

**Modifikation von
Schwerewellen bei Propagation
durch die Tropopause –
Idealisierte Modellstudien**

*Dissertation zur Erlangung des Grades
“Doktor der Naturwissenschaften”
am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz*

VERA BENISE

geboren in Tübingen

Mainz, Juli 2019

Zusammenfassung

Atmosphärische Schwerewellen werden durch Anregungen in der Vertikalen, entgegen der Wirkungsrichtung der Schwerkraft, hervorgerufen. Auslöser solcher Vertikalbewegungen in der Luftströmung können unter anderem Gebirge, konvektive Ereignisse oder Frontalsysteme sein. Damit liegt ein Großteil der Quellen für Schwerewellen in der Troposphäre. Breiten sich die Wellen nach oben aus, so durchwandern sie atmosphärische Schichten unterschiedlicher Eigenschaften, wobei die Tropopausenregion eine zentrale Rolle spielt. Mit der Umkehr des vertikalen Temperaturgradienten geht dort eine starke Änderung der statischen Stabilität einher und der Horizontalwind zeichnet sich durch große vertikale Windscherungen aus. Sowohl die statische Stabilität als auch Windscherungen sind entscheidende Größen für die Ausbreitung von Schwerewellen, sodass die Tropopausenregion als ein Filter oder Modulator für Wellen wirken kann, wenn diese dort reflektiert werden, mit veränderter Wellenlänge weiter propagieren oder brechen. All diese Prozesse, insbesondere auch das Wellenbrechen bei abnehmender Dichte in noch größeren Höhen, sind entscheidend für den atmosphärischen Energie- und Impulstransport und damit für das Verständnis der globalen Zirkulation. Die Propagation von Schwerewellen durch die Tropopausenregion wird in dieser Arbeit mithilfe von hochaufgelösten, idealisierten Simulationen betrachtet.

Im ersten Ergebnisteil wird die Entwicklung eines Verfahrens zur Bestimmung von Transmissionskoeffizienten vorgestellt, in dem die Anregung von Wellen aus zeitabhängigen Umgebungszuständen innerhalb einer Dämpfungsschicht am Modellunterrand erfolgt. Damit lässt sich die Propagation von Wellen ohne Mehrfachreflexionen in der Troposphäre simulieren. Die Untersuchung verschiedener Stabilitätsprofile zeigt dabei das Auftreten von Wellentunneln durch Schichten reduzierter Stabilität, sofern diese Schichten dünn genug sind und behandelt außerdem die deutliche Reduktion der Transmission bei Vorhandensein einer Tropopauseninversionsschicht.

Der zweite Ergebnisteil zeigt Analysen dazu, wie sich die simulierte Änderung der Wellenlängen bei Propagation durch eine Tropopausenschicht mit Gradienten in Stabilität und Windscherung im Vergleich zu den von linearer Theorie prognostizierten Wellenlängen verhält. Eine Studie behandelt hier beispielsweise, wie ein Strahlstrom variierender Stärke unterhalb der thermischen Tropopause die Propagation von Wellen beeinflusst und zeigt, dass bei großer Windscherung lange Wellen weiter in die Stratosphäre propagieren.

Eine detaillierte Untersuchung einer Tropopauseninversionsschicht ist Bestandteil des dritten Ergebnisteils. Hier wird betrachtet, wie sich Schichtdicke und Inversionsstärke auf die Wellentransmission auswirken. Für einen Teil des Wellenspektrums, insbesondere bei kleinen Wellenlängen, zeigt sich, dass die Schichtdicke einen deutlich größeren Einfluss auf die Stärke der Transmission hat als die Inversionsstärke. Es werden hier drei verschiedene Modelle miteinander verglichen, denen unterschiedliche Annahmen zugrunde liegen.

Ausgehend von Situationen, die bei Messungen von Schwerewellen interessante Fragen aufwerfen, werden im vierten Ergebnisteil die jeweils herrschenden meteorologischen Bedingungen auf stark idealisierte Simulationen übertragen und Teilaspekte der Wellenausbreitung betrachtet. Ein Vergleich verschiedener Wellenlängen zeigt hier in einem Fall in Übereinstimmung mit den Auswertungen der Messungen nahezu lineare Propagation durch die Tropopause, während in einem anderen Fall die Anregung sekundärer Wellen aus einer kritischen Schicht beobachtet werden kann. Dieses Phänomen tritt für unterschiedliche Wellenlängen und Amplituden auf.

Abstract

Atmospheric gravity waves are excited through vertical movement, against the direction of gravity. Causes of such motions can be air flowing over mountains, convective events or frontal systems. A major part of gravity wave sources is located in the troposphere. When such waves travel vertically, they cross atmospheric layers of different characteristics, however, the tropopause region plays a key role. Here, the reversal of the vertical temperature gradient is attended by strong alterations of static stability and the horizontal wind exhibits strong vertical shear. Both the static stability as well as wind shear are critical quantities for determining how gravity waves propagate. This means that the tropopause can act as a filter or as a modulator on waves when they are reflected, continue propagating with a modified wavelength or break in the tropopause region. These processes as well as gravity wave breaking in higher altitudes due to density decrease are crucial for the redistribution of energy and momentum in the atmosphere and therefore for the fundamental understanding of the global circulation. Within this work, idealized high resolution numerical simulations are used to study gravity wave propagation across the tropopause region.

The first chapter presents the development of a method to calculate transmission coefficients. The waves are excited through time-dependent environmental states inside an absorbing layer at the model bottom. This allows for the simulation of wave propagation without multiple reflections inside the troposphere. Several stability profiles are studied and wave tunneling through layers of reduced stability can be observed, as long as these layers are adequately thin compared to the wavelength. Another comparison shows that the transmission is significantly reduced in the presence of a tropopause inversion layer.

The second chapter shows waves propagating across a tropopause layer with gradients in stability and wind shear and how the simulated changes in wavelength compare to the wavelength prognosed by linear theory. One study examines how a jet stream of varying strength located below the thermal tropopause affects wave propagation. It can be shown that long waves propagate deep into the stratosphere in the presence of a large wind shear.

A detailed investigation of a tropopause inversion layer is presented in the third chapter. The focus there is on how the depth of the layer and the strength of the inversion affect wave transmission. These two parameters are varied independently. For a part of the wave spectrum, namely small wavelengths, the depth of the tropopause region has a much larger influence on the transmission than the strength of the inversion. Three models with different underlying assumptions are compared.

Relating to measurements of gravity waves that raised interesting questions, aspects of wave propagation are studied in the fourth chapter. The meteorological conditions that were present during measurements are transferred as environmental conditions to idealized simulations. A comparison of several wavelengths shows quasi-linear propagation across the tropopause, in agreement with the evaluation of the measurements. Another case exhibits a critical layer where the excitation of secondary waves can be observed. This phenomenon is found to be persistent for various wavelengths and amplitudes.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Atmosphärische Schwerewellen	1
1.2	Tropopausenregion	3
1.3	Ziele und Aufbau der Arbeit	5
2	Theoretische Grundlagen	7
2.1	Mathematische Beschreibung atmosphärischer Strömungen	7
2.1.1	Pseudo-inkompressible Gleichungen	8
2.1.2	Anelastische Gleichungen	9
2.1.3	Boussinesq-Gleichungen	9
2.2	Wellenausbreitung in der Atmosphäre	10
2.2.1	Die Taylor-Goldstein-Gleichung	11
2.2.2	Erhaltungsgrößen	17
2.2.3	Wechselwirkungsprozesse	21
3	Modelle und Methoden	25
3.1	EULAG	25
3.1.1	Basiszustand in EULAG	25
3.1.2	Umgebungszustand in EULAG	27
3.1.3	Realisierung verschiedener Gleichungssysteme	29
3.1.4	Modellgebiet und Parallelisierung	30
3.1.5	Randbedingungen	30
3.1.6	Numerische Lösung	31
3.1.7	Wellenanregung im Modell	34
3.2	Mehrschichtenmodell	36
3.3	Ray-Tracing-Modell	37
3.4	Analysemethoden	39
3.4.1	Fourier-Transformation	39
3.4.2	Wavelet-Transformation	39
4	Ergebnisse	42
4.1	Zur Bestimmung von Transmissionskoeffizienten	42
4.1.1	Wellenpaket	44
4.1.2	Vorschreiben der Welle am Unterrand	48
4.1.3	Welle in zeitabhängigem Umgebungszustand	53

4.1.4	Zusammenfassung	64
4.2	Orographische Wellen in stückweise linearen Umgebungsprofilen	66
4.2.1	Gradienten in der Stabilität bei konstantem Hintergrundwind	66
4.2.2	Gradienten in Hintergrundwind und Stabilität	73
4.2.3	Zusammenfassung	78
4.3	Orographische Wellen in einer Tropopauseninversionsschicht	81
4.3.1	Aufbau und Ziel der Untersuchung	81
4.3.2	Ergebnisse aus EULAG	82
4.3.3	Ergebnisse aus Mehrschichtenmodell	92
4.3.4	Ergebnisse aus Ray-Tracing-Modell	99
4.3.5	Vergleich der verschiedenen Modelle	102
4.3.6	Zusammenfassung	105
4.4	Durch Messungen inspirierte Studien	108
4.4.1	Situation 1	108
4.4.2	Situation 2	114
4.4.3	Situation 3	124
4.4.4	Zusammenfassung	126
5	Fazit und Ausblick	128
A	Anhang	131
	Abkürzungsverzeichnis	134
	Symbolverzeichnis	135
	Abbildungsverzeichnis	139
	Tabellenverzeichnis	142
	Literaturverzeichnis	143
	Danksagung	150

1 Einleitung

1.1 Atmosphärische Schwerewellen

Schwerewellen sind ein Phänomen in der Strömungsdynamik, bei dem aus einer Störung eine Welle entsteht, wobei die rückstellende Kraft die Schwerkraft ist. Solche Wellen können an der Grenzfläche zweier Fluide auftreten, wie es etwa bei Wellen an der Oberfläche eines Sees sichtbar wird, oder auch innerhalb eines Mediums, zum Beispiel im Ozean oder in der Atmosphäre. In dieser Arbeit werden solche atmosphärischen internen Schwerewellen behandelt, viele der Zusammenhänge sind aber auch auf den Ozean übertragbar (Kapitel 3.3 in Sutherland, 2010).

Bei der Störung, die am Anfang der Entwicklung der Welle steht, handelt es sich um eine irgendwie geartete vertikale Auslenkung. Dies kann in der Atmosphäre ein Hindernis wie ein Berg sein, der von der Strömung überwunden werden muss, aber auch eine Vertikalbewegung im Zusammenhang mit Frontalsystemen, Gewitterzellen oder dynamischen Instabilitäten im Bereich großer Windscherungen (Bühler et al., 1999; Fritts & Alexander, 2003; Plougonven & Zhang, 2014).

Damit eine Schwerewelle in der Atmosphäre propagieren kann, muss die Atmosphäre stabil geschichtet sein, das Luftpaket in Abbildung 1.1b wird also nach Auslenkung aus seiner Ruhelage wieder in deren Richtung gezwungen, kann diese aufgrund seiner Trägheit überschießen, wird wiederum in Richtung Ruhelage beschleunigt und beginnt um diese zu pendeln. Die Stabilität ist also ein Maß dafür, inwiefern ein Widerstand für Aufwärtsbewegungen vorhanden ist und wird über Vertikalgradienten in Dichte oder Temperatur definiert. Die Ausbreitung kann in allen Raumrichtungen erfolgen, ein Beispiel für eine vertikal propagierende Welle ist in Abbildung 1.1c gezeigt.

Schwerewellen kommen in räumlichen Skalen von etwa 1 km–1 000 km vor und sind quasi omnipräsent in der Atmosphäre. Sichtbar werden sie für einen Beobachter dann, wenn sie in Regionen auftreten, in denen die Luftfeuchtigkeit nahe an der Sättigung ist. Dann kann es vorkommen, dass in Aufwindregionen Kondensation und somit Wolkenbildung eintritt, während sich die Tropfen oder Kristalle in Abwindregionen wieder auflösen. Berühmte Beispiele sind linsenförmige Wolken, die Leewellen hinter Bergen anzeigen und dadurch für Segelflieger oft relevant sind, aber auch Wolken in anderen Höhenbereichen der Atmosphäre (siehe Abbildungen 1.1a und 1.1d).

Messbar sind Schwerewellen etwa mit flugzeuggetragenen Instrumenten, die mit den Wellen assoziierte Temperatur-, Druck- oder Windschwankungen detektieren. Auch Radiosonden messen die Schwerewellenaktivität direkt vor Ort. Eine große Bedeutung haben zudem Fernerkundungsmethoden wie Radar, Lidar und satellitenbasierte Messsysteme.

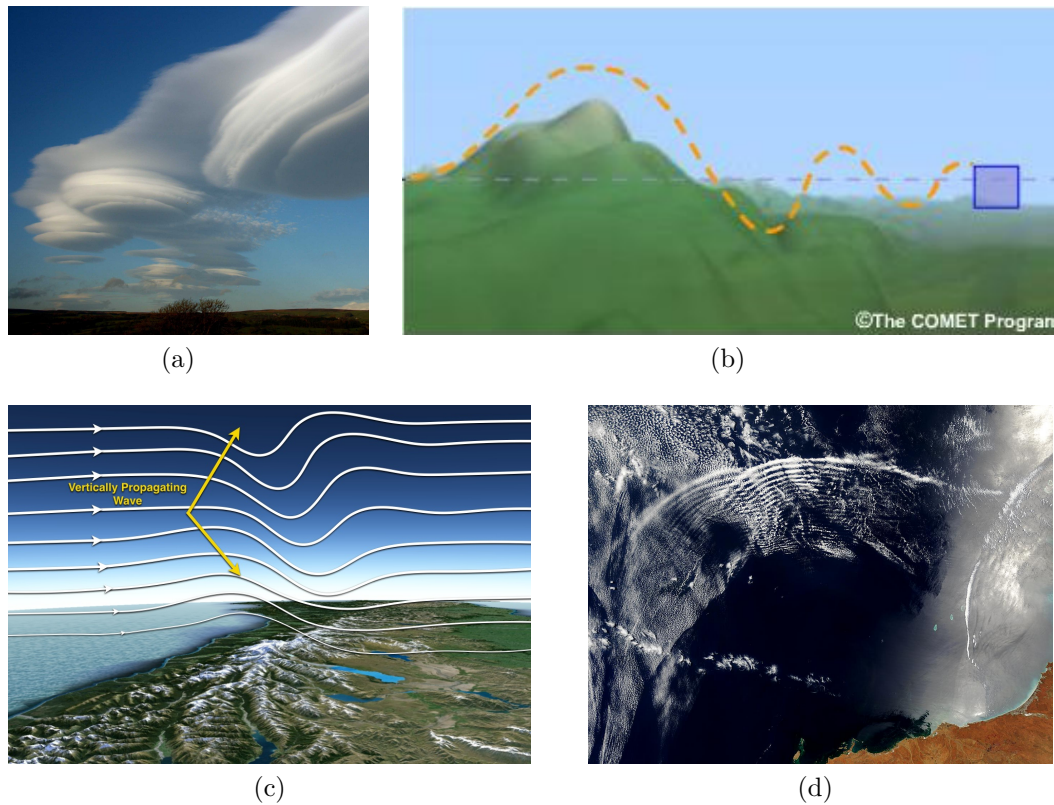


Abb. 1.1: Veranschaulichungen zur Entstehung und Beobachtung von Schwerewellen. (a) Wellenwolken (*Altostratus lenticularis*) über England am 22.12.2011 ©M. Clark (aus dem Internationalen Wolkenatlas, WMO, 2017); (b) Schemazeichnung zur Entstehung von Auftriebsoszillationen bei Advektion von Luft über einen Berg, bearbeitet nach ©The COMET Program (2019); (c) Schemazeichnung von ©NCAR/EOL (Rockwell, 2014), (d) Satellitenaufnahme von sich überlagernden Wellenwolken über Australien am 11.11.2003 ©NASA/GSFC (Descloitres, 2003).

Ein Grund, sich mit Schwerewellen zu befassen ist, dass es sich bei ihnen um eine sehr wichtige Kopplung zwischen unterer und oberer Atmosphäre handelt, ohne die die globale Zirkulation nicht ausreichend verstanden und modelliert werden kann. Viele der Quellen von Schwerewellen liegen in der Troposphäre, während die Regionen, in denen Wellen auch brechen und ihre Energie und ihren Impuls an die Umgebungsströmung abgeben, deutlich höher liegen. Damit treiben sie die Zirkulation der mittleren Atmosphäre entscheidend mit an (siehe Kim et al., 2003, und daraus Abbildung 1.2).

Nur ein Teil des Spektrums von Schwerewellen wird in globalen Modellen aufgelöst. Für kleinere Wellen sind Parametrisierungen in Gebrauch, aber doch oft mit Unzulänglichkeiten verbunden, beispielsweise bezüglich der Wechselwirkung von Welle und Grundstrom (Achatz et al., 2010). Mit umfassenden Messungen, Prozessstudien mit hochauflösenden Modellen und Erweiterungen der theoretischen Beschreibung von Schwerewellen wird daran gearbeitet, die Parametrisierung von Schwerewellen in globalen Modellen zu verbessern, um Wetter- und Klimasimulationen zu optimieren.

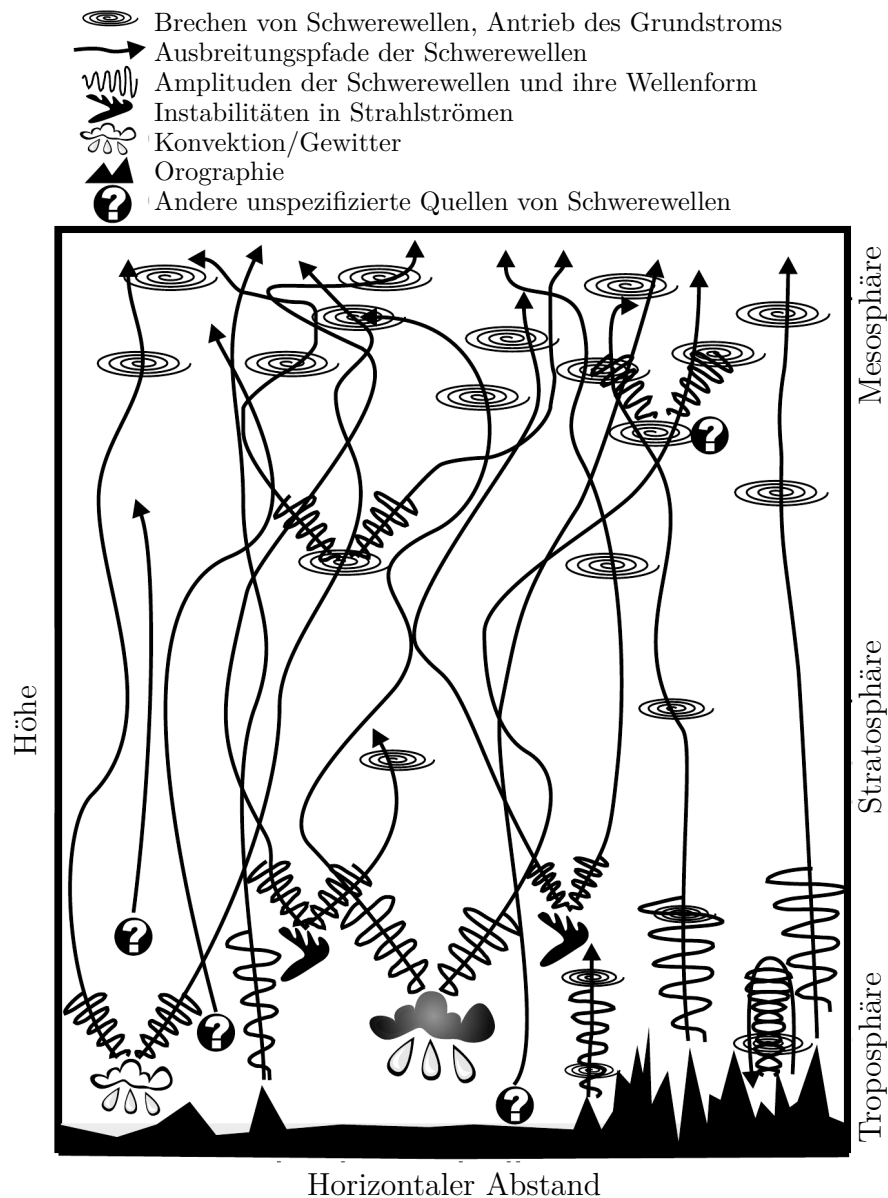


Abb. 1.2: Schematische Darstellung verschiedener Prozesse zur Entstehung, Ausbreitung und Dissipation von Schwerwellen. Das Bild zeigt ein grundlegendes Muster mit der Troposphäre als Quellregion von Schwerwellen, die sich in der Stratosphäre hauptsächlich weiter ausbreiten und in der oberen Stratosphäre und Mesosphäre häufig brechen. Aus Kim et al., 2003 (bearbeitet).

1.2 Tropopausenregion

Verwendet man die gängige Unterteilung der Atmosphäre in verschiedene Stockwerke, handelt es sich bei der Tropopause um die Grenze zwischen den beiden untersten Schichten, Troposphäre und Stratosphäre.

In der bodennahen Troposphäre spielen die Phasenübergänge von Wasser eine große Rolle und das Wettergeschehen mit Wolken und Frontalsystemen findet dort statt. Kon-

vektive Durchmischung prägt die Troposphäre, was an der Konzentration verschiedener Gase abgelesen werden kann. Aufgrund der gravitationsbedingten Abnahme von Luftdruck und Luftdichte mit der Höhe erfährt ein vom Boden aufsteigendes Luftpaket eine Expansion und kühlt sich dadurch ab. Dies führt zu einem mittleren troposphärischen Temperaturprofil mit einem negativen Gradienten von etwa -6.5 K km^{-1} . Bei niedrigeren Temperaturen tritt schon bei einem geringeren Wasserdampfgehalt Sättigung ein und so wird die Luft in der Troposphäre bei zunehmender Höhe immer trockener. Am Oberrand der Troposphäre treten nur noch geringe Wasserdampfmenngen auf. Die Strahlungseigenschaften von Wasserdampf führen dann zu einer selbstverstärkenden Rückkopplung auf das Temperaturprofil. Die dreiatomigen Wasserdampfmoleküle absorbieren und re-emittieren die langwellige Abstrahlung der Erdoberfläche besonders gut. Dies führt zu einer Erwärmung der bodennahen Luftschichten, in denen viele Wasserdampfmoleküle vorhanden sind. In größerer Höhe hingegen trifft ein emittiertes Lichtquant oft nicht mehr auf ein Molekül, von dem es absorbiert werden könnte und kann also in den Welt- raum entweichen. Das führt zu einem Netto-Energieverlust, der als Strahlungskühlung bezeichnet wird.

In der mittleren Stratosphäre befindet sich die Ozonschicht. Kurzwellige Strahlung der Sonne wird durch die dreiatomigen Ozon-Moleküle absorbiert, was zu einer Erwärmung führt. Die Stratosphäre weist dadurch eine mit der Höhe gleichbleibende oder mit der Höhe zunehmende Temperatur auf. Ein aufsteigendes Luftpaket, das expandiert und sich abkühlt, wäre dadurch immer kälter als die Umgebung und würde in seine Ausgangslage zurücksinken. In einer solchen Umgebung werden also vertikale Bewegungen unterdrückt und die Luft wird als stabil geschichtet bezeichnet. In der Stratosphäre ist kaum Wasserdampf vorhanden und Wolken treten lediglich in seltenen Sonderformen wie polaren Stratosphärenwolken oder nachtleuchtenden Wolken auf.

Die Tropopausenregion ist geprägt von starken vertikalen Gradienten, die alle, abhängig von der Fragestellung, herangezogen werden können, um die Lage der Tropopause zu definieren. Die thermische Definition der Tropopause (WMO, 1957) ist dann erfüllt, wenn der vertikale Temperaturgradient einen bestimmten Wert unterschreitet. Weiterhin kann auch die Stabilität als ein Maß herangezogen werden, ein Temperaturminimum (*engl.: cold point tropopause*), die Zusammensetzung chemischer Bestandteile (beispielsweise Ozon oder Wasserdampf) oder ein Grenzwert für dynamische Eigenschaften wie die potentielle Wirbelstärke (siehe eine Übersicht der Methoden in Ivanova, 2013). Abbildung 1.3 zeigt aus Radiosondenprofilen ermittelte Profile der Temperatur, der Stabilität (hier dargestellt durch die quadrierte Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 , siehe Gleichung 2.15) und des Horizontalwindes. Alle Einzelprofile wurden an der Lage ihrer jeweiligen Tropopause, berechnet nach WMO (1957), orientiert und die Mittelungen erfolgten dann in der tropopausenbasierten Höhenkoordinate. Die schwarze Linie stellt das Gesamtmittel aller Radiosonden dar und zeigt eine Temperaturzunahme (Inversion) direkt oberhalb der Tropopause in etwa 11 km Höhe, was sich in einer stark erhöhten Stabilität äußert, N^2 nimmt um den Faktor acht zu. Dieses Phänomen einer Tropopauseninversionsschicht (TIL) ist typisch für die mittleren Breiten und tritt in dieser Analyse von Birner et al.

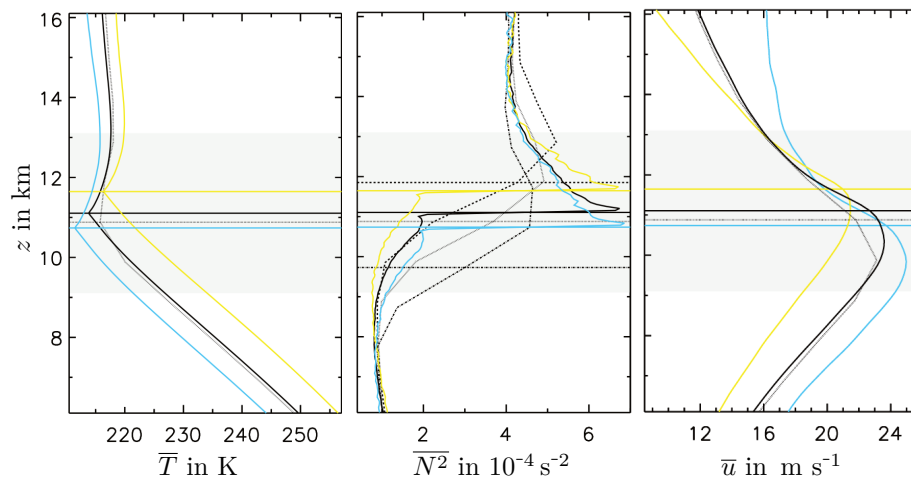


Abb. 1.3: Gemittelte Profile von Temperatur (links), quadrierter Brunt-Väisälä-Frequenz (Mitte) und Horizontalwind (rechts) für München. Die gelben, blauen und schwarzen Linien stehen für Mittelwerte über Sommer, Winter und den ganzen Zeitraum (10 Jahre), respektive. Gepunktete Linien stammen aus Reanalysen des European Center for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF). Gestrichpunktete Linien im mittleren Bildteil stehen für zyklonische und antizyklonische Tropopausenanomalien, respektive. Die Profile sind zeitlich gemittelt relativ zur jeweiligen Tropopausenhöhe (horizontale Linien). Die Tropopausenregion ist grau hinterlegt. Aus Birner et al. (2002) (bearbeitet).

(2002) bei etwa 85 % aller Radiosondenprofile auf. Die Höhe der Tropopause variiert in den Extratropen stark und befindet sich typischerweise in einem Bereich zwischen 5 km und 15 km (Birner, 2006). Die absolute Windgeschwindigkeit weist für alle Jahreszeiten ein deutliches Maximum unterhalb der Tropopause auf.

Im Zusammenhang mit Schwerewellen treten in der Tropopausenregion eine Reihe von Besonderheiten auf. Da die Stabilität entscheidend für die Propagation von Schwerewellen ist und diese an der Tropopause starke Gradienten aufweist, kann das zu einer Transmission unter Veränderung der Wellenlänge führen, Wellen können dort auch reflektiert werden, hindurch tunneln oder in einem Wellenleiter gefangen werden (Vosper, 2004; Wurtele et al., 1987). Nicht-lineare Prozesse können zur Generation neuer Wellen in der Tropopausenregion führen. Durch Vertikalbewegung in Schwerewellen ausgelöste Wolken können wiederum in Wechselwirkung mit Wellen treten, denn ihre diabatischen Prozesse haben Einfluss auf die Stabilität und damit auf die Wellenausbreitung.

1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit soll der Frage nachgegangen werden, wie sich Schwerewellen beim Durchgang durch eine Schicht mit starken Gradienten, eben der Tropopausenregion, verändern. In idealisierten Modellstudien wurden dafür Sensitivitäten der einzelnen Parameter untersucht. Dabei spielen zahlreiche Merkmale der Tropopausenregion eine Rolle: Schichtungsstabilität, Windscherung sowie deren jeweilige Lage und Ausdehnung.

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen zur mathematischen Beschreibung von Strömungen, Schwerewellen und ihrer Rolle in der Atmosphäre dargestellt.

In Kapitel 3 werden die verwendeten Modelle und Methoden erläutert.

Die Ergebnisse werden in Kapitel 4 aufgeführt und sind in vier Unterkapitel unterteilt. Abschnitt 4.1 zeigt verschiedene Herangehensweisen, Transmissionskoeffizienten zu berechnen und erläutert die dabei auftretenden Herausforderungen, vor allem in Bezug auf die Behandlung der Modellränder, und stellt Ansätze zu ihrer Lösung vor.

In Abschnitt 4.2 werden Studien mit stückweise-linearen Hintergrundprofilen vorgestellt, wobei Stabilität und Scherung untersucht werden und Vergleiche der Simulationsergebnisse zu linearer Theorie angestellt werden.

In Abschnitt 4.3 folgt die systematische Untersuchung einer Tropopauseninversionschicht dahingehend, inwiefern Stärke der Inversion und Mächtigkeit der Schicht die Propagation von Schwerewellen beeinflussen.

Einige Vergleiche von Simulationen, die durch Messungen inspiriert wurden, werden in Abschnitt 4.4 vorgestellt.

In Kapitel 5 folgt schließlich eine Zusammenfassung und eine Einordnung der Ergebnisse, sowie ein Ausblick auf weitere interessante Themenfelder, die sich an die Untersuchungen anschließen könnten.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Mathematische Beschreibung atmosphärischer Strömungen

In einem trockenen, rotierenden Fluid, das einer konstanten Schwerebeschleunigung \mathbf{g} ausgesetzt ist, gelten die folgenden Gesetze:

$$\text{Erhaltung des Impulses :} \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = \mathcal{F} \quad (2.1a)$$

$$\text{Erhaltung der Energie :} \quad \frac{D\theta}{Dt} = \mathcal{H} \quad (2.1b)$$

$$\text{Erhaltung der Masse :} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1c)$$

Außerdem werden noch die beiden folgenden Beziehungen benötigt:

$$\text{Ideale Gasgleichung :} \quad p = \rho R_d T \quad (2.1d)$$

$$\text{Definition potentielle Temperatur :} \quad \theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^\kappa \quad (2.1e)$$

Hierbei wird mit $\mathbf{v} = (u, v, w)$ der dreidimensionale Geschwindigkeitsvektor bezeichnet und $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ beschreibt die materielle Ableitung einer Größe, wobei t für die Zeit steht. Die übrigen in den Gleichungen verwendeten Variablen bezeichnen Temperatur T , Dichte ρ , Druck p und potentielle Temperatur θ . Die spezifische Gaskonstante trockener Luft $R_d = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und die spezifische Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Druck $c_p = 1004.5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ werden in der Beziehung $\kappa = \frac{R_d}{c_p} \simeq 2/7$ verwendet. Die Schwerebeschleunigung der Erde ist als $\mathbf{g} = (0, 0, -g) = (0, 0, -9.81) \text{ m s}^{-2}$ und der Coriolisparameter als $\mathbf{f} = 2 \boldsymbol{\Omega} \sin \phi = 2 \cdot \left(0, 0, \frac{2\pi}{\mathcal{d}}\right) \cdot \sin \phi$, definiert, wobei ϕ die geographische Breite und \mathcal{d} einen Tag bezeichnen. Mit p_{00} wird der Druck auf einem Referenzniveau bezeichnet, meist der Boden mit $p_{00} = 1000 \text{ hPa}$. In den Termen \mathcal{H} und \mathcal{F} sind alle externen Kräfte wie diabatische Prozesse, Diffusion und Reibung zusammengefasst.

Die Gleichungen (2.1a)-(2.1e) stellen für $\mathcal{H} = \mathcal{F} = 0$ ein geschlossenes System für reibungsfreie Strömungen dar (Fritts & Alexander, 2003). Zusammen mit einer Erhaltungsgleichung für die spezifische Feuchte q sind diese Gleichungen Bestandteil der von Bjerknes (1904) erstmals postulierten Möglichkeit, mit einem solchen System von sieben

Gleichungen für sieben Variablen (u, v, w, p, T, ρ, q) ein Modell zur Wettervorhersage zu entwickeln. Allerdings konnte noch keine analytische Lösung für dieses System gefunden werden und auch der Beweis, dass eine eindeutige Lösung existiert, konnte noch nicht erbracht werden. Dies brachte dem Gleichungssystem, das auch als die Navier-Stokes-Gleichungen bekannt ist, den Rang eines von sieben Millenium-Problemen ein, die im Jahr 2000 von der Amerikanischen mathematischen Gesellschaft ausgeschrieben wurden (Fefferman, 2006).

Für viele Anwendung werden die Gleichungen gefiltert. Es werden dadurch Prozesse eliminiert, die für viele atmosphärischen Skalen nicht relevant sind, wie beispielsweise Schallwellen. Das kann einerseits helfen, aus den vereinfachten Gleichungen ein besseres konzeptuelles Verständnis zu erlangen, andererseits erlaubt es in der Anwendung größere Zeitschritte für die numerische Integration (Achatz et al., 2010). Einige verbreitete Möglichkeiten, wie ein solches Filtern durchgeführt wird, sollen im folgenden Abschnitt vorgestellt werden. Im Wesentlichen wird stets eine Aufspaltung der physikalischen Größen in einen horizontal homogenen Basiszustand (tiefergestellte 0) und einer Abweichung von diesem Zustand (gestrichene Größen) vorgenommen:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0(z) + \psi'(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Hierbei kann ψ für verschiedene Größen stehen, beispielsweise $\psi \in \{p, \rho, \theta, T, \Pi\}$, wobei Π hier den Exner-Druck bezeichnet und als $\Pi = (p/p_{00})^\kappa = T/\theta$ definiert ist. Der dreidimensionale Ortsvektor ist $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Die gefilterten Gleichungssysteme werden hier in ihrer quellfreien Form vorgestellt, \mathcal{F} und \mathcal{H} verschwinden also.

2.1.1 Pseudo-inkompressible Gleichungen

Dieses Gleichungssystem geht auf Durran (1989) zurück. Es wird vorausgesetzt, dass die Druckvariationen klein sind, $\Pi' \ll \Pi_0$, und dass außerdem die lagrangesche Zeitskala T einer Störung der Größe L viel größer ist als die Zeitskala von Schallwellen mit Schallgeschwindigkeit c_s , dass also $L/T \ll c_s$ gilt. Dies vereinfacht die Kontinuitätsgleichung und das folgende Gleichungssystem entsteht:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.3a)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \quad (2.3b)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \theta_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3c)$$

Die physikalische Bedeutung dieser Annahmen ist, dass kein Austausch zwischen dem elastischen Anteil der potentiellen Energie (Druckvariationen) und der kinetischen Energie stattfindet.

2.1.2 Anelastische Gleichungen

Dieses Gleichungssystem geht auf Batchelor (1953), Ogura & Phillips (1962) und Lipps & Hemler (1982) zurück. Zunächst wird in der Kontinuitätsgleichung (2.1c) eine stationäre Dichte $\rho_0(z)$ angenommen, was als anelastische Kompressibilität bezeichnet wird. Diese kann somit umgeschrieben werden:

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

In der Impulsbilanz tritt ein nichtlinearer Term auf, in dem p und ρ gekoppelt sind. An den Basiszustand ψ_0 in Gleichung (2.2) wird nun gefordert, dass er hydrostatisch sein soll, dass also

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp_0}{dz} = -\rho g. \quad (2.5)$$

gilt. Weiterhin werden die Näherungen

$$\frac{\rho'}{\rho} \simeq \frac{\rho'}{\rho_0} \simeq -\frac{\theta'}{\theta_0} \quad (2.6)$$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p' \simeq \nabla \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) \quad (2.7)$$

verwendet (Lipps & Hemler, 1982; Nappo, 2012), womit das anelastische Gleichungssystem (Ogura & Phillips, 1962) folgende Form annimmt:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) + \frac{\theta'}{\theta_0} \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.8a)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \quad (2.8b)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (2.8c)$$

2.1.3 Boussinesq-Gleichungen

Die Boussinesq-Näherung war für die Entwicklung vieler Theorien entscheidend. Sie geht auf Boussinesq (1897) zurück. Es wird wieder ein hydrostatischer Hintergrundzustand angenommen (siehe Gleichung 2.5), wodurch die Impulsgleichung (2.1a) so geschrieben werden kann:

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} + \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \mathbf{f} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

In der Boussinesq-Näherung wird nun angenommen, dass $|\frac{\rho'}{\rho_0}| \ll 1$ gilt und kleine Dichteunterschiede ρ' nur im Auftriebsterm eine Rolle spielen. Die thermische Energiegleichung (2.1b) lässt sich mithilfe von Gleichung (2.1d) und Gleichung (2.1e) folgendermaßen um-

schreiben:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - c_s^2 \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.9)$$

Hierbei wurde die Definition der Schallgeschwindigkeit $c_s^2 = \frac{c_p p}{c_v \rho}$ benutzt, in der die spezifische Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Druck (c_p) und bei konstantem Volumen (c_v) enthalten sind. Es kann gezeigt werden, dass Dichteänderungen, die von lokalen Druckänderungen hervorgerufen werden, vernachlässigbar sind (Spiegel & Veronis, 1960). In diesem Fall kann also das Fluid als inkompressibel angesehen werden und Schallwellen werden unterdrückt, weil $c_s \rightarrow \infty$. Das bedeutet, dass Gleichung (2.9) in zwei Teile aufgespalten werden kann, die beide Null sind. In der Kontinuitätsgleichung (2.1c) führt das zum Wegfall der Dichte, womit das Boussinesq-Gleichungssystem folgende Form hat:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.10a)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.10b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.10c)$$

2.2 Wellenausbreitung in der Atmosphäre

Periodische Schwankungen kommen in der Physik dann vor, wenn Kräfte aus dem Gleichgewicht sind und die Trägheit dazu führt, dass sich der Zeitraum verzögert, bis ein Gleichgewicht eintritt. Während dieses Zeitraums oszilliert eine Feldgröße um den Gleichgewichtszustand und breitet sich dabei in Zeit und Raum aus. Auch in der Atmosphäre gibt es verschiedene Arten von Wellen auf unterschiedlichen Skalen, in Holton (2004) werden einige vorgestellt. Dabei können die verschiedenen Wellen danach unterschieden werden, welche rückstellende Kraft wirkt. Bei Schallwellen ist die Kompressibilität entscheidend, wobei für große Skalen zunehmend auch die Rotation der Erde relevant wird, wie es auch bei planetaren Wellen der Fall ist. Auch für elektromagnetische Wellen stellt die Atmosphäre ein Ausbreitungsmedium dar, was natürlich für die Sonnenergie als Antrieb für jegliche Zirkulation relevant ist, aber auch bei Erkundungsmethoden wie Radar genutzt wird.

In dieser Arbeit soll der Fokus auf internen Schwerewellen liegen. Die Grundlage für Oszillationen liefert bei diesen die Auftriebskraft, die wirkt, wenn ein Luftpaket um eine Strecke δz von seiner Ausgangslage ausgelenkt wird, ohne dabei seine Umgebung zu stören. Befindet sich die Umgebung mit Druck p_0 und Dichte ρ_0 in hydrostatischem Gleichgewicht (Gleichung 2.5), so wird ein Luftpaket des Volumens V mit Dichte ρ mit

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{F_{\text{total}}}{V \rho} = \frac{F_b + F_g}{V \rho} = \frac{\rho_0 V g - \rho V g}{V \rho} = g \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right) \quad (2.11)$$

beschleunigt. Dabei wirken die Gewichtskraft F_g und die Auftriebskraft F_b , wobei letz-

tere der Gewichtskraft des verdrängten Volumens mit Umgebungsdichte ρ_0 entspricht. Es wird angenommen, dass sich der Druck instantan an die Umgebung anpasst, dass also stets $p = p_0$ gilt, sodass mit Hilfe der Gleichungen (2.1d) und (2.1e) geschrieben werden kann:

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = g \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right) = g \left(\frac{T - T_0}{T_0} \right) = g \left(\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} \right) \quad (2.12)$$

Es gelte nun für eine kleine Auslenkung δz von der Ausgangslage z_s für die potentielle Temperatur der Umgebung $\theta_0(z_s + \delta z) \approx \theta_0(z_s) + \frac{d\theta_0}{dz} \delta z$. Das Luftpaket hat vor der Auslenkung dieselbe potentielle Temperatur wie die Umgebung, $\theta_0(z_s) = \theta(z_s)$, und steigt dann adiabatisch auf, sodass diese erhalten bleibt und $\theta(z_s + \delta z) = \theta(z_s) = \theta_0(z_s)$ gilt. Damit kann für den Zähler geschrieben werden (Holton, 2004):

$$\theta - \theta_0 = \theta(z_s + \delta z) - \theta_0(z_s + \delta z) \approx \theta_0(z_s) - \left[\theta_0(z_s) + \frac{d\theta_0}{dz} \delta z \right] = -\frac{d\theta_0}{dz} \delta z \quad (2.13)$$

Die Bewegungsgleichung lautet damit

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -g \frac{1}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} \delta z = -N^2 \delta z, \quad (2.14)$$

wobei die Brunt-Väisälä-Frequenz

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} \quad (2.15)$$

als ein Maß für die statische Stabilität der Umgebung eingeführt wurde. Eine Lösung von Gleichung (2.14) lautet $\delta z = A \exp(i N t)$. Falls $N^2 > 0$ ist, oszilliert das Paket um seinen Gleichgewichtszustand (typische Perioden für die Troposphäre sind etwa 8 min, siehe 2.7.3 in Holton, 2004), für $N = 0$ bleibt es nach der Auslenkung in seiner neuen Position und für $N^2 < 0$ wächst die Auslenkung exponentiell an. Diese drei Fälle entsprechen einer statisch stabilen, neutralen und labilen Schichtung.

Treten Oszillationen auf, die miteinander in Verbindung stehen und sich in Raum und Zeit ausbreiten, handelt es sich um eine Welle. Diese transportiert Energie, jedoch keine Materie durch den Raum. Schwerewellen sind transversale Wellen, bei denen die einzelnen Luftpakete senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und damit parallel zu den Phasenlinien oszillieren (siehe Illustration in Abbildung 2.1).

2.2.1 Die Taylor-Goldstein-Gleichung

Beginnend mit den Boussinesq-Gleichungen (2.10) für eine zweidimensionale ($x - z$), nicht-rotierende, reibungsfreie und nicht-wärmeleitende (= adiabatische) Atmosphäre wird im folgenden Abschnitt die Taylor-Goldstein-Gleichung hergeleitet.

Dazu werden die Gleichungen linearisiert. Das bedeutet, dass Terme, in denen mehr als eine Variable vorkommt, entkoppelt werden. Dafür werden die Größen in einen Basiszustand und eine Störung gemäß Gleichung (2.2) unterteilt. Es werden nun alle Terme

vernachlässigt, in denen Störungen quadratisch vorkommen, was auf das linearisierte Boussinesq-System führt:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + w' \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad (2.16b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2.16c)$$

Als nächstes wird der Ansatz gemacht, dass die Störgrößen eine Wellenlösung mit Frequenz ω und horizontaler Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda_x$ darstellen, wobei λ_x die horizontale Wellenlänge ist. Ihre Amplitude soll nur von der Höhe z abhängen, sodass die Lösungen in der Form

$$u'(x, z, t) = \tilde{u}(z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.17a)$$

$$w'(x, z, t) = \tilde{w}(z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.17b)$$

$$\rho'(x, z, t) = \tilde{\rho}(z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.17c)$$

$$p'(x, z, t) = \tilde{p}(z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.17d)$$

geschrieben werden können. Einsetzen in die Gleichungen (2.16a)-(2.16c) führt auf die Polarisationsbeziehungen (Nappo, 2012):

$$i\hat{\omega}\tilde{u} - \frac{du_0}{dz}\tilde{w} - \frac{ik}{\rho_0}\tilde{p} = 0 \quad (2.18a)$$

$$i\hat{\omega}\tilde{w} - \frac{1}{\rho_0}\frac{d\tilde{p}}{dz} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}g = 0 \quad (2.18b)$$

$$i\hat{\omega}\tilde{\rho} + \frac{N^2\rho_0}{g}\tilde{w} = 0 \quad (2.18c)$$

$$ik\tilde{u} + \frac{d\tilde{w}}{dz} = 0 \quad (2.18d)$$

Dabei wurde die intrinsische Frequenz $\hat{\omega} = \omega - u_0 k$ eingeführt, die im Bezugssystem eines Beobachters gilt, der sich mit der Strömung mitbewegt und es wurde benutzt, dass die Brunt-Väisälä-Frequenz N im Falle einer Boussinesq-Strömung als

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \quad (2.19)$$

geschrieben werden kann. Die Polarisationsgleichungen (2.18a)-(2.18d) können nun so ineinander eingesetzt werden, dass man eine einzige Gleichung für eine Größe, hier die Vertikalgeschwindigkeit w' , erhält. Unter der Annahme, dass die Dichte in der Atmosphäre exponentiell mit

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \exp\left(-\frac{z}{H_s}\right) \quad (2.20)$$

abnimmt, mit der Dichte ρ_{00} am Boden und der Skalenhöhe $H_s = RT_{00}/g$, die in einer isothermen Atmosphäre mit Temperatur T_{00} die Höhenabnahme von Dichte und Druck beschreibt, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} - \frac{1}{H_s} \frac{d\tilde{w}}{dz} + \left(\frac{k^2 N^2}{\hat{\omega}^2} + \frac{k}{\hat{\omega}} \frac{d^2 u_0}{dz^2} - \frac{k}{\hat{\omega}} \frac{1}{H_s} \frac{du_0}{dz} - k^2 \right) \tilde{w} = 0 \quad (2.21)$$

Eine Umbenennung der Variablen

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \exp\left(\frac{z}{2H_s}\right) \hat{u} \\ \tilde{w} &= \exp\left(\frac{z}{2H_s}\right) \hat{w} \\ \tilde{p} &= \exp\left(\frac{z}{2H_s}\right) \hat{p} \\ \tilde{\rho} &= \exp\left(\frac{z}{2H_s}\right) \hat{\rho}, \end{aligned}$$

die Schreibweise $\hat{w}' = \frac{d\hat{w}}{dz}$ und die Einführung der Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k$, die sich aus einer Zeitreihe der Horizontalbewegung der Welle ergeben würde, führen schließlich zur finalen Form der **Taylor-Goldstein-Gleichung (TGE)** (Gleichung 2.42 in Nappo, 2012):

$$\hat{w}'' + \left[\frac{N^2}{(c - u_0)^2} + \frac{u_0''}{c - u_0} - \frac{u_0'}{H_s (c - u_0)} - \frac{1}{4H_s^2} - k^2 \right] \hat{w} = 0 \quad (2.22)$$

Die genaue Zusammensetzung der Terme in der Klammer entscheidet darüber wie die Lösung aussieht. Der erste Term stellt den Auftrieb dar. Er ist entscheidend dafür, ob die Welle evaneszent ist oder nicht. Der zweite Term heißt Krümmungsterm und wird wichtig, wenn ein Strahlstrom vorhanden ist. Der dritte Term wird als Scherungsterm bezeichnet und ist in der unteren Atmosphäre ($H_s \approx (7-10)$ km) meist klein. Der vierte Term wird mitunter Kompressibilität genannt, weil er von der Dichte abhängt. Der fünfte Term behandelt den nicht-hydrostatische Anteil und ist nach dem Auftriebsterm der wichtigste in der Klammer. Die ersten vier Terme werden auch als Scorer-Parameter ℓ^2 zusammengefasst (Lane et al., 2000; Scorer, 1949) und die gesamte Klammer als m^2 :

$$\hat{w}'' + (\ell^2 - k^2) \hat{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{w}'' + m^2 \hat{w} = 0 \quad \text{mit} \quad \ell^2 := k^2 + m^2 \quad (2.23)$$

Konstanter Hintergrund

Falls m^2 in Gleichung (2.22) konstant ist, stellt $\hat{w} = A \exp(imz) + B \exp(-imz)$ mit Konstanten A und B eine Lösung dar. Dies ist dann der Fall, wenn die Windscherung verschwindet und die Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 konstant bleibt:

$$m^2 = \frac{N^2}{(c - u_0)^2} - \frac{1}{4H_s^2} - k^2. \quad (2.24)$$

Ist $m^2 > 0 \Leftrightarrow \ell^2 > k^2$, variiert \hat{w} sinusförmig mit der Höhe; eine propagierende Welle mit vertikaler Wellenlänge $\lambda_z = 2\pi/m$ tritt auf. Falls $m^2 < 0$ ist, variiert die Amplitude exponentiell mit der Höhe und die Welle propagiert nicht, sondern ist evaneszent. Bei konstantem Hintergrund ist dessen Skala der vertikalen Variation gleich null und also $\lambda_z \ll H_s$ (Nappo, 2012). Damit kann der zweite Term in Gleichung (2.24) vernachlässigt werden, sodass die Dispersionsbeziehung

$$m^2 = \frac{N^2}{(c - u_0)^2} - k^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + k^2 = \frac{N^2 k^2}{\hat{\omega}^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\omega} = \pm \frac{N k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \quad (2.25)$$

folgt. Der Wellenvektor $\mathbf{k} = (k, m)$ mit seinem Betrag $|\mathbf{k}| = \sqrt{k^2 + m^2}$ beschreibt die Richtung, in die sich die Wellenfronten ausbreiten. Für eine in positive x -Richtung propagierende Welle mit $k > 0$ bestimmt die vertikale Wellenzahl

$$m = \pm k \left(\frac{N^2}{\hat{\omega}^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

ob sich diese nach oben ausbreiten ($m > 0$) oder nach unten ($m < 0$). Die intrinsischen Phasengeschwindigkeiten $\hat{c}_{Px} = \hat{\omega}/m$ und $c_{Pz} = \hat{\omega}/m$ bezeichnen die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellenfronten relativ zur Hintergrundströmung bewegen (Fritts & Alexander, 2003). In Sutherland (2010) wird der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten der Phasenlinien, die von einem festen Ort aus beobachtet werden und der Geschwindigkeit, die ein Beobachter hat, der sich auf einer Wellenfront mitbewegt, aufgezeigt. Erstere sind als $c_{Px} = \omega/k$ und $c_{Pz} = \omega/m$ definiert und sind nicht als die Komponenten eines Geschwindigkeitsvektors zu interpretieren (Fritts & Alexander, 2003), während zweitere durch $c_{px} = (\omega k)/|\mathbf{k}|^2$ und $c_{pz} = (\omega m)/|\mathbf{k}|^2$ gegeben sind und die Komponenten der Phasengeschwindigkeit \mathbf{c}_p darstellen (Sutherland, 2010). Für die bereits in Gleichung (2.22) eingeführte Phasengeschwindigkeit c gilt $c = c_{Px}$. Die Gruppengeschwindigkeit $\mathbf{c}_g = (c_{gx}, c_{gz})$ ist mit dem Energietransport assoziiert und wird aus der Frequenz

$$\omega = u_0 k + \hat{\omega} = u_0 k \pm N k (k^2 + m^2)^{-1/2} = u_0 k \pm \frac{N k}{|\mathbf{k}|} \quad (2.27)$$

berechnet, was auf die Komponenten

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = u_0 \pm N m^2 (k^2 + m^2)^{-3/2} = u_0 k \pm \frac{N m^2}{|\mathbf{k}|^3} \quad (2.28)$$

$$c_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \mp N k m (k^2 + m^2)^{-3/2} = \mp \frac{N k m}{|\mathbf{k}|^3} = \mp \frac{m \hat{\omega}^3}{k^2 N^2} \quad (2.29)$$

führt. Bei nach oben propagierenden Wellenfronten mit $k > 0$ und $m > 0$ wird der obere Zweig der Wurzel betrachtet, wodurch die Gruppengeschwindigkeit in positive x -Richtung und in negative z -Richtung gerichtet ist. Energie wird also nach unten transportiert. Es gilt $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0$, der Energietransport verläuft also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Wellenfronten. Außerdem kann gezeigt werden, dass $\mathbf{c}_p \cdot \mathbf{c}_g = 0$ gilt.

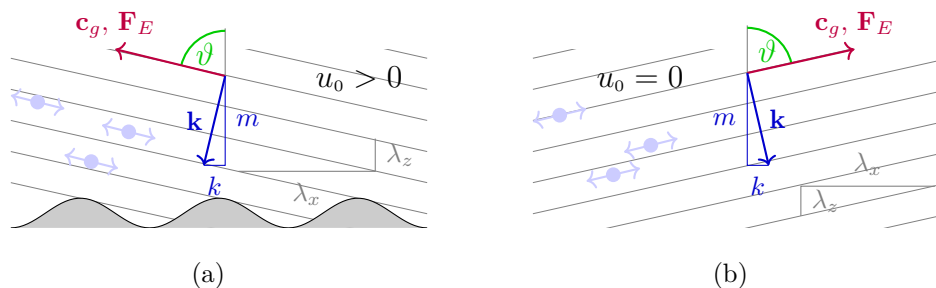


Abb. 2.1: Schemazeichnung ebener Wellen mit nach oben gerichtetem Energietransport. Dargestellt sind Gruppengeschwindigkeit und Energiefluss nach Gl. (2.44) in dunkelrot, der Winkel, den diese mit der Vertikalen einschließen (grün), der Wellenvektor (dunkelblau), Wellenlängen (grau) und einzelne oszillierende Luftpakete (hellblau) für (a) stationäre orographische Wellen bei Anströmung von links ($u_0 > 0$) mit $k < 0$, $m < 0$ und (b) Wellen in ruhender Umgebung ($u_0 = 0$) mit $k > 0$, $m < 0$.

Stationäre Wellen Bei manchen Wellenarten ändert sich, vom Boden aus betrachtet, die Lage der Wellenfronten nicht mit der Zeit. Dies ist zum Beispiel bei Wellen der Fall, die beim Überströmen von Bergen entstehen und es gilt $\omega = 0$ (Nappo, 2012). Dadurch ergibt sich die intrinsische Phasengeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit der Wellenfronten relativ zur Strömung, zu $\hat{c}_{P_x} = \hat{\omega}/k = (\omega - u_0 k)/k = -u_0$. Eine stationäre Welle bewegt sich also mit derselben Geschwindigkeit wie der Hintergrundwind, jedoch in entgegengesetzte Richtung. Die Dispersionsrelation nimmt hier die Form

$$m^2 = \frac{N^2}{u_0^2} - k^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + k^2 = \frac{N^2}{u_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\omega}^2 = (0 - u_0 k)^2 = u_0^2 k^2 \quad (2.30)$$

an. Bei positivem Hintergrundwind $u_0 > 0$ erfordert $\omega = 0$, dass in Gleichung (2.27) der untere Wurzelzweig benutzt werden muss, für die vertikale Gruppengeschwindigkeit gilt also $c_{gz} = N k m / |\mathbf{k}|^2$. Daraus wird ersichtlich, dass eine positive Gruppengeschwindigkeit und damit ein nach oben gerichteter Energietransport dann eintritt, wenn k und m dasselbe Vorzeichen haben. Ein solcher Fall ist in Abbildung 2.1a dargestellt.

Ruhende Umgebung Propagieren Wellen durch eine Atmosphäre, die sich in Ruhe befindet, verändert sich die Dispersionsrelation mit $u_0 = 0$ zu

$$m^2 = \frac{N^2}{c^2} - k^2 = k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\omega}^2 = \omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2}. \quad (2.31)$$

Da es physikalisch sinnvoll ist, die Frequenz ω in Gleichung (2.27) positiv zu definieren, wird dort der obere Wurzelzweig benutzt, sodass sich eine positive vertikale Gruppengeschwindigkeit c_{gz} dann ergibt, wenn m und k unterschiedliche Vorzeichen haben, siehe auch die Illustration in Abbildung 2.1b.

Hydrostatische Wellen Ist die vertikale Wellenlänge deutlich kleiner als die horizontale Wellenlänge, kann die Dispersionsrelation mit $k/m \ll 1$ als

$$m^2 = \frac{N^2}{(c - u_0)^2} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = \frac{N^2 k^2}{\hat{\omega}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\omega}^2 = \frac{N^2 k^2}{m^2} \quad (2.32)$$

geschrieben werden.

Leicht veränderlicher Hintergrund

Wie in Kapitel 2.4 in Nappo (2012) beschrieben, kann auch für den Fall, dass der atmosphärische Hintergrund (N^2, u_0) nicht konstant ist, also eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + Q^2(z) \psi = 0 \quad (2.33)$$

für die Strömung gegeben ist, näherungsweise eine Lösung gefunden werden. Wenn sich der Hintergrund, hier symbolisiert durch die Funktion $Q(z)$, nur langsam ändert, kann der Ansatz von Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) verwendet werden: Die Funktion $\psi(z) = \Psi_0 Q^{-1/2} \exp(\pm i \int_0^z Q dz)$, welche die Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + Q^2(z) (1 + d) \psi = 0 \quad (2.34)$$

löst, stellt für $d := \frac{1}{2Q^3} \frac{d^2Q}{dz^2} - \frac{3}{4Q^4} \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2 \ll 1$ auch eine Lösung für die TGE (2.22) dar. Dies tritt dann ein, wenn sich eine Welle in einem Medium ausbreitet, das verglichen mit ihrer vertikalen Wellenlänge langsam variiert, was oft bei hydrostatischen Schwerewellen erfüllt ist.

In der praktischen Anwendung kann dies so umgesetzt werden, dass eine Skalenseparation zwischen der Skalenhöhe der potentiellen Temperatur $H_\theta = c_p T_{00}/g$ und der Wellenlänge vorgenommen wird. Für die Welle kann dabei (nach Bretherton, 1966; Achatz et al., 2010; Muraschko et al., 2015) ein Ansatz der Form

$$\psi'(x, z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \Re \left\{ \tilde{\psi}_j(Z, T) \exp \left[i k x + \frac{i}{\epsilon} \Phi(Z, T) \right] \right\} \quad (2.35)$$

gemacht werden. Hier steht ψ' für den kleinskaligen Anteil verschiedener Größen, hier sind das (u', w', b', p') , und ϵ für einen kleinen Parameter. Mit

$$b = b' = g \theta' / \theta_0 \quad (2.36)$$

ist der Auftrieb definiert, wobei θ_0 ein konstanter Wert ist. Die Amplitude $\tilde{\psi}$ hängt von "langsamen" Höhen- und Zeitkoordinaten $Z = \epsilon z$ und $T = \epsilon t$ ab, während die Phase $\Phi(Z, T)/\epsilon$ schneller variiert und über

$$m(Z, T) = \frac{\partial \Phi}{\partial Z}, \quad \omega(Z, T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} \quad (2.37)$$

mit der vertikalen Wellenzahl m und der Wellenfrequenz ω zusammenhängt. Der Ansatz kann in die linearisierten Boussinesq-Gleichungen (2.10) eingesetzt werden und die dadurch entstehenden Terme nach dem Auftreten von ϵ sortiert werden. Dann ergeben sich in erster Ordnung $\mathcal{O}(1)$ die Dispersionsrelation (2.25) und die Polarisationsbeziehungen (2.18a)-(2.18d), siehe Muraschko et al. (2015). Die Polarisationsbeziehungen können auch kompakt geschrieben werden:

$$\left(\tilde{u}_0, \tilde{w}_0, \tilde{b}_0, \tilde{p}_0\right) = a \left(-i \frac{\hat{\omega}}{k}, i \frac{\hat{\omega}}{m}, \frac{N^2}{m}, -i \frac{\hat{\omega}^2}{k^2}\right) \quad (2.38)$$

Der konstante Wert a ist dimensionslos und beschreibt die Wellenamplitude, sodass diese für $|a| > 1$ statisch instabil wird.

In der nächsten Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ folgt das Gesetz für die Erhaltung der Wellenwirkung

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial (c_{gz} \mathcal{A})}{\partial z} = 0. \quad (2.39)$$

Die Wellenwirkung hängt über $\mathcal{A} := E/\hat{\omega}$ mit der Wellenenergie E zusammen. Deren Definition und Eigenschaften werden im nächsten Abschnitt 2.2.2 vorgestellt.

2.2.2 Erhaltungsgrößen

Aus der Kenntnis darüber, welche Größen bei einem Vorgang unter welchen Bedingungen erhalten werden, lässt sich ermitteln, ob und wie ein Austausch von einer dieser Größen stattgefunden hat. Dabei spielt es eine Rolle, ob die Welle sich in einer ruhenden Umgebung ausbreitet oder ob ein Hintergrundwind, möglicherweise mit Scherung, vorhanden ist.

Energie

Aus den linearisierten Boussinesq-Gleichungen lässt sich eine Regel für die Erhaltung der Energie ableiten. Nach Kombination der x - und z -Komponenten der Impulsgleichung (2.16a) und unter Hinzuziehen der Kontinuitätsgleichung (2.16c) gilt (Nappo, 2012):

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} \rho_0 (u'^2 + w'^2) + \frac{1}{2} \rho_0 N^2 \xi^2 \right] = -\frac{\partial}{\partial x} (u' p') - \frac{\partial}{\partial z} (w' p') \quad (2.40)$$

Dabei ist ξ die vertikale Auslenkung eines Luftpakets aus dem Gleichgewichtszustand, sodass $w' = \partial \xi / \partial t$ und $\rho' = -\xi d\rho_0/dz$ gilt. Der Term in eckigen Klammern beschreibt die Gesamtenergie einer Störung pro Einheitsvolumen und setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen:

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2} \rho_0 (u'^2 + w'^2 + N^2 \xi^2) = \frac{1}{2} \rho_0 \left(u'^2 + w'^2 + \frac{b'^2}{N^2} \right) \quad (2.41)$$

Die letzte Umformung zeigt, dass die Energie auch mit Hilfe des Auftriebs (2.36) geschrieben werden kann, wobei die Boussinesq-Näherung (2.6) benutzt wurde. Die Gleichung für die Energie der Störung lautet damit

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x}(u'p') + \frac{\partial}{\partial z}(w'p') = 0. \quad (2.42)$$

Da die Energie einer Welle periodisch in Raum und Zeit ist, kann die zeitliche Mittelung von Gleichung (2.42) betrachtet werden. Dazu wird die mittlere Wellenenergie

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\rho_0 (\overline{u'^2 + w'^2}) + \frac{1}{2}\rho_0 N^2 \overline{\xi^2} \quad (2.43)$$

mit den gemittelten Druckstörungstermen in Gleichung (2.42) in Verbindung gebracht. Letztere beschreiben den Energiefluss \mathbf{F}_E durch eine Oberfläche und können für einen Wellenansatz (2.17) und unter Verwendung der Gleichungen (2.18) und (2.28)-(2.29) als

$$\mathbf{F}_E = \overline{u'p' + w'p'} = \overline{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{u}'} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{u}'^*) = \mathbf{c}_g \bar{E} \quad (2.44)$$

umgeschrieben werden. Damit kann Gleichung (2.42) in der horizontalen Mittelung als

$$\frac{D\bar{E}}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_g \bar{E}) = 0 \quad (2.45)$$

ausgedrückt werden. Ohne Hintergrundwind und bei uniformer Schichtung gilt $\overline{D\bar{E}/Dt} = \overline{\partial\bar{E}/\partial t} = \partial\bar{E}/\partial t$ und die Wellenzahlen k und m sind konstant. Damit ist auch die Gruppengeschwindigkeit \mathbf{c}_g konstant und die Energie der Wellenstörung ist erhalten - ihre Änderungsrate wird also einzig durch die Divergenz des Energieflusses $\mathbf{F}_E = \mathbf{c}_g \bar{E}$ bestimmt:

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} + \mathbf{c}_g \nabla \bar{E} = 0 \quad (2.46)$$

Wellenwirkung

Im allgemeinen Fall, wenn die Umgebung nicht in Ruhe und nicht uniform geschichtet ist, entsteht bei der Mittelung von Gleichung (2.42) ein zusätzlicher Term:

$$\frac{D\bar{E}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'p'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{w'p'}) = -\rho_0 \overline{u'w'} \frac{du_0}{dz} \quad (2.47)$$

Hier wird deutlich, dass sich die Energie nicht nur durch eine Divergenz des Energieflusses ändert, sondern dass auch ein vertikaler Transport von Impuls durch die Strömung eine Änderung der Energie zur Folge hat (Sutherland, 2010). Die rechte Seite in Gleichung (2.47) kann umgeschrieben werden zu

$$\rho_0 \overline{u'w'} \frac{du_0}{dz} = \frac{k}{\hat{\omega}} \frac{du_0}{dz} c_{gz} \bar{E} = -\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \frac{Dg\hat{\omega}}{Dt}, \quad (2.48)$$

wobei $D_g = \partial/\partial t + \mathbf{c}_g \cdot \nabla$ als materielle Ableitung bezüglich der Gruppengeschwindigkeit definiert ist. Einsetzen in Gleichung (2.47) führt auf eine Erhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{E}}{\hat{\omega}} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{c}_g \frac{\overline{E}}{\hat{\omega}} \right) = 0 \quad (2.49)$$

Für die hier erhaltene Größe $\mathcal{A} := \overline{E}/\hat{\omega}$ wurde von Bretherton (1966) die Bezeichnung Wellenwirkung (*engl.: wave activity*) eingeführt. Falls die Hintergrundströmung konstant ist, reduziert sich Gleichung (2.49) auf Gleichung (2.46), dann ist die Energie erhalten. Ist jedoch eine Scherung vorhanden, ist die Wellenwirkung \mathcal{A} gemäß

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_g \mathcal{A}) = 0 \quad (2.50)$$

erhalten. Dieses Ergebnis folgt auch aus der ersten Ordnung eines WKB-Ansatzes, siehe vorheriger Abschnitt und Muraschko et al. (2015).

Pseudo-Energie

Eine weitere Größe, die im Zusammenhang mit internen Schwerewellen betrachtet werden kann, ist die Pseudo-Energie. Deren Verwendung wurde von McIntyre (1981) vorgeschlagen, um eine Größe zu gebrauchen, welche die Eigenschaften einer Erhaltungsgröße, die Symmetrie von Energie und Zeit, erfüllt und also zeitinvariant ist (Nappo, 2012). Für kleine Amplituden (Sutherland, 2010) ist sie als

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}} := \omega \frac{\overline{E}}{\hat{\omega}} = \omega \mathcal{A} \quad (2.51)$$

definiert. Die Pseudo-Energie hat, im Gegensatz zur Wellenwirkung, die Einheit einer Energie und entspricht im Fall einer ruhenden Hintergrundströmung auch der Energie.

Impuls

Die x -Komponente der Impulsgleichung (2.10a) kann für eine Situation ohne Rotation unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (2.10c) in Flussform

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.52)$$

geschrieben werden. Horizontale Mittelung dieser Gleichung führt dazu, dass die Ableitungen in x wegfallen und mit $\bar{u} = \overline{u_0 + u'} = \bar{u}_0 = u_0$ geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = - \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z} \quad (2.53)$$

Gleichung (2.53) macht deutlich, dass die Hintergrundströmung beschleunigt wird, wenn der mittlere vertikale Transport (w') des horizontalen Impulses pro Einheitsmasse (u')

divergiert (Sutherland, 2010). Um eine physikalisch sinnvolle Größe mit den Einheiten eines Impulses zu haben, kann Gleichung (2.53) wieder mit ρ_0 (hier konstant in Boussinesq-Näherung) multipliziert werden und man erhält:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial F_M}{\partial z} \quad (2.54)$$

Hier bezeichnet $M := \rho_0 u'$ den horizontalen Impuls und $F_M := \rho_0 \overline{u'w'}$ dessen vertikalen Fluss. Da die horizontalen und vertikalen Windfelder einer propagierenden Welle direkt korreliert sind, transportieren sie Impuls. Mithilfe der Polarisationsgleichungen (2.38) kann gezeigt werden, dass das Produkt $\overline{u'w'}$ maximal ist für den Fall, dass der vertikale Ausbreitungswinkel $\beta = k/\sqrt{k^2 + m^2} = 45^\circ$ beträgt, dass also $m = k$ gilt (Sutherland, 2010). Der Impulstransport ist nach oben gerichtet, wenn k und m unterschiedliche Vorzeichen haben.

Pseudo-Impuls

Wenn Schwerewellen sich dissipationsfrei durch ein Medium bewegen, das nur mit der Höhe variiert, wird ihr Pseudo-Impulsfluss $F_{\mathcal{M}\varphi}$ erhalten (Fritts & Alexander, 2003). Mit den Polarisationsbeziehungen (2.38) und mit Gleichung (2.41) kann geschrieben werden:

$$\rho_0 \overline{u'w'} = k c_{gz} \mathcal{A} \quad (2.55)$$

Mit der Impulsflussgleichung (2.53) und der Wellenwirkungserhaltung (2.50) kann daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 u_0 - k \mathcal{A}) = 0 \quad (2.56)$$

abgeleitet werden. Damit wird der Zusammenhang zwischen dem mittleren Impuls des Hintergrunds $\rho_0 u_0$ und dem Pseudo-Impuls der Welle $\mathcal{M}\varphi := k \mathcal{A} = k \overline{E}/\hat{\omega}$ ausgedrückt.

Eliassen-Palm-Beziehungen

Ausgehend von Gleichung (2.55) kann unter Benutzung von (2.44) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} c_{gz} \hat{\omega} \mathcal{A} &= \frac{\hat{\omega}}{k} \rho_0 \overline{u'w'} = \frac{\omega - u_0 k}{k} \rho_0 \overline{u'w'} = (c - u_0) \rho_0 \overline{u'w'} \\ \Leftrightarrow F_E &= -(u_0 - c) F_M \end{aligned} \quad (2.57)$$

Hierbei wurde der vertikale Energiefluss $F_E := c_{gz} \overline{E}$ benutzt. Gleichung (2.57) wird als das erste Theorem von Eliassen & Palm (1961) bezeichnet. Bei Betrachten von stationären orographischen Wellen gilt $c = 0$ und somit sind dann Energie- und Impulsfluss über den Hintergrundwind mit

$$F_E = -u_0 F_M \quad (2.58)$$

verbunden. Anschaulich erkennt man hieran, dass für eine nach oben propagierende orographische Welle ($c_{gz} > 0$ und $F_E > 0$), die sich in einer Hintergrundströmung mit

$u_0 > 0$ ausbreitet, der zonale Impulsfluss negativ ist, $F_M < 0$.

Bei der Auswertung von Mess- oder Simulationsdaten wird dieser Zusammenhang in der Form

$$\frac{1}{L} \int p' w' dx = -u_0 \frac{\rho_0}{L} \int u' w' dx \quad (2.59)$$

angewandt. In Gleichung (2.59) werden vertikaler Energie- und Impulsfluss über eine horizontale Strecke L , zum Beispiel die Länge eines Flugpfades, ermittelt (siehe z.B. Bramberger et al., 2017; Woods & Smith, 2010). Da die Eliassen-Palm-Beziehung aus den linearisierten Boussinesq-Gleichungen abgeleitet wurde, gilt sie nicht immer. Sie kann daher umgekehrt angewandt werden, um zu untersuchen, ob für eine bestimmte beobachtete Situation lineare Bedingungen herrschen oder nicht.

Zur Beschreibung von Wellen wird auch der sogenannte Eliassen-Palm-Fluss verwendet (z.B. Holton, 2004), dessen meridionale und zonale Komponenten als

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} -\rho_0 \overline{u'v'} \\ -\rho_0 \overline{u'w'} \end{pmatrix} = -\mathbf{F}_M \quad (2.60)$$

definiert sind. Damit kann die zweite Eliassen-Palm-Beziehung mithilfe von (2.57) ausgedrückt werden, bei der es sich um eine Umformulierung der bereits bei der Einführung der Wellenwirkung genannten Gleichung (2.50) handelt.

$$k \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (2.61a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_g}{D} \mathcal{A} + \mathcal{A} \nabla \cdot \mathbf{c}_g = 0 \quad (2.61b)$$

In Gleichung (2.61b) wird die zweite Eliassen-Palm-Beziehung in einer lagrangeschen Perspektive ausgedrückt: In einem Bezugssystem, das sich mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt und dabei einem Wellenpaket folgt, wird die Wellenwirkung \mathcal{A} entweder durch Konvergenz der Gruppengeschwindigkeit verändert oder durch nicht-konservative Effekte. Diese Herangehensweise, Wellenpaketen entlang der Gruppengeschwindigkeit zu folgen, wird in der Ray-Tracing-Methode verwendet, siehe Abschnitt 3.3.

2.2.3 Wechselwirkungsprozesse

Bei der Herleitung einiger wichtiger Gleichungen zur Dynamik von Schwerewellen werden durch Skalenseparation und Linearisierung Schwerewellen vielfach entkoppelt und getrennt von anderen Phänomenen betrachtet. Auch wenn dies für das konzeptuelle Verständnis wichtig ist, stellt es die Realität, in der Wechselwirkungen auf verschiedenen Skalen ablaufen, nur in Teilen dar.

Wellen-induzierte Strömung

Die im vorherigen Abschnitt eingeführte Impulsflussgleichung (2.53) zeigt bereits, wie die Störgröße $\overline{u'w'}$ einer Welle Einfluss auf den Hintergrundwind u_0 nehmen kann. Diese

Beziehung kann auch mit dem Eliassen-Palm-Fluss (2.60) ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (2.62)$$

Die Divergenz des Eliassen-Palm-Flusses hat also eine Beschleunigung der Hintergrundströmung zur Folge.

Nicht-Interaktions-Theorem

Die zweite Eliassen-Palm-Beziehung (2.61a) macht deutlich, dass im Falle einer stationären Amplitude, wenn auch

$$\partial \mathcal{A} / \partial t = 0 \quad (2.63)$$

gilt, der Eliassen-Palm-Fluss verschwindet, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Gleichung (2.62) zeigt, dass in einem solchen Fall keine Wechselwirkungen mit der mittleren Strömung auftreten. Aus der Bedingung (2.63) folgt mit den Gleichungen (2.50) und (2.55) auch, dass der Pseudo-Impulsfluss höhenkonstant ist, dass also

$$\frac{\partial F_{\mathcal{M}\mathcal{P}}}{\partial z} = \frac{\partial (k c_{gz} \mathcal{A})}{\partial z} = 0 \quad (2.64)$$

gilt. Sobald allerdings die Bedingungen hierzu verletzt sind, die Welle also nicht konservativ und stationär ist, kann eine Beschleunigung der mittleren Strömung durch die Welle erwartet werden. Die meisten derzeit in globalen Zirkulationsmodellen benutzten Parametrisierungen von Schwerewellen beruhen auf dieser Annahme eines stationären Zustands (Böloni et al., 2016). Eine Wechselwirkung zwischen Welle und Grundstrom kann dann nur stattfinden, wenn Wellen brechen. Das stationäre Profil der Wellenwirkung $\mathcal{A}(z)$ kann für gegebene Umgebungsbedingungen $N^2(z)$ und $u_0(z)$ direkt berechnet werden. Dazu wird zunächst über die höhenabhängige vertikale Wellenzahl

$$m(z) = \sqrt{\frac{k^2 N^2(z)}{(\omega - k u_0(z))^2} - k^2} \quad (2.65)$$

mit konstanter extrinsischer Frequenz $\omega = k u_0(z_0) \pm k N(z_0) / \sqrt{k^2 + m^2(z_0)}$ die Gruppengeschwindigkeit c_{gz} ermittelt. Die Höhe z_0 stellt hierbei die Quellregion der Welle dar, in der alle Größen bekannt sind. Daraus kann mithilfe von Gleichung (2.64) und Gleichung (2.29) das gesamte Profil der Wellenwirkung

$$\mathcal{A}(z) = \frac{c_{gz}(z_0) \mathcal{A}(z_0)}{c_{gz}(z)} = \frac{m(z_0) \hat{\omega}^3(z_0)}{k^2 N^2(z_0)} \frac{k^2 N^2(z)}{m(z) \hat{\omega}^3(z)} \mathcal{A}(z_0) \quad (2.66)$$

berechnet werden. Änderungen der Bedingungen in der Höhe z_0 werden also sofort durch das gesamte Höhenprofil weitergegeben und breiten sich nicht, wie es physikalisch realistisch wäre, mit der Gruppengeschwindigkeit aus (Böloni et al., 2016).

Wellenbrechen

Bei einer Betrachtung und numerischen Auflösung aller Skalen entspricht Wellenbrechen dem Übergang von großen Amplituden zu kleinskaliger turbulenter Bewegung. In linearer Theorie werden dafür verschiedene Bedingungen benutzt, die Informationen über Schwellen für das Wellenbrechen liefern. Zur Bestimmung des Kriteriums für die sogenannte **statische Instabilität** wird der lokale Auftriebsgradient der Welle $\partial\theta'/\partial z$ mit dem Auftrieb des Hintergrunds $\partial\theta_0/\partial z$ verglichen. Neutralisieren sich beide, tritt Instabilität auf und das Kriterium dafür ist nach Lindzen (1981) als

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\theta'}{\partial z} + \frac{d\theta_0}{dz} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{\theta_0} \left(\frac{\partial\theta'}{\partial z} + \frac{d\theta_0}{dz} \right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial b'}{\partial z} + N^2 < 0 \quad (2.67)$$

formuliert. Aus dem Ansatz (2.2.1) für die nullte Ordnung kann der lokale Auftrieb als

$$\frac{\partial b'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \Re \left\{ \tilde{b}_0(z, t) \exp [i k x + i \Phi(z, t)] \right\} = \Re \left\{ i \frac{\partial \Phi}{\partial z} b' \right\} = |m| |\tilde{b}_0| \quad (2.68)$$

geschrieben werden und die Energiegleichung (2.42) als

$$\bar{E} = \frac{\rho_0}{4} \left(|\tilde{u}_0|^2 + |\tilde{w}_0|^2 + \frac{|\tilde{b}_0|^2}{N^2} \right) = \frac{\rho_0 |\tilde{b}_0|^2}{2 N^2}. \quad (2.69)$$

Mit Gleichung (2.68) und Gleichung (2.69) lautet das Kriterium (2.2.3):

$$|m|^2 |\tilde{b}_0|^2 = \frac{2 m^2 N^2 \bar{E}}{\rho_0} > N^4 \quad (2.70)$$

Nützlich ist die Definition einer dimensionslosen Wellenamplitude a in der Art, dass $a > 1$ statische Instabilität ausdrückt. Aus Gleichung (2.70) kann eine Bedingung für die Wellenwirkung \mathcal{A} abgeleitet werden. Wellenbrechen tritt dann auf, wenn

$$\mathcal{A} = \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} = \left| \frac{\alpha^2 N^2(z) \rho_0(z)}{2 m^2(z) \hat{\omega}(z)} \right| = \left| \frac{\alpha^2 \hat{\omega}(z) \rho_0(z) N^2(z)}{2 k^2 [N^2(z) - \hat{\omega}^2(z)]} \right| \quad (2.71)$$

gilt, wobei der Parameter α die Unsicherheit bezeichnet, mit der das Kriterium behaftet ist. Durch einen Vergleich von Gleichung (2.71) mit dem Profil der Wellenwirkung in Gleichung (2.66) können die Regionen ermittelt werden, in denen es zu Wellenbrechen kommt.

Unter zusätzlicher Berücksichtigung von Windscherung wurde von Howard (1961) und Miles (1961) gezeigt, dass die Bedingung für **dynamische Instabilität** greift, wenn die lokale Richardson-Zahl kleiner als 1/4 ist, wenn also

$$Ri = \frac{N^2}{(du/dz)^2 + (dv/dz)^2} < \frac{1}{4} \quad (2.72)$$

gilt. Dies ist jedoch eine notwendige und noch keine hinreichende Bedingung.

Beide Instabilitätskriterien (2.70) und (2.72) gelten für Hintergrundprofile in N^2 und u_0 , die ausschließlich von der Vertikalkoordinate z abhängen. Außerdem berücksichtigt dies ausschließlich lineare Theorie, in der Realität tritt Wellenbrechen häufig schon bei geringeren Amplituden auf (Achatz, 2007).

3 Modelle und Methoden

In diesem Kapitel sollen die verschiedenen verwendeten Modelle vorgestellt werden, sowie einige Methoden zur Auswertung erläutert werden.

3.1 EULAG

Die in dieser Arbeit vorgestellten Simulationen wurden zum größten Teil mit dem Strömungslöser **EU**larian/semi-**LAG**rangian fluid solver (EULAG) durchgeführt, der von Prusa et al. (2008) beschrieben wird. Mit diesem Computermodell lassen sich Strömungen über eine Vielzahl von Größenskalen und für unterschiedliche physikalische Szenarien simulieren. Ursprünglich geleitet vom Forschungsinteresse an Wetter- und Klimasimulationen wurde ein spezielles numerisches Verfahren entwickelt (Abschnitt 3.1.6), das auf nicht-oszillierenden vorwärts in der Zeit berechneten Algorithmen basiert (Smolarkiewicz & Prusa, 2002), einen robusten elliptischen Drucklöser enthält und eine Anpassung des Gitters durch generalisierte Koordinaten ermöglicht. Dies führte zu einer Anwendung von EULAG in zahlreichen Bereichen der Strömungsdynamik wie beispielsweise die Kopplung an mikrophysikalische Modelle zur Simulation von Eiswolken (Spichtinger & Gierens, 2009), Untersuchungen visko-elastischer Wellen im menschlichen Gehirn (Cotter et al., 2002) oder Erweiterungen zur Beschreibung magneto-hydrodynamischer Konvektion in der Sonne (Smolarkiewicz & Charbonneau, 2013).

3.1.1 Basiszustand in EULAG

In EULAG werden die physikalischen Größen zur Implementierung und numerischen Lösung, wie in Abschnitt 2.1 in Gleichung (2.2) beschrieben, in Basiszustand und Abweichung aufgespalten. Die folgenden Basiszustände sind gebräuchliche Beispiele dafür, wie die Größen konsistent gewählt werden können. Sie werden in EULAG über den Parameter `lipps` gesetzt. Als Referenzgrößen werden $\theta_{00} = T_{00} = 300$ K, $\rho_{00} = 1$ kg m⁻³, $p_{00} = \rho_{00} R_d T_{00}$ und die Stabilität $s := N^2/g$ mit $N = 0.01$ s⁻¹ verwendet.

lipps = 0: Boussinesq, nach Boussinesq (1897).

$$\rho_0(z) = \rho_{00}$$

$$\theta_0(z) = \theta_{00}$$

$$T_0(z) = T_{00} - \frac{g}{R_d} z$$

$$p_0(z) = p_{00} - \rho_{00} g z$$

$$\text{Maximale Höhe: } z_{\max} = \frac{p_{00}}{\rho_{00} g} = \frac{8.611 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-2}}{1 \text{ kg m}^{-3} 9.81 \text{ m s}^{-2}} = 8.78 \text{ km}$$

lipps = 1: Anelastisch, isentropisch nach Ogura & Phillips (1962).

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \left(1 - \frac{\kappa}{H_r} z\right)^{1/\kappa-1}$$

$$\theta_0(z) = \theta_{00}$$

$$T_0(z) = T_{00} \left(1 - \frac{\kappa}{H_r} z\right)$$

$$p_0(z) = p_{00} \left(1 - \frac{\kappa}{H_r} z\right)^{1/\kappa}$$

$$\text{Maximale Höhe: } z_{\max} = \frac{H_r}{\kappa} = \frac{7000\text{m}}{2/7} = 24.50 \text{ km}$$

lipps = 2: Anelastisch, nach Clark & Farley (1984).

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-s z) \left[1 - \frac{g}{c_p T_{00} s} (1 - \exp(-s z))\right]^{1/\kappa-1}$$

$$\theta_0(z) = \theta_{00} \exp(s z)$$

$$T_0(z) = T_{00} \exp(s z) \left[1 - \frac{g}{c_p T_{00} s} (1 - \exp(-s z))\right]$$

$$p_0(z) = p_{00} \left[1 - \frac{g}{c_p T_{00} s} (1 - \exp(-s z))\right]^{1/\kappa}$$

$$\text{Maximale Höhe: } z_{\max} = -\frac{1}{s} \ln\left(1 - \frac{c_p T_{00} s}{g}\right) = -\frac{1}{1.02 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}} \ln\left(1 - \frac{1004.5 \cdot 300 \cdot 1.02 \cdot 10^{-5}}{9.81}\right) = 36.87 \text{ km}$$

lipps = 3: Anelastisch, isotherm, nach Bacmeister & Schoeberl (1989).

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \exp\left(-\frac{c_p s}{R_d} z\right)$$

$$\theta_0(z) = \theta_{00} \exp(s z)$$

$$T_0(z) = \frac{p_{00}}{R_d \rho_{00}}$$

$$p_0(z) = p_{00} \exp\left(-\frac{1}{H_s} z\right)$$

Keine Höhenbeschränkung

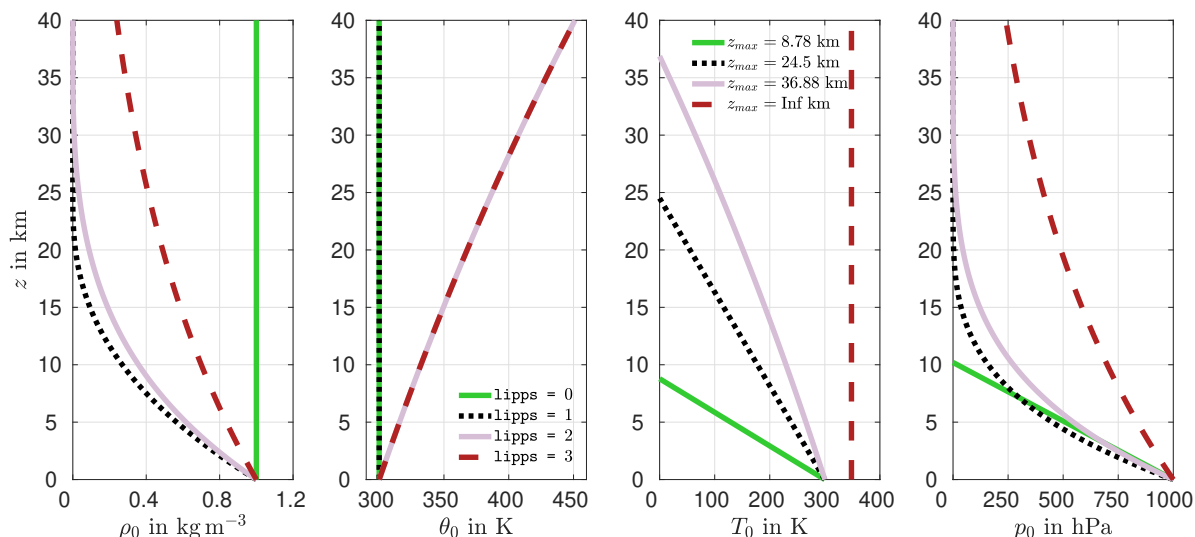


Abb. 3.1: EULAG-Basisprofile für Dichte, potentielle Temperatur, Temperatur und Druck zur Realisierung der Boussinesq-Gleichungen (**lipps** = 0, grüne Kurven) und drei Varianten zur Realisierung der anelastischen Gleichungen (**lipps** = 1/2/3).

3.1.2 Umgebungszustand in EULAG

Bei einer Aufspaltung der Variablen in einen Basiszustand und eine Störung ist es das Ziel, die Störung möglichst klein zu halten. Nur dann können etwa die Näherungen der Gleichungen (2.6) und (2.7) angesetzt werden und die sogenannte numerische Steifheit des Problems bleibt gering. Um dies zu ermöglichen, wird nach der Einführung des Basiszustands in Gleichung (2.2) in einem zweiten Schritt der sogenannte Umgebungszustand eingeführt, der hier mit einem tiefgestellten e (*engl.: environmental state*) versehen ist. Dieser Umgebungszustand kann verschiedene Formen haben, muss beispielsweise auch nicht hydrostatisch sein, und kann so besser an die zu behandelnde Situation angepasst werden, was die Störungen gering hält. Eine Aufspaltung der vollen Variablen ψ in einen Umgebungszustand ψ_e und ihre Abweichung ψ'' von diesem Zustand erfolgt gemäß

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_e(z) + \psi''(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

wobei ψ stellvertretend für die Größen $p, \theta, \rho, \mathbf{v}$ steht. Es wird im Allgemeinen keine Einschränkung darüber gemacht, von welchen Koordinaten der Umgebungszustand abhängt, auch zeitabhängige Umgebungsvariablen $\psi_e(\mathbf{x}, t)$ sind möglich.

Zeitunabhängiger Umgebungszustand

Die folgende Wahl des Umgebungszustands wird klassischerweise in EULAG verwendet, sie wird auch von Prusa et al. (2008) beschrieben. Dabei wird neben einer zeitunabhängigen potentiellen Temperatur für den Umgebungszustand gefordert, dass ein Gleichgewicht zwischen Druckgradientkraft, Corioliskraft und Auftriebskraft herrscht, dass also die Gleichungen

$$\theta_e = \theta_e(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \left(\frac{p_e - p_0}{\rho_0} \right) - \left(\frac{\theta_e - \theta_0}{\theta_0} \right) \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_e \quad (3.3)$$

erfüllt sind. Das Einsetzen dieser Bedingungen in die anelastischen Gleichungen (2.8) führt in der Impulsgleichung auf

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) - \frac{\theta'}{\theta_0} \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \underbrace{\nabla \left(\frac{p_e - p_0}{\rho_0} \right) + \left(\frac{\theta_e - \theta_0}{\theta_0} \right) \mathbf{g} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_e}_{=0} \\ &= -\nabla \left(\frac{p' - p_e + p_0}{\rho_0} \right) - \left(\frac{\theta' - \theta_e + \theta_0}{\theta_0} \right) \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \\ &= -\nabla \left(\frac{p''}{\rho_0} \right) - \frac{\theta''}{\theta_0} \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'' \end{aligned}$$

und in der Energiegleichung auf

$$\begin{aligned}\frac{D\theta}{Dt} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\theta_e + \theta'') + \mathbf{v} \cdot \nabla (\theta_e + \theta'') &= 0 \\ \frac{\partial \theta''}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\theta_e + \theta'') &= 0 \\ \frac{D\theta''}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_e &= 0.\end{aligned}$$

Das in dieser Weise modifizierte anelastische Gleichungssystem ist in EULAG implementiert und hat also folgende Form:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla \left(\frac{p''}{\rho_0} \right) - \mathbf{g} \frac{\theta''}{\theta_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'' &= \mathbf{0} & (3.4a) \\ \frac{D\theta''}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_e &= 0 & (3.4b) \\ \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) &= \mathbf{0} & (3.4c)\end{aligned}}$$

Zeitabhängiger Umgebungszustand

Im Allgemeinen kann auch ein vollständig orts- und zeitabhängiger Umgebungszustand $\psi_e = \psi_e(\mathbf{x}, t)$ gewählt werden. Es werde die Existenz eines solchen Zustands gefordert, der die generischen anelastischen Gleichungen (2.8) von Ogura & Phillips (1962) gemäß

$$\frac{D_e \mathbf{v}_e}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p_e - p_0}{\rho_0} \right) - \mathbf{g} \frac{\theta_e - \theta_0}{\theta_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_e \quad (3.5a)$$

$$\frac{D_e \theta_e}{Dt} = 0 \quad (3.5b)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_e) = \mathbf{0} \quad (3.5c)$$

mit $\frac{D_e}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla$ erfüllt (Fusina, 2011). Nun lässt sich untersuchen, inwiefern die Forderung (3.5) von den in EULAG implementierten Gleichungen (3.4) abweicht. Dazu wird das neue Gleichungssystem von den generischen anelastischen Gleichungen (2.8) abgezogen. Man erhält also für (2.8a) minus (3.5a):

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \frac{D_e \mathbf{v}_e}{Dt} &= -\nabla \left(\frac{p - p_0 - p_e + p_0}{\rho_0} \right) - \mathbf{g} \frac{\theta - \theta_0 - \theta_e + \theta_0}{\theta_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla \left(\frac{p - p_e}{\rho_0} \right) - \mathbf{g} \frac{\theta - \theta_e}{\theta_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) + \frac{D_e \mathbf{v}_e}{Dt} \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla \left(\frac{p''}{\rho_0} \right) - \mathbf{g} \frac{\theta''}{\theta_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'' + \frac{D_e \mathbf{v}_e}{Dt}\end{aligned}$$

Ausgehend von Gleichung (2.8b) erhält man außerdem für die Energiegleichung

$$\begin{aligned} \frac{D\theta}{Dt} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\theta_e + \theta'') + \mathbf{v} \cdot \nabla (\theta_e + \theta'') &= 0 \\ \frac{\partial \theta''}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta'' + \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_e &= 0 \\ \frac{D\theta''}{Dt} + \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_e &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D\theta''}{Dt} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_e - \frac{\partial \theta_e}{\partial t}. \end{aligned}$$

Also hat das Gleichungssystem nun folgende Form:

$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p''}{\rho_0} \right) + \mathbf{g} \frac{\theta''}{\theta_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'' + \frac{D_e \mathbf{v}_e}{Dt}$	(3.6a)
$\frac{D\theta''}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_e - \frac{\partial \theta_e}{\partial t}$	(3.6b)
$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0$	(3.6c)

Diese Gleichungen weisen im Vergleich zu den Gleichungen (3.4) zwei neue Terme auf der rechten Seite auf (farbig markiert), die als Störungen im gesamten Modellgebiet wirken. Dadurch beeinflusst die zeitabhängige Dynamik der Umgebungszustände die Lösung der Gleichungen (3.6). Es wird also zu jedem Zeitpunkt und an jedem Gitterpunkt eine bekannte Lösung der anelastischen Gleichungen als ein treibender Term benutzt, sodass die Dynamik unter dem Einfluss des sich ändernden Umgebungszustands berechnet wird.

3.1.3 Realisierung verschiedener Gleichungssysteme

In der hier verwendeten Modellversion von EULAG können über das Setzen von Umgebungsvariablen folgende Gleichungssysteme ausgewählt werden:

ISOUNDPROOF = 0 : voll kompressibel

ISOUNDPROOF = 1 : nicht kompressibel

IPSINCOMP = 0 : anelastische Gleichungen (Ogura & Phillips, 1962)

IPSINCOMP = 1 : pseudo-inkompressible Gleichungen (Durrant, 1989)

In Kapitel 4.1 werden später Simulationen gezeigt, die mit den Boussinesq-Gleichungen berechnet wurden. Wie genau kann also eine Boussinesq-Behandlung der Strömung in EULAG realisiert werden? Dazu werden über ISOUNDPROOF=0 und IPSINCOMP=0 die anelastischen Gleichungen ausgewählt. Durch die Wahl von lipps=0 wird dann der entsprechende Basiszustand 3.1.1 ausgewählt, also wird $\rho(z) = \rho_{00}$ in die anelastischen Gleichungen (2.8) eingesetzt und die Näherungen (2.6) und (2.7) genutzt, was folgende

Konsequenz hat:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.9)$$

Dies sind genau die Boussinesq-Gleichungen (2.10), siehe auch Smolarkiewicz & Szmelter (2011). Da es neben dem Basiszustand ψ_0 auch den Umgebungszustand ψ_e gibt, kann über diesen auch bei einem Boussinesq-Basiszustand ein variables Dichte- und Temperaturprofil gewählt werden.

3.1.4 Modellgebiet und Parallelisierung

In den hier vorgestellten Simulationen wird ein zweidimensionales Gitter (x - z -Richtung) verwendet. Entlang der x -Achse verteilen sich n Gitterpunkte auf L_x km, was in einer horizontalen Auflösung von Δx resultiert. Die vertikale Achse wird von l Gitterpunkten mit einem Abstand von jeweils Δz eingeteilt. Für die diskretisierten Koordinaten wird folgende Notation verwendet:

$$\begin{aligned} x(i) &:= (i-1)\Delta x, & x(i+1) - x(i) &= \Delta x, & i &= 1, 2, 3, \dots, n \\ z(k) &:= (k-1)\Delta z + z_0, & z(k+1) - z(k) &= \Delta z, & k &= 1, 2, 3, \dots, l \end{aligned}$$

Das Modell EULAG erlaubt eine parallelisierte Berechnung des Zustands der Atmosphäre, was hier für die x -Richtung und die z -Richtung genutzt wird. Dazu werden sogenannte Halozellen eingeführt, die auf jeweils zwei benachbarten Prozessoren berechnet werden, wodurch auch in den Gitterpunkten am Rand des von einem Prozessor berechneten Modellgebiets Informationen über die benachbarten Gitterpunkte vorliegen. Die Größe dieses Halo beträgt hier drei Gitterpunkte.

3.1.5 Randbedingungen

In EULAG werden die Strömungsgleichungen in eine elliptische Gleichung für den Druck überführt (Prusa et al., 2008). Um die Entwicklung der Strömung auf einem eingeschränkten Gebiet zu realisieren, müssen passende Randbedingungen für diese Gleichung gelten. Die physikalisch leicht einsehbare Dirichlet-Randbedingung, dass die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten am Rand verschwinden müssen, ist in eine implizite Neumann-Randbedingung für die Ableitung des Drucks überführbar, die in EULAG zur Anwendung kommt (Prusa & Smolarkiewicz, 2003). In Dirichlet-Bedingungen werden im Allgemeinen Vorgaben zu den Funktionswerten auf dem Rand gemacht, während Neumann-Bedingungen die Werte der Ableitung der Funktion auf dem Rand festlegt. Darüber hinaus lassen sich in EULAG weitere Wahlen für die Ränder treffen. Die hier vorgestellten Simulationen werden mit periodischen Randbedingungen in horizontaler

Richtung berechnet. Auch für den oberen Rand des Modellgebietes wird eine Randbedingung gesetzt. Dieser wird als ein undurchlässiger, fester Deckel betrachtet, für den gilt, dass die Vertikalgeschwindigkeit verschwindet. Um die Einhaltung dieser Randbedingungen zu gewährleisten und trotzdem Reflexionen an den Rändern zu verhindern, werden sogenannte Schwammschichten in das Modell eingebaut. Innerhalb dieser Regionen werden die Modellvariablen an den Umgebungszustand angepasst, welcher unter anderem einen Vertikalwind $w_e = 0$ aufweist. Dazu wird zur Impulsgleichung (3.4a) ein zusätzlicher Term addiert.

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p''}{\rho_0} \right) + \mathbf{g} \frac{\Theta''}{\Theta_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'' + \mathcal{F} + \alpha_S(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \quad (3.10)$$

Der zusätzliche Term enthält den Parameter α_S , der die Dimension einer inversen Zeit hat. Der Term bewirkt, dass der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} nahe der Oberränder des Modellgebietes auf das Umgebungsprofil \mathbf{v}_e gezwungen wird. Der Verlauf von α_S kann unterschiedlich gewählt werden, sofern nicht anders angegeben wird ein linearer Anstieg von α innerhalb der Schwammschicht angenommen, in Abschnitt 4.1.3 wird aber auch ein anderer Verlauf vorgestellt. Sowohl α_S als auch die Dicke der Schwammschicht sind sehr entscheidend dafür, ob und wie Reflexionen stattfinden. Deshalb wurden bei allen Simulationen Tests durchgeführt, um die richtige Wahl zu treffen, wobei die Angaben in Klemp & Lilly (1978) als Orientierung benutzt wurden.

3.1.6 Numerische Lösung

Zur Lösung der Differentialgleichungen für die Strömung wird in EULAG der Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm (MPDATA) angewandt, der auf Smolarkiewicz & Margolin (1998) zurückgeht.

Der advektive Transport einer Fluideigenschaft $\rho\Psi$ durch die äußeren Kräfte F^Ψ kann im Falle kartesischer Koordinaten durch folgende verallgemeinerte Bilanzgleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\Psi) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\Psi) = \rho F^\Psi \quad (3.11)$$

Diese Darstellung wird EULER'sche Form der Erhaltungsgleichung genannt. Hierbei ist $\Psi(\mathbf{x}, t)$ eine massenspezifische Eigenschaft des Fluids, zum Beispiel

- Impuls/Masse: $\Psi = \mathbf{v}$ Geschwindigkeit
- Masse/Masse: $\Psi = 1$ spezifische Masse
- Wasserdampfmasse/Masse: $\Psi = q$ spezifische Feuchte

Die äußeren Kräfte $F^\Psi(\mathbf{x}, t, \Psi)$ können je nach betrachteter Variable diabatische Wärmeflüsse, Druckgradientkräfte, Reibungskräfte oder anderes umfassen und werden oft

als *forcings* bezeichnet. Ausführen der Differentiation in Gleichung (3.11) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Psi) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Psi) &= \rho F^\Psi \\ \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \underbrace{\Psi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Psi \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi}_{=0} &= \rho F^\Psi \\ \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi &= \rho F^\Psi \\ \frac{D\Psi}{Dt} &= F^\Psi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hier wurde im zweiten Schritt die Massenerhaltung (2.1c) benutzt. Die resultierende Gleichung (3.12) ist äquivalent zur EULER'schen Form der Erhaltungsgleichung (3.11) und wird auch als ihre LAGRANGE'sche Form bezeichnet. Der Name EULAG wurde gewählt, weil in diesem Programm beide Formen realisiert sind. Zum Verständnis der Diskretisierung und numerischen Behandlung einer solchen Erhaltungsgleichung soll hier beispielhaft der Transport eines eindimensionalen Skalares ohne Quellen und Senken unter Annahme konstanter Dichte betrachtet werden. In diesem Fall vereinfacht sich Gleichung (3.11) zu

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial(u\Psi)}{\partial x} = 0. \quad (3.13)$$

Um diese Gleichung numerisch auszuwerten, wird die approximative Lösung $\Psi_i^n = \Psi(x_i, t^n)$ von Gleichung (3.13) auf dem diskreten Gitter

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{nx}\} & \text{mit } x_{i+1} - x_i &= \Delta x = \text{const.} \\ t^n &\in \{t^1, t^2, t^3, \dots, t^{nt}\} & \text{mit } t^{n+1} - t^n &= \Delta t = \text{const.} \end{aligned}$$

gesucht, unter Anwendung von finiten Differenzen. Dies kann über das sogenannte upstream-Advektionsschema (ein einfaches *forward-in-time and forward-in-space (FTFS) scheme*) erfolgen, wobei die Differentialquotienten $\frac{\partial \Psi}{\partial x}|_{x_i}$ durch Differenzenquotienten $\frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta x}$ ersetzt werden:

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n + F_{i-\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

Hierbei beschreiben die Flussfunktionen $F_{i\pm\frac{1}{2}}$, definiert über

$$F_{i-\frac{1}{2}} = \left[\left(u_{i-\frac{1}{2}} + |u_{i-\frac{1}{2}}| \right) \Psi_{i-1} + \left(u_{i-\frac{1}{2}} - |u_{i-\frac{1}{2}}| \right) \Psi_i \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} \quad (3.15)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \left[\left(u_{i+\frac{1}{2}} + |u_{i+\frac{1}{2}}| \right) \Psi_i + \left(u_{i+\frac{1}{2}} - |u_{i+\frac{1}{2}}| \right) \Psi_{i+1} \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x}, \quad (3.16)$$

den Transport zwischen den Gitterpunkten. Dies ist in Abbildung 3.2 veranschaulicht. Die vorgenommenen Diskretisierungen können die ursprüngliche Gleichung (3.13) bis zu einer Ordnung $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$ approximieren. Die auftretenden Unterschiede werden als implizite Diffusion bezeichnet. Die Rate dieser impliziten Diffusion kann im Falle konstanter Windgeschwindigkeit ($u = \text{const.}$) über eine Taylorentwicklung 2. Ordnung für

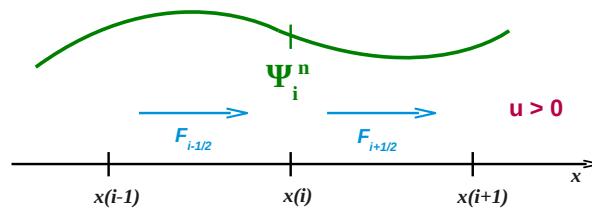


Abb. 3.2: Schemazeichnung des Flusses zwischen Gitterpunkten.

Ψ um den Zustand (x_i, t^n) abgeschätzt werden. Mit der Einschränkung für die Windgeschwindigkeit und nach Einsetzen der Flussfunktionen hat Gleichung (3.14) folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \Psi_i^{n+1} &= \Psi_i^n + \left[(u + |u|)\Psi_{i-1}^n + (u - |u|)\Psi_i^n \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
 &\quad - \left[(u + |u|)\Psi_i^n + (u - |u|)\Psi_{i+1}^n \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
 &= \Psi_i^n + \left[(u + |u|)\Psi_{i-1}^n - (u - |u|)\Psi_{i+1}^n - 2|u|\Psi_i^n \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Taylorentwicklungen

$$\begin{aligned}
 \Psi_i^{n+1} &= \Psi_i^n + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Big|_i^n \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2) \\
 \Psi_{i+1}^n &= \Psi_i^n + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_i^n \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2) \\
 \Psi_{i-1}^n &= \Psi_i^n - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_i^n \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)
 \end{aligned}$$

in Gleichung (3.17) führt auf

$$\begin{aligned}
 \Psi_i^n + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Big|_i^n \Delta t^2 &= \Psi_i^n + \left[(u + |u|) \left(\Psi_i^n - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_i^n \Delta x^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - (u - |u|) \left(\Psi_i^n + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_i^n \Delta x^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2|u|\Psi_i^n \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta t^3) \\
 &= \Psi_i^n + \left[|u| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Delta x^2 - 2u \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Delta x \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
 &\Leftrightarrow \\
 &\quad \dots \\
 \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_i^n + u \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_i^n &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(|u| \Delta x - u^2 \Delta t \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \Big|_i^n \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Die analytische Entsprechung dieser Gleichung lautet

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + u \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right), \quad (3.19)$$

mit dem impliziten Diffusionskoeffizienten $K = 1/2(|u|\Delta x - u^2\Delta t)$. Die diskretisierte Gleichung (3.14) approximiert also statt der Advektionsgleichung (3.13) vielmehr die Gleichung (3.19) (mit einer Genauigkeit 2. Ordnung). Diese Gleichung hat die Form einer Advektions-Diffusionsgleichung mit dem Diffusionsterm $\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$. Um das eigentliche Ziel der Diskretisierung, nämlich die Approximation von Gleichung (3.13) zu erreichen, reicht es nicht aus, den Fehlerterm abzuziehen, da er wichtig für die Stabilität des Verfahrens ist. In MPDATA wird die Kompensation dieses Fehlerterms dadurch realisiert, dass nach dem ersten Advektionsschritt mit der physikalischen Geschwindigkeit u ein weiterer Advektionsschritt durchgeführt wird, durch den die Diffusion umgekehrt wird:

$$\text{Anfangszeitpunkt } t^n: \quad \Psi_i^n \quad (3.20)$$

$$1. \text{ Schritt zum Zwischenzeitniveau } t^*: \quad \Psi_i^* = \Psi_i^n - F_{i-1/2} + F_{i+1/2} \quad (3.21)$$

$$2. \text{ Schritt zum Endzeitniveau } t^{n+1}: \quad \Psi_i^{n+1} = \Psi_i^* - \tilde{F}_{i-1/2} + \tilde{F}_{i+1/2} \quad (3.22)$$

Hierbei sind die Flussgeschwindigkeiten \tilde{F} analog zu Gleichung (3.15) definiert, wobei statt u die ‘‘Antidiffusionsgeschwindigkeit’’ oder ‘‘Pseudogeschwindigkeit’’

$$\tilde{u} = -u_d = K \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.23)$$

in ihrer diskretisierten Form

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{\Psi_{i+1}^* - \Psi_i^*}{\Psi_{i+1}^* + \Psi_i^*} \cdot \frac{|u_{i+1/2}|\Delta x - u_{i+1/2}^2\Delta t}{\Delta x} \quad (3.24)$$

einght. Diese Geschwindigkeit \tilde{u} hat keine physikalische Bedeutung. Das mehrdimensionale Advektionsschema ergibt sich als eine einfache Verallgemeinerung der eindimensionalen Ergebnisse (Smolarkiewicz, 1982). Durch die zeit- und ortsabhängige Berechnung der Pseudogeschwindigkeiten folgt im MPDATA-Schema an jedem Gitterpunkt zu jedem Zeitpunkt eine andere strömungsabhängige Kompensation des Fehlers.

3.1.7 Wellenanregung im Modell

Für die gezielte Anregung von Schwerewellen in EULAG, deren weitere Propagation und Modifikation durch die Tropopause anschließend untersucht wird, werden in diesem Abschnitt drei verschiedene Methoden vorgestellt. Die horizontalen Randbedingungen sind dabei in allen Fällen periodisch.

Modifikation der Topographie

Durch Einbau eines Hindernisses in das Modellgebiet wird anströmende Luft ausgelenkt, wodurch Schwerewellen angeregt werden können. Bei der Wahl einer sinusförmigen Topographie mit periodischen Randbedingungen, wie in Abbildung 3.3c dargestellt, entwickelt sich unter konstanter Anströmung und bei geeigneter Stabilität eine Welle, deren Wellenlänge der Berglänge entspricht (Nappo, 2012). Die resultierenden Vertikalwinde nach 480 min Simulationszeit in Abbildung 3.3b weisen ein Wellenmuster auf. In diesem Fall ändert sich die Stabilität der Umgebung, dargestellt in Abbildung 3.3a, in einer Höhe von $z = 10$ km von $N^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ auf $N^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$. Dies wird hier auch am Windfeld sichtbar: die vertikale Wellenlänge nimmt deutlich ab. Bei orographisch angeregten Wellen handelt es sich um ein stationäres Phänomen. Solange die Umgebungsbedingungen zeitkonstant sind, ist die Phasengeschwindigkeit $c = 0$, siehe auch Gleichung (2.30).

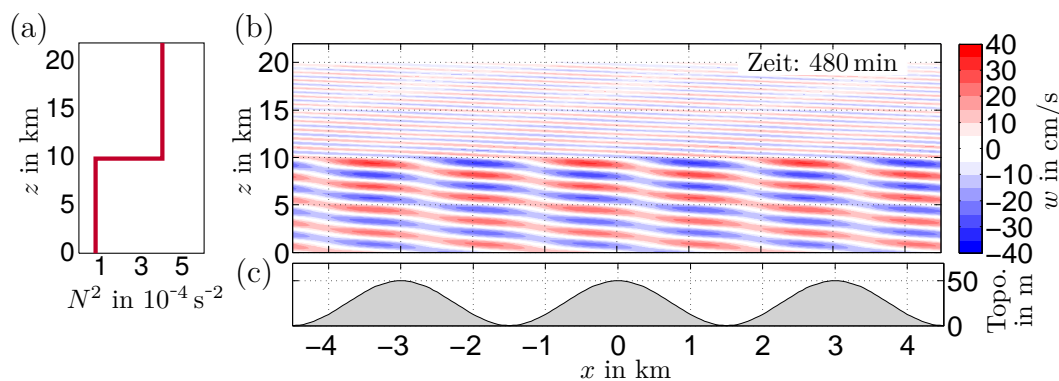


Abb. 3.3: Wellenanregung im Modell durch Topographie bei Anströmung mit $u_0 = 3 \text{ m s}^{-1}$. (a): Profil der Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 , (b): Vertikales Windfeld w , ausgelöst durch (c) sinusförmige Topographie.

Für eine sinusförmige Orographie kann bei konstantem Hintergrundwind u_0 und konstanter Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 eine *analytische Lösung* für die Strömung berechnet werden. Haben die Berge eine Wellenlänge $\lambda_b = 2\pi/k_b$ und eine Höhe H , wird auch genau diese Wellenlänge angeregt. Erfüllen die Hintergrundbedingungen die Propagationsbedingung, ist also $m \in \mathbb{R}$, gilt für verschiedene physikalische Größen, die über die Polarisationsbeziehungen (2.18) verknüpft sind (Nappo, 2012):

$$w(x, z) = -u_0 H k \sin(kx + mz) \quad (3.25a)$$

$$u(x, z) = u_0 H m \sin(kx + mz) \quad (3.25b)$$

$$p(x, z) = -\rho_0 u_0^2 H m \sin(kx + mz) \quad (3.25c)$$

$$\theta(x, z) = H \frac{d\theta_0}{dz} \cos(kx + mz) \quad (3.25d)$$

Initialisierung von Wellenpaketen

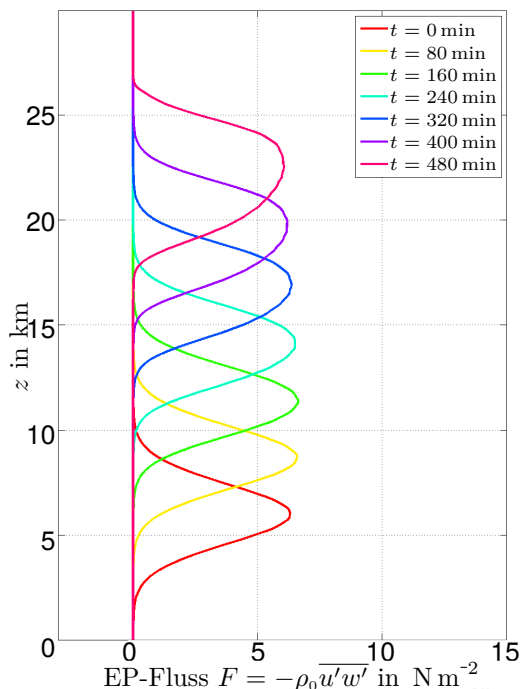


Abb. 3.4: Wellenpaket (Einhüllende) zu verschiedenen Zeitpunkten.

Während orographisch angeregte Wellen, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, ein stationäres Phänomen sind, gilt das bei der Propagation von Wellenpaketen nicht. Im Modell kann ein Wellenpaket beispielsweise durch Vorschreiben einer Welle im Wind- und Temperaturfeld zum Anfangszeitpunkt entstehen. Dabei müssen die vorgegebenen Felder Lösungen des verwendeten Gleichungssystems sein. Abbildung 3.4 zeigt ein Wellenpaket zu verschiedenen Zeitpunkten. Nach Rieper et al. (2013) wird eine Einhüllende für den Auftrieb $\hat{b}_0(z) = a \cdot N^2/m_0 \exp\left\{-((z-z_c)/L/2)^2\right\}$ verwendet und daraus werden über einen Ansatz (2.17) die übrigen Felder u' , w' , θ' gemäß der Polarisationsbeziehungen (2.38) bestimmt. Die Anfangshöhe des Wellenpakets beträgt hier $z_c = 6\,000$ m und die anderen Größen $a = 0.1$, $\lambda_x = \lambda_z = 4\,000$ m und $L \approx 5\,700$ m.

Zeitabhängige Umgebungszustände

Auch wenn die Ränder eines numerischen Modells so gewählt werden können, dass sie möglichst wenig Einfluss auf die zu untersuchende Strömung haben, bleiben sie doch vorhanden und machen es schwierig, manchen Fragestellungen nachzugehen. Um das Auslösen von nach oben propagierenden Wellen am Unterrand zu implementieren und gleichzeitig eine Reflexion von Wellen zu verhindern, die sich von oben dem Unterrand nähern, wurden zeitabhängige Umgebungsbedingungen genutzt. Die formalen Hintergründe sind in Abschnitt 3.1.2 und dort im Gleichungssystem (3.6) vorgestellt und eine Anwendung folgt in Abschnitt 4.1.3.

3.2 Mehrschichtenmodell

In dieser Arbeit werden Simulationen aus EULAG auch mit einem Mehrschichtenmodell verglichen, das von Pütz et al. (2018) entwickelt wurde. In diesem Modell wird Wellenpropagation durch eine dünne Schicht, beispielsweise die Tropopause, betrachtet. Da eine explizite Lösung der Taylor-Goldstein-Gleichung (2.22) nur für konstanten Hintergrund gegeben ist, werden Regionen, die Gradienten in der Stabilität oder der horizontalen Windgeschwindigkeit aufweisen, in viele dünne Schichten zerlegt, sodass stückweise konstante Profile für N^2 und u_0 betrachtet werden können, die den tatsächlichen Hintergrundzustand approximieren. Für die Boussinesq-Gleichungen ohne Hintergrundwind

wird in jeder Schicht j mit $j = 1, \dots, J$ eine Differentialgleichung für den Vertikalwind

$$\frac{d^2 w_j}{dz^2} + k^2 \left(\frac{N_j^2}{\omega^2} - 1 \right) w_j = 0 \quad (3.26)$$

gelöst. Dies ist, mit der vertikalen Wellenzahl $m_j = -k \sqrt{N_j^2/\omega^2 - 1}$, durch eine Welle

$$w_j(z) = A_j \exp(i m_j z) + B_j \exp(-i m_j z) \quad (3.27)$$

gegeben. Eine negative vertikale Wellenzahl m_j bedeutet nach oben gerichteten Energietransport (siehe Gleichung (2.26) in Abschnitt 2.2.1). Die Lösungen müssen an den Grenzflächen z_j zwischen zwei benachbarten Schichten stetig sein, für den Vertikalwind und seine Ableitung muss

$$w_j(z_j) = w_{j+1}(z_j) \quad \text{und} \quad dw_j(z_j)/dz = dw_{j+1}(z_j)/dz \quad (3.28)$$

gelten. Daraus folgt eine Bedingung für die Amplituden der Welle

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_j \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Die Komponenten der Matrix \mathbf{M}_j setzen sich im Wesentlichen aus den Wellenzahlen m_j und m_{j+1} der Schichten zusammen (siehe Pütz et al., 2018). Wird dies für alle Teilschichten so durchgeführt, erhält man in Kombination eine Gleichung, die die Amplituden der transmittierten Welle aus der Schicht $J+1$ mit der inzidenten Welle aus der Schicht 1 in Verbindung bringt. Randbedingungen für die Amplituden in der obersten Schicht $J+1$ führen schließlich auf ein System, das durch

$$\frac{A_{J+1}}{A_1} = \frac{\det(\mathbf{M})}{M_{2,2}} \quad (3.30)$$

gelöst werden kann. Hier steht \mathbf{M} für die Matrix, die durch Multiplikation aller Matrizen \mathbf{M}_j der einzelnen Schichten entstanden ist und $M_{2,2}$ für einen ihrer Einträge (2. Zeile, 2. Spalte). Gleichung (3.30) liefert also das Verhältnis der Amplitude der nach oben propagierenden Welle oberhalb der in J Teilschichten zerlegten Region nicht-konstanter Stabilität (A_{J+1}) zur Amplitude der nach oben gerichteten Welle direkt unterhalb dieser Region (A_1). Dies kann benutzt werden, um Transmissionskoeffizienten zu berechnen, siehe Kapitel 4.1 und 4.3.

3.3 Ray-Tracing-Modell

Die in Abschnitt 2.2.2 erwähnte Herangehensweise, Wellenpaketen entlang der Gruppengeschwindigkeit zu folgen, wird in Ray-Tracing-Modellen angewandt. Bei dieser mit *Strahlverfolgung* übersetzbaren Methode wird untersucht, wie sich die Welleneigenschaf-

ten entlang von Strahlpfaden verändern. In Kapitel 4.3 werden EULAG-Simulationen mit einem Ray-Tracing-Modell verglichen, das von Muraschko et al. (2015) und Bölöni et al. (2016) entwickelt wurde. Dort gelten, mit der materiellen Ableitung im Bezugssystem der Gruppengeschwindigkeit $D_g/Dt = \partial/\partial t + c_{gz}\partial/\partial z$, folgende prognostische Gleichungen:

$$c_{gz} = \frac{D_g z}{Dt} = \mp \frac{N k m}{\sqrt{k^2 + m^2}^3} \quad (3.31a)$$

$$\dot{m} = \frac{D_g m}{Dt} = \mp \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{dN}{dz} - k \frac{du_0}{dz} \quad (3.31b)$$

$$\frac{D_g \omega}{Dt} = k \frac{du_0}{dt} \quad (3.31c)$$

$$\frac{D_g \mathcal{A}}{Dt} = -\mathcal{A} \frac{\partial c_{gz}}{\partial z} \quad (3.31d)$$

Bei der Lösung des Gleichungssystems (3.31) können Probleme auftreten, wenn sich mehrere Strahlen schneiden. In der WKB-Annahme gibt es an jedem Punkt genau eine lokale Phase und Amplitude. Schneiden sich mehrere Strahlen, die dann an einem Punkt verschiedene Werte für m , ω , \mathcal{A} und also auch c_{gz} haben, ist die rechte Seite der Gleichung (3.31d) nicht mehr definiert.

Dieses Problem kann umgangen werden, wenn die Strahl-Gleichungen zu einer Transportgleichung für die Wellenwirkungsichte \mathcal{N} im Ort-Wellenzahl-Phasenraum umgeformt werden (Hertzog et al., 2002). Dabei ist die Wellenwirkungsichte eine Überlagerung einzelner WKB-Felder mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, die nicht miteinander interagieren:

$$\mathcal{N}(z, m, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\alpha(z, t) \delta[m - m_\alpha(z, t)] d\alpha \quad (3.32)$$

Mit der Transportgleichung der Wellenwirkungsichte \mathcal{N} im Ort-Wellenzahl-Phasenraum

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\partial(c_{gz} \mathcal{N})}{\partial z} + \frac{\partial(\dot{m} \mathcal{N})}{\partial m} = 0 \quad (3.33)$$

kann aus einer Anfangsverteilung $\mathcal{N}_0(z, m)$ ihre weitere zeitliche Entwicklung berechnet werden. Zur Interpretation der physikalischen Bedeutung der Ergebnisse können mithilfe der Gleichungen (2.53) und (2.55) Impulsfluss, durch die Welle induzierter Hintergrundwind und Energie aus der Wellenwirkungsichte ermittelt werden:

$$\overline{u'w'} = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} k c_{gz} \mathcal{N}(m, z, t) dm \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} k c_{gz} \mathcal{N}(m, z, t) dm \right) \quad (3.35)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(m, z, t) \hat{\omega} dm \quad (3.36)$$

3.4 Analysemethoden

3.4.1 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation erlaubt es, kontinuierliche, nicht-periodische Signale oder Funktionen in ein kontinuierliches Spektrum zu zerlegen, welches durch die Spektralfunktion beschrieben wird. Einer Funktion $f(x)$ wird ihre kontinuierliche Fourier-Transformierte (Spektralfunktion) $F(k)$ über die Integrale

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \quad \text{und} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{2\pi i k x} dk. \quad (3.37)$$

zugeordnet (siehe Butz, 2012; Weisstein, 2019). Aus diesen kontinuierlichen Funktionen können durch Diskretisierung der Frequenz $F(k)$ als $F(k_n) =: F_n$ mit $n = 0, 1, \dots, N - 1$ und durch Diskretisierung des Ortes $f(x)$ als $f(x_j) =: f_j$ mit $j = 0, 1, \dots, N - 1$ ermittelt werden (mathworks.com, 2019):

$$F_n = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i j n/N} \quad \text{und} \quad f_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi i j n/N} \quad (3.38)$$

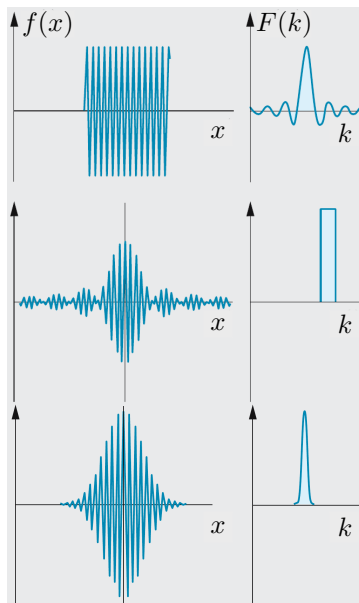


Abb. 3.5: Beispiele für Fourier-Transformationen, aus Gerthsen (2006) (bearbeitet).

In Abbildung 3.5 sind drei Beispiele für Schwingungen $f(x)$ und ihre Fourier-Transformierten $F(k)$ dargestellt. Im oberen Bildteil erkennt man, dass das Frequenzspektrum $F(k)$ einer Schwingung $f(x)$, die auf einen Ortsbereich begrenzt ist, dem Verlauf des Beugungsmusters an einem Spalt folgt (Gerthsen, 2006). Dieser Zusammenhang gilt genau umgekehrt auch für die Rücktransformation (Mitte): Ein begrenztes Intervall im Frequenzraum resultiert in einer Schwingung mit mehreren Maxima, deren Einhüllende dem Beugungsmuster an einem Spalt entspricht. Die unteren Bilder zeigen eine durch eine Gauß-Kurve modulierte Sinusschwingung $f(x)$, welche im Frequenzraum ebenfalls durch eine Gauß-Kurve $F(k)$ beschrieben wird.

3.4.2 Wavelet-Transformation

Mithilfe der Wavelet-Transformation können aus einer Datenreihe nicht nur die auftretenden Frequenzen extrahiert werden, sondern auch Informationen darüber, in welchen Abschnitten der Datenreihe welche Frequenzen dominant sind. Als Basisfunktionen werden dabei räumlich lokalisierte Wellen, sogenannte Wavelets, verwendet.

Im Folgenden wird die Wavelet-Analyse anhand einer Datenreihe $f(z)$ erläutert, die entlang einer räumlichen Achse z variiert. Dabei wird auf die Beschreibung in Torrence & Compo (1998) zurück gegriffen. Die Autoren stellen auf der Website <http://atoc.colorado.edu/research/wavelets/> Software zur Anwendung der Wavelet-Analyse zur Verfügung, die in dieser Arbeit verwendet wurde.

Hier wurde das Morlet-Wavelet $\psi_0(\eta)$ benutzt, das von einem dimensionslosen Ortsparameter η abhängt und als

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2} \quad (3.39)$$

definiert ist. Real- und Imaginärteil von ψ_0 sind in Abbildung 3.6a dargestellt. Wird $f(z)$ als eine Datenreihe f_j diskretisiert, die bei konstanter Intervallgröße Δz auf einem Gitter mit Index $j = 0, \dots, N-1$ definiert ist, kann daraus die kontinuierliche Wavelet-Transformation $W_n(s)$ ermittelt werden. Diese ist definiert als Faltung von f_j mit einer skalierten und verschobenen Version der Wavelet-Funktion:

$$W_j(s) = \sum_{j'=0}^{N-1} f_{j'} \psi^* \left[\frac{(j' - j)\Delta z}{s} \right] \quad (3.40)$$

Hierbei ist $\psi^* = \left[\left(\frac{\Delta z}{s} \right)^{1/2} \psi_0 \right]^*$ die komplex konjugierte normierte Wavelet-Funktion ψ_0 . Indem die Wavelet-Skala s variiert und ψ^* entlang des Ortsindex j verschoben wird, kann ein Bild rekonstruiert werden, das sowohl die Amplitude einzelner Merkmale des Signals zeigt als auch die Variation der Amplitude mit dem Ort.

Für jede Skala s muss Gleichung (3.40) N -mal angewandt werden, damit die kontinuierliche Wavelet-Transformation approximiert wird. Diese Berechnung erfolgt deutlich schneller im Fourier-Raum, wo die Wavelet-Transformation gleichzeitig für alle N durchgeführt werden kann. Für die Skalen s empfiehlt sich eine Wahl von M Skalen, die als Vielfache von 2 ausgedrückt werden:

$$s_m = s_0 2^{m\Delta m} \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, \dots, M \quad \text{und} \quad M = \Delta m^{-1} \log_2(N \Delta m / s_0)$$

Die kleinste Skala s_0 sollte dabei so gewählt werden, dass die entsprechende Fourier-Periode etwa $2 \Delta z$ beträgt. Aus der komplexen Wavelet-Transformierten $W_j(s)$ kann das reelle Wavelet-Leistungsspektrum $|W_j(s)|$ berechnet werden. Bei der Interpretation dieses Spektrums muss beachtet werden, dass bei der Fourier-Transformation eine Annahme bezüglich zyklischer Daten gemacht wird, die nicht unbedingt erfüllt ist. An den Rändern des Datensatzes können deshalb Fehler auftreten. Der Einflusskegel (engl.: *cone of influence*) gibt an, in welchen Bereichen des Spektrums Randeffekte wichtig werden. Er ist definiert als e -Abklingzeit τ_s der Wavelet-Leistung zu jeder Skala s und für das Morlet-Wavelet gilt $\tau_s = \sqrt{2} s$.

Im rechten Bildteil von Abbildung 3.6c ist ein Wavelet-Leistungsspektrum dargestellt, in dem auch der Einflusskegel als weiße Linie markiert ist. Die schwarze Kontur gibt ein Konfidenzniveau von 95 % an, bezogen auf ein Spektrum roten Rauschens mit lag-

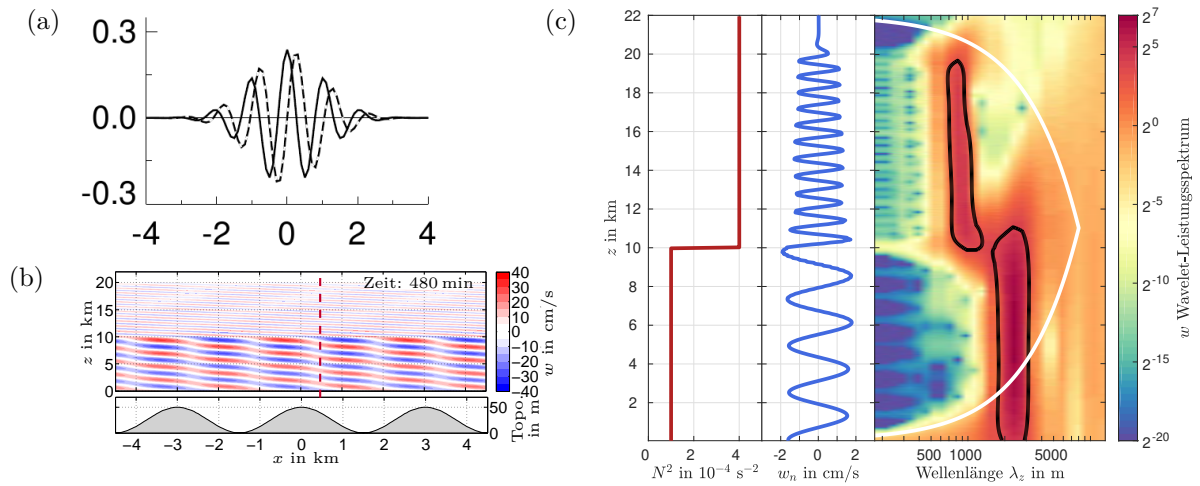


Abb. 3.6: (a) Morlet-Wavelet aus Torrence & Compo (1998), (b) vertikales Windfeld mit Markierung des Schnitts (rot-gestrichelt), (c) normierter Vertikalwind w (links) und zugehöriges Wavelet-Leistungsspektrum (rechts).

1-Koeffizient 0.72 (siehe Torrence & Compo, 1998). Es zeigt die Wavelet-Analyse eines Profils des Vertikalwinds (mittlerer Bildteil von Abbildung 3.6c) aus einer EULAG-Simulation. Der Vertikalschnitt durch das Windfeld ist in Abbildung 3.6b als rot-gestrichelte Linie dargestellt. Im Wavelet-Leistungsspektrum, das mit dem Morlet-Wavelet (Abbildung 3.6a) erstellt wurde, können einzelne Bereiche als dominante Signale ausgemacht werden. Im unteren Bereich bis zu einer Höhe von $z = 10$ km ist eine vertikale Wellenlänge λ_z zwischen etwa 2000 m und 3000 m verstärkt vorhanden, während in größeren Höhen kleinere Wellenlängen von unter 1000 m das Spektrum bestimmen. Dieser Fall ist in Abschnitt 4.2.1 ausführlich besprochen.

4 Ergebnisse

4.1 Zur Bestimmung von Transmissionskoeffizienten

Eine Frage, der im Zusammenhang mit der Ausbreitung von Schwerewellen durch die Tropopause nachgegangen werden kann, ist, inwiefern eine Welle durch diese Region vollständig hindurch propagiert oder ob ein Anteil der Welle womöglich reflektiert wird. In Abbildung 4.1 ist die Transmission und Reflexion einer Welle illustriert, die sich von einer Schicht j in eine Schicht $j+1$ ausbreitet, wobei in beiden Schichten jeweils eine konstante Brunt-Väisälä-Frequenz herrscht, die sich an ihrer Schnittstelle sprunghaft ändert. Die Berechnung von Transmissionskoeffizienten bietet eine Möglichkeit, für eine Wellenpropagation durch eine bestimmte Schicht den reflektierten und transmittierten Anteil zu quantifizieren. Dabei wird eine Größe benutzt, die bei der Wellenpropagation ohne Reflexion und andere Verluste erhalten ist und ermittelt, zu welchem Anteil die Größe in der zu untersuchenden Situation tatsächlich erhalten wird. Für ebene Wellenlösungen der

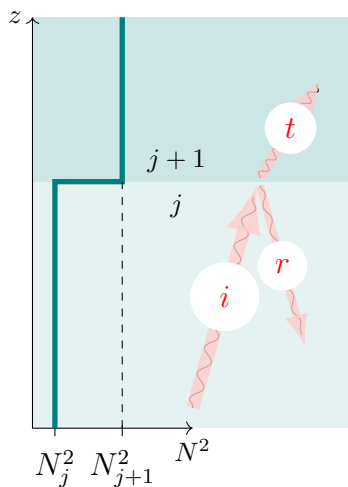


Abb. 4.1: Skizze einer Welle i , die einfallend (*engl.: incident*) aus einer Schicht j in eine Schicht $j+1$ propagiert - ein Teil der Welle wird reflektiert (r), ein Teil wird transmittiert (t).

Boussinesq-Gleichungen (2.10) können Transmissionskoeffizienten in einem Mehrschichtenverfahren ermittelt werden, siehe zum Beispiel Sutherland & Yewchuk (2004) und Pütz et al. (2018). Dabei wird ausgenutzt, dass sich die aus den Boussinesq-Gleichungen abgeleitete Taylor-Goldstein-Gleichung (2.22) für konstanten Hintergrundwind u_0 und konstante Brunt-Väisälä-Frequenz N analytisch lösen lässt. In diesem Kapitel werden Ergebnisse aus einem solchen Mehrschichtenverfahren mit hochaufgelösten EULAG-Simulationen verglichen. Dabei werden Wellen betrachtet, die in der x - z -Ebene durch eine in Ruhe befindliche Atmosphäre propagieren und dabei eine Schicht nicht-konstanter Stabilität durchlaufen. Diese Schicht repräsentiert die Tropopausenregion und ihre Dicke wird im Folgenden mit d bezeichnet. Wird sie in genügend viele Teilschichten j zerlegt, kann man in jeder dieser Schichten N_j als konstant annehmen und Lösungen für die Teilschichten bestimmen, welche durch Kopplung und Anpassen der Randbedingungen eine asymptotische

Lösung für den gesamten Propagationsvorgang darstellen. In Pütz et al. (2018) ist erläutert, welche Genauigkeit aus welcher Anzahl an Teilschichten $j = (1, \dots, J)$ folgt. Ohne Dissipation und Hintergrundströmung ist die mittlere Energie \bar{E} einer Schwerewelle er-

halten, siehe Gleichung (2.46) in Abschnitt 2.2.2. In einer stationären Situation gilt für den vertikalen Energiefluss $c_{gz} \bar{E} = \text{const.}$, was sich mit

$$c_{gz} \bar{E} = \frac{m \omega^3}{N^2 k^2} \cdot \frac{1}{2} \rho_0 \frac{N^2}{\omega^2} |w|^2 = \frac{\rho_0 m \omega^3}{2 k^2} |w|^2 \quad (4.1)$$

ausdrücken lässt. Hierbei sind k und m horizontale und vertikale Wellenzahlen, ω ist die Frequenz der Welle und $|w|^2$ die Amplitude des Vertikalwinds. Der Hintergrund weist die Brunt-Väisälä-Frequenz N und die Dichte ρ_0 auf, für welche hier angenommen wird, dass sie sich über die Tropopause hinweg kaum ändert und deshalb als konstant angesehen werden kann. Damit kann der Wellenenergiefluss ober- wie unterhalb der Region nicht-konstanter Brunt-Väisälä-Frequenz in ein Verhältnis gesetzt werden, das als Transmissionskoeffizient TC definiert ist und hier als

$$TC := \frac{(c_{gz} \bar{E})_{J+1}}{(c_{gz} \bar{E})_1} = \frac{(\rho_0 m \omega^3 |w|^2)_{J+1}}{(2 k^2)_{J+1}} \frac{(2 k^2)_1}{(\rho_0 m \omega^3 |w|^2)_1} = \frac{m_{J+1} |w_J|^2}{m_1 |w_1|^2} = \frac{m_{ss} |w_{ss}|^2}{m_{ts} |w_{ts}|^2} \quad (4.2)$$

berechnet wird. Hierbei wird auch angenommen, dass sich weder die horizontale Wellenzahl k noch die Frequenz ω ändern und im letzten Umformungsschritt außerdem die Schicht 1 mit der Ursprungsregion der Welle, der Troposphäre mit konstanter Brunt-Väisälä-Frequenz $N_{ts} = N_0$, assoziiert und die Schicht $J + 1$ mit der Stratosphäre und konstantem N_{ss} , die auf die J Schichten der Tropopausenregion folgt. Vollständige Transmission führt zur Erhaltung der Energie und $TC = 1$, während niedrigere Werte darauf schließen lassen, dass ein Teil der Energie reflektiert wurde und nicht in der oberen Schicht ankommt. Dieser Teil lässt sich durch den Reflexionskoeffizienten $RC := TC - 1$ beschreiben.

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, Sensitivitätsstudien der Transmission hinsichtlich der Parameter ω/N_0 und d/λ_x durchzuführen. Dabei wird einerseits die Frequenz der Welle ω zur Eigenfrequenz der Umgebung der Ursprungsregion der Welle N_0 ins Verhältnis gesetzt und andererseits die horizontale Wellenlänge λ_x mit der Tropopausenschichtdicke d verknüpft. Dabei kann das Frequenzverhältnis ω/N_0 mit Gleichung (2.31) über

$$\cos(\vartheta) = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m_0^2}} = \frac{k}{\sqrt{N_0^2 k^2 / \omega^2}} = \frac{\omega}{N_0} \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta = \arccos\left(\frac{\omega}{N_0}\right) \quad (4.3)$$

mit der Ausbreitungsrichtung der Welle in Verbindung gebracht werden, was auch in

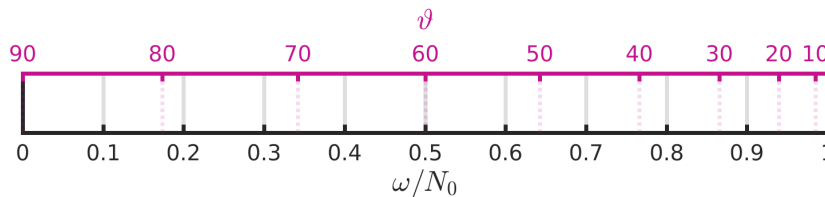


Abb. 4.2: Zusammenhang zwischen Frequenzverhältnis ω/N_0 und Ausbreitungswinkel ϑ .

Abbildung 4.2 illustriert ist. Der Winkel ϑ beschreibt dabei den Winkel, den die Phasenlinien der Welle mit der Vertikalen einschließen, siehe auch Abbildung 2.1. In diese Richtung ist auch die Gruppengeschwindigkeit \mathbf{c}_g und damit der Energietransport orientiert, siehe Abschnitt 2.2.1.

Bei der Berechnung von Transmissionskoeffizienten aus EULAG-Simulationen, die direkt mit dem Mehrschichtenmodell von Pütz et al. (2018) in Zusammenhang gebracht werden sollen, kamen interessante Fragen zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse auf. Ein grundlegender Unterschied des Mehrschichtenansatzes zu numerischen Simulationen ist es, dass bei letzteren mit einem fest definierten Gebiet mit Rändern gearbeitet wird, während das Mehrschichtenmodell die Analyse einer Welle vorsieht, die aus dem Unendlichen kommt und ins Unendliche geht. Es werden nun verschiedene Ansätze vorgestellt, um zu illustrieren, wie das schließlich gewählte Vorgehen zustande kam.

4.1.1 Wellenpaket

Der erste Ansatz, um die Propagation einer Welle durch eine ruhende Atmosphäre zu untersuchen, war es, zu Beginn der Simulation ein Wellenpaket vorzuschreiben, das ausgehend von der Troposphäre nach oben propagiert und dabei eine Region mit einem Gradienten in N durchläuft. Ausschnitte von Momentaufnahmen einer solchen Simulation sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Das Modellgebiet beträgt $L_x = 10$ km und $L_z = 50$ km mit einer räumlichen Auflösung von $\Delta x = \Delta z \approx 50$ m und einer zeitlichen Auflösung $\Delta t = 5$ s. Es werden die Boussinesq-Gleichungen gelöst, was durch die Wahl des anelastischen Gleichungssystems mit Basiszustand `lipps=0` realisiert ist, siehe Abschnitt 3.1.3. Der Umgebungszustand weist in einer Höhe von $z_{\text{tp}} = 11$ km eine lineare Änderung der Brunt-Väisälä-Frequenz auf, die dort innerhalb einer Schicht der Ausdehnung $d = 1000$ m von $N_{\text{ts}}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ auf $N_{\text{ss}}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ zunimmt, wie ganz links in Abbildung 4.3 illustriert:

$$N^2(z) = \begin{cases} N_{\text{ts}}^2, & \text{für } z \leq z_{\text{tp}} - \frac{d}{2} \\ N_{\text{ts}}^2 + \frac{N_{\text{ss}}^2 - N_{\text{ts}}^2}{d} \left(z - \left[z_{\text{tp}} - \frac{d}{2} \right] \right), & \text{für } z_{\text{tp}} - \frac{d}{2} < z \leq z_{\text{tp}} + \frac{d}{2} \\ N_{\text{ss}}^2, & \text{für } z_{\text{tp}} + \frac{d}{2} < z \end{cases} \quad (4.4)$$

Das Wellenpaket weist bei einer Frequenz $\omega = 0.0098 \text{ s}^{-1}$ eine horizontale Wellenzahl $k_0 = 2\pi/\lambda_x = 2\pi/(2000 \text{ m})$ auf und hat damit gemäß Gleichung (2.31) eine vertikale Wellenzahl von $m_0 = -2\pi/\lambda_z \approx -2\pi/(9850 \text{ m})$. Die tiefgestellte 0 steht für die Ursprungsregion des Wellenpakets und ist hier mit der Troposphäre gleichzusetzen. Es wird $m_0 < 0$ und damit eine Welle mit nach oben gerichtetem Energietransport gewählt, siehe Abbildung 2.1. Mit der Brunt-Väisälä-Frequenz in Bodennähe $N_0 = N_{\text{ts}} = 0.01 \text{ s}^{-1}$ ergibt sich für die Quotienten $d/\lambda_x = 0.5$ und $\omega/N_0 = 0.98$, das Wellenpaket breitet sich also nahezu vertikal mit $\vartheta \approx 11^\circ$ aus, siehe Abbildung 4.2. Alle Größen des Wellenfeldes sind mit einer Fermifunktion $1/(\exp[s_f(z - z_c)/L_z] + 1)$ gewichtet und damit zu Simulationsbeginn bei t_0 auf den Bereich unterhalb von $z_c = 8000$ m beschränkt, wobei

die Abnahme hin zu Null weich ist und durch den Parameter $s_f = 50$ charakterisiert wird. Während der Simulation kann das Wellenpaket dann frei nach oben propagieren. Die Fermifunktion ist in die Amplitude des Auftriebs \hat{b} eingeschrieben, genauso wie die dimensionslose Amplitude a , die ein Maß dafür ist, wie weit \hat{b} von der Schwelle der statischen Instabilität $b_s = \frac{N_0^2}{m}$ (siehe Gleichungen 2.38 und 2.70) entfernt ist. Diese beträgt hier $a = 0.01$ und die Definition des Wellenpakets orientiert sich an Rieper et al. (2013):

$$\hat{b}(z) = \frac{a N_0^2}{m_0 \exp \left[s_f \frac{z-z_c}{L_z} \right] + m_0} \quad (4.5a)$$

$$u(x, z, t_0) = \frac{m_0}{k_0} \frac{\omega}{N_0^2} \hat{b} \cos \left(k_0 x + m_0 z - \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.5b)$$

$$w(x, z, t_0) = \frac{\omega}{N_0^2} \hat{b} \cos \left(k_0 x + m_0 z + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.5c)$$

$$\theta(x, z) = \frac{\theta_e}{g} \hat{b} \cos (k_0 x + m_0 z) \quad (4.5d)$$

Die Zeitreihe des Vertikalwindes in Abbildung 4.3 zeigt, wie das Wellenpaket nach 1 h in die Stratosphäre eintritt und dort mit einer deutlich kleineren vertikalen Wellenlänge weiter propagiert. Aus der Dispersionsrelation (2.31), hier $m_j = -k_0 \sqrt{N_j^2 / \omega^2 - 1}$, ergibt sich das Wellenzahlverhältnis $m_{ss} / m_{ts} \approx 8.8$, wobei für N_j entweder die Brunt-Väisälä-Frequenz der Stratosphäre N_{ss} oder die der Troposphäre N_{ts} eingesetzt wird.

Anhand der veränderten Neigung der Phasenlinien in der Troposphäre nach 3 h Simulationszeit ist ersichtlich, dass dort der an der Tropopause reflektierte Anteil der Welle in Richtung Boden propagiert. Nach 6 h Simulationszeit wird die Welle wiederum am Boden reflektiert und propagiert erneut nach oben. Dies deckt sich mit der nach Gleichung (2.29) errechneten vertikalen Gruppengeschwindigkeit für die Troposphäre $c_{gz} \approx 2.2 \text{ km h}^{-1}$, wonach es ungefähr 5 h dauert, bis die Welle die Strecke von 11 km zwischen Boden und Tropopause zurück gelegt hat. Nach 9 h findet erneut Transmission eines nun bereits am Boden reflektierten Anteils des Wellenpakets in die Stratosphäre statt. Der in die Stratosphäre transmittierte Teil des Wellenpakets propagiert ab $t = 2 \text{ h}$

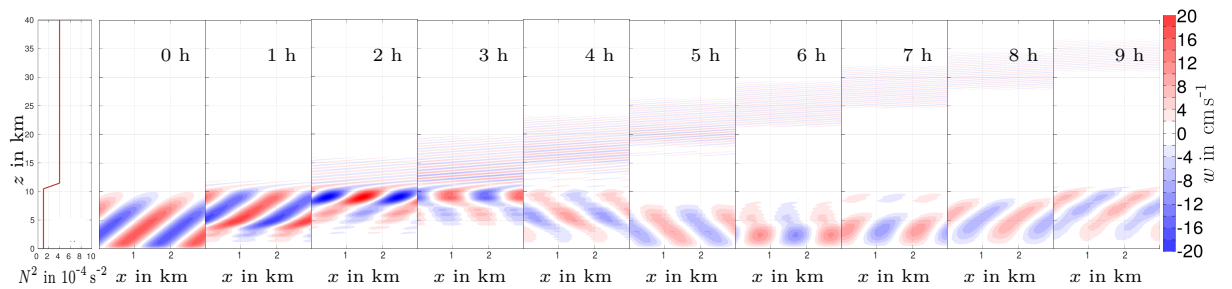


Abb. 4.3: Propagation eines Wellenpakets durch eine Tropopause mit linearer Stabilitätszunahme in der Höhe $z_{tp} = 11 \text{ km}$, für das $\omega/N_0 = 0.98$, $d/\lambda_x = 0.5$ und $a = 0.01$ gilt. Dargestellt ist das Profil der Brunt-Väisälä-Frequenz (links) sowie Ausschnitte aus dem vertikalen Windfeld zu verschiedenen Simulationszeiten.

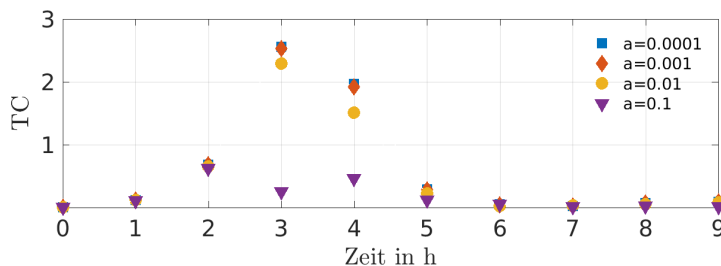


Abb. 4.4: Transmissionskoeffizienten für die Propagation von Wellenpaketen durch eine Tropopause mit linearer Stabilitätszunahme in der Höhe $z_{tp} = 11$ km, für die $\omega/N_0 = 0.98$ und $d/\lambda_x = 0.5$ gilt. Dargestellt ist der Zeitverlauf der Transmissionskoeffizienten für verschiedene Amplituden a , die die Abweichung zur statischen Instabilität $b_s = N_0^2/m_0$ beschreiben. Ergebnisse aus der Simulation in Abbildung 4.3 sind als gelbe Kreise dargestellt.

weiter bis an den Modelloberrand, wobei sowohl die Amplitude des Wellenpakets als auch seine Ausdehnung immer weiter abnehmen.

Zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten nach Gleichung (4.2) wird für jeden Zeitpunkt die Amplitude $|w_{ss}(t)|$ in der Stratosphäre mit der Amplitude in der Troposphäre zu Beginn der Simulation $|w_{ts}(t_0)|$ ins Verhältnis gesetzt. Die Amplituden werden dabei als das Maximum der absoluten vertikalen Windgeschwindigkeit innerhalb zweier Regionen jeweils ober- und unterhalb der Tropopause ermittelt. Die vertikale Ausdehnung jeder dieser Schichten beträgt $\Delta_w = 4$ km. In Abbildung 4.4 sind die Transmissionskoeffizienten der in Abbildung 4.3 dargestellten Simulation als gelbe Kreise gezeigt, neben den Transmissionskoeffizienten von drei weiteren Simulationen, die sich lediglich in der Amplitude a voneinander unterscheiden.

Die Transmissionskoeffizienten weisen eine starke Abhängigkeit vom betrachteten Zeitpunkt auf. Zwischen $t = 2$ h und $t = 4$ h werden die höchsten Werte erreicht, in diesem Zeitraum durchläuft das Wellenpaket die Tropopausenregion (Abbildung 4.3). Allerdings übersteigen die Werte bei $t = 3$ h und $t = 4$ h den physikalisch eigentlich maximal möglichen Wert von $TC = 1$ deutlich, Werte bis 2.55 werden erreicht. Dieses Verhalten wurde in verschiedenen Konfigurationen für diesen Simulationstyp so beobachtet und trat auch auf, wenn nicht $|w_{ts}(t_0)|$ sondern $|w_{ts}(t)|$ zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten benutzt wurde.

Ein Grund hierfür könnte die Form des Wellenpakets sein. Während der obere Rand durch die Fermifunktion (siehe Gleichung 4.5a) begrenzt wird, stellt sich der untere Rand, sobald die Welle zu propagieren beginnt, als ein Sprung der Einhüllenden von 1 auf 0 dar. Eine derart räumlich begrenzte Schwingung entspricht im Frequenzraum einer Verteilung mit einem Hauptmaximum und mehreren Nebenmaxima bei verschiedenen Wellenzahlen, siehe Abschnitt 3.4.1 und dort die oberen beiden Bilder in Abbildung 3.5. Die Schwingung setzt sich also aus unterschiedlichen, weit voneinander entfernt liegenden Wellenzahlen zusammen, wodurch die Dispersion erhöht wird. Unterschiedliche Komponenten breiten sich unterschiedlich schnell aus, können dadurch aufeinander auflaufen und so eine Verzerrung des Wellenpakets bewirken. Tatsächlich weist der Ver-

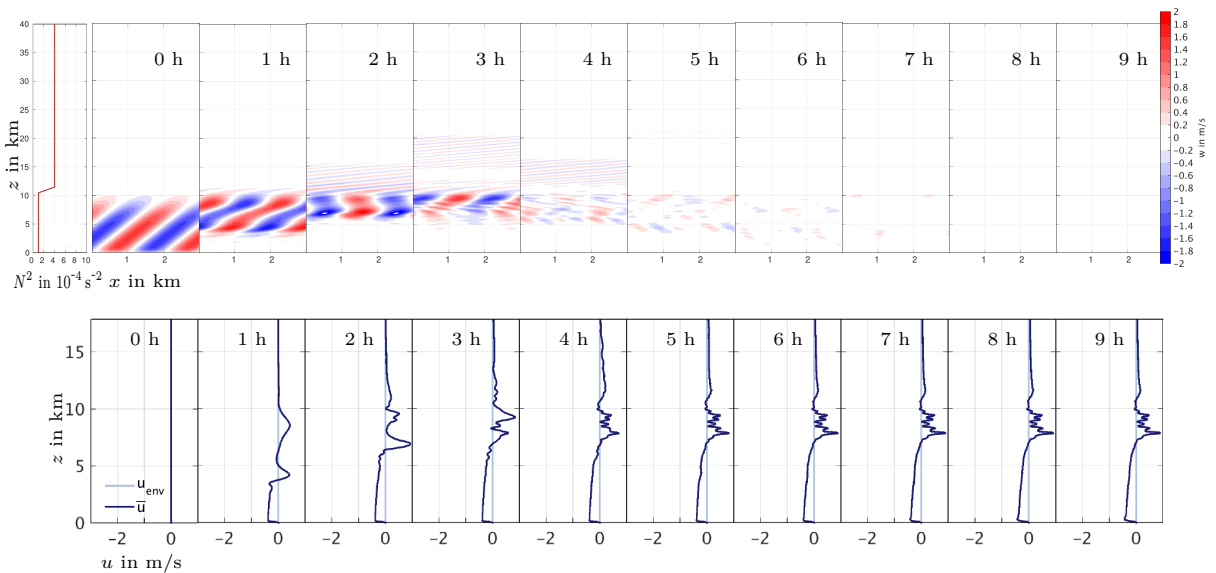


Abb. 4.5: Oben: Wie Abb. 4.3, aber mit Amplitude $a = 0.1$. Unten: Anfänglich initialisierter Umgebungswind $u_e = 0$ m/s (hellblau) und horizontal gemittelter Horizontalwind (dunkelblau) für verschiedene Zeitpunkte.

tikalwind nach 1 h in einer Höhe von etwa 5 km höhere Geschwindigkeiten auf als zu Simulationsbeginn, was damit zusammen hängen könnte. Außerdem können auch bereits einsetzende partielle Reflexion des Wellenpakets an der Tropopause und die Überlagerung der initialen und reflektierten Amplituden eine Rolle spielen. Das Maximum bei $z = 5$ km propagiert vertikal und kann zu einem späteren Zeitpunkt, etwa nach 3 h oder 4 h, durch die Tropopause transmittiert werden. In der unteren Stratosphäre werden dann Amplituden detektiert, die durch Dispersion und Überlagerung ungewöhnlich hoch sind, wodurch Transmissionskoeffizienten auftreten können, die größer als 1 sind.

Wird der Zeitpunkt $t = 2$ h betrachtet, zu dem das Wellenpaket bereits in die Tropopausenregion eingedrungen ist, aber die Reflexion noch nicht sehr weit fortgeschritten ist, ergibt sich als Mittelwert über alle vier Simulationen $\overline{TC} \approx 0.66$. Das Mehrschichtenverfahren aus Pütz et al. (2018) zeigt für die hier gezeigte Konfiguration von Wellenlänge und Frequenz einen Wert von $TC \approx 0.7$. Die beiden Methoden scheinen also, zumindest für eine Momentaufnahme, ähnliche Werte zu liefern. Allerdings ist die Wahl des richtigen Zeitpunkts, zu dem die Transmission betrachtet wird, nicht eindeutig möglich.

Generell weisen die drei Simulationen mit geringen Amplituden sehr ähnliche Werte auf. Lediglich die Simulation mit $a = 0.1$ zeigt eine deutliche Abweichung hin zu kleineren Werten für TC . Diese Simulation ist in Abbildung 4.5 im Zeitverlauf dargestellt. Neben Ausschnitten aus dem vertikalen Windfeld ist auch das horizontal gemittelte Profil des Horizontalwindes \bar{u} gezeigt.

Der Verlauf der vertikalen Windgeschwindigkeit in der Stratosphäre zeigt, dass nach $t = 2$ h ein Teil der Welle durch die Tropopause transmittiert wird und weiter nach oben propagiert ($t = 3$ h). Bei $t = 4$ h ist erneut eine Wellenstruktur in der unteren Stratosphäre vorhanden, während oberhalb von etwa 17 km Höhe kein Signal mehr zu sehen ist.

Diese erneute Transmission der Welle in die Stratosphäre kann auch mit der Form des Wellenpakets zusammenhängen, wie bereits oben mithilfe der Fourier-Transformation und Dispersion erläutert. Das Windfeld w in Abbildung 4.5 zeigt nach $t = 1$ h zwischen stärkeren Maxima und Minima in etwa 4 km und 9 km Höhe einen Bereich mit etwas niedrigeren Werten $|w|$. Die erneut auftretende Transmission in die untere Stratosphäre nach 4 h kann durch das Eintreten des unteren Maximums (bei $t = 1$ h in 4 km Höhe) in die Stratosphäre erklärt werden.

An beiden Variablen ist ablesbar, wie bereits nach $t = 1$ h nicht-lineare Effekte auftreten und die Welle bricht. Zu späteren Zeitpunkten kann beobachtet werden, dass die Welle weder in der Troposphäre noch in der Stratosphäre für einen längeren Zeitraum weiter propagiert. Schnell werden alle Amplituden sehr klein, verglichen mit der Ausgangsamplitude zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ h. Auf den Grundstrom hat das brechende Wellenpaket hier jedoch eine deutliche Auswirkung (Abbildung 4.5) - im Vergleich zum Simulationsbeginn, als $u_e = 0$ im gesamten Modellgebiet galt, gibt es auch nach 9 h Bereiche mit erhöhtem mittleren Horizontalwind \bar{u} .

Es wurde deutlich, dass hier eine große Schwankung der Transmissionskoeffizienten mit der Zeit auftrat, sodass diese Herangehensweise nicht ideal mit den Ergebnissen aus dem Mehrschichtenmodell vergleichbar ist. Es wurden verschiedene weitere Simulationen durchgeführt, in denen die Ausdehnung des Wellenpakets relativ zu seiner Wellenlänge sehr hoch war und diese Simulationen wurden für sehr weit in z -Richtung ausgedehnte Modellgebiete erstellt. Dennoch war das Ergebnis nicht zufriedenstellend, sodass ein sinnvoller Vergleich nicht durchgeführt werden konnte.

4.1.2 Vorschreiben der Welle am Unterrand

Eine Möglichkeit, einen stationären Zustand anzustreben, der eine vergleichbare Berechnung von Transmissionskoeffizienten zulässt, ist es, die gewünschte Lösung zu jedem Integrationschritt in einer Schicht am Unterrand des Modellgebiets vorzuschreiben, also eine ständige Quelle für Schwerewellen zu definieren.

Ein Beispiel einer solchen Simulation ist in Abbildung 4.6 gezeigt. Die Brunt-Väisälä-Frequenz erfährt nun keine Zunahme bei zunehmender Höhe, sondern ist konstant bis auf eine Schicht mit verringerter Stabilität. Auch wenn die Stabilität dort so gering ist, dass nach linearer Theorie keine Propagation von Wellen stattfinden könnte, ist es doch möglich, dass Wellen eine solche Schicht überwinden. Dieses Phänomen wird als Wellentunneln bezeichnet und kommt in verschiedenen Bereichen der Physik vor. Die theoretischen Grundlagen für die Atmosphäre wurden beispielsweise von Fritts & Yuan (1989) und Sutherland & Yewchuk (2004) untersucht und gehen dabei auf Erkenntnisse über den Ozean von Eckart (1961) zurück. Wellentunneln ist nicht spezifisch mit der Tropopause verknüpft, dort findet für gewöhnlich eine Zunahme der Stabilität statt. Jedoch können solche Schichten erniedrigter Stabilität in verschiedenen Höhenbereichen der Atmosphäre auftreten, weshalb auch ein solches Phänomen hier untersucht werden soll.

Das Modellgebiet hat eine räumliche Ausdehnung von $L_x = 10$ km und $L_z = 50$ km mit einer Auflösung von $\Delta x = \Delta z \approx 50$ m und die Simulationen werden mit einer zeitlichen Auflösung von $\Delta t = 5$ s durchgeführt. Es werden die Boussinesq-Gleichungen gelöst, was durch die Wahl des anelastischen Gleichungssystems mit Basiszustand `lipps=0` realisiert ist, siehe Abschnitt 3.1.3. Das Umgebungsprofil der Brunt-Väisälä-Frequenz ist in Abbildung 4.6 illustriert. Es ist konstant bei $N_{ss}^2 = N_{ts}^2 = N_0^2 = 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ bis auf eine Schicht von $d = 500$ m Dicke in einer Höhe von $z_t = 16$ km, innerhalb der die Stabilität auf $N_{\min}^2 = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ zurück geht:

$$N^2(z) = \begin{cases} N_{ts}^2, & \text{für } z \leq z_{tp} - \frac{d}{2} \\ N_{ts}^2 + \frac{N_{\min}^2 - N_0^2}{d_1} \left(z - \left[z_{tp} - \frac{d}{2} \right] \right), & \text{für } z_{tp} - \frac{d}{2} < z \leq z_{tp} - d_2 \\ N_{\min}^2, & \text{für } z_{tp} - d_2 < z \leq z_{tp} + d_2 \\ N_{\min}^2 + \frac{N_0^2 - N_{\min}^2}{d_1} \left(z - [z_{tp} + d_2] \right), & \text{für } z_{tp} + d_2 < z \leq z_{tp} + \frac{d}{2} \\ N_{ss}^2, & \text{für } z_{tp} + \frac{d}{2} < z \end{cases} \quad (4.6)$$

Hier gilt $d_1 = 0.2 \cdot d$, $d_2 = 0.3 \cdot d$ und $d = 2(d_1 + d_2)$. Das Vorschreiben der Welle am Unterrand ähnelt der Definition des Wellenpakets in 4.5a-4.5d, beinhaltet jedoch eine Abhängigkeit von der Zeit t :

$$\hat{b} = \frac{a N_0^2}{m_0} \quad (4.7a)$$

$$u(x, z, t) = \frac{m_0}{k_0} \frac{\omega}{N_0^2} \hat{b} \cos \left(k_0 x + m_0 z - \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \quad (4.7b)$$

$$w(x, z, t) = \frac{\omega}{N_0^2} \hat{b} \cos \left(k_0 x + m_0 z + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \quad (4.7c)$$

$$\theta(x, z) = \frac{\theta_e}{g} \hat{b} \cos(k_0 x + m_0 z) \quad (4.7d)$$

Die initiale Welle hat eine horizontale Wellenzahl von $k_0 = 2\pi/\lambda_x = 2\pi/(5000 \text{ m})$ und eine vertikale Wellenzahl von $m_0 = -2\pi/\lambda_z \approx -2\pi/(6670 \text{ m})$, was gemäß der Dispersionsrelation (2.31) eine Wellenfrequenz von $\omega = 0.008 \text{ s}^{-1}$ bedeutet. Damit gilt $\omega/N_0 = 0.8$, $\vartheta \approx 37^\circ$ und $d/\lambda_x = 0.1$. Die Amplitude beträgt $a = 0.01$. Die oben genannten Größen werden zu Beginn der Simulation im gesamten Modellgebiet vorgegeben und im Laufe der Zeitintegration für alle $z < 2000$ m weiter vorgeschrieben. Die ebenfalls oszillierenden Felder für Druck p und Dichte ρ werden im Modell durch den Drucklöser bestimmt, im Einklang mit dem gewählten Gleichungssystem. Das Windfeld in Abbildung 4.6 zeigt, dass die Welle auch oberhalb der Region reduzierter Stabilität deutlich ausgeprägt ist, es tritt also Wellentunneln auf. Da die Brunt-Väisälä-Frequenz hier sowohl ober- als auch unterhalb der Tropopause denselben Wert annimmt, gilt für das Verhältnis der vertikalen Wellenzahlen $m_{ss}/m_{ts} = 1$. Für das Amplitudenverhältnis wurde zu jedem Zeitpunkt jeweils das Maximum der Amplitude des Vertikalwindes w in einer Schicht der Dicke $\Delta_w = 1700$ m ober- und unterhalb der Tropopause bestimmt, um den Quotienten $|w_{ss}(t)|^2/|w_{ts}(t)|^2$ zur Berechnung des Transmissionskoeffizienten zu

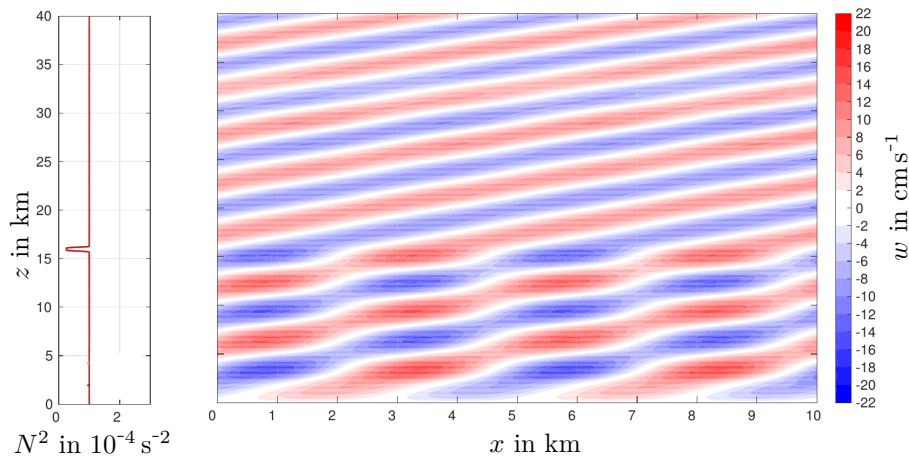


Abb. 4.6: Propagation einer ständig am Modellunterrand vorgeschriebenen Welle durch eine Schicht reduzierter Brunt-Väisälä-Frequenz in der Höhe $z_{\text{tp}} = 16$ km, für das $\omega/N_0 = 0.8$, $d/\lambda_x = 0.1$ und $a = 0.01$ gilt. Dargestellt ist das Profil der Brunt-Väisälä-Frequenz (links) sowie das vertikale Windfeld nach 300 min Simulationszeit (rechts).

berechnen. Die so ermittelten Werte aus einer Reihe von Simulationen mit variierender Schichtdicke d sind in Abbildung 4.7a aufgetragen, neben einer Darstellung aus Pütz et al. (2018) zu Werten vergleichbarer Wellenkonfigurationen aus dem Mehrschichtenansatz (Abbildung 4.7b). Die Variation der Werte d/λ_x erfolgt durch das Vorschreiben verschiedener Schichtdicken $d \in \{500 \text{ m}, 750 \text{ m}, 1000 \text{ m}, \dots, 2500 \text{ m}\}$.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ min nehmen die Transmissionskoeffizienten alle den Wert $TC = 1$ an, was daran liegt, dass die Wellenlösung aus Gleichung (4.7) zum Startzeitpunkt der Simulation im gesamten Modellgebiet initialisiert wird und also die durch die schwach stabile Schicht beeinflusste Welle erst nach einiger Zeit in die Berechnung der Amplitude $|w_{\text{ss}}|^2$ eingeht. Im weiteren zeitlichen Verlauf ist zunächst eine Abnahme der Transmissionskoeffizienten in allen Simulationen erkennbar, nach $t = 180$ min wird die Spannweite der erreichten Werte deutlich größer und der Bereich zwischen 0 und 1 wird weitgehend vollständig abgedeckt. Zum Ende der Simulationszeit hin nimmt die zeitliche Variabilität der Transmissionskoeffizienten ab. Die Reihenfolge der Simulationen ändert sich selten, so weist zumeist die Simulation mit dem kleinsten Wert für d/λ_x die höchste Transmission auf und bei großen d/λ_x wird nur ein geringer Teil transmittiert. Darin ähnelt die Verteilung der Transmissionskoeffizienten aus EULAG der Verteilung aus dem Mehrschichtenmodell wenigstens qualitativ: dünnere Schichten erlauben eine höhere Transmission. Es fällt auf, dass die Transmissionskoeffizienten auch hier teilweise größer als 1 sind. Dieses Verhalten könnte mit Reflexionen der Welle am Boden zusammenhängen. Legt man die vertikale Komponente der Gruppengeschwindigkeit zugrunde, die hier laut Gleichung (2.29) $c_{gz} \approx 11$ km/h beträgt, ergibt sich, dass die Welle etwa 87 min braucht, um die Strecke zwischen Boden und gering stabiler Schicht bei $z_t = 16$ km zu durchlaufen. Die beobachtete Erhöhung der TC geschieht ziemlich genau nach der dop-

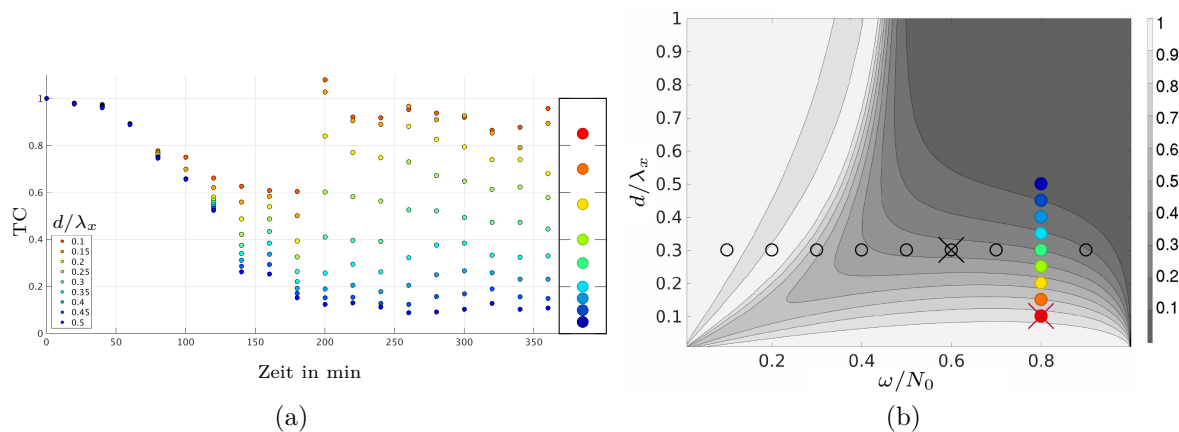


Abb. 4.7: Wellentunneln. (a) Zeitverlauf der mit EULAG berechneten Transmissionskoeffizienten für $\omega/N_0 = 0.8$ und verschiedene d/λ_x sowie Transmissionskoeffizienten aus dem Mehrschichtenmodell (bunte Ringe). (b) Mit dem Mehrschichtenmodell berechnete Transmissionskoeffizienten aus Pütz et al. (2018) (bearbeitet), bunte Ringe stellen die Konfigurationen aus (a) dar, wobei das rote Kreuz die Simulation in 4.6 markiert, schwarze Ringe stellen die Konfigurationen aus 4.8b dar, wobei das schwarze Kreuz die Simulation in 4.8a markiert.

pelten Zeit. Ein Erklärungsansatz ergibt sich beim Vergleich der vertikalen Windfelder zu den verschiedenen Zeitpunkten (nicht abgebildet). Die Wirkung der schwach stabilen Schicht scheint sich dort zunächst nach unten zu entfalten, wird dann am Boden reflektiert und dringt also erst nach $t = 2 \cdot 16 \text{ km} / (11 \text{ km/h}) \approx 180 \text{ min}$ wieder durch die schwach stabile Schicht und geht damit in die Berechnung der Transmissionskoeffizienten ein. Ab diesem Zeitpunkt handelt es sich also bei der einfallenden Welle um die Überlagerung der inzidenten Welle und einem an der Tropopause und wiederum am Boden reflektierten Anteil. Es wird vermutet, dass dies auch bei der zeitlichen Variabilität der Transmissionskoeffizienten eine Rolle spielt.

Problematisch ist, dass der reflektierte Anteil der Wellen am Oberrand der Schicht, in der zu jedem Zeitpunkt der Simulation die Welle vorgeschrieben wird (bei $z = 2 \text{ km}$), an ein hartes Hindernis stößt. Auch wenn die Grenze weniger hart gestaltet wurde, sondern durch einen sanften Abfall der Einhüllenden implementiert wurde, blieb dieses Verhalten so bestehen. Auch bei einer Erhöhung der Simulationszeit ergab sich kein klares Bild darüber, dass beispielsweise die Konvergenz der Transmissionskoeffizienten gegen konstante Grenzwerte zeigen würde.

In einer weiteren Simulationsreihe wurden die Vorgaben und Einschränkungen, die das Boussinesq-System mit sich bringt, stärker in den Fokus gerückt. Die Hintergründe sind in Abschnitt 3.1.1 erläutert. Dies bedeutet auch, dass die Basisprofile nur bis zu einer Höhe von etwa 8.8 km so gewählt werden können, wie es in Abbildung 3.1 gezeigt ist. Es wurde deshalb ein deutlich flacheres Modellgebiet gewählt und die zu analysierende Schicht mit der Änderung in der Stabilität auf eine Höhe von 3 km gelegt. Dies ent-

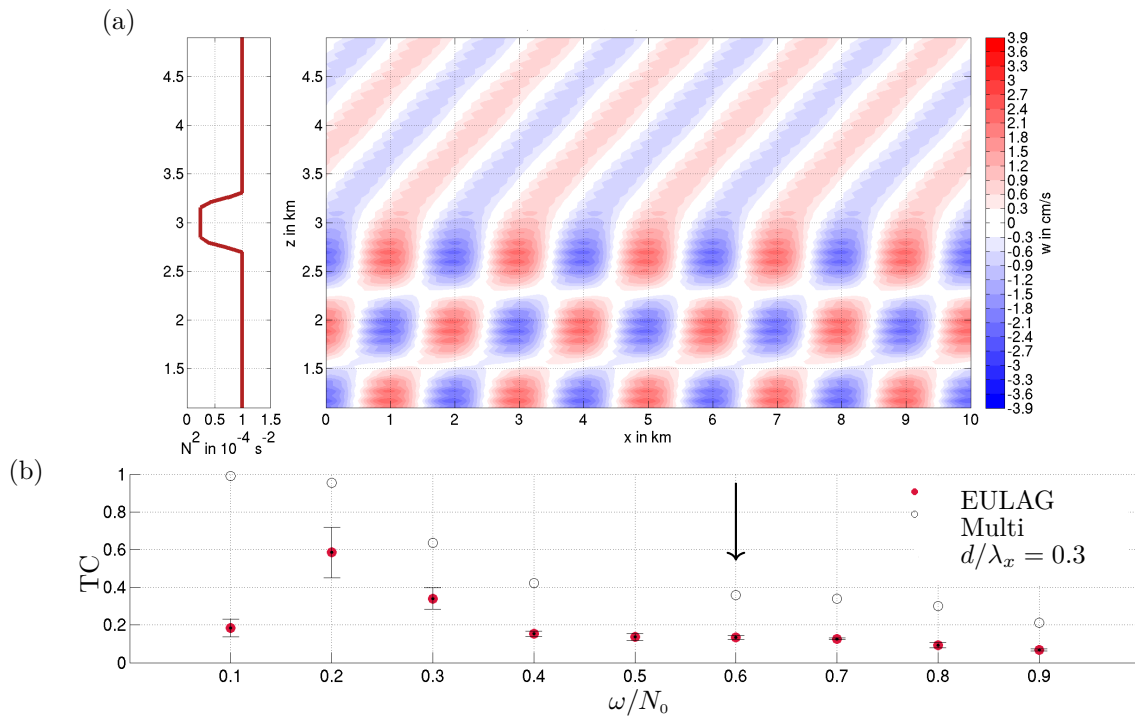


Abb. 4.8: (a) Profil der Brunt-Väisälä-Frequenz (links) und zugehöriges Vertikalwindfeld nach 15 h Simulationszeit (rechts) für $\omega/N_0 = 0.6$ und $d/\lambda_x = 0.3$. (b) Transmissionskoeffizienten für unterschiedliche $\frac{\omega}{N_b}$, berechnet aus numerischen Simulationen als 9 h-Mittel (rote Kreise, mit Standardabweichung) und mit der Mehrschichtenmethode (schwarze Ringe), der Pfeil markiert die Konfiguration aus 4.8a.

spricht zwar nicht unbedingt einer Tropopausenhöhe, wie sie in der Natur vorkommt, um aber Transmissionskoeffizienten durch eine Schicht zu bestimmen, ist deren Lage bei Boussinesq-Näherung nicht entscheidend, wenn die vertikale Ausdehnung der Schicht und damit die Gradienten in den Hintergrundbedingungen ausreichend klein bleiben. Abbildung 4.8a zeigt wieder eine Simulation, in der Wellentunneln auftritt, diese weist nun allerdings eine andere Konfiguration für ω und d auf. Das Modellgebiet beträgt hier $L_x = 10 \text{ km}$ und $L_z = 8.5 \text{ km}$ mit einer räumlichen Auflösung von $\Delta x = \Delta z \approx 50 \text{ m}$ und einer zeitlichen Auflösung $\Delta t = 2.5 \text{ s}$. Es werden die Boussinesq-Gleichungen gelöst, was durch die Wahl des anelastischen Gleichungssystems mit Basiszustand `lipps=0` realisiert ist, siehe Abschnitt 3.1.3. Die Brunt-Väisälä-Frequenz erfährt in einer Höhe von $z_{\text{tp}} = 3 \text{ km}$ innerhalb einer Schicht der Ausdehnung $d = 600 \text{ m}$ von ihrem sonst konstanten Wert $N_0^2 = N_{\text{ts}}^2 = N_{\text{ss}}^2 = 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ eine Abnahme hin zu $N_{\text{min}}^2 = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$, gemäß Gleichung 4.6. Die Welle hat eine horizontale Wellenlänge von $\lambda_x = 2000 \text{ m}$, eine vertikale Wellenlänge von $\lambda_z \approx 6670 \text{ m}$ und eine Frequenz von $\omega = 0.006$, was einem Ausbreitungswinkel $\vartheta \approx 53^\circ$ entspricht. Dieses Wellenfeld ist in EULAG in die Zeitschleife eingebaut und wird dort im untersten Bereich in einer Schicht der Dicke 1 km zu jedem Zeitschritt vorgeschrieben. Auch in diesem Fall, in dem das Verhältnis d/λ_x im Vergleich zu Abbildung 4.6 von 0.1 auf 0.3 erhöht ist, tritt Wellentunneln auf. Unterhalb der Region erniedrigter Brunt-Väisälä-Frequenz befindet sich ein mit einem Schachbrett

vergleichbares Muster der Auf- und Abwinde, das die Überlagerung der reflektierten und inzidenten Welle sichtbar macht. Die Berechnung der Transmissionskoeffizienten erfolgte wieder genauso wie zu Abbildung 4.7 erläutert, hier wurde allerdings eine zeitliche Mittelung der Transmissionskoeffizienten über einen Zeitraum von 9 h durchgeführt. Solche zeitgemittelten Transmissionskoeffizienten sind in Abbildung 4.8b für verschiedene Frequenzverhältnisse ω/N_0 aufgetragen. Die eingezeichneten Fehlerbalken markieren den Wert der Standardabweichung. Die grundsätzliche Struktur mit hoher Transmission bei niedrigen Wellenfrequenzen ω , also hohen Winkeln ϑ und damit flacherer Ausbreitungsrichtung der Gruppengeschwindigkeit, wird mit beiden Methoden erfasst. Allerdings gibt es eine besonders große Abweichung für den Wert bei $\omega/N_0 = 0.1$, was mit der endlichen Auflösung in EULAG zusammen hängen könnte. Die Fehlerbalken sind sehr klein, was dafür spricht, dass sich ein stationärer Zustand herausbildet.

Dennoch bleibt fraglich, welche Transmission durch die Koeffizienten tatsächlich dargestellt wird, da wiederholte Reflexionen an der Tropopause und am Modellunterrand möglich sind. Der Oberrand der Schicht, in der die Wellenlösung zu jedem Zeitschritt vorgeschrieben wird, stellt außerdem womöglich eine zu starke Diskontinuität im Modell dar. Die EULAG-Simulationen zeigen durchgehend deutlich niedrigere Transmission als die mit dem Mehrschichtenansatz berechneten Werte. Auch diese Tatsache spricht dafür, dass es eine grundlegende Abweichung in der Behandlung der Wellentransmission in beiden Modellen gibt.

4.1.3 Welle in zeitabhängigem Umgebungszustand

Eine numerische Simulation, welche die Propagation einer Welle abbildet, die aus dem unendlichen Raum kommt und wieder in ihm verschwindet, kann nur gelingen, wenn Reflexionen an den Rändern verhindert werden. In horizontaler Raumrichtung kann dies durch periodische Randbedingungen realisiert werden und am oberen Rand des Modellgebiets kann eine Schwammschicht eingebaut werden, wodurch die Strömung auf den Umgebungszustand relaxiert wird, wie in Abschnitt 3.1.5 beschrieben. Nun sollen auch Reflexionen am unteren Rand des Modellgebiets verhindert werden, gleichzeitig aber auch eine Quelle zur Wellenanregung in Bodennähe realisiert werden. Das Einführen eines zeitlich veränderlichen Umgebungszustands erfüllt diese Anforderungen. Stellt der Umgebungszustand in einer Schicht am Unterrand des Modellgebiets eine in Ort und Zeit oszillierende Welle dar, so kann durch eine Schwammschicht in dieser Region veranlasst werden, dass die Strömung dieser Wellenlösung folgt. Eine derart angeregte Welle kann, nachdem sie die Schicht verlassen hat, frei nach oben propagieren. Erfährt sie weiter oben Reflexion, so wird der nach unten propagierende reflektierte Anteil der Welle jedoch nicht erneut am Boden reflektiert, sondern er wird beim Eintritt in die Schwammschicht auf den Umgebungszustand, also die initiale Welle, gedämpft. Indem der Umgebungszustand so gewählt wird, dass er außerhalb des Bereichs der unteren Schwammschicht zeitlich konstant ist, wird erreicht, dass der transmittierte Teil der Welle am Oberrand des Modellgebiets gedämpft wird und damit verschwindet.

Schwammschicht am Ober- und Unterrand

Für das genaue Wirken der Schwammschicht ist es einerseits entscheidend, wie der Umgebungszustand definiert ist und andererseits, wie der Dämpfungsparameter α_S verläuft, siehe auch Abschnitt 3.1.5. Dieser Parameter sollte sicherstellen, dass an den Modellrändern der Umgebungszustand herrscht, dort ist sein Wert $\alpha_S = 1 \text{ s}^{-1}$. Außerhalb der Schwammschicht kann sich die Strömung frei entfalten, dort gilt $\alpha_S = 0 \text{ s}^{-1}$.

Ein stetiger und weicher Übergang zwischen zwei Werten kann durch eine Kombination der folgenden Funktionen ϕ_a und ϕ_b erreicht und gut angepasst werden.

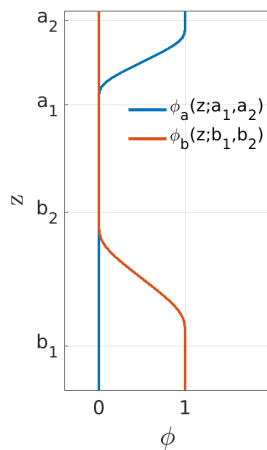


Abb. 4.9: Hutfunktion zur Definition der Schwammschicht.

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{c_2-c_1}{z-c_1}\right), & \text{für } z > c_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{c_2-c_1}{z-c_2}\right), & \text{für } z < c_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\phi_a(z; c_1, c_2) = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}, \quad \phi_b(z; c_1, c_2) = \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

Die Funktion $\phi_a(z; c_1, c_2)$ stellt somit einen Übergang von 0 auf 1 innerhalb der Grenzen c_1 und c_2 dar, mit $c_1 < c_2$, während die Funktion $\phi_b(z; c_1, c_2)$ einen Übergang von 1 auf 0 in denselben Grenzen beschreibt.

In Abbildung 4.9 ist dies illustriert. Für die Definition der Schwammschicht wird der Parameter α_S über Gleichung 4.8 bestimmt und es gilt

$$\alpha_S(z) = \frac{1}{\tau_{abl}} \phi_b(z; 0, z_{abl}) + \frac{1}{\tau_{abu}} \phi_a(z; z_{abu}, L_z). \quad (4.9)$$

Hierbei ist z_{abl} der Oberrand der Schwammschicht am Boden und z_{abu} ist der Unterrand der Schwammschicht am Modelloberrand. Die Zeitkonstanten $\tau_{abl} = \tau_{abu}$ bestimmen die Wirksamkeit der Dämpfung. Für die in diesem Abschnitt vorgestellten Simulationen gilt $L_z = 8500 \text{ m}$, $z_{abl} = 3400 \text{ m}$, $z_{abu} = 6800 \text{ m}$ und $\tau_{abl} = \tau_{abu} = 250 \text{ s}$. Die Schwammschicht umfasst damit also unten 40 % des Modellgebiets und oben 20 % des Modellgebiets.

Umgebungs- und Basiszustand

Der Umgebungszustand folgt einer Welle, ähnlich wie in Abschnitt 4.1.2. Die Wirkung des zeitabhängigen Umgebungszustands auf die Modellgleichungen (siehe Gleichungen 3.6) macht deutlich, dass neben den Windfeldern auch deren zeitliche Ableitungen implementiert werden müssen. Die Amplitude der Windvariablen u_e und w_e ist mit ϕ_w gewichtet, was über Gleichung (4.8) als $\phi_w = \phi_b(z; 0, z_w)$ mit $z_w = 4000 \text{ m}$ definiert ist.

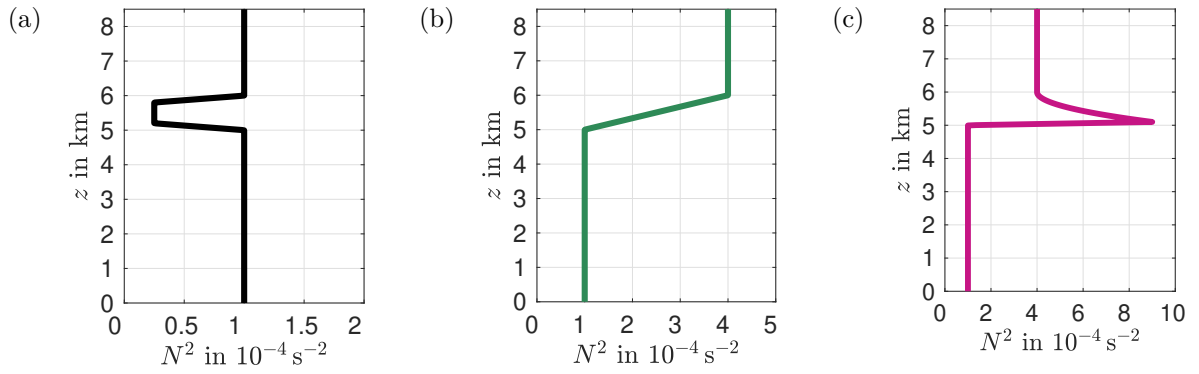


Abb. 4.10: N^2 -Profile einer Tropopause mit Schichtdicke $d = 1000$ m für (a) Wellentunneln, (b) lineare Zunahme und (c) Inversionsschicht.

Außerhalb dieser Schicht befindet sich die Umgebung also in Ruhe.

$$\hat{b}(z) = \phi_w a \frac{N_0^2}{m_0} \quad (4.10a)$$

$$u_e(x, z, t) = \frac{m_0}{k_0} \frac{\omega}{N^2} \hat{b} \sin(k_0 x + m_0 z - \omega t) \quad (4.10b)$$

$$w_e(x, z, t) = \frac{m_0}{k_0} \frac{\omega}{N^2} \hat{b} \sin(k_0 x + m_0 z - \omega t) \quad (4.10c)$$

$$\frac{du_e}{dt}(x, z, t) = -\omega \frac{m_0}{k_0} \frac{\omega}{N^2} \hat{b} \cos(k_0 x + m_0 z - \omega t) \quad (4.10d)$$

$$\frac{dw_e}{dt}(x, z, t) = \omega \frac{m_0}{k_0} \frac{\omega}{N^2} \hat{b} \cos(k_0 x + m_0 z - \omega t) \quad (4.10e)$$

Die anfängliche Amplitude der Welle muss sehr klein gewählt werden, da die Bedingungen für die Boussinesq-Näherung erfüllt sein müssen, und es gilt hier $a = 0.01$, wobei $a < 1$ wieder den Parameter darstellt, der angibt, zu welchem Anteil die Schwelle der statischen Instabilität erreicht wird (siehe Gleichungen 2.38 und 2.70).

Die potentielle Temperatur der Umgebung θ_e wird als zeitlich konstant angenommen und über diese wird die Schicht charakterisiert, deren Transmissionseigenschaften untersucht werden sollen. Dies steht über Gleichung (2.15) in direktem Zusammenhang mit der Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 , deren Verlauf für die drei hier betrachteten Fälle in Abbildung 4.10 illustriert ist: Bildteil 4.10a zeigt die bereits in Abschnitt 4.1.1 und 4.1.2 vorgestellten Profile mit einer Schicht d innerhalb der ein Minimum N_{\min}^2 durchlaufen wird, durch welches Wellentunneln erfolgen kann und Bildteil 4.10b zeigt ein Profil, in dem eine lineare Zunahme von N^2 erfolgt. Das dritte Profil in Bildteil 4.10c stellt einen in der Atmosphäre häufig beobachteten Verlauf mit einer Inversionsschicht dar (siehe Abschnitt 1.2 und Abb. 4.10c). Der Unterrand der Tropopause ist hier für alle Profile in einer Höhe von $z_b = 5000$ m und die Schicht ist unterschiedlich weit nach oben hin ausgedehnt, d nimmt Werte zwischen 500 m und 1000 m an. Dies wurde so gewählt, um einen ausreichenden Abstand der Tropopause von der Schwammschicht am Unterrand zu erreichen und für alle Simulationen den gleichen Bereich vorzugeben, in dem die Welle nach oben propagiert, bevor sie auf die Schicht mit einem Gradienten in N^2 trifft.

Das Modell wird mit den Boussinesq-Gleichungen betrieben, wie in Abschnitt 3.1.3 erläutert, die Basiszustände ρ_0 und θ_0 werden also auf konstante Werte gesetzt.

Rechentechnische Einstellungen

Die Rechnungen werden auf einem x - z -Gebiet mit periodischen Rändern in x -Richtung durchgeführt. Das Modellgebiet reicht bis auf $L_z = 8500$ m in der Höhe und hat eine horizontale Ausdehnung von $L_x = \lambda_x$, die der horizontalen Wellenlänge entspricht und zwischen 1 000 m und 3 000 m variiert. Die Auflösung beträgt für beide Raumrichtungen $\Delta x = \Delta z \approx 10.5$ m und der Zeitschritt beträgt $\Delta t = 2.5$ s. Die vertikale Ausdehnung des Modellgebiets wird durch die Boussinesq-Basiszustände limitiert, damit diese physikalisch sinnvoll bleiben (siehe Abbildung 3.1).

Berechnung der Transmissionskoeffizienten

Die Definition des Transmissionskoeffizienten aus Gleichung (4.2) wird hier so angewandt, dass die transmittierte Amplitude $|w_{ss}|^2$ als das Maximum der absoluten vertikalen Windgeschwindigkeit in einer Schicht oberhalb der Region von Interesse bestimmt wird, während die Amplitude $|w_{ts}|^2$ aus einer Referenzsimulation mit konstanter Stabilität N^2 berechnet wird und dort aus der vertikalen Windgeschwindigkeit in einer Schicht unterhalb der Tropopausenhöhe ermittelt wird. Die Dicke dieser Schichten beträgt für die hier gezeigten Fälle jeweils etwa $\Delta_w \approx 1$ km. Dies ist ausreichend, da horizontale und vertikale Wellenlängen klein genug sind, um jeweils ein Maximum oder Minimum in diesem Gebiet aufzuweisen. Da für die Transmission einer ebenen Welle geringer Amplitude durch eine Tropopausenschicht eine stationäre Situation erwartet wird, werden die Simulationen bis zu einer Simulationszeit von 15 h durchgeführt, wenn die Strömung sich schon lange stabilisiert hat und nur sehr geringe zeitliche Änderungen in den Größen zeigt, die hier von Interesse sind. Der Transmissionskoeffizient wird dann als gemittelte Größe \overline{TC} für die Wellenfelder im Zeitraum zwischen 8 h und 15 h berechnet.

Wellentunneln

In dieser Simulationsreihe nimmt die Brunt-Väisälä-Frequenz ausgehend von einem Wert $N_0^2 = N_{ts}^2 = N_{ss}^2 = 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ innerhalb einer Schicht der Dicke $0.2 \cdot d$ zunächst linear ab auf einen Wert $N_{\min}^2 = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$, über einen Höhenbereich der Dicke $0.6 \cdot d$ wird dieser Wert beibehalten und schließlich nimmt die Brunt-Väisälä-Frequenz in einem Bereich $0.2 \cdot d$ wieder auf N_0^2 zu. Dieses N^2 -Profil wird mit Gleichung (4.6) berechnet und ist in Abbildung 4.10a dargestellt. Es werden Simulationen mit verschiedenen Schichtdicken d durchgeführt, für die $d \in \{2000, 1000, 400, 200\}$ m gilt. Die Abnahme von N^2 beginnt stets bei $z_b = 5000$ m. Bei der in den Umgebungszustand eingeschriebenen Welle gilt für die Wellenlängen $\lambda_x = \lambda_z = 2000$ m, damit $\omega/N_0 = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ und $\vartheta = 45^\circ$. Für die initiale Welle gilt $m_0 = k_0 \sqrt{(N_0/\omega)^2 - 1}$ und im Falle $m_0 = k_0$ ergibt sich für die

d/λ_x	0.1	0.2	0.5	1	
TC	0.8648	0.5846	0.0916	0.0028	Mehrschichtenmodell
	0.8732	0.5659	0.1137	0.0521	EULAG

Tabelle 4.1: Transmissionskoeffizienten für die Propagation einer ebenen Welle durch eine Schicht reduzierter Stabilität der Dicke d , mit horizontaler Wellenlänge $\lambda_x = \lambda_z = 2000$ m, $\omega/N_0 = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ und $\vartheta = 45^\circ$. Werte wurden aus EULAG-Simulationen und mit einem Mehrschichtenmodell (Pütz et al., 2018) berechnet.

Frequenz $\omega^2 = N_0^2/2$, was eingesetzt in die Dispersionsrelation auf

$$m_{\min} = k \sqrt{\frac{N_{\min}^2}{\omega^2} - 1} = k \sqrt{2 \frac{N_{\min}^2}{N_0^2} - 1} = k \sqrt{-\frac{7}{8}} \notin \mathbb{R}$$

führt. Eine Welle ist also bei Anwendung linearer Theorie evaneszent unter den hier beschriebenen Konditionen, demnach wäre hier keine Propagation möglich.

Die ermittelten Transmissionskoeffizienten aus EULAG-Simulationen und dem Mehrschichtenansatz sind in Tabelle 4.1 dargestellt und in Abbildung 4.11 illustriert. Sie zeigen, dass Wellentunneln stattfindet und dass dieser Vorgang stark von der Konfiguration abhängt. Bei zunehmender Schichtdicke d nimmt die Transmission deutlich ab. Eine dünne Schicht von 200 m mit $d/\lambda_x = 0.1$ lässt eine Transmission von über $TC = 0.85$ zu, während im Fall der dicksten Schicht mit $d/\lambda_x = 1$ die Transmission geringer ausfällt und ein kleiner Anteil von $TC < 0.06$ durch die Schicht reduzierter Stabilität tunnelt. Die Fehlerbalken aus der zeitlichen Mittelung sind so klein, dass sie in diesen Plots nicht sichtbar wären und wurden deshalb nicht eingezeichnet. Die zeitliche Variabilität der Transmissionskoeffizienten ist also sehr gering. In der in Abbildung 4.7b gezeigten Graphik, die Wellentunneln im Mehrschichtenmodell zeigt, entsprechen die Konfigurationen aus Tabelle 4.1 einem vertikalen Schnitt bei $\omega/N_0 = 0.7071$. Bei gleichbleibendem Winkel ϑ nimmt hier also die Transmission ab. Eine Verkleinerung von d/λ_x hat zur Folge, dass die Wellenlänge deutlich größer ist als die Schichtdicke und die Welle die Schicht dadurch, bildlich gesprochen, nicht “sieht” und folglich auch nicht darauf reagiert, dass die Stabilität der Umgebung die Propagationsbedingung verletzt. Dieses Phänomen ist auch aus anderen Bereichen der Physik bekannt, beispielsweise beim Rückstreuverhalten von Aerosolen oder bei der Frage, bis zu welcher Objektgröße Kameras auflösen können

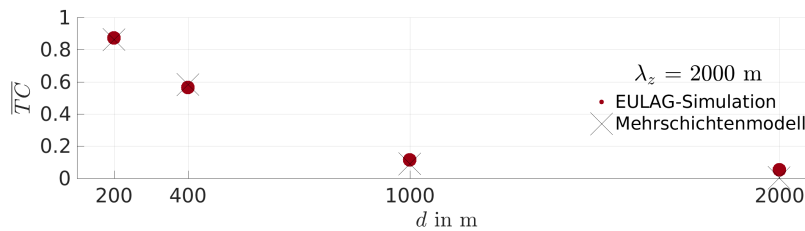


Abb. 4.11: Transmissionskoeffizienten aus Tabelle 4.1 (Wellentunneln), mit $\lambda_z = 2000$ m.

und weshalb Atome nicht fotografiert werden können. Anhand der in Gerthsen (2006) (S. 519) genannten Analogie wird das verdeutlicht: *“Ein Kind stellt sich hinter einen Baum und ruft ‘Such mich!’ (...) Warum hört man das Kind, sieht es aber nicht?”* Auch dabei ist das Verhältnis zwischen Wellenlänge, hier die von Licht und von Schall sowie dem Objekt, hier dem Baum, relevant.

Beide Methoden, die Berechnungen mit EULAG und dem Mehrschichtenmodell, zeigen eine sehr gute Übereinstimmung, Wellentunneln ist für die hier betrachteten Konfigurationen von beiden Modellen also sehr ähnlich dargestellt.

Lineare Zunahme von N^2

Über Gleichung (4.4) wird ein N^2 -Profil berechnet, in dem eine lineare Zunahme innerhalb einer Tropopausenschicht erfolgt (Abbildung 4.10b). Die Schichtdicke der Tropopause beträgt hier $d = 1000$ m. Die horizontale Wellenlänge wird variiert im Bereich zwischen den Werten $\lambda_x = 1000$ m und $\lambda_x = 3000$ m und es werden dafür jeweils zwei Simulationen mit $\lambda_z = 1000$ m und $\lambda_z = 2000$ m durchgeführt. Die verschiedenen Kombinationen sind zusammen mit den sich daraus ergebenden Verhältnissen d/λ_x in der Kopfzeile von Tabelle 4.2 aufgelistet. Aus den Werten $k_0 = 2\pi/\lambda_x$ und $m_0 = -2\pi/\lambda_z$ ergibt sich nach Gleichung (2.25) die Frequenz $\omega = N_0 k_0 / \sqrt{m_0^2 + k_0^2}$ und für das Verhältnis von Wellenfrequenz zu Eigenfrequenz der Umgebung ω/N_0 gelten so die in Tabelle 4.2 grau unterlegten Werte. Außerdem ist der nach Gleichung (4.3) berechnete Winkel ϑ mit angegeben. Die Transmissionskoeffizienten aus den EULAG-Simulationen werden, wie im vorherigen Abschnitt erläutert, mithilfe einer Referenzsimulation berechnet und sind in Tabelle 4.2 aufgeführt, zusammen mit Ergebnissen aus dem Mehrschichtenmodell. Abbildung 4.12 visualisiert den Verlauf der Transmissionskoeffizienten und die Abweichung zwischen beiden Methoden.

Die Übereinstimmung zwischen beiden Verfahren ist für den Fall $\lambda_z = 1000$ m sehr hoch, siehe Abbildung 4.12a. Beide Methoden zeigen nahezu vollständige Transmission für die hier gewählte Kombination von Schichtdicke, Wellenlängen und Frequenzen. Keiner der ermittelten Transmissionskoeffizienten liegt unter $TC = 0.97$. Die Werte aus dem Mehrschichtenansatz zeigen eine kontinuierliche Zunahme der Transmission für größer werdende Wellenlängen. Dies ist bei den Transmissionskoeffizienten aus EULAG weitgehend auch der Fall. Für eine vertikale Wellenlänge $\lambda_z = 2000$ m weisen beide Reihen einen deutlicheren Anstieg auf: Bei größer werdenden Wellenlängen nimmt die Transmission zu. Eine zunehmende horizontale Wellenlänge λ_x bedeutet hier ein kleiner werdendes Verhältnis ω/N_0 und dadurch einen größeren Winkel ϑ . Der Gruppengeschwindigkeitsvektor ist also immer mehr in Richtung Horizontale ausgerichtet. Die senkrecht zur Gruppengeschwindigkeit verlaufenden Wellenfronten treffen bei zunehmendem ϑ immer senkrechter auf die Grenzfläche, was die Transmission begünstigt. In der Optik ist dieses Phänomen durch die Fresnel-Gleichungen beschrieben (Gerthsen, 2006). Die Transmissionskoeffizienten aus den beiden Modellen zeigen hier also, dass dieser Zusammenhang bei Schwerewellen in ähnlicher Art auftritt - eine Welle wird umso vollständiger transmittiert, je senkrechter ihre Wellenfronten auf die Schicht treffen, an der sich das Medium

λ_z in m	λ_x in m	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	
	d/λ_x	1	$0.\bar{6}$	0.5	0.4	$0.\bar{3}$	
1 000		0.7071	0.5547	0.4472	0.3714	0.3162	ω/N_0
		45°	56°	63°	68°	72°	ϑ
		0.9950	0.9964	0.9979	0.9985	0.9988	TC Mehrsch.-modell
		0.9727	0.9832	0.9828	0.9881	0.9982	TC EULAG
2 000		0.8944	0.8	0.7071	0.6247	0.5547	ω/N_0
		27°	37°	45°	51°	56°	ϑ
		0.9560	0.9799	0.9884	0.9892	0.9894	TC Mehrsch.-modell
		0.8119	0.8390	0.8829	0.9106	0.9297	TC EULAG

Tabelle 4.2: Transmissionskoeffizienten für die Propagation einer ebenen Welle durch eine Schicht mit linearem Anstieg der Stabilität in einer Schichtdicke von $d = 1000$ m. Werte wurden aus EULAG-Simulationen und mit einem Mehrschichtenmodell (Pütz et al., 2018) berechnet.

ändert.

Es wurden zwei Simulationspaare durchgeführt, in denen ϑ gleich bleibt, aber ein anderes Verhältnis d/λ_x gilt. Diese Simulationen sind in Abbildung 4.12 mit gelben ($\vartheta = 45^\circ$) und blauen ($\vartheta = 56^\circ$) Ringen markiert. Für $\vartheta = 45^\circ$ weist die Simulation mit $d/\lambda_x = 1$ einen höheren Transmissionskoeffizienten auf als die Simulation mit $d/\lambda_x = 0.5$ und für $\vartheta = 56^\circ$ weist die Simulation mit $d/\lambda_x = 0.\bar{6}$ einen höheren Transmissionskoeffizienten auf als die Simulation mit $d/\lambda_x = 0.\bar{3}$. Bei gleichbleibendem Ausbreitungswinkel der Welle ist also eine Transmission bei größeren Werten von d/λ_x begünstigt. Hier werden bei festem d also kleinere Wellenlängen besser transmittiert. Diese Wellen können sich bei einer Änderung der Umgebung besser daran anpassen.

Die Abweichung zwischen beiden verwendeten Modellen ist für $\lambda_z = 2000$ m größer als für die kleinere vertikale Wellenlänge $\lambda_z = 1000$ m. Bei allen verschiedenen Werten für λ_x liegt die Transmission der mit EULAG durchgeführten Simulationen unter der mit dem Mehrschichtenmodell berechneten. Die Abweichung ist insbesondere bei kleineren horizontalen Wellenlängen λ_x ausgeprägter, wenn die Wellenfronten in einem flacheren Winkel auf die Tropopause treffen. Dies kann damit zusammen hängen, dass aufgrund der endlichen vertikalen Ausdehnung die Änderung der Hintergrundbedingung in EULAG abrupter geschieht und dies insbesondere auf große vertikale Wellenlängen, die sich langsamer an den Hintergrund anpassen, eine größere Auswirkung hat.

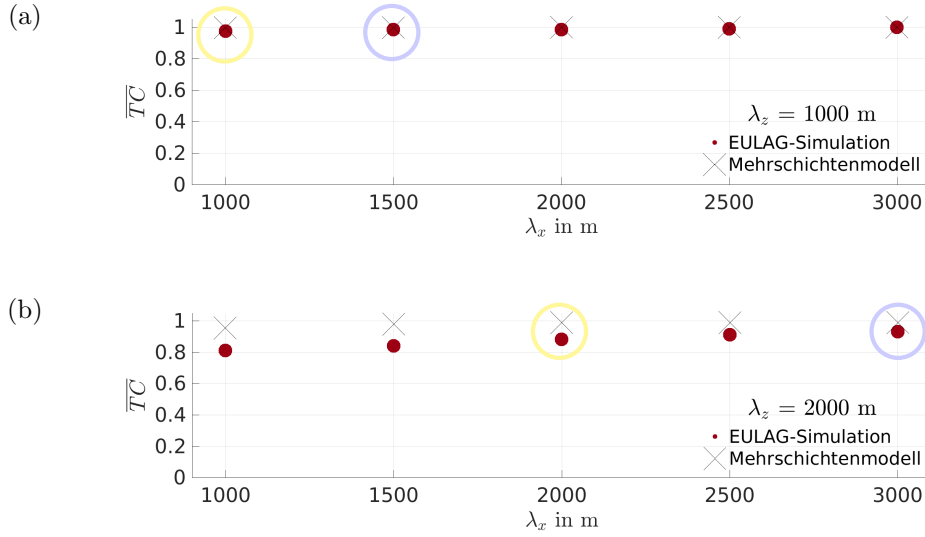


Abb. 4.12: Transmissionskoeffizienten aus Tabelle 4.2 (lineare Zunahme von N^2 in einer Schicht der Dicke $d = 1000$ m), mit (a) $\lambda_z = 1000$ m und (b) $\lambda_z = 2000$ m. Gelbe/blau Kreise markieren Simulationen mit $\vartheta = 45^\circ/56^\circ$.

Inversionsschicht

In diesem Abschnitt werden Transmissionskoeffizienten einer Inversionsschicht untersucht. In der Brunt-Väisälä-Frequenz wird eine solche dabei durch einen scharfen Anstieg des troposphärischen Wertes N_{ts}^2 auf einen Wert N_{max}^2 und einen langsameren Abfall zum stratosphärischen Wert N_{ss}^2 gekennzeichnet. Dies wird stückweise als

$$N^2(z) = \begin{cases} N_{ts}^2, & \text{für } z \leq z_b \\ N_{ts}^2 + \frac{N_{max}^2 - N_{ts}^2}{d_1} (z - z_b), & \text{für } z_b < z \leq z_b + d_1 \\ p_1 z^2 + p_2 z + p_3, & \text{für } z_b + d_1 < z \leq z_b + d \\ N_{ss}^2, & \text{für } z_b + d < z \end{cases} \quad (4.11)$$

definiert. Es gilt hier $d_1 = 0.1 \cdot d$, $d_2 = 0.9 \cdot d$, $d_1 + d_2 = d$ und $p_1 = \frac{N_{max}^2 - N_{ss}^2}{d_2^2}$ und $p_2 = -2(z_b + d) \frac{N_{max}^2 - N_{ss}^2}{d_2^2}$ und $p_3 = N_{ss}^2 + (z_b + d)^2 \frac{N_{max}^2 - N_{ss}^2}{d_2^2}$. Die Schichtdicke wird auf $d = 1000$ m festgelegt und die Zahlenwerte der Brunt-Väisälä-Frequenz betragen $N_{ts}^2 = 10^{-4} \text{ s}^{-2}$, $N_{max}^2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ und $N_{ss}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$. Diese Funktion ist in Abbildung 4.13 links aufgetragen, neben einer Zeitreihe des vertikalen Windfeldes. Für die dargestellte Konfiguration gilt $d = \lambda_x = 1000$ m und $\lambda_z = 2000$ m. Nach 1 h Simulationszeit hat die Welle die Inversionsschicht noch nicht erreicht. Nach 2 h ist ein Teil der Welle durch die Inversionsschicht hindurch transmittiert worden und zeigt in der Stratosphäre eine deutlich geringere Amplitude und eine kleinere vertikale Wellenlänge, bedingt durch die erhöhte Stabilität. Die Momentaufnahmen nach 3 h und nach 15 h zeigen ein sehr ähnliches Windfeld, es scheint sich also ein stationärer Zustand eingestellt zu haben. Die Abfolge der Auf- und Abwindgebiete ist jedoch eine andere, die Wellen sind zueinander phasenverschoben. Die horizontale Gruppengeschwindigkeit

keit für dieses Szenario kann nach Gleichung (2.28) berechnet werden und beträgt hier $c_{gx} = N_0 m_0^2 / \sqrt{k_0^2 + m_0^2}^3 \approx 1.02 \text{ km/h}$. Das bedeutet also, dass die Welle zwischen $t = 3 \text{ h}$ und $t = 15 \text{ h}$ die Strecke $c_{gx} \cdot 12 \text{ h} \approx 12.3 \text{ km}$ zurückgelegt hat und damit die Phasenlinien in der Momentaufnahme nach 15 h gegenüber der Momentaufnahme nach 3 h um etwa 300 m nach rechts verschoben sind. Dies deckt sich mit dem Verhalten der Welle in Abbildung 4.11. Das vertikale Windfeld lässt sich für die beiden Momentaufnahmen nach 3 h und 15 h, wenn davon ausgegangen werden kann, dass der stationäre Zustand schon erreicht wurde, in drei Bereiche unterteilen: In den untersten 2 km über dem Boden wird das Strömungsfeld über die in den Umgebungszustand eingeschriebene ebene Welle bestimmt, deren Einfluss bis zu einer Höhe von $z = 4 \text{ km}$ stetig nachlässt, gemäß der in Gleichung (4.8) definierten Funktion. Im Höhenintervall zwischen $z = 2 \text{ km}$ und $z = 5 \text{ km}$ findet eine Überlagerung von initialer Welle und dem an der Inversionsschicht reflektierten Anteil statt. Direkt oberhalb von $z = 5 \text{ km}$ ist ein Bereich erkennbar, in dem die vertikale Wellenlänge ihre kleinsten Werte annimmt, rechnerisch müsste dort $\lambda_z = \lambda_x / \sqrt{(N_{\max}/\omega)^2 - 1} \approx 310 \text{ m}$ gelten. Weiter oben in der Stratosphäre sind es dann $\lambda_z(N_{\text{ss}}) \approx 500 \text{ m}$. Es wurden neben dem in Abbildung 4.13 gezeigten Fall noch weitere Simulationen für $\lambda_x = L_x \in \{1\,000 \text{ m}, 1\,500 \text{ m}, 2\,000 \text{ m}, 2\,500 \text{ m}, 3\,000 \text{ m}\}$ durchgeführt, jeweils für vertikale Wellenlängen von $\lambda_z = 1\,000 \text{ m}$ und $\lambda_z = 2\,000 \text{ m}$. Die verschiedenen Kombinationen sind, zusammen mit den sich daraus ergebenden Verhältnissen d/λ_x , in der Kopfzeile von Tabelle 4.3 aufgelistet. Außerdem sind das Verhältnis ω/N_0 und der Winkel ϑ nach Gleichung (4.3) in den grau unterlegten Zellen aufgeführt. Die Transmissionskoeffizienten aus den EULAG-Simulationen werden, wie im vorherigen Abschnitt erläutert, mithilfe einer Referenzsimulation berechnet und sind in Tabelle 4.3 aufgelistet, zusammen mit Ergebnissen aus dem Mehrschichtenmodell.

Abbildung 4.14 visualisiert den Verlauf der Transmissionskoeffizienten und die Abweichung zwischen beiden Methoden. Auch hier sind die Fehlerbalken so klein, dass sie nicht sichtbar wären und wurden deshalb nicht eingezeichnet. Bei größer werdender horizontaler Wellenlänge λ_x und damit kleiner werdendem Quotienten d/λ_x werden hier

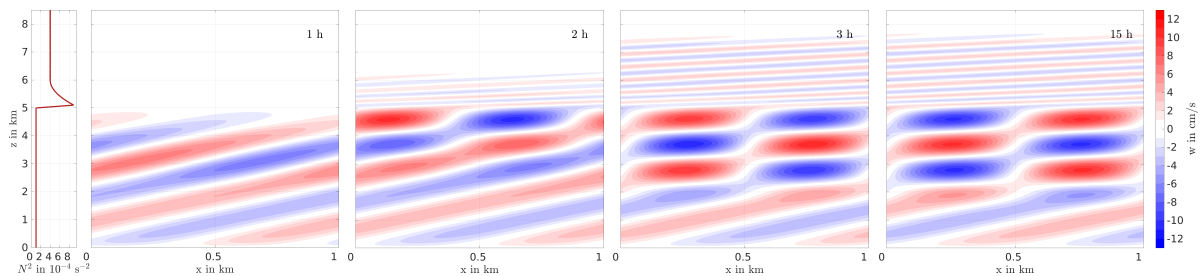


Abb. 4.13: Propagation einer über den Umgebungszustand innerhalb einer Schwamm- schicht am Modellunterrand angeregten Welle durch eine Tropopause mit Inversionsschicht in der Höhe $z_{\text{tp}} = 5 \text{ km}$. Es gilt $\lambda_x = 1\,000 \text{ m}$, $\lambda_z = 2\,000 \text{ m}$, $\omega/N_0 = 0.8944$, $\vartheta = 27^\circ$, $d/\lambda_x = 1$ und $a = 0.01$. Dargestellt ist das Profil der Brunt-Väisälä-Frequenz (links) sowie das vertikale Windfeld zu verschiedenen Simulationszeiten.

λ_z in m	λ_x in m	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	
	d/λ_x	1	$0.\bar{6}$	0.5	0.4	$0.\bar{3}$	
1 000		0.7071	0.5547	0.4472	0.3714	0.3162	ω/N_0
		45°	56°	63°	68°	72°	ϑ
		0.7858	0.8010	0.8095	0.8151	0.8185	<i>TC</i> Mehrsch.-modell
		0.7884	0.8084	0.8169	0.8224	0.8367	<i>TC</i> EULAG
2 000		0.8944	0.8	0.7071	0.6247	0.5547	ω/N_0
		27°	37°	45°	51°	56°	ϑ
		0.5635	0.6237	0.6620	0.6913	0.7113	<i>TC</i> Mehrsch.-modell
		0.5559	0.5912	0.6248	0.6565	0.6814	<i>TC</i> EULAG

Tabelle 4.3: Transmissionskoeffizienten für die Propagation einer ebenen Welle durch eine Inversionsschicht der Dicke $d = 1\,000$ m. Werte wurden aus EULAG-Simulationen und mit einem Mehrschichtenmodell (Pütz et al., 2018) berechnet.

die Transmissionskoeffizienten immer größer. Dies kann bei beiden gezeigten vertikalen Wellenlängen λ_z und für beide verwendeten Modelle beobachtet werden. Zunehmende d/λ_x gehen hier mit abnehmenden ω/N_0 und daher einem größeren Winkel ϑ einher. Die Wellenfronten sind also immer stärker gegenüber der Vertikalen geneigt. Hier kann also, wie auch schon im Fall der linearen Zunahme von N^2 , beobachtet werden, dass senkrechttes Auftreffen der Wellenfronten die Transmission begünstigt (vergleiche Abbildung 4.4). Auch die anderen bei linearer Stabilitätzunahme beobachteten Zusammenhänge treten

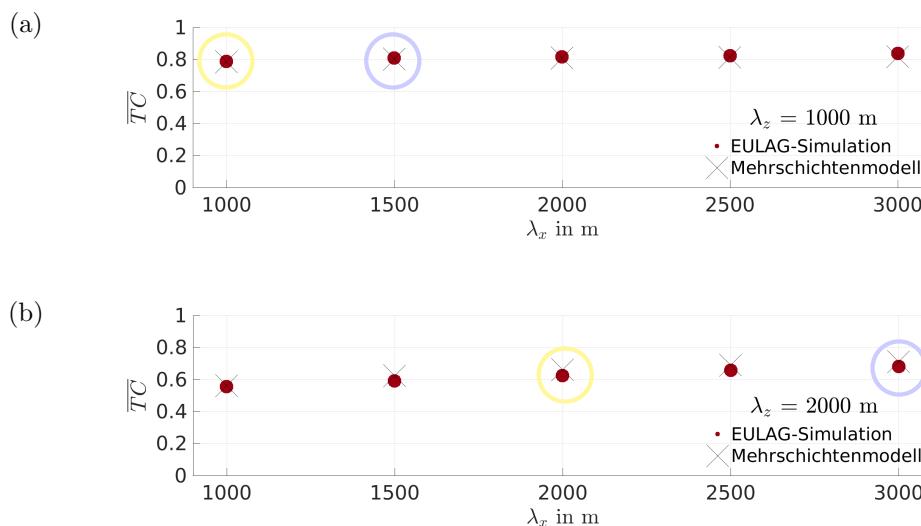


Abb. 4.14: Transmissionskoeffizienten aus Tabelle 4.3 (Inversionsschicht der Dicke $d = 1\,000$ m), mit (a) $\lambda_z = 1\,000$ m und (b) $\lambda_z = 2\,000$ m. Gelbe/blaue Kreise markieren Simulationen mit $\vartheta = 45^\circ/56^\circ$.

hier wieder auf: Eine kleinere vertikale Wellenlänge führt zu einer erhöhten Transmission. In Abbildung 4.14a sind die Werte von TC durchweg größer als für die entsprechenden Simulationen mit $\lambda_z = 2000$ m in Abbildung 4.12b. Außerdem führt bei gleichbleibendem Winkel ϑ (in Abbildung 4.14 mit gelben und blauen Ringen markiert) ein größer werdendes Verhältnis d/λ_x zu einer Erhöhung der Transmission. Kleinere Wellen können sich also besser an die starken Änderungen der Umgebung anpassen und werden transmittiert.

Ein Unterschied zu der Studie mit linearer Stabilitätzunahme besteht darin, dass hier sowohl für $\lambda_z = 1000$ m als auch für $\lambda_z = 2000$ m beide Modelle eine sehr hohe Übereinstimmung zeigen. Der scharfe Sprung in der Stabilität wirkt hier gleichermaßen auf kürzere und längere vertikale Wellenlängen.

Einfluss der Inversionsschicht auf die Transmission

Um zu quantifizieren, wie das Vorhandensein einer Inversionsschicht zwischen Troposphäre und Stratosphäre die Transmission beeinflusst, werden die Ergebnisse mit Inversionsschicht mit den Ergebnissen aus den Simulationen mit linearer Zunahme von N^2 verglichen. Dazu werden die Transmissionskoeffizienten TC_{til} aus Tabelle 4.3 und die Transmissionskoeffizienten TC_{lin} aus Tabelle 4.2 ins Verhältnis gesetzt. Dieser Quotient $TC_{\text{til}}/TC_{\text{lin}}$ ist in Abbildung 4.15 dargestellt und nimmt Werte zwischen 0.58 und 0.84 an.

Der Einfluss der Inversionsschicht ist am stärksten, wenn Wellen mit großer vertikaler Wellenlänge λ_z , kleiner horizontaler Wellenlänge λ_x und damit einem kleinen Winkel ϑ auftreten, wenn die Wellenfronten also eher senkrecht auf die Tropopause eintreffen. Bei gleichbleibendem Winkel ϑ und Schichtdicke d werden Wellen mit großem Verhältnis d/λ_x stärker von der Inversionsschicht an der Propagation gehindert.

Außerdem ist auffällig, dass die Transmission im Fall des Mehrschichtenmodells stärker durch die Inversionsschicht reduziert wird als bei EULAG-Simulationen.

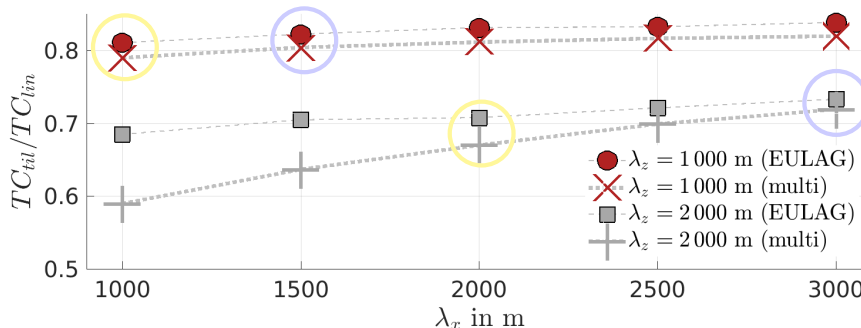


Abb. 4.15: Vergleich der Transmissionskoeffizienten mit und ohne TIL. Gelbe/blau Kreise markieren Simulationen mit $\vartheta = 45^\circ/56^\circ$.

4.1.4 Zusammenfassung

In diesem Ergebnisteil wurde vorgestellt, wie bei der Berechnung von Transmissionskoeffizienten vorgegangen wurde. Das Ziel dieser Untersuchung war es, die Ausbreitung einer ebenen Welle durch eine Umgebung zu untersuchen, in der die Stabilität innerhalb einer Schicht eine Änderung erfährt. Eine solche Änderung kann für die Tropopausenregion stehen. Die Berechnung von Transmissionskoeffizienten erlaubt eine Aussage darüber, welcher Anteil der Welle durch eine betreffende Schicht propagiert und welcher Anteil reflektiert wird.

Transmissionskoeffizienten aus EULAG-Simulationen sollten mit solchen aus einem Mehrschichtenmodell verglichen werden. Als problematisch stellte sich dabei heraus, dass die Existenz von Modellrändern in EULAG die Vergleichbarkeit mit dem Mehrschichtenmodell, das eine Betrachtungsweise ohne Ränder vorsieht, erschwerte. Es wurden drei verschiedene Profile der Brunt-Väisälä-Frequenz analysiert und verglichen. Ein Profil beinhaltet eine Schicht mit reduzierter Stabilität, in der nach linearer Theorie keine Wellenpropagation stattfindet. Ist diese Schicht jedoch dünn genug, kann Wellentunneln auftreten. Außerdem wurden zwei N^2 -Profile untersucht, bei denen die Zunahme von einem konstanten Wert im unteren Bereich (Troposphäre) auf einen höheren konstanten Wert im oberen Bereich (Stratosphäre) einmal linear erfolgt und einmal durch einen scharfen Anstieg auf ein Maximum an der Tropopause und einer langsameren Abnahme in der unteren Stratosphäre beschrieben wird. Letzteres ist eine Inversionsschicht.

Zunächst wurde die Propagation von Wellenpaketen und von ebenen Wellen, die am Modellunterrand zu jedem Zeitschritt vorgeschrieben wurden, untersucht. Dabei konnten einige zusätzliche interessante Phänomene beobachtet werden. Die Wahl unterschiedlicher Amplituden zeigte Fälle von Wellenbrechen und dabei eine deutliche Rückwirkung auf den Hintergrundstrom. Auch der nicht-lineare Vorgang des Wellentunnelns konnte beobachtet werden. Die Analyse der Transmissionskoeffizienten zeigte aber in allen Fällen eine deutliche Abhängigkeit der Werte von der Zeit. Somit war keine verlässliche Aussage dazu möglich, welcher Wert zu welchem Zeitpunkt nun der relevante Transmissionskoeffizient ist. Es traten Reflexionen zwischen Tropopause und Boden auf, sodass es zu einer Überlagerung verschiedener Wellenkomponenten kam, die dann die an der Tropopause einfallende Welle ergaben. Auch das erschwerte die Vergleichbarkeit der Ergebnisse.

Um diesen Problemen zu begegnen, wurden zeitabhängige Umgebungszustände eingeführt. Innerhalb einer zusätzlichen Schwammschicht am Unterrand des Modellgebiets wurde die Strömung auf eine zeitabhängige Wellenlösung hin relaxiert. Dadurch wurde ein an der Tropopause reflektierter Anteil der Welle nicht am Boden reflektiert, sondern vorher gedämpft und so entfernt. Dies erhöhte die Vergleichbarkeit der Werte für die Transmissionskoeffizienten und die Resultate zeigten eine sehr hohe Übereinstimmung. Für Simulationen mit dieser Methode wurden Transmissionskoeffizienten berechnet und dabei die Auswirkung der Variation der Parameter ω/N_0 und d/λ_x untersucht.

Für das Profil mit einer Schicht erniedrigter Stabilität, in dem Wellentunneln beobachtet werden konnte, zeigte sich, dass eine Vergrößerung der betreffenden Schicht das Wellentunneln unterbindet und mit geringeren Transmissionskoeffizienten einhergeht.

Bei einem kleinen Verhältnis d/λ_x von 0.1 wurde ein Großteil der Welle transmittiert, der Transmissionskoeffizient betrug $TC > 0.85$. Im Gegensatz dazu wiesen Simulationen mit einem Verhältnis von $d/\lambda_x = 1$ Transmissionskoeffizienten von $TC < 0.05$ auf, es fand also fast keine Transmission statt.

Für das Profil mit linearer Zunahme der Stabilität konnte beobachtet werden, dass kleinere vertikale Wellenlängen eine höhere Transmission aufwiesen als größere vertikale Wellenlängen. Außerdem wurde ersichtlich, dass Wellen dann immer besser transmittiert wurden, wenn ihre Wellenfronten annähernd senkrecht auf die Tropopausenschicht treffen. Bei gleichbleibendem Eintreffwinkel und fester Schichtdicke ist hier die Transmission kleinerer horizontaler Wellenlängen verstärkt gegenüber größeren horizontalen Wellenlängen.

All diese Tendenzen konnten auch bei der Untersuchung von Wellentransmission durch eine Inversionsschicht beobachtet werden. Im Vergleich zum linearen N^2 -Übergang waren die Transmissionskoeffizienten hier zwischen 58 % und 84 % niedriger. Der transmissionshemmende Effekt der Inversionsschicht war hier besonders stark für große vertikale Wellenlängen, die eher senkrecht auf die Tropopause auftreffen. Im Gegensatz dazu werden Wellen mit niedrigeren vertikalen Wellenlängen, die eher flach auf die Grenzschicht auftreffen, weniger stark von der Inversion an der Tropopause beeinflusst.

Die Übereinstimmungen zwischen EULAG und Mehrschichtenmodell sind hoch, beide Modelle sind also ähnlich gut geeignet, Transmission zu beschreiben und erfassen auch nicht-lineare Prozesse.

4.2 Orographische Wellen in stückweise linearen Umgebungsprofilen

In diesem Unterkapitel werden eine Reihe von Simulationen vorgestellt, die mit dem Strömungslöser EULAG, siehe Abschnitt 3.1, durchgeführt wurden. Die Anregung der Schwerewellen im Modell erfolgt durch sinusförmige Orographie, wie in Abschnitt 3.1.7 erläutert, sodass ebene, monochromatische Wellen entstehen. Diese Wellen propagieren durch ein zweidimensionales x - z -Modellgebiet. Die Umgebungsprofile des Horizontalwinds u_e und der potentiellen Temperatur θ_e werden so angepasst, dass verschiedene Tropopausenkonfigurationen entstehen. Dabei erfolgt die Definition des Temperaturprofils über die Brunt-Väisälä-Frequenz $N^2 = \frac{g}{\theta_e} \frac{d\theta_e}{dz}$. Die Profile sind abschnittsweise konstant, sodass die für orographisch angeregte Wellen gültige Dispersionsrelation 2.30 abschnittsweise benutzt werden kann. Es werden die anelastischen Gleichungen (3.4) gelöst und der Basiszustand wird über `lipps=2` gesetzt.

4.2.1 Gradienten in der Stabilität bei konstantem Hintergrundwind

Zunächst wird die Variation allein auf das Stabilitätsprofil N^2 beschränkt, um Sensitivitäten in diesem herausarbeiten zu können. Die Simulationen in diesem Teil werden mit einer räumlichen Auflösung von $\Delta x = \Delta z = 50$ m und einer zeitlichen Auflösung $\Delta t = 5$ s auf einem Modellgebiet der Größe $L_x = 9$ km und $L_z = 22$ km berechnet. Das Modell hat periodische Ränder in x -Richtung und am Oberrand eine absorbierende Schicht mit einer Dämpfungskonstante von $\tau = 100$ s, die in einer Höhe $z_{abu} = 19.5$ km beginnt. Die maximale Berghöhe am Unterrand beträgt $H = 50$ m. Die gezeigten Analysen werden für einen Zeitpunkt 8 h nach Simulationsbeginn durchgeführt.

Sprunghafte Erhöhung der Stabilität an der Tropopause

Das in Abschnitt 3.4.2 bei der Einführung der Wavelet-Transformation in Abbildung 3.6 veranschaulichte Beispiel soll hier noch einmal aufgegriffen werden. Die Stabilität folgt hier dem Verlauf der US-Standardatmosphäre (USSA) (NOAA/NASA/U.S. Air Force, 1976), die keine Inversionsschicht an der Tropopause aufweist und in dieser Form häufig in idealisierten Studien als Hintergrund verwendet wird (Birner, 2006). In der Troposphäre herrscht eine konstante Brunt-Väisälä-Frequenz $N_{ts}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$, die in einer Höhe von $z_{tp} = 10$ km sprunghaft auf $N_{ss}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ ansteigt. Es wird eine Simulation mit konstanter Anströmung $u_0 = u_e = 3 \text{ m s}^{-1}$ durchgeführt. Der Abstand der Maxima im Sinus-Bergprofil beträgt $\lambda_b = 3000$ m. Diese horizontale Wellenlänge $\lambda_x = \lambda_b$ entspricht in linearer Theorie gemäß Gleichung (2.30) einer vertikalen Wellenlänge von $\lambda_{z|ts} \sim 2430$ m in der Troposphäre und $\lambda_{z|ss} \sim 990$ m in der Stratosphäre. In Abbildung 4.16 ist neben dem Hintergrundprofil der Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 ein Profil des normierten Vertikalwinds w_n bei festem x (hier $x = 500$ m) gezeigt, sowie

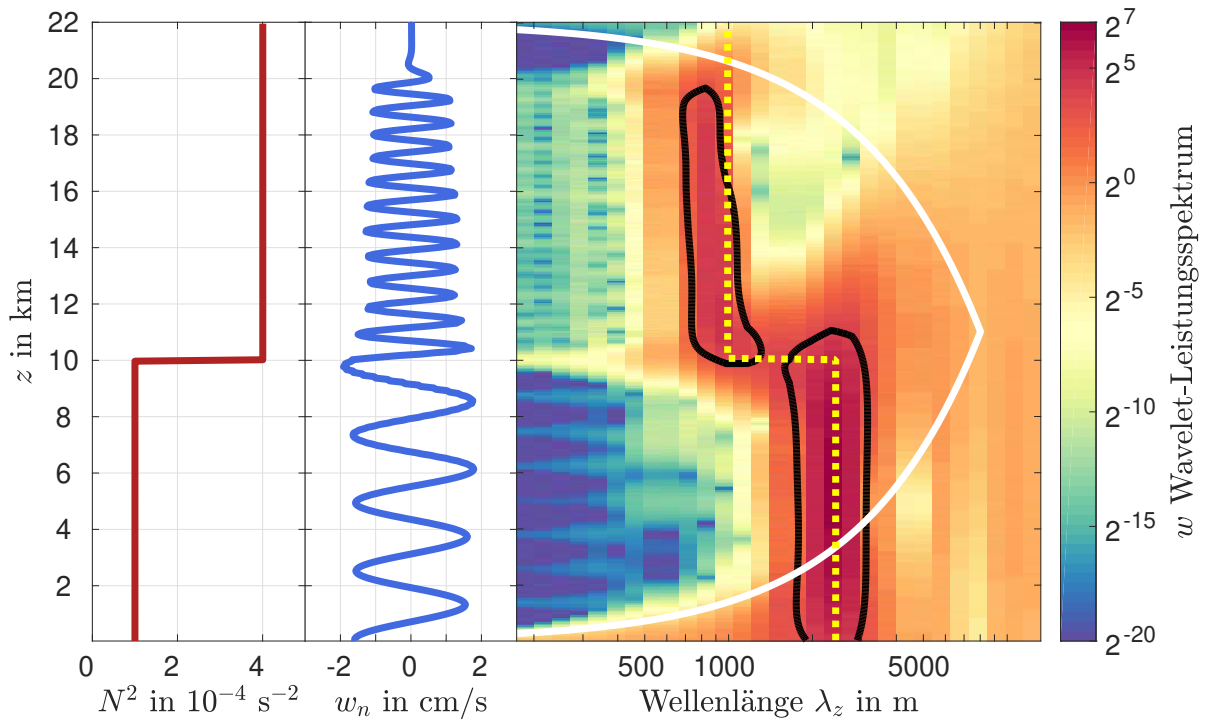


Abb. 4.16: Wellenpropagation bei sprunghafter Erhöhung der Stabilität (USSA). Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 , aus dem Vertikalwindfeld extrahiertes normiertes Profil w_n und dessen Wavelet-Analyse (von links nach rechts). Im rechten Bildteil umschließt die schwarze Kontur die Bereiche, in denen das Leistungsspektrum signifikant erhöht ist (Konfidenzniveau größer als 95%), die weiße Linie ist der “Cone of influence”: Werte rechts der weißen Linie werden durch Randeffekte aufgrund der endlichen Länge des analysierten Datensatzes beeinflusst. Die gelb-gestrichelte Linie zeigt die aus der Dispersionsrelation für lineare Theorie berechnete vertikale Wellenlänge.

eine Wavelet-Analyse dieses Profils (Erklärung der Methode in Abschnitt 3.4.2). Die Wavelet-Analyse zeigt zwei klar voneinander getrennte Bereiche, die vom Konfidenzniveau (schwarze Kontur) eingeschlossen sind. In der Tropopausenregion sind erhöhte Werte im Leistungsspektrum auch zwischen diesen beiden Bereichen ($\lambda_z \sim 1\,000$ m bis $\lambda_z \sim 2\,400$ m) erkennbar. Troposphärische lange Wellenlängen von ungefähr $\lambda_z = 2\,400$ m zeigen auch oberhalb der Tropopause bis ungefähr in 12 km Höhe erhöhte Werte im Leistungsspektrum.

Im Bereich unterhalb von $z = 10$ km ist die dominante vertikale Wellenlänge weitgehend konstant und fällt sehr genau mit der aus linearer Theorie berechneten Wellenlänge zusammen. Auch oberhalb von 10 km Höhe liegen die dort deutlich kleineren dominierenden Wellenlängen im Bereich der aus der Dispersionsrelation berechneten Wellenlänge. In größerer Höhe, ab etwa $z = 14$ km, zeigt die Simulation jedoch vermehrt kleinere Wellenlängen als aus der linearen Theorie erwartet. Dies kann mit der Schwammschicht (Abschnitt 3.1.5) zusammenhängen, die bei einer Höhe von 19.5 km Höhe einsetzt und das Windfeld dadurch beeinflussen kann.

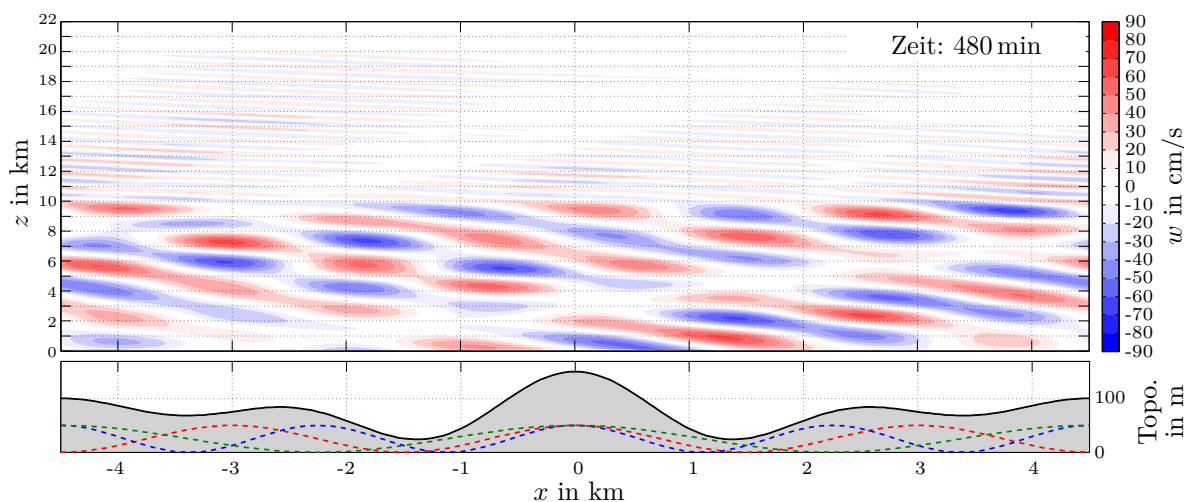


Abb. 4.17: Vertikales Windfeld w (oben) für das USSA- N^2 -Profil wie in Abb. 4.16, Topographie resultierend aus Überlagerung von Sinuswellen mit jeweils 2, 3 oder 4 Bergen im Modellgebiet (unten).

Aufgrund des Superpositionsprinzips, das auch dem Fourieransatz zugrunde liegt, kann eine Welle als eine Überlagerung von mehreren anderen Wellen dargestellt werden. Um zu untersuchen, ob sich dies auch durch eine Überlagerung von Topographien realisieren lässt, wurden mit demselben N^2 -Profil wie in Abbildung 4.16 Simulationen mit einem entsprechenden Bergprofil durchgeführt. In Abbildung 4.17 ist im unteren Bildteil dargestellt, welche Topographie bei Überlagerung von Einzelprofilen mit jeweils 2, 3 oder 4 Bergen im Modellgebiet zustande kommt. Der obere Bildteil zeigt das daraus resultierende Feld des Vertikalwinds nach 5 h Simulationszeit.

Eine Analyse dieses Windfeldes ist in Abbildung 4.18 gezeigt. Hier wurde das Modellgebiet in Troposphäre (bis 10 km Höhe, Bildteil 4.18a) und Stratosphäre (ab 10 km Höhe, Bildteil 4.18b) unterteilt und eine Fouriertransformation von $\rho_0 \cdot w$ berechnet (siehe Abschnitt 3.4.1). Die Dichte wurde hier mit einbezogen, um die Zunahme der Amplitude bei abnehmender Dichte zu kompensieren und zu vermeiden, dass Bereiche in größerer Höhe stärker gewichtet werden. Da die Topographie aus der Überlagerung einzelner Sinus-Bergprofile der Wellenlängen $\lambda_b \in \{4\,500\text{ m}, 3\,000\text{ m}, 2\,250\text{ m}\}$ zusammengesetzt ist, werden auch im Windfeld diese horizontalen Wellenlängen erwartet. Die theoretisch aus der Dispersionsrelation (2.30) resultierenden vertikalen Wellenlängen für den hier dargestellten Wellenlängenbereich sind mit einer schwarzen Linie markiert und die durch die drei einzelnen Sinus-Komponenten angeregten Wellenlängen λ_b sind zusätzlich mit roten Kreuzen gekennzeichnet.

Die Maxima der Fouriertransformation stimmen alle sehr genau mit diesen Wellenlängen überein. Allerdings gibt es für die vertikalen Wellenlängen eine größere Streuung als für die horizontalen Wellenlängen. Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, dass die endliche vertikale Ausdehnung des analysierten Bereichs (jeweils 10 km in Troposphäre und Stratosphäre) die vertikal periodischen Signale in w in einer festen Höhe abschneidet. In x -Richtung sind die angeregten Wellen genau periodisch mit der Modelllänge L_x und es

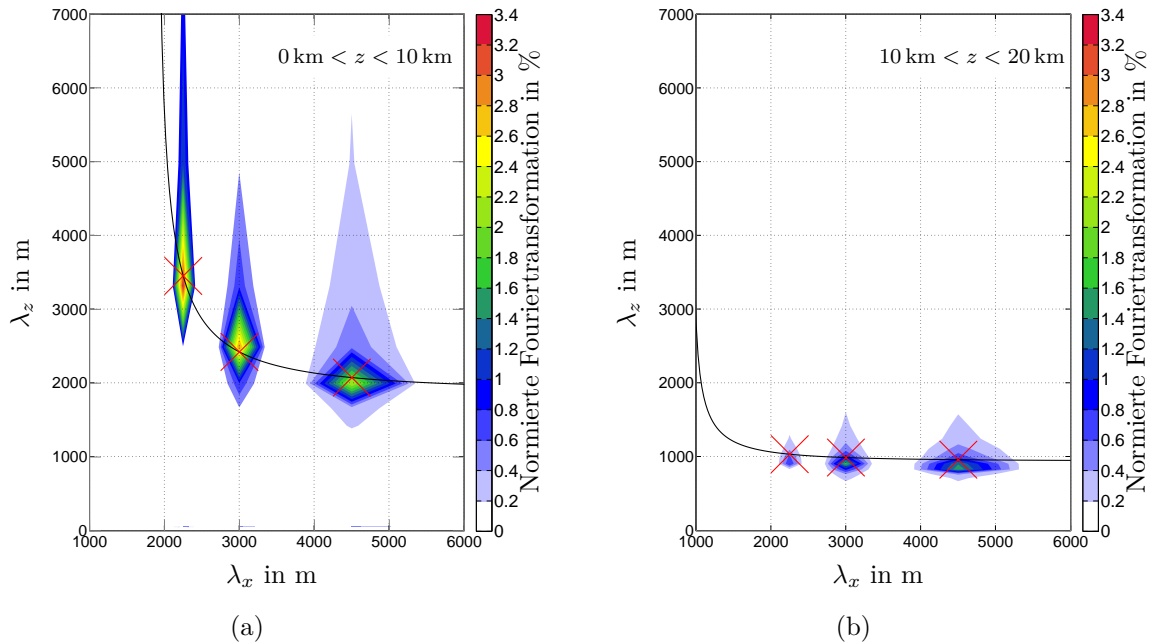


Abb. 4.18: Fouriertransformation von $\rho_0 \cdot w$ der durch die Topographie in Abb. 4.17 und das USSA-Profil in Abb. 4.16 angeregten Wellen (Konturen), nach linearer Theorie berechnete vertikale Wellenlängen (schwarze Linie) und erwartete Wellenlängen (rote Kreuze). (a) Troposphäre und (b) Stratosphäre.

gehen also immer volle Zyklen in die Fouriertransformation ein. Außerdem könnte es eine Rolle spielen, dass die Wellen teilweise an der Tropopause reflektiert werden und so die vertikale Wellenlänge immer wieder von einer Überlagerung der ursprünglich angeregten und der reflektierten Wellenlängen beeinflusst wird.

Nach demselben Prinzip der Überlagerung einzelner Sinus-Komponenten wie eben gezeigt, wird in einer anderen Simulation eine größere Anzahl von verschiedenen Wellenlängen angeregt. Dies ist in Abbildung 4.19 illustriert. Aus der Überlagerung von 21 verschiedenen Sinusfunktionen mit Wellenlängen zwischen $\lambda_{x,\min} \sim 2570$ m und $\lambda_{x,\max} = 6000$ m entsteht die im unteren Bildteil von Abbildung 4.19 dargestellte Topographie. Eine Anströmung mit den Umgebungsprofilen wie in Abbildung 4.16 führt zur Anregung von Wellen. Die Fouriertransformation des mit der Dichte gewichteten Vertikalwinds ergibt, wieder unterteilt in Troposphäre und Stratosphäre, die in Abbildung 4.20 gezeigten Spektren. Auch hier zeigt die schwarze Linie die theoretische, nach linearer Theorie berechnete Wellenlänge. Die roten senkrechten Linien markieren den Bereich zwischen den hier angeregten minimalen und maximalen Wellenlängen. In der Tat kommen alle horizontalen Wellenlängen im erwarteten Bereich vor. Allerdings unterscheiden diese sich sehr stark in ihrer Häufigkeit. Insbesondere das Maximum in der Troposphäre bei $\lambda_x = 3000$ m ist dominant ausgeprägt, doch auch ein weiteres bei $\lambda_x = 4500$ m ist erkennbar. Dies hängt damit zusammen, dass es sich hier um “resonante” Wellenlängen

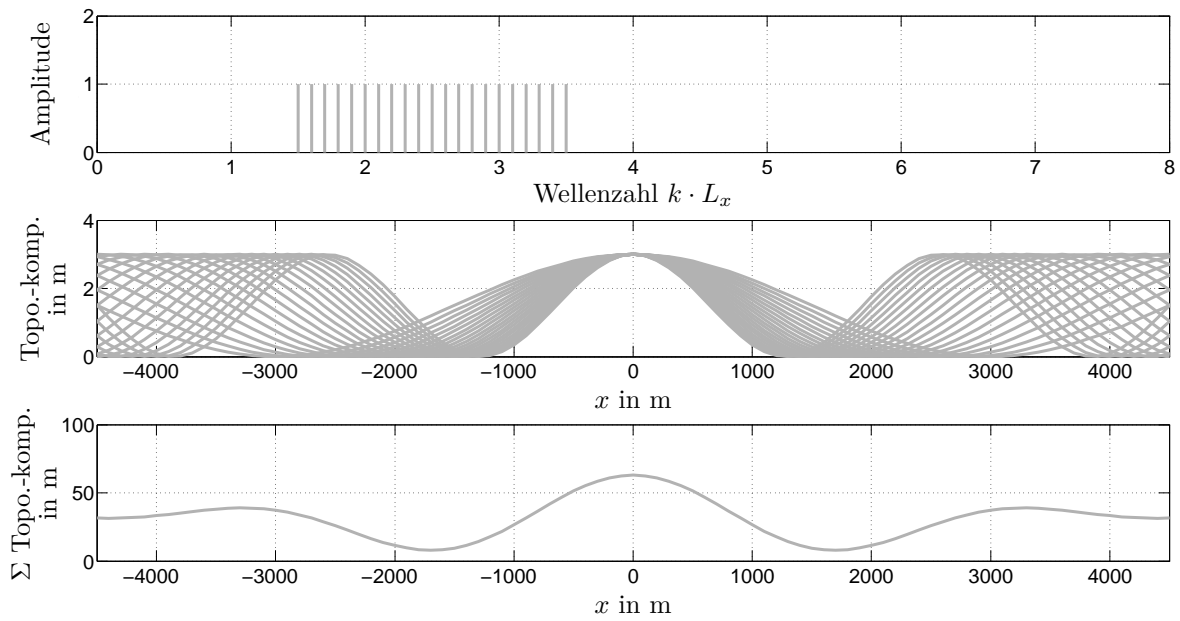


Abb. 4.19: Aufbau der Topographie bei Überlagerung von 21 Sinusfunktionen mit Wellenlängen zwischen $\lambda_{x,\min} = L_x/3.5 \sim 2570$ m und $\lambda_{x,\max} = L_x/1.5 = 6000$ m.

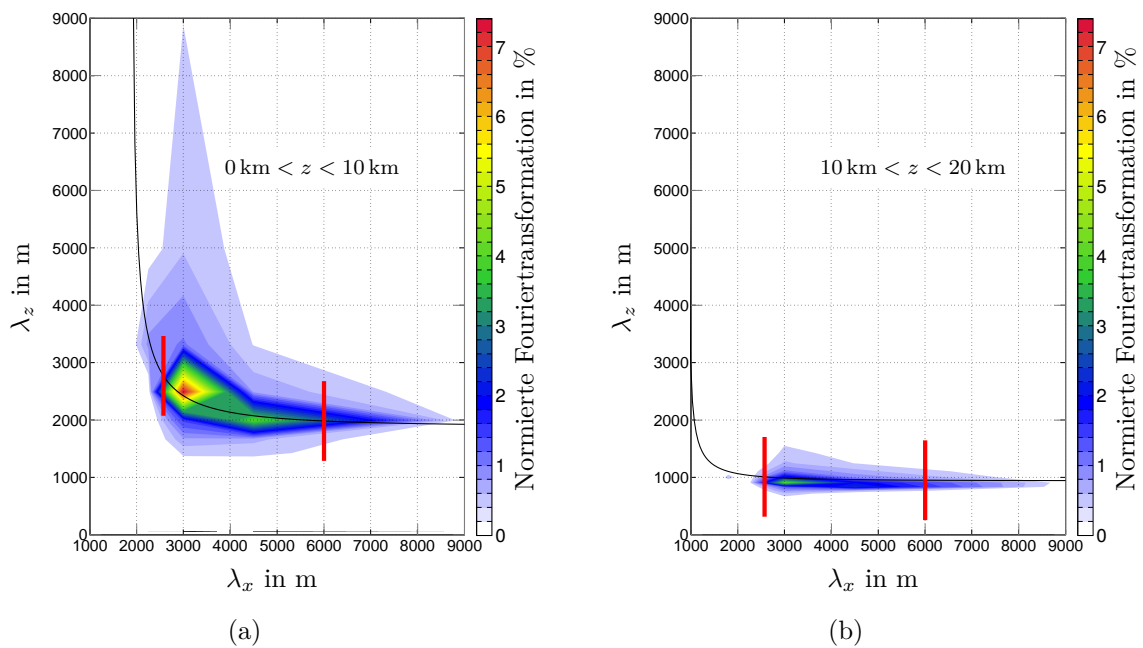


Abb. 4.20: Fouriertransformation von $\rho_0 \cdot w$ der durch die Topographie in Abb. 4.19 und das USSA-Profil in Abb. 4.16 angeregten Wellen (Konturen), nach linearer Theorie berechnete vertikale Wellenlängen (schwarze Linie) und erwartbarer Bereich (eingegrenzt durch rote Linien). (a) Troposphäre und (b) Stratosphäre.

handelt, also solche, die einen ganzzahligen Teiler für die Länge des Modellgebiets darstellen. Es ist auffällig, dass in der Troposphäre kleinere Wellenlängen als $\lambda_{x,\min}$ kaum auftreten, während Wellenlängen, die größer als $\lambda_{x,\max}$ sind, häufiger auftreten. In der Stratosphäre ist das Spektrum sehr stark ausgeschmiedt. Die Begrenzung auf bestimmte vertikale Wellenlängen ist jedoch viel mehr gegeben als in der Troposphäre.

Inversionsschicht mit variierender Stärke

In der Tropopausenregion kann häufig eine Inversionsschicht (TIL) beobachtet werden (Abschnitt 1.2). Um der Frage nachzugehen, wie sich eine TIL im Gegensatz zu einer sprunghaften Zunahme von N^2 auf die Propagation von Wellen auswirkt, wird hier ein Vergleich durchgeführt. Dazu sind in Abbildung 4.21 zwei Wavelet-Analysen gezeigt - neben dem bereits behandelten Fall der sprunghaften Zunahme von N^2 an der Tropopause (Abbildung 4.21a) auch ein Fall mit Inversionsschicht (Abbildung 4.21b). Das N^2 -Profil weist bei letzterem zwischen dem konstanten troposphärischen Wert $N_{ts}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ und dem stratosphärischen Wert $N_{ss}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ im Höhenbereich zwischen 10 km und 10.5 km eine stark erhöhte Stabilität von $N_{\max}^2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ auf.

Die Analysen der Verteilung der Wellenlängen zeigen weitgehend große Ähnlichkeiten und die dominanten Wellenlängen in Troposphäre und Stratosphäre sind klar voneinander getrennt. Es treten jedoch auch Unterschiede auf. Die Separation der dominanten Wellenlängen in einen troposphärischen und einen stratosphärischen Bereich ist bei der Simulation mit Inversionsschicht wesentlich klarer ausgeprägt. Der im Fall des USSA-Profiles vorhandene Übergangsbereich in der Tropopausenregion, in dem alle Wellenlängen zwischen der troposphärisch dominanten und der stratosphärisch dominanten Wellenlänge erhöhte Werte zeigen, ist bei der Inversion weniger stark ausgebildet. In der Wavelet-Analyse der Simulation mit TIL ist in der Stratosphäre eine Tendenz der Wellenlängen zu etwas kleineren Werten erkennbar, als sie theoretisch erwartbar sind.

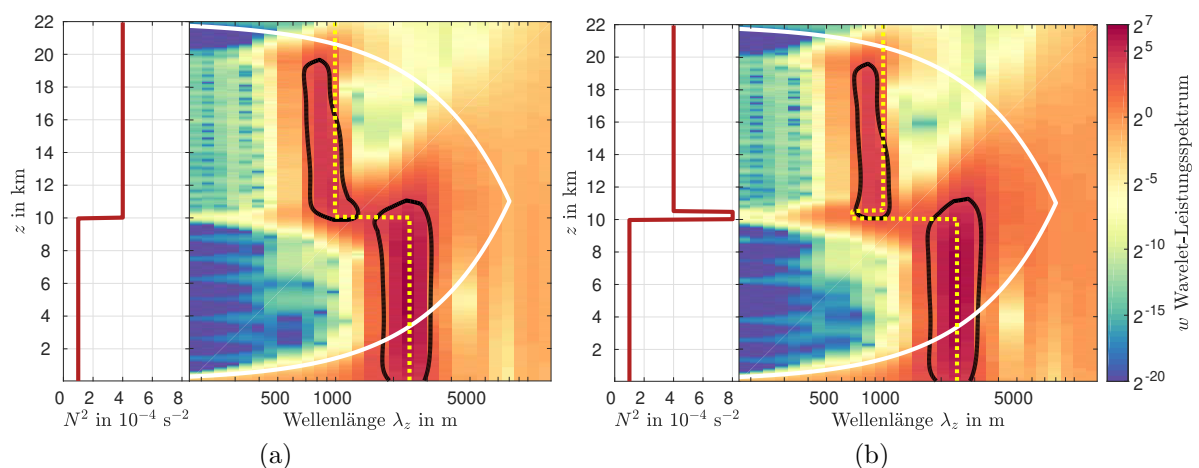


Abb. 4.21: Brunt-Väisälä-Frequenz (links) und Wavelet-Analyse wie in Abb. 4.16 (rechts), jeweils für (a) einen sprunghaften Anstieg von N^2 (USSA) und (b) eine Inversionsschicht mit $N_{\max}^2 = 8 \cdot N_{ts}^2$.

Auch hier könnte die bei $z_{\text{abu}} = 19.5$ km einsetzende Schwammschicht damit in Verbindung stehen. Die aus linearer Theorie errechnete kleinskalige Struktur der vertikalen Wellenlängen im Bereich der Inversion wird in der Wavelet-Analyse nicht exakt abgebildet. Dennoch ist im Bereich der rein rechnerisch an der Stelle maximaler Stabilität erwartbaren Wellenlänge $\lambda_z \sim 680$ m eine Erhöhung der Wavelet-Leistung zu sehen.

Tropopausenschicht mit variierender Dicke

Bei den hier vorgestellten Simulationen vervierfacht sich die quadrierte Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 in einem linearen Anstieg von einem konstanten troposphärischen Wert $N_{\text{ts}}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ auf einen konstanten stratosphärischen Wert $N_{\text{ss}}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$. Die Dicke der Schicht, in der dies geschieht, beträgt in den drei hier betrachteten Fällen

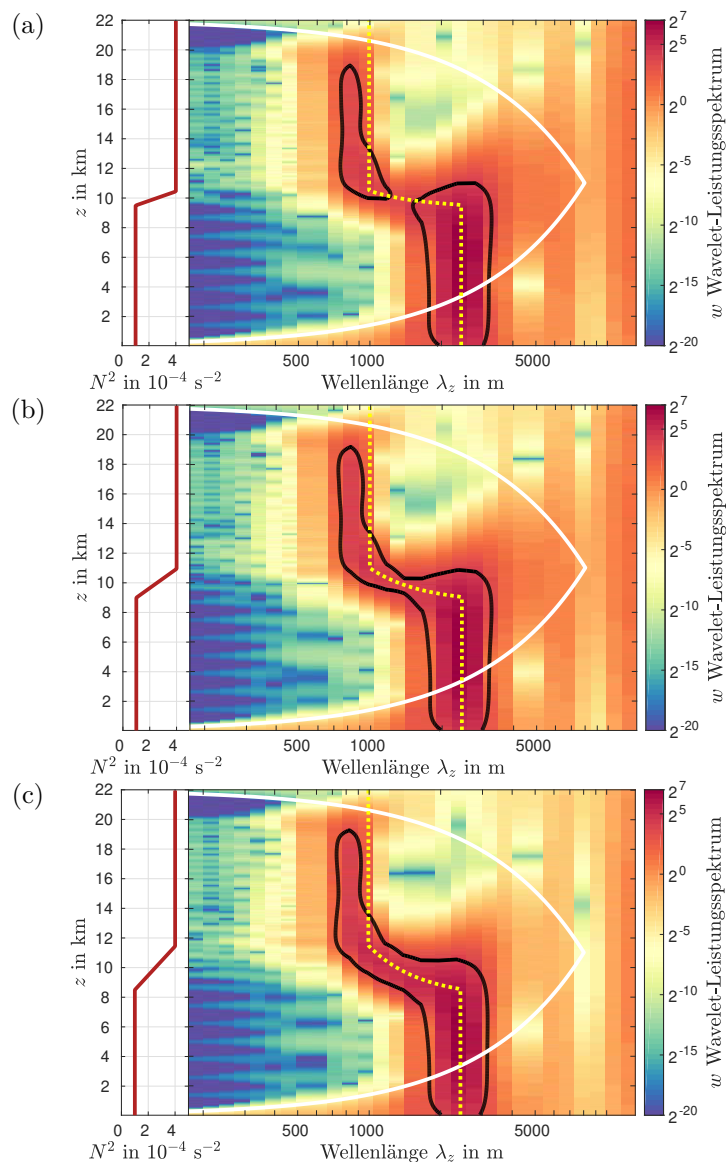


Abb. 4.22: Brunt-Väisälä-Frequenz (links) und Wavelet-Analyse wie in Abb. 4.16 (rechts), jeweils für Tropopausenschichtdicke (a) 1000 m, (b) 2000 m und (c) 3000 m.

$d \in \{1 \text{ km}, 2 \text{ km}, 3 \text{ km}\}$. In Abbildung 4.22 sind Wavelet-Analysen von Vertikalwindprofilen $w(z)$ aus den drei Simulationen gezeigt. Von Abbildung 4.22a nach Abbildung 4.22c nimmt die Tropopausenschichtdicke d zu. Dabei weisen immer mehr der zwischen troposphärischer Wellenlänge $\lambda_{z,ts}$ und stratosphärischer Wellenlänge $\lambda_{z,ss}$ liegenden Wellenlängen hohe Wavelet-Leistungen auf. Das Konfidenzniveau zeigt bei $d = 2000 \text{ m}$ und bei $d = 3000 \text{ m}$ keine voneinander getrennten Bereiche für Troposphäre und Stratosphäre, sondern einen graduellen Übergang der dominanten Wellenlängen von $\lambda_{z,ts}$ zu $\lambda_{z,ss}$. Die dominanten Wellenlängen aus der Wavelet-Analyse entsprechen weitgehend den theoretisch berechneten vertikalen Wellenlängen. Allerdings ist es auch hier auffällig, dass in der Stratosphäre alle drei Wavelet-Analysen geringere Wellenlängen zeigen, als sie sich durch die Dispersionsrelation ermitteln lassen. Dies könnte damit erklärt werden, dass der Rand des Modellgebiets bereits eine Rolle spielt und sich auch die Wirkung der Schwammschicht entfaltet.

4.2.2 Gradienten in Hintergrundwind und Stabilität

In diesem Abschnitt wird die Propagation von Wellen durch eine thermische Tropopause (USSA-Profil) bei gleichzeitigem Auftreten eines Strahlstroms (Jet) betrachtet. Der Strahlstrom wird dabei über eine Scherschicht im Hintergrundwind u_e verwirklicht. Um die Simulationen näher an die Realität anzupassen, wird der Horizontalwind in Anlehnung an Ergebnisse aus den mittleren Breiten (siehe Abbildung 1.3 aus Birner et al., 2002) im Vergleich zu den in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Simulationen deutlich erhöht. Deshalb werden auch längere Wellenlängen betrachtet, die die Propagationsbedingung für die vertikale Wellenzahl, $m^2 > 0$, nicht verletzen. Es werden EULAG-Simulationen in einem Modellgebiet der Größe $L_x = 100 \text{ km}$ und $L_z = 30 \text{ km}$ durchgeführt, wobei die horizontale Wellenlänge über $\lambda_x = L_x$ gegeben ist. Die räumliche Auflösung beträgt $\Delta x = 100 \text{ m}$, $\Delta z = 50 \text{ m}$ und die zeitliche Auflösung $\Delta t = 2.5 \text{ s}$. Das Modell hat periodische Ränder in x -Richtung und am Oberrand eine absorbierende Schicht mit einer Dämpfungskonstante von $\tau = 100 \text{ s}$, die in einer Höhe $z_{abu} = 23 \text{ km}$ beginnt. Die maximale Berghöhe am Unterrand beträgt $H = 250 \text{ m}$. Die gezeigten Analysen werden für einen Zeitpunkt 16 h nach Simulationsbeginn durchgeführt.

Variierende Höhenlage des Strahlstroms

In Abbildung 4.23 sind Ergebnisse aus drei Simulationen gezeigt, bei denen die Stabilität N^2 dem USSA-Profil entspricht, also einen konstanten Wert $N_{ts}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ in der Troposphäre und einen konstanten Wert $N_{ss}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ in der Stratosphäre aufweist. Die Anströmgeschwindigkeit u_e beträgt über weite Höhenbereiche 10 m s^{-1} , mit Ausnahme einer Schicht von 4 km Dicke, in der u_e linear auf einen Maximalwert $u_{e,max} = 26 \text{ m s}^{-1}$ zunimmt und dann wieder linear auf 10 m s^{-1} abnimmt. Das entspricht einer Scherung von $du_e/dz = 8 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Die Lage des Strahlstroms z_{jet} wird variiert - in Abbildung 4.23a befindet sich das Windmaximum unterhalb der Tropopause in einer Höhe von 8 km, in 4.23b fallen Windmaximum und Tropopause in einer Höhe von 10 km zusam-

men und in Abbildung 4.23c befindet sich das Windmaximum oberhalb der Tropopause in einer Höhe von 12 km. Dies ist in Abbildung 4.23 jeweils in den ganz links dargestellten Bildteilen (grünes Profil) veranschaulicht. Die jeweils mittleren Bildteile illustrieren den Verlauf von N^2 (rotes Profil), während die rechts dargestellten Bildteile in Abbildung 4.23 Wavelet-Analysen eines Vertikalwindprofils zeigen. Die angeregte Wellenlänge $\lambda_x = 100$ km resultiert bei einem Wind von 10 m s^{-1} in Bodennähe nach der Dispersions-

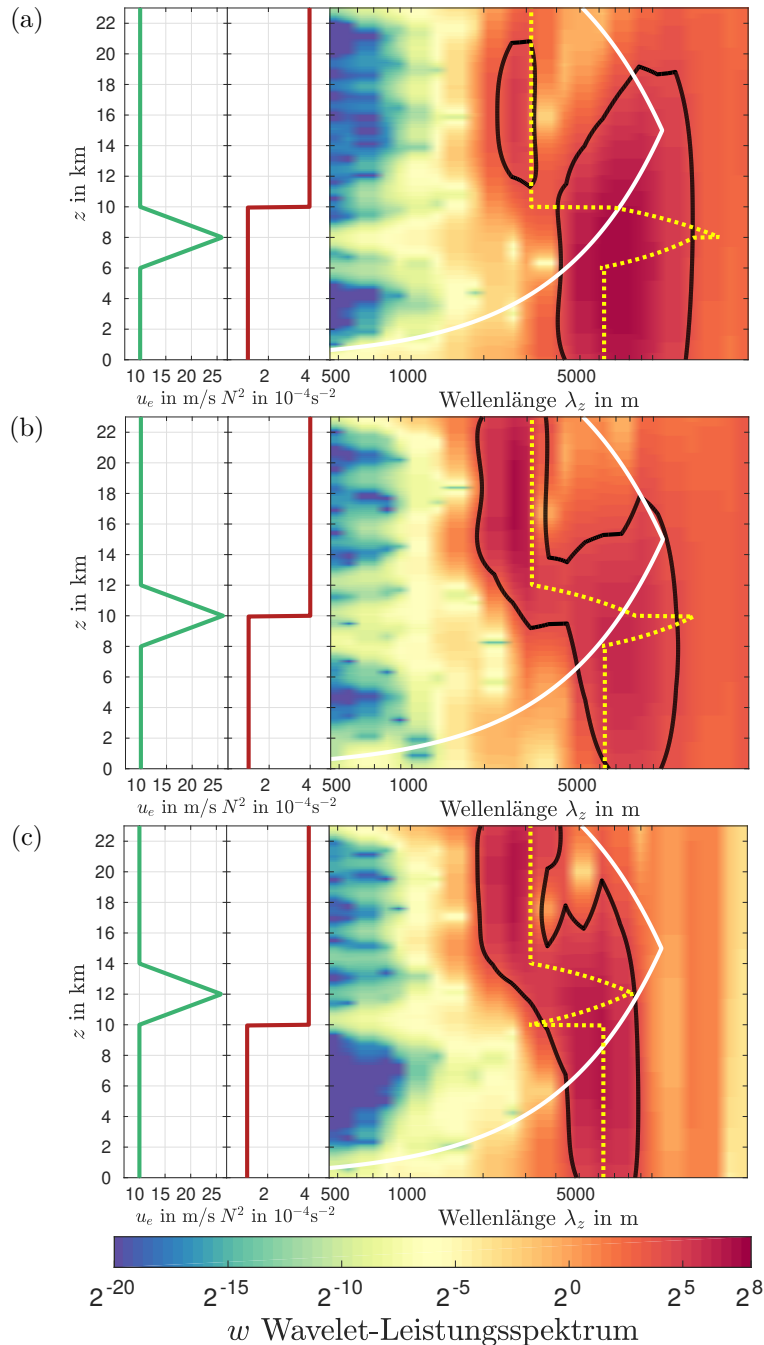


Abb. 4.23: Hintergrundwind (links), Brunt-Väisälä-Frequenz (Mitte) und Wavelet-Analyse wie in Abb. 4.16 (rechts), jeweils für eine Scherschicht (a) unter, (b) an und (c) über der thermischen Tropopause.

relation (2.30) in einer vertikalen Wellenlänge von $\lambda_z \sim 6.3$ km. In allen drei Situationen lassen sich zwei Bereiche dominanter Wellenlängen ausmachen, in der Troposphäre liegt dieser bei etwa 6 000 m und in der Stratosphäre bei etwa 2 500 m. Befindet sich der Strahlstrom unterhalb der Tropopause (Abbildung 4.23a), sind troposphärisch und stratosphärisch dominante Wellenlängen voneinander abgegrenzt, das Konfidenzniveau (schwarze Kontur) umschließt zwei voneinander getrennte Bereiche. Treten Tropopause und Strahlstrom in derselben Höhe auf (Abbildung 4.23b), umschließt das Konfidenzniveau in der Tropopausenregion einen größeren Bereich von Wellenlängen und zeigt einen graduellen Übergang von langen zu kurzen Wellenlängen. Auch im Fall eines Strahlstroms oberhalb der Tropopause (Abbildung 4.23c) enthält das schwarz markierte Konfidenzniveau in der Tropopausenregion auch die Wellenlängen, die zwischen $\lambda_{z,ts}$ und $\lambda_{z,ss}$ liegen. Alle drei Wavelet-Analysen zeigen, dass troposphärische Wellenlängen $\lambda_{z,ts}$ auch in der unteren Stratosphäre auftreten. Der Bereich, in dem solche Wellen als dominant detektiert werden, reicht im Fall eines Strahlstroms oberhalb der Tropopause am weitesten in die Stratosphäre hinein, bis in etwa 18 km Höhe. Die nach linearer Theorie berechneten vertikalen Wellenlängen, für die nun auch der Scherungsterm in der Taylor-Goldstein-Gleichung (2.22) berücksichtigt wurde, sind in Abbildung 4.23 als gelb-gestrichelte Linien eingezeichnet. Ihr Profil zeigt einen von sehr starken Gradienten geprägten Verlauf. In der Wavelet-Analyse sind diese kleinskaligen Strukturen nicht deutlich abgebildet, die vom 95 %-Konfidenzniveau eingeschlossenen Strukturen sind deutlich glatter und im Wellenlängenbereich weniger stark lokalisiert. Die theoretisch möglichen sehr großen

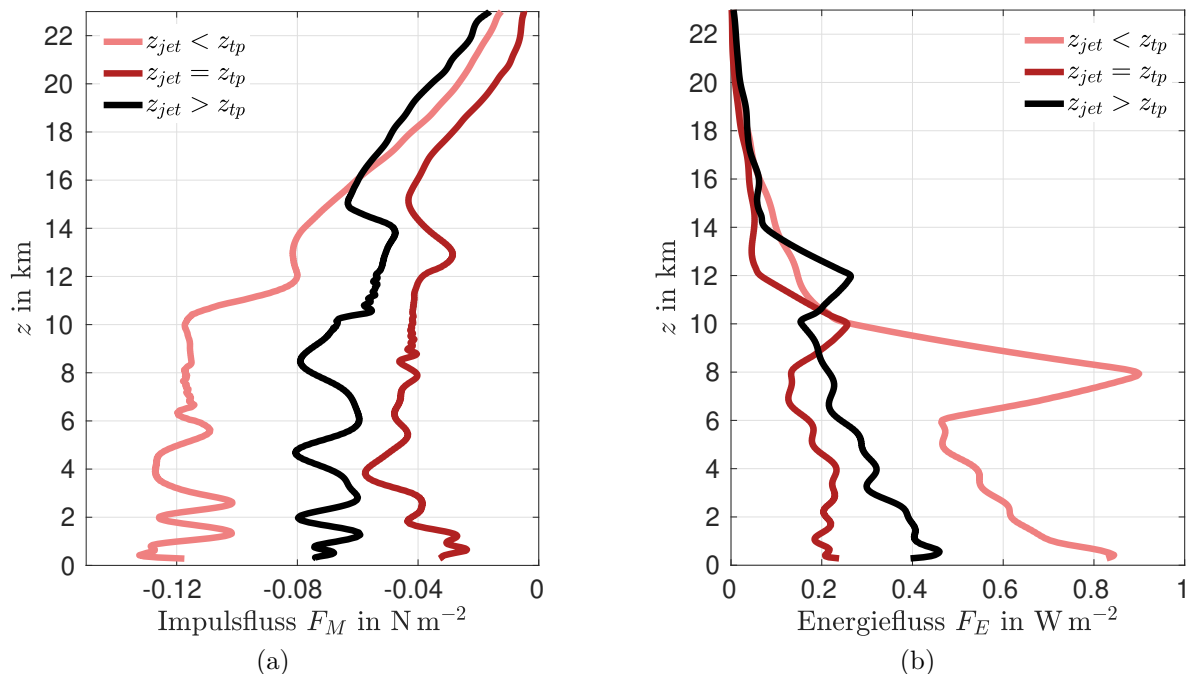


Abb. 4.24: Horizontal gemittelter (a) Impulsfluss F_M und (b) Energiefluss F_E für die Simulationen aus Abbildung 4.23. Lage des Strahlstroms unter (rosa), an (rot) und über (schwarz) der thermischen Tropopause.

Wellenlängen (Spitzen des gelb-gestrichelten Profils) werden weder in Abbildung 4.23a noch in Abbildung 4.23b innerhalb des 95 %-Konfidenzniveaus geführt (schwarze Kontur). Aus den Wind- und Druckfeldern der Simulationen wurden die vertikalen Komponenten des horizontal gemittelten Impulsflusses $F_M = \overline{\rho_0 u' w'}$ (Gleichung 2.54) und des Energieflusses $F_E = \overline{p' w'}$ (Gleichung 2.44) berechnet. Diese sind in Abbildung 4.24 dargestellt. Befindet sich der Strahlstrom in der Stratosphäre, so weist die Simulation mit einem Strahlstrom unterhalb der Tropopause (rosa) mit etwa -0.12 N m^{-2} den stärksten Impulsfluss in der Troposphäre auf. Befindet sich der Strahlstrom auf Höhe der Tropopause, bleibt der Impulsfluss über weite Höhenbereiche annähernd konstant bei einem Wert von etwa -0.04 N m^{-2} . Bei der Simulation mit einem Strahlstrom oberhalb der Tropopause übersteigt der Impulsfluss ab einer Höhe von etwa 16 km die Impulsflüsse der anderen beiden Fälle. Die Energieflüsse in Abbildung 4.24b zeigen auf der Höhe der Maxima des Strahlstroms jeweils auch ein lokales Maximum. In der Troposphäre treten hier im Fall $z_{\text{jet}} < z_{\text{tp}}$ die höchsten Energieflüsse auf.

Variierende Stärke des Strahlstroms

Für den Fall eines Strahlstroms unterhalb der Tropopause werden noch weitere Simulationen betrachtet, die sich in der Stärke des Strahlstroms unterscheiden. In Abbildung 4.25 sind vier Fälle gezeigt, in denen die maximale Horizontalwindgeschwindigkeit zwischen $u_{e,\text{max}} = 10 \text{ m s}^{-1}$ und $u_{e,\text{max}} = 26 \text{ m s}^{-1}$ liegt und die Scherung die Werte $du_e/dz \in \{0, 2.5, 5, 8\} \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ annimmt. Die Leistungsspektren in Abbildung 4.25 zeigen alle wieder wie in Abbildung 4.23 einen dominanten Wellenlängenbereich in der Troposphäre bei etwa 6 000 m und einen dominanten Wellenlängenbereich in der Stratosphäre bei etwa 3 000 m. In der Tropopausenregion treten die Wellenlängen zwischen diesen beiden Bereichen für schwächere Strahlströme ebenfalls vermehrt auf und werden von der 95 %-Konfidenz-Kontur umschlossen (Abbildungen 4.25a und 4.25b). Bei stärkeren Strahlströmen tritt hingegen in der Tropopausenregion eine Lücke im Wellenlängenspektrum auf (Abbildung 4.25d). Die langen Wellenlängen von etwa 6 000 m sind in allen vier Fällen auch in der unteren Stratosphäre persistent. Bei größerer Windscherung kommen sie noch weit in die Stratosphäre hinein vor, die 95 %-Kontur zeigt lange Wellenlängen in eine Höhe von bis zu etwa 19 km (Abbildung 4.25d). Um dieses Verhalten genauer zu quantifizieren, sind in Abbildung 4.26b die maximalen Werte aufgetragen, die im Wavelet-Leistungsspektrum in verschiedenen Sektoren vorkommen. Die Einteilung der Sektoren ist in Abbildung 4.26a veranschaulicht. Sie erfolgt im Spektralbereich bei einer Wellenlänge von $\lambda_z \sim 4 000 \text{ m}$ und im Ortsbereich in einer Höhe von $z = 10 \text{ km}$, also beim Übergang von N_{ts}^2 zu N_{ss}^2 .

Sektor IV zeigt den Bereich großer Wellenlängen in der Troposphäre. Hier nimmt die Wavelet-Leistung bei zunehmender Windscherung zu. In Sektor I ist dargestellt, welche Leistung in der Stratosphäre auf kürzere Wellenlängen entfällt. Dabei ist im Vergleich mit Sektor IV ein umgekehrter Verlauf zu beobachten: Bei größerer Windscherung sind kurze Wellenlängen unterhalb von 4 000 m weniger dominant als ohne Windscherung. Die Persistenz großer Wellenlängen bis in die Stratosphäre ist in Sektor II gezeigt. Wird

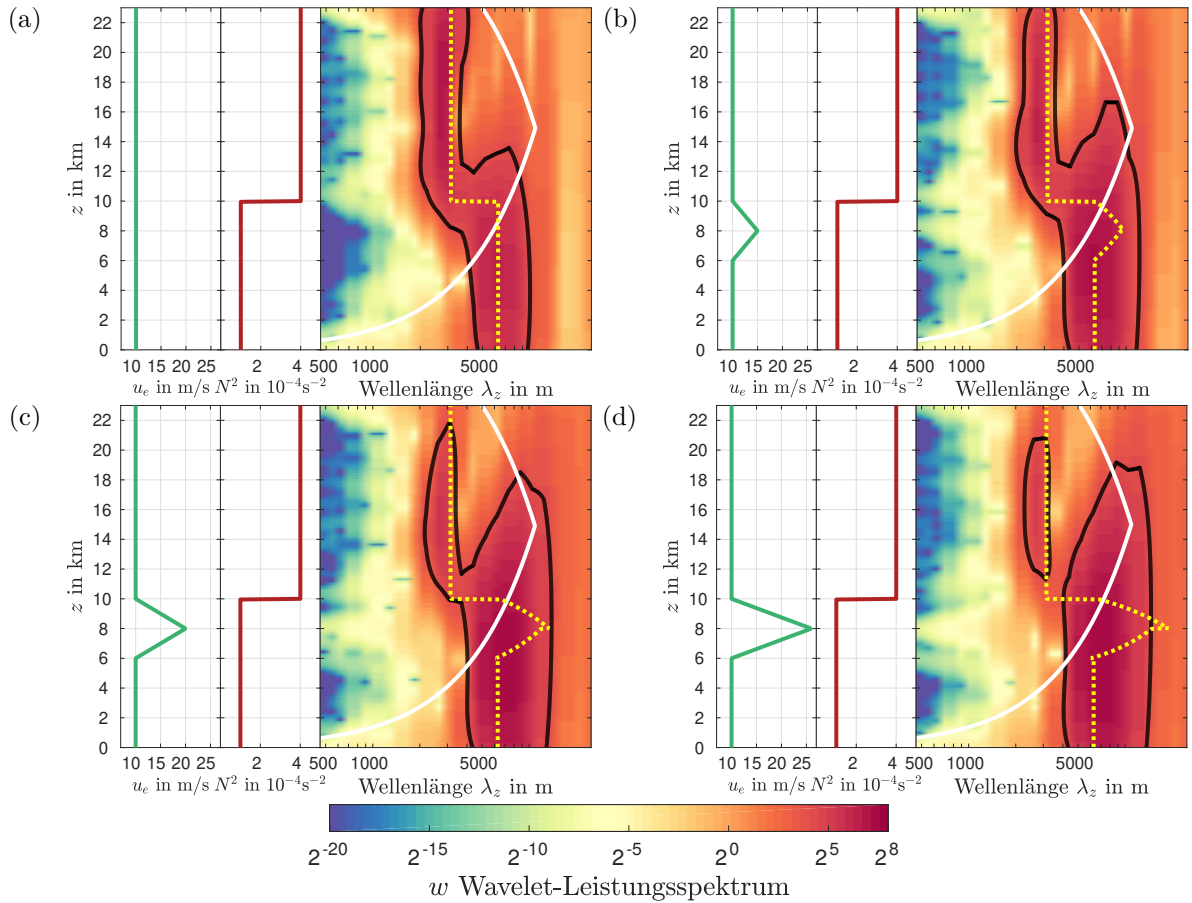


Abb. 4.25: Hintergrundwind (links), Brunt-Väisälä-Frequenz (Mitte) und Wavelet-Analyse wie in Abb. 4.16 (rechts), jeweils für einen Strahlstrom mit einer Scherung du_e/dz von (a) $0 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, (b) $2.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, (c) $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und (d) $8 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

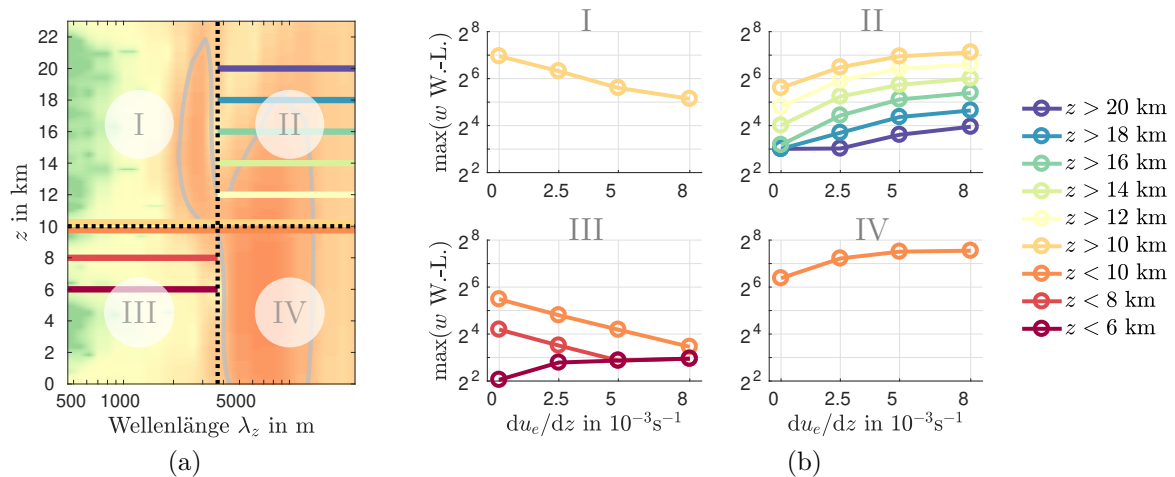


Abb. 4.26: (a): Illustration zur Einteilung eines Wavelet-Spektrums in vier Sektoren I-IV (schwarz-gepunktete Linien bei $z = 10 \text{ km}$ und bei $\lambda_z \sim 4000 \text{ m}$) und verschiedene Höhenbereiche (farbige Linien). (b): Maximale Wavelet-Leistung der Simulationen aus Abbildung 4.25 mit Scherungen $du_e/dz \in \{0, 2.5, 5, 8\} \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ in verschiedenen Höhenbereichen (farbige Linien) für die Sektoren I-IV.

der gesamte Bereich $z > 10$ km betrachtet, zeigen die Maxima einen ähnlichen Verlauf wie in der Troposphäre (Sektor IV), jedoch leicht nach unten verschoben. Es werden zwischen 60 % und 74 % der Werte aus der Troposphäre (IV) angenommen. Wird der betrachtete Bereich in Sektor II verkleinert, so nehmen die Werte in allen Simulationen bis $z > 16$ km immer mehr ab, zeigen aber weiter einen ähnlichen qualitativen Verlauf. Beim Verschieben der Grenze nach noch weiter oben tritt für $du/dz = 0 \text{ s}^{-1}$ keine Änderung des Maximums mehr auf. Dies ist in Abbildung 4.25a daran zu erkennen, dass die Wavelet-Leistung in Sektor II ab einigen Kilometern Abstand von der Tropopause sehr homogen ist. Sektor III umfasst den Bereich kleinerer Wellenlängen mit $\lambda_z < 4000$ m in der Troposphäre. Wird der kleinste Höhenbereich betrachtet ($z < 6$ km), erreichen die Maxima niedrige Werte und ihr Verlauf ähnelt dem in den Sektoren II und IV. Werden die Höhenbereiche direkt unterhalb der Tropopause hinzugenommen (hellrote und orange Linie in Sektor III, Abbildung 4.26b), kehrt sich dieser Verlauf um. Es treten dann bei größer werdender Windscherung die niedrigeren Wavelet-Leistungen auf. Dies liegt daran, dass der Wellenlängenbereich zwischen $\lambda_{z,ts}$ und $\lambda_{z,ss}$ bei großen Windscherungen weniger stark ausgeprägt ist, wie bereits an den Konfidenz-Konturen in den Wavelet-Spektren aus Abbildung 4.25 erläutert wurde. Ein starker Strahlstrom unterhalb der Tropopause verschiebt die Wellenlängen in der Tropopausenregion, in Übereinstimmung mit linearer Theorie, hin zu großen Wellenlängen. Im Wellenlängenbereich $\lambda_z < 4000$ m werden deshalb nur noch niedrige Wavelet-Leistungen erreicht.

Interessant ist auch der Vergleich von Abbildung 4.25a mit Abbildung 4.16: Die Umgebungsprofile weisen denselben Verlauf auf, jedoch sind die angeregte Wellenlänge und die Stärke der Anströmung in Abbildung 4.25a beide deutlich größer. Die Wellenlänge beträgt $\lambda_x = 100$ km im Vergleich zu $\lambda_x = 3$ km und die Anströmung $u_e = 10 \text{ m s}^{-1}$ statt $u_e = 3 \text{ m s}^{-1}$. Das Resultat ist ein deutlich veränderter Einfluss der Tropopause auf die Wellenlänge. Im Falle der größeren Windgeschwindigkeiten und Wellenlängen bleiben die troposphärischen Wellenlängen auch deutlich in der unteren Stratosphäre erkennbar und über einen Höhenbereich zwischen etwa 9 km und 13 km gibt es eine bimodale Verteilung. Die beiden dominanten Wellenlängen, die von der troposphärischen Brunt-Väisälä-Frequenz N_{ts}^2 und von der stratosphärischen Brunt-Väisälä-Frequenz N_{ss}^2 geprägt sind, können bei großer Wellenlänge und Anströmung (Abbildung 4.25a) bei Betrachtung des 95 %-Konfidenzniveaus nicht mehr so klar unterschieden werden wie bei niedrigerer Wellenlänge und Anströmung in Abbildung 4.16.

4.2.3 Zusammenfassung

Im zweiten Ergebnisteil wurden orographisch angeregte Wellen und ihr Durchgang durch Schichten mit Änderung in Stabilität und Umgebungswind vorgestellt. Hierbei sollten insbesondere auch Übereinstimmungen und Abweichungen zwischen den Simulationen und der linearen Theorie betrachtet werden.

Es wurde ein Stabilitätsprofil verwendet, das dem Temperaturverlauf in der US-Standardatmosphäre entspricht: Von einem konstanten troposphärischen Wert nimmt die

Stabilität sprunghaft auf einen konstanten stratosphärischen Wert zu.

Zunächst wurde der Umgebungswind als konstant angenommen. Es konnte dabei beobachtet werden, dass eine ebene Welle dem in linearer Theorie vorhergesagten Verlauf weitgehend folgte, eine Wavelet-Analyse zeigte zwei diskrete vertikale Wellenlängen in Troposphäre und Stratosphäre, die durch die dort jeweils vorherrschende Stabilität bestimmt wurden. Allerdings erfolgte die Änderung der Wellenlänge an der Tropopause nicht instantan, sondern auch lange troposphärische Wellen propagierten noch in die untere Region der Stratosphäre. Durch Festlegen eines Bergprofils, das aus der Überlagerung unterschiedlicher Wellenlängen zusammengesetzt ist, konnte auch im Frequenzraum eine Überlagerung festgestellt werden. Im Fourierspektrum waren mehrere diskrete Wellenlängen analysierbar. Dabei war auffällig, dass die Streuung der vertikalen Wellenlänge in der Troposphäre deutlich größer war als in der Stratosphäre. Hierbei spielte womöglich die Überlagerung von an der Tropopause reflektierten Anteilen eine Rolle.

Das Stabilitätsprofil aus der US-Standardatmosphäre wurde mit einer Tropopausen-inversionsschicht verglichen. Dabei war auch eine konstante Stabilität in Troposphäre und Stratosphäre vorherrschend, jedoch befand sich dazwischen noch eine sehr schmale Schicht mit deutlich erhöhter Stabilität. In diesem Fall war die Trennung der vertikalen Wellenlängen an der Tropopause noch deutlicher ausgeprägt als ohne die Inversionsschicht.

Es wurden außerdem Simulationen betrachtet, in denen sich die Tropopausenregion über eine Schicht erstreckt, innerhalb der eine lineare Zunahme der Stabilität von einem konstanten troposphärischen auf einen konstanten stratosphärischen Wert erfolgt. Die Dicke dieser Schicht wurde variiert. Dabei konnte beobachtet werden, dass bei größeren Schichtdicken in der Wavelet-Analyse eine kontinuierliche Änderung der Wellenlänge detektiert wurde und die Übereinstimmung mit der linearen Theorie immer größer wurde.

Die Kombination von Änderungen in der Stabilität und in der Windscherung wurde in einer weiteren Studie betrachtet. Hier wurde wieder das Profil der US-Standardatmosphäre gewählt und ein Strahlstrom implementiert, dessen Lage sich relativ zur thermischen Tropopause veränderte. Diese Simulationen wurden mit deutlich erhöhter Anströmgeschwindigkeit und Wellenlänge gegenüber der vorherigen Simulationen durchgeführt. Hier wies die nach linearer Theorie berechnete Wellenlänge eine feinskalige Struktur mit starken Gradienten auf. Dies wurde in den Simulationen so nicht wiedergegeben. Befand sich der Strahlstrom oberhalb der Tropopause, so führte dies zu einer weiteren Persistenz langer Wellen in die untere Stratosphäre hinein. Befand sich der Strahlstrom unterhalb der Tropopause, so hatte das höhere Impuls- und Energieflüsse zur Folge als wenn er an der Tropopause oder darüber lag.

Für diesen Fall eines Strahlstroms unterhalb einer Tropopause nach US-Standardatmosphäre wurde auch die Stärke des Strahlstroms variiert. Dabei waren generell lange Wellen auch über weite Teile der Stratosphäre sichtbar. Auch hier wurde im Vergleich zu vorherigen Simulationen mit höheren Windgeschwindigkeiten angeregt, was dieses Verhalten vermutlich verstärkte. Der stärkste Strahlstrom hatte die größte Transmission langer troposphärischer Wellenlängen in die Stratosphäre zur Folge. Gleichzeitig nahm

die Dominanz kurzer Wellen in der Stratosphäre in diesem Fall am stärksten ab.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass in den meisten Höhenbereichen eine Übereinstimmung zwischen den analysierten vertikalen Wellenlängen mit den aus linearer Theorie ermittelten Werten gefunden werden kann. Der Übergang von langen troposphärischen Wellenlängen zu kürzeren stratosphärischen Wellenlängen erfolgt jedoch nicht unmittelbar an der Tropopause, sondern lange Wellenlängen sind auch noch in der unteren Stratosphäre sichtbar - umso mehr, je höher die horizontale Windgeschwindigkeit ist. Zudem konnte in fast allen Fällen beobachtet werden, dass die Simulationen in der mittleren Stratosphäre kleinere Wellenlänge zeigten als durch die lineare Theorie ermittelt. Dies trat sowohl bei den Simulationen mit niedriger Anströmung als auch bei jenen mit höherer Anströmung auf.

4.3 Orographische Wellen in einer Tropopauseninversionsschicht

4.3.1 Aufbau und Ziel der Untersuchung

In dieser Studie soll systematisch untersucht werden, wie orographisch angeregte Schwerkwellen durch eine Tropopauseninversionsschicht propagieren. Es werden hierfür verschiedene Wellenlängen betrachtet, sowie die Struktur der Tropopause variiert. Das betrifft einerseits die vertikale Ausdehnung der Tropopausenschicht und andererseits die Stärke der Inversion. Die Implementierung der Tropopauseninversionsschicht erfolgt durch eine hyperbolische Funktion für N^2 , die den Übergang der Brunt-Väisälä-Frequenz von einem konstanten troposphärischen Wert $N_{ts}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ zu einem konstanten stratosphärischen Wert $N_{ss}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ beschreibt. Es werden zwei Parameter variiert, um verschiedene Konfigurationen zu realisieren:

$$N^2(z; c, d, z_{tp}) = \left(N_{ts}^2 + \frac{N_{ss}^2 - N_{ts}^2}{2} \cdot \left[1 + \tanh \left(\frac{z - z_{tp}}{d} \right) \right] \right) \cdot \left(1 + (c - 1) \cdot \text{sech}^2 \left(\frac{z - z_{tp}}{d} \right) \right) \quad (4.12)$$

Der Parameter d beschreibt die Dicke der Tropopauseninversionsschicht und der Parameter c beschreibt die Stärke der Inversion. Die Höhe der Tropopause beträgt $z_{tp} = 11 \text{ km}$. Aus $c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $d \in \{200 \text{ m}, 350 \text{ m}, 500 \text{ m}, 650 \text{ m}, 800 \text{ m}, 950 \text{ m}\}$ ergeben

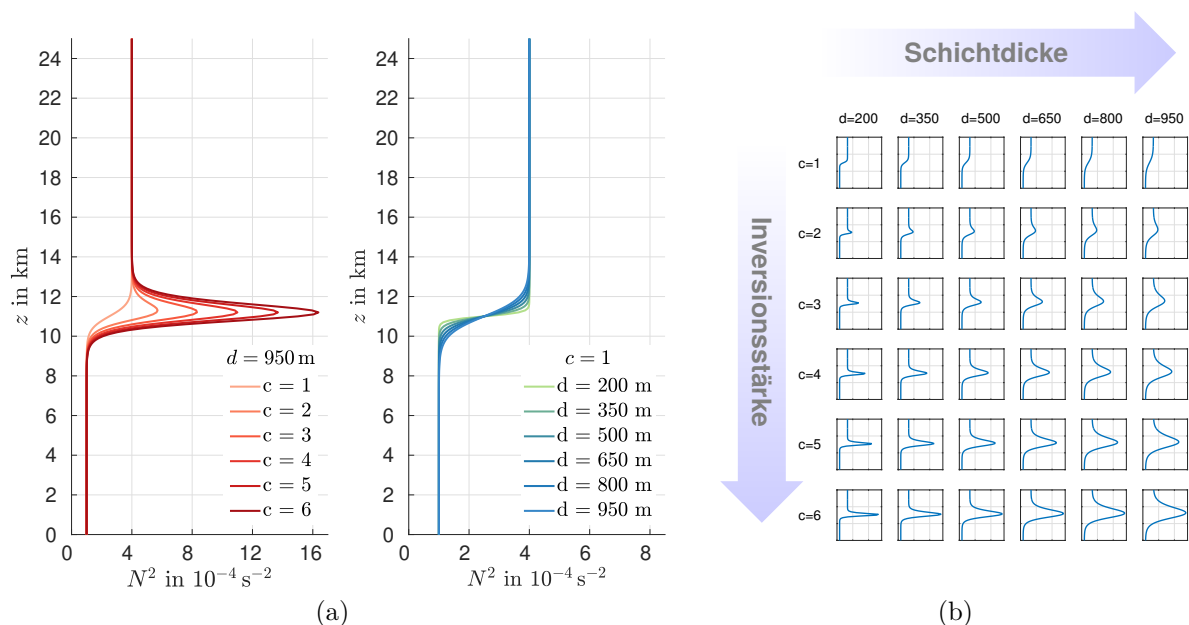


Abb. 4.27: Profile der Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 gemäß Gleichung (4.12), Variation der Parameter für die Inversionsstärke c und die Schichtdicke d - (a) getrennt voneinander und (b) kombiniert zu 36 Profilen.

sich 36 verschiedene Kombinationen, wie in Abbildung 4.27 illustriert ist.

Diese Tropopausenkonfigurationen werden mit drei verschiedenen Modellen dahingehend untersucht, welche Transmissionseigenschaften sie für Schwerewellen haben. Die Modelle unterscheiden sich in ihrer Herangehensweise und in ihren Annahmen stark, was einen Vergleich interessant macht.

Zunächst soll dafür das bereits in Abschnitt 3.1 beschriebene Modell EULAG in hoher Auflösung verwendet werden, womit ein möglichst nah an der Realität befindliches Ergebnis angestrebt wird. Im Modell werden Schwerewellen direkt simuliert, allerdings werden kleinskalige Prozesse wie Turbulenz parametrisiert. Die Wellenanregung erfolgt durch Anströmung einer sinusförmigen Orographie und die Wellen erfüllen die anelastischen Gleichungen (2.8).

Außerdem wird das Mehrschichtenmodell von Pütz et al. (2018) verwendet, das in Abschnitt 3.2 vorgestellt wurde. Hier werden die Boussinesq-Gleichungen (2.10) herangezogen, um die Propagation von ebenen Wellen zu beschreiben.

Des Weiteren wird ein Ray-Tracing-Modell von Muraschko et al. (2015) und Bölöni et al. (2016) verwendet, das vor allem zur Untersuchung der Interaktion zwischen Welle und Grundstrom entwickelt wurde. Dieses Modell wurde bereits in Abschnitt 3.3 kurz erläutert und wird auch in der Boussinesq-Näherung betrieben.

In den folgenden Abschnitten 4.3.2, 4.3.3 und 4.3.4 werden die Ergebnisse und Methoden bei der Benutzung der einzelnen Modelle vorgestellt. Dabei ist es insbesondere interessant, die jeweils auftretenden Unterschiede mit den Eigenheiten und den getroffenen Annahmen der verschiedenen Modelle in Relation zu setzen. Dies wird im Vergleich der Modelle in Abschnitt 4.3.5 näher erläutert.

4.3.2 Ergebnisse aus EULAG

Es wird der Strömungslöser EULAG (Prusa et al., 2008) verwendet, dessen Eigenschaften in Kapitel 3.1 bereits beschrieben wurden. Der Basiszustand ψ_0 wird über die Wahl `lipps=3` auf das isotherme Bacmeister-Schoeberl-Profil festgelegt (siehe Abschnitt 3.1.1), da nur so die erforderliche hohe vertikale Ausdehnung gewährleistet werden kann, die über die Tropopause hinaus reicht. Im Umgebungszustand ψ_e wird das hyperbolische N^2 -Profil für die Definition von θ_e benutzt und der Hintergrundwind wie in Abbildung 4.28 gezeigt gewählt. Es wird im Modellgebiet stets eine Wellenlänge dargestellt, es gilt also für die Modellgebietsgröße $L_x = \lambda_x$ und die Auflösung beträgt in beide Raumrichtungen $\Delta x \approx \Delta z \approx 10$ m und in der Zeit $\Delta t = 1$ s.

Ausbreitungsbedingung orographischer Wellen

Bei den hier diskutierten orographischen Wellen gilt die Dispersionsrelation (2.30), aus der ersichtlich wird, wann die Wellen propagieren und wann sie evaneszent sind. Dabei ist entscheidend, ob die vertikale Wellenzahl m einen imaginären Anteil hat. Bei einer durch die Orographie festgelegten horizontalen Wellenlänge λ_x ergibt sich durch die Wahl der Anströmgeschwindigkeit u_0 die vertikale Wellenzahl. Abbildung 4.28 illustriert den

Zusammenhang von horizontaler Wellenlänge, Anströmgeschwindigkeit und vertikaler Wellenlänge. Im farbig konturierten Bereich des Diagramms kann Wellenpropagation stattfinden. Die Markierungen beziehen sich auf Konfigurationen, die in den folgenden Abschnitten betrachtet werden.

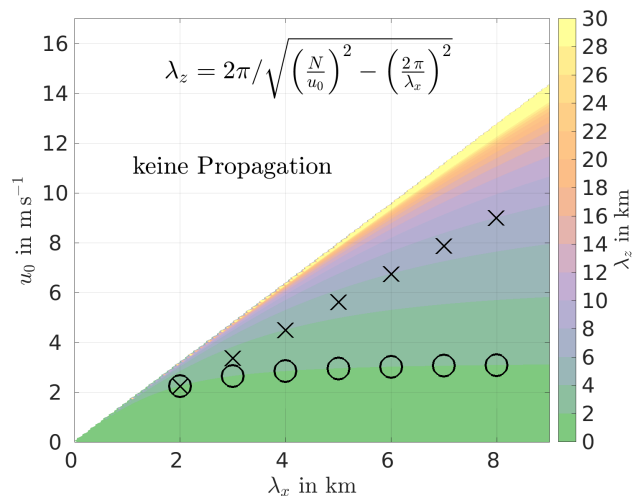


Abb. 4.28: Ausbreitungsbedingung orographischer Wellen gemäß Gleichung (2.30) mit $N^2 = 10^{-4} \text{ s}^{-2}$. Die Konfigurationen für $\lambda_x = \lambda_z$ sind mit Kreuzen markiert, die Konfigurationen mit $\lambda_z = 2 \text{ km}$ mit Kreisen.

Bestimmung von TC - Welches N^2 verwenden?

Wie zu Beginn von Abschnitt 4.1 erläutert wurde, lassen sich Transmissionskoeffizienten in einer Situation ohne Windscherung über die Erhaltung der Energie berechnen. Nach Gleichung (4.2) kann ein Transmissionskoeffizient für die Propagation einer Welle von einer Schicht j in eine Schicht $j+1$ über

$$TC = \frac{m_{j+1} |w|_{j+1}^2}{m_j |w|_j^2} = \frac{-\sqrt{N_{j+1}^2/u_0^2 - k^2} |w|_{j+1}^2}{-\sqrt{N_j^2/u_0^2 - k^2} |w|_j^2} \quad (4.13)$$

berechnet werden. Er gibt an, inwiefern das Verhalten von vollständiger Transmission abweicht und kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Die Amplituden $|w|_j^2$ werden aus EULAG-Simulationen ermittelt, wobei hier jeweils das absolute Maximum in einer bestimmten Schicht ober- und unterhalb der Tropopausenregion benutzt wird. Bei der Berechnung der vertikalen Wellenzahlen m_j wird für die jeweilige Schicht mit konstanter Brunt-Väisälä-Frequenz N_j die Dispersionsrelation verwendet. Betrachtet man hierbei die Tropopause als eine Schicht, in der die Brunt-Väisälä-Frequenz nicht konstant ist und untersucht, wie eine Welle von der Troposphäre in die Stratosphäre propagiert, kann die in der unteren Schicht konstante Brunt-Väisälä-Frequenz mit N_{ts}^2 und die in der oberen Schicht konstante Brunt-Väisälä-Frequenz mit N_{ss}^2 bezeichnet werden.

Möchte man ein Zweischichtenmodell, wie es in Abbildung 4.29a dargestellt ist, auf

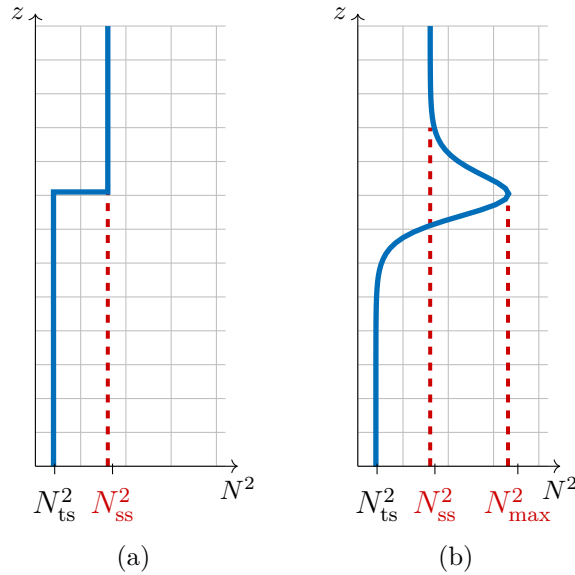


Abb. 4.29: (a) Illustration eines Profils der Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 , die in zwei Schichten jeweils einen konstanten Wert hat. (b) Profil mit einer Inversionsschicht und unterschiedlichen Werten N^2_{max} und N^2_{ss} .

einen Fall übertragen, in dem die Änderung von N^2 nicht nur sprunghaft auftritt, sondern N^2 über eine größere Schicht der Dicke d gemäß Gleichung (4.12) variiert, stellt sich die Frage, welcher Wert der Brunt-Väisälä-Frequenz bei der Berechnung der vertikalen Wellenzahl in Gleichung (4.13) relevant ist. Zwar ist in dieser Betrachtungsweise in der Stratosphäre die konstante Brunt-Väisälä-Frequenz N^2_{ss} vorherrschend, allerdings ist es auch denkbar, dass während der Propagation die Signatur der Tropopause mit der charakteristischen Inversion mit Brunt-Väisälä-Frequenz N^2_{max} von noch größerer Bedeutung ist. Die Lage dieser spezifischen Frequenzen ist in Abbildung 4.29b dargestellt.

Bevor weitere Überlegungen dazu angestellt werden, soll zunächst eine Darstellungsweise der verschiedenen Tropopausenkonfigurationen eingeführt werden, die im weiteren Verlauf dieses Abschnitts verwendet wird. Dabei werden die Ergebnisse in einer Matrix dargestellt, wobei die einzelnen Zellen jeweils den Wert einer Größe aus der Auswertung einer Simulation mit einer bestimmten Tropopausenkonfigurationen enthalten und die Anordnung derjenigen in Abbildung 4.27b entspricht. In Abbildung 4.30 ist beispielhaft das Amplitudenverhältnis von Stratosphäre zu Troposphäre für Wellen mit Wellenlängen $\lambda_z = \lambda_x = 2$ km in dieser Darstellungsweise gezeigt.

Abbildung 4.31 illustriert, wie daraus Transmissionskoeffizienten berechnet werden können. Dort zeigt der erste Bildteil das Amplitudenverhältnis $|w_{ss}|^2/|w_{ts}|^2$, wobei hier jeweils das Maximum der absoluten Windamplitude in einer Schicht von 3 km Dicke ober- und unterhalb der Tropopause zugrunde liegt. Das Amplitudenverhältnis erreicht Werte zwischen etwa 0.2 bis 0.5. Die niedrigsten Amplitudenverhältnisse ergeben sich im Fall einer schmalen, scharfen TIL (unten links) und die höchsten Werte für eine breite Tropopause ohne TIL (oben rechts). Es verläuft ein Gradient von unten links nach oben rechts

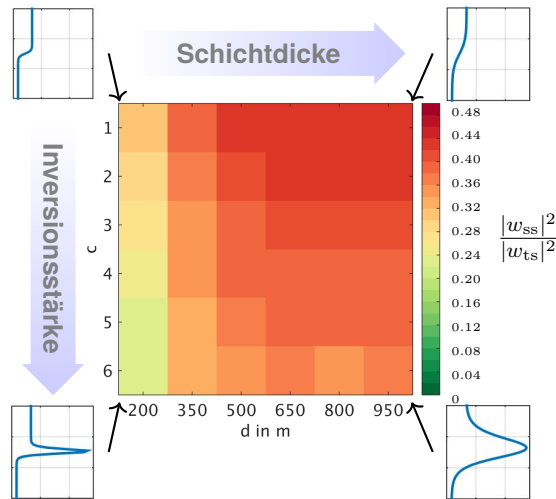


Abb. 4.30: Veranschaulichung der Zuordnung der N^2 -Profile mit verschiedener Tropopausenschichtdicke d und Inversionsstärke c in einer Matrix. Hier gezeigt für das Amplitudenverhältnis $|w_{ss}|^2/|w_{ts}|^2$, das aus dem jeweiligen Maximum innerhalb einer Schicht oberhalb der Tropopause zu einer Schicht unterhalb der Tropopause (Dicke jeweils 3 km) ermittelt wird. Die Datengrundlage sind EULAG-Simulationen mit orographischer Anregung von Wellen mit $\lambda_x = \lambda_z = 2$ km.

durch die Matrix. Der zweite Bildteil von 4.31 zeigt das Wellenzahlverhältnis m_{ts}/m_{\max} bei Verwendung von N_{\max}^2 . Dieses ist für jede Zeile mit $c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ konstant und wird mit $m_{\max} = -\sqrt{N_{\max}^2/u_0^2 - k^2}$ berechnet. Der dritte Bildteil zeigt das Wellenzahlverhältnis m_{ts}/m_{ss} bei Verwendung von N_{ss}^2 . Hier ergibt sich für alle Komponenten dasselbe Wellenzahlverhältnis und es gilt $N_{\max}^2 (c = 1) = N_{ss}^2$. Für $k = m$ gilt $u_0^2 = N^2/(2k^2)$ und mit $N_{ss}^2 = 4N_{ts}^2$ kann das Verhältnis der vertikalen Wellenzahlen in Stratosphäre und

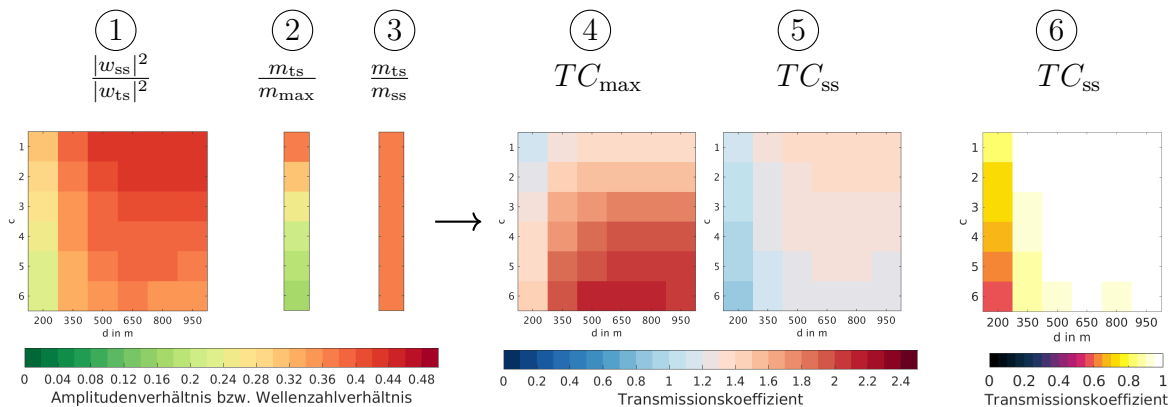


Abb. 4.31: Wellentransmission für Wellenlängen $\lambda_z = \lambda_x = 2$ km: Amplitudenverhältnis $|w_{ss}|^2/|w_{ts}|^2$, Wellenzahlverhältnis m_{ts}/m_{\max} bei Verwendung von N_{\max}^2 , Wellenzahlverhältnis m_{ts}/m_{ss} bei Verwendung von N_{ss}^2 , Transmissionskoeffizient TC_{\max} bei Verwendung von N_{\max}^2 und Transmissionskoeffizient TC_{ss} bei Verwendung von N_{ss}^2 in zwei Farbschemata (von links nach rechts).

Troposphäre über die entsprechenden Dispersionselationen zu

$$\frac{m_{ts}}{m_{ss}} = \frac{-\sqrt{\frac{N_{ts}^2}{u_0^2} - k^2}}{-\sqrt{\frac{N_{ss}^2}{u_0^2} - k^2}} = \sqrt{\frac{\frac{N_{ts}^2}{N_{ts}^2} 2k^2 - k^2}{\frac{4 \cdot N_{ts}^2}{N_{ts}^2} 2k^2 - k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{8k^2 - k^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.38 \quad (4.14)$$

berechnet werden. Der vierte Bildteil zeigt die mit N_{\max}^2 errechneten Transmissionskoeffizienten TC_{\max} , die entstehen, wenn man die Werte aus der ersten Matrix durch die Werte aus dem zweiten Bildteil teilt. Der fünfte Bildteil zeigt die jeweiligen Transmissionskoeffizienten TC_{ss} bei Verwendung von N_{ss}^2 , die sich ergeben, wenn man die Werte aus der ersten Matrix durch die Werte aus dem dritten Bildteil dividiert.

Der fünfte Bildteil zeigt damit das gleiche Muster wie der erste, es ist lediglich um einen konstanten Faktor umskaliert. Auch der sechste Bildteil (ganz rechts) zeigt dieses Verhältnis, hier wurde lediglich ein anderes Farbschema gewählt, das dem Wertebereich dieser Transmissionskoeffizienten besser entspricht und um die Vergleichbarkeit mit den nachfolgenden Untersuchungen zu vereinfachen.

Beim Vergleich der Transmissionskoeffizienten, denen die beiden unterschiedlichen Berechnungsmethoden zugrunde liegen (TC_{\max} in Bildteil 4 und TC_{ss} in Bildteil 5), fällt auf, dass die jeweils obersten Reihen der Matrix ($c = 1$) identisch sind - hier gilt $N_{\max}^2 = N_{ss}^2$. Außerdem befinden sich in beiden Fällen die niedrigsten Transmissionen am linken Rand der Matrix, also bei geringer Tropopausenschichtdicke d . Die genaue Struktur ist jedoch recht unterschiedlich. Generell sind die errechneten Transmissionskoeffizienten TC_{\max} deutlich größer als die Transmissionskoeffizienten TC_{ss} , sie überschreiten auch den eigentlich theoretisch maximal möglichen Wert von 1 deutlich mit Werten von bis zu 2.5. Die Transmissionskoeffizienten TC_{ss} fallen geringer aus, übertreffen mit maximalen Werten bis zu 1.3 allerdings auch die theoretisch zu erwartenden Werte. Die höchsten Transmissionskoeffizienten befinden sich im ersten Fall (Verwendung von N_{\max}^2) am rechten unteren Rand der Matrix (große Schichtdicke und starke Inversion), während sie im zweiten Fall (Verwendung von N_{ss}^2) am rechten oberen Rand (große Schichtdicke und schwache Inversion) zu finden sind. Der Unterschied zwischen beiden Varianten ist am unteren Rand der Matrix jeweils am deutlichsten, denn dort ist auch der Unterschied zwischen N_{\max}^2 und N_{ss}^2 am größten. Die Zahlenwerte von TC_{\max} können ein interessantes Maß dafür sein, inwiefern die Transmissionskoeffizienten von solchen aus einem Zweischichtenfall abweichen. Im Anhang ist in Abbildung A.2 ein Vergleich für weitere Wellenlängen dargestellt. Allerdings sind auch die hohen Werte sehr deutlich über $TC = 1$ ein Indikator dafür, dass ihre physikalische Plausibilität in Frage gestellt werden sollte. Die Erhaltung der Wellenenergie, auf der die Berechnung fußt, gilt jeweils im Vergleich von einzelnen Regionen, in denen dann alle entsprechenden Vergleichsgrößen (hier m und $|w|^2$) berechnet werden. Da im Falle von N_{\max}^2 die Berechnung der Windamplitude in der Stratosphäre und die Berechnung der vertikalen Wellenzahl direkt an der Tropopause erfolgt, ist das nicht gegeben. In den folgenden Untersuchungen wird deshalb die Verwendung von TC_{ss} der Verwendung von TC_{\max} vorgezogen.

Wellentransmission für $\lambda_z = \lambda_x$

In dieser Simulationsreihe sind die horizontale und die vertikale Wellenlänge identisch. Die gewünschte horizontale Wellenlänge wird hierbei durch eine sinusförmige Orographie mit entsprechenden Bergabständen erreicht, während sich eine bestimmte vertikale Wellenlänge über die Wahl einer geeigneten Anströmung u_0 realisieren lässt. Für $m = k$ gilt in der Dispersionsrelation (2.30) $u_0 = N_{ts}/(\sqrt{2}k)$. Die entsprechenden Horizontalwindgeschwindigkeiten sind in Abbildung 4.28 als Kreuze markiert. In Abbildung 4.32 sind die Ergebnisse dieser Simulationsreihe in Form von Transmissionskoeffizienten gezeigt. Es handelt sich dabei um die Transmissionskoeffizienten TC_{ss} , die im Folgenden nur noch mit TC bezeichnet werden. Für die Wellenlängen $\lambda_z = \lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ km wurden jeweils 36 Simulationen mit den verschiedenen TIL-Konfigurationen aus Abbildung 4.27 durchgeführt.

Für $\lambda_z = \lambda_x = 2$ km findet bei fast allen Tropopausenkonfigurationen nahezu vollständige Transmission statt, nur im Fall der schmalsten Tropopausenschichtdicke $d = 200$ m sind die Werte von TC deutlicher reduziert. Bis zu einer Wellenlänge von 5 km ist die Transmission vor allen Dingen am linken Rand der Matrix, also bei den geringsten Tropopausenschichtdicken, eingeschränkt. Ab einer Wellenlänge von 6 km ändert sich diese Struktur und die Transmission ist auch vermehrt am unteren Rand der Matrix reduziert, also bei starken Inversionen (große c). Die Transmissionskoeffizienten weisen dann einen Gradienten auf, der von der unteren linken Ecke hin zur oberen rechten Ecke durch die Matrix verläuft. Die Abhängigkeit der Transmission von c und d ist jedoch nicht genau gleich ausgeprägt. Betrachtet man etwa bei der größten Wellenlänge $\lambda_z = \lambda_x = 8$ km den Rand der Matrix und folgt dem Verlauf der Transmissionskoeffizienten, ausgehend vom Minimum in der linken unteren Ecke, so bleiben diese am linken Rand der Matrix, also bei $d = 200$ m und einer Änderung in c , alle unter einem Wert von $TC \sim 0.55$. Entlang des unteren Randes der Matrix, also bei $c = 6$ und zunehmender Schichtdicke d ist die Änderung in TC deutlich größer und die Transmission nimmt bis auf $TC \sim 0.75$ zu. Der Winkel, unter dem die Wellenfronten auf die Tropopause treffen, ist mit $\lambda_x = \lambda_z$ für alle Wellenlängen gleich und beträgt $\vartheta = 45^\circ$.

Eine Übersicht der Transmissionskoeffizienten ist auch in Abbildung 4.33 gegeben. Hier werden aus den Matrizen in Abbildung 4.32 jeweils die Extremwerte und der Mittelwert

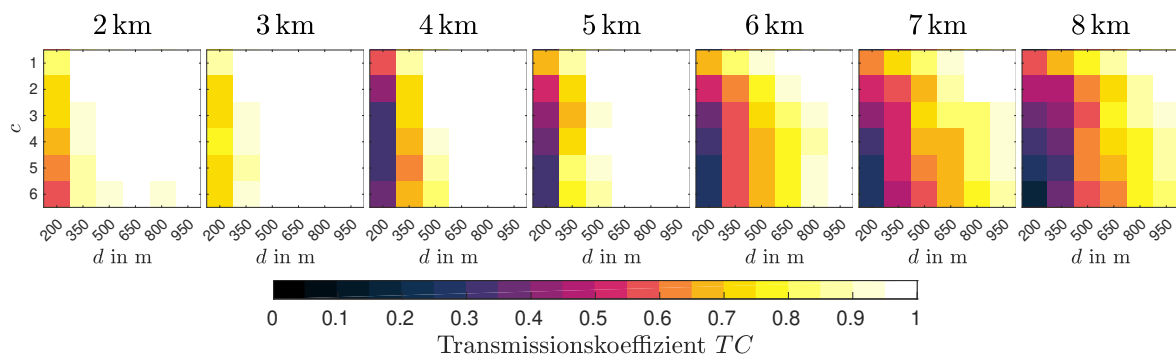


Abb. 4.32: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = \lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ km.

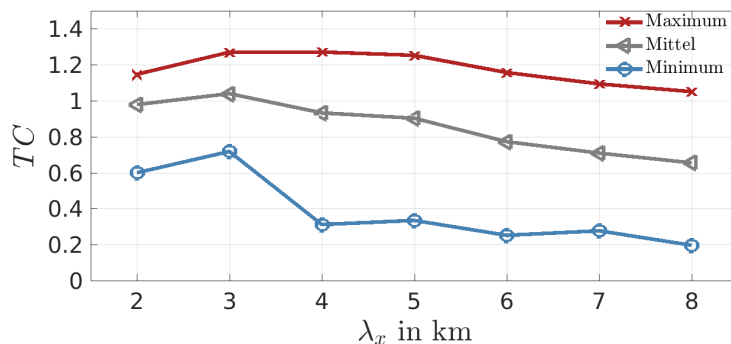


Abb. 4.33: Übersicht Transmissionskoeffizienten für $\lambda_x = \lambda_z$. Mittelwert und Extremwerte wurden aus den Matrizen in Abbildung 4.32 berechnet.

bestimmt. Insgesamt nimmt die Transmission beim Übergang von kleinen zu großen Wellenlängen ab. Betrachtet man die Mittelwerte, so starten diese bei einer Transmission von etwa 1 für die Wellenlängen 2 km und 3 km und nehmen dann bis auf einen Wert von etwa 0.65 ab. Das Maximum der Transmission, das sich in allen Matrizen im rechten oberen Eck befindet (keine TIL, große Schichtdicke), bleibt bei allen Wellenlängen oberhalb von 1, also bei vollständiger Transmission. Für das Übertreffen von $TC > 1$ könnten mögliche Mehrfachreflexionen zwischen Tropopause und Boden ein Grund sein. Das Minimum der Transmission, das sich in allen Matrizen im linken unteren Eck befindet (starke TIL, geringe Schichtdicke), zeigt ein Maximum bei $\lambda_x = \lambda_z = 3$ km und fällt dann auf einen Wert von etwa 0.2 ab. Eine schmale und starke Inversionsschicht stellt also für größer werdende Wellen eine zunehmende Barriere für die Transmission dar.

Wellentransmission für $\lambda_z = 2$ km

In dieser Simulationsreihe werden dieselben horizontalen Wellenlängen verwendet wie in der vorherigen, jedoch werden die Anströmgeschwindigkeiten dahingehend verändert, dass die vertikale Wellenlänge konstant bleibt und $\lambda_z = 2$ km für alle Fälle gilt. Die dafür erforderlichen Werte von u_0 sind in Abbildung 4.28 als Kreise markiert. Für das Verhältnis der Wellenzahlen bedeutet das hier:

$$\frac{m_{ts}}{m_{ss}} = \frac{-\sqrt{\frac{N_{ts}^2}{u_0^2} - k^2}}{-\sqrt{\frac{N_{ss}^2}{u_0^2} - k^2}} = \sqrt{\frac{\frac{N_{ts}^2 (m_{ts}^2 + k^2)}{N_{ts}^2} - k^2}{\frac{4 N_{ts}^2 (m_{ts}^2 + k^2)}{N_{ts}^2} - k^2}} = \sqrt{\frac{m_{ts}^2}{4 m_{ts}^2 + 3 k^2}} = \sqrt{\frac{1}{4 + 3 \frac{k^2}{m_{ts}^2}}}$$

In Tabelle 4.4 sind diese Wellenzahlverhältnisse aufgelistet. Außerdem ist der Winkel ϑ aufgeführt, den die Wellenfronten mit der Vertikalen einschließen (siehe Illustration in Abbildung 2.1). Bei zunehmender horizontaler Wellenlänge nimmt der Winkel zu, die Wellenfronten befinden sich also zunehmend senkrecht zur Tropopause.

Abbildung 4.34 zeigt die mit diesen Wellenzahlverhältnissen und mit den Windamplituden $|w|^2$ aus EULAG-Simulationen errechneten Transmissionskoeffizienten. Auch wenn die vertikale Wellenlänge λ_z konstant bleibt, hat hier die horizontale Wellenlänge λ_x

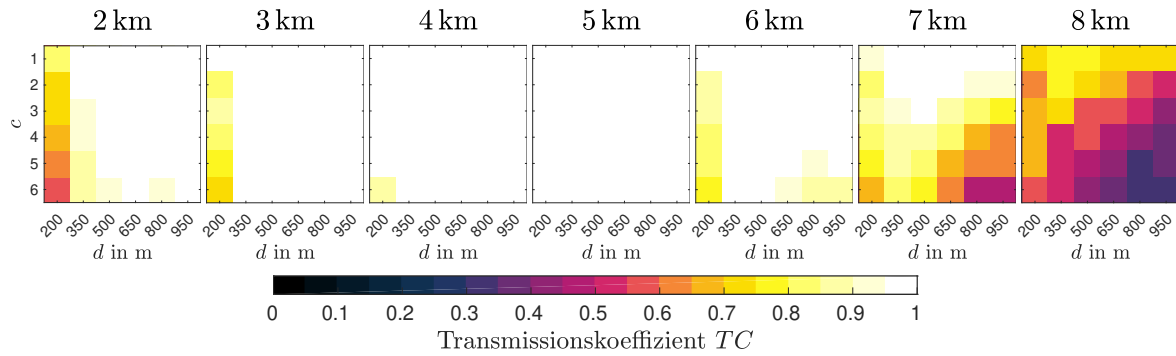


Abb. 4.34: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = 2$ km, $\lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ km.

offenbar einen entscheidenden Einfluss auf die Transmission, es werden Werte zwischen 0.3 und 1.4 erreicht. Bei horizontalen Wellenlängen von $\lambda_x = 4$ km und $\lambda_x = 5$ km findet nahezu vollständige Transmission statt. Bei kleineren und größeren Wellenlängen treten allerdings Bereiche reduzierter Transmission auf. Während für die kleinste horizontale Wellenlänge $\lambda_x = 2$ km das Minimum der Transmission bei dem N^2 -Profil mit der geringsten Ausdehnung d und der stärksten Inversion c liegt (in der Matrix unten links), befindet sich das Minimum im Fall von $\lambda_x = 8$ km zwar auch bei der stärksten Inversion $c = 6$, aber bei größeren Schichtdicken d (in der Matrix unten rechts). Treffen die Wellen also unter einem größeren Winkel auf die Tropopause, so wird die Transmission insbesondere dann reduziert, wenn die Tropopausenschichtdicke groß und die Inversion stark ist. Dabei kommt wahrscheinlich zum Tragen, dass die größeren Wellen durch eine kleinere Tropopausenschicht d propagieren können. Wenn diese deutlich kleiner ist als die Wellenlänge, werden die Wellen kaum von ihr beeinflusst.

Aus jeder Matrix wurden wieder die Extremwerte und der Mittelwert der Transmissionskoeffizienten bestimmt. Diese sind in Abbildung 4.35 dargestellt. Alle drei Kenngrößen zeigen einen Verlauf, der die stärkste Transmission für eine mittlere Wellenlänge von 4 km und 5 km aufweist. Die Bandbreite der Transmissionskoeffizienten bleibt für alle Wellenlängen ähnlich, zwischen Maximum und Minimum liegen ungefähr 0.5.

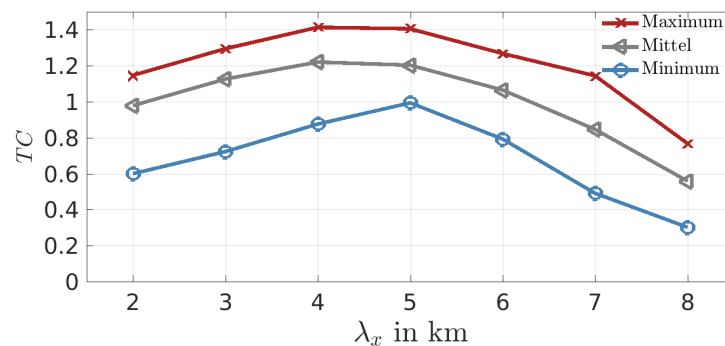


Abb. 4.35: Übersicht Transmissionskoeffizienten aus EULAG für $\lambda_z = 2$ km. Mittelwert und Extremwerte wurden aus den Matrizen in Abbildung 4.34 berechnet.

λ_x	2 km	3 km	4 km	5 km	6 km	7 km	8 km
m_{ts}/m_{ss}	0.38	0.43	0.46	0.47	0.48	0.49	0.49
ϑ	45°	56°	63°	68°	72°	74°	76°

Tabelle 4.4: Wellenzahlverhältnisse Tropo-/Stratosphäre für $\lambda_z = 2$ km und versch. λ_x .

Amplitudenvariation

Wie eine Welle durch eine Schicht mit starken Gradienten propagiert, hängt auch von ihrer Amplitude ab. Deshalb wurden in einem Vergleich die Transmissionen durch die Tropopause bei unterschiedlicher Amplitude untersucht. Wenn eine Wechselwirkung der Welle mit dem Hintergrund stattfindet, kann dadurch auch die Stabilität der Umgebung beeinflusst werden. Die Änderung der Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 wurde deshalb als Maß dafür herangezogen, wie stark die Wechselwirkung ist. Dazu wurden Simulationen durchgeführt, die im Vergleich zu den bisher gezeigten Studien eine verdoppelte Amplitude haben. In Abbildung 4.36a ist dargestellt, wie sich das N^2 -Profil nach 7 h Simulationszeit im Vergleich zum Simulationsbeginn verändert hat, wenn eine Welle mit stärkerer Amplitude durch die Tropopause propagiert. Die Profile werden dabei aus den horizontal gemittelten Werten von θ berechnet. Für die Differenz der beiden N^2 -Profile $\Delta N^2 = N^2(t = 7 \text{ h}) - N^2(t = 0 \text{ h})$ wird dann über

$$S(\Delta N^2) = \sqrt{\frac{1}{k_2 - k_1 - 1} \sum_{k=k_1}^{k_2} |\Delta N^2(k) - \mu|^2} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k=k_1}^{k_2} \Delta N^2(k) \quad (4.15)$$

die Standardabweichung in der Tropopausenregion berechnet. Über den Index k wird die vertikale Achse diskretisiert und die betrachtete Region befindet sich zwischen $z(k_1) \sim 10$ km und $z(k_2) \sim 12$ km. Aus der Standardabweichung für jede der 36 unterschiedlichen Tropopausenkonfigurationen werden Matrizen erstellt, wie sie in Abbildung 4.36b und 4.36c gezeigt sind. In beiden Fällen gilt für die Wellenlängen $\lambda_x = \lambda_z = 4$ km.

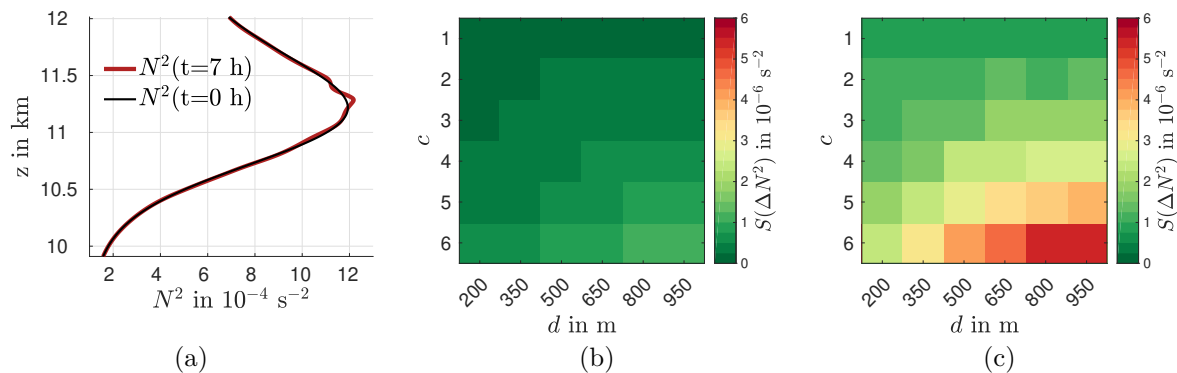


Abb. 4.36: (a) Propagation von Wellen mit $\lambda_x = \lambda_z = 4$ km. Standardabweichung von $\Delta N^2 = N^2(t = 7 \text{ h}) - N^2(t = 0 \text{ h})$ in der Tropopausenschicht bei (b) einer Berghöhe von 50 m und (c) einer Berghöhe von 100 m (verdoppelte Amplitude).

Bei Abbildung 4.36b handelt es sich um orographische Wellen, die bei einer Berghöhe von $H = 50$ m angeregt werden (zugehörige Transmissionskoeffizienten sind in Abbildung 4.32 gezeigt) und die Werte in Abbildung 4.36c wurden aus Simulationen berechnet, die orographische Wellen einer Sinus-Bergkette mit $H = 100$ m zeigen. Nach Gleichung 3.25a ist eine Änderung der Berghöhe direkt mit der Wellenamplitude $|w|$ verknüpft.

In beiden Fällen herrscht ein Gradient, der von der linken oberen Ecke zur rechten unteren Ecke der Matrix verläuft. Die größte Änderung in N_{env}^2 kann für die stärkste und breiteste TIL beobachtet werden. Eine Verdopplung der Amplitude führt dazu, dass sich die Standardabweichung in ΔN^2 stärker verändert. Während für $H = 50$ m die maximale Abweichung $1.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ beträgt, steigt dieser Wert für $H = 100$ m auf $5.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ an.

4.3.3 Ergebnisse aus Mehrschichtenmodell

In dem in Pütz et al. (2018) vorgestellten Modell werden die bekannten Zusammenhänge der Wellenausbreitung für ein Medium mit konstanter Stabilität $N = \text{const.}$ benutzt und Gradienten durch Schichten mit stückweise konstanten Werten approximiert. Dies ist in Abschnitt 3.2 näher erläutert. Das Modell wurde für die Boussinesq-Gleichungen entwickelt. Es werden neben Konfigurationen, die mit den EULAG-Simulationen direkt vergleichbar sind, nämlich einer Reihe von Wellenlängen $\lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ km, auch größere Wellen $\lambda_x \in \{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ km betrachtet und auch deren Transmission durch die Tropopause untersucht. Für diese 18 horizontalen Wellenlängen wird der Fall $\lambda_z = \lambda_x$ betrachtet, sowie $\lambda_z = \text{const.}$ für verschiedene vertikale Wellenlängen von 2 km, 10 km und 20 km. In Abbildung 4.37 ist illustriert, unter welchem Winkel die Wellen bei diesen Wellenlängen jeweils propagieren. Der Winkel $\vartheta = \arccos\left(k/\sqrt{k^2 + m^2}\right) = \arccos(\hat{\omega}/N_0)$ liegt zwischen den Wellenfronten und der Vertikale und kann mit der Dispersionsrelation (2.25) ermittelt werden.

Im Fall $\lambda_z = \lambda_x$ gilt $\vartheta = 45^\circ$ für alle Wellenlängen. Wird die vertikale Wellenlänge bei $\lambda_z = 2$ km festgehalten, bewegt sich der Winkel bei kleinen Wellenlängen (4.37a) zwischen 45° und 79° und bei großen Wellenlängen zwischen 84° und 89° (4.37b). Ist die vertikale Wellenlänge größer, bei $\lambda_z = 10$ km, werden bei kleinen Wellenlängen (4.37a) Winkel von 11° bis 45° und bei großen Wellenlängen (4.37b) Winkel von 63° bis 84° angenommen. Bei einer vertikalen Wellenlänge von $\lambda_z = 20$ km, liegt ϑ bei kleinen horizontalen Wellenlängen (4.37a) zwischen 6° und 27° und bei großen horizontalen Wellenlängen (4.37b) zwischen 45° und 79° .

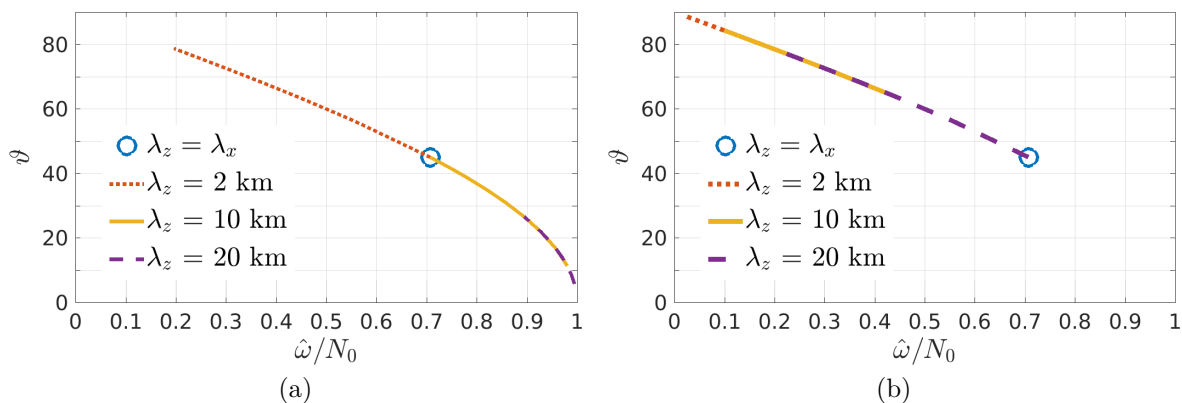
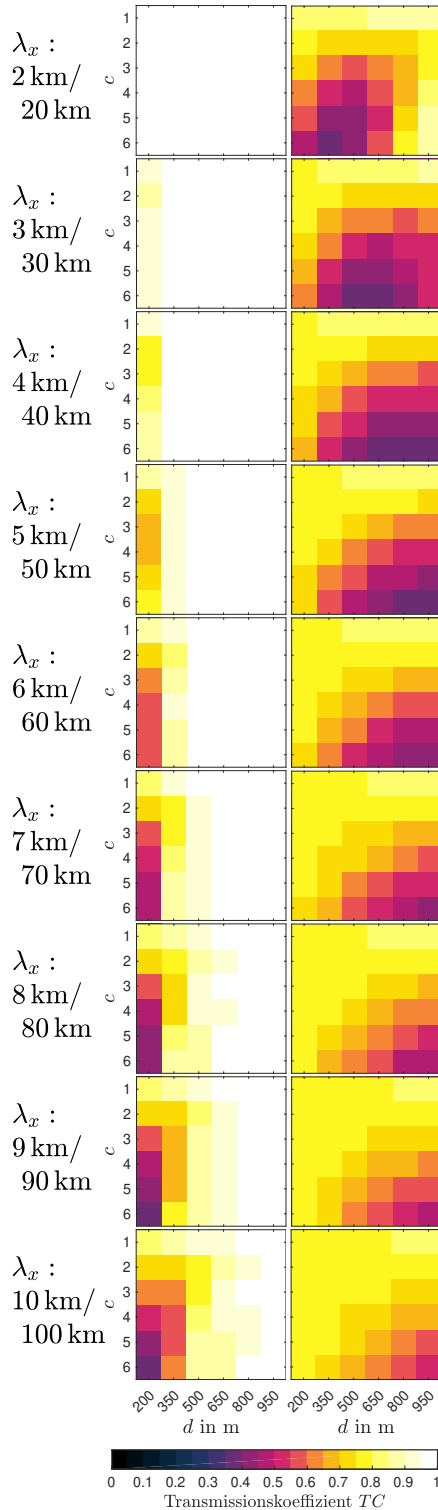


Abb. 4.37: Winkel ϑ , den Wellenfronten mit der Vertikalen einschließen, bei horizontalen Wellenlängen von (a) $\lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ km und von (b) $\lambda_x \in \{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ km.

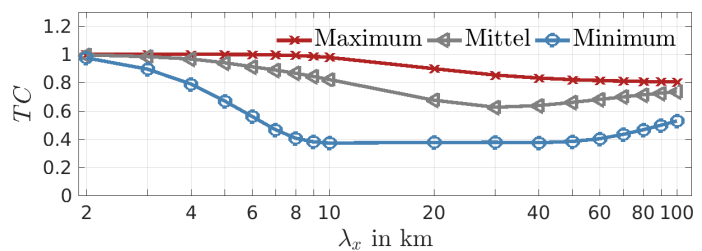
Wellentransmission für $\lambda_z = \lambda_x$

Für die Untersuchung von Wellen mit gleicher Wellenlänge in x - und in z -Richtung wurden mit dem Mehrschichtenmodell Matrizen der Transmissionskoeffizienten für eine Reihe kleinerer Wellenlängen im Bereich bis 10 km und für größere Wellenlängen im Bereich bis 100 km berechnet. Die Wellenlängen von 2 km bis 10 km sind in der linken

Abb. 4.38: TC für $\lambda_z = \lambda_x$.

Spalte von Abbildung 4.38 dargestellt, die Wellenlängen von 20 km bis 100 km in deren rechten Spalte. Bei den kleineren Wellenlängen bis etwa 6 km kann beobachtet werden, dass die Gradienten innerhalb der Matrix vor allem entlang der horizontalen Achse auftreten, auf der die Schichtdicke d aufgetragen ist. Für einen festen Wert der Schichtdicke ist die Variation des Transmissionskoeffizienten geringer als umgekehrt bei einem festen Wert für c ; die Stärke der Inversion hat also einen kleineren Einfluss. Dieses Verhalten ändert sich allerdings bei längeren Wellen und bei 10 km Wellenlänge ist die Änderung am linken Matrixrand auch in vertikaler Richtung stark. Das Minimum der Transmission liegt dann im linken unteren Eck, also bei einer schmalen Tropopausenschicht mit starker Inversion. Am rechten Rand der Matrix, also bei dickeren Schichten, werden Wellen bis 10 km Wellenlänge sehr gut transmittiert, unabhängig von der Stärke der Inversion.

In der rechten Spalte von Abbildung 4.38 werden keine Werte oberhalb von $TC = 0.9$ mehr erreicht. Im Verlauf der Erhöhung der Wellenlänge von 10 km in Schritten von 10 km auf 100 km verschiebt sich das Minimum der Transmission vom linken unteren Rand der Matrix nach rechts, hin zu größeren Schichtdicken. Auch wird die gesamte Matrix für besonders hohe

Abb. 4.39: Übersicht TC für $\lambda_z = \lambda_x$.

Wellenlängen von 100 km immer homogener, die Streuung der Transmissionskoeffizienten ist geringer, jedoch auf einem niedrigen Niveau von 0.5 – 0.8. Dies kann auch gut an der Reihe der Extrem- und Mittelwerte aus den Matrizen gesehen werden, die in Abbildung 4.39 aufgetragen sind. Die Spannbreite der Transmissionskoeffizienten nimmt zunächst bis zu einer Wellenlänge $\lambda_x = \lambda_z = 10$ km zu. Für größer werdende Wellenlängen nähern sich Minimum und Maximum immer weiter an, wobei interessanterweise das Minimum der Transmissionskoeffizienten für den gesamten Bereich zwischen etwa 8 km und 60 km annähernd konstant bei $TC = 0.4$ oder knapp darunter liegt. Dies betrifft den Bereich, in dem sich die Lage des Maximums vom linken unteren Rand der Matrix an den rechten unteren Rand der Matrix verschiebt.

Wellentransmission für $\lambda_z = 2$ km

Für den mit EULAG simulierten Fall einer konstant bleibenden vertikalen Wellenlänge von 2 km wurden auch mit dem Mehrschichtenmodell Berechnungen für die horizontalen Wellenlängen $\lambda_x \in \{2, 3, 4, \dots, 10, 20, 30, \dots, 100\}$ km durchgeführt. Dabei ergab sich, dass alle betrachteten Wellenlängen bei allen Tropopausenkonfigurationen etwa gleich gut und nahezu vollständig transmittiert werden. Der Ausbreitungswinkel ϑ liegt hier zwischen 45° bei $\lambda_x = 2$ km und 89° bei $\lambda_x = 100$ km. Damit treffen die Wellenfronten bei zunehmender Wellenlänge also zunehmend senkrecht auf die Tropopause.

Die minimalen und maximalen Transmissionskoeffizienten für jede Wellenlänge sowie der mittlere Transmissionskoeffizient sind in Abbildung 4.40 dargestellt. Maximum und Mittelwert zeigen keine Abhängigkeit von der Wellenlänge. Es ist lediglich eine sehr leichte Abnahme des Minimums (blaue Linie) zu erkennen.

Da die Variation so gering ist, werden die Transmissionskoeffizienten lediglich im Vergleich der Methoden in Kapitel 4.3.5 in der Matrix-Darstellung gezeigt.

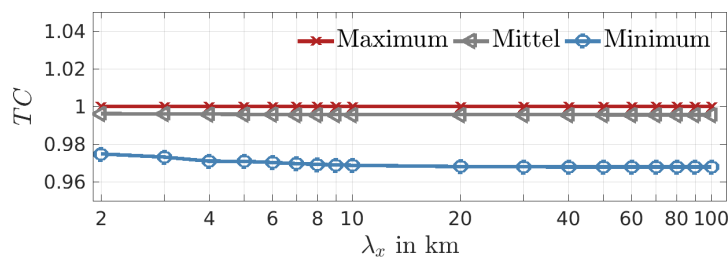
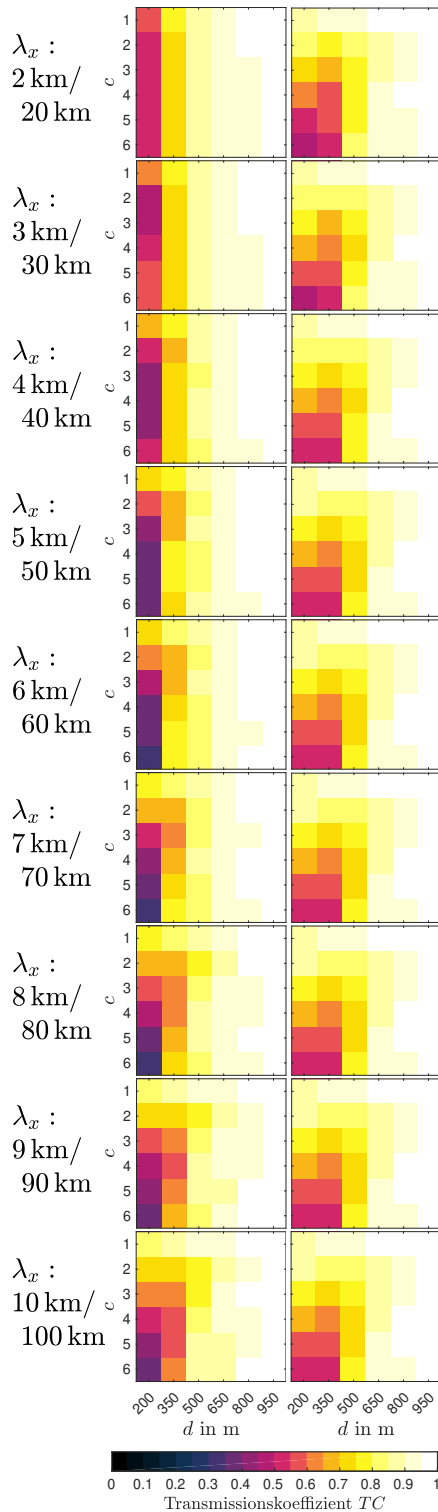


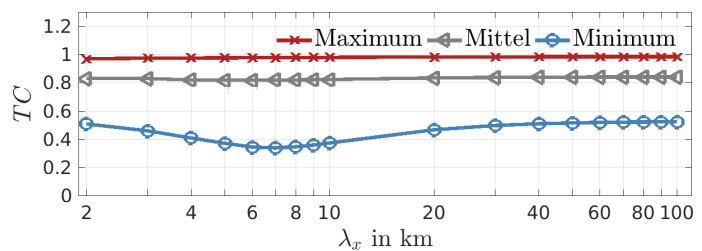
Abb. 4.40: Übersicht TC für $\lambda_z = 2$ km.

Wellentransmission für $\lambda_z = 10$ km

Da die Berechnungen mit dem Mehrschichtenmodell bei einer konstant bleibenden vertikalen Wellenlänge von 2 km bei allen Tropopausenkonfiguration nur sehr geringe Unterschiede in der Wellentransmission zeigten, wurde diese Reihe mit einer deutlich größeren konstanten vertikalen Wellenlänge von $\lambda_z = 10$ km wiederholt. In Abbildung 4.41

Abb. 4.41: TC für $\lambda_z = 10$ km.

sind Transmissionskoeffizienten für kleinere horizontale Wellenlängen zwischen 2 km und 10 km in der linken Spalte gezeigt und Transmissionskoeffizienten für größere horizontale Wellenlängen zwischen 20 km und 100 km in der rechten Spalte. Im Fall $\lambda_x = 2$ km zeigt sich eine geringe Abhängigkeit der Transmissionskoeffizienten von der Inversionsstärke c , jedoch eine große Abhängigkeit von der Schichtdicke d . Bei größer werdender horizontaler Wellenlänge nimmt auch die Abhängigkeit von der Inversionsstärke zu. Bei $\lambda_x = \lambda_z = 10$ km findet sich eine Verteilung, in der das Minimum der Transmission von $TC \sim 0.4$ in der linken unteren Ecke der Matrix, bei der schmalsten und stärksten Inversionsschicht liegt, während größere Schichtdicken durchweg hohe Transmissionen aufweisen. Betrachtet man größere horizontale Wellenlängen, wie in der rechten Spalte von Abbildung 4.41 dargestellt, so verändert sich die Verteilung von TC ab $\lambda_x = 30$ km kaum noch. Lediglich das Minimum steigt leicht an auf $TC \sim 0.5$. Die aus den Matrizen generierten Mittelwerte und die Maxima in Abbildung 4.42 zeigen keine Abhängigkeit von der Wellenlänge. Bei allen Wellenlängen gibt es Tropopausenkonfigurationen, die eine vollständige Transmission der Wellen zulassen. Das Minimum der Transmission variiert hingegen und zeigt seinen niedrigsten Wert bei Wellenlängen von 6 km bis 8 km.

Abb. 4.42: Übersicht TC für $\lambda_z = 10$ km.

Wellentransmission für $\lambda_z = 20$ km

Wird die vertikale Wellenlänge noch weiter auf $\lambda_z = 20$ km erhöht, stellt sich die Verteilung der Transmissionskoeffizienten so dar, wie in Abbildung 4.43 gezeigt ist. Wieder ist erkennbar, dass im Falle der beiden niedrigsten horizontalen Wellenlängen von $\lambda_x = 2$ km und $\lambda_x = 3$ km die Abhängigkeit der Transmission lediglich relativ zur

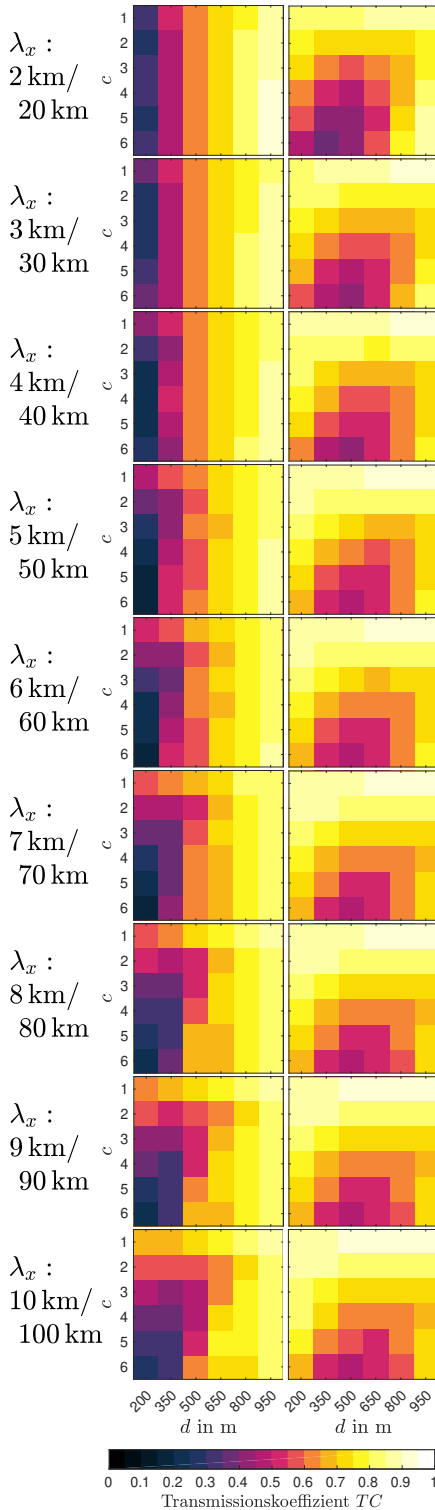


Abb. 4.43: TC für $\lambda_z = 20$ km.

Schichtdicke existiert und nicht relativ zur Inversionsstärke. Im Falle von $\lambda_x = 10$ km ist eine Verteilung vorhanden, in der die niedrigsten Werte von TC bei der schmalsten Schicht mit der stärksten Inversion liegen. Betrachtet man die größeren Wellenlängen λ_x im Bereich zwischen 20 km und 100 km (rechte Spalte in Abbildung 4.43), so verschiebt sich das Minimum der Verteilung bei zunehmender Wellenlänge hin zu größeren Schichtdicken. Das Minimum verbleibt aber im Gegensatz zu der Simulationsreihe mit $\lambda_z = \lambda_x$ (Abbildung 4.38) am mittleren unteren Rand der Matrix, also bei mittleren Schichtdicken von 500 m – 650 m. Abbildung 4.44 zeigt die Extrem- und Mittelwerte aus den einzelnen Matrizen für die verschiedenen Wellenlängen. Im Gegensatz zum Fall $\lambda_z = 10$ km wird für keine der untersuchten Wellenlängen vollständige Transmission $TC = 1$ gezeigt. Die Minima liegen auch deutlich niedriger als in Abbildung 4.42, bei bis zu $TC \sim 0.2$. Die Spannbreite der Transmissionskoeffizienten ist für die Wellenlängen $\lambda_x \leq 10$ km deutlich größer als für $\lambda_x \geq 20$ km. Der Winkel ϑ , den die Wellenfronten mit der Vertikalen einschließen, erreicht Werte von maximal 79° bei $\lambda_x = 100$ km.

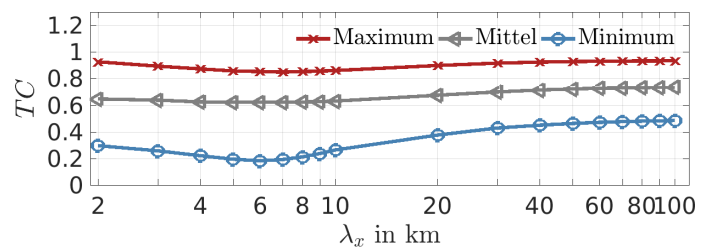


Abb. 4.44: Übersicht TC für $\lambda_z = 20$ km.

Lage der Transmissionsminima und -maxima

In Abbildung 4.45 ist eine Übersicht zur Lage der Transmissionsminima und -maxima bei den in diesem Abschnitt vorgestellten Berechnungen mit dem Mehrschichtenmodell gezeigt. In dieser Darstellung liegt die c - d -Matrix in der Horizontalen, während die vertikale Achse verschiedene horizontale Wellenlängen markiert. Die blauen Kreise befinden sich im Matrixsegment mit der minimalen Transmission bei der jeweiligen Wellenlänge und die roten Kreise an der Stelle der maximalen Transmission.

Im Fall $\lambda_z = \lambda_x$ ist in Abbildung 4.45a erkennbar, dass sich das Maximum der Transmission stets im Bereich dicker Tropopausenschichten von $d = 850$ m oder $d = 900$ m befindet. Für eine Großzahl der Wellenlängen, insbesondere für lange Wellenlängen, liegt es bei $c = 1$, wenn also keine Inversion besteht. Lediglich bei den Wellenlängen 2 km, 4 km und 5 km tritt die maximale Transmission bei anderen c auf. Die Lage des Minimums ändert sich stärker. Für Wellenlängen zwischen 2 km und 10 km befindet es sich stets in der Spalte der dünnsten Inversionsschicht, bei $d = 200$ m, und verschiebt sich dabei bei zunehmender Wellenlänge von kleinen Inversionsstärken zu großen Inversionsstärken. Für Wellenlängen über 10 km bleibt das Minimum bei $c = 6$, also der stärksten Inversionsschicht, während es sich von der linken Reihe zur rechten Reihe bewegt - von $d = 200$ m zu $d = 950$ m.

Bei den Berechnungen mit konstanter vertikaler Wellenlänge $\lambda_z = 10$ km, die in Abbildung 4.45b dargestellt sind, liegt das Maximum der Transmission stets im selben Matrix-Segment, bei $c = 1$ und $d = 950$ m. Das Minimum der Transmission verbleibt für alle Wellenlängen bei derselben Schichtdicke von $d = 200$ m. Bei Zunahme der Wellenlänge

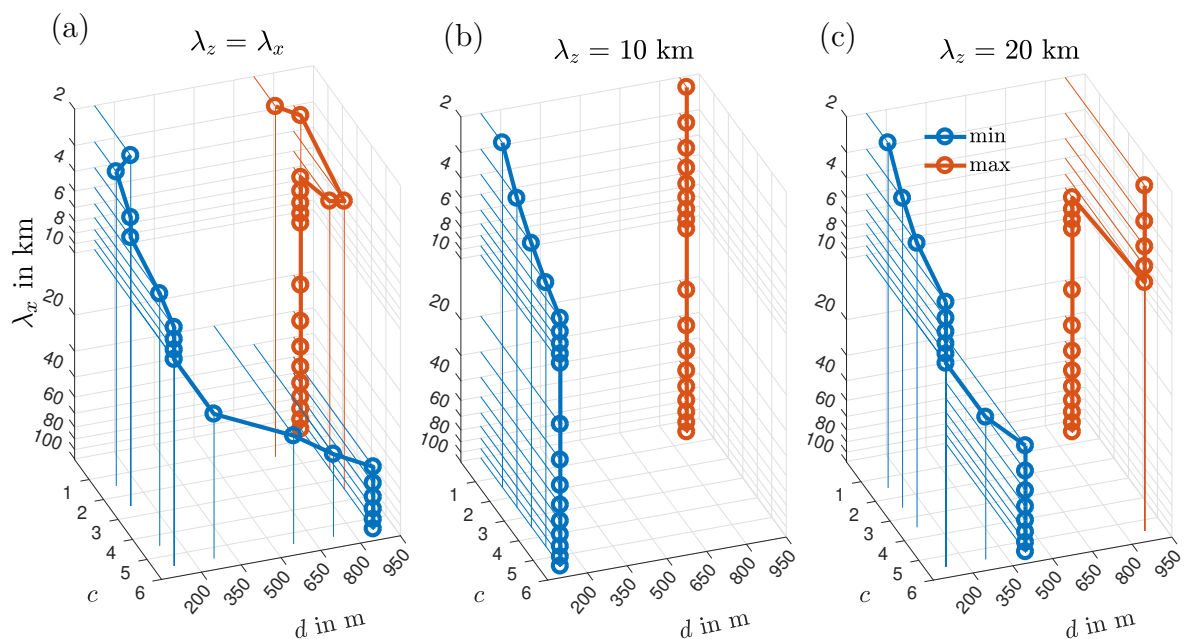


Abb. 4.45: Lage der minimalen (blau) und der maximalen (rot) Transmissionskoeffizienten in der c - d -Matrix. Ergebnisse aus dem Mehrschichtenmodell für (a) $\lambda_z = \lambda_x$, für (b) $\lambda_z = 10$ km und für (c) $\lambda_z = 20$ km.

von 2 km auf 6 km verschiebt sich seine Lage von $c = 2$ hin zu größeren Inversionsstärken von $c = 6$, wo sie für größere Wellenlängen verbleibt.

Eine Erhöhung der konstanten vertikalen Wellenlänge auf 20 km (Abbildung 4.45c) führt zu einer Änderung der Lage der Maxima und Minima in den c - d -Matrizen. Hier befindet sich die maximale Transmission bei kleinen Wellenlängen bis 6 km im Segment $d = 950$ m und $c = 6$. Bei größeren Wellenlängen befindet sich das Maximum bei derselben Inversionsschichtdicke d , jedoch bei niedrigerer Inversionsstärke $c = 1$. Die Minima von TC zeigen, genauso wie in den beiden anderen in den Bildteilen 4.45a und 4.45b gezeigten Verläufen, zunächst innerhalb der Spalte $d = 200$ m eine Verschiebung von $c = 1$ bei $\lambda_x = 2$ km hin zu $c = 6$ bei $\lambda_x = 5$ km. Bei Wellenlängen ab 10 km erfolgt dann bei weiter zunehmender Wellenlänge eine Verlagerung des Minimums zu größeren Schichtdicken bis $d = 500$ m, während keine Verschiebung mehr in c -Richtung erfolgt.

Dieser Verlauf ist auch bei $\lambda_x = \lambda_z$ in Abbildung 4.45a in ähnlicher Art zu beobachten: Bei konstant bleibendem c erfolgt eine Verschiebung der Lage der minimalen Transmission in d -Richtung. Dieses Verhalten lässt sich mit dem Verhältnis d/λ_x in Verbindung

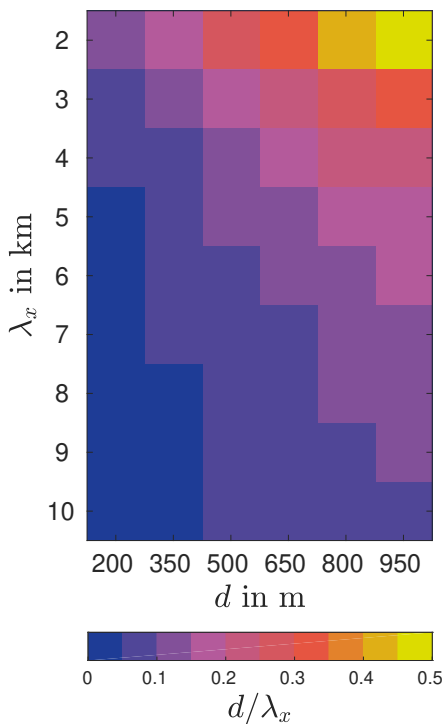


Abb. 4.46: Verhältnis d/λ_x für die hier benutzten Längen.

bringen, das die Tropopausenschichtdicke mit der horizontalen Wellenlänge in Beziehung setzt und bereits in Abschnitt 4.1 benutzt wurde. Die Werte von d/λ_x sind in Abbildung 4.46 dargestellt. Die vertikale Achse steht dort für verschiedene Wellenlängen λ_x , also beispielsweise für verschiedene Matrizen in der linken Spalte der Abbildungen 4.38, 4.41 oder 4.43 oder für einen Vertikalschnitt entlang der d -Achse in Abbildung 4.45. Auf der horizontalen Achse von Abbildung 4.46 sind die unterschiedlichen Werte für die Tropopausenschichtdicke d aufgetragen. Abbildung 4.46 lässt sich auch auf die Reihe der größeren Wellenlängen zwischen 20 km und 100 km übertragen. Das Verhältnis d/λ_x ist dann um den Faktor zehn kleiner. Der Farbverlauf wäre also derselbe, wenn die Farbskala entsprechend verschoben würde. Die Isolinien mit konstantem Verhältnis d/λ_x verlaufen in dieser Darstellung diagonal von links oben nach rechts unten und folgen damit dem Verlauf der minimalen Transmission, die in Abbildung 4.45a und

4.46c gezeigt ist. Es kann also vermutet werden, dass für die minimale Transmission hier ein bestimmtes Verhältnis d/λ_x ein entscheidender Schwellwert ist.

Generell ist bei Abbildung 4.45 zu beachten, dass nur sehr geringfügig unterschiedliche Transmissionskoeffizienten zu einer Zuordnung der Maxima und Minima in unterschiedliche Matrix-Segmenten führen kann. So können beispielweise die starken Änderungen der Lage der Maxima in 4.45a und 4.45c entstehen.

4.3.4 Ergebnisse aus Ray-Tracing-Modell

In diesem Abschnitt werden Simulationen vorgestellt, die mithilfe des Ray-Tracing-Modells von Muraschko et al. (2015) in der Erweiterung von Bölöni et al. (2016) durchgeführt wurden. In Abschnitt 3.3 sind die diesem Modell zugrunde liegenden Gleichungen erläutert. Es wurden Berechnungen mit einem Boussinesq-Hintergrund durchgeführt in denen die Stabilität gemäß dem hyperbolischen N^2 -Profil aus Gleichung (4.12) verläuft. Es wird kein Umgebungswind vorgegeben. In diesem Hintergrundzustand wird ein Wellenpaket mit horizontaler Wellenzahl k und vertikaler Wellenzahl m_0 initiiert, dessen Einhüllende einer Gauß-Funktion

$$b(z) = a \frac{N^2}{m_0} \exp \left\{ -\frac{(z - z_0)^2}{2 \sigma_{\text{wp}}^2} \right\} \quad (4.16)$$

folgt, hier ausgedrückt für den Auftrieb b . Die dimensionslose Amplitude beträgt $a = 0.1$ und der Parameter σ_{wp} ist mit der vertikalen Ausdehnung des Wellenpakets Δ_{wp} über $\Delta_{\text{wp}} \approx 5 \sigma_{\text{wp}}$ verknüpft (Bölöni et al., 2016). In den hier gezeigten Simulationen gilt $\sigma_{\text{wp}} = 5 \text{ km}$ und zu Simulationsbeginn ist das Wellenpaket um die Höhe $z_c = 9 \text{ km}$ zentriert. Um sicherzustellen, dass das Wellenpaket auch in der Troposphäre noch eine ausreichend lange Strecke propagieren kann, bevor es auf die Tropopause trifft, wird die Tropopause hier auf eine größere Höhe von 20 km gelegt. Da die Berechnung mit den Boussinesq-Gleichungen durchgeführt wird, in denen sich die Dichte nicht mit der Höhe ändert und außerdem bei der Bestimmung von Transmissionskoeffizienten Verhältnisse von Größen betrachtet werden, ändert sich dadurch das Ergebnis nicht. Das Modellgebiet im Ortsraum umspannt vertikal 40 km, was bei 801 Gitterpunkten zu einer Auflösung von $\Delta z = 50 \text{ m}$ führt. Die Simulationszeit beträgt 20 000 s $\sim 5.5 \text{ h}$ bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 1 \text{ s}$. Rund um die initiale Wellenzahl m_0 werden in einem Intervall von Δm_0 für jedes der 400 Höhenniveaus zwischen $z = 0 \text{ km}$ und $z = 20 \text{ km}$ je 35 Strahlen initialisiert. Während der Simulation ändern sich Wellenzahl und Position der Strahlen

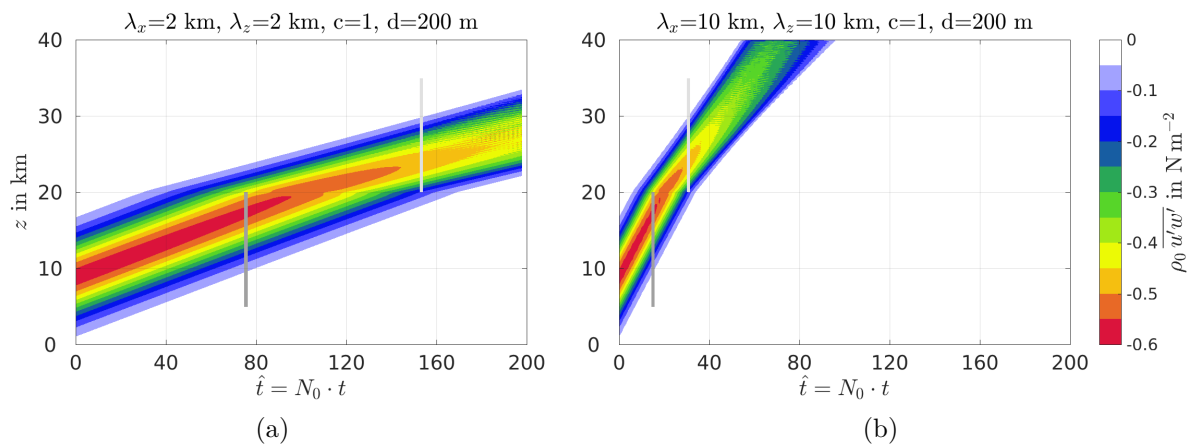


Abb. 4.47: Impulsfluss $\rho_0 \overline{u'w'}$ für (a) $\lambda_z = \lambda_x = 2 \text{ km}$ und für (b) $\lambda_z = \lambda_x = 10 \text{ km}$.

gemäß der Gleichungen (3.31). Zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten wird nun benutzt, dass der vertikale Fluss des horizontalen Impulses $\rho_0 \overline{u'w'}$ erhalten ist. Dies folgt aus den Gleichungen (2.50) und (2.55). Die Berechnung des Impulsflusses erfolgt im Modell als Integration über alle Wellenzahlen nach Gleichung (3.34). Das Ergebnis zweier Simulationen ist in Abbildung 4.47 dargestellt, in der ein Zeit-Ort-Diagramm die zeitliche Entwicklung des Impulsflusses zeigt. Die Parameter $c = 1$ und $d = 200$ m beziehen sich auf ein hyperbolisches N^2 -Profil nach Gleichung (4.12), wobei die Wellenlängen in Bildteil 4.47a $\lambda_z = \lambda_x = 2$ km und in Bildteil 4.47b $\lambda_z = \lambda_x = 10$ km betragen.

Die Bestimmung der Transmission durch die Tropopause ($z_{tp} = 20$ km) erfolgt nun aus dem Vergleich des Impulsflusses zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, an denen das Zentrum des Wellenpakets bestimmte Höhen erreicht hat. Diese Höhenniveaus werden jeweils 3.5 km unter- und oberhalb der Tropopausenhöhe gesetzt, sie liegen also bei $z_{ts,m} = 16.5$ km und $z_{ss,m} = 23.5$ km. Um zu bestimmen, an welchem Zeitpunkt ein Wellenpaket diese Höhenniveaus passiert, wird für jede Kombination aus N^2 -Profil und Wellenzahlen m_0 und k die theoretisch zu erwartende vertikale Gruppengeschwindigkeit nach Gleichung (2.29) berechnet. In Abbildung 4.48 sind die aus der Gruppengeschwindigkeit bestimmten Höhenlagen des Zentrums des Wellenpakets für $c = 6$, $d = 950$ m und verschiedene Wellenlängen gezeigt. Die vertikalen roten Linien markieren die Zeitpunkte, zu denen die Stratosphäre (grüner Höhenbereich) erreicht wird. Diese Zeitpunkte sind auch in Abbildung 4.47 durch dunkelgraue Linien (Troposphäre) und hellgraue Linien (Stratosphäre) markiert.

Die weitere Vorgehensweise bei der Berechnung der Transmissionskoeffizienten ist in Abbildung 4.49 illustriert. Die vier gezeigten Fälle entsprechen den Tropopausenkonfigurationen an den Eckpunkten der Matrix in Abbildung 4.27b. Aus den Profilen des Impulsflusses zu den Zeitpunkten, an denen die Höhen $z_{ts,m}$ und $z_{ss,m}$ vom Wellenpaket

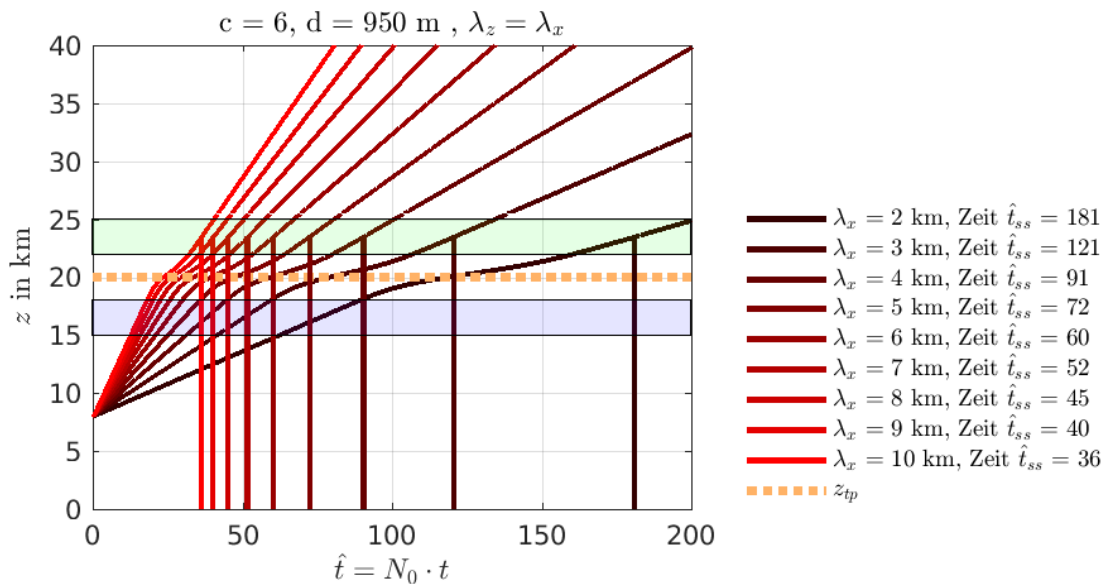


Abb. 4.48: Theoretische Lage des Zentrums des Wellenpakets für ein festes N^2 -Hyperbelprofil und verschiedene Wellenlängen.

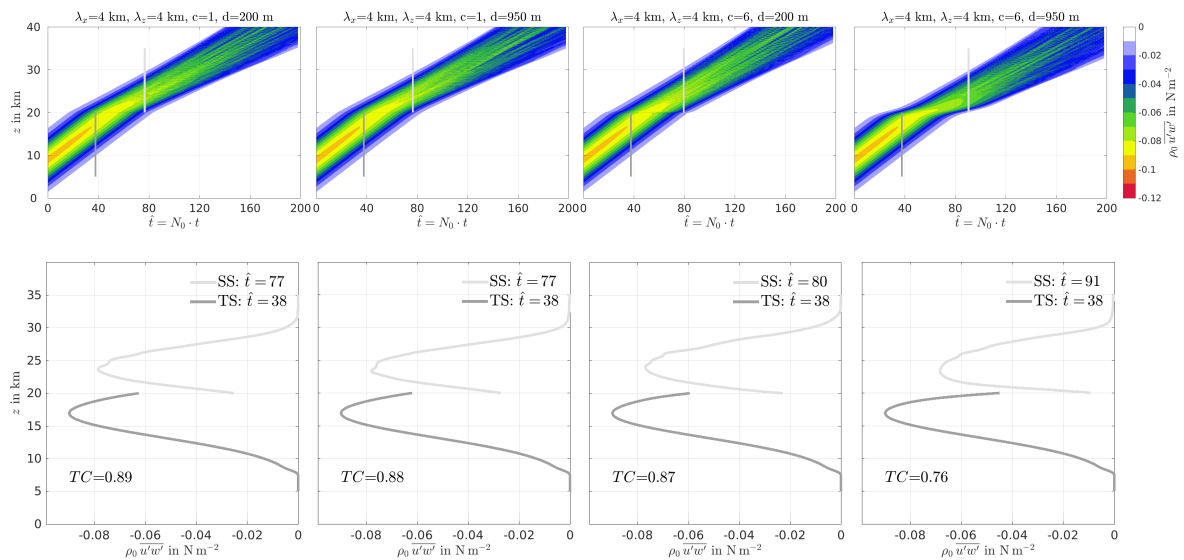


Abb. 4.49: Impulsfluss-Schnitte und Impulsfluss-Zeitverlauf für $\lambda_z = \lambda_x = 4$ km.

erreicht werden, wird der Transmissionskoeffizient als Quotient der Minima berechnet. Im hier gezeigten Fall ergeben sich so Werte zwischen $TC = 0.76$ und $TC = 0.89$. Diese Werte werden wieder in einer Matrix aufgetragen. Das Ergebnis für verschiedene Wellenlängen zwischen 2 km und 10 km ist in Abbildung 4.50 gezeigt. Die Transmissionskoeffizienten liegen hier zwischen etwa $TC = 0.76$ und $TC = 0.95$ und die Verteilung in der Matrix ähnelt sich für alle Wellenlängen stark. Die geringste Transmission findet bei einer breiten und stark ausgeprägten Tropopauseninversionsschicht statt (rechte untere Ecke in der Matrix), während am linken Rand der Matrix, wenn die Tropopauseninversionsschicht sehr schmal ist, höhere Transmissionen möglich sind.

In Abbildung 4.51 sind die Transmissionskoeffizienten aus Ray-Tracing-Simulationen mit konstanter vertikaler Wellenlänge $\lambda_z = 2$ km dargestellt. Auch hier ist die Transmission für breite und stark ausgeprägte Inversionsschichten besonders niedrig und ihre Verteilung weist eine geringe Abhängigkeit von der Wellenlänge λ_x auf. Es werden Werte zwischen $TC = 0.79$ und $TC = 0.9$ angenommen. Damit ist die Bandbreite der Transmissionskoeffizienten noch ein wenig kleiner als im Fall $\lambda_z = \lambda_x$. Ein direkt sichtbarer Unterschied zwischen den Simulationsreihen in 4.50 und 4.51 tritt nicht auf.

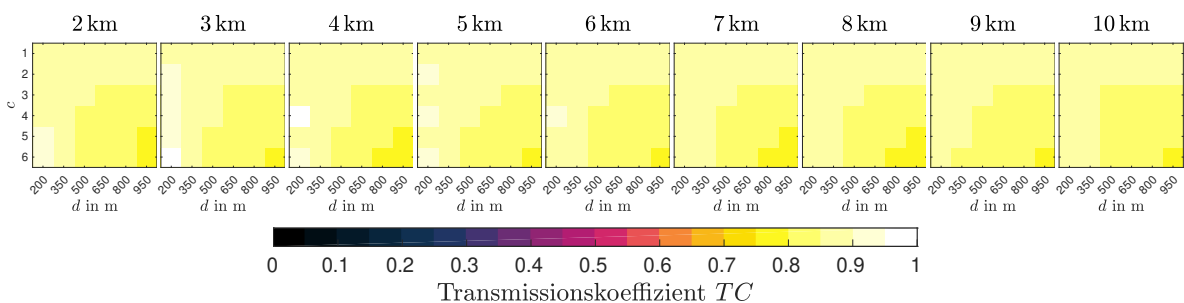


Abb. 4.50: Matrix-Darstellung der Transmissionskoeffizienten, berechnet aus dem Verhältnis des Impulsflusses für Ray-Tracing-Simulationen mit $\lambda_z = \lambda_x$.

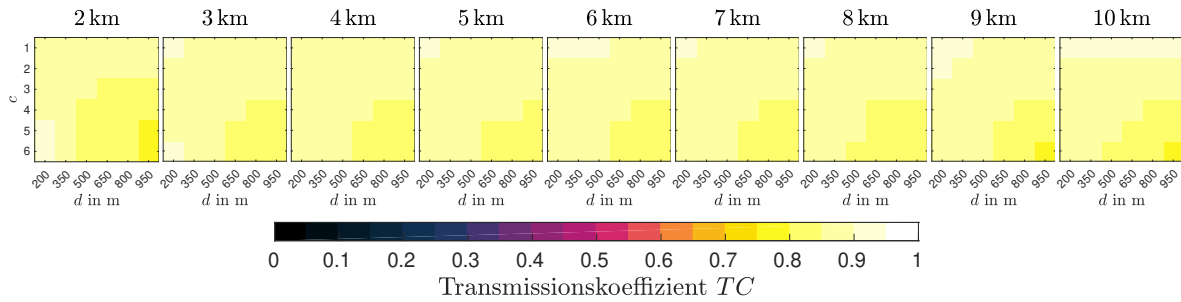


Abb. 4.51: Matrix-Darstellung der Transmissionskoeffizienten, berechnet aus dem Verhältnis des Impulsflusses für Ray-Tracing-Simulationen mit $\lambda_z = 2$ km.

In einer vergleichenden Simulationsreihe wurde auch untersucht, wie sich diese Transmissionskoeffizienten verändern, wenn nicht mit einem Boussinesq-Hintergrund sondern mit einem mit der Höhe abnehmenden Dichte-Verlauf gerechnet wird. Dabei wurde das hyperbolische Profil von N^2 durch Integration von Gleichung (2.19) auch auf das Dichteprofil übertragen. Diese Simulationen zeigen einen sehr ähnlichen Verlauf wie im Boussinesq-Fall in den Abbildungen 4.50 und 4.51, die Bandbreite der ermittelten Transmissionskoeffizienten und ihre Verteilung in der c - d -Matrix sind vergleichbar.

4.3.5 Vergleich der verschiedenen Modelle

In den Abbildungen 4.52 und 4.53 sind die Transmissionskoeffizienten gezeigt, die mit den drei verschiedenen Methoden - EULAG, Mehrschichtenmodell und Ray-Tracing - berechnet wurden. Dabei handelt es sich in Abbildung 4.52 um Wellen mit Wellenlängen $\lambda_z = \lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ km und in Abbildung 4.53 um die horizontalen Wellenlängen $\lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ km bei fester vertikaler Wellenlänge $\lambda_z = 2$ km.

Für die Berechnungen, in denen die Wellenlängen in x - und z -Richtung gleich sind, zeigen die Simulationen mit EULAG (linke Spalte in Abbildung 4.52) die niedrigsten Werte, insbesondere für große Wellenlängen. Auch in den mit dem Mehrschichtenmodell berechneten Transmissionskoeffizienten (mittlere Spalte in Abbildung 4.52) ist eine Abnahme der Transmission bei größer werdenden Wellenlängen erkennbar. Allerdings sind die Transmissionskoeffizienten dabei durchweg größer als die aus den EULAG-Simulationen ermittelten Werte. Bei großer Schichtdicke (jeweils rechter Rand der Matrix) liegt die mit dem Mehrschichtenmodell ermittelte Transmission für alle hier gezeigten Wellenlängen nahezu bei $TC = 1$. Bei den Transmissionskoeffizienten, die mit dem Ray-Tracing-Modell berechnet wurden (rechte Spalte in Abbildung 4.52), liegt das Minimum der Transmission hingegen am rechten unteren Rand der Matrix, wird also bei einer breiten und stark ausgeprägten Inversionsschicht erreicht.

Im Fall einer festen vertikalen Wellenlänge von $\lambda_z = 2$ km unterscheiden sich die Transmissionskoeffizienten aus den drei Modellen deutlicher voneinander (Abbildung 4.53): Mit EULAG ist bei Zunahme der horizontalen Wellenlänge von 6 km auf 7 km eine Verschiebung des Minimums von kleinen Schichtdicken d hin zu größeren Schichtdicken beobachtbar. Das Mehrschichtenmodell zeigt für alle Wellenlängen gleichermaßen eine

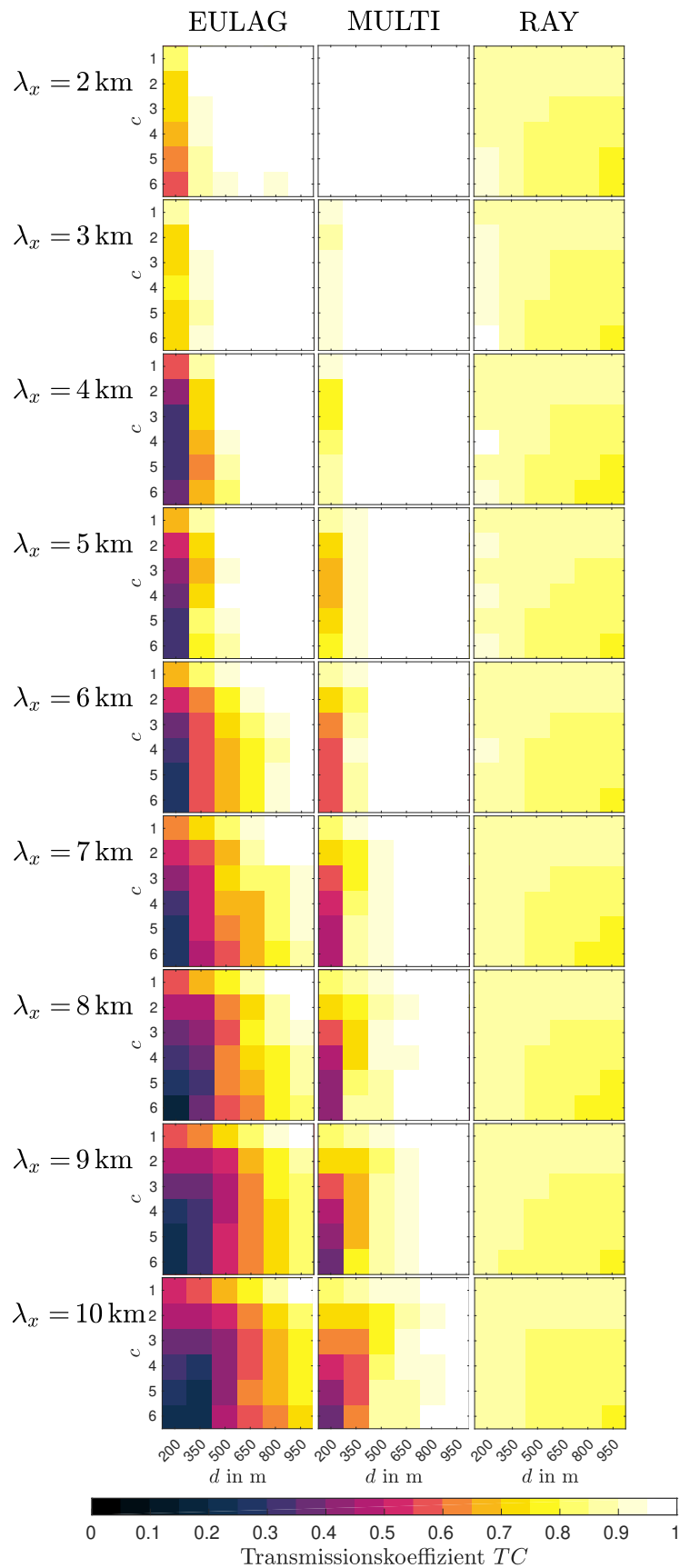


Abb. 4.52: Transmissionskoeffizienten aus EULAG-Simulationen (links), dem Mehrschichtenmodell (Mitte) und aus dem Ray-Tracing-Modell (rechts) für $\lambda_z = \lambda_x$.

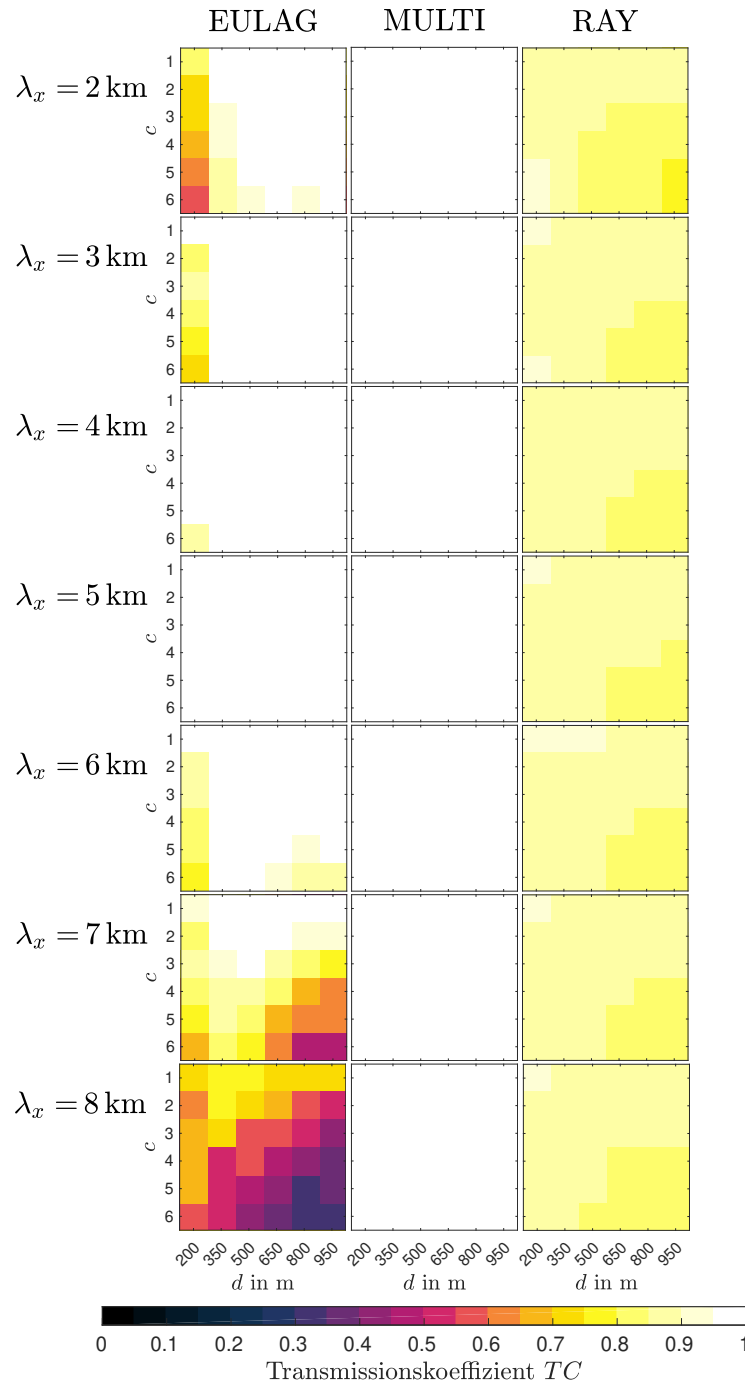


Abb. 4.53: Transmissionskoeffizienten aus EULAG-Simulationen (links), dem Mehrschichtenmodell (Mitte) und aus dem Ray-Tracing-Modell (rechts) für $\lambda_z = 2 \text{ km}$.

sehr hohe Transmission von $TC > 0.95$ für alle Tropopausenkonfigurationen. Das Ray-Tracing-Modell weist wieder, wie im Falle einer variierenden vertikalen Wellenlänge λ_z , für alle Wellenlängen eine sehr ähnliche Verteilung der Transmission auf, in der sich das Minimum der Transmission in der unteren rechten Ecke, also bei einer stark ausgeprägten und dicken Inversionsschicht, befindet.

Ein grundlegender Unterschied zwischen dem Ray-Tracing-Modell und den beiden anderen Verfahren liegt darin, dass im Ray-Tracing-Modell keine unendlich ausgedehnten

ebenen Wellen betrachtet werden, sondern dass diese räumlich begrenzt als Wellenpaket behandelt werden. Dies führt dazu, dass mit der vertikalen Ausdehnung des Wellenpakets Δ_{wp} eine zusätzliche Länge eingeführt wird. Bei unterschiedlichen Wellenlängen nehmen dann also auch die Verhältnisse zwischen Δ_{wp} und λ verschiedene Werte an. Gegen eine Auswirkung dieses Zusammenhangs auf die Transmission spricht allerdings die Tatsache, dass die tatsächlich ermittelte Verteilung der Transmissionskoeffizienten sich nur sehr wenig unterscheidet, wenn unterschiedliche Wellenlängen betrachtet werden. Die Zeitverläufe der Impulsflüsse in Abbildung 4.49 zeigen, in der gewählten Farbskala, keine Reflexion an der Tropopause. Es findet zwar eine Beeinflussung des Wellenpakets durch die Inversionsschicht statt, die Ausbreitungsrichtung ändert sich, jedoch offenbar in anderer Art und Weise als dies in EULAG der Fall ist. Bei einer Erhöhung der Amplituden ändert sich dieses Verhalten nicht grundlegend. Weiterhin fällt auf, dass die Verteilung der Transmissionskoeffizienten im Ray-Tracing-Modell an die Auswirkungen der Wellenpropagation bei Amplitudenvariation auf das Stabilitätsprofil in Abbildung 4.36 erinnert. Hier wird also unter Umständen nicht die Reflexion der Welle detektiert, sondern eine Größe, die mit einer Beeinflussung des Hintergrundzustands vergleichbar ist. Zu Vergleichszwecken wurde eine Simulation mit konstanter Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 durchgeführt. Diese zeigte einen Transmissionskoeffizienten von $TC = 0.96$. Diese Abnahme kann durch die Dispersion des Wellenpakets zustande kommen. Es besteht auch die Möglichkeit, dass lediglich durch die Verschiebung des Zeitpunkts, der für den Vergleich herangezogen wird, die Struktur der Transmissionskoeffizienten in der c - d -Matrix zustande kommt. Bei der Berechnung des Zeitpunkts geht die Annahme ein, dass sich die Ausbreitung mit linearer Theorie beschreiben lässt, was eigentlich nur für konstante Stabilität N gilt. Ein Vergleich der berechneten Ausbreitung des Wellenpakets mit den Daten aus dem Ray-Tracing-Modell zeigt jedoch, dass die Zeitpunkte augenscheinlich gut getroffen werden.

4.3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Propagation orographischer Wellen durch eine Tropopauseninversionsschicht untersucht. Die Inversionsschicht wurde dabei über eine hyperbolische Funktion für die Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 definiert, wobei zwei Parameter für die Schichtdicke und die Inversionsstärke variiert wurden. Es wurden Transmissionskoeffizienten für insgesamt 36 verschiedene Kombinationen von Schichtdicke und Inversionsstärke berechnet. Dies wurde für verschiedene Wellenlängen und mit drei verschiedenen Modellen durchgeführt.

In EULAG-Simulationen (Prusa et al., 2008) wurden zunächst Wellen mit horizontalen Wellenlängen bis $\lambda_x = 10$ km untersucht, für die $\lambda_z = \lambda_x$ gilt. Die Transmissionskoeffizienten variierten über den gesamten Bereich zwischen 0 und 1 und waren umso geringer, je größer die Wellenlänge war. Es konnte für alle Wellenlängen beobachtet werden, dass geringe Transmission bei einer schmalen und stark ausgeprägten Inversionsschicht auftrat

und hohe Transmission bei einer breiteren und schwächer ausgeprägten Inversionsschicht. Diese Verteilung trat bei allen untersuchten Wellenlängen auf. Für kleine Wellenlängen zeigte sich, dass die Abhängigkeit von der Inversionsstärke schwach war, während eine Änderung der Schichtdicke einen deutlich größeren Einfluss auf die Transmissionkoeffizienten hatte. In vergleichbarer Weise wurde auch eine Simulationsreihe mit konstanter vertikaler Wellenlänge bei variierender horizontaler Wellenlänge untersucht. Die vertikale Wellenlänge war hier stets kleiner als die horizontale Wellenlänge, für den am stärksten hydrostatischen Fall um ein fünffaches. Die Lage der minimalen und maximalen Transmission in der c - d -Matrix war nicht mehr so eindeutig wie im Fall $\lambda_z = \lambda_x$. Für größer werdende λ_x verschob sich das Minimum der Transmission von kleinen Schichtdicken hin zu größeren Schichtdicken. Die Transmission für alle Tropopausenkonfigurationen war generell bei mittleren Wellenlängen von $\lambda_x \approx (4-5)$ km am stärksten ausgeprägt. Durch eine schmale Tropopauseninversionsschicht propagierten kurze Wellen schlechter als mittellange Wellen und die längsten Wellen wurden wiederum schlechter transmittiert. In einem weiteren Vergleich wurde die Amplitude variiert, indem die Berghöhe des Profils verdoppelt wurde, um zu untersuchen, inwiefern dies Einfluss auf die Umgebungsprofile hat. Für den Fall der breitesten, stärksten Inversionsschicht gab es die größte Beeinflussung der Hintergrundstabilität beim Durchgang einer Welle.

Mit einem Mehrschichtenmodell (Pütz et al., 2018), in dem Transmissionskoeffizienten asymptotisch berechnet werden, wurden dieselben Konfigurationen und weitere untersucht. In den vergleichbaren Wellenlängen bis $\lambda_x = 10$ km zeigte das Mehrschichtenmodell für $\lambda_z = \lambda_x$ eine ähnliche Verteilung der Transmission wie EULAG. Für größer werdende horizontale Wellenlängen verschob sich jedoch das Minimum der Transmission hin zu dickeren Schichten. Ein Grund hierfür kann sein, dass die kleinsten Schichtdicken für größere Wellen ein weniger starkes Hindernis darstellten, sodass dort die Transmission anstieg, was zu einer Verschiebung des Minimums führen konnte. Ein grundlegender Unterschied zu den EULAG-Simulationen trat im Fall einer konstant gehaltenen vertikalen Wellenlänge von $\lambda_z = 2$ km auf. Hier zeigte das Mehrschichtenmodell für alle Tropopausenkonfigurationen und Wellenlängen eine nahezu vollständige Transmission von $TC \sim 1$. Es wurden deshalb weitere Simulationsreihen mit einer konstant gehaltenen vertikalen Wellenlänge $\lambda_z = 10$ km durchgeführt. Im ersten Fall befand sich das Minimum der Transmission stets im Bereich schmaler und scharfer Inversionsschichten und bei Erhöhung der Wellenlänge fand keine Verschiebung seiner Lage statt. Bei kleinen Wellenlängen waren die Gradienten vornehmlich entlang der d -Achse orientiert und eine Änderung in der Inversionsstärke fiel im Gegensatz zu einer Änderung in der Schichtdicke deutlich weniger stark ins Gewicht. Ab einer Wellenlänge von $\lambda_x = 30$ km zeigte sich zudem, dass die Transmission kaum mehr abhängig von der Wellenlänge war. Im anderen Fall, in dem die vertikale Wellenlänge auf $\lambda_z = 20$ km erhöht wurde, ergab sich ein ähnlicher Verlauf, jedoch fand eine Verschiebung der Lage der minimalen Transmission hin zu breiteren Inversionsschichten statt.

Als dritte Methode wurde ein Ray-Tracing-Modell (Muraschko et al., 2015) benutzt, um auch damit die Konfigurationen zu testen. Die Berechnung der Transmissionskoeffizienten erfolgte dabei über den Vergleich der Impulsflüsse zu den Zeitpunkten, an denen die Wellenpakete sich in einem festen Höhenbereich ober- und unterhalb der Tropopause befanden. In der c - d -Matrix befanden sich die Minima der Transmission für $\lambda_z = \lambda_x$ bei allen Wellenlängen auch im Bereich der stärksten Inversion, jedoch hier bei der dicksten Schicht und nicht wie bei den Ergebnissen der beiden anderen Methoden bei der dünnsten Schicht. Diese Verteilung trat bei allen Wellenlängen so auf und generell konnte eine geringe Wellenlängenabhängigkeit der Transmissionskoeffizienten festgestellt werden. Die Streubreite der Transmissionskoeffizienten war außerdem deutlich geringer als in den beiden anderen Methoden und befand sich für alle untersuchten Wellenlängenkombinationen und Tropopauseninversionsschichten zwischen 0.76 und 0.95.

Im Vergleich der Modelle kann zusammengefasst werden, dass im Fall $\lambda_z = \lambda_x$ die qualitative Verteilung der Transmissionskoeffizienten für EULAG und das Mehrschichtenmodell ähnlich ist. Aus dem Mehrschichtenmodell ergeben sich generell größere Transmissionskoeffizienten, was daran liegen kann, dass dort keine numerische Diffusion behandelt wird, die im Fall von EULAG eine zusätzliche Energieabnahme im System darstellen könnte. Das Ray-Tracing-Modell zeigt generell hohe Transmissionen und eine andere Verteilung der Transmissionskoeffizienten in der c - d -Matrix. Hier wird die Propagation von Wellenpaketen betrachtet und deren endliche vertikale Ausdehnung könnte das Ergebnis verändern.

Für eine feste vertikale Wellenlänge $\lambda_z = 2$ km lassen sich die Ergebnisse aus dem Mehrschichtenmodell schlecht mit den beiden anderen Methoden vergleichen, da die Transmission stets bei $TC \sim 1$ liegt.

In den numerischen Simulationen mit EULAG werden Schwerewellen in den hier vorgestellten Fällen stärker von einer Tropopauseninversionsschicht beeinflusst als bei den beiden anderen Verfahren.

4.4 Durch Messungen inspirierte Studien

In diesem Teil der Arbeit werden Studien vorgestellt, die durch Beobachtungen von Schwerewellen in der Tropopausenregion inspiriert wurden, welche einen Vergleich der Situation mit idealisierten Simulationen sinnvoll erscheinen ließen.

Die Idee ist hierbei, die Anströmungsbedingungen vom Zeitpunkt der Beobachtung in EULAG zu benutzen und durch gezielte Anregung verschiedener Wellenlängen zu testen, wie diese durch die Tropopause propagieren und ob ein Zusammenhang mit den Messdaten hergestellt werden kann. Es wird dabei so vorgegangen, dass der atmosphärische Hintergrundzustand, in dem Wellenerscheinungen auftraten, in EULAG als Anströmung verwendet wird. Die Daten hierzu stammen aus ECMWF-Reanalysen.

Im südhemispherischen Winter 2014 fand in Neuseeland die Messkampagne Deep Propagating Gravity Wave Experiment (DEEPWAVE) statt. Das Ziel des Vorhabens war es, die Entwicklung von Schwerewellen zu quantifizieren - von ihren Quellen in der unteren Atmosphäre über ihre Ausbreitung und Wechselwirkung mit dem Grundstrom und miteinander bis hin zu ihrer Dissipation in der oberen Atmosphäre (Fritts et al., 2016). Die Geographie und die Lage Neuseelands bieten für dieses Vorhaben gute Voraussetzungen, denn mit den neuseeländischen Alpen existiert eine relativ isoliert liegende und steile Erhebung im Ozean, wodurch eine hohe Aktivität von Schwerewellen verursacht wird. Betrachtet werden drei ausgewählte Situationen:

Situation 1 am 4. 7. 2014: Lineare Zunahme der Stabilität in der Tropopausenregion, Windmaximum an der Tropopause, darüber Windabnahme bis $z = 25$ km.

Situation 2 am 11. 7. 2014: Moderat ausgeprägte Tropopauseninversionsschicht, kritische Schicht oberhalb der TIL, bei der Horizontalwind auf $u_e = 0 \text{ m s}^{-1}$ abfällt, sodass Wellenbrechen zu erwarten ist.

Situation 3 am 12. 7. 2014: Stark ausgeprägte und breite Tropopauseninversionsschicht, Windmaximum bei $z = 15$ km, potentiell Spurenstofftransport über die Tropopause hinweg, deshalb Betrachtung von passiven Tracern in EULAG

4.4.1 Situation 1

Während der Messkampagne wurde immer wieder beobachtet, dass relativ geringe troposphärische Wellenanregung zeitgleich mit sehr großen Wellenamplituden in der Mesosphäre auftrat (Fritts et al., 2016). Eine mögliche Ursache dieses Zusammenhangs kann sein, dass durch schwache Anströmung Wellen geringer Amplitude in der Troposphäre angeregt werden, die dann annähernd linear vertikal propagieren und dabei trotz Amplitudenzunahme noch nicht in den Bereich konvektiver Instabilität kommen. Dies wird von Bramberger et al. (2017) in einer Fallstudie für den 4. Juli 2014 untersucht, dem Tag, an dem die höchsten Energieflüsse der Kampagne gemessen wurden. Die Studie legt nahe, dass die Wellen fast linear durch die Tropopause propagieren. Eine Analyse der Wellenlängenbereiche zeigt außerdem, dass die stärksten Energieflüsse durch kurze bis

mittellange horizontale Wellenlängen im Bereich $\lambda_h \sim (10 - 60)$ km hervorgerufen werden. In der Troposphäre sind auch Wellenlängen von etwa $\lambda_h \sim 80$ km stark vertreten, die jedoch in der Stratosphäre nicht mehr gemessen werden.

Umgebungsbedingungen

Abbildung 4.54 zeigt als dünne Linien Profile für Horizontalwind und Brunt-Väisälä-Frequenz, die als Mittel über mehrere stromaufwärts der neuseeländischen Alpen gelege-

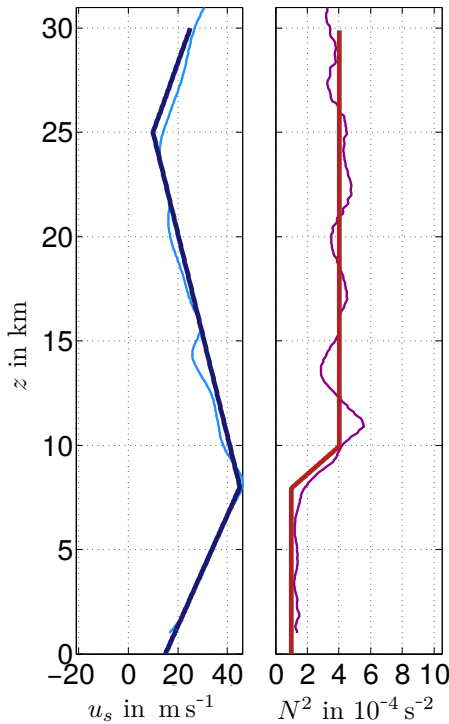


Abb. 4.54: ECMWF-Reanalyse-
daten für Neuseeland, 4. Juli
2014, 18 UTC. Horizontalwind
 u_s (links) und Brunt-Väisälä-
Frequenz N^2 (rechts).

ne Gitterpunkte berechnet wurden. Der Horizontalwind u_s bezeichnet hier die Windkomponente, mit der die neuseeländischen Alpen angeströmt werden, ihre Richtung ist also senkrecht zur Bergkette. Die Profile werden stückweise linear approximiert (dicke Linien in Abbildung 4.54) und so als Umgebungszustand in EULAG genutzt, mit ihnen werden also u_e und θ_e besetzt. Da hier $u_s = u_e = u_0$ gilt, wird im Folgenden ausschließlich u_0 als Bezeichnung für den Hintergrundwind verwendet. Das Windprofil im linken Bildteil von Abbildung 4.54 zeigt einen Anstieg vom bodennahen Wert $u_0 = 15 \text{ m s}^{-1}$ auf ein Maximum $u_0 = 25 \text{ m s}^{-1}$ in einer Höhe von $z = 8$ km, danach nimmt der Wind wieder ab bis zu einer Höhe von $z = 25$ km, wo das Minimum von $u_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ erreicht wird. Oberhalb von $z = 25$ km nimmt der Wind wieder zu. Die Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 im rechten Bildteil von Abbildung 4.54 wird mit einem in der Troposphäre und in der Stratosphäre konstanten Wert von $1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ beziehungsweise $4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ angenähert. Die Zunahme vom troposphärischen auf den stratosphärischen Wert erfolgt innerhalb einer Schicht der Dicke $d = 2$ km, zentriert bei $z = 9$ km.

Modelleinstellungen

In einem Modellgebiet der Ausdehnung $L_x = 90$ km in horizontaler Richtung werden durch eine sinusförmige Orographie der Höhe $H = 50$ m und eine Anströmung mit dem in Abbildung 4.54 links gezeigten Windprofil Schwerewellen angeregt. Es befinden sich zwischen einer und fünf Perioden im Modellgebiet, was horizontale Wellenlängen von $\lambda_x \in \{90, 45, 30, 22.5, 18\}$ km ergibt. In der Vertikalen erstreckt sich das Modell bis $L_z = 30$ km, hat eine räumliche Auflösung $\Delta z \approx \Delta x \approx 95$ m und eine zeitliche Auflösung von $\Delta t = 1$ s. Die gesamte Simulationszeit beträgt $T = 8$ h. Am oberen Rand erfolgt eine Dämpfung der Wellen innerhalb einer Schwammschicht, die bei $z_S = 23$ km beginnt und einen Dämpfungskoeffizienten von $\alpha_S = 1/(100 \text{ s})$ aufweist.

Windamplituden

Nach einer Simulationszeit von 8 h finden sich die in Abbildung 4.55 dargestellten Oszillationen im vertikalen Windfeld. In allen Fällen neigen sich die Wellenfronten

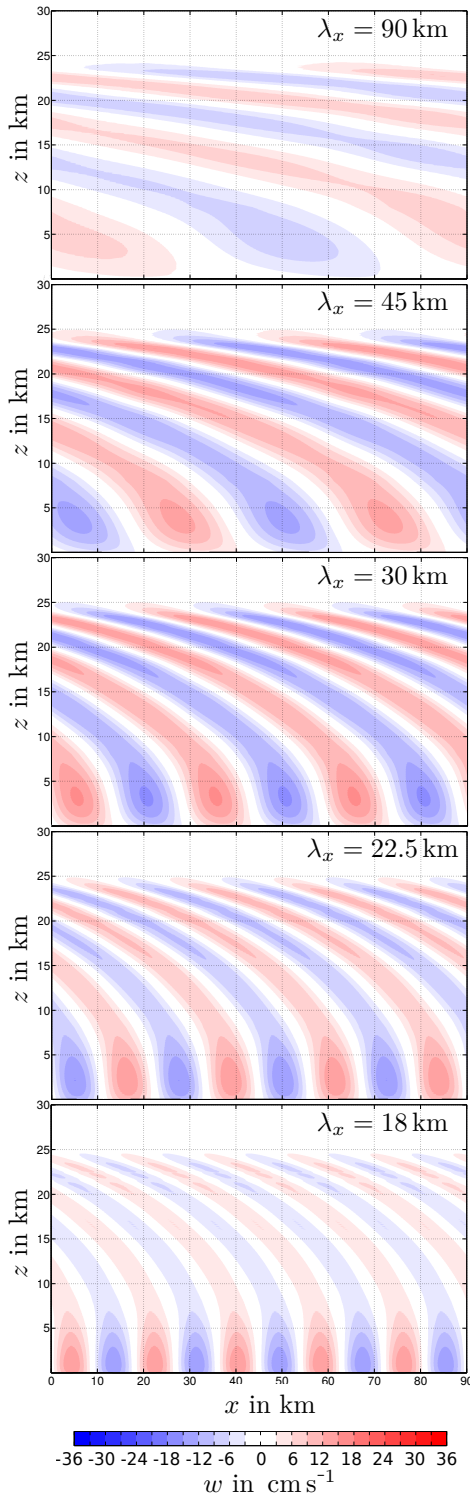


Abb. 4.55: Vertikalwind w nach 8 h. Anströmung mit Profilen aus Abb. 4.54, verschiedene Wellenlängen.

mit zunehmender Höhe immer weiter. Der abnehmende Hintergrundwind u_0 ist über $m = \sqrt{(N/u_0)^2 - k^2}$ (Dispersionsrelation 2.30) mit einer Abnahme der vertikalen Wellenlänge verbunden, solange eine Änderung in N dem nicht entgegen wirkt. Die Wellen werden mit zunehmender Höhe also zunehmend hydrostatisch. Eine Abschätzung für die vertikale Wellenlänge, die beim Windminimum von $u_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ in 25 km Höhe herrscht, ergibt damit $\lambda_z \approx 3 \text{ km}$, für die einzelnen Fälle verschiedener horizontaler Wellenlängen λ_x liegt dieser Wert nur etwa 50 m auseinander. Die Wellenlängenverhältnisse lauten demnach $\lambda_x/\lambda_z \in \{29, 14, 9, 7, 5\}$. Die vertikalen Wellenlängen in Bodennähe betragen mit $u_0 = 15 \text{ m s}^{-1}$ $\lambda_z \in \{12.7, 13.1, 13.8, 15.1, 17.6\} \text{ km}$, was einem Wellenlängenverhältnis von $\lambda_x/\lambda_z \in \{7, 3, 2, 1, 1\}$ am Boden entspricht. In Tabelle 4.5 sind in der vorletzten Zeile die tatsächlich erreichten maximalen vertikalen Windgeschwindigkeiten $|w|$ aufgelistet. Außerdem sind dort auch die theoretisch in Bodennähe ausgelösten Amplituden bei konstanten Umgebungsbedingungen $|w_b|$ genannt. Diese Zahlen ergeben sich aus den in Gleichung (3.25) aufgeführten analytischen Lösungen der Taylor-Goldstein-Gleichung für konstante Anströmung eines sinusförmigen Bergprofils in einem Boussinesq-Medium. In diesem Fall hängt die Amplitude des Vertikalwinds über

$$|w_b| = |u_0 H k| \quad (4.17)$$

mit Anströmung u_0 , Berghöhe H und Wellenzahl k zusammen. Mit Propagation der Welle durch eine in diesem Fall räumlich veränderliche Hintergrundströmung und Stabilität weicht die Amplitude in den Simulationen von diesen Werten natürlich ab, was an den Unterschieden zwischen $|w|$ und $|w_b|$ deutlich wird. Die Werte in Tabelle 4.5

Wellenlänge λ_x in km	90	45	30	22.5	18
Amplitude (stat. inst.) $ w_s $ in cm s^{-1}	157.9	321.3	496.4	691.9	921.9
Amplitude (theoretisch) $ w_b $ in cm s^{-1}	5.2	10.5	15.7	20.9	26.2
Verhältnis $a_t = w_b / w_s $	0.033	0.033	0.032	0.030	0.028
Amplitude (erreicht) $ w $ in cm s^{-1}	9.1	15.2	15.7	15.0	14.9
Verhältnis $a_r = w / w_s $	0.058	0.047	0.032	0.022	0.016

Tabelle 4.5: Verschiedene Kenngrößen zu den Simulationen in Abbildung 4.55.

zeigen, dass hier bei allen Simulationen, außer der mit den längsten Wellenlängen von $\lambda_x = 90$ km, sehr ähnliche Amplituden $|w|$ erreicht werden. Für die Simulation mit einer horizontalen Wellenlänge von $\lambda_x = 45$ km ist die positive Abweichung gegenüber der theoretischen Anfangsamplitude $|w_b|$ am größten.

Außerdem kann noch der Frage nachgegangen werden, inwiefern die statische Instabilität in den Simulationen relevant wird. Deren Wert für den Auftrieb $b_s = \frac{N^2}{m}$ (Achatz et al., 2010) lässt sich durch die Polarisationsbeziehungen (2.38) über $w = i b \hat{\omega}/N^2$ mit w in Verbindung setzen, sodass sich die vertikale Windamplitude für statische Instabilität zu

$$|w_s| = \frac{|\hat{\omega}|}{N^2} |b_s| = \frac{|\omega - u_0 k|}{N^2} \frac{N^2}{|m|} = \left| \frac{u_0 k}{m} \right| \quad (4.18)$$

ergibt. Hierbei wurde benutzt, dass im Fall von stationären Wellen $\omega = 0$ gilt. Die somit errechneten Amplituden $|w_s|$, bei denen für u_0 und m stets die Werte am Boden verwendet wurden, welcher hier $u_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ beträgt, finden sich in Tabelle 4.5. Der Quotient a_t zeigt an, wie sich diese theoretisch in Bodennähe angeregten Amplituden zur statischen Instabilität verhalten. Die Werte fallen sehr klein aus, die Situation ist also theoretisch noch weit von statischer Instabilität entfernt. Auch der zweite in der Tabelle aufgeführte Quotient a_r , der die tatsächlich erreichten Amplituden mit der statischen Instabilität vergleicht, nimmt kleine Werte $a_r < 0.06$ an. Anhand der Messdaten, die an diesem Tag aufgenommen wurden, kommen Bramberger et al. (2017) ebenfalls zu dem Schluss, dass die Propagation der Wellen weitgehend linear durch die Tropopause erfolgt sein muss. Um dies auch für die EULAG-Simulationen zu überprüfen, wurden verschiedene Flüsse berechnet.

Flüsse

Zur Berechnung von Impulsfluss und Energiefluss werden die Definitionen aus Abschnitt 2.2.2 benutzt, wobei diese für die hier auf einem Modellgitter vorliegenden Daten als

$$F_M(k) = \frac{1}{L_x} \sum_{i=1}^n \rho_0(i, k) u'(i, k) w'(i, k) \Delta x \quad (4.19)$$

$$F_E(k) = \frac{1}{L_x} \sum_{i=1}^n p'(i, k) w'(i, k) \Delta x \quad (4.20)$$

diskretisiert werden. Hierbei beziehen sich die Indizes i und k auf die Horizontalkoordinate $x(i) = x(1), \dots, x(n)$ und auf die kartesische Vertikalkoordinate $z_c(k) = z_c(1), \dots, z_c(l)$, auf die alle Felder vor der horizontalen Mittelung interpoliert werden. Bei der Berechnung von horizontalen Mittelwerten muss eine solche Interpolation vorgenommen werden, da die Modellkoordinaten in EULAG dem Gelände folgen und so die Mittelung entlang der vertikalen Koordinate im Modell besonders in der Nähe des unteren Randes nicht auf einer festen Höhe erfolgen würde. Die gestrichelten Größen bezeichnen Abweichungen vom Umgebungszustand und ρ_0 steht für die Dichte des Basiszustands, die hier über `lipps=3` gewählt wurde, siehe Abschnitt 3.1.1. In Abbildung 4.56 sind die berechneten Profile für verschiedene Flüsse gezeigt. Der Impulsfluss ist höhenkonstant für stationäre Wellen, die sich linear und nicht-dissipativ in einem Medium ausbreiten (Eliassen & Palm, 1961). In den hier gezeigten Fällen trifft dies für den Höhenbereich zwischen $z = 5$ km und $z = 15$ km weitgehend zu. Insbesondere die beiden kleinsten Wellenlängen $\lambda_x = 22.5$ km und $\lambda_x = 18$ km weisen dort konstanten Impulsfluss auf. Am oberen Rand des Modellgebiets verschwindet der Impulsfluss, dort wird die Strömung durch die Schwammschicht auf den Umgebungszustand relaxiert. Der Unterrand der Schwammschicht bei $z = 23$ km fällt hier mit dem Auftreten von Oszillationen zusammen. Die dabei erscheinenden vertikalen Wellenlängen im Impulsfluss sind umso größer, je größer

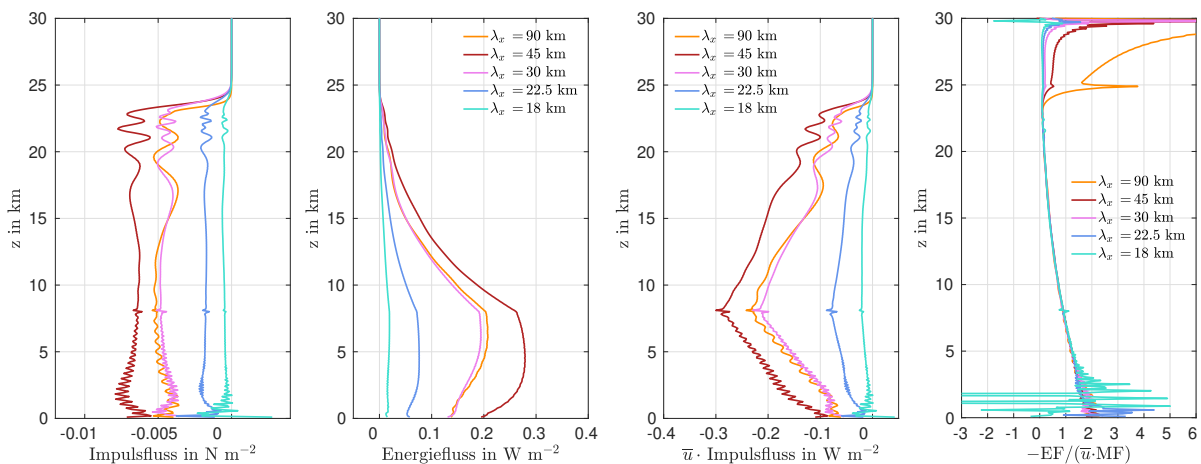


Abb. 4.56: Impulsfluss F_M , Energiefluss F_E , Produkt aus Impulsfluss und mittlerem Horizontalwind $\bar{u} \cdot F_M$ und Quotient $-F_E/(\bar{u} \cdot F_M)$ für die Simulationen in Abbildung 4.55.

die horizontale Wellenlänge λ_x ist. Möglicherweise werden Schwerewellen hier an der Schwammschicht reflektiert, wobei eine Überlagerung der nach oben und nach unten propagierenden Wellen im Impulsfluss sichtbar wird. Der Impulsfluss nimmt bei einer horizontalen Wellenlänge $\lambda_x = 45$ km die höchsten Werte an. Auch der Energiefluss ist für diese Wellenlänge über den gesamten Höhenbereich hinweg am größten. Oberhalb von $z = 8$ km nimmt der Energiefluss für alle Wellenlängen ab. Dies fällt mit der Zunahme von N^2 und der Abnahme von u_0 bei 8 km Höhe zusammen. Der dritte Bildteil von Abbildung 4.56 zeigt das Produkt aus gemitteltem Horizontalwind \bar{u} und Impulsfluss F_M . Nach Eliassen & Palm (1961) ist dieser Fluss im Fall linearer Propagation von stationären Wellen betragsmäßig gleich dem Energiefluss F_E , siehe Abschnitt 2.2.2. In Abbildung 4.56 zeigen diese beiden Flüsse auch einen recht ähnlichen Verlauf. Der Quotient der beiden, der ganz rechts in Abbildung 4.56 aufgetragen ist, fällt für alle Wellenlängen sehr ähnlich aus. Zwischen $z = 5$ km und $z = 20$ km, abseits der Ränder, erscheint er sehr glatt und ändert sich nur langsam mit der Höhe, kleinskalige Abweichungen treten nicht auf. Jedoch ist eine stetige Abnahme zu sehen und der erwartete konstante Wert von 1 wird nur im Höhenbereich von $z \sim 8$ km durchlaufen. Auch hier handelt es sich wieder um die Höhe, in der die größten Gradienten in u_0 und N^2 auftreten.

Die Abweichung von einem konstanten Wert von 1 könnte auch damit zusammenhängen, dass hier dissipative Prozesse aufgrund der endlichen Auflösung und der Existenz der Modellränder auftreten. Jedoch legen die ähnlichen Verläufe von Impulsfluss und dem Produkt aus Horizontalwind und Energiefluss nahe, dass hier lineare Propagation stattfindet. Wäre dies nicht der Fall, ließen sich Nichtlinearitäten wohl auch an einem Einbruch oder Ausbruch eines der Flüsse feststellen.

4.4.2 Situation 2

Diese Untersuchung bezieht sich auf die Umgebungsbedingungen in Neuseeland wenige Tage später, am 11. Juli 2014. Die synoptische Situation ist allerdings verändert (Gisinger et al., 2017), was sich auch an den hier verwendeten Umgebungsprofilen erkennen lässt.

Umgebungsbedingungen

Aus ECMWF-Reanalyse- und Beobachtungsdaten wurden Profile für den Zustand des Hintergrunds gewonnen, die aus einer Mittelung mehrerer in Anströmungsrichtung der neuseeländischen Alpen liegenden Gitterpunkte stammen. Abbildung 4.57 zeigt Profile für die senkrecht zur

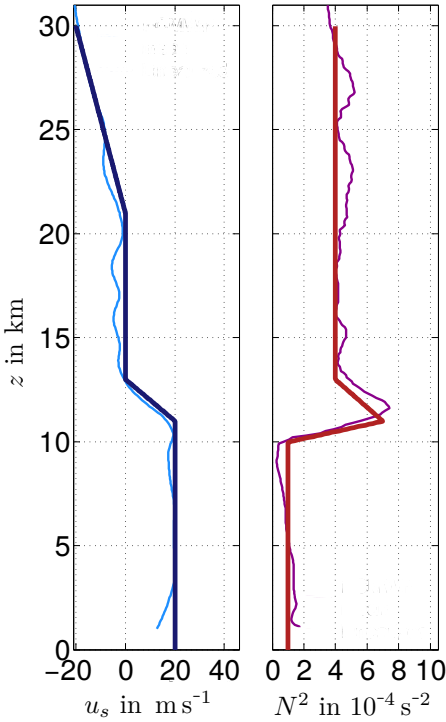


Abb. 4.57: ECMWF-Reanalyse- und Beobachtungsdaten für Neuseeland, 11. Juli 2014, 12 UTC. Horizontalwind u_s (links) und Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 (rechts).

Bergkette ausgerichtete Komponente des Horizontalwindes u_s und die Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 , wobei dünne Linien das Ergebnis aus dem ECMWF-Modell darstellen, während dicke Linien eine stückweise lineare Näherung illustrieren. Die so approximierten Profile werden in EULAG als Umgebungszustände genutzt und es gilt $u_0 = u_e = u_s$. Das Windprofil weist in der Troposphäre eine quasi höhenkonstante Geschwindigkeit $u_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ auf. Ab einer Höhe von $z = 11 \text{ km}$ nimmt der Wind in Anströmungsrichtung ab und verschwindet schließlich bei $z = 13 \text{ km}$. Ab einer Höhe $z = 21 \text{ km}$ nimmt der Wind negative Werte an, bis auf $u_0 = -20 \text{ m s}^{-1}$ bei $z = 30 \text{ km}$. Das Profil der Brunt-Väisälä-Frequenz zeigt konstante Werte in Troposphäre ($N_{ts}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$) und Stratosphäre ($N_{ss}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$), dazwischen liegt eine Inversionsschicht: Zwischen $z = 10 \text{ km}$ und $z = 13 \text{ km}$ nimmt die Stabilität erst auf $N_{\max}^2 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ zu und dann wieder auf den stratosphärischen Wert N_{ss}^2 ab. Der verschwindende Wind zwischen 13 km und 22 km bedeutet, dass sich dort eine kritische Schicht befindet, in der Wellen nicht propagieren können und möglicherweise brechen.

Modelleinstellungen

Die Simulationen werden auf einem Modellgebiet der Größe $L_x = 90 \text{ km}$, $L_z = 30 \text{ km}$ gerechnet, mit einer Auflösung $\Delta x \approx 95 \text{ m}$ in horizontaler und $\Delta z \approx 40 \text{ m}$ in vertikaler Richtung. Der Zeitschritt beträgt $\Delta t = 1 \text{ s}$ und die Simulationszeit insgesamt $T = 8 \text{ h}$. Die Wellen werden über eine sinusförmige Orographie mit Berghöhe $H = 50 \text{ m}$ angeregt. Die Schwammschicht am Oberrand des Modells beginnt bei $z_S = 23 \text{ km}$, und weist eine Dämpfungskonstante von $\alpha_S = 1/(100 \text{ s})$ auf.

Windamplituden

In Abbildung 4.58 ist der Vertikalwind für fünf verschiedene Wellenlängen dargestellt. In der Stratosphäre, oberhalb einer Höhe von $z = 12$ km, sind lange Wellen der jeweils

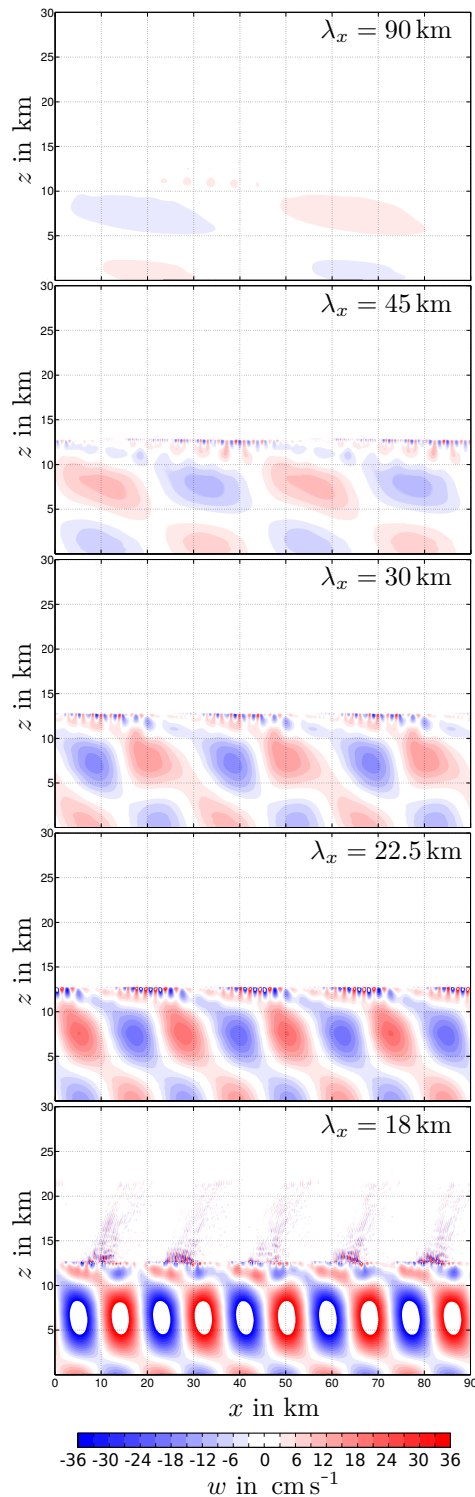


Abb. 4.58: Vertikalwind w nach 8 h. Anströmung mit Profilen aus Abb. 4.57, verschiedene Wellenlängen.

angeregten Wellenlänge zwischen 18 km und 90 km nicht mehr zu sehen. Unterhalb der Tropopause ist ein alternierendes Muster von Auf- und Abwindregionen erkennbar, das auf eine Überlagerung der Welle mit einer an der Tropopause reflektierten Komponente schließen lässt. In der Tropopausenregion, bei Erreichen der kritischen Schicht, finden sich kleinskalige Oszillationen. Insbesondere im Fall der kleinsten Wellenlänge, $\lambda_x = 18$ km, treten solche Oszillationen auch in größerer Höhe in der Stratosphäre auf. Dies kann ein Anzeichen für die Anregung von sekundären Wellen sein. Das Brechen von orographisch angeregten Schwerkwellen bei Eindringen in eine kritische Schicht und die damit verbundene Entstehung sekundärer Wellen wurde in zahlreichen Messungen und numerischen Studien untersucht (z.B. Chun & Kim, 2008; Woods & Smith, 2011; Bossert et al., 2017 und Liu et al., 2019). Abbildung 4.59 zeigt in einem Ausschnitt des Modellgebiets den Vertikalwind für die Simulation mit $\lambda_x = 18$ km im Zeitverlauf, nun auch mit einer geänderten Farbskala. Nach etwa 1 h Simulationszeit hat die angeregte Welle die kritische Schicht erreicht, nach 4 h sind die ersten kleinskaligen Strukturen oberhalb von $z \sim 12$ km zu sehen. Wenn die Wellen bereits ausgebildet sind, wird im Vergleich der letzten drei gezeigten Zeitpunkte in Abbildung 4.59 auch sichtbar, dass es sich bei den sekundären Wellen, im Gegensatz zu den anregenden stationären orographischen Wellen, um transiente Strukturen handelt. Ihre horizontale Wellenlänge beträgt etwa 700 m und die vertikale Wellenlänge etwa 2 km. Ihre Amplitude variiert horizontal, was laut Abbildung 4.58, in der fünf Maxima ausgemacht werden können, mit der horizontalen Wellenlänge der troposphärischen Wellen zusammenhängt. Das Eintreffen einer bestimmten Wellenphase in die kritische Schicht kann hier also mit der Anregung

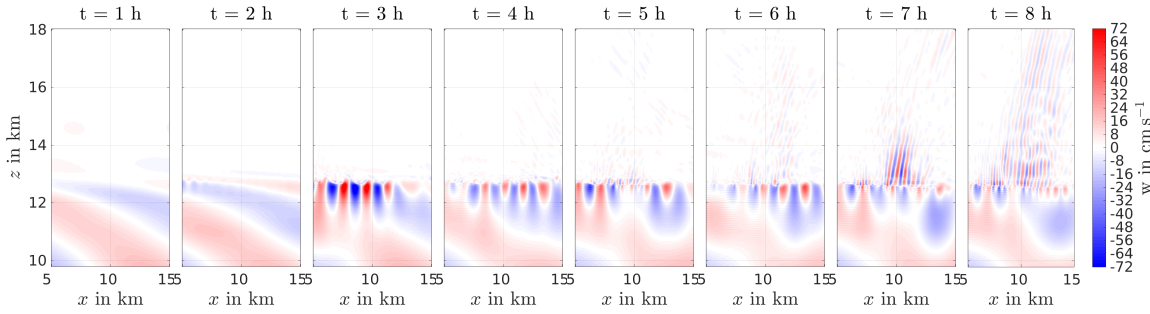


Abb. 4.59: Zeitverlauf des Vertikalwinds in der Tropausenregion für $\lambda_x = 18$ km.

sekundärer Wellen zusammenhängen. In Abbildung 4.60 wird auch eine Wechselwirkung mit dem Umgebungszustand erkennbar. Dort sind die Profile der Brunt-Väisälä-Frequenz nach 0 h und nach 8 h Simulationszeit gezeigt. Die Profile wurden dabei aus der horizontal gemittelten potentiellen Temperatur $\bar{\theta}$ erstellt. In allen Fällen tritt am Oberrand der Inversionsschicht, in der Höhe, in der der Hintergrundwind verschwindet, eine Störung auf. Dies ist umso deutlicher sichtbar, je kleiner die Wellenlänge λ_x ist. Eine kleinere Wellenlänge geht laut Gleichung (4.17) mit einer größeren angeregten Amplitude $|w_b|$ einher. Diese Werte sind in Tabelle 4.6 aufgeführt. Große Amplituden begünstigen hier wahrscheinlich die Anregung der sekundären Wellen. Allerdings ist das Verhältnis dieser Amplitude $|w_b|$ zur Schwelle der statischen Instabilität $|w_s|$ für kleine Wellenlängen nicht größer, wie in Tabelle 4.6 an den Werten a_t abgelesen werden kann. Daraus lässt sich schließen, dass statische Instabilität hier also nicht der entscheidende Prozess für das Wellenbrechen ist. Um die Stärke des Einflusses der Welle auf N^2 zu quantifizieren, wurde zunächst aus der mit dem vollen θ berechneten Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 und der über den Umgebungszustand θ_e berechneten Brunt-Väisälä-Frequenz N_e^2 die Differenz $\Delta N^2 = N^2(z_c) - N_e^2(z_c)$ ermittelt. Für diese wurde dann über die kartesische vertikale Koordinate z_c , die von $k = k_1, \dots, l$ diskretisiert ist, die Standardabweichung

$$S(\Delta N^2) = \sqrt{\frac{1}{l-1} \sum_{k=k_1}^l |\Delta N^2(k) - \mu_N|^2} \quad \text{mit} \quad \mu_N = \frac{1}{l} \sum_{k=k_1}^l \Delta N^2(k) \quad (4.21)$$

berechnet. Die Summation startet bei k_1 , was der zugehörige Index für die Höhe ist, ab der die Topographie nicht mehr ins Modellgebiet ragt. Die so ermittelten Werte sind in

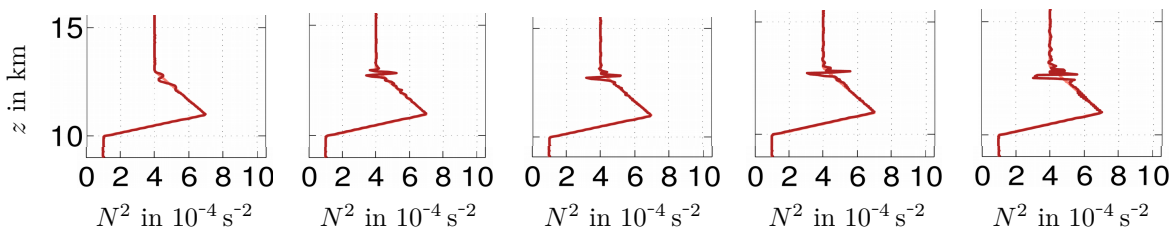


Abb. 4.60: Profil der nach 8 h Simulationszeit aus $\bar{\theta}$ errechneten Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 (dunkelrot) und der anfänglichen Brunt-Väisälä-Frequenz N_e^2 (hellrot) für Wellenlängen $\lambda_x \in \{90, 45, 30, 22.5, 18\}$ km (von links nach rechts).

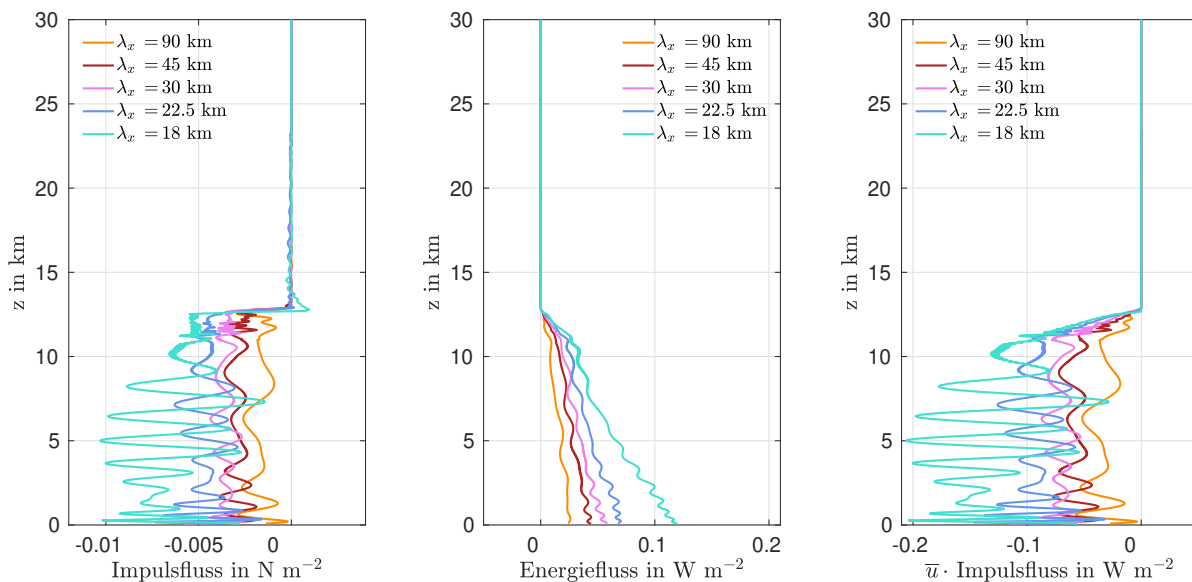
Wellenlänge λ_x in km	90	45	30	22.5	18
Amplitude (stat. inst.) $ w_s $ in cm s^{-1}	282.0	581.6	922.6	1346.6	1950.2
Amplitude (theoretisch) $ w_b $ in cm s^{-1}	7.0	14.0	20.9	27.9	34.9
Verhältnis $a_t = w_b / w_s $	0.025	0.024	0.023	0.021	0.018
Amplitude (erreicht) $ w $ in cm s^{-1}	5.0	29.0	33.4	54.9	68.2
Verhältnis $a_r = w / w_s $	0.018	0.050	0.036	0.041	0.035
Verhältnis $a_e = w / w_b $	0.7143	2.0714	1.5981	1.9677	1.8482
$S(\Delta N^2)$ in 10^{-4} s^{-2}	0.020	0.079	0.078	0.090	0.130

Tabelle 4.6: Verschiedene Kenngrößen zu den Simulationen in Abbildung 4.58.

Tabelle 4.6 in der untersten Zeile eingetragen. Insgesamt nehmen fast alle dargestellten Größen zu, wenn die Wellenlänge λ_x abnimmt und sowohl die errechneten als auch die simulierten Amplituden $|w_b|$ und $|w|$ sind weit von den Amplituden der statischen Instabilität entfernt.

Flüsse

In Abbildung 4.61 sind die horizontal gemittelten Profile für den Impulsfluss F_M , den Energiefluss F_E und das Produkt $\bar{u} \cdot F_M$ dargestellt. Die Wellenpropagation durch die kritische Schicht ist klar unterdrückt und unterhalb dieser Schicht befindet sich ein Wellenleiter (*engl.: trapped wave*), in dem sich die Welle vornehmlich aufhält. Der Impulsfluss ist deutlich größeren Fluktuationen unterworfen als der Energiefluss. Oberhalb der kritischen Schicht lassen sich im Impulsfluss die kleinskaligen Oszillationen der sekundär

Abb. 4.61: Impulsfluss F_M , Energiefluss F_E und Produkt aus Impulsfluss und mittlerem Horizontalwind $\bar{u} \cdot F_M$ für die Simulationen in Abbildung 4.58.

generierten Wellen erkennen. Ein Vergleich des zweiten Bildteils von Abbildung 4.61 (F_E) mit ihrem dritten Bildteil ($\bar{u} \cdot F_M$) macht schnell deutlich, dass hier die Abweichungen erheblich größer sind als in der weiter oben diskutierten Situation 1. Dieses Szenario ist also weiter von linearer Propagation orographischer Wellen entfernt und die Eliassen-Palm-Beziehung (2.58) gilt nicht.

Erhöhung der Amplitude

Um zu analysieren, wie die Bildung von sekundären Wellen in dieser Situation von der Amplitude der angeregten Welle abhängt, wurden weitere Simulationen durchgeführt. Dabei wurde für eine horizontale Wellenlänge $\lambda_x = 18$ km, die am stärksten zur Entstehung von sekundären Wellen führte, die Modellorographie erhöht. Exemplarisch ist das Windfeld für die Berghöhe $H = 200$ m in Abbildung 4.62 gezeigt. Dort ist die Amplitude gegenüber der in den Abbildungen 4.58 (unten) und 4.59 gezeigten Simulation vervierfacht. Im Vergleich dazu ist die Entwicklung von sekundären Wellen bei der höheren Windamplitude in Abbildung 4.62 horizontal homogener verteilt und die Überlagerung von fünf Regionen verstärkter sekundärer Wellen in der Stratosphäre, wie sie in Abbildung 4.58 erkennbar ist, hier nicht so deutlich zu sehen. Eine Analyse der Wellenlängen der sekundären Wellen folgt im übernächsten Abschnitt. Auch hier wird ersichtlich, wie die kritische Schicht auch die Umgebung beeinflusst. Es sind in diesem Fall nicht nur Änderungen in der Stabilität wirksam, sondern auch im horizontalen Windprofil. In Abbildung 4.63 ist der Ausschnitt der Tropopausenregion für die vier verschiedenen

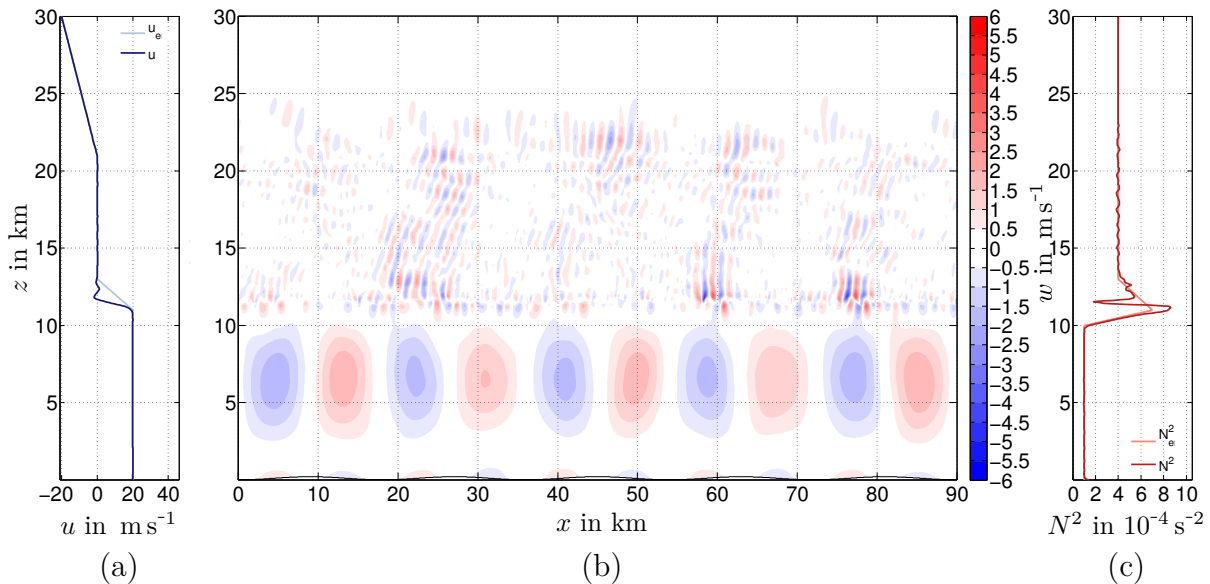


Abb. 4.62: (a): Horizontal gemittelter Horizontalwind $\bar{u}(t = 8 \text{ h})$ (dunkelblau) und anfänglicher Horizontalwind u_e (hellblau), (b): Vertikales Windfeld $w(t = 8 \text{ h})$ für $\lambda_x = 18$ km und $H = 200$ m, (c): Horizontal gemittelte Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 nach $t = 8 \text{ h}$ (dunkelrot) und anfängliche Brunt-Väisälä-Frequenz N_e^2 (hellrot).

Berghöhe H in m	50	100	150	200
Amplitude (stat. inst.) $ w_s $ in cm s^{-1}	1950.2	1950.2	1950.2	1950.2
Amplitude (theoretisch) $ w_b $ in cm s^{-1}	34.9	69.8	104.7	139.6
Verhältnis $a_t = w_b / w_s $	0.018	0.036	0.054	0.072
Amplitude (erreicht) $ w $ in cm s^{-1}	68.2	250.9	248.8	454.8
Verhältnis $a_r = w / w_s $	0.035	0.129	0.128	0.233
$S(\Delta N^2)$ in 10^{-4} s^{-2}	0.130	0.322	0.378	0.447
$S(\Delta u)$ in m s^{-1}	0.289	1.299	1.599	1.980

Tabelle 4.7: Verschiedene Kenngrößen zu Simulationen mit $\lambda_x = 18 \text{ km}$ und verschiedenen Berghöhen $H \in \{50 \text{ m}, 100 \text{ m}, 150 \text{ m}, 200 \text{ m}\}$.

Amplituden dargestellt. Die Abweichung zwischen den Umgebungsprofilen und den nach 8 h Simulationszeit durch horizontale Mittelung berechneten Profilen ist umso größer, je größer die Amplitude ist. In Abbildung 4.63a ist eine deutliche Verschärfung der Inversionschicht zu erkennen. Einerseits wird das Maximum von N^2 erhöht und andererseits wird die Schicht schmäler. Es tritt eine starke Variation in N^2 auf, insbesondere folgt hier auf das Maximum ein rapider Abfall auf einen niedrigeren Wert. Für alle Berghöhen nimmt auch die Windscherung zu, im Fall $H = 200 \text{ m}$ ist sie etwa verdoppelt im Vergleich zum anfänglichen Profil (Abbildung 4.63b). In Tabelle 4.7 sind in den untersten beiden Zeilen die Standardabweichungen $S(\Delta N^2)$ nach Gleichung (4.22) und $S(\Delta u)$ mit

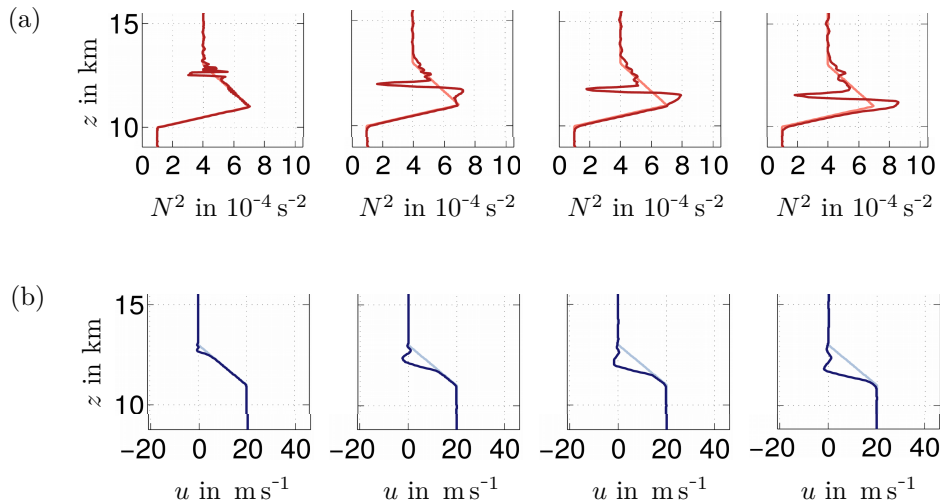


Abb. 4.63: (a): Profil der nach $t = 8 \text{ h}$ aus $\bar{\theta}$ errechneten Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 (dunkelrot) und der anfänglichen Brunt-Väisälä-Frequenz N_e^2 (hellrot) sowie (b): horizontal gemittelter Wind \bar{u} (dunkelblau) wie auch anfänglicher Umgebungswind u_e für Wellenlängen $\lambda_x = 18 \text{ km}$ und $H \in \{50 \text{ m}, 100 \text{ m}, 150 \text{ m}, 200 \text{ m}\}$ (von links nach rechts).

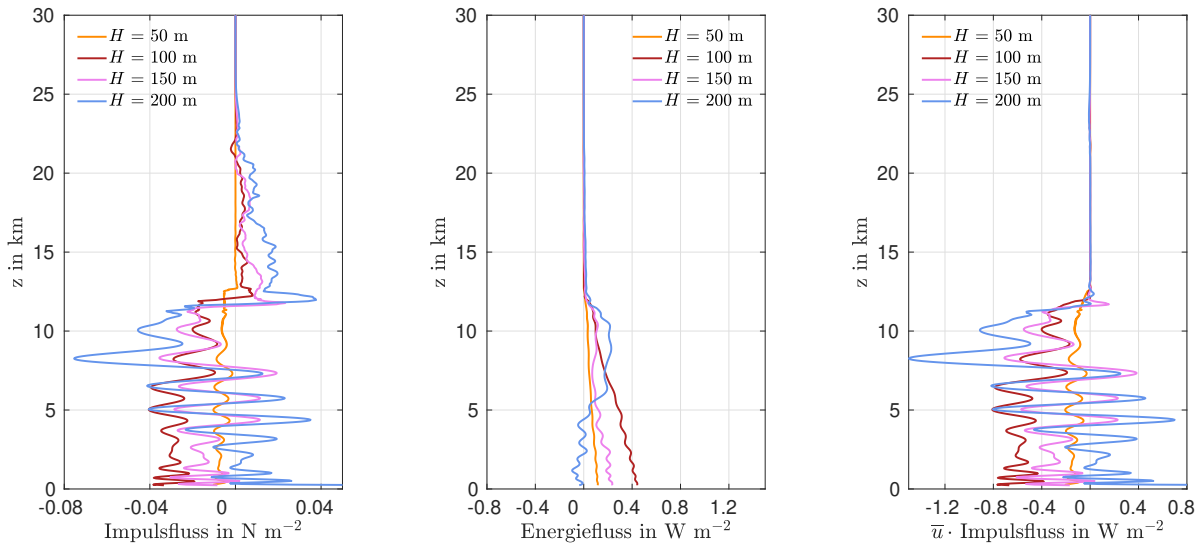


Abb. 4.64: Impulsfluss F_M , Energiefluss F_E und Produkt aus Impulsfluss und mittlerem Horizontalwind $\bar{u} \cdot F_M$ für $\lambda_x = 18$ km und verschiedene Berghöhen H .

$\Delta u = u(t = 8 \text{ h}) - u_e$ aufgeführt. Die Standardabweichung $S(\Delta u)$ wurde dabei als

$$S(\Delta u) = \sqrt{\frac{1}{l-1} \sum_{k=k_1}^l |\Delta u(k) - \mu_u|^2} \quad \text{mit} \quad \mu_u = \frac{1}{l} \sum_{k=k_1}^l \Delta u(k) \quad (4.22)$$

berechnet. Außerdem wurden wieder verschiedene Amplituden ermittelt, um zu vergleichen, wie sich die Fälle zur statischen Stabilität und zur ursprünglich angeregten initialen Amplitude verhalten. Hier fällt auf, dass im Fall der größten Berghöhe das Verhältnis $a_r = |w|/|w_s|$, bei dem die erreichte Amplitude mit der Amplitude der statischen Stabilität verglichen wird, schon deutlich höhere Werte erreicht als in den anderen bisher gezeigten Fällen. Die sekundär generierten Wellen sind auch in den in Abbildung 4.64 dargestellten Flüssen sichtbar. Der Impulsfluss verschwindet hier nicht oberhalb von 12 km, wenn die kritische Schicht erreicht wird. Für die größte Berghöhe $H = 200$ m weist der Impulsfluss dort die größten Werte auf. Der Impulsfluss wechselt bei Eintritt in die kritische Schicht sein Vorzeichen, die Gruppengeschwindigkeit der sekundären Wellen in der Stratosphäre ist also nach unten gerichtet. In der Troposphäre treten unterhalb von $z \sim 5$ km bei der größten Berghöhe $H = 200$ m positive Impulsflüsse und negative Energieflüsse auf. Auch hier ist also die Gruppengeschwindigkeit der Wellen nach unten gerichtet. Dies kann an der Wirkung der Tropopause als Wellenleiter liegen. Bei Reflexion an der Tropopause propagiert die Welle nach unten und möglicherweise überwiegen zum Zeitpunkt der Mittelung ($t = 8$ h) in der Überlagerung der verschiedenen Wellenkomponenten in der Troposphäre jene, die nach unten gerichtet sind.

Vergleich mit Simulation ohne Inversionsschicht

Abbildung 4.65 zeigt die Simulation mit der stärksten Anregung, also mit einer Berghöhe von $H = 200$ m, die hier mit einem modifizierten Stabilitätsprofil wiederholt wurde. Die Brunt-Väisälä-Frequenz N_e^2 nimmt nun in einer Schicht von 1 km Dicke linear vom troposphärischen auf den stratosphärischen konstanten Wert zu und weist keine Tropopauseninversionsschicht mehr auf wie in Abbildung 4.57. Dieses Profil ist in 4.65c durch die hellrote Linie dargestellt. Dort ist auch erkennbar, dass das aus der horizontalen Mittelung von $\theta(t = 8 \text{ h})$ generierte Profil, dargestellt als dunkelrote Linie, deutlich davon abweicht. Auch im Profil des Horizontalwindes und im vertikalen Windfeld (4.65a und 4.65b) ist die Entwicklung sekundärer Wellen zu sehen.

Die Standardabweichungen für die Differenz der aktuellen Umgebungsprofile und der initialen Umgebungsprofile können hier für Stabilität und Horizontalwind zu $S(\Delta N^2) = 0.415 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-2}$ und $S(\Delta u) = 2.155 \text{ m s}^{-1}$ errechnet werden. Mit TIL betragen diese Werte $S(\Delta N^2) = 0.447 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ und $S(\Delta u) = 1.980 \text{ m s}^{-1}$ (siehe Tabelle 4.7). Für die Stabilität N^2 liegen die Abweichungen also in einem ähnlichen Bereich, für den Horizontalwind u sind die Abweichungen ohne TIL leicht erhöht. Die Auswirkungen auf die Umgebungsbedingungen sind hier also ähnlich und es macht keinen großen Unterschied, ob eine starke Inversionsschicht vorhanden ist oder nicht. Eine Waveletanalyse der horizontalen Wellenlängen auf einer festen Höhe von $z = 14 \text{ km}$ ergibt hier ein Maximum der Wavelet-Leistung bei $\lambda_{x,s} = 2790 \text{ m}$. Gegenüber der direkt vergleichbaren Situation ohne TIL ist hier die horizontale Wellenlänge der sekundären Wellen etwas länger.

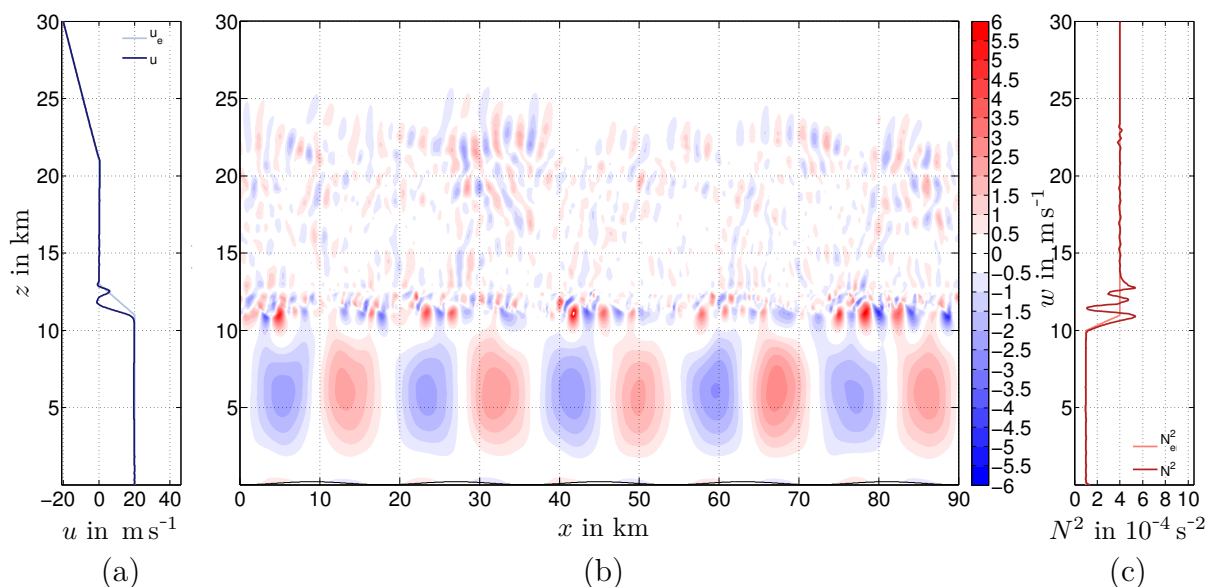


Abb. 4.65: (a): Horizontal gemittelter Horizontalwind $\bar{u}(t = 8 \text{ h})$ (dunkelblau) und anfänglicher Horizontalwind u_e (hellblau), (b): Vertikales Windfeld $w(t = 8 \text{ h})$ für $\lambda_x = 18 \text{ km}$ und $H = 200 \text{ m}$, (c): Horizontal gemittelte Brunt-Väisälä-Frequenz \bar{N}^2 nach $t = 8 \text{ h}$ (dunkelrot) und anfängliche Brunt-Väisälä-Frequenz N_e^2 (hellrot).

Einfluss der Scherschichtdicke

Um der Frage nachzugehen, was die genaue Struktur der sekundär generierten Wellen prägt, wurde betrachtet, wie sich eine Änderung der Scherschichtdicke d_u auf die Wellenlänge auswirkt. Dafür wurden Wavelet-Analysen durchgeführt, wie in Abbildung 4.66 beispielhaft anhand der in Abbildung 4.62 dargestellten Simulation gezeigt ist. Die horizontale Wellenlänge der Sinus-Bergkette beträgt hier $\lambda_x = 18$ km bei einer Höhe von $H = 200$ m und der Horizontalwind u_e nimmt zwischen $z = 11$ km und $z_{\text{crit}} = 13$ km von $u_e = 20 \text{ m s}^{-1}$ auf $u_e = 0 \text{ m s}^{-1}$ ab (vergleiche Abbildung 4.57), die Scherschichtdicke beträgt also $d_u = 2000$ m. Die Konturen zeigen das Leistungsspektrum für den Vertikalwind innerhalb der kritischen Schicht, in einer Höhe von $z = 14$ km. Der Wellenlängenbereich zwischen etwa $\lambda_{x,s} = 1000$ m und $\lambda_{x,s} = 3000$ m weist erhöhte Werte auf, deren genaue Struktur ist jedoch horizontal inhomogen. Es sind verschiedene Maxima bei einer Wellenlänge von $\lambda_{x,s} \sim 2000$ m erkennbar, drei davon liegen oberhalb des Konfidenzniveaus (schwarze Linie). Zwei weitere Bereiche mit höheren Werten finden sich bei $x \sim 20$ km und $x \sim 57$ km. Die Zahl der Maxima könnte im Zusammenhang mit der Anzahl von Sinus-Bergen im Modellgebiet stehen, die hier $L_x/\lambda_x = 90/18 = 5$ beträgt. Demnach würden sekundäre Wellen primär dort generiert, wo eine bestimmte Phase der Welle auf die kritische Schicht trifft. Es wurden weitere Simulationen durchgeführt, in denen die Windscherung unterhalb der kritischen Schicht variiert wurde. Die Lage der Höhe z_{crit} wurde verändert, sodass die Scherschichtdicke zwischen $d_u = 500$ m und $d_u = 2000$ m und die Scherung damit zwischen $du_e/dz = -0.04 \text{ s}^{-1}$ und $du_e/dz = -0.01 \text{ s}^{-1}$ lag. Für diese Simulationen wurden Wavelet-Leistungsspektren wie in Abbildung 4.67 berechnet und diese horizontal gemittelt und in Abbildung 4.67 dargestellt. Dabei erfolgte die Berechnung stets auf einer Höhe $z_{\text{crit}} + 1$ km, was hier Höhen von 12.5 km, 13 km und 14 km entspricht. Um die Kurven besser unterscheidbar zu machen, wurden sie um einen

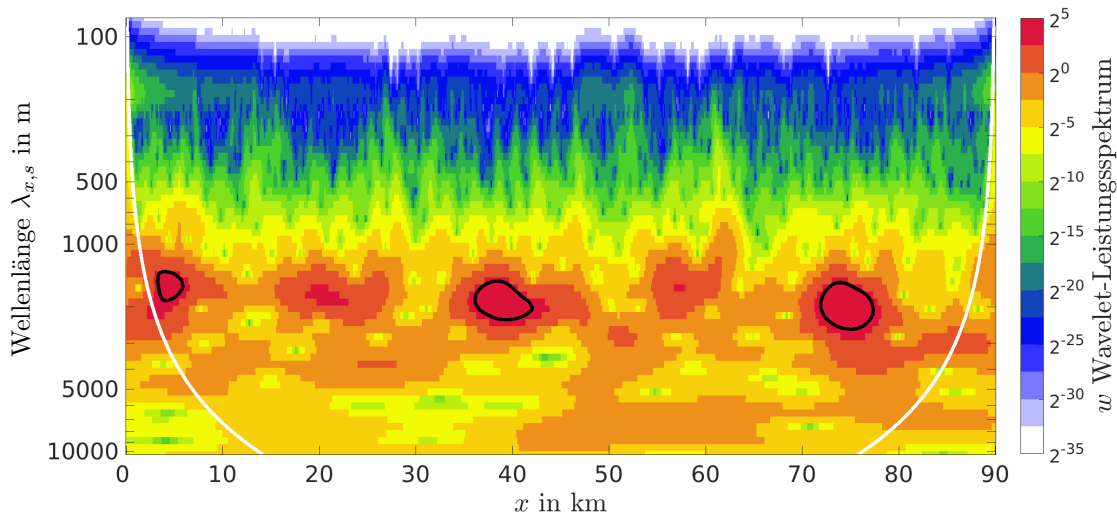


Abb. 4.66: Wavelet-Analyse bei $z = 14$ km für Scherschichtdicke $d_u = 2000$ m, Wellenlänge $\lambda_x = 18$ km und Berghöhe $H = 200$ m.

festen Wert von 2^2 gegeneinander verschoben. Alle gemittelten Leistungsspektren weisen ein Maximum auf, markiert durch die gepunkteten Linien. In der Simulation mit der dicksten Scherschicht $d_u = 2000$ m dominiert eine Wellenlänge von $\lambda_{x,s} \sim 1900$ m, während in der Simulation mit der dünnsten Scherschicht $d_u = 500$ m eine etwas größere Wellenlänge von $\lambda_{x,s} \sim 2390$ m verstärkt auftritt.

Die Variation ist nicht groß, dennoch gibt es hier eine Tendenz für einen Zusammenhang zwischen der Dicke der Scherschicht und der sekundär angeregten Wellenlänge $\lambda_{x,s}$: Bei höherer Scherung du_e/dz , also geringerer Scherschichtdicke d_u , werden größere Wellenlängen $\lambda_{x,s}$ angeregt.

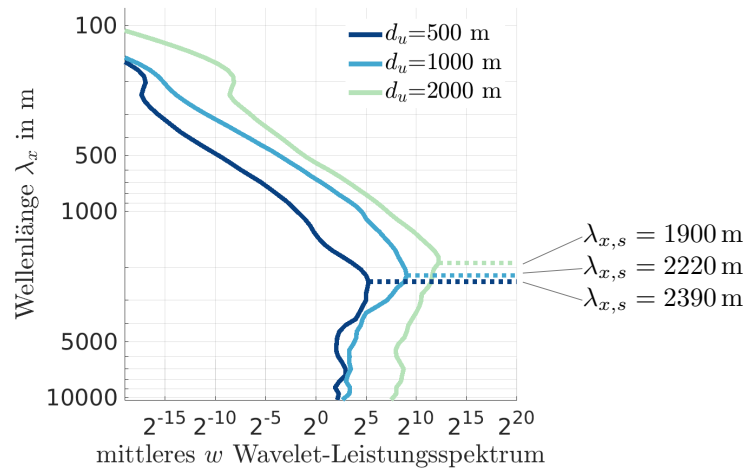


Abb. 4.67: Gemittelte Wavelet-Spektren für unterschiedliche Scherschichtdicken d_u . Diese Schichtdicken entsprechen bei einer Abnahme um 20 m s^{-1} Scherungen von $du_e/dz \in \{-0.04 \text{ s}^{-1}, -0.02 \text{ s}^{-1}, -0.01 \text{ s}^{-1}\}$. Das zu $d_u = 500$ m gehörige Profil ist an seiner Ursprungslage, die anderen Profile sind jeweils um 2^2 nach rechts verschoben. Gepunktete Linien zeigen die Lage des Maximums des Spektrums.

4.4.3 Situation 3

Am 12. 7. 2014 fanden Messungen im Rahmen von DEEPWAVE statt, bei denen die Verteilung verschiedener Spurengase Hinweise darauf gaben, dass möglicherweise irreversibler Massenaustausch über die Tropopause hinweg stattgefunden hatte. Dieses Verhalten ist oft im Zusammenhang mit brechenden Wellen beobachtbar.

Modelleinstellungen

Das Modellgebiet beträgt hier $L_x = 100$ km in horizontaler Richtung und $L_z = 50$ km in vertikaler Richtung, bei einer räumlichen Auflösung von $\Delta x \sim \Delta z \sim 50$ m. Mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.25$ s werden $T = 10$ h simuliert. Die sinusförmige Orographie am Modellunterrand weist eine Höhe von $H = 200$ m auf. Am Modelloberrand befindet sich eine Schwammschicht ab einer Höhe von $z_S = 44$ km, innerhalb der die Strömung mit einer Dämpfungskonstante von $\alpha_S = 1/(500 \text{ s})$ auf den Umgebungszustand relaxiert wird. Zur Untersuchung von Austauschprozessen wird ein Tracer *chm* initialisiert, der im Modell passiv advehiert wird. Mit der Tropopausenhöhe $z_{tp} = 10$ km wird die Verteilung des Tracers zu Beginn der Simulation durch folgende Funktion beschrieben:

$$chm(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z \leq z_{tp} \\ 0, & \text{für } z > z_{tp} \end{cases} \quad (4.23)$$

Umgebungsbedingungen und Windfeld

In Abbildung 4.68a und 4.68c sind die Umgebungsprofile gezeigt. Der Umgebungswind nimmt in der Troposphäre von $u_e = 0 \text{ m s}^{-1}$ am Boden auf $u_e = 30 \text{ m s}^{-1}$ in 15 km Höhe zu. Nach einer Abnahme bis auf $u_e = 13 \text{ m s}^{-1}$ in 22 km Höhe steigt die Geschwindigkeit wieder an. Die Brunt-Väisälä-Frequenz hat in der Troposphäre einen konstanten Wert von $N^2 = 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ bis zu einer Höhe von $z_{tp} = 10$ km. Dort nimmt ihr Wert innerhalb von 500 m auf $N^2 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ zu. Nach einer Abnahme auf $N^2 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ in 16 km Höhe nimmt der Wert der Brunt-Väisälä-Frequenz wieder zu, bis er ab einer Höhe von 21 km konstant bei $N^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ bleibt. Das vertikale Windfeld in 4.68b zeigt in Bodennähe einen deutlich anderen Verlauf als es in den Situationen 1 und 2 (Abbildungen 4.55 und 4.58) der Fall ist. Da der Hintergrundwind für $z = 0$ km verschwindet, befindet sich unmittelbar am Boden eine kritische Schicht und die Propagationsbedingung für Schwerewellen ist erst bei zunehmender Höhe erfüllt. Während in linearer Theorie eine Anregung von Wellen hier nicht möglich wäre, zeigt die Simulation, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, dass Wellen in der Troposphäre propagieren. Beim Überströmen der Sinus-Bergkette erfolgt hier eine vertikale Auslenkung nicht nur direkt am Boden, sondern auch in den Höhenlagen darüber, sodass auch von dort aus Wellen angeregt werden können. Dies hat jedoch die kleinskalige Struktur in Bodennähe zu verantworten. In großer Höhe ist eine ständige Änderung der Wellenlängen zu beobachten.

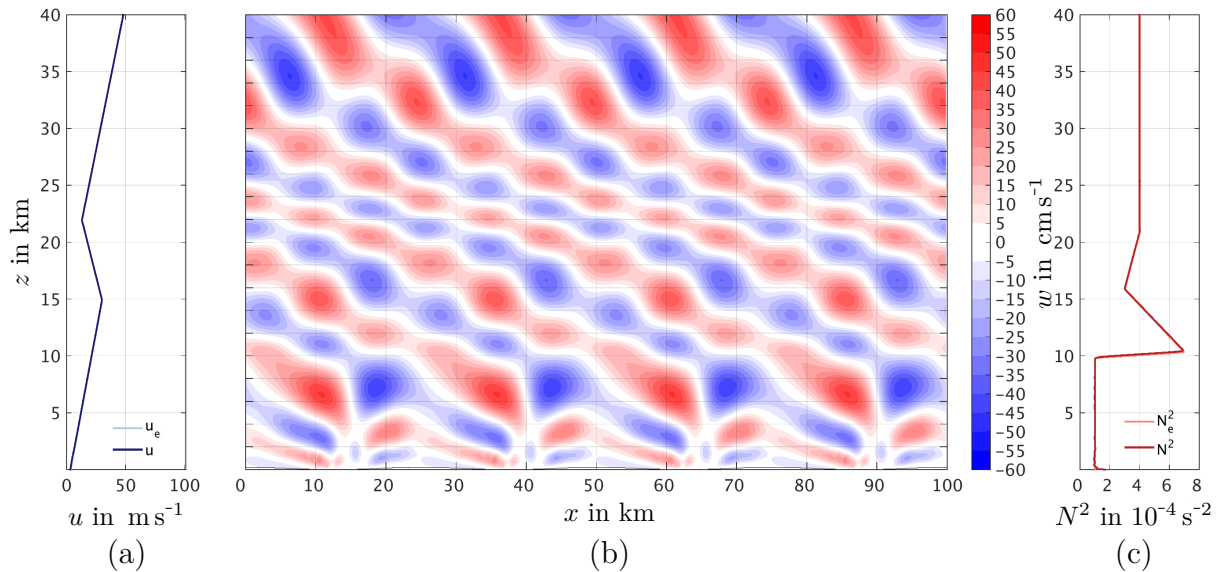


Abb. 4.68: Sinus-Bergprofil mit $H = 200 \text{ m}$ (a): Horizontal gemittelter Horizontalwind $\bar{u}(t = 4 \text{ h})$ (dunkelblau) und anfänglicher Horizontalwind u_e (hellblau), (b): Vertikales Windfeld $w(t = 4 \text{ h})$ für $\lambda_x = 25 \text{ km}$ und $H = 200 \text{ m}$, (c): Horizontal gemittelte Brunt-Väisälä-Frequenz \bar{N}^2 nach $t = 4 \text{ h}$ (dunkelrot) und anfängliche Brunt-Väisälä-Frequenz N_e^2 (hellrot).

Spurenstofftransport

Abbildung 4.69 zeigt eine horizontale Mittelung der Abweichung des Tracers zur Anfangsverteilung, $\Delta chm = chm(t) - chm(t = 0 \text{ h})$, zu verschiedenen Zeitpunkten. Nach 2 h hat der Wert von chm oberhalb von $z = 10 \text{ km}$ bereits abgenommen, während er unterhalb von $z = 10 \text{ km}$ zugenommen hat. Im Verlauf der Zeit wird sichtbar, wie sich die Schicht, in der Änderungen von chm gegenüber der Anfangsverteilung auftreten, immer weiter verbreitert.

Dieser Versuchsaufbau wurde mit verschiedenen Wellenlängen zwischen $\lambda_x = 14.3 \text{ km}$ und $\lambda_x = 100 \text{ km}$ wiederholt. Dabei traten nur geringe Unterschiede in der Verteilung von chm auf. Es konnte also mit diesem Vorgehen keine genauere Eingrenzung dazu erfolgen, bei welchen Wellenlängen der Massenaustausch besonders stark ist.

Die Tracerverteilung zeigt hier eine größere Änderung gegenüber ihrem Anfangszustand als eine vergleichende Simulation mit konstanten Umgebungsprofilen. Der Transport des Spurenstoffs geht in Abbildung 4.69 also über reine Diffusion hinaus. Dennoch finden die Änderungen in einem räumlich eingeschränkten Bereich von wenigen 100 m um die Tropopausenregion herum statt und fallen außerhalb dieser Region schnell ab.

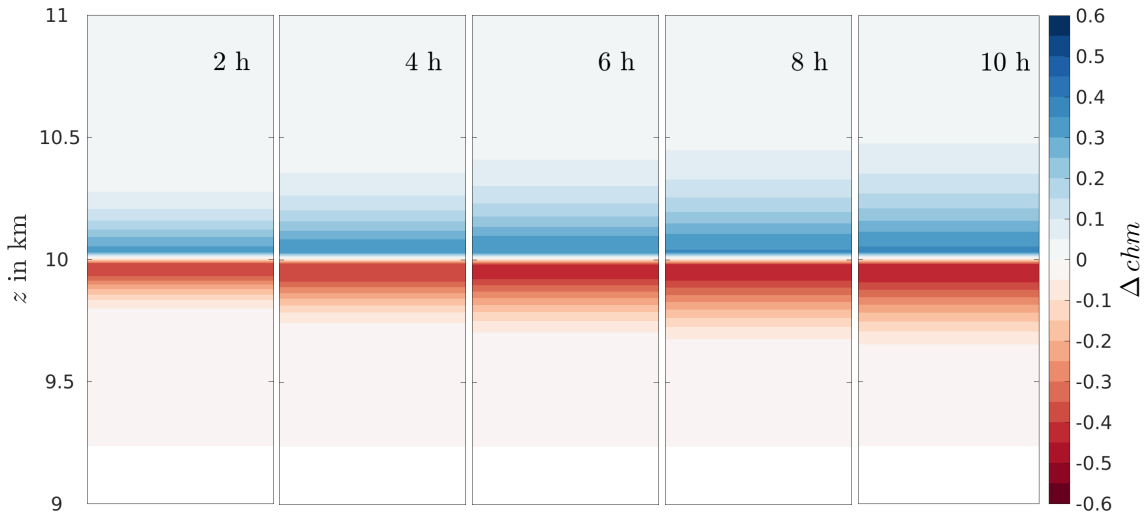


Abb. 4.69: Verteilung des passiven Tracers chm zu verschiedenen Zeitpunkten. Dargestellt ist eine horizontale Mittelung der Differenz zur anfänglichen Verteilung $\Delta chm = chm(t) - chm(t = 0 \text{ h})$. Es handelt sich um eine Simulation mit horizontaler Wellenlänge $\lambda_x = 25 \text{ km}$ bei einer Berghöhe $H = 200 \text{ m}$.

4.4.4 Zusammenfassung

Ausgehend von einigen Fällen, die bei der Messkampagne DEEPWAVE interessante Wellenerscheinungen zeigten, wurden numerische Simulationen durchgeführt, um einzelnen Teilaspekten aus den Beobachtungen nachzugehen. Dafür wurden die atmosphärischen Bedingungen zu einem Zeitpunkt, an dem Messungen durchgeführt wurden, als Umgebungsbedingungen zur orographischen Anregung von Wellen in EULAG herangezogen.

Der erste untersuchte Fall wies während der Messkampagne die höchsten beobachteten Energieflüsse auf. Numerische Simulationen für verschiedene Wellenlängen zeigten, dass diese, wie es auch Erklärungsansätze aus der Analyse der Messdaten nahelegten, annähernd linear durch die Tropopause propagierten. Die Wellenlängen, die die stärksten Energieflüsse verursachten, konnten durch diese Betrachtung in einem Bereich von etwa $\lambda_x = 40 \text{ km}$ lokalisiert werden.

Im zweiten untersuchten Fall wies das horizontale Windprofil eine kritische Schicht auf, in der die Windgeschwindigkeit verschwand. In den numerischen Simulationen fand keine Propagation langer Wellen durch diese Schicht statt. Bei kürzeren Wellen war jedoch die Entwicklung sekundärer Wellen sichtbar. Das Stabilitätsprofil der Umgebung wurde im Bereich der Wellengeneration deutlich beeinflusst und ein Test der Eliassen-Palm-Beziehung zeigte nicht-lineares Verhalten. Bei Erhöhung der Anfangsamplitude erhöhte sich diese Wechselwirkung mit dem Hintergrund und es waren auch im Horizontalwind deutliche Einflüsse erkennbar. Die Inversionsschicht erfuhr dadurch eine Verschärfung und die Scherung eine Zunahme auf etwa den doppelten Wert.

Weiterhin wurde eine Änderung des initialen Stabilitätsprofils bei gleichbleibender kritischer Schicht vorgenommen. Dabei zeigte sich, dass die zunächst vorhandene Inversi-

onsschicht keine grundsätzliche Änderung der Entstehung sekundärer Wellen bewirkte. Die Auswirkungen auf den Hintergrundstrom in der Simulation ohne Inversionsschicht waren in einem ähnlichen Größenbereich wie bei der Existenz der Inversionsschicht. Die horizontale Wellenlänge der sekundären Wellen betrug $\lambda_x \sim 2$ km und eine Änderung der Dicke der Scherschicht, innerhalb der die kritische Windgeschwindigkeit Null erreicht wurde, bewirkte eine Änderung dieser Wellenlänge. Die Abhängigkeit war schwach, zeigte hier jedoch, dass geringe Schichtdicken die Entstehung größerer sekundärer Wellen zur Folge hatten.

Es wurde außerdem getestet, ob die Entstehung sekundärer Wellen auch bei dreidimensionalen Simulationen stattfindet und ob die Auflösung relevant ist (nicht gezeigt). In beiden Fällen wurden sehr ähnliche Ergebnisse erzielt, das Phänomen ist also kein numerisches Artefakt aufgrund der Auflösung oder der Betrachtung in zwei Dimensionen.

Eine weitere Untersuchung zeigte den Transport von Spurenstoffen durch die Tropopausenregion. Ein künstlicher Tracer, der passiv mit der Strömung advehiert wurde, änderte im Modell beim Durchgang einer Welle sein Profil gegenüber dem Anfangszustand. Auch in den Messungen wurde in diesem Fall irreversibler Massenaustausch beobachtet.

5 Fazit und Ausblick

Im ersten Kapitel wurde die Entwicklung eines Verfahrens vorgestellt, das es erlaubt, Transmissionskoeffizienten weitgehend unabhängig von Reflexionen an Modellrändern zu untersuchen. Die Wellenanregung in EULAG (Prusa et al., 2008) erfolgte dabei durch zeitabhängige Umgebungszustände in einer Absorptionsschicht am Modellunterrand. Es wurden Transmissionskoeffizienten für unterschiedliche Tropopausenkonfigurationen bestimmt. Dabei konnte im Fall einer Schicht mit reduzierter Stabilität Wellentunneln beobachtet werden, solange diese Schicht deutlich kleiner als die Wellenlänge war. Bei Wellenpropagation durch eine Schicht mit linear zunehmender Stabilität in der Tropopausenregion zeigte sich, dass Wellen dann stärker transmittiert werden, wenn ihre Wellenfronten annähernd senkrecht auf die Tropopausenschicht treffen. Bei gleichbleibendem Eintreffwinkel war die Transmission kleinerer horizontaler Wellenlängen stärker als bei größeren horizontalen Wellenlängen. Auch eine kleinere vertikale Wellenlänge resultierte in einer Erhöhung der Transmission. Bei einer Tropopauseninversionsschicht konnten dieselben Tendenzen beobachtet werden wie bei einer Schicht mit linearer Stabilitätszunahme. Hier waren jedoch die Transmissionen durchweg niedriger als bei einer einfachen Zunahme der Stabilität ohne Inversion und betrug teilweise nur etwa 60 % des Wertes ohne Inversion.

Die Berechnungen mit EULAG wurden mit einem Mehrschichtenansatz (Pütz et al., 2018) verglichen und zeigten dabei sehr hohe Übereinstimmungen. Sowohl das qualitative als auch das quantitative Verhalten konnten in jedem der Testfälle reproduziert werden. Wenn kleine Unterschiede auftraten, so konnte in den hier untersuchten Fällen kein bestimmtes Gefälle ausgemacht werden: Weder war die Abweichung des Mehrschichtenmodells gegenüber den EULAG-Simulationen stets negativ noch positiv.

Diese Ergebnisse erlauben es, das vorgestellte Verfahren weiter auszubauen und auf weitere Fälle zur Simulation von Schwerewellen ohne Reflexionen am Boden anzuwenden. Die hohe Übereinstimmung mit dem Mehrschichtenmodell in der hier gezeigten Boussinesq-Näherung kann genutzt werden, um beispielsweise zu überprüfen, welche Übereinstimmung das Mehrschichtenmodell mit den anelastischen oder voll kompressiblen Gleichungen aufweist, wenn entsprechende EULAG-Simulationen als Referenzen verwendet werden.

Im zweiten Ergebnisteil wurden orographisch angeregte Wellen und ihr Durchgang durch Schichten mit Änderungen in Stabilität und Umgebungswind vorgestellt. Hierbei sollten insbesondere auch Übereinstimmungen und Abweichungen zwischen den Simulationen und der linearen Theorie betrachtet werden. Es wurde deutlich, dass bei geringen Am-

plituden die Übereinstimmung der vertikalen Wellenlängen mit den aus linearer Theorie ermittelten Werten sehr hoch ist. Bei Zunahme der Stabilität an der Tropopause erfolgte ein Übergang von troposphärischen langen Wellenlängen auf stratosphärische kürzere Wellenlängen. Dieser befand sich allerdings in den Simulationen nicht unmittelbar an der Tropopause, auch wenn die Stabilität eine sprunghafte Änderung durchlief. Stattdessen konnte die Propagation der troposphärisch bestimmten langen Wellenlängen auch noch in die untere Stratosphäre hinein beobachtet werden. Dies trat umso stärker auf, je höher die horizontale Windgeschwindigkeit war.

Eine Erweiterung dieser Simulationen auf die Betrachtung größerer Amplituden ist denkbar. Gerade die gezielte Überlagerung einzelner Wellenlängen kann zeigen, wie die Energieverlagerung im Fall von Wellenbrechen und Interaktion zwischen den einzelnen Wellen erfolgt. Außerdem kann die Thematik der Windscherungen noch weitreichender behandelt werden, hier können beispielsweise auch andere Formen von Windprofilen zum Einsatz kommen oder das Zusammenwirken von Scherschichten und Inversionsschichten untersucht werden.

Der dritte Ergebnisteil behandelte die Propagation von orographischen Wellen durch eine Tropopauseninversionsschicht. Letztere wurde durch ein hyperbolisches Profil in der Brunt-Väisälä-Frequenz definiert, bei dem die Schichtdicke der Tropopausenregion und die Stärke der Inversion durch zwei Parameter unabhängig voneinander variiert wurden. Die Untersuchung wurde mit drei verschiedenen Modellen durchgeführt: Mit dem Strömungslöser EULAG, der auch in allen anderen Teilen dieser Arbeit zum Einsatz kam, mit einem Mehrschichtenmodell, das auch im ersten Ergebnisteil zu einem Vergleich herangezogen wurde und mit einem Ray-Tracing-Modell (Muraschko et al., 2015), in dem die Entwicklung von Wellenpaketen im Orts-Frequenzraum behandelt wird.

Es wurde eine Studie durchgeführt, in der die horizontale und die vertikale Wellenlänge gleich waren. Dabei zeigte sich, dass sowohl die mit EULAG als auch die mit dem Mehrschichtenmodell berechneten Transmissionskoeffizienten eine ähnliche Verteilung aufwiesen. Die Transmission war hier am geringsten bei schmalen und stark ausgeprägten Inversionsschichten. Mit dem Mehrschichtenmodell wurden außerdem noch verschiedene Simulationsreihen mit jeweils konstanter vertikaler Wellenlänge durchgeführt. Durch die Änderung des Verhältnisses der Wellenlängen lagen die Konfigurationen hier teilweise im Bereich hydrostatischer Wellen. Im Falle der kleinsten Wellenlänge von 2 km trat nahezu vollständige Transmission auf, während bei größeren vertikalen Wellenlängen nur für einen Teil der Konfigurationen die Transmission begünstigt war. Hier zeigte sich eine Verschiebung der Lage des Minimums bei zunehmender horizontaler Wellenlänge dahingehend, dass die Transmission von langen Wellen durch eine dünne und stark ausgeprägte Inversionsschicht zunahm und gleichzeitig für dickere Schichten abnahm. Diese Beobachtung konnte mit dem Verhältnis d/λ_x , das Tropopausenschichtdicke und horizontale Wellenlänge in Beziehung setzt, in Zusammenhang gebracht werden. Das Ray-Tracing-Modell zeigte durchgehend hohe Transmissionen und kaum Reflexionen und auch eine deutlich geringere Abhängigkeit der Transmission von der Wellenlänge.

Eine Erweiterung der hier gezeigten Untersuchungen könnte darin bestehen, dass größere Schichtdicken betrachtet werden. Hier kann insbesondere der Bereich analysiert werden, in dem Tropopausenschichtdicke und Wellenlänge einen ähnlichen Wert aufweisen. Die EULAG-Simulationen könnten beispielsweise auch dahingehend erweitert werden, dass die Behandlung der Transmission durch eine Inversionsschicht mit verschiedenen Gleichungssystemen vorgenommen und verglichen wird.

Ein Verknüpfung zwischen Messungen von Schwerewellen und EULAG-Simulationen wurde im vierten Ergebnisteil hergestellt. Die atmosphärischen Hintergrundbedingungen, bei denen auf einer Messkampagne Schwerewellenaktivität beobachtet wurde, dienten hier als Ausgangspunkt idealisierter Simulationen. Dabei konnte gezielt untersucht werden, wie sich einzelne Wellenlängen bei gegebenen Umgebungsprofilen von Horizontalwind und Temperatur verhielten. Für eine Situation, in der hohe Energieflüsse in der mittleren Atmosphäre detektiert wurden, zeigte sich, dass dort die Wellen annähernd linear durch die Tropopause propagieren konnten, sodass ihre Amplitude sich immer weiter verstärkte. Dies stand in Übereinstimmung mit Ergebnissen aus der Analyse der Messungen. In einem anderen Fall konnte die Anregung sekundärer Wellen in einer kritischen Schicht beobachtet werden. Dieses Phänomen trat für unterschiedliche Wellenlängen und Amplituden auf. Durch Variation einzelner Parameter konnte außerdem festgestellt werden, dass ein umgekehrt proportionaler Zusammenhang zwischen der Dicke der Scherschicht und der Wellenlänge der sekundären Wellen bestand. Weiterhin wurde in diesen Fällen eine starke Rückwirkung auf die Hintergrundstabilität in der Entstehungsregion der sekundären Wellen beobachtet. Eine weitere betrachtete Situation wurde dahingehend untersucht, ob irreversibler Spurenstofftransport stattfand. Dazu wurde ein passiver Tracer in das Modell integriert, der nach einigen Stunden Simulationszeit auch einen Transport über die Tropopause hinweg zeigte.

Aus diesen Studien ergibt sich als Ansatzpunkt für weitere mögliche Untersuchungen die genauere Beleuchtung der Frage, unter welchen Bedingungen die sekundären Wellen auftreten können. Auch in Bezug auf den gezeigten Spurenstofftransport kann vertiefend untersucht werden, inwiefern höhere Amplituden in den initial angeregten Wellen den Austausch begünstigen.

Die hier vorgestellten Studien zeigen Teile der vielfältigen Dynamik von Schwerewellen in der Tropopausenregion. Für einen Teil der möglichen Parameter, durch die Schwerewellenpropagation beeinflusst wird, konnten in dieser Arbeit Erkenntnisse über die Stärke der Abhängigkeit und die Wechselwirkung mit andere Größen hinzugewonnen werden. Es wurde deutlich, wie kleine Änderungen in den Gradienten für Stabilität oder Wind zur Folge haben können, dass die Propagation von Schwerewellen durch die Tropopause begünstigt oder verhindert wird. Durch die große Bedeutung von Schwerewellen für den Energie- und Impulstransport in der Atmosphäre kann die Interaktion zwischen Schwerewellen und der Tropopause Auswirkungen auf der globalen Skala haben.

A: Anhang

Gauß-Wellenpaket

In Abbildung A.1 ist illustriert, welche Breiten in einem Gauß-Wellenpaket, das zum Beispiel in Abschnitt 4.3.4 verwendet wird, vorkommen. Mit der Formel

$$b(z) = a \frac{N^2}{m_0} \exp \left\{ -\frac{(z - z_0)^2}{2 \sigma_{wp}^2} \right\} \quad (\text{A.1})$$

ergeben sich für verschiedene Bruchteile von $1/2$ bis $1/20$ unterschiedliche Breiten. Die gesamte Breite des Wellenpakets entspricht in etwa seiner $1/20$ -Breite und es gilt $\Delta_{wp} \sim 5 \sigma_{wp}$.

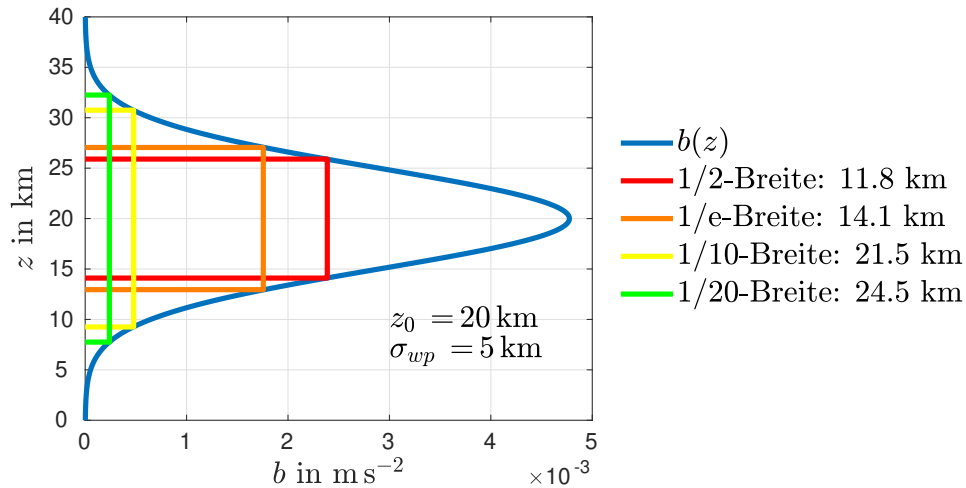


Abb. A.1:: Illustration Breite Wellenpaket.

Bestimmung von Transmissionskoeffizienten

In Abschnitt 4.3.2 wird illustriert, wie aus EULAG-Simulationen Transmissionskoeffizienten bestimmt werden. Dies ist in Abbildung A.2 für weitere Wellenlängen $\lambda_z = \lambda_x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ km dargestellt. Die einzelnen Spalten zeigen von links nach rechts: Amplitudenverhältnis $|w_{ss}|^2/|w_{ts}|^2$, Wellenzahlverhältnis m_{ts}/m_{\max} bei Verwendung von N_{\max}^2 , Wellenzahlverhältnis m_{ts}/m_{ss} bei Verwendung von N_{ss}^2 , Transmissionskoeffizient TC_{\max} bei Verwendung von N_{\max}^2 und Transmissionskoeffizient TC_{ss} bei Verwendung von N_{ss}^2 .

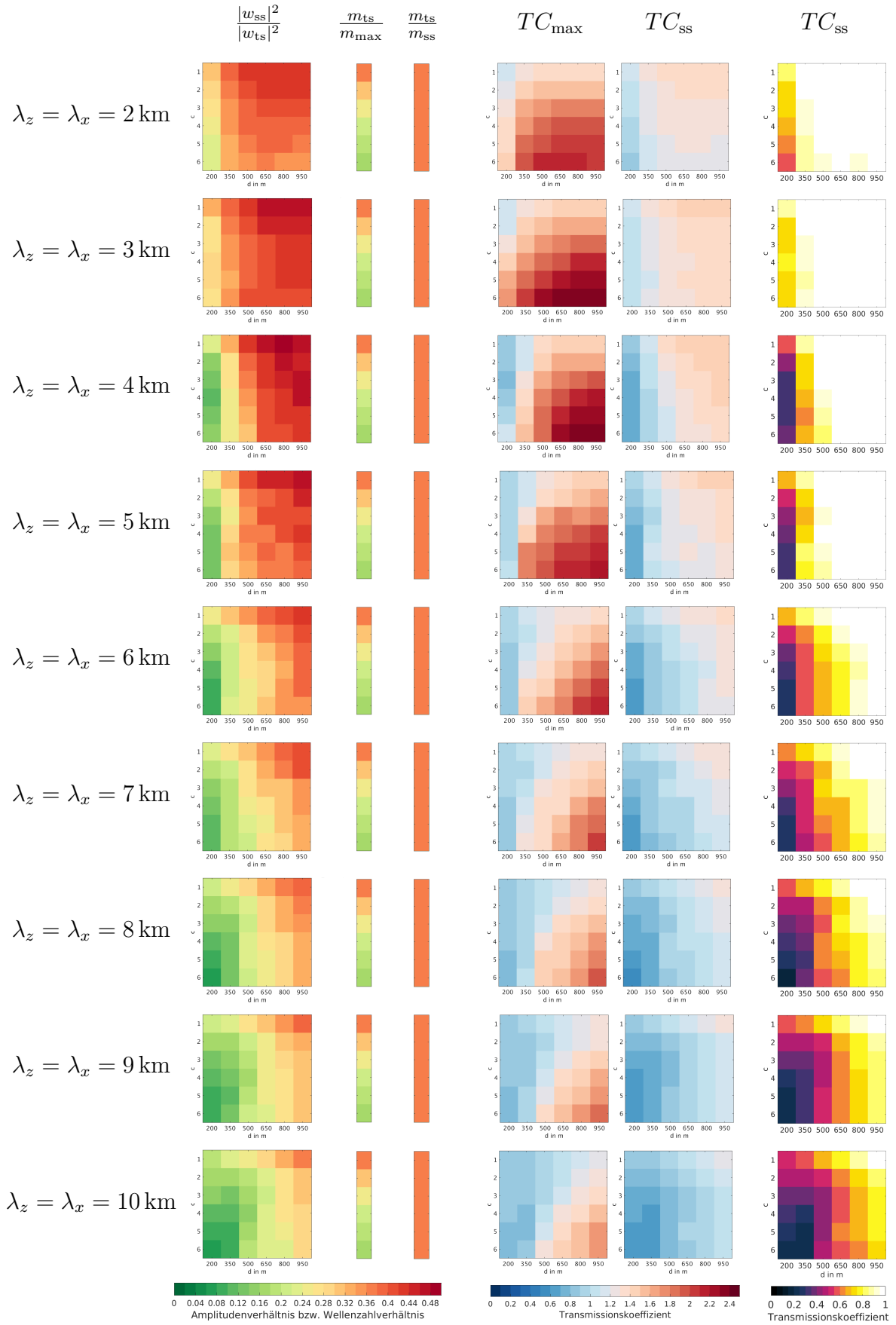


Abb. A.2.: Illustration zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten TC_{\max} und TC_{ss} .

Wavelet-Kospektren

Energieflüsse von Wellen können auch über Wavelet-Kospektren bestimmt werden (Bramberger et al., 2017; Woods & Smith, 2010). Diese sind ein Maß dafür, inwiefern zwei Variablen voneinander abhängig sind. Für die Simulationen aus Abschnitt 4.4.1 wurden Wavelet-Analysen $\tilde{p}'_n(s_j)$ und $\tilde{w}'_k(s_j)$ für Druck p' und Vertikalwind w' durchgeführt, wobei s_j hier die Wavelet-Skala zur Wellenzahl j ist (Torrence & Compo, 1998). Damit kann das Kospektrum

$$\widetilde{EF}_n(s_j) = \Re \left\{ \widetilde{P}_n(s_j) \widetilde{W}_k^*(s_j) \right\} \quad (\text{A.2})$$

berechnet werden. Hierbei handelt es sich um ein zweidimensionales Feld, dessen Indizes n für das Gitter in x -Richtung und j für die Wavelet-Skala stehen (siehe Abschnitt 3.4.2). Um diese Größe in eine physikalisch sinnvolle Zahl umzurechnen, muss sie noch umskaliert werden zu

$$EF(n, j) = \frac{\Delta j \Delta x}{C_\delta} \frac{\widetilde{EF}_n(s_j)}{s_j}. \quad (\text{A.3})$$

Hierbei bezeichnet Δ_j die Auflösung der Wellenzahlen in der Wavelet-Berechnung, Δx die horizontale Auflösung im Modellgebiet und $C_\delta = 0.776$ einen speziellen Rekonstruktionsfaktor für das hier verwendete Morlet-Wavelet (siehe auch Torrence & Compo (1998) und Abschnitt 3.4.2). In Abbildung A.3 sind Wavelet-Kospektren für Situation 1 aus Abschnitt 4.4.1 gezeigt. Der linke Bildteil bezieht sich auf eine Höhe in der Troposphäre ($z = 7.5$ km), der rechte auf eine Höhe in der Stratosphäre ($z = 11.5$ km). Es wird deutlich, dass der Energiefluss in der Stratosphäre gegenüber den troposphärischen Werten abnimmt, wie es auch in Abbildung 4.56 gezeigt ist. Verglichen mit den Energieflussprofilen in Abbildung 4.56 zeigt dieses Verfahren auch sehr ähnliche Werte.

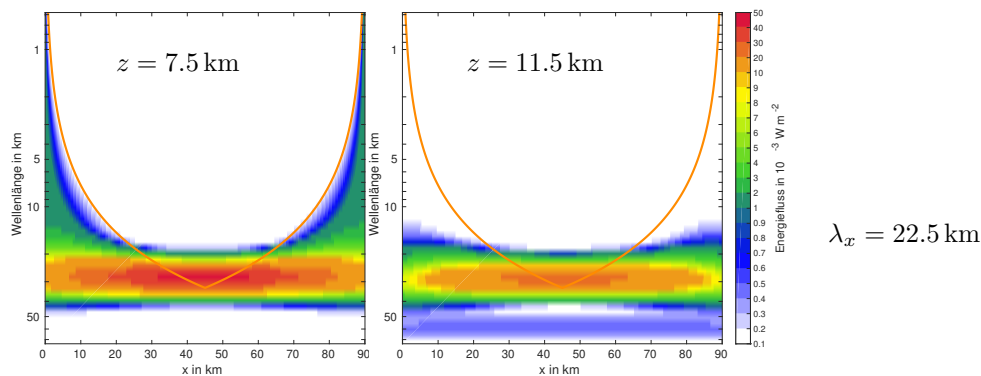


Abb. A.3.: Energiefluss aus Wavelet-Kospektren Situation 1.

Abkürzungsverzeichnis

DEEPWAVE	Deep Propagating Gravity Wave Experiment
DKRZ	Deutsches Klimarechenzentrum
ECMWF	European Center for Medium-Range Weather Forecasts
EULAG	E Ularian/ semi-LAG rangian fluid solver
MPDATA	Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm
TGE	Taylor-Goldstein-Gleichung
TIL	Tropopause Inversion Layer
USSA	US-Standardatmosphäre
WKB	von Wentzel, Kramers und Brillouin entwickelte Näherung zur Lösung von linearen Differentialgleichungen

Symbolverzeichnis

a	Dimensionslose Wellenamplitude, $a > 1$: statische Instabilität
\mathcal{A}	Wellenwirkung
α_S	Dämpfungsparameter
b_s	Grenzwert der Auftriebsbeschleunigung für statische Instabilität, $b_s = N^2/m$
b	Auftriebsbeschleunigung
β	Winkel zwischen Wellenvektor \mathbf{k} und der Horizontalen
c	Parameter für die Stärke der Tropopauseninversionsschicht
\mathbf{c}_g	Gruppengeschwindigkeit, mit Komponenten c_{gx} und c_{gz} in x - und z -Richtung
\mathbf{c}_p	Phasengeschwindigkeit, mit Komponenten $c_{px} = \omega k/ \mathbf{k} ^2$ und $c_{pz} = \omega m/ \mathbf{k} ^2$ in x - und z -Richtung, entspricht der Geschwindigkeit, die ein Beobachter hat, der sich auf einer Wellenfront mitbewegt
c_p	Spezifische Wärmekapazität von Luft bei konstantem Druck $\sim 1004.5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
c	Phasengeschwindigkeit $c = c_{Px} = \omega/k$, entspricht Geschwindigkeit der Phasenlinien, von einem festen Ort aus beobachtet
c_{Pz}	Phasengeschwindigkeit $c_{Pz} = \omega/m$, entspricht Geschwindigkeit der Phasenlinien, von einem festen Ort aus beobachtet
c_s	Schallgeschwindigkeit
d	Tag
d	Parameter für die Dicke der Tropopauseninversionsschicht
ΔN^2	Abweichung von N^2 vom Umgebungsprofil $\Delta N^2 = N^2(t) - N_e^2$
Δu	Abweichung von u vom Umgebungsprofil $\Delta u = u(t) - u_e$

Δ_{wp}	Vertikale Ausdehnung Wellenpaket, bei Gauß-Funktion gilt $\Delta_{\text{wp}} \approx 5 \sigma_{\text{wp}}$
Δ_w	Vertikale Ausdehnung der Schicht, die für Mittelung zur Berechnung von TC benutzt wird
Δt	Zeitliche Auflösung
Δx	Räumliche Auflösung in x -Richtung
Δz	Räumliche Auflösung in z -Richtung
δz	Kleine vertikale Strecke
E	Wellenenergie
\mathcal{E}	Pseudo-Energie
ε	Kleiner Parameter
\mathcal{F}	Externe Kräfte in der Impulserhaltung
F^Ψ	Externe Kräfte in der allgemeinen Advektionsgleichung
\mathbf{f}	Coriolisparameter $\mathbf{f} = 2 \Omega \sin(\phi)$, $f = \mathbf{f} $
F_b	Betrag der Auftriebskraft
\mathbf{F}_E	Energiefluss, mit Vertikalkomponente F_E
\mathbf{F}	Eliassen-Palm-Fluss
F_g	Betrag der Gravitationskraft
\mathbf{F}_M	Impulsfluss, mit Vertikalkomponente F_M
$F_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$	Vertikalkomponente des Pseudo-Impulsflusses
\mathbf{g}	Schwerebeschleunigung der Erde, $\mathbf{g} = (0, 0, -g) = (0, 0, -9.81) \text{ m s}^{-1}$
\mathcal{H}	Externe Kräfte in der Energieerhaltung
H_r	Skalenhöhe: $H_r = 7000 \text{ m}$
H_s	Skalenhöhe der Dichte und des Drucks: $H_s = RT_{00}/g$
H_θ	Skalenhöhe der potentiellen Temperatur: $H_\theta = c_p T_{00}/g$
K	Diffusionskoeffizient
$ \mathbf{k} $	Betrag des Wellenvektors $ \mathbf{k} = (k, l, m) = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$
k	Horizontale Wellenzahl in x -Richtung
l	Horizontale Wellenzahl in y -Richtung
λ_b	Wellenlänge der Berge bei sinusförmiger Orographie
λ_h	Horizontale Wellenlänge $\lambda_h = 2\pi/k_h = 2\pi/\sqrt{k^2 + l^2}$

λ_x	Horizontale Wellenlänge in x -Richtung, $\lambda_x = 2\pi/k$
λ_z	Vertikale Wellenlänge in z -Richtung, $\lambda_z = 2\pi/m$
\mathcal{L}	Typische Größenskala einer Störung
L_x	Modellgebietsgröße in x -Richtung
L_z	Modellgebietsgröße in z -Richtung
m	Vertikale Wellenzahl in z -Richtung
M	Impuls
$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$	Pseudo-Impuls
μ_N	Arithmetisches Mittel von ΔN^2
μ_u	Arithmetisches Mittel von Δu
N	Brunt-Väisälä-Frequenz
N_0	Brunt-Väisälä-Frequenz in anfänglicher Höhe (meist Boden)
N_{ss}	Brunt-Väisälä-Frequenz in der Stratosphäre
N_{ts}	Brunt-Väisälä-Frequenz in der Troposphäre
ω	Extrinsische Frequenz
$\hat{\omega}$	Intrinsische Frequenz $\hat{\omega} = \omega - u_0 k$
Ω	Winkelgeschwindigkeit der Erde, $\Omega = (0, 0, 2\pi/d)$
p	Druck
p_{00}	Referenzdruck
ϕ	Geographische Breite
Φ	Wellenphase
π	Kreiszahl (3.1412...)
Π	Exner-Druck: $\Pi = T/\theta$
ψ	Stellvertretende Bezeichnung für Größe die in Basiszustand ψ_0 und Abweichung ψ' aufgespalten wird: $\psi = \psi_0 + \psi'$
Ψ	Stellvertretende Bezeichnung für massenspezifische Eigenschaft eines Fluids
Q	Leicht veränderlicher Hintergrund, WKB-Theorie
RC	Reflexionskoeffizient
R_d	Spezifische Gaskonstante trockener Luft: $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
R_i	Richardson-Zahl

ρ	Dichte
ρ_{00}	Referenzdichte
s	Stabilität $s = N^2/g$
s_f	Parameter für Steilheit der Abnahme in Fermifunktion
σ_{wp}	Vertikale Ausdehnung Wellenpaket
t	Zeit
τ	Dämpfungsparameter (Schwammschicht) $\tau = 1/\alpha_S$
\mathcal{T}	Typische Lagrangesche Zeitskala
T	Temperatur
T_{00}	Referenztemperatur
TC	Transmissionskoeffizient
θ	Potentielle Temperatur
ϑ	Winkel zwischen Phasenlinien und Vertikale
\mathbf{u}	Zweidimensionaler Windvektor (u, w)
\mathbf{v}	Dreidimensionaler Windvektor (u, v, w)
u	Zonale Komponente des Horizontalwinds (x -Richtung)
v	Meridionale Komponente des Horizontalwinds (y -Richtung)
V	Volumen
w	Vertikalwind
w_n	normierter Vertikalwind
z_{abl}	Oberrand der Schwammschicht am Modellunterrand
z_{abu}	Unterrand der Schwammschicht am Modelloberrand
z_c	Anfängliche Höhe des Wellenpakets (Zentrum)
z_{jet}	Höhe des Strahlstroms
z_{tp}	Höhe der Tropopause

Abbildungsverzeichnis

1.1	Veranschaulichungen zur Entstehung und Beobachtung von Schwerewellen	2
1.2	Schemazeichnung zu Lebenszyklen von Schwerewellen.	3
1.3	Gradienten in der Tropopausenregion	5
2.1	Schemazeichnung Wellenausbreitung	15
3.1	Profile Basiszustand in EULAG	26
3.2	Schemazeichnung des Flusses zwischen Gitterpunkten.	33
3.3	Wellenanregung im Modell durch Topographie	35
3.4	Veranschaulichung Wellenpaket	36
3.5	Beispiele für Fourier-Transformationen	39
3.6	Veranschaulichung der Wavelet-Analyse	41
4.1	Schemazeichnung zur Reflexion und Transmission einer Welle	42
4.2	Zusammenhang zwischen Frequenzverhältnis und Ausbreitungswinkel. . .	43
4.3	Tropopause mit linearer Stabilitätszunahme. Wellenpaket. Zeitverlauf Vertikalwind.	45
4.4	Tropopause mit linearer Stabilitätszunahme. Wellenpakete unterschiedlicher Amplitude. Zeitverlauf Transmissionskoeffizienten.	46
4.5	Tropopause mit linearer Stabilitätszunahme. Wellenpaket mit erhöhter Amplitude. Zeitverlauf Vertikalwind und Einfluss auf Umgebungswind. .	47
4.6	Wellentunneln. Wellenanregung am Modellunterrand. Momentaufnahme Vertikalwind.	50
4.7	Wellentunneln. Wellenanregung am Modellunterrand. Transmissionskoeffizienten aus EULAG und Mehrschichtenmodell	51
4.8	Wellentunneln. Momentaufnahme Vertikalwind und Vergleich Transmissionskoeffizienten EULAG und Mehrschichtenmodell.	52
4.9	Hutfunktion zur Definition der Schwammschicht.	54
4.10	N^2 -Profile für lineare Zunahme, Wellentunneln und Inversionsschicht . .	55
4.11	Wellentunneln. Wellenanregung über Umgebungszustand. Vergleich von Transmissionskoeffizienten aus EULAG und Mehrschichtenmodell.	57
4.12	Tropopause mit linearer Stabilitätszunahme. Wellenanregung über Umgebungszustand. Vergleich von Transmissionskoeffizienten aus EULAG und Mehrschichtenmodell.	60
4.13	Tropopauseninversionsschicht. Wellenanregung über Umgebungszustand. Zeitverlauf Vertikalwind.	61

4.14 Tropopauseninversionsschicht. Wellenanregung über Umgebungszustand. Vergleich von Transmissionskoeffizienten aus EULAG und Mehrschichtenmodell.	62
4.15 Vergleich der Transmissionskoeffizienten mit und ohne TIL	63
4.16 Waveletanalyse: USSA	67
4.17 Orographische Anregung: Überlagerung von drei Wellenlängen	68
4.18 Überlagerung von drei Wellenlängen, Fouriertransformation	69
4.19 Topographie bei Überlagerung von 21 Sinusfunktionen	70
4.20 Überlagerung von 21 Wellenlängen, Fouriertransformation	70
4.21 Wavelet-Analyse für Tropopausenschicht mit und ohne TIL	71
4.22 Wavelet-Analyse für Tropopausenschicht variierender Dicke	72
4.23 Wavelet-Analyse für Jet variierender Lage	74
4.24 Impulsfluss und Energiefluss für Jet variierender Lage	75
4.25 Nicht-konstante Stabilität und Scherung	77
4.26 Nicht-konstante Stabilität und Scherung: Verteilung der maximalen Wavelet-Leistung	77
4.27 Profile der Brunt-Väisälä-Frequenz mit 36 Variationen von Inversionsstärke und Schichtdicke	81
4.28 Ausbreitungsbedingung orographischer Wellen	83
4.29 Illustration N^2 -Profile: zwei Schichten und Inversionsschicht	84
4.30 Veranschaulichung der Zuordnung der N^2 -Profile zu einer Matrix	85
4.31 Illustration zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten TC_{\max} und TC_{ss}	85
4.32 EULAG: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = \lambda_x$	87
4.33 EULAG: Extrem- und Mittelwerte der TC für $\lambda_z = \lambda_x$	88
4.34 EULAG: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = 2 \text{ km}$	89
4.35 EULAG: Extrem- und Mittelwerte der TC für $\lambda_z = 2 \text{ km}$	89
4.36 EULAG: Standardabweichung von N^2 in der Tropopausenregion bei unterschiedlichen Berghöhen	90
4.37 Illustration Ausbreitungswinkel von Wellen	92
4.38 Multi: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = \lambda_x$	93
4.39 Multi: Extrem- und Mittelwerte der TC für $\lambda_z = \lambda_x$	93
4.40 Multi: Extrem- und Mittelwerte der TC für $\lambda_z = 2 \text{ km}$	94
4.41 Multi: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = 10 \text{ km}$	95
4.42 Multi: Extrem- und Mittelwerte der TC für $\lambda_z = 10 \text{ km}$	95
4.43 Multi: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = 20 \text{ km}$	96
4.44 Multi: Extrem- und Mittelwerte der TC für $\lambda_z = 20 \text{ km}$	96
4.45 Lage der minimalen und der maximalen Transmissionskoeffizienten in der c - d -Matrix.	97
4.46 Illustration d/λ_x	98
4.47 RAY: Impulsfluss für (a) $\lambda_z = \lambda_x = 2 \text{ km}$ und für (b) $\lambda_z = \lambda_x = 10 \text{ km}$. .	99
4.48 Theoretischer Verlauf der Wellenpakete für verschiedene Wellenlängen . .	100
4.49 Impulsfluss-Schnitte und Impulsfluss-Zeitverlauf für $\lambda_z = \lambda_x = 4 \text{ km}$	101

4.50 RAY: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = \lambda_x$	101
4.51 RAY: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = 2 \text{ km}$	102
4.52 VERGLEICH: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = \lambda_x$	103
4.53 VERGLEICH: Transmissionskoeffizienten für $\lambda_z = 2 \text{ km}$	104
4.54 ECMWF-Reanalysedaten Situation 1	109
4.55 Vertikale Windfelder Situation 1	110
4.56 Flüsse zu Situation 1	112
4.57 ECMWF-Reanalysedaten Situation 2	114
4.58 Vertikale Windfelder Situation 2	115
4.59 Zeitverlauf w für $\lambda_x = 18 \text{ km}$	116
4.60 Einfluss auf Umgebung (N^2) Situation 2	116
4.61 Flüsse zu Situation 2	117
4.62 Simulation mit erhöhter Bergamplitude Situation 2	118
4.63 Einfluss auf Umgebung (N^2 und u) bei erhöhter Amplitude Situation 2 .	119
4.64 Flüsse bei erhöhter Amplitude Situation 2	120
4.65 Simulation ohne Inversionsschicht Situation 2	121
4.66 Wavelet-Analyse zu Simulation ohne Inversionsschicht Situation 2	122
4.67 Gemittelte Wavelet-Spektren zur Simulation ohne Inversionsschicht Si- tuation 2	123
4.68 Simulation zu Situation 3	125
4.69 Spurengastransport bei Simulation zu Situation 3	126
A.1 Illustration Breite Wellenpaket.	131
A.2 Illustration zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten TC_{\max} und TC_{ss} für weitere λ_x	132
A.3 Energiefluss aus Wavelet-Kospektren Situation 1.	133

Tabellenverzeichnis

4.1	Wellentunneln. Wellenanregung über Umgebungszustand. Vergleich von Transmissionskoeffizienten aus EULAG und Mehrschichtenmodell.	57
4.2	Tropopause mit linearer Stabilitätszunahme. Wellenanregung über Umgebungszustand. Vergleich von Transmissionskoeffizienten aus EULAG und Mehrschichtenmodell.	59
4.3	Tropauseninversionsschicht. Wellenanregung über Umgebungszustand. Vergleich von Transmissionskoeffizienten aus EULAG und Mehrschichtenmodell.	62
4.4	Wellenzahlverhältnisse Troposphäre/Stratosphäre für $\lambda_z = 2$ km	90
4.5	Kenngößen der Amplituden Situation 1	111
4.6	Kenngößen der Amplituden Situation 2	117
4.7	Kenngößen der Amplituden bei erhöhter Bergamplitude Situation 2	119

Literaturverzeichnis

- Achatz, U. (2007): Gravity-wave breaking: Linear and primary nonlinear dynamics. *Advances in Space Research* 40 (6): S. 719–733. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2007.03.078> (zitiert auf S. 24).
- Achatz, U., R. Klein & F. Senf (2010): Gravity waves, scale asymptotics and the pseudo-incompressible equations. *Journal of Fluid Mechanics* 663: S. 120–147. doi: 10.1017/S0022112010003411 (zitiert auf S. 2, 8, 16, 111).
- Bacmeister, J. T. & M. R. Schoeberl (1989): Breakdown of vertically propagating two-dimensional gravity waves forced by orography. *Journal of the Atmospheric Sciences* 46 (14): S. 2109–2134 (zitiert auf S. 26).
- Batchelor, G. K. (1953): The conditions for dynamical similarity of motions of a frictionless perfect-gas atmosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 79 (340): S. 224–235. doi: 10.1002/qj.49707934004 (zitiert auf S. 9).
- Birner, T. (2006): Fine-scale structure of the extratropical tropopause region. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 111 (D4): doi: 10.1029/2005JD006301 (zitiert auf S. 5, 66).
- Birner, T., A. Dörnbrack & U. Schumann (2002): How sharp is the tropopause at midlatitudes? *Geophysical Research Letters* 29 (14): S. 1700. doi: 10.1029/2002GL015142 (zitiert auf S. 4, 5, 73).
- Bjerknes, V. (1904): Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik. (The problem of weather prediction, considered from the viewpoints of mechanics and physics). - *Meteorologische Zeitschrift* 21, S. 1–7. (übersetzt und editiert von E. Volken und S. Brönnimann). *Meteorologische Zeitschrift* 6 (18): S. 663–667. doi: 10.1127/0941-2948/2009/416. (2009) (zitiert auf S. 7).
- Bölöni, G., B. Ribstein, J. Muraschko, C. Sgoff, J. Wei & U. Achatz (2016): The interaction between atmospheric gravity waves and large-scale flows: An efficient description beyond the nonacceleration paradigm. *Journal of the Atmospheric Sciences* 73: doi: 10.1175/JAS-D-16-0069.1 (zitiert auf S. 22, 38, 82, 99).

- Bossert, K., C. G. Kruse, C. Heale, D. C. Fritts, B. Williams, J. Snively, P.-D. Pautet & M. J. Taylor (2017): Secondary gravity wave generation over New Zealand during the DEEPWAVE campaign: Secondary Gravity Wave Generation. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 122: doi: 10.1002/2016JD026079 (zitiert auf S. 115).
- Boussinesq, J. (1897): Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section. url: <https://archive.org/details/thbeoriedelbeco01bousrich/page/26> (besucht am 23.01.2019) (zitiert auf S. 9, 25).
- Bramberger, M., A. Dörnbrack, K. Bossert, B. Ehard, D. C. Fritts, B. Kaifler, C. Mallaun, A. Orr, P.-D. Pautet et al. (2017): Does Strong Tropospheric Forcing Cause Large-Amplitude Mesospheric Gravity Waves? A DEEPWAVE Case Study. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 122 (21): S. 11, 422–11, 443. doi: 10.1002/2017JD027371 (zitiert auf S. 21, 108, 111, 133).
- Bretherton, F. P. (1966): The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 92 (394): S. 466–480. doi: 10.1002/qj.49709239403 (zitiert auf S. 16, 19).
- Bühler, O., M. E. McIntyre & J. F. Scinocca (1999): On Shear-Generated Gravity Waves that Reach the Mesosphere. Part I: Wave Generation. *Journal of the Atmospheric Sciences* 56 (21): S. 3749–3763. doi: 10.1175/1520-0469(1999)056<3749:OSGGWT>2.0.CO;2 (zitiert auf S. 1).
- Butz, T (2012): Fouriertransformation für Fußgänger. 7. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag (zitiert auf S. 39).
- Chun, H.-Y. & Y.-H. Kim (2008): Secondary waves generated by breaking of convective gravity waves in the mesosphere and their influence in the wave momentum flux. *Journal of Geophysical Research* 113: doi: 10.1029/2008JD009792 (zitiert auf S. 115).
- Clark, T. L. & R. D. Farley (1984): Severe Downslope Windstorm Calculations in Two and Three Spatial Dimensions Using Anelastic Interactive Grid Nesting: A Possible Mechanism for Gustiness. *Journal of the Atmospheric Sciences* 41: S. 329–350 (zitiert auf S. 26).
- Cotter, C. S., P. K. Smolarkiewicz & I. N. Szczyrba (2002): A viscoelastic fluid model for brain injuries. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 40 (1-2): S. 303–311. doi: 10.1002/flid.287 (zitiert auf S. 25).
- Descloitres, J. (2003): Atmospheric Gravity Waves and Internal Waves Off Australia, image taken by the Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer (MODIS) on the Terra satellite on November11, 2003. MODIS Rapid Response Team, National

- Aeronautics & Space Administration, Goddard Space Flight Center. url: <https://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=69463> (besucht am 23. 01. 2019) (zitiert auf S. 2).
- Durran, D. R. (1989): Improving the anelastic approximation. *Journal of the Atmospheric Sciences* 46 (11): S. 1453–146. doi: 10.1175/1520-0469(1989)046<1453:ITAA>2.0.CO;2 (zitiert auf S. 8, 29).
- Eckart, C. (1961): Internal Waves in the Ocean. *The Physics of Fluids* 4 (7): S. 791–799. doi: 10.1063/1.1706408 (zitiert auf S. 48).
- Eliassen, A. & E. Palm (1961): On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geofysiske Publikasjoner* 12 (3): (Zitiert auf S. 20, 112, 113).
- Fefferman, C. L. (2006): Existence and Smoothness of the Navier-Stokes equations. *The Millenium Prize Problems*. Hrsg. von J. Carlson, A. Jaffe & A. Wiles. Providence: Clay Mathematics Institute, American Mathematical Society, S. 57–67 (zitiert auf S. 8).
- Fritts, D. C. & M. J. Alexander (2003): Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Reviews of Geophysics* 41 (1): doi: 10.1029/2001RG000106 (zitiert auf S. 1, 7, 14, 20).
- Fritts, D. C., R. B. Smith, M. J. Taylor, J. D. Doyle, S. D. Eckermann, A. Dörnbrack, M. Rapp, B. P. Williams, P.-D. Pautet et al. (2016): The Deep Propagating Gravity Wave Experiment (DEEPWAVE): An Airborne and Ground-Based Exploration of Gravity Wave Propagation and Effects from Their Sources throughout the Lower and Middle Atmosphere. *Bulletin of the American Meteorological Society* 97 (3): S. 425–453. doi: 10.1175/BAMS-D-14-00269.1 (zitiert auf S. 108).
- Fritts, D. C. & L. Yuan (1989): An analysis of gravity wave ducting in the atmosphere: Eckart’s resonances in thermal and Doppler ducts. *Journal of Geophysical Research* 941: S. 18455–18466. doi: 10.1029/JD094iD15p18455 (zitiert auf S. 48).
- Fusina, F. (2011): The multiscale aspect of cirrus cloud dynamics. Diss. ETH Zürich. doi: <https://doi.org/10.3929/ethz-a-006380665> (zitiert auf S. 28).
- Gerthsen, C. (2006): Gerthsen Physik. Hrsg. von Dieter Meschede. 23., überarb. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg (zitiert auf S. 39, 58).
- Gisinger, S., A. Dörnbrack, V. Matthias, J. D. Doyle, S. D. Eckermann, B. Ehard, L. Hoffmann, B. Kaifler, C. G. Kruse et al. (2017): Atmospheric Conditions during the Deep Propagating Gravity Wave Experiment (DEEPWAVE). *Monthly Weather Review* 145 (10): S. 4249–4275. doi: 10.1175/MWR-D-16-0435.1 (zitiert auf S. 114).

- Hertzog, A., C. Souprayen & A. Hauchecorne (2002): Eikonal simulations for the formation and the maintenance of atmospheric gravity wave spectra. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 107 (D12): doi: 10.1029/2001JD000815 (zitiert auf S. 38).
- Holton, J. R. (2004): An Introduction to Dynamic Meteorology. 4. Aufl. International Geophysics Series 88. Amsterdam u.a.: Elsevier Academic Press (zitiert auf S. 10, 11, 21).
- Howard, L. N. (1961): Note on a paper of John W. Miles. *Journal of Fluid Mechanics* 10 (4): S. 509–512. doi: 10.1017/S0022112061000317 (zitiert auf S. 23).
- Ivanova, A. R. (2013): The tropopause: Variety of definitions and modern approaches to identification. *Russian Meteorology and Hydrology* 38 (12): S. 808–817. doi: 10.3103/S1068373913120029 (zitiert auf S. 4).
- Kim, Y.-J., S.-E. Eckermann & H.-Y. Chun (2003): An Overview of the Past, Present and Future of Gravity-Wave Drag Parametrization for Numerical Climate and Weather Prediction Models. *Atmosphere-Ocean* 41 (1): S. 65–98 (zitiert auf S. 2, 3).
- Klemp, J. B. & D. K. Lilly (1978): Numerical Simulation of Hydrostatic Mountain Waves. *Journal of the Atmospheric Sciences* 35 (1): S. 78–107. doi: 10.1175/1520-0469(1978)035<0078:NSOHMW>2.0.CO;2 (zitiert auf S. 31).
- Lane, Todd, Michael J. Reeder, Bruce R. Morton & Terry L. Clark (2000): Observations and Modelling of mountain waves over the Southern Alps of New Zealand. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 126: S. 2765–2788. doi: 10.1002/qj.49712656909 (zitiert auf S. 13).
- Lindzen, R. S. (1981): Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *Journal of Geophysical Research: Oceans* 86 (C10): S. 9707–9714. doi: 10.1029/JC086iC10p09707 (zitiert auf S. 23).
- Lipps, F. B. & R. S. Hemler (1982): A scale analysis of deep moist convection and some related numerical calculations. *Journal of the Atmospheric Sciences* 39: S. 2192–2210 (zitiert auf S. 9).
- Liu, X., J. Xu, J. Yue, S. L. Vadas & E. Becker (2019): Orographic Primary and Secondary Gravity Waves in the Middle Atmosphere From 16-Year SABER Observations. *Geophysical Research Letters*: doi: 10.1029/2019GL082256 (zitiert auf S. 115).
- mathworks.com (2019): Discrete Fourier Transform of Vector. url: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html#buuutyt-6> (besucht am 01.03.2019) (zitiert auf S. 39).

- McIntyre, M. E. (1981): On the ‘wave momentum’ myth. *Journal of Fluid Mechanics* 106: S. 331–347. doi: 10.1017/S0022112081001626 (zitiert auf S. 19).
- Miles, J. W. (1961): On the stability of heterogeneous shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* 10 (4): S. 496–508. doi: 10.1017/S0022112061000305 (zitiert auf S. 23).
- Muraschko, J., M. D. Fruman, U. Achatz, S. Hickel & Y. Toledo (2015): On the application of Wentzel–Kramer–Brillouin theory for the simulation of the weakly nonlinear dynamics of gravity waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141 (688): S. 676–697. doi: 10.1002/qj.2381 (zitiert auf S. 16, 17, 19, 38, 82, 99, 107, 129).
- Nappo, C. J. (2012): *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves*. 2. Aufl. Cambridge, MA, USA: Academic Press (zitiert auf S. 9, 12–17, 19, 35).
- NOAA/NASA/U.S. Air Force (1976): *U.S. Standard Atmosphere 1976*. Techn. Ber. Washington, D. C.: U.S. Govt. Print. Off. (zitiert auf S. 66).
- Ogura, Y. & N. A. Phillips (1962): Scale Analysis of Deep and Shallow Convection in the Atmosphere. *Journal of the Atmospheric Sciences* 19: S. 173–179 (zitiert auf S. 9, 26, 28, 29).
- Plougonven, R. & F. Zhang (2014): Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts. *Reviews of Geophysics* 52 (1): S. 33–76. doi: 10.1002/2012RG000419 (zitiert auf S. 1).
- Prusa, J. M. & P. K. Smolarkiewicz (2003): An All-scale Anelastic Model for Geophysical Flows: Dynamic Grid Deformation. *J. Comput. Phys.* 190 (2): S. 601–622. doi: 10.1016/S0021-9991(03)00299-7 (zitiert auf S. 30).
- Prusa, J. M., P. K. Smolarkiewicz & A. A. Wyszogrodzki (2008): EULAG, a computational model for multiscale flows. *Computers and Fluids* 37: S. 1193–1207 (zitiert auf S. 25, 27, 30, 82, 105, 128).
- Pütz, C., M. Schlutow, R. Klein, V. Bense & P. Spichtinger (2018): Reflection and transmission of gravity waves at non-uniform stratification layers. arXiv. url: arxiv.org/abs/1812.08779 (zitiert auf S. 36, 37, 42, 44, 47, 50, 51, 57, 59, 62, 82, 92, 106, 128).
- Rieper, F., U. Achatz & R. Klein (2013): Range of validity of an extended WKB theory for atmospheric gravity waves: one-dimensional and two-dimensional case. *Journal of Fluid Mechanics* 729: S. 330–363. doi: 10.1017/jfm.2013.307 (zitiert auf S. 36, 45).

- Rockwell, Alison (2014): Quick Questions for DEEPWAVE PIs: Vertical development of gravity waves. National Center for Atmospheric Research | Earth Observing Laboratory. url: www.eol.ucar.edu/deepwave/eo (besucht am 23.01.2019) (zitiert auf S. 2).
- Scorer, R. S. (1949): Theory of waves in the lee of mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 75 (323): S. 41–56. doi: 10.1002/qj.49707532308 (zitiert auf S. 13).
- Smolarkiewicz, P. K. (1982): A Simple Positive Definite Advection Scheme with Small Implicit Diffusion. *Monthly Weather Review* 111: S. 479–486 (zitiert auf S. 34).
- Smolarkiewicz, P. K. & P. Charbonneau (2013): EULAG, a computational model for multiscale flows: An MHD extension. *Journal of Computational Physics* 236: S. 608–623. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.11.008> (zitiert auf S. 25).
- Smolarkiewicz, P. K. & L. G. Margolin (1998): MPDATA: A Finite-Difference Solver for geophysical Flows. *Journal of Computational Physics* 140: S. 459–480 (zitiert auf S. 31).
- Smolarkiewicz, P. K. & J. Szmelter (2011): A nonhydrostatic unstructured-mesh sound-proof model for simulation of internal gravity waves. *Acta Geophysica* 59 (6): S. 1109. doi: 10.2478/s11600-011-0043-z (zitiert auf S. 30).
- Smolarkiewicz, P.K. & J.M. Prusa (2002): Forward-in-time Differencing for Fluids: Simulation of Geophysical Turbulence. *Turbulent Flow Computation*. Hrsg. von Geurts B. Drikakis D. Bd. 66. Fluid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Springer (zitiert auf S. 25).
- Spichtinger, P. & K. M. Gierens (2009): Modelling of cirrus clouds - Part 1a: Model description and validation. *Atmospheric Chemistry and Physics* 9: S. 685–706 (zitiert auf S. 25).
- Spiegel, E. A. & G. Veronis (1960): On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophysical Journal* 131: S. 442–447 (zitiert auf S. 10).
- Sutherland, B. R. (2010): Internal Gravity Waves. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511780318 (zitiert auf S. 1, 14, 18–20).
- Sutherland, B. R. & K. Yewchuk (2004): Internal Wave Tunnelling. *Journal of Fluid Mechanics* 511: S. 125–134. doi: 10.1017/S0022112004009863 (zitiert auf S. 42, 48).

- The COMET Program (2019): Buoyancy Oscillation with Advection. The source of this material is the COMET® Website at <http://meted.ucar.edu/> of the University Corporation for Atmospheric Research (UCAR), sponsored in part through cooperative agreement(s) with the National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), U.S. Department of Commerce (DOC). ©1997-2017 University Corporation for Atmospheric Research. All Rights Reserved. url: <http://www.eumetrain.org/data/4/452/navmenu.php?tab=4&page=4.0.0> (besucht am 23. 01. 2019) (zitiert auf S. 2).
- Torrence, C. & G. P. Compo (1998): A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society* 79: S. 61–78. doi: [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2) (zitiert auf S. 40, 41, 133).
- Vosper, S. B. (2004): Inversion effects on mountain lee waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 130 (600): S. 1723–1748. doi: 10.1256/qj.03.63 (zitiert auf S. 5).
- Weisstein, E. W. (2019): Fourier Transform. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. url: <http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html> (besucht am 02. 03. 2019) (zitiert auf S. 39).
- WMO (1957): Definition of the Tropopause. *WMO Bulletin* 6 (4): S. 136–137 (zitiert auf S. 4).
- (2017): International Cloud Atlas. Manual on the Observation of Clouds and Other Meteors (WMO-No. 407). url: <https://cloudatlas.wmo.int/species-altocumulus-lenticularis-ac-len.html> (besucht am 17. 04. 2019) (zitiert auf S. 2).
- Woods, B. K. & R. B. Smith (2010): Energy Flux and Wavelet Diagnostics of Secondary Mountain Waves. *Journal of the Atmospheric Sciences* 67 (11): S. 3721–3738. doi: 10.1175/2009JAS3285.1 (zitiert auf S. 21, 133).
- (2011): Short-Wave Signatures of Stratospheric Mountain Wave Breaking. *Journal of the Atmospheric Sciences* 68 (3): S. 635–656. doi: 10.1175/2010JAS3634.1 (zitiert auf S. 115).
- Wurtele, M. G., R. D. Sharman & T. L. Keller (1987): Analysis and Simulations of a Troposphere–Stratosphere Gravity Wave Model. Part I. *Journal of the Atmospheric Sciences* 44 (21): S. 3269–3281. doi: 10.1175/1520-0469(1987)044<3269:AASOAT>2.0.CO;2 (zitiert auf S. 5).

Danksagung

Die Danksagung ist in der digitalen Version aus Gründen des Datenschutzes nicht enthalten. Allen, die mich während meiner Promotionszeit unterstützt haben, möchte ich ein herzliches Danke sagen!