

Die Entwicklung eines neuen Verfahrens zur Suche nach kosmischen Neutrino-Punktquellen mit dem AMANDA-Neutrino-Teleskop

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
am Fachbereich Physik der
Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz

Till Neunhöffer
geboren in Heidelberg

Mainz 2003

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 2003

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	viii
Einleitung	1
I Die physikalischen Grundlagen	4
1 Neutrinophysik	5
1.1 Das Neutrino im Standardmodell der Teilchenphysik	5
1.2 Die elektroschwache Vereinheitlichung	6
1.3 Die Wechselwirkungen des Neutrinos	11
1.4 Die Propagation und Oszillation des Neutrinos	18
1.5 Das Neutrino als kosmischer Informationsträger	20
2 Astrophysik	23
2.1 Die kosmische Strahlung	23
2.2 Atmosphärische Myonen und Neutrinos	27
2.3 Die Fermi-Beschleunigung	31
2.4 Potenzielle kosmische Quellen hochenergetischer Neutrinos	34
3 Detektorphysik	45
3.1 Das Detektionsprinzip eines Neutrinoteleskopes	45
3.2 Das Verhalten hochenergetischer Myonen in Materie	49
3.3 Das Verhalten von Licht in natürlichen optischen Medien	51
3.4 Parameter zur Beschreibung der Detektorqualität	54
II Das AMANDA-Neutrino teleskop	61
4 Der AMANDA-Detektor und die Kalibrierung	62
4.1 Die Komponenten des AMANDA-Detektors	62
4.2 Das Eis am Südpol	66
4.3 Die Kalibrierung	67
4.4 Die Simulationskette	69

5	Von den Rohdaten zu den Neutrino-Ereignissen	74
5.1	Die verschiedenen Untergrundklassen	75
5.2	Die Spurrekonstruktion: Grundlagen und analytische Algorithmen	76
5.3	Die Spurrekonstruktion mit Maximum-Likelihood-Verfahren	82
5.4	Die Qualitätsvariablen zur Untergrund-Unterdrückung	89
5.5	Die offizielle Selektion der AMANDA-Kollaboration für die Punktquellensuche 2000	93
6	Die Winkelauflösung von AMANDA	99
6.1	Die Schätzung der Auflösung in zwei Winkeln pro Ereignis	100
6.2	Die Güte der Schätzung	105
6.3	Die Auflösung im räumlichen Winkel	115
6.4	Die Eigenschaften der Auflösung als Qualitätsparameter	122
III	Die Suche nach Neutrino-Punktquellen	125
7	Grundsätzliches zur Suche nach Neutrino-Punktquellen	126
7.1	Definition der Signalthypothese	127
7.2	Die prinzipielle Suchstrategie	128
7.3	Statistische Observable und Konfidenzplots	130
7.4	Die Qualität eines Verfahrens zur Punktquellensuche	133
7.5	Das „alte“ Verfahren: die <i>gebintte Suche</i>	134
7.6	Die Notwendigkeit eines neuen Verfahrens	135
8	Die ungebintte Maximum-Likelihood-Methode	137
8.1	Die Punktquellensuche in einer Dimension	138
8.2	Die Observablen der Methode	140
8.3	Die Adaptation der Idee auf das AMANDA-Neutrino-teleskop	143
8.4	Die Schätzer für die Signifikanz des Nachweises und für Fluss und Ort einer Quelle .	150
8.5	Die Konstruktion der Konfidenzplots, die Sensitivität und das Entdeckungspotenzial .	159
8.6	Die Systematik der Methode	164
8.7	Ansätze zur Erweiterung und Verfeinerung der Methode	166
9	Die Punktquellensuche am gesamten Himmel	169
9.1	Ein Konfidenzplot für die Suche am gesamten Nordhimmel	171
9.2	Die Eigenschaften der Signifikanzverteilung am Nordhimmel	174
9.3	Die Suche am gesamten Nordhimmel	176
10	Ergebnisse	179
10.1	Vorbemerkungen zu den Ergebnissen	179
10.2	Die Resultate der Suche an ausgewählten Objekten	181
10.3	Die Resultate der Suche am gesamten Nordhimmel	185
10.4	Diskussion der Resultate	193
	Zusammenfassung und Ausblick	195

IV	Anhänge	198
A	Der Zusammenhang der Energiespektren von Neutrino- und Myonflüssen	199
B	Verwendete Koordinatensysteme	201
	B.1 Detektorkoordinaten	201
	B.2 Deklination und Rektaszension	202
	B.3 Lokale Koordinaten auf der Kugeloberfläche	203
	B.4 Die Hammer-Aithoff-Projektion	204
C	Halbanalytische Faltung der Pandelfunktion	207
D	Die Herleitung der Poisson-gesättigten Amplitude	209
E	Das Konzept und die Methoden der <i>Maximum Likelihood</i>	211
	E.1 Die Grundlagen der Maximum Likelihood	211
	E.2 Parabeldarstellungen	215
	E.3 Analytische Anpassung mit der Methode der kleinsten Quadrate	216
F	Mathematische Eigenschaften der Punktquellen-Likelihood-Funktion	218
	F.1 Definitionen und Begriffe	218
	F.2 Nullstellen und Extrema	219
	F.3 Die ersten und zweiten Ableitungen	220
	F.4 Das schnelle Auffinden des Extremums	220
	F.5 Mathematische Eigenschaften der Funktion zur Beschreibung des Untergrundes	221
G	Die Punktquellensuche am gesamten Himmel	223
	G.1 Der Ausgangspunkt der Betrachtungen	223
	G.2 Eine endliche Zahl an Suchstellen	224
	G.3 Die Suche entlang einer Linie fester Deklination	228
H	Himmelsatlas der Ereignisse	230
	Danksagung	232
	Literaturverzeichnis	235

Abbildungsverzeichnis

1.1	Feynmangraphen der Schwachen Wechselwirkung in niedrigster Ordnung	12
1.2	Veranschaulichung des Wirkungsquerschnittes	13
1.3	Wirkungsquerschnitt der Reaktionen von Neutrinos gegen ihre Energie	14
1.4	Vorhersagen für das Verhalten von Neutrinowechselwirkungen bei hohen Energien .	15
1.5	Veranschaulichung der Helizitätsunterdrückung in Geladenen-Strom-Wechselwirkungen	16
1.6	Energieverteilung auf Lepton und hadronischen Rest in der tief-inelastischen Neutrinostreuung	17
2.1	Spektrum der kosmischen Strahlen	24
2.2	Anteil der Pionen und Kaonen in der Produktion atmosphärischer Myonen	30
2.3	Vorhersagen für die Flüsse atmosphärischer Myonen und Neutrinos	30
2.4	Der Mechanismus der Fermi-Beschleunigung	32
2.5	Schematische Darstellung eines Aktiven Galaktischen Kerns	38
2.6	Die Produktion hochenergetischer Photonen in Aktiven Galaktischen Kernen	39
2.7	Neutrinoflüsse aus Modellvorhersagen	43
3.1	Schematische Darstellung der Neutrinowechselwirkung mit Materie	46
3.2	Die Entstehung des Cherenkovkegels im klassischen Bild	46
3.3	Schematische Darstellung einer μ -Spur mit Cherenkov-Kegel und eines Schauers mit sphärischer Lichtwellenfront	47
3.4	Die Erde als Neutrinofilter	48
3.5	Energieverlust und Reichweite von Myonen in Materie	52
3.6	Anschauliche Interpretation der Neutrino-effektiven Fläche	58
4.1	Schematische Darstellung des AMANDA-Detektors	63
4.2	Streu- und Absorptionskoeffizienten im Südpoleis	66
5.1	Definition der Variablen einer Myonspur	77
5.2	Vergleich der gefalteten mit der zusammengesetzten Pandelfunktion	79
5.3	Verlauf der Loglikelihood-Funktion eines Ereignisses	93
5.4	Wahl der deklinationsabhängigen Schnitte	96
5.5	Zenitwinkelverteilung des Neutrino-Datensatzes	97
5.6	Neutrino-effektive Fläche der „offiziellen“ Selektion	98
6.1	Vereinfachung der Dimension einer Gauß-Verteilung durch numerische Verfahren . .	101

6.2	Veranschaulichung der Effekte krummliniger Koordinaten	103
6.3	Beispiele für Paraboloidanpassung an die Loglikelihood-Funktion	106
6.4	Vergleich der Auflösungschätzer in Daten und Untergrundsimulation	107
6.5	<i>Pull</i> -Verteilung in Zenit und Spur-Azimut	107
6.6	Verschiedene Anpassungen an die <i>Pull</i> -Verteilung	109
6.7	Systematische Abhängigkeit der <i>Pull</i> -Verteilungen von der Energie	111
6.8	Vergleich der Energieverteilung der Myonen vor und nach Qualitätsschnitten	111
6.9	Abstand der Myonspur zur Detektor-Achse	112
6.10	Systematik der <i>Pull</i> -Verteilungen in Zenit und Azimut in der E_ν^{-2} -Simulation	113
6.11	<i>Pull</i> -Verteilung in Zenit und Spur-Azimut auf Stufe 4	113
6.12	<i>Pull</i> -Verteilung in Zenit und Spur-Azimut (mit Teilspuren)	115
6.13	Exzentrizitätskorrektur und Eigenschaften des Schätzers σ_a	117
6.14	Vergleich von σ_a und ϵ zwischen Daten und Simulation auf Stufe 4 der Analyse.	118
6.15	Vergleich der Korrelationen von σ_1 und σ_2 beziehungsweise σ_a und ϵ	119
6.16	Abhängigkeit der Detektorauflösung von der Richtung der Spur	120
6.17	Abhängigkeit der Detektorauflösung von der Myonenergie	121
6.18	Verteilung von L_{dir} und σ_a in Signal und Untergrund.	122
6.19	Vergleich der Signaleffizienz von L_{dir} und σ_a als Qualitätsparameter in Abhängigkeit der Energie	124
6.20	Signaleffizienz gegen Untergrundunterdrückung von L_{dir} und σ_a als Qualitätsparameter	124
7.1	Die Konstruktion von Konfidenzplots	132
8.1	Veranschaulichung der Likelihood als Funktion des Signalanteils	141
8.2	Veranschaulichung negativer Signalanteile s	142
8.3	Anzahl der erwarteten Signalereignisse einer Punktquelle	145
8.4	Deklinationsverteilung des Neutrino Datensatzes mit Anpassung	147
8.5	Likelihood-Funktion gegen den Signalanteil mit und ohne Quelle	151
8.6	Der Schätzer für die Zahl der Signalereignisse	152
8.7	Der Schätzer für die Signifikanz in Anwesenheit einer Quelle	153
8.8	Die Likelihood-Schätzer als Funktionen des Hypothesenortes anhand eines Beispiels	154
8.9	Der Schätzer für die Signifikanz in Abwesenheit einer Quelle	155
8.10	Der Eigenschaften des Signifikanzschätzers gegen δ	156
8.11	Die Genauigkeit der Ortsmessung: ein Beispiel.	157
8.12	Die Genauigkeit der Ortsmessung in Abhängigkeit von Stärke und Ort der Quelle	158
8.13	Der Eigenschaften des Signifikanzschätzers als Funktion des Signalerwartungswertes	159
8.14	Der Konfidenzplot bei einer Deklination von $\delta = 40^\circ$	160
8.15	Die Konfidenzplots bei Deklinationen von $\delta = 20^\circ$ und $\delta = 80^\circ$	160
8.16	Die Sensitivität als Funktion der Deklination	161
8.17	Die Deklinationsabhängigkeit der Sensitivität verstehen	162
8.18	Das Entdeckungspotenzial	163
8.19	Die systematischen Fehler	165
9.1	Verteilung der Observablen $\hat{\zeta}_{\text{max}}$ für zwei Suchstellen	172
9.2	Verteilung der Observablen $\hat{\zeta}_{\text{max}}$ für zwei inkompatible Suchstellen	173

9.3	Die maximale Signifikanz am Himmel	175
10.1	Vergleich der oberen Flussgrenzen auf Kandidatenobjekte	184
10.2	Beispiele für die Resultate der Suche bei Kandidatenobjekten: Ereignisse	186
10.3	Beispiele für die Resultate der Suche bei Kandidatenobjekten: Signifikanzen und obere Grenzen	187
10.4	Die Ereignisse und Signifikanzen am Nordhimmel	188
10.5	Die Punktquellenkandidaten, die höchsten Signifikanzen und die oberen Flussgrenzen	189
10.6	Höchste Signifikanzen am Nordhimmel: Ereignisse	190
10.7	Höchste Signifikanzen am Nordhimmel: Signifikanzen und obere Grenzen	191
10.8	Neutrinoflüsse aus Modellvorhersagen verglichen mit der Sensitivität der Suche	194
B.1	Veranschaulichung verwendeter Koordinatensysteme	206
E.1	Konfidenzellipse einer zweidimensionalen Gauß-Verteilung	215
H.1	Himmelsatlas der Ereignisse des Jahres 2000 mit $35^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$	230
H.2	Himmelsatlas der Ereignisse des Jahres 2000 mit $0^\circ \leq \delta \leq 40^\circ$	231

Einleitung

Wer sich nicht mehr wundern kann,
ist seelisch bereits tot.

(*Albert Einstein*)

In den letzten Jahren haben Astrophysik und Kosmologie es geschafft, ein in weiten Bereichen einheitliches Bild des Universums zu zeichnen. Die sehr geringen Abweichungen des kosmischen Mikrowellenhintergrundes von der Isotropie, die Rotationsbewegungen von Galaxien und die Relation von Abstand zu Bewegungsgeschwindigkeit von Supernovae unterstützen ein Modell, in dem der Raum flach und mit einem großen Anteil *Dunkler Materie* und einem noch größeren Anteil *Dunkler Energie* gefüllt ist.

Damit hat dieser Bereich zur Hochenergiephysik aufgeholt, die schon etwas länger über eine erstaunlich erfolgreiche Theorie verfügt. Das *Standardmodell der Teilchenphysik* kann die meisten Phänomene von Elementarteilchen, die sich in Labors untersuchen lassen, mit hoher Präzision vorhersagen.

In beiden Bereichen gibt es aber noch genügend ungelöste Fragen und Rätsel. Die Hochenergiephysik nennt als zentrale Fragestellungen die Ursache von Masse an sich, die weitere Vereinheitlichung der Teiltheorien des Standardmodells mit dem Ziel der *Weltformel* und ob es weitere Raum-Zeit-Dimensionen zusätzlich zu den offensichtlichen vier gibt.

Astrophysik und Kosmologie stehen insbesondere vor den Rätseln der Herkunft der kosmischen Strahlen höchster Energie, der Ursache der *Gammastrahlenblitze* (Gamma Ray Bursts, GRB) und der Natur der Dunklen Materie und der Dunklen Energie.

Dazu kommen noch viele Nebenschauplätze, die das große Bild unterschiedlich stark beeinflussen. Als Beispiele seien die noch nicht vollständig geklärte Frage nach den Massen der Neutrinos, die Existenz neuer Physik unterhalb der Vereinheitlichungsenergie und die Physik Schwarzer Löcher genannt.

Die Teilchenastrophysik ist als Grenzwissenschaft dort angesiedelt, wo Hochenergie- und Astrophysik einander überlappen. Die Neutrinoastrophysik konzentriert sich auf die Aspekte, die mit den elektrisch neutralen, ausschließlich schwach wechselwirkenden *Neutrinos* zusammenhängen. Dabei geht es zum einen darum, die Eigenschaften der Neutrinos selber aufzuklären, zum anderen darum, die Neutrinos, die aus dem Universum zu uns kommen, als Träger von Informationen über den Kosmos und die Phänomene, die er beherbergt, zu nutzen.

Das Besondere an Neutrinos als Informationsträger ist ihre fast ungestörte Ausbreitung durch das All und auch durch Materie. Während Photonen und geladene Elementarteilchen in Staubwolken

oder anderen Materieansammlungen größtenteils gestoppt werden, können Neutrinos diese fast völlig störungsfrei durchdringen. Auch werden sie, da ungeladen, nicht in den galaktischen und intergalaktischen Magnetfeldern abgelenkt. Sie behalten ihre ursprüngliche Richtungsinformation bei.

Das Antarctic Muon and Neutrino Detection Array AMANDA ist ein Neutrino teleskop, das sich die vorteilhaften Eigenschaften der Neutrinos zu Nutze macht. Tief im Eis der Antarktis eingebettet, weist dieser Detektor Lichtsignale nach, die von sehr energiereichen geladenen Elementarteilchen (vornehmlich Myonen) ausgestrahlt werden. Man kann Ankunftszeit, Flugrichtung und Energie eines Myons bestimmen und so seine geradlinige Flugbahn, die *Spur*, rekonstruieren. Wenn ein Myon aus dem Inneren der Erde zu kommen scheint, dann muss es aus der Vernichtung eines Neutrinos stammen – wenn keine „neue Physik“ im Spiel ist; nur ein Neutrino kann die Erde durchdringen.

Nimmt man viele solche Ereignisse zusammen, kann AMANDA nach verschiedenen Arten von Neutrinoquellen suchen. Weist man insgesamt mehr Neutrinos nach, als in der Erdatmosphäre produziert werden, dann schreibt man den Überschuss einem *diffusen Fluss* an extraterrestrischen Neutrinos zu. Dazu benötigt man nur die Anzahl und eventuell die Energieinformation der Ereignisse. Nimmt man auch die Richtungsinformation hinzu, so kann man Anhäufungen auf der Himmelskarte identifizieren und damit auf *Punktquellen* schließen. Synchronisiert man sich noch mit Beobachtungen der klassischen optischen Astronomie, dann kann man transiente Quellen – mit zeitlich veränderlichem Verhalten – untersuchen, wie zum Beispiel Gamma Ray Bursts (GRB).

Ferner gibt es noch exotischere Dinge, wie magnetische Monopole, topologische Defekte, Dunkle Materie und Supernovae, nach denen man mit AMANDA Ausschau halten kann.

Nicht zuletzt ist AMANDA auch in der Lage, Myonen nachzuweisen, die direkt in der Atmosphäre entstanden sind – ein Umstand, der einerseits den größten Untergrund beisteuert, und andererseits zur Kalibrierung und zum Verständnis des Detektors herangezogen werden kann.

Ziel dieser Arbeit ist die Suche nach Neutrino-Punktquellen mit AMANDA. Aufbauend auf der Standardanalyseprozedur der AMANDA-Kollaboration wird eine neue Methode zur Bestimmung der erwarteten Auflösung für jedes einzelne Ereignis entwickelt. Diese Methode öffnet die Tür zu einer ungerasterten Punktquellensuche mit dem Ansatz der *Maximum Likelihood*, die ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wird. Das Ziel ist die Entdeckung der ersten Punktquelle, oder – falls dies misslingt – die Angabe von verbesserten oberen Grenzen auf die potenziellen Neutrinoflüsse von astronomischen Punktquellen.

Das Resultat soll dazu beitragen, das Rätsel der Herkunft der kosmischen Strahlen zu beleuchten. Die Atmosphäre der Erde ist einem Beschuss von geladenen Teilchen mit einem sehr breiten Energiespektrum ausgesetzt. Aufgrund der Form des Spektrums erwartet man, dass verschiedene Prozesse zur Beschleunigung der Partikel beitragen. Man schreibt den Supernovae innerhalb unserer Milchstraße die nötigen Kräfte zu, um für den Fluss an kosmischer Strahlung unterhalb des *Knies*¹ verantwortlich zu sein. Oberhalb davon steht man noch vor einem Rätsel.

Man hat Photonen sehr hoher Energien (im TeV-Bereich) von weit entfernten Objekten nachgewiesen. Es handelt sich dabei um *Aktive Galaktische Kerne*, leuchtstarke Zentren von Galaxien, in denen man

¹Mit der Bezeichnung *Knie* bezieht man sich auf einen Knick im Verlauf der Energieverteilung bei etwa 10^{15} eV.

supermassereiche Schwarze Löcher vermutet. Senkrecht zu den Akkretionsscheiben um die Schwarzen Löcher bilden sich ausgedehnte Plasmaströme aus, die magnetohydrodynamisch erzeugt und getrieben werden. Bei der Propagation dieser *Jets* durch das Intergalaktische Medium können Teilchen auf hohe Energien beschleunigt werden, wobei Schockwellen entlang der Jets eine zentrale Bedeutung zukommt. Ein Neutrinosignal würde eine hadronische Komponente² in den Plasmaströmen nahe legen. Eine hochenergetische Quelle der kosmischen Strahlung wäre belegt.

In der Geschichte der Naturwissenschaften ist es immer wieder geschehen, dass neue Messinstrumente unerwartete Beobachtungen zur Folge hatten. Gerade in der Astronomie hat jede neue Beobachtungsmethode ein Fenster zu ungeahnten Aspekten des Kosmos eröffnet. Im Falle der Neutrino-teleskope fußt die Hoffnung aber nicht nur auf der historischen Analogie, sondern zusätzlich in der Fähigkeit der Informationsträger, Staubwolken, Magnetfelder und andere Hindernisse im Gegensatz zu Photonen und geladenen Teilchen zu durchdringen. Für die Punktquellensuche motiviert das die Analyse des gesamten Himmels, um auch Objekte zu entdecken, die der herkömmlichen Astronomie entgehen.

Die vorliegende Arbeit ist in drei Teile und einen Anhang untergliedert. Im ersten Teil werden die physikalischen Grundlagen gelegt, die zum Verständnis der Motivation, der Analyse und der Ergebnisse notwendig sind. Im darauf folgenden Teil geht es um das AMANDA-Neutrino-teleskop von den installierten Komponenten bis hin zum Verständnis der aufgezeichneten Daten. Der Winkelauflösung wird dabei besondere Beachtung zu Teil. Die Verfahren der Punktquellensuche sind im dritten Teil thematisiert. Neben der neu entwickelten Methode werden auch die Ergebnisse der Analyse präsentiert. Alle technischen Hintergründe findet man im Anhang. Zu Beginn jeden Kapitels findet man einen ausführlicheren Überblick, in dem – wenn möglich – die zentralen Ideen knapp dargestellt sind.

Die vorliegende Arbeit hat einen relativ ausführlichen allgemeinen Teil, da sie die erste Dissertation über das AMANDA-Projekt am Fachbereich Physik der Universität Mainz darstellt. Neben der Entwicklung eines neuen Verfahrens zur Punktquellensuche und seiner Anwendung werden auch theoretische Fragen bearbeitet. Dabei geht es um grundlegende statistische Probleme im Zusammenhang mit der Suche nach Punktquellen (siehe Kapitel 9).

Über die Mitarbeit beim Aufbau eines neuen Systems zum Supernovanachweis, bei der Koordination der Datenqualitätsüberwachung und bei der Computersicherheit in der Südpolstation wird in dieser Arbeit nicht berichtet.

²Alles, was aus Quarks aufgebaut ist, bezeichnet man als hadronisch – somit auch die kosmische Strahlung, die im Wesentlichen aus geladenen Kernen zusammengesetzt ist.

Teil I

Die physikalischen Grundlagen

1 Neutrinophysik

Wer, wie, was – der, die, das,
wieso, weshalb, warum – wer nicht fragt, bleibt
dumm.

(Die Sesamstraße)

In diesem Kapitel geht es um die grundlegende Frage, was ein Neutrino ist. Die Antwort bleibt die Physik schuldig. Es wird auf die Erkenntnistheorie verwiesen, die sich mit den Dingen per se beschäftigt.

Wir folgen der typischen Vorgehensweise der Physik. Zuerst verschaffen wir uns einen Überblick. Dann betrachten wir die Theorie und diskutieren schließlich die Eigenschaften des Neutrinos.

1.1 Das Neutrino im Standardmodell der Teilchenphysik

Ein Teilchen wird als *Elementarteilchen* bezeichnet, wenn es keine weitere Unterstruktur besitzt. Allen Elementarteilchen ist damit gemein, dass sie als punktförmig angesehen werden. Ihre Unterschiede können sich nur anhand zweier Kriterien bemerkbar machen, zum Einen durch ihre Wechselwirkung mit anderen Elementarteilchen, zum Anderen durch ihr Verhalten als freies Teilchen.

Die systematische Beschreibung dieser Kriterien weist Teilchen mit gleichem Verhalten gleiche Eigenschaften zu. Einen gewissen Sonderstatus nimmt der intrinsische Drehimpuls ein, der *Spin*. Er ist maßgeblich für das Verhalten von Ensembles identischer Teilchen. Man unterscheidet zwischen Bosonen, Teilchen mit ganzzahligem Spin, und Fermionen mit halbzahligem Spin. Erstere folgen der Bose-Einstein- und letztere der Fermistatistik.

Im Standardmodell werden vier Wechselwirkungen (oder Kräfte) diskutiert. Sie werden durch Austauschteilchen vermittelt, die an verschiedene Eigenschaften („Ladungen“) der Elementarteilchen koppeln. Fehlt einem Partikel die entsprechende Eigenschaft, dann nimmt es an der zugehörigen Wechselwirkung nicht teil.

Die elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt elektrische und magnetische Kräfte. Das zugehörige Austauschteilchen ist das Photon. Es koppelt an die elektrische Ladung.

Die Gravitation, die Wechselwirkung zwischen Teilchen mit Masse, ist bisher nicht erfolgreich in das Standardmodell eingebunden. Man erwartet eine Vereinheitlichung mit den anderen Kräften bei der *Planckskala* von 10^{19} GeV. Für eine vereinheitlichte Beschreibung muss aber die Allgemeine Relativitätstheorie mit den Quantenfeldtheorien zusammengeführt werden, was bisher noch nicht gelungen ist.

Die starke Wechselwirkung beschreibt die Kräfte, die innerhalb von Atomkernen maßgeblich sind. Die Kopplungseigenschaften bezeichnet man als *Farben* (engl. *colors*), von denen es drei Sorten gibt. Das Austauscheteilchen, das Gluon, trägt selbst Farbe, es gibt eine Gluon-Gluon Kopplung. Oberhalb einer gewissen Größenskala existieren nur farbneutrale, zusammengesetzte Objekte, in denen die elementaren Bauteile quasi eingeschlossen sind (engl. *confinement*). Die starke Wechselwirkung ist in der Reichweite begrenzt.¹

Die schwache Wechselwirkung ist verantwortlich für alle Reaktionen, bei denen Elementarteilchen ineinander umgewandelt werden, damit insbesondere für die radioaktiven (β -)Prozesse. Dies geschieht in *Geladenen-Strom*-Wechselwirkungen. Vermittelt werden diese durch die geladenen massiven Vektorbosonen W^\pm . Dazu kommen noch die *neutralen Ströme*, bei denen das ungeladene Z^0 -Boson das vermittelnde Teilchen ist.

Die Austauscheteilchen haben ganzzahligen Spin und sind damit Bosonen. Die Konstituenten der Materie sind fermionisch². Man kennt die elektrisch geladenen Leptonen Elektron, Myon und Tau, und ihre ungeladenen Partnerleptonen Elektron-, Myon- und Tauneutrino. Die Leptonen tragen keine Farbe und nehmen daher nicht an der starken Wechselwirkung teil.

Die restlichen Fermionen des Standardmodells bezeichnet man als Quarks. Auch sie lassen sich in drei Generationen oder Familien unterteilen. Es gibt die Paare Up-Down, Charm-Strange und Top-Bottom in Reihenfolge steigender Masse. Die Quarks sind farbige Objekte und treten daher nur in farblosen Komposita von zwei Quarks (Mesonen) oder drei Quarks (Baryonen) auf. Das einzige (freie) stabile Baryon ist das Proton mit einem Down und zwei Up Quarks.

Das Neutrino ist ein ungeladenes und farbloses Elementarteilchen mit Spin $\frac{1}{2}$. Die schwache Wechselwirkung ist die einzige Kraft des Standardmodells, an der das Neutrino teilnimmt. Die zugehörige (*elektroschwache*) Theorie verdient genauere Betrachtung und wird im folgenden Abschnitt (1.2) diskutiert.

An welchen Reaktionen das Neutrino teilnimmt, wie wahrscheinlich sie sind und durch welche Verteilungen sie beschrieben werden, wird im Abschnitt 1.3 dargelegt. Um die Frage, ob und wieviel Masse es hat, gibt es genügend Diskussion, um ihr einen eigenen Abschnitt zu widmen (vgl. 1.4).

Im letzten Abschnitt (1.5) zum Thema Neutrinophysik werden die Konsequenzen für die Neutrinoastronomie aus den vorangegangenen Diskussionen aufgezeigt.

1.2 Die elektroschwache Vereinheitlichung

Die Auseinandersetzung mit der Hochenergiephysik führt zum Konzept der Symmetrie. In der Physik versteht man unter einer Symmetrie, dass Eigenschaften eines Systems erhalten bleiben, wenn man es

¹Im Limes gegen unendlich kleine Abstände verschwindet die Farbwechselwirkung. Man spricht von der asymptotischen Freiheit.

²Diese strikte Unterteilung relativiert sich, wenn man sich vor Augen führt, dass etwa in einem Proton die Gluonen einen großen Teil des Impulses tragen und damit doch zur Materie gehören.

einer bestimmten Transformation unterwirft. Alle möglichen Transformationen bilden eine Gruppe, die zugehörige Symmetriegruppe. Zu einer Symmetrie findet man immer eine Erhaltungsgröße³.

Beispielsweise ist die Physik der Bewegung von Massenpunkten invariant unter gleichzeitigen Verschiebungen aller Positionen. Die Symmetriegruppe wird von den Translationen im Raum gebildet, die zugehörige Erhaltungsgröße ist der Impuls.

Die Quantenfeldtheorien des Standardmodells sind Eichtheorien und haben damit jeweils eine weitere Symmetrie, die Eichsymmetrie. Sie muss sich in den jeweiligen Lagrangedichten widerspiegeln, die zur Beschreibung der Systeme verwendet werden. Die Erhaltung der Symmetrie erfordert einerseits die Einführung von Vektorfeldern, die man mit den Austauschteilchen assoziieren kann, und andererseits den Übergang zur *kovarianten Ableitung* ($\partial_\mu \rightarrow D_\mu$), über die die Wechselwirkung eingefügt wird.

Die Eichtransformation für das Spinorfeld⁴ $\psi(x)$ des Elektrons und das Vektorfeld des Photons $A_\mu(x)$ und der Übergang zur kovarianten Ableitung am Beispiel der Quantenelektrodynamik (QED) lauten:

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i \cdot e \cdot \chi(x)) \cdot \psi(x) \quad (1.1)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \cdot \partial_\mu \chi(x) \quad (1.2)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i \cdot e \cdot A_\mu(x) \quad . \quad (1.3)$$

Wegen der Abhängigkeit des differenzierbaren Transformationsfeldes $\chi(x)$ vom Ort bezeichnet man die Symmetrie als *lokal*. Sie sorgt dafür, dass es keine Fernwirkungen gibt. Die Symmetriegruppe ist in diesem Fall die $U(1)$. Bei der Transformation in Gleichung 1.1 handelt es sich um die Multiplikation mit einer Phase. Im Exponenten steht die Elementarladung e , die Kopplungsstärke des Elektrons an das Photon.

Dass diese Bezeichnung sinnvoll ist, wird evident, wenn man die freie Lagrangedichte⁵ des Elektrons

$$L = \bar{\psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi \quad (1.4)$$

um die des freien Photons

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.5)$$

erweitert. In der resultierenden Lagrangedichte

$$L_{\text{QED}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - q \cdot \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot A_\mu \quad (1.6)$$

findet man nach den Termen für das freie Elektron und für das freie Photon einen weiteren Ausdruck, der sich als der Wechselwirkungsterm der beiden interpretieren lässt. Dabei steht q für die Ladung des Elektrons ($q = -e$).

³vgl. Noether-Theorem.

⁴Der Begriff des Spinors wird hier nicht explizit eingeführt. Man stelle sich einen vierdimensionalen Vektor vor, in dem Teilchen- und Antiteilchen mit jeweils zwei verschiedenen Spinzuständen zusammengefasst sind, die als links- und rechtshändige Chiralität bezeichnet werden.

⁵Für eine explizite Darstellung der 4×4 - γ_μ -Matrizen siehe beispielsweise [HM84].

Aus der Lagrangedichte erhält man die Bewegungsgleichungen. Das sind zum einen die Diracgleichung des Elektrons im elektrischen Feld

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - q \cdot A_\mu) - m]\psi = 0 \quad (1.7)$$

und zum anderen die inhomogenen Maxwellgleichungen⁶

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = qj^\mu \quad . \quad (1.8)$$

Man bezeichnet

$$q \cdot j^\mu = q \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.9)$$

als den *elektromagnetischen Strom*. Er hat die Eigenschaft $\partial_\mu j^\mu = 0$, die gleichbedeutend mit der Erhaltung der elektrischen Ladung ist.

In der QED sind Teilchen und Antiteilchen mit links- oder rechtshändiger *Chiralität*, ihrem Spinzustand, gleichberechtigt.

In der elektroschwachen Vereinheitlichung fasst man die linkshändigen Vertreter einer Fermionfamilie axiomatisch zu Dubletts des *schwachen Isospins* mit $I = \frac{1}{2}$ zusammen

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad . \quad (1.10)$$

Die 3-Komponente des Isospins ist $I_3 = +\frac{1}{2}$ für die oberen und $I_3 = -\frac{1}{2}$ für die unteren Einträge der Dubletts. Die rechtshändigen Komponenten sind Singulets

$$(\nu_e)_R, (e)_R, (\nu_\mu)_R, (\mu)_R, (\nu_\tau)_R, (\tau)_R, (u)_R, (d)_R, (c)_R, (s)_R, (t)_R, (b)_R \quad (1.11)$$

mit Isospin 0.⁷ Die rechtshändigen Neutrinosingulets stehen hier nur der Vollständigkeit halber, was im Folgenden noch diskutiert wird.

Man konstruiert die *schwache Hyperladung* Y aus der Ladung Q und dem Isospin

$$Y = 2(Q - I_3) \quad . \quad (1.12)$$

In Tabelle 1.1 sind Isopin und Hyperladung für die erste Generation der Fermionen dargestellt.

Die Eichsymmetrie der elektroschwachen Theorie hat eine $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Struktur, wobei die $SU(2)$ zum Isospin und die $U(1)$ zur Hyperladung gehört. Die Eichtransformationen und der Übergang zur kovarianten Ableitung lauten

$$\psi(x) \rightarrow \exp\left(i\vec{\chi}_1(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \exp\left(i\chi_2(x) \frac{Y_\psi}{2}\right) \cdot \psi(x) \quad (1.13)$$

$$B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x) + \frac{1}{g'} \cdot \partial_\mu \chi_2(x) \quad (1.14)$$

$$\vec{W}_\mu(x) \rightarrow \vec{W}_\mu(x) + \frac{1}{g} \cdot \partial_\mu \vec{\chi}_1(x) + \vec{\chi}_1(x) \times \vec{W}_\mu(x) \quad (1.15)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_\mu(x) - ig' \frac{Y_\psi}{2} \cdot B_\mu(x) \quad . \quad (1.16)$$

⁶die homogenen Maxwellgleichungen sind in dieser Schreibweise nur Identitäten. $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0$

⁷Man erhält die links- und rechtshändigen Komponenten aus den Diracs핀oren durch Projektionen mit Hilfe der Matrix $\gamma_5 \cdot \psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi$. Siehe [HM84]

	ν_L	e_L	u_L	d_L	ν_R	e_R	u_R	d_R
Isospin (gesamt) I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Isospin (3-Komponente) I_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
elektrische Ladung Q	0	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
schwache Hyperladung Y	-1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Tabelle 1.1: Übersicht über Isospin und Hyperladung der ersten Generation Fermionen im Standardmodell. Man erkennt, dass der Isospin nur in links- und rechtshändig unterscheidet. Die Hyperladung zeigt eine komplexere Struktur. Für die folgenden Generationen ist die Situation identisch.

Dabei sind $\vec{\chi}_1$ und χ_2 die differenzierbaren Transformationsfelder. Die Vektorfelder $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ und B_μ werden analog dem Photonfeld A_μ in der QED eingeführt, um die Eichsymmetrie zu wahren. Da die $SU(2)$ nicht-abelsch ist, wird in der Transformation des \vec{W}_μ (Gleichung 1.15) ein weiterer Term nötig. Dieser Ausdruck führt zu einer Selbstwechselwirkung der zugehörigen Vektorbosonen. Die $U(1)$ -Symmetrie der Hyperladung Y ist abelsch. Dort findet sich kein entsprechender Term, analog zu der Situation in der QED, wo ein Photon nicht mit anderen Photonen wechselwirkt.

Die $\vec{\sigma}$ sind die drei Pauli-Matrizen⁸. Sie sind die Generatoren der $SU(2)$. Auf die rechtshändigen Singulets wirken sie identisch Null ($\sigma\psi_R = 0$), so dass für rechtshändige Spinoren Gleichung 1.13 zu

$$\psi_R(x) \rightarrow 1 \cdot \exp\left(i\chi_2(x)\frac{Y_\psi}{2}\right) \cdot \psi_R(x) \quad (1.17)$$

vereinfacht wird. Auch verschwindet in der kovarianten Ableitung (Gleichung 1.16) für rechtshändige Spinoren der Term, der $\vec{\sigma}$ enthält. Damit verlieren die rechtshändigen Neutrinos sämtliche Wechselwirkungen. Sie sind steril und werden im Standardmodell als nicht existent angenommen. Diskutiert werden sie erst wieder in Erweiterungen, in denen die Masse der Neutrinos (siehe Abschnitt 1.4) eine entscheidende Rolle spielt, etwa zur Erklärung der Dunklen Materie.

Die Größen g und g' sind die Kopplungskonstanten. Isospin I und die Konstante g bestimmen die Kopplungsstärke an die \vec{W}_μ -Felder, Hyperladung Y_ψ und g' die an die B_μ -Felder. Für den Isospin ist die Situation recht einfach: linkshändige Teilchen haben $I = \frac{1}{2}$, rechtshändige $I = 0$. Für die Hyperladung ist die Situation komplizierter (vgl. Tabelle 1.1).

Die vollständige⁹ Lagrangedichte der elektroschwachen Theorie L_{ew} lautet dann

$$L_{ew} = \bar{\psi} \left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - \frac{g}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu(x) - \frac{g'}{2}Y_\psi \cdot B_\mu(x)) \right] \psi - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Die in der Natur realisierten Vektorbosonen erhält man über Mischungen der zugehörigen Felder. Die ersten beiden Komponenten von \vec{W}_μ mischen ähnlich wie Auf- und Absteigeoperatoren zu den

⁸Für eine explizite Darstellung der 2×2 - σ -Matrizen siehe beispielsweise [HM84]

⁹Bis auf die aus dem Higgspotenzial abgeleiteten Terme, die den Vektorbosonen bzw. den Fermionen Masse geben. Der Higgsmechanismus wird hier nicht diskutiert. Siehe [Hig64].

Feldern W_μ^+ und W_μ^- . Die verbleibenden W_μ^3 und B_μ mischen zum Photonfeld A_μ und zum Feld des neutralen Z-Bosons Z_μ^0 .

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2) \quad (1.19)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W \cdot W_\mu^3 - \sin \theta_W \cdot B_\mu \quad (1.20)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W \cdot W_\mu^3 + \cos \theta_W \cdot B_\mu \quad (1.21)$$

Der Mischungswinkel θ_W bei den beiden letzteren heißt *Weinberg-Winkel*. Der Winkel ist so eingestellt, dass das Photon nicht an das Neutrino koppelt. Sein Wert ist $\sin^2 \theta_W \approx 0.23$.

Mit den zu Isospin und Hyperladung gehörenden Strömen \vec{j}_μ und j_μ^Y

$$\vec{j}^\mu = (j_1^\mu, j_2^\mu, j_3^\mu) = i\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\vec{\sigma}\psi \quad (1.22)$$

$$j_Y^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{Y}{2}\psi \quad . \quad (1.23)$$

schreibt sich der Wechselwirkungsterm der Lagrangedichte L_{int} kompakt als

$$L_{\text{int}} = g\vec{j}^\mu \cdot \vec{W}_\mu + g'j_Y^\mu B_\mu \quad . \quad (1.24)$$

Wechselt man in der Beschreibung auf die gemischten und physikalisch realisierten Felder, dann verwendet man die zugehörigen Ströme

$$j_{\text{em}}^\mu = j_\mu^Y + j_\mu^3 = i\bar{\psi}\gamma^\mu q\psi \quad (q : \text{elektr. Ladung}) \quad (1.25)$$

$$j_\pm^\mu = 2i(j_1^\mu \pm ij_2^\mu) \quad (1.26)$$

und findet für die Lagrangedichte

$$L_{\text{int}} = \underbrace{\frac{g}{2\sqrt{2}}(j_-^\mu W_\mu^+ + j_+^\mu W_\mu^-)}_{\text{Geladene-Strom-WW.}} - \underbrace{g \sin \theta_W j_{\text{em}}^\mu A_\mu}_e}_{\text{elektromagn. WW.}} - \underbrace{\frac{g}{4 \cos \theta_W} \overbrace{(j_3^\mu - \sin^2 \theta_W j_{\text{em}}^\mu)}^{j_{\text{NC}}^\mu}}_{\text{(schwache) Neutrale-Strom-WW.}} Z_\mu^0 \quad . \quad (1.27)$$

Die zugehörigen Ströme, wie sie sich in der elektroschwachen Vereinheitlichung darstellen, lauten

$$j_-^\mu = \sum_{x \in \{e, \mu, \tau\}} i\bar{\psi}_x \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_x} + \sum_{u, d} i\bar{\psi}_d U_{du}^{\text{CKM}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_u \quad (1.28)$$

$$j_+^\mu = \sum_{x \in \{e, \mu, \tau\}} i\bar{\psi}_{\nu_x} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_x + \sum_{u, d} i\bar{\psi}_u U_{ud}^{\text{CKM}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_d \quad (1.29)$$

$$j_{\text{em}}^\mu = \sum_{x=f^\pm} iq_x \bar{\psi}_x \gamma^\mu \psi_x \quad (1.30)$$

$$j_{\text{NC}}^\mu = \sum_{x=f} (-1)^{(\frac{1}{2} - I_3)} i\bar{\psi}_x \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_x - 4 \sin^2 \theta_W \cdot \sum_{x=f^\pm} iq_x \bar{\psi}_x \gamma^\mu \psi_x \quad . \quad (1.31)$$

Dabei bedeutet eine Summation über u bzw. d , dass $u \in \{u, c, t\}$ bzw. $d \in \{d, s, b\}$. Eine Summe über $x = f$ bzw. $x = f^\pm$ läuft über alle bzw. alle geladenen Fermionen.

Der erste Term in Gleichung 1.27 beschreibt die Geladene-Strom-Wechselwirkung. Innerhalb eines Isospindoublets wechselt der Zustand unter Abstrahlung eines W -Bosons ($f \leftrightarrow f' + W$). Diese Kopplung ist rein linkshändig. Im Gegensatz zu den Leptonen wählt man bei den d -artigen Quarks als Basis der Darstellung nicht die schwachen sondern die Masseneigenzustände. Zwischen beiden Systemen vermittelt die unitäre CKM -Matrix¹⁰ U^{CKM} . Nichtverschwindende Einträge abseits der Diagonalen erlauben Übergänge zwischen den verschiedenen Familien. Diese sind als *flavor changing currents* bekannt. Der zweite Term zeigt die Kopplung des Photons an alle Fermionen mit Ladung ($f \leftrightarrow f + \gamma$). Die Forderung, das Neutrino solle nicht an das Photon koppeln, wird erfüllt, da Ersteres ungeladen ist. In der Neutralen-Strom-Wechselwirkung koppelt das Z -Boson linkshändig an den Isospin und chiralitätsunabhängig an die Ladung ($f \leftrightarrow f + Z^0$). Damit ist die Kopplung des Neutrinos rein linkshändig, wie nach der $V-A$ -Theorie gefordert. Neutrale Ströme ändern ein Fermion nicht, das heißt, es gibt keine (fundamentalen) *flavor changing neutral currents*.

Es gibt zwei freie Parameter des elektroschwachen Modells, die elektrische Ladung und den Weinbergwinkel, wobei auch andere Möglichkeiten wählbar wären. Das Thema der Entstehung der Massen (insbesondere durch den Higgsmechanismus) wird hier nicht diskutiert. Durch die Massenterme kommen eine Vielzahl an weiteren Parametern hinzu, die vom Experiment bestimmt werden müssen. Im Wesentlichen ist das einer pro Fermionmasse und einer aus dem Higgssektor selbst.

Zwischen verschiedenen Parametern gibt es feste Relationen, wie beispielsweise

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \quad \frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W \quad . \quad (1.32)$$

Dabei sind m_W und m_Z die Massen der Vektorbosonen und G_F ist die Fermikonstante.

1.3 Die Wechselwirkungen des Neutrinos

Um eine Neutrinoreaktion zu erhalten, die tatsächlich ablaufen kann, muss man zwei elementare Bausteine der Form $f \leftrightarrow f' + W$ bzw. $f \leftrightarrow f + Z^0$ derart zusammensetzen, dass kein externes Vektorboson übrig bleibt. Man erhält Vorgänge, bei denen zwei Fermionlinien durch ein Boson verbunden werden. Zur Darstellung dieser Prozesse geht man zu *Feynmangraphen* über. In Abbildung 1.1 sind die vier Graphen einfachster Ordnung gezeigt. Sie haben alle zwei Vertices, an die jeweils zwei Fermionen und ein Vektorboson koppeln.

Die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit \dot{W} dafür, dass ein Austausch zwischen zwei Fermionen stattfindet, erhält man aus *Fermi's Zweiter Goldener Regel*. Sie setzt \dot{W} mit dem *Matrixelement* $M_{fi} = \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle$, welches das Wechselwirkungspotenzial zwischen Anfangs- und Endzustand beschreibt, und der Energiezustandsdichte $\rho(E')$ des Endzustandes in Zusammenhang. Es gilt:

$$\dot{W} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \cdot \rho(E') \quad . \quad (1.33)$$

¹⁰Das Analogon zur CKM -Matrix im Neutrinossektor U^{MNS} wird im Abschnitt über Oszillationen 1.4 weiter diskutiert.

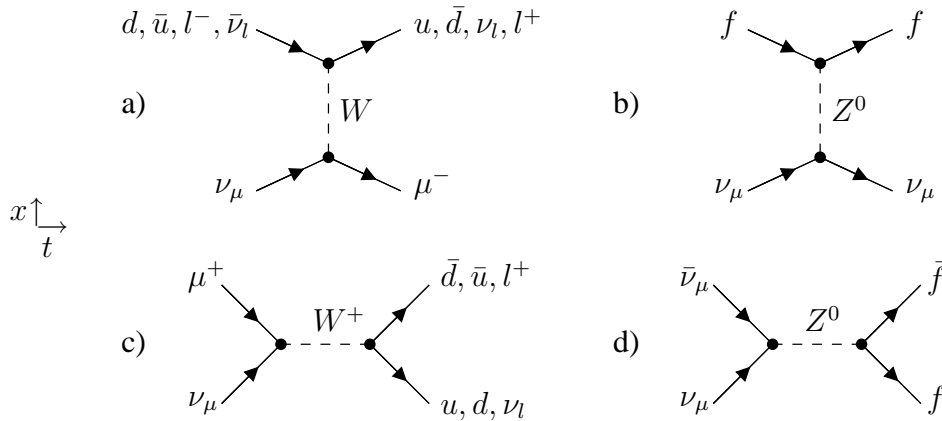


Abbildung 1.1: Feynmangraphen der Schwachen Wechselwirkung in niedrigster Ordnung am Beispiel des Myonenneutrinos ν_μ . Die beiden linken Diagramme a) und c) entsprechen Geladenen-Strom-Wechselwirkungen des Neutrinos mit anderen Fermionen. Graph a) zeigt den Austausch eines W -Bosons und Umwandlung der beteiligten Fermionen. Aus Gründen der Ladungserhaltung tauchen an der rechten Fermionlinie nicht alle Teilchen des Standardmodells auf. In c) annihilieren Neutrino und passendes Antilepton; das entstehende W^+ kann in die verschiedenen Quark-Antiquark oder Neutrino-Antilepton Paare zerfallen. Die beiden rechten Diagramme gehören zu den Neutralen-Strom-Wechselwirkungen. Analog zur Situation bei den Geladenenen Strömen zeigt b) den Austausch eines Z^0 zwischen einem Neutrino und einem beliebigen anderen Fermion. Bild d) entspricht der Neutrino-Antineutrino-Annihilation in ein Z^0 , das seinerseits in ein beliebiges Fermion-Antifermion-Paar zerstrahlt. Die Situation für Antiteilchen ist analog. Es sind nur Quarks der ersten Generation eingezeichnet.

Dabei erhält man das Matrixelement mittels geeigneter Transformationen aus dem Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte (vgl. Gleichung 1.27). Für den geladenen Strom $\nu_\mu + e^- \xrightarrow{W} \mu^- + \nu_e$ ist beispielsweise

$$M_{fi} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu \gamma^\rho \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\mu} \right) \frac{1}{m_W^2 - q^2} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\rho \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_e \right) \quad (1.34)$$

Den Term $\frac{1}{m_W^2 - q^2}$ mit Masse und Viererimpuls q des ausgetauschten W -Bosons bezeichnet man als Propagatorterm, da er die Integration über die verschiedenen Wege des Austauschteilchens beinhaltet. Für kleine q ist er durch die Masse dominiert und erklärt damit die „Schwäche“ der Schwachen Wechselwirkung bei kleinen Energien. Die Energiezustandsdichte $\rho(E')$ entspricht im Wesentlichen dem *Phasenraum* der Reaktion, bei festgelegtem Betrag des Impulses eine Kugelschale im Impulsraum.

Im Experiment ist die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit W nicht direkt zugänglich. Man parametrisiert sie mittels des *Wirkungsquerschnittes* σ . Dazu betrachtet man ein Teilchen, das durch einen Materiequader mit Querschnittsfläche A , geringer Dicke d und Teilchenzahldichte n fliegt (vgl. Abbildung 1.2). Das Strahlteilchen kann mit $n \cdot A \cdot d$ Streuzentren des Targets wechselwirken. Ordnet man jedem Streuzentrum derart eine effektive Fläche σ zu, dass es zur Wechselwirkung kommt, wenn

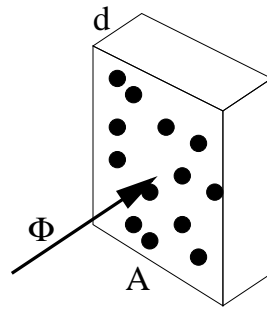


Abbildung 1.2: Veranschaulichung des Wirkungsquerschnitts. Ein Fluss Φ an Teilchen trifft auf ein Volumen der Dicke d und mit Querschnittsfläche A , das Streuzentren enthält.

sie getroffen wird, dann ist

$$W = \frac{\sigma \cdot n \cdot A \cdot d}{A} = \sigma \cdot n \cdot d \quad . \quad (1.35)$$

Ein Fluss Φ an Strahlteilchen führt dann im Volumen V zu einer Reaktionsrate

$$R = \Phi \cdot A \cdot W = \Phi \cdot A \cdot \sigma \cdot n \cdot d = \Phi \cdot \sigma \cdot n \cdot V \quad . \quad (1.36)$$

Diese Beziehung wird bei der Diskussion der *effektiven Fläche* des AMANDA-Detektors in Abschnitt 3.4.2 verwendet.

Abbildung 1.3 zeigt den Wirkungsquerschnitt für eintreffende Neutrinos auf ein ruhendes Target in Abhängigkeit der Neutrinoenergie. Für alle drei Neutrinogenerationen sind die Reaktionen von jeweils Neutrino und Antineutrino, geladenen und neutralen Strömen, an Elektronen und Nukleonen dargestellt.

Zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte im Detail muss man über die Goldene Regel hinausgehen und die Feynmanregeln verwenden (siehe beispielsweise [HM84]). Die Ergebnisse, so wie sie in Abbildung 1.3 dargestellt sind, lassen sich aber anschaulich interpretieren. Dafür werden die folgende Zusammenhänge für die Kinematik von (quasi-)elastischen¹¹ Zweikörperreaktionen verwendet (siehe auch [Sch97])

$$s = 2E_\nu m_t \cdot c^2 \quad (1.37)$$

$$y = \frac{E_\nu - E'_\nu}{E_\nu} = \frac{1}{2}(1 - \cos \vartheta) \quad . \quad (1.38)$$

Dabei ist E_ν die Neutrinoenergie im Laborsystem vor der Wechselwirkung, E'_ν diejenige danach, m_t die Masse des Targetteilchens, \sqrt{s} die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem, ϑ der Streuwinkel im Schwerpunktsystem und y der relative Energieübertrag, die *Inelastizität*. Die Formeln gelten für die Näherungen $m_\nu = 0$ und $E_\nu \gg m_t$.

Unter Vernachlässigung des W -Propagators ist der Wirkungsquerschnitt linear in s . Für die Wechselwirkung punktförmiger Teilchen folgt das direkt aus der elektroschwachen Theorie¹². Mit Glei-

¹¹d.h. Reaktionen, bei denen keine oder kaum Energie in Umwandlungsprozessen verloren geht.

¹²Es entspricht dem Volumen des Phasenraums, wo die Kugelschale im Impulsraum quadratisch mit dem Betrag des Impulses - und damit der Energie - zusammenhängt.

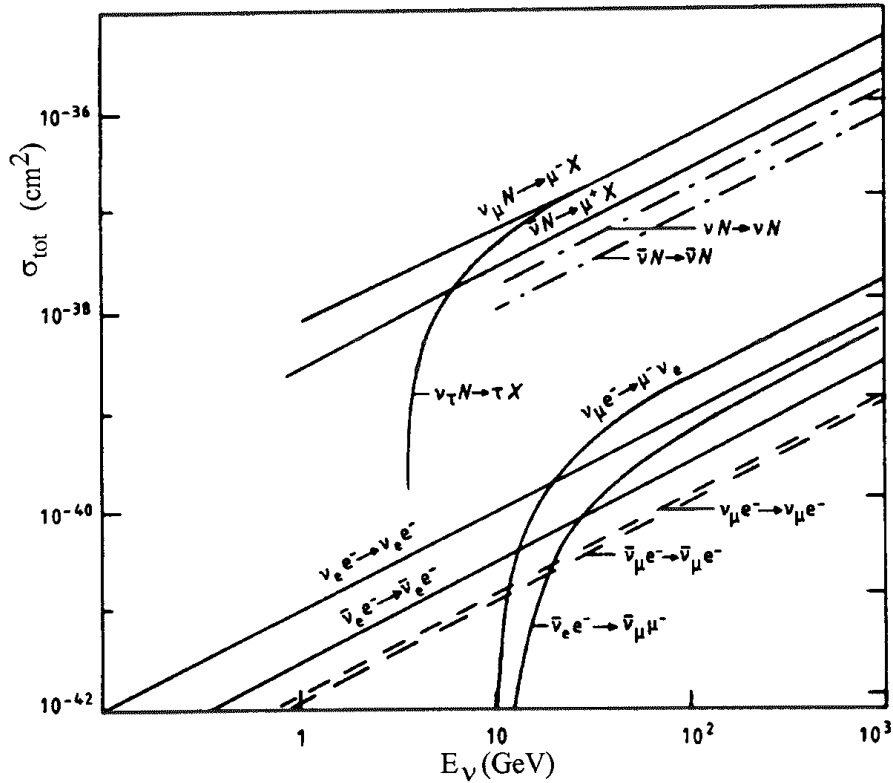


Abbildung 1.3: Wirkungsquerschnitt der Reaktionen von Neutrinos gegen ihre Energie. Eingetragen sind die Reaktionen von Neutrinos und Antineutrinos aller drei Generationen an Nukleonen und Elektronen. Die Diskussion der Kurven findet sich im Text. Abbildung adaptiert aus [Sch97, Eis86].

Abbildung 1.37 ist der Wirkungsquerschnitt somit linear in Neutrinoenergie und Targetmasse. Die Linearität in der Energie für die Wechselwirkung an punktförmigen Elektronen ist damit erklärt. Für die tief-inelastische Streuung an Nukleonen

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu + X \quad (1.39)$$

sieht man den gleichen Effekt. Bei diesen hohen Energien reagiert das Neutrino quasielastisch mit einem der Quarks in Neutron oder Proton, während die anderen Konstituenten als Zuschauer fungieren. Das Aufschauern des Targetnukleons geschieht erst nach der eigentlichen Reaktion. Den Anteil an Energie und Impuls – beziehungsweise im Laborsystem an der Ruhemasse – des aktiven Partons liefert die *Skalenvariable*

$$x = \frac{-q^2}{2q \cdot p_N} \quad , \quad (1.40)$$

wenn p_N den Viererimpuls des Targetnukleons bezeichnet. Um zum Wirkungsquerschnitt zu gelangen, muss man über die *Strukturfunktionen* mitteln. Sie beschreiben die Verteilung von x für die verschiedenen Partonen des Nukleons. Da alle einzelnen Terme linear in der Energie sind, gilt dies auch für den Wirkungsquerschnitt insgesamt. Dass die Streuung am Nukleon so viel wahrscheinlicher ist als am Elektron, liegt daran, dass das Nukleon 2000 mal schwerer ist (vgl. Gleichung 1.37).

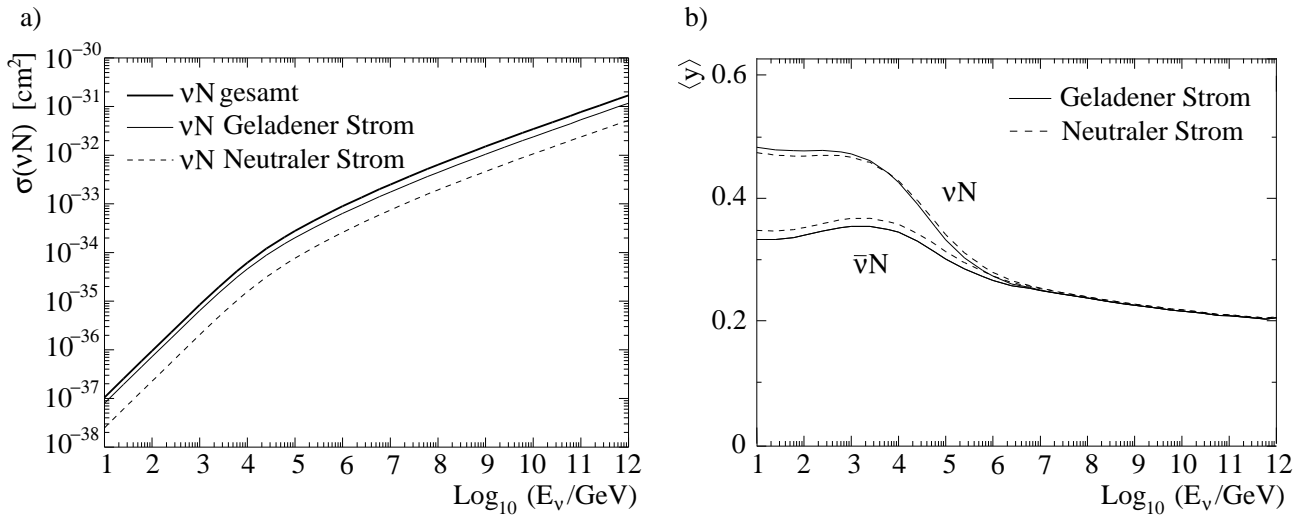


Abbildung 1.4: Vorhersagen für das Hochenergieverhalten von Neutrinowechselwirkungen in Abhängigkeit der Neutrinoenergie. **a)** Wirkungsquerschnitt der Neutrino-Nukleonstreuung. Ab dem TeV Bereich wird der Einfluss des W-Propagators wichtig. Adaptiert aus [G⁺98]. **b)** Mittlere Inelastizität der Neutrino-Nukleonstreuung. Für große Energien wird die Wechselwirkung mit virtuell erzeugten $q\bar{q}$ -Paaren (dem „See“) ausschlaggebend und die Unterschiede zwischen Neutrino- und Antineutrino-Streuung verschwinden. Adaptiert aus [G⁺96].

Für Energien jenseits der TeV Skala wird der W-Propagator wichtig und der Wirkungsquerschnitt steigt schwächer als linear an. Eine theoretische Vorhersage des weiteren Verlaufes findet man in Abbildung 1.4 a).

Es sollen noch drei weitere Ursachen für die Unterschiede in den Wirkungsquerschnitten der Reaktionen angeprochen werden, die in Abbildung 1.3 gezeigt sind. Zum Einen muss bei Reaktionen mit Myonen oder Tau-Teilchen im Endzustand die Energie für deren Ruhemasse aufgebracht werden. Das führt zu den beobachtbaren Schwelleneffekten. Zum Anderen gehören zu den eingezeichneten Prozessen zum Teil unterschiedliche Feynmangraphen. Beispielsweise ist die Reaktion



eine reine Neutrale-Strom-Wechselwirkung, beschrieben durch Diagramm b) in Abbildung 1.1, während zur Reaktion



auch der geladene Strom – analog Diagramm 1.1 a) – beiträgt. Man erkennt, dass der neutrale Strom etwas schwächer ist als der geladene. Das liegt an den verschiedenen Matrixelementen und Kopplungskonstanten.

Der dritte Punkt betrifft den Unterschied zwischen den Neutrino- und Antineutrinowirkungsquerschnitten. Auch hier können unterschiedliche Feynmangraphen eine Rolle spielen. Bei der tief-inelastischen Streuung (Gleichung 1.39) ist dies aber nicht der Fall, falls das Target zu gleichen Teilen aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt ist. Was in diesem Fall den Ausschlag gibt, ist der Spin

	$\nu + e^- \xrightarrow{W} \nu + e^-$	$\bar{\nu} + e^- \xrightarrow{W} \bar{\nu} + e^-$
vor der Streuung	$\nu \xrightarrow{\leftarrow} \xrightarrow{\leftarrow} e^-$ $J_z = 0$	$\bar{\nu} \xrightarrow{\rightarrow} \xrightarrow{\rightarrow} e^-$ $J_z = +1$
nach der Streuung		
$\vartheta = 0^\circ, y = 0$	$e^- \xrightarrow{\rightarrow} \xrightarrow{\rightarrow} \nu$ $J_z = 0$	$e^- \xrightarrow{\rightarrow} \xrightarrow{\rightarrow} \bar{\nu}$ $J_z = +1$
nach der Streuung		
$\vartheta = 180^\circ, y = 1$	$\nu \xrightarrow{\leftarrow} \xrightarrow{\leftarrow} e^-$ $J_z = 0$	$\bar{\nu} \xrightarrow{\leftarrow} \xrightarrow{\leftarrow} e^-$ $J_z = -1$ verboten

Abbildung 1.5: Veranschaulichung der Helizitätsunterdrückung in Geladenen-Strom-Wechselwirkungen. Dünne Pfeile repräsentieren Impulse, dicke Pfeile Spinrichtungen. Um wechselwirken zu können, müssen Teilchen linkshändig und Antiteilchen rechtshändig sein. Wegen Drehimpulserhaltung ist die Antineutrino-Elektron-Streuung um 180° verboten. Die Neutrino-Elektron-Streuung ist dagegen isotrop.

der Fermionen, da er eine Anisotropie der Antineutrino-Reaktionen verursacht. Das soll am Beispiel des geladenen Stromes in der elastischen Neutrino-Elektron-Streuung veranschaulicht werden.

Der Begriff der Chiralität ist schon erwähnt worden. Es gibt links- und rechtschirale Lösungen der Dirac-Gleichung. Im Experiment ist die Chiralität selbst nicht zugänglich, sondern nur die Helizität, die Projektion des Spins auf die Flugrichtung des betrachteten Teilchens. Direkt nach einer Messung¹³ kann ein Teilchen entweder rein linkshändig oder rein rechtshändig sein und entsprechend Helizität -1 oder $+1$ haben, da der Messvorgang in einen Eigenzustand projiziert. Ein unpolarisiertes Teilchen hat in Ruhe¹⁴ die Helizität Null. Bewegt es sich mit der Geschwindigkeit v , so ist die Helizität gleich $\frac{v}{c_{\text{vak}}}$. Für ein masseloses Teilchen ist Helizität gleich Chiralität. Ein masseloses Neutrino ist immer linkshändig, ein Antineutrino immer rechtshändig.

Das W -Boson in der Neutrino-Elektron-Wechselwirkung koppelt an linkschirale Zustände. Vor der Streuung ergänzen sich die Komponenten des Spins in Impulsrichtung der beiden Teilchen zu Null, wie in Abbildung 1.5 dargestellt. Man betrachtet die Extremfälle der Streuwinkel von 0° und 180° . Nach der Streuung addieren sich die Spinprojektionen wiederum zu Null.

Bei der Antineutrino-Elektron-Streuung ist der Fall anders. Das Antineutrino ist rechtschiral, während das Elektron wie eben linkschiral projiziert werden muss, um zu reagieren. Die Spinkomponenten addieren sich vor der Reaktion zu $+1$. Bei einer Vorwärtsstreuung ist das auch nach der Reaktion so, bei einem Streuwinkel von 180° drehen sich aber alle Spins um. Die Gesamtkomponente in Impulsrichtung wäre dann -1 , was aber aus Gründen der Drehimpulserhaltung verboten ist. Das wird als *Helizitätsunterdrückung* bezeichnet.

Nach Gleichung 1.38 ist der Energieübertrag auf das Targeeteilchen y eindeutig mit dem Streuwinkel im Ruhesystem verbunden. Man geht in der Beschreibung der Helizitätsunterdrückung zur Abhängig-

¹³Hamilton- und Helizitätsoperator vertauschen nicht. Die Helizität ist nicht erhalten.

¹⁴Oder im Grenzwert für sehr kleine Geschwindigkeiten, damit eine Bewegungsrichtung ausgezeichnet bleibt.

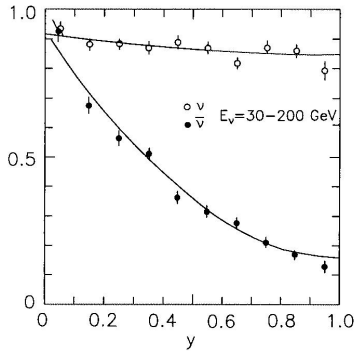


Abbildung 1.6: Energieverteilung auf Lepton und hadronischen Rest in der tief-inelastischen Neutrino-Streuung. Gezeigt ist die Häufigkeitsverteilung der *Inelastizität* y für die Reaktion von Neutrinos und Antineutrinos mit Nucleonen gemessen vom CDHS Experiment. Die Anpassungen sind von der Form $a + b(1 - y)^2$. Im Fall der Neutrinos entspricht der konstante Term der Wechselwirkung mit den Quarks, der quadratische Term der mit den Antiquarks im Nucleonsee. Im Fall der Antineutrinos ist es entsprechend anders herum. Die Messung ist in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Die Abbildung stammt aus [Sch97, dG+79].

keit des Wirkungsquerschnittes von y über und findet mittels der Feynmanregeln qualitativ

$$\frac{\partial \sigma_{\bar{\nu}e}^{CC}}{\partial y} \propto (1 - y)^2 \quad , \quad (1.43)$$

während $\frac{\partial \sigma_{\nu e}^{CC}}{\partial y}$ unabhängig von y ist.

Die gleiche Argumentation gilt entsprechend für die tief-inelastische Neutrino-Nucleon-Streuung. Die Messergebnisse des CDHS-Experimentes ([Kno03]) sind in Abbildung 1.6 dargestellt und spiegeln die theoretischen y -Verteilungen wider. Sie sind absolut aufeinander normiert. Die Verhältnisse der Flächen unter den Kurven geben damit das Verhältnis der totalen Wirkungsquerschnitte wieder. Eine theoretische Vorhersage der Abhängigkeit der Inelastizität y von der Neutrinoenergie findet man in in Abbildung 1.4 b). Man erkennt, dass für höhere Energien der Nucleonsee an Bedeutung gewinnt und die Unterschiede für Neutrinos und Antineutrinos verschwinden. Ausserdem geht im Mittel immer weniger Energie auf das Targetnucleon über.

Damit sind die Neutrinowirkungsquerschnitte als Funktion der Neutrinoenergie von Abbildung 1.3 verstanden. Zudem sind die Energieverteilung auf Myon und hadronischen Rest der Reaktion $\nu_\mu + N \rightarrow \mu + X$ (Gleichung 1.39) diskutiert.

Auch der Zerfall des Myons in ein Elektron und zwei Neutrinos

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (1.44)$$

wird durch einen Feynmangraphen des geladenen Stromes in Abbildung 1.1 beschrieben, da ein in der Zeit vorwärts laufendes Teilchen das Gleiche ist wie sein Antiteilchen, das in der Zeit rückwärts läuft.¹⁵

An jedem Vertex im Standardmodell gilt die Leptonzahlerhaltung getrennt für Elektron-, Myon- und Tauleptonzahl. Das besagt, dass ein Elektronneutrino mit Elektronzahl 1 nur entweder gemeinsam mit einem Antielektronneutrino mit Elektronzahl -1 oder aber übergehend in ein Elektron mit seinerseits Elektronzahl $+1$ vernichtet werden kann. Unter bestimmten Umständen sind die Leptonzahlen allerdings in der Fortbewegung der Neutrinos nicht mehr erhalten. Dafür muss die Annahme der Masselosigkeit aufgegeben werden.

¹⁵Mit der zusätzlichen Verwendung einer Paritätstransformation folgt dies aus dem CPT-Theorem.

Nach der Darstellung der Wechselwirkungen der Neutrinos ist der folgende Abschnitt der Propagation und den daraus resultierenden Oszillationseffekten gewidmet.

1.4 Die Propagation und Oszillation des Neutrinos

Die aktuellen Modelle von der Sonne und unserer Atmosphäre sagen jeweils Flüsse von Neutrinos mit einer Genauigkeit von jeweils etwa 5 – 15 Prozent ([BPB01, H⁺95]) vorher. Das Experiment bestätigt deren Existenz, findet aber in beiden Fällen zu wenige Neutrinos¹⁶, was als *solare* und das *atmosphärische Neutrinoproblem* bezeichnet wird. Deren Lösung findet man in einem Phänomen, das man als *Neutrino-Oszillation* bezeichnet. Elektron-, Myon-, und Tauneutrinos können sich dabei ineinander umwandeln.

Die drei Neutrinozustände $|\nu_e\rangle$, $|\nu_\mu\rangle$ und $|\nu_\tau\rangle$ sind Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung. Die Propagation eines quantenmechanischen Zustandes erfolgt durch den Hamiltonoperator H_0 , dessen Eigenwerte der Energie eines Zustandes entsprechen. Im Ruhesystem eines Teilchens ist die Energie gerade gleich der Masse. Die Zeitentwicklung eines Systems erfolgt also in Masseneigenzuständen $|\nu_i\rangle$:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iH_0t}|\nu_i(0)\rangle = e^{-iE_it}|\nu_i(0)\rangle \quad . \quad (1.45)$$

Die schwachen Eigenzustände $|\nu_\alpha\rangle$ und die Masseneigenzustände $|\nu_i\rangle$ bilden jeweils ein orthonormales System, zwischen denen eine unitäre Abbildung U vermittelt. Es ist

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad , \quad \langle \nu_\alpha | = \sum_i U_{\alpha i} \langle \nu_i | \quad . \quad (1.46)$$

Neutrinos können nur in schwachen Eigenzuständen erzeugt und vernichtet werden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{\alpha \rightarrow \beta}$, dass ein im Zustand $|\nu_\alpha\rangle$ erzeugtes Neutrino im Zustand $|\nu_\beta\rangle$ vernichtet wird, beträgt für ein Neutrino der Energie E nach einer Flugstrecke L ([GG02])

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta} &= |\langle \nu_\beta | e^{-iH_0t} | \nu_\alpha \rangle|^2 = \left| \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* e^{-iE_it} \right|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re} (U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 x_{ij} + 2 \sum_{i < j} \text{Im} (U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \frac{x_{ij}}{2} \end{aligned} \quad (1.47)$$

wobei $x_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 \cdot c^4 \cdot L}{4E}$ und $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ das Quadrat der Massendifferenzen ist. Die Oszillationslänge, die zu einer Massendifferenz und Energie gehört, beträgt

$$L_{0,ij} = \frac{4\pi\hbar c E}{|\Delta m_{ij}^2| \cdot c^4} = 2.48 \text{ m} \cdot \frac{E/\text{MeV}}{|\Delta m_{ij}^2| \cdot c^4/\text{eV}^2} \quad . \quad (1.48)$$

¹⁶Referenzen finden sich im Einzelnen auf der folgenden Seite.

In der Betrachtung mit drei Masseneigenzuständen, hat sich die Parametrisierung von U nach Maki, Nakagawa und Sakata durchgesetzt ([MNS62]). Mittels dreier Mischungswinkel θ_{ij} und einer komplexen Phase δ schreibt sich U^{MNS}

$$U^{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

mit den Abkürzungen s_{ij} und c_{ij} für $\sin \theta_{ij}$ beziehungsweise $\cos \theta_{ij}$.

Im Szenario dreier Masseneigenzustände hat man insgesamt sieben Parameter, zwei Differenzen von Massenquadraten, drei Winkel und eine Phase δ . Verschwindet Letztere, dann gibt es im Neutrino-sektor keine CP-Verletzung.

Die aktuellen experimentellen Erkenntnisse stammen von den Detektoren SNO über solare ([A⁺01, A⁺02a, A⁺02b]), von Super-Kamiokande über atmosphärische ([F⁺00]) und solare Neutrinos ([F⁺02]) und von CHOOZ ([A⁺99]) und KamLAND ([E⁺03]) über Reaktorneutrinos. Erste Beobachtungen mit Neutrinos von Beschleunigern liegen ebenfalls vor ([Wil02]). Daten älterer, radiochemischer Experimente unterstützen die neueren Messungen ([C⁺98, H⁺99a]).

Die wahrscheinlichste Lösung liefert ein Modell, bei dem zwei Masseneigenwerte sehr nahe beieinander liegen und der dritte weiter davon entfernt ist. Die Winkel θ_{12} und θ_{23} sind groß, während θ_{13} klein ist. Über die CP-verletzende Phase kann man damit noch keine Aussage machen, außer dass sie umso schwerer zu messen sein wird, je kleiner θ_{13} tatsächlich ist.

Das solare und das atmosphärische Neutrinoproblem entkoppeln, und man kann die beiden Fälle in Szenarien mit zwei effektiven Neutrinogenerationen studieren, in denen jeweils ein Winkel und eine quadratische Massendifferenz auftritt.

Die entsprechenden Analysen liefern ([B⁺02a])

$$\Delta m_{12}^2 \approx \Delta m_{13}^2 \approx \Delta m_{\text{atm.}}^2 = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (1.50)$$

$$\sin^2 2\theta_{23} = \sin^2 2\vartheta_{\text{atm.}} = 1.0 \quad (1.51)$$

$$\Delta m_{\text{sol.}}^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (1.52)$$

$$\tan^2 \theta_{12} = \tan^2 \vartheta_{\text{sol.}} = 0.34 \quad . \quad (1.53)$$

In der Näherungen mit $\delta = 0$, $\theta_{13} = 0^\circ$, $\theta_{23} = 45^\circ$ und $\theta_{12} = 30^\circ$ erhält die Matrix die übersichtlichere Form

$$U^{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{6}{8}} & \sqrt{\frac{2}{8}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{4}{8}} \\ \sqrt{\frac{1}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{4}{8}} \end{pmatrix} \quad . \quad (1.54)$$

Das einzige Experiment, dessen Daten nicht innerhalb eines Drei-Generationen-Modells mit den anderen Messungen in Übereinstimmung gebracht werden kann, ist LSND ([A⁺98b, A⁺98c]). Die zugehörige Kollaboration findet eine Massendifferenz in der Größenordnung von eV^2 bei kleinen Mischungswinkeln. Das würde auf die Existenz eines vierten Masseneigenzustandes und mindestens

eines *sterilen Neutrinos* hindeuten. Das KARMEN Experiment kann die LSND Ergebnisse nicht vollständig ausschließen ([G⁺90]). Endgültige Klärung erhofft man sich vom MiniBOONE Experiment ([B⁺00]).

Die tiefer gehenden Feinheiten der Neutrino-Oszillation findet man in Übersichtsartikeln, beispielsweise in [B⁺02a]. Dort wird insbesondere der Einfluss von Propagation durch Materie, der *MSW-Effekt*, diskutiert. Dabei berücksichtigt man, dass sich die $\nu_e e^-$ -Streuung von der $\nu_{\mu\tau} e^-$ -Streuung unterscheidet (vgl. Abschnitt 1.3), und Elektronneutrinos damit eine effektive Masse erhalten. Der generelle Mechanismus bleibt aber unberührt.

Studien der Neutrino-Oszillation können nur in sehr beschränktem Maße Aussagen über die absolute Massenskala machen. Im Wesentlichen ist $\max(m_i, m_j) \geq \sqrt{\Delta m_{ij}^2}$.

Eine obere Grenze auf die Elektronneutrinomasse erhält man aus dem Spektrum des Tritium- β -Zerfalls, wie es beim Mainzer Neutrinomassen-Experiment ([B⁺02b]) und dem Nachfolger KATRIN ([O⁺01]) gemacht wird. Das ist die einzige direkte Messmethode. Eine weitere Grenze erhält man aus der Beobachtung des kosmischen Mikrowellenhintergrundes ([S⁺03, Han03]). Auch durch die Untersuchung des neutrinolosen doppelten β -Zerfalls kann man die Neutrinomasse eingrenzen ([KKDHK01]). Zusätzlich erhält man noch Informationen über die Frage, ob ein Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist. Das ist im Rahmen dieser Arbeit nicht von Belang.

1.5 Das Neutrino als kosmischer Informationsträger

Um zu verstehen, was die Neutrinoastronomie leisten kann, müssen drei Fragen beantwortet werden:

- Welche Informationen bekommt das Neutrino bei seiner Entstehung?
- Was passiert auf dem Weg zur Erde?
- Was kann man beim Nachweis messen?

Die Antwort auf die erste Frage ist denkbar knapp. Der Zustand eines Neutrinos ist eindeutig definiert durch seine Energie, seinen Impuls, seine Spinrichtung und ob es ein Elektron-, Myon- oder Tau-neutrino ist.

Die zweite Frage beschäftigt sich mit der Propagation. Im vorhergehenden Abschnitt sind die Oszillationseffekte diskutiert worden. Über die langen Flugstrecken, die ein Neutrino bis zur Erde zurückzulegen hat, oszilliert die Wahrscheinlichkeit hin und her, in welches geladene Lepton es sich bei einer Reaktion verwandelt. Solch eine Oszillation im Wortsinne ist aber bei der Beobachtung potenzieller kosmischer Quellen nicht messbar. Zum Einen haben die Gebiete der Neutrinoproduktion eine Ausdehnung, die viel größer als die Oszillationslänge ist. Zum Anderen ist die Oszillationslänge ihrerseits eine Funktion der Neutrinoenergie. Da ein breites Spektrum an Energien erzeugt wird, sind wegen der großen Entfernung die Oszillationen verwischt.

Was bleibt, ist ein gemittelter Effekt. Die Wahrscheinlichkeit, ein im Zustand $|\nu_\alpha\rangle$ produziertes Neutrino im Zustand $|\nu_\beta\rangle$ nachzuweisen, ist unter diesen Voraussetzungen ([NKAS03])

$$\overline{P_{\alpha\rightarrow\beta}} = \sum_i |U_{\beta i}|^2 |U_{\alpha i}|^2 \quad . \quad (1.55)$$

Was man auf der Erde detektiert, wenn nur eine Neutrinoart am Produktionsort entsteht, rechnet man mit der Näherung des letzten Abschnittes (Gleichung 1.54) nach. Die Verhältnisse sind

$$\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 0 : 0 \quad \longrightarrow \quad \nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = \frac{1}{32} \cdot (20 : 6 : 6) \quad , \quad (1.56)$$

$$\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 0 : 1 : 0 \quad \longrightarrow \quad \nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = \frac{1}{32} \cdot (6 : 13 : 13) \quad , \quad (1.57)$$

$$\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 0 : 0 : 1 \quad \longrightarrow \quad \nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = \frac{1}{32} \cdot (6 : 13 : 13) \quad . \quad (1.58)$$

Der wichtigste realistische Kanal der Neutrinoproduktion ist der Pionzerfall in Myonneutrino und Myon, wobei letzteres in Elektron, Elektronneutrino und Myonneutrino übergeht

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad ; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (1.59)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad ; \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \quad . \quad (1.60)$$

Insgesamt entstehen doppelt so viele Myon- wie Elektronneutrinos. Auf der Erde weist man wegen der Oszillationen jedoch alle drei Neutrinoarten in gleichen Maße nach!

$$\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 2 : 0 \quad \longrightarrow \quad \nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 1 : 1 \quad . \quad (1.61)$$

In Anbetracht der weniger glatten Zahlen in Gleichungen 1.56ff. mag dieses Ergebnis überraschen, umso mehr da es unter den Annahmen $\theta_{23} = 45^\circ$ und $\theta_{13} = 0^\circ$ für *jeden beliebigen* dritten Mischungswinkel θ_{12} erhalten bleibt. Für eine ausführlichere Diskussion siehe [GM02].

Die Energieverteilungen der Myon- und Elektronneutrinos sind unterschiedlich. Das wirkt sich beispielsweise durch Schwelleneffekte beim Nachweis aus, so dass obige Zahlen als Näherung verstanden werden müssen.

Zusätzlich zu den Oszillationen muss man die Wechselwirkungen mit Materie berücksichtigen, denen ein Neutrino begegnet. Um Magnet- und Photonfelder, die geladene Teilchen und auch Licht beeinflussen können, braucht man sich nicht zu kümmern. Wie steht es mit dem Rest? Die mittlere Dichte des Universums entspricht etwa sechs Nukleonen pro Kubikmeter Weltall. Setzt man in Gleichung 1.35 die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit auf $W = 1 - \frac{1}{e}$ und den Wirkungsquerschnitt eines 1 TeV-Neutrinos von $\sigma = 10^{-35} \text{cm}^2$ ein, dann folgt damit eine mittlere freie Weglänge¹⁷ von $d = 3.5 \cdot 10^{21} \text{ly}$. Das ist um elf Größenordnungen größer als unser Horizont, der sich aus dem Alter des Universums von etwa $13.7 \cdot 10^9 \text{a}$ auf ebensoviele Lichtjahre ergibt (vgl. [B⁺03]).

Abschätzungen dieser Art führen aber nur die prinzipiellen Dimensionen vor Augen. Die mittlere Dichte des Universums entspricht zwar oben genanntem Wert, allerdings sind nur wenige Prozent

¹⁷Ausgedrückt in Lichtjahren $1 \text{ly} = 9.46 \cdot 10^{12} \text{km}$.

davon tatsächlich baryonische Materie. Der Rest setzt sich hauptsächlich aus Dunkler Materie und Dunkler Energie zusammen, womit eine Wechselwirkung der Neutrinos noch unwahrscheinlicher wird – beispielsweise unter der Annahme, dass Dunkle Energie nicht schwach koppelt.

Zudem ist die Materie im All sehr inhomogen verteilt. Ein Neutrino kann auf seinem Weg Gebiete sehr hoher Dichte durchlaufen. Der geringe Wirkungsquerschnitt lässt es Staubwolken durchdringen, die für Photonen undurchlässig sind. In Gebieten sehr hoher Energiedichte, wie etwa im Inneren einer Supernovaexplosion¹⁸ und auch schon im Inneren der Sonne, kann ein Neutrino entweichen, während Photonen durch diffusionsähnliche Prozesse an die Oberfläche gelangen. Dadurch ermöglicht es die Neutrinospektroskopie, ein direktes Bild der Verhältnisse im Inneren solcher Zonen zu erlangen.

Bei extrem hohen Neutrinoenergien wird die Streuung am kosmischen Neutrinohintergrund interessant. Analog zum kosmischen Mikrowellenhintergrund erwartet man omniprésente Neutrinos mit sehr geringen Energien ($T \approx 1.9\text{K}$ [KKZ97]). Man schätzt für Neutrinos der Masse m_ν ab, dass es bei einer Neutrinoenergie von

$$E_\nu = \frac{m_{Z^0}^2}{2 \cdot m_\nu} \quad (1.62)$$

zur resonanten Produktion reeller Z^0 -Bosonen analog zur Glashow-Resonanz¹⁹ kommt. Mit der Masse des Z^0 von $m_{Z^0} = 91.2\text{ GeV}$ folgt

$$E_\nu \cdot (m_\nu/\text{eV}) \approx 4.2 \cdot 10^{21} \text{ eV} \quad . \quad (1.63)$$

Dieser Zusammenhang hat Auswirkungen auf die Diskussion um die Herkunft der kosmischen Strahlen höchster Energien, wie in Abschnitt 2.1 diskutiert wird.

Der Neutrinonachweis wird in der Beschreibung des Detektionsprinzips in Kapitel 3 ausführlich dargestellt. In der Diskussion um das Neutrino als kosmischem Informationsträger sollen drei Punkte der Vollständigkeit halber schon angesprochen werden. Das ist zum Einen die Notwendigkeit großer Detektoren wegen der geringen Wirkungsquerschnitte und zum Zweiten, dass man sich beim Nachweis auf die Geladene-Strom-Wechselwirkung am Nukleon konzentriert, ebenfalls aus Argumenten der Wechselwirkungswahrscheinlichkeit.

Der dritte Aspekt behandelt die Güte der Richtungsinformation eines Leptons, das aus einem Neutrino entstanden ist. Der Winkel zwischen einem Myonneutrino und dem daraus entstehenden Myon lässt sich parametrisieren über die Beziehung ([LM00])

$$\angle(\nu, \mu) \approx \frac{0.7^\circ}{(E_\nu/\text{TeV})^{0.7}} \quad . \quad (1.64)$$

Das Neutrino ist damit als kosmischer Informationsträger geeignet, um die bisherigen Methoden der Astronomie zu komplettieren. Die Untersuchung des Himmels im „Neutrinolicht“ ist ein wertvoller Informationsquell auf dem Weg, das Universum zu verstehen.

¹⁸Oberhalb der *Einschlussdichte* (engl. *trapping density*) von etwa $2 \cdot 10^{11} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sind auch Neutrinos „gefangen“ ([RSS97]).

Zum Vergleich: die Atomkerndichte liegt bei etwa $3 \cdot 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

¹⁹Die Glashow-Resonanz bezeichnet die starke Überhöhung der $\bar{\nu}_e e^-$ - gegenüber der $\nu_e e^-$ -Streuung bei resonanter W^- -Produktion in Materie.

2 Astrophysik

Nicht alles, was wir wissen, verstehen wir auch.

(Peter Tille)

In der Einleitung wird die Herkunft der kosmischen Strahlen als eines der wichtigsten ungelösten Rätsel der Astrophysik genannt. Nach der Auftaktdiskussion des letzten Kapitels über die Eigenschaften des Neutrinos und seiner Eignung zu Astronomie soll es im Folgenden um astrophysikalische Aspekte gehen. Was sind die kosmischen Strahlen, woher stammen sie und wie erhalten sie ihre hohe Energie? Unser heutiger Kenntnisstand wird in Abschnitt 2.1 vorgestellt. Danach geht es um die Teilchen, die entstehen, wenn kosmische Strahlung mit der Materie der Erdatmosphäre in Wechselwirkung tritt. Für Neutrinooteleskope sind dabei besonders die entstehenden Flüsse atmosphärischer Myonen und Neutrinos interessant (Abschnitt 2.2).

Der verbleibende Teil des Kapitels behandelt die Quellen der kosmischen Strahlen. Es wird zunächst der Mechanismus der *Fermi-Beschleunigung* diskutiert, der modelliert, wie geladene Teilchen höchster Energien im Universum erzeugt werden können (Abschnitt 2.3). Danach geht es um astronomische Objekte, bei denen diese Mechanismen verwirklicht sein können (Abschnitt 2.4). Insbesondere die *Aktiven Galaktischen Kerne* stehen im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit, da sie nicht nur Emissionen in nahezu allen Bereichen des elektromagnetischen Spektrums zeigen, sondern weil einige zudem als Quellen ultrahochenergetischer Photonen¹ identifiziert worden sind ([A⁺00, Aha99]).

Es existieren zwei grundlegende Modelle für Produktionsmechanismen dieser hochenergetischen Photonen, die entweder auf der Beschleunigung von Elektronen oder von Protonen beruhen. Der Nachweis, dass einer der Aktiven Galaktischen Kerne eine Neutrino-Punktquelle ist, würde ihn gleichzeitig als Quelle der kosmischen Strahlung identifizieren. Darin liegt die zentrale Motivation für die vorliegende Arbeit.

2.1 Die kosmische Strahlung

Wenn sich geladene Teilchen durch Materie bewegen, dann ionisieren sie einen Teil der Atome auf ihrem Weg. Auf der Erdoberfläche kann man eine natürlich entstehende Ionisation nachweisen, auch ohne dass künstliche radioaktive Quellen in der Nähe sind. Die Stärke der Ionisation nimmt als Funktion der Höhe zunächst ab. Ihre Ursache liegt – zumindest teilweise – in der natürlichen Radioaktivität der Erde.

¹Im TeV-Bereich.

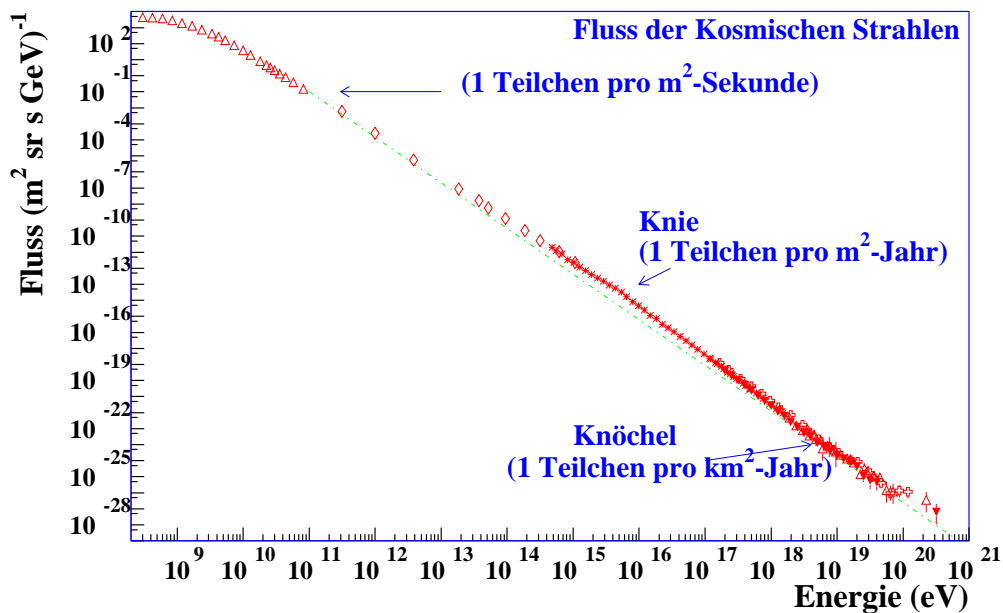


Abbildung 2.1: Das Spektrum der kosmischen Strahlen. Aufgetragen ist der differentielle Fluss gegen die Energie der einfallenden Teilchen. Das Spektrum folgt einem exponentiellen Verlauf. Der spektrale Index ändert sich bei etwa 10^{16} eV und 10^{18} eV, dem *Knie* und dem *Knöchel*. Adaptiert aus [CGS97].

Man stellt aber oberhalb von etwa 2000 m fest, dass die Ionisation mit wachsender Höhe wieder zunimmt. Es muss zusätzlich zur Aktivität der Erde eine weitere ionisierende Komponente geben.

Man identifiziert sie als einen Strom an geladenen Teilchen, der aus dem Universum kommt² und auf die Atmosphäre trifft. Er überspannt viele Größenordnungen an Energie und Fluss-Stärke. Man bezeichnet ihn als *kosmische Strahlung*.

In Abbildung 2.1 ist der Fluss an geladenen Teilchen gegen deren Energie aufgetragen. Das Spektrum folgt einem Potenzverlauf der Form ([BMT03])

$$\frac{dN(E)}{dE} \sim E^{-\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha = \begin{cases} 2.7 & \text{für} & E \lesssim 10^{16} \text{ eV} \\ \sim 3.1 & \text{für} & 10^{16} \text{ eV} \lesssim E \lesssim 10^{18} \text{ eV} \\ \sim 2.7 & \text{für} & E \gtrsim 10^{19} \text{ eV} \end{cases}, \quad (2.1)$$

wobei sich der *spektrale Index* α an zwei Stellen ändert.

Bei etwa 10^{16} eV wird das Spektrum etwas steiler. Diese Stelle bezeichnet man als *Knie*. Gut zwei Größenordnungen höher wechselt das Spektrum wieder auf den ursprünglichen spektralen Index zurück. Man spricht hier vom *Knöchel*.

²Der Entdecker der kosmischen Strahlung, Viktor Hess, hat die Sonne als Quelle früh ausgeschlossen, indem er während einer Sonnenfinsternis gemessen hat und keine Verringerung der kosmischen Strahlung sah ([Fed02]).

Direkte Messungen der kosmischen Strahlung sind nur in großer Höhe möglich. Je tiefer innerhalb der Atmosphäre man observiert, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass es davor zu einer Wechselwirkung gekommen ist. Man weist dann nur noch Folgeprodukte nach.

Noch nicht im Detail geklärt ist die Zusammensetzung der kosmischen Strahlung. Man weiß, dass sie hauptsächlich³ aus geladenen Kernen besteht ([H⁺02a]). Davon ist der größte Teil aus Wasserstoff, also aus Protonen. Es gibt aber auch schwerere Komponenten bis hin zum Eisen und darüber hinaus⁴.

Zudem gibt es Hinweise darauf, dass die Position des Knies für unterschiedliche Kerne an verschiedenen Stellen liegt. Je höher die Kernladung ist, desto höher ist auch die Energie, an der das Spektrum steiler wird ([Hoe02]). Oberhalb des Knies findet man wiederum vermehrt leichte Kerne.

Um die mittlere Verweildauer eines Teilchens der kosmischen Strahlung in der Milchstraße (τ_{KS}) zu bestimmen, gibt es zwei Datierungsmöglichkeiten, die beide auf der Betrachtung relativer Häufigkeiten beruhen.

- In der ersten Variante untersucht man Isotopenhäufigkeiten. Auf dem Weg vom Entstehungsort zur Erde zerfällt ein Teil der instabilen Nuklide. Aus dem Verhältnis der stabilen zu den instabilen Kernen eines Isotops kann man auf die Zeitdauer rückschließen, die ein Teilchen benötigt, um diesen Weg zu bewältigen. Das entspricht dem Prinzip der Radiokarbonmethode zur Altersbestimmung von biologischen Funden auf der Erde.
- Bei der zweiten Methode betrachtet man relative Elementhäufigkeiten. Durch Wechselwirkungen mit dem interstellaren Medium zerplatzen schwerere Kerne in Spallationsprozessen und leichtere entstehen. Je weiter ein Teilchen durch die Galaxis fliegt, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Vorgang. Über die relativen Elementhäufigkeiten hat man somit Zugang auf die mittlere Flugstrecke der kosmischen Strahlung.

Die mittlere Verweildauer ist energieabhängig und liegt in der Größenordnung von einigen Millionen Jahren. Bei der Spallation rechnet man mit der Entstehung von Gammastrahlung. Die Messungen des Compton Gamma Ray Observatory können deren Existenz belegen ([AA00]).

Als Quelle des niederenergetischen Teils des Spektrums bis zum Knie vermutet man die *Supernova-Überreste* in unserer Galaxis (vgl. Abschnitt 2.4). Durch die Supernovaexplosionen entstehen Schockwellen, in denen geladene Teilchen stark beschleunigt werden können (vgl. Abschnitt 2.3). Man kann abschätzen, dass die höchsten erreichbaren Energien gerade in der Region des Knies liegen. Zudem erwartet man eine höhere Grenze für schwerere Kerne ([LC83]).

Auch entspricht der erwartete Energieausstoß der Quellen den Verlusten durch die kosmische Strahlung, die unsere Galaxis verlässt, so dass sich ein Gleichgewichtszustand einstellen kann. Die entsprechenden Abschätzungen werden in der Diskussion der Supernova-Überreste in Abschnitt 2.4 ausgeführt.

³Ein Anteil von $< 1\%$ an Elektronen ist nachgewiesen worden [B⁺97].

⁴Eisen ist das Element mit der größten Bindungsenergie pro Nukleon im Kern. Höhere Ordnungszahlen können in thermonuklearen Fusionsprozessen nicht erreicht werden, weil eine weitere Verschmelzung von Kernen keinen Energiegewinn mehr bringt. Schwerere Kerne werden aber gerade in den Supernovaexplosionen durch Neutroneinfang gebildet (R- und S-Prozesse, siehe [KKZ97]).

Das Bild ist damit hinreichend konsistent und man geht davon aus, dass die kosmische Strahlung des Energiebereiches bis zum Knie in unserer Galaxis entsteht ([BMT03]).

Die Herkunft der kosmischen Strahlen oberhalb des Knies ist nicht geklärt. In der Milchstraße kennt man keine Objekte, die die entsprechenden Energien freisetzen können. Der detektierte Fluss ist ebenfalls fast isotrop, wengleich gewisse Abweichungen gemessen worden sind ([H⁺99b, U⁺00]). Allerdings reichen die Beobachtungen nicht aus, um Punktquellen zu identifizieren.

Ein großer Vorteil bei der Beobachtung der kosmischen Strahlung oberhalb von $E > 10^{19}$ eV – jenseits des Knöchels – ist der Erhalt der Richtungsinformation. Die Ablenkung in den Magnetfeldern im Universum ist so gering, dass die Herkunftsrichtung geladener Teilchen auf ihren Entstehungsort zurückzeigen sollte.

Es gibt vielversprechende Kandidaten für Punktquellen, die *Aktiven Galaktischen Kerne*, deren Modelle in Abschnitt 2.4 diskutiert werden. Die bisherigen Beobachtungen von Photonen im TeV-Bereich ([A⁺00, Aha99]) reichen aber nicht aus, um zu entscheiden, ob hier Elektronen oder Hadronen beschleunigt werden.

Bei den allerhöchsten Energien gibt es noch einen zusätzlichen erwarteten Effekt. Ein Proton kann mit einem Photon der kosmischen Hintergrundstrahlung wechselwirken. Jenseits einer Energie von $E_{\text{Proton}} \gtrsim 2 \cdot 10^{20}$ eV ist im Schwerpunktsystem die Schwelle erreicht, um die Deltaresonanz $\Delta(1232)$ anzuregen. Das System kann in ein Pion und ein Nukleon zerfallen ([H⁺02a]).

Die mittlere freie Weglänge von Protonen mit einer Energie von $\sim 3 \cdot 10^{20}$ eV ist daher kleiner als 100 Millionen Lichtjahre. Innerhalb dieses Abstandes kennt man aber keine Objekte, in denen eine Beschleunigung auf so hohe Energien stattfinden kann. Aus dieser Argumentation heraus erwartet man, dass das Spektrum der kosmischen Strahlung bei einer Energie von etwa 10^{21} eV abgeschnitten ist. Das bezeichnet man als *Greisen-Zatsepin-Kuzmin-* oder *GZK-Cutoff* ([Gre66, ZK66]).

Es wird auch diskutiert, ob man nicht knapp unterhalb der Schwelle eine Überhöhung im Spektrum sehen müsste. Wenn Protonen auf Energien jenseits von 10^{21} eV beschleunigt werden, dann könnten die Folgeprodukte aus obiger Reaktion zu mehr Ereignissen unterhalb der Schwelle führen.

Die derzeitigen Beobachtungen mit Luftschauerexperimenten sind noch nicht konsistent bezüglich der Frage, ob der GZK-Cutoff existiert oder nicht. Während das HiRes-Experiment keine Ereignisse oberhalb der Grenze findet ([AZ⁺02]), kann das AGASA-Experiment den Cutoff nicht bestätigen ([T⁺98, H⁺99c]). Allerdings ist die Kalibrierung der Ereignisenergie bei diesen Größenordnungen extrem schwierig. Auch verwenden die beiden Experimente unterschiedliche Beobachtungsmethoden, was den Vergleich erschwert.

Alternative Erklärungsmöglichkeiten für den hochenergetischen Anteil der beobachteten Spektren bieten die *Top-Down*-Szenarien, die ohne Beschleunigungsmechanismen auskommen. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 2.4 noch einmal aufgegriffen.

2.2 Atmosphärische Myonen und Neutrinos

In diesem Abschnitt werden die Flüsse an Myonen und Neutrinos diskutiert, die in den Luftschauern aus Wechselwirkungen der primären kosmischen Strahlung mit der Atmosphäre erzeugt werden.

Trifft ein Proton auf ein Molekül der Atmosphäre, dann entstehen hauptsächlich leichte Mesonen, insbesondere auch geladenen Pionen und Kaonen.



Diese können weiter zerfallen und produzieren dabei Myonen und Neutrinos ([H⁺02a]):

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad ; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{BR} > 99.9\% \quad (2.3)$$

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad ; \quad K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{BR} > 63.4\% \quad . \quad (2.4)$$

Dabei steht BR⁵ für die jeweiligen Verzweigungsverhältnisse. Das Pion zerfällt fast ausschließlich über diesen Kanal, im Kaonzerfall können auch weitere Pionen auftreten. Obige Zerfälle sind Zweikörperzerfälle und man kann zeigen, dass für die differentiellen Anzahldichten im Laborsystem gilt ([Gai90])

$$\frac{dn}{dE_\mu} = \frac{dn}{dE_\nu} = \begin{cases} \frac{m_{\pi,K}}{m_{\pi,K} - m_\mu} \cdot \frac{\text{BR}_{\pi,K}}{E_{\pi,K}} & \text{im kinematisch erlaubten Energiebereich,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Dabei sind $E_{\pi,K}$ und $m_{\pi,K}$ die Energie und die Masse der Mesonen, m_μ ist die Myonmasse⁶ und $\text{BR}_{\pi,K}$ die in Gleichung 2.3 angegebene Verzweigungsverhältnisse für den Zerfall nach Myon und Neutrino. Die Spektren für die Flüsse an Myonneutrinos und Myonen sind also flach. Allerdings sind die minimalen und maximalen Energien unterschiedlich. Für die Grenzen der Energien rechnet man im relativistischen Grenzfall nach

$$E_{\pi,K} \cdot \left(\frac{m_\mu^2}{m_{\pi,K}^2} \right) \leq E_\mu \leq E_{\pi,K} \quad . \quad (2.6)$$

$$0 \leq E_\nu \leq E_{\pi,K} \cdot \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_{\pi,K}^2} \right) \quad . \quad (2.7)$$

Das Myon zerfällt in der Regel weiter in ein Elektron und zwei Neutrinos

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad ; \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \quad . \quad (2.8)$$

Der zusätzliche Myonneutrinofluss, der hierbei entsteht, hat deutlich geringere Energien als die Komponente aus dem Mesonzerfall. Der Einfluss auf die Form des Spektrums bei hohen Energien ist gering.

⁵BR: englisch für *Branching Ratio*.

⁶Die Neutrinomasse kann in diesem Kontext vernachlässigt werden.

Teilchen	$\lambda/\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$	$\tau/\mu\text{s}$	s/m	ϵ/GeV
p,n	86	–	–	–
μ^\pm	–	2.2	$6.3 \cdot 10^5$	1.0
π^\pm	116	0.026	$5.5 \cdot 10^3$	115
K^\pm	138	0.012	750	850

Tabelle 2.1: Wechselwirkungslänge λ , Lebensdauer τ , Zerfallslänge s und kritische Energie ϵ von Nukleonen, Myonen, Pionen und Kaonen in Luftschauern bei einer Teilchenenergie von 100 GeV. Werte aus [H⁺02a, Bös02].

Anstelle der Lebensdauer τ eines Teilchens, nach der es mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{e}$ noch nicht zerfallen ist, gibt man die zugehörige *mittlere Wegstrecke* s an, in die auch die Teilchenmasse über den Lorentz-Faktor γ mit einfließt⁷. Es gilt

$$s = \beta\gamma c_{\text{vak}}\tau \quad . \quad (2.9)$$

Für die (hier) wichtigsten Teilchen sind Lebensdauer und mittlere Wegstrecke in Tabelle 2.1 dargestellt. Nur das Myon kann in der Regel Meereshöhe erreichen.

Ein Teil der entstehenden Partikel reagiert mit der Atmosphäre, statt zu zerfallen. Für sich allein erzeugt das eine exponentielle Abnahme des Flusses. Analog zur Zerfallslänge definiert man die *Wechselwirkungslänge* λ . Nach dieser Strecke ist ein Fluss um den Faktor $\frac{1}{e}$ abgesunken. Da die Dichte der Luft ρ in erster Näherung exponentiell mit der Höhe abnimmt (Barometrische Höhenformel),

$$\rho \propto e^{-\frac{h}{h_0}} \quad , \quad (2.10)$$

gibt man λ nicht als Länge an, sondern als Massenbelegung in den Einheiten Masse pro Fläche. Es ist

$$\lambda = \frac{m^{\text{Luft}}}{\sigma^{\text{Luft}}} \quad , \quad (2.11)$$

wobei m^{Luft} die Masse eines Luftmoleküles und σ^{Luft} der Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion ist. In Tabelle 2.1 sind die Wechselwirkungslängen für Teilchen mit einer Energie von etwa 100 GeV aufgelistet. Die Massenbelegung der *Standardatmosphäre* liegt auf Meereshöhe bei $1030 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$. Das ist für Mesonen ein Vielfaches der angegebenen Wechselwirkungslängen. Sie reagieren daher bereits in den oberen Schichten der Atmosphäre.

Um die Wechselwirkungslänge und die Zerfallslänge miteinander vergleichen zu können, formt man zweitens um, so dass sie auch von der Massenbelegung abhängt. Dazu definiert man die *schräge Tiefe* X. Das ist die Massenbelegung entlang der Flugrichtung des primären Teilchens

$$X = \int_l^\infty \rho(l) dl \quad . \quad (2.12)$$

⁷Es werden die üblichen Bezeichnungen $\beta = \frac{v}{c_{\text{vak}}}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ verwendet.

Für die Flussänderung $\Delta\Phi$ auf dem Wegstück Δl gilt damit

$$\Delta\Phi = -\Phi \cdot \frac{\Delta l}{s} = -\Phi \cdot \frac{\Delta X}{s \cdot \rho(l)} \quad . \quad (2.13)$$

Also rechnet man die Zerfallslänge folgendermaßen um ([Gai90])

$$\tilde{s} = s \cdot \rho(l) = c_{\text{vak}} \tau \frac{E}{mc^2} \frac{X \cos \theta}{h_0} = \frac{EX \cos \theta}{\epsilon} \quad . \quad (2.14)$$

Diese Näherung gilt nur für kleine Winkel gegen den Zenit $\theta < 60^\circ$, wenn man die Krümmung der Erde vernachlässigt. Alle unveränderlichen Größen sind in der Teilchenkonstante ϵ zusammengefasst. Man bezeichnet sie als *kritische Energie*. Für Teilchenenergien, die viel kleiner als die kritische Energie sind, ist es wahrscheinlicher, dass das Teilchen zerfällt. Für $E \gg \epsilon$ tritt eher eine Wechselwirkung ein. Auch die kritischen Energien sind in Tabelle 2.1 gezeigt.⁸

Um die Anzahl $N_h(E_h, X)$ für verschiedene Hadronen $h \in \{p, n, \pi, K, D, \dots\}$ im Luftschauer in Abhängigkeit der Energie und der schrägen Tiefe zu beschreiben, verwendet man ein System von gekoppelten Transportgleichungen

$$\frac{dN_h(E_h, X)}{dX} = - \left(\frac{1}{\lambda_h} + \frac{1}{\tilde{s}_h} \right) N_h(E_h, X) + \sum_{h'} \int F_{hh'}(E_h, E_{h'}) \frac{N_{h'}(E_{h'})}{\lambda_{h'}} dE_{h'} \quad . \quad (2.15)$$

Der linke Term beschreibt die Abnahme durch Wechselwirkung und Zerfall. Der rechte Term steht für die Zunahme an Teilchen der Sorte h , die in Übergängen anderer Teilchen h' entstehen. Es wird über alle möglichen Ausgangsteilchen summiert und über deren mögliche Energien integriert. Der Term

$$F_{hh'}(E_h, E_{h'}) \quad (2.16)$$

beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass ein Teilchen h' mit der Energie $E_{h'}$ ein Teilchen h der Energie E_h erzeugt.

Ausgehend vom Protonenspektrum

$$N_p(E) = N_p^0 \cdot E^{-\alpha} \quad (2.17)$$

kann man die Transportgleichungen 2.15 näherungsweise lösen. Das Spektrum der Myonenenergien erhält man aus den Spektren der zerfallenden Mesonen⁹. Man muss die Energieverteilung im Zerfall berücksichtigen (Gleichung 2.5) und für eine feste Myonenenergie über alle möglichen Mesonenenergien integrieren. Die Integrationsgrenzen erhält man, indem man die Energiebedingungen 2.6 umkehrt. Nach einer weiteren Integration über die schräge Tiefe X findet man für das Myonenspektrum

$$\frac{dN_\mu}{dE_\mu} \propto N_p^0 \cdot \left(\frac{A_\pi^\mu}{1 + B_\pi^\mu \cos \theta E_\mu / \epsilon_\pi} + 0.635 \cdot \frac{A_K^\mu}{1 + B_K^\mu \cos \theta E_\mu / \epsilon_K} + \dots \right) \quad . \quad (2.18)$$

⁸Die geringe kritische Energie der Myonen von 1 GeV drückt aus, dass es für ein 100 GeV Myon wahrscheinlicher ist zu reagieren als zu zerfallen. In der Atmosphäre kann man beide Prozesse vernachlässigen.

⁹Das entspricht einer Transportgleichung vom Typ 2.15, bei der man Zerfall und Wechselwirkung der Myonen in der Atmosphäre unberücksichtigt lässt.

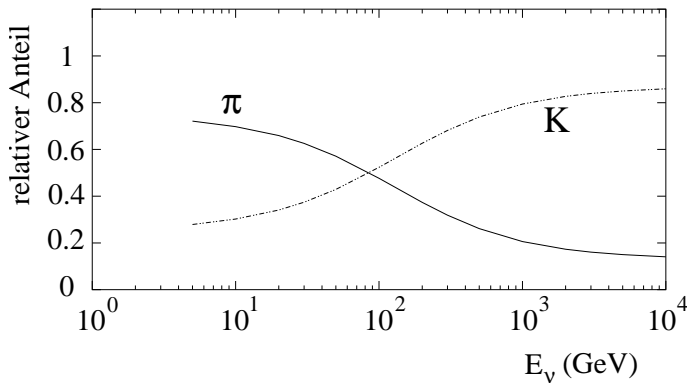


Abbildung 2.2: Relativer Anteil der Pionen und Kaonen an der Produktion atmosphärischer Myonen und Neutrinos als Funktion der Neutrinoenergie. Für größere Energien wird der Kaonanteil immer wichtiger. Entnommen aus [Gai02].

Die Parameter $A_{\pi,K}^\mu$ und $B_{\pi,K}^\mu$ beschreiben das Verhalten der Mesonen im Schauer. Sie hängen ab von den Wechselwirkungslängen $\lambda_{\pi,K}$, den Übergangswahrscheinlichkeiten 2.16 und dem spektralen Index α . Die Form der Terme für die verschiedenen Mesonen ist identisch. Sie unterscheiden sich nur in den Konstanten. Man findet vor dem Kaonterm das zugehörige Verzweigungsverhältnis als zusätzliches Gewicht.

Für steigende Energien wird eine Wechselwirkung gegenüber einem Zerfall wahrscheinlicher. Der entscheidende Parameter ist die kritische Energie ϵ . Da sie für Kaonen deutlich größer ist als für Pionen, wird der Kaonkanal in hohen Energiebereichen für das Myonspektrum immer wichtiger. Dies ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

Wie in Gleichung 2.18 angedeutet, entstehen auch noch schwerere Teilchen, wie beispielsweise das D-Meson. Die Situation ist analog zu den Abläufen bei den leichteren Mesonen. Allerdings ist die kritische Energie sehr hoch $\epsilon_D = 4 \cdot 10^7$ GeV. Es kommt nur sehr selten zu Wechselwirkungen, das D-Meson zerfällt fast instantan. Man bezeichnet die entstehenden Myonen als *prompte Myonen* oder als *Charm-Beitrag* wegen des Quarkinhaltes des D-Mesons. Für sehr große Energien dominieren sie

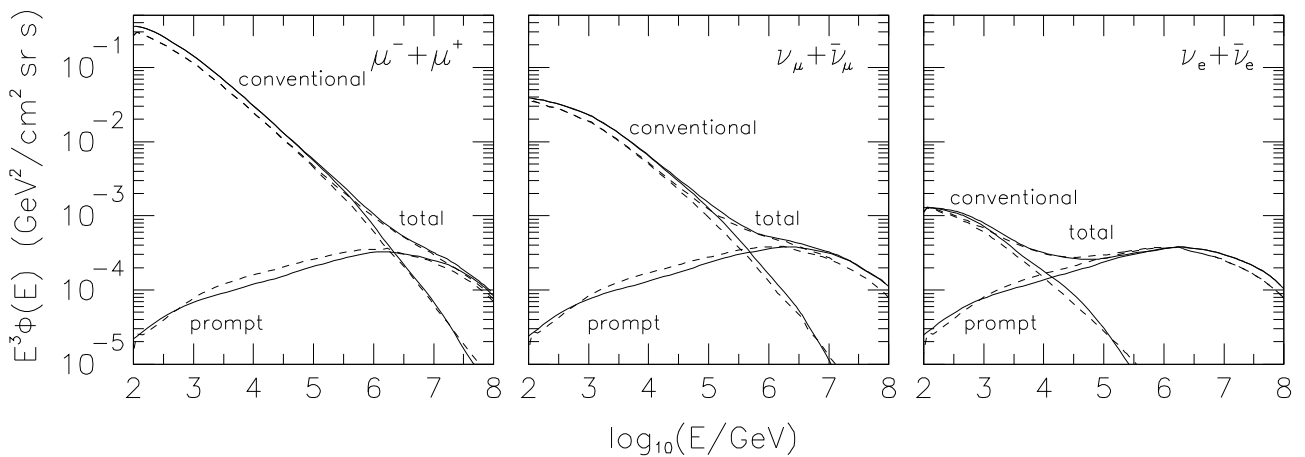


Abbildung 2.3: Vorhersagen für die Flüsse atmosphärischer Myonen und Neutrinos. Mit *conventional* sind die Flüsse aus Kaon- und Pionzerfall, mit *prompt* die Komponente aus dem D-Mesonzerfall bezeichnet. Die gestrichelte Linie zeigt eine analytische Näherung an die Simulation (durchgezogene Linie). Entnommen aus [TIG96].

das Spektrum. Das ist in Abbildung 2.3 (links) zu sehen.

Für Neutrinos ist die Situation sehr ähnlich. Man muss in der Integration die unterschiedlichen Energiegrenzen (Gleichung 2.7) berücksichtigen. Das Resultat ist von der gleichen Form wie bei den Myonen (Gleichung 2.18), nur die Konstanten sind unterschiedlich: $A_{\pi,K}^{\mu} \rightarrow A_{\pi,K}^{\nu}$ und $B_{\pi,K}^{\mu} \rightarrow B_{\pi,K}^{\nu}$ (siehe [Gai90]).

Das entstehende Spektrum ist in Abbildung 2.3 (Mitte) zu sehen. Für kleinere Energien ist der Neutrinofluss etwa eine Größenordnung kleiner als der Myonfluss (Abbildung 2.3 links). Das liegt daran, dass das Myon im Mittel mehr Energie bei einem Zerfall bekommt und das Ausgangsspektrum der kosmischen Strahlung mit der Energie fällt. Für höhere Energien wird die Myonmasse vernachlässigbar und die Flüsse gleichen sich einander an.

Um zu exakten Vorhersagen zu gelangen, müssen die Winkelabhängigkeiten berücksichtigt werden. Die Massenbelegung – und damit das Integral über die schräge Tiefe X – hängt vom genauen Weg des Schauers durch die Atmosphäre ab. Der ist aber für jede Richtung unterschiedlich. Auch die Eigenschaften der Atmosphäre selbst können sich ändern. Wegen der unterschiedlichen Temperaturen ist beispielsweise die Luft über dem Südpol im Winter (der Südhalbkugel) dichter als im Sommer. Die Wechselwirkungslänge sinkt und mehr Mesonen reagieren statt zu zerfallen. Der Myonfluss nimmt mit der Tiefe ab ([Bt99]).

Der Vollständigkeit halber ist in Abbildung 2.3 (rechts) der Fluss von Elektronneutrinos gezeigt. Sie entstehen hauptsächlich im Zerfall $K_L^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ bzw. $K_L^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e$. Für eine Diskussion über Elektronneutrinos und ihren Nachweis siehe [A⁺02d].

2.3 Die Fermi-Beschleunigung

Das Spektrum der kosmischen Strahlung ist proportional zu $E^{-\alpha}$ (Gleichung 2.1). Enrico Fermi hat schon 1949 einen Mechanismus vorgeschlagen, der dieses Verhalten erklärt ([Fer49]). Die zentrale Idee der *Fermi-Beschleunigung* liegt darin, dass ein geladenes Teilchen an einem ausgedehnten Objekt, das sich gegenüber seiner Umgebung bewegt, mehrfach beschleunigt wird.

Man betrachte eine Gaswolke, die sich mit der Geschwindigkeit v_w durch die Galaxis bewegt. Typische Geschwindigkeiten liegen bei etwa $v_w \sim 15 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ relativ zur Rotationsbewegung. Das ist klein bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit, $\beta_w < 10^{-4}$. Die Wolke ist teilweise ionisiert und transportiert daher ihre Magnetfelder mit.

Ein relativistisches, geladenes Teilchen mit $E \approx pc$, das in das Gas eintritt, wird an den Magnetfeldern elastisch gestreut. Man spricht von *kollisionsfreier Streuung*, in der keine Teilchenumwandlungen stattfinden. Im Bezugssystem der Wolke wird das einfliegende Teilchen ohne Energieaustausch gestreut, da die Gesamtmasse des Gases viel größer als die Teilchenmasse ist. Die Streuung ist zudem isotrop.

Im Laborsystem, das bedeutet im Referenzsystem der Galaxis oder der Erde, kann es zu einem Energiegewinn kommen. Dazu betrachtet man die Energie des Teilchens vor (E_1) und nach dem Stoß (E_2). Mit θ_1 und θ_2 bezeichnet man die Winkel zwischen den Flugrichtungen des Teilchens und der Wolke

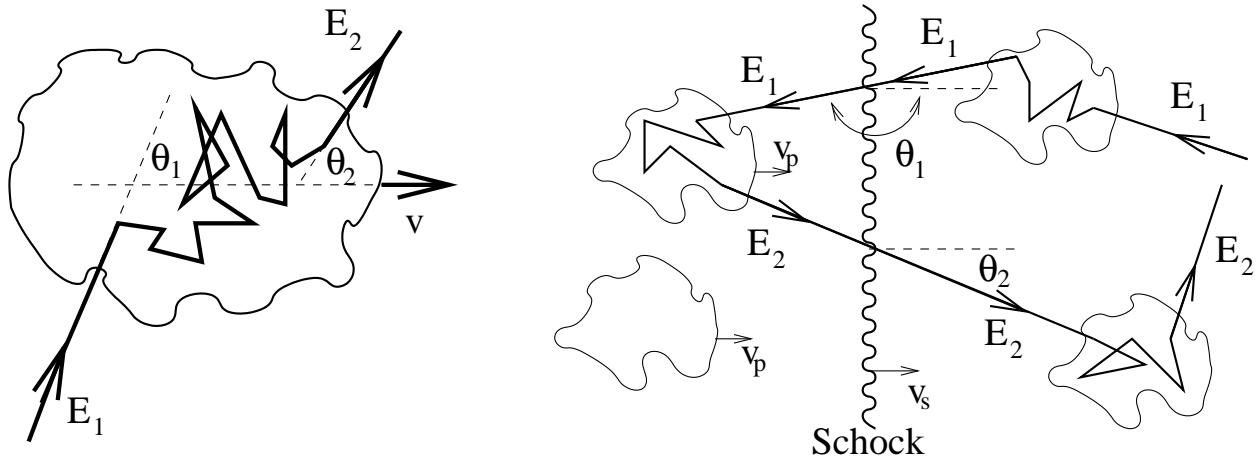


Abbildung 2.4: Der Mechanismus der Fermi-Beschleunigung. Die Energie eines einfallendes Teilchen wird von E_1 auf Energie E_2 verändert. **Links:** Beschleunigung an einer Gaswolke, die sich mit Geschwindigkeit v bewegt. **Rechts:** Beschleunigung an einer Schockfront. Erläuterung im Text.

(siehe Abbildung 2.4 links). Im mitbewegten Bezugssystem verwendet man gestrichene Größen zur Bezeichnung.

Man muss die Energie im Laborsystem vor dem Stoß in das bewegte System Lorentz-transformieren

$$E'_1 = \gamma E_1 (1 - \beta_w \cos \theta_1) \quad (2.19)$$

und danach wieder zurück ins Laborsystem

$$E_2 = \gamma E'_2 (1 + \beta_w \cos \theta'_2) \quad (2.20)$$

Im Bezugssystem der Wolke findet keine Änderung der Teilchenenergie statt, das bedeutet $E'_2 = E'_1$. Für den relativen Energiegewinn erhält man

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \gamma^2 (1 - \beta_w \cos \theta_1) (1 + \beta_w \cos \theta'_2) - 1 \quad (2.21)$$

Um den Erwartungswert des Energiegewinns zu bestimmen, muss man die Verteilung der Streuwinkel betrachten. Im System der Wolke ist kein Winkel bevorzugt. Daraus folgt für den Erwartungswert des Kosinus

$$\langle \cos \theta'_2 \rangle = 0 \quad (2.22)$$

Um $\langle \cos \theta_1 \rangle$ zu erhalten, geht man von einem Fluss ankommender Teilchen aus, der im Laborsystem isotrop ist. Durch die Bewegung der Wolke werden mehr Teilchen in sie eintreten, die ihr entgegenkommen, als solche, die in die gleiche Richtung fliegen. Die Wahrscheinlichkeit pro Raumwinkelelement ist proportional zu $(1 - \beta_w \cos \theta_1)$. Damit findet man $\langle \cos \theta_1 \rangle = -\frac{\beta_w}{3}$. Setzt man das in Gleichung 2.21 ein, dann erhält man als relativen Energiegewinn pro Kollision (für kleine β_w)

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{1 + \beta_w^2/3}{1 - \beta_w^2} - 1 \approx \frac{4}{3} \beta_w^2 \quad (2.23)$$

Er ist vom Quadrat der Wolkengeschwindigkeit abhängig. Man spricht von *Fermi-Beschleunigung zweiter Ordnung*. Der mittlere Energiegewinn ist sehr klein. Es gibt fast genauso viele Stöße mit Wolken, bei denen das Teilchen Energie verliert, wie solche, bei denen es gewinnt.

Es gibt auch eine *Fermi-Beschleunigung erster Ordnung*, bei der der Energiegewinn linear mit dem entsprechenden Geschwindigkeitsparameter zusammenhängt. Er kann bei der Beschleunigung an Schockwellen realisiert werden.

Eine Schockwelle kann beispielsweise bei einer Supernova entstehen, wenn Materie in das umgebende interstellare Medium geschossen wird. Deren Geschwindigkeit ist mit etwa $10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ deutlich größer als die Schallgeschwindigkeit im Medium, die circa $10 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ beträgt. Vor der ausgeworfenen Materie wird das interstellare Medium zusammen mit den darin gefangenen Magnetfeldern aufgehäuft und es entsteht eine Schockwelle.

Die Argumentation, die zum relativen Energiegewinn in Gleichung 2.21 geführt hat, ist auch für die Schockwelle korrekt. Man kann sich die beiden Seiten der Front als Gaswolken vorstellen, die sich aufeinander zu bewegen. Allerdings ändern sich die möglichen Eintritts- und Austrittswinkel der Teilchen.

Man betrachtet näherungsweise eine unendlich große ebene Schockfront. Die Eintrittswinkel müssen jetzt größer als 90° sein (vgl. Abbildung 2.4 rechts). Die Teilchen nähern sich der Front mit einer Geschwindigkeit proportional zu $\cos \theta_1$. Die Häufigkeit, mit der Teilchen unter dem Winkel θ_1 die Schockwelle überqueren, ist damit ebenfalls proportional zu $\cos \theta_1$. Daraus erhält man $\langle \cos \theta_1 \rangle = -\frac{2}{3}$. Aus einer analogen Argumentation folgt $\langle \cos \theta_2 \rangle = \frac{2}{3}$ und damit für den Energiegewinn pro Begegnung (für kleine β_s)

$$\epsilon := \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \approx \frac{4}{3} \beta_s \quad . \quad (2.24)$$

Eine Begegnung entspricht jetzt einem zweimaligen Überqueren der Grenze. Wegen der eingeschränkten Winkel ($\theta_1 > 90^\circ$, $\theta_2 < 90^\circ$) folgt aus Gleichung 2.21, dass im Fall der Schockwelle *jede* Begegnung mit einem Energiegewinn verknüpft ist.

Ein Teilchen mit Ausgangsenergie E_0 hat eine Energie E_k nach k Begegnungen mit dem Schock von

$$E_k = E_0 (1 + \epsilon)^k \quad . \quad (2.25)$$

Wie oft ein bestimmtes Teilchen den Schock überquert, schätzt man aus der *Fluchtwahrscheinlichkeit* P_{Flucht} , dass ein Teilchen zwischen zwei Begegnungen die Gegend des Schocks verlässt. Diese Wahrscheinlichkeit hängt von den Eigenschaften des Schocks, den Geschwindigkeiten und thermodynamischen Parametern der Medien ab. Für eine Diskussion siehe [Pro98].

Das integrale Energiespektrum $N(E)$ der Teilchen mit Energie größer E ist

$$N(E) \propto (1 - P_{\text{Flucht}})^{k(E)} \quad (2.26)$$

mit

$$k(E) = \frac{\ln(E/E_0)}{\ln(1 + \epsilon)} \quad . \quad (2.27)$$

Für das differentielle Spektrum folgt

$$\frac{dN}{dE} = \frac{1}{E_0} \cdot \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{\ln(1-P_{\text{Flucht}})}{\ln(1+\epsilon)} - 1} \propto E^{-\alpha} \quad (2.28)$$

Das entspricht genau der beobachteten Form der Abhängigkeit. Den spektralen Index berechnet man in diesem Modell zu $\alpha = 2$. Betrachtet man moderat relativistische Schocks, dann erhält man $2.1 \leq \alpha \leq 2.4$. Berücksichtigt man ferner, dass höherenergetische Teilchen die Magnetfelder der Galaxis leichter verlassen können, dann verändert sich der spektrale Index schlussendlich zum beobachteten $\alpha = 2.7$.

Eine Behandlung relativistischer Schocks mit β_s nahe 1 findet man in [Web87]. Die Form des Schocks kann zudem durch den Druck verändert werden, den die kosmische Strahlung erzeugt. Man erwartet daraus eine Verflachung des Spektrums bei höheren Energien. Siehe [Pro98].

Die maximal erreichbare Energie kann man einerseits aus den entstehenden Energieverlustprozessen der kosmischen Strahlung während des Beschleunigungsprozesses und andererseits aus den Ausmaßen an Zeit und Raum abschätzen, die für die Beschleunigung zur Verfügung stehen. Siehe [BS87].

2.4 Potenzielle kosmische Quellen hochenergetischer Neutrinos

Der zentrale Prozess, in dem hochenergetische Neutrinos entstehen können, ist der Zerfall leichter Mesonen, der schon bei den atmosphärischen Neutrinos in Abschnitt 2.2 diskutiert worden ist (siehe Gleichungen 2.3 und 2.4).

Wegen ihrer kurzen Lebensdauer können die Mesonen aber nicht selbst auf hohe Energien gebracht werden, da die Beschleunigungsmechanismen zu viel Zeit in Anspruch nehmen. An ihrer statt werden Protonen beschleunigt, die dann in Wechselwirkungen Pionen und Kaonen erzeugen.

Als Partner in diesen Wechselwirkungen diskutiert man einerseits andere Protonen des interstellaren Mediums oder sonstiger Materieansammlungen. Die andere Möglichkeit sind jedwelche Photonfelder, die in der Nähe der Beschleunigungszone existieren. Man spricht allgemein vom *Beam Dump*¹⁰, in dem die Umwandlungsprozesse von den Protonen zu den Neutrinos stattfinden.

Im Folgenden werden verschiedene Objekte diskutiert, die als Neutrinoquellen in Frage kommen. Dafür braucht man eine Quelle für Protonen und Schockfronten für Beschleunigungen. Zudem muss es Wechselwirkungspartner für die Umwandlung in Neutrinos geben, für die aber beispielsweise die beschleunigten Teilchen oder die der Schockfront selber dienen können.

Es werden zunächst die gängigen Vorstellungen von Supernova-Überresten, Aktiven Galaktischen Kernen und Mikroquasaren besprochen. Nach einem kurzen Ausflug in exotischere Gedankengänge schließt das Kapitel mit Vorhersagen von Neutrinoflüssen aus Modellrechnungen.

¹⁰Englisch für etwa „Strahlhalde“

2.4.1 Supernova-Überreste

Eine Supernova (Typ II) ist das katastrophale Ereignis am Ende der Fusionsprozesse in einem Stern. Jenseits von ^{56}Fe wird bei der Verschmelzung zweier Kerne keine Energie mehr frei. Ist der gesamte Brennstoff im Inneren eines massereichen Sterns verbraucht, dann wirkt der Gravitation kein Strahlungsdruck mehr entgegen und es kommt zum Kollaps. Zuerst vereinigen sich in der *Neutronisierung* Elektronen und Protonen durch inversen β -Zerfall zu Neutronen und es entstehen Elektronenneutrinos. Dann fällt der Stern in sich zusammen und es entsteht ein Bereich sehr hoher Energiedichte, den nur Neutrinos verlassen können¹¹. Fast 99% der Energie wird in Form von thermischen Neutrinos frei. Deren mittlere Energie beträgt allerdings nur etwa 15 MeV, was um Größenordnungen unter der Triggerschwelle von AMANDA liegt. Man kann nur die gleichzeitige Deposition von Licht in einem großen Gebiet nachweisen (siehe [Nt01, Hel00]).

Während des Kollapses wird der äußere Teil des Sterns mit großer Geschwindigkeit weggeschleudert. Sie liegt oberhalb der Schallgeschwindigkeit des umgebenden interstellaren Mediums und eine Schockwelle kann entstehen. Der innere Teil formt ein *Kompaktes Objekt*, das beispielsweise ein stellares Schwarzes Loch oder ein rotierender Neutronenstern, ein *Pulsar*, sein kann.

Die klassischen Beispiele von Supernova-Überresten in der Milchstraße sind der Krebsnebel, Cassiopeia A und der Überrest-1006, zugehörig zu der Supernova des gleichen Jahres.

Im Abschnitt über die kosmische Strahlung 2.1 werden die Supernova-Überreste als Quellen der kosmischen Strahlung diskutiert. Die maximal erreichbaren Teilchenenergien in den Schockfronten liegen in der Knieregion, wobei die Grenze für schwerere Kerne mit größerer Ladung etwas höher liegt. Sowohl die Existenz des Knies als auch die Abhängigkeit seiner Position von der Komposition sind Indizien dafür, dass die Supernova-Überreste Quellen der kosmischen Strahlung bis zur Energie des Knies sind. Weitere Messungen im Röntgenbereich bestätigen diese Theorie ([APG01]).

Im Folgenden soll der Energieverlust durch die kosmische Strahlung, die unsere Milchstraße verlässt, mit dem Energieausstoß aus allen Supernovae (Typ II) in unserer Galaxis verglichen werden. Zweite- ren schätzt man aus der kinetischen Energie der Supernova-Explosionen ab. Etwa alle 30 Jahre werden in unserer Milchstraße zehn Sonnenmassen mit einer Geschwindigkeit von $v \approx 5000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ durch eine Supernova emittiert. Die produzierte Leistung ist

$$P_{\text{SN}} = 10^{35} \text{W} \quad . \quad (2.29)$$

Für den Verlust bestimmt man zunächst die Gesamtenergie der kosmischen Strahlung unterhalb des Knies aus dem Volumen der galaktischen Scheibe $V_{\text{Milchstraße}}$

$$V_{\text{Milchstraße}} = \pi \cdot \text{Radius}^2 \cdot \text{Dicke} \approx \pi \cdot (5 \cdot 10^4 \text{ ly})^2 \cdot 800 \text{ ly} = 6.3 \cdot 10^{12} \text{ ly}^3 \quad (2.30)$$

und der Energiedichte der kosmischen Strahlung $\rho_{\text{KS}} = 1 \frac{\text{eV}}{\text{cm}^3}$. Um diese Energiedichte in der gesamten Milchstraße aufrecht zu erhalten, benötigt man eine Gesamtleistung

$$P_{\text{KS}} = \frac{V_{\text{Milchstraße}} \cdot \rho_{\text{KS}}}{\tau_{\text{KS}}} \quad , \quad (2.31)$$

¹¹Oberhalb einer Materiedichte von $\sim 3 \cdot 10^{11} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ können auch Neutrinos nicht mehr entweichen. Siehe [Mül03a].

wobei $\tau_{\text{KS}} \approx 10^6 \text{a}$ die typische Verweildauer eines Teilchens der kosmischen Strahlung in der Milchstraße ist.

Man errechnet eine benötigte Leistung von

$$P_{\text{KS}} = 10^{34} \text{W} \quad , \quad (2.32)$$

was nahe an P_{SN} liegt, insbesondere da hier keine Beschleunigungseffizienzen berücksichtigt worden sind. Die Ähnlichkeit der beiden Leistungen ist ein weiteres Indiz für die These, dass die kosmischen Strahlen bis zur Energie des Knies aus den Supernova-Überresten der Milchstraße stammen. Siehe auch [Gai01].

Vorhersagen über Neutrinoflüsse von Supernova-Überresten findet man in Abschnitt 2.4.7.

2.4.2 Aktive Galaktische Kerne

Die Galaxien am Himmel kann man grob in zwei Klassen unterteilen, diejenige der „normalen“ leuchtschwachen und diejenige der leuchtstarken Galaxien, die man als „aktiv“ bezeichnet. Dabei rührt die Aktivität jeweils vom zentralen Bereich her, weshalb man bei der zweiten Klasse von *Aktiven Galaktischen Kernen* (AGN¹²) spricht. Man sieht zudem häufig zwei lange Strukturen, die entlang der Rotationsachse des Systems auslaufen. Innerhalb dieser Strukturen, die man als *Jets*¹³ bezeichnet, kann man die Bewegung von Materieanhäufungen nach außen beobachten. Die Geschwindigkeiten innerhalb der Jets sind relativistisch. In Fällen, bei denen die Jetachse stark in Richtung Beobachter zeigt, erscheint die Bewegung der Materiehaufen sogar als überlichtschnell, was man aber bei relativistisch korrekter Interpretation als „optische Täuschung“ entlarven kann ([Ree66, Qin00]).

Das heutige Modell eines Aktiven Galaktischen Kernes setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen. Im Zentrum befindet sich ein supermassereiches Schwarzes Loch mit einer Masse von $10^6 - 10^{10}$ Sonnenmassen (M_{\odot}). Es zieht Materie aus der umgebenden Galaxie an. Dabei kommt es zur Ausbildung einer *Akkretionsscheibe*. Die Scheibengeometrie entsteht durch den Drehimpuls des Systems. Die gravitative Wechselwirkung der Partikel kann sie parallel zur Drehachse zusammenführen. In der Richtung senkrecht dazu, das bedeutet auf die Symmetrieachse hin, ist das nur möglich, wenn die Teilchen Drehimpuls abgeben.

Die Akkretionsscheibe wird permanent durch Strahlungsprozesse gekühlt und durch die Umwandlung von Gravitationspotenzial erwärmt. Die resultierende Temperatur ist so hoch, dass die Materie zum Teil ionisiert ist (Plasma). Die entstehenden Magnetfelder – insbesondere aus dem Kreisstrom der geladenen Teilchen um das Zentralobjekt – werden mitgerissen. Man spricht auch von eingefrorenen Magnetfeldlinien. Die Geometrie dieses Magnetfeldes stellt man sich in erster Näherung als unendlich lange Linien parallel zur Rotationsachse des Systems vor. Diese idealisierte Topologie

¹²Englisch: Active Galactic Nuclei

¹³Englisch für Strahl

wird jedoch durch die Bewegung des Plasmas deformiert, das die Magnetfeldlinien mitreißt. In unmittelbarer Nähe des supermassereichen Schwarzen Loches deformieren auch allgemein relativistische Effekte die Magnetfeldtopologie¹⁴.

Bevor ein Teilchen in das Schwarze Loch fallen kann, muss es sich von dem mitgeführten Magnetfeld lösen. Das ist die Aussage des *No-Hair-Theorems*¹⁵, das besagt, dass aus dem Schwarzen Loch keine Feldlinien hinausragen dürfen. Die Vorgänge, mit denen das bewerkstelligt wird, hängen sehr eng mit der Metrik rotierender Schwarzer Löcher, der *Kerr-Metrik*, zusammen. In der Nähe des Ereignishorizontes wird allem die Rotation aufgezwungen – einschließlich der Raumzeit. Die Magnetfeldlinien werden verdrillt und können sich bei entgegengesetzter Polarität auheben und vernichten. Das bezeichnet man als *Rekonnexion*. Die frei werdende Energie des Magnetfeldes wird auf das Plasma übertragen. Man vermutet hierin die treibende Kraft für die Ausbildung der Jets ([Cam95]).

Die Rotation des Schwarzen Loches ist notwendig, weil die rotierende Raumzeit die Magnetosphäre mitschleppt. Allerdings erscheint ein statisches – nicht rotierendes – Schwarzes Loch im Zentrum einer Galaxis als unwahrscheinlich, da es Materie mit Drehimpuls akkretiert und dadurch selbst Drehimpuls haben sollte.

Die Modellierung der Vorgänge in der Akkretionsscheibe und den Jets sind aktuelle Forschungsgebiete der *Magnetohydrodynamik* (MHD). In aufwändigen Simulationen versucht man, die dynamischen Prozesse nachzuempfinden.

In Abbildung 2.5 ist ein Aktiver Galaktischer Kern schematisch dargestellt. Man sieht das zentrale Schwarze Loch, die entstandenen Jets und die Akkretionsscheibe. In größerer Entfernung vom Schwarzen Loch ist die ankommende Materie noch nicht zu einer Scheibe verflacht worden. Es bildet sich ein Torus aus Staub.

Der Erfolg des AGN-Modells beruht darin, dass es mehrere Klassen astrophysikalischer Objekte gleichzeitig beschreiben kann. Je nach der Größe des Beobachtungswinkels zwischen Sichtlinie und Jetachse sieht ein Aktiver Galaktischer Kern unterschiedlich aus und man beobachtet verschiedene Eigenschaften der elektromagnetischen Spektren. Man unterscheidet zwei Typen.

Typ 1: Bei diesem Typ blickt man mehr oder weniger entlang der Symmetrieachse des Staubtorus. Die beobachteten Linien sind stark Doppler-verbreitert, da man das heiße Zentrum sieht. Ein typisches Beispiel sind die *Seyfertgalaxien (Typ 1)*.

Typ 2 ist die Kategorie, bei der man seitlich auf den Torus blickt. Das heiße Zentrum ist verborgen und Photonen von dort werden absorbiert und reemittiert. Ursprünglich härtere Photonen sind dann im infraroten Bereich zu finden. Das Spektrum ist von den Eigenschaften des Staubtorus dominiert. Man sieht schmale Absorptionslinien entsprechend der geringen Geschwindigkeiten des kalten Staubs.

Die *Blazare* sind besondere AGN vom Typ 1, bei denen man in den Jet hineinblickt. Die zeitliche Variabilität findet auf besonders kurzen Skalen statt. Die Veränderungen ereignen sich zum Teil auf der Zeitskala von Tagen. Daraus kann man ableiten, dass das Gebiet, aus dem die entsprechenden

¹⁴Das bezeichnet man als *Frame-Dragging*-Effekt. (*Frame*: Englisch für *Bezugssystem*; *Dragging*: Englisch für *Mitschleppen*.)

¹⁵Englisch für *Keine-Haare-Theorem*.

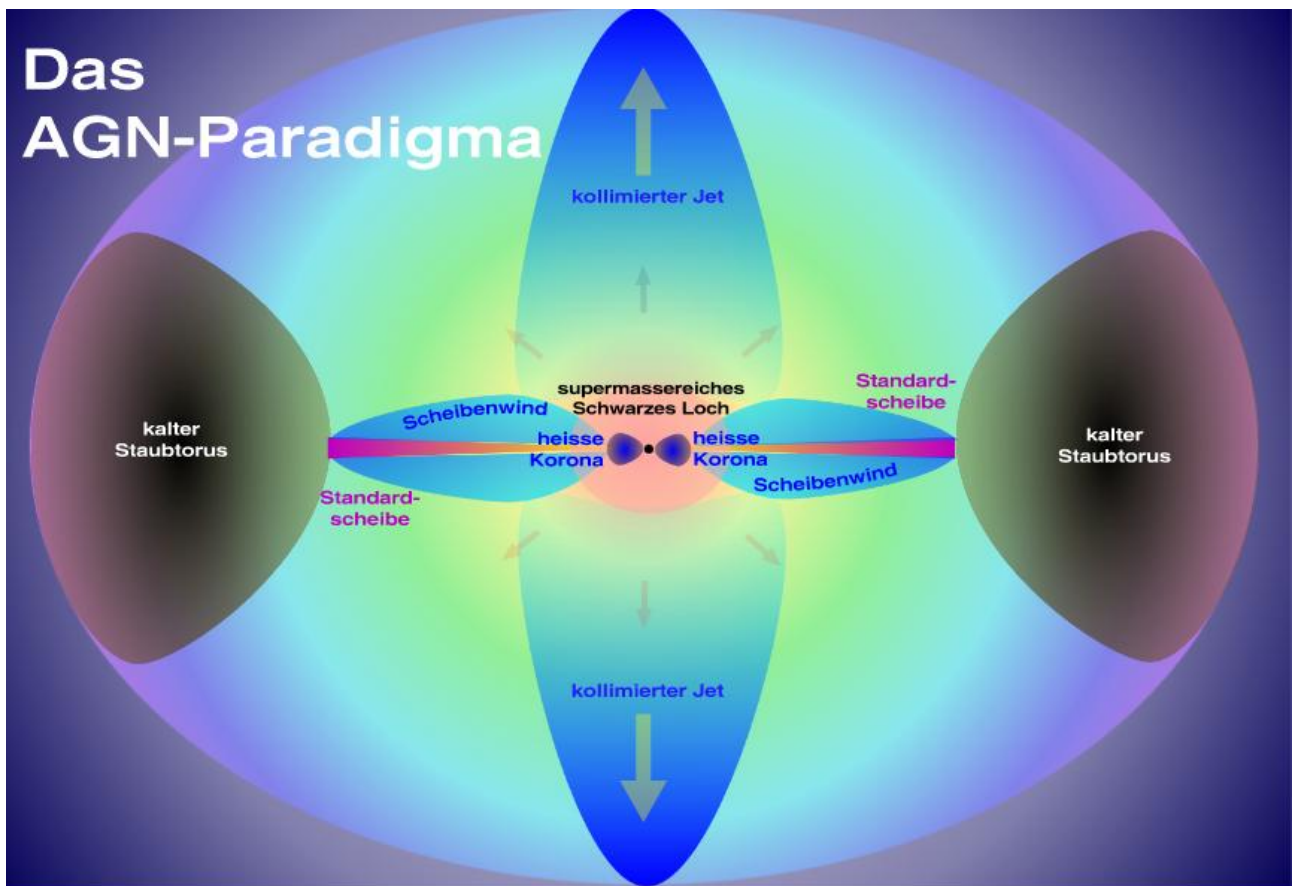


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung eines Aktiven Galaktischen Kerns. Das Schwarze Loch in der Mitte akkretiert Material aus der umgebenden Galaxie. Es kommt zur Ausbildung der Akkretionsscheibe, der Jets und des Staubtorus. Beide Achsen sind logarithmisch in der Darstellung. Quelle [Mül03b].

Prozesse hervorgehen, kleiner als unser Sonnensystem sein muss. Das untermauert das Modell, in dem man von einem relativen kleinen (wenn auch schweren) Zentralobjekt ausgeht, in dessen Nähe sich die entscheidenden Strahlungsmechanismen abspielen. Die prominentesten Vertreter sind die Objekte vom Typ *BL Lac* nach dem Prototyp im Sternbild Lacerta.

Es gibt noch ein weiteres Unterscheidungsmerkmal, das sich allerdings nicht im Rahmen des Vereinheitlichungsmodelles erklären lässt. Dabei geht es um die Stärke der Radioabstrahlung, der *radioloudness*. Das wird hier nicht diskutiert. Für eine übersichtliche Zusammenstellung der einzelnen Objekte, der Definition ihrer Bezeichnungen und der Einordnung in das Modellschema siehe [Bir02].

Man vermutet, dass sich in der Mitte *aller* Galaxien ein supermassereiches Schwarzes Loch befindet, und nicht nur in den Aktiven Galaktischen Kernen. Man geht davon aus, dass ein System aus Kern und Wirtsgalaxis seinen Zustand zwischen *aktiv* und *nicht aktiv* ändern kann – je nach Akkretionsrate. Damit wäre der Rahmen des vereinheitlichenden Modells noch deutlich weiter gesteckt. Die Zeitdauer, innerhalb dessen sich der Zustand ändert, hängt von der Masse des zentralen Schwarzen Loches

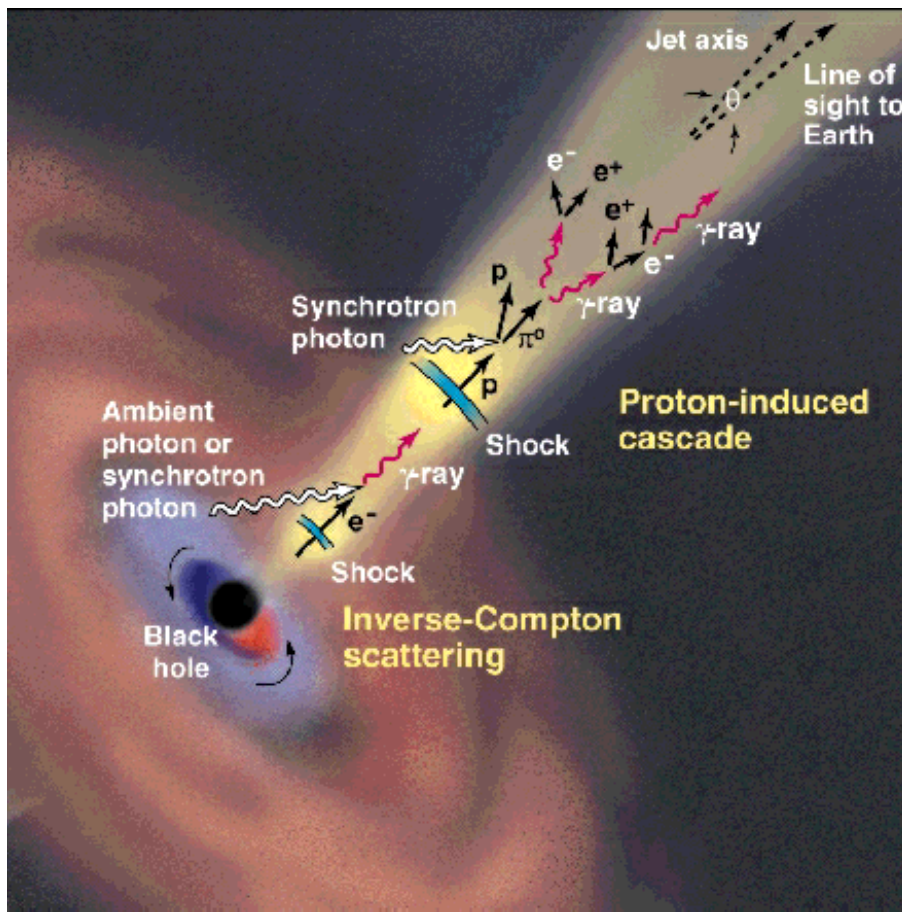


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung der Produktion hochenergetischer Photonen in Aktiven Galaktischen Kernen. In der Nähe des Schwarzen Loches ist die Beschleunigung von Elektronen und der inverse Compton-Prozess gezeigt. Weiter außen sieht man beschleunigte Protonen, die in Wechselwirkungen mit einem Photonfeld Pionen erzeugen. Bild entnommen aus [Buc98]

ab. Größenordnungen von einigen tausend Jahren könnten realistisch sein ([Mei00]).

Offen ist die Frage, welche Teilchensorten im Jet beschleunigt werden. Es ist nicht notwendigerweise so, dass die Materie aus der Akkretionsscheibe selbst in den Jet einfließt. Wenn die Felddichten elektromagnetischer Felder groß genug sind, kann es zur Bildung von Elektron-Positron-Paaren kommen, die dann dem Beschleunigungsprozess unterworfen werden. Man spricht von einem *Poynting-Fluss getriebenen Wind*. Die entsprechenden Modelle bezeichnet man als *leptonisch*.

Die TeV-Emission der Aktiven Galaktischen Kerne kann im leptonischen Jet-Modell durch zwei Mechanismen erklärt werden. Die niedrigeren Energien stammen entweder aus der Synchrotronstrahlung der Elektronen in der Nähe des Schwarzen Loches oder es sind Hintergrundphotonen beispielsweise der thermischen Strahlung der Akkretionsscheibe oder des kosmischen Hintergrunds. Die TeV-Gammastrahlen entstehen durch die Beschleunigung niederenergetischer Photonen durch inverse Comptonprozesse. Bei einem Stoß eines hochenergetischen Elektrons mit einem Photon wird auf

letzteres die notwendige Energie übertragen. Dieses Modell ist in Abbildung 2.6 im Anfangsbereich des Jets dargestellt.

In den *hadronischen Modellen* ist der Jet über einen magnetohydrodynamischen Fluss mit der Akkretionsscheibe verbunden. Sowohl Protonen als auch Elektronen werden beschleunigt. Damit ist der Begriff *hadronisch* etwas verwirrend, da die hadronischen Modelle immer eine leptonische Komponente haben.

Die hadronische Modellvorstellung ist in Abbildung 2.6 im Mittelbereich des Jets zu sehen. Hochenergetische Protonen erzeugen in Wechselwirkungen Pionen. Aus den neutralen Pionen entstehen die beobachteten TeV-Gammastrahlen. Aus den geladenen Pionen entstehen unter anderem Myonenneutrinos. Die Wechselwirkung findet in verschiedenen Modellen entweder mit Materie oder Photonen statt. Diese können entweder dem Jet oder dem interstellaren Medium entstammen.

Ein Neutrinosignal würde eindeutig auf hadronische Modelle rückschließen lassen. Die erwarteten Flussstärken sind Gegenstand aktueller Debatten. In Abschnitt 2.4.7 sind einige Vorhersagen vorgestellt. Es gibt auch modellunabhängige Flussgrenzen, die aus dem gemessenen Spektrum der kosmischen Strahlen und einfachen Annahmen über Zusammenhänge zum Spektrum von Neutrinos aus der gleichen Quelle bestimmt werden. Waxman und Bahcall geben eine obere Grenze von $10^{-8} E_\nu^2 \text{ GeV cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ an, die in einem Energiebereich von $E_\nu = 10^3 \text{ GeV}$ bis $E_\nu = 10^{11} \text{ GeV}$ gültig sein soll ([WB99, BW01]). Mannheim, Protheroe und Rachen errechnen innerhalb des Intervalls $E_\nu \in [10^7 \text{ GeV}, 10^9 \text{ GeV}]$ das gleiche Resultat und setzen außerhalb davon einen Grenzwert, der um zwei Größenordnungen darüber liegt ([MPR01]).

2.4.3 Mikroquasare

Mikroquasare sind eine Miniaturversion der Aktiven Galaktischen Kerne, die man in der Milchstraße gefunden hat. Anstelle eines supermassereichen Schwarzen Loches haben sie ein rotierendes kompaktes Objekt, dessen Masse in der Größenordnung von ein bis zehn Sonnenmassen liegt. Die zu akkretierende Materie wird einem Begleitstern entzogen. Ein Mikroquasar ist ein Binärsystem. Die kompakte Komponente in Mikroquasaren ist entweder ein stellares Schwarzes Loch oder ein Neutronenstern.

Wie im Fall der AGN kommt es bei Mikroquasaren zur Ausbildung einer Akkretionsscheibe und Materieauswürfen, die den Jets ähnlich sind. Allerdings findet alles auf einer völlig unterschiedlichen Größenskala statt. Die Akkretionsscheibe von Mikroquasaren hat einen Durchmesser von $\sim 10^3 \text{ km}$, bei Quasaren sind es $\sim 10^{16} \text{ km}$. Die Ausdehnung der Jets beträgt im kleinen Fall einige Lichtjahre, die Jets der großen Variante sind einige Millionen Lichtjahre lang. Es gibt bei Mikroquasaren kein Pendant zum Staubtorus.

Die scheinbar überlichtschnelle Bewegung entlang der auf uns gerichteten Jets kann bei Mikroquasaren direkt nachgewiesen werden – entgegen der indirekten Methoden über das Spektrum bei den Quasaren ([C⁺03a]). Die zeitliche Variabilität ist deutlich schneller gegenüber den Aktiven Galaktischen Kernen. Insbesondere scheint sich ein Wechsel zwischen aktiven und passiven Zuständen innerhalb von Tagen ereignen zu können ([Mei00]). Auch gibt es keinen kontinuierlichen Materiestrom.

Bei Mikroquasaren diskutiert man *unstetige Akkretionslösungen* bei denen die akkretierte Materie in Paketen (*blobs*¹⁶) ausgeworfen wird. Das zugehörige Modell wird als *Bullet-Ejection*¹⁷-Modell bezeichnet ([CGW⁺02]).

Inwiefern Mikroquasare als Quellen der kosmischen Strahlung höchster Energien in Frage kommen, ist eine offene Frage. Der prominenteste Mikroquasar auf der Nordhemisphäre ist SS433. Es gibt Modellrechnungen, die allein von dieser Quelle Ereignisraten von über 250 pro Jahr in den Neutrino-teleskopen der nächsten Generation vorhersagen ([GDLW02]).

2.4.4 Magnetare und transiente Quellen

Ein Magnetar ist ein langsam rotierender Neutronenstern. Es entsteht ein enorm großes Magnetfeld und in katastrophalen Vorgängen analog zu Erdbeben können große Energiemengen in kurzer Zeit freigesetzt werden. Es entstehen Signaturen mit großer zeitlicher Variabilität ([KDT03, ELTW03]).

Die Zeitabhängigkeiten von Neutrinoquellen werden in dieser Arbeit nicht untersucht. Wenn bei Punktquellen eine zeitliche Entwicklung vorliegt, dann wird durch die applizierten Suchmethoden implizit gemittelt.

Die vorhergesagten Neutrinoflüsse von Magnetaren sind eher gering ([Z⁺02]).

2.4.5 Versteckte und unerwartete Quellen

Wegen der geringen Wechselwirkungswahrscheinlichkeit von Neutrinos können sie Staubwolken durchdringen, die für alle anderen kosmischen Informationsträger undurchsichtig sind. Jegliche Modelle, die sich nicht unbedingt auf astronomische Beobachtung aus dem elektromagnetischen Spektrum stützen, können mit dieser Argumentation zu Neutrinoflüssen führen, selbst oder gerade wenn sie mit anderen Methoden nicht nachgewiesen werden konnten (siehe beispielsweise [BD01].)

Auch die Hoffnung, etwas Neues zu entdecken, wenn man mit einem neuen Nachweisgerät in den Himmel blickt, ist in der Geschichte noch nie enttäuscht worden. Es macht demnach Sinn, auch an Stellen zu suchen, die sich nicht mit Kandidatenobjekten in Verbindung bringen lassen.

2.4.6 Top-Down-Szenarien und WIMPs

In den bisher diskutierten Ansätzen zur Erklärung der kosmischen Strahlung werden niederenergetische Teilchen einem Beschleunigungsprozess ausgesetzt. Es gibt aber auch Modelle, die ohne Beschleunigung auskommen. Man bezeichnet sie als *Top-Down*¹⁸-Szenarien. Die größten Neutrinoflüsse

¹⁶Englisch für Klacks, Klumpen.

¹⁷*Bullet*: Englisch für Gewehrkugel, Geschoss, *Ejection*: Englisch für Auswurf.

¹⁸Englisch für *von oben herab*

werden dabei von der Paarvernichtung der *Weakly Interacting Massive Particles*¹⁹ (WIMPs) vorhergesagt. Diese Partikel haben deutlich größere Massen als alle bisher nachgewiesenen Elementarteilchen. Da sie nur schwach wechselwirken oder aber durch „neue Physik“, die bei Energien unterhalb der TeV-Skala unterdrückt ist, sind sie ideale Kandidaten für die *Dunkle Materie*. Im Rahmen der supersymmetrischen Modelle ([Neu99]) ist das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP²⁰) der meistdiskutierte Kandidat.

Wegen ihrer großen Masse erwartet man, dass WIMPs sich in der Nähe eines jeden schweren Objektes ansammeln können, beispielsweise in der Sonne oder der Erde. Da sie nur schwach wechselwirken, bildet sich ein Halo aus, der innerhalb des entsprechenden Körpers am dichtesten ist. Durch Neutrale-Strom Wechselwirkungen können sie sich soweit abkühlen, dass es an den Stellen mit der größten WIMP-Dichte zu paarweisen Annihilationen kommen kann. Die entstehenden Z^0 -Bosonen zerfallen auch in bekannte Teilchen, von denen nur Neutrinos die Produktionszonen verlassen können. Grenzen auf den Neutrinofluss aus dem Erdinneren findet man beispielsweise in [A⁺02c].

Neben den WIMPs gibt es noch andere Modelle mit sehr massereichen Teilchen. Die *topologischen Defekte* werden als Überbleibsel aus der Frühzeit des Universums diskutiert. In ihrem Zerfall können hochenergetische Teilchen aller Arten entstehen. Man erwartet aber keine signifikanten Neutrino-flüsse von eingeschränkten Raumbereichen, was der Signatur einer Punktquelle entsprechen würde ([B⁺01]).

2.4.7 Modellvorhersagen

In Abbildung 2.7 sind verschiedene Modellvorhersagen von Neutrinoströmen zu sehen. Aufgetragen ist der Fluss multipliziert mit dem Quadrat der Neutrinoenergie gegen die Neutrinoenergie. Ein E^{-2} -Spektrum ist in dieser Darstellung flach.

Zu sehen sind die diffusen Flüsse atmosphärischer und galaktischer Neutrinos als Bänder jeweils integriert über $1^\circ \times 1^\circ$ Gesichtsfeld. Erstere sind mehrfach nachgewiesen, die Abwesenheit der zweiten würde die Astroteilchenphysikgemeinschaft erschüttern, da aus der Wechselwirkung von kosmischen Strahlen mit der Materie des galaktischen Zentrums Neutrinos entstehen müssen. Man bezeichnet die galaktischen Neutrinos als *garantierte Quelle*. Die Breiten der Bänder geben die Unsicherheiten wieder.

Die eingezeichneten Modelle sind im Einzelnen

1. Modell von Nellen et al. für 3C273 mit Beschleunigung in der Nähe des Schwarzen Loches und Proton Beam Dump ([NMB93]).
2. Modell von Stecker und Salomon für 3C273 mit gleicher Beschleunigung und Photon Beam Dump ([SS96]).
3. Modell von Mannheim mit Beschleunigung im Jet und gemischtem Beam Dump ([Man93]).
4. Modell von Colafrancesco et al. für den Coma Cluster ([CB98]).

¹⁹Englisch für *schwach wechselwirkende massive Teilchen*.

²⁰Lightest Supersymmetric Particle

5. Modell I von Bednarek und Protheroe für den Krebsnebel ([BP97]).
6. Modell von Ingelman und Thunman für kosmische Strahlen, die in der Sonne Neutrinos erzeugen ([IT96]).
7. Modell von Gaisser et al. für den Supernova-Überrest IC444 ([GPS98]).
8. und für den Supernova-Überrest γ Cygni ([GPS98]).
9. Modell von Atoyan et al. für den Supernova-Überrest CasA, unter den Annahmen, dass Photon- und Neutrinofluss gleich groß sind, und dass die Neutrinoenergie im Mittel der halben Photonenergie entspricht ([AATV00]).

2.4.8 Gammastrahlenblitze, diffuse Flüsse und anderes

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Suche nach ortsfesten Punktquellen mit einem Neutrinoteleskop. Die wahrscheinlichsten Quellen hochenergetischer Neutrinos, die nicht direkt in diese

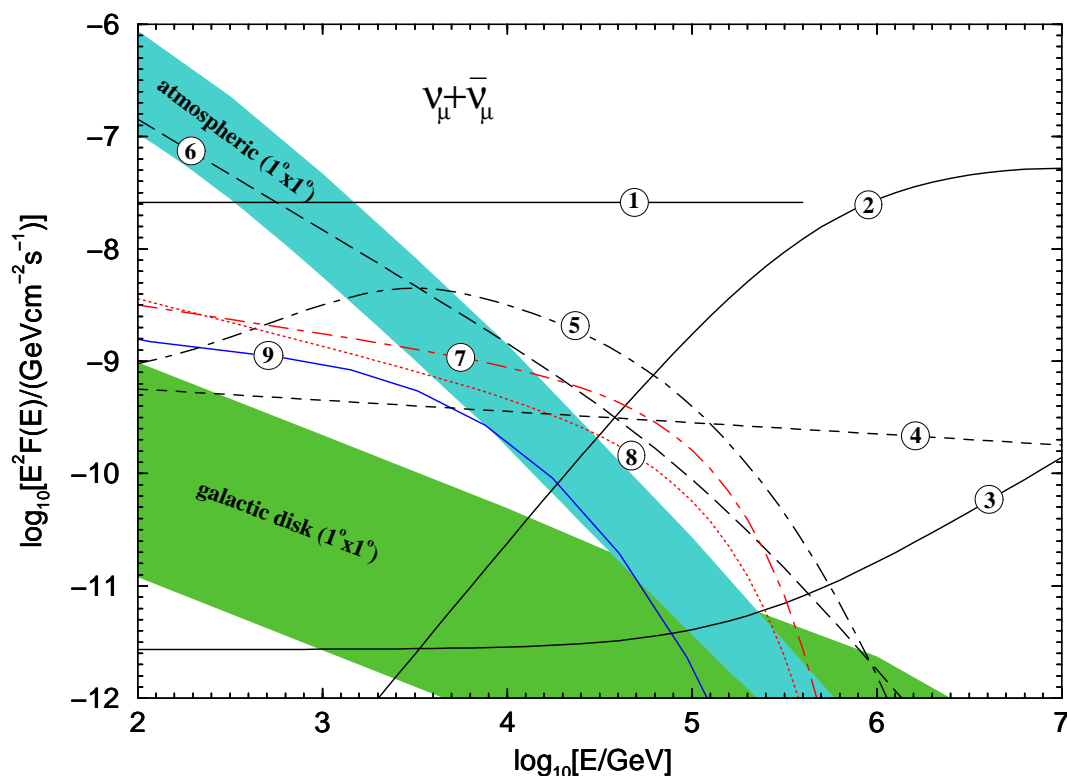


Abbildung 2.7: Neutrinofluss gegen die Neutrinoenergie. Verschiedene Modellvorhersagen sind eingezeichnet, die im Text beschrieben werden. Auf der y-Achse ist der Fluss mit dem Quadrat der Neutrinoenergie multipliziert dargestellt. Entnommen aus [LM00]. Modelle im Text.

Kategorie fallen, sind die *Gammastrahlenblitze* (GRB²¹). Es handelt sich dabei um äußerst hochenergetische Ausbrüche von relativ kurzer Dauer in der Größenordnung von Millisekunden bis Minuten. Die Gammastrahlenblitze werden als Quelle der hochenergetischen kosmischen Strahlen diskutiert und man erwartet Flüsse hochenergetischer Neutrinos ([Wax00]). Die Beschreibung entsprechender Untersuchungen mit dem AMANDA-Detektor findet man in [A⁺03b].

Um das Bild abzurunden, sollen im Folgenden noch einige weitere physikalischen Fragestellungen aufgelistet werden, die man mit Neutrinoteleskopen untersucht.

- Die Suche nach diffusen Neutrinoströmen ([Ahr03]).
- Die Suche nach Elektron- und Tauneutrinos ([A⁺03c]).
- Die Suche nach magnetischen Monopolen und anderen topologischen Defekten ([Nie00]).
- Der Nachweis von Supernovaexplosionen und die Teilnahme am Supernovafrühwarnsystem SNEWS²² ([A⁺02e, Nt01, HSV99]).
- Die Untersuchung des *Charm Beitrages* der atmosphärischen Neutrinos (vgl. Abschnitt 2.2, [Cos00, MNS⁺01]).
- Die Suche nach Neutrinos der allerhöchsten Energien ([LM00, Ht01]).
- Die Untersuchung der kosmischen Strahlen mittels atmosphärischer Myonen ([Raw03a]).
- Die Untersuchung der Parameter des umgebenden optischen Mediums (vgl. Kapitel 3, [PWC00, PW01b]).

²¹Für *Gamma Ray Bursts*.

²²Für *SuperNova Early Warning System*.

3 Detektorphysik

Ich habe etwas Schreckliches getan. Ich habe ein Teilchen vorausgesagt, das sich nicht nachweisen lässt.

(Wolfgang Pauli)

Im vorangegangenen Kapitel 2 ist dargestellt, dass der Nachweis von extraterrestrischen, hochenergetischen Neutrinos zur Lösung des Rätsels der kosmischen Strahlung beitragen kann. In Kapitel 1 über die Physik der Neutrinos wird gezeigt, dass die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit eines einzelnen Neutrinos äußerst gering ist. Ebenso hat man gesehen, dass es unmöglich ist, ein Neutrino direkt nachzuweisen. Vielmehr muss man versuchen, die Folgeprodukte zu detektieren, die in einer Neutrinoreaktion entstehen.

Im Folgenden geht es um die physikalischen Prozesse, die beim Nachweis von Neutrinos eine Rolle spielen. Abschnitt 3.1 behandelt die Idee, wie ein Neutrinoteleskop funktioniert. Dabei wird klar, dass eine genaue Kenntnis des Verhaltens von Myonen in Materie (Abschnitt 3.2) und von Licht in natürlich vorkommenden optischen Medien wie Eis (Abschnitt 3.3) von Nöten ist.

Das Kapitel schließt in Abschnitt 3.4 mit einer Diskussion der Kenngrößen, mittels derer man Neutrinoteleskope in ihrer Qualität beurteilen und miteinander vergleichen kann.

3.1 Das Detektionsprinzip eines Neutrinoteleskopes

Neutrinos können mit Materie über geladene oder neutrale Ströme wechselwirken. Im ersten Fall wandelt sich das Neutrino in das zugehörige geladene Lepton um, $\nu_l + N \rightarrow l + X$ (siehe Gleichung 1.39). Im zweiten Fall, $\nu_l + N \rightarrow \nu_l + N'$, bleibt es erhalten und überträgt nur Energie und Impuls auf den Stoßpartner. Meistens ist das getroffene Teilchen ein Nukleon. Bei den Energien, für die man sich interessiert, „zerplatzt“ der zugehörige Kern und es bildet sich ein hadronischer Schauer. Eine schematische Darstellung findet man in Abbildung 3.1.

Das Lepton, das durch den geladenen Strom entsteht, verhält sich je nach Familie unterschiedlich. Ein Elektron erzeugt einen elektromagnetischen Schauer. Myon und Tau laufen geradlinig weiter und deponieren Energie entlang ihrer Spur. Das Tau hat mit $\tau_\tau = 0.29$ ps eine deutlich kürzere Lebensdauer als das Myon mit $\tau_\mu = 2.2$ μ s. Mit einer Energie E_τ und einer Masse $m_\tau \approx 1.77$ GeV zerfällt das Tau nach einer Flugstrecke $s_\tau = \beta\gamma c\tau_\tau$ von (vgl. Gleichung 2.9)

$$s_\tau \approx \frac{E_\tau}{m_\tau} \cdot 90 \mu\text{m} \quad . \quad (3.1)$$

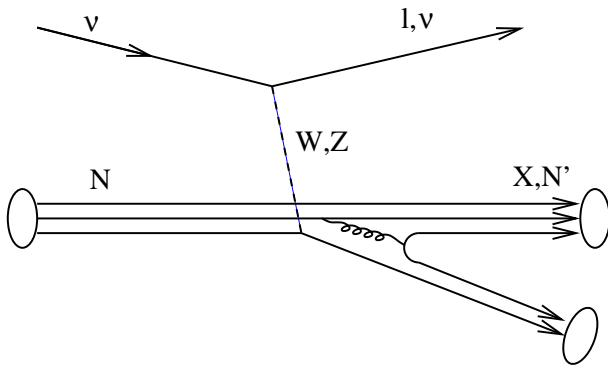


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Neutrino-Wechselwirkung mit Materie. Das einfliegende Neutrino tauscht entweder ein geladenes W^\pm - oder ein neutrales Z^0 -Boson mit dem Quark eines Nukleons aus. Im ersten Fall wandelt es sich in ein geladenes Lepton um. Das Nukleon zerplatzt und fragmentiert. Das gezeigte Bild ist eine starke Vereinfachung der tatsächlichen Situation, in der Wechselwirkungen mit dem See dominieren und die Fragmentation sehr viel mehr Teilchen ausbildet.

Am Zerfallsvertex entsteht ein zweiter Schauer. Damit die beiden Kaskaden räumlich getrennt sind¹, muss die Energie relativ groß sein. Für $E_\tau = 1\text{TeV}$, beträgt die Flugstrecke $s_\tau \approx 5\text{cm}$, für $E_\tau = 1\text{PeV}$ entsprechend $s_\tau \approx 50\text{m}$. Hochenergetische Tauereignisse werden wegen der beiden getrennten Schauer als *Double-Bang-Ereignisse* bezeichnet.

Das Myon hingegen stoppt, sobald es alle seine Energie abgegeben hat. Mit der längeren Lebensdauer und einer viel kleineren Masse kann der Zerfall vernachlässigt werden. Die typische Flugweite eines Myons von 1TeV Energie beträgt $\sim 2.5\text{km}$. Darauf wird in Abschnitt 3.2 ausführlicher eingegangen.

Phänomenologisch gibt es zwei Ereignisklassen, je nachdem, ob eine Spur entsteht oder nur ein Schauer. Wie eben diskutiert handelt es sich im ersten Fall ausschließlich um Myonneutrinos oder sehr hochenergetische – und damit sehr seltene – Tauneutrinos. Neutrale Ströme können keine Spuren erzeugen. Ein Neutrino kann zwar in der Reaktion $\nu + e \rightarrow \nu + e'$ ein Elektron mit großem Impuls erzeugen, dieses schauert aber sofort auf. Myonen oder Tauteilchen kommen nicht in Materie vor. Ein analoger Prozess, der Myon- oder Tauspuren erzeugen würde, findet also nicht statt.

¹Das Volumen eines Schauers ist zwar nur einige Kubikzentimeter groß, die entstehenden Photonen bewegen sich aber in einem Bereich, der durch die Transparenz des umgebenden Mediums bestimmt wird, typischerweise einige zehn Meter.

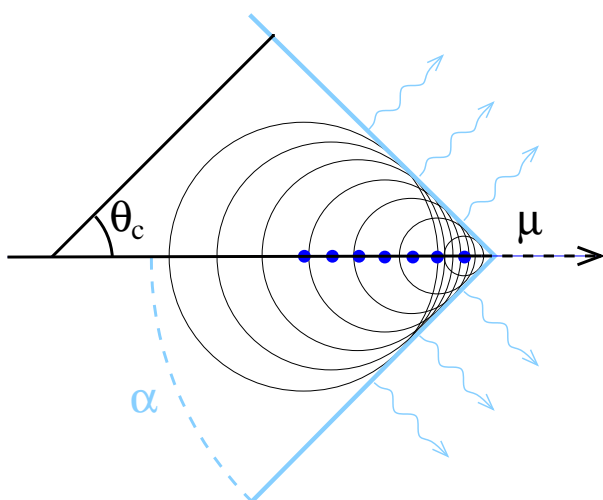


Abbildung 3.2: Die Entstehung des Cherenkovkegels im klassischen Bild. An jeder Stelle, die das Myon passiert, wird eine Kugelwelle abgestrahlt. In der Überlagerung entsteht eine Kegelfront. Der Cherenkovwinkel θ_c und der halbe Öffnungswinkel des Kegels α sind eingezeichnet.

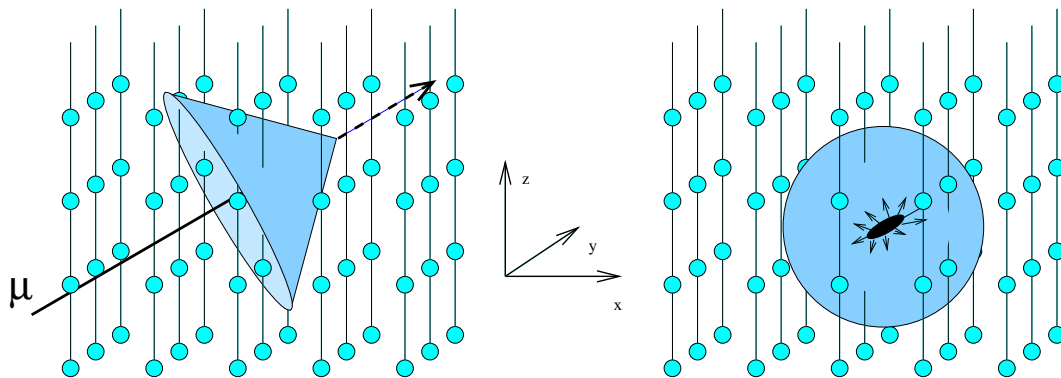


Abbildung 3.3: **Links:** Perspektivische Darstellung eines Myons beim Flug durch ein optisches Medium. Gezeigt ist das Myon als schwarzer Pfeil und der *zeitgleiche* Cherenkovkegel, den es erzeugt. Man findet auch Darstellungen der Photonbahnen, die alle von der gleichen Stelle der Myonspur ausgehen. Diese Kegel sind in Flugrichtung geöffnet. In der gewählten Darstellung entspricht die Kegeloberfläche den Orten aller Photonen zu einem festen Zeitpunkt. Das Myon befindet sich an der Spitze des Kegels.

Rechts: Ein Schauer im optischen Medium erzeugt eine Lichtwellenfront, die nur leicht von einer sphärischen Symmetrie abweicht.

An einem Netz aus lichtsensitiven Geräten kommen die Photonen in beiden Fällen zu jeweils unterschiedlichen Zeiten an.

Ein hochenergetisches Teilchen bewegt sich durch Materie annähernd mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_{vak} . In einem optischen Medium mit Brechungsindex n bildet sich analog zu dem Schallkegel eines Überschallflugzeuges ein Lichtkegel aus, da sich Photonen nur mit der Mediumslichtgeschwindigkeit

$$c_{\text{med}} = c_{\text{vak}} \cdot \frac{1}{n} \quad (3.2)$$

ausbreiten können. Im klassischen Bild überlagern sich die Kugelwellen, die an jeder Stelle abgestrahlt werden, zu einer kegelförmigen Wellenfront. Das ist in Abbildung 3.2 skizziert. Auch für das einzelne Photon bleibt die Kegelform als Abstrahlcharakteristik erhalten. Der zu Grunde liegende *Cherenkoeffekt* wird zu Beginn des Abschnittes 3.2 diskutiert.

Plaziert man in dem optischen Medium ein Netz aus lichtsensitiven Geräten, kann man die Spur des Myons aus den Ankunftszeiten des Lichtes rekonstruieren. Aus der Richtung und Energie der Spur kann man auf das ursprüngliche Neutrino rückschließen. Der insbesondere bei hohen Energien kleine Winkel zwischen den beiden ist hierbei von Vorteil (vgl. Gleichung 1.64).

Das Licht, das in einem elektromagnetischen oder hadronischen Schauer entsteht, ist auch hauptsächlich Cherenkovlicht der geladenen Teilchen. Es entsteht eine fast sphärische Wellenfront mit größerer Amplitude in Vorwärtsrichtung. Sie kann mit dem gleichen Netz an Photosensoren nachgewiesen und ihre Richtung auf einige 10° bestimmt werden. Die beiden Situationen sind in Abbildung 3.3 dargestellt.

Wegen der geringen Wechselwirkungswahrscheinlichkeit der Neutrinos benötigt man ein großes Nach-

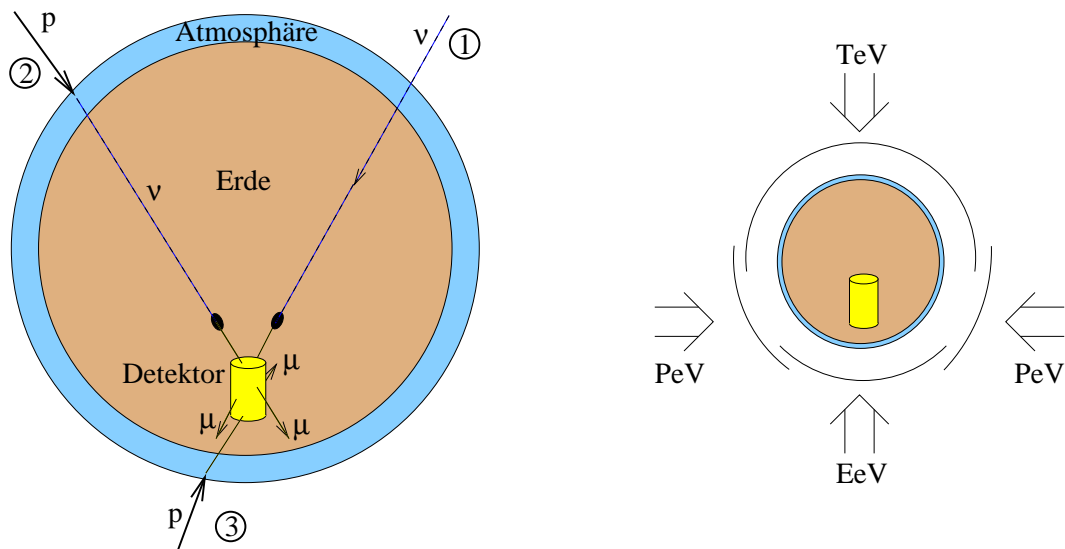


Abbildung 3.4: Die Erde als Neutrinofilter. **Links:** Nur Neutrinos können die Erde durchdringen. Der Großteil der Ereignisse, die im Detektor abwärts laufen, sind atmosphärische Myonen (3). Aufwärts laufende Ereignisse müssen aus Neutrinowechselwirkungen stammen. A priori kann man extraterrestrische Neutrinos (1) nicht unterscheiden von in der Atmosphäre erzeugten (2). **Rechts:** Je nach Energie des einfallenden Neutrinos sucht man in verschiedenen Richtungen. Für höchste Energien wird auch die Erde undurchlässig.

weisivolumen. Man verwendet natürlich vorkommende optische Medien, entweder Wasser in Seen und Ozeanen oder das Eis der Südpolkappe. Bei der Instrumentierung muss man einen Kompromiss finden zwischen der Größe des Detektors und den Abständen zwischen benachbarten Sensoren. Je feiner die Granularität, desto besser kann man niederenergetische Spuren rekonstruieren. Auch die Energiemessung wird besser. Größere Volumina erhöhen die Neutrinoereignisraten insbesondere höherenergetischer Neutrinos. Bei der Optimierung muss man auch das spektrale Verhalten der zu untersuchenden Quellen berücksichtigen. Typische Abstände zwischen Photosensoren liegen zwischen zehn und siebenzig Metern.

Mit der größte Unterschied eines Neutrinoteleskopes zu einem Fernrohr der herkömmlichen Astronomie ist die Blickrichtung. Während ein normales Fernrohr von seinem Standort mehr oder weniger nach *oben* blickt, konzentriert man sich bei den Neutrinos auf diejenigen, die von *unten*, also durch die Erde kommen² (siehe Abbildung 3.4 links). Das liegt an der großen Anzahl an atmosphärischen Myonen im Vergleich zu denjenigen Myonen, die durch atmosphärische Neutrinos erzeugt werden (vgl. Abschnitt 2.2). Je tiefer unter die Erdoberfläche man einen Detektor baut, desto größer wird der Anteil an Myonen aus Neutrinos. Die Erde erfüllt damit zweierlei Funktion; sie ist Strahlenschutz und Filter zugleich.

Für Neutrinos der allerhöchsten Energien wird auch die Erde undurchsichtig. Die Wirkungsquerschnitte werden so groß, dass die mittlere freie Neutrinoweglänge klein gegen den Erddurchmesser

²Das gilt für Myonneutrinos. Elektron- und Tauneutrinos können über den gesamten Raumwinkel nachgewiesen werden.

wird.³ In der Atmosphäre werden diese Energien allerdings so selten erreicht, dass man die Blickrichtung wieder umkehren kann. Eine Messung von horizontal fliegenden Neutrinos mit Energien im Bereich von PeV und von abwärts gerichteten mit $E_\nu > \text{EeV}$ ist praktisch untergrundfrei. Das ist in Abbildung 3.4 rechts skizziert.

Einem einzelnen Neutrino ist nicht anzusehen, ob es in der Atmosphäre oder außerhalb des Sonnensystems entstanden ist. Man muss die Energie- und Richtungsverteilungen eines Ensembles studieren.

3.2 Das Verhalten hochenergetischer Myonen in Materie

3.2.1 Der Cherenkoeffekt

Der in Analogie zum Überschallkegel eingeführte Cherenkoeffekt soll jetzt genauer diskutiert werden. Grundvoraussetzung ist, dass sich ein Teilchen schneller als mit der Lichtgeschwindigkeit des entsprechenden Mediums bewegt.

$$\beta > \frac{1}{n(\omega)} \quad . \quad (3.3)$$

Wegen der Dispersion, also der Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex $n(\omega)$, erhält man leicht unterschiedliche Schwellen für verschiedene Kreisfrequenzen des abgestrahlten Photons.

Für den Cherenkovwinkel, unter dem ein Photon abgestrahlt wird, gilt ([Gru93]):

$$\cos(\theta_c) = \frac{1}{\beta n(\omega)} \quad , \quad (3.4)$$

was man sich in Abbildung 3.2 geometrisch klar macht.

Der Brechungsindex und damit der Cherenkovwinkel in Gleichung 3.4 werden von der Phasengeschwindigkeit $\frac{c_{\text{vak}}}{n_p}$ bestimmt. Ein Photon propagiert mit der Gruppengeschwindigkeit $\frac{c_{\text{vak}}}{n_g}$ durch das Eis. Eine Diskussion der Auswirkungen für Neutrino teleskope wie AMANDA findet man in [PW01a]. Sie sind nicht ausschlaggebend.

Die Cherenkovphotonen formen einen Kegel mit dem halben Öffnungswinkel α ([MS53])

$$\alpha = \text{arccot} \left(\sqrt{\beta^2 n^2 - 1} + \frac{dn}{d\omega} \frac{n\omega\beta^2}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}} \right) \quad . \quad (3.5)$$

Für konstanten Brechungsindex steht die Photonausbreitungsrichtung senkrecht auf der Kegelfront.

³Für Tauneutrinos gibt es einen weiteren wichtigen Effekt, die *Tauregeneration*. Ein τ -Neutrino höchster Energie kann die Erde ebenfalls nicht ungehindert durchdringen. Das entstehende Tauteilchen fliegt aber wie oben beschrieben nur eine kurze Strecke, bevor es zerfällt. Dabei entsteht seinerseits ein τ -Neutrino, dessen Richtung wiederum nur unwesentlich von der Ausgangsrichtung abweicht. Das „neue“ Neutrino hat etwa ein Sechstel der Energie des „alten“. Dieser Vorgang kann sich mehrfach wiederholen. Auf der anderen Seite der Erde kommt ein Neutrino an, das eine entsprechend geringere Energie hat.

Myonen mit Energien oberhalb der typischen Nachweisschwelle eines Neutrinooteleskopes von $E_\mu \geq 10 \text{ GeV}$ liegen weit jenseits des Schwellenwertes von $E_\mu^{\text{schw.}} \approx 160 \text{ MeV}$. Ihre Geschwindigkeit ist praktisch gleich der Lichtgeschwindigkeit⁴ $\beta \approx 1$.

Die Anzahl an Photonen, die pro Wegstrecke und Wellenlänge λ abgestrahlt werden, beschreibt die Frank-Tamm-Formel ([Jac96])

$$\frac{d^2N}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha_f}{\lambda^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad , \quad (3.6)$$

wobei $\alpha_f \approx \frac{1}{137}$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet.

Für einen Wellenlängenbereich von 300 nm bis 500 nm integriert man Gleichung 3.6 unter Vernachlässigung der Dispersion. Für einen Cherenkovwinkel von 41° errechnet man, dass etwa 265 Cherenkovphotonen pro Zentimeter Flugstrecke erzeugt werden. Daraus bestimmt man mit der Lichtgeschwindigkeit c_{vak} und dem Planckschen Wirkungsquantum h einen Energieverlust von

$$\frac{dE_\mu}{dx} = \frac{dN}{dx} \cdot \langle E_\gamma \rangle = \frac{dN}{dx} \frac{h \cdot c_{\text{vak}}}{\langle \lambda \rangle} \approx 850 \text{ eV/cm} \quad . \quad (3.7)$$

Dieser Wert liegt weit unter dem Verlust durch andere Prozesse. Die dominanten Mechanismen sind Ionisation, Bremsstrahlung, photonukleare Reaktionen und Paarbildung. Dabei entstehen weitere geladene Teilchen, die ihrerseits Cherenkovlicht in der gleichen Richtung⁵ abstrahlen wie das primäre Myon. Der größte Teil des Lichtes, der zur Rekonstruktion verwendet wird, stammt von diesen Sekundärteilchen.

3.2.2 Die dominanten Energieverlustprozesse

Der Energieverlust eines Myons lässt sich für die interessanten Energiebereiche durch den folgenden Zusammenhang nähern ([Par00]):

$$\frac{dE_\mu}{dx} = a + b \cdot E_\mu \quad \text{mit} \quad (3.8)$$

$$a \approx 2 \text{ MeV/cm} \quad \text{und} \quad b \approx 3.6 \cdot 10^{-6} / \text{cm} \quad .$$

In erster Näherung sind die Größen a und b unabhängig von der Energie. Der konstante Energieverlust kommt durch Ionisation zu Stande. Der lineare Anteil fasst die so genannten *katastrophalen* Energieverluste zusammen. Sie hängen immer mit der Emission eines energiereichen Photons zusammen. Im Gegensatz zur Ionisation muss man ihren stochastischen Charakter berücksichtigen.

Bei einer kritischen Energie von etwa $E_{\text{krit}} \approx 600 \text{ GeV}$ sind der konstante und der lineare Term des Energieverlustes von gleicher Größe. Oberhalb überwiegen die katastrophalen Energieverluste, unterhalb die Ionisation.

Die einzelnen Prozesse sollen kurz diskutiert werden.

⁴Ein Myon mit der Masse $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}$ hat bei einer Energie von $E_\mu = 10 \text{ GeV}$ eine Geschwindigkeit von $\beta > 0.99994$.

⁵Das liegt am starken Lorentzboost.

Die Ionisation. Die kinetische Energie des Myons E_{kin} ist groß gegen das mittlere Ionisationspotenzial I der Atome. Das Myon „schlägt“ aus der Hülle ein Elektron heraus. Der Energieverlust wird durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben ([Per00]).

$$\frac{dE_{\mu}}{dx} \propto \frac{Z}{A} \frac{1}{E_{\text{kin}}} \left(\ln \left(\frac{4E_{\text{kin}}}{I \cdot (1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right) . \quad (3.9)$$

Der Energieverlust ist für ein Medium nur abhängig von dem Verhältnis der Zahl der Protonen Z zur Zahl aller Nukleonen A im Kern. Für ein Myon ist der Energieverlust minimal bei 0.4 GeV (für $Z : A \sim 1 : 2$). Der Anstieg oberhalb ist logarithmisch und damit sehr schwach. Bei hohen Energien können herausgeschlagene Elektronen ihrerseits weitere Kerne ionisieren. Man bezeichnet sie als δ -Elektronen.

Die Bremsstrahlung. Im Coulombfeld eines Kernes erfährt das Myon eine Beschleunigung. Es wird abgebremst und ein *Bremsstrahlung* photon emittiert. Für die Abstrahlung ist die Anwesenheit des Atoms nötig, um den zusätzlichen Rückstoß aufzunehmen. Ein freies Myon kann aus Gründen der Impulserhaltung kein reelles Photon abstrahlen.

Die photonukleare Reaktionen. Analog zur Ionisation kann auch aus dem Kern selber ein Teil herausgeschlagen werden. Durch den Austausch eines virtuellen Photons wird der Kern ange-regt. Ist die übermittelte Energie groß genug, wird er zerstört.

Die Paarbildung. Hat das Myon eine hinreichend hohe Energie, dann kann ein abgestrahltes Photon in ein Elektron-Positron-Paar aufspalten. Auch dieser Prozess kann nur in der Nähe eines weiteren geladenen Objektes stattfinden, das den Rückstoß aufnehmen kann. Die Energieschwelle für das Photon, damit der Prozess stattfinden kann, ist $E_{\text{paar}} = 1 \text{ MeV}$, falls der Rückstoß auf einen Kern übertragen wird, und doppelt so groß, falls ein Elektron ihn aufnimmt. Jenseits der entsprechend höheren Schwellen kommt es auch zur Myonpaarproduktion.

In Abbildung 3.5 (links) ist der Energieverlust eines Myons in seinen verschiedenen Anteilen dargestellt. Im rechten Teil der Abbildung ist die Reichweitenverteilung von Myonen verschiedener Energien zu sehen.

3.3 Das Verhalten von Licht in natürlichen optischen Medien

Ein Photon, das in einem der oben diskutierten Prozesse erzeugt wird, ist bei der Propagation zwei Effekten unterworfen. Zum Einen kann es vom umgebenden Medium absorbiert werden. Zum Anderen kann es seine Richtung durch einen Streuprozess ändern. Beide Effekte sind grundsätzlich stochastischer Natur.

Der erste Vorgang wird vollständig durch die mittlere Reichweite λ_{abs} beschrieben, die das Photon von der Erzeugung zur Absorption zurücklegt. Die Reichweitenverteilung $P(r)$ hat ein exponentielles Verhalten

$$P(r) \propto e^{-\frac{r}{\lambda_{\text{abs}}}} . \quad (3.10)$$

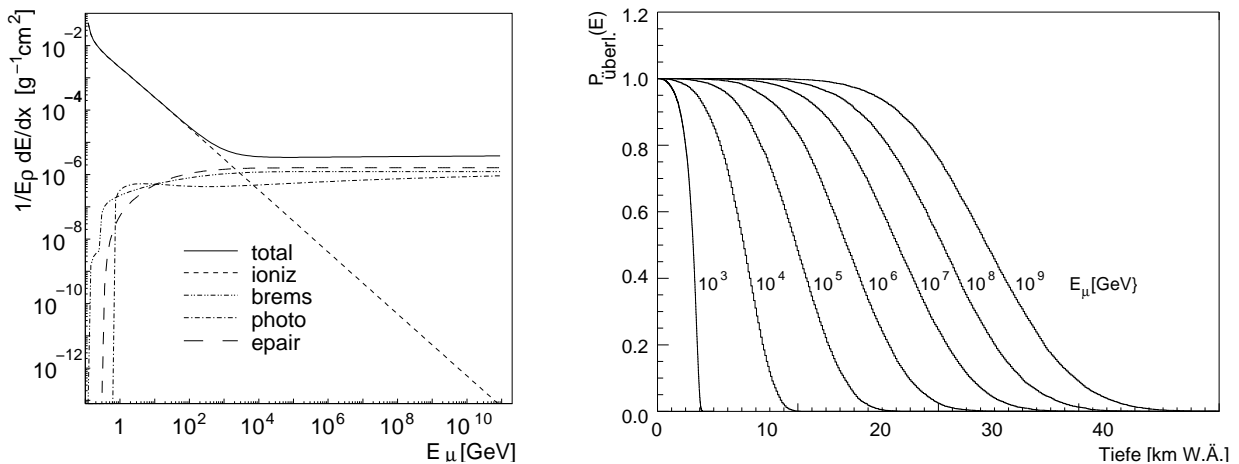


Abbildung 3.5: **Links:** Der Energieverlust von Myonen in Materie aufgeschlüsselt nach den verschiedenen Komponenten. Man beachte, dass auf der y-Achse der Energieverlust pro Streckenelement durch die Energie und die Dichte des Mediums dividiert ist. Entnommen aus [Mio01]. **Rechts:** Reichweitenverteilung von Myonen in Materie für verschiedene Ausgangsenergien ausgedrückt in wasseräquivalenter Tiefe. Entnommen aus [Hil96].

Der mittlere Abstand zwischen zwei Streuprozessen eines Photons, die Streulänge λ_{streu} , ist das Analogon der Absorptionslänge. Zusätzlich muss man noch den Streuwinkel betrachten. Die Angabe seiner kompletten Verteilung ist nötig, um das Medium vollständig zu charakterisieren. In guter Näherung kann man aber Aussagen allein unter Berücksichtigung des mittleren Streuwinkels machen.

Man betrachte beispielsweise den Fluss von einer punktförmigen Lichtquelle. Aus geometrischen Gründen nimmt er quadratisch mit dem Abstand ab. Die Absorption fügt noch einen exponentiellen Faktor hinzu (Gleichung 3.10). Die Streuung sorgt dafür, dass ein Photon nicht den kürzesten Weg von der Quelle zu einem Detektor im Abstand r nimmt. Für stark vorwärts streuende Medien wie Wasser und Eis gilt für den Erwartungswert der zurückgelegten Weglänge L ([B⁺99])

$$L(r) \approx r \sqrt{1 + \frac{r}{3} \frac{(1 - \langle \cos \theta \rangle)}{\lambda_{\text{streu}}}} \quad (3.11)$$

Dabei ist θ der Streuwinkel und $\langle \rangle$ steht für die Bildung des Erwartungswertes. Man muss den Abstand r in Gleichung 3.10 durch die Weglänge aus Gleichung 3.11 ersetzen. Zur Beschreibung der Streuwinkelverteilung ist die Angabe des Erwartungswertes ausreichend.

Man benötigt insgesamt sogar nur zwei Größen, um alle Eigenschaften des Mediums anzugeben, da der mittlere Streuwinkel und die Streulänge immer in der gleichen Beziehung auftreten. Die *effektive Streulänge*

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\lambda_{\text{streu}}}{1 - \langle \cos \theta \rangle} \quad (3.12)$$

und die Absorptionslänge sind die entscheidenden Angaben.⁶ Die Reichweitenverteilung ist dann

$$P(r) \propto \exp\left(-\frac{r}{\lambda_{\text{abs}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{r}{3\lambda_{\text{eff}}}}\right) \quad . \quad (3.13)$$

Häufig verwendet man auch die Kehrwerte der Parameter, die *Streu-* und *Absorptionskoeffizienten*⁷

$$b_{\text{streu}} = \frac{1}{\lambda_{\text{streu}}} \quad \text{und} \quad a_{\text{abs}} = \frac{1}{\lambda_{\text{abs}}} \quad . \quad (3.14)$$

Für die Messung der Energie einer Spur oder eines Schauers ist es sehr wichtig, den Photonfluss zu ermitteln, der aus der entsprechenden Ausgangskonfiguration folgt, also aus Geometrie und Abstrahlcharakteristik der Vorgänge.

Für die Rekonstruktion der Spurrichtung ist die Verteilung der Ankunftszeiten an den Photosensoren ausschlaggebend. In der Beschreibung verwendet man die *Zeitresiduen* t_{res} , das sind die Abweichungen der tatsächlichen Ankunftszeiten t_{ank} von den geometrisch erwarteten t_{geo} , die aus der Cherenkovbedingung folgen. Es gilt:

$$t_{\text{res}} = t_{\text{ank}} - t_{\text{geo}} \quad . \quad (3.15)$$

Negative Residuen sind unphysikalisch, sie treten nur durch Ungenauigkeiten in der Zeitmessung auf (vgl. Abschnitt 5.3).

Die explizite Verteilung $P(t_{\text{res}}, d)$ der Zeitresiduen an einem Sensor hängt von seinem Abstand d von der Quelle und deren Abstrahlcharakteristik ab. Man kann aber eine allgemeine Forderung stellen. Zerlegt man den Abstand d in zwei Teile d_1 und d_2 , dann muss sich die Zeitverzögerung additiv aus den Verzögerungen auf den beiden Teilstrecken zusammensetzen. Das führt auf ein Faltungsintegral

$$P(t_{\text{res}}, d) = \int P(t', d_1) \cdot P(t_{\text{res}} - t', d_2) dt' \quad . \quad (3.16)$$

Normierte Lösungen der Form

$$P(t_{\text{res}}, d) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \cdot \frac{1}{t_{\text{res}}} \cdot \left(\frac{t_{\text{res}}}{\tau}\right)^{\frac{d}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{t_{\text{res}}}{\tau}} \quad (3.17)$$

bezeichnet man AMANDA-kollaborationsintern als *Pandelfunktionen* nach dem Diplomanden Dirk Pandel. Sie enthalten zwei Parameter λ und τ , die beide Funktionen des Abstandes d sind. In der Praxis macht man entweder einen linearen Ansatz

$$\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_{\text{streu}} + \lambda_2 \cdot d \quad , \quad \tau = \tau_1 \cdot \lambda_{\text{streu}} + \tau_2 \cdot d \quad , \quad (3.18)$$

oder betrachtet λ und τ selbst als fest. Die konstanten Parametersätze $(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ beziehungsweise λ, τ bestimmt man durch Monte-Carlo-Simulationen der im Experiment vorliegenden Situation.

⁶Für manche geometrischen Vorgaben kann es sinnvoll sein, die beiden Angaben auf eine einzige zu reduzieren, die *Abschwächungslänge* λ_{schw} . Es handelt sich dabei um den Abstand, nach dem der entsprechende Photonfluss um den Faktor $\frac{1}{e}$ abgeschwächt ist.

⁷Entsprechend verwendet man auch den *Abschwächungskoeffizienten* $c_{\text{schw}} = \frac{1}{\lambda_{\text{schw}}} = b_{\text{streu}} + a_{\text{abs}} \quad .$

Die Weglänge L , die ein Photon von der Quelle bis zur Detektion zurückgelegt hat, hängt direkt mit dem Zeitresiduum zusammen. Es gilt

$$L(d, t_{\text{res}}) = d + c_{\text{med}} \cdot t_{\text{res}} \quad . \quad (3.19)$$

Um die Absorption in die Pandelfunktion einzufügen, multipliziert man einen Reichweitenterm dazu:

$$P(t_{\text{res}}, d) \rightarrow P(t_{\text{res}}, d) \cdot \exp\left(-\frac{d + c_{\text{med}} \cdot t_{\text{res}}}{\lambda_{\text{abs}}}\right) \quad (3.20)$$

und normiert wieder (siehe Abschnitt 5.2.2 und [Pan96]).

Die beschriebenen Vorgehensweisen sind Näherungen, die sich bei der Ereignisrekonstruktion als erfolgreich erwiesen haben. Zwei weitere Aspekte verkomplizieren die Lage: Zum Einen können die Mediumseigenschaften in Abhängigkeit des Ortes unterschiedlich sein (vgl. Abschnitt 4.2). Zum Anderen sind sie Funktionen der Frequenz des Lichts.

Der korrekte analytische Zugang führt auf komplizierte Pfadintegrale. Die Monte-Carlo-Simulationen, mit denen man die obigen Parameter gewinnt, entsprechen einer numerischen Evaluation vieler Pfade und damit einer Näherung der Integrale.

3.4 Parameter zur Beschreibung der Detektorqualität

Um sich ein Bild von der Qualität eines Detektors zu machen und um ihn mit anderen Experimenten zu vergleichen, versucht man, sein Leistungsvermögen durch wenige aussagekräftige Parameter wiederzugeben.

Für Unterwasser- bzw. Untereisteteleskope verwendet man zweierlei Parameter, einerseits diejenigen, die eine Aussage über ihre Genauigkeit machen, und andererseits solche, die ihre physische Größe mit ihrer Nachweiseffizienz verbinden.

3.4.1 Die Auflösung

Von jedem Ereignis möchte man Ankunftszeit, Richtung und Energie bestimmen. Die Genauigkeiten der jeweiligen Messungen bezeichnet man als *Auflösungen*. Diese werden im Folgenden diskutiert⁸.

⁸Die Ankunftszeit eines Ereignisses lässt sich dabei mit einer so hohen Präzision bestimmen, dass man für alle physikalischen Interpretationen von einer fehlerfreien Messung ausgehen kann. Sie wird nicht weiter behandelt.

Die Energieauflösung

Die Messung der Energie eines Ereignisses ist dagegen kompliziert. Bei der Wechselwirkung eines Myonneutrinos wird dessen Energie auf das entstehende Myon und den hadronischen Schauer verteilt (vgl. Abschnitt 1.3). Liegt der Schauer außerhalb des Detektors, kann man nur die Myonenergie bestimmen, liegt er innerhalb, dann müssen die Energiemessungen von Schauer und Spur gleichzeitig erfolgen, was die Lage weiter verkompliziert.

Die Lichtmenge, die von einem Myon erzeugt wird, ist proportional zur deponierten Energie. Für Myonen wird in Abschnitt 3.2 dargelegt, dass unterhalb der kritischen Energie der Energieverlust pro Flugstrecke kaum von der Myonenergie abhängig ist. Aus einer Messung der abgegebenen Lichtmenge kann man demnach erst oberhalb von etwa 1TeV auf die Myonenergie rückschließen.

Eine weitere Komplikation entsteht dadurch, dass ein Myon ständig Energie verliert, während es durch Wasser oder Eis fliegt. Liegt der Entstehungsort außerhalb des instrumentierten Volumens, ist nicht bekannt, wie weit entfernt das Myon entstanden ist. Man kann nur eine untere Grenze für die Energie bei der Erzeugung ermitteln.

Auf der anderen Seite ist die Schwankung der Spurlängenverteilung für kleine Spurenergien schmal. Kann man Anfangs- und Endpunkt einer Myonspur bestimmen, ist ein Rückschluss auf die Energie möglich. Je größer die Myonenergie ist, desto größer muss der benötigte Detektor sein, damit beide Punkte innerhalb des instrumentierten Volumens liegen. Auch fließt die Genauigkeit ihrer Ortsbestimmung in die Energieauflösung ein.

Bei der Energiebestimmung von Schauern verwendet man in erster Linie die deponierte Lichtmenge. Die Messung ist am besten, wenn das Ereignis vollständig innerhalb des Detektors liegt. Ein größerer Detektor ist dabei von Vorteil, weil dieser Fall dann häufiger eintritt.

Die für die Spurrekonstruktion optimierten Neutrino teleskope haben für Kalorimeter eine sehr geringe Dichte an Messinstrumenten. Man muss die Energie sowohl für Spuren als auch für Schauer aus wenigen Messpunkten zusammensetzen. Eine kurze Streulänge ist hierbei von Vorteil, weil ein Photon im Mittel näher an seinem Entstehungsort bleibt. Ein Lichtquant, das innerhalb des Detektors erzeugt wird, hat eine größere Wahrscheinlichkeit, einen Photosensor zu treffen, was einer erhöhten Nachweiseffizienz entspricht.

Die Energieauflösung liegt typischerweise bei 0.35 bis 0.5 in $\log(E/\text{GeV})$ für Myonen im Energiebereich von $\sim 1\text{ TeV}$ bis $\sim 1\text{ PeV}$ und 0.12 bis 0.2 in $\log(E/\text{GeV})$ für Elektronen im Bereich 1 TeV bis 100 TeV.

Die Energiebestimmung ist für das Thema dieser Arbeit nicht zentral. Für ausführlichere Diskussionen siehe [Mio01, Gee02, A⁺02d].

Die Winkelauflösung

Die Richtung einer Spur wird durch zwei Winkel angegeben. Man denkt sich eine Einheitssphäre um den Entstehungsvortex gelegt und verwendet den Durchstoßpunkt des Impulsvektors zur Beschreibung der Richtung.

Eine Möglichkeit, die Richtungsauflösung anzugeben, liegt in der Betrachtung des räumlichen Winkels zwischen wahrer und gefundener Spur. Auf obiger Einheitssphäre entspricht das dem Abstand der zugehörigen Durchstoßpunkte. Daher bezeichnet man den räumlichen Winkel auch als *Raumwinkelabstand*, wohingegen der *Raumwinkel* einem Flächenstück auf der Kugel entspricht.

Die präzisere Variante der Darstellung beschreibt die Richtungsauflösung in zwei Dimensionen. Man erhält je eine Unsicherheit für zwei orthogonale Richtungen auf der Kugeloberfläche und eine Korrelation zwischen den beiden. Die Ungenauigkeit entspricht dann einer kleinen Fläche auf der Kugel, deren Größe und Form man aus den drei Parametern ableiten kann.

Wählt man zur Darstellung der Spurrichtungen Kugelkoordinaten⁹, dann beschreibt man Orte auf der Einheitsphäre durch ihren Zenitwinkel θ und ihren Azimutwinkel ϕ . Ersterer entspricht der geographischen Breite und zweiterer der Länge auf der Kugel. Für den räumlichen Winkel ψ zwischen zwei Spuren mit Koordinaten (θ_1, ϕ_1) und (θ_2, ϕ_2) gilt

$$\cos \psi = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad . \quad (3.21)$$

Die Winkelauflösung wird in Kapitel 6 im Detail diskutiert werden. Dort wird beschrieben, wie für jedes einzelne Ereignis eine eigene Schätzung der Unsicherheit gemacht werden kann.

Im Gegensatz zur Energiemessung profitiert die Richtungsrekonstruktion von großen Streulängen, weil die Ankunftszeiten weniger verschmiert werden.

3.4.2 Effektive Fläche und effektives Volumen

Die beobachtete Rate an Ereignissen R_{obs} ist proportional zu dem Fluss Φ , der sie verursacht. Der zugehörige Proportionalitätsfaktor ist ein wichtiger detektorbeschreibender Parameter. Man bezeichnet ihn als *effektive Fläche* A_{eff} . Es gilt:

$$R_{\text{obs}} = \Phi \cdot A_{\text{eff}} \quad . \quad (3.22)$$

In Abschnitt 1.3 wird der Zusammenhang zwischen der wahren Rate R_{wahr} in einem Volumen V mit Teilchenzahldichte n und dem einfallenden Neutrinofluss Φ^ν erklärt. Der Wirkungsquerschnitt wird mit σ bezeichnet. Der Zusammenhang ist durch

$$R_{\text{wahr}} = \Phi^\nu \cdot \sigma \cdot n \cdot V \quad (3.23)$$

gegeben. Um von der wahren auf die beobachtete Rate zu kommen, muss die Nachweiseffizienz berücksichtigt werden. Ein Myon, das an der Stelle \vec{x} aus dem Neutrino entsteht, wird im Experiment mit der Wahrscheinlichkeit $\epsilon_\mu(\vec{x}) < 1$ im Detektor gesehen. Daraus folgt:

$$R_{\text{obs}} = \Phi^\nu \underbrace{\int_V \sigma \cdot n \cdot \epsilon_\mu dV}_{A_{\text{eff}}^\nu} \quad . \quad (3.24)$$

⁹Wie beispielsweise im AMANDA-Koordinatensystem, das in Anhang B definiert ist.

Die Integration läuft dabei über ein hinreichend großes Volumen, so dass $\epsilon_\mu(\vec{x})$ außerhalb davon verschwindend klein ist. Wegen der Abhängigkeit der Nachweiseffizienz von der Flugrichtung des Myons ist auch A_{eff}^ν für unterschiedliche Winkel verschieden. Da die Teilchenzahldichte ortsabhängig sein kann, weil sie in Wasser bzw. Eis und Gestein unterschiedlich ist, steht sie ebenfalls unter dem Integral.

Für die neutrino-effektive Fläche gibt es eine anschauliche Interpretation, die in Abbildung 3.6 skizziert ist. An jedem Nukleon in der Nähe des Detektors entspricht in diesem geometrischen Bild der Wirkungsquerschnitt einer kleinen Fläche. Genau dann, wenn ein Neutrino sie trifft, kommt es zu einer Wechselwirkung. Verkleinert man die jeweilige Fläche um die Nachweiseffizienz ϵ_μ , dann hat man ein „Heer“ an kleinen „Teleskopspiegeln“, die alle mit hundertprozentiger Effizienz Neutrinos nachweisen können. Die Summe über alle diese Flächen ist A_{eff}^ν . Sie entspricht der Spiegelfläche eines herkömmlichen Teleskopes (multipliziert mit der Photoneffizienz).

Bestimmen kann man diese Größe nur in der Simulation (vgl. Abschnitt 4.4). Dazu generiert man unter einem festen Winkel einen Neutrinofluss verteilt über eine große Fläche A_{gen} . Sie wird so gewählt, dass kein Neutrino, das an ihr vorbeifliegt, im Detektor nachgewiesen werden kann (vgl. Abbildung 3.6). Man propagiert die Neutrinos auf den Detektor zu und simuliert ihre Interaktion und den Nachweis der entstehenden Myonen. Hat man von N_{gen} erzeugten Neutrinos N_{obs} Ereignisse gezählt, dann folgt für die neutrino-effektive Fläche

$$A_{\text{eff}}^\nu = A_{\text{gen}} \cdot \frac{N_{\text{obs}}}{N_{\text{gen}}} \quad . \quad (3.25)$$

Diese Simulation lässt sich auch anders interpretieren. Alle Punkte, an denen ein Neutrino in ein Myon umgewandelt wird, liegen innerhalb eines großen Volumens V_{gen} (vgl. ebenfalls Abbildung 3.6). Wir definieren das *effektive Volumen* des Detektors V_{eff} über die Beziehungen

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{gen}} \cdot \frac{N_{\text{obs}}}{N_{\text{gen}}} = \int_V \epsilon_\mu dV \quad . \quad (3.26)$$

Das effektive Volumen für Myonen beschreibt die Größe eines Detektors, der mit 100%iger Effizienz eine Neutrino-Myon Umwandlung nachweisen kann, die in seinem Inneren passiert. Das effektive Volumen für Neutrinos ist genau das gleiche $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}^\nu = V_{\text{eff}}^\mu$, da es nur um den Ort der Umwandlung $\nu \rightarrow \mu$ geht.

Dagegen sind die effektiven Flächen für Neutrinos und Myonen sehr verschieden. Um A_{eff}^μ zu bestimmen, benötigt man den Myonfluss Φ^μ , der aus einem Neutrinofluss Φ^ν resultiert. Man erwartet, dass er proportional ist zum Wirkungsquerschnitt σ , der Teilchenzahldichte n , dem Neutrinofluss selber und der mittleren Reichweite eines Myons $\langle r_\mu \rangle$. Daraus folgt

$$\Phi^\mu = \Phi^\nu \cdot \sigma \cdot n \cdot \langle r_\mu \rangle \quad . \quad (3.27)$$

Dieser Zusammenhang wird in Anhang A explizit hergeleitet. Setzt man sie in Gleichung 3.24 ein, so erhält man

$$R_{\text{obs}} = \Phi^\mu \underbrace{\frac{1}{\langle r_\mu \rangle} \int_V \epsilon_\mu dV}_{A_{\text{eff}}^\mu} \quad . \quad (3.28)$$

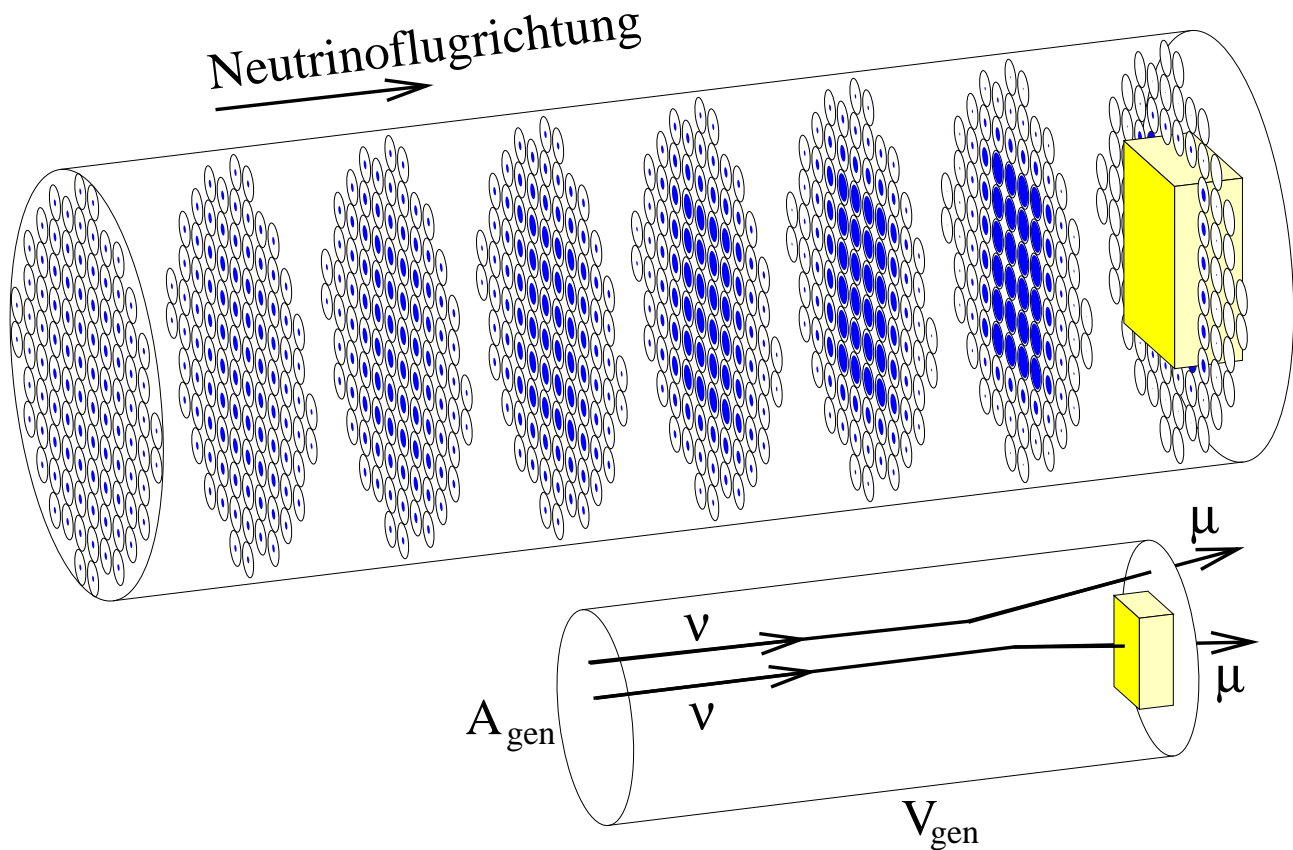


Abbildung 3.6: **Großes Bild:** Anschauliche Interpretation der Neutrino-effektiven Fläche für eine feste Neutrinoflugrichtung parallel zu dem Zylinder. Die offenen Kreise deuten die Wirkungsquerschnitte an, mit denen ein Neutrino eine Wechselwirkung an der entsprechenden Stelle macht. Sie sind stark vergrößert dargestellt und es sind exemplarisch einige Schnittebenen senkrecht zur Neutrino-richtung gezeigt. Die vollen Flächen sind um die Nachweiseffizienz verkleinert, mit der das entstehende Myon im Detektor (rechts im Bild) nachgewiesen werden kann. Je dichter am Detektionsvolumen ein Myon entsteht, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nachgewiesen werden kann. Die vollen Flächen sind kleiner, je weiter sie vom Detektor (in Flugrichtung) entfernt sind. Wegen des Winkels zwischen Neutrino- und Myonflugrichtung können auch Neutrinoereignisse detektiert werden, bei denen das Neutrino selbst am Detektor vorbei geflogen wäre. Daher ist die Grundfläche des gezeigten Volumens größer als der Detektorumriss.

Die Summe aller Wirkungsquerschnitte gewichtet mit ihren jeweiligen Effizienzen entspricht der effektiven Fläche des Teleskopes.

Kleines Bild: Die Bestimmung von effektiven Flächen und Volumina mit Monte-Carlo-Methoden. Ein Neutrino entsteht in der Generationsfläche A_{gen} und propagiert auf den Detektor zu. Innerhalb des Volumens V_{gen} entsteht ein Myon. Es wird nicht immer nachgewiesen. Das Verhältnis von simulierten zu nachgewiesenen Neutrinos entspricht demjenigen von effektiver Fläche zu Generationsfläche. Für das effektive Volumen bildet man analog den Quotient aus nachgewiesenen und entstandenen Myonen und multipliziert mit der Größe des Generationsvolumens.

Mit 3.26 gilt für die Myon-effektive Fläche

$$A_{\text{eff}}^{\mu} = \frac{V_{\text{eff}}}{\langle r_{\mu} \rangle} \quad . \quad (3.29)$$

3.4.3 Die Energieabhängigkeit der effektiven Flächen und Volumina

In den bisherigen Betrachtungen ist die Abhängigkeit von der Energie unberücksichtigt geblieben. Die Angabe einer effektiven Detektorgröße setzt aber implizit ein Spektrum des zugehörigen Flusses voraus, über das gemittelt wird. Will man die entsprechende Kenngröße für unterschiedliche Eingangsspektren berechnen, muss man die Energieabhängigkeit kennen.

Im Fall der neutrino-effektiven Fläche kann die Definition des letzten Abschnittes direkt übertragen werden. Mit dem mono-energetischen Neutrinofluss Φ_{E}^{ν} setzt man analog zu Gleichung 3.22

$$A_{\text{eff}}^{\nu}(E) = \frac{R_{\text{obs}}}{\Phi_{\text{E}}^{\nu}} \quad . \quad (3.30)$$

Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen muss man im energieabhängigen Fall zwischen myon- und neutrino-effektiven Volumina unterscheiden. Im einen Fall hat man mono-energetische Neutrinos, im anderen Fall mono-energetische Myonen, die im Detektor nachgewiesen werden. Bezeichnet man die entsprechenden Effizienzen mit $\epsilon_{\mu}(E_{\mu})$ und $\epsilon_{\mu}(E_{\nu})$, je nachdem ob man die Neutrino- oder die Myonenergie fixiert, dann gilt für die effektiven Volumina analog zu Gleichung 3.26

$$V_{\text{eff}}^{\nu}(E) = \int_{\text{V}} \epsilon_{\mu}(E_{\nu}) dV \quad , \quad V_{\text{eff}}^{\mu}(E) = \int_{\text{V}} \epsilon_{\mu}(E_{\mu}) dV \quad . \quad (3.31)$$

Die größten Schwierigkeiten hat man mit der myon-effektiven Fläche. Ein mono-energetischer Fluss an Myonen ist kein physikalisch realistisches Bild. Ein mono-energetischer Neutrinofluss kommt in der Realität zwar ebenfalls nicht vor, aber für Myonen wird die Situation dadurch verkompliziert, dass sie bei der Propagation Energie verlieren. Generiert man mono-energetische Myonen in einer Fläche vor dem Detektor, dann hängt die observierte Rate von dem Abstand der beiden ab. Die myon-effektive Fläche ist nicht eindeutig.

Man kann aber über Gleichung 3.29 nichtsdestotrotz einen Zugang finden, der mit einem physikalischen Bild verbunden ist. Man definiert die energieabhängige myon-effektive Fläche als

$$A_{\text{eff}}^{\mu}(E) = \frac{V_{\text{eff}}^{\mu}(E)}{\langle r_{\mu} \rangle_{\text{E}}} \quad . \quad (3.32)$$

In der Simulation betrachtet man ein Volumen, in dem man Myonen fester Energie generiert. Der Myonfluss an einer Stelle ist dann nicht mehr mono-energetisch, aber die Definition widerspricht nicht den physikalischen Vorstellungen.

Obwohl die neutrino-effektive Fläche die klarere physikalische Motivation hat, wird in Fachkreisen häufiger die myon-effektive Fläche verwendet. Das liegt daran, dass sie in erster Näherung unabhängig von der Energie ist. Da sowohl Wirkungsquerschnitt als auch Myonreichweite bis etwa 1TeV linear von der Energie abhängen, gilt in diesem Bereich näherungsweise

$$A_{\text{eff}}^{\nu}(E) \sim E^2 \quad , \quad (3.33)$$

$$V_{\text{eff}}^{\mu,\nu}(E) \sim E \quad , \quad (3.34)$$

$$A_{\text{eff}}^{\mu}(E) \sim 1 \quad . \quad (3.35)$$

Teil II

Das AMANDA-Neutrino-teleskop

4 Der AMANDA-Detektor und die Kalibrierung

Jedes Mal, wenn Du Dich überwindest,
machst Du das Unsichtbare sichtbar.

(Ibn Arabi)

Nach den theoretischen Grundlagen geht es in diesem Teil um das Instrument der Beobachtung. Der erste Abschnitt (4.1) dieses Kapitels behandelt die installierten physischen Komponenten und die Rohdaten, welche man damit gewinnt. Die Eigenschaften des optischen Detektormediums werden in Abschnitt 4.2 dargestellt. Die Kalibrierung des Gerätes (Abschnitt 4.3) und die Simulationskette vom physikalischen Prozess bis zu den Rohdaten (Abschnitt 4.4) beschließen das Kapitel.

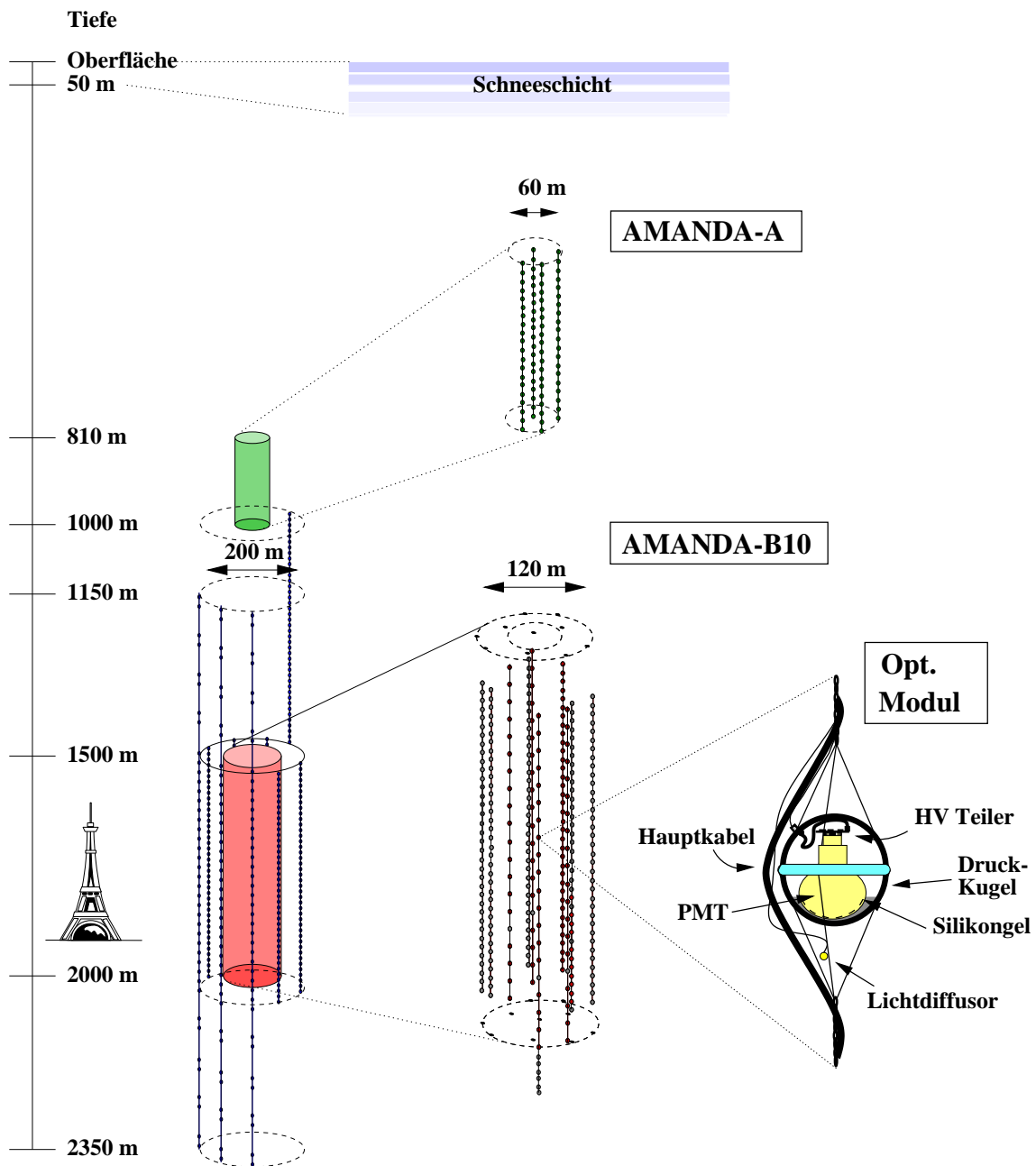
4.1 Die Komponenten des AMANDA-Detektors

Das *Antarctic Muon And Neutrino Detection Array* befindet sich in der antarktischen Eiskappe in unmittelbarer Nähe des geographischen Südpols. In der Zeit von 1995 bis 2000 sind insgesamt 678 Photodetektoren in druckfesten Glaskugeln im Eis eingelassen worden. Diese *optischen Module* sind entlang neunzehn einzelner Kabelstränge aufgereiht, für die senkrechte Löcher in das Eis geschmolzen wurden.¹ Ein Ensemble aus Kabeln, Halterungen und optischen Modulen bezeichnet man als *String*.

In Abbildung 4.1 findet man eine schematische Darstellung des AMANDA-Detektors. Die vier innersten Strings sind in der Form eines dreistrahligen Sterns angeordnet. Sie sind zuerst installiert worden. Die restlichen Strings liegen auf zwei konzentrischen Kreisen darum, wobei die äußeren Strings die neuesten sind. Veröffentlichungen, bei denen Daten aus den Jahren vor 2000 analysiert werden, beziehen sich auf innere Detektorteile, die man entsprechend der Anzahl der verwendeten Strings als AMANDA-B4 oder AMANDA-B10 bezeichnet. Mit dem Namen AMANDA-II bezieht man sich auf den komplettierten Detektor.

Die optischen Module, die im Wesentlichen für die Analyse verwendet werden, befinden sich in einer Tiefe von 1500 m bis 2000 m. Weiter oben oder unten liegende Teile des Detektors können zur Untersuchung des Eises herangezogen werden. Das instrumentierte Kernvolumen ist etwa zylindrisch mit einem Durchmesser von 200 m und einer Höhe von 500 m. Der Zylinder ist somit relativ schlank.

¹Bei dem Schmelzprozess kommt ein speziell entwickelter Heißwasser-„Bohrer“ zum Einsatz, dessen Aufbau und Wasserstrahlcharakteristik für möglichst gerade Löcher sorgt.



AMANDA seit dem Jahr 2000
Eiffel Turm zum Vergleich
(maßstabsgetreu)

Vergrößerung von
AMANDA-A (oben)
AMANDA-B10 (unten)

Vergrößerung eines
Optischen Moduls (OM)

Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des AMANDA-Detektors. Man erkennt die zylindrischen Strukturen der verschiedenen Ausbaustufen (vgl. Text). Zum Größenvergleich ist der Eiffelturm eingezeichnet. Der mit AMANDA-A gekennzeichnete Teil weiter oben ist nicht mehr in Betrieb. Neben der Detektordarstellung ist ein optisches Modul im Querschnitt skizziert. Ein Photomultiplier ist in einer druckfesten Kugel untergebracht. Für die optische Ankopplung sorgt ein Silikongel.

Das liegt einerseits daran, dass man an eine Geometrie aus Strings gebunden ist. Andererseits dürfen die horizontalen Abstände eine Distanz von etwa 70 m nicht überschreiten, damit eine geometrische Kalibrierung der Strings untereinander noch möglich ist (vgl. Abschnitt 4.3). Der senkrechte Abstand zwischen zwei Modulen liegt zwischen 10 m und 20 m.

In jedem optischen Modul befindet sich ein Photomultiplier, dessen Photokathode einen Durchmesser von acht Zoll² hat. Er ist mit einem optischen Gel an das Borosilikatglas der Druckkugel angekoppelt. Die optischen Eigenschaften dieses Systems werden in [Sud01] dargelegt. Man versucht, eine möglichst hohe Lichtausbeute aus der Cherenkovstrahlung zu erreichen. Wegen deren λ^{-2} -Abhängigkeit ist der Bereich im nahen Ultravioletten besonders interessant (vgl. Abschnitt 4.2).

Die Photomultiplier werden einzeln von der Oberfläche mit Hochspannung versorgt, wobei man bei AMANDA-B4 Koaxialkabel und bei den übrigen Strings Twisted-Pair-Kabel einsetzt. Die Signale werden bei den ersten zehn Strings auf elektrischem Wege aus dem Eis übertragen. Die Pulse, die in der Kontrollstation ankommen, haben durch Dispersion bedingte Breiten³ von 600 ns im Fall der Koaxialkabel und von 180 ns bei den Twisted-Pair-Varianten. Bei den neueren optischen Modulen verwendet man zusätzliche optische Fasern für den Signaltransport. Der Photomultiplierimpuls wird über Dioden direkt in diese Lichtleiter eingespeist. Dadurch treten auf dem über 2 km langen Weg nach oben keine nennenswerten Dispersionseffekte auf, und die natürlichen Breiten von einigen zehn Nanosekunden bleiben erhalten. Allerdings ist es kompliziert, stabile Steckverbindungen durch die Glaskugel zu konstruieren. Beim Einfrierprozess in den geschmolzenen Löchern kann es zum Verlust einiger Fibernverbindungen kommen, und man weicht bei den entsprechenden Modulen auf die herkömmliche Technologie aus.

Einer der AMANDA-Strings ist mit digitaler Technologie ausgestattet. In diesem Konzept werden die Pulse im Eis digitalisiert, bevor die benötigten Informationen an die Kontrollstation geschickt werden. Das Nachfolgeprojekt IceCUBE ([Wis01]) wird diese Methode ausschließlich verwenden. In AMANDA wird sie getestet und abgestimmt. Bei den digitalen Modulen existiert eine zusätzliche Datenauslese der bisherigen Art, um die beiden Methoden miteinander vergleichen und die Daten dieses Strings analog zu den restlichen in der Analyse behandeln zu können.

Die typischen Datenraten der optischen Module liegen bei 0.3 kHz bis 1.5 kHz. Davon ist nur ein geringer Teil durch Myonspuren bedingt, der größte Teil stammt von intrinsischen Rauschprozessen der Module⁴. Jeder Puls wird bis zur Oberfläche weitergeleitet. Es kommt zur Aufzeichnung aller Pulse (oder *Treffer*) in einem 32 μ s-Intervall, wenn innerhalb eines Zeitfensters von 2.5 μ s Länge 24 Photomultiplier Treffer verzeichnet haben. Diese Koinzidenzbedingung bezeichnet man als *Majoritäts- oder Multiplizitätstrigger*⁵. Durch die Abstände der optischen Module bedingt ergibt sich aus der

²Es gibt auch einige Photomultiplier mit 10 Zoll Durchmesser. Ein Zoll entspricht 2.54 cm.

³Hier sind die vollen Breiten bei halber Höhe angegeben: *FWHM: Full Width at Half Maximum*.

⁴Das Rauschen setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen. Zum Einen rauscht der Photomultiplier selbst, zum Anderen gibt es Radioaktivität und Lumineszenzvorgänge im Glas der Druckkugeln. Siehe auch [H⁺03].

⁵Die Ankunftszeiten der Pulse, die für die Errechnung der Triggerbedingung verwendet werden, sind nicht kalibriert (siehe Abschnitt 4.3). Sie sind noch nicht auf die unterschiedlichen Kabellaufzeiten von den Modulen bis zur Oberfläche korrigiert worden. Dadurch werden aufwärts laufende Spuren begünstigt, da auch die zugehörigen Lichtfronten im Detektor nach oben laufen und Unterschiede in den Kabellängen und den Lichtlaufzeiten im Eis einander kompensieren. Für abwärts laufende Wellenfronten ist es genau umgekehrt. Sie sind im Trigger unterdrückt.

Triggerbedingung eine untere Energieschwelle von einigen zehn Gigaelektronvolt für die Myonenergie.

Eine zusätzliche Triggerlogik untersucht das Treffermuster auf lokale Koinzidenzen. Damit kann die Energieschwelle abgesenkt werden, wenngleich die verminderte Zahl an Treffern die Rekonstruktion erschwert. Für eine ausführliche Diskussion siehe [Fes00]. Zusätzliche Trigger können von dem Luftschauerexperiment SPASE-2 ([D⁺00]) und dem Radioantennendetektor RICE ([A⁺98a]) ausgelöst werden. Beide befinden sich in unmittelbarer Nähe des AMANDA-Detektors an beziehungsweise knapp unterhalb der Eisoberfläche.

Jedes Auslösen der Datenaufzeichnung definiert ein *Ereignis*. Für jeden Kanal werden dabei zwei Kategorien an Informationen gespeichert. Zum Einen wird für jeden Puls die Zeit registriert, wann ein bestimmter Schwellenwert überschritten wird, und wie lange es dauert, bis die Pulshöhe wieder darunter liegt. Diese Information liegt für jeden Puls getrennt vor⁶. Man bezeichnet sie als *LE*⁷ und *TOT*⁸. Zum Anderen gibt es einen Analog-Digital-Konverter, der die maximale Pulshöhe in einem Fenster $2\ \mu\text{s}$ vor und $7.8\ \mu\text{s}$ nach dem Triggerzeitpunkt speichert. Diese Informationen bezeichnet man als *ADC-Werte*⁹.

Seit Beginn des Jahres 2003 sind fast alle optischen Module an *Wellenform-Analysatoren* (*TWR*¹⁰) angeschlossen, mittels derer der zeitliche Pulshöhenverlauf aufgezeichnet werden kann. Dadurch können Höhe, Breite und Ankunftszeit aller Treffer in einem Modul während eines Ereignisses getrennt bestimmt werden, was insbesondere bei der Analyse hochenergetischer Ereignisse von Vorteil ist ([Wag03]).

Während des Auslesevorgangs von etwa 2.2 ms Dauer ist der AMANDA-Detektor nicht in der Lage, weitere Signale aufzunehmen. Das resultiert in einer *Totzeit*, die von der Einstellung der Auslöseschwelle abhängt. Je größer die Anzahl an Modulen, die in der Triggerbedingung gefordert wird, desto geringer die Ereignisrate und desto geringer auch die Totzeit. Im Jahr 2000 lag die relative Totzeit bei den geschilderten Triggerbedingungen insgesamt bei $\sim 17\%$ ([Wal03]). Das TWR-System operiert fast totzeitfrei.

Alle Daten werden auf Magnetbändern gespeichert und nach Abschluss der südpolaren Wintersaison Ende Oktober in die nördliche Hemisphäre geflogen. Es gibt zusätzlich ein Echtzeitrekonstruktionsystem, bei dem parallel zur Datennahme die verschiedenen Schritte der Analyse stattfinden können. Die Ergebnisse und wichtige Zwischenschritte können über Satellitenverbindungen übertragen werden, was für den gesamten Datensatz aus Gründen beschränkter Kapazität unmöglich ist. Das Echtzeitsystem ist in [Bec00] beschrieben.

AMANDA ist das größte derzeit existierende Neutrinoobservatorium. Es ist zudem das einzige, das Eis als optisches Medium verwendet. Das bringt die Vorteile einer stabilen Installationsplattform, einer zeitlich unveränderlichen Geometrie der optischen Module zueinander, und eines äußerst geringen Photomultiplierauschlags wegen der Abwesenheit von ⁴⁰K mit sich. Als Nachteil ist die begrenzte

⁶Das ist bis zu einem Maximum von acht Treffern pro Kanal möglich.

⁷Für *Leading Edge*: englisch für führende Flanke.

⁸Für *Time Over Threshold*: englisch für Zeit oberhalb der Schwelle.

⁹Für *Analog to Digital Converter*.

¹⁰Für *Transient Waveform Recorder*.

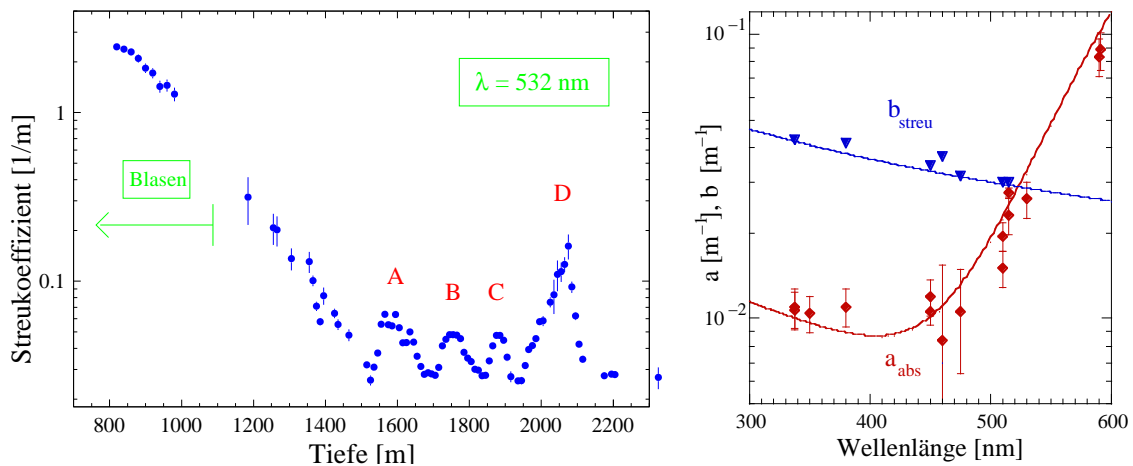


Abbildung 4.2: Eigenschaften des Südpoleises. **Links:** Streukoeffizient in Abhängigkeit der Tiefe. **Rechts:** Streu- und Absorptionskoeffizienten b_{streu} und a_{abs} in Abhängigkeit der Wellenlänge. Eine Anpassung an die Datenpunkte mittels Mie-Streutheorie ist ebenfalls gezeigt.

Tiefe von ca. 2 km im Vergleich zu Meerwasserexperimenten mit bis zu ~ 4 km zu nennen. Der Fluss atmosphärischer Myonen ist entsprechend größer. Ferner können an einem optischen Modul keine Reparaturarbeiten durchgeführt werden. Die unterschiedlichen optischen Eigenschaften werden im folgenden Abschnitt gegenübergestellt.

AMANDA ist außerdem das einzige Neutrinoobservatorium auf der Südhalbkugel und beobachtet damit den Nordhimmel. Die Gesamtdeckung des Himmels wird durch im Bau befindliche Teleskope auf der Nordhalbkugel komplettiert ([Ct01, vDt01, Gt01, Ct99]).

Für eine ausführlichere Diskussion der Standortvor- und -nachteile siehe [Bir02].

4.2 Das Eis am Südpol

Im südpolaren Gletscher sind die Tiefe einer bestimmten Schicht und ihr Alter stark korreliert. Entsprechend der jeweiligen klimatischen Eigenschaften und der Zusammensetzung der Atmosphäre findet man auch im Eis eine geschichtete Struktur. Unterschiedlich starke Einschlüsse von Säuren, Salzen, Mineralien und Rußpartikeln verändern lokal die optischen Eigenschaften. Die Reinheit des Eises ist sehr hoch. Sie entspricht der von Wasser nach dreifacher Destillation.

In Abbildung 4.2 (links) ist der Streuparameter als Funktion der Tiefe aufgetragen¹¹. Die Streuung ist an eingeschlossenen Gasblasen am stärksten. Unterhalb einer Tiefe von etwa 1000 m sind die Blasen fast vollständig verschwunden und die Streuung an Mineralien dominiert. Im Bereich des Detektors gibt es drei klare Überhöhungen (A,B,C) und eine weitere unterhalb davon (D). Sie können mit vier

¹¹Eine Diskussion der optischen Parameter findet man in 3.3.

Gletschermaxima¹² identifiziert werden ([PWC00]). Innerhalb der mit heißem Wasser geschmolzenen Löcher für die Strings geht die Schichtstruktur verloren. Durch Blasenbildung beim Einfrieren und das Einbringen weiterer Unreinheiten beim Bohrvorgang erhöht sich die Streuung. Der Streukoeffizient wird über den gesamten Lochradius als konstant angenommen mit $b_{\text{streu}} = 2 \text{ m}^{-1}$. Die Tiefenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten ist gering.¹³

Auf der rechten Seite von Abbildung 4.2 sind die Wellenlängenabhängigkeiten dargestellt. Während der Streukoeffizient konstant und langsam abfällt, zeigt der Absorptionskoeffizient ein stärker wechselndes Verhalten. Für Wellenlängen $\lambda < 210 \text{ nm}$ und $\lambda > 510 \text{ nm}$ ist das Eis selbst für die Absorption verantwortlich. Im Regime dazwischen überwiegen die Einflüsse der Einschlüsse. Die theoretische Beschreibung mittels Mie-Streuung kann die Beobachtungen gut beschreiben ([PB97, PW01b]).

In Tabelle 4.1 sind die typischen Streu- und Absorptionslängen in See-, Meereswasser und Eis einander gegenübergestellt. Die kleinere Streulänge in Eis erschwert die Spurrekonstruktion während sie die Kalorimetrie verbessert.

4.3 Die Kalibrierung

Die Komponenten des AMANDA-Detektors sind bewusst einfach gehalten, um eine möglichst geringe Ausfallquote an Geräten im Eis zu haben. Entsprechend wenige Größen benötigt man zur Kalibrierung. Man muss einerseits die Orte der optischen Module vermessen und andererseits die Rohdaten von Ankunftszeiten und Höhen der Pulse interpretieren. Die Eigenschaften des Eises sind schon im vorangehenden Abschnitt diskutiert worden.

Für alle Aspekte der Kalibrierung kann man die Detektorantwort auf künstliche Lichtquellen heranziehen. An einem Teil der optischen Module sind *Diffusorbälle* angebracht, in die man durch optische Fasern Laserpulse von der Kontrollstation aus einkoppeln kann. Sie erzeugen isotropes Licht. In manchen Modulen der äußeren Strings gibt es zusätzliche Lichtquellen in Form von Laserdioden.

Zusätzlich zu den künstlichen Lichtquellen verwendet man Ereignisse atmosphärischer Myonen zur Kalibrierung. Außerdem werden die Daten analysiert, die beim Bohren der Löcher aufgezeichnet werden.

¹²Ein Gletschermaximum ist eine Periode, in der ein Gletscher verstärkt wächst.

¹³Das wiedergefrorene Eis wird im Jargon als *Locheis* bezeichnet.

Medium	Eis	Meerwasser	Seewasser (Baikal)
λ_{streu}	3 m – 5 m	25 m – 55 m	18 m
λ_{abs}	90 m – 120 m	50 m – 65 m	20 m

Tabelle 4.1: Streu- und Absorptionslängen in verschiedenen natürlichen optischen Medien bei einer Wellenlänge von 460 nm. (aus [Bös02]).

4.3.1 Kalibrierung der Zeitkonstanten

Die wahre Zeit t_w , zu der ein Photon ein Signal im Eis auslöst, ist deutlich vor der gemessenen Ankunftszeit t_{LE} des Pulses. Die Verzögerung setzt sich aus zwei Teilen zusammen.

Das ist einerseits die reine Laufzeit durch das System sowohl im Eis als auch an der Oberfläche. Diese Zeit bezeichnet man mit t_0 . Sie wird über die Gesamtlaufzeit eines Laserpulses bestimmt von der Kontrollstation über den nächstgelegenen Diffusorball in das optische Modul und weiter (als Signalpuls) in das Datennahmesystem. Von dieser Zeit wird die Lichtlaufzeit durch die Faser und das Eis abgezogen. Erstere kann man mittels eines weiteren Lichtpulses messen, der am Ende der Faser reflektiert wird. Dazu wird ein *optisches Reflektometer* eingesetzt. Für die Lichtlaufzeit im Eis muss man die Geometrie kennen, solange der Diffusorball nicht im gleichen Modul ist, das man kalibrieren möchte.

Der zweite Teil der Ankunftszeitvergrößerung beruht darauf, dass die Pulse nicht unendlich große Amplituden haben. Von der Ankunft des Pulsanfangs vergeht eine gewisse Zeit, bis die Diskriminatorschwelle überschritten ist. Je nach Pulshöhe A dauert diese Zeit unterschiedlich lang. Sie ist umgekehrt proportional zur Wurzel von A ([Sch02]). Die Proportionalitätskonstante bezeichnet man als α .

Insgesamt gilt für die Ankunftszeit:

$$t_w = t_{LE} - t_0 - \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \quad . \quad (4.1)$$

Sowohl t_0 als auch α müssen für jeden Kanal getrennt bestimmt werden. Allerdings ist es nicht mehr notwendig, das sequentiell zu tun. Man kann atmosphäre Myonen zur Kalibrierung verwenden. Das Verfahren wird in [CHt01] beschrieben.

Die erreichte Genauigkeit für t_0 beträgt $\sigma_{t_0} \approx 7$ ns und für α etwa 30%. Das ist für die Rekonstruktion ausreichend ([Bir02, Bir00]).

4.3.2 Kalibrierung der Geometrie

Zur Bestimmung der Ortskoordinaten stehen mehrere einander ergänzende Verfahren zur Verfügung. Die Neigung des Bohrkopfes wird während des Schmelzvorgangs der Löcher überwacht, wodurch man den Verlauf des Loches errechnen kann. Mit Drucksensoren kann man zudem die Tiefe unter Wasser bestimmen, solange es noch nicht wieder zugefroren ist ([Wos00]).

Zur weiteren Bestimmung verwendet man wiederum Lichtpulse aus Lasern und Dioden und betrachtet die relativen Ankunftszeiten an den verschiedenen Photomultipliern. Aus einer globalen Anpassung an alle verfügbaren Daten kann man die absoluten Positionen mit einer Genauigkeit von weniger als 1 m bestimmen.

Die Ungenauigkeit, mit der man die Ausrichtung des AMANDA-Teleskopes kennt, ist damit kleiner als 0.2° , was für die Verfahren der Punktquellensuche mehr als ausreicht ([Wos03]).

Zusätzlich kann man Ereignisse betrachten, die in Koinzidenz mit dem Luftschauerexperiment SPASE ([D⁺00]) oder dem Gammastrahlen-Cherenkovteleskop GASP ([Bt93]) aufgezeichnet werden. Die Abweichung der rekonstruierten Zenitwinkel liegt bei etwa einem Grad, für die Azimutwinkel ist sie vernachlässigbar. Den Unterschied in den Zenitwinkeln erklärt man mit systematischen Abweichungen in den Rekonstruktionen für die betrachtete Klasse an Ereignissen und nicht durch eine Unsicherheit in der Richtungskalibration von AMANDA ([Raw03b]).

Diskutiert wird auch, in Zukunft die Abschattung der kosmischen Strahlen durch den Mond heranzuziehen. Da geladene Teilchen den Erdbegleiter nicht durchdringen können, erwartet man eine starke Abschwächung des atmosphärischen Myonenflusses aus der Richtung, in der sich der Mond jeweils befindet. Der Vergleich der wahren Position mit derjenigen, die aus der Abschattung rekonstruiert wird, kann analog zu obigen Koinzidenzereignissen eingesetzt werden (vgl. [Opp01]).

4.3.3 Kalibrierung der Amplituden

Die Photomultiplier werden in einer Verstärkung von etwa 10^9 betrieben. Das bedeutet, dass ein einzelnes Photon $\sim 10^9$ Elektronen an der letzten Dynode freisetzt. Die Antwort des Systems ist im interessanten Bereich bis zu einigen gleichzeitig eintreffenden Photonen linear. Weitaus die meisten aufgezeichneten Pulse gehören zu Einzelphotonen. Histogrammiert man die Pulshöhen, kann man aus der Position des zugehörigen lokalen Maximums relativ zum Ruhepegel die Proportionalitätskonstante bestimmen.

Die Genauigkeit der Messung entspricht der Breite einer Gauß-Anpassung an das Maximum. Sie liegt bei etwa 35% ([Bir02]).

4.4 Die Simulationskette

Um die aufgezeichneten Daten zu interpretieren, versucht man, alle relevanten Prozesse im Detail zu simulieren. Mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden verfolgt man die Vorgänge ausgehend von den Flüssen extraterrestrischer Teilchen bis hin zur Antwort des Detektors auf die tatsächlich nachgewiesenen Photonen. Man vergleicht die Verteilungen verschiedener Observablen zwischen Daten und Simulation und zieht daraus dann umgekehrt Schlüsse über die Daten.

Im Folgenden werden die verwendeten Programmpakete vorgestellt, mit denen die Ereignisgeneration bis zu den Myonen, die Myon- und Lichtpropagation durch das Detektormedium und die Detektorantwort simuliert werden. In den Kapiteln 5 und 6 werden Daten und Simulation miteinander verglichen, sobald die dafür notwendigen Observablen bereit gestellt sind.

4.4.1 Die Ereignisgeneration

Die Myonen, die man in AMANDA nachweist, stammen entweder aus Luftschauern oder aus Neutrinowechselwirkungen. Entsprechend verwendet man zwei unterschiedliche Programme zur Simulation.

NUSIM [Hil96], ist innerhalb der AMANDA-Kollaboration entwickelt worden. Ausgehend von den atmosphärischen Neutrinoflussvorhersagen aus [Lip93] werden nur Neutrinos im Zenitwinkelbereich größer als 80° erzeugt. Beim Flug durch die Erde „zwingt“ man sie dazu, nicht stecken zu bleiben, und ebenso forciert man eine Wechselwirkung in Detektornähe, um das entstehende Myon dann durch den Detektor verfolgen zu können. Dadurch kann der Rechenaufwand drastisch reduziert werden, man muss aber statistische Gewichte einführen, wie wahrscheinlich das erzwungene Verhalten ist.

Die Form der generierten Verteilungen bezüglich Zenitwinkel und Neutrinoenergie sind frei wählbar. Um von einer gewählten Ausgangsform auf andere Abhängigkeiten zu transformieren, werden die statistischen Gewichte der einzelnen Ereignisse entsprechend modifiziert. So kann aus der gleichen Simulation sowohl auf atmosphärische Neutrinos als auch auf Punktquellenneutrinos mit einem erwarteten Spektrum von E^{-2} zugegriffen werden. Eine Diskussion über die Verwendung statistischer Gewichte in Monte-Carlo-Simulationen findet man in [Hil00].

Bei der Propagation durch die Erde wird das *vorläufige Referenzerdmodell* ([DA81]) zu Grunde gelegt. Effekte von Neutrino-Oszillationen werden nicht berücksichtigt. Die Wirkungsquerschnitte für Neutrinowechselwirkungen stammen aus [Hil97] und die Partonstrukturfunktionen aus [MSR95] werden verwendet.

Aus technischen Gründen ist es derzeit noch nicht möglich, den Winkel zwischen Myon- und Neutrinoimpuls zu simulieren. Die beiden Richtungen werden als identisch angenommen.

CORSIKA [HKC⁺98, Chi02] ist das derzeitige Standardsimulationspaket für Luftschauer. Für das AMANDA-Experiment sind im Wesentlichen die entstehenden Myonen interessant. Es werden zwei Wechselwirkungsmodelle oberhalb und unterhalb einer Energieschwelle von ~ 70 GeV eingesetzt. Für hohe Energien wird QGSJET eingesetzt, für niedrige Energie verwendet man GEISHA. Zweiteres hat aber nur einen geringen Einfluss auf den Myonfluss in der Tiefe des Detektors, weil nur Myonen mit Energien von über ~ 400 GeV an der Oberfläche im Detektor nachgewiesen werden können.

Wegen des hohen Zeitaufwandes bei der Simulation der Luftschauer ist CORSIKA eine der langsameren Komponenten in der Simulationskette. Man verwendet daher den gleichen Schauer einhundert mal mit jeweils zufällig ausgewählter azimuthaler Richtung und horizontalem Abstand zum Detektor. Tests haben gezeigt, dass dadurch keine systematischen Probleme in die Analyse einfließen ([A⁺03a]).

4.4.2 Die Myonpropagation

Die verschiedenen Energieverlustprozesse von Myonen in Materie sind in Abschnitt 3.2 diskutiert worden. Zu ihrer Simulation mit hinreichender Genauigkeit muss ihrem stochastischem Charakter Rechnung getragen werden. Das bedeutet, dass man die Einzelprozesse nur dann als kontinuierliche Energieverluste nähern kann, wenn sehr viele Prozesse in sehr kurzen Abständen stattfinden. Damit die Rechenzeit in realistischen Grenzen bleibt, muss geschickt entschieden werden, in welchen Bereichen man diese Näherung durchführt. Um in einem großen Intervall an Myonenergien die erforderliche Genauigkeit erreichen zu können, ist innerhalb der AMANDA-Kollaboration ein neues Programmpaket, MMC ¹⁴, entwickelt worden ([CR01]). Die verwendeten Wirkungsquerschnitte stammen aus [Rho99].

4.4.3 Die Photonpropagation

Zur Propagation der Photonen, die durch die Myonenergieverluste entstehen, verwendet man das Paket PTD ¹⁵ ([Kar99]). Die Wellenlängenabhängigkeit wird durch ein Drei-Komponenten-Modell beschrieben ([At97]). Die veränderten Eigenschaften des Locheises werden berücksichtigt (siehe Abschnitt 4.2).

Während der eigentlichen Simulation findet keine Propagation der einzelnen Photonen statt. Stattdessen werden im Vorfeld große Tabellen erzeugt, in denen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen registrierter Signale gespeichert werden. Sie sind abhängig vom Abstand und der relativen Orientierung zwischen dem Energieverlustprozess, der Photonen erzeugt, und dem optischen Modul, das sie nachweist. Weitere Parameter sind die deponierte Energiemenge und die Zeitverzögerung des Lichtes auf dem Weg.

Die Änderung der effektiven Streulänge mit der Tiefe ist nicht im Detail in dieser Simulation implementiert. In der tatsächlichen Situation kann ein Photon Schichten mit verschiedenen optischen Eigenschaften passieren. In der Simulation nimmt man an, dass unabhängig von weiteren geometrischen Betrachtungen das Photon nur durch Eis läuft, das die gleichen Eigenschaften hat wie die Umgebung des Photomultipliers, in dem es nachgewiesen wird. Damit wird das Ende der Photonbahn berücksichtigt, aber nicht ihr Ausgangsort und ihr eigentlicher Verlauf. Mit diesem Zugang kann man gegenüber einem Modell mit einer homogenen Eisstruktur die Daten deutlich besser beschreiben ([Hun00]).

Das Modell, das als derzeitiger Standard verwendet wird und das den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Simulationen zu Grunde liegt, heißt

MAM Eis-Modell ([H⁺02b]). Die Abkürzung steht für *Myon-Absorptionsmodell*. Man untersucht die Zeitresiduenverteilungen¹⁶ von Photonen atmosphärischer Myonen. Um die Höhe der Verteilung für große Residuen richtig zu beschreiben, ist die Absorption ausschlaggebend. Im Vergleich von Daten und Simulation passt man den Absorptionskoeffizienten als Funktion der Tie-

¹⁴Für Muon-Monte-Carlo

¹⁵Für Photon Transport and Detection.

¹⁶Die Zeitresiduen werden in Abschnitt 3.3 definiert.

fe an, wobei man den Zusammenhang von Streuung und Absorption in der Theorie ([PB97]) ausnutzt.

Es werden vier unterschiedliche Wertepaare als Eingangsparameter für PTD-Tabellen verwendet. Aus diesen vier verschiedenen Eistypen wird das Eismodell in sechzehn horizontalen Schichten zusammengesetzt. Die daraus resultierende Tiefenabhängigkeit der Streuung ist eine Stufenfunktion wie in früheren Modellen auch. Allerdings folgt sie nicht mehr direkt den Messungen der lokalen optischen Parameter (vgl. Abbildung 4.2 links), weil durch die Anpassung an Myondata auch Effekte berücksichtigt werden, die durch das Passieren von Photonen durch mehrere Schichten entstehen. Indirekt wird dadurch die ursprüngliche Annahme korrigiert, dass Licht jeweils nur durch eine Sorte Eis propagiert.

Um alle Effekte der Photonpropagation durch ein geschichtetes Eismodell berücksichtigen zu können, ist innerhalb der Kollaboration ein weiteres Programmpaket PHOTONICS ([Mio01]) entwickelt worden. Darin ist auch die Wellenlängenabhängigkeit von Streuung und Absorption berücksichtigt. PHOTONICS wird derzeit innerhalb der Kollaboration auf seine Einsatzbereitschaft und seine Auswirkung auf die Qualität der Detektorbeschreibung untersucht.

4.4.4 Die Detektorantwort

In der Simulation der Detektorantwort müssen alle Aspekte des Signaltransportes vom Photon bis hin zum aufgezeichneten Ereignis berücksichtigt werden. Damit ist die Eismodellierung im Prinzip schon ein Teil der Detektorsimulation, da das Eis einer seiner integralen Bestandteile ist.

Das Programmpaket AMASIM ([Hun99]) ist innerhalb der AMANDA-Kollaboration entwickelt worden. Ausgehend von den weiter oben diskutierten Eismodellen wird zunächst die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer in einem optischen Modul ermittelt. Dabei muss die absolute Sensitivität der Photovervielfacher sowie die Abhängigkeit vom Auftreffwinkel gegen die Symmetrieachse des Systems berücksichtigt werden ([OW01]). Diese wird ihrerseits durch die optischen Eigenschaften des Loch-eises beeinflusst. Wenn es zu einem Signal kommt, dann werden die entstehende Pulsform, der Datentransport entlang der Kabel und die Vorgänge in der Oberflächenelektronik simuliert.

Eine genaue Kenntnis der Eigenschaften der einzelnen Systemkomponenten ist ausschlaggebend für eine erfolgreiche Nachbildung der Vorgänge. Insbesondere sind die Photovervielfacher sensible Geräte, so dass es immer wieder zu zeitweisen Ausfällen oder zu unphysikalisch überhöhten Datenraten einzelner Exemplare kommt. Dieses Verhalten kann nur sehr schwer in der Simulation imitiert werden. Während man *tot*e Kanäle schlicht ignoriert, tragen „*hyperaktive*“ Kanäle zum Erreichen der Auslösebedingung bei und müssen berücksichtigt werden.

Die Monte-Carlo-Simulation ist ein deutlich langsamerer Prozess als die Datennahme. Um eine annehmbare Statistik zu erreichen, muss viel Rechenzeit aufgewandt werden. Das ist insbesondere beim Untergrund-Monte-Carlo der Fall. Einerseits ist die Simulation der Luftschauer aufwändig. Andererseits wird bei der Analyse die Zahl der Untergrundereignisse drastisch reduziert (vgl. Kapitel 5). Pro Untergrundereignis, das alle Qualitätskriterien passiert, müssen Millionen an Ereignissen generiert werden. Deshalb ist es wichtig, nur wenige verschiedene Detektorkonfigurationen zu betrachten.

Die Daten des Jahres 2000 wurden in drei verschiedene Perioden unterteilt, in denen jeweils ein anderer Satz an optischen Modulen ignoriert wird ([Rib01]). Um das oben diskutierte Problem der veränderten Auslösebedingung zu umgehen, werden die Daten mit den gleichen Algorithmen behandelt. Die ignorierten Kanäle werden ausgeblendet und die Ereignisse dahingehend untersucht, ob sie die Auslösebedingung immer noch erfüllen. Wenn nicht, dann werden sie verworfen.

Als weiterer Effekt kommt die jahreszeitlich veränderliche Rate der atmosphärischen Myonen hinzu. Dadurch sind die Verhältnisse im Detektor per se jeden Tag anders. Da sich die Atmosphäre kontinuierlich verändert, ist es nicht wie im letzten Fall möglich, Daten und Simulation einander anzupassen. Man muss für das Monte-Carlo einen durchschnittlichen Atmosphärenzustand wählen.

Insgesamt stehen 54.3 Tage an simuliertem Untergrund aus atmosphärischen Myonen für die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit zur Verfügung. Das steht einer Beobachtungsdauer von 197.0 Tagen gegenüber.

Bei der Simulation von Myonen aus Neutrinowechselwirkungen kann keine entsprechende Messdauer angegeben werden, da energieabhängige Gewichte verwendet werden. Für das Eingangsspektrum der simulierten Neutrinos ist eine umgekehrt proportionale Abhängigkeit von der Energie gewählt worden $N(E_\nu) \propto E_\nu^{-1}$. Daraus resultieren in der Simulation von Punktquellenspektren mit einem $N(E_\nu) \propto E_\nu^{-2}$ -Verhalten deutlich geringere statistische Fehler als in dem weicheren Spektrum, das bei Verwendung von atmosphärisch gewichtetem Monte-Carlo entsteht. Insgesamt stehen $2 \cdot 10^5$ simulierte Neutrinoereignisse zur Verfügung.

Die Übereinstimmung zwischen den aufgezeichneten Daten und den Resultaten der Simulationskette wird in den Kapiteln 5 und 6 diskutiert, wenn es jeweils um die Eigenschaften des Neutrinodatensatzes geht.

5 Von den Rohdaten zu den Neutrino-Ereignissen

Wenn man alles Unmögliche ausgeschlossen hat, ist das was übrig bleibt, wie unwahrscheinlich es auch sein mag, die Wahrheit.

(*Sherlock Holmes*)

Im Abschnitt 3.1 über die Funktionsweise eines Neutrinooteleskopes wird dargelegt, dass alle drei Neutrinoarten nachgewiesen werden können. Die Genauigkeit, mit der man auf die Flugrichtung eines Neutrinos rückschließt, ist sehr unterschiedlich, da die Flugrichtungen der jeweiligen Leptonen nicht gleich gut bestimmbar sind. Die Spur eines Myons ist leichter zu rekonstruieren als der elektromagnetische Schauer, den ein Elektron hervorruft. Für die Suche nach Neutrino-Punktquellen beschränkt man sich deshalb auf Myonneutrinos. Tauneutrino-Ereignisse treten zu selten auf und werden nicht berücksichtigt.

Die Triggerrate, mit der AMANDA Ereignisse aufzeichnet, liegt bei circa 100 Hz. Pro Tag werden etwa fünfzehn Myonneutrino-Ereignisse aufgezeichnet. Man benötigt eine Datenunterdrückung in der Größenordnung eines Faktors von 10^{-7} , um die Signalereignisse aus dem Untergrund herauszufiltern.¹

Der Hauptanteil der aufgenommenen Daten besteht aus Ereignissen atmosphärischer Myonen, die in Wechselwirkungen der kosmischen Strahlung mit Luftmolekülen über dem Südpol entstehen (siehe Abschnitt 2.2). Das wichtigste Kriterium, anhand dessen auf ein Neutrinoereignis geschlossen werden kann, ist die Flugrichtung des Myons. Nur Neutrinos erzeugen Spuren, die aufwärts laufen. Die Erde filtert alle anderen Teilchen aus der Nordhemisphäre ab.

Die Rekonstruktion von Myonspuren ist der zentrale Schritt bei der Datenanalyse. Zudem muss man alle Ereigniskategorien, die fälschlicherweise als aufwärts laufende Spuren rekonstruiert werden, als Untergrund erkennen.

In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise dargelegt, wie man einen Datensatz an Neutrinoereignissen separiert. Den Auftakt bildet eine Beschreibung der verschiedenen Untergrundprozesse, die vom Signal unterschieden werden müssen (Abschnitt 5.1). Im darauf folgenden Abschnitt 5.2 werden die Spurparametrisierung, dann die *Trefferbereinigung* und schließlich ein schnelles, analytisches Verfahren vorgestellt, mit dem man die meisten atmosphärischen Myonen als solche identifizieren und verwerfen kann.

¹Das ist schwieriger als die sprichwörtliche Suche nach der Nadel im Heuhaufen. Das rechnet man mit dem typischen 10-Kubikmeter-Heuhaufen mit einer typischen Dichte von $\rho = 0.2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ aus typischen 3-Gramm-Heuhalm nach.

Für den deutlich verkleinerten Datensatz hat man mehr Rechenzeit pro Ereignis zur Verfügung. Man kann eine vollständige Spurrekonstruktionen mit der Methode der *Maximum Likelihood* machen. Das wird in Abschnitt 5.3 ausgeführt. Danach werden *Qualitätsparameter* definiert, mittels derer abschließend das Signal vom verbleibenden Untergrund getrennt wird (Abschnitt 5.4).

Beschlossen wird dieses Kapitel mit der Beschreibung des Neutrino-datensatzes des Jahres 2000, der den bisherigen Punktquellsuchen zu Grunde liegt (Abschnitt 5.5). Dieser Datensatz wird in der vorliegenden Arbeit einer weiteren Suche nach Neutrino-Punktquellen unterzogen. Dabei kommt ein neu entwickeltes Maximum-Likelihood-Verfahren zum Einsatz. Dessen Eigenschaften und die Resultate der Suche sind Gegenstand von Teil III.

5.1 Die verschiedenen Untergrundklassen

Die Ereignisse, die nicht von Neutrinos induziert werden, lassen sich in die folgenden neun Klassen einordnen:

Gut rekonstruierbare, abwärts laufende Myonen. Diese Kategorie an Ereignissen macht den größten Anteil der aufgezeichneten Daten aus. Sie ist völlig unproblematisch, da sie per definitionem durch die rekonstruierte Flugrichtung identifiziert werden kann.

Horizontale, atmosphärische Myonen. Ereignisse, deren wahre Einfallrichtungen in der Nähe des Horizontes liegen, können durch die endliche Richtungsauflösung oder durch Fehlrekonstruktion als aufwärts laufend klassifiziert werden.

Streifende Myonen. Die Richtungsrekonstruktion wird ebenfalls erschwert, wenn ein Ereignis das Innere des Detektors nicht passiert. Ein vorbeifliegendes Myon kann die Triggerbedingung erfüllen, da AMANDA keine äußeren Begrenzungen hat.

Stoppende Myonen. Ein ähnlicher Fall liegt bei Ereignissen vor, deren Spur in der Nähe oder innerhalb des Detektors endet. Insbesondere horizontale Ereignisse können dann als aufwärts laufend fehlrekonstruiert werden.

Kaskadenartige Ereignisse. Katastrophale Energieverluste höherenergetischer, atmosphärischer Myonen erzeugen im Eis kaskadenartige Lichtdepositionen. Diese können zu einem Treffermuster ähnlich einem Neutrinoereignis führen.

Myonbündel. In den Wechselwirkungen hochenergetischer, kosmischer Strahlen über dem Südpol kann es zur Ausbildung von *Myonbündel* kommen. Mehrere fast parallel laufende Myonen durchqueren gemeinsam den Detektor und erzeugen wiederum ein Muster, das dem eines einzelnen aufwärts laufenden Myons entspricht.

Unkorrelierte, koinzidente Myonen. Innerhalb der Länge eines einzelnen Ereignisses von mehreren Mikrosekunden können zwei Myonen aus verschiedenen Wechselwirkungen der kosmischen Strahlung mit der Atmosphäre Licht in AMANDA deponieren. Im Unterschied zur vorherigen Kategorie können die Myonen völlig unterschiedliche Richtungen haben und den Detektor an zwei getrennten Stellen treffen. Ein Algorithmus, der ein einzelnes Myon als Hypothese

zu Grunde legt, kann diese Stellen zu einer aufwärts laufenden Spur verbinden. Die Rate an aufgezeichneten Ereignissen, bei denen zwei Myonen Treffer beisteuern, liegt bei etwa 0.7 Hz ([Bös02]).

Streulagenereignisse. Durch die besondere Schichtstruktur des Eises und die stark wechselnden optischen Eigenschaften (siehe Abschnitt 4.2) können Photonen systematisch zu bestimmten Zonen des Detektors hin abgelenkt werden.

Elektronische Artefakte. Das Übersprechen zwischen optischen Modulen an einem String ist ein Beispiel für elektronische Artefakte. Sie können die Rekonstruktion stören und verfälschen.

Die starke Streuung im Eis, die Nicht-Abgeschlossenheit des Detektors und physikalische Prozesse, für die die einfachste Spurannahme nicht zutrifft, müssen bei der Separation der Neutrinoereignisse berücksichtigt werden.

5.2 Die Spurrekonstruktion: Grundlagen und analytische Algorithmen

Die Daten, die man aus dem Detektor erhält, sind die Ankunftszeiten t_{hit} von Photonen an den optischen Modulen, die Dauer, wie lange ein Puls oberhalb der Schwelle bleibt (TOT), und die höchste Amplitude (ADC-Wert) innerhalb eines bestimmten Zeitfensters um den Triggerzeitpunkt (siehe Kapitel 4). Aus diesen Informationen wird eine zu Grunde liegende Myonspur rekonstruiert.

5.2.1 Die Spurparameterisierung

Zur Parametrisierung einer solchen Spur wird ein einfaches Geradenmodell zu Grunde gelegt. Das Myon passiert den Punkt \vec{r}_1 zu einem Zeitpunkt t_1 (siehe Abbildung 5.1). Zur Beschreibung dieses Raumzeitpunktes, des *Vertex*, verwendet man das AMANDA-Koordinatensystem, das in Anhang B definiert wird. Die Flugrichtung \hat{p} wird durch zwei Winkel angegeben, den Zenitwinkel θ und den Azimutwinkel ϕ . Sie entsprechen den Kugelkoordinatenwinkeln im gleichen System. Dabei beschreibt man mittels der Winkel die Richtung, aus der das Myon kommt und nicht den Vektor \hat{p} , wohin es fliegt. Das liegt daran, dass man an der Herkunftsrichtung des zugehörigen Neutrinos interessiert ist. Ein genau aufwärts laufendes Myon hat beispielsweise einen Zenitwinkel von $\theta = 180^\circ$.

Die noch verbleibende Größe, die zur Beschreibung verwendet wird, ist die Energie des Myons. Entscheidend ist, dass man den Ort (\vec{r}_E, t_E) mit angibt, an dem das Myon die entsprechende Energie hat, da es beim Flug durch Materie Energie verliert (siehe Abschnitt 3.2). Typische Möglichkeiten sind die Energie am Punkt (\vec{r}_1, t_1) , am Punkt, der dem Detektormittelpunkt am nächsten liegt, oder dem Eintrittspunkt in das Detektorvolumen.

Für eine feste Spur hat man zwei Wahlfreiheiten, die der Positionierung der Punkte (\vec{r}_1, t_1) und (\vec{r}_E, t_E) entlang der Bahn entsprechen.

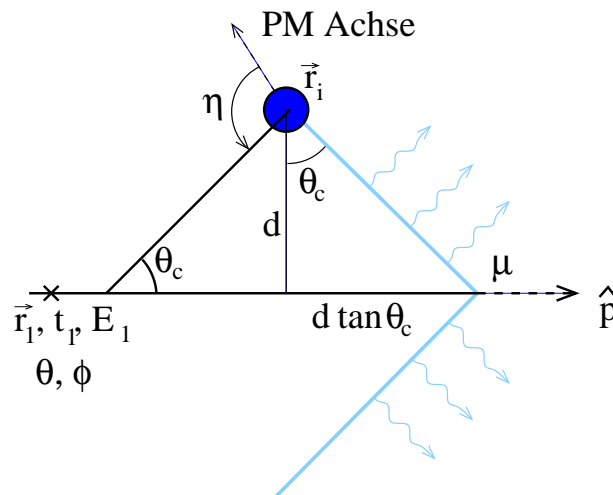


Abbildung 5.1: Die Variablen in der Parametrisierung einer Myonspur. Beim Aufpunkt (t_1, \vec{r}_1) hat das Myon die Energie E_1 . Die Richtung wird durch die Winkel θ und ϕ beschrieben. Der Winkel zur Symmetrieachse des Photomultipliers wird mit η bezeichnet.

In dieser Beschreibung bleiben sowohl die endliche Reichweite eines Myons als auch elektromagnetische und hadronische Schauer zu Beginn der Myonspur bzw. bei katastrophalen Energieverlusten unberücksichtigt. Das impliziert, dass der Angabe der Punkte (\vec{r}_1, t_1) eine echte Wahlfreiheit zu Grunde liegt. Man verschiebt nur den Aufpunkt einer mathematischen Geraden. Beim Punkt (\vec{r}_E, t_E) ist die Situation komplizierter, da man von der Energie an einem Punkt der Bahn nicht unbedingt auf die Energie an einer anderen Stelle schließen kann. Das liegt an der stochastischen Natur der Energieverlustprozesse insbesondere hochenergetischer Myonen (siehe Abschnitt 3.2).

5.2.2 Die Verteilung der Zeitresiduen

In Abschnitt 3.1 wird die *geometrische Ankunftszeit* t_{geo} definiert als derjenige Zeitpunkt, zu dem ein ungestreutes Cherenkovphoton einen bestimmten Punkt erreicht. Mit den oben definierten Spurparametern und dem senkrechten Abstand der Spur von einem optischen Modul, findet man den Zusammenhang (vgl. Abbildung 5.1)

$$t_{\text{geo}} = t_1 + \frac{\hat{p} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_1) + d \cdot \tan \theta_c}{c_{\text{vak}}} \quad (5.1)$$

Die absoluten Trefferzeiten t_{hit} kann man zu den geometrischen Ankunftszeiten einer Spurhypothese in Beziehung setzen. In den *Zeitresiduen* t_{res}

$$t_{\text{res}} = t_{\text{hit}} - t_{\text{geo}} \quad (5.2)$$

sind ebenfalls alle Ankunftszeit-Informationen eines Ereignisses enthalten.

Die Verteilung der Zeitresiduen beschreibt man mit Hilfe der Pandelfunktionen (Gleichung 3.17) einschließlich des Absorptionsterms in Gleichung 3.20. Sie lautet

$$P(t_{\text{res}}, d) = \frac{1}{N(d)} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \cdot \frac{1}{t_{\text{res}}} \cdot \left(\frac{t_{\text{res}}}{\tau}\right)^{\frac{d}{\lambda}} \cdot \exp\left(-t_{\text{res}} \cdot \left(\frac{1}{\tau} + \frac{c_{\text{med}}}{\lambda_{\text{abs}}}\right) - \frac{d}{\lambda_{\text{abs}}}\right) \quad (5.3)$$

$$N(d) = e^{-\frac{d}{\lambda_{\text{abs}}}} \left(1 + \frac{\tau \cdot c_{\text{med}}}{\lambda_{\text{abs}}}\right)^{-\frac{d}{\lambda}} \quad (5.4)$$

Dabei ist $N(d)$ die Normierungskonstante, die durch den Absorptionsterm notwendig wird. Ferner sind Γ die Gamma-Funktion², c_{med} die Lichtgeschwindigkeit im Medium und λ_{abs} die Absorptionslänge. Letztere wird ebenso wie die beiden Konstanten λ und τ als freier Parameter betrachtet (siehe auch Abschnitt 3.3). Mit Hilfe der im letzten Kapitel besprochenen Eismodelle simuliert man die Ankunftszeiten und passt die Parameter der Pandelfunktion an³. Sie werden damit zu effektiven, mittleren Größen. Innerhalb der AMANDA-Kollaboration wird an Verfahren gearbeitet, auch in der Analyse die detaillierten Informationen über die Schichtstruktur des Eises zu verwenden, beispielsweise in Form großer Rekonstruktionstabellen. Diese Verfahren sind noch im Entwicklungsstadium.

In der experimentellen Situation müssen noch drei weitere Aspekte berücksichtigt werden. Das ist zum Einen die Winkelabhängigkeit der Quanteneffizienz der optischen Module. Ein Photon, das „von vorne“ auf die Photokathode trifft, hat eine größere Nachweiswahrscheinlichkeit, als eines, das von der anderen Seite auf das optische Modul trifft. Man ersetzt den Abstand d durch einen *effektiven Abstand* d_{eff} , der eine Funktion des Winkels η zwischen der Ankunftsrichtung und der Symmetrieachse des Photomultipliers ist⁴. Der Winkel ist in Abbildung 5.1 eingezeichnet.

Zum Zweiten muss die endliche Zeitauflösung des Systems berücksichtigt werden, insbesondere die des Photomultipliers. Man beschreibt alle Auflösungen mit einer einzigen Gauß-Funktion der Breite $\sigma_g = 15$ ns. Die Verteilung der Zeitresiduen im Experiment erhält man durch eine Faltung der Pandelfunktion mit der Zeitauflösungsfunktion.

Das Faltungsintegral hat keine offensichtliche analytische Lösung. In der Praxis wird ein anderer Zugang verwendet, um Rechenzeit zu sparen. Man setzt die Ankunftszeitverteilung aus drei Teilen zusammen. Für negative Zeitresiduen verwendet man die Gauß-Funktion selbst. Für große positive t_{res} bleibt die Pandelfunktion unverändert. Im Intervall dazwischen, $[0, \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_g]$, werden die beiden äußeren Teile stetig differenzierbar durch ein Polynom verbunden ([A⁺03a]). Obwohl die zusammengesetzte Funktion sich vom Resultat der Faltung deutlich unterscheidet, erhält man gute Rekonstruktionsergebnisse für $\sigma_g \in [10 \text{ ns}, 20 \text{ ns}]$.

Im Rahmen dieser Arbeit ist ein halb-analytischer, schneller Algorithmus zur Ausführung der Faltung entwickelt worden, um von der Methode der gestückelten Pandelfunktion zu einer korrekten Behandlung des Problems überzugehen.⁵ Die Idee des Algorithmus beruht darauf, den exponentiellen Anteil des Integranden der Faltung stückweise als konstant zu nähern und den Potenzanteil in

²Die Erweiterung der Fakultät für reelle Argumente.

³Man erhält für die konstanten Parameter $\tau = 557$ ns, $\lambda = 33.3$ m und $\lambda_{\text{abs}} = 98$ m ([A⁺03a]).

⁴Man verwendet für den effektiven Abstand $d_{\text{eff}} = 0.84 \cdot d + (3.1 - 3.9 \cdot \cos \eta + 4.6 \cos^2 \eta)$ m. Die Zahlenwerte entstammen einer Anpassung an entsprechende Simulationen ([A⁺03a]).

⁵Mittlerweile ist eine analytische Lösung der Faltung gefunden worden, deren Eigenschaften derzeit von der Kollaboration untersucht werden (vgl. [Jap03]).

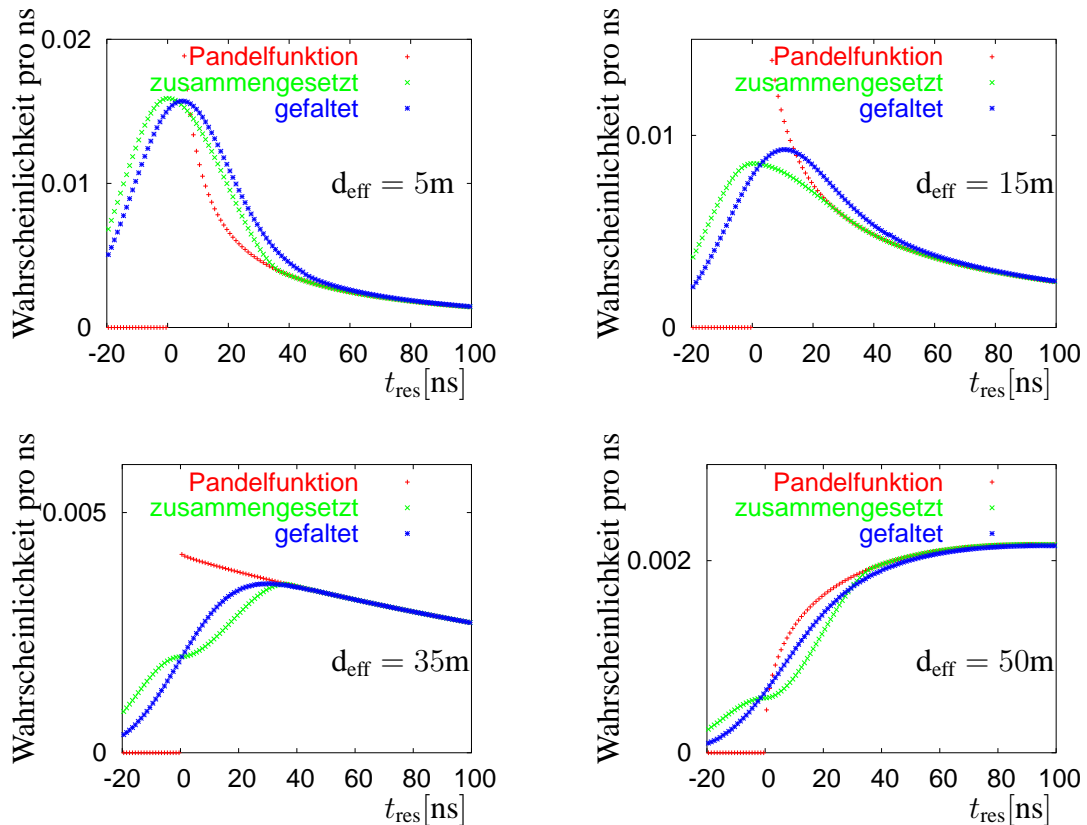


Abbildung 5.2: Vergleich der gefalteten mit der zusammengesetzten Pandelfunktion für verschiedene effektive Distanzen. Die verwendete zeitliche Auflösung beträgt $\sigma_g = 15$ ns. Die eigentliche Pandelfunktion ist ebenfalls gezeigt.

Für größer werdenden effektiven Abstand werden die Funktionen breiter – man beachte den konstant gehaltenen Ausschnitt auf der Abszisse.

Für kleine Zeitresiduen liefert die zusammengesetzte Funktion systematisch verschobene Werte beziehungsweise seltsame Strukturen. Für große Residuen ist die Berücksichtigung der zeitlichen Auflösung nicht mehr notwendig. Der Haupteffekt stammt dann von der Streuung im Eis.

jedem Stück analytisch zu integrieren. Der Algorithmus wird in Anhang C im Detail dargestellt. In Abbildung 5.2 sind die gefaltete und die zusammengesetzte Pandelfunktion für verschiedene effektive Abstände gegenübergestellt. Letztere ist im Bereich negativer Zeitresiduen zu hoch. Für größere Abstände entstehen in der zusammengesetzten Variante immer größere Artefakte.

Es zeigt sich, dass die Unterschiede im Ergebnis der Rekonstruktion mit gefalteten und zusammengesetzten Pandelfunktionen vernachlässigbar sind, was Richtungsbestimmung und Effizienz angeht. Für die Ergebnisse dieser Arbeit sind daher aus technischen Gründen die zusammengesetzten Funktionen verwendet worden.

Als letzten Aspekt muss man noch die Dunkelrausraten der Photomultiplier berücksichtigen. Die

Pandelfunktion beschreibt die Zeitverzögerung eines Photons, das von einer Myonspur zu einem optischen Modul gelaufen ist. A priori ist bei einem Treffer aber nicht klar, ob er durch das Ereignis ausgelöst worden ist.

Die Zeitresiduenverteilung für Rauschtreffer ist flach. Die korrekte Verteilung von t_{res} ist eine gewichtete Summe der Pandelfunktion mit dieser flachen Rauschtrefferverteilung. Die Gewichte entsprechen gerade den Wahrscheinlichkeiten, dass ein Treffer von der Spur beziehungsweise vom Rauschen stammt.

Sie zu bestimmen ist schwierig, insbesondere da man im ersten Schritt der Analyse versucht, Rauschtreffer als solche zu erkennen und aus den Daten zu entfernen (siehe folgender Abschnitt 5.2.3). Ein großer Vorteil der Pandelfunktion liegt darin, dass keine Aussagen darüber gemacht werden, wie wahrscheinlich ein Treffer ist.⁶ Es geht nur um die Zeitverzögerung, falls schon klar ist, dass ein Treffer gemessen wurde.

Um den Einfluss von Rauschtreffern klein zu halten, setzt man die Pandelfunktion auf einen festen (aber kleinen) Wert p_0 überall da, wo die gefaltete oder zusammengesetzte Funktion unter p_0 fällt. Die direkte Interpretation von p_0 als Rausch-Wahrscheinlichkeit geht verloren, aber die genaue zeitliche Position eines Treffers innerhalb dieses konstanten Bereiches hat keinen Einfluss auf die Rekonstruktion.

5.2.3 Die Trefferbereinigung, das *Hitcleaning*

Bevor die Spurrekonstruktion beginnt, trifft man eine Auswahl aus den Trefferinformationen, die aufgezeichnet worden sind. Es sollen möglichst nur diejenigen Daten verwendet werden, die tatsächlich zu dem Ereignis gehören. Dieser Prozess der Trefferbereinigung wird als *Hitcleaning* bezeichnet. Er erfolgt nach der Kalibrierung. Jedes optische Modul kann mehrere Treffer detektiert haben. Die folgenden vier Kriterien kommen zur Anwendung, um jeweils alle Signale eines Moduls aus den Daten zu entfernen. Auf Grund der ersten beiden Kriterien wird ein optisches Modul meist für längere Zeiträume aus dem Datenstrom entfernt. Das ist bei den beiden anderen Kriterien anders, da sie von der Trefferinformation eines Ereignisses mit beeinflusst werden.

1. Alle optischen Module, die außerhalb des Hauptbereiches von AMANDA liegen, werden nicht zur Rekonstruktion herangezogen. Sie liegen insbesondere auf den besonders langen Strings 11-13 und dem weiter oben eingefrorenen String 17 (vgl. Abschnitt 4.1).
2. Da ein stabiles Rauschen auf einen stabilen Photonenvervielfacher rückschließen lässt, werden Module mit abnormalen Rauschraten nicht verwendet. Daten aus *toten* Kanälen mit zu geringem Rauschen, aus *hyperaktiven* Kanälen, mit zu hohem Rauschen und aus *instabilen* Kanälen mit stark wechselndem Rauschen bleiben unberücksichtigt. Der Anteil dieser optischen Module liegt bei etwa 5%-10%.
3. Kanäle mit einem ADC-Wert, der nicht zum TOT-Wert passt, werden für das entsprechende Ereignis verworfen.

⁶Das wird in Abschnitt 5.3 wieder aufgegriffen.

4. Hat man einen Spurkandidaten gefunden, können weitere, darauf aufbauende Rekonstruktionen stattfinden, bei denen nur optische Module berücksichtigt werden, die in seiner Nähe liegen. Die zugehörigen Treffer sind im Mittel weniger stark gestreut. Das ist technisch gesehen auch eine Trefferbereinigung, erfolgt aber erst in einer fortgeschritteneren Phase der Analyse.

In den Modulen, die nicht auf Grund obiger Kriterien aus den Daten entfernt werden, wird jeder einzelne Treffer nach den folgenden Gesichtspunkten beurteilt und gegebenenfalls verworfen. Alle diese Entscheidungen werden für jedes Ereignis neu bestimmt.

1. Ein Treffer wird als *isoliert* bezeichnet, wenn in einem Umkreis von 100 m innerhalb von ± 500 ns kein weiterer Treffer verzeichnet wird. Man geht dann davon aus, dass es sich um einen Rauschtreffer handelt.
2. Um den Triggerzeitpunkt wird ein Zeitfenster von $[-2\mu\text{s}, +4.5\mu\text{s}]$ gelegt. Alle Treffer außerhalb davon werden verworfen. Selbst falls sie zu dem Ereignis gehören sollten, sind sie durch Streuung derart verzögert, dass sie kaum noch nutzbare Information enthalten.
3. Um vom Übersprechen zwischen elektrisch ausgelesenen Kanälen eines Strings möglichst wenig beeinträchtigt zu werden, vergleicht man die Pulslänge (TOT) eines Treffers mit dem zugehörigen ADC-Wert. Da ein Signal bei der Übermittlung über die kilometerlangen Kabel dispersiv verbreitert wird, sind hohe ADC-Werte mit zu kurzen Pulsen ein deutliches Zeichen für Übersprechen. Entsprechende Treffer werden entfernt.

Der Prozess der Trefferbereinigung ist hier nur kurz dargestellt. Ausführlichere Diskussionen findet man in [Rib01, Bös02].

5.2.4 Die Mustererkennung *Direct Walk*

Das analytische Verfahren, das man zur schnellen Spurfindung eingesetzt, ist der *Direct Walk* ([Ste00]). Es handelt sich dabei um einen Algorithmus, der in den Treffern nach bestimmten Mustern sucht, aus denen dann eine Spur zusammengesetzt wird.

Das Verfahren durchläuft vier Schritte. Als erstes werden *Spurelemente* gesucht. Man betrachtet alle Paare von Treffern, bei denen die zugehörigen optischen Module einen Mindestabstand von $d = 50$ m haben. Der Zeitunterschied der beiden Treffer Δt muss der Bedingung genügen:

$$\Delta t < \frac{d}{c_{\text{vak}}} + 30 \text{ ns} \quad . \quad (5.5)$$

Dann wird aus dem Trefferpaar ein Spurelement konstruiert, das durch den gleichen Parametersatz beschrieben wird, wie eine ganze Spur. Als Aufpunkt fungiert der Mittelpunkt zwischen den beiden Treffern in Raum und Zeit. Die Richtung ist durch die Verbindungslinie der Module festgelegt.

Im zweiten Schritt wird die Anzahl an *assoziierten Treffern* N_{AT} bestimmt. Dazu errechnet man für jeden weiteren Treffer das zugehörige Zeitresiduum t_{res} nach Gleichung 5.2 und den senkrechten Abstand d_{\perp} zum Spurelement. Ein assoziierter Treffer muss den beiden folgenden Bedingungen

genügen:

$$-30 \text{ ns} < t_{\text{res}} < 300 \text{ ns} \quad , \quad (5.6)$$

$$d_{\perp} < 25 \text{ m} \cdot (t_{\text{res}}/\text{ns} + 30)^{\frac{1}{4}} \quad . \quad (5.7)$$

Für alle Treffer, die das erfüllen, bestimmt man den *Hebel* L_i . Dazu wird der Ort des zugehörigen Moduls auf das Spurelement projiziert und der Abstand zu seinem Vertex bestimmt. Aus der Verteilung der Hebel schätzt man den *mittleren Hebel* σ_L ab

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{AT}}} \sum_i (L_i - \langle L \rangle)^2} \quad . \quad (5.8)$$

Ein Spurelement wird als *Spurkandidat* bezeichnet, wenn es die beiden Kriterien erfüllt:

$$N_{\text{AT}} \geq 10 \quad , \quad (5.9)$$

$$\sigma_L \geq 20 \text{ m} \quad . \quad (5.10)$$

Findet sich mehr als einen Spurkandidat, dann wird in den nächsten beiden Schritten der vielversprechendste ausgewählt. Zunächst betrachtet man ein weiteres Qualitätskriterium Q_{SK}

$$Q_{\text{SK}} = \min\left\{N_{\text{AT}}, \frac{0.3}{\text{m}} \cdot \sigma_L + 7\right\} \quad , \quad (5.11)$$

mittels dessen die beiden Größen aus den Gleichungen 5.9 und 5.10 auf eine einzige vereinigt werden.

Die höchste Qualität $\max\{Q_{\text{SK}}\}$ setzt die „Messlatte“ in einem Ereignis. Alle Kandidaten, deren Spurqualität unter 70% des besten ist, werden verworfen:

$$Q_{\text{SK}} \geq 0.7 \cdot \max\{Q_{\text{SK}}\} \quad . \quad (5.12)$$

Unter den verbleibenden wird eine *Häufungssuche* durchgeführt. Für jeden Spurkandidaten zählt man, wie viele der anderen Spurkandidaten in ihrer Richtung nicht mehr als 15° abweichen. Derjenige mit den meisten Nachbarn wird ausgewählt. Sein Vertex wird für den Aufpunkt einer Spur verwendet, die Richtung erhält man aus dem Mittel aller Spuren in dem 15° -Kegel.

Die Ergebnisse des *Direct Walk* bleiben stabil, auch wenn keine Trefferbereinigung verwendet wird. Man verwendet ihn als ersten, schnellen Schritt des Rekonstruktionsprozesses.

5.3 Die Spurrekonstruktion mit Maximum-Likelihood-Verfahren

In der vollen Spurrekonstruktion verwendet man das Verfahren der *Maximum Likelihood*. Die prinzipielle Idee dabei ist, die hypothetische Spur auszuwählen, für die es am wahrscheinlichsten war, das gesehene Treffermuster in einem Ereignis zu messen (vgl. Anhang E ⁷).

⁷Anhang E.1 beginnt mit einer Einführung in die grundsätzlichen Begriffe des Likelihood-Formalismus. Die darauf folgenden Abschnitte sind jedoch als Vorbereitung der Betrachtungen in Kapitel 6 konzipiert.

\vec{M} bezeichnet die Gesamtinformation eines Ereignisses. Für eine bestimmte Vorgehensweise wählt man einen Teil \vec{m} davon aus. Der Parametersatz zur Beschreibung einer Spurhypothese wird abstrahiert als \vec{a} geschrieben. Gemeint sind damit im Fall der Myonspur die Parameter $(\vec{r}_1, t_1, \theta, \phi)$ und eventuell E_1 (vgl. Abschnitt 5.2.1).

Für jeden gemessenen Wert m_i benötigt man die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $p_i(m_i; \vec{a})$, die von den Spurparametern \vec{a} abhängt. Die Funktion

$$p(\vec{m}; \vec{a}) = \prod_i p_i(m_i; \vec{a}) \quad (5.13)$$

ist für festes \vec{a} die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von \vec{m} , wenn Korrelationen unberücksichtigt bleiben. Deren Einfluss wird in Abschnitt 5.4 diskutiert.

Für gemessenes und damit festes \vec{m} wird \vec{a} die Variable. In dieser Interpretation wird aus Gleichung 5.13 die Likelihood-Funktion $\mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m})$. Mit $\mathcal{L}_i(\vec{a}; m_i) = p_i(m_i; \vec{a})$ folgt

$$\mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}) = \prod_i \mathcal{L}_i(\vec{a}; m_i) \quad (5.14)$$

Die wahrscheinlichste Hypothese findet man an der Stelle, an der die Likelihood-Funktion maximal wird. Aus technischen Gründen wird in der Regel der negative Logarithmus betrachtet, die *Loglikelihood-Funktion*

$$l(\vec{a}; \vec{m}) = -\ln \mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}) = -\sum_i \ln \mathcal{L}_i(\vec{a}; m_i) \quad (5.15)$$

Jedes Maximum von \mathcal{L} entspricht einem Minimum von l .

Betrachtet man zwei disjunkte Teilmengen von \vec{M} , \vec{m}^a und \vec{m}^b , so kann man die gemeinsame Likelihood-Funktion als Produkt der einzelnen gewinnen.

$$\mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}^a, \vec{m}^b) = \mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}^a) \cdot \mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}^b) \quad (5.16)$$

Diesen Ansatz kann man auch verfolgen, wenn \vec{m}^a und \vec{m}^b überlappen. Insbesondere dann ist es sinnvoll, die einzelnen Terme mit Gewichten w_a und w_b zu versehen

$$\mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}^a, \vec{m}^b) = \left(\mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}^a)\right)^{w_a} \cdot \left(\mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}^b)\right)^{w_b} \quad (5.17)$$

Zum Auffinden des Extremums im Parameterraum gibt es mehrere Verfahren. Man kann eine gerasterte Suche durchführen, was aber aus Gründen des Rechenzeitaufwandes nicht mit hinreichend feiner Schrittweite möglich ist. Alternativ kann man eine numerische Minimierung verwenden⁸. Den benötigten Startpunkt liefern analytische Algorithmen, üblicherweise der *Direct Walk* (siehe Abschnitt 5.2.4).

Es zeigt sich als besonders erfolgreich, die numerische Minimierung mehrfach mit leicht veränderten Startwerten durchzuführen. In dieser *iterativen Suche* werden die Winkel θ und ϕ nach dem ersten

⁸Das verwendete Verfahren ist der *Simplex-Algorithmus* ([PTVF97]).

Durchlauf zufällig variiert, und die so erhaltene Spur dient als Ausgangspunkt eines neuen Versuches. Die Bezeichnung *iterativ* ist dabei etwas irreführend, da im Winkelanteil des Parameterraums zufällig und nicht aufeinander aufbauend gesucht wird.⁹ Für den Aufpunkt der Spur ist der Begriff zutreffender, da tatsächlich die Koordinaten der bisher besten Lösung verwendet werden. Allerdings verschiebt man den Punkt vor dem Verändern der Winkel möglichst nahe an das Detektorzentrum, damit die neue „Startspur“ nicht weit außerhalb der Region getroffener optischer Module liegt.

Der Erfolg der iterativen Suche beruht auf der Form des Loglikelihood-Gebirges¹⁰. Das „Einzugsgebiet“ des richtigen Minimums muss groß genug sein, dass bei mehrfacher zufälliger Wahl von Startwinkeln der Minimierungsprozess in dieses Minimum führt. Der Verlauf der Loglikelihood-Funktion wird in der Diskussion um die Qualitätsparameter noch einmal thematisiert (Abschnitt 5.4).

Die Anzahl der Parameter in \vec{a} definiert die Dimensionalität des Raumes, in dem nach einem Minimum gesucht wird. Mit steigender Dimension wächst die benötigte Rechenzeit stark an. Daher ist es sinnvoll, zunächst mit einer simpleren Hypothese, beispielsweise ohne Energieparameter, in mehreren Iterationsschritten zu suchen. Die erhaltene Spur verwendet man dann als Startwert für eine oder wenige Iterationen mit einer komplexeren Likelihood-Funktion.

Die verwendeten Ansätze verschiedener Likelihood-Funktionen werden im Folgenden diskutiert.

5.3.1 Die Verfahren mit relativen Wahrscheinlichkeiten

Die Pandelfunktion beschreibt die Verteilung der Ankunftszeiten unter der Annahme, dass ein Treffer erfolgt ist. Entsprechend ist sie auf Eins normiert. Es werden nur verschiedene Trefferzeiten relativ zueinander gewichtet. Wird nur die Pandelfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte eingesetzt, bezeichnet man die Vorgehensweise als ein Verfahren mit *relativen* Wahrscheinlichkeiten.

Die enthaltenen Informationen sind gut in der Simulation beschreibbar, weil man sich auf eine einfache Fragestellung beschränkt. Die Verfahren mit *absoluten* Wahrscheinlichkeiten untersuchen zusätzlich die Fragestellung, wie wahrscheinlich es ist, dass ein Treffer erfolgt oder nicht. Sie werden im nächsten Abschnitt (5.3.2) diskutiert.

Das Standardverfahren

Das Standardverfahren verwendet alle Treffer, die nicht vom *Hitcleaning* entfernt werden. Damit kann jedes optische Modul mehrfach zu einem Ereignis beitragen. Allerdings müssen zwei Treffer in einem Modul einen bestimmten zeitlichen Abstand haben, um getrennt detektiert zu werden, da sie durch Dispersionseffekte auf den Leitungen nach oben verbreitert werden und sonst ineinander laufen. Der Abstand liegt für elektrisch übertragene Signale in der Größenordnung einiger 100 ns und für optisch übertragene bei etwa 10 ns.

Als Likelihood-Funktion $\mathcal{L}_{\text{std.}}$ verwendet man die Pandelfunktion aus Gleichung 5.3.

⁹Dennoch haben sich die Bezeichnungen *iterative Rekonstruktion* beziehungsweise *n-fach iterative Rekonstruktion* etabliert und werden in dieser Arbeit verwendet. Typischerweise verwendet man $n = 16$.

¹⁰Dieses ist in der Tat relativ „zerklüftet“, so dass der Ausdruck *Gebirge* gerechtfertigt ist ([Hau01]).

Das Multiphotoelektron Verfahren (MPE)

Die genaueste Zeitinformation ist im ersten Treffer in einem optischen Modul enthalten, weil das zugehörige Photon am wenigsten gestreut worden ist. Die entsprechenden Zeitresiduen werden nicht direkt durch die Pandelfunktion beschrieben, da frühere Zeiten wahrscheinlicher sind. Für die adaptierte Pandelfunktion p_N^1 für das Erste von N Photonen gilt

$$p_N^1(t_{\text{res}}) = N \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot \left(\int_{t_{\text{res}}}^{\infty} p(t) dt \right)^{(N-1)}. \quad (5.18)$$

Diese Funktion wird als Multiphotoelektron-Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet. Sie setzt sich aus drei Termen zusammen. Der Faktor N ist bedingt durch die Auswahl eines Photons aus insgesamt N . Der mittlere Term ist die eigentliche Pandelfunktion $p(t_{\text{res}})$ und beschreibt das ausgewählte Photon. Der letzte Term spiegelt die Wahrscheinlichkeit wider, dass die übrigen $(N - 1)$ Photonen später als das Erste kommen.

Die Anzahl an Photonen N bestimmt man für elektrisch ausgelesene Kanäle aus der Amplitudenmessung. Die Höhe des Pulses ist proportional zu N . Treffer, die so spät kommen, dass man sie getrennt auflösen kann, werden entfernt. Sie werden nicht in Gleichung 5.18 berücksichtigt.

Für die optisch ausgelesenen Module wird prinzipiell das gleiche Verfahren verwendet. Allerdings wäre es sinnvoller, nachfolgende Pulse zu zählen, um N zu erhalten. Wegen der geringen Dispersion überlagern sich in diesen Modulen zwei Photonsignale nur dann, wenn sie fast zeitgleich eintreffen. Die Adaption der MPE-Dichte auf optisch ausgelesene Kanäle ist bisher noch nicht systematisch untersucht worden. Die Situation ist durch das *Nachpulsverhalten* der optischen Module etwas komplizierter. Ein Treffer¹¹ zieht mit relativ großer Wahrscheinlichkeit einen oder mehrere Folgetreffer nach sich. Dadurch ist es schwieriger, die Anzahl von Photonen N zu bestimmen, die von der Spur kommen. Für eine Diskussion des Nachpulsverhaltens siehe [Fra03, H+03].

Analog zu der Vorgehensweise bei der einfachen Pandelfunktion wird auch bei der MPE-Funktion die Zeitauflösung berücksichtigt.

5.3.2 Die Verfahren mit absoluten Wahrscheinlichkeiten

Die Anzahl an Photonen, die von einer Spur im Eis abgestrahlt werden, ist sehr groß im Vergleich zu den Treffern, die in den optischen Modulen registriert werden. Wegen der komplexen Eiseigenschaften ist die Frage, wie viele Treffer man unter einer gegebenen Spurbhypothese an einem optischen Modul erwartet, deutlich schwieriger zu beantworten als die Frage nach den Ankunftszeitverzögerungen unter der Bedingung, dass ein Treffer vorliegt.

Zudem werden die Minimierungsverfahren zeitaufwändiger, da die Energie als weiterer Parameter zur Spurbeschreibung hinzukommt. Das ist zumindest für Spurenergien oberhalb einiger hundert GeV notwendig, wenn die Lichtdeposition stark von der Energie abhängt (vgl. Abschnitt 3.2).

¹¹Die Bezeichnung „Treffer“ bezieht sich immer auf einen einzelnen Puls eines Photonenervielfachers.

Das Verfahren der Poisson-gesättigten Amplituden

Das Verfahren der *Poisson-gesättigten Amplituden* beruht auf der MPE-Pandelfunktion p_N^1 (vgl. Gleichung 5.18). Man geht aber nicht von der gemessenen Zahl an Photoelektronen aus, sondern verwendet deren Erwartungswert μ . Die Anzahl an Photoelektronen N wird durch eine Poissonverteilung beschrieben. Man faltet sie mit p_N^1 , um auf die Poisson-gesättigte Amplitude p_μ zu kommen. Es ist

$$p_\mu(t_{\text{res}}) = c \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\mu^N e^{-\mu}}{N!} \cdot p_N^1(t_{\text{res}}) = \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot e^{-\mu P(t_{\text{res}})} \quad . \quad (5.19)$$

Dabei bezeichnet

$$P(t_{\text{res}}) = \int_{-\infty}^{t_{\text{res}}} p(t) dt \quad (5.20)$$

die Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t)$ und $c = \frac{1}{1 - e^{-\mu}}$ die Normierungskonstante. Die Herleitung des Zusammenhangs 5.19 steht in Anhang D.

Der Erwartungswert der Photoelektronen μ wird von mehreren Faktoren beeinflusst. Er hängt von der Anzahl der Photonen im Eis, deren Absorptionswahrscheinlichkeit auf dem Weg von der Spur zum optischen Modul und der Effizienz des Photomultipliers ab, die ihrerseits eine Funktion des Winkels η ist.

Um μ zu bestimmen, bestimmt man die Wahrscheinlichkeit P^{kTr} , dass ein optisches Modul keinen Treffer verzeichnet. Es gilt

$$P^{\text{kTr}} = e^{-\mu} \quad . \quad (5.21)$$

Daraus folgt auch die Interpretation für die Normierungskonstante c . Sie entspricht dem Kehrwert der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Photon nachgewiesen wird.

Es gibt noch einen zweiten Zugang zu P^{kTr} . Dazu betrachtet man ein Photon, das von der Spur auf den Weg zum optischen Modul geschickt wird. Für solch ein Photon kann man die Normierungskonstante $N(d)$ aus Gleichung 5.4 als Wahrscheinlichkeit interpretieren, nicht auf der Strecke absorbiert zu werden. Bezeichnet man mit $\epsilon(\eta)$ die winkelabhängige Effizienz des Moduls, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Photon *nicht* zu einem Signal führt, gleich

$$P_{1\gamma}^{\text{kTr}} = \left(1 - N(d) \cdot \epsilon(\eta)\right) \quad . \quad (5.22)$$

Für k injizierte Photonen ist die Wahrscheinlichkeit $P_{k\gamma}^{\text{kTr}}$, keines davon nachzuweisen, gleich

$$P_{k\gamma}^{\text{kTr}} = (P_{1\gamma}^{\text{kTr}})^k = \left(1 - N(d) \cdot \epsilon(\eta)\right)^k \quad . \quad (5.23)$$

Bezeichnet man den Erwartungswert an injizierten Photonen mit $n = n(E_\mu)$ und faltet Gleichung 5.23 mit einer Poissonverteilung $P(k; n)$, findet man für P^{kTr}

$$P^{\text{kTr}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k e^{-n}}{k!} \left(1 - N(d) \cdot \epsilon(\eta)\right)^k = e^{-n \cdot N(d) \cdot \epsilon(\eta)} \quad . \quad (5.24)$$

Aus den Gleichungen 5.21 und 5.24 folgt

$$\mu = n \cdot N(d) \cdot \epsilon(\eta) \quad . \quad (5.25)$$

In der Praxis fasst man n und ϵ in einem gemeinsamen Term $\epsilon'(\eta, E_\mu)$ zusammen. Zum Einen sind die absoluten Effizienzen der optischen Module nicht bekannt, zum Anderen gibt es Korrelationen zwischen der Spurenergie und der Verteilung der Einfallswinkel η . Man verwendet einen veränderten und energieabhängigen Ansatz für den effektiven Abstand und übernimmt die optischen Parameter τ , λ und λ_{abs} aus der Anpassung der Standardpandelfunktion (siehe Abschnitt 5.2.2). Dann adaptiert man $\mu = N(d) \cdot \epsilon'(\eta, E_\mu)$ in der Simulation.

Das Verfahren der Trefferwahrscheinlichkeiten

Die *Trefferwahrscheinlichkeit* P^{Tr} , dass ein optisches Modul getroffen wird, und die *Wahrscheinlichkeit* P^{kTr} , nicht getroffen zu werden, addieren sich zu Eins. Man kann die eine aus der anderen gewinnen

$$P^{\text{Tr}} = 1 - P^{\text{kTr}} \quad . \quad (5.26)$$

Für ein optisches Modul, das sich nahe an der Myonspur befindet, ist es unwahrscheinlich, kein Photon nachzuweisen, ebenso wie man in einem weit entfernten Model eher keinen Treffer erwartet. Im *Verfahren der Trefferwahrscheinlichkeiten* setzt man eine Likelihood-Funktion \mathcal{L}^{TW} aus den Wahrscheinlichkeiten P^{Tr} und P^{kTr} für jedes Modul zusammen. Es ist

$$\mathcal{L}^{\text{TW}} = \prod_{i=1}^{N^{\text{Tr}}} P_i^{\text{Tr}} \cdot \prod_{i=N^{\text{Tr}}+1}^{N^{\text{OM}}} P_i^{\text{kTr}} \quad . \quad (5.27)$$

Der erste Term bezieht sich auf alle N^{Tr} getroffenen Photomultiplier, der zweite auf diejenigen ohne Treffer. N^{OM} bezeichnet die Zahl aller optischen Module, die in die Funktion eingehen. Es ist wichtig, nur solche Beiträge zu verwenden, bei denen das entsprechende Modul stabil ist. Sonst ist die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit nicht zu bestimmen.

Außerdem muss man die Rauschwahrscheinlichkeit P_{rausch} berücksichtigen. Die vollständige Wahrscheinlichkeit P_v^{kTr} , keinen Treffer zu verzeichnen, ist dann

$$P_v^{\text{kTr}} = P^{\text{kTr}} \cdot (1 - P_{\text{rausch}}) \quad . \quad (5.28)$$

Die Energie-Rekonstruktion

Wenn möglich, wird die Rekonstruktion der Energie in zwei aufeinanderfolgenden Schritten durchgeführt. Man bestimmt zuerst die rein geometrischen Parameter der Myonspur, um ihre Lage im Raum festzulegen. Das geschieht unter Verwendung eines der Verfahren mit *relativen* Wahrscheinlichkeiten. Im Anschluss daran führt man einen weiteren Rekonstruktionsschritt durch, in dem nur die Energie als freier Parameter zugelassen ist. Dabei werden drei Vorgehensweisen verwendet.

1. Das Verfahren der Trefferwahrscheinlichkeiten ist der einfachste Ansatz zur Energierekonstruktion.
2. Die gemessenen Amplituden der Pulshöhen (ADC-Werte) lassen sich vollständig in eine Likelihood-Funktion einfügen ([Mio01]). Die Rekonstruktionsgenauigkeit ist besser, hängt aber stärker von der Genauigkeit der Kalibrierung ab.
3. Es gibt mehrere energieabhängige Observable in einem Ereignis. Das sind unter anderem die Mittelwerte und Streuung der Zeitresiduen, Pulshöhen und Pulsbreiten (TOT), zudem die jeweiligen Anzahlen der Treffer insgesamt, der getroffenen optischen Module und die derjenigen Photomultiplier, die nur genau einen Treffer verzeichnet haben. Mit Hilfe eines Neuronalen Netzes, das obige Größen als Eingangsparameter verwendet, bestimmt man einen Schätzer für die Energie des Myons ([Gee02]).

In Rekonstruktionsverfahren wie der Poisson-saturierten Amplitude, bei denen es starke Korrelationen zwischen der Energie und den gemessenen Zeitresiduen gibt, muss man die sechs Spurparameter der Lage und Energie gleichzeitig optimieren.

5.3.3 Der Bayesische Ansatz

Der Satz von Bayes macht eine Aussage über bedingte Wahrscheinlichkeiten. Betrachtet man zwei Aussagen A und B und bezeichnet mit $P(A|B)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A wahr ist unter der Bedingung B , dann gilt

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad . \quad (5.29)$$

Diesen Zusammenhang macht man sich in der Rekonstruktion zu Nutze, indem man a priori Informationen darüber einfließen lässt, dass manche Spuren häufiger vorkommen als andere und damit wahrscheinlicher sind ([Hil01]). Man identifiziert A mit den Spurparametern \vec{a} und B mit der Messung \vec{m} . Mit $P(\vec{a})$ wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung von verschiedenen Spuren beschrieben. Da in der Region des Detektors atmosphärische Myonen diejenigen aus atmosphärischen Neutrinos um einen Faktor von $\sim 10^5$ überwiegen, sind abwärts laufende Spuren a priori wahrscheinlicher. Den genauen Verlauf von $P(\vec{a})$ erhält man aus einer Monte-Carlo-Simulation, deren Eingangsparameter auf der Kenntnis des atmosphärischen Myonflusses aus anderen Experimenten beruht ([A⁺03c]). Dabei ist $P(\vec{m})$ unabhängig von den Spurparametern und wird in diesem Zusammenhang nur als Normierungskonstante betrachtet. Da man sich nur für relative Likelihood-Werte interessiert, wird $P(\vec{m})$ im Folgenden nicht mehr mitgeführt. Für die Bayesische Likelihood-Funktion \mathcal{L}_B folgt

$$\mathcal{L}_B(\vec{a}; \vec{m}) = p(\vec{m}; \vec{a}) \cdot P(\vec{a}) \quad . \quad (5.30)$$

Für $p(\vec{m}; \vec{a})$ verwendet man eine beliebige der bisher diskutierten Likelihood-Funktionen, da $\mathcal{L}(\vec{a}; \vec{m}) = p(\vec{m}; \vec{a})$ ist.

Die Situation wird etwas verkompliziert, wenn man die Rekonstruktion auf verschiedenen Stufen der Analyse verwenden möchte. Sobald man durch die Applikation von Selektionskriterien die Spuren von atmosphärischen Myonen unterdrückt, verändert sich die Funktion $P(\vec{a})$. Aufwärts laufende Spuren werden dann a priori wahrscheinlicher. Dieser Effekt wird im Verlauf des Analyseprozesses immer größer. Es bleibt aber unproblematisch, da man prinzipiell jede Funktion für $P(\vec{a})$ verwenden kann, solange das Resultat eine Trennung von Signal und Untergrund erlaubt. Die Bayesische Interpretation der Vorgehensweise geht aber verloren, ebenso wie die direkte physikalische Interpretation.

Im Vergleich mit der Standardmethode werden mit der Vorgehensweise unter Verwendung von \mathcal{L}_B deutlich weniger atmosphärische Myonen als aufwärts laufende Spuren rekonstruiert ([DeY01]).

5.4 Die Qualitätsvariablen zur Untergrund-Unterdrückung

Die Likelihood-Funktionen des vorangehenden Abschnittes sind alle als Produkte konstruiert, bei denen sich jeder Faktor auf jeweils ein optisches Modul bezieht. Die Korrelationen zwischen den Signalen verschiedener Module sind unberücksichtigt geblieben. Will man ausschließlich mit dieser Funktion das Signalmuster im Detektor vollständig beschreiben, müssten sie mit einbezogen werden. Die zugehörigen Likelihood-Funktionen sind sehr aufwändig. Man wählt daher eine andere, zweistufige Vorgehensweise.

Zuerst rekonstruiert man die Spuren mit den Methoden des letzten Abschnittes und verwirft diejenigen mit zu kleinen Zenitwinkeln, das heißt abwärts laufende Myonen. Bei den verbleibenden Spuren berechnet man die Werte von *Qualitätsvariablen*, mit Hilfe derer man im verbleibenden Datensatz das Signal vom Untergrund abtrennen kann.

Die verschiedenen Qualitätsvariablen werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

5.4.1 Parameter aus ungestreuten Treffern

Die Photonen, die im Eis die wenigsten Streuprozesse erfahren haben, enthalten am meisten Informationen über den Verlauf der Spur. Man definiert einen *direkten Treffer* als ein Signal mit einem Zeitresiduum t_{res} nahe Null:

$$t_1 < t_{\text{res}} < t_2 \quad \text{mit} \quad t_1 = -15 \text{ ns} \quad , \quad t_2 = +75 \text{ ns} \quad . \quad (5.31)$$

Daraus werden mehrere Qualitätsparameter konstruiert. Der Einfachste entspricht der Anzahl der direkten Treffer N_{dir} . Die *direkte Länge* L_{dir} erhält man, indem man die Orte aller optischen Module mit direkten Treffern auf die Spur projiziert. Der größte Abstand zweier Projektionspunkte bestimmt L_{dir} . Diese Länge entspricht einem *Hebelarm*. Je länger der Hebel, umso genauer kann die Richtung der Spur bestimmt werden. Damit ist L_{dir} mit der Winkelauflösung des Ereignisses korreliert. Das gilt auch für Kombinationen wie beispielsweise dem Produkt von direkter Länge und der Anzahl direkter Treffer.

Die direkte Länge ist eine hilfreiche Variable bei der Unterdrückung von streifenden und stoppenden Myonen sowie von Kaskaden. Allerdings werden auch hochenergetischen Neutrinoereignissen, deren Myonen katastrophalen Energieverlusten unterliegen, geringe direkte Längen zugewiesen. Letzteres wird in Abschnitt 6.4 dargelegt.

5.4.2 Die Ebenmäßigkeit, die *Smoothness*

Unter der vereinfachenden Annahme, dass ein Myon entlang seiner Spur stets die gleiche Lichtmenge deponiert, erwartet man eine ebenmäßige Verteilung der Treffer entlang der Spur. Man projiziert die Position jedes getroffenen Moduls senkrecht auf die Spurrichtung. Man erhält N^{Tr} Koordinaten x_j entlang der Spur. Die *Teillängen* l_j definiert man als den Abstand der Koordinate x_j von der ersten Koordinate x_1 . Im Fall einer absolut ebenmäßigen Verteilung der Treffer mit jeweils gleich großen Abständen zu den Nachbarn gilt

$$\frac{l_j}{l_{N^{\text{Tr}}}} = \frac{j-1}{N^{\text{Tr}}-1} \quad (5.32)$$

Die Abweichung von diesem unphysikalischen Modell ist dann

$$S_j = \frac{j-1}{N^{\text{Tr}}-1} - \frac{l_j}{l_{N^{\text{Tr}}}} \quad (5.33)$$

Aus der extremalen Abweichung (mit maximalem Betrag)

$$S = \sup\{S_j\} \quad (5.34)$$

erhält man ein Maß für die Gleichverteilung der Treffer entlang der Spur. Gleichung 5.34 ist die Definitionsgleichung für die *Ebenmäßigkeit* oder *Smoothness*. Positive Werte nahe +1 deuten auf eine Anhäufung der Treffer im vorderen Bereich der Spur, negative Werte bei -1 auf überdurchschnittlich viele Module im hinteren Bereich hin.

Die Ebenmäßigkeit ist durch den Kolmogorov-Smirnov Test motiviert, bei dem die Integrale zweier Verteilungen auf ihre Konsistenz hin geprüft werden. Entsprechend kann das Konzept erweitert werden, beispielsweise indem man die Trefferwahrscheinlichkeiten P^{Tr} einbindet. Der resultierende Qualitätsparameter S^{Tr} ist

$$S^{\text{Tr}} = \sup\{S_j^{\text{Tr}}\} \quad \text{mit} \quad (5.35)$$

$$S_j^{\text{Tr}} = \frac{\sum_{i=1}^j \Lambda_i}{\sum_{i=1}^{N^{\text{OM}}} \Lambda_i} - \frac{\sum_{i=1}^j P_i^{\text{Tr}}}{\sum_{i=1}^{N^{\text{OM}}} P_i^{\text{Tr}}} \quad (5.36)$$

Dabei ist $\Lambda_i = 1$ für jedes getroffene Modul und $\Lambda_i = 0$ für jedes ohne Treffer. Die Trefferwahrscheinlichkeit des Moduls i bestimmt man wie in Abschnitt 5.3.2. In die Berechnung von S^{Tr} fließen auch Informationen von nicht getroffenen Modulen mit ein. Die Reihenfolge aller Module wird entsprechend ihrer Projektion auf die Spur bestimmt.

Durch Anforderungen an die Ebenmäßigkeit eines Ereignisses lassen sich stoppende und koinzidente Myonen sowie atmosphärische Myonen mit schauerartigen Energieverlusten unterdrücken.

5.4.3 Parameter aus Winkeldifferenzen

Für verschiedene Rekonstruktionsverfahren, die unterschiedliche Likelihood-Funktionen verwenden, liegt die optimale Spurrhypothese nicht notwendigerweise an derselben Stelle im Parameterraum. Bezeichnet man die Einheitsvektoren der Richtungen zweier Rekonstruktionen als \hat{p}_1 und \hat{p}_2 , dann gilt für den räumlichen Winkel zwischen den Spuren Ψ

$$\Psi = \arccos(\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2) \quad . \quad (5.37)$$

Sollen mehr als zwei Spurrichtungen verglichen werden, dann betrachtet man die mittlere Abweichung $\bar{\Psi}$ von der mittleren Richtung \bar{p}

$$\bar{\Psi} = \sum_{i=1}^n \arccos(\hat{p}_i \cdot \bar{p}) \quad \text{mit} \quad \bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \quad . \quad (5.38)$$

Die Verfahren verwenden eine unterschiedliche Teilmenge aus der Gesamtinformation des Ereignisses. Es liegt allen die gleiche physikalische Realität zu Grunde. Weichen die Resultate der Rekonstruktion stark voneinander ab, dann schließt man daraus, dass mindestens eines der Ergebnisse nicht verlässlich und die Qualität des Ereignisses somit gering ist.

Die Vergleichbarkeit von Rekonstruktionen ist statistisch nicht einfach zu beschreiben, da die verschiedenen Verfahren stark korreliert sind. Man kann aber die Treffer in den optischen Modulen in zwei Hälften unterteilen, indem man sie nach ihrer absoluten Zeit durchnummeriert und in ungerade und gerade Treffer aufteilt. Die beiden resultierenden Signalmuster im Detektor enthalten (fast) gleich viele Zeitresiduen und man kann die beiden Teilspuren nach dem jeweils gleichen Verfahren rekonstruieren. Der räumliche Winkel zwischen den beiden Spuren ist ein Maß für die Genauigkeit der Richtungsrekonstruktion und ebenfalls als Qualitätsparameter verwendbar. Diese Vorgehensweise wird in Abschnitt 6.2 nochmals aufgegriffen.

Schnitte auf Winkeldifferenzen sind insbesondere gegen Myonbündel und koinzidente atmosphärische Myonen effizient. Bei zwei gleichzeitig eintreffenden Myonen finden die Likelihood-Rekonstruktionen eine Spur, die Treffer von beiden Quellen zu verbinden versuchen, während der *Direct Walk* eines der Myonen auswählt. Das führt zu großen Unterschieden in der rekonstruierten Richtung.

5.4.4 Parameter aus dem Vergleich von Hypothesen

Der Likelihood-Funktionswert ist ein Maß dafür, wie wahrscheinlich es war, das gemessene Signalmuster zu erhalten. Will man zwei verschiedene Hypothesen miteinander vergleichen, kann man aus dem Quotienten der zugehörigen Likelihood-Werte schließen, welche Hypothese als wahrscheinlicher anzusehen ist. Bei den negativen Logarithmen der Funktionswerte betrachtet man deren Differenz.

Für zwei Hypothesen \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 mit zugehörigen Likelihood-Funktionswerten \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 erhält man den Qualitätsparameter Δl

$$\Delta l = (-\ln \mathcal{L}_1) - (-\ln \mathcal{L}_2) \quad . \quad (5.39)$$

Positive Werte von Δl schreiben \mathcal{H}_2 die größere a posteriori Wahrscheinlichkeit zu und umgekehrt bevorzugt man \mathcal{H}_1 für negative Δl .

Eine Möglichkeit, einen solchen Parameter zu konstruieren, stammt aus dem Vergleich zweier physikalisch unterschiedlicher Hypothesen. Man kann Δl beispielsweise erhalten, wenn \mathcal{H}_1 mit der besten Spurhypothese und \mathcal{H}_2 mit der besten Hypothese für ein schauerartiges Ereignis¹² identifiziert wird. Je größer $|\Delta l|$, desto klarer kann man zwischen den beiden physikalischen Modellen unterscheiden.

Eine weitere Vorgehensweise betrifft den Vergleich von Likelihood-Werten bei gleicher physikalischer Hypothese aber in unterschiedlichen Bereichen des Parameterraums. Während des iterativen Rekonstruktionsprozesses (siehe Abschnitt 5.3) können verschiedene lokale Minima der Loglikelihood-Funktion aufgefunden werden. Es werden aber nur die Spurparameter gespeichert, die zu dem tiefsten gefundenen Minimum gehören. Zusätzlich behält man die Funktionswerte am jeweils tiefsten Minimum für aufwärts und abwärts laufende Spuren. Für Ereignisse, die als aufwärts laufend rekonstruiert werden, ist der Parameter

$$\Delta l^\theta = (-\ln \mathcal{L}_{\theta \leq 90^\circ}) - (-\ln \mathcal{L}_{\theta > 90^\circ}) \quad (5.40)$$

per definitionem positiv. Werte nahe Null bedeuten aber, dass es ein fast ebenso wahrscheinliches Minimum für eine abwärts laufende Spur gibt. Große Werte von Δl^θ lehnen abwärts laufende Lösungen ab.

Für Gauß-verteilte Größen entspricht der Quotient

$$L_{\text{red}} = \frac{-\ln \mathcal{L}}{n_{\text{frei}}} \quad (5.41)$$

aus Loglikelihood-Funktionswert und der Zahl der Freiheitsgrade dem reduzierten χ^2 . Anstelle der Likelihood-Funktionswerte kann man in der Bestimmung von Δl auch die reduzierten Werte verwenden, oder L_{red} selbst als Qualitätsparameter betrachten.

In Abbildung 5.3 ist der Verlauf der Loglikelihood-Funktion gegen den Zenitwinkel für ein Ereignis exemplarisch dargestellt. Man erkennt mehrere Minima. Der iterative Rekonstruktionsprozess hat die optimale Lösung nicht gefunden, sondern die durch eine Parabelanpassung gekennzeichnete Stelle.

Im Rahmen dieser Arbeit ist ein Verfahren entwickelt worden, mit dem die Form eines Minimums untersucht werden kann. Man möchte aus seinen Eigenschaften schließen, ob tatsächlich das wahre Minimum gefunden worden ist. Aus der Form kann man verschiedene Qualitätsparameter entwickeln. Dieses Thema wird in Kapitel 6 dargelegt.

Die Betrachtung der Likelihood-Verläufe vieler Ereignisse analog desjenigen in Abbildung 5.3 motiviert Rekonstruktionen, die auf verschiedene Zenitwinkelbereiche eingeschränkt sind. Liegt jeweils die vollständige Information der Spurhypothese vor, kann man alle bisher diskutierten Qualitätsvariablen für die eingeschränkten Lösungen getrennt betrachten.

¹²Die zugehörige Likelihood-Funktion $\mathcal{L}^{\text{Schauer}}$ ist hier nicht beschrieben worden. Siehe [A⁺03c].

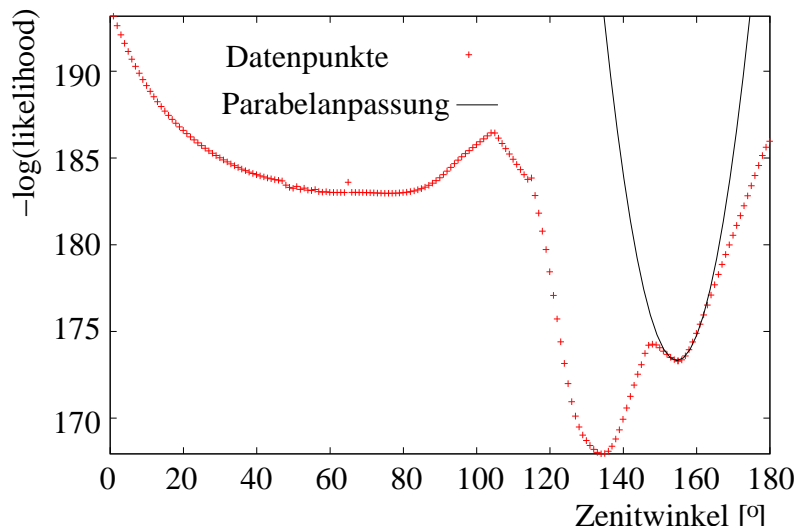


Abbildung 5.3: Verlauf der Loglikelihood-Funktion eines Ereignisses der Signal-Simulation als Funktion des Zenitwinkels θ der Spurnhypothese. An jedem Punkt sind die übrigen Parameter in einem iterativen Prozess optimiert worden. Der Rekonstruktionsalgorithmus hat als beste Lösung die Stelle gefunden, die durch die Parabelanpassung gekennzeichnet ist. Es wurde ein Nebenminimum selektiert, was eher untypisch ist.

Periode	Nummern der Läufe	Beobachtungsdauer
1	193 ... 281	$5.46 \cdot 10^6$ s
2	282 ... 474	$7.29 \cdot 10^6$ s
3	475 ... 584	$4.27 \cdot 10^6$ s
Σ	193..584	$1.70 \cdot 10^7$ s = 197.0 Tage

Tabelle 5.1: Liste der Läufe in den drei Datennahmeperioden des Jahres 2000

5.5 Die offizielle Selektion der AMANDA-Kollaboration für die Punktquellensuche 2000

Die Daten des Jahres 2000 sind von der AMANDA-Kollaboration einer Suche nach Neutrino-Punktquellen unterzogen worden ([HS03, A⁺04]). In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise der Ereignisselektion dargelegt, die dabei zur Anwendung kommt.

Im Folgenden werden der verwendete Ausgangsdatensatz und die verschiedenen Stufen der Analyse kurz beschrieben. Die Eigenschaften des erhaltenen Neutrinodatensatzes werden präsentiert und systematische Unsicherheiten diskutiert. Ausführlichere Diskussionen findet man in [Hau03c, Ste03].

5.5.1 Die verwendeten Daten

Die analysierten Daten sind in 238 Tagen zwischen Februar und November 2000 aufgezeichnet worden. Die Gesamtanzahl an Ereignissen beläuft sich auf $1.2 \cdot 10^9$. Das entspricht einem Datenvolumen von etwa zwei Terabyte. Die Beobachtungsdauer der Datennahme entspricht nach Korrektur auf die Totzeit¹³ (vgl. Abschnitt 4.1)

$$T_L = 197.0 \text{ Tage} \quad . \quad (5.42)$$

Die Datennahme ist in *Läufe*¹⁴ aufgeteilt, die jeweils einen Tag dauern. Jeder Lauf wird in mehreren Dateien gespeichert, die jede etwa zehn Minuten Aufzeichnung entsprechen.

Nach dem Entfernen von fehlerhaften Dateien werden die Daten der Jahres 2000 in drei Perioden aufgeteilt, in denen unterschiedliche optische Module als *stabil* klassifiziert sind. Welche das jeweils sind, findet man in [Rib01]. Die Nummern der Läufe der drei Datennahmeperioden sind in Tabelle 5.1 aufgelistet.

5.5.2 Die verschiedenen Stufen der Rekonstruktion

In Tabelle 5.2 sind die verschiedenen Schritte und Stufen der Analyse aufgelistet. Nach der Kalibrierung und der Trefferbereinigung (Details ebenfalls in [Rib01]) wird zuerst der analytische Algorithmus *Direct Walk* angewendet. Man verwirft abwärts laufende Spuren, indem man $\theta_{DW} > 70^\circ$ fordert. Dieser Schnitt ist ausreichend weit vom Horizont entfernt, um eventuell fehlbestimmte Signalereignisse zu behalten, die eigentlich aufwärts laufen.

Danach erfolgt eine 16-fach iterative Likelihood-Rekonstruktion mit der Standardpandelfunktion. Auch hier fordert man $\theta_{std.} > 70^\circ$. Der resultierende Datensatz entspricht der *Stufe 1* der Analyse. Etwa ein Prozent der Daten passiert die Schnitte. Vom Signal-Monte-Carlo behält man 81% der Ereignisse, die die Triggerbedingung erfüllen, wenn man von einem Energiespektrum der Form E^{-2} ausgeht. Diese Zahl ist damit mit Vorsicht zu interpretieren, da die Zenitwinkelabhängigkeit der Effizienz unberücksichtigt bleibt.

Der zweite Schritt beginnt mit einer Verschärfung der Bedingung an den Zenitwinkel des Standardverfahrens $\theta_{std.} > 80^\circ$. Danach wird eine Rekonstruktion unter der Annahme eines Schauers durchgeführt. Die verbleibenden Daten konstituieren *Stufe 2*.

In *Schritt 3* appliziert man die Trefferbereinigung gegen elektronische Artefakte (vgl. Abschnitt 5.2.3), was nur aus technischen Gründen nicht schon vor Stufe 1 geschehen ist. Mit der veränderten Auswahl an optischen Modulen wird die Standardanalyse wiederholt, gefolgt von 16-fach iterativen Rekonstruktionen mit der MPE-Likelihood \mathcal{L}_{MPE} und dem Bayesischen Ansatz \mathcal{L}_{Bayes} . Den Abschluss bilden die *Topf-Algorithmen*, in denen geometrisch motivierte Ebenmäßigkeitsobservablen berechnet werden, insbesondere die *Zylinderebenmäßigkeit* S_{dir}^{zyl} . Bei ihrer Berechnung beschränkt man sich auf direkte Treffer innerhalb eines Zylinders um die rekonstruierte Spur mit einem Radius von 50 m

¹³Sie lag im Zeitraum der Datennahme bei etwa 17.8%.

¹⁴Englisch: *Runs* etwa für *Durchläufe*.

Rekonstruktion	Schnitt	N_{dat}	ϵ_{dat}	ϵ_{ν}
0	Stufe 0: Trigger	$1.2 \cdot 10^9$	1	–
Schritt 1				
Direct Walk 16fach iterativ $\mathcal{L}_{\text{std.}}$	$\theta_{\text{DW}} > 70^\circ$ $\theta_{\text{std.}} > 70^\circ$			
1	Stufe 1	$1.2 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^{-2}$	–
Schritt 2				
Schauer-Likelihood $\mathcal{L}_{\text{Schauer}}$	$\theta_{\text{std.}} > 80^\circ$			
2	Stufe 2	$4.8 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^{-3}$	1
Schritt 3				
Trefferbereinigung gegen Übersprechen 16-fach iterativ $\mathcal{L}_{\text{std.}}$ 16-fach iterativ \mathcal{L}_{MPE} 16-fach iterativ $\mathcal{L}_{\text{Bayes}}$ Topf	$\theta_{\text{std.}} > 80^\circ$			
3a	Stufe 3	$3.4 \cdot 10^6$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	98.8%
3b	Stufe 3 mit $\theta_{\text{std.}} > 90^\circ$	$1.3 \cdot 10^6$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	84.8%
Schritt 4				
Berechnen der NN-Variable Q	$ S_{\text{zyl}} < 0.36$ $Q > Q_0(\delta)$ $L_{\text{diff}} > L_0(\delta)$			
4a	Stufe 4	1555	$2.1 \cdot 10^{-6}$	26.7%
4b	Stufe 4 mit $\theta_{\text{std.}} > 90^\circ$	697	$5.8 \cdot 10^{-7}$	25.7%

Tabelle 5.2: Übersicht über die Stufen der „offiziellen“ Analyse des Jahres 2000. Für jede Stufe ist die Anzahl der verbleibenden Datenereignisse N_{dat} , die Datenunterdrückung ϵ_{dat} und die Signaleffizienz ϵ_{ν} für die Simulation atmosphärischer Neutrinos gezeigt. Die Datenunterdrückung wird auf das Triggerniveau und die Signaleffizienz auf Stufe 2 bezogen, weil die atmosphärischen Neutrinos nur oberhalb eines Zenitwinkels von 80° simuliert werden. (Quelle [HS03, Hau03a]).

(vgl. [Bös02]). Stufe 3 der Analyse erhält man nach einem Schnitt auf den Zenitwinkel der wiederholten Rekonstruktion mit dem Standardverfahren $\theta_{\text{std.}} > 80^\circ$.

Schritt 4 beginnt mit einem Schnitt $|S_{\text{dir}}^{\text{zyl}}| < 0.36$, um die Datenmenge zu reduzieren. Dann betrachtet man zwei Variablen. Zum Einen die Differenz der Loglikelihood-Funktionswerte aus der Standard- und der Bayesianischen Rekonstruktion L_{diff} . Zum Zweiten gewinnt man eine kombinierte Qualitätsvariable Q_{NN} , bei der man sechs Eingangsgrößen in einem Neuronalen Netz zusammenführt. Man verwendet

- die Zahl der direkten Treffer N_{dir} ,

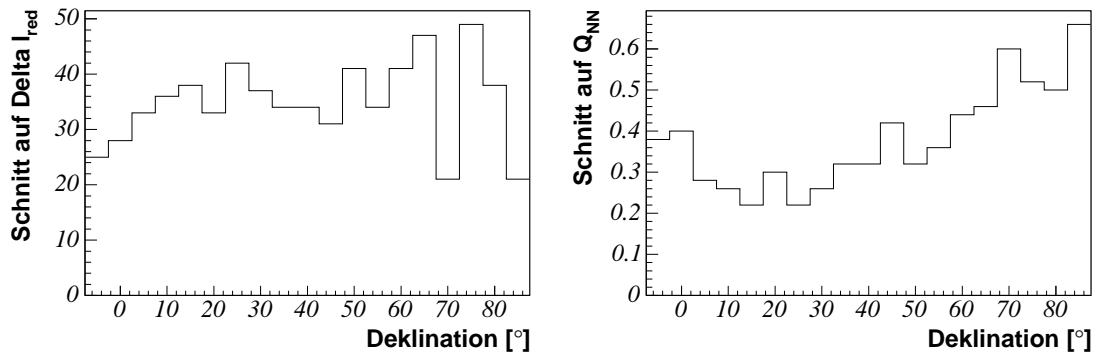


Abbildung 5.4: Wahl der deklinationsabhängigen Schnitte in Schritt 4 der Analyse. Gezeigt sind **links** der Schnitt auf die reduzierte Loglikelihood-Differenz und **rechts** auf den Qualitätsparameter des Neuronalen Netzwerkes.

- die direkte Länge L_{dir} ,
- den reduzierten Loglikelihood-Wert L_{red} der Standardrekonstruktion (Gleichung 5.41),
- die Differenz der reduzierten Loglikelihood-Werte für Standard- und Schauerrekonstruktion,
- die mittlere Spurabweichung $\bar{\Psi}$ (Gleichung 5.38) aus *Direct Walk*, Standard- und MPE-Rekonstruktion und
- die Zylinderebenmäßigkeit $S_{\text{dir}}^{\text{zyl}}$.

Für Details siehe [Hau03c].

Die geforderten Schnitte für L_{red} und Q_{NN} sind Stufenfunktionen der Deklination. Sie sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Der Stufencharakter ist durch die *gebinnte Punktquellensuche* motiviert, die in Teil III dargestellt wird.

5.5.3 Die Eigenschaften des Neutrino-Datensatzes

Die Vorgehensweise des letzten Abschnittes resultiert in einem Satz von 1555 Neutrino-Kandidaten. Davon liegen 697 unterhalb des Horizontes und haben damit einen Zenitwinkel größer als neunzig Grad. Eine Abbildung mit der Verteilung der Ereignisse auf der Himmelskarte findet man in Kapitel 10. Die Zenitwinkelverteilung ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Man erkennt den starken Anstieg an Ereignissen in der Nähe des Horizontes. Es handelt sich dabei um den Untergrund aus fehlrekonstruierten atmosphärischen Myonen.

Um die Signaleffizienz zu bestimmen, muss zunächst ein Normalisierungsfaktor gefunden werden, der die absoluten Anzahlen von Datenereignissen und simulierten Ereignissen in Relation setzt. Dazu verschärft man die Schnitte schrittweise immer mehr und betrachtet das Verhältnis

$$V = \frac{\text{Anzahl an simulierten Ereignissen}}{\text{Anzahl an gemessenen Ereignissen}} \quad (5.43)$$

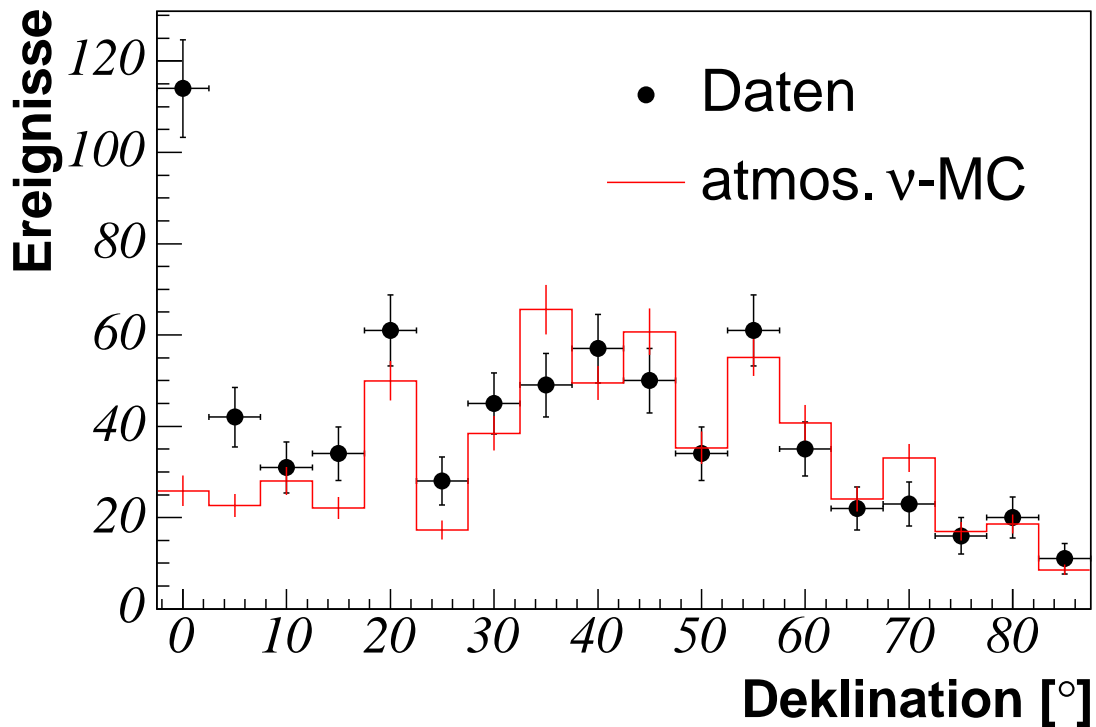


Abbildung 5.5: Zenitwinkelverteilung des Neutrino-Datensatzes dargestellt als Funktion der Deklination $\delta = \theta - 90^\circ$ (vgl. Anhang B). Eine Anpassung in Form eines Polynoms sechsten Grades ist mit dargestellt, ebenso wie die Neutrino-Simulation mit atmosphärischen Gewichten.

als Funktion der Stelle des Schnittes auf Q_{NN} . Oberhalb desjenigen Wertes von Q_{NN} , ab dem $V(Q_{NN})$ flach wird, geht man davon aus, dass der Datensatz nur aus Neutrinos besteht. Aus dem Wert von $V(Q_{NN})$ im flachen Bereich folgt ein Normierungsfaktor von $F = 0.862 \pm 0.041$. Alle aus der Simulation gewonnenen Zahlen müssen mit F multipliziert werden, um auf die entsprechenden Zahlen in den Daten zu kommen.

Ein großer Vorteil der Anpassung der Simulation an die Neutrinodaten liegt in der Bestimmung des systematischen Fehlers. Während beispielsweise die Suche nach diffusen Flüssen extraterrestrischer Neutrinos die Unsicherheiten in den Eiseigenschaften (15% für das Eismodell sowie 25% für das Locheis), für die Sensitivität der optischen Module (15%), für die Myonpropagation (10%) und für die Kalibrierung (10%) in einer Gesamtunsicherheit von 37% berücksichtigen muss, entspricht der systematische Fehler bezüglich der Signalkennntnis im Fall der Punktquellensuche nur der Unsicherheit von 25%, mit der man den Fluss der atmosphärischen Neutrinos kennt.

Aus dem Vergleich von Daten und Simulation bestimmt man die Reinheit des Neutrinodatensatzes im Bereich mit $\theta_{std.} > 95^\circ$ auf $\sim 95\%$ ([HS03]).

In Abbildung 5.6 ist die neutrino-effektive Fläche als Funktion der Energie für verschiedene Deklinationen dargestellt. Der Abschirmungseffekt der Erde für hohe Neutrinoenergien ist deutlich zu

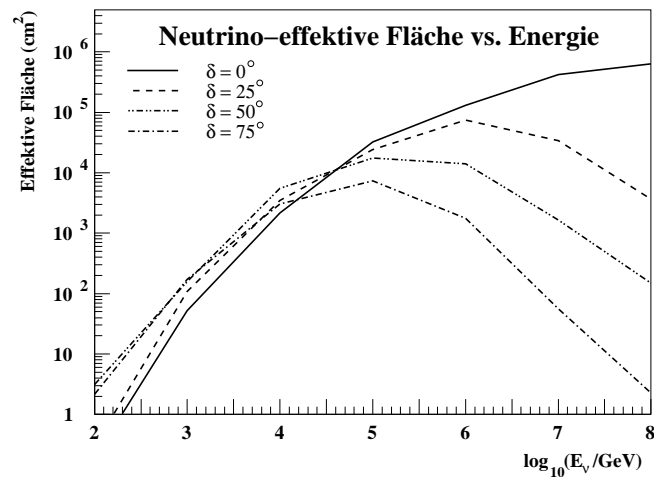


Abbildung 5.6: Neutrino-effektive Fläche der „offiziellen“ Selektion als Funktion der Neutrinoenergie für verschiedene Deklinationen. Aus [HS03].

erkennen.

6 Die Winkelauflösung von AMANDA

Wir sehen die Dinge nicht wie sie sind,
sondern wie wir sind.

(Talmud)

Im letzten Kapitel sind die Verfahren zur Rekonstruktion der Myonspuren dargestellt worden. Alle Methoden, die auf höheren Stufen angewendet werden, sind Likelihood-Verfahren. Derjenige Parametersatz wird ausgewählt, für den es am wahrscheinlichsten war, das gesehene Muster an Treffern in den optischen Modulen zu erzeugen. Die zugehörige negative logarithmische Likelihood-Funktion hat an dieser Stelle ein Minimum.

Aus der Umgebung des Minimums der Likelihood-Funktion kann man auf die Unsicherheit der Parameterbestimmung rückschließen. Die Hyperfläche im Parameterraum, auf der sich die negative logarithmische Likelihood-Funktion um $\frac{1}{2}$ vom Minimum unterscheidet, umschließt im Fall von Gauß-Verteilungen das 1σ -Konfidenzvolumen. Im eindimensionalen Fall ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert sich darin befindet, gleich 68.23%, in zwei Dimensionen 39.35%. Diese Thematik wird in Anhang E näher beschrieben.

Die Ungenauigkeit in der Parameterbestimmung entspricht der Auflösung, mit der ein Ereignis rekonstruiert worden ist. Man interessiert sich weitaus mehr für die Richtung einer Spur als für die exakte Stelle, an der sie den Detektor passiert hat. Eine Unsicherheit in transversaler Richtung selbst von Hunderten von Metern hat nahezu keinerlei Auswirkungen bezüglich der Frage, wo im Universum das Neutrino entstanden ist, ganz im Gegensatz zu den Fehlern in der Winkelbestimmung.

In diesem Kapitel wird ein Verfahren entwickelt, dessen Ziel die Bestimmung der Winkelauflösung für jedes einzelne Ereignis ist. Dazu wird die Form des Likelihood-Minimums untersucht, wobei man von einer gaußischen Näherung ausgeht.

In Abschnitt 6.1 wird das eigentliche Verfahren beschrieben, mit dem Schätzer für die Unsicherheiten in Zenit und Azimut jeder Spur gewonnen werden. Danach (Abschnitt 6.2) wird die Güte der Schätzung gezeigt, ebenso wie die Berechtigung der gaußischen Näherung.

Es folgt eine Betrachtung des Zusammenhanges der Unsicherheiten in den Spurparametern mit dem Fehler im Raumwinkel und eine Diskussion der tatsächlichen Detektorauflösung in Abschnitt 6.3. Das Kapitel schließt mit einer Untersuchung, die zeigt, dass die gewonnene *ereignisindividuelle Winkelauflösung* auch als Qualitätsparameter eingesetzt werden kann (Abschnitt 6.4).

6.1 Die Schätzung der Auflösung in zwei Winkeln pro Ereignis

Der Ausgangspunkt zur Bestimmung der Winkelauflösung eines Ereignisses ist eine rekonstruierte Spur, die man mit einem Likelihood-Verfahren gewonnen hat (vgl. Abschnitt 5.3). Um dieses überhaupt durchführen zu können, muss man in der Lage sein, die Likelihood-Funktion für einen bestimmten Satz an Parametern zu evaluieren. Allerdings liegt die Funktion nicht in geschlossener Form vor, sonst könnte man ihr die Winkelauflösung direkt entnehmen.

Das Minimum der Loglikelihood-Funktion im fünfdimensionalen Parameterraum wird als bekannt vorausgesetzt¹. Die Auflösung bestimmt man aus der Form in seiner Umgebung. Im strikt gaußischen Fall hat man es mit einem Paraboloiden zu tun. In n Dimensionen wird sein Scheitel durch $(n+1)$ und die Krümmung durch $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ Größen beschrieben². Dargestellt wird das in der symmetrischen $n \times n$ Kovarianzmatrix C . (Vgl. Anhang E, Gleichung E.10). Dadurch ist der Paraboloid eindeutig festgelegt. Aus der Krümmung kann man direkt auf den Bereich schließen, an dessen Grenze der Funktionswert sich um $\frac{1}{2}$ vom Wert am Scheitel unterscheidet.

Die Krümmung in fünf Dimensionen wird durch fünfzehn Parameter bestimmt. Man interessiert sich aber nur für drei davon, die Fehler in den Winkeln und ihre Korrelation. Wie man das Problem auf zwei Dimensionen reduziert und dabei die Korrelation der Winkelfehler mit den Unsicherheiten in der Ortsbestimmung berücksichtigt, wird in Abschnitt 6.1.1 dargelegt. Danach wird gezeigt, in welchem Koordinatensystem am besten gearbeitet wird (Abschnitt 6.1.2), wie man den Paraboloiden analytisch gewinnt (Abschnitt 6.1.3) und wie die Ergebnisse dargestellt werden können (Abschnitt 6.1.4).

6.1.1 Reduktion der Zahl der Dimensionen

Wir betrachten zunächst den vereinfachten Fall mit einer Winkel- und einer Ortskoordinate, θ und x . Die zugehörige Likelihood-Funktion wird von einer zweidimensionalen Gauß-Funktion $f(\theta, x)$ beschrieben. Gesucht ist σ_θ unter Berücksichtigung von σ_x und $\text{cov}(\theta, x)$. Die Situation ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die Kantenlänge des umschriebenen Rechtecks in θ -Richtung ist gerade doppelt so groß wie die gesuchte Unsicherheit σ_θ (siehe Anhang E).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\theta(\theta)$ für den Winkel alleine kann man prinzipiell durch Integration von $f(\theta, x)$ über alle x erlangen. Dieser Weg steht aber aus Gründen begrenzter Rechenzeit nicht offen, da man die Likelihood-Funktion nur an einzelnen Stellen evaluieren kann.

Man hat aber Kenntnis von weiteren Eigenschaften von $f_\theta(\theta)$, so dass es einen realisierbaren Zugang gibt. Die Funktion ist Gauß-förmig, das folgt aus den Annahmen durch direkte Rechnung. Der Mittelwert θ_0 entspricht demjenigen der gemeinsamen Dichte $f(\theta, x)$. Zudem ist jeder Schnitt entlang einer Geraden durch eine zweidimensionale Gauß-Verteilung bis auf eine Normierung selbst Gauß-verteilt ist (Anhang E).

¹bis auf Ungenauigkeiten des numerischen Minimierungsverfahrens.

²Davon sind n Parameter Auflösungen und $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ Größen sind Korrelationen.

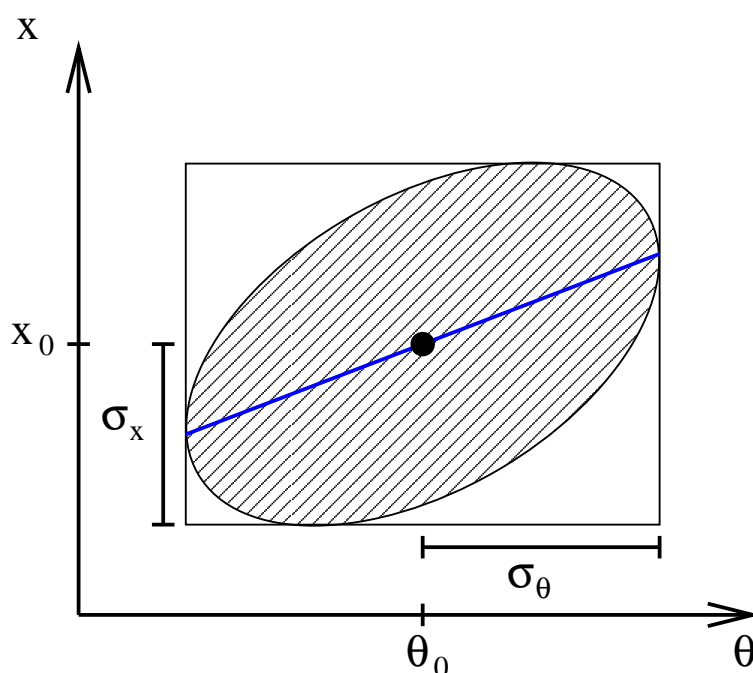


Abbildung 6.1: Darstellung einer Kovarianzellipse in zwei Dimensionen. Auf der Ordinate ist eine Winkelgröße θ , auf der Abszisse eine Ortsgröße x aufgetragen. Das umschriebene Rechteck hat die Kantenlängen $2 \cdot \sigma_\theta$ und $2 \cdot \sigma_x$. Sucht man für festes θ jeweils das x mit extremaler Likelihood, dann resultiert die eingezeichnete Linie.

Wir betrachten den Schnitt entlang der durchgezogenen Linie in Abbildung 6.1. Er verläuft durch die Berührungspunkte der Kovarianzellipse mit dem umschließenden Rechteck sowie durch den Mittelpunkt des Systems. Projiziert man die Funktion $f(\theta, x)$ entlang dieses Schnittes senkrecht auf die θ -Achse, dann erhält man eine Gauß-Funktion mit der gesuchten Breite σ_θ . Eine eventuelle Normierung kann man unberücksichtigt lassen, da sie für die logarithmische Likelihood-Funktion nur eine Verschiebung nach oben oder unten bedeutet. Die Krümmung bleibt davon unberührt.

Technisch erhält man den Zugang auf diese Funktion durch den folgenden Zusammenhang. Die Linie beschreibt das Minimum der Funktion $-\ln f(\theta, x)$ für festes θ

$$-\frac{\partial}{\partial x} \ln f(\theta, x) \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (6.1)$$

Am Mittelpunkt und den Berührungspunkten der Ellipse mit dem Rechteck sieht man das sofort ein. Für alle anderen Punkte folgt es aus Ähnlichkeitsbetrachtung oder auch aus der Linearität der Ableitung.

Zusammengefasst ist die Vorgehensweise wie folgt: man wählt einen Satz an Stützstellen θ_i um den Mittelpunkt θ_0 . Für jeden Punkt minimiert man $-\ln f(\theta_i, x)$ als Funktion von x numerisch. Die erhaltene Funktion ist eine Parabel, in deren Krümmung die Information über die gesuchte Winkelauflösung inklusive der Korrelation mit der Ortsauflösung enthalten ist.

Die Verallgemeinerung auf weitere Winkel- und Ortskoordinaten geschieht in analogem Vorgehen. Alle Winkel werden jeweils fixiert und über die wird Orte minimiert. Es resultiert analog zu der Linie in Abbildung 6.1 eine Hyperebene im Raum aller Parameter, da alle wesentlichen Zusammenhänge linear in den Koordinaten sind. Der Paraboloid über dieser Ebene enthält die gesuchten Auflösungs-Informationen. Man muss allerdings die richtige Wahl an Koordinaten treffen. Das soll im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

6.1.2 Die richtigen Koordinaten

Die Verwendung der Gauß-Verteilungen im vorangegangenen Abschnitt fußt auf der impliziten Annahme, dass die zu Grunde liegenden Koordinaten kartesisch sind. Das trifft aber für die Winkel Zenit und Azimut im AMANDA-Koordinatensystem nicht zu. Linien konstanten Azimuts sind Großkreise auf der Kugel. Sie entsprechen Längengraden auf der Erde. Bei konstantem Zenit erhält man Breitenkreise, die – mit Ausnahme des Äquators – keine Großkreise sind.

Lokal stehen Längen- und Breitengrade immer senkrecht aufeinander. Das Koordinatensystem ist aber krummlinig, wenn man die Umgebung eines Punktes betrachtet. Je näher er den Polen kommt, desto stärker weicht das System von rechtwinkligen Koordinaten ab. Am Äquator kommt es der Rechtwinkligkeit am nächsten, eben weil der Äquator ein Großkreis ist. Aber wegen der Krümmung der Kugeloberfläche finden sich auch hier Abweichungen von der Rechtwinkligkeit.

Betrachtet man ein Koordinatensystem, dessen Ursprung auf dem Äquator liegt, beispielsweise mit $\theta = 90^\circ$ und $\phi = 180^\circ$, dann ist der Raumwinkelabstand³ zu einem weiteren Punkt, der sich in nur einer Koordinate unterscheidet, gerade gleich der Differenz in dieser Koordinate. Sind beide Koordinaten verschieden, dann ist der korrekte Zusammenhang zwischen dem räumlichen Winkel Ψ und den Koordinaten (θ_i, ϕ_i) durch Gleichung 3.21 gegeben. In der kartesischen Näherung erhält man den Abstand durch den Satz von Pythagoras

$$\Psi_{\text{Pyt}} = \sqrt{(\theta_1 - \theta_2)^2 + (\phi_1 - \phi_2)^2} \quad . \quad (6.2)$$

Ist der Unterschied in Zenit und Azimut beispielsweise jeweils gleich 5° , dann ist der relative Unterschied der beiden Berechnungen (für dieses Koordinatensystem!) etwas größer als ein halbes Promill.

Die typische Winkelauflösung des AMANDA-Detektors bewegt sich im Bereich von 1° bis 5° für die Spuren, an denen man interessiert ist. Der Bereich von Winkeln, der für die Wahl an Stützstellen verwendet werden soll, orientiert sich an diesen Größen. Man benötigt ein Koordinatensystem, das bis zu einem Raumwinkelabstand von mindestens fünf Grad von der rekonstruierten Spurrichtung im Wesentlichen kartesisch ist.

Diese Forderung wird von obigem System hinreichend gut erfüllt. Entfernt man sich vom Äquator, werden die Abweichungen deutlich größer. Beispielsweise ist der räumliche Winkel zwischen $(\theta_1 = 150^\circ, \phi_1 = 180^\circ)$ und $(\theta_2 = 155^\circ, \phi_2 = 185^\circ)$ korrekt berechnet $\psi = 5.5^\circ$, wohingegen die kartesische Näherung 7.1° beträgt. Das entspricht einem relativen Fehler von 28.5%.

³Der Begriff *Raumwinkelabstand* wird in dieser Arbeit synonym zum *räumlichen Winkel* verwendet. Siehe 51.

Abbildung 6.2 illustriert den Sachverhalt. Für verschiedene Zenitwinkel sind „richtige“ Kreise, das heißt Punkte mit festem Raumwinkelabstand nach Gleichung 3.21, und „falsche“ Kreise mit festem Ψ_{Pyl} dargestellt. Die Deformation nimmt zum Pol hin deutlich zu.

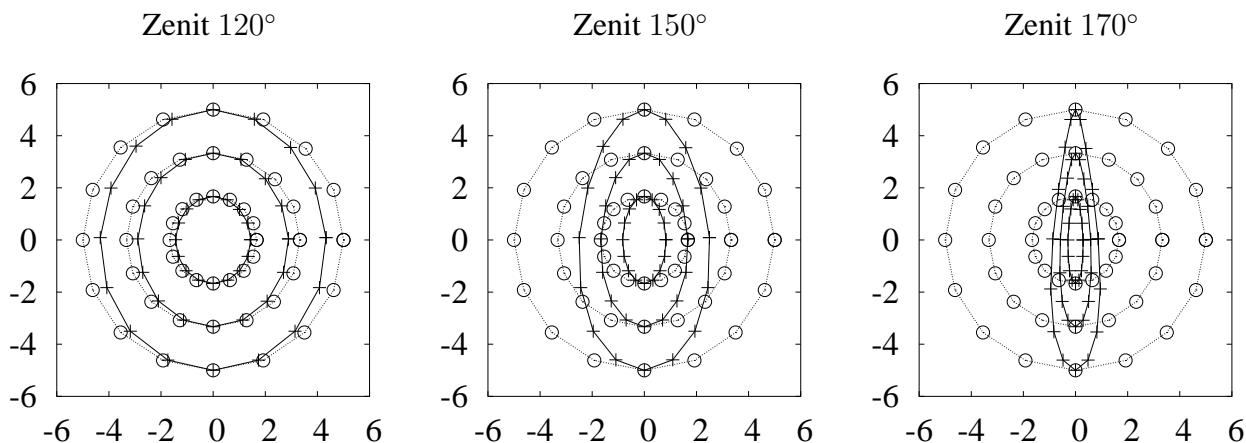


Abbildung 6.2: Für steigenden Zenitwinkel von links nach rechts (120°, 150° und 170°) werden die Effekte veranschaulicht, die aus krummlinigen Koordinaten erwachsen. Aufgetragen ist der Spur-Azimuth auf der Abszisse und Spurzenit auf der Ordinate, beide in Grad. Gezeigt sind jeweils drei Kreise festen Raumwinkelabstandes um die Spur (offene Symbole) und drei Kreise mit festem Ψ_{Pyl} (Kreuze). Man erkennt, dass der Effekt nicht vernachlässigt werden kann. Er wird bedeutsamer, je näher man zum Pol kommt.

Es ist also unbedingt erforderlich, in ein passendes Koordinatensystem zu rotieren. Man verwendet ein System, bei dem die Spur die x-Achse darstellt, so dass das Myon in Richtung positiver x-Werte fliegt. Damit definiert die Spur in neuen Koordinaten $\theta = 90^\circ$ und $\phi = 180^\circ$. Die verbleibende Freiheit wird dadurch festgelegt, dass die Zenitgroßkreise in AMANDA-Koordinaten und *Spurkoordinaten* aufeinanderliegen. Die Koordinate des neuen Äquators bezeichnet man als *Spur-Azimuth*. Die verschiedenen verwendeten Koordinatensysteme werden in Anhang B diskutiert.

6.1.3 Analytische Parabelanpassung im Likelihood-Raum

In den Spurkoordinaten bestimmt man die Auflösungen. Dazu wird die negative Loglikelihood-Funktion l auf 25 Stützstellen evaluiert. Sie liegen auf drei konzentrischen Kreisen von jeweils 8 Punkten und der Spurrichtung selbst. Die Kreise in Abbildung 6.2 veranschaulichen die Stützstellen, allerdings sind dort doppelt so viele Punkte dargestellt, um die Deformationen besser erkennbar zu machen. Wichtig ist, dass für jeden Punkt (θ^s, ϕ^s) auch $(-\theta^s, \phi^s)$, $(\theta^s, -\phi^s)$ und $(-\theta^s, -\phi^s)$ als Stützstellen vorkommen⁴. Diese Symmetrie wird bei den nötigen Rechnungen im Weiteren ausgenutzt.

⁴Das Superskript s steht dafür, dass *Spurkoordinaten* verwendet werden.

Die folgenden Bezeichnungen werden für die Winkel der i -ten Stelle und den zugehörigen Loglikelihood-Funktionswert verwendet:

$$\vec{x}_i = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$l_i = l(\theta_i, \phi_i) \quad . \quad (6.4)$$

Gesucht ist der Paraboloid $p(\vec{x})$, der am besten zu den Stützpunkten passt. Dazu wählen wir die Darstellung als Polynom, bei der die sechs Parameter mit der Konstanten α , dem Vektor $\vec{\beta}$ und der Matrix $\Gamma = C^{-1}$ beschrieben werden (vgl. Anhang E.2)

$$p(\vec{x}; \alpha, \vec{\beta}, \Gamma) = \alpha + \langle \vec{\beta} | \vec{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x} | \Gamma \vec{x} \rangle \quad . \quad (6.5)$$

und verwenden die Methode der kleinsten Quadrate ([Bra99]). Die Summe der quadratischen Abweichungen χ^2 ist

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (p(\vec{x}_i; \alpha, \vec{\beta}, \Gamma) - l_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\alpha + \langle \vec{\beta} | \vec{x}_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x}_i | \Gamma \cdot \vec{x}_i \rangle - l_i \right)^2 \quad , \quad (6.6)$$

und man fordert, dass für die besten Parameter alle partiellen Ableitungen von χ^2 verschwinden.

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha} = \frac{\partial \chi^2}{\partial (\vec{\beta})_m} = \frac{\partial \chi^2}{\partial (\Gamma)_{mp}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.7)$$

Man erhält eine Reihe von *linearen* Gleichungen. Die Linearität mag zunächst verwundern, da der Paraboloid ein Polynom zweiten Grades ist. Man interessiert sich jedoch für die Parameter, das heißt für die Koeffizienten des Polynoms. In diesen ist es linear.

Die Gleichungen sind in Anhang E.3 aufgeführt. Aus ihnen erhält man ein lineares Gleichungssystem in sechs Dimensionen. Berücksichtigt man die Symmetrie in der Stützstellenwahl, dann erhält man drei der sechs Parameter direkt und kann das verbleibende dreidimensionale Gleichungssystem schnell lösen, beispielsweise mit dem Kramer-Verfahren. Das ist in den Gleichungen E.22 bis E.31 explizit dargestellt.

6.1.4 Die Darstellung der Ergebnisse

Im vorangehenden Abschnitt hat man sechs Parameter in der Paraboloidanpassung gewonnen. Die Position des Scheitels ist eine zusätzliche Bestimmung der Richtung einer Spur, der Scheitelwert entspricht der negativen Loglikelihood-Funktion an ihrem Minimum. Die drei Krümmungsparametern enthalten die gesuchte Winkelauflösung. Es gibt dabei mehrere interessante Darstellungen. Die erste entspricht den Fehlern in den Spurkoordinaten. Sie erhält man direkt aus der obigen Anpassung. Die Wahl der Koordinaten hat dafür gesorgt, dass die Fehler in Zenit und Spurzenit identisch sind. Die Unsicherheit in azimuthaler Richtung σ_ϕ ist aber keine besonders hilfreiche Größe, weil ein fester Wert für unterschiedliche Zenitwinkel verschiedene Bedeutung hat. Es gilt näherungsweise

$$\sigma_\phi = \sigma_\phi^s \cdot \frac{1}{\sin \theta} \quad . \quad (6.8)$$

Das Zeichnen einer Himmelskarte wird einfacher, wenn die beiden Halbmesser der Konfidenzellipse bekannt sind, und um welchen Winkel die Ellipse verkippt ist. Man geht zu ihrer Hauptachsendarstellung über, indem man sie diagonalisiert. Die zugehörige inverse Kovarianzmatrix lautet

$$C_D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix} . \quad (6.9)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählt man $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Als dritten Parameter verwendet man den Drehwinkel α , den man zur Diagonalisierung⁵ verwendet. Eine Ellipse, deren größere Halbachse in Zenitrichtung liegt, muss man um den Winkel α drehen, um zur eigentlichen Konfidenzellipse zu gelangen.

Aus den Längen der Halbachsen kann man zwei weitere Parameter gewinnen. Der Quotient der beiden liefert die Exzentrizität der Ellipse ϵ , das Produkt ist proportional zur Fläche. Ein Kreis mit der gleichen Fläche hätte den Radius des geometrischen Mittels der beiden. Diese Größe wird hier als Flächenauflösung σ_a bezeichnet. Sie wird in Abschnitt 6.3 genauer untersucht. Es ist

$$\epsilon = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} , \quad (6.11)$$

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2} . \quad (6.12)$$

6.2 Die Güte der Schätzung

6.2.1 Beispiele für Parabelanpassungen

In Abbildung 6.3 sind vier Beispiele für eine Paraboloidanpassung nach dem geschilderten Verfahren gezeigt. Die Funktionswerte sind in rot und durchgezogen und die Paraboloidwerte in blau und gestrichelt dargestellt. Die Projektionen der Konturen sind ebenfalls eingezeichnet.

Der weitaus häufigste Fall ist oben links zu sehen. Die Funktion ist hinreichend glatt und wird gut von dem Paraboloid beschrieben. Die Konturen liegen übereinander. Im Fall oben rechts zeigt die Loglikelihood-Funktion ein Verhalten mit Sprüngen. Die Anpassung ist nicht ganz so gut, aber die Konturlinien sind sehr ähnlich.

Unten links ist ein Fall präsentiert, in dem die ursprüngliche Rekonstruktion kein echtes Minimum gefunden hat. Der Paraboloid beschreibt eine Schräge. Unten rechts ist die numerische Minimierung auf einem Sattelpunkt stehen geblieben. In solchen Fällen ist mindestens einer der Halbachsenparameter negativ. Die Konfidenzellipse wird mathematisch zur Hyperbel. Die entscheidende Information aus beiden unteren Bildern ist, dass man nicht das richtige Minimum gefunden hat.

⁵Man diagonalisiert mit der symmetrischen Matrix U und parametrisiert diese über den zugehörigen Rotationswinkel α .

$$C_D^{-1} = UC^{-1}U^{-1} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} . \quad (6.10)$$

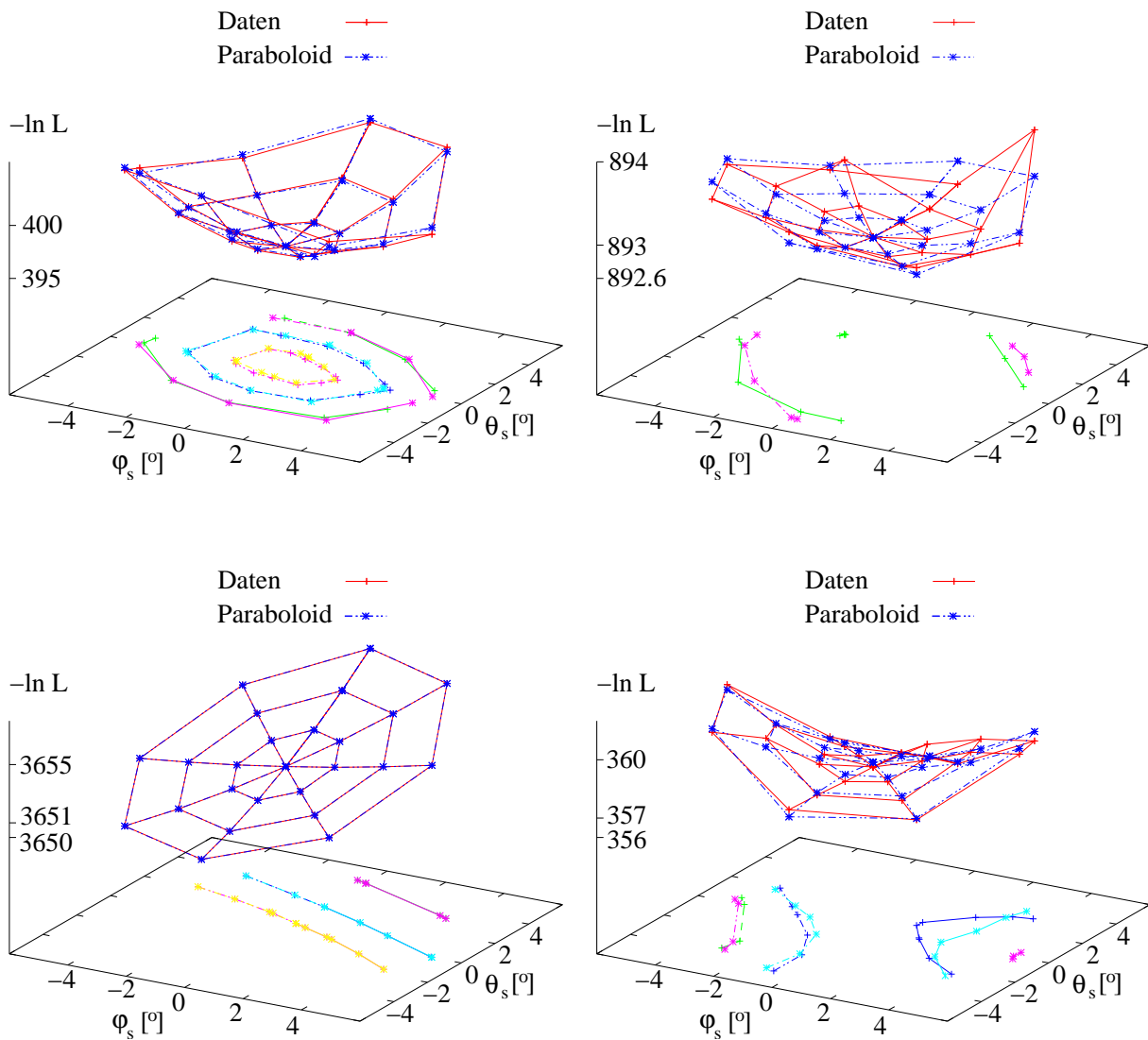


Abbildung 6.3: Beispiele für Paraboloidanpassung an das Minimum der Loglikelihood-Funktion in vier Fällen. Gezeigt ist die Funktion mit durchgezogenen, roten und die Anpassung mit gestrichelten, blauen Linien an den gewählten Stützstellen in Zenit und Spur-Azimut. Die Konturen sind jeweils in die Ebene projiziert. Auf den Achsen sind die Abweichungen von der rekonstruierten Spur aufgetragen.

6.2.2 Vergleich mit der Simulation

In Abbildung 6.4 ist ein Vergleich der Auflösungs estimator in Zenit σ_θ und Spur-Azimut σ_ϕ^s zwischen Daten und Untergrundsimulation gezeigt. Die verwendeten Ereignisse stammen von *Stufe 3* der Analyse auf der noch keine Qualitätsschnitte angewandt worden sind (vgl. Abschnitt 5.5). Es handelt sich damit in der Hauptsache um fehlrekonstruierte atmosphärische Myonen. Dennoch werden die beiden Größen gut im Monte-Carlo beschrieben.

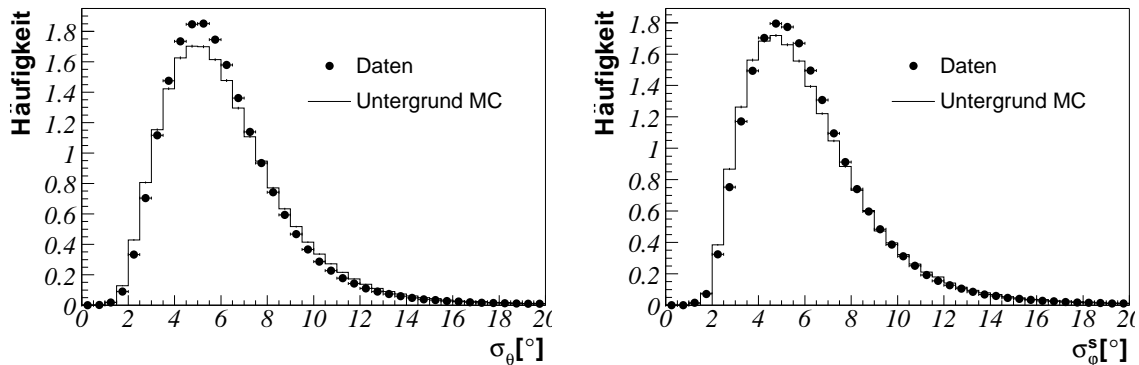


Abbildung 6.4: Vergleich der Auflösungschätzer in Daten und Untergrundsimulation. **Links:** Der Schätzer σ_θ . **Rechts:** Der Schätzer σ_ϕ^s . Der Vergleich ist auf *Stufe 3* der Analyse gemacht. Die Kurven sind flächennormiert.

Die Eigenschaften der Schätzer werden im Folgenden zunächst anhand der Signal-Simulation untersucht. Um zu evaluieren, ob man durch das Verfahren tatsächlich Zugriff auf die Auflösung erhält, vergleicht man die Differenz aus wahren und rekonstruiertem Zenitwinkel $\theta_w - \theta_r$ mit dem Schätzer σ_θ . Dazu wird die Verteilung des *Pulls*⁶ P_θ

$$P_\theta = \frac{\theta_w - \theta_r}{\sigma_\theta} \quad (6.13)$$

untersucht. Wenn σ_θ keine Schätzung sondern exakt wäre, dann müsste P_θ normal-verteilt sein.

In Abbildung 6.5 ist P für Zenit und Azimut auf Stufe 3 der Analyse gezeigt. Den Bildern liegt das atmosphärische Neutrino-Monte-Carlo zu Grunde (vgl. Abschnitt 4.4). An beide Graphen ist im

⁶pull: englisch für *ziehen*.

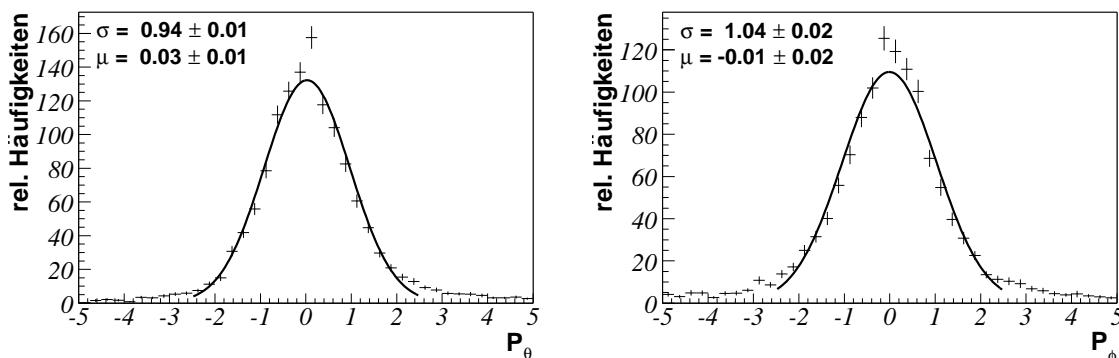


Abbildung 6.5: *Pull*-Verteilung in Zenit (links) und Spur-Azimut (rechts) für atmosphärisches Neutrino-Monte-Carlo auf Stufe 3 der Analyse.

zentralen Bereich $[-2.5; +2.5]$ eine Gauß-Funktion angepasst. Im Rahmen der Anpassung stimmt die Breite jeweils in etwa mit Eins überein, wobei der Zenitfehler leicht überschätzt und der Spur-Azimuthfehler leicht unterschätzt wird.

Die Verteilungen haben breitere Ausläufer, als man von einer reinen Gauß-Form erwarten würde. Das liegt daran, dass das Loglikelihood-Gebirge von der reinen Paraboloid-Form abweicht. Wie in Kapitel 5 diskutiert, gibt es mehrere Minima als Funktion der Winkel (vgl. Abbildung 5.3). Der Verlauf nahe der Tiefpunkte ist zwar parabelförmig, aber weiter davon entfernt „biegt“ die Funktion auf und wird flacher, bevor sie zum nächsten Minimum hin wieder abfällt.

Für den Pull folgt daraus, dass es mehr Werte mit großem Betrag gibt, als eine exakte Gauß-Verteilung erwarten ließe. Dazu kommen noch die Ereignisse, bei denen die Rekonstruktion nicht das Minimum gewählt hat, in dessen Nähe die wahre Spur liegt. In diesem Fall ist die Schätzung des Messfehlers von vornherein zu klein.

Bewertung der Pull-Verteilungen

Um die Verwendung einer Gauß-Kurve im zentralen Bereich zu rechtfertigen, werden in Abbildung 6.6 verschiedene Anpassungen an den Pull im Zenit miteinander verglichen. Im Gegensatz zu Abbildung 6.5 liegt diesen Bildern die Signal-Simulation mit einer E_{ν}^{-2} -Abhängigkeit zu Grunde, weil die statistischen Fehler dann deutlich geringer sind (vgl. Abschnitt 4.4).

In Diagramm 6.6 a) ist eine Gauß-Funktionen im zentralen Bereich zu sehen. Das entspricht der Vorgehensweise in Abbildung 6.5. In Diagramm 6.6 b) ist die Gauß-Funktionen über die gesamte Breite der Verteilung angepasst. Die erwarteten nicht Gauß-förmigen Ausläufer verbreitern die Funktion, so dass man aus ihrer Standardabweichung nicht gut auf die statistisch bedingten Fehlrekonstruktionen schließen kann.

In Diagramm 6.6 c) ist eine Anpassung zu sehen, die eine Summe zweier Gauß-Kurven ist. Solch eine Funktion wird häufig in der AMANDA-Kollaboration verwendet, um die Auflösung des Detektors zu beschreiben. Die Anpassung ist sehr gut, aber als Qualitätskriterium der Auflösungsschätzer kaum zu interpretieren.

Im verbleibenden Diagramm 6.6 d) ist eine *Student-t*-Verteilung gezeigt (vgl. Abschnitt E.1). Sie entspricht der richtigen theoretischen Form, wenn man sowohl die Spurrichtung als auch den Schätzer des Fehlers aus der Messung gewinnt. Diese Verteilung hat als einzigen Parameter die Anzahl der Freiheitsgrade f . Für $f \rightarrow \infty$ geht sie in eine Gauß-Kurve über. Die betrachteten Ereignisse haben mindestens 24 Treffer (vor der Trefferbereinigung) und fünf Spurparameter. Somit ist die Anzahl der Freiheitsgrade groß genug, dass sich die Student-t- und die Gauß-Verteilung kaum unterscheiden sollten. Die Zahl der Freiheitsgrade variiert von Ereignis zu Ereignis, bei einer Anpassung findet eine Mittelung statt.

Auch die Student-t-Verteilung beschreibt die Form des Pulls sehr gut. Allerdings ist die Zahl der Freiheitsgrade, durch die man die beste Anpassung erhält, mit $f \approx 2.8$ deutlich zu klein. Auch das findet seine Erklärung in der Abweichung der Loglikelihood-Funktion von der Paraboloid-Form.

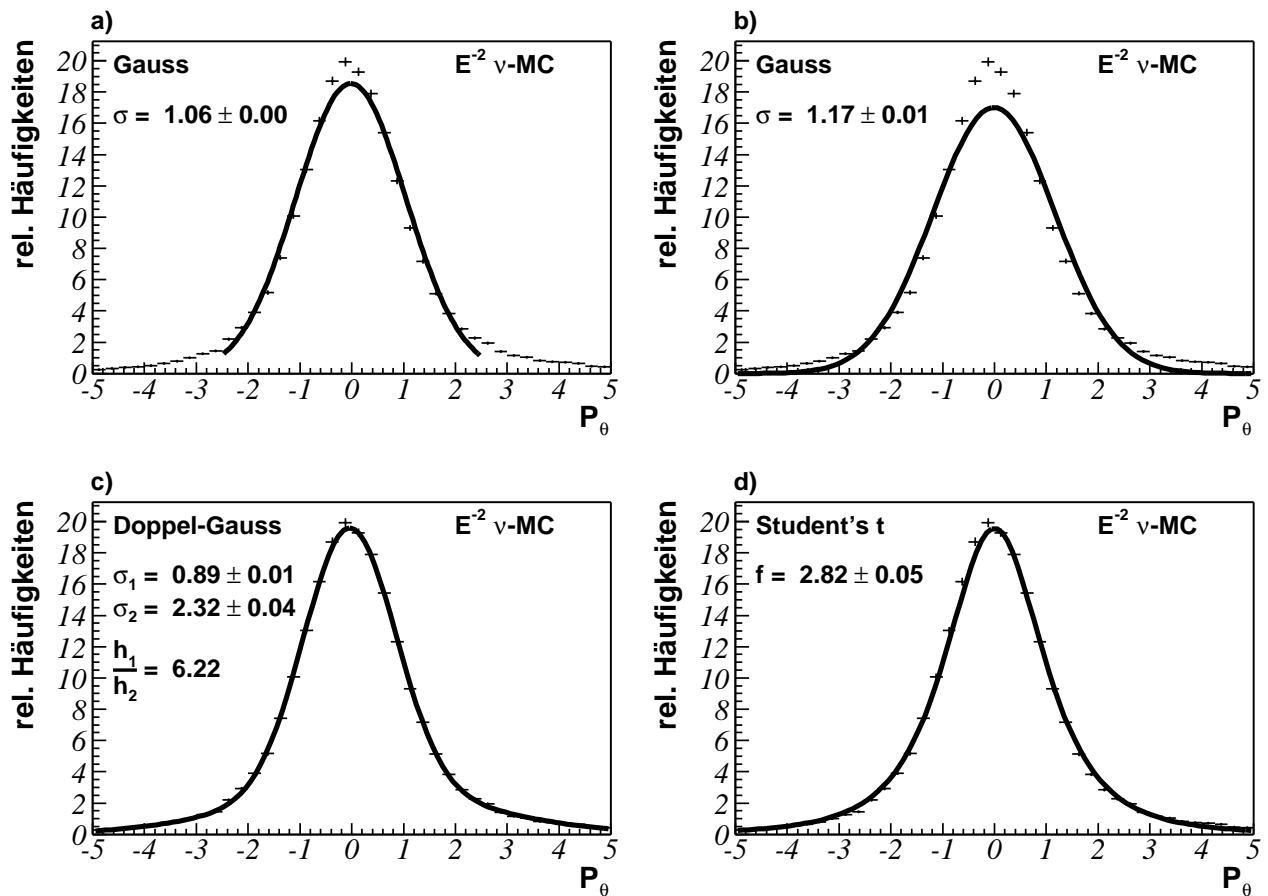


Abbildung 6.6: Verschiedene Anpassungen an die *Pull*-Verteilung im Zenit für die Neutrino-Simulation mit einer E_ν^{-2} -Verteilung. Abbildung a) und b) zeigen einfache Gauß-Kurven, während in c) die Summe zweier Gauß-Verteilungen dargestellt ist. Neben den jeweiligen Breiten ist in c) auch das Verhältnis der Gewichte der beiden Gauß-Komponenten h_1/h_2 angegeben. Abbildung d) zeigt eine Student-t-Anpassung.

Im Folgenden wird mit *Mittelwert* und *Breite* des Pulls stets auf die entsprechenden Größen einer Gauß-Anpassung an das Intervall $[-2.5; +2.5]$ Bezug genommen.

Die Energieabhängigkeit der Pull-Verteilungen

Bei einem Vergleich der Pull-Verteilungen in den Abbildungen 6.5 und 6.6 a) fällt auf, dass für das härtere Spektrum die Breite größer ist. Die Ursache dieses Effektes ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Gezeigt sind die Pull-Eigenschaften in Abhängigkeit der Energie E_μ^c , die das Myon an dem Punkt seiner Bahn mit dem geringsten Abstand zur Detektormitte hat. Im Energiebereich bis 10 TeV, für den AMANDA optimiert ist, sind die Schätzer sehr gut, während sie oberhalb einiger zehn TeV schlechter werden.

Das liegt zum Einen daran, dass das Likelihood-Modell der Standardrekonstruktion die Energie des Myons nicht berücksichtigt. Daher stimmt für große Energien die theoretische Beschreibung nicht mehr ganz und die Abweichungen der rekonstruierten von der wahren Spur sind im Mittel größer als man durch die Form des Tales erwartet.

Zum Anderen können hochenergetische Ereignisse wegen ihrer großen Lichtdeposition im Eis die Datennahme auch auslösen, wenn sie weit entfernt am Detektor vorbeifliegen. Den Rekonstruktionsalgorithmen stehen nur Treffer zur Verfügung, deren zugehörige Photonen relativ weit durch das Eis geflogen und entsprechend gestreut sind. Die Fehler der Richtungsrekonstruktion lassen sich wiederum nicht richtig abschätzen.

Ein Ansatz, um dem Phänomen der verbreiterten Pulls zu begegnen, ist eine energieabhängige Korrektur. Entsprechende Versuche schlagen aber aus zwei Gründen fehl. Einerseits ist die Energiemessung mit AMANDA sehr schwierig und daher ungenau (vgl. Kapitel 3). Andererseits wird man Korrekturen am stärksten bei denjenigen Ereignissen anbringen, die von schlechter Qualität sind. Jegliche Schnitte auf Qualitätsvariablen, die *nach* der Korrektur gemacht werden, verwerfen größtenteils diejenigen Ereignisse, die die stärksten Korrekturen erfahren. Jegliche Qualitätsschnitte müssen demnach *vor* einer möglichen Korrektur durchgeführt werden.

Die Energiespektren der nachgewiesenen Myonen

Um erlauben zu können, inwiefern die zu große Breite des Pulls bei hohen Energien berücksichtigt werden muss, ist in Abbildung 6.8 die Energieverteilung der Ereignisse in AMANDA dargestellt. Sowohl für horizontal verlaufende Spuren mit $80^\circ < \theta_{\text{std.}} < 100^\circ$ als auch für vertikale mit $\theta_{\text{std.}} > 150^\circ$ sind jeweils drei Energieverteilungen gezeigt: diejenige der Myonenergie am Entstehungsort auf Stufe 3 und diejenige der Myonenergie am detektornächsten Punkt sowohl auf Stufe 3 als auch auf Stufe 4 der Analyse. Es sind die Verteilungen für atmosphärische Neutrinos und solche mit einem E_ν^{-2} -Spektrum einander gegenüber gestellt.

Die Form der Spektren ist durch mehrere Effekte bedingt. Je höher seine Energie, desto größer die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutrino die Erde nicht durchdringen kann (vgl. Kapitel 3). Zudem kann es durch Neutrale-Strom-Wechselwirkungen in der Erde Energie verlieren. Dadurch ist der größte Unterschied zwischen horizontalen und aufwärts laufenden Ereignissen erklärt.

Die Verteilung der Neutrinoenergien für diejenigen Ereignisse, die in AMANDA registriert werden, entspricht dem Produkt des Neutrinospektrums in Detektornähe mit der neutrino-effektiven Fläche (vgl. Abschnitt 3.4) als Funktion der Energie. Die Neutrinoenergien sind in Abbildung 6.8 nicht dargestellt.

Das Myon erhält bei seiner Entstehung einen Teil der Neutrinoenergie (vgl. Kapitel 1), hat also weniger Energie als das Neutrino. Während seines Fluges zum Detektor hin verliert es konstant Energie. Je größer seine Ausgangsenergie, desto weiter entfernt kann es erzeugt werden und trotzdem die Datennahme auslösen. Durch die Verluste während der Propagation ist die Energie in Detektornähe geringer als am Entstehungsort.

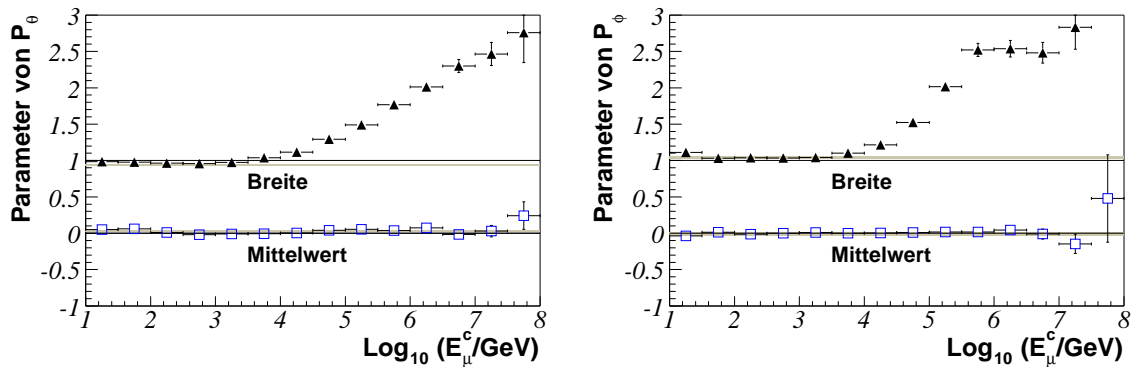


Abbildung 6.7: Systematische Abhängigkeit der Eigenschaften der *Pull*-Verteilungen von der Myonenergie E_μ^c am detektornächsten Punkt auf Stufe 3 der Analyse (für Zenit links und Azimut rechts). Es sind jeweils Breite und Mittelwert gezeigt. Die durchgezogenen Linien zeigen die Sollwerte an, während die schattierten Linien die Durchschnittswerte für die atmosphärische ν -Simulation angeben.

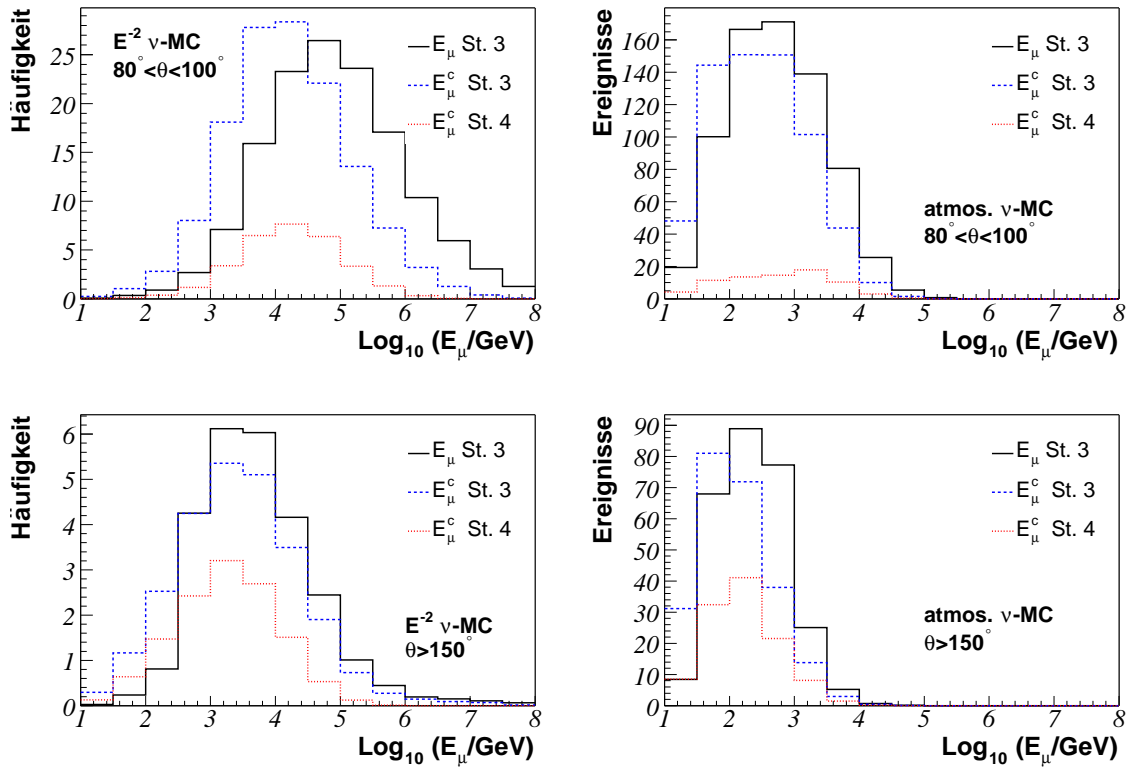


Abbildung 6.8: Vergleich der Energieverteilung der Myonen vor und nach Qualitätsschnitten. Die Signal-Simulation ist in der linken Spalte jeweils für ein E_ν^{-2} - und in der rechten Spalte für ein atmosphärisches Neutrinospektrum gezeigt. Die obere Reihe bezieht sich auf als horizontal rekonstruierte Spuren mit $80^\circ < \theta_{\text{std.}} < 100^\circ$, während die untere Reihe auf aufwärts laufenden mit $\theta_{\text{std.}} > 150^\circ$ beruht. Es sind jeweils die Myonenergie am Vertex E_μ auf Stufe 3 und die Myonenergie E_μ^c am detektornächsten Punkt auf den Stufen 3 und 4 gezeigt. Rechts sind absolute Ereigniszahlen in 2000, links relative Häufigkeiten zu sehen.

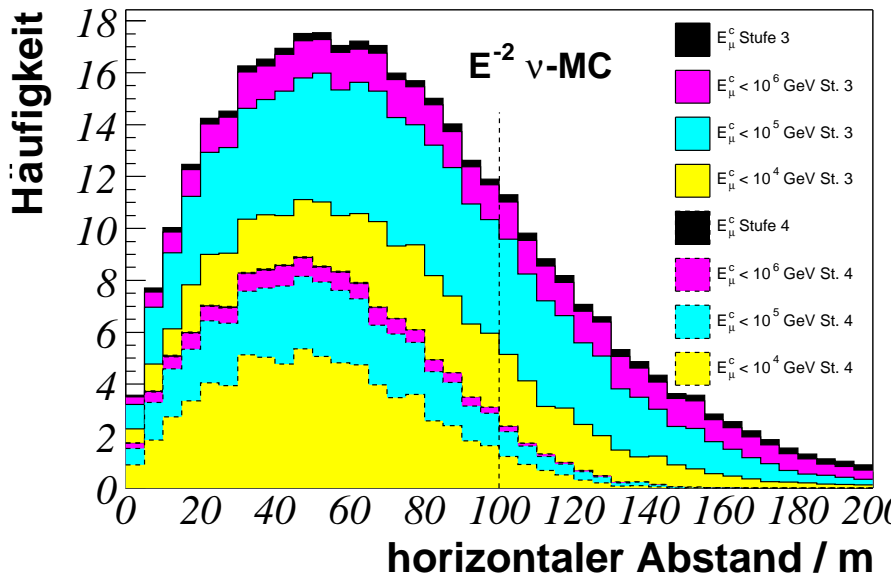


Abbildung 6.9: Abstand der Myonspur zur Detektor-Achse in der Signal-Simulation (E_ν^{-2}) vor und nach den Qualitätsschnitten. Gezeigt sind die verschiedene Energiebereiche bis jeweils 10^4 GeV, 10^5 GeV, 10^6 GeV und ohne Begrenzung auf den Stufen 3 und 4 der Analyse. Die Detektorgrenze ist als gestrichelte Linie angedeutet.

Durch die Qualitätsschnitte entsteht schließlich das resultierende Spektrum. Insbesondere da ein Neuronales Netz eingesetzt wird, ist es schwierig, die Neutrinoeffizienz als Funktion der Energie zu erklären. Um sie zumindest zum Teil zu beschreiben, ist in Abbildung 6.9 der Abstand der Myonspuren zur Symmetrieachse des Detektorzylinders (z -Achse) aufgeschlüsselt nach der Myonenergie dargestellt. Vor den Schnitten haben 24% aller Spuren einen wahren Abstand von mehr als 100 m von der z -Achse. Davon haben wiederum 27% eine Energie von mehr als $E_\mu^c > 10^5$ GeV. Auf der letzten Stufe der Analyse verbleiben nur sehr wenige Ereignisse, die nicht durch das instrumentierte Volumen des Detektors laufen (etwa 6%). Davon sind fast keine im oberen Energiebereich zu finden (weniger als 3%).

Ein Vergleich der Energiespektren in Abbildung 6.8 mit der Energieabhängigkeit der Pull-Verteilungen in Abbildung 6.7 zeigt, dass die Auflösung nur für den geringsten Teil der Ereignisse auf Stufe 4 unterschätzt wird. Für atmosphärische Energien passiert es gar nicht und für das E^{-2} -Spektrum sind zenitwinkelabhängig zwischen 4% und 25% der Ereignisse betroffen.

Der Pull in Abhängigkeit der Myonflugrichtung

Abschließende Klarheit über die Güte der Schätzung verschafft die Untersuchung der systematischen Abhängigkeiten der Pull-Eigenschaften nach allen Qualitätsschnitten. Sie sind für die Signal-

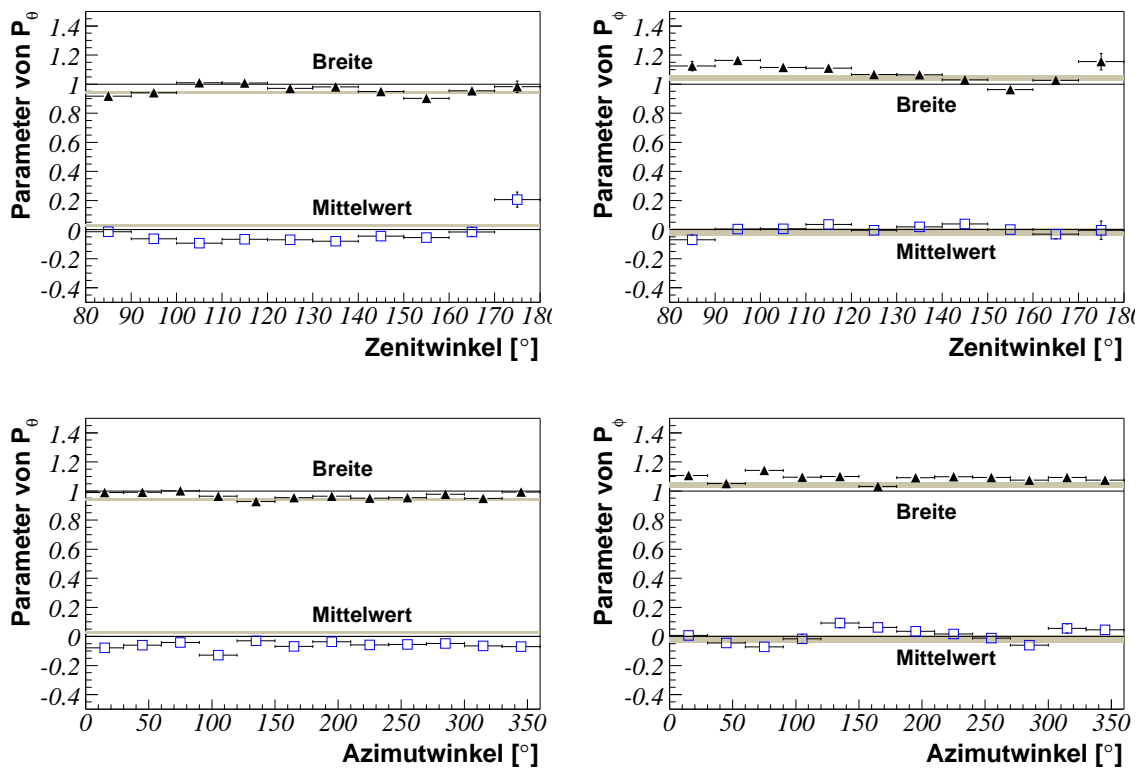


Abbildung 6.10: Systematisches Verhalten der *Pull*-Verteilung in Zenit und Azimut in der Signal-Simulation für ein E_ν^{-2} -Spektrum auf Stufe 4 der Analyse. Gezeigt sind Breite und Mittelwert als Funktion der rekonstruierten Zenit- und Azimutwinkel.

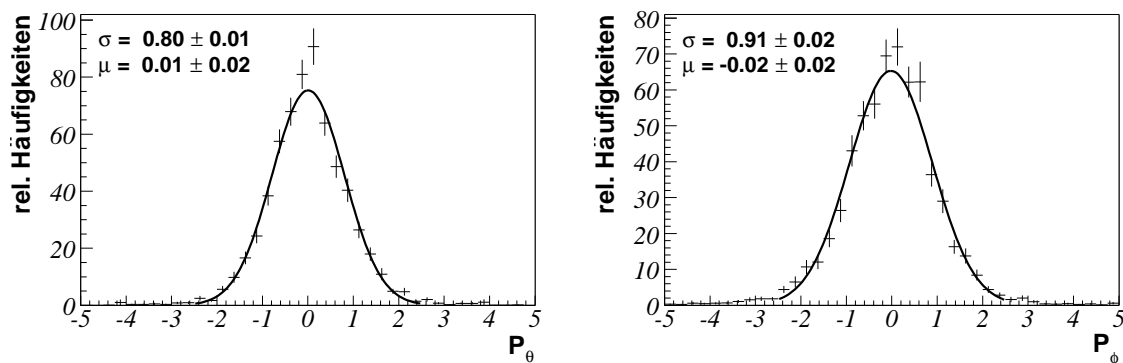


Abbildung 6.11: *Pull*-Verteilung in Zenit (links) und Spur-Azimut (rechts) für atmosphärisches Neutrino-Monte-Carlo auf Stufe 4 der Analyse.

Simulation mit einem E_ν^{-2} -Spektrum in Abbildung 6.10 als Funktion der rekonstruierten Zenit- und Azimutwinkel dargestellt.

Wie schon vorher – bei der atmosphärischen Simulation auf Stufe 3 – werden die Fehler in Zenitrichtung etwas zu groß und die Fehler in Spur-Azimutrichtung etwas zu gering abgeschätzt. Die Abweichungen von den Sollwerten sind aber unerheblich. Eine systematische Abhängigkeit der Pull-Eigenschaften von der rekonstruierten Richtung ist nicht nachzuweisen. Allerdings liegt der Mittelwert des Pulls in Zenitrichtung durchgängig im Bereich negativer Werte⁷. Das korrespondiert mit der systematischen leichten Fehlrekonstruktion, die in Abschnitt 4.3 diskutiert wird. Dieser Fehler fließt als systematischer Fehler auf den Ort einer Punktquelle ein.

Ferner schlägt sich die Energieabhängigkeit der Breite des Pulls in der leichten Zenitwinkelabhängigkeit von P_ϕ nieder, da die mittlere Energie in horizontaler Richtung größer ist.

Die Pull-Verteilungen der Signal-Simulation für ein atmosphärisches Spektrum auf Stufe 4 der Analyse sind fast Gauß-förmig (vgl. Abbildung 6.11). Ihre Breiten liegen deutlich unterhalb von Eins. Eine mögliche Korrektur müsste die Schätzer also eher verkleinern. In Anbetracht der Resultate aus der Simulation mit einem E_ν^{-2} -Spektrum wird dies aber unterlassen. Die Schätzer sind konservativ.

6.2.3 Vergleich mit rekonstruierten Teilspuren

In den aufgezeichneten Daten des Experimentes steht im Gegensatz zur Simulation die „Wahrheit“ nicht zur Verfügung. Um dennoch die Qualität der Auflösungsschätzung auch in den Daten überprüfen zu können, zerlegt man jedes Ereignis in zwei Hälften. Dazu werden alle Treffer nach ihren absoluten Zeiten sortiert und durchnummeriert. Alle Treffer mit ungeraden Nummern bilden das Teilereignis 1 und die übrigen das Teilereignis 2. Damit hat man zwei unabhängige Messungen der gleichen zu Grunde liegenden Spur.

Beide Teilereignisse durchlaufen die Rekonstruktionsalgorithmen und die Fehlerbestimmung. Man erhält jeweils zwei Winkel und Fehlerschätzer θ^i , ϕ^i , σ_θ^i und σ_ϕ^i mit $i \in \{1, 2\}$. Die Größe D_θ

$$D_\theta = \theta^1 - \theta^2 \quad . \quad (6.14)$$

hat einen Fehler σ_θ^D von

$$\sigma_\theta^D = \sqrt{(\sigma_\theta^1)^2 + (\sigma_\theta^2)^2} \quad . \quad (6.15)$$

Die Pull-Verteilung

$$P_\theta = \frac{D_\theta}{\sigma_\theta^D} = \frac{\theta^1 - \theta^2}{\sqrt{(\sigma_\theta^1)^2 + (\sigma_\theta^2)^2}} \quad (6.16)$$

⁷Die positive Abweichung des Mittelwertes im Bereich oberhalb von 170° rührt daher, dass es größere Zenitwinkel als 180° nicht geben kann. Abweichungen der Rekonstruktion von der wahren Richtung bei Spuren in diesem Bereich haben daher immer zu kleine Zenitwinkel.

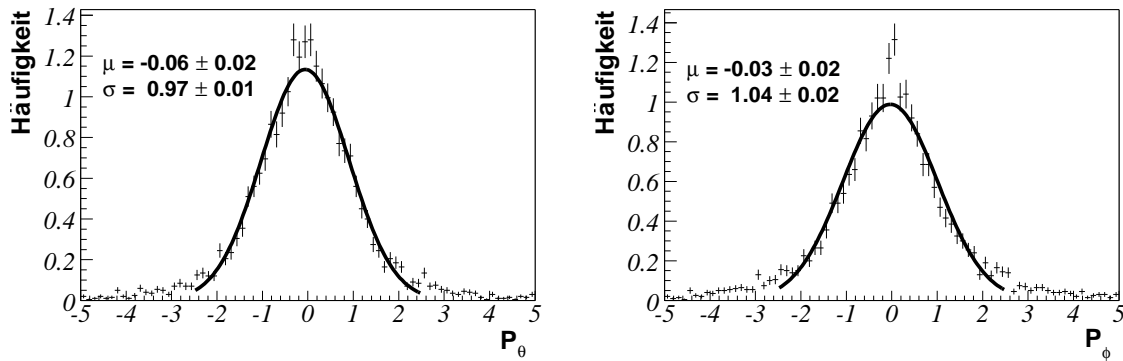


Abbildung 6.12: *Pull*-Verteilung in Zenit und Spur-Azimut mit Teilspuren atmosphärischer, d.h. abwärts laufender Myonen.

sollte im Fall guter Schätzer eine Gauß-Verteilung mit Mittelwert Null und Breite Eins sein. Für P_ϕ muss die Differenz der Azimutwinkel noch mit $\sin \theta$ multipliziert werden, um näherungsweise den Unterschied zum Spur-Azimut auszugleichen. Es ist

$$P_\phi = \frac{\sin \theta \cdot (\phi^1 - \phi^2)}{\sqrt{(\sigma_\phi^1)^2 + (\sigma_\phi^2)^2}} \quad (6.17)$$

In Abbildung 6.12 ist P für Zenit und Azimut gezeigt. Die zu Grunde liegenden Daten sind abwärts laufende Myonen, die weder Richtungs- noch Qualitätsschnitten unterworfen worden sind. Die Übereinstimmung mit der Gauß-Form entspricht den Erwartungen.

Damit sind die Größen σ_θ und σ_ϕ als Schätzer für die Auflösung einsetzbar.

6.3 Die Auflösung im räumlichen Winkel

Im Folgenden wird aus der Fehlerellipse ein Parameter für den Fehler im räumlichen Winkel konstruiert (Abschnitt 6.3.1). Seine Verteilung auf der letzten Stufe der Analyse wird diskutiert (Abschnitt 6.3.2) und die mittlere Auflösung von AMANDA als Funktion von Flugrichtung und Energie des Myons dargestellt (Abschnitt 6.3.3).

6.3.1 Die Konstruktion eines Schätzers für den Fehler im Raumwinkelabstand

Die Fehlerellipse beschreibt eine Fläche, innerhalb derer mit einer Wahrscheinlichkeit von 39.4% die wahre Spurrichtung zu finden ist. Fragt man nach dem räumlichen Winkel zwischen wahrer und

rekonstruierter Spur, dann entspricht das dem Abstand vom Ellipsenmittelpunkt zu dem Punkt, der die wahre Spur beschreibt.

Der Raumwinkelabstand kann nicht negativ sein. Sein Erwartungswert kann vom Ausläufer seiner Verteilung überproportional stark beeinflusst werden, daher verwendet man den Median als charakterisierende Größe. Der Median ist die Stelle der Verteilung, bei der das Integral 50% erreicht.

Gesucht ist ein Schätzer für den Median M des Raumwinkels. Er wird aus den Halbachsen der Ellipse σ_1 und σ_2 konstruiert.

Für den Raumwinkelfehler ist die Orientierung der Ellipse irrelevant. Die Gauß-Verteilung lautet im Koordinatensystem, das parallel zu den Halbachsen liegt,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2\right)} \quad . \quad (6.18)$$

Um den Median zu erhalten, muss $f(x_1, x_2)$ von $(0, 0)$ aus in Kreisen nach außen integriert werden, bis 0.5 erreicht ist. Dieses Integral wird am besten in Polarkoordinaten ausgeführt:

$$0.5 \stackrel{!}{=} \int_0^M \int_0^{2\pi} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, dr \, d\phi \quad . \quad (6.19)$$

Sind die beiden Halbachsen gleich lang, $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, dann wird aus der Ellipse ein Kreis und man kann Gleichung 6.19 analytisch lösen. Es ist

$$0.5 = 1 - e^{-\frac{M^2}{2\cdot\sigma^2}} \quad . \quad (6.20)$$

und somit

$$M = \sqrt{2\ln(2)} \cdot \sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = 1.177 \cdot \sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad . \quad (6.21)$$

Im Fall verschieden großer Halbachsen bleibt nur die numerische Integration. Ihr Resultat ist in Abbildung 6.13 (links) dargestellt. Dort ist als Funktion der Exzentrizität ϵ der äquivalente Radius gezeigt, bis zu dem integriert werden muss, damit Gleichung 6.19 erfüllt ist. Die Ellipsenfläche ist konstant gehalten mit $\sigma_a = 1^\circ$. Für andere σ_a muss der äquivalente Radius linear skaliert werden⁸.

Der äquivalente Radius ist invariant unter Vertauschung der beiden Halbachsen σ_1 und σ_2 . An das Ergebnis der numerischen Integration ist daher eine Funktion der Form $c \cdot (\epsilon + \frac{1}{\epsilon})$ angepasst worden. Im Bereich $\epsilon \in [1; 3]$, innerhalb dessen fast alle Ereignisse liegen, liefert die Anpassung eine gute Beschreibung der numerischen Rechnung.

Mit der *exzentrizitätskorrigierten Flächenauflösung*

$$\sigma_a^\epsilon = 0.57 \cdot \left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right) \cdot \sigma_a \quad (6.22)$$

⁸Der Zusammenhang ist linear, weil für feste Exzentrizität eine Veränderung von σ_a einer Skalierung der Koordinatenachsen entspricht.

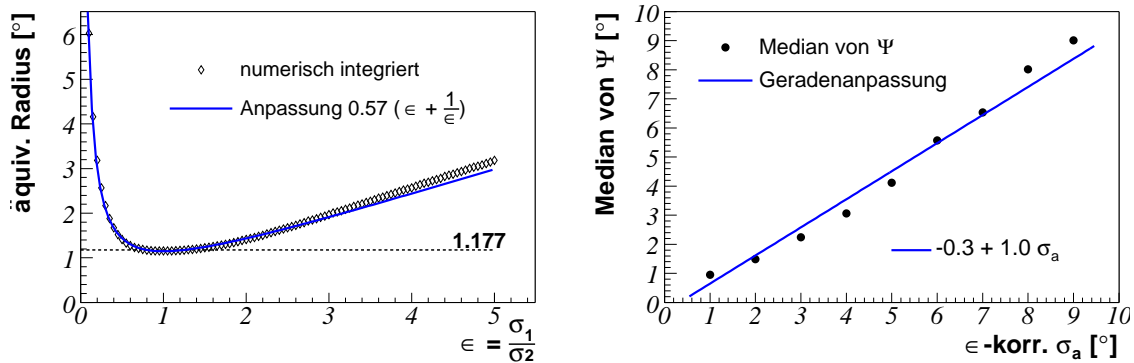


Abbildung 6.13: Exzentrizitätskorrektur und Eigenschaften des Schätzers σ_a . **Links:** Äquivalenter Radius (entsprechend Gleichung 6.19) als Funktion der Exzentrizität. **Rechts:** Median der Raumwinkelverteilung jeweils für Ensembles von Ereignissen mit gleicher exzentrizitätskorrigierter Flächenauflösung σ_a^ϵ dargestellt als Funktion von σ_a^ϵ . Die lineare Anpassung entspricht der erwarteten Ursprungsgerade mit Steigung 1. Der Vergleich ist auf Stufe 3 der Analyse mit atmosphärisch gewichteten Ereignissen gemacht.

ist ein Schätzer für den Fehler im Raumwinkel gewonnen. Per definitionem erwartet man, dass in der Hälfte aller Fälle der wahre Raumwinkelabstand kleiner und in der anderen Hälfte größer als der Schätzer ist. Damit entspricht σ_a^ϵ dem Median der Verteilung des räumlichen Winkels.

Um das zu prüfen, unterteilt man alle Ereignisse der Signal-Simulation in Ensembles mit gleicher (korrigierter) Flächenauflösung. Der Median des räumlichen Winkels sollte genau der jeweiligen Flächenauflösung entsprechen. In Abbildung 6.13 (rechts) ist dieser Zusammenhang auf Stufe 3 der Analyse gezeigt. Eine Geradenanpassung liefert die erwartete Ursprungsgerade mit Steigung 1.

Vor den Qualitätsschnitten entspricht die exzentrizitätskorrigierte Flächenauflösung damit dem Median des Raumwinkelabstandes zwischen wahrer und rekonstruierter Spur.

6.3.2 Die Verteilung des Flächenauflösungsschätzers

In Abbildung 6.14 sind die Verteilungen von σ_a und ϵ in Daten und Simulation auf der abschließenden Stufe 4 der Analyse gezeigt. Um Verunreinigungen durch atmosphärische Myonen weitgehend zu unterdrücken, sind nur Ereignisse mit Zenitwinkeln größer als 110° verwendet worden (siehe Abbildung 5.5).

Die Übereinstimmung zwischen dem Datensatz und der atmosphärischen Neutrinosimulation ist sehr gut⁹. Somit hat man einen Zugang gewonnen, mit dem man die Auflösung des Detektors *in den Daten* und nicht nur in der Simulation – wie bisher – untersuchen kann. Die Ergebnisse einer entsprechenden Studie werden im folgenden Abschnitt 6.3.3 gezeigt.

⁹Das Monte-Carlo ist mit dem Faktor 0.86 skaliert (vgl. Abschnitt 5.5).

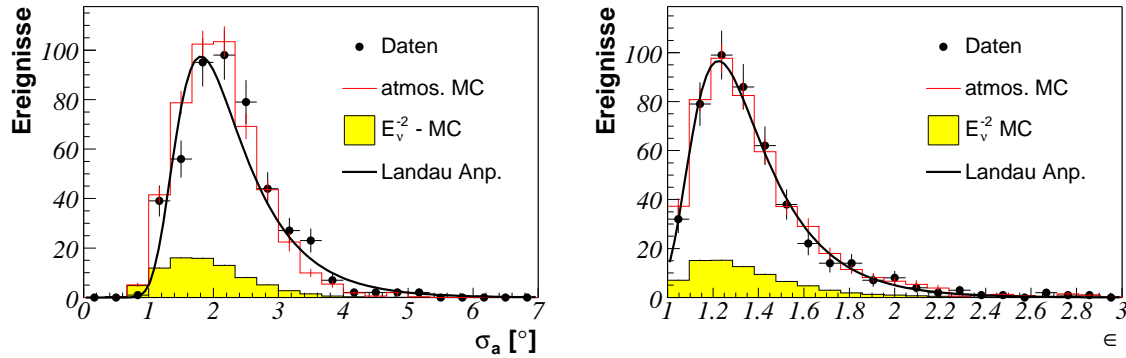


Abbildung 6.14: Vergleich von σ_a und ϵ zwischen Daten und Neutrino-Simulation auf Stufe 4 der Analyse. Um Verunreinigungen mit atmosphärischen Myonen zu unterdrücken, ist $\theta_{\text{std}} > 110^\circ$ gefordert. An die Datenpunkte sind jeweils Landau-Funktionen angepasst.

Sowohl die Flächenauflösung als auch die Exzentrizität sind mit Hilfe von Landau-Verteilungen – oder korrekterweise Moyal-Verteilungen¹⁰ – parametrisiert worden. Diese sind von der Form

$$M(x; m, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\lambda + e^{-\lambda})} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{x - m}{s} \quad (6.23)$$

Dabei steht m für die Stelle, an der die Kurve ihr Maximum hat, und s parametrisiert die Breite und den Ausläufer der Verteilung. Die in Abbildung 6.14 gezeigten Kurven haben als Parameter

$$\begin{aligned} m_\sigma &= 1.81^\circ & s_\sigma &= 0.36^\circ \\ m_\epsilon &= 1.22 & s_\epsilon &= 0.11 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Diese Verteilungen können verwendet werden, um Ereignissätze zu generieren, ohne die gesamte Simulationskette zu durchlaufen. Wenn man sich nur für Richtung und Winkelfehler interessiert, kann man diese Größen aus den Anpassungen auslösen.

Die Parametrisierung der Fehler-Ellipsen durch ihre Fläche und Exzentrizität hat dabei einen entscheidenden Vorteil gegenüber der Verwendung der Halbachsen. Während σ_1 und σ_2 stark korreliert sind, kann man σ_a und ϵ in guter Näherung als unabhängig voneinander betrachten. Das ist in Abbildung 6.15 verdeutlicht, in der die jeweiligen Größen und Korrelationskoeffizienten in den Daten einander gegenübergestellt sind. Die Korrelation aller vier Parameter mit dem Winkel α zwischen der größeren Halbachse und der Zenitrichtung ist ebenfalls vernachlässigbar (nicht gezeigt).

¹⁰Die Landau-Verteilung ist nur in integraler Form darstellbar. Die Moyal-Verteilung ist eine analytisch geschlossene Näherung. In der vorliegenden Arbeit werden beide Namen synonym für Funktionen entsprechend Gleichung 6.23 verwendet. Die Moyal-Verteilung kann gut zur Beschreibung von Observablen verwendet werden, die nur positive Werte annehmen und deren Verteilung Ausläufer haben können.

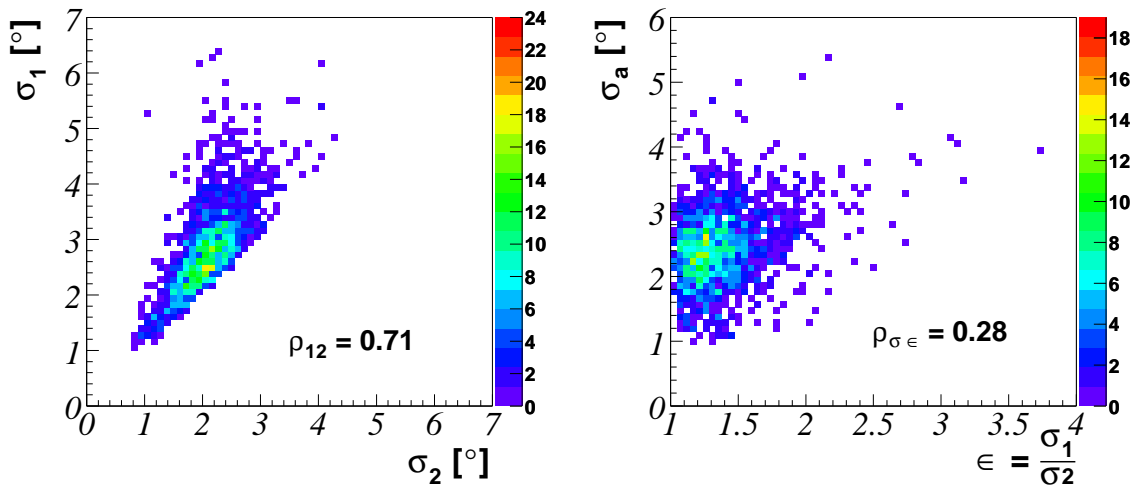


Abbildung 6.15: Vergleich der Korrelationen von σ_1 und σ_2 (**links**) beziehungsweise σ_a und ϵ (**rechts**). Während die Halbachsen stark miteinander zusammenhängen, ist die Größe und die Form der Fehlerellipse weitgehend unabhängig, wie die Korrelationskoeffizienten ρ belegen.

6.3.3 Die Abhängigkeit der Winkelauflösung von Richtung und Energie der Spur

Die mittlere Winkelauflösung des AMANDA-Neutrinooteleskopes wird von der Kollaboration üblicherweise über den Winkel Ψ zwischen wahrer und rekonstruierter Spur bestimmt. Der Median der entsprechenden Verteilung ist ein Maß für die Genauigkeit der Richtungsrekonstruktion. In der Neutrino-Simulation mit atmosphärischem Energiespektrum wird er auf $\Psi \approx 2.1^\circ$ und mit E_ν^{-2} -Verhalten auf $\Psi \approx 2.2^\circ$ bestimmt. In den Daten ist diese Größe nicht zugänglich.

Die Verteilung der exzentrizitätskorrigierten Flächenauflösung wird in der Landau-Anpassung durch zwei Parameter charakterisiert. Um ebenfalls nur eine Größe als Auflösung anzugeben, wird der Median der jeweiligen Funktion verwendet. Er liegt in den Daten bei $\sigma_a^\epsilon \approx 3.0^\circ$ und in der Simulation bei $\sigma_a^\epsilon \approx 2.8^\circ$ für atmosphärische und bei $\sigma_a^\epsilon \approx 2.5^\circ$ für E_ν^{-2} -Gewichte.

Der Median des Schätzers liegt über dem Median des wahren Raumwinkelabstandes. Das rührt daher, dass durch die Qualitätsschnitte Ereignisse mit einer besseren Richtungsrekonstruktion selektiert werden, als allein aus der Form des Loglikelihood-Minimums zu schließen ist.

Die Abhängigkeit der Winkelauflösung vom Zenit- und vom Azimutwinkel ist in Abbildung 6.16 zu sehen. Die drei Werte Ψ und σ_a^ϵ in der atmosphärischen Simulation und σ_a^ϵ in den Daten sind einander gegenübergestellt.

In der Nähe des Horizontes ist die Auflösung in den Daten ein wenig schlechter als in der Neutrino-Simulation (vgl. Abbildung 6.16 links). Das kommt von den horizontal rekonstruierten atmosphärischen Myonen, die nicht von den Qualitätsanforderungen aus dem Datensatz entfernt worden sind.

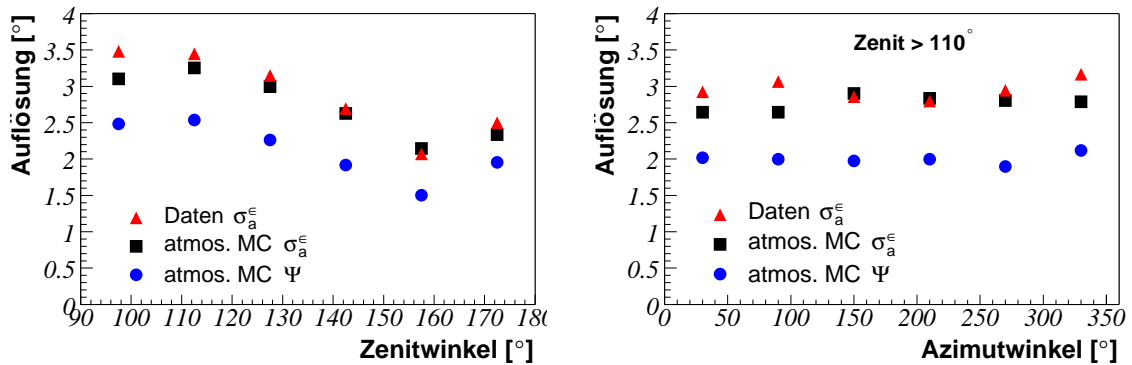


Abbildung 6.16: Abhängigkeit der Detektorauflösung von der Richtung der Spur in Daten und Simulation auf Stufe 4 der Analyse. **Links:** gegen den Zenitwinkel. **Rechts:** gegen den Azimutwinkel für Spuren mit $\theta_{\text{std.}} > 110^\circ$.

Sie haben typischerweise etwas schlechtere Auflösungen als die „echten“ Neutrinoereignisse, wenngleich sie bessere Auflösungsschätzer als durchschnittliche Untergrundereignisse haben. Aus diesem Beitrag rührt auch der Unterschied in den eingangs des Abschnitts genannten durchschnittlichen Werten von σ_a^e in Daten und Simulation.

Weiter weg vom Horizont werden die Daten sehr gut vom Monte-Carlo beschrieben. Auch passen die Verläufe der drei Kurven als Funktion des Zenitwinkels sehr gut zusammen. Es werden diejenigen Ereignisse am genauesten rekonstruiert, welche von schräg unten kommen und damit die längste Flugstrecke durch den zylindrischen Detektor haben.

Um von der Kontamination durch atmosphärische Myonen unabhängig zu sein, sind in Abbildung 6.16 (rechts) nur Ereignisse mit Zenitwinkeln oberhalb von 110° verwendet. Die resultierenden Kurven sind im Wesentlichen flach. Die statistischen Fehler bei der Bestimmung des Medians sind nur schwer zugänglich. Zusammen mit der leichten Diskrepanz zwischen den Daten und der Simulation kann man auf keine Abhängigkeit der Auflösung vom Azimutwinkel rückschließen. Mit einer verbesserten Simulation der Eiseigenschaften und erhöhter Statistik, sowohl in Daten, als auch im Monte-Carlo, sollte es in der Zukunft möglich sein, die Abweichungen der Detektorform vom Zylinder zu beobachten.

Der Verlauf der Auflösung als Funktion der Myonenenergie in Detektornähe ist in Abbildung 6.17 (links) zu sehen. Es sind nur die Größen aus der Simulation aufgetragen, da die wahre Myonenenergie in den Daten nicht zugänglich ist.

Im Bereich atmosphärischer Neutrinoenergien bis ca. 10 TeV verlaufen sowohl die wahre Winkelauflösung, als auch der Schätzer flach und parallel zueinander. Oberhalb davon laufen sie jedoch in verschiedene Richtungen. Während σ_a^e immer kleiner wird, nimmt der tatsächliche Fehler in der Rekonstruktion zu, woraus die Verbreiterung der Pulls für höhere Energien resultiert (vgl. Abbildung 6.7).

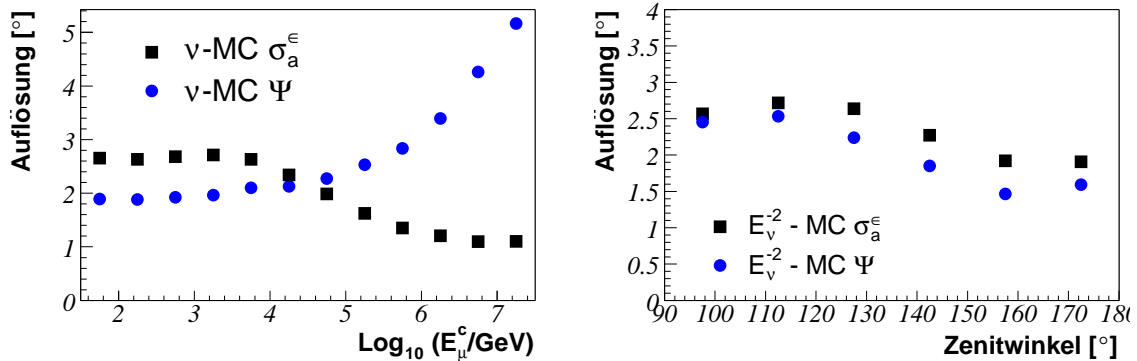


Abbildung 6.17: **Links:** Abhängigkeit der Detektorauflösung von der Myonenergie. **Rechts:** Abhängigkeit der Detektorauflösung vom Zenitwinkel der Spur für die Neutrino-Simulation mit einem E_{ν}^{-2} -Spektrum.

Der Einfluss auf die Winkelauflösung für Punktquellenenergien – mit E_{ν}^{-2} -Abhängigkeit – ist in Abbildung 6.17 (rechts) als Funktion des Zenitwinkels dargestellt. Der prinzipielle Verlauf entspricht demjenigen für atmosphärische Energien (Abbildung 6.16 links). Je näher die Richtung am Horizont liegt, desto mehr spielen hohe Energien eine Rolle und die beiden Kurven nähern sich einander an.

6.3.4 Fazit

In den vorangehenden Abschnitten werden mehrere Auflösungsschätzer in Zenit, Azimut und im Raumwinkel diskutiert. Dabei werden ihre Eigenschaften vor und nach den Qualitätsschnitten und als Funktion der Energie diskutiert. Es ergibt sich das folgende Bild:

Im Bereich atmosphärischer Energien passen die Schätzer vor den Schnitten im Mittel gut zu den wahren Abweichungen (Abbildungen 6.5 und 6.13 rechts). Danach werden die Fehler leicht überschätzt (Abbildungen 6.11 und 6.16). Das rührt daher, dass in die Qualitätsschnitte zusätzliche Informationen einfließen, was zu einer Selektion von Ereignissen mit besserer Auflösung führt, als gemäß der Krümmung des Likelihood-Tales zu erwarten ist.

Für höhere Energien wird die Richtungsrekonstruktion schlechter, während die Schätzer kleiner werden (Abbildungen 6.17 links und 6.7). Für Punktquellspektren mit einer E_{ν}^{-2} -Abhängigkeit führt das dazu, dass die Fehler im Mittel gerade richtig abgeschätzt werden (Abbildung 6.10).

Damit sind die Auflösungsschätzer in der Analyse einsetzbar.

Im folgenden Abschnitt 6.4 wird ihre Stärke als Qualitätsparameter untersucht. In Teil III sind die ereignisindividuellen Winkelaufösungen zentrale Grundlage der neuen Suchmethode nach kosmischen Neutrino-Punktquellen.

Nichtsdestotrotz sollte in weiterführenden Analysen auf ein Rekonstruktionsverfahren gewechselt werden, das die Energieabhängigkeiten mit berücksichtigt. Damit sollten nicht nur hochenergetische Ereignisse besser rekonstruiert, sondern auch die Auflösungs-schätzer genauer werden können.

Ferner wäre es wünschenswert, möglichst viele der Informationen, die derzeit nur in den Qualitätsparametern verwendet werden, in die Likelihood-Funktion mit einfließen zu lassen, damit sie bei der Bestimmung der Winkelauflösung gleich mit berücksichtigt werden.

6.4 Die Eigenschaften der Auflösung als Qualitätsparameter

A priori erwartet man eine starke Korrelation zwischen Fehlrekonstruktion und schlechter Auflösung. Im Folgenden soll quantitativ geklärt werden, inwiefern die Auflösungs-schätzer als Qualitätsparameter verwendbar sind. Das geschieht im direkten Vergleich mit der direkten Länge L_{dir} , die ebenfalls stark mit der Winkelauflösung korreliert ist (vgl. Abschnitt 5.4).

Die Größe, die als Schnittparameter untersucht wird, ist die Flächenauflösung ohne Exzentrizitätskorrektur. Man verwendet σ_a und nicht $\sigma_{1,2}$ oder $\sigma_{\theta,\phi}$, damit man nur einen Parameter verwenden muss. Die ϵ -Korrektur wird unterlassen, da die Form der Fehlerellipse später explizit in die Punktquellensuche mit einfließt¹¹. Das wird in Kapitel 8 erklärt.

¹¹ Auch die Größe der Fehlerellipse wird auf natürliche Weise in die Punktquellensuche eingebaut.

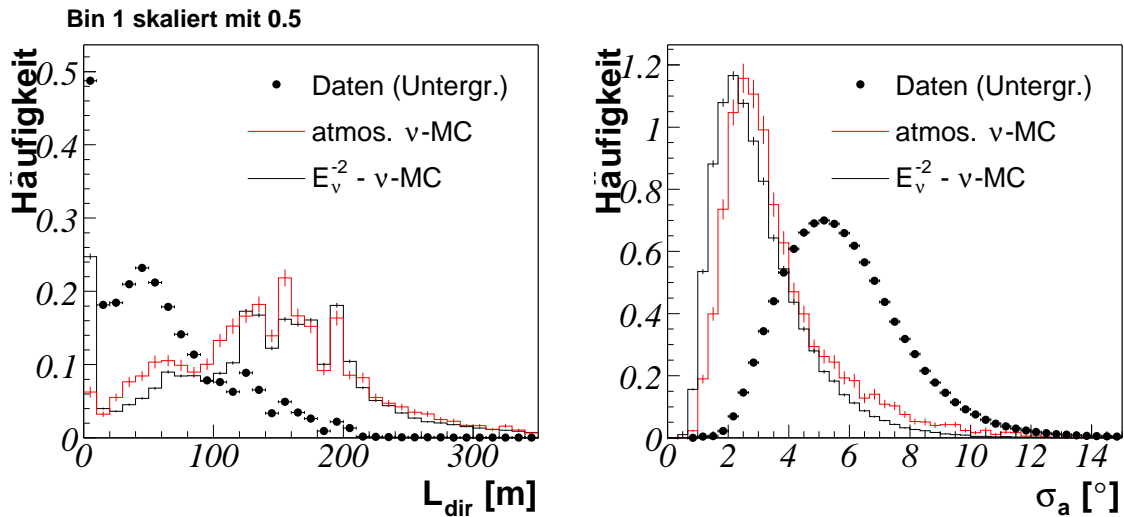


Abbildung 6.18: Verteilung von L_{dir} und σ_a in Signal und Daten auf Stufe 3 der Analyse. Die Daten bestehen größtenteils aus Untergrund. Alle Einträge im ersten Bin des linken Graphen sind mit dem Faktor 0.5 skaliert worden, damit die restliche Verteilung besser zu erkennen ist.

In Abbildung 6.18 sind die Verteilungen von L_{dir} und σ_a für Signal und Daten vor den Qualitätsschnitten gezeigt. Auf dieser Stufe der Analyse bestehen die Daten fast ausschließlich aus Untergrundereignissen. Die hohen Einträge im ersten Bin des L_{dir} -Graphen stammen von Ereignissen, mit einem oder keinem direkten Treffer. Die entsprechenden Werte wurden alle um Faktor zwei verkleinert, damit der Rest der Verteilung besser sichtbar ist. Woher die feineren Strukturen der Verteilungen stammen, ist nicht bekannt.

Die Signaleffizienz ist in Abbildung 6.19 als Funktion der Myonenergie gezeigt. Für jeweils drei Werte, bei denen man typischerweise schneiden könnte, ist der Anteil der Ereignisse aufgetragen, die den Schnitt passieren. Für hochenergetische Ereignisse ist L_{dir} kein guter Qualitätsparameter. Allerdings muss man beachten, dass die Signaleffizienz von σ_a in diesem Bereich mit deshalb so gut ist, weil die Auflösung unterschätzt wird.

Wie gut die beiden Größen zwischen Signal und Untergrund diskriminieren können, zeigt Abbildung 6.20. Für eine Reihe an Schnittwerten ist jeweils die Signaleffizienz gegen den Anteil an Datenereignissen eingezeichnet, die nach dem Schnitt verbleiben. Die Punkte, die den Schnitten aus Abbildung 6.19 entsprechen, sind hervorgehoben.

Je näher ein Punkt in diesen Diagrammen an $(0, 1)$ liegt, desto besser, weil $(0, 1)$ 100%-iger Signaleffizienz bei vollständiger Untergrundunterdrückung entspricht. Für den Fall atmosphärischer Neutrinos gelingt mit L_{dir} die bessere Trennung zwischen Signal und Untergrund; das gilt zumindest für weiche Schnitte. Im Bereich von etwa 60% Signaleffizienz kann mit σ_a besser separiert werden. Bei der Neutrino-Simulation mit einem E_ν^{-2} -Spektrum ist σ_a durchweg die bessere Qualitätsgröße.

Bei dem Ergebnis dieser Untersuchung muss betont werden, dass es von den übrigen Selektionskriterien abhängt, die man anwendet. Die verschiedenen Qualitätsparameter sind teilweise stark miteinander korreliert. Verlangt man beispielsweise ein Minimum an direkten Treffern (vgl. Abschnitt 5.4), dann sind alle Ereignisse mit verschwindender direkter Länge nicht mehr dabei. Die Linien aus blauen Kreuzen läuft dann bis zum Punkt $(1, 1)$. Ob sie oberhalb oder unterhalb der Linie von σ_a verläuft, muss im Einzelnen untersucht werden.

Zudem muss der Untergrund insgesamt um etwa sieben Größenordnungen reduziert werden. In dem schrittweisen Prozess, in dem das geschieht, sind immer wieder andere Untergrundarten dominant, die von jeweils anderen Qualitätsparametern am besten separiert werden können. Nichtsdestotrotz wird die Flächenauflösung σ_a – und die anderen Winkelfehlerschätzer für die weitere Analyse sehr nützlich sein.

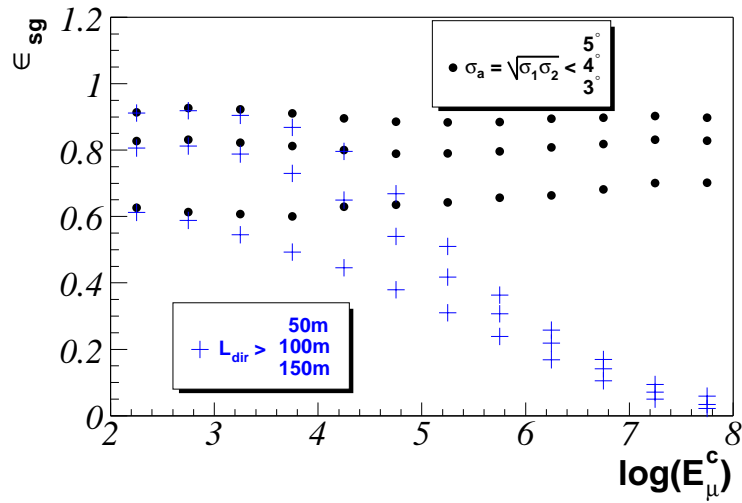


Abbildung 6.19: Vergleich der Signaleffizienz von L_{dir} und σ_a als Qualitätsparameter in Abhängigkeit der Energie.

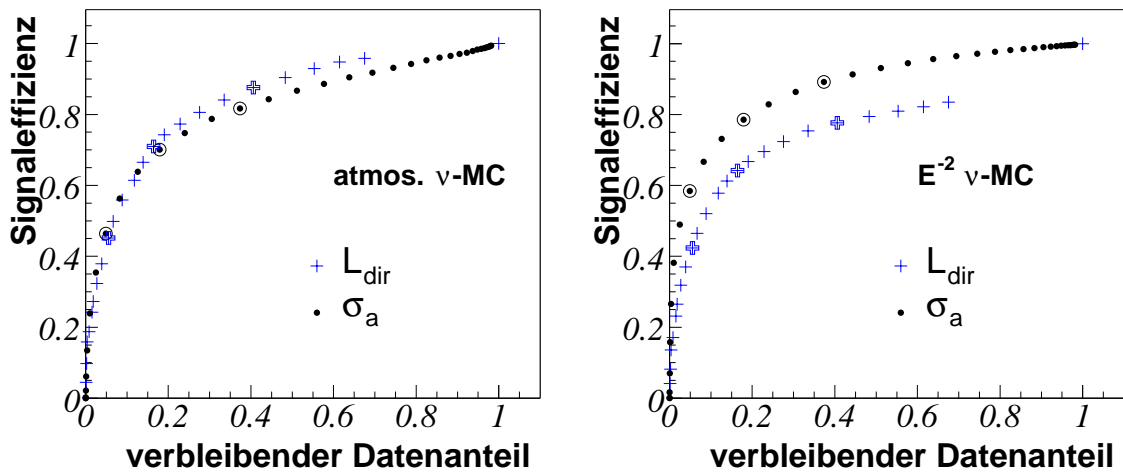


Abbildung 6.20: Signaleffizienz gegen Untergrundunterdrückung von L_{dir} und σ_a als Qualitätsparameter für atmosphärische Neutrinos (**links**) und Punktquellenneutrinos mit E_ν^{-2} -Verlauf (**rechts**). Die hervorgehobenen Punkte entsprechen den Schnitten aus Abbildung 6.19 mit $L_{dir} = \{50 \text{ m}, 100 \text{ m}, 150 \text{ m}\}$ und $\sigma_a = \{3^\circ, 4^\circ, 5^\circ\}$.

Teil III

Die Suche nach Neutrino-Punktquellen

7 Grundsätzliches zur Suche nach Neutrino-Punktquellen

Wenn die Begriffe sich verwirren,
ist die Welt in Unordnung.

(Konfuzius)

Im dritten Teil dieser Arbeit geht es um die Verfahren, die bei der Suche nach Neutrino-Punktquellen zur Anwendung kommen. Das Ziel dieser Verfahren ist die Beantwortung der Frage, ob es im Universum Objekte gibt, die einen Fluss an hochenergetischen Neutrinos erzeugen. Dabei beschränkt man sich in der Suche nach *Punktquellen* auf ortsfeste Objekte, deren Ausdehnung klein gegenüber ihrem Abstand zur Erde ist.¹

Findet man Punktquellen, dann möchte man ihre Eigenschaften vermessen. Wo ist die Quelle? Wie groß ist der Neutrinofluss? Wie sind seine Energie- und seine Zeitabhängigkeit?

Findet man keine Punktquelle, dann möchte man eine obere Grenze auf den Fluss angeben.

Bei der Suche gibt es zwei fundamental unterschiedliche Fragestellungen:

1. Befindet sich an einem festgelegten Ort des Himmels eine Neutrino-Punktquelle?
2. Befindet sich in einem bestimmten Bereich des Himmels eine Punktquelle zunächst unbekanntem Ortes?

Der erste Fall entspricht der Situation, wenn man ein bestimmtes Kandidatenobjekt – beispielsweise einen Aktiven Galaktischen Kern – daraufhin untersuchen möchte, ob es eine Neutrino-Punktquelle ist.

Im zweiten Fall wird die Suche auf Objekte erweitert, die mit herkömmlicher Astronomie noch nicht entdeckt worden sind. Sei es, weil sie keine Photonen aussenden, weil ausgesandte Photonen auf dem Weg zur Erde absorbiert werden oder weil in dem entsprechenden Himmelsbereich noch nicht eingehend genug gesucht worden ist.

Die Suche in einem Gebiet ist eine Erweiterung der Suche an einem Punkt, die eine entsprechende Erweiterung der statistischen Methoden nach sich zieht. Im Folgenden geht es zunächst nur um die erste Fragestellung. In Kapitel 9 werden die Probleme und Lösungsmöglichkeiten der zweiten Fragestellung aufgezeigt.

¹Keines der untersuchten Objekte hat eine Ausdehnung, die einige Bogenminuten überschreitet. Im Rahmen der Winkelauflösung des AMANDA-Neutrinooteleskops sind das in der Tat Punkte.

Da bisher noch keine hochenergetischen kosmischen Neutrino-Punktquellen gefunden wurden², wird die Suche auf eine einfache Klasse an Modellen eingeschränkt. Das wird im folgenden Abschnitt 7.1 beschrieben. In Abschnitt 7.2 wird die prinzipielle Suchstrategie erläutert, die allen Suchverfahren zu Grunde liegt. Nach der Beschreibung, wie *Konfidenzplots* konstruiert werden (Abschnitt 7.3), wird diskutiert, wie man die Qualität verschiedener Suchen miteinander vergleichen kann (Abschnitt 7.4). In diesem Zusammenhang wird auch der Qualitätsparameter gewonnen, mit Hilfe dessen eine Suche optimiert werden kann. Es folgt eine Darlegung des bisherigen Suchverfahrens (Abschnitt 7.5) und die Begründung, warum man zu einem neuen Verfahren wechseln sollte (Abschnitt 7.6).

7.1 Definition der Signalhypothese

Im einfachsten Szenario gibt es am Himmel eine einzige Neutrinoquelle an einer bekannten Stelle. Der zugehörige Ortsparameter wird mit $\vec{x}_0 = (\alpha_0, \delta_0)$ bezeichnet. Dabei steht α_0 für die *Rektaszension* und δ_0 für die *Deklination* der Quelle. Es sind die beiden Koordinaten eines Koordinatensystems, dessen Ursprung im Erdmittelpunkt liegt, dessen Richtungen aber gegenüber dem galaktischen Hintergrund fest sind. Eine genaue Definition der verwendeten Koordinatensysteme und der Transformationen zwischen ihnen findet sich im Anhang B. Der Begriff *Ort eines Ereignisses* bezieht sich im Folgenden auf die Richtung, aus der das zugehörige Neutrino gekommen ist, also auf den Ort auf der Himmelskarte.

Es gibt theoretische Argumente (vgl. Kapitel 2), nach denen die Energieabhängigkeit des Neutrino-flusses einem Potenzgesetz der Form

$$\Phi^d(E) = \frac{d\Phi}{dE}(E) = \Phi^d(E_0) \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha = 2 \quad (7.1)$$

folgt. In der Simulation des Signals und somit in der Analyse wird nur dieses Modell verwendet. Die Stärke des Flusses wird mit Φ^ν bezeichnet. Sie entspricht dem Integral des differentiellen Flusses oberhalb einer Grenze von $E_{\text{Grenze}} = 10 \text{ GeV}$.³

Die Zeitabhängigkeit der Quellenstärke wird hier nicht untersucht. Ein gefundener Fluss oder auch eine Grenze darauf bezieht sich daher immer auf einen Mittelwert über den Beobachtungszeitraum.

Ein wesentlicher Aspekt der Hypothese ist, dass es nur genau eine Punktquelle gibt. Physikalisch wird diese Aussage kaum zutreffen, denn wenn es eine gibt, dann gibt es sicherlich noch weitere. Nichtsdestotrotz ist diese Annahme gerechtfertigt, da man erwarten kann, dass es nur wenige Quellen gibt, die auf Grund ihrer individuellen Stärke, ihrer Entfernung und ihrer eventuell gerichteten Abstrahlcharakteristik die Nachweisschwelle überschreiten. Für die Suche an einem festen Ort ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine zweite (Stör-) Quelle in direkter Nachbarschaft befindet, besonders

²Die Neutrinos von SN-1987A und unserer Sonne sind aus Sicht von Neutrinoteleskopen niederenergetisch.

³Die Größen Φ^ν und $\Phi^d(E_0)$ unterscheiden sich um den Faktor $\frac{E_0^2}{E_{\text{Grenze}}}$. Üblicherweise wählt man $E_0 = 1 \text{ GeV}$. Daraus resultiert die etwas seltsame Situation, dass der integrale Fluss oberhalb von 10 GeV, aber der zugehörige differentielle Fluss an einer Stelle unterhalb dieser Grenzenergie angegeben wird.

klein, bei einer Suche in einem Gebiet des Himmels wächst die Wahrscheinlichkeit mit steigender Größe des Gebietes.

Ein Verfahren zur Entdeckung muss so konstruiert sein, dass jede weitere Neutrino-Punktquelle als Beitrag zum Untergrund eingeht. Damit ist das Problem konservativ behandelt.

7.2 Die prinzipielle Suchstrategie

Da a priori nicht zwischen einem Neutrino, das in der Erdatmosphäre erzeugt wurde, und einem Neutrino, das von weither stammt, unterschieden werden kann, muss man aus einem größeren Datensatz an Ereignissen herausfinden, ob an einer bestimmten Stelle des Himmels eine Punktquelle ist oder nicht. Die Signatur ist eine lokale Überhöhung über dem Untergrund.

Aus dem Gesamtdatensatz werden diejenigen Ereignisse selektiert, die alle Qualitätsschnitte passieren. Dabei wählt man die Schnittkriterien derart, dass man möglichst gut Punktquellen untersuchen kann. Woran die Güte gemessen werden kann, wird weiter unten diskutiert (siehe Abschnitt 7.4).

Der reduzierte Datensatz wird dann weiter abstrahiert, da man von jedem Ereignis nur noch einen Teil der Informationen verwendet, die während des Rekonstruktionsprozesses gewonnen werden. Die wesentliche Größe ist der Ort eines Ereignisses am Himmel. Es liegt jedoch auf der Hand, dass auch die in Kapitel 6 eingeführte ereignisindividuelle Auflösung wichtige Informationen enthält. Rekonstruierte Energie und Ankunftszeit des Neutrinos würde man als nächstes betrachten, wenn man sich intensiver für die entsprechenden Spektren beziehungsweise das zeitliche Verhalten der Quellen interessiert. Letztere werden in dieser Arbeit aber nicht verwendet.

Der Datensatz setzt sich aus den Signal- und den Untergrundergebnissen zusammen. Ein detailliertes Verständnis beider Ensembles ist essenziell, um eine Punktquelle korrekt und effizient nachweisen oder ausschließen zu können.

Das Verhalten des Untergrundes entnimmt man den Daten selbst. Unter der Annahme, dass sich das Ereignisensemble zum größten Teil aus atmosphärischen Neutrinos – und damit aus Untergrundergebnissen – zusammensetzt, kann man Stärke und Winkelabhängigkeit des Untergrundverlaufes aus den Daten abschätzen und parametrisieren. Dabei ist die Rotation des Detektors um seine Längsachse von großem Vorteil. Durch den Poissoncharakter der einzelnen Prozesse und der dadurch garantierten statistischen Unabhängigkeit von Einzelereignissen fallen alle Azimutabhängigkeiten der Detektoreffizienz durch Mittelung heraus. Der Untergrund ist unabhängig von der Rektaszension und muss nur noch als Funktion der Deklination beschrieben werden.

Interessiert man sich für einen bestimmten Quell-Kandidaten, dann entnimmt man den Untergrund aus dem zugehörigen Band gleicher Deklination aber abseits der Hypothesenrektaszension. Bei der Untersuchung vieler Quellorte und letztendlich des gesamten Himmels ist es aus praktischen Gründen nicht immer machbar, den jeweiligen Bereich bei der Beschreibung des Untergrundes auszunehmen. Man entnimmt den Untergrundverlauf aus dem gesamten Datensatz. Ein eventuelles Signal wird dabei implizit über das zugehörige Deklinationsband verschmiert und der Untergrund leicht zu hoch abgeschätzt. Die daraus resultierenden Ergebnisse messen einer Quelle etwas zu niedrige Flüsse zu.

Für eine Entdeckung entspricht das einer konservativen Behandlung des Problems. Damit ist auch die Forderung aus dem letzten Abschnitt erfüllt, dass jede weitere Neutrino-Punktquelle als Beitrag zum Untergrund eingehen soll.

Obere Grenzen sind aber ebenfalls zu niedrig, was als systematischer Fehler behandelt werden muss. Die Größe des Fehlers hängt von der Stärke einer störenden⁴ Quelle ab. Ist sie schwach, dann ist der Fehler vernachlässigbar. Ist sie stark, dann würde der Fehler groß werden, aber dann ist sie andererseits nachweisbar und der entsprechende Himmelsbereich kann – und muss – aus den Daten ausgenommen werden, wenn es um die Bestimmung des Untergrundes geht.

Aus der Rotationssymmetrie erwächst noch ein weiterer Vorteil. Man will zwar den Untergrund aus den Daten parametrisieren, muss aber eine Vorgehensweise wählen, bei der man für ein wahres Signal *blind* ist. Sonst besteht die Gefahr, dass bei der Optimierung der Analyse eine statistische Fluktuation künstlich verstärkt, und somit eine Punktquelle erzeugt wird, die nicht da ist.

Man erreicht die geforderte statistische Blindheit durch einen Randomisierungsprozess, indem man jedem Ereignis einer Stichprobe eine zufällige Rektaszension zuweist.⁵ Dadurch erhält man einen Datensatz, der sich vom tatsächlichen in keiner derjenigen Eigenschaften unterscheidet, die für die Untergrundparametrisierung verwendet werden. Erst für den allerletzten Schritt der Analyse, die eigentliche Messung, wird die statistische Blindheit aufgehoben und jedem Ereignis wieder der gemessene Wert der Rektaszension zugewiesen.

Bei der Beschreibung des Signals muss man sich auf die Simulation verlassen, um die Reaktion des Detektors zu verstehen und interpretieren zu können. Die zentrale Größe ist die effektive Neutrinofläche als Funktion der Einfallrichtung – gemittelt über die Neutrinoenergie mit dem oben diskutierten E^{-2} -Verhalten.

Die kosmischen Neutrinoquellen werden als punktförmig angenommen. Die rekonstruierte Myonverteilung aus dem Signal hat im Gegensatz dazu eine endliche Breite. Das liegt zum Teil am Winkel zwischen Neutrino- und Myonflugrichtung. Dieser Effekt ist relativ klein (siehe Gleichung 1.64). Er wird im Folgenden als *natürliche Breite* bezeichnet. Die eigentliche Verbreiterung des Signals erfolgt durch die Ungenauigkeit bei der Richtungsrekonstruktion des Myons.

Die Form des Signalensembles als Funktion des Ortes ist eine Faltung der natürlichen Breite mit der winkelabhängigen Detektoreffizienz. Diese Funktion muss dann ihrerseits mit der Detektorauflösung gefaltet werden. In der Praxis nimmt man die effektive Neutrinofläche als konstant über die intrinsische Breite an und multipliziert die Effizienz mit der Faltung der beiden Verschmierungen.

Die absolute Normierung der effektiven Neutrinofläche erhält man wiederum unter Zuhilfenahme der Daten. Mit sehr restringenten Schnitten wird ein Ensemble separiert, das praktisch frei von fehlrekonstruierten atmosphärischen Myonen ist und damit (fast) ausschließlich aus atmosphärischen Neutrinos

⁴Von einer störenden Quelle zu sprechen, ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt vielleicht nicht ganz angemessen.

⁵Dieser Mechanismus funktioniert in der Nähe des Nordpols nicht mehr. Eine zufällige Verschiebung entlang der Rektaszension hat einen umso geringeren Effekt, je näher man dem Pol kommt. In dieser Arbeit werden keine Hypothesepunkte näher als 5° am Nordpol untersucht.

besteht. Aus dem Vergleich mit der entsprechenden Simulation erhält man den gesuchten Normierungsfaktor. Die Unsicherheiten werden dann nur durch die Ungenauigkeit bestimmt, mit der der atmosphärische Neutrinofluss bekannt ist ($\pm 25\%$). Siehe auch Abschnitt 5.5.

7.3 Statistische Observable und Konfidenzplots

Für einen festgelegten Ort der Signalthypothese ist der einzige freie Parameter der Neutrinofluss Φ^ν . Die Anzahl der Signalereignisse in einer Messperiode der Dauer T_L bei neutrino-effektiver Fläche A_{eff}^ν folgt einer Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert μ_{sg} . Multipliziert man die Definitionsgleichung von A_{eff}^ν (Gleichung 3.22) mit der Messdauer, dann folgt

$$\mu_{\text{sg}} = \Phi_{\text{sg}}^\nu \cdot A_{\text{eff}}^\nu \cdot T_L \quad . \quad (7.2)$$

Zur Messung der beiden Größen μ_{sg} und Φ_{sg}^ν geht man jeweils folgendermaßen vor.

Zunächst wird aus den Daten eine statistische Observable, also eine zufallsverteilte Größe, extrahiert. Man kann sich hier beispielsweise eine Ereignisanzahl vorstellen. Für jeden möglichen Wert des Signalparameters (Φ_{sg}^ν oder μ_{sg}) muss die Observable unterschiedlich verteilt sein. Ansonsten kann man aus dem Messwert der Observablen nicht auf den Parameter rückschließen.

Für jede Hypothese macht man einen statistischen Test, der entscheiden soll, ob durch die Beobachtung die Hypothese abgelehnt wird oder nicht. Dazu betrachtet man die Verteilung der Observablen für den gegebenen Hypothesenparameter und wählt daraus ein Intervall I aus. Eine Beobachtung $x \notin I$ interpretiert man als Ablehnung der Hypothese.

Um das Intervall festzulegen, wird zuerst ein *Konfidenzniveau* CL^6 gewählt, beispielsweise $CL = 90\%$. Das entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Observable in I liegt, wenn die Hypothese stimmt. Entsprechend lehnt man die Hypothese mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - CL)$ ab, obwohl der Signalparameter richtig ist. Dieser Fehler heißt *Fehler erster Art*. Er ist schlimmer als der *Fehler zweiter Art*, bei dem die Hypothese nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist. Das Konfidenzniveau beschreibt also (indirekt) die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler erster Art zu begehen.

Es gibt noch eine weitere Freiheit bei der Wahl des Intervalles, nämlich wie seine genaue Positionierung festgelegt wird. Aus dem Bisherigen folgt nur, dass das Integral der Observablenverteilung über I gleich dem Konfidenzniveau ist. Zur Festlegung der Grenzen entscheidet man sich für ein Verfahren, dass die verschiedenen Werte der Observablen in eine bestimmte Reihenfolge bringt. Entsprechend dieser Ordnung nimmt man Werte in das Intervall I auf, bis es groß genug ist, um der Integralbedingung zu genügen. Dieser Vorgang wird als *Ordering*⁷ bezeichnet.

In älteren Vorgehensweisen wählt man einseitige oder um den Erwartungswert zentrierte Intervalle. Im ersten Fall entspricht die Ordnung direkt dem Wert der Variablen, im zweiten Fall ist sie durch den Abstand vom Erwartungswert gegeben.

⁶Für *Confidence Level*

⁷*Ordering*: Englisch für Reihenfolge

Als Standardverfahren hat sich das Ordnungsverfahren über Likelihood-Verhältnisse durchgesetzt ([FC98]⁸). Dabei wird für jeden Observablenwert x der Hypothesenparameter μ_{best} bestimmt, für den es am wahrscheinlichsten ist, x tatsächlich zu messen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit – eigentlich Likelihood – bezeichnet man als $P(x, \mu_{\text{best}})$. Entsprechend bestimmt man die Likelihood $P(x, \mu_0)$ dafür, x mit der zu untersuchenden Hypothese μ_0 zu erhalten. Der Quotient der beiden stellt das erwähnte Likelihood-Verhältnis R dar. Diese Größe verwendet man als Ordnungsparameter und fügt Observablen mit größerem R dem Intervall I früher zu.

Um viele Hypothesentests gleichzeitig durchführen zu können, konstruiert man einen *Konfidenzplot*. In einem zweidimensionalen Graphen trägt man den Hypothesenparameter Φ'_{sg} oder μ_{sg} auf der Ordinate und die Observable x auf der Abzisse auf. Für jeden Wert von μ wird entsprechend der eben diskutierten Vorgehensweise ein Intervall in x -Richtung bestimmt und in dem Graphen markiert. Es entsteht ein zusammenhängender Bereich, der als *Konfidenzgürtel* bezeichnet wird. Für jeden Messwert x kann man ein zugehöriges *Konfidenzintervall* auf der Achse der Parameter ablesen, indem man den markierten Bereich betrachtet. Liegt ein gemessener Wert x_0 innerhalb des Intervalles in x -Richtung für eine bestimmte Hypothese, dann liegt der entsprechende Hypothesenparameter innerhalb des Konfidenzintervalles, das zu dem Messwert x_0 gehört. Für den wahren Parameter ist das mit der Wahrscheinlichkeit des Konfidenzniveaus der Fall. Per constructionem liegt der wahre Wert ebenfalls mit dieser Wahrscheinlichkeit im Konfidenzintervall. Die Konstruktion eines Konfidenzgürtels ist in Abbildung 7.1 a) bis d) illustriert.

Das wesentliche Kriterium an einen Konfidenzplot, um entscheiden zu können, ob man statistisch korrekte Aussagen entnehmen kann, ist die *Coverage*⁹. Man sagt, ein Konfidenzplot habe *Coverage*, wenn für jeden Wert des Hypothesenparameters die integrierte Wahrscheinlichkeit im zugehörigen Messwertintervall de facto größer oder gleich dem Konfidenzniveau ist. Falls das Integral echt größer ist, was im Falle diskreter Observabler wie etwa Anzahlen unvermeidlich ist, dann spricht man von *Overcoverage*. Ist die Bedingung nicht erfüllt, dann verwendet man die Bezeichnung *Undercoverage*, um auszudrücken, dass man den statistischen Aussagen keinen Glauben schenken darf.

Obwohl *Overcoverage* zu konservativen Ergebnissen führt, ist es dennoch eine unerwünschte Eigenschaft. Ist eine größere Wahrscheinlichkeit im Intervall I erwünscht, dann muss man das Konfidenzniveau erhöhen.

Undercoverage muss dagegen unter allen Umständen vermieden werden. Bei der direkten Konstruktion von Konfidenzplots tritt dieser Fall nicht ein. Gefährlicher ist es, wenn man in einer statistischen Analyse Entscheidungen versteckt trifft, die eigentlich mittels eines Konfidenzplots entschieden werden sollten.

Das klassische Beispiel aus dem oben erwähnten Papier ist unter dem Stichwort *Flipflopping*¹⁰ bekannt. Man betrachtet zwei mögliche Klassen von Ausgängen einer Beobachtung. Für große Werte einer Observablen, gibt man zentrale Konfidenzgrenzen an. Das entspricht einer Entdeckung. Ist der Wert klein, gibt man nur eine obere Grenze an. Für beide Fälle werden Konfidenzplots erstellt, die beide jeweils Coverage haben. Der Wert der Observablen entscheidet aber darüber, in welchem der

⁸Dieses Papier von Feldman und Cousins ist sehr empfehlenswert.

⁹*Coverage*: Englisch für Bedeckung

¹⁰*Flipflopping*: Englisch etwa für Hin- und Herspringen

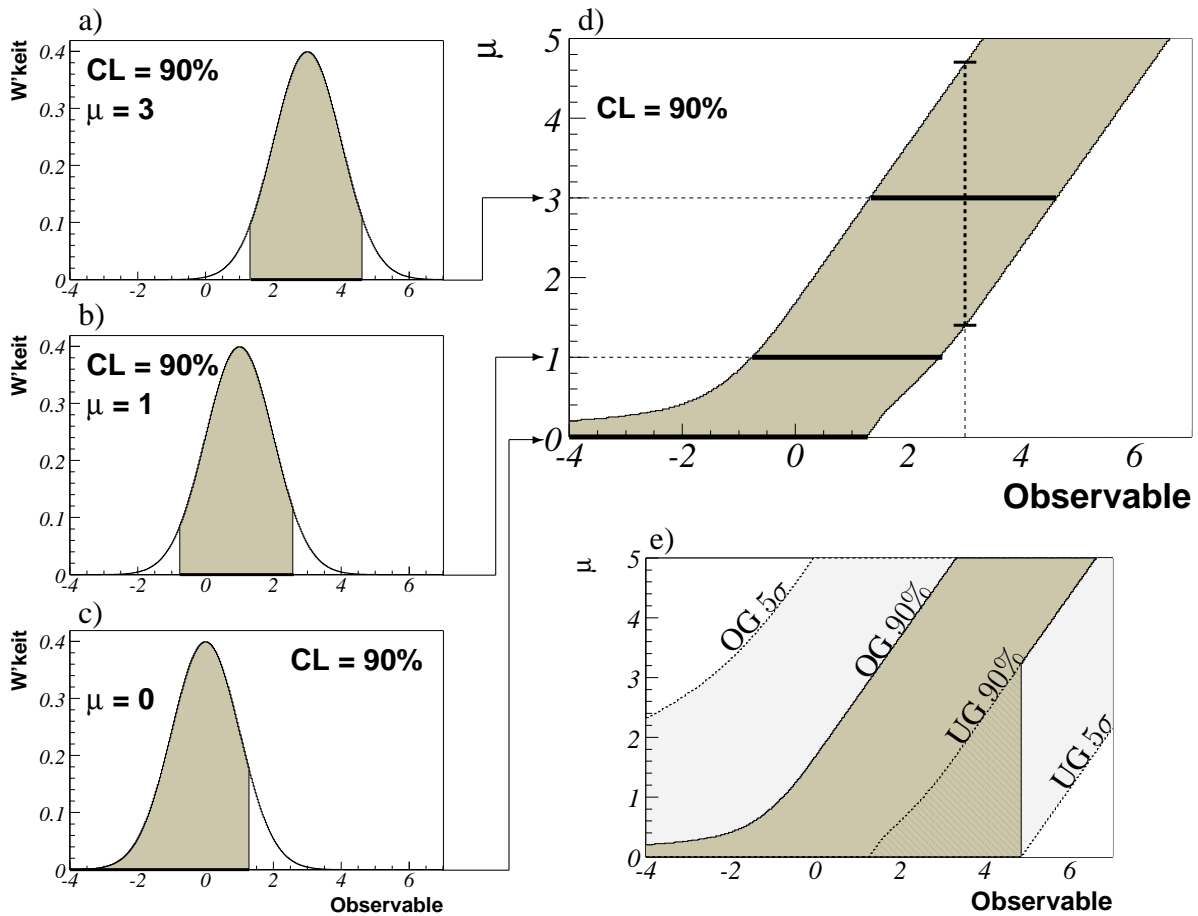


Abbildung 7.1: Die Konstruktion von Konfidenzplots: Abbildungen a) bis c) zeigen die Verteilung einer Observablen für Signalparameter $\mu = 3$, $\mu = 1$ und $\mu = 0$. In diesem Beispiel sind es Gauß-Verteilungen der Breite 1 und mit dem Mittelwert des zugehörigen Signalparameters. Diese Situation entspricht einer unverzerrten Messung mit festem Fehler.

Es wird jeweils ein Intervall ausgewählt, dessen Integral dem Konfidenzniveau von 90% entspricht. Die entsprechenden Intervalle werden im *Konfidenzplot* in Abbildung d) wie skizziert eingetragen. Es entsteht der hervorgehobene Bereich, der *Konfidenzgürtel*. Eine nachfolgende Messung der Observablen – hier beispielsweise bei 3 – führt zu einem *Konfidenzintervall* in y-Richtung, innerhalb dessen mit der Wahrscheinlichkeit des Konfidenzniveaus der wahre Signalparameter liegt.

In Abbildung e) sind die Konfidenzplots für die Konfidenzniveaus von 90% und entsprechend 5σ übereinandergelegt. Die oberen und unteren Grenzen der jeweiligen Graphen sind entsprechend mit OG und UG beschriftet. Will man erst ab einer Signifikanz entsprechend 5σ von einer Entdeckung sprechen, kann man den 90%-Konfidenzplot um die schraffierte Fläche erweitern. Es wird kontrolliert Overcoverage eingeführt. Bei einer Messung der Observable in dem Bereich, innerhalb dessen $UG_{5\sigma} = 0$, werden nur obere Grenzen angegeben. Für größere Messwerte erhält man zweiseitige Grenzen.

Graphen das Konfidenzintervall abgelesen wird. Man verwendet eigentlich nur einen Konfidenzplot, der unterhalb eines Schwellenwertes dem einen und oberhalb davon dem anderen ursprünglichen Konfidenzplot entspricht. Der resultierende Graph hat Undercoverage.

Die Zielsetzung, die zu dieser Vorgehensweise führt, ist korrekt. Man möchte in der Tat für große Beobachtungswerte zentrale Grenzen und für kleine Werte nur obere Grenzen für den Signalparameter erhalten.

Auch dieses Problem wird durch die Verwendung von Likelihood-Verhältnissen gelöst. Es stellt sich ein fließender Übergang zwischen einseitigen oberen Grenzen und zweiseitigen Konfidenzintervallen ein (vgl. Abbildung 7.1 d). Allerdings muss man gewahr bleiben, dass selbst wenn man eine von Null verschiedene untere Grenze erhält, noch keine Entdeckung vorliegen muss. Das Konfidenzintervall schließt den wahren Wert nur mit einer Wahrscheinlichkeit entsprechend des Konfidenzniveaus ein.

Eine mögliche Lösung besteht darin, künstlich Overcoverage einzuführen. Wenn man beispielsweise ein Konfidenzniveau von 90% für seine Ergebnisse gewählt hat, aber erst ab einer 5σ entsprechenden Wahrscheinlichkeit von einer Entdeckung sprechen möchte, dann konstruiert man zunächst beide zugehörigen Konfidenzplots. Für Messwerte, deren untere Grenze im 5σ -Graph von Null verschieden ist, wählt man zweiseitige 90% Intervalle. Für alle anderen Werte, gibt man einseitige obere Grenzen für 90% an. Das ist in Abbildung 7.1 e) skizziert.

Wegen des linearen Zusammenhangs von Neutrinofluss und Erwartungswert der Signalereignisse (Gleichung 7.2) macht es grundlegend keinen Unterschied, ob man Konfidenzplots mit Φ_{sg}^ν oder μ_{sg} auf der y-Achse konstruiert. Allerdings können systematische Unsicherheiten in der effektiven Fläche nur eingefügt werden, wenn der Fluss als Signalparameter verwendet wird. Entsprechende Methoden werden in [C⁺03b, Hil03] diskutiert.

7.4 Die Qualität eines Verfahrens zur Punktquellensuche

In diesem Abschnitt werden drei Maße vorgestellt, anhand derer eine Methode zur Punktquellensuche bewertet werden kann: die erwartete Signifikanz, die Genauigkeit der Parameterbestimmung und die *Sensitivität*. Erstere kann man noch verfeinern und die *garantierte* Signifikanz angeben.

Signifikanz. Die Signifikanz beschreibt die Wahrscheinlichkeit, den beobachteten Messwert durch eine Fluktuation des Untergrundes zu erhalten. Ausgedrückt wird diese Wahrscheinlichkeit in Standardabweichungen einer Gauß-Verteilung. Man integriert die Untergrundverteilung oberhalb des Messwertes und findet die Wahrscheinlichkeit P. In einer Gaußverteilung mit Erwartungswert Null und Breite σ sucht man die Stelle x , für die das Integral oberhalb von x ebenfalls den Wert P hat. Die Signifikanz ist dann definiert als

$$\zeta = \frac{x}{\sigma} \quad . \quad (7.3)$$

Im Falle eines Gauß-verteilter Untergrundes $f(x; \mu, \sigma)$ mit Mitterwert μ und Breite σ

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (7.4)$$

kann die Signifikanz einer Messung von x_0 durch die Funktionswerte an den Stellen x_0 und μ berechnet werden, auch ohne dass σ explizit bekannt ist:

$$\zeta = \sqrt{-2 \cdot \ln \frac{f(x_0; \mu, \sigma)}{f(\mu; \mu, \sigma)}} \quad . \quad (7.5)$$

Erwartete Signifikanz. Für bekannte oder angenommene Signal- und Untergrundflüsse kann man den Erwartungswert der Signifikanz bestimmen.

Garantierte Signifikanz. Bestimmt man die Signifikanz in vielen simulierten Experimenten, dann liegen die erhaltenen Werte teilweise oberhalb und teilweise unterhalb des Erwartungswertes. Aus der entsprechenden Verteilung bestimmt man die *garantierte* Signifikanz für ein gewähltes Konfidenzniveau CL derart, dass nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - CL)$ eine geringere Signifikanz gemessen wird. Allerdings ist der Begriff *garantiert* nicht wörtlich zu nehmen.

Genauigkeit der Flussmessung. Gemessen werden soll der Fluss einer Quelle. Der relative und absolute Fehler dieser Flussbestimmung sind der direkte Ausdruck der Qualität dieser Messung.

Genauigkeit der Ortsmessung. Im Fall, dass eine Quelle gefunden wird, möchte man auch wissen, wo sie ist. Die Unsicherheit in der Bestimmung des Ortes gibt ebenfalls Auskunft über die Güte eines Verfahrens.

Sensitivität. Falls man keine Quelle findet, möchte man eine obere Grenze auf den Fluss einer möglichen nicht nachgewiesenen Quelle angeben. Der Erwartungswert dieses Flusslimits unter der Annahme, dass kein Signal präsent ist, heißt *Sensitivität*.

Je größer die erwartete Signifikanz und je kleiner die Messfehler und die Sensitivität, desto besser.

Alle betrachteten Größen sind Erwartungswerte, in deren Bildung die tatsächliche Verteilung der Observablen einfließt. Diese ist aber a priori unbekannt. Fast alle dieser Bewertungsgrößen kann man nur als Funktion des wahren (und unbekanntes) Signalflusses angeben. Nur bei der Sensitivität ist die Situation etwas anders, da hier die Annahme zu Grunde liegt, dass kein Signal vorhanden ist.

Die Sensitivität hat sich als allgemeines Kriterium zur Optimierung von Suchen durchgesetzt, selbst wenn eine Quelle einer vorgegebenen Stärke damit nicht ganz optimal untersucht werden kann.

7.5 Das „alte“ Verfahren: die *gebinnte Suche*

Die *gebinnte Suche* ist ein reines Zählexperiment. Man wählt einen Ausschnitt am Himmel, ein *Bin*¹¹, das um den Hypothesenpunkt \vec{x}_0 gelegt wird. Überlicherweise verwendet man entweder rechteckige

¹¹für Englisch *Eimer, Behälter, Kasten*

oder kreisförmige Bins. Die statistische Observable ist die Anzahl an Ereignissen n , deren rekonstruierte Herkunftsrichtung innerhalb des Bins liegt. Sie folgt einer Poissonverteilung, wobei der Erwartungswert μ sich als Summe aus dem Untergrund- ($\mu_{\text{bg}}^{\text{bin}}$) und dem Signalerwartungswert ($\mu_{\text{sg}}^{\text{bin}}$) zusammensetzt ([Neu99]).

$$P(n; \mu = \mu_{\text{sg}}^{\text{bin}} + \mu_{\text{bg}}^{\text{bin}}) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \quad (7.6)$$

Aus den Daten im gleichen Zenitband schätzt man – wie im letzten Abschnitt diskutiert – den Untergrund ab, in diesem Fall den Erwartungswert an Untergrundereignissen ($\mu_{\text{bg}}^{\text{bin}}$).

Den Signalparameter erhält man aus dem Signalfluss über Gleichung 7.2. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass ein Teil der Signalereignisse außerhalb des Bins liegen kann. Diesen Effekt beschreibt man mit der *Bineffizienz* ϵ^{bin} . Das ist der Prozentsatz an Signalereignissen, der innerhalb eines Bins erwartet wird. Es gilt

$$\mu_{\text{sg}}^{\text{bin}} = \Phi_{\text{sg}}^{\nu} \cdot A_{\text{eff}}^{\nu} \cdot T_{\text{L}} \cdot \epsilon^{\text{bin}} \quad (7.7)$$

Damit kann man Konfidenzplots konstruieren, wie in Abschnitt 7.3 beschrieben.

7.6 Die Notwendigkeit eines neuen Verfahrens

Die Information der ereignisindividuellen Winkelauflösung (siehe Kapitel 6) ist für die Punktquellensuche wertvoll. Betrachten wir zwei Ereignisse, die beide von dem hypothetischen Ort \vec{x}_0 der Quelle den gleichen Abstand von 4° , jedoch unterschiedliche Auflösungen von 2° respektive 5° haben. Das zweite, schlechter aufgelöste Ereignis unterstützt die Hypothese besser als das erste, von dem man nicht erwarten würde, dass seine wahre Richtung \vec{x}_0 ist. Hätten umgekehrt beide Ereignisse einen verschwindend geringen Abstand vom Ort der Quelle, dann würde das besser aufgelöste Ereignis mehr für die Hypothese sprechen.

Bei der gebinnten Suche gibt es für ein Ereignis nur zwei Möglichkeiten. Entweder befindet es sich innerhalb des Suchausschnittes oder nicht. Will man die Winkelauflösungsinformation verwenden, dann steht man vor einem Problem. Ähnlich schwierig gestaltet sich die Integration weiterer Informationen, die bei der Entdeckung hilfreich sein könnten. Der Unterschied in den Energiespektren von Signal und Untergrund lässt sich nicht verwenden, ebensowenig wie die zeitlichen Verläufe, die bei der Untersuchung transientser Phänomene wichtig werden.

Das alles verlangt nach einer neuen Methode, die Ereignisse auf Grund zusätzlicher Information, also zusätzlich zu ihrer Richtung, unterschiedlich behandelt.

Darüber hinaus kann man noch zwei weitere Aspekte verbessern. Für den Fall, dass man eine Quelle entdeckt, möchte man Ort und Fluss messen. Die typische Biringröße von etwa 6° Radius machen eine Ortsbestimmung recht ungenau. Man erhält keinerlei Information darüber, wo innerhalb eines Bins eine entdeckte Quelle liegt. Bisherige Suchen ([Bir02]) legen vier Netze aus Bins über den Himmel, was zu einer Ortsungenauigkeit in der Größenordnung des Binradius führt.

Bei der Bestimmung des Flusses beeinträchtigt die Bineffizienz ϵ^{bin} die Genauigkeit. Der Zusammenhang zwischen Erwartungswert der beobachteten Signalereignisse und Signalfluss ist in Gleichung 7.7 gegeben. Der Einfluss der Bineffizienz soll im Folgenden veranschaulicht werden.

Der statistische Fehler eines Zählexperimentes entspricht der Wurzel des Erwartungswertes. Im Grenzfall verschwindenden Untergrundes wird der Messfehler des Signalflusses um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\epsilon^{\text{bin}}}}$ vergrößert.

Hält man die Bingröße fest und variiert die Detektorauflösung, dann ist der Untergrund ebenfalls fest und die Bineffizienz verändert sich. Die Signifikanz $\frac{\text{Signal}}{\sqrt{\text{Untergrund}}}$ ist proportional zu ϵ^{bin} .

Diese Betrachtungen sind im Detail nicht korrekt. Zum Einen ist der Fall verschwindenden Untergrundes unrealistisch und zum Anderen hängt die optimale Bingröße von der Detektorauflösung ab. Für eine detailkorrekte Betrachtung, wie die Genauigkeit der Flussmessung von der Bineffizienz abhängt, muss man die komplette Analyse durchführen und Konfidenzplotkonstruktionen verwenden.

Es liegt aber auf der Hand, dass man ein Verfahren haben möchte, das alle aufgenommenen Signalereignisse einer Quelle berücksichtigt.

Trotz der genannten Nachteile sei betont, dass die gebinnte Suche nicht ohne Berechtigung ist. Sie ist relativ simpel und dadurch robust. Die Statistik ist analytisch untersuchbar, was ebenfalls von Vorteil ist. Damit wird die gebinnte Suche für alle nach ihr folgenden Konzepte als Vergleich und Konsistenzprüfung dienen.

8 Die ungebinnte Maximum-Likelihood-Methode

Mit etwas Geschick kann man aus den Steinen,
die einem in den Weg gelegt werden, eine Treppe
bauen.

(Erich Kaestner)

Motiviert durch die Forderungen, die im letzten Abschnitt des vorangehenden Kapitels gestellt worden sind, soll im Folgenden ein neues Verfahren zur Neutrino-Punktquellensuche entwickelt werden. Der zentrale Gesichtspunkt ist die Einbindung der ereignisindividuellen Winkelauflösung. Weitere Ziele sind verbesserte Messgenauigkeiten für die Fluss- und die Ortsbestimmung im Fall einer Entdeckung.

Einer der naheliegendsten Gedanken zur Erweiterung der gebinnten Suche besteht darin, jedem Ereignis ein Gewicht zu geben. Obwohl in dieser Arbeit ein anderer Weg eingeschlagen wird, soll dieser Ansatz näher beleuchtet werden. Das geschieht zur Einführung prinzipieller Ideen und als Motivation der Entwicklung einer Maximum-Likelihood-Methode.

In Kapitel 6 wird die Winkelauflösung für ein Ereignis aus einer zweidimensionalen Gauß-Verteilung gewonnen. Sie beschreibt für jeden Ort des Himmels, wie wahrscheinlich es ist, dass das Ereignis tatsächlich von dort gekommen ist. Um diese Größe als Gewicht zu verwenden, kann man für einen hypothetischen Punktquellenort alle entsprechenden Wahrscheinlichkeiten aufaddieren. Der Ort mit der höchsten Summe ist dann auch der wahrscheinlichste Ort für eine Punktquelle.

Mit diesem Zugang löst man sich von der Beschränkung, eine endliche Zahl an Suchgittern über den Himmel zu legen. Stattdessen wird um jeden gemessenen Ereignispunkt die zugehörige Gauß-Verteilung gelegt und an jeder Stelle aufsummiert. Es entsteht eine stetige Funktion der Himmelskoordinaten.

In der Praxis wird eine solche Funktion nur an einer endlichen Zahl an Stützstellen evaluiert. Man verwendet implizit wieder ein Suchgitter, jedoch mit dem Unterschied, dass die Verwendung von mehr Suchpunkten nur einer Verfeinerung der Evaluation obiger Funktion dient. Die Stetigkeit der Funktion ist Ausdruck der Korrelation benachbarter Funktionspunkte, welche durch die Gauß-förmige Verschmierung durch die Detektorauflösung herrührt¹.

Das erste Problem der Vorgehensweise mit Gewichten liegt darin, dass Wahrscheinlichkeiten *addiert* werden. Logisch entspricht das einem *Oder*. Man will aber alle Ereignisse gemeinsam beschreiben. Das entspricht einem logischen *Und*. Die Wahrscheinlichkeiten sollten demnach *multipliziert* werden.

¹Dieser Aspekt wird in Kapitel 9 im Detail aufgegriffen.

Nichtsdestotrotz ist zunächst jede Methode gerechtfertigt, sofern sie Punktquellen finden kann. In der Addition der Gauß-Kurven ist aber ein Denkfehler versteckt. Um ihn zu erkennen, kann man das folgende Gedankenexperiment anstrengen.

Wir betrachten einen Datensatz an Ereignissen, die alle die gleiche Auflösung haben sollen. Histogrammiert man die gemessenen Orte der Ereignisse, dann erhält man eine Verteilung, in der die Signal- auf die Untergrundverteilung aufgesetzt ist. Im Grenzfall unendlicher langer Messdauer wird die Messung beliebig genau. Signal sowie Untergrund sind mit der Detektorauflösung verschmiert. Das unverschmierte Signal einer Punktquelle ist eine Delta-Funktion, damit entspricht die beobachtete Breite der lokalen Überhöhung über dem Untergrund gerade der Detektorauflösung. Wird der Datensatz mit der Additionsmethode untersucht, dann füllt man ebenfalls ein Histogramm. Für jedes Ereignis werden die zugehörigen Gewichte an den entsprechenden Stellen aufaddiert, jeder Ereignisort aus obigem Histogramm wird also zusätzlich ein zweites Mal verschmiert. Als Resultat erhält man die wahre Verteilung – *zweimal* mit der Detektorauflösung gefaltet. Die intuitive Annahme, dass die Verwendung der Auflösung als Gewicht die ursprüngliche Verschmierung durch den Detektor aufhebt, ist also falsch. Lässt man verschiedene – ereignisindividuelle – Auflösungen zu, wird die Situation nicht besser. Im Gegenteil, es wird sehr schwierig, aus dem Verlauf der addierten Funktion auf den Messfehler rückzuschließen, mit dem die Bestimmung des Ortes einer Punktquelle behaftet ist. Die Gewichtungsmethode stößt endgültig an ihre Grenzen.

Gelöst werden alle diese Probleme mit einer korrekten Maximum-Likelihood-Methode. Die grundlegende Vorgehensweise wird in Abschnitt 8.1 anhand eines vereinfachten Sachverhaltes eingeführt. Welche Observablen man gewinnt, findet sich in Abschnitt 8.2. Dann wird der Formalismus auf das AMANDA-Teleskop angepasst: die Eigenschaften der Auflösungen und der Verlauf des Untergrundes müssen parametrisiert werden (Abschnitt 8.3). Die statistischen Schätzer, die im realen Fall Verwendung finden, werden in Abschnitt 8.4 diskutiert. Die explizite Konstruktion des Konfidenzplots wird ebenso wie die resultierende Sensitivität und das Entdeckungspotenzial des Verfahrens in Abschnitt 8.5 gezeigt.

Das Kapitel schließt mit einer Diskussion der systematischen Fehler des Verfahrens (Abschnitt 8.6) und Ansätzen, welche Optimierungen noch denkbar sind (Abschnitt 8.7).

8.1 Die Punktquellensuche in einer Dimension

Der Ansatz wird zunächst im Eindimensionalen betrachtet. In einem festen Ortsintervall $I = [0, w]$ detektiert man Ereignisse, die entweder von einem Untergrund- oder von einem Signalprozess stammen. Die Form der Untergrundverteilung heißt $bg(x)$ und sei aus einer Messung in einem Vergleichsintervall bekannt. Die Verteilung der Signalereignisse ist Gauß-förmig um eine Punktquelle an der Stelle x_0 verteilt mit der natürlichen Breite σ_0 . Letztere ist für eine Neutrino-Punktquelle beliebig schmal. Es macht aber Sinn, den Winkelunterschied zwischen Neutrino- und Myonrichtung mittels des Parameters σ_0 zu beschreiben.

Eine Messung besteht aus N Ereignissen. Für jedes Ereignis E_i erhält man einen Schätzer für den Ort (x_i) und einen Schätzer für die Detektorauflösung (σ_i) und damit die Ortsunsicherheit dieses Ereignisses. Die zugehörige Auflösungsfunktion ist ebenfalls eine Gauß-Funktion $r(x; 0, \sigma_i)$.

Die beobachteten Signal- und Untergrundverteilungen entstehen aus den jeweils wahren durch Falten mit der Auflösungsfunktion r . Beim Signal entspricht das einer Addition der Varianzen. In der im Vergleichsintervall *gemessenen* Untergrundverteilung ist die Faltung schon enthalten. Der beobachtete Untergrund ist im einfachsten Fall flach. Signal und Untergrund werden dann folgendermaßen beschrieben:

$$\text{sg} \left(x; x_0, \tilde{\sigma}_i = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_i^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_i}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\tilde{\sigma}_i^2}} \quad , \quad (8.1)$$

$$\text{bg}(x) = \frac{1}{w} \quad . \quad (8.2)$$

Der Untergrund ist vom Ort der Quelle unabhängig. Eine abhängige Komponente würde zum Signal gehören. Im vorliegenden Beispielfall liegt auch keine Abhängigkeit vom gemessenen Ort des Ereignisses vor. Bei später folgenden Erweiterungen wird der Untergrund eine Ortsabhängigkeit erhalten, die direkt aus den Daten bestimmt wird. Die Unabhängigkeit von der gemessenen Auflösung σ_i bleibt dagegen bestehen, da bg den *gemessenen* Untergrund beschreibt, in dem die Auflösungen schon enthalten sind. Die Form des Signales wird sowohl vom Quellort als auch von der Ereignisauflösung bestimmt².

Zur Beschreibung des Datensatzes benötigt man noch eine weitere Information. Wie viele der Ereignisse stammen von der Quelle und wieviele stammen aus dem Untergrund. Der *Signalanteil* s ist definiert als Quotient der Anzahl der Signalereignisse n_{sg} und der Zahl aller Ereignisse N

$$s = \frac{n_{\text{sg}}}{N} \quad . \quad (8.3)$$

In der Größe s ist die Stärke einer Quelle enthalten.

Die Konstruktion einer Likelihood-Funktion in Abhängigkeit der Parameter s und x_0 geschieht folgendermaßen. Unter der Voraussetzung, dass die Parameter bekannt sind, betrachtet man zunächst die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Ortsvariable x . Für eine gewählte Auflösung σ und bekannte Signaleigenschaften wird sie beschrieben durch

$$f(x; s, x_0) = s \cdot \text{sg}(x; x_0, \tilde{\sigma}) + (1 - s) \cdot \text{bg}(x) \quad . \quad (8.4)$$

Man erhält die Likelihood-Funktion \mathcal{L}_i , die zu einem einzelnen Ereignis $E_i = (x_i, \sigma_i)$ gehört, indem man die Wahrscheinlichkeitsdichte f uminterpretiert. Durch die Messung ist die Größe x_i – ebenso wie σ_i – festgelegt. Die jetzt unbekannt Parameter s und x_0 werden die neuen Variablen. Die Likelihood-Funktion gibt dann an, wie wahrscheinlich es für einen Parametersatz ist, das Ergebnis x in einer Messung zu erhalten. Sie lautet

$$\mathcal{L}_i(s, x_0; x_i, \sigma_i) = s \cdot \text{sg}(x_i; x_0, \tilde{\sigma}_i) + (1 - s) \cdot \text{bg}(x_i) \quad . \quad (8.5)$$

²Wenn von der *Signalverteilung* die Rede ist, dann bezeichnet Gleichung 8.1 genau genommen für jeden Wert von σ_i ein Ensemble von Ereignissen mit jeweils gleicher Auflösung.

Die Funktion $\mathcal{L}_i(s)$ ist an der Stelle $s = 1$ gleich der Signal-Likelihood sg und bei $s = 0$ nimmt sie den Wert der Untergrund-Likelihood bg an.

Aus einem einzelnen Ereignis kann man nichts über eine Punktquelle lernen. Alle N beobachteten Ereignisse werden gleichzeitig berücksichtigt, indem man die einzelnen \mathcal{L}_i als Produkt zur Gesamt-Likelihood-Funktion \mathcal{L} zusammensetzt:

$$\mathcal{L}(s, x_0) = \prod_{i=1}^N \mathcal{L}_i(s, x_0; x_i, \sigma_i) \quad . \quad (8.6)$$

Um Likelihood-Schätzer für s und x_0 zu erhalten, sucht man das Maximum der Funktion \mathcal{L} . Die zugehörigen Parameterwerte sind diejenigen, für die es am wahrscheinlichsten wäre, den gemessenen Datensatz tatsächlich zu erhalten.

In der Darstellung wird auf die negative logarithmische Likelihood-Funktion l gewechselt. Zum Einen wird dann aus dem Logarithmus eines Produktes die Summe der Logarithmen der Einzelterme. Es ist

$$l = -\ln \mathcal{L} = -\ln \prod_{i=1}^N \mathcal{L}_i = -\sum_{i=1}^N \ln \mathcal{L}_i \quad . \quad (8.7)$$

Zum Anderen kann man aus der Krümmung von l am Minimum Schätzer auf die Messfehler von s und x_0 gewinnen. Die Vorgehensweise ist dabei analog zu dem in Kapitel 6 beschriebenen Verfahren zur Bestimmung der Messfehler in der Richtungsrekonstruktion.

Bevor im folgenden Abschnitt die statistischen Observablen der Methode vorgestellt werden, sei angemerkt, dass einige der Forderungen an eine neue Methode erfüllt sind (siehe Abschnitt 7.6). Die ereignisindividuelle Winkelauflösung ist auf natürliche Art und Weise in das Verfahren integriert. Weitere Observablen wie Energie und Ankunftszeit eines Ereignisses können direkt eingebunden werden, indem die Signal- und die Untergrund-Likelihood mit den zugehörigen Verteilungen multipliziert werden. Das Problem der Bineffizienz existiert nicht.

8.2 Die Observablen der Methode

Die statistischen Schätzer³ für den Signalanteil \hat{s} und den Ort der Quelle \hat{x}_0 sind Observablen der Methode. Zudem kann man den Erwartungswert des Signales μ_{sg} abschätzen, indem man die Gesamtanzahl an Ereignissen N mit \hat{s} multipliziert. Es ist

$$\hat{\mu}_{sg} = N \cdot \hat{s} \quad . \quad (8.8)$$

Über einen Zusammenhang analog zu Gleichung 7.2 kann man auch einen Schätzer für den Fluss $\hat{\Phi}_{sg}^\nu$ erhalten. Das macht aber erst für die in Abschnitt 8.3 besprochene Erweiterung auf den realistischen Fall Sinn, wenn die effektive Fläche Bedeutung hat, und wird an der entsprechenden Stelle diskutiert.

³Statistische Schätzer werden mit Hüten über dem entsprechenden Parameter gekennzeichnet.

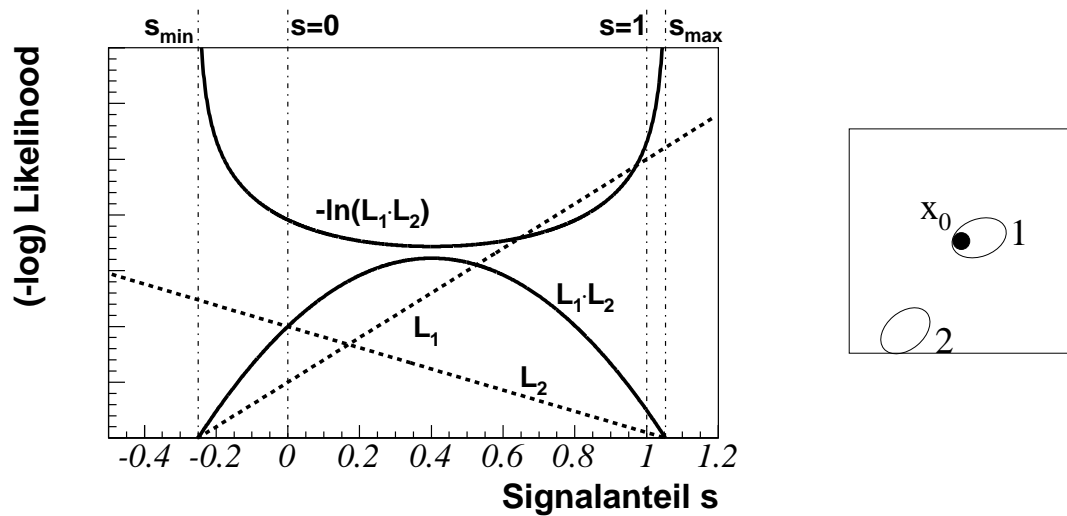


Abbildung 8.1: Veranschaulichung der Likelihood als Funktion des Signalanteils. Für festen Hypothesenparameter x_0 sind die Einzel-Likelihood-Funktionen für zwei Ereignisse \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 gezeigt. Sie sind Geraden, die an der Stelle $s = 0$ den Wert der Untergrund-Likelihood bg_i und an der Stelle $s = 1$ denjenigen der Signal-Likelihood sg_i annehmen. Im Ereignis 1 ist $sg_1 > bg_1$, somit hat \mathcal{L}_1 eine positive Steigung und eine Nullstelle links der Null. Entsprechend ist $sg_2 < bg_2$, die Steigung der Geraden negativ, und die Nullstelle rechts der Eins.

Die beiden Ereignisse sind in ihrer Position zur Signalthypothese x_0 im kleinen Bild skizziert. Je näher ein Ereignis an x_0 liegt, desto größer ist die Signal-Likelihood sg .

Das Produkt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$ hat Nullstellen bei s_{\min} und s_{\max} und ein Maximum dazwischen (die Kurve ist um Faktor 10 vergrößert dargestellt). Die Funktion $-\ln \mathcal{L}$ hat Pole bei s_{\min} und s_{\max} und ein Minimum dazwischen.

Für jeden Hypothesenparameter x_0 erhält man immer einen eindeutigen Schätzer für den Signalanteil \hat{s} . Die Likelihood-Funktion $\mathcal{L}_i(s)$ für ein einzelnes Ereignis ist eine Gerade in s für festes x_0 (siehe Gleichung 8.5). Somit ist $\mathcal{L}(s)$ als Produkt aller $\mathcal{L}_i(s)$ ein Polynom des Grades N mit ebensoviele reellen Nullstellen, von denen keine im Intervall $[0, 1]$ liegt. Es gibt ein größeres Intervall $I = [s_{\min}, s_{\max}]$, das $[0, 1]$ einschließt und für das gilt

$$\mathcal{L}(s_{\min}) = \mathcal{L}(s_{\max}) = 0 \quad . \quad (8.9)$$

Innerhalb von I hat $\mathcal{L}(s)$ genau ein Maximum. Die zugehörige Stelle ist \hat{s} . Entsprechend hat $l(s)$ dort ein Minimum⁴. Die Situation ist in Abbildung 8.1 veranschaulicht.

Mit der Definitionsgleichung 8.3 des Parameters s vor Augen mögen negative Werte von s zunächst verwundern. Auch schlägt deren physikalische Interpretation fehl, wenngleich Objekte wie der Mond,

⁴Die mathematischen Eigenschaften der Funktionen $\mathcal{L}(s)$ und $l(s)$ werden in Anhang F im Detail betrachtet. Dort wird auch dargelegt, wie man ihre Ableitungen bildet und effizient die Stelle \hat{s} findet.

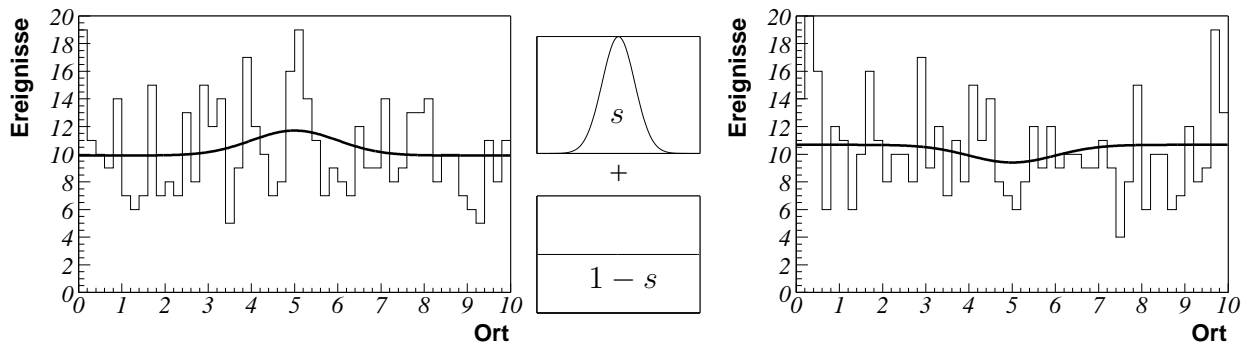


Abbildung 8.2: Veranschaulichung negativer Signalanteile s . In jedem Ortsbin ist zufällig eine Ereignisanzahl aus einer Poisson-Verteilung mit Erwartungswert 10 gezogen. Die beste Anpassung mit einer gewichteten Summe aus einer Gauß-Funktion und einer Konstanten (entsprechend Gleichung 8.4) ist gezeigt. Im Beispiel **links** ist $s = 0.044$, während **rechts** $s = -0.031$ am besten passt.

die die kosmische Strahlung abschirmen, auch den atmosphärischen Neutrinofluss aus dieser Richtung verringern.

Allerdings erwartet man in Abwesenheit der Quelle Fluktuationen des Untergrundes weg vom wahren Wert $s = 0$. Die Forderung nach einem unverzerrten Schätzer für s führt dazu, dass Schwankungen des Untergrundes sowohl nach oben als auch nach unten erlaubt sein und betrachtet werden müssen. Es entfällt dann die Notwendigkeit einer Interpretation durch jedwelche Punktobjekte.

Anschaulich kann man sich negative Signalanteile folgendermaßen vorstellen. In Abbildung 8.2 sind zwei Histogramme gemessener Orte x_i dargestellt. Gesucht wird nach demjenigen s , für das die gewichtete Summe von flachem Untergrund und lokaler Signalerhebung dem Histogramm am besten angepasst ist. In diesem Bild sind Schwankungen nach oben und unten sofort einsichtig.

Aus den bisherigen Größen kann eine weitere Zufallsvariable abgeleitet werden. Mit welcher Signifikanz ist ein von Null verschiedener Fluss gemessen? Die Signifikanz ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher man ein Messergebnis als Fluktuation des Untergrundes erhält ausgedrückt durch gaußische Standardabweichungen. Gesucht ist also

$$\zeta = \frac{\hat{s}}{\sigma_{\hat{s}}} \quad (8.10)$$

Unter der Annahme zu Grunde liegender Gauß-Verteilungen und dass l damit Parabelform hat, gibt es mehrere Zugänge zur Schätzung der Signifikanz.

Eine Möglichkeit verwendet die Eigenschaften der Likelihood-Funktion l an der Stelle ihres Minimums⁵. Unter obigen Annahmen gilt

$$\frac{1}{\sigma_{\hat{s}}^2} = l''(\hat{s}) \quad (8.11)$$

⁵Das entspricht einer Taylorentwicklung von $l(s)$ bis zur zweiten Ordnung um \hat{s} . Prinzipiell kann man um jeden beliebigen

und somit für die Signifikanz

$$\hat{\zeta}_k = \hat{s} \cdot \sqrt{l''(\hat{s})} \quad . \quad (8.12)$$

Der zweite Weg zum Signifikanzschätzer verwendet eine Parabel $p(s)$, deren Scheitel im Minimum der Funktion l liegt und deren Nulldurchgang mit demjenigen von l übereinstimmt. Für die Parabel gilt somit

$$p(0) = l(0) \quad (8.13)$$

$$p(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_s^2} (s - \hat{s})^2 + l(\hat{s}) \quad . \quad (8.14)$$

Daraus erwächst ein weiterer Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}_s$ über die folgenden Überlegungen:

$$2 \cdot (l(0) - l(\hat{s})) = \frac{\hat{s}^2}{\sigma_s^2} \quad \text{und} \quad (8.15)$$

$$\hat{\zeta}_s = \text{sign}(\hat{s}) \sqrt{2 \cdot \ln \frac{\mathcal{L}(\hat{s})}{\mathcal{L}(0)}} \quad . \quad (8.16)$$

Das Vorzeichen von $\hat{\zeta}_s$ entnimmt man dem Vorzeichen von \hat{s} .⁶

Im zweiten Schätzer verbirgt sich ein statistischer Test, der die Hypothese mit der besten Anpassung und die Hypothese mit der Abwesenheit eines Signales miteinander vergleicht.

Wie im Folgenden zu sehen ist, sorgt die zusätzliche Transformation des Likelihood-Verhältnisses dafür, dass $\hat{\zeta}_s$ im Wesentlichen Gauß-förmig ist. Die Verteilungen werden in der Diskussion um Konfidenzplots nach der Erweiterung auf die im Experiment vorliegende Situation gezeigt.

8.3 Die Adaptation der Idee auf das AMANDA-Neutrino-Teleskop

Die Anpassung der Vorgehensweise auf den realen Fall beinhaltet die folgenden Punkte:

- Die Anzahl der Ortsdimensionen muss auf zwei erweitert werden.
- Die Krümmung des Ortsraumes muss berücksichtigt werden. Im Fall von AMANDA entspricht der Ortsraum einer (halben) Kugeloberfläche.

Diese Aspekte werden getrennt für Untergrund und Signal diskutiert. Für Letzteres muss zudem

- der Zusammenhang zwischen der Anzahl von Signalereignissen μ_{sg} und dem Fluss Φ_{sg}^ν geklärt werden.

Punkt der Funktion, beispielsweise $s = 0$, entwickeln und analog verfahren, um zu einem weiteren Signifikanzschätzer zu kommen.

⁶Dieses Resultat entspricht demjenigen in Gleichung 7.5, das im Rahmen der Qualitätsbestimmung einer Punktquellensuche entwickelt wird.

Die Adaptation ist dabei stets auf einen bestimmten Datensatz ausgerichtet, das bedeutet auf eine Menge an (Neutrino-)Ereignissen, die feste Qualitätsanforderungen erfüllen. Im Folgenden wird das anhand des „offiziellen“ Neutrinodatensatzes des Jahres 2000 der Kollaboration durchgeführt. Die Eigenschaften dieser Selektion sind in Abschnitt 5.5 dargelegt.

8.3.1 Die Signalfunktion sg im Fall von AMANDA

Eine Spurnhypothese \vec{x}_0 setzt sich aus einer Rektaszension α_0 und einer Deklination δ_0 zusammen. Die Signal-Likelihood-Funktion wird als Gauß-Funktion betrachtet, deren Kovarianzmatrix sich aus der natürlichen und der gemessenen Breite zusammensetzt.

Mittels der natürlichen Breite wird der Winkel $\angle(\nu, \mu)$ zwischen der Neutrino- und der Myonflugrichtung beschrieben. Da in der Standardsimulation der Kollaboration aus technischen Gründen $\angle(\nu, \mu)$ nicht berücksichtigt werden kann, schätzt man eine obere Grenze ab.

Der Winkel beträgt bei einer Neutrinoenergie von 1 TeV etwa 0.7° und wird für größere Energien kleiner (vgl. Gleichung 1.64). Die typischen Energien der Neutrinos aus Punktquellen werden größtenteils oberhalb von 1 TeV erwartet⁷. Es wird eine konservative obere Grenze von $\angle(\nu, \mu) < 1^\circ$ gewählt.

Die Faltung der natürlichen und der gemessenen Breite für das Signal ist in zwei Dimensionen analog zum einfachen Fall. Die Kovarianzmatrizen werden addiert. Allerdings muss der folgende Aspekt beachtet werden.

Wie in Kapitel 6 diskutiert, müssen alle Fehlergrößen in einem lokalen Koordinatensystem interpretiert werden. Dort sind die Koordinaten näherungsweise kartesisch. Für eine bestimmte Spurnhypothese \vec{x}_0 liegt der Ursprung dieses Koordinatensystems genau an der Stelle \vec{x}_0 . Die Ordinate wird immer so gewählt, dass sie in Richtung des Nordpols zeigt, also entlang steigender Deklination (vgl. Anhang B über Koordinatensysteme). Bei der Bestimmung des ereignisindividuellen Fehlers wird ebenfalls ein lokales Koordinatensystem ausgezeichnet und zwar dasjenige der Spur. Auch hier zeigt die Ordinate in Richtung Nordpol, d. h. in Richtung steigenden Zenitwinkels. Die beiden Ordinatenrichtungen sind im Allgemeinen verschieden. Will man die Konfidenzellipse eines Ereignisses in den lokalen Koordinaten einer Hypothese darstellen, dann muss der Winkel zwischen den beiden Ordinaten berücksichtigt werden. Die Kovarianzmatrix der gemessenen Breiten wird gedreht.

Der Signal-Likelihood-Wert sg eines beobachteten Ereignisses entspricht dem Funktionswert an der Stelle des Ereignisses nach der Transformation in die lokalen Koordinaten der Hypothese.

8.3.2 Weitere Eigenschaften des Signales im realen Fall

Der Erwartungswert der Signalerereignisse μ_{sg} ist proportional zu demjenigen des Signalflusses Φ_{sg}^ν und der Messdauer T_L (siehe Gleichung 7.2). Die Proportionalitätskonstante ist die effektive Fläche

⁷Siehe dazu Abbildung 6.8. Dort sind allerdings Myonenergien gezeigt, die Neutrinoenergien liegen jeweils höher.

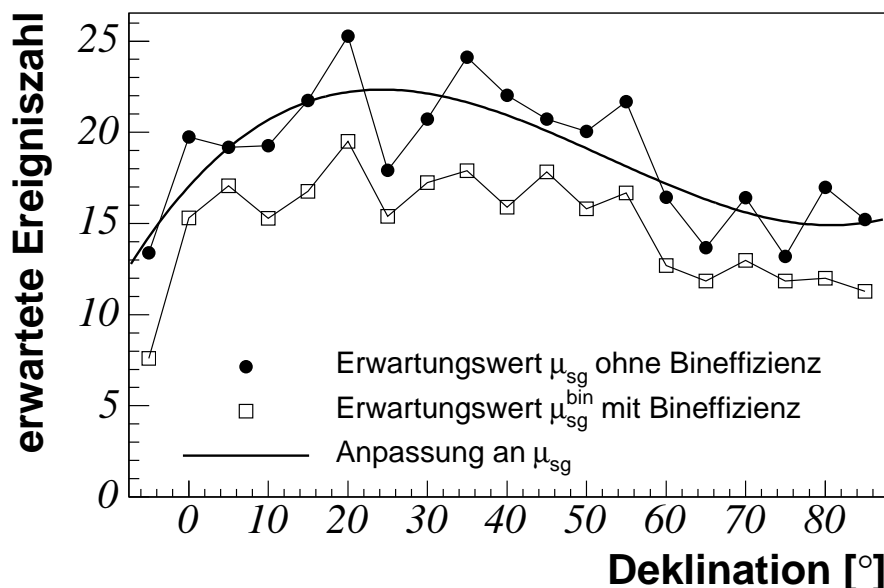


Abbildung 8.3: Anzahl der erwarteten Signalereignisse einer Punktquelle als Funktion ihrer Deklination bezogen auf den Neutrinofluss, der in Gleichung 8.17 angegeben ist.

$A_{\text{eff}}^{\nu}(\delta)$. Wegen ihrer Deklinationsabhängigkeit ist für einen festen Referenzfluss⁸:

$$\Phi_{\text{ref}}^{\nu} = 10.0 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{cm}^2 \text{s}} \quad (8.17)$$

auch die Anzahl an Signalereignissen deklinationsabhängig.

In Abbildung 8.3 ist die erwartete Anzahl an Neutrinoereignissen einer Punktquelle als Funktion der Deklination der Quelle abgebildet, wie sie in der gebinnten Suche ermittelt werden. Dabei sind die Erwartungswerte für den Fall mit und ohne Bineffizienz einander gegenübergestellt. Der durchschnittliche Anteil an Signalereignissen, der in der gebinnten Suche behalten wird, liegt bei etwa 80%.

Die Werte für μ_{sg} und $\mu_{\text{sg}}^{\text{bin}}$ werden durch eine gesonderte Simulation gewonnen, bei der die Neutrinoereignisse für jeweils feste Deklination generiert werden. Die statistischen Fehler sind dabei vernachlässigbar. Durch den Stufencharakter der Schnittfunktionen (vgl. Abbildung 5.4), erhält man auch in der Signaleffizienz keine glatte Kurve. Um auch für Deklinationen zwischen den simulierten Stützstellen Erwartungswerte für die Ereigniszahlen zu erhalten, sind zwei Vorgehensweisen denkbar. In der vorliegenden Arbeit wird für alle Untersuchungen der Daten des Jahres 2000 eine lineare Interpolation verwendet – so wie sie in der Abbildung eingezeichnet ist.

Zusätzlich ist an μ_{sg} ein Polynom dritten Grades angepasst⁹. Ein solcher Schritt ist dann berechtigt, wenn die Schnittfunktionen kontinuierlich sind, also insbesondere für zukünftige Analysen. Diese

⁸Dieser Fluss entspricht dem Integral oberhalb einer Energiegrenze von $E_{\text{Grenze}} = 10 \text{ GeV}$. Siehe auch Abschnitt 7.1.

⁹Die in Abbildung 8.3 gezeigte Anpassung lautet: $\mu_{\text{sg}}(\delta) = 17.0 + 0.48 \cdot \delta - 0.013 \cdot \delta^2 + 8.27 \cdot 10^{-5} \cdot \delta^3$.

Anpassung wird entsprechend nur für die Abschätzung der Leistungsfähigkeit kommender Untersuchungen eingesetzt.

8.3.3 Die Untergrundfunktion bg im Fall von AMANDA

Der Verlauf des Untergrundes $bg = f(\alpha, \delta)$ wird aus den Daten bestimmt. Man geht von folgenden Annahmen aus:

1. Alle Ereignisse sind voneinander unabhängig.
2. Es gibt keine Korrelationen zwischen Deklination und Rektaszension. Man kann den Untergrund als Produkt einer deklinations- und einer rektaszensionsabhängigen Funktion schreiben.
3. Der Untergrund ist flach gegen die Rektaszension. Das schließt man aus der Unabhängigkeit der Ereignisse und der Rotation des Detektors um seine Längsachse bedingt durch die Erddrehung.
4. Die Abhängigkeit von der Deklination $g(\delta)$ entnimmt man den Daten.

Mit diesen Annahmen kann die Untergrundform aus der gemessenen Deklinationsabhängigkeit $g(\delta)$ gewonnen werden¹⁰. Eventuell vorhandene Überhöhungen durch Punktquellen gehen bei dieser Vorgehensweise in die Beschreibung des Untergrundes mit ein. Wegen der Verschmierung über die gesamte Rektaszension ist der resultierende Effekt gering.

Die Deklinationsabhängigkeit $g(\delta)$ ist in Abbildung 8.4 zunächst als Histogramm dargestellt. Die Verwendung dieses Histogramms selbst stellt eine Möglichkeit dar, die Funktion $g(\delta)$ zu gewinnen. In der Abbildung ist zusätzlich eine Anpassung an den Verlauf der Daten in Form eines Polynoms sechster Ordnung¹¹ eingezeichnet. Man wählt ein Polynom, da der tatsächliche funktionale Verlauf unbekannt ist. Wegen der Unstetigkeit der Schnittfunktionen ist auch hier diese Vorgehensweise nicht ideal. Im Gegensatz zur Diskussion des vorangehenden Abschnittes ist die Annahme dennoch näherungsweise gerechtfertigt, zum Einen, weil die statistischen Fehler der einzelnen Bineinträge nicht vernachlässigt werden können, und zum Anderen, weil die Ereignisse nicht alle exakt in der Mitte eines Bins liegen.

Die Verwendung einer solchen Anpassung ist für zukünftige Analysen mit stetigen Schnittfunktionen das Mittel der Wahl, da die aus den beiden genannten Effekten resultierenden systematischen Unsicherheiten in der Untergrundbeschreibung verringert werden.

Es existiert ein dritter Vorteil der Anpassung. Wie oben diskutiert fließt das Signal einer eventuellen Punktquelle in die Untergrundbeschreibung mit ein und resultiert in einer schwachen lokalen Überhöhung in $g(\delta)$. Bei der Anpassung einer Fitfunktion werden solche Überhöhungen im Mittel eher abgeschwächt und der eigentliche Untergrund besser beschrieben.

In dieser Arbeit wird die Anpassung nur für die Abschätzung des systematischen Fehlers (vgl. Abschnitt 8.6) und die Sensitivität zukünftiger Analysen verwendet, obgleich nur bei 20° , 25° und 55° Abweichungen zwischen Histogramm und Polynom bestehen.

¹⁰Die mathematischen Aspekte dieses Vorgangs – wie beispielsweise die Normierung der Funktion f – werden in Anhang F.5 im Detail erörtert.

¹¹Die Anpassung lautet $P_6(\delta) = 102.3 - 13.3 \delta^1 + 0.81 \delta^2 - 0.0204 \delta^3 + 2.37 \cdot 10^{-4} \delta^4 - 1.20 \cdot 10^{-6} \delta^5 + 1.66 \cdot 10^{-9} \delta^6$.

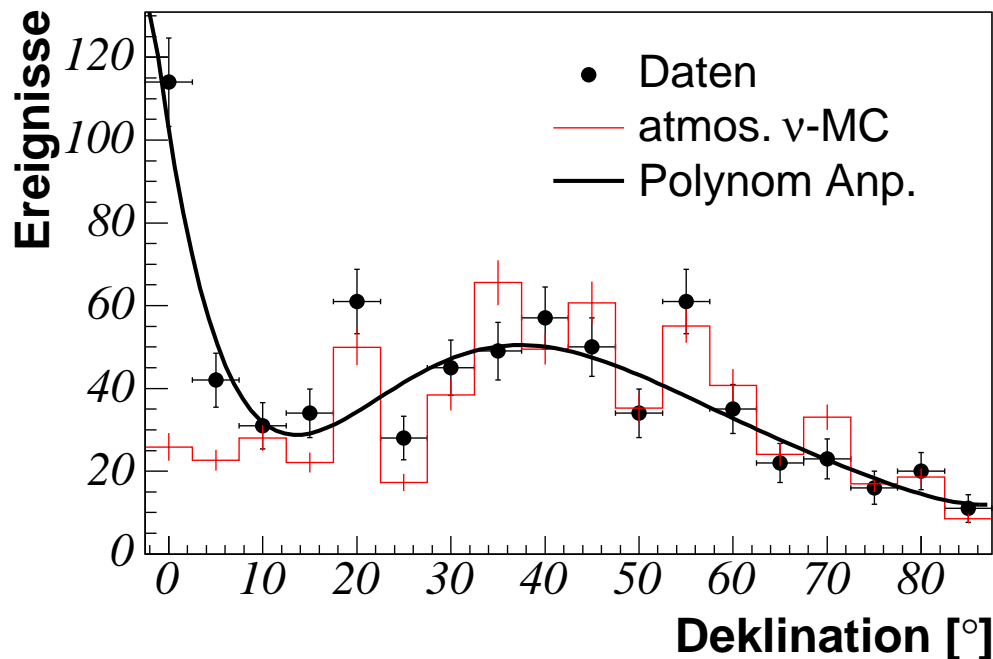


Abbildung 8.4: Die Deklinationsverteilung des Neutrino Datensatzes analog zu Abbildung 5.5. Eine Anpassung in Form eines Polynoms sechsten Grades ist dargestellt, ebenso wie die Neutrinosimulation mit atmosphärischen Gewichten.

Ereignisse, die zu nahe am Nordpol sind, werden in der Analyse nicht verwendet, weil die Untergrundbeschreibung nicht genau genug ist. Der Abstand kann mit $\Delta\delta = 2.5^\circ$ aber kleiner gewählt werden als die 5° , mit denen man aus Gründen der statistischen Blindheit mit dem Signalthypothese parameter vom Nordpol entfernt bleibt (vgl. Abschnitt 7.2). Durch diese Vorgehensweise bleibt ein eventuell divergentes Verhalten von $bg(\alpha, \delta)$ gegen den Nordpol ohne Folgen. Dieser technische Aspekt ist ebenfalls im Anhang näher ausgeführt (vgl. Abschnitt F.5).

Der Vergleich *globaler* und *lokaler* Ansätze für die Untergrund-Likelihood

Für eine zu untersuchende Signalthypothese \vec{x}_0 tragen Ereignisse, die sehr weit entfernt liegen, keinerlei Informationen darüber, ob sich an der betreffenden Stelle eine Punktquelle befindet. Entsprechend ist die Signal-Likelihood für diese Ereignisse de facto gleich Null. Für die Untersuchung eines Punktes könnte man sich auf eine lokale Umgebung beschränken. Allerdings ergeben sich auch keine expliziten Nachteile, wenn jeweils alle Ereignisse berücksichtigt werden.

Bei der *globalen* Vorgehensweise, bei der immer alle Ereignisse berücksichtigt werden, ist der Wert der Untergrund-Likelihood eines Ereignisses immer der gleiche. Die Untergrundfunktion ist über den gesamten sensitiven Bereich des Detektors auf Eins normiert. Bei der *lokalen* Methode wird die

gleiche Form des Untergrundes verwendet, allerdings muss die Funktion auf der lokalen Karte jeweils neu normiert werden. Die Werte von bg unterscheiden sich in den beiden Fällen um den Quotient der beiden Normierungskonstanten. Da die Normierung von Karte zu Karte unterschiedlich ist, wechselt auch die Untergrund-Likelihood eines Ereignisses von Hypothese zu Hypothese.

Die lokale Methode erfordert somit einen ungleich höheren Rechenaufwand. Zudem wechselt für jede Karte die Teilmenge an Ereignissen, die in der Likelihood-Funktion berücksichtigt werden. Damit ist es im Allgemeinen nicht möglich, benachbarte Hypothesenpunkte miteinander zu vergleichen, da sich $\mathcal{L}(\hat{s}, \vec{x}_0)$ als Funktion von \vec{x}_0 immer dann unstetig verändert, wenn ein Ereignis wegfällt oder hinzukommt.

Im globalen Ansatz ist das anders. Die Likelihood-Funktion ist stetig. Es wird einfach, den Wert von \vec{x}_0 zu finden, der am besten zur Hypothese einer Punktquelle passt, und man kann über die Untersuchung des zugehörigen Minimums von l die Ungenauigkeit in der Ortsbestimmung schätzen.

Während der Entwicklung der ungebinnten Maximum-Likelihood-Methode zur Punktquellensuche sind keine nennenswerten Unterschiede zwischen den beiden Möglichkeiten zur Untergrundbeschreibung zu Tage getreten. Im Folgenden wird nur die globale Methode zum Einsatz kommen.

8.3.4 Die abstrahierte Simulation: Das Spielzeug-Monte-Carlo

Um die Eigenschaften der statischen Observablen zu studieren, die in der ungebinnten Maximum-Likelihood-Methode gewonnen werden, müssen deren Verteilungen untersucht werden. Dazu ist es nötig, sehr viele Jahre an AMANDA-Datensätzen zu studieren. In der vollständigen Simulation ist das aus Gründen der Rechenzeit nicht möglich. Man betrachtet eine abstrahierte Situation, welche man liebevoll als *Spielzeug-Monte-Carlo* bezeichnet.

Die einzigen Informationen, die in der Punktquellensuche verwendet werden, sind die Richtungen der Ereignisse und die zugehörigen Fehler. Damit sind das auch die einzigen Größen, die für einen Datensatz ausgelost werden müssen.

Ein Datensatz setzt sich aus Untergrund- und Signalereignissen zusammen. Der Einfachheit halber generiert man Untergrunddatensätze, die dem echten Datensatz nachempfunden sind, und fügt zusätzlich einige Signalereignisse hinzu. Das entspricht nicht ganz der experimentellen Situation, bei der ein mögliches Signal im echten Datensatz enthalten ist, ist aber mit der gleichen Annahme gerechtfertigt, mit der man den Untergrund aus den Daten gewinnt, nämlich, dass ein Signal selbigen nicht ernsthaft verzerrt.

Die Anzahl an Ereignissen im echten Datensatz ist eine gute Schätzung für den Erwartungswert, wieviele Ereignisse man in 197 Tagen beobachten kann. Die Verteilung der Ereignisse entspricht genau der Likelihood-Funktion $bg(\alpha, \delta)$, die im vorangehenden Abschnitt gewonnen wird¹². Es wird zunächst eine Ereignisanzahl aus einer Poisson-Verteilung mit Erwartungswert von 697 bestimmt und dann ebensoviele Ereignisorte gelost.

¹²Auch hier wird das Histogramm für $g(\delta)$ verwendet und nicht die Anpassung.

In der Simulation des Auflösungs-schätzer benötigt man deren Verteilungen. Wie in Kapitel 6 ausgeführt bietet sich dabei die Beschreibung durch die Flächenauflösung σ_a , die Exzentrizität ϵ und den Winkel $\phi \in [-90^\circ, 90^\circ]$ der größeren Ellipsenachse zur Abszisse der lokalen Koordinaten an, da die jeweiligen Korrelationen am geringsten sind.

Die Größen σ_a und ϵ werden aus den Landau-Verteilungen gelöst, deren Anpassungen ebenfalls in Kapitel 6 diskutiert werden. Der Betrag des Winkels ϕ wird im Intervall $[0^\circ, 90^\circ]$ durch ein Polynom beschrieben, das Vorzeichen wird gelöst¹³.

Eventuelle Korrelationen zwischen allen drei Größen werden vernachlässigt. Ebenso bleibt die Deklinationsabhängigkeit der Auflösung unberücksichtigt (vgl. Abbildung 6.16). Das geschieht, um die Vorgänge einfach zu halten. In Verfeinerungen der Suche sollte die Abhängigkeit mit eingefügt werden (vgl. Abschnitt 8.7).

Alternativ dazu könnte man den eigentlichen Datensatz in der Rektaszension randomieren, um zu simulierten AMANDA-Jahren zu kommen. Der große Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass die Winkelauflösungen dann nicht gelöst werden müssen. Allerdings handelt man sich Korrelationen zwischen verschiedenen Stellen des Himmels ein. Eine große Fluktuation nach oben durch Häufung von Ereignissen bei einer bestimmten Rektaszension sorgt dafür, dass an einer anderen Stelle gleicher Deklination keine solche Fluktuation auftreten kann. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit der zuerst beschriebene Weg gewählt.

Ein Signaldatensatz wird in den folgenden Schritten erzeugt:

1. Auswahl der Ereignisanzahl aus einer Poisson-Verteilung mit vorher gewähltem Erwartungswert μ_{sg} .
2. Auslösen der Auflösungsgrößen nach dem oben beschriebenen Verfahren¹⁴.
3. Bestimmen der Gauß-Funktion für jedes Ereignis. Die ausgelosten Breiten – die den gemessenen Fehlern entsprechen – müssen mit der natürlichen Breite gefaltet werden.
4. Auslösen der Richtung jeden Ereignisses relativ zur Quellposition. Für jedes Ereignis wird seine individuelle Gauß-Funktion verwendet. Das geschieht in einer lokalen Karte.
5. Bestimmen der Ereignisrichtungen am Himmel in Abhängigkeit der Quellposition.
6. Bestimmen der gemessenen Fehlergrößen. Die natürliche Breite darf nicht mit angegeben werden. Ferner muss auch hier die Konfidenzellipse richtig gedreht werden, wie schon im Abschnitt über die Signal-Likelihood diskutiert. Das rührt daher, dass der Nordpol vom Ort der Quelle aus und vom Ort eines Ereignisses aus nicht in der gleichen Richtung liegt.

Ein Programmpaket sowohl zur Simulation als auch zur Analyse der abstrahierten Datensätze ist im Rahmen dieser Dissertation entwickelt worden. Die im Folgenden gezeigten Verteilungen und Ergebnisse sind alle mit Hilfe dieser Programme entstanden.

¹³Die Verteilung und die Anpassung sind nicht gezeigt.

¹⁴Für Signal und Untergrund wird hier die gleiche Kurvenform verwendet.

8.4 Die Schätzer für die Signifikanz des Nachweises und für Fluss und Ort einer Quelle

In diesem Abschnitt wird zunächst anhand eines Beispiels gezeigt, wie die Maximum-Likelihood Methode umgesetzt wird. Danach geht es um die statistischen Schätzer für Fluss und Ort einer Quelle und um die Signifikanz, mit der sie nachgewiesen wird.

8.4.1 Ein Beispiel

In Abbildung 8.5 ist ein Ausschnitt der Himmels jeweils mit und ohne zusätzlich simuliertem Signal dargestellt. Die zugehörigen Verläufe der Funktion $l(s)$ sind jeweils daneben zu finden. Das Minimum der Funktion wird zu positiven s hin verschoben, wenn das Signal mit berücksichtigt wird.

8.4.2 Der Schätzer für den Signalfluss

Multipliziert man die Anzahl der berücksichtigten Ereignisse¹⁵ N mit dem Signalanteil \hat{s} , so resultiert eine Schätzung für die Anzahl der Signalereignisse \hat{n}_{sg} .

$$\hat{n}_{\text{sg}} = N \cdot \hat{s} \quad . \quad (8.18)$$

Der Fehler auf diese Größe, $\hat{\sigma}_{\hat{n}_{\text{sg}}}$, wird wiederum aus der Form des Likelihood-Minimums bestimmt. Zur Beurteilung der Qualität der Fehlerschätzung wird wiederum der Pull

$$P_{n_{\text{sg}}} = \frac{\hat{n}_{\text{sg}} - n_{\text{sg}}}{\hat{\sigma}_{\hat{n}_{\text{sg}}}} \quad (8.19)$$

herangezogen¹⁶. Er wird in der Simulation ermittelt, in der die wahre Anzahl an Signalereignissen n_{sg} bekannt ist.

Für eine feste Deklination der Quelle von $\delta_0 = 40^\circ$ und eine feste Anzahl an Signalereignissen $n_{\text{sg}} = 10$ sind die Verteilungen von \hat{n}_{sg} und $P_{n_{\text{sg}}}$ in Abbildung 8.6 dargestellt. Sie folgen beide einer Gauß-Verteilung und entsprechende Anpassungen sind mit eingezeichnet. Der Schätzer für die Anzahl der Signalereignisse (in Abbildung 8.6 links gezeigt) hat einen Mittelwert knapp unterhalb

¹⁵Im Fall der globalen Untergrund-Likelihood entspricht N der Gesamtanzahl an Ereignissen.

¹⁶Technisch wird $\hat{\sigma}_{\hat{n}_{\text{sg}}}$ aus \hat{s} und $\hat{\zeta}$ konstruiert, indem Gleichung 8.10 nach $\sigma_{\hat{s}}$ aufgelöst und mit N multipliziert wird:

$$\hat{\sigma}_{\hat{n}_{\text{sg}}} = N \cdot \frac{\hat{s}}{\hat{\zeta}} = \frac{\hat{n}_{\text{sg}}}{\hat{\zeta}} \quad .$$

Entsprechend ergibt sich für den Pull gemäß Gleichung 8.19

$$P_{n_{\text{sg}}} = \hat{\zeta} \cdot \left(1 - \frac{n_{\text{sg}}}{N \cdot \hat{s}}\right) \quad .$$

Der Schätzer für die Signifikanz $\hat{\zeta}$ ist in Abschnitt 8.2 definiert und wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

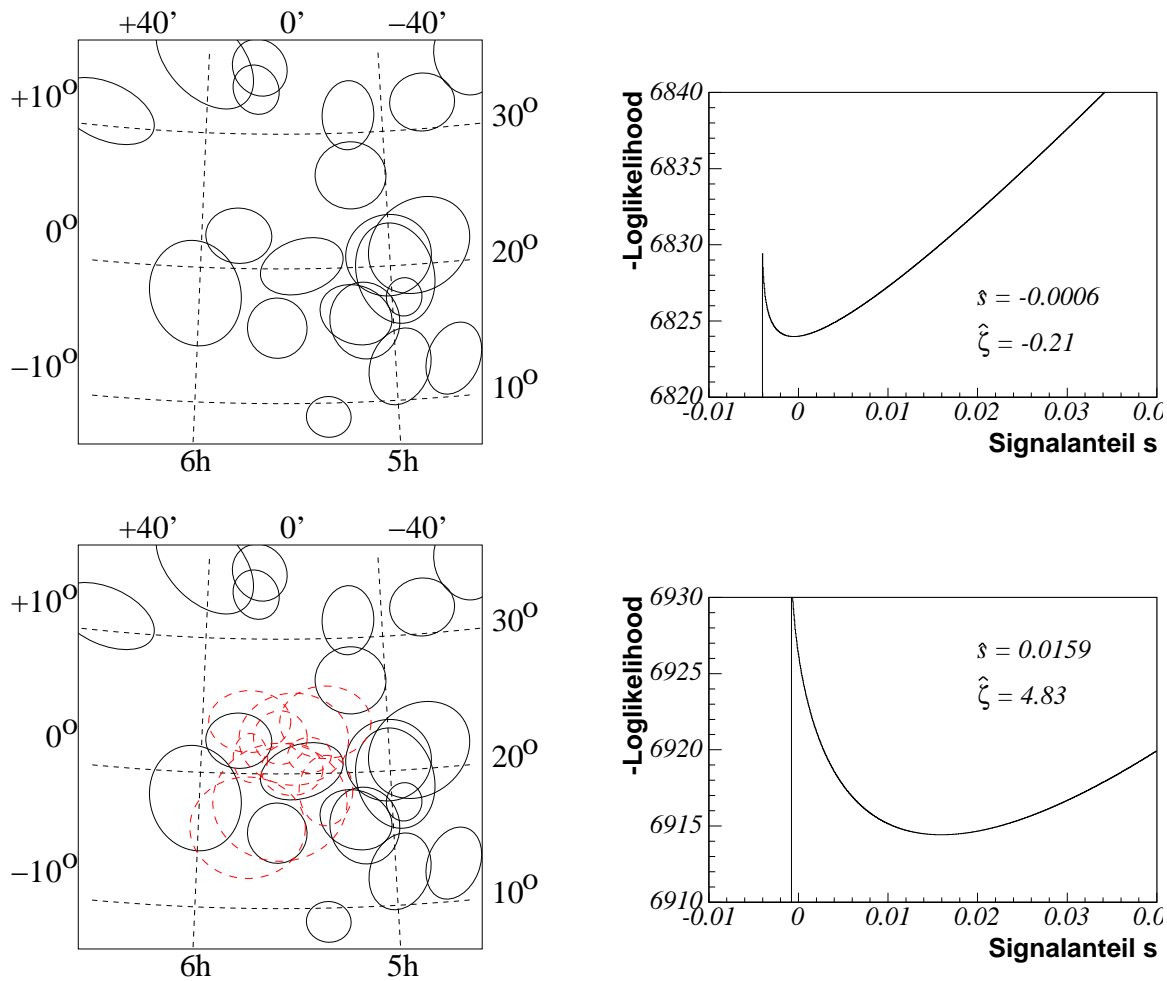


Abbildung 8.5: Verlauf der Likelihood-Funktion gegen den Signalanteil mit und ohne Quelle. Links sind die Konfidenzellipsen der Ereignisse und rechts $l(s)$ für festen Hypothesenort x_0 gezeigt. In der oberen Zeile ist nur der Untergrund zu sehen, während unten zehn Signalereignisse (in rot und gestrichelt dargestellt) hinzugefügt sind. Das Minimum der Loglikelihood-Funktion verschiebt sich im unteren Fall zu positiven s .

des wahren Wertes von 10 und eine Breite von etwa $\sigma_{n_{sg}} = 2$ Ereignissen. Für die in Abbildung 8.6 rechts gezeigte Pull-Verteilung ergibt sich entsprechend ein Mittelwert knapp unterhalb der Null. Die Breite der Verteilung ist kleiner als Eins, somit ist die Fehlerschätzung konservativ.

Um aus der Anzahl der Signalereignisse auf den Signalfluss schließen zu können, müssen noch zwei weitere Schritte durchgeführt werden. Zum Einen muss der Schätzer für die *Anzahl* der Signalereignisse als Schätzer für den *Erwartungswert der Anzahl* der Signalereignisse uminterpretiert werden. Das ist in Gleichung 8.8 schon vorweg genommen worden. Der Fehler dieser Schätzung addiert sich quadratisch aus dem Fehler für \hat{n}_{sg} und dem Fehler $\sqrt{\hat{\mu}_{sg}}$, der aus der zu Grunde liegenden Poisson-

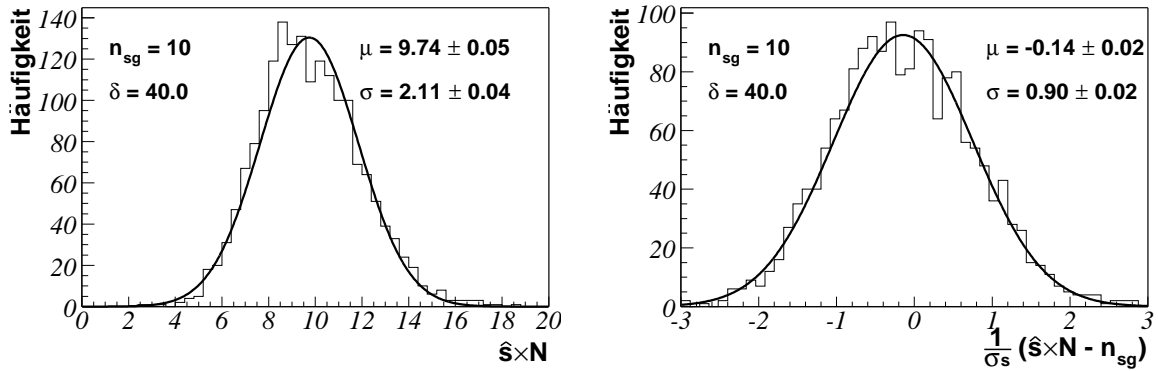


Abbildung 8.6: Der Schätzer für die Zahl der Signalereignisse für zehn Signalereignisse einer Quelle bei $\delta = 40^\circ$. Links ist \hat{n}_{sg} und rechts der zugehörige Pull mit Gauß-Anpassungen gezeigt.

Annahme stammt.

Zum Zweiten muss der Erwartungswert für die Signalereignisse in den Erwartungswert für den Signalfluss umgerechnet werden. Die Proportionalität dieser beiden Größen ist in Gleichung 7.2 und Abbildung 8.3 dargestellt. Entsprechend sind ihre Fehler proportional.

Somit kann man direkt aus der Likelihood-Funktion auf den Signalfluss rückschließen. Das ist ein Aspekt, der die Mächtigkeit des Verfahrens demonstriert. Allerdings werden die eigentlichen Grenzen auf den Signalfluss durch die Konstruktion von Konfidenzplots erlangt. Die Observable, die dafür zur Verwendung kommt, ist der Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}$, dessen Eigenschaften im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

8.4.3 Der Schätzer für die Signifikanz

Der Schätzer $\hat{\zeta}$ wird in Abschnitt 8.2 eingeführt. Im Weiteren wird nur die Variante $\hat{\zeta}_s$ nach Gleichung 8.16 diskutiert, bei der die Signifikanz aus den Funktionswerten an den Stellen $s = 0$ und $s = \hat{s}$ errechnet wird. Diese Größe wird mit $\hat{\zeta}$ bezeichnet – also ohne Index.

In Abbildung 8.7 ist die Verteilung von $\hat{\zeta}$ für zwei Signalstärken einer simulierten Quelle dargestellt, wenn eine Quelle vorhanden ist. Die Histogramme haben jeweils Gauß-Form mit einem größeren Mittelwert für die stärkere Quelle. An beiden Beispielen sind jeweils Anpassungen eingezeichnet. Die Tatsache, dass die Kurven Gauß-förmig sind, ist von unschätzbarem Vorteil. Sie gestattet, die Verteilungen zu parametrisieren und somit auch die Form einer Verteilung für einen Zwischenwert der Signalstärke zu bestimmen, der nicht explizit simuliert worden ist. Das wird in Abschnitt 8.5 grundlegend sein, wenn es um die Konstruktion von Konfidenzplots geht.

Um zu untersuchen, ob $\hat{\zeta}$ wirklich die Signifikanz schätzt, müssen zwei Eigenschaften betrachtet werden. Zum Einen sollte die Variable in Abwesenheit einer Quelle einer Normalverteilung folgen. Zum

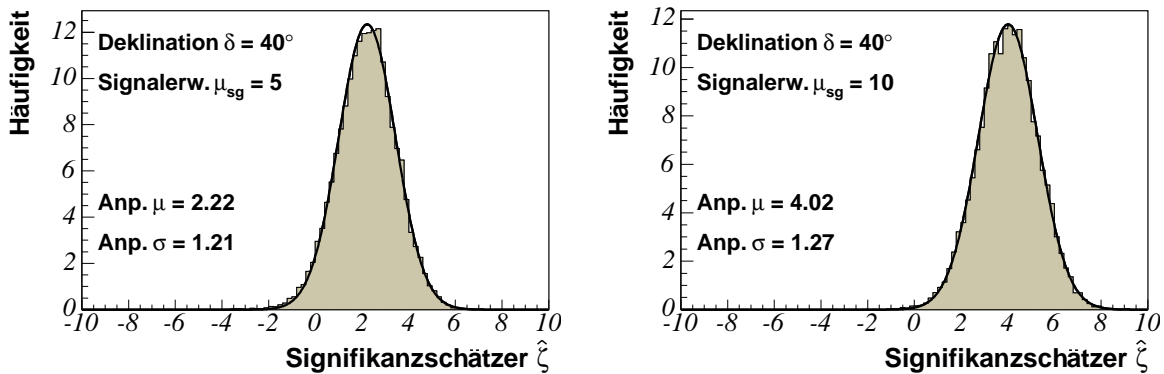


Abbildung 8.7: Der Schätzer für die Signifikanz $\hat{\zeta}$ in Anwesenheit einer Quelle. Für $\delta = 40^\circ$ ist links die Verteilung für einen Signalerwartungswert von $\mu_{sg} = 5$ und rechts für $\mu_{sg} = 10$ jeweils mit Gauß-Anpassung gezeigt.

Anderen muss eine Art „Wohlordnung“ vorliegen, das bedeutet, dass eine Situation mit stärkerem Punktquellencharakter auch mit der größeren Signifikanz gewertet wird.

Die zweite Forderung an den Signifikanzschätzer ist per constructionem dann erfüllt, wenn die Likelihood-Funktion vernünftige Resultate liefert. Das rührt daher, dass $\hat{\zeta}$ im Wesentlichen durch den Quotienten der Likelihood-Funktionswerte für die Fälle $s = \hat{s}$ und $s = 0$ bestimmt wird (vgl. Gleichung 8.16).

Es kann aber zu Situationen kommen, in denen $\mathcal{L}(\hat{s})$ keine sinnvollen Ergebnisse liefert, und zwar dann, wenn in der näheren Umgebung des Hypothesenortes kein einziges Ereignis zu finden ist. Das ist in Abbildung 8.8 anhand einer Beispielsituation gezeigt. In der Mitte einer lokalen Karte von $30^\circ \times 30^\circ$ Größe¹⁷ ist eine Punktquelle mit $n_{sg} = 10$ Ereignissen über dem Untergrund simuliert. Mehrere Darstellungen des gleichen Himmelsausschnittes sind zu sehen. In den Bildern 8.8 a) und 8.8 b) sind die Konfidenzellipsen der Ereignisse der Loglikelihood-Funktion $l(x_0, \hat{s}(x_0))$ gegenübergestellt¹⁸. Am Ort der Quelle findet sich ein lokales Minimum. Aber auch an Stellen, bei denen keine Ereignisse in der Nähe sind, nimmt $l(x_0)$ sehr kleine Werte an.

Die Ursache zeigt Abbildung 8.8 c). Dort ist \hat{s} als Funktion von x_0 zu sehen. In Gebieten mit sehr wenigen Ereignissen nimmt \hat{s} sehr große negative Werte an. Analog sind die Schätzer für die Anzahl der Signalereignisse \hat{n}_{sg} und den Signalfluss $\hat{\Phi}_{sg}$ in den Abbildungen 8.8 d) und 8.8 e) zu klein. Das führt dann ebenfalls zu Signifikanzen $\hat{\zeta}$, die zu sehr ins Negative rutschen (vgl. Abbildung 8.8 f). Es lässt sich demnach erwarten, dass die Form der Verteilung von $\hat{\zeta}$ im Fall ohne Quelle auf der negativen Seite von der Gauß-Form abweicht.

In Abbildung 8.9 a) ist die Verteilung von $\hat{\zeta}$ für die Deklination $\delta_0 = 40^\circ$ gezeigt. Während sie für positive Signifikanzen ein Gauß-förmiges Verhalten an den Tag legt, zeigt sich auf der negativen Seite

¹⁷In Richtung der Rektaszension entsprechen 30° 2 h (siehe auch Anhang B).

¹⁸Die Ereignisse sind als Funktion des Ortes x und die Likelihood-Funktion als Funktion des Hypothesenortes x_0 dargestellt.

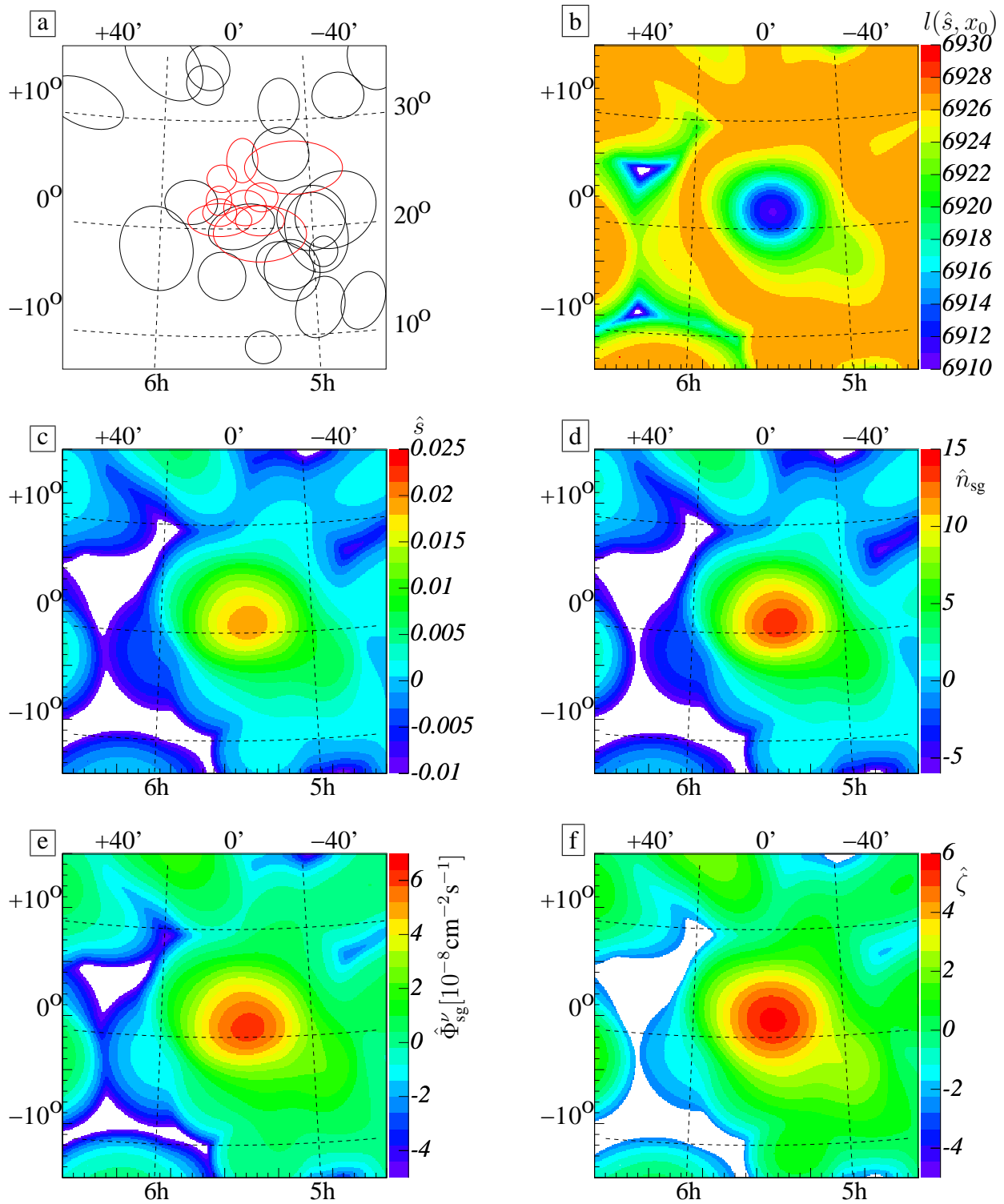


Abbildung 8.8: Die Likelihood-Schätzer als Funktionen des Hypothesenortes anhand eines Beispiels. Neben den Konfidenzellipsen der Ereignisse in a) finden sich in b) die Loglikelihood-Funktion selbst und in c) bis f) die Schätzer \hat{s} , \hat{n}_{sg} , $\hat{\Phi}_{sg}^\nu$ und $\hat{\zeta}$.

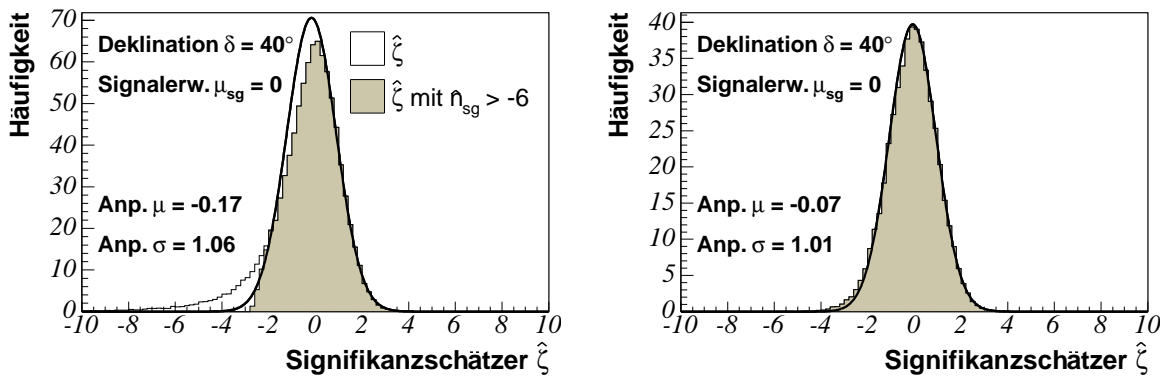


Abbildung 8.9: Der Schätzer für die Signifikanz $\hat{\zeta}$ in Abwesenheit einer Quelle ($\mu_{sg} = 0$). Für $\delta = 40^\circ$ ist links die Verteilung für eine Beobachtungsdauer von 197 Tagen gezeigt (entsprechend dem Jahr 2000). Das offene Histogramm entspricht allen gefundenen Werten. Bei dem unterlegten Histogramm werden nur solche $\hat{\zeta}$ berücksichtigt, für die gilt: $\hat{n}_{sg} > -6$. Im rechten Bild sind die entsprechenden Verteilungen für eine fünfmalige Messdauer gezeigt. Der Ausläufer verschwindet. Es sind jeweils Gauß-Funktionen an die positiven Werte angepasst, unter der Nebenbedingung, dass die Integrale von Funktion und Histogramm übereinstimmen müssen.

– wie erwartet – ein Ausläufer.

Für die Anpassung, die ebenfalls in der Abbildung gezeigt ist, können die negativen Werte nicht direkt verwendet werden, weil das Histogramm keine Gauß-Form hat. Die Anzahl der Einträge, das heißt das Integral, ist aber eine wichtige Information, die berücksichtigt werden muss. Das liegt an der Definition der Signifikanz, bei der es nur um die Integrale unter der zu untersuchenden Funktion und einer Normalverteilung geht (vgl. Abschnitt 7.4). Daher bestimmt man die Anpassung in den folgenden Schritten:

1. Das Integral des Histogramms wird bestimmt und das Integral der Gauß-Kurve auf diesen Wert festgelegt.
2. Im Bereich $\hat{\zeta} > 0$, in dem der Signifikanzschätzer immer sinnvolle Resultate liefert, werden Mittelwert und Breite der Kurve angepasst.

Die Anpassung in Abbildung 8.9 (links) hat einen Mittelwert knapp unterhalb der Null und eine Breite, die etwas größer als Eins ist. Damit ist der Schätzer für positive Werte gut, wenngleich ein wenig verzerrt. Für einen ersten Eindruck, ob eine Quelle gefunden ist, reicht die Genauigkeit aus. Für eine exakte Messung müssen Konfidenzplots konstruiert werden, was in Abschnitt 8.5 ausgeführt wird.

Die offene Frage ist nun, wie man mit den zu negativen Werten der Signifikanz umgeht.

Der einfachste Zugang besteht darin, eine längere Beobachtungsdauer in der Analyse zu verwenden. Legt man an Stelle der etwa 200 Tage des Jahres 2000 mit 1000 Tagen das Fünffache an Ereignissen zu Grunde, dann kommt es praktisch nicht zu der Situation, dass in der Nähe eines Hypothesenortes kein

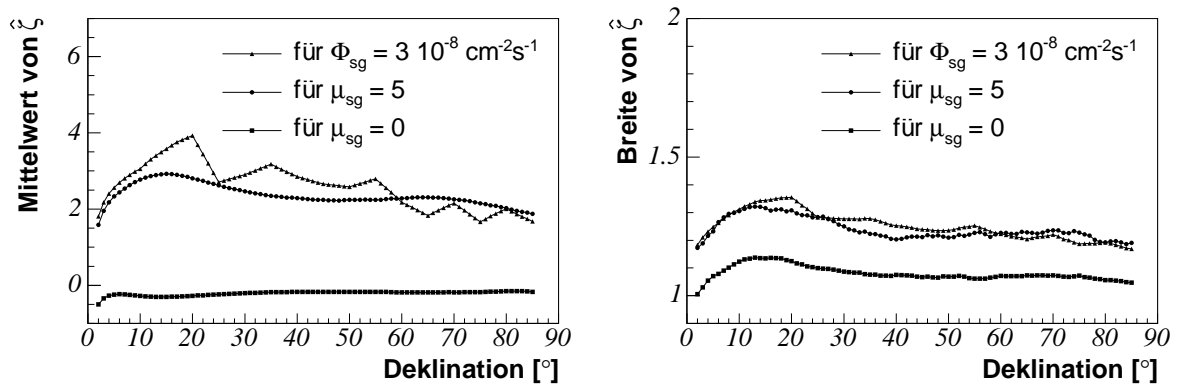


Abbildung 8.10: Die gaußischen Erwartungswerte und Breiten des Signifikanzschätzers $\hat{\zeta}$ als Funktion der Deklination der Quelle δ_0 . Es sind jeweils die Verläufe in Abwesenheit einer Quelle ($\mu_{sg} = 0$, $\Phi_{sg} = 0$), für einen festen Erwartungswert der Signalereignisse von $\mu_{sg} = 5$ und für einen festen Signalfluss von $\Phi_{sg} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ gezeigt.

Ereignis zu finden ist. Die Verteilung von $\hat{\zeta}$ nimmt explizit Gauß-Form an, wie es in Abbildung 8.9 (rechts) zu sehen ist. Mit Ablauf des Jahres 2003 wird eine entsprechende Beobachtungsdauer aufgezeichnet sein.

Um mit den Daten des Jahres 2000 allein zu Ergebnissen zu gelangen, müssen die Gebiete mit zu negativen Schätzern identifiziert werden. Das eingefärbte Histogramm in Abbildung 8.9 (links) gehört zu den $\hat{\zeta}$, für die der Schätzer für die Anzahl der Signalereignisse nicht zu klein ist, d.h. $\hat{n}_{sg} > -6$. Der Wert -6 wird so bestimmt, dass das schattierte Histogramm vollständig unterhalb der Gauß-Anpassung liegt.

Bedingt durch die Konstruktion ist die Fläche zwischen Anpassung und farbigem Histogramm genauso groß wie die Differenzfläche der beiden Histogramme. Der Vorgehensweise liegt die Annahme zu Grunde, dass die Einträge aus dem ersten dieser beiden Areale gleichsam in das zweite „abrutschen“. Für die übrigen Einträge geht man weiter von einer wohlgeordneten Schätzung aus.

Damit ist es möglich, die *eigentliche* Verteilung der Observablen durch die Gauß-Kurve zu beschreiben und mit dieser die Konfidenzplots zu konstruieren. Beim Ablesen von Ergebnissen müssen die Fälle mit $\hat{n}_{sg} \leq -6$ gesondert behandelt werden. Da das eigentliche $\hat{\zeta}$ hier nicht bestimmt werden kann, setzt man $\hat{\zeta} = 0$. Das führt nicht zu einer Entdeckung und verschlechtert die oberen Grenzen. Damit ist dieser Aspekt konservativ abgefangen.

Abhängig von der Deklination der Suchhypothese kommt es zwischen 8% und 20% der Fälle zu einer solchen Situation.

Weiter oben wird schon diskutiert, dass die Mittelwerte und Breiten der Gauß-Anpassungen leicht von einer Normalverteilung abweichen. In Abbildung 8.10 sind diese Parameter in Abhängigkeit der Deklination gezeigt. Für den Fall $\mu_{sg} = 0$ zeigen sie nur geringe Änderungen. Für $\mu_{sg} = 5$ läßt sich ersehen, dass eine Quelle entsprechender Stärke für kleinere Deklinationen besser nachweisbar

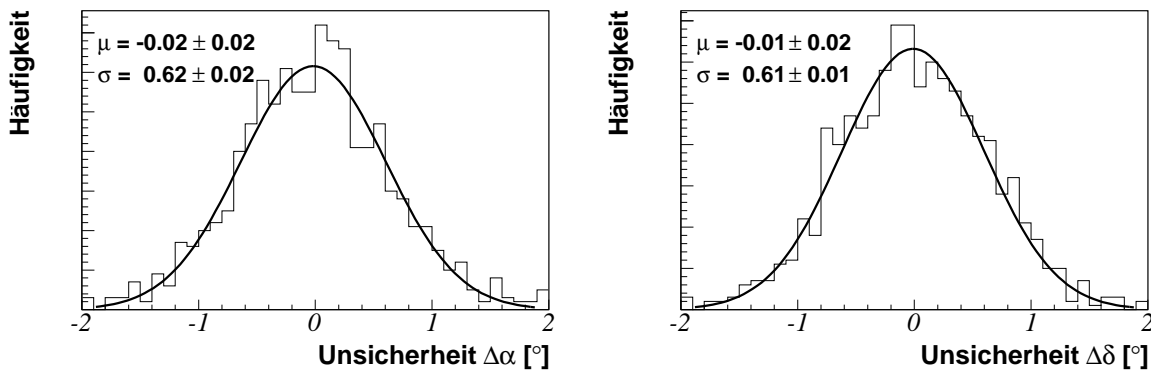


Abbildung 8.11: Die Genauigkeit der Ortsmessung anhand eines Beispiels. Für eine Deklination von $\delta = 25^\circ$ und eine Signalstärke von $n_{\text{sg}} = 20$ ist die Ortsungenauigkeit histogrammiert. Gezeigt ist der Ort mit minimaler Loglikelihood in lokalen Koordinaten, wobei die relative Rektaszension der besseren Vergleichbarkeit wegen ebenfalls in Grad angegeben ist. Die Quelle liegt bei $(0, 0)$. Aus den Gauß-Anpassungen entnimmt man die Auflösung der Bestimmung des Quellortes.

ist. Wenn man den Fluss konstant hält, dann wirken sich die Stufenformen der Qualitätsparameter aus und die für festes μ_{sg} glatten Kurven werden eckig. Auch das wird sich im Sensitivitätsverlauf widerspiegeln.

Bevor die Konfidenzplots und die Sensitivität diskutiert werden, geht es im folgenden Abschnitt noch um die Bestimmung der Position einer Quelle.

8.4.4 Der Schätzer für den Ort einer Quelle

Die Gesamt-Likelihood-Funktion hängt von drei Parametern ab: dem Signalanteil s und den Ortsparametern der Quelle δ_0 und α_0 . In den bisherigen Betrachtungen sind jeweils die letzten beiden festgehalten. Das entspricht der Untersuchung eines an einer festen Stelle befindlichen Kandidatenobjektes daraufhin, ob es sich um eine Neutrinoquelle handelt.

Die Suche in einem Gebiet ist mit ihren eigenen statistischen Tücken behaftet, insbesondere wenn es um die Bestimmung des Signalflusses, das bedeutet um die eigentliche Identifikation als Quelle geht. Die Problematik der Suche nach einer Quelle in einem ausgedehnten Suchareal wird in Kapitel 9 erörtert.

Sobald man eine Quelle gefunden hat, soll auch ihr Ort vermessen werden. In einer Umgebung wird zunächst für jede Stelle x_0 das Minimum der Likelihood-Funktion $\hat{s}(x_0)$ gesucht. Die erhaltenen Funktionswerte kann man gegen den Ort x_0 auftragen und wiederum das Minimum suchen. Diese Stelle \hat{x}_0 ist der wahrscheinlichste Ort der Quelle.

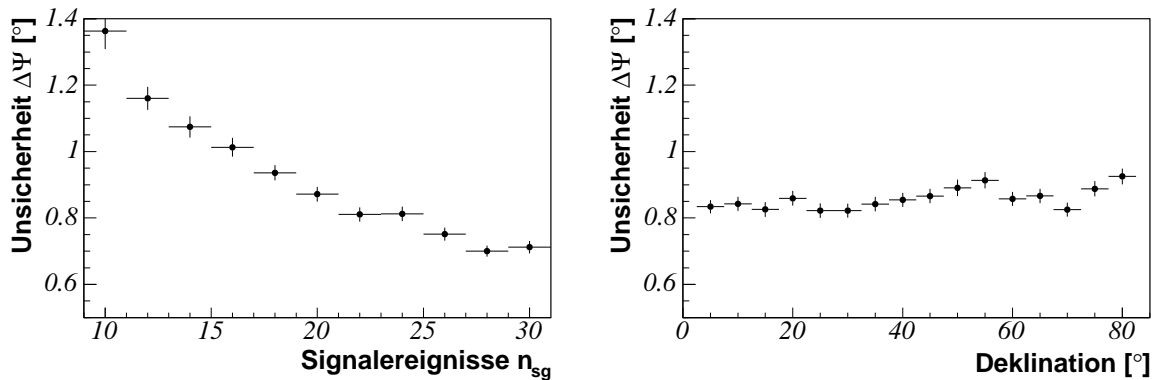


Abbildung 8.12: Die Genauigkeit der Ortsmessung in Abhängigkeit von Signalstärke und Ort. Der erwartete Raumwinkelabstand zur wahren Quellposition ist links für festes $\delta = 40^\circ$ als Funktion der Anzahl der Signalereignisse und rechts für festes $n_{sg} = 20$ als Funktion der Deklination gezeigt.

Für die Ortsmessung beschränkt man sich auf einen kleineren Bereich als denjenigen, der in Abbildung 8.8 dargestellt ist. Ein Areal mit jeweils $\pm 2^\circ$ wird verwendet¹⁹ – es ist nur eben in der Darstellung weniger illustrativ. In diesem Gebiet sucht man die Stelle mit dem geringsten Likelihood-Funktionswert. Um einen Eindruck der Ortsauflösung des Verfahrens zu erhalten ist in Abbildung 8.11 der Abstand des aufgefundenen Minimums vom wahren Quellort histogrammiert. In der zugehörigen Simulation befindet sich eine Quelle mit einer Stärke von $n_{sg} = 20$ bei einer Deklination von $\delta_0 = 40^\circ$. Das entspricht einem relativ starken Fluss²⁰, aber den Ort einer nicht nachgewiesenen Quelle zu bestimmen, ist sinnlos.

Die angepassten Gauß-Kurven lassen auf eine Ortsauflösung von $\Delta\alpha = 0.62^\circ$ und $\Delta\delta = 0.61^\circ$ schließen, die man quadratisch zu einer Auflösung im räumlichen Winkel von $\Delta\Psi = 0.87^\circ$ kombiniert.

In Abbildung 8.12 (links) ist $\Delta\Psi$ in Abhängigkeit der Signalereignisse n_{sg} für eine feste Deklination von $\delta = 40^\circ$ gezeigt. Je mehr Signalereignisse in die Bestimmung des Quellortes einfließen, desto genauer wird die Messung. Für festes $n_{sg} = 20$ ist die Abhängigkeit von der Deklination gering. Das ist in Abbildung 8.12 (rechts) dargestellt.

Die Ortbestimmung ist damit deutlich genauer als bei einem gebinnten Verfahren mit mehreren Suchrastern am Himmel, bei denen mindestens die halbe Breite der verwendeten Bins als Fehler resultiert – typischerweise $\sim 4^\circ$.

Eine Fehlerschätzung des Ortes in analoger Weise zu derjenigen des Signalflusses ist prinzipiell problemlos machbar, wird hier aber nicht weiter ausgeführt. Zu diesem rein statistischen Fehler tritt dann noch der systematische Fehler auf Grund der leichten systematischen Fehlrekonstruktion des Zenitwinkels der Myonspuren und der Ungenauigkeit der geometrischen Richtungskalibration des gesamten Neutrinooteleskopes von insgesamt weniger als einem Grad (vgl. Abschnitte 4.3.2).

¹⁹In diesem Zusammenhang wird die Rektaszension auch in Grad angegeben, um sie besser mit der Deklination vergleichen zu können.

²⁰Ein Signalerwartungswert von $\mu_{sg} = 20$ entspricht bei $\delta = 40^\circ$ einem Fluss von $\Phi_{sg}^\nu = 9.1 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

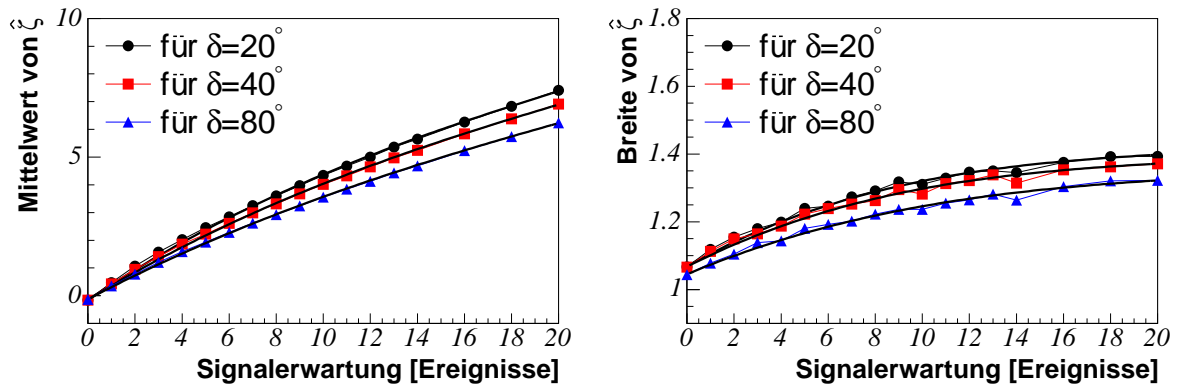


Abbildung 8.13: Der Eigenschaften des Signifikanzschätzers als Funktion des Signalerwartungswertes μ_{sg} . Für drei Beispieldeklinationen sind die Erwartungswerte und der Breiten der $\hat{\zeta}$ -Verteilungen gezeigt.

8.5 Die Konstruktion der Konfidenzplots, die Sensitivität und das Entdeckungspotenzial

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Konstruktion von Konfidenzplots ist in Abschnitt 7.3 eingeführt worden. Grundlage ist, dass für jeden Signalparameter μ_{sg} oder Φ_{sg} die Verteilung der Observablen bekannt ist.

Im Fall des Signifikanzschätzers $\hat{\zeta}$ sind diese Verteilungen Gauß-Kurven. In Abwesenheit einer Quelle weicht die eigentliche Verteilung zwar von der Gauß-Form ab, eine entsprechende Anpassung wird aber in Abschnitt 8.4.3 vorgestellt. Die Konfidenzplots werden im Folgenden unter Verwendung dieser Anpassung konstruiert. Beim späteren Ablesen, um für eine Messung Grenzen zu erlangen, werden die zu stark negativen Schätzer auf $\hat{\zeta} = 0$ gesetzt. Damit erhält man dann konservative Resultate.

In Abbildung 8.13 sind die Abhängigkeiten von Mittelwert und Breite der Gauß-Verteilungen von $\hat{\zeta}$ für drei Beispieldeklinationen gezeigt. Es lässt sich jeweils ein glatter Kurvenverlauf erkennen. Entsprechend ist es gerechtfertigt, zwischen den explizit simulierten Stützstellen zu interpolieren. Damit sind – wie gefordert – die Eigenschaften der Observablen in Abhängigkeit des Signalparameters bekannt und die eigentliche Konstruktion kann durchgeführt werden.

Das Resultat findet sich für ein Konfidenzniveau von $\text{CL} = 90\%$ und $\delta = 40^\circ$ in Abbildung 8.14 und bringt keinerlei Überraschungen. Wegen der Proportionalität von μ_{sg} und Φ_{sg} kann in der gleichen Grafik links eine Achse für den Erwartungswert der Signalereignisanzahl und rechts eine Achse für den Signalfluss eingezeichnet werden.

Zum Vergleich sind für $\delta = 20^\circ$ und $\delta = 80^\circ$ die Konfidenzplots in Abbildung 8.15 etwas kleiner dargestellt. Die Bilder unterscheiden sich nur in zwei Details. Zum Einen ist die Proportionalitätskonstante zwischen μ_{sg} und Φ_{sg} deklinationsabhängig (vgl. Abbildung 8.3). Zum Anderen liegen die

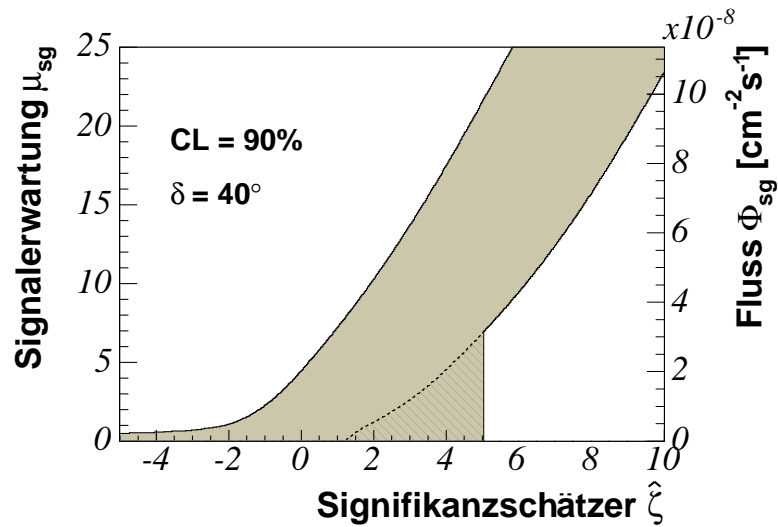


Abbildung 8.14: Der Konfidenzplot bei einer Deklination von $\delta = 40^\circ$. Auf der Abszisse ist der Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}$ und auf der Ordinate links der Erwartungswert der Signalereignisse μ_{sg} und rechts der Signalfluss Φ_{sg} aufgetragen. Das gewählte Konfidenzniveau liegt bei $CL = 90\%$. Eine von Null verschiedene untere Grenze wird ab $CL \hat{=} 5\sigma$ angegeben, die entsprechende *Overcoverage* wird durch den schraffierten Bereich eingeführt.

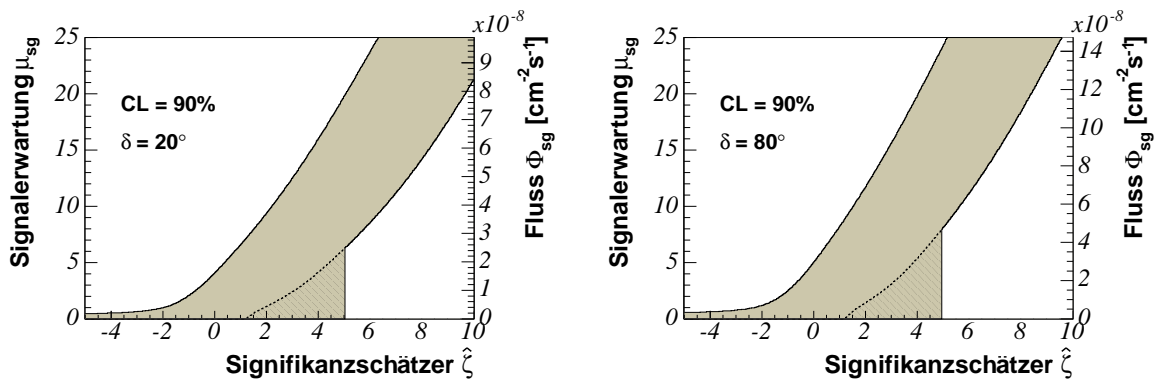


Abbildung 8.15: Die Konfidenzplots bei Deklinationen von $\delta = 20^\circ$ und $\delta = 80^\circ$. Die Bilder unterscheiden sich von demjenigen in Abbildung 8.14 nur durch einen leicht anderen Verlauf der Konfidenzbereiche und durch eine unterschiedliche Beschriftung auf der Achse des Flusses rechts.

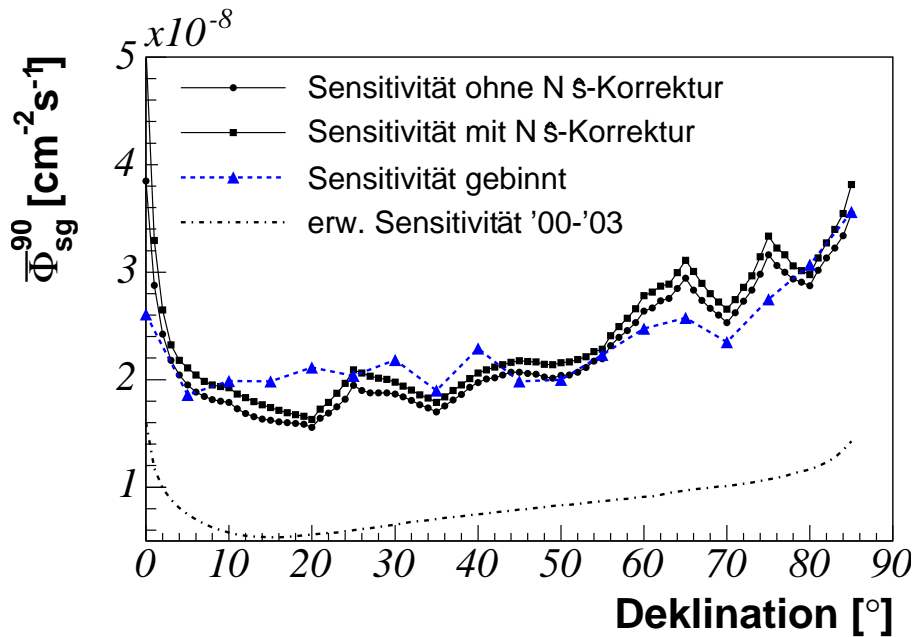


Abbildung 8.16: Die Sensitivität $\bar{\Phi}_{sg}^{90}$ als Funktion der Deklination. Die Werte für die gebinnte und für die ungebinnete Suche werden verglichen. Für Letztere wird die Sensitivität mit und ohne die Korrektur auf \hat{n}_{sg} angegeben.

Grenzen leicht verschieden hoch. Davon kann man sich am besten an der Stelle $\hat{\zeta} = 0$ überzeugen. Die dortige obere Grenze gibt auch einen ersten Eindruck von der Sensitivität der Messung, die im folgenden Abschnitt diskutiert werden soll.

8.5.1 Die Sensitivität

Die Sensitivität $\bar{\Phi}_{sg}^{90}$ ist definiert als der Erwartungswert einer oberen Grenze unter der Annahme, dass kein Signal existiert. In Abbildung 8.16 ist $\bar{\Phi}_{sg}^{90}$ als Funktion der Deklination gezeigt. Für das Maximum-Likelihood-Verfahren wird die Sensitivität für zwei unterschiedliche Annahmen der Verteilung von $\hat{\zeta}$ im Fall ohne Signal bestimmt. Zuerst wird die tatsächliche Verteilung betrachtet, bei der zusätzlich jedesmal $\hat{\zeta} = 0$ gesetzt wird, wenn $\hat{n}_{sg} < -6$ gilt. Damit erhält man die wahre Sensitivität, weil dieses $\hat{\zeta}$ zum Ablesen im Konfidenzplot tatsächlich verwendet wird.

Um zu ersehen, wie viel die Sensitivität schlechter wird, weil die wahre Signifikanzverteilung nicht zugänglich ist, zeigt Abbildung 8.16 auch die entsprechende Kurve, wenn mit der Gauß-Anpassung der Verlauf von $\hat{\zeta}$ beschrieben wird. Sie liegt im Durchschnitt knapp 6% tiefer.

Im Vergleich mit der gebinnten Suche, deren Sensitivität ebenfalls in Abbildung 8.16 eingetragen ist, lässt sich insbesondere im Bereich $\delta \leq 45^\circ$ eine Verbesserung verzeichnen²¹. Dabei ist zu be-

²¹Die hier gezeigten Werte entsprechen nicht ganz denjenigen, die in [A⁺04] veröffentlicht sind, da dort der Winkel zwischen Myon und Neutrino nicht berücksichtigt wird. Wenn man das macht, dann verschlechtert sich die Sensitivität

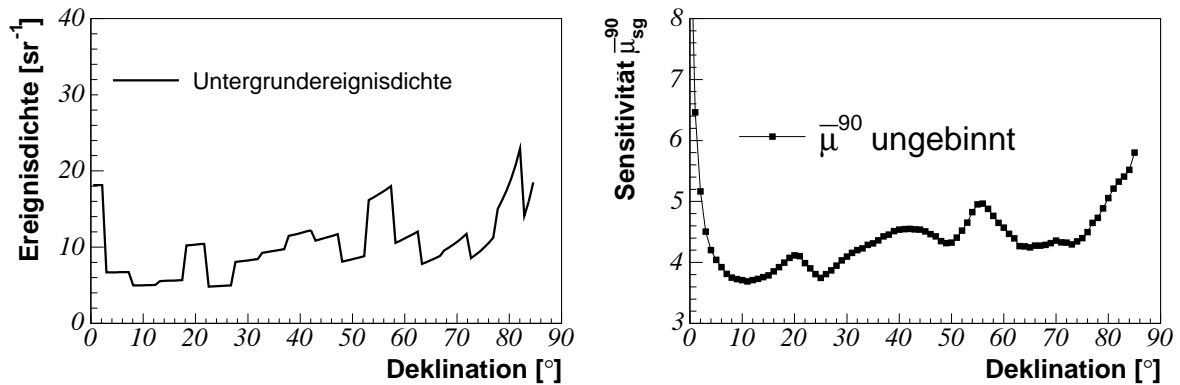


Abbildung 8.17: Um die Deklinationsabhängigkeit der Sensitivität zu verstehen, sind die Untergrundereignisdichte (links) und die Sensitivität bezüglich der Signalereignisanzahl μ_{sg}^{90} (rechts) nebeneinander gestellt. Die rechte Kurve entsteht aus der linken durch die Verschmierung mit der Auflösung.

achten, dass die Deklinationsabhängigkeit der Auflösung von AMANDA im Maximum-Likelihood-Verfahren nicht berücksichtigt worden ist. Anstelle des Verlaufes entsprechend Abbildung 6.16 ist in der abstrahierten Simulation eine konstante Auflösung zu Grunde gelegt worden. Wenn die Vorgänge entsprechend verfeinert werden, wird die Sensitivität für kleine Deklinationen etwas ansteigen, weil da die Auflösung etwas schlechter ist, während sie für große Deklinationen etwas sinkt, weil die Auflösung dort etwas besser ist. Der qualitative Verlauf der Sensitivität beider Verfahren wird dadurch ähnlicher werden.

Für eine Messdauer von ~ 1000 Tagen lassen sich in diesem Bereich sogar Werte von $\bar{\Phi}_{sg}^{90} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ erwarten. Für die zugehörige Simulation sind sowohl für den Untergrundverlauf (Abbildung 8.4) als auch für die Signaleffizienz (Abbildung 8.3) die jeweiligen Anpassungen verwendet worden, wodurch die Kurve deutlich glatter wird.

Um den Verlauf von $\bar{\Phi}_{sg}^{90}$ zu verstehen, ist in Abbildung 8.17 die Untergrundereignisdichte²² (links) der Sensitivität der *Signalereignisse* $\bar{\mu}_{sg}^{90}$ (rechts) gegenübergestellt. Die beiden Kurvenverläufe ähneln einander sehr, die Funktion $\bar{\mu}_{sg}^{90}$ ist etwas glatter, weil die Ereignisse noch mit ihren Gauß-förmigen Auflösungen verschmiert werden. Die beiden Kurven müssen einander auch ähnlich sein, weil $\bar{\mu}_{sg}^{90}$ sonst von nichts abhängt. Erst die Umrechnung auf einen Signalfuss:

$$\bar{\Phi}_{sg}^{90} = \Phi_{ref}^{\nu} \cdot \frac{\bar{\mu}_{sg}^{90}}{\mu_{ref}^{\nu}} \quad (8.20)$$

bringt den Zusammenhang zwischen Ereignissen und Fluss nach Abbildung 8.3 wieder ins Spiel²³.

um etwa 5% ([Hau03b]). Um einen entsprechenden Betrag sind die hier gezeigten Werte nach oben korrigiert.

²²Diese Dichte entspricht im Wesentlichen der Anzahl der Datenergebnisse als Funktion der Deklination (vgl. Abbildung 8.4) dividiert durch $\cos(\delta)$. Dann fehlt nur noch ein Normierungsfaktor von 2π (vgl. Gleichung F.42).

²³Deshalb ist es auch wichtig, eine Analyse nicht auf minimales $\bar{\mu}_{sg}^{90}$, sondern auf minimales $\bar{\Phi}_{sg}^{90}$ zu optimieren. Sonst bleibt die Abhängigkeit der effektiven Fläche von den Qualitätsanforderungen unberücksichtigt. Alternativ zu $\bar{\Phi}_{sg}^{90}$

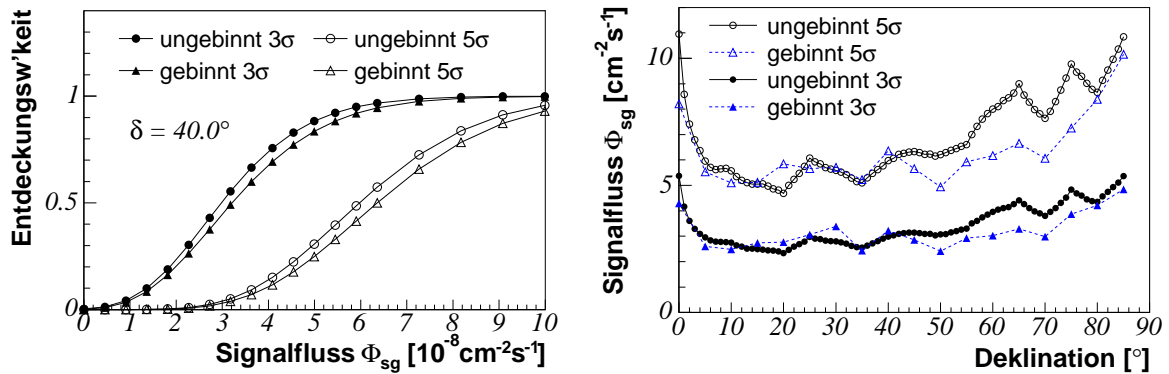


Abbildung 8.18: Das Entdeckungspotenzial.

Den Verlauf der Sensitivität im Fluss erhält man schließlich, indem man die Kurve in Abbildung 8.17 (rechts) durch die Kurve in Abbildung 8.3 dividiert, also Gleichung 8.20 anwendet.

Der unruhige Verlauf der Sensitivitäten beruht auf den unstetigen Qualitätsschnitten (vgl. Abbildung 5.4). Die Wahl dieser Schnitte ist für die gebinnnte Suche wohl gerechtfertigt, aber selbst dort bei Untersuchungen von Deklinationen zwischen den Binmitten nicht optimal. Eine Neuoptimierung sollte insbesondere mit kontinuierlichen Qualitätsanforderungen arbeiten.

8.5.2 Das Entdeckungspotenzial

Einen Eindruck vom Entdeckungspotenzial liefert Abbildung 8.18. Dabei illustriert Abbildung 8.18 (links) zunächst die Methode, mit der es bestimmt wird. Gegen den Signalfluss einer potenziellen Quelle ist die Wahrscheinlichkeit aufgetragen, dass die untere Grenze einer Messung von Null verschieden ist. Die beiden Konfidenzniveaus, die dabei untersucht werden sind $CL \hat{=} 3\sigma$ für Hinweise auf Quellen und $CL \hat{=} 5\sigma$ für Entdeckungen.

Dann wählt man eine Entdeckungswahrscheinlichkeit von beispielsweise $p = 50\%$ und liest in der Grafik den zugehörigen Fluss ab. Das Resultat einer solchen Vorgehensweise ist in Abbildung 8.18 zu sehen. Der notwendige Signalfluss, um eine Quelle mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% und dem jeweiligen Konfidenzniveau zu beobachten, folgt qualitativ dem Verlauf der Sensitivität.

Der Vergleich mit der gebinnnten Suche enthält diesmal keine Korrektur auf den Winkel zwischen Myon und Neutrino. Daher ist er nur bedingt aussagekräftig.

kann man auch den Bruch in Gleichung 8.20 minimieren, da der davor stehende Referenzfluss konstant ist. Der Bruch wird in der Literatur als *Model Rejection Factor*, etwa *Modellablehnungsfaktor* diskutiert ([HR03]).

8.6 Die Systematik der Methode

Das vorgestellte Verfahren untersucht den *Verlauf* der Ereignisverteilung unter besonderer Berücksichtigung der Winkelauflösung jeder einzelnen Spur. Die Vorgehensweise setzt auf einem idealisierten Niveau an, auf dem jedes Ereignis nur noch aus Richtungs- und Auflösungsinformationen besteht. Daraus wird weiter abstrahiert, um den Verlauf des Signales und des Untergrundes gegen den Ort zu extrahieren. Basierend auf diesen Funktionen werden in einer Simulation die statistischen Schätzer und Konfidenzplots gewonnen.

Jeder Abstraktionsschritt, der dabei gemacht wird, kann in einen systematischen Fehler resultieren. Diese Fehler werden anhand der Veränderungen der Sensitivität bestimmt, wenn die einzelnen Annahmen innerhalb ihrer Unsicherheiten variiert werden. Es folgt eine Diskussion der einzelnen Unsicherheiten. In Tabelle 8.1 findet sich eine Übersicht über die systematischen Fehler. Neben dem durchschnittlichen Fehler sind der jeweils größte und kleinste Wert mit den zugehörigen Deklinationen angegeben.

Unsicherheit in der effektiven Fläche. Der Erwartungswert der Signalereignisse ist proportional zum Myonfluss (siehe Gleichung 7.2). In Kapitel 5 wird diskutiert, dass die effektive Fläche und damit die Proportionalitätskonstante nur mit einem systematischen Fehler von 25% bekannt ist. Diese Unsicherheit muss in der Konstruktion der Konfidenzplots mit eingefügt werden. Die grundlegende Idee ist dabei, den strikt linearen Zusammenhang zwischen den beiden Größen mit der Unsicherheit zu verschmieren. Für einen bestimmten Fluss verwendet man nicht mehr einen festen Wert für μ_{sg} sondern eine Gauß-Verteilung, deren Breite gerade durch die Unsicherheit bestimmt wird ([CH92]).

Für die Poisson-Statistiken wird diese Vorgehensweise in der AMANDA-Kollaboration schon eingesetzt ([Con03, Hil03, A⁺04]). Die Übertragung auf kontinuierliche Observablen wie die Signifikanz $\hat{\zeta}$ sollte auf keine unüberwindlichen Hindernisse stoßen, muss aber im Detail noch umgesetzt werden.

In dieser Arbeit wird der entsprechende systematische Fehler aus der Poisson-Methode abgeschätzt. In Abbildung 8.19 (links) ist die Sensitivität für die Fälle mit und ohne Berücksich-

Fehlerquelle	δ_{\min}	σ_{\min}	σ_{mittel}	σ_{\max}	δ_{\max}
Effektive Fläche	–	< 25%	< 25%	< 25%	–
Signalform $\angle(\nu, \mu)$	18°	3.8%	6.2%	9.9%	2°
Signalform σ_a	4°	5.3%	7.0%	9.4%	79°
Untergrundverlauf	42°	0.1%	3.6%	9.2%	56°
Gesamt (ohne $\angle(\nu, \mu)$)	52°	< 31.0%	< 35.5%	< 41.2%	20°

Tabelle 8.1: Übersicht über die systematischen Fehler des Maximum-Likelihood-Suchverfahrens in Prozent. Für jede Fehlerursache sind der mittlere Fehler σ_{mittel} , der kleinste σ_{\min} und der größte σ_{\max} aufgelistet. Für die letzten beiden ist noch die jeweilige Deklination notiert, an der dieser Fehler auftritt.

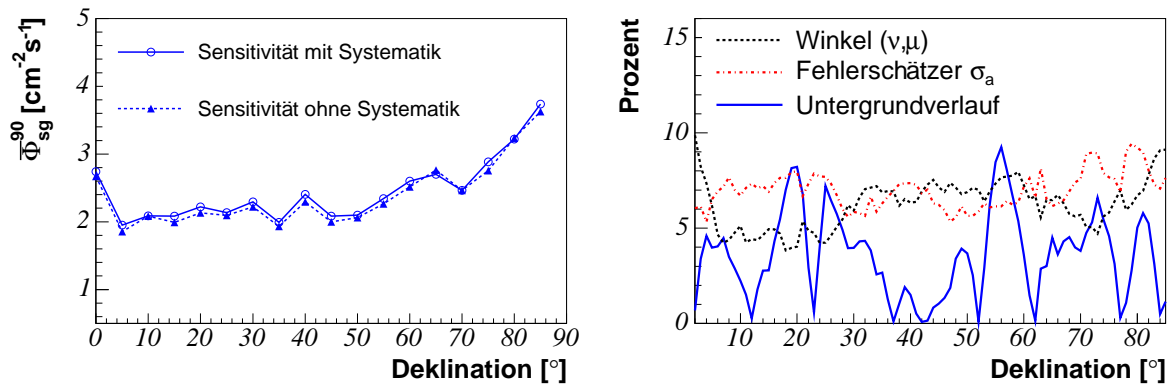


Abbildung 8.19: Die systematischen Fehler. Links ist die Sensitivität des gebinnten Verfahrens einmal mit und einmal ohne Einbinden der systematischen Unsicherheiten in der effektiven Fläche in die Konstruktion der Konfidenzplots zu sehen. Rechts sind die verschiedenen systematischen Fehler des Maximum-Likelihood-Verfahrens als Funktion der Deklination dargestellt.

tigung der Unsicherheit in der effektiven Fläche gezeigt. Die Angaben beziehen sich auf die gebinnte Suche und sind in [A⁺04] veröffentlicht.

Zwischen den beiden Kurven zeigen sich nur geringe Unterschiede in der Sensitivität. Das liegt zum Teil an der diskreten Observablen im Fall der Poisson-Statistik ([Hau03b]). Für die Maximum-Likelihood-Suche tritt ein analoger Fall nicht ein, da kontinuierliche Größen wie $\hat{\zeta}$ gemessen werden. Man kann erwarten, dass der resultierende Fehler in einer ähnlichen Größenordnung wie bei der Poisson-Statistik, aber etwas darüber liegt.

Damit ist die systematische Unsicherheit bedingt durch die effektive Fläche auf jeden Fall geringer als 25%. Dieser Wert wird daher als äußerst konservative Abschätzung dieses Fehlers angesetzt.

Unsicherheiten im Verlauf des Signals. Die Signalform ist in zweierlei Hinsicht nicht exakt bekannt. Zum einen wird der Winkel zwischen Neutrino und Myon nur konservativ abgeschätzt. Zum anderen wird die Winkelauflösung durch die in Kapitel 6 eingeführten Schätzer etwas zu groß bestimmt.

Um einen Eindruck vom Einfluss des Neutrino-Myon-Winkels zu bekommen, wird die Sensitivität unter der Annahme bestimmt, dass $\angle(\nu, \mu) = 0^\circ$ gilt. Der prozentuale Unterschied der Sensitivitäten ist in Abbildung 8.19 zu sehen. Er liegt zwischen 4% und 11% und ist im Mittel bei 6.3%. Die Sensitivität ist im Fall $\angle(\nu, \mu) = 0^\circ$ durchweg besser. Da alle Ergebnisse in dieser Arbeit unter Berücksichtigung des Winkels gewonnen werden, muss dieser Effekt nicht ein weiteres Mal als systematischer Fehler berücksichtigt werden.

Der zweite Punkt, der untersucht werden muss, hängt mit den Auflösungsschätzern zusammen. In Abschnitt 6.2 wird die Breite der Pulls bei atmosphärischen Neutrino-Energien auf $\sigma_\theta = 0.80$ und $\sigma_\phi = 0.91$ bestimmt, während sie für E^{-2} -Spektren etwa bei 1 liegen. Die Ortsauflösung der Untergrundereignisse ist damit besser als geschätzt. Verringert man die simulierte Auflösung

des Untergrundes um einen Faktor von 0.8, dann verändert das auch die Sensitivität. Sie steigt etwas an. Der resultierende systematische Fehler liegt im Mittel bei 7%.

Unsicherheiten im Verlauf des Untergrunds. Der Untergrund wird aus den Daten bestimmt und ist damit nur im Rahmen der Fehler dieser Messung bekannt. In Abschnitt 8.3.3 wird eine Anpassung in Form eines Polynoms an die Deklinationsverteilung gezeigt. Anstelle des Histogramms der Daten kann diese Anpassung zur Evaluation der Sensitivität herangezogen werden.

Der Unterschied in $\bar{\Phi}_{\text{sg}}^{90}$ liegt zwischen 0.1% und 10.2%. Im Mittel beträgt er 3.6%. Der Verlauf ist ebenfalls in Abbildung 8.19 eingetragen.

Systematik gegen mehrere Punktquellen. Dieser Fehler stammt daher, dass die Annahme nur einer in den Daten vorhandenen Punktquelle falsch ist. Er wird nicht über eine Abschätzung der Sensitivität kontrolliert, sondern durch einen anderen Mechanismus. Solange keine Hinweise auf Quellen gefunden worden sind, betrachtet man ihn als nicht existent. Sobald ein Hinweis entdeckt ist, muss die entsprechende Himmelsregion aus der Untergrundbestimmung ausgenommen und die Analyse wiederholt werden.

Addiert man die systematischen Fehler²⁴, dann ergibt sich ein deklinationsabhängiger – und sehr konservativ abgeschätzter – Gesamtfehler zwischen 31.0% und 41.2%, der im Mittel bei 35.5% liegt.

8.7 Ansätze zur Erweiterung und Verfeinerung der Methode

Die Maximum-Likelihood-Methode zur Punktquellensuche, die in diesem Kapitel entwickelt worden ist, setzt alle wesentlichen Ideen und Vorgänge ein, die diesem Verfahren zu Grunde liegen. Es sind jedoch zusätzliche Schritte denkbar, anhand derer die Ergebnisse in zukünftigen Arbeiten verbessert und optimiert werden können:

Die Qualität des Neutrinodatensatzes verbessern.

- Die einfachste Möglichkeit besteht darin, mehrere Jahre an Daten gemeinsam zu betrachten. Das AMANDA-Neutrinoobservatorium hat in der vollen Ausbaustufe seit dem Beginn des Jahres 2000 etwa die vierfache Beobachtungszeit an Daten genommen, im Vergleich zu den 197 Tagen, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden.
- Die Winkelauflösung bei der Spurrekonstruktion mit Likelihood-Methoden wird in Kapitel 6 diskutiert. Dort wird ausgeführt, dass insbesondere für hohe Energien die Rekonstruktion ebenso wie die Schätzung der Winkelauflösung nicht optimal ist. Verbesserungen der Likelihood-Rekonstruktion – und damit auch des Auflösungsschätzers – werden derzeit innerhalb der Kollaboration vorangetrieben.

²⁴Mit Ausnahme desjenigen aus dem Winkel $\angle(\nu, \mu)$, der explizit berücksichtigt wird.

- Die Qualitätskriterien zur Selektion des Neutrino Datensatzes sind explizit für die gebinnte Suche ausgewählt. Inwiefern eine Optimierung für die Maximum-Likelihood-Methode die Sensitivität noch verbessert, muss gesondert untersucht werden. Da die Sensitivität der gebinnten Suche zumindest bei manchen Deklinationen relativ stabil gegenüber der expliziten Wahl der abschließenden Qualitätsschnitte ist, steht aber zu erwarten, dass es für die ungebinnte Methode noch Möglichkeiten zur Verbesserung gibt.

Die Likelihood-Funktion der ungebinnten Suche um zusätzliche Informationen erweitern.

- Das erwartete Energiespektrum einer Neutrino-Punktquelle folgt einem Potenzgesetz mit spektralem Index von etwa $\alpha = -2$ (vgl. Kapitel 2). Es ist damit deutlich härter als das Spektrum der atmosphärischen Neutrinos. Die Energieinformation kann damit im Prinzip zum verbesserten Identifizieren einer Punktquelle beitragen. Allerdings ist die Energierekonstruktion in AMANDA relativ kompliziert und ungenau (vgl. Kapitel 5). Der jeweiligen Messgenauigkeit müsste mit Sorgfalt Rechnung getragen werden.
- Durch Synchronisation mit anderen astronomischen Beobachtungen kann auch eine Zeitabhängigkeit explizit in die Likelihood-Funktion der Punktquellsuche mit aufgenommen werden. Dabei kann sowohl eine „echte“ Synchronisierung beispielsweise mit Beobachtungen im TeV- γ -Bereich vorgenommen werden, als auch nach transientem²⁵ Verhalten mit einer bestimmten Form der Zeitabhängigkeit gesucht werden, beispielsweise nach Ausbrüchen.
- Die bisher diskutierten Abhängigkeiten der Likelihood-Funktion zielen immer nur auf die Form verschiedener Verteilungen ab. Im Hauptteil dieses Kapitels geht es um das Aufdecken einer lokalen Überhöhung als Funktion des Ortes, während obige Erweiterungen sich mit den Spektren der Energie oder in der Zeit beschäftigen. Die gebinnte Suche dagegen ist nur auf absolute Anzahlen in einem bestimmten Bereich des Himmels sensitiv.

Um diesen Aspekt zu übertragen, stellt man nicht mehr die Frage: „Wie wahrscheinlich ist es, die beobachtete Verteilung an Ereignissen zu sehen, wenn die Parametern s und \vec{x}_0 der Wahrheit entsprechen?“, sondern erweitert dahingehend: „Wie wahrscheinlich ist es, die Anzahl N an Ereignissen zu sehen und dass ihre Verteilung zu den Parametern s und \vec{x}_0 passt?“

Effizient kann das nur funktionieren, wenn man die Anzahl der verwendeten Ereignisse N in einem kleinen Ausschnitt am Himmel bestimmt. Man muss demnach mit einer lokalen Untergrund-Likelihood arbeiten. Der Erwartungswert der Untergrundeignisse μ_{bg} im Beobachtungsfenster kann aus dem Deklinationsband abgeschätzt werden, ebenso wie es mit der Form des Untergrundes gemacht wird.

Die Likelihood-Funktion $\mathcal{L}(s, x_0)$ aus Gleichung 8.6 kann dann auf zwei Arten erweitert werden. Entweder man multipliziert sie mit der Poissonwahrscheinlichkeit $P(N; \frac{\mu_{bg}}{1-s})$ dafür, dass $(1-s) \cdot N$ Ereignisse aus dem Untergrund mit Erwartungswert μ_{bg} stammen²⁶.

²⁵transient: zeitlich veränderlich

²⁶Dann erfährt dieser Term allerdings nur das gleiche Gewicht wie jeder einzelne Faktor, der zu einem Ereignis gehört.

Oder man faltet die beiden Poissonwahrscheinlichkeiten, sowohl n_{sg} Signalereignisse bei einer Erwartung von μ_{sg} , als auch $(N - n_{\text{sg}})$ Untergrundereignisse bei einer Erwartung von μ_{bg} zu beobachten dazu. Die Likelihood-Funktion \mathcal{L}_{Anz} , bei der die Ereignisanzahl mit berücksichtigt wird, lautet dann

$$\mathcal{L}_{\text{Anz}}(\mu_{\text{sg}}, \mu_{\text{bg}}, \vec{x}_0) = \sum_{n_{\text{sg}}=0}^N \left[\mathcal{L}\left(\frac{n_{\text{sg}}}{N}, \vec{x}_0\right) \cdot \text{P}(n_{\text{sg}}; \mu_{\text{sg}}) \cdot \text{P}(N - n_{\text{sg}}; \mu_{\text{bg}}) \right] \quad . \quad (8.21)$$

Diese Funktion ist mathematisch deutlich aufwändiger als alle bisher diskutierten. Sie lässt eine Verbesserung der Flussmessung erwarten, ist allerdings mit den Nachteilen einer lokalen Untergrund-Likelihood-Funktion behaftet (vgl. Abschnitt 8.3.3).

Die Methode selbst verfeinern. Unter diesem Punkt werden einige der systematischen Fehler des letzten Abschnittes aufgegriffen, diesmal mit der Zielsetzung, sie zu verringern.

- Je genauer der Verlauf des Untergrundes beschrieben werden kann desto besser. Neben einer verlängerten Datennahmepriode, mit der die statistischen Unsicherheiten in der Untergrundbeschreibung immer geringer werden, ist es auch hilfreich, die Qualitätskriterien nicht als Stufenfunktionen der Deklination anzuwenden (vgl. Abschnitt 5.5). Dieser Punkt geht damit Hand in Hand mit der Verbesserung des Neutrinodatensatzes.
- Der Verlauf der Signalfunktion kann ebenfalls genauer werden. Der Verteilung des Winkels zwischen Neutrino und Myon sollte explizit integriert werden – am besten energieabhängig. Ferner kann die Abhängigkeit der mittleren Auflösung von der Deklination in die Simulationen aufgenommen werden. Zuletzt können Abweichungen vom Gauß-Verhalten untersucht werden.
- Zur Integration von systematischen Fehlern in die Konstruktion von Konfidenzplots gibt es vielversprechende Ansätze, die für Poisson-Statistiken zum Teil schon eingesetzt werden ([CH92, Con03, Hil03, A+04]). Die Übertragung auf kontinuierliche Observablen wie die Signifikanz $\hat{\zeta}$ sollte auf keine unüberwindlichen Hindernisse stoßen.

Bis auf die explizit ausgewiesenen Punkte werden die obigen Verfeinerungsmethoden in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Insbesondere werden systematische Unsicherheiten nicht explizit in der Konstruktion der Konfidenzplots berücksichtigt. Alle konservativen Abschätzungen, die bisher diskutiert worden sind, fließen aber über die Verteilung der Observablen implizit mit ein.

Im folgenden Kapitel geht es um die besonderen Aspekte, die bei der Suche in einem ausgedehnten Gebiet berücksichtigt werden müssen, bevor im letzten Teil Ergebnisse gezeigt werden.

9 Die Punktquellensuche am gesamten Himmel

Jeder Funke einer Erkenntnis bereichert das Leben, und sei er auch noch so klein.

(Gabriele Ende)

In Kapitel 7 sind zwei fundamentale Fragen gestellt worden.

1. Befindet sich an einem festgelegten Ort des Himmels eine Neutrino-Punktquelle?
2. Befindet sich in einem bestimmten Bereich des Himmels eine Punktquelle zunächst unbekanntem Ortes?

Die Verfahren zur Beantwortung der ersten Frage sind in den beiden vorangehenden Kapiteln dargestellt, jetzt wenden wir uns der Problematik der zweiten Frage zu. Der *bestimmte Bereich*, um den es letzten Endes geht, ist der gesamte sensitive Bereich des Detektors, für AMANDA im Wesentlichen die nördliche Hemisphäre. Das eigentliche verwendete Verfahren zur Identifikation von Punktquellen (vgl. Abschnitt 7.5 und Kapitel 8) spielt dabei nur eine untergeordnete Rolle. Die hier beschriebenen Probleme und Lösungsansätze sind der gebinnten Suche und der Maximum-Likelihood-Methode gemein, werden im Folgenden aber anhand der letzteren entwickelt und dargestellt.

Obige Fragen können nicht mit einem einfachen *Ja* oder *Nein* beantwortet werden. Die Antworten bestehen immer aus einer oberen und einer unteren Grenze auf den Neutrinofluss einer Quelle bei einem bestimmten Konfidenzniveau von beispielsweise $CL_G = 90\%$. Dabei ist man nicht verpflichtet, von einer Entdeckung zu sprechen, wenn die untere Grenze von Null verschieden ist ([FC98]). Vielmehr wählt man ein zweites, höheres Konfidenzniveau von beispielsweise $CL_E \hat{=} 5\sigma$ und fordert, dass hier die zugehörige untere Grenze ungleich Null ist. Wenn das der Fall ist, dann liegt eine Entdeckung mit einer Signifikanz von 5σ vor. Analog wird eine Signifikanz von 3σ als *Hinweis* interpretiert¹ (siehe auch Abschnitt 7.3).

Die möglichen Antworten sind damit²:

Keine Quelle entdeckt: Es ist die untere Grenze $\Phi_U^{5\sigma} = 0$. Die obere Grenze Φ_O^{90} wird angegeben.

Quelle entdeckt: Es $\Phi_U^{5\sigma} > 0$. Obere und untere Grenzen Φ_O^{90} und Φ_U^{90} werden angegeben, ebenso der Ort der Quelle.

¹Die Indizes *E*, *H* und *G* stehen für Entdeckung, Hinweis und Grenze. Die Indizes *O* und *U* stehen für obere und untere Grenzen. Beispielsweise ist $\Phi_U^{CL_G}$ die untere Grenze auf den Fluss mit Konfidenzniveau CL_G .

²Für die angegebenen Konfidenzniveaus von $CL_G = 90\%$, $CL_E \hat{=} 5\sigma$ und $CL_H \hat{=} 3\sigma$, die üblicherweise Anwendung finden.

Hinweis gefunden: Es ist $\Phi_U^{5\sigma} = 0$ aber die untere Grenze $\Phi_U^{3\sigma} > 0$. Die obere Grenze Φ_O^{90} und eventuell die untere Φ_U^{90} werden angegeben, ebenso der Ort der Quelle.

Die Problematik bei der Suche nach einer Punktquelle in einem Gebiet liegt darin begründet, dass der gleiche Suchvorgang an verschiedenen Stellen wiederholt wird. An jeder Stelle erhält man einen Wert der Observablen, beispielsweise des Signifikanzschätzers $\hat{\zeta}$. Dort, wo der größte Wert resultiert, wird man am ehesten eine Punktquelle vermuten. Liest man im Konfidenzplot aus dem vorangehenden Kapitel an der Stelle dieses Wertes ab, dann erhält man Grenzen auf den Fluss.

Der größte Wert aus einer Reihe an Messungen ist aber größer als der Durchschnitt. Die oberen und unteren Grenzen, die daraus folgen, liegen systematisch zu hoch. Insbesondere bei unteren Grenzen ist das ein Problem, weil die zugehörige statistische Aussage falsch ist. Sie lautet:

„Mit einer Wahrscheinlichkeit entsprechend des Konfidenzniveaus liegt der wahre Wert des Signalflusses oberhalb der unteren Grenze.“

Wenn beispielsweise der wahre Signalfluss gleich Null und ein Konfidenzniveau entsprechend 3σ gewählt ist, dann erwartet man in drei von 1000 Fällen, dass die untere Grenze oberhalb von Null liegt. Misst man an 1000 Stellen am Himmel, dann erwartet man ebenfalls drei Stellen, an denen man eine untere Grenze ungleich Null ablesen würde. Es wäre also verwunderlich, wenn man bei einer solchen Suche *keinen* Hinweis auf eine Entdeckung bekäme. Der Konfidenzplot für Einzelmessungen hat als Konfidenzplot für das Maximum aus einer Reihe von Messungen *Undercoverage*.

Im Fall von oberen Grenzen ist die Situation nicht ganz so schlimm, da sie systematisch zu hoch liegen und damit konservativ sind. Die statistische Aussage:

„Mit einer Wahrscheinlichkeit entsprechend des Konfidenzniveaus liegt der wahre Wert des Signalflusses unterhalb der oberen Grenze“

ist zwar richtig, aber man könnte eine niedrigere – ebenfalls statistisch richtige – obere Grenzen aus den Daten ablesen.³

Der einzuschlagende Weg, um die Antwort auf Frage zwei zu finden, liegt in der Konstruktion des richtigen Konfidenzplots für das Problem.

Die Korrektur, die man applizieren muss, wird häufig als das „Bezahlen der *Trial Penalty*⁴“ bezeichnet. Der Begriff *Penalty* ist teilweise irreführend. Bei Entdeckungen ist es zwar richtig, dass man zu gute Ergebnisse erhält und quasi bestraft wird, wenn man die Zahl der Messungen berücksichtigt. Wenn man aber obere Grenzen sucht, dann verbessert eine korrekte Behandlung der Observablen das Resultat. Man muss im zweiten Fall also eher von einer *Trial Reward*⁵ sprechen.

Im folgenden Abschnitt 9.1 wird das zentrale Hindernis für die Konstruktion eines einzigen Konfidenzplot für die Suche am Nordhimmel diskutiert. Es fusst in der Tatsache, dass der Detektor für

³Die statistische Aussage des Konfidenzplots insgesamt ist diejenige, dass *beide* oben gemachten Aussagen gleichzeitig wahr sind. Bei den problematischen Szenarien, die in diesem Kapitel diskutiert werden, ist meistens nur eine der beiden falsch. Damit ist zwar die Gesamtaussage auch falsch, aber die jeweils andere Teilaussage kann richtig bleiben.

⁴Etwa: Iterationsstrafe.

⁵Reward: englisch für Belohnung

verschiedene Deklinationen unterschiedliche Sensitivitäten hat. Ein möglicher Lösungsweg wird aufgezeigt.

Ein anderer Ansatz lässt die Detektorantwort auf ein mögliches Signal unberücksichtigt. Es werden nur Untergrundschwankungen, das heißt Signifikanzen, betrachtet. Das wird in Abschnitt 9.2 untersucht. Das Kapitel schließt mit einer Übersicht über die prinzipiellen Lösungsansätze in Abschnitt 9.3.

9.1 Ein Konfidenzplot für die Suche am gesamten Nordhimmel

Im Folgenden geht es um die Konstruktion eines korrekten Konfidenzplots, wenn die Suche an mehr als einer Hypothesenstelle gleichzeitig durchgeführt werden soll. Die Signalthypothese hierbei ist, dass genau *eine* Quelle an einer der untersuchten Hypothesenorte ist.⁶ Die Stärke dieser Quelle kann gleich Null sein, wenn eben keine Quelle da ist.

Es tritt ein Problem auf, wenn Hypothesenorte mit unterschiedlicher Detektorantwort gleichzeitig untersucht werden sollen. Das wird im Folgenden anhand von nur zwei Suchstellen ausgeführt. Die Details der Formeln und die Erweiterung auf Gebiete finden sich in Anhang G. Die zwei Hypothesenstellen werden mit (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) bezeichnet. Die Observable, die betrachtet wird, ist das Maximum der beiden Signifikanzschätzer:

$$\hat{\zeta}_{\max} = \max\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2\} \quad . \quad (9.1)$$

Um Konfidenzplots konstruieren zu können, muss für jede Signalstärke die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ ermittelt werden.

Die Verteilungen für $\hat{\zeta}_i$ sind jeweils gleich, wenn keine Quelle da ist. Die Signifikanz ist in Abwesenheit eines Signals normal-verteilt⁷. Das Maximum $\hat{\zeta}_{\max}$ liegt systematisch höher und ist nicht mehr Gauß-verteilt. Das rechte Ende der Kurve entspricht etwa dem doppelten der Untergrundverteilung, während die linke Flanke deutlich steiler als eine Gauß-Verteilung verläuft. Das ist in Abbildung 9.1 a) dargestellt.

Für den Fall mit einer Quelle hängen die Verteilungen von den Hypothesendeklinationen ab. Liegen die beiden Punkte auf der gleichen Deklination ($\delta_1 = \delta_2$), dann sind die Verteilungen von $\hat{\zeta}_i$ für eine Quelle bestimmter Stärke gleich. Diese Situation ist in Abbildung 9.1 b) gezeigt. Unabhängig davon, wo die Quelle tatsächlich ist, wird eine der beiden Verteilungen der Situation mit und die andere derjenigen ohne Signal entsprechen. Die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ lässt sich ohne Kenntnis des Quellortes bestimmen. Sie folgt am rechten Ende der Signalverteilung, während die linken Flanke wie im vorherigen Fall steil abfällt⁸.

⁶Diese Annahme ist nicht ungerechtfertigt, da es sicher eine *stärkste* Quelle am Himmel gibt, die man zuerst finden wird.

⁷Die geringen Abweichungen von $\hat{\zeta}$ von der Normalverteilung können im Rahmen dieser Diskussion vernachlässigt werden.

⁸Wenn das Signal so stark ist, dass sich die Untergrund- und die Signalverteilung nicht überlappen, dann folgt die Verteilung

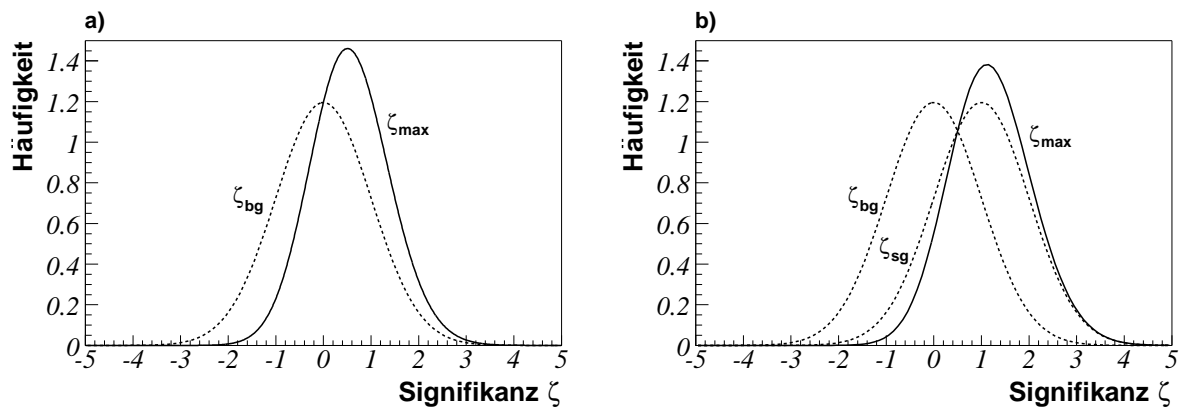


Abbildung 9.1: Verteilung der Observablen $\hat{\zeta}_{max}$ für zwei Suchstellen. Abbildung a) zeigt den Fall ohne Quelle. Die Einzelmessung $\hat{\zeta}_{bg}$ ist normal-verteilt. Misst man zwei Werte daraus, dann ist das Maximum $\hat{\zeta}_{max}$ nicht mehr Gauß-verteilt und liegt systematisch höher. Abbildung b) zeigt den Fall mit einer Quelle. Die Observable an der Stelle mit Signal $\hat{\zeta}_{sg}$ ist gegenüber $\hat{\zeta}_{bg}$ um eine Einheit nach rechts verschoben. Die Verteilung von $\hat{\zeta}_{max}$ ist ebenfalls nicht Gauß-förmig.

Das ist für den Fall $\delta_1 \neq \delta_2$ anders, wie in Abbildung 9.2 a) illustriert wird. Die Untergrundverteilung ist für beide Orte gleich, die Signalverteilung ist aber deutlich unterschiedlich. Das kann man sich im Fall von AMANDA als die Detektorantwort auf ein Signal bei $\delta = 30^\circ$ und $\delta = 70^\circ$ vorstellen.

Die Verteilung von $\hat{\zeta}_{max}$ hängt jetzt explizit davon ab, ob sich die Quelle an der Stelle 1 oder der Stelle 2 befindet. Das ist aber zum Zeitpunkt der Konstruktion des Konfidenzplots nicht bekannt. Die Verwendung einer gemittelten Verteilung über alle untersuchten Quellorte führt zu explizit falschen Ergebnissen. Diese Vorgehensweise wäre nur richtig, wenn für viele Wiederholungen des AMANDA-Experimentes die Punktquelle sich jedes mal an einer anderen Stelle befinden würde. Das ist aber nicht der Fall. Der Ort der Quelle ist ein fester – wenn auch unbekannter – Parameter.

Somit befindet man sich in einem Dilemma. Der Ort einer Quelle muss bekannt sein, bevor man anfängt, nach ihr zu suchen. Es ist daher unmöglich, die Suche an verschiedenen Deklinationen zu vereinen, wenn der Detektor jeweils unterschiedlich auf ein Signal reagiert.

Nur wenn die Verteilungen von $\hat{\zeta}_i$ jeweils für Signal *und* Untergrund an beiden Stellen identisch sind, wird die Konstruktion der Konfidenzplots vom tatsächlichen Ort der Quelle unabhängig. Wenn das aber für die Observable $\hat{\zeta}$ nicht erfüllt ist, dann ist die Existenz einer anderen Messgröße, die dieser Bedingung genügt, mehr als fraglich.

Auf der anderen Seite kann man für Orte gleicher Deklination, bzw. gleicher Detektorsensitivität tatsächlich einen angepassten Konfidenzplot konstruieren und damit optimale statistische Aussagen über eine einzelne Punktquelle auf einem Deklinationsband machen. Allerdings fasst man dabei das

lung von $\hat{\zeta}_{max}$ ausschließlich der Signalverteilung. Bei einem so starken Signalfuss wird der Ort höchster Signifikanz immer am Ort der Quelle gemessen. In diesem Fall kann auch der Konfidenzplot für eine einzelne Stelle angewendet werden.

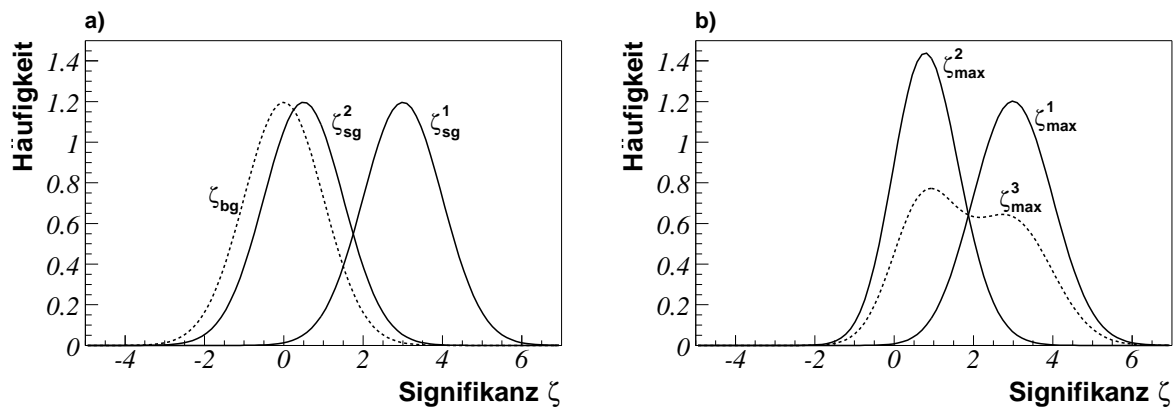


Abbildung 9.2: Verteilung der Observablen $\hat{\zeta}_{max}$ für zwei inkompatible Suchstellen. Abbildung a) zeigt die Untergrundverteilung $\hat{\zeta}_{bg}$ der Signifikanz und die Verteilungen $\hat{\zeta}_{sg}^1$ und $\hat{\zeta}_{sg}^2$ für das Vorhandensein eines Signales an einer Stelle mit „guter“ Detektorantwort und an einer Stelle, an der „schlechter“ Punktquellen nachgewiesen werden können. Gezeigt sind jeweils Gauß-verteilte Größen gleicher Breite. Abbildung b) zeigt die Verteilungen von $\hat{\zeta}_{max}^{1,2}$ in denjenigen Fällen, bei denen das wahre Signal an der Stelle 1 oder der Stelle 2 liegt. Die Verteilung $\hat{\zeta}_{max}^3$ entspricht der gewichteten Summe der ersten beiden und tritt in der Realität nicht auf.

Universum in Kegeloberflächen gleicher Deklination aus Sicht der Erde zusammen. Diese Einteilung ist physikalisch nicht begründbar und nur auf Grund technischer Argumente – nämlich gleicher Detektorsensitivität – haltbar.

Die beste Lösung wäre die Erweiterung der Konfidenzplots von eindimensionalen Variablen auf mehrdimensionale. Die vollständige wahre Hypothese besteht aus Ort *und* Fluss einer Quelle. Die zugehörige Observable ist der maximale Signifikanzschätzer gepaart mit dem Ort, an dem der entsprechende Wert gemessen wird.

Wie im eindimensionalen Fall muss man für jede Signalthypothese die Verteilungen der Observablen gewinnen und daraus einen Konfidenzplot konstruieren. Die Dimension dieses Plots ist gleich der Summe der Signaldimension und der Observablendimension. Man kann nun sowohl ein zweidimensionales Verfahren betrachten, bei dem Fluss und Deklination verwendet werden, oder ein dreidimensionales Verfahren wählen, bei dem zusätzlich die Rektaszension einfließt. In zwei Dimensionen ist der Konfidenzplot vierdimensional und in drei Dimensionen ist er sechsdimensional.

Bei einer Messung erhält man dann gleichzeitig Grenzen auf den Fluss und den Ort einer Quelle mit dem gleichen Konfidenzniveau. Eine weitere Untersuchung dieser aufwändigen aber auch mächtigen Variante ist leider im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich.

Damit bleibt festzuhalten, dass (noch) kein Verfahren zur Verfügung steht, um die optimalen Resultate aus einem Datensatz zu extrahieren. Die beiden oben diskutierten Ansätze:

- die Konstruktion von Konfidenzplots in einer Variablendimension für jede Deklination und

- die Konstruktion eines Konfidenzplots in zwei oder drei Variablendimensionen am gesamten Himmel

bedürfen beide einer theoretischen Beschreibung der Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ in Abhängigkeit der Signalstärke und der Signaldeklinaton. Ein vielversprechender Ansatz wird in Anhang G aufgezeigt. Für räumlich getrennte Suchstellen kann das Verhalten von $\hat{\zeta}_{\max}$ explizit angegeben werden. Für die Suche in einem zusammenhängenden Gebiet, muss noch den Korrelationen benachbarter Hypothesenorte Rechnung getragen werden. Auch dafür wird in Anhang G ein Ansatz geboten, der es zukünftigen Arbeiten ermöglichen sollte, die entsprechenden Konfidenzplots zu erhalten.

9.2 Die Eigenschaften der Signifikanzverteilung am Nordhimmel

Da keine passenden Konfidenzplots für die Suche am Himmel zur Verfügung stehen, muss zur Beurteilung der Resultate in der vorliegenden Arbeit ein anderer Weg eingeschlagen werden. Dazu verwendet man, dass die Signifikanzverteilung im Fall ohne Quelle für jeden Hypothesenort gleich ist. Damit lassen sich alle Hypothesenorte gemeinsam studieren, indem die Reaktion auf ein Signal außer acht gelassen wird. Somit kann der Ort des Signales zwar gefunden werden, jedoch ist es unmöglich, über die Stärke des Flusses eine Aussage zu machen.

Steht dann der Ort einer Quelle fest, dann darf auch im Nachhinein keine Suche an dieser ausgewählten Stelle gemacht werden, indem man im Konfidenzplot für Kandidatenobjekte der entsprechenden Deklination abliest. Die Auswahl der Stelle beruht ja auf den Daten und ist statistisch nicht blind. Damit ist die obere Grenze für einen Kandidaten an dieser Stelle inadäquat.

Wie aber soll man entscheiden, ob ein Ort hoher Signifikanz einer Fluktuation nach oben entspricht oder doch zu einer Quelle gehört? Wegen der starken Korrelation benachbarter Stellen am Himmel hilft hier nur die abstrahierte Simulation. Man betrachtet zwei Observablen: zum Einen das Maximum der Signifikanz $\hat{\zeta}_{\max}$ am gesamten Himmel analog Gleichung 9.1. Zum Anderen untersucht man, an wievielen Stellen $n_{\hat{\zeta} > 3}$ die Grenze von $\hat{\zeta} > 3$ überschritten wird.

Die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ ist in Abbildung 9.3 (links) als Histogramm zu sehen. Der Funktionsverlauf entspricht qualitativ dem Fall mit nur zwei Punkten (vgl. Abbildung 9.1 links). Das rechte Ende entspricht etwa der Gauß-Form, während die linke Flanke deutlich steiler abfällt. Eine Anpassung der Form

$$f^{N_{\text{eff}}}(\hat{\zeta}_{\max}) = N_{\text{eff}} \cdot f(\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_{\max}) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\hat{\zeta}_{\max}} f(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta} \right)^{N_{\text{eff}}-1} \quad (9.2)$$

ist ebenfalls eingezeichnet. Dabei bezeichnet $f(\hat{\zeta})$ die Verteilung von $\hat{\zeta}$ an einer einzelnen Stelle des Himmels und $f^{N_{\text{eff}}}(\hat{\zeta}_{\max})$ die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ – jeweils in Abwesenheit einer Quelle. Der Parameter N_{eff} steht für eine *effektive Anzahl an Suchstellen* am Himmel⁹. Die Herleitung von Gleichung 9.2

⁹Damit wird die Korrelation benachbarter Punkte berücksichtigt.

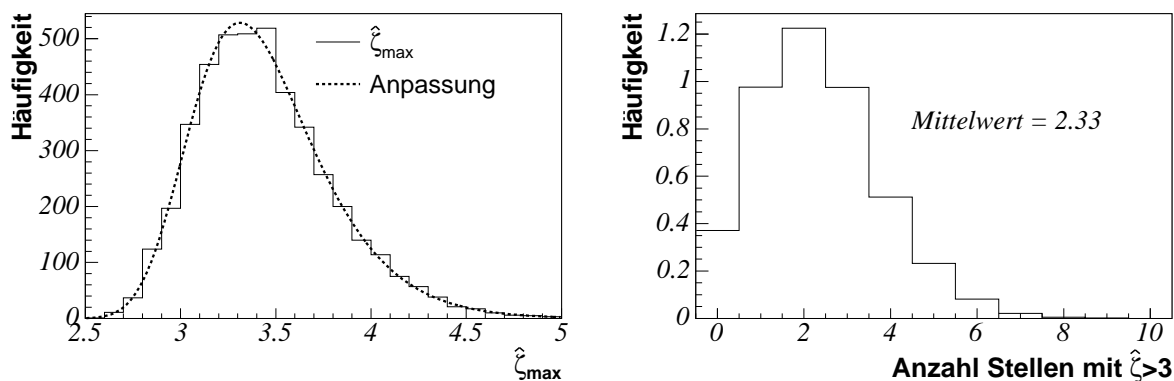


Abbildung 9.3: **Links:** Die Verteilung der maximalen Signifikanz am Himmel $\hat{\zeta}_{\max}$. **Rechts:** Die Verteilung der Anzahl der Stellen $n_{\hat{\zeta} > 3}$, an denen die Grenze von $\hat{\zeta} > 3$ überschritten wird. Beide Histogramme sind mit der abstrahierten Simulation ohne eine Punktquelle gewonnen.

findet sich mit einer erweiterten Diskussion in Anhang G. An dieser Stelle sind nur zwei Aspekte wichtig:

1. Eine Anpassung ist möglich. Damit können in Zukunft die im vorangehenden Abschnitt diskutierten Konfidenzplots konstruiert werden.
2. Die effektive Anzahl an Suchstellen ergibt sich zu

$$N_{\text{eff}} \approx 1790 \pm 50 \quad . \quad (9.3)$$

Für einen beobachteten Wert $\hat{\zeta}_{\max}^0$ der maximalen Signifikanz kann man mit Hilfe dieser Verteilung wiederum eine Signifikanz angeben, das heißt eine Wahrscheinlichkeit, dass der entsprechende Wert als Fluktuation des Untergrundes entstandes ist. Diese Vorgehensweise wird in Kapitel 10 Verwendung finden, um zu prüfen, ob eine Fluktuation oder aber ein Hinweis auf eine Quelle vorliegt.

In Abbildung 9.3 (rechts) ist die Verteilung von $n_{\hat{\zeta} > 3}$ dargestellt. Für die Messung an N unkorrelierten Punkten, folgt die Anzahl an Stellen, deren Messergebnisse oberhalb einer festen Schwelle liegen, einer Binomialverteilung. Die Wahrscheinlichkeit, an einer Stelle eine Signifikanz oberhalb von 3σ zu beobachten, beträgt $p = 0.135\%$. Der Erwartungswert der Binomialverteilung ist $N \cdot p$.

Dividiert man den Mittelwert der Verteilung $\bar{n}_{\hat{\zeta} > 3} = 2.33$ durch die effektive Anzahl an Suchstellen aus Gleichung 9.3, so erhält man eine Wahrscheinlichkeit von $p = 0.130\%$. Die leichte Abweichung von $p = 0.135\%$ ist mit der Ungenauigkeit der Bestimmung von N_{eff} kompatibel.

Damit ergibt sich ein konsistentes Bild und auch die Größe $n_{\hat{\zeta} > 3}$ kann dazu herangezogen werden, die Suchergebnisse am Nordhimmel zu beurteilen. Im Gegensatz zu $\hat{\zeta}_{\max}$, das nur eine Stelle beschreibt und damit nur von der stärksten Quelle abhängt, bedeutet ein zu großes $n_{\hat{\zeta} > 3}$, dass es zu viele Stellen mit hoher Signifikanz, das bedeutet mehrere Quellen gibt.

9.3 Die Suche am gesamten Nordhimmel

In der Suche im gesamten sensitiven Bereich des AMANDA-Neutrinooteleskopes muss man zwangsläufig Orte mit unterschiedlicher Deklination und damit unterschiedlicher Detektorantwort vereinen. Der Bereich, um den es in der vorliegenden Arbeit geht, umfasst alle Hypothesenorte mit Deklination im Intervall $0^\circ \leq \delta_0 \leq 85^\circ$. Die Rektaszension ist nicht eingeschränkt.

Die statistischen Schwierigkeiten, die dabei auftreten, werden in den vorangehenden Abschnitten diskutiert. Im Folgenden sollen die offen stehenden Lösungsmöglichkeiten der Reihe nach aufgezeigt und ihre Vor- und Nachteile diskutiert werden.

Lösung I. Man findet eine sehr starke Quelle und kann den Konfidenzplot, der für die Suche einer Stelle entsprechender Deklination konstruiert ist, direkt verwenden.

Vorteil: Optimale obere und untere Grenzen werden erhalten.

Nachteil: Eine sehr starke Quelle ist nicht notwendigerweise in den Daten enthalten. Zusätzlich entsteht ein weiterer systematischer Fehler, weil die maximale Signifikanz in der Umgebung einer Quelle nicht immer exakt an ihrem wahren Ort liegt. Die Konfidenzplots sind aber unter der Annahme konstruiert, dass man an der wahren Stelle sucht und nicht am Ort maximaler Signifikanz in der Umgebung einer Quelle. Allerdings ist die Ortsbestimmung für starke Quellen sehr gut, so dass dieser Fehler klein wird (vgl. Abschnitt 8.4.4).

Lösung II. Wenn man durch geschickte Schnitte erreicht, dass der Detektor überall gleich reagiert, dann können speziell zugeschnittene Konfidenzplots konstruiert werden. Eventuell muss die Suche auf einen Teil des sensitiven Bereiches beschränkt werden, in dem die Detektorantwort überall gleich ist. Den Rest des Himmels darf man dann nicht betrachten.

Vorteil: Optimale obere und untere Grenzen werden erhalten.

Nachteil: Man muss den sensitiven Bereich (stark) einschränken.

Lösung III. Man gibt die obere Grenze als Funktion des Hypothesenortes an.

Vorteil: Für jede einzelne Stelle ist das Verfahren statistisch korrekt.

Nachteil: Da man an sehr vielen Stellen testet, erwartet man, dass in 90% der Fälle entweder die obere oder die untere Grenze falsch ist. Es ist also gefährlich, sich im Nachhinein eine bestimmte Stelle herauszusuchen, um eine Aussage über das Ensemble zu machen. Das wird im nächsten Punkt aufgegriffen.

Zusätzlich handelt es sich um eine große Menge anzugebender Informationen.

Lösung IV. Man betrachtet die Stelle mit größter oberer Grenze aus der vorangehenden Methode. Der resultierende Wert wird als obere Grenze insgesamt angegeben. Ist die untere Grenze bei einem Konfidenzniveau entsprechend 5σ ungleich Null, spricht man von einer Entdeckung.

Vorteil: Die obere Grenze ist statistisch korrekt. Das 5σ -Kriterium für die untere Grenze sollte eine falsche Entdeckung vermeiden.

Nachteil: Die obere Grenze ist systematisch zu hoch, das heißt zu schlecht. Eine statistisch richtige untere Grenze auf den Fluss kann nicht angegeben werden, außer die Quelle ist so stark, dass Lösung I angewendet werden kann. Das ist bei einer 5σ -Entdeckung nicht von der Hand zu weisen.

Lösung V. Man gibt die obere Grenze als Funktion der Hypothesendeklination an.

Vorteil: Für jede einzelne Deklination ist das statistisch korrekt. Die erhaltenen Grenzen sind besser als bei Methode III.

Nachteil: Da man immer noch an knapp 100 Stellen testet, erwartet man auch, dass für 90% der Deklinationen entweder die obere oder die untere Grenze falsch ist. Man muss also ebenfalls vorsichtig sein, um aus einer bestimmten Stelle eine Aussage über das Ensemble abzuleiten. Wegen der deutlich verringerten Anzahl an Teststellen gegenüber der Suche an allen Orten des Himmels ist die Wahrscheinlichkeit für eine starke statistische Fluktuation des Untergrundes nach oben allerdings viel kleiner.

Lösung VI. Man kann auch bei Methode V das Maximum der oberen Grenze betrachten. Wiederum wird der resultierende Wert als obere Grenze insgesamt angegeben. Ist die untere Grenze bei einem Konfidenzniveau entsprechend 5σ ungleich Null, spricht man von einer Entdeckung.

Vorteil: Die obere Grenze ist statistisch korrekt und deutlich besser als diejenige aus Methode IV. Das 5σ -Kriterium für die untere Grenze sollte ebenfalls eine falsche Entdeckung vermeiden.

Nachteil: Die obere Grenze ist systematisch zu hoch, das heißt zu schlecht. Eine statistisch richtige untere Grenze auf den Fluss kann nicht angegeben werden, außer die Quelle ist so stark, dass Lösung I angewendet werden kann.

Lösung VII. Die Untersuchung der Signifikanz wird entsprechend der Vorgehensweise aus Abschnitt 9.2 angewendet.

Vorteil: Man kann entscheiden, ob die Daten mit Untergrundfluktuationen verträglich sind. Der wahrscheinlichste Ort einer Quelle kann gefunden werden.

Nachteil: Es lassen sich keine Grenzen auf den Signalfluss ableiten, weil die Antwort des Teleskopes auf eine Quelle nicht in die Analyse mit einfließt.

Lösung VIII. Der letzte aufzulistende Ansatz entspricht der Konstruktion mehrdimensionaler Konfidenzplots, wie es in Abschnitt 9.1 diskutiert wird.

Vorteil: Optimale obere und untere Grenzen auf den Signalfluss und Grenzen auf den Ort des Signales werden erhalten.

Nachteil: Dieses Verfahren ist relativ aufwändig.

In der Bewertung der Resultate der Suche am gesamten Nordhimmel kommen in der vorliegenden Arbeit die folgenden Ansätze zum Einsatz¹⁰:

- Die Angabe der oberen Flussgrenze an jeder Stelle des Himmels (Lösung III),

¹⁰Sollte zudem eine extrem starke Quelle gefunden werden, so wird diese zusätzlich mit Lösung I untersucht.

- die Angabe der maximalen oberen Flussgrenze (Lösung IV) und
- die Untersuchung, ob hohe Signifikanzen Fluktuationen des Untergrundes sind (Lösung VII).

Die verbesserten Strategien der Lösungen V, VI und VIII, sollten verwendet werden, sobald die entsprechenden Verfahren zur Konstruktion der Konfidenzplots vorliegen und anwendbar sind.

10 Ergebnisse

He's got the outfit, he's got the elephant,
but we're not through, yet.

(*The Genie of the Lamp*)

In diesem letzten Kapitel sollen die Ergebnisse bezüglich der Frage vorgestellt werden, ob in den AMANDA-Daten des Jahres 2000 eine Neutrino-Punktquelle zu finden ist. Die knappe Antwort ist: *Nein*. Es werden im Folgenden obere Grenzen auf die Neutrinoflüsse mit einem Konfidenzniveau von 90% angegeben.

Das Kapitel beginnt mit einigen Vorbemerkungen (Abschnitt 10.1). Dann geht es um die Resultate bei Kandidatenobjekten (in Abschnitt 10.2) und die Ergebnisse einer Suche am gesamten Nordhimmel (in Abschnitt 10.3). Im letzten Abschnitt 10.4 des Kapitels werden die gemessenen Flussgrenzen diskutiert und mit den Vorhersagen der Theorie beziehungsweise mit Messungen anderer Experimente verglichen.

10.1 Vorbemerkungen zu den Ergebnissen

Der Titel dieser Dissertation lautet: *Die Entwicklung eines neuen Verfahrens zur Suche nach kosmischen Neutrino-Punktquellen mit dem AMANDA-Neutrino-Teleskop*. Damit sind die eigentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit schon in den beiden vorangehenden Kapiteln dargestellt, in denen das entwickelte Verfahren und seine Eigenschaften diskutiert werden.

Die Signifikanzen und Flussgrenzen, die in diesem Kapitel präsentiert werden, sind aber nichtsdestotrotz wichtige Resultate dieser Arbeit. Sie dienen zusätzlich als Beispiel, um das entwickelte Verfahren weiter zu erklären und ein Bild der Ergebnisdarstellung zu vermitteln.

Auch ist in Kapitel 8 gezeigt worden, dass der für die gebinnte Suche ausgewählte Datensatz des Jahres 2000 für das ungebinte Verfahren nicht ganz passt. Deutlich verbesserte physikalische Resultate lassen sich erwarten, wenn

1. eine umfangreichere Beobachtungsdauer von beispielsweise 1000 Tagen an Stelle der hier untersuchten 197 Tage zu Grunde gelegt wird, und
2. die Qualitätskriterien zur Ereignis Selektion neu optimiert werden, um
 - die Artefakte durch die Unstetigkeit der Schnitte als Funktion der Deklination zu entfernen,

- die neu gewonnenen Qualitätsparameter aus der ereignisindividuellen Winkelauflösung einzubringen (vgl. Kapitel 6) und
- die Kriterien anhand und für das ungebinnte Verfahren zu wählen.

Dann sollten auch die systematischen Fehler in die Konstruktion der Konfidenzplots mit aufgenommen werden, was für die folgenden Ergebnisse unterlassen worden ist.

10.1.1 Erwartete Fluktuationen der Signifikanz

Die Signifikanz ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Beobachtung durch eine Fluktuation des Untergrundes entsteht. Ausgedrückt wird diese Größe durch die entsprechende Anzahl an Standardabweichungen einer Gauß-Verteilung (vgl. Abschnitt 7.4). Ein Messwert mit einer Signifikanz von 3σ entspricht einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.135\%$, diesen Wert oder einen größeren als eine Fluktuation des Untergrundes zu messen. Analog gehört zu 5σ eine Wahrscheinlichkeit von $p = 0.0000285\%$.

Wenn nur ein einziges Objekt am Himmel untersucht wird, dann vermitteln obige Wahrscheinlichkeiten ein gutes Maß dafür, ob eine Quelle identifiziert worden ist oder nicht. Je mehr Kandidaten betrachtet werden, umso wahrscheinlicher wird es aber, eine Fluktuation des Untergrundes nach oben zu beobachten.

Das lässt sich mittels einer Binomialstatistik beschreiben. Wenn an n Stellen gesucht wird, und mit der Wahrscheinlichkeit $p(\zeta_0)$ der Untergrund über die Signifikanz ζ_0 fluktuiert, dann erwartet man, dass das an

$$\bar{n} = n \cdot p(\zeta_0) \quad (10.1)$$

Stellen tatsächlich eintritt. Oder anders betrachtet liegt die Wahrscheinlichkeit p_n an *keiner* der n Stellen eine Signifikanz oberhalb von ζ_0 zu beobachten bei

$$p_n = (1 - p(\zeta))^n \approx 1 - n \cdot p(\zeta_0) \quad \text{für } p(\zeta_0) \ll 1 \quad . \quad (10.2)$$

Diese Zusammenhänge werden in Abschnitt 10.2 verwendet, um abzuschätzen, ob die Resultate bei den Kandidaten von der statistischen Seite her stimmig sind. Zur Bewertung der Suche am gesamten Himmel (Abschnitt 10.3) werden die Ergebnisse aus Abschnitt 9.2 herangezogen, die das entsprechende Pendant zu den obigen Überlegungen sind.

10.1.2 Neutrino-Oszillationen und Flussgrenzen

In den Abschnitten 1.4 und 1.5 wird die Neutrino-Oszillation eingeführt und es wird erklärt, dass ein von Pionen und Kaonen erzeugter Neutrinofluss von $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 2 : 0$ auf der Erde als $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 1 : 1$ nachgewiesen wird (vgl. Gleichung 1.61).

Eine Energieabhängigkeit dieser Zusammenhänge ist bisher nicht diskutiert worden. Für Neutrinos aus Pionen ist die Abhängigkeit ohne großen Einfluss, da die drei entstehenden Neutrinos (vgl. Gleichungen 2.3 und 2.8) etwa die gleiche Energie haben. Das liegt am Massenverhältnis von Myon und Pion. Bei Neutrinos aus Kaonen ist die Situation leicht verändert, weil das Kaon schwerer ist. Das Myonneutrino aus dem ersten Zerfallsschritt hat eine deutlich höhere Energie als die beiden Neutrinos aus dem Myonzerfall. Zusammen mit dem E^{-2} -Verhalten der Spektren folgt daraus, dass mehr Myonneutrinos oberhalb der Nachweisschwelle von AMANDA erzeugt werden. Es werden weiterhin gleich viele Myon- wie Tauneutrinos erwartet, jedoch weniger Elektronneutrinos (vgl. Gleichungen 1.56). Wenn alle drei Neutrinoarten gleich häufig auftreten, werden die gemessenen Grenzen durch Berücksichtigung der Oszillationen um einen Faktor zwei größer. Es besteht aber zusätzlich zum Einfluss der unterschiedlichen Produktionskanäle noch eine Abhängigkeit vom spektralen Index α . Für den Pionkanal ist sie relativ gering, für den Kaonkanal dafür sehr ausgeprägt. Eine ausführlichere Diskussion dieser Zusammenhänge ist in [Kow03] zu finden.

Sämtliche Grenzen auf den Myonneutrinofluss, die im Folgenden angegeben werden, beziehen sich auf den Fluss am Ort des AMANDA-Detektors. Das entspricht der in der Literatur üblichen Vorgehensweise und erleichtert den Vergleich mit anderen Veröffentlichungen. Zudem ist man dann unabhängig davon, ob die Neutrinos aus Myonen oder Kaonen entstanden sind.

Alle Flüsse werden in Einheiten von $10^{-8} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ angegeben, integriert oberhalb einer Grenzenergie von $E_{\text{Grenze}} = 10 \text{ GeV}$ unter der Annahme eines E^{-2} -Spektrums der Neutrino-Punktquellen.

10.2 Die Resultate der Suche an ausgewählten Objekten

In diesem Abschnitt sollen die Flussgrenzen an ausgewählten Kandidaten des Himmels präsentiert werden. Die Auswahl der Objekte orientiert sich an denjenigen Kandidaten, die in der Veröffentlichung [A+04] diskutiert werden. Dort sind die Resultate der gebinnten Suche in den AMANDA-Daten des Jahres 2000 zu finden, d.h. die Vergleichsanalyse zu der hier vorgestellten.

Die verwendeten Datensätze bei beiden Verfahren unterscheiden sich nur in den letztendlich angewandten Schnitten des letzten Analyseschrittes (vgl. Abschnitt 5.5). Während im Maximum-Likelihood-Verfahren diejenigen Daten zu Grunde liegen, bei denen die Schnitte in 5° -Schritten variiert werden (siehe wiederum Abschnitt 5.5), ist bei dem gebinnten Verfahren bei jeder Quellposition neu optimiert worden.

Die untersuchten Punktquellenkandidaten lassen sich in mehrere Gruppen unterteilen.

Da sind zunächst die Blazare, also Aktive Galaktische Kerne, deren Jetachse im Wesentlichen in unsere Richtung zeigt. Die untersuchten Blazare werden nochmals unterteilt, je nachdem, ob sie hochenergetische Photonen im TeV- oder im GeV-Bereich emittieren. Die nächste Gruppe umfasst die Mikroquasare, die „kleinen Versionen“ der Aktiven Galaktischen Kerne innerhalb unserer Milchstraße. Die Supernovaüberreste beschließen diejenigen Objekte, die in Kapitel 2 als potenzielle Quellen vorgestellt werden.

Nr.	Kandidat	Deklination	Rektaszension	Signifikanz $\hat{\zeta}$	Φ_{ν}^{90} (gebinnt)	Φ_{ν}^{90}
TeV Blazare						
1	Markarian 421	38.2°	11.07 h	0.91	3.5	3.0
2	Markarian 501	39.8°	16.90 h	0.80	1.8	3.0
3	1ES 1426+428	42.7°	14.48 h	-0.95	1.7	1.1
4	1ES 2344+514	51.7°	23.78 h	-1.45	2.0	0.8
5	1ES 1959+650	65.1°	20.00 h	0 (-31.5)	1.3	3.0
GeV Blazare						
6	QSO 0528+134	13.4°	5.52 h	0.11	2.0	1.9
7	QSO 0235+164	16.6°	2.62 h	-0.30	1.3	1.5
8	QSO 1611+343	34.4°	16.24 h	0 (-12.1)	0.8	1.8
9	QSO 1633+382	38.2°	16.59 h	-0.21	1.7	0.9
10	QSO 0219+428	42.9°	2.38 h	-0.21	1.6	1.9
11	QSO 0954+556	55.0°	9.87 h	0.09	1.7	2.4
12	QSO 0716+714	71.3°	7.36 h	1.41	4.4	5.3
Mikroquasare						
13	SS433	5.0°	19.20 h	-1.79	0.4	0.6
14	GRS 1915+105	10.9°	19.25 h	0.03	2.2	1.9
15	GRO J0422+32	32.9°	4.36 h	0.29	2.9	2.1
16	Cygnus X1	35.2°	19.97 h	0.23	2.5	2.0
17	Cygnus X3	41.0°	20.54 h	1.22	3.5	3.6
18	XTE J1118+480	48.0°	11.30 h	0.34	2.2	2.5
19	CI Cam	56.0°	4.33 h	0 (-7.9)	0.8	2.3
20	LS I +61 303	61.2°	2.68 h	-0.57	1.5	1.9
Supernova Überreste und sonstige						
21	SGR 1900+14	9.3°	19.12 h	-1.67	1.0	0.7
22	Krebs Nebel	22.0°	5.58 h	-0.21	2.4	1.6
23	Cassiopeia A	58.8°	23.39 h	0.86	1.2	3.9
24	3EG J0450+1105	11.4°	4.82 h	0.85	3.2	2.7
25	M 87	12.4°	12.51 h	-0.67	1.0	1.2
26	Geminga	17.9°	6.57 h	0.81	3.3	2.5
27	UHE CR Triplet	20.4°	1.28 h	0.11	2.3	1.7
28	NGC 1275	41.5°	3.33 h	-0.07	1.6	2.0
29	Cyg. OB2 region	41.5°	20.54 h	1.12	3.5	3.5
30	UHE CR Triplet	56.9°	12.32 h	-0.61	1.9	1.6

Tabelle 10.1: Obere Grenze auf den Fluss einer Quelle bei ausgewählten Kandidatenobjekten. Neben der Bezeichnung des Objektes sind äquatoriale Koordinaten, die Signifikanz und die Grenzen auf den Fluss für die gebinnte Suche und die Maximum-Likelihood-Methode zu finden. Die Flussgrenzen sind in Einheiten von $10^{-8} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ angegeben. An drei Stellen ist $\hat{n}_{\text{sg}} < -6$ (die Werte sind in Klammern mit angegeben).

Unter der Kategorie *Sonstige* finden sich noch einige exotischere Objekte, angefangen von der Radiogalaxie M87, die vom HEGRA-Experiment als γ -Quelle identifiziert worden ist ([G⁺03]), bis hin zu Richtungen, aus denen das AGASA-Luftschauerexperiment eine Häufung von drei höchstenergetischen Ereignissen der kosmischen Strahlung gemessen hat.

In Tabelle 10.1 sind die Ergebnisse und Orte für alle untersuchten Kandidaten angegeben. Neben dem Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}$ sind die ermittelten Flussgrenzen von jeweils der gebinnten und der neuen Suche mit dem ungebinnten Maximum-Likelihood-Verfahren aufgelistet. An denjenigen Stellen, an denen $\hat{\zeta}$ künstlich auf 0 angehoben wird, da der Schätzer zu stark ins Negative rutscht, ist jeweils der Wert für \hat{n}_{sg} mit angegeben (vgl. Abschnitt 8.4.3).

Um die ermittelten Flussgrenzen der beiden Methoden besser miteinander vergleichen zu können, sind sie in Abbildung 10.1 als Funktion ihrer Deklination eingetragen. Um zu ersehen, an welchen Stellen eine Fluktuation nach unten zu überdurchschnittlich guten Grenzen geführt hat, ist die Sensitivität der ungebinnten Suche ebenfalls gezeigt.

Aus Tabelle 10.1 und Grafik 10.1 lässt sich ersehen, dass die Ergebnisse der beiden Verfahren in Bezug auf obere Limits absolut vergleichbar sind. Insbesondere in den Grafiken ist zu erkennen, dass die Resultate an fast allen Stellen als Paare beieinander zu finden sind, zum Teil mit niedrigeren Grenzen aus dem einen und zum Teil aus dem anderen Verfahren. Es gibt drei Fälle, bei denen der Signifikanzschätzer zu sehr ins Negative abrutscht und die obere Grenze willkürlich auf die Sensitivität gesetzt wird. Passenderweise sind an diesen Stellen in der gebinnten Suche Fluktuationen nach unten beobachtbar.

Es sind insgesamt $n = 30$ Punktquellenkandidaten untersucht worden. Nach Gleichung 10.2 liegt die Wahrscheinlichkeit, bei keinem Objekt eine Signifikanz oberhalb von 3σ zu erhalten, bei $p_n = 96\%$. Damit sind die Ergebnisse mit Fluktuationen des Untergrundes verträglich.

Für drei ausgewählte Objekte sind in den Abbildungen 10.2 und 10.3 die lokalen Umgebungen in mehreren Karten eingezeichnet. Neben den Ereignisorten, wie sie von der gebinnten Suche (Punkte) und der ungebinnten Suche (Ellipsen) gesehen werden, finden sich die Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}$ und die oberen Flussgrenzen. Andere Kandidaten sind in den Karten mit ihren Nummern aus Tabelle 10.2 eingetragen.

Die drei ausgewählten Objekte sind Markarian 421, Cygnus X3 und Cassiopeia A. Sie gehören zu denjenigen mit höheren Signifikanzen. Zusätzlich ist Cassiopeia A eine weitere Ausnahme, bei der sich die Ergebnisse bei den beiden Verfahren unterscheiden. Das liegt daran, dass dieses Objekt zwischen zwei Untergrundfluktuationen liegt. Die gebinnte Suche ist dafür blind, weil sie nur in einem sehr begrenzten Gebiet Ereignisse zählt. Bei dem ungebinnten Verfahren dagegen, ist die Signifikanzfunktion über dem Himmel stetig und wird entsprechend der Auflösungen der Ereignisse in der Nähe beeinflusst. Somit findet man mit dem gebinnten Verfahren eine Fluktuation nach unten und bei der ungebinnten Vorgehensweise eine Fluktuation nach oben.

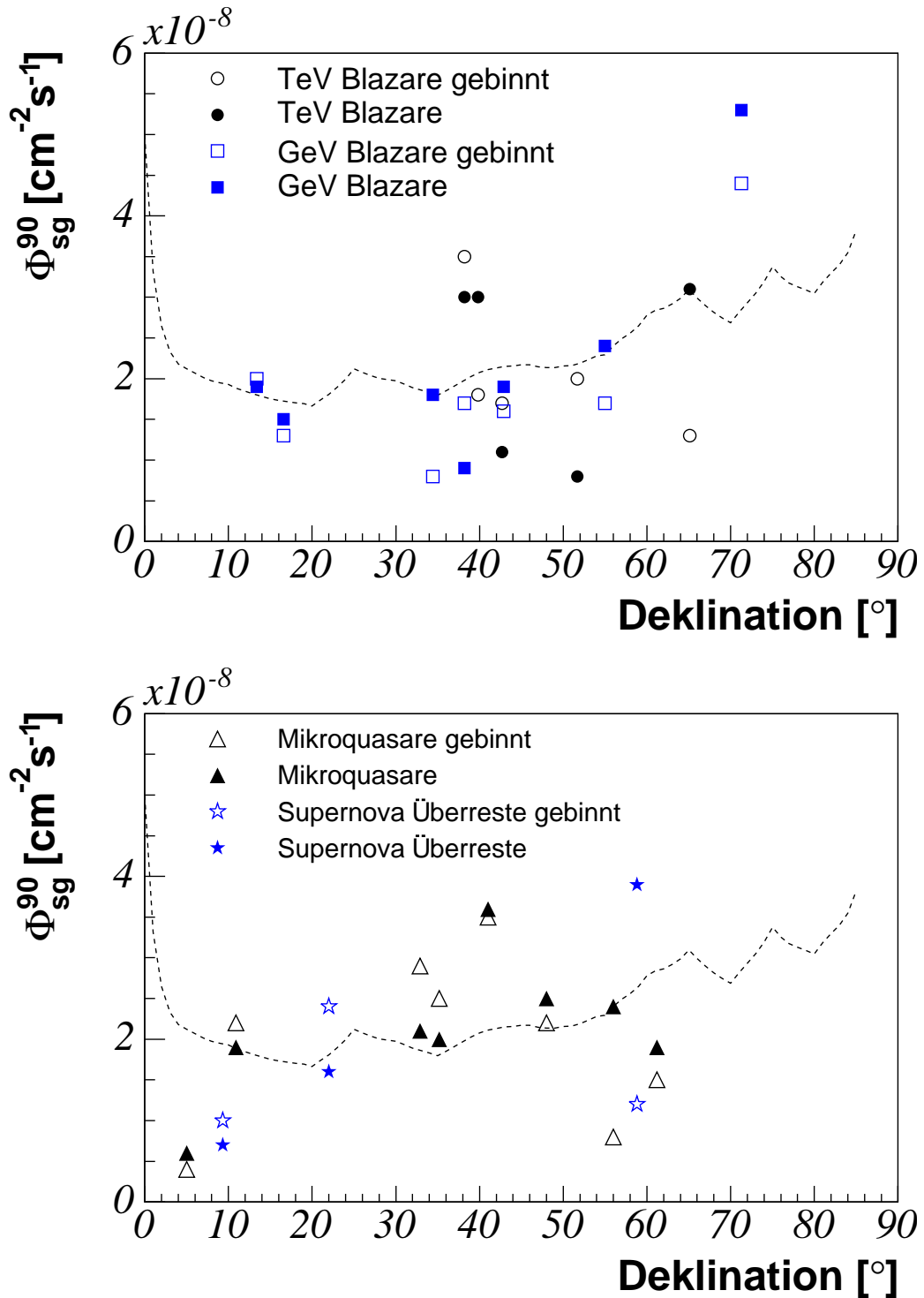


Abbildung 10.1: Vergleich der oberen Flussgrenzen auf Kandidatenobjekte zwischen der gebinnten (offene Symbole) und der ungebinnten Suche (gefüllte Symbole). Die verschiedenen Gruppen an Kandidaten werden durch jeweils gleiche Zeichen identifiziert. In der oberen Abbildung sind die extragalaktischen und in der unteren die galaktischen Objekte gezeigt. Eine Liste der Kandidaten findet sich in Tabelle 10.1. Die Sensitivität des Maximum-Likelihood-Verfahrens ist zum Vergleich als gestrichelte Linie eingezeichnet.

Nr. der Signifikanz	Deklination	Rektaszension	Signifikanz $\hat{\zeta}$	Φ_{ν}^{90}
1	77.9°	0.38 h	3.49	10.8
2	39.4°	21.20 h	3.48	6.9
3	44.4°	13.03 h	2.89	6.3
4	59.7°	23.92 h	2.75	7.7
5	62.9°	23.10 h	2.66	8.0
6	67.0°	21.06 h	2.65	8.0
7	20.2°	22.20 h	2.62	4.5

185

Tabelle 10.2: Liste aller Stellen bei der Suche am Nordhimmel mit $\hat{\zeta} > 2.6$. Neben den äquatorialen Koordinaten ist die Signifikanz und die Grenze auf den Fluss in Einheiten von $10^{-8} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ angegeben.

10.3 Die Resultate der Suche am gesamten Nordhimmel

In Abbildung 10.4 (links) ist eine Grafik mit allen 697 Ereignissen zu sehen, die den „offiziellen“ Neutrinosdatensatz des Jahres 2000 konstituieren. Es sind nur Ereignisse oberhalb einer Deklination von $\delta = 0^\circ$, also oberhalb des Äquators eingezeichnet. Die gewählte Darstellung kommt durch eine *Hammer-Aitoff-Projektion* zu Stande. Diese flächentreue Projektion der Kugeloberfläche in die Ebene ist in Anhang B erklärt. Sie wird wegen ihrer Flächentreue verwendet, weil dann mit dem Auge lokale Ereignishäufungen bewertet werden können. Auch gewinnt man dadurch in den folgenden Abbildungen einen direkten Eindruck von der Auflösung des Teleskopes.

Bedingt durch die Wahl der Projektion stellt sich die nördliche Himmelshälfte als recht schmales Bild dar¹. Entsprechend ist zum direkten Vergleich mit der Ereignisverteilung daneben, in Abbildung 10.4 (rechts), der Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}$ als Funktion des Himmels gezeigt. Der Zusammenhang zwischen den beiden Bildern lässt sich besonders gut beurteilen, wenn beide Darstellungen übereinandergelegt werden. Aber auch im Vergleich nebeneinander kann man erkennen, dass die weißen Gebiete des Signifikanzschätzers zu Bereichen ohne Ereignisse und gelbe und rote Gebiete zu Bereichen mit vielen Ereignissen gehören.

In Abbildung 10.5 (links) sind alle Kandidatenorte verzeichnet. Es lässt sich aber auch hier keiner davon mit einer besonders signifikanten Stelle in Verbindung bringen. Um die Stellen mit der größten Signifikanz besonders hervorzuheben, ist in der gleichen Abbildung der Schätzer gezeigt, allerdings nur dort, wo $\hat{\zeta} \geq 2.6$ gilt. Die Grenze 2.6 ist so gewählt, dass diejenige Stelle, die in der gebintten Suche als die signifikanteste ermittelt wurde, beinhaltet ist ([A⁺04]).

In Tabelle 10.2 sind die zugehörigen Orte aufgelistet. Die höchste Signifikanz von $\hat{\zeta}_{\max} = 3.49$ liegt bei einer Deklination von 77.9° und einer Rektaszension von 0.38 h. Die zweithöchste Signifikanz hat einen fast identischen Wert von $\hat{\zeta} = 3.48$ und liegt bei $\delta = 39.4^\circ$ und $\alpha = 21.20$ h. Den Wert von $\hat{\zeta}_{\max}$ kann man mit der Verteilung dieser Größe in Abbildung 9.3 (links) vergleichen, die in einer

¹ Alle Grafiken des Nordhimmels sind im Vergleich zu einer eigentlichen Hammer-Aitoff-Projektion um 30% verbreitert, damit die Details nicht zu klein werden.

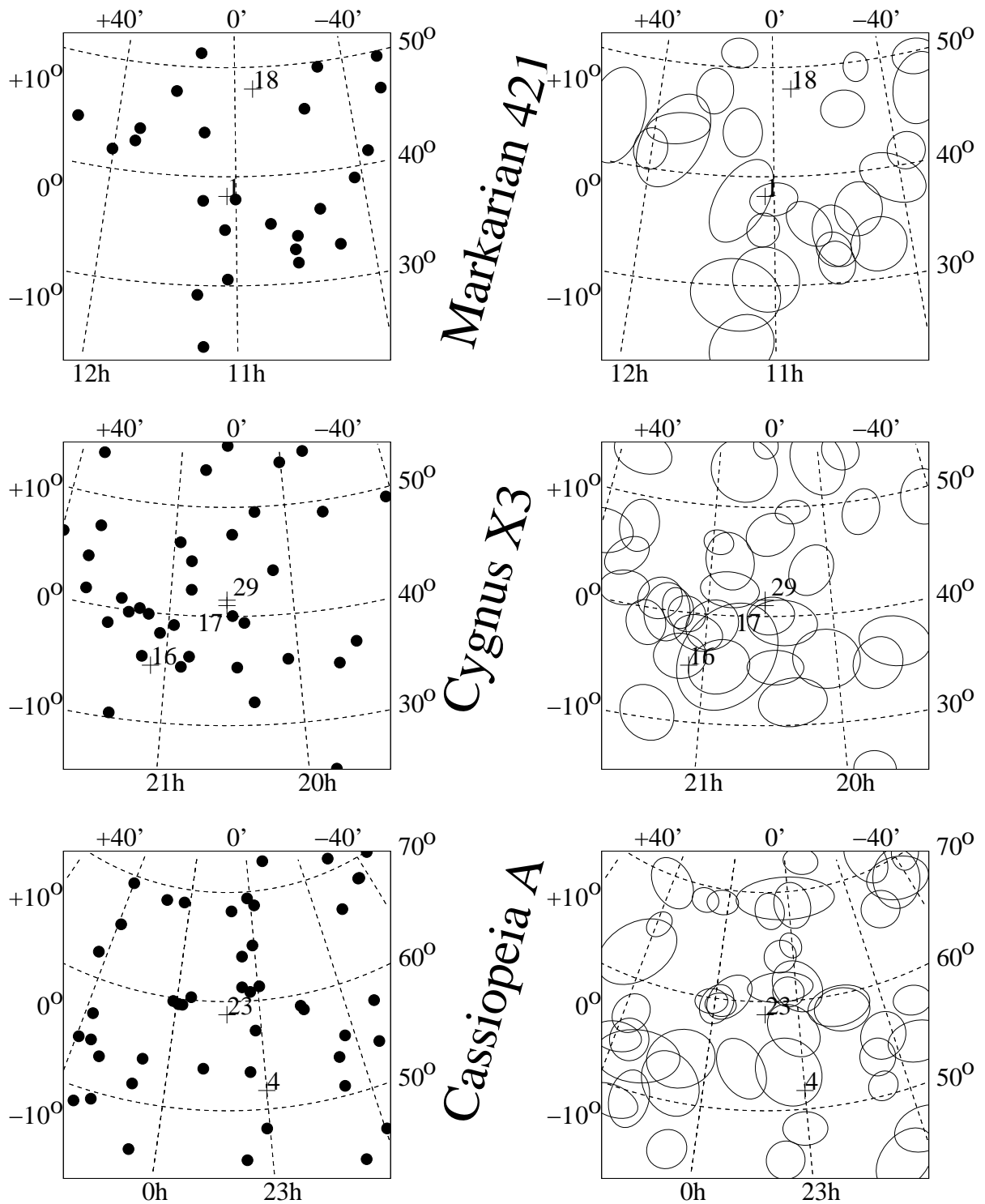


Abbildung 10.2: Beispiele für die Resultate der Suche bei Kandidatenobjekten.

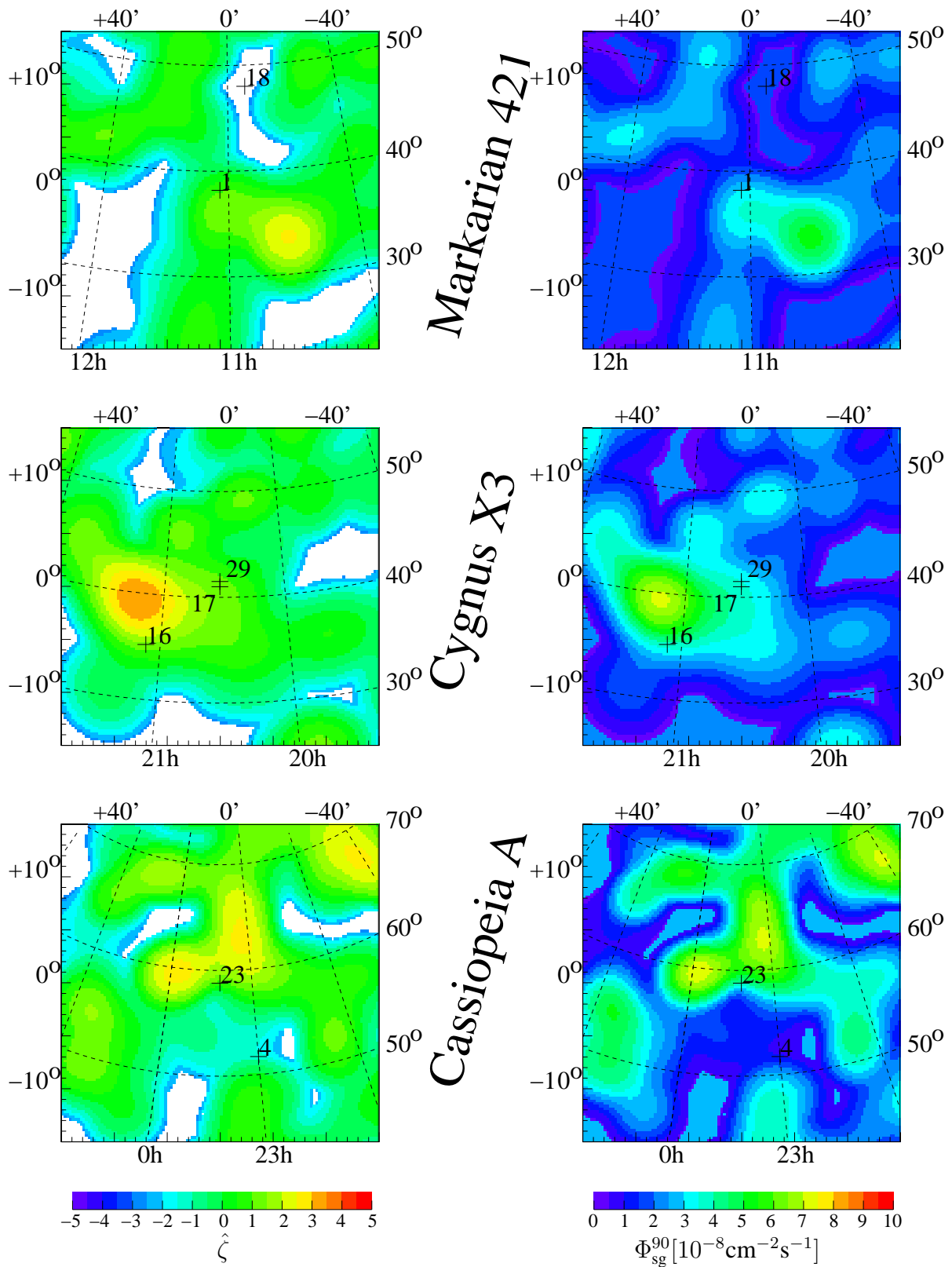


Abbildung 10.3: Beispiele für die Resultate der Suche bei Kandidatenobjekten.

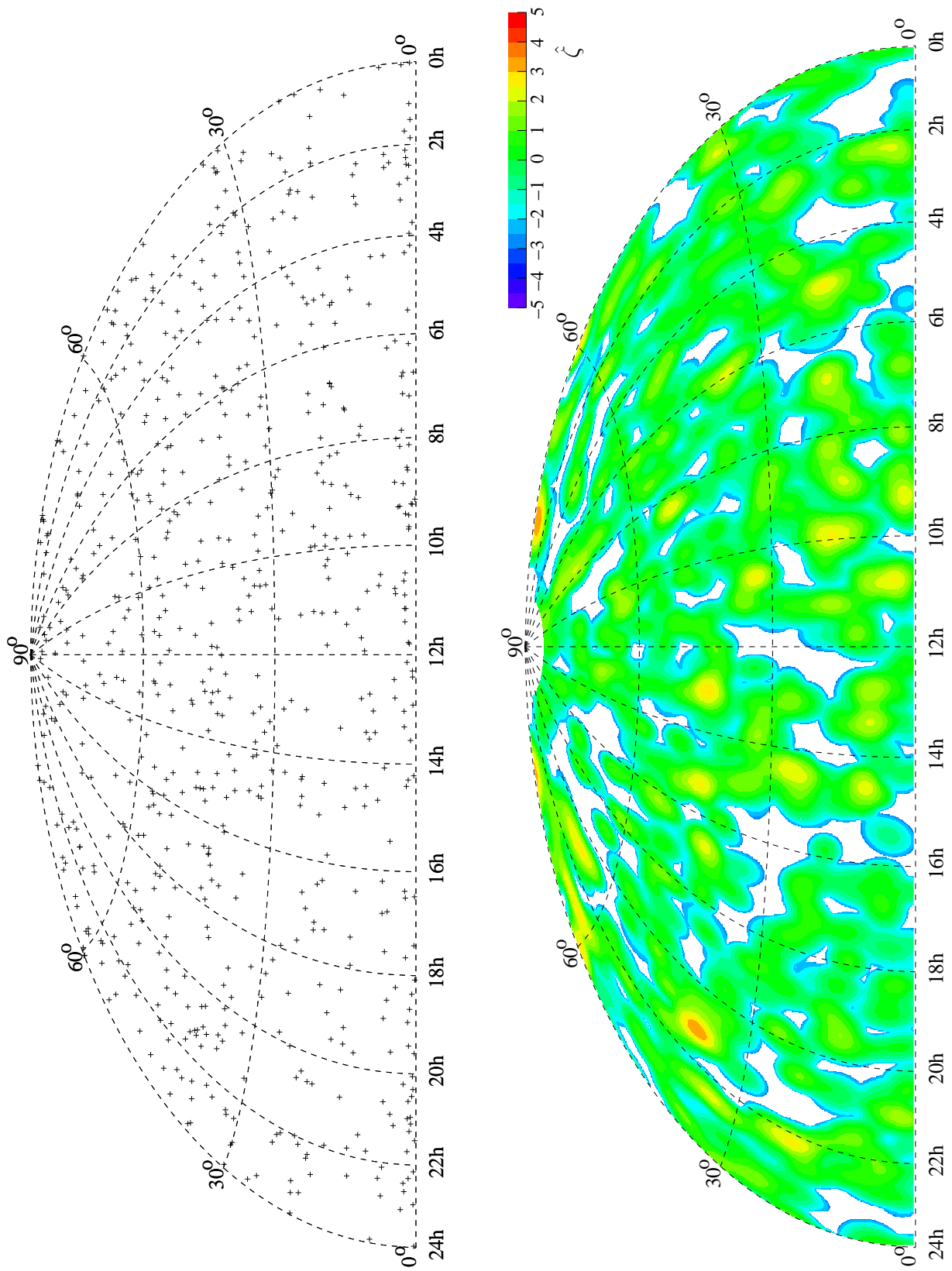


Abbildung 10.4: Die Ereignisse und Signifikanzen am Nordhimmel.

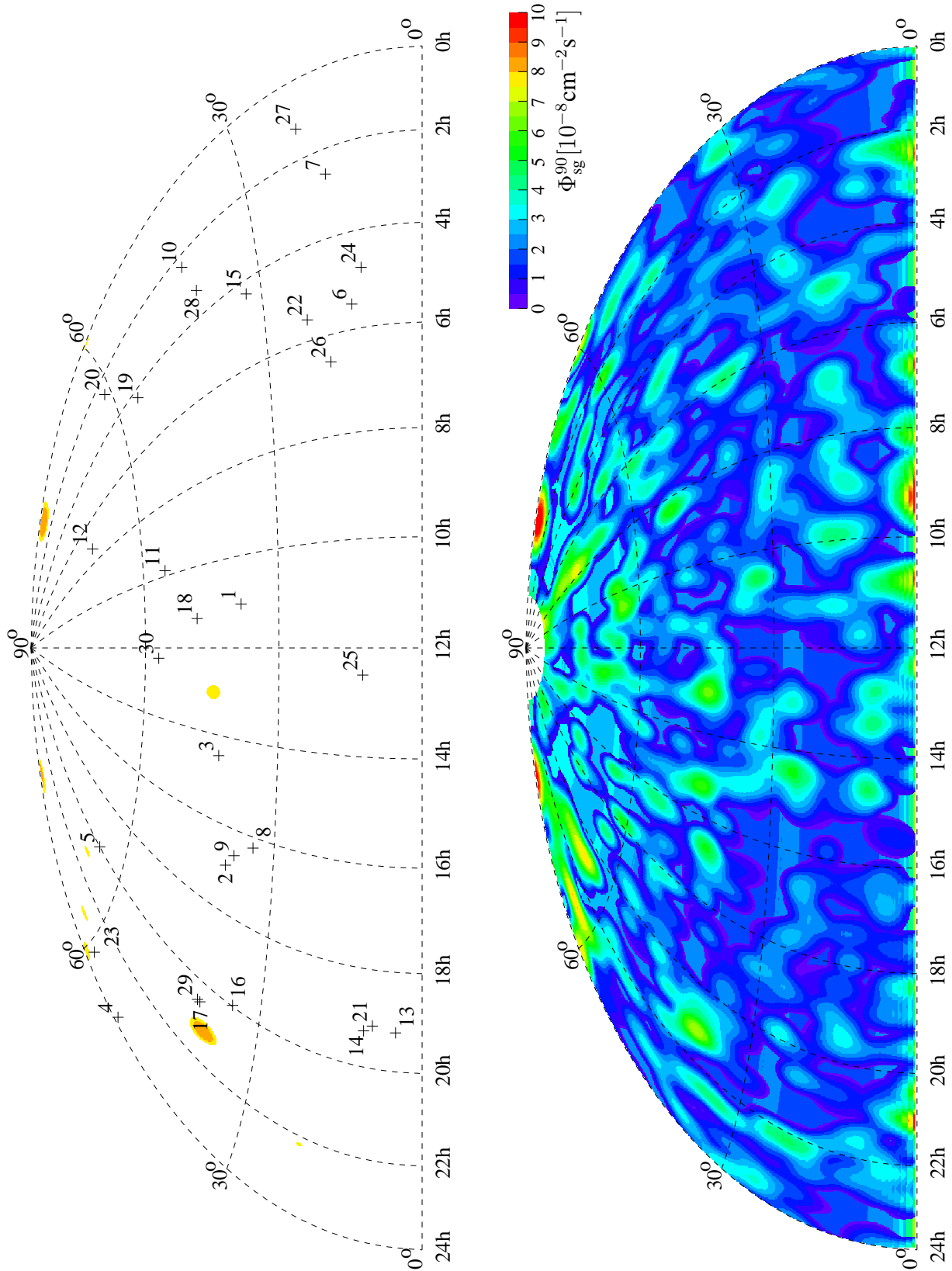


Abbildung 10.5: Die Punktquellenkandidaten, die höchsten Signifikanzen und die oberen Flussgrenzen.

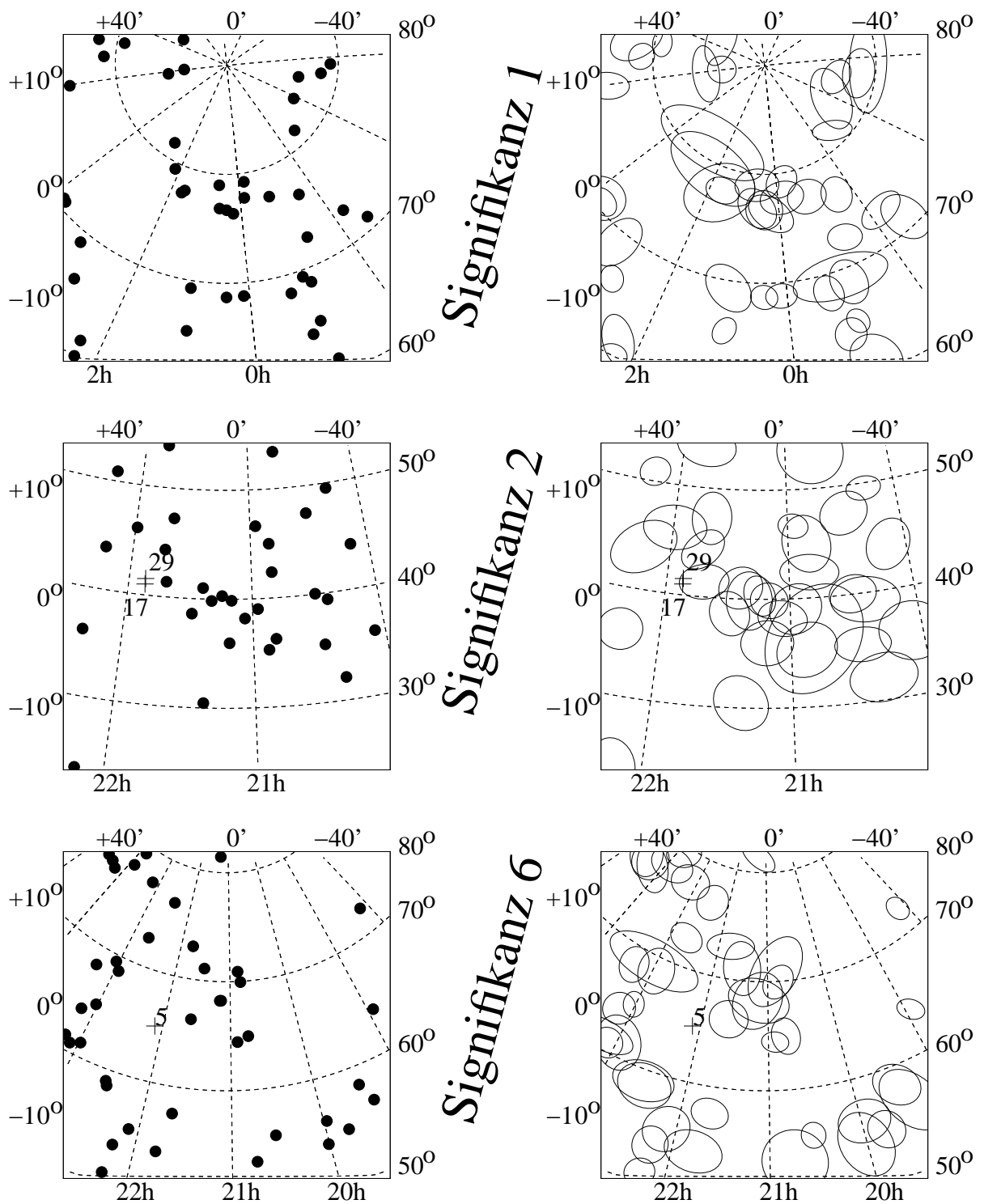


Abbildung 10.6: Höchste Signifikanzen am Nordhimmel.

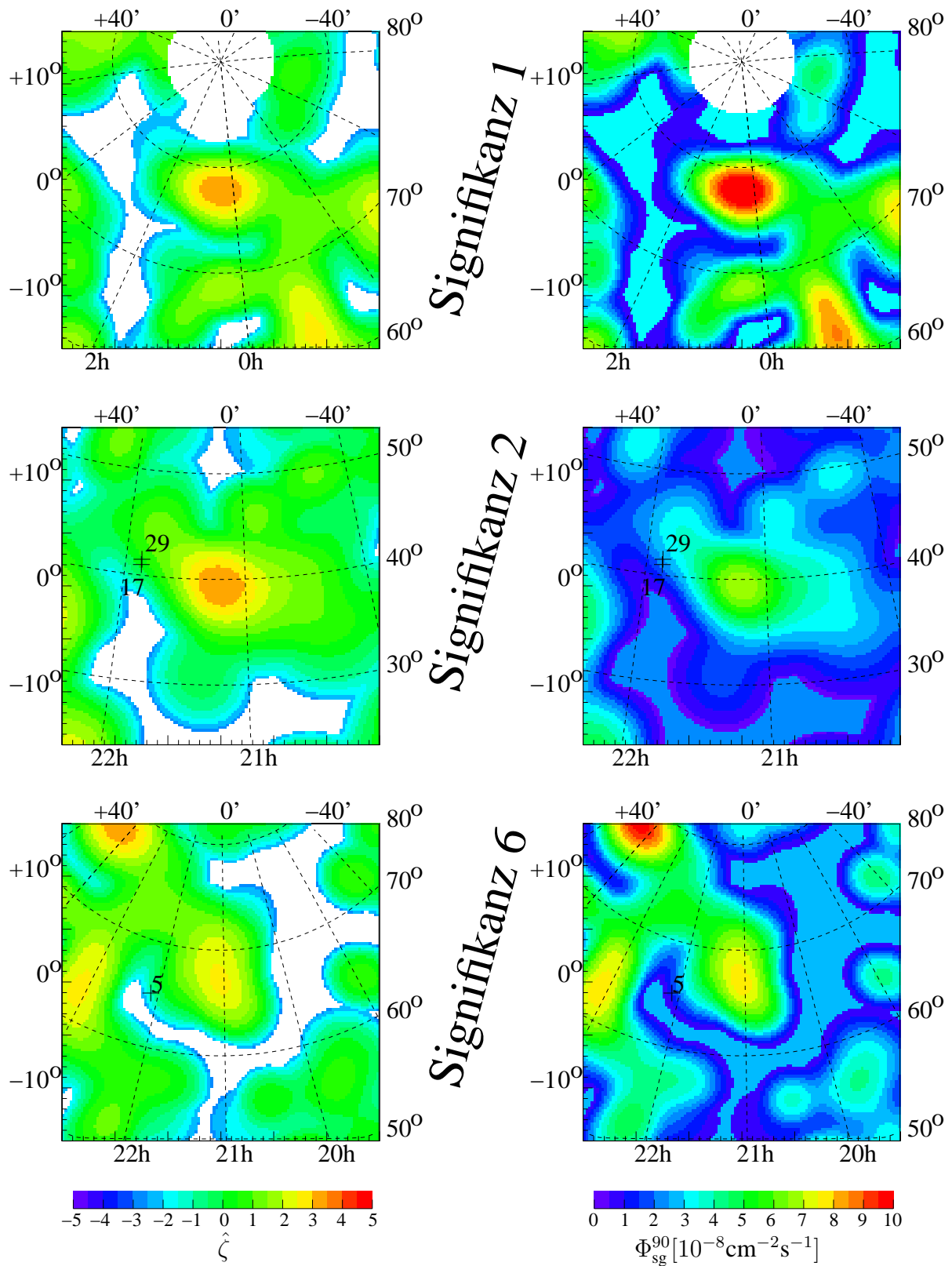


Abbildung 10.7: Höchste Signifikanzen am Nordhimmel.

Simulation ohne Punktquelle erzeugt ist. Der beobachtete Wert liegt mitten in der Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit, eine maximale Signifikanz oberhalb von $\hat{\zeta}_{\max} = 3.49$ zu erhalten, bestimmt man zu $p = 38.4\%$. Damit ist diese Beobachtung mit einer Fluktuation des Untergrundes gut erklärbar.

Es gibt $n_{\hat{\zeta} > 3} = 2$ Stellen mit Signifikanzwerten oberhalb von $\hat{\zeta} > 3$. Sie sind in den Abbildungen rot eingezeichnet. Auch dieser Wert kann mit der in der Simulation gewonnenen Verteilung verglichen werden (vgl. Abbildung 9.3 rechts). Er liegt knapp unterhalb des Mittelwertes und entspricht genau dem wahrscheinlichsten Ergebnis einer Messung. Damit ist auch diese Beobachtung mit der Hypothese einer Untergrundfluktuation gut verträglich.

Als letzte Konsistenzprüfung kann noch die folgende Überlegung angestellt werden. Aus den verschiedenen Graphen der Signifikanz schätzt man ab, dass ein lokales Maximum etwa eine Größe von $4^\circ \times 4^\circ$ einnimmt. Das entspricht einem Raumwinkel von $\Omega \approx 5 \cdot 10^{-3}$. Dividiert man den Raumwinkel der Nordhalbkugel von 2π durch Ω , dann erhält man eine grobe Schätzung für die effektive Anzahl an Suchstellen. Der resultierende Wert von $N'_{\text{eff}} \approx 1300$ liegt in der gleichen Größenordnung², wie der simulierte Wert aus Gleichung 9.3 von $N_{\text{eff}} \approx 1790$. Damit kann dieser Simulation vertraut werden.

In Tabelle 10.2 sind auch die zugehörigen oberen Grenzen auf den Fluss mit angegeben. Diese sind mit der gebührenden Vorsicht zu interpretieren. Die statistischen Schwierigkeiten, die mit einer Suche am gesamten Nordhimmel verbunden sind, werden in Kapitel 9 ausführlich dargelegt. Es lässt sich aber erkennen, dass ähnliche Signifikanzen zu sehr unterschiedlichen Grenzen führen können. Das rührt daher, dass in die Bestimmung der Signifikanz nur das Verhalten des Untergrundes einfließt, während bei der Berechnung der oberen Grenzen auch die Reaktion des Teleskopes auf ein Signal berücksichtigt werden muss.

Für die beiden Stellen mit der höchsten Signifikanz (1 und 2) und die Stelle 6, die der höchsten Signifikanz in der gebinteten Suche entspricht, sind analog zu den Darstellungen für die drei Beispieldaten jeweils vier lokale Karten gezeigt. In den Abbildungen 10.6 und 10.7 findet man Ereignisorte, Signifikanzen und obere Grenzen. Zudem sind die Orte der Punktquellenkandidaten mit ihren Nummern eingetragen (nach Tabelle 10.1). Es gibt aber keine Übereinstimmungen, die auf eine Entdeckung schließen ließen.

In Abbildung 10.5 (rechts) ist die obere Grenze auf den Neutrinofluss über den gesamten Nordhimmel gezeigt. Das Maximum befindet sich an der Stelle der höchsten Signifikanz und beträgt (vgl. Tabelle 10.2):

$$\Phi_{\max}^{90} = 10.8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad . \quad (10.3)$$

Das ist damit auch eine obere Grenze für den Fluss einer Quelle unbekanntes Ortes im gesamten Suchgebiet.

²Diese Schätzung ist relativ grob. Variiert man die Größe des Maximums zu $3^\circ \times 3^\circ$ oder $5^\circ \times 5^\circ$, dann errechnen sich daraus $N'_{\text{eff}} \approx 2290$ beziehungsweise $N'_{\text{eff}} \approx 830$ effektive Suchstellen.

10.4 Diskussion der Resultate

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich mit den theoretischen Vorhersagen vergleichen. Dazu werden die Modelle aus Abschnitt 2.4.7 herangezogen. Da in den Daten des Jahres 2000 keine Hinweise für Neutrino-Punktquellen zu finden sind, werden die Modellverläufe mit der Sensitivität des Experimentes verglichen.

Abbildung 10.8 greift Abbildung 2.7 wieder auf. Es handelt sich um die Darstellung der differentiellen Neutrinoflüsse in Abhängigkeit der Energie. Die Ordinate ist mit E_ν^2 multipliziert, so dass sich die Sensitivitäten als flache Linien darstellen – das E_ν^{-2} -Verhalten ist ja explizit in die Signalhypothese mit eingeflossen.

Die differentiellen Flussgrenzen unterscheiden sich von den integralen um $\frac{E_0^2}{E_{\text{Grenze}}} = 10 \text{ GeV}^{-1}$ (vgl. Abschnitt 7.1). Für AMANDA werden sie aus Abbildung 8.16 entsprechend adaptiert, während sie für das Nachfolgeexperiment³ IceCUBE aus [A⁺03d] entnommen sind und lauten:

	Experiment	Beobachtungszeitraum	differentielle Sensitivität
A	AMANDA	2000	$(1.7 - 3) \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \text{ GeV}^{-1}$
B	AMANDA	2000 – 2003	$(0.6 - 1) \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \text{ GeV}^{-1}$ (erwartet)
C	IceCUBE	1 Jahr	$5.5 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \text{ GeV}^{-1}$ (erwartet)

Diese Sensitivitäten sind in Abbildung 10.8 eingetragen. Es lässt sich erkennen, dass mit der Analyse der vorliegenden Daten des AMANDA-Neutrinoobservatoriums auch die optimistischeren Modellvorhersagen nicht ausgeschlossen werden können. Dazu sind größere effektive Flächen von Nöten. Allerdings werden die Ausschlussgrenzen, die auf einer mehrjährigen Datennahme von AMANDA beruhen, so nahe an die Modelle heranrutschen können, dass eventuelle Fluktuationen einer Punktquelle nach oben als Hinweis auf eine Entdeckung auftauchen können.

³Ein Experiment am Südpol mit einer geplanten effektiven Fläche von $\sim 1 \text{ km}^2$.

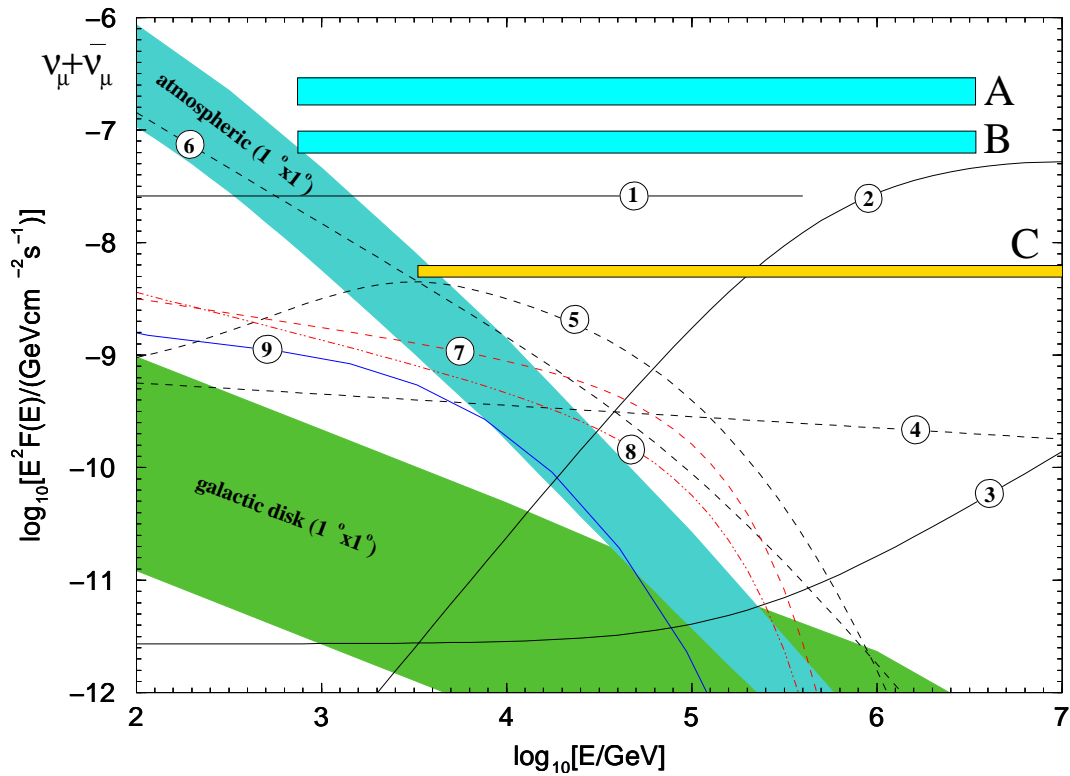


Abbildung 10.8: In dieser Abbildung sind die Modellvorhersagen aus Abbildung 2.7 mit der Sensitivität von gegenwärtigen und zukünftigen Analysen der Daten von Neutrinoobservatorien am Südpol verglichen. Die mit A bezeichnete Sensitivität gehört zu der in dieser Arbeit durchgeführten Analyse der Daten von AMANDA aus dem Jahr 2000. Bei Verwendung der fünffachen Datenmenge wird eine Sensitivität entsprechend B erwartet. Ein Jahr Messdauer mit IceCUBE sollte zu der mit C gekennzeichneten Sensitivität führen.

Zusammenfassung und Ausblick

Erfolg besteht zu fünfzig Prozent aus Können, zu fünfzig Prozent aus Fleiß und zu fünfzig Prozent aus Glück oder Wohlwollen der Götter.

(Nikolaos Papadopoulos)

Die Suche nach kosmischen Neutrino-Punktquellen ist insbesondere durch die Frage motiviert, wo die hochenergetische kosmische Strahlung entsteht. An denjenigen Stellen im Universum, an denen Protonen starke Beschleunigung erfahren, erwartet man die Produktion von Pionen, falls die Protonen mit Materie oder einem Strahlungsfeld wechselwirken können. Unter den Folgeprodukten des Pionzerfalls befinden sich dann hochenergetische Neutrinos, die im Wesentlichen ungestört die Erde erreichen können. Umgekehrt erlaubt die Identifikation einer Neutrino-Punktquelle den Rückschluss auf die Existenz hochenergetischer Hadronen. Eine der zentralen Aufgaben des AMANDA-Neutrino-Teleskops am geographischen Südpol ist das Auffinden solcher Quellen.

Die vorliegende Dissertation zeigt zunächst, wie die Winkelauflösung für jedes einzelne Neutrino-Ereignis individuell bestimmt werden kann. Die erhaltenen Schätzer werden systematisch untersucht und die Winkelauflösung des Teleskops analysiert. Anhand der Daten kann die bisher nur in der Simulation erhaltene mittlere Abweichung im räumlichen Winkel von $\Delta\Psi \approx 2.1^\circ$ bestätigt werden. Zudem wird dargelegt, dass die Winkelfehlerschätzer gut als Qualitätsparameter zur Unterdrückung von Untergründereignissen dienen können.

Die im Jahr 2000 aufgezeichneten Daten sind von der AMANDA-Kollaboration einer Suche nach Neutrino-Punktquellen unterzogen worden. Dabei geht es sowohl um die Untersuchung von 30 Kandidatenobjekten, darunter Aktive Galaktische Kerne, Mikroquasare und Supernova-Überreste, als auch darum, den gesamten Nordhimmel nach unbekanntem Quellen zu durchforsten.

Das bisher dabei zum Einsatz gebrachte Suchverfahren kann die neue Information der ereignisindividuellen Winkelauflösung nicht verwenden, da es sich im Wesentlichen nur um ein Zählverfahren handelt. Dadurch motiviert ist in dieser Arbeit ein neues Verfahren zur Suche von Neutrino-Punktquellen entwickelt worden, das auf der Methode der Maximalen a posteriori Wahrscheinlichkeit, der *Maximum Likelihood*, basiert. Darin wird die Winkelauflösung für jedes Ereignis in natürlicher Art und Weise integriert. In zukünftigen Erweiterungen lassen sich auch Energie- und weitere Informationen, die sich von Ereignis zu Ereignis unterscheiden, nahtlos einbinden.

Das Verfahren liefert als erstes und schnelles Resultat die Signifikanz, mit der ein Messergebnis sich vom Untergrund abhebt. Aufbauend auf diesen Observablen werden Konfidenzplots konstruiert, anhand derer auf obere und untere Grenzen des Flusses einer eventuellen Quelle rückgeschlossen wer-

den kann. Die erreichte Sensitivität ist vergleichbar mit derjenigen des bisherigen Verfahrens, für manche Suchrichtungen werden Verbesserungen erzielt. Die Ortsauflösung, mit der die Position einer identifizierten Quelle bestimmt wird, ist sogar um den Faktor ~ 4 verbessert, und liegt – je nach Quellstärke – bei etwa einem Grad.

Ein weiterer großer Schritt ist der Wegfall von künstlichen Suchgittern, mit denen der Himmel bei der Suche nach Quellen unbekannter Lage bisher eingeteilt worden ist. Stattdessen werden kontinuierliche Funktionen studiert, sowohl der a posteriori Wahrscheinlichkeit als auch der Signifikanz jeweils in Abhängigkeit des Ortes am Himmel.

Den statistischen Besonderheiten, die mit der Suche in einem Areal verbunden sind, wird eine ausführliche Behandlung zu Teil. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei bisher nicht verwendete Lösungsansätze in die Diskussion gebracht, um die aus statistischer Sicht optimalen Flussgrenzen aus den Daten zu gewinnen. Aber auch ohne die explizite Umsetzung dieser technisch aufwändigeren Verfahren lassen sich korrekte Resultate extrahieren.

Mit der neuen Methode wird im Neutrinodatensatz des Jahres 2000 eine Suche nach Punktquellen durchgeführt. Wie schon bei der vorherigen Suche kann keine Quelle identifiziert werden. Für die 30 untersuchten Kandidatenobjekte ergeben sich vergleichbare obere Grenzen in der Nähe der Sensitivität des Maximum-Likelihood-Verfahrens von $\bar{\Phi}_\nu^{90} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Der angegebene Neutrinofluss entspricht dem Integral eines differentiellen Flusses mit einem E_ν^{-2} -Spektrum oberhalb einer Grenzenergie von $E_{\text{Grenze}} = 10 \text{ GeV}$.

Bei der Suche am gesamten Nordhimmel sind ebenfalls alle Stellen erhöhter Signifikanz mit der erwarteten Fluktuation des Untergrundes verträglich. Die höchste obere Grenze wird zu $\Phi_{\text{max}}^{90} = 10.8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ bestimmt, während an den meisten Stellen ebenfalls Grenzen in der Nähe der Sensitivität gesetzt werden können.

Die ermittelten Resultate sind in voller Übereinstimmung mit den Ergebnissen der vorangehenden Suche, die mit dem Zählverfahren durchgeführt worden ist.

Mit Abschluss der AMANDA-Datennahme des Jahres 2003 steht die etwa fünffache Datenmenge im Vergleich zu der hier untersuchten zur Verfügung. Die erwartete Sensitivität, die damit erreicht werden kann, beträgt $\bar{\Phi}_\nu^{90} \approx (0.5 - 1.0) \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Sie liegt nur noch um einen Faktor 2 – 4 oberhalb der vorhergesagten Neutrinoflüsse der optimistischeren Modelle. Eine explizite Optimierung der Analyse für das Maximum-Likelihood-Verfahren sollte diesen Faktor nochmals verringern können.

Um die meisten gegenwärtigen Modelle testen zu können, müssen die Flussgrenzen allerdings um Faktoren von 10 – 100 verringert werden. Dazu müssen Neutrinooteleskope mit effektiven Flächen in der Größenordnung eines Quadratkilometers gebaut werden. Damit ist mit IceCUBE und den Teleskopen im Mittelmeer schon begonnen worden.

Das entwickelte Verfahren ist problemlos auf andere Experimente, insbesondere auf die größeren Neutrinooteleskope übertragbar. Es ist anwendbar bei jeglichen Detektoren, die ein Entdeckungspotenzial für Punktquellen haben. Das schließt die Luftschauer- und Fluoreszenzexperimente, mit denen die höchstenergetischen geladenen Teilchen der kosmischen Strahlung vermessen werden, explizit

mit ein. Die Methode ist aber andererseits auch einsetzbar, um *Punktsenken* zu identifizieren, wie etwa den Schatten des Mondes im Fluss der kosmischen Strahlen.

Mit den beschriebenen Eigenschaften ist das hier entwickelte neue Verfahren zur Suche nach kosmischen Neutrino-Punktquellen für zukünftige Analysen das Mittel der Wahl.

Teil IV

Anhänge

A Der Zusammenhang der Energiespektren von Neutrino- und Myonflüssen

In Kapitel 3 wird der Zusammenhang von Myonfluss und Neutrinofluss plausibel gemacht. Gleichung 3.27

$$\Phi^\mu = \Phi^\nu \cdot \sigma \cdot n \cdot \langle \tau_\mu \rangle \quad . \quad (\text{A.1})$$

wird nun unter Berücksichtigung der Energien der einzelnen Teilchen exakt hergeleitet.

Da die Energieabhängigkeiten der Flüsse, Raten und Wahrscheinlichkeiten wichtig sind, wechselt die Beschreibung zu den differentiellen Größen, die mit einem hochgestellten Index „d“ versehen werden

$$\Phi^d(E) = \frac{d\Phi}{dE}(E) \quad , \quad P^d(E) = \frac{dP}{dE}(E) \quad , \quad R^d(E) = \frac{dR}{dE}(E) \quad . \quad (\text{A.2})$$

Wir betrachten ein zylindrisches Volumen mit Grundfläche A , das von einem homogen Neutrinofluss $\Phi^\nu(E)$ durchsetzt wird. Eine dünne Scheibe der Fläche A und der Dicke d erzeugt eine Myonrate $R^d(E_\mu)$ in der Scheibe von

$$R^d(E_\mu) = \int_0^\infty dE_\nu \Phi_\nu^d(E_\nu) \cdot \sigma(E_\nu) \cdot P_y^d(E_\nu \leftrightarrow E_\mu) \cdot n \cdot A \cdot d \quad . \quad (\text{A.3})$$

Enthalten ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutrino mit Energie E_ν wechselwirkt – parametrisiert durch $\sigma(E_\nu)$ – und die (differentielle) Wahrscheinlichkeit $P_y^d(E_\nu \leftrightarrow E_\mu)$, dass gerade die Energie E_μ auf das Myon übertragen wird¹.

Die Anzahl und jeweilige Energie der Myonen, die die Grundfläche des Zylinders erreichen, hängen von den myonischen Energieverlustprozessen im Medium und der damit verbundenen Überlebenswahrscheinlichkeit ab, dass das Myon die Grundfläche überhaupt erreicht. Ausschlaggebend dafür ist die Flugstrecke des Myons und damit der Abstand x zwischen der betrachteten dünnen Scheibe und A . Die Wahrscheinlichkeit, ein mit der Energie E_μ erzeugtes Myon im Abstand x mit der Energie E anzutreffen, wird mit $P_\mu^d(E_\mu \leftrightarrow E; x)$ bezeichnet.

Um zum differentiellen Myonfluss $\Phi_\mu^d(E)$ zu gelangen, integriert man entlang des Zylinders und faltet die beiden Wahrscheinlichkeiten

$$\Phi_\mu^d(E) = n \cdot \int_0^\infty dx \int_0^\infty dE_\nu \Phi_\nu^d(E_\nu) \cdot \sigma(E_\nu) \cdot \int_0^\infty dE_\mu P_y(E_\nu \leftrightarrow E_\mu) \cdot P_\mu(E_\mu \leftrightarrow E; x) \quad . \quad (\text{A.4})$$

¹Für eine Diskussion des Energieübertrages und der Inelastizität y siehe Abschnitt 1.3.

Den totalen Fluss Φ_μ erhält man durch Integration über E.

$$\Phi_\mu = \int_0^\infty dE \Phi_\mu^d(E) \quad (\text{A.5})$$

Fasst man die Energieabhängigkeiten des differentiellen Neutrinoflusses und des Wirkungsquerschnittes in einer normierten Funktion $s^d(E_\nu)$ zusammen,

$$\Phi_\nu^d(E_\nu) \cdot \sigma(E_\nu) = \Phi_\nu \cdot \sigma_{\text{eff}} \cdot s^d(E_\nu) \quad , \quad (\text{A.6})$$

dann erhält man nach Umsortieren der Integrationsreihenfolge

$$\Phi_\mu = \Phi_\nu \cdot \sigma_{\text{eff}} \cdot n \cdot \int_0^\infty dE_\nu s^d(E_\nu) \int_0^\infty dx \int_0^\infty dE_\mu \int_0^\infty dEP_y (E_\nu \leftrightarrow E_\mu) \cdot P_\mu (E_\mu \leftrightarrow E; x) \quad . \quad (\text{A.7})$$

In diesem Ausdruck ist die Überlebenswahrscheinlichkeit $P(x; E_\nu)$ enthalten, dass ein Myon, das von einem Neutrino mit Energie E_ν erzeugt wird, nach einer Flugstrecke x noch existiert

$$P(x; E_\nu) = \int_0^\infty dE_\mu \int_0^\infty dEP_y (E_\nu \leftrightarrow E_\mu) \cdot P_\mu (E_\mu \leftrightarrow E; x) \quad . \quad (\text{A.8})$$

Der Zusammenhang zur Reichweitenverteilung $r_\mu(x; E_\nu)$ eines Myons mit Neutrinoenergie E_ν ist²

$$\int_0^\infty dx P(x; E_\nu) = \int_0^\infty dx x r_\mu(x; E_\nu) = \langle r_\mu \rangle_{E_\nu}^d \quad . \quad (\text{A.9})$$

Einsetzen in A.7 führt auf 3.27

$$\Phi_\mu = \Phi_\nu \cdot \sigma_{\text{eff}} \cdot n \cdot \langle r_\mu \rangle \quad . \quad (\text{A.10})$$

Diese relativ einfache Beziehung täuscht darüber hinweg, dass sich die Spektren von Neutrino- und Myonfluss unterscheiden.

²partielle Integration

B Verwendete Koordinatensysteme

B.1 Detektorkoordinaten

Das AMANDA-Koordinatensystem ist ein rechtshändiges, kartesisches System, das bezüglich des Detektors ortsfest ist. Es dreht sich mit der Erde mit.

- Die z -Achse steht senkrecht auf der Oberfläche an der Stelle, an der der mittlere String 4 im Eis eingelassen ist, und zeigt von der Oberfläche weg, also vor Ort nach oben.
- Die y -Achse steht senkrecht auf der z -Achse und zeigt in Richtung Greenwich. Am Südpol bezeichnet man diese Richtung auch als *Grid North*¹.
- Die x -Achse zeigt dann nach *Grid East*, damit man ein rechtshändiges, kartesisches Koordinatensystem erhält.

Der Ursprung des AMANDA-Koordinatensystems war zunächst durch das zehnte optische Modul an String 4 definiert (OM 70). Spätere Kalibrierungsmessungen haben gezeigt, dass dieses Modul eigentlich bei (1.80 m, -1.48 m, -25.90 m) bezüglich der ersten Annahmen liegt ([Wos00]). Man hat aber beschlossen, an der Position des Ursprungs festzuhalten, auch wenn er nicht an ein bestimmtes Bauteil des Detektors gebunden ist.

Die zugehörigen Kugelkoordinaten sind den üblichen Standards folgend definiert. Der Winkel zur z -Achse θ wird als *Zenit* und der Winkel ϕ zur x -Achse in der x - y -Ebene als *Azimut* bezeichnet.

Es entspricht der Konvention innerhalb der AMANDA-Kollaboration, dass für eine Spur die Richtung angegeben wird, aus der ein Teilchen kommt, und nicht diejenige, wohin es fliegt. Ein Myon aus Richtung des Nordpols, das im Detektor aufwärts läuft, hat $\theta = 180^\circ$. Ein abwärts laufendes hat $\theta = 0^\circ$. Für den Einheitsvektor der Impulsrichtung \hat{p} gilt damit

$$p_x = -\sin \theta \cos \phi \quad (\text{B.1})$$

$$p_y = -\sin \theta \sin \phi \quad (\text{B.2})$$

$$p_z = -\cos \theta \quad (\text{B.3})$$

In Abbildung B.1 a) ist das AMANDA-Koordinatensystem skizziert. Die z -Achse zeigt nach unten, in dieser Darstellung ist der Südpol ebenfalls unten. Für eine Beispielflugrichtung – gekennzeichnet durch das μ – sind die Winkel θ und ϕ eingezeichnet. Kleine Pfeile deuten jeweils die Drehrichtung an, in der die Winkel gemessen werden.

¹*Grid*: Englisch für Raster, Gitter. Eine ausgezeichnete Nordrichtung gibt es am Südpol nicht.

B.2 Deklination und Rektaszension

Um Objekte am Himmel beschreiben zu können, braucht man ein Koordinatensystem, das ortsfest bezüglich des Himmels ist. Dazu definiert man zunächst eine Referenzebene. Das ist typischerweise die Äquatorialebene der Erde, die Ebene der Ekliptik², diejenige der galaktischen Scheibe oder die supergalaktische Ebene.

Man verwendet zwei Winkelangaben zur Beschreibung eines Ortes. Eine gibt den Abstand zur Referenzebene an, wobei an Stelle des Bogenmaßes üblicherweise in Grad gemessen wird. Der andere Winkel liegt innerhalb der Ebene und wird bezüglich einer jeweils festzulegenden Richtung bestimmt.

In *äquatorialen Koordinaten* wird die Referenzebene durch die Äquatorialebene der Erde definiert. Den Winkel zur Ebene bezeichnet man als *Deklination* δ mit $\delta \in [-90^\circ, +90^\circ]$. Positive Deklinationen entsprechen Sternpositionen über der Nordhalbkugel, negative denjenigen über der Südhalbkugel.

Der Winkel innerhalb der Ebene heißt *Rektaszension*. Er wird gegen die Referenzachse gemessen, die durch den Schnitt der Äquatorialebene mit der Ekliptik entsteht. Genauer gesagt misst man den Abstand vom *Frühlingspunkt* in östlicher Richtung, wobei der Frühlingspunkt durch die Sonnenposition am Frühlingsanfang (21. März) gegeben ist. Die Rektaszension α läuft von 0 bis 24 Stunden. Die Stunden sind wie gewohnt in Minuten und Sekunden unterteilt.

Man unterscheidet bei äquatorialen Koordinaten zwischen *topozentrischem* und *geozentrischem* Beobachter, je nachdem, ob der Ursprung des Systems beim Beobachter selbst oder im Erdmittelpunkt liegt. Der Unterschied in den Winkeln ist für die Abstände, um die es bei der Neutrinoastronomie geht, völlig vernachlässigbar.

Der Zusammenhang zwischen dem Zenitwinkel in Detektorkoordinaten θ und der Deklination δ ist wegen der ausgezeichneten Lage von AMANDA in unmittelbarer Nähe des geographischen Südpols sehr einfach:

$$\delta = \theta - 90^\circ \quad . \quad (B.4)$$

Die Umrechnung zwischen Rektaszension und Azimut ist dagegen aufwändig, da sie von der Zeit abhängt. Dabei reicht es nicht aus, nur die Uhrzeit am Tag zu berücksichtigen. Ein Stern, der an einem bestimmten Tag beispielweise genau um 12:00 Uhr bei einem Azimutwinkel von $\phi = 180^\circ$ steht, ist am folgenden Tag um die gleiche Zeit bei $\phi = 181^\circ$ zu finden, weil sich Sonnen- und Sternentage unterscheiden. Innerhalb der 24 Stunden hat sich die Erde um etwa 361° gedreht.

Um es ganz exakt zu machen, muss man noch die Präzession der Erde mit einer Periode von 25770 Jahren berücksichtigen, die zu einer geringen Verschiebung des Frühlingspunktes führt.

Wichtig ist aber bei den Winkeldefinitionen von ϕ und α , dass die Richtung steigender Azimutwinkel im AMANDA-Koordinatensystem der Richtung fallender Rektaszension entspricht. Das liegt im Wesentlichen daran, dass die beiden z-Achsen der zugehörigen Koordinatensysteme sich in der Orientierung unterscheiden.

²Die Ekliptik ist die Ebene, die durch die Umlaufbewegung der Erde um die Sonne definiert ist.

B.3 Lokale Koordinaten auf der Kugeloberfläche

An zwei zentralen Stellen der vorliegenden Arbeit werden lokale Koordinatensysteme auf der Kugeloberfläche verwendet. Das ist zum Einen bei der Bestimmung der ereignisindividuellen Winkelauflösung in Abschnitt 6.1.2 und zum Anderen bei der ungebinnten Punktquellensuche in Abschnitt 8.3 der Fall.

In beiden Fällen ist die grundlegende Vorgehensweise die gleiche. Man stellt sich eine Einheitskugel um den Ursprung des verwendeten globalen Koordinatensystems vor. Jeden Punkt auf der Kugel kann man als Paar von Zenit und Azimut oder von Deklination und Rektaszension betrachten. Umgekehrt entspricht jedes Paar von Winkelkoordinaten genau einem Punkt auf der Kugel.

Ein lokales Koordinatensystem in der Umgebung eines Punktes erhält man über die Tangentialebene an diesen Punkt. Der Berührungspunkt liefert den Ursprung des lokalen Systems. Die Achsen in der Ebene sind durch die Tangenten an die Großkreise gegeben, die durch die jeweiligen Winkelkoordinaten definiert werden. Die Längen auf den Achsen werden in Grad gemessen außer für die Rektaszension, die in Stunden angegeben wird. Eine Stunde entspricht 15° . Die Unterschiede zwischen einem Koordinatensystem, das in der Tangentialebene liegt, und einem System, das der Krümmung der Kugel folgt, können dabei vernachlässigt werden (vgl. Abschnitt 6.1.2).

Der Sachverhalt wird in Abbildung B.1 b) veranschaulicht. Dort ist das kartesische AMANDA-Koordinatensystem wie in Abbildung B.1 a) eingezeichnet. Die Äquatorialebene, die von der x- und y-Achse aufgespannt wird, ist angedeutet ebenso wie eine Kugel um den Ursprung.

Für die Beispielrichtung μ ist die Tangentialebene skizziert. Innerhalb dieser Ebene sind drei Richtungen dargestellt. Die 1-Achse zeigt in Richtung wachsenden Zenits und damit wachsender Deklination. Die 3-Achse zeigt in Richtung wachsenden Azimuts, während die 2-Achse in Richtung steigender Rektaszension deutet.

Das lokale System ist Abbildung B.1 c) nochmals flach dargestellt, um explizit den Unterschied zwischen den beiden lokalen Koordinatensystemen herauszuarbeiten.

Bei der Bestimmung der ereignisindividuellen Winkelauflösung (Abschnitt 6.1.2) wird die Zenitrichtung – also die 1-Richtung – als lokale x-Koordinate und die Azimutrichtung – also die 3-Koordinate – als lokale y-Koordinate verwendet.

$$x_d \hat{=} 1\text{-Richtung} \hat{=} \theta \tag{B.5}$$

$$y_d \hat{=} 3\text{-Richtung} \hat{=} \phi \quad . \tag{B.6}$$

Bei der ungebinnten Punktquellensuche (Abschnitt 8.3) wird die Rektaszensionsrichtung – also die 2-Richtung – als lokale x-Koordinate und die Deklinationsrichtung – also die 1-Koordinate – als lokale y-Koordinate verwendet.

$$x_{\ddot{a}} \hat{=} 2\text{-Richtung} \hat{=} \alpha \tag{B.7}$$

$$y_{\ddot{a}} \hat{=} 1\text{-Richtung} \hat{=} \delta \quad . \tag{B.8}$$

Die Transformation zwischen beiden System ist durch die folgenden Gleichungen gegeben.

$$x_{\ddot{a}} = -y_d \quad (\text{B.9})$$

$$y_{\ddot{a}} = x_d \quad , \quad (\text{B.10})$$

wobei der Index „d“ die lokalen Koordinaten beschreibt, die aus den Detektorkoordinaten abgeleitet werden, und der Index „ä“ diejenigen, die aus den äquatorialen Koordinaten stammen.

Die Fehlergrößen, die man innerhalb des ersten Systems gewinnt, müssen in das zweite System transformiert werden. Die Varianzen σ_x^2 und σ_y^2 werden einfach vertauscht. Die Kovarianz ändert nur ihr Vorzeichen, weil die 2- und die 3-Achse unterschiedliche Orientierung haben. Die Definition der Kovarianz folgt in Gleichung E.7.

Beide lokalen Systeme sind rechtshändig, wenn man „von außen“ auf die Einheitskugel und ihre Tangentialebene schaut, und linkshändig, wenn man „von innen“ blickt.

Die Ansicht von innen ist bei astrophysikalischen Betrachtungen intuitiv, da man den Sternenhimmel so betrachtet. Allerdings ist es auch dann für einen Beobachter im Erdmittelpunkt so, dass, wenn steigende Deklination „nach oben“ bedeutet, steigende Rektaszension „nach links“ entspricht.

Der Unterschied zwischen Betrachtungen „von innen“ und „von außen“ wird bei der im Folgenden diskutierten Projektion in die Ebene wieder aufgegriffen.

B.4 Die Hammer-Aithoff-Projektion

Zur Darstellung der Ergebnisse, die als Funktion der Himmelskoordinaten Deklination und Rektaszension gewonnen werden, können diese Winkel in ein flaches Koordinatensystem transformiert werden. Das entspricht der Projektion der Kugeloberfläche in die Ebene.

Die Transformation, die bei vielen Darstellung in dieser Arbeit verwendet wird, heißt *Hammer-Aithoff-Projektion*. Sie zeichnet sich insbesondere durch ihre Flächentreue aus, was für die vorgestellte Punktquellensuche passend ist, da diese die Winkelauflösung der einzelnen Ereignisse explizit verwendet. Man kann aus den Bildern direkt einen Eindruck davon gewinnen, wie genau der Ort einer Quelle bestimmt werden kann.

Die Hammer-Aithoff-Projektion ist durch die folgenden Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{2} \cdot (1 + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha^\circ/2))^{-\frac{1}{2}} \\ x &= 2 \cdot t \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha^\circ/2) & \text{mit } x &\in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ y &= t \cdot \sin(\delta) & \text{mit } y &\in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Dabei ist t eine Hilfsgröße, mit Hilfe derer die Koordinaten x und y in den angegebenen Wertebereichen berechnet werden können. Anstelle der Rektaszension α wird in den Projektionsgleichungen B.11 die Größe α° verwendet. Sie wird in Grad gemessen und hängt mit α folgendermaßen zusammen:

$$\alpha^\circ = (\alpha - 12 \text{ h}) \cdot \frac{180^\circ}{12 \text{ h}} \quad (\text{B.12})$$

Die Umkehrabbildung lautet

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} \\ \alpha^\circ &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{x \cdot z}{4 \cdot z^2 - 2}\right) & \text{mit} & \quad \alpha^\circ \in [-180^\circ, 180^\circ] \\ \delta &= \arcsin(y \cdot z) & \text{mit} & \quad \delta \in [-90^\circ, 90^\circ] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Auch z ist eine Hilfsgröße, die zur abkürzenden Schreibweise verwendet wird. Die in den Gleichungen B.11 und B.13 angegebenen Wertebereiche der Variablen sind die Definitionsbereiche der Größen bei der jeweiligen Umkehrabbildung.

Die Hammer-Aithoff-Projektion ist eher durch geographische als durch astronomische Überlegungen motiviert. Daher entspricht sie der Betrachtung einer Kugel – nämlich der Erdoberfläche – „von außen“.

Bei astronomischen Darstellungen möchte man aber Bilder mit der Perspektive „von innen“ zeigen, so dass die Rektaszension nach links statt nach rechts wächst.

Dadurch ändert sich das Vorzeichen in x und die jeweils mittleren Zeilen in den Gleichungen B.11 und B.13 müssen durch die folgenden ersetzt werden.

$$x = -2 \cdot t \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha^\circ/2) \quad (\text{B.14})$$

$$\alpha^\circ = 2 \cdot \arctan\left(\frac{-x \cdot z}{4 \cdot z^2 - 2}\right) \quad (\text{B.15})$$

Diese Variation der Hammer-Aithoff-Projektion wird in allen entsprechenden Bildern dieser Arbeit verwendet.

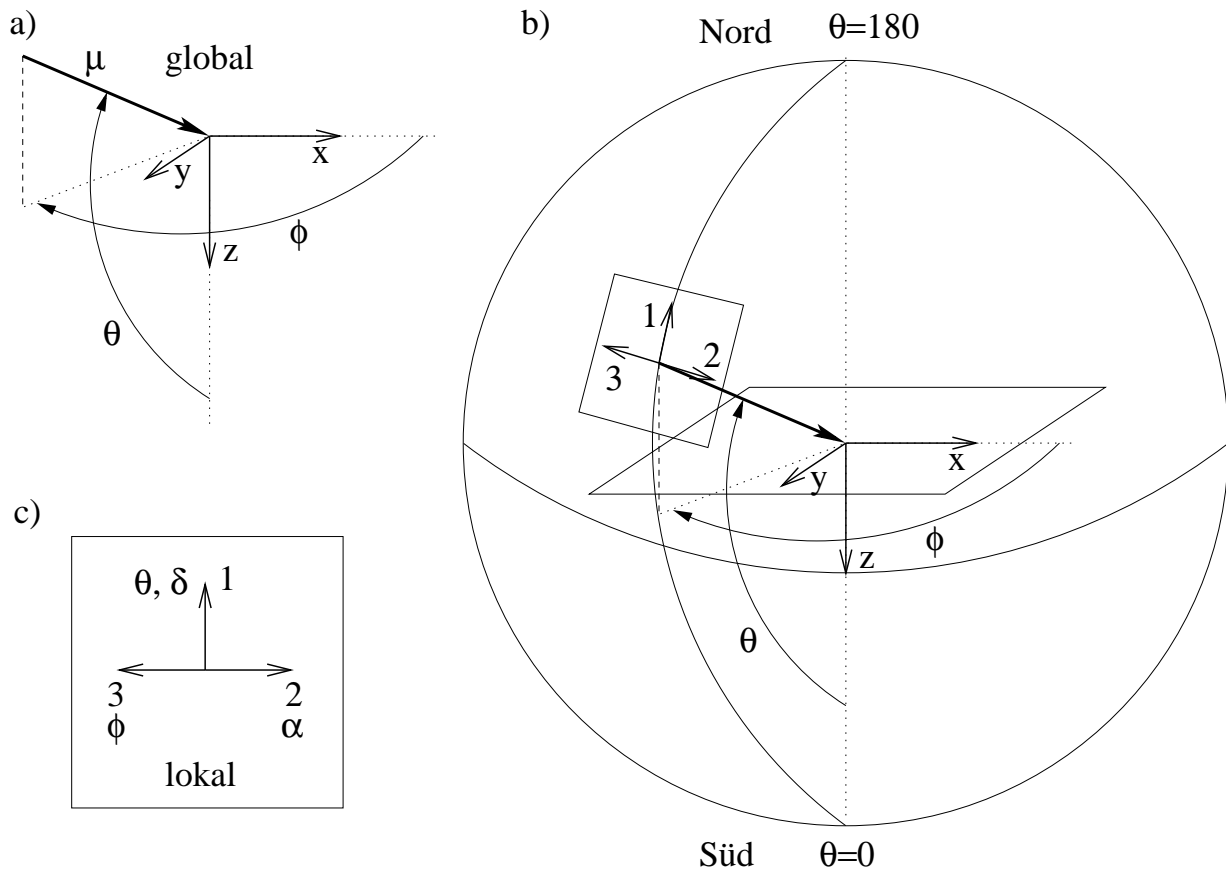


Abbildung B.1: Veranschaulichung verwendeter Koordinatensysteme. In a) ist das AMANDA-Koordinatensystem gezeigt. Die z -Achse zeigt zum Südpol. Zenit- und Azimutwinkel einer Beispielflugrichtung μ sind eingezeichnet. In b) ist zusätzlich die x - y -Ebene angedeutet, sowie eine Kugel um den Ursprung gezeigt. Die Tangentialebene senkrecht zur Flugrichtung ist zusammen mit zwei-dimensionalen Koordinatensystemen in der Ebene dargestellt. In c) ist der Zusammenhang zwischen den lokalen Richtungen 1, 2 und 3 einerseits und wachsenden Winkelrichtungen andererseits zu sehen.

C Halbanalytische Faltung der Pandelfunktion

In Kapitel 5 wird dargelegt, dass es für die korrekte Behandlung des Effektes der zeitlichen Detektorauflösung nötig ist, die Pandelfunktion (siehe Abschnitt 3.3) mit einer Gauß-Verteilung g der Breite σ_g zu falten. Im Rahmen dieser Arbeit ist ein Verfahren entwickelt worden, diese Faltung mit hinreichender Geschwindigkeit und Genauigkeit zu nähern. Dieses Verfahren soll im Folgenden vorgestellt werden.

Die Pandelfunktion $P(t)$ gibt die Ankunftszeitresiduen von Photonen an einer bestimmten Stelle im Eis an. Die eingehenden Parameter werden in den Kapiteln 3 und 5 eingehend diskutiert. Im Folgenden interessiert nur die Abhängigkeit vom Zeitresiduum $t = t_{\text{res}}$. Diese ist von der Struktur

$$P(t) = \begin{cases} c_0 \cdot e^{-c_1 \cdot t} \cdot t^{c_2} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

mit konstanten c_i . Es ist $c_0, c_1 > 0$, $c_2 > -1$ und $P(t)$ integrierbar. Für $c_2 \geq 0$ verschwindet der Pol bei $t = 0$.

Die Faltung lautet dann

$$(p * g)(\tilde{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \cdot g(\tilde{t} - t) dt \quad (\text{C.2})$$

$$= \underbrace{\frac{c_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_g}}_{c'_0} \int_0^{\infty} t^{c_2} \cdot \exp\left(-c_1 \cdot t - \frac{(\tilde{t} - t)^2}{2\sigma_g^2}\right) dt \quad . \quad (\text{C.3})$$

Für die numerische Evaluation schränkt man zunächst das Intervall ein, auf dem man das Integral ausgewertet wird. Es zeigt sich, dass eine Umgebung um den Punkt \tilde{t} von drei Standardabweichungen in beiden Richtungen ausreicht. Für das Evaluationsintervall $I = [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$ gilt

$$t_{\text{min}} = \max\{0, (\tilde{t} - 3 \cdot \sigma_g)\} \quad , \quad t_{\text{max}} = \tilde{t} + 3 \cdot \sigma_g \quad . \quad (\text{C.4})$$

Zur tatsächlichen Integration zerlegt man das Intervall I in n Teilintervalle $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ mit $i \in \{1..n\}$. Innerhalb jeden Intervalles nähert man den Exponentialanteil $f_e(t)$ in Gleichung C.3

$$f_e(\tilde{t}, t) = \exp\left(-c_1 \cdot t - \frac{(\tilde{t} - t)^2}{2\sigma_g^2}\right) \quad (\text{C.5})$$

als konstant und berechnet seinen Wert an der Intervallmitte $m_i = \frac{1}{2} (t_i - t_{i-1})$. Den verbleibenden Teil unter dem Integral kann man analytisch integrieren. Es ist

$$(p * g)(\tilde{t}) = c'_0 \sum_{i=1}^n \left(f_e(\tilde{t}, m_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{c_2} dt \right) \quad (\text{C.6})$$

$$= \frac{c'_0}{c_2 + 1} \sum_{i=1}^n f_e(\tilde{t}, m_i) \cdot [t^{c_2+1}]_{t_{i-1}}^{t_i} . \quad (\text{C.7})$$

	$d_{\text{eff}} \leq 10 \text{ m}$	$10 \text{ m} < d_{\text{eff}} \leq 20 \text{ m}$	$20 \text{ m} < d_{\text{eff}}$
$\tilde{t} \leq 3 \cdot \sigma_g$	1 ns	3 ns	5 ns
$\tilde{t} > 3 \cdot \sigma_g$	5 ns	15 ns	15 ns

Tabelle C.1: Wahl der Teilintervallbreite in der halbanalytischen Faltung. Als Parameter werden das Zeitresiduum \tilde{t} und der effektive Abstand d_{eff} verwendet. Die angegebenen Werte gelten für $\sigma_g = 15 \text{ ns}$.

Die Wahl der Teilintervallbreite erfolgt in Abhängigkeit von \tilde{t} und des effektiven Abstandes d_{eff} (siehe Abschnitt 5.2.2). Je größer d_{eff} , desto schwächer wird der Pol der Pandelfunktion bei $t = 0$ und man kommt mit weniger Stützstellen aus. Analog kann man die Zahl der Intervalle für große \tilde{t} verringern. Die Wahl der Teilintervallbreite entnimmt man Tabelle C.1. Sie ist für $\sigma_g = 15 \text{ ns}$ optimiert.

Je größer die Intervalle I_i sind, desto weniger Rechenschritte sind nötig und desto schneller wird der Algorithmus. Man achtet darauf, dass die Abweichung vom korrekten Ergebnis nur im Prozentbereich liegen. Dann hat man keine Auswirkungen auf die Rekonstruktionsergebnisse.

Insgesamt ist die Rechengeschwindigkeit um etwa den Faktor vier langsamer als die zusammengesetzte Version, was bei den schneller werdenden Computern immer weniger ins Gewicht fällt.

D Die Herleitung der Poisson-gesättigten Amplitude

In Kapitel 5 wird die Poisson-gesättigte Amplitude p_μ diskutiert. Gleichung 5.19 lautet

$$p_\mu(t_{\text{res}}) = c \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\mu^N e^{-\mu}}{N!} \cdot p_N^1(t_{\text{res}}) = \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot e^{-\mu P(t_{\text{res}})} \quad . \quad (\text{D.1})$$

mit der Bezeichnung

$$P(t_{\text{res}}) = \int_{-\infty}^{t_{\text{res}}} p(t) dt \quad . \quad (\text{D.2})$$

Die MPE-Pandelfunktion p_N^1 lautet (Gleichung 5.18)

$$p_N^1(t_{\text{res}}) = N \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot \left(\int_{t_{\text{res}}}^{\infty} p(t) dt \right)^{(N-1)} = N \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot (1 - P(t_{\text{res}}))^{(N-1)} \quad (\text{D.3})$$

Damit ist der Zusammenhang D.1 folgendermaßen einzusehen.

$$p_\mu(t_{\text{res}}) = c \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\mu^N e^{-\mu}}{N!} \cdot p_N^1(t_{\text{res}}) \quad (\text{D.4})$$

$$= c \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\mu^N e^{-\mu}}{N!} \cdot N \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot (1 - P(t_{\text{res}}))^{(N-1)} \quad (\text{D.5})$$

$$= c \cdot \mu \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot e^{-\mu} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{[\mu \cdot (1 - P(t_{\text{res}}))]^{(N-1)}}{(N-1)!} \quad (\text{D.6})$$

$$= c \cdot \mu \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot e^{-\mu} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{[\mu \cdot (1 - P(t_{\text{res}}))]^N}{N!} \quad (\text{D.7})$$

$$= c \cdot \mu \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot e^{-\mu} \cdot e^{\mu \cdot (1 - P(t_{\text{res}}))} \quad (\text{D.8})$$

$$= c \cdot \mu \cdot p(t_{\text{res}}) \cdot e^{-\mu \cdot P(t_{\text{res}})} \quad . \quad (\text{D.9})$$

D Die Herleitung der Poisson-gesättigten Amplitude

Die Normierungskonstante c erhält man über das Integral von $p_\mu(t_{\text{res}})$.

Es ist

$$1 \stackrel{!}{=} c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_\mu(t) dt \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot p(t) \cdot e^{-\mu \cdot P(t)} dt \quad (\text{D.11})$$

$$= \left[-e^{-\mu \cdot P(t)} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (\text{D.12})$$

$$= 1 - e^{-\mu} \quad (\text{D.13})$$

mit

$$P(-\infty) = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$P(\infty) = 1 \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = p(t) \quad . \quad (\text{D.16})$$

Damit ist die Poisson-gesättigte Amplitude in Gleichungen 5.19 und D.1 hergeleitet.

E Das Konzept und die Methoden der *Maximum Likelihood*

Likelihood-Betrachtungen liegen einem großen Teil der vorliegenden Arbeit als technische Hilfsmittel zu Grunde. Im Folgenden wird eine Übersicht der Grundlagen und Begriffe gegeben (siehe auch [Bra99]).

E.1 Die Grundlagen der Maximum Likelihood

E.1.1 Einführung der Begriffe im eindimensionalen Fall

Man betrachte eine eindimensionale Gauß-Verteilung mit Mittelwert μ und Breite σ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x; \mu, \sigma)$, einen Wert x daraus zu messen ist

$$p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad (\text{E.1})$$

Dabei ist x die Zufallsvariable und μ und σ sind Parameter.

Hat man umgekehrt x gemessen kann man Gleichung E.1 uminterpretieren: wie wahrscheinlich war es, x als Messwert erhalten zu haben? Jetzt ist x ein Parameter und man betrachtet die Funktion $\mathcal{L}(\mu; x, \sigma)$ in Abhängigkeit von μ . Das ist aber keine Wahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne, weil x , das wahre μ und σ schon feststehen, und damit kein Zufall mehr im Spiel ist. Es ist eine *a posteriori* Wahrscheinlichkeit, oder *Likelihood*.¹

Als Schätzer für den gesuchten Wert μ nimmt man dasjenige $\hat{\mu}$, das die größte Likelihood $\mathcal{L}(\mu; x, \sigma)$ aufweist. Hat man eine Reihe an Messungen mit unterschiedlichen Fehlern (x_i, σ_i) , so multipliziert man die Wahrscheinlichkeitsdichten und damit die Likelihood-Funktionen auf.

¹Im Englischen unterscheidet man die Begriffe *probability* und *likelihood*, um den Unterschied zwischen a priori und a posteriori Wahrscheinlichkeiten klarzustellen. Im Deutschen gibt es nur den Begriff *Wahrscheinlichkeit*, der mit echt zufälligen Vorgängen assoziiert ist, das bedeutet mit *a priori* Wahrscheinlichkeiten. Daher hat sich die Verwendung des Begriffes *Likelihood* auch im Deutschen zur deutlichen Abgrenzung durchgesetzt.

Man betrachtet dann den negativen Logarithmus der Likelihood. Das ändert nichts an der Lage der Extremstellen, aber aus Produkten von Wahrscheinlichkeiten werden Summen. Es ist rechentechnisch einfacher.

$$l = -\ln \mathcal{L} = \sum_i \left(\ln(\sqrt{2\pi}\sigma_i) + \frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i - \mu)^2 \right) \quad . \quad (\text{E.2})$$

Die Forderung nach einer maximalen Likelihood ($\frac{\partial l}{\partial \mu} \stackrel{!}{=} 0$) führt direkt auf den bekannten Zusammenhang

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad . \quad (\text{E.3})$$

Allgemein kann man festhalten: Wann immer eine Likelihood-Funktion gegeben ist, dann ist ihre Extremalstelle $\hat{\mu}$ ein guter Schätzer für μ . Ein Maximum von \mathcal{L} entspricht einem Minimum der Loglikelihood-Funktion l .

Die Likelihood-Funktion enthält auch Informationen über den Fehler der Schätzung. Dazu betrachtet man wiederum den Fall einer Einzelmessung mit Ergebnis x . Es interessiert das Verhalten in der Nähe des Minimums. Entfernt man sich von dem Extremum $\hat{\mu} = x$ um einen Wert a , dann ändert sich l um Δl . Es ist

$$\Delta l(a) = l((x \pm a); x, \sigma) - l(x; x, \sigma) = \frac{1}{2\sigma^2}(\pm a)^2 - 0 \quad (\text{E.4})$$

Die Loglikelihood ändert sich um $\frac{1}{2}$, wenn man sich um eine Standardabweichung entfernt hat. Allgemein folgt aus der Forderung

$$\Delta l(a) = \frac{1}{2} \cdot n^2 \quad , \quad (\text{E.5})$$

dass $a = n \cdot \sigma$ für jedes n . Für $n = 1$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert μ im Intervall $I = [x - a, x + a]$ liegt, gleich 68.3%. Das Intervall I nennt man *Konfidenzintervall*, bzw. *Ein-Sigma-Konfidenzintervall*.

Die logarithmische Likelihood-Funktion (Gleichung E.2) beschreibt eine Parabel. Eine Parabel ist vollständig beschrieben durch die Lage des Scheitels und die Krümmung am Scheitel. Der Parameter, der die Krümmungsinformation enthält, ist $\frac{1}{2\sigma^2}$. Man muss in diesem Fall nur die Eigenschaften der Funktion an ihrem Minimum kennen, um Schätzer für μ und σ zu erhalten, weil aus der Krümmung schon abzulesen ist, wie weit man sich vom Minimum entfernen muß, damit sich der Funktionswert um $\frac{1}{2}$ ändert. Die Krümmung ist die zweite Ableitung $l'' = \frac{1}{\sigma^2}$.

Die Situation ist anders, wenn die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsfunktion keine Gauß-Funktion ist. Dann ist l auch nicht parabelförmig. Damit verliert ein Intervall, dessen Grenzen durch die Bedingung in Gleichung E.5 definiert ist, seine Eigenschaft, den wahren Wert des Parameters mit

der entsprechenden Wahrscheinlichkeit zu enthalten. Es entspricht aber der gängigen Konvention, das Intervall für $n = 1$ anzugeben.

Bemerkung: Bei den bisherigen Betrachtungen ist man davon ausgegangen, dass die Breite der Gauß-Verteilung explizit bekannt ist. Die Breite ist auch explizit in der Likelihood-Funktion verwendet worden. Das ist für viele Anwendungen eine realistische Situation, da man für viele Messgeräte, die man verwendet, die Auflösung kennt.

Entnimmt man einem Satz an Messpunkten jedoch gleichzeitig Schätzer für den wahren Wert $\hat{\mu}$ und die Breite der Messverteilung $\hat{\sigma}$, dann folgt der Quotient der beiden $t = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$ im Gegensatz zu $\frac{\hat{\mu}}{\sigma}$ keiner Gauß-Form. Die Verteilung ist stattdessen eine *Student's t Verteilung*. Sie hat bei f Freiheitsgraden die Form

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(f + 1))}{\Gamma(\frac{1}{2}f)\sqrt{\pi}\sqrt{f}} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{1}{2}(f+1)} \quad (E.6)$$

Dabei ist $\Gamma(x)$ die *Gammafunktion*, die kontinuierliche Erweiterung der Fakultät ([Bra99]).

Wenn man im nicht-gaußischen Fall den Verlauf der Likelihood-Funktion mit anderen Methoden erhalten kann, zum Beispiel durch eine vollständige Monte-Carlo-Simulation des Messvorganges, dann ist die zu Grunde liegende Auflösung implizit bekannt. Sie geht in die Simulation und dadurch in die Messung ein. Mittels der Konstruktion des Konfidenzintervalles extrahiert man die implizite Information über die Genauigkeit der Messung und stellt sie explizit dar.

Zusammenfassung: Im Fall einer Gauß-verteiltern Zufallsgröße ist die negative logarithmische Likelihood-Funktion l eine Parabel. Aus der Position des Scheitels (des Minimums) erhält man einen Schätzer für den gesuchten Parameter, aus der Krümmung am Scheitel eine Schätzung für den zugehörigen Fehler. Im nicht-gaußischen Fall liefert die Bedingung in Gleichung E.5 das Fehlerintervall, wenn man nicht explizit Konfidenzintervalle konstruieren will oder kann.

E.1.2 Verallgemeinerung auf den zwei- und mehrdimensionalen Fall

Jetzt wird die Situation auf eine zweidimensionale Gauß-Verteilung erweitert. Die Schreibweise wird so gewählt, dass eine weitere Verallgemeinerung auf n Parameter das Aussehen der Formeln nicht ändert.

Der Mittelwert ist $\vec{\mu}$. Das, was im eindimensionalen Fall die Breite σ ist, wird jetzt zu einer quadratischen Matrix, die die beiden Breiten $\sigma_{1,2}$ und die Kovarianz² $\text{cov}(x_1, x_2)$ enthält. Die *Kovarianzmatrix* C ist symmetrisch.

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(x_1, x_2) \\ \text{cov}(x_1, x_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (E.8)$$

²Die Kovarianz zweier Größen x_1 und x_2 mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_1, x_2)$ ist

$$\text{cov}(x_1, x_2) = \int (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad (E.7)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\vec{x}; \vec{\mu}, C)$, ein Wertepaar $\vec{x} = (x_1, x_2)$ zu messen ist

$$p(\vec{x}; \vec{\mu}, C) = \frac{\sqrt{\det C^{-1}}}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T C^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})} \quad . \quad (\text{E.9})$$

Die negative Loglikelihood-Funktion lautet

$$l(\vec{\mu}; \vec{x}, C) = -\ln \frac{\sqrt{\det C^{-1}}}{2\pi} + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}) \quad (\text{E.10})$$

In mehreren Dimensionen wird aus der Parabel des eindimensionalen Falles ein Paraboloid. Wiederum genügen die Eigenschaften am Scheitel, um alle Informationen zu erhalten, und wiederum erhält man die Krümmung mittels zweifacher Differentiation. Die Inverse der Kovarianzmatrix ist gleich der Hesse-Matrix an der Stelle $\vec{\mu}$.

$$\left(\frac{\partial^2 l}{\partial_i \partial_j} \right) = C^{-1} \quad (\text{E.11})$$

In zwei Dimensionen wird aus dem Konfidenzintervall eine Konfidenzellipse. Die 1σ -Ellipse ist definiert als die Menge aller Orte, an denen die Likelihood-Funktion um den Faktor $e^{-\frac{1}{2}}$ abgefallen ist. Gleichung E.5 gilt weiterhin. Daraus erhält man die Ellipsengleichung

$$(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}) = n^2 \quad (\text{E.12})$$

Wenn man sich die Gauß-Verteilung als Gebirge über der Parameterebene vorstellt, dann erhält man die Ellipse als Schnitt mit einer dazu parallelen Ebene. Die Wahrscheinlichkeit, dass *beide* wahren Parameter *gleichzeitig* innerhalb der Kovarianzellipse sind, beträgt 39.35%. Das ist weniger als die Wahrscheinlichkeit von 68.23% im eindimensionalen Fall, weil die Aussage stärker ist. Es ist auch weniger als die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Parameter in ihren jeweiligen eindimensionalen 1σ -Intervallen sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür wäre $46.55\% = 68.23\% \cdot 68.23\%$.

Um diesen Sachverhalt näher zu beleuchten, folgt ein Beispiel. In Abbildung E.1 ist in einem zweidimensionalen Koordinatensystem eine Konfidenzellipse gezeigt. Die beiden Parameter auf den Achsen heißen μ_1 und μ_2 . Die Korrelation der beiden äußert sich darin, dass die Symmetrieachsen der Ellipse gegen die Koordinatenachsen verkippt sind.

Im unkorrelierten Fall zerfällt die zweidimensionale Gauß-Verteilung aus Gleichung E.9 in ein Produkt von zwei eindimensionalen Verteilungen der Form von Gleichung E.1. Da diese bezüglich ihres Erwartungswertes jeweils symmetrisch sind, muß auch die zugehörige Konfidenzellipse dieses Verhalten zeigen. Die Halbachsen liegen dann parallel zu den Koordinatenachsen.

Daraus kann man direkt ableiten, dass es immer ein Koordinatensystem gibt, in dem die Korrelationen verschwinden. Man erreicht es durch eine Drehung im Parameterraum, so dass die neuen Koordinatenachsen durch die Halbachsen der Konfidenzellipse gegeben sind.

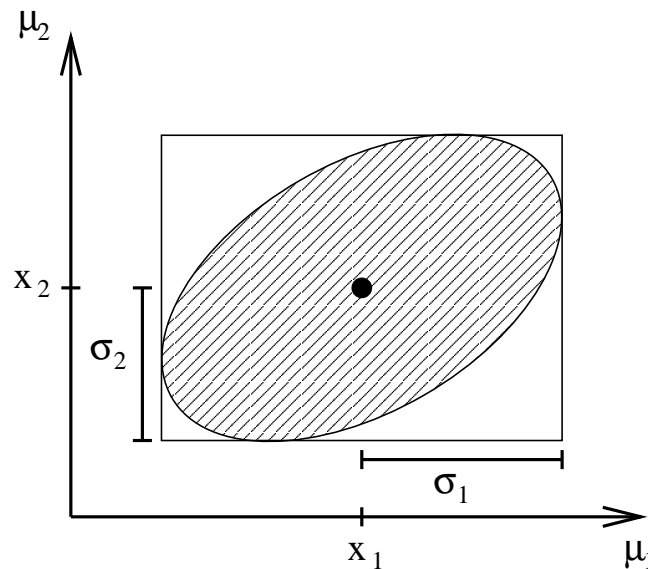


Abbildung E.1: Konfidenzellipse einer zweidimensionalen Gauß-Verteilung. Es ist $\sigma_1 = 2.1$, $\sigma_2 = 1.6$ und $\text{cov}(x_1, x_2) = 1.6$ in willkürlichen Einheiten. Die Ellipse ist um 30° gegen die x -Achse verkippt. Das umschreibende Rechteck hat die Kantenlängen von jeweils der doppelten Breite der eindimensionalen Verteilungen.

Betrachtet man nur eine der beiden Variablen (x_1), dann erhält man ihre Verteilung durch eine Integration über den gesamten Definitionsbereich der anderen (x_2). Man kann direkt nachrechnen, dass die so erhaltene Verteilung von x_1 eine Gauß-Verteilung mit der Breite σ_1 ist. Die geometrische Aussage ist in Abbildung E.1 durch das Rechteck eingezeichnet, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und das die Konfidenzellipse berührt. Die Kantenlängen des Rechteckes sind gerade doppelt so groß wie die Standardabweichungen. Das rechnet man mit der Ellipsengleichung E.12 nach. Die oben erwähnten 46.6% entsprechen dem Integral der zweidimensionalen Gauß-Verteilung über dem Rechteck.

Die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen ist problemlos. Konfidenzellipsen werden Ellipsoide. Allerdings verringert sich die Wahrscheinlichkeit, *alle* Parameter gleichzeitig innerhalb der 1σ -Umgebung zu finden mit jeder weiteren Dimension. Manchmal findet man deshalb in der Literatur die Angabe von Bereichen, die einer Gesamtwahrscheinlichkeit von 68.3% entsprechen.

E.2 Parabeldarstellungen

Der Paraboloid der negativen logarithmischen Likelihood-Funktion ist in Gleichung E.10 in folgender Form geschrieben

$$f(x; A, \vec{b}, c) = c + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{b} | A (\vec{x} - \vec{b}) \rangle \quad (\text{E.13})$$

$$= c + \frac{1}{2} \langle \vec{b} | A \vec{b} \rangle - \langle \vec{x} | A \vec{b} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x} | A \vec{x} \rangle \quad (\text{E.14})$$

Diese Form wird hier als *Standarddarstellung* bezeichnet. Wenn man die Klammern ausmultipliziert, gelangt man zur Darstellung als Polynom $f(\vec{x}; \alpha, \vec{\beta}, \Gamma)$. Es ist

$$f(\vec{x}; \alpha, \vec{\beta}, \Gamma) = \alpha + \langle \vec{\beta} | \vec{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x} | \Gamma \vec{x} \rangle \quad . \quad (\text{E.15})$$

Man hat jeweils einen Skalar (a und α), einen Vektor (\vec{b} und $\vec{\beta}$) und eine symmetrische Matrix (A, Γ) zur Beschreibung. Die Hin- und Rücktransformation der jeweiligen Größen lauten

$$\Gamma = A \quad (\text{E.16})$$

$$\vec{\beta} = -A\vec{b} \quad (\text{E.17})$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \langle \vec{b} | A \vec{b} \rangle + c \quad (\text{E.18})$$

$$A = \Gamma \quad (\text{E.19})$$

$$\vec{b} = -\Gamma^{-1} \vec{\beta} \quad (\text{E.20})$$

$$c = \alpha - \frac{1}{2} \langle \vec{b} | A \vec{b} \rangle = \alpha - \frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1} \vec{\beta} | \Gamma \Gamma^{-1} \vec{\beta} \rangle = \alpha - \frac{1}{2} \langle \vec{\beta} | \Gamma^{-1} \vec{\beta} \rangle \quad (\text{E.21})$$

Wenn Γ nicht invertierbar ist, dann entspricht das einer entarteten Parabel. Eine Transformation in die Standarddarstellung schlägt fehl.

E.3 Analytische Anpassung mit der Methode der kleinsten Quadrate

In Abschnitt 6.1 wird ein Paraboloid mit der Methode der kleinsten Quadrate angepasst. Die verwendeten Formeln sind im Folgenden aufgeführt.

Die Bedingung, dass alle partiellen Ableitungen von χ^2 nach den Parametern verschwinden sollen, lauten im einzelnen

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (\alpha + \langle \vec{\beta} | \vec{x}_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x}_i | \Gamma \cdot \vec{x}_i \rangle - y_i) \cdot 1 \quad (\text{E.22})$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial (\vec{\beta})_m} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (\alpha + \langle \vec{\beta} | \vec{x}_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x}_i | \Gamma \cdot \vec{x}_i \rangle - y_i) \cdot (\vec{x}_i)_m \quad (\text{E.23})$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial (\Gamma)_{mm}} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (\alpha + \langle \vec{\beta} | \vec{x}_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x}_i | \Gamma \cdot \vec{x}_i \rangle - y_i) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\vec{x}_i)_m^2 \quad (\text{E.24})$$

$$\left. \frac{\partial \chi^2}{\partial (\Gamma)_{mp}} \right|_{m \neq p} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (\alpha + \langle \vec{\beta} | \vec{x}_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x}_i | \Gamma \cdot \vec{x}_i \rangle - y_i) \cdot (\vec{x}_i)_m \cdot (\vec{x}_i)_p \quad . \quad (\text{E.25})$$

Das daraus resultierende Gleichungssystem in sechs Dimensionen lautet

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum \phi_i & \sum \theta_i & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 & \sum \phi_i \theta_i & \frac{1}{2} \sum \theta_i^2 \\ \sum \phi_i & \sum \phi_i^2 & \sum \phi_i \theta_i & \frac{1}{2} \sum \phi_i^3 & \sum \phi_i^2 \theta_i & \frac{1}{2} \sum \phi_i \theta_i^2 \\ \sum \theta_i & \sum \phi_i \theta_i & \sum \theta_i^2 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 \theta_i & \sum \phi_i \theta_i^2 & \frac{1}{2} \sum \theta_i^3 \\ \sum \phi_i^2 & \sum \phi_i^3 & \sum \phi_i^2 \theta_i & \frac{1}{2} \sum \phi_i^4 & \sum \phi_i^3 \theta_i & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 \theta_i^2 \\ \sum \phi_i \theta_i & \sum \phi_i^2 \theta_i & \sum \phi_i \theta_i^2 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^3 \theta_i & \sum \phi_i^2 \theta_i^2 & \frac{1}{2} \sum \phi_i \theta_i^3 \\ \sum \theta_i^2 & \sum \phi_i \theta_i^2 & \sum \theta_i^3 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 \theta_i^2 & \sum \phi_i \theta_i^3 & \frac{1}{2} \sum \theta_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ (\vec{\beta})_1 \\ (\vec{\beta})_2 \\ (\Gamma)_{11} \\ (\Gamma)_{12} \\ (\Gamma)_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \phi_i \\ \sum y_i \theta_i \\ \sum y_i \phi_i^2 \\ \sum y_i \phi_i \theta_i \\ \sum y_i \theta_i^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.26})$$

Verwendet man die Symmetriebedingung an die Stützstellen (vgl. Abschnitt 6.1.3), dann vereinfacht sich das Problem zu

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 & 0 & \frac{1}{2} \sum \theta_i^2 \\ 0 & \sum \phi_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \theta_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sum \phi_i^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^4 & 0 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 \theta_i^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum \phi_i^2 \theta_i^2 & 0 \\ \sum \theta_i^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 \theta_i^2 & 0 & \frac{1}{2} \sum \theta_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ (\vec{\beta})_1 \\ (\vec{\beta})_2 \\ (\Gamma)_{11} \\ (\Gamma)_{12} \\ (\Gamma)_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \phi_i \\ \sum y_i \theta_i \\ \sum y_i \phi_i^2 \\ \sum y_i \phi_i \theta_i \\ \sum y_i \theta_i^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.27})$$

und zerfällt damit in drei unabhängige Gleichungen

$$\sum \phi_i^2 \cdot (\vec{\beta})_1 = \sum y_i \phi_i \quad (\text{E.28})$$

$$\sum \theta_i^2 \cdot (\vec{\beta})_2 = \sum y_i \theta_i \quad (\text{E.29})$$

$$\sum \phi_i^2 \theta_i^2 \cdot (\Gamma)_{12} = \sum y_i \phi_i \theta_i \quad (\text{E.30})$$

und ein dreidimensionales System

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 & \frac{1}{2} \sum \theta_i^2 \\ \sum \phi_i^2 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^4 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 \theta_i^2 \\ \sum \theta_i^2 & \frac{1}{2} \sum \phi_i^2 \theta_i^2 & \frac{1}{2} \sum \theta_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ (\Gamma)_{11} \\ (\Gamma)_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \phi_i^2 \\ \sum y_i \theta_i^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.31})$$

F Mathematische Eigenschaften der Punktquellen-Likelihood-Funktion

F.1 Definitionen und Begriffe

Die Likelihood-Funktion für ein einzelnes Ereignis \mathcal{L}_i wird in Kapitel 8 eingeführt. Sie lautet

$$\mathcal{L}_i = s \cdot \text{sg}(x_0; \vec{x}_i, \sigma_i) + (1 - s) \cdot \text{bg}(\vec{x}_i) \quad . \quad (\text{F.1})$$

Die Likelihood-Funktion \mathcal{L} eines Ensembles von N Ereignissen ist

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^N \mathcal{L}_i \quad . \quad (\text{F.2})$$

Die negativen Logarithmen werden jeweils mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Es ist

$$l_i = -\ln \mathcal{L}_i \quad (\text{F.3})$$

$$l = -\ln \mathcal{L} \quad (\text{F.4})$$

$$= -\sum_{i=1}^N \ln \mathcal{L}_i \quad . \quad (\text{F.5})$$

Ereignisse, bei denen die Signal- und Untergrund-Likelihood exakt gleich groß sind, tragen keine Information ($\mathcal{L}_i = \text{const}$) und werden nicht verwendet. Ereignisse mit nicht-positiver Untergrund-Likelihood werden nicht beachtet. Sie liegen außerhalb des Bereiches, den man für seine Beobachtung verwenden möchte. Damit ist

$$0 < \text{bg}_i \leq 1 \quad \text{und} \quad (\text{F.6})$$

$$0 \leq \text{sg}_i \leq 1 \quad (\text{F.7})$$

mit

$$\text{sg}_i = \text{sg}(x_0; \vec{x}_i, \sigma_i) \quad \text{und} \quad (\text{F.8})$$

$$\text{bg}_i = \text{bg}(\vec{x}_i) \quad . \quad (\text{F.9})$$

Für festes x_0 ist $\mathcal{L}_i(s)$ eine Gerade. Es ist

$$\mathcal{L}_i(s = 0) = \text{bg}_i \quad (\text{F.10})$$

$$\mathcal{L}_i(s = 1) = \text{sg}_i \quad (\text{F.11})$$

$$(\text{F.12})$$

F.2 Nullstellen und Extrema

Im Folgenden sollen die Eigenschaften der Funktionen $\mathcal{L}(s)$ und $l(s)$ für festes x_0 diskutiert werden. Der physikalisch leicht zu interpretierende Teil des Definitionsbereiches ist das Intervall $s \in I_s = [0, 1]$. Das entspricht einem Anteil der Signalereignisse zwischen 0% und 100% an allen N Ereignissen im Beobachtungsfenster. Man sucht ein Minimum der Funktion $l(s)$, das nicht notwendigerweise in $[0, 1]$ liegen muss. Allerdings hat $l(s)$ ein *garantiertes* Minimum, wenn man das Intervall I_s etwas erweitert. Die Interpretation von Lage und Höhe des Minimums ist Teil der Methode, die in Kapitel 8 dargestellt wird. In diesem Anhang geht es um die *mathematischen* Eigenschaften der Funktionen.

Aus den Gleichungen F.6 und F.7 folgt

$$0 < \mathcal{L}_i(s) \leq 1 \quad \text{für } s \in [0, 1[\quad (\text{F.13})$$

und damit

$$0 < \mathcal{L}(s) \leq 1 \quad \text{für } s \in [0, 1[\quad . \quad (\text{F.14})$$

$\mathcal{L}(s)$ ist ein Polynom des Grades N mit N reellen Nullstellen. Das geht aus der Produktdarstellung der Konstruktion in Gleichung F.2 hervor. Zwischen zwei Nullstellen hat dieses Polynom genau ein lokales Extremum.

Alle L_i mit positiver Steigung, also mit $sg_i > bg_i$, haben ihre Nullstelle s_0^i links der Null, alle L_i mit negativer Steigung rechts (oder auf) der Eins. Es sei

$$s_{\min} := \max\{s_0^i | s_0^i < 0\} \quad (s_{\min} < 0) \quad (\text{F.15})$$

$$s_{\max} := \max\{s_0^i | s_0^i \geq 1\} \quad (s_{\max} \geq 1) \quad . \quad (\text{F.16})$$

Wenn s_{\min} und s_{\max} wohldefiniert sind, wenn es also jeweils mindestens ein Ereignis mit positiver und negativer Steigung gibt, dann ist

$$\mathcal{L}(s) > 0 \quad \text{für } s \in I_{\hat{s}} :=]s_{\min}, s_{\max}[\quad \text{und} \quad (\text{F.17})$$

$$\mathcal{L}(s) = 0 \quad \text{für } s = s_{\min}, s_{\max} \quad . \quad (\text{F.18})$$

Dazwischen gibt es genau ein garantiertes Extremum bei \hat{s} . Dieses Extremum kann außerhalb des einfach zu interpretierenden Intervalles $[0, 1]$ liegen. Die Interpretation erfolgt im Rahmen der Methode der Punktquellensuche (siehe Abschnitt 8.2).

Die Intervallgrenzen s_{\min} und s_{\max} von $I_{\hat{s}}$ sind einfach zu bestimmen, da die s_0^i Nullstellen von Polynomen ersten Grades mit bekannten Koeffizienten sind.

Wenn $bg_i > sg_i$ für alle i , dann fehlt die Nullstelle des Polynoms links von $[0, 1]$. Folglich gibt es kein Minimum der Loglikelihood-Funktion im gesuchten Bereich. Als besten Schätzer kann man $\hat{s} = 0$ wählen, weil man kein Ereignis gesehen hat, das man dem Signal zurechnen würde. Allerdings verliert man dabei das Gauß-Verhalten durch statistische Schwankungen. Das wird auch in Abschnitt 8.2 diskutiert. Für $sg_i > bg_i \forall i$ fehlt analog die Nullstelle rechts der Eins und man kann $\hat{s} = 1$ setzen.

F.3 Die ersten und zweiten Ableitungen

Die erste Ableitungen der Funktionen lauten

$$\mathcal{L}'_i = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial s} = \text{sg}_i - \text{bg}_i \quad , \quad (\text{F.19})$$

$$\mathcal{L}'(s) = \frac{\partial \mathcal{L}(s)}{\partial s} = \mathcal{L}(s) \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}_i(s)} \quad , \quad (\text{F.20})$$

$$l'(s) = \frac{\partial l(s)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} - \ln \mathcal{L}(s) = -\frac{\mathcal{L}'(s)}{\mathcal{L}(s)} = -\sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}_i(s)} \quad . \quad (\text{F.21})$$

$$(\text{F.22})$$

Die zweiten Ableitungen der Funktionen lauten

$$\mathcal{L}''_i = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_i}{\partial s^2} = 0 \quad , \quad (\text{F.23})$$

$$\mathcal{L}''(s) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(s)}{\partial s^2} = \mathcal{L}(s) \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}_i(s)} \cdot \frac{\mathcal{L}'_j}{\mathcal{L}_j(s)} \quad , \quad (\text{F.24})$$

$$l''(s) = \frac{\partial^2 l(s)}{\partial s^2} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}_i(s)} \right) \quad (\text{F.25})$$

$$= -\sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{L}''_i \mathcal{L}_i - \mathcal{L}'_i{}^2}{\mathcal{L}_i(s)^2} \quad (\text{F.26})$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}_i(s)} \right)^2 \quad . \quad (\text{F.27})$$

Damit sind insbesondere die erste und die zweite Ableitung von $l(s)$ sehr schnell auszurechnen.

F.4 Das schnelle Auffinden des Extremums

Sucht man nach dem Minimum \hat{s} von $l(s)$, so kann man eine Folge s_k konstruieren, die schnell gegen \hat{s} konvergiert. Man entwickelt $l(s)$ um s_k bis zur zweiten Ordnung nach Taylor und verwendet das Minimum der resultierenden Parabel $p_{k+1}(s - s_k)$ als nächstes Folgenglied. Es ist

$$p_{k+1}(s) = \frac{1}{2} l''(s_k) \cdot (s - s_k)^2 + l'(s_k) \cdot (s - s_k) + l(s_k) \quad . \quad (\text{F.28})$$

Das Minimum erhält man durch die Forderung

$$\frac{\partial p_{k+1}(s)}{\partial s} \stackrel{!}{=} 0 = l''(s_k) \cdot (s - s_k) + l'(s_k) \quad . \quad (\text{F.29})$$

Man kann das folgende Glied s_{k+1} bestimmen, ohne $l(s_k)$ zu kennen. Es ist

$$s_{k+1} = s_k - \frac{l'(s_k)}{l''(s_k)} \quad . \quad (\text{F.30})$$

In der Praxis konvergiert die Folge $\{s_k\}$ innerhalb weniger Iterationen, so dass $s_{k+1} - s_k \leq 10^{-5}$. Das liegt mit daran, dass sich in der Nähe des Extremums die logarithmische Likelihood-Funktion gut durch eine Parabel annähern lässt.

Abfangen muß man den Fall $s_{k+1} \notin I_{\hat{s}} =]s_{\min}, s_{\max}$. Für diesen setzt man s_{k+1} auf das arithmetischen Mittel aus der überschrittenen Grenze und dem vorangehenden Folgenwert s_k .

F.5 Mathematische Eigenschaften der Funktion zur Beschreibung des Untergrundes

Die Eigenschaften der Verteilung der Untergrundereignisse wird in Abschnitt 8.3 diskutiert. Sie sind hier nochmals zusammengefasst, bevor die mathematische Struktur diskutiert wird. Dabei soll $f(\alpha, \delta)$ die (normierte) Verteilung als Funktion von Rektaszension α und Deklination δ bezeichnen und $g(\delta)$ die gemessene Verteilung der N Untergrundereignisse in Abhängigkeit der Deklination.

Die Eigenschaften sind im Einzelnen:

1. Das Integral der beobachteten Deklinationsverteilung ist gleich der Anzahl der beobachteten Ereignisse. Die angepasste Funktion kann ein wenig davon abweichen.

$$\int g(\delta) d\delta = G \approx N \quad . \quad (\text{F.31})$$

2. Die Untergrunddichte ist normiert.

$$\iint f(\alpha, \delta) \cos(\delta) d\alpha d\delta = 1 \quad . \quad (\text{F.32})$$

Der Kosinus im Integral entspricht dem Raumwinkelelement in Kugelkoordinaten. Da die Deklination gegen den Zenitwinkel um 90° verschoben ist, steht statt des gewohnten Sinus hier der Kosinus.

3. Der Untergrund ist flach gegen die Rektaszension

$$\frac{\partial f(\alpha, \delta)}{\partial \alpha} = 0 \quad . \quad (\text{F.33})$$

4. Es gibt keine Korrelationen zwischen α und δ . Die Funktion f zerfällt in zwei Anteile h und j , die von nur jeweils einer der Variablen abhängen

$$f(\alpha, \delta) = h(\delta) \cdot j(\alpha) \quad . \quad (\text{F.34})$$

5. Die Funktion $g(\delta)$ hat bis auf einen Faktor das gleiche Verhalten wie das Integral von f über α

$$\int f(\alpha, \delta) \cos(\delta) d\alpha = c_g \cdot g(\delta) \quad . \quad (\text{F.35})$$

Aus den Gleichungen F.33 und F.34 folgt

$$j(\alpha) = \text{const} \quad . \quad (\text{F.36})$$

Wählt man

$$j(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \quad , \quad (\text{F.37})$$

hat f die Form

$$f(\alpha, \delta) = \frac{1}{2\pi} \cdot h(\delta) \quad (\text{F.38})$$

und man kann das Integral in Gleichung F.35 ausführen

$$\int f(\alpha, \delta) d\alpha = \frac{2\pi}{2\pi} h(\delta) \quad . \quad (\text{F.39})$$

Aus dem Zusammenhang F.35 folgt daraus

$$h(\delta) \cdot \cos(\delta) = c_g \cdot g(\delta) \quad . \quad (\text{F.40})$$

Integriert man diese Gleichung über δ , dann folgt aus den Normierungsbedingungen F.31 und F.32

$$c_g = \frac{1}{N} \quad (\text{F.41})$$

und schließlich für die gesuchte Funktion f

$$f(\alpha, \delta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{g(\delta)}{\cos \delta} \quad . \quad (\text{F.42})$$

In der Praxis muß man beachten, dass $\frac{1}{\cos \delta}$ für $\delta = \pm 90^\circ$ einen Pol hat. Wenn die Funktion g dieses Verhalten nicht kompensiert, dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für diese Funktionswerte nicht definiert. Man schließt in diesem Fall einen kleinen Bereich um die Pole aus der Analyse aus, indem alle dortigen Ereignisse nicht berücksichtigt werden.

Möchte man umgekehrt Ereignisorte aus der Verteilung f simulieren, dann muß man α flach wählen und die Deklinationen aus der Verteilung $g(\delta)$ lösen.

G Die Punktquellensuche am gesamten Himmel

In Kapitel 9 wird ausgeführt, dass die optimalen statistischen Ergebnisse einer Punktquellensuche in einem Himmelsbereich durch die Konstruktion der richtigen Konfidenzplots erreicht werden können. Dazu ist es notwendig, dass die Verteilungen der Observablen in Abhängigkeit der Signalparameter bekannt sind. Die Kenntnis des Quellortes darf keine Voraussetzung sein, weil der schließlich bestimmt werden soll.

In Kapitel 9 wird weiter dargelegt, dass diese Bedingung auf zwei Wegen erfüllt werden kann:

1. Man untersucht nur Himmelsorte gemeinsam, die mit der gleichen Detektorempfindlichkeit beobachtet werden können.
2. Man erweitert die Dimension des Konfidenzplots und nimmt die unbekannte Quellposition als weitere(n) Parameter mit auf.

Die benötigten Verteilungen lassen sich nur in der Simulation gewinnen. Es können aber nicht alle möglichen Werte der Signalparameter untersucht werden, sondern man muss vielmehr einen Weg finden, zwischen zwei simulierten Stellen zu interpolieren. Dazu benötigt man einen theoretischen Ansatz, um die Kurvenformen zu beschreiben. Ein solcher Ansatz soll anhand der ersten beiden der obigen Möglichkeiten in diesem Anhang aufgezeigt werden.

G.1 Der Ausgangspunkt der Betrachtungen

Für jeden Signalthypothese ist die Verteilung von statistischen Observablen in Abhängigkeit der Signalstärke bekannt, also insbesondere auch in Abwesenheit des Signales.

Die Observable, die im Folgenden verwendet wird, ist der Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}$ des Maximum-Likelihood-Verfahrens (vgl. Kapitel 8). Ihre Verteilungsfunktion $f(\hat{\zeta})$ ist im Wesentlichen Gaußverteilt und hängt nur vom Signalfluss Φ_{sg} und der Hypothesendeklination δ_0 ab. Wegen der Rotation des Teleskopes um seine Längsachse, sind die Verteilungen unabhängig von der Rektaszension der Quelle. Zur Vereinfachung der Notation werden die Verteilungen für die Fälle mit und ohne Signal getrennt bezeichnet. Es ist

$$f_{\text{bg}}^{\delta_0}(\hat{\zeta}) : \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte von } \hat{\zeta} \text{ im Fall ohne Signal,} \quad (\text{G.1})$$

$$f_{\text{sg}}^{\delta_0}(\hat{\zeta}|\Phi_{\text{sg}}) : \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte von } \hat{\zeta} \text{ im Fall mit Signal.} \quad (\text{G.2})$$

Entsprechend werden die Wahrscheinlichkeiten, einen Wert der Observablen $\hat{\zeta}$ unterhalb einer Grenze $\hat{\zeta}_g$ zu erhalten, mit $F_{bg}^{\delta_0}(\hat{\zeta} < \hat{\zeta}_g)$ und $F_{sg}^{\delta_0}(\hat{\zeta} < \hat{\zeta}_g | \Phi_{sg})$ bezeichnet. Es gilt

$$F_{bg}^{\delta_0}(\hat{\zeta} < \hat{\zeta}_g) = \int_{-\infty}^{\hat{\zeta}_g} f_{bg}^{\delta_0}(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta} \quad (G.3)$$

$$F_{sg}^{\delta_0}(\hat{\zeta} < \hat{\zeta}_g | \Phi_{sg}) = \int_{-\infty}^{\hat{\zeta}_g} f_{sg}^{\delta_0}(\hat{\zeta} | \Phi_{sg}) d\hat{\zeta} \quad . \quad (G.4)$$

Gesucht wird nach einer einzigen Neutrino-Punktquelle, deren Ort und Stärke nicht bekannt ist. Ziel ist die Bestimmung dieser Größen. Wenn man keine Quelle mit hinreichend hoher Signifikanz nachweisen kann, was als das wahrscheinlichere Szenario erscheint, dann will man eine obere Flussgrenze erhalten. Die Bestimmung der Flussgrenzen ist die hauptsächliche Schwierigkeit. Im Fall einer Entdeckung ist der Ort einer Quelle nicht mehr schwer zu finden.

Eine Messung an N Stellen am Himmel liefert die N Signifikanzschätzer $\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_N$. Daraus erzeugt man eine neue Variable $\hat{\zeta}_{max}$, die aus den $\hat{\zeta}_i$ durch Maximumsbildung entsteht. Es ist

$$\hat{\zeta}_{max} = \max\{\hat{\zeta}_i | i \in [1..N]\} \quad . \quad (G.5)$$

Auch andere Definitionen einer neuen Observable wären denkbar. Das Maximum muss aber auf jeden Fall in die Konstruktion einfließen. Größen wie der Mittelwert, Median, oder andere, die Eigenschaften der Verteilung der $\hat{\zeta}_i$ beschreiben, könnten den Einfluss einer Punktquelle verwaschen, die ja nur an einem einzigen Punkt sitzt.

G.2 Eine endliche Zahl an Suchstellen

In den folgenden Unterabschnitten werden verschiedene Spezialfälle der Suche in einem Gebiet diskutiert. Sie sind physikalisch nicht notwendigerweise sinnvoll, beleuchten aber besondere Aspekte der Thematik.

Es geht immer um die Suche an einer endlichen Zahl an Suchstellen, die jeweils so weit voneinander entfernt liegen, dass die Messungen nicht miteinander korreliert sind.

G.2.1 Zwei Suchstellen ohne Signal

Die einfachste Konfiguration ist die Suche an zwei Hypothesenstellen (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) , wenn gar kein Signal da ist. Die Observable ist im Fall von zwei Punkten

$$\hat{\zeta}_{max} = \max\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2\} \quad (G.6)$$

und ihre Verteilung lautet

$$f_{bg}^{N=2}(\hat{\zeta}_{max}) = f_{bg}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1) \cdot F_{bg}^{\delta_2}(\hat{\zeta}_2 < \hat{\zeta}_1) + f_{bg}^{\delta_2}(\hat{\zeta}_2) \cdot F_{bg}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2) \quad . \quad (G.7)$$

Der erste Summand beschreibt den Fall, dass der Signifikanzschätzer an der Stelle 1 größer ist als an der Stelle 2: $\hat{\zeta}_2 < \hat{\zeta}_1$. Er setzt sich zusammen aus der Verteilung von $\hat{\zeta}_1$ multipliziert mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit, dass $\hat{\zeta}_2$ kleiner ist. Der zweite Summand beschreibt den umgekehrten Fall mit $\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2$.¹

Im Fall, dass beide Hypothesenpunkte die gleiche Deklination haben, das heißt $\delta_1 = \delta_2$, sind die beiden Summanden in Gleichung G.7 identisch und können zusammengefasst werden:

$$f_{\text{bg}}^{\text{N}=2}(\hat{\zeta}_{\text{max}}) = 2 \cdot f_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_{\text{max}}) \cdot F_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta} < \hat{\zeta}_{\text{max}}) \quad . \quad (\text{G.8})$$

Die Voraussetzung $\delta_1 = \delta_2$ ist für diesen Schritt nicht zwingend notwendig. Die *wahre* Signifikanz ist im Fall ohne Signal immer normal-verteilt. Nur im Fall des Signifikanzschätzers – oder einer anderen gewählten Observablen – können Abweichungen auftreten. Dann können die Verteilungen $f_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_{\text{max}})$ und $f_{\text{bg}}^{\delta_2}(\hat{\zeta}_{\text{max}})$ unterschiedlich sein, und Gleichung G.7 kann nicht zu Gleichung G.8 vereinfacht werden.

In Abbildung 9.1 a) sind die Verteilungen $f_{\text{bg}}^{\delta_0}(\hat{\zeta})$ und $f_{\text{bg}}^{\text{N}=2}(\hat{\zeta}_{\text{max}})$ miteinander verglichen unter der Annahme, dass $f_{\text{bg}}^{\delta_0}(\hat{\zeta})$ normal-verteilt ist und dass $\delta_1 = \delta_2$.

G.2.2 Zwei Suchstellen mit einem Signal an einer der beiden

In der nächsten Konfiguration, die untersucht werden soll, gibt es ebenfalls zwei Hypothesenstellen (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) . An *einer* der beiden Stellen befindet sich eine Punktquelle mit der Flussstärke Φ_{sg} , während an der anderen Stelle keine ist.

Um die Verteilung der Observablen aufschreiben zu können, wird eine weitere Wahrscheinlichkeit eingeführt. Wir bezeichnen mit $P_1^{x_0}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Punktquelle an der Stelle 1 ist, und mit $P_2^{x_0}$, dass sie an der Stelle 2 zu finden ist. Es gilt

$$P_1^{x_0} + P_2^{x_0} = 1 \quad . \quad (\text{G.9})$$

Die Verteilung der Observablen lautet

$$\begin{aligned} f_{\text{sg}}^{\text{N}=2}(\hat{\zeta}_{\text{max}} | \Phi_{\text{sg}}) = & \quad (\text{G.10}) \\ & P_1^{x_0} \cdot \left[f_{\text{sg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 | \Phi_{\text{sg}}) \cdot F_{\text{bg}}^{\delta_2}(\hat{\zeta}_2 < \hat{\zeta}_1) + f_{\text{bg}}^{\delta_2}(\hat{\zeta}_2) \cdot F_{\text{sg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2 | \Phi_{\text{sg}}) \right] \\ & + P_2^{x_0} \cdot \left[f_{\text{sg}}^{\delta_2}(\hat{\zeta}_2 | \Phi_{\text{sg}}) \cdot F_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2) + f_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1) \cdot F_{\text{sg}}^{\delta_2}(\hat{\zeta}_2 < \hat{\zeta}_1 | \Phi_{\text{sg}}) \right] \quad . \end{aligned}$$

Sie setzt sich jetzt aus vier Fällen zusammen. Einerseits kann die Quelle an der einen oder der anderen Stelle sein und andererseits kann der größere Wert der Observablen an der einen oder der anderen

¹Der Fall $\hat{\zeta}_1 = \hat{\zeta}_2$ wird hier ausgelassen, damit die Formeln lesbar bleiben. Bei kontinuierlichen Observablen ist seine Wahrscheinlichkeit beliebig klein. Im Fall diskreter Observablen, wie etwa der Anzahl von Ereignissen in einem Suchbin, muss er zusätzlich eingefügt werden.

Stelle gefunden werden. Die beiden Zeilen in Gleichung G.10 stehen für die beiden Quellenpositionen. Innerhalb der eckigen Klammern steht der jeweils erste Term für den Fall, dass das Maximum bei der Quelle liegt, und der zweite Term dafür, dass das Maximum aus dem Untergrund stammt.

Auch diese Gleichung vereinfacht sich, wenn die Hypothesenpunkte die gleiche Deklination haben. Dann sind die Ausdrücke in den eckigen Klammern für beide Zeilen identisch, und es gilt

$$f_{\text{sg}}^{N=2}(\hat{\zeta}_{\text{max}}|\Phi_{\text{sg}}) = \underbrace{(\mathbf{P}_1^{x_0} + \mathbf{P}_2^{x_0})}_{=1} \cdot \left[f_{\text{sg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1|\Phi_{\text{sg}}) \cdot F_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2) + f_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1) \cdot F_{\text{sg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2|\Phi_{\text{sg}}) \right] \quad (\text{G.11})$$

Im Gegensatz zu der Situation ohne Signal wird die Bedingung $\delta_1 = \delta_2$ notwendig. Das gilt zumindest dann, wenn sich die Verteilungen der Observablen an den beiden Deklinationen für eine feste Signalstärke unterscheiden.

In Abbildung 9.1 b) ist der Fall mit Signalstärke ungleich Null illustriert.

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}_1^{x_0}$ und $\mathbf{P}_2^{x_0}$ sind a priori unbekannt. Es gibt nur zwei mögliche Fälle.

1. Die Quelle ist an Stelle 1. Dann ist $\mathbf{P}_1^{x_0} = 1$ und $\mathbf{P}_2^{x_0} = 0$.
2. Die Quelle ist an Stelle 2. Dann ist $\mathbf{P}_1^{x_0} = 0$ und $\mathbf{P}_2^{x_0} = 1$.

In Gleichung G.11, in der die beiden Fälle zusammengefasst werden können, fallen die Wahrscheinlichkeiten gerade heraus, da nur ihre Summe auftritt. Das bedeutet, dass man Orte am Himmel zusammenfassen kann, an denen das Teleskop identisch auf eine Quelle reagiert.

Will man Orte mit unterschiedlicher Detektorantwort zusammenfassen, steht man vor einem Problem, eben weil die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}_1^{x_0}$ und $\mathbf{P}_2^{x_0}$ unbekannt sind.

Man könnte sich auf folgenden Standpunkt stellen und annehmen: „A priori sind alle Quellenorte gleich wahrscheinlich.“ Das führt auf den dritten Fall

3. Es ist $\mathbf{P}_1^{x_0} = \mathbf{P}_2^{x_0} = \frac{1}{2}$.

Leider führt das zu explizit falschen Verteilungen, wie am folgenden Beispiel illustriert wird. Dazu betrachten wir zwei Stellen am Himmel, an denen die jeweiligen Signalverteilung stark unterschiedlich sind. An Stelle 1 soll sich das Signal deutlich vom normal-verteilten Untergrund abheben, an Stelle 2 sind Signal und Untergrund sehr nahe beieinander. Man kann sich für AMANDA die „gute“ Stelle 1 bei $\delta = 40^\circ$ und die „schlechte“ Stelle 2 am Horizont bei $\delta = 0^\circ$ vorstellen.

In Abbildung 9.2 a) sind die Verteilungen von Untergrund und den beiden Signalen gezeigt. Es sind Gauß-Kurven der Breite $\sigma = 1$ mit Mittelwerten von $\mu_{\text{bg}} = 0$, $\mu_{\text{sg}}^1 = 3$ und $\mu_{\text{sg}}^2 = 0.5$.

In Abbildung 9.2 b) sind die Verteilungen der Observablen $\hat{\zeta}_{\text{max}}$ für die drei Fälle gezeigt. Ist die Quelle an Stelle 1, dann ist $\hat{\zeta}_{\text{max}}^1$ die wahre Verteilung. Entsprechend ist $\hat{\zeta}_{\text{max}}^2$ richtig, wenn die das Signal von Stelle 2 kommt.

Abgesehen davon, dass die Verteilung für den Fall 3 mit ihren zwei Maxima seltsam aussieht, ist sie in beiden möglichen wahren Fällen des Signalortes falsch. Ist die Quelle an der Stelle 1, dann liegt

$\hat{\zeta}_{\max}^3$ systematisch zu tief und gibt zu tiefe Grenzen an. Eine Entdeckung, die man an der „guten“ Stelle machen könnte, wird erschwert, während die oberen Grenzen statistisch falsch sind.

Umgekehrt wird zu häufig eine Entdeckung angezeigt, wenn die Quelle an der „schlechten“ Stelle 2 ist, weil die unteren Grenzen statistisch falsch sind. Die erlangten oberen Grenzen sind nicht optimal.

Ein weiterer Lösungsversuch liegt darin, dass man auf andere Observablen ausweicht. Eine nahe-
liegende Wahl wäre der Schätzwert für den Fluss der Quelle. Den erhält man entweder direkt aus
der Maximum-Likelihood-Methode (vgl. Abschnitt 8.2) oder indirekt aus dem Likelihood-Schätzer
 $\hat{\zeta}$. Das lässt sich beispielsweise durch eine deklinationsabhängige Transformation bewerkstelligen.
Damit kann man zwar erreichen, dass der *Erwartungswert* der Observablenverteilung für jeden Hy-
pothesenpunkt identisch ist, aber die Verteilungen selbst sind es im Allgemeinen nicht. Nur wenn
es gelingt, eine Observable zu finden, die tatsächlich für festen Signalfluss die gleiche *Verteilung* an
jeder untersuchten Stelle hat, kann man einen gemeinsamen Konfidenzplot konstruieren. Eine solche
Observable ist aber ohne vorherige Kenntnis der Signalstärke und des Signalortes nicht konstruierbar,
wenn die Detektorqualität unterschiedlich ist.

Auf der anderen Seite ist die Entdeckung eines sehr starken Signales problemlos. Wenn die Verteilun-
gen der Observablen mit und ohne Signal nicht überlappen, dann ist entstammt das Maximum immer
aus dem Signal. Die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ ist mit derjenigen aus dem Signal identisch.

Daraus folgt, dass der Konfidenzplot für die Suche an mehreren Stellen im Grenzfall für sehr starke
Signalflüsse mit dem Konfidenzplot für die Suche an einer Stelle übereinstimmen muss.

G.2.3 N diskrete Suchstellen gleicher Deklination mit einem Signal

Die Überlegungen für den Fall von zwei Suchstellen lassen sich direkt auf eine beliebige Anzahl von
N möglichen Orten für die Punktquelle erweitern. Die Voraussetzungen sind

- Es gibt genau eine Quelle. Der Fall ohne Quelle entspricht demjenigen mit einer Quelle der
Stärke Null.
- Die Verteilungen der Observablen sind für jeden potenziellen Quellenort identisch. Das ist für
Orte gleicher Deklination immer gegeben.
- Die Messungen an zwei Stellen sind jeweils unkorreliert.

Die Verteilung des Maximums aller N Messwerte lautet dann

$$f_{\text{sg}}^N(\hat{\zeta}_{\max} | \Phi_{\text{sg}}) = f_{\text{sg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 | \Phi_{\text{sg}}) \cdot \left(F_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2) \right)^{N-1} \quad (\text{G.12})$$

$$+ (N-1) \cdot f_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1) \cdot \left(F_{\text{sg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2 | \Phi_{\text{sg}}) \right) \cdot \left(F_{\text{bg}}^{\delta_1}(\hat{\zeta}_1 < \hat{\zeta}_2) \right)^{N-2} .$$

Der Term in der ersten Zeile entspricht dem Fall, dass das Maximum von der Quelle kommt. Alle
(N – 1) Messwerte aus dem Untergrund müssen kleiner sein. Kommt das Maximum aus dem Unter-
grund, dann müssen der Wert aus dem Signal und die übrigen (N – 2) Messwerte aus dem Untergrund
jeweils geringer sein. Für den zweiten Fall gibt es (N – 1) Möglichkeiten, aus welchem Ort der ma-
ximale Wert ist, daher kommt ein entsprechender Faktor hinzu.

G.3 Die Suche entlang einer Linie fester Deklination

Im nächsten Schritt gehen wir dazu über, alle Orte gleicher Deklination für die Signalthypothese zuzulassen. Es entsteht eine Observablenfunktion $\hat{\zeta}(\alpha)$ in Abhängigkeit der Rektaszension. Die neue Observable wird analog zu dem Fall für zwei Punkte definiert. Es ist

$$\hat{\zeta}_{\max} = \max\{\hat{\zeta}(\alpha) | \alpha \in [0^\circ..360^\circ]\} \quad . \quad (\text{G.13})$$

Typischerweise wird die Funktion an einer endlichen Zahl an Stellen evaluiert, um das Maximum zu finden.² Der Unterschied zum vorherigen Fall ist derjenige, dass für benachbarte Evaluationspunkte Korrelationen hinzukommen. Das ist Ausdruck der Tatsache, dass die Detektorauflösung die Informationen von benachbarten Punkten miteinander verschmiert. Für kontinuierliche Observable folgt daraus, dass die Funktion $\hat{\zeta}(\alpha)$ stetig sein muss.

Die Reichweite der Korrelationen ist eine Funktion der Detektorauflösung. Je besser die Ortsauflösung ist, desto unabhängiger sind zwei benachbarte Meßpunkte mit festem Abstand.

Eine geschlossene Form für die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ anzugeben, ist wegen der Korrelationen nicht mehr möglich. Wie bei der Bestimmung der Verteilungen von $\hat{\zeta}$ in Kapitel 8 muss man zur Simulation übergehen.

Zur Konstruktion eines Konfidenzplots ist es nötig, die Verteilung für alle Signalstärken zu kennen. Es ist daher wünschenswert, eine analytische Beschreibung zu finden, so dass man für Werte, die nicht explizit simuliert werden, durch Interpolation zu einem Ergebnis kommt. Dabei wird folgender Ansatz verfolgt:

Die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ ist von der Form von Gleichung G.12 mit einem zunächst unbekanntem aber festen effektiven N . Die Signal- und Untergrundverteilungen $f_{sg}(\hat{\zeta} | \Phi_{sg})$ und $f_{bg}(\hat{\zeta})$ sind aus der Suche an einer festen Stelle des Himmels bekannt.

Die effektive Anzahl an Suchstellen muss nicht notwendigerweise eine natürliche Zahl sein. Vielmehr gilt $N_{\text{eff}} \in \mathcal{R}$ und man fordert $N_{\text{eff}} > 2$.

Es sollte Abhängigkeiten von N_{eff} sowohl von der Deklination als auch von der Signalstärke geben. Die Abhängigkeit von δ rührt sowohl von den unterschiedlichen Detektoreigenschaften wie beispielsweise der unterschiedlichen Auflösung als auch schlicht von der unterschiedlichen Länge eines Deklinationsbandes her.

Bei der Signalstärke gibt es zwei Effekte zu bedenken. Zum Einen wird ein Signal am Himmel immer breiter, je stärker es ist. Dadurch erwartet man eine leichte Verkleinerung von N_{eff} mit stärker werdendem Signal. Zum Anderen wird der Einfluss der effektiven Suchstellenzahl für sehr starke Signale immer kleiner, weil der Untergrund eine immer schwächere Rolle spielt. Die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ geht in der Verteilung von $\hat{\zeta}_{sg}$ über.³

²Es können die üblichen Standardverfahren zum Auffinden des Maximums einer Funktion zum Einsatz gebracht werden.

³Vergleiche dazu auch die letzte Bemerkung in Abschnitt G.2.2.

Erste Voruntersuchung deuten darauf hin, dass die Ansätze vielversprechend sind. Als Beleg dient Abbildung 9.3, in der die Verteilung von $\hat{\zeta}_{\max}$ für den gesamten Nordhimmel in Abwesenheit einer Signalquelle gut mit der hier vorgestellten Form (analog Gleichung G.12) beschrieben werden kann.

Bis zur Konstruktion von neuen Konfidenzplots gibt es sicherlich noch einiges an Arbeit zu tun, aber ein Weg ist hier aufgezeigt worden, der verspricht, zum Ziel zu führen.

H Himmelsatlas der Ereignisse

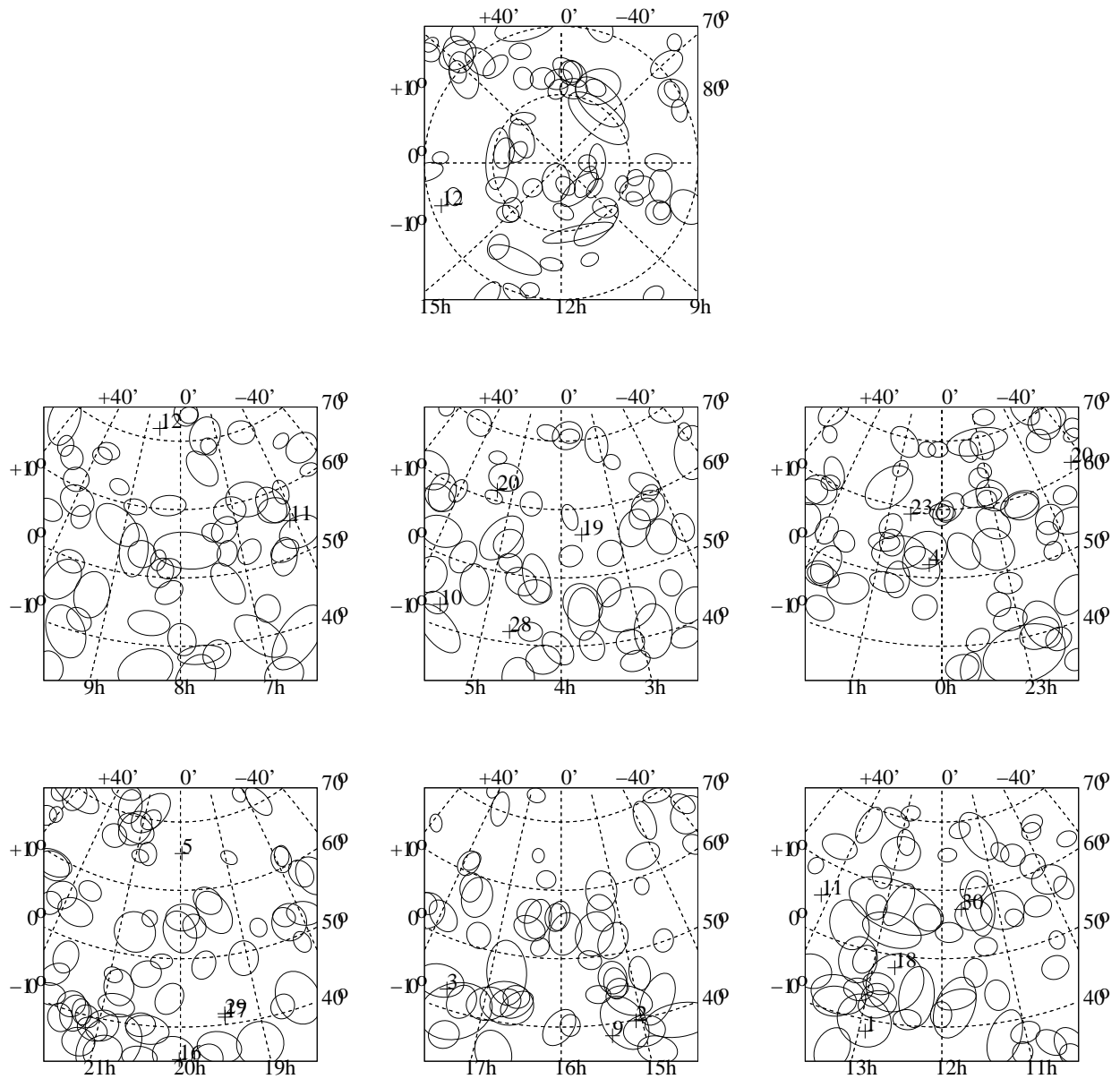


Abbildung H.1: Himmelsatlas der Ereignisse des Jahres 2000 mit $45^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$

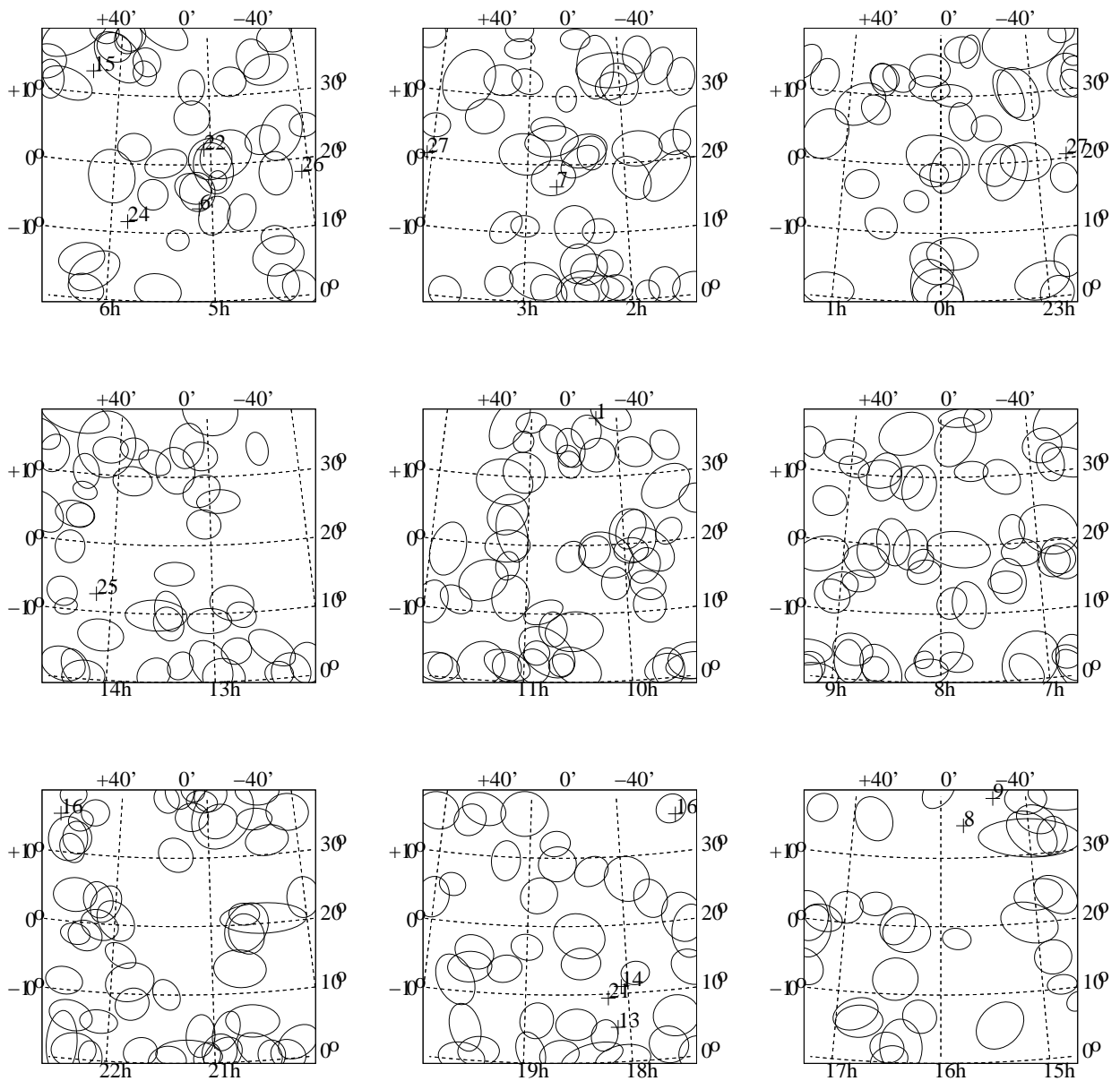


Abbildung H.2: Himmelsatlas der Ereignisse des Jahres 2000 mit $0^\circ \leq \delta \leq 40^\circ$

Danksagung

Zuallererst bedanke ich mich bei allen, die auf diese Dissertation gewartet haben – für ihre Geduld. Allen voran meinem Betreuer Lutz K., dicht gefolgt von unserem Arbeitsgruppenleiter Herrn Konrad K. und nicht minder meiner Familie: Tanja, Elena und Finja.

Nach dieser Präambel möchte ich Herrn Konrad K. für die Aufnahme in die Schar *seiner* Leute danken, für deren Belange er sich stets einsetzt. Wir haben uns genüsslich über Physik und anderes gestritten und geeinigt (oder nicht), ohne dass man jedes Wort auf die Goldwaage legen musste. Für sein Interesse und seine Unterstützung bin ich dankbar.

Lutz K. möchte ich für die ausgezeichnete Betreuung und die Themenstellung danken. Wir haben gemeinsam bei AMANDA angefangen und unseren Weg gefunden. Ich bin dankbar dafür, dass er so viele seiner Ideen mit mir geteilt hat, und soviel Zeit für mich verwendet hat. Lutz K. ist die Antithese von „unzugänglich“. Auch bin ich froh, dass bei ihm die menschliche Seite immer als erstes kommt.

Bei der gesamten ETAP bedanke ich mich für das ausgezeichnete Arbeitsklima der offenen Türen – selbstverständlich erst nach dem Frühstück. Aber dann habe ich immer gesprächs- und hilfsbereite Leute gefunden. Besonders glücklich hat es mich gemacht, auf Menschen zu treffen, die bereit sind, die Dinge tiefgehend verstehen zu wollen. Eine besondere Bereitschaft zur Diskussion bis zum Schluss haben dabei Frank H., Rolf D., Michael H., Michael D., Sven S., Tombel B., Tom F. (nach dem Frühstück), Uli M. und Rainer W. an den Tag gelegt. Mit Alexander H. gehört noch ein Theoretiker zu dieser Liste, der sich wirklich mit jeder meiner Fragen auseinandergesetzt hat, so banal sie auch zuerst erscheinen mag. Andreas M. danke ich für viel Geduld und Erklärungen bei meinen ersten (und weiteren) Gehversuchen in der Welt der Astrophysik.

Last but not least I wish to thank Tom F. for pointing me in the right direction and pushing my Now-You-Think-This-Through button, in order to arrive at a Maximum-Likelihood-Method to find point sources. Thanks indeed.

Damit sind wir bei den ersten Dienstleistern angekommen, ohne die das Promovieren nicht geht. Vielen Dank an alle, die die Computerwelt am Laufen gehalten haben. Insbesondere danke ich Uwe K., Burkhard R., mir selbst, Frank H., Dietrich S. und Peter M. dafür, dass es uns wichtig war, dass es läuft.

Ein Spezialdank an Hans-Arno N. und Evir M. für das Kaffeemeter. Mit dem Warnruf *Till goes Hardware* haben sie das Löten lieber selbst besorgt.

Besonderes Glück haben wir mit unserer guten Seele Silvia M.. Sie ist der lebende Beweis von Calvin's Überzeugung: „You don't become a Mom, if you can't fix everything!“ Weil sie bei *allen* Problemen helfen kann und hilft. Dafür vielen Dank.

In die gleiche Bresche schlägt Karl-Heinz G., der *alles* bauen kann – und baut, was Du brauchst. Respekt. Und ja, ich werde diese Lampe fertig bauen.

Das gesamte Institut für Physik hat sehr positiv auf den Südpol reagiert. Bestellungen auf den letzten Drücker (beachte: nicht vom letzten Drücker), Zollabfertigungen in die Antarktis (das ist nicht so leicht wie es sich anhört) und Eilsendungen an den Südpol haben immer große Unterstützung erfahren. Wenn nur die Händler, die Zollbeamten und die Paketdienstler immer genauso motiviert und hilfsbereit gewesen wären.

Next I wish to thank all my friends and colleagues of the AMANDA-collaboration. First of all I thank Christian *Damn-Good-Idea* S., who got me on board. Thanks go to Katherine *Size-Does-Not-Matter* R., Ped *I-know-this-Module* M., and Kurt W. (I *am* writing this down – by the way – and it will be funny later), fellow Founding Knights of the Kiddie Table. I hear they already miss us at collaboration dinners. . .

For a very special South Pole experience I wish to thank Katherine *It's-what-you-dip-it-in* R., Dave *At-home-it's-warmer* R., and Darryn *It-can't-be-the-same-Dome* S., and the whole South Pole crew with their amazing Can-Do-attitude.

There are astonishingly many interesting physicists in the AMANDA-team. To name but a few, I would like to thank Gary C. H. for our shared desire to understand statistics, Tonio H. and David S. for their help in searching for if yet not finding point sources, Doug C. for many an interesting discussion be it physics or otherwise and Per Olof *Can-I-do-it-from-the-Boat?* H., a PI with a perpetual readiness for decision taking – which somewhat sets him apart from – well – others.

Ein besonderer Dank geht an mein Lektorenteam. Was Tombel B., Sven S., Frank H., Andreas M., Max N. und Conny *Das-würde-ich-koppeln* P. noch alles finden können, wenn man denkt, man sei durch, ist beeindruckend. Deshalb habe ich auch abgegeben, bevor Ihr alles lesen durftet. Meinem B. Max gehört dabei als allzeitbareitem L^AT_EX- und Linuxberater noch ein Zusatzdankeschön. Sven hat die schnellsten Reaktionszeiten. Tombel kriegt die Ich-habe-alles-Gelesen-Medaille. Andreas und Conny bekommen den Durchhaltepreis für bis zum Schluss. Und Frank kann noch mehr Korinthen über Statistik ihr wisst schon was als ich. Ob das eine Auszeichnung ist, steht auf einem anderen Blatt. . .

Ein Blitzdank geht an Markus W., der spontan das Leiden des Ausdrucks in aller Frühe mit mir teilt(e).

Der Weg, eine Dissertation zu erstellen, kann steinig sein. Ich danke allen meinen Freunden dafür, dass sie mir geholfen haben diesen Weg zu gehen, sei es durch Aufmunterung, durch Ablenkung, oder Anteilnahme. Stellvertretend möchte ich mich bei Dieter B. und Bardo K. bedanken, die ihr Aikido mit mir teilen, bei Marcus G., der von Anfang an da war, und bei Max N., der immer ein offenes Ohr für seinen kleinen B. hat.

Ich möchte meinen Eltern danken, die mir so viel ermöglicht haben. Ich danke meinem Vater, der mich gelehrt hat, dass alles falsch ist, was ich nicht verstanden habe. Ich danke meiner Mutter, die mich gelehrt hat, dass man die Dinge tun muss, wie man die Dinge tun muss.

Die Erkenntnis ist ein Gut an sich, aber den Sinn des Lebens verstehe ich nur, wenn ich in die Augen meiner Kinder Elena *Sei-ein-Kavalier-Papi!* und Finja *Rabäh!* blicke.

Liebe Tanja, Du bist unbeschreiblich, mir fehlen die Worte... Danke.

Literaturverzeichnis

- [A⁺98a] C. Allen et al. Status of the Radio Ice Cherenkov Experiment (RICE). *New Astronomy Review*, 42:319–329, September 1998.
- [A⁺98b] C. Athanassopoulos et al. Evidence for ν_{μ} to ν_{e} Neutrino Oscillations from LSND. *Physical Review Letters*, 81:1774, 1998.
- [A⁺98c] C. Athanassopoulos et al. Evidence for ν_{μ} to ν_{e} Oscillations from Pion Decay in Flight Neutrinos. *Physical Review C*, 58:2489, 1998.
- [A⁺99] M. Apollonio et al. *Physics Letters B*, 466:415, 1999.
- [A⁺00] F. A. Aharonian et al. The energy spectrum of tev gamma-rays from the crab nebula as measured by the hegra system of imaging air cerenkov telescopes. *Astrophys. J.*, 539:317–324, 2000. astro-ph/0003182.
- [A⁺01] Q. R. Ahmad et al. Measurement of the charged current interactions produced by b-8 solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 87:071301, 2001. nucl-ex/0106015.
- [A⁺02a] Q. R. Ahmad et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 89:011301, 2002. nucl-ex/0204008.
- [A⁺02b] Q. R. Ahmad et al. Measurement of day and night neutrino energy spectra at sno and constraints on neutrino mixing parameters. *Phys. Rev. Lett.*, 89:011302, 2002. nucl-ex/0204009.
- [A⁺02c] J. Ahrens et al. Limits to the muon flux from wimp annihilation in the center of the earth with the amanda detector. *Phys. Rev.*, D66:032006, 2002. astro-ph/0202370.
- [A⁺02d] J. Ahrens et al. Observation of high energy atmospheric neutrinos with the antarctic muon and neutrino detector array. *Phys. Rev.*, D66:012005, 2002. astro-ph/0205109.
- [A⁺02e] J. Ahrens et al. Search for supernova neutrino-bursts with the amanda detector. *Astropart. Phys.*, 16:345–359, 2002. astro-ph/0105460.
- [A⁺03a] J. Ahrens et al. Muon Track Reconstruction in AMANDA. 2003. in Vorbereitung.
- [A⁺03b] J. Ahrens et al. Search for High Energy Neutrinos from Gamma-Ray Bursts with the AMANDA South Pole Neutrino Telescope. 2003. in Vorbereitung.

- [A⁺03c] J. Ahrens et al. Search for neutrino-induced cascades with the amanda detector. *Phys. Rev.*, D67:012003, 2003. astro-ph/0206487.
- [A⁺03d] J. Ahrens et al. Sensitivity of the IceCube detector to astrophysical sources of high energy muon neutrinos. 2003. astro-ph/0305196.
- [A⁺04] J. Ahrens et al. Search for extraterrestrial point sources of neutrinos with amanda-ii. *Phys. Rev. Lett.*, 92:071102, 2004.
- [AA00] F. A. Aharonian and A. M. Atoyan. Broad-band diffuse gamma ray emission of the galactic disk. 2000. astro-ph/0009009.
- [AATV00] Armen M. Atoyan, Felix A. Aharonian, Richard J. Tuffs, and Heinrich J. Völk. On the gamma-ray fluxes expected from Cassiopeia A. *Astronomy and Astrophysics*, 355(1):211–220, March 2000. arXiv:astro-ph/0001186.
- [aC03] AMANDA Collaboration. The 28th International Cosmic Ray Conference AMANDA collaboration papers. Internal report AIR/20030601, AMANDA Collaboration, Juni 2003.
- [Aha99] F. A. Aharonian. Observations of mkn 421 during 1997 and 1998 in the energy range above 500-gev with the hegra stereoscopic cherenkov telescope system. 1999. astro-ph/9905032.
- [Ahr03] J. Ahrens. Limits on diffuse fluxes of high energy extraterrestrial neutrinos with the amanda-b10 detector. *Physical Review Letters*, 90:251101, 2003. astro-ph/0303218.
- [APG01] G. E. Allen, R. Petre, and E. V. Gotthelf. X-ray synchrotron emission from 10-teV to 100-teV cosmic- ray electrons in the supernova remnant sn 1006. *Astrophys. J.*, 558:739, 2001. astro-ph/0107540.
- [At97] Per Askebjør and the AMANDA Collaboration. Optical Properties of Deep Ice at the South Pole: Absorption. *Applied Optics*, 36(18):4168–4180, 1997.
- [AZ⁺02] T. Abu-Zayyad et al. Measurement of the spectrum of uhe cosmic rays by the fadc detector of the hires experiment. 2002. astro-ph/0208301.
- [B⁺97] S. W. Barwick et al. The energy spectra and relative abundances of electrons and positrons in the galactic cosmic radiation. 1997. astro-ph/9712324.
- [B⁺99] V. A. Balkanov et al. In-situ measurements of optical parameters in lake baikal with the help of a neutrino telescope. *Appl. Opt.*, 33:6818, 1999. astro-ph/9903342.
- [B⁺00] A. Bazarko et al. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, 91:210, 2000. Mini-BooNE Collaboration.
- [B⁺01] Alexander Biron et al. Participation of DESY-Zeuthen in the IceCube Project. Proposal to the DESY PRC, DESY-Zeuthen, Germany, May 2001.
- [B⁺02a] S. M. Bilenky et al. Absolute values of neutrino masses: Status and prospects. 2002. hep-ph/0211462.

- [B⁺02b] J. Bonn et al. Results from the mainz neutrino mass experiment. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 48:133–139, 2002.
- [B⁺03] C. L. Bennett et al. First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Preliminary maps and basic results. 2003. astro-ph/0302207.
- [BD01] V. S. Berezinsky and V. I. Dokuchaev. Hidden source of high-energy neutrinos in collapsing galactic nucleus. *Astropart. Phys.*, 15:87–96, 2001. astro-ph/0002274.
- [Bec00] Thomas Becka. Entwicklung einer Echtzeit–Datenfilterung für das Neutrino teleskop AMANDA. Diplomarbeit, Universität Mainz, Dezember 2000. Geburtsname Scheider.
- [Bir00] Alexander Biron. Reconstruction Uncertainties due to Time Calibration Errors. Internal report AIR/20001101, AMANDA Collaboration, November 2000.
- [Bir02] Alexander Biron. *Search for Atmospheric Muon-Neutrinos and Extraterrestrial Neutrino Point Sources in the 1997 AMANDA-B10 Data*. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, Januar 2002.
- [BMT03] Peter L. Biermann and Gustavo Medina-Tanco. Ultra high energy cosmic ray sources and experimental results. 2003. astro-ph/0301299.
- [Bös02] Sebastian Böser. Separation of atmospheric neutrinos with the AMANDA-II detector. Diplomarbeit, Technische Universität München, 2002.
- [BP97] W. Bednarek and Raymond J. Protheroe. Gamma-rays from interactions of stars with active galactic nucleus jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 287:L9–L13, 1997.
- [BPB01] John N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, and Sarbani Basu. Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties. *Astrophys. J.*, 555:990–1012, 2001. astro-ph/0010346.
- [Bra99] S. Brandt. *Datenanalyse*. Spektrum, Akad. Verl., 1999.
- [BS87] P. L. Biermann and P. A. Strittmatter. Synchrotron emission from shock waves in active galactic nuclei. *Astrophys. J.*, 322:643–649, 1987.
- [Bt93] G. Barbagli and the GASP Collaboration. The development of the gamma-ray Cherenkov telescope at the South Pole. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, 32(1–3):156–162, May 1993. Proceedings of the Third International Conference on Advanced Technology and Particle Physics, Como, Italy, 22 - 26 June 1992, ed. E. Borchi, T. Ferbel, D. Hygren, A. Penzo and P.G. Rancoita.
- [Bt99] Adam Bouchta and the AMANDA Collaboration. Seasonal variations of the muon flux seen by AMANDA. In Kieda et al. [KSD99], pages 108–111. HE.3.2.11.
- [Buc98] James H. Buckley. What the Wild Things Are. *Science*, 279(5351):676–677, 1998.

- [BW01] John N. Bahcall and Eli Waxman. High Energy Astrophysical Neutrinos: the Upper Bound is Robust. *Physical Review D*, 64(2):023002.1–023002.8, 2001. arXive:hep-ph/9902383.
- [C⁺98] B.T. Cleveland et al. Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector. *Astrophysical Journal*, 496:127, 1998.
- [C⁺03a] M. H. Cohen et al. Variability and velocity of superluminal sources. 2003. astro-ph/0304164.
- [C⁺03b] Jan Conrad et al. Including systematic uncertainties in confidence interval construction for Poisson statistics. *Physical Review D*, 67:012002, 2003.
- [Cam95] Max Camenzind. Magnetic Fields and the Physics of Active Galactic Nuclei. *Reviews in Modern Astronomy*, 8:201–234, 1995.
- [CB98] Sergio Colafrancesco and Pasquale Blasi. Clusters of galaxies and the diffuse gamma-ray background. *Astroparticle Physics*, 9(3):227–246, 1998. arXive:astro-ph/9804262.
- [CGS97] J. Cronin, T.K. Gaisser, and S.P. Swordy. Cosmic Rays at the energy frontier. *Scientific American*, 276:44, 1997.
- [CGW⁺02] Sandip K. Chakrabarti, P. Goldoni, P. J. Wiita, A. Nandi, and S. Das. On the ejection mechanism of bullets in ss 433. *Astrophys. J.*, 576:L45–L48, 2002. astro-ph/0208148.
- [CH92] Robert D. Cousins and V. L. Highland. Incorporating systematic uncertainties into an upper limit. *Nuclear Instruments and Methods*, A320:331–335, 1992.
- [Chi02] Dmitry Chirkin. dCORSIKA Update. Internal report AIR/20020802, AMANDA Collaboration, July 2002.
- [CHt01] Douglas F. Cowen, Kael Hanson, and the AMANDA Collaboration. Time Calibration of the AMANDA Neutrino Telescope with Cosmic Ray Muons. In Heinzlmann et al. [HKS01], pages 1133–1136. HE.237.
- [Con03] Jan Conrad. *Search for Neutrinos from Cosmic Point Sources using AMANDA-B10 with Emphasis on Limit Calculation Techniques*. PhD thesis, Uppsala University, 2003. AIR/20001002.
- [Cos00] C. G. S. Costa. The Prompt Lepton Cookbook. Internal report AIR/20001003, AMANDA Collaboration, October 2000.
- [CR01] Dimitri Chirkin and Wolfgang Rhode. Muon Monte Carlo: a new high-precision tool for tracking of muons in medium. In Heinzlmann et al. [HKS01], pages 1017–1020. HE.220.
- [Ct99] Antonio Capone and the NEMO Collaboration. Site characterization for a km³ scale deep underwater astrophysical Neutrino observatory in the Mediterranean Sea. In Kieda et al. [KSD99], pages 444–447. HE.6.3.05.

- [Ct01] Antonio Capone and the ANTARES Collaboration. The ANTARES Neutrino Telescope: Status report. In Heinzlmann et al. [HKS01], pages 1233–1236. HE.2.05.01.
- [D⁺00] E. Dickinson et al. The new south pole air shower experiment - SPASE-2. *Nucl. Inst. Meth. A*, 440 (1):95–113, 2000.
- [DA81] Adam M. Dziewonski and D. L. Anderson. Preliminary Reference Earth Model (PREM). *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25:297–356, 1981.
- [DeY01] Tyce Robert DeYoung. *Observation of Atmospheric Muon Neutrinos with AMANDA*. PhD thesis, University of Wisconsin at Madison, Madison, Wisconsin, USA, May 2001.
- [dG⁺79] J. G. H. de Groot et al. Inclusive interactions of high-energy neutrinos and anti-neutrinos in iron. *Zeit. Phys.*, C1:143, 1979.
- [E⁺03] K. Eguchi et al. First results from kamland: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance. *Phys. Rev. Lett.*, 90:021802, 2003. hep-ex/0212021.
- [Eis86] F. Eisele. *Reports of Progress in Physics*, 49:233, 1986.
- [ELTW03] D. Eichler, Y. Lyubarsky, C. Thompson, and P. Woods. Magnetars in the afterglow era. 2003. astro-ph/0303296.
- [F⁺00] S. Fukuda et al. Tau neutrinos favored over sterile neutrinos in atmospheric muon neutrino oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3999–4003, 2000. hep-ex/0009001.
- [F⁺02] S. Fukuda et al. Determination of solar neutrino oscillation parameters using 1496 days of super-kamiokande-i data. *Phys. Lett.*, B539:179–187, 2002. hep-ex/0205075.
- [FC98] Gary J. Feldman and Robert D. Cousins. Unified approach to the classical statistical analysis of small signals. *Physical Review D*, 57(7):3873–3889, 1998.
- [Fed02] Georg Federmann. Viktor Hess – eine Diplomarbeit. Diplomarbeit, Universität Wien, Wien, Österreich, März 2002.
- [Fer49] Enrico Fermi. *Physical Review*, 75:1169, 1949.
- [Fes00] Thomas Feser. Triggerstudien am AMANDA Detektor. Diplomarbeit, Universität Mainz, August 2000.
- [Fra03] Olav Franzen. Untersuchungen optischer Module für das AMANDA– bzw. IceCUBE Projekt. Diplomarbeit, Universität Mainz, Januar 2003.
- [G⁺90] H. Gemmeke et al. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 289:490, 1990. KARMEN Collaboration.
- [G⁺96] Raj Gandhi et al. Ultrahigh-energy neutrino interactions. *Astropart. Phys.*, 5:81–110, 1996. hep-ph/9512364.
- [G⁺98] Raj Gandhi et al. Neutrino interactions at ultrahigh energies. *Phys. Rev.*, D58:093009, 1998. hep-ph/9807264.

- [G⁺03] N. Goetting et al. Hegera contributions to the 28th international cosmic ray conference. 2003.
- [Gai90] T.K. Gaisser. *Cosmic Rays and Particle Physics*. Cambridge University Press, 1990.
- [Gai01] Thomas K. Gaisser. Origin of cosmic radiation. *AIP Conf. Proc.*, 558:27–42, 2001. astro-ph/0011524.
- [Gai02] Thomas K. Gaisser. Semi-analytic approximations for production of atmospheric muons and neutrinos. *Astropart. Phys.*, 16:285–294, 2002. astro-ph/0104327.
- [GDLW02] D. Guetta, C. Distefano, A. Levinson, and E. Waxman. Tev neutrinos from galactic microquasar jets. 2002. astro-ph/0207359.
- [Gee02] Heiko Geenen. Energy reconstruction and spectral unfolding of atmospheric leptons with the AMANDA detector. Diplomarbeit, Bergische Universität Wuppertal, November 2002.
- [GG02] M. C. Gonzalez-Garcia. Neutrino masses and mixing: Where we stand and where we are going. 2002. hep-ph/0211054.
- [GM02] G. J. Gounaris and G. Moulataka. The flavor distribution of cosmic neutrinos. 2002. hep-ph/0212110.
- [GPS98] Thomas K. Gaisser, Raymond J. Protheroe, and Todor S. Stanev. Gamma-Ray Production in Supernova Remnants. *Astrophysical Journal*, 492:219–227, 1998. arXiv:astro-ph/9609044.
- [Gre66] Kenneth Greisen. End to the cosmic ray spectrum? *Phys. Rev. Lett.*, 16:748–750, 1966.
- [Gru93] Claus Grupen. *Teilchendetektoren*. BI Wissenschaft, 1993.
- [Gt01] P. K. F. Grieder and the NESTOR Collaboration. NESTOR Neutrino Telescope Status Report. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, 97(1–3):105–108, 2001. Proceedings of the 11th International Symposium on Very-High-Energy Cosmic Ray Interactions.
- [H⁺95] M. Honda et al. Calculation of the flux of atmospheric neutrinos. *Physical Review D*, 52:4985, 1995.
- [H⁺99a] W. Hampel et al. *Physics Letters B*, 447:127, 1999.
- [H⁺99b] N. Hayashida et al. The anisotropy of cosmic ray arrival direction around 10¹⁸-ev. 1999. astro-ph/9906056.
- [H⁺99c] N. Hayashida et al. Updated agasa event list above 4*10¹⁹-ev. *Astrophys. J.*, 522:225, 1999. astro-ph/0008102.
- [H⁺02a] K. Hagiwara et al. Review of Particle Physics. *Physical Review D*, 66:010001+, 2002. <http://pdg.lbl.gov>.

- [H⁺02b] Gary Colin Hill et al. Ice property investigations with muons and implications for AMANDA analyses. Beitrag zum Kollaborationstreffen in Berkeley, 2002.
- [H⁺03] Klaus Helbing et al. Light emission in AMANDA pressure spheres. Internal report AIR/20030701, AMANDA Collaboration, 2003.
- [Han03] Steen Hannestad. Neutrino masses and the number of neutrino species from wmap and 2dfgrs. 2003. astro-ph/0303076.
- [Hau01] Tonio Hauschildt. Investigation of the Likelihood Function. Beitrag zum Kollaborationstreffen in Mainz, 2001.
- [Hau03a] Tonio Hauschildt. Abschätzung der Signaleffizienz der Neutrino Selektion 2000. private Kommunikation, Juni 2003.
- [Hau03b] Tonio Hauschildt. Besondere Aspekte der systematischen Fehler der Sensitivität. private Kommunikation, October 2003.
- [Hau03c] Tonio Hauschildt. *Search for Extraterrestrial Neutrino Point Sources in the 2000 AMANDA Data*. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, 2003. in Vorbereitung.
- [Hel00] Marc Hellwig. Aufbau eines Supernovanachweissystems am AMANDA Detektor. Diplomarbeit, Universität Mainz, August 2000.
- [Hig64] P.W. Higgs. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508, 1964.
- [Hil96] Gary C. Hill. *Experimental and Theoretical Aspects of High Energy Neutrino Astrophysics*. PhD thesis, University of Adelaide, Adelaide, Australia, 1996.
- [Hil97] Gary C. Hill. Detecting neutrinos from AGN: New fluxes and cross sections. *Astroparticle Physics*, 6:215–227, 1997. arXiv:astro-ph/9607140.
- [Hil00] Gary Hill. Application of Importance Sampling to the atmospheric muon generator BASIEV. Internal report AIR/20000904, AMANDA Collaboration, September 2000.
- [Hil01] Gary C. Hill. Bayesian event reconstruction and background rejection in neutrino detectors. In Heinzlmann et al. [HKS01], pages 1279–1282. HE.267.
- [Hil03] Gary C. Hill. Including Systematic Uncertainties in Confidence Interval Construction for Poisson Statistics. *Physical Review D*, 2003. akzertiert, physics/0302057.
- [HKC⁺98] D. Heck, J. Knapp, J. N. Capdevielle, G. Schatz, and T. Thouw. CORSIKA: A Monte Carlo code to simulate extensive air showers. Wissenschaftlicher Bericht FZKA 6019, Forschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe, Germany, 1998. http://hikwww4.fzk.de/hbk/literatur/FZKA_Berichte/FZKA6019.pdf.
- [HKS01] G. Heinzlmann, K.-H. Kampert, and Christian Spiering, editors. *Proceedings of the 27th International Cosmic Ray Conference*, Hamburg, Germany, August 2001.
- [HM84] Francis Halzen and Alan D. Martin. *Quarks & Leptons*. Wiley, 1984.

- [Hoe02] J. R. Hoerandel. On the scent of the knee: Air shower measurements with kascade. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 110:453–456, 2002. astro-ph/0201109.
- [HR03] Gary C. Hill and Katherine Rawlins. Unbiased cut selection for optimal upper limits in neutrino detectors: The model rejection potential technique. *Astropart. Phys.*, 19:393–402, 2003. astro-ph/0209350.
- [HS03] Tonio Hauschildt and David Steele. Search for extraterrestrial Point Sources of Neutrinos with AMANDA-II. [aC03].
- [HSV99] Alec Habig, Kate Scholberg, and Mark Vagins. The SNEWS Home Page. Website, 1999. <http://hep.bu.edu/~snnnet/>.
- [Ht01] Stephan Hundertmark and the AMANDA Collaboration. A Method to Detect UHE Neutrinos with AMANDA. In Heinzlmann et al. [HKS01], pages 1129–1132. HE.236.
- [Hun99] Stephan Hundertmark. AMASIM Neutrino Detector Simulation Program. In Spiering [Spi99], pages 276–286.
- [Hun00] Stephan Hundertmark. Vertical Ice Properties for the AMANDA Simulation. Internal report AIR/20001001, AMANDA Collaboration, October 2000.
- [IT96] Gunnar Ingelman and M. Thunman. High energy neutrino production by cosmic ray interaction in the Sun. *Physical Review D*, 54(7):4385–4392, 1996. arXiv:hep-ph/9604288.
- [Jac96] John David Jackson. “*Classical Electrodynamics*”. Wiley, New York, USA, third edition, 1996.
- [Jap03] George Japarizde. Photon arrival time distribution and PMT jitter. Beitrag zum Kollaborationstreffen in Madison, 2003.
- [Kar99] Albrecht Karle. Monte Carlo simulation of photon transport and detection in deep ice: muons and cascades. In Spiering [Spi99], pages 174–185.
- [KDT03] Chryssa Kouveliotou, Robert C. Duncan, and Christopher Thompson. Magnetare. *Spektrum der Wissenschaft*, pages 56–63, Mai 2003.
- [KKDHK01] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz, H. L. Harney, and I. V. Krivosheina. Evidence for neutrinoless double beta decay. *Mod. Phys. Lett.*, A16:2409–2420, 2001. hep-ph/0201231.
- [KKZ97] Hans Volker Klapdor-Kleingrothaus and Kai Zuber. *Teilchenastrophysik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, Germany, first edition, 1997.
- [Kno03] Jürgen Knobloch. The CDHS Neutrino Experiment. Website, 2003. <http://knobloch.home.cern.ch/knobloch/cdhs/cdhs.html>.

- [Kow03] Marek Kowalski. *Search for Cascades from extraterrestrial Neutrinos with the AMANDA-II Detector*. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, 2003. in Vorbereitung.
- [KSD99] D. Kieda, M. Salamon, and B. Dingus, editors. *Proceedings of the 26th International Cosmic Ray Conference*, Salt Lake City, USA, August 1999.
- [LC83] P.O. Lagage and C.J. Cesarsky. Cosmic-ray shock acceleration in the presence of self-excited waves. *Astronomy and Astrophysics*, 118(2):223–8, 1983.
- [Lip93] Paolo Lipari. Lepton spectra in the earth’s atmosphere. *Astroparticle Physics*, 1(2):195–227, 1993.
- [LM00] John Gregory Learned and Karl Mannheim. High-Energy Neutrino Astrophysics. *Annual Reviews of Nuclear and Particle Science*, 50:679–749, 2000.
- [Man93] Karl Mannheim. γ -rays and neutrinos from a powerful cosmic accelerator. *Physical Review D*, 48(6):2408–2414, 1993.
- [Mei00] David L. Meier. The association of jet production with geometrically thick accretion flows and black hole rotation. 2000. astro-ph/0010231.
- [Mio01] Predrag Miočinović. *Muon energy reconstruction in the Antarctic Muon and Neutrino Detector Array (AMANDA)*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, California, USA, December 2001.
- [MNS62] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata. *Progress of Theoretical Physics*, 28:870, 1962.
- [MNS⁺01] A. Misaki, V. A. Naumov, T. S. Sinegorskaja, S. I. Senegorsky, and N. Takahashi. Atmospheric muon fluxes underwater as a tool to probe the small- x gluon distribution. In Heinzlmann et al. [HKS01], pages 1025–1028. HE.226.
- [MPR01] Karl Mannheim, Raymond J. Protheroe, and Jörg P. Rachen. On the cosmic ray bound for models of extragalactic neutrino production. *Physical Review D*, 63(2):023003.1–023003.16, 2001. arXiv:astro-ph/9812398.
- [MS53] H. Motz and L. I. Shiff. Cherenkov Radiation in a Dispersive Medium. *American Journal of Physics*, 21:258–259, 1953.
- [MSR95] Alan D. Martin, W. James Stirling, and Robert G. Roberts. Pinning down the glue in the proton. *Physics Letters B*, 354:155–162, 1995.
- [Mül03a] Andreas Müller. Astro-lexikon. web page, 2003. <http://www.lsw.uni-heidelberg.de/users/amueller/lexdt.html>.
- [Mül03b] Andreas Müller. Darstellung des AGN Paradigma. private Kommunikation, Juli 2003.
- [Neu99] Till Neunhöffer. Suche nach leptonischen Chargino-Zerfällen in Elektron Positron Kollisionen mit dem ALEPH Detektor bei einer Schwerpunktsenergie von 189 GeV. Diplomarbeit, Universität Mainz, Januar 1999.

- [Nie00] Peter Niessen. *Search for relativistic magnetic monopoles with the AMANDA detector*. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, November 2000.
- [NKAS03] Shigehiro Nagataki, Kazunori Kohri, Shin'ichiro Ando, and Katsuhiko Sato. Gamma-ray burst neutrino background and star formation history in the universe. *Astropart. Phys.*, 18:551–564, 2003. astro-ph/0203481.
- [NMB93] Lukas Nellen, Karl Mannheim, and Peter Ludwig Biermann. Neutrino production through hadronic cascades in AGN accretion disks. *Physical Review D*, 47(12):5270–5274, 1993. arXiv:hep-ph/9211257.
- [Nt01] Till Neunhöffer and the AMANDA Collaboration. Supernova Neutrino-Burst Search with the AMANDA Detector. In Heinzlmann et al. [HKS01], pages 1125–1128. HE.231.
- [O⁺01] A. Osipowicz et al. Katrin: A next generation tritium beta decay experiment with sub-eV sensitivity for the electron neutrino mass. 2001. hep-ex/0109033.
- [Opp01] Anne Oppelt. *Étude de la résolution angulaire du télescope à neutrinos ANTARES*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Marseille, France, April 2001. in french.
- [OW01] Philip Olbrechts and Christopher Henrik Viktor Wiebusch. On the angular sensitivity of optical modules in ice. Internal report AIR/20010102, AMANDA Collaboration, October 2001.
- [Pan96] Dirk Pandel. Bestimmung von Wasser- und Detektorparametern und Rekonstruktion von Myonen bis 100 TeV mit dem Baikal-Neutrinoobservatorium NT-72. Diploma thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, February 1996.
- [Par00] Particle Data Group. Review of particle physics. *Europ. Phys. J.*, C 3, 2000.
- [PB97] P. Buford Price and Lars Bergstöm. Optical Properties of Deep Ice at the South Pole: scattering. *Applied Optics*, 36(18):4181–4194, 1997.
- [Per00] Donald H. Perkins. *Introduction to High Energy Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 4th edition, 2000.
- [Pro98] R. J. Protheroe. Acceleration and interaction of ultra high energy cosmic rays. 1998. astro-ph/9812055.
- [PTVF97] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. V. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1997.
- [PW01a] P. Buford Price and Kurt Woschnagg. Role of Group and Phase Velocity in High-Energy Neutrino Observatories. *Astroparticle Physics*, 15(1):97–100, 2001. arXiv:hep-ex/0008001.

- [PW01b] P. Buford Price and Kurt Woschnagg. Temperature Dependence of Absorption in Ice at 532 nm. *Applied Optics*, 40(15):2496–2500, May 2001. <http://area51.berkeley.edu/manuscripts/>.
- [PWC00] P. Buford Price, Kurt Woschnagg, and Dimitri Chirkin. Age vs depth of glacial ice at South Pole. *Geophysical Research Letters*, 27(13):2129–2144, 2000. <http://area51.berkeley.edu/manuscripts/>.
- [Qin00] Yi-Ping Qin. Formulas for direct determination of real speed in galactic superluminal sources. 2000. astro-ph/0005007.
- [Raw03a] Katherine Rawlins. Measurement of the Cosmic Ray Composition at the Knee with the SPASE/AMANDA-B10 Detectors. [aC03].
- [Raw03b] Katherine Rawlins. Spase/amanda 2000-2002 page. web page, 2003. <http://amanda.wisc.edu/kath/spase2002/>.
- [Ree66] M. J. Rees. . *Nature*, 211:468, 1966.
- [Rho99] Rhode, W. and Cârloganu. C. . In Spiering [Spi99], pages 247–261.
- [Rib01] M. Ribordy. Final files and om selection for 2000 data. web page, 2001. <http://www-zeuthen.desy.de/~ribordy/OMfinal2000.html>.
- [RSS97] A. Ray, F. K. Sutaria, and J. Sheikh. Electron capture in early gravitational collapse: Nuclear equation of state. 1997. astro-ph/9707218.
- [S⁺03] D. N. Spergel et al. First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Determination of cosmological parameters. 2003. astro-ph/0302209.
- [Sch97] Norbert Schmitz. *Neutrino Physik*. Teubner Studienbücher, 1997.
- [Sch02] Thorsten Schmidt. *Entwicklung eines optischen Modules für AMANDA und IceCube*. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, 2002.
- [Spi99] Christian Spiering, editor. “*Proceedings of Workshop on the Simulation and Analysis Methods for Large Neutrino Telescopes*”, DESY-Proc-1999-01, DESY Zeuthen, Germany, July 1999.
- [SS96] Floyd W. Stecker and Michael H. Salamon. High Energy Neutrinos from Quasars. *Space Science Reviews*, 75:341–355, January 1996. arXiv:astro-ph/9501064.
- [Ste00] Peter Steffen. Direct Walk II. Internal report AIR/20020201, AMANDA Collaboration, February 2000.
- [Ste03] David Steele. *Search for Extraterrestrial Neutrino Point Sources in the 2000 and 2001 AMANDA Data*. PhD thesis, University of Madison, Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA, 2003. in Vorbereitung.
- [Sud01] Peter Sudhoff. Systematische Untersuchungen an Optischen Modulen im AMANDA-Experiment. Diploma thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, November 2001.

- [T⁺98] M. Takeda et al. Extension of the cosmic-ray energy spectrum beyond the predicted greisen-zatsepin-kuzmin cutoff. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1163–1166, 1998. astro-ph/9807193.
- [TIG96] M. Thunmann, G. Ingelman, and P. Gondolo. Charm production and high energy atmospheric muon and neutrino fluxes. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 48(472), April 1996.
- [U⁺00] Y. Uchihori et al. Cluster analysis of extremely high energy cosmic rays in the northern sky. *Astropart. Phys.*, 13:151–160, 2000. astro-ph/9908193.
- [vDt01] R. van Dantzig and the ANTARES Collaboration. ANTARES, Physics Potential, Progress and Status. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, 100(1–3):341–343, 2001. Proceedings of the Europhysics Neutrino Oscillation Workshop.
- [Wag03] Wolfgang Wagner. New Capabilities of the AMANDA-II High Energy Neutrino Detector. [aC03].
- [Wal03] Christian Walck. Live- and dead-time analysis. web page, 2003. <http://www.physto.se/~walck/amanda/livedead/>.
- [Wax00] Eli Waxman. High energy cosmic-rays and neutrinos from cosmological gamma-ray burst fireballs. *Phys. Scripta*, T85:117–126, 2000. astro-ph/9911395.
- [WB99] Eli Waxman and John N. Bahcall. High Energy Astrophysical Neutrinos: An Upper Bound. *Physical Review D*, 59(2):023002.1–023002.8, 1999. arXiv:astro-ph/9807282.
- [Web87] G. M. Webb. Hydrodynamical constraints on cosmic-ray acceleration in relativistic shocks. *Astrophysical Journal*, 319:215–236, August 1987.
- [Wil02] R. Jeffrey Wilkes. New results from Super-K and K2K. *ECONF*, C020805:TTH02, 2002. hep-ex/0212035.
- [Wis01] Henrike Wissing. Detection of Cosmic Muon-Neutrinos with IceCube. Diploma thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, November 2001.
- [Wos00] Kurt Woschnagg. Preliminary (non-Optical) Position Calibration of strings 14 to 19. Internal report AIR/20001002, AMANDA Collaboration, October 2000.
- [Wos03] Kurt Woschnagg. Unsicherheiten in der geometrischen Kalibration. private Kommunikation, Juli 2003.
- [Z⁺02] Bing Zhang et al. Tev neutrinos from magnetars. 2002. astro-ph/0210382.
- [ZK66] G. T. Zatsepin and V. A. Kuzmin. Upper limit of the spectrum of cosmic rays. *JETP Lett.*, 4:78–80, 1966.