



Nichtkommutative Geometrie und Quantisierung von Raumzeiten und Konfigurationsräumen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
“Doktor der Naturwissenschaften”
am Fachbereich Physik der
Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Alexander Holfter
geb. in Worms

Mainz, 2003



Theoretische
Elementarteilchen-
Physik

Datum der mündlichen Prüfung: 5.12.2003

WO NICHTS MEHR ZU ENTRÄTSELN BLEIBT,
HÖRT UNSER ANTEIL AUF.
(ERNST VON FEUCHTERSLEBEN)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Wieso Nichtkommutative und nicht kommutative Geometrie?	7
1.1.1	Der Stein des Anstoßes und der Anstoß des Steins	8
1.1.2	Kurzer historischer Überblick	11
1.2	Spektrale Tripel	13
1.2.1	Definition spektraler Tripel	13
1.2.2	Bemerkungen und Beispiele	15
1.3	Teilchenmodelle in der NCG	19
1.4	Aufbau der Arbeit	20
1.5	Hinweise für den Leser	21
2	Klassifizierung endlicher Tripel	23
2.1	Definition endlicher spektraler Tripel	23
2.2	Die Algebra	23
2.3	Der Hilbertraum	24
2.4	Der Diracoperator	26
2.5	Exkurs K-Theorie	32
2.5.1	Wozu K-Theorie?	32
2.5.2	Adjungieren einer 1	32
2.5.3	Der algebraische direkte Limes	35
2.5.4	Die Grothendieck-Konstruktion	38

2.5.5	Der Monoid $V(A)$ und die Gruppe $K_{00}(A)$	46
2.5.6	Äquivalenzen von Projektoren	49
2.5.7	Die Gruppe $K_0(A)$	53
2.5.8	Höhere K-Gruppen und Bott-Periodizität	54
2.6	Die Schnittform und Poincaré-Dualität	56
3	Ab- und Zustände	61
3.1	Zustände auf endlichdimensionalen C^* -Algebren	61
3.2	Abstände	62
3.3	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	64
3.4	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	70
3.5	$M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	87
3.6	$M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$	96
3.7	$M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	98
4	Quotientenräume und Quantisierung	101
4.1	Vorbemerkungen	101
4.2	Quotientenräume	105
4.3	Quantisierung	115
4.4	Diskussion	125
5	Das Zeitproblem in NCG	128
5.1	Problemstellung	128
5.2	Lösungsansätze	129
5.3	Ein erster Schritt	130
5.4	Spektrale Quadrupel	138
5.4.1	Motivation: Tripel + Zeit = Quadrupel	138
5.4.2	Die Axiome für spektrale Quadrupel	139
5.5	Klassifizierung diskreter Quadrupel	141

5.5.1	Ein Spielzeugmodell	144
5.5.2	Diskussion des Beispiels	147
5.6	Abschließende Bemerkungen zum “Zeitproblem”	149
6	Feynman’s Beweis der Maxwellgleichungen und dessen nichtkommutative Verallgemeinerung	150
6.1	Der “Standard”-Beweis für $C^\infty(\mathbb{R}^n)$	151
6.2	$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Derivationsargument	156
6.3	Vergleich der Ergebnisse von 6.1 und 6.2	158
6.4	Moyal-deformierter \mathbb{R}^n in Analogie zum “Standard”-Beweis	161
6.5	Strukturelle Gesichtspunkte	164
6.6	Moyal-deformierter \mathbb{R}^n mit Derivationsargument	165
6.6.1	\mathbb{R}_θ^n mit singulärem θ	166
6.6.2	\mathbb{R}_θ^n mit invertierbarem θ	171
6.7	Vergleich der Ergebnisse von 6.4 und 6.6	172
6.8	$C^\infty(\mathbb{R}^a) \otimes M_n(\mathbb{C})$	173
6.9	Abschließende Bemerkungen	183
7	Zusammenfassung, Ausblick	184
	Symbolverzeichnis	186
	Literaturverzeichnis	189
	Danksagung	193
	Lebenslauf	194

Kapitel 1

Einleitung

DAS LETZTE, WAS MAN FINDET, WENN MAN EIN WERK SCHAFFT, IST
DIE ERKENNTNIS, WAS MAN AN SEINEN ANFANG ZU STELLEN HAT.
(BLAISE PASCAL)

1.1 Wieso Nichtkommutative und nicht kommutative Geometrie?

Das Ziel dieser Arbeit ist in zwei Sätzen gesagt (das nur, um die ungeduldige Leserin/den ungeduldigen Leser¹ zu beruhigen): Die Bedeutung eines Ausdrucks der Form

$$[x^i, p^j] = i\hbar \delta^{ij} \mathbb{1}$$

ist aus der Quantenmechanik bekannt. In den folgenden Kapiteln soll (zumindest teilweise) geklärt werden, welchen Ursprung, welche Bedeutung und welche Konsequenzen eine Relation

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

hat.

¹An dieser Stelle gleich eine Bemerkung zur politischen Korrektheit: Im Folgenden wird auf die geschlechtsneutrale Formulierung der Art “Physikerin/Physiker” verzichtet, und zwar nicht aus Ignoranz, sondern aus Bequemlichkeit. Es ist also grundsätzlich “Physiker” auch als “Physikerin” aufzufassen, ebenso wie bei allen vergleichbaren Fällen. Offensichtliche Ausnahmen sind als solche sofort erkennbar, z.B. “Mannigfaltigkeit” oder “Feynman”.

1.1.1 Der Stein des Anstoßes und der Anstoß des Steins

Jetzt etwas ausführlicher: Was ist überhaupt unter “kommutativer Geometrie” zu verstehen? Betrachtet man eine “klassische” Geometrie, d.h. ein Objekt M , das “mindestens” die Struktur einer Punktmenge hat, dann ist die Algebra $\mathcal{F}(M)$ der Funktionen auf M unter punktweiser Multiplikation kommutativ:

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in M.$$

Es ist klar, dass diese Struktur nicht sehr überraschend ist und dass niemand auf die Idee käme, sie mit besonderer Beachtung zu würdigen, wenn da nicht Gedankengänge wären, welche die fundamentale Struktur der Punkt Mengen an sich in Frage stellen (“der Stein des Anstoßes”). Ein solcher Gedankengang taucht z.B. in einem inzwischen fast “klassischen” Paper [DFR95] (aus dem Jahr 1995) auf und soll nun in zwei vereinfachten Versionen vorgestellt werden, wobei die Argumentation die Idee und eine gewisse Intuition vermitteln soll und keineswegs Wert auf völlige mathematische oder physikalische Exaktheit gelegt wird. Die “Punktmenge” bzw. Mannigfaltigkeit, die hierbei in erster Linie eine Rolle spielt, ist die physikalische Raumzeit.

Angenommen, ein Raumzeitvolumen der Größe $\Delta x \Delta t$ soll durch eine Messung möglichst genau bestimmt werden. Zu dieser Messung werde ein Teilchen (oder mehrere) der Masse m verwendet. Dann erhält man zunächst wegen der Energie-Zeit Unschärfe $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ die Abschätzung

$$\Delta x \Delta t \geq \frac{\hbar \Delta x}{2 \Delta E}. \quad (1.1)$$

ΔE hat die Größenordnung mc^2 . Des Weiteren kann man sich klarmachen, dass Δx nach unten durch den Schwarzschildradius $r_S = 2Gm/c^2$ beschränkt ist, da bei einem kleineren Abstand keine Information mehr aus dem betrachteten Raumvolumen nach außen gelangen kann. Setzt man also $\Delta E = mc^2$ und $\Delta x = 2Gm/c^2$ in (1.1) ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta t &\geq \frac{\hbar G}{c^4} \\ \text{bzw. } \Delta x \Delta x^0 &\geq \lambda_P^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

wobei $x^0 = ct$ und λ_P die Planck-Länge ist, welche gegeben ist durch

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m.}$$

Eine analoge Abschätzung kann man erreichen, indem man (masselose) Photonen als “Messteilchen” verwendet: Ein Photon der Energie E kann eine Länge $\Delta x \approx \lambda$ auflösen, wobei λ die Wellenlänge ist. Wegen $\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E}$ ist somit

$$\Delta x \approx \frac{2\pi\hbar c}{E}. \quad (1.3)$$

Andererseits ist $\Delta x \geq r_S = \frac{2Gm}{c^2} = \frac{2GE}{c^4}$, wenn man die “effektive Masse” des Photons als E/c^2 ansetzt. Damit hat man dann

$$E \leq \frac{c^4 \Delta x}{2G}. \quad (1.4)$$

Setzt man (1.4) in (1.3) ein, so erhält man

$$\Delta x \geq \frac{4\pi\hbar G}{c^3 \Delta x}$$

und daher, wenn man den Faktor 4π vernachlässigt,

$$(\Delta x)^2 \geq \lambda_P^2. \quad (1.5)$$

Die Gleichungen (1.2) und (1.5) entsprechen in ihrer Struktur den beiden in [DFR95] hergeleiteten Formeln

$$\begin{aligned} \Delta x_0(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3) &\geq \lambda_P^2, \\ \Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_2 \Delta x_3 + \Delta x_3 \Delta x_1 &\geq \lambda_P^2. \end{aligned}$$

Bekanntlich lassen sich derartige Unschärferelationen durch nichtkommutierende Objekte realisieren (andere Ansätze, wie z.B. stochastische, sollen hier nicht untersucht werden). Betrachtet man Raum- und Zeitindizes in Gleichung (1.2) im Sinne von Minkowski gleichberechtigt, so lässt sich die Gleichung in “kovarianter” Form

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \lambda_p^2. \quad (1.6)$$

schreiben. Solange auf der rechten Seite Konstanten stehen, wird diese Ungleichung niemals völlig kovariant sein, sie sieht durch symmetrisches Auftreten der Raumzeitindizes jedoch zumindest “kovarianter” als Gleichung (1.2) aus. Diese Unschärfe wird durch den Kommutator

$$[x^\mu, x^\nu] = 2i\lambda_p^2 \mathbf{1} \quad (1.7)$$

erzeugt (man beachte, dass für hermitesche Operatoren H_1 und H_2 die Formel $\Delta H_1 \Delta H_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [H_1, H_2] \rangle|$ gilt), bzw. allgemeiner

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Man ist nun in der Situation, in der die Raumzeit durch nichtkommutierende Objekte beschrieben werden muss (oder anders ausgedrückt: Wir benötigen eine Geometrie, die keinen Bezug auf Punkte nimmt), was zum Begriff der “Nichtkommutativen Geometrie” führt.

Im Allgemeinen werden die Arbeiten von Gelfand und Naimark als die Geburtsstunde der Nichtkommutativen Geometrie angesehen, insbesondere das folgende Theorem aus dem Jahr 1943:

Theorem 1.1.1 *Sei \mathcal{A} eine kommutative (komplexe) C^* -Algebra mit Eins. Dann existiert ein kompakter topologischer Hausdorffraum M , so dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}(M)$.*

(Zur Definition einer C^* -Algebra siehe Definition 2.5.1 auf Seite 32.) Hierbei sind $\mathcal{C}(M)$ die bezüglich der Supremumsnorm stetigen Funktionen auf M . Mit dieser Norm wird $\mathcal{C}(M)$ zu einer C^* -Algebra mit Eins und \cong bezeichnet eine C^* -Isomorphie.

Die wesentliche Aussage ist, dass **jede** kommutative C^* -Algebra eine Funktionalgebra auf einem bestimmten topologischen Raum ist.

Wenn im Folgenden vom “kommutativen Fall” gesprochen wird, ist damit im Sinne des Gelfand-Naimark-Theorems immer gemeint, dass die jeweilige betrachtete Algebra durch $A = \mathcal{C}(M)$ gegeben ist.

Theorem 1.1.1 ist für unser durch Gleichung (1.6) hervorgerufenen Problem insofern relevant, dass es eine kanonische Möglichkeit liefert, die Kommutativität der Funktionalgebra $\mathcal{C}(M)$ fallenzulassen, ohne die anderen Strukturen zu beeinträchtigen. Um nun die Physik auf einer durch Gleichung (1.8) beschriebenen nichtkommutativen Raumzeit zu formulieren, muss man folgendermaßen vorgehen: Man suche diejenigen Elemente der jeweiligen Theorie, die auf die Raumzeit M bzw. auf die Elemente von M (die Punkte) Bezug nehmen. Die jeweiligen Aussagen formuliere man dann unter Verwendung von $\mathcal{C}(M)$ anstelle von M und ersetze in der nichtkommutativen Beschreibung $\mathcal{C}(M)$ durch eine allgemeinere Algebra \mathcal{A} . Die Frage, die sich an diesem Punkt stellt, ist, **wie allgemein** diese “allgemeinere Algebra” sein darf, man muss nämlich bedenken, dass $\mathcal{C}(M)$ als Algebra stetiger Funktionen auf der **Raumzeit** wesentlich mehr Struktur besitzt, als die Funktionalgebra auf einem beliebigen topologischen Raum. Diese Strukturen auf $\mathcal{C}(M)$ werden durch die auf M existierenden Strukturen (wie z.B. Metrik, Spinstruktur, Orientierung) induziert und führen letztendlich auf den Begriff des spektralen Tripels, der in Abschnitt 1.2 diskutiert wird.

Mathematiker, die sich die Hände reiben und behaupten, die Lösung des Problems, welches 1995 von [DFR95] aufgeworfen wurde, sei ja schon 1943 (zumindest teilweise) bekannt gewesen, müssen hier eines Besseren belehrt werden, denn über die Struktur der Raumzeit bei kleinsten Abständen hat sich schon Riemann in seiner Habilitationsschrift aus dem Jahre 1854 Gedanken gemacht, wo er schreibt:

Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Maßbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar dass die Maßverhältnisse des Raums im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäß sind, und dies würde man in der Tat annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären ließen. (...)

Es muss also entweder das dem Raum zu Grunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden.

Das Faszinierende an diesem Zitat ist, dass sich Riemann selbst (als Erfinder bzw. Begründer der Riemannschen Geometrie) schon der Grenzen seiner Theorie bewusst war und damit schon wichtige Gedanken im Sinne einer Quantengravitation vorweggenommen hat.

1.1.2 Kurzer historischer Überblick

Ein wesentliches Anliegen der Nichtkommutativen Geometrie (im Folgenden stellenweise mit NCG abgekürzt für “Noncommutative Geometry”, gemäß dem Titel des Standardwerks von Connes [Con94]) ist es, geometrische Daten in algebraische zu übersetzen. Im Fall des Gelfand-Naimark-Theorems bestehen die geometrischen Daten aus der Punktmenge sowie der zugehörigen Topologie. Die “Übersetzungsvorschrift”, die dieses Theorem nun liefert, ist von der Form

$$\text{topologischer Raum} \leftrightarrow (\text{kommutative}) C^*\text{-Algebra.}$$

Im Laufe der Zeit ist dieses “Wörterbuch der Nichtkommutativen Geometrie”, das 1943 erst aus einer Zeile bestand, kontinuierlich gewachsen. Ein Teil dieses Wörterbuchs findet man z.B. in [WO93] S.24, wo hauptsächlich topologische Zusatzstrukturen (wie “kompakt”, “offen”, “abgeschlossen”, “zusammenhängend” etc.) hinzugefügt sind. Weitere Zeilen des Wörterbuchs stammen von “echt” geometrischen Objekten, wie z.B. Vektorbündeln oder der äußeren Algebra.

Im Falle der Vektorbündel stammt das zugehörige Theorem von Serre bzw. Swan (siehe hierzu [Swa62] und auch [GBVF01] Seite 59):

Theorem 1.1.2 *Sei M eine kompakte, endlich-dimensionale, zusammenhängende Mannigfaltigkeit und sei \mathcal{E} ein $C^\infty(M)$ -Modul. Dann gilt: Es existiert genau dann ein Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ mit $\mathcal{E} \cong \Gamma(M, E)$, falls \mathcal{E} endlich projektiv ist. Hierbei ist $\Gamma(M, E) = \{s : M \rightarrow E \mid s \text{ differenzierbar und } \pi \circ s = \text{id}_M\}$, wobei π die Projektion des Bündels E ist.*

Man hätte dann also folgende Zeile für das “Wörterbuch”:

Vektorbündel \leftrightarrow endlich projektive Moduln.

Die Konstruktion der äußeren Formen geht auf Connes zurück und liefert einen nichtkommutativen Zugang zum de Rham Komplex.

Es gäbe noch viele erwähnenswerte Zeilen im Wörterbuch der Nichtkommutativen Geometrie, doch wir wollen uns auf die letzte (oder vorletzte? - siehe hierzu Kapitel 5) und für die Physik wahrscheinlich wichtigste beschränken. Sie lautet

Riemannsche Spinmannigfaltigkeiten \leftrightarrow reelle spektrale Tripel.

Kurz gesagt sind Spinmannigfaltigkeiten solche, auf denen Fermionen leben können. Im \mathbb{R}^4 bzw. im \mathbb{R}^n ist dies (mehr oder weniger) offensichtlich, doch für allgemeine Mannigfaltigkeiten keineswegs klar. Ein wesentlicher (oder sogar “der wesentliche”) Bestandteil einer Riemannschen Spinmannigfaltigkeit ist der Diracoperator, und wir werden sehen, dass er in der Algebraisierung der Mannigfaltigkeit eine zentrale Rolle spielt. Er beinhaltet unter anderem die Dimension der Mannigfaltigkeit und die Metrik (besser ausgedrückt, beides lässt sich aus ihm rekonstruieren: die Dimension gemäß Axiom (A1) in Definition 1.2.1, die Metrik gemäß Abstandsformel (3.2) in Kapitel 3).

Wegen ihrer zentralen Bedeutung (auch für die vorliegende Arbeit), werden spektrale Tripel in Abschnitt 1.2 gesondert behandelt. Man sollte sich als Leser dort nicht von der umfangreichen Definition abschrecken lassen, denn die wesentlichen Punkte werden in den sich anschließenden Beispielen und Bemerkungen klarer und auch in Kapitel 2 wird man durch konkrete Rechnungen im nulldimensionalen Fall mit den einzelnen Objekten vertraut.

Ein wichtiger Erfolg der spektralen Tripel (bzw. der NCG überhaupt) in der Physik ist die Möglichkeit, Teilchenmodelle elegant zu erfassen. Zu diesem Punkt und zu dem Zusammenhang mit (Teilen) der vorliegenden Arbeit wird in Abschnitt 1.3 noch etwas gesagt.

An dieser Stelle noch eine allgemeine Bemerkung zur Vermeidung von Missverständnissen: Nichtkommutative Geometrie beschäftigt sich keineswegs nur mit nichtkommutativen Algebren, vielmehr ist es ein wesentliches Ziel, von einer geometrischen zu einer algebraischen Beschreibung zu gelangen und auf diesem Weg möglichst viele Erkenntnisse über die jeweiligen Strukturen zu sammeln. Ein gutes Beispiel hierzu ist wiederum das Gelfand-Naimark-Theorem 1.1.1: Einerseits ist es natürlich ein wichtiges Strukturtheorem in der Theorie der C^* -Algebren, andererseits wirft es auch ein neues Licht auf die kompakten Hausdorffräume.

1.2 Spektrale Tripel

Wir rekapitulieren hier zunächst nochmals kurz den bisherigen Gedankengang: Es gibt Argumente (z.B. [DFR95]), welche Unschärferelationen zwischen Raumzeitkoordinaten implizieren. Möchte man die Unschärferelationen durch Kommutatorrelationen der Form

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

realisieren, so ist man gezwungen, die Kommutativität der Funktionenalgebra auf der Raumzeit (welche die Koordinatenfunktionen x^μ enthält) fallenzulassen. Bei der Frage, welche Strukturen eine “nichtkommutative Funktionenalgebra auf der Raumzeit” tragen sollte, lässt man sich vom Gelfand-Naimark-Theorem 1.1.1 leiten und fordert zunächst die C^* -Eigenschaft, welche sich aus der Topologie der Raumzeit ableitet. Will man tatsächlich **alle** Strukturen der Raumzeit auf algebraischer Ebene erfassen, geschieht dies durch den Begriff des **spektralen Tripels**, der im folgenden Abschnitt definiert werden soll. Die Definition ist sehr technisch und abstrakt. Um hier nicht die Übersicht zu verlieren, ist es sinnvoll, zunächst das Beispiel 1.2.1 und Bemerkung 1.2.9 zu betrachten. Beispiel 1.2.1 beschreibt den Archetypus eines spektralen Tripels, aus dem sich letztendlich die Axiomatik der Definition 1.2.1 entwickelt hat. Erläuterungen, Beispiele und diverse Veranschaulichungen zu der Definition finden sich dann in Abschnitt 1.2.2.

1.2.1 Definition spektraler Tripel

Definition 1.2.1 (Gerades, reelles, spektrales Tripel) *Ein gerades, reelles, spektrales Tripel (oder auch K -Zykel) besteht aus 5 Objekten ((O1) - (O5)), welche den Axiomen (A1) - (A7) genügen.*

Objekte: (A, H, D, Γ, J)

- (O1) A ist eine (komplexe) Prä- C^* -Algebra.
- (O2) H ist ein Hilbertraum, der eine treue, beschränkte Darstellung π von A trägt.
- (O3) D ist ein selbstadjungierter Operator auf H mit den Eigenschaften, dass erstens D einen endlichdimensionalen Kern hat und zweitens die Inverse D^{-1} , welche auf dem orthogonalen Komplement des Kerns von D definiert ist, ein kompakter Operator ist.
- (O4) Γ ist ein selbstadjungierter, unitärer Operator (genannt Graduierung) auf H (d.h. $\Gamma^2 = 1$), der mit $\pi(a)$ vertauscht $\forall a \in A$ und der mit D antivertauscht ($D\Gamma = -\Gamma D$).
- (O5) J ist ein antiunitärer Operator auf H , d.h. eine antilineare Bijektion mit $J^2 = \pm 1$ und $\langle J\phi, J\psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle \forall \phi, \psi \in H$.

Axiome:

(A1 Dimension) Es existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $ds := |D|^{-1}$ infinitesimal von der Ordnung $1/n$ ist. n ist die Dimension des spektralen Tripels.

(A2 Ordnung 1) Für alle $a, b \in A$ gilt

$$[[D, a], Jb^*J^{-1}] = 0$$

(hier ist a mit $\pi(a)$ und b^* mit $\pi(b^*)$ identifiziert).

(A3 Regularität) Für alle $a \in A$ ist $[D, a]$ ein beschränkter Operator auf H . Des Weiteren gehören a und $[D, a]$ zu $\bigcap_{k=1}^{\infty} \text{dom}(\delta^k)$, wobei δ eine Derivation auf $\mathcal{L}(H)$ ist, welche durch $\delta(T) := [|D|, T]$ definiert ist. Naiv ausgedrückt bedeutet dies, dass a und $[D, a]$ "unendlich oft differenzierbar" sind.

(A4 Orientierbarkeit) Es existiert ein Hochschild-Zykel $c \in Z_n(A, A \otimes A^o)$, dessen Repräsentant auf H gegeben ist durch

$$\pi(c) = \begin{cases} \Gamma & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(A5 Endlichkeit) Der Raum der glatten Vektoren $H_{\infty} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{dom}(D^k)$ ist ein endlich projektiver Links- A -Modul.

(A6 Poincaré Dualität) Der Fredholm-Index des Operators D ergibt eine nichtentartete Schnittform auf der K -Theorie der Algebra $A \otimes A^o$.

(A7 Realität) (im Sinne von Existenz einer reellen Struktur)

J, D und Γ erfüllen (in Abhängigkeit von n) folgende Relationen:
 n gerade:

$n \bmod 8$	0	2	4	6
$J^2 = \epsilon$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = -1$	$\epsilon = -1$	$\epsilon = +1$
$JD = \epsilon \cdot DJ$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = +1$
$J\Gamma = \epsilon \cdot \Gamma J$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = -1$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = -1$

n ungerade:

$n \bmod 8$	1	3	5	7
$J^2 = \epsilon$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = -1$	$\epsilon = -1$	$\epsilon = +1$
$JD = \epsilon \cdot DJ$	$\epsilon = -1$	$\epsilon = +1$	$\epsilon = -1$	$\epsilon = +1$

Des Weiteren ist durch

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} : A^\circ &\rightarrow \text{End } H \\ a &\mapsto J\pi(a^*)J^{-1}\end{aligned}\tag{1.9}$$

eine Darstellung der opposite Algebra A° gegeben, welche mit der Darstellung π von A vertauscht:

$$[\pi(a), \tilde{\pi}(b)] = 0 \quad \forall a, b.\tag{1.10}$$

Da man oft anstelle von spektralen Tripeln von “einer nichtkommutativen Geometrie” spricht, soll auch die

Definition 1.2.2 (Nichtkommutative Geometrie) *Eine nichtkommutative Geometrie ist ein (gerades oder ungerades) reelles spektrales Tripel.*

erwähnt werden.

1.2.2 Bemerkungen und Beispiele

An dieser Stelle sind einige Bemerkungen und Beispiele zur Definition eines spektralen Tripels angebracht. Anmerkungen zu fundamentalen Problemen, wie z.B. die fehlende Semi-Riemannsche Verallgemeinerung, werden in den späteren Kapiteln angesprochen.

Bemerkung 1.2.1 *Eine Prä- C^* -Algebra ist eine normierte $*$ -Algebra, deren Abschluss eine C^* -Algebra ist. Mit “Darstellung” π der Prä- C^* -Algebra A ist stets $*$ -Darstellung gemeint, d.h. $\pi(a^*) = \pi(a)^*$.*

Der Grund dafür, dass man sich hier auf Prä- C^* -Algebren beschränkt, ist das “Differenzierbarkeitsproblem”. Betrachtet man den kommutativen Fall, so gilt folgender Satz (siehe z.B. [Sak91], S.20):

Satz 1.2.1 *Sei \mathcal{A} eine kommutative C^* -Algebra und sei $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ eine Derivation. Dann ist $\delta = 0$.*

Intuitiv lässt sich dies mit Hilfe des Gelfand-Naimark-Theorems (1.1.1) verstehen: Für eine kommutative Algebra \mathcal{A} ist $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}(M)$ und es ist klar, dass $\mathcal{C}(M)$ eben auch nichtdifferenzierbare Elemente enthält.

Bemerkung 1.2.2 *Streng genommen sind ungerade spektrale Tripel noch gar nicht definiert. “Ungerade” heißt ein Tripel, falls die Graduierung Γ nicht existiert. Dies ist genau für ungerade Dimension der Fall, daher taucht Γ auch in der entsprechenden Tabelle in Axiom 7 nicht auf.*

Bemerkung 1.2.3 Dass mit $\tilde{\pi}$ eine Darstellung von A° vorliegt, muss nicht als Axiom gefordert werden, allerdings ist die Tatsache, dass π und $\tilde{\pi}$ vertauschen (1.10) keine Selbstverständlichkeit. Dadurch kann eine Darstellung der Algebra $A \otimes A^\circ$ definiert werden:

$$\begin{aligned} \pi_\otimes : A \otimes A^\circ &\rightarrow \text{End} H \\ a \otimes b &\mapsto \pi(a)\tilde{\pi}(b) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Bemerkung 1.2.4 (zu Axiom 1 - Dimension)

Unter "infinitesimal von der Ordnung $1/n$ " versteht man Folgendes: Sei $T : H \rightarrow H$ ein kompakter Operator auf einem Hilbertraum H . Sei $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der charakteristischen Werte von T (d.h. die Eigenwerte von $|T| := \sqrt{T^*T}$), angeordnet in absteigender Reihenfolge und gemäß ihrer Multiplizität wiederholt. T heißt infinitesimal von der Ordnung α , wenn

$$\mu_k(T) = O(k^{-\alpha}),$$

d.h. wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\mu_k(T) \cdot k^\alpha \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(Dass man die μ_n überhaupt absteigend anordnen kann, folgt aus der Tatsache, dass T ein kompakter Operator ist.)

Bemerkung 1.2.5 (ebenfalls zu Axiom 1)

Im kommutativen Fall, d.h. für $A = C^\infty(M)$, liefert das Dimensionsaxiom natürlich die klassische Dimension der Mannigfaltigkeit M . Dies ist eine sehr starke Aussage, denn sie besagt, dass man die Dimension der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit aus dem Spektrum von D bestimmen kann. Betrachtet man beispielsweise die S^1 mit dem Diracoperator $D = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$, so sind die Eigenfunktionen von D von der Form

$$\psi_n(\phi) = e^{in\phi}, n \in \mathbb{Z},$$

und daher hat D die Eigenwerte $\lambda_n = n \in \mathbb{Z}$. Dementsprechend erhält man für $|D|$ die Eigenwerte $\lambda_n = n \in \mathbb{N}$ und für $|D|^{-1}$ die Eigenwerte $\lambda_n = \frac{1}{n}$. Also ist $|D|^{-1}$ infinitesimal von der Ordnung 1, und die Dimension des spektralen Tripels ist 1, was natürlich gleich der Dimension der S^1 als Mannigfaltigkeit ist.

Das Beispiel der S^2 ist schon etwas komplizierter und ist ausführlich in [Pas01] oder [Var97] diskutiert.

Bemerkung 1.2.6 (zu Axiom 2 - Ordnung 1)

Dieses Axiom ist die algebraische Fassung der Aussage, dass D ein Differentialoperator erster Ordnung ist. Man kann beispielsweise im Kommutativen leicht überprüfen, dass

$[[\frac{\partial}{\partial x}, f], g] = 0 \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt, oder auch die analoge Aussage $[[[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, f], g], h] = 0 \forall f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für höhere Ordnungen.

Die exakte definierende Relation für einen Differentialoperator 1. Ordnung auf einem A - B -Bimodul \mathcal{N} lautet

$$D(x\psi y) = xD(\psi y) + D(x\psi)y - xD(\psi)y \quad (1.12)$$

für $x \in A, y \in B, \psi \in \mathcal{N}$ (siehe [DVM95]). Man kann diese Relation folgendermaßen verstehen: Betrachtet man $A = B = \mathcal{N} = C^\infty(M)$, so gilt für eine Derivation, z.B. ∂_x , die Leibniz-Regel. Für die Abbildung $D := \partial_x + a$, welche durch

$$Df := \partial_x f + af, \quad a \in C^\infty(M), \quad (1.13)$$

definiert ist, gilt die Leibniz-Regel jedoch nicht. Will man erreichen, dass die niedrigeren Ordnungen in der Definition keine Rolle spielen, so kann man dies z.B. dadurch tun, dass man einen Differentialoperator 1. Ordnung folgendermaßen definiert:

Seien \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 A - B -Bimoduln. Dann heißt eine lineare Abbildung $D : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ Differentialoperator 1. Ordnung, falls die Abbildung

$$m \mapsto D(fm) - fD(m)$$

für alle $f \in A$ ein Rechts- B -Modul Homomorphismus ist (in [DVM95] ist eine äquivalente Definition mit Links- A -Modul Homomorphismen gegeben).

Man kann leicht nachprüfen, dass die in (1.13) definierte Abbildung D diese Bedingung erfüllt. Die Gleichung (1.12) ist dann eine direkte Folge dieser Definition und ist dann mit der Schreibweise

$$y^\circ \psi := \psi y$$

wegen

$$\begin{aligned} [[D, x], y^\circ] \psi &= (Dxy^\circ - xDy^\circ - y^\circ Dx + y^\circ xD)\psi \\ &= D(x\psi y) - xD(\psi y) - D(x\psi)y + xD(\psi)y \end{aligned}$$

tatsächlich äquivalent zu

$$[[D, x], y^\circ] = 0.$$

Man beachte, dass **Derivationen** eine bestimmte Klasse von Operatoren 1. Ordnung sind. Betrachtet man eine (unitale) Algebra A als A - A -Bimodul, so ist eine Derivation δ charakterisiert durch die Leibniz-Regel

$$\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b).$$

Ein Operator 1. Ordnung erfüllt wegen (1.12)

$$\begin{aligned} D(ab) &= D(a\mathbf{1}b) \\ &= aD(\mathbf{1}b) + D(a\mathbf{1})b - aD(\mathbf{1})b \\ &= aD(b) + D(a)b - aD(\mathbf{1})b \end{aligned}$$

und ist daher genau dann eine Derivation, falls $D(\mathbf{1}) = 0$ ist.

Bemerkung 1.2.7 (zu Axiom 4 - Orientierbarkeit)

Die Darstellung eines Elements aus $(A \otimes A^o) \otimes A^{\otimes n}$ auf H ist gegeben durch

$$\pi_D((a \otimes c) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) := \pi(a)\tilde{\pi}(c)[D, \pi(a_1)] \dots [D, \pi(a_n)].$$

Die Elemente der Menge $C_n(A, A \otimes A^o) := (A \otimes A^o) \otimes A^{\otimes n}$ heißen Hochschild n -Ketten (mit Koeffizienten in $A \otimes A^o$). Der Hochschild Randoperator b ist definiert durch

$$\begin{aligned} b((a \otimes c) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &:= (aa_1 \otimes c) \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (a \otimes c) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n (a_n a \otimes c) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

und erfüllt $b^2 = 0$ (b ist als Abbildung $C_n \rightarrow C_{n-1}$ zu betrachten und daher b^2 als Abbildung $C_n \rightarrow C_{n-2}$). Die Elemente $x \in C_n(A, A \otimes A^o)$ mit $bx = 0$ heißen Zykel. Die Menge solcher Zykel wird mit $Z_n(A, A \otimes A^o)$ bezeichnet.

Die im Axiom geforderte Existenz eines Hochschild-Zykels entspricht im kommutativen Fall der Existenz einer Volumenform (und daher der Orientierbarkeit).

Bemerkung 1.2.8 (zu Axiom 6 - Poincaré Dualität)

Die Existenz der nichtentarteten Schnittform in K -Theorie ist die "Übersetzung" der Tatsache, dass für Riemannsche Mannigfaltigkeiten M der Dimension n ein Isomorphismus zwischen den de Rham Kohomologiegruppen $H^p(M)$ und $H^{n-p}(M)$ existiert. Für diesen (relativ diffizilen) Punkt sei hier auf die Literatur, z.B. [Con94], verwiesen.

Beispiel 1.2.1 (das kanonische Tripel einer Riemannschen Spinmannigfaltigkeit)

Betrachtet man eine Riemannsche Spinmannigfaltigkeit M , so bilden die Daten $A := C^\infty(M)$, $H := L^2(M, S)$, $D := \mathcal{D} = -i\gamma \circ \nabla^S$ ein spektrales Tripel, welches man das zu M gehörige kanonische Tripel nennt (J entspricht der Ladungskonjugation und Γ der Volumenform $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ bzw. der zugehörigen Clifforddarstellung). Die Algebra besteht also aus den glatten Funktionen auf M , welche auf dem Hilbertraum der quadratintegrierbaren Spinoren durch punktweise Multiplikation dargestellt sind, und der Diracoperator ist durch die Darstellung γ des Cliffordbündels $\text{Cl}(T^*M)$ und durch den Spinzusammenhang ∇^S gegeben (im \mathbb{R}^4 : $\mathcal{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$ und $\Gamma = \gamma_5$). Ausführliche Details hierzu findet man in [GBVF01].

Bemerkung 1.2.9 *Man kann sich natürlich fragen, wie man aus den algebraischen Daten im kommutativen Fall (also für das kanonische Tripel zu M) die geometrischen Daten rekonstruieren kann. Dimension und Metrik sind in Abschnitt 1.1.2 schon erwähnt, aber auch die Spinstruktur lässt sich reproduzieren. Hier ist nun etwas Sorgfalt in der Formulierung angebracht: Im kanonischen Tripel ist die Spinstruktur im Hilbertraum $H = L^2(M, S)$ implizit schon gegeben. Die Aussage der Rekonstruierbarkeit sollte nun besser lauten wie in [GBVF01] S.492, Theorem 11.2: Sei $(\mathcal{A}, H, D, \Gamma, J)$ ein spektrales Tripel über der Algebra $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. Dann ist M eine Spinmannigfaltigkeit.*

Nach Axiom (A5) ist der Hilbertraum H_∞ ein endlich projektiver Modul und daher wegen Theorem 1.1.2 von der Form $H_\infty \cong \Gamma(M, S)$ für ein Vektorbündel $S \rightarrow M$. Wie man auf diesem Vektorbündel mit Hilfe von D , der Ordnung-1-Bedingung und dem Hauptsymbol von D die Darstellung der Cliffordalgebra und somit die Spinstruktur konstruiert, ist eine etwas längere Prozedur und ist in [GBVF01] (S. 500 ff., “The spin-structure and the metric”) beschrieben.

Bemerkung 1.2.10 *An dieser Stelle sollte man sich klarmachen, was man durch die Definition eines spektralen Tripels und die in Bemerkung 1.2.9 erwähnte Rekonstruierbarkeit von M gewonnen hat. Ein spektrales Tripel $(\mathcal{A}, H, D, \Gamma, J)$ mit einer kommutativen Algebra \mathcal{A} beschreibt notwendigerweise eine Riemannsche Spinmannigfaltigkeit M (mit $\mathcal{A} = C^\infty(M)$), wobei alle Strukturen des Tripels von den Strukturen auf M induziert werden. Geht man nun zu einem spektralen Tripel mit nichtkommutativer Algebra \mathcal{A} über, so kann man sicher sein, dass man von den Strukturen von \mathcal{A} tatsächlich **nur** die Kommutativität geopfert (und alle anderen beibehalten) hat.*

1.3 Teilchenmodelle in der NCG

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist zwar experimentell hervorragend bestätigt, hat aber auf der strukturellen Seite einige Schwachpunkte: Der Higgsmechanismus z.B. muss “von Hand” eingefügt werden und auch die Beschreibung der Gravitation unterscheidet sich fundamental von dem “Eichsektor” der Theorie, der das beobachtete Teilchenspektrum im Rahmen einer $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Eichtheorie beschreibt.

Beide Schwachstellen werden durch Teilchenmodelle, die auf Methoden der NCG beruhen, behoben. Im sogenannten **Connes-Lott-Modell** beschreibt man das Standardmodell durch ein spektrales Tripel zur Algebra $\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes A_F$, wobei $A_F = M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{C}$ eine endlichdimensionale Matrixalgebra ist, die die Eichgruppe des Standardmodells als Menge unitärer Elemente enthält, und $C^\infty(M)$ die glatten Funktionen auf der Raumzeit darstellt. Der Hilbertraum des endlichen Teils dieses Modells wird von allen Fermionen und Antifermionen aufgespannt, die Bosonen (einschließlich Higgs) treten als Eichfelder im Diracoperator auf. Der Operator J bildet jeweils ein Fermion auf das zugehörige Antifermion ab und der Operator Γ liefert für linkshändige Fermionen den Wert -1 und für

rechtshändige den Wert $+1$. (Details zum Connes-Lott-Modell findet man z.B. in [CL90] oder [Con94], um nur einen Teil der umfangreichen Literatur zu nennen.)

Das **Mainz-Marseille-Modell** verwendet den Begriff des spektralen Tripels nicht, liefert aber ähnliche Voraussagen und ist in gewissem Sinn allgemeiner als das Connes-Lott-Modell ([Pap97, PP96]).

Beide Zugänge liefern die Lagrangedichte des Standardmodells auf der Stufe einer klassischen Feldtheorie und in [Pap97] ist gezeigt, dass Modelle dieser Form keine weiteren wesentlichen Verallgemeinerungen zulassen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit (genauer gesagt von Kapitel 4) ist es, **Quantisierungen** eines solchen Systems zu untersuchen, welches durch ein spektrales Tripel beschrieben wird. Wegen der auftretenden konzeptionellen Schwierigkeiten werden hier zunächst null-dimensionale Beispiele untersucht, an denen einige Probleme demonstriert und teilweise auch gelöst werden. Eine Behandlung von realistischen (d.h. vierdimensionalen) Systemen könnte dann z.B. durch einen geeigneten Kontinuumsliches geschehen. Dies wäre (im Vergleich z.B. mit der Stringtheorie) als alternativer Zugang zur Quantengravitation zu sehen. Details zu der Quantisierungsproblematik finden sich ausführlich in den Abschnitten 4.1 und 4.4.

1.4 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit besteht im Wesentlichen aus drei Teilen.

- Im ersten Teil (den Kapiteln 2 bis 4) geht es um spektrale Tripel, deren Klassifizierung und Quantisierung. Hierbei ist die Klassifizierung eine zusammenfassende und teilweise vertiefende Darstellung der Arbeiten [Pas01], [PS98] und [Kra98], sie liefert aber insbesondere die Grundlage für die Kapitel 3 und 4 (und teilweise auch für Kapitel 5). In Kapitel 3 werden “Zustände” diskutiert (das sind diejenigen Abbildungen, die im kommutativen Fall den Punkten einer Mannigfaltigkeit entsprechen), und ebenso, wie es in der Regel zwischen Punkten einen “Abstand” gibt, kann man auch zwischen Zuständen einen Abstand definieren, dessen konkrete Berechnung in einzelnen Beispielen durchgeführt wird. Das Problem der “Quantisierung” eines Systems, das durch ein spektrales Tripel beschrieben ist, wird in Kapitel 4 diskutiert. Hierbei werden die Abstände, die in Kapitel 3 berechnet sind, benötigt, da sie in der quantisierten Theorie als Observablen dienen.
- Der zweite Teil (Kapitel 5) erläutert das Problem der Signatur der Metrik: Bisher ist es im Rahmen der NCG nicht möglich, Lorentzsche Spinmannigfaltigkeiten zu beschreiben, sondern nur echt Riemannsche. Zu diesem Problem werden in Kapitel 5 Lösungsansätze diskutiert.

- Eine andere Thematik wird im dritten Teil (Kapitel 6) behandelt. Hier wird Feynman's Beweis der Maxwellgleichungen betrachtet (siehe z.B. [Dys90] oder [Tan92]), wo es um die Form der möglichen Wechselwirkungen geht, die mit den quantenmechanischen Kommutatorrelationen verträglich ist. Dieser Beweis wird auf nichtkommutative Konfigurationsräume verallgemeinert.

1.5 Hinweise für den Leser

Es ist natürlich nicht immer sofort ersichtlich, ob eine Rechnung “nur” lang ist, oder ob eine wesentliche Idee oder eine neue Methode dahintersteckt, die vielleicht von besonderem Interesse ist. Ich habe mich in dieser Arbeit dazu entschlossen, die Rechnungen im laufenden Text zu belassen und nicht in Anhängen zusammenzufassen, denn ich denke, es ist einfacher, eine Rechnung, die dem Leser uninteressant scheint, zu überblättern, als eine, die von Interesse ist, im Anhang zu suchen.

Ebensowenig ersichtlich ist oft die Tatsache, ob in einem Kapitel bzw. Abschnitt Literaturarbeit betrieben wird, oder ob eigene und neue Gedankengänge präsentiert werden.

Um diese beiden Unklarheiten möglichst zu beseitigen, soll zu den einzelnen Teilen der Arbeit an dieser Stelle noch etwas gesagt werden.

Das Kapitel 2 ist als Grundlage für die darauf folgenden zu verstehen und stellt eine reine Bearbeitung der zu dem Gebiet gehörenden Arbeiten ([PS98]) und ([Kra98]) dar. Die Rechnungen sind hier im Vergleich zu den Originalarbeiten ausführlicher, aber immer noch relativ kurz und überschaubar (besondere Beachtung sollte hier der Beweis von Lemma 2.4.1 finden, da diese Aussage in der oben genannten Literatur nicht korrekt bewiesen wurde). Eine Ausnahme (in bezug auf den Umfang der Rechnungen bzw. Beweise) bildet der Abschnitt 2.5 über K-Theorie, der im Rahmen dieser Arbeit als Einstieg in den Themenkomplex dient, sehr ausführlich und auch sehr mathematisch formuliert ist. Mit Hilfe dieses Abschnitts kann das Axiom der Poincaré Dualität (Seite 14) besser verstanden werden, das bei der Klassifizierung endlicher Tripel eine wichtige Rolle spielt (Satz 2.6.1).

Die meisten Rechnungen in Kapitel 3 sind “straight forward” und insbesondere für diejenigen interessant, der selbst derartige Methoden braucht. Hervorzuheben ist hier das (neue) Ergebnis in Abschnitt 3.5: Ich habe das dort angegebene Resultat zunächst durch elementaren Differentialkalkül ermittelt, allerdings würde die zugehörige Rechnung viele Seiten füllen. Man kann das gleiche Ergebnis jedoch auch durch einen eleganten Trick erhalten (die Idee hierzu stammt von Mario Paschke und Tomas Kopf). Man erkennt auch, dass solche Tricks bei der Berechnung komplizierter Abstände (leider) unverzichtbar sind, denn es ist bisher nicht gelungen, ein allgemeines “Kochrezept” in diesem Zusammenhang anzugeben.

Kapitel 4 stimmt inhaltlich im Wesentlichen mit dem Artikel [HP03] überein und besteht

größtenteils aus strukturellen Überlegungen, und die zugehörigen Rechnungen sind eher technisch. Anders in Kapitel 5: Hier ist die Rechnung in Abschnitt 5.3 ein zentraler Punkt und wird deshalb auch ausführlich formuliert. Das Konzept der spektralen Quadrupel in Abschnitt 5.4 stammt aus dem Artikel [KP01]. Der neue Beitrag zu dieser Thematik in der vorliegenden Arbeit ist erstens die Klassifizierung der nulldimensionalen spektralen Quadrupel und zweitens die Veranschaulichung der Quantisierungsproblematik anhand eines Beispiels.

Nicht nur rein technischer Natur sind die Rechnungen in Kapitel 6, wo sie insofern eine wichtige Rolle spielen, da sie die Konsistenz der betrachteten Theorien liefern. Kapitel 6 stellt meinen Beitrag zu dem Projekt [HKP03] dar, welches noch zusätzlich diverse strukturelle Gesichtspunkte und den nichtkommutativen Torus behandelt.

Kapitel 2

Klassifizierung endlicher Tripel

SCHÜLER: KANN EUCH NICHT EBEN GANZ VERSTEHEN.
MEPHISTOPHELES: DAS WIRD NÄCHSTENS SCHON BESSER GEHEN,
WENN IHR LERNT ALLES REDUZIEREN
UND GEHÖRIG KLASSIFIZIEREN. (GOETHE, "FAUST")

2.1 Definition endlicher spektraler Tripel

Die Definition eines (allgemeinen) spektralen Tripels ist schon in der Einleitung gegeben (Definition 1.2.1). Im Folgenden werden wir (wie angekündigt) den endlichen Fall betrachten.

Definition 2.1.1 (*endliches spektrales Tripel*)

Unter einem endlichen spektralen Tripel versteht man ein spektrales Tripel, bei dem die Algebra A und der Hilbertraum H endlichdimensional sind. Einem solchen Tripel ordnet man die Dimension 0 zu (eine Diskussion dieses Punktes findet sich in [Pas01] S.141).

In den folgenden drei Abschnitten sollen nun die Bausteine eines solchen Tripels erörtert werden.

2.2 Die Algebra

Unter den drei wesentlichen Ingredienzen eines spektralen Tripels (A, H, D) ist im endlichdimensionalen Fall die Algebra am einfachsten zu klassifizieren. Bekanntlich ist nämlich jede endlichdimensionale C^* -Algebra (und damit natürlich auch jede endlichdimensionale

Prä- C^* -Algebra) über \mathbb{C} von der Form

$$A = \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C}). \quad (2.1)$$

(Dass man in diesem Fall von “endlich” spricht, rührt von der Tatsache her, dass für kommutatives $A = \mathbb{C}^N$ die Algebra A eine Funktionenalgebra auf einem N -Punktraum ist.)

Die Algebra ist also durch Angabe des Zahlentupels

$$(n_1, \dots, n_k) = \vec{n} \in \mathbb{N}^k \quad (2.2)$$

bestimmt.

2.3 Der Hilbertraum

Um die Struktur des Hilbertraums (und später auch des Diracoperators) zu charakterisieren, zerlegen wir H folgendermaßen: Definiere P_i als den Projektor auf die i -te Matrix-Unteralgebra von A

$$P_i := 0_{n_1 \times n_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{1}_{n_i \times n_i} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \quad (2.3)$$

(man beachte im Folgenden, dass P_i als Algebraelement aufgefasst werden muss) und

$$H_{ij} := \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)H, \quad (2.4)$$

wobei π und $\tilde{\pi}$ die Darstellungen von A bzw. A^o bezeichnen. H_{ij} trägt nun sowohl eine Darstellung von A_i als auch von A_j^o . Denn sei zunächst $a_i \in A_i$ und $v_{ij} \in H_{ij}$. Es ist nur zu zeigen, dass $\pi(a_i)v_{ij}$ in H_{ij} liegt. Beachte, dass $a_i \in A_i$ impliziert, dass ein $a \in A$ existiert mit $a_i = P_i a$, analog existiert ein $v \in H$ mit $v_{ij} = \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)v$. Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} \pi(a_i)v_{ij} &= \pi(P_i a)\pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)v \\ &= \pi(P_i)\pi(a)\pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)v \\ &= \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)\pi(a)\pi(P_i)v \quad \text{weil } \pi \text{ und } \tilde{\pi} \text{ vertauschen} \\ &= \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)v \in H_{ij}. \end{aligned}$$

Die analoge Rechnung führt man für $a_j \in A_j^o$ durch: Es existiert ein $a \in A$, so dass $a_j = aP_j$. Man beachte nun, dass $\tilde{\pi}(aP_j) = \tilde{\pi}(P_j)\tilde{\pi}(a)$ gilt, wenn man aP_j als Produkt in A auffasst (man könnte natürlich auch $P_j a$ betrachten, da ohnehin $aP_j = P_j a$). Es gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(a_j)v_{ij} &= \tilde{\pi}(aP_j)\pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)v \\ &= \tilde{\pi}(P_j)\tilde{\pi}(a)\pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)v \\ &= \tilde{\pi}(P_j)\pi(P_i)\tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(P_j)v \in H_{ij}. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt $H_{ij} \cap H_{kl} = \{0\}$ falls $(i, j) \neq (k, l)$, denn sei $v \in H_{ij} \cap H_{kl}$:

$$\begin{aligned} v \in H_{ij} &\Rightarrow \exists w \in H \quad \text{mit} \quad v = \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)w, \\ v \in H_{kl} &\Rightarrow \exists w' \in H \quad \text{mit} \quad v = \pi(P_k)\tilde{\pi}(P_l)w'. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)w &= \pi(P_k)\tilde{\pi}(P_l)w' \\ \Rightarrow \underbrace{\pi(P_i)^2}_{=\pi(P_i)}\tilde{\pi}(P_j)w &= \underbrace{\pi(P_i)\pi(P_k)}_{\pi(P_i P_k)}\tilde{\pi}(P_l)w' \\ &= \delta_{ik}\pi(P_k)\tilde{\pi}(P_l)w' \\ \Rightarrow \tilde{\pi}(P_j)^2\pi(P_i)w &= \underbrace{\tilde{\pi}(P_j)\tilde{\pi}(P_l)}_{=\delta_{jl}\tilde{\pi}(P_l)}\pi(P_k)\delta_{ik}w' \\ \Rightarrow \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)w &= \delta_{jl}\delta_{ik}\pi(P_k)\tilde{\pi}(P_l)w' \\ &\Rightarrow v \sim \delta_{jl}\delta_{ik}. \end{aligned}$$

Jedes $h \in H$ ist ferner eine Linearkombination von Vektoren aus den H_{ij} , weil $H = \pi(\mathbf{1})\tilde{\pi}(\mathbf{1})H$ und $\mathbf{1} = \sum P_i$. Also ist

$$H = \bigoplus_{i,j=1}^k H_{ij}. \quad (2.5)$$

Die einzige irreduzible Darstellung von $M_n(\mathbb{C})$ ist \mathbb{C}^n . Betrachte nun die Tatsache, dass H_{ij} eine Darstellung von $A_i = M_{n_i}(\mathbb{C})$ trägt. Zerlegt man diese in ihre irreduziblen Bestandteile, so erhält man

$$H_{ij} = \mathbb{C}^{n_i} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{n_i} = \mathbb{C}^{n_i} \otimes \mathbb{C}^{r_i} \quad (r_i \in \mathbb{N}_0).$$

Des Weiteren trägt H_{ij} eine Darstellung von $A_j^o = M_{n_j}(\mathbb{C})^o$, also ist analog

$$H_{ij} = \mathbb{C}^{r_j} \otimes \mathbb{C}^{n_j} \quad (r_j \in \mathbb{N}_0).$$

Die Forderung, dass die beiden Darstellungen vertauschen, führt zu der Bedingung, dass sie auf verschiedene Faktoren im Tensorprodukt wirken, d.h. die endgültige Form von H_{ij} ist

$$H_{ij} = \mathbb{C}^{n_i} \otimes \mathbb{C}^{r_{ij}} \otimes \mathbb{C}^{n_j}, \quad (2.6)$$

wobei die Darstellung π auf den linken, $\tilde{\pi}$ auf den rechten Faktor des Tensorprodukts wirkt,

$$\begin{aligned} \pi(a_i)(u \otimes v \otimes w) &= (a_i u) \otimes v \otimes w, \\ \tilde{\pi}(b_j)(u \otimes v \otimes w) &= u \otimes v \otimes (b_j^T w), \end{aligned}$$

und $r_{ij} \in \mathbb{N}_0$ zunächst eine beliebige Zahl ist, man setzt $H_{ij} = \{0\}$ für $r_{ij} = 0$.

Betrachte nun die Graduierung Γ . Γ vertauscht mit der Darstellung π und vertauscht mit J (Axiom A7), daher vertauscht es auch mit $\tilde{\pi}$. Daraus folgt, dass Γ jeweils H_{ij} auf sich selbst abbildet und auf dem 1. und 3. Faktor im Tensorprodukt als Identität wirkt:

$$\Gamma|_{H_{ij}} = \mathbf{1} \otimes \Gamma_{ij} \otimes \mathbf{1}. \quad (2.7)$$

Aus Axiom (A4) folgt aber, dass $\Gamma = \pi_{\otimes}(c)$ für ein $c \in A \otimes A^o$, d.h. $\Gamma = \pi_{\otimes}(c) = \sum_i a_i \otimes \mathbf{1} \otimes b_i$. Dies liefert $\Gamma_{ij} = \lambda \mathbf{1}$ und wegen $\Gamma^2 = 1$ folgt $\lambda = \pm 1$. Definiere das Vorzeichen als γ_{ij}

$$\Gamma_{ij} =: \gamma_{ij} \mathbf{1} \quad (2.8)$$

und setze

$$q_{ij} := \gamma_{ij} r_{ij}. \quad (2.9)$$

Man sieht schon an dieser Stelle, dass die Matrix (q_{ij}) erhebliche Informationen über das spektrale Tripel enthält, nämlich die Dimensionen der Hilberträume in der Zerlegung $H = \oplus H_{ij}$ und zu welchem Eigenwert von Γ die (Eigen-) Räume H_{ij} gehören.

Die Realitätsstruktur J liefert nun Bedingungen an r_{ij} und an γ_{ij} (und damit an die q_{ij}). Sei $\Psi_{ij} \in H_{ij}$, d.h. $\exists \Psi \in H$ mit $\Psi_{ij} = \pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)\Psi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} J\Psi_{ij} &= J\pi(P_i)\tilde{\pi}(P_j)\Psi \\ &= J\pi(P_i)J\pi(P_j)J^{-1}\Psi \quad (\text{wegen Def. von } \tilde{\pi} \text{ in (1.9)}) \\ &= J\pi(P_i)J^{-1}\pi(P_j)J\Psi \quad (\text{wegen } J = J^{-1}) \\ &= \tilde{\pi}(P_i)\pi(P_j)J\Psi \\ &= \pi(P_j)\tilde{\pi}(P_i)(J\Psi) \\ &\Rightarrow J\Psi_{ij} \in H_{ji}. \\ J^2 = 1 &\Rightarrow \dim H_{ij} = \dim H_{ji} \Rightarrow r_{ij} = r_{ji}. \\ [J, \Gamma] = 0 &\Rightarrow \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \end{aligned}$$

und daher ist schließlich

$$q_{ij} = q_{ji}, \quad (2.10)$$

d.h. die Matrix (q_{ij}) ist symmetrisch.

2.4 Der Diracoperator

Der Diracoperator D lässt sich auf $H = \oplus H_{ij}$ als Matrix darstellen, die aus einzelnen Blöcken $H_{ij} \rightarrow H_{kl}$ besteht. Die Axiomatik der NCG schränkt die Struktur des Diracoperators stark ein bzw. legt sie weitestgehend fest. Dies soll im folgenden Abschnitt erläutert

werden.

Definiere zunächst

$$D_{ij,kl} : H_{kl} \rightarrow H_{ij} \quad (2.11)$$

durch

$$D_{ij,kl} := \pi(P_i) \circ \tilde{\pi}(P_j) \circ D \circ \pi(P_k) \circ \tilde{\pi}(P_l). \quad (2.12)$$

Aus der Selbstadjungiertheit von D folgt

$$D_{ij,kl} = D_{kl,ij}^*. \quad (2.13)$$

Die Bedeutung des Kommutators $[D, J] = 0$ erfordert etwas genauere Erörterung. Hierzu zunächst ein vorbereitendes Lemma:

Lemma 2.4.1 *Es existieren stets Orthonormalbasen $\{v_1, \dots, v_n\}$ von H_{kl} und $\{w_1, \dots, w_n\}$ von H_{lk} mit folgender Eigenschaft: Für $k \neq l$ ist $Jv_i = w_i$ und für $k = l$ gilt (mit $v_i = x \otimes y \otimes z$)*

$$Jv_i = J(x \otimes y \otimes z) = \bar{z} \otimes \bar{y} \otimes \bar{x}. \quad (2.14)$$

Im Wesentlichen tauscht also J gerade die Basisvektoren zwischen verschiedenen Räumen aus.

BEWEIS: Beachte zunächst folgende Tatsache: Definiert man J durch

$$J(u \otimes v \otimes w) = \bar{w} \otimes \bar{v} \otimes \bar{u}, \quad (2.15)$$

so sind die Axiome $J^2 = 1$ und $[\pi(a), J\pi(b)J] = 0$ erfüllt, denn: $J^2 = 1$ klar.

$$\begin{aligned} \pi(a)J\pi(b)J(u \otimes v \otimes w) &= \pi(a)J\pi(b)(\bar{w} \otimes \bar{v} \otimes \bar{u}) \\ &= \pi(a)J((\pi(b)\bar{w}) \otimes \bar{v} \otimes \bar{u}) \\ &= \pi(a)(u \otimes v \otimes \overline{\pi(b)\bar{w}}) \\ &= (\pi(a)u) \otimes v \otimes \overline{\pi(b)\bar{w}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J\pi(b)J\pi(a)(u \otimes v \otimes w) &= J\pi(b)J((\pi(a)u) \otimes v \otimes w) \\ &= J\pi(b)(\bar{w} \otimes \bar{v} \otimes \overline{\pi(a)u}) \\ &= J((\pi(b)\bar{w}) \otimes \bar{v} \otimes \overline{\pi(a)u}) \\ &= (\pi(a)u) \otimes v \otimes \overline{\pi(b)\bar{w}}. \end{aligned}$$

Sei nun \tilde{J} eine weitere antiunitäre Abbildung mit $\tilde{J}^2 = 1$, $\tilde{\pi}(a) = \tilde{J}\pi(a^*)\tilde{J}$. Dann ist $J \circ \tilde{J}$ eine invertierbare Abbildung mit

$$[J \circ \tilde{J}, \pi(a)] = [J \circ \tilde{J}, \tilde{\pi}(a)] = 0,$$

denn

$$\begin{aligned} J \circ \tilde{J}\pi(a) &= J \circ \tilde{J}\pi(a)\tilde{J}^2 = J \circ \tilde{\pi}(a^*) \circ \tilde{J} \\ &= J \circ J \circ \pi(a) \circ J \circ \tilde{J} = \pi(a)J \circ \tilde{J}. \end{aligned}$$

Analog für $\tilde{\pi}$:

$$\begin{aligned} J \circ \tilde{J}\tilde{\pi}(a) &= J \circ \tilde{J}\tilde{\pi}(a)\tilde{J}^2 = J \circ \pi(a^*) \circ \tilde{J} \\ &= J \circ J \circ \tilde{\pi}(a) \circ J \circ \tilde{J} = \tilde{\pi}(a)J \circ \tilde{J}. \end{aligned}$$

Daher hat $J \circ \tilde{J}$ die Form

$$J \circ \tilde{J} = \mathbf{1} \otimes j \otimes \mathbf{1}, \quad (2.16)$$

und $J \circ \tilde{J}$ ist unitär, denn es ist

$$\langle \psi, \phi \rangle = \langle \tilde{J}\phi, \tilde{J}\psi \rangle = \langle J \circ \tilde{J}\psi, J \circ \tilde{J}\phi \rangle,$$

und daher ist auch j unitär. Betrachte nun zwei Fälle:

Fall 1: $k \neq l$. Wähle eine beliebige Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\mathbb{C}^{r_{kl}}$ und definiere die Basis von $\mathbb{C}^{r_{lk}}$ durch

$$w_i := J \circ (1 \otimes j \otimes 1)v_i.$$

Wegen $\tilde{J} = J \circ (1 \otimes j \otimes 1)$ ist dann klarerweise $w_i = \tilde{J}v_i$ erfüllt.

Fall 2: $k = l$. Beachte $J^2 = \tilde{J}^2 = 1$. Dies impliziert $j\bar{j} = 1$, denn

$$\begin{aligned} (2.16) \Rightarrow \tilde{J} &= J \circ (1 \otimes j \otimes 1) \\ \Rightarrow \tilde{J}^2 &= J \circ (1 \otimes j \otimes 1) \circ J \circ (1 \otimes j \otimes 1) \\ &= (1 \otimes \bar{j} \otimes 1) \circ J^2 \circ (1 \otimes j \otimes 1) \quad \text{nach Def. von } J \text{ in (2.15)} \\ &= (1 \otimes \bar{j}j \otimes 1). \end{aligned}$$

j erfüllt also die beiden Relationen $j^* = j^{-1}$ und $\bar{j} = j^{-1}$. Zu einer solchen Matrix j existiert stets eine unitäre Matrix u mit der Eigenschaft

$$j = u^T u. \quad (2.17)$$

Beweis von Formel (2.17): Betrachte $j \in M_n(\mathbb{C})$, Beweis durch Induktion nach n . Der Fall $n = 1$ ist trivial: Für $j = e^{i\varphi}$ erfüllt $u = e^{i\varphi/2}$ die Behauptung.

Sei nun die Behauptung bewiesen für alle $k = 1, \dots, n$ und sei $j \in M_{n+1}(\mathbb{C})$. Weil j unitär ist, sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ komplex vom Betrag 1. Wegen $\bar{j} = j^{-1}$ gilt Folgendes: Ist ψ Eigenvektor von j zum Eigenwert λ , so ist auch $\bar{\psi}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ , denn

$$\begin{aligned} j\psi = \lambda\psi &\Rightarrow \psi = \lambda j^{-1}\psi \\ &\Rightarrow \bar{\lambda}\psi = \bar{j}\psi \quad \text{wegen } \lambda^{-1} = \bar{\lambda} \quad \text{und } \bar{j} = j^{-1} \\ &\Rightarrow \lambda\bar{\psi} = j\bar{\psi} \quad (\text{nach Konjugieren}). \end{aligned}$$

Betrachte nun zwei Fälle:

Fall 1: j hat nur einen Eigenwert λ , der $(n+1)$ -fach entartet ist. Weil j unitär ist, ist es diagonalisierbar: $j = v j_d v^*$ mit v unitär und $j_d = \lambda \mathbf{1}$. Dies impliziert $j = \lambda \mathbf{1}$. In diesem Fall ist die Existenz von u mit $j = u^T u$ klar.

Fall 2: j hat mindestens zwei verschiedene Eigenwerte. λ sei einer dieser Eigenwerte, E_λ sei der zugehörige Eigenraum, dessen Dimension k höchstens n sein kann, und sei $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ eine ONB von E_λ . Weil die konjugierten Vektoren jeweils auch Eigenvektoren von j sind, ist auch $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_k\}$ ONB von E_λ . Der Basiswechsel sei durch die (unitäre) Matrix a beschrieben:

$$\bar{\psi}_i = a_{ji} \psi_j. \quad (2.18)$$

Konjugieren von (2.18) liefert zunächst $\psi_i = \bar{a}_{ji} \bar{\psi}_j$ bzw. $\psi_j = \bar{a}_{kj} \bar{\psi}_k$. Setzt man diesen Ausdruck wieder in (2.18) ein, so liefert dies

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_i &= a_{ji} \bar{a}_{kj} \bar{\psi}_k \\ \Rightarrow \bar{a}_{kj} a_{ji} &= \delta_{ki} \quad (\text{weil } \{\bar{\psi}_i\} \text{ ONB}) \\ \Rightarrow \bar{a} &= a^{-1}. \end{aligned}$$

Die Matrix a erfüllt also die Induktionsvoraussetzung und lässt sich daher schreiben als $a = b b^T \iff b_{ij} b_{kj} = a_{ik}$. Definiere nun eine neue ONB von E_λ durch

$$\phi_i := b_{ji} \psi_j.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i &= \bar{b}_{ji} \bar{\psi}_j = \bar{b}_{ji} a_{kj} \psi_k \\ &= \bar{b}_{ji} b_{kl} b_{jl} \psi_k = b_{kl} \underbrace{\bar{b}_{ij}^* b_{jl}}_{\delta_{il}} \psi_k \\ &= b_{ki} \psi_k = \phi_i. \end{aligned}$$

Damit bildet $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ eine reelle ONB von E_λ . Man kann also einen vollständigen Satz orthogonaler reeller Eigenvektoren von J konstruieren und somit existiert eine (reelle) orthogonale Matrix R , welche j diagonalisiert:

$$R j R^T = j_d = \text{diag}(e^{i\rho_1}, \dots, e^{i\rho_{n+1}}).$$

Setze $u = \text{diag}(e^{i\rho_1/2}, \dots, e^{i\rho_{n+1}/2}) R$. Dann gilt $j = u^T u$ und (2.17) ist bewiesen. Also haben wir $j = u^T u$ und somit gilt

$$\begin{aligned} (1 \otimes u \otimes 1) \circ \tilde{J} \circ (1 \otimes u^* \otimes 1) &= (1 \otimes u \otimes 1) \circ J \circ (1 \otimes j \otimes 1) \circ (1 \otimes u^* \otimes 1) \\ &= J \circ (1 \otimes \bar{u} j u^* \otimes 1). \end{aligned}$$

Es ist aber $\bar{u} j u^* = \bar{u} u^T u u^* = 1$, also

$$(1 \otimes u \otimes 1) \circ \tilde{J} \circ (1 \otimes u^* \otimes 1) = J,$$

d.h. u liefert den Basiswechsel, der \tilde{J} auf die oben angegebene Form bringt. \square

Wählt man nun eine Basis von H , wie sie in Lemma 2.4.1 konstruiert ist, so gilt hier wegen $JD = DJ$ für die einzelnen Blöcke von D :

$$\begin{aligned} D_{ij,kl} &= \overline{D_{ji,lk}} \quad \text{falls } i \neq j \quad \text{und } k \neq l, \\ \text{bzw. } D_{ii,kl} &= J \circ D_{ii,lk} \circ J, \\ D_{ij,kk} &= J \circ D_{ji,kk} \circ J. \end{aligned}$$

Aus $D\Gamma = -\Gamma D$ folgt

$$D_{ij,kl} = 0 \quad \text{falls } \gamma_{ij} = \gamma_{kl}. \quad (2.19)$$

Die "Ordnung-1-Bedingung"

$$[[D, \pi(a)], \tilde{\pi}(b)] = 0 \quad \forall a, b \quad (2.20)$$

liefert folgende Aussagen: Sei $\Psi_{kl} \in H_{kl} \Rightarrow [[D, \pi(a)], \tilde{\pi}(b)]\Psi_{kl} = 0 \quad \forall a, b \Rightarrow$

$$D\pi(a)\tilde{\pi}(b)\Psi_{kl} - \pi(a)D\tilde{\pi}(b)\Psi_{kl} - \tilde{\pi}(b)D\pi(a)\Psi_{kl} + \tilde{\pi}(b)\pi(a)D\Psi_{kl} = 0 \quad \forall a, b. \quad (2.21)$$

Setze $b_i := bP_i$ (analog die übrigen Algebraelemente), dann gilt $\pi(a)\Psi_{kl} = \pi(a_k)\Psi_{kl}$ und $\tilde{\pi}(b)\Psi_{kl} = \tilde{\pi}(b_l)\Psi_{kl}$. Damit lautet dann (2.21) zunächst

$$D\pi(a_k)\tilde{\pi}(b_l)\Psi_{kl} - \pi(a)D\tilde{\pi}(b_l)\Psi_{kl} - \tilde{\pi}(b)D\pi(a_k)\Psi_{kl} + \tilde{\pi}(b)\pi(a)D\Psi_{kl} = 0 \quad \forall a, b.$$

Schränkt man sich nun auf Teilblöcke des Operators auf der linken Seite ein, so erhält man

$$\begin{aligned} D_{ij,kl}\pi(a_k)\tilde{\pi}(b_l)\Psi_{kl} - \pi(a_i)D_{ij,kl}\tilde{\pi}(b_l)\Psi_{kl} \\ - \tilde{\pi}(b_j)D_{ij,kl}\pi(a_k)\Psi_{kl} + \tilde{\pi}(b_j)\pi(a_i)D_{ij,kl}\Psi_{kl} = 0 \quad \forall a, b. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wähle nun $i = k, j \neq l$ und $b_j = P_j, b_l = 0 \Rightarrow \tilde{\pi}(b_j) = id|_{H_{ij}}$ und die letzte Gleichung liefert

$$\begin{aligned} -D_{ij,il}\pi(a_i)\Psi_{il} + \pi(a_i)D_{ij,il}\Psi_{il} &= 0 \quad \forall a_i \\ \Rightarrow [D_{ij,il}, \pi(a_i)] &= 0 \quad \forall a_i. \end{aligned}$$

Für $i \neq k$ hat man

$$-D_{ij,kl}\pi(a_k) + \pi(a_i)D_{ij,kl} = 0 \quad \forall a_i, a_k.$$

Dies ist nur gegeben, falls $D_{ij,kl} = 0$, also

$$D_{ij,kl} = 0 \quad \text{falls } j \neq l \quad \text{und } i \neq k.$$

Die analoge Überlegung führen wir nun für die Darstellung $\tilde{\pi}$ durch:

Wähle $k \neq i, a_i = P_i, a_k = 0$, d.h. $\pi(a_i) = id|_{H_{ij}}$ und betrachte zunächst den Fall $j = l$. Hier liefert die Gleichung (2.22)

$$-D_{ij,kj}\tilde{\pi}(b_j) + \tilde{\pi}(b_j)D_{ij,kj} = 0 \quad \forall b_j$$

$$\Rightarrow [D_{ij,kj}, \tilde{\pi}(b_j)] = 0 \quad \forall b_j.$$

Der Fall $j \neq l$ liefert

$$-D_{ij,kl}\tilde{\pi}(b_l) + \tilde{\pi}(b_j)D_{ij,kl} = 0 \quad \forall b_l, b_j,$$

und man erhält wie oben

$$D_{ij,kl} = 0 \quad \text{falls } j \neq l \text{ und } k \neq i$$

und somit keine neue Information.

Der letzte Fall, der übrig bleibt, ist $i = k, j = l$. Hier ist aber

$$D_{ij,ij} = 0$$

wegen der Relation (2.19).

Hiermit ist die mögliche Information über den Diracoperator ausgeschöpft, und wir fassen nochmals alles in folgendem Satz zusammen:

Satz 2.4.1 (*Struktur des Diracoperators*)

Seien $D_{ij,kl} : H_{kl} \rightarrow H_{ij}$ die Blöcke des Diracoperators, wie sie in (2.11) und (2.12) definiert sind. Dann gilt:

- (1) $D_{ij,kl} = D_{kl,ij}^*$,
- (2) $D_{ij,kl} = 0$ falls $\gamma_{ij} = \gamma_{kl}$,
- (3) $[D_{ij,il}, \pi(a_i)] = 0 \quad \forall a_i$,
- (4) $[D_{ij,kj}, \tilde{\pi}(b_j)] = 0 \quad \forall b_j$,
- (5) $D_{ij,kl} = 0$ falls $i \neq k$ und $j \neq l$,
- (6) $D_{ij,ij} = 0$.

Wählt man eine spezielle Basis von H , welche die Eigenschaften hat, wie in Lemma 2.4.1 beschrieben, dann gilt zusätzlich

- (7) $D_{ij,kl} = \overline{D_{ji,lk}}$ für $i \neq j$ und $k \neq l$,
 $D_{ii,kl} = J \circ D_{ii,lk} \circ J$,
 $D_{ij,kk} = J \circ D_{ji,kk} \circ J$.

2.5 Exkurs K-Theorie

2.5.1 Wozu K-Theorie?

Die naheliegendste Antwort (“Weil sie in den Axiomen der spektralen Tripel auftaucht”) ist natürlich nur eingeschränkt befriedigend. Man kann sich klarerweise fragen, warum sie dort erscheint. Wie schon des Öfteren erwähnt, ist es ein wesentliches Anliegen der NCG, Geometrie in algebraische Sprache zu übersetzen. Hier betrachtet man z.B. Vektorbündel über kompakten Räumen (z.B. M), welche vermöge Serre-Swan-Theorem durch projektive Moduln über der Algebra $C(M)$ beschrieben werden können. Äquivalenzklassen von Vektorbündeln übersetzen sich dann in Äquivalenzklassen von projektiven Moduln über $C(M)$. Die Theorie solcher Äquivalenzklassen von Projektoren über (jetzt beliebigen, also insbesondere nichtkommutativen) C^* -Algebren ist die K-Theorie. Einen weiteren illustrativen Gesichtspunkt über die Rolle der K-Theorie liefert folgendes Theorem:

Theorem 2.5.1 (Cuntz) *K_j ist der einzige stabile, stetige, homotopieinvariante, halberakte kovariante Funktor von der Kategorie der C^* -Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen mit*

$$\begin{array}{ll} K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, & K_0(C_0(\mathbb{R})) \cong 0, \\ K_1(\mathbb{C}) \cong 0, & K_1(C_0(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}. \end{array}$$

Sowohl auf den Beweis (siehe z.B. [WO93] S. 194) als auch auf genaue Definitionen der Begriffe soll hier verzichtet werden.

2.5.2 Adjungieren einer 1

Zunächst soll an dieser Stelle nochmals an die Definition einer C^* -Algebra erinnert werden:

Definition 2.5.1 (normierte Algebra, Banachalgebra, $*$ -Algebra, Banach- $*$ -Algebra, C^* -Algebra)

Sei A eine Algebra über \mathbb{C} . Falls auf A eine Norm $\|\cdot\|$ existiert, so dass $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \forall a, b$ gilt, so heißt A normierte Algebra. Ist $(A, \|\cdot\|)$ eine normierte Algebra und zusätzlich ein Banachraum, d.h. vollständig, so heißt A Banachalgebra. Existiert auf A eine Involution, d.h. eine konjugiert-lineare Abbildung $*$: $A \rightarrow A$ mit $a^{**} = a$, $(ab)^* = b^*a^* \forall a, b$, so heißt $(A, *)$ eine $*$ -Algebra. Eine Banachalgebra mit Involution, in der $\|a^*\| = \|a\| \forall a$ erfüllt ist, heißt Banach- $*$ -Algebra. Eine Banach- $*$ -Algebra mit der Eigenschaft $\|a^*a\| = \|a\|^2 \forall a$ heißt C^* -Algebra.

Viele C^* -Algebren besitzen keine 1, wie z.B. die Algebra $C_0(M)$ der Funktionen auf einem nichtkompakten, topologischen Raum M , die im Unendlichen verschwinden, oder die Algebra $K(H)$ der kompakten Operatoren auf einem (unendlichdimensionalen) Hilbertraum

H. Viele Aussagen über Algebren bzw. deren Elemente benötigen jedoch die Existenz eines Einselements, um überhaupt sinnvoll formuliert werden zu können. Beispiele sind Spektraltheorie (also Aussagen über Invertierbarkeit, die allein schon eine 1 erfordert, von Elementen der Form $a - \lambda 1$) und die Theorie unitärer Elemente. Die Prozedur, wie einer nichtunitalen Algebra eine Eins adjungiert wird ($A \rightarrow \tilde{A}$), soll hier beschrieben werden.

Als Vorarbeit benötigt man den folgenden Satz.

Satz 2.5.1 *Sei A eine C^* -Algebra. Dann ist die linksreguläre Darstellung*

$$\begin{aligned} L : A &\rightarrow \mathcal{L}(A) \\ a &\mapsto L_a \end{aligned}$$

ein isometrischer Algebrenhomomorphismus.

Hierbei ist $\mathcal{L}(A) := \{\phi : A \rightarrow A \text{ linear, stetig}\}$ (versehen mit der Operatornorm wird $\mathcal{L}(A)$ zu einer Banachalgebra) und L_a ist definiert als $L_a(b) := ab$.

BEWEIS: Algebrenhomomorphismus klar.

$$\begin{aligned} \|L_a b\|_A &= \|ab\|_A \leq \|a\|_A \|b\|_A \Rightarrow \|L_a\| \leq \|a\|_A. \\ \|L_a a^*\|_A &= \|aa^*\|_A = \|a^*\|_A^2 = \|a\|_A \|a^*\|_A \Rightarrow \|L_a\| \geq \|a\|_A. \end{aligned}$$

(Die nichtindizierte Norm bezeichnet die Operatornorm in $\mathcal{L}(A)$.) □

Jetzt zum eigentlichen Adjungieren:

Satz 2.5.2 *Sei A eine C^* -Algebra ohne 1. Dann wird*

$$\tilde{A} := \{L_a + \lambda id_A \in \mathcal{L}(A) \mid a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

mit

$$\begin{aligned} (L_a + \lambda id_A)^* &:= L_{a^*} + \bar{\lambda} id, \\ \|x\|_{\tilde{A}} &:= \|x\|_{\mathcal{L}(A)}, \end{aligned}$$

zu einer C^ -Algebra mit 1.*

BEWEIS: Dass \tilde{A} eine $*$ -Algebra ist, ist offensichtlich. Es bleiben noch zwei Punkte zu zeigen:

- (1) \tilde{A} ist eine Banachalgebra (d.h. vollständig). Hier genügt es zu zeigen, dass \tilde{A} abgeschlossen in $\mathcal{L}(A)$ ist.
- (2) C^* -Eigenschaft der Norm: $\|x\|_{\tilde{A}}^2 = \|x^* x\|_{\tilde{A}}$

Weil L , wie oben gezeigt, isometrisch ist, ist es auch injektiv, d.h. die Abbildung $L : A \rightarrow L(A)$ ist bijektiv und die Inverse ist auch isometrisch. Da in metrischen Räumen Abgeschlossenheit und Folgenabgeschlossenheit äquivalent sind, konvergiert mit jeder Folge in $L(A)$ auch die Urbildfolge in A . A ist aber vollständig und das Bild des Grenzwertes in A ist der Grenzwert der Folge in $L(A)$, d.h. $L(A)$ ist abgeschlossen. Damit ist die Quotientenabbildung

$$\mathcal{L}(A) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(A)/L(A)$$

stetig. Ebenso ist auch

$$\tilde{A} \xrightarrow{\pi} \tilde{A}/L(A) \cong \mathbb{C}$$

stetig und somit ist \tilde{A} das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung \Rightarrow (1). Jetzt zur Norm: Sei $x = L_a + \lambda id_A \in \tilde{A}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Definition des Supremums existiert dann ein $b \in A$, $\|b\| \leq 1$ mit

$$\begin{aligned} \|x\|_{\tilde{A}}^2 &= \|(L_a + \lambda id_A)b\|_A^2 + \varepsilon \\ &= \|(ab + \lambda b)\|_A^2 + \varepsilon \\ &= \|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\|_A + \varepsilon \\ &\leq \|b^*\|_A \|(L_a + \lambda id)^*(L_a + \lambda id)b\|_A + \varepsilon \\ &\leq \|x^*x\|_{\tilde{A}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $\|x\|_{\tilde{A}}^2 \leq \|x^*x\|_{\tilde{A}} \leq \|x^*\|_{\tilde{A}}\|x\|_{\tilde{A}} \Rightarrow \|x\|_{\tilde{A}} \leq \|x^*\|_{\tilde{A}}$.

Analog erhält man $\|x^*\|_{\tilde{A}} \leq \|x\|_{\tilde{A}} \Rightarrow \|x\|_{\tilde{A}}^2 \leq \|x^*x\|_{\tilde{A}} \leq \|x^*\|_{\tilde{A}}\|x\|_{\tilde{A}} = \|x\|_{\tilde{A}}^2 \Rightarrow$ (2). \square

\tilde{A} lässt sich also auffassen als $A \times \mathbb{C}$ mit Multiplikation $(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ (das Einselement ist dann $(0, 1)$) und Norm $\|(a, \lambda)\| := \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\}$.

Für die nächsten Abschnitte benötigen wir noch die folgenden Definitionen (und die Bemerkungen werden, zum Teil wenigstens, von Nutzen sein):

Definition 2.5.2

$$A^+ := \begin{cases} \tilde{A} & \text{falls } A \text{ nicht unital,} \\ A \oplus \mathbb{C} & \text{falls } A \text{ unital.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Definition 2.5.3 (die "Skalarprojektion")

$$\begin{aligned} \pi : A^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, \lambda) &\mapsto \lambda \end{aligned}$$

Dieses π ist ein Algebrenhomomorphismus. Ebenso ist die komponentenweise Fortsetzung

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : M_n(A^+) &\rightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ (a, \lambda)_{ij} &\mapsto (\lambda)_{ij} \end{aligned}$$

ein Homomorphismus, wie man leicht nachrechnet.

Bemerkung 2.5.1 *Es ist vielleicht interessant anzumerken, dass für einen nichtkompakten Raum M und die Algebra $A = C_0(M)$ die Unitalisierung $\tilde{A} = C(M^+)$ ist, wobei M^+ die 1-Punkt-Kompaktifizierung von M ist, die Unitalisierung entspricht also auf der Stufe der Punkte einer Kompaktifizierung.*

Bemerkung 2.5.2 *Die Algebra A ist ein Ideal in der unitalisierten Algebra \tilde{A} , wie man sich leicht klarmachen kann (entweder direkt oder aus der Tatsache, dass $A = \ker \pi$). Ebenso ist $M_n(A)$ ein Ideal in $M_n(\tilde{A})$.*

Bemerkung 2.5.3 *Falls A unital ist, lässt sich \tilde{A} genauso definieren, wie in Satz 2.5.2. Dann ist jedoch $A \cong \tilde{A}$. Dies ist am einfachsten an der Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{A} &\rightarrow A \\ (a, \lambda) &\mapsto a + \lambda e \end{aligned}$$

zu sehen, denn dieses Φ ist

- *Homomorphismus:*

$$\begin{aligned} \Phi((a, \lambda)(b, \mu)) &= \Phi((ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)) \\ &= ab + \lambda b + \mu a + \lambda\mu e \\ &= (a + \lambda e)(b + \mu e) \\ &= \Phi((a, \lambda))\Phi((b, \mu)). \end{aligned}$$

- *injektiv: Sei $\Phi((a, \lambda)) = \Phi((b, \mu)) \Rightarrow a + \lambda e = b + \mu e$. Als Elemente von $\mathcal{L}(A)$ sind (a, λ) und (b, μ) dann gleich, denn*

$$(L_a + \lambda \text{id})x = ax + \lambda x = (a + \lambda e)x = (b + \mu e)x = (L_b + \mu \text{id})x.$$

- *surjektiv: klar, weil $\Phi((a, 0)) = a$.*

2.5.3 Der algebraische direkte Limes

In der Konstruktion der K-Theorie spielt ein Objekt der Form

$$M_\infty(A) := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(A) \tag{2.24}$$

eine Rolle, welches der “algebraische direkte Limes” der Familie $(M_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ genannt wird. Im Folgenden soll dieser Begriff definiert werden.

Das Ziel bei der Konstruktion des direkten Limes ist es, eine sinnvolle “Vereinigung” von Objekten zu definieren, die nicht in einer passenden Obermenge liegen. Sei also $\{A_i\}$ eine Familie von algebraischen Objekten einer Kategorie (z.B. Gruppen, Vektorräume, $*$ -Algebren, ...), wobei i Element irgendeiner Indexmenge I sein soll. Falls alle A_i in einer Menge B enthalten sind ($A_i \subset B \quad \forall i \in I$), ist es kein Problem, deren Vereinigung zu bilden:

$$A_\infty := \bigcup_{i \in I} A_i \subset B \quad (2.25)$$

Eine Verallgemeinerung dieses Konzepts (falls also kein B existiert mit $A_i \subset B \quad \forall i$) erfordert die Existenz eines gerichteten Systems, welches folgendermaßen definiert ist:

1. Eine Teilordnung \geq auf der Indexmenge I mit der Eigenschaft, dass zu jedem Paar $i_1, i_2 \in I$ ein $i_3 \in I$ existiert mit $i_3 \geq i_1, i_3 \geq i_2$. In Worten: Jedes Paar von Indizes wird von einem Element der Indexmenge majorisiert.
2. Zu jedem Paar i, j mit $i \geq j$ existiert ein Morphismus $\Phi_{ij} : A_j \rightarrow A_i$.
3. Für alle $i \geq k \geq j$ gilt $\Phi_{ij} = \Phi_{ik} \circ \Phi_{kj}$.

Satz 2.5.3 *Seien nun also gegeben $(I, \{A_i\}_{i \in I}, \{\Phi_{ij}\})$ mit den obigen Eigenschaften. Dann gilt: Es existiert ein universelles Objekt (in der gleichen Kategorie)*

$$A_\infty = \varinjlim A_i = \varinjlim \{A_i, \Phi_{ij}\}, \quad (2.26)$$

welches der “algebraische direkte Limes” des gerichteten Systems $\{A_i, \Phi_{ij}\}$ genannt wird, und eine Menge von kanonischen Morphismen $\Phi_i : A_i \rightarrow A_\infty$, so dass folgendes Diagramm kommutiert (falls $i \geq j$):

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\Phi_j} & A_\infty \\ \Phi_{ij} \downarrow & \nearrow \Phi_i & \\ A_i & & \end{array} \quad (2.27)$$

und so dass

$$A_\infty = \bigcup_{i \in I} \Phi_i(A_i). \quad (2.28)$$

BEWEIS: Definiere zunächst $\prod_{i \in I} A_i$ als direktes Produkt der $\{A_i\}$ mit punktweisen Operationen. Definiere dann folgende Untermenge von $\prod A_i$:

$$\tilde{A} := \{(a_i)_{i \in I} \in \prod A_i \mid \exists k \in I : i \geq k \Rightarrow a_i = \Phi_{ik} a_k\} \quad (2.29)$$

(\tilde{A} = “Menge der vorhersagbaren Enden” oder “kontrollierbare Elemente”)
Äquivalenzrelation auf \tilde{A} :

$$(a_i) \sim (b_i) \iff \exists j \in I : a_i = b_i \quad \forall i \geq j \quad (2.30)$$

(“Die Netze (a_i) und (b_i) sind schließlich gleich”)

Mittels dieser Äquivalenzrelation lässt sich nun unser gesuchtes Objekt A_∞ bilden:

$$A_\infty := \{[(a_i)] : (a_i) \in \tilde{A}\} \quad (2.31)$$

Zeige nun, dass A_∞ die Eigenschaften des “algebraischen direkten Limes” hat:

- (1) A_∞ ist in der gleichen Kategorie wie die A_i .
- (2) Es existieren Morphismen $\Phi_i : A_i \rightarrow A_\infty$.
- (3) Die Φ_i erfüllen (2.27).
- (4) Die Φ_i erfüllen (2.28).

zu (1): Betrachte o.B.d.A. multiplikative Verknüpfung in den A_i . Seien $[(a_i)], [(b_i)] \in A_\infty$. Definiere Produkt durch $[(a_i)] \cdot [(b_i)] := [(a_i \cdot b_i)]$. Dies ist wohldefiniert, weil sich die Eigenschaft “schließlich gleich” auf die Produkte überträgt.

zu (2): Sei $x \in A_j$. Definiere

$$\Phi_j(x) := [(a_i)], \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} a_i = \Phi_{ij}(x) & \text{falls } i \geq j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.32)$$

$\Phi_j(x) \in A_\infty$ nach Definition. Φ_j ist ein Morphismus, denn:

$$\Phi_j(xy) := [(a_i)] \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_i = \Phi_{ij}(xy) & \text{falls } i \geq j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.33)$$

Weil $\Phi_{ij}(xy) = \Phi_{ij}(x)\Phi_{ij}(y)$ gilt, folgt, dass Φ_j ein Morphismus ist.

zu (3): Zeige (für $i \geq j$) die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\Phi_j} & A_\infty \\ \Phi_{ij} \downarrow & \nearrow \Phi_i & \\ A_i & & \end{array} \quad (2.34)$$

$$\iff \Phi_j(x) = \Phi_i(\Phi_{ij}(x)) \quad \forall x \in A_j. \quad (2.35)$$

Betrachte die Gleichung (2.35):

$$\begin{aligned} \text{l.S.} &= \Phi_j(x) = [(a_k)], \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} a_k = \Phi_{kj}(x) & \text{falls } k \geq j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ \text{r.S.} &= \Phi_i(\Phi_{ij}(x)) = [(b_k)], \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} b_k = \Phi_{ki}(\Phi_{ij}(x)) = \Phi_{kj}(x) & \text{falls } k \geq i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Weil $i \geq j$, ist $a_k = b_k \quad \forall k \geq i$ und daher $[(a_k)] = [(b_k)] \Rightarrow \text{l.S.} = \text{r.S.}$

zu (4): zeige

$$A_\infty = \bigcup_{i \in I} \Phi_i(A_i). \quad (2.36)$$

Klar: r.S. \subset l.S.

Zeige noch l.S. \subset r.S.:

Sei $[(a_i)] \in A_\infty \Rightarrow \exists$ Repräsentant $(a_i) \in \tilde{A} \Rightarrow \exists k \in I : [i \geq k \Rightarrow a_i = \Phi_{ik}a_k]$

$$\Rightarrow \Phi_k(a_k) = [(b_i)], \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} b_i = \Phi_{ik}a_k & \text{falls } i \geq k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.37)$$

$\Rightarrow [(a_i)] = \Phi_k(a_k) \in \bigcup_{i \in I} \Phi_i(A_i) \Rightarrow (4)$ und damit die Behauptung. \square

2.5.4 Die Grothendieck-Konstruktion

(Siehe z.B. [WO93] S. 295-297)

Die Grothendieck-Konstruktion liefert eine Möglichkeit, aus einer abelschen Halbgruppe eine Gruppe zu machen, indem formale Differenzen eingeführt werden, z.B. "aus \mathbb{N} mache \mathbb{Z} ". Die Details hierzu sollen nun erläutert werden.

Sei H eine abelsche Halbgruppe (multiplikativ). Definiere folgende Äquivalenzrelation auf $H \times H$:

$$(g_1, h_1) \sim (g_2, h_2) \iff \exists x \in H : g_1 h_2 x = g_2 h_1 x \quad (2.38)$$

Dies liefert in der Tat eine Äquivalenzrelation, denn

- (1) $(g, h) \sim (g, h)$, weil $ghx = ghx \quad \forall x \Rightarrow$ Reflexivität.
- (2) $(g_1, h_1) \sim (g_2, h_2) \Rightarrow (g_2, h_2) \sim (g_1, h_1)$ klar wegen der Kommutativität der Halbgruppe \Rightarrow Symmetrie.
- (3) Sei $(g_1, h_1) \sim (g_2, h_2)$ und $(g_2, h_2) \sim (g_3, h_3)$. Dann existieren x_1 und x_2 mit $g_1 h_2 x_1 = g_2 h_1 x_1$ und $g_2 h_3 x_2 = g_3 h_2 x_2$. Setze $x_3 = x_1 x_2 g_2$. Dann zeigt man leicht (unter Verwendung der Kommutativität der Halbgruppe), dass $g_1 h_3 x_3 = g_3 h_1 x_3 \Rightarrow$ Transitivität.

Bezeichne im Folgenden die Äquivalenzklassen mit $[(g, h)]$.

Bemerkung 2.5.4 *Man sieht am Beweis der Transitivität, dass diese die etwas umständliche Definition der Äquivalenz mit Hilfe eines Elements x erfordert. Betrachte zum Beispiel die Halbgruppe $M :=$ Menge aller Teilmengen von \mathbb{N} mit Verknüpfung gegeben durch Mengenvereinigung. Definiert man eine "Äquivalenzrelation" auf $M \times M$ durch*

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a \cup b' = b \cup a', \quad (2.39)$$

so ist Transitivität nicht erfüllt, denn setze

$$\begin{aligned} a = \bar{b} &= \emptyset, \\ a' = b' &= \{1, 2\}, \\ b = \bar{a} &= \{1\}, \end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} a \cup b' = a' \cup b &\Rightarrow (a, b) \sim (a', b') \\ \text{und } a' \cup \bar{b} = \bar{a} \cup b' &\Rightarrow (a', b') \sim (\bar{a}, \bar{b}), \\ \text{aber } a \cup \bar{b} \neq b \cup \bar{a} &\Rightarrow (a, b) \not\sim (\bar{a}, \bar{b}). \end{aligned}$$

Nun sind wir in der Lage, die Grothendieck-Gruppe zu definieren:

Definition 2.5.4 (Grothendieck-Gruppe für H)

Sei \sim die Äquivalenzrelation gemäß (2.38). Dann definiert man

$$\mathcal{G}(H) := H \times H / \sim \tag{2.40}$$

mit Multiplikation $[(g_1, h_1)] \cdot [(g_2, h_2)] := [(g_1g_2, h_1h_2)]$

Lemma 2.5.1 $\mathcal{G}(H)$ ist eine Gruppe.

BEWEIS: Zeige Wohldefiniertheit des Produkts, Existenz der Eins, Existenz von Inversen.

$$\begin{aligned} \text{Sei } (\tilde{g}_1, \tilde{h}_1) \in [(g_1, h_1)], (\tilde{g}_2, \tilde{h}_2) \in [(g_2, h_2)] &\Rightarrow \exists x_1 \in H \text{ mit } \tilde{g}_1 h_1 x_1 = g_1 \tilde{h}_1 x_1, \\ &\exists x_2 \in H \text{ mit } \tilde{g}_2 h_2 x_2 = g_2 \tilde{h}_2 x_2. \end{aligned}$$

Setze $x_3 = x_1 x_2$. Dieses x_3 liefert $(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2, \tilde{h}_1 \tilde{h}_2) \in [(g_1 g_2, h_1 h_2)]$ und damit die Wohldefiniertheit des Produkts.

Betrachte nun das Element $[(g, g)] \in \mathcal{G}(H)$:

$[(g, g)] \cdot [(h_1, h_2)] = [(gh_1, gh_2)] \quad \forall [(h_1, h_2)] \in \mathcal{G}(H)$. Es ist aber $[(gh_1, gh_2)] = [(h_1, h_2)]$ nach Definition der Äquivalenzklassen und damit $[(g, g)] \cdot [(h_1, h_2)] = [(h_1, h_2)] \quad \forall [(h_1, h_2)] \in \mathcal{G}(H) \Rightarrow [(g, g)]$ ist das Einselement von $\mathcal{G}(H)$.

Um die Existenz von Inversen zu zeigen, betrachte $[(g, h)] \cdot [(h, g)] = [(gh, hg)] = [(g, g)] = 1 \Rightarrow [(g, h)] = [(h, g)]^{-1}$. \square

Einige Eigenschaften der Gruppe $\mathcal{G}(H)$

Um das Verhältnis zwischen H und $\mathcal{G}(H)$ zu illustrieren, definiere folgende Abbildung:

Definition 2.5.5

$$\begin{aligned}
 i : H &\rightarrow \mathcal{G}(H) \\
 h &\mapsto [(hk, k)] \quad \text{für ein } k \in H.
 \end{aligned}$$

Proposition 2.5.1 Die Abbildung i hat folgende Eigenschaften:

- (1) i hängt nicht von dem gewählten k ab.
- (2) i ist ein Homomorphismus (von Halbgruppen).
- (3) i ist injektiv $\iff H$ erlaubt Kürzen (d.h. in H gilt: $h_1h = h_2h \Rightarrow h_1 = h_2$).
- (4) Jedes Element aus $\mathcal{G}(H)$ lässt sich schreiben als $i(h)i(k)^{-1}$ mit $h, k \in H$.

BEWEIS:

- (1) $[(hk, k)] = [(hg, g)]$, weil $(hk, k) \sim (hg, g)$.
- (2) $i(g)i(h) = [(gk, k)] \cdot [(hk, k)] = [(gkhk, k^2)]$
 $= [(ghk^2, k^2)] = [(ghk, k)] = i(gh)$.
- (3) " \Rightarrow " Sei i injektiv, d.h. es gilt $i(g) = i(h) \Rightarrow g = h$.

$$\begin{aligned}
 \text{Sei nun } h_1h = h_2h &\Rightarrow i(h_1h) = i(h_2h) \\
 &\Rightarrow i(h_1)i(h) = i(h_2)i(h). \\
 i(h) \text{ invertierbar} &\Rightarrow i(h_1) = i(h_2). \\
 i \text{ injektiv} &\Rightarrow h_1 = h_2 \\
 &\Rightarrow H \text{ erlaubt Kürzen.}
 \end{aligned}$$

" \Leftarrow " H erlaube Kürzen, d.h. es gilt $h_1h = h_2h \Rightarrow h_1 = h_2$.

$$\begin{aligned}
 \text{Sei nun } i(g) = i(h) &\Rightarrow [(gk, k)] = [(hk, k)] \\
 &\Rightarrow \exists x \text{ mit } gk^2x = hk^2x. \\
 \text{Kürzungseigenschaft} &\Rightarrow g = h \\
 &\Rightarrow i \text{ injektiv.}
 \end{aligned}$$

(4) Sei $[(h, k)] \in \mathcal{G}(H)$ beliebig. Dann ist

$$i(h)i(k)^{-1} = [(hg, g)][(kg, g)]^{-1} = [(hg, g)][(g, kg)] = [(hg^2, kg^2)] = [(h, k)].$$

□

Theorem 2.5.2 (*universelle Eigenschaft*)

Sei S eine abelsche Halbgruppe mit neutralem Element $e(S)$ und $\Phi : H \rightarrow S$ ein Homomorphismus von Halbgruppen, der H auf invertierbare Elemente von S abbildet. Dann existiert genau ein Homomorphismus (von Halbgruppen mit 1) $\Psi : \mathcal{G}(H) \rightarrow S$, der Φ fortsetzt:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\Phi} & S \\
 & \searrow i & \uparrow \Psi \\
 & & \mathcal{G}(H)
 \end{array} \tag{2.41}$$

BEWEIS:

(1) Existenz: Definiere

$$\begin{aligned}
 \Psi : \mathcal{G}(H) &\rightarrow S \\
 [(g, h)] &\mapsto \Phi(g)\Phi(h)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Dieses Ψ ist wohldefiniert, denn sei $(g, h) \sim (\tilde{g}, \tilde{h})$
 $\Rightarrow \exists x \in H$ mit $g\tilde{h}x = h\tilde{g}x$
 $\Rightarrow \Phi(g)\Phi(\tilde{h})\Phi(x) = \Phi(h)\Phi(\tilde{g})\Phi(x)$.
 $\Phi(x)$ invertierbar $\Rightarrow \Phi(g)\Phi(\tilde{h}) = \Phi(h)\Phi(\tilde{g})$
 $\Rightarrow \Phi(g)\Phi(h)^{-1} = \Phi(\tilde{g})\Phi(\tilde{h})^{-1}$ (S abelsch!)
 \Rightarrow Wohldefiniertheit.

Ψ ist ein Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned}
 \Psi([(g_1, h_1)] \cdot [(g_2, h_2)]) &= \Psi([(g_1g_2, h_1h_2)]) \\
 &= \Phi(g_1g_2)\Phi(h_1h_2)^{-1} \\
 &= \Phi(g_1)\Phi(g_2)\Phi(h_2)^{-1}\Phi(h_1)^{-1} \\
 &= \Phi(g_1)\Phi(h_1)^{-1}\Phi(g_2)\Phi(h_2)^{-1} \\
 &= \Psi([(g_1, h_1)]) \cdot \Psi([(g_2, h_2)]), \\
 \Psi([(g, g)]) &= \Phi(g)\Phi(g)^{-1} = e(S).
 \end{aligned}$$

Ψ ist Fortsetzung von Φ , denn:

$$\Psi(i(h)) = \Psi([(hk, k)]) = \Phi(hk)\Phi(k)^{-1} = \Phi(h) \quad \forall h \in H.$$

(2) Eindeutigkeit:

Seien $\Psi_1, \Psi_2 : \mathcal{G}(H) \rightarrow S$ Homomorphismen, die Φ fortsetzen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1([(h, k)]) &= \Psi_1(i(h)i(k)^{-1}) \quad \text{wegen (4) in Prop. 2.5.1} \\
 &= \Psi_1(i(h)) \underbrace{\Psi_1(i(k)^{-1})}_{=\Psi_1(i(k))^{-1}} \\
 &= \Phi(h)\Phi(k)^{-1} \\
 &= \Psi_2([(h, k)]) \\
 &\Rightarrow \Psi_1 = \Psi_2 \\
 &\Rightarrow \text{Eindeutigkeit.}
 \end{aligned}$$

□

Theorem 2.5.3 (*induzierte Homomorphismen*)

Seien H_1, H_2 abelsche Halbgruppen mit neutralen Elementen. Dann existiert zu jedem Homomorphismus $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$ genau ein Homomorphismus $\Psi : \mathcal{G}(H_1) \rightarrow \mathcal{G}(H_2)$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
 H_1 & \xrightarrow{\Phi} & H_2 \\
 i \downarrow & & \downarrow i \\
 \mathcal{G}(H_1) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{G}(H_2)
 \end{array} \tag{2.42}$$

Ist $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$ bijektiv, so ist der induzierte Homomorphismus Ψ ebenfalls bijektiv.

BEWEIS:

(1) Existenz: Definiere

$$\begin{aligned}
 \Psi : \mathcal{G}(H_1) &\rightarrow \mathcal{G}(H_2) \\
 [(g, h)] &\mapsto [(\Phi(g), \Phi(h))].
 \end{aligned}$$

Überprüfe zunächst Wohldefiniertheit. Sei $(\tilde{g}, \tilde{h}) \sim (g, h)$. Zeige:

$$(\Phi(\tilde{g}), \Phi(\tilde{h})) \sim (\Phi(g), \Phi(h)) \iff \exists y \in H_2 \quad \text{mit} \quad \Phi(\tilde{g})\Phi(h)y = \Phi(g)\Phi(\tilde{h})y$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{g}, \tilde{h}) \sim (g, h) &\Rightarrow \exists x \in H_1 \quad \text{mit} \quad \tilde{g}hx = \tilde{h}gx \\
 &\Rightarrow \Phi(\tilde{g}hx) = \Phi(\tilde{h}gx) \\
 &\Rightarrow \Phi(\tilde{g})\Phi(h)\Phi(x) = \Phi(\tilde{h})\Phi(g)\Phi(x) \\
 &\Rightarrow (\Phi(\tilde{g}), \Phi(\tilde{h})) \sim (\Phi(g), \Phi(h)) \\
 &\Rightarrow \text{Wohldefiniertheit.}
 \end{aligned}$$

Ψ ist ein Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned}
 \Psi([(g_1, h_1)] \cdot [(g_2, h_2)]) &= \Psi([(g_1 g_2, h_1 h_2)]) \\
 &= [(\Phi(g_1 g_2), \Phi(h_1 h_2))] \\
 &= [(\Phi(g_1)\Phi(g_2), \Phi(h_1)\Phi(h_2))] \\
 &= [(\Phi(g_1), \Phi(h_1))] \cdot [(\Phi(g_2), \Phi(h_2))] \\
 &= \Psi([(g_1, h_1)]) \cdot \Psi([(g_2, h_2)]) \\
 &\Rightarrow \Psi \text{ Homomorphismus.}
 \end{aligned}$$

Kommutativität von (2.42): Zu zeigen ist $\Psi(i(h)) = i(\Phi(h))$. Dies rechnet man direkt nach:

$$\Psi(i(h)) = \Psi([hk, k]) = [(\Phi(hk), \Phi(k))] = [(\Phi(h)\Phi(k), \Phi(k))] = i(\Phi(h)).$$

- (2) Eindeutigkeit: Seien $\Psi_1, \Psi_2 : \mathcal{G}(H_1) \rightarrow \mathcal{G}(H_2)$ Homomorphismen, welche (2.42) kommutativ machen. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \Psi_1([(g, h)]) &= \Psi_1(i(g)i(h)^{-1}) \\
 &= \Psi_1(i(g))\Psi_1(i(h)^{-1}) \\
 &= \Psi_1(i(g))\Psi_1(i(h))^{-1} \\
 &= i(\Phi(g))i(\Phi(h))^{-1} \\
 &= \Psi_2([(g, h)]) \\
 &\Rightarrow \Psi_1 = \Psi_2 \\
 &\Rightarrow \text{Eindeutigkeit.}
 \end{aligned}$$

Jetzt zur Bijektivität: Sei $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$ bijektiv. Dann existiert also zu Φ genau ein Homomorphismus Ψ_{12} und zu Φ^{-1} existiert genau ein Homomorphismus Ψ_{21} , so dass folgende beiden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 H_1 & \xrightarrow{\Phi} & H_2 \\
 i \downarrow & & \downarrow i \\
 \mathcal{G}(H_1) & \xrightarrow{\Psi_{12}} & \mathcal{G}(H_2)
 \end{array} \tag{2.43}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H_2 & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & H_1 \\
 i \downarrow & & \downarrow i \\
 \mathcal{G}(H_2) & \xrightarrow{\Psi_{21}} & \mathcal{G}(H_1)
 \end{array} \tag{2.44}$$

Ψ_{21} ist die Inverse zu Ψ_{12} , denn für $[(g, h)] \in \mathcal{G}(H_1)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Psi_{21} \circ \Psi_{12}[(g, h)] &= \Psi_{21}[(\Phi(g), \Phi(h))] \\ &= [(\Phi^{-1}\Phi(g), \Phi^{-1}\Phi(h))] \\ &= [(g, h)] \\ \Rightarrow \Psi_{21} \circ \Psi_{12} &= id_{\mathcal{G}(H_1)}.\end{aligned}$$

Analog erhält man $\Psi_{12} \circ \Psi_{21} = id_{\mathcal{G}(H_2)}$ und damit die Bijektivität von Ψ_{12} . \square

Bemerkung 2.5.5 (zu den Beweisen der Theoreme 2.5.2 und 2.5.3, Beweis der Homomorphismeigenschaft von Ψ)

Im Falle von Gruppen bildet jede multiplikative Abbildung automatisch die Eins auf die Eins ab: Sei $f : G \rightarrow H$ multiplikativ $\Rightarrow f(e_G) = f(e_G^2) = f(e_G)f(e_G)$. Von links mit $f(e_G)^{-1}$ multiplizieren liefert $f(e_G)^{-1}f(e_G) = e_H = f(e_G)$. Falls jedoch Monoiden betrachtet werden, ist diese Aussage nicht mehr richtig, Beispiel:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{C} &\rightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(\mathbb{C} und $M_2(\mathbb{C})$ sind hier als multiplikative Halbgruppen mit 1 betrachtet.)

Bemerkung 2.5.6 Falls in H ein Element ∞ existiert mit $h \cdot \infty = \infty \quad \forall h \in H$, dann enthält wegen $(h, k) \sim (\infty, \infty)$ die Gruppe $\mathcal{G}(H)$ nur ein Element: $\mathcal{G}(H) = \{0\}$. Diese Tatsache spielt u.a. bei der Berechnung der K-Theorie von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, \mathcal{H} unendlichdimensionaler Hilbertraum, eine Rolle: $K_0(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \{0\}$.

Als Abschluss dieses Abschnitts über die Grothendieck-Konstruktion noch ein einfaches Lemma, das wir an späterer Stelle benötigen und dessen Beweis etwas technisch, aber an sich nicht kompliziert ist.

Lemma 2.5.2 Seien A und B Halbgruppen. Dann gilt

$$\mathcal{G}(A \oplus B) \cong \mathcal{G}(A) \oplus \mathcal{G}(B).$$

BEWEIS: Die Elemente von $\mathcal{G}(A \oplus B)$ sind von der Form

$$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)], \quad a_i \in A, b_i \in B. \quad (2.45)$$

Die Elemente von $\mathcal{G}(A) \oplus \mathcal{G}(B)$ sind von der Form

$$([a_1, a_2], [b_1, b_2]), \quad a_i \in A, b_i \in B. \quad (2.46)$$

Definiere Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{G}(A \oplus B) &\rightarrow \mathcal{G}(A) \oplus \mathcal{G}(B) \\ [(a_1, b_1), (a_2, b_2)] &\mapsto ([a_1, a_2], [b_1, b_2])\end{aligned}$$

und zeige

- (1) Wohldefiniertheit,
- (2) Bijektivität,
- (3) ϕ ist Gruppenhomomorphismus.

Zu (1): Sei $((a_3, b_3), (a_4, b_4)) \in [(a_1, b_1), (a_2, b_2)]$
 $\Rightarrow \exists (x, y) \in A \oplus B$ mit

$$\begin{aligned}(a_3, b_3) \cdot (a_2, b_2) \cdot (x, y) &= (a_4, b_4) \cdot (a_1, b_1) \cdot (x, y) \\ \Rightarrow (a_2 a_3 x, b_2 b_3 y) &= (a_1 a_4 x, b_1 b_4 y) \\ \Rightarrow a_2 a_3 x = a_1 a_4 x &\Rightarrow (a_3, a_4) \in [a_1, a_2] \\ \text{und } b_2 b_3 y = b_1 b_4 y &\Rightarrow (b_3, b_4) \in [b_1, b_2]\end{aligned}$$

\Rightarrow Wohldefiniertheit.

(2) ist dann klar.

Zu (3): Zu zeigen ist

$$\phi\left([(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \cdot [(a_3, b_3), (a_4, b_4)]\right) = \phi\left([(a_1, b_1), (a_2, b_2)]\right) \cdot \phi\left([(a_3, b_3), (a_4, b_4)]\right) \quad (2.47)$$

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, berechnen wir beide Seiten von (2.47) getrennt:

$$\begin{aligned}\text{l.S.} &= \phi\left([(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \cdot [(a_3, b_3), (a_4, b_4)]\right) \\ &= \phi\left([(a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3), (a_2, b_2) \cdot (a_4, b_4)]\right) \\ &= \phi\left([(a_1 a_3, b_1 b_3), (a_2 a_4, b_2 b_4)]\right) \\ &= ([a_1 a_3, a_2 a_4], [b_1 b_3, b_2 b_4]), \\ \text{r.S.} &= \phi\left([(a_1, b_1), (a_2, b_2)]\right) \cdot \phi\left([(a_3, b_3), (a_4, b_4)]\right) \\ &= ([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \cdot ([a_3, a_4], [b_3, b_4]) \\ &= ([a_1, a_2] \cdot [a_3, a_4], [b_1, b_2] \cdot [b_3, b_4]) \\ &= ([a_1 a_3, a_2 a_4], [b_1 b_3, b_2 b_4]).\end{aligned}$$

Also r.S. = l.S.

□

2.5.5 Der Monoid $V(A)$ und die Gruppe $K_{00}(A)$

Sei A eine C^* -Algebra, $M_\infty(A)$ der algebraische direkte Limes der Familie $(M_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$, dessen Konstruktion in Abschnitt 2.5.3 beschrieben ist. Die Morphismen Φ_{ij} ($i \geq j$) sind hier durch “kanonische Einbettungen” gegeben:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} : M_j(A) &\rightarrow M_i(A) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(D.h. es wird “mit Nullen aufgefüllt”.)

Definiere eine Äquivalenzrelation auf $P(M_\infty(A))$ (den Projektoren in $M_\infty(A)$) durch

$$p \sim q \iff \exists v \in M_\infty(A) : p = v^*v, q = vv^*. \quad (2.48)$$

Die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen bezeichnet man mit $V(A)$.

Definition 2.5.6 ($V(A)$)

$$\begin{aligned} V(A) &:= P(M_\infty(A)) / \sim \\ &= \{[p] \mid p = p^* = p^2 \in M_\infty(A)\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Definiert man Addition auf $V(A)$ durch

$$[p] + [q] := \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right], \quad (2.50)$$

so erhält $V(A)$ die Struktur eines abelschen Monoids (Halbgruppe mit Eins), denn:

- Die Addition ist wohldefiniert:

Sei $p' \in [p], q' \in [q] \Rightarrow p' = v^*v, p = vv^*, q' = u^*u, q = uu^*$.

$$\begin{aligned} \text{Setze } x = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} &\Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} v^* & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow xx^* = \begin{pmatrix} vv^* & 0 \\ 0 & uu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ &x^*x = \begin{pmatrix} v^*v & 0 \\ 0 & u^*u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{Wohldefiniertheit.} \end{aligned}$$

- Das Einselement ist $[0]$.
- Kommutativität zeigt man folgendermaßen: Setze

$$x = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit hat man

$$\begin{aligned} x^*x &= \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \\ xx^* &= \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow [p] + [q] &= \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \right] = [q] + [p]. \end{aligned}$$

Proposition 2.5.2 (*induzierte Morphismen auf $V(A)$*)

A und B seien C^* -Algebren, $\alpha : A \rightarrow B$ ein Morphismus (von C^* -Algebren). Dieses α induziert einen Homomorphismus von Halbgruppen

$$\begin{aligned} \alpha_* : V(A) &\rightarrow V(B) \\ [(a_{ij})] &\mapsto [(\alpha(a_{ij}))]. \end{aligned}$$

BEWEIS:

- Wohldefiniertheit.
Zwei Dinge sind hier zu zeigen:
 - (1) $(\alpha(a_{ij}))$ ist ein Projektor.
 - (2) $(a_{ij}) \sim (b_{ij}) \Rightarrow (\alpha(a_{ij})) \sim (\alpha(b_{ij}))$.

Beides folgt direkt aus der Tatsache, dass α ein $*$ -Morphismus ist.

- α_* Homomorphismus: Klar, weil α_* auf den einzelnen Matrixelementen definiert ist.

Beispiel 2.5.1 ($V(A)$ für $A = \mathbb{C}$)

Es ist

$$V(\mathbb{C}) = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

weil Projektoren in $M_\infty(\mathbb{C})$ genau dann äquivalent sind, wenn die Dimensionen ihrer Bildräume übereinstimmen.

BEWEIS:

“ \Leftarrow ” Seien $p, q \in P(M_\infty(\mathbb{C}))$ und $\dim \text{Bild}(p) = \dim \text{Bild}(q) = m$. Zeige: $\exists u \in M_\infty(\mathbb{C})$ mit $p = u^*u, q = uu^*$.

$p, q \in M_\infty(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists n : p, q \in M_n(\mathbb{C})$. Es existiert eine (Orthonormal-) Basis, in der p die Form

$$p = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Ebenso existiert eine Basis, in der q eine solche Form hat. Es existieren also unitäre Matrizen w_1 und w_2 mit

$$w_1^* p w_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = w_2^* q w_2$$

$$\Rightarrow p = w_1 w_2^* q w_2 w_1^* = (w_2 w_1^*)^* q w_2 w_1^*.$$

Setze $v = w_2 w_1^*$, d.h. $p = v^* q v$, die Projektoren p und q sind also unitär äquivalent. Setze des Weiteren $u = qv$, dann gilt

$$u^* u = v^* q^2 v = v^* q v = p, \quad (2.51)$$

$$u u^* = q v v^* q = q^2 = q.$$

“ \Rightarrow ” Sei $p \sim q$ in $P(M_\infty(\mathbb{C}))$.

$$\begin{aligned} p \sim q &\Rightarrow p = u u^*, \quad q = u^* u \\ &\Rightarrow \text{tr } p = \text{tr } q \\ &\Rightarrow \dim \text{Bild}(p) = \dim \text{Bild}(q). \end{aligned}$$

□

Nun wird die Gruppe $K_{00}(A)$ definiert als die Grothendieck-Gruppe der Halbgruppe $V(A)$:

Definition 2.5.7 (Die Gruppe $K_{00}(A)$)

$$K_{00}(A) := \mathcal{G}(V(A))$$

Beispiel 2.5.2

$$K_{00}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z} \quad (2.52)$$

(Dies folgt direkt aus Beispiel 2.5.1.)

Beispiel 2.5.3 (V und K_{00} für $A = M_n(\mathbb{C})$)

Zunächst gilt $M_k(M_n(\mathbb{C})) = M_{kn}(\mathbb{C})$ (klar). Seien nun p und q äquivalente Projektoren in $M_\infty(M_n(\mathbb{C}))$, d.h. es existiert ein k mit $p, q \in M_k(M_n(\mathbb{C})) = M_{kn}(\mathbb{C})$. Nun kann man aber wie im Fall $A = \mathbb{C}$ argumentieren und erhält somit

$$V(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (2.53)$$

und damit

$$K_{00}(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}. \quad (2.54)$$

Proposition 2.5.3 *A und B seien C^* -Algebren. Betrachte $A \oplus B$ mit (kanonischen) Projektoren*

$$\begin{aligned}\pi^A : A \oplus B &\rightarrow A, \\ \pi^B : A \oplus B &\rightarrow B.\end{aligned}$$

Die induzierten Abbildungen π_*^A und π_*^B (siehe Prop. 2.5.2, S. 47) erzeugen Isomorphismen

$$\begin{aligned}\pi_*^A \oplus \pi_*^B : V(A \oplus B) &\rightarrow V(A) \oplus V(B), \\ \tilde{\pi}^A \oplus \tilde{\pi}^B : K_{00}(A \oplus B) &\rightarrow K_{00}(A) \oplus K_{00}(B),\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\pi}^A$ und $\tilde{\pi}^B$ gemäß Theorem 2.5.3, S. 42, zu verstehen sind.

BEWEIS: Seien $p \in P(M_\infty(A)), q \in P(M_\infty(B))$. Dann ist $p \oplus q \in P(M_\infty(A \oplus B))$ und es gilt für $[p \oplus q] \in V(A \oplus B)$

$$\begin{aligned}\pi_*^A \oplus \pi_*^B([p \oplus q]) &:= \pi_*^A([p \oplus q]) \oplus \pi_*^B([p \oplus q]) \\ &= [\pi^A(p \oplus q)] \oplus [\pi^B(p \oplus q)] \\ &= [p] \oplus [q].\end{aligned}$$

Daher ist $\pi_*^A \oplus \pi_*^B$ ein bijektiver Halbgruppenhomomorphismus und $\tilde{\pi}^A \oplus \tilde{\pi}^B$ ist ebenfalls bijektiv (Theorem 2.5.3, S. 42) als Abbildung von $K_{00}(A \oplus B) \rightarrow \mathcal{G}(V(A) \oplus V(B))$. Wegen Lemma 2.5.2, S. 44, ist $\mathcal{G}(V(A) \oplus V(B)) \cong \mathcal{G}(V(A)) \oplus \mathcal{G}(V(B)) = K_{00}(A) \oplus K_{00}(B)$. \square

2.5.6 Äquivalenzen von Projektoren

Für Projektoren in einer C^* -Algebra gibt es verschiedene Äquivalenzbegriffe. Einen davon haben wir in (2.48) bereits kennengelernt, zwei weitere sollen nun vorgestellt werden. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass die Definition von $V(A)$ (Definition 2.5.6 auf S. 46) unabhängig von der gewählten Äquivalenz ist. Dies erleichtert in einigen Fällen die Beweise in K-Theorie erheblich (z.B. die Wohldefiniertheit der Indexabbildung in Abschnitt 2.6). Für das generelle Verständnis des Kapitels ist dieser Abschnitt jedoch nicht vonnöten.

Definition 2.5.8 *Sei A eine C^* -Algebra und p, q Projektoren in A. Dann heißen p und q*

- äquivalent ($p \sim q$) $\iff \exists v \in A : p = v^*v, q = vv^*$,
- unitär äquivalent ($p \sim_u q$) $\iff \exists u \in \tilde{A}$ unitär mit $p = u^*qu$ (\tilde{A} gemäß Satz 2.5.2 von Seite 33),
- homotop ($p \sim_h q$) $\iff p$ und q sind durch einen normstetigen Weg von Projektoren in A verbunden.

Satz 2.5.4 In $P(M_\infty(A))$ stimmen die drei Äquivalenzbegriffe überein.

BEWEIS: $p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$ ist in (2.51) gezeigt.

$p \sim q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, denn:

Sei $p \sim q \Rightarrow \exists v$ mit $p = v^*v, q = vv^*$. Beachte zunächst folgende Relationen zwischen v, v^*, p, q : Wegen $p^2 = p$ folgt $v^*vv^*v = v^*v$ und wegen $q^2 = q$ folgt $vv^*vv^* = vv^*$. Damit erhält man für

$$\begin{aligned} \|v - vv^*v\|^2 &= \|(v - vv^*v)^*(v - vv^*v)\| \\ &= \|(v^* - v^*vv^*)(v - vv^*v)\| \\ &= \|v^*v - v^*vv^*v - v^*vv^*v + v^*vv^*vv^*v\| \\ &= \|p - p^2 - p^2 + p^3\| = 0 \\ \Rightarrow v &= vv^*v = vp = qv, \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$v^* = v^*vv^* = pv^* = v^*q. \tag{2.56}$$

Definiere nun $u := \begin{pmatrix} v & 1 - q \\ 1 - p & v^* \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u^*u &= \begin{pmatrix} v^* & 1 - p \\ 1 - q & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 1 - q \\ 1 - p & v^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^*v + (1 - p)^2 & v^*(1 - q) + (1 - p)v^* \\ (1 - q)v + v(1 - p) & (1 - q)^2 + vv^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ wegen (2.55), (2.56).} \\ uu^* &= \begin{pmatrix} v & 1 - q \\ 1 - p & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* & 1 - p \\ 1 - q & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} vv^* + (1 - q)^2 & v(1 - p) + (1 - q)v \\ (1 - p)v^* + v^*(1 - q) & (1 - p)^2 + v^*v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ wegen (2.55), (2.56)} \\ \Rightarrow u &\text{ unitär.} \end{aligned}$$

Nun berechnet man leicht, dass

$$\begin{aligned} u \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* &= \begin{pmatrix} v & 1 - q \\ 1 - p & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* & 1 - p \\ 1 - q & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um die Implikation $\sim_h \Rightarrow \sim_u$ zu zeigen, benötigen wir zunächst folgende Proposition:

Proposition 2.5.4 *Seien p und q Projektoren mit $\|p - q\| < 1$. Dann existiert eine stetige Abbildung $q \mapsto u_q$ (u_q unitär) mit $q = u_q p u_q^*$.*

BEWEIS: Definiere zu p und q zunächst folgende Elemente in \tilde{A} :

$$\begin{aligned} v_p &:= 2p - 1, \\ v_q &:= 2q - 1, \\ z_q &:= v_q v_p + 1. \end{aligned}$$

(Beachte: $v_q^2 = (2q - 1)(2q - 1) = 4q^2 - 2q - 2q + 1 = 1$ und damit $\|v_q\| = 1$, analog v_p .)
Dann gilt:

$$\begin{aligned} qz_q &= q(v_q v_p + 1) \\ &= q(2q - 1)(2p - 1) + q \\ &= (2q^2 - q)(2p - 1) + q \\ &= q(2p - 1) + q \\ &= 2qp, \\ z_q p &= (v_q v_p + 1)p \\ &= (2q - 1)(2p - 1)p + p \\ &= (2q - 1)(2p^2 - p) + p \\ &= 2qp, \\ \text{also } qz_q &= z_q p. \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\|z_q - 2\| = \|v_q v_p - 1\| = \|v_q v_p - v_q^2\| \leq \|v_p - v_q\| = \|2p - 1 - 2q + 1\| = 2\|p - q\| < 2.$$

Daher ist z_q in \tilde{A} invertierbar (Neumannsche Reihe!) $\Rightarrow q = z_q p z_q^{-1}$. Setze $u_q := z_q |z_q|^{-1}$ (unitär!). Damit gilt dann $q = u_q p u_q^*$. Erläuterung:

$$\begin{aligned} q = z p z^{-1} &\Rightarrow z p = q z \quad \text{und} \quad z^* q = p z^* \\ &\Rightarrow p z^* z = z^* q z = z^* z p \\ &\Rightarrow p \text{ kommutiert mit } z^* z \\ &\Rightarrow p \text{ kommutiert mit } |z|^{-1} = (z^* z)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{Funktionalkalkül}). \end{aligned}$$

Für $u := z |z|^{-1}$ gilt dann $u p u^* = z |z|^{-1} p |z|^{-1} z^* = z p |z|^{-2} z^* = q z |z|^{-2} z^* = q$.

Die Abbildung $q \mapsto z_q$ ist stetig, weil

$$\begin{aligned} \|z_{q_1} - z_{q_2}\| &= \|v_{q_1} v_p + 1 - v_{q_2} v_p - 1\| \\ &\leq \|v_{q_1} - v_{q_2}\| \\ &= 2\|q_1 - q_2\| \Rightarrow \text{Stetigkeit.} \end{aligned}$$

Die Abbildung $z \mapsto z|z|^{-1}$ ist ebenfalls stetig $\Rightarrow q \mapsto u_q$ stetig \Rightarrow Prop. 2.5.4 \square

Jetzt weiter im Beweis von Satz 2.5.4: Sei (p_t) die Homotopie zwischen p und q , $t \in [0, 1]$. Zerlege nun das Intervall $[0, 1]$ in so kleine Teilstücke $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$, dass $\|p_{t_k} - p_{t_{k-1}}\| < 1 \quad \forall k$. Dies ist aus folgendem Grund möglich: Der Weg (p_t) ist kompakt in den Projektoren der Algebra, weil er das stetige Bild eines kompakten Intervalls ist. Überdecke nun diesen Weg mit Mengen, deren Durchmesser kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Eine solche Überdeckung ist z.B. gegeben durch

$$U_{1/4}(p) := \{p' \in (p_t) : \|p' - p\| < 1/4\},$$

denn für $p_1, p_2 \in U_{1/4}(p)$ gilt $\|p_1 - p_2\| = \|p_1 - p + p - p_2\| \leq \|p_1 - p\| + \|p - p_2\| < 1/2$. Wegen der Kompaktheit von (p_t) enthält diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, und Projektoren aus "benachbarten" Gebieten haben einen Abstand kleiner als 1. Wähle aus jedem Gebiet einen Punkt aus, dies liefert die Folge $(p_k)_{k=1, \dots, n}$. Die Paare $p_{t_k}, p_{t_{k-1}}$ von Projektoren sind dann wegen Prop. 2.5.4, S. 51, alle unitär äquivalent und damit folgt die Behauptung.

Der letzte fehlende Teil ist noch die Implikation $\sim_u \Rightarrow \sim_h$:

Sei $p \sim_u q \Rightarrow q = upu^*$ mit $u \in \tilde{A}$ unitär. Setze

$$\begin{aligned} u_t &:= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2}t & -\sin \frac{\pi}{2}t \\ \sin \frac{\pi}{2}t & \cos \frac{\pi}{2}t \end{pmatrix}, \\ w_t &:= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_t^*, \\ p_t &:= w_t \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_t^*. \end{aligned}$$

Man zeigt dann leicht, dass p_t für alle t ein Projektor ist und dass

$$p_0 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass p_t tatsächlich in $M_2(A)$ liegt, und nicht in $M_2(\tilde{A})$: Hierzu verwenden wir den Skalarprojektor $\hat{\pi}$ aus Definition 2.5.3, von dem wir wissen, dass er ein Homomorphismus ist. Es gilt dann

$$\hat{\pi}(p_t) = \hat{\pi}(w_t) \underbrace{\hat{\pi} \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}_{=0} \hat{\pi}(w_t^*) = 0.$$

Eine analoge Argumentation verwendet die Idealeigenschaft von A in \tilde{A} bzw. von $M_n(A)$ in $M_n(\tilde{A})$, siehe Bemerkung 2.5.2 auf S. 35. Auch hier folgt aus der Tatsache, dass $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Element von $M_2(A)$ ist, dass auch $p_t = w_t \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_t^*$ in $M_2(A)$ liegt.

\Rightarrow Satz 2.5.4 \square

2.5.7 Die Gruppe $K_0(A)$

Betrachte die Abbildung π , welche aus der unitalisierten Algebra A^+ (siehe Definition 2.5.2) den skalaren Anteil herausprojiziert:

$$\begin{aligned} \pi : A^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, \lambda) &\mapsto \lambda. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Gemäß Proposition 2.5.2, S. 47, induziert diese Abbildung π einen Homomorphismus von Halbgruppen $\pi_* : V(A^+) \rightarrow V(\mathbb{C})$, wobei $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Beispiel 2.5.1). Dieser Homomorphismus wiederum induziert gemäß Theorem 2.5.3, S. 42, einen weiteren (Gruppen-) Homomorphismus $\tilde{\pi}$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi} : \mathcal{G}(V(A^+)) &\rightarrow & \mathcal{G}(V(\mathbb{C})) \\ \parallel & & \parallel \\ K_{00}(A^+) & & K_{00}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z} \end{array}$$

Die Gruppe $K_0(A)$ ist schließlich definiert als der Kern dieser von π induzierten Abbildung:

Definition 2.5.9 (Die Gruppe $K_0(A)$)

$$K_0(A) := \ker(\tilde{\pi} : K_{00}(A^+) \rightarrow \mathbb{Z})$$

Zur Verdeutlichung hier nochmals die relevanten Abbildungen in einem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A^+ &\xrightarrow{\pi}& \mathbb{C} \\ \downarrow v & & \downarrow v \\ V(A^+) &\xrightarrow{\pi_*}& V(\mathbb{C}) \cong \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ K_{00}(A^+) := \mathcal{G}(V(A^+)) &\xrightarrow{\tilde{\pi}}& \mathcal{G}(V(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z} \\ \cup & & \\ K_0(A) &:=& \ker \tilde{\pi} \end{array} \tag{2.58}$$

Wem der lange Weg zur Definition der K_0 -Gruppe zu kompliziert erscheint, der tröste sich mit einem Zitat eines Altmeisters der K-Theorie: “K-theory is not intended to be too easy, not even to define.” ([WO93], S.108)

Für unitale Algebren vereinfacht sich die Sache etwas, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.5.5 Für unitale C^* -Algebren A gilt

$$K_0(A) = K_{00}(A). \tag{2.59}$$

BEWEIS: A unital $\Rightarrow A^+ = A \oplus \mathbb{C}$. Dann gilt wegen Prop. 2.5.3, S. 49,

$$\begin{aligned} K_{00}(A^+) &= K_{00}(A) \oplus K_{00}(\mathbb{C}) \\ &= K_{00}(A) \oplus \mathbb{Z} \\ &= K_{00}(A) \oplus \text{Bild } \tilde{\pi} \\ \Rightarrow K_{00}(A) &\cong K_{00}(A^+)/\text{Bild } \tilde{\pi} \cong \ker \tilde{\pi} = K_0(A). \end{aligned}$$

□

$K_{00}(\mathbb{C})$ und $K_{00}(M_n(\mathbb{C}))$ sind in den Beispielen 2.5.2 und 2.5.3 berechnet, somit erhält man für die zugehörigen K_0 -Gruppen:

Beispiel 2.5.4

$$K_0(\mathbb{C}) = K_0(M_n(\mathbb{C})) = K_{00}(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z} \quad (2.60)$$

2.5.8 Höhere K-Gruppen und Bott-Periodizität

Die höheren K-Gruppen spielen bei der Klassifizierung endlicher spektraler Tripel keine Rolle, daher werden sie hier nur kurz und der Vollständigkeit halber erwähnt.

Definition 2.5.10 Sei A eine C^* -Algebra (mit oder ohne 1), A^+ die unitalisierte C^* -Algebra gemäß Definition 2.5.2, S. 34, π und $\hat{\pi}$ seien die Skalarprojektoren gemäß Definition 2.5.3, S. 34. Definiere nun folgende Mengen:

$$\begin{aligned} GL_n(A^+) &:= \text{Menge der invertierbaren Elemente in } M_n(A^+), \\ GL_n^+(A) &:= \{a \in GL_n(A^+) \mid \hat{\pi}(a) = \mathbf{1}_n\}, \\ U_n(A^+) &:= \text{Menge der unitären Elemente in } M_n(A^+), \\ U_n^+(A) &:= \{u \in U_n(A^+) \mid \hat{\pi}(u) = \mathbf{1}_n\}, \\ GL_\infty^+(A) &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} GL_n^+(A) \text{ als alg. direkter Limes,} \\ U_\infty^+(A) &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^+(A) \text{ als alg. direkter Limes,} \\ GL_n(A^+)_0 &:= \text{die Zusammenhangskomponente von } GL_n(A^+), \text{ die die 1 enthält} \\ &\quad (\text{analog für die übrigen Gruppen}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Mengen wird die Gruppe $K_1(A)$ definiert:

Definition 2.5.11 Sei A eine C^* -Algebra. $K_1(A)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} K_1(A) &:= GL_\infty^+(A)/GL_\infty^+(A)_0 \\ &\cong U_\infty^+(A)/U_\infty^+(A)_0 \\ &\cong GL_\infty(A^+)/GL_\infty(A^+)_0 \\ &\cong U_\infty(A^+)/U_\infty(A^+)_0 \end{aligned}$$

(Auf den Beweis der Isomorphismen sei hier verzichtet, siehe [WO93] S.77, Prop. 4.2.6)

Diese Definition der Gruppe $K_1(A)$ lässt natürlich zunächst keine kanonische Definition höherer K -Gruppen zu, jedoch wird im Folgenden ein Theorem vorgestellt, welches diese Verallgemeinerung in natürlicher Weise ermöglicht. Hierzu benötigen wir den Begriff der Einhängung:

Definition 2.5.12 (Einhängung)

Die Einhängung (engl. suspension, daher die Notation) einer C^* -Algebra ist die C^* -Algebra

$$\begin{aligned} SA &:= A \otimes C_0(\mathbb{R}) \\ &\cong C_0(\mathbb{R} \rightarrow A). \end{aligned}$$

(C_0 : Funktionen, die im Unendlichen verschwinden)

Nun lautet das Theorem ([WO93] S.138, Thm. 7.2.5)

Theorem 2.5.4 Es gilt folgende Isomorphie:

$$K_1(A) \cong K_0(SA) \tag{2.61}$$

Dieses Theorem liefert die gewünschte Möglichkeit zur Verallgemeinerung der Gruppen K_0 und K_1 , da man ja die Einhängung mehrmals anwenden kann.

Definition 2.5.13 (höhere K -Gruppen)

$$K_n(A) := K_0(S^n A) \tag{2.62}$$

Es sieht nun so aus, als ob es eine ganze Menge verschiedener K -Gruppen gäbe, jedoch gibt es de facto nur zwei, wie folgendes Theorem zeigt (siehe [WO93] S.158 ff):

Theorem 2.5.5 (Bott-Periodizität)

Sei A eine C^* -Algebra. Dann gilt

$$\begin{aligned} K_0(A) &\cong K_{2n}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ K_1(A) &\cong K_{2n+1}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.5.7 *Es gelten des Weiteren folgende Aussagen:*

$$\begin{aligned} K_i(A \oplus B) &\cong K_i(A) \oplus K_i(B), \quad i = 0, 1; \\ K_1(M_n(\mathbb{C})) &= 0. \end{aligned}$$

Hier wird dann klar, dass für endlichdimensionale Algebren, die wir betrachten, K_1 immer trivial ist.

2.6 Die Schnittform und Poincaré-Dualität

Die endgültige Definition der Schnittform in K-Theorie erfordert zunächst noch etwas Vorarbeit. In Gleichung (1.11) von Bemerkung 1.2.3 (S. 16) ist die Darstellung π_\otimes von $A \otimes A^\circ$ definiert. Diese vertauscht mit der Graduierung Γ , denn

$$\begin{aligned} \pi_\otimes(a \otimes b)\Gamma &= \pi(a)\tilde{\pi}(b)\Gamma \\ &= \pi(a)J\pi(b^*)J^{-1}\Gamma \\ &= \Gamma\pi(a)J\pi(b^*)J^{-1} \\ &= \Gamma\pi_\otimes(a \otimes b). \end{aligned}$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen folgt aus der Tatsache, dass

$$\begin{aligned} J\Gamma &= (-1)^k \Gamma J \\ \text{und } J^{-1} &= (-1)^l J, \end{aligned}$$

wobei k und l von der Dimension des spektralen Tripels abhängen (siehe Axiom 7 in Definition 1.2.1). Seien H^+ und H^- die Eigenräume von Γ zu den Eigenwerten $+1$ und -1 , d.h.

$$\begin{aligned} H^+ &= \frac{1 + \Gamma}{2}H, \\ H^- &= \frac{1 - \Gamma}{2}H. \end{aligned}$$

Da π_\otimes mit Γ vertauscht, sind H^\pm invariant unter π_\otimes und π_\otimes zerfällt in zwei Teildarstellungen

$$\begin{aligned} \pi_\otimes^+(a) : H^+ &\rightarrow H^+, \\ \pi_\otimes^-(a) : H^- &\rightarrow H^-. \end{aligned}$$

Man kann also $\pi_\otimes(a)$ folgendermaßen auffassen:

$$\pi_\otimes(a) = \begin{pmatrix} \pi_\otimes^+(a) & 0 \\ 0 & \pi_\otimes^-(a) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H^+ \\ H^- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H^+ \\ H^- \end{pmatrix}$$

Betrachtet man nun Erzeuger der Gruppe $K_0(A \otimes A^\circ)$, d.h. Elemente der Form $\left[([p], [0])\right]$, so liegt das Element p in einem $M_m(A \otimes A^\circ)$, es ist also nötig, den Hilbertraum zu vergrößern: Setze

$$\begin{aligned} H_m &:= H \oplus \dots \oplus H \quad (\text{m-mal}), \\ D_m &:= D \oplus \dots \oplus D, \\ \pi_m(p) &: H_m \rightarrow H_m, \end{aligned}$$

mit Wirkung von D_m und $\pi_m(p)$ komponentenweise. Weil H graduiert ist, ist auch H_m graduiert (mit $\Gamma_m := \Gamma \oplus \dots \oplus \Gamma$) und π_m vertauscht mit Γ_m . Daher zerfällt auch $\pi_m(p)$ in

$$\begin{aligned} \pi_m^+(p) &: H_m^+ \rightarrow H_m^+, \\ \pi_m^-(p) &: H_m^- \rightarrow H_m^-. \end{aligned}$$

Beachte an dieser Stelle, dass wegen $\Gamma D = -D \Gamma$ (D ist ein ungerader Operator) auch $\Gamma_m D_m = -D_m \Gamma_m$ gilt und somit D von $H^+ \rightarrow H^-$ und $H^- \rightarrow H^+$ abbildet (analog D_m), d.h. man kann D schreiben als

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^{+-} \\ D^{-+} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H^+ \\ H^- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H^+ \\ H^- \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\left[([p], [0])\right] \in K_0(A \otimes A^\circ)$ mit $p \in M_m(A \otimes A^\circ)$. Definiere nun (endlich!) die Schnittform durch

$$\begin{aligned} \Phi : K_0(A \otimes A^\circ) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \left[([p], [0])\right] &\mapsto \text{index}(\pi_m^-(p) D_m \pi_m^+(p)), \end{aligned}$$

oder alternativ

$$\begin{aligned} \Phi : K_0(A) \times K_0(A) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \left(\left[([s], [0])\right], \left[([t], [0])\right]\right) &\mapsto \text{index}(\pi_m^-(s \otimes t^\circ) D_m \pi_m^+(s \otimes t^\circ)), \end{aligned} \tag{2.63}$$

wobei $\pi_m^-(s \otimes t^\circ) D_m \pi_m^+(s \otimes t^\circ)$ als Operator von $\pi(s \otimes t^\circ) H^+ \rightarrow \pi(s \otimes t^\circ) H^-$ aufzufassen ist. Somit ist die Schnittform auf Erzeugern der K-Theorie erklärt und wird additiv fortgesetzt. An dieser Stelle sind zwei Dinge zu zeigen:

- (1) $\pi_m^-(p) D_m \pi_m^+(p)$ ist ein Fredholm-Operator.
- (2) Der Index ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten p in $[p]$.

BEWEIS:

- (1) Siehe [Con94] S.404 und dort angegebene Referenzen.
- (2) Sei $p' \in [p]$. Da in der Definition von $V(A)$ die Wahl der Äquivalenz keine Rolle spielt (siehe Satz 2.5.4, S.50), kann man sich also auf Homotopieäquivalenz von p und p' beschränken, d.h. es existiert ein normstetiger Weg von Projektoren, der p und p' verbindet. Da die Indexabbildung bezüglich der Normtopologie stetig ist (siehe [GBVF01] S. 143 und Referenzen dort), ist sie zwischen p und p' also konstant.

Nun berechnen wir konkret die Schnittform Φ für Erzeuger der K-Theorie für die Algebra

$$A = \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C}),$$

welche auf dem Hilbertraum $H = \bigoplus H_{ij}$ dargestellt ist. Für $K_0(A)$ gilt wegen Bemerkung 2.5.7, S. 56, die Relation

$$K_0(A) = K_0 \left(\bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C}) \right) = \bigoplus_{i=1}^k K_0(M_{n_i}(\mathbb{C})).$$

Es ist $K_0(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ (siehe Beispiel 2.5.4, S. 54), d.h. die Erzeuger von $K_0(A)$ sind von der Form

$$0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$$

mit 1 an der i-ten Stelle. Diese "1" entspricht der Dimension des Bildraumes eines Projektors in der i-ten Algebra, d.h. man kann für die Berechnung der Schnittform Erzeuger der Form

$$\rho_i = 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$$

betrachten (mit der nichttrivialen Matrix an der i-ten Stelle). Berechne nun

$$\Phi(\rho_i, \rho_j).$$

Diese Notation soll die Schreibweise von Gleichung (2.63) durchsichtiger machen, gemeint ist

$$\Phi \left(\left[([\rho_i], [0]) \right], \left[([\rho_j], [0]) \right] \right),$$

was zugegebenermaßen etwas "unhandlich" ist.

$$\begin{aligned} \Phi(\rho_i, \rho_j) &= \text{index } \pi_{\otimes}^{-}(\rho_i \otimes \rho_j) D \pi_{\otimes}^{+}(\rho_i \otimes \rho_j) \\ &= \text{index } \pi_{-}(\rho_i) \tilde{\pi}_{-}(\rho_j) D \pi_{+}(\rho_i) \tilde{\pi}_{+}(\rho_j) \end{aligned}$$

Der Operator

$$A_{ij} := \pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)D\pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)$$

ist nach Definition der Schnittform ein Operator

$$A_{ij} : \pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)H^+ \rightarrow \pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)H^-$$

oder ausgeschrieben

$$A_{ij} : \underbrace{\pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)\frac{1}{2}(1+\Gamma)H}_{=:D(A_{ij})} \rightarrow \underbrace{\pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)\frac{1}{2}(1-\Gamma)H}_{=:R(A_{ij})}.$$

Betrachte nun die beiden möglichen Vorzeichen von γ_{ij} .

Für $\gamma_{ij} = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \dim \pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)\frac{1}{2}(1+\Gamma)H &= r_{ij}, \\ \dim \pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)\frac{1}{2}(1-\Gamma)H &= 0. \end{aligned}$$

Für $\gamma_{ij} = -1$ gilt

$$\begin{aligned} \dim \pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)\frac{1}{2}(1+\Gamma)H &= 0, \\ \dim \pi(\rho_i)\tilde{\pi}(\rho_j)\frac{1}{2}(1-\Gamma)H &= r_{ij}. \end{aligned}$$

Somit erhält man für

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} = 1 : \quad & \dim D(A_{ij}) = r_{ij}, \quad \dim R(A_{ij}) = 0, \\ & \text{index} A_{ij} = \dim \ker A_{ij} - \dim \text{koker} A_{ij} = r_{ij}. \\ \gamma_{ij} = -1 : \quad & \dim D(A_{ij}) = 0, \quad \dim R(A_{ij}) = r_{ij}, \\ & \text{index} A_{ij} = -r_{ij}. \end{aligned}$$

Also ist für beliebiges γ_{ij} der Index von A_{ij} gleich q_{ij} , siehe Definition von q_{ij} in Formel (2.9), S. 26.

Satz 2.6.1 *Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Schnittform in K-Theorie und den Dimensionen der Hilberträume eines endlichen spektralen Tripels:*

$$\Phi(\rho_i, \rho_j) = q_{ij} \tag{2.64}$$

Somit ist die Klassifizierung eines endlichen spektralen Tripels (A, H, D, Γ, J) abgeschlossen:

Die Algebra ist gegeben durch die Formeln (2.1) und (2.2), der Hilbertraum durch (2.5) und (2.6), wobei die Freiheit in der Wahl der Dimensionen durch die Zahlen $r_{ij} = |q_{ij}|$ in (2.6) beschrieben wird. In der durch (2.5) festgelegten Zerlegung des Hilbertraums ist Γ gegeben durch (2.7) und (2.8), wobei die Vorzeichen $\gamma_{ij} = \pm 1$ ebenfalls durch q_{ij} beschrieben werden gemäß (2.9). Die kanonische Form von J ist in Lemma 2.4.1 gegeben und die Form des Diracoperators in Satz 2.4.1.

Schließlich wird der Zusammenhang zwischen der Matrix q , die durch (2.9) definiert ist, und der Schnittform in K-Theorie in Satz 2.6.1 hergestellt, der im Wesentlichen besagt, dass beide identisch sind. Die Forderung der Nichtigkeit an die Schnittform in Axiom (A6) in Definition 1.2.1 überträgt sich daher auf die Matrix q , welche dementsprechend invertierbar sein muss.

Kapitel 3

Ab- und Zustände

WAS NICHT KOMPLIZIERT IST, IST FALSCH.
(NICOLÁS GÓMEZ DÁVILA)

3.1 Zustände auf endlichdimensionalen C^* -Algebren

Ein Physiker wird unter einem “reinen Zustand” zunächst ein Element ψ eines Hilbertraums \mathcal{H} verstehen. Wenn er die Sache genauer betrachtet, wird er sich auf die normierten Elemente $\|\psi\| = 1$ beschränken und außerdem noch ψ und $e^{i\varphi}\psi$ als äquivalent auffassen (die daraus resultierende Menge ist der zu \mathcal{H} gehörige projektive Raum). Will man nun das Konzept des Zustands auf die Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ übertragen, so kann man dies durch Definition folgender Abbildung tun:

$$\begin{aligned}\omega \equiv \omega_\psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ B &\mapsto \langle \psi, B\psi \rangle.\end{aligned}$$

Man nennt dann im algebraischen Kontext die Abbildung ω “Zustand” und definiert sie über ihre Eigenschaften

$$\begin{aligned}\|\omega\| &= 1, \\ \omega(B^*B) &\geq 0,\end{aligned}$$

welche keinen Bezug mehr auf den ursprünglichen Hilbertraum haben und somit auch für beliebige C^* -Algebren verwendet werden können. Die Definition eines “reinen Zustands” ist in der rein algebraischen Fassung etwas schwieriger und soll hier auch nicht im Detail angegeben werden (siehe hierzu [BR87]). Sie beruht im Wesentlichen auf der Tatsache, dass Zustände eine konvexe Menge bilden, und die reinen Zustände sind die Extrempunkte dieser Menge.

Betrachtet man kommutative C^* -Algebren, so sind reine Zustände und Punkte identisch im folgenden Sinn: Nach dem Theorem von Gelfand und Naimark ist jede kommutative C^* -Algebra A isomorph zu einer Algebra von stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum M und die Punktauswertungen

$$\begin{aligned} \delta_x : C(M) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

sind die reinen Zustände der Algebra (welche mit den Charakteren, den multiplikativen Linearformen auf A , übereinstimmen, siehe [BR87] S.62, Prop. 2.3.27).

Für (nichtkommutative) endlichdimensionale Matrixalgebren $M_n(\mathbb{C})$ sind die reinen Zustände gegeben durch Einheitsvektoren $\psi \in \mathbb{C}^n$ modulo Phase, d.h. die reinen Zustände sind Elemente des projektiven Raumes $\mathbb{C}P^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^{n-1} &= \{[v] : v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0\} \\ \text{wobei } [v] &:= \{w \in \mathbb{C}^n : \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w\} \end{aligned}$$

(Der projektive Raum $\mathbb{C}P^{n-1}$ lässt sich also als Menge aller eindimensionalen Unterräume von \mathbb{C}^n auffassen.)

Für direkte Summen von Matrixalgebren ist der Raum P der reinen Zustände (“pure states”) die Vereinigung der Zustandsräume P_i der einzelnen Summanden. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

Beispiel 3.1.1 (*Reine Zustände auf $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$*)

Die reinen Zustände auf $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ haben die Struktur $\mathbb{C}P^1 \cup \{q\}$, sie bestehen also aus den reinen Zuständen über $M_2(\mathbb{C})$ und aus den Zuständen über \mathbb{C} (wovon es jedoch nur einen gibt, da \mathbb{C} die Funktionenalgebra über einem Punkt darstellt). Die Wirkung der Zustände (als Abbildungen) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^1 \ni [\psi] : M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, z) &\mapsto \langle \psi, a\psi \rangle, \\ q : M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, z) &\mapsto z, \end{aligned}$$

wobei ψ einen normierten Repräsentanten aus der entsprechenden Klasse des projektiven Raumes bezeichnet.

3.2 Abstände

Nichtkommutative Geometrie liefert unter anderem eine Verallgemeinerung Riemannscher Spinmannigfaltigkeiten M und hier z.B. auch die Möglichkeit, den geodätischen Abstand

zweier Punkte durch algebraische Daten wie den Diracoperator auszudrücken:

$$d(p, q) = \sup\{|\delta_p(a) - \delta_q(a)| : a \in C^\infty(M), \|[D, a]\| \leq 1\}. \quad (3.1)$$

Ein Beweis dieser auf Connes zurückgehenden sogenannten “distance formula” findet sich z.B. in [GBVF01]. Wie wir zu Beginn des Kapitels gesehen haben, sind die Abbildungen δ_p und δ_q reine Zustände der Algebra $C^\infty(M)$ und man kann die Abstandsformel auf nichtkommutative Algebren A erweitern (bzw. auf spektrale Tripel, weil man den Diracoperator benötigt), indem man (nun allgemeine) reine Zustände betrachtet. Das zugehörige Abstandsfunktional lautet dann

$$d(\varphi, \psi) = \sup\{|\varphi(a) - \psi(a)| : a \in A, \|[D, a]\| \leq 1\}. \quad (3.2)$$

In den folgenden Abschnitten werden Abstandsfunktionale für verschiedene spektrale Tripel, d.h. verschiedene Algebren und verschiedene Diracoperatoren, betrachtet. (Die Problematik wurde bereits untersucht in [IKM99], Teile der dortigen Ergebnisse werden hier auch verwendet.) Diese Größen dienen dann in Kapitel 4 als Observablen im Quantisierungsprozess.

Beispiel 3.2.1 (zur Abstandsformel)

Betrachten wir $M = S^1$, wie schon in Bemerkung 1.2.5, S. 16, diskutiert. Der Diracoperator ist

$$D = -i \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

und Zustände auf $\mathcal{C}(S^1)$ sind Abbildungen

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi_i} : \mathcal{C}(S^1) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(\varphi_i). \end{aligned}$$

Wegen

$$[D, f] = -i \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

erhält man für den Abstand der Zustände δ_{φ_1} und δ_{φ_2} den Ausdruck

$$\begin{aligned} d(\delta_{\varphi_1}, \delta_{\varphi_2}) &= \sup_{\|[D, f]\| \leq 1} \{|\delta_{\varphi_1}(f) - \delta_{\varphi_2}(f)|\} \\ &= \sup_{\|\frac{\partial f}{\partial \varphi}\| \leq 1} \{|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)|\} \\ &= \sup_{\|\frac{\partial f}{\partial \varphi}\| \leq 1} \left\{ \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \right| \right\} \\ &= |\varphi_2 - \varphi_1|. \end{aligned}$$

Das Supremum wird hierbei angenommen für die Funktion $f(\varphi) = \varphi$, welche $\|\frac{\partial f}{\partial \varphi}\| = 1$ erfüllt.

3.3 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

Das einfachste Beispiel, für das ein Abstandsfunktional definiert werden kann, ist der 2-Punkt-Raum mit der zugehörigen Algebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, sind spektrale Tripel zu dieser Algebra durch symmetrische, invertierbare 2×2 -Matrizen q mit ganzzahligen Einträgen gegeben. Für

$$q = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad q = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

existiert kein Diracoperator (ungleich Null): Wegen Satz 2.4.1, S. 31, bildet D nur zwischen Räumen $H_{kl} \rightarrow H_{ij}$ ab, für die entweder $i = k$ oder $j = l$ ist, d.h. deren Einträge in der Matrix q entweder in der gleichen Zeile oder in der gleichen Spalte stehen. Das gleiche Argument liefert natürlich auch das Verschwinden des Diracoperators für spektrale Tripel zu den Schnittformen

$$q = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad q = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Ebenso ist der Diracoperator zu

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

trivial wegen $\gamma_{11} = \gamma_{21} = \gamma_{12}$ (verwende Aussage (2) von Satz 2.4.1). Betrachte als erstes nichttriviales Beispiel den Fall

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Hilbertraum ist hier 3-dimensional. An dieser Stelle lässt sich natürlich schon ein kleines Zwischenergebnis festhalten:

Lemma 3.3.1 *Für $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ und $D \neq 0$ existiert kein spektrales Tripel (A, H, D) mit $\dim H \leq 2$.*

Für $q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat der Diracoperator die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \bar{m} & m \\ m & 0 & 0 \\ \bar{m} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{C}, \quad \text{bezüglich} \quad H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21}.$$

Die Darstellung von $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ auf $H = \mathbb{C}^3$ ist gegeben durch

$$\pi(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Man berechnet dann leicht

$$[D, \pi(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m(y-x) \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{m}(x-y) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhält daher

$$\|[D, \pi(x, y)]\| = |m(x-y)|$$

und somit

$$d(p_1, p_2) = \sup\{|x-y| : |m(x-y)| \leq 1\} = \frac{1}{|m|}.$$

Analog berechnet man dieses Ergebnis für $q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. für die Darstellung

$$\pi(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \quad \text{bezüglich } H = H_{12} \oplus H_{21} \oplus H_{22}.$$

Damit sind die 3-dimensionalen Möglichkeiten schon ausgeschöpft. Betrachte nun 4-dimensionale Beispiele, zunächst zu

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hier hat der allgemeinste Diracoperator die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \bar{m} & m & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ \bar{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{C},$$

bezüglich $H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21} \oplus H_{22}$. Die Darstellung der Algebra ist

$$\begin{aligned} \pi(x, y) &= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & y\mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [D, \pi(x, y)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & m(y-x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{m}(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \|[D, \pi(x, y)]\| &= |m(x-y)|. \end{aligned}$$

Für den Abstand erhält man somit wie im 3-dimensionalen Fall

$$d(p_1, p_2) = \frac{1}{|m|}.$$

Etwas komplizierter wird es für

$$q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier hat der Diracoperator bezüglich $H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21}$ die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & v & \bar{v} \\ v^* & 0 & 0 \\ v^T & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei nun $H_{11} \cong \mathbb{C}^2$ ist und dementsprechend v als Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C}^2 ein Element von \mathbb{C}^2 ist, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Die Darstellung ist

$$\pi(x, y) = \begin{pmatrix} x \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Ausführlich geschrieben liefert das

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 & \bar{v}_1 \\ 0 & 0 & v_2 & \bar{v}_2 \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} [D, \pi(x, y)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{v}_1(y-x) \\ 0 & 0 & 0 & \bar{v}_2(y-x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1(x-y) & v_2(x-y) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (x-y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\bar{v}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{v}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: (x-y)R. \end{aligned}$$

Dies liefert schließlich für die Norm des Kommutators

$$\begin{aligned} \|[D, \pi(x, y)]\|^2 &= \|[D, \pi(x, y)]^* [D, \pi(x, y)]\| \\ &= |x-y|^2 \|R^* R\| \\ &= |x-y|^2 \left\| \begin{pmatrix} |v_1|^2 & \bar{v}_1 v_2 & 0 & 0 \\ v_1 \bar{v}_2 & |v_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |v_1|^2 + |v_2|^2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= |x-y|^2 \max \left\{ \left\| \begin{pmatrix} |v_1|^2 & \bar{v}_1 v_2 \\ v_1 \bar{v}_2 & |v_2|^2 \end{pmatrix} \right\|, (|v_1|^2 + |v_2|^2) \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei verwendet man die Aussage, dass für beliebige quadratische Matrizen A und B gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\| = \max(\|A\|, \|B\|).$$

Man berechnet nun weiter

$$\left\| \begin{pmatrix} |v_1|^2 & \bar{v}_1 v_2 \\ v_1 \bar{v}_2 & |v_2|^2 \end{pmatrix} \right\| = (|v_1|^2 + |v_2|^2) \cdot \left\| \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} \frac{(v_1, v_2)}{|v_1|^2 + |v_2|^2} \right\|.$$

Die Matrix, deren Norm an dieser Stelle benötigt wird, ist ein Projektor und hat daher Norm 1. Somit erhält man als Endergebnis

$$\begin{aligned} \|[D, \pi(x, y)]\| &= |x - y| \cdot \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} = |x - y| \cdot |v| \\ \Rightarrow d(p_1, p_2) &= \sup\{|x - y| : \|[D, \pi(x, y)]\| \leq 1\} = \frac{1}{|v|}. \end{aligned}$$

Der Fall

$$q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lässt sich nun relativ einfach auf

$$q = \begin{pmatrix} n & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N},$$

erweitern. Wir haben hier $H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21} \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ und Diracoperator und Algebradarstellung haben die Form

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 0 & v & \bar{v} \\ v^* & 0 & 0 \\ v^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } v \in \mathbb{C}^n, \\ \pi(x, y) &= \begin{pmatrix} x \mathbf{1}_{n \times n} & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit dieser Schreibweise ist natürlich gemeint

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & v_1 & \bar{v}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_n & \bar{v}_n \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \dots & \bar{v}_n & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält dann (analog zu oben) für den Kommutator

$$[D, \pi(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{v}(y-x) \\ 0 & 0 & 0 \\ v^T(x-y) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und dessen Norm

$$\begin{aligned} \|[D, \pi(x, y)]\|^2 &= \|[D, \pi(x, y)]^*[D, \pi(x, y)]\| \\ &= |x-y|^2 \cdot \sum |v_i|^2. \end{aligned}$$

Somit ist also

$$\|[D, \pi(x, y)]\| = |x-y| \cdot |v|,$$

und für den Abstand gilt

$$d(p_1, p_2) = \sup\{|x-y| : \|[D, \pi(x, y)]\| \leq 1\} = \frac{1}{|v|}.$$

Als letztes und allgemeinstes Beispiel (man überlegt sich leicht, dass wirklich der allgemeinste Fall von dieser Form sein muss) für ein spektrales Tripel zur Algebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ betrachten wir

$$q = \begin{pmatrix} k & -l \\ -l & m \end{pmatrix} \quad k, l, m \in \mathbb{N}.$$

Hier sind H , π und D gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21} \oplus H_{22} \\ &\cong \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l \oplus \mathbb{C}^l \oplus \mathbb{C}^m, \end{aligned}$$

$$\pi(x, y) = \begin{pmatrix} x\mathbf{1}_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x\mathbf{1}_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y\mathbf{1}_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y\mathbf{1}_m \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_{11,12} & D_{11,21} & 0 \\ D_{12,11} & 0 & 0 & D_{12,22} \\ D_{21,11} & 0 & 0 & D_{21,22} \\ 0 & D_{22,12} & D_{22,21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der in Satz 2.4.1 auf Seite 31 angesprochenen Symmetrien von D , lässt sich vereinfachend schreiben

$$\begin{aligned} D_{11,12} = \bar{D}_{11,21} = D_{12,11}^* = D_{21,11}^T &=: M : \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^k, \\ D_{12,22} = \bar{D}_{21,22} = D_{22,12}^* = D_{22,21}^T &=: N : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^l, \end{aligned}$$

und man hat dann

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} 0 & M & \bar{M} & 0 \\ M^* & 0 & 0 & N \\ M^T & 0 & 0 & \bar{N} \\ 0 & N^* & N^T & 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow [D, \pi(x, y)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{M}(y-x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N(y-x) \\ M^T(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^*(x-y) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (x-y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N \\ M^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^* & 0 & 0 \end{pmatrix} =: (x-y)R,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|R\|^2 &= \|R^*R\| = \left\| \begin{pmatrix} \bar{M}M^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & NN^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^T\bar{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^*N \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \max\{\|\bar{M}M^T\|, \|NN^*\|, \|M^T\bar{M}\|, \|N^*N\|\}.
 \end{aligned}$$

Es ist aber $\|\bar{M}M^T\| = \|MM^*\|$ (Konjugieren der Einträge ändert die Norm nicht) und außerdem $\|MM^*\| = \|M^*M\|$. Dies ist für nichtquadratische Matrizen nicht selbstverständlich, aber trotzdem richtig: MM^* und M^*M sind selbstadjungierte Matrizen, daher ist die Norm jeweils gleich dem größten Eigenwert. Die Eigenwerte von MM^* und M^*M sind jedoch gleich (wenn auch verschieden entartet), denn: Ist λ ein Eigenwert von MM^* zum Eigenvektor v , so ist M^*v ein Eigenvektor von M^*M zum gleichen Eigenwert λ .

Man erhält also

$$\|R\|^2 = \max\{\|M^*M\|, \|N^*N\|\}$$

und daher

$$\begin{aligned}
 \|[D, \pi(x, y)]\| &= |x-y| \cdot \sqrt{\max(\|M^*M\|, \|N^*N\|)} \\
 \Rightarrow d(p_1, p_2) &= \sup\{|x-y| : \|[D, \pi(x, y)]\| \leq 1\} \\
 &= \left[\max\left(\sqrt{\|M^*M\|}, \sqrt{\|N^*N\|}\right) \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Da es die obigen Beispiele als Spezialfälle enthält, soll dieses Ergebnis nun abschließend als Satz formuliert werden.

Satz 3.3.1 Für

$$A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad q = \begin{pmatrix} k & -l \\ -l & m \end{pmatrix}$$

hat der allgemeinste Diracoperator die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M & \bar{M} & 0 \\ M^* & 0 & 0 & N \\ M^T & 0 & 0 & \bar{N} \\ 0 & N^* & N^T & 0 \end{pmatrix}$$

mit $M : \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^k$, $N : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^l$ und für den Abstand der beiden Zustände auf $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ gilt

$$d(p_1, p_2) = \frac{1}{\max\left(\sqrt{\|M^*M\|}, \sqrt{\|N^*N\|}\right)}.$$

3.4 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

NICHTS IST BEDEUTENDER IN JEDEM ZUSTAND
ALS DIE DAZWISCHENKUNFT EINES DRITTEN.
(GOETHE, "WAHLVERWANDTSCHAFTEN")

Johann-Wolfgang von hat natürlich völlig recht, allein schon wegen der Tatsache, dass es für den 3-Punkt-Raum drei (in der Regel verschiedene) Abstände zu berechnen gibt. Man kann sich hier z.B. die Frage stellen, ob, und wenn ja wie, vorgegebene Dreiecke durch spektrale Tripel beschrieben werden können.

Bevor wir konkrete Beispiele anschauen, sind zwei Bemerkungen angebracht.

Bemerkung 3.4.1 *Es ist keineswegs klar, ob das Axiom der Poincaré Dualität (für unsere Belange also die Invertierbarkeit der Matrix q) zwingend gefordert werden muss, z.B. ist es dann nicht möglich, rechtshändige Neutrinos in die (nichtkommutative) Beschreibung des Standardmodells einzubauen (siehe z.B. [Pas01] für eine Diskussion dieses Punktes). In den folgenden Beispielen werden daher auch Fälle diskutiert, in denen q nicht invertierbar ist. Bei der Algebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ trat dieses Problem nicht auf, da eine geschlossene Behandlung des allgemeinen Falles für q möglich war (siehe Satz 3.3.1).*

Bemerkung 3.4.2 *Um den Rechenaufwand so gering wie möglich zu halten, betrachten wir an dieser Stelle zunächst eine einfache Möglichkeit, um bei gegebenem Diracoperator D den Kommutator $[D, \pi(a)]$ zu berechnen für den Fall, dass die Algebra ein n -Punktraum ist, d.h. $A \cong \mathbb{C}^n$. Wir hatten ja die Blöcke des Diracoperators definiert als*

$$D_{ij,kl} : H_{kl} \rightarrow H_{ij}.$$

Die Darstellung π mischt die Unterräume des Hilbertraums nicht, d.h.

$$\pi(a) : H_{ij} \rightarrow H_{ij}$$

und für $a = a_i$ ist $\pi(a_i)$ gerade Multiplikation mit der Zahl a_i :

$$\pi(a)|_{H_{ij}} = a_i \cdot id_{H_{ij}}$$

(siehe Kapitel 2, Abschnitt 2.3). Setzt man $\pi(a)|_{H_{ij}} = \pi(a)_{ij}$ und betrachtet die Blöcke des Kommutators $[D, \pi(a)]_{ij,kl}$, so gilt

$$\begin{aligned} [D, \pi(a)]_{ij,kl} &= D_{ij,kl} \circ \pi(a)_{kl} - \pi(a)_{ij} \circ D_{ij,kl} \\ &= D_{ij,kl} \cdot (a_k - a_i). \end{aligned}$$

Doch jetzt zu den Rechnungen: Zum "Warmwerden" betrachten wir zunächst

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\det q = -1).$$

Der Diracoperator und die Darstellung der Algebra haben nun die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & \bar{m} & 0 \\ \bar{m} & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k} & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \quad (m, k \in \mathbb{C}),$$

$$\pi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\mathbf{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$$

bezüglich des Hilbertraums $H = H_{11} \oplus H_{13} \oplus H_{23} \oplus H_{31} \oplus H_{32} \cong \mathbb{C}^5$.

Verwendet man nun die Regel aus Bemerkung 3.4.2, so erhält man für den Kommutator

$$[D, \pi(x, y, z)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{m}(z-x) & 0 \\ 0 & 0 & k(y-x) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ m(x-z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und für dessen Norm (beachte: die letzte Zeile und die letzte Spalte mit Nullen kann man in der Norm streichen)

$$\begin{aligned} \|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 &= \|[D, \pi(x, y, z)]^*[D, \pi(x, y, z)]\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} |m|^2|x-z|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |k|^2|x-y|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |k|^2|y-x|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |m|^2|z-x|^2 \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Also

$$\| [D, \pi(x, y, z)] \|^2 = \max(|m|^2|x - z|^2, |k|^2|x - y|^2).$$

Betrachte nun die drei Zustände auf $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} p_1(x, y, z) &= x, \\ p_2(x, y, z) &= y, \\ p_3(x, y, z) &= z. \end{aligned}$$

Für die Abstände erhält man

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \sup\{|x - y| : \| [D, \pi(x, y, z)] \|^2 \leq 1\} = \frac{1}{|k|} \quad (x = z = 0, y = \frac{1}{|k|}), \\ d(p_1, p_3) &= \frac{1}{|m|} \quad (x = y = 0, z = \frac{1}{|m|}), \\ d(p_2, p_3) &= \frac{1}{|m|} + \frac{1}{|k|} \quad (x = 0, y = \frac{1}{|k|}, z = -\frac{1}{|m|}). \end{aligned}$$

Also liegen die drei Punkte auf einer Linie mit Abständen $1/|k|$ und $1/|m|$.

Als nächstes betrachten wir ein Beispiel mit nichtinvertierbarer Schnittform q , bei dem beliebige Dreiecke realisiert werden können (dies ist ein Spezialfall von Proposition 13 in [IKM99], wo gezeigt wird, dass jede Punktmenge der Mächtigkeit n durch ein endliches spektrales Tripel zur Algebra \mathbb{C}^n realisiert werden kann):

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\det q = 0).$$

Hier ist der Hilbertraum 6-dimensional, $H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21} \oplus H_{23} \oplus H_{32} \oplus H_{33}$, und D und π haben die Form

$$\begin{aligned} \pi(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x\mathbf{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & y\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 & z\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & k & \bar{k} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k} & 0 & 0 & 0 & l & 0 \\ k & 0 & 0 & \bar{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 0 & m \\ 0 & \bar{l} & 0 & 0 & 0 & \bar{m} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m} & m & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Des Weiteren berechnet man

$$[D, \pi(x, y, z)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{k}(y-x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l(z-x) & 0 \\ k(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m(z-y) \\ 0 & \bar{l}(x-z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m}(y-z) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$[D, \pi]^* [D, \pi] = \begin{pmatrix} |k|^2|x-y|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |l|^2|x-z|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |k|^2|y-x|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |m|^2|y-z|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |l|^2|z-x|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |m|^2|y-z|^2 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt dann für die Norm des Kommutators

$$\|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 = \max\{|k|^2|x-y|^2, |l|^2|x-z|^2, |m|^2|y-z|^2\}.$$

Um die drei Abstände auszurechnen, betrachte o.B.d.A.

$$|k| \geq |l| \geq |m|. \quad (3.3)$$

Man erhält dann zunächst

$$d(p_1, p_2) = \sup\{|x-y| : \|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 \leq 1\} = \frac{1}{|k|} \quad (x = \frac{1}{|k|}, y = z = 0),$$

$$d(p_1, p_3) = \sup\{|x-z| : \|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 \leq 1\} = \frac{1}{|l|} \quad (x = y = 0, z = \frac{1}{|l|}).$$

Man sieht an dieser Stelle natürlich schon die "Logik" in den Abständen, allerdings erfordert der dritte Abstand eine Fallunterscheidung, die der Dreiecksungleichung Rechnung trägt.

Fall 1:

$$\frac{1}{|m|} > \frac{1}{|l|} + \frac{1}{|k|} \quad (3.4)$$

Hier gilt

$$d(p_2, p_3) = \sup\{|y-z| : \|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 \leq 1\} = \frac{1}{|l|} + \frac{1}{|m|},$$

denn setze $x = 0, y = 1/|k|, z = -1/|l|$.

Fall 2:

$$\frac{1}{|m|} \leq \frac{1}{|l|} + \frac{1}{|k|} \quad (3.5)$$

Hier erhält man

$$d(p_2, p_3) = \frac{1}{|m|}.$$

Denn: Setze $x = 1/|l|$, $y = 1/|m|$, $z = 0$, dann hat man

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \frac{1}{|l|} - \frac{1}{|m|} \right| = \frac{1}{|m|} - \frac{1}{|l|} \quad \text{wegen (3.3)} \\ &\leq \frac{1}{|k|} \quad \text{wegen (3.5),} \\ |x - z| &= \frac{1}{|l|}, \\ |y - z| &= \frac{1}{|m|}, \end{aligned}$$

und somit ist $\max\{|k|^2|x - y|^2, |l|^2|x - z|^2, |m|^2|y - z|^2\} \leq 1$ erfüllt.

Man sieht an diesem Beispiel, dass sich tatsächlich jedes beliebige Dreieck durch ein spectrales Tripel zur Algebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ realisieren lässt (allerdings mit einer entarteten Schnittform). Dass man das gleiche Resultat auch für nichtentartete Schnittformen erreichen kann, soll das folgende Beispiel zeigen. Betrachte hierzu

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cancel{1} \end{pmatrix} (\det q = -1).$$

Der Hilbertraum ist hier 7-dimensional

$$H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21} \oplus H_{22} \oplus H_{23} \oplus H_{32} \oplus H_{33} \cong \mathbb{C}^7$$

und die Darstellung und der Diracoperator bezüglich H haben die Form

$$\begin{aligned} \pi(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x\mathbf{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & y\mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & z\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & k & \bar{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k} & 0 & 0 & l & 0 & m & 0 \\ k & 0 & 0 & \bar{l} & \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l} & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & \bar{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{n} & n & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Kommutator $[D, \pi(x, y, z)]$ erhält man folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{k}(y-x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l(y-x) & 0 & m(z-x) & 0 \\ k(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l}(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n(z-y) \\ 0 & \bar{m}(x-z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{n}(y-z) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und für $[D, \pi(x, y, z)]^*[D, \pi(x, y, z)]$

$$\begin{pmatrix} |k|^2|x-y|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |l|^2|x-y|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +|m|^2|x-z|^2 & |k|^2|y-x|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |l|^2|y-x|^2 & 0 & m\bar{l}(\bar{y}-\bar{x})(z-x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |n|^2|y-z|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l\bar{m}(\bar{z}-\bar{x})(y-x) & 0 & |m|^2|z-x|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |n|^2|z-y|^2 \end{pmatrix}.$$

Um die Norm dieser Matrix zu berechnen, beachte man, dass Vertauschen von Zeilen oder von Spalten durch Multiplikation mit unitären Matrizen von links oder von rechts erreicht werden kann und sich daher die Norm der Matrix nicht ändert. Man kann sie also auf die Form einer "Fast"-Diagonalmatrix bringen, mit einer quadratischen Untermatrix

$$\begin{pmatrix} |l|^2|y-x|^2 & m\bar{l}(\bar{y}-\bar{x})(z-x) \\ l\bar{m}(\bar{z}-\bar{x})(y-x) & |m|^2|z-x|^2 \end{pmatrix},$$

welche (analog zu den Rechnungen oben) das $(|l|^2|y-x|^2 + |m|^2|z-x|^2)$ -fache eines Projektors ist. Die Norm ist also

$$\|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 = \max\{|k|^2|x-y|^2, |n|^2|y-z|^2, |l|^2|x-y|^2 + |m|^2|z-x|^2\}.$$

Für $l = 0$ reduziert sich das Problem auf den schon behandelten Fall bei

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und man erhält für $|k|^2 \geq |m|^2 \geq |n|^2$

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \frac{1}{|k|}, \\ d(p_1, p_3) &= \frac{1}{|m|}, \\ d(p_2, p_3) &= \min\left\{\frac{1}{|k|} + \frac{1}{|m|}, \frac{1}{|n|}\right\}. \end{aligned}$$

Als letztes Beispiel für ein spektrales Tripel zum 3-Punkt-Raum betrachten wir eine nicht-entartete Schnittform und einen 6-dimensionalen Hilbertraum:

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\det q = 1),$$

$$H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{13} \oplus H_{21} \oplus H_{31} \oplus H_{33},$$

$$\pi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\mathbf{1}_3 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z\mathbf{1}_2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & \bar{k} & 0 & 0 \\ \bar{k} & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l} & 0 & 0 & 0 & m \\ k & 0 & 0 & 0 & \bar{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & \bar{m} \\ 0 & 0 & \bar{m} & 0 & m & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow [D, \pi(x, y, z)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{k}(y-x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m(z-x) \\ k(x-y) & 0 & 0 & 0 & \bar{l}(z-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l(y-z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}(x-z) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit den gleichen Methoden wie oben erhält man dann für die Norm des Kommutators

$$\|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 = \max\{|m|^2|x-z|^2, |k|^2|x-y|^2 + |l|^2|z-y|^2\}.$$

Die Abstände zu berechnen ist nun nicht ganz so einfach. Bevor wir diese Aufgabe in Angriff nehmen, soll an dieser Stelle ein sehr nützliches Resultat aus [IKM99] zitiert (und der Vollständigkeit halber auch bewiesen) werden, welches im Folgenden noch des Öfteren verwendet wird:

Satz 3.4.1 *Sei (A, H, D) ein spektrales Tripel, wobei A eine unitale C^* -Algebra ist. π sei die Darstellung von A auf H , ϕ und ψ seien reine Zustände auf A . Für das durch*

$$d(\phi, \psi) := \sup_{a \in A} \{|\phi(a) - \psi(a)| : \|[D, \pi(a)]\| \leq 1\}$$

definierte Abstandsfunktional gilt dann

$$d(\phi, \psi) = \sup_{a \in A_+} \{|\phi(a) - \psi(a)| : \|[D, \pi(a)]\| = 1\},$$

wobei A_+ die Menge der positiven Elemente in A bezeichnet.

BEWEIS: Betrachte zunächst

$$\sup_{a \in A} \{ |\phi(a) - \psi(a)| : \|[D, \pi(a)]\| \leq 1 \}.$$

Wir nehmen an, das Supremum werde erreicht an der Stelle $a_0 \in A$ (wenn das Supremum nicht angenommen wird, argumentiert man mit einer Folge (a_n) von Elementen in A). Dann liefert auch das selbstadjungierte Element

$$b_0 := \frac{1}{2}(a_0 e^{-i\theta} + a_0^* e^{i\theta})$$

mit $\theta = \arg(\phi(a_0) - \psi(a_0))$ das Supremum, denn

$$\begin{aligned} |\phi(b_0) - \psi(b_0)| &= \left| \phi\left(\frac{a_0}{2}e^{-i\theta} + \frac{a_0^*}{2}e^{i\theta}\right) - \psi\left(\frac{a_0}{2}e^{-i\theta} + \frac{a_0^*}{2}e^{i\theta}\right) \right| \\ &= \left| \frac{e^{-i\theta}}{2}(\phi(a_0) - \psi(a_0)) + \frac{e^{i\theta}}{2}(\phi(a_0^*) - \psi(a_0^*)) \right| \\ &= \left| \frac{e^{-i\theta}}{2}(\phi(a_0) - \psi(a_0)) + \overline{\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}(\phi(a_0) - \psi(a_0))\right)} \right| \end{aligned}$$

(beachte $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$, [BR87] Prop. 2.3.11). Es ist aber nach Definition von θ :

$$\begin{aligned} \phi(a_0) - \psi(a_0) &= |\phi(a_0) - \psi(a_0)| e^{i\theta} \\ \Rightarrow |\phi(a_0) - \psi(a_0)| &= \frac{(\phi(a_0) - \psi(a_0)) e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}} \\ &= \overline{(\phi(a_0) - \psi(a_0)) e^{-i\theta}} \end{aligned}$$

und somit ist

$$|\phi(b_0) - \psi(b_0)| = |\phi(a_0) - \psi(a_0)|.$$

Des Weiteren gilt (mit $a_0 \equiv \pi(a_0)$)

$$\begin{aligned} \|[D, b_0]\| &= \left\| \left[D, \frac{a_0}{2}e^{-i\theta} + \frac{a_0^*}{2}e^{i\theta} \right] \right\| \\ &\leq \left\| \left[D, \frac{a_0}{2}e^{-i\theta} \right] \right\| + \left\| \left[D, \frac{a_0^*}{2}e^{i\theta} \right] \right\| \\ &= \|[D, a_0]\|. \end{aligned}$$

Setze nun

$$c_0 := b_0 + \|b_0\|e.$$

Dieses c_0 ist positiv, denn sei $\lambda \in \sigma(c_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_0 + \|b_0\|e - \lambda e &\text{ nicht invertierbar} \\ \Rightarrow \|b_0\| - \lambda &\in \sigma(b_0). \end{aligned}$$

Das Spektrum eines selbstadjungierten Elements b_0 liegt in dem Intervall $[-\|b_0\|, \|b_0\|]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\|b_0\| &\leq \|b_0\| - \lambda \leq \|b_0\| \\ \Rightarrow \|b_0\| &\geq \lambda - \|b_0\| \geq -\|b_0\| \\ \Rightarrow 2\|b_0\| &\geq \lambda \geq 0 \\ \Rightarrow c_0 &\in A_+ \end{aligned}$$

und c_0 erfüllt

$$\begin{aligned} |\phi(c_0) - \psi(c_0)| &= |\phi(b_0 + \|b_0\|e) - \psi(b_0 + \|b_0\|e)| \\ &= |\phi(b_0) + \|b_0\| - \psi(b_0) - \|b_0\|| \\ &= |\phi(b_0) - \psi(b_0)| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|[D, c_0]\| &= \|[D, b_0 + \|b_0\|e]\| \\ &= \|[D, b_0] + \|b_0\| \underbrace{[D, \pi(e)]}_{=0}\|. \end{aligned}$$

Damit ist also gezeigt, dass es im Supremum genügt, die positiven Elemente der Algebra zu betrachten. Dass das Supremum für $\|[D, c_0]\| = 1$ angenommen wird, sieht man folgendermaßen:

Angenommen das Supremum sei bei c_0 mit $\|[D, c_0]\| < 1$. Setze

$$c := \frac{c_0}{\|[D, c_0]\|}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|[D, c]\| &= 1 \\ \text{und } |\phi(c) - \psi(c)| &= \frac{1}{\underbrace{\|[D, c_0]\|}_{>1}} |\phi(c_0) - \psi(c_0)| \\ &> |\phi(c_0) - \psi(c_0)| \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme, das Supremum sei bei c_0 . □

Jetzt betrachten wir die Abstände im spektralen Tripel zu

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie schon berechnet gilt für die Norm des Kommutators

$$\|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 = \max\{|m|^2|x - z|^2, |k|^2|x - y|^2 + |l|^2|z - y|^2\}.$$

Setze

$$a := |m|^2, b := |k|^2, c := |l|^2$$

und betrachte zunächst den Fall $a \geq b \geq c > 0$. Verwendet man Satz 3.4.1, so gilt (mit $x \equiv p_1, y \equiv p_2$)

$$d(x, y) = \sup_{x, y, z \in \mathbb{R}^+} \{|x - y| : a(x - z)^2 \leq 1, b(x - y)^2 + c(z - y)^2 \leq 1\}.$$

Aus $b|x - y|^2 + c|z - y|^2 \leq 1$ folgt sofort $|x - y| \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$. Kann nun $\frac{1}{\sqrt{b}}$ erreicht werden?

Wäre $|x - y| = \frac{1}{\sqrt{b}}$, dann würde wegen der zweiten Randbedingung $y = z$ gelten und somit wäre dann $a(x - z)^2 = a(x - y)^2 = \frac{a}{b}$. Es ist aber nach Vor. $a \geq b \iff \frac{a}{b} \geq 1$ und somit gilt

$$d(x, y) = \frac{1}{\sqrt{b}} \iff a = b.$$

Man kann nun auch das äquivalente Problem betrachten

$$d^2(x, y) = \sup_{x, y, z \in \mathbb{R}^+} \{(x - y)^2 : a(x - z)^2 \leq 1, b(x - y)^2 + c(z - y)^2 \leq 1\}.$$

Setze

$$\left. \begin{array}{l} \delta := x - y \\ \Delta := x - z \end{array} \right\} \Rightarrow \delta - \Delta = z - y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d^2 &= \sup_{\delta, \Delta \in \mathbb{R}} \{\delta^2 : a\Delta^2 \leq 1, b\delta^2 + c(\delta - \Delta)^2 \leq 1\} \\ &= \sup_{\delta, \Delta \in \mathbb{R}} \underbrace{\{\delta^2 : a\Delta^2 \leq 1\}}_{(1)} \underbrace{\{b\delta^2 + c(\delta - \Delta)^2 = 1\}}_{(2)}, \end{aligned}$$

denn das Supremum wird sicher angenommen für $b\delta^2 + c(\delta - \Delta)^2 = 1$. Man kann sich des Weiteren auf $\Delta \geq 0$ beschränken, denn angenommen, das Supremum

$$\sup_{\delta, \Delta \in \mathbb{R}} \{\delta^2 : a\Delta^2 \leq 1, b\delta^2 + c(\delta - \Delta)^2 = 1\}$$

werde erreicht für ein $\Delta < 0$ und für ein δ . Setze $\Delta' = -\Delta, \delta' = -\delta$, dann erfüllen die gestrichenen Größen ebenfalls die Randbedingungen und liefern das gleiche Supremum. Also betrachte nur den Fall $\Delta \geq 0$. (2) auflösen liefert

$$\begin{aligned} b\delta^2 + c\delta^2 - 2c\delta\Delta + c\Delta^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \delta^2(b + c) - 2c\delta\Delta + c\Delta^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \delta^2 - 2\delta\frac{c\Delta}{b + c} + \frac{c\Delta^2 - 1}{b + c} &= 0 \\ \Rightarrow \delta_{1/2} &= \frac{c\Delta}{b + c} \pm \sqrt{\frac{c^2\Delta^2}{(b + c)^2} - \frac{c\Delta^2 - 1}{b + c}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \text{ reell} &\Rightarrow \frac{c^2\Delta^2}{(b+c)^2} \geq \frac{c\Delta^2 - 1}{b+c} \\
&\Rightarrow c^2\Delta^2 \geq (c\Delta^2 - 1)(b+c) = bc\Delta^2 + c^2\Delta^2 - b - c \\
&\Rightarrow 0 \geq bc\Delta^2 - b - c \\
&\Rightarrow \Delta^2 \leq \frac{b+c}{bc}.
\end{aligned}$$

Wir haben also zwei Beschränkungen an Δ : $\Delta \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ und $\Delta \leq \sqrt{\frac{b+c}{bc}}$. Es ist aber wegen $a \geq b$

$$\begin{aligned}
a \geq b &\Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \\
&\Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \leq \sqrt{\frac{b+c}{bc}}.
\end{aligned}$$

Damit ist also $\Delta \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ die stärkere Bedingung. Wegen $|\delta_1| \geq |\delta_2|$ genügt es, nur $\delta_1 =: \delta$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{c\Delta}{b+c} + \sqrt{\frac{c^2\Delta^2}{(b+c)^2} - \frac{c\Delta^2 - 1}{b+c}} \\
\Rightarrow \delta(b+c) &= c\Delta + \sqrt{b+c - bc\Delta^2}.
\end{aligned}$$

Um das Maximum von δ zu bestimmen, berechnen wir das Maximum von $\delta(b+c)$ als Funktion von Δ unter der Randbedingung $0 \leq \Delta \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$:

$$\begin{aligned}
f(\Delta) &= c\Delta + \sqrt{b+c - bc\Delta^2}, \\
f'(\Delta) &= c - \frac{bc\Delta}{\sqrt{b+c - bc\Delta^2}}.
\end{aligned}$$

Der Ansatz $f'(\Delta) = 0$ liefert als Lösung $\Delta = \pm \frac{1}{\sqrt{b}}$. Die negative Lösung entfällt wegen der Randbedingung. Des Weiteren gilt aber wegen $a \geq b$, dass $\frac{1}{\sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$, d.h. nur für $a = b$ ist die Lösung mit der Randbedingung verträglich. Das Maximum der Funktion f liegt daher auf dem Rand des Intervalls $[0, \frac{1}{\sqrt{a}}]$. Berechnet man die beiden zugehörigen Werte von δ , so erhält man

$$\begin{aligned}
\delta(\Delta = 0) &= \frac{1}{\sqrt{b+c}}, \\
\delta(\Delta = \frac{1}{\sqrt{a}}) &= \frac{c}{\sqrt{a}(b+c)} + \sqrt{\frac{c^2}{a(b+c)^2} - \frac{c}{a(b+c)} + \frac{1}{b+c}}.
\end{aligned}$$

Setze

$$s_1 := (\delta(\Delta = 0))^2, \quad s_2 := (\delta(\Delta = \frac{1}{\sqrt{a}}))^2.$$

Daher ist (nach einigen Rechenschritten zur Vereinfachung)

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{b+c}, \\ s_2 &= \frac{2c^2}{a(b+c)^2} - \frac{c}{a(b+c)} + \frac{1}{b+c} + \frac{2c}{\sqrt{a}(b+c)} \sqrt{\frac{c^2}{a(b+c)^2} - \frac{c}{a(b+c)} + \frac{1}{b+c}} \\ &= \frac{(c + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2}. \end{aligned}$$

Nun gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} s_2 \geq s_1 &\iff \frac{(c + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2} \geq \frac{1}{b+c} \\ &\iff (c + \sqrt{ab + ac - bc})^2 \geq a(b+c) \\ &\iff c^2 - bc + 2c\sqrt{ab + ac - bc} \geq 0 \\ &\iff 2\sqrt{ab + ac - bc} \geq b - c \\ &\iff 4(ab + ac - bc) \geq (b - c)^2 \\ &\iff 4ab + 4ac \geq b^2 + 2bc + c^2 = (b+c)^2 \\ &\iff 4a \geq b+c. \end{aligned}$$

Dies ist wegen $a \geq b$ jedoch immer erfüllt, somit ist das Maximum für δ^2

$$\delta_{max}^2 = \frac{(c + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2}.$$

Man kann problemlos verifizieren, dass auch für $c = 0$ das Ergebnis korrekt bleibt (vorausgesetzt, dass a und b ungleich Null sind), also erhält man als Endergebnis für den ersten Abstand

$$d^2(x, y) = \frac{(c + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2} \quad \text{falls } a \geq b \geq c \geq 0; a, b \neq 0.$$

Weiter mit den anderen beiden Abständen:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sup\{|x - z| : a|x - z|^2 \leq 1, b|x - y|^2 + c|z - y|^2 \leq 1\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (x = \frac{1}{\sqrt{a}}, y = z = 0). \end{aligned}$$

(Dies gilt auch für $c = 0$ oder $b = 0$.)

Der Abstand $d(y, z)$ führt zu den gleichen Problemen, wie der Abstand $d(x, y)$, und lässt sich auch mit genau der gleichen Methode lösen:

$$d^2(y, z) = \frac{(b + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2}$$

(gilt auch für $c = 0$).

Als nächstes wollen wir den Fall $b > a \geq c > 0$ untersuchen. Hier haben wir

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \sup\{(x - y)^2 : a(x - z)^2 \leq 1, b(x - y)^2 + c(z - y)^2 \leq 1\} \\ &= \frac{1}{b} \quad (x = \frac{1}{\sqrt{b}}, y = 0, z = 0), \\ d^2(x, z) &= \sup\{(x - z)^2 : a(x - z)^2 \leq 1, b(x - y)^2 + c(z - y)^2 \leq 1\} \\ &= \frac{1}{a} \quad (z = \frac{1}{\sqrt{a}}, y = 0, x = 0), \end{aligned}$$

welche auch für $c = 0$ erfüllt sind. Für $d^2(y, z) = \sup(y - z)^2$ gilt nun folgende Überlegung (analog zu oben):

Wäre $d^2(y, z) = \frac{1}{c}$, so könnte die Randbedingung nur mit $x = y$ erfüllt werden. Dann wäre aber andererseits $a(x - z)^2 = a(y - z)^2 = \frac{a}{c}$. Dies ist für $a > c$ aber größer als 1 und liefert einen Widerspruch zur Randbedingung. Also

$$d^2(y, z) = \frac{1}{c} \iff a = c.$$

Betrachte also den Fall $a > c$, d.h. $b > a > c > 0$. Setze

$$\left. \begin{aligned} \delta &:= y - z \\ \Delta &:= x - z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta - \Delta = y - x$$

und berechne

$$\begin{aligned} d^2(y, z) &= \sup\{(y - z)^2 : a(x - z)^2 \leq 1, b(x - y)^2 + c(y - z)^2 \leq 1\} \\ &= \sup\{\delta^2 : a\Delta^2 \leq 1, b(\delta - \Delta)^2 + c\delta^2 \leq 1\} \\ &= \sup\{\delta^2 : \underbrace{a\Delta^2 \leq 1}_{(1)}, \underbrace{b(\delta - \Delta)^2 + c\delta^2 = 1}_{(2)}\}. \end{aligned}$$

Es genügt wieder der Fall $\Delta \geq 0$.

(2) auflösen liefert

$$\delta_{1/2} = \frac{b\Delta}{b+c} \pm \sqrt{\frac{b^2\Delta^2}{(b+c)^2} - \frac{b\Delta^2 - 1}{b+c}}.$$

$$\begin{aligned} \delta \text{ reell} &\iff \frac{b^2\Delta^2}{(b+c)^2} \geq \frac{b\Delta^2 - 1}{b+c} \\ &\iff b^2\Delta^2 \geq (b\Delta^2 - 1)(b+c) \\ &\iff 0 \geq bc\Delta^2 - b - c \\ &\iff \Delta^2 \leq \frac{b+c}{bc}. \end{aligned}$$

Es ist jedoch $\Delta^2 \leq \frac{1}{a}$ die stärkere Bedingung, denn

$$\begin{aligned} c < a &\Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{a} \\ &\Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \\ &\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{b+c}{bc}. \end{aligned}$$

Also lautet unsere Randbedingung $0 \leq \Delta \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$. Es ist $\delta_1 \geq \delta_2$, setze also

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{b\Delta}{b+c} + \sqrt{\frac{b^2\Delta^2}{(b+c)^2} - \frac{b\Delta^2 - 1}{b+c}} \\ \Rightarrow \delta(b+c) &= b\Delta + \sqrt{b^2\Delta^2 - (b\Delta^2 - 1)(b+c)} \\ &= b\Delta + \sqrt{b+c - bc\Delta^2} =: f(\Delta). \\ f'(\Delta) &= b - \frac{bc\Delta}{\sqrt{b+c - bc\Delta^2}} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \Delta^2 &= \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$ ist dies keine Lösung, die mit der Randbedingung verträglich ist, also liegt das Maximum von δ auf dem Rand des Intervalls $[0, \frac{1}{\sqrt{a}}]$.

$$\begin{aligned} \delta(\Delta = 0) &= \frac{1}{\sqrt{b+c}}, \\ \delta(\Delta = \frac{1}{\sqrt{a}}) &= \frac{b}{\sqrt{a}(b+c)} + \sqrt{\frac{b^2}{a(b+c)^2} - \frac{b}{a(b+c)} + \frac{1}{b+c}}. \end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned} s_1 &:= (\delta(\Delta = 0))^2 = \frac{1}{b+c}, \\ s_2 &:= (\delta(\Delta = \frac{1}{\sqrt{a}}))^2 \\ &= \frac{2b^2}{a(b+c)^2} - \frac{b}{a(b+c)} + \frac{1}{b+c} + \frac{2b}{a(b+c)^2} \sqrt{ab+ac-bc}, \end{aligned}$$

dann gilt (nach elementaren Umformungen)

$$s_2 \geq s_1 \iff b - c + 2\sqrt{ab+ac-bc} \geq 0.$$

Dies ist aber nach Vor. erfüllt (wegen $b \geq c$) und man erhält für δ_{max}

$$\delta_{max}^2 = \frac{(b + \sqrt{ab+ac-bc})^2}{a(b+c)^2}.$$

Insgesamt also

$$d^2(y, z) = \frac{(b + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b + c)^2} \quad \text{falls } b > a > c > 0,$$

was auch für die Fälle $c = 0$ und $a = c > 0$ richtig ist.

Als letzter relevanter Fall bleibt $b \geq c \geq a > 0$ zu betrachten. Die Randbedingung ist wieder

$$RB : \quad a(x - z)^2 \leq 1, b(x - y)^2 + c(z - y)^2 \leq 1.$$

Dann erhält man zunächst

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \sup\{(x - y)^2 : RB\} \\ &= \frac{1}{b} \quad (x = \frac{1}{\sqrt{b}}, y = z = 0), \\ d^2(y, z) &= \sup\{(y - z)^2 : RB\} \\ &= \frac{1}{c} \quad (z = \frac{1}{\sqrt{c}}, x = y = 0). \end{aligned}$$

(Beide Abstände gelten auch für $a = 0$, falls $b, c \neq 0$.) Der dritte Abstand erfordert wieder "Sonderbehandlung" ähnlich der obigen. Setze

$$\left. \begin{aligned} \delta &:= x - z \\ \Delta &:= x - y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta - \Delta = y - z.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d^2(x, z) &= \sup\{(x - z)^2 : RB\} \\ &= \sup\{\delta^2 : \underbrace{a\delta^2 \leq 1}_{(1)}, \underbrace{b\Delta^2 + c(\delta - \Delta)^2 \leq 1}_{(2)}\}. \end{aligned}$$

Unter welchen Bedingungen kann man $a\delta^2 = 1$ erreichen?

$$\begin{aligned} a\delta^2 = 1 &\Rightarrow \delta = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{o.B.d.A.} \quad \delta = +\frac{1}{\sqrt{a}}, \\ \text{einsetzen in (2)} &\Rightarrow b\Delta^2 + c\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \Delta\right)^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta \frac{c}{(b+c)\sqrt{a}} + \frac{c-a}{a(b+c)} \leq 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\Delta^2 - 2\Delta \frac{c}{(b+c)\sqrt{a}} + \frac{c-a}{a(b+c)} = 0$$

muss eine reelle Lösung Δ besitzen, dies liefert Bedingungen an a, b, c :

$$\Delta_{1/2} = \frac{c}{(b+c)\sqrt{a}} \pm \sqrt{\frac{c^2}{a(b+c)^2} - \frac{c-a}{a(b+c)}},$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ reell} &\iff \frac{c^2}{a(b+c)^2} \geq \frac{c-a}{a(b+c)} \\ &\iff \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Dementsprechend ist für $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$ also

$$d(x, z) = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Betrachte nun $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Hier gilt im Supremum

$$\begin{aligned} a\delta^2 &< 1, \\ b\Delta^2 + c(\delta - \Delta)^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Man kann sich nun leicht überlegen, dass das Sup. für

$$b\Delta^2 + c(\delta - \Delta)^2 = 1 \tag{3.6}$$

erreicht wird und dass man sich auf $\Delta \geq 0$ beschränken kann. Auflösen von (3.6) nach δ liefert

$$\delta_{1/2} = \Delta \pm \sqrt{\frac{1 - b\Delta^2}{c}}.$$

Aus der Forderung, dass δ reell sein muss, erhält man zunächst $\Delta \in [0, \frac{1}{\sqrt{b}}]$. Des Weiteren (wegen $\delta_1 \geq \delta_2$) betrachten wir

$$\begin{aligned} \delta = f(\Delta) &= \Delta + \sqrt{\frac{1 - b\Delta^2}{c}}, \\ f'(\Delta) &= 1 - \frac{b\Delta}{c\sqrt{\frac{1 - b\Delta^2}{c}}} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \Delta^2 &= \frac{c}{b(b+c)}. \end{aligned}$$

Dieses Δ liegt in dem Intervall $[0, \frac{1}{\sqrt{b}}]$, denn wegen $c \leq c+b$ gilt $\frac{c}{b+c} \leq 1$ und somit natürlich $\frac{c}{b(b+c)} \leq \frac{1}{b}$. Daher ist $\Delta = \sqrt{\frac{c}{b(b+c)}}$ Extremalstelle und der Wert von δ an dieser Stelle ist

$$\begin{aligned} \delta(\Delta = \sqrt{\frac{c}{b(b+c)}}) &= \sqrt{\frac{c}{b(b+c)}} + \sqrt{\frac{1 - b\frac{c}{b(b+c)}}{c}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \sqrt{\frac{b+c}{bc}}. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass dieser Wert größer ist, als die Werte von δ auf dem Rand des Intervalls $[0, \frac{1}{\sqrt{b}}]$ und man erhält somit

$$d(x, z) = \sqrt{\frac{b+c}{bc}} \quad \text{für} \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Für $a = 0$, d.h. $\frac{1}{a} = \infty$, erhält man das gleiche Ergebnis. Wir fassen nun das Endergebnis dieser doch etwas länglichen Rechnung zusammen:

Satz 3.4.2 *Für ein spektrales Tripel zu*

$$A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat der Diracoperator die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & \bar{k} & 0 & 0 \\ \bar{k} & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l} & 0 & 0 & 0 & m \\ k & 0 & 0 & 0 & \bar{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & \bar{m} \\ 0 & 0 & \bar{m} & 0 & m & 0 \end{pmatrix},$$

und für die Norm des Kommutators $[D, \pi(x, y, z)]$ gilt

$$\|[D, \pi(x, y, z)]\|^2 = \max\{|m|^2|x-z|^2, |k|^2|x-y|^2 + |l|^2|z-y|^2\}.$$

Setzt man

$$a := |m|^2, \quad b := |k|^2, \quad c := |l|^2,$$

so sind die drei Abstände in Abhängigkeit von a, b, c folgendermaßen gegeben:
Für $a \geq b \geq c \geq 0$; $a, b \neq 0$:

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \frac{(c + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2}, \\ d^2(x, z) &= \frac{1}{a}, \\ d^2(y, z) &= \frac{(b + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2}. \end{aligned}$$

Für $b \geq a \geq c \geq 0$; $a, b \neq 0$:

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \frac{1}{b}, \\ d^2(x, z) &= \frac{1}{a}, \\ d^2(y, z) &= \frac{(b + \sqrt{ab + ac - bc})^2}{a(b+c)^2}. \end{aligned}$$

Für $b \geq c \geq a \geq 0; b, c \neq 0$:

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \frac{1}{b}, \\ d^2(x, z) &= \frac{1}{c}, \\ d^2(y, z) &= \min\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right\}. \end{aligned}$$

Die übrigen drei Fälle ($a \geq c \geq b \geq 0, c \geq a \geq b \geq 0, c \geq b \geq a \geq 0$) erhält man aus den behandelten durch Vertauschen der Rollen von b und c , dies entspricht im Ergebnis einem Vertauschen der Abstände $d(x, y)$ und $d(y, z)$, zum Beispiel

$$d(x, y)|_{a \geq c \geq b} = d(y, z)|_{a \geq b \geq c}.$$

$d(x, z)$ ist immer invariant unter der Vertauschung von b und c .

3.5 $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$

Besonders interessant werden nun "echte" nichtkommutative Algebren, da man hier trotz endlichdimensionaler Algebren einen Zustandsraum erhält, der unendlich viele Punkte enthält (siehe die Diskussion am Anfang des Kapitels). Wir betrachten als erstes Beispiel den Fall

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung der Algebra ist hier (für $(\lambda, z) \in M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$) gegeben durch

$$\pi(\lambda, z) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & z\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 & z\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$$

bezüglich $H = H_{12} \oplus H_{21} \oplus H_{22} \cong \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$. Der Diracoperator hat die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & \bar{M} \\ M^* & M^T & 0 \end{pmatrix} \quad (M \in M_2(\mathbb{C})).$$

Man erhält somit für den Kommutator

$$[D, \pi(\lambda, z)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (z - \lambda)M \\ 0 & 0 & 0 \\ M^*(\lambda - z) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und dessen Norm

$$\|[D, \pi(\lambda, z)]\| = \max\{\|(z - \lambda)M\|, \|M^*(\lambda - z)\|\}. \quad (3.7)$$

Der Abstand Punkt-Sphäre

Was hier gemeint ist, ist der Abstand $d(p, \vec{\zeta})$ zwischen dem reinen Zustand p auf \mathbb{C} (aufgefasst als ‘‘Punkt’’) und den reinen Zuständen auf $M_2(\mathbb{C})$ (aufgefasst als ‘‘Sphäre’’, was von der Tatsache herrührt, dass ein Isomorphismus $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ existiert). Gemäß Satz 3.4.1 von S. 76 gilt für den Abstand

$$\begin{aligned} d(p, \vec{\zeta}) &= \sup_{a \in A} \{|p(a) - \vec{\zeta}(a)| : \|[D, \pi(a)]\| \leq 1\} \\ &= \sup_{a \in A_+} \{|p(a) - \vec{\zeta}(a)| : \|[D, \pi(a)]\| = 1\}. \end{aligned}$$

Die positiven Elemente von $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ sind von der Form (λ, z) , wobei λ eine positive Matrix in $M_2(\mathbb{C})$ ist und z eine reelle nichtnegative Zahl. Für solche Elemente ist natürlich $z - \lambda$ selbstadjungiert und es gilt daher wegen Formel (3.7)

$$\|[D, \pi(\lambda, z)]\| = \|(z - \lambda)M\|.$$

Somit erhält man für den Abstand zunächst

$$\begin{aligned} d(p, \vec{\zeta}) &= \sup_{(\lambda, z) \in A_+} \{|z - \vec{\zeta}^* \lambda \vec{\zeta}| : \|(z - \lambda)M\| = 1\} \\ &= \sup_{(\lambda, z) \in A_+} \{|\vec{\zeta}^*(z - \lambda)\vec{\zeta}| : \|(z - \lambda)M\| = 1\} \\ &= \sup_{x=x^* \in M_2(\mathbb{C})} \{|\vec{\zeta}^* x \vec{\zeta}| : \|xM\| = 1\}. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Tatsache, dass sich jedes selbstadjungierte Element x einer unitalen C^* -Algebra schreiben lässt als $x = c - \mu e$ mit c positiv und $\mu \in \mathbb{R}$ nichtnegativ. Siehe hierzu den Beweis von Satz 3.4.1, S. 76, wo gezeigt wird, dass für selbstadjungiertes b_0 das Element $c_0 := b_0 + \|b_0\|e$ positiv ist.

Man kann nun M mit einer biunitären Transformation diagonalisieren, so dass $M = U\hat{M}V$. U und V sind hierbei unitäre Matrizen und \hat{M} ist eine Diagonalmatrix mit den charakteristischen Werten von M auf der Diagonalen. Verwendet man nun die Tatsache, dass $\|UA\| = \|A\| = \|AU\|$ für alle unitären Matrizen U gilt, so erhält man

$$\begin{aligned} d(p, \vec{\zeta}) &= \sup_{x=x^*} \{|\vec{\zeta}^* x \vec{\zeta}| : \|xU\hat{M}V\| = \|xU\hat{M}\| = 1\} \\ &= \sup_{x=x^*} \{|\vec{\zeta}^* x \vec{\zeta}| : \|U^* x U \hat{M}\| = 1\} \\ &= \sup_{y=y^*} \{|\vec{\zeta}^* U y U^* \vec{\zeta}| : \|y\hat{M}\| = 1\}. \end{aligned}$$

Die Substitution $\vec{\xi} := U^* \vec{\zeta}$ liefert

$$\begin{aligned} d(p, U\vec{\xi}) &= \sup_{y=y^*} \{ |\vec{\xi}^* y \vec{\xi}| : \|y \hat{M}\| = 1 \} \\ &= \sup_{y=y^*} \{ |\langle \xi, y \xi \rangle| : \|\hat{M}y\| = 1 \}. \end{aligned}$$

Betrachtet man zunächst den Fall einer singulären Matrix M , so hat \hat{M} o.B.d.A. die Form

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für

$$y = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$\|\hat{M}y\|^2 = m^2(a^2 + |b|^2).$$

Setzt man

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\langle \xi, y \xi \rangle = a|z_1|^2 + d|z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(b\bar{z}_1 z_2).$$

Ist $z_2 \neq 0$, so ist

$$d(p, U\vec{\xi}) = \infty,$$

weil die Randbedingung keine Einschränkung an den Koeffizienten von $|z_2|^2$ liefert. Es bleibt also nur noch $z_2 = 0$ (und damit $z_1 = 1$) zu betrachten, was sich jedoch einfach lösen lässt:

$$d(p, U\vec{\xi}) = \sup\{|a| : m^2(a^2 + |b|^2) = 1\} = \frac{1}{m}.$$

Weiter nun mit dem Fall einer invertierbaren Matrix M . Für

$$d(p, U\vec{\xi}) = \sup_{y=y^*} \{ |\langle \xi, y \xi \rangle| : \|\hat{M}y\| = 1 \}$$

könnte man "raten", dass das Supremum für $y = \hat{M}^{-1}$ erreicht wird, und tatsächlich lässt sich dies auch durch elementaren Differentialkalkül beweisen, aber diese Rechnung ist ziemlich schwierig und auch nicht sehr instruktiv. Stattdessen soll an dieser Stelle ein elegantes Argument (die Idee hierzu stammt von Mario Paschke und Tomas Kopf) für die Vermutung gegeben werden. Beachte zunächst, dass \hat{M} (und auch \hat{M}^{-1}) positive Operatoren auf \mathbb{C}^2 sind. Nun verwenden wir folgendes Lemma:

Lemma 3.5.1 Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein beliebiger Hilbertraum, A sei ein positiver, invertierbarer (beschränkter) Operator auf H . Wir definieren

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Dies ist ein positiv definites nichtentartetes Skalarprodukt. Dann gilt für jeden Operator B auf H mit den Eigenschaften

i) $\|B\| = 1$ (Norm bezüglich des ursprünglichen Skalarprodukts)

ii) $\langle x, By \rangle_A = \langle Bx, y \rangle_A$

und jedes $x \in H$ die Relation

$$\begin{aligned} \langle x, Bx \rangle_A &\leq \langle x, x \rangle_A. \\ (\iff \langle Ax, Bx \rangle &\leq \langle Ax, x \rangle.) \end{aligned} \quad (3.8)$$

BEWEIS: Aus ii) (d.h. der Selbstadjungiertheit von B bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$) folgt, dass eine Basis $|\beta\rangle \in H$ existiert mit

$$B|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle.$$

Beachte jedoch, dass im Allgemeinen

$$\langle \beta, \beta' \rangle \neq \delta_{\beta\beta'} \quad (3.9)$$

gilt, aber

$$\langle \beta, \beta' \rangle_A = \delta_{\beta\beta'}. \quad (3.10)$$

Wegen i) ist jedoch klar, dass

$$|\langle \beta, B\beta \rangle| \leq |\langle \beta, \beta \rangle| \quad \forall \beta. \quad (3.11)$$

Dies impliziert

$$|\beta| \leq 1. \quad (3.12)$$

Setzt man nun

$$x = \sum_{\beta} c_{\beta} |\beta\rangle, \quad (3.13)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \langle x, Bx \rangle_A &= |\langle x, Bx \rangle_A| = \left| \sum_{\beta, \beta'} \bar{c}_{\beta} c_{\beta'} \underbrace{\langle \beta, B\beta' \rangle_A}_{=\beta' \delta_{\beta\beta'}} \right| = \left| \sum_{\beta} |c_{\beta}|^2 \beta \right| \\ &\leq \sum_{\beta} |c_{\beta}|^2 |\beta| \leq \sum_{\beta} |c_{\beta}|^2 = \sum_{\beta, \beta'} \bar{c}_{\beta} c_{\beta'} \delta_{\beta\beta'} = \sum_{\beta, \beta'} \bar{c}_{\beta} c_{\beta'} \langle \beta, \beta' \rangle_A \\ &= \langle x, x \rangle_A \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. \square

Wir wenden nun das Lemma auf unser vorliegendes Problem an:

$$\begin{aligned}
d(p, U\vec{\xi}) &= \sup_{y=y^*} \{ |\langle \xi, y\xi \rangle| : \|\hat{M}y\| = 1 \} \\
&= \sup \{ |\langle \xi, \hat{M}^{-1}x\xi \rangle| : \|x\| = 1, \hat{M}^{-1}x \text{ s.a.} \} \\
&= \sup \{ |\langle \hat{M}^{-1}\xi, x\xi \rangle| : \|x\| = 1, \hat{M}^{-1}x \text{ s.a.} \} \\
&= \sup \{ |\langle \xi, x\xi \rangle_{\hat{M}^{-1}}| : \|x\| = 1, \hat{M}^{-1}x \text{ s.a.} \}.
\end{aligned}$$

Beachte nun zwei Dinge:

1. $\hat{M}^{-1}x$ s.a. heißt s.a. bezüglich des ursprünglichen Skalarprodukts.
2. Dies impliziert, dass x selbstadjungiert bezüglich des “neuen” Skalarprodukts ist:

$$\begin{aligned}
\forall v, w \in H : \langle v, xw \rangle_{\hat{M}^{-1}} &= \langle \hat{M}^{-1}v, xw \rangle = \langle v, \hat{M}^{-1}xw \rangle \\
&= \langle \hat{M}^{-1}xv, w \rangle = \langle xv, w \rangle_{\hat{M}^{-1}}.
\end{aligned}$$

Daher sind die Voraussetzungen von Lemma 3.5.1 erfüllt und man erhält

$$\langle \xi, x\xi \rangle_{\hat{M}^{-1}} \leq \langle \xi, \xi \rangle_{\hat{M}^{-1}} = \langle \hat{M}^{-1}\xi, \xi \rangle. \quad (3.14)$$

Dies bestätigt unsere “Vermutung”, dass $d(p, U\xi) = |\langle \xi, \hat{M}^{-1}\xi \rangle|$ oder nach Resubstitution

$$d(p, \zeta) = |\langle U^*\zeta, \hat{M}^{-1}U^*\zeta \rangle|. \quad (3.15)$$

Der Abstand zwischen Punkten auf der Sphäre

Leider ist es uns bisher nicht gelungen, einen geschlossenen Ausdruck für den Abstand zweier Zustände $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ der Form

$$\begin{aligned}
\vec{\xi}_i : M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\
(\lambda, z) &\mapsto \vec{\xi}_i^* \lambda \vec{\xi}_i = \langle \xi_i, \lambda \xi_i \rangle
\end{aligned}$$

($i = 1, 2$) anzugeben. Stattdessen sollen an dieser Stelle aber einige Symmetrieeigenschaften der Metrik untersucht werden. Hierzu betrachten wir den anfangs (Seite 88 zu Beginn des Abschnitts “Der Abstand Punkt-Sphäre”) erwähnten Isomorphismus $\phi : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ etwas genauer. ϕ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{C}P^1 &\rightarrow S^2 \\
\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ 2 \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

wobei $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ ist. (Wohldefiniertheit und Isomorphismuseigenschaft rechnet man leicht nach.) Mit Hinblick auf diesen Isomorphismus ϕ führen wir einige Bezeichnungen

ein, mit deren Hilfe man sich die Symmetrien der Metrik leichter klarmachen kann. Die **Pole** der Sphäre S^2 sind die Vektoren $(0, 0, 1)^T$ und $(0, 0, -1)^T$, die zugehörigen Urbilder unter ϕ in $\mathbb{C}P^1$ nennen wir ebenfalls Pole. Sie sind gegeben durch die Vektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ (eigentlich durch die zugehörigen Klassen, dies wird jedoch im Folgenden immer stillschweigend angenommen, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht). **Breitenkreise** auf der S^2 sind gegeben durch $(x, y, z)^T$, wobei z konstant ist. In $\mathbb{C}P^1$ liegen also zwei Punkte auf dem gleichen Breitenkreis, wenn sie von der Form

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

sind, sich also nur in der Phase eines Eintrags unterscheiden. Der **Äquator** ist derjenige Breitenkreis, für den $|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

Betrachten wir nun den Abstand zweier Punkte ξ_1 und ξ_2 . Die Rechnung ähnelt weitestgehend derjenigen im vorausgehenden Abschnitt und wird daher nur kurz wiedergegeben:

$$\begin{aligned} d(\xi_1, \xi_2) &= \sup\{|\xi_1(a) - \xi_2(a)| : a \in M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}, \|[D, \pi(a)]\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\xi_1(a) - \xi_2(a)| : a \in [M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}]_+, \|[D, \pi(a)]\| = 1\} \\ &= \sup\{|\xi_1^* \lambda \xi_1 - \xi_2^* \lambda \xi_2| : (\lambda, z) \in [M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}]_+, \|[D, \pi(\lambda, z)]\| = 1\} \\ &= \sup\{|\xi_1^* \lambda \xi_1 - \xi_2^* \lambda \xi_2| : \lambda \text{ pos.}, z = \bar{z} \geq 0, \|(z - \lambda)M\| = 1\} \\ &= \sup\{|\xi_1^* x \xi_1 - \xi_2^* x \xi_2| : x = x^* \in M_2(\mathbb{C}), \|xM\| = 1\}. \end{aligned}$$

Nun existieren unitäre Matrizen U, V mit $UMV = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \hat{M}$. Betrachte o.B.d.A.

$\hat{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dies kann man immer durch Herausziehen eines Faktors erreichen. Also ist zunächst $M = U^* \hat{M} V^*$ und somit

$$d(\xi_1, \xi_2) = \sup\{|\xi_1^* x \xi_1 - \xi_2^* x \xi_2| : x = x^*, \underbrace{\|xU^* \hat{M} V^*\|}_{=\|UxU^* \hat{M}\|} = 1\}.$$

Substituiere $y = UxU^* \iff x = U^*yU, x = x^* \iff y = y^*$. Dann ist

$$d(\xi_1, \xi_2) = \sup\{|\xi_1^* U^* y U \xi_1 - \xi_2^* U^* y U \xi_2| : y = y^*, \|y \hat{M}\| = \|\hat{M} y\| = 1\}.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \zeta_1 &:= U \xi_1 &\iff & \xi_1 = U^* \zeta_1, \\ \zeta_2 &:= U \xi_2 &\iff & \xi_2 = U^* \zeta_2, \end{aligned}$$

so gilt

$$d(U^* \zeta_1, U^* \zeta_2) = \sup\{|\zeta_1^* y \zeta_1 - \zeta_2^* y \zeta_2| : y = y^*, \|\hat{M} y\| = 1\}.$$

Betrachte der Einfachheit halber nur den Fall $U = \mathbf{1}$ (den allgemeinen Fall erhält man durch Resubstitution). Also:

$$d(\zeta_1, \zeta_2) = \sup\{|\zeta_1^* y \zeta_1 - \zeta_2^* y \zeta_2| : y = y^*, \|\hat{M}y\| = 1\}.$$

Zunächst berechnen wir den Abstand der Pole $\zeta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \zeta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \sup\left\{|a - d| : y = \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & d \end{pmatrix}, \|\hat{M}y\| = 1\right\} \\ &= 1 + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Begründung: $\hat{M}y = \begin{pmatrix} ma & mb + imc \\ b - ic & d \end{pmatrix}$. Wegen $\|\hat{M}y\| = 1$ folgt $|ma| \leq 1, |d| \leq 1$. Die Matrix $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ liefert dann das Supremum.

Will man nun Rotationssymmetrie des Systems untersuchen, muss man zeigen, dass

$$d\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}\right) \quad (3.18)$$

gilt, denn die Transformation

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

entspricht einer Drehung der S^2 um die z -Achse um den Winkel φ :

Sei $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 e^{i\rho} \end{pmatrix}, r_i \geq 0, r_1^2 + r_2^2 = 1$. Man kann sich auf solche Vektoren beschränken, weil man in jeder Klasse des projektiven Raumes einen derartigen Repräsentanten auswählen kann. Betrachte das Bild unter ϕ :

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 e^{i\rho} \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2r_1 r_2 \cos \rho \\ -2r_1 r_2 \sin \rho \\ r_1^2 - r_2^2 \end{pmatrix}, \\ \phi\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 e^{i(\rho+\varphi)} \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2r_1 r_2 \cos(\rho + \varphi) \\ -2r_1 r_2 \sin(\rho + \varphi) \\ r_1^2 - r_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

An diesen beiden Ausdrücken ist zu erkennen, dass die oben angegebene Transformation tatsächlich eine Drehung um φ liefert. Nun zum Beweis von Formel (3.18), die Randbedingung (RB) ist im Folgenden immer die Forderung $\left\| \begin{pmatrix} ma & mw \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \right\| = 1$.

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) &= \sup\left\{\left|(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \begin{pmatrix} a & w \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \begin{pmatrix} a & w \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right| : \text{RB}\right\} \\ &= \sup\left\{|a(|z_1|^2 - |v_1|^2) + w(\bar{z}_1 z_2 - \bar{v}_1 v_2) + \bar{w}(z_1 \bar{z}_2 - v_1 \bar{v}_2) + d(|z_2|^2 - |v_2|^2)| : \text{RB}\right\} \end{aligned}$$

Setze nun $u = e^{i\varphi}$ und berechne die rechte Seite der Formel (3.18):

$$d\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 u \end{pmatrix}\right) = \sup \{ |a(|z_1|^2 - |v_1|^2) + wu(\bar{z}_1 z_2 - \bar{v}_1 v_2) + \bar{w}\bar{u}(z_1 \bar{z}_2 - v_1 \bar{v}_2) + d(|z_2|^2 - |v_2|^2)| : RB \}.$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt nun aus der Tatsache, dass

$$\left\| \begin{pmatrix} ma & mw \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} ma & mwu \\ \bar{w}\bar{u} & d \end{pmatrix} \right\| \quad \text{falls } |u| = 1$$

(weil für die Norm einer 2×2 -Matrix A allgemein

$$\|A\|^2 = \frac{\operatorname{tr} A^* A}{2} + \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr} A^* A}{2}\right)^2 - |\det A|^2}$$

gilt). Somit ist die Formel (3.18) bewiesen. \square

Als nächstes berechnen wir die Abstände zweier Punkte auf dem gleichen Breitenkreis. Wegen der Rotationssymmetrie kann man sich auf

$$\zeta_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad r_i \geq 0,$$

beschränken.

$$\begin{aligned} d(\zeta_1, \zeta_2) &= \sup \left\{ |\zeta_1^* y \zeta_1 - \zeta_2^* y \zeta_2| : y = \begin{pmatrix} a & se^{i\psi} \\ se^{-i\psi} & d \end{pmatrix}, \|\hat{M}y\| = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |ar_1^2 + dr_2^2 + sr_1 r_2 (e^{i\psi} + e^{-i\psi}) - ar_1^2 - dr_2^2 - sr_1 r_2 (e^{i(\psi+\varphi)} + e^{-i(\psi+\varphi)})| : RB \right\} \\ &= \sup \{ |2sr_1 r_2 (\cos \psi - \cos(\psi + \varphi))| : RB \}. \end{aligned}$$

Wegen der Randbedingung ist $|s| \leq \frac{1}{m}$ und die Phase ψ ist frei wählbar. Suche also das Supremum der Funktion

$$f(\psi) := \cos \psi - \cos(\psi + \varphi).$$

Verwendet man das Additionstheorem

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

so erhält man für die Funktion f

$$f(\psi) = \cos \psi - \cos(\psi + \varphi) = -2 \sin \frac{\varphi + 2\psi}{2} \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

für das Supremum

$$\sup f(\psi) = 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

und schließlich für den Abstand

$$d(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{4r_1 r_2}{m} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Dies entspricht dem Abstand zweier Punkte auf einem Kreis mit Radius $\frac{2r_1 r_2}{m}$, die um den Winkel φ gedreht sind. Der Äquator hat dementsprechend einen Durchmesser von $\frac{2}{m}$. Man sieht an den bisher erhaltenen Daten, dass keine Einbettung des Zustandsraumes von $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ (mit der durch unser spektrales Tripel induzierten Metrik) in irgendeinen \mathbb{R}^n (mit euklidischer Metrik) möglich ist, denn betrachte hierzu Folgendes: Wegen

$$\begin{aligned} d\left(p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{m}, \\ d\left(p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 1, \\ d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 1 + \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

liegen Nordpol N , Südpol S und p (der Zustand auf \mathbb{C}) auf einer Linie. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} d\left(p, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= d\left(p, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right), \\ d\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

Die beiden Punkte $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ definieren eine Linie, welche aus Gründen der Rotationssymmetrie die Linie schneidet, welche durch N, S und p geht. Diesen Schnittpunkt nennen wir q . q hat gleichen Abstand zu N wie zu S , dies folgt aus der Tatsache, dass

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \quad (3.19)$$

Beweis von (3.19):

$$\begin{aligned} \text{l.S.} &= \sup \left\{ \left| (1, 0) \begin{pmatrix} a & w \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (1, 1) \begin{pmatrix} a & w \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| : RB \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{2} |a - d - (w + \bar{w})| : RB \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{r.S.} &= \sup \left\{ \left| (0, 1) \begin{pmatrix} a & w \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1, 1) \begin{pmatrix} a & w \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| : RB \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{2} |d - a - (w + \bar{w})| : RB \right\}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit der beiden Terme folgt nun aus

$$\left\| \begin{pmatrix} ma & mw \\ \bar{w} & d \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -ma & mw \\ \bar{w} & -d \end{pmatrix} \right\|$$

\Rightarrow (3.19) □

Wegen $d(p, N) = \frac{1}{m}$ folgt

$$d(p, q) = d(q, N) - d(p, N) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{m}.$$

Daher ist

$$d(p, q) + d(q, w) = d(p, w)$$

und somit

$$\begin{aligned} p &= q \\ \Rightarrow d(p, w) &= d(q, w) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) &= \frac{1}{m} \\ \Leftrightarrow m &= 1. \end{aligned}$$

Man sieht also, dass nur für $m = 1$ eine Einbettung in einen euklidischen Raum möglich ist.

Bemerkung: Eine allgemeine Nord-Süd-Symmetrie, wie sie Formel (3.19) vielleicht erwarten lässt, ist **nicht** gegeben. Es gilt also im Allgemeinen

$$d \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \neq d \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} \right).$$

3.6 $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$

Man sieht hier schon an der einfachsten nichttrivialen Schnittform

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$d(\zeta_1, \zeta_2) = \sup\{|\zeta_1^* a \zeta_1 - \zeta_2^* a \zeta_2| : \|b - a\| = 1\} = \infty,$$

denn man kann immer

$$b = a + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wählen, um die Randbedingung zu erfüllen.

3.7 $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

Beispiel 3.7.1

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Der Hilbertraum hat hier die Form

$$H = H_{11} \oplus H_{22} \oplus H_{23} \oplus H_{32} \cong \mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Die Darstellung eines Elements $(a, x, y) \in M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ auf H ist gegeben durch

$$\pi(a, x, y) = \begin{pmatrix} a \otimes \mathbf{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & x \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$

und der Diracoperator ist

$$D = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & \bar{m} \\ 0 & \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man für die Norm des Kommutators

$$\|[D, \pi(a, x, y)]\| = |m| \cdot |x - y|.$$

Abstände:

ξ_i seien Zustände auf $M_2(\mathbb{C})$, p_1 und p_2 seien die beiden Zustände auf \mathbb{C} , d.h.

$$\begin{aligned} p_1(a, x, y) &= x, \\ p_2(a, x, y) &= y, \\ \xi_i(a, x, y) &= \xi_i^* a \xi_i. \end{aligned}$$

Dann gilt zunächst

$$d(\xi_i, p_1) = \sup\{|\xi_i^* a \xi_i - x| : |m||x - y| = 1\} = \infty,$$

weil a durch die Randbedingung nicht beschränkt ist. Mit dem gleichen Argument erhält man

$$d(\xi_i, p_1) = d(\xi_i, p_2) = d(\xi_i, \xi_j) = \infty \quad \text{für } i \neq j.$$

Der einzige endliche Abstand ist

$$d(p_1, p_2) = \sup\{|x - y| : |m||x - y| = 1\} = \frac{1}{m}.$$

Es wird also der Abstand der beiden Punkte im spektralen Tripel zu $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ mit $q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ reproduziert. Wie man leicht nachprüfen kann, gilt die gleiche Rechnung auch für $A = M_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ mit der gleichen Schnittform (3.20).

Dass sich Abstände von Tripeln niedriger Ordnung reproduzieren lassen, zeigt sich auch im folgenden Beispiel:

Beispiel 3.7.2 $A = M_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ mit $q = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & k & -l \\ 0 & -l & m \end{pmatrix}$.

Der Hilbertraum ist $H = H_{11} \oplus H_{22} \oplus H_{23} \oplus H_{32} \oplus H_{33}$ mit $H_{11} = \mathbb{C}^{sn^2}$, $H_{22} = \mathbb{C}^k$, $H_{23} = H_{32} = \mathbb{C}^l$, $H_{33} = \mathbb{C}^m$. Die Darstellung der Algebra ist

$$\pi(a, x, y) = \begin{pmatrix} a \otimes \mathbf{1}_{sn} & & & & \\ & x \mathbf{1}_k & & & \\ & & x \mathbf{1}_l & & \\ & & & y \mathbf{1}_l & \\ & & & & y \mathbf{1}_l \end{pmatrix}.$$

Für den Diracoperator erhält man

$$D = \begin{pmatrix} 0_{sn^2 \times sn^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & \bar{M} & 0 \\ 0 & M^* & 0 & 0 & N \\ 0 & M^T & 0 & 0 & \bar{N} \\ 0 & 0 & N^* & N^T & 0 \end{pmatrix}$$

und somit für die Norm des Kommutators

$$\|[D, \pi(a, x, y)]\|^2 = |x - y|^2 \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N \\ M^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Dies ist auf Seite 69 schon berechnet:

$$\|[D, \pi(a, x, y)]\| = |x - y| \cdot \sqrt{\max(\|M^*M\|, \|N^*N\|)}.$$

Seien nun wieder ξ_i (reine) Zustände auf $M_n(\mathbb{C})$ und p_1 und p_2 die beiden Zustände auf \mathbb{C} . Dann gilt analog zum obigen Beispiel

$$d(\xi_i, p_1) = d(\xi_i, p_2) = d(\xi_i, \xi_j) = \infty \quad \text{für } i \neq j$$

und

$$d(p_1, p_2) = \left(\max(\sqrt{M^*M}, \sqrt{N^*N}) \right)^{-1}.$$

Kapitel 4

Quotientenräume und Quantisierung

ALL ANIMALS ARE EQUAL BUT SOME ARE MORE EQUAL THAN OTHERS.
(GEORGE ORWELL, "ANIMAL FARM")

4.1 Vorbemerkungen

Wie schon in der Einleitung ausführlich erläutert wurde, ist es durchaus sinnvoll, Strukturen der Raumzeit in Erwägung zu ziehen, die sich von denen einer "klassischen" differenzierbaren Mannigfaltigkeit unterscheiden (siehe hierzu [DFR95], [AC02], [CC97]).

Ignoriert man die Probleme, die bei einer Beschreibung der Raumzeit durch spektrale Tripel auftreten, d.h. beschränkt man sich auf die traditionelle Connessche Formulierung mit strikt Euklidischer Metrik, so stellt sich natürlich die Frage nach der Quantisierung eines solchen Systems. Es steht außer Zweifel, dass dies für den allgemeinen Fall eine sehr schwierige (wenn nicht gar unlösbare) Aufgabe darstellt. Allerdings kann man, wie man es ja legitimerweise oft praktiziert, sich zunächst den nulldimensionalen Fall vornehmen: Man betrachtet also endliche spektrale Tripel, wie sie in den vorausgegangenen Kapiteln schon diskutiert wurden, und hofft auf neue Einsichten, die sich im höherdimensionalen Fall als nützlich erweisen könnten. Unabhängig davon könnte das Studium einer solchen endlichdimensionalen Quantengravitation auch für sich genommen interessant sein, da es zu ungewöhnlichen Matrixmodellen führt mit ungewöhnlichen Symmetrien und zum Teil völlig neuartiger "physikalischer" Interpretation.

In [Rov99] ist die kanonische Quantisierung an einem speziellen Beispiel durchgeführt. Hierbei wurde verwendet, dass auf dem Raum der Diracoperatoren eine kanonische symplektische Form existiert. Dieser Zugang ist jedoch nur dann gerechtfertigt, wenn man (spektrale oder zumindest Diffeomorphismus-) Invarianz des Systems außer Acht lässt, denn nur in diesem Fall ist der Konfigurationsraum mit dem Raum *aller* Diracoperatoren zu identifizieren. In den folgenden Abschnitten soll diese Problematik näher untersucht

werden.

Auf den ersten Blick erscheint es einfach, ein Pfadintegral für ein spektral invariantes System zu formulieren:

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die (unabhängigen) Eigenwerte des Diracoperators, so kann jedes spektral invariante Maß in der Form

$$d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

geschrieben werden, wobei ρ eine Dichte ist, die symmetrisch unter Vertauschung ihrer Argumente ist. (Es existieren immer unitäre Operatoren, die die Eigenräume von D vertauschen.) Leider ist es meistens unvorteilhaft oder sogar unmöglich, sinnvolle Observable durch die Eigenwerte von D auszudrücken, und auch im Fall endlicher spektraler Tripel existieren solche Beispiele. Für den Zweipunktraum ist klarerweise der Abstand der beiden Punkte invariant unter der Diffeomorphismengruppe und stellt somit eine Observable dar. Das ist natürlich nicht sehr verwunderlich, da es nur einen nichttrivialen Diffeomorphismus gibt, nämlich derjenige, der die Punkte vertauscht. In Beispiel 4.3.3 ist der Abstand der beiden Punkte funktional unabhängig von den Eigenwerten des Diracoperators. Hier ist es dementsprechend nicht sinnvoll, ein Maß zu verwenden, das spektral invariant ist, sondern nur eines, welches unter Diffeomorphismen invariant ist. Man wird dann in solchen Beispielen versuchen, das Maß durch die Einträge von D auszudrücken.

In Kapitel 2 wurde eine Klassifizierung endlichdimensionaler Tripel durchgeführt, welche explizit den Raum der zulässigen Diracoperatoren liefert und insbesondere diejenigen Einträge von D , die nicht notwendigerweise verschwinden. Jedoch verbleibt eine Freiheit in der Wahl der Basis von \mathcal{H} , durch die weitere Einträge in D eingeschränkt oder sogar wegtransformiert werden können. Zwei spektrale Tripel heißen unitär äquivalent, wenn sie durch eine solche Basiswahl ineinander transformiert werden können, d.h. wenn alle Daten der beiden Tripel durch dieselbe unitäre Transformation U verbunden sind (genaue mathematische Definition folgt).

Es taucht dann schließlich das Problem auf, dass unitäre Operatoren existieren, die zwar mit allen Strukturabbildungen des betrachteten spektralen Tripels vertauschen, aber nicht mit dem Diracoperator. Die zusätzliche Freiheit sowie die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Quantisierung des Systems wird im Folgenden detailliert untersucht. Leider ist es im Moment nicht möglich, die Quotientenräume von solchen äquivalenten Diracoperatoren geschlossen zu beschreiben, aber in den Beispielen, die in diesem Kapitel besprochen werden, wird die Lösung des jeweiligen "individuellen" Problems beschrieben.

Bei der Pfadintegralquantisierung spektraler Tripel sollte man natürlich nur über unitäre Äquivalenzklassen summieren, d.h. für dieses Vorhaben ist die Berechnung der Moduli Räume unerlässlich. In dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt auf konkreten Beispielen zum Zweipunktraum $\mathcal{A} = \mathbb{C}^2$. An diesen sollte die Komplexität des Problems klar werden, was hinsichtlich des allgemeinen Falles dann auch notwendig sein wird.

Man beachte, dass die Diffeomorphismen der zugrunde liegenden “Raumzeit”, d.h. die Automorphismen von \mathcal{A} , nicht zu den oben angesprochenen unitären Äquivalenzen gehören: Falls sie tatsächlich unitär auf \mathcal{H} dargestellt sind, kommutieren sie nicht mit den Darstellungen von \mathcal{A} . Man müsste also im allgemeinen Fall noch zusätzlich die Wirkung der Diffeomorphismengruppe vom Raum der Diracoperatoren abdividieren. Dies ist jedoch in den \mathbb{C}^2 -Beispielen dieses Kapitels trivial. Für die Algebra $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ spielen die Diffeomorphismen jedoch eine wichtige Rolle.

Obwohl die hier diskutierten Beispiele sehr einfach sind, zeigen sie doch interessante Aspekte. Auf den ersten Blick scheint die spontane Brechung der spektralen Invarianz (siehe Beispiele 4.3.3 und 4.3.4) der wichtigste Effekt zu sein, der jedoch relativ einfach zu verstehen ist:

Nimmt man der Einfachheit halber an, die klassische Wirkung sei gegeben durch $S = \text{Tr}P(D^2)$ wobei $P(x)$ ein Polynom sein soll mit genau einem Minimum an der Stelle x_0 auf der reellen Achse. Dann ist das Minimum von S gegeben durch $D = x_0 \text{id}$. (Tatsächlich ist ein Grundzustand, der invariant unter allen unitären Transformationen ist, notwendigerweise von dieser Form.) Nun ist aber, wie oben erläutert, das Maß

$$d\mu = d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \prod_{i < j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 e^{-S}$$

spektral invariant. Aber in diesem Fall wird der Vakuumerwartungswert

$$\langle \lambda_k^2 - \lambda_l^2 \rangle = \int d\mu (\lambda_k^2 - \lambda_l^2)$$

im Allgemeinen nicht verschwinden. Man kann auch sagen, dass die unitären Elemente der Algebra auf dem Hilbertraum der Quantentheorie nicht so dargestellt werden können, dass der Vakuumerwartungswert unter ihnen invariant wäre. Ansonsten wäre nämlich der Erwartungswert von je zwei Eigenwerten von D , als Observablen betrachtet, gleich. Man wird in den Beispielen sehen, dass Maße wie das oben angesprochene auf natürliche Weise auftreten, was sich durch die gekrümmte Geometrie des Moduli Raumes erklären lässt.

Nichtsdestotrotz kann der Verlust der spektralen Invarianz offensichtlich auf die Eigenschaften des verwendeten Maßes zurückgeführt werden und man kann natürlich fragen, ob eine solche Wahl gerechtfertigt ist. Zum Beispiel könnte ja auch die Invarianz des Vakuums als Kriterium für die Wahl eines Maßes herangezogen werden.

Andererseits sollte man sich immer klar darüber sein, dass die zugrunde liegende “Mannigfaltigkeit” nulldimensional ist und dementsprechend keine “Zeit” vorhanden ist und daher auch keine kanonische Wirkung der symplektischen Gruppe. Daher gibt es kein kanonisches Maß im Pfadintegral, da für (endlichdimensionale) quantenmechanische Systeme ein bestimmtes Maß ausgezeichnet ist, und zwar durch seine Invarianz unter kanonischen Transformationen zusammen mit dem gegebenen klassischen Limes des Systems. Um es deutlicher zu machen: Das Fehlen kanonischer Transformationen sollte als Mehrdeutigkeit in der Definition der “klassischen” Wirkung angesehen werden, da man immer folgender-

maßen umdefinieren kann:

$$d\mu e^{-S} = d\tilde{\mu} e^{-\tilde{S}}.$$

Schreibt man das obige Maß in der Form $d\lambda_1 \cdots d\lambda_n e^{-\tilde{S}}$, so sieht man, dass die so definierte Wirkung \tilde{S} kein eindeutiges Minimum hat. Der Grundzustand ist entartet mit nichttrivialer Wirkung der unitären Elemente mittels Permutation der verschiedenen Minima, dies führt zu einer spontanen Brechung der spektralen Invarianz in der quantisierten Theorie.

Dies ist auch im Hinblick auf eine wichtige Fragestellung interessant, die für zukünftige Untersuchungen offen bleibt:

Kann man einen klassischen Limes eines solchen Systems definieren?

Auf diese Frage muss es keine (eindeutige) Antwort geben, aber falls ja, dann wird sie mit Sicherheit durch detaillierte Analyse diverser Beispiele gefunden. In einem komplementären Projekt ([Häu01, Pös02]) wird die mathematische Struktur einer störungstheoretischen Behandlung eines Maßes $d\lambda_1 \cdots d\lambda_n e^{-S}$ untersucht unter besonderer Berücksichtigung der Nichtkommutativität der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit. In den Beispielen, die in dieser Arbeit behandelt werden, sind größtenteils Gaußsche Maße $S \sim \text{Tr} D^2$ auf den Moduli Räumen gewählt. An dieser Stelle soll nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass es nicht immer möglich ist, ein spektral invariantes Maß zu wählen, weil es Observablen gibt, die nicht durch die Eigenwerte von D ausgedrückt werden können. Für den Zweipunktraum ist die einzige interessante Observable der Abstand d der beiden Punkte, welcher im einfachsten Beispiel, wenn D nur einen (unabhängigen) Eigenwert λ hat, gegeben ist durch

$$d = \frac{1}{\lambda}.$$

Für das Gaußsche Maß divergiert daher der Vakuumerwartungswert

$$\langle d \rangle = \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-t\lambda^2} = \infty,$$

was auch zu erwarten war, da dies dem "klassischen" Grundzustand $D = 0$ entspricht. In anderen Beispielen jedoch (falls D mehrere Eigenwerte hat) findet man endliche Erwartungswerte von d , was auf eine Art "attraktive Kraft" zwischen den Punkten hindeutet, hervorgerufen durch Quanteneffekte. Eine andere Möglichkeit, endliche Erwartungswerte von d zu erzeugen, ist, das System an Fermionen zu koppeln: Wegen

$$\int_0^\infty d\lambda e^{\langle \psi, D \psi \rangle} \sim \lambda^2$$

hat man dann

$$\langle d \rangle_F \sim \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-t\lambda^2} < \infty.$$

In der vorliegenden Arbeit soll jedoch nicht versucht werden, diese (und andere) Effekt zu erklären bzw. zu interpretieren, sondern es sollen die Probleme, die bei einer Quantisierung endlicher spektraler Tripel auftreten, herausgearbeitet werden.

4.2 Quotientenräume

Um eine Quantisierung (oder Zustandssumme) von spektralen Tripeln zu definieren mit Hilfe eines Integrals

$$Z \sim \int \mathcal{D}D e^{-S(D)}$$

ist es nötig, äquivalente spektrale Tripel zu gegebener Algebra A und gegebener Schnittform q zu klassifizieren. Das Integral wird dann über die jeweiligen Quotientenräume durchgeführt.

Definition 4.2.1 *Zwei spektrale Tripel $(A, H, \pi, D, \Gamma, J)$ und $(A, H', \pi', D', \Gamma', J')$ sind äquivalent, falls ein unitärer Operator $U : H \rightarrow H'$ existiert mit der Eigenschaft, dass (für $F = \pi(a), J, \Gamma$ oder D) folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{U} & H' \\ F \downarrow & & \downarrow F' \\ H & \xrightarrow{U} & H' \end{array}$$

Weil in unserem Fall die Dimensionen der Hilberträume durch die Matrix q festgelegt sind, kann man alle Betrachtungen auf denselben Hilbertraum $H = H'$ beschränken. Des Weiteren ist die kanonische Form der Abbildungen J und Γ durch geeignete Basiswahl in H erreicht. Es existieren aber immer noch unitäre Abbildungen U , die mit π , J und Γ kommutieren. Diese Transformationen charakterisieren die Äquivalenzklassen der Diracoperatoren, die wir suchen. Die grundlegende Struktur dieser Klassen lässt sich leicht beschreiben. Weil die Matrix U mit Γ vertauscht, muss sie blockdiagonal sein

$$UH_{ij} = H_{ij}$$

und weil sie sowohl mit der Darstellung π als auch mit $\tilde{\pi}$ vertauscht, ist sie von der Form

$$U_{ij} = \mathbf{1}_{n_i} \otimes u_{ij} \otimes \mathbf{1}_{n_j}, \quad U_{ij} := U|_{H_{ij}}, \quad (4.1)$$

wobei nun u_{ij} eine unitäre Abbildung $u_{ij} : \mathbb{C}^{r_{ij}} \rightarrow \mathbb{C}^{r_{ij}}$ ist. Die Relation $[U, J] = 0$ führt zu der Einschränkung

$$u_{ij} = \overline{u_{ji}}. \quad (4.2)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, Äquivalenzklassen zu finden für die Relation

$$D \sim UDU^*, \quad (4.3)$$

wobei U durch die obigen Einschränkungen gegeben ist.

Wir beginnen mit einfachen Beispielen, die das Problem demonstrieren, die Lösung für den allgemeinen Fall steht noch aus. Die Algebra in den folgenden Beispielen ist immer $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Beispiel 4.2.1

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der zugehörige Hilbertraum ist $H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21} \cong \mathbb{C}^3$ und der Diracoperator hat die Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \bar{m} & m \\ m & 0 & 0 \\ \bar{m} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{C}.$$

Betrachte nun eine unitäre Matrix U , welche die oben genannten Einschränkungen erfüllt. Sie hat die Form

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a \in U(1).$$

Man erhält dann

$$UDU^* = \begin{pmatrix} 0 & \bar{m}\bar{a} & ma \\ ma & 0 & 0 \\ \bar{m}\bar{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und kann somit durch geeignete Wahl von a ($a = \frac{\bar{m}}{|m|}$) erreichen, dass

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & m \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}, m \geq 0. \quad (4.4)$$

Im allgemeinen Fall ist die Schnittform

$$q = \begin{pmatrix} k & -l \\ -l & m \end{pmatrix}, \quad k, l, m \in \mathbb{N},$$

und der zugehörige (allgemeine) Diracoperator

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M & \bar{M} & 0 \\ M^* & 0 & 0 & N \\ M^T & 0 & 0 & \bar{N} \\ 0 & N^* & N^T & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} D_{11,12} = \bar{D}_{11,21} = D_{12,11}^* = D_{21,11}^T &=: M : \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^k, \\ D_{12,22} = \bar{D}_{21,22} = D_{22,12}^* = D_{22,21}^T &=: N : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^l, \end{aligned}$$

was schon im vorangegangenen Kapitel hergeleitet wurde. Die unitären Transformationen sind gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in O(k), V \in U(l), B \in O(m),$$

und für den transformierten Diracoperator erhält man

$$UDU^* = \begin{pmatrix} 0 & AMV^* & A\bar{M}V^T & 0 \\ VM^*A^T & 0 & 0 & VNB^T \\ \bar{V}M^TA^T & 0 & 0 & \bar{V}\bar{N}B^T \\ 0 & BN^*V^* & BN^TV^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Wir haben hier zwei unabhängige Blöcke AMV^* und VNB^T , wegen den Relationen

$$\overline{AMV^*} = A\bar{M}V^T, \quad \overline{VNB^T} = \bar{V}\bar{N}B^T$$

und der Tatsache, dass UDU^* selbstadjungiert ist. Die Frage ist nun, ob es möglich ist, kanonische Formen der Matrizen M und N unter diesen Transformationen zu finden. Eine allgemeine Lösung ist (wie oben schon erwähnt) noch nicht gefunden, aber für bestimmte Fälle möglich. Wir betrachten also weitere Beispiele:

Beispiel 4.2.2

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Dass q nicht invertierbar ist, soll uns an dieser Stelle nicht beunruhigen.) Der Hilbertraum ist \mathbb{C}^4 und

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & \bar{m} & 0 \\ \bar{m} & 0 & 0 & \mu \\ m & 0 & 0 & \bar{\mu} \\ 0 & \bar{\mu} & \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad m, \mu \in \mathbb{C}.$$

Erlaubte unitäre Transformationen sind

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in U(1),$$

d.h. (nur) eine komplexe Phase kann in

$$UDU^* = \begin{pmatrix} 0 & m\bar{a} & \bar{m}a & 0 \\ \bar{m}a & 0 & 0 & \mu a \\ m\bar{a} & 0 & 0 & \bar{\mu}\bar{a} \\ 0 & \bar{\mu}\bar{a} & \mu a & 0 \end{pmatrix}$$

eliminiert werden, beispielsweise durch die Wahl $a = \frac{m}{|m|}$. In diesem Fall können also die Äquivalenzklassen von Diracoperatoren durch eine reelle, nichtnegative Zahl m und eine komplexe Zahl μ parametrisiert werden.

Beispiel 4.2.3

$$q = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist $H = \mathbb{C}^6$ und der Diracoperator

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & \bar{m} \\ m^* & 0 & 0 \\ m^T & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Unitäre Äquivalenz des entsprechenden spektralen Tripels ist gegeben durch Transformationen der Form

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V} \end{pmatrix}, \quad A \in O(2), V \in U(2).$$

Dies führt auf

$$UDU^* = \begin{pmatrix} 0 & AmV^* & A\bar{m}V^T \\ Vm^*A^T & 0 & 0 \\ \bar{V}m^TA^T & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. wir suchen einen Repräsentanten in der Klasse von Diracoperatoren unter der Transformation

$$m \rightarrow AmV, \quad A \in O(2), V \in U(2).$$

Die Lösung dieses Problems ist gegeben durch folgendes Theorem:

Theorem 4.2.1 *Sei m eine beliebige nichtsinguläre 2×2 -Matrix. Dann existiert genau eine positive (selbstadjungierte) Matrix C von der Form*

$$C = \begin{pmatrix} a & ic \\ -ic & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \geq b \geq 0, ab \geq c^2,$$

sowie eine unitäre Matrix U und eine orthogonale Matrix O (beide eindeutig, falls $a \neq b$), so dass

$$m = OCU.$$

BEWEIS: Die (technische) Basis des Beweises ist folgende kleine Rechnung:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Z \\ \bar{Z} & Y \end{pmatrix}$$

mit

$$X = x \cos^2 \alpha + y \sin^2 \alpha + 2(\operatorname{Re} z) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.6)$$

$$Z = (y - x) \sin \alpha \cos \alpha + (\operatorname{Re} z)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + i(\operatorname{Im} z), \quad (4.7)$$

$$Y = x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha - 2(\operatorname{Re} z) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.8)$$

Insbesondere ist der Imaginärteil des Nebendiagonalelements invariant unter orthogonalen Transformationen. Wir zeigen nun zunächst die Existenz der behaupteten Zerlegung und dann die Eindeutigkeit.

Existenz: Jede nichtsinguläre Matrix m kann in Spektralzerlegung geschrieben werden als

$$m = TU \quad (4.9)$$

mit T positiv (selbstadjungiert). Daher muss man nur zeigen, dass eine orthogonale Matrix O existiert sowie eine Matrix C mit der behaupteten Form, so dass $T = OCO^T$ ist (man beachte, dass $O^T U$ unitär ist). Dementsprechend genügt auch die Existenz einer orthogonalen Matrix zu zeigen, die den Realteil des Nebendiagonalelements in T wegtransformiert, so dass T auf die gewünschte Form C gebracht wird. Mit (4.7) führt dies auf

$$(y - x) \sin \alpha \cos \alpha + (\operatorname{Re} z)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

und nach elementaren Umformungen erhält man die Gleichung

$$\frac{y - x}{\operatorname{Re} z} = -2 \cot(2\alpha),$$

die eine Lösung α für alle möglichen Werte von x, y, z besitzt, d.h. die Existenz der Zerlegung ist gezeigt.

Jetzt zur Eindeutigkeit der Matrizen C, U und O : Angenommen, es gibt zwei Möglichkeiten für die Zerlegung

$$\begin{aligned} m = O_1 C_1 U_1 &= O_2 C_2 U_2 \\ \Rightarrow C_2 &= O_2^T O_1 C_1 U_1 U_2^*. \end{aligned}$$

Weil $O^T U$ unitär ist, kann man auch

$$C_2 = O C_1 O^T U \iff C_2 U^* = O C_1 O^T$$

betrachten. Die Determinanten von C_1 und C_2 sind positiv (reell), dies impliziert $U \in SU(2)$. Des Weiteren (weil $O C_1 O^T$ selbstadjungiert ist) muss gelten

$$U C_2 \stackrel{!}{=} C_2 U^*.$$

Parametrisiert man

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

und C_2 wie oben, so erhält man die Bedingungen

$$\begin{aligned} a_2 \alpha - i c_2 \beta &\stackrel{!}{=} a_2 \bar{\alpha} + i c_2 \bar{\beta}, \\ a_2 \beta &\stackrel{!}{=} -b_2 \beta, \\ -i \bar{\beta} c_2 + \bar{\alpha} b_2 &\stackrel{!}{=} i c_2 \beta + \alpha b_2. \end{aligned}$$

Weil C_2 positiv sein soll, muss $a_2, b_2 \geq 0$ gelten, und daher liefert die zweite Gleichung zwei Fälle: $a_2 = b_2 = 0$ oder $\beta = 0$. Im ersten Fall, wegen $a_2 b_2 \geq c_2^2$, hätte man $C_2 = C_1 = 0$. Dies liefert $m = 0$, was ausgeschlossen werden muss. Der Fall $\beta = 0$ impliziert $\alpha = 1$ (Unitaritätsbedingung und dritte Gleichung), d.h. $U = \mathbf{1}$, man muss also nur $O = \mathbf{1}$ zeigen. (4.7) zeigt aber, dass in jedem Fall $c_2 = c_1$ ist (der Imaginärteil des Nebendiagonalelements ist invariant unter orthogonalen Transformationen), und weil C_1 und C_2 gleiche Spur und gleiche Determinante haben, weiß man, dass entweder $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ oder $a_1 = b_2, a_2 = b_1$ gilt. Falls $a_1 \neq b_1$ ist, liefert die Forderung $a_1 \geq b_1$ die Eindeutigkeit der Zerlegung. Falls $a_1 = b_1$ gilt, ist die Zerlegung nur bis auf eine $\pi/2$ -Rotation eindeutig, weil

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & ic \\ -ic & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ic \\ -ic & a \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt die behauptete Eindeutigkeit der Zerlegung und die Behauptung ist somit bewiesen. \square

Beispiel 4.2.4

$$q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der allgemeinste Diracoperator ist

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 & \bar{m}_1 \\ 0 & 0 & m_2 & \bar{m}_2 \\ \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{C},$$

und wirkt auf $H = H_{11} \oplus H_{12} \oplus H_{21} \cong \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Zulässige unitäre Transformationen sind

$$U = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad R \in O(2), e^{i\varphi} \in U(1).$$

Setzt man $\vec{m} := \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$, so kann man den Diracoperator schreiben als

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \vec{m} & \vec{m} \\ \vec{m}^* & 0 & 0 \\ \vec{m}^T & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und unitäre Transformationen führen auf

$$\begin{aligned} UDU^* &= \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{m} & \vec{m} \\ \vec{m}^* & 0 & 0 \\ \vec{m}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & R\vec{m}e^{-i\varphi} & R\vec{m}e^{i\varphi} \\ e^{i\varphi}\vec{m}^*R^T & 0 & 0 \\ e^{-i\varphi}\vec{m}^TR^T & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wieder kann man Repräsentanten der Äquivalenzklassen finden indem man das folgende Theorem verwendet:

Theorem 4.2.2 Sei $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Dann existiert $R \in O(2), \varphi \in [0, 2\pi[$ und ein eindeutiges $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ so dass

$$R\vec{m}e^{i\varphi} = \frac{|\vec{m}|}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Die Diracoperatoren lassen sich also parametrisieren durch Vektoren der Form $\frac{\rho}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi} \end{pmatrix}, \psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, d.h. sie bilden einen "Viertelkegel" im \mathbb{C}^2 .

BEWEIS: Der Beweis ähnelt dem Beweis von Theorem 4.2.1, Leser, die nicht an technischen Details interessiert sind, können ihn getrost überspringen. Zunächst beweisen wir die Existenz der Zerlegung, indem wir Folgendes zeigen: Zu $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ existiert $R \in SO(2)$ mit der Eigenschaft

$$R \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad |u| = |v|. \quad (4.11)$$

Um (4.11) zu zeigen, setzt man

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} \\ r_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$$

und berechnet

$$\begin{aligned} R\vec{m} &= \begin{pmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} \\ r_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_1 \cos \rho e^{i\theta_1} - r_2 \sin \rho e^{i\theta_2} \\ r_1 \sin \rho e^{i\theta_1} + r_2 \cos \rho e^{i\theta_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man erhält dann für das Betragsquadrat der beiden Einträge

$$\begin{aligned} |r_1 \cos \rho e^{i\theta_1} - r_2 \sin \rho e^{i\theta_2}|^2 &= |r_1 \cos \rho - r_2 \sin \rho e^{i(\theta_2 - \theta_1)}|^2 \\ &= |r_1 \cos \rho - r_2 \sin \rho \cos \Delta - ir_2 \sin \rho \sin \Delta|^2 \quad (\Delta := \theta_2 - \theta_1) \\ &= (r_1 \cos \rho - r_2 \sin \rho \cos \Delta)^2 + (r_2 \sin \rho \sin \Delta)^2 \\ &= r_1^2 \cos^2 \rho + r_2^2 \sin^2 \rho - 2r_1 r_2 \sin \rho \cos \rho \cos \Delta, \\ |r_1 \sin \rho e^{i\theta_1} + r_2 \cos \rho e^{i\theta_2}|^2 &= |r_1 \sin \rho + r_2 \cos \rho e^{i\Delta}|^2 \\ &= |r_1 \sin \rho + r_2 \cos \rho \cos \Delta + ir_2 \cos \rho \sin \Delta|^2 \\ &= (r_1 \sin \rho + r_2 \cos \rho \cos \Delta)^2 + (r_2 \cos \rho \sin \Delta)^2 \\ &= r_1^2 \sin^2 \rho + r_2^2 \cos^2 \rho + 2r_1 r_2 \sin \rho \cos \rho \cos \Delta. \end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden Terme führt auf

$$\begin{aligned} (r_1^2 - r_2^2)(\cos^2 \rho - \sin^2 \rho) &= 4r_1 r_2 \sin \rho \cos \rho \cos \Delta \\ \iff \underbrace{\frac{\cos^2 \rho - \sin^2 \rho}{\sin \rho \cos \rho}}_{=-2 \cot 2\rho} &= \frac{4r_1 r_2 \cos \Delta}{r_1^2 - r_2^2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

was immer eine Lösung ρ hat. Wir haben also die Situation, dass $R \in SO(2)$ und $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$ existieren mit der Eigenschaft

$$R\vec{m} = r \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} \end{pmatrix}.$$

Die folgenden Matrizen gehören zu $O(2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. man kann immer den Fall $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \pi$ erreichen. Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i(\theta_2-\pi)} \end{pmatrix}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass man $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ wählen kann in der behaupteten Zerlegung. Betrachte hierzu

$$\begin{aligned} R\vec{m}e^{i\varphi} &= \frac{|\vec{m}|}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi} \end{pmatrix}, \quad \psi \in [\frac{\pi}{2}, \pi[\\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R\vec{m}e^{i\varphi}e^{i(\pi-\psi)} &= \frac{|\vec{m}|}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(\pi-\psi)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. $\psi' := \pi - \psi$ liefert das gewünschte Resultat $\psi' \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Jetzt zur Eindeutigkeit der Zerlegung: Angenommen es gibt R_1, φ_1, ψ_1 and R_2, φ_2, ψ_2 so dass

$$R_1\vec{m}e^{i\varphi_1} = \frac{|\vec{m}|}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_1} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$R_2\vec{m}e^{i\varphi_2} = \frac{|\vec{m}|}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_2} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Gleichung (4.13) impliziert

$$\vec{m} = \frac{|\vec{m}|}{\sqrt{2}} R_1^T \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_1} \end{pmatrix} e^{-i\varphi_1}. \tag{4.15}$$

(4.15) in (4.14) liefert

$$R_2 R_1^T \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_1} \end{pmatrix} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_2} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Daher genügt es, folgende Gleichung zu betrachten:

$$R \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_1} \end{pmatrix} e^{i\varphi} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_2} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Nun muss man verschiedene Fälle untersuchen:

Fall 1: $R \in SO(2)$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

(4.18) in (4.17) liefert

$$\begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ e^{i(\varphi+\psi_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_2} \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

und man erhält die folgenden Gleichungen:

$$\cos \rho e^{i\varphi} + \sin \rho e^{i(\varphi+\psi_1)} = 1, \quad (4.20)$$

$$-\sin \rho e^{i\varphi} + \cos \rho e^{i(\varphi+\psi_1)} = e^{i\psi_2}. \quad (4.21)$$

Berechnet man den Betrag der linken Seite von (4.20), so erhält man

$$|\cos \rho e^{i\varphi} + \sin \rho e^{i(\varphi+\psi_1)}|^2 = 1 + 2 \sin \rho \cos \rho \cos \psi_1, \quad (4.22)$$

und somit gibt (4.20) die Bedingung

$$\sin \rho \cos \rho \cos \psi_1 = 0. \quad (4.23)$$

(Wir hätten stattdessen auch Gleichung (4.21) verwenden können, was jedoch zum gleichen Ergebnis führt.)

Jetzt müssen die drei Fälle betrachtet werden, in denen das Produkt Null werden kann:

Fall 1.1: $\sin \rho = 0$. Dies impliziert

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = 0, \psi_1 = \psi_2$$

oder $R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{i\varphi} = -1, \psi_1 = \psi_2.$

Fall 1.2: $\cos \rho = 0$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ in (4.17) ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi_1)} \\ -e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi_2} \end{pmatrix},$$

und dies liefert $\varphi = 2\pi - \psi_1$ und $\psi_1 + \psi_2 = \pi$, d.h. nur $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}$ ist eine Lösung im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. Der Fall $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist analog.

Fall 1.3: $\cos \psi_1 = 0 \Rightarrow e^{i\psi_1} = i$. Dies führt zu der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\rho} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

die für alle Werte von ρ erfüllt ist, aber $\psi_1 = \psi_2$ liefert.

Fall 2: $R \in O(2), R \notin SO(2)$ kann auf die gleiche Art behandelt werden und liefert das gleiche Resultat, somit ist der Beweis vollständig. \square

4.3 Quantisierung

Nachdem nun alle nötigen Vorarbeiten geleistet sind, kommen wir zur Hauptangelegenheit dieses Kapitels, der Pfadintegralquantisierung endlicher Tripel. Pfadintegrale basieren auf der Idee, dass jeder mögliche Zustand, den ein System in seiner Entwicklung von einem Anfangs- zu einem Endzustand durchlaufen kann, zu der Übergangsamplitude beiträgt. Im Zusammenhang mit Gravitation müsste man einen Weg finden, über Lorentzsche Mannigfaltigkeiten zu summieren, ein Problem, welches in (3+1) Dimensionen noch nicht gelöst ist. Im Kontext endlicher Geometrien ist es für einzelne Beispiele jedoch möglich, eine solche Summation durchzuführen, falls der zugehörige Moduli Raum gefunden ist.

Für ein gegebenes spektrales Tripel (A, q) soll eine Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}D e^{-S(D)}$$

definiert werden, wobei $\mathcal{D}D$ das invariante Maß bezeichnet, das wir suchen. Eine “klassisch” (stabile) spektral invariante Wirkung $S(D)$ auf endlichdimensionalen Hilberträumen kann in der Form

$$S(D) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \operatorname{tr} D^{2k}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = +\infty,$$

geschrieben werden. Es genügt hier, über Terme mit geraden Exponenten zu summieren, da $\operatorname{tr} D^{2k+1} = 0$ ist (weil D mit der Graduierung Γ antikommutiert). Wie schon in den Vorbemerkungen zu diesem Kapitel erwähnt, sollte man den Ausdruck “klassische Wirkung” nicht allzu ernst nehmen, da das Fehlen von “Zeit” und daher das Fehlen kanonischer Transformationen die Definition eines klassischen Limes erschwert.

Gelegentlich wird das betrachtete System auch an Fermionen $\psi \in \mathcal{H}$ gekoppelt, deren klassische Wirkung gegeben ist durch

$$S_{\text{ferm}} = \langle \psi | D | \psi \rangle.$$

Wir nennen diese Felder ψ fermionisch, weil wir sie gemäß Fermi-Dirac Statistik quantisieren, auch wenn es natürlich kein Spin-Statistik Theorem gibt, welches uns dazu veranlassen würde. Wenn man die Fermionen ausintegriert, was wir in diesem Kapitel grundsätzlich tun werden, ist die effektive Wirkung gegeben durch

$$\mathcal{Z}_F = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}D e^{-S_F(D)}$$

mit

$$S_F(D) = S(D) - \ln \det D.$$

In den meisten Fällen ist $\det D = 0$, d.h. für eine sinnvolle Definition der fermionischen Wirkung muss man $\det D$ auf dem Komplement des Kerns von D berechnen. Die Konstanten \mathcal{N} und \mathcal{N}' werden so gewählt, dass $\mathcal{Z} = 1$ und $\mathcal{Z}_F = 1$ für $S = \frac{t}{2} \operatorname{tr} D^2$ (daher taucht t

auch in den Normierungskonstanten auf). Aber jetzt zu den konkreten Beispielen (es wird nur die Algebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ behandelt).

Beispiel 4.3.1 Betrachte die Schnittform

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

welche in Beispiel 4.2.1 diskutiert wurde.

Jede Klasse von äquivalenten Diracoperatoren hat einen Repräsentanten der Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & m \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}, m \geq 0,$$

was in Gleichung (4.4) gezeigt wurde. D hat Eigenwerte $0, \pm m\sqrt{2}$ und der Kern von D ist aufgespannt von dem Vektor $(0, 1, -1)^T$. Vernachlässigt man den Kern, so erhält man für die Determinante

$$\det D = -2m^2.$$

Da D nur einen unabhängigen Eigenwert $\lambda = m\sqrt{2}$ hat, ist klar, was als invariantes Maß verwendet werden muss:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int_0^\infty d\lambda e^{-S(\lambda)}$$

beziehungsweise (beachte $\det D = -2m^2 = -\lambda^2$)

$$\mathcal{Z}_F = -\mathcal{N}' \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 e^{-S(\lambda)}.$$

Fixiert man die Konstanten \mathcal{N} und \mathcal{N}' gemäß unserer Konvention, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_0^\infty d\lambda e^{-t\lambda^2}, \\ \mathcal{Z}_F &= 4\sqrt{\frac{t^3}{\pi}} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 e^{-t\lambda^2}. \end{aligned}$$

In Kapitel 3 wurde für den Abstand $d(1, 2) = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$ berechnet, d.h. für die Vakuumerwartungswerte erhält man folgende Ausdrücke:

$$\langle d(1, 2) \rangle = 4\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-S(\lambda)},$$

$$\langle d(1, 2) \rangle_F = 8\sqrt{\frac{t^3}{2\pi}} \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-S(\lambda)}.$$

Dies führt zu einer ersten interessanten Beobachtung:

Lemma 4.3.1 *Für jede polynomiale Wirkung $S(D) = \sum_{k=0}^n t_k \lambda^{2k}$ gilt für den Vakuumerwartungswert des Abstandes*

$$\langle d(1, 2) \rangle = \infty.$$

Hat man zusätzlich jedoch $t_{-1} \neq 0$, so ist $\langle d(1, 2) \rangle < \infty$. Auf der anderen Seite bleibt der Wert im fermionischen Fall immer endlich:

$$\langle d(1, 2) \rangle_F < \infty.$$

Für $S = t\lambda^2$ erhält man

$$\langle d(1, 2) \rangle_F = 4\sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Der Beweis ist elementar und soll an dieser Stelle übersprungen werden. Das Beispiel zeigt, dass Terme der Form $t_{-1}\lambda^{-2}$ zur Regularisierung des Erwartungswertes des Abstandes verwendet werden können. Der gleiche Effekt tritt bei Kopplung an Fermionen auf: Sie führt zu einer "attraktiven Kraft" (vielleicht entgegen der Intuition) zwischen den Punkten, die stark genug ist, endliche Werte zu erzeugen.

Nach diesem kurzen Aufwärmtraining kommen wir zu tiefsinnigeren Beispielen. Im Folgenden wird explizit ein invariantes Maß auf dem Raum der Diracoperatoren konstruiert unter Verwendung der Ergebnisse des vorherigen Abschnitts und der Faddeev-Popov Methode.

Beispiel 4.3.2

$$q = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Diracoperatoren und Äquivalenzklassen sind in Beispiel 4.2.3 berechnet: Ein allgemeines D ist von der Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & \bar{m} \\ m^* & 0 & 0 \\ m^T & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{C}^{2 \times 2},$$

und Repräsentanten sind gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} 0 & C & \bar{C} \\ C & 0 & 0 \\ \bar{C} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } C = \begin{pmatrix} a & ic \\ -ic & b \end{pmatrix}, \quad a \geq b \geq 0, ab \geq c^2. \quad (4.24)$$

Die Konstruktion des invarianten Maßes kann nun wie folgt durchgeführt werden:

Wir wissen, dass Äquivalenzklassen gegeben sind durch $m \sim OmU$, mit $O \in O(2)$ und $U \in U(2)$. Des Weiteren existiert für jedes m ein positives T und ein unitäres U mit $m = TU$, d.h. man kann einen positiven Repräsentanten in jeder Klasse auswählen. Die verbleibende Symmetrie ist die Äquivalenz

$$T \sim OTOT^T, \quad O \in O(2).$$

Man kann nun eine Eichfixierung der Form

$$\operatorname{Re} T_{12} = 0$$

ansetzen und die Faddeev-Popov Methode anwenden. Das invariante Maß auf dem Raum der selbstadjungierten Matrizen ist bekannt:

$$dH = dp dq d\operatorname{Re}(z) d\operatorname{Im}(z) \quad \text{für} \quad H = \begin{pmatrix} p & z \\ \bar{z} & q \end{pmatrix}, \quad p, q \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Startet man von diesem Ausgangspunkt, so kann man das invariante Maß für Matrizen C , die von der Form (4.24) sind, durch die wohlbekannt Formel

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int_{H \geq 0} dH \delta(\operatorname{Re} H_{12}) \Delta_{FP} e^{-S(H)}$$

berechnen, wobei

$$\Delta_{FP}^{-1} = \int d\alpha \delta(\operatorname{Re} H_{12}^\alpha)$$

und H_{12}^α das 12-Element nach der Drehung von H um α ist, welches gegeben ist durch Formel (4.7). Die Berechnung von

$$\Delta_{FP}^{-1} = \int d\alpha \delta((q-p) \sin \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{Re} z)$$

erfolgt dann mit der Formel

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad \text{Summe über die Nullstellen } x_i \text{ von } f.$$

Man erhält dann schließlich das (überraschend einfache) Ergebnis

$$\Delta_{FP}(H) = \sqrt{(p - q)^2 + 4(\text{Re}z)^2}.$$

Drückt man nun alles durch die Matrizen C aus, d.h. berücksichtigt man Positivität und die Bedingung $a \geq b \geq 0$, so erhält man letztendlich für das invariante Integral

$$\int f(C) dC = \int_0^\infty da \int_0^a db \int_{-\sqrt{ab}}^{\sqrt{ab}} dc f(C)$$

und für die zugehörige Zustandssumme (mit der Randbedingung (R.B.) $H \geq 0$, $H_{11} \geq H_{22} \geq 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{N} \int_{(R.B.)} dH \delta(\text{Re}H_{12}) \Delta_{FP} e^{-S(H)} \\ &= \mathcal{N} \int_0^\infty da \int_0^a db \int_{-\sqrt{ab}}^{\sqrt{ab}} dc \sqrt{(a-b)^2} e^{-S(a,b,c)}. \end{aligned}$$

Man sieht an dem letzten Ausdruck, dass (selbst für die freie klassische Wirkung $S(D) = t_1 \text{tr} D^2$) der stärkste Beitrag nicht von der Konfiguration $C = 0$ ($\iff D = 0$) stammt und dementsprechend der Vakuumerwartungswert des Abstandes endlich bleibt: Der Abstand ist in diesem Beispiel gegeben durch das Inverse des größten Eigenwerts von C , d.h.

$$d(1, 2) = \left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c^2} \right)^{-1}.$$

Für die Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \text{tr} D^2 = 2(a^2 + b^2 + 2c^2)$$

erhält man dann

$$\langle d(1, 2) \rangle = \mathcal{N} \int_0^\infty da \int_0^a db \int_{-\sqrt{ab}}^{\sqrt{ab}} dc \frac{(a-b)}{a+b + \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}} e^{-2(a^2+b^2+2c^2)}.$$

Alle Konstanten werden von jetzt an in \mathcal{N} absorbiert. Um zu zeigen, dass dieser Ausdruck endlich ist, benutzt man die Tatsache, dass

$$\frac{1}{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4c^2}} e^{-2(a^2+b^2+2c^2)} \leq \frac{1}{2a} e^{-2(a^2+b^2)}$$

(beachte, dass $a \geq b$ im Integrationsgebiet). Dies liefert dann

$$\langle d(1,2) \rangle \leq \mathcal{N} \int_0^\infty da \int_0^a db \int_0^{\sqrt{ab}} dc \frac{a-b}{a} e^{-2(a^2+b^2)}.$$

Die Integration über c ergibt \sqrt{ab} , d.h. man hat

$$\begin{aligned} \langle d(1,2) \rangle &\leq \mathcal{N} \int_0^\infty da \int_0^a db \sqrt{ab} \left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{-2(a^2+b^2)} \\ &= \mathcal{N} \int_0^\infty da \int_0^a db \sqrt{ab} e^{-2(a^2+b^2)} - \mathcal{N} \int_0^\infty da \int_0^a db \sqrt{\frac{b^3}{a}} e^{-2(a^2+b^2)}. \end{aligned}$$

Den Betrag kann man dann abschätzen durch

$$\begin{aligned} |\langle d(1,2) \rangle| &\leq \mathcal{N} \int_0^\infty da \sqrt{a} e^{-2a^2} \int_0^\infty db \sqrt{b} e^{-2b^2} + \mathcal{N} \int_0^\infty da \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2a^2} \int_0^\infty db \sqrt{b^3} e^{-2b^2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

wobei man verwendet, dass

$$\int_0^\infty x^n e^{-kx^2} dx < \infty \quad \text{für } n > -1.$$

Dies zeigt die Endlichkeit von $\langle d(1,2) \rangle$.

Das nächste Beispiel illustriert einen Effekt von gebrochener spektraler Invarianz:

Beispiel 4.3.3 Für

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(siehe Beispiel 4.2.2) hatten wir folgenden Ausdruck für den allgemeinsten Diracoperator:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & \bar{m} & 0 \\ \bar{m} & 0 & 0 & \mu \\ m & 0 & 0 & \bar{\mu} \\ 0 & \bar{\mu} & \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad m, \mu \in \mathbb{C},$$

und eine der beiden komplexen Zahlen (sagen wir m) kann reell positiv gewählt werden. Für den Abstand hatten wir

$$d(1, 2) = \frac{1}{\max\{m, |\mu|\}},$$

und die Eigenwerte des Diracoperators waren gegeben durch

$$\lambda_{\pm}^2 = m^2 + |\mu|^2 \pm |m^2 + \mu^2|$$

und hängen von der Phase von μ ab. Daher ist es unmöglich, den Abstand durch die Eigenwerte auszudrücken. Wir suchen daher ein Maß, das nur invariant unter Diffeomorphismen ist – was in diesem Fall trivial ist – aber nicht unter allen unitären Abbildungen auf \mathcal{H} . Eine solche diffeomorphismusinvariante Zustandssumme für $S(D) = \frac{t}{4} \operatorname{tr} D^2 = t(m^2 + |\mu|^2)$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{N} \int_0^{\infty} dm \int d\mu d\bar{\mu} e^{-t(m^2 + |\mu|^2)} \\ &= 2\pi\mathcal{N} \int_0^{\infty} dm dr r e^{-t(m^2 + r^2)} \\ &= 2\pi\mathcal{N} \int_0^{\infty} dm dr e^{-W(m,r)}, \end{aligned}$$

wobei $W(m, r) := t(m^2 + r^2) - \ln r$. Benutzt man die Abschätzung

$$\sqrt{m^4 + |\mu|^4 + 2m^2|\mu|^2 \cos(2\varphi)} \geq \sqrt{(m^2 - |\mu|^2)^2},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \lambda_-^2 &= m^2 + |\mu|^2 - \sqrt{m^4 + |\mu|^4 + 2m^2|\mu|^2 \cos(2\varphi)} \\ &\leq m^2 + |\mu|^2 - \sqrt{(m^2 - |\mu|^2)^2} \\ &= 2 \min\{m^2, |\mu|^2\} \end{aligned}$$

und damit

$$|\lambda_+| - |\lambda_-| \geq \sqrt{2}|m - |\mu||.$$

Mit diesem Resultat kann man dann berechnen, dass

$$\begin{aligned} \langle |\lambda_+| - |\lambda_-| \rangle &\geq \sqrt{2} \langle |m - |\mu|| \rangle \\ &= \mathcal{N} \int_0^\infty dm dr r |m - r| e^{-t(m^2+r^2)} \\ &= \frac{\mathcal{N}}{4t^2} > 0 \end{aligned}$$

gilt. Dies zeigt, dass der Vakuumerwartungswert der beiden quantisierten Eigenwerte unterschiedlich ist. Das sollte aber in einer spektral invarianten Quantentheorie nicht der Fall sein, wegen der folgenden Überlegung (die in den Vorbemerkungen schon diskutiert wurde): Falls

$$S(D^2) = \sum_i P(\lambda_i^2)$$

spektral invariant ist und falls das Polynom $P(\lambda)$ ein eindeutiges Extremum hat, so sind alle Eigenwerte von D^2 an diesem Extremalpunkt von S identisch (dies folgt direkt aus spektraler Invarianz, da der Grundzustand insbesondere unter Permutation der Eigenwerte invariant sein muss). Aus der kleinen Rechnung oben folgt, dass die unitären Transformationen, die diesen Permutationen entsprechen, in der quantisierten Theorie nicht so dargestellt sind, dass der Grundzustand invariant darunter ist. Klarerweise lässt sich die Verletzung der spektralen Invarianz auf die Tatsache zurückführen, dass das verwendete Maß nicht spektral invariant ist. Dies lässt sich durch einen Blick auf die effektive Wirkung klären

$$W(m, r) := t(m^2 + r^2) - \ln r,$$

deren Minimum nicht bei $r = 0$, sondern bei $r = \frac{1}{\sqrt{2t}}$ liegt.

Das nächste Beispiel behandelt das Tripel, das in schon in Beispiel 4.2.4 betrachtet wurde.

Beispiel 4.3.4

$$q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diracoperatoren sind gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 & \bar{m}_1 \\ 0 & 0 & m_2 & \bar{m}_2 \\ \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{C},$$

und Repräsentanten der Äquivalenzklassen sind charakterisiert durch

$$m_1 = \frac{\rho}{\sqrt{2}}, \quad m_2 = \frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{i\psi}.$$

Die Eigenwerte von D in dieser Parametrisierung sind

$$\lambda_+^2 = \frac{\rho^2}{2} \left(2 + \sqrt{2 + 2 \cos(2\psi)} \right), \quad (4.25)$$

$$\lambda_-^2 = \frac{\rho^2}{2} \left(2 - \sqrt{2 + 2 \cos(2\psi)} \right). \quad (4.26)$$

Für

$$S(D) = \frac{t}{4} \text{tr } D^2 = t\rho^2$$

kann man dann zum Beispiel berechnen

$$\langle \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \rangle = \left\langle \rho^2 \sqrt{2 + 2 \cos(2\psi)} \right\rangle \quad (4.27)$$

mit dem (offensichtlichen) Maß

$$\int d\rho \int d\psi. \quad (4.28)$$

Das Einzige, was hier zu beachten ist, ist das Integrationsgebiet für die Variable ψ , welches $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist, gemäß Theorem 4.2.2 . Für diesen Fall erhält man

$$\int_0^\infty d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \rho^2 \sqrt{2 + 2 \cos(2\psi)} e^{-t\rho^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4t^3}} > 0, \quad (4.29)$$

also tritt spontane Brechung der spektralen Invarianz auch in diesem Beispiel auf. Allerdings ist hier der Unterschied, dass das verwendete Maß spektral invariant ist: Ein spektral invariantes Maß (für vier unabhängige Eigenwerte von D) muss von der Form

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4$$

sein, wobei f total symmetrisch bezüglich Permutationen seiner Argumente ist. In unserem Fall sind die Eigenwerte des Diracoperators nicht unabhängig ($\lambda_1 = -\lambda_2, \lambda_3 = -\lambda_4$), d.h. man kann als invariantes Maß wählen

$$f(\lambda_1, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_3$$

(im Integral laufen λ_1 und λ_3 dann von 0 bis ∞). Um Invarianz von (4.28) zu zeigen, beweisen wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 4.3.2 *Hat die Funktion f die Eigenschaften $|f(\lambda_+, \lambda_-)| = |f(\lambda_-, \lambda_+)| \quad \forall \lambda_+, \lambda_-$ und $f(\lambda_+, \lambda_-) \geq 0$ falls $\lambda_+ \geq \lambda_-$, dann ist der Ausdruck $\int_0^\infty d\lambda_+ \int_0^{\lambda_+} d\lambda_- f(\lambda_+, \lambda_-)$ spektral invariant.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung (die Symmetrie von $|f|$) ist der Ausdruck

$$\int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\infty} d\lambda_- |f(\lambda_+, \lambda_-)|$$

spektral invariant. Zerlegt man das Integrationsgebiet gemäß

$$\int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\infty} d\lambda_- = \int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\lambda_+} d\lambda_- + \int_0^{\infty} d\lambda_- \int_0^{\lambda_-} d\lambda_+,$$

so erhält man

$$\int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\infty} d\lambda_- |f(\lambda_+, \lambda_-)| = \int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\lambda_+} d\lambda_- |f(\lambda_+, \lambda_-)| + \int_0^{\infty} d\lambda_- \int_0^{\lambda_-} d\lambda_+ |f(\lambda_+, \lambda_-)|.$$

Nach Umbenennen $\lambda_+ \leftrightarrow \lambda_-$ und Verwenden der Symmetrie von $|f|$ sieht man, dass die beiden Terme auf der rechten Seite gleich sind und daher ist

$$\int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\infty} d\lambda_- |f(\lambda_+, \lambda_-)| = 2 \int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\lambda_+} d\lambda_- |f(\lambda_+, \lambda_-)|.$$

Verwendet man nun noch die Eigenschaft $|f(\lambda_+, \lambda_-)| = f(\lambda_+, \lambda_-) \forall \lambda_+ \geq \lambda_-$, so sieht man, dass

$$\int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\lambda_+} d\lambda_- f(\lambda_+, \lambda_-) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\lambda_+ \int_0^{\infty} d\lambda_- |f(\lambda_+, \lambda_-)|$$

tatsächlich spektral invariant ist. □

Wir wollen nun überprüfen, ob das Maß (4.28) die Voraussetzungen von Lemma 4.3.2 erfüllt. Summiert man hierzu (4.25) und (4.26), so erhält man

$$\begin{aligned} \lambda_+^2 + \lambda_-^2 &= 2\rho^2 \\ \Rightarrow \rho &= \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_+^2 + \lambda_-^2)}. \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Ausdrücke ist

$$\begin{aligned} \lambda_+^2 - \lambda_-^2 &= \rho^2 \sqrt{2 + 2 \cos(2\psi)} \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_+^2 + \lambda_-^2) \sqrt{2 + 2 \cos(2\psi)} \\ \Rightarrow \cos(2\psi) &= 2 \left(\frac{\lambda_+^2 - \lambda_-^2}{\lambda_+^2 + \lambda_-^2} \right)^2 - 1 \\ \Rightarrow \psi &= \frac{1}{2} \arccos \left(2 \left(\frac{\lambda_+^2 - \lambda_-^2}{\lambda_+^2 + \lambda_-^2} \right)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Im Folgenden setzen wir $x := \lambda_+, y := \lambda_-$, um die Notation etwas zu erleichtern. Man hat dann

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}, \\ \psi &= \frac{1}{2} \arccos \left(2 \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Das Maß transformiert sich gemäß

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ \Rightarrow d\rho d\psi &= \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}_{=: J(x,y)} dx dy. \end{aligned}$$

Berechnet man J , so erhält man

$$J(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{2 \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2} \left[1 - \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 \right]}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sign}(x^2 - y^2).$$

Wie man sieht, hat J die in Lemma 4.3.2 geforderten Eigenschaften und somit ist das Integral

$$\int_0^\infty d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi = \int_0^\infty d\lambda_+ \int_0^{\lambda_+} d\lambda_- J(\lambda_+, \lambda_-)$$

spektral invariant. Im vorliegenden Beispiel tritt also ein offensichtlicher Verlust spektraler Invarianz beim Übergang von der klassischen zur quantisierten Theorie auf.

4.4 Diskussion

In diesem Kapitel ist das Thema der Quantisierung endlicher spektraler Tripel nur teilweise erschlossen. Tatsächlich haben wir nur “einige Punkte zu zwei Punkten” (und Narhalla-marsch, dies ist nämlich ein beliebtes Mainzer Wortspiel) behandelt. Von einem solchen Spielzeug-Spielzeugmodell sollte man natürlich nicht mehr als eine unvollständige Illustration der Problematik erwarten.

Insbesondere mag der eine oder andere Leser (vielleicht sogar der dritte ;-)) die “üblichen” Resultate zur Plancklänge vermissen, d.h. eine minimale messbare Entfernung von (den) zwei Punkten. Tatsächlich konnten wir in unseren Beispielen ein solches Resultat nicht erzielen. Für das einfachste Beispiel 4.2.1 bzw. 4.3.1, in dem D nur einen Eigenwert hat, erhält man (mit dem Gaußschen Maß) für den Erwartungswert des Abstands

$$\langle 0 | d(1, 2) | 0 \rangle = \mathcal{N} \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-t\lambda^2}.$$

Für einen beliebigen Zustand

$$|f\rangle = f(\lambda)|0\rangle, \quad \langle f|f\rangle = \mathcal{N} \int_0^\infty d\lambda |f|^2 e^{-t\lambda^2} = 1$$

mit einer passenden Funktion f , kann man dann leicht verifizieren, dass der Erwartungswert

$$\langle f | d(1, 2) | f \rangle = \mathcal{N} \int_0^\infty d\lambda \frac{|f|^2}{\lambda} e^{-t\lambda^2}$$

nach unten nur durch Null beschränkt ist: Betrachte zum Beispiel $|f(\lambda)|^2 = \frac{e^{t\lambda_0^2}}{\mathcal{N}} \delta(\lambda - \lambda_0)$, womit dann $\langle f | d(1, 2) | f \rangle = \frac{1}{\lambda_0}$ ist.

Jedoch scheinen solche Argumente nicht unbedingt überzeugend, vor allem wenn man sich das ernsthafte Problem der fehlenden “Zeit” vor Augen führt. Im Moment sind Modelle, die auf Algebren der Form

$$\mathcal{A} = C_0^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}_F$$

basieren, in Planung (wobei \mathcal{A}_F eine endlichdimensionale C^* -Algebra ist, während $C_0^\infty(\mathbb{R})$ als Funktionen auf der Zeitachse interpretiert wird). Es wird auch das letztendliche Ziel dieses Projektes sein, genau solche Modelle zu betrachten, weil dann z.B. möglich sein wird, sinnvolle klassische kanonische Transformationen zu definieren, unter denen ein diffeomorphismusinvariantes Maß für die Quantisierung dann invariant sein müsste, und so weiter. Des Weiteren wäre es ein sehr lohnenswertes Ziel, die reale (4-dimensionale) Raumzeit durch ein solches Modell zu approximieren, oder genauer: Den “Raum” durch \mathcal{A}_F . Aber dies alles ist Zukunftsmusik.

Das bedeutet nun natürlich nicht, dass es vergeblich ist, solche auf endliche Tripel basierende Modelle zu studieren. Zunächst ist hier natürlich die Lösung der technischen Probleme eine Voraussetzung für die Behandlung komplizierterer Modelle, bei denen die Zeit eingeschlossen ist. Außerdem kann man, auch wenn die “physikalische” Interpretation unserer Modelle zu Beginn nicht klar ist, auch nicht behaupten, dass sie überhaupt nicht existiert. Stellenweise zeigen sich einige bemerkenswerte Effekte, für die es sich lohnt, eine gewisse

Intuition zu entwickeln. Zum Beispiel haben wir gesehen, dass in dem Fall, in dem D nur einen unabhängigen Eigenwert hat, der Erwartungswert des Abstandes (der beiden Punkte) divergiert, aber endlich bleibt, falls D mehrere Eigenwerte hat. In dem hier präsentierten Beispiel scheint das mit der spontanen Brechung der spektralen Invarianz zu tun zu haben, aber in anderen Beispielen ist das nicht der Fall: Es gibt z.B. “distanzartige” Observablen der Form $d = \frac{1}{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$, wo λ_1, λ_2 die beiden unabhängigen Eigenwerte des Diracoperators bezeichnen – wenn es hier nur einen Eigenwert gäbe, wäre d gerade das Inverse dieses Werts – und der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\langle d \rangle = \mathcal{N} \int_0^\infty \int_0^\infty d\lambda_1 d\lambda_2 \frac{1}{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}} e^{-t(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}.$$

In [Pas01] ist dieser *endliche* Erwartungswert berechnet.

Letzten Endes kann die Betrachtung unserer Modelle für sich genommen von Interesse sein, weil sie auf ungewöhnliche Matrixmodelle führt. In diesem Zusammenhang ist es z.B. möglicherweise interessant, die verschiedenen Kontinuumslimites der Systeme zu betrachten. Natürlich kann man hier erstens N -Punkt Räume betrachten und eventuell den Kontinuumslimes $N \rightarrow \infty$, was einem Gitter entspricht. Zweitens kann man für echt nicht-kommutative Beispiele der Art

$$A = \bigoplus_{i=1}^N M_{n_i}(\mathbb{C})$$

Limites $n_i \rightarrow \infty$ betrachten. Eine dritte Möglichkeit ist, einen oder mehrere Einträge in der Schnittform q gegen Unendlich zu schicken. All das erfordert eine systematische Konstruktion des Pfadintegrals für möglichst allgemeine endliche spektrale Tripel. Dies ist ebenfalls eines der zukünftigen Projekte.

Kapitel 5

Das Zeitproblem in NCG

THIS THING ALL THINGS DEVOURS;
BIRDS, BEASTS, TREES, FLOWERS;
GNAWS IRON, BITES STEEL;
GRINDS HARD STONES TO MEAL;
SLAYS KING, RUINS TOWN,
AND BEATS HIGH MOUNTAIN DOWN.
(J.R.R. TOLKIEN, "THE HOBBIT")

Das nun folgende Kapitel ist in der vorliegenden Arbeit das am wenigsten ausgereifteste, die damit zusammenhängenden Projekte (z.B. [GBHKP03]) sind auch noch nicht abgeschlossen. Dennoch sollen hier einige Teilergebnisse präsentiert werden, welche in sich schlüssige Aussagen liefern oder zumindest als Beispiele oder Ausgangspunkte für weitere Überlegungen dienen können.

5.1 Problemstellung

Unter dem "Zeitproblem in der Nichtkommutativen Geometrie" versteht man die Tatsache, dass es im üblichen Rahmen der spektralen Tripel nicht möglich ist, Spinmannigfaltigkeiten mit echt Semi-Riemannscher Signatur der Metrik zu beschreiben.

Dies soll zunächst kurz am Beispiel des \mathbb{R}^4 erläutert werden.

Beispiel 5.1.1 *Betrachtet man den Diracoperator $\mathcal{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$ auf dem \mathbb{R}^4 mit Metrik $g^{\mu\nu}$, so erhält man für $\mathcal{D}^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, wenn man die Cliffordrelation $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} 1$ verwendet. Die Eigenfunktionen von \mathcal{D}^2 sind*

$$\psi_{\omega, \vec{k}}(x_0, \vec{x}) = \psi_0 e^{\omega x_0 + \vec{k} \cdot \vec{x}}.$$

Für $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ gehören die $\psi_{\omega, \vec{k}}$ zum Eigenwert $\omega^2 + \vec{k}^2$, für die Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ zum Eigenwert $\omega^2 - \vec{k}^2$. Man erkennt nun zwei Dinge: Im Falle der Lorentzmetrik ist jeder Eigenwert unendlich entartet, dies macht die in Axiom (A1), S. 14, beschriebene Behandlung der Dimension unmöglich. Ein ähnliches Problem taucht durch die Nichtkompaktheit des \mathbb{R}^4 auch im Fall Riemannscher Metrik auf: ω und \vec{k} können dann kontinuierliche Werte annehmen und somit sind die Eigenwerte auch hier unendlich entartet. Insgesamt sieht man also, dass zwei Dinge wesentlich in die Beschreibung einer Mannigfaltigkeit M durch spektrale Tripel eingehen, nämlich die Kompaktheit von M und die echt Riemannsche Signatur der Metrik.

Des Weiteren sieht man an der Abstandsformel (3.2), S. 63,

$$d(\phi, \psi) = \sup\{|\phi(a) - \psi(a)| : a \in A, \|[D, a]\| \leq 1\}, \quad (5.1)$$

dass man hier stets nur positive Abstände von Punkten im Formalismus der spektralen Tripel beschreiben kann.

5.2 Lösungsansätze

[Str01] definiert Semi-Riemannsche spektrale Tripel, beschränkt sich aber auf den kompakten Fall (das entspricht unitalen Algebren). In [Mor02] wird eine Verallgemeinerung der Distanzformel diskutiert unter besonderer Berücksichtigung global hyperbolischer Mannigfaltigkeiten.

Der Zugang [KP01] untersucht ebenfalls global-hyperbolische Raumzeiten, hier wird die Mannigfaltigkeit in raumartige Hyperflächen zerlegt (“Foliation”) und diese Hyperflächen, deren Metrik Riemannsche Signatur trägt, werden durch spektrale Tripel beschrieben. Diesen Zugang werden wir im vorliegenden Kapitel genauer untersuchen (die so entstandenen Objekte werden “spektrale Quadrupel” genannt, doch dazu wird an geeigneter Stelle noch mehr gesagt). Die dazu teilweise nötige Vorarbeit wird in Abschnitt 5.3 geliefert, wo die Tabellen für die Relationen der Strukturabbildungen eines spektralen Tripels (vgl. Axiom (A7) Seite 14) für allgemeine Signatur der Metrik berechnet werden. In Abschnitt 5.4 wird zunächst die Motivation zur Konstruktion eines spektralen Quadrupels gegeben und die daraus entstehende Axiomatik wird vorgestellt. Ausgehend von dieser Axiomatik wird dann in Abschnitt 5.5 eine Klassifizierung diskreter spektraler Quadrupel durchgeführt (in Analogie zu der Klassifizierung diskreter spektraler Tripel in Kapitel 2). Diese Klassifizierung wird anhand eines einfachen Beispiels diskutiert, und auch das Problem der Äquivalenz von spektralen Quadrupeln sowie die Quantisierung wird in diesem Zusammenhang angesprochen.

5.3 Ein erster Schritt

Die Strukturabbildungen D , J und Γ eines geraden, reellen spektralen Tripels erfüllen diverse Kommutator- bzw. Antikommutatorrelationen, welche aus der Darstellungstheorie von Cliffordalgebren stammen. Für kommutative Geometrien (d.h. **Riemannsche** Spinmannigfaltigkeiten, der zugehörige Hilbertraum ist der Raum der quadratintegrierbaren Spinoren über der Mannigfaltigkeit) liefert eine Spinstruktur lokal eine treue, irreduzible Darstellung der Cliffordalgebra über dem Kotangententialraum (dies lässt sich als Definition der Spinstruktur auffassen, siehe hierzu die Diskussion in [GBVF01] Kapitel 9, hier wird zum Beispiel auch gezeigt, dass eine Abbildung J mit den gewünschten Eigenschaften existiert). Ebenso sind die Wirkungen von D und Γ lokal definiert. Es genügen also lokale Betrachtungen, um die Axiomatik der Vorzeichen von $J^2 = \pm 1$, $JD = \pm DJ$ und von $J\Gamma = \pm \Gamma J$ zu bestimmen. Wir betrachten also nur $V = T_p^*(M)$ für festes $p \in M$ mit zugehöriger Metrik $g(p)$ - genauer gesagt eigentlich g^{-1} , da aber g und g^{-1} die gleiche Signatur tragen, ist dies irrelevant. Des Weiteren identifizieren wir J in seiner globalen und lokalen Form. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Relationen der Strukturabbildungen definiert werden müssen, um allgemeine Signatur der Metrik zu beschreiben.

Die Berechnung der Tabellen orientiert sich am Beweis von Theorem 9.20 in [GBVF01] S. 406, mit dem Unterschied, dass (wie eben schon angedeutet) die Signatur der Metrik und der zugehörigen Cliffordalgebren nun beliebig ist.

Betrachten wir zunächst die Vorzeichen von $J^2 = \pm 1$ und formulieren unser Ergebnis als Theorem:

Theorem 5.3.1 *Sei $(V, g_{k,l})$ ein reeller Vektorraum mit Metrik g der Signatur (k, l) , d.h. $\dim_{\mathbb{R}} V = k + l$ und*

$$g_{k,l}(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_{k+l} y_{k+l}.$$

Definiere nun

$$\mathbb{Cl}^{(+)}(V) := \begin{cases} \mathbb{Cl}(V) & k+l \text{ gerade,} \\ \mathbb{Cl}^+(V) & k+l \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(Die definierende Relation der Cliffordalgebra ist hierbei $uv + vu = 2g(u, v)$ für Vektoren $u, v \in V$.)

Dies hat den Sinn, dass man sich so auf einfache Matrixalgebren beschränkt, da für den Fall $k+l$ ungerade die komplexifizierte Cliffordalgebra eine direkte Summe von zwei Matrixalgebren ist. Sei $\rho : \mathbb{Cl}^{(+)}(V) \rightarrow \text{End } W$ (W : \mathbb{C} -Vektorraum) eine irreduzible treue Darstellung von $\mathbb{Cl}^{(+)}(V)$ und sei $J : W \rightarrow W$ ein antilinearer Operator mit $J^2 = \pm 1$ und $J\rho(a)J^{-1} = \rho(\chi(\bar{a})) \quad \forall a \in \mathbb{Cl}^{(+)}(V)$ (χ ist die Graduierungsabbildung der Cliffordalgebra). Dann gilt

$$\begin{aligned} J^2 &= +1 && \text{falls } l - k = 0, 1, 2, 7 \pmod{8}, \\ J^2 &= -1 && \text{falls } l - k = 3, 4, 5, 6 \pmod{8}. \end{aligned}$$

BEWEIS:

Die Idee des Beweises ist folgende: Wir suchen eine Vektorraumbasis $\{e_i\}$ von V mit der Eigenschaft $J\rho(e_i)J^{-1} = \rho(e_i)$. Dann betrachten wir eine *endliche* Untergruppe von $\text{Cl}^{(+)}(V)$ (welche aus den Basiselementen e_i und deren Produkten besteht), welche (vermittels der Darstellung ρ) ebenfalls irreduzibel auf W wirkt (diese Idee geht auf Boya und Byrd [BB99] zurück). Für diese endliche Gruppe kann man den Typ der Darstellung berechnen. Dann benutzt man die Tatsache, dass eine irreduzible Darstellung nicht gleichzeitig reellen oder quaternionischen Typs sein kann, um das Vorzeichen von $J^2 = \pm 1$ zu bestimmen, weil J den Raum W gerade mit einer reellen oder quaternionischen Struktur ausstattet.

Es werden im Folgenden diverse Fakten über Darstellungen verwendet, die aus dem Buch [BtD85] stammen: Sei V ein komplexer Vektorraum, der eine Darstellung einer kompakten Liegruppe G trägt. Dann heißt V von reellem (bzw. quaternionischem) Typ, falls V eine reelle (bzw. quaternionische) Struktur erlaubt, d.h. eine antilineare äquivariante Abbildung $J : V \rightarrow V$ mit $J^2 = 1$ (reeller Fall) oder $J^2 = -1$ (quaternionischer Fall). Ist V (zusätzlich) eine irreduzible, selbstkonjugierte Darstellung, dann ist V entweder von reellem oder quaternionischem Typ (aber nicht beides). Man beachte, dass die Abbildung J , welche eine reelle oder quaternionische Struktur liefert, die Darstellung automatisch selbstkonjugiert macht. Für endliche Gruppen kann der Typ der Darstellung mittels der folgenden Formel berechnet werden:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \rho(g^2) = \begin{cases} +1 & \iff \rho \text{ reellen Typs,} \\ 0 & \iff \rho \text{ komplexen Typs,} \\ -1 & \iff \rho \text{ quaternionischen Typs.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Betrachten wir zunächst den Fall $k+l$ gerade. Sei $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+l}\}$ eine ONB von V . In $\text{Cl}(V)$ erfüllen die Basiselemente die Relation

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} 2\delta_{ij} & i = 1, \dots, k; \\ -2\delta_{ij} & i = k+1, \dots, k+l. \end{cases}$$

Definiere $\{f_1, \dots, f_{k+l}\}$ durch $f_j := ie_j$. Dies liefert die Relationen

$$f_i f_j + f_j f_i = \begin{cases} -2\delta_{ij} & i = 1, \dots, k \\ 2\delta_{ij} & i = k+1, \dots, k+l \end{cases}$$

und $J\rho(f_i)J^{-1} = \rho(\chi(\bar{f}_i)) = \rho(\chi(-f_i)) = \rho(f_i)$.

Setze $n = k+l = 2m$. Von der allgemeinen Theorie der Cliffordalgebren wissen wir, dass die Dimension von W gleich 2^m ist. Betrachte die Cliffordgruppe, welche von den Elementen f_j erzeugt ist

$$CL(n) := \{\pm f_{k_1} \dots f_{k_p} \in \text{Cl}(V) \mid 1 \leq p \leq n, 0 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n, f_0 := 1\}.$$

Die Ordnung von $CL(n)$ ist 2^{n+1} . Man überprüft leicht, dass die Einschränkung der Darstellung ρ auf die Gruppe $CL(n)$ ebenfalls irreduzibel ist. Benutze nun Formel (5.2), um den Typ der Darstellung zu berechnen:

$$\frac{1}{|CL(n)|} \sum_{g \in CL(n)} \operatorname{tr} \rho(g^2) = \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{f_{k_1} \dots f_{k_p}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) \quad (5.3)$$

Nennen wir nun N die Zahl der f 's mit Quadrat $+1$ in einem gegebenen Element von $CL(n)$. Die Summe in Gleichung (5.3) kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$\sum_{f_{k_1} \dots f_{k_p}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) = \sum_{q=0}^l \left(\sum_{\substack{f_{k_1} \dots f_{k_p} \\ N(f_{k_1} \dots f_{k_p}) = q}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) \right)$$

Betrachten wir nun die Terme für verschiedenes N einzeln:

$$\sum_{\substack{f_{k_1} \dots f_{k_p} \\ N(f_{k_1} \dots f_{k_p}) = 0}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) = \operatorname{tr} \rho(1) + \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} \rho(f_i^2) + \sum_{i < j}^k \operatorname{tr} \rho((f_i f_j)^2) + \dots + \operatorname{tr} \rho((f_1 \dots f_k)^2)$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \rho(1) &= \dim W = 2^m, \\ \operatorname{tr} \rho(f_i^2) &= \operatorname{tr} \rho(-1) = -2^m, \\ \text{allgemein } (f_1 \dots f_q)^2 &= (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f_{k_1} \dots f_{k_p} \\ N(f_{k_1} \dots f_{k_p}) = 0}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) &= 2^m \left(1 - k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \binom{k}{4} - \dots \right) \\ &= 2^m \left(1 - \binom{k}{2} + \binom{k}{4} - \dots \right) - 2^m \left(\binom{k}{1} - \binom{k}{3} + \dots \right) \\ &= 2^m (\operatorname{Re} (1+i)^k - \operatorname{Im} (1+i)^k). \end{aligned}$$

Die nächsten Terme in der Summe sind

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{f_{k_1} \dots f_{k_p} \\ N(f_{k_1} \dots f_{k_p}) = 1}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) &= \sum_{i=1}^l \operatorname{tr} \rho(f_{k+i}^2) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k \operatorname{tr} \rho((f_j f_{k+i})^2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^l \sum_{p < q=1}^k \operatorname{tr} \rho((f_p f_q f_{k+i})^2) + \dots \\
&= l \left(\operatorname{tr} \rho(f_{k+1}^2) + \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} \rho((f_i f_{k+1})^2) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p < q=1}^k \operatorname{tr} \rho(f_p f_q f_{k+1})^2 + \dots \right) \\
&= 2^{m_l} \left(1 + k - \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots \right) \\
&= 2^{m_l} \left[\left(1 - \binom{k}{2} + \binom{k}{4} - \dots \right) + \left(k - \binom{k}{3} + \binom{k}{5} - \dots \right) \right] \\
&= 2^{m_l} (\operatorname{Re} (1 + i)^k + \operatorname{Im} (1 + i)^k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{f_{k_1} \dots f_{k_p} \\ N(f_{k_1} \dots f_{k_p}) = 2}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) &= \sum_{i < j=1}^l \operatorname{tr} \rho((f_{k+i} f_{k+j})^2) + \sum_{i < j=1}^l \sum_{m=1}^k \operatorname{tr} \rho((f_m f_{k+i} f_{k+j})^2) + \dots \\
&= 2^m \binom{l}{2} \left(-1 + k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} - \dots \right) \\
&= 2^m \binom{l}{2} \left[\left(-1 + \binom{k}{2} - \binom{k}{4} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(k - \binom{k}{3} + \binom{k}{5} - \dots \right) \right] \\
&= 2^m \binom{l}{2} (-\operatorname{Re} (1 + i)^k + \operatorname{Im} (1 + i)^k),
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{f_{k_1} \dots f_{k_p} \\ N(f_{k_1} \dots f_{k_p}) = 3}} \operatorname{tr} \rho((f_{k_1} \dots f_{k_p})^2) = 2^m \binom{l}{3} (-\operatorname{Re} (1 + i)^k - \operatorname{Im} (1 + i)^k).$$

Man sieht, dass die Vorzeichen von Real- und Imaginärteil mit Periode 2 wechseln, d.h. für

N und $N + 2$ sind die Vorzeichen umgekehrt. Man erhält dann als Endresultat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|CL(n)|} \sum_{g \in CL(n)} \operatorname{tr} \rho(g^2) &= \frac{1}{2^m} \left[\operatorname{Re} (1+i)^k \left(1+l - \binom{l}{2} - \binom{l}{3} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Im} (1+i)^k \left(-1+l + \binom{l}{2} - \binom{l}{3} - \dots \right) \right] \\
&= \frac{1}{2^m} \{ \operatorname{Re} (1+i)^k [\operatorname{Re} (1+i)^l + \operatorname{Im} (1+i)^l] \\
&\quad + \operatorname{Im} (1+i)^k [-\operatorname{Re} (1+i)^l + \operatorname{Im} (1+i)^l] \} \\
&= \cos \frac{(l-k)\pi}{4} + \sin \frac{(l-k)\pi}{4} = \begin{cases} 1 & (l-k) = 0, 2 \pmod{8}, \\ -1 & (l-k) = 4, 6 \pmod{8}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für den Fall $k+l$ ungerade, $n = k+l = 2m+1$ sollen hier nur die wesentlichen Rechenschritte skizziert werden, da die Rechnung weitestgehend mit der obigen übereinstimmt. $\rho: \mathbb{C}l^+(V) \rightarrow \operatorname{End} W$ irreduzibel und treu $\Rightarrow \dim W = 2^m$.

Zur Erinnerung:

$$J\rho(a)J^{-1} = \rho(\chi(\bar{a})) \quad \forall a \in \mathbb{C}l^+(V).$$

Sei $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+l}\}$ eine ONB von V , d.h.

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} \delta_{ij} & i = 1, \dots, k; \\ -\delta_{ij} & i = k+1, \dots, k+l. \end{cases}$$

$\{e_i\}$ reelle Basis $\Rightarrow J\rho(e_i e_j)J^{-1} = \rho(e_i e_j)$. Betrachte

$$CL^+(n) := \{\pm 1, \pm e_i e_j, \pm e_i e_j e_p e_q, \dots\}.$$

Die Ordnung von $CL^+(n)$ ist 2^n und $\rho|_{CL^+(n)}$ ist irreduzibel. Berechne den Typ von ρ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|CL^+(n)|} \sum_{g \in CL^+(n)} \operatorname{tr} \rho(g^2) &= \frac{2}{2^n} \sum_{e_{p_1} \dots e_{p_q}} \operatorname{tr} \rho((e_{p_1} \dots e_{p_q})^2) \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{t=0}^l \sum_{\substack{e_{p_1} \dots e_{p_q} \\ N(e_{p_1} \dots e_{p_q}) = t}} \operatorname{tr} \rho((e_{p_1} \dots e_{p_q})^2),
\end{aligned}$$

wobei N die Zahl der e 's mit Quadrat -1 bezeichnet. Die Terme einzeln:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{e_{p_1} \dots e_{p_q} \\ N(e_{p_1} \dots e_{p_q}) = 0}} \operatorname{tr} \rho((e_{p_1} \dots e_{p_q})^2) &= \operatorname{tr} \rho(1) + \sum_{i < j=1}^k \operatorname{tr} \rho((e_i e_j)^2) + \sum \operatorname{tr} \rho((e_i e_j e_s e_t)^2) + \dots \\
&= 2^m \left(1 - \binom{k}{2} + \binom{k}{4} - \dots \right) \\
&= 2^m \operatorname{Re} (1+i)^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{e_{p_1} \dots e_{p_q} \\ N(e_{p_1} \dots e_{p_q}) = 1}} \operatorname{tr} \rho((e_{p_1} \dots e_{p_q})^2) &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} \rho((e_i e_{j+k})^2) + \sum_{j=1}^l \sum_{m < n < r=1}^k \operatorname{tr} \rho(e_m e_n e_r e_{j+k})^2 + \dots \\
&= l \cdot 2^m \left(k - \binom{k}{3} + \binom{k}{5} - \dots \right) \\
&= 2^m \binom{l}{1} \operatorname{Im} (1 + i)^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{e_{p_1} \dots e_{p_q} \\ N(e_{p_1} \dots e_{p_q}) = 2}} \operatorname{tr} \rho((e_{p_1} \dots e_{p_q})^2) &= \sum_{i < j=1}^l \operatorname{tr} \rho((e_{i+k} e_{j+k})^2) + \sum_{i < j=1}^l \sum_{m < n=1}^k \operatorname{tr} \rho(e_m e_n e_{i+k} e_{j+k})^2 + \dots \\
&= \binom{l}{2} 2^m \left(-1 + \binom{k}{2} - \binom{k}{4} + \dots \right) \\
&= 2^m \binom{l}{2} (-\operatorname{Re} (1 + i)^k).
\end{aligned}$$

Alle Terme aufsummieren liefert

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|CL^+(n)|} \sum_{g \in CL^+(n)} \operatorname{tr} \rho(g^2) &= \frac{2^m}{2^{2m}} \left\{ \operatorname{Re} (1 + i)^k \left[\binom{l}{0} - \binom{l}{2} + \binom{l}{4} - \dots \right] \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Im} (1 + i)^k \left[\binom{l}{1} - \binom{l}{3} + \binom{l}{5} - \dots \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2^m} [\operatorname{Re} (1 + i)^k \operatorname{Re} (1 + i)^l + \operatorname{Im} (1 + i)^k \operatorname{Im} (1 + i)^l] \\
&= \frac{1}{2^m} \sqrt{2}^{k+l} \left(\operatorname{Re} \exp \frac{ik\pi}{4} \operatorname{Re} \exp \frac{il\pi}{4} + \operatorname{Im} \exp \frac{ik\pi}{4} \operatorname{Im} \exp \frac{il\pi}{4} \right) \\
&= \sqrt{2} \cos \frac{(k-l)\pi}{4} \\
&= \begin{cases} 1 & (l-k) = 1, 7 \pmod{8}, \\ -1 & (l-k) = 3, 5 \pmod{8}, \end{cases}
\end{aligned}$$

womit das Theorem bewiesen wäre. \square

Betrachten wir nun die Vorzeichen von $JD = \pm DJ$.

Erster Fall: $g_{k,l}$ mit $k+l$ gerade.

D hat lokal die Form $D = -i\rho(\vartheta^\alpha) \nabla_{E_\alpha}^S$, wobei $\{\vartheta^\alpha\}$ eine lokale ONB von 1-Formen ist und $\{E_\alpha\}$ die duale Basis von Vektorfeldern, die exakte Form des Spinzusammenhangs $\nabla_{E_\alpha}^S$

wird hier nicht benötigt, die Definition und einen Ausdruck in lokalen Koordinaten findet man in [GBVF01] Kap. 9.3, hier insbesondere Formeln (9.14a/b) und Exercise 9.6. Für $\{\rho(\vartheta^\alpha)\}$ haben wir die Relationen

$$\rho(\vartheta^\alpha)\rho(\vartheta^\beta) + \rho(\vartheta^\beta)\rho(\vartheta^\alpha) = \begin{cases} 2\delta_{\alpha\beta} & \text{für } \alpha = 1, \dots, k; \\ -2\delta_{\alpha\beta} & \text{für } \alpha = k+1, \dots, k+l. \end{cases}$$

J kommutiert mit dem Spinzusammenhang ∇^S und erfüllt die Relation $J\rho(\vartheta^\alpha)J^{-1} = -\rho(\vartheta^\alpha)$. Dies impliziert

$$JD = J(-i\rho(\vartheta^\alpha)\nabla_{E_\alpha}^S) = iJ\rho(\vartheta^\alpha)\nabla_{E_\alpha}^S = -i\rho(\vartheta^\alpha)J\nabla_{E_\alpha}^S = -i\rho(\vartheta^\alpha)\nabla_{E_\alpha}^S J = DJ.$$

Also erhalten wir, dass $JD = DJ$ unabhängig von der Signatur (k, l) der Metrik ist, vorausgesetzt $k+l$ ist gerade.

Zweiter Fall: $k+l$ ungerade.

Hier müssen wir zunächst das Chiralitätselement Γ der Cliffordalgebra bestimmen. Betrachte hierzu V mit ONB $\{e_1, \dots, e_{k+l}\}$, $\dim V = k+l = 2m+1$.

In $\mathbb{C}\ell(V)$ ist

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} 2\delta_{ij} & \text{für } i = 1, \dots, k; \\ -2\delta_{ij} & \text{für } i = k+1, \dots, k+l; \end{cases}$$

und daher

$$\begin{aligned} (e_1 \dots e_{k+l})^2 &= e_1 \dots e_{k+l} e_1 \dots e_{k+l} \\ &= (-1)^{\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}} \underbrace{e_1^2 e_2^2 \dots e_{k+l}^2}_{=(-1)^l} \\ &= (-1)^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}}. \end{aligned}$$

Setze

$$\Gamma := \pm i^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}} e_1 \dots e_{k+l} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^2 = 1.$$

Verwende das $+$ Zeichen im Folgenden und schreibe

$$\Gamma := i^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}} \vartheta^1 \dots \vartheta^{k+l}.$$

Bis hier ist die Rechnung allgemein, d.h. auch gültig für den Fall $k+l$ gerade. Ist nun $k+l$ explizit ungerade, so kann man " $D = -i\rho(\vartheta^\alpha)\nabla_{E_\alpha}^S$ " streng genommen gar nicht schreiben, da hier die Darstellung eines Elements von ungeradem Grad auftaucht. Die korrekte Definition des Diracoperators erfordert die erweiterte Wirkung (siehe [GBVF01] (9.2), S.372), welche gegeben ist durch

$$D = -i\rho(\vartheta^\alpha \Gamma)\nabla_{E_\alpha}^S.$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
JD &= J(-i\rho(\vartheta^\alpha \Gamma) \nabla_{E_\alpha}^S) \\
&= iJ\rho(\vartheta^\alpha \vartheta^1 \dots \vartheta^{k+l}) i^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}} \nabla_{E_\alpha}^S \\
&= i \cdot (-i)^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}} \rho(\vartheta^\alpha \vartheta^1 \dots \vartheta^{k+l}) J \nabla_{E_\alpha}^S \\
&= (-1)(-i)(-1)^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}} i^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}} \rho(\vartheta^\alpha \vartheta^1 \dots \vartheta^{k+l}) \nabla_{E_\alpha}^S J \\
&= (-1)^{\frac{(k+l)(k+l-1)+2l}{2}+1} DJ.
\end{aligned}$$

Man kann nun berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}((k+l)(k+l-1)+2l)+1 \pmod{2} &= \frac{1}{2}(k^2+2kl+l^2-k+l)+1 \pmod{2} \\
&= \frac{(l-k)^2}{2} + \frac{l-k}{2} + 1 \pmod{2}.
\end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1 \pmod{2} = \frac{(x+4)^2}{2} + \frac{x+4}{2} + 1 \pmod{2},$$

und dies impliziert

$$\frac{(l-k)^2}{2} + \frac{l-k}{2} + 1 \pmod{2} = \begin{cases} 0 & \text{für } l-k = 1 \pmod{4}, \\ 1 & \text{für } l-k = 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Kombiniert mit den Ergebnissen für $(l-k)$ gerade ($\iff k+l$ gerade) liefert dies

$(l-k) \pmod{8}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$JD = \pm DJ$	+	+	+	-	+	+	+	-

Die Berechnung von $J\Gamma = \pm\Gamma J$ ist einfach, wenn das Volumenelement Γ gegeben ist (für den Fall $k+l$ gerade):

$$\begin{aligned}
\Gamma &= i^{\frac{1}{2}((k+l)(k+l-1)+2l)} e_1 \dots e_{k+l} \\
\Rightarrow J\Gamma &= J i^{\frac{1}{2}((k+l)(k+l-1)+2l)} e_1 \dots e_{k+l} \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}((k+l)(k+l-1)+2l)} i^{\frac{1}{2}((k+l)(k+l-1)+2l)} e_1 \dots e_{k+l} J \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}((k+l)(k+l-1)+2l)} \Gamma J.
\end{aligned}$$

Nun haben wir wie oben

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}((k+l)(k+l-1)+2l) \pmod{2} &= \frac{(l-k)^2}{2} + \frac{l-k}{2} \pmod{2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } l-k = 0 \pmod{4}, \\ 1 & \text{für } l-k = 2 \pmod{4}, \end{cases}
\end{aligned}$$

womit man schließlich erhält

$(l-k) \pmod{8}$	0	2	4	6
$J\Gamma = \pm\Gamma J$	+	-	+	-

5.4 Spektrale Quadrupel

5.4.1 Motivation: Tripel + Zeit = Quadrupel

Wie schon in Kapitel 1 erwähnt, liefern spektrale Tripel eine effektive und elegante Möglichkeit zur Beschreibung *Riemannscher* Spinmannigfaltigkeiten, es ist jedoch aus physikalischer Sicht natürlich wünschenswert, das Konzept der spektralen Tripel auf Räume mit Lorentzmetrik [KP01] zu erweitern. Ein weiteres Manko der spektralen Tripel besteht darin, dass sie keine Möglichkeit bieten, Randbedingungen festzusetzen, die für die Dynamik des Gravitationsfeldes (welche durch die spektrale Wirkung gegeben ist) nötig sind. In diesem Fall fehlen also sauber definierte Lösungen der Feldgleichungen und damit ist auch eine Quantisierung des Systems nicht (ad hoc) möglich.

Wir stellen also zwei Anforderungen an unser Modell: Es sollte Lorentzmetrik erfassen und es sollte den Einbau von Randbedingungen ermöglichen. Daher werden wir uns hier zunächst auf global hyperbolische Mannigfaltigkeiten beschränken, welche (als topologischer Raum) immer in der Form $\Sigma \times \mathbb{R}$ geschrieben werden können, wobei \mathbb{R} die gewählte Zeitachse ist. Aus technischen Gründen werden wir im Folgenden annehmen, dass der "Raum" Σ kompakt ist. Man erhält also eine Familie von *raumartigen* Hyperflächen Σ_t (parametrisiert durch die Zeit t), die alle homöomorph zu Σ sind. Da die Σ_t eine Spinstruktur von der Raumzeit erben, lässt sich ihre Spingeometrie (jeweils) vollständig durch ein spektrales Tripel $(\mathcal{H}, \pi_t(\mathcal{A}), D_t, \gamma_t, J)$ beschreiben. Man beachte, dass \mathcal{H} und J keinen Index t tragen, während das für die Darstellung π der Algebra $\mathcal{A} = C^\infty(\Sigma_t) \cong C^\infty(\Sigma)$ der Fall ist. Man kann dies begründen, indem man alle Hilberträume $\mathcal{H}_t = L^2(\Sigma_t, S)$ (wobei S die Einschränkung des Spinorbündels auf Σ_t bezeichnet, welches - topologisch - unabhängig von der Zeit ist), folgendermaßen identifiziert: Man betrachtet zunächst die Lösungen der Diracgleichung

$$D\Psi = 0,$$

welche auch in Hamiltonscher Form

$$H(t)\Psi(t) = i\partial_t\Psi(t) \tag{5.4}$$

geschrieben werden kann. Dann konstruiert man Isomorphismen zwischen den Hilberträumen, die zu unterschiedlichen Zeiten gehören, indem man Spinoren genau dann identifiziert, wenn sie (als Einschränkung auf Σ_t) zur selben Lösung der Diracgleichung gehören. Mit anderen Worten verwendet man die Zeitentwicklungsoperatoren $U_H(t_0, t)$, welche zum Hamiltonoperator H gehören. Definiert man

$$U(t_0, t) : \mathcal{H}_{t_0} \rightarrow \mathcal{H}_t$$

durch

$$\Psi(t) = U(t_0, t)\Psi(t_0) \tag{5.5}$$

und setzt (5.5) in (5.4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} i\partial_t U_H(t_0, t) &= H(t)U(t_0, t), \\ U_H(t_0, t)^* &= U_H(t_0, t)^{-1} = U_H(t, t_0), \quad U(t, t) = \text{id}. \end{aligned}$$

Der Hilbertraum, mit dem wir arbeiten, ist also der Raum der quadratintegrablen Lösungen der Diracgleichung, d.h. der Phasenraum für die Spinoren. Man beachte, dass dieser Raum auch als Einteilchen-Unterraum des quantisierten Fermionfeldes aufgefasst werden kann. (Vorausgesetzt, dass es nur an klassische externe Felder gekoppelt ist. Wir werden uns hier jedoch auf die Wechselwirkung mit dem gravitativen Hintergrundfeld beschränken.) Tatsächlich ist die ursprüngliche Idee zu den spektralen Quadrupeln bei dieser eben beschriebenen physikalischen Interpretation entstanden, als “Einteilchen-Näherung” des quantisierten Fermionfeldes.

Aus den Axiomen spektraler Tripel für die raumartigen Hyperflächen Σ_t , welche nun durch $\pi_t(\mathcal{A}) = U_H(t_0, t)\pi_0(\mathcal{A})U_H(t, t_0)$ mit einer “Randbedingung” π_0 gegeben sind, lässt sich nur die Einschränkung der Metrik auf die Hyperflächen rekonstruieren. Es stellt sich jedoch heraus, dass zu einer (zumindest lokal) vollständigen Rekonstruktion der Metrik nur ein weiterer Operator zu dem Datensatz des spektralen Tripels hinzugefügt werden muss, nämlich das Analogon zu γ_0 in der Dirac-Theorie. Daher auch der Name “Quadrupel”. Die detaillierte Diskussion dieses Punktes findet man in [KP01].

5.4.2 Die Axiome für spektrale Quadrupel

Wir betrachten nun die Axiome für spektrale Quadrupel in ihrer “minimalen” Version, siehe wiederum [KP01] für ausführlichere Erläuterungen. “Minimal” bezieht sich hier auf die Tatsache, dass die Zeit tatsächlich durch \mathbb{R} parametrisiert wird, in einer allgemeinen Beschreibung könnte stattdessen ein beliebiger Gruppoid auftauchen.

Definition 5.4.1 *Ein (minimales) spektrales Quadrupel $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \mathcal{H}, H_{\mathbb{R}}, J, \gamma_{\mathbb{R}}, E_{\mathbb{R}})$ zur Raumzeitdimension n besteht aus folgenden Daten:*

- einer Familie von Algebren $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, welche auf dem Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt sind,
- einem antiunitären Operator J ,
- zu jeder Algebra \mathcal{A}_t der Familie $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ drei Operatoren $E(t), \gamma(t), H(t)$.

Diese Strukturen erfüllen folgende Bedingungen:

1. **Zeitentwicklung.** *Jeweils zwei Algebren $\mathcal{A}_{t_0}, \mathcal{A}_{t_1}$ der Familie $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ sind zueinander unitär äquivalent mittels eines unitären $U_H(t_0, t_1)$ und kommutieren **nicht** untereinander, $[\mathcal{A}_{t_1}, \mathcal{A}_{t_2 \neq t_1}] \neq 0$. Für jede Algebra $\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}(0)$ ist die Ableitung der*

Abbildung $t \mapsto U(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_t)$ an der Stelle $t = 0$ (bezeichnet mit $iH(t_0)$) kompatibel mit den noch folgenden Forderungen.

2. **Ladungskonjugation.** Der antilineare Operator J kommutiert bzw. antikommutiert (abhängig von n) mit H und erfüllt

$$J^2 = (-1)^{s(n)} \quad (5.6)$$

mit

$$s(n) := \frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4). \quad (5.7)$$

(Dies entspricht der Tabelle für J^2 in Theorem 5.3.1. für $k = 1, l = n - 1$.)
In $0 + 1$ Dimensionen:

$$\{J, H\} = 0. \quad (5.8)$$

3. **Ordnung-1-Bedingung (Dynamik).** Es gilt

$$[[f, H(0)], g^{op}] = 0 \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{A}_0 \quad (5.9)$$

mit $g^{op} = Jg^*J^{-1}$.

4. **Der Zeitvektor.** Zu jeder Algebra der Familie \mathcal{A}_t existiert ein Operator $E_t \equiv E$ (wir werden im Folgenden den Index t weglassen), genannt Zeitvektor, der

$$E^2 = -1, \quad (5.10)$$

$$E^* = -E \quad (5.11)$$

erfüllt sowie die Kompatibilitätsbedingungen 5. und 6. in dieser Definition. E soll mit der Algebra \mathcal{A}_t vertauschen sowie mit der Ladungskonjugation J vertauschen bzw. antivertauschen (in Abhängigkeit von n).

In $0 + 1$ Dimensionen:

$$\{J, E\} = 0. \quad (5.12)$$

5. **Das Volumenelement.** Zu jeder Algebra \mathcal{A}_t existiert ein Operator γ mit

$$\gamma^2 = \pm 1, \quad (5.13)$$

$$\{E, \gamma\} = 0, \quad n \text{ gerade}, \quad (5.14)$$

$$[E, \gamma] = 0, \quad n \text{ ungerade}, \quad (5.15)$$

und

$$\gamma = E \sum_{f \bullet \in \mathcal{A}_t} f_{i_0} [\tilde{D}, f_{i_1}] \cdots [\tilde{D}, f_{i_{n-1}}] \quad \text{für gerade Raumzeitdimension } n, \quad (5.16)$$

$$\gamma = \sum_{f \bullet \in \mathcal{A}_t} f_{i_0} [\tilde{D}, f_{i_1}] \cdots [\tilde{D}, f_{i_{n-1}}] \quad \text{für ungerade Raumzeitdimension } n, \quad (5.17)$$

mit passenden Funktionen f_\bullet , wobei \tilde{D} gegeben ist durch

$$\tilde{D} = \begin{cases} \gamma[iH, \gamma] & \text{für gerade Raumzeitdimension,} \\ iH & \text{für ungerade Raumzeitdimension.} \end{cases} \quad (5.18)$$

6. Geometrie des Raumes.

Für jede Algebra \mathcal{A}_t bilden die Daten $(\mathcal{A}_t, \mathcal{H}, D = [H, E], \gamma, J)$

- ein spektrales Tripel (falls n ungerade),
- ein spektrales Tripel (falls n gerade), wenn man es auf die beiden Eigenräume von E einschränkt.

5.5 Klassifizierung diskreter Quadrupel

Es ist klar, dass man nicht alle spektralen Quadrupel, die zu einer gegebenen Algebra \mathcal{A}_0 gehören, algebraisch erfassen kann. Falls \mathcal{A}_0 jedoch endlichdimensional ist, ist dies möglich, da die spektralen Tripel, welche zu solchen Algebren gehören, vollständig klassifiziert sind ([PS98], [Kra98] und Kapitel 2). Der naheliegende Ausgangspunkt für eine solche Klassifizierung diskreter Quadrupel (das sind solche Quadrupel, deren raumartige Hyperflächen durch diskrete spektrale Tripel beschrieben sind) ist sicher folgender: Man gebe ein (diskretes) spektrales Tripel zum Zeitpunkt $t = 0$ vor. Dann sucht man alle spektralen Quadrupel mit der Eigenschaft, dass ihre Einschränkung auf $t = 0$ zusammen mit dem Diracoperator $D = [H, E]$ mit dem gegebenen Tripel übereinstimmen. Man muss also insbesondere einen Hamiltonoperator H und einen Zeitvektor E finden, so dass die zugehörigen Diracoperatoren die gleichen sind.

Gegeben sei also ein diskretes spektrales Tripel durch (\vec{n}, q_{ij}, D) , wobei $\vec{n} = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$ die Algebra gemäß Gleichung (2.2) Seite 24 charakterisiert. Da die Dimension des Raumes gerade ist, tritt in \mathcal{H} keine Verdoppelung beim Übergang zum spektralen Quadrupel auf (gemäß Bedingung 6 in Definition 5.4.1). Wir suchen nun einen (selbstadjungierten) Operator H und einen (anti-selbstadjungierten) Operator E , so dass

$$[H, E] \stackrel{!}{=} D.$$

Multipliziert man diese Gleichung zunächst von links und dann von rechts mit E , so sieht man, dass E und D antikommutieren müssen:

$$\{D, E\} = DE + ED = 0.$$

Diese Gleichung wird sich als die einzige nichttriviale herausstellen, deren allgemeine Lösung angegeben werden muss, um die diskreten spektralen Quadrupel vollständig zu klassifizieren. Um dies zu sehen, fahren wir zunächst fort: Wie aus den Axiomen ersichtlich, soll E

mit den beiden Darstellungen der Algebra kommutieren. Also muss es (zu jedem festen Zeitpunkt) blockdiagonal sein, wobei Einschränkungen an die Blöcke von den Relationen $E^2 = -1$ und $E^* = -E$ kommen:

$$E : \mathcal{H}_{ij} \rightarrow \mathcal{H}_{ij}, \quad E|_{\mathcal{H}_{ij}} = \text{id} \otimes e_{ij} \otimes \text{id}, \quad e_{ij}^* = -e_{ij}, \quad e_{ij}^2 = -1.$$

Dann kann man aber die verbleibende Freiheit der unitären Äquivalenz von spektralen Tripeln verwenden, d.h. beliebige unitäre Matrizen u_{ij} auf den \mathcal{H}_{ij} 's mit

$$u_{ij} = \overline{u_{ji}},$$

siehe Definition 4.2.1 und die darauf folgende Diskussion, insbesondere die Formeln (4.1) und (4.2). Die Matrizen u_{ii} müssen also reell und orthogonal sein, während für $i < j$ die Matrizen u_{ij} beliebige, unabhängige unitäre Matrizen sind. Da die e_{ij} antiselbstadjungiert sind, kann man diese Freiheit (vollständig!) verwenden, um alle e_{ij} mit $i < j$ zu diagonalisieren, die Einschränkungen der e_{ij} werden weiter unten hergeleitet. Für $i = j$ kann man e_{ii} in Real- und Imaginärteil aufspalten, wobei der Imaginärteil i -mal eine symmetrische Matrix ist. Diese symmetrische Matrix lässt sich mit Hilfe der orthogonalen Matrix u_{ii} diagonalisieren. Da die Eigenwerte alle rein imaginär sind, können die e_{ii} in eine Form gebracht werden, in der alle nichtdiagonalen Elemente reell sind, und dies fixiert dann vollständig die Basis in \mathcal{H} (d.h. es besteht keine Freiheit mehr bezüglich unitärer Äquivalenz). Aber es bleibt noch mehr über E zu sagen: Gemäß Axiom 4 in Definition 5.4.1 muss für $0 + 1$ Dimensionen gelten

$$\{J, E\} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{ij} = -\overline{e_{ji}}.$$

Dies fixiert dann die Komponenten e_{ij} für $i > j$, sobald die entsprechenden Diagonalmatrizen e_{ji} gegeben sind. Insbesondere können wir nun mit der obigen kanonischen Form schließen, dass die Matrizen e_{ii} diagonal sein müssen. Wir erhalten somit die Aussage:

*Bis auf unitäre Äquivalenz sind
alle Komponenten e_{ij} Diagonalmatrizen
mit Einträgen $\pm i$.*

Zusammen mit $\{D, E\} = 0$ ist das alles, was über E gesagt werden kann.

Als letztes der Hamiltonoperator. Er muss die Gleichung $D = HE - EH$ erfüllen, deren allgemeine Lösung

$$H = \frac{1}{2}ED + \Omega_0 \quad \text{mit} \quad [\Omega_0, E] = 0$$

ist. Ω_0 muss jedoch so gewählt werden, dass H noch mit der Ladungskonjugation antikommutiert und (als stärkste Einschränkung) dass die Ordnung-1-Bedingung gültig bleibt. Es

müssen also Lösungen für folgende Gleichungen gefunden werden:

$$H = \frac{1}{2}ED + \Omega_0, \quad (5.19)$$

$$[\Omega_0, E] = 0, \quad (5.20)$$

$$\Omega_0 = \Omega_0^*, \quad (5.21)$$

$$\{H, J\} = 0, \quad (5.22)$$

$$[[a, H], b^{op}] = 0 \quad \forall a, b, \quad (5.23)$$

wobei man noch beachten muss, dass

$$\{E, J\} = 0 \quad \text{und} \quad (5.24)$$

$$[D, J] = 0 \quad (5.25)$$

gilt. Wenn D und E gegeben sind, ist H bis auf die Wahl von Ω_0 festgelegt, wir müssen also die Gleichungen (5.20) - (5.23) als Restriktionen für Ω_0 auffassen:

$$\begin{aligned} (5.19) \text{ in } (5.22) &\Rightarrow \left\{ \frac{1}{2}ED + \Omega_0, J \right\} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \{ED, J\} + \{\Omega_0, J\} = 0. \end{aligned}$$

Nun ist $\{ED, J\} = 0$, weil $[D, J] = 0$ und $\{E, J\} = 0$, wir erhalten also

$$\{\Omega_0, J\} = 0. \quad (5.26)$$

Als Letztes werfen wir noch einen Blick auf die Ordnung-1-Bedingung:

$$(5.19) \text{ in } (5.23) \Rightarrow [[a, \frac{1}{2}ED + \Omega_0], b^{op}] = 0. \quad (5.27)$$

Verwendet man die Tatsache, dass D selbst die Ordnung-1-Bedingung erfüllt und dass E mit den beiden Darstellungen \mathcal{A} und \mathcal{A}^o kommutiert, kann man schließen, dass auch Ω_0 durch die Bedingung

$$[[a, \Omega_0], b^{op}] = 0 \quad (5.28)$$

eingeschränkt ist. Wir erhalten also letztendlich folgende Restriktionen an Ω_0 :

$$[\Omega_0, E] = 0, \quad (5.29)$$

$$\Omega_0 = \Omega_0^*, \quad (5.30)$$

$$\{\Omega_0, J\} = 0, \quad (5.31)$$

$$[[a, \Omega_0], b^{op}] = 0 \quad \forall a, b. \quad (5.32)$$

Die Freiheit, in H einen Term zu addieren, der mit E kommutiert, entspricht der Wahl der zeitartigen Komponente des Spinzusammenhangs im klassischen Fall.

5.5.1 Ein Spielzeugmodell

Zur Veranschaulichung der oben erzielten Resultate soll hier das einfachste Beispiel eines spektralen Quadrupels analysiert werden.

Es (genauer gesagt, das zugehörige spektrale Tripel) ist gegeben durch

$$(\vec{n} = (1, 1), q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D).$$

Die Algebra ist also $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, d.h. die Algebra der Funktionen auf dem 2-Punkt-Raum, und der Hilbertraum ist $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$, mit der Darstellung

$$\mathcal{A} \ni z_1 \oplus z_2 \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Die opposite Algebra ist dargestellt durch

$$\mathcal{A}^o \ni (z_1 \oplus z_2)^o \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}.$$

Die Graduierung γ und die Ladungskonjugation J sind gegeben durch

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ K$$

wobei K den Operator der Komplexkonjugation bezeichnet. Als letztes der Diracoperator. Er ist gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} 0 & m & \bar{m} \\ \bar{m} & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei m eine beliebige komplexe Zahl ist. Man beachte an dieser Stelle, dass man, vom Gesichtspunkt der spektralen Tripel aus betrachtet, die Freiheit einer Phasentransformation $u_{12} = e^{i\varphi}$ in \mathcal{H}_{12} hat (und gleichzeitig $u_{21} = e^{-i\varphi}$ in \mathcal{H}_{21}). In \mathcal{H}_{11} besteht diese Freiheit nicht, da u_{11} reell sein müsste. Gemäß dieser Freiheit kann m immer reell und positiv gewählt werden. Allerdings muss man nun Vorsicht walten lassen: Diese Freiheit besteht (im Allgemeinen) nicht mehr, wenn man sie zur Wahl der kanonischen Form von E benutzt. Verwendet man Connes' Distanzformel (3.2), so erhält man für den Abstand der beiden Punkte $\Psi_{1/2}(z_1 \oplus z_2) := z_{1/2}$

$$d(\Psi_1, \Psi_2) = \frac{1}{|m|}.$$

Jetzt nehmen wir die Zeit dazu: Wir haben in Abschnitt 5.5 gesehen, dass man die Basis des Hilbertraums \mathcal{H} so wählen kann, dass E diagonal ist mit Einträgen $\pm i$. Wir fixieren die Vorzeichen, indem wir die Gleichung

$$\{D, E\} = 0$$

betrachten. Man sieht dann sofort, dass E von folgender Form sein muss:

$$E = \pm \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \pm i\gamma.$$

Das Vorzeichen von E scheint keine Rolle in unseren Überlegungen zu spielen (zumindest haben wir bis jetzt nichts Gegenteiliges gefunden), d.h. wir werden die Konvention

$$E = i\gamma$$

wählen.

Wir sehen jedoch an dieser Stelle, dass die Phasenfreiheit in \mathcal{H}_{12} nicht verwendet werden kann, um in E etwas wegzutransformieren, wir verwenden diese Freiheit also dazu, die Bedingung

$$0 < m \in \mathbb{R}$$

zu erreichen (der Fall $m = 0$ wäre zu trivial). Hat man den Zeitvektor bestimmt, kann man sich nun dem Hamiltonoperator zuwenden: Wie oben hergeleitet, muss er von der Form

$$H = \frac{1}{2}ED + \Omega_0$$

sein, wobei Ω_0 durch die Bedingungen

$$[\Omega_0, E] = 0, \tag{5.33}$$

$$\Omega_0 = \Omega_0^*, \tag{5.34}$$

$$\{\Omega_0, J\} = 0, \tag{5.35}$$

$$[[a, \Omega_0], b^{op}] = 0 \quad \forall a, b, \tag{5.36}$$

eingeschränkt ist. Die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen ist leicht zu berechnen und lautet

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{5.37}$$

Der allgemeinste Hamiltonoperator lautet also

$$H(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & im(t) & im(t) \\ -im(t) & 2\omega(t) & 0 \\ -im(t) & 0 & -2\omega(t) \end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

Betrachten wir nun den zugehörigen Zeitentwicklungsoperator $U(t_0, t)$. Zunächst wiederholen wir kurz die Konstruktion der Lösungen zu der Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t_0, t) = H(t)U(t_0, t) \quad (5.39)$$

(mit der Randbedingung $U(t_0, t_0) = \mathbf{1}$) mittels iterierter Integrale: Integration von Gleichung (5.39) liefert

$$U(t_0, t) = \mathbf{1} - i \int_{t_0}^t H(t_1)U(t_0, t_1)dt_1 \quad (5.40)$$

und natürlich das Gleiche für "frühere Zeiten" $t_1 < t$:

$$U(t_0, t_1) = \mathbf{1} - i \int_{t_0}^{t_1} H(t_2)U(t_0, t_2)dt_2. \quad (5.41)$$

(5.41) in (5.40) \Rightarrow

$$U(t_0, t) = \mathbf{1} - i \int_{t_0}^t H(t_1)dt_1 + (-1)^2 \int_{t_0}^t H(t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_2)U(t_0, t_2)dt_2dt_1.$$

Wiederholt man diese Prozedur, führt das auf die iterierte Lösung

$$U(t_0, t) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1) \dots H(t_n)dt_n \dots dt_1, \quad (5.42)$$

die nichts anderes ist, als der zeitgeordnete Ausdruck

$$U(t_0, t) = \mathbf{T} e^{-i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau)}. \quad (5.43)$$

Wir betrachten den Fall

$$\omega \equiv 0, \quad \frac{dM(t)}{dt} = \frac{1}{2}m(t), \quad M(t_0) = 0,$$

das heißt

$$H(t) = \frac{i}{2}m(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Man stellt zunächst fest, dass Hamiltonoperatoren zu verschiedenen Zeiten kommutieren: $[H(t_1), H(t_2)] = 0$. Dies vereinfacht die iterierten Integrale gemäß folgender Formel:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1) \dots H(t_n)dt_n \dots dt_1 &= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t H(t_1) \dots H(t_n)dt_n \dots dt_1 \\ &= \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^t H(t_1)dt_1 \right)^n \\ &= \frac{1}{n!} i^n M^n(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n. \end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen setzen wir

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann man berechnen, dass $I^2 = -Q$, $I^3 = -IQ = -2I$, $Q^2 = 2Q$ gilt und daher

$$Q^n = 2^{n-1}Q, \quad I^{2n+1} = (-2)^n I. \quad (5.45)$$

Für das relevante Integral erhält man dann

$$\int_{t_0}^t H(t_1) dt_1 = iM(t)I \quad (5.46)$$

und daher hat die Zeitentwicklung die Form

$$\begin{aligned} U(t_0, t) &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} i^n M^n(t) I^n \\ &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} M^{2n}(t) I^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} M^{2n-1}(t) I^{2n-1} \\ &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} M^{2n}(t) (-Q)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} M^{2n+1}(t) I^{2n+1} \\ &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}(t) 2^{n-1} Q + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} M^{2n+1}(t) (-2)^n I \\ &= \mathbf{1} - \frac{Q}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}(t) 2^{n-1} Q + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n M^{2n+1}(t)}{(2n+1)!} I \\ &= \mathbf{1} - \frac{Q}{2} + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}M(t))Q + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}M(t))I. \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.5.2 Diskussion des Beispiels

Man kann anhand des Beispiels 5.5.1 einige fundamentale Fragen erläutern, welche im Zusammenhang der spektralen Quadrupel auftreten.

Zunächst ist es nicht klar, was man unter äquivalenten spektralen Quadrupeln zu verstehen hat, d.h. es fehlt ein exakt definierter Äquivalenzbegriff in Analogie zur Definition 4.2.1 für spektrale Tripel. Die minimale Forderung, die man sicher stellen muss, ist diejenige nach Äquivalenz bezüglich Zeitreparametrisierung: Unterscheiden sich zwei spektrale Quadrupel nur durch ihre "Zeitkoordinate" (d.h. ist das eine durch t und das andere durch $t' = f(t)$, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist, parametrisiert), so sind die beiden Quadrupel äquivalent,

beschreiben also die gleiche Raumzeit. Wie man analog mit Transformationen verfährt, die "Lorentzboost-artig" sind, ist im Moment noch ein offenes Problem.

Betrachten wir hierzu konkret das Beispiel 5.5.1: Man kann die beiden reinen Zustände (also Punkte) über $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ zur Zeit $\tau = 0$ zum Beispiel durch

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen. Des Weiteren kann man die Orbits dieser Vektoren unter der Zeitentwicklung (5.47), die durch H in (5.44) gegeben ist, berechnen. Interessant ist hier jedoch nur folgende Aussage: Angenommen, man führt eine Zeitreparametrisierung $\tau \mapsto \tau'$ durch, die man alternativ auch als $M(\tau) \mapsto M'(\tau)$ auffassen kann. Da Diffeomorphismen invertierbar sind, haben die Funktionen M und M' das gleiche Bild. Die Orbits, welche durch diese beiden Funktionen beschrieben werden, sind also identisch. Dies illustriert unsere obige Behauptung der Äquivalenz der beiden Quadrupel, die durch Zeitreparametrisierung auseinander hervorgehen.

Im Hinblick auf die Quantisierung eines durch ein spektrales Quadrupel gegebenes System ist ein exakter Äquivalenzbegriff unverzichtbar. Man sieht auch, dass unser in 5.5.1 aufgeführtes Beispiel zur Illustrierung des Äquivalenzproblems (bzw. eines Quantisierungsversuchs) etwas zu einfach gewählt ist. Möchte man eine diffeomorphismusinvariante Wirkung zu unserem Hamiltonoperator konstruieren, merkt man, dass dies in dem vereinfachten Fall mit $\Omega_0 = 0$ keinen Sinn macht, da H nur einen unabhängigen (reellen) Freiheitsgrad enthält: Es sei ein eindimensionales dynamisches System gegeben, welches durch die Funktion $x(t)$ und deren erste Zeitableitung $\dot{x}(t)$ beschrieben wird. Angenommen, die Wirkung

$$S(x, \dot{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$$

sei invariant unter beliebigen, differenzierbaren, bijektiven Zeitreparametrisierungen $t \mapsto t'$, d.h.

$$\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) = \left| \frac{\partial t'}{\partial t} \right| \mathcal{L}(x(t'), \dot{x}(t')).$$

Ist dann ein Extremum $x_e(t)$ dieser Wirkung gegeben, so kann dieses durch Zeitreparametrisierung $t \mapsto t'(t)$, bzw. $\tilde{x}_e = x_e(t'(t))$ auf andere Extrema abgebildet werden. In einer Dimension kann man nun zwei beliebige Funktionen x_1, x_2 genau dann auf diese Art aufeinander abbilden, wenn ihre (erste) Zeitableitung nirgends verschwindet (das ist das Theorem über inverse Funktionen). Man kann also sagen, dass lokal, d.h. in Intervallen, die keine Nullstellen von \dot{x} enthalten, jede solche Funktion durch Zeitreparametrisierung erzeugt werden kann. Also:

Die Extrema der obigen Wirkung hängen nur von den Werten der Funktion $x(t)$ an den kritischen Punkten t_c (mit $\dot{x}(t_c) = 0$) ab.

Um ein Beispiel zu nennen: Man kann leicht nachprüfen, dass die Minima der Wirkung

$$S(x, \dot{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2}$$

genau für die Funktionen angenommen wird, welche im Intervall $[t_1, t_2]$ streng monoton wachsen (bzw. fallen).

5.6 Abschließende Bemerkungen zum “Zeitproblem”

Sowohl die allgemeinen Tabellen für die Strukturabbildungen spektraler Tripel (Abschnitt 5.3) als auch das Konzept der spektralen Quadrupel sind als erste Schritte in Richtung einer nichtkommutativen Beschreibung allgemeiner Semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten zu verstehen, wobei an dieser Stelle noch erwähnt werden sollte, dass ein Beweis für die Strukturabbildungen eines spektralen **Quadrupels** im Stil von Abschnitt 5.3 noch aussteht, z.B. sind die Formeln (5.8) oder (5.12) zunächst nur als Arbeitshypothese zu verstehen (anders als Formel (5.6), die aus Theorem 5.3.1 folgt).

Ein Problem in der Art von Abschnitt 4.2, wo es um die Bestimmung äquivalenter Tripel ging, steht für Quadrupel ebenso aus, wie eine systematische Erfassung der Äquivalenzklassen von Tripeln. Allerdings ist das Problem bei den Quadrupeln von fundamentalerer Natur, da man hier noch nicht einmal das prinzipielle Vorgehen kennt.

Kapitel 6

Feynman's Beweis der Maxwellgleichungen und dessen nichtkommutative Verallgemeinerung

UNZÄHLIGE PROBLEME RÜHREN VON DER METHODE HER,
MIT DER WIR SIE ZU LÖSEN VERSUCHEN.
(NICOLÁS GÓMEZ DÁVILA)

Dieses letzte Kapitel verlässt etwas den zentralen Weg der Arbeit, in der es ja hauptsächlich um spektrale Tripel und deren Verallgemeinerungen ging. Der Zusammenhang der Feynman-Thematik mit der Nichtkommutativen Geometrie wird jedoch schnell sichtbar, wenn man die Verallgemeinerung der in den "klassischen" Beweisen verwendeten Relation $[x_i, x_j] = 0$ betrachtet.

1990 veröffentlichte Dyson [Dys90] einen Artikel mit dem Titel "Feynman's Beweis der Maxwellgleichungen" und merkte darin an, dass die ursprüngliche Arbeit von Feynman aus dem Jahr 1948 stammt, diese jedoch unveröffentlicht blieb. In dem Artikel geht es um die Fragestellung, wie man aus den quantenmechanischen Kommutatorrelationen auf die Form der möglichen Wechselwirkung schließen kann. 1992 wurde diese Arbeit von Tanimura [Tan92] auf Relativistik und nichtabelsche Eichtheorie erweitert. Im folgenden Kapitel soll nun untersucht werden, wie Feynman's Argument auf nichtkommutative Konfigurationsräume angewendet werden kann. Hierbei wird nach einer Wiederholung des (ursprünglichen) "Standard"-Beweises, der jedoch hier schon für allgemeinen \mathbb{R}^n formuliert ist, eine alternative Methode mit Derivationsargument vorgestellt, die sich im nichtkommutativen Fall als vorteilhaft erweist.

Die Betrachtung nichtkommutativer Konfigurationsräume ist aus (mindestens) zwei Gründen

sinnvoll: Zum einen können Freiheitsgrade wie Spin oder Isospin den Konfigurationsraum nichtkommutativ machen, zum anderen existieren diverse Modelle, bei denen die Raumzeit selbst als nichtkommutativer Raum mit $[x^\mu, x^\nu] \neq 0$ vorausgesetzt wird. Spin- bzw. Isospin-artige Freiheitsgrade werden in Abschnitt 6.8 behandelt, der Moyal-deformierte \mathbb{R}^n als Beispiel für $[x^\mu, x^\nu] \neq 0$ in den Abschnitten 6.4 bis 6.7. Der Beweis in Abschnitt 6.1 ist eine leicht verallgemeinerte Fassung der in [Tan92] durchgeführten dreidimensionalen Rechnung und ist bezüglich seiner Aussage und seiner Intention weitestgehend selbsterklärend, daher steht er unkommentiert am Anfang des Kapitels. Nähere Erläuterungen folgen dann später. Die Parameter m und \hbar werden in den folgenden Abschnitten gelegentlich 1 gesetzt.

Das vorliegende Kapitel entstand aus einem Projekt in Zusammenarbeit mit Tomas Kopf und Mario Paschke, welches zum Ziel hatte, die versteckten Annahmen in Feynman's Beweis herauszustellen und diese in geometrischer und/oder algebraischer Sprache zu formulieren. [Pas03] ist hierbei die Behandlung des kommutativen Falles (d.h. skalare nichtrelativistische Quantenmechanik) mit besonderer Berücksichtigung **allgemeiner** Konfigurationsräume, in [HKP03] werden nichtkommutative Fälle diskutiert.

6.1 Der "Standard"-Beweis für $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Theorem 6.1.1 *Angenommen, es gilt Folgendes:*

(i) *Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im \mathbb{R}^n mit Position $x_i(t), i = 1, \dots, n$, wobei t die Zeit ist.*

(ii) *Position und Geschwindigkeit $\dot{x}_i(t)$ erfüllen die Relationen*

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (6.1)$$

$$m[x_i, \dot{x}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (6.2)$$

(iii) *Die Bewegung ist gegeben durch die Gleichung*

$$m\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t). \quad (6.3)$$

Dann kann man zeigen:

(i) *Die Kraft lässt sich schreiben als*

$$F_i(x, \dot{x}, t) = E_i(x, t) + \langle B_{ik}(x, t) \dot{x}_k \rangle. \quad (6.4)$$

(ii) *Die Felder $E_i(x, t)$ und $B_{ij}(x, t)$ erfüllen*

$$B_{ij} = -B_{ji}, \quad (6.5)$$

$$\partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki} + \partial_k B_{ij} = 0, \quad (6.6)$$

$$\partial_j E_i - \partial_i E_j = \partial_t B_{ij}. \quad (6.7)$$

Bemerkung 6.1.1 zu Gleichung (6.4): Die Klammern $\langle \rangle$ bezeichnen totale Symmetrisierung von Operator-Produkten (Weylordnung), wie sie u. a. in [Tan92] definiert ist, z.B.

$$\langle x_i \dot{x}_j \rangle := \frac{1}{2}(x_i \dot{x}_j + \dot{x}_j x_i).$$

BEWEIS:

Leitet man (6.2) nach der Zeit ab und verwendet (6.3), so erhält man

$$m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = -[x_i, F_j]. \quad (6.8)$$

Definiert man nun B_{ij} durch

$$m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] =: \frac{i\hbar}{m} B_{ij} \quad (6.9)$$

dann gilt

$$B_{ij} = -B_{ji}$$

und

$$[x_k, B_{ij}] = 0 \quad \forall k$$

(die zweite Gleichung folgt direkt aus der Jacobi-Identität). Ebenfalls aus Jacobi folgt

$$\partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki} + \partial_k B_{ij} = 0. \quad (6.10)$$

Hier haben wir die Tatsache

$$[x_k, B_{ij}] = 0 \Rightarrow B_{ij} = B_{ij}(x, t)$$

verwendet, und man kann für Polynome zeigen, dass

$$[\dot{x}_k, B_{ij}] = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} B_{ij}.$$

Definiere E durch

$$E_j(x, \dot{x}, t) := F_j(x, \dot{x}, t) - \langle B_{jk} \dot{x}_k \rangle$$

und zeige zunächst $[x_k, E_j] = 0$:

$$\begin{aligned} [x_k, E_j] &= [x_k, F_j] - [x_k, \langle B_{jl} \dot{x}_l \rangle] \\ &= -\frac{i\hbar}{m} B_{kj} - [x_k, \dot{x}_l B_{jl}] \quad \text{wegen (6.8), (6.9)} \\ &= -\frac{i\hbar}{m} B_{kj} - \dot{x}_l \underbrace{[x_k, B_{jl}]}_{=0} - \underbrace{[x_k, \dot{x}_l]}_{=\frac{i\hbar}{m} \delta_{kl}} B_{jl} \\ &= -\frac{i\hbar}{m} (B_{kj} + B_{jk}) = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert dann

$$E_j = E_j(x, t)$$

und

$$[\dot{x}_k, E_j] = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} E_j. \quad (6.11)$$

Hier haben wir verwendet, dass $[x_k, \langle B_{jl} \dot{x}_l \rangle] = [x_k, \dot{x}_l B_{jl}]$ gilt, was aus der Tatsache folgt, dass Umordnen von Termen in dem Weyl-geordneten Ausdruck nur Terme erzeugt, die mit den x_k kommutieren.

Es bleibt Gleichung (6.7) zu zeigen, was durch die folgende Rechnung geschieht:

$$\begin{aligned} \partial_j E_i - \partial_i E_j &= -\frac{m}{i\hbar} ([\dot{x}_j, E_i] - [\dot{x}_i, E_j]) \quad \text{wegen (6.11)} \\ &= -\frac{m}{i\hbar} ([\dot{x}_j, F_i] - [\dot{x}_j, \langle B_{ik} \dot{x}_k \rangle] - [\dot{x}_i, F_j] + [\dot{x}_i, \langle B_{jl} \dot{x}_l \rangle]) \\ &= -\frac{m^2}{i\hbar} ([\dot{x}_j, \ddot{x}_i] - [\dot{x}_i, \ddot{x}_j]) + \frac{m}{i\hbar} \langle B_{ik} [\dot{x}_j, \dot{x}_k] + [\dot{x}_j, B_{ik}] \dot{x}_k \rangle \\ &\quad - \frac{m}{i\hbar} \langle B_{jl} [\dot{x}_i, \dot{x}_l] + [\dot{x}_i, B_{jl}] \dot{x}_l \rangle \\ &= -\frac{m^2}{i\hbar} \frac{d}{dt} [\dot{x}_j, \dot{x}_i] + \frac{1}{m} \langle B_{ik} B_{jk} \rangle - \langle \dot{x}_k \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_j} \rangle - \frac{1}{m} \langle B_{jl} B_{il} \rangle + \langle \dot{x}_l \frac{\partial B_{jl}}{\partial x_i} \rangle \\ &= \frac{d}{dt} B_{ij} - \langle \dot{x}_k \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_j} \rangle + \langle \dot{x}_l \frac{\partial B_{jl}}{\partial x_i} \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} B_{ij} + \langle \dot{x}_k \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} \rangle - \langle \dot{x}_k \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_j} \rangle + \langle \dot{x}_l \frac{\partial B_{jl}}{\partial x_i} \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} B_{ij} + \underbrace{\langle \dot{x}_k \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial x_i} \right) \rangle}_{=0 \text{ wegen (6.10)}}. \end{aligned}$$

(Beachte, dass für die totale Zeitableitung die Relation

$$\frac{d}{dt} B_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} B_{ij} + \langle \dot{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k} B_{ij} \rangle$$

verwendet wurde.)

Dies zeigt (6.7). □

Bemerkung 6.1.2 Die Aussage von Theorem 6.1.1 lässt sich auch ohne Weylordnung formulieren. In diesem Fall ist die Kraft gegeben durch

$$F_i(x, \dot{x}, t) = E_i(x, t) + \dot{x}_k B_{ik}(x, t). \quad (6.12)$$

Man muss dann aber die totale Zeitableitung folgendermaßen definieren:

$$\frac{d}{dt}B_{ij} := \frac{\partial}{\partial t}B_{ij} + \dot{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k}B_{ij}. \quad (6.13)$$

Bemerkung 6.1.3 Im Beweis von Gleichung (6.7) haben wir benutzt, dass

$$[\dot{x}_l, \langle \dot{x}_i f(x) \rangle] = \langle [\dot{x}_l, \dot{x}_i f(x)] \rangle. \quad (6.14)$$

Dies kann folgendermaßen gezeigt werden. Beachte zunächst, dass

$$\langle \dot{x}_i f(x) \rangle = \dot{x}_i f(x) + g(x)$$

(mit dem gleichen Argument wie oben: Sortiert man \dot{x}_i nach vorne, erzeugt das nur Terme, die von x abhängen).

Betrachte nun (6.14):

$$\begin{aligned} l.S. &= [\dot{x}_l, \dot{x}_i f(x)] + [\dot{x}_l, g(x)] \\ &= \dot{x}_i [\dot{x}_l, f(x)] + [\dot{x}_l, \dot{x}_i] f(x) - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial g}{\partial x_l} \\ &= -\dot{x}_i \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial x_l} + [\dot{x}_l, \dot{x}_i] f(x) - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial g}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Angenommen, es ist

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_l} (\dot{x}_i f(x)) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \dot{x}_i f(x) \rangle. \quad (6.15)$$

Dann erhält man für die rechte Seite von (6.14)

$$\begin{aligned} r.S. &= \langle \dot{x}_i [\dot{x}_l, f(x)] \rangle + \langle [\dot{x}_l, \dot{x}_i] f(x) \rangle \\ &= \langle \dot{x}_i \left(-\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \rangle + [\dot{x}_l, \dot{x}_i] f(x) \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \dot{x}_i f(x) \rangle + [\dot{x}_l, \dot{x}_i] f(x) \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_l} (\dot{x}_i f(x) + g(x)) + [\dot{x}_l, \dot{x}_i] f(x) \\ &= -\dot{x}_i \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial x_l} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial g}{\partial x_l} + [\dot{x}_l, \dot{x}_i] f(x) \\ &= l.S. \Rightarrow (6.14). \end{aligned}$$

(6.15) kann gezeigt werden, indem man

$$f(x) = \sum_{p_1, \dots, p_n} a_{p_1 \dots p_n} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$$

betrachtet und Induktion nach der jeweiligen Ordnung in jedem Monom durchführt.

Bemerkung 6.1.4 Für $n = 3$ reduziert sich die Aussage des Theorems darauf, dass

$$F_i(x, \dot{x}, t) = E_i(x, t) + \varepsilon_{ijk} \langle \dot{x}_j B_k(x, t) \rangle,$$

bzw. auf

$$F_i(x, \dot{x}, t) = E_i(x, t) + \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k(x, t),$$

wenn man gemäß Bemerkung 6.1.2 ohne Weylordnung argumentiert, und

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0. \end{aligned}$$

Man reproduziert also die Lorentzkraft, die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes und die Faradaygleichung.

Dyson interpretierte Feynman's Ergebnis in dem Sinn, dass die einzigen Felder, die konsistent auf ein (skalares, nichtrelativistisches) quantenmechanisches Teilchen wirken können, Eichfelder sind.

Außerdem merkte er noch zwei Dinge an: Erstens sei es beachtlich, dass eine Lorentzkovariante Theorie (die homogenen Maxwellgleichungen) aus nichtrelativistischen Voraussetzungen folgt. Zweitens benötige man die inhomogenen Maxwellgleichungen nur zur **Definition** der äußeren Quellen, dementsprechend spielen sie in der Argumentation keine Rolle.

Bemerkung 6.1.5 Die erste Frage, die sich nach einer naiven Betrachtung des Feynman Beweises stellt, ist die nach der Bedeutung der Elemente x_i und \dot{x}_j in den Relationen (6.1) und (6.2). Die x_i sind ihrer Interpretation nach sicher als lokale Koordinaten des Konfigurationsraumes $Q = \mathbb{R}^n$ aufzufassen, sie sind also Elemente der Algebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Die Zeitabhängigkeit soll zunächst durch einen Index t angedeutet werden: $C^\infty(\mathbb{R}^n)_t$. Die naheliegende Interpretation der \dot{x}_j als Funktionen auf dem Tangentialraum von Q , d.h. Elemente von $C^\infty(T\mathbb{R}^n)$, ist jedoch falsch, da dies auf $[x_i, \dot{x}_j] = 0$ führen würde. Im Geiste der Quantenmechanik ist es sinnvoll, Folgendes anzunehmen:

- Die Algebren $\mathcal{A}_t := C^\infty(\mathbb{R}^n)_t$ hängen "glatt" von der Zeit t ab und sind jeweils durch punktweise Multiplikation auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ dargestellt (nenne diese Darstellung zunächst $\pi_{\mathcal{A}}$).
- $\dot{\mathcal{A}}_t$ soll die Menge bezeichnen, welche aus allen Elementen

$$\dot{a}_t = \left. \frac{da_{t'}}{dt'} \right|_t, a_{t'} \in \mathcal{A}_{t'},$$

besteht. Diese Elemente sollen ebenfalls auf \mathcal{H} dargestellt sein (wegen $[a, \dot{b}] \neq 0$ also offensichtlich **nicht** durch punktweise Multiplikation von Funktionen). Diese Sichtweise entspricht dem Heisenbergbild: Die Zeitabhängigkeit steckt in den Operatoren (also in den Elementen von \mathcal{A}_t und $\dot{\mathcal{A}}_t$) und nicht in den Zuständen, daher \mathcal{H} ohne Index t .

- Als Drittes sollen auch die Derivationen auf \mathcal{A}_t auf (einem dichten Teilraum von) \mathcal{H} dargestellt sein (diese Darstellung sei mit π_D bezeichnet), und zwar "als Derivationen", d.h. es soll gelten

$$\pi_D(\delta)\pi_{\mathcal{A}}(a)f = \pi_{\mathcal{A}}(\delta a)f + \pi_{\mathcal{A}}(a)\pi_D(\delta)f \quad \forall \delta \in \text{Der}(\mathcal{A}_t), a \in \mathcal{A}_t, f \in \mathcal{H} \quad (6.16)$$

und

$$\pi_D(\delta)f = (\delta f).$$

Die Standard-Derivationen ∂_k , welche durch $\partial_k(x_j) := \delta_{kj}$ definiert sind, sind somit auf \mathcal{H} als anti-selbstadjungierte Operatoren dargestellt. Dies hat den Vorteil, dass man nicht zwischen der Wirkung einer Derivation auf die Algebra oder den Hilbertraum zu unterscheiden braucht. Statt (6.16) kann man also schreiben

$$\delta(af) = (\delta a)f + a\delta f, \quad a \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{H},$$

was schließlich auf

$$[\delta, a] = \delta a$$

führt. Wir werden aus diesem Grund auch im Folgenden die Notationen $\pi_{\mathcal{A}}$ bzw. π_D für die Darstellungen weglassen.

Mit den so gewählten Annahmen wollen wir nun eine alternative Form des Feynman Beweises betrachten, wie schon zu Beginn des Kapitels angekündigt, wobei wir immer \mathcal{A} statt \mathcal{A}_t schreiben werden (analog für die Algebraelemente a statt a_t) und implizit die Zeitabhängigkeit voraussetzen.

6.2 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Derivationsargument

Betrachte $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den Relationen

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (6.17)$$

$$[x_i, \dot{x}_j] \in \mathcal{A}. \quad (6.18)$$

Aus (6.18) folgt:

$$a \mapsto [a, \dot{x}_j] \quad \text{ist eine Derivation auf } \mathcal{A}. \quad (6.19)$$

Jede Derivation auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorfeld auf \mathbb{R}^n und hat daher die Form

$$\delta = \sum_{j=1}^n a_j \partial_j, \quad a_j \in \mathcal{A}. \quad (6.20)$$

Sei nun

$$[x_i, \dot{x}_j] = g_{ij}. \quad (6.21)$$

Es ist $g_{ij} = g_{ji}$ wegen $0 = \frac{d}{dt}[x_i, x_j] = [\dot{x}_i, x_j] + [x_i, \dot{x}_j]$.

$$(6.19) \Rightarrow [a, \dot{x}_j] = a_{jk} \partial_k a.$$

Setze $y := -a_{jk} \partial_k$. Dann gilt

$$[a, y] = -a_{jk} \underbrace{[a, \partial_k]}_{-\partial_k a} = a_{jk} \partial_k a = [a, \dot{x}_j] \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

y und \dot{x}_j können sich also nur durch ein Element des Kommutanten \mathcal{A}' von \mathcal{A} unterscheiden:

$$\dot{x}_j = -a_{jk} \partial_k + a_j \quad \text{mit} \quad a_j \in \mathcal{A}'. \quad (6.22)$$

(6.22) $\Rightarrow [x_i, \dot{x}_j] = -a_{jk} \underbrace{[x_i, \partial_k]}_{-\delta_{ik}} = a_{ji} \stackrel{(6.21)}{=} g_{ij} = g_{ji} \Rightarrow a_{jk} = g_{jk}$ und somit ist

$$\dot{x}_j = -g_{jk} \partial_k + a_j, \quad a_j \in \mathcal{A}'. \quad (6.23)$$

Bemerkung 6.2.1 Man sieht an den Gleichungen (6.21) und (6.23), dass es sinnvoll ist, die Matrix $g = (g_{ij})$ invertierbar anzunehmen. Wäre sie es nicht, so könnte man z.B. den Tangentialraum nicht durch die Geschwindigkeiten aufspannen, d.h. Gleichung (6.23) nicht nach den ∂_k auflösen. Wir werden also im Folgenden g invertierbar voraussetzen.

Man sucht nun den Hamiltonoperator H , der die Zeitevolution liefert, d.h. der

$$\dot{x}_j = i[H, x_j] \quad \forall j \quad (6.24)$$

erfüllt. Mit dem Ansatz

$$H = h_{kl} \partial_k \partial_l + h_k \partial_k + \phi_0$$

gilt dann

$$\begin{aligned} i[H, x_j] &= ih_{kl} \underbrace{[\partial_k \partial_l, x_j]}_{\delta_{kj} \partial_l + \delta_{lj} \partial_k} + ih_j + i[\phi_0, x_j] \\ &= i(h_{jk} + h_{kj}) \partial_k + ih_j + i[\phi_0, x_j]. \end{aligned}$$

Definiert man

$$\begin{aligned} i(h_{jk} + h_{kj}) &:= -g_{jk}, \\ ih_j &:= a_j, \\ \phi_0 &\in \mathcal{A}' \text{ beliebig,} \end{aligned}$$

dann ist (6.24) erfüllt. Also (z.B. mit $h_{jk} := \frac{i}{2}g_{jk}$)

$$H = \frac{i}{2}g_{kl}\partial_k\partial_l - ia_k\partial_k + \phi_0. \quad (6.25)$$

Man kann sich nun fragen, ob es möglich ist, diesen Hamiltonoperator in "bekannterer" Form zu schreiben, z.B. als

$$\tilde{H} = \alpha_{kl}(\partial_k - \beta_k)(\partial_l - \beta_l) + \gamma, \quad (6.26)$$

was dem Hamiltonoperator eines Teilchens im elektromagnetischen Feld entspricht. Es ist genau dann $H = \tilde{H}$, wenn man

$$\begin{aligned} \alpha_{kl} &= \frac{i}{2}g_{kl}, \\ \beta_j &= (g^{-1})_{jk}a_k, \\ \gamma &= \phi_0 + \frac{i}{2}g_{kl}\partial_k((g^{-1})_{lm}a_m) - \frac{i}{2}(g^{-1})_{kl}a_ka_l \end{aligned}$$

wählt. Also statt (6.25) lässt sich auch schreiben

$$\begin{aligned} H &= \frac{i}{2}g_{kl}(\partial_k - (g^{-1})_{km}a_m)(\partial_l - (g^{-1})_{lp}a_p) \\ &\quad + \phi_0 + \frac{i}{2}g_{kl}\partial_k((g^{-1})_{lm}a_m) - \frac{i}{2}(g^{-1})_{kl}a_ka_l. \end{aligned} \quad (6.27)$$

6.3 Vergleich der Ergebnisse von 6.1 und 6.2

Die Frage, die sich natürlich stellt, ist die nach der Verträglichkeit der Ergebnisse von Theorem 6.1.1, hier insbesondere die Formeln (6.5) bis (6.7) und (6.12), und Formel (6.25). Diese soll nun beantwortet werden (wir werden uns auf den Fall ohne Weylordnung beschränken). Zunächst muss man in (6.21), (6.23) und (6.25)

$$g_{ij} := i\delta_{ij}$$

setzen, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten. Für die Inverse gilt dann

$$(g^{-1})_{ij} = -i\delta_{ij},$$

und man erhält für H aus (6.25)

$$H = -\frac{1}{2} \sum_k (\partial_k^2 + 2ia_k \partial_k) + \phi_0. \quad (6.28)$$

Berechne nun \ddot{x}_j mit Hilfe von (6.28) und dem Ausdruck (6.23):

$$\dot{x}_j = -i\partial_j + a_j. \quad (6.29)$$

Das Ergebnis muss dann mit Gleichung (6.12) verglichen werden. Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} \ddot{x}_j &= i[H, \dot{x}_j] \\ &= i[-\frac{1}{2} \sum_k (\partial_k^2 + 2ia_k \partial_k) + \phi_0, -i\partial_j + a_j] \\ &= -\frac{i}{2} \sum_k \partial_k^2 a_j - i \sum_k (\partial_k a_j) \partial_k + i \sum_k (\partial_j a_k) \partial_k + \sum_k a_k (\partial_k a_j) - \partial_j \phi_0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Verwendet man nun die Relation

$$\partial_k (\partial_k a_j) = \partial_k^2 a_j + (\partial_k a_j) \partial_k,$$

so lässt sich \ddot{x}_j schreiben als

$$\ddot{x}_j = \frac{i}{2} \sum_k \partial_k^2 a_j + i \sum_k \partial_k (\partial_j a_k - \partial_k a_j) - i\partial_j \sum_k \partial_k a_k + \sum_k a_k (\partial_k a_j) - \partial_j \phi_0.$$

Wegen (6.29) ist

$$i\partial_k = -\dot{x}_k + a_k$$

und damit

$$\ddot{x}_j = \frac{i}{2} \sum_k \partial_k^2 a_j + \sum_k \dot{x}_k (\partial_k a_j - \partial_j a_k) + \sum_k a_k (\partial_j a_k) - i\partial_j \sum_k \partial_k a_k - \partial_j \phi_0.$$

Setzt man nun

$$E_j := \frac{i}{2} \sum_k \partial_k^2 a_j + \underbrace{\sum_k a_k (\partial_j a_k)}_{= \frac{1}{2} \partial_j \sum_k a_k^2} - i\partial_j \sum_k \partial_k a_k - \partial_j \phi_0,$$

$$B_{jk} := \partial_k a_j - \partial_j a_k,$$

so gilt

$$F_j = \ddot{x}_j = E_j + \dot{x}_k B_{jk},$$

was mit (6.12) übereinstimmt. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} B_{jk} &= -B_{kj}, \\ \partial_i B_{jk} + \partial_k B_{ij} + \partial_j B_{ki} &= 0 \end{aligned}$$

sind offensichtlich erfüllt, es bleibt

$$\partial_i E_j - \partial_j E_i = 0$$

zu zeigen. Hierbei ist eine Subtilität zu beachten. Aus der Definition der totalen Zeitableitung in (6.13) kann man nämlich Relationen herleiten, und zwar folgendermaßen: Es muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_{ij} &= i[H, B_{ij}] \\ \iff \sum_k \dot{x}_k (\partial_k B_{ij}) &= i[H, B_{ij}]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Berechnet man beide Seiten für $B_{ij} = \partial_j a_i - \partial_i a_j$ und $\dot{x}_k = -i\partial_k + a_k$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_k \dot{x}_k (\partial_k B_{ij}) &= -i \sum_k (\partial_k^2 (\partial_j a_i - \partial_i a_j)) - i \sum_k (\partial_k (\partial_j a_i - \partial_i a_j)) \partial_k \\ &\quad + \sum_k a_k (\partial_k (\partial_j a_i - \partial_i a_j)), \\ i[H, B_{ij}] &= -\frac{i}{2} \sum_k (\partial_k^2 (\partial_j a_i - \partial_i a_j)) - i \sum_k (\partial_k (\partial_j a_i - \partial_i a_j)) \partial_k \\ &\quad + \sum_k a_k (\partial_k (\partial_j a_i - \partial_i a_j)). \end{aligned}$$

Somit ist (6.31) äquivalent zu

$$\sum_k \partial_k^2 (\partial_j a_i - \partial_i a_j) = 0. \quad (6.32)$$

Die Komponenten des Feldes B_{ij} müssen also die Laplace-Gleichung erfüllen. Mit (6.32) kann man berechnen, dass

$$\partial_i E_j - \partial_j E_i = 0 \quad (6.33)$$

ist, was die Übereinstimmung der mit den beiden Methoden erzielten Ergebnisse zeigt, bzw. genaugenommen ergibt sich 6.1 als Spezialfall von 6.2, weil 6.2 eine allgemeinere Metrik g_{ij} erlaubt.

Bemerkung 6.3.1 *In Abschnitt 6.2 existieren keine partiellen Zeitableitungen. Daher muss auch auf der rechten Seite von Gleichung (6.33) Null stehen.*

6.4 Moyal-deformierter \mathbb{R}^n in Analogie zum "Standard"-Beweis

Es ist beachtlich, dass Feynman (bzw. Dyson) in seinem Beweis die Relation $[x_i, x_j] = 0$ explizit hingeschrieben hat. Dies legt natürlich eine Verallgemeinerung auf einen "Klassiker" der nichtkommutativen Räume (nämlich den Moyal-deformierten \mathbb{R}^n) nahe.

Theorem 6.4.1 *Angenommen, es gelten die folgenden drei Bedingungen:*

(i) *Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in \mathbb{R}_θ^n mit "Position" $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, wobei t die Zeit ist (als externer Parameter betrachtet).*

(ii) *Position und Geschwindigkeit $\dot{x}_i(t)$ erfüllen die Relationen*

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij}, \quad \theta_{ij} \in \mathbb{C}, \quad (6.34)$$

$$m[x_i, \dot{x}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (6.35)$$

(iii) *Die Bewegung ist gegeben durch*

$$m\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t). \quad (6.36)$$

Dann

(i) *kann F_i geschrieben werden als*

$$F_i(x, \dot{x}, t) = E_i(x, \dot{x}, t) + B_{ij}(x, \dot{x}, t)\dot{x}_j \quad (6.37)$$

(Überraschung!) und

(ii) *die Felder E_i und B_{ij} erfüllen die Relationen*

$$B_{ij} = -B_{ji}, \quad (6.38)$$

$$[x_k, E_i] = 0, \quad (6.39)$$

$$[x_k, B_{ij}] = 0 \quad \forall i, j, k, \quad (6.40)$$

die sich mit der Notation

$$\begin{aligned} \vec{a}_k &:= (\theta_{k1}, \dots, \theta_{kn}, \frac{\hbar}{m}\delta_{k1}, \dots, \frac{\hbar}{m}\delta_{kn}), \\ \vec{\nabla} &:= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

auch in der Form

$$(\vec{a}_k \cdot \vec{\nabla})E_i = 0 \quad \forall k, \quad (6.42)$$

$$(\vec{a}_k \cdot \vec{\nabla})B_{ij} = 0 \quad \forall k \quad (6.43)$$

schreiben lassen.

BEWEIS: Leitet man (6.35) nach der Zeit ab, erhält man

$$m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] + [x_i, F_j] = 0.$$

Definiere B_{ij} durch

$$m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] =: \frac{i\hbar}{m} B_{ij}.$$

Dann folgt direkt aus der Definition und aus der Jacobi-Identität, dass

$$\begin{aligned} B_{ij} &= -B_{ji} \quad \text{und} \\ [x_k, B_{ij}] &= 0. \end{aligned} \tag{6.44}$$

Aus (6.44) kann man nun nicht schließen, dass B_{ij} eine Funktion nur von x und t ist. Stattdessen gilt die folgende Formel für eine allgemeine Funktion der Orte und Geschwindigkeiten:

$$[x_k, f(x, \dot{x})] = \sum_{l=1}^n i\theta_{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k}. \tag{6.45}$$

Aus (6.44), (6.45) folgt, dass

$$\sum_{l=1}^n \theta_{kl} \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\hbar}{m} \frac{\partial B_{ij}}{\partial \dot{x}_k} = 0 \quad \forall k,$$

was mit der Notation von (6.41) in der Form

$$(\vec{a}_k \cdot \vec{\nabla}) B_{ij} = 0 \quad \forall k \tag{6.46}$$

geschrieben werden kann. Setze nun

$$E_j := F_j - B_{jk} \dot{x}_k$$

und berechne den Kommutator mit x_l :

$$\begin{aligned} [x_l, E_j] &= [x_l, F_j] - [x_l, B_{jk} \dot{x}_k] \\ &= \frac{i\hbar}{m} B_{jl} - B_{jk} [x_l, \dot{x}_k] - \underbrace{[x_l, B_{jk}] \dot{x}_k}_{=0} \\ &= \frac{i\hbar}{m} B_{jl} + \frac{i\hbar}{m} B_{lj} = 0. \end{aligned}$$

Aus (6.45) folgt also

$$(\vec{a}_k \cdot \vec{\nabla}) E_j = 0,$$

womit (6.42) gezeigt und der Beweis vollständig wäre. \square

Natürlich ist die Aussage von Theorem 6.4.1 wesentlich schwächer, als die analoge Aussage in Theorem 6.1.1. Die Gleichungen (6.39) und (6.40) sind ja nur eine Verallgemeinerung der Tatsache, dass E_i und B_{ij} Funktionen der x_k sind, d.h. in Theorem 6.4.1 wird keine Aussage darüber gemacht, ob die Felder E_i und B_{ij} irgendwelchen weiteren "Maxwellartigen" Gleichungen genügen. Wir werden in Abschnitt 6.7 sehen, dass die Aussage von Theorem 6.4.1 tatsächlich so schwach ist, dass sie für beliebige Kommutatorrelationen $[x_i, x_j]$ gilt.

Bemerkung 6.4.1 *Betrachte die Lösungen der Gleichungen (6.46) bzw. (6.42): Angenommen*

$$(\vec{a}_k \cdot \vec{\nabla})f = 0. \tag{6.47}$$

Sei \vec{b} ein Vektor orthogonal zu \vec{a}_k , $\vec{b} \cdot \vec{a}_k = 0$, und setzt man $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$, dann ist $f(x, \dot{x}) := w(\vec{b} \cdot \vec{X})$ mit einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion w eine Lösung von (6.47). Diese Lösungen sind konstant in Richtung von \vec{a}_k . Man kann nun die Frage stellen, unter welchen Bedingungen die Gleichung (6.47) Lösungen hat, die nur von den Orten abhängen. Sei also $F = F(x, t)$ eine Lösung von (6.47). Weil $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} = 0$ gilt, haben wir die Relation

$$\sum_{l=1}^n \theta_{kl} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \iff (\vec{\theta}_k \cdot \vec{\nabla}_x)F = 0 \quad \forall k. \tag{6.48}$$

Hier haben wir gesetzt

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_k &= (\theta_{k1}, \dots, \theta_{kn}), \\ \vec{\nabla}_x &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Gleichung (6.48) hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $\det \theta_{kl} = 0$. Ob dies möglich oder sogar automatisch erfüllt ist, hängt von der Dimension (des "Ortsraums") ab: In 2 Dimensionen ist $\det \theta \neq 0$ falls $\theta \neq 0$. In ungeraden Dimensionen haben wir $\det \theta = 0$, was aus $\theta^T = -\theta$ und $\det(-\theta) = (-1)^n \det \theta$ folgt. Man kann also sagen

Beobachtung 6.4.1 *In ungeraden Dimensionen existieren (unabhängig von den Ortskommutatoren) Felder B_{ij} , die nur von x (und t) abhängen und die kompatibel mit $[x_k, B_{ij}] = 0$ sind. In geraden Dimensionen hängt diese Aussage von $\det \theta$ ab ($\det \theta = 0 \Rightarrow \exists$ nichttriviale Lösungen), in 2 Dimensionen ist nur $B_{ij} = 0$ kompatibel.*

Bemerkung 6.4.2 *(bezüglich der Invertierbarkeit von θ .) Falls θ invertierbar ist, lassen sich die partiellen Ableitungen (auf Funktionen der Orte) eindeutig durch Kommutatoren*

ausdrücken. Man hat für $f = f(x, t)$

$$[x_j, f] = i \sum_k \theta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_j (\theta^{-1})_{lj} [x_j, f] &= i \sum_{k,j} (\theta^{-1})_{lj} \theta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} = i \frac{\partial f}{\partial x_l} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_l} &= -i \sum_j (\theta^{-1})_{lj} [x_j, f]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

6.5 Strukturelle Gesichtspunkte

Falls die Algebra \mathcal{A} nichtkommutativ ist, ist es im Allgemeinen nicht mehr möglich (in Analogie zu Gleichung (6.18)) zu fordern, dass der Kommutator von "Funktionen" (d.h. Algebraelementen $a \in \mathcal{A}$) und "Geschwindigkeiten" $\dot{b} \in \dot{\mathcal{A}}$ ein Algebraelement ist. Angenommen, es wäre so. Seien also $a, b \in \mathcal{A}$ und

$$[a, \dot{b}] \in \mathcal{A}.$$

Dann hat man

$$[a, (\dot{b}c)] = [a, b]\dot{c} + b[a, \dot{c}] + [a, \dot{b}]c + \dot{b}[a, c], \quad (6.51)$$

was kein Algebraelement ist, falls nicht \dot{b} selbst in der Algebra liegt oder der Faktor $[a, c]$ verschwindet (d.h. die Algebra kommutativ ist). Man kann jedoch immer noch fordern (als "nächst schwächere" Bedingung), dass Kommutatoren von Elementen des Zentrums $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ mit Zeitableitungen von Algebraelementen in der Algebra liegen:

Axiom 6.5.1 (NC-Unschärfe) *Wir nehmen an, dass*

$$[z, \dot{b}] \in \mathcal{A} \quad \forall z \in \mathcal{Z}, b \in \mathcal{A}. \quad (6.52)$$

Aus Axiom 6.5.1 folgt

Lemma 6.5.1

$$[\mathcal{A}, \dot{\mathcal{Z}}] \subset \mathcal{A}, \quad (6.53)$$

$$[\mathcal{Z}, \dot{\mathcal{Z}}] \subset \mathcal{Z}. \quad (6.54)$$

BEWEIS: Angenommen, es sei $z \in \mathcal{Z}$ und $a \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}[z, a] = 0 \quad \Rightarrow \quad [z, \dot{a}] = [a, \dot{z}] \in \mathcal{A} \quad \text{wegen (6.52).}$$

Dies zeigt die Behauptung $[\mathcal{A}, \dot{\mathcal{Z}}] \subset \mathcal{A}$. Betrachte nun ein weiteres Element $w \in \mathcal{Z}$. Aus der Jacobi-Identität

$$0 = [a, [z, \dot{w}]] + \underbrace{[z, \underbrace{[\dot{w}, a]}_{\in \mathcal{A}}]}_{=0} + \underbrace{[\dot{w}, \underbrace{[a, z]}_{=0}]}_{=0} \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

folgt dann die Aussage $[\mathcal{Z}, \dot{\mathcal{Z}}] \subset \mathcal{Z}$. □

Bemerkung 6.5.1 *Es existieren natürlich "prominente" Beispiele, bei denen das Zentrum der Algebra trivial ist, der Moyal-deformierte \mathbb{R}^2 mit irrationalem θ ist ein solches. Man kann für solche Modelle aber immer noch eine **modifizierte NC-Unschärfe** fordern, indem man die Relation $[x_i, x_k] \in \mathcal{A}$ nur für Generatoren x_i der Algebra annimmt. In diesem Fall wäre dann $[a, b]$ nicht mehr für alle $a, b \in \mathcal{A}$ ein Element der Algebra, analog zu Gleichung (6.51).*

6.6 Moyal-deformierter \mathbb{R}^n mit Derivationsargument

Betrachte als Algebra $\mathcal{A} := \mathbb{R}_\theta^n$, d.h. den Moyal-deformierten \mathbb{R}^n , mit den Relationen

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{6.55}$$

zusammen mit der modifizierten NC-Unschärfe (siehe Bemerkung 6.5.1)

$$[x_i, \dot{x}_j] \in \mathcal{A} \quad \forall i, j. \tag{6.56}$$

Die Algebra sei auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ dargestellt. Ebenfalls seien die Standard-Derivationen $\partial_k(x_j) := \delta_{kj}$ auf \mathcal{A} (als Derivationen) auf (einem dichten Teilraum von) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ dargestellt:

$$\partial_k(af) = (\partial_k a)f + a\partial_k f.$$

(6.56) \Rightarrow

$$a \mapsto [a, \dot{x}_j] \quad \text{ist eine Derivation auf } \mathcal{A}.$$

Jede Derivation auf \mathcal{A} hat die Form

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ a &\mapsto \sum_{i=1}^n c_i \partial_i a + [a, A], \quad c_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), A \in \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{6.57}$$

An dieser Stelle sieht man, dass man zwei Fälle unterscheiden muss, nämlich ob die Matrix $\theta = (\theta_{ij})$ singulär ist oder nicht. Zum Beispiel ergibt sich für invertierbares θ aus

Bemerkung 6.4.2, dass sich alle partiellen Ableitungen in (6.57) durch Algebraelemente ausdrücken lassen (genauer gesagt durch Kommutatoren) und somit jede Derivation eine innere Derivation ist, d.h. von der Form $a \mapsto [a, A]$. Wir betrachten zunächst den Fall eines singulären θ , d.h. einen *partiell kommutativen* Raum. Der "echte" nichtkommutative Raum ergibt sich dann als Spezialfall.

6.6.1 \mathbb{R}_θ^n mit singulärem θ

Betrachte die Algebra $\mathcal{A} = \mathbb{R}_\theta^n$ mit folgenden Relationen:

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, p\}, \quad p < n, \quad (6.58)$$

$$[x_i, x_j] = 0 \quad \text{sonst}, \quad (6.59)$$

$$[x_i, \dot{x}_j] \in \mathcal{A}. \quad (6.60)$$

Die Matrix θ hat also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1p} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ \theta_{p1} & \cdots & \theta_{pp} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Jede antisymmetrische Matrix (vom Rang p) lässt sich (durch orthogonale Transformationen) auf eine solche Form bringen, wobei der nichttriviale $p \times p$ -Block invertierbar ist. Man kann die Form sogar noch weiter festlegen, dies ist aber für die folgenden Überlegungen nicht nötig. Jede Derivation auf \mathcal{A} hat nun dementsprechend die Form

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ a &\mapsto \sum_{k=p+1}^n c_k \partial_k a + [a, A], \quad c_k \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Gelte also

$$[a, \dot{x}_j] = \sum_{k=p+1}^n c_{jk} \partial_k a + [a, A_j].$$

Setzt man $y := -\sum_{k=p+1}^n c_{jk} \partial_k + A_j$, so gilt $[a, y] = [a, \dot{x}_j]$ und somit hat \dot{x}_j die Form

$$\dot{x}_j = -\sum_{k=p+1}^n c_{jk} \partial_k + A_j + \omega_j, \quad c_{jk} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), A_j \in \mathcal{A}, \omega_j \in \mathcal{A}'. \quad (6.61)$$

Bemerkung zum Kommutanten \mathcal{A}' von $\mathcal{A} = \mathbb{R}_\theta^n$:

Es ist klar, dass Operatoren, die von den Elementen des Zentrums von \mathcal{A} erzeugt sind, im Kommutanten von \mathcal{A} liegen. Ebenso kann man leicht nachprüfen, dass die Operatoren

$$k_i := \partial_i + i \sum_{k=1}^p (\theta^{-1})_{ik} x_k \quad \text{für } i \leq p$$

mit allen x_j (und daher mit allen Algebraelementen) kommutieren und somit alle aus den k_i erzeugten Operatoren ebenfalls in \mathcal{A}' liegen.

Aus der Tatsache $\frac{d}{dt}[x_i, x_j] = 0$ folgen Restriktionen an die Elemente A_j :

Es ist $[\dot{x}_i, x_j] = [\dot{x}_j, x_i]$ und daher

$$\begin{aligned} [- \sum_{k=p+1}^n c_{ik} \partial_k + A_i + \omega_i, x_j] &= [- \sum_{k=p+1}^n c_{jk} \partial_k + A_j + \omega_j, x_i] \\ \Rightarrow - \sum_{k=p+1}^n c_{ik} \underbrace{[\partial_k, x_j]}_{\delta_{kj}} + [A_i, x_j] &= - \sum_{k=p+1}^n c_{jk} \underbrace{[\partial_k, x_i]}_{\delta_{ki}} + [A_j, x_i]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Unterscheidet man nun in (6.62) die Fälle (1) $i, j \leq p$, (2) $i \leq p, j > p$, (3) $i, j > p$, so erhält man folgende Restriktionen:

$$[A_i, x_j] = [A_j, x_i] \quad \text{für } i, j \leq p, \quad (6.63)$$

$$[x_i, A_j] = c_{ij} \quad \text{für } i \leq p, j > p, \quad (6.64)$$

$$c_{ij} = c_{ji} \quad \text{für } i, j > p. \quad (6.65)$$

Gesucht ist nun wieder der Hamiltonoperator H mit

$$\dot{x}_j \stackrel{!}{=} i[H, x_j]. \quad (6.66)$$

Mit dem Ansatz

$$H = \sum_{k,l=p+1}^n \alpha_{kl} \partial_k \partial_l + \sum_{k=p+1}^n \beta_k \partial_k + \gamma \quad (6.67)$$

gilt dann

$$\begin{aligned} i[H, x_j] &= i \left[\sum_{k,l=p+1}^n \alpha_{kl} \partial_k \partial_l, x_j \right] + i \left[\sum_{k=p+1}^n \beta_k \partial_k, x_j \right] + i[\gamma, x_j] \\ &= i \sum_{k,l=p+1}^n \alpha_{kl} (\delta_{kj} \partial_l + \delta_{lj} \partial_k) + i \sum_{k,l=p+1}^n [\alpha_{kl}, x_j] \partial_k \partial_l \\ &\quad + i \sum_{k=p+1}^n \beta_k \delta_{kj} + i \sum_{k=p+1}^n [\beta_k, x_j] \partial_k + i[\gamma, x_j]. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Betrachte zwei Fälle.

Fall 1: $j \leq p$

Hier ist $\delta_{kj} = 0$ für $k \geq p+1$, analog δ_{lj} , also lautet (6.66)

$$-\sum_{k=p+1}^n c_{jk} \partial_k + A_j + \omega_j \stackrel{!}{=} i \sum_{k,l=p+1}^n [\alpha_{kl}, x_j] \partial_k \partial_l + i \sum_{k=p+1}^n [\beta_k, x_j] \partial_k + i[\gamma, x_j]. \quad (6.69)$$

Fall 2: $j \geq p+1$. Hier lautet (6.66)

$$\begin{aligned} -\sum_{k=p+1}^n c_{jk} \partial_k + A_j + \omega_j &\stackrel{!}{=} i \sum_{k=p+1}^n (\alpha_{jk} + \alpha_{kj}) \partial_k + i \sum_{k,l=p+1}^n [\alpha_{kl}, x_j] \partial_k \partial_l \\ &\quad + i\beta_j + i \sum_{k=p+1}^n [\beta_k, x_j] \partial_k + i[\gamma, x_j]. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Betrachte nun zunächst den Fall 1 mit $j \leq p$ genauer. Koeffizientenvergleich in (6.69) liefert

$$[\alpha_{kl}, x_j] \stackrel{!}{=} 0 \quad (k \geq p+1), \quad (6.71)$$

$$-c_{jk} \stackrel{!}{=} i[\beta_k, x_j], \quad (6.72)$$

$$A_j + \omega_j \stackrel{!}{=} i[\gamma, x_j]. \quad (6.73)$$

Jedes $\alpha_{kl} \in \mathcal{A}'$ erfüllt (6.71). Zur Lösung von (6.72) machen wir folgenden Ansatz für β_k :

$$\beta_k = \sum_{m=1}^p b_{km} x_m, \quad b_{km} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \quad (6.74)$$

Die Forderung

$$-c_{jk} \stackrel{!}{=} i[\beta_k, x_j]$$

ist dann äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\sum_{m=1}^p b_{km} \theta_{mj} = c_{jk}, \quad (6.75)$$

welches durch

$$b_{kl} = \sum_{j=1}^p c_{jk} (\theta^{-1})_{jl} \quad (6.76)$$

gelöst wird. Zur Lösung von (6.73) setzen wir $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ an (γ_3 werden wir erst später benötigen) und versuchen,

$$i[\gamma_1, x_j] = \omega_j, \quad (6.77)$$

$$i[\gamma_2, x_j] = A_j \quad (6.78)$$

zu erzeugen. Setzt man

$$\gamma_1 := - \sum_{l,m=1}^p \omega_m (\theta^{-1})_{ml} x_l, \quad (6.79)$$

so ist (6.77) erfüllt.

Jetzt zu Gleichung (6.78). Wegen Relation (6.49) lässt sich $i[\gamma_2, x_j]$ schreiben als

$$i[\gamma_2, x_j] = \sum_{k=1}^p \theta_{jk} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_k}, \quad (6.80)$$

also lautet (6.78) nun

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \theta_{jk} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_k} &= A_j \\ \iff \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_m} &= \sum_{j=1}^p (\theta^{-1})_{mj} A_j, \\ \text{kurz: } \vec{\nabla} \gamma_2 &= \theta^{-1} \vec{A}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Gemäß Poincaré-Lemma besitzt (6.81) genau dann eine Lösung, wenn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left((\theta^{-1} \vec{A})_l \right) &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left((\theta^{-1} \vec{A})_k \right) \\ \iff \sum_q (\theta^{-1})_{kq} [x_q, (\theta^{-1} \vec{A})_l] &= \sum_q (\theta^{-1})_{lq} [x_q, (\theta^{-1} \vec{A})_k] \\ \iff \sum_{q,j} (\theta^{-1})_{kq} (\theta^{-1})_{lj} [x_q, A_j] &= \sum_{q,j} (\theta^{-1})_{lq} (\theta^{-1})_{kj} [x_q, A_j] \\ \iff \sum_{q,j} (\theta^{-1})_{lq} (\theta^{-1})_{kj} [x_j, A_q] &= \sum_{q,j} (\theta^{-1})_{lq} (\theta^{-1})_{kj} [x_q, A_j]. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Hier ist die Relation (6.50) bei der ersten Umformung verwendet und bei der letzten Umformung wurden auf der linken Seite j und q umbenannt. Wegen (6.63) ist (6.82) erfüllt, d.h. es existiert eine Lösung von (6.81). Bezeichne diese Lösung als

$$\gamma_2 = \int (\theta^{-1} \vec{A}) \cdot d\vec{s}. \quad (6.83)$$

Wir haben nun also α_{kl}, β_k und γ so bestimmt, dass die Gleichungen (6.71) - (6.73) für $j \leq p$ erfüllt sind. Betrachte nun den Fall 2 mit $j \geq p + 1$. Koeffizientenvergleich in (6.70) liefert

$$[\alpha_{kl}, x_j] \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.84)$$

$$-c_{jk} \stackrel{!}{=} i(\alpha_{jk} + \alpha_{kj}) + i[\beta_k, x_j], \quad (6.85)$$

$$A_j + \omega_j \stackrel{!}{=} i\beta_j + i[\gamma, x_j]. \quad (6.86)$$

Die β_k sind für $k \geq p+1$ schon durch (6.74) und (6.76) festgelegt und erfüllen daher

$$[\beta_k, x_j] = 0 \quad \text{für } j \geq p+1.$$

Wählt man also $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$ mit

$$-c_{jk} = 2i\alpha_{jk} \iff \frac{i}{2}c_{jk} = \alpha_{jk}$$

(die Symmetrie der c_{jk} folgt aus (6.65)), so sind (6.84) und (6.85) erfüllt.

Zu Gleichung (6.86): β_j ist für $j \geq p+1$ gegeben durch (6.74), (6.76):

$$\beta_j = \sum_{m=1}^p b_{jm} x_m = \sum_{m,l=1}^p c_{lj} (\theta^{-1})_{lm} x_m,$$

wobei β_j nur bis auf Elemente des Kommutanten von \mathcal{A} bestimmt ist, d.h.

$$\beta'_j = \beta_j + \Omega_j \quad \text{mit } \Omega_j \in \mathcal{A}' \quad (6.87)$$

erfüllt ebenfalls (6.72). Betrachte die Form von A_j für $j \geq p+1$, die durch (6.64) gegeben ist:

$$[x_i, A_j] = c_{ij} \quad \text{für } j \geq p+1, i \leq p.$$

Wir wissen andererseits bereits, dass für $j \leq p, k \geq p+1$ gilt

$$-c_{jk} = i[\beta_k, x_j],$$

also ist (mit umbenannten Indizes) $c_{ij} = i[x_i, \beta_j]$ und somit

$$[x_i, A_j] = [x_i, i\beta_j] \Rightarrow A_j = i\beta_j + \kappa_j \quad \text{mit } \kappa_j \in \mathcal{A}'.$$

Wählt man nun zunächst $\beta'_j = \beta_j - i\kappa_j$, so ist $A_j = i\beta'_j$. Wählt man des Weiteren

$$\gamma_3 := -i \sum_{k=p+1}^n \omega_k \partial_k, \quad (6.88)$$

so gilt

$$i[\gamma_3, x_j] = \omega_j \quad \text{für } j \geq p+1$$

und

$$[\gamma_3, x_j] = 0 \quad \text{für } j \leq p.$$

Also lautet der gesuchte Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{i}{2} \sum_{k,l=p+1}^n c_{kl} \partial_k \partial_l + \sum_{k=p+1}^n \beta'_k \partial_k + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, & (6.89) \\
 \text{mit } \beta'_k &= \sum_{j,m=1}^p c_{jk} (\theta^{-1})_{jm} x_m - i \kappa_k, \\
 \gamma_1 &= - \sum_{l,m=1}^p \omega_m (\theta^{-1})_{ml} x_l, \\
 \gamma_2 &= \int (\theta^{-1} \vec{A}) \cdot d\vec{s}, \\
 \gamma_3 &= -i \sum_{k=p+1}^n \omega_k \partial_k.
 \end{aligned}$$

Dieser Hamiltonoperator beschreibt nun tatsächlich "neue Physik" auf der Planck-Skala (d.h. wo eine nichtkommutative Struktur der Raumzeit zu erwarten ist, siehe Kapitel 1). Eine Identifizierung der einzelnen Terme mit bekannten Wechselwirkungen ist bisher leider nicht gelungen, womit allerdings von vornherein auch nicht zu rechnen war.

6.6.2 \mathbb{R}_θ^n mit invertierbarem θ

Sei nun θ invertierbar. Wir werden schnell sehen, dass sich dieser Fall als Spezialfall von Abschnitt 6.6.1 herausstellt, was auch klar ist, da man ihn als singuläres θ mit nulldimensionalem Kern (d.h. nulldimensionalem kommutativen Unterraum) interpretieren kann. Wie schon erwähnt, sind alle Derivationen innere Derivationen, d.h. sie sind von der Form

$$\delta(a) = [a, A].$$

Aus der Tatsache, dass $a \mapsto [a, \dot{x}_j]$ eine Derivation ist, folgt die Form

$$\dot{x}_j = A_j + \omega_j, \quad A_j \in \mathcal{A}, \omega_j \in \mathcal{A}'$$

für \dot{x}_j . Somit ist $[x_i, \dot{x}_j] = [x_i, A_j]$ und aus $\frac{d}{dt}[x_i, x_j] = 0$ folgt

$$[x_i, A_j] = [x_j, A_i]. \tag{6.90}$$

Sucht man nun einen Hamiltonoperator H mit

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_j &= i[H, x_j] \\
 \iff A_j + \omega_j &= i[h_1, x_j] + i[h_2, x_j]
 \end{aligned}$$

so lassen sich h_1 und h_2 genau analog zu den Gleichungen (6.77) und (6.78) bestimmen, wobei hier auch mit (6.90) die gleiche Integrabilitätsbedingung wie in (6.63) auftritt.

6.7 Vergleich der Ergebnisse von 6.4 und 6.6

In Analogie zu Abschnitt 6.3 könnte man $\ddot{x}_j = i[H, \dot{x}_j]$ ausrechnen (wobei H und \dot{x}_j durch (6.89) und (6.61) gegeben sind) und dann mit dem Kraftgesetz (6.37) vergleichen. Dies liefert jedoch sehr unübersichtliche Terme und die Identifizierung der Felder E_i und B_{ij} ist schwierig. Stattdessen verwende folgendes Theorem:

Theorem 6.7.1 *Gelte*

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij}(x), \quad (6.91)$$

$$[x_i, \dot{x}_j] = i\delta_{ij}, \quad (6.92)$$

$$\dot{x}_i = i[H, x_i], \quad (6.93)$$

$$F_i = \ddot{x}_i = i[H, \dot{x}_i]. \quad (6.94)$$

Dann existieren E_i, B_{ij} mit

$$\ddot{x}_i = E_i + B_{ij}\dot{x}_j \quad (6.95)$$

und

$$B_{ij} = -B_{ji}, \quad (6.96)$$

$$[x_k, B_{ij}] = 0, \quad (6.97)$$

$$[x_k, E_i] = 0 \quad \forall k, i, j. \quad (6.98)$$

BEWEIS: Definiere B_{ij} durch

$$B_{ij} := -i[\dot{x}_i, \dot{x}_j],$$

dann folgt $[x_k, B_{ij}] = 0$ direkt aus der Jacobi-Identität und aus (6.92). Definiere des Weiteren

$$\begin{aligned} E_i &:= \ddot{x}_i - B_{ij}\dot{x}_j \\ &= i[H, \dot{x}_i] + i[\dot{x}_i, \dot{x}_j]\dot{x}_j. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} -i[x_k, E_i] &= [x_k, [H, \dot{x}_i] + [x_k, [\dot{x}_i, \dot{x}_j]\dot{x}_j] \\ &= -\underbrace{[H, [\dot{x}_i, x_k]]}_{=0} - \underbrace{[\dot{x}_i, [x_k, H]]}_{i\dot{x}_k} + [\dot{x}_i, \dot{x}_j] \underbrace{[x_k, \dot{x}_j]}_{i\delta_{kj}} = 0, \end{aligned}$$

womit das Theorem bewiesen wäre. \square

Es ist beachtlich, dass die konkrete Form der Orts-Kommutatoren im Beweis gar keine Rolle spielt (Gleichung (6.91) wird im Beweis nicht benutzt), d.h. die Aussage des Theorems ist relativ allgemein. Es zeigt auch insbesondere, dass die Form (6.37) des Kraftgesetzes im Wesentlichen schon aus der *Existenz* des Hamiltonoperators folgt, und nicht aus dessen konkreter *Form*. Unter diesem Gesichtspunkt ist die Aussage in Abschnitt 6.6 stärker, da hier die konkrete Form des Hamiltonoperators hergeleitet wird.

6.8 $C^\infty(\mathbb{R}^q) \otimes M_n(\mathbb{C})$

Als letztes Beispiel im Feynman Kontext betrachten wir die Algebra $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^q) \otimes M_n(\mathbb{C})$. Hier ist $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ als die komplexifizierte Algebra der reellen, unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R}^q aufzufassen und das Tensorprodukt ist über \mathbb{C} . \mathcal{A} ist gegeben durch die Generatoren x_i (für $C^\infty(\mathbb{R}^q)$) und T_k (für $M_n(\mathbb{C})$), welche die folgenden Relationen erfüllen:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (6.99)$$

$$[x_i, T_k] = 0, \quad (6.100)$$

$$[T_k, T_l] = if_{klm}T_m, \quad (6.101)$$

wobei f_{klm} die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der $su(n)$ sind. Man kann eine Basis der Liealgebra $su(n)$ so wählen, dass

$$\text{tr}(T_i T_j) = \delta_{ij}. \quad (6.102)$$

In der adjungierten Darstellung

$$\begin{aligned} \text{ad} : su(n) &\rightarrow \text{End } su(n) \\ X &\mapsto \text{ad}_X, \end{aligned}$$

wo

$$\text{ad}_X(Y) := [X, Y]$$

haben wir

$$(C_i)_{jk} := (\text{ad}_{T_i})_{jk} = -if_{ijk},$$

und die Relation (6.102) kann durch die Strukturkonstanten ausgedrückt werden:

$$\sum_{l,m} f_{ilm} f_{jlm} = \delta_{ij}. \quad (6.103)$$

Ein beliebiges Algebraelement ist von der Form

$$a = \sum_{k=0}^n a_k T_k, \quad T_0 := \mathbb{1}, \quad a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^q).$$

Das NC-Unschärfe Axiom $[x_i, \dot{a}] \in \mathcal{A} \forall a \in \mathcal{A}$ zusammen mit Lemma 6.5.1 führt dann auf

$$[x_i, \dot{x}_j] \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \quad (6.104)$$

Das Zentrum von \mathcal{A} ist $C^\infty(\mathbb{R}^q) \otimes \mathbb{1}_{M_n(\mathbb{C})}$, d.h.

$$[x_i, \dot{x}_j] = g_{ij} \mathbb{1} \quad (6.105)$$

mit

$$g_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^q), \quad g_{ij} = g_{ji}. \quad (6.106)$$

Die Symmetrie von g in (6.106) folgt wieder aus

$$0 = \frac{d}{dt}[x_i, x_j] = [\dot{x}_i, x_j] + [x_i, \dot{x}_j] = -g_{ji} + g_{ij}$$

und aus (6.104) kann man schließen:

$$[\dot{x}_j, \cdot] \text{ ist eine Derivation auf } \mathcal{Z}(\mathcal{A}) = C^\infty(\mathbb{R}^q). \quad (6.107)$$

Jede Derivation auf $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ ist (vergleiche (6.20)) von der Form

$$\delta = a_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^q). \quad (6.108)$$

Aufgrund der "größeren" Algebra müssen wir die in Bemerkung 6.1.5 genannten Voraussetzungen in leicht modifizierter Form verwenden:

- Die Algebra $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^q) \otimes M_n(\mathbb{C})$ ist auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^q) \otimes \mathbb{C}^n$ in offensichtlicher Weise dargestellt.
- Die Derivationen auf \mathcal{A} sind ebenfalls auf (einem dichten Teilraum von) \mathcal{H} als Derivationen dargestellt (im Sinne von Bemerkung 6.1.5).
- Die Standard-Derivationen $\partial_k \equiv \partial_k \otimes \mathbf{1}$, welche durch $\partial_k(x_j) := \delta_{kj}$ definiert sind, sind auf \mathcal{H} dargestellt durch

$$\pi_D(\partial_k)f := (\partial_k f), \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^q) \otimes \mathbb{C}^n$$

(genau genommen benötigen wir in unserer Argumentation wegen (6.107) nur die Aussage über Derivationen auf dem Zentrum von \mathcal{A}).

Untersuche nun die Implikationen von (6.107) und (6.108). Gemäß (6.107) ist $[\dot{x}_j, \cdot]$ eine Derivation δ auf $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$:

$$[\dot{x}_j, z] = \delta(z) \quad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \quad (6.109)$$

Für

$$\delta = a_{jk} \partial_k$$

erhalten wir

$$[\dot{x}_j, z] \stackrel{(6.109)}{=} a_{jk} \partial_k z = [\delta, z] \quad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}).$$

Also können sich δ und \dot{x}_j nur durch ein Element aus $\mathcal{Z}(\mathcal{A})' = \overline{\mathcal{A}}$ unterscheiden:

$$\dot{x}_j = a_{jk} \partial_k + a_j, \quad a_{jk} \in C^\infty(\mathbb{R}^q), a_j \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Die Elemente a_{jk} können bestimmt werden, indem man (6.105) verwendet: Mit der expliziten Form von \dot{x}_j erhält man für den Kommutator

$$\begin{aligned} [x_i, \dot{x}_j] &= [x_i, a_{jk} \partial_k + a_j] \\ &= a_{jk} \underbrace{[x_i, \partial_k]}_{-\delta_{ki}} = -a_{ji}. \end{aligned} \tag{6.110}$$

Aus (6.105), (6.106) und (6.110) folgt dann

$$g_{ij} = g_{ji} = -a_{ji}$$

und daher

$$\dot{x}_j = -g_{jk} \partial_k + a_j. \tag{6.111}$$

Als nächstes bestimmen wir die Form von \dot{T}_k . Aus $\frac{d}{dt}[x_j, T_k] = 0$ folgt

$$\begin{aligned} [x_j, \dot{T}_k] &= -[\dot{x}_j, T_k] \\ &= -[-g_{jk} \partial_k + a_j, T_k] \\ &= [T_k, a_j]. \end{aligned}$$

Definiert man

$$b_{kl} := [a_l, T_k] \quad \text{und setzt} \quad y := b_{kl} \partial_l,$$

so erhält man

$$[x_j, \dot{T}_k] = -b_{kj}$$

und

$$\begin{aligned} [x_j, y] &= [x_j, b_{kl} \partial_l] \\ &= b_{kl} \underbrace{[x_j, \partial_l]}_{-\delta_{jl}} = -b_{kj} = [x_j, \dot{T}_k]. \end{aligned}$$

Mit dem gleichen Argument wie oben hat man also

$$y - \dot{T}_k \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})' = \overline{\mathcal{A}}$$

und daher gilt für \dot{T}_k

$$\dot{T}_k = b_{kl}\partial_l + b_k = [a_l, T_k]\partial_l + b_k, \quad b_k \in \overline{\mathcal{A}}. \quad (6.112)$$

Mit diesem Ausdruck für \dot{T}_k kann man direkt

$$[T_k, \dot{T}_l] = [T_k, b_{lm}]\partial_m + [T_k, b_l] \quad (6.113)$$

berechnen, was ein Differentialoperator der Ordnung 1 ist.

Ein wichtiger Punkt ist nun, dass die Relationen (6.101) Einschränkungen an die Elemente b_k in (6.112) liefern. Dies sieht man folgendermaßen: Die relevanten Gleichungen waren

$$[T_k, T_l] = if_{klm}T_m, \quad (6.114)$$

$$\dot{T}_k = [a_l, T_k]\partial_l + b_k. \quad (6.115)$$

Leitet man (6.114) nach der Zeit ab, erhält man

$$[\dot{T}_k, T_l] + [T_k, \dot{T}_l] = if_{klm}\dot{T}_m.$$

Setzt man Ausdruck (6.115) für \dot{T}_k ein, liefert das

$$[[a_n, T_k]\partial_n + b_k, T_l] + [T_k, [a_s, T_l]\partial_s + b_l] = if_{klm}[a_p, T_m]\partial_p + if_{klm}b_m.$$

Verwendet man nun die Tatsache, dass jede partielle Ableitung mit jedem T kommutiert, führt das auf

$$\begin{aligned} [[a_n, T_k]\partial_n, T_l] &= [[a_n, T_k], T_l]\partial_n, \\ [T_k, [a_s, T_l]\partial_s] &= [T_k, [a_s, T_l]]\partial_s \end{aligned}$$

und daher ist (nach Umbenennung der Indizes)

$$[[a_p, T_k], T_l]\partial_p + [b_k, T_l] + [T_k, b_l] + [T_k, [a_p, T_l]]\partial_p = if_{klm}[a_p, T_m]\partial_p + if_{klm}b_m.$$

Koeffizientenvergleich liefert dann die folgenden beiden Gleichungen:

$$[[a_p, T_k], T_l] + [T_k, [a_p, T_l]] = if_{klm}[a_p, T_m], \quad (6.116)$$

$$[b_k, T_l] + [T_k, b_l] = if_{klm}b_m. \quad (6.117)$$

Gleichung (6.116) ist automatisch erfüllt als Folge der Relation (6.101), d.h. es ergibt sich keine Restriktion an die Elemente a_p , aber Gleichung (6.117) muss erfüllt sein, um konsistente Relationen zu erhalten.

Schreibt man ein allgemeines b_k als

$$b_k = \beta_{k0}T_0 + \sum_{i=1}^n \beta_{ki}T_i, \quad \beta_{k\mu} \in \overline{C^\infty(\mathbb{R}^q)},$$

dann lautet Relation (6.117)

$$\sum_{i,p} (\beta_{ki} f_{ilp} + \beta_{li} f_{kip}) T_p = \sum_i \beta_{i0} f_{kli} T_0 + \sum_{i,p} f_{kli} \beta_{ip} T_p.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \sum_i \beta_{i0} f_{kli} &= 0 \quad \forall k, l \\ \Rightarrow \sum_{i,k,l} \beta_{i0} f_{kli} f_{klm} &= \sum_i \beta_{i0} \underbrace{\sum_{k,l} f_{kli} f_{klm}}_{=\delta_{im} \text{ wegen (6.103)}} = 0 \\ \Rightarrow \beta_{m0} &= 0 \quad \forall m \end{aligned} \tag{6.118}$$

und

$$\sum_j (\beta_{kj} f_{jlp} + \beta_{lj} f_{kjp} + \beta_{jp} f_{kjl}) = 0 \quad \forall k, l, p. \tag{6.119}$$

Als nächstes muss Antisymmetrie der Funktionen β bezüglich ihrer Indizes gezeigt werden

$$\beta_{lm} = -\beta_{ml} \quad \forall m, l, \tag{6.120}$$

weil dies nötig ist für die Konstruktion eines Hamiltonoperators, der die Zeitevolution beschreibt. Betrachte hierzu Gleichung (6.119). Multiplizieren mit f_{ilp} und Summation über p, l liefert

$$\sum_j \beta_{kj} \underbrace{\left(\sum_{p,l} f_{ilp} f_{jlp} \right)}_{=\delta_{ij}} + \sum_{p,l,j} (\beta_{lj} f_{ilp} f_{kjp} + \beta_{jp} f_{ilp} f_{kjl}) = 0 \quad \forall i, k$$

d.h.

$$\beta_{ki} = - \sum_{p,l,j} (\beta_{lj} f_{ilp} f_{kjp} + \beta_{jp} f_{ilp} f_{kjl}) \quad \forall i, k. \tag{6.121}$$

Auf die gleiche Weise erhält man mit (6.119) nach Multiplikation mit f_{kil} , Summation über k, l und Umbenennen der Indizes

$$\beta_{ki} = - \sum_{j,l,p} (\beta_{lj} f_{lkp} f_{jpi} + \beta_{pj} f_{lkp} f_{lji}) \quad \forall i, k \tag{6.122}$$

$$\Leftrightarrow \beta_{ik} = - \sum_{j,l,p} (\beta_{lj} f_{lip} f_{jpk} + \beta_{pj} f_{lip} f_{ljk}) \quad \forall i, k. \tag{6.123}$$

Gleichsetzen von (6.121) und (6.122) liefert

$$\sum_{p,l,j} (\beta_{lj} + \beta_{jl}) f_{ilp} f_{kjp} = 0. \tag{6.124}$$

Summiert man β_{ki} (gegeben durch (6.121)) und β_{ik} (gegeben durch (6.123)), so erhält man

$$\begin{aligned}\beta_{ki} + \beta_{ik} &= - \sum_{p,l,j} (\beta_{jp} + \beta_{pj}) f_{ilp} f_{kjl} \\ &= 0 \quad \text{wegen (6.124)}.\end{aligned}$$

Dies zeigt (6.120). An dieser Stelle kann man natürlich fragen, ob aus $\frac{d}{dt}[x_i, T_j] = 0$ eine Restriktion für die Elemente a_j in $\dot{x}_j = -g_{jk}\partial_k + a_j$ folgt. Man erhält hier jedoch

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x_i, T_j] &= [\dot{x}_i, T_j] + [x_i, \dot{T}_j] \\ &= [-g_{ik}\partial_k + a_i, T_j] + [x_i, [a_l, T_j]\partial_l + b_j] \\ &= [a_i, T_j] + [a_l, T_j][x_i, \partial_l] \\ &= [a_i, T_j] - [a_i, T_j] = 0,\end{aligned}$$

was unabhängig von a_i erfüllt ist.

Unser nächstes (und letztes) Ziel ist nun die Bestimmung eines Hamiltonoperators H mit der Eigenschaft

$$\dot{a} = i[H, a] \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (6.125)$$

Motiviert von der Tatsache, dass \dot{a} ein Differentialoperator erster Ordnung ist (siehe (6.111) und (6.112)), machen wir folgenden allgemeinen Ansatz für H (als Differentialoperator zweiter Ordnung)

$$H = c_{kl}\partial_k\partial_l + c_k\partial_k + A_0 \quad (6.126)$$

und bestimmen c_{kl}, c_k, A_0 so, dass (6.125) gilt. Dazu genügt es, (6.125) auf Generatoren zu überprüfen:

$$\begin{aligned}i[H, x_j] &= i[c_{kl}\partial_k\partial_l + c_k\partial_k + A_0, x_j] \\ &= i c_{kl} \underbrace{[\partial_k\partial_l, x_j]}_{\delta_{lj}\partial_k + \delta_{kj}\partial_l} + i c_k \underbrace{[\partial_k, x_j]}_{\delta_{kj}} \\ &= i(c_{kj} + c_{jk})\partial_k + i c_j.\end{aligned}$$

Wir hatten aus (6.111), dass $\dot{x}_j = -g_{jk}\partial_k + a_j$. Dies führt auf die Bedingung

$$i(c_{kj} + c_{jk})\partial_k + i c_j \stackrel{!}{=} -g_{jk}\partial_k + a_j. \quad (6.127)$$

Betrachte nun den Anteil der T_k :

$$\begin{aligned}i[H, T_k] &= i[c_{ml}\partial_m\partial_l + c_m\partial_m + A_0, T_k] \\ &= i[c_{ml}\partial_m\partial_l, T_k] + i[c_m\partial_m, T_k] + i[A_0, T_k].\end{aligned}$$

Für die einzelnen Terme gilt

$$\begin{aligned} [c_{ml}\partial_m\partial_l, T_k] &= [c_{ml}, T_k]\partial_m\partial_l, \\ [c_m\partial_m, T_k] &= [c_m, T_k]\partial_m, \end{aligned}$$

und damit

$$i[H, T_k] = i[c_{ml}, T_k]\partial_m\partial_l + i[c_m, T_k]\partial_m + i[A_0, T_k].$$

Aus (6.112) hatten wir jedoch $\dot{T}_k = b_{kl}\partial_l + b_k$, wobei die b_k (6.117) erfüllen, wir müssen also sicherstellen, dass

$$i[c_{ml}, T_k]\partial_m\partial_l + i[c_m, T_k]\partial_m + i[A_0, T_k] \stackrel{!}{=} b_{km}\partial_m + b_k.$$

Koeffizientenvergleich für die verschiedenen Ordnungen liefert

$$[c_{ml}, T_k] = 0 \quad \forall k \Rightarrow c_{ml} \in \mathcal{A}' = \overline{\mathcal{Z}}, \quad (6.128)$$

$$i[c_m, T_k] \stackrel{!}{=} b_{km} = [a_m, T_k] \Rightarrow i[c_m, T_k] \stackrel{!}{=} [a_m, T_k] \quad (6.129)$$

und

$$i[A_0, T_k] \stackrel{!}{=} b_k. \quad (6.130)$$

Wählt man

$$\begin{aligned} ic_{kj} = ic_{jk} &:= -\frac{g_{jk}}{2}, \\ ic_j &:= a_j, \end{aligned}$$

so sind die Gleichungen (6.127),(6.128),(6.129) erfüllt. Es bleibt (6.130) zu zeigen, indem man ein Element $B \in \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft

$$[B, T_k] = b_k \quad \forall k \quad (6.131)$$

konstruiert. Definiere

$$B = \sum_{l=1}^n B_l T_l,$$

dann ist

$$[B, T_k] = \sum_l B_l [T_l, T_k] = i \sum_{l,m} f_{lkm} B_l T_m \stackrel{!}{=} b_k = \sum_m \beta_{km} T_m.$$

Die Bedingung $[B, T_k] = b_k$ ist daher äquivalent zu

$$i \sum_l B_l f_{lkm} = \beta_{km} \quad \forall k, m. \quad (6.132)$$

Bemerkung 6.8.1 An dieser Stelle kann man die Bedeutung von (6.118) und (6.120) erkennen. Falls b_k einen T_0 -Term enthalten würde, wäre es unmöglich, diesen Term mit einem Kommutator der Form $[B, T_k]$ zu erzeugen, die Relation (6.118) stellt sicher, dass dies möglich ist. Des Weiteren ist die linke Seite von (6.132) antisymmetrisch bezüglich $k \leftrightarrow m$. Diese Bedingung wird durch die Relation (6.120) gewährleistet.

Definiert man nun B_l durch

$$B_l := -i\beta_{ij}f_{lij},$$

so erhält man

$$i \sum_l B_l f_{lkm} = \sum_{l,i,j} \beta_{ij} f_{lij} f_{lkm}. \quad (6.133)$$

Bekanntlich lässt sich aus der Jacobi-Identität die folgende Symmetrie der Strukturkonstanten ableiten:

$$\sum_l f_{lij} f_{lkm} = \sum_l (f_{ljm} f_{lik} + f_{lmi} f_{ljk}). \quad (6.134)$$

Mit (6.134) lässt sich (6.133) schreiben als

$$i \sum_l B_l f_{lkm} = \sum_{l,i,j} \beta_{ij} (f_{ljm} f_{lik} + f_{lmi} f_{ljk}). \quad (6.135)$$

Zunächst untersuchen wir eine weitere Implikation von (6.122):

$$\begin{aligned} \beta_{km} &= -\sum_{j,l,p} (\beta_{lj} f_{lkp} f_{jpm} + \beta_{pj} f_{lkp} f_{ljm}) \\ &= -2 \sum_{j,l,p} \beta_{lj} f_{lkp} f_{jpm} \end{aligned} \quad (6.136)$$

(was nach Umbenennung der Indizes $l \leftrightarrow p$ im zweiten Term folgt). Dann ergibt sich aus (6.135), (6.136) und aus der Antisymmetrie von β_{kl}

$$i \sum_l B_l f_{lkm} = \left(\sum_{i,j,l} \beta_{ij} f_{ljm} f_{lik} + \sum_{i,j,l} \beta_{ij} f_{lmi} f_{ljk} \right) = \beta_{km}.$$

Dies zeigt (6.131) und die Existenz des Hamiltonoperators H gegeben durch (6.126):

$$\begin{aligned} H &= c_{kl} \partial_k \partial_l + c_k \partial_k + A_0 \\ &= \frac{i}{2} g_{kl} \partial_k \partial_l - i a_k \partial_k - \beta_{ij} f_{lij} T_i. \end{aligned}$$

Die Frage ist nun, analog zu den Gleichungen (6.25) und (6.26), ob dieser Hamiltonoperator in die Form

$$\begin{aligned} H &= h_{kl}(\partial_k - h_k)(\partial_l - h_l) + \phi_0 \\ &= h_{kl}\partial_k\partial_l - h_{kl}(\partial_k h_l) - h_{kl}h_l\partial_k - h_{kl}h_k\partial_l + h_{kl}h_k h_l + \phi_0. \end{aligned}$$

gebracht werden kann. Offensichtlich kann ϕ_0 immer so gewählt werden, dass

$$-h_{kl}(\partial_k h_l) + h_{kl}h_k h_l + \phi_0 = -\beta_{ij} f_{ij} T_l.$$

Es bleibt also zu zeigen: $\exists h_{kl}, h_k$ so dass

$$h_{kl}\partial_k\partial_l - h_{kl}h_l\partial_k - h_{kl}h_k\partial_l = \frac{i}{2}g_{kl}\partial_k\partial_l - ia_k\partial_k.$$

Koeffizientenvergleich liefert zunächst

$$h_{kl} = \frac{i}{2}g_{kl}. \quad (6.137)$$

Man muss nun h_l so bestimmen, dass

$$-\frac{i}{2}g_{kl}h_l\partial_k - \frac{i}{2}g_{kl}h_k\partial_l = -ia_k\partial_k.$$

Weil $g_{kl} = g_{lk}$ ist, vereinfacht sich das zu

$$\begin{aligned} g_{kl}h_l\partial_k &= a_k\partial_k \\ \iff g_{kl}h_l &= a_k. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Nun, da die Matrix (g_{kl}) die Korrespondenz zwischen Impulsen (eigentlich Geschwindigkeiten) \dot{x}_k und Ableitungen ∂_l gemäß (6.111)

$$\dot{x}_k = -g_{kl}\partial_l + a_k$$

liefert, kann man (g_{kl}) invertierbar annehmen (vergleiche hierzu auch Bemerkung 6.2.1). Dann liefert (6.138)

$$h_l = (g^{-1})_{lk}a_k.$$

Dies zeigt, dass der allgemeinste Hamiltonoperator für die Algebra $C^\infty(\mathbb{R}^q) \otimes M_n(\mathbb{C})$, der kompatibel mit den Relationen (6.99) - (6.101) ist, von der Form

$$H = h_{kl}(\partial_k - h_k)(\partial_l - h_l) + \phi_0 \quad (6.139)$$

ist, mit

$$h_{kl} = h_{lk} \in C^\infty(\mathbb{R}^q), \quad h_k, \phi_0 \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Bemerkung 6.8.2 Für $n = 2, q = 3$, d.h. für die Algebra $C^\infty(\mathbb{R}^3) \otimes M_2(\mathbb{C})$, kann man mit der Wahl

$$\phi_0 := \varphi(\vec{x}, t) \mathbb{1} + \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

die Pauli-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \left[\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2 + e\varphi(\vec{x}, t) \right) \mathbb{1} + \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

reproduzieren. Auch die Spin-Bahn-Kopplung lässt sich in unserem Modell erfassen. Betrachte hierzu den Spin-Bahn-Term

$$H_{SB} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \quad (6.140)$$

wobei wir radialsymmetrisches Potential φ annehmen, d.h. es ist $\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{r} = \vec{\nabla} \varphi$. Der Term (6.140) kann nun folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} H_{SB} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \underbrace{\vec{r}}_{\vec{\nabla} \varphi} \cdot (\vec{p} \times \vec{\sigma}) \\ &= \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (\vec{p} \times \vec{\sigma})_i = \sum_{i,j,k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} p_j \sigma_k. \end{aligned}$$

Nun ist (mit $m = 1$)

$$\begin{aligned} p_j &= \dot{x}_j \stackrel{(6.111)}{=} -g_{jk} \partial_k + a_j \\ &\stackrel{(6.137)}{=} 2i\hbar h_{jk} \partial_k + a_j. \end{aligned}$$

Also gilt

$$H_{SB} = 2i \sum_{i,j,k,m} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \sigma_k h_{jm} \partial_m + \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} a_j \sigma_k.$$

Betrachtet man den in (6.139) gegebenen Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H &= h_{kl} (\partial_k - h_k) (\partial_l - h_l) + \phi_0 \\ &= h_{kl} \partial_k \partial_l - h_{kl} (\partial_k h_l) - 2h_{kl} h_k \partial_l + h_{kl} h_k h_l + \phi_0 \end{aligned} \quad (6.141)$$

so sieht man, dass die beiden Terme in H_{SB} durch passende Wahl von h_k und ϕ_0 in (6.141) erzeugt werden können.

6.9 Abschließende Bemerkungen

Sicherlich gehört Feynman's Beweis der Maxwellgleichungen nicht zu den fundamentalen Theoremen der modernen Physik, aber beim "Erstkontakt" vermag er doch immer zu überraschen und ist allein schon deshalb einer genaueren Untersuchung wert, ebenso wie seine naheliegende nichtkommutative Verallgemeinerung. Es ist zum Beispiel bemerkenswert, dass die Restriktionen, welche die Relation $\frac{d}{dt}[x_i, x_j] = 0$ an die Form der \dot{x}_j stellt, immer bei der Konstruktion des Hamiltonoperators benötigt werden (analoge Überlegungen für die Erzeuger T_k der Algebra $M_n(\mathbb{C})$ in Abschnitt 6.8). Gemäß Stone's Theorem (siehe z.B. [BB93]) ist die Existenz des Hamiltonoperators gesichert, falls die Zeitentwicklung durch eine stark-stetige unitäre Gruppe gegeben ist. Dies wird in unserer Argumentation aber gerade nicht vorausgesetzt (vergleiche hierzu auch die Diskussion in [HKP03]).

Es ist vielleicht interessant anzumerken, dass kurz vor "Drucklegung" der vorliegenden Arbeit ein Paper erschienen ist [BS03], welches die gleiche Problematik wie Abschnitt 6.4 behandelt. Leider konnten die dort erzielten Ergebnisse hier nicht mehr berücksichtigt werden, aber für den interessierten Leser sei so viel gesagt: Außer den "üblichen" Relationen

$$\begin{aligned} [x_j, x_k] &= i\theta_{jk} \\ m[x_j, \dot{x}_k] &= i\hbar\delta_{jk} \end{aligned}$$

werden auch Relationen der Form

$$\begin{aligned} [x_j, x_k] &= i\theta_{jk} \\ m[x_j, \dot{x}_k] &= i\hbar\delta_{jk} + im\theta_{jk}f \end{aligned}$$

untersucht, welche zu Korrekturtermen in θ bei den Maxwellgleichungen führen. Des Weiteren sind im Literaturverzeichnis von [BS03] noch interessante Verweise zu finden.

Kapitel 7

Zusammenfassung, Ausblick

DIE KLUGHEIT EINES MENSCHEN LÄSST SICH AUS DER SORGFALT ERMESSEN,
WOMIT ER DAS KÜNFTIGE ODER DAS ENDE BEDENKT. RESPICE FINEM.
(GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG)

Die Bedeutung der spektralen Tripel für die Physik kommt (wie schon in der Einleitung erwähnt wurde) unter anderem aus der Zeile

Riemannsche Spinmannigfaltigkeiten \leftrightarrow reelle spektrale Tripel

des “nichtkommutativen Wörterbuchs” und aus dem Erfolg, den diese Formulierung bei der Beschreibung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik hat, wo Gravitations- und Eichsektor des Modells auf einheitliche Weise beschrieben werden und die durch das Higgs-Boson hervorgerufene spontane Symmetriebrechung in natürlicher Weise auftritt. Unter diesem Gesichtspunkt ist es natürlich interessant, die Quantisierung eines solchen Systems zu untersuchen. Diese Problematik wurde in den Kapiteln 2, 3 und 4 behandelt, indem wir für die in Kapitel 2 klassifizierten nulldimensionalen spektralen Tripel Abstände zwischen den Zuständen der zugehörigen Algebren ausgerechnet haben (Kapitel 3), die dann in dem Kapitel 4 über Quantisierung die Rolle der Observablen übernommen haben. Das Kapitel 2 erfasst die Klassifizierung endlicher spektraler Tripel vollständig und ist insofern nicht mehr “ausbaufähig”. Eine Fortsetzung der Klassifizierung für höhere Dimensionen mit den gleichen Methoden ist nicht möglich, da man hier auf wesentlich kompliziertere Probleme stößt (man vergleiche hierzu z.B. die Klassifizierung von Mannigfaltigkeiten einer bestimmten Dimension, wo Probleme in der Art der Poincaré-Vermutung auftreten). Weiterführende Probleme vielfältiger Art ergeben sich in den Kapiteln 3 und 4, wo sie zum Teil auch schon angesprochen wurden: Die Abstände zwischen Zuständen auf beliebigen endlichdimensionalen C^* -Algebren sind zum Teil sehr schwierig zu berechnen (siehe z.B. Abschnitt 3.5) und einige allgemeine Struktursätze wären hier hilfreich und interessant, dies auch im Hinblick auf die damit zusammenhängenden Probleme der Quantisierung

in Kapitel 4. Die gleiche Aussage gilt für die Quotientenräume, durch welche äquivalente spektrale Tripel beschrieben werden (gemäß den Formeln (4.3) und (4.5)): Auch hier ist die konkrete Berechnung bisher nur in einzelnen Beispielen (4.2.1 - 4.2.4) durchgeführt. Ebenfalls an Beispielen ist die Quantisierung der entsprechenden Systeme behandelt. Zu den offenen Problemen, die in diesem Kontext auftauchen (z.B. eine systematische Konstruktion des jeweiligen invarianten Maßes) wurde in Abschnitt 4.4 schon das Wichtigste gesagt.

Im Kapitel 5 gibt es noch wesentlich mehr offene Probleme: Das Hauptziel in dieser Richtung ist natürlich eine nichtkommutative Beschreibung von Spinmannigfaltigkeiten mit beliebiger Metrik, das ist eine der wichtigen fehlenden Zeilen im "Wörterbuch". Aber auch bei der Teillösung des Problems, wo man Lorentzsche Mannigfaltigkeiten durch Foliationen beschreibt und die Zeitentwicklung durch die Diracgleichung (d.h. man bewegt sich nahe an der physikalischen Anwendung und auch der Einbau von Randbedingungen ist in diesem Modell möglich), ist noch nicht völlig befriedigend: Es fehlt das Konzept von äquivalenten spektralen Quadrupeln und auch zu der Quantisierung eines solchen Systems fehlen bisher nichttriviale Beispiele.

Die in Kapitel 6 diskutierte Methode, von den quantenmechanischen Kommutatorrelationen auf die möglichen Wechselwirkungen in der Theorie zu schließen, ist von der Struktur und Idee her interessant und wurde/wird für verschiedene Fälle auch in der Literatur diskutiert (außer der Originalarbeit [Dys90] z.B. [Tan92], [CnIMS95] oder die aktuellen Arbeiten [Pas03] für nichtrelativistische skalare Quantenmechanik, [HKP03] für Verallgemeinerung auf nichtkommutative Konfigurationsräume, wie in Kapitel 6 behandelt).

Der Zusammenhang der Feynman-Thematik mit den in den ersten Kapiteln diskutierten spektralen Tripeln war bisher offen, da der in den Abschnitten 6.4 und 6.6 betrachtete Moyal-deformierte \mathbb{R}^n kein spektrales Tripel im Sinne von Definition 1.2.1 darstellt. Dieses Problem wurde jedoch in einem kürzlich erschienenen Paper [GGBI⁺03] gelöst, und es wäre sicher interessant, dieses Ergebnis im Zusammenhang mit den hier erzielten Resultaten zu untersuchen.

Symbolverzeichnis

A, \mathcal{A}	eine Algebra
$A^\circ, \mathcal{A}^\circ$	opposite Algebra
\tilde{A}	unitalisierte Algebra (siehe Satz 2.5.2, S. 33)
A^+	siehe Definition 2.5.2, S.34
A_+	die Menge der positiven Elemente der Algebra A
\mathcal{A}'	Kommutant von \mathcal{A}
A_∞	algebraischer direkter Limes der Familie $\{A_i\}$, siehe Abschnitt 2.5.3
\mathbb{C}	die komplexen Zahlen
$\mathbb{C}P^n$	der komplexe projektive Raum (siehe Abschnitt 3.1)
c	Lichtgeschwindigkeit
C_n	Hochschild-Ketten (siehe Bemerkung 1.2.7)
$\mathcal{C}(M), C(M)$	Algebra der stetigen Funktionen auf M
$C^\infty(M)$	Algebra der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf M
$C_0(\mathbb{R})$	Algebra der stetigen Funktionen auf \mathbb{R} , die im Unendlichen verschwinden
$\text{Cl}(V)$	komplexifizierte Cliffordalgebra über V
$\text{Cl}^+(V)$	die von den geraden Elementen von $\text{Cl}(V)$ erzeugte Unteralgebra
$\text{Cl}^{(+)}(V)$	siehe Theorem 5.3.1
$CL(n)$	Cliffordgruppe (siehe Abschnitt 5.3)
D	Diracoperator
$ D $	$ D := \sqrt{D^*D}$, "Betrag" des Operators D
Δ_{FP}	Faddeev-Popov-Determinante
$d(p, q)$	(geodätischer) Abstand der Punkte p und q
$d(\phi, \psi)$	Abstand der beiden reinen Zustände ϕ und ψ , siehe Formel (3.2) S. 63
δ_x	Punktauswertung: $\delta_x(f) := f(x)$
δ_{kl}	Kroneckersymbol
$\text{Der}(\mathcal{A})$	Menge der Derivationen auf \mathcal{A}
$\text{dom}(a)$	Definitionsbereich einer Abbildung a
E	Zeitvektor eines spektralen Quadrupels
\mathcal{E}	ein Modul
End	Endomorphismen
$\mathcal{F}(M)$	Algebra der Funktionen $\{f : M \rightarrow \mathbb{C}\}$
G	Newtonsche Gravitationskonstante oder eine Gruppe

$ G $	Ordnung der Gruppe G
$\mathcal{G}(H)$	Grothendieck-Gruppe zur Halbgruppe H
γ	Graduierungsabbildung eines spektralen Quadrupels
Γ	Graduierungsabbildung (eines spektralen Tripels) oder Chiralitätselement einer Cliffordalgebra
$\Gamma(M, E)$	Algebra der (differenzierbaren) Schnitte in das Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ (siehe Theorem 1.1.2, S. 11)
$GL_n(A^+)$	siehe Definition 2.5.10, S. 54
$GL_n(A^+)_0$	siehe Definition 2.5.10, S. 54
$GL_n^+(A)$	siehe Definition 2.5.10, S. 54
$GL_\infty^+(A)$	siehe Definition 2.5.10, S. 54
$g_{k,l}$	Metrik der Signatur (k, l) , siehe Theorem 5.3.1, S. 130
H, \mathcal{H}	ein Hilbertraum oder Hamiltonoperator
H	(in Abschnitt 2.5) eine Halbgruppe
\mathbb{H}	die Quaternionen
\hbar	Plancksches Wirkungsquantum
J	Ladungskonjugation bzw. Realitätsstruktur (antiunitär)
\mathbb{K}	ein Körper (meistens \mathbb{R} oder \mathbb{C})
$K_0(A)$	siehe Definition 2.5.9, S. 53
$K_{00}(A)$	siehe Definition 2.5.7, S. 48
$K_1(A)$	siehe Definition 2.5.11, S. 55
$K_i(\mathcal{A})$	K-Theorie der Algebra \mathcal{A} (siehe Abschnitt 2.5, insbesondere Definition 2.5.13, S. 55)
$\ker(\phi)$	Kern der (linearen) Abbildung ϕ
$\text{koker}(\phi)$	Kokern der (linearen) Abbildung ϕ
$L^2(\mathbb{R}^n)$	Hilbertraum der quadratintegriblen Funktionen auf \mathbb{R}^n
$\mathcal{L}(A), \mathcal{L}(H)$	stetige, lineare Abbildungen auf A bzw. H
$\mathcal{L}(x, \dot{x})$	Lagrangefunktion
λ_P	Planck-Länge (siehe S. 8)
$\lim_{\rightarrow} A_i$	algebraischer direkter Limes der Familie $\{A_i\}$, siehe Abschnitt 2.5.3
\bar{M}	eine Mannigfaltigkeit
$M_n(\mathbb{C})$	Algebra der komplexen $n \times n$ -Matrizen
$M_n(\mathcal{A})$	$n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus \mathcal{A}
$M_\infty(A)$	der algebraische direkte Limes der Familie $(M_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$, siehe Abschnitt 2.5.3
μ_B	Bohrsches Magneton
\mathbb{N}	die natürlichen Zahlen
$P(A)$	die Menge der Projektoren in A oder die Menge der reinen Zustände auf A
\mathbb{R}	die reellen Zahlen
\mathbb{R}_θ^n	der Moyal-deformierte \mathbb{R}^n , siehe Relation (6.34) S. 161
r_S	Schwarzschildradius (siehe S. 8)

S	Wirkungsfunktional
S^n	die n-dimensionale Sphäre (im \mathbb{R}^{n+1})
SA	die Einhängung von A , siehe Definition 2.5.12, S. 55
$\sigma(a)$	Spektrum des Algebraelements a
$T_p(M), T_p^*(M)$	Tangential- bzw. Kotangentialraum an M im Punkt p
$U_n(A^+)$	siehe Definition 2.5.10, S. 54
$U_n^+(A)$	siehe Definition 2.5.10, S. 54
$U_\infty^+(A)$	siehe Definition 2.5.10, S. 54
$V(A)$	siehe Definition 2.5.6, S. 46
χ	Graduierungsabbildung einer Cliffordalgebra
\mathbb{Z}	die ganzen Zahlen
Z_n	Hochschild-Zykel (siehe Bemerkung 1.2.7, S. 18)
$\mathcal{Z}(\mathcal{A})$	das Zentrum von \mathcal{A}
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
$\langle \cdot \rangle$	Vakuumerwartungswert (in Kapitel 4) oder Weylgeordnetes Produkt (in Kapitel 6)
\sim	“proportional” oder “äquivalent”
$\ \cdot \ $	Norm
$[\cdot]$	Äquivalenzklassen bezuglich einer gegebenen Äquivalenzrelation
$\nabla^S, \nabla_{E_\alpha}^S$	Spinzusammenhang

Literaturverzeichnis

- [AC02] G. Amelino-Camelia. Quantum-Gravity Phenomenology: Status and Prospects. *gr-qc/0204051*, 2002.
- [BB93] P. Blanchard and E. Brüning. *Distributionen und Hilbertraumoperatoren*. Springer, 1993.
- [BB99] L.J. Boya and M. Byrd. Clifford Periodicity from Finite Groups. *math-ph/9902013*, 1999.
- [BGV92] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Springer, 1992.
- [BR87] O. Bratteli and D.W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*. Springer, 1987.
- [BS03] A. Boulahoual and M.B. Sedra. Noncommutative Geometry Framework and the Feynman's Proof of Maxwell Equations. *hep-th/0308079*, 2003.
- [BtD85] T. Bröcker and T. tom Dieck. *Representations of compact Lie Groups*. Springer, 1985.
- [CBDMDB77] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland, 1977.
- [CC97] A.H. Chamseddine and A. Connes. The Spectral Action Principle. *Comm. Math. Phys.* 186 (1997) 731-750, 1997.
- [CEFS92] R. Coquereaux, G. Esposito-Farèse, and F. Scheck. Noncommutative Geometry and graded algebras in electroweak interactions. *J. Mod. Phys. A* 7 (1992) 6555, 1992.
- [CL90] A. Connes and J. Lott. Particle models and noncommutative geometry. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 18 (1990) 29-47, 1990.
- [CnIMS95] J.F. Cariñena, L.A. Ibort, G. Marmo, and A. Stern. The Feynman problem and the inverse problem for poisson dynamics. *Physics Reports* 263 (1995) 153-212, 1995.

- [Con94] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [Con96] A. Connes. Gravity Coupled with Matter and the Foundations of Noncommutative Geometry. *Comm. Math. Phys.* 182 (1996) 155-176, 1996.
- [dFGZJ95] P. di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. 2d gravity and random matrices. *Physics Reports* 254 (1995), 1-133, 1995.
- [DFR95] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J.E. Roberts. The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields. *Comm. Math. Phys.* 172 (1995) 187-220, 1995.
- [DS95] J. Dittmann and K. Schmüdgen, editors. *Proceedings der Arbeitstagung Nichtkommutative Geometrie*, Hesselbach, 1995.
- [Dün89] Petra Dünges. Der Dirac-Operator über semiriemannschen, raum- und zeitorientierbaren Spinmannigfaltigkeiten von beliebiger Dimension und beliebigem Index. Diplomarbeit, Mainz, 1989.
- [DVKM90] M. Dubois-Violette, R. Kerner, and J. Madore. Noncommutative geometry and new models of gauge theory. *J. Math. Phys.* 31 (1990) 323, 1990.
- [DVM95] M. Dubois-Violette and T. Masson. On the first order operators in bimodules. *q-alg/9507028*, 1995.
- [Dys90] F.J. Dyson. Feynman's proof of the Maxwell equations. *Amer. J. Phys.* 58 (3) 1990, 209-211, 1990.
- [GBHKP03] J.M. Gracia-Bondia, A. Holfter, T. Kopf, and M. Paschke. Semi-Riemannian spectral triples for the Moyal-deformed \mathbb{R}^4 . *in Vorbereitung*, 2003.
- [GBVF01] J.M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, and H. Figueroa. *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhäuser, 2001.
- [GGBI⁺03] V. Gayral, J.M. Gracia-Bondia, B. Iochum, T. Schücker, and J.C. Varilly. Moyal Planes are Spectral Triples. *hep-th/0307241*, 2003.
- [Gil84] P. Gilkey. *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*. Publish or Perish, 1984.
- [GM91] J. Gilbert and A.M. Murray. *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [GS95] M. Göckeler and T. Schücker. *Differential geometry, gauge theories, and gravity*. Cambridge University Press, 1995.

- [Häu01] R. Häußling. Quantum Field Theory on a discrete space and Noncommutative Geometry. Habilitationsschrift, *Annals of Phys.* 299 (2002) 1-77, 2001.
- [HKP03] A. Holfter, T. Kopf, and M. Paschke. On time evolution and quantum mechanics on noncommutative spaces. *in Vorbereitung*, 2003.
- [HP03] A. Holfter and M. Paschke. Moduli spaces of discrete gravity I: A few points... *J. Geom. Phys.* 47 (2003) 101-127, 2003.
- [Hun74] T.W. Hungerford. *Algebra*. Springer, New York, 1974.
- [IKM99] B. Iochum, Th. Krajewski, and P. Martinetti. Distances in finite spaces from Noncommutative Geometry. *hep-th/9912217*, 1999.
- [Jän96] K. Jänich. *Topologie*. Springer, 1996.
- [Kg74] H. Kumano-go. *Pseudo-Differential Operators*. MIT Press, 1974.
- [KP01] Th. Kopf and M. Paschke. A Spectral Quadruple for de Sitter space. *math-ph/0012012*, 2001.
- [Kra98] Th. Krajewski. Classification of finite spectral triples. *J. Geom. Phys.* 28 (1998) 1-30, 1998.
- [Lan97] G. Landi. *An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries*. Springer, 1997.
- [LM89] H. Lawson and M. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton University Press, 1989.
- [LR97] G. Landi and C. Rovelli. General Relativity in terms of Dirac Eigenvalues. *Phys.Lett B* 78 (1997) 3051-3054, 1997.
- [Mad95] J. Madore. *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [Mor02] V. Moretti. A C*-algebra approach to noncommutative lorentzian geometry of globally-hyperbolic spacetimes. *gr-qc/0203095*, 2002.
- [O'N83] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*. Academic Press, 1983.
- [Pap97] N.A. Papadopoulos. Aspects of the noncommutative geometry approach to elementary particle physics. In H.-D. Doebner, W. Scherer, and C. Schulte, editors, *Group 21, Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras*, volume II. World Scientific, 1997.

- [Pas01] M. Paschke. Von Nichtkommutativen Geometrien, ihren Symmetrien und etwas Hochenergiephysik. Dissertation, Mainz, 2001.
- [Pas03] M. Paschke. Time evolutions in quantum mechanics and (Lorentzian) geometry. *math-ph/0301040*, 2003.
- [Pös02] C. Pösel. Ein, zwei Punkte zu Nichtkommutativer Geometrie und Quantenfeldtheorie auf diskreten Räumen. Dissertation, Mainz, 2002.
- [PP96] N. Papadopoulos and J. Plass. Natural extensions of the Connes-Lott Model and comparison with the Marseille-Mainz Model. *hep-th/9605072*, 1996.
- [PS98] M. Paschke and A. Sitarz. Discrete spectral triples and their symmetries. *Journal of Mathematical Physics, Vol. 39, Nr. 11*, 1998.
- [Ren01] A. Rennie. Poincaré Duality and Spin^c Structures for Complete Noncommutative Manifolds. *math-ph/0107013*, 2001.
- [Rov99] C. Rovelli. Spectral noncommutative geometry and quantization: a simple example. *Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 1079-1083*, 1999.
- [Sak91] S. Sakai. *Operator algebras in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1991.
- [Sch97] E. Schrohe. Wodzicki's noncommutative residue and traces for operator algebras on manifolds with conical singularities. In L. Rodino, editor, *Microlocal analysis and spectral theory*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [Str01] A. Strohmaier. On Noncommutative and semi-Riemannian Geometry. *math-ph/0110001*, 2001.
- [Swa62] R.G. Swan. Vector bundles and projective modules. *Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 264-277*, 1962.
- [Tan92] S. Tanimura. Relativistic Generalization and Extension to the Non-Abelian Gauge Theory of Feynman's Proof of the Maxwell Equations. *Annals of Physics 220 (1992), 229-247*, 1992.
- [Var97] J.C. Varilly. An Introduction to Noncommutative Geometry. *physics/9709045*, 1997.
- [VGB93] J.C. Varilly and J.M. Gracia-Bondia. Connes' noncommutative differential geometry and the Standard Model. *Journal of Geometry and Physics*, 1993.
- [WO93] N.E. Wegge-Olsen. *K-Theory and C^* -Algebras*. Oxford University Press, 1993.

Danksagung

EINE FEINE SEELE BEDRÜCKT ES, SICH JEMANDEN ZUM DANK
VERPFLICHTET ZU WISSEN; EINE GROBE, SICH JEMANDEM.
(FRIEDRICH NIETZSCHE)

In diesem Sinne bedrückt es mich, nun einige Leute bedrücken zu müssen:

Ich bedanke mich

- zu allererst bei meinen Eltern, die mich während meines Studiums immer finanziell und moralisch unterstützt haben.
- bei Prof. Papadopoulos nicht nur für die Betreuung der Arbeit, sondern auch für viele fachübergreifende Diskussionen und Treffen in der “Zweigstelle Wackernheim”, die immer mit hervorragender Verköstigung verbunden waren.
- bei Prof. Reuter für diverse Tiere, Mineralien und Spielzeug (d.h. Kröten, Mäuse, Kies und Knete).
- bei Hubert Spiesberger für die EDV-Beratung.
- bei meinen (teilweise ehemaligen) Kolleginnen und Kollegen
 - Mario, der einen großen Beitrag zur vorliegenden Arbeit geleistet hat und von dem ich immer Anregungen, Ideen und Impulse erhielt. Er war u.a. auch der “Entdecker” des Riemann-Zitats auf S. 10.
 - Isa, Astrid, Jan-Eric, Markus und Andres, die mir beim “Feinschliff” der Arbeit eine große Hilfe waren.
 - Uwe (“niemand ist unnütz, er kann immer noch als schlechtes Beispiel dienen”).
 - Olli, Hans-Jürgen, Marcus, Martin, Holger (und die sonstigen, schon genannten oder nicht genannten, Mitglieder der Tafelrunde) für den geselligen Verzehr diverser Heißgetränke und die damit verbundene Konversation (das ist keine Selbstverständlichkeit, wenn man in der “nichtkommunikativen Geometrie” arbeitet).
- bei demjenigen, der mich vor der grünen Fee gerettet hat, kann mich leider an nichts erinnern, bitte melde Dich unter esgrüntsogrün@gmx.de, hochachtungsvoll, Alex.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Alexander Holfter
Geburtsdatum: 16. Juli 1971
Geburtsort: Worms
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Studium

06.1999 - 12.2003 Promotion (Physik) an der Joh.-Gutenberg
Universität Mainz
10.1991 - 05.1999 Studium (Physik Diplom) an der Joh.-Gutenberg
Universität Mainz
10.1993 - 07.1994 Auslandsaufenthalt (Universität Florenz)

Zivildienst

07.1990 - 09.1991 Zivildienst bei der "Interessengemeinschaft
Körperbehinderter Worms e.V."

Schulbildung

09.1981 - 06.1990 Gauss-Gymnasium Worms
(Abschluss: Allg. Hochschulreife)