

Der Renormierungsgruppen-Fluß der konform-reduzierten Quantengravitation



Dissertation zur Erlangung des Grades

„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik

der Johannes Gutenberg-Universität, Mainz



vorgelegt von

Holger Weyer

geboren in Mainz



Mainz, im September 2010

Erster Gutachter:

Zweiter Gutachter:

Datum der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 2010

D77 Mainzer Dissertation

ZUSAMMENFASSUNG

Wir analysieren die Rolle von „Hintergrundunabhängigkeit“ im Zugang der effektiven Mittelwertwirkung zur Quantengravitation. Wenn der nicht-störungstheoretische Renormierungsgruppen-(RG)-Fluß „hintergrundunabhängig“ ist, muss die Vergrößerung durch eine nicht spezifizierte, variable Metrik definiert werden. Die Forderung nach „Hintergrundunabhängigkeit“ in der Quantengravitation führt dazu, daß die funktionale RG-Gleichung von zusätzlichen Feldern abhängt; dadurch unterscheidet sich der RG-Fluß in der Quantengravitation deutlich von dem RG-Fluß einer gewöhnlichen Quantentheorie, deren Moden-Cutoff von einer starren Metrik abhängt. Beispielsweise kann in der „hintergrundunabhängigen“ Theorie ein Nicht-Gauß'scher Fixpunkt existieren, obwohl die entsprechende gewöhnliche Quantentheorie keinen solchen entwickelt. Wir untersuchen die Bedeutung dieses universellen, rein kinematischen Effektes, indem wir den RG-Fluß der Quanten-Einstein-Gravitation (QEG) in einem „konform-reduzierten“ Zusammenhang untersuchen, in dem wir nur den konformen Faktor der Metrik quantisieren. Alle anderen Freiheitsgrade der Metrik werden vernachlässigt. Die konforme Reduktion der Einstein-Hilbert-Trunkierung zeigt exakt dieselben qualitativen Eigenschaften wie in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung. Insbesondere besitzt sie einen Nicht-Gauß'schen Fixpunkt, der notwendig ist, damit die Gravitation asymptotisch sicher ist. Ohne diese zusätzlichen Feldabhängigkeiten ist der RG-Fluß dieser Trunkierung der einer gewöhnlichen ϕ^4 -Theorie. Die lokale Potentialnäherung für den konformen Faktor verallgemeinert den RG-Fluß in der Quantengravitation auf einen unendlich-dimensionalen Theorienraum. Auch hier finden wir sowohl einen Gauß'schen als auch einen Nicht-Gauß'schen Fixpunkt, was weitere Hinweise dafür liefert, daß die Quantengravitation asymptotisch sicher ist. Das Analogon der Metrik-Invarianten,

die proportional zur dritten Potenz der Krümmung ist und die die störungstheoretische Renormierbarkeit zerstört, ist unproblematisch für die asymptotische Sicherheit der konform-reduzierten Theorie. Wir berechnen die Skalenfelder und -dimensionen der beiden Fixpunkte explizit und diskutieren mögliche Einflüsse auf die Vorhersagekraft der Theorie. Da der RG-Fluß von der Topologie der zugrundeliegenden Raumzeit abhängt, diskutieren wir sowohl den flachen Raum als auch die Sphäre. Wir lösen die Flußgleichung für das Potential numerisch und erhalten Beispiele für RG-Trajektorien, die innerhalb der Ultraviolett-kritischen Mannigfaltigkeit des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes liegen. Die Quantentheorien, die durch einige solcher Trajektorien definiert sind, zeigen einen Phasenübergang von der bekannten (Niederenergie-) Phase der Gravitation mit spontan gebrochener Diffeomorphismus-Invarianz zu einer neuen Phase von ungebrochener Diffeomorphismus-Invarianz. Diese Hochenergie-Phase ist durch einen verschwindenden Metrik-Erwartungswert charakterisiert.

ABSTRACT

We analyze the conceptual role of background independence in the application of the effective average action to quantum gravity. Insisting on a background independent nonperturbative renormalization group (RG) flow the coarse graining operation must be defined in terms of an unspecified variable metric since no rigid metric of a fixed background spacetime is available. This leads to an extra field dependence in the functional RG equation and a significantly different RG flow in comparison to the standard flow equation with a rigid metric in the mode cutoff. The background independent RG flow can possess a non-Gaussian fixed point, for instance, even though the corresponding standard one does not. We demonstrate the importance of this universal, essentially kinematical effect by computing the RG flow of Quantum Einstein Gravity (QEG) in the “conformally reduced” theory which discards all degrees of freedom contained in the metric except the conformal one. The conformally reduced Einstein-Hilbert approximation has exactly the same qualitative properties as in the full Einstein-Hilbert truncation. In particular it possesses the non-Gaussian fixed point which is necessary for asymptotic safety. Without the extra field dependence the resulting RG flow is that of a simple ϕ^4 -theory. We employ the Local Potential Approximation for the conformal factor to generalize the RG flow on an infinite dimensional theory space. Again we find a Gaussian as well as a non-Gaussian fixed point which provides further evidence for the viability of the asymptotic safety scenario. The analog of the invariant cubic in the curvature which spoils perturbative renormalizability is seen to be unproblematic for the asymptotic safety of the conformally reduced theory. The scaling fields and dimensions of both fixed points are obtained explicitly and possible implications for the predictivity of the theory are discussed. Since the RG flow depends on

the topology of the underlying spacetime we consider the flat space as well as the sphere. Solving the flow equation for the potential numerically we obtain examples of renormalization group trajectories inside the ultraviolet critical surface of the non-Gaussian fixed point. The quantum theories based upon some of them show a phase transition from the familiar (low energy) phase of gravity with spontaneously broken diffeomorphism invariance to a new phase of unbroken diffeomorphism invariance; this high energy phase is characterized by a vanishing expectation value of the metric.

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|---|-------------|
| Abbildungsverzeichnis | xiii |
| Tabellenverzeichnis | xv |
| 1 Einleitung | 1 |
| I Grundlagen | 15 |
| 2 Die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Wirkung | 17 |
| 2.1 Bemerkungen | 19 |
| 2.2 Das ursprüngliche und das invertierte Bild | 19 |
| 3 Die effektive Mittelwertwirkung für die konform-reduzierte Gravitation | 23 |
| 3.1 Die Hintergrundfeld-Methode | 23 |
| 3.1.1 Das Pfadintegral | 24 |
| 3.1.2 Die Metriken in der Konstruktion | 27 |
| 3.2 Die Mittelwertwirkung für den konformen Faktor | 29 |
| 3.2.1 Der Cutoffoperator | 30 |

| | |
|---|-----------|
| II Die konforme Reduktion der Einstein-Hilbert-Trunkierung | 35 |
| 4 Die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Trunkierung | 37 |
| 4.1 Der Ansatz für die effektive Mittelwertwirkung | 37 |
| 4.2 Die projizierten Renormierungsgruppen-Gleichungen | 38 |
| 4.2.1 Die Wahl der Infrarot-Cutoffs | 40 |
| 4.2.2 Die β -Funktionsrechnung (ii) | 42 |
| 4.2.3 Die Einführung dimensionsloser Größen | 44 |
| 4.2.4 Die β -Funktionsrechnung (i) | 46 |
| 4.3 Die β -Funktionen für die dimensionslose Newton- und kosmologischen Konstante | 46 |
| 4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für vier Dimensionen | 49 |
| 4.5 Vergleich mit der funktionalen Renormierungsgruppen-Gleichung eines skalaren Materiefeldes | 52 |
| 5 Asymptotische Sicherheit in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung | 57 |
| 5.1 Das Anti-Abschirmungsverhalten der Newton-Konstanten | 57 |
| 5.2 Die Suche nach Fixpunkten | 59 |
| 5.2.1 Beliebige Dimensionen | 60 |
| 5.3 Die kritischen Exponenten des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes | 66 |
| 5.4 Das Phasenportrait des Renormierungsgruppen-Flusses | 68 |
| 5.5 Zusammenfassung Teil II | 72 |
| III Die lokale Potentialnäherung | 75 |
| 6 „Hintergrundunabhängigkeit“ durch Hintergrundfelder | 77 |
| 7 Die Flußgleichungen in der lokalen Potentialnäherung | 83 |
| 7.1 Der Trunkierungsansatz in der lokalen Potentialnäherung | 84 |
| 7.2 Der Cutoff-Operator | 87 |
| 7.3 Die Flußgleichung für das laufende Potential | 91 |
| 7.3.1 Die Sphäre | 91 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 7.3.2 | Die Spektralsummen für den optimierten Cutoff | 92 |
| 7.3.3 | Der flache Raum | 98 |
| 7.3.4 | Die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Näherung | 99 |
| 7.4 | Die Flußgleichung für die laufende Newton-Konstante | 100 |
| 7.4.1 | Der flache Raum | 100 |
| 7.4.2 | Die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Näherung | 102 |
| 7.4.3 | Die Sphäre | 102 |
| 7.A | Zusammenfassung der Ergebnisse für vier Dimensionen | 103 |
| 8 | Allgemeine Eigenschaften des Renormierungsgruppen-Flusses in der lokalen Potentialnäherung | 105 |
| 8.1 | Das asymptotische Verhalten für $\varphi \rightarrow \infty$ | 106 |
| 8.2 | Die Struktur des Anfangswertproblems | 107 |
| 8.3 | Die Stabilität der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Näherung | 109 |
| 8.4 | Das Verhalten für $\varphi \rightarrow 0$ | 110 |
| 9 | Die Fixpunkte der lokalen Potentialnäherung | 113 |
| 9.1 | Der Gauß'sche Fixpunkt auf dem flachen Raum und auf der Sphäre | 113 |
| 9.2 | Die lineare Stabilitätsanalyse | 114 |
| 9.3 | Die Stabilitätsanalyse des Gauß'schen Fixpunktes auf dem flachen Raum und auf der Sphäre | 116 |
| 9.4 | Der Nicht-Gauß'sche Fixpunkt | 119 |
| 9.4.1 | Der flache Raum | 119 |
| 9.4.2 | Die Sphäre | 123 |
| 9.5 | Die Stabilitätsanalyse des NGFP | 126 |
| 9.5.1 | Die Skalenfelder und die Bedingung $n' < 4$ | 126 |
| 9.5.2 | Die UV-kritische Mannigfaltigkeit und Subsidiaritätsbedingungen | 135 |
| 10 | Der Übergang zu einer Phase mit ungebrochener Diffeomorphismus-Invarianz | 141 |
| 10.1 | Eine analytische Lösung im flachen Raum | 142 |
| 10.2 | Phasenübergänge erster Ordnung im flachen Raum | 146 |
| 10.3 | Phasenübergänge auf der Sphäre | 149 |

| | |
|---|------------|
| 11 Diskussion und Ausblick | 153 |
| A Definitionen und Konventionen | 161 |
| B Verhalten unter Weyl-Transformationen | 163 |
| C Herleitung der anomalen Dimension aus dem kinetischen Term | 165 |
| D Die Berechnung des Skalenfeldes (9.11) für beliebige Dimensionen | 173 |
| D.1 Der flache Raum | 173 |
| D.2 Die Sphäre | 175 |
| D.3 Zu den Hypergeometrischen Funktionen | 176 |
| D.4 Explizite Berechnung des $\hat{\Upsilon}_{-2}$ -Integrals in vier Dimensionen | 182 |
| D.4.1 Der flache Raum | 182 |
| D.4.2 Die Sphäre | 183 |
| Literaturverzeichnis | 185 |

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

| | | |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Schematische Darstellung der UV-kritischen Mannigfaltigkeit des NGFP. . . . | 11 |
| 3.1 | Der Cutoff-Operator \mathcal{R}_k | 31 |
| 4.1 | Die optimierte Profildfunktion (4.35) aus Ref. [60]. | 47 |
| 4.2 | Die Polkurven der CREH-Trunkierung aus der β -Funktionsrechnung (ii). . . . | 53 |
| 4.3 | Fortsetzung von Abbildung 4.2. | 54 |
| 5.1 | Die Lage der Fixpunkte und die Polkurve in der CREH-Trunkierung für η_N aus dem Potentialterm. | 61 |
| 5.2 | Fortsetzung von Abbildung 5.1. | 62 |
| 5.3 | Die Lage des NGFP in der vollen und in der konform-reduzierten EH-Trunkierung. | 62 |
| 5.4 | Phasenportrait des CREH-Flusses mit $\eta_N^{(\text{kin})}$ | 69 |
| 5.5 | Die Typ IIIa-Trajektorie, die in der Natur realisiert ist. (Aus [46].) | 70 |
| 5.6 | Phasenportrait des CREH-Flusses mit $\eta_N^{(\text{pot})}$ | 71 |
| 5.7 | Der kanonische RG-Fluß zu konstanten G und Λ . (Aus [46].) | 72 |
| 5.8 | Phasenportrait des vollen EH-Flusses. | 73 |
| 7.1 | Die Zahl n_{max} aus Gl. (7.40) in vier Dimensionen. | 94 |
| 7.2 | Die Spektralfunktionen $\rho(\varphi)$ und $\tilde{\rho}(\varphi)$ in vier Dimensionen. | 95 |
| 7.3 | Eine polynomielle Annäherung an die Spektralfunktion $\rho(\varphi)$ | 96 |
| 7.4 | Eine φ^4 -Annäherung an die Spektralfunktion $\rho(\varphi)$ | 97 |
| 8.1 | Der Exponent $\nu(d)$ | 111 |

| | | |
|------|---|-----|
| 9.1 | Das negative Fixpunktpotential $-Y_*$ in der S^4 -Topologie | 126 |
| 9.2 | Skalendimensionen realisiert durch die „ n_+ -Familie“ | 131 |
| 9.3 | Die Funktion $\theta(n)$ aus (9.48) für reelle n | 139 |
| 10.1 | Die Trajektorie aus Abschnitt 10.1 | 144 |
| 10.2 | Die Trajektorie aus Abschnitt 10.2 | 147 |
| 10.3 | Die Trajektorie aus Abschnitt 10.3 | 150 |

TABELLENVERZEICHNIS

| | | |
|-----|--|-----|
| 4.1 | Die Polkurven in der CREH-Trunkierung. | 52 |
| 5.1 | Eigenschaften des NGFP aus der vollen EH- bzw. CREH-Rechnung | 65 |
| 9.1 | Skalenfelder am Gauß'schen Fixpunkt | 118 |

EINLEITUNG



Die Formulierung einer mathematisch konsistenten Quantentheorie der Gravitation, deren Vorhersagekraft sich von den größtmöglichen bis hin zu beliebig kleinen Abständen erstreckt, ist eine der größten Herausforderungen moderner theoretischer Physik. Auch wenn die ersten Versuche zur Quantisierung des Gravitationsfeldes bis in die Dreißiger Jahre des letzten Jahrtausends zurückreichen [1] und wenn die letzten Jahre beachtliche Fortschritte in der Loop-Quantengravitation, der Stringtheorie und dem Zugang der asymptotischen Sicherheit hervorgebracht haben, um nur drei Zugänge zu nennen [2], scheint es, daß gewisse grundlegende Eigenschaften einer befriedigenden mikroskopischen Theorie immer noch fehlen oder nicht vollständig verstanden sind. Jeder der verfügbaren verschiedenen Zugänge hat immer noch beachtenswerte konzeptionelle und technische Probleme. Das schwierigste Problem auf der konzeptuellen Seite ist möglicherweise der Punkt der „Hintergrundunabhängigkeit“¹ [3–5]. Bereits in der klassischen Physik unterscheidet sich die Allgemeine Relativitätstheorie von allen anderen physikalischen Theorien dadurch, daß sie nicht nur bestimmt, wie physikalische Prozesse in einer gegebenen Raumzeit ablaufen, sondern daß sie auch die Dynamik der Raumzeit selbst beschreibt. Wir können viele Probleme, denen wir während der Quantisierung der Gravitation

¹Hier und im folgenden bedeutet der Ausdruck „hintergrundunabhängig“, in Anführungs- und Schlußzeichen gesetzt, das Fehlen einer bevorzugten Metrik; in diesem Sinne wird der Ausdruck oft zum Beispiel in der Loop-Quantengravitation [3–5] oder im Zugang mit dynamischen Triangulierungen [6–8] verwendet. Wenn es um den Hintergrundfeld-Formalismus geht, werden wir keine Anführungs- und Schlußzeichen setzen.

begegnen, wenn wir nach einer Quantentheorie der Gravitation suchen, auf diese wichtige Eigenschaft der Allgemeinen Relativitätstheorie, der „Hintergrundunabhängigkeit“ im Sinne von [3–5], zurückführen: die Gravitation erklärt den Ursprung der Raumzeit, auf der sie „lebt“, dynamisch als eine Art Grundzustandseigenschaft. Insbesondere definiert das Trägerfeld der Freiheitsgrade der Gravitation, die Metrik, die „Eigen“länge oder die Massenskala *aller* dimensionsbehafteter physikalischer Größen.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir einen speziellen Aspekt der Hintergrund(un)abhängigkeit untersuchen, der besonders wichtig ist im Kontext der asymptotischen Sicherheit [9–31]. In diesem Zugang zur Quantengravitation beschreiben wir wie in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Freiheitsgrade der Gravitation durch eine Metrik $g_{\mu\nu}$, die wir nach den gewöhnlichen Regeln der Quantenmechanik quantisieren werden. Diese Quantenfeldtheorie wird an einem Nicht-Gauß’schen Renormierungsgruppen-(RG)-Fixpunkt nichtstörungstheoretisch renormiert. Um diese Idee zu realisieren, müssen wir einen konkreten RG-Kontext wählen. Prinzipiell sind hier mehrere Wahlen möglich; sie unterscheiden sich in den erzeugenden Funktionalen, die verwendet werden, in der Art, wie Feldkonfigurationen entlang des RG-Flusses „ausintegriert“ werden und – damit verbunden – in der Interpretation der mit der „Ausintegration“ verbundenen RG-Skala, die wir von jetzt an mit k bezeichnen. In Quantentheorien auf der flachen Raumzeit existieren Realisierungen der Wilson’schen RG, zum Beispiel die effektive Mittelwertwirkung [32–35], die die spezielle Eigenschaft besitzt, daß die Massenskala k eine „quasi-physikalische“ Bedeutung im folgenden Sinne besitzt: Die grundlegende funktionale RG-Gleichung (FRGE) beschreibt die Skalenabhängigkeit der Familie von effektiven Wirkungen $\{\Gamma_k, 0 \leq k < \infty\}$, von denen jede eine effektive Feldtheorie beschreibt, die in der Nähe der Skala k gültig ist. Das bedeutet, daß für eine Skala mit typischen Impulsen p die optimale effektive Feldtheorie² durch die Mittelwertwirkung Γ_k mit $k = p$ definiert ist.

Wenn wir nun zur Quantengravitation übergehen, ist es zunächst nicht klar, wie wir die RG-Skala mit einer vergleichbaren physikalischen Bedeutung einführen können. Wenn die Skala k den Status eines physikalischen Impulses besitzen soll, so muß $1/k$ eine *Eigenlänge* statt einer *Koordinatenlänge* sein. Eigenimpulse, Eigenlängen und andere dimensionsbehaftete Größen erfordern jedoch eine Metrik für ihre Definition. Wenn diese

²Wir wollen den Begriff effektive Feldtheorie hier so verstehen, daß es ausreicht, Γ_k auf Baumgraphenniveau auszurechnen. Wenn die Fluktuationen genügend klein sind, werden dann dadurch die Quanteneffekte beschrieben, die in der Nähe der Skala k führend sind.

Metrik nicht starr sondern dynamisch ist, dann ist nicht klar, im Bezug auf welche Metrik $1/k$ eine „Eigen“länge sein soll. Wenn wir nun naiv fortführen, würde die effektive Mittelwertwirkung der Gravitation ein Funktional $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ sein, das – neben k – nur von dem Argument $g_{\mu\nu}$ abhängt. Genauer betrachtet ist $\Gamma_k[\cdot]$ für jeden festgehaltenen Wert von k eine Abbildung vom Raum der Metriken in die reellen Zahlen. Das führt dazu, daß von $\Gamma_k[\cdot]$ mit festem k aus gesehen alle Metriken gleichwertig sind, so daß $1/k$ keine „Eigen“länge bezüglich einer aus diesem Raum ausgewählten Metrik sein kann. Das ist eine direkte Konsequenz der „Hintergrundunabhängigkeit“ und hat zur Folge, daß durch die naive Realisierung einer effektiven Mittelwertwirkung, die zu einer Familie von Funktionalen $\{\Gamma_k\}$ führt, die nur von einer einzelnen Metrik abhängen, die RG-Skala k keine „quasi-physikalische“ Bedeutung im obigen Sinne besitzen kann.

Die Situation kann also wie folgt beschrieben werden. In einer gewöhnlichen Quantenfeldtheorie auf dem flachen Raum ist der RG-Fluß ein universelles Objekt in dem Sinne, daß er nicht von einer speziellen Feldkonfiguration ϕ abhängt. Aus der Sicht der laufenden Kopplungskonstanten $\{g_n(k)\}$ hat das Funktional Γ_k den Charakter einer erzeugenden Funktion. In einer Theorie mit Feld(ern) ϕ und Basisfunktionalen (Monomen) $\{P_n[\phi]\}$ entwickelt man für gewöhnlich $\Gamma_k[\phi] = \sum_n g_n(k) P_n[\phi]$. Definitionsgemäß ist $g_n(k)$ die Komponente von Γ_k in Richtung des „Basisvektors“ P_n . Die Rolle von ϕ ist lediglich die eines unbedeutenden Parameters, der zur Unterscheidung der Basisvektoren benötigt wird. Es ist daher offensichtlich, daß die RG-Trajektorien $k \mapsto \{g_n(k)\}$ keine Beziehung zu irgendeiner speziellen Feldkonfiguration ϕ besitzen. Wenn wir denselben Formalismus für die Metrik in der Quantengravitation verwenden, dann kann die Skala k kein „Eigen“impuls sein.

Die effektive Mittelwertwirkung der Gravitation, die in [10] konstruiert wurde, erreicht den gewünschten „quasi-physikalischen“ Status der Skala k durch die Verwendung des Hintergrundfeld-Formalismus [36]. Die Idee dabei ist, eine beliebige Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ festzuhalten, die (nicht notwendigerweise kleinen) Metrik-Fluktuationen $h_{\mu\nu}$ nicht-störungstheoretisch in diesem Hintergrund zu quantisieren und schließlich $\bar{g}_{\mu\nu}$ so anzupassen, daß der Erwartungswert der Fluktuation verschwindet: $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv \langle h_{\mu\nu} \rangle = 0$. Dadurch wird der Hintergrund dynamisch festgelegt. Der Vorteil dieser Methode ist, daß man nicht-störungstheoretische Hilfsmittel verwenden kann, die für Feldtheorien auf nicht-dynamischen Hintergründen entwickelt wurden. Dennoch ist die entstandene Quantentheorie gleichzeitig „hintergrundunabhängig“ in dem Sinne, daß keine spezielle Hintergrundmetrik

$\bar{g}_{\mu\nu}$ eine ausgezeichnete Rolle spielt. Während der Quantisierung des Feldes $h_{\mu\nu}$ halten wir die Hintergrundmetrik fest; wir werden sie aber niemals genau spezifizieren.

In dieser Konstruktion ist die RG-Skala k ein „Eigen“impuls im Bezug auf die Hintergrundmetrik. Technisch gesehen organisieren wir das Pfadintegral über $h_{\mu\nu}$ durch die Eigenfunktionen des kovarianten Laplace-Beltrami-Operators $D^2(\bar{g}_{\mu\nu})$, der durch die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ definiert ist; danach brechen wir die Integration bei der Infrarot-(IR)-Skala k ab. Dazu fügen wir einen Term $\Delta_k S$ zur nackten Wirkung hinzu, der die Moden unterdrückt. Folglich ist k ein $\bar{g}_{\mu\nu}$ -Eigenimpuls bezogen auf die Skala, die durch die „zuletzt ausintegrierte Mode“ bestimmt ist; daher können wir k eine annähernd physikalische Bedeutung geben. (Siehe [26, 27] für eine detaillierte Diskussion dieses Punktes.) Diese Eigenschaft der Mittelwertwirkung der Gravitation ist die zentrale Voraussetzung für die effektive Feldtheorie-Interpretation und für die Möglichkeit, RG-Verbesserungen auf der Basis von Γ_k durchzuführen [37–49].

Durch den Hintergrundfeld-Formalismus ist die Mittelwertwirkung nun ein Funktional von zwei Metriken:

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}] \equiv \Gamma_k[\bar{h}_{\mu\nu}; \bar{g}_{\mu\nu}].$$

Hier ist $g_{\mu\nu} \equiv \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$ der Erwartungswert der mikroskopischen Metrik. Nur nachdem wir den (nun komplizierteren) RG-Fluß von $\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$ gelöst haben, können wir $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ setzen und das folgende reduzierte Funktional definieren:

$$\bar{\Gamma}_k[g_{\mu\nu}] \equiv \Gamma_k[g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}].$$

Das reduzierte Funktional erzeugt auf der Massenschale dieselben Matrixelemente wie das ursprüngliche Funktional [36].

Wir sollten an dieser Stelle betonen, daß die Mittelwertwirkung $\Gamma_k[\cdot, \cdot]$ und ihr RG-Fluß „*hintergrundunabhängige*“ Objekte sind in dem Sinne des Wortes, wie es zum Beispiel in der Loop-Quantengravitation [3–5] gebraucht wird. Beide Metriken $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ sind lediglich frei variable Argumente und keine Metrik spielt eine ausgezeichnete Rolle. Ferner ist der Modencutoff durch $D^2(\bar{g}_{\mu\nu})$ ausgedrückt, der durch die variable Metrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ definiert ist, und nicht durch irgendeine starre Metrik. Das steht in deutlichem Kontrast zu Materiefeldtheorien auf einer nicht-dynamischen Raumzeit mit einer Metrik $g_{\mu\nu}^{\text{non-dyn}}$. Dort ist $\Delta_k S$ aus $D^2(g_{\mu\nu}^{\text{non-dyn}})$ konstruiert, welches durch eine tatsächlich spezielle Metrik definiert ist. Der resultierende RG-Fluß ist nicht „hintergrundunabhängig“ im Sinne von [3–5].

Neben dem Festlegen der physikalischen Skala von k hat die Verwendung der Hintergrundfeld-Methode einen zweiten, konzeptionell unabhängigen Vorteil: Wenn wir einen Eichfixierungsterm einsetzen, der invariant unter Hintergrund-Eichtransformationen ist, dann ist die resultierende Mittelwertwirkung ein *diffeomorphismus-invariantes* Funktional seiner Argumente.

In der Konstruktion der effektiven Mittelwertwirkung der Gravitation in [10] wurden diese zwei Punkte miteinander kombiniert; aufgrund der Komplexität von realistischen RG-Flüssen ist es jedoch nicht einfach zu sehen, wie genau die Abhängigkeit des IR-Cutoffs $\Delta_k S[h_{\mu\nu}; \bar{g}_{\mu\nu}]$ von der Hintergrundmetrik den Fluß beeinflusst. Eines der Ziele der vorliegenden Arbeit ist, diesen Einfluß in einer möglichst einfachen Umgebung zu studieren, in einer Näherung des RG-Flusses der Gravitation, in der die Eichung keine Rolle spielt. Dort können wir den Einfluß der Abhängigkeit des Cutoffs von der Hintergrundmetrik isoliert studieren. Die Auswirkungen dieser \bar{g} -Abhängigkeit sind ein zentrales Problem in der Konstruktion einer konsistenten Theorie der Quantengravitation. Dieses entsteht nur, weil die Metrik die wichtige Eigenschaft besitzt, daß sie die Eigengrößen aller dimensionsbehafteten Größen definiert, inklusive die der Skala k . Diese Eigenschaft wird von keinem anderen Feld geteilt.

Innerhalb einer anderen Gravitationstheorie und in einer anderen formalen Umgebung haben Floreanini und Percacci [50] ähnliche Beobachtungen gemacht. Sie studierten eine störungstheoretisch renormierbare Eichtheorie von Vielbein- und Spinzusammenhangs-Feldern. Während asymptotische Sicherheit dort kein Thema war, zeigten sie, daß die Quantisierung des Modells eine „bimetrische Theorie“ ergab. Abhängig davon, welche Metrik in dem Ultraviolett-(UV)-Regulator verwendet wird, haben sie unterschiedliche effektive Potentiale für den konformen Faktor erhalten.

Das System, das wir zunächst untersuchen wollen, erhalten wir, indem wir den RG-Fluß der Gravitation durch die folgenden zwei Schritte nähern: Zunächst beschränken wir den Theorienraum auf den der bekannten Einstein-Hilbert-Trunkierung, deren RG-Fluß in voller Allgemeinheit bekannt ist [10, 13]. Danach quantisieren wir nur den konformen Faktor der Metrik; alle anderen Freiheitsgrade werden vernachlässigt. Diese „konform-reduzierte Einstein-Hilbert“- (conformally reduced Einstein-Hilbert, „CREH“)-Trunkierung führt zu einem modifizierten RG-Fluß auf demselben Theorienraum wie die volle Einstein-Hilbert-Trunkierung. Daher wird es sehr aufschlußreich sein, die beiden zu vergleichen.

Alle Metriken, die im Rahmen der CREH-Trunkierung auftauchen, die Integrations-

variable in dem Pfadintegral, $\gamma_{\mu\nu}$, sowie die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ und der Metrik-Erwartungswert $g_{\mu\nu}$, sollen proportional zu einer Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ sein. Wir halten diese Metrik fest und werden sie niemals ändern. Auf dem flachen Raum beispielsweise wäre die Referenzmetrik die flache Metrik, $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Auf diese Weise werden $\gamma_{\mu\nu}$, $\bar{g}_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ durch eine einzelne „skalare“ Funktion repräsentiert, ihren entsprechenden konformen Faktor. Die Hintergrundmetrik zum Beispiel schreiben wir als $\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\phi}^{2/(d-2)}(x) \hat{g}_{\mu\nu}$. Der Grund für diese Struktur ist, daß wir einen kinetischen Term der üblichen Struktur proportional zu $\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ erhalten wollen. Wenn wir in vier Dimensionen die Metrik $\phi^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ in die Einstein-Hilbert-Trunkierung einsetzen, so erhalten wir ein Potential mit zwei Termen, die zu ϕ^2 sowie zu ϕ^4 proportional sind:

$$U_k^{\text{CREH}}(\phi) = -\frac{3}{4\pi G_k} \left(\frac{1}{12} \hat{R} \phi^2 - \frac{1}{6} \Lambda_k \phi^4 \right). \quad (1.1)$$

(Hier ist \hat{R} der Krümmungsskalar der Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$.) Die Kopplungskonstante des ϕ^4 -Terms ist proportional zur kosmologischen Konstanten. Diese skalar-artige ϕ^4 -Theorie wollen wir mit Hilfe der effektiven Mittelwertwirkung analysieren. Wir verwenden dabei die Hintergrundfeld-Methode, die analog zu der in der vollen Gravitationstheorie ist. Insbesondere bestimmt hier der konforme Faktor von $\bar{g}_{\mu\nu}$ die physikalische Skala von k . Konzeptionell unterscheidet sich die konform-reduzierte Theorie also nicht von der vollen Theorie in [10]; der einzige Unterschied aber ist, daß in der reduzierten Theorie nur die Quantenfluktuationen des konformen Faktors zum RG-Laufen der Kopplungen, das heißt der Newton- beziehungsweise der kosmologischen Konstanten, beitragen darf.

Die gewöhnliche Quantisierung einer ϕ^4 -Theorie mit Hilfe einer funktionalen RG-Gleichung für die effektive Mittelwertwirkung ist detailliert untersucht worden [34]. Sie beruht auf einem IR-Cutoff, der nicht von der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ abhängt. Hier ist die Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$ durch die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ definiert, die üblicherweise als die Metrik des flachen euklidischen Raumes gewählt ist. Diese Metrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ definiert in dieser gewöhnlichen Quantisierung die Bedeutung der Skala k . Diese Vorgehensweise ist die natürliche, wenn ϕ ein gewöhnliches skalares Materiefeld ist. Bis heute ist vieles über den resultierenden RG-Fluß bekannt [34]. Insbesondere finden wir oberhalb aller Massenschwellen das Laufen der ϕ^4 -Kopplung proportional zu $\ln(k)$ wieder, das wir aus der Störungstheorie kennen.

Wenn ϕ aber der konforme Faktor der Metrik ist, dann ist die Situation anders. Nun ist es natürlich, $\Delta_k S$ und damit k durch die *einstellbare* Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu} =$

$\bar{\phi}^{2/(d-2)}(x) \widehat{g}_{\mu\nu}$ zu definieren. Wir bestimmen deren konformen Faktor $\bar{\phi}$ dynamisch durch die Bedingung, daß die Fluktuationen um $\bar{\phi}$ verschwindende Erwartungswerte haben sollen. Wir finden heraus, daß sich der resultierende RG-Fluß deutlich von dem eines gewöhnlichen Skalarfeldes unterscheidet. Das RG-Laufen im Falle der Gravitation ist viel schneller. Es existiert beispielsweise in vier Dimensionen ein Regime, in dem das langsame Laufen proportional zu $\ln(k)$ des gewöhnlichen Skalars durch ein viel stärkeres Laufen der ϕ^4 -Kopplung proportional zu k^4 ersetzt ist. In diesem Regime ist die ϕ^4 -Kopplung proportional zur kosmologischen Konstanten Λ_k . Folglich verhält sich in diesem speziellen Regime die kosmologische Konstante wie k^4 . Diese quartische Abhängigkeit vom Cutoff ist etwas sehr bekanntes. Es ist genau das, was man findet, wenn man Nullpunkts-Energien aufsummiert, oder was man als quartische Divergenzen in gewöhnlichen Feynman-Diagramm-Rechnungen wiederfindet. Darüber hinaus stimmt diese Laufen mit dem Ergebnis aus der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung überein.

Fassen wir diesen wichtigen Punkt einmal zusammen: Das (erwartete) Verhalten $\Lambda_k \propto k^4$ erhalten wir nur, wenn wir die sehr spezielle Rolle der Gravitation berücksichtigen, nämlich daß sie die Eigengrößen aller physikalischer Skalen bestimmt, inklusive die der Cutoff-Skala k . Wir erhalten das Laufen der kosmologischen Konstanten proportional zu k^4 nur, wenn wir den Cutoff durch die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\phi}^2(x) \widehat{g}_{\mu\nu}$ definieren. Das viel schwächere logarithmische Verhalten der kosmologischen Konstanten, $\Lambda_k \propto \ln(k)$, erhalten wir dann, wenn wir ϕ als gewöhnlichen Skalar behandelt.

Schon früher haben Polyakov [51] und Jackiw [52] darauf hingewiesen, daß in der CREH-Näherung die Mittelwertwirkung der Gravitation vom ϕ^4 -Typ ist. Sie haben auf der Basis einer gewöhnlichen skalaren Feldtheorie argumentiert, daß die kosmologische Konstante daher eine logarithmischen Skalenabhängigkeit haben sollte. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen, daß, wenn die Skala k eine physikalische Bedeutung, indem sie in Einheiten des konformen Faktors ϕ gemessen wird, das Laufen von Λ_k dann tatsächlich viel stärker als logarithmisch ist.

Die wahrscheinlich unerwartetste und auffallendste Eigenschaft des CREH-Flusses ist, daß er einen Nicht-Gauß'schen RG-Fixpunkt (NGFP) zuläßt, der exakt dieselben qualitativen Eigenschaften besitzt wie der NGFP in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung. Die vergleichbar einfache Dynamik einer ϕ^4 -Theorie reicht also aus, um asymptotische Sicherheit zu erhalten. Die Voraussetzung ist aber, daß *man berücksichtigt, daß der konforme Faktor die Skala der Vergrößerungs-Operation definiert.*

Am NGFP ist die kosmologische Konstante positiv und dies übersetzt sich in eine negative ϕ^4 -Kopplung. Vor langer Zeit zeigte Symanzik [53, 54], daß die skalare ϕ^4 -Theorie mit einer negativen Kopplungskonstanten asymptotisch frei ist; ihre Kopplungsstärke verschwindet logarithmisch bei hohen Impulsen. Diese Theorie hat ein Potential, das nach unten ungebunden ist, und sie ist bekannt für die daraus resultierende Infrarot-Instabilität. Wenn wir den für die Gravitation passenden Cutoff verwenden, wird der asymptotisch freie RG-Fluß zu einem asymptotisch sicheren, das heißt ein NGFP entsteht. In der Quanten-Einstein-Gravitation (QEG) ist diese IR-Instabilität jedoch kein Problem. In der vollen Theorie wird sie vermutlich durch Terme höherer Ableitungen weggehoben. Es ist in der Tat bekannt [14], daß ein Term proportional zu $\int \sqrt{g} R^2$, wenn man ihn zur Einstein-Hilbert-Wirkung addiert, den kinetischen Term des konformen Faktors bei hohen Skalen stabilisiert. (Siehe dazu auch Ref. [55].)

Die Untersuchungen im Kontext der effektiven Mittelwertwirkung für die Gravitation, die während der letzten wenigen Jahren durchgeführt wurden [10–23] zeigten, daß die volle QEG wahrscheinlich einen NGFP besitzt, der die Theorie asymptotisch sicher macht. Immer kompliziertere Trunkierungen des Theorienraumes wurden analysiert, wobei dort alle Freiheitsgrade der Metrik quantisiert wurden. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit deuten an, daß der NGFP, den wir in unseren Untersuchungen gefunden haben, möglicherweise einfacher zu verstehen ist als gedacht. Es scheint, daß er seine Existenz bis zu einem gewissen Maß einem hauptsächlich „kinematischen“ Phänomen verdankt, das mit der Forderung nach „Hintergrundunabhängigkeit“ verbunden ist; weiter spielt die Tatsache eine Rolle, daß das dynamische Feld selbst, die Metrik, die Skala der Vergrößerungs-Operation bestimmt. Auf der anderen Seite können die komplizierten Selbstwechselwirkungen der Moden mit Helizität 2 vernachlässigt werden, ohne den NGFP zu zerstören. Während sie charakteristisch und notwendig für eine Beschreibung der vollen Gravitation sind, scheinen sie unbedeutend für die asymptotische Sicherheit zu sein.

In der vorliegenden Arbeit werden wir sehen, daß alle qualitativen Eigenschaften der RG-Flüsse, die wir aus der CREH- beziehungsweise aus der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung ableiten können, fast identisch sind. Das führt zu der Hoffnung, daß der konforme Faktor auch in allgemeineren Trunkierungen eine repräsentative Rolle spielt³, so daß es uns mit einiger Vorsicht möglich sein wird, aus der konformen Reduktion etwas über die volle Dynamik der Gravitation zu lernen. Technisch gesehen ist die „skalare“ Theorie

³Für frühere Arbeiten in ähnlichem Geiste siehe Ref. [56].

vergleichbar einfach, so daß man in der Lage sein sollte, Berechnungen in Bereichen des Theorienraumes durchzuführen, die sonst unerreichbar sind.

Der nächste logische Schritt in der Analyse der konform-reduzierten QEG ist die Verallgemeinerung auf einen unendlich-dimensionalen Theorienraum. In der RG-Analyse von gewöhnlichen skalaren Theorien spielte die lokale Potentialnäherung (local potential approximation, LPA) eine wichtige Rolle, insbesondere im Kontext von spontaner Symmetriebrechung und im Zugang zur Konvexität [34]. Wir werden daher die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Näherung der QEG mit Hilfe der LPA verallgemeinern. Die Idee der LPA ist es [34], den gewöhnlichen kinetischen Term aus der CREH-Näherung zu behalten, aber beliebige Terme ohne Ableitungen zu erlauben:

$$\Gamma_k[\phi = const] = + \int d^4x \sqrt{\widehat{g}} U_k(\phi). \quad (1.2)$$

Das laufende Potential $U_k(\phi)$ darf beliebige Abhängigkeiten vom Feld ϕ entwickeln; es ist nicht länger auf ein quartisches Potential beschränkt. Der relevante Theorienraum ist nun unendlich-dimensional; die entsprechenden Flußgleichungen werden eine partielle Differentialgleichung für $U_k(\cdot)$ beinhalten.

Natürlich kann die LPA keine numerisch präzise Näherung der vollen Theorie sein, auch wenn die Fluktuationen von ϕ immer einen „typischen“ Einfluß auf den RG-Fluß haben. Nichtsdestotrotz sollte sie uns ein qualitatives Verständnis und konzeptionelle Einblicke in die allgemeinen Eigenschaften der QEG bringen.

Die (relative!) technische Einfachheit der konform-reduzierten Theorie hat jedoch ihren Preis. Im allgemeinen wird es nicht möglich sein, Terme in $U_k(\phi)$ den Invarianten $I[g_{\mu\nu}]$ eindeutig zuzuordnen, die von der vollen Metrik abhängen. Typischerweise wird es viele Invarianten geben, die zu einem gegebenen Term im Potential beitragen, wenn wir $g_{\mu\nu} = \phi^2 \widehat{g}_{\mu\nu}$ einsetzen. Nichtsdestotrotz ist die LPA anfällig für bestimmte Projektionen (oder „Schatten“) der Invarianten $I[g_{\mu\nu}]$, die das allgemeine $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ bilden. Wenn $\widehat{g}_{\mu\nu}$ die Metrik auf einem gekrümmten Raum ist, enthält $U_k(\phi)$ beispielsweise Informationen über Terme höherer Ableitungen. Wenn wir eine Entwicklung der Mittelwertwirkung im Krümmungsskalar betrachten,

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}] = \sum_n c_n(k) \int d^4x \sqrt{g} R(g)^n, \quad (1.3)$$

und $\widehat{g}_{\mu\nu}$ als Metrik auf einer vierdimensionalen Einheitssphäre wählen, dann nimmt das entsprechende Potential $\Gamma_k[\phi = \text{const}] / \int d^4x \sqrt{\widehat{g}}$ die folgende Form an:

$$U_k(\phi) = \sum_n (12)^n c_n(k) \phi^{4-2n}. \quad (1.4)$$

Der konstante Term in (1.4) mit $n = 2$ stammt aus der Invarianten $\int d^4x \sqrt{g} R^2$; es würden aber auch $\int d^4x \sqrt{g} (R_{\mu\nu})^2$ oder $\int d^4x \sqrt{g} (R_{\mu\nu\sigma\rho})^2$ zum konstanten Teil in $U_k(\phi)$ beitragen, sowie viele nicht-lokale Terme. In ähnlicher Weise erhält das Monom ϕ^{-2} unter anderem Beiträge aus der Invarianten $\int d^4x \sqrt{g} R^3$ und aus dem Goroff-Sagnotti-Term $\int d^4x \sqrt{g} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma\mu\nu}$ [57].

Trotz dieser Einschränkungen lassen die Erfahrungen mit gewöhnlichen Feldtheorien darauf schließen, daß die LPA ein wichtiges Instrument für eine erste Erforschung der Bereiche des Theorienraumes ist, die rechnerisch sonst unerreichbar sind. In der vorliegenden Arbeit wollen wir die LPA anwenden, um konzeptionelle Probleme in Bezug auf den RG-Fluß von Γ_k zu analysieren und zu illustrieren, die bis jetzt rechnerisch zu kompliziert sind, um in der vollen Theorie untersucht zu werden. Im einzelnen wollen wir die folgenden drei Punkte untersuchen:

(a) In der LPA haben wir die Möglichkeit, Informationen über den Nicht-Gauß'schen Fixpunkt der Mittelwertwirkung für die Gravitation auf einem *unendlich-dimensionalen Theorienraum* zu erhalten. Wir werden herausfinden, daß der RG-Fluß auf dem Raum der (dimensionslosen) Potentialfunktionen und der Newton-Konstante sowohl einen Gauß'schen als auch einen Nicht-Gauß'schen Fixpunkt zuläßt. In beiden Fällen werden wir die Fixpunktpotentiale berechnen und eine lineare Stabilitätsanalyse durchführen. Wir werden sehen, daß die Skalendimensionen am Gauß'schen Fixpunkt (GFP) den Unterschied zwischen einem gewöhnlichen Skalar und dem konformen Faktor besonders deutlich beschreiben. Die Skalenfelder und Skalendimensionen (die kritischen Exponenten θ) des NGFP sind wichtig, um die asymptotische Sicherheit in der Gravitation zu diskutieren.

Die relevanten Skalenfelder, jene mit positivem Realteil der Skalendimension, fallen für $k \rightarrow \infty$ ab, während die irrelevanten, jene mit negativem Realteil der Skalendimension, in diesem Grenzfall anwachsen. Eine asymptotisch sichere Quantentheorie ist durch jede RG-Trajektorie spezifiziert, die den NGFP für $k \rightarrow \infty$ trifft. Die *UV-kritische Mannigfaltigkeit* \mathcal{S}_{UV} ist definiert als die Menge aller Punkte des Theorienraumes, die unter dem inversen RG-Fluß (das heißt für anwachsendes k) in den NGFP gezogen werden.

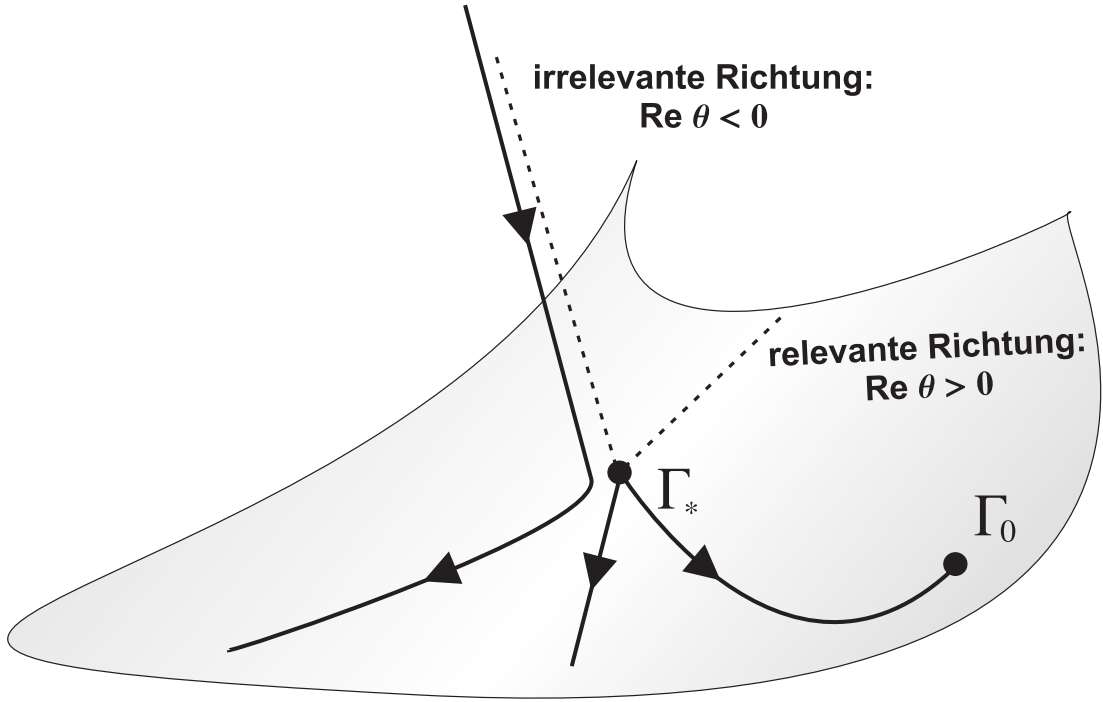


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der UV-kritischen Mannigfaltigkeit \mathcal{S}_{UV} des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes. Der schattierte Bereich stellt \mathcal{S}_{UV} dar. Wir bezeichnen die Fixpunktwirkung im NGFP mit Γ_* und die gewöhnliche effektive Wirkung für $k = 0$ mit Γ_0 . Die Pfeilspitzen zeigen in Richtung kleinerer Werte für k , von „UV“ nach „IR“. Die UV-kritische Mannigfaltigkeit ist durch die RG-Trajektorien parametrisiert, die aus dem NGFP herauslaufen, wenn k kleiner wird. Trajektorien, die nicht auf \mathcal{S}_{UV} liegen, werden in Richtung \mathcal{S}_{UV} angezogen, wenn k kleiner wird. Eine asymptotisch sichere Quantentheorie ist durch ein solches Γ_k definiert, das von Γ_* nach Γ_0 läuft und vollständig in \mathcal{S}_{UV} liegt.

Im einfachsten Fall ist \mathcal{S}_{UV} eine glatte Untermannigfaltigkeit des Theorienraumes. Jede vollständige RG-Trajektorie, die innerhalb von \mathcal{S}_{UV} liegt, definiert eine mögliche Quantentheorie. In Abbildung 1.1 haben wir eine Skizze von \mathcal{S}_{UV} dargestellt. Mit $\Delta_{UV} \equiv \dim \mathcal{S}_{UV}$ existiert daher eine Δ_{UV} -Parameterfamilie von asymptotisch sicheren Quantenfeldtheorien; welche wirklich in der Natur realisiert ist, muß anhand von experimentellen Vorhersagen von genau den Δ_{UV} -Parametern bestimmt werden, deren Werte nicht von der Theorie vorhergesagt werden. Wenn \mathcal{S}_{UV} tatsächlich eine glatte Mannigfaltigkeit ist und der NGFP keine marginalen Skalenfelder (solche mit verschwindendem Realteil der Skalendimensi-

on) besitzt, dann ist Δ_{UV} gleich der Dimension des Unterraum des Tangentialraumes von \mathcal{S}_{UV} , der durch die relevanten Skalenfelder parametrisiert wird. Als Konsequenz gibt es eine Beziehung zwischen der Anzahl der relevanten Skalenfelder und der Vorhersagekraft der Quantentheorie, die erreicht werden kann. (Siehe [31] für eine allgemeinere Diskussion.)

Innerhalb der LPA wird es uns möglich sein, die Mannigfaltigkeit \mathcal{S}_{UV} in der Nähe des NGFP im Detail zu untersuchen. Wir werden herausfinden, daß der Wert von Δ_{UV} deutlich von dem Funktionenraum abhängt, in dem die erlaubten Skalenfelder „leben“ sollen. Es stellt sich heraus, daß es im Prinzip unendlich viele relevante Skalenfelder geben könnte; wir werden aber sehen, daß wir dieses Problem durch die Untersuchung der LPA nicht lösen können.

(b) Wir wollen das RG-Laufen des Potentials $U_k(\phi)$ mit numerischen Methoden auch im nicht-linearen Bereich analysieren. Besonders interessant sind durch das RG-Laufen verursachte Phasenübergänge, in denen das globale Minimum von $U_k(\phi)$ entweder springt oder kontinuierlich von einem Wert $\phi \neq 0$ nach $\phi = 0$ läuft. Wir können dies als einen Übergang von der bekannten Phase der Gravitation mit gebrochener Diffeomorphismus-Invarianz zu einer *Phase mit unebrochener Diffeomorphismus-Invarianz* interpretieren.

Wir werden Metriken der Form $g_{\mu\nu} = \phi^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ untersuchen, wobei ϕ der Erwartungswert des mikroskopischen konformen Faktors und $\hat{g}_{\mu\nu}$ eine nicht-entartete klassische Referenzmetrik ist. Wenn der Erwartungswert ϕ , hier interpretiert als das Minimum von U_k , nicht verschwindet, ist der Erwartungswert der Metrik, $g_{\mu\nu} \equiv \langle \gamma_{\mu\nu} \rangle$, ebenso nicht-entartet. Wenn aber $\phi = 0$ ist, dann hat die Metrik einen verschwindenden Erwartungswert⁴.

Die Situation, in der $\phi = 0$ ist, können wir als Wiederherstellung einer spontan gebrochenen Symmetrie ansehen [50, 58]. Die relevanten Symmetrien sind die Raumzeit-Diffeomorphismen. Wenn die Quantenzustand derart ist, daß der Erwartungswert der Metrik nicht verschwindet, $\langle \gamma_{\mu\nu} \rangle \neq 0$, dann ist die Diffeomorphismen-Gruppe spontan auf die Stabilitätsgruppe der Metrik $\langle \gamma_{\mu\nu} \rangle$ heruntergebrochen. Wenn der Erwartungswert der mikroskopischen Metrik die flache Metrik ist, $\langle \gamma_{\mu\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu}$, dann ist diese Stabilitätsgruppe die Poincaré-Gruppe. Die gebrochene Phase der Gravitation ist die, mit der wir vertraut sind. Es ist allerdings denkbar, daß die Symmetriebrechung bei sehr kleinen Abständen tatsächlich verschwindet. Dies ist genau das Verhalten, das wir in spontan gebroche-

⁴Mit Blick auf $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \delta_{ab}$ ist es genauer das Vielbein e_μ^a , dessen Erwartungswert verschwindet, da $g_{\mu\nu} = \phi^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ quadratisch vom konformen Faktor ϕ abhängt.

nen Yang-Mills-Theorien finden, beispielsweise im Standardmodell. Wenn wir Phänomene studieren, die Impulsskalen weit oberhalb der W-Masse einbeziehen, erscheint die volle $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie ungebrochen. Technisch gesehen können wir diese Wiederherstellung der Symmetrie aus dem Higgs-Potential U_k^{Higgs} bei $k \gg M_W$ ableiten.

In demselben Geiste wollen wir das laufende Potential für den konformen Faktor analysieren. Wir werden herausfinden, daß typische Trajektorien in \mathcal{S}_{UV} für genügend große Werte für k eine Phase von ungebrochener Diffeomorphismus-Invarianz beschreiben in dem Sinne, daß die Metrik dort einen verschwindenden Erwartungswert hat.

(c) Während die β -Funktionen, die durch die funktionalen RG-Gleichungen impliziert werden, sich nicht auf eine spezielle Metrik beziehen, hängen sie dennoch von der *Topologie* der Mannigfaltigkeit ab, die die Metriken $\gamma_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, $\bar{g}_{\mu\nu}$ und $\hat{g}_{\mu\nu}$ trägt. Wir veranschaulichen dieses Phänomen dadurch, daß wir die beiden Fälle parallel zueinander diskutiert werden, in denen die Topologie der (euklidischen) Raumzeitmannigfaltigkeit die einer Sphäre (S^d -Topologie) beziehungsweise die des flachen Raumes (R^d -Topologie) ist. Die β -Funktionen (oder β -Funktionale) für das laufende Potential U_k unterscheiden sich in den beiden Fällen, da sie vom Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators abhängen, der durch die entsprechenden Referenzmetriken $\hat{g}_{\mu\nu}$ definiert wird.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 reduzieren wir die Einstein-Hilbert-Wirkung auf ein Integral über den konformen Faktor. In Kapitel 3 diskutieren wir im Detail die Hintergrundfeld-Methode stellen die exakte Renormierungsgruppen-Flußgleichung für die effektive Mittelwertwirkung der Gravitation auf. In Kapitel 4 berechnen die effektive Mittelwertwirkung im zweidimensionalen Theorienraum der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung und leiten die β -Funktionen für die Newton-Konstante und die kosmologische Konstante her. Insbesondere vergleichen wir die CREH-Trunkierung mit gewöhnlichen Materie-Feldtheorien. In Kapitel 5 suchen wir nach Fixpunkten des Renormierungsgruppen-Flusses und führen eine lineare Stabilitätsanalyse für den GFP und den NGFP durch. Wir berechnen Phasenportraits des RG-Flusses in der CREH-Trunkierung. In Kapitel 6 untersuchen wir Symmetrien, die die effektive Mittelwertwirkung der Gravitation sowie deren RG-Fluß und dessen Lösungen erfüllen. In Kapitel 7 verallgemeinern wir die Theorie mit Hilfe der lokalen Potentialnäherung auf einen unendlich-dimensionalen Theorienraum und leiten die β -Funktionen für die Newton-Konstante und das laufende

Potential her. Die Sphäre und der flache Raum werden dabei getrennt voneinander diskutiert. In Kapitel 8 analysieren wir allgemeine Eigenschaften des RG-Flusses der lokalen Potentialnäherung. Insbesondere finden wir eine besondere Stabilitätseigenschaft der CREH-Näherung. In Kapitel 9 suchen wir nach Fixpunkten in der LPA und führen eine lineare Stabilitätsanalyse am GFP sowie am NGFP durch. Wir diskutieren die Auswirkung verschiedener Wahlen des Theorienraumes auf die Anzahl der relevanten Skalenfelder am NGFP. In Kapitel 10 lösen wir numerisch die partiellen Differentialgleichung für das laufende Potential. Wir zeigen verschiedene Szenarien für den Phasenübergang von spontan gebrochener QEG zu einer Phase ungebrochener Diffeomorphismus-Invarianz. Kapitel 11 beinhaltet eine Diskussion der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit.

Die vorliegende Arbeit ist in den folgenden Publikationen veröffentlicht:

- Martin Reuter und Holger Weyer
The role of Background Independence for Asymptotic Safety in Quantum Einstein Gravity
General Relativity and Gravitation 41 (2009) 983;
- Martin Reuter und Holger Weyer
Background Independence and Asymptotic Safety in Conformally Reduced Gravity
Physical Review D 79 (2009) 105005;
- Martin Reuter und Holger Weyer
Conformal sector of Quantum Einstein Gravity in the local potential approximation: non-Gaussian fixed point and a phase of unbroken diffeomorphism invariance
Physical Review D 80 (2009) 025001.

Teil I

Grundlagen

DIE KONFORM-REDUZIERTE EINSTEIN-HILBERT-WIRKUNG

Die Allgemeine Relativitätstheorie wird in d Raumzeitdimensionen durch die Einstein-Hilbert-(EH)-Wirkung

$$S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{g} \left\{ R(g) - 2\Lambda \right\} \quad (2.1)$$

beschrieben. Der zweidimensionale Theorienraum der EH-Trunkierung wird durch die Newton-Konstante G sowie die kosmologische Konstante Λ parametrisiert.

Damit wir die Freiheitsgrade, die durch die Einstein-Hilbert-Wirkung (2.1) beschrieben werden, auf den konformen Faktor der Metrik reduzieren können, stellen wir das Argument von S_{EH} , die Metrik $g_{\mu\nu}$, in der folgenden Form dar:

„ konformer Faktor \times feste, nicht-dynamische Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ “.

Wir parametrisieren den konformen Faktor durch die skalar-artige Funktion $\phi(x)$:

$$g_{\mu\nu} = \phi^{2\nu(d)} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Dabei bestimmen wir den Exponenten $\nu(d)$ in (2.2) durch die Forderung, daß der kinetische Term für ϕ die konventionelle Form proportional zu $(\partial_\mu \phi)^2$ annehmen soll. Dies ist in der Tat für jede Dimension d möglich. Unter der Weyl-Reskalierung (2.2) transformiert sich

der Krümmungsskalar $R(g)$ wie folgt (siehe Anhang B):

$$R(g) = \phi^{-2\nu} \left[R(\widehat{g}) - 2(d-2)\nu^2 \phi^{-2} \widehat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - (d-1)(d-2)\nu^2 \phi^{-2} \widehat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right]. \quad (2.3a)$$

Damit ist das Transformationsverhalten der Invarianten $\int d^d x \sqrt{g} R(g)$ durch den folgenden Ausdruck gegeben (siehe Anhang B):

$$\int d^d x \sqrt{g} R(g) = \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \phi^{(d-2)\nu} \left[(d-1)(d-2)\nu^2 \phi^{-2} \widehat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \widehat{R} \right]. \quad (2.3b)$$

Hier ist $R(\widehat{g}) \equiv \widehat{R}$ der Krümmungsskalar der Referenzmetrik $\widehat{g}_{\mu\nu}$. Setzt man die Transformationen (2.3) in die Einstein-Hilbert-Wirkung (2.1) ein, so erhält man die folgende konform-reduzierte EH-Wirkung:

$$S_{\text{EH}}[\phi; \widehat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \times \left\{ \phi^{(d-2)\nu-2} \left[\nu^2 (d-1)(d-2) \widehat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \widehat{R} \phi^2 \right] - 2\Lambda \phi^{d\nu} \right\}. \quad (2.4)$$

Wir sehen sofort, daß wir genau dann einen konventionellen kinetischen Term für ϕ erhalten, wenn der Exponent ν die folgende Form annimmt:

$$\nu(d) = \frac{2}{d-2}. \quad (2.5)$$

Aus der klassischen Wirkung $S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}]$ ist nun die Wirkung $S_{\text{EH}}[\phi; \widehat{g}_{\mu\nu}]$ geworden, die die Dynamik des konformen Faktors $\phi(x)$ beschreibt:

$$S_{\text{EH}}[\phi; \widehat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{8\pi\xi(d)G} \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \widehat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \xi(d) \widehat{R} \phi^2 - \xi(d) \Lambda \phi^{d\nu} \right\}. \quad (2.6)$$

In (2.6) haben wir die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\xi(d) \equiv \frac{d-2}{4(d-1)}. \quad (2.7)$$

In vier Dimensionen gilt $\nu = 1$ und $\xi = 1/6$; damit wandelt die Parametrisierung

$$g_{\mu\nu} = \phi^2 \widehat{g}_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

die klassische Einstein-Hilbert-Wirkung in die einer „ ϕ^4 -artigen“ Theorie um:

$$S_{\text{EH}}[\phi; \widehat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{3}{4\pi G} \int d^4 x \sqrt{\widehat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \widehat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{12} \widehat{R} \phi^2 - \frac{1}{6} \Lambda \phi^4 \right\}. \quad (2.9)$$

Im folgenden werden wir die Wirkung (2.6) und ihren Spezialfall (2.9) als konform-reduzierte Einstein-Hilbert- beziehungsweise „CREH“-Wirkung¹ bezeichnen.

¹Die Abkürzung „CREH“ leitet sich aus dem englischen Ausdruck „conformally reduced Einstein-Hilbert“ truncation beziehungsweise action ab.

2.1 Bemerkungen

An dieser Stelle sind einige Bemerkungen angebracht.

(a) Bis jetzt ist die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ eine vollkommen beliebige Metrik, die auf derselben glatten Mannigfaltigkeit wie $g_{\mu\nu}$ definiert ist. Später wird die Topologie dieser Mannigfaltigkeit die des flachen Raumes R^d oder die einer Sphäre S^d sein.

(b) Für $d > 2$ – diesen Fall werden wir hier immer annehmen – ist der kinetische Term in $S_{\text{EH}}[\phi; \hat{g}_{\mu\nu}]$ aus Gl. (2.6) immer negativ-definit aufgrund des „falschen“ Vorzeichens seines Vorfaktors. Daher ist die Wirkung nach unten hin unbeschränkt. Die Wirkung $S_{\text{EH}}[\phi; \hat{g}_{\mu\nu}]$ kann beliebig negativ werden für ein $\phi(x)$, das sich genügend schnell ändert. Das ist die bekannte Instabilität des konformen Faktors [2, 56].

(c) Um die Analogie zu einer skalaren Wirkung perfekt zu machen, könnte man den Vorfaktor $1/(8\pi \xi(d) G)$ in Gl. (2.6) durch eine Reskalierung des Feldes ϕ entfernen. (Das gilt jedoch nicht für das Minuszeichen!) Da aber die Newton-Konstante später von der RG-Skala k abhängen wird, haben wir diese Reskalierung in der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt, denn der hier verwendete FRGE-Formalismus erlaubt keine skalenabhängigen Feldreskalierungen.

(d) Die Potentialterme in $S_{\text{EH}}[\phi, \hat{g}_{\mu\nu}]$ sind zum einen ein massenartiger Term proportional zu dem Krümmungsskalar von $\hat{g}_{\mu\nu}$ und zum anderen ein Wechselwirkungsterm proportional zu $\phi^{2d/(d-2)}$. Die Selbstwechselwirkung von ϕ folgt allein aus der kosmologischen Konstanten; für $\Lambda = 0$ verschwindet sie. Der Exponent $2d/(d-2)$ ist Vier in vier Dimensionen, ist kleiner als Vier in höheren Dimensionen (er nähert sich Zwei für $d \rightarrow \infty$) und ist größer als Vier in kleineren Dimensionen (er divergiert nach $+\infty$ für $d \searrow 2$).

2.2 Das ursprüngliche und das invertierte Bild

Wenn wir Einheiten des funktionalen Maßes beiseite lassen, so ist die Quantisierung von Gravitation in der CREH-Näherung mit der nackten Wirkung $S_{\text{EH}}[\phi; \hat{g}_{\mu\nu}]$ aus (2.6) ähnlich der einer skalaren Theorie mit einer Wirkung des allgemeinen Typs

$$S[\phi] = c \int d^d x \left\{ -\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + U(\phi) \right\}. \quad (2.10)$$

Hierbei ist c eine positive Konstante. Für die folgende Diskussion sei $d = 4$ und $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ die flache Metrik auf dem flachen Raum. Dann ist S_{EH} aus (2.6) in der Tat von der Form

(2.10) mit dem Potential $U(\phi) = \frac{1}{6} \Lambda \phi^4$ und $c = 3/(4\pi G) > 0$. Der später relevante Fall wird $\Lambda > 0$ sein; dann ist der Potentialterm in der Wirkung (2.10) positiv-definit, während der kinetische Teil negativ-definit ist. Wir wollen die Quantentheorie analysieren, die auf dem folgenden Funktionalintegral basiert:

$$I \equiv \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\tilde{S}[\phi]}. \quad (2.11)$$

Hierbei ist \tilde{S} die Wick-rotierte Version von S und es gilt die Abkürzung $(\partial\phi)^2 \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi$. Man würde erwarten, daß das falsche Vorzeichen des kinetischen Terms in dieser Theorie die Kondensation von räumlich inhomogenen (x -abhängigen) Moden antreibt, das heißt die Bildung von kinetischen Kondensaten ähnlich denen, die in [55] diskutiert wurden. Die Amplitude dieser inhomogenen Moden kann jedoch nicht unbegrenzt anwachsen, da dies potentielle Energie kosten würde.

Eine damit eng verbundene Theorie basiert auf der „invertierten“ Wirkung $S_{\text{inv}}[\phi] \equiv -S[\phi]$. Somit besitzt S_{inv} die folgende Struktur:

$$S_{\text{inv}}[\phi] = c \int d^4x \left\{ + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) \right\}. \quad (2.12)$$

In (2.12) finden wir das folgende negative Potential:

$$V(\phi) \equiv -U(\phi) \leq 0. \quad (2.13)$$

Da das globale Minuszeichen aus S herausgezogen wurde, ist die in der Theorie enthaltene Instabilität von dem kinetischen Term auf den Potentialterm verlagert worden. Nach Gl. (2.12) nimmt die kinetische Energie ihr Minimum für homogene Konfigurationen $\phi = \text{const}$ an; diese neigen jedoch dazu, unbegrenzt anzuwachsen, da das invertierte Potential $-V(\phi) = \frac{1}{6} \Lambda \phi^4$ beliebig negativ wird für große Werte für ϕ .

Obwohl S und S_{inv} Instabilitäten beinhalten, die von sehr unterschiedlicher Natur sind, beschreiben sie dennoch – bis auf eine Zeitspiegelung – dieselbe Physik. Die Pfadintegrale, die S und S_{inv} enthalten, sind durch eine komplexe Konjugation miteinander verbunden:

$$I_{\text{inv}} \equiv \int \mathcal{D}\phi \, e^{-i\tilde{S}[\phi]} = I^*. \quad (2.14)$$

Wir bezeichnen die Formulierungen mittels S und S_{inv} als *ursprüngliches* beziehungsweise *invertiertes* Bild.

Man sieht, daß man für *reine* Gravitation, das heißt für eine Gravitationstheorie ohne Materiefelder, in der CREH-Näherung das „falsche“ Vorzeichen des kinetischen Terms wie ein umgestürztes Potential behandeln kann. Der FRGE-Formalismus, den wir hier entwickeln wollen, wird sich genau auf das invertierte Bild beziehen. In der Tat ist $\Lambda > 0$ der Fall, der für die asymptotische Sicherheit relevant ist. Daher wird die Dynamik des konformen Faktors von einer Wirkung mit einem positiven kinetischen, aber einem negativen Potentialterm beschrieben.

Interessanterweise wurde diese Art ϕ^4 -Theorie mit negativer Kopplungskonstante vor langer Zeit von Symanzik diskutiert [53]. Er zeigte, daß die Kopplungsstärke bei kleinen Abständen verschwindet, was das erste Beispiel einer asymptotisch freien Quantenfeldtheorie lieferte [54].

DIE EFFEKTIVE MITTELWERTWIRKUNG FÜR DIE KONFORM-REDUZIERTERTE GRAVITATION

3.1 Die Hintergrundfeld-Methode

Es gibt einen sehr großen Unterschied zwischen dem skalar-artigen Feld ϕ , dem konformen Faktor der Metrik $g_{\mu\nu}$, und einem gewöhnlichen Skalarfeld. Der konforme Faktor ϕ bestimmt die Größen aller physikalischen Skalen; insbesondere bestimmt er die „Eigenskala“, die dem numerischen Wert des IR-Cutoffs k entspricht, der im FRGE-Formalismus auftaucht. Aus diesem Grund unterscheidet sich die Quantisierung von ϕ im FRGE-Formalismus von der konventionellen Quantisierung. Obwohl die Eichfixierung hier keine Rolle spielt, muß man aus diesem Grund den Hintergrundfeld-Formalismus anwenden. Dieser Zugang erlaubt Aussagen wie „ Γ_k beschreibt die Dynamik von Feldern, die über Raumzeitvolumina der ungefähren Länge k^{-1} gemittelt wurden“ auch in Anwesenheit einer quantisierten Metrik einen präzisen Sinn zu geben. In dieser Situation ist ja zunächst nicht klar, im Bezug auf welche Metrik solche Raumzeitvolumina gemessen werden sollen.

3.1.1 Das Pfadintegral

Bevor wir den Renormierungsgruppen-Formalismus aufstellen können, müssen wir das Pfadintegral, das der Quantenfeldtheorie des konformen Faktors zugrunde liegt, im Hintergrundfeld-Formalismus formulieren. Startpunkt ist das formale Pfadintegral¹

$$\int \mathcal{D}\chi \ e^{-S[\chi; \hat{g}_{\mu\nu}]} . \quad (3.1)$$

Dabei ist S ein beliebiges Wirkungsfunktional. Es kann der Wirkung S_{EH} ähnlich sein; dies ist aber keine Voraussetzung. Weiter bezeichnet $\chi(x)$ den mikroskopischen (Quanten-)konformen Faktor. (Wir benötigen die Notation $\phi(x)$ für den Erwartungswert von $\chi(x)$.) Gl. (3.1) entsteht aus einem Pfadintegral über die Quantenmetrik $\gamma_{\mu\nu}$,

$$\int \mathcal{D}\gamma_{\mu\nu} \ e^{-S_{\text{grav}}[\gamma_{\mu\nu}]}, \quad (3.2)$$

in dem wir annehmen, daß die Metrik $\gamma_{\mu\nu}$ die folgende Form besitzt:

$$\gamma_{\mu\nu} = \chi^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Die Pfadintegrale (3.1) und (3.2) beziehen sich auf eine Raumzeitmannigfaltigkeit, deren Topologie vorgeben ist. Die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ gehört zu dieser Topologie. Die Wirkung $S[\chi; \hat{g}_{\mu\nu}]$ hängt parametrisch von $\hat{g}_{\mu\nu}$ ab. Wir halten die nicht-dynamische, klassische Metrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ fest und werden sie niemals ändern; in der vollen Theorie [10] existiert keine zu $\hat{g}_{\mu\nu}$ analoge Metrik. Man darf die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ nicht mit der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ und ihrem entsprechenden konformen Faktor χ_{B} verwechseln.

Im Hintergrundfeld-Formalismus spalten wir die Integrationsvariable χ in ein klassisches, festes Hintergrundfeld χ_{B} und Quantenfluktuationen f auf:

$$\chi(x) = \chi_{\text{B}}(x) + f(x). \quad (3.4)$$

Auch wenn wir oft die Bezeichnung „Fluktuation“ verwenden, muß $f(x)$ nicht notwendigerweise klein sein. Insbesondere entwickeln wir hier nicht nach Potenzen von f . Wir nehmen im folgenden an, daß das Integrationsmaß $\mathcal{D}\chi$ translations-invariant ist und daß wir (3.1) somit durch

$$\int \mathcal{D}f \ \exp(-S[\chi_{\text{B}} + f; \hat{g}_{\mu\nu}]) \quad (3.5)$$

¹Da dies in der Literatur üblich ist, werden wir in den allgemeinen Diskussionen hier die euklidische Notation verwenden. Auf formaler Stufe ist dies trivial, da man die entsprechende Lorentz'sche Formulierung durch die Ersetzung $-S \rightarrow iS$ etc. erhält.

ersetzen können. Hier genügt sogar die Annahme, daß das ursprüngliche Maß $\mathcal{D}\chi$ gleich einem translations-invarianten Maß ist bis auf eine Jacobi-Determinante, da wir den Logarithmus dieser Jacobi-Determinante in die Wirkung S einfügen können.

An dieser Stelle ist es üblich, daß man ein hintergrund-artiges erzeugendes Funktional einführt, indem man eine externe Quelle $J(x)$ nur an die Fluktuationen koppelt:

$$\exp(W[J; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]) = \int \mathcal{D}f \exp\left(-S[\chi_B + f; \hat{g}_{\mu\nu}] + \int d^d x \sqrt{\hat{g}} J(x) f(x)\right). \quad (3.6)$$

Indem wir das Funktional W wiederholt nach der Quelle J differenzieren, erhalten wir die verbundenen n -Punkt-Funktionen von f in Anwesenheit der Quelle J . Der normierte Erwartungswert der Fluktuationen f ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\bar{f}(x) \equiv \langle f(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}(x)}} \frac{\delta W[J; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta J(x)}. \quad (3.7)$$

Er hängt funktional sowohl von der Quelle J als auch vom Hintergrundfeld χ_B ab,

$$\bar{f} = \bar{f}[J; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}].$$

Wir nehmen an, daß wir (3.7) nach der Quelle J auflösen können,

$$J = J[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}].$$

Dann ist die Legendre-Transformierte von W durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\Gamma[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \int d^d x \sqrt{\hat{g}} J[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}](x) \bar{f}(x) - W[J[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]. \quad (3.8)$$

Diese Definition impliziert die effektive Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta \bar{f}(x)} = J(x). \quad (3.9)$$

Wenn wir das Funktional Γ wiederholt nach $\bar{f}(x)$ differenzieren, so erhalten wir die Ein-Teilchen-irreduziblen n -Punkt-Funktionen des Erwartungswertes \bar{f} in Anwesenheit der Quelle J . Nach dem Differenzieren können wir die Quelle „abschalten“, indem \bar{f} gleich der Funktion $\bar{f}_0[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \equiv \bar{f}[J = 0; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ setzen. Im allgemeinen wird \bar{f}_0 nicht verschwinden. Die resultierende n -Punkt-Funktion hängt dann immer noch vom Hintergrundfeld χ_B ab.

Der Erwartungswert des mikroskopischen konformen Faktors nimmt die folgende Form an:

$$\phi \equiv \langle (\chi_B + f) \rangle = \chi_B + \bar{f}. \quad (3.10)$$

Wir können Γ auch als Funktion von ϕ und χ_B anstatt von \bar{f} und χ_B ansehen:

$$\Gamma[\phi, \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \equiv \Gamma[\bar{f} = \phi - \chi_B; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]. \quad (3.11)$$

Die Einschränkung auf verschwindende Fluktuations-Erwartungswerte, das heißt $\phi = \chi_B$, definiert das reduzierte Funktional [10]

$$\bar{\Gamma}[\phi, \hat{g}_{\mu\nu}] \equiv \Gamma[\phi, \phi, \hat{g}_{\mu\nu}] = \Gamma[\bar{f} = 0; \chi_B = \phi, \hat{g}_{\mu\nu}]. \quad (3.12)$$

Es ist interessant, die obigen erzeugenden Funktionale im Hintergrundfeld-Zugang mit jenen im Standard-(„st“-)Zugang, das heißt im Nicht-Hintergrundfeld-Formalismus, zu vergleichen. Dort würden wir $W_{\text{st}}[J]$ durch

$$\exp(W_{\text{st}}[J]) = \int \mathcal{D}\chi \exp\left(-S[\chi] + \int d^d x \sqrt{\hat{g}} J(x) \chi(x)\right) \quad (3.13)$$

definieren und dann die gewöhnliche effektive Wirkung $\Gamma_{\text{st}}[\phi]$ als Legendre-Transformierte von $W_{\text{st}}[J]$ erhalten. Wenn wir die Translations-Invarianz des Funktionalmaßes $\mathcal{D}\chi$ ausnutzen, so ist es einfach zu sehen, daß die zwei Funktionale auf triviale Weise miteinander verknüpft sind:

$$W[J; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = W_{\text{st}}[J] - \int d^d x \sqrt{\hat{g}} J(x) \chi_B(x) \quad (3.14)$$

$$\Gamma[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \Gamma_{\text{st}}[\chi_B + \bar{f}] \iff \Gamma[\phi, \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \Gamma_{\text{st}}[\phi] \quad (3.15)$$

$$\bar{\Gamma}[\phi, \hat{g}_{\mu\nu}] = \Gamma_{\text{st}}[\phi]. \quad (3.16)$$

Es ist die grundlegende Eigenschaft des Hintergrundfeld-Formalismus, daß wir die n -Punkt-Funktionen des Standard-Zugangs,

$$\frac{\delta^n \Gamma_{\text{st}}[\phi]}{\delta\phi(x_1) \cdots \delta\phi(x_n)}, \quad (3.17)$$

alternativ berechnen können, indem wir das Funktional $\Gamma[\bar{f} = 0; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \bar{\Gamma}[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ nach dem Hintergrundfeld χ_B differenzieren:

$$\left. \frac{\delta^n \Gamma[\bar{f} = 0; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta\chi_B(x_1) \cdots \delta\chi_B(x_n)} \right|_{\chi_B = \phi} \equiv \frac{\delta^n \Gamma_{\text{st}}[\phi]}{\delta\phi(x_1) \cdots \delta\phi(x_n)}. \quad (3.18)$$

In der konform-reduzierten Gravitation ist die Gleichheit von (3.17) und (3.18) trivial, da $\Gamma[\bar{f} = 0; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ und $\Gamma_{\text{st}}[\chi_B]$ hier exakt gleich sind.

Die Situation ist weniger trivial, wenn wir diesen Formalismus auf Eichtheorien anwenden, wobei wir einen Eichfixierungsterm verwenden, der invariant unter Hintergrund-Eichtransformationen ist. Dann sind die Analoga der n -Punkt-Funktionen (3.17) und (3.18) nicht exakt gleich; sie sind es aber zumindest on-shell, das heißt auf der Massenschale. Folglich ergeben beide Sätze von n -Punkt-Funktionen dieselben physikalischen S -Matrix-Elemente [36]. Der wichtige Schluß ist, daß sogar das reduzierte Funktional $\bar{\Gamma}$, das nur von einem Feld abhängt ($\chi_B \equiv \phi$), alle physikalischen, eichinvarianten Informationen enthält.

3.1.2 Die Metriken in der Konstruktion

An dieser Stelle wollen wir die Rollen der verschiedenen Metriken, die im Hintergrundfeld-Formalismus für die konform-reduzierte Gravitation auftauchen, zusammenfassen. Alle Metriken sind konform zueinander. Zunächst gibt es die *Referenzmetrik* $\hat{g}_{\mu\nu}$. Sie ist ein klassisches Feld, das wir festhalten und niemals ändern werden. Die zweite Metrik ist die *Quantenmetrik*, die Integrationsvariable

$$\gamma_{\mu\nu} = \chi^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu} = (\chi_B + f)^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Im kanonischen Zugang entspricht $\gamma_{\mu\nu}$ einem Operator. Als drittes ist die *Hintergrundmetrik* durch

$$\bar{g}_{\mu\nu} \equiv \chi_B^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

definiert. Sie ist ebenfalls ein klassisches Feld, das aber variabel ist. Wir können sie – sofern wir dies wünschen – durch die Bedingung $\bar{f} = 0$ dynamisch anpassen. Dann gibt es als vierte Metrik den *Vakuumerwartungswert der Quantenmetrik*,

$$g_{\mu\nu} \equiv \langle \gamma_{\mu\nu} \rangle \equiv \langle (\chi_B + f)^{2\nu} \rangle \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

Und als letztes existiert noch die *Metrik mit dem konformen Faktor* ϕ . Da $\phi \equiv \chi_B + \bar{f} = \chi_B + \langle f \rangle$ gilt, besitzt diese Metrik die folgende Form:

$$\check{g}_{\mu\nu} \equiv \phi^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu} \equiv (\chi_B + \langle f \rangle)^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

Im allgemeinen sind $g_{\mu\nu}$ und $\check{g}_{\mu\nu}$ nicht exakt gleich. Sie sind es zumindest näherungsweise, wenn die Fluktuationen f klein sind. In vier Dimensionen, wo ν den Wert Eins annimmt, erhalten wir zum Beispiel

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + [2 \chi_B \langle f \rangle + \langle f^2 \rangle] \hat{g}_{\mu\nu} \quad (3.23a)$$

beziehungsweise

$$\check{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + [2 \chi_B \langle f \rangle + \langle f \rangle^2] \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.23b)$$

Die Differenz $g_{\mu\nu} - \check{g}_{\mu\nu} = [\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2] \hat{g}_{\mu\nu}$ ist proportional zur Varianz von f , so daß $g_{\mu\nu}$ und $\check{g}_{\mu\nu}$ sich nicht sehr voneinander unterscheiden, wenn die Fluktuationen f „klein“ sind. Um diese Feststellung zu präzisieren, müßten wir zuerst dem Erwartungswert des Operatorproduktes f^2 eine Bedeutung geben, wobei beide Operatoren am selben Punkt ausgewertet sind. Dies wollen wir hier jedoch nicht machen. Für $\bar{f} = 0$ ist die Metrik $\check{g}_{\mu\nu}$ gleich der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$, während der Erwartungswert durch $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \langle f^2 \rangle \hat{g}_{\mu\nu}$ gegeben ist.

Die Metriken $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ sind analog zu den gleichnamigen Metriken in der Konstruktion der exakten Mittelwertwirkung der Gravitation [10]. Es gibt jedoch einige Unterschiede: In [10] wurde eine lineare Aufspaltung der Metrik in Hintergrund und Fluktuation auf der Stufe der vollen Metrik vollzogen; im vorliegenden Zugang spalten wir den konformen Faktor linear in Hintergrund und Fluktuation auf. In [10] ist (3.1) das Pfadintegral über alle Metriken $\gamma_{\mu\nu}$. Die Metrik $\gamma_{\mu\nu}$ wurde gemäß $\gamma_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ aufgespalten und das Pfadintegral wurde über die Fluktuation $h_{\mu\nu}$ integriert. Somit ist in [10] $g_{\mu\nu} = \langle \gamma_{\mu\nu} \rangle = \bar{g}_{\mu\nu} + \langle h_{\mu\nu} \rangle$ linear im Fluktuations-Erwartungswert und es gibt keinen Unterschied zwischen $g_{\mu\nu}$ und $\check{g}_{\mu\nu}$. Im vorliegenden Zugang parametrisieren wir $\gamma_{\mu\nu}$ *nicht-linear* durch $\gamma_{\mu\nu} = (\chi_B + f)^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}$. Der Grund dafür ist, daß die daraus resultierende CREH-Wirkung wie die Wirkung einer konventionellen skalaren Theorie aussehen soll. In der vorliegenden Arbeit wollen wir die Unterschiede zwischen der Dynamik des konformen Faktors und der eines konventionellen Skalars diskutieren. Deshalb akzeptieren wir diese Nicht-Linearität. Als Konsequenz daraus sind die späteren Rechnungen in der „CREH-Trunkierung“ nicht einfach eine Untermenge der Rechnung in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung, die alle Moden der Metrik beinhaltet [10].

3.2 Die Mittelwertwirkung für den konformen Faktor

Technisch gesehen liegt das Hauptproblem darin, das Pfadintegral (3.6) zumindest näherungsweise auszuführen. Der folgende Renormierungsgruppen-Formalismus soll das ursprüngliche Problem in ein dazu äquivalentes übersetzen: Lösen einer bestimmten RG-Gleichung, deren Randbedingung die Wirkung S beinhaltet. Mit Hilfe einer Version der effektiven Mittelwertwirkung für Skalare [31, 32] modifizieren wir das Pfadintegral (3.6) zu einem Pfadintegral, das das erzeugende Funktional W definiert:

$$\begin{aligned} & \exp(W_k[J; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]) \\ &= \int \mathcal{D}f \exp\left(-S[\chi_B + f; \hat{g}_{\mu\nu}] - \Delta_k S[f; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] + \int d^d x \sqrt{\hat{g}} J(x) f(x)\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wir haben (3.24) dadurch erhalten, daß wir zum Pfadintegral (3.6) einen Modencutoff $\Delta_k S$ hinzugefügt haben. Dabei ist die Wirkung $\Delta_k S[f; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ so konstruiert, daß der Faktor $\exp(-\Delta_k S)$ die langwelligen Moden von $f(x)$ mit Impulsen $p \lesssim k$ unterdrückt; die kurzwelligen Moden mit $p \gtrsim k$ läßt er unverändert. Damit wir eine FRGE zweiter Ordnung erhalten können, muß $\Delta_k S$ quadratisch in den Fluktuationen f sein:

$$\Delta_k S[f; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} f(x) \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] f(x). \quad (3.25)$$

Der Pseudo-Differentialoperator \mathcal{R}_k kann vom Hintergrundfeld χ_B abhängen. Diese Abhängigkeit ist äußerst wichtig, um eine „hintergrundunabhängige“ Quantengravitation zu erhalten [3–5] und um der Vergrößerungsskala k dieser Theorie eine physikalische Bedeutung zu geben.

In der elementaren Fourier-Theorie auf dem flachen Raum interpretiert man den Parameter k als die inverse Längenskala, über die die mikroskopischen Felder gemittelt werden. Wenn wir ähnlich dazu k in der Quantengravitation interpretieren möchten, müssen wir entscheiden, welche Metrik der „Messung“ dieser Längenskala zugrunde liegen soll. Im Hintergrundfeld-Formalismus existiert ein kanonischer Kandidat einer solchen Metrik, nämlich die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu} = \chi_B^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}$. Der RG-Fluß wird dann „hintergrundunabhängig“ [3–5], wenn $\Delta_k S$ aus $\bar{g}_{\mu\nu}$ (beziehungsweise deren konformem Faktor χ_B) statt aus einer starren Metrik konstruiert wird. Es ist die wesentliche Eigenschaft von $\mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$, zwischen „langwelligen“ und „kurzwelligen“ Moden der Fluktuationen zu unterscheiden.

Die „Länge“ der Moden ist durch die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$, das heißt durch deren konformen Faktor χ_B , definiert.

Der Vorteil der Hintergrundfeld-Methode ist, daß auf einer Zwischenstufe die Fluktuationen f , über die integriert wird, vom Hintergrundfeld χ_B entkoppelt werden, das den physikalischen Wert für k definiert. Wenn wir die Quantisierung durchgeführt haben und alle RG-Trajektorien kennen, dann können wir ohne Informationsverlust $\bar{f} = 0$ setzen. Dann hängt die skalenabhängige Version des in (3.12) definierten reduzierten Funktionals $\bar{\Gamma}_k[\phi \equiv \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ nur noch von einem konformen Faktor ab, demjenigen bezüglich „der“ Metrik $g_{\mu\nu}$; sein Parameter k ist ein Impuls, der bezüglich genau dieser Metrik „gemessen“ ist.

3.2.1 Der Cutoffoperator

Wir können einen Cutoffoperator \mathcal{R}_k , der die gewünschten Eigenschaften besitzt, wie folgt konstruieren. Wir organisieren das Funktionalintegral (3.24) über f durch die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators, den wir aus der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ bilden:

$$\bar{\square} \equiv \bar{g}^{-1/2} \partial_\mu \bar{g}^{1/2} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (3.26)$$

Wenn wir f in den Eigenfunktionen von $(-\bar{\square})$ entwickeln, ist es die Aufgabe von \mathcal{R}_k , die Eigenfunktionen mit Eigenwerten kleiner als k^2 zu unterdrücken, indem er ihnen eine „Masse“ der Ordnung k gibt; jene mit größeren Eigenwerten müssen „masselos“ bleiben [31, 32]. In Abbildung 3.1 haben wir die Wirkungsweise des Cutoff-Operators \mathcal{R}_k schematisch dargestellt. Im einfachsten Fall, in dem die Moden der Fluktuationen f einen zu $\bar{\square}$ selbst proportionalen kinetischen Operator haben, führt das korrekte \mathcal{R}_k zu der Ersetzung

$$(-\bar{\square}) \longrightarrow (-\bar{\square}) + k^2 R^{(0)}\left(\frac{-\bar{\square}}{k^2}\right), \quad (3.27)$$

wenn wir es zu $\Gamma_k^{(2)}$ addieren. Hierbei ist $R^{(0)}(z)$ eine beliebige „Profilfunktion“, die zwischen $R^{(0)}(0) = 1$ und $R^{(0)}(\infty) = 0$ interpoliert mit einer Übergangsregion um $z = 1$. Diese Bedingungen garantieren, daß der effektive inverse Propagator der lang- und kurzwelligen Moden $-\bar{\square} + k^2$ beziehungsweise $-\bar{\square}$ ist und daß der Übergang zwischen lang- und kurzwelligen Moden beim $(-\bar{\square})$ -Eigenwert k^2 stattfindet, wie es auch sein sollte.

Wir finden die zum Cutoffwert k gehörige Vergrößerungsskala $\ell = \ell(k)$, indem wir die Eigenschaften der $(-\bar{\square})$ -Eigenfunktionen mit Eigenwert k^2 , der sogenannten „Cutoffmode“,

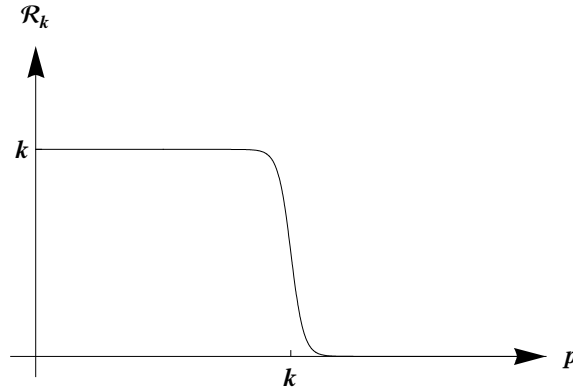


Abbildung 3.1: Der Cutoff-Operator \mathcal{R}_k . Er unterdrückt Moden mit Impulsen kleiner als k , indem er ihnen eine Masse der Ordnung k gibt. Moden mit Impulsen größer als k werden nicht verändert.

untersuchen [26, 27]: man bestimmt ihre typische Skala für die Variation nach x (zum Beispiel eine Periode) und wandelt diese Koordinatenlänge in eine physikalische, das heißt in eine Eigenlänge von $\bar{g}_{\mu\nu}$ um. Das Ergebnis $\ell(k)$ ist ein ungefähres Maß für die Ausdehnung der Raumzeitvolumina, bis zu welcher die Dynamik „gemittelt“ worden ist. Wenn $\bar{g}_{\mu\nu}$ eine nahezu flache Metrik ist, so ist $\ell(k)$ ungefähr gleich π/k . (Siehe [26, 27] für eine detaillierte Diskussion.) In diesem Sinne bestimmt die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ beziehungsweise ihr konformer Faktor χ_B die physikalische, das heißt die Eigenskala von k .

Die Definition der Skala k als Cutoff im Spektrum des kovarianten Laplace-Beltrami-Operators, der aus der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ gebildet ist, ist im Einklang mit der Konstruktion der exakten Mittelwertwirkung der Gravitation in [10]; dort ist es auch die Hintergrundmetrik, die die Skala von k definiert.

Während diese Wahl sehr natürlich erscheint und in der Tat auch die einzige sinnvolle für die Quantisierung der Gravitation ist, benutzt jede gewöhnliche Quantisierung und jedes RG-Schema, das ϕ zumindest implizit als einen gewöhnlichen Skalar behandelt, einen anders definierten Cutoff: die Grundlage dieses Cutoffs ist der Laplace-Beltrami-Operator $\hat{\square}$ bezüglich der Referenz-Metrik,

$$\hat{\square} = \hat{g}^{-1/2} \partial_\mu \hat{g}^{1/2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (3.28)$$

Der Cutoffoperator \mathcal{R}_k ist dabei so konstruiert, daß er zu der folgenden Ersetzung führt:

$$(-\hat{\square}) \longrightarrow (-\hat{\square}) + k^2 R^{(0)}\left(\frac{-\hat{\square}}{k^2}\right). \quad (3.29)$$

In diesem Fall ist die Eigenskala von k durch die Metrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ bestimmt, die nie eine physikalische Bedeutung annimmt. Die Referenzmetrik besitzt keine Informationen über die wahre, die „On-shell“-Raumzeitmetrik, nämlich die Hintergrundmetrik, die wir dynamisch durch die Bedingung $\langle f \rangle = 0$ anpassen können.

Die Ersetzungsregel (3.29) ist die richtige Wahl, wenn wir χ als gewöhnlichen Skalar auf einer nicht-dynamischen Raumzeit mit der Metrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ betrachten, zum Beispiel auf dem flachen Raum, wo $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ist. Der Mittelwertwirkungs-Formalismus, der auf (3.29) aufbaut, reproduziert dann alle bekannten Ergebnisse der Störungstheorie, zum Beispiel das $\ln(k)$ -Laufen der quartischen Kopplung in der ϕ^4 -Theorie.

Da $\hat{g}_{\mu\nu}$ eine starre Metrik ist, ist der aus der Ersetzung (3.29) resultierende Fluß nicht „hintergrundunabhängig“ im Sinne von [3–5]; die Ersetzungsregel (3.27) hingegen ergibt tatsächlich einen „hintergrundunabhängigen“ RG-Fluß.

Die Diskussionen der nächsten Kapitel werden zeigen, daß der auf dem $\bar{\square}$ -Schema (3.27) basierende Fluß sich *deutlich* von dem für gewöhnliche Skalare unterscheidet. Der Grund dafür ist, daß das Gravitationsfeld über die χ_B -Abhängigkeit von $\bar{\square}$ selbst die Skala von k definiert. Der Unterschied zwischen (3.27) und (3.29) wird deutlich, wenn wir uns in Erinnerung rufen, daß die Laplace-Beltrami-Operatoren von $\hat{g}_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu} = \chi_B^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}$ über die folgende Beziehung miteinander verbunden sind:

$$\bar{\square} = \chi_B^{-2\nu} \hat{\square} + \mathcal{O}(\partial\chi_B). \quad (3.30)$$

Der Faktor $\chi_B^{-2\nu}$ führt zu dramatischen Veränderungen des RG-Flusses. Die Terme der Ordnung proportional zu $\partial\chi_B$ sind weniger wichtig; innerhalb der Einstein-Hilbert-Trunkierung spielen sie keine Rolle.

Die verbleibenden Konstruktionsschritte folgen den bekannten Regeln [31,32,34]. Wir definieren den skalenabhängigen Fluktuations-Erwartungswert

$$\bar{f}(x) \equiv \langle f(x) \rangle_k = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}(x)}} \frac{\delta W_k[J; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta J(x)}, \quad (3.31)$$

und lösen (3.31) nach der Quelle J auf,

$$J(x) = J_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}](x). \quad (3.32)$$

Schließlich definieren wir die effektive Mittelwertwirkung als die Legendre-Transformierte

von W_k , von der wir die Cutoffwirkung $\Delta_k S[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ abgezogen haben:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] &= \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \bar{f}(x) J_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}](x) - W_k[J_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \bar{f} \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \bar{f}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Analog zu (3.11) und (3.12) führen wir

$$\Gamma_k[\phi, \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \equiv \Gamma_k[\bar{f} = \phi - \chi_B; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \quad (3.34)$$

ein sowie das reduzierte Funktional mit einem Argument,

$$\bar{\Gamma}_k[\phi, \hat{g}_{\mu\nu}] \equiv \Gamma_k[\phi, \phi, \hat{g}_{\mu\nu}] = \Gamma_k[\bar{f} = 0; \chi_B = \phi, \hat{g}_{\mu\nu}]. \quad (3.35)$$

Wir finden die wesentlichen Eigenschaften von Γ_k , indem wir der Diskussion für gewöhnliche skalare Theorien folgen [31, 32, 34]. Insbesondere führt die Differentiation von (3.24) nach k zu der folgenden FRGE, die die Skalenabhängigkeit von Γ_k beschreibt:

$$k \partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] + \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \right)^{-1} k \partial_k \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \right]. \quad (3.36)$$

Hierbei ist $\Gamma_k^{(2)}$ die Matrix der zweiten funktionalen Ableitungen von $\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ nach \bar{f} bei festem χ_B . In bra-ket-Schreibweise ist sie durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\langle x | \Gamma_k^{(2)} | y \rangle = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}(x)} \sqrt{\hat{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta \bar{f}(x) \delta \bar{f}(y)}. \quad (3.37)$$

Man sollte beachten, daß die Metrik, die in Formeln wie (3.31) oder (3.37) auftaucht, die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ ist (und nicht die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$!). Entsprechend gilt

$$\text{Tr}(\dots) \equiv \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \langle x | (\dots) | x \rangle.$$

Da wir die Ableitung nach \bar{f} bei festem Hintergrundfeld durchführen, können wir die FRGE (3.36) nicht mit dem reduzierten Funktional $\bar{\Gamma}_k$ alleine formulieren. Somit besteht der relevante Theorienraum aus den Funktionalen, die von zwei Feldern, von \bar{f} und χ_B , oder alternativ von ϕ und χ_B abhängen.

Durch seine Konstruktion verschwindet \mathcal{R}_k für $k \rightarrow 0$. Als Konsequenz daraus reduziert sich Γ_k in diesem Grenzfall auf die gewöhnliche effektive Wirkung

$$\begin{aligned} \Gamma_{k=0}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] &= \Gamma[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \\ \bar{\Gamma}_{k=0}[\phi] &= \bar{\Gamma}[\phi]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Daher genügen $\Gamma_{k \rightarrow 0}$ und $\bar{\Gamma}_{k \rightarrow 0}$ den Relationen (3.15) bzw. (3.16), was zeigt, daß $\Gamma_{k=0}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ nur von der Summe $\chi_B + \bar{f}$ abhängt. Dies gilt *nicht* für $k \neq 0$, da hier im allgemeinen $\Delta_k S[f; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ von f und χ_B einzeln und nicht nur von ihrer Summe abhängen kann. Im entgegengesetzten Grenzfall $k \rightarrow \infty$ nähert sich $\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ der Wirkung $S[\chi_B + \bar{f}]$ plus einem berechenbaren Korrekturterm (siehe [59] für eine ausführliche Diskussion).

Teil II

Die konforme Reduktion der Einstein-Hilbert-Trunkierung

DIE KONFORM-REDUZIERTE EINSTEIN-HILBERT-TRUNKIERUNG

4.1 Der Ansatz für die effektive Mittelwertwirkung

In diesem Kapitel werden wir die bis jetzt exakte Flußgleichung (3.36) auf den Raum der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-(„CREH“-)Trunkierung¹ projizieren. Wir machen dabei zwei Näherungen:

- (1) die übliche *Einstein-Hilbert-Trunkierung*, das heißt wir projizieren die Flußgleichung auf den Unterraum des Theorienraumes, der durch die Newton- und die kosmologische Konstante parametrisiert wird,

und

- (2) die *konforme Reduktion*, in der wir nur den konformen Faktor quantisieren; alle anderen Freiheitsgrade der Metrik sowie die Faddeev-Popov-Geistfelder werden vernachlässigt.

Wir leiten alle Formeln für beliebige Dimensionen her; in Abschnitt 4.4 fassen wir alle Ergebnisse für vier Dimensionen zusammen.

Der Trunkierungsansatz für $\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ ist durch das konform-reduzierte Funktional $S_{EH}[\bar{f} + \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]$ aus Gl. (2.6) mit einer k -abhängigen Newton-Konstante G_k und einer

¹Für einen anderen Zugang zur Quantisierung konformer Fluktuationen siehe [56].

k -abhängigen kosmologischen Konstante Λ_k gegeben:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] &= -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{1}{2}(\chi_B + \bar{f}) \hat{\square}(\chi_B + \bar{f}) + \frac{1}{2}\xi(d)\hat{R}(\chi_B + \bar{f})^2 \right. \\ &\quad \left. - \xi(d)\Lambda_k(\chi_B + \bar{f})^{d\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die effektive Mittelwertwirkung Γ_k hängt von der Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ ab, auch wenn wir diese festhalten und niemals ändern. Deshalb haben wir $\hat{g}_{\mu\nu}$ in die Liste der Argumente von Γ_k aufgenommen. Die Felder χ_B und \bar{f} sind hier noch immer beliebige Funktionen von x . Zusätzlich hängt die effektive Mittelwertwirkung von der ebenfalls beliebigen Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ ab. In Gl. (4.1) ist \hat{R} der Ricci-Skalar bezüglich der Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ (siehe Anhang A) und $\hat{\square}$ ist deren Laplace-Beltrami-Operator (siehe Gl. (3.28)). Die Matrix (3.37) der zweiten Funktionalableitungen der Mittelwertwirkung (4.1) nach \bar{f} besitzt die folgende Struktur:

$$\langle x | \Gamma_k^{(2)} | y \rangle = \Gamma_k^{(2)} \frac{\delta^d(x-y)}{\sqrt{\hat{g}(x)}}. \quad (4.2a)$$

In (4.2a) ist das Funktional $\Gamma_k^{(2)}$ durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] &= -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \left\{ -\hat{\square}_x + \xi(d)\hat{R} - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d)\Lambda_k(\chi_B(x) + \bar{f}(x))^{2\nu} \right\} \end{aligned} \quad (4.2b)$$

Wir interpretieren $\Gamma_k^{(2)}$ hier als einen Differentialoperator, der auf x wirkt.

4.2 Die projizierten Renormierungsgruppen-Gleichungen

Die β -Funktionen geben an, in welcher Weise die laufenden Kopplungskonstanten der diskutierten Quantentheorie von der Renormierungsgruppen-Skala k abhängen. Für die laufende Newton-Konstante beispielsweise ist das Skalenverhalten durch $\beta_G = k\partial_k G_k$ gegeben; analog gilt für die laufende kosmologische Konstante $\beta_\Lambda = k\partial_k \Lambda_k$. Wir bestimmen die β -Funktionen von G_k und Λ_k wie folgt. Zunächst setzen wir den Ansatz (4.1) in die Flußgleichung (3.36) ein. Dabei erhalten wir auf der linken Seite der Flußgleichung

Ableitungen von G_k und Λ_k nach der Skala k . Auf ihrer rechten Seite müssen wir eine funktionale Spur berechnen, die die Matrix $\Gamma_k^{(2)}$ enthält. Es ist dabei ausreichend, diese Spur in einer Ableitungsentwicklung zu bestimmen, die nur diejenigen Terme beinhaltet, die auf der linken Seite der Flußgleichung stehen. Das sind die Terme, die zu den Monomen $\phi \widehat{\square} \phi$, $\widehat{R} \phi^2$ und $\phi^{d\nu}$ proportional sind, wobei die Summe ϕ durch $\phi \equiv \chi_B + \bar{f}$ definiert ist. Wenn wir dann auf beiden Seiten einen Koeffizientenvergleich durchführen, erhalten wir die gewünschten RG-Gleichungen für G_k und Λ_k .

Ohne Informationen zu verlieren, können wir diese Berechnung für ein homogenes Hintergrundfeld $\chi_B(x) = \text{const} \equiv \chi_B$ durchführen. Die folgenden zwei Rechnungen sind notwendig, um die drei interessierenden Monome zu erhalten:

(i) Wir werten die funktionale Spur für eine flache Referenzmetrik $\widehat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ und für ein nicht-konstantes Feld $\bar{f}(x)$ aus. Wir müssen dann lediglich den Term $\bar{f} \widehat{\square} \bar{f}$ berücksichtigen. Ein Koeffizientenvergleich mit dem relevanten Term auf der linken Seite der Flußgleichung,

$$k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \delta_{\mu\nu}] = +\frac{1}{8\pi\xi(d)} k\partial_k \left(\frac{1}{G_k} \right) \int d^d x \frac{1}{2} \bar{f} \widehat{\square} \bar{f} + \dots, \quad (4.3)$$

liefert die β -Funktion für die Newton-Konstante G_k .

(ii) Wir werten die funktionale Spur für $\bar{f} = 0$ und für eine beliebige Referenzmetrik $\widehat{g}_{\mu\nu}$ aus und berücksichtigen dabei nur die Monome $\chi_B^{d\nu}$ und $\widehat{R} \chi_B^2$. Ein Koeffizientenvergleich mit den entsprechenden Termen der linken Seite der Flußgleichung,

$$\begin{aligned} & k\partial_k \Gamma_k[0; \chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu}] \\ &= -\frac{1}{8\pi\xi(d)} \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \xi(d) k\partial_k \left(\frac{1}{G_k} \right) \widehat{R} \chi_B^2 \right. \\ & \quad \left. - \xi(d) k\partial_k \left(\frac{\Lambda_k}{G_k} \right) \chi_B^{d\nu} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

ermöglicht die Berechnung von $\partial_k(\Lambda_k/G_k)$ und eine alternative Bestimmung der β -Funktion für G_k .

Da die Terme proportional zu $\phi \widehat{\square} \phi$ sowie proportional zu $\widehat{R} \phi^2$ denselben Vorfaktor $1/G_k$ haben, können wir die β -Funktion für G_k aus beiden Termen ableiten. Wir erwarten nicht, daß die entsprechenden β -Funktionen gleich sind; wenn die CREH-Näherung aber sinnvoll ist, sollten sie zumindest ähnlich sein.

4.2.1 Die Wahl der Infrarot-Cutoffs

Bevor wir diese Rechnungen durchführen können, müssen wir die Frage beantworten, welches der richtige Infrarot-Cutoff ist. Nach Abschnitt 3.2 muß die RG-Skala k ein Cutoff im Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators der Hintergrundmetrik, $\bar{\square}$, sein, damit die Theorie „hintergrundunabhängig“ im Sinne von [3–5] ist; die Skala k darf kein Cutoff im Spektrum von $\hat{\square}$ sein, der aus der starren, unveränderbaren Referenzmetrik gebildet ist. Da das Hintergrundfeld χ_B konstant ist, sind die beiden Operatoren $\bar{\square}$ und $\hat{\square}$ über die folgende Relation miteinander verbunden:

$$\hat{\square} = \hat{g}^{-1/2} \partial_\mu \hat{g}^{1/2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu = \chi_B^{2\nu} \bar{g}^{-1/2} \partial_\mu \chi_B^{-2\nu} \bar{g}^{1/2} \chi_B^{2\nu} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu = \chi^{2\nu} \bar{\square}. \quad (4.5)$$

Somit können wir die Matrix $\Gamma_k^{(2)}$ der zweiten Funktionalableitungen von Γ_k nach \bar{f} aus Gl. (4.2b) wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} & \Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \\ &= -\frac{1}{8\pi\xi(d) G_k} \left\{ -\chi_B^{2\nu} \bar{\square} + \xi(d) \hat{R} - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k (\chi_B + \bar{f}(x))^{2\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wir definieren den Cutoff-Operator \mathcal{R}_k derart, daß er zu der Ersetzung (3.27) führt, wenn wir ihn zu $\Gamma_k^{(2)}$ addieren:

$$\begin{aligned} & \Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] + \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \\ &= -\frac{1}{8\pi\xi(d) G_k} \left\{ -\chi_B^{2\nu} \left[\bar{\square} + k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\bar{\square}}{k^2} \right) \right] + \xi(d) \hat{R} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k (\chi_B + \bar{f}(x))^{2\nu} \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Als Konsequenz daraus ist der Cutoff-Operator nun explizit vom Hintergrundfeld χ_B abhängig:

$$\mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{8\pi\xi(d) G_k} \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\bar{\square}}{k^2} \right). \quad (4.8)$$

Ausdrückt durch $\hat{\square}$ erhalten wir für den Cutoff-Operator

$$\mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{8\pi\xi(d) G_k} \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2} \right), \quad (4.9)$$

sowie

$$\begin{aligned} & \Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] + \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \\ &= -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \left\{ -\hat{\square} + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) + \xi(d) \hat{R} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k (\chi_B + \bar{f}(x))^{2\nu} \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

für die Summe aus Cutoff-Operator und der Matrix $\Gamma_k^{(2)}$. Die beiden Faktoren $\chi_B^{2\nu}$, die in (4.9) auftauchen, sind der entscheidende Unterschied zwischen der FRGE für den konformen Faktor und der für einen gewöhnlichen Skalar. Wenn wir anstatt (3.27) die Ersetzungsregel (3.29) anwendeten, würden diese Faktoren fehlen.

Wenn wir nun $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ aus Gl. (4.10), in der \square durch $\hat{\square}/\chi_B^{2\nu}$ ausdrückt ist, in die Flußgleichung (3.36) einsetzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[G_k k\partial_k \left\{ \frac{1}{G_k} \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) \right\} \right. \\ & \quad \times \left(-\hat{\square} + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) + \xi(d) \hat{R} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k (\chi_B + \bar{f}(x))^{2\nu} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mit der wie üblich definierten anomalen Dimension des Operators $\sqrt{\hat{g}} \hat{R}$ [10],

$$\eta_N(k) \equiv +k\partial_k \ln G_k \quad (4.12)$$

erhalten wir die folgende Relation:

$$G_k k\partial_k \frac{1}{G_k} = -G_k \frac{k\partial_k G_k}{G_k^2} = -\frac{k\partial_k G_k}{G_k} = -k\partial_k \ln G_k = -\eta_N. \quad (4.13)$$

Damit nimmt die Flußgleichung (4.11) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} & k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \\ &= \chi_B^{2\nu} k^2 \text{Tr} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \eta_N\right) R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) - \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) R^{(0)'} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) \right\} \right. \\ & \quad \times \left(-\hat{\square} + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) + \xi(d) \hat{R} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k (\chi_B + \bar{f}(x))^{2\nu} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

In Gl. (4.14) hebt sich das globale Minuszeichen von \mathcal{R}_k aus (4.8) (und damit von $k\partial_k \mathcal{R}_k$) gegen das globale Minuszeichen von $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ in (4.7) weg. Das ist der Schritt, bei dem im vorliegenden Zugang der Übergang vom „ursprünglichen“ zum „invertierten“ Bild stattgefunden hat (siehe Abschnitt 2). Der Faktor $(\dots)^{-1}$ unter der Spur in Gl. (4.14) ist der Propagator der Mode mit positiver kinetischer, aber negativer potentieller Energie. (Dies ist ein Beispiel der „ $\mathcal{Z}_k = z_k$ -Regel“, die in [10] und [14] diskutiert wurde.)

Die einzige Spezialisierung, die in (4.14) eingeht, ist $\chi_B = \text{const}$; die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ und der Mittelwert der Fluktuationen, \bar{f} , sind noch immer beliebig. Gl. (4.14) ist daher den Startpunkt sowohl für die β -Funktionsrechnung (i) als auch für die β -Funktionsrechnung (ii).

4.2.2 Die β -Funktionsrechnung (ii)

Wir wollen zunächst die β -Funktionsrechnung (ii) durchführen; diese ist analog zu der entsprechenden Rechnung in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung in Ref. [10]. Ein Vergleich damit wird sehr aufschlußreich sein.

In der Rechnung (ii) setzen wir $\bar{f} \equiv 0$. Somit bleibt aus der Flußgleichung (4.14) der folgende Ausdruck übrig:

$$k\partial_k \Gamma_k[0; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \chi_B^{2\nu} k^2 \text{Tr} \left[\mathcal{N}(-\hat{\square}) \left(\mathcal{A}(-\hat{\square}) + \xi(d) \hat{R} \right)^{-1} \right]. \quad (4.15)$$

In (4.15) haben wir die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(-\hat{\square}) &\equiv \left(1 - \frac{1}{2} \eta_N\right) R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) - \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) R^{(0)'} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) \\ \mathcal{A}(-\hat{\square}) &\equiv -\hat{\square} + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k \chi_B^{2\nu}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Es reicht aus, die Spur auf der rechten Seite von (4.15) bis zur ersten Ordnung in \hat{R} zu entwickeln. Wenn wir den inversen Operator in (4.15) nach Potenzen von \hat{R} entwickeln und Terme höherer Ordnung vernachlässigen, bleibt der folgende Ausdruck zur Spurberechnung übrig:

$$\begin{aligned} k\partial_k \Gamma_k[0; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] &= \chi_B^{2\nu} k^2 \text{Tr} \left[\mathcal{N}(-\hat{\square}) \mathcal{A}(-\hat{\square})^{-1} \right] \\ &\quad - \xi(d) \chi_B^{2\nu} k^2 \text{Tr} \left[\hat{R}(x) \mathcal{N}(-\hat{\square}) \mathcal{A}(-\hat{\square})^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir an dieser Stelle annehmen, daß $\widehat{g}_{\mu\nu}$ die Metrik einer maximal-symmetrischen Raumzeit ist². Dann ist der Ricci-Skalar \widehat{R} unabhängig von x und kann aus der zweiten Spur in (4.17) herausgezogen werden. Wir können die Spuren mit derselben Entwicklungsformel wie in der vollen Rechnung³ [10] bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[W(-\widehat{\square})] &= (4\pi)^{-d/2} \left\{ Q_{d/2}[W] \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} + \frac{1}{6} Q_{d/2-1}[W] \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \widehat{R} + \mathcal{O}(\widehat{R}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Hier haben wir die folgenden Funktionale eingeführt:

$$\begin{aligned} Q_0[W] &= W[0] \\ Q_n[W] &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{\infty} dz z^{n-1} W(z), \quad n > 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Gleichung (4.19) gilt für jede beliebige Funktion W . Wenn wir die Spurentwicklung (4.18) in Gl. (4.17) einsetzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} k\partial_k \Gamma_k[0; \chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu}] &= (4\pi)^{-d/2} \chi_B^{2\nu} k^2 \left[\left\{ \frac{1}{6} Q_{d/2-1}[\mathcal{N}/\mathcal{A}] - \xi(d) Q_{d/2}[\mathcal{N}/\mathcal{A}^2] \right\} \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \widehat{R} \right. \\ &\quad \left. + Q_{d/2}[\mathcal{N}/\mathcal{A}] \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} + \mathcal{O}(\widehat{R}^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aus Gl. (4.19) können wir die Q_n -Funktionale ablesen:

$$\begin{aligned} Q_{d/2-1}[\mathcal{N}/\mathcal{A}] &= (\chi_B^{2\nu} k^2)^{d/2-2} \left[\Phi_{d/2-1}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k/k^2 \right) - \frac{\eta_N}{2} \widetilde{\Phi}_{d/2-1}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k/k^2 \right) \right] \\ Q_{d/2}[\mathcal{N}/\mathcal{A}^2] &= (\chi_B^{2\nu} k^2)^{d/2-2} \left[\Phi_{d/2}^2 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k/k^2 \right) - \frac{\eta_N}{2} \widetilde{\Phi}_{d/2}^2 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k/k^2 \right) \right] \\ Q_{d/2}[\mathcal{N}/\mathcal{A}] &= (\chi_B^{2\nu} k^2)^{d/2-1} \left[\Phi_{d/2}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k/k^2 \right) - \frac{\eta_N}{2} \widetilde{\Phi}_{d/2}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k/k^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

²Wir könnten die β -Funktionen auch ohne diese Annahme ableiten; das Ergebnis ist jedoch das selbe.

³Hier und im folgenden werden wir die Bezeichnung „volle Rechnung“ immer auf die vollständige Rechnung innerhalb der Einstein-Hilbert-Trunkierung in [10] beziehen.

Wir haben die Funktionale (4.21) durch dieselben Standard-Schwellenfunktionen wie in der vollen Einstein-Hilbert-Rechnung [10] ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\Phi_n^p(w) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z) - z R^{(0)'}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + w]^p} \\ \tilde{\Phi}_n^p(w) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + w]^p}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Nach Gl. (4.21) sind $Q_{d/2-1}[\mathcal{N}/\mathcal{A}]$ und $Q_{d/2}[\mathcal{N}/\mathcal{A}^2]$ proportional zu $\chi_B^{2(d-4)/(d-2)}$, während $Q_{d/2}[\mathcal{N}/\mathcal{A}]$ proportional zu χ_B^2 ist. (In vier Dimensionen sind die Funktionale $Q_1[\mathcal{N}/\mathcal{A}]$ und $Q_2[\mathcal{N}/\mathcal{A}^2]$ sogar unabhängig vom Hintergrundfeld χ_B .) Die Monome $\int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \chi_B^2 \widehat{R}$ und $\int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \chi_B^{d\nu}$ sind daher die einzigen relevanten auf der rechten Seite von (4.20). Diese sind exakt dieselben Monome wie auf der linken Seite der Flußgleichung, die wir in Gl. (4.4) explizit aufgeschrieben haben. Indem wir die Koeffizienten der ersten Invarianten in (4.4) und (4.20) gleichsetzen, erhalten wir die Gleichung für $\partial_k G_k$. Die zweite Invariante liefert $\partial_k(\Lambda_k/G_k)$; mit der Information aus der ersten Invarianten erhalten wir dann die Gleichung für $\partial_k \Lambda_k$.

4.2.3 Die Einführung dimensionsloser Größen

Durch die Einführung von dimensionslosen Kopplungskonstanten,

$$\begin{aligned}g_k &\equiv k^{d-2} G_k \\ \lambda_k &\equiv k^{-2} \Lambda_k,\end{aligned}\tag{4.23}$$

wird das gekoppelte System aus zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen autonom:

$$k \partial_k g_k = \beta_g(g_k, \lambda_k),\tag{4.24}$$

$$k \partial_k \lambda_k = \beta_\lambda(g_k, \lambda_k).\tag{4.25}$$

Für die dimensionslose Newton-Konstante g_k erhalten wir so die folgende β -Funktion:

$$\beta_g(g_k, \lambda_k) = [d - 2 + \eta_N(g_k, \lambda_k)] g_k.\tag{4.26}$$

Der Koeffizient der ersten Invarianten $\int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \chi_B^2 \widehat{R}$ liefert mit (siehe Gl. (4.13))

$$k \partial_k (1/G_k) = -\eta_N/G_k$$

den folgenden expliziten Ausdruck für die anomale Dimension:

$$\eta_N^{(\text{pot})}(g_k, \lambda_k) = \frac{g_k B_1(\lambda_k)}{1 - g_k B_2(\lambda_k)} \quad (4.27)$$

In (4.27) haben wir die folgenden Funktionen eingeführt:

$$B_1(\lambda_k) = \frac{2}{3} (4\pi)^{-d/2+1} \times \left\{ \Phi_{d/2-1}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) - 6 \xi(d) \Phi_{d/2}^2 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) \right\}, \quad (4.28a)$$

$$B_2(\lambda_k) = -\frac{1}{3} (4\pi)^{-d/2+1} \times \left\{ \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) - 6 \xi(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^2 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) \right\}. \quad (4.28b)$$

Ausgedrückt durch die dimensionslosen Größen g_k und λ_k gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} k\partial_k \left(\frac{\Lambda_k}{G_k} \right) &= k\partial_k \left(k^d \frac{\Lambda_k}{k^2} \frac{1}{k^{d-2} G_k} \right) = \frac{k^d}{g_k} \left(d \lambda_k + k\partial_k \lambda_k - \frac{k\partial_k g_k}{g_k} \right) \\ &= \frac{k^d}{g_k} \left[k\partial_k \lambda_k + (2 - \eta_N) \lambda_k \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Der Koeffizientenvergleich der Invarianten $\int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \chi_B^{d\nu}$ liefert die β -Funktion für die dimensionslose kosmologische Konstante λ_k :

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(g_k, \lambda_k) &= -(2 - \eta_N) \lambda_k \\ &+ 2 (4\pi)^{-d/2+1} g_k \left\{ \Phi_{d/2}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) - \frac{\eta_N}{2} \tilde{\Phi}_{d/2}^1 \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

In Gl. (4.27) haben wir die anomale Dimension mit η_N^{pot} bezeichnet. Wir wollen damit andeuten, daß wir diesen Ausdruck aus dem Potentialterm („pot“) proportional zu $\widehat{R} \phi^2$ abgeleitet haben. Wie bereits erwähnt, können wir die anomale Dimension auch aus dem kinetischen Term proportional zu $(\partial_\mu \phi)^2$ bestimmen; letztere werden wir später mit η_N^{kin} bezeichnen.

An dieser Stelle wollen wir auf die Ähnlichkeit der obigen „skalaren“ RG-Gleichungen mit denen in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung hinweisen. Wir vergleichen dazu die obigen Gleichungen (4.27), (4.28) und (4.30) mit ihren Entsprechungen in Abschnitt 4 von Ref. [10]. Insbesondere ist die Struktur (4.27) der anomalen Dimension die selbe wie in der vollen Rechnung. Den Term $g_k B_2(\lambda_k)$ im Nenner von (4.27) erhielten wir, als wir den Vorfaktor des Operators \mathcal{R}_k in (4.8), $1/G_k$, nach k abgeleitet hatten. Diese strukturelle Ähnlichkeit führt dazu, daß das Ergebnis für η_N in der Störungstheorie nicht untersucht werden kann, da hier g_k beliebig große wie auch kleine Werte annehmen kann und wir die Theorie somit nicht in der Kopplungskonstanten g_k entwickeln können.

4.2.4 Die β -Funktionsrechnung (i)

Die β -Funktionsrechnung (i), die $\eta_N \equiv \eta_N^{(\text{kin})}$ aus dem kinetischen Term extrahiert, haben wir in Anhang C durchgeführt. Die resultierenden RG-Gleichungen sind wieder von der Form (4.24), (4.25), mit demselben β_λ (siehe Gl. (4.30)) und mit der folgenden anomalen Dimension:

$$\begin{aligned} \eta_N(k) = & (-1)^{1+d/2} \frac{2^{(14-d)/2} \pi v_d d^{d/2} (d+2)^{d/2}}{(d-1)^{(d+2)/2} (d-2)^{(d+2)/2}} g_k \lambda_k^{d/2} \\ & \times \widehat{\Sigma}_d \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) \left[1 + \frac{16 \pi v_d d^2 (d+2)^2}{(d-1)^3 (d-2)^3} g_k \lambda_k^2 \widetilde{\Sigma}_d \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Familien $\widehat{\Sigma}_d$ und $\widetilde{\Sigma}_d$ bestehen aus gewöhnlichen Integralen, die die Profilfunktion $R^{(0)}$ enthalten. Die erste Familie ist durch den folgenden Ausdruck definiert:

$$\widehat{\Sigma}_d(w) \equiv \frac{d}{dw} \left(w^{(6-d)/2} \Sigma_d(w) \right). \quad (4.32)$$

In (4.32) haben wir die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\Sigma_d(w) \equiv \frac{1}{d} \int_0^\infty dz z^{d/2} \frac{[1 + R^{(0)'}(z)]^2}{[z + R^{(0)}(z) + w]^4}. \quad (4.33)$$

Hier bezeichnet der Strich an $R^{(0)}$ die Ableitung nach dem Argument. Die zweite Familie ist wie folgt definiert:

$$\widetilde{\Sigma}_d(w) \equiv \frac{2}{d} \int_0^\infty dz z^{d/2} \left\{ \frac{[1 + R^{(0)'}(z)] R^{(0)'}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + w]^4} - 2 \frac{[1 + R^{(0)'}(z)]^2 R^{(0)}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + w]^5} \right\}. \quad (4.34)$$

In Abschnitt 5 werden wir die beiden Varianten der RG-Gleichungen für g und λ , Gleichungen (4.24) beziehungsweise (4.25), im Detail analysieren und ihren physikalischen Inhalt mit dem der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung vergleichen.

4.3 Die β -Funktionen für die dimensionslose Newton- und kosmologischen Konstante

Das „Profil“ des Cutoffs, das heißt die genaue Form der Interpolation zwischen dem „lang-“ und „kurzwelligem“ Bereich ist durch die Profilfunktion $R^{(0)}$ gegeben. Diese ist

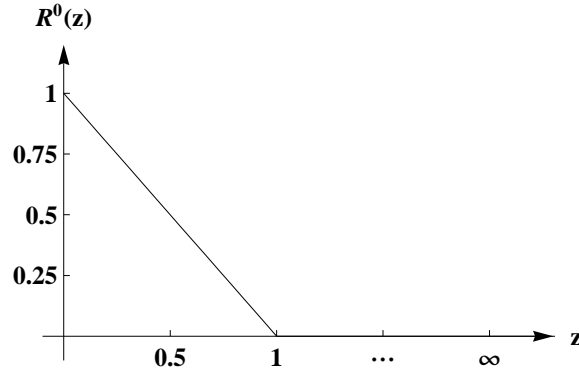


Abbildung 4.1: Die optimierte Profilfunktion (4.35) aus Ref. [60].

vollkommen beliebig, außer daß sie den Randbedingungen $R^{(0)}(0) = 1$ und $R^{(0)}(\infty) = 0$ genügen muß. Auf der Stufe der meßbaren Größen, die sich aus der effektiven Mittelwertwirkung ableiten, muß sich jedoch die $R^{(0)}$ -Abhängigkeit (zumindest näherungsweise) wegheben. In den folgenden Abschnitten wollen wir die optimierte Profilfunktion aus Ref. [60] verwenden; sie erlaubt es, die verschiedenen Integrale aus Abschnitt 4.2 analytisch zu bestimmen.

Die optimierte Profilfunktion ist durch die folgende Funktion gegeben [60]:

$$R^{(0)}(z) = (1 - z) \theta(1 - z) \quad (4.35)$$

In Abbildung 4.1 ist diese Funktion dargestellt. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} R^{(0)'}(z) &= -\theta(1 - z), & R^{(0)''}(z) &= \delta(1 - z) \\ z + R^{(0)}(z) &= \theta(1 - z) + z\theta(z - 1) \\ R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z) &= \theta(1 - z) \\ \left[1 + R^{(0)'}(z)\right]^n &= \theta(z - 1), \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \\ \left[1 + R^{(0)'}(z)\right]^n \left[R^{(0)}(z)\right]^m &= 0, \quad \forall n, m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.36)$$

Damit lassen sich die Schwellenfunktionen aus (4.22) wie folgt vereinfachen [23]:

$$\Phi_n^p(w) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1+w)^p} \quad (4.37a)$$

$$\tilde{\Phi}_n^p(w) = \frac{1}{\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1+w)^p}. \quad (4.37b)$$

Auch wenn $R^{(0)}$ keine glatte Funktion ist, so sind alle Schwellenfunktionen wohldefiniert.

Durch die Verwendung der optimierten Profilfunktion (4.35) vereinfacht sich das Integral (4.33) zu

$$\Sigma_d(w) = \frac{1}{d} \int_1^\infty dz \frac{z^{d/2}}{(z+w)^4}. \quad (4.38)$$

Wenn wir z gemäß $z \rightarrow z/w$ reskalieren, so nimmt das Integral (4.32) die folgende Form an:

$$\widehat{\Sigma}_d(w) = \frac{1}{d} \frac{w^{(4-d)/2}}{(1+w)^4}. \quad (4.39)$$

Weiterhin finden wir, daß für dieses spezielle Beispiel einer Profilfunktion das Integral (4.34) verschwindet, das heißt daß folgendes gilt:

$$\widetilde{\Sigma}_d(w) = 0. \quad (4.40)$$

Für andere Profilfunktionen wird $\widetilde{\Sigma}_d$ im allgemeinen nicht verschwinden.

Mit den obigen Formeln können wir die RG-Gleichungen für g und λ in expliziter Form angeben. Die anomale Dimension aus dem kinetischen Term nimmt die folgende Form an:

$$\eta_N^{(\text{kin})}(g_k, \lambda_k) = -\frac{2^{11} \pi v_d \xi(d)^3 d(d+2)^2}{(d-2)^6} g_k \lambda_k^2 \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right]^{-4}. \quad (4.41)$$

Weiterhin ist $\eta_N^{(\text{pot})}$ durch (4.27) gegeben, mit den folgenden B -Funktionen:

$$B_1(\lambda_k) = \frac{2}{3} (4\pi)^{-d/2+1} \left\{ \Gamma(d/2)^{-1} \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right]^{-1} - 6 \xi(d) \Gamma(d/2+1)^{-1} \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right]^{-2} \right\}, \quad (4.42a)$$

$$B_2(\lambda_k) = -\frac{1}{3} (4\pi)^{-d/2+1} \left\{ \Gamma(d/2+1)^{-1} \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right]^{-1} - 6 \xi(d) \Gamma(d/2+2)^{-1} \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right]^{-2} \right\}. \quad (4.42b)$$

Mit der optimierten Profilfunktion erhalten wir die folgende β -Funktion für die kosmologische Konstante λ_k :

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(g_k, \lambda_k) = & -\left[2 - \eta_N(g_k, \lambda_k)\right] \lambda_k \\ & + 2(4\pi)^{-d/2+1} g_k \left\{ \Gamma(d/2 + 1)^{-1} - \frac{1}{2} \Gamma(d/2 + 2)^{-1} \eta_N(g_k, \lambda_k) \right\} \\ & \times \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

In (4.43) müssen wir entweder $\eta_N^{(\text{kin})}$ oder $\eta_N^{(\text{pot})}$ für die anomale Dimension einsetzen.

4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für vier Dimensionen

In vier Dimensionen besitzt der Trunkierungsansatz (4.1) der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung die folgende Form:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B] = & -\frac{3}{4\pi G_k} \int d^4x \sqrt{\widehat{g}} \left\{ -\frac{1}{2} (\chi_B + \bar{f}) \widehat{\square} (\chi_B + \bar{f}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \widehat{R} (\chi_B + \bar{f})^2 - \frac{1}{6} \Lambda_k (\chi_B + \bar{f})^4 \right\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Matrix der zweiten Funktionalableitungen der effektiven Mittelwertwirkung nach den Quantenfluktuationen, Gl. (4.2b), ist hier durch das folgende Funktional gegeben:

$$\Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B] = -\frac{3}{4\pi G_k} \left\{ -\widehat{\square}_x + \frac{1}{6} \widehat{R}(x) - 2 \Lambda_k (\chi_B(x) + \bar{f}(x))^2 \right\}. \quad (4.45)$$

Für $d = 4$ ist der Cutoff-Operator \mathcal{R}_k aus (4.8) beziehungsweise (4.9) durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k[\chi_B] &= -\frac{3}{4\pi G_k} \chi_B^2 k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\widehat{\square}}{k^2}\right) \\ &= -\frac{3}{4\pi G_k} \chi_B^2 k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\widehat{\square}}{\chi_B^2 k^2}\right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Mit (4.44) bis (4.46) leiten wir die folgende Flußgleichung her:

$$\begin{aligned} & k \partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B] \\ &= \chi_B^2 k^2 \text{Tr} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \eta_N\right) R^{(0)}\left(-\frac{\widehat{\square}}{\chi_B^2 k^2}\right) - \left(-\frac{\widehat{\square}}{\chi_B^2 k^2}\right) R^{(0)'}\left(-\frac{\widehat{\square}}{\chi_B^2 k^2}\right) \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \left(-\widehat{\square} + \frac{1}{6} \widehat{R} + \chi_B^2 k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\widehat{\square}}{\chi_B^2 k^2}\right) - 2 \Lambda_k (\chi_B + \bar{f})^2 \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Für beliebige Cutoff-Funktionen sind die dimensionslose Newton-Konstante und die dimensionslose kosmologische Konstante in vier Dimensionen durch die beiden folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} g_k &= k^2 G_k, \\ \lambda_k &= \Lambda_k/k^2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die β -Funktionen für g_k und λ_k sind durch die beiden folgenden Gleichungen gegeben:

$$\beta_g(g_k, \lambda_k) = [2 + \eta_N(g_k, \lambda_k)] g_k, \quad (4.49)$$

$$\beta_\lambda(g_k, \lambda_k) = -(2 - \eta_N) \lambda_k + \frac{g_k}{2\pi} \left[\Phi_2^1(-2\lambda_k) - \frac{1}{2} \eta_N \tilde{\Phi}_2^1(-2\lambda_k) \right]. \quad (4.50)$$

Die anomale Dimension aus dem Potentialterm, $\eta_N^{(\text{pot})}$, erhalten wir aus Gl. (4.27) mit den folgenden B -Funktionen:

$$\begin{aligned} B_1(\lambda_k) &\equiv \frac{1}{6\pi} \left[\Phi_1^1(-2\lambda_k) - \Phi_2^2(-2\lambda_k) \right], \\ B_2(\lambda_k) &\equiv -\frac{1}{12\pi} \left[\tilde{\Phi}_1^1(-2\lambda_k) - \tilde{\Phi}_2^2(-2\lambda_k) \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die anomale Dimension aus dem kinetischen Term, $\eta_N^{(\text{kin})}$, nimmt in vier Dimensionen die folgende Form an:

$$\eta_N^{(\text{kin})}(g_k, \lambda_k) = -\frac{8}{3\pi} g_k \lambda_k^2 \frac{\widehat{\Sigma}_4(-2\lambda_k)}{1 + \frac{4}{3\pi} g_k \lambda_k^2 \widetilde{\Sigma}_4(-2\lambda_k)}. \quad (4.52)$$

Wenn wir den optimierten Cutoff (4.35) verwenden, reduziert sich die anomale Dimension aus dem kinetischen Term, Gl. (4.52), auf den folgenden Ausdruck:

$$\eta_N^{(\text{kin})}(g_k, \lambda_k) = -\frac{2}{3\pi} \frac{g_k \lambda_k^2}{(1 - 2\lambda_k)^4}. \quad (4.53)$$

Für die anomale Dimension aus dem Potentialterm, $\eta_N^{(\text{pot})}$, erhalten wir aus (4.51) mit dem optimierten Cutoff:

$$B_1(\lambda_k) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{1}{4} - \lambda_k \right) \frac{1}{(1 - 2\lambda_k)^2}, \quad (4.54a)$$

$$B_2(\lambda_k) = -\frac{1}{12\pi} \left(\frac{1}{3} - \lambda_k \right) \frac{1}{(1 - 2\lambda_k)^2}. \quad (4.54b)$$

Auf einer vierdimensionalen Raumzeit erhalten wir die folgende β -Funktion für die dimensionslose kosmologische Konstante:

$$\beta_\lambda(g_k, \lambda_k) = -(2 - \eta_N) \lambda_k + \frac{g_k}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{6} \eta_N\right) \frac{1}{1 - 2\lambda_k}. \quad (4.55)$$

Die Ausdrücke (4.53) bis (4.55) der CREH-Rechnung zeichnen sich durch ihre Ähnlichkeit zu der vollen EH-Trunkierung in [10] aus: in beiden Sätzen von β -Funktionen existiert ein Pol bei (oder nahe) $\lambda = 1/2$. Damit wir die Singularitäten von β_g und β_λ genauer diskutieren können, müssen wir die „kin“- und „pot“-Fälle getrennt betrachten.

Mit der **anomalen Dimension aus dem kinetischen Term** ist es nach den Gleichungen (4.53) und (4.55) offensichtlich, daß sowohl $\eta_N^{(\text{kin})}(g, \lambda)$ als auch $\beta_\lambda(g, \lambda)$ Pole bei $\lambda = 1/2$ hat, sonst aber regulär sind. Es existiert die folgende Linie in der (g, λ) -Ebene, entlang der die β -Funktionen divergieren und der Fluß undefiniert ist:

$$\{(g, 1/2) \mid -\infty < g < +\infty\}. \quad (4.56)$$

Der physikalisch relevante Teil des Parameterraumes ist die Halbebene links dieser Linie ($\lambda < 1/2$), genau wie in der vollen Theorie [10].

Mit der **anomalen Dimension aus dem Potentialterm** ist der Rand des „physikalischen“ Parameterraumes durch eine Kurve links der $\lambda = 1/2$ -Linie gegeben. Entlang dieser Kurve ist $1 - g B_2(\lambda) = 0$, so daß die anomale Dimension $\eta_N^{(\text{pot})}$ dort divergiert, $|\eta_N^{(\text{pot})}| = \infty$. Wenn wir die Kurve durch λ parametrisieren, $g = g_\eta^{(\text{pot})}(\lambda)$, so erhalten wir die folgende explizite Form:

$$g_\eta^{(\text{pot})}(\lambda) = 12\pi \frac{(1 - 2\lambda)^2}{\lambda - 1/3}. \quad (4.57)$$

Bei $\lambda = 1/2$, das heißt auf dem Rand des physikalisch relevanten Raumes, sind $\eta_N^{(\text{pot})}$ und β_λ endlich; für jedes $g \neq 0$ gilt hier:

$$\lim_{\lambda \nearrow 1/2} \eta_N^{(\text{pot})}(g, \lambda) = 6 \quad (4.58a)$$

$$\lim_{\lambda \nearrow 1/2} \beta_\lambda^{(\text{pot})}(g, \lambda) = 2. \quad (4.58b)$$

In Tabelle 4.1 haben wir die Polkurven $g_{\eta;d}^{(\text{pot})}(\lambda)$ für verschiedene Dimensionen zusammengefaßt. Wir haben hierbei die beiden β -Funktionsrechnungen (siehe die Abschnitte 4.2.2 und 4.2.4) unterschieden. In den Abbildungen 4.2 und 4.3 haben wir die Polkurven für

| d | Pollinie für CREH, kin | Polkurve für CREH, pot |
|-----|------------------------|--|
| 3 | $\lambda = 4/15$ | $g_{\eta;3}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{45 \pi (4-15 \lambda)^2}{8 (75 \lambda - 14)}$ |
| 4 | $\lambda = 1/2$ | $g_{\eta;4}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{12 \pi (1-2 \lambda)^2}{\lambda - 1/3}$ |
| 5 | $\lambda = 24/35$ | $g_{\eta;5}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{105 \pi^2 (24-35 \lambda)^2}{1960 \lambda - 912}$ |
| 6 | $\lambda = 5/6$ | $g_{\eta;6}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{576 \pi^2 (5-6 \lambda)^2}{60 \lambda - 35}$ |
| 7 | $\lambda = 20/21$ | $g_{\eta;7}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{567 \pi^3 (20-21 \lambda)^2}{378 \lambda - 260}$ |
| 8 | $\lambda = 21/20$ | $g_{\eta;8}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{3840 \pi^3 (21-20 \lambda)^2}{7 (50 \lambda - 39)}$ |
| 9 | $\lambda = 112/99$ | $g_{\eta;9}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{4455 \pi^4 (112-99 \lambda)^2}{4356 \lambda - 3752}$ |
| 10 | $\lambda = 6/5$ | $g_{\eta;10}^{(\text{pot})}(\lambda) = \frac{46080 \pi^4 (6-5 \lambda)^2}{15 \lambda - 14}$ |

Tabelle 4.1: Die Polkurven in der CREH-Trunkierung für drei bis zehn Dimensionen. Die Polkurven geben den Rand des physikalischen relevanten Raumes links dieser Kurven an. Zur Unterscheidung haben wir die Spalten mit „kin“ und „pot“ bezeichnet, die dann die Polkurven aus den β -Funktionsrechnungen (i) beziehungsweise (ii) enthalten.

die β -Funktionsrechnung (ii), das heißt für η_N aus dem Potentialterm, für drei bis zehn Dimensionen visualisiert. In jedem der beiden Fälle führt die Existenz eines Randes im (g, λ) -Raum, das heißt die Existenz einer Singularität in den β -Funktionen, dazu, daß einige der RG-Trajektorien schon bei einem endlichen Wert von k enden, wenn sie in die Randlinie laufen. In der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung wurde der Status dieser Singularitäten im Detail in der Literatur diskutiert [13, 18, 23, 46]. Man hat sie als Zusammenbruch der Trunkierung im Infraroten interpretiert. Ein Fortsetzen der Trajektorien bis $k = 0$ würde wahrscheinlich einen allgemeineren Ansatz für Γ_k erfordern.

4.5 Vergleich mit der funktionalen Renormierungsgruppen-Gleichung eines skalaren Materiefeldes

An diesem Punkt können wir uns die Frage stellen, wie die RG-Gleichungen für den konformen Faktor mit denen für einen gewöhnlichen Skalar [34] in Beziehung stehen. Ein Vergleich zeigt, daß sowohl die Struktur der Gleichungen als auch ihre Lösungen sich

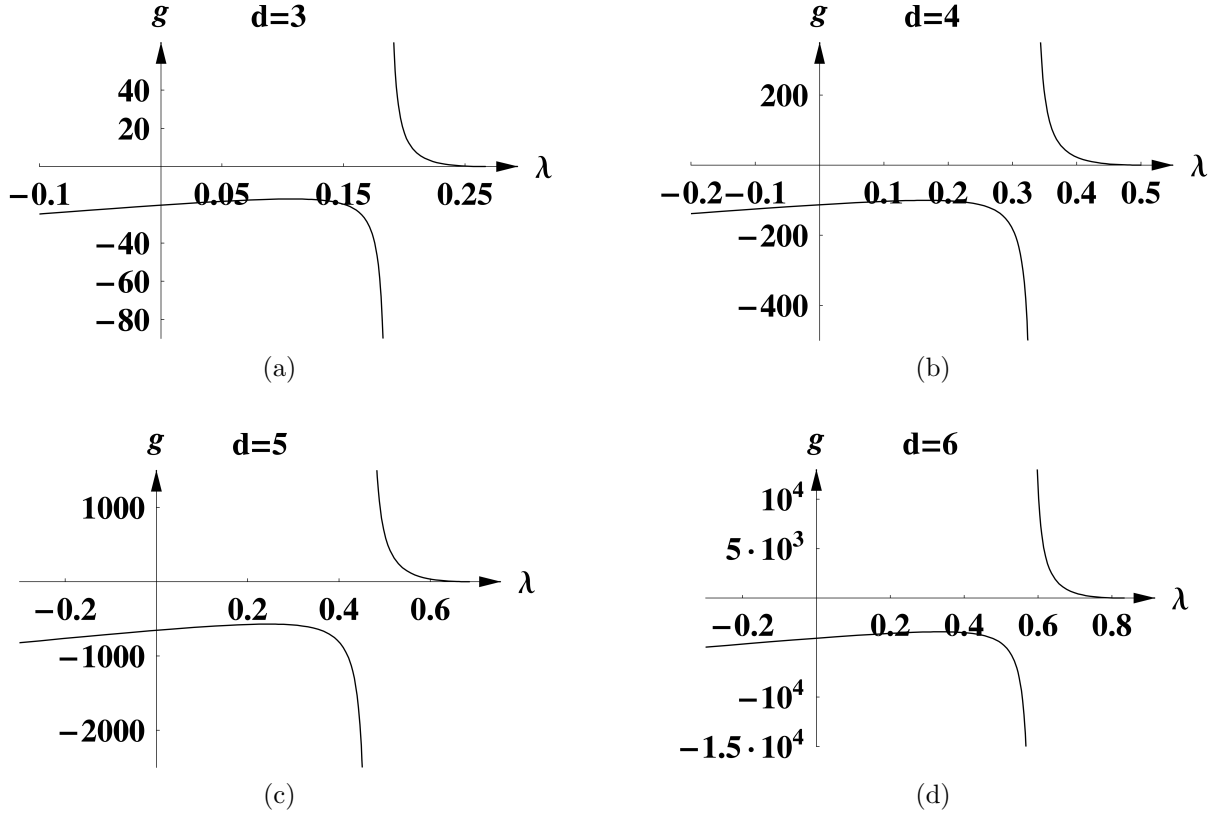


Abbildung 4.2: Die Polkurven der CREH-Trunkierung aus der β -Funktionsrechnung (ii). Der physikalisch relevante Bereich der Quantengravitation ist der Bereich links unterhalb der rechten Polkurve und rechts oberhalb der linken Polkurve. Diese Abbildung beinhaltet die Dimensionen drei bis sechs, Abbildung 4.3 zeigt die Dimensionen sieben bis zehn.

deutlich unterscheiden. Details dazu diskutieren wir in Kapitel 5. Wir wollen hier nur den auffallendsten Unterschied erwähnen. Um den Vergleich so übersichtlich wie möglich zu halten, beschränken wir die Diskussion auf vier Dimensionen.

Wir betrachten hierzu eine RG-Trajektorie in einem Regime, in dem die anomale Dimension so klein ist, daß wir sie näherungsweise vernachlässigen können, das heißt das wir $\eta_N = 0$ setzen können. (Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß es in der Tat Trajektorien gibt, für die wir die anomale Dimension durch $\eta_N \approx 0$ über einen großen Skalenbereich nähern können.) Dann integriert sich (4.13) zu $G_k = \text{const} \equiv \bar{G}$; die RG-Gleichung für λ_k beinhaltet die entsprechend vereinfachte β -Funktion (4.55) mit $g_k \equiv \bar{G} k^2$. Wenn wir die RG-Gleichung (4.25) durch die dimensionsbehaftete kosmologische Konstante

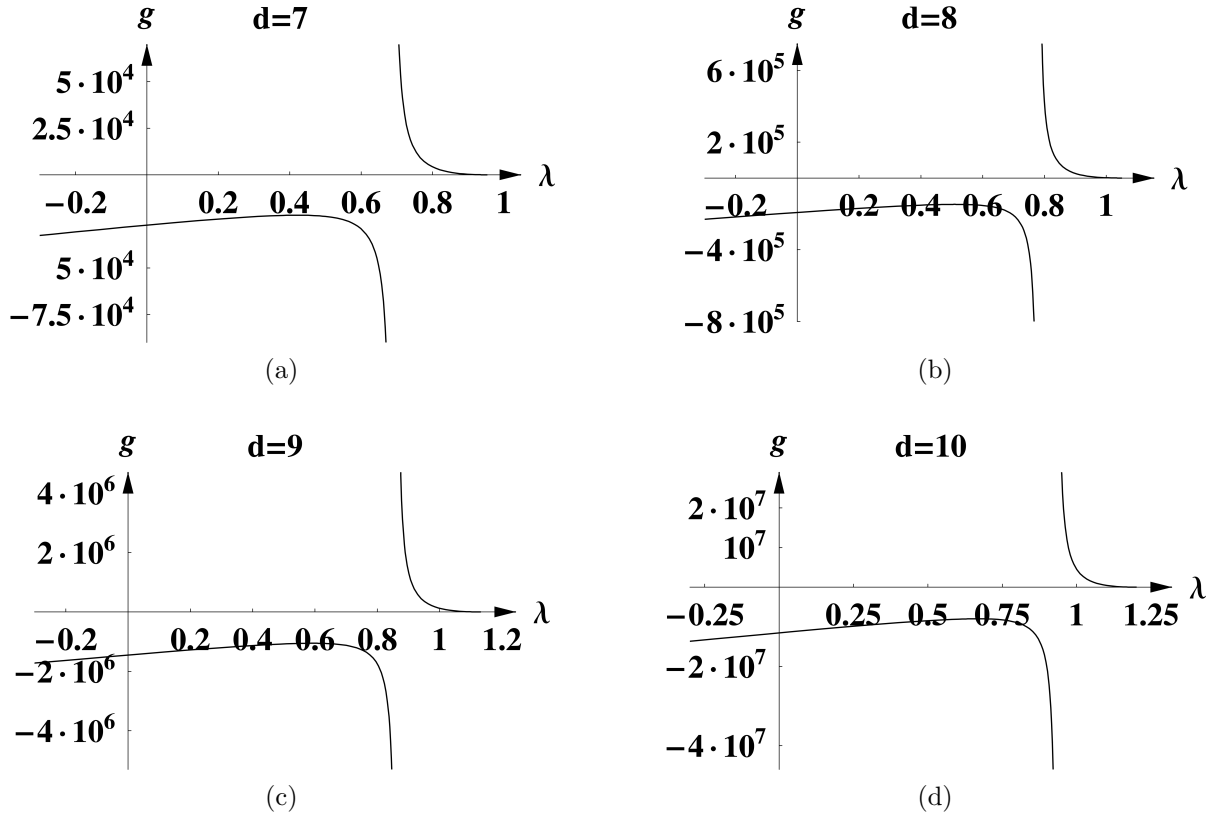


Abbildung 4.3: Fortsetzung von Abbildung 4.2 für sieben bis zehn Dimensionen.

$\Lambda_k \equiv k^2 \lambda_k$ ausdrücken, nimmt diese die folgende Form an:

$$k \partial_k \Lambda_k = \frac{\bar{G}}{4\pi} \frac{k^6}{k^2 - 2\Lambda_k}. \quad (4.59)$$

Insbesondere für $\Lambda_k \ll k^2$ vereinfacht sich (4.59) zu

$$k \partial_k \Lambda_k = \frac{1}{4\pi} \bar{G} k^4. \quad (4.60)$$

Offensichtlich *implizieren die RG-Gleichungen der CREH-Trunkierung ein Laufen der kosmologischen Konstanten proportional zu k^4 , so lange Λ klein ist und G näherungsweise konstant ist.*

Aus Sicht der Quantengravitation ist dieses Ergebnis keine Überraschung. Es ist genau das, was man in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung [10] findet, abgesehen vom Vorfaktor von $\bar{G} k^4$, der nicht-universell ist. In der Tat ist es das Laufen proportional zu

k^4 , Gl. (4.60), über das sich alle Methoden zur Aufsummierung von Nullpunkts-Energien einig sind. Insbesondere können wir es als Widerspiegelung der wohlbekannteren quartischen Divergenzen ansehen, die in allen Feynman-Diagramm-Rechnungen auftauchen (und normalerweise „wegrenormiert“ werden). Es kann also keinen Zweifel geben, daß das Laufen (4.60) proportional zu k^4 die physikalisch korrekte Antwort für das hier betrachtete Regime ist.

Andererseits ist dieses Laufen aus Sicht eines gewöhnlichen Skalarfeldes eine Überraschung. In der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Näherung für Γ_k spielt die kosmologische Konstante Λ_k die Rolle einer Kopplungskonstanten proportional zu ϕ^4 , die sich nach (4.60) wie $\Lambda_k \propto k^4$ verhält. Diese sehr starke Skalenabhängigkeit müssen wir der viel schwächeren, lediglich logarithmischen Skalenabhängigkeit gegenüberstellen, die wir in einer gewöhnlichen skalaren Theorie auf einer vierdimensionalen flachen Raumzeit finden (vorausgesetzt, die Skala k ist oberhalb aller Massenschwellen).

Der Ursprung dieses gravierenden Unterschiedes im RG-Laufen der ϕ^4 -Kopplung, zum einen proportional zu $\ln(k)$ für ein gewöhnliches Skalarfeld und zum anderen proportional zu k^4 für den konformen Faktor, ist klar: Der konforme Faktor bestimmt die Eigenskala des Cutoffs, wohingegen ein skalares Materiefeld dies nicht macht. Bei der Konstruktion des Operators \mathcal{R}_k in Abschnitt 4.2 haben wir erklärt, wie der spezielle Status des konformen Faktors dabei berücksichtigt wird. Wenn wir der Vergrößerungsskala eine physikalische Bedeutung geben wollen, muß k ein Cutoff im Spektrum des *aus der Hintergrundmetrik gebildeten und damit vom Hintergrundfeld χ_B abhängigen* Operators $\bar{\square}$ sein; dies führte zu der Ersetzungsregel (3.27).

Wenn wir stattdessen die Ersetzungsregel für gewöhnliche Skalarfelder, Gl. (3.29), verwendeten, würde die obige Berechnung der β -Funktionen bis zu Gl. (4.17) fast ungeändert bleiben. Die einzigen Änderungen wären:

- (a) Die Faktoren χ_B^2 vor den beiden Spuren auf der rechten Seite von (4.17) fehlten und
- (b) die Operatoren \mathcal{N} und \mathcal{A} würden durch

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{\text{st}} &= \left(1 - \frac{1}{2} \eta_N\right) R^{(0)}(-\hat{\square}/k^2) - \left(-\hat{\square}/k^2\right) R^{(0)' }(-\hat{\square}/k^2) \\ \mathcal{A}^{\text{st}} &= -\hat{\square} + k^2 R^{(0)}(-\hat{\square}/k^2) - 2 \Lambda_k \chi_B^2.\end{aligned}\tag{4.61}$$

ersetzt.

Alle Faktoren von χ_B wären verschwunden, bis auf den Faktor, der aus der zweiten Ableitung des Wechselwirkungstermes proportional zu $\Lambda_k (\chi_B + f)^4$ stammt. Es ist klar, daß auf Basis der Standard-Version von Gl. (4.17) die β -Funktionsrechnungen (i) und (ii) aus Abschnitt 4.2.4 beziehungsweise 4.2.2 zu völlig anderen Ergebnissen führen. Da hier die zusätzlichen Potenzen von χ_B^2 fehlen, bilden andere Terme, die auf beiden Seiten der FRGE gleichgesetzt werden sollen, den Ausgangspunkt des Koeffizientenvergleichs in den einzelnen β -Funktionsrechnungen.

Diese Bemerkungen machen klar, wie „Hintergrundunabhängigkeit“ und der spezielle Status der Metrik in einer konkreten Rechnung unvermeidlich zu Renormierungsgruppen-Gleichungen führen, die sich von denen eines skalaren Materiefeldes unterscheiden.

In der Konstruktion der exakten Mittelwertwirkung für die Gravitation in [10], in der alle Freiheitsgrade der Metrik quantisiert werden, wurden „Hintergrundunabhängigkeit“ und dieser spezielle Status der Metrik berücksichtigt. Dort ist es die volle Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$, die Verallgemeinerung des hier betrachteten Feldes χ_B^2 , die im Cutoff-Operator \mathcal{R}_k steckt und die die Skala von k setzt. Die Verwendung der Hintergrundfeld-Methode in [10] dient zwei *konzeptionell vollständig unabhängigen* Zwecken:

- (1) Sie erlaubt, wie in dieser Arbeit diskutiert, die Vergrößerungsskala mit der *physikalischen Metrik* zu definieren und
- (2) sie führt mit einem passenden Eichfixierungsterm zu einer Mittelwertwirkung $\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$, die ein *diffeomorphimus-invariantes Funktional* ihrer Argumente ist.

Zur letzteren Eigenschaft existiert kein Analogon in der vorliegenden konform-reduzierten Quanten-Einstein-Gravitation.

ASYMPTOTISCHE SICHERHEIT IN DER
KONFORM-REDUZIERTEN
EINSTEIN-HILBERT-TRUNKIERUNG

5.1 Das Anti-Abschirmungsverhalten der Newton-Konstanten

Aus der Definition der anomalen Dimension (4.13) folgt, daß das Renormierungsgruppen-Laufen der dimensionsbehafteten Newton-Konstante durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$k\partial_k G_k = \eta_N G_k. \tag{5.1}$$

Wenn die anomale Dimension positiv ist, wächst die Newton-Konstante für größer werdende Massenskala k an; in Analogie zu Eichtheorien bezeichnen wir dies als Abschirmungsverhalten („Screening“). Der Fall einer negativen anomalen Dimension heißt Anti-Abschirmungsverhalten („Antiscreening“): G_k wird kleiner für ansteigende Werte für k . In der vollen Rechnung war η_N stets negativ im gesamten physikalischen Teil der (g, λ) -Ebene; die Masse wird also nicht durch Quantenfluktuationen abgeschirmt, sondern erhält einen zusätzlichen positiven Beitrag von den virtuellen Teilchen, die sie umgeben.

Um die Diskussionen übersichtlich zu halten, beschränken wir uns auf vier Dimensio-

nen. Die Ergebnisse dieses Kapitels für beliebige Dimensionen fassen jeweils am Ende des entsprechenden Abschnitts zusammen.

Wenn wir η_N **aus dem kinetischen Term** bestimmen, ist das entsprechende CREH-Resultat in Gl. (4.53) gegeben. Wir sehen, daß $\eta_N^{(\text{kin})}$ für jeden Wert von $g > 0$ und λ negativ ist. Dies entspricht dem Antiscreening: die Newton-Konstante wird bei hohen Energien kleiner. Die Quantisierung des konformen Faktors ist somit ausreichend, um Antiscreening in der Gravitation zu erhalten. Der Spin 2-Charakter des metrischen Feldes scheint dafür nicht entscheidend zu sein und die Selbstwechselwirkungen, die aus $\int d^4x \sqrt{g} R$ stammen, scheinen keine führende Rolle zu spielen. Die einzige Selbstwechselwirkung, die wir in der CREH-Trunkierung berücksichtigen, ist der Term proportional zu ϕ^4 , der aus $\Lambda \int d^4x \sqrt{g}$ stammt. Das Antiscreening innerhalb der CREH-Trunkierung ist jedoch schwächer als in der vollen Theorie. In der Nähe des Ursprungs $g = \lambda = 0$ zum Beispiel verhält sich die anomale Dimension in der vollen Theorie [10] wie folgt:

$$\eta_N^{(\text{volle EH})} = -2\omega g + \dots \quad (5.2)$$

Hierbei ist ω eine positive *Konstante*. Für $\eta_N^{(\text{kin})}$ ist die Entsprechung der Konstanten ω nicht konstant, sondern fällt proportional zu λ^2 ab, wenn wir uns dem Ursprung nähern (siehe Gl. (4.53) in vier beziehungsweise (4.41) in beliebigen Dimensionen). Ein solches Verhalten haben wir erwartet, da die gesamte Selbstwechselwirkung in der CREH-Trunkierung von der kosmologischen Konstanten ausgeht.

Die Eingrenzung des Antiscreening-Bereiches in Abhängigkeit von der kosmologischen Konstanten ist sogar ausgeprägter, wenn wir η_N **aus dem Potentialterm** bestimmen. Der entsprechende Ausdruck ist in Gl. (4.27) mit (4.54) gegeben. Sein Nenner ist positiv in dem „physikalischen“ Teil der (g, λ) -Ebene, so daß die Funktion $B_1(\lambda)$ alleine über das Vorzeichen von $\eta_N^{(\text{pot})}$ entscheidet. In Gl. (4.42a) sehen wir, daß $\eta_N^{(\text{pot})}$ für $g > 0$ die folgende Werte annimmt:

$$\begin{aligned} \eta_N^{(\text{pot})} &\leq 0, & \text{wenn } \lambda &\geq 1/4, \\ \eta_N^{(\text{pot})} &> 0, & \text{wenn } \lambda &< 1/4. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Entlang der Linie $\lambda = 1/4$ verschwindet die anomale Dimension $\eta_N^{(\text{pot})}$.

5.2 Die Suche nach Fixpunkten

In diesem Abschnitt wollen wir nach Fixpunkten des Differentialgleichungssystems (4.24) / (4.25) suchen, das heißt nach Punkten (g_*, λ_*) , für die beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$\beta_g(g_*, \lambda_*) = 0, \quad \beta_\lambda(g_*, \lambda_*) = 0. \quad (5.4)$$

Aus den Gleichungen (4.53), (4.54) und (4.55) ist offensichtlich, daß das System für jede Wahl von η_N einen Fixpunkt im Ursprung besitzt, den sogenannten Gauß'schen Fixpunkt (GFP): $g_*^{\text{GFP}} = \lambda_*^{\text{GFP}} = 0$.

Ein Nicht-Gauß'scher Fixpunkt (NGFP) würde, sofern er existierte, die Bedingung $\beta_g = 0$ mit nicht-verschwindenden Werten für g_* und / oder λ_* erfüllen; hier muß also die anomale Dimension im Fixpunkt den Wert Minus Zwei annehmen. Wenn wir $\eta_* \equiv \eta_N(g_*, \lambda_*) = -2$ in (4.55) einsetzen, so nimmt die Bedingung $\beta_\lambda = 0$ die folgende Form an:

$$g_* = 12\pi \lambda_* (1 - 2\lambda_*). \quad (5.5)$$

Die zweite Fixpunktbedingung $\eta_* = -2$ hängt von der Wahl von η_N ab.

Wenn wir **η_N aus dem kinetischen Term** aus Gleichung (4.53) wählen, so erhalten wir für die Bedingung $\eta_N^{(\text{kin})}(g_*, \lambda_*) = -2$ den folgenden Ausdruck:

$$g_* \frac{\lambda_*^2}{(1 - 2\lambda_*)^4} = 3\pi. \quad (5.6)$$

Das Gleichungssystem (5.5) / (5.6) wird dadurch entkoppelt, daß wir g_* aus Gl. (5.5) in die Bedingung (5.6) einsetzen. Wir finden eine reelle Lösung dieses Gleichungssystems:

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \frac{2^{1/3}}{(1 + 2^{1/3})} \approx 0.279 \quad (5.7a)$$

$$g_* = 6\pi \frac{2^{1/3}}{(1 + 2^{1/3})^2} \approx 4.650 \quad (5.7b)$$

Aus Sicht einer gewöhnlichen skalaren ϕ^4 -Theorie in vier Dimensionen ist die Existenz dieses NGFP eine Überraschung; es existiert dort kein solcher Fixpunkt.

Wenn wir stattdessen **η_N aus dem Potentialterm**, Gleichung (4.27) mit (4.54), verwenden, nimmt die Bedingung $\eta_N^{(\text{pot})}(g_*, \lambda_*) = -2$ die folgende Form an:

$$g_* \left(\lambda_* - \frac{5}{18} \right) = 4\pi (1 - 2\lambda_*)^2. \quad (5.8)$$

Wir können die gekoppelten Gleichungen (5.8) und (5.5) wieder analytisch lösen. Der Fixpunkt besitzt die folgenden reellen, positiven Koordinaten:

$$\lambda_* = \frac{7}{36} \left(\sqrt{481/49} - 1 \right) \approx 0.415 \quad (5.9a)$$

$$g_* = 12\pi \lambda_* (1 - 2\lambda_*) \approx 2.665 \quad (5.9b)$$

Die einzelnen Werte für g_* und λ_* aus den beiden β -Funktionsrechnungen stimmen nicht ganz überein. Die einzelnen Fixpunktkoordinaten haben aber keine direkte Beziehung zu meßbaren Größen; sie sind konstruktionsabhängig beziehungsweise „nicht-universell“. Auf der anderen Seite ist das Produkt $g_* \lambda_*$ universell [12,14] und kann prinzipiell gemessen werden. Die Produkte der Werte aus (5.7) und (5.9) stimmen ziemlich genau überein:

$$(g_* \lambda_*)^{(\text{kin})} \approx 1.296, \quad (g_* \lambda_*)^{(\text{pot})} \approx 1.106 \quad (5.10)$$

Die jeweiligen Nicht-Gauß'schen Fixpunkte der beiden Rechnungen befinden sich immer innerhalb der physikalischen Region der (g, λ) -Ebene befinden. In den Abbildungen 5.1 und 5.2 ist die Lage der jeweiligen Nicht-Gauß'schen Fixpunkte innerhalb der (g, λ) -Ebene für drei bis zehn Dimensionen gezeigt. Die Fixpunktordinate λ_* aus der β -Funktionsrechnung mit dem kinetischen Term erfüllt $\lambda_* < 1/2$, siehe Gl. (5.7a). In Abbildung 5.1b sehen wir, daß λ_* aus der Rechnung mit dem Potentialterm in (5.9a) links (vom $g > 0$ -Zweig) der Polkurve $\lambda \mapsto g_\eta^{(\text{pot})}(\lambda)$ aus Gleichung (4.57) liegt. Ähnliches finden wir in beliebigen Dimensionen. Wenn wir für vier Dimensionen die Ergebnisse aus unserer β -Funktionsrechnung (ii) in der CREH-Trunkierung mit denen der vollen Einstein-Hilbert-Rechnung vergleichen, so sehen wir, daß beide Rechnungen nicht exakt übereinstimmen. Dies ist jedoch keine Überraschung, da wir in der CREH-Trunkierung nur den konformen Faktor quantisieren und alle anderen Freiheitsgrade der Metrik vernachlässigen. In beiden Trunkierungen finden wir aber auch ein Gemeinsamkeit: Der entsprechende Nicht-Gauß'sche Fixpunkt liegt jeweils im ersten Quadranten, das heißt im Bereich positiver g und λ . Weiter liegt er jeweils innerhalb des von der Theorie erlaubten physikalisch relevanten Bereiches. In Abbildung 5.3 haben wir beide Trunkierung graphisch gegenübergestellt. Wir zeigen dort die jeweiligen Polkurven und die Lage der entsprechenden NGFP.

5.2.1 Beliebige Dimensionen

Wir können die Suche nach den Fixpunkten leicht auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Ausgangspunkt hierfür ist dann das gekoppelte Differentialgleichungssystem

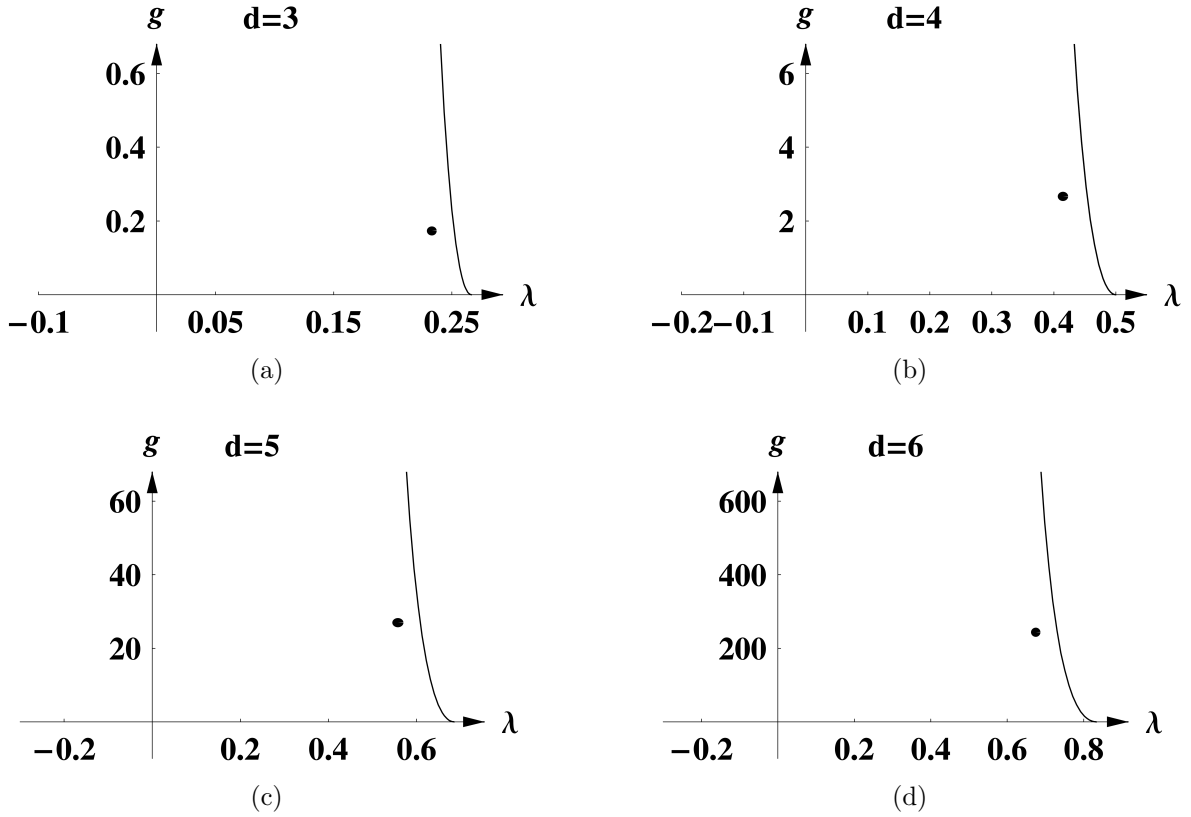


Abbildung 5.1: Die Lage der Fixpunkte und die Polkurve in der CREH-Trunkierung für η_N aus dem Potentialterm. Man sieht, daß in allen betrachteten Dimension der NGFP innerhalb des physikalisch relevanten Raumes, das heißt links unterhalb der rechten Polkurve und im ersten Quadranten (mit $g > 0$ und $\lambda > 0$). Diese Abbildung beinhaltet die Dimensionen drei bis sechs, Abbildung 5.2 zeigt die Dimensionen sieben bis zehn.

(4.24) / (4.25) mit $\beta_\lambda(g, \lambda)$ aus (4.43). Für die anomale Dimension setzen wir entweder $\eta_N^{(\text{kin})}$ aus (4.41) oder $\eta_N^{(\text{pot})}$ aus Gleichung (4.27) mit (4.42) ein.

Die erste Fixpunktbedingung $\beta_\lambda(g_*, \lambda_*) = 0$ nimmt in beliebigen Dimensionen die folgende Form an:

$$g_* = \frac{(4\pi)^{d/2-1} d}{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}} \lambda_* \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_* \right]. \quad (5.11)$$

Für die zweite Bedingung, $\eta_N(g_*, \lambda_*) = 2 - d$ erhalten wir entweder

$$g_* \lambda_*^2 \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_* \right]^4 = \frac{(d-2)^7}{2^{11} \pi v_d \xi(d)^3 d (d+2)^2} \quad (5.12)$$

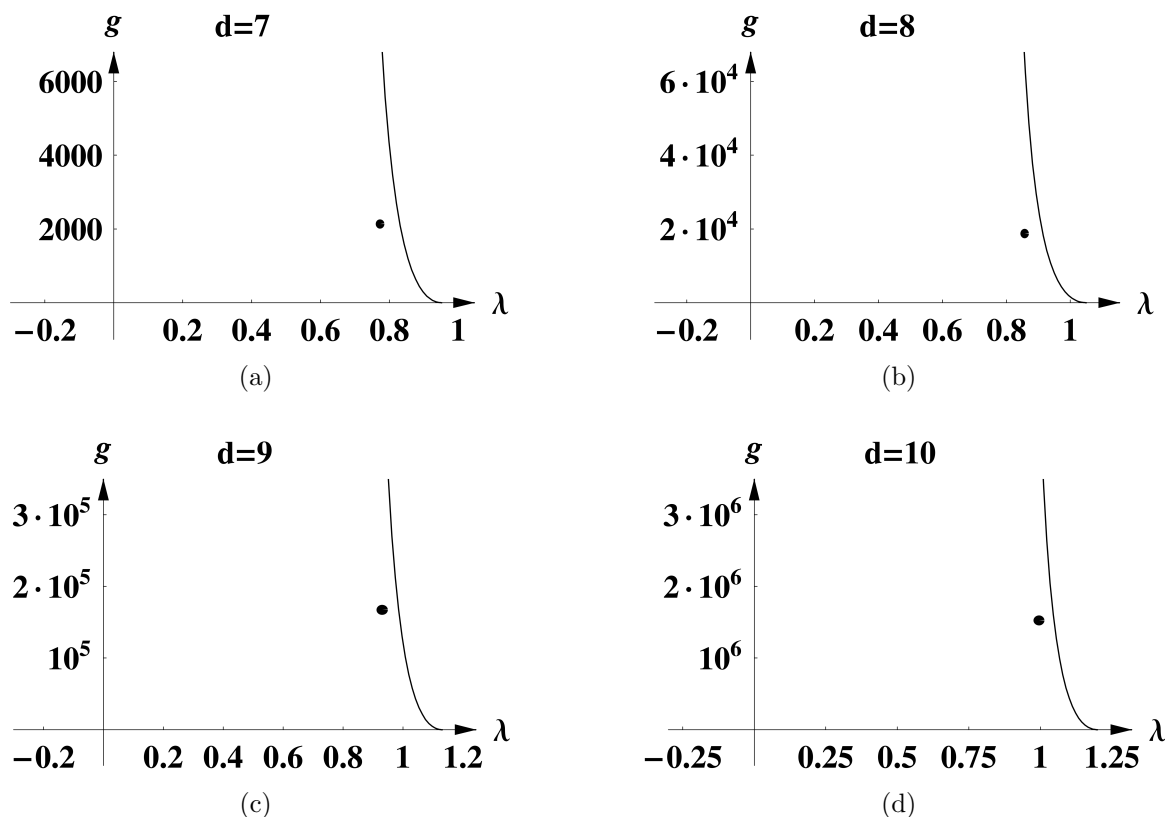


Abbildung 5.2: Fortsetzung von Abbildung 4.2 für sieben bis zehn Dimensionen.

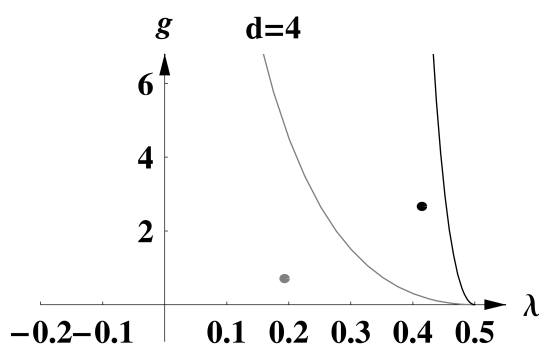


Abbildung 5.3: Die Lage des NGFP in der vollen und in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung in vier Dimensionen. In schwarz ist die β -Funktionsrechnung (ii) der CREH-Trunkierung dargestellt, mit grau bezeichnen wir die EH-Rechnung. In beiden Rechnungen liegt der NGFP innerhalb des physikalisch relevanten Bereiches, das heißt links und unterhalb der rechten Polkurve. Der NGFP hat in beiden Rechnungen eine positive g - und eine positive λ -Koordinate.

für η_N aus dem kinetischen Term oder

$$\begin{aligned}
g_* & \left(6 \xi(d) \left\{ 2 \Gamma(d/2 + 1)^{-1} + (d - 2) \Gamma(d/2 + 2)^{-1} \right\} \right. \\
& \quad \left. - \left\{ 2 \Gamma(d/2)^{-1} + (d - 2) \Gamma(d/2 + 1)^{-1} \right\} \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_* \right] \right) \\
& = 3 (4\pi)^{d/2-1} (d-2) \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_* \right]^2
\end{aligned} \tag{5.13}$$

für η_N aus dem Potentialterm. Hier haben wir gemäß Kapitel 2 die folgende Abkürzung verwendet:

$$\xi(d) = \frac{d-2}{4(d-1)}.$$

Beide Gleichungssysteme, (5.11) / (5.12) beziehungsweise (5.11) / (5.13), lassen sich analytisch lösen; wir finden jeweils einen Fixpunkt mit reellen, positiven Koordinaten. Mit $\eta_N^{(\text{kin})}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\lambda_* & = \frac{(d-2)^2}{2\xi(d)} \left(\frac{(d-2) \{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}\}}{(4\pi)^{d/2} v_d d^2 (d+2)^2} \right)^{1/3} \\
& \quad \times \left\{ 4 + \left(\frac{d(d^2-4) \{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}\}}{(4\pi)^{d/2} v_d} \right)^{1/3} \right\}^{-1},
\end{aligned} \tag{5.14a}$$

$$\begin{aligned}
g_* & = \frac{2(d-2)^2}{\xi(d)} \left(\frac{(4\pi)^{d-3} d(d-2)}{v_d (d+2)^2 \{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}\}^2} \right)^{1/3} \\
& \quad \times \left\{ 4 + \left(\frac{d(d^2-4) \{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}\}}{(4\pi)^{d/2} v_d} \right)^{1/3} \right\}^{-2}.
\end{aligned} \tag{5.14b}$$

Hier haben wir die folgende Abkürzung verwendet (siehe Anhang C):

$$v_d = [2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)]^{-1}.$$

Mit $\eta_N^{(\text{pot})}$ erhalten wir die folgenden Fixpunktkoordinaten:

$$\lambda_* = \left\{ \frac{3(d-2)}{d+2} \frac{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}}{2\Gamma(d/2)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+1)^{-1}} - \frac{(d-2)^2}{4d(d+2)\xi(d)} \right\} \\ \times \left[\left(1 + \frac{3(d-2)^3}{2d^2(d+2)\xi(d)} \frac{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}}{2\Gamma(d/2)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+1)^{-1}} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \frac{3(d-2)}{d+2} \frac{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}}{2\Gamma(d/2)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+1)^{-1}} - \frac{(d-2)^2}{4d(d+2)\xi(d)} \right\}^{-2} - 1 \right)^{1/2} \right], \quad (5.15a)$$

$$g_* = \frac{(4\pi)^{d/2-1} d}{2\Gamma(d/2+1)^{-1} + (d-2)\Gamma(d/2+2)^{-1}} \lambda_* \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_* \right]. \quad (5.15b)$$

In Tabelle 5.1 haben wir die numerischen Werte der Fixpunktkoordinaten für drei bis zehn Dimensionen aufgelistet. In Tabelle 5.1 sind zwei Einträge mit einem Stern versehen. In zehn Dimensionen konnten wir die kritischen Exponenten (siehe Abschnitt 5.3) nicht mit der von uns festgelegten Genauigkeit (die wir für die Berechnung der übrigen Einträge in Tabelle 5.1 vorausgesetzt hatten) ausrechnen. In allen betrachteten Dimensionen existiert ein NGFP mit $g_* > 0$ und $\lambda_* > 0$. Für jede Dimension beinhaltet Tabelle 5.1 die Ergebnisse der β -Funktionsrechnungen aus dem kinetischen Term und dem Potentialterm innerhalb der CREH-Trunkierung und zum Vergleich auch die entsprechenden Werte aus der vollen Einstein-Hilbert-Rechnung. Desweiteren haben wir in Tabelle 5.1 auch die dimensionsabhängigen Verallgemeinerungen des Produktes $g_* \lambda_*$,

$$\tau_d \equiv \lambda_* g_*^{2/(d-2)}, \quad (5.16)$$

aufgelistet. Die Größe τ_d ist der Fixpunktwert der dimensionslosen Kombination aus Newton- und kosmologischer Konstante, $\lambda_k g_k^{2/(d-2)} = \Lambda_k G_k^{2/(d-2)}$. (Man beachte, daß in d Dimensionen $g_k = k^{d-2} G_k$ und $\lambda_k = k^{-2} \Lambda_k$ gilt.)

Es ist beeindruckend, wie genau die Werte für τ_d aus den beiden β -Funktionsrechnungen in vier und höheren Dimensionen übereinstimmen. Im Vergleich zur vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung sind sie immer etwa um den Faktor Zehn größer. Wir können diesen Faktor dahingehend interpretieren, daß der konforme Faktor nicht alleine für die Existenz eines Nicht-Gauß'schen Fixpunktes verantwortlich ist. Wir sehen jedoch in den Rechnungen

| d | Trunk. | g_* | λ_* | τ_d | θ' | θ'' |
|-----|-----------|----------------------|-------------|------------|-----------|------------|
| 3 | volle EH | 0.202139 | 0.0651806 | 0.00266329 | 1.11664 | 0.827598 |
| | CREH, pot | 0.172872 | 0.233092 | 0.00696588 | -3.54754 | 4.92795 |
| | CREH, kin | 0.391798 | 0.126945 | 0.0194868 | 2.04572 | 3.60445 |
| 4 | volle EH | 0.707321 | 0.193201 | 0.136655 | 1.4753 | 3.04321 |
| | CREH, pot | 2.6654 | 0.41477 | 1.10553 | 1.47122 | 9.30442 |
| | CREH, kin | 4.65005 | 0.278753 | 1.29622 | 4.0 | 6.1837 |
| 5 | volle EH | 2.85863 | 0.234757 | 0.472851 | 2.76008 | 5.12941 |
| | CREH, pot | 26.9696 | 0.557727 | 5.01577 | 5.81627 | 12.0556 |
| | CREH, kin | 42.3258 | 0.417188 | 5.06681 | 6.27681 | 8.6899 |
| 6 | volle EH | 13.8555 | 0.255477 | 0.950958 | 4.48592 | 7.07967 |
| | CREH, pot | 243.547 | 0.674559 | 10.5272 | 10.8493 | 14.3777 |
| | CREH, kin | 361.57 | 0.537523 | 10.221 | 8.81712 | 11.1844 |
| 7 | volle EH | 76.3589 | 0.269073 | 1.5241 | 6.51007 | 8.9431 |
| | CREH, pot | 2134.67 | 0.77282 | 16.5886 | 17.0223 | 15.9635 |
| | CREH, kin | 3069.3 | 0.641211 | 15.9154 | 11.591 | 13.6754 |
| 8 | volle EH | 464.662 | 0.279376 | 2.16389 | 8.78536 | 10.7446 |
| | CREH, pot | 18744.8 | 0.857143 | 22.7691 | 24.6444 | 16.0092 |
| | CREH, kin | 26451.9 | 0.730796 | 21.7745 | 14.5789 | 16.1597 |
| 9 | volle EH | 3066.23 | 0.287851 | 2.85326 | 11.2969 | 12.4932 |
| | CREH, pot | 167205.0 | 0.930559 | 28.9135 | 33.9881 | 12.4239 |
| | CREH, kin | 233516.0 | 0.808694 | 27.6432 | 17.7666 | 18.6307 |
| 10 | volle EH | 21673.5 | 0.295179 | 3.58153 | 14.044 | 14.1871 |
| | CREH, pot | $1.52489 \cdot 10^6$ | 0.995177 | 34.9712 | * | * |
| | CREH, kin | $2.11943 \cdot 10^6$ | 0.876935 | 33.4597 | 21.1433 | 21.0813 |

Tabelle 5.1: Diese Tabelle vergleicht die Eigenschaften des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes, die wir zum einen aus der vollen Einstein-Hilbert-Rechnung erhalten und zum anderen aus den entsprechenden CREH-Ergebnissen basierend auf $\eta_N^{(\text{kin})}$ beziehungsweise $\eta_N^{(\text{pot})}$. Die mit einem Stern markierten Einträge konnten numerisch nicht mit einer den anderen Dimensionen vergleichbaren Genauigkeit berechnet werden.

der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung, daß sein Beitrag repräsentativ ist in dem Sinne, daß er zu einem im Vergleich mit der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung qualitativ ähnlichen Renormierungsgruppen-Fluß führt.

5.3 Die kritischen Exponenten des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes

Die Eigenschaften des in der Nähe des NGFP linearisierten RG-Flusses auf dem (g, λ) -Raum sind durch die folgende Stabilitätsmatrix gegeben:

$$B = \begin{bmatrix} \partial\beta_\lambda/\partial\lambda & \partial\beta_\lambda/\partial g \\ \partial\beta_g/\partial\lambda & \partial\beta_g/\partial g \end{bmatrix}_{(g,\lambda)=(g_*,\lambda_*)} \quad (5.17)$$

Wir werten die Matrix B hierbei am Punkt (g_*, λ_*) aus. In derselben Notation wie in [12, 13] ist $BV = -\theta V$ das entsprechende Eigenwertproblem; wir bezeichnen die negativen Eigenwerte θ als „kritische Exponenten“. Im allgemeinen ist B nicht symmetrisch.

Wenn wir η_N aus dem kinetischen Term aus Gl. (4.53) verwenden und die Stabilitätsmatrix B an den entsprechenden Fixpunktkoordinaten (5.7) auswerten, so nimmt sie die folgende Form an:

$$B = \begin{bmatrix} -6 & (1 + 2^{1/3})/(4\pi) \\ -48\pi (1 + 2^{4/3}) / (1 + 2^{1/3}) & -2 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Die aus (5.18) berechneten Eigenwerte sind komplexe Zahlen ungleich Null. Die beiden kritischen Exponenten $\theta_{1,2} = \theta' \pm i\theta''$ bilden ein komplex-konjugiertes Paar mit Real- und Imaginärteil θ' beziehungsweise θ'' :

$$\theta' = 4, \quad \theta'' = 2\sqrt{2} \sqrt{1 + 3 \cdot 2^{1/3}} \approx 6.1837 \quad (5.19)$$

Der positive Realteil des kritischen Exponenten bedeutet, daß der Nicht-Gauß'sche Fixpunkt anziehend ist, wenn man die Skala k bis Unendlich anwachsen läßt. Diese UV-Anziehung findet in beiden Richtungen der (g, λ) -Ebene statt. Der nicht-verschwindende Imaginärteil des kritischen Exponenten bedeutet, daß die RG-Trajektorien nahe dem NGFP Spiralen sind. Dies ist exakt dasselbe Bild wie in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung [13].

Dasselbe qualitative Verhalten finden wir, wenn wir die Stabilitätsmatrix B stattdessen mit η_N aus dem **Potentialterm** auswerten; diese ist in Gl. (4.27) mit (4.54) gegeben. Für die entsprechenden Fixpunktkoordinaten (5.9) erhalten wir die folgenden kritischen Exponenten:

$$\theta' \approx 1.471, \quad \theta'' \approx 9.304 \quad (5.20)$$

Wir können den Unterschied zwischen (5.19) und (5.20) als ein grobes Maß für die Genauigkeit unserer Rechnung ansehen. Es ist jedoch zufriedenstellend zu sehen, daß beide Rechnungen zu demselben qualitativen Verhalten führen: Attraktivität in beiden Richtungen des Parameterraums und nicht-verschwindender Imaginärteil der kritischen Exponenten. Numerisch können wir den Ergebnissen für θ' und θ'' vermutlich nur innerhalb eines Faktors von etwa Zwei vertrauen. In Tabelle 5.1 haben wir die kritischen Exponenten auch für die Nicht-Gauß'schen Fixpunkte in den anderen Dimensionen aufgelistet.

Ein Vergleich mit der vollen Einstein-Hilbert-Rechnung zeigt: In Dimensionen größer als vier finden wir exakt dieselben Eigenschaften wie in vier Dimensionen: Während die Werte des Produkte τ_d der beiden CREH-Rechnungen ziemlich gut übereinstimmen, ist die Übereinstimmung der kritischen Exponenten weniger gut. Dies paßt zu Beobachtungen, die in früheren Rechnungen gemacht wurden [12–14, 22, 23]: es ist viel einfacher, einen präzisen Wert für $g_*^{2/(d-2)} \lambda_*$ zu bestimmen als für die kritischen Exponenten.

In drei Dimensionen scheint die CREH-Trunkierung das qualitative Verhalten der vollen Theorie nicht ausreichend verläßlich zu repräsentieren: Das Vorzeichen von θ' , also die Unterscheidung zwischen Anziehung und Abstoßung durch den NGFP, hängt von der Wahl der anomalen Dimension, $\eta_N^{(\text{kin})}$ oder $\eta_N^{(\text{pot})}$, ab.

Mit Blick auf die numerischen Werte in Tabelle 5.1 muß jedoch hervorgehoben werden, daß sogar in einer exakten Analyse der konform-reduzierten Theorie die kritischen Exponenten keinen Grund hätten, mit denen in der vollen Quanten-Einstein-Gravitation übereinzustimmen, in der auch die übrigen in der Metrik enthaltenen Freiheitsgrade quantisiert werden. Die betrachteten Feldinhalte in den beiden Theorien sind unterschiedlich und somit würde man erwarten, daß sie zu verschiedenen Universalitätsklassen gehören, mit unterschiedlichen Werten für θ .

5.4 Das Phasenportrait des Renormierungsgruppen-Flusses

In diesem Abschnitt wollen wir die gekoppelten Differentialgleichungen (4.24) und (4.25) nun numerisch lösen, um das Phasenportrait des Renormierungsgruppen-Flusses der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung zu erhalten. Zum Vergleich haben wir den RG-Fluß der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung (siehe Ref. [13]) numerisch für den optimierten Cutoff (4.35) berechnet. Das daraus entstandene Phasenportrait ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

Das Ergebnis für η_N **aus dem kinetischen Term** zeigen wir in Abbildung 5.4. Das Flußdiagramm ist auffallend ähnlich dem entsprechenden Diagramm in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung in Abbildung 5.8. Der Fluß wird von zwei Fixpunkten dominiert, dem NGFP mit positiven g - und λ -Koordinaten und dem GFP im Ursprung. Wir können drei Arten von Trajektorien unterscheiden, die aus dem NGFP herauslaufen. Zunächst bilden sie Spiralen um den NGFP. Danach laufen sie in Richtung negativer, verschwindender beziehungsweise positiver kosmologischer Konstante und entsprechen genau den Typ Ia-, IIa- beziehungsweise IIIa-Trajektorien des vollen Flusses (siehe Ref. [13] und Abbildung 5.8a). Die Trajektorien des CREH-Typs Ia und IIa erstrecken sich bis zu $k = 0$, während jene des Typs IIIa bei einem nicht-verschwindenden k_{term} enden, wenn sie die Pollinie $\lambda = 1/2$ (beziehungsweise die Polkurve in der vollen EH-Rechnung) erreichen. Exakt wie in der vollen Theorie brechen die Typ IIIa-Trajektorien bei einem Wert für die Skala k , der nicht Null ist. Die CREH-Näherung mit der anomalen Dimension aus dem kinetischen Term läßt RG-Trajektorien zu, deren Umkehrpunkt beliebig nahe am GFP liegt, so daß sich ein langes klassisches Regime, das heißt ein Regime mit konstanter Newton-Konstante, ausbilden kann [46]. In Abbildung 5.5 ist eine solche Typ IIIa-Trajektorie schematisch dargestellt. (Solche Trajektorien könnten für die Kosmologie relevant sein [42, 46].) Der einzige Rand des physikalischen Gebietes im CREH-Parameterraum ist die „vertikale“ Linie $\lambda = 1/2$. Der Anziehungsbereich des NGFP besteht aus *allen* Punkten (g, λ) in diesem Gebiet mit $g > 0$.

Wenn wir die RG-Gleichungen mit η_N **aus dem Potentialterm** lösen, so erhalten wir das Phasenportrait aus Abbildung 5.6a. In der Umgebung des GFP beziehungsweise des NGFP ist die Struktur des Flusses wieder genau wie in der vollen Theorie. Die einzige neue Eigenschaft ist, daß Trajektorien existieren, die am Rand des physikalischen Teils

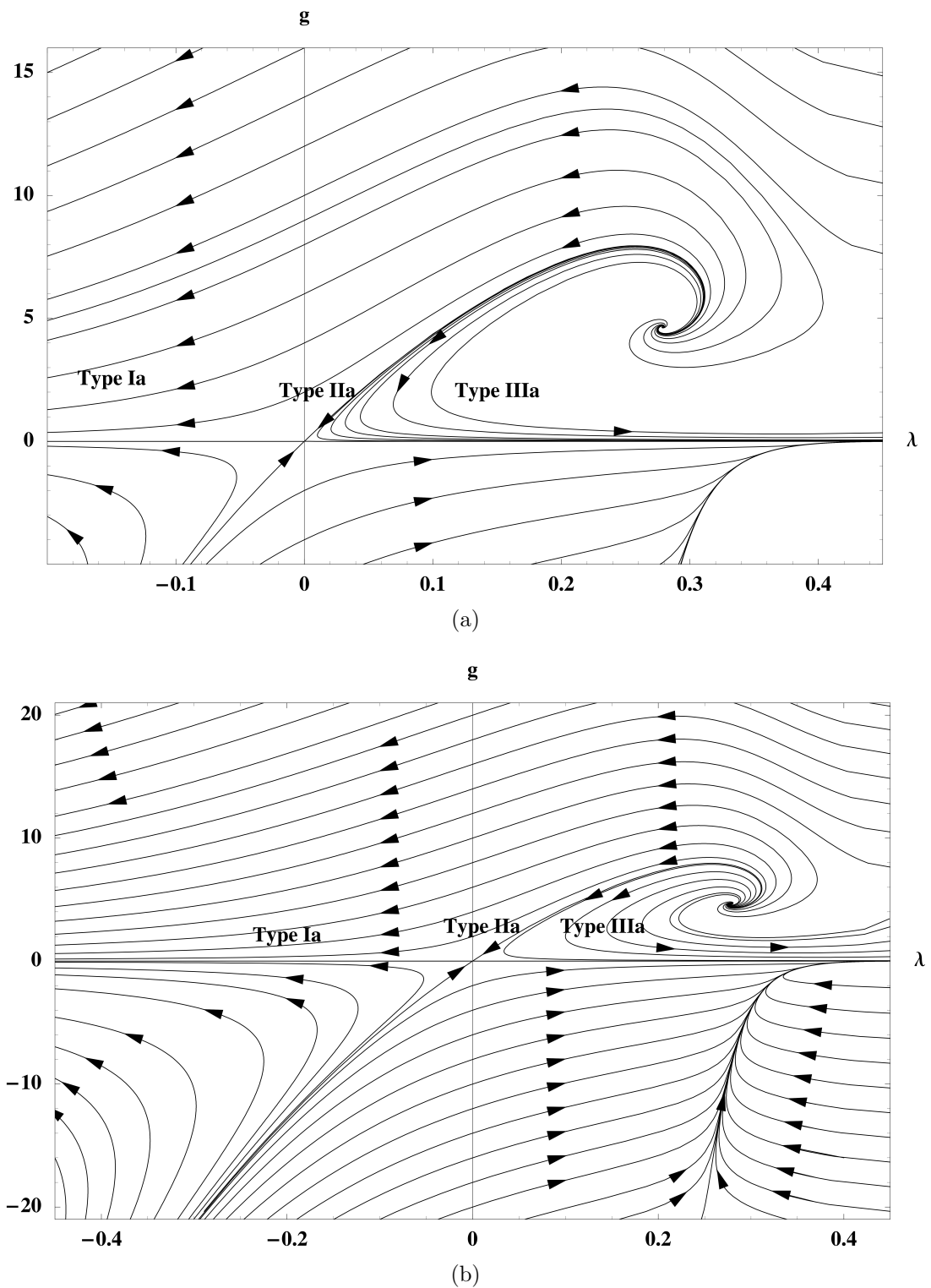


Abbildung 5.4: Die beiden Abbildungen zeigen den RG-Fluß in der (g, λ) -Ebene, den man aus der CREH-Trunkierung mit $\eta_N^{(\text{kin})}$ erhält. Die Pfeilspitzen zeigen in Richtung abnehmender Werte für k . Abbildung 5.4a ist ein Ausschnitt aus Abbildung 5.4b.

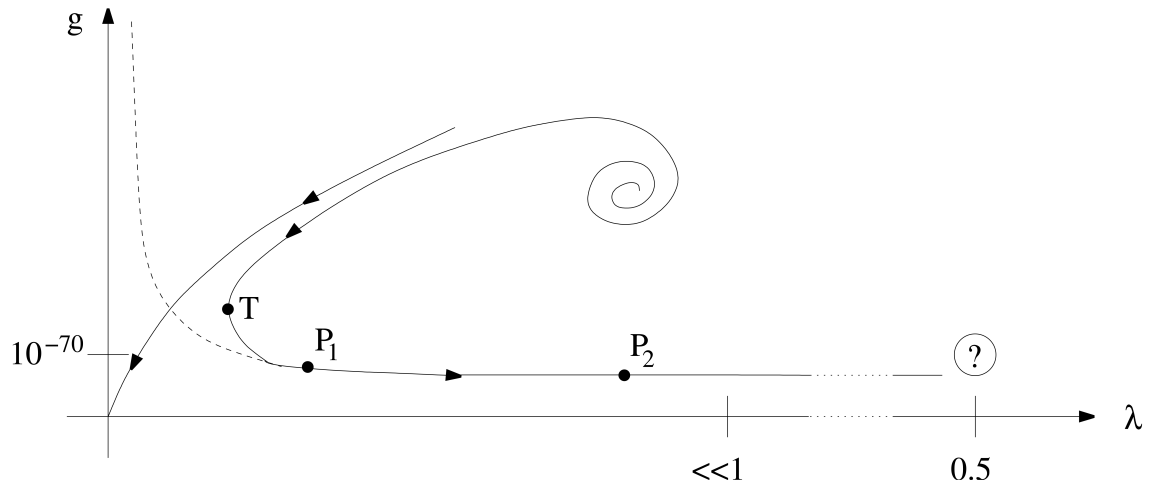


Abbildung 5.5: Die Typ IIIa-Trajektorie, die in der Natur realisiert ist, und die Separatrix. Die gestrichelte Linie ist die Trajektorie des kanonischen RG-Flusses. (Aus [46].)

des (g, λ) -Raums (siehe die Polfunktion $g_\eta(\lambda)$ aus Gleichung (4.57)) sowohl beginnen als auch enden. Daher ist der Anziehungsbereich des NGFP *kleiner* als das volle physikalische Gebiet und Trajektorien, deren Umkehrpunkt nahe am GFP liegt, befinden sich außerhalb dieses Bereiches. Dies ist dasselbe Verhalten wie in der vollen Einstein-Hilbert-Rechnung in Abbildung 5.8a; in beiden wurde der optimierte Cutoff zur Berechnung des RG-Flusses verwendet. In [13] wurde gezeigt, daß für andere Profildfunktionen auch die Trajektorien, deren Umkehrpunkt beliebig nahe am GFP liegt, vollständig innerhalb des physikalisch relevanten Bereiches liegen. Weitere Untersuchungen müssen zeigen, inwieweit der optimierte Cutoff diese Eigenschaft einschränkt. Was die Existenz der NGFP und das Verhalten der Trajektorien in der Nähe des NGFP betrifft, so können wir festhalten, daß der konforme Faktor den Fluß in dieselbe Richtung wie die volle Metrik treibt; er ist in diesem Sinne repräsentativ. Der konforme Faktor alleine ist jedoch zu schwach, um die Trajektorien genügend stark weg von der hyperbolischen Form zu drücken. Diese Form hätten die Trajektorien in Abwesenheit jeglicher nicht-trivialer RG-Effekte [46]. In Abbildung 5.7 ist das Phasenportrait eines solchen kanonischen RG-Flusses dargestellt. In Abbildung 5.6b sowie in Abbildung 5.8b aus der vollen EH-Rechnung sind auch einige „unphysikalische“ Trajektorien jenseits der Singularitätslinie dargestellt. Zu beachten ist, daß sich die Richtung der Pfeile an der Singularität umkehrt.

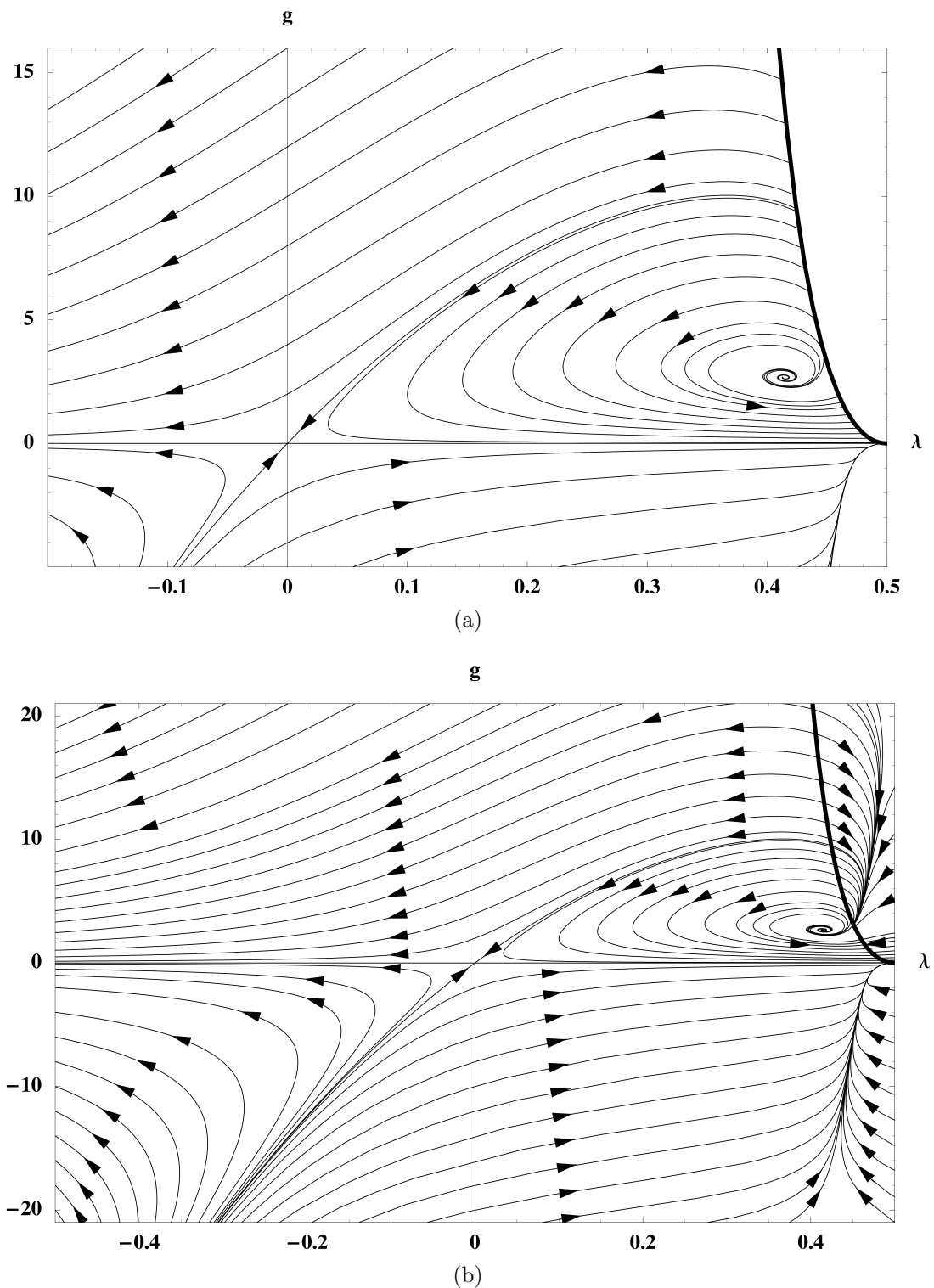


Abbildung 5.6: Wie die Abbildungen 5.4, aber mit $\eta_N^{(\text{pot})}$. Die Pfeilspitzen zeigen in Richtung abnehmender Werte für k . Die fett gedruckte Linie ist der Rand der physikalischen Parameterraums, auf dem $\eta_N^{(\text{pot})}$ divergiert. Abbildung 5.6a ist ein Ausschnitt aus Abbildung 5.6b. In Abbildung 5.6b ist auch der „unphysikalische“ Fluß jenseits des Randes gezeigt.

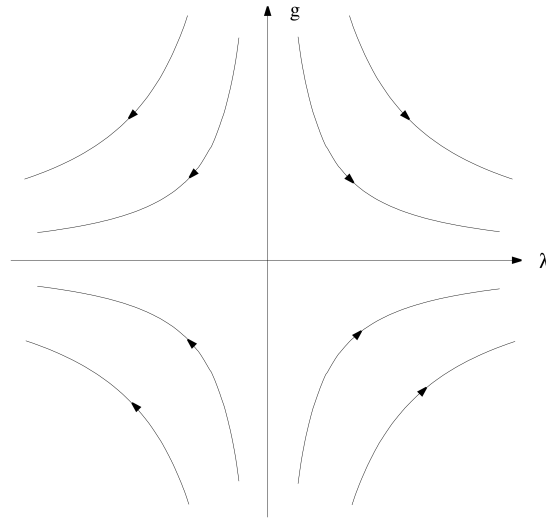


Abbildung 5.7: Der kanonische RG-Fluß, der zu konstanten Werten der dimensionsbehafteten Parametern G und Λ gehört. Die Pfeilspitzen zeigen in Richtung kleinerer Werte für k . Die RG-Trajektorien sind Hyperbeln in der (g, λ) -Ebene. (Aus [46].)

5.5 Zusammenfassung Teil II

In diesem Teil haben wir die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Trunkierung verwendet, um in einem reduzierten Kontext die folgende Eigenschaft der Metrik zu untersuchen: sie bestimmt, auf welche Weise jede physikalische Größe gemessen werden soll. Um diese Eigenschaft der Metrik zu berücksichtigen, mußten wir fordern, daß die effektive Mittelwertwirkung sowie die Renormierungsgruppen-Gleichung und damit auch der RG-Fluß „hintergrundunabhängig“ im Sinne von [3–5] sein sollen. Damit müssen wir auch der Skala der Vergrößerungs-Operation eine physikalische Bedeutung geben. Der modenunterdrückende Term in der effektiven Mittelwertwirkung erhielt eine Hintergrundfeld-Abhängigkeit, da die Vergrößerungsskala k als Cutoff im Bezug auf die Hintergrundmetrik eingeführt wurde. Wir haben herausgefunden, daß dadurch der resultierende Renormierungsgruppen-Fluß sich durch die Forderung nach „Hintergrundunabhängigkeit“ deutlich von dem eines gewöhnlichen Skalarfeldes unterscheidet. Weiter sind sowohl ein Gauß’scher als auch ein Nicht-Gauß’scher Fixpunkt entstanden. Letzterer deutet darauf hin, daß die Quantengravitation in der CREH-Trunkierung wohl asymptotisch sicher ist. Verglichen mit der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung scheint der konforme Faktor eine ausgezeichnete Rolle für asymptotische Sicherheit zu spielen. Andere Freiheitsgrade der Metrik scheinen

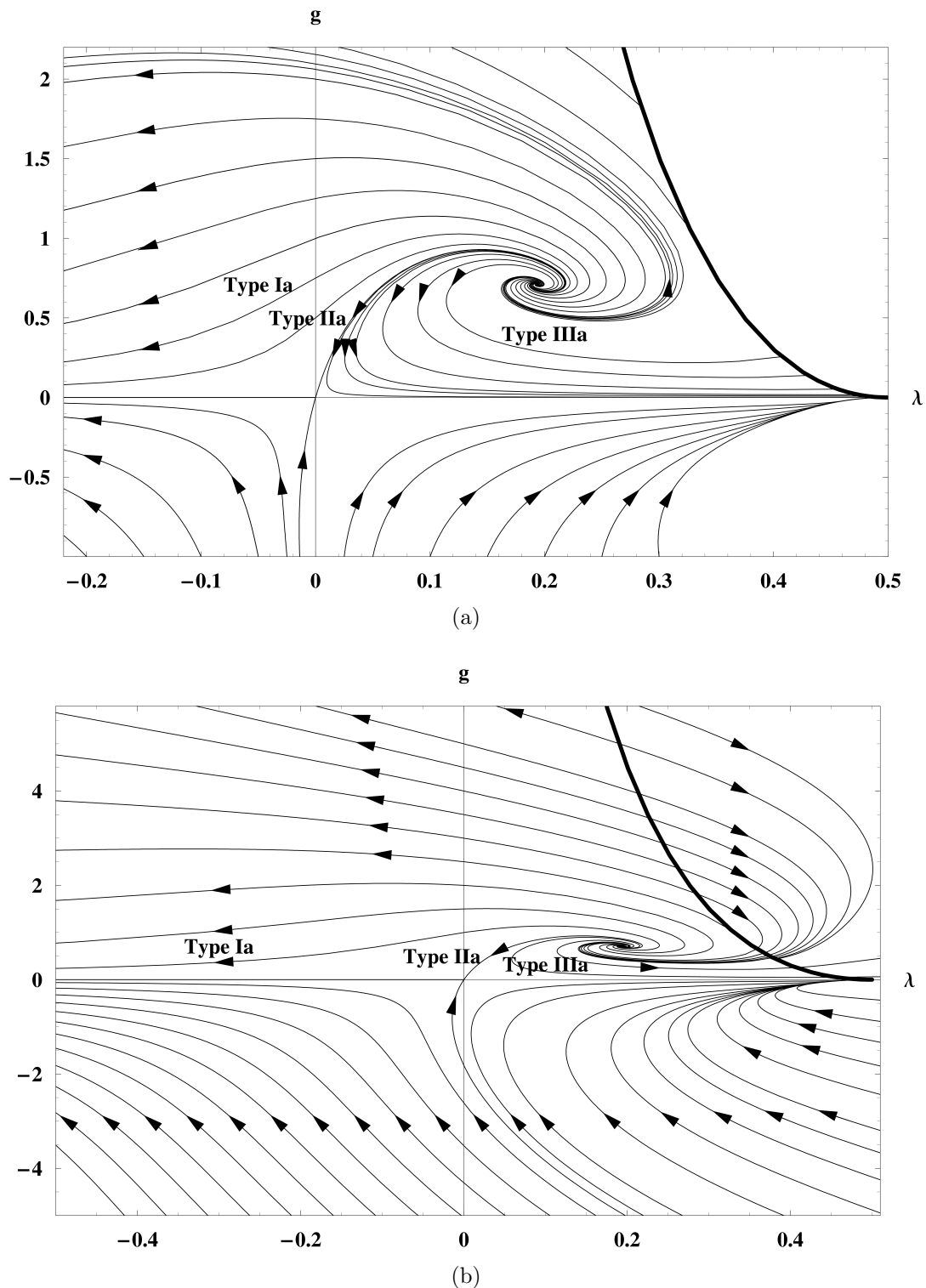


Abbildung 5.8: Die beiden Abbildungen zeigen den RG-Fluß in der (g, λ) -Ebene, den man aus der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung mit dem optimierten Cutoff (4.35) erhält. Die Pfeilspitzen zeigen in Richtung abnehmender Werte für k . Die fett gedruckte Linie ist der Rand der physikalischen Parameterräume, auf dem die anomale Dimension divergiert. Abbildung 5.8a ist ein Ausschnitt aus Abbildung 5.8b. In Abbildung 5.8b ist auch der „unphysikalische“ Fluß jenseits des Randes gezeigt.

zumindest für die Existenz eines NGFP nicht in führender Rolle verantwortlich zu sein.

Der nächste Schritt, der sich anbietet, ist die Verallgemeinerung der CREH-Trunkierung auf einen größeren Theorienraum. Dort können wir die Rolle des konformen Faktors für die Existenz eines NGFP weiter untersuchen. In Teil III leiten wir daher die Flußgleichungen in der lokalen Potentialnäherung her.

Teil III

Die lokale Potentialnäherung

„HINTERGRUNDUNABHÄNGIGKEIT“ DURCH HINTERGRUNDFELDER

Wir haben in Teil II herausgefunden, daß der Renormierungsgruppen-Fluß in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierungen qualitativ dieselben Eigenschaften besitzt wie in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung. Insbesondere existiert in beiden Trunkierungen ein Nicht-Gauß'scher Fixpunkt. Der konforme Faktor alleine scheint ausreichend zu sein, damit ein NGFP in der konform-reduzierten Quanten-Einstein-Gravitation existieren kann. Alle anderen Freiheitsgrade der Metrik scheinen zumindest für den NGFP keine allzu wichtige Rolle zu spielen. Da durch die Einschränkung der Freiheitsgrade auf den konformen Faktor die Eichfixierung keine Rolle spielt, ist es sinnvoll diesen konform-reduzierten Kontext beizubehalten, den Theorienraum jedoch möglichst weit zu vergrößern. Im folgenden wollen wir den Theorienraum durch die lokale Potentialnäherung auf unendlich viele Dimensionen ausdehnen.

In der Konstruktion der vollständigen effektiven Mittelwertwirkung für die Gravitation [10] spielen drei verschiedene Metriken eine Rolle: die mikroskopische Metrik, das heißt die Integrationsvariable im Pfadintegral, $\gamma_{\mu\nu}$, ihr Erwartungswert $g_{\mu\nu} \equiv \langle \gamma_{\mu\nu} \rangle$ und die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$. In der konform-reduzierten Gravitation sollen alle drei konform zu derselben, festgehaltenen Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ sein (siehe Kapitel 3). Wir bezeichnen den konformen Faktor der physikalischen Metrik mit $\chi^{2\nu}(x)$; der konforme Faktor der Hintergrundmetrik heißt $\chi_{\text{B}}^{2\nu}(x)$. Hier ist der Exponent ν so gewählt, daß die Mittelwertwirkung

Γ_k in der konform-reduzierten Gravitation einen konventionellen kinetischen Term beinhaltet (siehe Kapitel 2):

$$\nu(d) \equiv \frac{2}{(d-2)}.$$

In der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung reduzieren wir das vollständige Pfadintegral über alle Freiheitsgrade der Metrik $\gamma_{\mu\nu}$, Gl. (3.1). Im vereinfachten Pfadintegral (3.2) integrieren wir nur über den konformen Faktor der Metrik, $\chi(x)$. Danach formulieren wir diese skalar-ähnliche Theorie mit Hilfe der Hintergrundfeld-Methode um. Wir spalten den „mikroskopischen“ konformen Faktor χ wie folgt in Hintergrund χ_B und Quantenfluktuationen f auf:

$$\chi \equiv \chi_B + f. \quad (6.1a)$$

Wir bezeichnen die Erwartungswerte von f und χ werden mit $\bar{f} \equiv \langle f \rangle$ beziehungsweise mit

$$\phi \equiv \langle \chi \rangle = \chi_B + \bar{f}. \quad (6.1b)$$

Wir müssen nun also die folgenden Metriken unterscheiden:

$$\gamma_{\mu\nu} = \chi^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu} = (\chi_B + f)^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu} \quad (6.2)$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \chi_B^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu} \quad (6.3)$$

$$g_{\mu\nu} = \langle (\chi_B + f)^{2\nu} \rangle \hat{g}_{\mu\nu} \quad (6.4)$$

$$\check{g}_{\mu\nu} = \phi^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu} = (\chi_B + \langle f \rangle)^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (6.5)$$

Da die Zahl 2ν im allgemeinen ungleich Eins ist, führen wir mit (6.1a) eine *nicht-lineare* Aufspaltung des mikroskopischen konformen Faktors in Hintergrund und Quantenfluktuationen durch; diese bewirkt, daß die Felder $g_{\mu\nu}$ und $\check{g}_{\mu\nu}$ sich voneinander unterscheiden. Insofern ist die Übereinstimmung zwischen der vollen und der konform-reduzierten Theorie nicht perfekt. In der vollen Theorie wird die folgende *lineare* Aufspaltung durchgeführt [10]:

$$\gamma_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (6.6a)$$

Dort wird dann über $h_{\mu\nu}$ integriert und man definiert $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv \langle h_{\mu\nu} \rangle$. Es gibt also keinen Unterschied zwischen den Metriken $g_{\mu\nu}$ und $\check{g}_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} \equiv \langle \gamma_{\mu\nu} \rangle = \bar{g}_{\mu\nu} + \langle h_{\mu\nu} \rangle \equiv \check{g}_{\mu\nu}. \quad (6.6b)$$

In Kapitel 3 haben wir im Detail erklärt, warum das Hintergrundfeld sowohl in der vollen als auch in der konform-reduzierten Theorie für die Gravitation unverzichtbar ist, wenn wir „Hintergrundunabhängigkeit“ im Sinne von [3–5] fordern und wenn wir dem RG-Parameter k eine physikalische Bedeutung geben wollen. Wir organisieren das Pfadintegral über χ durch die Eigenfunktionen des kovarianten Laplace-Beltrami-Operators $\bar{\square}$, den wir aus der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ konstruieren; dann führen wir die Skala k als Cutoff im Spektrum von $\bar{\square}$ ein. Auf diese Weise ist die typische Längenskala, die durch die Eigenmode von $\bar{\square}$ mit Eigenwert $-k^2$, das heißt durch die „letzte“ ausintegrierte Mode, gegeben ist, ein ungefähres Maß für die Vergrößerungsskala, die wir im Bezug auf die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ auswerten. Wir bauen den Infrarot-Cutoff in das Pfadintegral ein, indem wir zur Mittelwertwirkung Γ_k eine passende Cutoff-Wirkung $\Delta_k S[f; \chi_B]$ hinzufügen (siehe Abschnitt 3.2).

In der vollen Theorie ist die Mittelwertwirkung für die Gravitation, abgesehen von Geistfeldern, eine Funktion des Erwartungswertes der Metrik und des Hintergrundfeldes [10]:

$$\Gamma_k[\bar{h}_{\mu\nu}; \bar{g}_{\mu\nu}] \equiv \Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]. \quad (6.7a)$$

In der konform-reduzierten Theorie hängt Γ_k gleichermaßen von \bar{f} und χ_B oder alternativ von $\phi \equiv \chi_B + \bar{f}$ und χ_B ab (siehe Abschnitt 3.2):

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B] \equiv \Gamma_k[\phi, \chi_B]. \quad (6.7b)$$

Auch wenn wir die Referenzmetrik festhalten und niemals ändern werden, hängt die Mittelwertwirkung auch von $\hat{g}_{\mu\nu}$ ab. Um uns diese Abhängigkeit im folgenden vor Augen zu halten, haben wir die Referenzmetrik in die Liste der Argumente aufgenommen:

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \equiv \Gamma_k[\phi, \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}]. \quad (6.7c)$$

In Abschnitt 3.2 haben wir die folgende funktionale Renormierungsgruppen-Gleichung für die reduzierte Mittelwertwirkung der Gravitation hergeleitet:

$$k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] + \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \right)^{-1} k\partial_k \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \right]. \quad (6.8)$$

Gl. (6.8) hat dieselbe Struktur wie in einer skalaren Theorie, außer daß die Eigenschaften des Cutoff-Operators \mathcal{R}_k sich hier unterscheiden. In Abschnitt 3.2.1 haben wir im Detail

erklärt, wie \mathcal{R}_k konstruiert werden muß, damit er „hintergrundunabhängig“ ist und damit die Metrik selbst die Vergrößerungsskala k bestimmt.

Die Referenzmetrik $\widehat{g}_{\mu\nu}$ ist unphysikalisch und hat keine Entsprechung in der vollen Theorie (siehe Abschnitt 3.2.1). Wir können eine Weyl-Reskalierung von $\widehat{g}_{\mu\nu}$ immer durch eine passende Redefinition des konformen Faktors auffangen. Die „physikalischen“ Metriken $\gamma_{\mu\nu}$, $\bar{g}_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ und $\check{g}_{\mu\nu}$, die wir durch die „Hintergrund-Quantenfeld-Aufspaltung“ (6.1a) erhalten haben, sind daher invariant unter den folgenden Aufspaltungs-Symmetrien:

$$\widehat{g}'_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(x)} \widehat{g}_{\mu\nu} \quad (6.9a)$$

$$f' = e^{\sigma(x)/\nu} f, \quad \chi'_B = e^{\sigma(x)/\nu} \chi_B \quad (6.9b)$$

$$\bar{f}' = e^{\sigma(x)/\nu} \bar{f}, \quad \phi' = e^{\sigma(x)/\nu} \phi. \quad (6.9c)$$

Da die Aufspaltung von der physikalischen Metrik $\gamma_{\mu\nu}$ als konformer Faktor mal Referenzmetrik $\widehat{g}_{\mu\nu}$ vollkommen beliebig ist, muß eine Quantentheorie des konformen Faktors die Aufspaltungs-Symmetrie (6.9) erfüllen. Insbesondere müssen wir fordern, daß die Cutoff-Wirkung $\Delta_k S[f; \chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu}]$ invariant sein soll unter den sogenannten „ σ -Transformationen“ (6.9). Diese Invarianz hat eine wichtige Konsequenz für die Lösungen $\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu}]$ der FRGE (6.8): Wenn Γ_k bei einem Wert der Vergrößerungsskala k invariant unter (6.9) ist, so ist es auch bei jedem anderen k . Der Fluß generiert keine nicht-invarianten Terme; daher ist es ausreichend, nur solche Terme in den Trunkierungsansatz einzufügen, die invariant unter den σ -Transformationen (6.9) sind.

Später wird $\widehat{g}_{\mu\nu}$ die Metrik einer vierdimensionalen Sphäre mit Radius \widehat{r} , $S^4(\widehat{r})$, sein, so daß das entsprechende Linienelement in den üblichen Koordinaten die folgende Form besitzt:

$$\widehat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \widehat{r}^2 \left[d\zeta^2 + \sin^2 \zeta \left(d\eta^2 + \sin^2 \eta \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right) \right]. \quad (6.10)$$

Wenn wir auf dieser Form der Referenzmetrik bestehen, brechen wir die Invarianz unter lokalen σ -Transformationen auf einer Symmetrie unter lediglich globalen σ -Transformationen herunter. Globale Transformationen (6.9) mit $\sigma(x) = \sigma = const$ erhalten die Form dieser Metrik, sie reskalieren aber den Radius der Sphäre gemäß der folgenden Gleichung:

$$\widehat{r}' = e^{-\sigma} \widehat{r}. \quad (6.11)$$

Nachdem wir die Gravitation auf den konformen Faktor reduziert haben, bleibt eine Theorie für das Feld $\chi(x)$ übrig. Um diese zu quantisieren, zerlegen wir den konformen Faktor in Hintergrundfeld und Quantenfluktuationen, $\chi = \chi_B + f$. Diese Hintergrund-Quantenfeld-Aufspaltung entspricht der Zerlegung $\gamma_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ in der vollen Theorie [10]. Die Felder χ und $\phi \equiv \chi_B + \bar{f}$ sind trivialerweise invariant unter einer zweiten Gruppe von Aufspaltungs-Transformationen:

$$\begin{aligned} f' &= f + \tau(x), & \bar{f}' &= \bar{f} + \tau(x), \\ \chi'_B &= \chi_B - \tau(x), & \hat{g}'_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Während die σ -Transformationen (6.9) kein Analogon in der vollen Theorie haben, besitzen die sogenannten „ τ -Transformationen“ (6.12) dort die folgende Entsprechung [10]:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \quad \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \quad \bar{g}'_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - \tau_{\mu\nu}. \quad (6.13)$$

Wir wollen hier betonen, daß sowohl in der vollen als auch in der konform-reduzierten Theorie die Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$ und als Konsequenz die FRGE und ihre exakten Lösungen Γ_k *nicht* invariant unter den entsprechenden τ -Transformationen sind, sofern k ungleich Null ist. Das führt dazu, daß wir das Hintergrundfeld *nicht* durch eine Redefinition des Quantenfeldes (das heißt der Integrationsvariablen) eliminieren können. Das Hintergrundfeld muß daher in gewissem Sinne eine „quasi-physikalische“ Bedeutung erhalten haben (siehe Abschnitt 3.1). Die Metrik besitzt den speziellen Status, daß sie alle Eigenlängen und Massenskalen inklusive der Skala k definiert. Daher ist klar, was diese quasi-physikalische Bedeutung ist¹: Das Hintergrundfeld beinhaltet die Information über die physikalische Interpretation des Modencutoffs, insbesondere über die Eigenlängen der „vergrößerten“ Bereiche in der Raumzeit. Als Cutoff im Spektrum von $\bar{\square}$ ist der Parameter k^{-1} eine Länge im Bezug auf die Hintergrundmetrik. (Er ist keine Koordinatenlänge.) Die τ -Symmetrie ist durch die Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$ gebrochen, die die Modenunterdrückung implementiert. Für $k \rightarrow 0$ erreicht das Funktional Γ_k die gewöhnliche effektive Wirkung Γ [10]. Erst in diesem Grenzfall wird Γ_k invariant unter den τ -Transformationen (siehe Abschnitt 3.2.1).

In Teil II haben wir die FRGE (6.8) auf dem zweidimensionalen Theorienraum gelöst,

¹In dieser Arbeit vernachlässigen wir die Eichfixierung. Sie ist nicht wichtig für unsere Diskussionen.

der durch den folgenden Ansatz parametrisiert wird:

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{1}{2} (\chi_B + \bar{f}) \left(-\hat{\square} + \xi(d) \hat{R} \right) (\chi_B + \bar{f}) - \xi(d) \Lambda_k (\chi_B + \bar{f})^{d\nu} \right\}. \quad (6.14)$$

Dieses Funktional ist invariant sowohl unter lokalen σ - als auch unter lokalen τ -Transformationen. Die zugehörige Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$ ist jedoch nur σ -invariant. Im nächsten Kapitel werden wir den Trunkierungsansatz (6.14) verallgemeinern.

DIE FLUSSGLEICHUNGEN IN DER LOKALEN POTENTIALNÄHERUNG

In Teil II haben wir die funktionale Renormierungsgruppen-Gleichung für die Mittelwertwirkung in der konform-reduzierten Gravitation,

$$k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] + \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \right)^{-1} k\partial_k \mathcal{R}_k[\chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] \right], \quad (7.1)$$

auf dem zweidimensionalen Theorienraum gelöst, der durch die laufende Newton-Konstante G_k und die laufende kosmologische Konstante Λ_k parametrisiert wird. In dieser Näherung machten wir für Γ_k den folgenden Ansatz:

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{1}{2} (\chi_B + \bar{f}) \left(-\hat{\square} + \xi(d)\hat{R} \right) (\chi_B + \bar{f}) - \xi(d)\Lambda_k (\chi_B + \bar{f})^{d\nu} \right\}. \quad (7.2)$$

In Gl. (6.14) sind die folgenden Abkürzungen enthalten (siehe Kapitel 2):

$$\nu(d) = \frac{2}{d-2}, \quad \xi(d) = \frac{d-2}{4(d-1)}.$$

Die Flußgleichung (6.8) hat dieselbe Struktur wie in einer gewöhnlichen skalaren Theorie; beide unterscheiden sich aber in den Eigenschaften des Cutoff-Operators \mathcal{R}_k . In Abschnitt 3.2.1 haben wir im Detail erklärt, wie wir diesen konstruieren müssen, damit er „hintergrundunabhängig“ ist. Diese „Hintergrundunabhängigkeit“ im Sinne von [3–5]

bedeutet, daß die Metrik selbst die Vergrößerungsskala definiert, das heißt daß k eine Eigenskala bezuglich der physikalischen Metrik ist. Das Funktional (6.14) ist invariant sowohl unter lokalen σ - als auch τ -Transformationen, Gl. (6.9) beziehungsweise (6.12). Die zugehörige Cutoffwirkung $\Delta_k S$ ist jedoch nur invariant unter σ -Transformationen.

Im nächsten Abschnitt wollen wir den Trunkierungsansatz (6.14) auf einen unendlich-dimensionalen Theorienraum verallgemeinern und die entsprechenden β -Funktionen ableiten. Wir werden die Diskussionen hierbei auf maximal symmetrischen Referenzmetriken $\widehat{g}_{\mu\nu}$ einschränken. Zunächst werden wir die Flußgleichung für die Sphäre aufstellen und lösen; später werden wir auch den flachen Raum diskutieren.

7.1 Der Trunkierungsansatz in der lokalen Potentialnäherung

Der Trunkierungsansatz für die lokale Potentialnäherung (LPA)¹ besitzt denselben kinetischen Term wie die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Trunkierung (6.14), aber statt eines einzelnen Potentialterms $\phi^{2d/(d-2)}$ proportional zur kosmologischen Konstanten Λ_k lassen wir nun ein beliebiges laufendes Potential $H_k(\cdot)$ zu:

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \left\{ \frac{1}{2} (\chi_B + \bar{f}) \left(-\widehat{\square} + \xi(d)\widehat{R} \right) (\chi_B + \bar{f}) + \frac{1}{\widehat{r}^d} H_k(\widehat{r}^{1/\nu}(\chi_B + \bar{f})) \right\}. \quad (7.3)$$

Nachdem wir die Referenzmetrik auf sphärische Metriken eingeschränkt haben, müssen wir sicherstellen, daß Γ_k invariant ist unter den globalen σ -Transformationen (6.9), die den Radius \widehat{r} gem Gl. (6.11) transformieren. Dies erklärt die expliziten Faktoren von \widehat{r} in (7.3). Sie garantieren, daß Γ_k tatsächlich invariant ist unter globalen σ -Transformationen:

$$\Gamma_k[e^{\sigma/\nu}\bar{f}; e^{\sigma/\nu}\chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu} = \widehat{g}_{\mu\nu}(S^d(e^{-\sigma}\widehat{r}))] = \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu} = \widehat{g}_{\mu\nu}(S^d(\widehat{r}))]. \quad (7.4)$$

Der Ansatz (7.3) für die Mittelwertwirkung ist offensichtlich invariant unter den τ -Transformationen (6.12). Der Grund für diese zufällige τ -Invarianz ist die immer vergleichbar einfache Form des Trunkierungsansatzes; die FRGE selbst und ihre exakten Lösungen besitzen diese Symmetrie nicht. In einer allgemeineren Trunkierung würden wir annehmen,

¹Die Abkürzung „LPA“ leitet sich aus dem englischen Ausdruck „local potential approximation“ ab.

daß das Potential von den zwei Feldern $\tilde{\chi}_B \equiv \hat{r} \chi_B$ und $\tilde{f} \equiv \hat{r} \bar{f}$ einzeln und nicht nur von ihrer Summe $\tilde{\phi} \equiv \hat{r} \phi$ abhängt. Die vereinfachende Annahme eines LPA-Potentials, das nur von einem einzelnen Feld abhängt, entspricht den analogen Trunkierungsschritten in der vollen Theorie [10]: Wir können ein allgemeines Potential $H_k(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}_B)$, das von den Feldern $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\chi}_B$ einzeln abhängt, ohne Einschränkung der Allgemeinheit in zwei Potentiale aufspalten:

$$H_k(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}_B) = \bar{H}_k(\tilde{\phi}) + \hat{H}_k(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}_B).$$

Dabei entspricht \bar{H}_k der Funktion $H_k(\tilde{\phi}, \tilde{\phi})$ und \hat{H}_k verschwindet für $\tilde{\phi} = \tilde{\chi}_B$:

$$\bar{H}_k(\tilde{\phi}) \equiv H_k(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}), \quad \hat{H}_k(\tilde{\phi} = \tilde{\chi}_B) = 0.$$

Wenn wir uns also für den Trunkierungsansatz (7.3) entscheiden, vernachlässigen wir \hat{H}_k ; wir nähern also $H_k \approx \bar{H}_k$. Da die Potentiale \bar{H}_k und \hat{H}_k den Funktionalen $\bar{\Gamma}_k[g_{\mu\nu}]$ beziehungsweise $\hat{\Gamma}_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$ entsprechen, ist das dieselbe Vereinfachung der Mittelwertwirkung, die oft in der Quanten-Einstein-Gravitation durchgeführt wird, siehe Abschnitt 3 in Ref. [10]. Auch wenn das Potential H_k in unserem Fall nur von einem Feld abhängt, sind spezielle Lösungen des Typs (7.3) bereits allgemein genug, um qualitative Konsequenzen der Abhängigkeiten vom Hintergrundfeld χ_B zu zeigen. Wir haben diese Abhängigkeiten über den Cutoff-Operator \mathcal{R}_k in den Ansatz eingebaut, damit die FRGE und ihre Lösungen „hintergrundunabhängig“ sind. Diese zerstören jedoch die τ -Invarianz (siehe Abschnitt 3.2.1).

Es ist praktisch, den Term proportional zum Ricci-Skalar der Referenzmetrik, den wir durch die Weyl-Transformation der Invarianten $\int \sqrt{g} R$ erhalten haben, mit dem Potential H_k zu kombinieren. (Zur Definition von R und seiner Weyl-Transformierten siehe die Anhänge A beziehungsweise B.) Auf einer beliebig-dimensionalen Sphäre mit Radius \hat{r} ist der Ricci-Skalar eine Konstante,

$$\hat{R} = \frac{d(d-1)}{\hat{r}^2}.$$

Wir führen daher das folgende laufende Gesamtpotential $F_k(\cdot)$ ein:

$$F_k(\tilde{\phi}) \equiv \frac{d(d-2)}{8} \tilde{\phi}^2 + H_k(\tilde{\phi}). \quad (7.5)$$

Damit nimmt die effektive Mittelwertwirkung Γ_k die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))] \\ = -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{1}{2}(\chi_B + \bar{f})\hat{\square}(\chi_B + \bar{f}) + \frac{1}{\hat{r}^d} F_k(\hat{r}^{1/\nu}(\chi_B + \bar{f})) \right\}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Diesen Ansatz setzen wir dann in die FRGE (6.8) ein. Unter der Spur auf ihrer rechten Seite benötigen wir die Matrix $\Gamma_k^{(2)}$ der zweiten funktionalen Ableitungen von Γ_k nach \bar{f} :

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)}[\bar{f}; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))]_{xy} \\ = -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \left[-\hat{\square}_x + \frac{1}{\hat{r}^2} F_k''(\hat{r}^{1/\nu}(\chi_B(x) + \bar{f}(x))) \right] \frac{\delta(x-y)}{\sqrt{\hat{g}(x)}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Hier und im folgenden bezeichnet ein Strich eine Ableitung nach dem Argument. Wenn wir Gl. (7.6) mit dem Potential (1.2) vergleichen, so sehen wir, daß

$$U_k(\phi) \equiv -\frac{1}{8\pi\xi(d)G_k} \frac{1}{\hat{r}^d} F_k(\hat{r}^{1/\nu} \phi). \quad (7.8)$$

Der Ansatz (7.6) enthält zwei skalenabhängige Parameter: einen vom Feld unabhängigen Parameter, die laufende Newton-Konstante G_k , und eine Funktion des Feldes, das laufende Potential $F_k(\cdot)$. Wir bestimmen ihre entsprechenden β -Funktionen dadurch, daß wir die FRGE (6.8) auf beiden Seiten auswerten. Dabei setzen wir den Ansatz (7.6) für spezielle Feldkonfigurationen in Gl. (6.8) ein, mit deren Hilfe wir die β -Funktionen für $F_k(\cdot)$ beziehungsweise G_k bestimmen können. Dadurch können wir die für unsere Diskussion interessanten Monome betrachten, die in der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k enthalten sind. Um die β -Funktion $k\partial_k F_k(\cdot)$ zu erhalten, setzen wir $\bar{f} = 0$ und $\chi_B = const$; danach berechnen wir die Spur auf der rechten Seite von (6.8) als Funktion des nun konstanten Feldes χ_B . Das Resultat dieser Rechnung ist dann die β -Funktion $k\partial_k F_k(\chi_B)$. Die β -Funktion für die Newton-Konstante erhalten wir aus dem kinetischen Term in Γ_k . Dafür setzen wir $\chi_B = const$ und lassen \bar{f} unverändert beliebig. Danach entwickeln wir die Spur auf der rechten Seite von (6.8) jeweils bis zur zweiten Ordnung in \bar{f} und in den Ableitungen nach \bar{f} . Der $(\partial\bar{f})^2$ -Term ist dann proportional zur β -Funktion $k\partial_k(1/G_k)$.

Da es für beide Rechnungen ausreicht, ein konstantes Hintergrundfeld anzunehmen, werden wir ab jetzt $\chi_B(x) = const \equiv \chi_B$ betrachten.

An dieser Stelle ist eine Bemerkung über die kanonischen Dimensionen der auftretenden Felder und Funktionen angebracht. In den obigen Gleichungen haben wir solche

Einheiten verwendet, daß die Koordinaten x^μ dimensionslos sind. Daher ergeben sich die folgenden kanonischen Massendimensionen:

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mu\nu}] &= [g_{\mu\nu}] = [\bar{g}_{\mu\nu}] = [\hat{g}_{\mu\nu}] = -2 \\ [f] &= [\bar{f}] = [\chi_B] = [\phi] = 0 \\ [H_k] &= [F_k] = 2 - d, \quad [\hat{r}] = -1. \end{aligned} \quad (7.9)$$

7.2 Der Cutoff-Operator

In Abschnitt 3.2.1 haben wir im Detail erklärt, daß die FRGE und ihre Lösungen nur dann „hintergrundunabhängig“ sind, wenn wir k als Cutoff im Spektrum von $\bar{\square}$ statt von $\hat{\square}$ definieren. (Hier sind $\bar{\square}$ und $\hat{\square}$ die Laplace-Beltrami-Operatoren in Bezug auf die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu} \equiv \chi_B^{2\nu} \hat{g}_{\mu\nu}$ beziehungsweise die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$.) Für Trunkierungen in der lokalen Potentialnäherung, Gl. (7.6), können wir „Hintergrundunabhängigkeit“ mindestens dadurch erreichen, daß wir den Cutoff-Operator \mathcal{R}_k so konstruieren, daß er zu der Ersetzung

$$(-\bar{\square}) \rightarrow (-\bar{\square}) + k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\bar{\square}}{k^2}\right), \quad (7.10)$$

führt, wenn wir ihn zur Matrix $\Gamma_k^{(2)}$ addieren (siehe Abschnitt 3.2.1). Für ein konstantes Hintergrundfeld gilt die Relation $\bar{\square} = \chi_B^{-2\nu} \hat{\square}$; somit nimmt die Ersetzungsregel (7.10) die folgende Form an:

$$(-\hat{\square}) \rightarrow (-\hat{\square}) + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right). \quad (7.11)$$

Wir definieren nun den Cutoff-Operator \mathcal{R}_k so, daß in Operatorschreibweise gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \\ = -\frac{1}{8\pi \xi(d) G_k} \left[-\hat{\square} + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) + \frac{1}{\hat{r}^2} F_k''(\hat{r}^{1/\nu} (\chi_B + \bar{f}(x))) \right]. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Als Resultat erhalten wir den Cutoff-Operator \mathcal{R}_k :

$$\mathcal{R}_k[\chi_B; \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))] = -\frac{1}{8\pi \xi(d) G_k} \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) \quad (7.13)$$

Man beachte die Abhängigkeit des Cutoff-Operators vom Hintergrundfeld, die Faktoren von $\chi_B^{2\nu}$ auf der rechten Seite von (7.13). Diese tauchen nur in der konform-reduzierten Gravitation auf; der Grund dafür ist die „hintergrundunabhängige“ Quantisierung des konformen

Faktors, in der die dynamische Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ die Informationen über die physikalische Interpretation des Modencutoffs enthält. In der Quantisierung eines gewöhnlichen Skalarfeldes im Bezug auf die nicht-dynamische Hintergrundmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ würden wir diese Faktoren nicht finden. Neben dem unterschiedlichen Transformationsverhalten unter Diffeomorphismen ist das Auftauchen dieser $\chi_B^{2\nu}$ -Faktoren die wichtigste Eigenschaft, die den konformen Faktor von skalaren Massensfeldern unterscheidet. Sie führen zu signifikanten Änderungen des RG-Flusses (siehe Abschnitt 4.5).

Die zum Cutoff-Operator (7.13) gehörende Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$ besitzt die folgende Form:

$$\begin{aligned} \Delta_k S[f; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))] \\ = -\frac{1}{16\pi \xi(d) G_k} \chi_B^{2\nu} k^2 \int d^d x \sqrt{\hat{g}} f(x) R^{(0)}\left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) f(x). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Dieses Funktional ist invariant unter den globalen σ -Transformationen (6.9):

$$\Delta_k S[e^{\sigma/\nu} f; e^{\sigma/\nu} \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(e^{-\sigma} \hat{r}))] = \Delta_k S[f; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))]. \quad (7.15)$$

Die Cutoff-Wirkung ist jedoch *nicht* invariant unter den τ -Transformationen (6.12):

$$\Delta_k S[f + \tau; \chi_B - \tau, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))] \neq \Delta_k S[f; \chi_B, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))]. \quad (7.16)$$

Die Flußgleichung (6.8) besitzt nun die folgende Form:

$$\begin{aligned} k\partial_k \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B = const, \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r}))] \\ = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(-\hat{\square} + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) + \frac{1}{\hat{r}^2} F_k''(\hat{r}^{1/\nu} (\chi_B + \bar{f})) \right)^{-1} \right. \\ \left. \times G_k k\partial_k \left\{ G_k^{-1} \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)}\left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2}\right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Hiebei ist \hat{r} der Radius Sphäre $S^d(\hat{r})$, deren Metrik durch die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ gegeben ist. Wir können diese radiale Abhängigkeit von (7.17) jedoch vollständig eliminieren, denn in der exakten Formulierung existieren keine Entsprechungen der Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ beziehungsweise deren Radius \hat{r} . Um das zu sehen, führen wir die Metrik einer d -dimensionalen Einheitssphäre, $\hat{g}_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \hat{g}_{\mu\nu}(S^d(1))$, so ein, daß die folgende Relation gilt:

$$\hat{g}_{\mu\nu}(S^d(\hat{r})) = \hat{r}^2 \hat{g}_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (7.18)$$

Die Metrik $\widehat{g}_{\mu\nu}^{(1)}$ ist dimensionslos, während $\widehat{g}_{\mu\nu}$ die kanonische Massendimension Minus Zwei besitzt. Wenn wir mit $\widehat{\square}^{(1)}$ und $\widehat{g}^{(1)}$ den Laplace-Beltrami-Operator beziehungsweise die Determinante bezüglich $\widehat{g}_{\mu\nu}^{(1)}$ bezeichnen, dann erhalten wir für $\widehat{\square}$ beziehungsweise $\sqrt{\widehat{g}}$ die folgenden Operatoren:

$$\widehat{\square} = \widehat{r}^{-2} \widehat{\square}^{(1)}, \quad \sqrt{\widehat{g}} = \widehat{r}^d \sqrt{\widehat{g}^{(1)}}.$$

Wenn wir alles durch $\widehat{g}_{\mu\nu}^{(1)}$ ausdrücken, nimmt die effektive Mittelwertwirkung Γ_k die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\bar{f}; \chi_B, \widehat{g}_{\mu\nu} = \widehat{g}_{\mu\nu}(S^d(\widehat{r}))] \\ = -\frac{1}{8\pi \xi(d) G_k} \int d^d x \sqrt{\widehat{g}^{(1)}} \left\{ -\frac{1}{2} (\widehat{r}^{1/\nu} \bar{f}) \widehat{\square}^{(1)} (\widehat{r}^{1/\nu} \bar{f}) \right. \\ \left. + F_k (\widehat{r}^{1/\nu} \chi_B + \widehat{r}^{1/\nu} \bar{f}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Das Funktional (7.19) wird in die linke Seite der Flußgleichung (7.17) eingesetzt. Ausgedrückt durch $\widehat{g}_{\mu\nu}^{(1)}$ erhalten wir für die rechte Seite von (7.17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(-\widehat{\square}^{(1)} + (\widehat{r}^{1/\nu} \chi_B)^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\widehat{\square}^{(1)}}{(\widehat{r}^{1/\nu} \chi_B)^{2\nu} k^2} \right) + F_k'' (\widehat{r}^{1/\nu} \chi_B + \widehat{r}^{1/\nu} \bar{f}) \right)^{-1} \right. \\ \left. \times G_k k \partial_k \left\{ G_k^{-1} (\widehat{r}^{1/\nu} \chi_B)^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\widehat{\square}^{(1)}}{(\widehat{r}^{1/\nu} \chi_B)^{2\nu} k^2} \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Man beachte, daß die Felder χ_B und \bar{f} sowie der Radius \widehat{r} in der Flußgleichung in $\widehat{g}_{\mu\nu}^{(1)}$ -Einheiten nur in den Kombinationen $\widehat{r}^{1/\nu} \chi_B$ beziehungsweise $\widehat{r}^{1/\nu} \bar{f}$ auftauchen, die invariant unter den σ -Transformationen sind. Aus diesem Grund liegt es nahe, neue Felder einzuführen, damit \widehat{r} vollständig aus den Gleichungen verschwindet:

$$\widetilde{\chi}_B \equiv \widehat{r}^{1/\nu} \chi_B, \quad \widetilde{f}(x) \equiv \widehat{r}^{1/\nu} \bar{f}(x), \quad \widetilde{\phi} \equiv \widehat{r}^{1/\nu} \phi. \quad (7.21)$$

Analog zu $\phi = \chi_B + \bar{f}$ haben wir in (7.21) die Summe $\widetilde{\phi} = \widetilde{\chi}_B + \widetilde{f}(x)$ definiert. Die neuen Variablen $(\widetilde{\chi}_B, \widetilde{f}, \widetilde{\phi})$ haben die Längendimension $1/\nu$, während die alten Variablen (χ_B, \bar{f}, ϕ) dimensionslos waren. Wir können die neuen Variablen (7.21) wie folgt interpretieren: Aus der Relation $\bar{g}_{\mu\nu} = \chi_B^{2\nu} \widehat{g}_{\mu\nu}$ beispielsweise folgt, daß

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \widehat{r}^{2\nu} \chi_B^{2\nu} \widehat{g}_{\mu\nu}^{(1)} = \widetilde{\chi}_B^{2\nu} \widehat{g}_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (7.22)$$

Somit ist $\tilde{\chi}_B^\nu$ nichts anderes als der Radius der Sphäre, die durch die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ definiert ist. Entsprechend können wir $\tilde{\phi}^\nu$ als den Radius der d -dimensionalen Sphäre mit Metrik $\check{g}_{\mu\nu}$ ansehen. (Zur Definition von ϕ und $\check{g}_{\mu\nu}$ siehe Abschnitt 3.1.2.)

Fassen wir an dieser Stelle einmal zusammen: Wir können die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ vollständig aus der Flußgleichung eliminieren, die das Renormierungsgruppen-Laufen der Parameter G_k und $F_k(\cdot)$ bestimmt. Somit können die entsprechenden β -Funktionen nicht von der Referenzmetrik abhängen. Da die Variablen $\tilde{\chi}_B$ und \tilde{f} Singulettts unter den σ -Transformationen (6.9) sind, ist die Flußgleichung invariant unter den Aufspaltungs-Transformationen (siehe Kapitel 6). Dies zeigt uns, daß wir die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ vollkommen beliebig wählen können.

Nachdem wir uns davon überzeugt haben, daß die Flußgleichung (7.17) dieselben Invarianz-Eigenschaften wie in der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung besitzt, können wir die Notation vereinfachen und die Tilde von den neuen Feldern, Gl. (7.21), weglassen. Genauso gut könnten wir die alten Felder χ_B und \bar{f} beibehalten und $\hat{r} = 1$ in allen Formeln einsetzen. In dieser vereinfachten Schreibweise gilt dann $\hat{g}_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu}^{(1)}$ und $\hat{\square} \equiv \hat{\square}^{(1)}$; wir können also den oberen Index „(1)“ weglassen. Die Tabelle der kanonischen Massendimensionen, Gl. (7.23), ändert sich dementsprechend; wir erhalten mit $[x^\mu] = 0$:

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mu\nu}] &= [g_{\mu\nu}] = [\bar{g}_{\mu\nu}] = -2, & [\hat{g}_{\mu\nu}] &= 0 \\ [f] &= [\bar{f}] = [\chi_B] = [\phi] = -1/\nu & & \\ [H_k] &= [F_k] = 2 - d. & & \end{aligned} \tag{7.23}$$

In dieser Notation nimmt die Flußgleichung, die wir auswerten wollen, die folgende Form an:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi \xi(d)} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left(-\frac{1}{2} \bar{f} \hat{\square} \bar{f} k \partial_k G_k^{-1} + k \partial_k \left\{ G_k^{-1} F_k(\chi_B + \bar{f}(x)) \right\} \right) \\ &= \chi_B^{2\nu} k^2 \text{Tr} \left[\left(-\hat{\square} + \chi_B^{2\nu} k^2 R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2} \right) + F_k''(\chi_B + \bar{f}(x)) \right)^{-1} \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \eta_N \right) R^{(0)} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2} \right) - \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2} \right) R^{(0)'} \left(-\frac{\hat{\square}}{\chi_B^{2\nu} k^2} \right) \right\} \right]. \end{aligned} \tag{7.24}$$

In Gl. (7.24) ist die zur Newton-Konstanten gehörende anomale Dimension enthalten, wie sie in [10] definiert ist:

$$\eta_N \equiv k \partial_k \ln G_k. \tag{7.25}$$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, hängen die β -Funktionen von der „Topologie“ der Hintergrundmannigfaltigkeit ab. Wir wollen dabei sowohl die Sphäre S^d als auch den flachen Raum R^d diskutieren. Für die S^d -Topologie haben wir die Flußgleichung bereits abgeleitet, Gl. (7.24); in diesem Fall ist $\hat{g}_{\mu\nu}$ die Metrik der d -dimensionalen Einheitssphäre. In der R^d -Topologie können wir die zugehörigen Flußgleichungen für G_k und $F_k(\cdot)$ ebenfalls aus (7.24) erhalten; hier müssen wir allerdings die Referenzmetrik als die flache Metrik interpretieren, $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

7.3 Die Flußgleichung für das laufende Potential

Wir werden in diesem und dem nächsten Abschnitt die Flußgleichungen für die Kopplungen in der lokalen Potentialnäherung, das laufende Potential $F_k(\cdot)$ und die laufende Newton-Konstante G_k (siehe dazu Abschnitt 7.4), für beliebige Dimensionen herleiten. In Abschnitt 7.A fassen wir die Ergebnisse dieser beiden Abschnitte für vier Dimensionen zusammen.

7.3.1 Die Sphäre

In diesem Abschnitt werden wir die Flußgleichung für das laufende Potential $F_k(\cdot)$ für die S^d -Topologie herleiten. Wir werden die Flußgleichung (7.24) bei $\bar{f} = 0$ auswerten; die Abhängigkeit vom (konstanten) Hintergrundfeld $\chi_B = \phi$ werden wir jedoch in vollem Umfang beibehalten. (Zur Erinnerung: Da wir das Feld ϕ durch $\phi \equiv \chi_B + \bar{f}$ definiert haben, gilt hier nun $\phi = \chi_B$.) Wir werten die Spur auf der rechten Seite von (7.24) in der Eigenbasis des Laplace-Beltrami-Operators $\hat{\square}$ der d -dimensionalen Einheitssphäre $S^d(1)$ aus. Seine Eigenwerte $-\mathcal{E}_{n;d}$ und deren Entartungsgrade $D_{n;d}$ sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben [61]:

$$\mathcal{E}_{n;d} = n(n+d-1), \quad D_{n;d} = \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n!(d-1)!}. \quad (7.26)$$

Das Volumen der d -dimensionalen Einheitssphäre beträgt

$$\sigma_d \equiv \int d^d x \sqrt{\hat{g}} = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)}. \quad (7.27)$$

Wenn wir (7.27) und $g_{\mu\nu} = \langle (\chi_B + f)^{2\nu} \rangle \widehat{g}_{\mu\nu}$ in die Flußgleichung (7.24) einsetzen, so nimmt sie die folgende Form an:

$$-\frac{\sigma_d}{8\pi \xi(d)} \frac{1}{G_k} \left[k \partial_k F_k(\phi) - \eta_N F_k(\phi) \right] = T_{1;d}(\phi) + T_{2;d}(\phi). \quad (7.28)$$

In dieser Gleichung für das laufende Potential $F_k(\cdot)$ haben wir die folgenden Spektralsummen eingeführt:

$$\begin{aligned} T_{1;d} &\equiv \varphi^{2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} D_{n;d} \frac{R^{(0)}(\mathcal{E}_{n;d}/\varphi^{2\nu}) - (\mathcal{E}_{n;d}/\varphi^{2\nu}) R^{(0)'}(\mathcal{E}_{n;d}/\varphi^{2\nu})}{\mathcal{E}_{n;d} + \varphi^{2\nu} R^{(0)}(\mathcal{E}_{n;d}/\varphi^{2\nu}) + F_k''(\phi)} \\ T_{2;d} &\equiv -\frac{1}{2} \eta_N \varphi^{2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} D_{n;d} \frac{R^{(0)}(\mathcal{E}_{n;d}/\varphi^{2\nu})}{\mathcal{E}_{n;d} + \varphi^{2\nu} R^{(0)}(\mathcal{E}_{n;d}/\varphi^{2\nu}) + F_k''(\phi)} \end{aligned} \quad (7.29)$$

In (7.29) ist das folgende neue Feld enthalten:

$$\varphi \equiv k^{1/\nu} \phi \quad (7.30)$$

Das Feld φ ist dimensionslos, da ϕ die Längendimension $1/\nu$ besitzt.

7.3.2 Die Spektralsummen für den optimierten Cutoff

Wir erhalten aus Gl. (7.28) die β -Funktion $k\partial_k F_k(\phi)$ für jede beliebige Profilfunktion $R^{(0)}$. Zur Vereinfachung der Spektralsummen können wir jedoch die optimierte Profilfunktion [60] verwenden:

$$R^{(0)}(z) = (1-z) \theta(1-z). \quad (7.31)$$

In Abschnitt 4.3 haben wir die Eigenschaften dieser Funktion aufgelistet. Eine dieser Eigenschaften ist die folgende Relation:

$$R^{(0)}(z) - z R^{(0)'}(z) = \theta(1-z) \quad (7.32)$$

Aufgrund von (7.32) und mit

$$\mathcal{E}_{n;d} + \varphi^{2\nu} R^{(0)}(\mathcal{E}_{n;d}/\varphi^{2\nu}) = \varphi^{2\nu} \quad (7.33)$$

nehmen die Spektralsummen (7.29) die folgenden Formen an:

$$\begin{aligned} T_{1;d} &= \frac{\varphi^{2\nu} \rho_d(\varphi)}{\varphi^{2\nu} + F_k''(\phi)} \\ T_{2;d} &= -\frac{1}{2} \eta_N T_{1;d} + \frac{1}{2} \eta_N \frac{\widetilde{\rho}_d(\varphi)}{\varphi^{2\nu} + F_k''(\phi)}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

In (7.34) haben wir zwei neue, einfachere Spektralfunktionen eingeführt: $\rho_d(\varphi)$ und $\tilde{\rho}_d(\varphi)$. Diese haben wir für beliebige Referenzmetriken $\hat{g}_{\mu\nu}$ wie folgt definiert:

$$\rho_d(\varphi) \equiv \text{Tr} \left[\theta(\varphi^{2\nu} + \hat{\square}) \right], \quad \tilde{\rho}_d(\varphi) \equiv \text{Tr} \left[(-\hat{\square}) \theta(\varphi^{2\nu} + \hat{\square}) \right]. \quad (7.35)$$

Für die Sphäre gilt mit (7.26):

$$\rho_d(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n;d} \theta(\varphi^{2\nu} - \mathcal{E}_{n;d}), \quad \tilde{\rho}_d(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_{n;d} D_{n;d} \theta(\varphi^{2\nu} - \mathcal{E}_{n;d}). \quad (7.36)$$

Mit dem optimierten Cutoff nimmt die Flußgleichung für das laufende Potential die folgende Form an:

$$k \partial_k F_k(\phi) - \eta_N F_k(\phi) = - \frac{G_k}{\zeta_d} \frac{\left\{ 1 - \frac{\eta_N}{2} \right\} k^2 \phi^{2\nu} \rho_d(k^{1/\nu} \phi) + \frac{\eta_N}{2} \tilde{\rho}_d(k^{1/\nu} \phi)}{k^2 \phi^{2\nu} + F_k''(\phi)}, \quad (7.37)$$

In (7.37) haben wir die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\zeta_d \equiv \frac{1}{8\pi \xi(d)} \sigma_d. \quad (7.38)$$

Aufgrund der Stufenfunktion in der optimierten Profilfunktion (7.31) erhalten wir für die Spektralfunktionen (7.36) die folgenden Ausdrücke:

$$\rho_d(\varphi) = J_d(n_{\max}(\varphi; d)), \quad \tilde{\rho}_d(\varphi) = \tilde{J}_d(n_{\max}(\varphi; d)). \quad (7.39)$$

Wir definieren $n_{\max}(\varphi; d)$ als die größte natürliche Zahl $n = 0, 1, 2, \dots$, die die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\mathcal{E}_{n;d} = n(n+d-1) < \varphi^{2\nu}. \quad (7.40)$$

In Abbildung 7.1 haben wir die Zahl $n_{\max}(\varphi; 4)$ in vier Dimensionen in Abhängigkeit vom Feld φ dargestellt. In Gl. (7.39) haben wir die folgenden endlichen Summen mit Hilfe der Euler-Maclaurin-Formel eingeführt:

$$J_d(N) \equiv \sum_{n=0}^N D_{n;d} = \frac{1}{(d-1)!} \sum_{n=0}^N \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n!}, \quad (7.41a)$$

$$\tilde{J}_d(N) \equiv \sum_{n=0}^N \mathcal{E}_{n;d} D_{n;d} = \frac{1}{(d-1)!} \sum_{n=0}^N \frac{(n+d-1)(2n+d-1)(n+d-2)!}{(n-1)!}. \quad (7.41b)$$

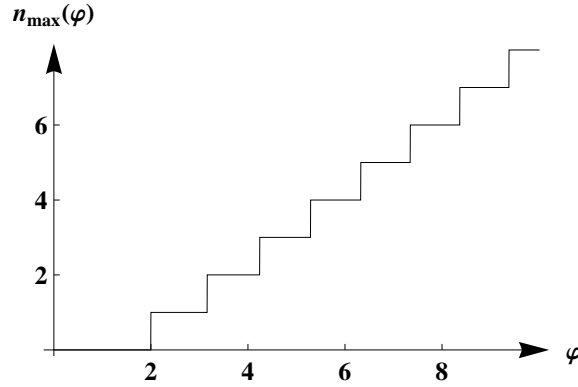


Abbildung 7.1: Die Zahl n_{\max} aus Gl. (7.40) in vier Dimensionen.

(Für eine Beweis der Euler-Maclaurin-Formel und eine allgemeine Berechnung siehe Ref. [62].) Wir können die Funktionen (7.41a) und (7.41b) explizit berechnen. In vier Dimensionen erhalten wir beispielsweise:

$$J_4(N) = \frac{1}{12} N^4 + \frac{2}{3} N^3 + \frac{23}{12} N^2 + \frac{7}{3} N + 1 \quad (7.42a)$$

$$\tilde{J}_4(N) = \frac{1}{18} N^6 + \frac{2}{3} N^5 + \frac{55}{18} N^4 + \frac{20}{3} N^3 + \frac{62}{9} N^2 + \frac{8}{3} N. \quad (7.42b)$$

Die führende Ordnung in (7.39) ist durch den folgenden Wert gegeben:

$$n_{\max}(\varphi; d) \approx \begin{cases} \varphi & \text{für } \varphi \gg 1 \\ 0 & \text{für } \varphi \ll 1 \end{cases} \quad (7.43)$$

Die impliziert mit (7.41) die folgenden Grenzfälle:

$$\rho_d(\varphi) \approx \begin{cases} \frac{2}{d!} \varphi^{d\nu} & \text{für } \varphi \gg 1 \\ 1 & \text{für } \varphi \ll 1 \end{cases} \quad (7.44a)$$

$$\tilde{\rho}_d(\varphi) \approx \begin{cases} \frac{2d(d+1)}{(d+2)!} \varphi^{(d+2)\nu} & \text{für } \varphi \gg 1 \\ 0 & \text{für } \varphi \ll 1 \end{cases} \quad (7.44b)$$

Insbesondere sehen wir, daß für $\varphi = 0$ folgendes gilt:

$$\rho_d(0) = 1, \quad \tilde{\rho}_d(0) = 0. \quad (7.45)$$

Auf der d -dimensionalen Sphäre ist das Spektrum von $\hat{\square}$ vollständig diskret. Daher haben $\rho_d(\varphi)$ und $\tilde{\rho}_d(\varphi)$ Sprünge bei den Werten für φ , bei denen $n_{\max}(\varphi; d)$ springt. In

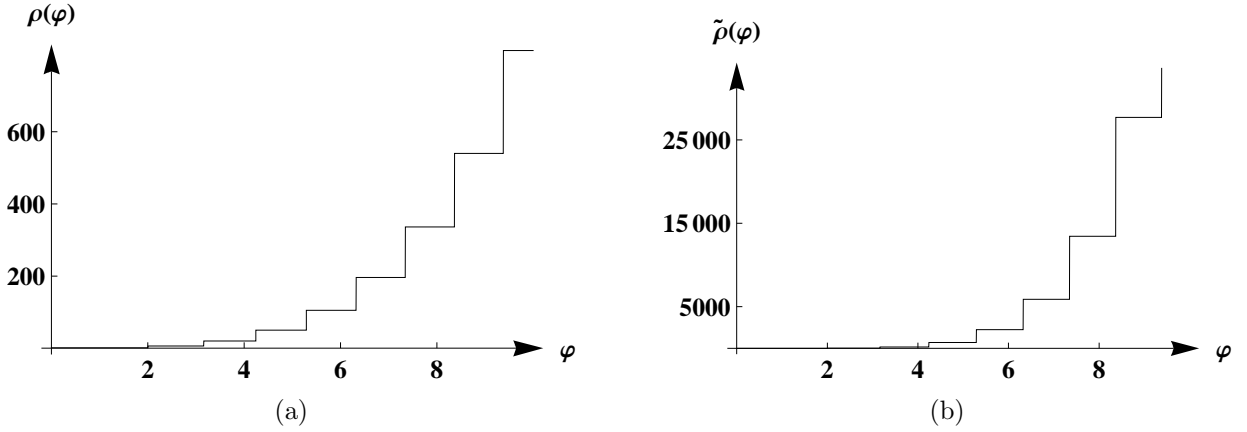


Abbildung 7.2: Die Spektralfunktionen $\rho(\varphi)$ und $\tilde{\rho}(\varphi)$ aus (7.36) für den optimierten Cutoff in vier Dimensionen.

Abbildung 7.2 haben wir die Funktionen ρ_4 und $\tilde{\rho}_4$ in vier Dimensionen in Abhängigkeit vom Feld φ dargestellt.

Es wäre mit Sicherheit einfacher, die Differentialgleichung (7.37) zu analysieren, wenn $\rho_d(\varphi)$ und $\tilde{\rho}_d(\varphi)$ glatte Funktionen wären. Daher wollen wir nun die ursprünglichen Funktionen ρ_d und $\tilde{\rho}_d$ durch glatte Funktionen annähern. Wir werden diese Näherungsfunktionen wieder mit ρ_d und $\tilde{\rho}_d$ bezeichnen. Die Art und Weise dieser Näherung ist aber nicht eindeutig. Die Wahl einer speziellen Näherung hat denselben konzeptuellen Status wie die Auswahl einer speziellen Profilfunktion $R^{(0)}$: wir legen fest, wie genau der Übergang vom Hochenergie- zum Niederenergie-Regime stattfinden soll. Wir entscheiden dadurch also, wie genau die Moden unterdrückt werden sollen, wenn ihre Eigenwerte den Schwellenwert passieren, der durch k gegeben ist. Meßbare Größen, die wir aus dem Renormierungsgruppen-Fluß ableiten können, dürfen jedoch weder von der Profilfunktion $R^{(0)}$ noch von der Näherungsprozedur für die Spektralfunktionen abhängen.

Wir können beispielsweise annehmen, daß die gesuchten glatten Funktionen ρ und $\tilde{\rho}$ Polynome in φ sind. In vier Dimensionen erhalten wir mit dem folgenden Ansatz eine Funktion ρ , die das korrekte asymptotische Verhalten für $\varphi \ll 1$ und für $\varphi \gg 1$, Gl. (7.44), zeigt:

$$\rho_4(\varphi) = \sum_{k=0}^4 a_k \varphi^k, \quad \text{mit } a_0 = 1, \quad a_4 = \frac{1}{12} \quad (7.46)$$

Einen ähnlichen Ansatz können wir für die Funktion $\tilde{\rho}_4$ verwenden. Eine guten Näherung

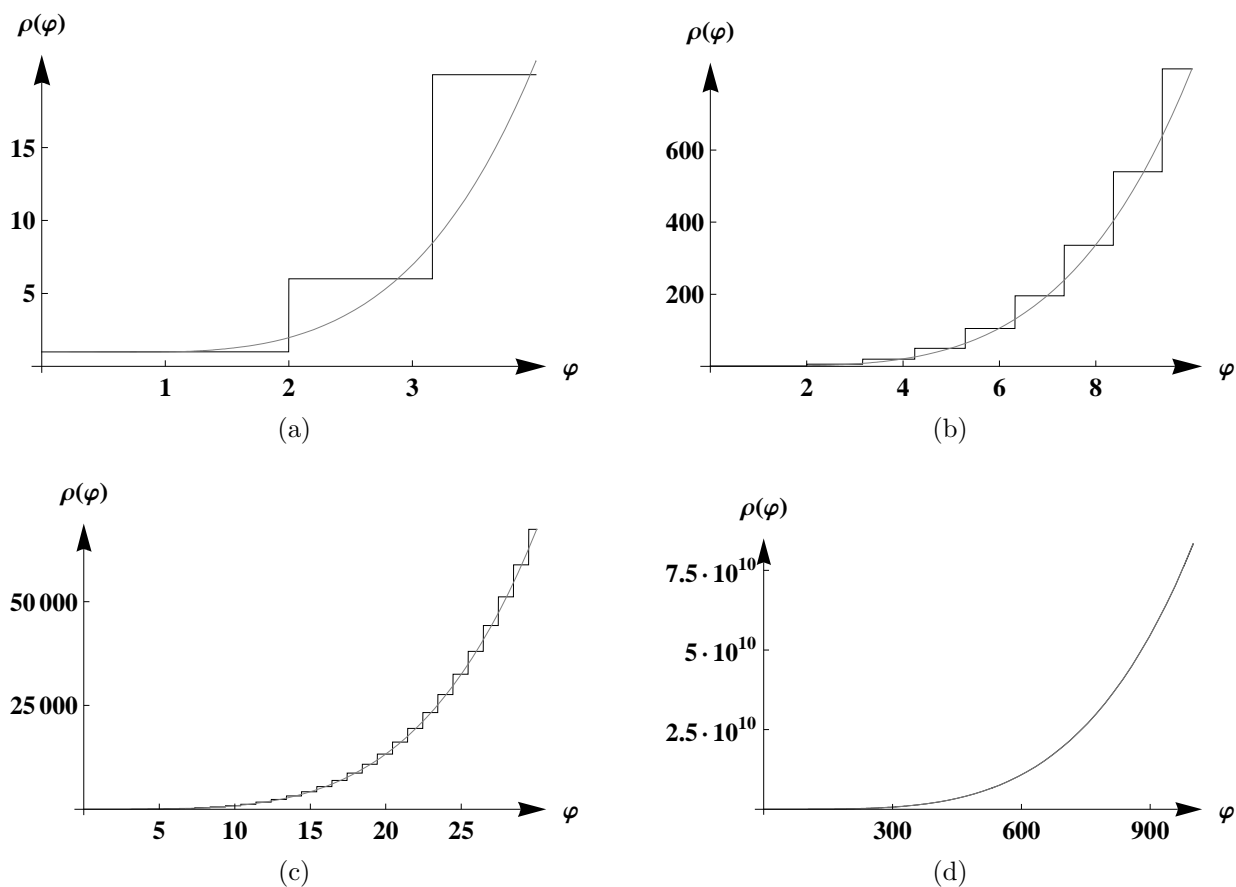


Abbildung 7.3: Diese Abbildung vergleicht die Polynomfunktion $\rho(\varphi)$ (7.46) mit den ursprünglichen diskreten Spektralfunktion $\rho(\varphi)$ in vier Dimensionen. Die Abbildungen (a) bis (d) stellen jeweils verschiedene Bereiche des Feldes φ dar. Schwarz zeigt die ursprüngliche Funktion, mit grau haben wir die glatte Näherung bezeichnet.

der Funktion $\rho_4(\varphi)$ aus Gl. (7.39) erhalten wir mit den Konstanten mit $a_1 \approx -0.0118142$, $a_2 \approx -0.0832909$ und $a_3 \approx -0.000333389$. In Abbildung 7.3 haben wir die Näherung (7.46) für verschiedene Bereiche in φ mit der ursprünglichen Funktion ρ_4 aus (7.39) verglichen. Bereits die folgenden, einfacheren Funktionen sind genügend gute Näherungen der ursprünglichen Funktionen ρ_4 und $\tilde{\rho}_4$:

$$\rho_4(\varphi) = 1 + \frac{1}{12} \varphi^4, \quad \tilde{\rho}_4(\varphi) = \frac{1}{18} \varphi^6. \quad (7.47)$$

Für die Funktion ρ_4 aus (7.47) haben wir die entsprechenden Vergleiche mit dem ursprünglichen ρ_4 in Abbildung 7.4 gezeigt. Ähnliches gilt jeweils für die Funktion $\tilde{\rho}_4$.

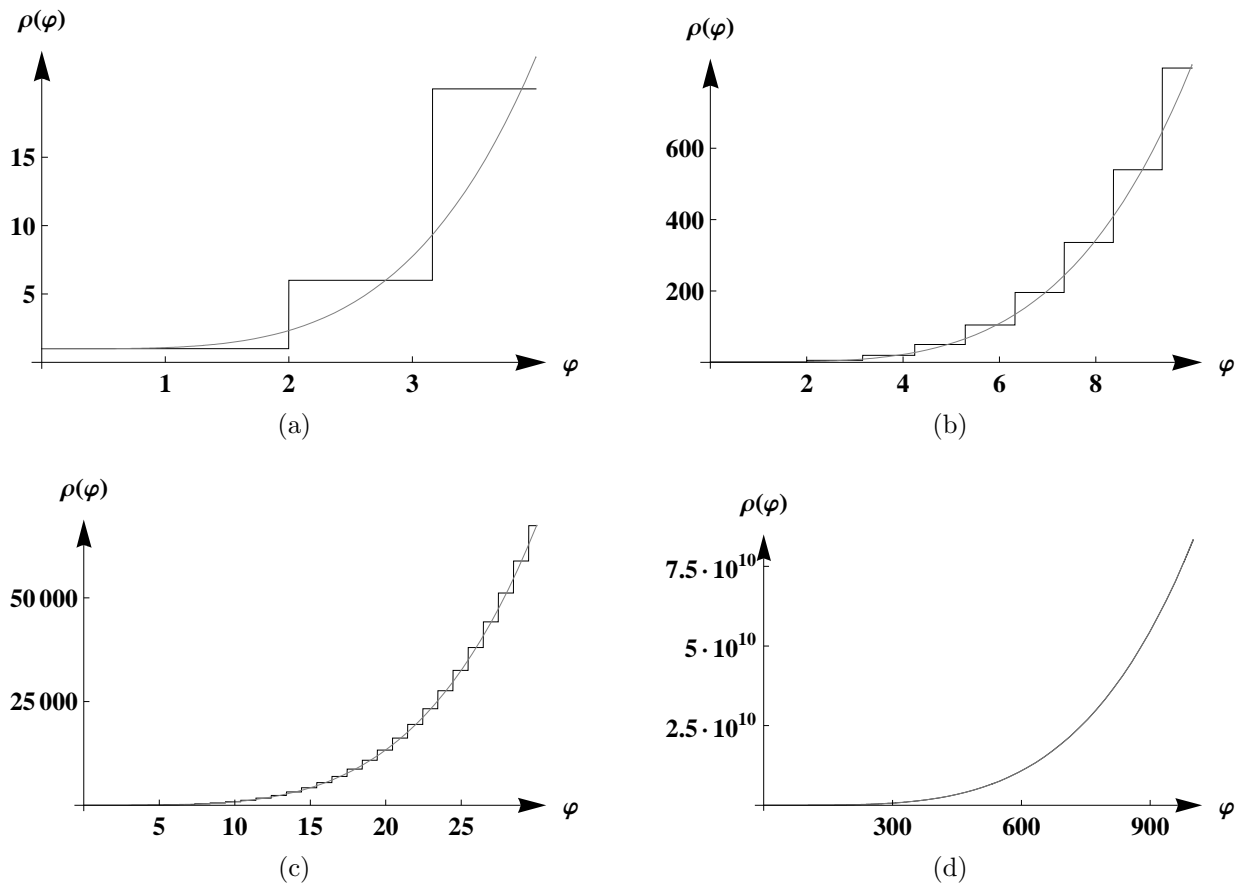


Abbildung 7.4: Diese Abbildung vergleicht die φ^4 -Funktion $\rho(\varphi)$ (7.47) mit den ursprünglichen diskreten Spektralfunktion $\rho(\varphi)$ in vier Dimensionen. Die Abbildungen (a) bis (d) stellen jeweils verschiedene Bereiche des Feldes φ dar. Schwarz zeigt die ursprüngliche Funktion, mit grau haben wir die Näherung bezeichnet.

Wenn wir speziell nach Fixpunkten des RG-Flusses suchen, benötigen wir die Flußgleichung in dimensionsloser Form. Daher führen wir die folgende Funktion ein:

$$F_k(\phi) \equiv k^{2-d} Y_k(k^{1/\nu} \phi) \quad (7.48)$$

Das neue Potential Y_k ist eine dimensionslose Funktion des dimensionslosen Arguments $\varphi \equiv k^{1/\nu} \phi$. Mit der Umkehrung von (7.48),

$$Y_k(\varphi) \equiv k^{d-2} F_k(\varphi/k^{1/\nu}) \quad (7.49)$$

und der Ableitung von Y_k nach der Skala k ,

$$\begin{aligned} k\partial_k Y_k(\varphi) &= (d-2)k^{d-2}F_k(\varphi/k^{1/\nu}) + k^{d-2}k\partial_k F_k(\varphi/k^{1/\nu}) - \frac{1}{\nu}\varphi k^{d-2}F'_k(\varphi/k^{1/\nu}), \end{aligned} \quad (7.50)$$

erhalten wir aus Gl. (7.37) die folgende Flußgleichung für das dimensionslose Potential Y_k :

$$\begin{aligned} k\partial_k Y_k(\varphi) + (2-d-\eta_N)Y_k(\varphi) + \frac{1}{\nu}\varphi Y'_k(\varphi) \\ = -\frac{g_k}{\zeta_d} \frac{\left\{1 - \frac{\eta_N}{2}\right\} \varphi^{2\nu} \rho_d(\varphi) + \frac{\eta_N}{2} \tilde{\rho}_d(\varphi)}{\varphi^{2\nu} + Y''_k(\varphi)}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Hier ist $g_k \equiv k^{d-2}G_k$ die dimensionslose Newton-Konstante. Wenn wir das ursprüngliche Potential U_k (siehe Gl. (1.2)) durch das dimensionslose Potential Y_k ausdrücken, so sehen wir, daß die folgende Relation gilt:

$$U_k(\phi) \equiv -\frac{1}{8\pi\xi(d)g_k} Y_k(k^{1/\nu}\phi). \quad (7.52)$$

7.3.3 Der flache Raum

Wenn die Mannigfaltigkeit, auf der die Metriken $\hat{g}_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ definiert sind, die Topologie des flachen Raumes besitzt, können wir wieder von Gl. (7.24) ausgehen. Jetzt ist die Referenzmetrik die Metrik des flachen Raums, $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Wir können in diesem Fall den Laplace-Beltrami-Operator $\hat{\square}$, der bezüglich der Referenzmetrik durch $\hat{\square} = \hat{g}^{-1/2} \partial_\mu \hat{g}^{1/2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu$ definiert ist, in der Basis ebener Wellen diagonalisieren. Die Spektralfunktionen ρ_d und $\tilde{\rho}_d$ aus (7.35) nehmen dann die folgenden Formen an:

$$\rho_d(\varphi) = \left(\frac{2}{d!} \varphi^{d\nu}\right) \left(\int d^d x\right) / \sigma_d \quad (7.53a)$$

$$\tilde{\rho}_d(\varphi) = \left(\frac{2d(d+1)}{(d+2)!} \varphi^{(d+2)\nu}\right) \left(\int d^d x\right) / \sigma_d. \quad (7.53b)$$

Das Spektrum des Operators $\hat{\square}$ ist kontinuierlich. Wir können den flachen Raum als eine Kugel mit unendlich großem Radius interpretieren. Somit können wir den flachen Raum auch als asymptotische Näherung einer Kugel für unendlich großen Radius ansehen.

Mit (7.53) bestimmen wir die folgende Flußgleichung für das dimensionsbehaftete Potential in der R^d -Topologie:

$$k\partial_k F_k(\phi) - \eta_N F_k(\phi) = -\frac{G_k}{\zeta_d} \left(\frac{2}{d!} - \frac{2(d+1)}{(d+2)!} \eta_N\right) \frac{k^{d+2} \phi^{(d+2)\nu}}{k^2 \phi^{2\nu} + F''_k(\phi)}. \quad (7.54)$$

Für das dimensionslose Potential Y_k erhalten wir die folgende vollständig explizite partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} k\partial_k Y_k(\varphi) + (2 - d - \eta_N) Y_k(\varphi) + \frac{1}{\nu} \varphi Y_k'(\varphi) \\ = -\frac{g_k}{\zeta_d} \left(\frac{2}{d!} - \frac{2(d+1)}{(d+2)!} \eta_N \right) \frac{\varphi^{(d+2)\nu}}{\varphi^{2\nu} + Y_k''(\varphi)}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Die Gleichungen in der R^d -Topologie, Gl. (7.54) und (7.55), stimmen exakt mit den entsprechenden Gleichungen für S^d , (7.37) und (7.51), überein, wenn wir dort die $\varphi \gg 1$ -Näherung aus (7.44a) und (7.44b) für *alle* Werte von φ verwenden².

7.3.4 Die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Näherung

In der lokalen Potentialnäherung bedeutet die CREH-Näherung, daß wir die allgemeine Form des dimensionslosen Potentials $Y_k(\varphi)$ wie folgt einschränken müssen:

$$Y_k^{\text{CREH}}(\varphi) = c_0 \frac{d(d-2)}{8} \varphi^2 - \xi(d) \lambda_k \varphi^{d\nu}. \quad (7.56)$$

In (7.56) gibt es nur einen einzigen skalenabhängigen Parameter, die kosmologische Konstante. Dies entspricht dem Ansatz in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung (siehe Abschnitt 4). Hier kann die Konstante c_0 die Werte Null oder Eins annehmen; diese stehen für die R^d - beziehungsweise die S^d -Topologie. In (7.56) ist $\lambda_k = \Lambda_k/k^2$ die dimensionslose kosmologische Konstante. Wir können ihre Renormierungsgruppen-Gleichung

$$k\partial_k \lambda_k = \beta_\lambda^{\text{CREH}}(g_k, \lambda_k) \quad (7.57)$$

ableiten, indem wir den CREH-Ansatz (7.56) entweder in Gl. (7.51) oder in Gl. (7.55) einsetzen und die Koeffizienten von $\varphi^{d\nu}$ vergleichen. Aus jeder der beiden Gleichungen erhalten wir die folgende β -Funktion für λ_k :

$$\begin{aligned} \beta_\lambda^{\text{CREH}}(g_k, \lambda_k) \\ = -(2 - \eta_N) \lambda_k + \frac{g_k}{\xi(d) \zeta_d} \left(\frac{2}{d!} - \frac{2(d+1)}{(d+2)!} \eta_N \right) \frac{1}{1 - d\nu(d\nu - 1) \xi(d) \lambda_k}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Mit den Abkürzungen

$$\nu = \frac{2}{d-2}, \quad \xi(d) = \frac{d-2}{4(d-1)} \quad \zeta_d = \frac{1}{8\pi \xi(d)} \sigma_d \quad \text{und} \quad \sigma_d = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)}$$

²Man beachte, daß der jeweils erste Faktor auf den rechten Seiten von (7.53a) und (7.53b) exakt mit den S^d -Resultaten (7.44a) und (7.44b) übereinstimmt, die für $\varphi \gg 1$ gültig sind. Der jeweils zweite Faktor $\int d^d x / \sigma_d$ bezieht sich auf die unterschiedlichen Normierungen für das Volumen in den beiden Fällen.

berechnen wir die beiden folgenden Relationen:

$$d\nu(d\nu - 1) = \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2}, \quad (7.59a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi(d)\zeta_d} \left(\frac{2}{d!} - \frac{2(d+1)}{(d+2)!} \eta_N \right) &= \frac{8\pi}{\sigma_d} \left(\frac{2}{d!} - \frac{2(d+1)}{(d+2)!} \eta_N \right) \\ &= 4\pi^{(1-d)/2} \Gamma((d+1)/2) \left(\frac{2}{\Gamma(d+1)} - \frac{2(d+1)}{\Gamma(d+3)} \eta_N \right). \end{aligned} \quad (7.59b)$$

Mit Hilfe der Verdopplungsformel für die Gamma-Funktion [63],

$$\Gamma(n) = (2\pi)^{-1/2} 2^{n-1/2} \Gamma(n/2) \Gamma((n+1)/2), \quad (7.60)$$

erhalten wir aus (7.59b) den folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{\xi(d)\zeta_d} \left(\frac{2}{d!} - \frac{2(d+1)}{(d+2)!} \eta_N \right) = 2(4\pi)^{-d/2+1} \left(\frac{1}{\Gamma(d/2+1)} - \frac{1}{2\Gamma(d/2+2)} \eta_N \right). \quad (7.61)$$

Setzen wir (7.59a) und (7.61) in Gl. (7.58) ein, so sehen wir, daß dies genau die β -Funktion (4.43) ist, die wir in Abschnitt 4.3 in der CREH-Trunkierung berechnet hatten.

7.4 Die Flußgleichung für die laufende Newton-Konstante

In diesem Abschnitt leiten wir aus der Renormierungsgruppen-Gleichung (7.24) die Flußgleichung für die laufende Newton-Konstante her:

$$k\partial_k g_k = \left[d - 2 + \eta_N(g_k, [Y_k]) \right] g_k. \quad (7.62)$$

Die anomale Dimension η_N ist eine *Funktion* von g_k und ein *Funktional* von Y_k . Wir berechnen den gewünschten Ausdruck für η_N , indem wir das Hintergrundfeld χ_B konstant halten und die funktionale Spur in Gl. (7.24) jeweils bis zur zweiten Ordnung in den Quantenfluktuationen \bar{f} und in den Ableitungen nach \bar{f} entwickeln (siehe Abschnitt 7.1).

7.4.1 Der flache Raum

Für $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ können wir die anomale Dimension η_N aus den Ergebnissen der Rechnung aus Anhang C ableiten. Wenn wir die anomale Dimension (C.36) durch die dimen-

sionsbehafteten Größen G_k und $F_k(\phi)$ ausdrücken, so nimmt η_N die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \eta_N = & -32\pi v_d \xi(d) G_k \frac{F_k'''(\phi_1)^2}{k^{6-d} \phi_1^{(6-d)\nu}} \left[\frac{F_k''(\phi_1)}{k^2 \phi_1^{2\nu}} \right]^{(d-4)/2} \widehat{\Sigma}_d \left(\frac{F_k''(\phi_1)}{k^2 \phi_1^{2\nu}} \right) \\ & \times \left[1 + 32\pi v_d \xi(d) G_k \frac{F_k'''(\phi_1)^2}{k^{6-d} \phi_1^{(6-d)\nu}} \widetilde{\Sigma}_d \left(\frac{F_k''(\phi_1)}{k^2 \phi_1^{2\nu}} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Hier sind $\widehat{\Sigma}_d$ und $\widetilde{\Sigma}_d$ die Schrankenfunktionen, die wir in (C.34) und (C.35) definiert haben. Sie hängen von der Profilfunktion $R^{(0)}$ ab. Für den optimierten Cutoff (7.31) beispielsweise sind dies die folgenden Funktionen:

$$\widehat{\Sigma}_d(w) = \frac{1}{d} w^{(4-d)/2} \frac{1}{(1+w)^4}, \quad \widetilde{\Sigma}_d(w) = 0. \quad (7.64)$$

In (7.63) haben wir Ableitungen von F_k bei dem Wert ϕ_1 ausgewertet, den wir *festhalten*. Dies ist genau der Wert von χ_B , um den wir die funktionale Spur in der Flußgleichung (7.24) entwickelt haben. Die Wahl $\chi_B \equiv \phi_1$ in η_N ist beliebig, da die Trunkierung, die wir zur Herleitung der anomalen Dimension in Anhang C benutzt haben, nur eine *feldunabhängige* Wellenfunktions-Renormierung $Z_{Nk} \propto 1/G_k$ zuläßt (siehe Anhang C). In gewöhnlichen skalaren Rechnungen identifiziert man ϕ_1 üblicherweise mit dem Minimum des Potentials [34]. Man beachte, daß die anomale Dimension nun aber eine Funktion von F_k und keine Funktion des Feldes ist, da wir ϕ_1 festhalten.

Mit der optimierten Profilfunktion (7.31) und den Schrankenfunktionen (7.64) nimmt die anomale Dimension die folgende Form an:

$$\eta_N = -\frac{32\pi v_d \xi(d)}{d} G_k \frac{F_k'''(\phi_1)^2}{k^{6-d} \phi_1^{(6-d)\nu}} \left[1 + \frac{F_k''(\phi_1)}{k^2 \phi_1^{2\nu}} \right]^{-4} \quad (7.65)$$

Wir sehen in Gl. (7.65), daß η_N für jede Wahl von ϕ_1 und für jede Potentialfunktion $F_k(\cdot)$ *negativ* ist, wenn $G_k > 0$. Das bedeutet, daß die Gravitation vom *Antiscreening*-Typ ist: Wenn k größer wird, wird die Newton-Konstante gemäß $k\partial_k G_k = \eta_N G_k$ geringer (siehe Abschnitt 5.1).

Wenn wir die anomale Dimension (7.65) durch die dimensionslosen Größen g_k und $Y_k(\cdot)$ ausdrücken, nimmt η_N die folgende Form an:

$$\eta_N(g_k, [Y_k]) = -\frac{32\pi v_d \xi(d)}{d} g_k Y_k'''(\varphi_1)^2 \frac{\varphi_1^{(d+2)\nu}}{[\varphi_1^{2\nu} + Y_k''(\varphi_1)]^4} \quad (7.66)$$

Hier ist φ_1 die dimensionslose Entsprechung des Feldes ϕ_1 , $\varphi_1 \equiv k^{1/\nu} \phi_1$.

7.4.2 Die konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Näherung

Wenn wir CREH-Form des laufenden dimensionslosen Potentials in der R^d -Topologie,

$$Y_k^{\text{CREH}}(\varphi) = -\xi(d) \lambda_k \varphi^{d\nu},$$

in Gl. (7.66) einsetzen, so erhalten wir

$$\eta_N^{(\text{kin})}(g_k, \lambda_k) = -\frac{2^{11} \pi v_d \xi(d)^3 d(d+2)^2}{(d-2)^6} g_k \lambda_k^2 \left[1 - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right]^{-4}. \quad (7.67)$$

Dies ist exakt die anomale Dimension der CREH-Trunkierung, die wir in den Abschnitten 4.2 und 4.3 hergeleitet haben (siehe die Gleichungen (4.31) beziehungsweise (4.41)). (Dort haben wir das obige η_N^{CREH} mit $\eta_N^{(\text{kin})}$ bezeichnet.) Man beachte, daß (7.67) unabhängig vom Entwicklungspunkt φ_1 ist: genau wenn das Potential Y_k proportional zu φ^4 ist, wird φ_1 aus der Formel für die anomale Dimension eliminiert.

Wenn wir in den nächsten Kapiteln die gekoppelten Flußgleichungen lösen, nehmen wir den Entwicklungspunkt φ_1 im Unendlichen an. Wir werden sehen, daß diese Annahme sinnvoll ist, da die relevanten Lösungen $Y_k(\varphi)$ sich wie $\varphi^{d\nu}$ für unendlich große Werte des Entwicklungspunktes φ_1 verhalten. Für solche relevanten Potentiale ist die anomale Dimension durch die CREH-Formel (7.67) gegeben. Dann hängt η_N nicht vom genauen Wert für φ_1 ab, solange dieser nur genügend groß ist. Andere Entwicklungspunkte φ_1 sind denkbar, beispielsweise Minima des Potentials. Es stellt sich jedoch heraus, daß Y_k im besonders interessanten UV-Fixpunktregime dann keinerlei stationäre Punkte besitzt.

7.4.3 Die Sphäre

Auch in der S^d -Topologie nehmen wir φ_1 im Unendlichen an. Die entsprechende Sphäre hat dann einen sehr großen Radius und wir können erwarten, daß die anomale Dimension durch das Ergebnis der R^d -Topologie gut genähert wird. Daher können wir die CREH-Form von η_N , Gl. (7.67), auch für die Sphäre verwenden. Eine präzisere Betrachtung inklusive Berechnung von η_N auf einer Sphäre mit endlichem Radius geht über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

7.A Zusammenfassung der Ergebnisse für vier Dimensionen

In vier Dimensionen nimmt die Flußgleichung für das dimensionsbehaftete laufende Potential $F_k(\cdot)$ auf der Sphäre, Gl. (7.37), mit Hilfe des optimierten Cutoffs (4.35) die folgende Form an:

$$k\partial_k F_k(\phi) = \eta_N F_k(\phi) - \frac{G_k}{2\pi} \frac{(1 - \eta_N/2) k^2 \phi^2 \rho(k\phi) + \frac{1}{2} \eta_N \tilde{\rho}(k\phi)}{k^2 \phi^2 + F_k''(\phi)}. \quad (7.68)$$

Für die in (7.36) definierten Spektralfunktion ρ_4 und $\tilde{\rho}_4$ existieren auf der vierdimensionalen Sphäre die folgenden Grenzfälle:

$$\rho_4(\varphi) \approx \begin{cases} \frac{1}{12} \varphi^4 & \text{for } \varphi \gg 1 \\ 1 & \text{for } \varphi \ll 1 \end{cases}, \quad \tilde{\rho}_4(\varphi) \approx \begin{cases} \frac{1}{18} \varphi^6 & \text{for } \varphi \gg 1 \\ 0 & \text{for } \varphi \ll 1 \end{cases}. \quad (7.69)$$

Für das dimensionsbehaftete laufende Potential F_k und das dimensionslose laufende Potential Y_k gelten in vier Dimensionen die folgenden Relationen:

$$Y_k(\varphi) = k^2 F_k(\varphi/k), \quad F_k(\phi) = k^{-2} Y_k(k\phi) \quad (7.70)$$

Aus (7.68) und (7.70) erhalten wir die folgende Flußgleichung für das dimensionslose Potential:

$$k\partial_k Y_k(\varphi) = (2 + \eta_N) Y_k(\varphi) - \varphi Y_k'(\varphi) - \frac{g_k}{2\pi} \frac{(1 - \eta_N/2) \varphi^2 \rho(\varphi) + \frac{1}{2} \eta_N \tilde{\rho}(\varphi)}{\varphi^2 + Y_k''(\varphi)}. \quad (7.71)$$

Die partielle Differentialgleichung (7.71) ist mit der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung für die dimensionslose Newton-Konstante gekoppelt:

$$k\partial_k g_k = \left[2 + \eta_N(g_k, [Y_k]) \right] g_k. \quad (7.72)$$

Auf dem flachen vierdimensionalen Raum ist die anomale Dimension η_N durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\eta_N = -\frac{G_k}{6\pi} \left[\frac{F_k'''(\phi_1)}{k\phi_1} \right]^2 \widehat{\Sigma}_4 \left(\frac{F_k''(\phi_1)}{k^2 \phi_1^2} \right) \left[1 + \frac{G_k}{12\pi} \left[\frac{F_k'''(\phi_1)}{k\phi_1} \right]^2 \widetilde{\Sigma}_4 \left(\frac{F_k''(\phi_1)}{k^2 \phi_1^2} \right) \right]^{-1}. \quad (7.73)$$

Mit dem optimierten Cutoff nimmt (7.73) die folgende Form an:

$$\eta_N = -\frac{G_k}{24\pi} \left[\frac{F_k'''(\phi_1)}{k\phi_1} \right]^2 \left[1 + \frac{F_k''(\phi_1)}{k^2 \phi_1^2} \right]^{-4}. \quad (7.74)$$

Ausgedrückt durch die dimensionslosen Größen g_k und $Y_k(\varphi)$ erhalten wir für die anomale Dimension:

$$\eta_N(g_k, [Y_k]) = -\frac{g_k}{24\pi} \frac{\left[\varphi_1^3 Y_k'''(\varphi_1)\right]^2}{\left[\varphi_1^2 + Y_k''(\varphi_1)\right]^4}. \quad (7.75)$$

Wenn wir die CREH-Form des dimensionslosen laufenden Potentials auf dem vierdimensionalen flachen Raum,

$$Y_k^{\text{CREH}}(\varphi) = -\frac{1}{6} \lambda_k \varphi^4, \quad (7.76)$$

in Gl. (7.75) einsetzen, so erhalten wir die anomale Dimension in der CREH-Näherung der lokalen Potentialnäherung in vier Dimensionen:

$$\eta_N^{\text{CREH}}(g_k, \lambda_k) = -\frac{2}{3\pi} \frac{g_k \lambda_k^2}{(1 - 2 \lambda_k)^4}. \quad (7.77)$$

Dies ist exakt dieselbe Gleichung, die wir in den Abschnitten 4.2 bis 4.4 hergeleitet haben. (Siehe dazu die Gleichungen (4.52) beziehungsweise (4.53).)

ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DES RENORMIERUNGSGRUPPEN-FLUSSES IN DER LOKALEN POTENTIALNÄHERUNG

Der Renormierungsgruppen-Fluß auf dem unendlich-dimensionalen Theorienraum der lokalen Potentialnäherung mit den Koordinaten $(g, Y(\cdot))$ wird durch die beiden folgenden gekoppelten Gleichungen beschrieben:

$$k\partial_k Y_k(\varphi) = \beta_Y(g_k, Y_k(\varphi)), \quad (8.1a)$$

$$k\partial_k g_k = \beta_g(g_k, [Y_k]) = \left[d - 2 + \eta_N(g_k, [Y_k]) \right] g_k. \quad (8.1b)$$

Für die Sphäre finden wir die β -Funktion für das dimensionslose laufende Potential in Gl. (7.51); auf dem flachen Raum ist β_Y durch (7.55) gegeben. Wir verwenden die anomale Dimension η_N in der Form (7.66); die funktionale Abhängigkeit vom Potential ist hier durch Ableitungen von Y_k nach dem Feld gegeben, die an einem festen Entwicklungspunkt φ_1 ausgewertet sind. Diesen Punkt wollen wir im Moment aber nicht genauer festlegen.

Alternativ können wir die Flußgleichungen auch durch die dimensionsbehafteten Größen G_k und $F_k(\cdot)$ ausdrücken. Die partielle Differentialgleichung für das dimensionsbehaftete laufende Potential F_k mit

$$F_k(\phi) \equiv k^{2-d} Y_k(k^{1/\nu} \phi)$$

ist für die S^d -Topologie in Gl. (7.37) angegeben; für die R^d -Topologie finden wir β_F in Gl. (7.54). In jeder Topologie ist das Skalenverhalten der dimensionsbehafteten Newton-Konstanten G_k durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$k\partial_k G_k = \eta_N G_k.$$

Die anomale Dimension η_N besitzt die in Gl. (7.65) angegebene Form.

In diesem Kapitel wollen wir verschiedene allgemeine Eigenschaften der gekoppelten Renormierungsgruppen-Gleichungen (8.1) diskutieren.

8.1 Das asymptotische Verhalten für $\varphi \rightarrow \infty$

Wenn wir die CREH-Näherung des dimensionslosen Potentials (siehe Abschnitt 7.3.4),

$$Y_k^{\text{CREH}}(\varphi) = c_0 \frac{d(d-2)}{8} \varphi^2 - \xi(d) \lambda_k \varphi^{d\nu}, \quad (8.2)$$

von der Funktion $Y_k(\varphi)$ abspalten,

$$Y_k(\varphi) \equiv \Delta Y_k(\varphi) + Y_k^{\text{CREH}}(\varphi). \quad (8.3)$$

können wir mit Gl. (7.57) eine Flußgleichung für den „Korrekturterm“ $\Delta Y_k(\varphi)$ ableiten. In der S^d -Topologie erhalten wir somit die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} k\partial_k \Delta Y_k(\varphi) + (2 - d - \eta_N) \Delta Y_k(\varphi) + \frac{1}{\nu} \varphi \Delta Y_k'(\varphi) \\ = \eta_N \frac{d(d-2)}{8} \varphi^2 - \frac{g_k}{\zeta_d} \mathbf{B}_k(\varphi). \end{aligned} \quad (8.4a)$$

In (8.4a) haben wir die Funktion $\mathbf{B}_k(\varphi)$ eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k(\varphi) \equiv \left[\rho_d(\varphi) - \frac{\eta_N}{2} \left(\rho_d(\varphi) - \frac{\tilde{\rho}_d(\varphi)}{\varphi^{2\nu}} \right) \right] \left(1 - d\nu(d\nu - 1) \xi(d) \lambda_k + \frac{\frac{d(d-2)}{4} + \Delta Y_k''(\varphi)}{\varphi^{2\nu}} \right)^{-1} \\ - \left[\frac{2}{d!} \varphi^{d\nu} - \frac{\eta_N}{2} \frac{4(d+1)}{(d+2)!} \varphi^{d\nu} \right] \left(1 - d\nu(d\nu - 1) \xi(d) \lambda_k \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.4b)$$

Wegen der Inhomogenität in (8.4a) können wir nicht einfach $\Delta Y_k = 0$ setzen. Diese Inhomogenität kontrolliert die Monome im Potential $Y_k(\varphi)$, die während seines Renormierungsgruppen-Laufens erzeugt werden. (Dieses Laufen ist durch die Flußgleichung (7.51) gegeben.) Unter bestimmten Bedingungen vereinfacht sich die Inhomogenität in (8.4a)

allerdings im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$. Aus den Gleichungen (7.44) wissen wir, daß sich die Spektralfunktionen $\rho_d(\varphi)$ und $\tilde{\rho}_d(\varphi)$ im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ wie folgt verhalten:

$$\rho_d \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} \frac{2}{d!} \varphi^{d\nu}, \quad \left(\rho_d - \frac{\tilde{\rho}_d}{\varphi^{2\nu}} \right) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} \frac{4(d+1)}{(d+2)!} \varphi^{d\nu}. \quad (8.5)$$

Die Funktion $\mathbf{B}_k(\varphi)$ *verschwindet im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ genau dann, wenn in diesem Grenzfall die folgende Bedingung für die zweite Ableitung des Potentials nach dem Feld gilt:*

$$\frac{\Delta Y_k''(\varphi)}{\varphi^{2\nu}} \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} 0. \quad (8.6)$$

Die Bedingung (8.6) bedeutet, daß das asymptotische Wachstum von $\Delta Y_k(\varphi)$ schwächer ist als proportional zu $\varphi^{d\nu}$. Nehmen wir einmal an, daß das Potential $\Delta Y_k(\varphi)$ bei irgendeinem Startwert von k viel langsamer als $\varphi^{d\nu}$ anwächst. Dann ist die rechte Seite von (8.4a) für große Werte von φ proportional zu φ^2 und es werden keine Monome in ΔY_k erzeugt, die proportional zu $\varphi^{d\nu}$ oder stärker oder schneller anwachsen. Dies bedeutet: *Wenn $\Delta Y_k(\varphi)$ zu Beginn keine Terme beinhaltet, die wie $\varphi^{d\nu}$ oder schneller anwachsen, dann werden solche Terme auch nicht durch den Renormierungsgruppen-Fluß erzeugt.*

Auch wenn wir die Gleichungen (8.4) für die S^d -Topologie aufgeschrieben haben, ist es offensichtlich, daß wir unsere Argumente problemlos auf die R^d -Topologie übertragen können.

Wenn $\Delta Y_k(\varphi)$ also viel langsamer als proportional zu $\varphi^{d\nu}$ anwächst, dann können wir für jedes k das asymptotische Verhalten des vollen Potentials $Y_k(\varphi)$ für große φ immer durch das CREH-Potential angeben. Die Asymptote besteht sogar nur aus dem Term proportional zur kosmologischen Konstanten, da der Term proportional zu φ^2 subdominant für große φ ist:

$$Y_k(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} -\xi(d) \lambda_k \varphi^{d\nu}. \quad (8.7)$$

8.2 Die Struktur des Anfangswertproblems

Die Wahl einer geeigneten Trunkierung bedeutet, daß wir einen passenden Theorienraum wählen müssen, in dem das Renormierungsgruppen-Laufen des Potentials Y_k stattfindet. Insbesondere müssen wir Randbedingungen für Y_k definieren. Unsere Diskussion über das asymptotische Verhalten von Y_k im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ in Abschnitt 8.1 zeigt, daß

wir die Lösbarkeit der Differentialgleichung (8.1a) keinesfalls einschränken, wenn wir den Theorienraum zum Teil durch die Forderung zu definieren, daß $Y_k(\varphi)$ nicht schneller als proportional zu $\varphi^{d\nu}$ im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ anwachsen soll. Wir wollen den Theorienraum im folgenden in dieser Weise einschränken. Eine weitere Motivation für diese Einschränkung finden wir in Kapitel 9, in dem wir die Fixpunkte der lokalen Potentialnäherung diskutieren werden. Wir sehen, daß ein Nicht-Gauß'scher RG-Fixpunkt existiert, durch den die Quanten-Einstein-Gravitation in der LPA asymptotisch sicher wird. Alle „physikalischen“ Trajektorien (solche, die den NGFP für $k \rightarrow \infty$ treffen) wachsen nicht stärker als proportional zu $\varphi^{d\nu}$ an; sie liegen also alle innerhalb des eingeschränkten Funktionenraumes.

Wie wir bereits in Abschnitt 7.4 erwähnt haben, motiviert das asymptotische Verhalten (8.7) einen sehr großen Entwicklungspunkt φ_1 in der Berechnung der anomalen Dimension. Wir wollen die Wahl $\varphi \rightarrow \infty$ treffen. Der Vorteil dieser Wahl ist, daß η_N nun kein kompliziertes Funktional von Y_k mehr ist (siehe Gl. (7.66)); wir können jetzt die bedeutend einfachere CREH-Form (7.67) der anomalen Dimension verwenden. Diese hängt nur von der dimensionslosen Newton-Konstante g_k und der dimensionslosen kosmologischen Konstanten λ_k ab. In Gl. (8.7) bestimmt λ_k das RG-Laufen der Asymptote von Y_k für große Werte für φ .

Nachdem wir nun den Theorienraum ohne Beschränkung der Lösbarkeit eingeschränkt und den Entwicklungspunkt φ_1 festgelegt haben, sieht unsere Lösungsstrategie des Anfangswertproblems für das System (8.1a,b) wie folgt aus:

- (i) Wir halten die Werte von Newton-Konstante, $g_{k_{\text{intl}}}$, und Potential, $Y_{k_{\text{intl}}}(\varphi)$, bei der Startskala k_{intl} fest.
- (ii) Aus dem asymptotischen Verhalten des Startpotentials im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ extrahieren wir die folgende Zahl:

$$\lambda_{k_{\text{intl}}} \equiv -\frac{1}{\xi(d)} \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{Y_{k_{\text{intl}}}(\varphi)}{\varphi^{d\nu}}. \quad (8.8)$$

- (iii) Mit den Anfangsbedingungen ($g_{k_{\text{intl}}}^{\text{CREH}} = g_{k_{\text{intl}}}$, $\lambda_{k_{\text{intl}}}^{\text{CREH}} = \lambda_{k_{\text{intl}}}$) lösen wir die beiden gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen der CREH-Trunkierung,

$$\begin{aligned} k\partial_k g_k^{\text{CREH}} &= \left[d - 2 + \eta_N^{\text{CREH}}(g_k^{\text{CREH}}, \lambda_k^{\text{CREH}}) \right] g_k^{\text{CREH}}, \\ k\partial_k \lambda_k^{\text{CREH}} &= \beta_\lambda^{\text{CREH}}(g_k^{\text{CREH}}, \lambda_k^{\text{CREH}}). \end{aligned} \quad (8.9)$$

In (8.9) sind η_N^{CREH} und $\beta_\lambda^{\text{CREH}}$ durch die Gleichungen (7.67) beziehungsweise (7.58) gegeben.

- (iv) Wir verwenden die Lösung von (8.9), um die anomale Dimension als die folgende explizite Funktion von k auszudrücken:

$$\eta_N(k) \equiv \eta_N^{\text{CREH}}(g_k^{\text{CREH}}, \lambda_k^{\text{CREH}}). \quad (8.10)$$

- (v) Wir setzen nun $g_k = g_k^{\text{CREH}}$ aus (8.9) sowie die anomale Dimension $\eta_N \equiv \eta_N(k)$ aus (8.10) in die partielle Differentialgleichung für Y_k , Gl. (7.51), ein. Diese lösen wir dann für die Anfangsbedingungen $g_{k_{\text{intl}}}$ und $Y_{k_{\text{intl}}}(\varphi)$.

Man beachte, daß dieses Vorgehen die Gleichungen für g_k und Y_k entkoppelt: in Schritt (v) müssen wir dann nur eine Gleichung für Y_k lösen. Diese kann trotzdem komplizierte skalenabhängige Koeffizientenfunktionen beinhalten.

8.3 Die Stabilität der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Näherung

Die Struktur des Anfangswertproblems in der lokalen Potentialnäherung der konform-reduzierten Gravitation (siehe Abschnitt 8.2) wirft ein interessantes Licht auf die deutlich einfachere CREH-Trunkierung. In beiden Trunkierungen sind nur die einfachsten Ableitungsterme proportional zu $(\partial\varphi)^2$ enthalten. Die LPA läßt ein allgemeines laufendes Potential $Y_k(\varphi)$ zu, während die CREH-Trunkierung nur das Monom proportional zu φ^{d_V} beinhaltet. In diesem Sinne können wir die LPA als eine Verallgemeinerung der CREH-Näherung ansehen.

Wenn wir einen Trunkierungsansatz dadurch verallgemeinern, daß wir weitere Feldmonome hinzufügen, werden Trajektorien in der neuen (höher dimensional) Trunkierung im allgemeinen nicht mit den Trajektorien in der alten Trunkierung übereinstimmen, wenn man jene auf den niedriger dimensional Theorienraum projiziert. Für glaubwürdige Trunkierungen könnte man zumindest näherungsweise Übereinstimmungen erreichen.

Die Diskussion des Anfangswertproblems in Abschnitt 8.2 zeigt, daß die lokale Potentialnäherung des konformen Faktors, als Verallgemeinerung der CREH-Näherung gesehen, eine bemerkenswerte Ausnahme ist: Die Projektion von RG-Trajektorien vom unendlich-dimensionalen $(g, Y(\cdot))$ -Raum auf den zweidimensionalen (g, λ) -Raum stimmt exakt mit

den Trajektorien überein, die wir in der CREH-Trunkierung aus den dort abgeleiteten β -Funktionen β_g und β_λ berechnet haben. Die Verallgemeinerung des Raums der Potentialfunktionen von der eindimensionalen Linie $\{\lambda \varphi^{d\nu}\}$ auf den unendlich-dimensionalen Raum $\{Y(\cdot)\}$ hat keinen Einfluß auf das Renormierungsgruppen-Laufen von g_k und λ_k . Das zeigt, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung besonders stabil gegenüber dem Einbau von weiteren Invarianten ist.

Diese Stabilitätseigenschaft hat unter anderem die folgende Auswirkung. Bekannt ist [14], daß einige Trajektorien der Einstein-Hilbert-Trunkierung, die des Typs IIIa, bei einer endlichen Skala k_{term} enden. Dasselbe gilt für die entsprechenden Trajektorien in der CREH-Trunkierung (siehe Abschnitt 4.3). Da die Trajektorien $(g_k, Y_k(\cdot))$ in der LPA Verallgemeinerungen der Trajektorien (g_k, λ_k) in der CREH-Trunkierung im obigen Sinne sind, impliziert der Zusammenbruch einer CREH-Trajektorie bei irgendeinem k_{term} , daß die entsprechende LPA-Trajektorie bei derselben Skala $k = k_{\text{term}}$ endet. Die Verallgemeinerung des Monoms proportional zu $\varphi^{d\nu}$ auf eine beliebige Funktion $Y_k(\varphi)$ scheint nicht hilfreich zu sein, den Gültigkeitsbereich der Trunkierung in die Richtung $k \rightarrow 0$ zu erweitern. Dieses Resultat ist in gewisser Weise überraschend, da im Falle von skalaren Materiefeld-Theorien die Trajektorien, die in einer polynomialen Trunkierung bei einer endlichen Skala abbrechen (die in der gebrochenen Phase), typischerweise $k = 0$ erreichen können, wenn die LPA verwendet wird. Dies zeigt einen weiteren Unterschied zwischen dem konformen Faktor und einem gewöhnlichen Skalarfeld.

8.4 Das Verhalten für $\varphi \rightarrow 0$

Als nächstes wollen wir die partielle Differentialgleichung für $Y_k(\varphi)$, Gl. (7.51), im Grenzfall $\varphi \rightarrow 0$ untersuchen. Wir betrachten zunächst den inhomogenen Term der Flußgleichung, den Term auf der rechten Seite von Gl. (7.51). Wir nehmen an, daß die Funktion $\tilde{\rho}(\varphi)$ zumindest proportional zu φ^2 für kleine φ verschwindet. Daher gilt für Dimensionen kleiner als vier der folgende Ausdruck im Zähler des inhomogenen Terms:

$$\left(1 - \frac{1}{2} \eta_N\right) \varphi^{2\nu} \rho(\varphi) + \frac{1}{2} \eta_N \tilde{\rho}(\varphi) = \mathcal{O}(\varphi^{2\nu}). \quad (8.11)$$

In höheren Dimensionen ist der Zähler proportional zu φ^2 . In Abbildung 8.1a haben wir die Funktion $2\nu(d)$ für verschiedene Dimensionen dargestellt. Man erkennt, daß sie in vier oder mehr Dimensionen stets kleiner oder gleich Zwei ist. Um den Nenner $\varphi^{2\nu} + Y_k''(\varphi)$

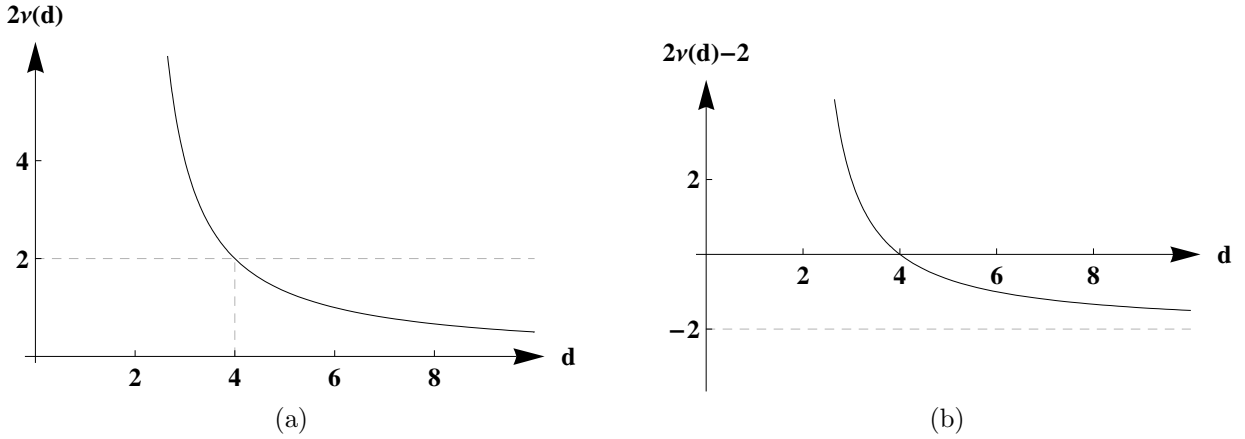


Abbildung 8.1: Der Exponent $\nu(d) = 2/(d-2)$. In Abbildung (a) ist die Funktion 2ν dargestellt; Abbildung (b) zeigt die Funktion $2\nu - 2$.

abzuschätzen, spalten wir das Potential Y_k wie folgt auf:

$$Y_k(\varphi) = Y_k^{\text{reg}}(\varphi) + Y_k^{\text{sing}}(\varphi). \quad (8.12a)$$

Der „reguläre“ Teil Y_k^{reg} ist durch die folgende Bedingung definiert:

$$(Y_k^{\text{reg}})''(\varphi) < \infty \quad \text{für } \varphi \rightarrow 0. \quad (8.12b)$$

Der „singuläre“ Teil Y_k^{sing} ist dadurch definiert, daß seine zweite Ableitung nach φ im Grenzfall $\varphi \rightarrow 0$ anwächst:

$$(Y_k^{\text{sing}})''(\varphi) \rightarrow \infty \quad \text{für } \varphi \rightarrow 0. \quad (8.12c)$$

Nehmen wir einmal an, daß der singuläre Teil sich wie $(Y_k^{\text{sing}})''(\varphi) = a/\varphi^\mu$ verhält, mit den Konstanten $a \neq 0$ und $\mu > 0$. Da $(Y_k^{\text{reg}})''$ nach (8.12b) von der Ordnung φ^0 ist oder sogar verschwindet, besitzt der inhomogene Term in Gl. (7.51) für Dimensionen kleiner als vier die folgende Struktur:

$$\frac{\mathcal{O}(\varphi^{2\nu})}{\varphi^{2\nu} + \mathcal{O}(\varphi^0) + a\varphi^{-\mu}} = \frac{\mathcal{O}(\varphi^{2\nu+\mu})}{\varphi^\mu [\varphi^{2\nu} + \mathcal{O}(\varphi^0)] + a} = \mathcal{O}(\varphi^{2\nu+\mu}). \quad (8.13a)$$

Die Inhomogenität in der Flußgleichung für Y_k verschwindet also proportional zu $\varphi^{2\nu+\mu}$, wenn φ gegen Null geht. Wenn wir diese Inhomogenität für kleine φ entwickeln, so sehen wir, daß sie nur Terme enthält, deren zweite Ableitung zumindest wie $\varphi^{2\nu-2+\mu}$ für $\varphi \rightarrow 0$

verschwindet; sie enthält also nur „reguläre“ Terme im Sinne von (8.12b). In Abbildung 8.1b haben wir die Funktion $2\nu(d) - 2$ dargestellt. In vier oder weniger Dimensionen nimmt sie nur Werte an, die größer oder gleich Null sind.

In vier oder mehr Dimensionen besitzt der inhomogenen Term in Gl. (7.51) die folgende Struktur:

$$\frac{\mathcal{O}(\varphi^2)}{\varphi^{2\nu} + \mathcal{O}(\varphi^0) + a\varphi^{-\mu}} = \mathcal{O}(\varphi^{2+\mu}). \quad (8.13b)$$

Die Inhomogenität in (7.51) verschwindet proportional zu $\varphi^{2+\mu}$, also im Grenzfall $\varphi \rightarrow 0$ mit einer Potenz, die stets größer als Zwei ist. Da μ größer als Null ist, finden wir in einer Entwicklung von Y_k für kleine φ nur „reguläre“ Terme.

Wie sehen also, daß die Inhomogenität in der Flußgleichung (7.51) für $Y_k(\varphi)$ in jeder beliebigen Dimension nur Terme beinhaltet, die „regulär“ im Sinne von (8.12b) sind. Es existieren keine Terme, die mit solchen in Y_k^{sing} übereinstimmen würden, wenn man Y_k in der Form $Y_k^{\text{reg}} + Y_k^{\text{sing}}$ in die Flußgleichung (7.51) einsetzte. Als Resultat daraus besitzt der „singuläre“ Teil des Potentials keinen Quellterm; seine Flußgleichung ist homogen, was dazu führt, daß *keine „singulären“ Terme generiert werden, wenn sie ursprünglich nicht vorhanden sind:*

$$Y_k^{\text{sing}} = 0 \quad \implies \quad k\partial_k Y_k^{\text{sing}} = 0. \quad (8.14)$$

Man beachte, daß sich die Attribute „regulär“ und „singulär“ auf die zweiten Ableitungen von Y_k nach dem Feld φ beziehen und nicht auf das Potential selbst. Wir können beispielsweise $Y_k(\varphi) = \varphi^m$ mit einem reellen Exponenten m betrachten. Dann ist $Y_k''(\varphi) = m(m-1)\varphi^{m-2}$, so daß Y_k genau dann „regulär“ ist, wenn $m = 0$, $m = 1$ oder $m \geq 2$ ist; in allen anderen Fällen ist Y_k „singulär“.

DIE FIXPUNKTE DER LOKALEN POTENTIALNÄHERUNG

In diesem Abschnitt wollen wir die Analyse der Renormierungsgruppen-Gleichungen (8.1a) und (8.1b) fortsetzen; wir suchen dabei nach Fixpunkten $(g_*, Y_*(\cdot))$, das heißt nach Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\beta_Y(g_*, Y_*(\varphi)) = 0, \quad \beta_g(g_*, [Y_*]) = 0. \quad (9.1)$$

Abhängig davon, ob wir $\beta_g = 0$ entweder durch $g_* = 0$ oder durch $\eta_N(g_*, [Y_*]) = 2 - d$ erreichen, werden wir $(g_*, Y_*(\cdot))$ als Gauß'schen oder als Nicht-Gauß'schen RG-Fixpunkt bezeichnen. Um die Diskussion so übersichtlich wie möglich zu halten, beschränken wir uns auf vier Dimensionen. Dies bedeutet unter anderem, daß wir die Spektralfunktionen ρ_4 und $\tilde{\rho}_4$ in diesem Kapitel ohne Einschränkung mit ρ beziehungsweise $\tilde{\rho}$ bezeichnen können.

9.1 Der Gauß'sche Fixpunkt auf dem flachen Raum und auf der Sphäre

Wenn wir die Fixpunktbedingung $\beta_g = 0$ für die Newton-Konstante durch $g_* = 0$ erfüllen, erhalten wir aus der zweiten Fixpunktbedingung $\beta_Y = 0$ die folgende Differentialgleichung für das Fixpunktpotential $Y_*(\varphi)$:

$$(2 + \eta_*) Y_*(\varphi) - \varphi Y_*'(\varphi) = 0. \quad (9.2)$$

Gl. (9.2) können wir aus (7.51) oder aus (7.55) erhalten; sie gilt sowohl in der S^4 - als auch in der R^4 -Topologie. In (9.2) haben wir die Abkürzung $\eta_* \equiv \eta_N(g_*, [Y_*])$ für die anomale Dimension am Fixpunkt eingeführt. Nach Gl. (7.66) verschwindet η_N am Gauß'schen Fixpunkt: $\eta_*^{\text{GFP}} = 0$. Damit läßt sich die gewöhnliche Differentialgleichung (9.2) in einfacher Weise lösen; wir erhalten dabei:

$$Y_*^{\text{GFP}}(\varphi) = c \varphi^2, \quad g_*^{\text{GFP}} = 0. \quad (9.3)$$

Hier ist c eine beliebige Integrationskonstante.

Wir können die Konstante c nicht durch die Gleichungen $\beta_g = 0$ und $\beta_Y = 0$ bestimmen. Offenbar existiert eine Schar von Fixpunkten, deren freier Parameter durch c gegeben ist. In der CREH-Form des dimensionslosen Potentials, $Y_k^{\text{CREH}}(\varphi) = c_0 \varphi^2 - \lambda_k \varphi^4/6$, ist der quadratische Term $c_0 \varphi^2$ mit dem kinetischen Term durch eine lokale Weyl-Reskalierung, eine „ σ -Transformation“, verbunden (siehe Abschnitt 6)¹. Wenn wir Invarianz unter lokalen σ -Transformationen fordern, müssen wir daher $c = c_0$ wählen. Dann können wir Y_* mit (einem Teil) der konformen Reduktion der Invarianten $\int \sqrt{g} R$ identifizieren. Folglich setzen wir $c = 0$ für die R^4 - und $c = 1$ für die S^4 -Topologie. An dieser Stelle sollten wir jedoch erwähnen, daß die Forderung nach lokaler σ -Invarianz einer zusätzlichen Annahme gleichkommt. Da wir bestimmt haben, daß die Referenzmetrik eine Metrik in der S^4 -Topologie sein soll, haben wir die Splitsymmetrie auf *globale* σ -Transformationen heruntergebrochen. Diese sind aber nicht stark genug, die Entstehung von Termen proportional zu φ^2 zu unterbinden, die nicht mit dem kinetischen Term und mit der Invarianten $\int \sqrt{g} R$ in Beziehung stehen. Wir wollen im folgenden die Konstante c zur besseren Übersicht beliebig lassen; klar ist jedoch, daß $c = c_0$ die sinnvollste Wahl ist.

9.2 Die lineare Stabilitätsanalyse

Wir können die Stabilitätseigenschaften eines beliebigen (nicht notwendigerweise eines Gauß'schen) Fixpunktes $(g_*, Y_*(\cdot))$ untersuchen, indem wir den Renormierungsgrup-

¹Wir erhalten den Term $c_0 \varphi^2$ aus $\frac{1}{6} \widehat{R}$ in Gl. (7.3), wenn wir für die Referenzmetrik $\widehat{g}_{\mu\nu}$ die Metrik der Sphäre oder des flachen Raums setzen und diese dann in (7.3) einsetzen. Wir erhalten sowohl den Term $\frac{1}{6} \widehat{R}$ als auch $\widehat{\square}$ aus der Invarianten $\int \sqrt{g} R$, wenn wir den konformen Faktor abspalten.

pen-Fluß in der Nähe des Fixpunktes wie folgt linearisieren:

$$\begin{pmatrix} g_k \\ Y_k(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_* \\ Y_*(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta g_k \\ \delta Y_k(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Für den „Tangentialvektor“ $(\delta g_k, \delta Y_k(\cdot))$ machen wir den folgenden Ansatz:

$$\begin{pmatrix} \delta g_k \\ \delta Y_k(\varphi) \end{pmatrix} = \varepsilon \left(\frac{k_0}{k}\right)^\theta \begin{pmatrix} y_g \\ \Upsilon(\varphi) \end{pmatrix} \equiv \varepsilon e^{-\theta t} \begin{pmatrix} y_g \\ \Upsilon(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Hierbei ist k_0 eine beliebige feste Skala. Die Größe $t \equiv \ln(k/k_0)$ bezeichnet die „Renormierungsgruppen-Zeit“ und ε ist ein infinitesimaler Parameter. Wir bestimmen $(\delta g_k, \delta Y_k(\cdot))$, indem wir die Flußgleichungen für g und Y bis zur ersten Ordnung in ε entwickeln. Dann ist $(y_g, \Upsilon(\cdot))$ ein Eigenvektor („Skalenfeld“) der entsprechenden unendlich-dimensionalen Stabilitätsmatrix mit negativem Eigenwert („kritischem Exponent“) θ . Skalenfelder mit positivem (negativem) Realteil heißen relevant (irrelevant). Entlang des RG-Flusses, das heißt in Richtung kleinerer Werte für k , wachsen sie an (werden sie unterdrückt). (Siehe dazu auch Abschnitt 5.3.)

Definitionsgemäß besteht die UV-kritische Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} des Fixpunktes, seine instabile Mannigfaltigkeit, aus allen Punkten $(g, Y(\cdot))$, die durch den inversen Fluß, das heißt in Richtung größerer Werte für k , in den Fixpunkt gezogen werden. Der Tangentialraum von \mathcal{S}_{UV} am Fixpunkt wird durch die relevanten Skalenfelder parametrisiert. Daher ist $\Delta_{UV} \equiv \dim \mathcal{S}_{UV}$ gleich der Anzahl der relevanten Skalenfelder, das heißt der Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil. (Siehe Abbildung 1.1; siehe [31] für eine präzisere Diskussion.)

Durch Variation der β -Funktionen für das dimensionslose Potential und für die dimensionslose Newton-Konstante erhalten wir zwei Gleichungen, die die Skalenfelder und Skalendimensionen bestimmen. Für β_g aus Gl. (8.1b) erhalten wir die folgende Gleichung:

$$[2 + \theta + \eta_*] \delta g_k + g_* \delta \eta_N = 0. \quad (9.6a)$$

Die Variation von β_Y aus (8.1a) ergibt die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
& [2 + \theta + \eta_*] \delta Y_k(\varphi) - \varphi \delta Y_k'(\varphi) + \delta \eta_N Y_*(\varphi) \\
&= \frac{\delta g_k}{2\pi} \frac{(1 - \frac{1}{2} \eta_*) \varphi^2 \rho(\varphi) + \frac{1}{2} \eta_* \tilde{\rho}(\varphi)}{\varphi^2 + Y_*''(\varphi)} \\
&\quad - \frac{g_*}{4\pi} \delta \eta_N \frac{\varphi^2 \rho(\varphi) - \tilde{\rho}(\varphi)}{\varphi^2 + Y_*''(\varphi)} \\
&\quad + \frac{g_*}{2\pi} \frac{(1 - \frac{1}{2} \eta_*) \varphi^2 \rho(\varphi) + \frac{1}{2} \eta_* \tilde{\rho}(\varphi)}{[\varphi^2 + Y_*''(\varphi)]^2} \delta Y_k''(\varphi).
\end{aligned} \tag{9.6b}$$

In (9.6) sind die folgenden Abkürzungen enthalten: Die anomale Dimension am Fixpunkt bezeichnen wir mit $\eta_* \equiv \eta_N(g_*, [Y_*])$; die Variation der anomalen Dimension nach g und Y besitzt die folgende Form:

$$\delta \eta_N \equiv \eta_N(g_* + \delta g_k, [Y_* + \delta Y_k]) - \eta_*.$$

Die Abkürzungen Y und δ stehen für die beiden folgenden Ausdrücke:

$$Y \equiv (Y(\varphi_1), Y'(\varphi_1), Y''(\varphi_1), \dots), \quad \delta \equiv \delta g \frac{\partial}{\partial g} + \delta Y \frac{\partial}{\partial Y} + \delta Y' \frac{\partial}{\partial Y'} + \dots$$

Wir haben Gl. (9.6b) für die S^4 -Topologie abgeleitet. Wir erhalten die entsprechende Gleichung in der R^4 -Topologie, wenn wir in (9.6b) die Spektralfunktionen wie folgt ersetzen:

$$\rho(\varphi) \longrightarrow \frac{1}{12} \varphi^4, \quad \tilde{\rho}(\varphi) \longrightarrow \frac{1}{18} \varphi^6. \tag{9.7}$$

(Siehe dazu auch Abschnitt 7.3.3.)

Als nächstes wollen wir die Stabilitätsanalyse am Gauß'schen Fixpunkt durchführen.

9.3 Die Stabilitätsanalyse des Gauß'schen Fixpunktes auf dem flachen Raum und auf der Sphäre

Am GFP (9.3) verschwindet die anomale Dimension:

$$\eta_N(g_*^{\text{GFP}}, [Y_*^{\text{GFP}}]) = 0. \tag{9.8a}$$

Die Variation der anomalen Dimension nach g und Y verschwindet ebenfalls, siehe Gl. (7.66):

$$(\delta\eta_N)(g_*^{\text{GFP}}, [Y_*^{\text{GFP}}]) = 0. \quad (9.8b)$$

Wenn wir (9.8) in Gl. (9.6a) einsetzen, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$[2 + \theta] y_g = 0. \quad (9.9a)$$

Die Variation der β -Funktion für das dimensionslose Potential, Gl. (9.6b), nimmt mit (9.8) die folgende Form an:

$$[2 + \theta] \Upsilon(\varphi) - \varphi \Upsilon'(\varphi) = \frac{y_g}{2\pi} \frac{\varphi^2 \rho(\varphi)}{\varphi^2 + 2c}. \quad (9.9b)$$

Wir können das lineare Gleichungssystem (9.9a,b) ganz einfach lösen: Da (9.9a) entweder durch $y_g = 0$ oder durch $2 + \theta = 0$ erfüllt werden kann, existieren zwei Arten von Skalenfeldern am GFP. Diese können wir wie folgt zusammenfassen:

- (i) Für jedes reelle θ existiert ein Skalenfeld ($y_g = 0, \Upsilon = \Upsilon_\theta$) mit Skalendimension θ und mit²

$$\Upsilon_\theta(\varphi) = \tilde{c}_\theta \varphi^{2+\theta}. \quad (9.10)$$

Hier bezeichnet \tilde{c}_θ eine Schar von Integrationskonstanten. Für $\theta > 0$, $\theta = 0$ und $\theta < 0$ sind diese Skalenfelder relevant, marginal beziehungsweise irrelevant.

- (ii) Es existiert ein einzelnes weiteres Skalenfeld,

$$(y_g \neq 0, \Upsilon = \hat{\Upsilon}_{-2}) \quad (9.11)$$

mit Skalendimension $\theta = -2$ und

$$\hat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) = -\frac{y_g}{2\pi} \int^\varphi d\varphi' \frac{\varphi' \rho(\varphi')}{\varphi'^2 + 2c}. \quad (9.12)$$

Dieses Skalenfeld ist irrelevant.

²An dieser Stelle haben wir angenommen, daß der Exponent n von $\Upsilon_\theta \propto \varphi^n$ reell ist. Hier ist jedoch nicht klar, ob wir $n \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{Z} oder \mathbb{N} setzen, oder sogar $n \in \mathbb{C}$ zulassen sollen. Wir werden das Problem der angemessenen Wahl des $\{Y(\cdot)\}$ -Funktionsraumes in Abschnitt 9.5.2 im Detail diskutieren.

| θ | ... | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 | ... |
|--------------------------|------------|----------------|---------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|
| | irrelevant | | | | marg. | relevant | | | |
| $y_g = 0, \Upsilon =$ | ... | φ^{-1} | φ^0 | φ^1 | φ^2 | φ^3 | φ^4 | φ^5 | ... |
| $y_g \neq 0, \Upsilon =$ | | | $\widehat{\Upsilon}_{-2}$ | | | | | | |

Tabelle 9.1: Skalenfelder am Gauß'schen Fixpunkt

Die Skalenfelder des Typs (i) stechen sofort hervor, denn ein Monom φ^n mit reellem Exponenten n besitzt die Skalendimension

$$\theta = n - 2. \quad (9.13)$$

Verglichen mit der Quantenfeldtheorie eines gewöhnlichen Skalarfeldes ist die Skalendimension am GFP hier um zwei Einheiten verschoben. Wir können diese Verschiebung auf die zusätzlichen Faktoren in der FRGE (siehe ihre allgemeine Form in Gl. (7.24)) zurückführen, die sich aus dem Feld ϕ zusammensetzen. Wir haben diese Faktoren zum einen dadurch erhalten, daß wir dem Cutoff eine physikalische Interpretation gegeben haben, was dazu führte, daß der Cutoff-Operator \mathcal{R}_k abhängig wurde vom Hintergrundfeld χ_B . Zum anderen sollte die Quanten-Einstein-Gravitation „hintergrundunabhängig“ sein. (Siehe dazu auch Abschnitt 3.2.) Wieder sehen wir, daß das Renormierungsgruppen-Verhalten der konform-reduzierten Gravitation sich deutlich von dem eines skalaren Materiefeldes unterscheidet, obwohl die konform-reduzierte Theorie der Feldtheorie eines gewöhnlichen skalaren Materiefeldes sehr ähnlich ist.

In Tabelle 9.1 haben wir die Skalenfelder am Gauß'schen Fixpunkt mit ganzzahligen Exponenten als Beispiel zusammen mit ihren Skalendimensionen aufgelistet. Die beiden fett gedruckten Einträge sind die Skalenfelder, die wir in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung erhalten. Das Skalenfeld $(y_g = 0, \varphi^4)$ mit $\theta = +2$ entspricht dem zweikomponentigen Eigenvektor der Stabilitätsmatrix für die (g, λ) -Ebene, der parallel zur λ -Achse ist; das andere Skalenfeld, $(y_g \neq 0, \widehat{\Upsilon}_{-2})$ mit $\theta = -2$, repräsentiert den Eigenvektor mit nicht-verschwindenden g - und λ -Komponenten. Dieses Schema, das in Tabelle 9.1 aufgelistet ist, ist exakt dasselbe wie in der vollen [12, 13] und in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung (siehe die Abschnitte 5.2 und 5.3). Im wesentlichen verhält sich $\widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi)$ wie φ^4 plus Korrekturterme, die bei großen Werten für φ keine Rolle spielen. Wenn wir das Integral (9.12) mit der zur R^4 -Topologie gehörenden Spektralfunktion ρ aus

(9.7) ausrechnen, erhalten wir die folgende Funktion:

$$\widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) = -\frac{y_g}{96\pi} \left[\varphi^4 - 4c\varphi^2 + 8c^2 \ln(\varphi^2 + 2c) \right]. \quad (9.14)$$

(In Anhang D.4.1 haben wir die Berechnung von (9.14) zusammengefaßt.) Wenn wir auf lokaler σ -Invarianz bestehen und $c = c_0[R^4] = 0$ setzen, sehen wir, daß $\widehat{\Upsilon}_{-2}$ in der R^4 -Topologie proportional zu φ^4 ist.

Auf der Sphäre erhalten wir mit der glatten Funktion $\rho(\varphi)$, die durch das Polynom (7.46) genähert haben, für $c \geq 0$ das Skalenfeld ($y_g \neq 0, \widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi)$), mit dem folgenden Ausdruck für $\widehat{\Upsilon}_{-2}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) = -\frac{y_g}{2\pi} & \left[\frac{1}{48} \varphi^4 + \frac{a_3}{3} \varphi^3 + \frac{1}{2} \left(a_2 - \frac{c}{6} \right) \varphi^2 + (a_1 - 2ca_3) \varphi \right. \\ & + \sqrt{2c} (2ca_3 - a_1) \arctan(\varphi/\sqrt{2c}) \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(1 - 2ca_2 + \frac{c^2}{3} \right) \ln(\varphi^2 + 2c) + const \right]. \end{aligned} \quad (9.15)$$

(In Anhang D.4.2 haben wir die Berechnung von (9.15) zusammengefaßt.) Wir sehen, daß für große Werte für φ der dominante Term in $\widehat{\Upsilon}_{-2}$ proportional zu φ^4 ist. Für kleine φ scheint es für die spezielle Wahl $c = 0$ eine Singularität zu geben. Der in der S^4 -Topologie bevorzugte Wert der Integrationskonstanten ist jedoch $c = c_0[S^4] = 1$. (Das ist der Wert, den c bei der Forderung nach lokaler σ -Invarianz annehmen muß.) Für $c = 1$ ist $\widehat{\Upsilon}_{-2}$ für alle $\varphi \geq 0$ regulär und nähert sich für $\varphi \rightarrow 0$ einer Konstanten.

In Anhang D haben wir das Skalenfeld ($y_g \neq 0, \Upsilon = \widehat{\Upsilon}_{2-d}$) für beliebige Dimensionen sowohl für die Sphäre als auch für den flachen Raum ausgerechnet.

9.4 Der Nicht-Gauß'sche Fixpunkt

In diesem Abschnitt wollen wir nach Fixpunkten (g_*, Y_*) mit $\eta_* = -2$ suchen. Wir betrachten zunächst den flachen Raum.

9.4.1 Der flache Raum

Wenn wir die Fixpunktbedingung $\beta_Y = 0$ in die partielle Differentialgleichung für das laufende Potential, Gl. (7.55), einsetzen, so erhalten wir die folgende gewöhnliche Dif-

ferentialgleichung für das Fixpunktpotential Y_* :

$$\varphi Y'_*(\varphi) = -\frac{g_*}{18\pi} \frac{\varphi^6}{\varphi^2 + Y''_*(\varphi)} \quad (9.16)$$

Die zweite Fixpunktbedingung $\eta_* = -2$ führt mit (7.75) auf die folgende Gleichung:

$$\frac{g_*}{48\pi} \frac{[\varphi_1^3 Y_*'''(\varphi_1)]^2}{[\varphi_1^2 + Y_*''(\varphi_1)]^4} = 1. \quad (9.17)$$

Der Entwicklungspunkt φ_1 ist hier festgehalten; wir werden seinen Wert im Moment nicht genauer festlegen. Die Gleichungen (9.16) und (9.17) bilden ein Gleichungssystem zur Bestimmung des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes ($g_* \neq 0, Y_*$).

Für die Analyse von Gl. (9.16) ist es praktisch, die folgende Funktion einzuführen:

$$h(\varphi) \equiv Y'_*(\varphi) \quad (9.18)$$

Wenn wir (9.18) in Gl. (9.16) einsetzen, so sehen wir, daß $h(\varphi)$ die folgende Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$h(\varphi) = -\frac{g_*}{18\pi} \frac{\varphi^5}{\varphi^2 + h'(\varphi)}. \quad (9.19)$$

Wenn wir das asymptotische Verhalten von (9.19) für sehr große beziehungsweise sehr kleine Werte für φ untersuchen, so stellen wir fest, daß die Lösung von (9.19) in führender Ordnung im wesentlichen dasselbe Verhalten für $\varphi \gg 1$ und $\varphi \ll 1$ zeigt:

$$h(\varphi) \approx \begin{cases} -\frac{2}{3} L \varphi^3, & \text{wenn } \varphi \ll 1 \\ -\frac{2}{3} \tilde{L} \varphi^3, & \text{wenn } \varphi \gg 1 \end{cases} \quad (9.20)$$

Hier sind L und \tilde{L} Konstanten, die dieselbe quadratische Gleichung erfüllen müssen,

$$12\pi L (1 - 2L) = g_*, \quad (9.21)$$

und entsprechend für \tilde{L} . Gl. (9.21) kann zwei verschiedene reelle Lösungen haben, so daß L und \tilde{L} prinzipiell verschiedene Werte annehmen können. Das asymptotische Verhalten (9.20) motiviert uns, die Funktion $W(\varphi)$ für $0 \leq \varphi < \infty$ einzuführen, die durch den folgenden Ausdruck definiert ist:

$$h(\varphi) \equiv -\frac{2}{3} L \varphi^3 W(\varphi). \quad (9.22)$$

Diese neue Funktion $W(\varphi)$ erfüllt die folgenden Randbedingungen:

$$W(0) = 1 \quad (9.23a)$$

$$W(\infty) = \tilde{L}/L. \quad (9.23b)$$

Wenn wir die Funktion h durch W ausdrücken, Gl. (9.22), und sie dann in die Differentialgleichung (9.19) einsetzen, so sehen wir, daß die so erhaltene Differentialgleichung für W die folgende Struktur besitzt:

$$\varphi \frac{d}{d\varphi} W(\varphi) = \mathcal{B}(W(\varphi)). \quad (9.24a)$$

In (9.24a) haben wir die folgende „ β -Funktion“ eingeführt:

$$\mathcal{B}(W) = \frac{3}{2L} \left[1 - 2LW - (1 - 2L)/W \right]. \quad (9.24b)$$

Da (9.24a) eine Differentialgleichung erster Ordnung in φ ist, ist sie mit den beiden Randbedingungen (9.23) überbestimmt. Somit ist zunächst fraglich, ob eine Lösung existiert. Wenn wir beispielsweise bei $\varphi = 0$ starten und Gl. (9.24a) mit der Anfangsbedingung $W(0) = 1$ in Richtung größer werdender Werte für φ integrieren, gibt es keinen Grund, warum das Ergebnis $W(\varphi)$ den Ausdruck \tilde{L}/L für $\varphi \rightarrow \infty$ erreichen sollte (zumindest nicht für ein allgemeines $\mathcal{B}(W)$). Die Funktion $\mathcal{B}(W)$ aus (9.24b) hat jedoch eine spezielle Eigenschaft, die die Existenz einer eindeutigen Lösung impliziert. Sie besitzt zwei Nullstellen: bei $W = 1$ beziehungsweise bei $W = \tilde{L}/L$:

$$\mathcal{B}(1) = 0, \quad (9.25a)$$

$$\mathcal{B}(\tilde{L}/L) = 0. \quad (9.25b)$$

Wir finden die zweite Nullstelle (9.25b), indem wir ausnutzen, daß L und \tilde{L} beide die Gleichung (9.21) erfüllen, also

$$L(1 - 2L) = \tilde{L}(1 - 2\tilde{L}). \quad (9.26)$$

Somit erhalten wir aus (9.25b) die folgende Relation:

$$\mathcal{B}(\tilde{L}/L) = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{L} - \frac{2\tilde{L}}{L} - \frac{(1 - 2\tilde{L})}{L} \right] = 0. \quad (9.27)$$

Offenbar ist $W = 1$ ein „Fixpunkt“ der „Flußgleichung“ (9.24a): Wenn wir sie mit der Anfangsbedingung $W(0) = 1$ in Richtung größerer Werte für φ integrieren, erhalten wir:

$$W(\varphi) = 1 \quad \forall \quad 0 \leq \varphi < \infty. \quad (9.28)$$

Diese Lösung erfüllt ebenfalls die zweite Randbedingung $W(\infty) = \tilde{L}/L$, sofern \tilde{L} und L dieselbe Lösung der quadratischen Gleichung (9.22) sind. (Wenn wir die Integration beim anderen „Fixpunkt“ $W = \tilde{L}/L$ und von $\varphi = \infty$ in Richtung kleinerer Werte für φ integrieren, kommen wir zum selben Schluß.)

Indem wir Gl. (9.18) mit (9.22) und (9.28) integrieren, können wir zeigen, daß das Fixpunktpotential die folgende Form besitzt:

$$Y_*(\varphi) = y_* - \frac{1}{6} L \varphi^4. \quad (9.29)$$

L löst die quadratische Gleichung (9.21) und y_* ist eine Integrationskonstante, die durch Gl. (9.16) nicht festgelegt ist.

Die zweite Bedingung, die der Fixpunkt (g_*, Y_*) erfüllen muß, ist Gl. (9.17). Wenn wir das Fixpunktpotential (9.29) dort einsetzen, nimmt sie die folgende einfachere Form an:

$$g_* \frac{L^2}{(1 - 2L)^4} = 3\pi. \quad (9.30)$$

Da das Fixpunktpotential Y_* (bis auf die Konstante y_*) proportional zu φ^4 ist, wird die Entwicklungspunkt φ_1 aus der Berechnung der anomalen Dimension aus (9.17) eliminiert.

Übrig bleibt nun, die zwei gekoppelten algebraischen Gleichungen (9.21) und (9.30) nach den Konstanten g_* und L aufzulösen. Mit der Identifikation $L \equiv \lambda_*$ erhalten die folgend Lösung:

$$Y_*(\varphi) = y_* - \frac{1}{6} \lambda_* \varphi^4 \quad (9.31a)$$

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \frac{2^{1/3}}{(1 + 2^{1/3})} \approx 0.279 \quad (9.31b)$$

$$g_* = 6\pi \frac{2^{1/3}}{(1 + 2^{1/3})^2} \approx 4.650 \quad (9.31c)$$

Die Konstante y_* wird nicht durch die Flußgleichung bestimmt. Bis auf diese Konstante, hat die lokale Potentialnäherung als Verallgemeinerung der CREH-Trunkierung die

funktionale Form des Fixpunktpotentials aus der CREH-Näherung nicht verändert beziehungsweise verallgemeinert. Dieses Resultat ist ziemlich bemerkenswert. Es zeigt, daß die CREH-Trunkierung dieselben hervorstechenden Stabilitätseigenschaften hat, wie sie die volle Einstein-Hilbert-Trunkierung besitzt (siehe [12, 14] und Abschnitt 8.3).

9.4.2 Die Sphäre

In die S^4 -Topologie besitzt die zweite Fixpunktbedingung $\eta_N(g_*, [Y_*]) = -2$ wieder die Form (9.17). Wenn wir β_Y aus Gl. (7.51) in die erste Fixpunktbedingung $\beta_Y = 0$ einsetzen, erhalten wir die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für das Fixpunktpotential Y_* :

$$Y_*'(\varphi) = -\frac{g_*}{\pi} \frac{\varphi \rho_{\text{eff}}(\varphi)}{\varphi^2 + Y_*''(\varphi)}. \quad (9.32)$$

In (9.32) haben wir die effektive Spektralfunktion ρ_{eff} eingeführt. Sie besitzt die folgende Form:

$$\rho_{\text{eff}}(\varphi) \equiv \rho(\varphi) - \frac{\tilde{\rho}(\varphi)}{2\varphi^2}. \quad (9.33)$$

Das asymptotische Verhalten der effektiven Spektralfunktion im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ ist durch den folgenden Ausdruck beschrieben:

$$\rho_{\text{eff}}(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\varphi^4}{18}. \quad (9.34)$$

Somit stimmt in diesem Grenzfall die Differentialgleichung für Y_* , Gl. (9.32), mit Gl. (9.16) für die R^4 -Topologie überein. Dies hat zur Folge, daß die asymptotische Form der Lösung von Gl. (9.32) mit der Lösung in der R^4 -Topologie übereinstimmt:

$$Y_*(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \infty} -\frac{1}{6} \lambda_* \varphi^4 \equiv Y_{\text{asym}}(\varphi). \quad (9.35)$$

Wenn wir $Y_* = Y_{\text{asym}}$ in Gl. (9.32) einsetzen und φ gegen Unendlich gehen lassen, so erhalten wir die erste Relation zwischen den Konstanten g_* und λ_* ; diese ist durch Gl. (9.21) mit $L \equiv \lambda_*$ gegeben,

$$12\pi \lambda_* (1 - 2\lambda_*) = g_*. \quad (9.36)$$

Die zweite Fixpunktbedingung, $\eta_N(g_*, [Y_*]) = -2$ besitzt die explizite Form (9.17). Wir haben hier die Wahl $\varphi_1 \rightarrow \infty$ getroffen. Für $\varphi_1 \rightarrow \infty$ wird wie zuvor die Abhängigkeit

vom Entwicklungspunkt φ_1 eliminiert und es bleibt eine zweite Relation zwischen g_* und λ_* übrig: diese ist durch Gl. (9.30) mit $L \equiv \lambda_*$ gegeben,

$$g_* \frac{\lambda_*^2}{(1 - 2\lambda_*)^4} = 3\pi. \quad (9.37)$$

Die Konstanten g_* und λ_* sind durch die Bedingungen (9.36) und (9.37) eindeutig bestimmt. Die Konstanten g_* und λ_* nehmen also in der S^4 -Topologie ihre Werte aus der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung, (9.31b) beziehungsweise (9.31c), an, genau wie in der R^4 -Topologie.

Was an dieser Stelle noch bleibt ist, die gewöhnliche Differentialgleichung für das Fixpunktpotential, Gl. (9.32), für den nun bekannten Wert von g_* (siehe Gl. (9.31c)) mit den Anfangsbedingungen zu lösen, die λ_* (siehe Gl. (9.31b)) beinhalten. Wir fordern, daß die Funktion Y_* für große Werte für φ das asymptotische Verhalten (9.35) zeigt; entsprechendes fordern wir für ihre Ableitungen. Wir starten die Integration bei irgendeinem $\hat{\varphi} > 0$ mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} Y_*(\hat{\varphi}) &= Y_{\text{asym}}(\hat{\varphi}), \\ Y'_*(\hat{\varphi}) &= Y'_{\text{asym}}(\hat{\varphi}), \end{aligned} \quad (9.38)$$

und integrieren ausgehend von $\hat{\varphi}$ rückwärts in Richtung kleinerer Werte für φ . Uns interessiert hier der Grenzfall $\hat{\varphi} \rightarrow \infty$.

Die Existenz eines Fixpunktpotentials ist keinesfalls garantiert. Es könnte passieren, daß die Funktion, die wir durch Integration der Differentialgleichung (9.32) mit den Anfangsbedingungen (9.38) in Richtung kleinerer Werte für φ erhalten, an irgendeiner Stelle Singularitäten entwickelt. Daraus müssten wir dann schließen, daß es keinen Fixpunkt für das laufende Potential $Y_k(\varphi)$ gibt. Der möglicherweise gefährliche Punkt in der Differentialgleichung (9.32) ist der Nenner $\varphi^2 + Y''_*(\varphi)$, der bei irgendeinem φ verschwinden könnte.

Nehmen wir einmal an, daß dies nicht passiert und daß eine Lösung Y_* existiert, die für $0 \leq \varphi \leq \hat{\varphi} \rightarrow \infty$ wohldefiniert ist. Dann gibt es kein $\hat{\varphi} \geq 0$, für das $\hat{\varphi}^2 + Y''_*(\hat{\varphi}) = 0$ ist. Das Fixpunktpotential besitzt im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ die Asymptote $-\lambda_* \varphi^4/6$; mit λ_* aus (9.31b) gilt $\varphi^2(1 - 2\lambda_*) > 0$ für alle $\varphi \geq 0$. Somit ist der Nenner $\varphi^2 + Y''_*(\varphi)$ überall positiv; da g_* positiv ist (siehe (9.31c)), ist die rechte Seite der Fixpunktgleichung (9.32) für alle φ negativ. Somit ist die Funktion $Y_*(\varphi)$ monoton fallend, das heißt es gilt überall $Y'_*(\varphi) < 0$.

Unglücklicherweise ist es nicht möglich, die Differentialgleichung für Y_* analytisch in geschlossener Form zu lösen. Wir müssen daher auf numerische Methoden zurückgreifen. Wir können jedoch die für kleine Werte für φ führenden Terme bestimmen. Dazu machen wir einen Potenzreihenansatz; ein Koeffizientenvergleich liefert dann den folgenden Ausdruck:

$$Y_*(\varphi) = y_0 - y_1 \varphi - \frac{g_*}{6\pi y_1} \varphi^3 + \mathcal{O}(\varphi^4). \quad (9.39)$$

Wir können die Integrationskonstanten y_0 und y_1 an diesem Punkt nicht näher bestimmen; sie werden letztendlich dadurch bestimmt, daß wir (9.39) an die Lösung für große Werte für φ anpassen. Das Monotonieverhalten $Y'_*(\varphi) < 0$ verlangt $y_1 > 0$. Die Form von Y_* in Gl. (9.39) führt dazu, daß $Y_*''(\varphi)$ von der Ordnung proportional zu φ ist; $Y_*''(\varphi)$ verschwindet also, wenn φ gegen Null geht. Dies bedeutet, daß $Y_*(\varphi)$ „regulär“ im Sinne von Abschnitt 8.4 ist.

Die numerische Analyse von (9.32) zeigt, daß tatsächlich eine Lösung von (9.32) existiert, die für *alle* positiven Werte für φ regulär ist. Sie ist in Abbildung 9.1 dargestellt, wo wir sie mit dem Potential der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung $Y_*^{\text{CREH}}(\varphi) = \varphi^2 - \lambda_* \varphi^4/6$ mit demselben Wert für λ_* vergleichen. (Y_*^{CREH} ist für große Werte für φ natürlich dasselbe wie Y_{asym} .) In Abbildung 9.1 haben wir das *negative* Fixpunktpotential $-Y_*$ dargestellt, da es – bis auf einen positiven Faktor – mit dem wahren Potential U_* übereinstimmt, dem Term im euklidischen Γ_k , der keine Ableitungen enthält (siehe Kapitel 2). Wie wir erwartet haben, ist Y_* tatsächlich eine monotone Funktion, im Gegensatz zum CREH-Potential. Wir sehen außerdem, daß Y_* näherungsweise linear für kleine Werte für φ ist, was mit dem Potenzreihenansatz (9.39) übereinstimmt.

An dieser Stelle wollen wir bemerken, daß $Y_*(\varphi)$ und $Y_*''(\varphi)$ endlich für $\varphi \searrow 0$ sind. Letzteres bedeutet, daß das Fixpunktpotential in der S^4 -Topologie einen verschwindenden „sing“-Anteil im Sinne von Abschnitt 8.4 hat. Dasselbe gilt für die R^4 -Topologie, wie die explizite Formel (9.29) zeigt.

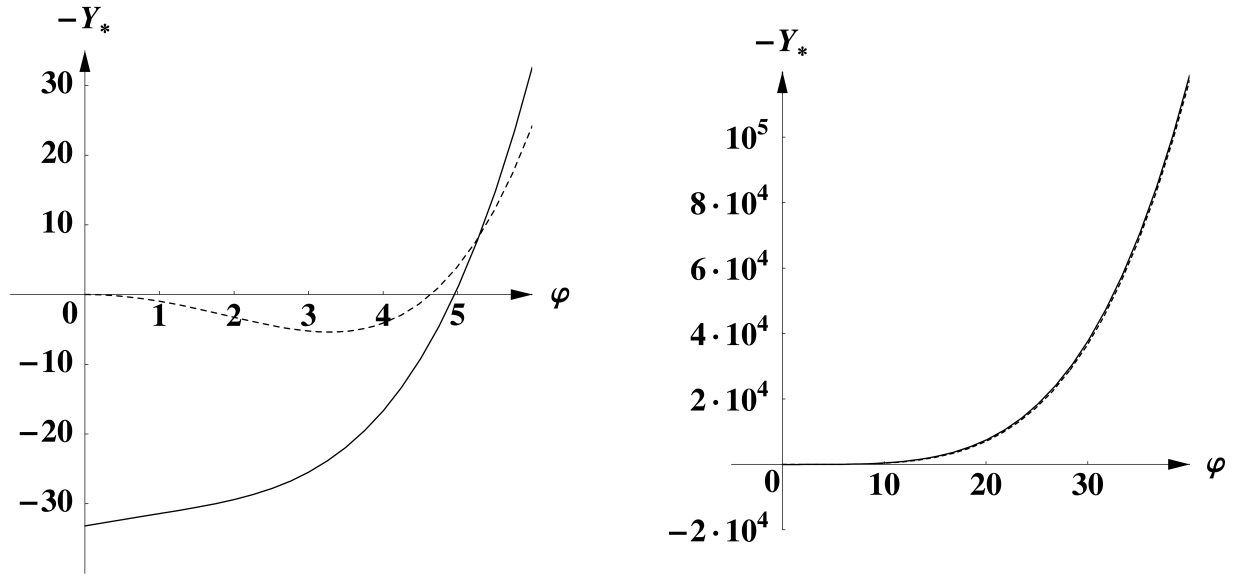


Abbildung 9.1: Das negative Fixpunktpotential $-Y_*$ in der S^4 -Topologie. Die gestrichelte Linie ist das CREH-Potential mit demselben Wert für λ_* . Die linke Abbildung ist ein Detail der rechten Abbildung; letztere zeigt, daß Y_* asymptotisch mit dem CREH-Potential übereinstimmt.

9.5 Die Stabilitätsanalyse des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes

9.5.1 Die Skalenfelder und die Bedingung $n' < 4$

Da wir das Fixpunktpotential in der S^4 -Topologie nur numerisch bestimmen konnten, beschränken wir unsere Stabilitätsanalyse auf die R^4 -Topologie, für die wir das Fixpunktpotential exakt bestimmt haben. Die relevante Fixpunktösung auf dem flachen Raum ist durch Gl. (9.31a) gegeben, mit den CREH-Werten von g_* und λ_* , Gl. (9.31c) beziehungsweise (9.31b). Die erste Bedingung für die Skalenfelder und Skalendimensionen, Gl. (9.6a), erhalten wir aus der Variation der β -Funktion für die dimensionslose Newton-Konstante. Die zweite Bedingung, Gl. (9.6b), folgt aus der Variation der β -Funktion für das dimensionslose Potential, wobei wir dort die Spektralfunktionen (9.7) eingesetzt haben.

Mit der Fixpunktbedingung $\eta_* = \eta_N(g_*, [Y_*]) = -2$ nimmt die *erste Bedingung* die folgende Form an:

$$(\delta\eta_N)(g_*, [Y_*]) = -\theta \delta g_k / g_*. \quad (9.40)$$

Die anomale Dimension ist durch Gl. (7.75) gegeben. Wenn wir η_N nach g und $Y(\cdot)$ variieren und gleichzeitig den Punkt φ_1 festhalten, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\delta\eta_N)(g_*, [Y_*]) &= -\frac{1}{24\pi} \delta g_k Y_*'''(\varphi_1)^2 \frac{\varphi_1^6}{[\varphi_1^2 + Y_*''(\varphi_1)]^4} \\ &\quad - \frac{1}{12\pi} g_* Y_*'''(\varphi_1) \delta Y_k'''(\varphi_1) \frac{\varphi_1^6}{[\varphi_1^2 + Y_*''(\varphi_1)]^4} \\ &\quad + \frac{1}{6\pi} g_* Y_*'''(\varphi_1)^2 \delta Y_k''(\varphi_1) \frac{\varphi_1^6}{[\varphi_1^2 + Y_*''(\varphi_1)]^5} \end{aligned} \quad (9.41)$$

Wenn wir in (9.41) die Fixpunktwerte (9.31b,c) einsetzen, nimmt die Variation der anomalen Dimension die folgende vereinfachte Form an:

$$(\delta\eta_N)(g_*, [Y_*]) = -2 \frac{\delta g_k}{g_*} + \frac{g_*}{3\pi} \frac{\lambda_*}{(1 - 2\lambda_*)^4} \left[\frac{\delta Y_k'''(\varphi_1)}{\varphi_1} + \frac{8\lambda_*}{1 - 2\lambda_*} \frac{\delta Y_k''(\varphi_1)}{\varphi_1^2} \right]. \quad (9.42)$$

Wenn wir (9.42) zusammen mit dem Tangentialvektor $(\delta g_k, \delta Y_k(\cdot))$ aus (9.5) in Gl. (9.40) einsetzen, so erhalten wir eine Bedingung, die die „Komponenten“ des Skalenfeldes $(y_g, \Upsilon(\cdot))$ und seine Skalendimension θ in Beziehung zueinander setzt. Zur besseren Übersicht betrachten wir die Fälle $y_g = 0$ und $y_g \neq 0$ getrennt voneinander. Für $y_g = 0$ vereinfacht sich die Bedingung zur der folgenden Relation, die unabhängig von der Skalendimension θ ist:

$$\frac{\Upsilon'''(\varphi_1)}{\varphi_1} + \frac{8\lambda_*}{1 - 2\lambda_*} \frac{\Upsilon''(\varphi_1)}{\varphi_1^2} = 0. \quad (9.43)$$

Für $y_g \neq 0$ erhalten wir die entsprechende Bedingung:

$$\theta = 2 - \frac{g_*^2}{3\pi y_g} \frac{\lambda_*}{(1 - 2\lambda_*)^4} \left[\frac{\Upsilon'''(\varphi_1)}{\varphi_1} + \frac{8\lambda_*}{1 - 2\lambda_*} \frac{\Upsilon''(\varphi_1)}{\varphi_1^2} \right]. \quad (9.44)$$

In der R^4 -Topologie nimmt die *zweite Bedingung* die folgende Form an:

$$-\theta \Upsilon(\varphi) + \varphi \Upsilon'(\varphi) - \alpha \varphi^2 \Upsilon''(\varphi) = -\theta \frac{y_* y_g}{g_*} + y_g \gamma(\theta) \varphi^4. \quad (9.45)$$

In (9.45) haben wir die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\alpha \equiv \frac{g_*}{18\pi (1 - 2\lambda_*)^2} = \frac{2^{1/3}}{3} \approx 0.41997 \dots, \quad (9.46a)$$

$$\gamma(\theta) \equiv \frac{1}{6} \left[\frac{\lambda_* \theta}{g_*} - \frac{\theta}{24\pi (1 - 2\lambda_*)} - \frac{1}{6\pi (1 - 2\lambda_*)} \right]. \quad (9.46b)$$

In (9.46a) ist Gl. (9.37) enthalten. Die exakten Werte für λ_k und g_k sind in (9.31b) beziehungsweise (9.31c) zu finden. Für den Spezialfall $y_g = 0$ erhalten wir die folgende homogene Euler'sche Differentialgleichung:

$$\theta \Upsilon(\varphi) - \varphi \Upsilon'(\varphi) + \alpha \varphi^2 \Upsilon''(\varphi) = 0. \quad (9.47)$$

Wir wollen nun nacheinander die Fälle $y_g = 0$ und $y_g \neq 0$ diskutieren.

(a) Skalenfelder mit $y_g = 0$

Um die Differentialgleichung (9.47) zu lösen, machen wir einen Potenzansatz: $\Upsilon(\varphi) \propto \varphi^n$. Hier lassen wir zunächst beliebige komplexe Exponenten $n \in \mathbb{C}$ zu. Der Ansatz ist genau dann eine Lösung von (9.47), wenn für $\theta = \theta(n)$ der folgende Ausdruck gilt:

$$\theta(n) = (1 + \alpha) n - \alpha n^2. \quad (9.48)$$

Wenn wir (9.48) nach n auflösen, so erhalten wir zwei mögliche Werte für n :

$$n_{\pm}(\theta) = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{\theta}{\alpha}}. \quad (9.49)$$

In (9.49) haben wir die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\omega \equiv \frac{1 + \alpha}{2\alpha} \approx 1.691 \quad (9.50)$$

Wenn $\theta \neq \alpha \omega^2$ ist, das heißt wenn $n_+ \neq n_-$ ist, dann ist die allgemeine Lösung von (9.47) durch das folgende Skalenfeld gegeben:

$$\Upsilon(\varphi) = h_+ \varphi^{n_+(\theta)} + h_- \varphi^{n_-(\theta)}. \quad (9.51)$$

Hier sind h_+ und h_- beliebige komplexe Konstanten. Im Spezialfall $\theta = \alpha \omega^2$ hingegen erhalten wir die folgende allgemeine Lösung ($h_{1,2} \in \mathbb{C}$):

$$\Upsilon(\varphi) = \varphi^{\omega} [h_1 + h_2 \ln \varphi]. \quad (9.52)$$

Im allgemeinen werden sowohl θ als auch n komplex sein. Wir spalten daher θ und n jeweils in Real- und Imaginärteil auf, $\theta \equiv \theta' + i\theta''$ beziehungsweise $n \equiv n' + in''$. Ausgedrückt durch die Real- und Imaginärteile (θ', n') beziehungsweise (θ'', n'') unterteilt sich (9.48) in die beiden folgenden Gleichungen:

$$\theta' = (1 + \alpha) n' - \alpha n'^2 + \alpha n''^2, \quad (9.53a)$$

$$\theta'' = n'' [1 + \alpha - 2\alpha n']. \quad (9.53b)$$

Zusätzlich benötigen wir die zu (9.53) inversen Relationen. An dieser Stelle verwenden wir, daß die Wurzel aus einer komplexen Zahl durch den folgenden Ausdruck gegeben ist [63]:

$$\sqrt{a + ib} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right\}. \quad (9.54)$$

(Hier sind a und b reelle Zahlen.) Zur Bestimmung von n beziehungsweise von n' und n'' nach Gl. (9.49) müssen wir die folgenden drei Fälle unterscheiden:

(i) Der Fall $\theta'' \neq 0$:

$$\begin{aligned} n'_{\pm}(\theta', \theta'') &= \omega \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\theta''}{\alpha \omega^2}\right)^2} + \left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right) \right]^{1/2} \right) \\ n''_{\pm}(\theta', \theta'') &= \mp \frac{\omega}{\sqrt{2}} \operatorname{sign}(\theta'') \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\theta''}{\alpha \omega^2}\right)^2} - \left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.55a)$$

(iia) Der Fall $\theta'' = 0$ und $\theta' \leq \alpha \omega^2$:

$$\begin{aligned} n'_{\pm}(\theta', \theta'') &= \omega \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}} \right] \\ n''_{\pm}(\theta', \theta'') &= 0 \end{aligned} \quad (9.55b)$$

(iib) Der Fall $\theta'' = 0$ und $\theta' > \alpha \omega^2$:

$$\begin{aligned} n'_{\pm}(\theta', \theta'') &= \omega \\ n''_{\pm}(\theta', \theta'') &= \pm \omega \sqrt{\frac{\theta'}{\alpha \omega^2} - 1} \end{aligned} \quad (9.55c)$$

Bis zu diesem Punkt haben wir nur eine der beiden Bedingungen berücksichtigt, die die Skalenfelder erfüllen müssen. Die zweite Bedingung ist Gl. (9.43) für $y_g = 0$. Wenn $\Upsilon(\varphi)$ proportional zu φ^n ist, nimmt (9.43) die folgende Form an:

$$n(n-1)[n-2+12\alpha]\varphi_1^{n-4} = 0, \quad (9.56)$$

In (9.56) haben wir mit (9.21) verwendet, daß die folgende Relation gilt:

$$\frac{8\lambda_*}{(1-2\lambda_*)} = 12\alpha \approx 5.0395.$$

Die Bedingung (9.56) ist erfüllt, wenn zumindest eine der folgenden Bedingungen gilt:

$$n = 0, \quad n = 1, \quad n = 2 - 12\alpha, \quad \varphi_1^{n-4} = 0.$$

Die ersten drei Bedingungen liefern uns nur endlich viele Skalenfelder. Wir erwarten jedoch unendlich viele. Daher sollten wir sinnvollerweise $\varphi_1^{n-4} = 0$ fordern. Diese Bedingung führt zu zwei möglichen Schlussfolgerungen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 0 & \quad \text{mit } \operatorname{Re} n > 4, \\ \varphi_1 \rightarrow \infty & \quad \text{mit } \operatorname{Re} n < 4. \end{aligned}$$

Wir können den ersten Fall klar ausschließen; da die Metrik mit $\varphi = 0$ singulär ist, sollten wir $\varphi_1 = 0$ nicht als Entwicklungspunkt in der Berechnung der anomalen Dimension verwenden. Übrig bleibt die Option $\varphi_1 \rightarrow \infty$, die wir bereits an anderer Stelle motiviert haben: Für sehr große Werte für φ_1 hängt die anomale Dimension η_N nicht mehr von φ_1 ab.

Somit kann man aufgrund der Stabilitätsanalyse schließen, daß nur $\varphi_1 \rightarrow \infty$ eine sinnvolle Wahl ist. Für die Skalenfelder mit $y_g = 0$ und $\Upsilon(\varphi)$ proportional zu φ^n bedeutet das, daß der Exponent n durch die folgende Bedingung eingeschränkt ist:

$$\operatorname{Re} n(\theta) \equiv n'(\theta', \theta'') < 4. \quad (9.57)$$

Um das Spektrum der Skalendimensionen zu erhalten, kombinieren wir nun die beiden Bedingungen, die die Skalenfelder erfüllen müssen. Die erlaubten Werte von (θ', θ'') sind derart, daß die Realteile n'_\pm , die durch die Ausdrücke (9.55) gegeben sind, streng kleiner als Vier sind. Es existieren daher die folgenden zwei Familien von Skalenfeldern $(y_g, \Upsilon) = (0, \varphi^n)$:

Die „ n_+ -Familie“: Mit der Bedingung $n'_+(\theta', \theta'') < 4$ erhalten wir aus Gl. (9.55a) nach einmaligen Quadrieren die folgende Ungleichung:

$$\frac{2}{\omega^2} (4 - \omega)^2 - \left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right) > \sqrt{\left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\theta''}{\alpha \omega^2}\right)^2}. \quad (9.58)$$

Nach weiterem Quadrieren und etwas Algebra stellen wir fest, daß für jeden Punkt (θ', θ'') in der komplexen θ -Ebene ein Skalenfeld $(y_g, \Upsilon) = (0, \varphi^{n'_+ + in''_+})$ mit komplexer Skalendimension $\theta \equiv \theta' + i\theta''$ existiert, die die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\theta' > -a_1 + a_2 \theta''^2. \quad (9.59a)$$

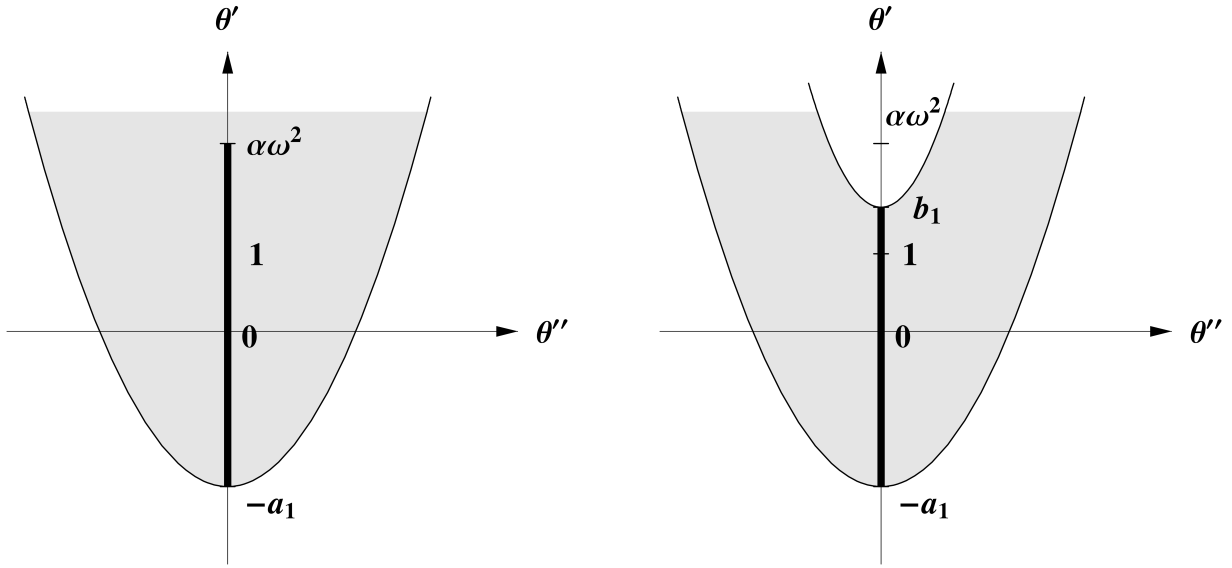


Abbildung 9.2: Linke Abbildung: Die Punkte in dem schattierten Bereich beziehen sich auf die Skalendimensionen (θ', θ'') , die durch die „ n_+ -Familie“ realisiert sind. Der fett gedruckte Abschnitt der vertikalen Achse repräsentiert die Skalensfelder mit $n'_+ = 0$. Die Punkte oberhalb der Parabel $\theta' = -a_1 + a_2 \theta''^2$ (siehe (9.59)) erfüllen die Bedingung $n'_+ < 4$. Rechte Abbildung: Hier ist zusätzlich die Bedingung $n'_+ \geq 2$ berücksichtigt. Diese ist durch alle Punkte unterhalb der oberen Parabel $\theta' = b_1 + b_2 \theta''^2$ (siehe Abschnitt 9.5.2) erfüllt.

In (9.59a) haben wir die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv \alpha (16 - 8\omega) = 4 (2^{1/3} - 1) \approx 1.0397, \\ a_2 &\equiv \frac{1}{4\alpha (4 - \omega)^2} = 3 \frac{2^{1/3}}{(7 \cdot 2^{1/3} - 3)^2} \approx 0.1116. \end{aligned} \quad (9.59b)$$

Die zu (θ', θ'') gehörenden Exponenten $n' + in''$ sind durch die Gleichungen (9.55a) und (9.55b) mit dem oberen Vorzeichen gegeben. Der Bereich der erlaubten Skalendimensionen ist durch die Parabel $\theta' = -a_1 + a_2 \theta''^2$ gegeben, die in Abbildung 9.2 dargestellt ist.

Die „ n_- -Familie“: Im Gegensatz zur „ n_+ -Familie“ existiert hier für *jeden* Punkt (θ', θ'') in der komplexen θ -Ebene ein Skalensfeld $(y_g, \Upsilon) = (0, \varphi^{n'_- + in''_-})$ mit der komplexen Skalendimension $\theta \equiv \theta' + i\theta''$. Der Grund dafür ist, daß n'_- maximal den Wert $\omega \approx 1.691$ annehmen kann (siehe Gl. (9.55a) mit dem unteren Vorzeichen). Die zugehörigen Exponenten $n' + in''$ sind durch die Gleichungen (9.55a,b) mit dem unteren Vorzeichen gegeben.

In jeder der beiden Familien sind die Skalenfelder mit $\theta' > 0$, $\theta' = 0$ und $\theta' < 0$ relevant, marginal beziehungsweise irrelevant.

Weiterhin finden wir den Spezialfall (9.52) mit $\theta' = \alpha \omega^2 \approx 1.2$ und $\theta'' = 0$. Da $\omega \approx 1.69$ ist, wächst es asymptotisch viel langsamer an als proportional zu φ^4 und definiert daher ein relevantes Skalenfeld.

Alle Skalendimensionen treten in komplex konjugierten Paaren auf. Wenn (y_g, Υ) eine komplexe Lösung der linearisierten Flußgleichung für (θ', θ'') ist, dann ist (y_g^*, Υ^*) eine Lösung mit $(\theta', -\theta'')$. Linearkombinationen aus (y_g, Υ) und (y_g^*, Υ^*) bilden die folgenden zwei reellen Lösungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \delta g_k \\ \delta Y_k(\varphi) \end{pmatrix} &= \varepsilon |h| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi^{n'} e^{-\theta' t} \cos(n'' \ln \varphi - \theta'' t + \delta), \\ \operatorname{Im} \begin{pmatrix} \delta g_k \\ \delta Y_k(\varphi) \end{pmatrix} &= \varepsilon |h| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi^{n'} e^{-\theta' t} \sin(n'' \ln \varphi - \theta'' t + \delta). \end{aligned} \quad (9.60)$$

Hier ist $\Upsilon(\varphi) = h \varphi^n$, wobei wir eine komplexe Amplitude $h = |h| e^{i\delta}$ zulassen. In Gl. (9.60) steht der komplexe Exponent (n', n'') entweder für (n'_+, n''_+) oder für (n'_-, n''_-) ; wir berechnen ihn gemäß (9.55) aus der komplexen Skalendimension (θ', θ'') . Alle linearen Lösungen mit $n'' \neq 0$ sind offensichtlich keine Polynome in φ ; sie hängen periodisch sowohl von φ als auch von der Skala k ab. Wenn φ den singulären Punkt einer verschwindenden Metrik, $\varphi = 0$, erreicht, oszillieren die Lösungen unendlich schnell. Lösungen mit $n'' = 0$ oszillieren nicht; sie sind aber keine Polynome, sofern n' keine natürliche Zahl ist.

(b) Skalenfelder mit $y_g \neq 0$

Wir schalten nun die Inhomogenität in Gl. (9.45) ein, das heißt wir berücksichtigen jetzt die Terme proportional zu y_g . Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung besitzt die Form

$$\Upsilon(\varphi) = \Upsilon_{\text{in}}(\varphi) + \Upsilon_{\text{hom}}(\varphi), \quad (9.61)$$

wobei Υ_{in} eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Die Funktion Υ_{hom} ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (9.47), mit demselben Parameter θ . Durch einen Ansatz proportional zu φ^4 finden wir die folgende spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (9.45):

$$\Upsilon_{\text{in}}(\varphi) = \frac{y_* y_g}{g_*} + y_g \frac{\gamma(\theta)}{4 - 12\alpha - \theta} \varphi^4. \quad (9.62)$$

Die zweite Bedingung, die die Lösung Υ erfüllen muß, ist Gl. (9.44). Wenn wir $\Upsilon = \Upsilon_{\text{in}} + \Upsilon_{\text{hom}}$ mit Υ_{in} aus (9.62) in Gl. (9.44) einsetzen, so nimmt diese Bedingung die folgende Form an:

$$\theta = 2 - \kappa \frac{\gamma(\theta)}{4 - 12\alpha - \theta} + \vartheta_{\text{hom}}. \quad (9.63)$$

In (9.63) haben wir die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\vartheta_{\text{hom}} \equiv -\frac{g_*^2}{3\pi y_g} \frac{\lambda_*}{(1 - 2\lambda_*)^4} \left[\frac{\Upsilon_{\text{hom}}'''(\varphi_1)}{\varphi_1} + \frac{8\lambda_*}{1 - 2\lambda_*} \frac{\Upsilon_{\text{hom}}''(\varphi_1)}{\varphi_1^2} \right], \quad (9.64)$$

$$\kappa \equiv \frac{8g_*^2 \lambda_* (1 + 2\lambda_*)}{\pi (1 - 2\lambda_*)^5} = 288\pi (1 + 2\lambda_*). \quad (9.65)$$

Die Konstante κ ist unabhängig von der Skalendimension θ . Wie bereits erwähnt, haben wir hier die Wahl $\varphi_1 \rightarrow \infty$ getroffen. Gl. (9.63) bestimmt die Werte für θ , für die Skalenfelder mit $y_g \neq 0$ existieren. Wir können sie wie folgt lösen:

- (i) Wir nehmen an, daß die Lösungen $\theta_{1,2}$ von (9.63) derart sind, daß $\vartheta_{\text{hom}} = 0$ ist für die Funktion Υ_{hom} , die die homogene Gleichung (9.47) mit $\theta = \theta_{1,2}$ löst.
- (ii) Wir bestimmen $\theta_{1,2}$, indem wir $\vartheta_{\text{hom}} = 0$ in Gl. (9.63) einsetzen und dann die folgende reduzierte Gleichung lösen:

$$\theta = 2 - \kappa \frac{\gamma(\theta)}{4 - 12\alpha - \theta}. \quad (9.66)$$

- (iii) Wie beweisen die Selbstkonsistenz dieser Lösung, indem wir zeigen, daß die in (ii) erhaltenen Werte $\theta_{1,2}$ tatsächlich zu der Lösung der homogenen Gleichung mit $\vartheta_{\text{hom}} = 0$ gehören.

Gl. (9.66) ist eine quadratische Gleichung für θ . Mit den Definitionen der verschiedenen Konstanten finden wir, daß die Lösungen ein komplex konjugiertes Paar $\theta_{1,2} = \theta' \pm i\theta''$ sind, mit den folgenden Werten für θ' beziehungsweise θ'' :

$$\theta' = 4, \quad \theta'' = 2\sqrt{2} \sqrt{1 + 3 \cdot 2^{1/3}} \approx 6.1837 \quad (9.67)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (9.47) ist dann durch die folgende Funktion gegeben:

$$\Upsilon_{\text{hom}} = h_+ \varphi^{n_+(\theta', \theta'')} + h_- \varphi^{n_-(\theta', \theta'')}. \quad (9.68)$$

Hierbei sind h_+ und h_- komplexe Konstanten. Mit (9.55) berechnen wir für die kritischen Exponenten (9.67) die Realteile der Exponenten n_+ und n_- :

$$n'_+(\theta', \theta'') \approx 3.87, \quad n'_-(\theta', \theta'') \approx -0.488 \quad (9.69)$$

Wir sehen, daß sowohl der Realteil von n_+ als auch von n_- kleiner als Vier ist. Wir erhalten also tatsächlich $\vartheta_{\text{hom}} = 0$, wenn wir die allgemeine homogene Lösung Υ_{hom} mit n_+ und n_- aus (9.69) in Gl. (9.64) einsetzen und den Grenzfall $\varphi_1 \rightarrow \infty$ betrachten. Damit haben wir die Konsistenz dieser Lösungsstrategie bewiesen.

Wir stellen fest, daß $(y_g \neq 0, \Upsilon_{\text{in}})$ das einzige Skalenfeld ist, das asymptotisch proportional zu φ^4 anwächst; alle anderen Skalenfelder wachsen weniger stark an und spielen daher keine führende Rolle im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$. Das komplexe Skalenfeld – oder äquivalent dazu die zwei reellen Skalenfelder (siehe Gl. (9.60)) – ist exakt das Skalenfeld, das wir in der Stabilitätsanalyse des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes in der Einstein-Hilbert-Trunkierung erhalten. Die Zahlen (9.67) sind sogar genau die kritischen Exponenten, die wir in der Stabilitätsanalyse des NGFP in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung erhalten (siehe Abschnitt 8.3). Der Realteil θ' beschreibt, wie stark die Trajektorien vom NGFP angezogen werden; der Imaginärteil θ'' ist dafür verantwortlich, daß die Trajektorien Spiralen bilden in der Nähe des NGFP im (g, λ) -Theorienraum. (Siehe hierzu die Abbildungen 5.4 und 5.6.) In der lokalen Potentialnäherung müssen wir den zweidimensionalen (g, λ) -Raum als einen Unterraum des unendlich-dimensionalen $(g, Y(\cdot))$ -Theorienraumes ansehen.

Zusammengefaßt können wir den linearen Fluß in der Nähe des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes auf dem $(g, Y(\cdot))$ -Raum wie folgt beschreiben. Es existieren zwei Skalenfelder mit nicht-verschwindender g -Komponente. Ihre einzige andere nicht-verschwindende Komponente liegt in der φ^4 -Richtung des Funktionenraumes $\{Y(\cdot)\}$, die wir mit der λ -Richtung der CREH-Trunkierung identifizieren. Diese zwei Skalenfelder sind relevant; sie haben die kritischen Exponenten $\theta' = 4$ und $\theta'' \approx 6.18$. Diese stimmen *exakt* mit denen der CREH-Näherung überein (siehe die Diskussion in Abschnitt 8.3). Alle anderen Skalenfelder haben verschwindende g -Komponenten und entsprechen Störungen des Fixpunktpotentials, die sich nur auf das Potential beziehen. Es existieren sowohl relevante als auch irrelevante Skalenfelder dieses Typs; im allgemeinen beziehen sie sich auf nicht-polynomielle, oszillierende Funktionen des Feldes φ (siehe Gl. (9.60)).

9.5.2 Die UV-kritische Mannigfaltigkeit und Subsidiaritätsbedingungen

Im einfachsten Fall, wenn die Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix am NGFP eine vollständige Basis bilden, parametrisiert die Untermenge der Eigenvektoren, die zu den Eigenwerten $-\theta$ mit positivem Realteil gehören, den Tangentialraum zur UV-kritischen Mannigfaltigkeit \mathcal{S}_{UV} . Die Dimension Δ_{UV} von \mathcal{S}_{UV} ist dann gleich der Anzahl der Skalenfelder mit positivem Realteil. Diese sind relevant in dem Sinne, daß sie anwachsen, wenn k kleiner wird. Da jede Trajektorie, die vollständig innerhalb von \mathcal{S}_{UV} liegt, eine mögliche asymptotisch sichere Quantentheorie definiert, existiert eine Δ_{UV} -Parameterfamilie solcher Theorien, wenn die Lösungen der linearisierten Flußgleichungen sich zu Lösungen der vollen nicht-linearen Gleichungen verallgemeinern, die bis zu $k = 0$ fortgesetzt werden können. Wenn die letzte Bedingung nicht für alle Skalenlösungen erfüllt ist, ist die Anzahl der freien Parameter kleiner als Δ_{UV} .

Unsere Stabilitätsanalyse in Abschnitt 9.5.1 zeigt: *Für jede spezielle Definition des Funktionenraumes $\{Y(\cdot)\}$ existieren unendlich viele Richtungen im trunkierten Theorienraum, entlang derer Trajektorien auf linearisiertem Niveau für $k \rightarrow \infty$ in den Nicht-Gauß'schen Fixpunkt gezogen werden.* Ob dieses Ergebnis direkt relevant für die Dimension von \mathcal{S}_{UV} in der vollen Quantengravitation und für deren Vorhersagekraft ist, ist nicht klar. Die tatsächliche Anzahl Δ der freien Parameter, die die Quantentheorie besitzt, kann nur auf nicht-linearem Niveau bestimmt werden. Diese Anzahl kann sich natürlich von Δ_{UV} unterscheiden, das sich auf (den Tangentialraum von) \mathcal{S}_{UV} bezieht. Es kann beispielsweise auch in der vollen (nicht-trunkierten) Theorie passieren, daß nicht alle Trajektorien, die auf \mathcal{S}_{UV} beginnen, bis $k = 0$ fortgesetzt werden können, was dann bedeutet, daß Δ kleiner als Δ_{UV} ist. Auch wenn diese Trajektorien $k = 0$ erreichen, werden wir im allgemeinen die meisten von ihnen nicht akzeptieren können, da sie zusätzliche physikalische Kriterien nicht erfüllen werden. Ein solches Kriterium ist beispielsweise die Existenz eines klassischen Regimes. Dies kann die Zahl Δ weiter verringern. Dieser Punkt könnte nur durch eine ausgedehnte numerische Analyse der partiellen Differentialgleichung für das laufende Potential Y_k analysiert werden. Wie wollen diese Analyse hier jedoch nicht durchführen; es ist insbesondere nicht klar ist, wie Δ in der konform-reduzierten Theorie mit dem entsprechenden Δ in der vollen Theorie in Verbindung steht, die alle Freiheitsgrade der Metrik quantisiert.

Wir wollen nun den anderen oben erwähnten Aspekt diskutieren: die genaue Definition des Theorienraumes. Bereits bei der Betrachtung des linearisierten Flusses in der Nähe des NGFP existiert eine Mehrdeutigkeit, die enormen Einfluß auf die Anzahl der relevanten Richtungen hat: die Wahl des Funktionenraumes $\{Y(\cdot)\}$, in dem alle erlaubten Potentialterme und somit alle Skalenfelder „leben“ sollen. In der Analyse in Abschnitt 9.5.1 war die einzige Bedingung (neben Differenzierbarkeit), die wir gestellt haben, daß das asymptotische Wachstum der Skalenfelder nicht stärker als proportional zu φ^4 sein soll (siehe dazu auch Abschnitt 8.1). Um zu zeigen, daß die genaue Spezifikation des Raumes $\{Y(\cdot)\}$ entscheidend ist, wollen wir im folgenden einige Funktionenräume betrachten. Zu diesem Zeitpunkt ist jedoch nicht klar, welche Wahl letztendlich die korrekte sein wird, das heißt welche eine möglichst gute Annäherung an die volle Quanten-Einstein-Gravitation ist.

(a) Die Subsidiaritätsbedingung $Y^{\text{sing}} = 0$: $n' \geq 2$

In Abschnitt 8.4 haben wir gezeigt, daß der Renormierungsgruppen-Fluß keine Beiträge zu Y_k^{sing} erzeugt, wenn Y_k^{sing} in der Anfangsbedingung nicht vorhanden ist:

$$Y_k^{\text{sing}} = 0 \quad \implies \quad k\partial_k Y_k^{\text{sing}} = 0.$$

Ferner haben wir in Abschnitt 9.4 herausgearbeitet, daß das Fixpunktpotential für beide der betrachteten Topologien keinen singulären Anteil besitzt: $Y_*^{\text{sing}} = 0$. Dies bedeutet, daß der Funktionenraum $\mathcal{Y} \equiv \{Y \mid Y^{\text{sing}} = 0\}$ den Fixpunkt enthält und somit invariant ist unter dem RG-Fluß: *Keine Trajektorie, die in \mathcal{Y} startet, wird ihn jemals verlassen.*

Als Konsequenz können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die *Subsidiaritätsbedingung* $Y^{\text{sing}} = 0$ einführen und die Theorie auf dem eingeschränkten Funktionenraum $\mathcal{Y} \equiv \{Y \mid Y^{\text{sing}} = 0\}$ definieren. Die Bedingung $Y^{\text{sing}} = 0$ führt zu einer entsprechenden Bedingung für die erlaubten Basisvektoren in den Tangentialräumen von \mathcal{Y} , insbesondere am NGFP: erlaubte Skalenfelder haben verschwindende Komponenten in den „sing“-Richtungen. Für das Skalenfeld mit polynomieller Y -Komponente, $(y_g, \Upsilon) = (0, \varphi^n)$, ist diese Bedingung erfüllt, wenn $\Upsilon'' = n(n-1)\varphi^{n-2}$ im Grenzfall $\varphi \rightarrow 0$ nicht anwächst, das heißt wenn der Realteil des Exponenten n mindestens den Wert Zwei besitzt, $n' \equiv \text{Re } n \geq 2$, beziehungsweise wenn $n = 0$ und $n = 1$ gilt.

Die Forderung $n'_\pm \geq 2$ für die Skalenfelder $(0, \varphi^n)$ führt auf die beiden folgenden Konsequenzen:

- (i) Die n_- -Familie wird vollständig eliminiert, denn keine komplexe Skalendimension erfüllt die Bedingung $n'_-(\theta', \theta'') \geq 2$.
- (ii) In der n_+ -Familie erhalten wir mit der Bedingung $n'_+ \geq 2$ aus Gl. (9.55a) nach einmaligem Quadrieren die folgende Ungleichung:

$$\frac{2}{\omega^2} (2 - \omega)^2 - \left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right) \leq \sqrt{\left(1 - \frac{\theta'}{\alpha \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\theta''}{\alpha \omega^2}\right)^2}. \quad (9.70)$$

Nach weiterem Quadrieren und etwas Algebra sehen wir, daß jeder Punkt (θ', θ'') in der komplexen θ -Ebene genau dann die Bedingung $n'_+(\theta', \theta'') \geq 2$ erfüllt, wenn er der folgenden Ungleichung genügt:

$$\theta' \leq b_1 + b_2 \theta''^2. \quad (9.71a)$$

In (9.71a) haben wir die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv 4\alpha(\omega - 1) = 2 \left(1 - \frac{2^{1/3}}{3}\right) \approx 1.160, \\ b_2 &\equiv \frac{1}{4\alpha(2 - \omega)^2} = \frac{1}{3} \frac{2^{1/3}}{(2^{1/3} - 1)^2} \approx 6.217. \end{aligned} \quad (9.71b)$$

Die zu (θ', θ'') gehörenden Exponenten $n' + in''$ sind durch die Gleichungen (9.55a) und (9.55b) mit dem oberen Vorzeichen gegeben. Die Skalendimensionen (θ', θ'') der erlaubten Skalenfelder gehören zu den Punkten in der θ -Ebene, die unterhalb der Parabel $\theta' = b_1 + b_2 \theta''^2$, und – aufgrund der Einschränkung $n'_+ < 4$ (siehe die Abschnitte 8.1 und 9.5.1) – oberhalb der Parabel (9.59a) liegen. Der entsprechende Bereich ist im rechten Bild von Abbildung 9.2 dargestellt.

(b) Reelle Exponenten: $n \in \mathbb{R}$

Als weiteres Beispiel nehmen wir einen Funktionenraum \mathcal{Y} an, für den wir die oszillierenden Skalenfelder ausschließen; wir müssen hier also $n'' = 0$ fordern. Mit Gl. (9.55) können wir zeigen, daß die Skalenfelder \mathcal{Y} proportional zu φ^n mit $n''_{\pm} = 0$ die folgenden Skalendimensionen besitzen:

$$\{(\theta', \theta'' = 0) \mid -\infty < \theta' \leq \alpha \omega^2\}. \quad (9.72a)$$

Aus (9.72a) erhalten wir dann mit Gl. (9.55) die folgenden *reellen Exponenten*:

$$n \equiv n'_{\pm} = \omega \left[1 \pm \sqrt{1 - \theta' / \alpha \omega^2} \right]. \quad (9.72b)$$

In der komplexen θ -Ebene liegen die erlaubten Skalendimensionen auf einem Teil der θ' -Achse. Wenn wir zusätzlich zu $n'' = 0$ die Bedingung $n' < 4$ stellen, finden wir:

- In der n_- -Familie erfüllen alle Skalenfelder mit $n'' = 0$ auch $n'_- < 4$.
- In der n_+ -Familie besitzen die Skalenfelder, die sowohl $n''_+ = 0$ als auch $n'_+ < 4$ erfüllen, die folgenden Skalendimensionen:

$$\{(\theta', \theta'' = 0) \mid -a_1 < \theta' \leq \alpha \omega^2\}. \quad (9.73a)$$

Daraus erhalten wir die folgenden reellen Exponenten:

$$n \equiv n'_+ = \omega \left[1 + \sqrt{1 - \theta' / \alpha \omega^2} \right]. \quad (9.73b)$$

In Abbildung 9.2 beziehen sich diese Skalenfelder auf das fett gedruckte Intervall auf der vertikalen Achse im linken Bild.

Wenn wir dazu noch fordern, das keine singulären Terme in Y_k existieren sollen, das heißt wenn wir zusätzlich noch $n_{\pm} \geq 2$ fordern, stellen wir folgendes fest:

- In der n_- -Familie existieren keine erlaubten Skalenfelder, da n'_- stets, das heißt für alle θ' aus der Menge $\{-\infty < \theta' \leq \alpha \omega^2\}$, kleiner als $\omega \approx 1.691$ ist.
- In der n_+ -Familie sind die erlaubten Skalenfelder diejenigen, deren Skalendimension θ' in dem halboffenen Intervall $(-1.0397, 1.160]$ liegt (siehe die Gleichungen (9.59) und (9.71)). Diese erlaubten Skalendimensionen liegen im fett gedruckten Intervall auf der θ' -Achse, das im rechten Bild von Abbildung 9.2 dargestellt ist.

(c) Ganzzahlige Exponenten: $n \in \mathbb{Z}$

Als letztes Beispiel für \mathcal{Y} wollen wir annehmen, daß $\{\varphi^n, n \in \mathbb{Z}\}$ eine „Basis“ in $\{Y(\cdot)\}$ ist, so daß sich jede Funktion in eine Laurent-Reihe entwickeln läßt,

$$Y(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi^n.$$

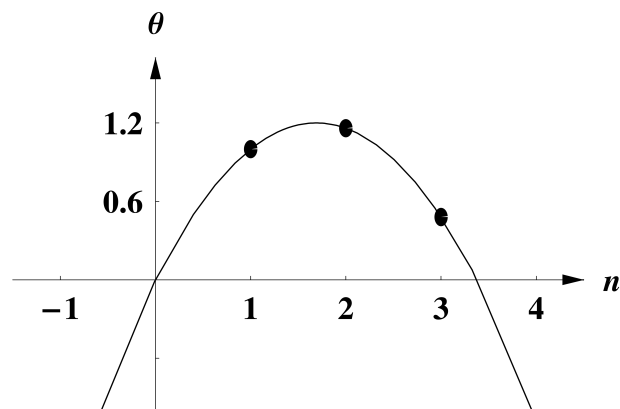


Abbildung 9.3: Die Funktion $\theta(n)$ aus (9.48) für reelle n . Sie ist nur zwischen $n = 0$ and $n = 2\omega \approx 3.38$ positiv. Die drei markierten Punkte kennzeichnen die relevanten Skalendimensionen für ganzzahlige Exponenten n .

Die Skalenfelder mit verschwindender g -Komponente, das heißt mit $y_g = 0$, sind immer noch die Monome φ^n , wir schränken n allerdings auf reelle und ganzzahlige Werte ein. Als Konsequenz daraus ist auch die Skalendimension $\theta(n)$ reell; sie ist durch Gl. (9.48) gegeben. In Abbildung 9.3 haben wir die Funktion $\theta = \theta(n)$ für reelle n dargestellt. Für ganzzahlige n existieren genau drei relevante Skalenfelder, mit den Skalendimensionen $\theta \approx 1.160$, $\theta = 1$ und $\theta \approx 0.480$.

An diesem Punkt ist nicht klar, wie wir den Funktionenraum $\{Y(\cdot)\}$ optimal wählen sollen, aber es ist offensichtlich, daß die Anzahl der relevanten Richtungen entscheidend von dieser Wahl abhängt. Die optimale Wahl würde diejenige sein, für die die lokale Potentialnäherung der vollen Quantengravitation so ähnlich wie möglich ist. Um eine solche zu finden, müßten wir ein besseres Verständnis davon haben, inwieweit die Invarianten der vollen Metrik $g_{\mu\nu}$ (möglicherweise in Kombinationen) mit den Invarianten in der konform-reduzierten Wirkung in Verbindung stehen. Dann könnten wir eine Rangliste über deren Bedeutung aufstellen.

Wir wollen dieses Kapitel mit einigen Anmerkungen schließen:

(i) Wenn man die Symmetrien reduziert, indem man nur Metriken mit zwei Killing-Vektoren quantisiert [30], besitzt der Nicht-Gauß'sche Fixpunkt, den man dort findet, auch unendlich viele relevante Richtungen. Tatsächlich sind *alle* durch diese Näherung erhalte-

nen Skalenfelder relevant. Ihre Beziehung zu den Invarianten der vollen vierdimensionalen Metrik ist ebenso unklar.

(ii) Für den unbeschränkten Funktionenraum $\{Y(\cdot)\}$ sind die reellen $y_g = 0$ -Skalenfelder durch Gl. (9.60) gegeben. Diese Lösungen sind keine Polynome in φ , wenn der Exponent n keine natürliche Zahl ist. In gewisser Hinsicht sind diese Skalenfelder analog zu den sogenannten *Halpern-Huang-Skalenfeldern* [64, 65] in gewöhnlichen skalaren Materiefeld-Theorien. Halpern und Huang analysierten ihren Gauß'schen Fixpunkt in der lokalen Potentialnäherung und fanden – ganz unerwartet – unendlich viele relevante Richtungen. In der Störungstheorie hat man sie übersehen, da die Potentiale im Bezug auf die physikalische Metrik keine Polynome im Feld sind. Bis jetzt ist ihr Status noch immer unklar. In der Literatur [66] wurde argumentiert, daß man sie durch eine entsprechende Wahl des Funktionenraumes sollte eliminieren können. Wenn man sie nun in ähnlicher Weise in der Gravitation vernachlässigt, bleiben lediglich drei relevante Richtungen übrig, die Monome proportional zu φ , φ^2 und φ^3 .

(iii) In der obigen Analyse beziehen wir uns auf die R^4 -Topologie. In der S^4 -Topologie ist es nicht möglich, vergleichbar transparente Ergebnisse in analytischer Form zu erhalten, da wir das Fixpunktpotential nur numerisch bestimmen können. Wir erwarten jedoch, daß wir auf der Sphäre keine qualitativ neuen Eigenschaften finden werden.

DER ÜBERGANG ZU EINER PHASE MIT UNGEBROCHENER DIFFEOMORPHISMUS-INVARIANZ

Bei der Untersuchung des Renormierungsgruppen-Flusses und insbesondere der Struktur der UV-kritischen Mannigfaltigkeit \mathcal{S}_{UV} auf nicht-linearem Niveau müssen wir uns meist auf numerische Methoden verlassen. Wir haben hier im wesentlichen zwei Strategien, um Trajektorien in \mathcal{S}_{UV} zu finden. Die erste besteht darin, daß wir beim Fixpunktpotential Y_* starten, das durch ein relevantes Skalenfeld gestört ist, und dann den RG-Fluß in Richtung kleinerer Werte für k berechnen. Wir haben dieses „Abwärtslaufen“ in der R^4 -Topologie ausprobiert, in der wir alle Skalenfelder am NGFP exakt kennen. Wie man im R^4 -Phasenportrait (siehe Abbildung 5.4) erkennen kann, liegen die Spiralen in der Nähe des Fixpunktes sehr eng beieinander; es war daher nicht möglich, diese Strategie mit einer verlässlichen numerischen Genauigkeit anzuwenden.

Die zweite Strategie besteht darin, daß wir einen Anfangspunkt im Theorienraum raten und von diesem Punkt aus den Fluß „aufwärts“ (das heißt in Richtung größerer Werte für k) berechnen. Wenn dieser Punkt tatsächlich auf der UV-kritischen Mannigfaltigkeit liegt, wird die Trajektorie den Fixpunkt für $k \rightarrow \infty$ treffen. In der Praxis müssen wir den Anfangspunkt solange variieren, bis die Trajektorie für eine *sehr lange* RG-Zeit nahe am NGFP bleibt. Kleine Fehler im geratenen Anfangspunkt werden immer dazu führen, daß

die Trajektorie letztendlich vom NGFP wegläuft. Durch genaues Einstellen des Anfangspunktes können wir jedoch eine numerische Näherung an eine Trajektorie in \mathcal{S}_{UV} mit jeder gewünschten Präzision konstruieren. Indem wir systematisch den Anfangspunkt verändern ist es möglich, auf diese Weise zumindest prinzipiell die nicht-lineare Struktur von \mathcal{S}_{UV} herauszuarbeiten. Eine vollständige numerische Analyse dieser Art ist jenseits des Rahmens der vorliegenden Arbeit. Wir wollen in diesem Kapitel einige typische Trajektorien darstellen, die wir mit Hilfe der zweiten Strategie gefunden haben, und deren allgemeine Eigenschaften beschreiben.

Zunächst wollen wir aber eine eher spezielle, dennoch sehr aufschlußreiche Klasse von Trajektorien diskutieren, die wir analytisch finden können.

10.1 Eine analytische Lösung im flachen Raum

In der R^4 -Topologie existiert für *jede* gegebene Trajektorie in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (wir setzen hier immer den Typ IIIa voraus)¹ eine Ein-Parameter-Familie von Trajektorien in \mathcal{S}_{UV} , die wir in geschlossener Form finden können:

$$Y_k(\varphi) = C_1 \frac{g_k}{k} \varphi - \frac{1}{6} \lambda_k \varphi^4. \quad (10.1)$$

Man sieht leicht, daß die Potentiale (10.1) Lösungen der vollständig expliziten partiellen Differentialgleichung (7.55) in vier Dimensionen sind. Hier ist C_1 ein freier Parameter mit Massendimension. Es ist offensichtlich, daß diese Trajektorien innerhalb von \mathcal{S}_{UV} liegen: für $k \rightarrow \infty$ nähern sich die Potentiale (10.1) dem Fixpunktpotential $-\lambda_* \varphi^4/6$. In der Sprache der linearen Stabilitätsanalyse in Abschnitt 9.4.1 ist der Term proportional zu φ relevant; er wächst an, wenn k kleiner wird. (Gl. (10.1) ist allerdings auch jenseits der Linearisierung gültig.) In dimensionsbehafteten Einheiten hat das entsprechende Potential U_k einen skalenunabhängigen Term proportional zum dimensionsbehafteten Feld ϕ :

$$U_k(\phi) = -\frac{3}{4\pi} \left(C_1 \phi - \frac{1}{6} \frac{\Lambda_k}{G_k} \phi^4 \right). \quad (10.2)$$

¹In [46] haben wir ausführlich diskutiert, daß die Trajektorie, die in der Natur realisiert ist, eine Typ IIIa-Trajektorie ist. Sie erlaubt ein langes (das heißt für viele Längenskalen geltendes) klassisches Regime, in dem die Newton-Konstante einen konstanten Wert annimmt.

Wenn $C_1 > 0$ ist, haben die Funktionen $-Y_k(\varphi)$ und $U_k(\phi)$ einen kritischen Punkt, ein Minimum, bei einem nicht-verschwindenden Wert des Feldes:

$$\varphi_0(k) = \left[\frac{3}{2} C_1 \frac{g_k}{\lambda_k} \frac{1}{k} \right]^{1/3} \quad (10.3)$$

$$\phi_0(k) = \left[\frac{3}{2} C_1 \frac{G_k}{\Lambda_k} \right]^{1/3} = \varphi_0(k)/k. \quad (10.4)$$

Wenn $C_1 < 0$ ist, nehmen sowohl $-Y_k(\varphi)$ als auch $U_k(\phi)$ ihr globales Minimum bei $\varphi = 0$ beziehungsweise $\phi = 0$ an.

Im Falle $C_1 > 0$ verschwindet $\varphi_0(k)$ nur im Grenzfall $k \rightarrow \infty$, da dort $\varphi_0(k)$ proportional zu $k^{-1/3}$ ist. Wenn wir k von Unendlich herunter bis zur Wendepunktskala k_T verringern, bewegt sich das Minimum $\varphi_0(k)$ in Richtung *größerer* Werte für φ . Etwas unterhalb der Skala k_T läuft die Trajektorie in das klassische Regime hinein, in dem G_k , Λ_k und $\phi_0(k)$ näherungsweise skalenunabhängig, das heißt k -unabhängig, sind. In diesem Regime steuert $\varphi_0(k)$ *kleinere* Werte für φ an, wenn wir k weiter verringern: $\varphi_0(k) = k \phi_0(k) \propto k$.

In Abbildung 10.1 haben wir die exakte Trajektorie (10.1) für $C_1 = +1$ dargestellt; die zugrunde liegende Trajektorie (g_k, λ_k) ist eine Typ IIIa-Trajektorie mit $g_T = 10^{-14}$ am Wendepunkt. Wir haben diesen sehr kleinen Wert gewählt, da er zu einem langen klassischen Regime führt, siehe [46] und [40]. Die ersten vier Diagramme in Abbildung 10.1 zeigen das Potential $-Y_k(\varphi)$ für verschiedene Werte von k . Die Diagramme (a) und (b) beziehen sich auf Skalen oberhalb des Wendepunktes, $k_T < k < \infty$, während die Diagramme (c) und (d) zu Skalen zwischen dem Wendepunkt und der Abbruchskala, $k_T > k > k_{\text{term}}$, gehören, siehe Abbildung 10.1(e). Hier und im folgenden sind dimensionsbehaftete Größen immer in Einheiten der Wendepunktskala k_T aufgetragen; die gepunktete (gestrichelte) Linie stellt das Fixpunkt- (Wendepunkt-) Potential dar. Die Graustufe der Potentialkurven ändert sich von schwarz nach grau für kleiner werdende Werte von k . Wir haben immer *minus* $Y_k(\varphi)$ aufgetragen, da dies die Funktion ist, die durch Reskalierung mit positiven Faktoren zu dem tatsächlichen Potential $U_k(\phi)$ gehört (siehe Abschnitt 2.2). Die Abbildungen 10.1(b) und (d) sind „Vergrößerungen“ der Abbildungen (a) beziehungsweise (c) im Bereich kleiner Werte für φ . Wir beobachten das folgende Verhalten, das allgemein für alle $C_1 > 0$ gilt: Wenn wir k von $k_{\infty} = \infty$ ausgehend verringern, nimmt das Potential $-Y_k(\varphi)$ sofort sein Minimum bei einem *nicht-verschwindenden* Wert für φ an. Zwischen $k = \infty$ und $k = k_T$ bewegt sich dieses Minimum in Richtung größerer Werte für φ , während es sich wieder zurück in Richtung kleinerer Werte für φ bewegt, wenn k die Skala k_T passiert hat. Es

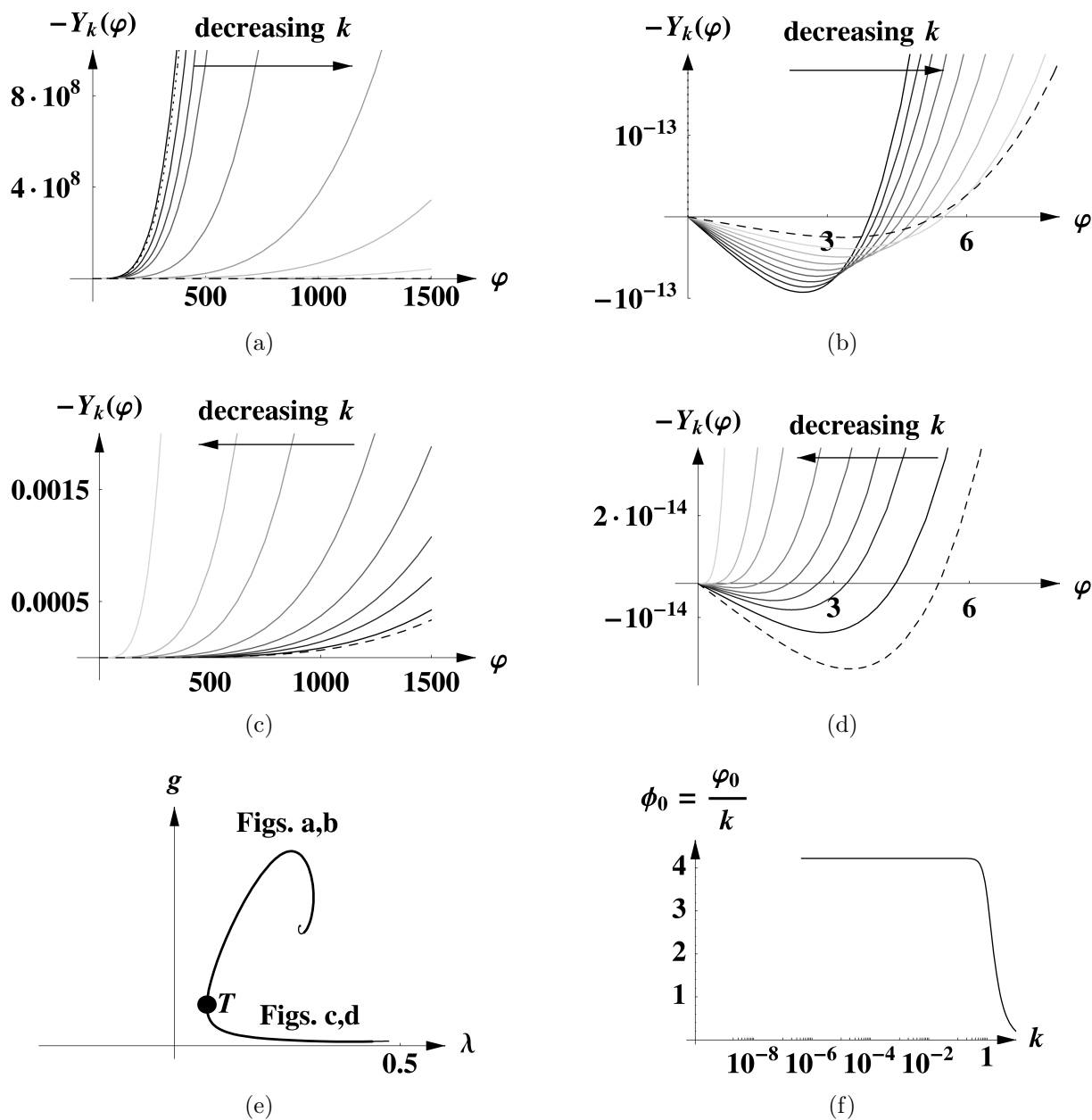


Abbildung 10.1: Die Trajektorie, die in Abschnitt 10.1 diskutiert ist. Die Diagramme (a) und (b) ((c) und (d)) zeigen das Potential für verschiedene Werte für k oberhalb (unterhalb) des Umkehrpunktes k_T , wie er im schematischen Diagramm (e) gezeigt ist. Die gepunktete (gestrichelte) Linie ist das Fixpunkt- (Wendepunkt-) Potential. Die Abbildung (b) ((d)) ist eine Vergrößerung der Abbildung (a) ((c)) bei kleinen Werten für φ . Dimensionsbehaftete Größen sind in Einheiten von k_T gemessen. Die Graustufe der verschiedenen Kurven ändert sich von schwarz nach grau für kleiner werdende Werte für k .

ist aufschlußreich, das letztere Regime in dimensionsbehafteten Einheiten zu betrachten. Abbildung 10.1(f) zeigt die Position des Minimums $\phi_0(k) = \varphi_0(k)/k$ unterhalb des Wendepunktes. Man sieht, daß ϕ_0 den ganzen Weg herunter bis zur Abbruchskala vollkommen konstant ist. (Für die gewählte Trajektorie ist die Abbruchskala $k_{\text{term}} \approx 10^{-7}$.)

Es ist verlockend, diese RG-Trajektorie als Beschreibung einer Art kontinuierlichen Phasenüberganges („zweiter Ordnung“) im Bezug auf die Skala zu interpretieren, der für $k \rightarrow \infty$ stattfindet. Bei $k_{\text{,}=\infty}$ hat das Potential $-Y_k(\varphi)$ sein globales Minimum bei $\varphi = 0$; für alle $k < \infty$ ist es bei einem nicht-verschwindenden $\varphi = \varphi_0(k) \neq 0$ ansässig. Entsprechend nähert sich das Minimum $\phi_0(k)$ von $U_k(\phi)$ kontinuierlich dem Wert Null für $k \rightarrow \infty$ und ist nicht-verschwindend für alle $k < \infty$. Die Bedeutung solcher Minima wird klar, wenn wir nach (laufenden) Lösungen der (laufenden) effektiven Feldgleichungen, das heißt nach stationären Punkten von Γ_k suchen.

In der Tat können wir den Vakuumerwartungswert der Metrik durch Lösen der effektiven Feldgleichung $\delta\Gamma_k/\delta\phi = 0$ finden. Innerhalb der lokalen Potentialnäherung ist der skalenabhängige Metrik-Erwartungswert durch $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k = \phi_0(k)^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ gegeben. Wenn φ_0 gleich Null ist, verschwindet dieser Erwartungswert in Übereinstimmung mit der LPA. Demzufolge ist die Phase, in der das System bei $k_{\text{,}=\infty}$ ist, die Phase einer ungebrochenen Diffeomorphismus-Invarianz [50, 58]. In dieser Phase hat die Metrik einen verschwindenden Erwartungswert mit nicht-trivialen Fluktuationen um $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k = 0$, aber es existiert kein „Metrik-Kondensat“, das die Diffeomorphismus-Invarianz spontan bricht. Für $k < \infty$ bricht eine nicht-verschwindende (und innerhalb der vorliegenden Näherung daher notwendigerweise nicht-entartete) Metrik $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k$ spontan die Diffeomorphismen-Gruppe herunter auf die Stabilitätsgruppe der Grundzustands-Metrik. Für $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k = \phi_0(k)^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ ist dies die (euklidische) Poincaré-Gruppe; $\hat{g}_{\mu\nu}$ ist hierbei die Metrik auf dem flachen Raum.

Wenn ϕ_0 über einen weiten Bereich von k -Werten näherungsweise k -unabhängig ist, definiert die „eingefrorene“ Metrik $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k = \phi_0^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ ein annähernd klassisches Regime. In dem obigen Beispiel haben wir gesehen, daß dies tatsächlich für k zwischen k_{T} und k_{term} der Fall ist. Es ist auch bekannt [40, 46], daß das klassische Regime, das von der Einstein-Hilbert-Trunkierung vorausgesagt wird, umso länger ist, je näher der Wendepunkt am Gauß’schen Fixpunkt liegt. Wenn ϕ_0 nicht von k abhängt, können wir Einheiten derart einführen, daß $\phi_0 = 1$ ist; dann besitzt der Metrik-Erwartungswert die Form $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k = \delta_{\mu\nu}$; hier ist $\hat{g}_{\mu\nu}$ die Referenzmetrik der R^4 -Topologie, $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, und die Skala k nimmt Werte innerhalb des klassischen Bereiches an. Auf diese Weise können wir die Entstehung einer

nahezu klassischen, flachen Raumzeit als ein Kondensations- und Symmetriebrechungs-Phänomen verstehen, das denen in gewöhnlichen skalaren Feldtheorien ähnlich ist.

Wenn man mit Gravitation im klassischen Regime einer gebrochenen Phase vertraut ist, scheint es viel mehr die Ausnahme als die Regel zu sein. Im vorliegenden Zusammenhang erfordert es einen sehr kleinen² Wert für g_T und eine positive Konstante C_1 in (10.1). Für $C_1 < 0$ bleibt das globale Minimum von $-Y_k(\varphi)$ stets bei $\varphi_0 = 0$. Hier ist Gravitation immer in ihrer „symmetrischen Phase“ und die Metrik entwickelt keinen Erwartungswert, noch nicht einmal einen, der von der Skala k unabhängig ist.

10.2 Phasenübergänge erster Ordnung im flachen Raum

In Abbildung 10.2 zeigen wir eine Trajektorie in \mathcal{S}_{UV} auf dem flachen Raum, die wir numerisch mit der zweiten Strategie gefunden haben. Die zugehörige Einstein-Hilbert-Trajektorie hat einen Wendepunkt bei $g_T = 10^{-1}$. Wir haben die Anfangsskala für die Aufwärtsintegration der partiellen Differentialgleichung bei $k_{\text{intl}} = k_T/2$ gewählt, wobei wir $k_T \equiv 1$ in Computer-Einheiten gesetzt haben. Mit der Annahme, daß das Anfangspotential $Y_{k_{\text{intl}}}$ ein Polynom der Form $\varphi + \varphi^2 + \varphi^4$ ist, haben wir die Koeffizienten der Terme proportional zu φ beziehungsweise proportional zu φ^2 so angepaßt, daß $Y_k(\varphi)$ während des Aufwärtslaufens dem Fixpunktpotential $Y_*(\varphi)$ sehr nahe kommt und dort für eine lange RG-Zeit bleibt. Das so angepaßte Anfangspotential besitzt die folgende Form:

$$Y_{k_{\text{intl}}}(\varphi) = -0.10 \varphi + 0.20 \varphi^2 - \frac{1}{6} \lambda_{k_{\text{intl}}} \varphi^4. \quad (10.5)$$

Um eine vollständige Trajektorie zu erhalten, wurde (10.1) ebenso abwärts ausgewertet, das heißt von der Anfangsskala k_{intl} bis zur Abbruchskala k_{term} . Die Abbildungen 10.2(a), (b) und (c) zeigen das laufende Potential für verschiedene Werte für k oberhalb des Umkehrpunktes k_T ; Abbildung 10.2(d) hingegen zeigt repräsentative Potentiale mit k unterhalb von k_T . In Abbildung 10.2(a) sehen wir, daß $Y_k(\varphi)$ sich dem (gepunkteten) Fixpunktpotential für große Werte für φ nähert. Wir konnten nachweisen, daß diese Annäherung oszillierend ist; dies ist eine Konsequenz der Spiralen in der (g, λ) -Ebene (siehe das Phasenportrait in

²Wenn wir versuchen möchten, das reale Universum zu diskutieren, müssen wir $g_T \approx 10^{-60}$ wählen [42, 46].

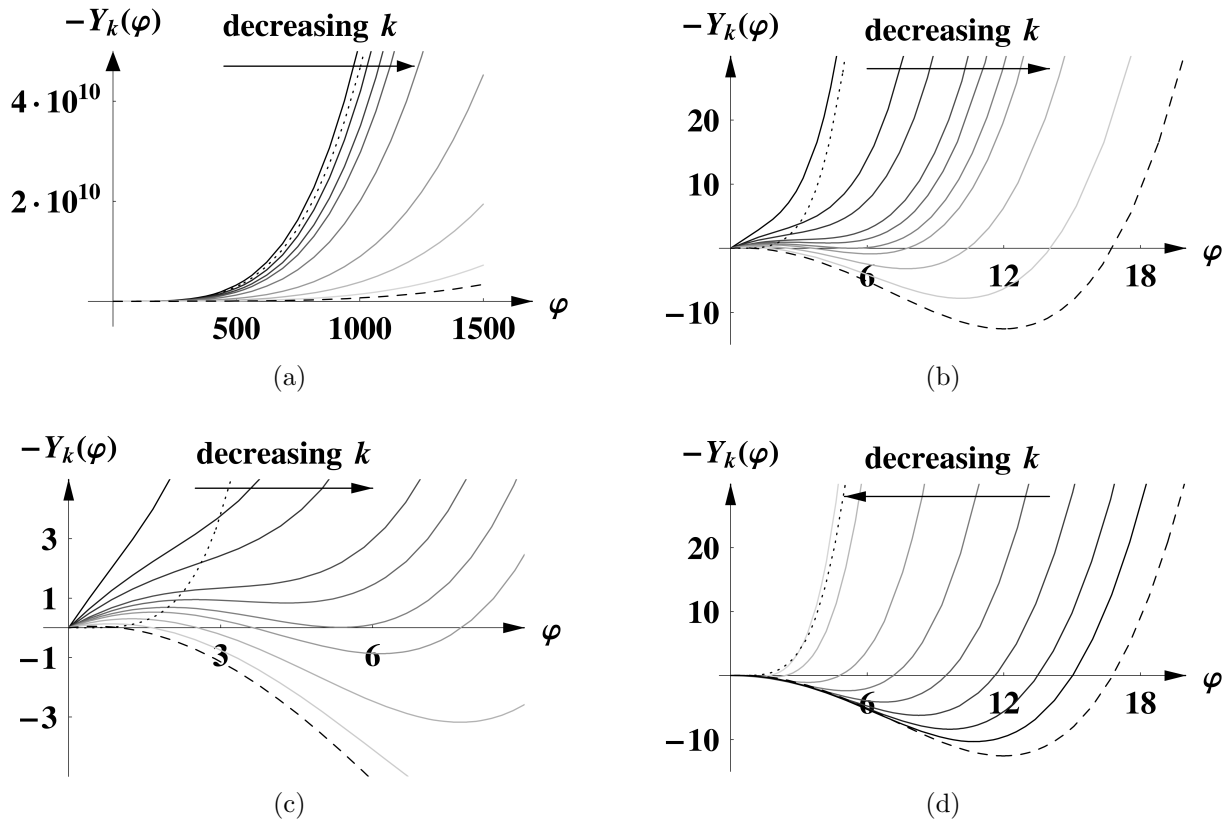


Abbildung 10.2: Die Trajektorie, die in Abschnitt 10.2 diskutiert ist. Die Diagramme (a), (b) und (c) zeigen das Potential für verschiedene Werte für k oberhalb des Umkehrpunktes k_T , das Diagramm (d) zeigt es für Werte für k unterhalb von k_T . Die gepunktete (gestrichelte) Linie ist das Fixpunkt- (Wendepunkt-) Potential. Die Abbildungen (b) und (c) sind Vergrößerungen des Diagramms (a) bei kleinen Werten für φ . Die Graustufe der verschiedenen Kurven ändert sich von schwarz nach grau für kleiner werdende Werte für k .

Abbildung 5.4). Die Abbildungen 10.2(b) und (c) zeigen, daß das Potential bei einem bestimmten Wert für k zunächst einen Wendepunkt und danach ein neues lokales Minimum sowie Maximum entwickelt. Bei der noch kleineren, „kritischen“ Skala k_c wird das lokale Minimum zu einem globalen. Oberhalb von k_T bewegt sich das neue globale Minimum in Richtung größerer Werte für φ ; danach bewegt es sich in Richtung kleinerer Werte für φ , siehe Abbildung 10.2(d). Das letztere Regime ist wieder das klassische, mit einem nahezu konstanten $\phi_0 = \varphi_0/k$. Wenn wir g_T verringern, erhalten wir ein (in k) beliebig langes Regime mit einer annähernd klassischen, flachen Raumzeit.

Im Vergleich zur analytischen Trajektorie in Abschnitt 10.1 gibt es hier zwei neue Eigenschaften des Phasenüberganges: zum einen findet er bei der *endlichen Übergangsskala* $k_c < \infty$ statt und ist *unstetig beziehungsweise diskontinuierlich*. Für $k > k_c$ liegt das globale Minimum bei $\phi_0 = 0$; bei $k = k_c$ springt es zum Wert $\phi_0 > 0$. In Analogie zu Phasenübergängen in gewöhnlichen skalaren Theorien bezeichnen wir diesen als einen Phasenübergang erster Ordnung.

Dieser Trajektorie zufolge verschwindet der Erwartungswert $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k$ für alle $k > k_c$. Man mag sich daher fragen, ob die Feldmoden mit Impulsen oberhalb von k_c korrekt ausintegriert werden. Diese Frage können wir mit „Ja“ beantworten. Um den Grund dafür zu sehen, erinnern wir uns, daß eine RG-Trajektorie ein laufendes Funktional $\Gamma_k[\cdot]$ ist, das auf einem bestimmten Funktionenraum $\{\phi(\cdot)\}$ lebt. Das globale Minimum von Γ_k ist ein einzelner Punkt in diesem Raum, $\phi_0(\cdot)$. Die Flußgleichung für Γ_k hat die Struktur

$$,, k\partial_k \Gamma_k[\phi(\cdot)] = \text{Ausdruck}(\phi(\cdot)) \quad \text{für alle } \phi(\cdot) \text{“};$$

der Punkt $\phi_0(\cdot)$ spielt hier also keine besondere Rolle. Nur nachdem wir die Flußgleichung, die beliebige „off-shell“-Argumente $\phi(\cdot)$ beinhaltet, konstruiert und gelöst haben, können wir nach „on-shell“-Lösungen, das heißt nach Lösungen der effektiven Feldgleichung,

$$(\delta\Gamma_k/\delta\phi)[\phi_0(\cdot)] = 0,$$

suchen. Dann erst können wir entscheiden, ob die Metrik einen nicht-verschwindenden Erwartungswert hat oder nicht.

Im allgemeinen Fall des vollen Funktionals $\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}, \dots]$ existiert jedoch ein Detail, das im vorliegenden Formalismus der konform-reduzierten Quanten-Einstein-Gravitation fehlt. In der ursprünglichen Konstruktion der vollen Mittelwertwirkung der Gravitation [10] wurde angenommen, daß $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ nicht-entartet sind, da dort ihre Inversen $g^{\mu\nu}$ beziehungsweise $\bar{g}^{\mu\nu}$ benötigt wurden. Somit sind $g_{\mu\nu} = 0$ beziehungsweise $\bar{g}_{\mu\nu} = 0$ allenfalls Randpunkte des Raumes $\{g_{\mu\nu}(\cdot), \bar{g}_{\mu\nu}(\cdot), \dots\}$, über dem Γ_k definiert ist. Also kann der ursprüngliche Zugang aus [10] die symmetrische Phase nur als singulären Grenzfall beschreiben. (In der vollen Einstein-Hilbert-Trunkierung zum Beispiel ist $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.) Wir werden das Problem, die ursprüngliche Konstruktion auf einen Theorienraum $\{\Gamma[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}, \dots]\}$ zu verallgemeinern, in dem Γ auch für nicht-invertierbare $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ definiert ist, nicht weiter diskutieren. Wir wollen hier nur erwähnen, daß dieses Problem im vorliegenden Zusammenhang nicht auftaucht, da wir zur Formulierung der Flußgleichung die Referenzmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ verwenden, die immer nicht-entartet ist.

Eine ähnliche Analyse spontaner Symmetriebrechung, aber in einem störungstheoretisch renormierbaren Modell der Quantengravitation, wurde in Ref. [50] durchgeführt. Die Skalierungseigenschaften des Potentials und die Mittelwertmetrik sind dort vollkommen anders, da die Theorie nicht asymptotisch sicher ist. Insbesondere wächst dort $\langle g_{\mu\nu} \rangle_k$ eher an, als daß es für $k \rightarrow \infty$ kleiner wird.

10.3 Phasenübergänge auf der Sphäre

In Abschnitt 10.2 hatten wir herausgefunden, daß in der R^4 -Topologie ein Phasenübergang bei endlichem k stattfinden *kann*. Es ist leicht zu sehen, daß im Falle der S^4 -Topologie ein Phasenübergang, sofern er überhaupt auftritt, bei einem endlichen Wert von k stattfinden *muß*. Auf der Sphäre hat das Fixpunktpotential $-Y_*(\varphi)$ die Form, die in Abbildung 9.1 aufgetragen ist. Im Gegensatz zu dem einfachen Fixpunktpotential $-Y_*$ proportional zu φ^4 auf dem flachen Raum ist diese Funktion *strukturell stabil* in dem Sinne, daß eine stetig differenzierbare infinitesimale Änderung von $-Y_*$ kein neues lokales oder globales Minimum zur Folge haben kann. Dies war anders für $-Y_*$ proportional zu φ^4 , bei dem ein infinitesimaler Term proportional zu φ das globale Minimum von $\varphi_0 = 0$ nach $\varphi_0 \neq 0$ verschieben konnte.

Phasenübergänge auf der Sphäre können sowohl erster Ordnung als auch zweiter Ordnung sein. Angenommen, das Abwärtslaufen startet zum Beispiel bei $-Y_*(\varphi)$, das in Abbildung 9.1 aufgetragen ist, zu dem eine infinitesimale relevante Störungen addiert wurde. Dann kann es passieren, daß sich für eine bestimmte RG-Zeitdauer, nehmen wir mal an für $k_0 < k < \infty$, keine kritischen Punkte bei $\varphi > 0$ formieren, daß aber die Steigung von $-Y_k(\varphi)$ am Ursprung kleiner wird, vom ursprünglichen positiven Wert $-Y'_*(0) > 0$ bis hin zu Null bei $k = k_0$: $-Y'_{k_0}(0) = 0$. Wenn für k unterhalb von k_0 die Steigung weiter fällt, formiert sich ein neues globales Minimum bei $\varphi_0(k) > 0$ und $\varphi_0(k)$ bewegt sich stetig vom Ursprung weg. Das ist dann ein Phasenübergang „zweiter Ordnung“, der bei der Skala $k = k_0$ stattfindet. Die Skala k_0 ist notwendigerweise endlich ($k_0 < \infty$), da die Anfangssteigung $-Y_*(0)$ streng positiv ist; daher wird eine nicht-verschwindende Laufzeit benötigt, bis die Steigung den Wert Null erreicht. Wir können Trajektorien finden, die dieses Szenario tatsächlich realisieren.

Ein mögliches Szenario erster Ordnung läuft wie folgt ab. Während des Abwärtslaufens von $-Y_*(\varphi)$ bei $k, = \infty$ formiert sich zunächst ein Wendepunkt bei einem $\varphi_{\text{infl}} > 0$

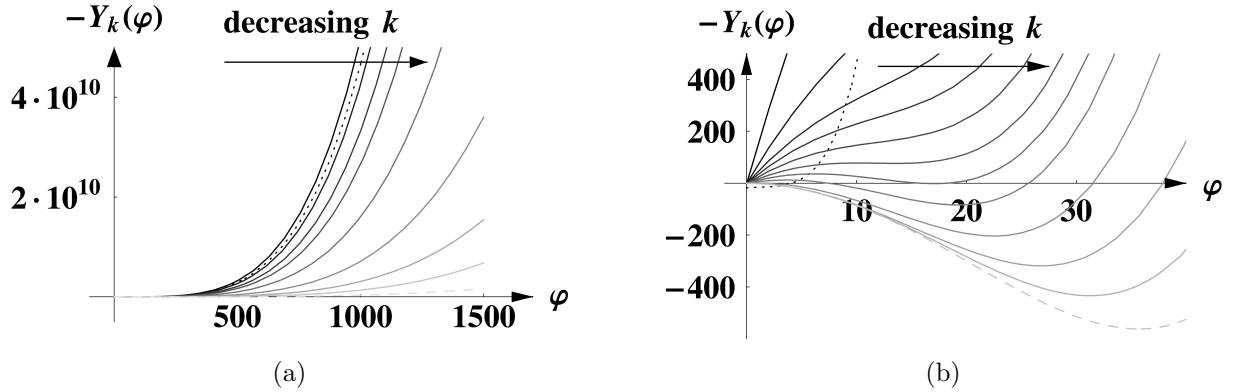


Abbildung 10.3: Die S^4 -Trajektorie, die in Abschnitt 10.3 diskutiert ist. Abbildung (a) zeigt das Potential für verschiedene Werte für k oberhalb des Umkehrpunktes k_T . Das Diagramm (b) vergrößert Abb. (a) bei kleinen Werten für φ und zeigt den Phasenübergang erster Ordnung. Die gepunktete (graue, gestrichelte) Linie ist das Fixpunkt- (Anfangs-) Potential. Die Graustufe der verschiedenen Kurven ändert sich von schwarz nach grau für kleiner werdende Werte für k .

und dann entstehen daraus ein lokales Minimum sowie ein lokales Maximum. Während des weiteren Abwärtslaufens wird das neue Minimum bei einer kritischen Skala k_c zu einem globalen Minimum. Dieses Verhalten entspricht einem diskontinuierlichen Phasenübergang; das globale Minimum springt plötzlich von $\varphi_0 = 0$ nach $\varphi_0 \neq 0$. Auch in diesem Szenario findet der Phasenübergang bei einer endlichen Skala $k_c < \infty$ statt. Der Grund dafür ist, daß die Steigung von $-Y_*$ überall streng positiv ist. Daher wird eine nicht-verschwindende RG-Zeit benötigt, bis $Y'_k(\varphi)$ bei $\varphi_{\text{infl}} \neq 0$ verschwindet.

In Abbildung 10.3 zeigen wir eine Trajektorie, die wir mit der zweiten Strategie gefunden haben und die ein Szenario erster Ordnung zeigt. Die entsprechende Einstein-Hilbert-Trajektorie hat einen Wendepunkt bei $g_T = 10^{-3}$. Bei der Anfangsskala für die Aufwärtsintegration der partiellen Differentialgleichung, $k_{\text{intl}} = 10 k_T$, haben wir ein Anfangspotential $Y_{k_{\text{intl}}}$ des Typs $\varphi^0 + \varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4$ gewählt. Nachdem wir die Koeffizienten der Terme proportional φ^0 , φ^2 sowie φ^3 so angepaßt haben, daß $Y_k(\varphi)$ nahe an $Y_*(\varphi)$ herankommt und dort eine sehr lange RG-Zeit bleibt, haben wir näherungsweise das folgende Anfangspotential erhalten:

$$Y_{k_{\text{intl}}}(\varphi) = 0.3845 + 0.9\varphi^2 - 0.001\varphi^3 - \frac{1}{6}\lambda_{k_{\text{intl}}}\varphi^4. \quad (10.6)$$

Für die numerische Integration haben wir die glatten Funktionen ρ und $\tilde{\rho}$ aus Abschnitt 7.3.1 verwendet:

$$\rho(\varphi) = 1 + \frac{1}{12} \varphi^4, \quad \tilde{\rho}(\varphi) = \frac{1}{18} \varphi^6. \quad (10.7)$$

Wie wir in Abbildung 7.4 gezeigt haben, sind die beiden Funktionen aus (10.7) schon ausreichend, eine akzeptable Genauigkeit in den numerischen Rechnungen dieses Abschnitts zu erreichen.

DISKUSSION UND AUSBLICK



In der vorliegenden Arbeit haben wir den „hintergrundunabhängigen“ Renormierungsgruppen-Fluß für die effektive Mittelwertwirkung der Quanten-Einstein-Gravitation untersucht. Damit wir Eichfixierungen vernachlässigen konnten, haben wir die Freiheitsgrade der Gravitation auf den konformen Faktor des Trägerfeldes, der Metrik, eingeschränkt. Das Renormierungsgruppen-Verhalten des konformen Faktors ist in dem Sinne repräsentativ, daß er die Entstehung eines Nicht-Gauß'schen Renormierungsgruppen-Fixpunktes erlaubt, der essentiell für ein asymptotisch sicheres Verhalten der Gravitation ist. Wir haben die gefundenen Fixpunkte in einer linearen Stabilitätsanalyse untersucht und dessen Skalenfelder und Skalendimensionen bestimmt.

In Teil II haben wir nicht nur die Freiheitsgrade der Gravitation auf den konformen Faktor der Metrik begrenzt, sondern auch den zunächst unendlich-dimensionalen Theorienraum auf den Unterraum beschränkt, der durch die Newton-Konstante und die kosmologische Konstante parametrisiert ist. Diese konform-reduzierte Einstein-Hilbert-Trunkierung erlaubte uns, eine Eigenschaft der Renormierungsgruppen-Flüsse in der Gravitation zu untersuchen, nämlich daß die Metrik unter allen Feldern, die zur Beschreibung der Natur verwendet werden, einen speziellen Status besitzt: sie definiert die Skalen aller dimensionsbehafteten physikalischen Größen. Wenn wir die Kadanoff-Wilson-Interpretation der Renormierungsgruppen-Flüsse als Reihe aufeinander folgender Vergrößerungsschritte auf die Quantengravitation anwenden, müssen wir dem Begriff der Vergrößerungsskala zumindest näherungsweise eine physikalische Bedeutung geben. Die effektive Mittelwertwirkung

$\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$ erfüllt diese Bedingung, da wir die Vergrößerungsskala k hier als einen Cutoff im Spektrum des kovarianten Laplace-Beltrami-Operators in Bezug auf die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ eingeführt haben. Folglich ist Vergrößerungs-Skala k eine „Eigen“größe bezüglich $\bar{g}_{\mu\nu}$ im Sinne von „Cutoffmoden“ [26,27]. Daher hängen der modenunterdrückende Term $\Delta_k S$ und als Ergebnis daraus der Cutoff-Operator \mathcal{R}_k auf nicht-triviale Weise vom Hintergrundfeld ab. Dies ist sogar dann der Fall, wenn man eine einfache Trunkierung betrachtet, die nicht explizit von der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ abhängt. Die Abhängigkeit des Cutoffs von $\bar{g}_{\mu\nu}$ hat einen starken Einfluß auf den resultierenden Renormierungsgruppen-Fluß. Wir haben argumentiert, daß die asymptotische Sicherheit, das heißt die Ausbildung eines Nicht-Gauß'schen Fixpunktes, zum Teil ein hauptsächlich „kinematisches“ Phänomen ist; dieses resultiert aus der speziellen Rolle, die die Metrik spielt: sie selbst definiert die Skala der Vergrößerungs-Operation, die auf die durch die Metrik gegebene Raumzeit angewendet wird.

Gleichzeitig wird die Verwendung eines von der Hintergrundmetrik abhängigen Cutoff-Operators durch die Forderung nach „Hintergrundunabhängigkeit“ im Sinne von [3–5] erzwungen. In Quantentheorien für gewöhnliche Materiefelder beinhaltet der Cutoff-Operator \mathcal{R}_k die Metrik einer festen Raumzeitmannigfaltigkeit, auf der die Theorie definiert ist. Dies kann zum Beispiel der Minkowski-Raum sein. In der Quantengravitation wollen wir eine „hintergrundunabhängige“ Quantisierung erreichen. Dies läßt den Schluß zu, daß der Renormierungsgruppen-Fluß für die Gravitation auch „hintergrundunabhängig“ sein sollte, wenn er eine physikalische Bedeutung haben soll: keine ausgezeichnete Metrik sollte in seiner Konstruktion enthalten sein. Wenn wir den Cutoff-Operator \mathcal{R}_k aus einem der Argumente von $\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$ konstruieren, ist dies tatsächlich der Fall. Im Kontext der effektiven Mittelwertwirkung verwenden wir dafür die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$. Nur dann ist die Cutoff-Wirkung $\Delta_k S$ quadratisch in den Fluktuationefeldern; die funktionale Renormierungsgruppen-Gleichung enthält dann nur Feldableitungen zweiter Ordnung.

Diese Punkte haben wir in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung diskutiert. Wenn wir den speziellen Status der Metrik ignorierten, würden wir eine ϕ^4 -Theorie mit einer negativen Kopplungskonstanten proportional zu ϕ^4 erhalten; diese Theorie ist Symanzik zufolge asymptotisch frei [53, 54]. Wenn wir stattdessen die Metrik selbst dazu verwenden, die Eigenskala von k zu definieren, dann unterscheidet sich der Renormierungsgruppen-Fluss deutlich. Insbesondere existiert dann ein Nicht-Gauß'scher Fixpunkt. Es ist bemerkenswert, daß diese einfache skalar-artige Theorie auf qualitativer Stufe genau

dasselbe Flußdiagramm besitzt wie die volle Einstein-Hilbert-Trunkierung, in der alle Freiheitsgrade der Metrik quantisiert werden. Daher liegt die Vermutung nahe, daß die komplizierten Selbstwechselwirkungen der Moden mit Helizität 2 – eine weitere Eigenschaft, die die Metrik von gewöhnlichen Materiefeldern unterscheidet – möglicherweise nicht entscheidend für asymptotische Sicherheit in der Gravitation sind. In der CREH-Näherung berücksichtigen wir nur die Wechselwirkungen aus dem Term $\Lambda \sqrt{g}$, der proportional zu ϕ^4 und proportional zur kosmologischen Konstante ist.

Die Ergebnisse der CREH-Trunkierung deuten an, daß der Renormierungsgruppen-Fluß aus dem konformen Faktor alleine repräsentativ für die volle Metrik sein kann. Der offensichtlich nächste logische Schritt war, die konforme Reduktion auf allgemeinere Trunkierungen anzuwenden.

In Teil III haben wir daher den „hintergrundunabhängigen“ Renormierungsgruppen-Fluß für die effektive Mittelwertwirkung in der Quanten-Einstein-Gravitation auf einem unendlich-dimensionalen Theorienraum untersucht. Wir haben die Einstein-Hilbert-Trunkierung durch die lokale Potentialnäherung verallgemeinert, die denselben kinetischen Term wie die Einstein-Hilbert-Trunkierung beinhaltet, aber ein beliebiges laufendes Potential des konformen Faktors zuläßt. Das (im Vergleich zur nicht-reduzierten Theorie) relativ einfache Flußgleichungssystem besteht in dieser Näherung aus einer partiellen Differentialgleichung, die mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung gekoppelt ist. Diese Untersuchungen können helfen, eine Verbindung mit anderen Zugängen zur Quantengravitation herzustellen, zum Beispiel zu numerischen Simulationen [6–8].

Im unendlich-dimensionalen Theorienraum der lokalen Potentialnäherung haben wir sowohl einen Gauß’schen als auch einen Nicht-Gauß’schen Fixpunkt gefunden; beide verallgemeinern die Fixpunkte, die in der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung existieren. Die Skalendimensionen am Gauß’schen Fixpunkt, die wir in der Stabilitätsanalyse erhalten haben, unterscheiden sich deutlich von denen in einer gewöhnlichen skalaren Quantenfeldtheorie. Dies ist eine direkte Konsequenz daraus, daß sowohl die funktionale Renormierungsgruppen-Gleichung als auch ihre Lösungen „hintergrundunabhängig“ sind. Selbst in dieser reduzierten Theorie existieren aber Hinweise dafür, daß die Gravitation asymptotisch sicher ist.

Wir haben den linearisierten Renormierungsgruppen-Fluß in der Nähe des Nicht-Gauß’schen Fixpunktes untersucht und herausgefunden, daß unendlich viele relevante Richtungen im Theorienraum existieren können. Die entsprechenden Skalenfelder sind nicht-po-

lynomielle Funktionen, die den Halpern-Huang-Skalenfelder am Gauß'schen Fixpunkt einer gewöhnlichen skalaren Feldtheorie ähnlich sind [64–66]. Zu diesem Zeitpunkt ist (selbst in der skalaren Theorie) jedoch nicht klar, welche Bedeutung diese Skalenfelder für die Vorhersagekraft der Theorie haben. In der Gravitation ist die lokale Potentialnäherung allerdings nicht allgemein genug, um dieses Problem zu lösen. Insbesondere ist unklar, inwieweit die Halpern-Huang-Skalenfelder mit den Invarianten aus der vollen Metrik zusammenhängen, die in der Fixpunkt-Wirkung enthalten sind.

In der Quanten-Einstein-Gravitation hängen die β -Funktion von keiner speziellen Metrik ab; sie hängen jedoch von der Topologie der Raumzeit ab. Wir haben dies berücksichtigt, indem wir sowohl den flachen Raum als auch die Sphäre diskutiert haben.

Wir haben die allgemeinen Eigenschaften des Renormierungsgruppen-Flusses und insbesondere seine UV-kritische Mannigfaltigkeit \mathcal{S}_{UV} am Nicht-Gauß'schen Fixpunkt untersucht; wir sahen, daß das laufende Potential $Y_k(\varphi)$ sich auf \mathcal{S}_{UV} wie φ^4 im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$ verhält. Auf der Sphäre trägt jeder Term in der Mittelwertwirkung $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$, der die Struktur $\int d^4x \sqrt{g} (\text{Krümmung})^n$ besitzt, zu dem Monom proportional zu φ^{4-2n} bei. Wir können daraus schließen, daß die Mittelwertwirkung in der konform-reduzierten Gravitation keine Verbindung zu Invarianten mit negativen Potenzen in der Krümmung hat. Abgesehen davon, daß Invarianten sich gegenseitig wegheben können, sollten also in Renormierungsgruppen-Trajektorien, die sich auf \mathcal{S}_{UV} befinden, keine Terme der Form $\int d^4x \sqrt{g} R^{-n}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ auftauchen. Machado und Saueressig [24] haben Trunkierungen mit drei Parametern analysiert, bei denen ein einzelner Term dieses Typs zur Einstein-Hilbert-Trunkierung hinzugefügt wurde. Tatsächlich zeigte sich, daß man für nicht allzu große Exponenten n keinen UV-Fixpunkt auf diesem dreidimensionalen Theorienraum finden konnte. Dies ist im Blick auf unsere Diskussion der lokalen Potentialnäherung einfach zu erklären: Trajektorien dieses Typs aus [24] liegen nicht auf der UV-kritischen Mannigfaltigkeit, wenn eine Invariante der Art $\int d^4x \sqrt{g} R^{-n}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ in den Trunkierungsansatz der lokalen Potentialnäherung eingebaut wird. Dieselbe Erklärung gilt für die Invariante $\int d^4x \sqrt{g} \ln R$, die einen Term proportional zu $\varphi^4 \ln \varphi$ erzeugt; dieser wächst schneller als proportional zu φ^4 an und zerstört den Nicht-Gauß'schen Fixpunkt. (Die eigentliche Motivation der Trunkierung in [24] war allerdings die Untersuchung und Verbesserung des Infrarot-Verhaltens der Renormierungsgruppen-Trajektorien.)

Im anderen Grenzfall, für $\varphi \rightarrow 0$, haben wir herausgefunden, daß das Fixpunktpotential $Y_*(\varphi)$ am Nicht-Gauß'schen Fixpunkt regulär ist, das heißt daß die zweite Ableitung

des Fixpunktpotentials nach φ in diesem Grenzfall nicht anwächst. Sogar die laufenden Potentiale $Y_k(\varphi)$ aller Trajektorien innerhalb von \mathcal{S}_{UV} sind regulär. Dies bedeutet, daß die Invarianten $I_n \equiv \int d^4x \sqrt{g} (\text{Krümmung})^n$ proportional zu φ^{4-2n} mit $n = 3, 4, \dots$ keinen Einfluß auf den Renormierungsgruppen-Fluß ausüben. Die Invarianten proportional zu φ^4 und φ^2 , I_0 beziehungsweise I_1 , sowie die Invariante $I_2 = \text{const}$ sind regulär. Sie stehen für die kosmologische Konstante und den Einstein-Hilbert-Term sowie für die Terme proportional zum Quadrat der Krümmung. Alle besitzen eine Kopplungskonstante, die im Fixpunkt nicht verschwindet¹. Die Kopplungskonstanten der höheren Invarianten I_n proportional zu φ^{4-2n} mit $n = 3, 4, \dots$ verschwinden im Fixpunkt.

In der konform-reduzierten Gravitation spielt der Goroff-Sagnotti-Term $\int d^4x \sqrt{g} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma\mu\nu}$ keine besondere Rolle für das UV-Verhalten der Theorie, da er zu dem Monom proportional zu φ^{-2} beiträgt. Wenn wir die Subsidiaritätsbedingung stellen, daß keine singulären Terme im Potential existieren, fehlt er sogar in den Trajektorien innerhalb von \mathcal{S}_{UV} . Von diesem Term ist bekannt, daß er es unmöglich macht, die volle Quantengravitation auf Zwei-Schleifen-Niveau störungstheoretisch zu renormieren [57]. Die allgemeine Theorie [31] und wohlbekanntes Beispiele [67] zeigen, daß Nicht-Renormierbarkeit im störungstheoretischen Sinne sehr wohl mit asymptotischer Sicherheit vereinbar ist. Die vorliegenden Resultate dieser Arbeit bestätigen dies.

An vielen Stellen haben wir die Unterschiede zwischen dem konformen Faktor der Metrik und einem gewöhnlichen skalaren Feld herausgearbeitet: asymptotische Sicherheit der konform-reduzierten Theorie und verändertes Skalenverhalten am Gauß'schen Fixpunkt sind nur einige der diskutierten Unterschiede.

Wir haben die Flußgleichung für das Potential numerisch gelöst und haben dabei Beispiele für Renormierungsgruppen-Trajektorien erhalten, die sich auf der UV-kritischen Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} des Nicht-Gauß'schen Fixpunktes befinden. Die Quantentheorien, die diese Trajektorien definieren, zeigen Phasenübergänge von einer Phase, in der das globale Minimum des ursprünglichen Potentials $U_k(\phi)$ bei einem $\phi \neq 0$ liegt, zu einer Phase, in der das Minimum bei Null liegt. In ersterer Phase besitzt der konforme Faktor einen nicht-verschwindenden Erwartungswert, in letzterer Phase verschwindet der Erwartungswert. Dies ist ein Anzeichen dafür, daß die Gravitation bei einem großen (aber in einigen Fällen endlichen) Wert für k von der bekannten „Niedrigenergie“-Phase mit nicht-verschwindendem

¹Die Kopplungskonstante der Invarianten I_2 , dem konstanten Term in Y_* , verschwindet zumindest nicht für die S^4 -Topologie, siehe Abbildung 9.1.

Metrik-Erwartungswert in eine neue Phase übergeht, in der $g_{\mu\nu} \equiv \langle \gamma_{\mu\nu} \rangle = 0$ gilt. In der Niedrigenergie-Phase ist die Diffeomorphismus-Invarianz spontan heruntergebrochen auf die Stabilitätsgruppe des Metrik-Kondensats $\langle \gamma_{\mu\nu} \rangle \neq 0$; in der „Hochenergie“-Phase finden wir die ungebrochene Diffeomorphismus-Invarianz. Es existieren also Trajektorien, entlang derer die Symmetrie immer ungebrochen bleibt, das heißt das dort die Metrik niemals einen Erwartungswert entwickelt. Die entsprechenden Quantentheorien besitzen dann allerdings kein klassisches Regime.

Ein weiteres Augenmerk lag auf der Analyse, wie sich die Ergebnisse der Einstein-Hilbert-Trunkierung in Bezug auf Verallgemeinerungen der Trunkierung verhalten, wenn wir den ursprünglichen zweidimensionalen Theorienraum auf unendlich viele Dimensionen ausdehnen. Wir haben herausgefunden, daß wir die Ergebnisse der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Fixpunkte und deren Stabilitätsanalyse) reproduzieren können, wenn wir Trajektorien aus dem größeren Theorienraum der lokalen Potentialnäherung auf dessen zweidimensional Unterraum der Einstein-Hilbert-Trunkierung projizieren. Wir sahen, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung bestehend aus der Newton-Konstante und der kosmologischen Konstante sehr stabil gegenüber Verallgemeinerungen ist. Die Verallgemeinerung durch die lokale Potentialnäherung kann das IR-Verhalten der Einstein-Hilbert-Trunkierung allerdings nicht verbessern: Typ IIIa-Trajektorien aus beiden Trunkierungen brechen jeweils bei derselben Skala ab und können den Grenzwert $k = 0$ nicht erreichen. Dies ist ein weiterer Unterschied zwischen dem konformen Faktor und einem gewöhnlichen Skalarfeld. Um das Infrarot-Verhalten der Renormierungsgruppen-Trajektorien zu untersuchen, müßten vermutlich Trunkierungen verwendet werden, die beliebige kinetische Terme zulassen.

Anhänge

ANHANG A

DEFINITIONEN UND KONVENTIONEN

In der folgenden Tabelle haben wir einige Definitionen und Konventionen aufgelistet, die wir in der vorliegenden Arbeit verwendet haben.

| | |
|-------------------------------|---|
| Euklidische Metrik | $(\delta_{\mu\nu}) = \text{diag}[\underbrace{+1, \dots, +1}_d]$ <small>d Einträge</small> |
| Inverse Metrik $g^{\mu\nu}$ | $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d$ |
| Determinante | $g = \det(g_{\mu\nu})$ |
| Volumenelement | $\omega = \sqrt{ g } dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d$ |
| Christoffel-Symbol | $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_{\beta}g_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma}g_{\beta\delta} - \partial_{\delta}g_{\beta\gamma})$ |
| Riemann'scher Krümmungstensor | $R^{\delta}_{\gamma\alpha\beta} = -\partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} + \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\Gamma_{\gamma\mu}^{\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}\Gamma_{\beta\mu}^{\delta}$ |
| Ricci-Tensor | $R_{\beta\gamma} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma}$ |
| Ricci-Skalar | $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ |

ANHANG B

VERHALTEN UNTER WEYL-TRANSFORMATIONEN

In diesem Anhang haben wir die Weyl-Transformierten verschiedener geometrischer Größen der Metrik $g_{\mu\nu}$ bezüglich einer beliebigen Funktion $\sigma(x)$ aufgelistet:

$$g'_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.1})$$

Die Weyl-transformierte Determinante von $g_{\mu\nu}$ besitzt die folgende Form:

$$g' = e^{2d\sigma} g.$$

Wenn wir die Christoffel-Symbole Weyl-transformieren, erhalten wir die folgenden Relationen:

$$\Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\delta} = \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\delta} + g^{\delta\tau} \left[(\partial_{\beta}\sigma) g_{\gamma\tau} + (\partial_{\gamma}\sigma) g_{\beta\tau} - (\partial_{\tau}\sigma) g_{\beta\gamma} \right].$$

Der Ricci-Skalar transformiert sich gemäß

$$R' = e^{-2\sigma} \left[R - 2(d-1)(\partial^2\sigma) - (d-1)(d-2)(\partial\sigma)^2 \right].$$

Die Weyl-transformierte Operator $\sqrt{g} R$ besitzt die folgende Form:

$$(\sqrt{g} R)' = e^{(d-2)\sigma} \sqrt{g} \left[R - 2(d-1)(\partial^2\sigma) - (d-1)(d-2)(\partial\sigma)^2 \right] \quad (\text{B.2})$$

Für die Weyl-Transformation der Invarianten $\int d^d x \sqrt{g} R$ erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$\left(\int d^d x \sqrt{g} R \right)' = \int d^d x e^{(d-2)\sigma} \sqrt{g} \left[R + (d-1)(d-2) (\partial\sigma)^2 \right]. \quad (\text{B.3})$$

HERLEITUNG DER ANOMALEN DIMENSION AUS DEM KINETISCHEN TERM

In diesem Anhang wollen wir die anomale Dimension $\eta_N^{(\text{kin})}$ aus Gl. (4.31) herleiten, die wir aus dem kinetischen Term des Trunkierungsansatzes erhalten. Wir wollen hier aber ein etwas allgemeineres Ergebnis für η_N herleiten, damit wir auch die lokale Potentialnäherung (siehe Abschnitt 7.4) abdecken können. Zunächst wollen wir eine gewöhnliche skalare Flußgleichung [68] betrachten; danach werden wir die Unterschiede zur Gravitation herausarbeiten.

Wir wollen die folgende gewöhnliche skalare funktionale Renormierungsgruppen-Gleichung auf dem d -dimensionalen flachen euklidischen Raum lösen:

$$k\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} k\partial_k \mathcal{R}_k \right]. \quad (\text{C.1})$$

In einer lokalen Potentialnäherung dieser gewöhnlichen skalaren Theorie nehmen wir den folgenden Trunkierungsansatz an:

$$\Gamma_k[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{Z}_k(\phi(x)) \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + U_k(\phi(x)) \right\}. \quad (\text{C.2})$$

Hierbei sind $\mathbf{Z}_k(\cdot)$ und $U_k(\cdot)$ skalenabhängige Funktionen des Feldes ϕ . Wir schränken diesen Ansatz soweit ein, daß wir zwar eine beliebige Feldabhängigkeit des Potentials zu-

lassen, die Normierung halten wir aber bei einem festen, möglicherweise skalenabhängigen Referenzpunkt $\phi = \phi_1(k)$ fest:

$$Z_k \equiv \mathbf{Z}_k(\phi_1(k)) \quad (\text{C.3})$$

Typischerweise können wir ϕ_1 als das Minimum des Potentials U_k wählen. (Für die Gravitation ist dies jedoch nicht immer möglich, siehe die Diskussion in Abschnitt 7.4.) Mit (C.3) nimmt der Cutoff-Operator für diese Trunkierung die folgende Form an:

$$\mathcal{R}_k = Z_k k^2 R^{(0)}(-\square/k^2). \quad (\text{C.4})$$

Mit der FRGE (C.1) wollen wir die β -Funktion für Z_k beziehungsweise äquivalent dazu die anomale Dimension herleiten:

$$\eta \equiv -Z_k^{-1} k \partial_k Z_k \quad (\text{C.5})$$

Wir projizieren den kinetischen Term aus der effektiven Mittelwertwirkung $\Gamma_k[\phi]$ dadurch heraus, daß wir das Feld ϕ wie folgt aufspalten:

$$\phi(x) = \phi_1 + \varphi(x) \quad (\text{C.6})$$

Wir setzen (C.6) dann in $\Gamma_k[\phi]$ ein und entwickeln es bis zur jeweils zweiten Ordnung in $\varphi(x)$ und in ∂_μ . Wenn wir die Entwicklung des Trunkierungsansatzes in die exakte Flußgleichung einsetzen, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & k \partial_k Z_k \int d^d x \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) + \dots \\ & = k^2 \text{Tr} \left[\left\{ \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) R^{(0)}(\hat{p}^2/k^2) - (\hat{p}^2/k^2) R^{(0)' }(\hat{p}^2/k^2) \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\hat{p}^2 + k^2 R^{(0)}(\hat{p}^2/k^2) + U_k''(\phi_1 + \varphi(\hat{x}))/Z_k \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Hier haben wir irrelevante Terme weggelassen. In (C.7) haben wir dieselbe Notation wie in elementarer Quantenmechanik benutzt; wir verwenden die Operatoren \hat{x}_μ und \hat{p}_μ , die die Relation $[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta_{\mu\nu}$ erfüllen. In der Ortsdarstellung gilt $\hat{x}_\mu = x_\mu$ und $\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$. Wir können die Spur in (C.7) natürlich in jeder Darstellung auswerten. Mit Methoden der gewöhnlichen Ableitungsentwicklung [69] ziehen wir den Term proportional zu $\int (\partial_\mu \varphi)^2$ aus der Spur heraus; dieser bestimmt dann mit (C.7) die β -Funktion $k \partial_k Z_k$. An dieser Stelle

ist es praktisch, die folgenden Funktionen einzuführen:

$$P(p^2) \equiv p^2 + k^2 R^{(0)} (p^2/k^2) \quad (\text{C.8})$$

$$H(p^2) \equiv P(p^2) + \gamma \quad (\text{C.9})$$

$$N(p^2) \equiv k \partial_k P(p^2) - \eta (P(p^2) - p^2). \quad (\text{C.10})$$

Wir benötigen weiterhin die folgenden Abkürzungen:

$$\alpha \equiv \frac{U_k'''(\phi_1)}{Z_k}, \quad (\text{C.11a})$$

$$\gamma \equiv \frac{U_k''(\phi_1)}{Z_k} \quad (\text{C.11b})$$

Ein Strich bezeichnet eine Ableitung nach dem Argument. Daher besitzt (C.7) nun die folgende Form (bis auf irrelevante Terme):

$$\begin{aligned} & k \partial_k Z_k \int d^d x \partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) + \dots \\ & = \text{Tr} \left[N(\widehat{p}^2) (H(\widehat{p}^2) + \alpha \varphi(\widehat{x}))^{-1} \right] \equiv \alpha^2 \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

In der Entwicklung von U_k'' ,

$$U_k''(\phi_1 + \varphi(x)) = U_k''(\phi_1) + U_k'''(\phi_1) \varphi(x) + \frac{1}{2} U_k''''(\phi_1) \varphi^2(x) + \mathcal{O}(\varphi^3), \quad (\text{C.13})$$

war es ausreichend, den Term linear in φ zu behalten, da der nächsthöhere Term, $U_k''''(\phi_1) \varphi^2(x)$, zwei Faktoren von φ an demselben Raumzeitpunkt x besitzt und somit nicht zur Invarianten proportional zu $\int (\partial_\mu \varphi)^2$ beitragen kann. Wenn wir den Nenner auf der rechten Seite von (C.12) im Feld φ entwickeln,

$$\begin{aligned} & \left(H(\widehat{p}^2) + \alpha \varphi(\widehat{x}) \right)^{-1} \\ & = \left(1 - \alpha H(\widehat{p}^2)^{-1} \varphi(\widehat{x}) + \alpha^2 H(\widehat{p}^2)^{-1} \varphi(\widehat{x}) H(\widehat{p}^2)^{-1} \varphi(\widehat{x}) + \mathcal{O}(\varphi^3) \right) H(\widehat{p}^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

und nur die Terme behalten, die quadratisch in φ sind, erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$\mathcal{S} = \text{Tr} \left[N(\widehat{p}^2) H(\widehat{p}^2)^{-2} \varphi(\widehat{x}) H(\widehat{p}^2)^{-1} \varphi(\widehat{x}) \right]. \quad (\text{C.15})$$

In (C.15) haben wir ausgenutzt, daß die Spur zyklisch ist. Weiterhin enthalten N und H nur die Operatoren \widehat{p}_μ ; somit gilt $[N, H] = 0$. Das Feld φ beinhaltet nur \widehat{x}_μ . Aufgrund der Kommutatorrelation

$$\phi H^{-1} = [\phi, H^{-1}] + H^{-1} \phi \quad (\text{C.16})$$

nimmt \mathcal{S} aus Gl. (C.15) nun die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \text{Tr} \left[N(\hat{p}^2) H(\hat{p}^2)^{-2} [\varphi(\hat{x}), H(\hat{p}^2)^{-1}] \varphi(\hat{x}) \right] \\ & + \text{Tr} \left[N(\hat{p}^2) H(\hat{p}^2)^{-3} \varphi(\hat{x})^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Wir können die zweite Spur auf der rechten Seite von (C.17) vernachlässigen, da sie in der Ortsdarstellung zu keinem Term führt, der aus Ableitungen nach φ besteht. Um die erste Spur auszuwerten, führen wir die Funktion

$$F(p^2) \equiv 1/H(p^2) \quad (\text{C.18})$$

ein und berechnen die folgende Kommutatoridentität:

$$\begin{aligned} [\varphi(\hat{x}), F(\hat{p}^2)] = & 2i F'(\hat{p}^2) \hat{p}_\mu (\partial_\mu \varphi)(\hat{x}) + F'(\hat{p}^2) (-\square \varphi)(\hat{x}) \\ & + 2 F''(\hat{p}^2) \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu (-\partial_\mu \partial_\nu \varphi)(\hat{x}) + \mathcal{O}(\partial^3 \varphi). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Wenn wir nun (C.19) in Gl. (C.17) einsetzen, dann stehen alle \hat{x} rechts und alle \hat{p} links, so daß in der Ortsdarstellung folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int d^d x \langle x | N(\hat{p}^2) H(\hat{p}^2)^{-2} F'(\hat{p}^2) (-\square \varphi)(\hat{x}) \varphi(\hat{x}) | x \rangle \\ & + 2 \int d^d x \langle x | N(\hat{p}^2) H(\hat{p}^2)^{-2} F''(\hat{p}^2) \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu (-\partial_\mu \partial_\nu \varphi)(\hat{x}) \varphi(\hat{x}) | x \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Mit $\hat{x}_\mu | x \rangle = x_\mu | x \rangle$ und durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int d^d x \left(\langle x | N(\hat{p}^2) H(\hat{p}^2)^{-2} F'(\hat{p}^2) | x \rangle \delta_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + 2 \langle x | N(\hat{p}^2) H(\hat{p}^2)^{-2} F''(\hat{p}^2) \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu | x \rangle \right) \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Die verbleibenden Matrixelemente $\langle x | \dots | x \rangle$ sind wegen der Translationsinvarianz sogar unabhängig von x und können im Impulsraum einfach berechnet werden. Mit der Identität

$$\int d^d p p_\mu p_\nu f(p^2) = \frac{1}{d} \delta_{\mu\nu} \int d^d p p^2 f(p^2) \quad (\text{C.22})$$

sehen wir, daß beide Terme auf der rechten Seite von (C.21) zu der Invarianten proportional zu $\int \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi$ beitragen. Wir erhalten den folgenden Ausdruck:

$$k \partial_k Z_k = \alpha^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N(p^2)}{H(p^2)^2} \left(F'(p^2) + \frac{2}{d} p^2 F''(p^2) \right). \quad (\text{C.23})$$

Durch die Variablentransformation $y = p^2$ und die Identität

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} f(p^2) = 2 v_d \int_0^\infty dy y^{d/2-1} f(y) \quad (\text{C.24})$$

nimmt (C.23) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} k\partial_k Z_k &= v_d \alpha^2 \int_0^\infty dy \frac{N(y)}{H(y)^2} \left(2 y^{d/2-1} F'(y) + \frac{4}{d} y^{d/2} F''(y) \right) \\ &= \frac{4 v_d \alpha^2}{d} \int_0^\infty dy y^{d/2} \frac{H'(y)}{H(y)^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{N(y)}{H(y)^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

In (C.25) haben wir die folgende Abkürzung eingeführt:

$$v_d \equiv [2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)]^{-1}. \quad (\text{C.26})$$

Das zweite Gleichheitszeichen in (C.25) erhalten wir aus der folgenden Identität:

$$2 y^{d/2-1} F' y + \frac{4}{d} y^{d/2} F''(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{4}{d} y^{d/2} F'(y) \right). \quad (\text{C.27})$$

Hierbei gilt $F' = -H'/H^2$. Wir haben danach noch eine partielle Integration durchgeführt, für die die Oberflächenterme verschwinden. Mit den Definitionen von η und N sowie mit $H'(y) = P'(y)$ erhält Gl. (C.25) die folgende Struktur:

$$\eta = -2 v_d \alpha^2 Z_k^{-1} (I_1 - \eta I_2). \quad (\text{C.28})$$

In (C.28) haben wir die folgenden Integrale eingeführt:

$$I_1 \equiv \frac{2}{d} \int_0^\infty dy y^{d/2} \frac{P'(y)}{H(y)^2} \frac{d}{dy} \frac{k\partial_k P(y)}{H(y)^2}, \quad (\text{C.29a})$$

$$I_2 \equiv \frac{2}{d} \int_0^\infty dy y^{d/2} \frac{P'(y)}{H(y)^2} \frac{d}{dy} \frac{P(y) - y}{H(y)^2}. \quad (\text{C.29b})$$

Um I_1 weiter auszuwerten, ist es hilfreich, die modifizierte Skalenableitung $\tilde{\partial}_k$ einzuführen, die definitionsgemäß nur auf die explizite Skalenabhängigkeit in $k^2 R^{(0)}(y/k^2)$ wirkt, nicht jedoch auf die implizite in Z_k , U_k , γ und α . Dann gilt die Relation

$$\frac{k\partial_k P(y)}{H(y)^2} = \frac{k\tilde{\partial}_k P(y)}{[P(y) + \gamma]^2} = -k\tilde{\partial}_k \left(\frac{1}{P(y) + \gamma} \right) \quad (\text{C.30})$$

und wir erhalten durch Vertauschen der modifizierten Skalenableitung $k\tilde{\partial}_k$ mit der Ableitung nach y die folgenden Identitäten:

$$\frac{d}{dy} \frac{k\tilde{\partial}_k P(y)}{H(y)^2} = -k\tilde{\partial}_k \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{P(y) + \gamma} \right) = k\tilde{\partial}_k \frac{P'(y)}{[P(y) + \gamma]^2}. \quad (\text{C.31})$$

Als Resultat nimmt Gl. (C.29a) die folgende Form an:

$$I_1 = k\tilde{\partial}_k \left(k^{d-6} \Sigma_d(\gamma/k^2) \right). \quad (\text{C.32})$$

In (C.32) finden wir die folgende Abkürzung:

$$\Sigma_d(\gamma/k^2) = \frac{1}{d} k^{6-d} \int_0^\infty dy y^{d/2} \frac{(P'(y))^2}{[P(y) + \gamma]^4}. \quad (\text{C.33})$$

Nachdem wir w mit γ/k^2 identifiziert und eine neue Variable $z \equiv y/k^2$ eingeführt haben, sehen wir, daß die Funktion Σ_d aus Gl. (C.33) mit der Funktion übereinstimmt, die wir in Gl. (4.33) im Haupttext definiert haben. Ausdrückt durch die Funktion $\widehat{\Sigma}_d$, die wir in (4.32) definiert haben, nimmt das Integral I_1 die folgende Form an:

$$I_1 = -2 k^{d-6} (\gamma/k^2)^{1-(6-d)/2} \widehat{\Sigma}_d(\gamma/k^2). \quad (\text{C.34})$$

In ähnlicher Weise können wir das zweite Integral, I_2 , durch die Funktion $\widetilde{\Sigma}_d(w)$ ausdrücken, die wir in Gl. (4.34) definiert haben. Ausführung der y -Ableitung in (C.29b), Einsetzen der Definitionen für P und H und die Variablentransformation auf dimensionslose Variablen führt auf den folgenden Ausdruck:

$$I_2 = k^{d-6} \widetilde{\Sigma}_d(\gamma/k^2). \quad (\text{C.35})$$

Wenn wir nun Gl. (C.28) nach der anomalen Dimension auflösen sowie die Ausdrücke (C.34) und (C.35) einsetzen, nimmt die anomale Dimension schließlich die folgende Form an:

$$\eta(k) = \left(\frac{4 v_d \alpha^2}{Z_k k^{6-d}} \right) (\gamma/k^2)^{(d-4)/2} \frac{\widehat{\Sigma}_d(\gamma/k^2)}{1 - \left(\frac{2 v_d \alpha^2}{Z_k k^{6-d}} \right) \widetilde{\Sigma}_d(\gamma/k^2)}. \quad (\text{C.36})$$

Hierbei sind α und γ durch die Ableitungen von U_k nach dem Referenzpunkt ϕ_1 gegeben, siehe die Gleichungen (C.11). Die Funktionen $\widehat{\Sigma}_d(w)$ und $\widetilde{\Sigma}_d(w)$ sind dimensionslose Funktionen eines dimensionslosen Arguments.

Bis zu diesem Punkt haben wir eine gewöhnliche skalare Theorie betrachtet. Nun wollen wir die anomale Dimension aus dem kinetischen Term, $\eta_N^{(\text{kin})}$, gemäß der β -Funktionsrechnung (i) in Abschnitt 4.2 ableiten. Startpunkt dieser Rechnung ist die Gleichung (4.14), wobei wir (4.3) auf ihrer linken Seite eingesetzt haben. Mit den Notationen aus diesem Anhang erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & k \partial_k \left(-\frac{1}{8\pi \xi(d)} \frac{1}{G_k} \right) \int d^d x \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{f}(x) \partial_\mu \bar{f}(x) + \dots \\ &= \tilde{k}^2 \text{Tr} \left[\left\{ \left(1 - \frac{\eta_N}{2} \right) R^{(0)}(\hat{p}^2/\tilde{k}^2) - (\hat{p}^2/\tilde{k}^2) R^{(0)'}(\hat{p}^2/\tilde{k}^2) \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\hat{p}^2 + \tilde{k}^2 R^{(0)}(\hat{p}^2/\tilde{k}^2) - \frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k (\chi_B + \bar{f}(\hat{x}))^{2\nu} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Hier haben wir verwendet, daß der Ricci-Skalar für den flachen Raum verschwindet, $\hat{R} = 0$ für $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Außerdem haben wir die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\tilde{k} \equiv \chi_B^{2/(d-2)} k = \chi_B^\nu k. \quad (\text{C.38})$$

Wir erhalten (C.37) aus der skalaren Gleichung (C.7), wenn wir die folgenden Ersetzungen durchführen:

$$\begin{aligned} & \varphi \rightarrow \bar{f}, \quad \phi_1 \rightarrow \chi_B, \quad k \rightarrow \tilde{k}, \\ & Z_k \rightarrow - \left(\frac{1}{8\pi \xi(d)} \frac{1}{G_k} \right), \quad \eta \rightarrow \eta_N, \\ & \gamma \rightarrow -\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k \chi_B^{4/(d-2)}, \quad \alpha \rightarrow -\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \Lambda_k \chi_B^{(6-d)/(d-2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Damit nimmt die anomale Dimension aus Gl. (C.36) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \eta_N(k) &= (-1)^{1+d/2} \frac{2^{(14-d)/2} \pi v_d d^{d/2} (d+2)^{d/2}}{(d-1)^{(d+2)/2} (d-2)^{(d+2)/2}} g_k \lambda_k^{d/2} \\ & \quad \times \hat{\Sigma}_d \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) \left[1 + \frac{16 \pi v_d d^2 (d+2)^2}{(d-1)^3 (d-2)^3} g_k \lambda_k^2 \tilde{\Sigma}_d \left(-\frac{2d(d+2)}{(d-2)^2} \xi(d) \lambda_k \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

In vier Dimensionen vereinfacht sich dieses Resultat zu Gl. (4.31) im Haupttext.

In der obigen Herleitung der anomalen Dimension sehen wir wieder, daß sich die Renormierungseigenschaften der konform-reduzierten Einstein-Hilbert-Trunkierung erheblich von denen einer gewöhnlichen skalaren Theorie unterscheiden. Die Ersetzung $k \rightarrow \tilde{k} = \chi_B^{2/(d-2)} k$ führt zu einer nicht-trivialen Abhängigkeit vom Hintergrundfeld χ_B . Damit wurde

die Theorie aber „hintergrundunabhängig“ und wir konnten der Skala k eine physikalische Bedeutung geben (siehe Abschnitt 4.2.1 in der CREH-Trunkierung sowie Abschnitt 7.2 in der LPA).

DIE BERECHNUNG DES SKALENFELDES (9.11) FÜR BELIEBIGE DIMENSIONEN

In diesem Anhang wollen wir das während der Stabilitätsanalyse des Gauß'schen Fixpunktes in der lokalen Potentialnäherung (siehe Abschnitt 9.3) definierte irrelevante Skalenfeld ($y_g \neq 0$, $\Upsilon = \hat{\Upsilon}_{2-d}$) für beliebige Dimensionen ausrechnen. Die Funktion $\hat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi)$ ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\hat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) = -\frac{\nu y_g}{\zeta_d} \int_0^\varphi d\varphi' \frac{\varphi'^{2\nu-1} \rho_d(\varphi')}{\varphi'^{2\nu} + 2c}. \quad (\text{D.1})$$

Wir betrachten die R^d - und die S^d -Topologie getrennt voneinander.

D.1 Der flache Raum

In der R^d -Topologie ist die Spektralfunktion ρ_d durch den folgenden Ausdruck gegeben (siehe Abschnitt 7.3.3):

$$\rho_d(\varphi) = \frac{2}{d!} \varphi^{d\nu}. \quad (\text{D.2})$$

Mit (D.2) nimmt die Funktion $\hat{\Upsilon}_{2-d}$ aus Gl. (D.1) die folgende Form an:

$$\hat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) = -\frac{2\nu}{d! \zeta_d} y_g W(\varphi) + \text{const.} \quad (\text{D.3})$$

Die Funktion W ist hier wie folgt definiert:

$$W'(\varphi) \equiv \frac{\varphi^{(2+d)\nu-1}}{\varphi^{2\nu} + 2c} \quad (\text{D.4})$$

In (D.4) gilt die folgende Relation:

$$(2+d)\nu - 1 = \left(3 + \frac{d}{2}\right)\nu.$$

Durch wenige Umformungen erhalten wir die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} W'(\varphi) &= \varphi^{(d/2+1)\nu} \frac{\varphi^{2\nu} + 2c}{\varphi^{2\nu} + 2c} - 2c \frac{\varphi^{(d/2+1)\nu}}{\varphi^{2\nu} + 2c} \\ &= \varphi^{(d/2+1)\nu} - 2c \varphi^{(d/2-1)\nu} \frac{\varphi^{2\nu} + 2c}{\varphi^{2\nu} + 2c} + 4c^2 \frac{\varphi}{\varphi^{2\nu} + 2c} \\ &= \varphi^{(d/2+1)\nu} - 2c\varphi + 4c^2 \frac{\varphi}{\varphi^{2\nu} + 2c}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

In (D.5) haben wir die beiden folgenden Relationen verwendet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} - 1 &= \frac{d-2}{2} = \frac{1}{\nu}, \\ \left(\frac{d}{2} + 1\right)\nu &= \frac{d+2}{2} \frac{2}{d-2} = \frac{d+2}{d-2}. \end{aligned}$$

Mit der Identität

$$\frac{d+2}{d-2} + 1 = \frac{2d}{d-2} = d\nu$$

integrieren wir (D.5) und erhalten die folgende Funktion:

$$W(\varphi) = \frac{1}{d\nu} \varphi^{d\nu} - c\varphi^2 + 4c^2 \widetilde{W}(\varphi) \quad (\text{D.6})$$

In (D.6) haben wir die Funktion $\widetilde{W}(\varphi)$ eingeführt, die die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\widetilde{W}'(\varphi) \equiv \frac{\varphi}{\varphi^{2\nu} + 2c} \quad (\text{D.7})$$

Mit dem Ergebnis für $\widetilde{W}(\varphi)$ aus Abschnitt D.3, Theorem 1, erhalten wir das folgende Resultat für die Funktion $\widehat{\Upsilon}_{2-d}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) &= -\frac{2\nu}{d! \zeta_d} y_g \left\{ \frac{1}{d\nu} \varphi^{d\nu} - c\varphi^2 \right. \\ &\quad \left. + c\varphi^2 {}_2F_1\left(\frac{d}{2} - 1, 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) + const \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

In Theorem 2 in Abschnitt D.3 zeigen wir, daß $\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi)$ für $c = 0$ eine wohldefinierte Funktion ist. Somit ergibt sich für die kanonische Wahl $c = 0$ in der R^d -Topologie der folgende Ausdruck:

$$\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi)\Big|_{c=0} = -\frac{2}{d! \zeta_d} y_g (\varphi^{d\nu} + const) \quad (D.9)$$

D.2 Die Sphäre

In der S^d -Topologie können wir für die Spektralfunktion $\rho_d(\varphi)$ den folgenden Potenzreihenansatz machen (siehe Abschnitt 7.3.1 für den entsprechenden Ansatz in vier Dimensionen):

$$\rho_d(\varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{d-1} a_k \varphi^{k\nu} + \frac{2}{d!} \varphi^{d\nu} \quad (D.10)$$

Der Term proportional zu $\varphi^{d\nu}$ dominiert die Funktion für sehr große Werte für φ und reproduziert das R^4 -Ergebnis im Grenzfall $\varphi \rightarrow \infty$. Das Integral (D.1) besitzt nun die folgende Form:

$$\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) = \left[\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) \right]_{R^4} - \frac{\nu y_g}{\zeta_d} \sum_{k=1}^{d-1} a_k W_k(\varphi) - \frac{\nu y_g}{\zeta_d} \int_0^\varphi d\varphi' \frac{\varphi'^{2\nu-1}}{\varphi'^{2\nu} + 2c} + const. \quad (D.11)$$

In (D.11) haben wir das Ergebnis für die R^d -Topologie berücksichtigt, siehe Abschnitt D.1. Die in Gl. (D.11) eingeführte Funktion $W_k(\varphi)$ erfüllt die folgende Differentialgleichung:

$$W'_k(\varphi) = \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{\varphi^{2\nu} + 2c}. \quad (D.12)$$

Wenn wir den dritten Term in (D.11) integrieren, erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) = \left[\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) \right]_{R^4} - \frac{y_g}{2\zeta_d} \ln(\varphi^{2\nu} + 2c) - \frac{\nu y_g}{\zeta_d} \sum_{k=1}^{d-1} a_k W_k(\varphi) + const \quad (D.13)$$

Mit dem Ergebnis für $W_k(\varphi)$ aus Abschnitt D.3, Theorem 3, erhalten wir das folgende Resultat für $\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) = & \left[\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi) \right]_{R^4} - \frac{y_g}{2\zeta_d} \ln(\varphi^{2\nu} + 2c) \\ & - \frac{y_g}{2c\zeta_d} \varphi^{2\nu} \sum_{k=1}^{d-1} \frac{a_k}{(k+2)} \varphi^{k\nu} {}_2F_1\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) + const. \end{aligned} \quad (D.14)$$

Der für sehr große Werte für φ führende Term proportional zu $\phi^{d\nu}$ hängt weder von c noch von den Parametern a_k ($k = 0, \dots, d-1$) ab. Im Grenzfall $\varphi \rightarrow 0$ existiert für die in der R^d -Topologie natürlichen Wahl $c = 0$ ein singulärer Term:

$$\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi \ll 1) = -\frac{y_g}{2\zeta_d} \ln(\varphi^{2\nu}).$$

Für die S^d -Topologie ist allerdings $c = 1$ die kanonische Wahl. Für diesen Wert sind alle Terme in (D.14) wohldefiniert.

D.3 Zu den Hypergeometrischen Funktionen

An dieser Stelle wollen wir einige Theoreme im Bezug auf Hypergeometrische Funktionen beweisen, die notwendig sind, um die Funktion $\widehat{\Upsilon}_{2-d}(\varphi)$ jeweils auf dem flachen Raum und auf der Sphäre bestimmen zu können.

Theorem 1. *Die Funktion*

$$\widetilde{W}(\varphi) = \frac{\varphi^2}{4c} {}_2F_1\left(\frac{d}{2} - 1, 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \quad (\text{D.15})$$

erfüllt die Differentialgleichung (D.7).

Beweis. Wir führen die folgende Abkürzung ein:

$${}_2F_1\left(\frac{d}{2} - 1, 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \equiv F\left(\frac{d}{2} - 1, 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right). \quad (\text{D.16})$$

Nach Gl. (15.1.1) aus [63] gilt das folgende Gleichheitszeichen:

$$F\left(\frac{d}{2} - 1, 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) = F\left(1, \frac{d}{2} - 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right). \quad (\text{D.17})$$

Wenn wir die Funktion $\widetilde{W}(\varphi)$ nach dem Feld φ ableiten, erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}'(\varphi) &= \frac{\varphi}{2c} F\left(1, \frac{d}{2} - 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\ &+ \frac{\varphi^2}{4c} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c} \right) \right] \frac{d}{d\left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)} F\left(\frac{d}{2} - 1, 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Die Ableitung der Hypergeometrischen Funktion nach ihrem letzten Argument ergibt nach Gl. (15.2.1) aus [63] den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}'(\varphi) &= \frac{\varphi}{2c} F\left(1, \frac{d}{2} - 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\ &\quad - \frac{\nu}{4c^2} \varphi^{2\nu+1} \left(\frac{\frac{d}{2} - 1}{\frac{d}{2}}\right) F\left(2, \frac{d}{2}; \frac{d}{2} + 1; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Mit der Definition von $\nu(d)$ aus (2.5) gelten die folgenden Identitäten:

$$\frac{\frac{d}{2} - 1}{\frac{d}{2}} = \frac{d - 2}{d} = \frac{2}{d\nu}.$$

Damit nimmt die Ableitung der Funktion \widetilde{W} nach φ die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}'(\varphi) &= \frac{\varphi}{2c} \left\{ F\left(1, \frac{d}{2} - 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{d}{2}\right)^{-1} \left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) F\left(2, \frac{d}{2}; \frac{d}{2} + 1; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Mit der Hilfsformel

$$c F(a, b; c; z) - c F(a, b + 1; c; z) + a z F(a + 1, b + 1; c + 1; z) = 0 \quad (\text{D.21})$$

und den Abkürzungen

$$a = 1, \quad b = \frac{d}{2} - 1, \quad c = \frac{d}{2}, \quad z = -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c} \quad (\text{D.22})$$

erhalten wir für \widetilde{W}' den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}'(\varphi) &= \frac{\varphi}{2c} \left\{ F\left(1, \frac{d}{2}; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right. \\ &\quad - \left(\frac{d}{2}\right)^{-1} \left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) F\left(2, \frac{d}{2}; \frac{d}{2} + 1; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{d}{2}\right)^{-1} \left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) F\left(2, \frac{d}{2}; \frac{d}{2} + 1; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right\} \\ &= \frac{\varphi}{2c} F\left(1, \frac{d}{2}; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Nach Gl. (15.1.8) aus [63] besitzt die Hypergeometrische Funktion $F(a, b; b; z)$ die folgende Form:

$$F(a, b; b; z) = (1 - z)^{-a}. \quad (\text{D.24})$$

Das führt uns zu der folgenden Differentialgleichung:

$$\widetilde{W}'(\varphi) = \frac{\varphi}{2c} \left(1 + \frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)^{-1} = \frac{\varphi}{2c \left(1 + \frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)} = \frac{\varphi}{\varphi^{2\nu} + 2c} \quad (\text{D.25})$$

Somit ist die Aussage bewiesen. \square

Korollar 1. *Beweis der Hilfsformel (D.21),*

$$a z F(a+1, b+1; c+1; z) = c F(a, b+1; c; z) - c F(a, b; c; z). \quad (\text{D.26})$$

Beweis. Nach Gl. (15.2.10) aus [63] gilt die folgende Identität zwischen Hypergeometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} a z F(a+1, b+1; c+1; z) \\ &= a F(a+1, b+1; c+1; z) - (c+1-a) F(a-1, b+1; c+1; z) \\ &\quad - (2a-c-1-az+bz+z) F(a, b+1; c+1; z). \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Aus Gl. (15.2.17) aus [63] erhalten wir:

$$\begin{aligned} a F(a+1, b+1; c+1; z) \\ &= -(c-a) F(a, b+1; c+1; z) + c F(a, b+1; c; z). \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Somit können wir die folgenden Relationen berechnen:

$$\begin{aligned} a z F(a+1, b+1; c+1; z) \\ &= c F(a, b+1; c; z) - (c+1-a) F(a-1, b+1; c+1; z) \\ &\quad - (a-1-az+bz+z) F(a, b+1; c+1; z) \\ &= c F(a, b+1; c; z) - b F(a, b+1; c+1; z) \\ &\quad - (c-b) F(a, b; c+1; z). \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Hier haben wir ausgenutzt, daß nach Gl. (15.2.19) aus [63] gilt:

$$\begin{aligned} &-(c+1-a) F(a-1, b+1; c+1; z) \\ &= -(b+1-a) (1-z) F(a, b+1; c+1; z) \\ &\quad - (c+1-b-1) F(a, b; c+1; z) \\ &= -(b+1-a-bz-z+az) F(a, b+1; c+1; z) \\ &\quad - (c+1-b-1) F(a, b; c+1; z). \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Aus den Gleichungen (15.2.14) und (15.2.17) aus [63] folgt:

$$\begin{aligned}
& -b F(a, b+1; c+1; z) \\
& = -(b-a) F(a, b; c+1; z) - a F(a+1, b; c+1; z) \\
& = -(b-a) F(a, b; c+1; z) + (c+1-a-1) F(a, b; c+1; z) \\
& \quad - (c+1-1) F(a, b; c; z).
\end{aligned} \tag{D.31}$$

Damit erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
& az F(a+1, b+1; c+1; z) \\
& = c F(a, b+1; c; z) - (b-a) F(a, b; c+1; z) \\
& \quad + (c-a) F(a, b; c+1; z) - c F(a, b; c; z) \\
& \quad - (c-b) F(a, b; c+1; z) \\
& = c F(a, b+1; c; z) - c F(a, b; c; z).
\end{aligned} \tag{D.32}$$

□

Theorem 2. *Es soll gezeigt werden, daß die Hypergeometrische Funktion aus (D.15) für $c \rightarrow 0$ nicht divergiert.*

Beweis. Nach Gl. (15.2.25) aus [63] gilt mit den Abkürzungen (D.22) die folgende Identität:

$$\begin{aligned}
& F\left(1, \frac{d}{2}-1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
& = \left(1 + \frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) F\left(1, \frac{d}{2}; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
& \quad + \frac{2}{d} \left(\frac{d}{2}-1\right) \left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) F\left(1, \frac{d}{2}; \frac{d}{2}+1; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right).
\end{aligned} \tag{D.33}$$

Da in (D.33) die Zahl $d/2-1$ größer als Null sein soll, gilt diese Rechnung nur in mehr als zwei Dimensionen. Mit Gl. (15.3.4) aus [63] erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
F\left(1, \frac{d}{2}; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) & = \left(1 + \frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)^{-1} F\left(1, 0; \frac{d}{2}; \frac{-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}}{-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}-1}\right) \\
& = \left(\frac{2c}{\varphi^{2\nu}+2c}\right) F\left(1, 0; \frac{d}{2}; \frac{\varphi^{2\nu}}{\varphi^{2\nu}+2c}\right),
\end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
F\left(1, \frac{d}{2}; \frac{d}{2}+1; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) & = \left(1 + \frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)^{-1} F\left(1, 1; \frac{d}{2}+1; \frac{-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}}{-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}-1}\right) \\
& = \left(\frac{2c}{\varphi^{2\nu}+2c}\right) F\left(1, 1; \frac{d}{2}+1; \frac{\varphi^{2\nu}}{\varphi^{2\nu}+2c}\right).
\end{aligned} \tag{D.35}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& F\left(1, \frac{d}{2} - 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
&= F\left(1, 0; \frac{d}{2}; \frac{\varphi^{2\nu}}{\varphi^{2\nu} + 2c}\right) \\
&\quad - \left(\frac{d-2}{d}\right) \left(\frac{\varphi^{2\nu}}{\varphi^{2\nu} + 2c}\right) F\left(1, 1; \frac{d}{2} + 1; \frac{\varphi^{2\nu}}{\varphi^{2\nu} + 2c}\right).
\end{aligned} \tag{D.36}$$

Mit Gl. (15.1.20) aus [63] können wir nun den Grenzfall $c \rightarrow 0$ betrachten:

$$\begin{aligned}
& F\left(1, \frac{d}{2} - 1; \frac{d}{2}; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
&\xrightarrow{c \rightarrow 0} F\left(1, 0; \frac{d}{2}; 1\right) - \left(\frac{d-2}{d}\right) F\left(1, 1; \frac{d}{2} + 1; 1\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} - \left(\frac{d-2}{d}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \\
&= 1 - \left(\frac{d-2}{d}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{D.37}$$

Die Funktion (D.37) ist in diesem Grenzfall eine endliche Konstante, da wir hier nur Raumzeitdimensionen betrachten, die größer als zwei sind. \square

Theorem 3. *Die Funktion*

$$W_k(\varphi) = \frac{\varphi^{(k+2)\nu}}{2\nu c(k+2)} {}_2F_1\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \tag{D.38}$$

ist Lösung der Differentialgleichung (D.12).

Beweis. Wenn wir die Funktion $W_k(\varphi)$ nach dem Feld φ ableiten, erhalten wir die folgende Funktion:

$$\begin{aligned}
W'_k(\varphi) &= \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{2c} F\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
&\quad + \frac{\varphi^{(k+2)\nu}}{2\nu c(k+2)} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right] \\
&\quad \times \frac{d}{d\left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)} F\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right).
\end{aligned} \tag{D.39}$$

Wenn wir die Ableitung der Hypergeometrischen Funktion nach ihrem letzten Argument ausführen, erhalten wir mit Gl. (15.2.1) aus [63] die folgende Funktion:

$$\begin{aligned}
W'_k(\varphi) &= \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{2c} F\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
&\quad + \frac{\varphi^{(k+2)\nu}}{2\nu c(k+2)} \left(-\frac{2\nu}{2c} \varphi^{2\nu-1}\right) \left(\frac{\frac{k}{2} + 1}{\frac{k}{2} + 2}\right) \\
&\quad \times F\left(2, \frac{k}{2} + 2; \frac{k}{2} + 3; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
&= \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{2c} F\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
&\quad - \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1} \varphi^{2\nu}}{2c^2(k+4)} F\left(2, \frac{k}{2} + 2; \frac{k}{2} + 3; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right).
\end{aligned} \tag{D.40}$$

Nach wenigen algebraischen Umformungen erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
W'_k(\varphi) &= \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{2c} \left\{ F\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{k}{2} + 2\right)^{-1} \left(-\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) F\left(2, \frac{k}{2} + 2; \frac{k}{2} + 3; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{D.41}$$

Mit der Hilfsformel (D.21) und mit den Abkürzungen

$$a = 1, \quad b = \frac{k}{2} + 1, \quad c = \frac{k}{2} + 2, \quad z = -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c} \tag{D.42}$$

nimmt die Funktion W'_k die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
W'_k(\varphi) &= \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{2c} \left\{ F\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right. \\
&\quad + F\left(1, \frac{k}{2} + 2; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \\
&\quad \left. - F\left(1, \frac{k}{2} + 1; \frac{k}{2} + 2; -\frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{D.43}$$

Mit (D.24) führt uns das zu der folgenden Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
W'_k(\varphi) &= \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{2c} \left(1 + \frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)^{-1} = \varphi^{(k+2)\nu-1} \frac{1}{2c \left(1 + \frac{\varphi^{2\nu}}{2c}\right)} \\
&= \frac{\varphi^{(k+2)\nu-1}}{\varphi^{2\nu} + 2c}.
\end{aligned} \tag{D.44}$$

Somit ist die Aussage bewiesen. □

D.4 Explizite Berechnung des $\widehat{\Upsilon}_{-2}$ -Integrals in vier Dimensionen

In diesem Abschnitt wollen wir die expliziten Funktionen $\widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi)$ in der R^4 -Topologie, Gl. (9.14), beziehungsweise in der S^4 -Topologie, Gl. (9.15), herleiten.

D.4.1 Der flache Raum

Der Startpunkt unserer Rechnung in der R^4 -Topologie ist die Gleichung (D.6) in vier Dimensionen:

$$\widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) = -\frac{1}{24\pi} y_g \left\{ \frac{1}{4} \varphi^4 - c \varphi^2 + 4c^2 \widetilde{W}(\varphi) + const \right\}. \quad (\text{D.45})$$

Die Funktion $\widetilde{W}(\varphi)$ löst die folgende Differentialgleichung:

$$\widetilde{W}'(\varphi) = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 2c}. \quad (\text{D.46})$$

Gl. (D.46) läßt sich wie folgt umschreiben:

$$\widetilde{W}'(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \ln(\varphi^2 + 2c). \quad (\text{D.47})$$

Somit erhalten wir als Lösung von (D.46) die folgende Funktion:

$$\widetilde{W}(\varphi) = \frac{1}{2} \ln(\varphi^2 + 2c). \quad (\text{D.48})$$

Das $\widehat{\Upsilon}_{-2}$ -Integral nimmt jetzt die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) &= -\frac{1}{24\pi} y_g \left\{ \frac{1}{4} \varphi^4 - c \varphi^2 + 2c^2 \ln(\varphi^2 + 2c) + const \right\} \\ &= -\frac{1}{96\pi} y_g \left\{ \varphi^4 - 4c \varphi^2 + 8c^2 \ln(\varphi^2 + 2c) + const \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

Dies ist Gleichung (9.14) aus dem Haupttext. Mit der in der R^4 -Topologie kanonischen Wahl $c = 0$ erhalten wir das folgende Integral:

$$\widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) \Big|_{c=0} = -\frac{1}{96\pi} y_g (\varphi^4 + const) \quad (\text{D.50})$$

D.4.2 Die Sphäre

Der Startpunkt unserer Rechnung in der S^4 -Topologie ist die Gleichung (D.13) in vier Dimensionen:

$$\begin{aligned} \widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) = & -\frac{1}{96\pi} y_g \left\{ \varphi^4 - 4c \varphi^2 + 8c^2 \ln(\varphi^2 + 2c) + \text{const} \right\} \\ & - \frac{y_g}{4\pi} \ln(\varphi^2 + 2c) - \frac{y_g}{2\pi} \widetilde{W}(\varphi; a_1, a_2, a_3) \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

Die Funktion $\widetilde{W}_k(\varphi)$ erfüllt die folgende Differentialgleichung:

$$\widetilde{W}'(\varphi; a_1, a_2, a_3) = a_1 \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 2c} + a_2 \frac{\varphi^3}{\varphi^2 + 2c} + a_3 \frac{\varphi^4}{\varphi^2 + 2c}. \quad (\text{D.52})$$

Algebraische Umformungen ergeben die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}'(\varphi; a_1, a_2, a_3) &= a_1 \frac{\varphi^2 + 2c}{\varphi^2 + 2c} - 2c a_1 \frac{1}{\varphi^2 + 2c} + a_2 \varphi \frac{\varphi^2 + 2c}{\varphi^2 + 2c} - 2c a_2 \frac{\varphi}{\varphi^2 + 2c} \\ &\quad + a_3 \varphi^2 \frac{\varphi^2 + 2c}{\varphi^2 + 2c} - 2c a_3 \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 2c} \\ &= a_1 + a_2 \varphi + a_3 \varphi^2 - 2c a_1 \frac{1}{\varphi^2 + 2c} - 2c a_2 \frac{\varphi}{\varphi^2 + 2c} \\ &\quad - 2c a_3 \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 2c}. \end{aligned} \quad (\text{D.53})$$

Mit der Relation

$$-2c a_3 \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 2c} = -2c a_3 \frac{\varphi^2 + 2c}{\varphi^2 + 2c} + 4c^2 a_3 \frac{1}{\varphi^2 + 2c} \quad (\text{D.54})$$

nimmt die Funktion \widetilde{W}'_k die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}'(\varphi; a_1, a_2, a_3) &= (a_1 - 2c a_3) + a_2 \varphi + a_3 \varphi^2 \\ &\quad + 2c (2c a_3 - a_1) \frac{1}{\varphi^2 + 2c} - 2c a_2 \frac{\varphi}{\varphi^2 + 2c}. \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

Weiter benötigen wir die folgenden Identitäten:

$$\frac{1}{\varphi^2 + 2c} = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{\sqrt{2c}} \arctan \left(\frac{\varphi}{\sqrt{2c}} \right) \right], \quad (\text{D.56a})$$

$$\frac{\varphi}{\varphi^2 + 2c} = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{2} \ln(\varphi^2 + 2c) \right]. \quad (\text{D.56b})$$

Damit erhalten wir den folgenden Ausdruck für die Funktion $\widetilde{W}(\varphi)$ aus Gl. (D.51):

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(\varphi; a_1, a_2, a_3) &= (a_1 - 2c a_3) \varphi + \frac{a_2}{2} \varphi^2 + \frac{a_3}{3} \varphi^3 \\ &\quad + \sqrt{2c} (2c a_3 - a_1) \arctan\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2c}}\right) \\ &\quad - a_2 c \ln(\varphi^2 + 2c). \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

Als Resultat besitzt nun das Integral $\widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi)$ in der S^4 -Topologie die folgende Form:

$$\begin{aligned} \widehat{\Upsilon}_{-2}(\varphi) &= -\frac{1}{2\pi} y_g \left\{ \frac{1}{48} \varphi^4 + \frac{a_3}{3} \varphi^3 + \frac{1}{2} \left(a_2 - \frac{1}{6} c \right) \varphi^2 \right. \\ &\quad + (a_1 - 2c a_3) \varphi + \sqrt{2c} (2c a_3 - a_1) \arctan\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2c}}\right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(1 - 2a_2 c + \frac{c^2}{3} \right) \ln(\varphi^2 + 2c) + \text{const} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

Dies ist Gleichung (9.15) aus dem Haupttext.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. Rosenfeld, Ann. der Physik 5 (1930) 113; Z. für Physik 65 (1930) 589;
M. Bronstein, Phys. Zeitschrift der Sowjetunion 9 (1936) 140.
- [2] Für eine allgemeine Einführung siehe C. Kiefer, *Quantum Gravity*, Second Edition,
Oxford Science Publications, Oxford (2007).
- [3] A. Ashtekar, *Lectures on non-perturbative canonical gravity*,
World Scientific, Singapore (1991);
A. Ashtekar und J. Lewandowski, Class. Quant. Grav. 21 (2004) R53.
- [4] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [5] Th. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*,
Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [6] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz und R. Loll, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 131301.
- [7] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz und R. Loll, Phys. Lett. B 607 (2005) 205.
- [8] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz und R. Loll, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 171301;
Phys. Rev. D 72 (2005) 064014; Contemp. Phys. 47 (2006) 103.
- [9] S. Weinberg in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*,
S.W. Hawking und W. Israel (Ed.), Cambridge University Press (1979);
S. Weinberg, hep-th/9702027; arXiv:0903.0568 [hep-th]; arXiv:0908.1964 [hep-th];
Phys. Rev. D 81 (2010) 083535.

- [10] M. Reuter, Phys. Rev. D 57 (1998) 971.
- [11] D. Dou und R. Percacci, Class. Quant. Grav. 15 (1998) 3449.
- [12] O. Lauscher und M. Reuter, Phys. Rev. D 65 (2002) 025013.
- [13] M. Reuter und F. Saueressig, Phys. Rev. D 65 (2002) 065016.
- [14] O. Lauscher und M. Reuter, Phys. Rev. D 66 (2002) 025026.
- [15] O. Lauscher und M. Reuter, Class. Quant. Grav. 19 (2002) 483.
- [16] O. Lauscher und M. Reuter, Int. J. Mod. Phys. A 17 (2002) 993.
- [17] W. Souma, Prog. Theor. Phys. 102 (1999) 181.
- [18] M. Reuter und F. Saueressig, Phys. Rev. D 66 (2002) 125001;
Fortschr. Phys. 52 (2004) 650.
- [19] A. Bonanno und M. Reuter, JHEP 02 (2005) 035.
- [20] Für einen Überblick über die Quanten-Einstein-Gravitation siehe:
O. Lauscher und M. Reuter in *Quantum Gravity*, B. Fauser,
J. Tolksdorf und E. Zeidler (Ed.), Birkhäuser, Basel (2007);
O. Lauscher und M. Reuter in *Approaches to Fundamental Physics*,
I.-O. Stamatescu und E. Seiler (Ed.), Springer, Berlin (2007);
M. Reuter und F. Saueressig, arXiv:0708.1317 [hep-th].
- [21] R. Percacci und D. Perini, Phys. Rev. D 67 (2003) 081503;
Phys. Rev. D 68 (2003) 044018; Class. Quant. Grav. 21 (2004) 5035.
- [22] A. Codello und R. Percacci, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 221301;
A. Codello, R. Percacci und C. Rahmede, Int. J. Mod. Phys. A23 (2008) 143;
Annals Phys. 324 (2009) 414.
- [23] D. Litim, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 201301; AIP Conf. Proc. 841 (2006) 322;
P. Fischer und D. Litim, Phys. Lett. B 638 (2006) 497;
AIP Conf. Proc. 861 (2006) 336.
- [24] P. Machado und F. Saueressig, Phys. Rev. D 77 (2008) 124045.

- [25] O. Lauscher und M. Reuter, JHEP 10 (2005) 050.
- [26] M. Reuter und J.-M. Schwindt, JHEP 01 (2006) 070.
- [27] M. Reuter und J.-M. Schwindt, JHEP 01 (2007) 049.
- [28] J.-E. Daum und M. Reuter, Adv. Sci. Lett. 2 (2009) 255.
- [29] F. Neugebohrn, arXiv:0704.3205 [hep-th]
- [30] P. Forgács und M. Niedermaier, hep-th/0207028;
M. Niedermaier, JHEP 12 (2002) 066; Nucl. Phys. B 673 (2003) 131;
Class. Quant. Grav. 24 (2007) R171.
- [31] Für einen detaillierten Überblick über die asymptotische Sicherheit in der Gravitation siehe: M. Niedermaier und M. Reuter, Living Reviews in Relativity 9 (2006) 5;
R. Percacci, in *Approaches to Quantum Gravity, Towards a New Understanding of Space, Time and Matter*, D. Oriti (Ed.), Cambridge University Press (2009).
- [32] C. Wetterich, Phys. Lett. B 301 (1993) 90.
- [33] M. Reuter und C. Wetterich,
Nucl. Phys. B 417 (1994) 181, Nucl. Phys. B 427 (1994) 291,
Nucl. Phys. B 391 (1993) 147, Nucl. Phys. B 408 (1993) 91;
M. Reuter, Phys. Rev. D 53 (1996) 4430, Mod. Phys. Lett. A 12 (1997) 2777.
- [34] J. Berges, N. Tetradis und C. Wetterich, Phys. Rep. 363 (2002) 223;
C. Wetterich, Int. J. Mod. Phys. A 16 (2001) 1951.
- [35] Für einen Überblick über die effektive Mittelwertwirkung in der Yang-Mills-Theorie siehe:
M. Reuter, hep-th/9602012; J. Pawłowski, hep-th/0512261; H. Gies, hep-ph/0611146.
- [36] L.F. Abbott, Nucl. Phys. B 185 (1981) 189;
B.S. DeWitt, Phys. Rev. 162 (1967) 1195;
M.T. Grisaru, P. van Nieuwenhuizen und C.C. Wu, Phys. Rev. D 12 (1975) 3203;
D.M. Capper, J.J. Dulwich und M. Ramon Medrano, Nucl. Phys. B 254 (1985) 737;
S.L. Adler, Rev. Mod. Phys. 54 (1982) 729.

- [37] A. Bonanno und M. Reuter, Phys. Rev. D 62 (2000) 043008;
Phys. Rev. D 73 (2006) 083005; Phys. Rev. D 60 (1999) 084011.
- [38] M. Reuter und E. Tuiran, hep-th/0612037.
- [39] A. Bonanno und M. Reuter, Phys. Rev. D 65 (2002) 043508.
- [40] M. Reuter und F. Saueressig, JCAP 09 (2005) 012.
- [41] A. Bonanno und M. Reuter, Phys. Lett. B 527 (2002) 9;
Int. J. Mod. Phys. D 13 (2004) 107;
E. Bentivegna, A. Bonanno und M. Reuter, JCAP 01 (2004) 001.
- [42] A. Bonanno und M. Reuter, JCAP 08 (2007) 024.
- [43] A. Bonanno, G. Esposito und C. Rubano, Gen. Rel. Grav. 35 (2003) 1899;
Class. Quant. Grav. 21 (2004) 5005;
A. Bonanno, G. Esposito, C. Rubano und P. Scudellaro,
Class. Quant. Grav. 23 (2006) 3103 und 24 (2007) 1443.
- [44] M. Reuter und H. Weyer, Phys. Rev. D 69 (2004) 104022.
- [45] M. Reuter und H. Weyer, Phys. Rev. D 70 (2004) 124028.
- [46] M. Reuter und H. Weyer, JCAP 12 (2004) 001.
- [47] F. Girelli, S. Liberati, R. Percacci und C. Rahmede,
Class. Quant. Grav. 24 (2007) 3995.
- [48] D. Litim und T. Plehn, Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 131301.
- [49] J. Moffat, JCAP 05 (2005) 2003;
J.R. Brownstein und J. Moffat, Astrophys. J. 636 (2006) 721;
Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 367 (2006) 527.
- [50] R. Floreanini und R. Percacci, Nucl. Phys. B 436 (1995) 141;
Phys. Rev. D 46 (1992) 1566.
- [51] A.M. Polyakov, Yad. Fiz. 64 (2001) 594
[englische Übersetzung: Phys. Atom. Nucl. 64 (2001) 540].

- [52] R. Jackiw, C. Núñez und S.-Y. Pi, Phys. Lett. A 347 (2005) 47.
- [53] K. Symanzik, Nuovo Cim. Lett. 6 (1973) 77.
- [54] Für eine historische Übersicht siehe: G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 254 (1985) 11.
- [55] O. Lauscher, M. Reuter und C. Wetterich, Phys. Rev. D 62 (2000) 125021.
- [56] J.V. Narlikar und T. Padmanabhan,
Gravity, Gauge Theories und Quantum Cosmology, D. Reidel, Dordrecht (1986),
Kapitel 12 und die darin angegebene Literatur.
- [57] M.H. Goroff und A. Sagnotti, Phys. Lett. B 160 (1985) 81;
A.E.M. van de Ven, Nucl. Phys. B 378 (1992) 309.
- [58] E. Witten, Nucl. Phys. B 311 (1988) 46.
- [59] M. Reuter und C. Wetterich, Nucl. Phys. B 506 (1997) 483.
- [60] D. Litim, Phys. Lett. B 486 (2000) 92; Phys. Rev. D 64 (2001) 105007;
Int. J. Mod. Phys. A 16 (2001) 2081.
- [61] M.A. Rubin und C.R. Ordóñez, J. Math. Phys. 25 (1984) 2888; 26 (1985) 65.
- [62] R.P. Boas und C. Stutz, Am. J. Phys. 39 (1971) 745.
- [63] M. Abramowitz und I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*,
National Bureau of Standards, Washington (1972).
- [64] K. Halpern und K. Huang, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 3526;
Phys. Rev D 53 (1996) 3252.
- [65] A. Bonanno, Phys. Rev. D 62 (2000) 027701;
H. Gies, Phys. Rev. D 63 (2001) 065011.
- [66] T.R. Morris, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1658; Phys. Lett. B 334 (1994) 355.
- [67] G. Parisi, Nucl. Phys, B 100 (1975) 368; Nucl. Phys, B 254 (1985) 58;
K. Gawedzki und A. Kupiainen, Nucl. Phys. B 262 (1985) 33;
Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 2191; Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 363;

- B. Rosenstein, B.J. Warr und S.H. Park, Phys. Rept. 205 (1991) 59;
C. de Calan, P.A. Faria da Veiga, L. Magnen und R. Sénéor,
Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 3233.
- [68] N. Tetradis und C. Wetterich, Nucl. Phys. B 422 (1994) 541;
A. Bonanno und D. Zappalà, Phys. Rev. D 57 (1998) 7383.
- [69] C.M. Fraser, Z. Phys. C 28 (1085) 101.