis zum Folgetag $t = n + 1$ als die Differenz des Marktwertes des Portfolios.

Dann gilt:

$$L_{n+1} = P(n) - P(n + 1) = -\Delta P$$

Im Folgenden arbeiten wir mit diesen Bezeichnungen:

$\omega_j(t) := b_j p_{t,j}$: Marktwert der Anlageposition j ($j = 1, \dots, k$) zum Zeitpunkt t

$X_{t,j} := \frac{p_{t,j} - p_{t-1,j}}{p_{t-1,j}}$: Die relative Preisänderung der Anlageposition j , ($j = 1, \dots, k$), zwischen dem Tag $t - 1$ und dem Tag t .

$\omega(t) := (\omega_1(t), \dots, \omega_k(t))'$: Vektor der Marktwerte zum Zeitpunkt t

$X_t := (X_{t,1}, \dots, X_{t,k})'$: Vektor der relativen Preisänderung zum Zeitpunkt t

¹¹Siehe Rürger, B.: Induktive Statistik, 1996.

Unter der Annahme, dass die relativen Preisänderungen unabhängig identisch normalverteilt sind, wird gezeigt, dass der Verlust am Tag $n+1$ ebenfalls normalverteilt ist.

Wir haben¹²

$$\begin{aligned}
 L_{n+1} &= P(n) - P(n+1) \\
 &= \sum_{j=1}^k b_j p_{n,j} - \sum_{j=1}^k b_j p_{n+1,j} \\
 &= - \sum_{j=1}^k \omega_j \left(\frac{p_{n+1,j} - p_{n,j}}{p_{n,j}} \right) \\
 &= - \sum_{j=1}^k \omega_j X_{n+1,j}
 \end{aligned}$$

$$\text{und daher} \quad L_{n+1} = -\omega' X_{n+1}$$

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, die Intervallschätzung des Value-at-Risk als unbekanntem Parameter der Verteilung vom Tagesverlust L_{n+1} zu bestimmen, wenn $p_{n,1}, \dots, p_{n,k}$ gegeben sind.

Das mathematische Modell, das unsere Verteilung beschreibt, ist das Modell einer Normalverteilung. Der Value-at-Risk wird definiert als das α -Quantil der Verteilung des Tagesverlusts zum Zeitpunkt $t = n + 1$.

Sei ν_α das α -Quantil der Verteilung von L_{n+1} .

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Tagesverlust über ν_α liegt, ist :

$$P(L_{n+1} > \nu_\alpha) = 1 - \alpha$$

Der Value-at-Risk entspricht dem Maß eines extremen Risikos, deshalb soll $1 - \alpha$ klein sein. In diesem Kapitel nehmen wir an, dass $\alpha > 0,5$ und somit $z_\alpha > 0$ gilt, wobei z_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Dann können wir zu einer vorgegebenen Prognosewahrscheinlichkeit α , ν_α als den Value-at-Risk (*VaR*) für unsere Verlustverteilung definieren.

Im folgenden Satz wird gezeigt, dass sich der Value-at-Risk als Funktion des Mittelwerts und der Varianz der Verteilung sowie des α -Quantils der Normalverteilung beschreiben läßt.

Satz 3.2

Seien b_1, \dots, b_k reelle Zahlen,

$p_{t,j} \geq 0$ ($j = 1, \dots, k$) und ($t = 0, \dots, n + 1$),

¹²Huschens, S.: Konfidenzintervalle für den Value-at-Risk, 1997.

$$P(m) = \sum_{t=1}^k b_j p_{m,j} \quad (m = 0, \dots, n+1)$$

$$L_{n+1} = P(n) - P(n+1),$$

$$X_{t,j} := \frac{p_{t,j} - p_{t-1,j}}{p_{t-1,j}},$$

$$X_t := (X_{t,1}, \dots, X_{t,k})'.$$

Die X_t ($t = 1, \dots, n+1$) werden unabhängig und identisch multivariant normalverteilt vorausgesetzt.

$$X_t \sim N_k(\mu_0, \Sigma_0)$$

Dann gilt

a)

$$L_{n+1} \sim N(-\omega' \mu_0, \omega' \Sigma_0 \omega) = N(\mu, \sigma^2)$$

wobei $\omega := (\omega_1(n), \dots, \omega_k(n))'$ und $\omega_j(t) := b_j p_{t,j}$

b) Falls ν_α das α -Quantil der Verteilung von L_{n+1} und z_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

$$\text{Dann gilt} \quad \nu_\alpha = -\omega' \mu_0 + z_\alpha \sqrt{\omega' \Sigma_0 \omega}$$

Wir fragen uns, welche Verluste wir gehabt hätten, wenn wir statt des historischen Marktwertes $\omega(t)$ ($t = 1, \dots, n-1$) den aktuellen Marktwert ω verwendet hätten.

Dafür bilden wir die fiktiven Verluste L_t ($t = 1, \dots, n-1$) mit dem aktuellen Marktwert ω und den historischen Preisänderungen X_t ($t = 1, \dots, n-1$).

$$\text{Dann gilt} \quad L_t = -\omega' X_t$$

. Mit L_1, L_2, \dots, L_n schätzen wir L_{n+1} .

Bemerkung 8

L_t sind fiktive Verluste, da die historische relative Variation mit den aktuellen Markt kombiniert ist, um den Einfluß (Effekt) der Inflation zu reduzieren.

Wir unterscheiden zwei Fälle :

- 1.Fall: Der Mittelwert μ der Normalverteilung von L_{n+1} ist bekannt und σ wird geschätzt.
- 2.Fall: Beide Parameter der Verlustverteilung werden geschätzt.

3.1.8 Konfidenzintervalle bei bekannten Mittelwerten

Vorausgesetzt, der Mittelwert der Verlustverteilung ist am Tag $t = n+1$ bekannt ist, dann wird zuerst die Varianz und danach der Value-at-Risk geschätzt.

Satz 3.3 ¹³

Sei L_t der Tagesverlust mit

$$L_t \sim N(\mu, \sigma^2), \quad (t = 1, \dots, n + 1)$$

z_α das α -Quantil der Normalverteilung,
 ν_α das α -Quantil der Verlustverteilung L_{n+1} und
 $\hat{\sigma}$ ein Schätzer für σ mit

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (L_t - \mu)^2} \quad .$$

Bei bekanntem μ ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für ν_p gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\alpha &= \mu + z_\alpha \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\omega' \hat{\Sigma} \omega} \\ \text{mit} \quad \hat{\Sigma} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \mu_0)(X_t - \mu_0)' . \end{aligned}$$

3.1.9 Exakte und asymptotische Konfidenzintervalle

In diesem Abschnitt werden exakte und asymptotische Konfidenzintervalle des Value-at-Risk ermittelt, wobei zum Zeitpunkt $t = n + 1$ der Mittelwert der Verlustverteilung bekannt ist, und die Varianz geschätzt werden soll. ¹⁴

Definition 3.1

Seien $0 < \alpha_* < 1$, $0 < \alpha^* < 1$, $\nu \in \mathbb{R}$, U und O zwei reelle Zufallsvariablen.

Falls $P(\nu \leq O) = 1 - \alpha^*$ (bzw. $P(\nu \geq U) = 1 - \alpha_*$).

Dann ist O eine obere (bzw. U untere) Konfidenzschranke für ν zum Niveau $1 - \alpha^*$ (bzw. $1 - \alpha_*$) und $[U, O]$ ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - (\alpha^* + \alpha_*)$.

Damit erhalten wir folgende Intervalle zum Niveau $1 - \alpha^* - \alpha_*$

Bei bekannten Mittelwerten ($\hat{\nu}_\alpha = z_\alpha \hat{\sigma} + \mu$):

Exaktes Konfidenzintervall:

$$I_1 = [c_{n, \alpha_*} \hat{\nu}_\alpha; c_{n, 1 - \alpha^*} \hat{\nu}_\alpha]$$

$$c_{n, \beta} := \sqrt{\frac{n}{\chi_{n, 1 - \beta}^2}}$$

¹³Siehe Lukacs, E.: Probability and Mathematical Statistics, 1972.

¹⁴Huschens, S., Konfidenzintervalle für den Value-at-Risk, 1997.

Asymptotische Konfidenzintervalle:

$$I_2 = [d_{n,\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha; d_{n,1-\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha]$$

$$d_{n,\beta} := 1 + \frac{z_\beta}{\sqrt{2n}}$$

$$I_3 = [d'_{n,\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha; d'_{n,1-\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha]$$

$$d'_{n,\beta} := \frac{1}{1 - \frac{z_\beta}{\sqrt{2n}}}$$

$$I_4 = [d''_{n,\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha; d''_{n,1-\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha]$$

$$d''_{n,\beta} := e^{\frac{z_\beta}{\sqrt{2n}}}$$

$$I_5 = [c'_{n,\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha; c'_{n,1-\alpha^*} \widehat{\nu}_\alpha]$$

$$c'_{n,\beta} := \sqrt{\frac{n}{z_{1-\beta} \sqrt{2n} + n}}$$

Bei geschätztem Mittelwert ($\widehat{\nu}_\alpha = z_\alpha \widehat{\sigma} + \widehat{\mu}$):

Exaktes Konfidenzintervall:

$$I_6 = [C_{n,\alpha^*,\alpha} \widehat{\nu}_\alpha; C_{n,1-\alpha^*,\alpha} \widehat{\nu}_\alpha]$$

$$C_{n,\beta,\alpha} := \frac{t_\beta(n-1, z_\alpha \sqrt{n})}{z_\alpha \sqrt{n-1}}$$

Asymptotisches Konfidenzintervall:

$$I_7 = [D_{n,\alpha^*,\alpha} \widehat{\nu}_\alpha; D_{n,1-\alpha^*,\alpha} \widehat{\nu}_\alpha]$$

$$D_{n,\beta,\alpha} := 1 + \frac{z_\beta}{\sqrt{2n}} \frac{\sqrt{2 + z_\alpha^2}}{z_\alpha}$$

$t_\beta(f, \delta)$ ist das β -Quantil von $t(f, \delta)$, wobei $t(f, \delta)$ eine nicht zentrale t-Verteilung mit f Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter δ ist.

3.1.10 Vergleich der Konfidenzintervalle

In diesem Abschnitt werden die sieben Konfidenzintervalle aus den vorangegangenen Abschnitten, die mit unterschiedlichen Verfahren berechnet wurden, miteinander verglichen. Dazu müssen wir den Spezialfall $\hat{\mu} = \mu = 0$ betrachten.

Es gilt :

$$\hat{\nu}_\alpha = z_\alpha \hat{\sigma} + \hat{\mu} = z_\alpha \hat{\sigma} + \mu = z_\alpha \hat{\sigma}$$

Damit erhalten wir folgende Intervalle:

$$I_1 = [c_{n,\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha; c_{n,1-\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha]$$

$$I_2 = [d_{n,\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha; d_{n,1-\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha]$$

$$I_3 = [d'_{n,\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha; d'_{n,1-\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha]$$

$$I_4 = [d''_{n,\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha; d''_{n,1-\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha]$$

$$I_5 = [c'_{n,\alpha_*} \hat{\nu}_\alpha; c'_{n,1-\alpha^*,\alpha} \hat{\nu}_\alpha]$$

$$I_6 = [C_{n,\alpha_*,\alpha} \hat{\nu}_\alpha; C_{n,1-\alpha^*,\alpha} \hat{\nu}_\alpha]$$

$$I_7 = [D_{n,\alpha_*,\alpha} \hat{\nu}_\alpha; D_{n,1-\alpha^*,\alpha} \hat{\nu}_\alpha]$$

Um zu vereinfachen, schreiben wir die Intervalle $[a\hat{\nu}_\alpha; b\hat{\nu}_\alpha]$ als $[a; b]\hat{\nu}_\alpha$

Definition 3.2

Gegeben sind zwei Intervalle $[a; b]$ und $[c; d]$,

wir setzen $F := |a - c| + |b - d|$.

Je kleiner F ist, desto näher ist $[c; d]$ an $[a; b]$,

und wir können F als den Abstand zwischen $[c; d]$ und $[a; b]$ betrachten.

Für unsere Anwendung wählen wir $\alpha_* = \alpha^* = \frac{\delta}{2}$ und $\alpha = 99\%$. 15

¹⁵Huschens, S., Konfidenzintervalle für den Value-at-Risk, 1997.

		$\delta = 1\%$		$\delta = 0.1\%$	
		n=50	n=250	n=50	n=250
I_1		$[0,793;1,337]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,896;1,129]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,747;1,460]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,870;1,169]\hat{\nu}_\alpha$
I_2		$[0,795;1,347]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,897;1,130]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,752;1,490]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,872;1,173]\hat{\nu}_\alpha$
I_3		$[0,742;1,258]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,885;1,115]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,671;1,329]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,853;1,147]\hat{\nu}_\alpha$
I_4		$[0,773;1,294]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,891;1,122]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,720;1,390]\hat{\nu}_p$	$[0,863;1,159]\hat{\nu}_p$
I_5		$[0,812;1,436]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,902;1,140]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,777;1,710]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,879;1,190]\hat{\nu}_\alpha$
I_6		$[0,757;1,402]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,879;1,152]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,700;1,544]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,847;1,198]\hat{\nu}_\alpha$
I_7		$[0,699;1,301]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,865;1,135]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,615;1,385]\hat{\nu}_\alpha$	$[0,828;1,172]\hat{\nu}_\alpha$

Vergleichen wir nun das exakte Intervall I_1 mit I_j ($j = 2, \dots, 5$).

Sei $F_{j,1}$ der Abstand zwischen I_1 und I_j ($j = 2, \dots, 5$).

Wir erhalten dann die Spalten ($F_{j,1}$) ($j = 2, \dots, 5$) wie folgt

		$\delta = 1\%$		$\delta = 0.1\%$	
		n=50	n=250	n=50	n=250
$j = 2$		$0,012 \hat{\nu}_\alpha $	$0,002 \hat{\nu}_\alpha $	$0,04 \hat{\nu}_\alpha $	$0,006 \hat{\nu}_\alpha $
$j = 3$		$0,13 \hat{\nu}_\alpha $	$0,025 \hat{\nu}_\alpha $	$0,21 \hat{\nu}_\alpha $	$0,039 \hat{\nu}_\alpha $
$j = 4$		$0,063 \hat{\nu}_\alpha $	$0,012 \hat{\nu}_\alpha $	$0,1 \hat{\nu}_\alpha $	$0,017 \hat{\nu}_\alpha $
$j = 5$		$0,118 \hat{\nu}_\alpha $	$0,017 \hat{\nu}_\alpha $	$0,28 \hat{\nu}_\alpha $	$0,03 \hat{\nu}_\alpha $

Die letzte Tabelle zeigt, daß I_2 die beste Näherung an das exakte Intervall I_1 ist; I_3 und I_5 sind die schlechtesten Näherungen an I_1 . Auch das Intervall I_4 ist eine schlechte Näherung an I_1 , insbesondere wenn n nicht groß genug ist.

Die Länge der Intervalle I_j ($j = 1, \dots, 7$) ist durch die folgende Tabelle gegeben:

		$\delta = 1\%$		$\delta = 0.1\%$	
		n=50	n=250	n=50	n=250
$ I_1 $		$0,544 \hat{\nu}_\alpha $	$0,233 \hat{\nu}_\alpha $	$0,713 \hat{\nu}_\alpha $	$0,299 \hat{\nu}_\alpha $
$ I_2 $		$0,552 \hat{\nu}_\alpha $	$0,233 \hat{\nu}_\alpha $	$0,738 \hat{\nu}_\alpha $	$0,301 \hat{\nu}_\alpha $
$ I_3 $		$0,516 \hat{\nu}_\alpha $	$0,23 \hat{\nu}_\alpha $	$0,658 \hat{\nu}_\alpha $	$0,294 \hat{\nu}_\alpha $
$ I_4 $		$0,521 \hat{\nu}_\alpha $	$0,231 \hat{\nu}_\alpha $	$0,67 \hat{\nu}_\alpha $	$0,296 \hat{\nu}_\alpha $
$ I_5 $		$0,624 \hat{\nu}_\alpha $	$0,238 \hat{\nu}_\alpha $	$0,933 \hat{\nu}_\alpha $	$0,311 \hat{\nu}_\alpha $
$ I_6 $		$0,645 \hat{\nu}_\alpha $	$0,273 \hat{\nu}_\alpha $	$0,844 \hat{\nu}_\alpha $	$0,351 \hat{\nu}_\alpha $
$ I_7 $		$0,602 \hat{\nu}_\alpha $	$0,27 \hat{\nu}_\alpha $	$0,77 \hat{\nu}_\alpha $	$0,344 \hat{\nu}_\alpha $

Wegen der steigenden Entwicklung in der Informatik und ihrer Anwendungen

in fast allen Bereichen insbesondere im Finanzbereich ist auch hier der Einsatz von Algorithmen interessant. Deswegen wollen wir hier einen Algorithmus vorstellen, der die verschiedenen Konfidenzintervalle von Value-at-Risk liefert. Aber auch für nichtparametrische Modellen werden andere Alternativen entwickelt die im nächsten Kapitel vorgestellt werden.

Algorithmus:

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten b_i ($i = 1, \dots, k$) der k Anlagepositionen und Preise $P_{t,j}$ der Anlage j ($j = 1, \dots, k$) zum Zeitpunkt t , ($t = 0, \dots, n$).

Gesucht sind die Konfidenzintervalle $I_i = [a_i; b_i]$, ($i = 1, \dots, 7$), des Value-at-Risk am Tag $n + 1$ zum Niveau $1 - \alpha_* - \alpha^*$.

read (n) * $n \in \mathbb{N}$

read (α) * $0 \leq \alpha \leq 1$

read (k) * $k \in \mathbb{N}$

read (α_*)

read (α^*) * $0 < \alpha_* < 1, 0 < \alpha^* < 1$ mit $\alpha_* + \alpha^* < 1$

for $j:=1$ to k * b_j konstante Koeffizienten der k Anlagepositionen

read (b_j)

for $j:=1$ to k *Preise der Anlageposition j am Tag t

for $t:=0$ to n

read ($p_{t,j}$)

if μ known true then read (μ) * Falls der Mittelwert der Verlustverteilungen μ bekannt ist

for $t := 1$ to n * Die relative Preisänderung der Anlageposition

for $j := 1$ to k * zwischen dem Tag $t - 1$ und dem Tag t

$$X_{t,j} := \frac{p_{t,j} - p_{t-1,j}}{p_{t-1,j}}$$

for $j := 1$ to k * aktuelle Marktwerte

$$\omega_j := b_j p_{n,j}$$

$r := 1$

for $t := 1$ to n

$$L_t := 0$$

$$\text{repeat } L_t := L_t - \omega_r X_{t,r} \quad * L_t = - \sum_{r=1}^k \omega_r X_{t,r}, \quad t = 1, \dots, n$$

$$r := r + 1$$

until $r = k$

$$t := 1$$

$$\hat{\sigma} := 0$$

$$\text{repeat } \hat{\sigma} := \hat{\sigma} + (L_t - \mu)^2 \quad * \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (L_t - \mu)^2}$$

$$t := t + 1$$

until $t = n$

$$\hat{\sigma} := \sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{n}}$$

$$\hat{v}_p := \mu + z_p \hat{\sigma}$$

$$a_1 := \mu + \sqrt{\frac{n}{\chi_{n,1-\alpha_*}^2}} (\hat{v}_p - \mu) \quad 16$$

$$b_1 := \mu + \sqrt{\frac{n}{\chi_{n,\alpha^*}^2}} (\widehat{v}_p - \mu) \quad * I_1 = [a_1; b_1]$$

$$a_2 := \mu + \frac{1}{1 - \frac{z_{\alpha^*}}{\sqrt{2n}}} (\widehat{v}_p - \mu)$$

$$b_2 := \mu + \frac{1}{1 - \frac{z_{1-\alpha^*}}{\sqrt{2n}}} (\widehat{v}_p - \mu) \quad * I_2 = [a_2; b_2]$$

$$a_3 := \mu + \left(1 + \frac{z_{\alpha^*}}{\sqrt{2n}}\right) (\widehat{v}_p - \mu)$$

$$b_3 := \mu + \left(1 + \frac{z_{1-\alpha^*}}{\sqrt{2n}}\right) (\widehat{v}_p - \mu) \quad * I_3 = [a_3; b_3]$$

$$a_4 := \mu + e^{\frac{z_{\alpha^*}}{\sqrt{2n}}} (\widehat{v}_p - \mu)$$

$$b_4 := \mu + e^{\frac{z_{1-\alpha^*}}{\sqrt{2n}}} (\widehat{v}_p - \mu) \quad * I_4 = [a_4; b_4]$$

$$a_5 := \mu + \sqrt{\frac{n}{z_{1-\alpha^*} \sqrt{2n} + n}} (\widehat{v}_p - \mu) \quad {}^{16}$$

$$b_5 := \mu + \sqrt{\frac{n}{z_{\alpha^*} \sqrt{2n} + n}} (\widehat{v}_p - \mu) \quad * I_5 = [a_5; b_5]$$


```

else      *Falls  $\mu$  nicht bekannt ist

   $i := 1$ 

   $\hat{\mu} := 0$ 

  repeat  $\hat{\mu} := \hat{\mu} + L_i$       *  $\hat{\mu} := \frac{\sum_{t=1}^n L_t}{n}$ 

   $i := i + 1$ 

  until  $i = n$ 

   $\hat{\mu} := \frac{\hat{\mu}}{n}$ 

   $j := 1$ 

   $\hat{\sigma} := 0$ 

  repeat  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma} + (L_j - \hat{\mu})^2$ 

     $j := j + 1$ 

  until  $j = n$ 

   $\hat{\sigma} := \sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{n}}$ 

   $\hat{\nu}_p := \hat{\mu} + z_p \hat{\sigma}$ 

   $a_6 := \hat{\mu} + \frac{t_{\alpha^*}(n-1, z_p \sqrt{n})}{z_p \sqrt{n-1}} (\hat{\nu}_p - \mu)$ 

   $b_6 := \hat{\mu} + \frac{t_{1-\alpha^*}(n-1, z_p \sqrt{n})}{z_p \sqrt{n-1}} (\hat{\nu}_p - \mu)$       *  $I_6 = [a_6; b_6]$ 

   $a_7 := \hat{\mu} + (1 + \frac{z_{\alpha^*}}{2n} \frac{\sqrt{2+z_p^2}}{z_p}) (\hat{\nu}_p - \mu)$ 

   $b_7 := \hat{\mu} + (1 + \frac{z_{1-\alpha^*}}{2n} \frac{\sqrt{2+z_p^2}}{z_p}) (\hat{\nu}_p - \mu)$       *  $I_7 = [a_7; b_7]$ 

```

3.2 Simulationsmodelle

Eine Alternative zu den parametrischen Modellen sind die Simulationsmodelle. Wertänderung eines Portfolios aus einer Alternative zu den parametrischen Modellen. Dabei geht die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portfolio-Wertänderung aus einer Häufigkeitsverteilung von fiktiven Portfolio-Wertänderungen hervor. Diese werden durch die Erstellung von Risikoszenarien berechnet. Die historische Simulation und die Monte Carlo Simulation sind die wichtigsten Simulationsmodelle. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Simulationsmodellen liegt in der Verwendung von Zufallszahlen.^{17, 18, 19}

3.2.1 Historische Simulation

3.2.1.1 Grundidee

Bei der historischen Simulation greift man auf die Analyse von vergangenen Szenarien zurück, nicht auf die analytische Untersuchung der Risikofaktoren. Dabei stehen die Differenzmethode und die Quotientenmethode einander gegenüber. Beide vergleichen die Änderungen eines ausgewählten Risikofaktors innerhalb einer festgelegten Zeitspanne und kombinieren anschließend diese Ergebnisse mit dem aktuellen Börsenkurs. Die Differenzmethode betrachtet allerdings nur die Differenz, während bei der Quotientenmethode die Veränderungen in logarithmischer Form angegeben werden. Dadurch wird bei letzterer sowohl Stationarität als auch Unabhängigkeit vom absoluten Niveau erreicht. Der Rückgriff auf den Verlauf verschiedener Marktpreisänderungen aus der Vergangenheit erlaubt es, auch für Portfolio mit verschiedenen Marktpreisrisiken alternative Szenarien zu ermitteln. Dabei werden die einzelnen Wertänderungen in aufsteigender Größe geordnet. Somit kann der VaR für das gesamte Portfolio anhand der Angabe der gewünschten Wahrscheinlichkeit abgelesen werden. Formal kann die Grundidee der historischen Simulation folgendermaßen formuliert werden:

Betrachte ein Portfolio $P(R_1(t), \dots, R_n(t))$, das von n Risikofaktoren abhängt, seien Δt die Liquidationsperiode und M die Länge der zur Verfügung stehenden historischen Horizont. Sei $m := M - \Delta t$ und $t_i := t - m + i$. Dann

$$\Delta P(t_i) = P(R_1(t) + \Delta R_1(t_i), \dots, R_n(t) + \Delta R_n(t_i)) - P(R_1(t), \dots, R_n(t)), i = 1, \dots, m$$

Die Berechnung der historischen Wertänderungen des Portfolios wird häufig approximiert (Full Valuation vs. Delta Valuation).

$$\Delta P(t_i) \approx \sum_{j=1}^n \frac{\delta P}{\delta R_j} \Delta R_j(t_i) \text{ für } i = 1, \dots, m$$

¹⁷Rang, J.: Vortrag an der Universität Heidelberg, 2003.

¹⁸vgl. Hager, P.: Corporate Risk Management-Value-at-Risk und Cash Flow at Risk, 2004.

¹⁹Read, O.: Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk, 1998.

Man ordne diese Wertänderungen in aufsteigender Größe. O.b.d.A. gelte

$$\Delta P(t_1) \leq \Delta P(t_2) \leq \dots \leq \Delta P(t_a) \leq \Delta P(t_{a+1}) \leq \dots \leq \Delta P(t_{m-1}) \leq \Delta P(t_m)$$

$$VaR = \Delta P(t_{a+1})$$

Zur Berechnung des VaR ignoriere man die ungünstigsten $m(1-\alpha)$ Wertänderungen und bezeichne die Anzahl der weggelassenen Werte mit a . Dann ist der VaR gegeben durch die ungünstigste Wertänderung des Portfolios, die größer als $\Delta P(t_a)$ ist, d.h.

$$VaR = \min_{i=1, \dots, m} \{\Delta P(t_i) | \Delta P(t_i) \geq \Delta P(t_a)\}$$

z.B.: Bei einer Historie von 250 Tagen, einer Liquidationsperiode von 10 Tagen und einem Konfidenzniveau von 95% ist $a=12$.

3.2.1.2 Vorteile der historischen Simulation

Die historische Simulation basiert lediglich auf Mathematische Grundkenntnissen und ist daher einfach anzuwenden. Es sind keine empirische Daten bezüglich Volatilitäten und Korrelationen notwendig. Dasselbe gilt auch für Funktionen oder die Simulationen von Zufallsvariablen. Darüber hinaus ist das Verfahren unabhängig von Modellannahmen. Sie vermeidet die Tail Problematik einer normalverteilten Datenmenge, da bereits alle Extrema aus den historischen Daten als bekannt vorausgesetzt werden können. Zudem werden keine Abhängigkeiten der Risikofaktoren untereinander gebraucht und auf Näherungen kann verzichtet werden.

3.2.1.3 Nachteile der historischen Simulation

Die historische Simulation weist große Nachteile auf: Zum einen erweist sich die Pflege der gewaltigen Datenmenge als zu aufwändig. Das Zeitfenster muss günstig gewählt werden: Die Relevanz älterer Beobachtungen muss berücksichtigt werden, genauso wie eine mögliche zu geringe Auswahl von Werten bei einem zu kleinen Zeitfenster. Außerdem ist es auch nachteilig, dass die historischen Wertänderungen $\Delta P(t_i)$ nach jeder Transaktion neu berechnet werden müssen. Zum anderen beruhen die Voraussagen allein auf dem bereits gesammelten Daten, d.h. Ereignisse, die vorher nie eingetreten sind, können nicht vorausgesagt werden und Ausnahmeereignisse in der Vergangenheit (z.B. extreme Preise) führen zu einer verfälschten Risikoeinschätzung (hier Überschätzung).

Um durchgehend frei von Modellannahmen zu sein, dürfte man bei der VaR-Berechnung auch bei der Berechnung der historischen Portfolio-Wertänderungen keine Modellannahmen treffen. Mit der historischen Simulation ist keine Optionsbe-

wertung möglich, da für diese eine Normalverteilung zugrunde zu legen ist, die bei einer historische Simulation nicht vorausgesetzt ist.

3.2.2 Monte Carlo Simulation

3.2.2.1 Grundidee

Bei der Monte Carlo Simulation werden nicht historische, sondern durch Zufallszahlen generierte Szenarien zugrunde gelegt. Dies ermöglicht eine Berücksichtigung der zukünftigen Entwicklung von Risikofaktoren, wie sie bei der historischen Simulation nicht möglich ist. Die durch Zufallszahlen generierten Marktszenarien und daraus resultierenden Portfoliowerte werden anschließend analysiert und für die Simulation künftiger Marktentwicklungen benutzt. Wie auch bei der Varianz-Kovarianz-Methode ist die Kovarianz-Matrix von zentraler Bedeutung, da die Wahrscheinlichkeiten von möglichen Risikofaktoränderungen beinhaltet.

Bemerkung 9 ²⁰

Da wir bei der Simulation die lineare Näherung nicht benötigen, sind hier die Korrelationen $\rho_{i,j}$ geringfügig anders definiert:

$$\rho_{i,j} = \rho(\text{Ln}(R_i(T)) - \text{Ln}(R_i(t)), \text{Ln}(R_j(T)) - \text{Ln}(R_j(t)))$$

.

Um korrelierte Zufallsvariablen zu simulieren,²¹ erzeugt man erstens einen Vektor von Standard-normalverteilten Zufallsvariablen $V \sim N(0, I)$.

Danach benutzt man eine der drei folgenden Methoden,

Cholesky-Zerlegung, Eigenwertzerlegung oder Singulärwertzerlegung, um diese korrelierten Zufallsvariablen zu bestimmen.

Wenn die Kovarianzmatrix der Zufallsvariable Σ positiv definit ist, verwenden wir die Cholesky-Zerlegung.

Cholesky-Zerlegung

Wir zerlegen die Kovarianzmatrix folgendermaßen:

$\Sigma = P^T P$, wobei P eine obere Dreiecksmatrix ist.

Dabei ist P^T die transponierte Matrix von P .

Hierbei ist $P_{ii} := \left(\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} P_{ik}^2 \right)$ und $P_{ij} := \frac{1}{a_{ii}} \left(\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} P_{ik} P_{jk} \right)^{\frac{1}{2}}$ mit

$j = i + 1, i + 2, \dots, N$.

²⁰Rank, J.: Value-at-Risk, 2003.

²¹Risk Metrics Technical, J. P. Morgan/Reuters, 1996.

Es folgt $P^T V \sim N(0, \Sigma)$.

Die Cholesky-Zerlegung kann nicht auf positiv semidefinite Matrizen angewandt werden. Obwohl sie einen höheren Rechenaufwand erfordern, sind Eigenwertzerlegung oder „Singularwertzerlegung“ nützlich, wenn die Kovarianz Σ positiv semidefinit aber möglicherweise nicht positiv definit ist.

Eigenwertzerlegung

Die Spektralzerlegung von Σ liefert

$\Sigma = C \Delta C^T = Q^T Q$, wobei Δ eine $N \times N$ -Diagonalmatrix mit den N Eigenwerten von Σ auf der Hauptdiagonalen ist, $Q = \Delta^{\frac{1}{2}} C^T$, $V \sim N(0, I)$ und es folgt

$$Q^T V \sim N(0, \Sigma).$$

Singularwertzerlegung

²² $\Sigma = U D V^T$, wobei U und V orthogonale $N \times N$ -Matrizen sind,

$V^T V = U^T U = I$, und D eine $N \times N$ -Diagonalmatrix mit den N Singularwerten von Σ auf der Hauptdiagonalen.

Weiterhin ist $Q = D^{\frac{1}{2}} V^T V \sim N(0, I)$ und es folgt

$$Q^T V \sim N(0, \Sigma).$$

3.2.2.2 Vorteile der Monte Carlo Simulation

Die Monte Carlo Simulation benötigt bei der VaR-Berechnung zwar einen hohen Rechenaufwand, bietet aber auch, besonders bei komplexen Risikofaktoren oder vielen Derivaten im Portfolio, Vorteile, da nur historische Werte und keine Näherungen benutzt werden. Bei einfachen Risikostrukturen mit linearer Abhängigkeit der Risikofaktoren von der Wertänderungen des Portfolios soll der hohe Rechenaufwand der Monte Carlo Simulation durch Anwendung der Varianz-Kovarianz-Ansatz oder der historische Simulation umgangen werden.

Die theoretische Basis der Monte Carlo Simulation und die durch die schnell voranschreibende Halbleitertechnologie verbesserte Rechnerleistung, versprechen wachsende Anwendungsmöglichkeiten der Monte Carlo Simulation.

²²Stewart, G.W: Introduction to Matrix computations, 1973.

Die VaR-Berechnung lässt sich einfach durchführen, wegen der von J.P.Morgan zur Verfügung gestellten Daten.

3.2.2.3 Nachteile der Monte Carlo Simulation

Da die Monte Carlo Simulation auf der Annahme beruht, dass sich die Risikofaktoren normalverteilt ergibt sich dementsprechend auch die Fat-Tail-Problematik.

Der hohe numerische Aufwand der Monte Carlo Simulation schlägt sich in langen Rechenzeiten nieder.

Bemerkung 10

Nach der Erzeugung von Szenarien und der zugeordneten Portfoliowerte benutzt man das gleiche Prinzip für die Berechnung von VaR wie bei der historischen Simulation.²³

²³Rank, J.: Value-at-Risk, 2003.

3.3 Nichtparametrische Schätzer für Value-at-Risk

Nichtparametrische Ansätze dienen für die Schätzung des Quantils direkt aus der historischen Verteilung.

In diesem Kapitel wird der Value-at-Risk (VaR) bei gegebenem Konfidenzniveau α einer bedingten Renditeverteilung der finanziellen Position $(Y_t)_{t=1,2,\dots}$ geschätzt.²⁴ F_t bezeichnet dabei entweder die marginale oder die bedingte Verteilung von Y_t , wobei letztere auf die Vergangenheit $\{Y_{t-k}\}_{M \geq k \geq 1}$ mit $M = 1, 2, 3, \dots$ bedingt wird.

Wir betrachten das conditional heteroscedastic autoregressive nonlinear (CHARN) Modell,²⁵ das durch die folgende Markovsche Kette der ersten Ordnung beschrieben ist:

$$Y_t = m(Y_{t-1}) + \sigma(Y_{t-1})\epsilon_t, t = 1, 2, \dots$$

Dabei ist ϵ_t ein unabhängiger, streng stationärer Prozess mit unbekannter marginaler Verteilung F_ϵ mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Weiterhin nehmen wir an dass F_ϵ absolut stetig ist

$m(x) := E(Y_t | Y_{t-1} = x)$ und $\sigma(x) := \sqrt{E((Y_t - m(Y_{t-1}))^2 | Y_{t-1} = x)}$ sind jeweils die bedingte Erwartung und die bedingte Varianz von Y_t , bei gegebenem Y_{t-1} .

Im Allgemeinen kann man den bedingten Erwartungswert $m(x) = E(Y | X = x)$ der Zufallsvariable Y in Abhängigkeit von den Ausprägungen einer anderen, als abhängig angesehenen Zufallsvariable X schätzen durch nichtparametrische Regression, ohne dabei eine Annahme über die Form dieses Zusammenhanges zu treffen. Auf der Basis der Beobachtungen (x_i, y_i) können auch verschiedene Verfahren angewendet werden.

In unserem Fall ist $(Y_t, X_t) = (Y_t, Y_{t-1})$ ein zweidimensionaler, streng stationärer Prozeß.

Wir nehmen an, dass m und σ zweimal differenzierbar und ihre Ableitungen gleichmäßig stetig in einer Umgebung von x sind.

$$M_{t-1} = \sigma(Y_s : M < s \leq t - 1), -\infty \leq M \leq t - 1$$

$$F_\epsilon(x) := F_t(m + \sigma x | M_{t-1})$$

²⁴Martins-Filho, C.; Yao, F.: Estimation of value at Risk and expected Shortfall based on nonlinear Models of Return Dynamics and extreme Value Theory, 2002.

²⁵Modell von Diebolt und Guegan, 1993. Härdle und Tsybakov, 1997. und Hafner, 1998.

VaR ist dann eindeutig bestimmt durch

$$F_t^{-1}(\alpha|M_{t-1}) = m + \sigma x_{(\alpha)}, \text{ mit}$$

$$P(\epsilon_t \leq x_{(\alpha)}|M_{t-1}) = \alpha.$$

Wir nehmen an, dass Y über einem Schwellenwert y liegt. ($Y_t > y \forall t = 1, 2, \dots$)

Für die Schätzung des Value-at-Risk VaR werden zwei Ansätze kombiniert: wir verwenden lokale polynomiale Schätzer für den bedingten Erwartungswert $m(x)$ und die bedingte Varianz $\sigma(x)$ und benutzen die Extremwerttheorie zur Bestimmung eines Schätzers des Quantils $x_{(\alpha)}$.

3.3.1 Schätzung des bedingten Erwartungswertes $m(y)$ und der bedingten Varianz $\sigma(y)$

Durch das Ersetzen des Rechteckskern durch andere Kernfunktionen, kann das Verfahren verallgemeinert werden. Die Kernfunktionen sollten dabei die folgenden Eigenschaften besitzen.²⁶

- 1) $K(u) = K(-u)$, Symmetrie um Null
- 2) $\operatorname{argmax} K(u) = 0$, Maximum bei $u=0$,
- 3) $\int K(u)du = 1$,
- 4) $|u|K(u) \rightarrow 0$ für $|u| \rightarrow \infty$,
- 5) K beschränkt,
- 6) $\int u^2 K(u)du < \infty$.

Definition 3.3

Dreieckskern: $K(u) = (1 - |u|) 1_{[-1,1]}(u)$

Epachinovkern: $K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2) 1_{[-1,1]}(u)$

Normal kern: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$

Wir gehen nun an die Schätzung des bedingten Erwartungswertes.

Als Ausgangspunkt nimmt man eine Folge von Stichproben $(y_t)_{t=1}^n$.

Wir betrachten die $(y_t, y_{t-1})_{t=2}^n$ regressand-regressor sequence.

um $\hat{m}(Y_{t-1})(y)$ zu bestimmen.

$$(\hat{\beta}, \hat{\beta}_1) = \operatorname{argmin}_{\beta, \beta_1} \sum_{t=2}^n (y_t - \beta - \beta_1(y_{t-1} - y))^2 K\left(\frac{y_{t-1} - y}{h(n)}\right)$$

$$\hat{m}(Y_{t-1})(y) = \hat{\beta}(y)$$

²⁶Lang, S.: Computerinsive Verfahren der Statistik, 2004.

Betrachte jetzt $(r_t, y_{t-1})_{t=2}^n$, um $\hat{\sigma}(Y_{t-1})^2(y)$ zu bestimmen.

$$\hat{r}(t) := (y_{t-1} - \hat{m}(y))^2$$

$$(\hat{\eta}, \hat{\eta}_1) = \operatorname{argmin}_{\eta, \eta_1} \sum_{t=2}^n (\hat{r}(t) - \eta - \eta_1(y_{t-1} - y))^2 W\left(\frac{y_{t-1} - y}{h_1(n)}\right)$$

Ein Schätzer für $\sigma^2(y)$ ist $\hat{\sigma}(Y_{t-1})^2(y) = \hat{\eta}(y)$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1(n) = 0$,

W und K seien Kernfunktionen.

3.3.2 Schätzung des α -Quantils $x_{(\alpha)}$ der bedingten Verteilung von $(\epsilon|M_{t-1})$

Hier wird die Extremwerttheorie genutzt, um das Quantil der bedingten Verteilung $(\epsilon|M_{t-1})$ zu schätzen. Ergebnisse der Extremwerttheorie beschreiben das Verhalten der Exzesse. Hierzu wird die Klasse der verallgemeinerten Paretoverteilung (Generalized Pareto Distribution, kurz GPD) verwendet. Diese ist gegeben durch

$$G_{\psi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\psi}{\beta}x)^{-\frac{1}{\psi}} & \text{falls } \psi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{\beta}) & \text{falls } \psi = 0 \end{cases}$$

wobei der Skalenparameter $\beta > 0$ ist und $x \geq 0$, bzw. $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\psi}$, falls $\psi \geq 0$ bzw. $\psi \leq 0$ ist.

Die Klassen der GEV (Generalized Extreme Value distribution) und der GPD Verteilungen stehen in enger Verbindung zueinander.²⁷

Bemerkung 11

Die Pareto-Verteilung bezieht sich auf die Menge X aller Beobachtungsgrößen, die größer als eine Schranke x_{\min} ($x_{\min} > 0$) sind:

$$P(X > x) = \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^k, \forall x > x_{\min}$$

²⁷vgl. Kotz, S.; Nadarajah, S.: Extreme Value Distributions Theory and Applications, 2000.

Seien X_1, X_2, \dots, X_n Beobachtungen einer Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der Verteilungsfunktion $F_X := F$.

In der Extremwerttheorie beschäftigt man sich mit dem Konvergenzverhalten des Maximums $M_n := \text{Max}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ dieser Beobachtungen.

Satz 3.4 (Fisher-Tippett)²⁸

Falls zwei reelle Folgen a_n und b_n mit

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) := F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{D} H(x), n \rightarrow \infty \quad (*)$$

existieren, wobei H eine nicht-degenerierte Verteilungsfunktion ist, dann existieren Parameter $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $\psi \in \mathbb{R}$ so, dass

$$H(x) = H_\psi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \text{ mit}$$

$$H_\psi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} \exp\left[-\left(1 + \psi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\right] & \text{falls } \psi \neq 0, \\ \exp\left[-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right] & \text{falls } \psi = 0, \end{cases}$$

mit dem Träger

$$D := \begin{cases} x > \mu - \frac{\sigma}{\psi} & \text{falls } \psi > 0 \\ x < \mu - \frac{\sigma}{\psi} & \text{falls } \psi < 0 \\ x \in \mathbb{R} & \text{falls } \psi = 0 \end{cases}$$

Gilt (*), so sagt man, F liege im Anziehungsbereich der Verteilung H , kurz $F \in MDA(H)$ (Maximum Domain of Attraction).

Für einen großen gewählten Schwellenwert u kann nun also die Verteilung $F_u(x)$ des Exzesses $X - u$ durch eine verallgemeinerte Paretoverteilung approximiert werden, genau dann, wenn $F \in MDA(H_\psi)$ ist.

Satz 3.5 (Pickands-Balkema-de-Haan)²⁹

Sei $x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < 1\}$.

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, u < x_F$$

wobei $x \in]0, x_F - u[$.

$F \in MDA(H_\psi)$ ist genau dann erfüllt, wenn eine positive Lebesgue-messbare Funktion β mit

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\psi, \beta(u)}(x)| = 0$$

existiert.

²⁸Vgl. Resnick, S.I: Extreme values, Regular Variation and Point Processes, 1987.

²⁹Pickands, J.: statistical inference using extreme order statistics, 1975.

Definition 3.4 ³⁰

Eine Verteilung F heißt regulär variierend, falls das Verteilungsende asymptotisch polynomial abfällt, genauer

$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x)$, $\alpha > 0$ und $\alpha = \frac{1}{\psi}$, wobei für $L(x)$ gilt $\frac{L(tx)}{L(x)} \rightarrow 1$ falls $x \rightarrow \infty$ und $t > 0$.

Bemerkung 12 ³¹

Die Pareto-Verteilungen sind regulär variierend mit $\alpha = \frac{1}{\psi}$ und $\psi > 0$.

Bemerkung 13

Der Anziehungsbereich der Frechet-Verteilung ist äquivalent zu den Verteilungen mit regulär variierendem Verteilungsende.

Sei nun $Y_i := X_i - u$, was man Exzess von X_i über u nennt und $N_u := \text{card}\{i \in \{1, \dots, n\} | X_i > u\}$ zähle die Exzedenten zur Schranke u .

Satz 3.6

Seien $u \in \mathbb{R}$ mit $u < x_F$, $x > 0$,

$(\epsilon_t)_{t=1}^n$ Beobachtungen der Zufallsvariable ϵ ,

$F_u(x) = P(\epsilon - u \leq x | \epsilon > u, M_{t-1})$.

Setze $\bar{F}_u(x) = 1 - F_u(x)$ und

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(\epsilon_i > u | M_{t-1})} = \frac{N_u}{n}.$$

Dann gilt $\hat{x}_{(\alpha)} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\psi}} [(\frac{n}{N_u}(1 - \alpha))^{-\hat{\psi}} - 1]$,

wobei $\hat{x}_{(\alpha)}$ ein Schätzer für das Quantil $x_{(\alpha)}$ der bedingten Verteilung von $(\epsilon | M_{t-1})$ ist, und $\hat{\psi}$, $\hat{\beta}$ Schätzer für die Parameter der Pareto-Verteilung sind.

Beweis:

$$P(\epsilon - u \leq x | \epsilon > u, M_{t-1}) \approx G(x, \Psi, \beta)$$

$$P(\epsilon - u > x | \epsilon > u, M_{t-1}) \approx 1 - G(x, \Psi, \beta)$$

$$\frac{P(\epsilon - u > x | M_{t-1})}{P(\epsilon > u | M_{t-1})} \approx 1 - G(x, \Psi, \beta)$$

Falls $x_{(\alpha)} > u$ gilt, dann

setze $x = \hat{x}_{(\alpha)} - u$.

³⁰vgl. Resnik, S.I.: Extreme values, Regular Variation and Point Processes, 1987.

³¹Mc Neil, A.J.; Frey, R.: Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series, an Extreme Value Approach, 1998.

$$P(\epsilon > x_{(\alpha)} | \epsilon > u, M_{t-1}) \approx 1 - G(x, \Psi, \beta)$$

$$1 - \alpha \approx P(\epsilon > u | M_{t-1}) [1 - G(x, \Psi, \beta)]$$

$$1 - \alpha = \frac{N_u}{n} (1 + \hat{\psi} \frac{(\hat{x}_{(\alpha)} - u)}{\hat{\beta}})^{-\frac{1}{\hat{\psi}}} \quad (\hat{F}(u) = F_n(u) = \frac{N_u}{n})$$

$$\left(\frac{n}{N_u} (1 - \alpha)\right)^{-\hat{\psi}} = 1 + \hat{\psi} \frac{(\hat{x}_{(\alpha)} - u)}{\hat{\beta}}$$

$$\hat{x}_{(\alpha)} - u = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\psi}} \left[\left(\frac{n}{N_u} (1 - \alpha)\right)^{-\hat{\psi}} - 1 \right]$$

$$\hat{x}_{(\alpha)} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\psi}} \left[\left(\frac{n}{N_u} (1 - \alpha)\right)^{-\hat{\psi}} - 1 \right] \quad \square$$

Ein zentrales Problem dieser Methode ist die Festlegung des Schwellenwertes u und die Schätzung der Parameter Ψ und β der Pareto Verteilung.

1) Schätzung des Schwellenwertes.

Eine Methode für die Auswahl des im Folgenden verwendeten Schwellenwertes verfährt wie folgt:

Erstens nimmt man eine Folge von Stichproben $(y_i)_{i=1}^n$ und setzt.

$$\hat{\epsilon}_i := \frac{y_i - \hat{m}(Y_{i-1})}{\hat{\sigma}(Y_{i-1})}$$

Ordnen wir zunächst $(\hat{\epsilon}_i)_{i=1}^n$:

$$\hat{\epsilon}_{1:n} \geq \hat{\epsilon}_{2:n} \dots \geq \hat{\epsilon}_{n:n}.$$

Sei $k \in 1, 2, \dots, n$ mit $1 - \frac{k}{n} < \alpha$.

Wir bekommen k Excesse über $\hat{\epsilon}_{k+1:n}$.

Ein Schätzer für den Schwellenwert ist dann $\hat{\epsilon}_{k+1:n}$.

2) Schätzung der Parameter Ψ und β der Pareto-Verteilung.

Zur Schätzung der Parameter Ψ und β der Pareto Verteilung wollen wir hier einige Methoden vorstellen. ³²

³²Hosking, J.R.M; Wallis, J.R.: Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution, 1987.

3.3.3 Likelihood Methode

Seien (Y_1, \dots, Y_n) i.i.d Stichproben einer Zufallsvariable, die eine GPD-Verteilung besitzt.

Likelihood für die GPD lautet:

$$l((\Psi, \beta), Y) = -n \operatorname{Ln}(\beta) - \left(\frac{1}{\Psi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{\Psi}{\beta} Y_i\right)$$

Die Maximum Likelihood Methode hat keine explizite Lösung und muss numerisch gelöst werden.

3.3.4 Momentenmethode

Seien μ und σ^2 jeweils der Erwartungswert und die Varianz der Pareto-Verteilung. Dann ist

$$\mu = \frac{\beta}{1-\psi} \text{ und}$$

$$\sigma^2 = \frac{\beta^2}{(1-\psi)^2 (1-2\psi)}.$$

Die Momentenschätzer von Ψ und β lauten dann:

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{x}^2}{s^2}\right) \text{ und}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{x}}{2} \left(1 + \frac{\hat{x}^2}{s^2}\right)$$

wobei \hat{x} der empirische Mittelwert und s^2 die empirische Varianz sind.³³

3.3.5 Methode des Probability Weighted Moments

Parameterschätzung:

Falls das Interesse auf der Tail liegt, sollte den größten Beobachtungen mehr Gewicht gegeben werden. Hoskins und Wallis (1997) haben eine Momentenmethode mit gewichteten Wahrscheinlichkeiten (PWM) entwickelt. Die Hill-Schätzung für den Shape Parameter (Hill 1975) benutzt lediglich die Daten aus dem Schwanz der Verteilung.

Definition 3.5

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Verteilungsfunktion $F_X := F$.

Die probability weighted moments der Zufallsvariable X lauten

³³Hosking, J.R.M; Wallis, J.R.: Regional Frequency Analysis, 1997.

$$M(p, r, s) = E(X^p F(X)^r (1 - F(X))^s)$$

Satz 3.7

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P)

Sei $x(u)$ die Quantilfunktion der Zufallsvariable X . Dann gilt

$$\alpha_r := M(1, 0, r) = E(X(1 - F(X))^r) = \int_0^1 x(u)(1 - u)^r du,$$

$$\beta_r := M(1, r, 0) = E(XF(X)^r) = \beta_r = \int_0^1 x(u)u^r du.$$

Satz 3.8 ³⁴

Seien $x_{(1:n)} \leq \dots \leq x_{(n:n)}$ n geordnete Stichproben.

Die Schätzer $\hat{\alpha}_r$ von α_r und $\hat{\beta}_r$ von β_r mit

$$\hat{\alpha}_r := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(n-i)(n-i-1)\dots(n-i-r+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)},$$

$$\hat{\beta}_r := \frac{1}{n} \sum_{i=r+1}^n \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} \text{ sind erwartungstreu.}$$

Definition 3.6 (Legendre Polynome)

Legendre Polynome $P_r^*(u)$ haben die folgende explizite Form:

$$P_r^*(u) = \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* u^k \text{ mit}$$

$$p_{r,k}^* = (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} = \frac{(-1)^{r-k} (r+k)!}{(k!)^2 (r-k)!}.$$

Bemerkung 14

Legendre-Polynome, $P_r^*(u)$ haben folgenden Eigenschaften

1) $P_r^*(u)$ ist ein Polynom vom Grade r in u .

2) $P_r^*(1) = 1$.

3) $\int_0^1 P_r^*(u) P_s^*(u) du = 0$, wenn $r \neq s$.

Definition 3.7

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) .

Sei $x(u)$ die Quantil-Funktion von X .

Wir definieren das L -Moment von X wie folgt:

$$\lambda_r = \int_0^1 x(u) P_{r-1}^*(u) du.$$

³⁴Maciunas Landwehr J.; Matlas, N.C.; Wallis, J.R.: Probability weighted Moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel Parameters and Quantiles, 1979.

Bemerkung 15

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) .

Weiterhin seien $X_{(1:n)} \leq X_{(2:n)} \dots \leq X_{(n:n)}$ n geordnete Beobachtungen der Zufallsvariable X .

wir können auch das L -Moment von X wie folgt definieren

$$\lambda_r = r^{-1} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} E(X_{r-j:r})$$

$$E(X_{r:n}) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x(u) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$$

Die zwei Definitionen sind konsistent.^{35, 36}

Bemerkung 16

$$\lambda_{r+1} = (-1)^r \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* \alpha_k = \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* \beta_k$$

Ein Vorteil der PWM-Methode gegenüber der Maximum Likelihood-Methode ist ihre einfachere Implementation und ihre bessere Eignung bei kleinen Stichproben (Landwehr et al 1979).

Lemma 3.1³⁷

Sei $F(x) = 1 - (1 + \frac{\Psi}{\beta} x)^{-\frac{1}{\Psi}}$ mit $\Psi < 1$ und $\Psi \neq 0$ die Pareto-Verteilung. Dann gilt:

$x(u) = -\frac{\beta}{\Psi} [1 - (1-u)^{-\Psi}]$ ist ihre entsprechende Quantilfunktion und

$$\lambda_1 = \frac{\beta}{1-\Psi}$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta}{(1-\Psi)(2-\Psi)}$$

Korollar 3.1

Es gilt $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2-\Psi}$. Dann folgt

$$\Psi = 2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ und}$$

$$\beta = (1 - \Psi) \lambda_1.$$

Korollar 3.2

Falls $\lambda_1 = \alpha_0 = \beta_0$ und $\lambda_2 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0$, dann folgt

$$\Psi = 2 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 2\alpha_1} \text{ und}$$

$$\beta = \frac{2\alpha_0\alpha_1}{\alpha_0 - 2\alpha_1}.$$

³⁵Hosking, J.R.M.; Wallis, J.R.: Regional Frequency Annalysis (1997)/Hosking 1990

³⁶Siehe Hosking, J.R.M: L-moments Analysis and estimation of distributions of order statistics. Journal of the Royal statistical Society, 1989.

³⁷Vgl. Hosking, J.R.M.; Wallis, J.R.: Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution, 1987.

Lemma 3.2

Sei $\hat{\beta}_k$ ein Schätzer von β_k , dann ist

$$\hat{\lambda}_r := \sum_{k=0}^r p_{r-1,k}^* \hat{\beta}_k = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} p_{r-1,k}^* \hat{\alpha}_k \text{ ein Schätzer von } \lambda_r \text{ und}$$

$$\hat{\Psi} = 2 - \frac{\hat{\lambda}_1}{\lambda_2} = 2 - \frac{\hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_0 - 2\hat{\alpha}_1} \text{ und } \hat{\beta} = (1 - \hat{\Psi})\hat{\lambda}_1 = \frac{2\hat{\alpha}_0\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_0 - 2\hat{\alpha}_1}.$$

3.4 Numerische Approximation vom Value-at-Risk

Im Folgenden werden einige wichtige numerische Ansätze zur Bestimmung von Value-at-Risk aufgeführt.³⁸

3.4.1 Ansatz von Fallon**Definition 3.8**

Falls alle Momente existieren, wird die Kumulanten erzeugende Funktion durch den Logarithmus der charakteristischen Funktion C_X gegeben:

$$\ln(C_X(u)) = \ln\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n,$$

wobei $C_X(u) := \int \exp(i u x) W_X(dx)$

$$M_n = E(X^n) = \frac{1}{i^n} C_X^{(n)}(0)$$

Satz 3.9

$$k_n = (\ln[C_X]^{(n)}(0)) = (\ln[1 + g])^{(n)}(0)$$

$$\text{damit } g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \frac{1}{i^n} C_X^n(0)$$

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} u^n$$

$$a_n = g^{(n)}(0)$$

$g^{(n)}(0)$ ist die n -te Ableitung nach u und $g(0) = 0$ Insbesondere

$$k_1 = a_1$$

$$k_2 = a_2 - a_1^2$$

$$k_3 = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3$$

$$\hat{\Delta P} := \frac{\Delta P - E(\Delta P)}{\sigma(\Delta P)}$$

$$\hat{k}_1 = 0,$$

$$\hat{k}_2 = 1,$$

³⁸Read, O.: Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value at Risk, 1998.

$$\begin{aligned}\hat{k}_3 &= SC(\Delta\hat{P}), \\ \hat{k}_4 &= Kurt(\Delta P) - 3 Var(\Delta P)^2 = EKC(\Delta P). \quad 39\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}_\alpha} dF_{\Delta P}(x) = \alpha.$$

\hat{x}_α hat die folgende Cornish-Fisher-Entwicklung⁴⁰

$$\hat{x}_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\hat{k}_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\hat{k}_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\hat{k}_3^2 + \frac{1}{120}\hat{k}_5 - \frac{1}{24}(z_\alpha^4 - 5z_\alpha^2 + 2)\hat{k}_3\hat{k}_4 + \frac{1}{324}(12z_\alpha^4 - 53z_\alpha^2 + 17)\hat{k}_3^3 \dots$$

Und der Value-at-Risk lautet:

$$VaR(t, T, \alpha) = F_{\Delta P}^{-1}(\alpha) = E(\Delta P) + \sigma(\Delta P) \cdot \hat{x}_\alpha.$$

3.4.2 Ansatz von Zangari

Zangari benutzt einen Ansatz von Johnson (1949), der auf Systemen von Verteilungen basiert, die durch Transformationsmethoden generiert werden (Translationssystem). Er nimmt an, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portfolio-Wertänderung ΔP eine monoton steigende Funktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable Z ist.

$Z = a + bh\left(\frac{\Delta P - c}{d}\right) \iff \Delta P = c + dh^{-1}\left(\frac{Z - a}{b}\right)$, wobei h eine monoton steigende Funktion, Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und a, b, c, d Parameter sind, die durch die Werte der ersten vier Momente bestimmt werden.

Daher wird der Value-at-Risk durch $VaR(t, T, \alpha) = c + dh^{-1}\left(\frac{z_\alpha - a}{b}\right)$ bestimmt.

3.4.3 Ansatz von Britten Jones/Schaefer

Britten-Jones/Schaefer (1997) betrachten die affine Funktion von nicht-zentral-quadrat-verteilten Zufallsvariablen:

$\Delta P = k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \gamma_{j,j}^* \cdot \omega_j$ wobei $\gamma_{j,j}^* \neq 0$ für alle Risikofaktoren $j \in \{1, \dots, N\}$ und k reelle Konstante.

Man benutzt die Approximationsmethode von Solomon/Stephens (1977), um den Three-Moment-Fit zu bestimmen.

Außerdem kann man die Verteilungsfunktion einer Linearkombination von nicht-zentral-chi-quadrat-verteilten Zufallsvariablen durch die Zufallsvariable $A := K_1 \omega^{K_2}$

³⁹ $Skew(\Delta P) = E((\Delta P - \mu)^3)$. $Kurt(\Delta P) = E((\Delta P - \mu)^4)$.
 $SC(\Delta P) = E\left(\left(\frac{\Delta P - \mu}{\frac{\mu}{2}}\right)^3\right)$. $KC(\Delta P) = E\left(\left(\frac{\Delta P - \mu}{\frac{\mu}{2}}\right)^4\right)$ $EKC(\Delta P) = KC(\Delta P) - 3$

⁴⁰vgl. Kendall, M.; Stuart, A.: Advanced Theory of Statistics, 1973.

approximieren.

Dabei ist ω eine chi-quadrat-verteilte Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden und K_1 und K_2 sind Konstanten.

$$E(\omega^r) = \frac{2^r \Gamma(r + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Der Delta-Gamma-Normal Value-at-Risk resultiert aus der folgenden Transformation der zentralen chi-quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden:

$$VaR(t, T, \alpha) = K_1 (\chi_{n, \alpha}^2)^{K_2}$$

Bemerkung 17

Sei $Z = K_1 \omega_2^K$, dann werden die Parameter n, K_1, K_2 durch die drei folgenden Gleichungen bestimmt:

$$E(Z) = E(\Delta P - k),$$

$$E(Z^2) = E((\Delta P - k)^2),$$

$$E(Z^3) = E((\Delta P - k)^3).$$

3.4.4 Ansatz von Rouvinez

Rouvinez modelliert die Portfolio-Wertänderung als affine Funktion von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit:

$$\Delta P = K + \sum_{j \in J} b_j \omega_j + b_0 \omega_0, \text{ wobei}$$

$$\omega_0 \sim N(0, 1),$$

$$\omega_j \sim \chi^2,$$

$$F_{\Delta P}(s) = M_{\Delta P}(i s), \text{ mit } i^2 = -1$$

$$F_{\Delta P}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im}\left(\frac{\exp(-i s x)}{s}\right) \varphi_{\Delta P}(s) ds$$

$$F_{\Delta P}(x) = \alpha.$$

Durch numerische Integration wird von der Gleichung $F_{\Delta P}(x) = \alpha$ eine Approximation der Lösung der Gleichung $VaR(t, T, \alpha) = F_{\Delta P}^{-1}(\alpha)$ berechnet.

Das folgende Kapitel dient hauptsächlich als Motivation für ein analoges Problem im nächsten Kapitel.⁴¹

4 Optimale Portfolios und Value-at-Risk im Black-Scholes-Modell

Am Markt möchte man bei der Auswahl eines Portfolios eine möglichst hohe Rendite erreichen. Aber gleichzeitig muß man das Risiko seiner Auswahl betrachten. Zu jeder ausgewählten Strategie gehört eine Rendite, aber auch ein Risiko. Deswegen betrachtet man nicht nur das Zielkriterium, eine maximale Rendite zu erreichen, sondern auch gleichzeitig das zweite Zielkriterium, ein minimales Risiko zu haben. Markowitz formuliert das Problem wie folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(R^\pi) \\ NB \quad Var(R^\pi) \leq c_1 \end{array} \right.$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\pi \in \mathbb{R}^d} Var(R^\pi) \\ NB \quad E(R^\pi) \geq c_2, \end{array} \right.$$

wobei R^π die Rendite des Portfolios π ist.⁴²

Aber dieser traditionelle Ansatz ist nicht ohne Kritik geblieben. Zum Beispiel kann damit nicht das Phänomen erklärt werden, dass bisher eine langfristige Investition in Aktien fast immer zu mehr Gewinn geführt hat als die Investition in risikolose Wertpapiere mit festem Zinssatz.

Aktienkursindizes steigen trotz des wiederholten Auftretens von Börsencrashes schneller als reine Bonds.

Die Benutzung der Varianz als Maß für das Risiko eines Investments zeigt, dass ein reines Bond-Investment das beste Ergebnis bezüglich des Risikos erzielt, was dem obigen Phänomen widerspricht. Deswegen wählt man als Alternative für das Risikomaß Value-at-Risk.⁴³

⁴¹vgl. Korn, R.: Optimierungsprobleme bei wertpapierhandel in stetiger Zeit, 1992.

⁴²Korn, R., Korn, E.: Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung, 1999.

⁴³Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

In diesem Kapitel betrachten wir ein zeitstetiges Portfolioproblem in dem Black-Scholes-Modell. Wir lösen dieses Problem zuerst mit dem Ansatz, bei dem das Risikomaß der Value-at-Risk ist. Wir maximieren das zu erwartende Endvermögen unter der Nebenbedingung, dass der Value-at-Risk nicht eine bestimmte obere Schranke überschreitet. Anschließend lösen wir das traditionelle Markowitz-Erwartungswert-Varianz-Problem. Zum Schluss vergleichen wir die beiden Methoden.

Das Modell eines Marktes ist dessen mathematische Beschreibung. Eines der wichtigsten Modelle in der Finanzwelt ist das Black-Scholes-Modell.

Definition 4.1 ⁴⁴

Ein Black-Scholes-Modell ist ein Marktmodell, das aus d verschiedenen Wertpapieren (Aktien) mit Preisen $P_i(t)$, $t \in [0, T]$, $d \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$ und $i = 1, \dots, d$ und einer risikolosen Anlage (Bond) mit Preisen $P_0(t)$ besteht.

Sei r die Verzinsungsrate des Bonds.

$b = (b_1, \dots, b_d)'$ sind die Verzinsungsraten der Aktien.

$\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ heißt Volatilitätsmatrix und erfülle $\sigma \sigma'$ positiv definit,

d.h. es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^d$ ($v' \sigma \sigma' v \geq \varepsilon \|v\|^2$) gilt.

Die Preise $(P_i(t))_{t \geq 0}$ und $(P_0(t))_{t \geq 0}$ erfüllen die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & dP_0(t) = P_0(t) r dt \quad \text{Bondpreis} \\ \text{(II)} & dP_i(t) = P_i(t) [b_i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_j(t)] \quad i = 1 \dots d, j = 1 \dots d \quad \text{Aktienpreis} \end{array} \right.$$

$W(t) = (W_1, \dots, W_d)$ bezeichnet eine d -dimensionale Standard Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) , der mit der P -Erweiterung $(F_t)_{t \in [0, T]}$ der natürlichen, von W erzeugten Filtration $F_t^W := \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$, $t \in [0, T]$ versehen ist.

Definition 4.2 ⁴⁵

a) Eine Handelsstrategie ϕ ist ein \mathbb{R}^{d+1} -wertiger, bzgl. $(F_t)_{t \in [0, T]}$ progressiv messbarer Prozess $\phi(t) := (\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_d(t))'$ mit

$$\int_0^T |\phi_0(t)| dt < \infty, \quad P\text{-fast sicher und}$$

$$\sum_{i=1}^d \int_0^T (|\phi_i(t) P_i(t)|)^2 dt < \infty \quad P\text{-fast sicher, für } i = 1, \dots, d.$$

Der Wert $x := \sum_{i=0}^d \phi_i(0) P_i(0)$ heißt Anfangswert von ϕ

b) Sei ϕ eine Handelsstrategie mit Anfangswert $x > 0$. Der Prozess

$$X(t) := \sum_{i=0}^d \phi_i(t) P_i(t) \text{ heißt Vermögensprozess bezüglich } \phi \text{ mit Startvermögen } x.$$

c) Ein nichtnegativer, bzgl. $(F_t)_{t \in [0, T]}$ progressiv messbarer, reellwertiger Prozeß $c(t)$,

$$t \in [0, T], \text{ mit } \int_0^T c(t) dt < \infty, \quad P\text{-fast sicher}$$

heißt ein Konsumratenprozess, kurz Konsumprozess.

⁴⁴Korn, R., Korn, E.: Optimierungsprobleme bei Wertpapierhandel in stetiger Zeit, 1992.

⁴⁵Korn, R., Korn, E., Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung, 1999.

Definition 4.3 ⁴⁶

Ein Paar (ϕ, c) aus einer Handelsstrategie ϕ und einem Konsumratenprozess c heißt selbstfinanzierend, falls für den zugehörigen Vermögensprozess $X(t), t \in [0, T]$ gilt:

$$X(t) = x + \sum_{i=0}^d \int_0^T \phi_i(s) dP_i(s) - \int_0^T c(s) ds, \text{ } P\text{-fast sicher.}$$

Definition 4.4 ⁴⁷

(ϕ, c) sei ein selbstfinanzierendes Paar aus einer Handelsstrategie und einem Konsumprozess $\pi(t) := (\pi_1(t), \dots, \pi_d(t))', t \in [0, T]$ mit $\pi_i(t) = \frac{\phi_i(t) P_i(t)}{X(t)}$, heißt selbstfinanzierender Portfolioprocess zum Paar (ϕ, c) .

Im Folgenden nehmen wir an, dass die $\pi(t)$ und die Volatilitätsmatrizen über die Zeit $[0, T]$ konstant gehalten werden und $c(t) = 0 \forall t \in [0, T]$.

Wir bezeichnen mit $\underline{1}$ das d -Tupel $(1, \dots, 1)'$ und mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in \mathbb{R}^d . $\text{Var}(X)$ ist die Varianz der Zufallsvariablen X .

4.1 Explizite Formeln für das Vermögen, seinen Mittelwert und seine Varianz

Um Handelsaktivitäten zu beschreiben, betrachten wir den Vermögensprozess $X^\pi(t), t \in [0, T]$ in einem Black-Scholes-Markt mit Anfangsvermögen $x > 0$, modelliert durch die stochastische Differentialgleichung:

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t) [\{(1 - \pi' \underline{1})r + \pi' b\} dt + \pi' \sigma dW(t)], t \in [0, T], \quad X^\pi(0) = x. \quad (1)$$

In diesem Portfolioprocess $\pi := (\pi_1, \dots, \pi_d)', \forall t \in [0, T]$ ist π_i der prozentuale Anteil am Vermögen $X^\pi(t)$, der in Aktien investiert wird. Der Anteil des in dem Bond investierten Vermögens ist durch $\frac{\phi_0(t) P_0(t)}{X(t)} = (1 - \pi' \underline{1})$ gegeben.

Bemerkung 18

Die Auswahl eines konstanten π heißt nicht, dass man nicht handelt (man muss sogar dauernd handeln). π ist nur deshalb konstant gewählt, weil kein allgemeines Problem gelöst werden könnte.

⁴⁶Korn, R., Korn, E., Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung, 1999.

⁴⁷Karatzas, I., Shreve, S.E.: Brownian Motion and Stochastic Calculus, 1987.

Hilfssatz 4.1 ⁴⁸

Sei $dX_i(t) = X_i(t)[\mu(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_j(t)]$ und $X_i(0) = X_i$, $i \in \{1, \dots, d\}$,

$t \in [0, T]$.

Falls $\mu(t) = (\mu_1, \dots, \mu_d) = \mu$ und $\sigma(t) = \sigma$,

dann gilt $X_i(t) = X_i \exp[(\mu_i t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 t)]$.

Die explizite Lösung der Gleichung (1) wird wie folgt gegeben.

Satz 4.1 ⁴⁹

Sei $dX^\pi(t) = X^\pi(t)[\{(1 - \pi' \underline{1})r + \pi' b\}dt + \pi' \sigma dW(t)]$, $t \in [0, T]$ und $X^\pi(0) = x$.

a) $X^\pi(t) = x \exp[(\pi'(b - r \underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2})t + \pi' \sigma W(t)]$

b) $E(X^\pi(T)) = x \exp((\pi'(b - r \underline{1}) + r) T)$

c) $Var(X^\pi(T)) = x^2 \exp(2(\pi'(b - r \underline{1}) + r) T)(\exp(\|\pi' \sigma\|^2 T) - 1)$

4.2 Der Value-at-Risk im Black-Scholes-Modell

Wir definieren den Value-at-Risk in unserem Markt als die Differenz zwischen dem sicheren Bondinvestment und dem Downside risk-Kapital für ein gegebenes Konfidenzniveau α . Das Downside risk-Kapital für ein gegebenes Konfidenzniveau α ist das α -Quantil der Verteilung von $X^\pi(T)$.

Satz 4.2 ⁵⁰

Sei z_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung.

Dann ist der Value-at-Risk des Portfolios π mit Anfangskapital x und Planungshorizont T gegeben durch

$$VaR(x, \pi, T) = x (\exp(r T) - \exp((\pi'(b - r \underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2}) T + z_\alpha \|\pi' \sigma\| \sqrt{T})).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} VaR(x, \pi, T) &= x \exp(r T) - X_*^\pi(T) \\ &= x \exp(r T) - y_\alpha \quad \text{mit} \quad X_*^\pi(T) = y_\alpha \end{aligned}$$

y_α ist das α -Quantil der Verteilung von $X^\pi(T)$.

⁴⁸Karatzas, I., Shreve, S.E., Brownian Motion and Stochastic Calculus, 1988.

⁴⁹Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

⁵⁰Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

Behauptung: $y_\alpha = x \exp((\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2) T + z_\alpha \|\pi' \sigma\| \sqrt{T})$,

wobei z_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

$$X^\pi(T) \leq y_\alpha \quad (I)$$

$$(I) \iff \frac{\pi' \sigma W(T)}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} \leq \frac{1}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} [\ln(\frac{y_\alpha}{x}) - (\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2) T] =: \psi(y_\alpha)$$

$$W(T) = (W_1(T), \dots, W_d(T))'$$

$$W_i(T) \sim N(0, \sqrt{T^2}) \quad i = 1, \dots, d$$

$$\frac{\pi' \sigma W(T)}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1) \quad \text{und} \quad P\left(\frac{\pi' \sigma W(T)}{\sqrt{T}} \leq \psi(y_\alpha)\right) = P(X^\pi(T) \leq y_\alpha) = \alpha$$

$$\text{daraus folgt} \quad \psi(y_\alpha) = z_\alpha$$

$$\frac{1}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} [\ln(\frac{y_\alpha}{x}) - (\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2) T] = z_\alpha$$

$$y_\alpha = x \exp((\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2) T + z_\alpha \|\pi' \sigma\| \sqrt{T})$$

$$\text{VaR}(x, \pi, T) = x \exp(r T) - y_\alpha$$

$$= x (\exp(r T) - \exp((\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2) T + z_\alpha \|\pi' \sigma\| \sqrt{T}))$$

□

Bemerkung 19

Die obige Definition des Value-at-Risk stimmt nicht mit einer anderen oft verwendeten Definition überein, bei der der VaR als Differenz zwischen dem Erwartungswert des Investments und des Downside risk-Kapitals definiert wird.

4.3 Schranken des Value-at-Risk

Im Folgenden werden Schranken des Value-at-Risk im Black-Scholes-Modell angegeben.

$$VaR(x, \pi, T) = x \left(\exp(rT) - \exp\left(\left(\pi'(b - r\mathbf{1}) + r - \frac{\|\pi'\sigma\|^2}{2}\right)T + z_\alpha \|\pi'\sigma\| \sqrt{T}\right) \right)$$

$$\sup_{\pi \in \mathbb{R}^d} VaR(x, \pi, T) = x \exp(rT),$$

a) Falls $b_i = r$ für alle $i=1, \dots, d$,

$$\text{dann gilt } \pi^* = 0 \text{ und } \min_{\pi \in \mathbb{R}^d} VaR(x, \pi, T) = VaR(x, \pi^*, T) = 0$$

b) Falls ein $b_i \neq r$ existiert, $i \in \{1, \dots, d\}$ und $\|\theta\| \sqrt{T} < |z_\alpha|$ gilt,

dann gilt $\pi^* = 0$ und $\min_{\pi \in \mathbb{R}^d} VaR(x, \pi, T)$ wird für die reine Bond-Strategie erreicht.

c) Falls ein $b_i \neq r$ existiert, $i \in \{1, \dots, d\}$ und $\|\theta\| \sqrt{T} \geq |z_\alpha|$ ist,

dann wird $\min_{\pi \in \mathbb{R}^d} VaR(x, \pi, T)$ erreicht für $\pi^* = \left(\|\theta\| - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right) (\sigma \sigma')^{-1} \frac{(b - r\mathbf{1})}{\|\sigma^{-1}(b - r\mathbf{1})\|}$,
und es gilt:

$$VaR(x, \pi^*, T) = x \exp(rT) \left(1 - \exp\left(\frac{1}{2}(\|\theta\| \sqrt{T} - |z_\alpha|)^2\right)\right)$$

4.4 Optimale Portfolios mit beschränktem Value-at-Risk

Wir wählen den Value-at-Risk als Risikomaß und lösen ein Portfolioproblem, bei dem das Endvermögen unter der Nebenbedingung einer oberen Schranke für dieses Risikomaß zu maximieren ist.

Wir betrachten das Problem \hat{P}_1 wie folgt:

$$P_1 \quad \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(X^\pi(T)) & P_{1,1} \\ VaR(x, \pi, T) \leq C & P_{1,2} \end{cases}$$

Bemerkung 20

$$\min_{\pi \in \mathbb{R}^d} VaR(x, \pi, T) = \begin{cases} 0 \\ \text{oder} \\ x \exp(rT) (1 - \exp(\frac{1}{2}(\sqrt{T} \|\theta\| - z_\alpha)^2)) \end{cases}$$

Deswegen nehmen wir an, dass

$$C \geq \max\{0, x \exp(rT) (1 - \exp(\frac{1}{2}(\sqrt{T} \|\theta\| - z_\alpha)^2))\} \text{ und } C \leq x \exp(rT).$$

Satz 4.3 ⁵¹

Sei $C \in \mathbb{R}$ mit $0 < C < x \exp(rT)$.

Falls ein i existiert, so dass $b_i \neq r$ ist, dann ist

$$\pi^* = \varepsilon^* \frac{1}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1}) \text{ mit}$$

$$\varepsilon^* = (\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}) + \sqrt{(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}})^2 - 2 \frac{c}{T}},$$

$$\theta = \sigma^{-1}(b - r \underline{1}) \quad \text{und} \quad c = \ln(1 - \frac{C}{x} \exp(-rT)),$$

und das maximale erwartete Vermögen unter der Beschränkung von VaR ist durch

$$E(X^{\pi^*}(T)) = x \exp((r + \varepsilon^* \|\sigma'^{-1}(b - r \underline{1})\|)T)$$

gegeben.

Beweis:

$$P_1 \iff \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} (\pi'(b - r \underline{1}) + r)T \\ VaR(x, \pi, T) \leq C \end{cases}$$

Wir lösen das Problem auf der Menge $H_\varepsilon = \{\pi \in \mathbb{R}^d \mid \|\pi' \sigma\| = \varepsilon\}$

⁵¹Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

Das Problem wird wie folgt beschrieben:

$$P_1 \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} (\pi'(b - r \underline{1}) + r)T & P_{1,1} \\ \|\pi' \sigma\| = \varepsilon & P_{1,2} \\ VaR(x, \pi, T) \leq C & P_{1,3} \end{cases}$$

Sei π_ε die Lösung von P_1 , dann gilt

$$E(X^{\pi_\varepsilon}(T)) = x \exp((r + \varepsilon \|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|)T)$$

$E(X^{\pi_\varepsilon}(T))$ ist monoton wachsend bezüglich ε .

Sei ε^* die größte Zahl, die P_1 erfüllt

Die optimale Lösung für \hat{P}_1 ist dann

$$\pi^* = \frac{\varepsilon^*}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1}).$$

□

4.5 Optimale Portfolios mit beschränkter Varianz

Wir lösen das klassische Markowitz-Varianz-Problem:

$$P_2 \quad \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(X^\pi(T)) & P_{2,1} \\ \text{Var}(x, \pi, T) \leq C & P_{2,3} \end{cases}$$

Satz 4.4

Sei $\pi \in \mathbb{R}^d$ und $t \in [0, T]$

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t) \{[(1 - \pi' \underline{1})r + \pi' b]dt + \pi' \sigma dW(t)\}, \quad t \in [0, T] \text{ und } X^\pi(0) = x.$$

Die optimale Lösung für \hat{P}_2 ist dann durch

$$\pi^* = \frac{\hat{\varepsilon}}{\|\sigma^{-1}(b-r\underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1}) \text{ und } \|\theta\| \hat{\varepsilon} T = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{x^2 (\exp(\hat{\varepsilon}^2 T) - 1)}\right) - r T$$

$$\theta = \sigma^{-1}(b - r \underline{1})$$

gegeben.

Beweis:

$$P_2 \quad \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} (\pi'(b - r \underline{1}) + r)T & P_{2,1} \\ \|\pi' \sigma\| = \varepsilon & P_{2,2} \\ \text{Var}(X^\pi(T)) \leq C & P_{2,3} \end{cases}$$

$$P_{2,3} \iff (\pi'(b - r \underline{1}) T) \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{x^2 (\exp(\varepsilon^2 T) - 1)}\right) - r T =: h(\varepsilon)$$

$$\text{Es gelten: } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} h(\varepsilon) = -\infty.$$

h ist monoton fallend.

Sei π_ε die Lösung von P_2 ,

$$\text{dann ist } \pi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|\sigma^{-1}(b-r\underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1}),$$

$$h(\varepsilon) \geq \pi_\varepsilon'(b - r \underline{1}) T = \|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\| T \varepsilon$$

$E(X^{\pi_\varepsilon}(T))$ ist monoton wachsend bezüglich ε .

Dann ist $\hat{\varepsilon}$ das größte ε , das P_2 erfüllt, mit $h(\hat{\varepsilon}) = \pi'_{\hat{\varepsilon}}(b - r \underline{1})T$.

Damit ist $E(X^{\pi_{\hat{\varepsilon}}}(T))$ das maximale zu erwartende Vermögen mit

$$\|\theta\| \hat{\varepsilon} T = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{x^2(\exp(\hat{\varepsilon}^2 T) - 1)}\right) - r T \quad \text{und} \quad \theta = \sigma^{-1}(b - r \underline{1})$$

Die optimale Lösung für \hat{P}_2 ist dann durch

$$\pi^* = \frac{\hat{\varepsilon}}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1})$$

gegeben. □

4.6 Vergleich der beiden Methoden

Das maximale zu erwartende Vermögen ist in beiden Optimierungsproblemen durch

$E(X^{\pi_\varepsilon}(T)) = x \exp((r + \varepsilon \|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|)T)$ gegeben, wobei sich die Lösungen nur in den ε -Werten unterscheiden

Es gilt $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ für die Methode mit beschränkter Varianz und $\hat{\varepsilon}$ erfüllt die Gleichung

$$\|\theta\| \hat{\varepsilon} T = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{x^2 (\exp(\hat{\varepsilon}^2 T) - 1)}\right) - r T.$$

Für die Methode mit beschränktem Value-at-Risk gilt $\varepsilon = \varepsilon^*$ und

$$\varepsilon^* = \left(\frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} + \|\theta\|\right) + \sqrt{\left(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right)^2 - 2 \frac{c}{T}} \quad \text{mit} \quad c = \ln\left(1 - \frac{C}{x} e^{-rT}\right). \quad (\text{IV})$$

Wir untersuchen jetzt ε^* und $\hat{\varepsilon}$.

$\varepsilon^* = \varepsilon^*(T)$ ist monoton wachsend bezüglich T ab einem bestimmten Zeitpunkt T_0 .

Aber $\hat{\varepsilon}$ ist gegen 0 monoton fallend.

Aus der klassischen Methode erhält man folgendes Ergebnis:

Für einen langfristigen Zeithorizont ist das maximale zu erwartende Vermögen:

$$x \exp((r + \hat{\varepsilon} \|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|)T) \quad \text{und} \quad \hat{\varepsilon} \longrightarrow 0$$

$$\text{Es gilt: } \pi^* = \pi_{\hat{\varepsilon}} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1}).$$

Das bedeutet, dass der Anteil an Aktien bei der Markowitz-Methode, d.h. Risiko-Optimierung bezüglich der Varianz, langfristig gegen Null geht. Folglich erzielt man auch langfristig nur die Rendite eines Bonds. Im Gegensatz dazu steigt ε^* bei der neuen Methode, d.h. Risiko-Optimierung bzgl. des Value-at-Risk, damit auch der Anteil an Aktien innerhalb eines langfristigen Zeitraums. Da der Erwartungswert des Vermögens bei der neuen Methode größer ist, erklärt dies die allgemein akzeptierte Tatsache, dass man mit Aktieninvestments langfristig die bessere Rendite erzielt.

4.7 Der optimale Nutzen aus dem Endvermögen mit beschränktem Value-at-Risk

Die Abschnitte 4.4 und 4.5 sind die Motivation für diesen Abschnitt, wo das gleiche Problem wie in 4.4 und 4.5 untersucht wird. Hier ist aber die betrachtete Zielfunktion nun $E[U_\gamma(X(T))]$ und es liegt der Spezialfall $U_\gamma(x) = x^\gamma$ vor.

Definition 4.5 ⁵²

Eine Funktion $U:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Nutzenfunktion (Utility function), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- 1) $U \in C^1$, U strikt konkav
- 2) $U'(0) := \lim_{c \rightarrow 0} U'(c) > 0$, wobei $\lim_{c \rightarrow +\infty} U'(c) = +\infty$ zugelassen sei
- 3) $\exists z \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit $U'(z) = 0$

Sei U eine Nutzenfunktion und $\gamma \in]0, 1[$.

$$\hat{P}_{1,\gamma} \quad \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(U(X^\pi(T))) & \hat{P}_{1,1,\gamma} \\ VaR(x, \pi, T, \gamma) \leq C & \hat{P}_{1,2,\gamma} \end{cases}$$

Wir betrachten das Problem $\hat{P}_{1,\gamma}$, $U(x) := x^\gamma$ wie folgt:

Satz 4.5 ⁵³

Sei $dX^\pi(t) = X^\pi(t)[\{(1 - \pi' \underline{1})r + \pi' b\}dt + \pi' \sigma dW(t)]$, $t \in [0, T]$ und $X^\pi(0) = x$.

- a) $X^\pi(t)^\gamma = x^\gamma \exp[\gamma(\pi'(b - r \underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2})t + \gamma \pi' \sigma W(t)]$
- b) $E(X^\pi(T)^\gamma) = x^\gamma \exp(\gamma(\pi'(b - r \underline{1}) + r)T) - \gamma(1 - \gamma) \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2} T$
- c) $Var(X^\pi(T)^\gamma) = x^{2\gamma} \exp[2\gamma(\pi'(b - r \underline{1}) + r)T][\exp(2\gamma - 1)\gamma \|\pi' \sigma\|^2 T] - \exp(\gamma - 1)\gamma \|\pi' \sigma\|^2 T]$

Satz 4.6 ⁵⁴

Sei $C \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in]0, 1[$ mit $0 < C < x \exp(\gamma r T)$.

Es existiere $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ so dass $b_i \neq r$ gilt.

Dann ist $\pi^* = \frac{\hat{\epsilon}^*}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1})$ die Lösung für $\hat{P}_{1,\gamma}$ wobei

⁵²Korn R.: Optimierungsprobleme bei wertpapierhandel in stetiger Zeit. Doktorarbeit, Johannes Gutenberg Universität Mainz, 1992.

⁵³Vgl. Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

⁵⁴vgl. Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

$$\hat{\varepsilon}_* = \frac{\|\theta\|}{1-\gamma}, \text{ falls}$$

$$0 < \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \leq (\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}) + \sqrt{(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}})^2 - 2 \frac{c(\gamma)}{T}} \text{ gilt.}$$

$$\hat{\varepsilon}_* = (\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}) + \sqrt{(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}})^2 - 2 \frac{c(\gamma)}{T}}$$

$$\text{falls } 0 < \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \geq (\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}) + \sqrt{(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}})^2 - 2 \frac{c(\gamma)}{T}} \text{ gilt.}$$

$$\theta = \sigma^{-1}(b - r \underline{1}) \quad \text{und} \quad c(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \ln(1 - \frac{C}{x^\gamma} \exp(-\gamma r T))$$

und das maximale erwartete Vermögen unter der Beschränkung von VaR ist durch

$$E(X^{\pi^*}(T)^\gamma) = x^\gamma \exp(\gamma(r + \hat{\varepsilon}_* \|\sigma'^{-1}(b - r \underline{1})\|)T - \gamma(1 - \gamma) \frac{\hat{\varepsilon}_*^2}{2} T)$$

gegeben.

Beweis:

Wir lösen das Problem zunächst auf der Menge $H_\varepsilon := \{\pi \in \mathbb{R}^d \mid \|\pi' \sigma\| = \varepsilon\}$

Wir betrachten nun also das Problem:

$$\hat{P}_{1,\gamma} \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} (\pi'(b - r \underline{1}) + r)T - (1 - \gamma) \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2} T & \hat{P}_{1,1,\gamma} \\ \|\pi' \sigma\| = \varepsilon & \hat{P}_{1,2,\gamma} \\ VaR(x, \pi, T, \gamma) \leq C & \hat{P}_{1,3,\gamma} \end{cases}$$

$$VaR(x, \pi, T, \gamma) = x^\gamma (\exp(\gamma r T) - \exp(\gamma(\pi'(b - r \underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2}) T + \gamma z_\alpha \|\pi' \sigma\| \sqrt{T}))$$

$$\hat{P}_{1,3,\gamma} \iff x^\gamma (\exp(\gamma r T) - \exp(\gamma(\pi'(b - r \underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2}) T + \gamma z_\alpha \|\pi' \sigma\| \sqrt{T})) \leq C$$

$$\hat{P}_{1,3,\gamma} \iff \ln(1 - \frac{C}{x^\gamma} e^{-\gamma r T}) \leq \gamma[(\pi'(b - r \underline{1})T + \varepsilon z_{E(\alpha)} \sqrt{T} - \frac{\varepsilon^2 T}{2})]$$

$$\hat{P}_{1,3,\gamma} \iff \pi'(b - r \underline{1})T \geq c(\gamma) + \frac{\varepsilon^2 T}{2} - \varepsilon z_\alpha \sqrt{T} \quad \text{mit} \quad c(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \ln(1 - \frac{C}{x^\gamma} e^{-\gamma r T})$$

$$\hat{P}_{1,\gamma} \iff \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} (\pi'(b - r \underline{1}) + r)T - (1 - \gamma) \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2} T & \hat{P}_{1,1,\gamma} \\ \|\pi' \sigma\| - \varepsilon = 0 & \hat{P}_{1,2,\gamma} \\ \pi'(b - r \underline{1})T - c(\gamma) - \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon z_\alpha \sqrt{T} \geq 0 & \hat{P}_{1,3,\gamma} \end{cases}$$

Setze $f(\pi) = [(\pi'(b - r \underline{1}) + r)T - (1 - \gamma) \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2} T]$ und betrachte die Lagrange-Funktion L mit

$$L(\pi, \lambda) = f(\pi) + \lambda(\|\pi' \sigma\|^2 - \varepsilon^2)$$

$$\nabla L(\pi, \lambda) = \nabla f(\pi) + \lambda \nabla \|\pi' \sigma\|^2$$

$$(III) \quad \nabla L(\pi, \lambda) = 0$$

$$(III) \iff (b - r \underline{1})'T - T(1 - \gamma) \pi' \sigma \sigma' + 2\lambda \pi' \sigma \sigma' = 0$$

$$(III) \iff \beta(b - r \underline{1}) = \sigma \sigma' \pi, \quad \beta = \frac{T}{(1 - \gamma)T - 2\lambda}$$

$$(III) \iff \pi = \beta(\sigma \sigma')^{-1}(b - r \underline{1})$$

$$\pi = \beta \sigma'^{-1} \sigma^{-1}(b - r \underline{1})$$

$$\sigma' \pi = \beta \sigma^{-1}(b - r \underline{1})$$

$$\|\pi' \sigma\| = |\beta| \|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|$$

$$|\beta| = \frac{\varepsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} \quad \text{oder} \quad \beta = -\frac{\varepsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|}$$

$$\pi_{1,\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1}(b - r \underline{1}) \quad \pi_{2,\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1}(b - r \underline{1})$$

$$\|\pi' \sigma\| = \varepsilon$$

Lösen wir jetzt das Problem mit $\|\pi' \sigma\| = \varepsilon$.

Dann hat die optimale Lösung für $\hat{P}_{1,1,\gamma}$ und $\hat{P}_{1,2,\gamma}$ die Form

$$\pi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1}(b - r \underline{1}).$$

$$\begin{aligned}
 \pi_\epsilon'(b - r \underline{1})T &= \frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (b - r \underline{1})' \sigma'^{-1} \sigma^{-1} (b - r \underline{1}) T \\
 &= \frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma^{-1}(b - r \underline{1}))' \sigma^{-1} (b - r \underline{1}) \\
 &= \epsilon T \frac{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|^2}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} \\
 &= \epsilon T \|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\| \\
 &= \epsilon \|\theta\| T \quad \theta = \sigma^{-1}(b - r \underline{1})
 \end{aligned}$$

$$\hat{P}_{1,\gamma} \iff \begin{cases} \max_{\epsilon \geq 0} f(\epsilon) = \gamma \|\theta\| T \epsilon - \frac{\gamma(1-\gamma)T}{2} \epsilon^2 \\ \frac{T}{2} \epsilon^2 - (\|\theta\| T + z_\alpha \sqrt{T}) \epsilon + c \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(\epsilon) = 0 \iff \epsilon = \epsilon_* = \frac{\|\theta\|}{1-\gamma}$$

$$\frac{T}{2} \epsilon^2 - (\|\theta\| T + z_\alpha \sqrt{T}) \epsilon + c \leq 0 \iff \epsilon \in [0, \epsilon^*] \text{ und}$$

$$\epsilon^* = \left(\frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} + \|\theta\| \right) + \sqrt{\left(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} \right)^2 - 2 \frac{c(\gamma)}{T}}$$

Sei $\hat{\epsilon}_*$ die optimale Lösung.

Falls $\epsilon_* = \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \in [0, \epsilon^*]$, dann gilt $\hat{\epsilon}_* = \epsilon_*$.

ansonsten $\hat{\epsilon}_* = \epsilon^*$

Die optimale Lösung für $\hat{P}_{1,\gamma}$ ist dann

$$\pi^* = \frac{\epsilon^*}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1}).$$

$$E(X^{\pi^*}(T)^\gamma) = x^\gamma \exp(\gamma(r + \hat{\epsilon}_* \|\sigma'^{-1}(b - r \underline{1})\|)T - \gamma(1-\gamma) \frac{\hat{\epsilon}_*^2}{2} T)$$

□

4.8 Optimierung des Nutzens aus dem Endvermögen mit beschränkter Varianz

Sei $\gamma \in]0, 1[$ und betrachten wir das Problem $\hat{P}_{2,\gamma}$:

$$\hat{P}_{2,\gamma} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(X^\pi(T)^\gamma) & \hat{P}_{2,1,\gamma} \\ \text{Var}(x, \pi, T, \gamma) \leq C & \hat{P}_{2,3,\gamma} \end{array} \right.$$

Satz 4.7

Seien $\pi \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in]0, 1[$ und $t \in [0, T]$

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t)[\{(1 - \pi' \underline{1})r + \pi' b\}dt + \pi' \sigma dW(t)], \quad t \in [0, T] \quad \text{und} \quad X^\pi(0) = x.$$

Die Lösung für $\hat{P}_{2,\gamma}$ ist dann gegeben durch

$$\pi^* = \frac{\hat{\varepsilon}}{\|\sigma^{-1}(b - r \underline{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r \underline{1}), \quad \|\pi' \sigma\| = \varepsilon, \quad \theta = \sigma^{-1} (b - r \underline{1})$$

$$E(X^\pi(T)^\gamma) := f(\varepsilon) = \gamma \|\theta\| T \varepsilon - \frac{\gamma(1-\gamma)T}{2} \varepsilon^2$$

Falls $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, gilt

Seien ε_1 und ε_2 die Lösungen der Gleichung $h(\varepsilon) = \|\theta\| T \varepsilon$

$$h(\varepsilon) : - = \frac{1}{2\gamma} \ln \left(\frac{x^{2\gamma} [\exp((2\gamma-1)\gamma\varepsilon^2 T) - \exp((\gamma-1)\gamma\varepsilon^2 T)]}{C} \right) - r T$$

Wenn $\varepsilon_* := \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \notin]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$, dann ist $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_*$.

Ansonsten gelten die Aussagen

$$f(\varepsilon_2) \geq f(\varepsilon_1) \implies \hat{\varepsilon} = \varepsilon_2,$$

$$f(\varepsilon_1) \geq f(\varepsilon_2) \implies \hat{\varepsilon} = \varepsilon_1.$$

Falls $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, sei $\hat{\varepsilon}$ die Lösung der Gleichung $h(\varepsilon) = \|\theta\| T \varepsilon$

$$\varepsilon_* := \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \in [0, \hat{\varepsilon}] \implies \hat{\varepsilon} = \varepsilon_*$$

$$\varepsilon_* := \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \notin [0, \hat{\varepsilon}] \implies \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} \text{ gegeben.}$$

Beweis:

$$\hat{P}_{2,\gamma} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} (\pi'(b - r \underline{1}) + r)T - (1 - \gamma) \frac{\|\pi' \sigma\|^2 T}{2} & \hat{P}_{2,1,\gamma} \\ \|\pi' \sigma\| = \varepsilon & \hat{P}_{2,2,\gamma} \\ \text{Var}(X^\pi(T)) \leq C & \hat{P}_{2,3,\gamma} \end{array} \right.$$

4.8 Optimierung des Nutzens aus dem Endvermögen mit beschränkter Varianz 61

$$\text{Var}(X^\pi(T)^\gamma) = x^{2\gamma} \exp(2\gamma(\pi'(b - r\underline{1}) + r)T) [\exp((2\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T) - (\exp((\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T))]$$

$$\hat{P}_{2,3,\gamma} \iff x^{2\gamma} \exp(2\gamma(\pi'(b - r\underline{1}) + r)T) [\exp((2\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T) - \exp((\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T)] \leq C$$

$$\hat{P}_{2,3,\gamma} \iff \pi'(b - r\underline{1})T \leq -\frac{1}{2\gamma} \ln\left(\frac{x^{2\gamma} [\exp((2\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T) - (\exp((\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T))]}{C}\right) - rT$$

$$h(\epsilon) := -\frac{1}{2\gamma} \ln\left(\frac{x^{2\gamma} [\exp((2\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T) - (\exp((\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T))]}{C}\right) - rT$$

$$\text{Setze } m(\epsilon) := \exp[(2\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T] - \exp[(\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T]$$

$$m(\epsilon) = \exp[(\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T] [\exp(\gamma^2 \epsilon^2 T) - 1]$$

$$m(\epsilon) = \exp[(2\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T] - \exp[(\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T]$$

$$m'(\epsilon) = 2\gamma\epsilon T \exp[(\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T] [(2\gamma - 1)\exp(\gamma^2 \epsilon^2 T) + (1 - \gamma)]$$

Falls $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, gilt

$$m'(\epsilon) \geq 0 \iff \exp(\gamma^2 T \epsilon^2) \leq \frac{\gamma - 1}{2\gamma - 1}$$

$$\iff \epsilon \leq \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{T} \ln\left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma - 1}\right)}$$

Es gelten $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(\epsilon) = +\infty$ und $\lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} h(\epsilon) = +\infty$.

Die Gleichung $h(\epsilon) = \|\theta\|T\epsilon$ hat also höchstens zwei Lösungen.

$$h(\epsilon) = \|\theta\|T\epsilon \iff \epsilon = \epsilon_1 \text{ oder } \epsilon = \epsilon_2$$

Falls $\epsilon_* = \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \in]\epsilon_1, \epsilon_2[$, gilt

$$f(\epsilon_2) \geq f(\epsilon_1) \implies \hat{\epsilon} = \epsilon_2,$$

$$f(\epsilon_1) \geq f(\epsilon_2) \implies \hat{\epsilon} = \epsilon_1.$$

Falls $\epsilon_* = \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \notin]\epsilon_1, \epsilon_2[$, gilt

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_*.$$

62.8 Optimierung des Nutzens aus dem Endvermögen mit beschränkter Varianz

Falls $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, gilt

$$m'(\epsilon) = 2\gamma\epsilon T \exp[(\gamma - 1)\gamma\epsilon^2 T][(2\gamma - 1)\exp(\gamma^2 \epsilon^2) + (1 - \gamma)] > 0$$

m ist monoton wachsend. Dann ist h monoton fallend.

Es gelten $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(\epsilon) = +\infty$ und $\lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} h(\epsilon) = -\infty$.

$$h(\epsilon) = \|\theta\|T\epsilon \iff \epsilon = \hat{\epsilon}$$

$$\epsilon_* = \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \in [0, \hat{\epsilon}] \implies \hat{\hat{\epsilon}} = \epsilon_*$$

$$\epsilon_* = \frac{\|\theta\|}{1-\gamma} \notin [0, \hat{\epsilon}] \implies \hat{\hat{\epsilon}} = \hat{\epsilon}$$

Damit ist $E(X^{\pi_{\hat{\epsilon}}}(T))$ das maximale zu erwartende Vermögen mit

$$\pi_{\hat{\epsilon}} = \frac{\hat{\hat{\epsilon}}}{\|\sigma^{-1}(b-r\mathbf{1})\|} (\sigma \sigma')^{-1} (b - r\mathbf{1}).$$

□

4.9 Motivation für das Tail Mean und den Expected Shortfall.

Unser Ziel ist, eine natürliche kohärente Alternative zum Value-at-Risk aufzubauen.

Seien (X_1, X_2, \dots, X_n) Beobachtungen einer Variable X .

Wir ordnen (X_1, X_2, \dots, X_n) zu $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$

$$X_{1:n} \leq X_{2:n}, \dots \leq X_{n:n}$$

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$$

$$VaR^{(\alpha)} = -x^{(\alpha)}$$

Setze $\omega = [n\alpha]$

$(ES_n)^\alpha := -(\text{Mittelwert der kleinsten } (100\alpha) \text{ Prozent Beobachtungen } X_i)$

$$(ES_n)^\alpha = -\frac{\sum_{i=1}^{\omega} X_{i:n}}{\omega}$$

$$(\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_{\omega:n} = x^{(\alpha)}) \text{ und } (\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_{\omega:n} = x^{(\alpha)})$$

Falls $X_{\omega:n}$ gegen $x^{(\alpha)}$ konvergiert, dann konvergiert $(ES_n)^\alpha$ gegen eine Zahl \bar{x}_α .⁵⁵

Definition 4.6

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $E[X^-] < \infty$. Dann ist

$$\bar{x}_\alpha = TM_\alpha(X) = \alpha^{-1}(E[X1_{(X \leq x^{(\alpha)})}] + x^{(\alpha)}(\alpha - P[X \leq x^{(\alpha)}])).$$

$ES_\alpha(X) = -\bar{x}_\alpha$ heißt *Expected Shortfall (ES) zum Niveau α von X* .

Satz 4.8

Sei $\alpha \in]0, 1[$, X eine reelle Zufallsvariable mit $E(X^-) < \infty$ und (X_1, \dots, X_n) unabhängig gleichverteilt wie X und $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\omega:n} = x^{(\alpha)}$, wobei $X_{\omega:n}$ wie oben definiert ist.

Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{[n\alpha]} X_{i:n}}{[n\alpha]} = \bar{x}_\alpha.$$

⁵⁵Acerbi, C.; Tasche, D.: On the coherence of Expected Shortfall, 2002.

Beweis:

Es gilt $\sum_{i=1}^{[n\alpha]} |X_{i:n}| \leq \sum_{i=1}^n |X_i|$

Nach dem starken Gesetz der Großen Zahlen

konvergiert $n^{-1} \sum_{i=1}^n |X_i|$ in L^1 . Daraus folgt $n^{-1} \sum_{i=1}^n |X_i|$ sowie auch $n^{-1} \left| \sum_{i=1}^{[n\alpha]} X_{i:n} \right|$ ist uniform integrierbar. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 (ES_n)^\alpha &= -\frac{\sum_{i=1}^{\omega} X_{i:n}}{\omega} \quad (\omega = [n\alpha]) \\
 &= -\frac{\sum_{i=1}^n X_{i:n} 1_{(i \leq \omega)}}{\omega} \quad (X_{\omega:n} = X_{\omega+1:n} = \dots X_{\omega+k:n}) \\
 &= -\frac{\sum_{i=1}^n X_{i:n} 1_{(X_{i:n} \leq X_{\omega:n})} - \sum_{i=1}^n X_{i:n} (1_{(X_{i:n} \leq X_{\omega:n})} - 1_{(i \leq \omega)})}{\omega} \\
 &= -\frac{X_{1:n} + \dots X_{\omega:n} + X_{\omega+1:n} \dots + X_{\omega+k:n} - (X_{\omega+1:n} \dots X_{\omega+k:n})}{\omega} \\
 &= -\frac{n}{\omega} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i 1_{(X_i \leq X_{\omega:n})} \right) - X_{\omega:n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n 1_{(X_i \leq X_{\omega:n})}}{n} - \frac{\omega}{n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ES_n)^\alpha = -\frac{1}{\alpha} E(X 1_{(X \leq x_{(\alpha)})}) - x_{(\alpha)} (P(X \leq x_{(\alpha)}) - \alpha) \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\omega:n} = x_{(\alpha)}) \quad \square$$

Bemerkung 21

Es gilt $(ES_n)^\alpha(X + Y) \leq (ES_n)^\alpha(X) + (ES_n)^\alpha(Y)$. Daraus folgt, dass ES_α subadditiv ist und damit kohärent.

Satz 4.9

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit F als Verteilungsfunktion von X , $E[X^-] < \infty$ und $\alpha \in]0, 1[$. Dann

$$\bar{x}_\alpha = \alpha^{-1} \int_0^\alpha x_{(u)} du$$

Beweis:

$U \sim U_{]0,1[}$ in (Ω, \mathcal{F}, P) ,

$P(U \leq u) = u, u \in]0, 1[, \quad \Omega =]0, 1[$,

$x_{(\alpha)} = F^{-1}(\alpha)$, wobei F die Verteilungsfunktion von X ist.

$$F^{-1}(U(\omega)) = x_{(U(\omega))} := Z(\omega) \sim X,$$

$u \rightarrow x_{(u)}$ monoton steigend.

Es gelten $\{U \leq \alpha\} \subset \{Z \leq x_{(\alpha)}\}$ und $\{U > \alpha\} \cap \{Z \leq x_{(\alpha)}\} \subset \{Z = x_{(\alpha)}\}$

Sei $\omega \in \{U \leq \alpha\}$,

$$U(\omega) \leq \alpha,$$

$$x_{(U(\omega))} \leq x_{(\alpha)},$$

$$Z(\omega) \leq x_{(\alpha)},$$

$$\omega \in \{Z \leq x_{(\alpha)}\}$$

Sei $\omega \in \{U > \alpha\} \cap \{Z \leq x_{(\alpha)}\}$.

Wenn $Z(\omega) < x_{(\alpha)}$, dann $x_{(U(\omega))} < x_{(\alpha)}$

$$U(\omega) \leq \alpha,$$

$\omega \notin \{U > \alpha\}$ Absurd.

Dann ist $Z \geq x_{(\alpha)}$ und daraus folgt

$$Z = x_{(\alpha)}.$$

$$\{U \leq \alpha\} = \{Z \leq x_{(\alpha)}\} / \{U > \alpha\} \cap \{Z \leq x_{(\alpha)}\}$$

$$\{Z \leq x_{(\alpha)}\} / \{U > \alpha\} \cap \{Z \leq x_{(\alpha)}\} = \{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap (\{U > \alpha\} \cap \{Z \leq x_{(\alpha)}\})^c$$

$$= (Z \leq x_{(\alpha)}) \cap (U \leq \alpha)$$

$$= (U \leq \alpha)$$

$$\begin{aligned} \{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U > \alpha\} &= \{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U \leq \alpha\}^c \\ &= \{Z \leq x_{(\alpha)}\} / \{U \leq \alpha\} \end{aligned}$$

$$P(\{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U > \alpha\}) = P(\{Z \leq x_{(\alpha)}\}) - \alpha$$

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha x_{(u)} du &= E(Z1_{\{U \leq \alpha\}}) \\ &= E(Z1_{\{Z \leq x_{(\alpha)}\}}) - E(Z1_{\{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U > \alpha\}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z1_{\{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U > \alpha\}}) &= E(Z1_{\{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U > \alpha\} \cap \{Z = x_{(\alpha)}\}}) \\ &= x_{(\alpha)} E(1_{\{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U > \alpha\} \cap \{Z = x_{(\alpha)}\}}) \\ &= x_{(\alpha)} P(\{Z \leq x_{(\alpha)}\} \cap \{U > \alpha\}) \\ &= x_{(\alpha)} (P(\{Z \leq x_{(\alpha)}\}) - \alpha) \end{aligned}$$

□

Definition 4.7

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $E[X^-] < \infty$, dann heißt $TCE^\alpha(X) := -E(X|X \leq x^{(\alpha)})$ Tail Conditional Expectation zum Niveau α von X .

Bemerkung 22

$ES^{(\alpha)} = TCE^{(\alpha)} + (\lambda - 1)(TCE^{(\alpha)} - VaR^{(\alpha)}) = \lambda TCE^{(\alpha)} + (\lambda - 1)VaR^{(\alpha)}$,
wobei $\lambda := \frac{P(X \leq x^\alpha)}{\alpha}$.

Falls die Verteilung von X stetig ist, bekommt man $ES^{(\alpha)} = TCE^{(\alpha)}$.

Ein Schätzer des α -Quantils $x_n^{(\alpha)}$ ist

$$X_{[n\alpha]:n}.$$

Ein Schätzer des Expected Shortfall $ES^{(\alpha)}$ ist

$$ES_n^{(\alpha)} := -\frac{\sum_{i=1}^{[n\alpha]} X_i 1_{(i \leq [n\alpha])}}{[n\alpha]}.$$

Ein Schätzer der Tail conditional expectation $TCE^{(\alpha)}$ ist

$$TCE_n^\alpha := -\frac{\sum_{i=1}^n X_i 1_{(X_i \leq X_{[n\alpha]})}}{\sum_{i=1}^n 1_{(X_i \leq X_{[n\alpha]})}}$$

und entspricht

-(Mittelwert aller Ausgänge $X_i \leq x_n^{(\alpha)}$)

Satz 4.10

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , $\alpha \in]0, 1[$ und

$H_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ mit

$H_\alpha(s) := \alpha E[(X - s)^+] + (1 - \alpha)E[(X - s)^-]$. Damit ist

H_α konvex und stetig mit $\lim_{|s| \rightarrow \infty} H_\alpha(s) = \infty$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} H_\alpha(s) &= \alpha E(X) + \left(\frac{E(X - s)^-}{\alpha} - s \right) \\ &= \alpha E(X) - \alpha \left(\frac{E(X 1_{(X \leq s)})}{\alpha} + s \frac{\alpha - P(X \leq s)}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} H_\alpha(s) &= \alpha E[(X - s)^+] + (1 - \alpha)E[(X - s)^-] \\ &= \alpha E[(X - s)1_{(X \geq s)}] + E[(X - s)^-] - \alpha E[(s - X)1_{(X \leq s)}] \\ &= \alpha E(X) - \alpha s P(X \geq s) + E(X - s)^- - \alpha s P(X \leq s) \\ &= \alpha E(X) + \alpha \left(\frac{E(X - s)^-}{\alpha} - s \right) \\ &= \alpha E(X) + \alpha \left(\frac{E(s - X)1_{(X \leq s)}}{\alpha} - s \right) \\ &= \alpha E(X) - \alpha \left(\frac{EX 1_{(X \leq s)}}{\alpha} + \frac{s\alpha - sP(X \leq s)}{\alpha} \right) \\ &= \alpha E(X) - \alpha \left(\frac{E(X 1_{(X \leq s)})}{\alpha} + s \frac{\alpha - P(X \leq s)}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

□

Korollar 4.1

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , $\alpha \in]0, 1[$, $\inf_{x \in \mathbb{R}} H_\alpha(x) = m$. Dann gilt

$\forall s \in [x_{(\alpha)}, x^{(\alpha)}]$ $H_\alpha(s) = m$ und

$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1}(E(X 1_{(X \leq s)}) + s(\alpha - P(X \leq s)))$, $s \in [x_{(\alpha)}, x^{(\alpha)}]$.

Beweis:

$$\left(\frac{E(X - s)^-}{\alpha} - s \right) = \left(\frac{E(X 1_{(X \leq s)})}{\alpha} + s \frac{\alpha - P(X \leq s)}{\alpha} \right)$$

Behauptung 1

$\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_{(\alpha)} \leq s_1 < s_2 \leq x^{(\alpha)}$ gilt $H_\alpha(s_1) = H_\alpha(s_2)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\alpha(H_\alpha(s_2) - H_\alpha(s_1)) &= E(X - s_2)^- - E(X - s_1)^- + \alpha(s_1 - s_2) \\
&= \int_{(s_2 \geq X)} (s_2 - X)dP - \int_{(s_1 \geq X)} (s_1 - X)dP + \alpha(s_1 - s_2) \\
&= \int_{(s_1 \geq X)} (s_2 - X)dP + \int_{(s_1 \leq X \leq s_2)} (s_2 - X)dP \\
&\quad - \int_{(s_1 \geq X)} (s_1 - X)dP + \alpha(s_1 - s_2) \\
&= (s_2 - s_1)(F(s_1) - \alpha) + \int_{(s_1 \leq X \leq s_2)} (s_2 - X)dP \\
&= 0 \qquad (P(s_1 \leq X \leq s_2) = 0)
\end{aligned}$$

□

Behauptung 2

$$H_\alpha(x_\alpha) \leq H_\alpha(s)$$

Erster Fall: $s > x^{(\alpha)} \geq x_{(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
\alpha(H_\alpha(s) - H_\alpha(x^\alpha)) &= (s - x^\alpha)(P(X \leq s) - \alpha) + \int_{(x^\alpha \leq X \leq s)} (s - X)dP \\
&\geq (s - x^\alpha)[F(x^\alpha) - \alpha + F(s) - F(x^\alpha) - F(s)] \\
&\geq (s - x^\alpha)[F(s) - \alpha] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Zweiter Fall: $s < x_{(\alpha)} \leq x^{(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
\alpha(H_\alpha(s) - H_\alpha(x^{(\alpha)})) &= E(X - x^\alpha)^- - E(X - s)^- + \alpha(x^{(\alpha)} - s) \\
&= \int_{(s \geq X)} (s - X)dP - \int_{(x_{(\alpha)} \leq X \leq x^{(\alpha)})} (x^{(\alpha)} - X)dP \\
&\quad - \int_{(s \geq X)} (x_{(\alpha)} - X)dP + \alpha(x_{(\alpha)} - s) \\
&= (s - x^{(\alpha)})[P(X \leq s) - \alpha] - \int_{(x_{(\alpha)} \leq X \leq x^{(\alpha)})} (x^\alpha - X)dP \\
&= (s - x^{(\alpha)})[P(X \leq s) - \alpha] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(X) &= -\bar{x}_\alpha \\
&= -\alpha^{-1}(E(X1_{(X \leq s)}) + s(\alpha - P(X \leq s))) \quad \forall s \in [x_{(\alpha)}, x^{(\alpha)}]
\end{aligned}$$

□

5 Alternativen zum Value-at-Risk

5.1 Kohärente Risikomaße

1999 Artzner/Delba/Eber/Heath befürworteten eine Regel für ein konsistentes Riskomaß. Sie bewiesen, dass VaR nicht kohärent ist. Eine Alternative dafür ist die Conditional Tail Expectation (Tail VaR).⁵⁶

Definition 5.1

Eine steigende Funktion $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ heißt *distortion-Funktion*.

In diesem Teil wird angenommen, dass der Verlust durch eine positive Zufallsvariable X modelliert wird ($(X > 0)$ entspricht einem Verlust.)

Definition 5.2

Seien g eine distortion-Funktion, X eine positive Zufallsvariable (Verlust) und ρ ein positives Risikomaß definiert mit $\rho(X) := \int_0^\infty g(P(X > x))dx$.
 ρ ist ein *distortion-Risikomaß*, das das Risiko für die Zufallsvariable X beschreibt.

Für eine Zufallsgröße, die eine finanzielle Position modelliert, kann man ein kohärentes Risikomaß für diese Position mittels einer konkaven distortion Funktion definieren.

Hilfssatz 5.1

Sei $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen,
 V und U^* seien Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P)
mit

$$U_p \in \{0, 1, \dots, p\} \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

$$\omega_0 := P(U_{n+1} = 0),$$

$$S_{V|0}(t) = P(V > t | U_{n+1} = 0), t > 0 \text{ und}$$

$$U^* \sim (U_{n+1} | U_{n+1} > 0), V^* \sim (V | U_{n+1} > 0). \text{ Dann gilt:}$$

$$1) S_{U_{n+1}}(t) = (1 - \omega_0)S_{U^*}(t),$$

$$2) S_V(t) = \omega_0 S_{V|0}(t) + (1 - \omega_0)S_{V^*}(t),$$

$$3) S_{U_{n+1}+V}(t) = \omega_0 S_{V|0}(t) + (1 - \omega_0)S_{U^*+V^*}(t).$$

Beweis:

$$P(V > t | U_{n+1} > 0) = P(V^* > t) \text{ und } P(U^* > t) = P(U_{n+1} > t | U_{n+1} > 0)$$

$$P(U^* > t) = P(U_{n+1} > t | U_{n+1} > 0)$$

$$P(U_{n+1} > t) = (1 - \omega_0)P(U^* > t) \text{ (Da } t > 0)$$

⁵⁶Julia L. Wirth, Mary R. Hardy: Ordering of Risk Measures for Capital Adequacy, 2000.

$$P(V > t) = \omega_0 P(V > t | U_{n+1} = 0) + (1 - \omega_0) P(V > t | U_{n+1} > 0)$$

$$P(U_{n+1} + V > t) = P(U_{n+1} + V > t | U_{n+1} > 0) P(U_{n+1} > 0) +$$

$$P(U_{n+1} + V > t | U_{n+1} = 0) P(U_{n+1} = 0)$$

$$P(U_{n+1} + V > t) = (1 - \omega_0) P(U_{n+1} + V > t | U_{n+1} > 0) +$$

$$\omega_0 P(U_{n+1} + V > t | U_{n+1} = 0)$$

$$P(U_{n+1} + V > t) = (1 - \omega_0) P(U^* + V^* > t) + \omega_0 P(V > t | U_{n+1} = 0)$$

□

Satz 5.1 (Wang, 1996.)

Wenn g eine konkave distortion Funktion ist und $S_X(x) := 1 - F(x) = P(X > x)$, dann ist das distortion Risikomaß

$$\rho_g(X) := \int_0^\infty g(P(X > x)) dx = \int_0^\infty g(S_X(x)) dx \text{ ein kohärentes Risikomaß.}$$

Beweis:

Für eine beliebige diskrete Zufallsvariable $U, U = 0, \dots, n$, und

einer beliebigen Zufallsvariable V zeigen wir mit Induktionsbeweis, dass

$$\rho(U + V) \leq \rho(U) + \rho(V) \text{ für eine beliebige Zufallsvariable } V \text{ gilt}$$

Induktionsanfang:

Für $n = 0, U_0 = 0, \rho(0) = 0$ und für beliebige Zufallsvariable V :

$$\text{gilt } \rho(U_0 + V) = \rho(V) + 0$$

Induktionsannahme:

$$\rho(U_n + V) \leq \rho(U_n) + \rho(V)$$

Induktionsschritt:

$$U_{n+1} = 0, \dots, n + 1$$

Setze $U^* \sim (U_{n+1} | U_{n+1} > 0)$ und $V^* \sim (V | U_{n+1} > 0)$

$$U^* = 1, \dots, n + 1$$

$\rho(U^* + V^*) \leq \rho(U^*) + \rho(V^*)$ (I) für alle ρ_f , wobei f ist eine beliebige konkave steigende distortion Funktion ist.

Seien $x > 0$, und $0 < a < b$. Dann gilt

$$g(b+x) - g(a+x) \leq g(b) - g(a) \text{ (II).}$$

Sei g eine beliebige konkave Funktion, $\rho_g(X) := \int_0^\infty g(P(X > x))dx$.

Wir setzen $x := \omega_0 S_{V|0}(t)$ in (I),

$$b := (1 - \omega_0)S_{U^*+V}(t),$$

$$a := (1 - \omega_0)S_V(t)$$

Die Ungleichung (II) ergibt dann:

$$\begin{aligned} g(S_{U_{n+1}+V}(t)) - g(S_V(t)) - g(S_{U_{n+1}}(t)) &= g(\omega_0 S_{V|0}(t) + (1 - \omega_0)S_{U^*+V}(t)) \\ &\quad - g(\omega_0 S_{V|0}(t) + (1 - \omega_0)S_{V^*}(t)) - g((1 - \omega_0)S_{U^*}(t)) \\ &\leq g((1 - \omega_0)S_{U^*+V}(t)) - g((1 - \omega_0)S_{V^*}(t)) \\ &\quad - g((1 - \omega_0)S_{U^*}(t)) \\ &= g(1 - \omega_0) \left[\frac{g((1 - \omega_0)S_{U^*+V}(t))}{g(1 - \omega_0)} - \frac{g((1 - \omega_0)S_{U^*}(t))}{g(1 - \omega_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g((1 - \omega_0)S_{V^*}(t))}{g(1 - \omega_0)} \right] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

h mit $h(x) := \frac{g((1-\omega_0)x)}{g(1-\omega_0)}$ ist eine steigende konkave distortion Funktion und $g(1-\omega_0) > 0$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$

Nach Integration und (I)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (g(S_{U_{n+1}+V}(t)) - g(S_V(t)) - g(S_{U_{n+1}}(t))) dt &\leq \int_0^\infty (g(1-\omega_0) \left[\frac{g((1-\omega_0)S_{U^*+V}(t))}{g(1-\omega_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g((1-\omega_0)S_{U^*}(t))}{g(1-\omega_0)} - \frac{g((1-\omega_0)S_V(t))}{g(1-\omega_0)} \right]) dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\rho_h(U^* + V) \leq \rho_h(U^*) + \rho_h(V)$$

und endlich $\rho(U_{n+1} + V) \leq \rho(U_{n+1}) + \rho(V)$

Der Beweis bleibt richtig, wenn $U \in \{k, k+1, \dots, k+n\}$, $k \in \mathbb{N}$

oder wenn $U \in \{hk, h(1+k), \dots, h(n+k)\}$, $h \in \mathbb{R}^+$: Jede Zufallsvariable kann durch eine diskrete Zufallsvariable approximiert werden. \square

Bemerkung 23

Liegt der Graph einer distortion-Funktion im Intervall $[0, 1]$ vollständig oberhalb bzw. unterhalb der Geraden der Gleichung $y=x$ gehörigen Graphen, weiß man, dass das zugeordnete distortion Risikomaß einer Zufallsvariable größer bzw. kleiner als ihr Erwartungswert ist.

Satz 5.2

Das distortion-Risikomaß $\rho_g(X) := \int_0^\infty g(P(X > x)) dx$ ist für alle X größer als der Erwartungswert $E(X)$ des Verlusts X , wenn und nur wenn $g(t) \geq t$ $\forall t \in [0, 1]$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \rho_g(X) &= \int_0^\infty g(P(X > x)) dx \\ &\geq \int_0^\infty P(X > x) dx \quad \left(x + \frac{1}{S(x)} \int_x^\infty S(u) du \text{ und } x = 0 \right) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

Sei $t \in [a, b]$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ und $g(t) < t$, $y \in (a, b)$

Wir setzen $X = \begin{cases} 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - y \\ \omega & \text{mit Wahrscheinlichkeit } y \end{cases}$

$$E(X) = y\omega \text{ und } \rho(X) = \omega g(y) < \omega y < E(X). \quad \square$$

Eine Alternative zum Value-at-Risk ist der Tail Conditional Expectation. Dieser interpretiert den als schlechtest mögliche zu erwartenden Verlust.

Und ist definiert als $TCE_X(x_\alpha) := E(X|X > x_\alpha)$.

Die Verteilung einer Zufallsvariablen X ist durch die Tail Conditional Expectation Function TCE_X bestimmt: $TCE_X(x) := E(X|X > x)$.⁵⁷

Satz 5.3

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) .

Man nimmt an, dass eine reelle Zahl a existiert, so dass $X \geq a$.

Wir setzen $S_X(x) := 1 - F_X(x) = P(X > x)$.

Dann gilt

$$S_X(x) = \frac{TCE_X(a) - a}{TCE_X(x) - x} \exp\left(-\int_a^x [TCE_X(v) - v]^{-1} dv\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} TCE_X(x) &= E(X|X > x) \\ &= E(X1_{(X>x)}) \frac{1}{P(X > x)} \\ &= \frac{1}{S(x)} \int_{(X>x)} X dP \\ &= -\frac{1}{S(x)} \int_x^\infty v dS_X(v) \quad (\text{PartialIntegration}) \\ &= x + \frac{1}{S(x)} \int_x^\infty S(u) du \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} xS_X(x) = 0\right) \end{aligned}$$

$$TCE_X(a) - a = \frac{1}{S(a)} \int_a^\infty S(u) du$$

$$S(a)(TCE_X(a) - a) = \int_a^\infty S(u) du$$

⁵⁷Landsman, Z.; Valdez, E.A.: Tail conditional expectation for elliptical, 2002.

$$\frac{1}{u - TCE(u)} = \frac{d}{du} [\ln(\int_u^\infty S(v)dv)]$$

$$\begin{aligned} - \int_a^x (TCE_X(u) - u)^{-1} du &= [B(u)]_a^x \quad B(u) = \ln(\int_u^\infty S(v)dv) \\ &= B(a) - B(x) \\ &= \ln\left[\frac{\int_a^\infty S(v)dv}{\int_x^\infty S(v)dv}\right] \end{aligned}$$

$$\exp(-\int_a^x (TCE_X(u) - u)^{-1} du) = \frac{\int_a^\infty S(v)dv}{\int_x^\infty S(v)dv}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\int_x^\infty S(v)dv}{x - TCE_X(x)} \\ &= \frac{S(a)(TCE_X(a) - a)\exp(-\int_a^x (TCE_X(u) - u)^{-1} du)}{x - TCE_X(x)} \quad S(a) = 1 \end{aligned}$$

□

Sei $\frac{dQ}{dP}$ die Radon-Nikodym-Ableitung von Q bzgl. P und

$$\Theta := \{Q \mid \frac{dQ}{dP} \leq (1 - \alpha)^{-1}\}.$$

Nun betrachten wir den größten erwarteten Wert von X , wenn Q ein Maß in Θ ist:

$$\vartheta_\Theta(X) = \sup\{E_Q(X) \mid Q \in \Theta\}.$$

Satz 5.4

$\vartheta_\Theta(X)$ ist kohärent

Falls F_X stetig ist für $\alpha \in [0, 1]$, haben wir

$$\vartheta_\Theta(X) = E_P(X \mid X > x_\alpha)$$

Beweis: Behauptung 1

Sei Q_0 das Maß mit $\frac{dQ_0}{dP} = (1 - \alpha)^{-1} 1_{(X > x_\alpha)}$,

$Q_0 \in \Theta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E_{Q_0}(X) &= E_P\left(\frac{dQ_0}{dP} X\right) \\ &= E(X \mid X > x_\alpha) \\ &= TCE_X(x_\alpha) \end{aligned}$$

Behauptung 2

$\forall Q \in \Theta$ gilt $E_Q(X) \leq TCE_X(x_\alpha)$

$$\begin{aligned}
E_Q(X) &= \int X dQ \\
&= \int_A X \frac{dQ}{dP} dP + \int_{A^c} X \frac{dQ}{dP} dP \quad A = (X > x_\alpha) \\
&= (1 - \alpha)^{-1} \int_A X dP + \int_A X \left[\frac{dQ}{dP} - (1 - \alpha)^{-1} \right] dP + \int_{A^c} X \frac{dQ}{dP} dP \\
&\leq (1 - \alpha)^{-1} \int_A X dP + \int_A x_\alpha \left[\frac{dQ}{dP} - (1 - \alpha)^{-1} \right] dP + \int_{A^c} x_\alpha \frac{dQ}{dP} dP \\
&\leq (1 - \alpha)^{-1} \int_A X dP + x_\alpha [Q(A) - 1 + Q(A^c)] \\
&= (1 - \alpha)^{-1} \int_A X dP \\
&= E_{Q_0}(X) \\
&= TCE_X(x_\alpha)
\end{aligned}$$

□

5.2 Optimale Portfolios mit dem Expected Shortfall

In diesem Teil möchten wir ein ähnliches Problem wie das Problem von Korn und Klüppelberg lösen.

Der VaR sagt nichts über die Höhe des über ihn hinausgehenden Verlustes aus. Dieser wird vom Expected-Shortfall berücksichtigt.

Hier möchten wir ein zu Kapitel 4 analoges Problem lösen.

In diesem Kapitel ist der Parameter α eine Zufallsvariable von Ω nach $]0, 1[$ (Siehe Definition 2.7).

Wir wählen als Risikomaß die Differenz zwischen dem sicheren Bondinvestment und dem Expected Shortfall und lösen ein Portfolioproblem, bei dem das Risikomaß zu minimieren ist. Die Nebenbedingung $E(X) \geq C$ beschreibt dabei die untere Schranke für das erwartete Endvermögen. Sei y_α ein $E(\alpha)$ -Quantil von $X^\pi(T)$, mit $X^\pi(T) := X$

Unser Problem ist wie folgt zu beschreiben

$$P: \begin{cases} \min_{\pi \in \mathbb{R}^d} (x \exp(rT) - E(X|X \leq y_\alpha)) \\ NB \quad E(X) \geq C \end{cases}$$

wobei $X^\pi(t)$ die Lösung der Gleichung

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t)[\{(1 - \pi' \underline{1})r + \pi' b\}dt + \pi' \sigma dW(t)], \quad t \in [0, T] \text{ und } X^\pi(0) = x \text{ ist.}$$

Um obiges Problem zu lösen müssen wir zunächst den Expected Shortfall im Black-Scholes-Modell betrachten. ⁵⁸

Satz 5.5

Sei $dX^\pi(t) = X^\pi(t)[\{(1 - \pi' \underline{1})r + \pi' b\}dt + \pi' \sigma dW(t)]$, $t \in [0, T]$ und $X^\pi(0) = x$.

Dann ist die Lösung durch

$$X^\pi(t) = x \exp[(\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2})t + \pi' \sigma W(t)] \text{ gegeben und}$$

⁵⁸Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

$$\begin{aligned}
E(X|X \leq y_\alpha) &= \frac{x}{E(\alpha)} \exp[(\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2})T] \int_{(X \leq y_\alpha)} \exp[\|\pi' \sigma\| \sqrt{T} \frac{\pi' \sigma W(T)}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}}] dP \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{E(\alpha)} \exp((\pi'(b - r\underline{1}) + r)T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T} \|\pi' \sigma\|} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \\
&= \frac{x}{E(\alpha)} \exp((\pi'(b - r\underline{1}) + r)T) \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T} \|\pi' \sigma\|)
\end{aligned}$$

wobei $z_{E(\alpha)}$ das $E(\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}
E(X|X \leq y_\alpha) &= \frac{1}{E(\alpha)} \int_{(X \leq y_\alpha)} X dP \\
&= \frac{1}{E(\alpha)} \int_{(X \leq y_\alpha)} x \exp[(\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2})T + \pi' \sigma W(T)] dP \\
&= \frac{x}{E(\alpha)} \exp[(\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{\|\pi' \sigma\|^2}{2})T] \int_{(X \leq y_\alpha)} \exp(\pi' \sigma W(T)) dP
\end{aligned}$$

$$X^\pi(T) \leq y_\alpha \quad (I)$$

$$(I) \iff x \exp[(\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2)T + \pi' \sigma W(T)] \leq y_\alpha$$

$$(I) \iff \pi' \sigma W(T) \leq \ln(\frac{y_\alpha}{x}) - (\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2)T$$

$$(I) \iff \frac{\pi' \sigma W(T)}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} \leq \frac{1}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} [\ln(\frac{y_\alpha}{x}) - (\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{1}{2}\|\pi' \sigma\|^2)T] =: \psi(y_\alpha) = z_{E(\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
\int_{(X \leq y_\alpha)} \exp[\pi' \sigma W(t)] dP &= \int_{(X \leq y_\alpha)} \exp[\|\pi' \sigma\| \sqrt{T} \frac{\pi' \sigma W(T)}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}}] dP \\
&= \int_{(\frac{\pi' \sigma W(T)}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} \leq z_{E(\alpha)})} \exp[\frac{\pi' \sigma W(T)}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} \|\pi' \sigma\| \sqrt{T}] dP \\
&= \int_{(Y \leq z_{E(\alpha)})} \exp[Y \|\pi' \sigma\| \sqrt{T}] dP \quad Y := \frac{\pi' \sigma W(T)}{\|\pi' \sigma\| \sqrt{T}} \sim N(0, 1)
\end{aligned}$$

$$E(X|X \leq y_\alpha) = \frac{x}{E(\alpha)} \exp[(\pi'(b-r\underline{1})+r-\frac{\|\pi'\sigma\|^2}{2})T] \int_{(X \leq y_\alpha)} \exp[\|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \frac{\pi'\sigma W(T)}{\|\pi'\sigma\| \sqrt{T}}] dP$$

$$\begin{aligned} \int_{(Y \leq z_{E(\alpha)})} \exp(Y \|\pi'\sigma\| \sqrt{T}) dP &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)}} \exp(y \|\pi'\sigma\| \sqrt{T}) \exp(-\frac{1}{2}y^2) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{\|\pi'\sigma\|^2 T}{2}) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)}} \exp(-\frac{1}{2}(y - \sqrt{T} \|\pi'\sigma\|)^2) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{\|\pi'\sigma\|^2 T}{2}) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T} \|\pi'\sigma\|} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X|X \leq y_\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{E(\alpha)} \exp((\pi'(b-r\underline{1})+r)T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T} \|\pi'\sigma\|} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \\ &= \frac{x}{E(\alpha)} \exp((\pi'(b-r\underline{1})+r)T) \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T} \|\pi'\sigma\|) \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 5.2

$E(X) \geq C \iff \pi'(b - r\underline{1})T \geq m$ mit $m = \frac{1}{T}(\ln(\frac{C}{x}) - r)$

$$P \iff \begin{cases} \min_{\pi \in \mathbb{R}^d} x \exp(rT) - \frac{x}{E(\alpha)} \exp[(\pi'(b - r\underline{1}) + r - \frac{\|\pi'\sigma\|^2}{2})T] \int_{(X \leq y_\alpha)} \exp[\|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \frac{\pi'\sigma W(T)}{\|\pi'\sigma\| \sqrt{T}}] dP \\ NB \quad \pi'(b - r\underline{1})T \geq m \end{cases}$$

$$P \iff \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} \exp[(\pi'(b - r\underline{1}) - \frac{\|\pi'\sigma\|^2}{2})T] \int_{(X \leq y_\alpha)} \exp[\|\pi'\sigma\| \sqrt{T} \frac{\pi'\sigma W(T)}{\|\pi'\sigma\| \sqrt{T}}] dP \\ NB \quad \pi'(b - r\underline{1})T \geq m \end{cases}$$

$$P \iff \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp((\pi'(b - r\underline{1}))T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\|\pi'\sigma\|} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \\ NB \quad \pi'(b - r\underline{1})T \geq m \end{cases}$$

Zuerst optimieren wir unsere Zielfunktion auf Ellipsoiden der Familie von E mit $E = \{\pi \in \mathbb{R}^d \mid \|\pi'\sigma\| = \epsilon, \epsilon > 0\}$ jeweils für festes ϵ .

Wir betrachten das Problem

$$P1: \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp((\pi'(b - r\underline{1}))T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\|\pi'\sigma\|} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \\ \pi \in E \end{cases}$$

Für festes ϵ

$$P1 \iff \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} \exp((\pi'(b - r\underline{1}))T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \\ \|\pi'\sigma\| = \epsilon \end{cases}$$

$$P1 \iff \begin{cases} \max_{\pi \in \mathbb{R}^d} (\pi'(b - r\underline{1})T) \\ \|\pi'\sigma\|^2 = \epsilon^2 \end{cases}$$

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L(\pi, \lambda) = \pi'(b - r\underline{1})T + \lambda(\|\pi'\sigma\|^2 - \epsilon^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} = (b - r\underline{1})T + 2\lambda\pi'\sigma\sigma' = 0$$

$$\pi = \beta(\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})$$

$$\|\pi' \sigma\| = \epsilon \iff |\beta| = \frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|}$$

$$\pi = \frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|} (\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1}) \quad \text{oder} \quad \pi = -\frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|} (\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})$$

Setze $g(\epsilon) := \exp((\pi'(b - r\underline{1}))T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv$

a) Erster Fall $\pi = \frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|} (\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})$

$$\begin{aligned} \pi'(b - r\underline{1}) &= \frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|} [(\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})]'(b - r\underline{1}) \\ &= \|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\| \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \exp((\pi'(b - r\underline{1}))T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \\ &= \exp(\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\| \epsilon T) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \\ &= \exp(T \|\theta\| \epsilon) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon} \exp(-\frac{1}{2}(v)^2) dv \quad \theta := \sigma^{-1}(b - r\underline{1}) \end{aligned}$$

$$g'(\epsilon) = T \|\theta\| g(\epsilon) - \sqrt{T} \exp(T \|\theta\| \epsilon) e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon)^2}{2}}$$

$$g'(\epsilon) = 0 \iff T \|\theta\| \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon} \exp(-\frac{1}{2}(v)^2) dv = \sqrt{T} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon)^2}{2}}$$

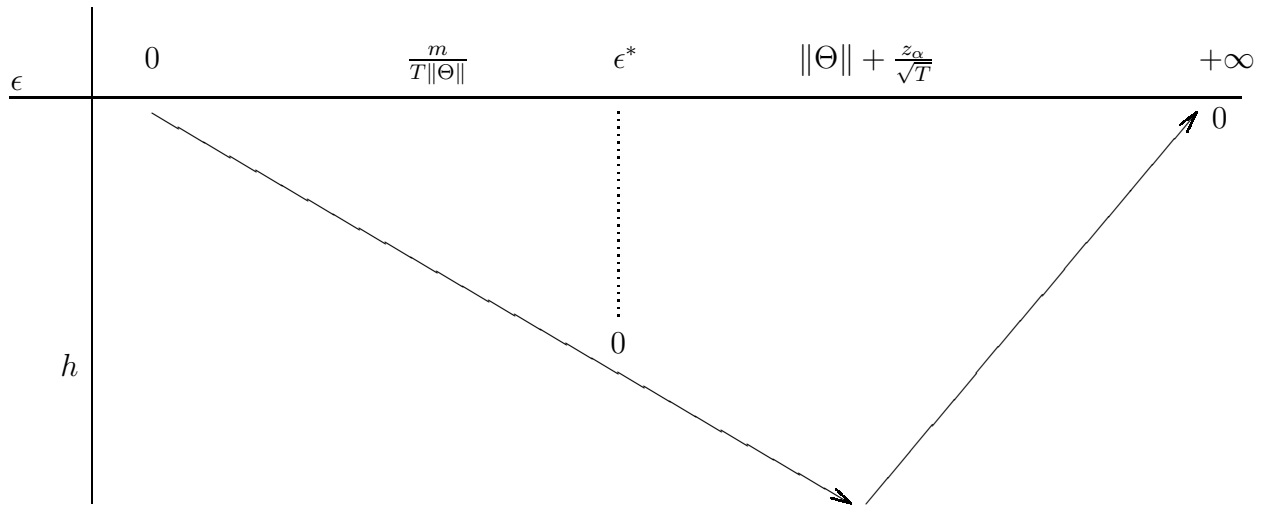
$$g'(\epsilon) = 0 \iff \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon) = \frac{1}{\|\theta\| \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon)^2}{2}} \quad (G)$$

Um die Gleichung (G) zu lösen, suchen wir die Nullstellen der Funktion h, wobei

$$h(x) := \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x) - \frac{1}{\|\theta\| \sqrt{T} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x)^2}{2}} \quad \text{und } x > 0$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-\sqrt{T}) e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x)^2}{2}} - \frac{1}{\|\theta\| \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x)^2}{2}} (z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x) \\ &= -\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi} \|\theta\|} (e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x)^2}{2}}) (\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}} - x) \end{aligned}$$

Wenn $\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}} < 0$, dann hat h keine Nullstellen.



Wenn $\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}} > 0$

$$\text{sei } b(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) dv - \frac{1}{\sqrt{T}\|\theta\|} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

$$h(0) = b(z_{E(\alpha)}) = E(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\theta\|} e^{-\frac{z_{E(\alpha)}^2}{2}}$$

$$h(+\infty) = 0$$

$$h'\left(\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}}\right) = 0$$

$$h\left(\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}}\right) = b(-\sqrt{T}\|\theta\|) \geq 0$$

Die Abbildung 1 verdeutlicht den Verlauf der Funktion h von Seite 82.

h fällt in $[0, \|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}}]$ und steigt in $[\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}}, +\infty[$

$$g''(\epsilon) = \|\theta\| T g'(\epsilon) - \sqrt{T} T e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon)^2}{2}} \exp(T\|\theta\|\epsilon) \left(\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}} - \epsilon \right)$$

Wenn $b(z_{E(\alpha)}) \geq 0$ dann existiert es $\epsilon_* \in [0, \|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}}]$ so dass $h(\epsilon_*) = 0$

$$\epsilon_* \leq \|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}}$$

$$g''(\epsilon_*) = -\sqrt{T} T e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon_*)^2}{2}} \exp(T\|\theta\|\epsilon_*) \left(\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}} - \epsilon_* \right)$$

$$g''(\epsilon_*) < 0$$

ϵ_* ist Maximum für die Funktion g und π^* die Optimal Lösung für unser Problem

$$\text{wobei } h(\epsilon^*) := \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*)^2}{2}} = 0$$

$$\pi^* = \frac{\epsilon^*}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|} (\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})$$

Wenn $b(z_{E(\alpha)}) < 0$ dann hat h keine Nullstelle.

$$\text{b) Zweiter Fall } \pi = -\frac{\epsilon}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|} (\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})$$

$$g(\epsilon) = \exp(-T\|\theta\|\epsilon) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv \quad \theta := \sigma^{-1}(b - r\underline{1})$$

g ist streng monoton fallend

$$g(+\infty) = 0$$

$$g(0) = \sqrt{2\pi}E(\alpha)$$

$$\epsilon^* = 0$$

$$\pi^* = 0$$

Bemerkung 24

$E(X) \geq C \iff \frac{m}{T\|\theta\|} \leq \epsilon^*$ Daraus folgt, das Problem hat eine Lösung, falls

$$\frac{m}{T\|\theta\|} \leq \epsilon^* \text{ gilt.}$$

Zusammenfassung

Sei ϵ^* die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} h(\epsilon^*) &:= \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*)^2}{2}} = 0 \\ &:= \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}} \varphi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) = 0 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\frac{m}{T\|\theta\|} \leq \epsilon^*$, hat das Problem eine Lösung. Aber

falls $\frac{m}{T\|\theta\|} > \epsilon^*$ oder $\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}} < 0$ oder $E(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2\pi T\|\theta\|}} e^{-\frac{z_{E(\alpha)}^2}{2}} < 0$,

hat P keine Lösung.

Falls $\frac{m}{T\|\theta\|} \leq \epsilon^*$, $\|\theta\| + \frac{z_{E(\alpha)}}{\sqrt{T}} > 0$, $E(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2\pi T\|\theta\|}} e^{-\frac{z_{E(\alpha)}^2}{2}} \geq 0$ und

$$\sqrt{2\pi}E(\alpha) \geq \exp(T\|\theta\|\epsilon^*) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv,$$

dann ist die Optimal Lösung $\pi^* = 0$.

Wenn $\sqrt{2\pi}E(\alpha) < \exp(T\|\theta\|\epsilon^*) \int_{-\infty}^{z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv$,

dann ist $\pi^* = \frac{\epsilon^*}{\|\sigma^{-1}(b - r\mathbf{1})\|} (\sigma\sigma')^{-1} (b - r\mathbf{1})$ die optimale Lösung.

Die Nebenbedingung ist äquivalent zu

$$E(X) \geq C \iff \frac{m}{T\|\theta\|} \leq \epsilon^* \iff h\left(\frac{m}{T\|\theta\|}\right) \geq 0$$

5.3 Numerische Approximation der optimalen Lösung mit dem Expected Shortfall

Wir suchen eine numerische Näherung zur Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} h(\epsilon^*) &:= \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*)^2}{2}} = 0 \\ &= \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}} \varphi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) = 0 \quad (G) \end{aligned}$$

Dafür setzen wir $x = \epsilon^*$ und damit nach der Approximation von Hastings ⁵⁹

$$\Phi(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}) \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})^2}{2}} [a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5] \text{ bei}$$

$$t := \frac{1}{1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})}$$

$$\Phi(-(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x)) = 1 - \Phi(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})$$

$$a_1 = 0, 2316419; a_2 = -0, 356563782; a_3 = 1, 781477937; a_4 = -1, 821255978;$$

$$a_5 = 1, 330274429; c = 0, 2316419$$

$$h(\epsilon^*) := \Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*) - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}\epsilon^*)^2}{2}} = 0$$

Die Gleichung (G) ist äquivalent zu

$$\Phi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x) - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}} \varphi(z_{E(\alpha)} - \sqrt{T}x) = 0$$

$$(G) \iff 1 - \Phi(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\theta\|} e^{-\frac{(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})^2}{2}} = 0$$

$$(G) \iff \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})^2}{2}} [a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5] - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})^2}{2}} = 0$$

$$(G) \iff [a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5] - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}} = 0$$

$$(G) \iff t^5 [a_1 \frac{1}{t^4} + a_2 \frac{1}{t^3} + a_3 \frac{1}{t^2} + a_4 \frac{1}{t} + a_5 - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T} t^5}] = 0$$

⁵⁹Hartung, J.: Statistik. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1991.

$$(G) \iff a_1(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^4 + a_2(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^3 + a_3(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^2 + a_4(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})) + a_5 - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}}(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^5 = 0$$

$$P_5(x) := -\frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}}(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^5 + a_1(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^4 + a_2(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^3 + a_3(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^2 + a_4(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})) + a_5$$

Obiges Problem ist äquivalent zum Finden der positiven Nullstelle des Polynoms P_5 .

Als Beispiel seien folgende Parameterwerte gegeben

$$d = 1; \quad r = 0,05; \quad b = 0,15; \quad \sigma = 0,2; \quad \alpha = 0,05;$$

$$\theta := \frac{b-r}{\sigma} = 0,5$$

$$a_1 = 0,2316419; a_2 = -0,356563782; a_3 = 1,781477937; a_4 = -1,821255978;$$

$$a_5 = 1,330274429; c = 0,2316419$$

$$P_5(x) := -\frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}}(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^5 + a_1(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^4 +$$

$$a_2(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^3 + a_3(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)}))^2 + a_4(1 + c(\sqrt{T}x - z_{E(\alpha)})) + a_5$$

Wir zeichnen die Graphen in den Fällen $T=100$, $T=200$, $T=300$ und $T=500$. Die folgenden Graphen zeigen den Verlauf von P_5 bei obiger Parameterwahl, allerdings für mehrere verschiedene T .

Man beobachtet, dass unsere Näherung $\epsilon^*(T)$ der Nullstelle mit T monoton wächst. Also wächst auch das Endvermögen mit der Zeit T .

Bemerkung 25

$$1) P(t) := a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t$$

P ist streng monoton wachsend im Interval $[0, +\infty[$ und die Gleichung

$$G : [a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5] - \frac{1}{\|\theta\|\sqrt{T}} = 0 \text{ hat genau eine Lösung.}$$

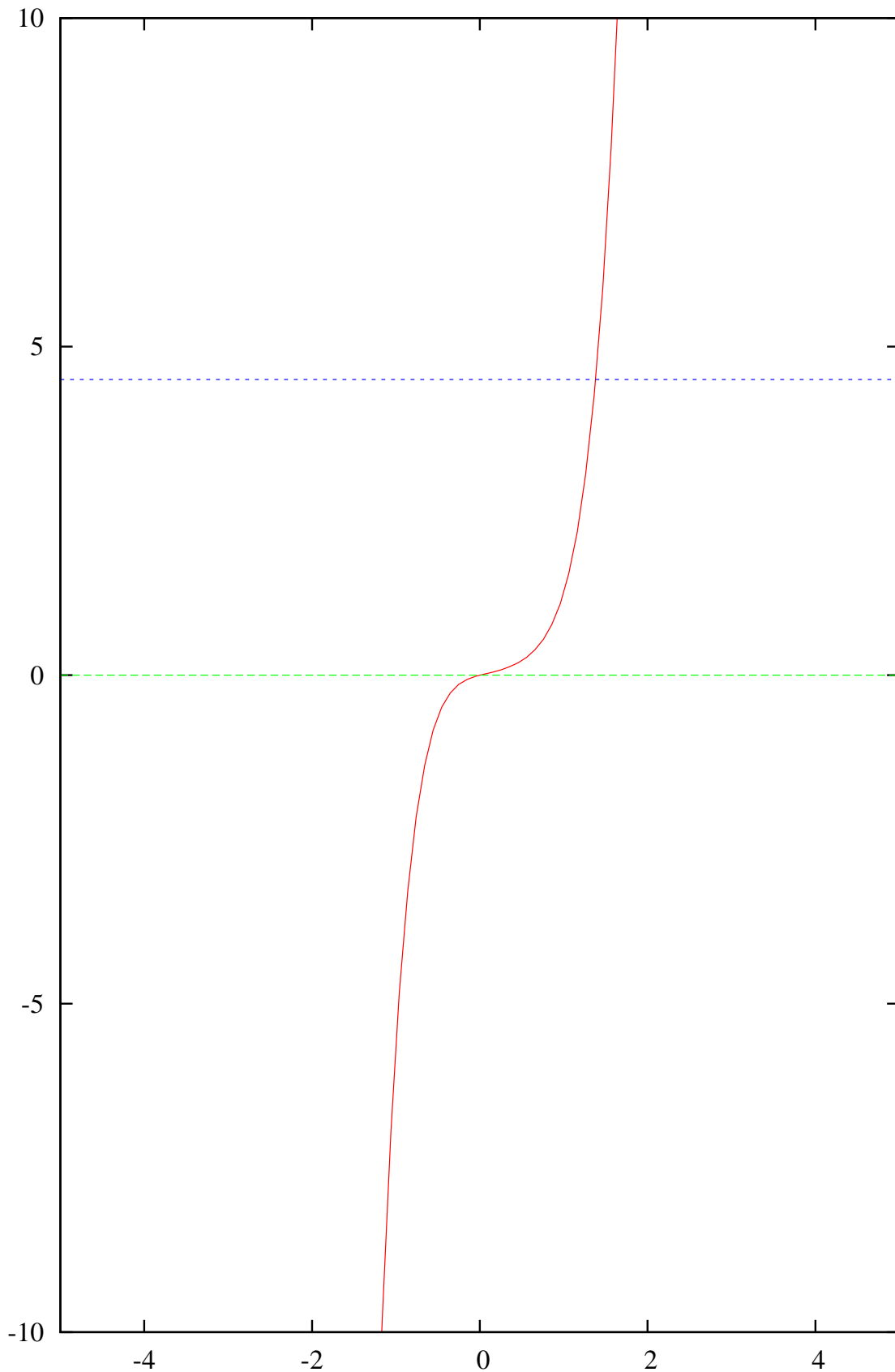


Abbildung 1: Graph des Polynoms $P(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t$ mit $(a_1 = 0, 31938153; a_2 = -0, 356563782; a_3 = 1, 781477937; a_4 = -1, 821255978; a_5 = 1, 330274429; c = 0, 2316419)$ ($t^* = \frac{1}{1+c(\sqrt{T}\epsilon^*-z_{E(\alpha)})}$)

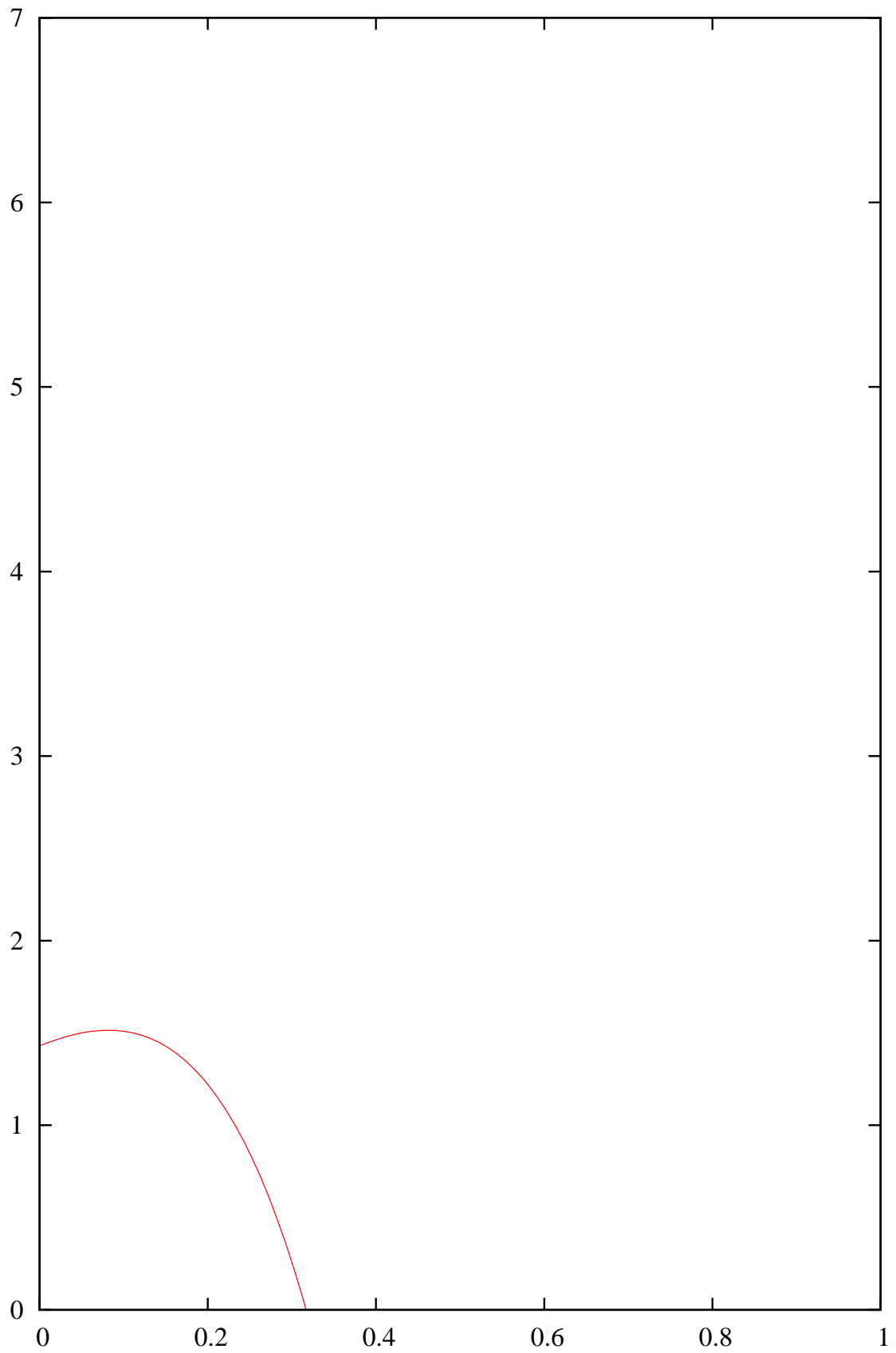


Abbildung 2: Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0$ ($T=100$; $d=1$; $r=0,05$; $b=0,15$; $\sigma = 0,2$; $\alpha = 0,05$)

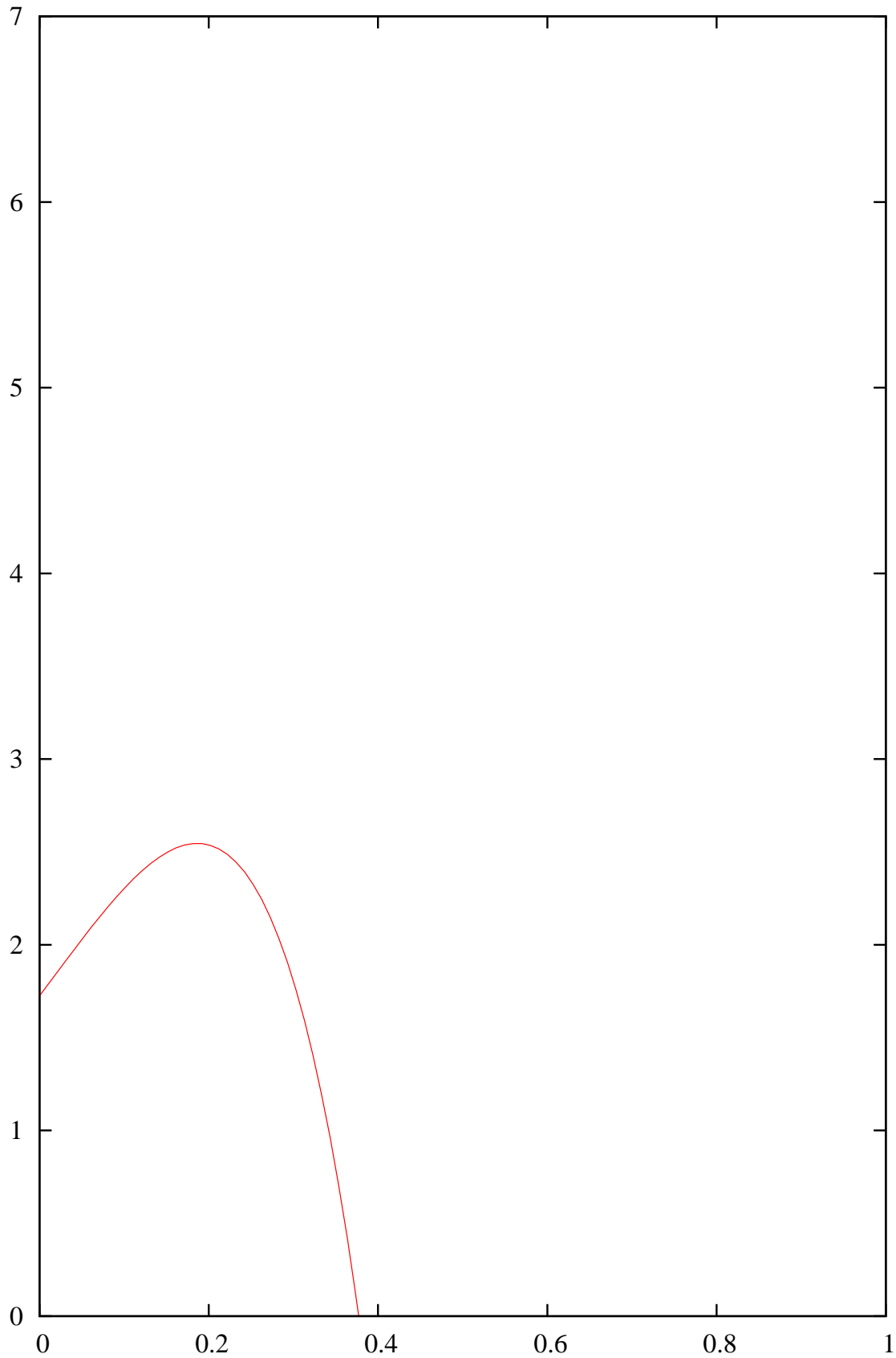


Abbildung 3: Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0$ ($T=200$; $d=1$; $r=0,05$; $b=0,15$; $\sigma = 0,2$; $\alpha = 0,05$)

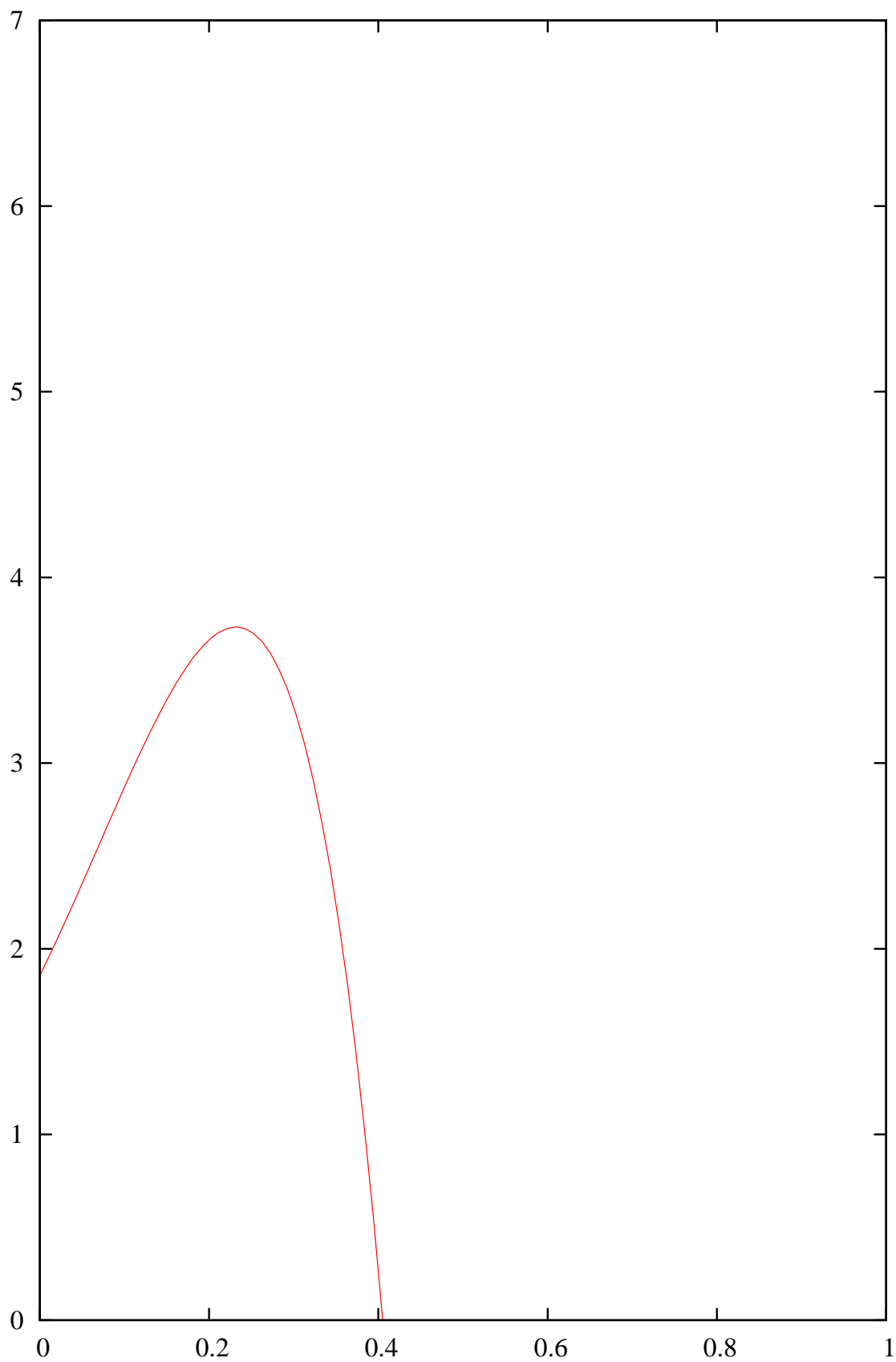


Abbildung 4: Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0, (T=300; d=1; r=0,05; b=0,15; \sigma = 0,2; \alpha = 0,05)$

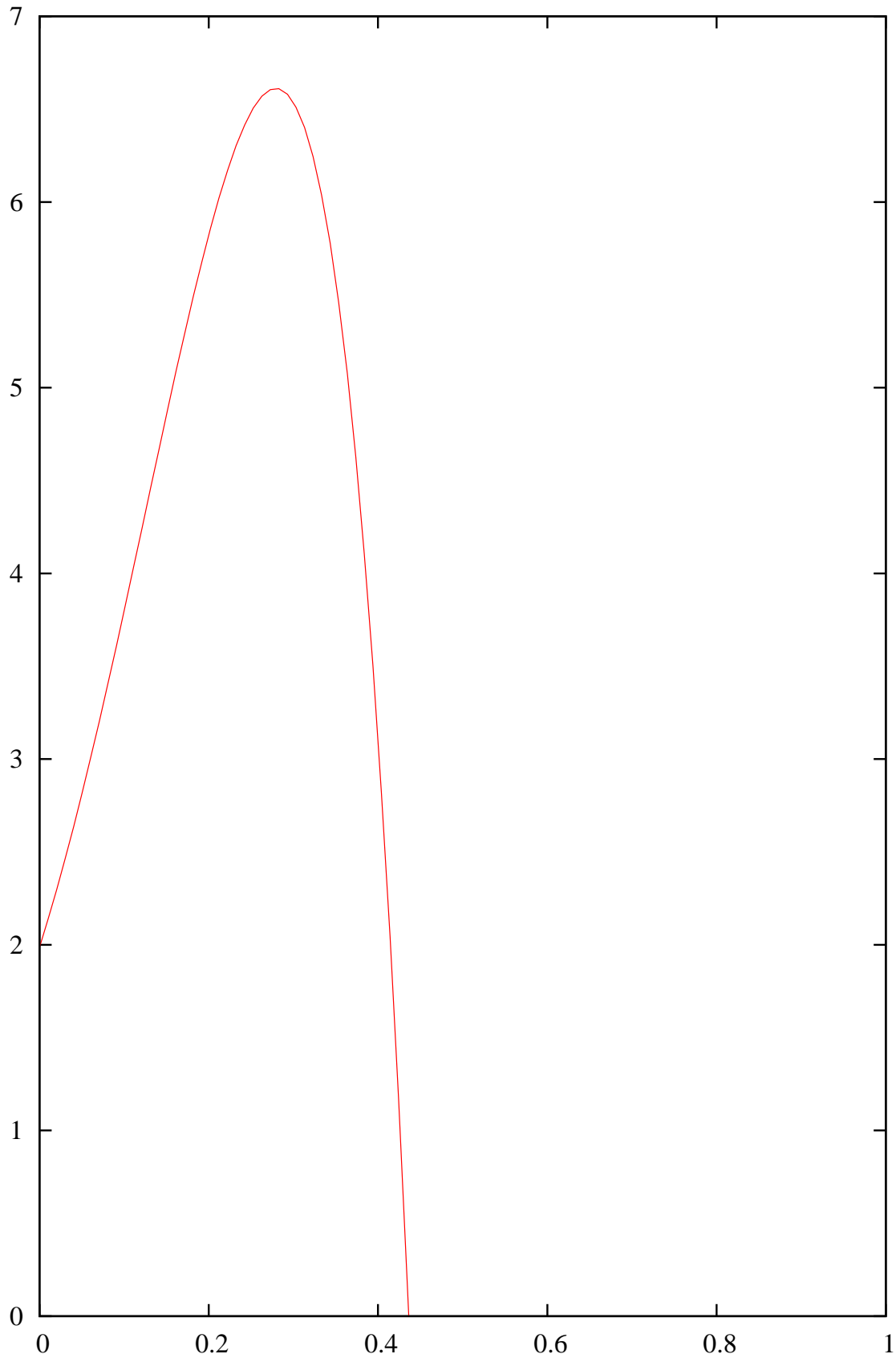


Abbildung 5: Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon^*(T)) = 0$ ($T=500$; $d=1$; $r=0,05$; $b=0,15$; $\sigma = 0,2$; $\alpha = 0,05$)

5.4 Vergleich der Methoden Optimal Portfolios mit dem Expected Shortfall und Value-at-Risk

Sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, α ist konstant und $E(\alpha) = \alpha$.

Bei der Methode der Optimal Portfolios mit dem Expected Shortfall erfüllt die optimale Lösung ε_2^* die Ungleichung

$$\frac{m}{T\|\theta\|} \leq \varepsilon_2^* \leq \|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}$$

Bei der Methode Optimal Portfolios mit Value-at-Risk lautet die optimale Lösung ε_1^*

$$\varepsilon_1^* = \left(\frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} + \|\theta\|\right) + \sqrt{\left(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right)^2 - 2\frac{c}{T}} \quad ^{60}$$

Eine Abschätzung nach oben für die Differenz $\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 \leq \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^* &\leq \left| \varepsilon_1^* - \|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} \right| + \left| \varepsilon_2^* - \left(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right) \right| \\ &\leq \sqrt{\left(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right)^2 - 2\frac{c}{T}} + \left| \frac{m}{T\|\theta\|} - \left(\|\theta\| + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right) \right| \quad z_\alpha < 0 \end{aligned}$$

und es gilt $\varepsilon_1^* \geq \varepsilon_2^*$. Daraus folgt $E(X^{\pi_{\varepsilon_1^*}}) \geq E(X^{\pi_{\varepsilon_2^*}})$.

Das heißt, bei der zweiten Methode (Expected Shortfall) ist die Rendite geringer als bei der ersten Methode, da man bei der zweiten Methode vorsichtiger bei der Auswahl des Risikomaßes ist.

⁶⁰Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, 2001.

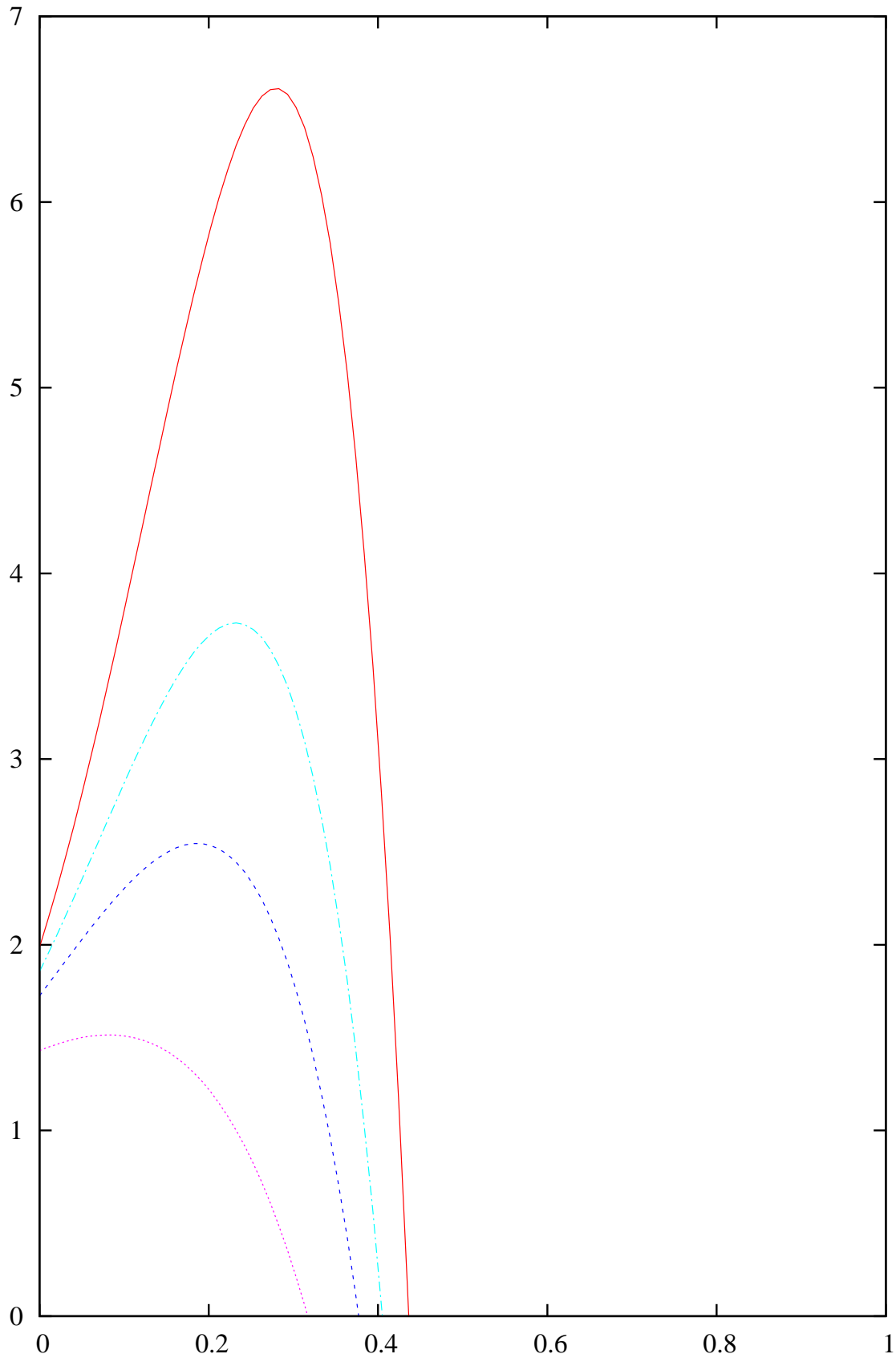


Abbildung 6: Graph des Polynoms P_5 mit $P_5(\epsilon_2^*(T)) = 0$
 ($T=500; T=300; T=200; T=100$, $d=1$; $r=0,05$; $b=0,15$; $\sigma = 0,2$ $\alpha = 0,05$)

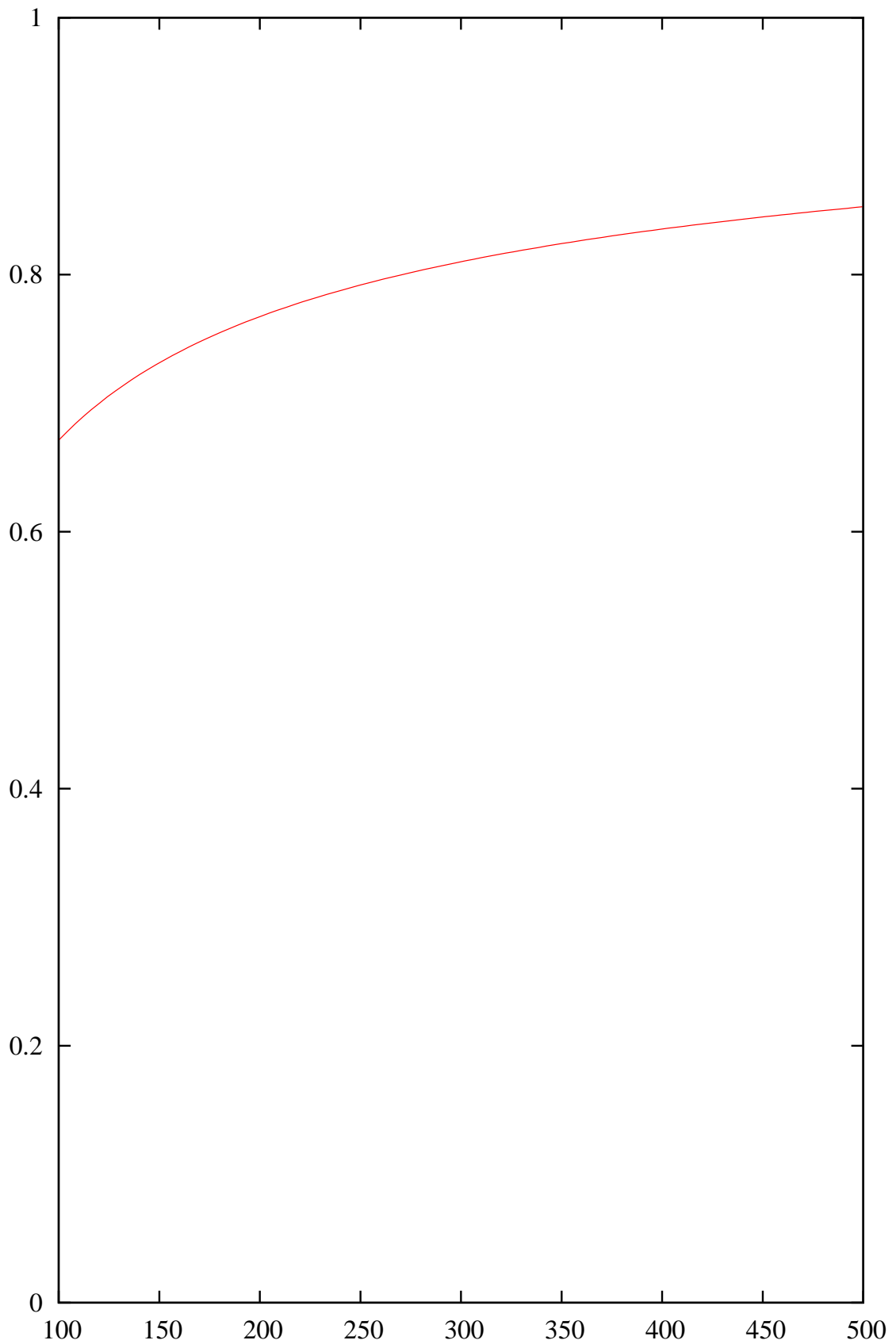


Abbildung 7: $\epsilon^*(T), T \in [100, 500]$ ($C=0.5$; $x=0,5$; $d=1$; $r=0,05$; $b=0,15$; $\sigma = 0,2$ $\alpha = 0,05$)

Abkürzungs-und Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	natürliche Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
$\chi^2(f)$	Chi-Quadratverteilung mit f Freiheitsgraden
\xrightarrow{D}	Schwache Konvergenz
$P \sim Q$	P hat dieselbe Verteilung wie Q
$N(0, 1)$	Standardnormalverteilung
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$t(f, \delta)$	eine nicht zentrale t-Verteilung mit f Freiheitsgraden und Nicht-zentralitätsparameter δ
$t_\beta(f, \delta)$	β -Quantil von $t(f, \delta)$
v'	Transponierte des Vektors v
$x \approx y$	x ist ungefähr gleich y
\longrightarrow	konvergiert gegen
VaR	Value-at-Risk
$Var(X)$	Varianz der Zufallsvariable X
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariable X
$\chi_{n,\alpha}^2$	α -Quantil der χ^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden
z_α	α -Quantil der Standardnormalverteilung
Γ	Gamma Funktion mit $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$
$(X Y)$	Die Zufallsvariable X bedingt auf Y
$(X A)$	Die Zufallsvariable X bedingt auf A
GPD	Generalized Pareto Distribution
GEV	Generalized Extreme Value Distribution
bzw.	beziehungsweise
i.i.d	independent and identically distributed
bzgl.	bezüglich
$Im(z)$	Imaginärteil von z in \mathbb{C}
Sup	Supremum
max	maximiere
min	minimiere
NB	unter der Nebenbedingung
vgl.	vergleiche
$\sigma(*)$	von $*$ erzeugte σ -Algebra oder Filtration
U_A	uniforme Verteilung auf A
$\frac{dQ}{dP}$	Radon-Nikodym-Ableitung
1_A	Indikatorfunktion der Menge A
L^p	Lebesgue'sche Räume p -fach integrierbarer Funktionen
X^-	$\max\{-X, 0\}$
MDA	Maximum Domain of Attraction

TCE	Tail Conditional Expectation
ES	Expected Shortfall
PWM	Probability Weighted Moments
ML	Maximum Likelihood
∇f	Gradient von f
SC	Schiefkoeffizient
KC	Kurtosiskoeffizient
EKC	Exceß-Kurtosiskoeffizient
Skew	Skewness
Kurt	Kurtosis

Literatur

- [1] Föllmer, H.; Schied, A.: Stochastic Finance Walter de Gruyter Berlin. New York, 2002.
- [2] Emmer, S.; Klüppelberg, C.; Trüstedt, M.: VaR ein Maß für das extreme Risiko. 1998.
- [3] Huschens, S.: Confidence Intervals for the Value-at-Risk. Technische Universität Dresden, 1997.
- [4] Jorion, P.: Value-at-Risk. the new Benchmark for Controlling Market Risk, Professional Publishing Chicago, London, Singapore, 1997. 85-89, 186-190, 191-192
- [5] Karatzas, I.; Shreve, S.E.: Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag New York Inc, 1988. 354-361
- [6] Emmer, S.; Korn, R.; Klüppelberg, C.: Optimal portfolio with bounded capital-at-risk, Universität Kaiserslautern, Deutschland, Mathematical Finance, 11, 365-384
- [7] Korn, R.; Korn, E.: Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung. Friedr. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, Wiesbaden, 1999. 1-8
- [8] www.ccfb.de/cfar/risikomessung/hs.htm
- [9] Lukacs, E.: Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc, 1972. 159-160
- [10] Korn, R.: Optimierungsprobleme bei wertpapierhandel in stetiger Zeit. Doktorarbeit, Johannes Gutenberg Universität Mainz, 1992.
- [11] Rüger, B.: Induktive Statistik. R.Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1996. 171
- [12] Acerbi, C.; Tasche, D.: Expected Shortfall, a natural coherent alternative to Value-at-Risk. 2002.
- [13] Acerbi, C.; Tasche, D.: On the coherence of Expected Shortfall. 2002.
- [14] Read, O.: Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk. Dissertationsschrift Universität Köln, 1998.
- [15] Rank, J.: Value-at-Risk. Vortrag an der Universität Heidelberg, 2003.
- [16] Hartung, J.: Statistik. R.Oldenbourg Verlag München Wien, 1991. 890

-
- [17] J.P.Morgan/Reuters RiskMetrics-Technical Document. New York, 1996.
<http://www.jpmorgan.com/RiskManagement/RiskMetrics/RiskMetrics.html>
- [18] Wirch, J.L.; Hardy, M.R.: Ordering of Risk Measures for Capital Adequacy. Simon Fraser University; University of Waterloo, 2000. 253-256
- [19] Hosking, J.R.M.; Wallis, J.R.: Regional Frequency Analysis. United States of America, 1997. 18-26; 194
- [20] Hosking, J.R.M.; Wallis, J.R.: Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. Technometrics, Vol 29 No 3, 1987.
- [21] Kotz, S.; Nadarajah, S.: Extreme Value Distributions Theory and Applications. Imperial College Press, 2000.
- [22] Hosking, J.R.M.: L-moments Analysis and estimation of distributions of order statistics. Journal of the Royal statistical Society, 1989. Series B, 52, 105-124
- [23] Landsman, Z.; Valdez, E.A.: Tail conditional expectation for elliptical Distributions. University of New south wales, Sydney Australia, 2002.
- [24] Alois L.J; Geyer, S.P.: Aggregationsprobleme im Rahmen des Value-at-Risk. Wien, 1998.
- [25] Hager, P.: Corporate Risk Management-Value at Risk und Cash Flow at Risk. Germany, 2004. 103-121, 128-130, 138-142
- [26] Resnick, S.I.: Extreme values Regular Variation and Point Processes. New York et.al, 1987.
- [27] Pickands, J.: Statistical inference using extreme order statistics. Annals of Statistics, Vol. 3, 1975. 119-131
- [28] Stewart, G.W.: Introduction to Matrix computations. S 318 Academic Press, Inc London (LTD), 1973. 318
- [29] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.-M. Heath, D.: coherent measures of risk, Mathematical Finance. Vol 9, No 3, 1999. 203-228, 209
- [30] Mc Neil, A.J.; Frey, R.: Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series, an Extreme Value Approach. Departement Mathematik zürich, 1998.
- [31] Maciunas Landwehr J.; Matlas, N.C.; Wallis, J.R.: Probability weighted Moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel Parameters and Quantiles. Water resources research, publ. by the American Geophysical union, 1979. 1063-1064

-
- [32] Martins-Filho, C.; Yao, F.: Estimation of value at Risk and expected Shortfall based on nonlinear Models of Return Dynamics and extreme Value Theory. Oregon State University, 2002.
- [33] Kendall Maurice , Stuart Alan: Advanced Theory of Statistics. Vol. 1, Distribution Theory, 5. Aufl., 1973. 220-233
- [34] Lang, S.: Computerinsive Verfahren der Statistik, München, 2004. 20