
Streuamplituden in Yang-Mills-Theorie und Gravitation auf Baumniveau

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Alexander Kniss
geboren in Stepnogorsk, Kasachische SSR

Mainz, den 9. Mai 2019

D77/ Dissertation der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

1. Berichterstatter: [REDACTED]

2. Berichterstatter: [REDACTED]

Datum der mündlichen Prüfung: [REDACTED]

Inhaltsverzeichnis

Abstract	iii
Zusammenfassung	iv
Symbolverzeichnis	v
1. Einleitung	1
2. Relationen zwischen farbgeordneten Amplituden in Eichtheorien und Gravitation	7
2.1. Die Farbzerlegung von QCD-Amplituden auf Baumlevel	8
2.2. Die KK-Relationen	13
2.3. Die Melia-Relationen	15
2.3.1. Orientieren von QCD-Amplituden	15
2.3.2. Die Melia-Basis	18
2.4. Die Farbe-Kinematik-Dualität für YM-Amplituden	21
2.5. Die BCJ-Relationen für YM-Amplituden	24
2.6. Das BCJ-Double-Copy-Verfahren	28
2.7. Verallgemeinerung auf QCD-Amplituden	30
2.7.1. Farbe-Kinematik-Dualität für QCD-Amplituden	30
2.7.2. Quadrieren von QCD-Amplituden	34
3. Streugleichungen und CHY-Darstellungen	36
3.1. Die Streugleichungen	37
3.1.1. Die polynomiale Form der Streugleichungen	39
3.1.2. Die KLT-Orthogonalität	41
3.1.3. Die massiven Streugleichungen	43
3.2. Die CHY-Darstellung	44
3.2.1. CHY-Darstellung für EYM-Amplituden	46
3.2.2. CHY-Darstellung für QCD-Amplituden	48
3.2.2.1. Definition von $\tilde{C}(\sigma, z)$	49
3.2.2.2. Definition von $\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$	50
3.2.3. Bemerkung zur CHY-Darstellung für Amplituden in der Gravitation	54
4. Streuformen und ihre Beziehung zum Associahedron	56
4.1. Positive Geometrien und kanonische Formen	57

4.2. Der Modulraum der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre und seine Kompaktifizierung	61
4.3. Das Associahedron	63
4.3.1. Das Associahedron als Teilmenge des Modulraums $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$	64
4.3.2. Das kinematische Associahedron	66
4.4. Die kanonische Form des Associahedrons	67
4.5. Eigenschaften von Streuformen	70
4.5.1. Die skalare Streuform $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$	71
4.5.2. Die YM-Streuform $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$	73
5. Relationen zwischen EYM-Amplituden und YM-Amplituden und ein Algorithmus zur Berechnung von Numeratoren	76
5.1. EYM-Amplituden als Linearkombination von YM-Amplituden	77
5.2. Algorithmus zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten	79
5.3. Grafische Regeln zur Berechnung von BCJ-Numeratoren	81
6. Zusammenfassung und Ausblick	86
Anhang A: Farbgeordnete Feynman-Regeln	88
Anhang B: Die Koeffizienten a_i und b_i	89
Anhang C: Verschiedene Beweise	91
C.1. Beweis der Permutationsinvarianz des Polarisationsfaktors	91
C.2. Beweis der Äquivalenz der Polarisationsfaktoren	92
C.3. Äquivalenz der KLT-, CHY- und BCJ-Double-Copy-Verfahren	93
Anhang D: Mathematische Grundbegriffe aus der Algebra und Algebraischen Geometrie	96
D.1. Varietäten und Abbildungen zwischen Varietäten	96
D.2. Gröbnerbasen	100
Anhang E: Mathematica Quelltext zur Berechnung der BCJ-Numerator	103

Abstract

Recently a new formulation of S-matrix elements for gauge theories and gravity at tree-level and in any spacetime dimension has been found. This so called Cachazo-He-Yuan (CHY) formalism is based on a set of algebraic equations known as the scattering equations. These equations provide a map between the moduli space of Riemann spheres with n marked points $\mathcal{M}_{0,n}$, where n is associated to the number of scattered particles and the kinematic space of Mandelstam invariants. We will utilize this formalism in order to prove relations between single-trace amplitudes in Einstein-Yang-Mills theory with one graviton and color-ordered Yang-Mills amplitudes found by Stieberger and Taylor. Furthermore, we will generalize these relations towards an arbitrary number of gravitons using a property of the solutions of the scattering equations.

The building blocks in the CHY formalism for Yang-Mills amplitudes, a cyclically invariant Parke-Taylor factor and a polarization factor, give rise to the definition of differential forms called scattering forms for bi-adjoint scalar theory and Yang-Mills theory on the compactification of $\mathcal{M}_{0,n}$. It is known that the scattering form for the bi-adjoint scalar theory is associated to a positive geometry and that the pushforward of this form under the scattering equations gives exactly the CHY representation of the double-ordered amplitude in bi-adjoint scalar theory. This motivates us to study scattering forms for bi-adjoint scalar theory and Yang-Mills theory in more detail. We will show that all singularities of the scattering forms are on the boundary of $\mathcal{M}_{0,n}$, that each singularity is logarithmic and that the residue on each boundary component factorizes into two scattering forms of lower point.

Zusammenfassung

Neulich wurde eine neue Darstellung von S-Matrix-Elementen in Eichtheorien und Gravitation auf Baumniveau und in jeder Raumzeitdimension gefunden. Diese so genannte Cachazo-He-Yuan(CHY)-Darstellung basiert auf einem Satz von algebraischen Gleichungen, welche als Streugleichungen bekannt sind. Diese Gleichungen liefern eine Abbildung zwischen dem Modulraum der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre $\mathcal{M}_{0,n}$, wobei n assoziiert ist mit der Anzahl der gestreuten Teilchen, und dem kinematischen Raum der Mandelstam-Invarianten. Wir werden diesen Formalismus verwenden, um Relationen zwischen Ein-Spur-Amplituden in Einstein-Yang-Mills-Theorie mit einem Graviton und farbgeordneten Yang-Mills-Amplituden, welche von Stieberger und Taylor gefunden wurden, zu zeigen. Weiterhin werden wir unter Benutzung einer Eigenschaft der Lösungen der Streugleichungen eine Verallgemeinerung dieser Relationen auf eine beliebige Anzahl an Gravitonen angeben.

Die Bausteine im CHY-Formalismus für Yang-Mills-Amplituden, ein zyklisch invarianter Parke-Taylor-Faktor und ein Polarisationsfaktor, geben Anlass zu der Definition von Differenzialformen, welche als Streuformen bezeichnet werden, für die bi-adjungierte skalare Theorie und die Yang-Mills-Theorie auf der Kompaktifizierung von $\mathcal{M}_{0,n}$. Es ist bekannt, dass die Streuform der bi-adjungierten skalaren Theorie assoziiert ist mit einer positiven Geometrie und dass der Pushforward dieser Form unter den Streugleichungen genau die CHY-Darstellung der farbgeordneten Amplitude in der bi-adjungierten skalaren Theorie liefert. Dies motiviert uns die Streuformen für die bi-adjungierte skalare Theorie und die Yang-Mills-Theorie genauer zu studieren. Wir werden zeigen, dass alle Singularitäten der Streuformen auf dem Rand von $\mathcal{M}_{0,n}$ liegen, dass jede Singularität logarithmisch ist und dass das Residuum auf jeder Randkomponente in zwei Streuformen vom niedrigeren Grad faktorisiert.

Symbolverzeichnis

Nachfolgend sind einige Symbole und Notationen zusammengestellt, welche in dieser Arbeit verwendet werden.

$A \equiv B$	A ist definitionsgemäß gleich B .
$\det(A)$	Determinante von A .
$ M $	Mächtigkeit der Menge M .
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null.
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen mit Null.
\mathbb{R}	Menge aller reellen Zahlen.
\mathbb{C}	Menge aller komplexen Zahlen.
$\text{tr}(A)$	Spur von A .
$\delta_{ij} \equiv \delta_j^i \equiv \delta^{ij}$	Kronecker-Delta.
$\delta(f)$	Delta-Distribution mit skalarwertigem Argument f .
$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$	Diagonalmatrix mit Einträgen a_1, a_2, \dots, a_n in den Diagonalen.
$A \cong B$	A ist isomorph zu B .
$f _U$	Einschränkung der Funktion f auf die Menge U .
\emptyset	Leere Menge.
$A \sqcup B$	Vereinigung der disjunkten Mengen A und B .
$S(G)$	Menge der bijektiven Abbildungen $G \rightarrow G$, wobei G eine endliche Menge ist.
S_n	Menge der Permutationen von n Elementen, d. h. $S_n = S(G)$ mit $ G = n$.
\mathcal{B}_n	Menge von Wörtern mit paarweise verschiedenen Buchstaben aus $\{1, 2, \dots, n\}$.
$\mathbb{K}\mathbb{P}^n$	n -dimensionaler projektiver Raum über dem Körper \mathbb{K} .

$\mathcal{M}_{0,n}$	Modulraum der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre.
$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$	Deligne-Mumford-Kompaktifizierung von $\mathcal{M}_{0,n}$.
\mathcal{X}_n	Lösungsmenge der masselosen Streugleichungen.
$\mathcal{X}_n^{\text{mass}}$	Lösungsmenge der massiven Streugleichungen.
$A_n^{\text{YM}}(\sigma, \mathbf{p}, \varepsilon)$	Farbgeordnete n -Gluon-Amplitude auf Baumniveau mit externer Ordnung σ der Gluonen. Impulse und Polarisationen der Teilchen werden beschrieben durch n -Tupel \mathbf{p} bzw. ε .
$A_n^{\text{G}}(\mathbf{p}, \varepsilon, \tilde{\varepsilon})$	Amplitude in Einstein-Gravitation+Dilaton+Axion auf Baumniveau.
$A_{n,r}^{\text{EYM}}(\sigma H)$	Farbgeordnete Ein-Spur-Amplitude in Einstein-Yang-Mills-Theorie auf Baumniveau, wobei H mit $ H = n - r$ die Menge der Gravitonen und $\sigma \in S_r$ die externe Ordnung der Gluonen ist.
$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma, \mathbf{p}, \varepsilon)$	Farbgeordnete Amplitude in der Quantenchromodynamik auf Baumniveau mit k Quark-Antiquark-Paaren und $n - 2k$ Gluonen.

1. Einleitung

Um theoretische Modelle in der Elementarteilchenphysik zu testen, werden heutzutage vor allem Collider als „Lupen“ eingesetzt, in welchen zwei Teilchenstrahlen zunächst aufeinander geschossen werden, um hinterher die Streuprodukte in Detektoren nachzuweisen. Die fundamentalste Größe eines Streuexperiments ist die Streuamplitude¹, da aus dieser der observable (differenzielle) Wirkungsquerschnitt, welcher ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Streuprozesses darstellt, durch Quadrieren der Amplitude extrahiert werden kann.

Es ist gut bekannt, dass Amplituden in Theorien, die sich durch eine Lagrangedichte beschreiben lassen, so auch zum Beispiel die Quantenchromodynamik (QCD) oder die Gravitation, perturbativ als Summe von Feynman-Diagrammen, welche mit einem Satz von Feynman-Regeln berechnet werden können, darstellen lassen. Im Allgemeinen ist allerdings die Berechnung von Amplituden über Feynman-Diagramme, auch wenn zwar ohne Weiteres möglich, sehr langwierig. Dies liegt zum einen daran, dass die Anzahl der zur Amplitude beitragenden Diagramme rasch mit der Anzahl n der externen Teilchen anwächst und zum anderen, dass die Ausdrücke mit steigendem n immer länger und unübersichtlicher werden. So tragen etwa für den 6-Gluon-Prozess $gg \rightarrow gggg$ bereits 220 Diagramme auf Baumniveau bei [1]. Während die Berechnung dieser 220 Diagramme per pedes noch möglich ist, so erscheint die Berechnung der entsprechenden 6-Graviton-Amplitude fast unmöglich, da die Feynman-Regeln für den 3- und 4-Graviton-Vertex deutlich mehr Terme enthalten als die entsprechenden Regeln für die Gluon-Vertizes und man zusätzlich Diagramme mit 5-Graviton-Vertizes, 6-Graviton-Vertizes, usw. berücksichtigen muss. Dies macht die Suche nach neuen effizienteren Methoden zur Berechnung von Amplituden, aber auch das Studium von Eigenschaften dieser, gerade in Zeiten von immer leistungsfähiger werdenden Collidern und somit immer höher werdenden experimentellen Präzision, unabdingbar. In dieser Dissertation studieren wir einige dieser neuen Methoden für Amplituden in Eichtheorien und Gravitation. Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich Baumniveau-Amplituden.

Um den Rechenaufwand zu verringern, wurde ein mächtiges Werkzeug entwickelt, welches die Amplitude in kleinere Informationsblöcke zerlegt und als Farbzerlegung bezeichnet wird. Demnach lassen sich Amplituden in Eichtheorien in zwei Teile zerlegen, einen Teil, der nur von der Eichgruppe abhängt und einen anderen Teil, der nur von der Kinematik (d. h. von Impulsen und Polarisationen) abhängt und als farbgeordnete Amplitude bezeichnet wird [1–6]. Damit sind für einen n -Teilchen-Prozess nur noch $n!$ farbgeordnete Amplituden zu berechnen. Tatsächlich sind es aufgrund von Relationen zwischen diesen farbgeordneten Amplituden sogar weniger als $n!$. So führen die zyklische Invarianz, die

¹Wir werden ab jetzt meist nur noch kurz von Amplituden reden.

Kleiss-Kuijf(KK)-Relationen und die Bern-Carrasco-Johansson(BCJ)-Relationen dazu, dass es nur $(n - 3)!$ unabhängige farbgeordnete Gluon-Amplituden gibt [7, 8]. Diese Amplituden können mit Hilfe von farbgeordneten Feynman-Regeln berechnet werden. Zur farbgeordneten Amplitude tragen weniger Feynman-Diagramme bei als zur vollen Amplitude. Für den Prozess $gg \rightarrow gggg$ etwa tragen 38 geordnete Diagramme bei.

Durch eine geschickte Wahl der kinematischen Variablen können die Berechnungen dieser Diagramme in $D = 4$ Raumzeitdimensionen sehr elegant gestaltet werden. Eine solch geschickte Wahl sind die Spinor-Helizitäts-Variablen [9]. Da Gluonen masselos sind, können wir den Impuls eines Gluons gemäß $p^{a\dot{a}} \equiv p^\mu \sigma_\mu^{a\dot{a}} = \lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}}$, wobei σ_0 die 2×2 -Einheitsmatrix und $-\sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) die Pauli-Matrizen sind, zerlegen. Die Polarisationsvektoren für Gluonen lassen sich dann mit Hilfe der zwei-komponentigen Spinoren λ^a und $\tilde{\lambda}^{\dot{a}}$ für die beiden möglichen Polarisationszustände der Gluonen (d. h. für Gluonen mit positiver und negativer Helizität) formulieren und die Amplitude als Funktion der Lorentz-Invarianten Produkte $\langle \lambda \mu \rangle \equiv \epsilon_{ab} \lambda^a \mu^b$ und $[\tilde{\lambda} \tilde{\mu}] \equiv \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \tilde{\mu}^{\dot{b}}$ mit $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ und $\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ ausdrücken.

Amplituden in der Yang-Mills(YM)-Theorie lassen sich deutlich effizienter als über (farbgeordnete) Feynman-Diagramme mit Hilfe der Bern-Cachazo-Feng-Witten(BCFW)-Rekursion [10–14], welche die analytischen Eigenschaften der Amplitude zu Nutze macht, berechnen. Genauer kann man die n -Gluon-Amplitude mit den gemäß $\tilde{\lambda}_1 \mapsto \tilde{\lambda}_1 - z\tilde{\lambda}_n$, $\lambda_n \mapsto \lambda_n + z\lambda_1$ verschobenen Spinoren als komplexe Funktion $A_n^{\text{YM}}(z)$ der komplexen Variable z auffassen. Es lässt sich zeigen, dass dies eine rationale Funktion ist mit nur einfachen Polstellen und $A_n^{\text{YM}}(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, sofern (ohne Einschränkung) Teilchen 1 negative und Teilchen n positive Helizität hat. Somit ist die Funktion eindeutig durch die Residuen an den Polstellen bestimmt. Die Berechnung der Residuen liefert eine Rekursionsformel für die Amplitude mit unverschobenen Spinoren $A_n^{\text{YM}}(z = 0)$. Startend mit Helizitätsamplituden bei $n = 3$ kann man somit alle Amplituden für $n \geq 4$ berechnen. Neben der Möglichkeit YM-Amplituden effizient zu berechnen, hat sich die BCFW-Rekursion vor allem für induktive Beweise von zahlreichen Formeln wie etwa den KK- oder BCJ-Relationen als nützlich erwiesen [15, 16].

Es ist bemerkenswert, dass die Kenntnis von Amplituden in Eichtheorien ausreicht, um Amplituden in der Gravitation zu berechnen. Kawai, Lewellen und Tye (KLT) fanden Beziehungen zwischen Amplituden von offenen und geschlossenen Strings, welche heute als KLT-Relationen bezeichnet werden [17]. Die Feldtheorie-Version dieser Relationen besagt, dass die n -Graviton-Amplitude sich darstellen lässt als Summe von Produkten von farbgeordneten n -Gluon-Amplituden, geschmückt mit gewissen kinematischen Faktoren [18, 19]. Eine äquivalente Umsetzung der Idee „Gravitation als Quadrat von YM“ fanden BCJ [8]: Die n -Gluon-Amplitude lässt sich entwickeln nach kubischen Graphen G . Zu jedem Graphen G können wir ein Propagatorterm $D(G)$, einen Farbfaktor $C(G)$, der von der Eichgruppe abhängt und die Jacobi-Identitäten erfüllt, sowie einen kinematischen Numerator $N(G)$ assoziieren. Die Farbe-Kinematik-Dualität besagt, dass es möglich ist, Numerator zu finden, welche dieselben Jacobi-Identitäten erfüllen wie die Farbfaktoren. Wählt man genau solche Numerator, so erhält man die n -Graviton-Amplitude, indem man den Farbfaktor $C(G)$ durch einen Numerator $N(G)$ ersetzt. Dies wird als *Double-*

Copy-Verfahren bezeichnet. Dieses Verfahren lässt sich nicht nur für Gluon-Amplituden anwenden. Da Amplituden in der QCD ebenfalls die Farbe-Kinematik-Dualität erfüllen [20], kann die Ersetzungsregel $C(G) \rightarrow N(G)$ auch in diesem Fall angewandt werden. Man erhält hierdurch Amplituden in einer gravitationellen Theorie mit Teilchen, deren Polarisationen beschrieben werden durch das Produkt von zwei Kopien von Dirac-Spinoren der Quarks bzw. Antiquarks, den so genannten *Double-Copies von Quarks bzw. Antiquarks*. Beeindruckenderweise lässt sich diese gravitationelle Amplitude auch mit verallgemeinerten KLT-Relationen berechnen [21].

Als Startpunkt für die moderne Theorie von Amplituden kann die Parke-Taylor-Formel angesehen werden. Parke und Taylor fanden 1986 durch explizite Rechnung heraus, dass die Summe über alle farbgeordneten Diagramme mit n externen Gluonen in der kanonischen Ordnung $1, 2, \dots, n$, wobei die Gluonen i und j (ohne Einschränkung sei $j > i$) negative Helizität besitzen und die restlichen Gluonen positive zu einem einzigen Term vereinfachen, welcher heute als Parke-Taylor-Formel bekannt ist [22]

$$A_n^{\text{YM}}(1^+ 2^+ \dots i^- \dots j^- \dots n^+) \propto \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle (n-1)n \rangle \langle n1 \rangle}. \quad (1.1)$$

Die Proportionalitätskonstante ist eine (komplexe) Zahl, die davon abhängt, wie man farbgeordnete Amplituden definiert. Solche Amplituden werden als Maximally-Helicity-Violating(MHV)-Amplituden bezeichnet, da n -Gluon-Amplituden mit nur einem oder keinem Gluon negativer Helizität und $n \geq 4$ verschwinden. Es stellt sich natürlich automatisch die Frage, wieso das Ergebnis so einfach ist und ob N^{k-2} MHV-Amplituden, d. h. Amplituden mit $k > 2$ Gluonen negativer Helizität, ebenso in solch kompakter Form geschrieben werden können. Es dauerte fast 20 Jahre bis Witten in seiner berühmten Arbeit [9] diese Fragen beantwortete. Witten gab eine Abbildung $\lambda^a(z)$ vom Grad $k-1$ an, welche Punkte z der Riemannschen Sphäre mit Spinoren λ^a in Verbindung brachte. Speziell für MHV-Amplituden ($k=2$) ist $\lambda^a(z)$ vom Grad 1 und somit besitzt die Gleichung $\lambda^a(z) = \lambda^a$ nur eine Lösung. Es ist somit klar, dass die Parke-Taylor-Formel sich als Integral schreiben lässt, welches lokalisiert auf der Lösung dieser Gleichung ist. Weiterhin zeigte Witten, dass diese Integraldarstellung der MHV-Amplitude aus einer gewissen Stringtheorie, dem so genannten topologischen B-Modell, hergeleitet werden kann. Wie später von Roiban, Spradlin und Volovich festgestellt, lässt sich allgemeiner die Abbildung $\lambda^a(z)$ dazu benutzen, um ein Integral hinzuschreiben, welches vollständig auf den Lösungen der Gleichungen $\lambda^a = \lambda^a(z)$ lokalisiert ist und die Amplitude in maximal supersymmetrischer YM-Theorie ($\mathcal{N}=4$ SYM) reproduziert [23]. Diese Formel ist als Roiban-Spradlin-Volovich-Witten(RSVW)-Formel bekannt.

Eine Verallgemeinerung der RSVW-Formel auf nicht supersymmetrische Theorien und insbesondere auf $D \neq 4$ Raumzeitdimensionen ist nicht offensichtlich, da man in allgemeiner Raumzeitdimension keinen Zugang zu den Spinor-Helizitäts-Variablen hat.² Cachazo, He und Yuan (CHY) gaben 2013 eine Abbildung vom Modulraum der n -fach punktierten

²Neben $D=4$ ist ein Spinor-Helizitäts-Formalismus auch für $D=6$ bekannt [24, 25]. Dies ist ein Grund, wieso Amplituden in $D=6$ Raumzeitdimensionen viel Interesse in letzter Zeit erfahren haben [26, 27].

Riemannschen Sphäre $\mathcal{M}_{0,n}$ in den von den Mandelstam-Variablen aufgespannten Raum der (masselosen) Kinematik an, welche als Verallgemeinerung von Wittens Abbildung angesehen werden kann [28]. Diese Abbildung ist gegeben durch ein System von rationalen Gleichungen, welche als Streugleichungen bezeichnet werden. Im CHY-Formalismus wird die n -Teilchen-Amplitude auf Baumniveau dargestellt als ein Integral, welches vollständig lokalisiert auf den Lösungen der Streugleichungen ist und somit äquivalent auch als Summe über die Lösungen der Streugleichungen dargestellt werden kann. Weiterhin gaben CHY eine explizite Darstellung der Integranden in einer Vielzahl von Theorien mit masselosen Teilchen, darunter auch YM-Theorie und Gravitation, an [29–33]. Es ist bekannt, dass auch QCD-Amplituden auf Baumniveau eine CHY-Darstellung besitzen [34]. Diese basiert auf einer Verallgemeinerung der Streugleichungen auf massive Teilchen, die mittels dimensionaler Reduktion aus den (gewöhnlichen) Streugleichungen gefolgert werden können [35, 36].

Die CHY-Integranden faktorisieren in zwei Halbintegranden, welche dasselbe Transformationsverhalten unter Möbiustransformation besitzen. Im YM-Fall sind die Halbintegranden ein zyklisch invarianter Parke-Taylor-Faktor $C(\sigma, z)$ und ein von der externen Ordnung σ der Teilchen unabhängiger, eichinvarianter Polarisationsfaktor $E(z, p, \varepsilon)$. z bezeichnet ein n -Tupel komplexer Zahlen, p die Impulskonfiguration und ε die Polarisationen der Gluonen. Die Definition dieser Funktionen werden wir später in dieser Arbeit angeben. Um Amplituden in der Gravitation aus YM-Amplituden im CHY-Formalismus zu erhalten, ist der Parke-Taylor-Faktor durch einen zweiten Polarisationsfaktor zu ersetzen. Es ist eine offene Frage, ob auch eine CHY-Darstellung für die Amplitude in der gravitationellen Theorie, die man durch das BCJ-Double-Copy-Verfahren bzw. die verallgemeinerten KLT-Relationen aus QCD-Amplituden erhält, existiert. Wir zeigen hier, dass dies zumindest für $n \leq 5$ Teilchen der Fall ist und geben die Halbintegranden explizit an.

Auch wenn effiziente Methoden existieren, um das CHY-Integral auszuwerten bzw. die Summe über die Streugleichungen zu berechnen ohne die Streugleichungen selber zu lösen [37–41], ist der CHY-Formalismus – genauso wie die RSVW-Formel – zum expliziten Berechnen der Amplitude ungeeignet, da etwa die BCFW-Rekursion deutlich effizienter ist. Dennoch ist dieser Formalismus von großem technischem und theoretischem Nutzen. Zum Beispiel lässt sich sehr einfach (auch auf mathematisch rigorosem Niveau) zeigen, dass der Parke-Taylor-Faktor und somit auch die YM-Amplitude die KK- und BCJ-Relationen, wobei für die Gültigkeit der BCJ-Relationen der Parke-Taylor-Faktor auf einer Lösung der Streugleichungen ausgewertet werden muss, erfüllt. Dies ist zumindest im Fall der BCJ-Relationen höchst nicht-trivial, wenn man die YM-Amplitude als Summe über farbgeordnete Feynman-Diagramme liest. Wir werden in dieser Arbeit den CHY-Formalismus dazu verwenden, um zu zeigen, dass Ein-Spur-Amplituden in Einstein-Yang-Mills(EYM)-Theorie als Linearkombination von (farbgeordneten) YM-Amplituden geschrieben werden können [42]. Die Koeffizienten besitzen dabei selber eine CHY-Darstellung. Die explizite Gestalt dieser kann effizienter mit Hilfe dem in [43] angegebenen Algorithmus bestimmt werden, welcher ebenfalls aus dem CHY-Formalismus hergeleitet wurde und zur Berechnung von Numeratoren verwendet werden kann [44].

Die Streugleichungen besitzen eine faszinierende geometrische Interpretation, welche in [45] entdeckt wurde. Wie von Arkani-Hamed und Trnka herausgefunden sind Amplituden in $\mathcal{N} = 4$ SYM assoziiert mit einer „positiven“ Geometrie, welche die Autoren als Amplituhedron bezeichnet haben [46]. Dies motivierte das Studium von positiven Geometrien im allgemeinen Rahmen [47]. Es ist wesentlich, dass jede positive Geometrie assoziiert ist mit einer eindeutigen Differenzialform, der kanonischen Form dieser Geometrie. In [45] wurde gezeigt, dass das von Tamari in [48] eingeführte und von Stasheff in [49, 50] wiederentdeckte Associahedron die positive Geometrie für die farbgeordnete Amplitude in skalarer ϕ^3 -Theorie mit Eichgruppe $U(N) \times U(\tilde{N})$ ist. Das Associahedron lässt sich als Teilmenge der Kompaktifizierung $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ des Modulraums $\mathcal{M}_{0,n}$ oder auch des kinematischen Raums der Mandelstam-Variablen realisieren. Die Streugleichungen liefern eine bijektive Abbildung zwischen diesen beiden Associahedra und die kanonische Form des kinematischen Associahedron erhält man durch einen Pushforward der kanonischen Form des Associahedrons im Modulraum unter dieser Abbildung. Insbesondere ist die kanonische Form des kinematischen Associahedrons durch eine CHY-Formel gegeben.

Wir studieren in dieser Arbeit die „kanonischen“ Formen für die skalare ϕ^3 -Theorie und die YM-Theorie auf $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ und zeigen, dass diese logarithmische Singularitäten auf $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$ und nur dort besitzen [51]. Ferner zeigen wir, dass das Residuum der Formen an den Singularitäten in zwei Differenzialformen vom niedrigeren Grad faktorisiert. Der Grund, wieso wir das Wort „kanonische“ in Anführungszeichen setzen ist, dass wir nicht wissen, ob im Falle der YM-Theorie eine positive Geometrie existiert, dessen kanonische Form im Sinne der Definition in [47] genau diese Differenzialform ist. Dennoch liefert der Pushforward der YM „kanonischen“ Form unter den Streugleichungen die CHY-Darstellung von YM-Amplituden.

Diese Dissertation ist wie folgt gegliedert: Im anschließenden Kapitel definieren wir farbgeordnete QCD-Amplituden und studieren Relationen zwischen diesen Amplituden. Hiernach geben wir zwei Möglichkeiten an, wie man Amplituden in der Gravitation aus farbgeordneten Amplituden in Eichtheorien erhalten kann. Wir diskutieren erst den reinen YM-Fall ohne Fermionen und geben anschließend eine Verallgemeinerung dieser Relationen auf QCD an. Im dritten Kapitel führen wir die Streugleichungen ein, diskutieren die Eigenschaften dieser sowie ihrer Lösungen und geben an, wie man mit Hilfe der Streugleichungen Amplituden in der EYM-Theorie, somit insbesondere in der Gravitation und der YM-Theorie, sowie der QCD auf Baumniveau im CHY-Formalismus bestimmen kann. Wir zeigen ferner in diesem Kapitel, wie man Gravitation aus QCD im CHY-Formalismus für $n \leq 5$ Teilchen erhält. Die Bausteine des CHY-Formalismus für YM-Amplituden geben Anlass zur Definition von Streuformen für eine skalare Theorie und die YM-Theorie auf der Kompaktifizierung von $\mathcal{M}_{0,n}$. Im vierten Kapitel werden wir diese Streuformen genauer untersuchen. Insbesondere werden wir sehen, dass die Streuform für die skalare Theorie mit einer positiven Geometrie, dem Associahedron assoziiert ist und dass der durch die Streugleichungen gegebene Pushforward die CHY-Darstellung der farbgeordneten Amplitude in der skalaren Theorie bzw. in der YM-Theorie liefert. Wir zeigen ferner, dass die Streuformen nur einfache Polstellen auf dem Divisor $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$ besitzen und dass das Residuum der Streuformen an diesen Polstellen in zwei Streuformen

vom niedrigeren Grad faktorisiert. Im fünften Kapitel zeigen wir mit Hilfe des CHY-Formalismus, dass Ein-Spur-EYM-Amplituden als Linearkombination von Amplituden in der YM-Theorie geschrieben werden können. Ein Algorithmus zur expliziten Bestimmung der Koeffizienten in dieser Linearkombination erlaubt es uns einen Algorithmus zur Berechnung von Numeratoren anzugeben. Im abschließenden sechsten Kapitel fassen wir unsere Resultate zusammen und geben einen Ausblick auf mögliche sich anschließende Forschungsprojekte.

Kapitel 2.1 bis 2.5 sowie Kapitel 3 (außer Kapitel 3.2.3) dieser Dissertation sind überarbeitete Fassungen von Teilen meiner Masterarbeit [52].

2. Relationen zwischen farbgeordneten Amplituden in Eichtheorien und Gravitation

Es ist bemerkenswert, dass man Amplituden in der Gravitation aus Amplituden in YM-Theorie auf störungstheoretischem Niveau erhalten kann. Die so genannten KLT-Relationen lauten symbolisch auf Baumniveau

$$A_n^G = A_n^{\text{YM}} \times S \times A_n^{\text{YM}}, \quad (2.1)$$

wobei A_n^G die n -Graviton-Amplitude und A_n^{YM} die farbgeordnete n -Gluon-Amplitude ist. S ist eine Matrix, die von den Impulsen der Teilchen abhängt. Wir werden später in diesem Kapitel eine explizite Formel für S angeben. Ursprünglich stammen die KLT-Relationen aus der Stringtheorie und bringen dort Amplituden von offenen und geschlossenen Strings in Verbindung [17]. Im Limes unendlicher Stringspannung folgt hieraus Gl. (2.1), wie in [19] gezeigt wurde.

Wie von Bern, Carrasco und Johansson herausgefunden, lassen sich diese Relationen in einer äquivalenten Form darstellen, welche als Double-Copy-Verfahren bezeichnet wird: Die n -Graviton Amplitude erhält man aus der n -Gluon-Amplitude durch Quadrieren der YM-Numerator [8]. Wie der Name es bereits andeutet, treten diese Numerator als Zähler einer feynmandiagrammatischen Entwicklung der Amplitude auf. Da Feynman-Diagramme nicht eichinvariant sind, sind die Numerator nicht eindeutig. Um auf diese Weise Graviton-Amplituden zu erhalten, ist es notwendig spezielle Numerator zu wählen – Numerator, welche die Jacobi-Identitäten erfüllen. Dass solche Numerator existieren, ist nicht trivial und als Farbe-Kinematik-Dualität bekannt.

Johansson und Ochirov haben festgestellt, dass die Farbe-Kinematik-Dualität auch in der QCD gültig ist [20]. Dies motiviert uns das Double-Copy-Verfahren für QCD-Amplituden anzuwenden [21]. Erstaunlicherweise existiert eine direkte Verallgemeinerung der KLT-Relationen, die äquivalent zum Double-Copy-Verfahren ist.

Dieses Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Wir diskutieren zunächst im ersten Abschnitt die Farbzerlegung in der QCD und geben im zweiten und dritten Abschnitt Relationen zwischen farbgeordneten QCD-Amplituden an, welche direkt aus den Feynman-Regeln bzw. aus dem Verschwinden von Amplituden mit gekreuzten Quarklinien folgen. Im vierten Unterkapitel erläutern wir die Farbe-Kinematik-Dualität im reinen YM-Fall und studieren im fünften und sechsten Abschnitt zwei wichtige Folgerungen dieser Dualität, nämlich die BCJ- und KLT-Relationen. Abschließend geben wir im siebten Unterkapitel eine Verallgemeinerung dieser Relationen auf QCD an.

2.1. Die Farbzerlegung von QCD-Amplituden auf Baumlevel

Wir interessieren uns in diesem Kapitel für farbgeordnete Amplituden in der QCD auf Baumniveau. Dies sind rein kinematische Objekte, hängen also nicht von der Eichgruppe der QCD ab. Wir werden deshalb in diesem Abschnitt diskutieren, wie man QCD-Amplituden in zwei Teile zerlegen kann, wobei ein Teil nur von der Eichgruppe und der andere nur von der Kinematik abhängen wird [5, 6].

Die Farbzerlegung lässt sich sehr intuitiv aus den Farbfluss-Feynman-Regeln herleiten. Die Farbfluss-Feynman-Regeln folgen aus der QCD-Lagrangedichte [53–55]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} + \mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu})_j^i(\mathcal{F}^{\mu\nu})_i^j + \bar{\Psi}_{q,i}\gamma^\mu(i\delta_j^i\partial_\mu + \frac{g}{\sqrt{2}}(\mathcal{A}_\mu)_j^i - m_q\delta_j^i)\Psi_q^j + \mathcal{L}_{\text{gf}} \quad (2.2)$$

in der Farbflussdarstellung.¹ Hierbei ist der Feldstärketensor gegeben durch

$$(\mathcal{F}_{\mu\nu})_j^i \equiv \partial_\mu(\mathcal{A}_\nu)_j^i - \partial_\nu(\mathcal{A}_\mu)_j^i + i\frac{g}{\sqrt{2}}\left((\mathcal{A}_\mu)_j^k(\mathcal{A}_\nu)_k^i - (\mathcal{A}_\nu)_j^k(\mathcal{A}_\mu)_k^i\right) \quad (2.3)$$

mit $(\mathcal{A}_\mu)_j^i \equiv \sqrt{2}A_\mu^a(t^a)_j^i$. t^a sind die Generatoren der Eichgruppe $SU(N)$. Wir verwenden für diese die Normierung

$$(t^a)_j^i(t^b)_i^j = \frac{\delta^{ab}}{2}. \quad (2.4)$$

Obere Indizes („Farbe“) transformieren unter der fundamentalen Darstellung der $SU(N)$, während untere Indizes („Antifarbe“) unter der antifundamentalen Darstellung der $SU(N)$ transformieren. m_q ist die Masse eines Quarks bzw. Antiquarks mit Flavor q und g die QCD-Kopplungskonstante. \mathcal{L}_{gf} ist ein Eichfixierungs-Term. Für diesen können wir

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu\mathcal{A}^\mu)_j^i(\partial_\mu\mathcal{A}^\mu)_i^j \quad (2.5)$$

mit einem Eichparameter $\xi \in \mathbb{R}$ wählen. Da wir nur Amplituden auf Baumniveau in dieser Arbeit betrachten, brauchen wir Faddeev-Popov-Geister nicht zu berücksichtigen.

Die Feynman-Regeln in Feynman-Eichung ($\xi = 1$ in Gl. (2.5)), welche in den Abbildungen 2.1 und 2.2 dargestellt sind, lassen sich durch Farbflussdiagramme veranschaulichen. Jede Deltafunktion δ_j^i entspricht dabei einer durchgezogenen, gerichteten Linie, welche den Farbfluss darstellt. Die Farbe „fließt“ hierbei von Antifarbe in Richtung Farbe, d. h. von j nach i . Der Gluon-Propagator [53]

$$-i\frac{\eta^{\mu\nu}}{p^2}\left(\delta_{j_2}^{i_1}\delta_{j_1}^{i_2} - \frac{1}{N}\delta_{j_1}^{i_1}\delta_{j_2}^{i_2}\right) \quad (2.6)$$

kann in zwei Teile aufgespalten werden. Der erste Summand entspricht einem $U(N)$ -Gluon-Propagator, während bei dem mit dem Faktor $-1/N$ unterdrückten Teil keine Farbübertragung stattfindet, weshalb das zugehörige Teilchen als abelsches Gluon bzw. als $U(1)$ -Gluon bezeichnet wird. Es wird im Farbflussdiagramm mit einer gestrichelten

¹Wir verwenden die Summenkonvention, d. h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

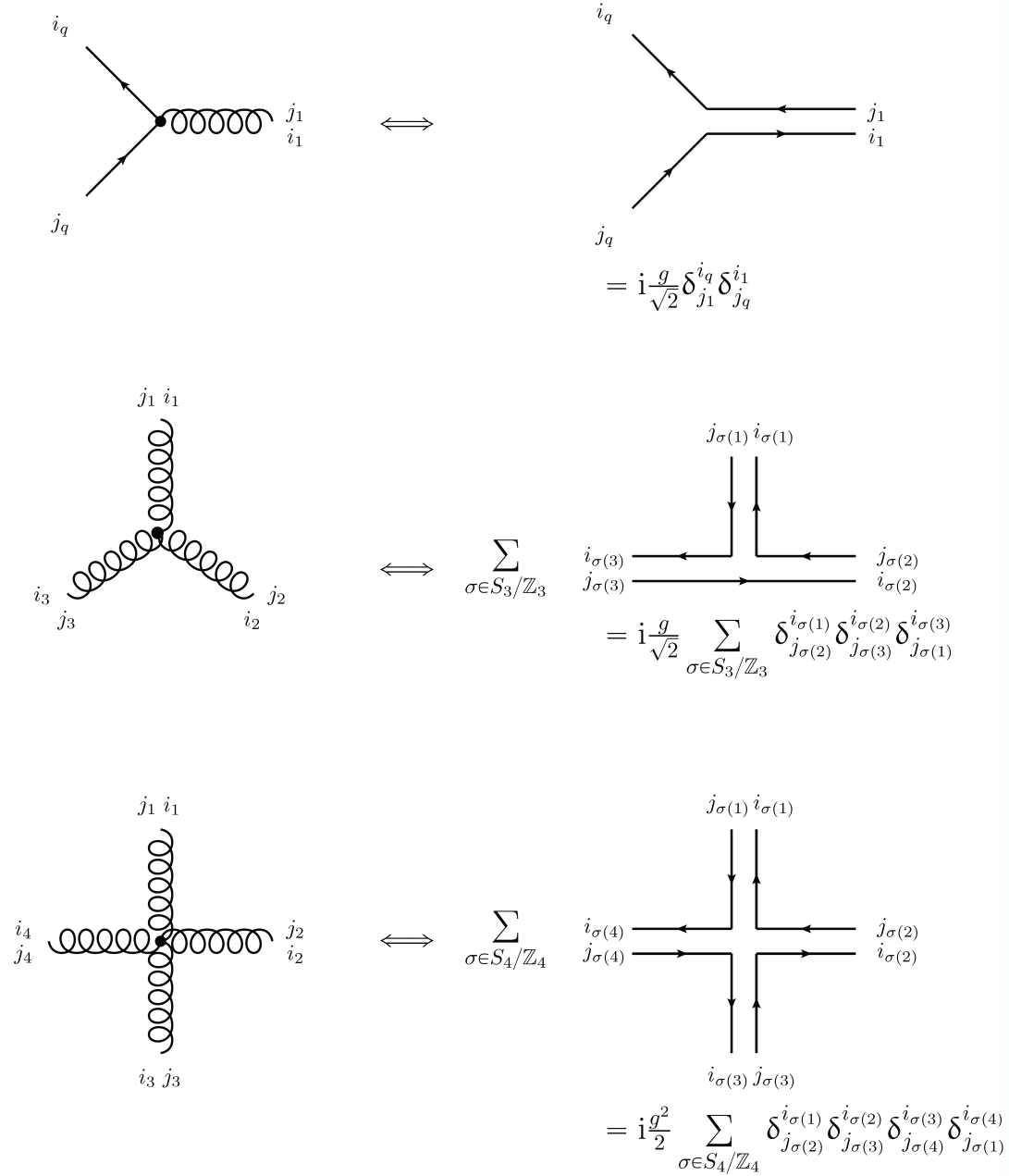


Abbildung 2.1.: Feynman-Regeln für die Vertizes [54]. Die herkömmlichen Feynman-Diagramme sind auf der linken Seite dargestellt; auf der rechten Seite finden sich ihre zugehörigen Farbfluss-Diagramme. Die Lorentzindizes, sowie die Dirac-Matrizen und die kinematischen Faktoren wurden weggelassen, da sie für die Diskussion der Farbzerlegung keine entscheidende Rolle spielen. Sie nehmen ihre übliche Form an, die sich im Anhang A nachlesen lässt.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} j_1 \\ i_1 \end{array} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \begin{array}{c} i_2 \\ j_2 \end{array} \iff \begin{array}{c} j_1 \\ i_1 \end{array} \text{---} \text{double line} \text{---} \begin{array}{c} i_2 \\ j_2 \end{array} + \begin{array}{c} j_1 \\ i_1 \end{array} \text{---} \text{dashed line} \text{---} \begin{array}{c} i_2 \\ j_2 \end{array} \\
 & = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} - \frac{1}{N} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.2.: Die Feynman-Regel für den Gluon-Propagator. Der Gluon-Propagator kann in zwei Teile aufgespalten werden, ein $U(N)$ -Gluon-Propagator und ein $U(1)$ -Gluon-Propagator. Das $U(1)$ -Gluon überträgt keine Farbe und wird deshalb gestrichelt dargestellt. Auch hier wurde der kinematische Teil weggelassen.

Linie gekennzeichnet. Als Konsequenz der Symmetrieeigenschaften des 3- bzw. 4-Gluon-Vertex koppelt das $U(1)$ -Gluon nicht an diese. Wir können uns deshalb auf den Standpunkt stellen, dass es nur an eine Quarklinie, gekennzeichnet durch die Indizes i und j , koppelt und dass der zugehörige Vertex durch $i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \delta_j^i$ beschrieben wird, d. h. wir ziehen die Deltafunktionen des zweiten Summanden in Gl. (2.6) in die Quark- $U(1)$ -Gluon-Vertices. Der Propagator ist dann nur durch $-1/N$ gegeben, wenn wir die Kinematik abspalten. Alternativ kann man auch eine zur QCD äquivalente „Farbfluss-QCD“ mit $U(N) \times U(1)'$ Symmetriegruppe postulieren, welche explizit im Lagrangian ein $U(N)$ - und $U(1)$ -Phantom-Gluonfeld enthält [55]. Das Phantom-Gluon kommt mit einem verkehrten Vorzeichen im Propagator und koppelt an Quarks mit der Kopplungskonstante g , jedoch nicht an Gluonen.

Die Amplitude ist die Summe über alle Feynman-Diagramme. Wir schreiben $\mathcal{A}_{n,k}^{\text{QCD}}(p, \varepsilon, a)$ für die QCD-Amplitude mit n Teilchen und k Quark-Antiquark-Paaren (d. h. mit $n - 2k$ Gluonen), welche wir mit q_1, q_2, \dots, q_k (Quarks) bzw. $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_k$ (Antiquarks) bezeichnen. Gluonen seien mit den Zahlen $k+1, k+2, \dots, n-k$ notiert. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Quarkflavor paarweise verschieden sind, da sich Amplituden mit gleichen Quarkflavorn auf solche mit verschiedenen Quarkflavorn zurückführen lassen. Für $k = 0$ schreiben wir $\mathcal{A}_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon, a) \equiv \mathcal{A}_{n,0}^{\text{QCD}}(p, \varepsilon, a)$. $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ist das n -Tupel der Impulse. Alle Impulse sind hierbei als auslaufend angenommen. $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ ist das n -Tupel der Polarisationen. Die Polarisation wird beschrieben durch einen Polarisationsvektor für Gluonen und durch die Dirac-Spinoren \bar{u}_i bzw. v_i für auslaufende Quarks bzw. auslaufende Antiquarks. Mit a drücken wir die Abhängigkeit der Amplitude von der Eichgruppe aus. Die Farbindices der Quarks wollen wir mit $i_{q_1}, i_{q_2}, \dots, i_{q_k}$, diejenigen der Antiquarks mit $j_{\bar{q}_1}, j_{\bar{q}_2}, \dots, j_{\bar{q}_k}$ und die der Gluonen mit $i_{k+1}, j_{k+1}, i_{k+2}, j_{k+2}, \dots, i_{n-k}, j_{n-k}$ bezeichnen.

Wir betrachten nun zunächst den reinen Gluon-Fall ($k = 0$). Das Farbflussdiagramm besteht in diesem Fall aus n durchgezogenen Linien, wobei jede Linie einem Kronecker-Delta $\delta_{\sigma(i+1)}^{\sigma(i)}$ mit $\sigma \in S_n$ und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ entspricht. S_n ist die symmetrische Gruppe, d. h. die Gruppe der Permutation von n Elementen. Der Farbfaktor bezüglich einer externen Ordnung $\sigma \in S_n$ lautet damit

$$c(\sigma) = \delta_{\sigma(2)}^{\sigma(1)} \delta_{\sigma(3)}^{\sigma(2)} \dots \delta_{\sigma(1)}^{\sigma(n)}. \quad (2.7)$$

Die Amplitude $\mathcal{A}_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon, a)$ lässt sich hiermit darstellen als

$$\mathcal{A}_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon, a) = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^{n-2} \sum_{\sigma \in S_n / \mathbb{Z}_n} c(\sigma) A_n^{\text{YM}}(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}, p, \varepsilon), \quad (2.8)$$

wobei A_n^{YM} als farbgeordnete Amplitude bezeichnet wird und nicht von der Eichgruppe abhängt. Beachte, dass der Farbfaktor $c(\sigma)$ invariant unter zyklischen Permutationen ist. Deshalb summieren wir in Gl. (2.8) nur über S_n / \mathbb{Z}_n , d. h. über alle Permutationen modulo der zyklischen Permutationen. Analog erhalten wir die Farbzerlegung für Amplituden mit nur einem Quark-Antiquark-Paar ($k = 1$):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,1}^{\text{QCD}}(p, \varepsilon, a) &= \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^{n-2} \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \delta_{\sigma(2)}^{q_1} \delta_{\sigma(3)}^{\sigma(2)} \dots \delta_{\bar{q}_1}^{\sigma(n-1)} \\ &\quad \times A_{n,1}^{\text{QCD}}(\{q_1, \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n-1), \bar{q}_1\}, p, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Betrachte als Nächstes den Fall von $k = 2$ Quark-Antiquark-Paaren. In diesem Fall gibt es erstmals die Möglichkeit des Austausches eines U(1)-Gluons. Enthält das Farbflussdiagramm ein U(1)-Gluon, so zerfällt das Diagramm in zwei Farbcluster, die durch das U(1)-Gluon miteinander verbunden sind. Die Farbfaktoren dieser Farbcluster können dargestellt werden als

$$c_{2,1}(\sigma, \alpha) = \delta_{j_{\sigma(3)}}^{i_{q_1}} \delta_{j_{\sigma(4)}}^{i_{\sigma(3)}} \dots \delta_{j_{\bar{q}_1}}^{i_{\sigma(\alpha)}}, \quad c_{2,2}(\sigma, \alpha) = \delta_{j_{\sigma(\alpha+1)}}^{i_{q_2}} \delta_{j_{\sigma(\alpha+2)}}^{i_{\sigma(\alpha+1)}} \dots \delta_{j_{\bar{q}_2}}^{i_{\sigma(n-2)}} \quad (2.10)$$

mit $\sigma \in S_{n-4}$ und $2 \leq \alpha \leq n-2$. Enthält das Farbflussdiagramm kein U(1)-Gluon, so hat der zugehörige Farbfaktor die Form

$$c_{1,1}(\sigma, \alpha) = \delta_{j_{\sigma(3)}}^{i_{q_1}} \delta_{j_{\sigma(4)}}^{i_{\sigma(3)}} \dots \delta_{j_{\bar{q}_2}}^{i_{\sigma(\alpha)}} \delta_{j_{\sigma(\alpha+1)}}^{i_{q_2}} \delta_{j_{\sigma(\alpha+2)}}^{i_{\sigma(\alpha+1)}} \dots \delta_{j_{\bar{q}_1}}^{i_{\sigma(n-2)}}. \quad (2.11)$$

Die Farbzerlegung lautet damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,2}^{\text{QCD}}(p, \varepsilon, a) &= \sum_{\sigma \in S_{n-4}} \sum_{\alpha=2}^{n-2} c_{1,1}(\sigma, \alpha) \\ &\quad \times A_{n,2}^{\text{QCD}}(\{q_1, \sigma(3), \dots, \sigma(\alpha), \bar{q}_2, q_2, \sigma(\alpha+1), \dots, \sigma(n-2), \bar{q}_1\}, p, \varepsilon) \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in S_{n-4}} \sum_{\alpha=2}^{n-2} c_{2,1}(\sigma, \alpha) c_{2,2}(\sigma, \alpha) \\ &\quad \times A_{n,2}^{\text{QCD}}(\{q_1, \sigma(3), \dots, \sigma(\alpha), \bar{q}_1, q_2, \sigma(\alpha+1), \dots, \sigma(n-2), \bar{q}_2\}, p, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Im allgemeinen Fall ($k \geq 1$) beachte man, dass jede Permutation $\pi \in S_k$ der Quarks sich darstellen lässt als Produkt von Zyklen:

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r, \quad \pi_\ell = (q_\kappa, q_{\pi(\kappa)}, \dots, q_{\pi^{\ell-1}(\kappa)}) \quad (\ell \in \{1, 2, \dots, r\}) \quad (2.13)$$

Hierbei ist l_ℓ die Länge des Zyklus π_ℓ . $\kappa \in \{1, 2, \dots, k\}$ ist eindeutig durch π_ℓ festgelegt, wenn wir vereinbaren, dass Zyklen in numerischer Reihenfolge (d. h. $q_1 < q_2 < \dots < q_k$) zu ordnen sind. Die Zerlegung von π in r Zyklen entspricht der Zerlegung des Farbflussdiagramms in r Farbcluster, die durch $(r-1)$ U(1)-Gluonen miteinander verbunden sind. Der Farbfaktor c_ℓ des zum Zyklus π_ℓ gehörigen Farbclusters lässt sich darstellen als

$$c_\ell = \delta_{j_{\sigma(\alpha_{\kappa-1}+1)}^{i_{q_\kappa}}} \delta_{j_{\sigma(\alpha_{\kappa-1}+2)}^{i_{\sigma(\alpha_{\kappa-1}+1)}}} \dots \delta_{j_{\bar{q}_{\pi(\kappa)}}^{i_{\sigma(\alpha_\kappa)}}} \delta_{j_{\sigma(\alpha_{\kappa+1})}^{i_{q_{\pi(\kappa)}}}} \dots \delta_{j_{\bar{q}_{\pi^2(\kappa)}}^{i_{\sigma(\alpha_{\kappa+1})}}} \delta_{j_{\sigma(\alpha_{\kappa+1}+1)}^{i_{q_{\pi^2(\kappa)}}}} \dots \delta_{j_{\bar{q}_\kappa}^{i_{\sigma(\alpha_{\kappa+l_\ell-1})}}}, \quad (2.14)$$

wobei $\alpha \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ein geordneter Multiindex ist, d. h.

$$\alpha \in M_{n,k} \equiv \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1} | k = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{k-1} \leq \alpha_k = n - k\} \quad (2.15)$$

mit $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$. Wir erhalten somit für $k \geq 1$ die Farbzerlegung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,k}^{\text{QCD}}(p, \varepsilon, a) &= \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} \sum_{\pi \in S_k} \sum_{\sigma \in S_{n-2k}} \sum_{\alpha \in M_{n,k}} c_1 c_2 \dots c_r \\ &\quad \times \left(\frac{-1}{N}\right)^{r-1} \sum_{\tau \in \Gamma[\pi, \sigma, \alpha]} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\tau, p, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Menge der U(1)-Gluon-Austauschpermutationen $\Gamma[\pi, \sigma, \alpha]$ berücksichtigt alle Möglichkeiten ein U(1)-Gluon zwischen den Quarklinien der r Farbcluster auszutauschen. Eine Konstruktion von $\Gamma[\pi, \sigma, \alpha]$ lässt sich in [5, 6] finden.

Wir bezeichnen nachfolgend farbgeordnete Amplituden in der QCD mit der Ordnung σ der externen Teilchen mit $A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma, p, \varepsilon)$ oder kurz mit $A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma)$, wobei wir die Permutation σ als Wort mit paarweise verschiedenen Buchstaben aus $\{1, 2, \dots, n\}$ auffassen. Es ist also $\sigma \in \mathcal{B}_n$ mit

$$\mathcal{B}_n \equiv \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n | \sigma_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma_i \neq \sigma_j \text{ für } i \neq j\}. \quad (2.17)$$

Für farbgeordnete Amplituden in reiner YM-Theorie (d. h. ohne Quarks) schreiben wir $A_n^{\text{YM}}(\sigma, p, \varepsilon)$ oder $A_n^{\text{YM}}(\sigma)$.

Farbgeordnete Amplituden sind ebenso wie die vollen Amplituden $\mathcal{A}_{n,k}^{\text{QCD}}(p, \varepsilon, a)$ eichinvariant, d. h. der Wert der Amplitude $A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma, p, \varepsilon)$ ändert sich nicht, wenn der Polarisationsvektor ε_i des Gluons i durch $\varepsilon_i + c p_i$, wobei c eine Konstante ist und p_i der Impuls von i , ersetzt wird. Weiterhin ist $A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma)$ invariant unter zyklischen Permutationen. Wir können daher die zur farbgeordneten Amplitude beitragenden Diagramme auf einer Kreisscheibe darstellen, wobei die externen Teilchen entsprechend ihrer zyklischen Ordnung $\sigma \in \mathcal{B}_n$ im Uhrzeigersinn auf dem Rand der Scheibe aufgetragen werden. Die Diagramme können mit Hilfe der farbgeordneten Feynman-Regeln (siehe Anhang A) berechnet werden. Diese ergeben sich aus den üblichen Feynman-Regeln durch Abspaltung von Farbfaktoren und der Kopplungskonstante. Die farbgeordneten 3-Teilchen-Vertizes

sind antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Beine. Hieraus folgen weitere Relationen zwischen den farbgeordneten Amplituden, welche wir im nächsten Abschnitt diskutieren werden. Man beachte, dass diese Relationen dazu führen, dass die Menge $I[\pi, \sigma, \alpha]$ sich nicht eindeutig definieren lässt.

2.2. Die KK-Relationen

Da farbgeordnete QCD-Amplituden invariant unter zyklischen Permutationen sind, können wir Teilchen 1 auf Position 1 fixieren. Dies reduziert die Anzahl unabhängiger Amplituden auf höchstens $(n-1)!$. Tatsächlich sind diese $(n-1)!$ Amplituden nicht unabhängig voneinander. Wie von Kleiss und Kuijf festgestellt, lässt sich jede Amplitude als Linearkombination von Amplituden in der KK-Basis

$$\mathcal{B}_n^{\text{KK}} = \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathcal{B}_n \mid \sigma_1 = 1, \sigma_n = n\} \quad (2.18)$$

darstellen. $\mathcal{B}_n^{\text{KK}}$ enthält $(n-2)!$ Elemente. Genauer gelten die KK-Relationen [3, 7, 15]

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(1\alpha n\beta) = (-1)^{|\beta|} \sum_{\sigma \in \alpha \sqcup \beta^T} A_{n,k}^{\text{QCD}}(1\sigma n). \quad (2.19)$$

Hierbei sind α und β zwei Wörter mit $1\alpha n\beta \in \mathcal{B}_n$ und $|\beta|$ ist die Anzahl der Buchstaben in β . β^T entsteht durch Umkehren der Reihenfolge der Buchstaben aus β , d. h. es ist $\beta^T = \beta_{|\beta|} \beta_{|\beta|-1} \dots \beta_1$ für $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{|\beta|}$. $\alpha \sqcup \beta^T$ bezeichnet das Shuffle-Produkt der Wörter α und β^T , d. h. die Menge derjenigen Wörter die man durch Durchmischen der Buchstaben von α und von β^T , ohne jedoch die relative Reihenfolge der Buchstaben in α und β^T zu verändern, erhält. Formal ist also

$$\alpha \sqcup \beta^T \equiv \{\gamma_1 \delta_1 \gamma_2 \delta_2 \dots \gamma_n \delta_n \mid n \in \mathbb{N}, \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = \alpha, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n = \beta^T\}. \quad (2.20)$$

Man kann sich anschaulich $\alpha \sqcup \beta^T$ als die Menge der möglichen Reihenfolgen von Karten, die beim Mischen zweier Stapel, deren Reihenfolgen durch α bzw. β^T gegeben sind, vorstellen, da sich beim Mischen die relative Ordnung der Karten in den beiden Stapeln nicht verändert.

Sowohl für α als auch für β können wir leere Wörter einsetzen. Ist β leer, so sind die KK-Relationen trivial erfüllt. Für leeres α folgt mit der zyklischen Invarianz der Amplitude

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(1n\beta) = (-1)^{n-2} A_{n,k}^{\text{QCD}}(1\beta^T n) = (-1)^n A_{n,k}^{\text{QCD}}(\beta^T n1). \quad (2.21)$$

Diese Eigenschaft wird als Reflexion bezeichnet: Kehrt man die Ordnung um, so ist die entstandene Amplitude gleich der Ausgangsamplitude, falls die Anzahl der externen Teilchen gerade ist oder sie unterscheidet sich von dieser um ein Vorzeichen für eine ungerade Anzahl an externen Teilchen. Eine weitere wichtige Eigenschaft ergibt sich für $\alpha = 34 \dots (n-1)$ und $\beta = 2$. In diesem Fall erhält man die Subzyklizität

$$\begin{aligned} A_{n,k}^{\text{QCD}}(134 \dots (n-1)n2) &= -A_{n,k}^{\text{QCD}}(1234 \dots (n-1)n) \\ &\quad - A_{n,k}^{\text{QCD}}(1324 \dots (n-1)n) - \dots - A_{n,k}^{\text{QCD}}(134 \dots (n-1)2n). \end{aligned} \quad (2.22)$$

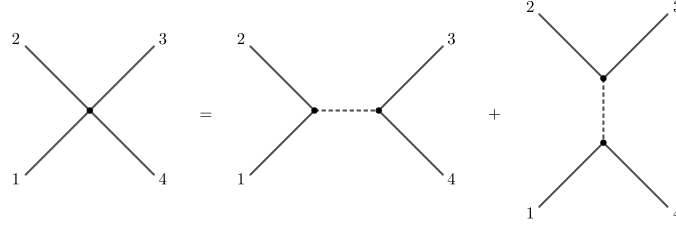


Abbildung 2.3.: Den Vier-Gluon-Vertex erhält man durch den Austausch eines Tensorteilchens (gestrichelt) im s- und t-Kanal. An die Beine 1, 2, 3 und 4 können beliebige Subgraphen angeheftet werden.

Die KK-Relationen können wir leicht verstehen, indem wir die Amplitude als Summe über kubische Graphen lesen:

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma) = i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,k}(\sigma)} N(G) \prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e - m_e^2} \quad (2.23)$$

$\mathcal{T}_{n,k}(\sigma)$ ist die Menge der bezüglich $\sigma \in \mathcal{B}_n$ geordneten kubischen Graphen mit n Beinen, wobei k Vertizes flavorerhaltend sind und dem Quark-Gluon-Vertex entsprechen. Für $k = 0$ enthält $\mathcal{T}_{n,k}(\sigma)$ genau

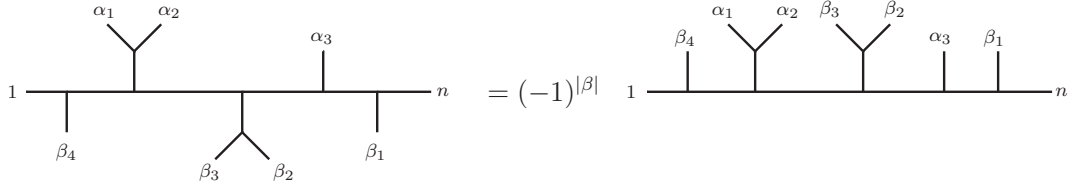
$$|\mathcal{T}_{n,0}(\sigma)| = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} \quad (2.24)$$

Elemente. Für $k > 0$ hängt diese Anzahl von der Ordnung σ ab. $N(G)$ bezeichnen wir als Numerator. Er hängt von Impulsen, Polarisationsvektoren der Gluonen und den Dirac-Spinoren der (Anti-)Quarks ab und kann mit Hilfe der (farbgeordneten) Feynman-Regeln bestimmt werden. $E(G)$ ist die Menge der Kanten des Graphen $G \in \mathcal{T}_{n,k}(\sigma)$ und s_e bzw. m_e die mit der Kante $e \in E(G)$ assoziierte Mandelstam-Variable bzw. Masse. Um die QCD-Amplitude nach kubischen Diagrammen zu entwickeln, ist es notwendig den 4-Gluon-Vertex zu ersetzen. Dies geschieht durch die Einführung eines Tensorteilchens. Der Gluon-Tensor-Vertex $V^{\mu\nu\rho\sigma}$ und der Tensor-Propagator $D^{\mu\nu\rho\sigma}$ sind gegeben durch [56]

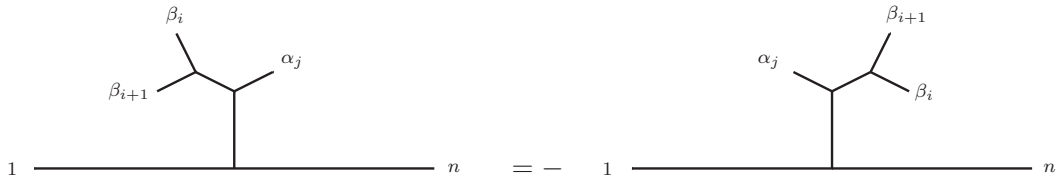
$$V^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}), \quad D^{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{i}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}). \quad (2.25)$$

Der Austausch eines Tensorteilchens im s- und t-Kanal liefern dann den 4-Gluon-Vertex (siehe Abb. 2.3).

Alle drei 3-Teilchen-Vertizes (3-Gluon-Vertex, Gluon-Tensor-Vertex und Quark-Gluon-Vertex) sind antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Beine. Dies liefert uns die KK-Relationen. Wir betrachten dazu einen typischen Beitrag zu $A_{9,0}^{\text{QCD}}(1\alpha n\beta)$, welcher in Abb. 2.4a auf der linken Seite dargestellt ist. Durch sukzessives Vertauschen der Beine können wir alle durch β_i gekennzeichneten Teilchen von Positionen unterhalb der Linie $1-n$ auf die entsprechenden Positionen oberhalb dieser Linie bringen. Wir erhalten dabei



- (a) Dargestellt ist auf der linken Seite ein Beitrag zur Amplitude $A_{n,k}^{\text{QCD}}(1\alpha n\beta)$, sowie ein Beitrag zu $A_{n,k}^{\text{QCD}}(1\sigma n)$ mit $\sigma \in \alpha \sqcup \beta^T$ auf der rechten Seite (jeweils für $n = 9$ und $k = 0$). Aufgrund der Antisymmetrie der 3-Teilchen-Vertizes unterscheiden sich die Diagramme um einen Faktor $(-1)^{|\beta|}$, sodass jedes Diagramm, welches einen Beitrag zur linken Seite von Gl. (2.19) liefert, ebenso auch zur rechten Seite der Gleichung beiträgt.



- (b) Zwei Beiträge zur rechten Seite von Gl. (2.19). Eingezeichnet ist jeweils nur ein Ast, der sich bei den Diagrammen unterscheidet. Der restliche Teil der Diagramme soll gleich sein. Aufgrund der Antisymmetrie der 3-Teilchen-Vertizes unterscheiden sich beide Diagramme um ein Vorzeichen und addieren sich deshalb zu Null.

Abbildung 2.4.: Veranschaulichung der KK-Relationen in Gl. (2.19).

jedes Mal aufgrund der Antisymmetrie der 3-Teilchen-Vertizes ein negatives Vorzeichen. Insgesamt erhalten wir also nach $|\beta|$ Vertauschungen ein Vorzeichen $(-1)^{|\beta|}$ und die Ordnung des Diagramms ist nun von der Form $1\sigma n$ mit $\sigma \in \alpha \sqcup \beta^T$. Es ist damit offensichtlich, dass jedes zur linken Seite von Gl. (2.19) beitragende Diagramm auch zur rechten Seite der Gleichung beiträgt. Natürlich enthält allerdings die rechte Seite von Gl. (2.19) mehr Summanden. Bei den übrigen Summanden gehören sowohl ein zu α als auch ein zu β gehöriges Teilchen zu einem Ast, welches an die Linie $1 - n$ koppelt. Allerdings gibt es zu jedem dieser Terme ein zugehöriges Diagramm, das sich nur um ein Vorzeichen unterscheidet, da das Shuffle-Produkt die relative Ordnung in α und β^T erhält und aufgrund der Antisymmetrie der 3-Teilchen-Vertizes. Dies ist in Abb. 2.4b veranschaulicht. Damit heben sich die übrigen Summanden weg und man erhält Gl. (2.19).

2.3. Die Melia-Relationen

Wie in Abb. 2.5 illustriert verschwinden QCD-Amplituden mit zwei gekreuzten Fermionenlinien $q_i - \bar{q}_i$ und $q_j - \bar{q}_j$:

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\dots q_i \dots q_j \dots \bar{q}_i \dots \bar{q}_j \dots) = 0 \quad (2.26)$$

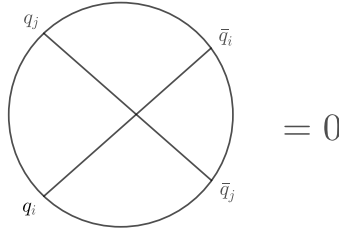


Abbildung 2.5.: QCD-Amplituden mit gekreuzten Fermionenlinien verschwinden.

Dies führt für $k \geq 2$ Quark-Antiquark-Paare zu weiteren Relationen zwischen QCD-Amplituden, welche die Anzahl unabhängiger Amplituden auf $(n-2)!/k!$ verkleinern. Wir wollen in diesem Abschnitt den Algorithmus angeben, welcher diese Relationen liefert.

Wir notieren von nun an Quarks mit $1, 2, \dots, k$ und Antiquarks mit $n - k + 1, n - k + 2, \dots, n$, wobei Quark i ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) und Antiquark $n - i + 1$ denselben Flavor haben sollen. Die Menge der Gluonen sei $G_{n,k} \equiv \{k + 1, k + 2, \dots, n - k\}$. Ferner seien hier alle Amplituden in der KK-Basis, d. h. Teilchen 1 sei auf Position 1 und Teilchen n auf Position n fixiert.

2.3.1. Orientieren von QCD-Amplituden

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass es möglich ist eine Amplitude in der KK-Basis und beliebiger Signatur als Linearkombination von Amplituden in der KK-Basis und einer fest gewählten Signatur darzustellen, was wir als Orientieren von Amplituden bezeichnen. Dies wird die Anzahl unabhängiger QCD-Amplituden von $(n - 2)!$ auf $(n - 2)!/k!$ verkleinern (siehe Kapitel 2.3.2).

Unter der Signatur einer Amplitude in der KK-Basis und mit k Quark-Antiquark-Paaren verstehen wir ein $(k - 1)$ -Tupel, dessen Einträge aus $+$ und $-$ bestehen. Der i -te Eintrag des Tupels ist ein $+$ genau dann, wenn in der zyklischen Ordnung der Amplitude das zur i -ten Quarklinie (nach der fixierten Linie $1 - n$) gehörige Quark vor dem zugehörigen Antiquark auftritt. In diesem Fall nennen wir die Quarklinie von positiver Signatur oder positiv orientiert, andernfalls ist die Signatur der Linie negativ. Die Signatur einer Amplitude heißt positiv, wenn alle Quarklinien positive Signatur besitzen. Wir sprechen dann auch von positiv orientierten Amplituden.

Wir diskutieren zunächst das Orientieren nur einer Quarklinie im reinen Quark-Fall ($2k = n$). Wir nehmen an, dass die Quarklinie $j - i$ „falsch“ orientiert ist. Unser Ziel an dieser Stelle ist es, diese Quarklinie zu orientieren, d. h. wir wollen eine Amplitude in der KK-Basis, bei der j vor i in der zyklischen Ordnung vorkommt, durch eine Linearkombination von Amplituden in der KK-Basis, bei denen i vor j kommt, ausdrücken. Zwischen j und i können etwaige Quark-Antiquark-Paare liegen, welche wir mit α abkürzen. Weiterhin bezeichnen wir mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{c-1}$ bzw. mit $\alpha_{c+1}, \alpha_{c+2}, \dots, \alpha_s$ ($s \in \{1, 2, \dots, k - 1\}, c \in \{1, 2, \dots, s\}$) Quarklinien, die in der zyklischen Ordnung vor j bzw. nach i liegen und deren Tiefen jeweils gleich der Tiefe der Linie $j - i$ sind, samt

zugehörigen Substrukturen bei höheren Tiefen.² Die zur nächst niedrigeren Tiefe gehörende Quarklinie bezeichnen wir mit $x - y$. Mit dieser Notation lautet die allgemeinst mögliche Amplitude, bei der j vor i kommt,

$$A_{2k,k}^{\text{QCD}}(\gamma_1 x \alpha_1 \dots \alpha_{c-1} j \alpha_i \alpha_{c+1} \dots \alpha_s y \gamma_2), \quad (2.27)$$

wobei man mit γ_1 bzw. γ_2 Quarks bzw. Antiquarks notiert, die in der zyklischen Ordnung vor x bzw. nach y kommen und damit vom restlichen Diagramm durch die Linie $x - y$ getrennt sind. Diese Amplitude ist in Abbildung 2.6 illustriert. Wir lassen $\gamma_i = \emptyset$, $i = 1, 2$, zu. Als Konsequenz dessen, dass die Amplitude in der KK-Basis sein soll, ist jedoch $\gamma_1 = \emptyset$ genau dann, wenn auch $\gamma_2 = \emptyset$ gilt. In diesem Fall ist notwendig $x = 1$ und $y = n$.

Durch Anwenden der zyklischen Invarianz der Amplitude, der KK-Relationen und Gl. (2.26) hat Melia in [57] gezeigt, dass man die Quarklinie $i - j$ vermöge

$$A_{2k,k}^{\text{QCD}}(\gamma_1 x \alpha_1^c j \alpha_i \alpha_3^c y \gamma_2) = - \sum_{a=1}^c \sum_{\sigma' \in \alpha_2^a \sqcup \alpha^T} \sum_{\sigma \in \sigma' j \sqcup \alpha_3^c} A_{2k,k}^{\text{QCD}}(\gamma_1 x \alpha_1^a i \sigma y \gamma_2), \quad (2.28)$$

wobei wir die Abkürzungen $\alpha_1^a \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{a-1}$, $\alpha_2^a \equiv \alpha_a \alpha_{a+1} \dots \alpha_{c-1}$ und $\alpha_3^a \equiv \alpha_{a+1} \alpha_{a+2} \dots \alpha_s$ eingeführt haben, orientieren kann.

Im allgemeinen Fall erlauben wir Gluonen zwischen den ersten und den letzten Buchstaben der α_a , welche per definitionem jeweils Quark-Antiquark-Paare sein sollen. Zwischen α_a und α_{a+1} ($a \in \{1, 2, \dots, s-1\}$) können im Allgemeinen weitere Gluonen liegen und wir bezeichnen diese mit β_{a+1} . Gluonen zwischen x und α_1 notieren wir mit β_1 ; solche zwischen α_s und y mit β_{s+1} . Weiterhin müssen wir auch die Möglichkeit zulassen, dass α Gluonen enthält. Die Zahl dieser notieren wir mit n_{g_α} . Die Amplitude in Gl. (2.27) ist also zu

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\gamma_1 x \beta_1 \alpha_1 \dots \beta_{c-1} \alpha_{c-1} \beta_c j \alpha_i \beta_{c+1} \alpha_{c+1} \dots \beta_s \alpha_s \beta_{s+1} y \gamma_2) \quad (2.29)$$

zu verallgemeinern.³

Im Gegensatz zum reinen Quark-Fall müssen wir bei der Orientierung der Linie $j - i$ einen fundamentalen Unterschied beachten: Wenn zwei Buchstaben l_ι und l_κ in $l_1 l_2 \dots l_\iota \dots l_\kappa \dots l_{|\alpha_a|} \equiv \alpha_a$ existieren, sodass $l_1, l_2, \dots, l_\kappa$ vor i in der zyklischen Ordnung der Amplitude auftreten und $l_\kappa, l_{\kappa+1}, \dots, l_{|\alpha_a|}$ danach, jedoch noch vor j , so tritt – unabhängig davon, ob wir den reinen Quark-Fall betrachten oder die Notation in Gl. (2.29) verwenden – eine gekreuzte Quarklinie auf, sodass wir die entsprechende Amplitude in der Summe von Gl. (2.28) nicht berücksichtigen brauchen. Da wir jedoch mit β_a ausschließlich Gluonen kennzeichnen, können Buchstaben von β_a beiderseits von i auftreten.

²Hierbei lässt sich die Tiefe einer Quarklinie wie folgt definieren. Wir platzieren einen Vertex in das Innere des Gebietes (bzw. der Gebiete im Fall $k = 1$), das nur durch den Rand der Kreisscheibe und $1 - n$ berandet ist. Die Tiefe einer Quarklinie ist dann die Anzahl der Quarklinien, die man schneiden muss, um von dieser zu dem Vertex zu gelangen. Insbesondere hat $1 - n$ die Tiefe 0 und alle Quarklinien, die nicht durch eine andere Quarklinie von $1 - n$ getrennt sind, die Tiefe 1.

³Im Allgemeinen enthalten nun auch γ_1 und γ_2 Gluonen. x und y bezeichnen aber immer noch ein Quark und Antiquark gleichen Flavors.

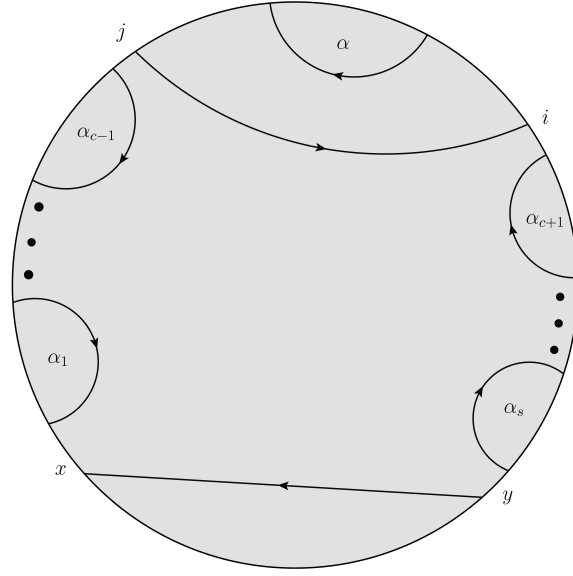


Abbildung 2.6.: Grafische Darstellung der Amplitude in Gl. (2.27). Von $\alpha_1, \dots, \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \dots, \alpha_s$ und α sind nur die äußersten Quarklinien eingezeichnet. Diese können jeweils Substrukturen bei höheren Tiefen beinhalten. Unterhalb der Quarklinie $x - y$ können ebenfalls weitere Quark-Antiquark-Paare liegen, welche in Gl. (2.27) mit γ_1 und γ_2 bezeichnet, hier jedoch nicht dargestellt, sind.

Wir zerlegen β_a gemäß $\beta_a^b \tilde{\beta}_a^{|\beta_a|-b} \equiv \beta_a$, wobei β_a^b b Buchstaben und $\tilde{\beta}_a^{|\beta_a|-b}$ $|\beta_a| - b$ Buchstaben enthalten sollen. Insbesondere ist damit $|\beta_a|$ die gesamte Anzahl an Buchstaben in β_a . Weiter definieren wir $\alpha_1^{b,a} \equiv \beta_1 \alpha_1 \dots \beta_{a-1} \alpha_{a-1} \beta_a^b$, $\alpha_2^{b,a} \equiv \tilde{\beta}_a^{|\beta_a|-b} \alpha_a \dots \beta_{c-1} \alpha_{c-1} \beta_c$ und $\alpha_3^{b,a} \equiv \beta_{a+1} \alpha_{a+1} \dots \beta_s \alpha_s \beta_{s+1}$ als Verallgemeinerungen von α_1^a , α_2^a und α_3^a im reinen Quark-Fall.⁴ Die Verallgemeinerung von Gl. (2.27) lautet dann [58]:

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\gamma_1 x \alpha_1^{|\beta_c|,c} j \alpha i \alpha_3^{|\beta_c|,c} y \gamma_2) = (-1)^{1+n_{g\alpha}} \sum_{a=1}^c \sum_{b=0}^{|\beta_a|} \sum_{\sigma' \in \alpha_2^{b,a} \sqcup \alpha^T} \sum_{\sigma \in \sigma' j \sqcup \alpha_3^{b,c}} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\gamma_1 x \alpha_1^{b,a} i \sigma y \gamma_2) \quad (2.30)$$

Das zusätzliche Vorzeichen $(-1)^{n_{g\alpha}}$ berücksichtigt nun, dass α im Allgemeinen nicht eine gerade Anzahl an Buchstaben (bzw. an Gluonen) besitzt. Die Summe über b trägt der Tatsache Rechnung, dass, wie erwähnt, Gluonen in β_a beiderseits von i liegen können. Sowohl in Gl. (2.28) als auch in Gl. (2.30) können jeweils auf der rechten Seite Amplituden auftreten, die aufgrund von gekreuzten Quarklinien verschwinden.

⁴Natürlich hängt $\alpha_3^{b,a}$ nicht von b ab. Wir verwenden diese Notation nur in Analogie zu $\alpha_1^{b,a}$ bzw. $\alpha_2^{b,a}$ und um von α_3^a zu unterscheiden.

Beachte, dass Gl. (2.30), außer der Quarklinie $i-j$, höchstens die Signaturen von Quarklinien auf höherer Tiefe als $i-j$ verändert, nicht jedoch die Signaturen von Quarklinien auf gleicher oder auf niedrigerer Tiefe als $i-j$. Dies erlaubt uns einen Algorithmus zum Orientieren von Amplituden zu formulieren: Die Quarklinie auf Tiefe 0 ist schon trivialerweise durch die KK-Relationen orientiert. Seien nun bereits alle Quarklinien bis zur Tiefe $m \geq 0$ orientiert. Dann orientieren wir sukzessive alle Quarklinien auf Tiefe $m+1$ mit Gl. (2.30), welche nicht die bereits gewünschte Signatur besitzen. Der Algorithmus terminiert spätestens, wenn $m = k-1$ ist, da $k-1$ die maximale Tiefe einer Quarklinie ist und somit alle Quarklinien in diesem Fall bereits orientiert sind.

Wir illustrieren dieses Verfahren anhand eines Beispiels. Betrachte die reine Quark-Amplitude

$$A_{6,3}^{\text{QCD}}(12637548). \quad (2.31)$$

Unser Ziel ist es, diese Amplitude als Linearkombination von positiv orientierten Amplituden darzustellen. Wir müssen demnach die zwei negativ orientierten Quarklinien, nämlich $6-3$ auf Tiefe 2 und $5-4$ auf Tiefe 1, orientieren. Wir orientieren zunächst die Quarklinie $5-4$ mit Gl. (2.30) bzw. mit Gl. (2.28):

$$A_{6,3}^{\text{QCD}}(12637548) = -A_{6,3}^{\text{QCD}}(12637458) - A_{6,3}^{\text{QCD}}(14263758) \quad (2.32)$$

Beide Amplituden auf der rechten Seite obiger Gleichung haben genau eine negativ orientierte Quarklinie auf Tiefe 2 bzw. auf Tiefe 3. Durch Orientieren dieser erhalten wir jeweils eine positiv orientierte Amplitude:

$$A_{6,3}^{\text{QCD}}(12637548) = A_{6,3}^{\text{QCD}}(12367458) + A_{6,3}^{\text{QCD}}(14236758) \quad (2.33)$$

Allgemeiner liefert uns der beschriebene Algorithmus Koeffizienten $c_\tau(\sigma) \in \{-1, 0, 1\}$ derart, dass

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}}} c_\tau(\sigma) A_{n,k}^{\text{QCD}}(\tau) \quad (2.34)$$

für alle $\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$ gilt, wobei $c_\tau(\sigma)$ verschwindet, falls die Ordnung σ zu gekreuzten Quarklinien gehört. Wir nennen dies die Melia-Relationen. $\mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}}$ ist hierbei diejenige Teilmenge von $\mathcal{B}_n^{\text{KK}}$, sodass alle Amplituden $A_{n,k}^{\text{QCD}}(\tau)$ mit $\tau \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}}$ positiv orientiert sind und insbesondere keine gekreuzten Quarklinien enthalten. Wir nennen $\mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}}$ die Melia-Basis. Nachfolgend wenden wir uns der genaueren Beschreibung dieser Basis zu.

2.3.2. Die Melia-Basis

Um herauszufinden, wie viele unabhängige Amplituden übrig bleiben, wenn man die zyklische Invarianz, die KK-Relationen und die Melia-Relationen verwendet, müssen wir uns zunächst darüber Gedanken machen, wie viele topologisch inäquivalente Quarkliniendiagramme bei einer gegebenen Anzahl k an Quarklinien existieren. Wie in [59] gezeigt ist die Anzahl gerade durch die Catalan-Zahl

$$C_{k-1} \equiv \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \quad (2.35)$$

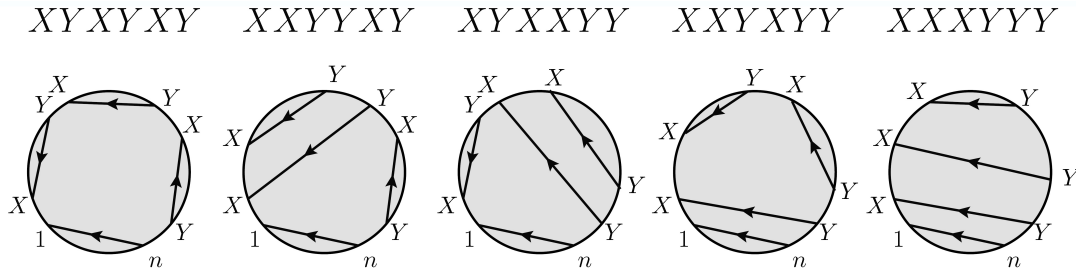


Abbildung 2.7.: Die Quarkklinendiagramme und die zugehörigen Dyck-Wörter für $k = 4$.

gegeben. In Abbildung 2.7 sind alle fünf Quarkklinendiagramme im Fall $k = 4$ grafisch dargestellt.

Wir geben als Nächstes eine Vorschrift zur Konstruktion aller topologisch verschiedenen Quarkklinendiagramme auf Basis von Dyck-Wörtern an. Ein Dyck-Wort der Länge $l \in \mathbb{N}_0$ ist ein Wort mit $2l$ Buchstaben aus dem Alphabet $\{X, Y\}$, sodass in jedem Anfangssegment des Wortes mindestens genau so viele Buchstaben X wie Y vorhanden sind und insgesamt das Wort aus genau so vielen X wie Y besteht. Die Anzahl an Dyck-Wörtern der Länge $k - 1$ ist durch Gl. (2.35) bestimmt. Um zu zeigen, dass C_{k-1} die Anzahl an topologisch verschiedenen Diagrammen ist, müssen wir somit nur noch eine Bijektion von der Menge der Dyck-Wörter der Länge $k - 1$ zu den Quarkklinendiagrammen mit k (nicht gekreuzten) Quarklinien, von denen wir eine Linie mit Hilfe der KK-Relationen fixiert haben, finden.

Sei ein Dyck-Wort d der Länge $k - 1$ gegeben. Wir ordnen nun diesem Dyck-Wort ein Quarkklinendiagramm $Q(d)$ mit k Quarklinien folgendermaßen zu: Zunächst zeichnen wir die Quarklinie $1 - n$ ein. Anschließend wird das Dyck-Wort im Uhrzeigersinn am Rand der Kreisscheibe, beginnend nach 1 aufgetragen. Immer dann, wenn wir dem Buchstaben Y begegnen, verbinden wir ihn mit dem zuletzt aufgetragenen X , das noch nicht mit einem Y verbunden wurde. Aufgrund der Definition des Dyck-Wortes ist die Abbildung Q dadurch wohldefiniert und in $Q(d)$ schneiden sich die Quarklinien offenbar nicht. Ferner ist Q bijektiv, denn die folgende Abbildung Q^{-1} , welche jedem Quarkklinendiagramm q mit k nicht gekreuzten Quarklinien (wovon eins fixiert ist) ein Dyck-Wort $d = Q^{-1}(q)$ zuordnet, ist invers zu Q : Beginnend bei der ersten Quarklinie nach $1 - n$ schreibt man den Buchstaben X , wenn eine Quarklinie beginnt oder einen Buchstaben Y , wenn die Quarklinie endet. Beginn und Ende der Quarklinien sind in diesem Kontext nicht mit Quarks oder Antiquarks zu assoziieren. Stattdessen bedeutet hier der Beginn (bzw. das Ende) einer Linie, dass man dieser Linie zum ersten (bzw. zweiten) Mal begegnet, wenn man entlang der Uhr läuft.

Damit sind wir nun in der Lage die Melia-Basis $\mathcal{B}_{n,k}^M$ zu definieren. Für die C_{k-1} verschiedenen Quark-Topologien, beschrieben etwa durch Dyck-Wörter d_i , müssen wir

1. $k - 1$ Quarkflavor auf $k - 1$ Quarklinien verteilen bzw. jeder Quarklinie ein Quark-Antiquark-Paar $(i, 2n - i + 1)$, $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, zuordnen,
2. $n - 2k$ Gluonen auf die freien $n - 2$ Plätze verteilen und

3. jeden Buchstaben X im Wort d_i mit einem Quark assoziieren, da die Melia-Basis gerade aus den positiv orientierten Amplituden besteht.

Wegen dem ersten Schritt führen wir $(k-1)!$ Kopien D_{k-1}^π , $\pi \in S_{k-1}$, der Menge D_{k-1} von Dyck-Wörtern der Länge $k-1$ ein, indem wir jedes Element d von D_{k-1} indizieren. Konkret erhält man $d^\pi \in D_{k-1}^\pi$ aus einem $d \in D_{k-1}$, indem jeder Buchstabe von d nacheinander (d. h. von links nach rechts) auf folgende Weise mit einem Index versehen wird: Das a -te X von d ($a \in \{1, 2, \dots, k-1\}$) erhält einen Index $\pi(a)$. Weiter erhält jeder Buchstabe Y von d denselben Index des zuletzt indizierten X , dessen Index noch für kein Y verwendet wurde. Beispielsweise hat man für $k=4$:

$$\begin{aligned} D_3^\pi = \{ & X^{\pi(1)} Y^{\pi(1)} X^{\pi(2)} Y^{\pi(2)} X^{\pi(3)} Y^{\pi(3)}, X^{\pi(1)} X^{\pi(2)} Y^{\pi(2)} Y^{\pi(1)} X^{\pi(3)} Y^{\pi(3)}, \\ & X^{\pi(1)} Y^{\pi(1)} X^{\pi(2)} X^{\pi(3)} Y^{\pi(3)} Y^{\pi(2)}, X^{\pi(1)} X^{\pi(2)} Y^{\pi(2)} X^{\pi(3)} Y^{\pi(3)} Y^{\pi(1)}, \\ & X^{\pi(1)} X^{\pi(2)} X^{\pi(3)} Y^{\pi(3)} Y^{\pi(2)} Y^{\pi(1)} \} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Wie im dritten Punkt beschrieben wollen wir jedes X^a mit einem Quark und jedes Y^a mit einem Antiquark assoziieren. Dies tun wir vermöge der Vorschrift f :

$$f(X^a) \equiv a, \quad f(Y^a) \equiv n - a + 1 \quad \text{mit} \quad a \in \{2, 3, \dots, k\} \quad (2.37)$$

Schließlich ordnen wir jedem Dyck-Wort $d^\pi \in D_{k-1}^\pi$ ein Tupel aus Quarks bzw. Antiquarks zu:

$$F^\pi(d^\pi) \equiv (f(d_1^\pi), f(d_2^\pi), \dots, f(d_{2k-2}^\pi)) \quad \text{für} \quad d_1^\pi d_2^\pi \dots d_{2k-2}^\pi \equiv d^\pi \quad (2.38)$$

Es ist klar, dass $F^\pi(D_{k-1}^\pi)$ genau so viele Elemente wie D_{k-1}^π , nämlich C_{k-1} , enthält.

Mit diesen Notationen ist die Melia-Basis für $k > 1$ explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n,k}^M = \{ & 1\sigma(\alpha_0 + 1) \dots \sigma(\alpha_1) x_1 \sigma(\alpha_1 + 1) \dots \sigma(\alpha_2) x_2 \sigma(\alpha_2 + 1) \dots \\ & \dots \sigma(\alpha_{2k-2}) x_{2k-2} \sigma(\alpha_{2k-2} + 1) \dots \sigma(\alpha_{2k-1}) n | \\ & \sigma \in S(G_{n,k}), (\alpha_0, \dots, \alpha_{2k-1}) \in \widetilde{M}_{n,k}, (x_1, \dots, x_{2k-2}) \in F^\pi(D_{k-1}^\pi), \pi \in S_{k-1} \}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

wobei $\widetilde{M}_{n,k}$ die Menge

$$\widetilde{M}_{n,k} \equiv \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2k-1}) \in \mathbb{N}^{2k} | k = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{2k-2} \leq \alpha_{2k-1} = n - k\} \quad (2.40)$$

und $S(G_{n,k})$ die Menge der Gluon-Permutationen ist. Für $k \leq 1$ kann es keine gekreuzten Quarklinien geben und die Melia-Basis ist somit in diesem Fall gleich der KK-Basis:

$$\mathcal{B}_{n,1}^M = \mathcal{B}_{n,0}^M = \mathcal{B}_n^{\text{KK}} \quad (2.41)$$

Für die Mächtigkeit $|\mathcal{B}_{n,k}^M|$ der Melia-Basis erhalten wir

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_{n,k}^M| &= |S(G_{n,k})| \cdot |\widetilde{M}_{n,k}| \cdot |F^\pi(D_{k-1}^\pi)| \cdot |S_{k-1}| \\ &= (n-2k)! \cdot \binom{n-2}{2k-2} \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (k-1)! = \frac{(n-2)!}{k!}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Diese stellt eine obere Schranke für die Anzahl der unabhängigen QCD-Amplituden dar, ist jedoch im Allgemeinen nicht die kleinste obere Schranke, wie wir im Folgenden feststellen werden.

2.4. Die Farbe-Kinematik-Dualität für YM-Amplituden

Wir betrachten zunächst den reinen Gluon-Fall ($k = 0$), genauer den Fall von $n = 4$ Gluonen. Die KK-Relationen erlauben uns ein Gluon auf die erste und eins auf die letzte Position zu fixieren. Die beiden übrigen Amplituden entwickeln wir nach den vorhandenen Polstellen wie in Gl. (2.23),

$$\begin{aligned} A_4^{\text{YM}}(1234) &= -i \left(\frac{N_s}{s} + \frac{N_t}{t} \right), \\ A_4^{\text{YM}}(1324) &= -i \left(-\frac{N_t}{t} + \frac{N_u}{u} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Hierbei sind $s \equiv s_{12}$, $t \equiv s_{14}$ und $u \equiv s_{13}$, $s_{ij} \equiv (p_i + p_j)^2$, die Mandelstam-Variablen. N_s/s , N_t/t und N_u/u sind Beiträge der Feynman-Diagramme im s-, t- und u-Kanal. Wie in Kapitel 2.2 beschrieben, kann der 4-Gluon-Vertex durch Einführung eines Tensorfeldes in 3-Teilchen-Vertizes zerlegt werden, sodass der Beitrag des 4-Gluon-Vertex zur Amplitude in die bereits vorhandenen kinematischen Terme absorbiert werden kann. Natürlich kann in Gl. (2.43) der Vorfaktor beliebig gewählt werden – er ändert zwar den Wert der Numerator, jedoch nicht der Amplitude. Es ist aber zu beachten, dass wir in den t-Kanälen der beiden Amplituden ein relatives Vorzeichen wegen der Antisymmetrie der 3-Teilchen-Vertizes unter Vertauschung zweier Beine haben müssen.

Bezeichnet man mit $F^a \equiv (F_{bc}^a)$ die durch $F_{bc}^a = if^{abc}$ gegebenen $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ -Matrizen, wobei

$$f^{abc} \equiv -2i[\text{tr}(t^a t^b t^c) - \text{tr}(t^b t^a t^c)] \quad (2.44)$$

die Strukturkonstanten der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$ sind, so erhält man die volle Amplitude $\mathcal{A}_n^{\text{YM}}$ mit der Zerlegung [3]

$$\mathcal{A}_n^{\text{YM}} = g^{n-2} \left(\sum_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} F^{a_{\sigma_2}} F^{a_{\sigma_3}} \dots F^{a_{\sigma_{n-1}}} A_n^{\text{YM}}(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n) \right)_{a_1 a_n}, \quad (2.45)$$

in welcher die KK-Relationen bereits implementiert sind. Die in Kapitel 2.1 dargestellte Farbflusszerlegung folgt aus Gl. (2.45) durch Kontrahieren mit $(\sqrt{2})^n (t^{a_1})_{j_1}^{i_1} \dots (t^{a_n})_{j_n}^{i_n}$ aus der $\text{SU}(N)$ -Fierz-Identität

$$(t^a)_{j_1}^{i_1} (t^a)_{j_2}^{i_2} = \frac{1}{2} \left(\delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} - \frac{1}{N} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \right) \quad (2.46)$$

sowie den KK-Relationen [53]. Definieren wir die Farbfaktoren $C_s \equiv -f^{a_1 a_2 b} f^{b a_3 a_4}$ und $C_u \equiv -f^{a_1 a_3 b} f^{b a_2 a_4}$ und setzen die Entwicklungen in Gl. (2.43) in Gl. (2.45) ein, so erhalten wir

$$\mathcal{A}_4^{\text{YM}} = -ig^2 \left(\frac{C_s N_s}{s} + \frac{C_t N_t}{t} + \frac{C_u N_u}{u} \right). \quad (2.47)$$

Hierbei haben wir die Jacobi-Identität für die Farbfaktoren, $C_s - C_u = C_t \equiv -f^{a_2 a_3 b} f^{b a_4 a_1}$, benutzt. Sie folgt aus der Tatsache, dass $\mathfrak{su}(N)$ mit $-i[\cdot, \cdot]$ als Lie-Klammer

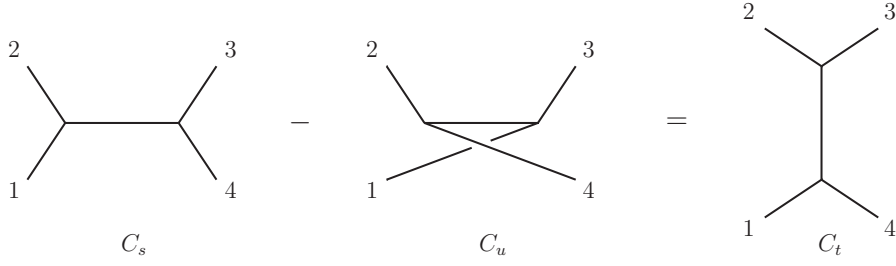


Abbildung 2.8.: Diagrammatische Darstellung der Jacobi-Identität $C_s - C_u = C_t$. Die Farbfaktoren C_i von s-, t- und u-Kanal erhält man, indem man jeden Vertex mit einem Faktor $i f^{abc}$ entsprechend der rechtsläufigen Ordnung der Beine des Diagramms versieht und über die Farben des internen Gluons summiert.

eine Lie-Algebra ist und deshalb die Basisvektoren t^a von $\mathfrak{su}(N)$ die Jacobi-Identität

$$[t^{a_1}, [t^{a_2}, t^{a_3}]] + [t^{a_2}, [t^{a_3}, t^{a_1}]] + [t^{a_3}, [t^{a_1}, t^{a_2}]] = 0 \quad (2.48)$$

erfüllen. Die Jacobi-Identität für die Farbfaktoren ist in Abbildung 2.8 veranschaulicht.

Die Numerator N_s , N_t und N_u sind keineswegs eindeutig. Dies kann bereits dadurch gesehen werden, dass die Summanden in Gl. (2.43) Beiträge von Feynman-Diagrammen sind, die – im Gegensatz zu farbgeordneten Amplituden – nicht eichinvariant sind. Genauer können wir die Transformationen

$$N_s \mapsto N_s + f s, \quad N_t \mapsto N_t - f t \quad \text{und} \quad N_u \mapsto N_u - f u \quad (2.49)$$

mit einer Funktion f der Impulse und Polarisationsvektoren simultan durchführen, ohne die Amplituden zu verändern. Man bezeichnet diese Transformationen als verallgemeinerte Eichtransformationen, da (gewöhnliche) Eichtransformationen eine Teilmenge dieser bilden. Interessanterweise gilt unter obiger verallgemeinerter Eichtransformation

$$N_s - N_u - N_t \mapsto N_s - N_u - N_t + f \cdot (s + t + u) = N_s - N_u - N_t. \quad (2.50)$$

Für einen Satz von Numeratoren stellt man leicht fest, dass dieser die Jacobi-Relation $N_t = N_s - N_u$, d.h. dieselbe wie die Farbfaktoren, erfüllt. Damit gilt diese für jede Wahl der Numerator – unabhängig von der gewählten Eichung. Tatsächlich ist dies für $n = 5$ nicht mehr der Fall. Es lässt sich jedoch für eine beliebige Anzahl an Gluonen eine verallgemeinerte Eichtransformation, d.h. eine Transformation der Numerator

$$N(G) \mapsto N(G) + \delta N(G) \quad \text{mit} \quad \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,0}} \frac{\delta N(G)}{\prod_{e \in E(G)} s_e} = 0, \quad (2.51)$$

finden, sodass die transformierten Numerator dieselben Jacobi-Relationen erfüllen wie die Farbfaktoren [8]:

$$C(G_1) + C(G_2) + C(G_3) = 0 \Rightarrow N(G_1) + N(G_2) + N(G_3) = 0 \quad (2.52)$$

Dies ist als Farbe-Kinematik-Dualität bekannt. Diejenigen Numerator, welche die Jacobi-Relationen erfüllen, bezeichnen wir als BCJ-Numerator und notieren diese mit $N^{\text{BCJ}}(G)$. Man beachte, dass Numerator allgemein – genau so wie die Farbfaktoren – antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Beine sind, d. h. es gilt $C(G_1) = -C(G_2)$ und $N(G_1) = -N(G_2)$, wenn G_2 aus G_1 durch Vertauschung zweier Beine entsteht.

Dass es tatsächlich möglich ist Numerator zu finden, welche die Jacobi-Relationen erfüllen, lässt sich beispielsweise zeigen, indem man einen effektiven YM-Lagrangian konstruiert, dessen abgeleitete Feynman-Regeln BCJ-Numerator liefern [60, 61]:

$$\mathcal{L}^{\text{YM}} + \mathcal{L}^{\text{gf}} = \frac{1}{2g^2} \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{L}^{(n)} \quad (2.53)$$

Für $2 \leq n \leq 4$ sind die Beiträge zum Lagrangian gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= -2\text{tr} \mathbf{A}_\mu \square \mathbf{A}^\mu, \\ \mathcal{L}^{(3)} &= 4\text{tr}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu], \\ \mathcal{L}^{(4)} &= -\eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} \eta_{\nu_1 \nu_2} \frac{\partial_{12}^{\nu_1} \partial_{34}^{\nu_2}}{\square_{12}} \text{tr}[\mathbf{A}_{\mu_1}, \mathbf{A}_{\mu_2}] [\mathbf{A}_{\mu_3}, \mathbf{A}_{\mu_4}], \end{aligned} \quad (2.54)$$

wobei wir die Felder

$$\mathbf{A}_\mu \equiv \frac{g}{i} A_\mu^a t^a = \frac{g}{\sqrt{2i}} \mathcal{A}_\mu \quad (2.55)$$

eingeführt haben. Tiefgestellte Indizes an den Differenzialoperatoren geben an auf welche Felder diese wirken, z. B. wirkt $\partial_{12}^{\nu_1}$ auf die Felder \mathbf{A}_{μ_1} und \mathbf{A}_{μ_2} .

Die Summe $\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)} + \mathcal{L}^{(4)}$ ist identisch mit dem üblichen YM-Lagrangian. Beachte, dass sich der Faktor $\eta_{\nu_1 \nu_2} \partial_{12}^{\nu_1} \partial_{34}^{\nu_2}$ gegen \square_{12} weghebt. Wenn wir diese Faktoren nicht kürzen, erhalten wir jedoch genau die Aufteilung des 4-Gluon-Vertex in Beiträge von s- und t-Kanal (siehe Abb. 2.3). Damit entspricht $\mathcal{L}^{(4)}$ in der dargestellten Form der Einführung eines Tensorteilchens wie in Kapitel 2.2 beschrieben.

Die Terme $\mathcal{L}^{(n)}$ verschwinden für $n \geq 5$ aufgrund den Jacobi-Identitäten. Sie führen jedoch einen n -Teilchen-Vertex ein, welcher Beiträge zu den einzelnen Numeratoren derart liefert, dass diese die Jacobi-Relationen erfüllen. Beispielsweise haben wir für $n = 5$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(5)} &= 4\eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} \frac{\partial_1^{\mu_5}}{\square_{123}} (\text{tr}[[[\mathbf{A}_{\mu_1}, \mathbf{A}_{\mu_2}], \mathbf{A}_{\mu_3}], \mathbf{A}_{\mu_4}] \mathbf{A}_{\mu_5} \\ &\quad + \text{tr}[[\mathbf{A}_{\mu_3}, \mathbf{A}_{\mu_4}], [\mathbf{A}_{\mu_1}, \mathbf{A}_{\mu_2}]] \mathbf{A}_{\mu_5} + \text{tr}[[\mathbf{A}_{\mu_4}, [\mathbf{A}_{\mu_1}, \mathbf{A}_{\mu_2}]], \mathbf{A}_{\mu_3}] \mathbf{A}_{\mu_5}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Beachte, dass die Terme $\mathcal{L}^{(n)}$ für $n \geq 5$ nicht eindeutig sind. Wir können etwa in Gl. (2.56) die Ersetzung

$$\eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} \partial_1^{\mu_5} \longmapsto \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} \partial_1^{\mu_5} + \lambda (\eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} \partial_1^{\mu_5} - \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_4 \mu_5} \partial_4^{\mu_2}) \quad (2.57)$$

mit einem freien Parameter λ durchführen, ohne die Jacobi-Relationen zu verletzen.

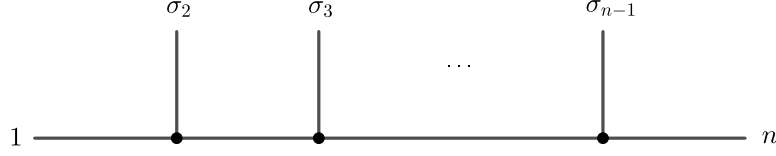


Abbildung 2.9.: Kamm-Graph bezüglich der Ordnung $1\sigma_2\sigma_3\dots\sigma_{n-1}n \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$.

2.5. Die BCJ-Relationen für YM-Amplituden

Wir nehmen nun an, dass wir einen Satz von BCJ-Numeratoren N^{BCJ} gefunden haben. Die Jacobi-Relationen erlauben es, den BCJ-Numerator $N^{\text{BCJ}}(G)$ eines beliebigen Graphen G auf BCJ-Numerator von solchen Graphen zurückzuführen, bei denen Teilchen $2, 3, \dots, n-1$ direkt mit der Linie $1-n$ verbunden sind (siehe Abb. 2.9). Wir bezeichnen diese Graphen als Kamm-Graphen und schreiben $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ für die BCJ-Numerator von Kamm-Graphen mit Ordnung $\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$. Betrachte hierzu einen generischen Graphen $G \in \mathcal{T}_{n,0}(\sigma)$ mit $\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$. Dieser ist oben in Abb. 2.10 veranschaulicht. Wenden wir die Jacobi-Relation auf den Vertex $v_{s,1}$ an, so erhalten wir die beiden unteren Graphen in Abb. 2.10, wobei der rechte Graph mit einem Minus Vorzeichen versehen ist. Diese Vorgehensweise können wir iterieren. Wir erhalten auf diese Weise Kamm-Diagramme mit Ordnungen $\tilde{\sigma} \in \text{CO}(G) \cap \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$, wobei wir mit $\text{CO}(G)$ die Menge der Ordnungen von externen Beinen derjenigen Graphen bezeichnen, die aus G durch Vertauschen von zwei Teilbäumen von G an einem gemeinsamen Vertex entstehen. Wir nennen solche Vertauschungen Flips. Das Vorzeichen wird durch die Anzahl der Flips $n_{\text{flip}}(\sigma, \tilde{\sigma})$ bestimmt, um den Graphen G von der Ordnung σ in einen Graphen \tilde{G} mit Ordnung $\tilde{\sigma}$ zu überführen. Wir haben damit

$$N^{\text{BCJ}}(G) = \sum_{\tilde{\sigma} \in \text{CO}(G) \cap \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} (-1)^{n_{\text{flip}}(\sigma, \tilde{\sigma})} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\tilde{\sigma}). \quad (2.58)$$

Insbesondere für $n = 4$ haben wir zwei unabhängige Numerator, nämlich

$$N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) = N_s \quad \text{und} \quad N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324) = N_u. \quad (2.59)$$

Setzen wir $N_t = N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324)$ in Gl. (2.43) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} iA_4^{\text{YM}}(1234) &= N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right) - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324) \frac{1}{t}, \\ iA_4^{\text{YM}}(1324) &= -N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) \frac{1}{t} + N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{t} \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Hieraus folgt, dass die beiden Amplituden auf der linken Seite nicht unabhängig voneinander sind. Mit $s + t + u = 0$ erhalten wir aus obigen Gleichungen die Relation

$$sA_4^{\text{YM}}(1234) = uA_4^{\text{YM}}(1324). \quad (2.61)$$

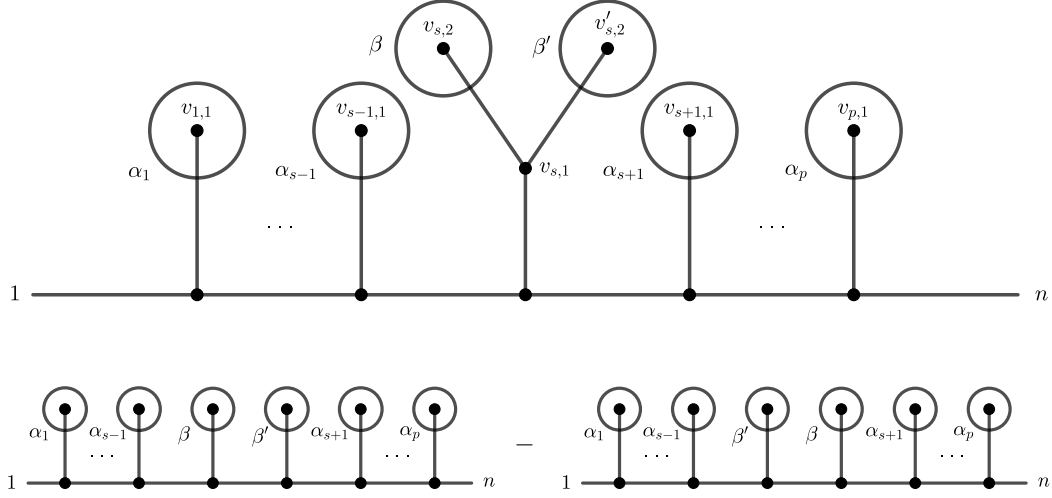


Abbildung 2.10.: Durch Anwenden der Jacobi-Relation auf einen Graphen G (oben) und den Vertex $v_{s,1}$ entstehen die beiden unteren Graphen, wobei der rechte Graph ein Minus Vorzeichen erhält. Die Kreise deuten beliebige Subgraphen an, welche an die Vertices $v_{1,1}, \dots, v_{s-1,1}, v_{s,2}, v'_{s,2}, v_{s+1,1}, \dots, v_{p,1}$ angehaftet sind.

Wir betrachten nun ein Beispiel für $n = 5$. Unter Verwendung von Gl. (2.58) erhalten wir eine Entwicklung von $A_5^{\text{YM}}(12345)$ nach Numeratoren von Kamm-Diagrammen:

$$\begin{aligned}
 -iA_5^{\text{YM}}(12345) &= N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(12345) \left(\frac{1}{s_{12}s_{45}} + \frac{1}{s_{23}s_{45}} + \frac{1}{s_{12}s_{34}} + \frac{1}{s_{15}s_{34}} + \frac{1}{s_{15}s_{23}} \right) \\
 &\quad - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(12435) \left(\frac{1}{s_{12}s_{34}} + \frac{1}{s_{15}s_{34}} \right) - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(13245) \left(\frac{1}{s_{23}s_{45}} + \frac{1}{s_{15}s_{23}} \right) \\
 &\quad - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(13425) \left(\frac{1}{s_{15}s_{34}} \right) - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(14235) \left(\frac{1}{s_{15}s_{23}} \right) \\
 &\quad + N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(14325) \left(\frac{1}{s_{15}s_{34}} + \frac{1}{s_{15}s_{23}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Die übrigen fünf Amplituden in der KK-Basis folgen hieraus durch eine geeignete Permutation von 2,3 und 4. Benutzen wir die Impulserhaltung, so folgen wiederum Relationen zwischen den farbgeordneten Amplituden, etwa

$$s_{12}A_5^{\text{YM}}(12345) + (s_{12} + s_{23})A_5^{\text{YM}}(13245) = s_{25}A_5^{\text{YM}}(13425). \tag{2.63}$$

In der Tat folgen für beliebiges n aus der Entwicklung der YM-Amplitude nach BCJ-Numeratoren von Kamm-Diagrammen Relationen zwischen Amplituden in der KK-Basis, welche die Anzahl unabhängiger YM-Amplituden von $(n - 2)!$ in der KK-Basis auf die

$(n-3)!$ Amplituden $A_n^{\text{YM}}(\sigma)$ mit

$$\sigma \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}} \equiv \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}} \mid \sigma_{n-1} = n-1\} \quad (2.64)$$

verringern. Diese so genannten BCJ-Relationen lauten [8]

$$A_n^{\text{YM}}(1\alpha(n-1)\beta n) = \sum_{\delta \in S(\beta)} \sum_{\gamma \in \alpha \sqcup \delta} A_n^{\text{YM}}(1\gamma(n-1)n) \mathcal{F}(\gamma \mid \alpha, \beta). \quad (2.65)$$

Hierbei sind $\alpha \equiv \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_j$ und $\beta \equiv \sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \dots \sigma_{n-3}$ Wörter mit $1\alpha(n-1)\beta n \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$ und

$$S(\beta) = \{\beta_{\kappa(1)} \beta_{\kappa(2)} \dots \beta_{\kappa(l)} \mid \kappa \in S_{n-3-j}\}. \quad (2.66)$$

$\mathcal{F}(\gamma \mid \alpha, \beta)$ ist eine Funktion von Mandelstam-Variablen. Sie ist definiert durch

$$\mathcal{F}(\gamma \mid \alpha, \beta) \equiv \prod_{k=j+1}^{n-3} \left[\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{t_{\sigma_k}-1} \mathcal{G}_k(\sigma_k, \rho_i) & \text{falls } t_{\sigma_k} < t_{\sigma_{k+1}} \\ \sum_{i=t_{\sigma_k}+1}^{n-1} -\mathcal{G}_k(\sigma_k, \rho_i) & \text{sonst} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } t_{\sigma_{k-1}} < t_{\sigma_k} < t_{\sigma_{k+1}} \\ -1 & \text{falls } t_{\sigma_{k-1}} > t_{\sigma_k} > t_{\sigma_{k+1}} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \right]. \quad (2.67)$$

$$(2.68)$$

t_a gibt für $a \neq \sigma_j$ die Position des Buchstabens a im Wort $\rho \equiv \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} \equiv 1\gamma(n-1)$ an. Für $a = \sigma_j$ bzw. $a = \sigma_{n-2}$ setzen wir

$$t_{\sigma_j} \equiv n, \quad t_{\sigma_{n-2}} \equiv t_{\sigma_{n-4}}. \quad (2.69)$$

Die Funktion $\mathcal{G}_k(\sigma_k, \rho_i)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{G}_k(\sigma_k, \rho_i) \equiv \begin{cases} \frac{s_{\sigma_k \rho_i}}{\hat{s}_{n\sigma_k \dots \sigma_{n-3}}} & \text{falls } \rho_i = 1, n-1 \text{ oder } \rho_i = \sigma_t \text{ mit } t < k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.70)$$

Hierbei haben wir

$$\hat{s}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \equiv \sum_{i < j} s_{\alpha_i \alpha_j} \quad (2.71)$$

verwendet.

Eine besonders übersichtliche Form nehmen die BCJ-Relationen an, wenn β aus genau einem Buchstaben besteht. Nehmen wir $\beta = 2$ und $\alpha = 34 \dots (n-2)$ an, so erstreckt sich die Summe in Gl. (2.65) über alle $\gamma^i = 34 \dots i2(i+1) \dots (n-2)$ mit $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ und wir setzen $\rho^i = 1\gamma^i(n-1)$. Wir haben in diesem Fall $t_{\sigma_{n-2}} = t_{\sigma_j} = t_{n-2} = n$ und $t_{\sigma_{n-3}} = t_2 = i$. Damit folgt

$$\mathcal{F}(\gamma^i \mid \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{i-1} \mathcal{G}_{n-3}(2, \rho_k^i) = \frac{1}{s_{2n}} \sum_{k=1}^i s_{2k} \quad (2.72)$$

und wir erhalten die BCJ-Relationen

$$s_{2n}A_n^{\text{YM}}(134\dots(n-1)2n) = \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{k=1}^i s_{2k}A_n^{\text{YM}}(134\dots i2(i+1)\dots(n-1)n). \quad (2.73)$$

Diese BCJ-Relationen werden als fundamentale BCJ-Relationen bezeichnet. Speziell für $n = 4$ sind das genau die Relationen, die wir in Gl. (2.61) gefunden haben.

Natürlich folgen alle allgemeinen BCJ-Relationen in Gl. (2.65) für $n \leq 5$ durch Umbenennung aus den fundamentalen BCJ-Relationen. Es ist bemerkenswert, dass auch für $n \geq 6$ die allgemeinen BCJ-Relationen aus den fundamentalen BCJ-Relationen gefolgert werden können [62, 63]. Wir nehmen an, dass die allgemeinen BCJ-Relationen für $\alpha = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_j$ und $\beta = \sigma_{j+1}\sigma_{j+2}\dots\sigma_{n-3}$ mit $j \in \{j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, n - 5\}$ bereits aus den fundamentalen BCJ-Relationen hergeleitet wurden und wollen skizzieren, wie man hieraus die Gültigkeit der allgemeinen BCJ-Relationen für $j = j_0$ erhält. Man betrachte hierzu die Amplitude $A_n^{\text{YM}}(1\alpha(n-1)\beta n)$ auf der linken Seite von Gl. (2.65). Teilchen $n - 1$ befindet sich auf Position $j_0 + 2$ in der externen Ordnung der Amplitude. Wenden wir die fundamentalen BCJ-Relationen (mit σ_{n-3} statt mit 2) auf diese Amplitude an, so erhalten wir Amplituden mit Teilchen $n - 1$ auf Position $j_0 + 2$ und solche mit Teilchen $n - 1$ auf Position $j_0 + 3$. Auf letztgenannte Amplituden wenden wir die allgemeinen BCJ-Relationen für $j = j_0 + 1$ an. Auf diese Weise erhalten wir einerseits Amplituden mit $n - 1$ auf vorletzter Position, d. h. $A_n^{\text{YM}}(1\gamma(n-1)n)$ mit $\gamma \in \alpha \sqcup S(\beta)$ und andererseits Amplituden der Form $A_n^{\text{YM}}(1\alpha(n-1)\delta n)$ mit $\delta \in S(\beta)$, $\delta \neq \beta$. Entsprechend gehen wir für die übrigen $(n - 3 - j_0)! - 1$ Amplituden $A_n^{\text{YM}}(1\alpha(n-1)\delta n)$ vor und erhalten ein lineares Gleichungssystem für die $(n - 3 - j_0)!$ Unbekannten $A_n^{\text{YM}}(1\alpha(n-1)\delta n)$. Auflösen nach $A_n^{\text{YM}}(1\alpha(n-1)\beta n)$ liefert die BCJ-Relationen in Gl. (2.65).

Um dies zu illustrieren, betrachten wir das erste nicht-triviale Beispiele, $n = 6$, $\alpha = 4$ und $\beta = 23$. Anwenden der fundamentalen BCJ-Relation liefert zunächst

$$\begin{aligned} & A_6^{\text{YM}}(145236) \\ &= \frac{1}{s_{36}}(A_6^{\text{YM}}(134526)s_{13} + A_6^{\text{YM}}(143526)(s_{13} + s_{34}) + A_6^{\text{YM}}(145326)(s_{13} + s_{34} + s_{35})). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Auf die ersten beiden Amplituden auf der rechten Seite dieser Gleichung wenden wir die BCJ-Relationen für $\beta = 2$ an, welche genau den fundamentalen BCJ-Relationen entsprechen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} A_6^{\text{YM}}(145236) &= \frac{1}{s_{26}s_{36}}(s_{12}s_{13}A_6^{\text{YM}}(123456) + s_{12}(s_{13} + s_{34})A_6^{\text{YM}}(124356) \\ &+ s_{13}(s_{12} + s_{23})A_6^{\text{YM}}(132456) - s_{13}(s_{25} + s_{26})A_6^{\text{YM}}(134256) \\ &+ (s_{12} + s_{24})(s_{13} + s_{34})A_6^{\text{YM}}(142356) \\ &- (s_{13} + s_{34})(s_{25} + s_{26})A_6^{\text{YM}}(143256)) - \frac{1}{s_{36}}(s_{23} + s_{36})A_6^{\text{YM}}(145326) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Hieraus erhalten wir eine Gleichung für $A_6^{\text{YM}}(145326)$ durch Umbenennung $2 \leftrightarrow 3$. Einsetzen dieser Amplitude in obige Gleichung liefert dann die BCJ-Relation

$$\begin{aligned} A_6^{\text{YM}}(145236) &= -\frac{1}{s_{36}\hat{s}_{623}}(s_{12}(s_{34} + s_{35})A_6^{\text{YM}}(123456) + s_{35}s_{12}A_6^{\text{YM}}(124356) \\ &+ s_{13}(s_{24} + s_{25} + \hat{s}_{623})A_6^{\text{YM}}(132456) + s_{13}(s_{25} + \hat{s}_{623})A_6^{\text{YM}}(134256) \\ &+ s_{35}(s_{12} + s_{24})A_6^{\text{YM}}(142356) + (s_{13} + s_{34})(s_{25} + \hat{s}_{623})A_6^{\text{YM}}(143256)), \end{aligned} \quad (2.76)$$

welche man auch aus Gl. (2.65) erhält.

Es sei angemerkt, dass die so genannte Kawai-Lewellen-Tye-Orthogonalität, welche wir an späterer Stelle in dieser Arbeit diskutieren werden, nahe legt, dass es in allgemeiner Raumzeitdimension keine weiteren Relationen zwischen Amplituden gibt. Wie in [64] gezeigt, gibt es jedoch in $D = 4$ Dimensionen weitere Relationen zwischen N^{k-2} MHV-Amplituden, wobei nun die Koeffizienten Funktionen von Spinor-Produkten $\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle$ und $[\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_j]$ und im Allgemeinen keine Funktionen von Mandelstam-Invarianten sind. Diese Relationen verringern die Anzahl unabhängiger Amplituden auf die Euler-Zahl

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k-2 \end{matrix} \right\rangle \equiv \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-1-i)^n. \quad (2.77)$$

Insbesondere gibt es für MHV-Amplituden ($k = 2$) nur eine unabhängige Amplitude, was natürlich auch sofort aus der Parke-Taylor-Formel in Gl. (1.1) folgt.

2.6. Das BCJ-Double-Copy-Verfahren

Wir betrachten eine Quantenfeldtheorie der Gravitation (Einstein-Gravitation), welche beschrieben wird durch die Einstein-Hilbert-Lagrangedichte [65, 66]

$$\mathcal{L}^{\text{EH}} = -\frac{2}{\kappa^2} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} R. \quad (2.78)$$

κ ist die Kopplungskonstante, welche im Gausschen Einheitensystem gegeben ist durch $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ mit Newtons Gravitationskonstante G . R ist die Skalarkrümmung. Ähnlich wie in Eichtheorien können wir störungstheoretisch Amplituden $\mathcal{A}_n^{\text{G}} \equiv (\kappa/4)^{n-2} A_n^{\text{G}}$ für die Streuung der Quanten dieser Theorie, den Gravitonen, beschreiben, indem wir Feynman-Regeln aus obigem Lagrangian durch Entwickeln des metrischen Tensorfeldes $g_{\mu\nu}$ um die flache Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$, d. h.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (2.79)$$

mit dem Graviton-Feld $h_{\mu\nu}$, herleiten. Jedoch enthält selbst der 3-Graviton-Vertex (in de Donder-Eichung) schon etwa 100 Terme. Mehr noch, enthält diese Theorie unendlich viele Vertizes. Dies macht die feynmandiagrammatische Berechnung von Graviton-Amplituden erheblich schwieriger als diejenige von YM-Amplituden.

Tatsächlich stellt sich jedoch heraus, dass man Amplituden in der Gravitation – grob gesprochen – durch Quadrieren von YM-Amplituden erhält, was die Berechnung dieser deutlich vereinfacht. Genauer fanden Kawai, Lewellen und Tye heraus, dass Amplituden von geschlossenen Strings ein „Produkt“ von Amplituden von offenen Strings sind [17]. Im Feldtheorie-Limes $\alpha' \rightarrow 0$ folgen dann die KLT-Relationen [18, 19]

$$A_n^G \equiv A_n^G(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}) = -i \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} A_n^{\text{YM}}(\alpha, p, \varepsilon) S[\alpha|\bar{\beta}] A_n^{\text{YM}}(\bar{\beta}, p, \tilde{\varepsilon}). \quad (2.80)$$

Hierbei ist der KLT-Kern $S[\alpha|\bar{\beta}]$ für $\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \beta \equiv \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$ definiert durch

$$S[\alpha|\bar{\beta}] \equiv (-1)^n \prod_{i=2}^{n-2} \left[2p_{\alpha_i} p_{\alpha_i} + \sum_{j=2}^{i-1} \theta_{\bar{\beta}}(\alpha_i, \alpha_j) (2p_{\alpha_i} p_{\alpha_j}) \right] \quad (2.81)$$

mit

$$\theta_{\bar{\beta}}(\alpha_i, \alpha_j) \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } j' < i' \text{ mit } \alpha_i = \beta_{j'}, \alpha_j = \beta_{i'}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.82)$$

$\theta_{\bar{\beta}}(\alpha_i, \alpha_j)$ ist also nur dann 1, wenn α_j vor α_i im Wort $\beta_2 \beta_3 \dots \beta_{n-2}$ erscheint. $\bar{\beta}$ entsteht aus β durch Vertauschen der letzten beiden Buchstaben, d. h. $\bar{\beta} \equiv \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-2} \beta_n \beta_{n-1}$. In $D = 4$ Dimensionen werden die beiden Polarisationszustände der Gravitonen beschrieben durch

$$\varepsilon_{i,\mu\nu}^{++} = \varepsilon_{i,\mu}^+ \varepsilon_{i,\nu}^+ \quad \text{und} \quad \varepsilon_{i,\mu\nu}^{--} = \varepsilon_{i,\mu}^- \varepsilon_{i,\nu}^-. \quad (2.83)$$

Erlauben wir $\varepsilon \neq \tilde{\varepsilon}$, so ist die Amplitude $A_n^G(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon})$ eine Amplitude in Einstein-Gravitation gekoppelt an ein Dilaton und ein antisymmetrisches Tensorfeld, deren Polarisationszustände beschrieben werden durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon_{i,\mu}^+ \varepsilon_{i,\nu}^- + \varepsilon_{i,\mu}^- \varepsilon_{i,\nu}^+ \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon_{i,\mu}^+ \varepsilon_{i,\nu}^- - \varepsilon_{i,\mu}^- \varepsilon_{i,\nu}^+ \right). \quad (2.84)$$

Für $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ ist $A_n^G(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon})$ eine Amplitude in reiner Einstein-Gravitation. Man beachte, dass auf Baumniveau kein Dilaton bzw. antisymmetrischer Tensor ausgetauscht werden können, wenn alle externen Teilchen Gravitonen sind [67].

Im Fall $n = 4$ besteht $\mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$ aus genau einem Element, nämlich $\alpha = 1234$, und es ist $S[1234|1243] = 2p_1 p_2 = s$. Damit lautet die KLT-Relation für $n = 4$

$$A_4^G = -is A_4^{\text{YM}}(1234) \tilde{A}_4^{\text{YM}}(1243) = is A_4^{\text{YM}}(1234) (\tilde{A}_4^{\text{YM}}(1234) + \tilde{A}_4^{\text{YM}}(1324)), \quad (2.85)$$

wobei wir die KK-Relationen verwendet und die Notation $\tilde{A}_4^{\text{YM}}(\sigma) \equiv A_4^{\text{YM}}(\sigma, p, \tilde{\varepsilon})$ eingeführt haben. Setzen wir hierin die Entwicklung der YM-Amplituden nach Polstellen, Gl. (2.43), ein, wobei wir die Numerator der getildeten Amplitude ebenfalls mit Tilden versehen, so erhalten wir

$$A_4^G = -i \left(\frac{N_s \tilde{N}_s}{s} + \frac{N_t \tilde{N}_s}{t} + \frac{N_s \tilde{N}_u}{u} + \frac{s N_t \tilde{N}_u}{tu} \right). \quad (2.86)$$

Benutzen wir die Jacobi-Identitäten für beide Sätze von Numeratoren, $N_s = N_t + N_u$ und $\tilde{N}_s = \tilde{N}_t + \tilde{N}_u$, so folgt

$$A_4^G = -i \left(\frac{N_s \tilde{N}_s}{s} + \frac{N_t \tilde{N}_t}{t} + \frac{N_u \tilde{N}_u}{u} \right). \quad (2.87)$$

Die 4-Graviton-Amplitude $\mathcal{A}_4^G = (\kappa/4)^2 A_4^G$ folgt also formal aus der vollen YM-Amplitude $\mathcal{A}_n^{\text{YM}}$ durch Ersetzen der Farbfaktoren durch die dazugehörigen Numerator und der YM-Kopplungskonstante g durch $\kappa/4$.

BCJ postulierten in [8], das dies sogar für beliebige n gilt:

$$A_n^G = i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{U}_{n,0}} \frac{N^{\text{BCJ}}(G) \tilde{N}^{\text{BCJ}}(G)}{\prod_{e \in E(G)} s_e} \quad (2.88)$$

Dies ist als BCJ-Double-Copy-Verfahren bekannt. $\mathcal{U}_{n,0}$ ist hierbei die Menge der ungeordneten kubischen Graphen mit n Beinen. Die Anzahl dieser ist gegeben durch

$$|\mathcal{U}_{n,0}| = (2n-5)!! = 2^{2-n} \frac{(2n-4)!}{(n-2)!}. \quad (2.89)$$

Beachte, dass es essentiell ist, dass die Numerator in Gl. (2.88) die Jacobi-Identitäten erfüllen. Wir werden einen Beweis von Gl. (2.88) auf Basis von Methoden, die wir später in dieser Arbeit einführen werden, in Anhang C.3 geben.

Das BCJ-Double-Copy-Verfahren ist nicht beschränkt auf Einstein-Gravitation bzw. reine YM-Theorie. Es ist bekannt, dass man Amplituden in einer Vielzahl von Gravitationstheorien durch das BCJ-Double-Copy-Verfahren erhalten kann [68–70]. Eine Verallgemeinerung von Gl. (2.88) werden wir in Kapitel 2.7.2 diskutieren.

Auch wenn wir uns in dieser Arbeit nur mit Amplituden auf Baumniveau beschäftigen, wollen wir an dieser Stelle bemerken, dass behauptet wird, dass man für eine beliebige Anzahl an Schleifen und eine beliebige Anzahl an Teilchen die Graviton-Amplitude durch das BCJ-Double-Copy Verfahren, d. h. durch Ersetzen des Farbfaktors $C(G)$ durch einen BCJ-Numerator $\tilde{N}^{\text{BCJ}}(G)$, erhält [8]. Dies konnte in dieser Allgemeinheit bislang jedoch nicht bewiesen werden. Eine Schwierigkeit ist hierbei das Auffinden von BCJ-Numeratoren, welches üblicherweise durch geeignete Ansätze für $N^{\text{BCJ}}(G)$ geschieht [71]. Tatsächlich wissen wir jedoch nicht, ob man immer Numerator finden kann, welche die Jacobi-Identitäten erfüllen. Um die Frage nach der Existenz der Numerator zu beantworten, wäre es sicherlich hilfreich herauszufinden, was die zu den Numeratoren zugehörige kinematische Lie-Algebra ist [72].

Es sei weiterhin bemerkt, dass in Spezialfällen Lösungen von Feldgleichungen ebenso durch ein Double-Copy-Verfahren miteinander verbunden sind, was in direkter Korrespondenz zur BCJ-Double-Copy-Konstruktion für Amplituden steht [73–76]. Dies könnte für das Verständnis des Double-Copy-Verfahrens auf nicht-störungstheoretischem Niveau hilfreich sein.

2.7. Verallgemeinerung auf QCD-Amplituden

Eine interessante Fragestellung ist, ob wir die Resultate von Kapitel 2.4, 2.5 und 2.6 auf QCD-Amplituden verallgemeinern können. Tatsächlich ist die Antwort auf diese Frage positiv – jedoch zeigt uns das Beispiel von Amplituden mit zwei Quark-Antiquark-Paaren und keinen Gluonen, dass wir diese nicht wörtlich übernehmen können. Die Melia-Relation lautet nämlich in diesem Fall

$$A_{4,2}^{\text{QCD}}(1234) = -A_{4,2}^{\text{QCD}}(1324), \quad (2.90)$$

was offensichtlich nicht äquivalent zu der BCJ-Relation für reine Gluon-Amplituden in Gl. (2.61) ist. Wir werden in diesem Kapitel feststellen, dass die Farbe-Kinematik-Dualität ihre Gültigkeit für QCD-Amplituden behält und die Verallgemeinerung der BCJ- und KLT-Relationen diskutieren. Insbesondere werden wir sehen, dass die verallgemeinerten KLT-Relationen äquivalent zum BCJ-Double-Copy-Verfahren sind.

2.7.1. Farbe-Kinematik-Dualität für QCD-Amplituden

Amplituden mit nur einem Quark-Antiquark-Paar können wir analog zu Amplituden in reiner YM-Theorie behandeln. Zu QCD-Amplituden mit zwei Quark-Antiquark-Paaren und keinen Gluonen trägt nur ein Feynman-Diagramm bei. Wir betrachten deshalb den ersten interessanten Fall: $k = 2$, $n = 5$. In diesem Fall enthält die Menge $\mathcal{U}_{n,k}$ der ungeordneten kubischen Graphen mit n Beinen und k flavorerhaltenden Vertizes 5 Elemente. Im Allgemeinen ist die Anzahl dieser durch

$$|\mathcal{U}_{n,k}| = \frac{(2n-5)!!}{(2k-1)!!} \quad (2.91)$$

gegeben. Diese Diagramme sind in Abb. 2.11 dargestellt. Die Numerator zu diesen Diagrammen können wir mit Hilfe der farbgeordneten Feynman-Regeln in Anhang A berechnen:

$$\begin{aligned} N_1 &= -(\bar{u}_2 \gamma_\mu v_4)(\bar{u}_1 \gamma^\mu (\not{p}_{35} + m_1) \not{p}_3 v_5) \\ N_2 &= (\bar{u}_2 \gamma_\mu v_4)(\bar{u}_1 \not{p}_3 (\not{p}_{13} + m_1) \gamma^\mu v_5) \\ N_3 &= -(\bar{u}_1 \gamma_\mu v_5)(\bar{u}_2 \gamma^\mu (\not{p}_{34} + m_2) \not{p}_3 v_4) \\ N_4 &= (\bar{u}_1 \gamma_\mu v_5)(\bar{u}_2 \not{p}_3 (\not{p}_{23} + m_2) \gamma^\mu v_4) \\ N_5 &= 2[(\bar{u}_1 \not{p}_3 v_5)(\bar{u}_2 \not{p}_3 v_4) - (\bar{u}_1 \not{p}_3 v_5)(\bar{u}_2 \not{p}_3 v_4) - (\bar{u}_1 \gamma_\mu v_5)(\bar{u}_2 \gamma^\mu v_4)(\varepsilon_3 p_{15})] \end{aligned} \quad (2.92)$$

m_1 ist die Masse des Quark-Antiquark-Paares 1,5 und m_2 die Masse des Quark-Antiquark-Paares 2,4. Weiterhin ist $p_{ij} \equiv p_i + p_j$ und $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$.

Benutzen wir $\varepsilon_3 p_3 = 0$, die definierende Eigenschaft der Gamma-Matrizen γ^μ ,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (2.93)$$

und die Dirac-Gleichung

$$(\not{p}_5 + m_1)v_5 = 0, \quad (2.94)$$

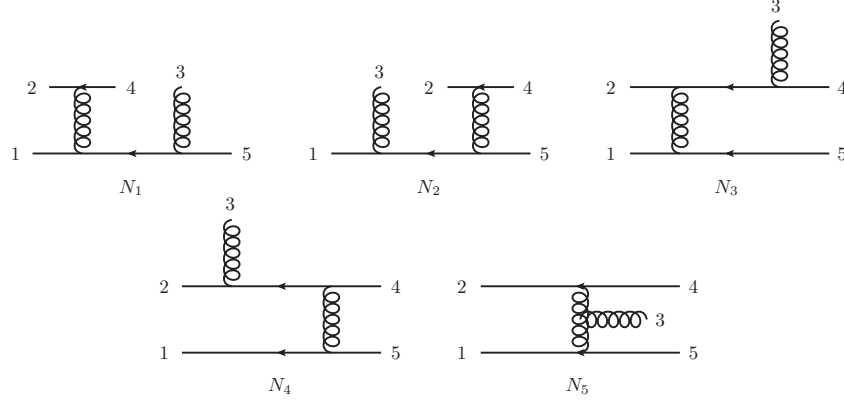


Abbildung 2.11.: Die zur Amplitude $\mathcal{A}_{5,2}^{\text{QCD}}$ beitragenden Feynman-Diagramme. Die drei Graphen in der oberen Reihe sind MW-Diagramme. Die Numerator N_4 und N_5 der Graphen in der unteren Reihe lassen sich mittels der Jacobi-Relationen, $N_5 = N_1 - N_2 = N_4 - N_3$, durch Numerator N_1, N_2, N_3 von MW-Graphen ausdrücken.

so erhalten wir

$$\begin{aligned} -\bar{u}_1 \gamma^\mu (\not{p}_{35} + m_1) \not{p}_3 v_5 &= -2(\bar{u}_1 \gamma^\mu v_5)(\varepsilon_3 p_5) + \bar{u}_1 \gamma^\mu \not{p}_3 \not{p}_3 v_5 \\ &= -2(\bar{u}_1 \gamma^\mu v_5)(\varepsilon_3 p_5) + 2\varepsilon_3^\mu (\bar{u}_1 \not{p}_3 v_5) - 2p_3^\mu (\bar{u}_1 \not{p}_3 v_5) - \bar{u}_1 \not{p}_3 \not{p}_3 \gamma^\mu v_5. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Analog berechnen wir mit $\bar{u}_1(\not{p}_1 + m_1) = 0$:

$$-\bar{u}_1 \not{p}_3 (\not{p}_{13} + m_1) \gamma^\mu v_5 = -2(\bar{u}_1 \gamma^\mu v_5)(\varepsilon_3 p_1) + \bar{u}_1 \not{p}_3 \not{p}_3 \gamma^\mu v_5 \quad (2.96)$$

Damit folgt die Jacobi-Identität $N_5 = N_1 - N_2$. Durch Umbenennung $1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5$ erhalten wir eine zweite Jacobi-Identität, $N_5 = N_4 - N_3$. Diese beiden Jacobi-Identitäten sind eichinvariant.

Die Jacobi-Identitäten erlauben uns die drei farbgeordneten QCD-Amplituden in der Melia-Basis mit Hilfe der drei unabhängigen Numerator N_1, N_2, N_3 auszudrücken:

$$\begin{aligned} A_{5,2}^{\text{QCD}}(13245) &= i \left[-N_1 \left(\frac{1}{s_{15}(s_{23} - m_2^2)} + \frac{1}{s_{15}s_{24}} \right) \right. \\ &\quad \left. + N_2 \left(\frac{1}{s_{24}(s_{13} - m_1^2)} + \frac{1}{s_{15}(s_{23} - m_2^2)} + \frac{1}{s_{15}s_{24}} \right) - \frac{N_3}{s_{15}(s_{23} - m_2^2)} \right] \\ A_{5,2}^{\text{QCD}}(12345) &= i \left[\frac{N_1}{s_{15}(s_{23} - m_2^2)} - \frac{N_2}{s_{15}(s_{23} - m_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + N_3 \left(\frac{1}{s_{15}(s_{34} - m_2^2)} + \frac{1}{s_{15}(s_{23} - m_2^2)} \right) \right] \\ A_{5,2}^{\text{QCD}}(12435) &= i \left[N_1 \left(\frac{1}{s_{24}(s_{35} - m_1^2)} + \frac{1}{s_{15}s_{24}} \right) - \frac{N_2}{s_{15}s_{24}} - \frac{N_3}{s_{15}(s_{34} - m_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.97)$$

Benutzen wir die Identität $s_{24} - s_{15} = s_{13} + s_{35} - 2m_1^2$, so folgt hieraus die BCJ-Relation

$$\begin{aligned} (s_{35} - m_1^2)A_{5,2}^{\text{QCD}}(12435) &= (s_{13} - m_1^2)A_{5,2}^{\text{QCD}}(13245) \\ &+ (s_{13} + s_{23} - m_1^2 - m_2^2)A_{5,2}^{\text{QCD}}(12345). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Dies entspricht genau der fundamentalen BCJ-Relation für $n = 5$ in Gl. (2.73), wobei wir jedoch die Mandelstam-Variablen s_{ij} durch das Produkt $2p_i p_j$ ersetzen müssen, um den massiven Fall zu berücksichtigen.

Johansson und Ochirov haben festgestellt, dass die Farbe-Kinematik-Dualität auch in der QCD gültig ist, d. h. es ist immer möglich Numerator zu finden, welche dieselben Jacobi-Identitäten erfüllen wie die Farbfaktoren [20]. Diese erlauben uns die BCJ-Numerator $N^{\text{BCJ}}(G)$ für einen beliebigen Graphen $G \in \mathcal{U}_{n,k}$ als Linearkombination von Numeratoren $N_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ von so genannten Mario-World(MW)-Diagrammen zu schreiben. Das MW-Diagramm ist für eine Ordnung $\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}}$ definiert durch die folgenden Bedingungen [77]:

- Gluonen sind direkt mit Quarklinien verbunden, d. h. MW-Diagramme enthalten keine 3-Gluon-Vertizes.
- Das Gluon, welches die Quarklinie $q_i - \bar{q}_i$ auf Tiefe $i \geq 1$ mit der Quarklinie $q_{i+1} - \bar{q}_{i+1}$ auf Tiefe $i + 1$ verbindet, ist rechts von dem Gluon, welches $q_i - \bar{q}_i$ mit der Quarklinie $q_{i-1} - \bar{q}_{i-1}$ auf Tiefe $i - 1$ verbindet.
- Gluonen sind mit der Quarklinie $q - \bar{q}$ auf niedrigst möglicher Tiefe so verbunden, dass diese rechts von dem Gluon liegt, welches $q - \bar{q}$ mit der Quarklinie auf nächst niedrigerer Tiefe verbindet.

Für $k = 0$ Quark-Antiquark-Paare stimmt diese Definition mit der Definition von Kamm-Diagrammen überein. Für $k = 1$ erhält man die MW-Diagramme aus den Kamm-Diagrammen durch Ersetzen der Gluonlinie $1 - n$ durch eine Quarklinie. MW-Diagramme für $n = 5, k = 2$ sind in der oberen Reihe in Abb. 2.11 dargestellt. Die Diagramme in der unteren Reihe sind keine MW-Diagramme, da sie einen 3-Gluon-Vertex enthalten (rechtes Diagramm) bzw. Gluon 3 links von dem Gluon liegt, welches die Quarklinien $1 - 5$ und $2 - 4$ verbindet (linkes Diagramm).

Drückt man die farbgeordneten Amplituden durch MW-Numerator aus, so stellt man fest, dass die Determinante der kinematischen Koeffizienten für $2k < n$, d. h. solange mindestens ein Gluon vorhanden ist, verschwindet. Dies impliziert BCJ-Relationen zwischen den QCD-Amplituden in der Melia-Basis [20]. Diese haben formal dieselbe Gestalt wie für YM-Amplituden in Gl. (2.65). Wir müssen jedoch zwei entscheidende Unterschiede beachten:

1. Das Wort β darf nur Gluonen enthalten, während α sowohl Gluonen als auch Quarks bzw. Antiquarks enthalten darf. Insbesondere gibt es für $2k = n$ keine nicht-trivialen BCJ-Relationen.

2. Damit die BCJ-Relationen auch im massiven Fall gültig bleiben, müssen die Mandelstam-Variablen s_{ij} , welche in der Definition der kinematischen Koeffizienten $\mathcal{F}(\gamma|\alpha, \beta)$ auftreten, ersetzt werden durch $2p_i p_j + 2m_{ij}^2$, falls i, j ein Quark-Antiquark-Paar mit Masse m_{ij} ist und durch $2p_i p_j$ in allen anderen Fällen.

Vermöge der BCJ-Relationen können wir für $k > 1$ ein Antiquark und für $k \leq 1$ das Gluon $n - 1$ auf Position $n - 1$ bringen. Die unter den BCJ-Relationen unabhängigen QCD-Amplituden sind also $A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma)$ mit $\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$, wobei

$$\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}} \equiv \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}} \mid \sigma_{n-1} \in \{n - k + 1, n - k + 2, \dots, n\}\} \quad (2.99)$$

für $k > 1$. Für $k \leq 1$ ist $\mathcal{B}_{n,1}^{\text{BCJ}} = \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$. Wir bezeichnen $\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$ als die BCJ-Basis. Sie enthält

$$|\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}| = (n - 2k)! \cdot \binom{n - 3}{2k - 3} \cdot \frac{1}{k} \binom{2k - 2}{k - 1} \cdot (k - 1)! = \frac{2k - 2}{k!} (n - 3)! \quad (2.100)$$

Elemente für $k > 1$ und $(n - 3)!$ Elemente für $k \leq 1$.

Beachte, dass, wie im reinen Gluon-Fall, die allgemeinen BCJ-Relationen aus den fundamentalen BCJ-Relationen

$$(2p_2 p_n) A_{n,k}^{\text{QCD}}(134 \dots (n - 1)2n) = \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{k=1}^i (2p_2 p_k) A_{n,k}^{\text{QCD}}(134 \dots i2(i + 1) \dots (n - 1)n) \quad (2.101)$$

folgen. Hierbei ist es wichtig, dass Teilchen 2 ein Gluon ist. Alle übrigen Teilchen können Quarks, Antiquarks oder Gluonen sein. In der obigen Form sind die fundamentalen BCJ-Relationen auch im massiven Fall gültig, was in [16] bewiesen wurde.

2.7.2. Quadrieren von QCD-Amplituden

Da es auch in der QCD möglich ist, Numerator zu finden, welche die Jacobi-Relationen erfüllen, liegt es nahe eine gravitationelle Theorie zu betrachten, deren Numerator durch das Produkt von zwei QCD-Numeratoren und Amplituden, welche wir mit $A_{n,k}^{\text{QCD}^2}$ notieren, somit durch

$$A_{n,k}^{\text{QCD}^2} = i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{U}_{n,k}} \frac{N^{\text{BCJ}}(G) \tilde{N}^{\text{BCJ}}(G)}{\prod_{e \in E(G)} (s_e - m_e^2)} \quad (2.102)$$

gegeben sind. Diese Theorie enthält neben Gravitonen auch massive Teilchen, welche wir als Double-Copies von Quarks bzw. Antiquarks bezeichnen. Der Name rührt daher, dass die Polarisierungen dieser beschrieben werden durch die Produkte

$$\bar{u}_\alpha \tilde{u}_\beta \quad \text{bzw.} \quad v_\alpha \tilde{v}_\beta. \quad (2.103)$$

Die BCJ-Double-Copy-Darstellung der Amplitude in Gl. (2.102) ist äquivalent zu den KLT-Relationen für $k \leq 1$ (siehe Anhang C.3). Wie wir jedoch schon am Beispiel $n =$

$4 = 2k$ sehen, stimmen die KLT-Relationen im Allgemeinen nicht mit dem BCJ-Double-Copy-Verfahren überein. Genauer stellen wir fest, dass die KLT-Ausdrücke

$$A_{n,k}^{\text{try}} \equiv -i \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\alpha) S[\alpha|\beta] A_{n,k}^{\text{QCD}}(\beta) \quad (2.104)$$

im Allgemeinen nicht-physikalische Amplituden $A_{n,k}^{\text{try}}$ liefern. Mit

$$S[1234|1234] = \frac{2p_2p_3}{2p_1p_3} S[1234|1243] = \frac{(2p_1p_2)(2p_2p_3)}{2p_1p_3} \quad (2.105)$$

erhalten wir nämlich im masselosen Fall

$$A_{4,2}^{\text{try}} \sim \frac{1}{s_{14}s_{13}}, \quad (2.106)$$

was unmöglich Amplitude einer Theorie sein kann, die Lokalität und Unitarität erfüllt, da diese Funktion Polstellen in zwei überlappenden Kanälen hat [78].

Es ist jedoch möglich eine KLT-Formel anzugeben, welche dieselbe Amplitude liefert wie Gl. (2.102). Hierzu beachten wir, dass die $(n-3)! \times (n-3)!$ -Matrix $(-iS_{\alpha\beta}) \equiv (-iS[\alpha|\beta])$ mit $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$ invers zur $(n-3)! \times (n-3)!$ -Matrix $(m_{\alpha\beta})$ ist, die durch

$$m_n(\alpha|\beta) \equiv m_{\alpha\beta} = i(-1)^{n-3+n_{\text{flip}}(\alpha|\beta)} \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,0}(\alpha) \cap \mathcal{T}_{n,0}(\beta)} \prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e} \quad (2.107)$$

gegeben ist, wie wir in Kapitel 3.1.2 noch sehen werden. $\mathcal{T}_{n,0}(\alpha) \cap \mathcal{T}_{n,0}(\beta)$ ist hierbei die Menge derjenigen Graphen, die kompatibel mit den Ordnungen α und β sind. $n_{\text{flip}}(\alpha|\beta)$ bezeichnet die Anzahl der benötigten Vertauschungen von zwei Ästen an einem gemeinsamen Vertex, um einen Graphen $G \in \mathcal{T}_{n,0}(\alpha) \cap \mathcal{T}_{n,0}(\beta)$ mit der externen Ordnung α in die externe Ordnung β zu überführen. Diese hängt nur von den Ordnungen α und β ab, nicht jedoch von dem Graphen G . $m_n(\alpha|\beta)$ ist die (doppelt-) farbgeordnete Amplitude in der bi-adjungierten skalaren Theorie mit Eichgruppe $U(N) \times U(\tilde{N})$. Diese Theorie besteht aus einem Skalarfeld $\Phi = \phi^{ab} t^a \tilde{t}^b$, wobei t^a, \tilde{t}^b die Generatoren von $U(N)$ bzw. $U(\tilde{N})$ sind und wird beschrieben durch den Lagrangian [79]

$$\mathcal{L}^{\text{scalar}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^{ab}) (\partial^\mu \phi^{ab}) - \frac{\lambda}{6} f^{a_1 a_2 a_3} \tilde{f}^{b_1 b_2 b_3} \phi^{a_1 b_1} \phi^{a_2 b_2} \phi^{a_3 b_3}. \quad (2.108)$$

Hierbei ist λ eine Kopplungskonstante und $f^{a_1 a_2 a_3}$ bzw. $\tilde{f}^{b_1 b_2 b_3}$ die Strukturkonstanten von $U(N)$ bzw. $U(\tilde{N})$. Die volle skalare Amplitude m_n erhält man mit der Farbzerlegung

$$m_n = \lambda^{n-2} \sum_{\alpha \in S_n / \mathbb{Z}_n} \sum_{\beta \in S_n / \mathbb{Z}_n} 2\text{tr}(t^{a_{\alpha(1)}} t^{a_{\alpha(2)}} \dots t^{a_{\alpha(n)}}) 2\text{tr}(\tilde{t}^{b_{\beta(1)}} \tilde{t}^{b_{\beta(2)}} \dots \tilde{t}^{b_{\beta(n)}}) m_n(\alpha|\beta). \quad (2.109)$$

Es ist offensichtlich, wie wir Gl. (2.107) zu verallgemeinern haben, wenn k der insgesamt n Teilchen einen Flavor besitzen, k Teilchen den entsprechenden Antiflavor und die Flavor

2. Relationen zwischen farbgeordneten Amplituden in Eichtheorien und Gravitation

paarweise verschieden sind: Wir summieren nur über solche Graphen, die flavorerhaltende Vertizes besitzen. Lassen wir ferner zu, dass Teilchen mit Flavor eine Masse besitzen, so ist $m_n(\alpha|\beta)$ zu

$$\hat{m}_{n,k}(\alpha|\beta) \equiv i(-1)^{n-3+n_{\text{flip}}(\alpha|\beta)} \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,k}(\alpha) \cap \mathcal{T}_{n,k}(\beta)} \prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e - m_e^2} \quad (2.110)$$

zu verallgemeinern. Wir betrachten nun die $|\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}| \times |\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}|$ -Matrix $\hat{m} \equiv (\hat{m}_{n,k}(\alpha|\beta))_{\alpha\beta}$ mit Indizes aus der BCJ-Basis $\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$ und definieren den verallgemeinerten KLT-Kern $\hat{S} = (\hat{S}_{\alpha\beta})$ als Inverse von \hat{m} bis auf einen Vorfaktor:

$$-i\hat{S} \equiv \hat{m}^{-1} \quad (2.111)$$

Die verallgemeinerten KLT-Relationen

$$A_{n,k}^{\text{QCD}^2}(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}) = -i \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\alpha, p, \varepsilon) \hat{S}_{\alpha\beta} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\beta, p, \tilde{\varepsilon}) \quad (2.112)$$

sind damit in der Tat äquivalent zum BCJ-Double-Copy-Verfahren, wie wir für $n \leq 8$ numerisch überprüft haben [21].

Für das Beispiel $n = 4 = 2k$ ist die 1×1 -Matrix \hat{S} gegeben durch $\hat{S} = -s_{14}$ und wir haben

$$A_{4,2}^{\text{QCD}^2} = -i \frac{N_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(1234) \tilde{N}_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(1234)}{s_{14}} = -i A_{4,2}^{\text{QCD}}(1234) \hat{S} \tilde{A}_{4,2}^{\text{QCD}}(1234). \quad (2.113)$$

\hat{S} kürzt also die doppelte Polstelle, die wir durch Quadrieren der QCD-Amplitude $A_{4,2}^{\text{QCD}}(1234)$ erhalten würden, sodass die Gravitationsamplitude $A_{4,2}^{\text{QCD}^2}$ nur noch eine Polstelle erster Ordnung in s_{14} besitzt.

3. Streugleichungen und CHY-Darstellungen

In diesem Kapitel werden wir einen Review zu der CHY-Darstellung geben. Die CHY-Darstellung lässt sich auf zwei verschiedene Arten formulieren: Als Integral, welches vollständig lokalisiert auf den Lösungen der Streugleichungen ist oder äquivalent als Summe über die Lösungen der Streugleichungen. Die Streugleichungen können dabei als polynomiale Gleichungen geschrieben werden. Somit können wir die Bestimmung von Amplituden, welche eine CHY-Darstellung besitzen, als Problem in Algebraischer Geometrie auffassen, nämlich die Berechnung von Summen von rationalen Funktionen über die Verschwindungsmenge eines Ideals, welches durch die Streugleichungen gegeben ist.

Ursprünglich wurde die CHY-Darstellung für reine YM-Theorie und der via KLT-Relationen mit der YM-Theorie verknüpften (Einstein-)Gravitation formuliert [29, 30], alsbald jedoch auf weitere Theorien, einschließlich EYM-Theorie und QCD, ausgeweitet [31–34]. EYM-Theorie ist YM-Theorie minimal gekoppelt an Einstein-Gravitation. Sie lässt sich beschreiben durch den Lagrangian

$$\mathcal{L}^{\text{EYM}} = -\frac{2}{\kappa^2} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} R - \frac{1}{4} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} g^{\mu_1\mu_2} g^{\nu_1\nu_2} (\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1})^i_j (\mathcal{F}_{\mu_2\nu_2})^j_i. \quad (3.1)$$

Die Notation ist dieselbe wie in Gl. (2.2) und Gl. (2.78). Sei im Folgenden $G = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ die Menge der Gluonen und $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}\}$ die Menge der Gravitonen. Amplituden in der EYM-Theorie, welche wir mit $\mathcal{A}_{n,r}^{\text{EYM}}(G|H)$ notieren, lassen sich gemäß

$$\mathcal{A}_{n,r}^{\text{EYM}}(G|H) = \left(\frac{\kappa}{4}\right)^{n-r} g^{r-2} \sum_{\sigma \in S_r/\mathbb{Z}_r} 2\text{tr}(t^{a_{\sigma(g_1)}} t^{a_{\sigma(g_2)}} \dots t^{a_{\sigma(g_r)}}) A_{n,r}^{\text{EYM}}(\sigma|H) + \dots \quad (3.2)$$

in einen Teil der nur von der Eichgruppe und einen kinematischen Teil, die farbgeordnete Ein-Spur-EYM-Amplitude $A_{n,r}^{\text{EYM}}(\sigma|H)$, zerlegen [33]. Die Auslassungspunkte kennzeichnen Beiträge mit mehr als einer Spur.

Eine interessante Frage ist, ob wir die im vorherigen Kapitel eingeführte gravitationelle Amplitude $A_{n,k}^{\text{QCD}^2}$ ebenfalls in CHY-Form darstellen können. Bis zum jetzigen Zeitpunkt wissen wir die Antwort auf diese Frage nicht. Wir werden hier jedoch einen Hinweis darauf geben, dass auch $A_{n,k}^{\text{QCD}^2}$ eine CHY-Darstellung besitzt.

Dieses Kapitel ist in zwei Abschnitte gegliedert. Im ersten Abschnitt führen wir die Streugleichungen ein und diskutieren ihre Eigenschaften bzw. die Eigenschaften ihrer Lösungen. Im zweiten Abschnitt geben wir die CHY-Darstellungen für Ein-Spur-EYM-Amplituden, Amplituden in der QCD und für $A_{n,k}^{\text{QCD}^2}$ im Fall $k = 2$, $n = 4$ und $k = 2$, $n = 5$ an.

3.1. Die Streugleichungen

Wir betrachten den Modulraum der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre

$$\mathcal{M}_{0,n} \equiv \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{CP}^n \mid i \neq j \Rightarrow z_i \neq z_j\} / \text{PSL}(2, \mathbb{C}). \quad (3.3)$$

Hierbei ist $\mathbb{CP}^1 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Sphäre und $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \equiv \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm \mathbb{1}\}$, wobei $\text{SL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle lineare Gruppe und $\mathbb{1}$ die 2×2 -Einheitsmatrix ist. Elemente aus $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ können wir mit Möbiustransformationen

$$\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.4)$$

identifizieren ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$) und $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ wirkt komponentenweise auf den Vektor $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{CP}^n$. Wie wir noch genauer in Kapitel 4 sehen werden, ist der Modulraum $\mathcal{M}_{0,n}$ sehr gut zur Beschreibung von Amplituden geeignet, da in $\mathcal{M}_{0,n}$ die Faktorisierung von Amplituden kodiert ist.

Als Nächstes wollen wir eine Abbildung von dem „Hilfsraum“ $\mathcal{M}_{0,n}$ in den Raum der Kinematik Φ_n^D mit

$$\Phi_n^D \equiv \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \in (\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^D)^n \mid p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0, p_1^2 = p_2^2 = \dots = p_n^2 = 0\}, \quad (3.5)$$

wobei $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^D$ die Komplexifizierung des D -dimensionalen Minkowski-Raums

$$\mathbb{M}^D \equiv (\mathbb{R}^D, (\eta_{\mu\nu})) \quad \text{mit} \quad \eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1) \in \mathbb{R}^{D \times D} \quad (3.6)$$

bezeichnet, angeben. Wir verwenden hierfür den Ansatz [28, 29]

$$p_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_i|=\epsilon} \frac{k(w)}{(w-z_1)(w-z_2)\dots(w-z_n)} dw \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.7)$$

Hierbei ist $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Phi_n^D$, $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_{0,n}$ und $\epsilon > 0$ hinreichend klein. k ist ein zunächst beliebiges Polynom. Wegen der Impulserhaltung $\sum_i p_i = 0$ folgt jedoch aus dem Integralsatz von Cauchy sofort die Einschränkung $\deg(k) \leq n - 2$ an den Grad des Polynoms. Tatsächlich muss sogar $\deg(k) = n - 2$ sein, denn wäre der Grad von k echt kleiner als $n - 2$, so würde Gl. (3.7) weitere Bedingungen an p_i liefern.

Aus Gl. (3.7) folgt mit dem Residuensatz weiterhin

$$p_i \prod_{j=1, j \neq i}^n (z_i - z_j) = k(z_i) \xrightarrow{p_i^2=0} (k(z_i))^2 = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.8)$$

Dies reicht jedoch nicht, um k^2 und damit die Abbildung in Gl. (3.7) eindeutig festzulegen. Wir fordern deshalb, dass k und somit auch die rationale Funktion

$$\omega(z) \equiv \frac{k(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)} \quad (3.9)$$

auf den Lichtkegel im Minkowski-Raum abbildet, d.h. $\omega^2(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{CP}^1$. Partialbruchzerlegung von ω liefert wegen $\text{Res}_{z=z_i}\omega(z) = p_i$ (man beachte, dass der Zählergrad von ω echt kleiner als der Nennergrad ist):

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{z - z_i} \quad (3.10)$$

Berechnung der Residuen von

$$\omega^2(z) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2p_i p_j}{(z - z_i)(z - z_j)} = 0 \quad (3.11)$$

bei z_i gibt uns eine Beziehung zwischen p und $z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)$ [28, 29]:

$$f_i(z, p) \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{2p_i p_j}{z_{ij}} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.12)$$

Hierbei ist $z_{ij} \equiv z_i - z_j$. Da man Streuamplituden mit Hilfe dieser Gleichungen formulieren kann, wie wir später feststellen werden, bezeichnen wir sie als Streugleichungen.

Jedes z , welches Gl. (3.12) erfüllt, bezeichnet man als Lösung der Streugleichungen. Hierbei fassen wir z als Element von $\mathcal{M}_{0,n}$ auf, denn wegen

$$f_i(z', p) = (cz_i + d)^2 \underbrace{f_i(z, p)}_{=0} - c(cz_i + d) \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^n 2p_i p_j}_{=0} = 0, \quad (3.13)$$

wobei $z' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$ die $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -Transformierte von z bezeichnet, sind die Streugleichungen $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -invariant. Die Lösungsmenge der Streugleichungen notieren wir mit

$$\mathcal{X}_n \equiv \{z \in \mathbb{CP}^n \mid f_i(z, p) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\} / \text{PSL}(2, \mathbb{C}). \quad (3.14)$$

Die $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -Eichfreiheit können wir fixieren, indem wir drei z_i 's vorgeben. Unsere übliche Wahl ist $z_1 = 0, z_{n-1} = 1$ und $z_n = \infty$. Für diese Wahl lauten die Streugleichungen für $n = 4$

$$-\frac{2p_1 p_2}{z_2} - 2p_1 p_3 = 0, \quad \frac{2p_1 p_2}{z_2} + \frac{2p_2 p_3}{z_2 - 1} = 0, \quad 2p_1 p_3 + \frac{2p_2 p_3}{1 - z_2} = 0. \quad (3.15)$$

Jede dieser drei Gleichungen hat die Lösung

$$z_2 = -\frac{2p_1 p_2}{2p_1 p_3}. \quad (3.16)$$

Die Streugleichung für $i = 4$ ist für die gewählte Eichung automatisch erfüllt. Allgemeiner folgt mit der binomischen Formel

$$\frac{z_i^\alpha - z_j^\alpha}{z_i - z_j} = \sum_{k=0}^{\alpha-1} z_i^{\alpha-1-k} z_j^k \quad (3.17)$$

für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und der Antisymmetrie von $2p_i p_j / z_{ij}$ unter der Vertauschung von i und j , dass

$$\sum_{i=1}^n f_i(z, p) z_i^{\alpha-1} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} 2p_i p_j \sum_{k=0}^{\alpha-2} z_i^{\alpha-2-k} z_j^k \quad (3.18)$$

gilt. Wegen Impulserhaltung und $p_i^2 = 0$ verschwindet diese Summe für $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, weswegen nur $n - 3$ der n Streugleichungen unabhängig voneinander sind.

3.1.1. Die polynomiale Form der Streugleichungen

Auch wenn es prinzipiell möglich ist die Streugleichungen $f_i(z, p) = 0$ numerisch, z. B. mit dem in [29] angegebenen Algorithmus, zu lösen, stellt dies für große n eine ernsthafte Herausforderung dar. Man ist deshalb gezwungen nach effizienteren Methoden zur Berechnung der Lösungsmenge \mathcal{X}_n zu suchen.

Einen Schritt in diese Richtung stellt Gl. (3.18) dar. Zwar sind die polynomialen Gleichungen

$$g_\alpha(z, p) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} 2p_i p_j \sum_{k=0}^{\alpha-2} z_i^{\alpha-2-k} z_j^k = 0 \quad (3.19)$$

für $\alpha = 1, 2, 3$ automatisch erfüllt, wie wir gesehen haben – für $\alpha = 4, 5, \dots, n$ liefern diese Gleichungen jedoch eine Beziehung zwischen den kinematischen Daten und $z \in \mathcal{M}_{0,n}$, welche äquivalent zu den Streugleichungen $f_i(z, p) = 0$ sind, da die durch $Z = (z_i^{j-1})$ für $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gegebene $n \times n$ -Matrix die Determinante

$$\det(Z) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i) \neq 0 \quad (3.20)$$

(Vandermonde-Determinante) auf $\mathcal{M}_{0,n}$ besitzt und somit invertierbar ist [80].

Dolan und Goddard haben in [80] gezeigt, dass die Gleichungen $g_\alpha(z, p) = 0$ wiederum äquivalent zu

$$h_j(z, p) \equiv \frac{1}{j!} \sum_{\tau \in S^j(A)} (p_1 + p_{\tau(1)} + \dots + p_{\tau(j)})^2 \prod_{i \in A_\tau} z_i, \quad j \in \{1, 2, \dots, n-3\}, \quad (3.21)$$

sind. $S^j(A)$ bezeichnet dabei die Menge der j -Permutationen auf $A \equiv \{2, 3, \dots, n-1\}$, d. h. der Menge der injektiven Abbildungen von $\{1, 2, \dots, j\}$ nach A und A_τ ist die Menge $A_\tau \equiv A \setminus \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(j)\}$. Die Eichinvarianz der Streugleichungen wurde teilweise durch die Wahl $z_1 = 0$ und $z_n = \infty$ fixiert.¹ Für $n = 5$ haben wir beispielsweise (wir setzen $z_{n-1} = 1$ und benutzen Impulserhaltung)

$$h_1(z, p) = s_{12} z_3 + s_{13} z_2 + s_{14} z_2 z_3, \quad (3.22)$$

$$h_2(z, p) = s_{45} + s_{35} z_3 + s_{25} z_2 \quad (3.23)$$

¹In [80] wird die Eichung $z_1 = \infty$, $z_n = 0$ verwendet. Deshalb folgt Gl. (3.21) aus der ursprünglichen Form der polynomialen Gleichungen in [80] durch Anwenden der Möbiustransformation $z \mapsto 1/z$.

mit $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$.

Die polynomialen Gleichungen (3.21) sind – im Gegensatz zu den Gleichungen $g_\alpha(z, p) = 0$ – linear in z_2, z_3, \dots, z_{n-1} . Da ferner h_j den Grad j hat, folgt mit dem Satz von Bézout, dass das System der Streugleichungen entweder unendlich viele oder genau $(n-3)!$ Lösungen besitzt, wenn wir Lösungen $(z_2, z_3, \dots, z_{n-1})$ als Elemente im projektiven Raum \mathbb{CP}^{n-3} auffassen [81]. Die Menge \mathcal{X}_n besitzt also $(n-3)!$ Elemente für eine generische Kinematik.

Der Vorteil der polynomialen Streugleichungen ist nicht nur, dass sich diese numerisch schneller lösen lassen – es stehen ferner Methoden aus der algebraischen Geometrie zur Verfügung, um Summen der Form

$$\sum_{z \in \mathcal{X}_n} r(z_2, z_3, \dots, z_{n-2}), \quad (3.24)$$

wobei r eine rationale Funktion in z_2, z_3, \dots, z_{n-2} ist, systematisch zu berechnen, ohne die Lösungen der Streugleichungen zu kennen. Eines dieser Verfahren möchten wir hier kurz vorstellen [39]. Eine andere Methode zur Berechnung der obigen Summe, welche auch auf den polynomialen Gleichungen basiert, findet sich in [41]. Eine Darstellung der algebraischen Grundbegriffe, die wir hier verwenden, ist im Anhang D zusammengestellt.

Wir betrachten das von den Polynomen h_j erzeugte Ideal $I \equiv \langle h_1, h_2, \dots, h_{n-3} \rangle$ im Ring $R \equiv \mathbb{C}[z_2, z_3, \dots, z_{n-2}]$. In dieser Sprache ist \mathcal{X}_n die Verschwindungsmenge $\mathcal{V}(I)$ des Ideals I . Ist $r = r_1/r_2$ mit $r_1, r_2 \in R$ und $r_2(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathcal{X}_n$, so lässt sich die Summe in (3.24) nach folgender Methode berechnen [39]:

1. Berechne die Gröbnerbasis G von I bzgl. einer Monomordnung \leq und folgere hieraus die Menge B der Basismonome von (I, \leq) . Die Menge der Äquivalenzklassen $\tilde{B} \equiv \{[b] | b \in B\}$, wobei

$$[b_1] = [b_2] \Leftrightarrow b_1 - b_2 \in I, \quad (3.25)$$

ist eine Basis des Quotienten R/I und enthält (für eine generische Kinematik) $(n-3)!$ Elemente.

2. Berechne die Wirkung der Endomorphismen M_{r_1} und $M_{r_2}^{-1}$ auf \tilde{B} . Hierbei ist M_f für $f \in R$ definiert durch

$$M_f : R/I \longrightarrow R/I, \quad [g] \longmapsto [f] \cdot [g] = [fg]. \quad (3.26)$$

3. Die Eigenwerte von M_f lassen sich durch

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } M_f \iff \lambda \in f(\mathcal{V}(I)) \quad (3.27)$$

charakterisieren [82].² Als Folgerung haben wir also:

$$\sum_{z \in \mathcal{X}_n} r(z_2, z_3, \dots, z_{n-2}) = \text{tr}(M_{r_1} M_{r_2}^{-1}) \quad (3.28)$$

²Dies impliziert insbesondere, dass M_{r_2} invertierbar ist, falls $r_2 \neq 0$ auf $\mathcal{V}(I) = \mathcal{X}_n$.

Um die Berechnung der Summe in (3.24) zu illustrieren, betrachten wir das Beispiel $n = 5$ und $r_1 = z_2, r_2 = z_3$. Natürlich können wir in diesem Fall die Streugleichungen auch algebraisch lösen, indem wir $h_2((z_2, z_3), p) = 0$ nach $z_2 = z_2(z_3)$ auflösen und die in z_3 quadratische Gleichung $h_2((z_2(z_3), z_3), p) = 0$ lösen – wir wollen jedoch hier das obige Verfahren anwenden.

Die Gröbnerbasis für das Ideal $I = \langle h_1, h_2 \rangle$ bzgl. der lexikografischen Ordnung mit $z_2 \leq z_3$ ist $G = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, wobei

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= s_{12}s_{45} + (s_{14}s_{45} - s_{13}s_{35} + s_{12}s_{25})z_2 + s_{14}s_{25}z_2^2, \\ \gamma_2 &= s_{45} + s_{25}z_2 + s_{35}z_3, \\ \gamma_3 &= s_{13}z_2 + s_{12}z_3 + s_{14}z_2z_3.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Das Ideal der Leiterterme ist somit $\langle z_2^2, z_3, z_2z_3 \rangle$. Hieraus folgt, dass die Menge der Basismonome gegeben ist durch $B = \{1, z_2\}$. Der Divisionsalgorithmus liefert nun die Wirkung von M_{z_2} und $M_{z_3}^{-1}$ auf die Basismonome:

$$\begin{aligned}M_{z_2}[1] &= [z_2] \\ M_{z_2}[z_2] &= -\frac{s_{12}s_{45}}{s_{14}s_{25}}[1] + \frac{-s_{12}s_{25} + s_{13}s_{35} - s_{14}s_{45}}{s_{14}s_{25}}[z_2] \\ M_{z_3}^{-1}[1] &= \frac{s_{12}s_{25} - s_{13}s_{35}}{s_{13}s_{45}}[1] + \frac{s_{14}s_{25}}{s_{13}s_{45}}[z_2] \\ M_{z_3}^{-1}[z_2] &= -\frac{s_{12}}{s_{13}}[1] - \frac{s_{14}}{s_{13}}[z_2]\end{aligned}\tag{3.30}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{z \in \mathcal{I}_5} \frac{z_2}{z_3} &= \text{tr}(M_{z_2}M_{z_3}^{-1}) = \left(-\frac{s_{12}s_{45}}{s_{14}s_{25}} \frac{s_{14}s_{25}}{s_{13}s_{45}} \right) + \left(-\frac{s_{12}}{s_{13}} + \frac{s_{14}}{s_{13}} \frac{s_{12}s_{25} - s_{13}s_{35} + s_{14}s_{45}}{s_{14}s_{25}} \right) \\ &= -\frac{s_{12}}{s_{13}} + \frac{s_{14}s_{45} - s_{13}s_{35}}{s_{25}s_{13}}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

3.1.2. Die KLT-Orthogonalität

Wir diskutieren in diesem Abschnitt eine beachtliche Eigenschaft der Lösungen der Streugleichungen, nämlich die Orthogonalität von zwei verschiedenen Lösungen jener Gleichungen bezüglich des KLT-Produktes, welches wir im Folgenden einführen.

Hierzu definieren wir zunächst für $\sigma \equiv \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathcal{B}_n$ und $z \in \mathcal{M}_{0,n}$ den so genannten Parke-Taylor-Faktor $C(\sigma, z)$ durch

$$C(\sigma, z) \equiv \frac{1}{z_{\sigma_1\sigma_2}z_{\sigma_2\sigma_3} \dots z_{\sigma_n\sigma_1}}.\tag{3.32}$$

Die Vektoren

$$(C(\sigma, z))_{z \in \mathcal{I}_n}\tag{3.33}$$

mit $\sigma \in \mathcal{B}_n$ sind nicht linear unabhängig. Neben der offensichtlichen zyklischen Invarianz erfüllt der Parke-Taylor-Faktor auch die KK- und BCJ-Relationen

$$C(1\alpha n\beta, z) = (-1)^{|\beta|} \sum_{\sigma \in \alpha \sqcup \beta^T} C(1\sigma n, z), \quad (3.34a)$$

$$C(1\alpha(n-1)\beta n, z) = \sum_{\delta \in S(\beta)} \sum_{\gamma \in \alpha \sqcup \delta} C(1\sigma(n-1)n, z) \mathcal{F}(\gamma|\alpha, \beta), \quad (3.34b)$$

wobei wir dieselben Bezeichnungen wie in Gl. (2.19) und Gl. (2.65) verwenden. Während für die erste der beiden Gleichungen es unerheblich ist, ob z eine Lösung der Streugleichungen ist, ist für die Gültigkeit der zweiten Gleichung $z \in \mathcal{X}_n$ entscheidend.

Es ist bemerkenswert, dass die $(n-3)!$ Vektoren in Gl. (3.33) mit z. B. $\sigma \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$ linear unabhängig sind und damit insbesondere die Anzahl linear unabhängiger Vektoren der Anzahl der Lösungen der Streugleichungen entspricht. Wir betrachten deshalb die Parke-Taylor-Faktoren als quadratische $(n-3)! \times (n-3)!$ -Matrizen $(C^{z\alpha})$ und $(\overline{C}^{z\bar{\beta}})$, welche durch

$$C^{z\alpha} \equiv C(\alpha, z), \quad \overline{C}^{z\bar{\beta}} \equiv C(\bar{\beta}, z) \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}, z \in \mathcal{X}_n, \quad (3.35)$$

definiert sind. Der Zeilenindex dieser Matrizen nummeriert also die Lösungen der Streugleichungen, während durch den Spaltenindex die Ordnung des Parke-Taylor-Faktors indiziert wird. $\bar{\beta}$ entsteht durch Vertauschen der letzten beiden Buchstaben aus β . Auf $\mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_n$ definieren wir die quadratische Form (\cdot, \cdot) bezüglich des durch Gl. (2.81) gegebenen KLT-Kerns $S[\alpha|\bar{\beta}]$:

$$(z, z') \equiv \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} C^{z\alpha} S[\alpha|\bar{\beta}] \overline{C}^{z'\bar{\beta}} \quad \text{für } z, z' \in \mathcal{X}_n \quad (3.36)$$

Die KLT-Orthogonalität besagt, dass die Lösungen z und z' der Streugleichungen in dem folgenden Sinne orthogonal sind [29, 83]:

$$(z, z')^2 = \delta_{zz'}(z, z)(z', z') \quad (3.37)$$

Setzt man die Definition des Produktes (\cdot, \cdot) ein, so hat man

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} C^{z\alpha} S[\alpha|\bar{\beta}] \overline{C}^{z'\bar{\beta}} \frac{1}{(z, z)} = \delta_{zz'}. \quad (3.38)$$

Insbesondere besitzt die Matrix $(C^{z\alpha})$ vollen Zeilenrang und ist somit als quadratische Matrix invertierbar.³ Die Inverse bezeichnen wir mir $(C_{\alpha z})$. Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $C_{\delta z} C^{z'\gamma}$, wobei $\delta, \gamma \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$, und Summation über alle $z, z' \in \mathcal{X}_n$ erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} S[\delta|\bar{\beta}] \sum_{z \in \mathcal{X}_n} C^{z\gamma} \frac{1}{(z, z)} \overline{C}^{z\bar{\beta}} &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} S[\alpha|\bar{\beta}] \sum_{z, z' \in \mathcal{X}_n} C_{\delta z} C^{z\alpha} \frac{1}{(z, z)} C^{z'\gamma} \overline{C}^{z'\bar{\beta}} \\ &= \sum_{z, z' \in \mathcal{X}_n} \delta_{zz'} C_{\delta z} C^{z'\gamma} = \delta_{\delta\gamma}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

³Die Vektoren in Gl. (3.33) mit $\sigma \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$ sind damit – wie behauptet – linear unabhängig.

Damit können wir eine physikalische Interpretation von $S[\alpha|\beta]$ angeben. Wegen Gl. (3.39) ist die $(n-3)! \times (n-3)!$ Matrix $(-iS_{\alpha\beta}) \equiv (-iS[\alpha|\beta])$ invers zur Matrix

$$\left(i \sum_{z \in \mathcal{Z}_n} C^{z\alpha} \frac{1}{(z, z)} C^{z\beta} \right)_{\alpha\beta}, \quad (3.40)$$

wobei Matrixindizes aus der BCJ-Basis $\mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}$ stammen. Dies ist aber die so genannte CHY-Darstellung der skalaren Amplitude $m_n(\alpha|\beta)$, welcher wir bereits in Kapitel 2.7.2 begegnet sind [30].

3.1.3. Die massiven Streugleichungen

Bisher haben wir Impulse als masselos angenommen. Wir wollen im Folgenden die massiven Streugleichungen durch dimensionale Reduktion der masselosen Streugleichungen einführen.

Wir betrachten eine Impulskonfiguration $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Phi_n^{\text{mass}, D}$ mit

$$\Phi_n^{\text{mass}, D} \equiv \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \in (\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^D)^n \mid p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0, p_i^2 = m_i^2\}, \quad (3.41)$$

wobei wir $m_i = 0$ zulassen, und wählen (euklidische) Vektoren $\pi \in \mathbb{R}^k$ so, dass $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \Phi_n^{D+k}$. Hierbei ist $P_i = (p_i, \pi_i)$. Dies ist äquivalent zu den beiden Forderungen

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 0 \quad \text{und} \quad \pi_i^2 = m_i^2 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.42)$$

Die massiven Streugleichungen zur Impulskonfiguration p sind die masselosen Streugleichungen zu P [35, 36]:

$$f_i^{\text{mass}}(z, p) \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{2p_i p_j - 2\pi_i \pi_j}{z_{ij}} = f_i(z, P) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.43)$$

Analog zum masselosen Fall erfüllen die massiven Streugleichungen die Relationen

$$\sum_{i=1}^n f_i^{\text{mass}}(z, p) z^{\alpha-1} = 0 \quad (3.44)$$

für $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, was zur Folge hat, dass nur $n-3$ dieser Gleichungen unabhängig voneinander sind. Weiterhin sind die massiven Streugleichungen invariant unter $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ und besitzen (bis auf $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -Transformationen) $(n-3)!$ Lösungen. Die Menge der Lösungen der massiven Streugleichungen notieren wir mit

$$\mathcal{Z}_n^{\text{mass}} \equiv \{z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid f_i^{\text{mass}}(z, p) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\} / \text{PSL}(2, \mathbb{C}). \quad (3.45)$$

Ebenso bleibt die KLT-Orthogonalität gültig, wenn wir im KLT-Kern $p_i p_j$ durch $p_i p_j - \pi_i \pi_j$ ersetzen, d. h. wenn wir $S[\alpha|\bar{\beta}]$ ersetzen durch

$$S^{\text{mass}}[\alpha|\bar{\beta}] \equiv (-1)^n \prod_{i=2}^{n-2} \left[2p_{\alpha_1} p_{\alpha_i} - 2\pi_{\alpha_1} \pi_{\alpha_i} + \sum_{j=2}^{i-1} \theta_{\bar{\beta}}(\alpha_i, \alpha_j) (2p_{\alpha_i} p_{\alpha_j} - 2\pi_{\alpha_i} \pi_{\alpha_j}) \right]. \quad (3.46)$$

Hierbei ist wichtig, dass die Vektoren π_i die Bedingungen in Gl. (3.42) erfüllen.

Abschließend betrachten wir noch ein Beispiel, welches für die Anwendung auf QCD-Amplituden wichtig ist. Wir nehmen an, dass Teilchen i und $n-i+1$ mit $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und $2k \leq n$ die Massen m_i haben. Alle anderen Teilchen seien masselos. Wir wählen dann die Vektoren π_i für $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ oder $i \in \{n-k+1, n-k+2, \dots, n\}$ wie folgt:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \pi_n = \begin{pmatrix} -m_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \pi_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix}, \pi_{n-k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -m_k \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Für alle übrigen π_i wählen wir

$$\pi_i = 0, \quad i \in \{k+1, k+2, \dots, n-k\}. \quad (3.48)$$

Mit dieser Wahl sind die Bedingungen an π_i in Gl. (3.42) offenbar erfüllt.

3.2. Die CHY-Darstellung

Die Streugleichungen können dazu verwendet werden, um explizite Darstellungen von Amplituden anzugeben. Die n -Teilchen Amplitude A_n wird in diesem Formalismus als Integral dargestellt, das vollständig auf den Lösungen der Streugleichungen lokalisiert ist:⁴

$$A_n = i \int \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_n}{|\text{PSL}(2, \mathbb{C})|} \prod'_{i=1}^n \delta(f_i(z, p)) \mathcal{F}(z) \quad (3.49)$$

Wir bezeichnen dies als CHY-Darstellung. Hierbei wird durch das „gestrichene Produkt“

$$\prod'_{i=1}^n \delta(f_i(z, p)) \equiv (-1)^{\kappa+\lambda+\mu} z_{\kappa\lambda} z_{\lambda\mu} z_{\mu\kappa} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \kappa, \lambda, \mu}}^n \delta(f_i(z, p)) \quad (3.50)$$

berücksichtigt, dass nur $n-3$ Streugleichungen unabhängig voneinander sind. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der (paarweise verschiedenen) $\kappa, \lambda, \mu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Da die Streugleichungen invariant unter $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -Transformationen sind, ist durch das Volumen von $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, welches wir mit $|\text{PSL}(2, \mathbb{C})|$ notieren, zu dividieren.

Der Integrand $\mathcal{F}(z)$ hängt von der betrachteten Theorie ab, insbesondere kann dieser somit explizit von Impulsen und Polarisationsvektoren abhängen. In der Regel faktorisiert der Integrand in zwei Teile,

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}_L(z) \mathcal{F}_R(z), \quad (3.51)$$

⁴Wir diskutieren hier den masselosen Fall, wie er erstmals im Jahr 2013 von Cachazo, He und Yuan vorgestellt wurde. Es ist jedoch problemlos möglich alles hier Dargestellte auf den massiven Fall zu übertragen [34].

wobei ein jedes sich wie

$$\mathcal{J}_X(z) \mapsto \prod_{i=1}^n (cz_i + d)^2 \mathcal{J}_X(z), \quad X \in \{L, R\}, \quad (3.52)$$

unter der $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -Transformation in Gl. (3.4) transformiert, weshalb wir \mathcal{J}_L und \mathcal{J}_R als Halbintegranden bezeichnen. Dieses Transformationsverhalten stellt sicher, dass die Amplitude invariant unter $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ ist.

Bevor wir uns den expliziten Darstellungen der Halbintegranden für EYM-Amplituden bzw. für QCD widmen, möchten wir die obige Integration ausführen und die Amplitude als Summe über die Lösungen der Streugleichungen darstellen. Hierzu fixieren wir die $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -Eichfreiheit nach Faddeev-Popov, indem wir drei Komponenten einer Lösung z der Streugleichungen, etwa z_l , $l \in \{p, q, r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, für paarweise verschiedene p, q und r , festhalten. Es ist dann

$$\frac{dz_1 dz_2 \dots dz_n}{|\text{PSL}(2, \mathbb{C})|} = (-1)^{p+q+r} z_{pq} z_{qr} z_{rp} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q, r}}^n dz_i. \quad (3.53)$$

Da die Delta-Funktionen im Integranden mit den Funktionen f_i verkettet sind, erhalten wir ferner die Funktionaldeterminante der Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : z &\equiv (z_1, z_2, \dots, \widehat{z}_p, \dots, \widehat{z}_q, \dots, \widehat{z}_r, \dots, z_n) \\ &\mapsto (f_1(z, p), f_2(z, p), \dots, \widehat{f_\kappa(z, p)}, \dots, \widehat{f_\lambda(z, p)}, \dots, \widehat{f_\mu(z, p)}, \dots, f_n(z, p)). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Man beachte dabei, dass aufgrund unserer Eichfixierung der p -te, q -te und r -te Listeneintrag von z sowie, da das Produkt in Gl. (3.50) sich nur über $i \neq \kappa, \lambda, \mu$ erstreckt, die κ -te, λ -te und μ -te Komponente von $\Phi(z)$ gestrichen werden müssen. Diese Streichung kennzeichnen wir in Gl. (3.54), in der wir ohne Einschränkung $p < q < r$ und $\kappa < \lambda < \mu$ angenommen haben, durch Hüte. Die Funktionaldeterminante $\det(\text{J}\Phi)$ dieser Funktion ist die Determinante der Matrix, die aus der durch

$$\frac{\partial f_a}{\partial z_b}(z, p) = \begin{cases} \frac{2p_a p_b}{z_{ab}^2} & \text{falls } a \neq b, \\ \sum_{c=1, c \neq a}^n \frac{-2p_a p_c}{z_{ac}^2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad a, b \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.55)$$

gegebenen $n \times n$ -Matrix durch Streichen der κ -ten, λ -ten und μ -ten Zeilen sowie der p -ten, q -ten und r -ten Spalten entsteht. Definieren wir nun den Jacobi-Faktor $J(z, p)$ gemäß

$$J(z, p) \equiv (-1)^{p+q+r+\kappa+\lambda+\mu} \frac{z_{pq} z_{qr} z_{rp} z_{\kappa\lambda} z_{\lambda\mu} z_{\mu\kappa}}{\det(\text{J}\Phi)}, \quad (3.56)$$

so folgt aus Gl. (3.49)

$$A_n = i \sum_{z \in \mathcal{Z}_n} J(z, p) \mathcal{J}(z). \quad (3.57)$$

3.2.1. CHY-Darstellung für EYM-Amplituden

Um die Integranden der EYM-Theorie zu definieren, betrachten wir zunächst eine Teilmenge $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ und definieren G als das Komplement von H , $G = \{1, 2, \dots, n\} \setminus H$. Es sei $|G| = n - m = r$. Für eine Permutation $\sigma \equiv \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r \in S_G$ und ein $z \in \mathcal{M}_{0,n}$ definieren wir als Verallgemeinerung von Gl. (3.32)

$$C_r(\sigma, z) \equiv \frac{1}{z_{\sigma_1 \sigma_2} z_{\sigma_2 \sigma_3} \dots z_{\sigma_r \sigma_1}} \quad (3.58)$$

für $2 \leq r \leq n$. Für $r = 0$ setzen wir $C_0(\sigma, z) \equiv 1$ und für $r = 1$ definieren wir $C_1(\sigma, z) \equiv 0$. Wir schreiben auch $C_r(\sigma)$ statt $C_r(\sigma, z)$ und $C(\sigma, z)$ bzw. $C(\sigma)$ statt $C_n(\sigma, z)$.

Weiter betrachten wir für $1 \leq m \leq n$ die schiefsymmetrische $2m \times 2m$ -Matrix

$$\Psi_H(z, p, \tilde{\varepsilon}) \equiv \begin{pmatrix} A & -C^T \\ C & B \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

mit den $m \times m$ -Matrizen $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ und $C = (C_{ij})$, die durch

$$A_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{2p_{\eta_i} p_{\eta_j}}{z_{\eta_i \eta_j}} & i \neq j, \\ 0 & i = j, \end{cases} \quad B_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{2\tilde{\varepsilon}_{\eta_i} \tilde{\varepsilon}_{\eta_j}}{z_{\eta_i \eta_j}} & i \neq j, \\ 0 & i = j, \end{cases} \quad C_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{2\tilde{\varepsilon}_{\eta_i} p_{\eta_j}}{z_{\eta_i \eta_j}} & i \neq j, \\ \sum_{k=1, k \neq \eta_i}^n \frac{-2\tilde{\varepsilon}_{\eta_i} p_{\eta_k}}{z_{\eta_i k}} & i = j \end{cases} \quad (3.60)$$

definiert sind. Das Tupel $\tilde{\varepsilon}$ von Polarisationsvektoren ist gegeben durch $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_{\eta_1}, \tilde{\varepsilon}_{\eta_2}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\eta_m})$. Man beachte, dass die Summe in C_{ii} sich über alle $k \neq \eta_i$ erstreckt und nicht nur über die Teilmenge von H mit $k \neq \eta_i$. Wir definieren damit für $0 \leq m \leq n - 1$ den Polarisationsfaktor $E_H(z, p, \tilde{\varepsilon})$ durch

$$E_H(z, p, \tilde{\varepsilon}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0, \\ \text{pf}(\Psi_H(z, p, \tilde{\varepsilon})) & \text{für } 1 \leq m \leq (n - 2), \\ 0 & \text{für } m = n - 1. \end{cases} \quad (3.61)$$

Mit $\text{pf}(X)$ notieren wir die pfaffsche Determinante der schiefsymmetrischen $2m \times 2m$ -Matrix X . Diese lässt sich rekursiv definieren über

$$\text{pf}(X) \equiv \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} \text{pf}(X^{1j}), \quad (3.62)$$

wobei X^{1j} die Matrix bezeichnet, die aus X durch Streichen der ersten und j -ten Zeilen und Spalten aus X entsteht, mit der Vereinbarung $\text{pf}(X) \equiv 1$ für eine 0×0 -Matrix X .

Für $m = n$ können wir den Polarisationsfaktor nicht als pfaffsche Determinante definieren, denn für Lösungen z der Streugleichungen überzeugt man sich leicht (unter Verwendung der Impulserhaltung), dass die Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ mal}}, \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ mal}} \quad \text{und} \\ v_2 &= (z_1, z_2, \dots, z_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ mal}}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Eigenvektoren von $\Psi_H(z, p, \tilde{\varepsilon})$ zum Eigenwert 0 sind, was zur Folge hat, dass die pfaffsche Determinante von Ψ_H in diesem Fall verschwindet. Wir streichen deshalb Zeilen und Spalten i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ von Ψ_H und notieren die resultierende Matrix mit Ψ_H^{ij} . Wir definieren dann für $m = n$:

$$E_H(z, p, \tilde{\varepsilon}) \equiv \frac{(-1)^{i+j}}{2z_{ij}} \text{pf}(\Psi_H^{ij}(z, p, \tilde{\varepsilon})) \quad (3.64)$$

Dies ist unabhängig von der Wahl von i und j und wird auch als reduzierte pfaffsche Determinante von Ψ_H bezeichnet und mit $\text{pf}'(\Psi_H(z, p, \tilde{\varepsilon}))$ notiert. Wir schreiben auch kurz E_m für E_H und speziell für $m = n$ lassen wir auch den Index weg und schreiben E statt E_H .

Nun sind wir in der Lage die Halbintegranden für Ein-Spur-EYM-Amplituden anzugeben. Es sei H die Menge der Gravitonen und entsprechend G die Menge der Gluonen. Dann haben wir [32]

$$\mathcal{J}_L^{\text{EYM}}(z) = C_r(\sigma, z)E_H(z, p, \tilde{\varepsilon}), \quad \mathcal{J}_R^{\text{EYM}}(z) = E_n(z, p, \varepsilon). \quad (3.65)$$

$\sigma \in S_r$ bezeichnet hierbei die externe Ordnung der Gluonen und es ist $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Mit

$$\frac{1}{z_{ij}} \longmapsto \frac{(cz_i + d)(cz_j + d)}{z_{ij}} \quad (3.66)$$

unter $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -Transformationen folgt das korrekte Transformationsverhalten der Halbintegranden (vgl. Gl. (3.52)). Weiterhin sind die Halbintegranden invariant unter der Ersetzung $\tilde{\varepsilon}_i \mapsto \tilde{\varepsilon}_i + cp_i$ (bzw. $\varepsilon_i \mapsto \varepsilon_i + cp_i$) für jede Konstante c und $i \in H$ (bzw. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) und somit die EYM-Amplitude manifest eichinvariant. Dies folgt zum einen aus der Multilinearität des Polarisationsfaktors $E_H(z, p, \tilde{\varepsilon})$ in $\tilde{\varepsilon}$ und zum anderen aus der Gleichheit der i -ten und der $(i+n)$ -ten Zeilen der Matrix $\Psi_H|_{\tilde{\varepsilon}_{\eta_i} \mapsto p_{\eta_i}}$ für Lösungen der Streugleichungen, wobei der Polarisationsvektor $\tilde{\varepsilon}_{\eta_i}$ durch den Impuls p_{η_i} ersetzt wird, was das Verschwinden der (reduzierten) pfaffschen Determinante zur Folge hat.

Insbesondere erhält man für $r = n$ die YM-Halbintegranden und für $r = 0$ die Halbintegranden in der Gravitation. Wir haben also für die farbgeordnete YM-Amplitude $A_n^{\text{YM}}(\sigma, p, \varepsilon)$ und die Graviton-Amplitude $A_n^{\text{G}}(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon})$ [31, 84]:

$$A_n^{\text{YM}}(\sigma, p, \varepsilon) = i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) C(\sigma, z) E(z, p, \varepsilon) \quad (3.67)$$

$$A_n^{\text{G}}(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}) = i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) E(z, p, \varepsilon) E(z, p, \tilde{\varepsilon}) \quad (3.68)$$

Graviton-Amplituden erhält man also aus YM-Amplituden durch das CHY-Double-Copy-Verfahren [29]:

$$C(\sigma, z) E(z, p, \varepsilon) \longmapsto E(z, p, \tilde{\varepsilon}) E(z, p, \varepsilon) \quad (3.69)$$

Dies lässt sich auch aus den KLT-Relationen in Gl. (2.80) folgern:

$$\begin{aligned}
 A_n^G &= -i \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} A_n^{\text{YM}}(\alpha, p, \varepsilon) S[\alpha|\bar{\beta}] A_n^{\text{YM}}(\bar{\beta}, p, \tilde{\varepsilon}) \\
 &= i \sum_{z, z' \in \mathcal{X}_n} J(z, p) J(z', p) E(z, p, \varepsilon) E(z', p, \tilde{\varepsilon}) \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} C(\alpha, z) S[\alpha|\bar{\beta}] C(\bar{\beta}, z') \\
 &= i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) J(z, p)(z, z) E(z, p, \varepsilon) E(z, p, \tilde{\varepsilon}) = i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) E(z, p, \varepsilon) E(z, p, \tilde{\varepsilon})
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt die CHY-Darstellung von YM-Amplituden eingesetzt, im dritten Schritt die KLT-Orthogonalität (siehe Gl. (3.38)) verwendet und im letzten Schritt die Identität $J(z, p) = 1/(z, z)$ für $z \in \mathcal{X}_n$ ausgenutzt [31].

Andererseits können wir EYM-Amplituden aus Graviton-Amplituden durch eine Operation erhalten, die als „squeezing“ bezeichnet wird [33]. Hierbei werden Gravitonen durch Gluonen „ersetzt“. Bezeichnen wir die Menge der zu ersetzenden Gravitonen mit G , so ersetzen wir in der Matrix $\Psi \equiv \Psi_{\{1,2,\dots,n\}}(z, p, \tilde{\varepsilon})$ die Zeilen $(\Psi_{ij})_j$ mit $i \in G$ und die Spalten $(\Psi_{ij})_i$ mit $j \in G$ durch die Summe dieser Zeilen bzw. Spalten. Dasselbe tun wir für die Zeilen $i \in n + G$ und Spalten $j \in n + G$. Weiter ersetzen wir in den so entstandenen Zeilen und Spalten alle auftretenden Polarisationsvektoren $\tilde{\varepsilon}_a$ durch $z_a \tilde{\varepsilon}_a$. Alle anderen Zeilen und Spalten bleiben indes unverändert. Nennen wir die auf diese Weise entstandene $(2m + 2) \times (2m + 2)$ -Matrix $\Pi(z, p, \tilde{\varepsilon})$, wobei m die Anzahl der nicht zu ersetzenden Gravitonen ist bzw. der Gravitonen in der EYM-Amplitude, so erhält man Ein-Spur-EYM-Amplituden aus Amplituden in der Gravitation durch die Ersetzungsregel

$$E(z, p, \tilde{\varepsilon}) E(z, p, \varepsilon) \longmapsto C_{n-m}(\sigma, z) \text{pf}'(\Pi(z, p, \tilde{\varepsilon})) E(z, p, \varepsilon). \tag{3.71}$$

Man kann zeigen, dass die reduzierte pfaffsche Determinante von $\Pi(z, p, \tilde{\varepsilon})$ nur von $\tilde{\varepsilon}_a$ mit $a \in H = \{1, 2, \dots, n\} \setminus G$ abhängt und mit $E_H(z, p, \tilde{\varepsilon})$ übereinstimmt [33].

Man beachte, dass im CHY-Formalismus die KK- und BCJ-Relationen für YM-Amplituden offensichtlich erfüllt sind, da der Parke-Taylor-Faktor diese Relationen erfüllt (vgl. Gl. (3.34a) und Gl. (3.34b)). Ferner gelten die KK- und BCJ-Relationen für EYM-Amplituden im Gluonen-Sektor. Insbesondere folgt die Subzyklizität für EYM-Amplituden mit einem Graviton n und $n - 1$ Gluonen $1, 2, \dots, n - 1$,

$$\begin{aligned}
 &A_{n,n-1}^{\text{EYM}}(1234 \dots (n-1)|\{n\}) + A_{n,n-1}^{\text{EYM}}(1324 \dots (n-1)|\{n\}) \\
 &+ A_{n,n-1}^{\text{EYM}}(1342 \dots (n-1)|\{n\}) + \dots + A_{n,n-1}^{\text{EYM}}(134 \dots (n-1)2|\{n\}) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

welche von Stieberger und Taylor in [85] aus Relationen zwischen Stringtheorie-Amplituden gefolgert wurden.

3.2.2. CHY-Darstellung für QCD-Amplituden

Wir werden im Folgenden zeigen, dass eine CHY-Darstellung auch für QCD-Amplituden existiert [34]. Hierbei können die Quarks massiv oder masselos sein.

QCD-Amplituden erfüllen nicht den vollen Satz an BCJ-Relationen. Weiterhin erfüllen sie – im Gegensatz zu Amplituden in reiner YM-Theorie – Melia-Relationen. Wir müssen also den Parke-Taylor-Faktor $C(\sigma, z)$ verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung bezeichnen wir als QCD-Parke-Taylor-Faktor und notieren sie mit $\tilde{C}(\sigma, z)$. Eine geeignete Verallgemeinerung der KLT-Orthogonalität wird uns dann die Existenz eines Polarisationsfaktors $\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$ liefern, sodass

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma, p, \varepsilon) = i \sum_{z \in \mathcal{Z}_n^{\text{mass}}} J^{\text{mass}}(z, p, \pi) \tilde{C}(\sigma, z) \tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon) \quad (3.73)$$

gilt. $J^{\text{mass}}(z, p, \pi)$ bezeichnet die Verallgemeinerung von $J(z, p)$ auf massive Teilchen, welche aus $J(z, p)$ durch die Ersetzungsregel

$$2p_i p_j \longrightarrow 2p_i p_j - 2\pi_i \pi_j, \quad (3.74)$$

wobei π_j die Bedingungen in Gl. (3.42) erfüllen, folgt. Haben die Quarks $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und die zugehörigen Antiquarks $n - i + 1$ die Masse m_i , so können wir π_j wie in Gl. (3.47) und Gl. (3.48) wählen.

3.2.2.1. Definition von $\tilde{C}(\sigma, z)$

Wir wollen zunächst $\tilde{C}(\sigma, z)$ so definieren, dass QCD-Amplituden die KK-Relationen, die Melia-Relationen und die BCJ-Relationen erfüllen. Ist die Amplitude auf der linken Seite der BCJ-Relationen in Gl. (2.65) in der Melia-Basis, so sind es auch alle Amplituden auf der rechten Seite von Gl. (2.65), sofern das Wort β nur Gluonen enthält, da die relative Ordnung in α unverändert bleibt. Andererseits erfüllt der Parke-Taylor-Faktor $C(\sigma, z)$ die BCJ-Relationen, wenn z eine Lösung der Streugleichungen ist. Wir setzen deshalb

$$\tilde{C}(\sigma, z) \equiv C(\sigma, z) \quad \text{für } \sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}}. \quad (3.75)$$

Damit erfüllt die Amplitude $A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma)$ in Gl. (3.73) automatisch die BCJ-Relationen für QCD-Amplituden. Wir setzen nun $\tilde{C}(\sigma, z)$ so fort auf \mathcal{B}_n , dass QCD-Amplituden manifest die KK- und Melia-Relationen erfüllen und invariant unter zyklischen Permutationen sind:

1. Für $\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$ setzen wir

$$\tilde{C}(\sigma, z) \equiv \sum_{\tau \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{M}}} c_\tau(\sigma) \tilde{C}(\tau, z) \quad (3.76)$$

mit $c_\tau(\sigma)$ wie in Gl. (2.34). Insbesondere ist $\tilde{C}(\sigma, z) = 0$, wenn σ zu einer Konfiguration mit gekreuzten Quarklinien gehört.

2. Mit den KK-Relationen setzen wir weiter \tilde{C} von der KK-Basis auf die Teilmenge von \mathcal{B}_n , bei der Teilchen 1 auf Position 1 fixiert ist, fort:

$$\tilde{C}(1\alpha n\beta, z) \equiv (-1)^{|\beta|} \sum_{\sigma \in \alpha \sqcup \beta^T} \tilde{C}(1\sigma n, z) \quad (3.77)$$

Hierbei verwenden wir dieselben Bezeichnungsweisen wie in Gl. (2.19).

3. Durch zyklische Invarianz wird schließlich \tilde{C} auf ganz \mathcal{B}_n fortgesetzt:

$$\tilde{C}(\beta 1\alpha, z) \equiv \tilde{C}(\sigma, z) \quad (3.78)$$

Dabei ist $\sigma \equiv 1\alpha\beta \in \mathcal{B}_n$ beliebig.

Damit ist der QCD-Parke-Taylor-Faktor $\tilde{C}(\sigma, z)$ für jede Ordnung $\sigma \in \mathcal{B}_n$ der externen Teilchen eine Linearkombination von gewöhnlichen Parke-Taylor-Faktoren $C(\tau, z)$ mit Ordnungen τ aus der Melia-Basis, jedoch alle ausgewertet bei der Lösung z der Streugleichungen. Da die $C(\tau, z)$ sich wie in Gl. (3.52) unter $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ transformieren, besitzt auch der QCD-Parke-Taylor-Faktor das gewünschte Transformationsverhalten eines Halbtintegranden,

$$\tilde{C}(\sigma, z) \mapsto \tilde{C}(\sigma, z) \prod_{i=1}^n (cz_i + d)^2, \quad (3.79)$$

unter $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

3.2.2.2. Definition von $\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$

Wir geben in diesem Abschnitt die Definition von $\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$ an. Wir beachten hierzu zunächst, dass mit

$$\tilde{M}_{\sigma z} = J^{\text{mass}}(z, p, \pi) \tilde{C}(\sigma, z), \quad \sigma \in \mathcal{B}_n, z \in \mathcal{X}_n^{\text{mass}}, \quad (3.80)$$

die CHY-Form in Gl. (3.73) auch kompakt als

$$A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma) = i \tilde{M}_{\sigma z} \tilde{E}_z \quad (3.81)$$

geschrieben werden kann, wobei hier eine Summe über alle $z \in \mathcal{X}_n^{\text{mass}}$, d.h. über alle Lösungen der (massiven) Streugleichungen, zu verstehen ist, $\sigma \in \mathcal{B}_n$ eine beliebige Permutation aller externen Teilchen sein soll und wir die Abkürzung $\tilde{E}_z \equiv \tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$ eingeführt haben. Wir schränken nun die $n! \times (n-3)!$ -Matrix $(\tilde{M}_{\sigma z})_{\sigma z}$ so ein, dass in den Zeilen nur Ordnungen vorkommen, die in der BCJ-Basis liegen:

$$\tilde{M}_{\sigma z}^{\text{red}} \equiv \tilde{M}_{\sigma z} \upharpoonright_{\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}} \quad (3.82)$$

Da die Mächtigkeit der BCJ-Basis höchstens gleich der Anzahl der Lösungen der Streugleichungen ist, besitzt $\tilde{M}^{\text{red}} \equiv (\tilde{M}_{\sigma z}^{\text{red}})_{\sigma z}$ höchstens so viele Zeilen wie Spalten. Während für mindestens drei Quark-Antiquark-Paare ($k > 2$) die Matrix \tilde{M}^{red} weniger Zeilen als Spalten besitzt und somit insbesondere nicht invertierbar ist, ist sie für $k \leq 2$ quadratisch und sogar invertierbar. Um dies zu zeigen, führen wir zunächst die Schreibweise

$$\mathcal{B}_n^{k \leq 2} \equiv \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}} = \mathcal{B}_{n,1}^{\text{BCJ}} = \mathcal{B}_{n,2}^{\text{BCJ}} \quad (3.83)$$

für die BCJ-Basis mit höchstens zwei Quark-Antiquark-Paaren ein. Nach der Definition des QCD-Parke-Taylor-Faktors im vorherigen Abschnitt, stimmt \tilde{C} mit dem gewöhnlichen Parke-Taylor-Faktor auf der BCJ-Basis überein, weshalb \tilde{M}^{red} für $k \leq 2$ durch

$$M_{\sigma z}^{\text{red}} \equiv \tilde{M}_{\sigma z}^{\text{red}} = J^{\text{mass}}(z, p, \pi) C(\sigma, z), \quad \sigma \in \mathcal{B}_n^{k \leq 2}, z \in \mathcal{X}_n^{\text{mass}}, \quad (3.84)$$

gegeben ist. Die $(n-3)! \times (n-3)!$ -Matrix $M^{\text{red}} \equiv (M_{\sigma z}^{\text{red}})_{\sigma z}$ ist aber wegen der KLT-Orthogonalität bzw. genauer wegen Gl. (3.39) invertierbar und die Inverse $N^{\text{red}} \equiv (N_{z\sigma}^{\text{red}})_{z\sigma}$ ist durch

$$N_{z\sigma}^{\text{red}} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n^{k \leq 2}} S^{\text{mass}}[\sigma|\bar{\beta}]C(\bar{\beta}, z), \quad \sigma \in \mathcal{B}_n^{k \leq 2}, z \in \mathcal{Z}_n^{\text{mass}}, \quad (3.85)$$

bestimmt, wobei $\bar{\beta} \equiv \beta_1\beta_2 \dots \beta_{n-2}\beta_n\beta_{n-1}$ für $\beta \equiv \beta_1\beta_2 \dots \beta_n$.

Wir möchten nun für eine allgemeine Anzahl an Quark-Antiquark-Paaren die Matrix $\widetilde{M}^{\text{red}}$ zumindest auf Rechtsinvertierbarkeit überprüfen. Da jedoch in $\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$ für $k > 2$ nicht immer dasselbe Antiquark auf Position $n-1$ fixiert ist und somit $\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$ für $k > 2$ keine Teilmenge von $\mathcal{B}_n^{k \leq 2}$ ist, können wir die KLT-Orthogonalität nicht direkt anwenden. Wir drücken deshalb die Parke-Taylor-Faktoren $C(\sigma, z)$ mit $\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$ als Linearkombination der Parke-Taylor-Faktoren $C(\sigma', z)$ mit $\sigma' \in \mathcal{B}_n^{k \leq 2}$ aus, wie es durch die BCJ-Relationen vorgeschrieben wird:

$$C(1\alpha(n-1)\beta n, z) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{B}_n^{k \leq 2}} F_{\sigma\sigma'} C(\sigma', z) \quad (3.86)$$

Hierbei sind α und β zwei Wörter mit $\sigma \equiv 1\alpha(n-1)\beta n \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$ und die $|\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}| \times (n-3)!$ -Matrix $F \equiv (F_{\sigma\sigma'})$ ist für $\sigma' = 1\gamma(n-1)n$ gegeben durch

$$F_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} \mathcal{F}^{\text{mass}}(\gamma|\alpha, \beta) & \text{falls } \gamma \in \alpha \sqcup S(\beta), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.87)$$

wobei $\mathcal{F}^{\text{mass}}(\gamma|\alpha, \beta)$ aus $\mathcal{F}(\gamma|\alpha, \beta)$ in Gl. (2.68) durch die Ersetzungsregel in (3.74) folgt. Damit hängt insbesondere F nur von den Lorentz-Invarianten $2p_i p_j$ und den Massen der Quarks ab.

Die Matrix F besitzt genau dann vollen Rang oder äquivalent eine Rechtsinverse, wenn

$$\widetilde{M}^{\text{red}} = FM^{\text{red}} \quad (3.88)$$

vollen Rang hat. Wir postulieren nun:

Behauptung 3.1. F hat vollen (Zeilen-)Rang und besitzt deshalb – genauso wie $\widetilde{M}^{\text{red}}$ – eine Rechtsinverse.

Diese Behauptung ist trivial für $k \leq 2$, da in diesem Fall F die $(n-3)! \times (n-3)!$ Einheitsmatrix ist. Für $n = 6 = 2k$ können wir obige Behauptung ebenfalls leicht überprüfen. Die BCJ-Basis ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathcal{B}_{6,3}^{\text{BCJ}} = \{125346, 132546, 134256, 123456\} \quad (3.89)$$

und wir haben

$$\mathcal{B}_6^{k \leq 2} = \{124356, 132456, 134256, 123456, 142356, 143256\}. \quad (3.90)$$

Für die durch Gl. (3.87) gegebene Matrix F erhalten wir damit

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.91)$$

wenn wir $\mathcal{B}_{6,3}^{\text{BCJ}}$ und $\mathcal{B}_6^{k \leq 2}$ als geordnete Basen auffassen. Die explizite Abhängigkeit der Funktionen a_i und b_i von den Mandelstam-Variablen braucht uns hier nicht zu interessieren, ist jedoch im Anhang B zusammengestellt. Entscheidend ist, dass sowohl die a_i als auch die b_i für generische Impulse der externen Teilchen nicht verschwinden. F besitzt deshalb vollen Rang, denn die quadratische Untermatrix \hat{F} , die aus F durch Streichen der letzten beiden Spalten von F entsteht, besitzt die Determinante $\det(\hat{F}) = a_1 b_2 \neq 0$ und ist somit invertierbar.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Ordnung der Basen nicht willkürlich ist. Tatsächlich kann man für eine beliebige Anzahl an externen Teilchen natürliche Striktordnungen $\prec_{\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}}$ auf $\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$ und $\prec_{\mathcal{B}_n^{k \leq 2}}$ auf $\mathcal{B}_n^{k \leq 2}$ einführen, sodass die quadratische Matrix \hat{F} , die aus F durch Streichen der letzten $|\mathcal{B}_n^{k \leq 2}| - |\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}|$ Spalten von F entsteht, eine Block-Diagonalmatrix ist [34]. Um die Invertierbarkeit von F zu testen, reicht es also die Blöcke in der Hauptdiagonalen von \hat{F} auf Invertierbarkeit zu prüfen. Für bis zu $n = 10$ externen Teilchen wurde für eine generische Kinematik durch numerische Berechnung die Invertierbarkeit der Blöcke gezeigt und Behauptung 3.1 ist somit wahr für $n \leq 10$ [34].

Unter der Annahme, dass Behauptung 3.1 für alle n und k wahr ist, können wir nun leicht eine Definition von \tilde{E} angeben. Eine mögliche Rechtsinverse von F ist in diesem Fall durch

$$G = F^\dagger (F F^\dagger)^{-1} \quad (3.92)$$

gegeben, wobei man beachtet hat, dass die (quadratische) Matrix $F F^\dagger$ invertierbar ist, da F maximalen Rang besitzt. Man setzt dann

$$\tilde{N}^{\text{red}} \equiv N^{\text{red}} G. \quad (3.93)$$

\tilde{N}^{red} ist eine Rechtsinverse zu \tilde{M}^{red} , denn es gilt

$$\tilde{M}^{\text{red}} \tilde{N}^{\text{red}} = F M^{\text{red}} N^{\text{red}} G = F \mathbb{1}_{\mathcal{B}_n^{k \leq 2}} G = F G = \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}}. \quad (3.94)$$

Wir definieren deshalb den QCD-Polarisationsfaktor durch

$$\tilde{E}_z \equiv -i \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}} \tilde{N}_{z\sigma}^{\text{red}} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma) \quad (3.95)$$

bzw. expliziter mit Gl. (3.85) und Gl. (3.93)

$$\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon) \equiv -i \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}} \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_n^{k \leq 2}} S^{\text{mass}}[\alpha|\beta] C(\bar{\beta}, z) G_{\alpha\sigma} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma, p, \varepsilon). \quad (3.96)$$

Die Gültigkeit der CHY-Darstellung in Gl. (3.73) folgt dann direkt aus der Konstruktion von \tilde{E}_z für alle $\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}$. Da wir aber $\tilde{C}(\sigma, z)$ genau so definiert haben, dass QCD-Amplituden dieselben Relationen erfüllen wie der QCD-Parke-Taylor-Faktor, folgt sogar Gl. (3.73) für alle $\sigma \in \mathcal{B}_n$.

Man beachte, dass \tilde{E}_z nur von der Lösung z der Streugleichungen – und nicht etwa von anderen Lösungen $z' \neq z$ abhängt. Diese Abhängigkeit kommt ausschließlich durch den Parke-Taylor-Faktor $C(\bar{\beta}, z)$ zustande, da $S^{\text{mass}}[\alpha|\bar{\beta}]$ und die Matrix G nur von Impulsen und Massen der Teilchen abhängen und die Amplitude $A_{n,k}^{\text{QCD}}$ ebenfalls unabhängig von den Lösungen der Streugleichungen ist. Weiter ist zu bemerken, dass die Rechtsinverse von F und somit auch \tilde{E} nicht notwendigerweise eindeutig sind. Dies ist jedoch auch nicht zu erwarten, da \tilde{E} keine physikalische Observable darstellt. Der Ausdruck

$$i \sum_{z \in \mathcal{F}_n^{\text{mass}}} J^{\text{mass}}(z, p, \pi) \tilde{C}(\sigma, z) \tilde{E}_{F_R}(z, p, \pi, \epsilon) \quad (3.97)$$

mit \tilde{E}_{F_R} gegeben durch

$$\tilde{E}_{F_R}(z, p, \pi, \epsilon) = -i \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_{n,k}^{\text{BCJ}}} \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_n^{k \leq 2}} S^{\text{mass}}[\alpha|\bar{\beta}] C(\bar{\beta}, z) (F_R)_{\alpha\sigma} A_{n,k}^{\text{QCD}}(\sigma, p, \epsilon) \quad (3.98)$$

ist jedoch unabhängig von der Wahl der Rechtsinversen F_R von F , da dieser für jede Rechtsinverse F_R gleich der QCD-Amplitude ist. Unsere Wahl der Rechtsinversen, $F_R = G$, ist genau die (eindeutig bestimmte) Matrix, welche die Moore-Penrose-Bedingung $(GF)^\dagger = GF$ erfüllt.

Beachte auch, dass Lösungen der massiven Streugleichungen, damit insbesondere auch \tilde{C} und \tilde{E} , von der Wahl von π_i in Gl. (3.43) abhängen. Die CHY-Darstellung in Gl. (3.73) ist jedoch gültig für beliebige π_i , welche die Bedingungen in Gl. (3.42) erfüllen, da für die KLT-Orthogonalität dasselbige gilt. Insbesondere können wir π_i wie in Gl. (3.47) und Gl. (3.48) wählen.

In jedem Fall besitzt \tilde{E} (bzw. \tilde{E}_{F_R}) das Transformationsverhalten in Gl. (3.52) unter $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Dies liegt daran, dass der Parke-Taylor-Faktor das Transformationsverhalten eines Halbintegranden besitzt und die QCD-Amplitude, der KLT-Kern S^{mass} , wie auch die Rechtsinversen von F unabhängig von den Lösungen der Streugleichungen sind. Ebenso stellen wir fest, dass \tilde{E} eichinvariant ist: Die Amplitude ist eichinvariant, trivialerweise aber auch S^{mass} , der Parke-Taylor-Faktor und die Rechtsinversen von F , da diese unabhängig von der Polarisation der externen Teilchen sind.

Abschließend sei angemerkt, dass – im Unterschied etwa zur CHY-Darstellung von Amplituden in reiner YM-Theorie – der QCD-Polarisationsfaktor explizit von der QCD-Amplitude abhängt. Die CHY-Darstellung in Gl. (3.73) ist keine neue Methode zur Berechnung von QCD-Amplituden. Wir stellen uns stattdessen auf den Standpunkt, dass wir QCD-Amplituden und damit auch den QCD-Polarisationsfaktor \tilde{E} anderweitig, etwa mit farbgeordneten Feynman-Regeln, berechnet haben. Die rechte Seite von Gl. (3.73) ist somit ein wohldefinierter Ausdruck, welcher genau die QCD-Amplitude liefert.

3.2.3. Bemerkung zur CHY-Darstellung für Amplituden in der Gravitation

Wie wir festgestellt haben, lässt sich die n -Graviton-Amplitude aus der n -Gluon-Amplitude auf drei äquivalenten Wegen gewinnen, den KLT-Relationen, dem BCJ-Double-Copy-Verfahren sowie der CHY-Darstellung. Wir haben ferner in Kapitel 2.7.2 eine Verallgemeinerung der KLT-Relationen auf QCD angegeben, welche dieselben Amplituden liefern wie das BCJ-Double-Copy-Verfahren. Die Amplituden in dieser gravitationellen Theorie, welche wir mit $A_{n,k}^{\text{QCD}^2}$ notiert haben, beinhalten nunmehr – neben Gravitonen – auch Double-Copies von Fermionen. Da es möglich ist QCD-Amplituden in CHY-Form darzustellen, stellt sich natürlich die Frage, ob auch $A_{n,k}^{\text{QCD}^2}$ eine CHY-Darstellung besitzt.

Naiv könnte man vermuten, dass man, wie in der Einstein-Gravitation, den Polarisationsfaktor quadrieren muss, d. h. dass

$$A_{n,k}^{\text{QCD}^2} = i \sum_{z \in \mathcal{X}_n^{\text{mass}}} J^{\text{mass}}(z, p, \pi) \tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon) \tilde{E}(z, p, \pi, \tilde{\varepsilon}) \quad (3.99)$$

gilt. Dies ist wahr für $k \leq 1$, schlägt jedoch fehl für $k \geq 2$. Wir geben nun anhand von zwei Beispielen einen Hinweis darauf, dass eine CHY-Darstellung für $A_{n,k}^{\text{QCD}^2}$ dennoch existieren könnte. Hierfür müssen wir jedoch einen Polarisationsfaktor $\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$ durch eine verwandte Funktion $\hat{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$ ersetzen. Es ist jedoch bis jetzt unklar, wie man $\hat{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$ aus $\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$ im Allgemeinen erhält.

Beispiel 3.2. $n = 4 = 2k$. Wir betrachten zunächst das Beispiel mit zwei Quarklinien und keinen Gluonen. In diesem Fall können wir den QCD-Polarisationsfaktor mit Hilfe des Numerators $N_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(1234)$ vom MW-Diagramm bezüglich der Ordnung $\sigma = 1234$ darstellen:

$$\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon) = -i S^{\text{mass}}[1234|1243] C(1243, z) A_{4,2}^{\text{QCD}}(1234) = -N_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(1234) C(1324, z) \quad (3.100)$$

Definieren wir nun einen zweiten Polarisationsfaktor $\hat{E}(z, p, \pi, \tilde{\varepsilon})$ durch

$$\hat{E}(z, p, \pi, \tilde{\varepsilon}) = \tilde{N}_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(1234) C(1234, z), \quad (3.101)$$

so folgt mit

$$\sum_{z \in \mathcal{X}_4^{\text{mass}}} J^{\text{mass}}(z, p, \pi) C(1234, z) C(1324, z) = \frac{1}{s_{14}}, \quad (3.102)$$

dass

$$A_{4,2}^{\text{QCD}^2} = i \sum_{z \in \mathcal{X}_4^{\text{mass}}} J^{\text{mass}}(z, p, \pi) \tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon) \hat{E}(z, p, \pi, \tilde{\varepsilon}) = -i \frac{N_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(1234) \tilde{N}_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(1234)}{s_{14}} \quad (3.103)$$

gilt. Dies haben wir auch über die verallgemeinerte KLT-Relation bzw. über das BCJ-Double-Copy-Verfahren erhalten, Gl. (2.113).

Beispiel 3.3. $n = 5, k = 2$. Als Nächstes betrachten wir das erste nichttriviale Beispiel. Für den Polarisationsfaktor für QCD-Amplituden mit zwei Quarklinien und einem Gluon erhalten wir durch Einsetzen von Gl. (2.97) in die Definition von $\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon)$:

$$\tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon) = -N_1 C(14235, z) - N_2 [C(13425, z) + C(14325, z)] + N_3 C(14325, z) \quad (3.104)$$

N_1, N_2 und N_3 sind die Numerator der MW-Diagramme, welche in der oberen Reihe von Abb. 2.11 dargestellt sind. Beachte, dass die Ordnungen der in obiger Gleichung auftretenden Parke-Taylor-Faktoren nicht in der Melia-Basis liegen, da die Quarklinien falsch orientiert sind. Wir behandeln nun die Parke-Taylor-Faktoren wie QCD-Parke-Taylor-Faktoren und wenden die Melia-Relationen (vgl. Gl. (3.76)) an. Wir erhalten hierdurch die Funktion

$$\hat{E}(z, p, \pi, \tilde{\varepsilon}) = \tilde{N}_1 [C(12435, z) + C(12345, z)] + \tilde{N}_2 C(13245, z) + \tilde{N}_3 C(12345, z). \quad (3.105)$$

Damit überprüft man leicht, dass die Amplitude $A_{5,2}^{\text{QCD}^2}$ sich in CHY-Form schreiben lässt:

$$\begin{aligned} A_{5,2}^{\text{QCD}^2} &= i \sum_{z \in \mathcal{Z}_5^{\text{mass}}} J^{\text{mass}}(z, p, \pi) \tilde{E}(z, p, \pi, \varepsilon) \hat{E}(z, p, \pi, \tilde{\varepsilon}) \\ &= i \left[\frac{N_1 \tilde{N}_1}{s_{24}(s_{35} - m_1^2)} + \frac{N_2 \tilde{N}_2}{s_{24}(s_{13} - m_1^2)} + \frac{N_3 \tilde{N}_3}{s_{15}(s_{34} - m_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(N_3 + N_1 - N_2)(\tilde{N}_3 + \tilde{N}_1 - \tilde{N}_2)}{s_{15}(s_{23} - m_2^2)} + \frac{(N_1 - N_2)(\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2)}{s_{15}s_{24}} \right] \end{aligned} \quad (3.106)$$

Hierbei ist m_1 die Masse des Quarks 1 bzw. Antiquarks 5 und m_2 die Masse des Quarks 2 bzw. des Antiquarks 4.

4. Streuformen und ihre Beziehung zum Associahedron

Der Modulraum $\mathcal{M}_{0,n}$ der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre ist ein hervorragender Hilfsraum, um Amplituden, insbesondere in YM-Theorie und Gravitation, zu beschreiben. In der CHY-Darstellung ist nämlich die Amplitude (auf Baumniveau) ein Integral über $\mathcal{M}_{0,n}$, welches lokalisiert auf den Lösungen der Streugleichungen ist. Die Streugleichungen liefern eine Abbildung von $\mathcal{M}_{0,n}$ in den von den Mandelstam-Variablen aufgespannten Raum der Kinematik \mathcal{K}_n . Wenn man diese auf eine „positive“ (und somit reelle) Region von $\mathcal{M}_{0,n}$ einschränkt, ist diese Abbildung sogar ein Diffeomorphismus auf eine positive Region eines geeigneten Unterraums von \mathcal{K}_n [45].

Amplituden in der bi-adjungierten skalaren Theorie und der YM-Theorie können wir wahlweise als Differenzialformen, wir bezeichnen diese als Streuformen, auf der Deligne-Mumford-Kompaktifizierung $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ von $\mathcal{M}_{0,n}$ oder auf \mathcal{K}_n auffassen. Im Fall der bi-adjungierten skalaren Theorie sind diese Differenzialformen eng verwandt mit einer reellen Geometrie. Genauer ist das kinematische Associahedron eine positive Geometrie, welche erstmals rigoros in [47] studiert wurden und die farbgeordnete Amplitude $m_n(\alpha|\beta)$ der bi-adjungierten skalaren Theorie ist die eindeutig bestimmte kanonische Form des (kinematischen) Associahedrons, aufgefasst als Streuform auf \mathcal{K}_n .

Aus der Faktorisierung der Facetten des Associahedrons in zwei niederdimensionale Associahedra folgt die Faktorisierung der skalaren Amplitude. Zwar wissen wir weder, was die Geometrie der zur YM-Theorie gehörigen Streuform ist, noch ob überhaupt so eine Geometrie existiert, so können wir dennoch explizit zeigen, dass – wie im skalaren Fall – die einzigen Singularitäten der YM-Streuform auf dem Divisor $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$ liegen, diese logarithmisch sind und dass die Residuen auf den irreduziblen Komponenten von $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$ in zwei YM-Streuformen vom niedrigeren Grad faktorisieren.

Dieses Kapitel ist wie folgt organisiert: Zunächst führen wir den Begriff der positiven Geometrie und der dazugehörigen kanonischen Formen ein. Im zweiten Abschnitt diskutieren wir die Kompaktifizierung des Modulraums $\mathcal{M}_{0,n}$, welche wesentlich ist, um das Verhalten der Streuformen an den Singularitäten zu verstehen. Im dritten Abschnitt zeigen wir, dass die kanonische Form des Associahedrons in der Tat die Amplitude $m_n(\alpha|\beta)$ ist. Der vierte Abschnitt beinhaltet den Hauptteil dieses Kapitels und basiert auf einer Arbeit von de la Cruz, Weinzierl und dem Autor dieser Dissertation [51]. Hier studieren wir die Eigenschaften der mit der bi-adjungierten skalaren Theorie und der YM-Theorie assoziierten Streuformen $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ bzw. $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ auf $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$.

4.1. Positive Geometrien und kanonische Formen

Wir werden hier den Begriff der positiven Geometrie einführen [47]. Jede positive Geometrie ist assoziiert mit einer eindeutigen Differenzialform, die als kanonische Form der positiven Geometrie bezeichnet wird. Wir geben anschließend einige Beispiele für positive Geometrien und ihre zugehörigen kanonischen Formen an und stellen eine Methode vor, wie man kanonische Formen von positiven Geometrien berechnen kann. Für die Definitionen der auftretenden algebraischen Begriffe verweisen wir auf Anhang D.

Sei $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ eine komplexe projektive Varietät der Dimension D , wobei die definierenden Polynome reelle Koeffizienten haben sollen. Wir nehmen an, dass X nichtsingulär ist. Nach dem Satz vom regulären Wert können wir somit X als komplexe abgeschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension D auffassen. Sei weiterhin $X(\mathbb{R}) \equiv X \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ der reelle Teil von X und $\emptyset \neq X_{\geq 0} \subset X(\mathbb{R})$ eine orientierte abgeschlossene semialgebraische Menge der (reellen) Dimension D , sodass das Innere $X_{>0}$ von $X_{\geq 0}$ eine offene orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension D ist. Wir bezeichnen den Rand von $X_{\geq 0}$ mit $\partial X_{\geq 0} = X_{\geq 0} \setminus X_{>0}$ und definieren ∂X als den Zariski-Abschluss von $\partial X_{\geq 0}$ in X . Seien C_1, C_2, \dots, C_r die irreduziblen Komponenten von ∂X . Dies sind komplexe projektive Varietäten. Wir notieren mit $C_{i,\geq 0}$ für $i = 1, 2, \dots, r$ den Abschluss des Inneren von $X_i \cap \partial X_{\geq 0}$ und nennen die Paare $(C_i, C_{i,\geq 0})$ die Randkomponenten von $(X, X_{\geq 0})$. Kurz bezeichnen wir auch $C_{i,\geq 0}$ als die Randkomponenten von $X_{\geq 0}$.

Wir definieren nun, was wir unter dem Residuum einer Differenzialform auf dem Rand verstehen [86]:

Definition 4.1. Sei ω eine holomorphe Form auf $X \setminus \partial X$ mit Polstellen höchstens erster Ordnung auf ∂X . Angenommen ω habe eine Polstelle erster Ordnung auf C_i ($i = 1, 2, \dots, r$) und sei C_i lokal gegeben durch die Gleichung $s_i = 0$. Dann haben wir (lokal)

$$\omega = \Psi_i \wedge \frac{ds_i}{s_i} + \theta_i \quad (4.1)$$

mit in einer Umgebung von $s_i = 0$ holomorphen Form θ_i . Die durch Gl. (4.1) eindeutig definierte auf ganz C_i holomorphe Form Ψ_i bezeichnen wir als (Leray-)Residuum von ω auf C_i und schreiben für dieses

$$\text{Res}_{C_i} \omega \equiv \Psi_i. \quad (4.2)$$

Hat ω auf C_i keine Singularität, so setzen wir

$$\text{Res}_{C_i} \omega \equiv 0. \quad (4.3)$$

Damit können wir nun definieren, was wir unter einer positiven Geometrie verstehen [47]:

Definition 4.2. Das Paar $(X, X_{\geq 0})$ heißt D -dimensionale positive Geometrie, falls die folgenden rekursiven Eigenschaften erfüllt sind:

- Für $D = 0$ ist $X = X_{\geq 0}$ ein Punkt und es gibt genau eine 0-Form $\Omega(X, X_{\geq 0})$ auf X mit $\Omega(X, X_{\geq 0}) = \pm 1$ – je nach Orientierung des Punktes $X_{\geq 0}$.

- Für $D > 0$ ist jede Randkomponente $(C_i, C_{i, \geq 0})$ von $(X, X_{\geq 0})$ eine $(D - 1)$ -dimensionale positive Geometrie. Implizit verlangen wir damit, dass jedes C_i nicht-singulär ist. Weiterhin existiert eine eindeutige rationale D -Form $\Omega(X, X_{\geq 0}) \neq 0$ mit

$$\text{Res}_{C_i} \Omega(X, X_{\geq 0}) = \Omega(C_i, C_{i, \geq 0}), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.4)$$

Wir nennen $\Omega(X, X_{\geq 0})$ die kanonische Form von $(X, X_{\geq 0})$. Wir schreiben kurz $X_{\geq 0}$ für die positive Geometrie $(X, X_{\geq 0})$ und $\Omega(X_{\geq 0})$ für ihre kanonische Form.

Anschaulich hat damit $X_{\geq 0}$ Ränder aller möglichen Kodimensionen und die zugehörige kanonische Form hat logarithmische Singularitäten auf den Rändern. Den Begriff der positiven Geometrie können wir leicht verallgemeinern, indem wir $X_{\geq 0} = \emptyset$ zulassen und $\Omega(\emptyset) \equiv 0$ setzen. Wir sprechen dann von pseudo-positiven Geometrien. Ein einfaches Beispiel einer pseudo-positiven Geometrie ist der Einheitskreis im 2-dimensionalen projektiven Raum. Dieser hat leeren 0-dimensionalen Rand, weswegen seine kanonische Form verschwindet.

Zur Illustration der obigen Definition geben wir drei Beispiele von positiven Geometrien an. Für X wählen wir jeweils den ganzen projektiven Raum, welcher trivialerweise eine projektive Varietät ist. Die positiven Geometrien geben wir als Teilmengen des reellen euklidischen Raums \mathbb{R}^n an. Vermöge der Einbettung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, \quad x \mapsto [1 : x], \quad (4.5)$$

können wir diese jedoch als Teilmengen des reellen projektiven Raums auffassen. Der Grund, wieso wir X nicht als komplexe affine Varietät definiert haben, ist derjenige, dass es auf \mathbb{C}^n beliebig viele holomorphe n -Formen gibt. Damit wäre die kanonische Form nicht eindeutig, da mit $\Omega(X_{\geq 0})$ auch $\Omega(X_{\geq 0}) + \Omega_0$ mit einer holomorphen n -Form Ω_0 ebenfalls eine kanonische Form von $X_{\geq 0}$ wäre.

Beispiel 4.3. Das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ ist eine eindimensionale positive Geometrie mit kanonischer Form

$$\Omega([0, 1]) = \frac{dx}{x(1-x)}, \quad (4.6)$$

wobei wir $[0, 1]$ entlang aufsteigender x -Werte orientieren. Die Randkomponenten $\{0\}$ und $\{1\}$ sind als Punkte 0-dimensionale positive Geometrien und wir haben für die Residuen

$$\text{Res}_{x=0} \Omega([0, 1]) = 1, \quad \text{Res}_{x=1} \Omega([0, 1]) = -1. \quad (4.7)$$

Allgemein ist mit $X_{\geq 0}, Y_{\geq 0}$ auch das Produkt $X_{\geq 0} \times Y_{\geq 0}$ mit der induzierten Orientierung eine positive Geometrie mit kanonischer Form $\Omega(X_{\geq 0} \times Y_{\geq 0}) = \Omega(X_{\geq 0}) \wedge \Omega(Y_{\geq 0})$. Somit ist der abgeschlossene Quader $[0, 1]^n$ eine positive Geometrie mit kanonischer Form

$$\Omega([0, 1]^n) = \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n}{x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\dots x_n(1-x_n)}. \quad (4.8)$$

Beispiel 4.4. Betrachte die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x(1-x)\}$, wobei ∂M gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist. M ist eine positive Geometrie mit der kanonischen Form

$$\Omega(M) = \frac{dx \wedge dy}{y(x(1-x) - y)}. \quad (4.9)$$

Für das Residuum entlang $y = 0$ haben wir

$$\text{Res}_{y=0}\Omega(M) = \frac{dx}{x(1-x)}, \quad (4.10)$$

was die kanonische Form des Intervalls $[0, 1]$ ist. Die Randkomponente $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], y = x(1-x)\}$ ist eine eindimensionale positive Geometrie mit kanonischer Form

$$\text{Res}_{y=x(1-x)}\Omega(M) = \frac{dx}{x(x-1)}. \quad (4.11)$$

Beispiel 4.5. Betrachte den $(n-3)$ -Simplex

$$\Delta_n = \{(z_2, z_3, \dots, z_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-3} \mid 0 \leq z_2 \leq z_3 \leq \dots \leq z_{n-2} \leq 1\}. \quad (4.12)$$

Für $n = 4$ ist dies das Intervall $[0, 1]$ und somit eine positive Geometrie, deren kanonische Form durch Gl. (4.6) gegeben ist. Für $n = 5$ sind die eindimensionalen Randkomponenten gegeben durch

$$\begin{aligned} C_{1, \geq 0} &= \{(z_2, z_3) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 \in [0, 1], z_3 = 1\}, \\ C_{2, \geq 0} &= \{(z_2, z_3) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 = 0, z_3 \in [0, 1]\}, \\ C_{3, \geq 0} &= \{(z_2, z_3) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 \in [0, 1], z_2 = z_3\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Der Rand soll gegen den Uhrzeigersinn orientiert sein. Dann sind die kanonischen Formen von $C_{i, \geq 0}$ gegeben durch

$$\Omega(C_{1, \geq 0}) = \frac{dz_2}{z_2(z_2 - 1)}, \quad \Omega(C_{2, \geq 0}) = \frac{dz_3}{z_3(z_3 - 1)}, \quad \Omega(C_{3, \geq 0}) = \frac{dz_2}{z_2(1 - z_2)}. \quad (4.14)$$

Damit ist Δ_5 eine positive Geometrie mit kanonischer Form

$$\Omega(\Delta_5) = \frac{dz_2 \wedge dz_3}{z_2(z_3 - z_2)(1 - z_3)}. \quad (4.15)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass für die Residuen, wie gefordert,

$$\text{Res}_{C_i}\Omega(\Delta_5) = \Omega(C_{i, \geq 0}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.16)$$

gilt. Allgemein folgt induktiv, dass Δ_n eine positive Geometrie mit kanonischer Form

$$\Omega(\Delta_n) = \frac{dz_2 \wedge dz_3 \wedge \dots \wedge dz_{n-2}}{z_2(z_3 - z_2)(z_4 - z_3) \dots (z_{n-2} - z_{n-3})(1 - z_{n-2})} \quad (4.17)$$

ist.

Häufig ist die Bestimmung der kanonischen Form nicht so einfach wie in obigen Beispielen, etwa weil die Randstruktur der positiven Geometrie kompliziert ist. Manchmal können wir jedoch die kanonische Form einer positiven Geometrie $Y_{\geq 0}$ aus der (bekannt) kanonischen Form einer einfacheren positiven Geometrie $X_{\geq 0}$ mittels eines Pushforwards gewinnen, wenn die Geometrien durch eine Abbildung $X_{\geq 0} \rightarrow Y_{\geq 0}$ miteinander verbunden sind [47]:

Definition und Behauptung 4.6.

- (i) Sei $\Phi : M \rightarrow N$ eine surjektive und meromorphe Abbildung zwischen zwei komplexen Mannigfaltigkeiten derselben Dimension und ω eine meromorphe Volumenform auf M . Sei ferner $b \in V \subset N$ offen und angenommen es existieren offene Mengen $U_i \subset M$, $i = 1, 2, \dots, p$, mit $\Phi^{-1}(V) = \cup_{i=1}^p U_i$ und $\Phi(a_i) = b$ für $a_i \in U_i$. Dann definieren wir den Pushforward Φ_* von ω unter Φ durch

$$(\Phi_*(\omega))(b) \equiv \sum_{i=1}^p \Psi_i^*(\omega(a_i)), \quad (4.18)$$

wobei $\Psi_i \equiv (\Phi|_{U_i})^{-1} : V \rightarrow U_i$.

- (ii) Unter einem Morphismus $\Phi : (X, X_{\geq 0}) \rightarrow (Y, Y_{\geq 0})$ zwischen zwei pseudo-positiven Geometrien $(X, X_{\geq 0})$ und $(Y, Y_{\geq 0})$ verstehen wir eine rationale Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$, sodass die Einschränkung $\Phi|_{X_{>0}} : X_{>0} \rightarrow Y_{>0}$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist.
- (iii) Seien $(X, X_{\geq 0})$ und $(Y, Y_{\geq 0})$ zwei pseudo-positive Geometrien und $\Phi : (X, X_{\geq 0}) \rightarrow (Y, Y_{\geq 0})$ ein Morphismus zwischen diesen Geometrien. Dann gilt

$$\Phi_*(\Omega(X, X_{\geq 0})) = \Omega(Y, Y_{\geq 0}). \quad (4.19)$$

Dies wurde zwar bisher nicht bewiesen, viele (nicht-triviale) Beispiele legen jedoch nahe, dass Gl. (4.19) allgemein wahr ist. Ein Beispiel diskutieren wir im Folgenden.

Beispiel 4.7. Betrachte den Morphismus $\Phi : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$, welcher gegeben sei durch

$$\Phi(1, x_1, x_2) \equiv (1, z_2, z_3) \equiv (1, x_2, 1 - x_1(1 - x_2)). \quad (4.20)$$

Wegen $x_2 + x_1(1 - x_2) = (1 - x_2)(x_1 - 1) + 1 < 1$ auf $(0, 1)^2$ bildet diese Abbildung das offene Quadrat $(0, 1)^2$ auf eine Teilmenge des Inneren $\mathring{\Delta}_5$ des Simplex Δ_5 ab. Die Einschränkung $\Phi|_{(0,1)^2} : (0, 1)^2 \rightarrow \mathring{\Delta}_5$ ist sogar ein Diffeomorphismus, denn

$$\Psi : \mathring{\Delta}_5 \rightarrow (0, 1)^2, \quad \Psi(z_2, z_3) = \left(\frac{1 - z_3}{1 - z_2}, z_2 \right), \quad (4.21)$$

ist die Inverse von $\Phi|_{(0,1)^2}$. Der Diffeomorphismus ist orientierungserhaltend, da die Jacobi-Determinante $\det(J\Phi) = 1 - x_2$ positiv auf $(0, 1)^2$ ist. Für den Pushforward der kanonischen Form von $[0, 1]^2$ unter Φ erhalten wir

$$\Phi_*(\Omega([0, 1]^2)) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(z_2, z_3)} \frac{dz_2 \wedge dz_3}{\frac{1-z_3}{1-z_2} (1 - \frac{1-z_3}{1-z_2}) z_2 (1 - z_2)} = \frac{dz_2 \wedge dz_3}{z_2(z_3 - z_2)(1 - z_3)}. \quad (4.22)$$

Dies ist genau die kanonische Form $\Omega(\Delta_5)$ des 2-Simplex.

Gewöhnlich sind wir an den kanonischen Formen bis auf Vorzeichen interessiert. Dieses hängt von der Orientierung der positiven Geometrie ab und ist physikalisch irrelevant. Wir werden deshalb nachfolgend stets das globale Vorzeichen bei den kanonischen Formen vernachlässigen.

4.2. Der Modulraum der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre und seine Kompaktifizierung

Wir betrachten den Modulraum \mathcal{M}_{0,I_n} der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre, wobei wir nun Elemente aus \mathcal{M}_{0,I_n} mit $(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n})$ (statt mit (z_1, z_2, \dots, z_n)) notieren und i_j aus der Indexmenge I_n stammen, die genau n Elemente enthalten soll. Dies drücken wir durch den Index I_n in \mathcal{M}_{0,I_n} aus. Ist $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, so schreiben wir $\mathcal{M}_{0,n}$ statt \mathcal{M}_{0,I_n} (vgl. die Definition in Gl. (3.3)). Unser Ziel ist es, diesen Raum zu kompaktifizieren, um das Verhalten von \mathcal{M}_{0,I_n} an den Rändern genauer zu untersuchen. Hierfür orientieren wir uns an [87].

Sei $D_n = \{\zeta^i \circ \rho^j | i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2\}\}$ die $2n$ -elementige Menge aller Kompositionen von zyklischen Permutationen

$$\zeta = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

und Reflexionen

$$\rho = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ i_n & i_{n-1} & \dots & i_1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

auf I_n . D_n bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n und heißt Dieder-Gruppe. Da die Dieder-Gruppe die Symmetriegruppe des regelmäßigen Polygons mit n Ecken (n -Gon) ist, können wir das Paar (I_n, δ) mit $\delta \in S_n/D_n$ geometrisch als n -Gon darstellen, wobei jedes Element von I_n einer Seite des n -Gons entspricht und die Seiten gemäß der Permutation δ geordnet sind.

Eine Diagonale $\{\delta_i, \delta_j\}$ verbindet diejenigen Ecken, die als Schnittpunkte der Seiten δ_i mit δ_{i+1} bzw. δ_j mit δ_{j+1} entstehen. Wir bezeichnen die Menge der Diagonalen des n -Gons (I_n, δ) mit $\chi_{I_n, \delta}$. Sie enthält $n(n-3)/2$ Elemente. Zu jeder Diagonalen $\{\delta_i, \delta_j\} \in \chi_{I_n, \delta}$ ordnen wir ein Doppelverhältnis

$$u_{\delta_i \delta_j}^\delta \equiv [\delta_i, \delta_{i+1} | \delta_{j+1}, \delta_j] \quad \text{mit} \quad [i, j | k, l] \equiv \frac{z_{ik} z_{jl}}{z_{il} z_{jk}} \quad (4.25)$$

für $z \in \mathcal{M}_{0,I_n}$ zu. Beachte, dass $u_{\delta_i \delta_j}^\delta = u_{\delta_j \delta_i}^\delta$ gilt und somit das Doppelverhältnis wohldefiniert ist. Um die Notation zu vereinfachen sei nachfolgend $\delta = \delta_0 \equiv 12 \dots n$ und

$u_{ij} \equiv u_{\delta_0, i\delta_0, j}^{\delta_0}$. Durch wiederholte Anwendung von $[i, j|k, l] = [i, j|k, m][i, j|m, l] = [i, m|k, l][m, j|k, l]$ folgt die nützliche Identität

$$u_{ik} + \prod_{\alpha=i+1}^{k-1} \prod_{\beta=k+1}^n \prod_{\beta=1}^{i-1} u_{\alpha\beta} = [i, i+1|k+1, k] + [i+1, k|i, k+1] = 1 \quad (4.26)$$

für $1 \leq i < j < k < l \leq n$. Wegen Dieder-Symmetrie kann dies zu

$$u_{ij} + \prod_{\{k,l\} \sim_x \{i,j\}} u_{kl} = 1 \quad (4.27)$$

für beliebige Diagonalen $\{i, j\} \in \chi_{I_n, \delta}$ verallgemeinert werden. Hierbei ist $\{i, j\} \sim_x \{k, l\} :\Leftrightarrow \{i, j\}$ schneidet $\{k, l\}$, d. h. das Produkt in obiger Gleichung läuft über alle Diagonalen, die $\{i, j\}$ schneiden. Diese Gleichung erlaubt es uns, alle u_{ij} durch die $n-3$ unabhängigen $u_{2n}, u_{3n}, \dots, u_{n-2, n}$ auszudrücken. Beispielsweise liefert uns Gl. (4.27) für $n=5$ drei unabhängige Gleichungen

$$u_{14} = 1 - u_{25}u_{35}, \quad u_{24} = 1 - u_{35}u_{13}, \quad u_{13} = 1 - u_{24}u_{25}. \quad (4.28)$$

u_{14} ist bereits durch u_{25} und u_{35} ausgedrückt. Für u_{24} und u_{13} erhalten wir aus der zweiten und dritten Gleichung

$$u_{24} = \frac{1 - u_{35}}{1 - u_{25}u_{35}}, \quad u_{13} = \frac{1 - u_{25}}{1 - u_{25}u_{35}}. \quad (4.29)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass Doppelverhältnisse $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -invariant sind. Damit definiert jedes feste u_{ij} eine Abbildung von \mathcal{M}_{0, I_n} nach $\mathcal{M}_{0, 4} \cong \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{C}$. Für $\delta = \delta_0$ haben wir in der Eichung $z_1 = 0, z_{n-1} = 1, z_n = \infty$:

$$u_{2, n} = \frac{z_2}{z_3}, \quad u_{3, n} = \frac{z_3}{z_4}, \quad \dots, \quad u_{n-3, n} = \frac{z_{n-3}}{z_{n-2}}, \quad u_{n-2, n} = z_{n-2} \quad (4.30)$$

Somit ist die Abbildung

$$i_\delta : \mathcal{M}_{0, I_n} \hookrightarrow \mathcal{M}_{0, 4}^{n(n-3)/2}, \quad z \mapsto (u_{ij}(z))_{\{i, j\} \in \chi_{I_n, \delta}}, \quad (4.31)$$

eine Einbettung in $\mathbb{C}^{n(n-3)/2}$ mit Bild

$$i_\delta(\mathcal{M}_{0, I_n}) = \{(u_{ij})_{\{i, j\} \in \chi_{I_n, \delta}} \mid u_{ij} \neq 0 \text{ und } u_{ij} \text{ erfüllt Gl. (4.27)} \forall \{i, j\} \in \chi_{I_n, \delta}\}. \quad (4.32)$$

Wir definieren den Modulraum $\mathcal{M}_{0, I_n}^\delta$ als den Abschluss von $i_\delta(\mathcal{M}_{0, I_n})$ in $\mathbb{C}^{n(n-3)/2}$ bezüglich der Zariski-Topologie,

$$\mathcal{M}_{0, I_n}^\delta \equiv \{(u_{ij})_{\{i, j\} \in \chi_{I_n, \delta}} \mid u_{ij} \text{ erfüllt Gl. (4.27)} \forall \{i, j\} \in \chi_{I_n, \delta}\}, \quad (4.33)$$

und die Deligne-Mumford-Kompaktifizierung von \mathcal{M}_{0, I_n} als Vereinigung aller $\mathcal{M}_{0, I_n}^\delta$:

$$\overline{\mathcal{M}}_{0, I_n} = \bigcup_{\delta \in S_n/D_n} \mathcal{M}_{0, I_n}^\delta \quad (4.34)$$

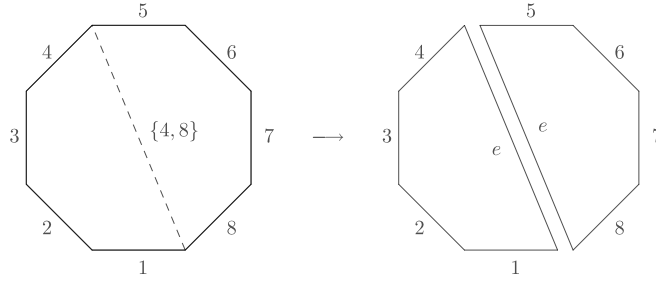


Abbildung 4.1.: Die Diagonale $\{4, 8\}$ zerlegt das Oktagon mit der Ordnung $\delta = 12345678$ in zwei Pentagone mit induzierten Ordnungen $\delta' = 1234e$ und $\delta'' = e5678$.

Ist $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ so schreiben wir $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$ statt $\mathcal{M}_{0,I_n}^\delta$ und $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ statt $\overline{\mathcal{M}}_{0,I_n}$.

Das Komplement $\mathcal{M}_{0,I_n}^\delta \setminus i_\delta(\mathcal{M}_{0,I_n})$ lässt sich als Vereinigung von Mengen D_{ij} schreiben, die durch $u_{ij} = 0$ definiert sind. Um D_{ij} genauer zu untersuchen, betrachten wir die Diagonale $\{i, j\}$ im n -Gon (I_n, δ) . Diese zerlegt das n -Gon in ein m -Gon (mit $m < n$), dessen Seiten mit Elementen aus $I'_{m-1} \cup \{e\}$ gekennzeichnet sind und ein $(n-m+2)$ -Gon mit Seiten aus $I''_{n-m+1} \cup \{e\}$, vgl. Abb. 4.1. Hierbei entspricht die Seite e der Diagonalen $\{i, j\}$ und es gilt $I_n = I'_{m-1} \cup I''_{n-m+1}$. Ferner induziert die Ordnung $\delta \in S_n/D_n$ im n -Gon Ordnungen δ' im m -Gon und δ'' im $(n-m+2)$ -Gon. Die Menge der Diagonalen in (I_n, δ) zerfällt in disjunkte Teilmengen:

$$\chi_{I_n, \delta} = \chi_{I'_{m-1} \cup \{e\}, \delta'} \sqcup \chi_{I''_{n-m+1} \cup \{e\}, \delta''} \sqcup \{\{i, j\}\} \sqcup \bigcup_{\{k, l\} \sim_x \{i, j\}} \{\{k, l\}\} \quad (4.35)$$

Ist $u_{ij} = 0$, so folgt aus Gl. (4.27), dass $u_{kl} = 1$ für alle Diagonalen $\{k, l\}$, die $\{i, j\}$ schneiden, gilt. Folglich zerfallen die Gl. (4.27) auf $\chi_{I_n, \delta}$ in diesem Fall in Gleichungen derselben Form, jedoch auf den disjunkten Teilmengen $\chi_{I'_{m-1} \cup \{e\}, \delta'}$ und $\chi_{I''_{n-m+1} \cup \{e\}, \delta''}$. Wir haben also einen Isomorphismus

$$D_{ij} \cong \mathcal{M}_{0, I'_{m-1} \cup \{e\}}^{\delta'} \times \mathcal{M}_{0, I''_{n-m+1} \cup \{e\}}^{\delta''}. \quad (4.36)$$

Allgemeiner gilt

$$\bigcap_{m=1}^l D_{i_m j_m} \cong \prod_{m=1}^{l+1} \mathcal{M}_{0, I_{n_m}^{(m)}}^{\delta_m}, \quad (4.37)$$

wobei $(I_{n_m}^{(m)}, \delta_m)$ die Polygone sind, die durch Unterteilung von (I_n, δ) mit l sich paarweise nicht schneidenden Diagonalen $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_l, j_l\}$ entstehen. Man beachte, dass der Durchschnitt auf der linken Seite von Gl. (4.37), als Konsequenz von Gl. (4.27), leer ist, sobald sich zwei Diagonalen schneiden.

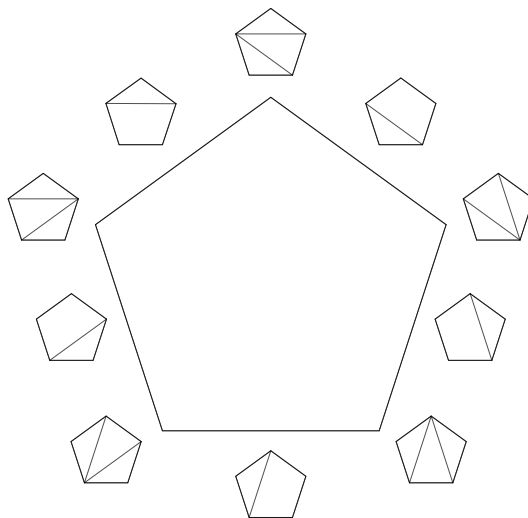


Abbildung 4.2.: Das Associahedron K_2 . Jede Ecke des Associahedrons ist assoziiert mit einer vollen Triangulierung des 5-Gons. Die Seiten des Associahedrons entsprechen den partiellen Triangulierungen des 5-Gons mit genau einer Diagonalen. Beim Übergang von einer Ecke zu einer benachbarten Seite wird eine Diagonale der Triangulierung weggelassen.

4.3. Das Associahedron

Das Associahedron K_{n-3} wurde als erstes von Tamari eingeführt [48]. Wir verstehen darunter ein $(n-3)$ -dimensionales konvexes Polytop, dessen durch Inklusion halbgeordnete Menge von Flächen ordnungsisomorph zu dem Tamari-Verband T_n ist. Der Tamari-Verband T_n ist die Menge aller partiellen Triangulierungen eines n -Gons, versehen mit der Halbordnung $P < P'$ genau dann, wenn das Polygon P' aus dem Polygon P durch Weglassen einer Diagonalen entsteht. Eine partielle Triangulierung eines konvexen Polygons ist die Unterteilung des Polygons mit sich paarweise nicht schneidenden Diagonalen.

Insbesondere entsprechen damit die Vertizes von K_{n-3} den (vollen) Triangulierungen des n -Gons mit genau $n-3$ Diagonalen. Die Anzahl dieser ist gleich der Catalan-Zahl $C_{n-2} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$. Allgemeiner entsprechen die Kodimension- k -Flächen von K_{n-3} den partiellen Triangulierungen des n -Gons mit $1 \leq k \leq n-3$ Diagonalen. Die Anzahl $A(k, K_{n-3})$ dieser Flächen ist gegeben durch die Kirkman-Cayley-Formel [88–90]

$$A(k, K_{n-3}) = \frac{1}{k+1} \binom{n-3}{k} \binom{n+k-1}{k}. \quad (4.38)$$

Das Associahedron ist für $n=5$ in Abb. 4.2 grafisch dargestellt.

Im Folgenden werden wir zwei Realisierungen des Associahedrons kennenlernen: Das Associahedron als Teilmenge des Modulraums $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ und das Associahedron als Teilmenge des kinematischen Raums \mathcal{K}_n , welcher von den Mandelstam-Invarianten aufgespannt wird.

4.3.1. Das Associahedron als Teilmenge des Modulraums $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{M}_{0,I_n}(\mathbb{R})$ von \mathcal{M}_{0,I_n} mit reellen Koordinaten:

$$\mathcal{M}_{0,I_n}(\mathbb{R}) \equiv \{(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n}) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \mid i \neq j \Rightarrow z_i \neq z_j\} / \text{PGL}(2, \mathbb{R}) \quad (4.39)$$

Hierbei ist $\text{PGL}(2, \mathbb{R}) \equiv \text{GL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \mathbb{1}\}$ die projektive lineare Gruppe auf \mathbb{R}^2 . Analog zum vorherigen Abschnitt konstruieren wir $\mathcal{M}_{0,I_n}^\delta(\mathbb{R})$ und $\overline{\mathcal{M}}_{0,I_n}(\mathbb{R})$. Für eine Ordnung $\delta \in S_n/D_n$ auf der Indexmenge I_n definieren wir

$$\overline{X}_{0,I_n}^\delta \equiv \{(u_{ij})_{\{i,j\} \in \chi_{I_n,\delta}} \mid u_{ij} \geq 0 \text{ und } u_{ij} \text{ erfüllt Gl. (4.27)} \forall \{i,j\} \in \chi_{I_n,\delta}\} \subset \mathcal{M}_{0,I_n}^\delta(\mathbb{R}) \quad (4.40)$$

und setzen $\overline{X}_{0,I_n}^\delta \equiv \overline{X}_{0,I_n}^\delta$ für $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Mit F_{ij} für $\{i, j\} \in \chi_{I_n,\delta}$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\overline{X}_{0,I_n}^\delta$ mit $u_{ij} = 0$. Dies ist eine Facette, d. h. eine Fläche der Kodimension 1, des Polytops $\overline{X}_{0,I_n}^\delta$.

Betrachte $1 \leq l \leq n-3$ Diagonalen $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_l, j_l\} \in \chi_{I_n,\delta}$. Schneiden sich zwei Diagonalen, so ist der Durchschnitt $\cap_{m=1}^l F_{i_m j_m}$ wegen Gl. (4.27) leer. Andernfalls erhalten wir mit Gl. (4.37)

$$\bigcap_{m=1}^l F_{i_m j_m} \cong \times_{m=1}^{l+1} \overline{X}_{0,I_{n_m}^{(m)}}^{\delta_m}, \quad (4.41)$$

wobei $(I_{n_m}^{(m)}, \delta_m)$ die Polygone sind, die bei der partiellen Triangulierung von (I_n, δ) mit den Diagonalen $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_l, j_l\}$ entstehen. Insbesondere ist dann $\cap_{m=1}^l F_{i_m j_m}$ eine Fläche von $\overline{X}_{0,I_n}^\delta$ der Kodimension l . Jede Fläche von $\overline{X}_{0,I_n}^\delta$ der Kodimension l entspricht also einer partiellen Triangulierung von (I_n, δ) mit l Diagonalen, d. h. $\overline{X}_{0,I_n}^\delta$ ist ein Associahedron.

Das Innere dieses Associahedrons ist gegeben durch

$$X_{0,I_n}^\delta = \{(u_{ij})_{\{i,j\} \in \chi_{I_n,\delta}} \mid u_{ij} > 0 \text{ und } u_{ij} \text{ erfüllt Gl. (4.27)} \forall \{i,j\} \in \chi_{I_n,\delta}\}. \quad (4.42)$$

Für $\delta = (1, 2, \dots, n)$ stiften die Koordinaten z_i gemäß Gl. (4.30) den Homöomorphismus

$$X_{0,I_n}^\delta \cong \{(z_2, z_3, \dots, z_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-3} \mid 0 < z_2 < z_3 < \dots < z_{n-2} < 1\} = \mathring{\Delta}_n. \quad (4.43)$$

Allgemeiner enthält die Menge $\mathcal{M}_{0,I_n}(\mathbb{R})$ genau $(n-1)!/2$ Zusammenhangskomponenten und jede dieser Zusammenhangskomponenten entspricht einem X_{0,I_n}^δ vermöge Gl. (4.25), d. h. wir haben

$$\mathcal{M}_{0,I_n}(\mathbb{R}) \cong \bigcup_{\delta \in S_n/D_n} X_{0,I_n}^\delta. \quad (4.44)$$

Beispielsweise ist für $n = 4$

$$X_{0,I_4}^{\delta_0} \cong (0, 1), \quad X_{0,I_4}^{\delta_1} \cong (1, \infty) \text{ und } X_{0,I_4}^{\delta_2} \cong (-\infty, 1) \quad (4.45)$$

für $\delta_0 = (1, 2, 3, 4)$, $\delta_1 = (1, 3, 2, 4)$ und $\delta_2 = (1, 2, 4, 3)$. Für $n = 5$ ist die Identifikation (4.44) in Abbildung 4.3 dargestellt.

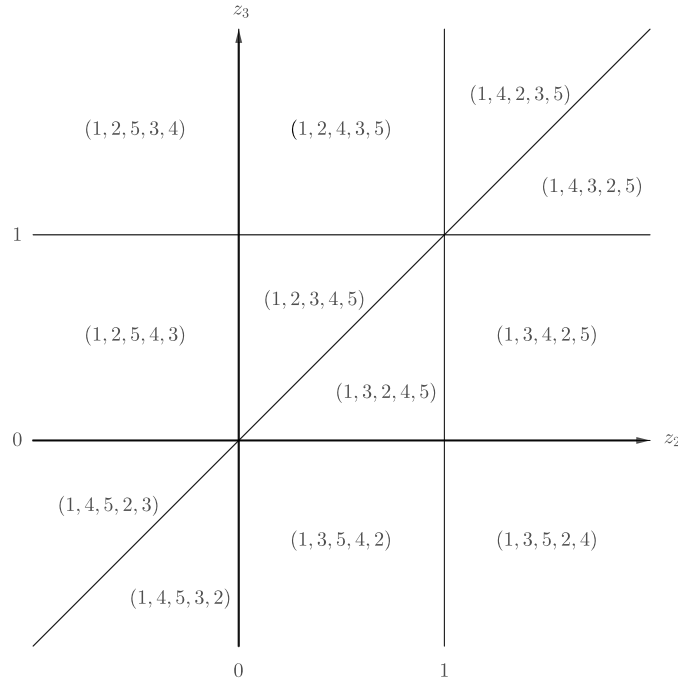


Abbildung 4.3.: Der Modulraum $\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{R})$ besteht aus 12 Zusammenhangskomponenten. Jede dieser Zusammenhangskomponenten entspricht genau einem Inneren des Associahedrons $\overline{X}_{0,5}^\delta$ mit $\delta \in S_5/D_5$ via Gl. (4.25). Für jede der Zusammenhangskomponenten sind die zugehörigen Ordnungen δ hier dargestellt.

Die Kompaktifizierung des Simplex Δ_n ist im Gegensatz zur Kompaktifizierung von X_{0,I_n}^δ nicht trivial, da nicht alle Flächen von $\overline{\Delta}_n$ manifest sind. Man erhält die Kompaktifizierung $\overline{\Delta}_n$ aus Δ_n , indem man jede Fläche der Kodimension $l \in \{2, 3, \dots, n-3\}$ von Δ_n , die durch $z_i = z_{i+1} = \dots = z_{i+l}$ mit $i = 1, 2, \dots, n-1-l$ gegeben ist, absteigend in l trunkiert, d. h. abschneidet [91]. Dies ist für $n = 5$ in Abb. 4.4 veranschaulicht. Die Facette F_{ij} von $\overline{X}_{0,n}^\delta$ mit $\delta = (1, 2, \dots, n)$ entspricht derjenigen Facette \tilde{F}_{ij} von $\overline{\Delta}_n$, bei der $z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}$ zusammentreffen, also $z_{kl} \rightarrow 0$ für alle $i \leq k < l < j$.

4.3.2. Das kinematische Associahedron

Wir betrachten den Raum \mathcal{K}_n der Mandelstam-Variablen $s_{ij} = (p_i + p_j)^2 = 2p_i p_j$. Impulse seien hier als masselos angenommen. Aufgrund der Symmetrie $s_{ij} = s_{ji}$, $s_{ii} = 2p_i^2 = 0$ und den aus der Impulserhaltung folgenden Relationen

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n s_{ij} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.46)$$

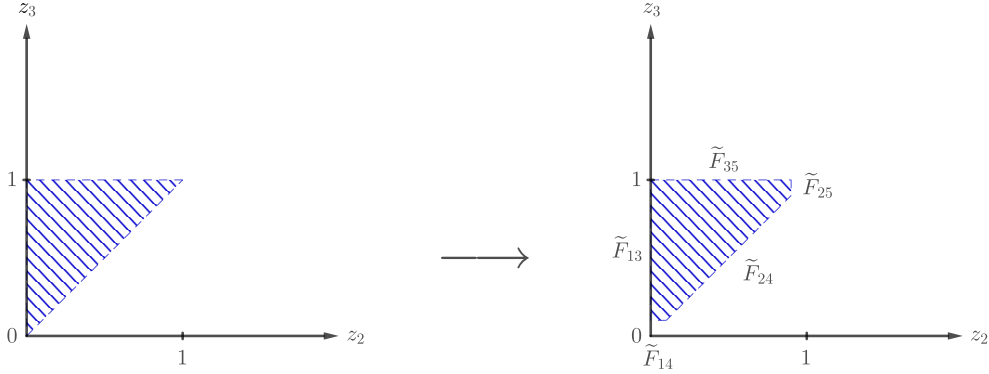


Abbildung 4.4.: Die Kompaktifizierung $\bar{\Delta}_5$ (rechts, schraffiert) von Δ_5 erhält man aus Δ_5 (links, schraffiert) durch Trunkieren der durch $z_2 = z_3 = 1$ und $z_2 = z_3 = 0$ gegebenen Kodimension-2-Flächen von Δ_5 .

hat dieser Raum die Dimension $n(n-1)/2 - n = n(n-3)/2$, falls für die Dimension des Minkowski-Raums $D \geq n-1$ gilt. Ist $D < n-1$, so müssen alle $(D+1) \times (D+1)$ Minoren der $(n-1) \times (n-1)$ Matrix (s_{ij}) mit $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ der Mandelstam-Variablen verschwinden, da $D+1$ Vektoren in einem D -dimensionalen Raum linear abhängig sind. Dies hat zur Folge, dass die Dimension von \mathcal{K}_n kleiner ist als $n(n-3)/2$ [92]. In der folgenden Diskussion nehmen wir $D \geq n-1$ an. Wir orientieren uns an [45].

Wir führen positive Konstanten c_{ij} ein und betrachten den affinen Unterraum $H_n \subset \mathcal{K}_n$, der durch

$$s_{ij} = -c_{ij} < 0 \quad \text{mit} \quad 1 \leq i < j-1 \leq n-2 \quad (4.47)$$

definiert ist. Dieser hat die Dimension $n(n-3)/2 - (n-3) - (n-4) - \dots - 1 = n-3$, insbesondere also dieselbe wie $\bar{X}_{0,n}^\delta$ bzw. $\bar{\Delta}_n$. Weiterhin definieren wir die „positive Region“ $P_n \subset \mathcal{K}_n$ durch

$$x_{ij} \equiv (x_i - x_j)^2 = (p_i + p_{i+1} + \dots + p_{j-1})^2 \geq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (4.48)$$

Hierbei sind x_i dual zu den Impulsen p_i , d. h. es gilt $x_{i+1} - x_i \equiv p_i$. Geometrisch können wir x_i als die Ecken eines n -Gons interpretieren, p_i als Kanten zwischen x_i und x_{i+1} und x_{ij} als Diagonalen, welche die Ecken x_i und x_j verbinden.

Damit definieren wir das kinematische Associahedron als $\mathcal{A}_n \equiv H_n \cap P_n$. Um zu sehen, dass dies tatsächlich ein Associahedron ist, müssen wir zeigen, dass es eine eindeutige Zuordnung zwischen den Kodimension- d -Flächen von \mathcal{A}_n und den partiellen Triangulierungen des n -Gons mit genau d Diagonalen gibt. Hierfür zeigen wir, dass für jede nichtleere Teilmenge von \mathcal{A}_n mit $x_{ik} = x_{jl} = 0$ die Diagonalen x_{ik} und x_{jl} eines n -Gons sich nicht schneiden können. Angenommen dem wäre nicht so, also ohne Einschränkung

$x_{ik} = x_{jl} = 0$ für $1 \leq i < j < k < l \leq n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_{il} + x_{jk} &= (p_i + \cdots + p_{k-1} + p_k + \cdots + p_{l-1})^2 + x_{jk} = x_{kl} + x_{jk} + 2 \sum_{\alpha=i}^{k-1} p_\alpha \sum_{\beta=k}^{l-1} p_\beta \\ &= -2 \sum_{\alpha=j}^{k-1} p_\alpha \sum_{\beta=k}^{l-1} p_\beta + 2 \sum_{\alpha=i}^{k-1} p_\alpha \sum_{\beta=k}^{l-1} p_\beta = 2 \sum_{\alpha=i}^{j-1} p_\alpha \sum_{\beta=k}^{l-1} p_\beta = - \sum_{\alpha=i}^{j-1} \sum_{\beta=k}^{l-1} c_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

wobei wir im zweiten Schritt $x_{ik} = 0$ und im dritten Schritt $x_{jl} = 0$ verwendet haben. Da \mathcal{A}_n eine Teilmenge von H_n ist, ist die rechte Seite dieser Gleichung negativ, also auch $x_{il} + x_{jk}$. Andererseits ist $x_{il} + x_{jk} \geq 0$ wegen $\mathcal{A}_n \subset P_n$. Damit ist unsere Annahme falsch und somit gezeigt, dass \mathcal{A}_n ein Associahedron ist. Insbesondere haben wir gesehen, dass hierfür die Wahl von positiven Konstanten c_{ij} von entscheidender Bedeutung ist. Für $c_{ij} < 0$ wäre \mathcal{A}_n im Allgemeinen kein Associahedron.

4.4. Die kanonische Form des Associahedrons

Wie von Arkani-Hamed et al. festgestellt, sind die beiden Associahedra $\overline{\Delta}_n$ und \mathcal{A}_n durch die Streugleichungen miteinander verbunden [45]. Wir betrachten dazu die Streugleichungen

$$f_i(z, p) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{s_{ij}}{z_i - z_j} = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4.50)$$

in der Eichung $z_1 = 0$, $z_{n-1} = 1$ und $z_n = \infty$ als Gleichungen für $(s_{ij}) \in H_n$ bei gegebenen $(z_2, z_3, \dots, z_{n-2}) \in \overset{\circ}{\Delta}_n$. Sukzessives Auflösen der 1-ten, ..., i -ten, ..., $(n-2)$ -ten Gleichung nach $s_{i,i+1}$ und Einsetzen von $s_{i-1,i}$ liefert

$$s_{i,i+1} = z_{i,i+1} \left(\sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{c_{kj}}{z_{kj}} + \sum_{j=i+2}^{n-1} \frac{c_{ij}}{z_{ij}} \right) \quad (4.51)$$

für $i = 1, 2, \dots, n-2$. Alle übrigen s_{ij} lassen sich hiermit und mit Gl. (4.46) eindeutig bestimmen. Mit $z_{ij} = z_{i,i+1} + z_{i+1,i+2} + \cdots + z_{j-1,j}$ erhalten wir ferner

$$x_{ij} = \sum_{k=i}^{j-3} \sum_{l=k+2}^{j-1} (-c_{kl}) + \sum_{k=i}^{j-2} s_{k,k+1} = \sum_{k=i}^{j-2} \sum_{l=j}^{n-1} c_{kl} \frac{z_{k,j-1}}{z_{kl}} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j-1}^{n-1} c_{kl} \frac{z_{i,j-1}}{z_{kl}} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=i+1}^{j-2} c_{kl} \frac{z_{il}}{z_{kl}} \quad (4.52)$$

für $n-1 \geq j-1 > i \geq 1$. Damit ist $x_{ij} > 0$ wegen $c_{ij} > 0$, falls $(z_2, z_2, \dots, z_{n-2}) \in \overset{\circ}{\Delta}_n$. Außerdem folgt aus Gl. (4.52), dass

$$x_{ij} = 0 \iff z_{kl} = 0 \quad \forall i \leq k < l < j. \quad (4.53)$$

Somit liefern die Streugleichungen eine Abbildung Φ von $\overline{\Delta}_n$ nach \mathcal{A}_n , welche $\overset{\circ}{\Delta}_n$ in das Innere des kinematischen Associahedrons \mathcal{A}_n und den Rand von $\overline{\Delta}_n$ auf den Rand von \mathcal{A}_n abbildet.

Analog wie in [93] können wir zeigen, dass es umgekehrt für jeden Punkt (s_{ij}) im Inneren von \mathcal{A}_n eine Lösung der Streugleichungen mit $0 < z_2 < z_3 < \dots < z_{n-2} < 1$ existiert.¹ Wir betrachten dazu die Funktion $V : \mathring{\Delta}_n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$V(z_2, z_3, \dots, z_{n-2}) = - \sum_{2 \leq i < j \leq n-2} s_{ij} \log |z_i - z_j| - \sum_{i=2}^{n-2} s_{1i} \log |z_i| - \sum_{i=2}^{n-2} s_{i,n-1} \log |1 - z_i|. \quad (4.54)$$

Wegen $s_{i,i+1} > 0$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ im Inneren von \mathcal{A}_n folgt aus $\mathring{\Delta}_n \ni (z_2, z_3, \dots, z_{n-2}) \rightarrow (z_2^*, z_3^*, \dots, z_{n-2}^*) \in \partial \Delta_n$, wobei wir mit $\partial \Delta_n$ den Rand (bezüglich der euklidischen Metrik) von Δ_n bezeichnen, dass $V(z_2, z_3, \dots, z_{n-2}) \rightarrow \infty$. Da V stetig differenzierbar ist, folgt weiter, dass es ein Minimum und somit auch einen kritischen Punkt in $\mathring{\Delta}_n$ besitzt. Da die kritischen Punkte von V aber gerade den Lösungen der Streugleichungen entsprechen, gibt es – wie behauptet – eine Lösung der Streugleichungen in $\mathring{\Delta}_n$. Tatsächlich ist diese Lösung sogar eindeutig, wie in [45] numerisch überprüft wurde. Damit liefern die Streugleichungen einen Diffeomorphismus von $\mathring{\Delta}_n$ auf das Innere von \mathcal{A}_n .

In diesem Fall erhält man die kanonische Form von \mathcal{A}_n gemäß Behauptung 4.6 (iii) aus der kanonischen Form $\Omega(\overline{\Delta}_n) = \omega_{\overline{\Delta}_n} dz_2 \wedge dz_3 \wedge \dots \wedge dz_{n-2}$ von $\overline{\Delta}_n$ durch einen Pushforward. Wegen der Definition 4.6 (i) bedeutet dies, dass wir die Lösungen der Streugleichungen in die Form $\Omega(\overline{\Delta}_n)$ einsetzen und über die Lösungen der Streugleichungen summieren müssen:

$$\Omega(\mathcal{A}_n) = \Phi_*(\Omega(\overline{\Delta}_n)) = \sum_{z \in \mathcal{I}_n} \omega_{\overline{\Delta}_n} \frac{\partial(z_2, z_3, \dots, z_{n-2})}{\partial(s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-3, n-2})} d^{n-3} s \quad (4.55)$$

Hierbei haben wir $s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-3, n-2}$ als Koordinaten auf \mathcal{A}_n gewählt. $\overline{\Delta}_n$ geht in den Simplex Δ_n über, wenn die Tiefe der Schnitte beliebig klein wird. Wir erhalten deshalb mit Gl. (4.17)

$$\omega_{\overline{\Delta}_n} = \frac{1}{z_2 z_{32} z_{43} \dots z_{n-2, n-3} (1 - z_{n-2})}. \quad (4.56)$$

Verwenden wir außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z_2, z_3, \dots, z_{n-2})}{\partial(s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-3, n-2})} &= \left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{n-3})}{\partial(z_2, z_3, \dots, z_{n-2})} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{n-3})}{\partial(s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-3, n-2})} \\ &= \frac{(-1)^n J(z, p)}{z_{n-2, n-1} z_{n-1, n} z_{n, n-2} z_{n-1, n} z_{n1}} \cdot \frac{1}{z_{12} z_{23} \dots z_{n-3, n-2}}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

wobei $J(z, p)$ der in Gl. (3.56) definierte Jacobi-Faktor ist, so erkennen wir auf der rechten Seite von Gl. (4.55) gerade die CHY-Darstellung der skalaren Amplitude

¹In [93] wird jedoch ein anderer kinematischer Bereich betrachtet. In unserem Fall sind nicht alle $(n-3)!$ Lösungen der Streugleichungen reell.

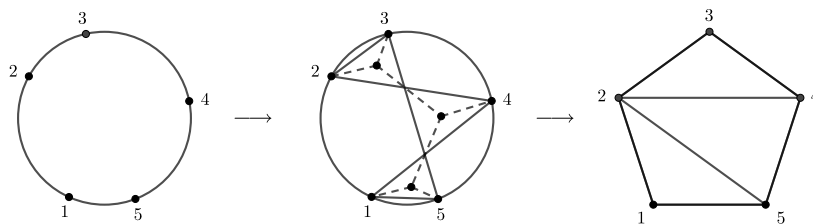


Abbildung 4.5.: Konstruktion der zu $(\alpha|\beta) = (12345|14235)$ zugeordneten partiellen Triangulierung in drei Schritten. Zunächst trägt man die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 entsprechend der Ordnung α auf dem Kreis auf, wobei 1, 5 und 2, 3 eng beisammen zu zeichnen sind (linkes Bild). Anschließend verbindet man die Punkte gemäß der Ordnung β (mittleres Bild). Hierdurch entstehen drei Polygone. Platziert man in das Innere der Polygone einen Vertex, so erhält man einen kubischen Graphen (gestrichelt). Der hierzu duale Graph ist die zu $(\alpha|\beta)$ zugeordnete (partielle) Triangulierung (rechtes Bild).

$m_n(12\dots n|12\dots n)$ in Gl. (3.40):²

$$\begin{aligned} i\Omega(\mathcal{A}_n) &= i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) C(12\dots n, z) C(12\dots n, z) d^{n-3} s \\ &= m_n(12\dots n|12\dots n) d^{n-3} s \end{aligned} \quad (4.58)$$

Abschließend geben wir eine Verallgemeinerung auf beliebige Ordnungen der externen Teilchen $\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \beta \equiv \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \in \mathcal{B}_n$ an. Hierzu definieren wir zunächst die zugeordnete partielle Triangulierung zu $(\alpha|\beta)$ [31]:

1. Trage n Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (in dieser Ordnung) im Uhrzeigersinn auf einem Kreis auf. Hierbei sind Punkte, die sowohl benachbart bezüglich α als auch bezüglich β sind, eng beisammen zu zeichnen. Wir gehen davon aus, dass es mindestens zwei solche Punkte gibt. Ansonsten ist $m_n(\alpha|\beta) = 0$.
2. Zeichne Diagonalen $\{\beta_i, \beta_{i+1}\}, i = 1, 2, \dots, n$, ein. Diese umranden eine Menge von Polygonen $\{P_1, P_2, \dots, P_s\}$. Für jedes Polygon P_j , zeichne einen Vertex V_j in das Innere von P_j , verbinde Vertices von benachbarten Polygonen sowie jedes V_j mit denjenigen α_k , die Ecken von P_j sind, miteinander. Hierdurch entsteht ein Baum mit äußeren Vertices $1, 2, \dots, n$ und inneren Vertices V_1, V_2, \dots, V_s .
3. Den dualen Graphen zu diesem Baum bezeichnen wir als zugeordnete partielle Triangulierung zu $(\alpha|\beta)$.

Diese Definition ist in Abbildung 4.5 veranschaulicht.

Damit definieren wir den Unterraum $H_n(\alpha|\beta) \subset \mathcal{H}_n$ durch die folgenden Bedingungen:

²Man beachte, dass $1/(z, z) = J(z, p)$ für alle $z \in \mathcal{X}_n$ gilt [31].

1. Für jede Diagonale $\{\alpha_i, \alpha_j\}$, die mindestens eine der Diagonalen e_1, e_2, \dots, e_d der zu $(\alpha|\beta)$ zugeordneten partiellen Triangulierung schneidet, setzt man

$$x_{\alpha_i, \alpha_j} \equiv (p_{\alpha_i} + p_{\alpha_{i+1}} + \dots + p_{\alpha_{j-1}})^2 = b_{\alpha_i, \alpha_j} = \text{const.} > 0. \quad (4.59)$$

2. Sei $S^{(\kappa)}$ die Menge der Seiten eines Teilpolygons κ der partiellen Triangulierung. Wir streichen für jedes Teilpolygon κ dasjenige $i_0^{(\kappa)} \in \{n, e_1, \dots, e_d\} \cap S^{(\kappa)}$, welches durch die Forderung $i_0^{(\kappa_1)} \neq i_0^{(\kappa_2)}$ für $\kappa_1 \neq \kappa_2$ eindeutig bestimmt ist und setzen $S'^{(\kappa)} \equiv S^{(\kappa)} \setminus \{i_0^{(\kappa)}\}$. Sei weiterhin

$$\Xi^{(\kappa)} \equiv \{(i, j) | i, j \in S'^{(\kappa)}, i, j \text{ nicht benachbart in } \kappa\} \quad (4.60)$$

die Menge von Paaren von nicht benachbarten Seiten aus $S'^{(\kappa)}$. Als Verallgemeinerung von Gl. (4.47) fordern wir für jedes κ

$$s_{ij} = -c_{ij} = \text{const.} < 0 \quad \text{für } (i, j) \in \Xi^{(\kappa)}. \quad (4.61)$$

Dies sind zusammen für jedes α und β genau $(n-3)(n-2)/2$ (unabhängige) Bedingungen und somit ist $H_n(\alpha|\beta)$ ein $(n-3)$ -dimensionaler Teilraum vom kinematischen Raum \mathcal{K}_n . Beispielsweise haben wir für $(\alpha|\beta) = (12345|14235)$ die drei Bedingungen

$$x_{35} = b_{35}, \quad x_{13} = b_{13}, \quad x_{14} = b_{14}. \quad (4.62)$$

Bedingungen zweiter Art treten hier nicht auf, da die zu $(\alpha|\beta)$ zugeordnete Triangulierung bereits eine volle Triangulierung des 5-Gons ist (siehe Abb. 4.5) und somit die Menge $\Xi^{(\kappa)}$ für jede der drei Teilpolygone leer ist.

Definieren wir noch die positive Region $P_n(\alpha)$ durch $x_{\alpha_i, \alpha_j} \geq 0$ für $1 \leq i < j \leq n$, so ist das Associahedron für Ordnungen $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_n$ gegeben durch $\mathcal{A}_n(\alpha|\beta) \equiv H_n(\alpha|\beta) \cap P_n(\alpha)$. Die Streugleichungen liefern einen Diffeomorphismus von $\hat{\Delta}_n(\alpha)$ mit

$$\Delta_n(\alpha) \equiv \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n | z_{\alpha_1} \leq z_{\alpha_2} \leq \dots \leq z_{\alpha_n}\} / \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \quad (4.63)$$

in das Innere von $\mathcal{A}_n(\alpha|\beta)$ und die kanonische Form von $\mathcal{A}_n(\alpha|\beta)$ ist (bis auf ein Vorzeichen) gegeben durch

$$i\Omega(\mathcal{A}_n(\alpha|\beta)) = m_n(\alpha|\beta) dx_{i_1 j_1} \wedge dx_{i_2 j_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-3} j_{n-3}}, \quad (4.64)$$

wobei $x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots, x_{i_{n-3} j_{n-3}}$ Koordinaten auf $\mathcal{A}_n(\alpha|\beta)$ seien [45].

$\mathcal{A}_n(\alpha|\alpha)$ entsteht durch die Umbenennung $i \rightarrow \alpha(i)$ aus \mathcal{A}_n , insbesondere stimmt die Definition von $\mathcal{A}_n(\alpha|\alpha)$ mit derjenigen von \mathcal{A}_n überein, falls $\alpha = \beta = 12 \dots n$ gilt. Ferner erhält man die „Gestalt“ von $\mathcal{A}_n(\alpha|\beta)$ aus derjenigen von $\mathcal{A}_n(\alpha|\alpha)$, indem man die durch $x_{\alpha_i, \alpha_j} = 0$, wobei $\{\alpha_i, \alpha_j\}$ eine Diagonale ist, die mindestens eine Diagonale der zu $(\alpha|\beta)$ zugeordneten partiellen Triangulierung schneidet, gegebenen Kodimension-1-Flächen von $\mathcal{A}_n(\alpha|\alpha)$ ins Unendliche verschiebt. Die Singularitäten $1/x_{\alpha(i), \alpha(j)}$ treten somit in der Amplitude $m_n(\alpha|\beta)$ nicht auf. Für unser Beispiel in Abb. 4.5 hat das Associahedron

$\mathcal{A}_5(12345|14235)$ im (x_{24}, x_{25}) -Raum die Gestalt $\mathcal{A}_5(12345|14235) \cong [0, \infty)^2$. Damit muss die kanonische Form $\Omega(\mathcal{A}_5(12345|14235))$ proportional sein zu

$$\frac{dx_{24} \wedge dx_{25}}{x_{24}x_{25}}. \quad (4.65)$$

In der Tat finden wir mit Gl. (4.64)

$$i\Omega(\mathcal{A}_5(12345|14235)) = m_5(12345|14235)dx_{24} \wedge dx_{25} = -i\frac{dx_{24} \wedge dx_{25}}{x_{24}x_{25}}. \quad (4.66)$$

4.5. Eigenschaften von Streuformen

Wir betrachten in diesem Abschnitt die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ -invarianten Streuformen

$$\begin{aligned} \Omega_n^{\mathrm{scalar}}(\sigma) &\equiv C(\sigma, z) \frac{d^n z}{|\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})|}, \\ \Omega_n^{\mathrm{YM}}(p, \varepsilon) &\equiv E(z, p, \varepsilon) \frac{d^n z}{|\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})|}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Diese sind auf ganz $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ definiert und nicht etwa nur auf den Lösungen der Streugleichungen. Die Streugleichungen treten durch die Abbildung von $\overline{\Delta}_n$ ins kinematische Associahedron \mathcal{A}_n (bzw. von der Kompaktifizierung $\overline{\Delta}_n(\sigma)$ des Simplex $\Delta_n(\sigma)$ nach $\mathcal{A}_n(\sigma|\sigma')$) auf. Der Pushforward der Formen $\Omega_n^{\mathrm{scalar}}(\sigma)$ und $\Omega_n^{\mathrm{YM}}(p, \varepsilon)$ unter dieser Abbildung liefert dann die Amplitude $m_n(\sigma|\sigma')$ in bi-adjungierter skalarer Theorie bzw. die YM-Amplitude $A_n^{\mathrm{YM}}(\sigma')$, wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben. Beachte, dass die skalare Streuform $\Omega_n^{\mathrm{scalar}}(\sigma)$ gerade die kanonische Form des Associahedrons $\overline{\Delta}_n(\sigma)$ ist.

Wie von Mizera herausgefunden, ist ebenso die Amplitude in der Gravitation durch obige Streuformen bestimmt. Genauer ist die Selbstschnittzahl³ von $\Omega_n^{\mathrm{YM}}(p, \varepsilon)$ bezüglich der durch die Streugleichungen gegebenen 1-Form

$$\omega = \sum_{i=2}^{n-2} f_i(z, p) dz_i, \quad (4.68)$$

welche als Twist bezeichnet wird, die n -Graviton-Amplitude A_n^{G} [95]. Analog ist die Amplitude $m_n(\sigma|\sigma)$ in der bi-adjungierten skalaren Theorie die Schnittzahl von $\Omega_n^{\mathrm{scalar}}(\sigma)$ mit sich selbst und die Schnittzahl von $\Omega_n^{\mathrm{scalar}}(\sigma)$ mit $\Omega_n^{\mathrm{YM}}(p, \varepsilon)$ die farbgeordnete YM-Amplitude $A_n^{\mathrm{YM}}(\sigma)$.

Wir wollen nachfolgend das Verhalten der Streuformen an den Singularitäten untersuchen. Aufgrund den Definitionen des Parke-Taylor-Faktors $C(\sigma, z)$ und des Polarisationsfaktors $E(z, p, \varepsilon)$ ist klar, dass diese nur auf dem Divisor $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$, d. h. für $u_{ij} \rightarrow 0$

³Für die Definition der Schnittzahl verweisen wir auf [94].

auftreten können.⁴ Wir zeigen hier, dass diese logarithmisch sind und ferner, dass die Residuen der $(n-3)$ -Formen $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ und $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ bei $u_{in} = 0$ in eine k - (mit $0 \leq k < n-3$) und eine $(n-4-k)$ -Form faktorisieren.

4.5.1. Die skalare Streuform $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$

Wir betrachten zunächst das Verhalten der skalaren Streuform $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ auf dem Divisor $\mathcal{M}_{0,n}^\delta \setminus \mathcal{M}_{0,n}$, wobei wir ohne Einschränkung $\delta = 12 \dots n$ annehmen. Wir erinnern daran, dass sich diese als Vereinigung von Mengen $D_{ij} \subset \mathcal{M}_{0,n}^\delta$ darstellen lässt, die durch $u_{ij} = 0$ definiert sind und dass wir jedes u_{ij} vermöge der Relationen in Gl. (4.27) durch die $n-3$ Variablen $u_{2n}, u_{3n}, \dots, u_{n-2,n}$ ausdrücken können. Wir müssen somit $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ im Grenzwert $u_{in} \rightarrow 0$ für $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ untersuchen. Wie in Kapitel 4.2 diskutiert, zerlegt die Diagonale $\{i, n\}$ das n -Gon $(\{1, 2, \dots, n\}, \delta)$ in zwei Teilpolygone $(I'_i \cup \{e\}, \delta')$ und $(I''_{n-i} \cup \{e\}, \delta'')$ mit $I'_i = \{1, 2, \dots, i\}$, $I''_{n-i} = \{i+1, i+2, \dots, n\}$. Mit e bezeichnen wir wieder die der Diagonalen $\{i, n\}$ entsprechende neu entstandene Seite und mit $\delta' = 12 \dots ie$, $\delta'' = e(i+1)(i+2) \dots n$ die induzierten Ordnungen der beiden Teilpolygone.

Mit Hilfe von Gl. (4.30) drücken wir zunächst die Variablen z_2, z_3, \dots, z_{n-2} , wobei wir $z_1 = 0, z_{n-1} = 1$ und $z_n = \infty$ fixieren, durch $u_{2n}, u_{3n}, \dots, u_{n-2,n}$ aus:

$$z_i = \prod_{j=i}^{n-2} u_{jn}, \quad i \in \{2, 3, \dots, n-2\} \quad (4.69)$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{z_n \rightarrow \infty} \frac{d^n z}{|\text{PSL}(2, \mathbb{C})| z_n^2} = dz_2 \wedge dz_3 \wedge \dots \wedge dz_{n-2} = \left(\prod_{j=3}^{n-2} u_{jn}^{j-2} \right) d^{n-3} u \quad \text{und} \quad (4.70)$$

$$\lim_{z_n \rightarrow \infty} z_n^2 C(\sigma, z) = \prod_{j=2}^{n-2} u_{jn}^{1-j} (u_{jn} - 1)^{-1}, \quad (4.71)$$

wobei für die zweite Gleichung $\sigma = 12 \dots n$ angenommen wurde. Hieraus folgt für das Beispiel $\sigma = \delta = 12 \dots n$ die Faktorisierung

$$\begin{aligned} \Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma) &= \bigwedge_{j=2}^{i-1} \frac{du_{jn}}{u_{jn}(u_{jn} - 1)} \wedge \frac{du_{in}}{u_{in}(u_{in} - 1)} \wedge \bigwedge_{j=i+1}^{n-2} \frac{du_{jn}}{u_{jn}(u_{jn} - 1)} \\ &= \Omega_{i+1}^{\text{scalar}}(\sigma') \wedge \frac{du_{in}}{u_{in}(u_{in} - 1)} \wedge \Omega_{n-i+1}^{\text{scalar}}(\sigma'') \end{aligned} \quad (4.72)$$

mit $\sigma' = \delta'$ und $\sigma'' = \delta''$. $\Omega_{i+1}^{\text{scalar}}(\sigma')$ ist eine $(i-2)$ -Form auf $\mathcal{M}_{0, I'_i \cup \{e\}}^{\delta'}$, auf der wir die Koordinaten $u_{2n}, u_{3n}, \dots, u_{i-1,n}$ verwenden und $\Omega_{n-i+1}^{\text{scalar}}(\sigma'')$ eine $(n-i-2)$ -Form auf

⁴Wir werden hier eine andere Definition des Polarisationsfaktors verwenden als in Gl. (3.64). $E(z, p, \varepsilon)$ ist hier eine Linearkombination von Parke-Taylor-Faktoren. Somit ist klar, dass Singularitäten nur bei $u_{ij} = 0$ auftreten können.

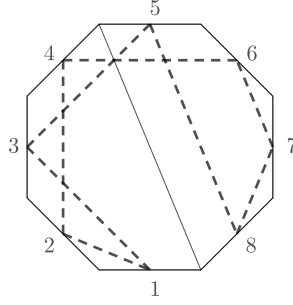


Abbildung 4.6.: Im Polygonzug P_σ mit $\sigma = 12467853$ (gestrichelt dargestellt) schneiden genau zwei Strecken die Diagonale $\{4, 8\}$ des Oktagon mit der Ordnung $\delta = 12345678$. Deswegen ist $\sigma \sim_{\{4,8\}} \delta$.

$\mathcal{M}_{0, I_{n-i}'' \cup \{e\}}^{\delta''}$, auf welcher wir die Koordinaten $u_{i+1,n}, u_{i+2,n}, \dots, u_{n-2,n}$ benutzen. Aus Gl. (4.72) folgt insbesondere, dass die Singularitäten der skalaren Form logarithmisch sind und dass das Residuum der Form bei $u_{in} = 0$ in $\Omega_{i+1}^{\text{scalar}}(\sigma')$ und $\Omega_{n-i+1}^{\text{scalar}}(\sigma'')$ faktorisiert:

$$\text{Res}_{D_{in}} \Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma) = (-1)^{i-1} \Omega_{i+1}^{\text{scalar}}(\sigma') \wedge \Omega_{n-i+1}^{\text{scalar}}(\sigma'') \quad (4.73)$$

Wir geben nun die Verallgemeinerung auf beliebiges σ an. Hierzu betrachten wir für $\sigma \in \mathcal{B}_n$ den geschlossenen Polygonzug

$$P_\sigma = (\overline{\sigma_1 \sigma_2}, \overline{\sigma_2 \sigma_3}, \dots, \overline{\sigma_n \sigma_1}), \quad (4.74)$$

wobei wir mit $\overline{\sigma_i \sigma_{i+1}}$ die Strecke, welche die Mittelpunkte der Seiten σ_i und σ_{i+1} des n -Gons (I_n, δ) verbindet, notieren (siehe Abb. 4.6). Es ist offensichtlich, dass die Anzahl n_{cross} derjenigen Strecken in P_σ , welche die Diagonale $\{i, n\}$ schneiden, für beliebiges σ gerade ist und

$$2 \leq n_{\text{cross}} \leq 2 \min\{i, n-i\} \quad (4.75)$$

erfüllt. Ist $n_{\text{cross}} = 2$, so nennen wir σ und δ äquivalent bezüglich der Diagonalen $\{i, n\}$ und schreiben

$$\sigma \sim_{\{i,n\}} \delta \quad (4.76)$$

hierfür. Dies ist genau dann der Fall, wenn σ durch eine zyklische Permutation auf die Form $\sigma = \sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_i \sigma''_{i+1} \sigma''_{i+2} \dots \sigma''_n$ mit $\sigma'_j \in \{1, 2, \dots, i\}$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, i\}$ und $\sigma''_k \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$ für alle $k \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$ gebracht werden kann.⁵ In diesem Fall definieren wir die induzierten Ordnungen σ' und σ'' durch

$$\sigma' = \sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_i e, \quad \sigma'' = e \sigma''_{i+1} \sigma''_{i+2} \dots \sigma''_n. \quad (4.77)$$

Der Term

$$z_{\sigma_i} - z_{\sigma_j} = u_{\sigma_j n} u_{\sigma_j+1, n} \dots u_{n-2, n} (u_{\sigma_i, n} u_{\sigma_i+1, n} \dots u_{\sigma_j-1, n} - 1) \quad (4.78)$$

⁵Man beachte, dass die skalare Streuform invariant unter zyklischen Permutationen ist und wir somit σ als Element von S_n/\mathbb{Z}_n auffassen können.

(wir haben hier ohne Einschränkung $\sigma_j > \sigma_i$ angenommen) enthält genau dann den Faktor u_{in} , wenn $\sigma_i, \sigma_j \in \{1, 2, \dots, i\}$. Es folgt, dass der Parke-Taylor-Faktor $C(\sigma, z)$ ein Pol der Ordnung $i - n_{\text{cross}}/2$ besitzt. Mit Gl. (4.70) folgt dann, dass die skalare Streuform $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ keine Polstelle bei $u_{in} = 0$ hat, wenn $n_{\text{cross}} > 2$ gilt und eine Polstelle erster Ordnung in $u_{in} = 0$ besitzt, falls $\sigma \sim_{\{i,n\}} \delta$. In diesem Fall erhalten wir nach Kürzen von $u_{in}^{i-2} u_{i+1,n}^{i-1} u_{i+2,n}^{i-1} \dots u_{n-2,n}^{i-1}$ die Faktorisierung des Residuums bei $u_{in} = 0$:

$$\text{Res}_{D_{in}} \Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma) = (-1)^{i-1} \Omega_{i+1}^{\text{scalar}}(\sigma') \wedge \Omega_{n-i+1}^{\text{scalar}}(\sigma'') \quad (4.79)$$

Hierbei sind σ', σ'' die induzierten Ordnungen, gegeben durch Gl. (4.77).

4.5.2. Die YM-Streuform $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$

Wir betrachten die YM-Form $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ off-shell, d. h.

- es ist nicht notwendig $p_j^2 = 0$,
- es ist nicht notwendig $\varepsilon_j p_j = 0$ und
- wir definieren $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ auf ganz $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ und nicht etwa auf der Menge \mathcal{X}_n der Lösungen der Streugleichungen.

Der Grund für den dritten Punkt ist, dass wir $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ für $u_{in} \rightarrow 0$ betrachten wollen. Der Grund, dass wir die Forderung, dass die Impulse auf der Massenschale liegen bzw. transversal zu den entsprechenden Polarisationsvektoren sind, aufgeben, wird nachfolgend deutlich werden.

Für diesen allgemeinen Fall ist die reduzierte pfaffsche Determinante in Gl. (3.64) nicht wohldefiniert. Man könnte auf die naive Idee kommen über alle $i < j$ zu mitteln – dann hätte jedoch der Polarisationsfaktor Polstellen höherer Ordnungen [51]. Eine geeignete Verallgemeinerung auf off-shell Daten lautet

$$E(z, p, \varepsilon) \equiv \sum_{\sigma \in S_n^{(i,j)}} C(\sigma, z) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma). \quad (4.80)$$

Hierbei ist $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ der BCJ-Numerator des Kamm-Diagramms mit Ordnung σ (vgl. Abb. 2.9) und $S_n^{(i,j)}$ die Menge der Wörter $i\sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_{n-1}j \in \mathcal{B}_n$, wobei $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Wir zeigen im Anhang C.1, dass der Polarisationsfaktor hierdurch wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von i und j , ist. Insbesondere können wir $i = 1$ und $j = n$ wählen. In diesem Fall erstreckt sich die Summe in obiger Definition über die KK-Basis, d. h. wir haben

$$\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon) = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) \Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma). \quad (4.81)$$

Beachte, dass die Lagrangedichten $\mathcal{L}^{(n)}$ für $n \geq 5$ und somit auch die aus dem effektiven Lagrangian erhaltenen Numerator nicht eindeutig sind. Für jede Wahl der Numerator

(und damit auch des Polarisationsfaktors) zeigen wir jedoch im Anhang C.2, dass für on-shell Daten ($p_j^2 = 0$, $\varepsilon_j p_j = 0$, $z \in \mathcal{X}_n$) diese Definition mit der Definition von $E(z, p, \varepsilon)$ als reduzierte pfaffsche Determinante in Gl. (3.64) übereinstimmt. Wir verwenden deshalb dieselbe Notation für den Polarisationsfaktor.

Explizit ist $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ für $n = 3$ bis auf den Vorfaktor i die 3-Gluon-Amplitude bzw. der 3-Gluon-Vertex kontrahiert mit den Polarisationsvektoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und ε_3 , d. h.

$$\Omega_3^{\text{YM}}(p, \varepsilon) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_3(p_1 - p_2)) + (\varepsilon_2 \varepsilon_3)(2\varepsilon_1 p_2) - (\varepsilon_1 \varepsilon_3)(2\varepsilon_2 p_1). \quad (4.82)$$

Für $n = 4$ ist $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ eine 1-Form, die gegeben ist durch (wir betrachten $\Omega_4^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ auf $\mathcal{M}_{0,4}^\delta$ mit $\delta = 1234$)

$$\Omega_4^{\text{YM}}(p, \varepsilon) = \left[\frac{N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234)}{u_{24}(u_{24} - 1)} - \frac{N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324)}{u_{24} - 1} \right] du_{24}. \quad (4.83)$$

Für den Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234)$ erhalten wir mit Hilfe der Feynman-Regeln

$$\begin{aligned} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) &= 4(\varepsilon_2 p_1)(\varepsilon_3 p_4)(\varepsilon_1 \varepsilon_4) - 4(\varepsilon_2 p_1)(\varepsilon_4 p_3)(\varepsilon_1 \varepsilon_3) - 4(\varepsilon_1 p_2)(\varepsilon_3 p_4)(\varepsilon_2 \varepsilon_4) \\ &+ 4(\varepsilon_1 p_2)(\varepsilon_4 p_3)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) - 4[(\varepsilon_3 p_1)(\varepsilon_4 p_2) - (\varepsilon_4 p_1)(\varepsilon_3 p_2)](\varepsilon_1 \varepsilon_2) \\ &- 4[(\varepsilon_1 p_3)(\varepsilon_2 p_4) - (\varepsilon_2 p_3)(\varepsilon_1 p_4)](\varepsilon_3 \varepsilon_4) + 2(p_2 p_3 - p_1 p_3)(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_3 \varepsilon_4) \\ &- 2(p_1 p_2)(\varepsilon_1 \varepsilon_3)(\varepsilon_2 \varepsilon_4) + 2(p_1 p_2)(\varepsilon_1 \varepsilon_4)(\varepsilon_2 \varepsilon_3). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Hierbei entstehen die letzten beiden Terme durch den Lagrangian $\mathcal{L}^{(4)}$ bzw. durch den Austausch des Tensorteilchens (vgl. Gl. (2.25)). Den Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324)$ erhalten wir aus $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234)$ durch Umbenennung $2 \leftrightarrow 3$.

Die Diagonale $\{i, n\}$ zerlegt das n -Gon (I_n, δ) in die beiden Polygone $(I'_i \cup \{e\}, \delta')$ und $(I''_{n-i} \cup \{e\}, \delta'')$. Wir verwenden dieselben Definitionen und Konventionen wie im vorherigen Abschnitt. Mit dem Polygon $(I'_i \cup \{e\}, \delta')$ assoziieren wir die Impulskonfiguration $p' \equiv (p_1, p_2, \dots, p_i, p_e)$ mit $p_e = -p_1 - p_2 - \dots - p_i$ und die Polarisationsvektoren $\varepsilon' \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \varepsilon_e)$. Für das Polygon $(I''_{n-i} \cup \{e\}, \delta'')$ setzen wir $p'' \equiv (-p_e, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n)$ und $\varepsilon'' \equiv (\varepsilon_e^*, \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \dots, \varepsilon_n)$. Die Impulse liegen zwar nicht auf der Massenschale, erfüllen jedoch die Impulserhaltung. Die $D - 2$ physikalischen Polarisationsvektoren im D -dimensionalen Minkowski-Raum ergänzen wir durch 2 unphysikalische Polarisationsvektoren, sodass diese die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\lambda} (\varepsilon_{\mu}^{\lambda})^* \varepsilon_{\nu}^{\lambda} = -\eta_{\mu\nu} \quad (4.85)$$

erfüllen. Hierbei erstreckt sich die Summe über alle D Polarisationszustände, die durch λ indiziert sind. Beachte, dass im Allgemeinen nun $\varepsilon_j p_j \neq 0$ gilt. Ebenso können wir für das Tensorteilchen in Abb. 2.3 Polarisationsensoren einführen, derart, dass diese die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\lambda} (\varepsilon_{\mu\nu}^{\lambda})^* \varepsilon_{\rho\sigma}^{\lambda} = -\frac{1}{2} p^2 (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \quad (4.86)$$

erfüllen. Analog verfahren wir für alle Teilchen, die durch die Lagrangedichten $\mathcal{L}^{(n)}$, $n \geq 5$, in Gl. (2.53) eingeführt werden.

Aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir, dass die skalare Streuform nur einfache Polstellen bei $u_{in} = 0$ hat, falls $\sigma \sim_{\{i,n\}} \delta$ gilt. Ist $\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$, so folgt

$$\sigma = 1\sigma'_2 \dots \sigma'_i e \sigma''_{i+1} \dots \sigma''_{n-1} n \quad (4.87)$$

mit $\sigma'_j \in \{2, 3, \dots, i\}$ und $\sigma''_k \in \{i+1, i+2, \dots, n-1\}$ aus $\sigma \sim_{\{i,n\}} \delta$. Der Kamm-Graph G mit der Ordnung σ faktorisiert dann in Kamm-Graphen G_1 und G_2 mit Ordnungen $\sigma' = 1\sigma'_2 \dots \sigma'_i e$ und $\sigma'' = e\sigma''_{i+1} \dots \sigma''_{n-1} n$. Für die zugehörigen Numerator folgt aus den Vollständigkeitsrelationen die Faktorisierung

$$N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) = \sum_{f,\lambda} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma''). \quad (4.88)$$

Hierbei summieren wir über alle internen Teilchen f , welche derjenigen Kante von G entsprechen, die G_1 und G_2 verbindet und über alle zugehörigen Polarisationszustände λ , physikalische und unphysikalische.

Benutzen wir ferner die Definitionen

$$S_{i+1}^{(1,e)} \equiv \{1\sigma'_2 \dots \sigma'_i e \mid \sigma'_j \in \{2, 3, \dots, i\}\}, \quad (4.89)$$

$$\tilde{S}_{n-i+1}^{(e,n)} \equiv \{e\sigma''_{i+1} \dots \sigma''_{n-1} n \mid \sigma''_j \in \{i+1, i+2, \dots, n-1\}\}, \quad (4.90)$$

so folgt mit Gl. (4.81), der Faktorisierung des Residuums der skalaren Form $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ in Gl. (4.79) und der Faktorisierung der Numerator, Gl. (4.88), für das Residuum der YM-Form bei $u_{in} = 0$:

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{D_{in}} \Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon) \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{\sigma' \in S_{i+1}^{(1,e)}} \sum_{\sigma'' \in \tilde{S}_{n-i+1}^{(e,n)}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) \Omega_{i+1}^{\text{scalar}}(\sigma') \wedge \Omega_{n-i+1}^{\text{scalar}}(\sigma'') \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{f,\lambda} \sum_{\sigma' \in S_{i+1}^{(1,e)}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') \Omega_{i+1}^{\text{scalar}}(\sigma') \wedge \sum_{\sigma'' \in \tilde{S}_{n-i+1}^{(e,n)}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma'') \Omega_{n-i+1}^{\text{scalar}}(\sigma'') \quad (4.91) \\ &= \sum_{f,\lambda} (-1)^{i-1} \Omega_{i+1}^{\text{YM}}(p', \varepsilon') \wedge \Omega_{n-i+1}^{\text{YM}}(p'', \varepsilon'') \end{aligned}$$

5. Relationen zwischen EYM-Amplituden und YM-Amplituden und ein Algorithmus zur Berechnung von Numeratoren

Im Jahr 2016 entdeckten Stieberger und Taylor neue Relationen zwischen den Ein-Spur-Amplituden in der EYM-Theorie mit einem Graviton und YM-Amplituden. Diese Relationen lauten [85]:

$$A_{n,n-1}^{\text{EYM}}(12 \dots (n-1) | \{n\}) = - \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=1}^j 2\tilde{\varepsilon}_n p_k A_n^{\text{YM}}(12 \dots j n(j+1) \dots (n-1)) \quad (5.1)$$

Obige Relationen folgerten die Autoren aus einer Beziehung zwischen Stringamplituden und Anwenden des Feldtheorie-Limes sowie geeigneter kollinearere und weicher Limes. Wir zeigen im ersten Abschnitt, dass die obigen Relationen auch aus den zugehörigen CHY-Darstellungen der EYM-Amplituden und Gluon-Amplituden folgen und geben ferner eine Verallgemeinerung für den Fall von r Gluonen und $n - r$ Gravitonen an, welche aus der KLT-Orthogonalität folgt. Die dabei auftretenden Koeffizienten können in einer CHY-Form dargestellt werden. Der erste Abschnitt basiert auf einer Arbeit zusammen mit de la Cruz und Weinzierl [42].¹

Da die Entwicklungskoeffizienten in der von uns präsentierten Form als Summe über die Streugleichungen dargestellt werden, ist die Berechnung dieser sehr ineffizient. Feng und Teng haben ein Verfahren entdeckt, um diese Koeffizienten effizienter rekursiv zu berechnen [43]. Die Ein-Graviton-Relationen in Gl. (5.1) dienen hierbei als Rekursionsanfang. Wir diskutieren diesen Algorithmus im zweiten Abschnitt.

Insbesondere haben wir damit ein Verfahren um Graviton-Amplituden als Linearkombination von YM-Amplituden in der KK-Basis darzustellen. Die zugehörigen Koeffizienten sind aber nichts anderes als die BCJ-Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$. Im dritten Abschnitt geben wir grafische Regeln zur Bestimmung dieser Numerator an [97].

¹Unabhängig voneinander wurden die Relationen in Gl. (5.1) auch in [96] gezeigt.

5.1. EYM-Amplituden als Linearkombination von YM-Amplituden

Um Gl. (5.1) zu zeigen, verwenden wir die CHY-Darstellung von EYM-Amplituden mit einem Graviton und $n - 1$ Gluonen,

$$A_{n,n-1}^{\text{EYM}}(\sigma|\{n\}) = i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) C_{n-1}(\sigma, z) E_n(z, p, \varepsilon) E_1(z, p, \tilde{\varepsilon}), \quad E_1(z, p, \tilde{\varepsilon}) = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2\tilde{\varepsilon}_n p_k}{z_{kn}}, \quad (5.2)$$

und die CHY-Darstellung der YM-Amplituden

$$A_n^{\text{YM}}(\sigma) = i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) C_n(\sigma, z) E_n(z, p, \varepsilon), \quad (5.3)$$

siehe Gl. (3.65) und Gl. (3.67). Es ist hinreichend zu zeigen, dass

$$C_{n-1}(12 \dots (n-1), z) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tilde{\varepsilon}_n p_k}{z_{kn}} = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=1}^j \tilde{\varepsilon}_n p_k C_n(12 \dots jn(j+1) \dots (n-1), z) \quad (5.4)$$

für Lösungen der Streugleichungen gilt. Tatsächlich können wir diese Gleichung allgemeiner für alle $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_{0,n}$ zeigen.

Durch Berechnung der rechten Seite in Gl. (5.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=1}^j \tilde{\varepsilon}_n p_k C_n(12 \dots jn(j+1) \dots (n-1), z) \\ &= C_{n-1}(12 \dots (n-1), z) \sum_{k=1}^{n-2} \tilde{\varepsilon}_n p_k \sum_{j=k}^{n-2} \frac{z_{j,j+1}}{z_{jn} z_{n,j+1}} \\ &= C_{n-1}(12 \dots (n-1), z) \sum_{k=1}^{n-2} \tilde{\varepsilon}_n p_k \frac{z_{k,n-1}}{z_{kn} z_{n,n-1}} \\ &= C_{n-1}(12 \dots (n-1), z) \left[- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tilde{\varepsilon}_n p_k}{z_{n,n-1}} + \sum_{k=1}^{n-2} \tilde{\varepsilon}_n p_k \frac{z_{k,n-1}}{z_{kn} z_{n,n-1}} \right] \\ &= C_{n-1}(12 \dots (n-1), z) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tilde{\varepsilon}_n p_k}{z_{kn}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Hierbei haben wir in der zweiten Zeile die Summen über j und k vertauscht:

$$\sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=1}^j = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k}^{n-2} \quad (5.6)$$

In der dritten Zeile haben wir die Eikonal-Identität

$$\sum_{j=k}^{n-2} \frac{z_{j,j+1}}{z_{jn} z_{n,j+1}} = \frac{z_{k,n-1}}{z_{kn} z_{n,n-1}}, \quad (5.7)$$

welche durch sukzessive Anwendung der Gleichung

$$\frac{z_{k,j+1}}{z_{kn}z_{n,j+1}} + \frac{z_{j+1,j+2}}{z_{j+1,n}z_{n,j+2}} = \frac{z_{k,j+2}}{z_{kn}z_{n,j+2}} \quad (5.8)$$

folgt, verwendet. Ferner wurde in der vierten Zeile die Impulserhaltung $p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = -p_n$ und $p_n \tilde{\varepsilon}_n = 0$ ausgenutzt. Damit ist Gl. (5.4) gezeigt und somit die Relationen in Gl. (5.1) bewiesen.

Allgemeiner können wir sogar zeigen, dass für eine beliebige Anzahl an Gravitonen in der EYM-Amplitude, diese sich als Linearkombination von Gluon-Amplituden darstellen lassen können, d. h. es existieren Koeffizienten $\alpha_\rho \equiv \alpha_\rho(\sigma, p, \tilde{\varepsilon})$ mit

$$A_{n,r}^{\text{EYM}}(\sigma|H) = \sum_{\rho \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} \alpha_\rho(\sigma, p, \tilde{\varepsilon}) A_n^{\text{YM}}(\rho, p, \varepsilon) \quad (5.9)$$

für alle $\sigma \in S_r$. Man beachte, dass es genügt über die BCJ-Basis zu summieren, da alle YM-Amplituden $A_n^{\text{YM}}(\beta)$ mit $\beta \in \mathcal{B}_n$ sich als Linearkombination von Amplituden aus der BCJ-Basis darstellen lassen.

Für den Existenzbeweis definieren wir zunächst für ein beliebiges $\sigma \in S_r$ den $(n-3)!$ -komponentigen Vektor $(G_z)_{z \in \mathcal{X}_n}$ durch

$$G_z \equiv J(z, p) C_r(\sigma, z) E_{n-r}(z, p, \tilde{\varepsilon}) \quad (5.10)$$

und betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_\rho M_{\rho z}^{\text{red}} = G_z, \quad (5.11)$$

wobei die Matrix M^{red} durch Gl. (3.84) (mit $\pi = 0$) gegeben ist. Dieses hat wegen der KLT-Orthogonalität die eindeutige Lösung

$$\alpha_\rho = G_z N_{z\rho}^{\text{red}}, \quad (5.12)$$

wobei N^{red} die Inverse zu M^{red} ist und durch Gl. (3.85) gegeben ist (vgl. Kapitel 3.2.2.2). Multiplizieren wir nun Gl. (5.11) mit E_n und summieren über alle Lösungen z der Streugleichungen, so erhalten wir mit den CHY-Darstellungen der EYM- und YM-Amplituden die Relationen in Gl. (5.9).²

Die angegebene Darstellung der Koeffizienten α_ρ ist zwar kompakt und allgemein gültig, beinhaltet jedoch eine Summe über die Lösungen der Streugleichungen. Obgleich wir die Lösungen nicht zu kennen brauchen, um α_ρ zu berechnen (siehe Kapitel 3.1.1 bzw. [37–41]), ist diese Darstellung für große n deshalb in der Praxis nicht geeignet. Insbesondere ist aus dieser Darstellung nicht ersichtlich, dass α_ρ eine rationale Funktion in den Produkten $(2p_i p_j)$, $(2p_i \tilde{\varepsilon}_j)$ und $(2\tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j)$ ist, denn die Lösungen der Streugleichungen sind im Allgemeinen irrationale Funktionen in den Mandelstam-Invarianten [98]. Wir

²Allgemeiner sehen wir sogar am Beweis, dass jede Amplitude mit einer CHY-Darstellung sich als Linearkombination von YM-Amplituden darstellen lässt.

werden im nächsten Abschnitt einen Algorithmus zur Berechnung der α_ρ bzw. genauer zur Berechnung der Koeffizienten β_ρ in

$$A_{n,r}^{\text{EYM}}(\sigma|H) = \sum_{\rho \in \mathcal{D}_n^{\text{KK}}} \beta_\rho(\sigma, p, \tilde{\varepsilon}) A_n^{\text{YM}}(\rho, p, \varepsilon) \quad (5.13)$$

angeben.

5.2. Algorithmus zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten

Sei im Folgenden $\{1, n\} \sqcup G$ die Menge der Gluonen und H die Menge der Gravitonen, sodass $\{1, n\} \sqcup G \sqcup H = \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. Weiter bezeichnen wir mit $h = h_1 h_2 \dots h_{|H|}$ ein Wort mit paarweise verschiedenen Buchstaben aus H sowie mit g ein Wort mit paarweise verschiedenen Buchstaben aus G . Die Relationen in Gl. (5.1) für ein Graviton legen nahe den 4-Vektor

$$T^\mu[1ghn|\emptyset] \equiv \sum_{\gamma \in g \sqcup h} 2Y_{h_1}^\mu C_n(1\gamma n) \quad (5.14)$$

zu definieren. Hierbei bezeichnet Y_{h_1} die Summe der Impulse der Gluonen vor dem Graviton h_1 im Shuffle-Produkt. Insbesondere hängt also Y_{h_1} außer von h_1 auch von γ ab, was wir jedoch in der Notation unterdrücken. Man beachte, dass das zweite Argument in T^μ eine Menge ist (in diesem Fall die leere Menge), während das erste Argument eine geordnete Liste bzw. ein Wort ist und somit die Reihenfolge der Buchstaben entscheidend ist. Mit der Definition in Gl. (5.14) lässt sich die zu Gl. (5.1) äquivalente Gl. (5.4) kompakter schreiben als (wir benennen in Gl. (5.4) n in $n-1$ um)

$$C_{n-1}(12 \dots (n-2)n, z) E_{\{n-1\}}(z, p, \tilde{\varepsilon}) = -\tilde{\varepsilon}_{n-1}^\mu T_\mu[12 \dots n|\emptyset]. \quad (5.15)$$

Allgemeiner ist das zweite Argument von T^μ eine echte Teilmenge von H , welche wir mit $\tilde{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$ bezeichnen. Sei $h = h_1 h_2 \dots h_j$ ein beliebiges Wort mit paarweise verschiedenen Buchstaben aus den übrigen $1 \leq j = |H| - m \leq |H|$ Gravitonen. Dann definieren wir rekursiv [43]

$$T^\mu[1ghn|\tilde{H}] \equiv \sum_{\gamma \in g \sqcup h} 2Y_{h_1}^\mu E_{\tilde{H}} C_{|G|+2+j}(1\gamma n) + (-1)^m \sum_{s=1}^m 2(F_{\eta_s})^{\mu\nu} T_\nu[1g(\eta_s h)n|\tilde{H}_s]. \quad (5.16)$$

Hierbei haben wir den Tensor

$$(F_{\eta_s})^{\mu\nu} \equiv p_{\eta_s}^\mu \tilde{\varepsilon}_{\eta_s}^\nu - p_{\eta_s}^\nu \tilde{\varepsilon}_{\eta_s}^\mu \quad (5.17)$$

eingeführt und $\tilde{H}_s \equiv \tilde{H} \setminus \{\eta_s\}$ definiert. Durch Anwendung von Gl. (5.16) können wir die Anzahl der Elemente im zweiten Argument von T^μ bei jedem Iterationsschritt verringern, solange die Menge nicht leer ist. Ist die Menge leer, so liefert der zweite Summand in Gl.

(5.16) keinen Beitrag, d. h. Gl. (5.16) geht in Gl. (5.14) über und die Rekursion terminiert an dieser Stelle.

Entwickelt man die pfaffsche Determinante E_H nach der $(i+1)$ -ten Zeile mit $1 \leq i \leq n$, wobei Elemente von H mit η_i bezeichnet werden, erhält man folgende Verallgemeinerung von Gl. (5.15) [43]:

$$C_{|G|+2}(1gn, z)E_H(z, p, \tilde{\varepsilon}) = (-1)^{|H|} \tilde{\varepsilon}_{\eta_i}^{\mu} T_{\mu}[1g\eta_i n | H \setminus \{\eta_i\}] \quad (5.18)$$

Man beachte jedoch, dass wir hier fordern müssen, dass z eine Lösung der Streugleichungen ist. Multiplizieren wir Gl. (5.18) mit $iJ(z, p)E(z, p, \varepsilon)$ und summieren über alle Lösungen der Streugleichungen, so erhalten wir auf der linken Seite die EYM-Amplitude $A_{n, |G|+2}^{\text{EYM}}(1gn | H)$. Die rechte Seite liefert dagegen wegen der Rekursionsformel in Gl. (5.16) eine Linearkombination von EYM-Amplituden mit mindestens $|G| + 3$ Gluonen. Jede dieser EYM-Amplituden können wir wiederum durch Anwenden von Gl. (5.16) und Gl. (5.18) als Linearkombination von EYM-Amplituden mit mindestens $|G| + 4$ Gluonen darstellen. Auf diese Weise fahren wir fort bis wir bei EYM-Amplituden mit $(n-1)$ Gluonen angelangt sind, welche wir mit Gl. (5.1) als Linearkombination von YM-Amplituden schreiben. Damit haben wir ein Verfahren, um EYM-Amplituden mit einer beliebigen Anzahl an Gluonen und Gravitonen als Linearkombination von YM-Amplituden darzustellen.

Zur Illustration dieses Algorithmus wollen wir die EYM-Amplitude $A_{4,2}^{\text{EYM}}(14|\{2,3\})$ mit 2 Gluonen und 2 Gravitonen als Linearkombination von YM-Amplituden darstellen. Mit den Definitionen in Gl. (5.14) und Gl. (5.16) berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} T^{\mu}[124|\{3\}] &= 2E_{\{3\}}C_3(124)p_1^{\mu} - 2F_3^{\mu\nu}T_{\nu}[1324|\emptyset] \\ &= 2E_{\{3\}}C_3(124)p_1^{\mu} - 4F_3^{\mu\nu}(p_1)_{\nu}C(1324). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Mit Gl. (5.18) können wir nun die Amplitude $A_{4,2}^{\text{EYM}}(14|\{2,3\})$ durch EYM-Amplituden mit höchstens einem Graviton darstellen:

$$A_{4,2}^{\text{EYM}}(14|\{2,3\}) = (2\tilde{\varepsilon}_2 p_1)A_{4,3}^{\text{EYM}}(124|\{3\}) - (4\tilde{\varepsilon}_2 F_3 p_1)A_4^{\text{YM}}(1324) \quad (5.20)$$

Als letzten Schritt stellen wir nun $A_{4,3}^{\text{EYM}}(124|\{3\})$ mittels Gl. (5.1) als Linearkombination von Gluon-Amplituden dar und verwenden ferner die Impulserhaltung und die Transversalität $\tilde{\varepsilon}_i p_i$ für $i = 2, 3$, um das Ergebnis kompakter darzustellen:

$$\begin{aligned} A_{4,2}^{\text{EYM}}(14|\{2,3\}) &= (2\tilde{\varepsilon}_2 p_4)(2\tilde{\varepsilon}_3 p_1)A_4^{\text{YM}}(1324) + (2\tilde{\varepsilon}_2 p_1)(2\tilde{\varepsilon}_3 p_4)A_4^{\text{YM}}(1234) \\ &\quad + (2\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_3)(2p_1 p_3)A_4^{\text{YM}}(1324) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Verwenden wir außerdem die BCJ-Relation in Gl. (2.61), so können wir dies auch in der Form von Gl. (5.9) darstellen:

$$A_{4,2}^{\text{EYM}}(14|\{2,3\}) = (2p_1 p_2) \left[(2\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_3) + \frac{(2\tilde{\varepsilon}_3 p_4)(2\tilde{\varepsilon}_2 p_1)}{(2p_1 p_2)} + \frac{(2\tilde{\varepsilon}_3 p_1)(2\tilde{\varepsilon}_2 p_4)}{(2p_1 p_3)} \right] A_4^{\text{YM}}(1234) \quad (5.22)$$

Natürlich ist es in diesem Fall auch problemlos möglich das obige Ergebnis aus Gl. (5.12) zu erhalten. Wir haben

$$\begin{aligned}
G_z &= J(z, p)C_2(14, z)E_{\{2,3\}}(z, p, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3) \\
&= \left[-\frac{z_{14}^2}{(2p_1p_4)} z_{12}z_{23}z_{31}z_{23}z_{34}z_{42} \right] \times \left[-\frac{1}{z_{14}^2} \right] \\
&\times \left[\frac{(2p_2p_3)(2\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_3)}{z_{23}^2} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^4 \frac{(2\tilde{\varepsilon}_2p_j)(2\tilde{\varepsilon}_3p_i)}{z_{2j}z_{3i}} - \frac{(2\tilde{\varepsilon}_2p_3)(2\tilde{\varepsilon}_3p_2)}{z_{23}^2} \right]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

und

$$N_{z,1234} = S[1234|1243]C(1243, z) = (2p_1p_2) \times \frac{1}{z_{12}z_{24}z_{43}z_{31}}. \tag{5.24}$$

Setzen wir nun die Lösung der Streugleichung für $n = 4$, $z = (0, -(2p_1p_2)/(2p_1p_3), 1, \infty)$, ein, so erhalten wir unter Verwendung der Impulserhaltung und $\tilde{\varepsilon}_i p_i = 0$ für $i = 2, 3$ das Ergebnis in Gl. (5.22):

$$\alpha_{1234} = G_z N_{z,1234} = (2p_1p_2) \left[(2\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_3) + \frac{(2\tilde{\varepsilon}_3p_4)(2\tilde{\varepsilon}_2p_1)}{(2p_1p_2)} + \frac{(2\tilde{\varepsilon}_3p_1)(2\tilde{\varepsilon}_2p_4)}{(2p_1p_3)} \right] \tag{5.25}$$

5.3. Grafische Regeln zur Berechnung von BCJ-Numeratoren

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, lässt sich jede Amplitude $A_{n,|G|+2}^{\text{EYM}}(1\alpha n|H)$ als Linearkombination von YM-Amplituden schreiben. Hierbei bleibt die relative Ordnung der Gluonen erhalten, d. h. wir können $A_{n,|G|+2}^{\text{EYM}}(1\alpha n|H)$ darstellen als

$$A_{n,|G|+2}^{\text{EYM}}(1\alpha n|H) = \sum_{\beta \in S_H} \sum_{\tau \in \alpha \cup \beta} (-1)^{m(m+1)/2} 2^m a(\beta, \tau) A_n^{\text{YM}}(1\tau n), \tag{5.26}$$

wobei $m = |H|$ die Anzahl der Gravitonen in der EYM-Amplitude auf der linken Seite ist und die Koeffizienten $a(\beta, \tau)$ durch den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Algorithmus bestimmt sind. Wir haben den konstanten Term $(-1)^{m(m+1)/2} 2^m$ abgespalten, damit die Funktionen $a(\beta, \tau)$ möglichst einfach sind.

Ferner lässt sich durch eine Entwicklung der pfaffschen Determinante zeigen, dass die Amplitude in der Gravitation sich durch EYM-Amplituden darstellen lässt [44, 97]

$$A_n^{\text{G}} = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} \sum_{\text{split}} \sum_{\alpha \in S_G} W(1\alpha n) (-1)^{m(m+3)/2} 2^{n-m-2} A_{n,|G|+2}^{\text{EYM}}(1\alpha n|H). \tag{5.27}$$

Hierbei bezeichnen wir mit \sum_{split} die Summe über alle Zerlegungen der Menge $\{2, 3, \dots, n-1\}$ in zwei disjunkte Teilmengen G und H und es ist $W(1\alpha n) \equiv \tilde{\varepsilon}_1 F_{\alpha_1} \dots F_{\alpha_s} \tilde{\varepsilon}_n$ für $\alpha \equiv \alpha_1 \dots \alpha_s$. Setzen wir Gl. (5.26) in Gl. (5.27) ein, so finden wir:

$$A_n^{\text{G}} = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} 2^{n-2} \sum_{\text{split}} \sum_{\alpha \in S_G} \sum_{\beta \in S_H} \sum_{\tau \in \alpha \cup \beta} (-1)^{|H|} W(1\alpha n) a(\beta, \tau) A_n^{\text{YM}}(1\tau n) \tag{5.28}$$

Andererseits können wir aber auch die Graviton-Amplitude mit Hilfe von BCJ-Numeratoren darstellen:

$$A_n^G = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) A_n^{\text{YM}}(\sigma) \quad (5.29)$$

Dies folgt unmittelbar aus Gl. (4.81). Durch Koeffizientenvergleich können wir damit den Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ für jedes $\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$ extrahieren. Nachfolgend illustrieren wir dieses Vorgehen für den Fall, dass H ein oder zwei Elemente enthält. Um die Notation einfach zu gestalten, wählen wir für σ die Standardordnung, $\sigma = 12 \dots n$.

Ist etwa $H = \{\eta_1\}$, so liefert in Gl. (5.28) nur der Summand mit $\alpha = \alpha_1 \equiv 2 \dots (\eta_1 - 1)(\eta_1 + 1) \dots (n - 1)$ und $\tau = \tau_1 \equiv 23 \dots (n - 1)$ einen Beitrag zum BCJ-Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$. Mit den Relationen in Gl. (5.1) erhalten wir

$$a(\eta_1, \tau_1) = \tilde{\varepsilon}_{\eta_1}(p_1 + p_2 + \dots + p_{\eta_1-1}). \quad (5.30)$$

Betrachte nun den Summanden in Gl. (5.28) mit $H = \{\eta_1, \eta_2\}$, wobei $2 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq n - 1$ angenommen sei. Gl. (5.18) zeichnet ein Graviton η_i aus. Entsprechend müssen wir uns entscheiden, ob wir diese Gleichung mit η_1 oder η_2 anwenden. Allgemeiner müssen wir eine Reihenfolge ρ^1 angeben, in welcher wir Gl. (5.18) anwenden. Genauer: Ist $\rho^1 = \rho_1^1 \rho_2^1 \dots \rho_{|H|}^1$ ein Wort mit paarweise verschiedenen Buchstaben in H , so wenden wir zunächst Gl. (5.18) mit $\eta_i = \rho_1^1$ an. Benutzen wir nun die Rekursionsgleichung (5.16), so können wir die EYM-Amplitude $A_{n,|G|+2}^{\text{EYM}}(1\alpha n|H)$ durch EYM-Amplituden mit Gravitonen aus $H' \subsetneq H$ ausdrücken. Auf diese Amplituden wenden wir wieder Gl. (5.18) an – jedoch mit dem (von links gelesen) nächsten ρ_i^1 , $2 \leq i \leq |H|$, in ρ^1 , welches in H' liegt. Speziell für $H = \{\eta_1, \eta_2\}$ wählen wir $\rho^1 = \eta_2 \eta_1$. Analog zu unserem Beispiel mit zwei Gravitonen im letzten Abschnitt erhalten wir

$$a(\eta_1 \eta_2, \tau_1) = \tilde{\varepsilon}_{\eta_2} F_{\eta_1} \sum_{k < \eta_1} p_k + \sum_{\substack{l < \eta_2 \\ l \neq \eta_1}} \sum_{k < \eta_1} (\tilde{\varepsilon}_{\eta_2} p_l)(\tilde{\varepsilon}_{\eta_1} p_k). \quad (5.31)$$

Allgemeiner sei $\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{|G|}$ ein Wort mit Buchstaben aus G , das ohne Einschränkung bereits geordnet bezüglich σ ist, d. h. $\alpha_i < \alpha_j$ für $i < j$ (für das hier gewählte σ) und $h^1 \equiv \phi_1(l_1) \dots \phi_1(2) \phi_1(1)$ mit $\phi_1(i) \in H$ für $i = 1, 2, \dots, l_1$ ($1 \leq l_1 \leq |H|$) und $\phi_1(i) \neq \phi_1(j)$ für $i \neq j$. Ferner definieren wir die Mengen $M_1 \equiv G \cup \{1\}$ und $M_2 \equiv M_1 \cup \{\phi_1(1), \phi_1(2), \dots, \phi_1(l_1)\}$. Dann erhalten wir mit Gl. (5.18) für $\eta_i = \phi_1(1)$ sowie mit l_1 -maliger Anwendung der Rekursionsgleichung (5.16) Beiträge der Form

$$\sum_{\gamma \in \alpha \sqcup h^1} (-1)^{l_1(2|H|+l_1-1)/2} 2^{l_1} \tilde{\varepsilon}_{\phi_1(1)} F_{\phi_1(2)} \dots F_{\phi_1(l_1)} Y_{\phi_1(l_1)} A_{n,|G|+2+l_1}^{\text{EYM}}(1\gamma n|H \setminus M_2) \quad (5.32)$$

zu $A_{n,|G|+2}^{\text{EYM}}(1\alpha n|H)$. Um am Ende den Koeffizienten der YM-Amplitude in Standardordnung zu erhalten, müssen wir diejenigen Summanden auswählen, für den $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{|G|+l_1}$ bzgl. σ geordnet ist, d. h. $\gamma_i < \gamma_j$ für $i < j$. Da das Shuffle-Produkt die relative Reihenfolge der Buchstaben in α und in h^1 nicht verändert, bedeutet dies, dass h^1 bezüglich σ geordnet sein muss:

$$\phi_1(l_1) < \dots < \phi_1(2) < \phi_1(1) \quad (5.33)$$

Für diesen Summanden γ ist ferner

$$Y_{\phi_1(l_1)} = \sum_{\substack{k \in M_1 \\ k < \phi_1(l_1)}} p_k. \quad (5.34)$$

Ansonsten erhalten wir jedoch Terme mit beliebigen $\phi_1(i)$, da wir im zweiten Term auf der rechten Seite von Gl. (5.16) über alle Elemente aus \tilde{H} summieren.

Ist $H \setminus M_2 \neq \emptyset$, so müssen wir wieder Rekursionsgleichung (5.16) in Kombination mit Gl. (5.18) anwenden und erhalten diesmal die Terme

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \alpha \omega h^1} \sum_{\delta \in \gamma \omega h^2} (-1)^{l_1(2|H|+l_1-1)/2} (-1)^{l_2(2|H|+l_2-1)/2} 2^{l_1+l_2} (\tilde{\varepsilon}_{\phi_1(1)} F_{\phi_1(2)} \cdots F_{\phi_1(l_1)} Y_{\phi_1(l_1)}) \\ & \times (\tilde{\varepsilon}_{\phi_2(1)} F_{\phi_2(2)} \cdots F_{\phi_2(l_2)} Y_{\phi_2(l_2)}) A_{n,|G|+2+l_1+l_2}^{\text{EYM}} (1\delta n | H \setminus M_3). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Hierbei ist $h^2 \equiv \phi_2(l_2) \dots \phi_2(2) \phi_2(1)$ ein Wort mit paarweise verschiedenen Buchstaben aus $H \setminus M_2$ der Länge $1 \leq l_2 \leq |H| - l_1$ und $M_3 \equiv M_2 \cup \{\phi_2(1), \phi_2(2), \dots, \phi_2(l_2)\}$. h^2 muss bezüglich σ geordnet sein, um einen Beitrag zu $A_n^{\text{YM}}(\sigma)$ zu liefern, kann ansonsten aber beliebig sein. Für den entsprechenden Summanden ist

$$Y_{\phi_2(l_2)} = \sum_{\substack{k \in M_2 \\ k < \phi_2(l_2)}} p_k. \quad (5.36)$$

Auf diese Weise fahren wir fort bis wir den Koeffizienten von $A_n^{\text{YM}}(\sigma)$ erhalten. Es ist entscheidend, dass aufgrund des Shuffle-Produktes die h^j bei jedem j -ten Schritt bezüglich σ geordnet sein müssen.

Wir können damit den Algorithmus zur Bestimmung des Numerators $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ mit $\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}$ in folgenden drei Schritten zusammenfassen [44]:

1. Konstruiere alle gewurzelten Bäume, die bezüglich der Ordnung σ geordnet sind, d. h. ist $(1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_j)$ mit $j > i$ ein Pfad von Knoten 1 über Knoten σ_i nach σ_j , so ist σ_j auf höherer Tiefe als σ_i . Damit ist notwendigerweise $1 = \sigma_1$ die Wurzel und $n = \sigma_n$ ein Blatt eines jeden solchen Baumes. Es gibt $(n-1)!$ geordnete Bäume, da man die Bäume mit $n+1$ Knoten aus den Bäumen mit n Knoten erhält, indem man Knoten $n+1$ mit einem Knoten $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ verbindet.
2. Sei $g = (1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, n)$ der Pfad von der Wurzel 1 bis zum Blatt n eines geordneten Baumes und $M_1 = \{1, \alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Die Menge der Knoten, die nicht auf diesem Pfad liegen, bezeichnen wir mit $H = \{1, 2, \dots, n-1\} \setminus M_1$. Auf H wählen wir (willkürlich) eine Ordnung $\rho^1 = \rho_1^1 \dots \rho_{|H|}^1$ (Referenzordnung) und bezeichnen mit $P_1 = (\phi_1(1), \dots, \phi_1(l_1), V_1)$ den Pfad von $\rho_1^1 = \phi_1(1)$ zum nächsten Element aus M_1 , welches wir mit V_1 bezeichnen.³ Seien nun Ordnungen ρ_i , Mengen M_i und Pfade P_i

³Beachte, dass wir für ein festes H , auch bei Berechnung von verschiedenen Numeratoren $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$, dasselbe ρ^1 wählen müssen. In der Praxis können wir eine globale Ordnung auf $\{2, 3, \dots, n-1\}$, etwa $\rho = (n-1)(n-2) \dots 2$, wählen. Diese induziert dann eine Ordnung auf H .

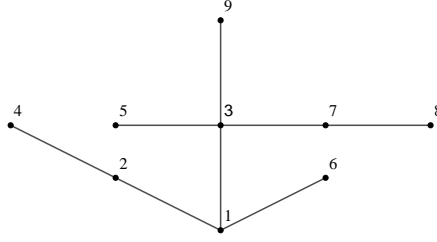


Abbildung 5.1.: Ein bezüglich $\sigma = 123456789$ geordneter Baum. Der Beitrag zum Numerator von diesem Baum ist durch Gl. (5.41) gegeben.

für $i \geq 1$ bereits konstruiert. Dann bezeichnen wir mit $\rho^{i+1} = \rho_1^{i+1} \dots \rho_{|H|-l_1-\dots-l_i}^{i+1}$ die Ordnung, die durch Streichen von $\phi_i(1), \dots, \phi_i(l_i) \in H \setminus M_i$ aus ρ^i entsteht und setzen $M_{i+1} = M_i \cup \{\phi_i(1), \dots, \phi_i(l_i)\}$. Mit $P_{i+1} = (\phi_{i+1}(1), \dots, \phi_{i+1}(l_{i+1}), V_{i+1})$ bezeichnen wir den Pfad von $\rho_1^{i+1} = \phi_{i+1}(1)$ zum nächsten Knoten aus M_{i+1} , welchen wir mit V_{i+1} bezeichnen. Auf diese Weise konstruieren wir alle Pfade P_i bis $M_i = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

3. Mit dem Pfad g assoziieren wir den Faktor

$$\eta_g = W(1\alpha n) = \varepsilon_1 F_{\alpha_1} \dots F_{\alpha_s} \varepsilon_n \quad (5.37)$$

und mit dem Pfad P_i den Faktor

$$\eta_{P_i} = \varepsilon_{\phi_i(1)} F_{\phi_i(2)} \dots F_{\phi_i(l_i)} p_{V_i}. \quad (5.38)$$

Für jeden Baum ist der Beitrag zum Numerator durch das Produkt

$$(-1)^{(n+1)(n+2)/2+|H|} 2^{n-2} \cdot \eta_g \prod_i \eta_{P_i} \quad (5.39)$$

gegeben. Der Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ ist die Summe der Beiträge über alle bezüglich σ geordneten Bäume.

Bevor wir ein Beispiel betrachten, wollen wir Schritt 2 und 3 des Algorithmus illustrieren. Hierzu betrachten wir den bezüglich $\sigma = 123456789$ geordneten Baum in Abb. 5.1, welcher einen Beitrag zum Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ liefert. Gemäß Schritt 2 müssen wir zunächst die Pfade g und P_i identifizieren. Es ist $g = (1, 3, 9)$ und somit $H = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Wir wählen die Referenzordnung $\rho^1 = 876542$ auf H . Dann sind die Pfade P_i gegeben durch

$$P_1 = (8, 7, 3), \quad P_2 = (6, 1), \quad P_3 = (5, 3), \quad P_4 = (4, 2, 1). \quad (5.40)$$

Wenden wir nur die Regeln in Schritt 3 an, so erhalten wir den Beitrag für diesen Baum:

$$-2^7 (\varepsilon_1 F_3 \varepsilon_9) (\varepsilon_8 F_7 p_3) (\varepsilon_6 p_1) (\varepsilon_5 p_3) (\varepsilon_4 F_2 p_1) \quad (5.41)$$

5. Relationen zwischen EYM-Amplituden und YM-Amplituden und ein Algorithmus zur Berechnung von Numeratoren

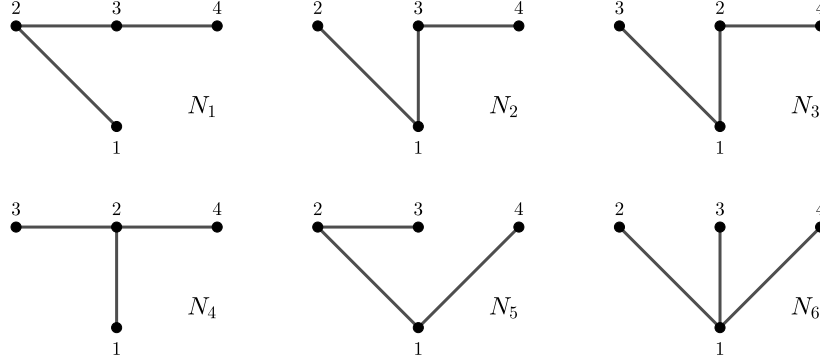


Abbildung 5.2.: Die bezüglich $\sigma = 1234$ geordneten Bäume.

Abschließend wollen wir mit obigem Algorithmus den Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234)$ berechnen. In diesem Fall haben wir $3! = 6$ geordnete Bäume bezüglich der Ordnung $\sigma = 1234$. Diese sind in Abb. 5.2 dargestellt. Für $H = \{2, 3\}$ wählen wir die Ordnung $\rho^1 = 32$. Dann lauten die einzelnen Beiträge zum Numerator:

$$\begin{aligned} N_1 &= -4(\varepsilon_1 F_2 F_3 \varepsilon_4), & N_2 &= 4(\varepsilon_1 F_3 \varepsilon_4)(\varepsilon_2 p_1), & N_3 &= 4(\varepsilon_1 F_2 \varepsilon_4)(\varepsilon_3 p_1) \\ N_4 &= 4(\varepsilon_1 F_2 \varepsilon_4)(\varepsilon_3 p_2), & N_5 &= -4(\varepsilon_1 \varepsilon_4)(\varepsilon_3 F_2 p_1), & N_6 &= -4(\varepsilon_1 \varepsilon_4)(\varepsilon_2 p_1)(\varepsilon_3 p_1) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Benutzen wir die Impulserhaltung und $\varepsilon_j p_j = 0$, so folgt für $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) = \sum_i^6 N_i$:

$$\begin{aligned} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) &= 4(\varepsilon_2 p_1)(\varepsilon_3 p_4)(\varepsilon_1 \varepsilon_4) - 4(\varepsilon_2 p_1)(\varepsilon_4 p_3)(\varepsilon_1 \varepsilon_3) - 4(\varepsilon_1 p_2)(\varepsilon_3 p_4)(\varepsilon_2 \varepsilon_4) \\ &+ 4(\varepsilon_1 p_2)(\varepsilon_4 p_3)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) - 4[(\varepsilon_3 p_1)(\varepsilon_4 p_2) - (\varepsilon_4 p_1)(\varepsilon_3 p_2)](\varepsilon_1 \varepsilon_2) \\ &- 4[(\varepsilon_1 p_3)(\varepsilon_2 p_4) - (\varepsilon_2 p_3)(\varepsilon_1 p_4)](\varepsilon_3 \varepsilon_4) + 4(p_2 p_3)(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_3 \varepsilon_4) \\ &+ 4(p_1 p_2)(\varepsilon_1 \varepsilon_4)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Beachte, dass $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324)$ nicht durch Umbenennung $2 \leftrightarrow 3$ aus $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234)$ entsteht. Stattdessen haben wir

$$\begin{aligned} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324) &= 4(\varepsilon_3 p_1)(\varepsilon_2 p_4)(\varepsilon_1 \varepsilon_4) - 4(\varepsilon_3 p_1)(\varepsilon_4 p_2)(\varepsilon_1 \varepsilon_2) - 4(\varepsilon_1 p_3)(\varepsilon_2 p_4)(\varepsilon_3 \varepsilon_4) \\ &+ 4(\varepsilon_1 p_3)(\varepsilon_4 p_2)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) - 4[(\varepsilon_2 p_1)(\varepsilon_4 p_3) - (\varepsilon_4 p_1)(\varepsilon_2 p_3)](\varepsilon_1 \varepsilon_3) \\ &- 4[(\varepsilon_1 p_2)(\varepsilon_3 p_4) - (\varepsilon_3 p_2)(\varepsilon_1 p_4)](\varepsilon_2 \varepsilon_4) + 4(p_2 p_3)(\varepsilon_1 \varepsilon_3)(\varepsilon_2 \varepsilon_4). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Numerator sind nicht identisch zu denen, die wir aus der YM-Lagrangedichte erhalten haben (vgl. Gl. (4.84)). Bezeichnen wir den Numerator in Gl. (4.84) mit $\hat{N}_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234)$ (und entsprechend für die Ordnung 1324), so gilt jedoch

$$\frac{1}{2(p_1 p_2)} \left(\hat{N}_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1234) \right) + \frac{1}{2(p_2 p_3)} \left(\hat{N}_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324) - N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(1324) \right) = 0. \quad (5.45)$$

Da beide Sätze von Numeratoren die Jacobi-Identität erfüllen, gehen die Numerator somit durch eine verallgemeinerte Eichtransformation auseinander hervor.

Der in diesem Kapitel vorgestellte Algorithmus lässt sich leicht implementieren. Der Quelltext für eine Implementierung in Mathematica findet sich in Anhang E. Beispielsweise geben wir hier einen Numerator für $n = 5$ an, wobei wir die globale Referenzordnung $\rho = 432$ verwenden:

$$\begin{aligned}
 N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(12345) = & \\
 & 8(-(\epsilon_1 F_2 \epsilon_5)(\epsilon_3 p_2)(\epsilon_4 p_1) - (\epsilon_1 F_2 \epsilon_5)(\epsilon_3 p_2)(\epsilon_4 p_2) - (\epsilon_1 F_2 \epsilon_5)(\epsilon_4 F_3 p_1) \\
 & - (\epsilon_1 F_2 \epsilon_5)(\epsilon_4 F_3 p_2) - (\epsilon_1 F_3 \epsilon_5)(\epsilon_2 p_1)(\epsilon_4 p_1) - (\epsilon_1 F_3 \epsilon_5)(\epsilon_2 p_1)(\epsilon_4 p_3) \\
 & - (\epsilon_1 F_4 \epsilon_5)(\epsilon_3 F_2 p_1) - (\epsilon_1 F_3 \epsilon_5)(\epsilon_4 F_2 p_1) + (\epsilon_1 F_2 F_3 \epsilon_5)(\epsilon_4 p_1) \\
 & + (\epsilon_1 F_2 F_3 \epsilon_5)(\epsilon_4 p_2) + (\epsilon_1 F_2 F_3 \epsilon_5)(\epsilon_4 p_3) - (\epsilon_3 p_1)((\epsilon_1 F_2 \epsilon_5)((\epsilon_4 p_1) + (\epsilon_4 p_2)) \\
 & + (\epsilon_1 F_4 \epsilon_5)(\epsilon_2 p_1) - (\epsilon_1 F_2 F_4 \epsilon_5)) + (\epsilon_1 F_2 F_4 \epsilon_5)(\epsilon_3 p_2) + (\epsilon_1 F_3 F_4 \epsilon_5)(\epsilon_2 p_1) \\
 & + (\epsilon_1 \epsilon_5)((\epsilon_4 p_1)(\epsilon_3 F_2 p_1) + ((\epsilon_3 p_1) + (\epsilon_3 p_2))(\epsilon_4 F_2 p_1) + (\epsilon_2 p_1)((\epsilon_4 F_3 p_1) \\
 & + (\epsilon_3 p_1)(\epsilon_4 p_1)) + (\epsilon_4 F_3 F_2 p_1)) - (\epsilon_1 F_2 F_3 F_4 \epsilon_5)
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Dissertation zeigten wir erstens in Kapitel 5.1, dass die CHY-Darstellung von Amplituden dazu verwendet werden kann, um Relationen zwischen Ein-Spur-EYM-Amplituden mit einem Graviton und $n-1$ Gluonen auf der einen Seite und farbgeordneten YM-Amplituden mit n Gluonen auf der anderen Seite zu beweisen. Ferner konnten wir mit Hilfe einer Eigenschaft der Lösungen der Streugleichungen, der KLT-Orthogonalität, eine Verallgemeinerung dieser Relationen auf eine beliebige Anzahl von Gravitonen angeben.

Zweitens studierten wir die $(n-3)$ -Streuformen $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ und $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ auf der Kompaktifizierung $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ des Modulraums $\mathcal{M}_{0,n}$ der n -fach punktierten Riemannschen Sphäre. Die Definition der Streuformen ist derart, dass der Pushforward dieser Streuformen unter den Streugleichungen die CHY-Darstellung der farbgeordneten Amplituden in der bi-adjungierten skalaren Theorie und der YM-Theorie liefert. Um die YM-Streuform $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ auf ganz $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, also auch abseits der Lösungen der Streugleichungen, zu untersuchen, war es jedoch notwendig den Polarisationsfaktor geeignet auf off-shell Daten zu verallgemeinern. Die Streuformen haben einige bemerkenswerte Eigenschaften, welche man von Streuformen von lokalen und unitären Quantenfeldtheorien zwar erwarten würde, welche jedoch nicht manifest in diesem geometrischen Bild von Amplituden sind. Wir zeigten in Kapitel 4.5, dass die beiden Streuformen $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ und $\Omega_n^{\text{YM}}(p, \varepsilon)$ nur Singularitäten auf dem Divisor $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$ besitzen, diese logarithmisch sind und dass das Residuum der Streuformen in den Singularitäten in zwei Streuformen vom niedrigeren Grad faktorisiert.

Natürlich würden wir gerne Streuformen für weitere Theorien, wie etwa QCD oder $\mathcal{N} = 4$ SYM, auch auf Loop-Niveau, studieren. Da die skalare Streuform $\Omega_n^{\text{scalar}}(\sigma)$ mit einer positiven Geometrie, dem Associahedron, assoziiert ist, wäre es ferner interessant herauszufinden, ob auch für andere Theorien Streuformen aus der Kenntnis einer Geometrie berechnet werden können.

Für das Studium von QCD-Streuformen wäre es wahrscheinlich hilfreich eine Verallgemeinerung der Formel in Gl. (4.80), d. h. einen Ausdruck für den QCD-Polarisationsfaktor $\tilde{E}(z, p, \varepsilon)$ in Abhängigkeit von BCJ-Numeratoren von MW-Diagrammen, zu haben. Eine entsprechende Verallgemeinerung für $n \leq 5$ Teilchen wurde in Kapitel 3.2.3 präsentiert. Durch geeignete Manipulation dieses Polarisationsfaktors konnte eine Amplitude in Gravitation aus QCD im CHY-Formalismus gewonnen werden. Diese stimmt mit dem, was wir aus dem BCJ-Double-Copy-Verfahren oder den verallgemeinerten KLT-Relationen erhalten, überein. Wir würden gerne wissen, ob dies auf beliebige n verallgemeinert werden kann.

Letztens möchten wir erwähnen, dass die Residuen der Streuformen auch für $\mathcal{N} = 4$ SYM und sogar auf Loop-Niveau faktorisieren, wie in [99] gezeigt wurde. Diese Faktori-

sierungseigenschaft genügt, um die Streuformen via BCFW-Rekursion zu rekonstruieren. Jedoch ist unbekannt, was die zugehörige positive Geometrie im von den Spinoren $\lambda_i, \tilde{\lambda}_i$ aufgespannten kinematischen Raum ist. Auf Baumniveau müssten wir hierfür das Bild des positiven Grassmanians $G_+(2, n)$, welcher definiert ist als Raum der komplexen $2 \times n$ -Matrizen (z_1, z_2, \dots, z_n) mit $\det(z_i, z_j) > 0$ für $j > i$ modulo Möbius-Transformationen und Reskalierung der Spalten, unter den RSVW-Gleichungen, einer 4-dimensionalen Version der Streugleichungen, finden. Es liegt nahe zu vermuten, dass diese positive Geometrie, ähnlich wie das kinematische Associahedron, als Durchschnitt einer positiven Region und einer 4-dimensionalen Version des in Kapitel 4.3.2 eingeführten Unterraums H_n des kinematischen Raums \mathcal{K}_n dargestellt werden kann. Die zugehörige positive Region wurde in [99] entdeckt und es bleibt – sofern obige Vermutung richtig ist – den Unterraum zu finden.

Anhang B.

Die Koeffizienten a_i und b_i

In diesem Anhang geben wir die explizite Abhängigkeit der Koeffizienten in Gl. (3.91) von den Invarianten $p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} \equiv \sum_{i<j} 2p_{\alpha_i}p_{\alpha_j}$ und der Masse m_3 des Quarks 3 bzw. des Antiquarks 4 an. Diese ergeben sich aus $\mathcal{F}^{\text{mass}}(\gamma|\alpha, \beta)$, welches aus dem in Gl. (2.68) definiertem $\mathcal{F}(\gamma|\alpha, \beta)$ mit der Ersetzungsregel in (3.74) folgt. Hierbei sind α und β eindeutig durch die Basiselemente $\sigma \in \{125346, 132546\} \subset \mathcal{B}_{6,3}^{\text{BCJ}}$ vermöge $\sigma = 1\alpha 5\beta 6$ bestimmt. Des Weiteren durchläuft γ alle Permutation mit $\gamma \in \alpha \sqcup S(\beta)$.

Die Koeffizienten bezüglich des BCJ-Basiselements $\sigma_1 = 125346$ werden mit dem Buchstaben a , diejenigen bezüglich des BCJ-Basiselements $\sigma_2 = 132546$ mit einem b , gekennzeichnet. Der Index nummeriert die Stelle, an der $\sigma' = 1\gamma 56$ in der Liste

$$\mathcal{B}_6^{k \leq 2} = \{124356, 132456, 134256, 123456, 142356, 143256\} \quad (\text{B.1})$$

auftritt. Die Koeffizienten lauten:

$$a_1 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(243|2, 34) = -\frac{(p_{14} + p_{24})(p_{346} + p_{35} + 2m_3^2)}{p_{46}(p_{346} + 2m_3^2)} \quad (\text{B.2})$$

$$a_2 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(324|2, 34) = -\frac{p_{45}p_{13}}{p_{46}(p_{346} + 2m_3^2)} \quad (\text{B.3})$$

$$a_3 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(342|2, 34) = -\frac{p_{13}(p_{45} + p_{24})}{p_{46}(p_{346} + 2m_3^2)} \quad (\text{B.4})$$

$$a_4 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(234|2, 34) = -\frac{p_{45}(p_{13} + p_{23})}{p_{46}(p_{346} + 2m_3^2)} \quad (\text{B.5})$$

$$a_5 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(423|2, 34) = -\frac{p_{14}(p_{346} + p_{35} + 2m_3^2)}{p_{46}(p_{346} + 2m_3^2)} \quad (\text{B.6})$$

$$a_6 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(432|2, 34) = -\frac{p_{14}(p_{346} + p_{23} + p_{35} + 2m_3^2)}{p_{46}(p_{346} + 2m_3^2)} \quad (\text{B.7})$$

$$b_2 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(324|32, 4) = \frac{p_{14} + p_{34} + p_{24} + 2m_3^2}{p_{46}} \quad (\text{B.8})$$

$$b_3 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(342|32, 4) = \frac{p_{14} + p_{34} + 2m_3^2}{p_{46}} \quad (\text{B.9})$$

$$b_6 = \mathcal{F}^{\text{mass}}(432|32, 4) = \frac{p_{14}}{p_{46}} \quad (\text{B.10})$$

Man beachte, dass – mit dieser Notation – $b_1 = b_4 = b_5 = 0$ gilt, da die Elemente 124356, 123456 und 142356 von $\mathcal{B}_6^{k \leq 2}$ sich nicht als $1\gamma 56$ mit $\gamma \in 32 \sqcup 4$ darstellen lassen.

Anhang C.

Verschiedene Beweise

C.1. Beweis der Permutationsinvarianz des Polarisationsfaktors

Wir zeigen hier, dass der Polarisationsfaktor in Gl. (4.80) unabhängig von i und j und somit permutationsinvariant ist.

Hierzu definieren wir

$$E_{ij} \equiv \sum_{\sigma' \in S_n^{(i,j)}} C(\sigma', z) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma'). \quad (\text{C.1})$$

Wir müssen zeigen, dass $E_{ij} = E_{1n}$ gilt. Dies können wir in zwei Schritten tun, nämlich indem wir erst $E_{1j} = E_{1n}$ und dann $E_{ij} = E_{1j}$ zeigen. Da beide Beweise analog verlaufen, begnügen wir uns mit dem Beweis von

$$E_{1j} = \sum_{\sigma' \in S_n^{(1,j)}} C(\sigma', z) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} C(\sigma, z) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) = E_{1n}. \quad (\text{C.2})$$

Jedes Element $\sigma' \in S_n^{(1,j)}$ kann geschrieben werden als $1\alpha' n\beta' j \equiv 1\alpha'_1 \dots \alpha'_l n\beta'_1 \dots \beta'_\kappa j$ mit $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_l, \beta'_1, \dots, \beta'_\kappa\} = \{2, 3, \dots, n-1\} \setminus \{j\}$ und $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_l\} \cap \{\beta'_1, \dots, \beta'_\kappa\} = \emptyset$. Wir drücken zuerst den Parke-Taylor-Faktor $C(\sigma', z)$ mittels der KK-Relationen durch Parke-Taylor-Faktoren in der KK-Basis aus:

$$C(\sigma', z) = (-1)^{1+|\beta'|} \sum_{\kappa \in 1\alpha' \sqcup (j\beta'^T)n} C(\kappa, z) \quad (\text{C.3})$$

Wir erinnern daran, dass wir hierfür nicht verlangen müssen, dass z eine Lösung der Streugleichungen ist. Ebenso können wir den Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma')$ durch Numerator in der KK-Basis ausdrücken. Sei G' der Kamm-Graph bezüglich der Ordnung σ' und F' derjenige Graph, der aus G' durch Vertauschen der Äste an dem Vertex, an dem Teilchen n angehaftet ist, entsteht (siehe Abb. C.1). F' hat die Ordnung $\sigma'_F = 1\alpha'\beta'jn$. Benutzen wir die Antisymmetrie der 3-Teilchen-Vertizes und Gl. (2.58), so finden wir

$$\begin{aligned} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') &= -N^{\text{BCJ}}(F') = \sum_{\tilde{\sigma} \in \text{CO}(F') \cap \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} (-1)^{1+n_{\text{flip}}(\sigma'_F, \tilde{\sigma})} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\tilde{\sigma}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} \sum_{\tilde{\sigma} \in \text{CO}(G')} (-1)^{n_{\text{flip}}(\sigma', \tilde{\sigma})} \delta_{\sigma\tilde{\sigma}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

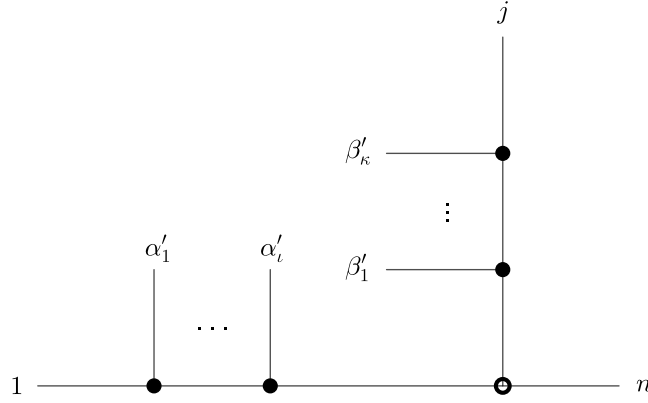


Abbildung C.1.: Der Graph F' , welcher aus dem Kamm-Graphen G' bezüglich der Ordnung $\sigma' = 1\alpha'n\beta'j$ durch Vertauschen der Äste an dem Vertex, an dem Teilchen n angehaftet ist, entsteht. Dieser ausgezeichnete Vertex ist hier als Kreis dargestellt.

Einsetzen von Gl. (C.3) und Gl. (C.4) in die Definitionsgleichung von E_{1j} liefert

$$E_{1j} = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) \sum_{\sigma'' \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} C(\sigma'', z) f(\sigma, \sigma'') \quad (\text{C.5})$$

mit

$$f(\sigma, \sigma'') = \sum_{\sigma' = 1\alpha'_0 n \beta'_0 j \in S_n^{(1,j)}} \sum_{\kappa \in 1\alpha' \sqcup (j\beta'^T)n} \sum_{\tilde{\sigma} \in \text{CO}(G')} \delta_{\sigma\tilde{\sigma}} \delta_{\kappa\sigma''} (-1)^{1+|\beta'|+n_{\text{flip}}(\sigma',\sigma)}. \quad (\text{C.6})$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\sigma'' = 12 \dots n$. Man überlegt sich leicht, dass sich alle Summanden auf der rechten Seite von Gl. (C.6), bis auf einen, jenen mit $\sigma' = \sigma'_0 \equiv 1\alpha'_0 n \beta'_0 j \equiv 12 \dots (j-1)n(n-1) \dots (j+1)j$ und $\kappa = \tilde{\sigma} = \sigma''$, wegheben. Wir haben also

$$f(\sigma, \sigma'') = \delta_{\sigma\sigma''} (-1)^{1+|\beta'_0|+n_{\text{flip}}(\sigma'_0, \sigma'')} = \delta_{\sigma\sigma''} (-1)^{1+(n-1-j)+(n-j)} = \delta_{\sigma\sigma''}. \quad (\text{C.7})$$

In Kombination mit Gl. (C.5) zeigt dies die Gültigkeit von Gl. (C.2) und damit die Permutationsinvarianz des Polarisationsfaktors.

C.2. Beweis der Äquivalenz der Polarisationsfaktoren

In diesem Anhang zeigen wir, dass die Definitionen des Polarisationsfaktors $E(z, p, \varepsilon)$ in Gl. (3.64) und in Gl. (4.80) übereinstimmen, wenn $\varepsilon_j p_j = 0, p_j^2 = 0$ und $z \in \mathcal{X}_n$. Dies ist wegen der KLT-Orthogonalität genau dann der Fall, wenn

$$A_n^{\text{YM}}(\sigma) = i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} \sum_{\rho \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} J(z, p) C(\sigma, z) C(\rho, z) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\rho) \quad (\text{C.8})$$

für alle $\sigma \in \mathcal{B}_n$ gilt. Benutzen wir die CHY-Darstellung der skalaren Amplitude $m_n(\sigma|\rho)$ und Gl. (2.107), so erhalten wir für die rechte Seite der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}
& i \sum_{z \in \mathcal{I}_n} \sum_{\rho \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} J(z, p) C(\sigma, z) C(\rho, z) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\rho) \\
&= i(-1)^{n-3} \sum_{\rho \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,0}(\sigma) \cap \mathcal{T}_{n,0}(\rho)} (-1)^{n_{\text{flip}}(\sigma|\rho)} \left(\prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e} \right) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\rho) \quad (\text{C.9}) \\
&= i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,0}(\sigma)} \left(\prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e} \right) \sum_{\rho \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}} \cap \text{CO}(G)} (-1)^{n_{\text{flip}}(\sigma|\rho)} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\rho).
\end{aligned}$$

Mit Reduktion von Numeratoren auf Numerator von Kamm-Graphen, Gl. (2.58), folgt weiter

$$\begin{aligned}
& i \sum_{z \in \mathcal{I}_n} \sum_{\rho \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} J(z, p) C(\sigma, z) C(\rho, z) N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\rho) \\
&= i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,0}(\sigma)} \left(\prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e} \right) N^{\text{BCJ}}(G) = A_n^{\text{YM}}(\sigma). \quad (\text{C.10})
\end{aligned}$$

Damit ist Gl. (C.8) gezeigt und die Behauptung bewiesen.

C.3. Äquivalenz der KLT-, CHY- und BCJ-Double-Copy-Verfahren

Wir haben in Kapitel 3.2.1 die CHY-Formel für die n -Graviton-Amplitude

$$A_n^{\text{G}}(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}) = i \sum_{z \in \mathcal{I}_n} J(z, p) E(z, p, \varepsilon) E(z, p, \tilde{\varepsilon}) \quad (\text{C.11})$$

aus den KLT-Relationen

$$A_n^{\text{G}}(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}) = -i \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,0}^{\text{BCJ}}} A_n^{\text{YM}}(\alpha, p, \varepsilon) S[\alpha|\beta] A_n^{\text{YM}}(\bar{\beta}, p, \tilde{\varepsilon}) \quad (\text{C.12})$$

gefolgert. Weiterhin haben wir in Kapitel 2.6 gesehen, dass man die n -Graviton-Amplitude für $n = 4$ auch durch das BCJ-Double-Copy-Verfahren erhält:

$$A_4^{\text{G}} = -i \left(\frac{N_s \tilde{N}_s}{s} + \frac{N_t \tilde{N}_t}{t} + \frac{N_u \tilde{N}_u}{u} \right) \quad (\text{C.13})$$

Wir wollen in diesem Anhang zeigen, dass sich dieses Resultat auf beliebige n verallgemeinern lässt, d. h. wir haben

$$A_n^{\text{G}} = i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{U}_n} \frac{N^{\text{BCJ}}(G) \tilde{N}^{\text{BCJ}}(G)}{\prod_{e \in E(G)} s_e}. \quad (\text{C.14})$$

Hierfür betrachten wir die rechte Seite von Gl. (C.11). Wir drücken zunächst die Polarisationsfaktoren durch Numerator von Kamm-Diagrammen, Gl. (4.80), aus und benutzen anschließend die CHY-Darstellung der Amplitude $m_n(\sigma|\sigma')$ der bi-adjungierten skalaren Theorie:

$$\begin{aligned}
A_n^G &= i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) E(z, p, \varepsilon) E(z, p, \tilde{\varepsilon}) \\
&= i \sum_{z \in \mathcal{X}_n} J(z, p) \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) \tilde{N}_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') C(\sigma, z) C(\sigma', z) \\
&= \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) \tilde{N}_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') m_n(\sigma|\sigma') \\
&= i(-1)^{n-3} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) \tilde{N}_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') \sum_{G \in \mathcal{T}_{n,0}(\sigma) \cap \mathcal{T}_{n,0}(\sigma')} (-1)^{n_{\text{flip}}(\sigma|\sigma')} \prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e}
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Durch Vertauschen der Summen über G und über σ, σ' sehen wir, dass dies dasselbe ist wie

$$\begin{aligned}
i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{U}_n} \sum_{\sigma, \sigma' \in \text{CO}(G) \cap \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma) \tilde{N}_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma') (-1)^{n_{\text{flip}}(\sigma|\sigma')} \prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e} \\
= i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{U}_n} N^{\text{BCJ}}(G) \tilde{N}^{\text{BCJ}}(G) \prod_{e \in E(G)} \frac{1}{s_e},
\end{aligned} \tag{C.16}$$

wobei wir die Formel für die Reduktion von BCJ-Numeratoren von beliebigen Graphen auf BCJ-Numerator von Kamm-Graphen, Gl. (2.58), benutzt haben. Damit ist Gl. (C.14) gezeigt und somit bewiesen, dass KLT-, CHY- und BCJ-Double-Copy-Verfahren äquivalent sind, um Amplituden in Einstein-Gravitation aus Amplituden in reiner YM-Theorie zu erhalten.

Beachte, dass Gl. (2.58) durch sukzessive Anwendung der Jacobi-Identität folgt und es somit notwendig ist, dass die Numerator in Gl. (C.14) BCJ-Numerator sind, also die Jacobi-Identität erfüllen.

Analog folgt die Äquivalenz von KLT-, CHY- und BCJ-Double-Copy-Verfahren im Fall von einer Quarklinie, d. h.

$$\begin{aligned}
A_{n,1}^{\text{QCD}^2}(p, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}) &= i \sum_{z \in \mathcal{X}_n^{\text{mass}}} J^{\text{mass}}(z, p) \tilde{E}(z, p, \varepsilon) \tilde{E}(z, p, \tilde{\varepsilon}) \\
&= i(-1)^{n-3} \sum_{G \in \mathcal{U}_{n,1}} \frac{N^{\text{BCJ}}(G) \tilde{N}^{\text{BCJ}}(G)}{\prod_{e \in E(G)} (s_e - m_e^2)} \\
&= \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{n,1}^{\text{BCJ}}} A_{n,1}^{\text{QCD}}(\alpha, p, \varepsilon) S^{\text{mass}}[\alpha|\beta] A_{n,1}^{\text{QCD}}(\bar{\beta}, p, \tilde{\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Der QCD-Polarisationsfaktor $\tilde{E}(z, p, \varepsilon)$ lässt sich darstellen als [100]

$$\begin{aligned}\tilde{E}(z, p, \varepsilon) &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{D}_{n,1}^{\text{BCJ}}} S^{\text{mass}}[\alpha|\bar{\beta}] C(\bar{\beta}, z) A_{n,1}^{\text{QCD}}(\alpha, p, \varepsilon) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n^{\text{KK}}} C(\sigma, z) N_{\text{MW}}^{\text{BCJ}}(\sigma).\end{aligned}\tag{C.18}$$

Die Gleichheit dieser beiden Darstellungen des QCD-Polarisationsfaktors folgt wie in Anhang C.2. Beachte hierbei, dass man für $k = 1$ die MW-Diagramme aus den Kamm-Diagrammen durch Ersetzen der Gluonlinie $1 - n$ durch eine Quarklinie erhält.

Anhang D.

Mathematische Grundbegriffe aus der Algebra und Algebraischen Geometrie

Wir werden in diesem Anhang mathematische Grundbegriffe einführen, soweit wir sie in dieser Arbeit benötigen. Im ersten Abschnitt führen wir den Begriff der Varietät ein und im zweiten Abschnitt studieren wir die Gröbnerbasis. Wir orientieren uns an [101, 102].

Es sei hier grundsätzlich \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper. Mit $R \equiv \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bezeichnen wir die Menge der Polynome in n Variablen über \mathbb{K} . Zusammen mit der üblichen komponentenweisen Addition und Multiplikation von Polynomen bildet R einen additiven Ring. Ein Ideal $I \subset R$ ist eine Untergruppe von R bezüglich Addition mit $f \cdot g = g \cdot f \in I$ für alle $f \in I$ und $g \in R$. Jedes Ideal $I \subset R$ ist nach dem Hilbertschen Basissatz endlich erzeugt, d. h. es existieren Polynome f_1, f_2, \dots, f_t mit

$$I = \langle f_1, f_2, \dots, f_t \rangle \equiv \{a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_t f_t \mid a_i \in R\}. \quad (\text{D.1})$$

$\langle f_1, f_2, \dots, f_t \rangle$ heißt das von f_1, f_2, \dots, f_t erzeugte Ideal und f_1, f_2, \dots, f_t heißen die Erzeugenden von $\langle f_1, f_2, \dots, f_t \rangle$. Allgemeiner sei für eine Menge $B \subset R$ das von B erzeugte Ideal gegeben durch

$$\langle B \rangle \equiv \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_t b_t \mid a_i \in R, b_i \in B\}. \quad (\text{D.2})$$

D.1. Varietäten und Abbildungen zwischen Varietäten

Sei \mathbb{A}^n der n -dimensionale affine Raum über \mathbb{K} , d. h. die Menge aller n -Tupel mit Komponenten aus \mathbb{K} . $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \equiv (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ heißt projektiver Raum. Die Äquivalenzrelation ist hierbei gegeben durch

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : x = \lambda y \quad (\text{D.3})$$

für $x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Elemente aus $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ notieren wir mit $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. Die Koordinaten des Punktes (x_0, x_1, \dots, x_n) der Äquivalenzklasse $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ heißen homogene Koordinaten.

Für ein Ideal $I \subset R$ ist die Verschwindungsmenge $\mathcal{V}(I) \subset \mathbb{A}^n$ definiert durch

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\}. \quad (\text{D.4})$$

Im projektiven Fall, d. h. für $x \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n$, ist die Gleichung $f(x) = 0$ im Allgemeinen nicht wohldefiniert. Um der Gleichung einen Sinn zu geben, müssen wir verlangen, dass das Ideal I von homogenen Polynomen erzeugt wird. Ein Polynom $f \in R$ heißt homogen vom Grad $d \in \mathbb{N}$, falls $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ gilt. Wir verwenden dann dieselbe Notation für die Verschwindungsmenge:

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\} \quad (\text{D.5})$$

Nun können wir definieren, was wir unter einer affinen bzw. projektiven Varietät verstehen:

Definition D.1.

- (i) Eine Menge $Y \subset \mathbb{A}^n$ heißt affin-algebraisch, falls es ein Ideal $I \subset R$ gibt mit $\mathcal{V}(I) = Y$. Eine Menge $W \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ heißt projektiv-algebraisch, falls es ein von homogenen Polynomen erzeugtes Ideal $I \subset R$ gibt mit $\mathcal{V}(I) = W$.
- (ii) \mathbb{A}^n und $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ werden zu topologischen Räumen, wenn wir Komplemente von affin-algebraischen bzw. projektiv-algebraischen Mengen als offen erklären. Wir nennen diese Topologie die Zariski-Topologie.
- (iii) Eine Teilmenge $\emptyset \neq X$ eines topologischen Raumes heißt irreduzibel, wenn aus $X = A_1 \cup A_2$ mit abgeschlossenen Mengen A_1, A_2 stets $X = A_1$ oder $X = A_2$ folgt.
- (iv) Eine affine Varietät ist eine irreduzible affin-algebraische Menge $Y \subset \mathbb{A}^n$. Eine projektive Varietät ist eine irreduzible projektiv-algebraische Menge $W \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$.
- (v) Die Dimension eines topologischen Raumes X ist das Supremum aller Längen l mit $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_l \subset X$, wobei X_0, X_1, \dots, X_l irreduzible abgeschlossene Mengen sind. Die Dimension einer affinen bzw. projektiven Varietät ist die Dimension der affinen bzw. projektiven Varietät als topologischer Raum.

Für $n = 1$ lassen sich (affine) Varietäten besonders einfach charakterisieren:

Beispiel D.2. Sei $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{A}^1$ eine affin-algebraische Menge. Dann ist $Y = \mathbb{A}^1$ oder $Y = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ mit $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}^1$ und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. \mathbb{A}^1 ist irreduzibel und $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ ist genau dann irreduzibel, wenn $m = 1$ ist. Die affinen Varietäten in \mathbb{A}^1 sind also einzelne Punkte oder der ganze affine Raum. $Y = \{p_1\}$ sind 0-dimensionale Varietäten und \mathbb{A}^1 eine eindimensionale Varietät. Die Zariski-Topologie τ auf \mathbb{A}^1 ist gegeben durch $\emptyset, \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \in \tau$. Diese erfüllt nicht das Hausdorffsche Trennungsaxiom, denn für $p_1, p_2 \in \mathbb{A}^1$ mit $p_1 \neq p_2$ ist der Durchschnitt zweier Umgebungen um p_1 bzw. um p_2 , $U_{p_1} \cap U_{p_2}$, das Komplement einer endlichen Menge und somit nicht leer, da \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen ist.

Da jedes Ideal in R endlich erzeugt ist, werden algebraische Mengen beschrieben durch die Gleichungen $f_1 = f_2 = \dots = f_t = 0$ mit $f_1, f_2, \dots, f_t \in R$. Wir bezeichnen ferner

Mengen, die sich als endliche Vereinigung von

$$\{x \in \mathbb{A}^n \mid g_i(x) = 0, h_{i,1}(x) > 0, \dots, h_{i,j}(x) > 0\} \quad (\text{D.6})$$

mit $g_i, h_{i,1}, \dots, h_{i,j} \in R$ darstellen lassen als affin-semialgebraisch. Analog verstehen wir unter einer projektiv-semialgebraischen Menge eine Menge, die sich als endliche Vereinigung der Bilder

$$\pi(\{x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid g_i(x) = 0, h_{i,1}(x) > 0, \dots, h_{i,j}(x) > 0\}) \quad (\text{D.7})$$

mit homogenen Polynomen $g_i, h_{i,1}, \dots, h_{i,j}$ unter der Projektion

$$\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n, \quad x \mapsto [x], \quad (\text{D.8})$$

darstellen lässt.

Ist V eine algebraische Menge, jedoch keine Varietät, so lässt sie sich in Varietäten zerlegen:

Satz D.3. Sei $V \neq \emptyset$ eine affin- bzw. projektiv-algebraische Menge. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$V = \bigcup_{i=1}^r V_i \quad (\text{D.9})$$

mit $V_i \not\subseteq V_j$ für $i \neq j$ in irreduzible Mengen V_1, V_2, \dots, V_r . Diese heißen die irreduziblen Komponenten von V .

Das Achsenkreuz $\{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ im 2-dimensionalen affinen Raum ist zum Beispiel eine affin-algebraische Menge, die keine affine Varietät ist. Die irreduziblen Komponenten des Achsenkreuzes sind die x - und die y -Achse.

In Kapitel 4.1 haben wir als Trägerraum X der positiven Geometrie nur nichtsinguläre Varietäten zugelassen. Diese können wir mit der üblichen (hausdorffschen) Topologie als Mannigfaltigkeit auffassen, d. h. in jedem Punkt sieht X lokal wie ein euklidischer Raum aus. Genauer verstehen wir darunter folgende Varietäten:

Definition D.4. Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät der Dimension D und angenommen $f_1, f_2, \dots, f_t \in R$ sind Erzeugende des Verschwindungsideals

$$I(X) \equiv \{f \in R \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X\} \quad (\text{D.10})$$

von X . Ein Punkt $x \in X$ heißt nichtsingulärer Punkt von X , falls die Jacobi-Determinante

$$\det \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right) \quad (\text{D.11})$$

im Punkt x den Rang $n - D$ hat. Ansonsten heißt x singulärer Punkt von X . X heißt nichtsingulär, wenn jeder Punkt nichtsingulär ist.

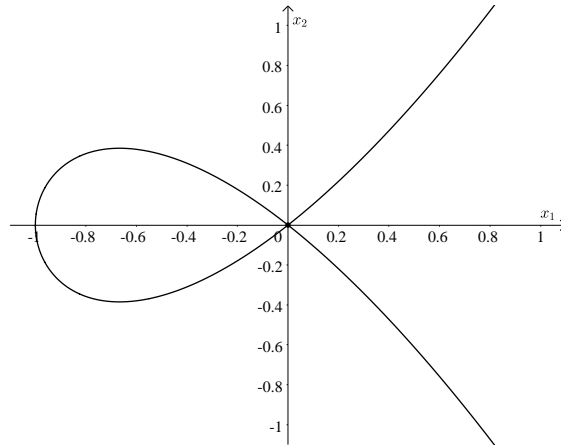


Abbildung D.1.: Die projektive Varietät X aus Beispiel D.5 aufgefasst als Teilmenge \tilde{X} von \mathbb{A}^2 . Der Ursprung ist ein singulärer Punkt der Varietät.

Diese Definition hängt nicht von den Erzeugenden f_1, f_2, \dots, f_t von $I(X)$ ab. Außerdem können wir jeden Punkt im projektiven Raum $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ (lokal) mit Hilfe einer affinen Karte als Punkt in \mathbb{A}^n beschreiben und diese Definition somit auch auf den projektiven Fall übertragen. Hierbei spielt es keine Rolle, welche Karte wir wählen.

Beispiel D.5. Betrachte die eindimensionale projektive Varietät $X = \{x \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid f(x) = 0\}$, wobei f das homogene Polynom $f(x_0, x_1, x_2) = x_2^2 x_0 - x_1^3 - x_0 x_1^2$ ist. Sei $U = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\}$. Vermöge der Karte

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{A}^2, \quad [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto (y_1, y_2) \equiv \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right), \quad (\text{D.12})$$

von $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ können wir X als affine Varietät

$$\tilde{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid \tilde{f}(x_1, x_2) \equiv x_2^2 - x_1^3 - x_1^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^2 \quad (\text{D.13})$$

auffassen. Das inhomogene Polynom \tilde{f} ist ein Erzeuger des Verschwindungsideals $I(\tilde{X})$ und die Jacobi-Determinante der Funktion \tilde{f} verschwindet genau im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{A}^2$. Also ist X singulär im Punkt $x_0 \equiv \phi^{-1}(0, 0) = [1 : 0 : 0] \in U \cap X$ und nichtsingulär in allen $x \in U \cap X$ mit $x \neq x_0$. Dies ist in Abbildung D.1 veranschaulicht.

Abschließend definieren wir, was wir unter rationalen Abbildungen zwischen zwei Varietäten verstehen. Dies sind partielle Funktionen, die nur auf einer offenen Teilmenge der Varietät definiert sind und dort jede Komponente als Quotient zweier Polynome dargestellt werden kann. Wir beschränken uns hier auf den projektiven Fall.

Definition D.6. Seien $X \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n, Y \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^m$ zwei projektive Varietäten und $X' \subset X, Y' \subset Y$ offen und nichtleer.

- (i) Eine Funktion $f : Y' \rightarrow \mathbb{K}$ heißt regulär im Punkt $x \in Y'$, wenn eine offene Umgebung $x \in U \subset Y'$ und homogene Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ vom selben Grad existieren mit $h \neq 0$ auf U und $f = g/h$ auf U . Da g und h denselben Grad besitzen, ist der Quotient g/h wohldefiniert. f heißt regulär, wenn f in jedem Punkt $x \in Y'$ regulär ist.
- (ii) Ein Morphismus $\Phi : X' \rightarrow Y'$ ist eine stetige Abbildung, sodass für jede offene Menge $V \subset Y'$ und für jede reguläre Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ die Komposition $f \circ \Phi : \Phi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ regulär ist.
- (iii) Eine rationale Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, Φ_U) , wobei $\emptyset \neq U \subset X$ offen ist, $\Phi_U : U \rightarrow Y$ ein Morphismus und zwei Paare (U, Φ_U) und (V, Φ_V) als äquivalent erklärt werden genau dann, wenn $\Phi_U = \Phi_V$ auf $U \cap V$ gilt.

Eine uns vertraute rationale Abbildung ist die Möbiustransformation:

Beispiel D.7. Betrachte die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad \Phi([x_0 : x_1]) \equiv [\Phi_0([x_0 : x_1]) : \Phi_1([x_0 : x_1])] \equiv [ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1], \quad (\text{D.14})$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Φ ist offenbar eine rationale Abbildung, da Φ_0 und Φ_1 homogene Polynome vom Grad 1 und somit reguläre Funktionen sind. Wegen $ad - bc \neq 0$ können ferner $\Phi_0([x_0 : x_1])$ und $\Phi_1([x_0 : x_1])$ in einem beliebigen Punkt $[x_0 : x_1] \in \mathbb{CP}^1$ nicht beide gleichzeitig verschwinden. Φ ist also überall auf \mathbb{CP}^1 definiert und damit ein Morphismus. Φ heißt Möbiustransformation. Identifizieren wir \mathbb{CP}^1 mit der Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via der Karte

$$\{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad [x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_0}{x_1}, \quad (\text{D.15})$$

und $[1 : 0] \leftrightarrow \{\infty\}$, so können wir die Möbiustransformation in der üblichen Form darstellen (vgl. Gl. (3.4)):

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{D.16})$$

D.2. Gröbnerbasen

Die Gröbnerbasis eines Ideals ist eine Menge von Polynomen, die besonders gute Eigenschaften bei Division besitzt und somit insbesondere in der Computeralgebra von großer praktischer Bedeutung ist. Sie hängt neben dem Ideal auch von der Ordnung der Monome ab.

Definition D.8. Eine reflexive, transitive, antisymmetrische, totale und mit der Addition verträgliche Relation \leq auf \mathbb{N}_0^n , die ein kleinstes Element besitzt, heißt Monomordnung. Im einzelnen gilt für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$:

- $\alpha \leq \alpha$ (Reflexivität)
- $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ (Transitivität)
- $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ (Antisymmetrie)
- $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$ (Totalität)
- $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ (Verträglichkeit mit Addition)
- $0 \leq \alpha$ (Existenz eines kleinsten Elementes)

Beispiel D.9. Die lexikografische Ordnung \leq_{lex} definiert durch $\alpha \leq_{\text{lex}} \beta$ dann und nur dann, wenn $\alpha = \beta$ oder $\alpha_{i_0} < \beta_{i_0}$ für $i_0 = \max\{i | \alpha_i \neq \beta_i\}$, wobei α_i die Komponenten von α sind, ist eine Monomordnung. In dieser Ordnung ist z. B. $(2, 5, 7, 1) \leq_{\text{lex}} (2, 4, 5, 6)$.

Ist eine Monomordnung \leq fixiert, so können wir als den Grad eines Polynoms

$$f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in R, \quad x^{\alpha} \equiv x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (\text{D.17})$$

das Maximum aller α (bzgl. \leq) definieren, dessen zugehöriger Koeffizient c_{α} nicht verschwindet:

$$\deg_{\leq}(f) \equiv \max\{\alpha | c_{\alpha} \neq 0\} \quad (\text{D.18})$$

Das Leitmonom von f , $\text{LM}_{\leq}(f)$, und der Leitterm von f , $\text{LT}_{\leq}(f)$, sind dann definiert durch

$$\text{LM}_{\leq}(f) \equiv x^{\deg_{\leq}(f)}, \quad \text{LT}_{\leq}(f) \equiv c_{\deg_{\leq}(f)} x^{\deg_{\leq}(f)}. \quad (\text{D.19})$$

Zum Beispiel ist das Leitmonom und der Leitterm des Polynoms

$$f = 10 - x_1 x_2 - 4x_1^4 x_2 + 2x_1^2 x_3^2 - 7x_1 x_3^3 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3] \quad (\text{D.20})$$

bezüglich der lexikografischen Ordnung gegeben durch

$$\text{LM}_{\leq_{\text{lex}}}(f) = x_1 x_3^3, \quad \text{LT}_{\leq_{\text{lex}}}(f) = -7x_1 x_3^3. \quad (\text{D.21})$$

Für ein Ideal $\{0\} \neq I \subset R$ bezeichnen wir ferner mit $\text{LT}_{\leq}(I)$ die Leiterte von Elementen aus I :

$$\text{LT}_{\leq}(I) \equiv \{\text{LT}_{\leq}(f) | f \in I \setminus \{0\}\} \quad (\text{D.22})$$

Seien $f_1, f_2, \dots, f_t \in R$ Erzeugende eines Ideals $I \subset R$, $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_t \rangle$. Es ist aus der Definition von $\text{LT}_{\leq}(I)$ offensichtlich, dass das von den Leiterten von f_1, f_2, \dots, f_t erzeugte Ideal im von $\text{LT}_{\leq}(I)$ erzeugten Ideal liegt:

$$\langle \text{LT}_{\leq}(f_1), \text{LT}_{\leq}(f_2), \dots, \text{LT}_{\leq}(f_t) \rangle \subset \langle \text{LT}_{\leq}(I) \rangle \quad (\text{D.23})$$

Gleichheit gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Die ausgezeichnete Basis von Polynomen, für welche Gleichheit gilt, bezeichnen wir als Gröbnerbasis.

Definition D.10. Sei $\{0\} \neq I \subset R$ ein Ideal und \leq eine feste Monomordnung. Dann gibt es ein $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\} \subset I$ mit

$$\langle \text{LT}_{\leq}(g_1), \text{LT}_{\leq}(g_2), \dots, \text{LT}_{\leq}(g_t) \rangle = \langle \text{LT}_{\leq}(I) \rangle. \quad (\text{D.24})$$

G heißt Gröbnerbasis von I .

G kann mit dem so genannten Buchberger-Algorithmus berechnet werden, welcher (in einer modifizierten Form) in den meisten Computeralgebrasystemen implementiert ist.

Wir geben nachfolgend einige Eigenschaften der Gröbnerbasis an.

Satz D.11. Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ eine Gröbnerbasis des Ideals $\{0\} \neq I \subset R$ bezüglich einer Monomordnung \leq .

- (i) g_1, g_2, \dots, g_t sind Erzeugende von I . Dies rechtfertigt den Namen Gröbnerbasis.
- (ii) Für jedes $f \in R$ existiert ein eindeutiges $r \in R$ mit

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_t g_t + r \quad (\text{D.25})$$

und $a_i \in R$, sodass kein Term von r teilbar durch eines der Leiterterme $\text{LT}_{\leq}(g_1), \text{LT}_{\leq}(g_2), \dots, \text{LT}_{\leq}(g_t)$ ist. Wir setzen $\bar{f}^G \equiv r$. Man erhält a_i und r durch Polynomdivision von f durch die Gröbnerbasis. Hierbei hängen die a_i von der Reihenfolge der Elemente in G ab. Insbesondere ist $f \in I$ genau dann, wenn der Rest \bar{f}^G bei Division durch die Gröbnerbasis verschwindet.

- (iii) Die Menge der Basismonome B sei

$$B \equiv \{x^\alpha \mid x^\alpha \notin \text{LT}_{\leq}(I)\} \quad (\text{D.26})$$

und der von B erzeugte Vektorraum

$$\text{span}(B) \equiv \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_t b_t \mid a_i \in \mathbb{K}, b_i \in B\}. \quad (\text{D.27})$$

Die Abbildung

$$\varphi : R \rightarrow \text{span}(B), \quad f \mapsto \bar{f}^G, \quad (\text{D.28})$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\varphi) = I$ und $\varphi^2 = \varphi$. Insbesondere ist

$$\pi : \text{span}(B) \rightarrow R/I, \quad f \mapsto [f] \equiv f + I, \quad (\text{D.29})$$

ein Vektorraumisomorphismus.

- (iv) Sei R/I endlichdimensional. Dann ist die Anzahl der Elemente in der Verschwindungsmenge $\mathcal{V}(I)$ höchstens gleich der Dimension von R/I (als \mathbb{K} -Vektorraum) bzw. der Dimension von $\text{span}(B)$ und insbesondere endlich. Ist I sogar ein Radikaleal, d. h. gilt

$$\sqrt{I} \equiv \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\} = I, \quad (\text{D.30})$$

so ist die Anzahl der Elemente in $\mathcal{V}(I)$ gleich der Dimension von R/I bzw. der Dimension von $\text{span}(B)$.

Anhang E.

Mathematica Quelltext zur Berechnung der BCJ-Numerator

Nachfolgend findet sich der Quelltext für die Implementierung des in Kapitel 5.3 vorgestellten Algorithmus für die Berechnung der BCJ-Numerator $N_{\text{comb}}^{\text{BCJ}}(\sigma)$ von Kamm-Graphen in MATHEMATICA. Wir verwenden eine globale Referenzordnung ($r[i]$ im Quelltext), welche zusammen mit der Ordnung σ ($s[i]$ im Quelltext) der externen Teilchen und der Anzahl n der Gluonen als Eingabe dient.

```
1 tree[n_] :=
2 For[k = 3, k <= n, k++, tree[2] = {{1 -> s[2]}}];
3 tree[k] =
4 Flatten[Table[
5   Insert[tree[k - 1][[i]], s[j] -> s[k], k - 1, {j, 1,
6     k - 1}, {i, (k - 2)!}], 1]] (*Menge der geordneten Bäume*)
7
8
9 path[j_, i_, n_] :=
10 SortBy[For[path[0, i, n] = FindShortestPath[tree[n][[i]], 1, n];
11   help[0, i, n] =
12     SortBy[Complement[Table[o, {o, 1, n}], path[0, i, n]], r]; k = 1,
13   help[k - 1, i, n] != {}, k++,
14   path[k, i, n] =
15     If[Intersection[Flatten[Table[path[g, i, n], {g, 0, k - 1}],
16       FindShortestPath[tree[n][[i]], 1,
17       help[k - 1, i, n][[1]]] == {1},
18     FindShortestPath[tree[n][[i]], 1, help[k - 1, i, n][[1]],
19     VertexList[
20     EdgeList[
21     GraphDifference[
22     Subgraph[tree[n][[i]],
23     FindShortestPath[tree[n][[i]], 1, help[k - 1, i, n][[1]]],
24     Subgraph[tree[n][[i]],
25     Flatten[Table[path[g, i, n], {g, 0, k - 1}]]]]];
26   help[k, i, n] =
27   SortBy[Complement[help[k - 1, i, n], path[k, i, n]], r]; k],
28 s] (*Assoziiere zu jedem Baum alle Pfade*)
29
30
```



```

31 npr[z_, j_, i_, n_] :=
32   For[k = 2, k <= z, k++, npr[2, j, i, n] = F[path[j, i, n][[2]]];
33   npr[k + 1, j, i, n] = npr[k, j, i, n].F[path[j, i, n][[k + 1]]]]
34 nprnew[z_, j_, i_, n_] :=
35   For[k = 2, k <= z, k++, nprnew[2, j, i, n] = F[path[j, i, n][[-2]]];
36   nprnew[k + 1, j, i, n] =
37   nprnew[k, j, i, n].F[path[j, i, n][[-k - 1]]]]
38 fact[j_, i_, n_] :=
39   If[Length[path[j, i, n]] ==
40   2, \[Epsilon][path[j, i, n][[-1]]].p[
41   path[j, i, n][[1]], \[Epsilon][path[j, i, n][[-1]].nprnew[
42   Length[path[j, i, n] - 1, j, i, n].p[path[j, i, n][[1]]]]]
43 fact2[i_, n_] :=
44   If[Length[path[0, i, n]] ==
45   2, \[Epsilon][path[0, i, n][[1]].\[Epsilon][
46   path[0, i, n][[-1]], \[Epsilon][path[0, i, n][[1]].npr[
47   Length[path[0, i, n] - 1, 0, i, n].\[Epsilon][
48   path[0, i, n][[-1]]] (*Zu jedem Pfad assoziiere einen Faktor*)
49
50
51 indold[i_, n_] :=
52   For[k = 1, help[k - 1, i, n] != {}, k++, indold[i, n] = k]
53 ind[i_, n_] := If[help[0, i, n] == {}, 0, indold[i, n]]
54 Fact[i_, n_] := (-1)^(Length[help[0, i, n]])*fact2[i, n]*
55   Product[fact[j, i, n], {j, 1, ind[i, n]}]
56 num[n_] := Sum[Fact[i, n], {i, 1, (n - 1)!}]
57
58
59 (*Eingabe*)
60 n = 5; (*Anzahl der Gluonen*)
61
62 Table[r[i] = n - i + 1, {i, 1, n}]; (*Referenzordnung*)
63 s[1] = 1;
64 s[n] = n;
65 Table[s[i] = i, {i, 2, n - 1}]; (*Externe Ordnung der Gluonen*)
66
67 tree[n];
68 num[n] (*Ausgabe: Numerator)

```

Danksagung

Allen voran möchte ich mich bei meinem Betreuer [REDACTED] dafür bedanken, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat in diesem interessanten Themenbereich zu arbeiten. Weiterhin danke ich meinem ehemaligen Zimmerkollegen [REDACTED] für zahlreiche hilfreiche Diskussionen. [REDACTED] danke ich für ihre Unterstützung, ohne die das Studium der Physik in derart unbeschwerter Weise nicht möglich gewesen wäre. Außerdem bedanke ich mich beim [REDACTED] für die finanzielle Unterstützung.

Literaturverzeichnis

- [1] M. L. Mangano und S. J. Parke, *Multi-Parton Amplitudes in Gauge Theories*, Phys. Rep. **200** (1991) 301-367, [arXiv:0509223v1 [hep-th]].
- [2] F. A. Berends und W. Giele, *On six-jet production at hadron colliders*, Nucl. Phys. B **294** (1987) 700.
- [3] V. Del Duca, L. J. Dixon und F. Maltoni, *New Color Decompositions for Gauge Amplitudes at Tree and Loop Level*, Nucl. Phys. B **571** (2000) 51-70, [arXiv:9910563v1 [hep-ph]].
- [4] L. J. Dixon, *A brief introduction to modern amplitude methods*, [arXiv:1310.5353v1 [hep-ph]].
- [5] C. Reuschle und S. Weinzierl, *Decomposition of one-loop QCD amplitudes into primitive amplitudes based on shuffle relations*, Phys. Rev. D **88** (2013) 105020, [arXiv:1310.0413v3 [hep-ph]].
- [6] T. Schuster, *Color ordering in QCD*, Phys. Rev. D **80** (2014) 105022, [arXiv:1311.6296v1 [hep-ph]].
- [7] R. Kleiss und H. Kuijf, *Multi-gluon cross-sections and five jet production at hadron colliders*, Nucl. Phys. B **312** (1989) 616.
- [8] Z. Bern, J. J. M. Carrasco und H. Johansson, *New Relations for Gauge-Theory Amplitudes*, Phys. Rev. D **78** (2008) 085011, [arXiv:0805.3993v2 [hep-ph]].
- [9] E. Witten, *Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space*, Commun. Math. Phys. **252** (2004) 189-258, [arXiv:0312171v2 [hep-th]].
- [10] R. Britto, F. Cachazo und B. Feng, *New Recursion Relations for Tree Amplitudes of Gluons*, Nucl. Phys. B **715** (2005) 499-522, [arXiv:0412308v3 [hep-th]].
- [11] R. Britto et al., *Direct Proof of Tree-Level Recursion Relation in Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 181602, [arXiv:0501052v2 [hep-th]].
- [12] J. M. Henn und J. C. Plefka, *Scattering Amplitudes in Gauge Theories*, Lect. Notes Phys. **883** (2014) 1-195.
- [13] R. Britto und A. Ochirov, *On-shell recursion for massive fermion currents*, JHEP **01** (2013) 002, [arXiv:1210.1755v2 [hep-th]].

- [14] J. L. Bourjaily, *Efficient Tree-Amplitudes in $\mathcal{N} = 4$: Automatic BCFW Recursion in MATHEMATICA*, [arXiv:1011.2447v1 [hep-ph]].
- [15] Y. Jia, R. Huang und C.-Y. Liu, *$U(1)$ -decoupling, KK and BCJ relations in $\mathcal{N}=4$ SYM*, Phys. Rev. D **82** (2010) 065001, [arXiv:1005.1821v4 [hep-th]].
- [16] L. de la Cruz, A. Kniss und S. Weinzierl, *Proof of the fundamental BCJ relations for QCD amplitudes*, JHEP **09** (2015) 197, [arXiv:1508.01432v2 [hep-th]].
- [17] H. Kawai, D. C. Lewellen und S.-H. H. Tye, *A relation between tree amplitudes of closed and open strings*, Nucl. Phys. B **269** (1986) 1-23.
- [18] T. Sondergaard, *Perturbative Gravity and Gauge Theory Relations – A Review*, Adv. High Energy Phys. **2012** (2012) 726030, [arXiv:1106.0033v1 [hep-th]].
- [19] N. E. J. Bjerrum-Bohr et al., *Gravity and Yang-Mills Amplitude Relations*, Phys. Rev. D **82** (2010) 107702, [arXiv:1005.4367v2 [hep-th]].
- [20] H. Johansson und A. Ochirov, *Color-kinematics duality for QCD amplitudes*, JHEP **01** (2016) 170, [arXiv:1507.00332v3 [hep-ph]].
- [21] L. de la Cruz, A. Kniss und S. Weinzierl, *Double Copies of Fermions as Matter that Interacts Only Gravitationally*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 201601, [arXiv:1601.04523v2 [hep-th]].
- [22] S. J. Parke und T. R. Taylor, *An Amplitude For n Gluon Scattering*, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2459.
- [23] R. Roiban, M. Spradlin und A. Volovich, *On the Tree Level S-Matrix of Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. D **70** (2004) 026009, [arXiv:0403190v2 [hep-th]].
- [24] C. Cheung und D. O’Connell, *Amplitudes and Spinor-Helicity in Six Dimensions*, JHEP **07** (2009) 075, [arXiv:0902.0981v2 [hep-th]].
- [25] R. H. Boels, *Covariant representation theory of the Poincaré algebra and some of its extensions*, JHEP **01** (2010) 010, [arXiv:1201.2653v2 [hep-th]].
- [26] F. Cachazo et al., *The S matrix of 6D super Yang-Mills and maximal supergravity from rational maps*, JHEP **09** (2018) 125, [arXiv:1805.11111v2 [hep-th]].
- [27] Y. Geyer und L. Mason, *Polarized Scattering Equations for 6D Superamplitudes*, Phys. Rev. Lett. **122** (2019) 101601, [arXiv:1812.05548v1 [hep-th]].
- [28] F. Cachazo, S. He und E. Y. Yuan, *Scattering in Three Dimensions from Rational Maps*, JHEP **10** (2013) 141, [arXiv:1306.2962v1 [hep-th]].
- [29] F. Cachazo, S. He und E. Y. Yuan, *Scattering Equations and KLT Orthogonality*, Phys. Rev. D **90** (2014) 065001, [arXiv:1306.6575v1 [hep-th]].

-
- [30] F. Cachazo, S. He und E. Y. Yuan, *Scattering of Massless Particles in Arbitrary Dimension*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 171601, [arXiv:1307.2199v2 [hep-th]].
- [31] F. Cachazo, S. He und E. Y. Yuan, *Scattering of Massless Particles: Scalars, Gluons and Gravitons*, JHEP **07** (2014) 033, [arXiv:1309.0885v1 [hep-th]].
- [32] F. Cachazo, S. He und E. Y. Yuan, *Einstein-Yang-Mills Scattering Amplitudes From Scattering Equations*, JHEP **01** (2015) 121, [arXiv:1409.8256v2 [hep-th]].
- [33] F. Cachazo, S. He und E. Y. Yuan, *Scattering Equations and Matrices: From Einstein To Yang-Mills, DBI and NLSM*, JHEP **07** (2015) 149, [arXiv:1412.3479v2 [hep-th]].
- [34] L. de la Cruz, A. Kniss und S. Weinzierl, *The CHY representation of tree-level primitive QCD amplitudes*, JHEP **11** (2015) 217, [arXiv:1508.06557v2 [hep-th]].
- [35] S. G. Naculich, *CHY representations for gauge theory and gravity amplitudes with up to three massive particles*, JHEP **05** (2015) 050, [arXiv:1501.03500v2 [hep-th]].
- [36] S. G. Naculich, *Scattering equations and BCJ relations for gauge and gravitational amplitudes with massive scalar particles*, JHEP **09** (2014) 029, [arXiv:1407.7836v2 [hep-th]].
- [37] C. Kalousios, *Scattering equations, generating functions and all massless five point tree amplitudes*, JHEP **05** (2015) 054, [arXiv:1502.07711v3 [hep-th]].
- [38] C. Baadsgaard et al., *Integration Rules for Scattering Equations*, JHEP **09** (2015) 129, [arXiv:1506.06137v1 [hep-th]].
- [39] R. Huang et al., *An Algebraic Approach to the Scattering Equations*, JHEP **12** (2015) 056, [arXiv:1509.04483v1 [hep-th]].
- [40] F. Cachazo und H. Gomez, *Computation of contour integrals on $\mathcal{M}_{0,n}$* , JHEP **04** (2016) 108, [arXiv:1505.03571v1 [hep-th]].
- [41] M. Sogaard und Y. Zhang, *Scattering equations and global duality of residues*, Phys. Rev. D **93** (2016) 105009, [arXiv:1509.08897v1 [hep-th]].
- [42] L. de la Cruz, A. Kniss und S. Weinzierl, *Relations for Einstein–Yang–Mills amplitudes from the CHY representation*, Phys. Lett. B **767** (2017) 86-90, [arXiv:1607.06036v2 [hep-ph]].
- [43] F. Teng und B. Feng, *Expanding Einstein-Yang-Mills by Yang-Mills in CHY frame*, JHEP **05** (2017) 075, [arXiv:1703.01269v2 [hep-th]].
- [44] Y.-J. Du und F. Teng, *BCJ numerators from reduced Pfaffian*, JHEP **04** (2017) 033, [arXiv:1703.05717v1 [hep-th]].

- [45] N. Arkani-Hamed et al., *Scattering forms and the positive geometry of kinematics, color and the worldsheet*, JHEP **05** (2018) 096, [arXiv:1711.09102v2 [hep-th]].
- [46] N. Arkani-Hamed und J. Trnka, *The Amplituhedron*, JHEP **10** (2014) 030, [arXiv:1312.2007v1 [hep-th]].
- [47] N. Arkani-Hamed, Y. Bai und T. Lam, *Positive geometries and canonical forms*, JHEP **11** (2017) 039, [arXiv:1703.04541v2 [hep-th]].
- [48] D. Tamari, *Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev*, Bull. de la Soc. Math. de France **82** (1954) 53-96.
- [49] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963) 275-292.
- [50] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963) 293-312.
- [51] L. de la Cruz, A. Kniss und S. Weinzierl, *Properties of scattering forms and their relation to associahedra*, JHEP **03** (2018) 064, [arXiv:1711.07942v2 [hep-th]].
- [52] A. Kniss, *Streugleichungen mit Fermionen*, Masterarbeit (2016), Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
- [53] F. Maltoni et al., *Color-flow decomposition of QCD amplitudes*, Phys. Rev. D **67** (2002) 014026, [arXiv:hep-ph/0209271v2 [hep-ph]].
- [54] K. Hagiwara und Y. Takaesu, *Generating QCD amplitudes in the color-flow basis with MadGraph*, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1668, [arXiv:1010.0748v3 [hep-ph]].
- [55] W. Kilian et al., *QCD in the Color-Flow Representation*, JHEP **10** (2012) 022, [arXiv:1206.3700v2 [hep-ph]].
- [56] C. Duhr, S. Höche und F. Maltoni, *Color-dressed recursive relations for multiparton amplitudes*, JHEP **08** (2006) 062, [arXiv:0607057v1 [hep-ph]].
- [57] T. Melia, *Dyck words and multi-quark primitive amplitudes*, Phys. Rev. D **88** (2013) 014020, [arXiv:1304.7809v1 [hep-ph]].
- [58] T. Melia, *Getting more flavor out of one-flavor QCD*, Phys. Rev. D **89** (2014) 074012, [arXiv:1312.0599v1 [hep-ph]].
- [59] R. P. Stanley, *Catalan Addendum*, (2014).
- [60] Z. Bern et al., *Gravity as the Square of Gauge Theory*, Phys. Rev. D **82** (2010) 065003, [arXiv:1004.0693v1 [hep-th]].
- [61] M. Tolotti und S. Weinzierl, *Construction of an effective Yang-Mills Lagrangian with manifest BCJ duality*, JHEP **07** (2013) 111, [arXiv:1306.2975v1 [hep-th]].

-
- [62] B. Feng, R. Huang und Y. Jia, *Gauge Amplitude Identities by On-shell Recursion Relation in S-matrix Program*, Phys. Lett. B **695** (2011) 350-353, [arXiv:1004.3417v3 [hep-ph]].
- [63] Y.-X. Chen, Y.-J. Du und B. Feng, *A Proof of the Explicit Minimal-basis Expansion of Tree Amplitudes in Gauge Field Theory*, JHEP **02** (2011) 112, [arXiv:1101.0009v1 [hep-th]].
- [64] F. Cachazo und G. Zhang, *Minimal Basis in Four Dimensions and Scalar Blocks*, [arXiv:1601.06305v1 [hep-th]].
- [65] Z. Bern, *Perturbative Quantum Gravity and its Relation to Gauge Theory*, Living Rev. Relativ. **5** (2002) 5, [arXiv:gr-qc/0206071v2].
- [66] H. W. Hamber, *Quantum Gravitation: The Feynman Path Integral Approach*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).
- [67] S. Weinzierl, *Tales of 1001 Gluons*, [arXiv:1610.05318v2 [hep-th]].
- [68] M. Chiodaroli et al., *Scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 2$ Maxwell-Einstein and Yang-Mills/Einstein supergravity*, JHEP **01** (2015) 081, [arXiv:1408.0764v2 [hep-th]].
- [69] Y.-J. Du und C.-H. Fu, *Explicit BCJ numerators of nonlinear sigma model*, JHEP **09** (2016) 174, [arXiv:1606.05846v2 [hep-th]].
- [70] M. Chiodaroli et al., *Explicit formulae for Yang-Mills-Einstein amplitudes from the double copy*, JHEP **07** (2017) 002, [arXiv:1703.00421v2 [hep-th]].
- [71] J. J. M. Carrasco, *Lectures on Gauge and Gravity Amplitude Relations*, JHEP **12** (2014) 056, [arXiv:1410.0239v2 [hep-th]].
- [72] C.-H. Fu und K. Krasnov, *Colour-kinematics duality and the Drinfeld double of the Lie algebra of diffeomorphisms*, JHEP **01** (2017) 075, [arXiv:1603.02033v2 [hep-th]].
- [73] R. Monteiro, D. O’Connell und C. D. White, *Black holes and the double copy*, JHEP **12** (2014) 056, [arXiv:1410.0239v2 [hep-th]].
- [74] A. Luna, R. Monteiro und D. O’Connell, *The classical double copy for Taub-NUT spacetime*, Phys. Lett. B **750** (2012) 272-277, [arXiv:1507.01869v2 [hep-th]].
- [75] A. Luna et al., *The double copy: Bremsstrahlung and accelerating black holes*, JHEP **06** (2016) 023, [arXiv:1603.05737v1 [hep-th]].
- [76] A. Luna et al., *Perturbative spacetimes from Yang-Mills theory*, JHEP **04** (2017) 069, [arXiv:1611.07508v2 [hep-th]].
- [77] T. Melia, *Proof of a new colour decomposition for QCD amplitudes*, JHEP **12** (2015) 107, [arXiv:1509.03297v2 [hep-ph]].

- [78] N. Arkani-Hamed, L. Rodina und J. Trnka, *Locality and Unitarity of Scattering Amplitudes from Singularities and Gauge Invariance*, Phys. Rev. Lett. **120** (2018) 231602, [arXiv:1612.02797v1 [hep-th]].
- [79] C. D. White, *Exact solutions for the biadjoint scalar field*, Phys. Lett. B **763** (2016) 365-369, [arXiv:1606.04724v2 [hep-th]].
- [80] L. Dolan und P. Goddard, *The Polynomial Form of the Scattering Equations*, JHEP **07** (2014) 029, [arXiv:1402.7374v1 [hep-th]].
- [81] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Aufl., (2013).
- [82] D. A. Cox, J. Little und D. O’Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, 2. Aufl., (2005).
- [83] F. Cachazo und Y. Geyer, *A “Twistor String” Inspired Formula For Tree-Level Scattering Amplitudes in $\mathcal{N} = 8$ SUGRA*, [arXiv:1206.6511v1 [hep-th]].
- [84] L. Dolan und P. Goddard, *Proof of the formula of Cachazo, He and Yuan for Yang-Mills tree amplitudes in arbitrary dimension*, JHEP **05** (2014) 010, [arXiv:1311.5200v1 [hep-th]].
- [85] S. Stieberger und T. R. Taylor, *New relations for Einstein–Yang–Mills amplitudes*, Nucl. Phys. B **913** (2016) 151-162, [arXiv:1606.09616v1 [hep-th]].
- [86] J. Leray, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III)*, Bull. de la Soc. Math. de France **87** (1959) 81-180.
- [87] F. C. S. Brown, *Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{R})$* , C. R. Acad. Sci. Paris **342** (2006) 949, [arXiv:math/0606419v1 [math.AG]].
- [88] T. P. Kirkman, *On the K-Partitions of the R-Gon and R-Ace*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **147** (1857) 217-272.
- [89] A. Cayley, *On the partitions of a polygon*, Proc. Lond. Math. Soc. **22** (1891) 237-262.
- [90] S. L. Devadoss, *Tesselations of moduli spaces and the mosaic operad*, Contemp. Math. **239** (1999) 91-114, [arXiv:math/9807010v2 [math.AG]].
- [91] S. L. Devadoss, *Combinatorial Equivalence of Real Moduli Spaces*, Not. Amer. Math. Soc. **51** (2004) 6, [arXiv:math-ph/0405011v1 [math-ph]].
- [92] V. E. Asribekov, *On the kinematics of many-tails*, Nucl. Phys. **34** (1962) 461-475.
- [93] F. Cachazo, F. Mizera und G. Zhang, *Scattering equations: real solutions and particles on a line*, JHEP **03** (2017) 151, [arXiv:1609.00008v2 [hep-th]].

- [94] K. Cho und K. Matsumoto, *Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I*, Nagoya Math. J. **139** (1995) 67-86.
- [95] S. Mizera, *Scattering Amplitudes from Intersection Theory*, Phys. Rev. Lett. **120** (2018) 141602, [arXiv:1711.00469v2 [hep-th]].
- [96] D. Nandan et al., *Einstein-Yang-Mills from pure Yang-Mills amplitudes*, JHEP **10** (2016) 070, [arXiv:1607.05701v2 [hep-th]].
- [97] C.-H. Fu et al., *Expansion of Einstein-Yang-Mills amplitude*, JHEP **09** (2017) 021, [arXiv:1702.08158v3 [hep-th]].
- [98] S. Weinzierl, *On the solutions of the scattering equations*, JHEP **04** (2014) 092, [arXiv:1402.2516v2 [hep-th]].
- [99] S. He und C. Zhang, *Notes on scattering amplitudes as differential forms*, JHEP **10** (2018) 054, [arXiv:1807.11051v2 [hep-th]].
- [100] S. Weinzierl, *Fermions and the scattering equations*, JHEP **03** (2015) 141, [arXiv:1412.5993v3 [hep-th]].
- [101] D. A. Cox, J. Little und D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer-Verlag New York, 3. Aufl., (2007).
- [102] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, 1. Aufl., (1977).

Die vorliegende Dissertation „Streuamplituden in Yang-Mills-Theorie und Gravitation auf Baumniveau“ basiert auf den Veröffentlichungen [42] und [51]. Ferner wird in Kapitel 3.2.3 der Dissertation gebrauch gemacht von Resultaten aus den Publikationen [34] und [21]. Diese werden in Kapitel 2.7.2 und 3.2.2 der Dissertation teilweise diskutiert.

Im Folgenden wird der Anteil des Doktoranden an diesen Publikationen dargestellt.

1. Alle drei Autoren waren an der Anfertigung des Manuskriptes beteiligt.
2. Der Doktorand hat in [42] die Ein-Graviton-Relationen bewiesen, Gl. (5.2) in der Dissertation. Ein Hinweis auf die Möglichkeit eines Beweises mit Hilfe der CHY-Darstellung stammt von ██████████.
3. Der Doktorand hat die Permutationsinvarianz des Polarisationsfaktors (Anhang C.1) sowie der Äquivalenz der Polarisationsfaktoren (Anhang C.2) bewiesen. Er hat die Beweise der Faktorisierungseigenschaft der Residuen (Kapitel 4.5) überprüft.
4. Der Doktorand hat die Rechtsinvertierbarkeit von F (vgl. Kapitel 3.2.2.2) für $n \leq 6$ analytisch sowie für $n \leq 10$ numerisch überprüft. Er hat die Gültigkeit der CHY-Darstellung für QCD-Amplituden bewiesen.
5. Der Doktorand hat in [21] für $n = 4$ die Gleichheit der KLT-Definition der Graviton-Amplitude und der Definition auf Basis des Double-Copy-Verfahrens analytisch und für $n = 5, 6$ numerisch überprüft. Außerdem hat er die Wirkungsquerschnitte in Gl. (19), Gl. (22), Gl. (23) und Gl. (25) in [21] berechnet.

Ferner ist die Bemerkung zur CHY-Darstellung für Amplituden in der Gravitation (Kapitel 3.2.3) eine Idee des Doktoranden.

Lebenslauf

(Für die elektronische Version entfernt.)