

# **Visualisierung vergrabener Objekte: Ein Sampling-Verfahren für die Maxwell-Gleichungen**

Dissertation zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik  
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Christoph Schneider

geboren in Bad Schwalbach

Mainz 2010

Datum der mündlichen Prüfung: 30. April 2010  
Mainzer Dissertation D77

# Danksagung

Ich nutze die Gelegenheit mich an dieser Stelle ganz herzlich bei allen zu bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt und damit zu ihrem Gelingen beigetragen haben. Ganz besonders danke ich meinem Doktorvater für das mir entgegengebrachte Vertrauen, die wertvollen Anregungen und die gewährte Freiheit. Auch den Mitgliedern des BMBF-Projekts, insbesondere den Kollegen aus Karlsruhe und Rostock, möchte ich für die mir entgegengebrachte Gastfreundschaft und die gute Zusammenarbeit danken. Ganz speziell bedanke ich mich bei den Mitgliedern des Göttinger Teilprojekts für die Bereitstellung des Lösers für das direkte Streuproblem.

Mein besonderer Dank gilt allen jetzigen wie ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für die anregenden Diskussionen, die auch weit über das Thema der Arbeit hinausgingen. Ich danke auch dem Institut für Mathematik dafür, dass es über das Studium hinaus eine anregende und angenehme Atmosphäre schuf.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meiner Familie, die mich auf meinem bisherigen Weg immer liebevoll und nach besten Kräften unterstützt hat.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Physikalische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1. Die Maxwell-Gleichungen . . . . .	5
2.1.1. Das Ohmsche Gesetz . . . . .	6
2.1.2. Die Kontinuitätsgleichung . . . . .	6
2.1.3. Das Induktionsgesetz von Faraday . . . . .	7
2.1.4. Die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen . . . . .	7
2.1.5. Randbedingungen . . . . .	8
2.2. Dipole . . . . .	12
2.3. Das Gesetz von Biot-Savart . . . . .	13
2.4. Metalldetektoren . . . . .	15
2.5. Bodenparameter . . . . .	19
<b>3. Die Problemstellung</b>	<b>21</b>
3.1. Notationen . . . . .	22
3.2. Das Modell . . . . .	24
3.3. Die Faktorisierung der Messoperatoren . . . . .	26
3.4. Erweiterung auf Spulen . . . . .	32
3.5. Das inverse Problem . . . . .	34
<b>4. Numerische Ergebnisse und Experimente</b>	<b>39</b>
4.1. Approximation der Singulärwertzerlegung von $M$ . . . . .	39
4.2. Implementation . . . . .	41
4.3. Numerische Ergebnisse . . . . .	45
4.3.1. Abschätzung des Fehlers . . . . .	47
4.3.2. Auswirkung der Polarisationsrichtung der Testfunktion . . . . .	50
4.3.3. Rekonstruktionen mit fehlerhaften Daten . . . . .	54
4.3.4. Auswirkungen des Messgitters . . . . .	58
4.3.5. Auswirkungen der Position der Kugel . . . . .	58
4.3.6. Rekonstruktion verschiedener Objekte . . . . .	63
4.3.7. Experimente . . . . .	68
4.3.8. Spulen . . . . .	75
4.4. Greensche Funktionen . . . . .	80

4.4.1. Greensche Funktion im Vollraum . . . . .	81
4.4.2. Greensche Funktion im geschichteten Medium . . . . .	81
4.5. Vergleich der Greenschen Funktionen . . . . .	82
<b>A. Formelsammlung</b>	<b>89</b>
A.1. Notationen . . . . .	89
A.1.1. Mengen . . . . .	89
A.1.2. Abbildungen und Operatoren . . . . .	89
A.1.3. Funktionenräume . . . . .	91
A.1.4. Physikalische Parameter . . . . .	91
A.2. Vektorgleichungen . . . . .	91
A.3. Koordinatensysteme . . . . .	91
A.3.1. Kartesische Koordinaten . . . . .	91
A.3.2. Zylinderkoordinaten . . . . .	92
<b>B. Die Hankel-Transformation</b>	<b>93</b>
B.1. Definition und Eigenschaften . . . . .	93
B.2. Eigenschaften von $\beta$ . . . . .	98
B.3. Die schnelle Hankel-Transformation . . . . .	99
<b>C. Lösungen der Helmholtz-Gleichung</b>	<b>103</b>
C.1. Die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung . . . . .	103
C.1.1. Definition und Eigenschaften . . . . .	103
C.1.2. Die Hesse-Matrix . . . . .	104
C.2. Lösungen im Zweischichtmedium . . . . .	105
C.2.1. Radialsymmetrische Lösungen . . . . .	105
C.2.2. Lösungen mit gegebener Winkelabhängigkeit . . . . .	106
<b>D. Die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im Zweischichtmedium</b>	<b>107</b>
D.1. Der Hertz-Vektor . . . . .	107
D.2. Dipole im Zweischichtmedium . . . . .	108
D.2.1. Vertikaler Dipol . . . . .	109
D.2.2. Horizontaler Dipol . . . . .	115
D.2.3. Die dyadischen Greenschen Funktionen . . . . .	121
<b>Zusammenfassung/Abstract</b>	<b>127</b>

# 1. Einleitung

Landminen gefährden als Hinterlassenschaften bewaffneter Konflikte in vielen Ländern die Bevölkerung. Die rasche und vollständige Beseitigung der vergrabenen Landminen, die in über 70 Ländern eine Fläche von insgesamt mehreren tausend Quadratkilometern kontaminieren [LM10], ist eine große technische Herausforderung. Das zum humanitären Minenräumen am häufigsten eingesetzte Gerät ist gegenwärtig der Metalldetektor. Diese Geräteklasse weist jedoch eine hohe Fehlalarmrate auf, die bedingt wird durch die sich gerade in Kampfgebieten allgegenwärtig im Boden befindlichen Metallteile. Daher war es das Ziel des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Projektverbunds „Humin/MD – Metalldetektoren für Humanitäres Minenräumen: Entwicklungspotenziale bei Datenanalyse und Messtechnik“ [HUM07], diese Fehlalarmrate zu senken. Als Partner dieses Verbunds entwickeln und untersuchen wir in dieser Arbeit eine Methode zur Visualisierung von im Boden vergrabenen Objekten mit Hilfe von Metalldetektoren.

Metalldetektoren, deren Messkopf im Wesentlichen aus kreisförmigen Spulen bestehen, erzeugen mit Hilfe eines an eine Spule angelegten Wechselstroms einer festen und relativ niedrigen Frequenz von etwa 20kHz [Bru02] ein elektromagnetisches Feld. Dieses Feld, das mit der Umgebung wechselwirkt, induziert in einer zweiten Spule einen Strom, der gemessen wird. Da sich das elektromagnetische Feld in der Nähe metallischer Objekte ändert, löst eine solche Änderung auf einer heuristischen Grundlage ein akustisches Signal aus. Dieses Signal zeigt dann an, dass sich ein metallisches Objekt unterhalb des Detektors befindet. Aufgrund des geringen Informationsgehalts verwenden wir nicht das akustische Signal, um die vergrabenen Objekte zu visualisieren, sondern betrachten die Funktionsweise eines Metalldetektors und leiten daraus ein idealisiertes Modell ab. Insbesondere betrachten wir kein klassisches handgeführtes Gerät, sondern ein Gitter aus mehreren in einer Ebene über dem Erdboden angeordneten Spulen.

Mathematisch betrachten wir ein inverses Streuproblem zeitharmonischer elektromagnetischer Wellen für Streukörper in einem unbeschränkten zweischichtigen Medium. Unser Ziel ist es, die Form, Position und Anzahl der Streukörper in einem bekannten Hintergrundmedium aus Messungen elektromagnetischer Felder einer festen Frequenz zu bestimmen. Die Felder werden durch die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen beschrieben, die zusammen mit geeigneten Rand- und Ausstrahlungsbedingungen ein System vektorwertiger linearer partieller Differentialgleichungen bilden. Aufgrund der Linearität können wir das elektromagnetische Feld als die Summe des von einem Detektor

erzeugten Feldes und des von den vergrabenen Objekten gestreuten Feldes schreiben. Das sogenannte *direkte Streuproblem* oder auch *Vorwärtsproblem* besteht darin, das von den Objekten gestreute Feld aus der Kenntnis des vom Detektor erzeugten Feldes und den Eigenschaften der Objekte zu bestimmen. Es muss also das entsprechende System von Differentialgleichungen gelöst werden. Das zugehörige *inverse Streuproblem* ist es, Eigenschaften der Streukörper aus dem Wissen über das gestreute elektromagnetische Feld zu rekonstruieren. Unser Wissen über das gestreute elektromagnetische Feld resultiert dabei aus einer einmaligen oder mehrmaligen Messung des Feldes auf einer Fläche in geringer Entfernung der Streukörper. Das inverse Problem ist nichtlinear und schlecht gestellt. Das heißt, die Form und Position der Streukörper hängt in keiner sinnvollen Norm stetig von den gestreuten Feldern ab [CK98].

Ein klassischer Ansatz zur Lösung des inversen Problems besteht darin, es als nicht-lineare Operatorgleichung zu formulieren. Dieses schlecht gestellte Problem wird dann mit Hilfe regularisierter Optimierungsverfahren, wie etwa einem regularisierten Newton-Verfahren, gelöst [CK98, ENH96]. Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die Messung des gestreuten Feldes für nur ein einziges einfallendes Feld benötigt wird. Ein großer Nachteil ist allerdings, dass die Optimierungsverfahren für gewöhnlich iterativ sind und in jedem Iterationsschritt das direkte Streuproblem gelöst werden muss, was sehr rechen- und damit zeitaufwändig ist. Weiterhin benötigen die Verfahren noch zusätzliche Informationen über die im Allgemeinen unbekanntes Streuobjekte, wie etwa deren Anzahl oder deren ungefähre Position. Ein Verfahren dieser Klasse wurde im Rahmen des Projekts [HUM07] von der Arbeitsgruppe aus Göttingen entwickelt. In [DEK<sup>+</sup>08] wird das inverse Streuproblem als ein Kleinste-Quadrate Optimierungsproblem formuliert und iterativ gelöst. Den dazu für die numerische Lösung des Vorwärtsproblems entwickelten Code verwenden wir zur Erzeugung unserer synthetischen Messdaten.

Aufgrund der Nachteile der iterativen Verfahren untersuchen wir eine Methode aus der relativ neuen Klasse der *Sampling-Verfahren* [Pot06, CK06]. Diese Methoden sind nicht iterativ und daher tendenziell schneller als die iterativen Verfahren. Weiterhin benötigen sie keine oder allenfalls wenige Informationen über die unbekanntes Streukörper. Die Verfahren eignen sich allerdings nicht zur Rekonstruktion quantitativer Eigenschaften wie etwa der genauen Leitfähigkeit im Erdboden. Die Methoden liefern für jeden einzelnen Punkt in einem zu untersuchenden Gebiet ein Kriterium dafür, ob dieser Punkt zu einem Streukörper gehört. In der Praxis betrachtet man eine diskrete Menge von Punkten (engl. *samples*) und wendet das Kriterium auf jeden einzelnen Punkt an. Die Punkte, bei denen das Kriterium positiv ausfällt, bilden dann eine Approximation der Streukörper. Ein Nachteil der Sampling-Methoden ist, dass die Theorie hinter den Verfahren im Allgemeinen nicht garantiert, dass mehr als nur eine echte Teilmenge der Streukörper rekonstruiert wird. Ferner erfordern die Verfahren nicht nur eine einzige Messung, sondern verlangen vergleichsweise viele und genaue Daten. Trotz der Lücke in der Theorie sind die Verfahren in der numerischen Anwendung geeignet, um gute Rekonstruktionen der vollständigen Streuobjekte zu erhalten, wie wir in [CHP03, CFH06, HEP06] und auch in dieser Arbeit sehen.

---

Die von Kirsch entwickelte *Faktorisierungsmethode* [KG08], die ebenfalls zu den Sampling-Verfahren gehört, weist die eben genannte Schwäche in der Theorie nicht auf. Das Entscheidungskriterium, das die Faktorisierungsmethode liefert, ermöglicht es die Streukörper vollständig zu charakterisieren. Allerdings ist die Theorie dieser Methode auf das von uns betrachtete Problem nicht direkt anwendbar [Kir07].

Die von uns entwickelte Methode folgt jedoch dem Grundgedanken der Faktorisierungsmethode und versetzt uns in die Lage für ein vereinfachtes Modell eine Teilmenge der Streukörper zu charakterisieren. Inspiriert durch die guten numerischen Ergebnisse unseres Verfahrens entstand der Artikel [GHS08]. Darin wird gezeigt, dass sich die Faktorisierungsmethode für den Grenzfall der Magneto- und Elektrostatik anwenden lässt. Wir sehen dies als eine Begründung für unsere guten Ergebnisse, da wir in dieser Arbeit die Maxwell-Gleichungen für relativ niedrige Frequenzen betrachten. Der magnetostatische Grenzfall ergibt sich, wenn wir die Frequenz des Wechselstroms, mit dem die Spulen unseres Metalldetektors angeregt werden, gegen Null gehen lassen, so dass nur noch ein Gleichstrom fließt.

Unser Sampling-Verfahren verwendet für das Entscheidungskriterium die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen. Die Auswertung dieser Funktion ist bereits für das betrachtete zweischichtige Hintergrundmedium numerisch sehr aufwändig. Bei unseren numerischen Untersuchungen stellen wir fest, dass wir mit der wesentlich einfacher auszuwertenden Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im homogenen Vollraum Rekonstruktionen vergleichbarer Qualität erhalten, wie mit der eigentlich zu verwendenden Funktion des Zweischichtmediums. Wie wir zeigen, liegt die Begründung dafür ebenfalls in der Verwendung niedriger Frequenzen bei der Erzeugung der elektromagnetischen Felder.

Die für die Anwendung unseres Sampling-Verfahrens benötigten Daten erhalten wir nicht mit einem einfachen handgeführten Metalldetektor, der nur an einer einzigen Stelle ein Feld erzeugen und messen kann. Wie bereits erwähnt stellen wir uns daher unser theoretisches Messgerät als ein planares Gitter von Spulen vor, in dem jede Spule als Sender und Empfänger dient. Bei diesem Aufbau wird allerdings immer auch das von den Spulen erzeugte Feld gemessen. Wir benötigen aber nur das von den vergrabenen Objekten gestreute Feld. Aufgrund unserer idealisierten Vorstellung des Erdbodens als einem homogenen, isotropen Halbraum erhalten wir das benötigte Streufeld aus der Differenz zweier Messungen mit diesem Gerät. Eine Messung findet über einem Gebiet statt, in dem sich keine Streukörper befinden. Diese Referenzmessung wird von der eigentlichen Messung abgezogen, die an einer zu untersuchenden Stelle vorgenommen wird. Sind an dieser Stelle keine Streukörper vorhanden, so ist die Differenz idealerweise Null. Methoden zur Messung des gestreuten Feldes in realen Anwendungen finden sich in Kapitel 8.5 von [Hol05]. Ein Versuch in Kooperation mit dem Teilprojekt der Universität Rostock mit in realiter gemessenen Daten führte leider zu keinen sinnvollen Ergebnissen, da die Daten einen zu hohen Fehler aufweisen.

## Die Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 betrachten wir die physikalischen Grundlagen der Maxwell-Gleichungen in einem zweischichtigen Medium und die Funktionsweise von Metalldetektoren. Weiterhin geben wir die physikalischen Parameter häufig vorkommender Böden an.

In Kapitel 3 präsentieren wir zunächst ein vereinfachtes Modell für das direkte Streuproblem für perfekt leitende Objekte, die vollständig im unteren Halbraum eines unbeschränkten zweischichtigen Mediums vergraben sind. Wir beschreiben den Messvorgang für dieses Modell, bei dem wir magnetische Dipole statt Metalldetektoren zur Anregung des elektromagnetischen Felds verwenden und entwickeln in Anlehnung an [GHK<sup>+</sup>05] und [Gri08] eine Charakterisierung der Streuobjekte in Abhängigkeit des gestreuten Magnetfelds. Schließlich erweitern wir das Modell auf die Verwendung von Metalldetektoren.

In Kapitel 4 geben wir zunächst einen Implementierungsvorschlag für einen Algorithmus, dem die Charakterisierung der Streuobjekte aus Kapitel 3 zu Grunde liegt. Wir untersuchen dann anhand synthetischer Daten zu einem einfachen Beispiel des vereinfachten Modells die Leistungsfähigkeit des Algorithmus, bevor wir damit komplexere Objekte rekonstruieren. Weiterhin betrachten wir Varianten des Algorithmus zur Verbesserung der Rekonstruktionen sowie zur Verringerung der Rechenzeit. Ferner adaptieren wir den Algorithmus auf die Verwendung von Spulen. Zum Abschluss des Kapitels vergleichen wir die Greensche Funktion des Zweischichtmediums mit der Greenschen Funktion des Vollraums und begründen damit die in den numerischen Experimenten festgestellten Vereinfachungsmöglichkeiten.

In Anhang A fassen wir eine Liste der verwendeten Notationen sowie eine Formelsammlung zusammen. In Anhang B wiederholen wir Eigenschaften der Hankel-Transformation und beschreiben die schnelle Hankel-Transformation, die wir zur numerischen Auswertung der Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im Zweischichtmedium verwenden. In Anhang C fassen wir Eigenschaften der Greenschen-Funktion der Helmholtz-Gleichung zusammen und in Anhang D leiten wir die Greensche-Funktion der Maxwell-Gleichungen für das unbeschränkte Zweischichtmedium her.

## 2. Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel tragen wir die physikalischen Grundlagen und Vereinfachungen zusammen, die wir für unsere spätere Modellierung verwenden. Wir beginnen mit den Maxwell-Gleichungen und leiten aus ihnen das Induktionsgesetz von Faraday sowie das Gesetz von Biot-Savart ab. Letzteres präsentieren wir in einer unüblichen Form, die wir für die grundlegende Herleitung unseres Verfahrens in Kapitel 3 verwenden. Die Bedingungen, die elektromagnetische Felder an Trennschichten zwischen verschiedenen Medien erfüllen sollen, leiten wir auf eine Art her, die die spätere Wahl der Funktionenräume in Kapitel 3 motivieren soll. Wir erklären kurz, was wir uns unter Dipolen vorstellen und beschreiben schließlich noch die Funktionsweise von Metalldetektoren, sowie charakteristische Werte der Parameter in den Maxwell-Gleichungen für reale Böden.

### 2.1. Die Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben die Felder des Magnetismus und der Elektrizitätslehre, die von Magneten, elektrischen Ladungen und elektrischen Strömen erzeugt werden. Sie wurden nach dem schottischen Physiker James Clerk Maxwell benannt, der sie im 19. Jahrhundert in seinem Werk „A Treatise on Electricity and Magnetism“ [Max54] auf der Grundlage von Faradays Arbeiten vervollständigte und damit die Grundlage der Elektrodynamik legte.

Für den Fall, den wir hier betrachten, nehmen wir an, dass sich die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Materie nicht ändern. Die Gleichungen haben dann die Gestalt

$$\operatorname{div} \{ \epsilon(x) \mathbf{E}(x, t) \} = \boldsymbol{\rho}(x, t), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}(x, t) - \epsilon(x) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{j}(x, t), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \{ \mu(x) \mathbf{H}(x, t) \} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(x, t) + \mu(x) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(x, t) = 0, \quad (2.2)$$

wobei die Differentialoperatoren  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  nur auf die Ortsvariable  $x$  angewandt werden. Die orts- und zeitabhängigen 3-dimensionalen reellen Vektorfelder werden mit

$\mathbf{E}$  : elektrisches Feld [V/m]      und       $\mathbf{H}$  : magnetisches Feld [A/m]

bezeichnet. Die Quellterme werden

$\boldsymbol{\rho}$  : Ladungsdichte [As/m<sup>3</sup>]      und       $\mathbf{j}$  : Stromdichte [A/m<sup>2</sup>]

genannt. In der hier untersuchten Situation nehmen wir weiterhin an, dass die Materie stückweise konstante elektrische und magnetische Eigenschaften besitzt und diese nicht von der Feldrichtung abhängen, d.h die Materie sei isotrop und stückweise homogen. Die Materialparameter

$\epsilon$  : elektrische Permittivität [As/Vm]    und     $\mu$  : magnetische Permeabilität [Vs/Am]

sind daher ortsabhängige Skalare. Im Vakuum sind sie durch

$$\epsilon = \epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ [As/Vm]} \quad \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [Vs/Am]} \quad (2.3)$$

gegeben [Dem95].

### 2.1.1. Das Ohmsche Gesetz

Bringt man elektrische Ladungen in ein elektrisches Feld, so wirkt auf diese eine Kraft, die sie in Bewegung versetzt. Es fließt also ein Strom. Dieser Zusammenhang wird durch das Ohmsche Gesetz beschrieben. Hat ein Körper eine Leitfähigkeit  $0 < \sigma$  [S/m], so nennt man ihn einen elektrischen Leiter, für  $\sigma = 0$  und  $\epsilon \neq \epsilon_0$  ein Dielektrikum. Die in einem Leiter  $L$  erzeugte Stromdichte ist durch die folgende Beziehung gegeben:

$$\mathbf{j}_L(x, t) = \sigma(x)\mathbf{E}(x, t). \quad (2.4)$$

Wir gehen hierbei davon aus, dass sich die Leitfähigkeit  $\sigma$  nicht durch das elektrische Feld oder den fließenden Strom ändert. Siehe dazu auch Abschnitt 9.2 in [Jel94].

Die rechte Seite der Maxwell-Gleichung (2.1) hat also mit  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_L + \mathbf{j}_e$  die Form

$$\text{rot } \mathbf{H}(x, t) - \epsilon(x)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(x, t) = \sigma(x)\mathbf{E}(x, t) + \mathbf{j}_e(x, t), \quad (2.5)$$

wobei  $\mathbf{j}_e$  eine externe, d.h. nicht von den Feldern erzeugte Stromdichte sei.

### 2.1.2. Die Kontinuitätsgleichung

Betrachten wir die inhomogenen Gleichungen (2.1) und bilden die Divergenz der rechten, so erhalten wir wegen  $\text{div rot} = 0$  die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \mathbf{j}(x, t) = -\text{div } \epsilon(x)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\rho}(x, t). \quad (2.6)$$

Integrieren wir nun diese Gleichung über ein Volumen und verwenden den Gaußschen Satz, so erhalten wir

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \boldsymbol{\rho}(x, t) dx = \int_V \text{div } \mathbf{j}(x, t) dx = \int_{\partial V} \mathbf{j}(x, t) \cdot \nu d\Sigma,$$

wobei  $\partial V$  die Oberfläche des Volumens und  $\nu$  seine Außennormale sei. Fließt also ein Strom nur in einem Volumen, oder fließt genausoviel hinein wie hinaus, so ändert sich die Ladung in diesem Volumen nicht. Für eine Lösung der Maxwell-Gleichungen gilt daher das Gesetz der Ladungserhaltung.

Setzen wir (2.6) voraus, so erhalten wir aus den rechten Gleichungen von (2.1) und (2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \{ \epsilon(x) \mathbf{E}(x, t) \} - \rho(x, t)) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \{ \mu(x) \mathbf{H}(x, t) \} = 0.$$

Die Divergenzgleichungen folgen somit aus den anderen Gleichungen und sind erfüllt, sobald diese für nur einen Zeitpunkt erfüllt sind.

### 2.1.3. Das Induktionsgesetz von Faraday

Wir integrieren nun die rechte der homogenen Maxwell-Gleichungen (2.2) über eine Fläche  $F$  in  $\mathbb{R}^3$  mit Rand  $\gamma$  und Normalenfeld  $\nu$  und verwenden den Satz von Stokes.  $\tau$  bezeichne das Tangentialfeld der Kurve.

$$\begin{aligned} - \int_F \mu(x) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(x, t) \cdot \nu \, d\Sigma \\ = - \frac{\partial}{\partial t} \int_F \mu(x) \mathbf{H}(x, t) \cdot \nu \, d\Sigma &= \int_F \operatorname{rot} \mathbf{E}(x, t) \cdot \nu \, d\Sigma \\ &= \oint_{\gamma} \mathbf{E}(x, t) \cdot \tau \, d\gamma. \end{aligned}$$

Zu einem sich auf einer Fläche zeitlich ändernden Magnetfeld gehört also ein elektrisches Feld entlang des Randes dieser Fläche. Ist dieser Rand eine geschlossene Kurve die von einer Leiterschleife gebildet wird, so fließt in dieser ein Strom.

### 2.1.4. Die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen

Wenden wir auf die Größen in den Maxwell-Gleichungen die Fourier-Transformation

$$\hat{f}(\omega) = [\mathcal{F} f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

bzgl. der Zeit  $t$  komponentenweise an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{ \epsilon(x) \hat{\mathbf{E}}(x, \omega) \} &= \hat{\rho}(x, \omega), & \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}}(x, \omega) + i\omega \epsilon(x) \hat{\mathbf{E}}(x, \omega) &= \hat{\mathbf{j}}(x, \omega), \\ \operatorname{div} \{ \mu(x) \hat{\mathbf{H}}(x, \omega) \} &= 0, & \operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(x, \omega) - i\omega \mu(x) \hat{\mathbf{H}}(x, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

mit komplexen Größen  $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\rho}$ . Die Kontinuitätsgleichung (2.6) hat dann die Gestalt

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{j}}(x, \omega) = \omega \hat{\rho}(x, \omega).$$

Mit ihrer Hilfe folgen wieder wie in 2.1.2 die linken Gleichungen aus den Rechten.

Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen im Folgenden für ein festes  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  und lassen die redundanten Gleichungen für die Divergenz der Felder weg. Für ein festes  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  ergibt sich eine Lösung der Maxwell-Gleichungen (2.1) und (2.2) für

$$\mathbf{j}(x, t) = \Re \left\{ \hat{\mathbf{j}}(x, \omega_0) e^{i\omega_0 t} \right\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}(x, t) = \Re \left\{ \hat{\boldsymbol{\rho}}(x, \omega_0) e^{i\omega_0 t} \right\}$$

durch

$$\mathbf{E}(x, t) = \Re \left\{ \hat{\mathbf{E}}(x, \omega_0) e^{i\omega_0 t} \right\}, \quad \mathbf{H}(x, t) = \Re \left\{ \hat{\mathbf{H}}(x, \omega_0) e^{i\omega_0 t} \right\},$$

da  $\mathbf{j}$  und  $\boldsymbol{\rho}$  sowie die Vektorfelder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  als reell vorausgesetzt sind.

Aufgrund der Kontinuitätsgleichung ist die zeitliche Änderung der Ladungsdichte die Quelle für Ströme. Wir betrachten hier also einen Wechselstrom mit einer festen Frequenz  $f = \omega_0/(2\pi)$ .

Wir definieren nun wie üblich (vgl. z.B. [CK92], [Mon03])

$$E(x) := \sqrt{\epsilon_0} \hat{\mathbf{E}}(x, \omega_0), \quad H(x) := \sqrt{\mu_0} \hat{\mathbf{H}}(x, \omega_0), \quad \kappa := \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0},$$

$$\epsilon_r := \frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega_0} \right) \quad \text{und} \quad \mu_r := \frac{\mu}{\mu_0}.$$

$\kappa$  heißt Wellenzahl,  $\epsilon_r$  relative Permittivität und  $\mu_r$  relative Permeabilität.  $\sigma = \sigma(x) \geq 0$  ist wieder die Leitfähigkeit. Die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich dann aus obigem System und dem Ohmschen Gesetz (2.4), d.h.  $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}_e + \sigma \hat{\mathbf{E}}$ , zu

$$\operatorname{rot} H + i\kappa\epsilon_r E = J, \quad \operatorname{rot} E - i\kappa\mu_r H = 0 \quad (2.7)$$

mit einer externen Stromdichte  $J := \sqrt{\mu_0} \hat{\mathbf{j}}_e$ .

Durch Anwenden von  $\operatorname{rot}$  auf eine der Gleichungen und Einsetzen der jeweils anderen eliminieren wir ein Feld und erhalten die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\epsilon_r} \operatorname{rot} H - \kappa^2 \mu_r H = \operatorname{rot} \frac{1}{\epsilon_r} J, \quad \operatorname{rot} \frac{1}{\mu_r} \operatorname{rot} E - \kappa^2 \epsilon_r E = i\kappa J. \quad (2.8)$$

### 2.1.5. Randbedingungen

Der folgende Abschnitt lehnt sich an die Herleitung in [Zag06] an. Weitere Herleitungen finden sich etwa in [Jel94] und [DL90].

Sei  $V := \overline{V_1} \cup \overline{V_2} \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  und einer Trennfläche  $\Gamma := \overline{V_1} \cap \overline{V_2} \neq \emptyset$  mit einer Flächennormalen  $\nu_\Gamma$  wie in Abbildung 2.1. Sei weiterhin  $F$  ein Vektorfeld auf  $V$  dessen Einschränkung auf  $V_i$  mit  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  bezeichnet werde.

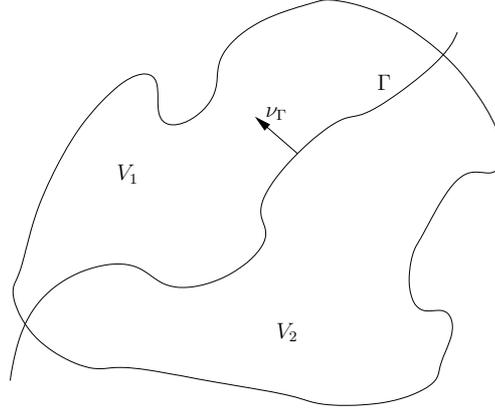


Abbildung 2.1.: Geometrie

Mit Hilfe des Satz von Gauß in den Teilgebieten  $V_1$  und  $V_2$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_V \operatorname{div} F \, dx &= \int_{V_1} \operatorname{div} F_1 \, dx + \int_{V_2} \operatorname{div} F_2 \, dx = \int_{\partial V_1} F_1 \cdot \nu \, d\Sigma + \int_{\partial V_2} F_2 \cdot \nu \, d\Sigma \\
 &= \int_{\partial V_1 \setminus \Gamma} F_1 \cdot \nu \, d\Sigma + \int_{\partial V_2 \setminus \Gamma} F_2 \cdot \nu \, d\Sigma + \int_{\Gamma} (F_2 - F_1) \cdot \nu_{\Gamma} \, d\Sigma \\
 &= \int_{\partial V} F \cdot \nu \, d\Sigma + \int_{\Gamma} [F \cdot \nu_{\Gamma}]_{\Gamma} \, d\Sigma, \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

wobei  $[F \cdot \nu_{\Gamma}]_{\Gamma} = F_2|_{\Gamma} \cdot \nu_{\Gamma} - F_1|_{\Gamma} \cdot \nu_{\Gamma}$  der Sprung der Normalenkomponente von  $F$  an  $\Gamma$  und  $\nu$  ein Normalenfeld der jeweiligen Fläche sei.

Sei  $A \subseteq V$  eine Fläche, die  $\Gamma$  entlang einer Kurve  $L := A \cap \Gamma$  schneidet und sei  $A_i := A \cap V_i, i = 1, 2$ . Wir verwenden nun den Satz von Stokes auf diesen Teilflächen. Dabei sei  $\nu$  wieder ein Normalenfeld der Fläche  $A$  und  $\tau_{1,2}$  ein passend gewähltes Tangentialfeld der Randkurve  $\partial A_{1,2}$ .

$$\begin{aligned}
 \int_A \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\Sigma &= \int_{A_1} \operatorname{rot} F_1 \cdot \nu \, d\Sigma + \int_{A_2} \operatorname{rot} F_2 \cdot \nu \, d\Sigma = \oint_{\partial A_1} F_1 \cdot \tau_1 \, d\gamma + \oint_{\partial A_2} F_2 \cdot \tau_2 \, d\gamma \\
 &= \oint_{\partial A_1 \setminus L} F_1 \cdot \tau_1 \, d\gamma + \oint_{\partial A_2 \setminus L} F_2 \cdot \tau_2 \, d\gamma + \oint_L (F_2 - F_1) \cdot \tau_2 \, d\gamma \\
 &= \oint_{\partial A} F \cdot \tau \, d\gamma + \oint_L [F \cdot \tau_2]_{\Gamma} \, d\gamma, \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

wobei  $[F \cdot \tau_2]_{\Gamma} = F_2|_{\Gamma} \cdot \tau_2 - F_1|_{\Gamma} \cdot \tau_2$  der Sprung der Tangentialkomponente von  $F$  an  $\Gamma$  entlang  $L$  sei. Ist  $A$  geschlossen und somit ohne Rand wie z.B. bei einer Kugel und  $L$  eine geschlossene kreuzungsfreie Kurve, so gilt aufgrund der entgegengesetzten Ausrichtungen der Außennormalen von  $A_1$  und  $A_2$  an der Trennschicht  $\Gamma$

$$\int_A \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\Sigma = - \oint_L [F \cdot \tau_L]_{\Gamma} \, d\gamma. \quad (2.11)$$

Dabei ist  $\tau_L$  so gewählt, dass die Kurve bzgl. der Normalen  $\nu_\Gamma$  im positiven Sinne durchlaufen wird.

Für  $F = \mu_r H$  erhalten wir damit aus (2.9)

$$\int_\Gamma [\mu_r H \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \, d\Sigma = \int_V \operatorname{div} \mu_r H \, dx - \int_{\partial V} \mu_r H \cdot \nu \, d\Sigma = - \int_{\partial V} \mu_r H \cdot \nu \, d\Sigma,$$

da  $\operatorname{div} \mu_r H = 0$  in  $V$ . Mit (2.11), den Maxwell-Gleichungen (2.7) und  $F = E$  erhalten wir

$$\oint_{\partial V \cap \Gamma} [E \cdot \tau_L]_\Gamma \, d\gamma = - \int_{\partial V} \operatorname{rot} E \cdot \nu \, d\Sigma = -\iota\kappa \int_{\partial V} \mu_r H \cdot \nu \, d\Sigma.$$

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich somit

$$\iota\kappa \int_\Gamma [\mu_r H \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \, d\Sigma = \oint_{\partial V \cap \Gamma} [E \cdot \tau_L]_\Gamma \, d\gamma.$$

Dies entspricht dem Induktionsgesetz von Faraday für die von der Kurve  $\partial V \cap \Gamma$  umrandete Fläche  $\Gamma$  für die Sprünge von  $\mu_r H$  und  $E$ . Wir verlangen im Folgenden, dass in der Trennschicht keine Ströme fließen können, d.h. wir fordern

$$[\mu_r H \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma = 0 = [E \wedge \nu_\Gamma]_\Gamma. \quad (2.12)$$

Aus (2.9) und (2.11) folgt daher, dass  $\mu_r H$  den Satz von Gauß und  $E$  den Satz von Stokes in jedem  $V$  erfüllen sollen. Diese Sprungbedingungen für  $\mu_r H$  und  $E$  werden generell gefordert (vgl. [DL90, S. 69], [Dem95, S. 225f], [Jel94, S. 279]).

Mit  $F = H$  erhalten wir aus (2.11) und den Maxwell-Gleichungen (2.7)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V \cap \Gamma} [H \cdot \tau_L]_\Gamma \, d\gamma &= - \int_{\partial V} \operatorname{rot} H \cdot \nu \, d\Sigma = - \int_{\partial V} (J - \iota\kappa\epsilon_r E) \cdot \nu \, d\Sigma \\ &= - \int_V \operatorname{div} (J - \iota\kappa\epsilon_r E) \, dx + \int_\Gamma [(J - \iota\kappa\epsilon_r E) \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \, d\Sigma \\ &= \iota\kappa \left( \int_\Gamma \left[ \frac{1}{\iota\kappa} J \cdot \nu_\Gamma \right]_\Gamma \, d\Sigma - \int_\Gamma [\epsilon_r E \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \, d\Sigma \right), \end{aligned}$$

da  $\operatorname{div} (J - \iota\kappa\epsilon_r E) = 0$  in  $V$ .  $\left[ \frac{1}{\iota\kappa} J \cdot \nu_\Gamma \right]_\Gamma$  entspricht einer Integration des Sprungs der Stromdichte  $J$  nach der Zeit, da  $J$  eine fouriertransformierte Größe ist. Es handelt sich somit um eine Ladungsdichte, die auf der Fläche  $\Gamma$  konzentriert ist. Wir gehen von nun an davon aus, dass sich auf der Trennschicht keine Ladungsträger befinden, so dass

$$\int_V \operatorname{div} J \, dx = \int_{\partial V} J \cdot \nu \, d\Sigma \quad \text{und} \quad \oint_{\partial V \cap \Gamma} [H \cdot \tau_L]_\Gamma \, d\gamma = -\iota\kappa \int_\Gamma [\epsilon_r E \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \, d\Sigma$$

gilt. Die letzte Gleichung entspricht einem Induktionsgesetz für magnetische Ströme in der Trennschicht, die durch Sprünge der Normalenkomponente von  $\epsilon_r E$  hervorgerufen

werden. Wir gehen im Folgenden auch davon aus, dass in der Trennschicht keine solchen magnetischen Wirbel entstehen und fordern daher noch

$$[\epsilon_r E \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma = 0 = [H \wedge \nu_\Gamma]_\Gamma. \quad (2.13)$$

Aus (2.9) und (2.11) folgt daher, dass  $\epsilon_r E$  den Satz von Gauß und  $H$  den Satz von Stokes in jedem  $V$  erfüllen sollen.

Somit gilt i.a. für springende Materialparameter  $\mu_r$  und  $\epsilon_r$

$$[\epsilon_r E \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma = 0 = [\mu_r H \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \quad \text{und} \quad [E \wedge \nu_\Gamma]_\Gamma = 0 = [H \wedge \nu_\Gamma]_\Gamma \quad (2.14)$$

sowie

$$[E \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \neq 0 \neq [H \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma \quad \text{und} \quad [\epsilon_r E \wedge \nu_\Gamma]_\Gamma \neq 0 \neq [\mu_r H \wedge \nu_\Gamma]_\Gamma. \quad (2.15)$$

### Perfekte Leiter

Wir sehen uns nun an, was mit dem elektrischen Feld geschieht, wenn ein Gebiet ein perfekter Leiter ist, d.h.  $\sigma \rightarrow \infty$  ([DL90, S. 75]). Dies stellt eine Idealisierung von Metallen dar, da diese eine sehr hohe Leitfähigkeit besitzen. Dazu entwickeln wir zunächst das elektrische Feld formal für  $\sigma \rightarrow \infty$ .

$$E = E_0 + \frac{1}{\sigma} E_1 + \frac{1}{\sigma^2} E_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Schreiben wir  $\epsilon_r$  in der rechten Seite von (2.8) aus, erhalten wir

$$\text{rot} \frac{1}{\mu_r} \text{rot} E - \kappa^2 \epsilon_r E = \text{rot} \frac{1}{\mu_r} \text{rot} E - \kappa^2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E - i \frac{\kappa^2}{\omega} \sigma E = i \kappa J.$$

Für die Entwicklung von  $E$  erhalten wir somit durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \sigma^1 : & \quad -i \frac{\kappa^2}{\omega} E_0 = 0, \\ \sigma^0 : & \quad \text{rot} \frac{1}{\mu_r} \text{rot} E_0 - \kappa^2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_0 - i \frac{\kappa^2}{\omega} E_1 = i \kappa J, \\ \sigma^{-n} : & \quad \text{rot} \frac{1}{\mu_r} \text{rot} E_n - \kappa^2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_n - i \frac{\kappa^2}{\omega} E_{n+1} = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Wenn wir davon ausgehen, dass im Leiter kein Strom angelegt wird, d.h.  $J = 0$ , sehen wir, dass das elektrische Feld im Leiter verschwindet.

Bezeichnen wir mit  $E_1$  wieder das elektrische Feld in einem Gebiet  $V_1$  und mit  $E_2$  das elektrische Feld in einem perfekt leitenden Gebiet  $V_2$  und die Trennschicht mit  $\Gamma$ , so erhalten wir aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten (2.12) für  $E_1$  die Randbedingung

$$E_1 \wedge \nu_\Gamma = 0. \quad (2.17)$$

Da auch das  $H$ -Feld aufgrund der Maxwell-Gleichungen im Inneren eines perfekten Leiters verschwindet, erhalten wir mit den entsprechenden Bezeichnungen auch

$$H_1 \cdot \nu_\Gamma = 0. \quad (2.18)$$

Die Bedingungen (2.13) müssen nicht mehr gelten ([DL90, S. 75]).

### Unbeschränkte Gebiete

Für unbeschränkte Gebiete fordern wir die Silver-Müller Ausstrahlungsbedingung

$$\int_{\partial B_R} \left| \nu \wedge H + \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} E \right|^2 d\Sigma \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

auf dem Rand der Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung. Aus ihr folgt (vgl. Beweis von Thm. 9.4 in [Mon03])

$$\int_{\partial B_R} |H|^2 d\Sigma = \mathcal{O}(1) \text{ und } \int_{\partial B_R} |E|^2 d\Sigma = \mathcal{O}(1), \quad R \rightarrow \infty,$$

d.h. dass die Felder für  $R \rightarrow \infty$  abklingen.

## 2.2. Dipole

Lassen wir die Stromdichte  $J$  in den Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} H + \imath \kappa \epsilon_r E = J, \quad \operatorname{rot} E - \imath \kappa \mu_r H = 0$$

auf einen Punkt zusammenschrumpfen, d.h.  $J = \delta p$  für eine Richtung  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $|p| = 1$ , so bezeichnen wir die ausstrahlende Lösung  $(E, H)$  als das Feld eines elektrischen Dipols mit Polarisationsrichtung  $p$  (vgl. linearer Dipol in [Jel94] S. 162ff). Analog bezeichnen wir die ausstrahlende Lösung  $(E, H)$  von

$$\operatorname{rot} H + \imath \kappa \epsilon_r E = 0, \quad \operatorname{rot} E - \imath \kappa \mu_r H = \delta p$$

als das Feld eines magnetischen Dipols mit Polarisationsrichtung  $p$ . Dies ist physikalisch sinnvoll, da wir aus (2.8) erhalten, dass das  $H$ -Feld durch die Rotation einer Stromdichte erzeugt wird. Stellen wir uns vor, dass die Stromdichte auf einer Kreisbahn etwa in einer Leiterschleife verläuft, so ist die Rotation parallel zur Drehachse und steht somit senkrecht zur Fläche, die von der Leiterschleife eingeschlossen wird.

Die Lösungen der beiden Gleichungen für das homogene sowie das Zweischichtmedium betrachten wir in Abschnitt 4.4.

## 2.3. Das Gesetz von Biot-Savart

In diesem Abschnitt leiten wir das von einer Leiterschleife erzeugte magnetische Feld her. Das Biot-Savart Gesetz stammt aus der Magnetostatik und beschreibt das Magnetfeld eines von einem konstanten Strom durchflossenen dünnen Leiters. Da wir den zeitharmonischen Fall der Maxwell-Gleichungen betrachten ist der Strom natürlich nicht mehr zeitlich konstant. Das Vorgehen ist aber ähnlich und wir erhalten auch eine ähnliche Formel für das Magnetfeld (vgl. [Dem95, 3.2.4],[Jel94, 4.4]). Entgegen der üblichen Schreibweise als Kurvenintegral werden wir jedoch eine Formel mit einem Flächenintegral herleiten, da wir diese später noch benötigen.

Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen (2.7)

$$\operatorname{rot} H + \imath\kappa\epsilon_r E = J, \quad \operatorname{rot} E - \imath\kappa\mu_r H = 0$$

in einem homogenen und isotropen Gebiet  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  mit einer konstanten Stromdichte  $J$ . Da aus der zweiten Gleichung  $\operatorname{div} \mu_r H = 0$  folgt, gibt es ein Vektorpotential  $A$  mit  $\operatorname{rot} A = \mu_r H$ . Damit erhalten wir aus der zweiten Gleichung  $\operatorname{rot}(E - \imath\kappa A) = 0$  und somit existiert ein skalares  $\Phi$  mit

$$\operatorname{grad} \Phi = \imath\kappa A - E.$$

Wir verwenden nun  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$ , wobei  $\Delta$  komponentenweise zu verstehen ist. Dies ergibt folgendes für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} \mu_r J &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} A + \imath\kappa\epsilon_r \mu_r (\imath\kappa A - \operatorname{grad} \Phi) \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A - \kappa^2 \epsilon_r \mu_r A - \imath\kappa\epsilon_r \mu_r \operatorname{grad} \Phi \\ &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} A - \imath\kappa\epsilon_r \mu_r \Phi) - (\Delta A + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r A). \end{aligned}$$

Da  $A$  nur bis auf ein Gradientenfeld eindeutig bestimmt ist, wählen wir  $A$  so, dass  $\operatorname{div} A = \imath\kappa\epsilon_r \mu_r \Phi$ . Es gilt also  $\Delta A + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r A = -\mu_r J$  und somit

$$A(x) = \mu_r \int_V G(x, y) J(y) dy \quad (2.20)$$

mit der ausstrahlenden Fundamentallösung  $G$  der Helmholtz-Gleichung, da  $A$  diese komponentenweise erfüllt.

Wir nehmen nun an, dass Strom in einer Leiterschleife fließt, d.h. die Stromdichte  $J$  auf eine geschlossene und kreuzungsfreie Kurve  $\gamma$  konzentriert ist. Parametrisieren wir  $\gamma$  bzgl. der Bogenlänge  $s$  mit

$$\gamma : [0, s] \rightarrow V, \quad \gamma(0) = \gamma(s), \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), \quad 0 < t_1 < t_2 \leq s,$$

gilt

$$A(x) = \mu_r I \int_0^s G(x, \gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

## 2. Physikalische Grundlagen

---

Es ist also  $J(\gamma(t)) = I\dot{\gamma}(t)$  für eine Stromstärke  $I$  und  $\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = 1$ . Wir formulieren nun die rechte Seite um zu

$$\int_0^s G(x, \gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \sum_{i=1}^3 e_i \int_0^s (G(x, \gamma(t))e_i) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \sum_{i=1}^3 e_i \oint G(x, \cdot) e_i \cdot \tau d\gamma,$$

wobei  $\tau$  das normierte Tangentialfeld von  $\gamma$  sei. Mit dem Satz von Stokes schreiben wir das Kurvenintegral nun als Integral über eine von  $\gamma$  berandete Fläche  $F$  mit Normalenfeld  $\nu$ .

$$\begin{aligned} \oint G(x, \cdot) e_i \cdot \tau d\gamma &= \int_F \operatorname{rot} (G(x, \cdot) e_i) \cdot \nu d\Sigma \\ &= \int_F (\operatorname{grad} G(x, \cdot) \wedge e_i) \cdot \nu d\Sigma = \int_F \operatorname{grad} G(x, \cdot) \cdot (e_i \wedge \nu) d\Sigma, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für das Magnetfeld

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{\mu_r} \operatorname{rot} A(x) = I \operatorname{rot} \sum_{i=1}^3 e_i \int_F \operatorname{grad} G(x, \cdot) \cdot (e_i \wedge \nu) d\Sigma \\ &= I \sum_{i=1}^3 \left( \operatorname{grad} \int_F \operatorname{grad} G(x, \cdot) \cdot (e_i \wedge \nu) d\Sigma \right) \wedge e_i \\ &= I \sum_{i,j=1}^3 \left( e_j \int_F D_x^2 G(x, \cdot) e_j \cdot (e_i \wedge \nu) d\Sigma \right) \wedge e_i \\ &= I \sum_{i,j=1}^3 e_j \wedge e_i \int_F ((D_x^2 G(x, \cdot) e_j) \wedge e_i) \cdot \nu d\Sigma \\ &= I \sum_{j=2}^3 \sum_{i=1}^{j-1} e_j \wedge e_i \int_F ((D_x^2 G(x, \cdot) e_j) \wedge e_i - (D_x^2 G(x, \cdot) e_i) \wedge e_j) \cdot \nu d\Sigma. \end{aligned}$$

mit der Hesse-Matrix  $D_x^2 G(x, \cdot)$  von  $G$  bzgl. der ersten Komponente. Sei nun  $h_j := D_x^2 G(x, \cdot) e_j$  die  $j$ -te Spalte und  $h_{i,j}$  der  $i$ -te Eintrag der  $j$ -ten Spalte der Hesse-Matrix mit  $i, j = 1, 2, 3$ . Dann ergibt sich für die Integranden

$$\begin{aligned} (h_2 \wedge e_1) - (h_1 \wedge e_2) &= [h_{3,1} \quad h_{3,2} \quad - (h_{1,1} + h_{2,2})]^T, \\ (h_3 \wedge e_1) - (h_1 \wedge e_3) &= [-h_{2,1} \quad (h_{1,1} + h_{3,3}) \quad -h_{2,3}]^T, \\ (h_3 \wedge e_2) - (h_2 \wedge e_3) &= [-(h_{2,2} + h_{3,3}) \quad h_{1,2} \quad h_{1,3}]^T. \end{aligned}$$

Da  $G$  eine Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung ist, gilt weiterhin

$$h_{1,1} + h_{2,2} + h_{3,3} + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G = \Delta G + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G = -\delta$$

und somit

$$\begin{aligned}
 H(x) &= -e_3 I \int_F [h_{3,1} \quad h_{3,2} \quad h_{3,3} + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x, \cdot) + \delta] \nu \, d\Sigma \\
 &\quad - e_2 I \int_F [h_{2,1} \quad h_{2,2} + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x, \cdot) + \delta \quad h_{2,3}] \nu \, d\Sigma \\
 &\quad - e_1 I \int_F [h_{1,1} + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x, \cdot) + \delta \quad h_{1,2} \quad h_{1,3}] \nu \, d\Sigma \\
 &= -I \int_F (D_x^2 G(x, y) + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x, y) \mathcal{I}_{3 \times 3} + \delta(x - y) \mathcal{I}_{3 \times 3}) \nu(y) \, d\Sigma(y)
 \end{aligned}$$

Das Magnetfeld außerhalb einer von Strom durchflossenen dünnen Leiterschleife ist daher durch

$$H(x) = -I \int_F (D_x^2 G(x, y) + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x, y) \mathcal{I}_{3 \times 3}) \nu(y) \, d\Sigma(y), \quad x \notin F \quad (2.21)$$

gegeben. Wie wir später sehen werden (vgl. (4.14)), beschreibt dies das Magnetfeld bis auf eine Faktor  $\nu \kappa \mu_r$  als Überlagerung magnetischer Dipole, die senkrecht zur Fläche der Leiterschleife orientiert sind.

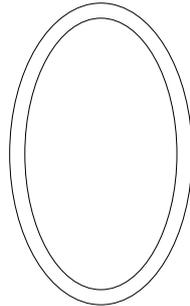
## 2.4. Metalldetektoren

Wir erklären in diesem Abschnitt kurz die Funktionsweise eines Metalldetektors. Eine ausführliche Analyse und Beschreibung findet sich in [Bru02].

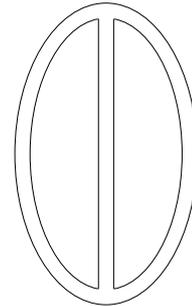
Metalldetektoren bestehen prinzipiell aus einer oder mehreren Spulen durch die ein Strom fließt. Dieser erzeugt ein elektromagnetisches Feld, welches sich im Raum ausbreitet und das wir als *primäres Feld* bezeichnen. Trifft dieses Feld nun auf einen Gegenstand oder den Boden, wird es gestreut (d.h. gebrochen und/oder reflektiert). Diesen gestreuten Teil bezeichnen wir als *sekundäres Feld* oder *Streuungsfeld*. Trifft nun das Streufeld auf eine Spule im Detektor, so wird darin nach dem Gesetz von Faraday (Abschnitt 2.1.3) ein Strom induziert. Der Strom bzw. seine Spannung wird gemessen und für gewöhnlich in ein Audiosignal umgewandelt, das dem Bediener des Detektors anzeigen soll, ob sich ein Objekt in der Nähe des Detektors befindet. Der Name Metalldetektor rührt daher, dass nicht leitende Objekte für den Detektor nicht detektierbar sind. Durch das primäre Feld werden in metallischen Objekten Wechselströme induziert, die ihrerseits wieder ein elektromagnetisches Feld erzeugen. Dadurch generieren metallische Objekte ein viel stärkeres Feld als alle nicht metallischen Objekte und sind daher überhaupt erst detektierbar.

Im wesentlichen gibt es zwei Arten von Metalldetektoren: Zum einen die *Pulse Induction* oder kurz PI Geräte und zum anderen die *Continuous Wave* oder kurz CW Geräte.

Bei PI Geräten wird der das Primärfeld erzeugende Strom in geringen Abständen für einen kurzen Zeitraum unterbrochen. In dieser Zeit wird gemessen, wie schnell der durch das Streufeld in der Detektorspule induzierte Strom abfällt. Dieser fällt durch die in der Umgebung des Detektors induzierten Ströme umso langsamer, je höher der Metallanteil in der Umgebung ist.



(a) konzentrische Spulen



(b) Doppel-D Spule

Abbildung 2.2.: Spulenkonfigurationen

CW Geräte verwenden einen kontinuierlichen Wechselstrom fester Frequenz im Bereich von 1kHz bis 50kHz. Dadurch lassen sich ihre Felder hervorragend durch die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen (2.7) beschreiben und sie bilden daher die Grundlage für unsere spätere Modellierung. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die Typen mit koplanaren Spulen wie in Abb. 2.2.

Im Fall der konzentrischen Spulen erzeugt die äußere Spule das Primärfeld. An der inneren Spule wird der induzierte Strom gemessen. Dieser Strom ändert sich, wenn das Spulenpaar in die Nähe eines leitenden Objekts gebracht wird. Das qualitative Verhalten ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Der schwarze Punkt markiert die Lage eines Objekts, die horizontale Linie eine Bahn oberhalb des Objekts auf der der Detektor bewegt wird. Die rechte Abbildung zeigt den induzierten Strom entlang dieser Bahn. Die Detektoren geben daher einen Ton aus, dessen Lautstärke proportional zum Strom ist. Das Objekt liegt dann unterhalb der Stelle, an der der Ton am lautesten ist. Da der Strom vom gesamten elektromagnetischen Feld, d.h. von Primär- und Sekundärfeld induziert wird, erhalten wir theoretisch den vom Sekundärfeld induzierten Strom durch Differenzbildung zweier Messungen. Die erste Messung wird ohne Objekt durchgeführt die zweite Messung dann mit. In der Praxis lässt sich dies leider nicht so einfach bewerkstelligen. Zum einen ist der Boden nicht homogen und daher liefert eine Messung an jeder Stelle ein anderes Signal (vgl. [Bru02, S. 109f], [IP05, S. 33ff]). Zum anderen ist die Differenz sehr klein und daher aufgrund der Messungenauigkeiten nur schwer messbar.



Abbildung 2.3.: Induzierter Strom bei Bewegung eines Detektors mit zwei konzentrischen Spulen entlang einer Linie über ein Objekt.

Bei Detektoren mit Doppel-D Spule wie in Abbildung 2.2(b) wird die Symmetrie des von der spiegelsymmetrischen äußeren Spule erzeugten Magnetfeldes ausgenutzt. Die Symmetrie des Feldes wird anhand des Biot-Savart-Gesetzes (2.21) deutlich. Zu einer spiegelsymmetrischen Spule wählen wir eine Fläche  $F$  für die Integration, die wie eine Seifenblase über der Spule liegt (vgl. Abb. 2.4). Die Integrationsfläche sei also bzgl. der Ebene durch die Symmetrieachse der Spule (o.B.d.A. die  $e_2$ - $e_3$ -Ebene), die senkrecht auf der Ebene, in der die Spule liegt (o.B.d.A. die  $e_1$ - $e_2$ -Ebene), steht, spiegelsymmetrisch. Mit  $x' := x - 2(x \cdot e_1)e_1$  bezeichnen wir die Spiegelung eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^3$  an der Symmetrieebene. Das von der Spule erzeugte Magnetfeld ist dann eine Überlagerung ma-

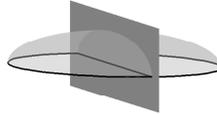
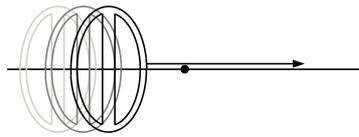


Abbildung 2.4.: Integrationsfläche (hell), Spiegelfläche (dunkel)

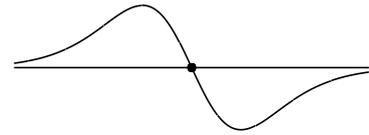
gnetischer Dipole mit einer Polarisationsrichtung senkrecht zur Integrationsfläche (vgl. (2.21)). Es gilt also für  $x \notin F$

$$\begin{aligned}
 H(x') \cdot e_3 &= -I \int_F ([D_x^2 G(x', y)] \nu(y)) \cdot e_3 + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x', y) (\nu(y) \cdot e_3) \, d\Sigma(y) \\
 \stackrel{\text{Symmetrie von } F}{=} &-I \int_F ([D_x^2 G(x', y')] \nu(y')) \cdot e_3 + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x', y') (\nu(y') \cdot e_3) \, d\Sigma(y) \\
 \stackrel{(C.2), (C.4)}{=} &-I \int_F ([D_x^2 G(x, y)] \nu(y)) \cdot e_3 + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G(x, y) (\nu(y) \cdot e_3) \, d\Sigma(y) = H(x) \cdot e_3.
 \end{aligned}$$

Die inneren Spulen einer Doppel-D Spule liegen so in einer Ebene mit der äußeren Spule, dass die eine Spule der Spiegelung der anderen Spule an der Symmetrieebene der äußeren Spule entspricht. Somit wird im Induktionsgesetz von Faraday (siehe Abschnitt 2.1.3) nur die Normalenkomponente des Magnetfelds in diesen beiden Spulen integriert und in beiden Spulen wird aufgrund der eben gezeigten Symmetrie der Normalenkomponenten des Feldes der gleiche Strom induziert. Im Detektor wird die Differenz dieser beiden Ströme gebildet, so dass das Primärfeld ausgeblendet wird. Bringt man den Detektor nun in die Nähe eines leitenden Objekts, wird die Symmetrie durch das Streufeld gestört und die Differenz der Ströme ist nicht mehr Null. Aufgrund der Differenzbildung wechselt der Strom bei Überschreiten eines Objekts senkrecht zur Symmetrieebene das Vorzeichen. Die Objekte werden also durch den Nulldurchgang detektiert. Das qualitative Verhalten des Stroms ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Der schwarze Punkt markiert die Lage eines Objekts, die horizontale Linie eine Bahn oberhalb des Objekts auf der der Detektor bewegt wird. Dabei steht die Symmetrieebene des Detektors senkrecht zur Bewegungsrichtung. Die rechte Abbildung zeigt den induzierten Strom entlang dieser Bahn, wenn das Streufeld ebenfalls symmetrisch ist. Die Ausblendung der Primärfel-



(a) Bewegung des Detektors



(b) induzierter Strom

Abbildung 2.5.: Induzierter Strom bei Bewegung eines Detektors mit Doppel-D Spule entlang einer Linie über ein Objekt.

des funktioniert auch im Falle des Zweischichtmediums. Wenn wir in (2.21) statt der magnetischen Greenschen Funktion (4.14) für den Vollraum die magnetische Greensche Funktion des Zweischichtmediums  $\mathbb{G}^m$  (vgl. Abschnitt 4.4.2) verwenden, erhalten wir aufgrund der Symmetrie von  $F$ :

$$H(x') \cdot e_3 = -I \int_F [\mathbb{G}^m(x', y) \nu(y)] \cdot e_3 d\Sigma(y) = -I \int_F [\mathbb{G}^m(x', y') \nu(y)'] \cdot e_3 d\Sigma(y).$$

Da wir für  $\mathbb{G}^m$  nur eine Darstellung in Zylinderkoordinaten hergeleitet haben, betrachten wir nun die Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  von  $x$  relativ zu einem Punkt  $y \in \mathbb{R}^3$ , d.h. es gilt  $\rho = \sqrt{((x-y) \cdot e_1)^2 + ((x-y) \cdot e_2)^2}$ ,  $\phi = \arg(x-y)$  und  $z = (x-y) \cdot e_3$ . Dabei bezeichnen wir mit  $\arg(x-y) \in [0, 2\pi)$  den Winkel den die Projektion von  $x-y$  auf die  $e_1$ - $e_2$ -Ebene mit der positiven  $e_1$ -Achse bildet. Dann gilt mit den gespiegelten Koordinaten  $x'$  und  $y'$  auch  $\rho = \sqrt{((x'-y') \cdot e_1)^2 + ((x'-y') \cdot e_2)^2}$  und  $z = (x'-y') \cdot e_3$ . Weiterhin erhalten wir für den Winkel  $\phi$  die Beziehungen  $\cos \phi = (x-y) \cdot e_1 / \rho = -(x'-y') \cdot e_1 / \rho =: -\cos \phi'$

und  $\sin \phi = (x - y) \cdot e_2 / \rho = (x' - y') \cdot e_2 / \rho =: \sin \phi'$ . Aus (D.14), (D.18) und (D.28) ergibt sich nun mit  $\nu(y) = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3$

$$\begin{aligned} [\mathbb{G}^m(x, y)\nu(y)] \cdot e_3 &= \cos \phi \mathbb{G}_{3,1}^m(\rho, z)\nu_1 + \sin \phi \mathbb{G}_{3,2}^m(\rho, z)\nu_2 + \mathbb{G}_{3,3}^m(\rho, z)\nu_3 \\ &= -\cos(\phi') \mathbb{G}_{3,1}^m(\rho, z)\nu_1 + \sin(\phi') \mathbb{G}_{3,2}^m(\rho, z)\nu_2 + \mathbb{G}_{3,3}^m(\rho, z)\nu_3 \\ &= [\mathbb{G}^m(x', y')\nu(y)] \cdot e_3. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die Funktionen  $\mathbb{G}_{3,i}^m$ ,  $i = 1, 2, 3$  den nicht winkelabhängigen Teil der Spalten der dritten Zeile von  $\mathbb{G}^m$ . Es gilt somit auch im Zweischichtfall

$$H(x') \cdot e_3 = H(x) \cdot e_3.$$

## 2.5. Bodenparameter

Ein aus bodenkundlicher Sicht homogener Boden ist aus mathematischer Sicht alles andere als homogen, da die maßgeblichen Parameter schon in Abständen von einigen Zentimetern um mehrere Prozent abweichen können (vgl. [Bru02, S. 109f], [IP05, S. 33ff]). Bei den maßgeblichen Parametern handelt es sich um die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$ , den Dielektrizitätskoeffizienten  $\varepsilon = \Re \epsilon_r$  und die magnetische Suszeptibilität  $\chi = \mu_r - 1$ . Typische Werte für die Parameter geben wir in der folgenden Tabelle an.

Standort	Bodenart im Oberboden	$\sigma$ [S/m]	$\chi$ [SI]	$\varepsilon$
Fuhrberg	schwach toniger Sand	7.5E-4	1.9E-5	9.8
Iserhagen	sandig toniger Lehm	7.0E-2	7.0E-5	23.5
Hiddestorf	schwach toniger Schluff	2.4E-2	1.1E-4	-
Lich	sandig toniger Lehm	7.5E-3	4.3E-2	-

Tabelle 2.1.: Wichtige Messwerte natürlicher Böden (Auszug aus [IP05])



### 3. Die Problemstellung

Im folgenden Kapitel betrachten wir zunächst das direkte Streuproblem mit einem zweischichtigen unbeschränkten Hintergrundmedium. Wir untersuchen das von endlich vielen perfekt leitenden Streukörpern, die sich im unteren Medium befinden, gestreute elektromagnetische Feld. Die Sender des einfallenden Feldes und die Empfänger für das gestreute Feld befinden sich dabei auf einer beschränkten Ebene  $\mathcal{M}$ , die parallel zur planaren Trennschicht der beiden Medien im oberen Halbraum liege. Als Sender oder Erzeuger des einfallenden Feldes verwenden wir zunächst magnetische Dipole als Idealisierung einer Erregerspule eines Metalldetektors (vgl. Abschnitt 2.2 und 2.4). Später werden wir anhand des Gesetzes von Biot-Savart (vgl. Abschnitt 2.3) den Fall von Erregerspulen auf magnetische Dipole zurückführen. Für die gängige Darstellung mit elektrischen Dipolen siehe etwa [DEK<sup>+</sup>08].

Im Falle magnetischer Dipole als Sender mögen die Empfänger in der Ebene  $\mathcal{M}$  die Komponenten des magnetischen Feldes auf  $\mathcal{M}$  messen. Wir definieren dann einen *Messoperator* als die Abbildung, die einer Verteilung magnetischer Dipole auf  $\mathcal{M}$  die Komponenten des von den vergrabenen Objekten gestreuten magnetischen Feldes auf  $\mathcal{M}$  zuweist. Wir können uns diesen Operator wie in Abbildung 3.1 als die Differenz von zwei Messvorgängen vorstellen, so dass nur das von den Streukörpern ausgehende Magnetfeld gemessen wird. Die blauen und roten Punkte sollen die Punkte von  $\mathcal{M}$  darstellen. Der rote Punkt markiert die Stelle, an der sich ein einzelner magnetischer Dipol befindet. Wir messen in jedem Punkt von  $\mathcal{M}$  die Komponenten des Magnetfeldes, das von einem solchen Dipol erzeugt wird. Durch Überlagerung solcher Dipole ergibt sich das Feld einer vorgegebenen Dipolverteilung. Zunächst messen wir oberhalb der Streukörper das Magnetfeld und ziehen davon die Messung des Feldes zur gleichen Dipolverteilung an einer Stelle ab, an der sich keine Streukörper befinden.

Im Bezug auf Metalldetektoren bedeutet dieses Modell, dass in jedem Punkt der Messebene kleine Spulen mit beliebiger Orientierung sitzen und jede dieser Spulen sowohl als Sende- wie auch als Empfangspule dient. Wir werden uns allerdings im Falle der Anregung des Feldes durch Spulen auf den Fall beschränken, dass deren Windungen in der Messebene verlaufen. Wir betrachten also nicht die klassischen tragbaren Metalldetektoren, deren Funktionsweise wir in Abschnitt 2.4 dargestellt haben. Detektoren mit mehreren und insbesondere nicht ineinander liegenden Spulen befinden sich aber ebenso im Einsatz [GSLB03, MDC03] und entsprechen in ihrer Funktionsweise den Detektoren mit konzentrischen Spulen. Ein Verfahren, das mit den klassischen tragbaren Detektoren die Tiefe und den Radius perfekt leitender Rotationsellipsoide rekonstruiert — allerdings iterativ arbeitet — wird in [DEK<sup>+</sup>08] beschrieben.

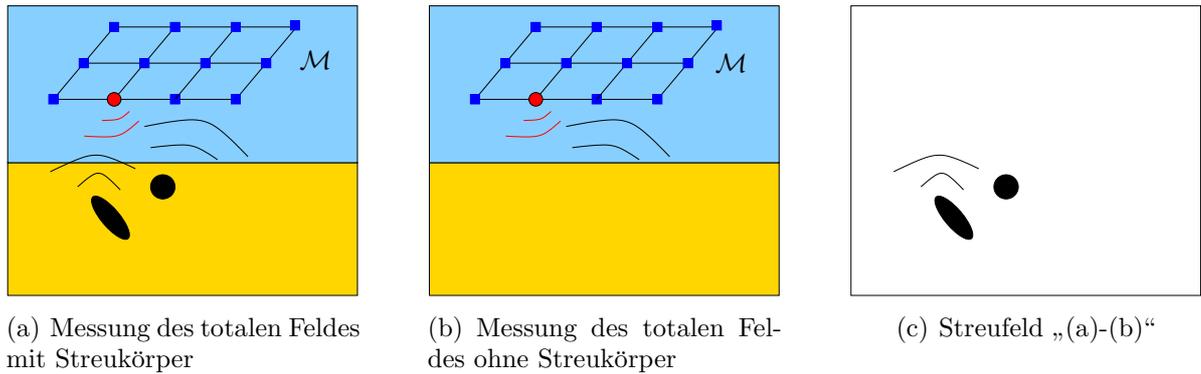


Abbildung 3.1.: Das Streufeld als Differenz zweier Messreihen

Wir untersuchen nun die Faktorisierung des Messoperators für beliebige Dipolanregungen wie sie in [Gri08] bewiesen wird. Wir erweitern sie dann auf den Fall tangentialer Dipole aus [GHK<sup>+</sup>05], Dipole mit Polarisation senkrecht zur Messebene  $\mathcal{M}$  und schließlich auf den Fall der Anregung durch Spulen und greifen dabei auf die Beweise aus [Gri08] zurück. Schließlich charakterisieren wir mit Hilfe dieser Faktorisierung die Streukörper und erhalten damit wie in [GHK<sup>+</sup>05] ein *Sampling-Verfahren*, das wir in Kapitel 4 beschreiben.

### 3.1. Notationen

Als erstes geben wir die Notationen für die nächsten Kapitel an und tragen einige Fakten über die bei Maxwell-Gleichungen verwendeten Funktionenräume zusammen. Für Details verweisen wir auf [BCS02, Ces96, Mon03].

Der  $\mathbb{R}^3$  sei wie folgt aufgeteilt:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_+^3 \cup \Sigma_0 \cup \mathbb{R}_-^3 := \mathbb{R}_0^3 \cup \Sigma_0$$

mit  $\mathbb{R}_\pm^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 \gtrless 0\}$  und  $\Sigma_d := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 = d\}$ ,  $d \in \mathbb{R}$ . Dabei bezeichnen wir die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$  mit  $(e_1, e_2, e_3)$  und mit  $x \cdot y$  und  $x \wedge y$  das euklidische Skalar- bzw. das Vektorprodukt für  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . Weiterhin sei  $B_R(x)$  die offene Kugel um den Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  mit Radius  $R > 0$ . Für  $x = 0$  schreiben wir nur  $B_R$ .

Mit  $L^2(A, B)$  bezeichnen wir die quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf einer Menge  $A$  mit Werten in einer Menge  $B$  und mit  $H^s(A, B)$  den zugehörigen Sobolev-Raum der Ordnung  $s > 0$ . Ist  $s < 0$ , so ist damit der zugehörige topologische Dualraum gemeint. Weiterhin bezeichnen wir mit  $L_{\text{loc}}^2(A, B)$  den Raum der lokal quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf einer Menge  $A$  mit Werten in einer Menge  $B$ , d.h.  $f \in L_{\text{loc}}^2(A, B) \Leftrightarrow f \in L^2(K, B)$  für alle kompakten  $K \subseteq A$ .

Für die Materialparameter gelte

$$\epsilon_r(x) = \begin{cases} \epsilon_r^+ > 0, & x \in \mathbb{R}_+^3, \\ \epsilon_r^- \in \mathbb{C}^+ \setminus \{0\}, & x \in \mathbb{R}_-^3, \end{cases} \quad \mu_r(x) = \begin{cases} \mu_r^+ > 0, & x \in \mathbb{R}_+^3, \\ \mu_r^- > 0, & x \in \mathbb{R}_-^3 \end{cases}$$

mit  $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \geq 0, \Im z \geq 0\}$ .

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine beschränkte offene Menge mit zusammenhängendem Komplement und Rand  $\partial\Omega$  aus  $C^2$ . Weiterhin sei der Abschluß von  $\Omega$  vollständig in  $\mathbb{R}_-^3$  enthalten. Das normierte Außennormalenfeld von  $\Omega$ , d.h. von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  gerichtet, bezeichnen wir mit  $\nu$ .

Wir definieren für Funktionen mit Werten in  $\mathbb{C}^3$  die Funktionenräume

$$\begin{aligned} L_t^2(\partial\Omega) &:= \{v \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{C}^3) \mid \nu \cdot v = 0 \text{ f.ü. auf } \partial\Omega\}, \\ H_t^{1/2}(\partial\Omega) &:= H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}^3) \cap L_t^2(\partial\Omega) \\ H(\operatorname{div}; \Omega) &:= \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \mid \operatorname{div} v \in L^2(\Omega, \mathbb{C})\}, \\ H(\operatorname{rot}; \Omega) &:= \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \mid \operatorname{rot} v \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)\} \end{aligned}$$

und bezeichnen mit  $H_{\operatorname{loc}}(\operatorname{div}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  und  $H_{\operatorname{loc}}(\operatorname{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  die Räume von Funktionen  $v \in L_{\operatorname{loc}}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \mathbb{C}^3)$ , für die  $v|_O \in H(\operatorname{div}; O)$  bzw.  $v|_O \in H(\operatorname{rot}; O)$  für alle offenen und beschränkten Teilmengen  $O \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ . Weiterhin bezeichnen wir mit  $H_t^{-1/2}(\partial\Omega)$  den Dualraum zu  $H_t^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Für Skalarfelder auf dem Rand von  $\Omega$  definieren wir den Flächengradienten  $\operatorname{grad}_{\partial\Omega}$  und die Flächenrotation  $\vec{\operatorname{rot}}_{\partial\Omega}$  in der üblichen Weise lokal über die Karten [Mon03, Chap. 3.4]. Diese können dann zu stetigen linearen Operatoren

$$\operatorname{grad}_{\partial\Omega} : H^{3/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow H_t^{1/2}(\partial\Omega), \quad \vec{\operatorname{rot}}_{\partial\Omega} : H^{3/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow H_t^{1/2}(\partial\Omega)$$

fortgesetzt werden. Mit dem zum Flächengradienten dualen Operator, der Flächendivergenz  $\operatorname{div}_{\partial\Omega}$ , und dem zur Flächenrotation dualen Operator, der skalaren Flächenrotation  $\operatorname{rot}_{\partial\Omega}$ , definieren wir die Hilberträume

$$\begin{aligned} H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\partial\Omega) &:= \left\{ v \in H_t^{-1/2}(\partial\Omega) \mid \operatorname{div}_{\partial\Omega} v \in H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}) \right\}, \\ H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega) &:= \left\{ v \in H_t^{-1/2}(\partial\Omega) \mid \operatorname{rot}_{\partial\Omega} v \in H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}) \right\}. \end{aligned}$$

Für jedes Vektorfeld  $u \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^3)$  definieren wir die *Normalenspur*  $\gamma_n(u) := u|_{\partial\Omega} \cdot \nu$ , die *Tangentialspur*  $\gamma_t(u) := \nu \wedge u|_{\partial\Omega}$  und die *Projektion auf die Tangentialebene*  $\pi_t(u) := (\nu \wedge u|_{\partial\Omega}) \wedge \nu$ . Diese können dann zu beschränkten, surjektiven linearen Operatoren fortgesetzt werden.

$$\begin{aligned} \gamma_n &: H(\operatorname{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}), \\ \gamma_t &: H(\operatorname{rot}; \Omega) \rightarrow H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \pi_t : H(\operatorname{rot}; \Omega) \rightarrow H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Spurabbildungen auf  $H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  bzw.  $H_{\text{loc}}(\text{div}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  bezeichnen wir ebenfalls mit  $\gamma_n, \gamma_t$  und  $\pi_t$ . Sie werden analog definiert und haben die gleichen Eigenschaften. Wir werden im Folgenden aber im Normalfall die klassischen Bezeichnungen mit Skalar- bzw. Vektorprodukt verwenden.

Wir können  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  auf natürliche Weise mit dem Dualraum von  $H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  identifizieren und es gilt die folgende Formel für partielle Integration: Für  $u, v \in H(\text{rot}; D)$  mit  $D \subset \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt gilt

$$\int_D \text{rot } u \cdot v \, dx - \int_D u \cdot \text{rot } v \, dx = \int_{\partial D} (\nu \wedge u) \cdot v \, d\Sigma = \langle \gamma_t(u), \pi_t(v) \rangle_{\partial D} \quad (3.1)$$

wobei wir mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial D}$  die duale Paarung zwischen  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial D)$  und  $H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial D)$  und mit  $\nu$  das Außennormalenfeld von  $D$  bezeichnen.

Schließlich definieren wir noch, was wir unter einem Maxwell-Eigenwert verstehen.

**Definition 3.1:** Ein *Maxwell-Eigenwert* für  $\Omega$  ist eine Wellenzahl  $\kappa^2 \epsilon_r \mu_r$ , so dass die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } H + \nu \kappa \epsilon_r E = 0, \quad \text{rot } E - \nu \kappa \mu_r H = 0$$

in  $\Omega$  mit der Randbedingung  $\nu \wedge E|_{\partial\Omega} = 0$  eine nicht triviale Lösung besitzen, d.h. in einem homogenen Medium ist  $\kappa^2 \epsilon_r \mu_r$  ein Eigenwert von  $\text{rot rot}$  in  $\Omega$  (vgl. (2.8)). Es ist bekannt, dass die Maxwell-Eigenwerte reell sind und sich nur im Unendlichen häufen (vgl. [Mon03, S. 95-98]).

## 3.2. Das Modell

Wir betrachten im Folgenden eine ebene Fläche  $\mathcal{M} \subset \Sigma_d$  parallel zur Trennschicht  $\Sigma_0$ , in der sich noch zu spezifizierende Sender und Empfänger elektromagnetischer Wellen befinden. Die Sender arbeiten mit einer festen Frequenz  $\omega$ . Die in  $\mathcal{M}$  erzeugten Wellen werden dann an der Trennschicht reflektiert und gebrochen und ebenso auch an vollständig vergrabenen Objekten  $\Omega$  – d.h.  $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ . Wir nehmen weiterhin an, dass es sich bei den vergrabenen Objekten um perfekte Leiter handelt und ihr Komplement – d.h.  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  – zusammenhängend ist. Wir bezeichnen mit  $(E^i, H^i)$  die Felder, die von den Sendern ohne die Anwesenheit von Streukörpern erzeugt werden und mit  $(E^s, H^s)$  das von  $\Omega$  gestreute Feld. Die Felder erfüllen dann die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen:

$$\text{rot } H^i + \nu \kappa \epsilon_r E^i = 0 \quad \text{rot } E^i - \nu \kappa \mu_r H^i = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}, \quad (3.2a)$$

$$\text{rot } H^s + \nu \kappa \epsilon_r E^s = 0, \quad \text{rot } E^s - \nu \kappa \mu_r H^s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \quad (3.2b)$$

mit

$$0 = [\nu \wedge (E^i + E^s)]_{\partial\Omega} \iff \nu \wedge E^s|_{\partial\Omega} = -\nu \wedge E^i|_{\partial\Omega} \quad (3.2c)$$

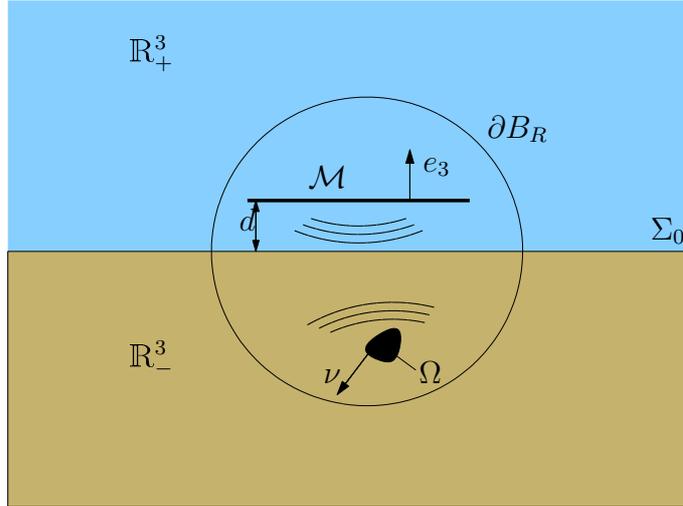


Abbildung 3.2.: Skizze der Modellkonfiguration

und der Ausstrahlungsbedingung (2.19) für  $(E^s, H^s)$ . Damit die Randbedingung und die Sprungbedingungen (2.14) an der Trennschicht  $\Sigma_0$  einen Sinn ergeben, betrachten wir Lösungen  $E^s, H^s \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ . Die Ausstrahlungsbedingung ist aufgrund eines von Kirsch in [Kir07] erwähnten Regularitätsresultats von Weber [Web81] sinnvoll definiert. Siehe auch [Gri08, S. 49]:

Sei  $R > 0$ , so dass  $\overline{\Omega} \subseteq B_R$  gelte und  $G := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}$ . Für  $E^s, H^s \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  gilt  $H^s|_{G_{\pm}}, E^s|_{G_{\pm}} \in C^n(\overline{G_{\pm}}, \mathbb{C}^3)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dabei ist  $G_{\pm} := \mathbb{R}_{\pm}^3 \setminus B_R$ .

Zunächst nehmen wir an, dass unser einfallendes Feld durch eine Überlagerung magnetischer Dipole auf  $\mathcal{M}$  erzeugt wird, d.h.

$$H^i(x) = \kappa^2 \epsilon_r^+ \mu_r^+ \int_{\mathcal{M}} \mathbb{G}^m(x, y) \varphi(y) d\Sigma(y), \quad E^i(x) = \frac{1}{\nu \kappa \epsilon_r} \text{rot } H^i(x). \quad (3.3)$$

Dabei sei  $\varphi \in L^2(\mathcal{M}) := L^2(\mathcal{M}, \mathbb{C}^3)$  eine Verteilung von magnetischen Dipolen auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathbb{G}^m$  die magnetische dyadische Greensche Funktion (D.30). Wir werden auch Einschränkungen betrachten, bei denen die Dipole entweder alle parallel zur Fläche  $\mathcal{M}$  polarisiert sind, d.h.  $\varphi \in L_t^2(\mathcal{M}) := \{v \in L^2(\mathcal{M}, \mathbb{C}^3) \mid v \cdot e_3 = 0 \text{ f.ü.}\}$  oder die Dipole alle senkrecht zur Fläche  $\mathcal{M}$  stehen, d.h. es gilt  $\varphi \in L_n^2(\mathcal{M}) := \{v e_3 \mid v \in L^2(\mathcal{M}, \mathbb{C})\}$ .

Wir definieren nun den Messoperator  $M$ , der einer Dipoldichte  $\varphi$  das gestreute  $H$ -Feld  $H^s|_{\mathcal{M}}$  auf  $\mathcal{M}$  zuweist, d.h.

$$M : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M}), \quad M\varphi := H^s|_{\mathcal{M}}. \quad (3.4)$$

Da  $H^s$  in einer Umgebung von  $\Sigma_d$  analytisch ist, ist die Spur  $H^s|_{\mathcal{M}}$  ein Element von

$L^2(\mathcal{M})$ . Für die Einschränkungen definieren wir entsprechend

$$\begin{aligned} M_t &: L_t^2(\mathcal{M}) \rightarrow L_t^2(\mathcal{M}), & M_t &:= P_t M P_t^T, \\ M_n &: L_n^2(\mathcal{M}) \rightarrow L_n^2(\mathcal{M}), & M_n &:= P_n M P_n^T \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit den stetigen Projektoren  $P_t H_{|\mathcal{M}}^s := (e_3 \wedge H_{|\mathcal{M}}^s) \wedge e_3$  und  $P_n H_{|\mathcal{M}}^s := (H_{|\mathcal{M}}^s \cdot e_3) e_3$ . Dabei seien  $P_t^T : L_t^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$  und  $P_n^T : L_n^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$  die bzgl. der Bilinearform

$$(\varphi_1 | \varphi_2)_{\mathcal{M}} := \int_{\mathcal{M}} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, d\Sigma, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathcal{M}) \quad (3.6)$$

transponierten Operatoren, d.h. die Einbettung von  $L_t^2(\mathcal{M})$  bzw.  $L_n^2(\mathcal{M})$  in  $L^2(\mathcal{M})$ , denn seien  $\varphi_1 \in L^2(\mathcal{M})$  und  $\varphi_2 \in L_t^2(\mathcal{M})$ , so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} [P_t \varphi_1] \cdot \varphi_2 \, d\Sigma &= \int_{\mathcal{M}} [(e_3 \wedge \varphi_1) \wedge e_3] \cdot \varphi_2 \, d\Sigma \stackrel{(A.1)}{=} \int_{\mathcal{M}} [\varphi_1 - (\varphi_1 \cdot e_3) e_3] \cdot \varphi_2 \, d\Sigma \\ &= \int_{\mathcal{M}} \varphi_1 \cdot \varphi_2 - (\varphi_1 \cdot e_3)(\varphi_2 \cdot e_3) \, d\Sigma = \int_{\mathcal{M}} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, d\Sigma. \end{aligned}$$

Die Aussage für  $P_n^T$  folgt ähnlich.

### 3.3. Die Faktorisierung der Messoperatoren

Wir geben nun die Faktorisierung des Operators  $M$  analog zu [GHK<sup>+</sup>05] an und betrachten sie noch einmal genauer.

Sei  $\psi \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  ein tangenciales Vektorfeld auf dem Rand von  $\Omega$ . Mit  $(E^\psi, H^\psi)$  bezeichnen wir die ausstrahlende Lösung des Außenraumproblems

$$\text{rot } H^\psi + \nu \kappa \epsilon_r E^\psi = 0, \quad \text{rot } E^\psi - \nu \kappa \mu_r H^\psi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \quad (3.7a)$$

$$\nu \wedge E^\psi = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.7b)$$

in  $H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  und definieren den beschränkten linearen Operator

$$L : H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\mathcal{M}), \quad L\psi := H_{|\mathcal{M}}^\psi. \quad (3.8)$$

Zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung verweisen wir auf [Gri08] und die dortigen Referenzen. Sind  $E^i$  und  $H^s$  das einfallende elektrische und das gestreute magnetische Feld aus dem letzten Abschnitt, so gilt insbesondere  $\psi = -\nu \wedge E_{|\mathcal{M}}^i \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und aufgrund der Randbedingung (3.2c) und der eindeutigen Lösbarkeit des Außenraumproblems erhalten wir  $L\psi = H_{|\mathcal{M}}^s$ .

Zur Definition des nächsten Operators in der Faktorisierung von  $M$  definieren wir das Transmissionsproblem

$$\text{rot } H^d + \nu \kappa \epsilon_r E^d = 0, \quad \text{rot } E^d - \nu \kappa \mu_r H^d = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \quad (3.9a)$$

mit den Transmissionsbedingungen

$$[(\nu \wedge H^d) \wedge \nu]_{\partial\Omega} = \chi, \quad [\nu \wedge E^d]_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.9b)$$

Dabei bezeichnen die eckigen Klammern wieder die Differenz der entsprechenden Spuren auf  $\partial\Omega$  von Außen bzw. Innen und  $\chi \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  ein gegebenes Tangentialfeld. Zur Eindeutigkeit einer ausstrahlenden Lösung  $(E^d, H^d)$ , für deren Einschränkungen  $E_{|\Omega}^d, H_{|\Omega}^d \in H(\text{rot}; \Omega)$  bzw.  $E_{|\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}^d, H_{|\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}^d \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$  gilt, verweisen wir auf [Gri08]. Wir definieren nun den beschränkten linearen Operator

$$F : H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega), \quad F\chi := \nu \wedge E_{|\partial\Omega}^d. \quad (3.10)$$

Bezeichnen wir mit  $H = H^i + H^s$  das totale magnetische Feld des Problems (3.2) zu einer Dipolverteilung  $\varphi \in L^2(\mathcal{M})$ , dann können wir für  $\chi = (\nu \wedge H_{|\partial\Omega}) \wedge \nu$  die Lösung des Transmissionsproblems (3.9) wie folgt angeben:

$$E^d(x) = \begin{cases} E^s(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ -E^i(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad H^d = \begin{cases} H^s(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ -H^i(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

Insbesondere gilt dann wegen der Randbedingung (3.2c)  $F\chi = \nu \wedge E^s = -\nu \wedge E^i$ .

Bezeichnen wir nun mit  $L^T$  den zu  $L$  bzgl. der Bilinearform (3.6) dualen Operator, so gilt die folgende Aussage.

**Proposition 3.2:** *Sei  $\varphi \in L^2(\mathcal{M})$ . Mit  $H^i$  und  $H^s$  bezeichnen wir das zugehörige einfallende bzw. das gestreute magnetische Feld (vgl. (3.2) und (3.3)). Dann gilt*

$$L^T : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega), \quad L^T\varphi = \frac{1}{\nu\kappa\mu_r^+}(\nu \wedge H_{|\partial\Omega}) \wedge \nu, \quad (3.12)$$

wobei  $H := H^i + H^s$  das totale magnetische Feld bezeichne.

*Beweis.* (vgl. [Gri08] Prop. 3.6)

Sei  $\psi \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und  $(E^\psi, H^\psi)$  die ausstrahlende Lösung des Außenraumproblems (3.7). Mit der Stratton-Chu-Formel [Gri08, Thm. B.1] erhalten wir für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{\Omega} \cup \Sigma_0\}$  mit der dyadischen Greenschen Funktion (4.4.2)

$$H^\psi(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\epsilon_r(x)}{\epsilon_r(y)} (\mathbb{G}^{mT}(y, x)(\nu \wedge \text{rot } H^\psi(y)) + (\text{rot}_y \mathbb{G}^m)^T(y, x)(\nu \wedge H^\psi(y))) \, d\Sigma(y).$$

Mit  $\mathbb{G}^{mT}$  bzw.  $(\text{rot}_x \mathbb{G}^m)^T$  bezeichnen wir die transponierten Matrizen. Damit gilt nun:

$$\begin{aligned} \nu\kappa\mu_r^+(\varphi | L\psi)_{\mathcal{M}} &= \nu\kappa\mu_r^+ \int_{\mathcal{M}} \varphi(x) \cdot H^\psi(x) \, d\Sigma(x) \\ &= \nu\kappa\mu_r^+ \int_{\mathcal{M}} \varphi(x) \cdot \int_{\partial\Omega} \frac{\epsilon_r^+}{\epsilon_r} \mathbb{G}^{mT}(y, x)(\nu \wedge \text{rot } H^\psi(y)) \, d\Sigma(y) \, d\Sigma(x) \\ &\quad + \nu\kappa\mu_r^+ \int_{\mathcal{M}} \varphi(x) \cdot \int_{\partial\Omega} \frac{\epsilon_r^+}{\epsilon_r} (\text{rot}_y \mathbb{G}^m)^T(y, x)(\nu \wedge H^\psi(y)) \, d\Sigma(y) \, d\Sigma(x). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iota\kappa\mu_r^+(\varphi | L\psi)_{\mathcal{M}} &\stackrel{(3.7a)}{=} \kappa^2\mu_r^+\epsilon_r^+ \int_{\mathcal{M}} \int_{\partial\Omega} \mathbb{G}^m(y, x)\varphi(x) \cdot (\nu \wedge E^\psi(y)) \, d\Sigma(y) \, d\Sigma(x) \\
&\quad + \iota\kappa\mu_r^+ \frac{\epsilon_r^+}{\epsilon_r^-} \int_{\mathcal{M}} \int_{\partial\Omega} \text{rot}_y \mathbb{G}^m(y, x)\varphi(x) \cdot (\nu \wedge H^\psi(y)) \, d\Sigma(y) \, d\Sigma(x) \\
&\stackrel{(3.7b)}{=} \int_{\partial\Omega} \psi(y) \cdot \kappa^2\epsilon_r^+\mu_r^+ \int_{\mathcal{M}} \mathbb{G}^m(y, x)\varphi(x) \, d\Sigma(x) \, d\Sigma(y) \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge H^\psi(y)) \cdot \text{rot}_y \left( \frac{\iota\kappa\mu_r^+\epsilon_r^+}{\epsilon_r^-} \int_{\mathcal{M}} \mathbb{G}^m(y, x)\varphi(x) \, d\Sigma(x) \right) \, d\Sigma(y) \\
&\stackrel{(3.3)}{=} \int_{\partial\Omega} \psi(y) \cdot H^i(y) \, d\Sigma(y) + \frac{\iota}{\kappa\epsilon_r^-} \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge H^\psi(y)) \cdot \text{rot} H^i(y) \, d\Sigma(y) \\
&\stackrel{(3.2a), (A.2)}{=} \int_{\partial\Omega} \psi(y) \cdot H^i(y) \, d\Sigma(y) - \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge E^i(y)) \cdot H^\psi(y) \, d\Sigma(y) \\
&\stackrel{(3.2c)}{=} \int_{\partial\Omega} H^i(y) \cdot \psi(y) \, d\Sigma(y) + \int_{\partial\Omega} H^\psi(y) \cdot (\nu \wedge E^s(y)) \, d\Sigma(y).
\end{aligned}$$

Sei  $R > 0$ , so dass  $\Omega \subset B_R$ , dann erhalten wir mit den homogenen Maxwell-Gleichungen unter Beachtung der Richtung von  $\nu$ , der Außennormalen von  $\Omega$  und  $\hat{x} = x/R$ , der Außennormalen von  $B_R$  mit partieller Integration (3.1) für das letzte Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} H^\psi(y) \cdot (\nu \wedge E^s(y)) \, d\Sigma(y) &\stackrel{(3.1)}{=} \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} \text{rot} H^\psi(y) \cdot E^s(y) - H^\psi(y) \cdot \text{rot} E^s(y) \, d\Sigma(y) \\
&\quad + \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E^s(y)) \cdot H^\psi(y) \, d\Sigma(y) \\
&\stackrel{(3.2b), (3.7a), (A.2)}{=} \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} E^\psi(y) \cdot \text{rot} H^s(y) - \text{rot} E^\psi(y) \cdot H^s(y) \, d\Sigma(y) \\
&\quad - \int_{\partial B_R} E^s(y) \cdot (\hat{x} \wedge H^\psi(y)) \, d\Sigma(y) \\
&\stackrel{(3.1)}{=} \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge H^s(y)) \cdot E^\psi(y) \, d\Sigma(y) \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge H^s(y)) \cdot E^\psi(y) \, d\Sigma(y) \\
&\quad - \int_{\partial B_R} E^s(y) \cdot (\hat{x} \wedge H^\psi(y)) \, d\Sigma(y).
\end{aligned}$$

Mit (A.2) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} H^\psi(y) \cdot (\nu \wedge E^s(y)) \, d\Sigma(y) &= \int_{\partial\Omega} H^s(y) \cdot (\nu \wedge E^\psi(y)) \, d\Sigma(y) \\ &+ \int_{\partial B_R} \left( \hat{x} \wedge H^s(y) + \left( \frac{\epsilon_r(y)}{\mu_r(y)} \right)^{1/2} E^s(y) \right) \cdot E^\psi(y) \, d\Sigma(y) \\ &- \int_{\partial B_R} E^s(y) \cdot \left( \hat{x} \wedge H^\psi(y) + \left( \frac{\epsilon_r(y)}{\mu_r(y)} \right)^{1/2} E^\psi(y) \right) \, d\Sigma(y). \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Ausstrahlungsbedingung (2.19) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung verschwinden die Integrale über  $B_R$  für  $R \rightarrow \infty$ . Wir erhalten daher mit der Randbedingung (3.7b) und  $H = H^i + H^s$ :

$$\imath\kappa\mu_r^+(\varphi | L\psi)_{\mathcal{M}} = \int_{\partial\Omega} H(y) \cdot \psi(y) \, d\Sigma(y) = \langle (\nu \wedge H|_{\partial\Omega}) \wedge \nu, \psi \rangle_{\partial\Omega}.$$

□

Insgesamt erhalten wir jetzt für  $\varphi \in L^2(\mathcal{M})$

$$\imath\kappa\mu_r^+\varphi \xrightarrow{L^T} (\nu \wedge H|_{\partial\Omega}) \wedge \nu \xrightarrow{F} \nu \wedge E^s|_{\partial\Omega} \xrightarrow{L} H^s|_{\mathcal{M}}$$

mit dem totalen Magnetfeld  $H$  und dem gestreuten elektromagnetischen Feld  $(E^s, H^s)$ . Somit ist die Faktorisierung von  $M$  durch

$$M = \imath\kappa\mu_r^+ L F L^T. \quad (3.13)$$

gegeben.

**Proposition 3.3:** *Sei  $\Omega \neq \emptyset$  und  $\kappa^2\epsilon_r^-\mu_r^-$  kein Maxwell-Eigenwert, dann sind die Operatoren  $L$  aus (3.8) und  $P_t L$  mit  $P_t$  aus (3.5) kompakt und injektiv.*

*Beweis.* Sei  $\psi \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und  $(E^\psi, H^\psi)$  die Lösung des Außenraumproblems (3.7). Nach [Gri08, 3.7] lässt sich, wenn  $\kappa^2\epsilon_r^-\mu_r^-$  kein Maxwell-Eigenwert ist,  $L$  schreiben als  $L\psi = ST\psi$  mit einem beschränkten Operator  $T : H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und

$$[S\tilde{\psi}](x) = -\imath\kappa\epsilon_r^- \int_{\partial\Omega} \mathbb{G}^m(x, y) \tilde{\psi} \, d\Sigma(y), \quad x \in \mathcal{M}, \quad \tilde{\psi} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$$

mit der dyadischen Greenschen Funktion  $\mathbb{G}^m$ . Da diese für alle  $x \in \mathcal{M}$  und  $y \in \partial\Omega$  stetige Funktionen als Einträge besitzt, ist  $S$  ein kompakter Operator (vgl. [RR04, Thm. 8.83]) und somit gilt dies auch für  $L$  und  $P_t L$ .

### 3. Die Problemstellung

---

Für den folgenden Beweis der Injektivität nach [GHK<sup>+</sup>05] benötigen wir nur die Tangentialkomponenten des  $H$ -Feldes auf  $\mathcal{M}$ , so dass die Injektivität für den Operator  $L$  analog zu der von  $P_t L$  folgt.

Sei  $P_t L\psi = 0$ , dann gilt  $(e_3 \wedge H|_{\mathcal{M}}^\psi) \wedge e_3 = 0$ . Da  $H^\psi$  auf  $\mathbb{R}_+^3$  analytische kartesische Komponenten besitzt, gilt dies auch für die tangentielle Projektion  $(e_3 \wedge H|_{\mathcal{M}}^\psi) \wedge e_3$  auf  $\mathcal{M}$  und somit verschwinden die Tangentialkomponenten von  $H^\psi$  auf der Ebene  $\Sigma_d$  (s. S. 22), d.h.  $(e_3 \times H|_{\Sigma_d}^\psi) \times e_3 = 0$ .  $E^\psi$  und  $H^\psi$  sind also eine ausstrahlende Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen auf dem Halbraum  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 > d\}$  mit der Randbedingung  $(e_3 \wedge H|_{\Sigma_d}^\psi) \wedge e_3 = 0$ . Wir setzen nun mit dem Reflektionsprinzip  $H^\psi$  durch

$$\tilde{H}(x) := \begin{cases} H^\psi(x), & x \cdot e_3 \geq d, \\ -\alpha_0(H^\psi(\alpha_d(x))), & x \cdot e_3 < d \end{cases}$$

auf den ganzen  $\mathbb{R}^3$  fort, wobei wir mit  $\alpha_r$  den Reflektionsoperator

$$\alpha_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha_r(x) := x - 2(x \cdot e_3 - r)e_3, \quad r \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

bezeichnen. Durch diese Konstruktion sind die Tangentialkomponenten von  $\tilde{H}$  und  $\text{rot } \tilde{H}$  stetig an  $\Sigma_d$  und  $(\tilde{E}, \tilde{H})$  mit  $\tilde{E} := -1/(\imath \kappa \epsilon_r^+) \text{rot } \tilde{H}$  erfüllt die Silver-Müller-Bedingung (2.19). Somit ist  $(\tilde{E}, \tilde{H})$  eine ausstrahlende Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\text{rot } \tilde{H} + \imath \kappa \epsilon_r^+ \tilde{E} = 0, \quad \text{rot } \tilde{E} - \imath \kappa \mu_r^+ \tilde{H} = 0$$

auf dem ganzen  $\mathbb{R}^3$ . Nach [CK98, S. 163] ist die einzige Lösung konstant Null und somit verschwindet auch  $H^\psi$  auf  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 > d\}$ . Aufgrund der Analytizität verschwindet  $H^\psi$  auch auf  $\mathbb{R}_+^3$  und daher auch  $E^\psi$ . Insbesondere haben  $H^\psi$  und  $E^\psi$  verschwindende Tangentialkomponenten auf  $\Sigma_0$ . Da  $H^\psi, E^\psi \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  sind, haben sie stetige Tangentialkomponenten an  $\Sigma_0$ . Nach einem Satz vom Holmgren-Typ (vgl. [Kre02a, Thm. 2.4, S.179]) verschwinden  $(H^\psi, E^\psi)$  somit in einer Umgebung von  $\Sigma_0$  in  $\mathbb{R}_-^3$ , da sie Lösungen der homogenen Maxwell-Gleichungen mit den konstanten Koeffizienten  $\epsilon_r^-$  und  $\mu_r^-$  sind. Somit gilt  $E^\psi = H^\psi = 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ . Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des Außenraumproblems ist damit  $\psi = 0$  und daher  $P_t L$  injektiv.  $\square$

**Bemerkung 3.4:** Da  $P_n$  stetig und  $L$  kompakt ist, ist auch  $P_n L$  ein kompakter Operator. Mit einem ähnlichen Spiegelargument für die dritte Komponente von  $H^\psi$  (vgl. Beweis von Satz 3.12) sehen wir, dass die dritte Komponente von  $H^\psi$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  verschwindet, wenn  $P_n L\psi = 0$  gilt. Betrachten wir  $H^\psi$  als das Streufeld zum Primärfeld  $H^i$ , so gilt aufgrund der Randbedingung (2.18) für perfekte Leiter  $H|_{\partial\Omega}^\psi \cdot \nu = -H|_{\partial\Omega}^i \cdot \nu$ . Somit muss die dritte Komponente des einfallenden  $H$ -Feldes  $H^i \cdot e_3$  auf Teilflächen von  $\partial\Omega$ , die parallel zur Trennschicht liegen, verschwinden. Dies ist allerdings i.a. bei einem von magnetischen Dipolen, die senkrecht zur Trennschicht stehen, erzeugten Primärfeld für beliebige Streukörper nicht der Fall.

**Proposition 3.5:** Sei  $\Omega \neq \emptyset$ . Der Operator  $F$  aus (3.10) ist symmetrisch, d.h.

$$\langle F\chi_1, \chi_2 \rangle_{(H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega), H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega))} = \langle \chi_1, F\chi_2 \rangle_{(H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega), H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega))}$$

mit  $\chi_1, \chi_2 \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und der dualen Paarung zwischen  $H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  bzw.  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und  $H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$ .

*Beweis.* Seien  $(E_i, H_i), i = 1, 2$ , die Lösungen des Transmissionsproblems (3.9) zu den Sprüngen  $\chi_1$  bzw.  $\chi_2$ . Weiterhin sei  $R > 0$  mit  $\Omega \subseteq B_R$ . Mit  $E_i^+, H_i^+$  bezeichnen wir die Spur der jeweiligen Felder auf  $\partial\Omega$  bzgl.  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  und mit  $E_i^-, H_i^-$  die innere Spur. Aus den Sprungbedingungen, partieller Integration (3.1) und den homogenen Maxwell-Gleichungen erhalten wir unter Beachtung der Richtung von  $\nu$ , der Außennormalen von  $\Omega$  und  $\hat{x} = x/R$ , der Außennormalen von  $B_R$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F\chi_1 \cdot \chi_2 \, d\Sigma &= \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge E_1^+) \cdot H_2^+ \, d\Sigma - \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge E_1^-) \cdot H_2^- \, d\Sigma \\ &\stackrel{(3.1)}{=} - \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} \text{rot } E_1 \cdot H_2 \, dx + \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} E_1 \cdot \text{rot } H_2 \, dx + \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E_1) \cdot H_2 \, d\Sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} \text{rot } E_1 \cdot H_2 \, dx + \int_{\Omega} E_1 \cdot \text{rot } H_2 \, dx \\ &\stackrel{(3.9a)}{=} - \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} H_1 \cdot \text{rot } E_2 \, dx + \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} \text{rot } H_1 \cdot E_2 \, dx + \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E_1) \cdot H_2 \, d\Sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} H_1 \cdot \text{rot } E_2 \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } H_1 \cdot E_2 \, dx \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge E_2^+) \cdot H_1^+ \, d\Sigma - \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E_2) \cdot H_1 \, d\Sigma + \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E_1) \cdot H_2 \, d\Sigma \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (\nu \wedge E_2^-) \cdot H_1^- \, d\Sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \chi_1 \cdot F\chi_2 \, d\Sigma + \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E_1) \cdot H_2 - (\hat{x} \wedge E_2) \cdot H_1 \, d\Sigma. \end{aligned}$$

Wir verwenden hier aufgrund der besseren Lesbarkeit die Integralschreibweise. Dies lässt sich auch damit rechtfertigen, dass  $H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  und  $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  dual zueinander sind mit  $L_t^2(\partial\Omega)$  als (dichtem) Pivot-Raum (vgl. [BCS02]).

Für das Integral über den Rand von  $B_R$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E_1) \cdot H_2 - (\hat{x} \wedge E_2) \cdot H_1 \, d\Sigma &\stackrel{(A.2)}{=} \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge H_1) \cdot E_2 - (\hat{x} \wedge H_2) \cdot E_1 \, d\Sigma \\ &\stackrel{+0}{=} \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge H_1 + \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} E_1) \cdot E_2 \, d\Sigma - \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge H_2 + \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} E_2) \cdot E_1 \, d\Sigma \\ &\quad + \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} \int_{\partial B_R} E_2 \cdot E_1 - E_1 \cdot E_2 \, d\Sigma. \end{aligned}$$

Und somit gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge E_1) \cdot H_2 - (\hat{x} \wedge E_2) \cdot H_1 \, d\Sigma \\ &= \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge H_1 + \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} E_1) \cdot E_2 \, d\Sigma - \int_{\partial B_R} (\hat{x} \wedge H_2 + \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} E_2) \cdot E_1 \, d\Sigma. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Ausstrahlungsbedingung (2.19) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung verschwinden diese Integrale für  $R \rightarrow \infty$  und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

**Proposition 3.6:** *Sei  $\Omega \neq \emptyset$  und  $\kappa^2 \epsilon_r^- \mu_r^-$  kein Maxwell-Eigenwert, dann ist der Operator  $F$  aus (3.10) injektiv.*

*Beweis.* Sei  $\chi \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  mit  $F\chi = 0$  und  $(E^d, H^d)$  die Lösung von (3.9) mit  $[(\nu \wedge H^d) \wedge \nu]_{\partial\Omega} = \chi$  und  $[\nu \wedge E^d]_{\partial\Omega} = 0$ . Seien  $E_{\pm}^d, H_{\pm}^d$  die äußere bzw. innere Spur der Felder auf  $\partial\Omega$ , dann gilt  $\nu \wedge E_+^d = \nu \wedge E_-^d = 0$ . Da  $(E^d, H^d)$  eine ausstrahlende Lösung des Außenraumproblems ist, folgt aus dessen eindeutiger Lösbarkeit (s. [Gri08, App. C]), dass  $E^d = H^d = 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ . Insbesondere gilt daher  $-(\nu \wedge H_-^d) \wedge \nu = \chi$ .

Nun ist  $(E^d, H^d)$  eine Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen in  $\Omega$  mit der Randbedingung  $\nu \wedge E_-^d = 0$ . Da  $\kappa^2 \epsilon_r^- \mu_r^-$  nach Voraussetzung kein Maxwell-Eigenwert ist, gilt somit  $E^d = H^d = 0$  in  $\Omega$ . Daraus folgt nun  $(\nu \wedge H_-^d) \wedge \nu = 0$  und daher auch  $\chi = 0$ . Insgesamt ist also  $F$  injektiv.  $\square$

**Satz 3.7:** *Sei  $\Omega \neq \emptyset$  und  $\kappa^2 \epsilon_r^- \mu_r^-$  kein Maxwell-Eigenwert, dann sind die Operatoren  $M$ ,  $M_t$  und  $M_n$  symmetrisch bzgl. der Bilinearform (3.6) und kompakt. Weiterhin gilt*

$$\overline{\mathfrak{R}(M)} = \overline{\mathfrak{R}(L)} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{R}(M_t)} = \overline{\mathfrak{R}(P_t L)}.$$

*Beweis.* Nach Proposition 3.3 ist  $L$  injektiv und kompakt. Nach Proposition 3.6 ist  $F$  injektiv und symmetrisch. Somit folgt aus der Faktorisierung (3.13) von  $M$  und der Definition von  $M_t$  und  $M_n$  die Symmetrie und Kompaktheit der Operatoren. Weiterhin gilt  $\mathfrak{R}(M) = \mathfrak{R}(L^T)$ , da  $F$  und  $L$  injektiv sind und daher gilt auch  $\overline{\mathfrak{R}(M)} = \mathfrak{R}(M)^\perp = \mathfrak{R}(L^T)^\perp = \overline{\mathfrak{R}(L)}$ . Dabei ist das orthogonale Komplement der Kerne bzgl. der Bilinearform (3.6) als reelles Skalarprodukt zu verstehen. Analog folgt auch die Aussage für  $M_t$ .  $\square$

### 3.4. Erweiterung auf Spulen

Wir erweitern nun das Modell auf den ursprünglichen Ansatz von Metalldetektoren. Dazu nehmen wir an, dass sich in  $N \in \mathbb{N}$  Punkten  $z_1, \dots, z_N$  unserer Messebene  $\mathcal{M}$  eine Spule zum Senden und zum Empfangen befindet und sich die Spulen nicht gegenseitig

beeinflussen. D.h. unser Metalldetektor besteht nicht nur aus zwei konzentrischen Spulen, sondern aus einem Gitter sich eventuell überlappender Spulen.

Wir definieren nun zunächst, was wir uns unter einer solchen Spule vorstellen. Zu jedem der Punkte  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  sei  $\gamma_j$  eine geschlossene, kreuzungsfreie, stückweise differenzierbare Kurve in  $\Sigma_d$ , die  $z_j$  einmal umläuft. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{F}_j \subseteq \Sigma_d$  die in  $\Sigma_d$  offene Menge der von dieser Kurve umschlossenen Punkte und mit

$$\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \bigcup_{j=1}^N \mathcal{F}_j \quad (3.15)$$

die in  $\Sigma_d$  offene Menge aller umschlossenen Punkte. Weiterhin definieren wir nun den linearen *Induktionsoperator*

$$P_u : L_n^2(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad P_u \varphi := \left( \int_{\mathcal{F}_1} \varphi \cdot e_3 \, d\Sigma, \dots, \int_{\mathcal{F}_N} \varphi \cdot e_3 \, d\Sigma \right)^T \quad (3.16)$$

der einem Vektorfeld  $\varphi \in L_n^2(\tilde{\mathcal{M}}) := \left\{ v e_3 \mid v \in L^2(\tilde{\mathcal{M}}, \mathbb{C}) \right\}$  den Vektor der  $N$  Oberflächenintegrale des Vektorfeldes über die Flächen der Spulen zuordnet. Ist  $\varphi$  etwa das gestreute  $H$ -Feld, so ist  $\nu \kappa \mu_r^+ P_u \varphi$  der Vektor mit den in den Spulen  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  induzierten Spannungen. Dies folgt aus dem Induktionsgesetz von Faraday 2.1.3, das im zeitharmonischen Fall für eine Fläche  $\mathcal{F}$  mit Rand  $\gamma$  und dem gestreuten  $E$ -Feld

$$\nu \kappa \mu_r^+ \int_{\mathcal{F}} H \cdot \nu \, d\Sigma = \oint_{\gamma} E \cdot \tau \, d\gamma$$

lautet.

**Lemma 3.8:** *Der Operator  $P_u : L_n^2(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \mathbb{C}^N$  aus (3.16) ist stetig.*

*Beweis.* Sei  $\varphi \in L_n^2(\tilde{\mathcal{M}})$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left| \int_{\mathcal{F}_j} \varphi(y) \cdot e_3 \, d\Sigma(y) \right|^2 &\leq \sum_{j=1}^N \left( \int_{\mathcal{F}_j} |\varphi(y) \cdot e_3| \, d\Sigma(y) \right)^2 \leq N \left( \int_{\tilde{\mathcal{M}}} |\varphi(y) \cdot e_3| \, dy \right)^2 \\ &\leq N \|\varphi\|_{L^1(\tilde{\mathcal{M}}, \mathbb{C}^3)}^2 \leq N |\tilde{\mathcal{M}}|^2 \|\varphi\|_{L_n^2(\tilde{\mathcal{M}})}^2. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.9:** *Der bzgl. der kanonischen Bilinearform auf  $\mathbb{C}^N$  transponierte Operator zu  $P_u$  aus (3.16) ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} P_u^T : \mathbb{C}^N &\rightarrow L_n^2(\tilde{\mathcal{M}}), \\ [P_u^T U](x) &= \left( \sum_{j=1}^N u_j \chi_j(x) \right) e_3, \quad x \in \tilde{\mathcal{M}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit  $U = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{C}^N$  und  $\chi_j$  der charakteristischen Funktion von  $\mathcal{F}_j$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in L_n^2(\tilde{\mathcal{M}})$ .

$$P_u \varphi \cdot U = \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{F}_j} \varphi(y) \cdot e_3 \, d\Sigma(y) u_j = \int_{\tilde{\mathcal{M}}} \varphi(y) \cdot \left( \sum_{j=1}^N u_j \chi_j(y) \right) e_3 \, d\Sigma(y).$$

□

Ist  $U$  eine Verteilung von Spulenspannungen, d.h. die Spule zum Punkt  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  wird mit einer Spannung  $u_j$  betrieben, so ordnet  $P_u^T$  dieser Verteilung ein Normalenfeld auf  $\tilde{\mathcal{M}}$  zu. Nach dem Gesetz von Biot-Savart (2.21) wird das von einer Spule erzeugte  $H$ -Feld von Dipolen gleicher Stärke, die normal zur Spulenfläche stehen, erzeugt. Wir interpretieren daher das Normalenfeld  $P_u^T U$  als eine solche Dipolverteilung und definieren den *Spannungs-Messoperator*  $M_u$  durch

$$M_u : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad M_u := P_u M_n P_u^T \quad (3.18)$$

mit dem auf  $\tilde{\mathcal{M}}$  erweiterten Operator  $M_n$  aus (3.5). D.h. wir definieren die Operatoren  $L$  und  $L^T$  aus (3.10) bzw. (3.12) und  $P_n$  sowie  $P_n^T$  aus (3.5) und damit  $M_n$  analog auf  $\tilde{\mathcal{M}} \supseteq \mathcal{M}$  statt auf  $\mathcal{M}$ . Wir erhalten dann die zu (3.13) entsprechende Faktorisierung für  $M$  auf  $\tilde{\mathcal{M}}$  und somit

$$M_u = \nu \kappa \mu_r^+ P_u P_n L F L^T P_n^T P_u^T \quad (3.19)$$

als symmetrischen kompakten Operator.

### 3.5. Das inverse Problem

Wir betrachten nun das inverse Problem die Form und den Ort der Streuobjekte anhand der Kenntnis des Messoperators  $M$  zu finden. Dazu verwenden wir eine Variante des Sampling-Verfahrens, das zuerst von Coyle [Coy00] für eine zweidimensionale Approximation des Problems eingeführt wurde.

Mit den Operatoren aus (3.5) und dem  $H$ -Feld eines magnetischen Dipols mit Polarisation  $p$  in einem Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$  definieren wir die *Testfunktionen* auf der Messebene  $\mathcal{M}$  durch

$$h_z^p(x) := \mathbb{G}^m(x, z) p, \quad x \in \mathcal{M}, \quad h_{t,z}^p := P_t h_z^p, \quad h_{n,z}^p := P_n h_z^p. \quad (3.20)$$

Unser Verfahren testet, ob die Funktion  $h_z^p$  zum Bild  $\mathfrak{R}(M)$  des Messoperators  $M$  gehört. Wir definieren daher mit

$$\Omega_0 := \{z \in \mathbb{R}_-^3 \mid h_z^p \in \mathfrak{R}(M) \text{ für ein } 0 \neq p \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.21)$$

die Menge aller Punkte, für welche dieser Test für eine Polarisation  $p$  positiv ausfällt. Entsprechend definieren wir für die Fälle der Anregung mit tangentialen bzw. horizontalen Dipolen die Mengen

$$\begin{aligned} \Omega_0^t &:= \{z \in \mathbb{R}_-^3 \mid h_{t,z}^p \in \mathfrak{R}(M_t) \text{ für ein } 0 \neq p \in \mathbb{R}^3\} \quad \text{und} \\ \Omega_0^n &:= \{z \in \mathbb{R}_-^3 \mid h_{n,z}^p \in \mathfrak{R}(M_n) \text{ für ein } 0 \neq p \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

mit den Operatoren  $M_t$  bzw.  $M_n$  aus (3.5).

## Charakterisierung der Streuobjekte

**Satz 3.10:** *Sei  $\Omega \neq \emptyset$  und die Polarisationsrichtung  $p$  ein Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^3$ . Ein Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$  liegt genau dann in  $\Omega$ , wenn die Funktion  $h_z^p$  aus (3.20) zum Bild von  $L$  aus (3.8) gehört.*

*Beweis.* Sei zunächst  $z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}_-^3$ . Mit  $(E_z^p, H_z^p)$  bezeichnen wir das elektrische bzw. das magnetische Feld des magnetischen Dipols  $\mathbb{G}^m(\cdot, z)p$ . Da  $z$  in  $\Omega$  liegt, ist  $(E_z^p, H_z^p)$  eine ausstrahlende Lösung des Außenraumproblems (3.7) mit der Randbedingung  $\psi := \nu \wedge E_z^p|_{\partial\Omega}$ . Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit gilt daher  $L\psi = h_z^p$  auf  $\mathcal{M}$ , d.h.  $h_z^p \in \mathfrak{R}(L)$ .

Für die andere Richtung seien nun  $h_z^p = L\psi$  für ein  $z \in \mathbb{R}_-^3$  und ein  $\psi \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Sei  $(E^\psi, H^\psi)$  die Lösung des Außenraumproblems (3.7) zur Randbedingung  $\psi = \nu \wedge E^\psi|_{\partial\Omega}$ . Da  $h_z^p$  in  $\mathfrak{R}(L)$  liegt, ist das Feld

$$H := \mathbb{G}^m(\cdot, z)p - H^\psi, \quad E := \frac{1}{i\kappa\epsilon_r} \text{rot } H$$

eine ausstrahlende Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen in  $\mathbb{R}^3 \setminus (\{z\} \cup \overline{\Omega})$  die

$$(e_3 \wedge H|_{\mathcal{M}}) \wedge e_3 = 0$$

auf  $\mathcal{M}$  erfüllt. Wir verfahren nun wie im Beweis von Proposition 3.3 und erhalten, dass  $E$  und  $H$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus (\{z\} \cup \overline{\Omega})$  verschwinden.

Ist  $z \notin \Omega$ , so können wir  $H$  stetig durch Null in  $z$  fortsetzen. Da  $H^\psi$  in einer Umgebung von  $z$  ohne  $z$  analytisch ist, ist dies allerdings ein Widerspruch dazu, dass  $\mathbb{G}^m(\cdot, z)p$  dort für alle Polarisationsrichtungen  $p$  eine Singularität der Ordnung 3 besitzt (vgl. (B.11) in [Gri08]).

Wir haben also gezeigt, dass  $z$  nicht in  $\mathbb{R}_-^3 \setminus \Omega$  liegen kann, wenn  $h_z^p$  in  $\mathfrak{R}(L)$  liegt.  $\square$

Da der Beweis von Satz 3.10 nur die Tangentialkomponenten der Testfunktion verwendet, erhalten wir mit dem fast wörtlichen Beweis das folgende Resultat.

**Satz 3.11:** *Sei  $\Omega \neq \emptyset$  und die Polarisationsrichtung  $p$  ein Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^3$ . Ein Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$  liegt genau dann in  $\Omega$ , wenn die Funktion  $h_{t,z}^p$  aus (3.20) zum Bild von  $P_t L$  mit  $P_t$  aus (3.5) und  $L$  aus (3.8) gehört.*

**Satz 3.12:** *Sei  $\Omega \neq \emptyset$  und die Polarisationsrichtung  $p$  ein Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^3$ . Ein Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$  liegt genau dann in  $\Omega$ , wenn die Funktion  $h_{n,z}^p$  aus (3.20) zum Bild von  $P_n L$  mit  $P_n$  aus (3.5) und  $L$  aus (3.8) gehört.*

### 3. Die Problemstellung

---

*Beweis.* Für  $z \in \Omega$  erhalten wir aus Satz 3.10, dass  $h_z^p \in \mathfrak{R}(L)$  und somit  $h_{n,z}^p \in \mathfrak{R}(P_n L)$ .

Für die andere Richtung folgen wir dem Beweis von Lemma 4.7 aus [Gri08]. Sei also  $h_{n,z}^p = P_n L \psi$  für ein  $z \in \mathbb{R}_-^3$  und ein  $\psi \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Sei  $(E^\psi, H^\psi)$  die Lösung des Außenraumproblems (3.7) zur Randbedingung  $\psi = \nu \wedge E|_{\partial\Omega}$ . Da  $h_{n,z}^p$  in  $\mathfrak{R}(P_n L)$  liegt, ist das Feld

$$H := \mathbb{G}^m(\cdot, z)p - H^\psi, \quad E := \frac{1}{\nu\kappa\epsilon_r} \text{rot } H$$

eine ausstrahlende Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen in  $\mathbb{R}^3 \setminus (\{z\} \cup \overline{\Omega})$ , die

$$H|_{\mathcal{M}} \cdot e_3 = 0$$

auf  $\mathcal{M}$  erfüllt. Da  $H$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus (\{z\} \cup \overline{\Omega})$  analytische kartesische Komponenten besitzt, ist die Normalenkomponente  $H_3 := H \cdot e_3$  auf  $\Sigma_d$  ebenfalls analytisch und verschwindet somit auf  $\Sigma_d$ , da sie schon auf  $\mathcal{M}$  verschwindet.  $H_3$  ist also eine ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$\Delta H_3 + \kappa^2 \epsilon_r^+ \mu_r^+ H_3 = 0$$

in  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 > d\}$  mit  $H_3|_{\Sigma_d} = 0$ . Wir verwenden nun den Reflektionsoperator  $\alpha_d$  aus (3.14) um  $H_3$  durch

$$\tilde{H}_3(x) := \begin{cases} H_3(x), & x \cdot e_3 \geq d, \\ -H_3(\alpha_d(x)), & x \cdot e_3 < d \end{cases}$$

auf den ganzen  $\mathbb{R}^3$  fortzusetzen. Durch diese Konstruktion sind dann  $\tilde{H}_3$  und  $\frac{\partial}{\partial e_3} \tilde{H}_3$  stetig an  $\Sigma_0$  und  $\tilde{H}_3$  erfüllt die Ausstrahlungsbedingung von Sommerfeld.  $\tilde{H}_3$  ist also eine ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung mit konstanten Koeffizienten auf dem ganzen  $\mathbb{R}^3$ . Aus [CK98, S. 20] folgt daher, dass  $\tilde{H}_3$  auf dem ganzen  $\mathbb{R}^3$  verschwindet. Insbesondere gilt  $H_3 = 0$  auf  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 > d\}$ . Da  $H_3$  im oberen Halbraum analytisch ist, verschwindet es auch auf  $\mathbb{R}_+^3$ . Aus den Randbedingungen (2.14) folgt (vgl. [CH98, S. 439] oder [Ces96, S. 32f])  $[\mu_r H_3]_{\Sigma_0} = 0 = \left[ \frac{\partial}{\partial e_3} H_3 \right]_{\Sigma_0}$  und somit nach einem Satz vom Holmgren Typ aus [Kre02b, Thm 2.2, S. 41], dass  $H_3$  in einer Umgebung von  $\Sigma_0$  in  $\mathbb{R}_-^3$  verschwindet, da  $H_3$  eine Lösung der Helmholtz-Gleichung mit konstanten Koeffizienten ist. Insgesamt ist somit  $H_3 = 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus (\{z\} \cup \overline{\Omega})$ , da  $H_3$  dort analytisch ist.

Ist  $z \notin \Omega$ , so können wir  $H_3$  stetig durch Null in  $z$  fortsetzen. Da  $H_3^\psi$  in einer Umgebung von  $z$  ohne  $z$  analytisch ist, ist dies allerdings ein Widerspruch dazu, dass  $e_3 \cdot \mathbb{G}^m(\cdot, z)p$  dort für alle Polarisationsrichtungen  $p$  eine Singularität der Ordnung 3 besitzt (vgl. (B.11) in [Gri08]).

Wir haben also gezeigt, dass  $z$  nicht in  $\mathbb{R}_-^3 \setminus \Omega$  liegen kann, wenn  $h_{n,z}^p$  in  $\mathfrak{R}(P_n L)$  liegt.  $\square$

Aus den vorigen Ergebnissen erhalten wir nun das folgende Korollar.

- Korollar 3.13:**
- Für  $\Omega_0$  aus (3.21) gilt immer  $\Omega_0 \subseteq \Omega$ , d.h. ist  $h_z^p \in \mathfrak{R}(M)$  für einen Polarisationsvektor  $p$  und einen Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$ , dann gilt  $z \in \Omega$ .
  - Für  $\Omega_0^t$  aus (3.22) gilt immer  $\Omega_0^t \subseteq \Omega$ , d.h. ist  $h_{t,z}^p \in \mathfrak{R}(M_t)$  für einen Polarisationsvektor  $p$  und einen Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$ , dann gilt  $z \in \Omega$ .
  - Für  $\Omega_0^n$  aus (3.22) gilt immer  $\Omega_0^n \subseteq \Omega$ , d.h. ist  $h_{n,z}^p \in \mathfrak{R}(M_n)$  für einen Polarisationsvektor  $p$  und einen Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$ , dann gilt  $z \in \Omega$ .

*Beweis.* Für  $\Omega \neq \emptyset$  erhalten wir aus der Faktorisierung (3.13) von  $M$ , dass  $\mathfrak{R}(M) \subseteq \mathfrak{R}(L)$  und somit aus Satz 3.10 die erste Behauptung für  $\Omega \neq \emptyset$ .

Ist  $\Omega = \emptyset$ , so gilt  $M = 0$  und  $h_z^p$  liegt in  $\mathfrak{R}(M)$  für ein  $z \in \mathbb{R}_-^3$  und eine Polarisationsrichtung  $p$ , wenn  $h_z^p = 0$  auf  $\mathcal{M}$  gilt. Wie im Beweis von Satz 3.10 folgern wir nun, dass das Dipolfeld  $\mathbb{G}^m(\cdot, z)p$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$  verschwinden muss. Dies ist ein Widerspruch zur Singularität in  $z$ . In diesem Fall gilt also  $\Omega_0 = \Omega = \emptyset$  und die erste Behauptung ist gezeigt.

Die zweite Behauptung folgt analog. Für die dritte Behauptung folgt der Fall  $\Omega \neq \emptyset$  analog. Für den Fall  $\Omega = \emptyset$  verfahren wir analog zu Satz 3.12.  $\square$

Korollar 3.13 bildet die Grundlage für unser numerisches Verfahren (s. Kapitel 4), auch wenn  $\Omega_0^{(t,n)}$  möglicherweise leere Mengen sind und wir keine Aussage über die Mengen  $\Omega \setminus \Omega_0^{(t,n)}$  haben. Wie sich in numerischen Experimenten herausstellt, erhalten wir aus simulierten Daten gute Näherungen der Streukörper und nicht nur Teilmengen.

Nachdem wir nun die Streukörper für den Fall von Dipolfeldern charakterisiert haben, wenden wir uns den Spulen zu. Wir definieren dazu

$$h_{u,z}^p := P_u h_{n,z}^p \quad (3.23)$$

mit  $P_u$  aus (3.16) und der auf  $\tilde{\mathcal{M}} \supseteq \mathcal{M}$  erweiterten Funktion  $h_{n,z}^p$ . Sei weiterhin

$$\Omega_0^u := \{z \in \mathbb{R}_-^3 \mid h_{u,z}^p \in \mathfrak{R}(M_u) \text{ für ein } 0 \neq p \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.24)$$

mit dem Operator  $M_u$  aus (3.19). Wir erhalten dann aus Satz 3.12 das folgende Korollar.

**Korollar 3.14:** Sei  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $z \in \Omega$  und die Polarisationsrichtung  $p$  ein Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^3$ , dann liegt  $h_{u,z}^p$  in  $\mathfrak{R}(P_u P_n L)$ . Dabei seien  $P_n$  und  $L$  die auf  $\tilde{\mathcal{M}}$  erweiterten Operatoren aus (3.19).

### 3. Die Problemstellung

---

## 4. Numerische Ergebnisse und Experimente

Das Korollar 3.13 motiviert das folgende Sampling-Verfahren:

Für jeden Punkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$  in einer Region in der wir einen Streukörper vermuten, überprüfen wir, ob die zugehörige Testfunktion  $h_z^p$  aus (3.20) zum Bild des bekannten Messoperators  $M$  aus (3.4) gehört. Auf diese Weise erhalten wir eine Teilmenge  $\Omega_0$  des Streukörpers (vgl. (3.21)). Entsprechend betrachten wir die Testfunktionen  $h_{t,z}^p$  und  $h_{n,z}^p$  und die Bildräume der Operatoren  $M_t$  und  $M_n$  aus (3.5) für den Fall tangentialer oder vertikaler Dipolanregungen. Im Folgenden beschreiben wir das Verfahren nur für den Fall beliebiger Dipolanregungen, weisen aber darauf hin, dass das Verfahren in den Fällen für rein tangentiale oder rein normale Dipole analog funktioniert.

Für den Test ob  $h_z^p \in \mathfrak{R}(M)$  gilt, verwenden wir das sogenannte *Picard-Kriterium* [ENH96, Kir96]:

Sei

$$Mv_l = \sigma_l u_l, \quad M^* u_l = \sigma_l v_l, \quad l \in \mathbb{N}$$

die Singulärwertzerlegung des kompakten Operators  $M$  aus (3.4) mit den Orthonormalbasen  $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$  und  $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$ , sowie der nicht wachsenden und positiven Folge von Singulärwerten  $(\sigma_l)_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l = 0$ .  $M^*$  bezeichne den bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $L^2(\mathcal{M})$  adjungierten Operator zu  $M$ . Die Funktion  $h_z^p$  gehört zu  $\mathfrak{R}(M)$  genau dann, wenn die Reihe

$$f_p(z) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|(h_z^p | \overline{u_l})_{\mathcal{M}}|^2}{\sigma_l^2} \Big/ \left( h_z^p | \overline{h_z^p} \right)_{\mathcal{M}} \quad (4.1)$$

konvergiert.

### 4.1. Approximation der Singulärwertzerlegung von $M$

In der Anwendung, egal ob in der Simulation oder der realen Anwendung, können wir den Operator  $M$  nicht bestimmen, sondern nur eine endlichdimensionale Approximation. Diese Approximation erhalten wir, indem wir zu endlich vielen Anregungen, z.B. durch Dipole, die zugehörigen Streufelder an endlich vielen Stellen auswerten.

Sei  $J : \mathbb{C}^N \rightarrow L^2(\mathcal{M})$  ein injektiver Operator, der einem endlichdimensionalen Vektor seine Bedeutung als kontinuierliche Funktion in  $L^2(\mathcal{M})$  zuordnet. Weiterhin nehmen

wir an, dass die Messdaten so in einer Matrix  $\mathbb{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  gesammelt werden, dass

$$\mathbb{M} \approx J^* M J \quad (4.2)$$

gilt. Da  $J^* J : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  offenbar selbstadjungiert, positiv semidefinit und bijektiv ist, können wir  $Q := (J^* J)^{-1/2}$ , die Inverse der bijektiven und selbstadjungierten Wurzel, definieren. Dann ist  $JQQJ^* : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$  die Orthogonalprojektion auf den endlichdimensionalen Unterraum  $\mathfrak{R}(J)$  und

$$JQQJ^* M JQQJ^* : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M}) \quad (4.3)$$

wird als Galerkin-Projektion von  $M$  auf  $\mathfrak{R}(J)$  bezeichnet. Seien nun  $(\tilde{\sigma}_l)_{l=1}^N$ ,  $(\tilde{u}_l)_{l=1}^N$  und  $(\tilde{v}_l)_{l=1}^N$  die Singulärwerte und -vektoren von  $Q\mathbb{M}Q$ . Dann sind  $(\tilde{\sigma}_l)_{l=1}^N$ ,  $(JQ\tilde{u}_l)_{l=1}^N$  und  $(JQ\tilde{v}_l)_{l=1}^N$  Approximationen der Singulärwerte und -vektoren der Galerkin-Projektion von  $M$  auf  $\mathfrak{R}(J)$  aus (4.3). Unter Verwendung von (4.2) sehen wir das wie folgt:

$$JQQJ^* M JQQJ^* (JQ\tilde{v}_l) = JQ(QJ^* M JQ)\tilde{v}_l \approx JQ(Q\mathbb{M}Q)\tilde{v}_l = \tilde{\sigma}_l (JQ\tilde{u}_l).$$

Verwenden wir  $(JQ\tilde{u}_l)_{l=1}^N$  als Approximation an die Singulärvektoren  $(u_l)_{l=1}^N$  von  $M$ , erhalten wir für jedes  $z \in \mathbb{R}_+^3$  und  $1 \leq k \leq N$  eine Approximation

$$\sum_{l=1}^k \frac{|(h_z^p | \overline{JQ\tilde{u}_l})_{\mathcal{M}}|^2}{\tilde{\sigma}_l^2} \bigg/ \left( h_z^p | \overline{h_z^p} \right)_{\mathcal{M}} \quad (4.4)$$

an die Picard-Reihe (4.1). In Abhängigkeit des Datenfehlers

$$\mathbf{err} := \|QJ^* M JQ - Q\mathbb{M}Q\|_2 \quad (4.5)$$

müssen wir noch entscheiden wie viele Singulärwerte und -vektoren wir für die Rekonstruktion wirklich verwenden wollen bzw. können.

Mit dieser Approximation an die Singulärwerte- und -vektoren formulieren wir nun Algorithmus 4.1 zur Rekonstruktion endlich vieler perfekt leitender Objekte, die sich im unteren Halbraum eines unbeschränkten zweischichtigen Mediums befinden.

**Bemerkung 4.1:** Im Falle tangentialer oder normaler Dipole und entsprechender Messung der tangentialen oder normalen Komponenten des gestreuten Feldes funktioniert der Rekonstruktionsalgorithmus analog zu Algorithmus 4.1. Wir müssen nur die entsprechenden Testfunktionen  $h_{t,z}^p$  oder  $h_{n,z}^p$  aus (3.20) statt  $h_z^p$  verwenden sowie  $M_n$  oder  $M_t$  statt  $M$ . Das gleiche gilt auch für den Fall von Anregung und Messung durch Spulen, bei dem wir dann die Testfunktion  $h_{u,z}^p$  aus (3.23) verwenden.

**Algorithmus 4.1** Rekonstruktion der Streukörper**Eingabe:** Messdaten  $\mathbb{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $\mathbb{M} \approx J^*MJ$ ,ein Gitter von  $k \in \mathbb{N}$  Testpunkten  $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}_+^3$ ,eine Dipolrichtung  $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  für die Testfunktion  $h_z^p$ ,

- 1: berechne die Singulärwerte  $(\tilde{\sigma}_l)_{l=1}^N$  und Singulärvektoren  $(\tilde{u}_l)_{l=1}^N$  von  $QMQ$
- 2: bestimme gemäß dem Datenfehler **err** die Anzahl  $N_0$  der zu verwendenden Singulärwerte und -vektoren
- 3: **for**  $j = 1$  to  $k$  **do**
- 4: berechne  $f_p^{(j)} := \sum_{l=1}^{N_0} \frac{\left| \left( h_{z_j}^p \mid \overline{JQ\tilde{u}_l} \right)_{\mathcal{M}} \right|^2}{\tilde{\sigma}_l^2} \bigg/ \left( h_{z_j}^p \mid \overline{h_{z_j}^p} \right)_{\mathcal{M}}$
- 5: **end for**
- 6: wähle eine Schranke  $c_\infty > 0$
- 7: **for**  $j = 1$  to  $k$  **do**
- 8: **if**  $\log_{10} \left( f_p^{(j)} \right) < c_\infty$  **then**
- 9: visualisiere  $z_j$
- 10: **end if**
- 11: **end for**

## 4.2. Implementation

Als erstes erläutern wir die Approximation des Messoperators  $M$  durch eine endlichdimensionale Matrix. Zu diesem Zweck betrachten wir für jedes  $y \in \mathcal{M}$  die matrixwertige Funktion  $H^s(\cdot, y) : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3}$  deren  $j$ -te Spalte das gestreute  $H$ -Feld zu einem magnetischen Dipol mit Polarisation  $e_j$  in  $y$  ist. Für einen Dipol mit Polarisation  $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  gilt sinngemäß  $H^s(\cdot, y)p = M\delta_y p$ . Statt der Messebene  $\mathcal{M}$  betrachten wir nun ein äquidistantes, quadratisches  $n \times n$  Gitter  $\mathcal{M}_h$  mit Gitterweite  $h > 0$ . Für jedes  $y \in \mathcal{M}_h$  werten wir nun  $H^s(\cdot, y)$  auf  $\mathcal{M}_h$  aus und sammeln die Daten spaltenweise in einer Matrix  $\mathbb{M}_h \in \mathbb{C}^{3n^2 \times 3n^2}$ , die wir als *diskretisierten Messoperator* bezeichnen.

$$\mathbb{M}_h = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & e_1 \cdot H^s(y_i, y_j)e_1 & e_1 \cdot H^s(y_i, y_j)e_2 & e_1 \cdot H^s(y_i, y_j)e_3 & \cdots \\ \cdots & e_2 \cdot H^s(y_i, y_j)e_1 & e_2 \cdot H^s(y_i, y_j)e_2 & e_2 \cdot H^s(y_i, y_j)e_3 & \cdots \\ \cdots & e_3 \cdot H^s(y_i, y_j)e_1 & e_3 \cdot H^s(y_i, y_j)e_2 & e_3 \cdot H^s(y_i, y_j)e_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n^2.$$

Wir ordnen die Daten so, dass in der Spalte  $3(j-1) + 1$  die drei Feldkomponenten des gestreuten  $H$ -Feldes im Gitterpunkt  $i$  für einen Dipol im Gitterpunkt  $j$  mit Polarisation  $e_1$  in den Zeilen  $3(i-1) + 1$  bis  $3(i-1) + 3$  stehen und in den Spalten  $3(j-1) + 2$  und  $3(j-1) + 3$  entsprechend die Feldkomponenten zur Polarisation  $e_2$  und  $e_3$ . Auf

diese Weise erhalten wir eine symmetrische Matrix mit komplexen Einträgen, wobei die Symmetrie aus der Symmetrie des Messoperators  $M$  folgt.

Sei nun passend zum diskreten Messoperator  $\mathbb{M}_h J: \mathbb{C}^{3n^2} \rightarrow L^2(\mathcal{M})$  ein injektiver Operator, der einem endlichdimensionalen Vektor  $v \in \mathbb{C}^{3n^2}$  eine Funktion  $V \in L^2(\mathcal{M})$  zuordnet, so dass die Werte von  $V$  auf  $\mathcal{M}_h$ , als Spaltenvektor betrachtet, mit  $v$  übereinstimmen. Durch Überlagerung der Dipole können wir  $M$  wie folgt als Integraloperator schreiben (vgl. [GHK<sup>+</sup>05]):

$$MJv = \int_{\mathcal{M}} H^s(\cdot, y)[Jv](y) d\Sigma(y).$$

Für  $u, v \in \mathbb{C}^{3n^2}$  gilt dann

$$\begin{aligned} v \cdot \overline{J^*MJ}u &= \int_{\mathcal{M}} Jv \cdot \overline{MJ}u d\Sigma = \int_{\mathcal{M}} V(x) \cdot \overline{\int_{\mathcal{M}} H^s(x, y)[Ju](y) d\Sigma(y)} d\Sigma(x) \\ &\approx (D_h^2 v) \cdot \overline{D_h^2 \mathbb{M}_h u} = v \cdot \overline{D_h^2 \mathbb{M}_h D_h^2 u}, \end{aligned}$$

wobei  $D_h$  die Diagonalmatrix sei, deren Einträge die Wurzeln der Gewichte der zweidimensionalen Trapez-Quadratur-Formel für das Integral über  $\mathcal{M}$  mit den Stützstellen in  $\mathcal{M}_h$  sind. Somit haben wir durch

$$J^*MJ \approx D_h^2 \mathbb{M}_h D_h^2$$

eine endlichdimensionale Näherung an den Messoperator  $M$  konstruiert. Wir gehen nun wie im vorigen Abschnitt vor, um die Approximationen der Singulärwerte und -vektoren von  $M$  zu erhalten. Ist  $U \in L^2(\mathcal{M})$  eine hinreichend glatte Funktion und  $u \in \mathbb{C}^{3n^2}$  der Vektor, der aus den Werten von  $U$  auf  $\mathcal{M}_h$  besteht, dann gilt für alle  $v \in \mathbb{C}^{3n^2}$

$$J^*U \cdot \bar{v} = \int_{\mathcal{M}} U \cdot \bar{V} d\Sigma \approx (D_h^2 u) \cdot \bar{v}.$$

Somit erhalten wir

$$J^*Ju = J^*U \approx D_h^2 u$$

und damit  $Q = (J^*J)^{-1/2} \approx D_h^{-1}$ . Seien  $(\sigma_{h,l})_{l=1}^N$ ,  $(u_{h,l})_{l=1}^N$  und  $(v_{h,l})_{l=1}^N$  für  $N := 3n^2$  die Singulärwerte und -vektoren von

$$D_h \mathbb{M}_h D_h \approx Q D_h^2 \mathbb{M}_h D_h^2 Q \approx Q J^* M J Q.$$

Dann gilt wie im vorigen Abschnitt, dass  $(\sigma_{h,l})_{l=1}^N$ ,  $(JQu_{h,l})_{l=1}^N$  und  $(JQv_{h,l})_{l=1}^N$  die Näherungen der Singulärwerte und -vektoren der Galerkin-Projektion von  $M$  auf  $\mathfrak{R}(J)$  sind. Daher verwenden wir  $(\sigma_{h,l})_{l=1}^N$ ,  $(D_h^{-1}u_{h,l})_{l=1}^N$  und  $(D_h^{-1}v_{h,l})_{l=1}^N$  als Approximationen an die Singulärwerte und -vektoren von  $M$  auf  $\mathcal{M}_h$  in der Implementierung unseres Algorithmus 4.1. Unsere numerischen Experimente zeigen, dass  $n^2 = 36$  eine sinnvolle Zahl

für die Rekonstruktion der Streukörper ist, so dass die Berechnung der Singulärwertzerlegung von  $D_h \mathbb{M}_h D_h$  im Vergleich zur Berechnung der Testfunktion nicht ins Gewicht fällt.

Diese Singulärwertzerlegung approximiert i.A. aber nur die dominanten Singulärwerte und die zugehörigen Singulärvektoren von  $D_h \mathbb{M}_h D_h$ , da die Daten in der Realität wie auch in der Simulation immer mit Fehlern behaftet sind. Wir schätzen den in  $D_h \mathbb{M}_h D_h$  enthaltenen Fehler durch den nicht symmetrischen Anteil der Matrix

$$\mathbf{err}_{\text{sym}} := \|D_h(\mathbb{M}_h - \mathbb{M}_h^T)D_h\|_2. \quad (4.6)$$

Dieser Wert ist für exakte Daten aufgrund der Symmetrie der Matrix Null und liegt sonst in der Größenordnung des Datenfehlers. Nach dem Satz von Bauer und Fike [GvL96, Thm. 7.2.2] sind die Singulärwerte von  $D_h \mathbb{M}_h D_h$  Störungen der Singulärwerte der zugehörigen exakten Matrix und die Störung ist durch  $\mathbf{err}_{\text{sym}}$  beschränkt. Somit ist die relative Störung der Singulärwerte von  $D_h \mathbb{M}_h D_h$ , die größer als  $\mathbf{err}_{\text{sym}}$  sind, klein.

Wir definieren daher die *Picard-Summe* durch die folgende Approximation an (4.4):

$$f_p^{(N_0)}(z) := \sum_{l=1}^{N_0} \frac{|\mathbf{h}_z^p \cdot \overline{D_h u_{h,l}}|^2}{\sigma_{h,l}^2} \bigg/ \sum_{l=1}^{N_0} |\mathbf{h}_z^p \cdot \overline{D_h u_{h,l}}|^2, \quad 1 \leq N_0 \leq 3n^2. \quad (4.7)$$

Dabei sei  $\mathbf{h}_z^p$  der Vektor mit den Werten von  $h_z^p$  auf  $\mathcal{M}_h$  und  $N_0$  maximal mit  $\sigma_{h,l} > \mathbf{err}_{\text{sym}}$  für alle  $1 \leq l \leq N_0$ . Weiterhin definieren

$$\Omega_0^h := \{z \in \mathcal{T} \mid \log_{10}(f_p^{(N_0)}(z)) < c_\infty\} \quad (4.8)$$

als die Approximation an die gesuchten Streukörper  $\Omega_0$  (vgl. (3.21)) auf einem Gitter von Testpunkten  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}_-^3$  mit der Konstanten  $c_\infty > 0$  aus Algorithmus 4.1. Unsere Versuche zeigen, dass  $c_\infty$  von den vergrabenen Objekten, deren Tiefe unter der Trennschicht und vom Hintergrundmedium abhängt, so dass wir keine konkreten Anhaltspunkte für die Wahl von  $c_\infty$  haben. Die Darstellung von  $\log_{10}(f_p^{(N_0)})$  auf horizontalen oder vertikalen Schnitten durch das Testgitter  $\mathcal{T}$  lässt allerdings schon gute Schätzungen zu.

**Bemerkung 4.2:** Es zeigt sich in unseren numerischen Experimenten, dass es sinnvoll ist die Anzahl der Summanden in der Picard-Summe (4.7) nicht nur in Abhängigkeit des Fehlers zu wählen, sondern auch in Abhängigkeit der Abstände zwischen den Singulärwerten. Durch das Hinzufügen oder Weglassen eines einzigen Summanden können sich gravierende Unterschiede in der Rekonstruktion ergeben. Eine Begründung und eine Heuristik dafür, wie man die Anzahl der Summanden sinnvoll wählt, findet sich in [GvL96, Th, 8.6.5]. Nach [GvL96, Thm. 8.1.12] sind Eigenvektoren zu nicht einfachen Eigenwerten instabil unter Störungen (vgl. [GvL96, Ex. 8.1.6]), d.h. bei einer kleinen Störung der Matrix können sich die Eigenvektoren stark ändern. Die entsprechende Aussage gilt auch für Singulärvektoren. Satz 8.6.5 aus [GvL96] sagt nun das Folgende:

Existiert ein deutlicher Sprung in den Singulärwerten, etwa bei  $\sigma_{h,j_0} \gg \sigma_{h,j_0+1}$  für ein  $1 \leq j_0 < N_0 - 1$ , dann ändert sich der Unterraum, der von  $u_{h,1}, \dots, u_{h,j_0}$  aufgespannt wird, unter einer kleinen Störung nicht stark. Unterräume zu dicht beisammen liegenden Singulärwerten können sich dagegen unter einer kleinen Störung stark ändern.

Da die Singulärwerte in unseren Experimenten deutliche Sprungstellen aufweisen, verwenden wir für die Berechnung der Picard-Summe immer alle Summanden bis zu einer Sprungstelle der Singulärwerte, auch wenn diese schon leicht unterhalb der Fehlerschranke liegen.

## Auswertung der Testfunktion

Um Auswertungen der Testfunktion zu sparen, die insbesondere für das Zweischichtmedium sehr aufwändig sind, nutzen wir aus, dass das Feld eines magnetischen Dipols translationsinvariant ist unter der Verschiebung des Dipols in einer Ebene parallel zur Trennschicht  $\Sigma_0$ . Wir betrachten ein äquidistantes, quadratisches, horizontales Gitter von Testpunkten  $z_1, \dots, z_{m^2} \in \mathbb{R}_-^3$ ,  $m \in \mathbb{N}$  mit Gitterweite  $t$ , so dass mit der Gitterweite  $h$  des Messgitters  $\mathcal{M}_h$  ein ganzzahliger Zusammenhang  $h = kt$ ,  $k \in \mathbb{N}$  besteht. Weiterhin liege das Gitter parallel zur Trennschicht mit  $z_{jm+i+1} = z_1 + t(i, j, 0)^T$  für  $i, j = 0, \dots, m-1$ . Für jeden dieser Punkte ist die Testfunktion  $h_z^p$  an den  $n^2$  Stellen von  $\mathcal{M}_h$  auszuwerten. Wir erhalten also insgesamt  $m^2 n^2$  Funktionsauswertungen.

Sei nun  $\mathcal{M}_h = \{x_1, \dots, x_{n^2}\}$  mit  $x_{jn+i+1} = x_1 + h(i, j, 0)^T$  für  $i, j = 0, \dots, n-1$ . Wir definieren das äquidistante, quadratische *Auswertungsgitter* mit Gitterweite  $t$  durch

$$\mathcal{A}_t := \left\{ x_1 + t \begin{pmatrix} i - (m-1) \\ j - (m-1) \\ 0 \end{pmatrix} \mid i, j = 0, \dots, K \right\}$$

mit  $K := (m-1) + k(n-1)$ . Dann gilt aufgrund der Translationsinvarianz

$$h_{z_{jm+i+1}}^p(x_{j'n+i'+1}) = h_{z_1}^p(x_{j'n+i'+1} - (z_{jm+i+1} - z_1)) = h_{z_1}^p \left( x_1 + t \begin{pmatrix} ki' - i \\ kj' - j \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

mit  $i', j' = 0, \dots, n-1$  und  $i, j = 1, \dots, m-1$  und wir können, statt für jeden Punkt  $z$  aus dem Testgitter  $h_z^p$  auf  $\mathcal{M}_h$  auszuwerten,  $h_{z_1}^p$  auf dem Gitter  $\mathcal{A}_t$  mit  $(K+1)^2 = m^2 + k^2 n^2 + \mathcal{O}(kmn)$  Punkten auswerten.

Abbildung 4.1 veranschaulicht das Prinzip noch einmal für  $n = 3$ ,  $m = 5$  und  $k = 2$ . Wir verschieben das Messgitter entgegengesetzt zur Richtung in die der Dipol auf dem Testgitter, ausgehend von  $z_1$ , wandert. Alle Punkte die wir so erreichen bilden das Auswertungsgitter. Eine Auswertung auf dem Messgitter für einen Dipol in einem Punkt  $z$  aus dem Testgitter entspricht einer Auswertung des Dipols in  $z_1$  auf dem in Richtung  $z_1 - z$  verschobenen Messgitter.

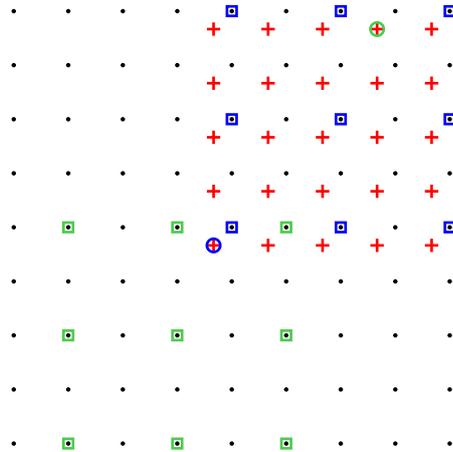


Abbildung 4.1.:  $9 \times 9$  Auswertungsgitter (schwarz) für ein  $3 \times 3$  Messgitter (blau) mit einem  $5 \times 5$  Testgitter (rot)

Die blauen Quadrate in Abbildung 4.1 markieren die Punkte des Messgitters  $\mathcal{M}_h$ , die roten Kreuze die Punkte des Testgitters und die schwarzen Punkte schließlich das Auswertungsgitter  $\mathcal{A}_t$ , d.h. die Stellen an denen die Testfunktion für den blau umrandeten Punkt des Testgitters ausgewertet wird. Wir werten also diese Testfunktion an 81 Stellen aus, statt 25 Testfunktionen an jeweils 9 Stellen auszuwerten, was 225 Funktionsauswertungen entspräche. Die grünen Quadrate markieren die Punkte, die zu den Werten der Testfunktion im grün umrandeten Punkt des Testgitters gehören.

### 4.3. Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt präsentieren wir unsere numerischen Ergebnisse für zwei Konfigurationen. Zur Lösung der Vorwärtsprobleme zu diesen Konfiguration haben wir einen Löser modifiziert und erweitert, der im Zuge des dieser Arbeit zugrundeliegenden BMBF-Projekts von Roland Potthast und seinen Mitarbeitern in Göttingen entwickelt wurde. Der Löser verwendet zur Lösung des Streuproblems eine Randelementmethode mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen auf dem Rand der Streukörper, siehe [DEK<sup>+</sup>08].

Für die erste Konfiguration betrachten wir den Vollraum. Die zweite Konfiguration beschreibt dann ein Zweischichtmedium mit realistischen Bodenparametern. Die Messebene  $\mathcal{M}$  ist durch eine quadratische Fläche mit einer Kantenlänge vom 25cm parallel zur Ebene  $\Sigma_0$  gegeben. Der Mittelpunkt von  $\mathcal{M}$  liegt bei  $(0\text{cm}, 0\text{cm}, 5\text{cm})^T$ . Wir diskretisieren  $\mathcal{M}$  durch ein äquidistantes  $6 \times 6$  Gitter  $\mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}$  mit Gitterweite  $h = 5\text{cm}$  in dessen Knoten die Anregung und Messung stattfindet. Die Primärfelder, die auf  $\mathcal{M}_h$  erzeugt werden, haben eine Frequenz von 20kHz, was zu  $\omega \approx 1.26 \cdot 10^5\text{Hz}$  führt, woraus wir  $\kappa \approx 4.1 \cdot 10^{-4}\text{m}^{-1}$  erhalten. Die Parameter für die beiden Konfigurationen sind wie folgt:

**Konfiguration 1** Wir nehmen an, dass wir uns im Vakuum befinden, d.h. es gibt keine Trennschicht und die Parameter lauten

$$\epsilon_r^+ = \epsilon_r^- = 1, \quad \mu_r^+ = \mu_r^- = 1.$$

**Konfiguration 2** Für den oberen Halbraum nehmen wir wieder die Parameter des Vakuums an, d.h. es gilt

$$\epsilon_r^+ = 1, \quad \mu_r^+ = 1.$$

Für den unteren Halbraum nehmen wir die Parameter des ersten Bodens aus Tabelle 2.1 - dem schwach tonigen Sand - an. Sie lauten mit

$$\epsilon = 9.8, \quad \sigma = 7.5 \cdot 10^{-4}, \quad \chi = 1.9 \cdot 10^{-5}$$

entsprechend

$$\epsilon_r^- = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \approx 9.8 + i674.08, \quad \mu_r^- = (1 + \chi) = 1 + 1.9 \cdot 10^{-5}.$$

Mit den Beziehungen (8.17) und (8.62) aus [Dem95] erhalten wir die Wellenlängen  $\lambda_+ \approx 15\text{km}$  im Vakuum und  $\lambda_- \approx 0.81\text{km}$  im Boden.

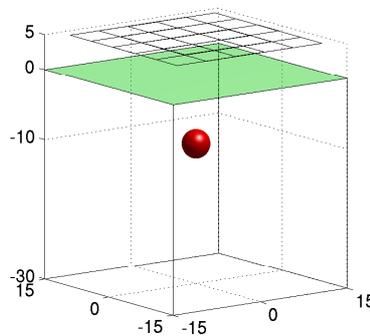


Abbildung 4.2.: Modellanordnung

Soweit nicht anders angegeben, verwenden wir den Aufbau aus Abbildung 4.2. Wir suchen eine perfekt leitende Kugel mit Radius 2cm, deren Zentrum sich 15cm mittig unterhalb der Messebene befindet. Die Anregung der Felder und ihre Messung erfolgt dabei in den Knoten des dargestellten Gitters. Als Testpunkte verwenden wir ein äquidistantes Gitter  $\mathcal{T}$  mit einer Gitterweite von 0.25cm in dem Quader  $[-15\text{cm}, 15\text{cm}]^2 \times [-30\text{cm}, 0\text{cm}]$ . Teilen wir dieses Gitter in horizontale Schichten ein, so erhalten wir 121 Schichten mit je  $121^2$  Gitterpunkten.

Wir zeigen in den folgenden Abschnitten zur Betrachtung der Rekonstruktionen immer nur einen kleinen Ausschnitt des getesteten Gebiets, um eine deutliche Darstellung der Rekonstruktionen zu erhalten. Wir möchten an dieser Stelle festhalten, dass wir immer alle im getesteten Gebiet rekonstruierten Objekte darstellen und diese auch immer im Bereich des gesuchten Objekts liegen. Die Darstellung erfolgt durch Visualisierung der Niveaumenge  $\left(\log_{10}\left(f_p^{(N_0)}\right)\right)^{-1}(c_\infty)$  durch den MATLAB® Befehl `isosurface`, der dazu die Werte von  $\log_{10}\left(f_p^{(N_0)}\right)$  zwischen den Punkten des Testgitters  $\mathcal{T}$  linear interpoliert.

### 4.3.1. Abschätzung des Fehlers

Wir untersuchen nun die Genauigkeit des Vorwärtslösers. Dazu betrachten wir für Konfiguration 1 und Konfiguration 2 den im letzten Abschnitt dargestellten Modellfall einer perfekt leitenden Kugel mit Radius 2cm als Streukörper. Der Mittelpunkt der Kugel befindet sich 10cm unterhalb der – bei Konfiguration 1 lediglich gedachten – Trennschicht und 15cm unterhalb des Mittelpunkts des Messgitters  $\mathcal{M}_h$ . Für die Matrix  $\mathbb{M}_h$  verwenden wir alle drei Komponenten des gestreuten  $H$ -Feldes für Dipolanregungen mit den Polarisierungen  $e_1, e_2$  und  $e_3$ .

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 betrachten wir die ersten 25 von 108 Singulärwerten der Matrix  $D_h \mathbb{M}_h D_h$  für verschiedene Triangulierungen des Streukörpers. Die Kugel wurde zur Lösung des Vorwärtsproblems durch 304 (blau,  $\cdot$ ), 608 (rot,  $\diamond$ ), 1202 (grün,  $+$ ) respektive 2408 (schwarz,  $\circ$ ) Dreiecke approximiert. In der linken Spalte sind die Singulärwerte sowie als Linien die entsprechenden geschätzten Fehler  $\mathbf{err}_{\text{sym}}$  (vgl. (4.6)) zu sehen. Die rechte Spalte zeigt den relativen Fehler der Singulärwerte. Dazu haben wir die Singulärwerte zur Triangulierung mit 2408 Dreiecken als exakte Werte angenommen. Abbildung 4.3 entspricht Konfiguration 1 und Abbildung 4.4 Konfiguration 2. Wir sehen an der linken Graphik von Abbildung 4.3 und 4.4, dass der geschätzte relative Fehler für genügend viele Dreiecke in beiden Konfigurationen im Bereich von  $10^{-3}$  – d.h. bei 0.1% – liegt. Wir verwenden daher im Folgenden immer Daten zur Lösung des Vorwärtsproblems mit einer Kugel, die mit 2408 Dreiecken angenähert wird und können also sicher die ersten acht Singulärwerte und -vektoren zur Berechnung der Picard-Summe (4.7) verwenden. Wir erkennen aber auch noch bis zum 15-ten Singulärwert eine gute Konvergenz. Der relative Fehler der einzelnen Singulärwerte steigt hier zwar fast bis auf 10% an, dennoch erhalten wir gute Rekonstruktionsergebnisse, wie die Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigen. Wir gehen daher davon aus, dass der Vorwärtslöser in etwa eine relative Genauigkeit von  $10^{-5}$  aufweist, wobei er im Falle von Konfiguration 2 noch genauer zu sein scheint.

Die linke Graphik der Abbildungen 4.5, 4.6, 4.7 und 4.8 zeigt jeweils einen horizontalen Schnitt 10cm unter der Trennschicht. Der schwarze Kreis entspricht also dem Äquator der Kugel. Gestrichelt in grün sehen wir den Umriss der Rekonstruktion. Wir haben dabei  $c_\infty$  (vgl. Algorithmus 4.1) so gewählt, dass dieser Umriss gerade noch innerhalb des schwarzen Kreises liegt, um im Folgenden ein einheitliches Kriterium für die Wahl

#### 4. Numerische Ergebnisse und Experimente

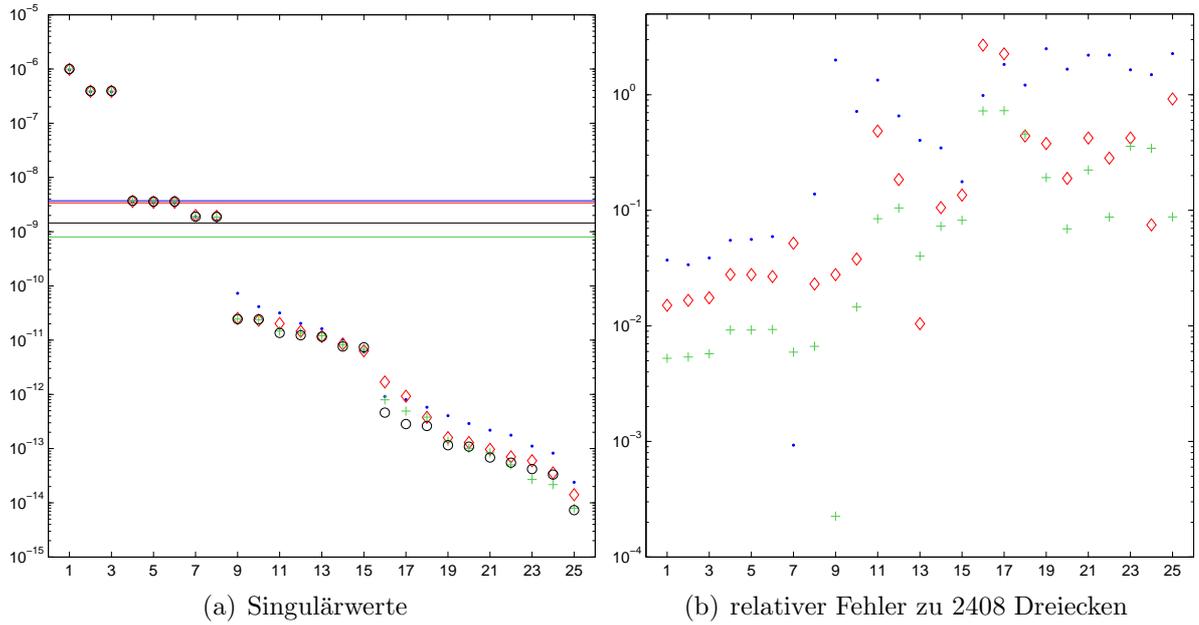


Abbildung 4.3.: Singulärwerte von  $D_h M_h D_h$  und relativer Fehler für verschiedene Triangulierungen des Streukörpers in Konfiguration 1. blau ( $\cdot$ ) 304, rot ( $\diamond$ ) 608, grün (+) 1202 und schwarz ( $\circ$ ) 2408 Dreiecke.

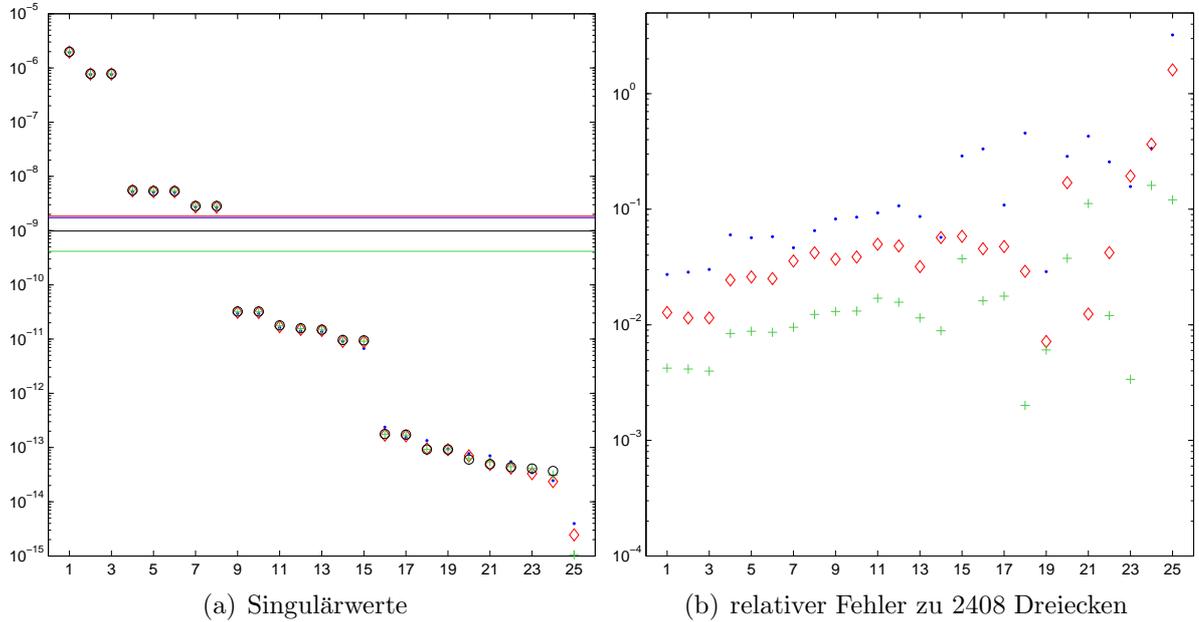


Abbildung 4.4.: Singulärwerte von  $D_h M_h D_h$  und relativer Fehler für verschiedene Triangulierungen des Streukörpers und Konfiguration 2. blau ( $\cdot$ ) 304, rot ( $\diamond$ ) 608, grün (+) 1202 und schwarz ( $\circ$ ) 2408 Dreiecke.

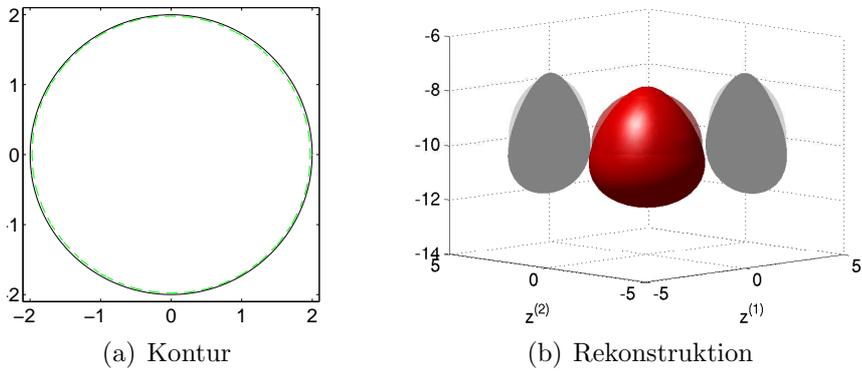


Abbildung 4.5.: Rekonstruktionen der Kugel mit 8 Summanden für Konfiguration 1.  
Polarisation der Testfunktion:  $e_3$ ,  $c_\infty = 6.91$ .

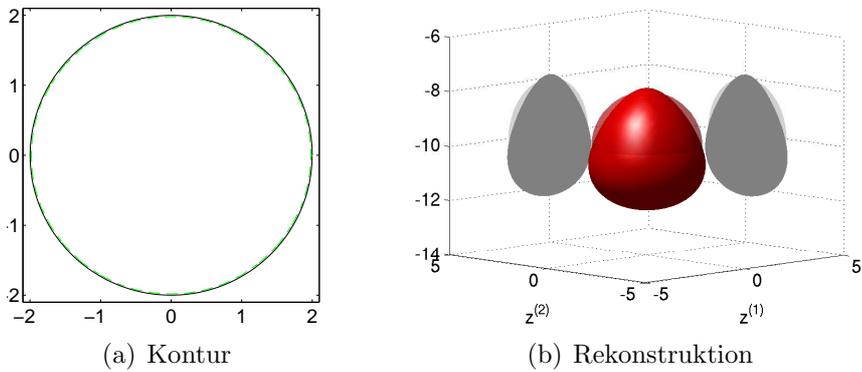


Abbildung 4.6.: Rekonstruktionen der Kugel mit 8 Summanden für Konfiguration 2.  
Polarisation der Testfunktion:  $e_3$ ,  $c_\infty = 12.80$ .

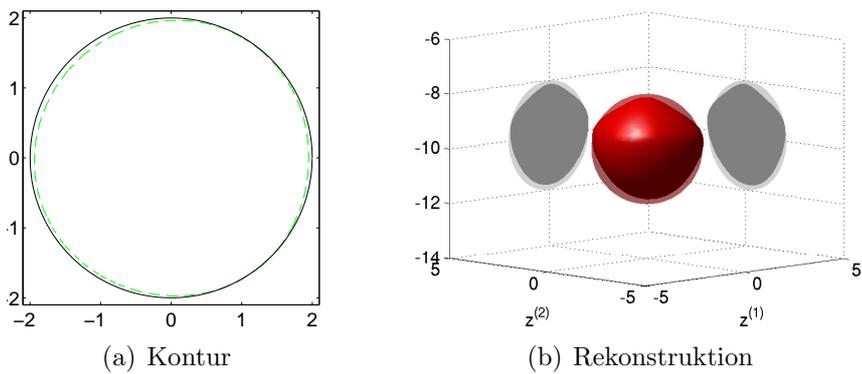


Abbildung 4.7.: Rekonstruktionen der Kugel mit 15 Summanden für Konfiguration 1.  
Polarisation der Testfunktion:  $e_3$ ,  $c_\infty = 7.48$ .

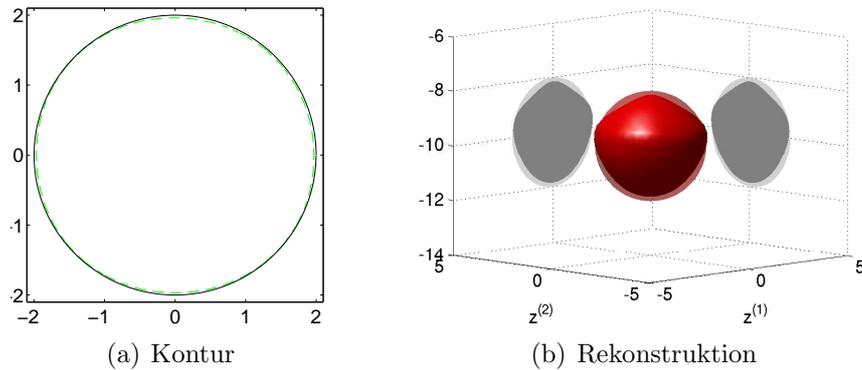


Abbildung 4.8.: Rekonstruktionen der Kugel mit 15 Summanden für Konfiguration 2. Polarisation der Testfunktion:  $e_3$ ,  $c_\infty = 13.68$ .

von  $c_\infty$  zu haben. Die rechte Spalte stellt die jeweilige Rekonstruktion zu diesem Wert dar. Die hellrote transparente Sphäre zeigt die gesuchte Kugel mit Radius 2cm. Das dunkelrote Gebilde ist die Rekonstruktion. Die dunkelgraue Fläche ist die Projektion der Rekonstruktion auf die jeweilige Koordinatenebene. Die hellgrauen Flächen gehören zur Projektion der Kugel.

Die Hinzunahme der Summanden zum dritten Block von Singulärwerten (vgl. Abbildung 4.3 bzw. 4.4) in der Picard-Summe (4.7) hat eine deutliche Verbesserung der Rekonstruktion in dem Sinne ergeben, dass die Rekonstruktion nun fast gänzlich in der eigentlichen Kugel liegt. Allerdings sehen wir in der Konturdarstellung der Abbildungen 4.7 und 4.8 bei der Rekonstruktion deutlichere Abweichungen von der Kreisform als in den Abbildung 4.5 und 4.6. Wir werden im nächsten und in Abschnitt 4.3.7 sehen, wie wir mit nur acht Singulärwerten bessere Ergebnisse erzielen können als mit 15. Positiv fällt auf, dass es keinen wesentlichen Unterschied der Rekonstruktionen für Konfiguration 1 und Konfiguration 2 gibt. Daher zeigen wir im Folgenden häufig Rekonstruktionen zu nur einer Konfiguration.

### 4.3.2. Auswirkung der Polarisationsrichtung der Testfunktion

Wir untersuchen nun, welche Auswirkung die Wahl der Polarisationsrichtung  $p$  der Testfunktion auf die Rekonstruktionen für die drei Fälle der Anregung und Messung hat und betrachten dazu wieder das Beispiel aus dem letzten Abschnitt.

In Abbildung 4.9 sehen wir nun in beiden Grafiken die ersten acht Singulärwerte der diskreten Messoperatoren für die drei behandelten Fälle sowie die geschätzten Fehler, die wieder durch Linien in der gleichen Farbe dargestellt sind. Die linke zeigt die Singulärwerte für den homogenen Fall, die rechte für den Fall des Zweischichtmediums. Wir sehen, dass auch für die Fälle mit tangentialer bzw. normaler Anregung und Messung die ersten acht Singulärwerte oberhalb des geschätzten Fehlers liegen. Daher verwenden wir in allen drei Fällen jeweils die ersten acht Singulärwerte und -vektoren für die

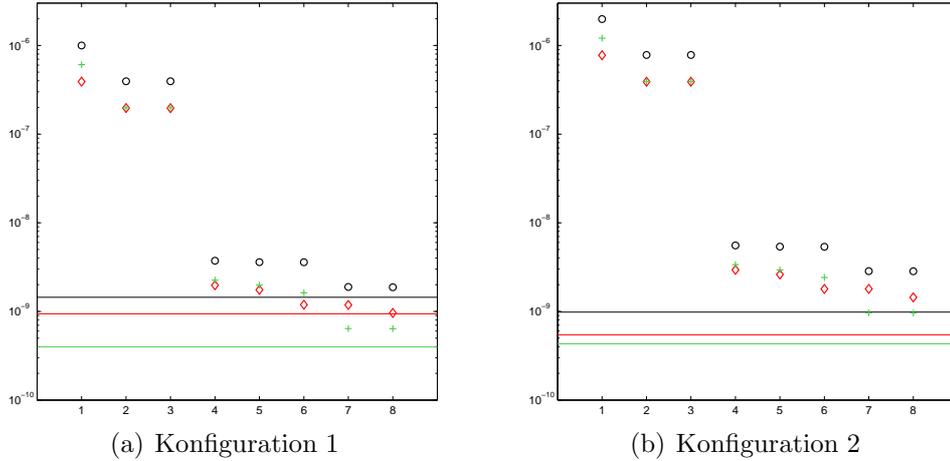


Abbildung 4.9.: Singulärwerte und geschätzter Fehler von  $D_h M_h D_h$  in schwarz ( $\circ$ ); in rot ( $\diamond$ ) für tangentiale Anregung und Messung und in grün (+) für vertikale Anregung und Messung.

Rekonstruktionen.

Im Folgenden beschränken wir uns darauf, nur Rekonstruktionen aus Daten zu Konfiguration 1 zu zeigen, da kein wesentlicher Unterschied zu Rekonstruktionen aus Daten zu Konfiguration 2 zu erkennen ist.

Betrachten wir zunächst den Fall dreidimensionaler Anregung und Messung. Abbildung 4.10(a) zeigt einen horizontalen Schnitt in 10cm Tiefe. Die horizontale Achse zeigt die  $z^{(1)}$ -Koordinaten, d.h. in Richtung  $e_1$ , die vertikale die  $z^{(2)}$ -Koordinaten, d.h. in Richtung  $e_2$ . In schwarz sehen wir den Umriss der gesuchten Kugel sowie, in grün gestrichelt, den Umriss der Rekonstruktion zur Testfunktion  $h_z^{e_2}$ . Die Schranke  $c_\infty$  wurde wieder so gewählt, dass dieser Umriss gerade noch im schwarzen Kreis enthalten ist. Das mittlere Bild von Abbildung 4.10 zeigt in dunkelrot die entsprechende Rekonstruktion. Hellrot und transparent ist wieder die Sphäre mit Radius 2cm und hellgrau ihre Projektion auf die Koordinatenebenen. Entsprechend sind die dunkelgrauen Flächen die Projektion der Rekonstruktion auf die Koordinatenebenen. Wir erkennen eine deutliche Stauchung der Rekonstruktion in Richtung der Polarisierung der verwendeten Testfunktion. Für eine in Richtung  $e_1$  polarisierte Testfunktion bekommen wir zu gleichem  $c_\infty$  eine fast identische, aber um  $90^\circ$  um die vertikale Achse gedrehte, Rekonstruktion. Abbildung 4.10(c) zeigt schließlich eine Rekonstruktion zum Wert  $c_\infty = 6.91$  und vertikal polarisierter Testfunktion  $h_z^{e_3}$ , die wir schon im letzten Abschnitt gesehen haben. Auch hier wurde  $c_\infty$  so gewählt, dass der Umriss der Rekonstruktion in 10cm Tiefe gerade noch im Kreis mit Radius 2cm enthalten ist.

Für den Fall tangentialer Anregung und Messung verwenden wir die Testfunktion  $h_{t,z}^p$  für  $p = e_2$  oder  $p = e_3$  und berechnen die entsprechende Picard-Summe (vgl. (4.7)) zum Messoperator  $M_t$  aus (3.5). Die Kontur der Rekonstruktion mit der Testfunktion  $h_{t,z}^{e_2}$

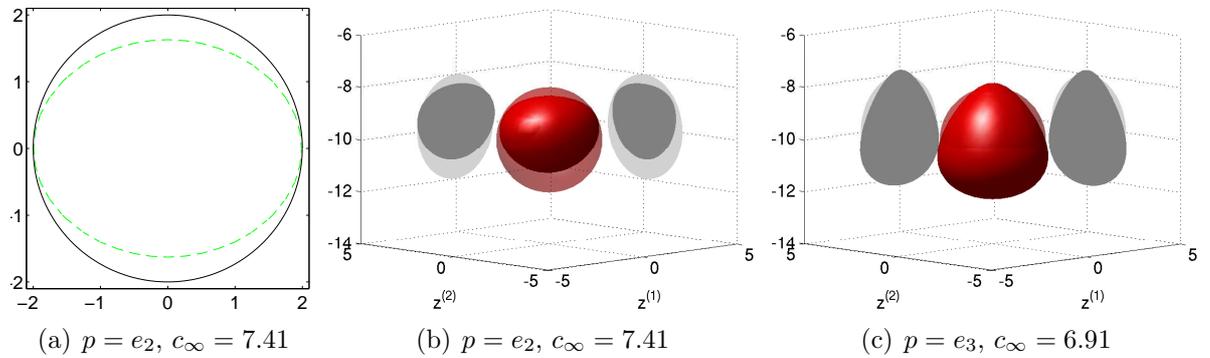


Abbildung 4.10.: Rekonstruktionen mit vollen Daten für verschiedene Richtungen  $p$  der Testfunktion  $h_z^p$ .

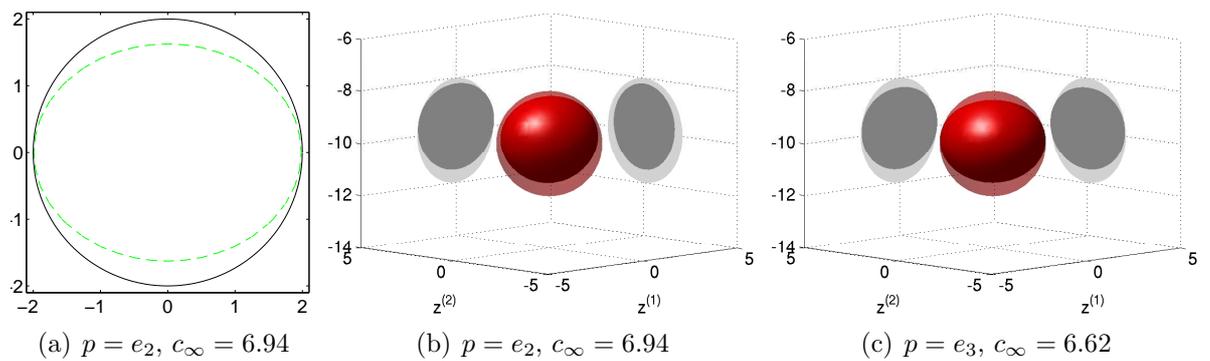


Abbildung 4.11.: Rekonstruktionen mit Daten zu tangentialer Anregung und Messung für verschiedene Richtungen  $p$  der Testfunktion  $h_{t,z}^p$ .

und  $c_\infty = 6.94$  sehen wir im linken Bild der Abbildung 4.11 und die Rekonstruktion in der Mitte. Wir erkennen wieder die Stauchung in Polarisationsrichtung. Eine entsprechend gedrehte Rekonstruktion erhalten wir für  $p = e_1$ . In der dritten Spalte sehen wir schließlich die Rekonstruktion mit der Testfunktion  $h_{t,z}^{e_3}$  zu  $c_\infty = 6.62$ . Im Vergleich zum mittleren Bild bemerken wir diesmal auch hier eine Stauchung in Polarisationsrichtung.

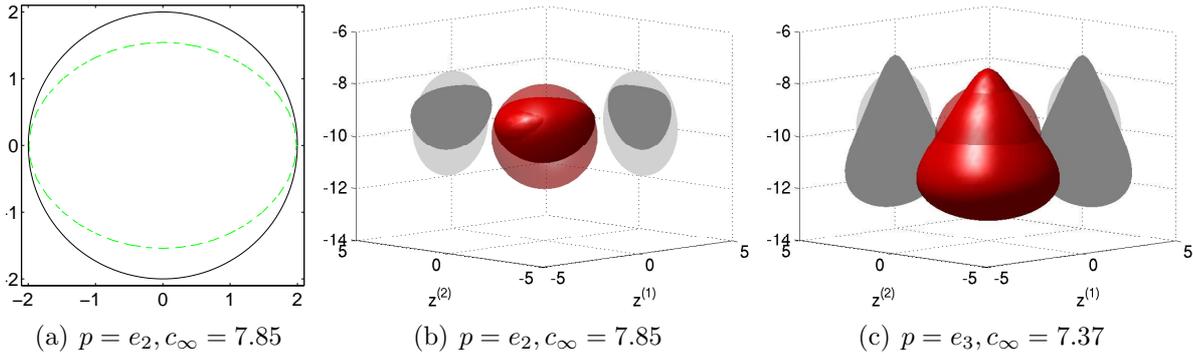


Abbildung 4.12.: Rekonstruktionen mit Daten zu Anregung und Messung in  $e_3$ -Richtung für verschiedene Richtungen  $p$  der Testfunktion  $h_{n,z}^p$ .

Bei vertikaler Anregung und Messung verwenden wir die Testfunktion  $h_{n,z}^p$  für  $p = e_2$  oder  $p = e_3$  und berechnen die entsprechende Picard-Summe (vgl. (4.7)) zum Messoperator  $M_n$  aus (3.5). Die Kontur der Rekonstruktion mit der Testfunktion  $h_{n,z}^{e_2}$  und  $c_\infty = 7.85$  sehen wir im linken Bild der Abbildung 4.12 und die Rekonstruktion in der Mitte. Wir erkennen wieder die Stauchung in Polarisationsrichtung. Für  $p = e_1$  erhalten wir eine entsprechend gedrehte Rekonstruktion. Das dritte Bild zeigt schließlich die Rekonstruktion mit der Testfunktion  $h_{n,z}^{e_3}$  zu  $c_\infty = 7.37$ . Es ist deutlich zu erkennen, dass wir mit  $p = e_3$  und den ersten 8 Summanden der Picard-Summe keine zufriedenstellende Rekonstruktion erhalten. Verwenden wir die ersten 15 Summanden, so erhalten wir ein ähnliches Ergebnis wie in Abbildung 4.7.

Es zeigt sich also, dass die Polarisationsrichtung der Testfunktion durchaus einen Einfluss auf die Rekonstruktionen und die ausschließliche Verwendung der Normalenkomponenten in den Daten einen negativen Effekt hat. Insbesondere erhalten wir für rein tangentielle Anregung und Messung die besten Ergebnisse. Wir werden uns daher im Folgenden auf diesen Fall beschränken. Zunächst betrachten wir aber noch eine Möglichkeit die Abhängigkeit der Rekonstruktionen von der Polarisationsrichtung zu kompensieren. Wir ändern dazu unser Verfahren so ab, dass wir in jedem Testpunkt die Testfunktion nicht nur für eine Polarisationsrichtung berechnen, sondern für die drei Polarisationsrichtungen  $e_1, e_2$  und  $e_3$  und dann die Picard-Summen aufsummieren, d.h. wir berechnen statt  $f_p^{(j)}$  aus Algorithmus 4.1 nun

$$\tilde{f}_p^{(j)} := f_{e_1}^{(N_0)}(z_j) + f_{e_2}^{(N_0)}(z_j) + f_{e_3}^{(N_0)}(z_j) \quad (4.9)$$

in den Testpunkten  $z_j \in \mathcal{T}$  mit den Picard-Summen aus (4.7). Für die Fälle mit rein tangentialer oder rein vertikaler Anregung und Messung verwenden wir die entsprechende Picard-Summe mit den Testfunktionen  $h_{t,z}^p$  bzw.  $h_{n,z}^p$ .

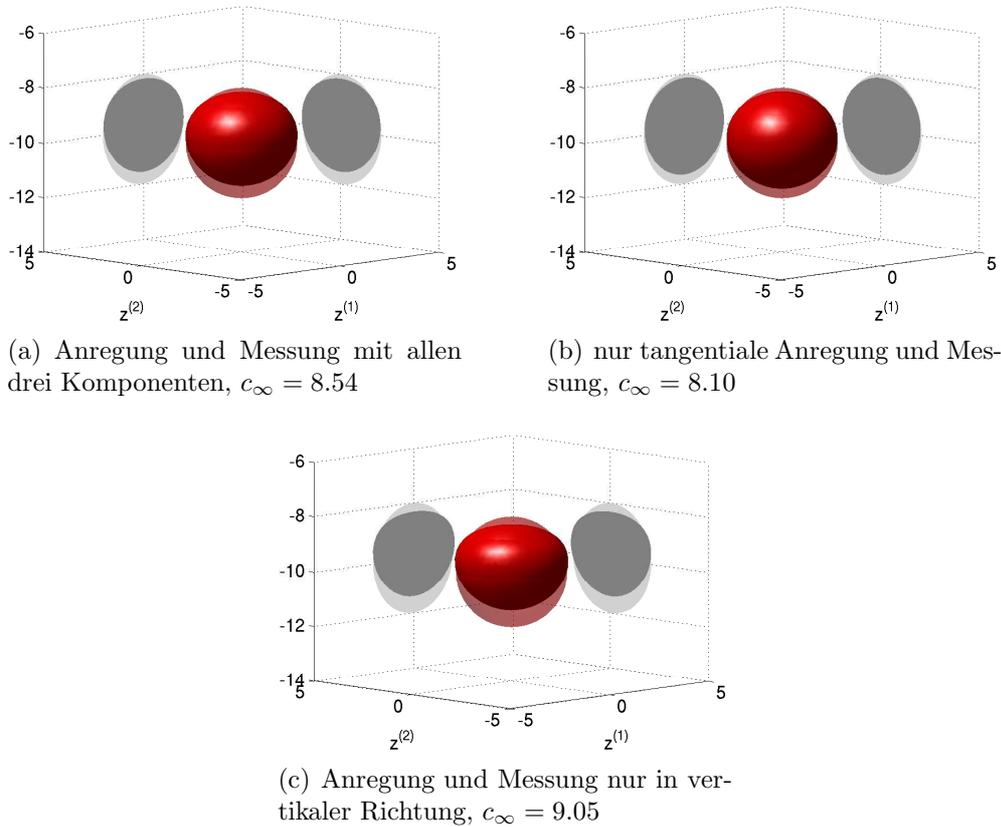


Abbildung 4.13.: Rekonstruktionen für die Summe der Testfunktionen.

In Abbildung 4.13 haben wir die Rekonstruktionen mit dem so abgeänderten Verfahren zusammengefasst. Das erste Bild zeigt die Rekonstruktion für Anregung und Messung mit allen drei Komponenten, das zweite für rein tangentiale und das letzte schließlich für rein normale Anregung und Messung.  $c_\infty$  wurde wieder so gewählt, dass der Umriss der Rekonstruktion in 10cm Tiefe gerade noch in der Kugel enthalten ist. Insgesamt haben sich die Rekonstruktionen durch die Kombination der Testfunktionen deutlich verbessert. Es ist aber immer noch zu erkennen, dass die Verwendung der Komponenten in  $e_3$ -Richtung einen negativen Einfluss hat.

### 4.3.3. Rekonstruktionen mit fehlerhaften Daten

In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Auswirkungen fehlerhafte Daten auf die Rekonstruktionen haben. Wir verwenden dazu wieder das Modellproblem der Kugel mit

Radius 2cm in Konfiguration 1, deren Zentrum 10cm unterhalb der gedachten Trennschicht und damit 15cm unterhalb der Messebene liegt. Wir betrachten aufgrund der Ergebnisse aus Abschnitt 4.3.2 den Fall rein tangentialer Anregung und Messung der magnetischen Felder und verwenden die Summe der entsprechenden Picard-Summen für die drei kanonischen Polarisierungen (vgl. (4.9)). Zur Erzeugung von fehlerhaften Daten stören wir die virtuell gemessenen Daten der Matrix  $\mathbb{M}_h$ , d.h. die Matrix mit allen drei Feldkomponenten, mit einer Matrix mit gleichverteilten zufälligen Einträgen, so dass wir für die gestörte Matrix einen relativen Fehler von 1% oder 3% in der 2-Norm erhalten.

In Abbildung 4.14 sehen wir die ersten 15 Singulärwerte des diskretisierten Messoperators mit 1% Fehler in rot (+), mit 3% Fehler in blau (·) und ohne zusätzlichen Fehler in schwarz (o). Die zugehörigen geschätzten Fehler sind durch horizontale Linien der gleichen Farbe gekennzeichnet. Die Fehler werden analog zu (4.6) mit einer kleineren Matrix, die nur die tangentialen Feldkomponenten zu tangentialer Dipolanregung enthält, geschätzt. Die geschätzten relativen Fehler für den diskretisierten Messoperator

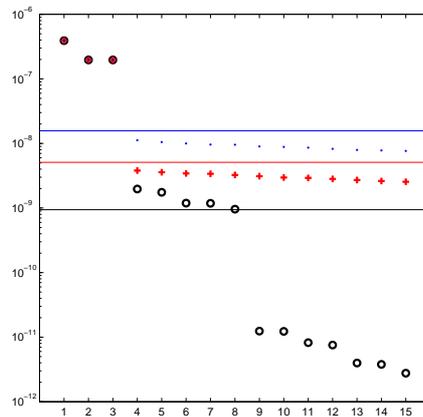


Abbildung 4.14.: Singulärwerte und geschätzter Fehler. Ohne zusätzlichen Fehler in schwarz (o) mit 1% relativem Fehler in rot (+) und mit 3% relativem Fehler in blau (·).

sind 0.2% ohne Störung, 1.3% für 1% Störung und 4% für 3% Störung. Da die ersten 8 Singulärwerte im ungestörten Fall über der Fehlerschranke liegen und in den beiden anderen Fällen nur knapp darunter, berechnen wir die Picard-Summen mit den ersten acht Summanden. Für weniger als sieben Summanden ergeben sich im Allgemeinen keine sinnvollen Rekonstruktionen.

In Abbildung 4.15, 4.16 und 4.17 sehen wir jeweils einen horizontalen und vertikalen Schnitt durch das Testgebiet  $\mathcal{T}$  (vgl. S. 46), welche die zu rekonstruierende Kugel mittig schneiden. Die Graustufen entsprechen dabei den Werten der entsprechenden Picard-Summen (vgl. (4.9)) in logarithmischer Skala. Die Werte zwischen den Punkten des Testgitters wurden linear interpoliert.

Wir erkennen bei nur 1% Fehler ein deutliches Ausschmieren der Konturen und bei

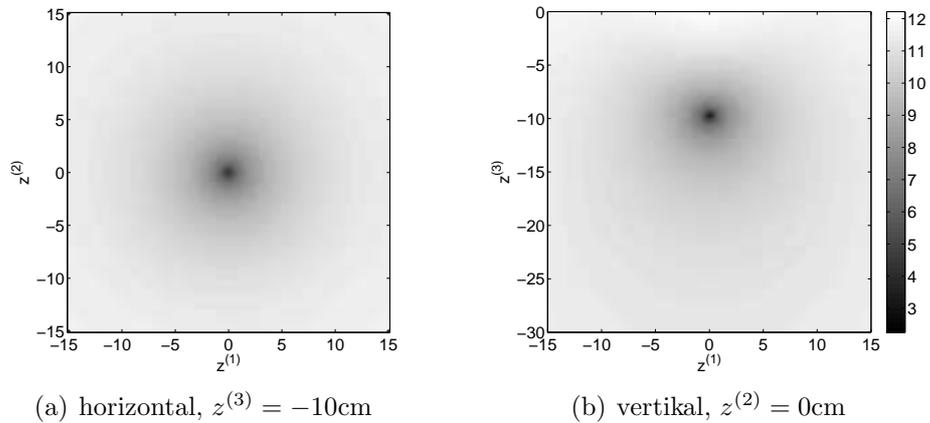


Abbildung 4.15.: Schnitte durch das Testgebiet ohne zusätzlichen Fehler.

3% Fehler ist kaum noch etwas zu erkennen.

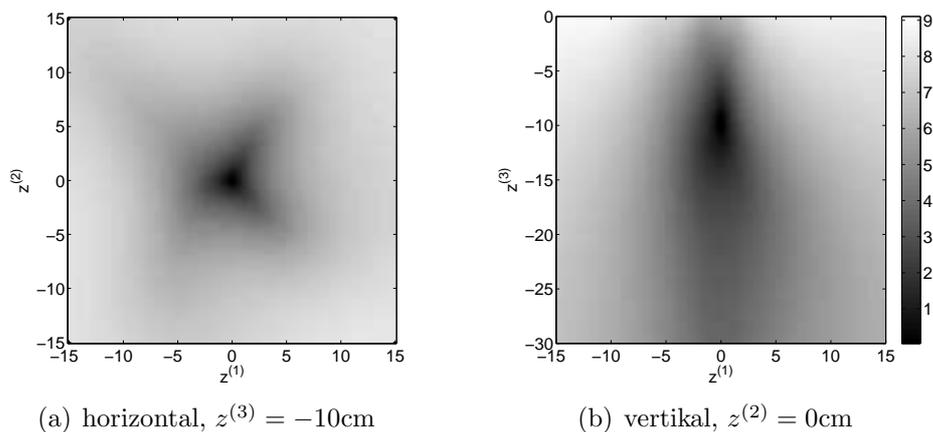


Abbildung 4.16.: Schnitte durch das Testgebiet für 1% zusätzlichen Fehler.

In Abbildung 4.18 sehen wir in rot die Rekonstruktion für  $c_\infty = 2.20$  und in dunkelgrau ihre Projektion auf die Koordinatenebenen. Die zu rekonstruierende Kugel ist transparent dargestellt, ihre Projektion auf die Koordinatenebenen in hellgrau.  $c_\infty$  wurde wieder so gewählt, dass der Umriss der Rekonstruktion in 10cm Tiefe gerade noch in dem Kreis mit einem Radius von 2cm enthalten ist, der dem Äquator der Kugel entspricht. Wir halten also fest, dass das Verfahren zur Rekonstruktion des Streukörpers sehr empfindlich auf Fehler reagiert und schon bei relativ kleinen Störungen die Form des Objekts nicht mehr rekonstruiert werden kann. Bei einem Fehler von 1% sind wir aber noch in der Lage die ungefähre Position des Streukörpers zu erkennen. Schließlich bemerken wir noch, dass wir auch im Fall der 3%-igen Störung die ungefähre Position des Streukörpers bestimmen können, wenn wir weitere Summanden zur Picard-Summe hinzufügen. Dies sehen wir in Abbildung 4.19. Die Abbildung zeigt Rekonstruktionen

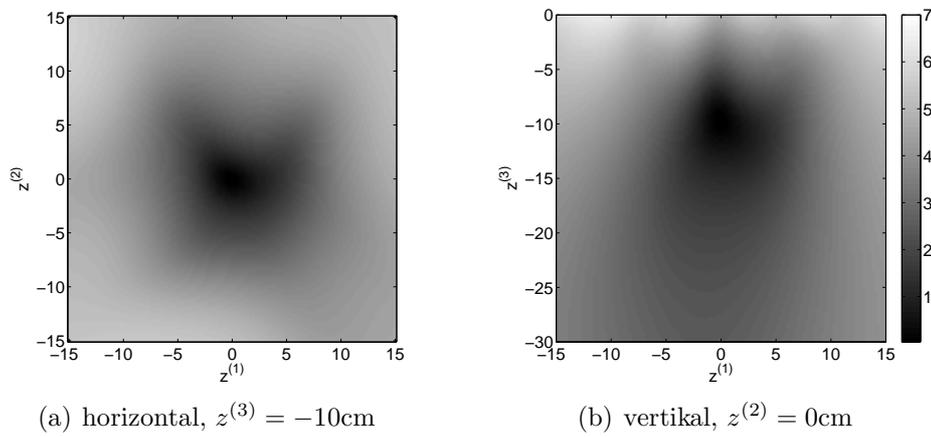


Abbildung 4.17.: Schnitte durch das Testgebiet für 3% zusätzlichen Fehler.

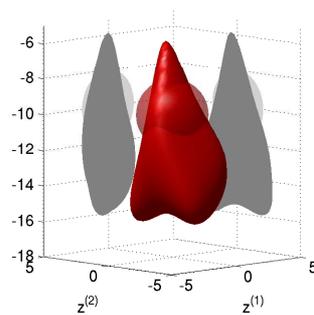


Abbildung 4.18.: Rekonstruktion für  $c_\infty = 2.20$  bei 1% zusätzlichem Fehler.

für die Kugel in 10cm bzw. 15cm Tiefe und einer 3%-igen Störung der Daten bei Verwendung von 15 Summanden der Picard-Summen. Bei einer Tiefe von 15cm beträgt der geschätzte relative Fehler etwa 4.35%. Im Fall von Konfiguration 2 wird die Streckung

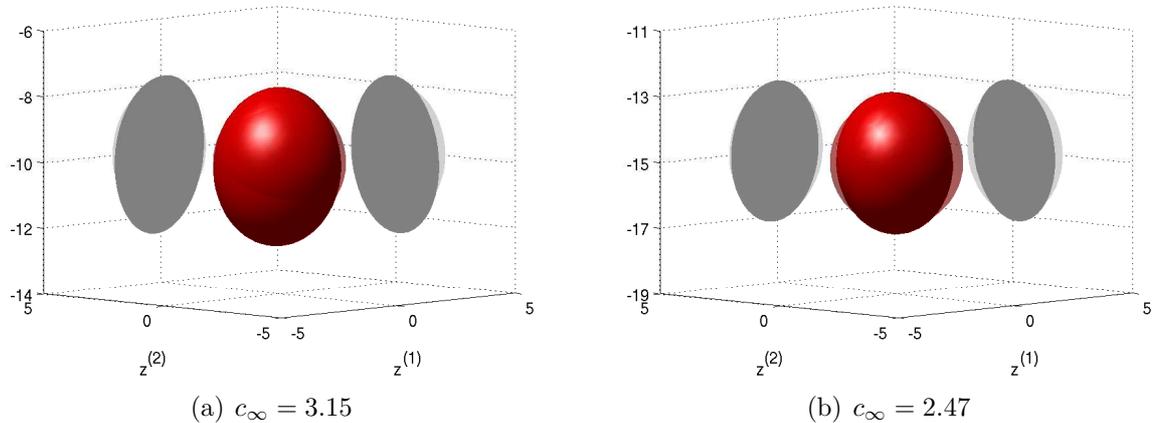


Abbildung 4.19.: Rekonstruktion für verschiedene Tiefen bei 3% zusätzlichem Fehler und 15 Summanden.

der Kugel in  $e_3$  Richtung noch viel deutlicher sichtbar.

#### 4.3.4. Auswirkungen des Messgitters

Um herauszufinden, welche Auswirkungen das Messgitter hat, haben wir die diskretisierten Messoperatoren für rein tangentiale Anregung und Messung in Konfiguration 1 für verschiedene Gitterweiten des Messgitters und verschiedene Tiefen der Kugel bestimmt. Die Eckpunkte der verschiedenen Gitter liegen wie bisher an den Eckpunkten von  $[-12.5\text{cm}, 12.5\text{cm}]^2 \times \{5\text{cm}\}$ . In Abbildung 4.20 haben wir jeweils die ersten acht normierten Singulärwerte sowie die geschätzten relativen Fehler dieser Messoperatoren aufgetragen. Von schwarz ( $\circ$ ) über rot (+) und blau ( $\cdot$ ) zu magenta ( $\diamond$ ) verringert sich die Anzahl der Gitterpunkte von  $11 \times 11$  über  $6 \times 6$  und  $5 \times 5$  zu  $3 \times 3$ . Bis auf den Fall des  $3 \times 3$  Gitters ändern sich die Singulärwerte nicht wesentlich und wir erhalten ähnliche Rekonstruktionen wie bisher. Bei Verwendung des  $3 \times 3$  Gitters nähern sich die Singulärwerte des Messoperators für größere Tiefen der Kugel denen der anderen Gitter an. Wir erhalten entsprechend in größeren Tiefen auf allen Gittern ähnliche Rekonstruktionen.

#### 4.3.5. Auswirkungen der Position der Kugel

Nun untersuchen wir, welche Auswirkung der Abstand der Kugel zum Testgitter hat. Dazu verwenden wir wieder Daten zu rein tangentialer Anregung und Messung in Kon-

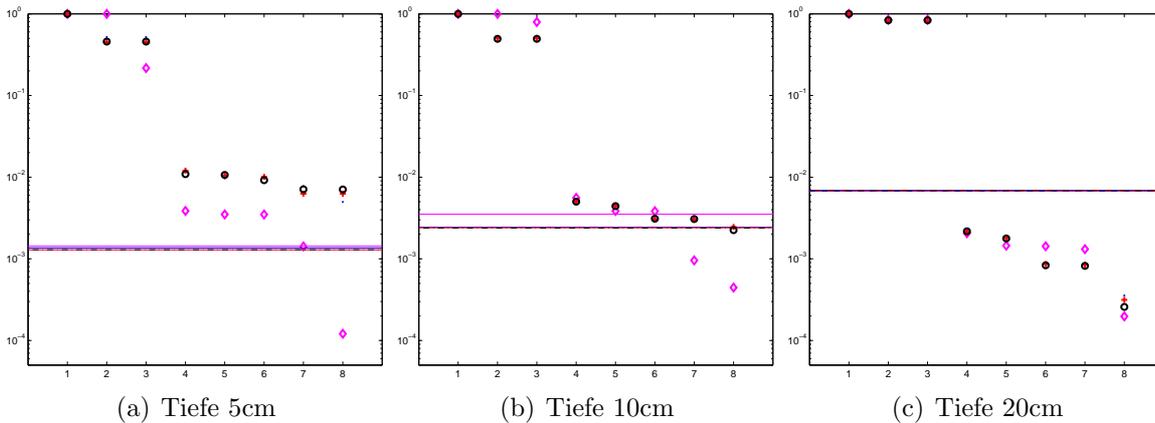


Abbildung 4.20.: Normierte Singulärwerte und geschätzter relativer Fehler für verschiedene Abstände der Punkte des Messgitters: Schwarz (o): 2.5cm, rot (+): 5cm, blau (·): 6.25cm, magenta (◇): 12.5cm.

figuration 1, sowie die Summe der entsprechenden Picard-Summen für die drei Polarisationsrichtungen  $e_1, e_2$  und  $e_3$  (vgl. (4.9)).

In Abbildung 4.21(a) sehen wir die Singulärwerte der diskretisierten Messoperatoren für verschiedene Tiefen des Zentrums der Kugel. Von schwarz (o) über rot (+) und blau (·) zu magenta (◇) befindet sich das Zentrum der Kugel zunächst 5cm unterhalb der Trennschicht, um dann in 5cm Schritten bis auf 20cm unter der Trennschicht zu sinken. Die Kugel befindet sich dabei wie bisher immer mittig unter dem Testgitter. In Abbildung 4.21(b) sehen wir die Singulärwerte der diskretisierten Messoperatoren für Kugeln, deren Zentrum horizontal in 10cm Tiefe unterhalb der Trennschicht entlang der  $e_1$  Richtung jeweils um 5cm verschoben wird. Wir beginnen mit 5cm Abstand zur Mitte des Messgitters und enden bei 20cm. Die Farben entsprechen denen aus Abbildung 4.21(a). Zunächst fällt auf, dass mit wachsendem Abstand die Singulärwerte schneller fallen. Für größere Abstände benötigen wir also auch höhere Genauigkeiten, um Objekte rekonstruieren zu können.

### Vertikale Verschiebung

Beginnen wir mit den verschiedenen Tiefen. Nach unseren Überlegungen in Bemerkung 4.2 sehen wir, dass wir für die Tiefen 5cm und 10cm die ersten acht Summanden verwenden können und für die Tiefen 15cm und 20cm hingegen nur die ersten drei, da der geschätzte Fehler mit steigender Tiefe wächst. Wir gehen aber nach Abschnitt 4.3.1 von einer höheren Genauigkeit aus und verwenden für alle Tiefen die ersten sieben Summanden, da dort für die Tiefen 10cm, 15cm und 20cm ein Sprung der Singulärwerte auftritt, der mit steigender Tiefe größer wird.

In Abbildung 4.22 sehen wir vertikale Schnitte durch das Testgebiet  $\mathcal{T}$  (s. S. 46) für  $z^{(2)} = 0$ . Die Graustufen entsprechen dabei den Werten der entsprechenden Picard-

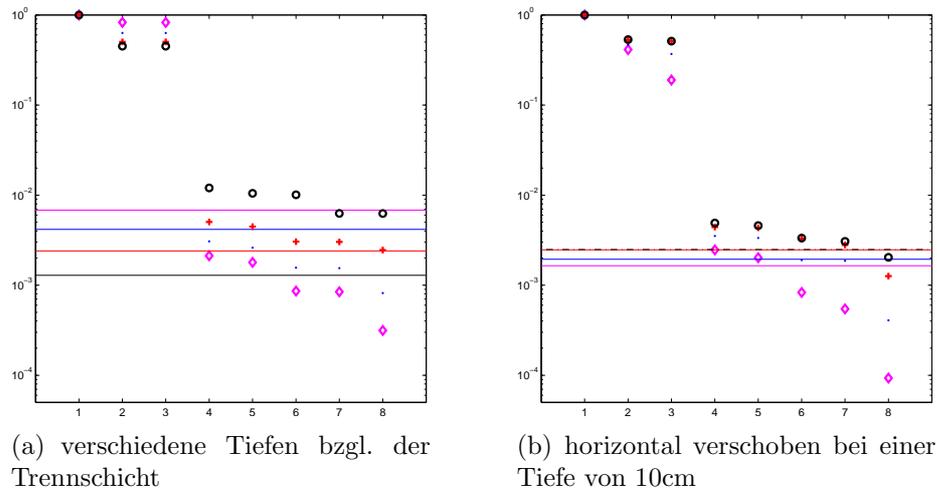


Abbildung 4.21.: Normierte Singulärwerte und geschätzter relativer Fehler für verschiedene Positionen des Zentrums der Kugel: Schwarz (o): 5cm, rot (+): 10cm, blau (·): 15cm, magenta (◇): 20cm.

Summen (vgl. (4.9)) in logarithmischer Skala. Die Werte zwischen den Punkten des Testgitters wurden linear interpoliert. Wir erkennen deutlich, dass die Position der Kugel sehr gut gefunden wird. Für 5cm Tiefe erkennen wir ein leichtes Ausschmieren, was wir darauf zurückführen, dass wir nur sieben statt acht Summanden verwendet haben und es keinen Sprung zwischen dem siebten und achten Singulärwert gibt.

In Abbildung 4.23 haben wir die Rekonstruktion für 5cm, 10cm und 20cm Tiefe zusammengefasst. In rot sehen wir die Rekonstruktion. Die transparente Kugel zeigt das Referenzobjekt. Die Projektion der Rekonstruktion auf die Koordinatenebenen ist in dunkelgrau dargestellt, die der Referenz in hellgrau.  $c_\infty$  haben wir wieder so gewählt, dass der Umriss der Rekonstruktion in 5cm, 10cm bzw. 20cm Tiefe gerade noch im entsprechenden Referenzkreis mit Radius 2cm enthalten ist. Für 20cm Tiefe erhalten wir eine sehr gute Rekonstruktion. Die Rekonstruktion für eine Tiefe von 5cm weist dagegen eine Eiform auf. Wir erkennen also eine Abhängigkeit der Rekonstruktionen vom vertikalen Abstand zum Messgitter. Für die deutliche Verbesserung bei steigender Tiefe machen wir den größer werdenden Sprung zwischen dem siebten und achten Singulärwert und die einfache runde Form des Objekts verantwortlich, denn im Allgemeinen werden die Rekonstruktionen mit steigender Tiefe schlechter. Die Abhängigkeit von der Tiefe ist nicht so auffällig, wenn wir Konfiguration 2 betrachten, was wir auf die höhere Genauigkeit dieser Daten zurückführen. Verwenden wir dagegen acht Summanden, so sehen wir für beide Konfigurationen bei steigender Tiefe eine deutliche Abflachung der Rekonstruktion in vertikaler Richtung zu einer konvexen Linsenform.

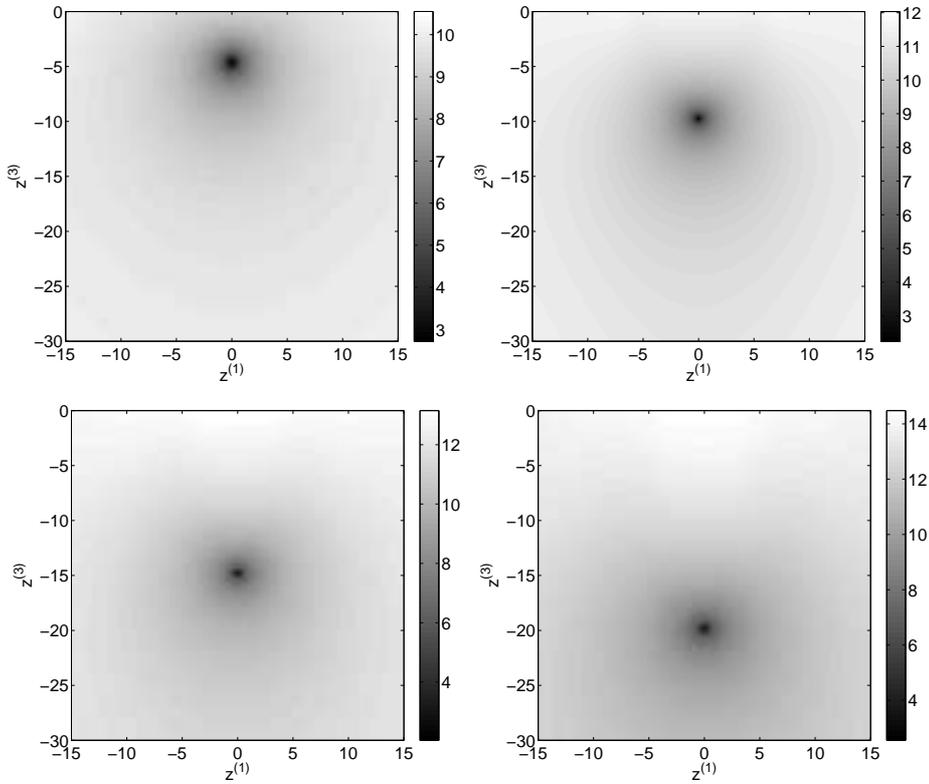


Abbildung 4.22.: Vertikale Schnitte durch das Testgebiet bei  $z^{(2)} = 0\text{cm}$  für 7 Summanden der Picard-Summe und verschiedene Positionen der Kugel.

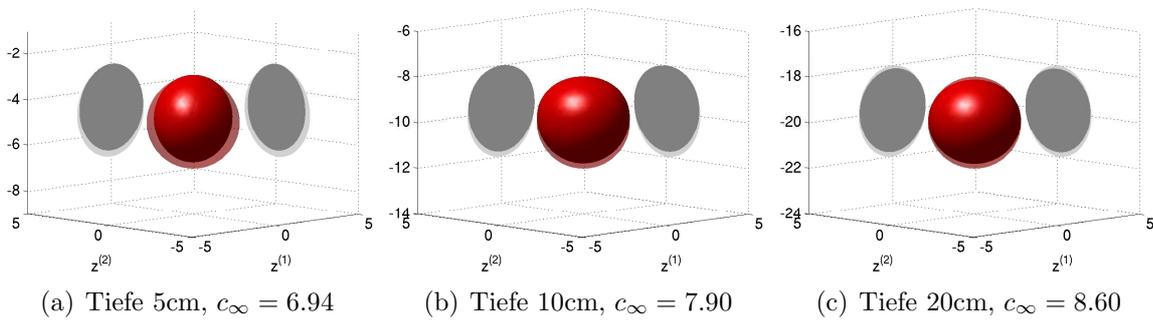


Abbildung 4.23.: Rekonstruktionen für verschiedene Tiefen mit 7 Summanden der Picard-Summe zu tangentialer Anregung und Messung.

### Horizontale Verschiebung

Wir betrachten nun, wie sich die Rekonstruktionen für den Fall verhalten, dass sich die Kugel nicht mehr mittig unter der Messebene befindet. In Abbildung 4.21(b) sehen wir, dass wir für die Abstände 5cm bis 15cm die ersten sieben Summanden für die Picard-Summen verwenden können, im Fall von 20cm Abstand nur die ersten fünf. Abbildung 4.24 zeigt einen vertikalen Schnitt bei  $z^{(2)} = 0\text{cm}$  und einen horizontalen Schnitt bei  $z^{(3)} = -10\text{cm}$  durch das Testgebiet, das hier im Quader  $[-25\text{cm}, 25\text{cm}]^2 \times [-15\text{cm}, -5\text{cm}]$  liegt. Die Testpunkte haben wieder einen Abstand von 2.5mm. Durch + markieren wir im Bild des horizontalen Schnitts die Position des Messgitters, das sich 15cm darüber befindet. Es zeigt sich, dass wir mit den fünf Summanden keine Rekon-

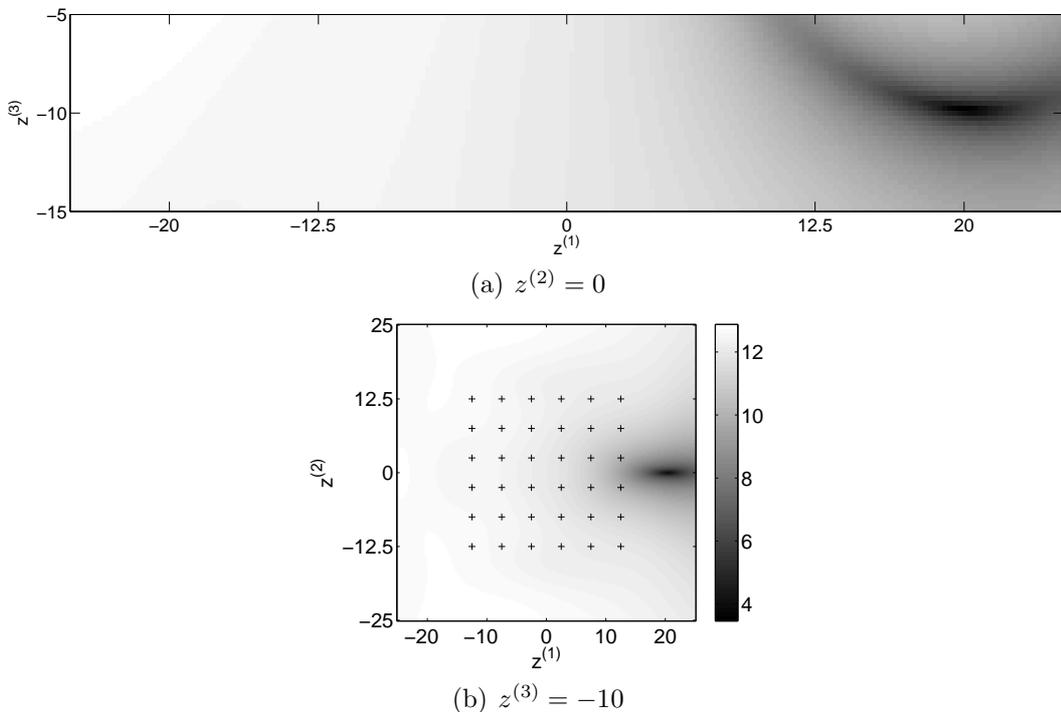


Abbildung 4.24.: Vertikaler und horizontaler Schnitt durch das Testgebiet für 5 Summanden der Picard-Summen. Der Mittelpunkt der Kugel liegt bei  $[20\text{cm}, 0\text{cm}, -10\text{cm}]$ . Durch + wird die Position des Messgitters markiert.

struktion der Kugel erhalten. Allerdings ist zumindest die Position des Objekts noch gut zu erkennen. In Abbildung 4.25 haben wir die horizontalen Schnitte durch das Testgebiet für die verschiedenen Positionen der Kugel und sieben Summanden zusammengefasst. Wir können mit sieben Summanden die Position der Kugel gut erkennen. Die Rekonstruktionen werden allerdings mit zunehmendem Abstand von der Mitte des Messgitters immer schlechter. In Abbildung 4.26 finden wir die Rekonstruktionen der am weitesten von der Mitte entfernten Kugel mit fünf bzw. 7 Summanden der Picard-Summen (vgl.

(4.9)). Mit sieben Summanden wird die Kugel noch relativ gut approximiert, wenn wir

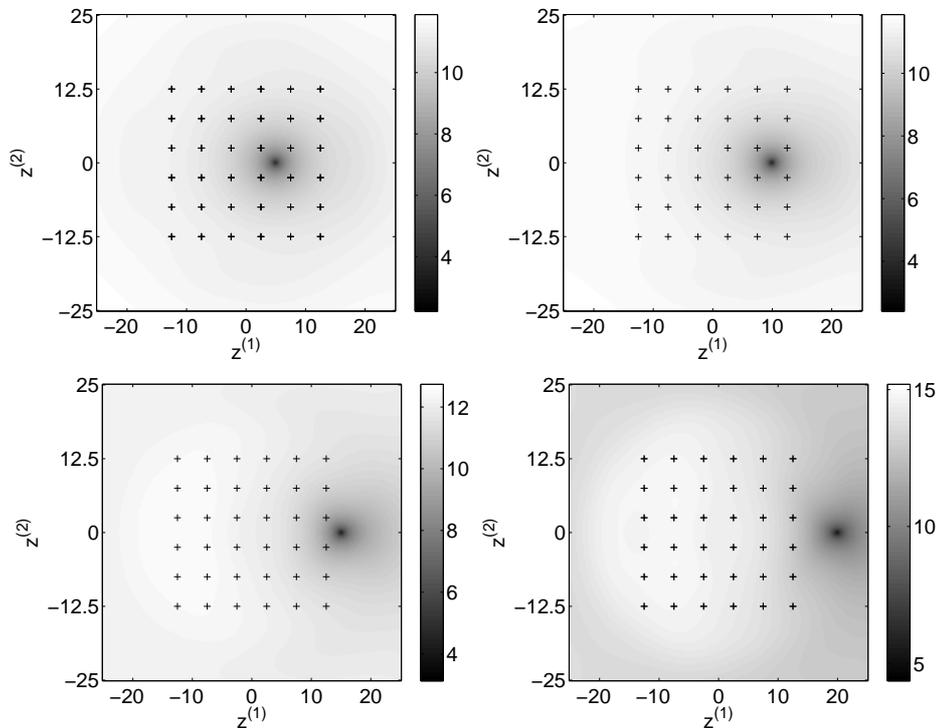


Abbildung 4.25.: Horizontale Schnitte durch das Testgebiet bei  $z^{(3)} = -10\text{cm}$  für 7 Summanden der Picard-Summen und verschiedene Positionen der Kugel. Durch + wird die Position des Messgitters markiert.

bedenken, dass sie sich nicht mehr unter dem Messgitter befindet.

#### 4.3.6. Rekonstruktion verschiedener Objekte

In diesem Abschnitt betrachten wir, inwieweit wir in der Lage sind auch andere Objekte zu rekonstruieren. Dazu betrachten wir neben Ellipsoiden mit Halbachsen 3cm, 2cm und 1cm auch einen Torus mit einem Innendurchmesser von 4cm und einem Außendurchmesser von 8cm. Der Ellipsoid ist somit in einer Dimension größer und in einer Dimension kleiner als die bisher betrachtete Kugel mit einem Radius von 2cm, die genau in das Loch des Torus passt. Aufgrund der Ergebnisse in Abschnitt 4.3.2 verwenden wir nur Daten zu rein tangentialer Anregung und Messung. Wir erhalten somit eine Matrix mit  $72 \times 72$  Einträgen und haben daher maximal 72 Summanden für die Berechnung der Picard-Summe zur Verfügung. Soweit nicht anders angegeben, verwenden wir zur Rekonstruktion immer die Summe der Picard-Summen zu den Testfunktionen mit den Polarisierungen  $e_1, e_2$  und  $e_3$  (4.9) und wählen  $c_\infty$  aus Algorithmus 4.1 so, dass die Konturlinie der Rekonstruktion gerade noch innerhalb der Konturlinie des zu re-

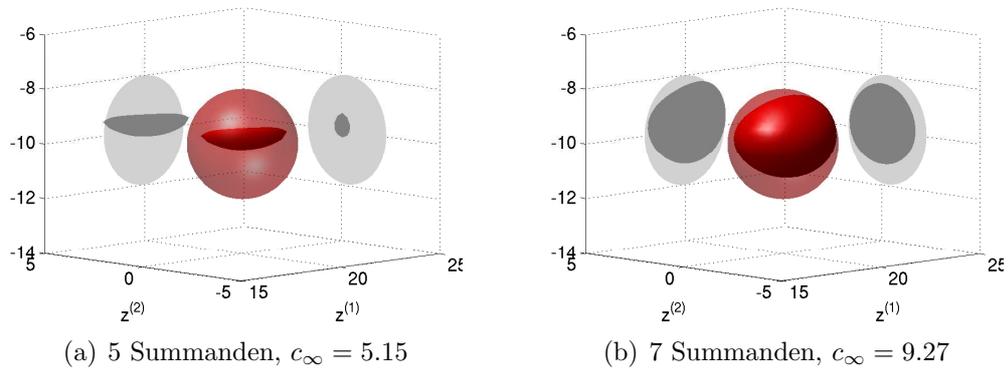


Abbildung 4.26.: Rekonstruktionen für verschiedene Anzahlen von Summanden der Picard-Summen zu tangentialer Anregung und Messung.

konstruierenden Objekts liegt. Wir verwenden dabei die Kontur der Objekte, die sich durch einen Schnitt mit einer zur Trennschicht parallelen Ebene ergibt, die durch den Mittelpunkt des Objekts verläuft (vgl. Abschnitt 4.3.1). Die Anzahl der Summanden ergibt sich durch den geschätzten Fehler sowie aus den Sprüngen in den Singulärwerten (vgl. Bemerkung 4.2). Wie bisher zeigen die folgenden Abbildungen in dunkelrot die Rekonstruktionen und in einem hellen transparenten rot die zu rekonstruierenden Objekte. Entsprechend zeigen die dunkelgrauen Flächen die Projektion der Rekonstruktion auf Koordinatenebenen und die hellgrauen Flächen die Projektion der zu rekonstruierenden Objekte.

Abbildung 4.27 zeigt Rekonstruktionen eines Ellipsoids in 10cm Tiefe in Konfiguration 2. Die linke Graphik zeigt die Rekonstruktion für 8 Summanden in den Picard-Summen die rechte für 64 Summanden. Wie wir sehen, wird die Form des Ellipsoids mit mehr Summanden deutlich besser approximiert als mit 8 Summanden, auch wenn uns der geschätzte Fehler von circa 0.4% die Verwendung von lediglich 5 Summanden erlaubt. 64 Summanden entsprechen einem relativen Fehler in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit von  $10^{-16}$ .

In Abbildung 4.28 sehen wir Rekonstruktionen zweier Ellipsoide in 10cm Tiefe in Konfiguration 2. Das Zentrum des Ellipsoids, dessen längste Halbachse parallel zur  $e_2$ -Richtung verläuft, befindet sich bei  $(4\text{cm}, 3\text{cm}, -10\text{cm})^T$ , das Zentrum des anderen bei  $(-5\text{cm}, -5\text{cm}, -10\text{cm})^T$ . Die linke Graphik zeigt die Rekonstruktion für 18 Summanden in den Picard-Summen, die rechte für 65 Summanden. Wie wir sehen, wird auch hier die Form der Ellipsoide mit mehr Summanden deutlich besser approximiert als mit 18 Summanden, auch wenn uns der geschätzte Fehler von circa 0.5% die Verwendung von lediglich 6 Summanden erlaubt. 65 Summanden entsprechen wieder einem relativen Fehler von  $10^{-16}$ . Die Ausrichtung der Ellipsoide können wir aber schon für 18 Summanden erkennen. Generell lässt sich sagen, dass wir für zwei Objekte in etwa doppelt so viele Summanden benötigen wie zur Rekonstruktion nur eines Objekts. Im nächsten Abschnitt lernen wir noch eine Methode kennen, mit der wir auch bei Verwendung von

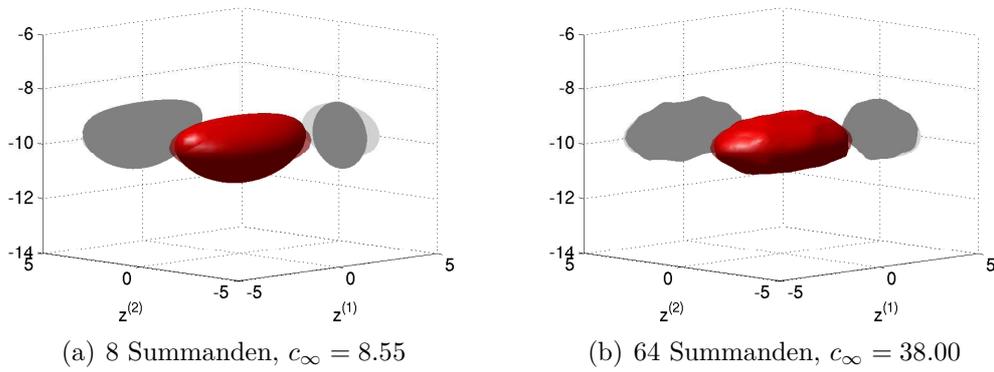


Abbildung 4.27.: Rekonstruktionen eines Ellipsoids in Konfiguration 2 mit unterschiedlich vielen Summanden der Picard-Summe zu tangentialer Anregung und Messung.

18 Summanden die beiden Ellipsoide getrennt rekonstruieren können.

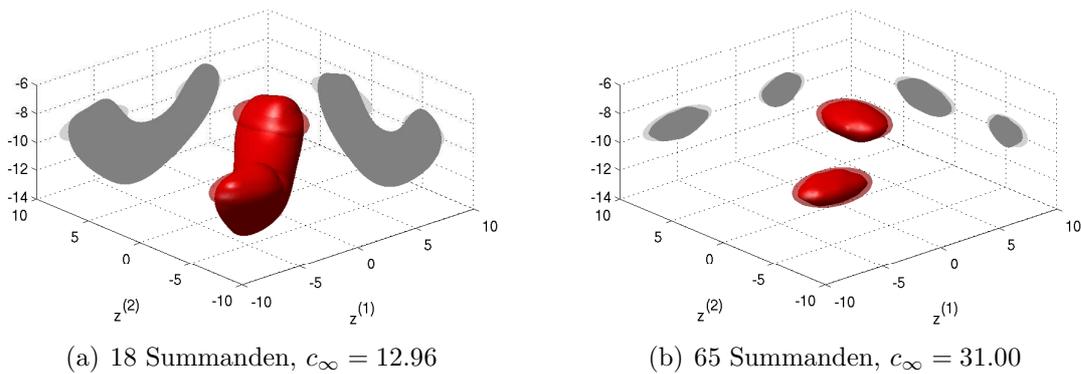


Abbildung 4.28.: Rekonstruktionen zweier Ellipsoide in Konfiguration 2 mit unterschiedlich vielen Summanden der Picard-Summe zu tangentialer Anregung und Messung.

Befinden sich die Ellipsoide wie in Abbildung 4.29 nicht mehr in einer Ebene, können wir einen Nachteil der Methode sehr deutlich erkennen. Das Zentrum des vorderen Ellipsoids liegt nun 20cm unterhalb der Trennschicht. Richten wir uns bei der Wahl von  $c_\infty$  nach dem oberen Ellipsoiden, so wird der untere nicht korrekt rekonstruiert, wie wir in Abbildung 4.29(a) erkennen. Orientieren wir uns zur Wahl von  $c_\infty$  am unteren Ellipsoiden, führt dies auf die Rekonstruktion in Abbildung 4.29(b). Der geschätzte Fehler liegt bei circa 0.8%.

Zur Erklärung betrachten wir in Abbildung 4.30 die Singulärwerte des diskreten Messoperators für den Ellipsoiden in 10cm Tiefe, den in 20cm Tiefe und für beide Ellipsoiden zusammen. Wir sehen, dass die Singulärwerte für den oberen Ellipsoiden (rot, +) deutlich größer sind als die des unteren (blau, ·), die darüber hinaus auch schneller fallen. Daraus schließen wir, dass bei zwei Ellipsoiden (schwarz, o) die Singulärwerte des oberen

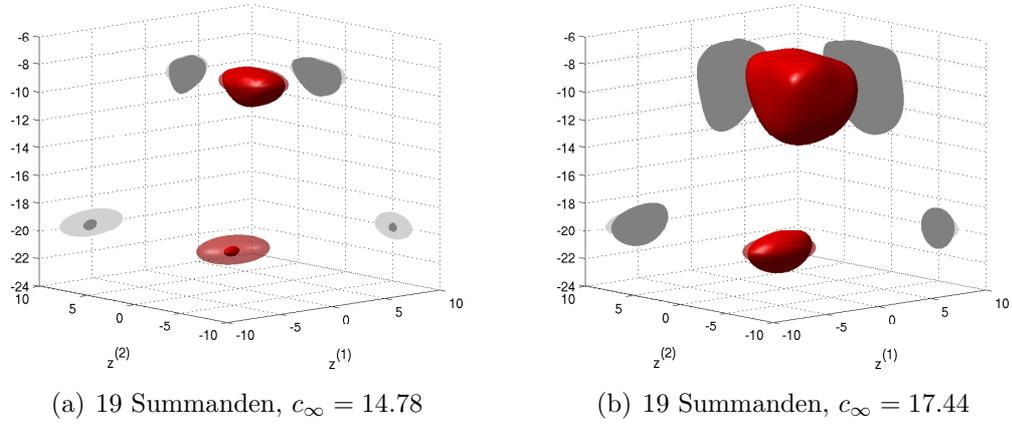


Abbildung 4.29.: Rekonstruktionen zweier Ellipsoide in verschiedenen Tiefen in Konfiguration 2 zu tangentialer Anregung und Messung.

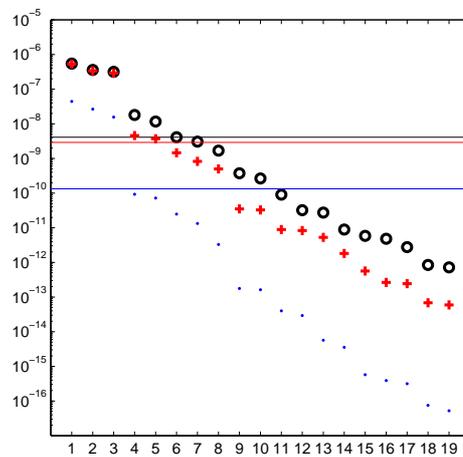


Abbildung 4.30.: Singulärwerte und geschätzter relativer Fehler für verschiedene Ellipsoide. schwarz ( $\circ$ ): Zwei Ellipsoide, 10 bzw. 20cm tief, rot (+): Ellipsoid, 10cm tief, blau ( $\cdot$ ): Ellipsoid, 20cm tief.

Ellipsoiden die des unteren dominieren. Die Summanden der Picard-Summe für einen Testpunkt aus dem unteren Ellipsoiden, der ja kein Punkt des oberen Ellipsoiden ist, ist daher größer als für einen Testpunkt aus dem oberen Ellipsoiden, so dass weniger Punkte das Kriterium erfüllen, dass die Picard-Summe kleiner als  $c_\infty$  ist. Dies führt dann im Vergleich zum oberen Ellipsoiden zu der kleineren Rekonstruktion.

Zum Abschluß betrachten wir mit einem Torus ein komplexeres Objekt. In der oberen Zeile von Abbildung 4.31 sehen wir die Rekonstruktionen des Torus tangential zur Trennschicht in 10cm Tiefe. In der zweiten Zeile die Rekonstruktionen des um die  $e_1$ -Achse um  $45^\circ$  gedrehten Torus. Die linke Spalte enthält Rekonstruktionen zu Konfiguration 1, die rechte zu Konfiguration 2. Für den gedrehten Torus haben wir den gleichen Wert für  $c_\infty$  angenommen wie für den horizontal ausgerichteten. Trotz des hohen geschätzten Fehlers

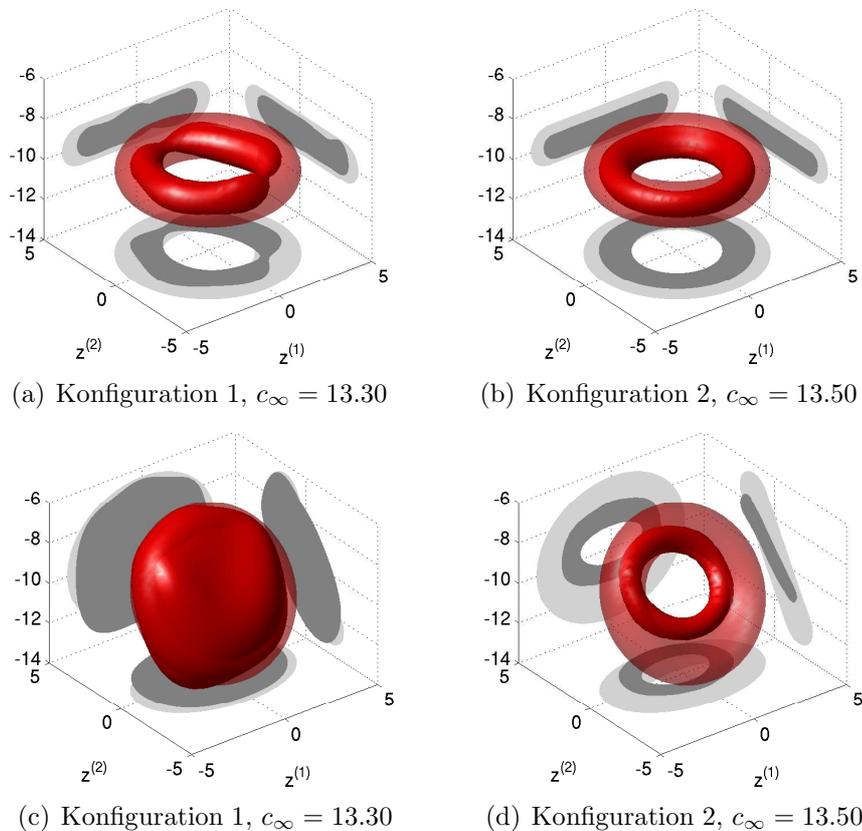


Abbildung 4.31.: Rekonstruktionen zweier Tori mit 17 Summanden der Picard-Summe zu tangentialer Anregung und Messung.

von etwa 7% für Konfiguration 1 ergibt sich zumindest eine sehr gute Rekonstruktion hinsichtlich der Größe und Ausrichtung des gedrehten Torus. In Konfiguration 2 mit einem geschätzten Fehler von unter 1% erhalten wir sogar eine gute Approximation des Lochs. Die verwendeten 17 Summanden entsprechen dem angenommen relativen Fehler des Vorwärtzlösers von  $10^{-5}$ .

### 4.3.7. Experimente

In Anlehnung an die Faktorisierungsmethode betrachten wir nun Rekonstruktionen bei denen wir für das Picard-Kriterium (4.1) einen größeren Raum als  $\mathfrak{R}(M)$  verwenden. Aus der Faktorisierung (3.13) von  $M$  wissen wir, dass  $\mathfrak{R}(M) \subseteq \mathfrak{R}(L)$  gilt. Aus der Charakterisierung der Streukörper in Abschnitt 3.5 wissen wir, dass eine Testfunktion  $h_z^p$  (vgl. (3.20)) genau dann im Bildraum von  $L$  liegt, wenn  $z \in \mathbb{R}_+^3$  ein Punkt im Streukörper ist. Die Faktorisierungsmethode beruht nun darauf, dass für eine Faktorisierung des Messoperators  $M$  die Bildraumidentität  $\mathfrak{R}(M^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(L)$  gezeigt werden kann, so dass die Charakterisierung der Streuobjekte auch für den bekannten Operator  $M^{\frac{1}{2}}$  gilt. Da in unserem Fall  $M$  im Allgemeinen weder normal noch positiv ist und die Wurzel daher nicht definiert ist, definieren wir uns im Folgenden einen Operator mit größerem Bildraum. Wir wissen allerdings nichts über die Relation zwischen dem Bildraum dieses Operators und dem Bildraum von  $L$ .

Sei

$$Mv_l = \sigma_l u_l, \quad M^*u_l = \sigma_l v_l, \quad l \in \mathbb{N}$$

die Singulärwertzerlegung des kompakten Operators  $M$  aus (3.4) mit den Orthonormalbasen  $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$  und  $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$ , sowie der nicht wachsenden und positiven Folge von Singulärwerten  $(\sigma_l)_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l = 0$ .  $M^*$  bezeichne den bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $L^2(\mathcal{M})$  adjungierten Operator zu  $M$ . Nach [ENH96, Prop. 2.18] gilt  $\mathfrak{R}(M) = \mathfrak{R}((MM^*)^{1/2})$ , so dass wir mit dem kompakten, positiven und selbstadjungierten Operator  $MM^*$  die Wurzel aus dem Absolutbetrag von  $M^*$  durch

$$|M^*|^{\frac{1}{2}} v := (MM^*)^{\frac{1}{4}} v = \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l^{\frac{1}{2}} (v | \overline{u_l})_{\mathcal{M}} u_l, \quad v \in L^2(\mathcal{M})$$

definieren. Dann ist  $\mathfrak{R}(M) = \mathfrak{R}((MM^*)^{1/2}) \subseteq \mathfrak{R}(|M^*|^{\frac{1}{2}})$  und für die Testfunktionen  $h_z^p$  gilt das Picard-Kriterium

$$h_z^p \in \mathfrak{R}(|M^*|^{\frac{1}{2}}) \iff \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|(h_z^p | \overline{u_l})_{\mathcal{M}}|^2}{\sigma_l} \Big/ (h_z^p | \overline{h_z^p})_{\mathcal{M}} < \infty. \quad (4.10)$$

Wir betrachten nun Rekonstruktionen mit der entsprechend abgeänderten Summe von Picard-Summen (4.9). D.h. wir verwenden im Nenner der einzelnen Picard-Summen nur noch die Approximationen der Singulärwerte  $\sigma_l$  statt  $\sigma_l^2$ .

Wir untersuchen wieder die selben Objekte und Daten wie im letzten Abschnitt. Wie bisher zeigen die folgenden Abbildungen in dunkelrot die Rekonstruktionen und in einem hellen, transparenten rot die zu rekonstruierenden Objekte. Entsprechend zeigen die dunkelgrauen Flächen die Projektion der Rekonstruktion auf die Koordinatenebenen und die hellgrauen Flächen die Projektion der zu rekonstruierenden Objekte.

In Abbildung 4.32 sehen wir die fast perfekte Rekonstruktion der Kugel mit Radius 2cm in Konfiguration 2. Das Zentrum der Kugel befindet sich 10cm unterhalb der Trennschicht. Im linken Bild sehen wir wieder wie bereits in Abschnitt 4.3.2 die Kontur der Kugel in 10cm Tiefe als schwarze Linie und die Kontur der Rekonstruktion als grüne gestrichelte Linie. Für die Rekonstruktion haben wir 8 Summanden bei einem geschätzten Fehler von weniger als 1% verwendet.

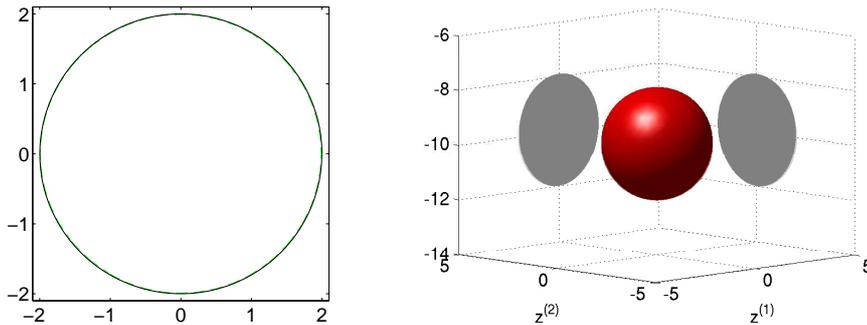


Abbildung 4.32.: Rekonstruktion mit der Faktorisierungsmethode zu  $c_\infty = 2.87$  und 8 Summanden.

Abbildung 4.33 zeigt die Rekonstruktion des Ellipsoiden aus dem letzten Abschnitt (vgl. Abb. 4.27(a)) mit ebenfalls 8 Summanden für die Picard-Summen. Am Konturgraphen können wir erkennen, dass die Ellipse in 10cm Tiefe sehr gut rekonstruiert wird. Die obere Hälfte der Rekonstruktion ist bei der üblichen Wahl von  $c_\infty$  allerdings sehr kugelförmig. Wenn wir 64 Singulärwerte verwenden, erhalten wir eine sehr gute Rekonstruktion, die im Vergleich zu Abbildung 4.27(b) keine Artefakte aufweist.

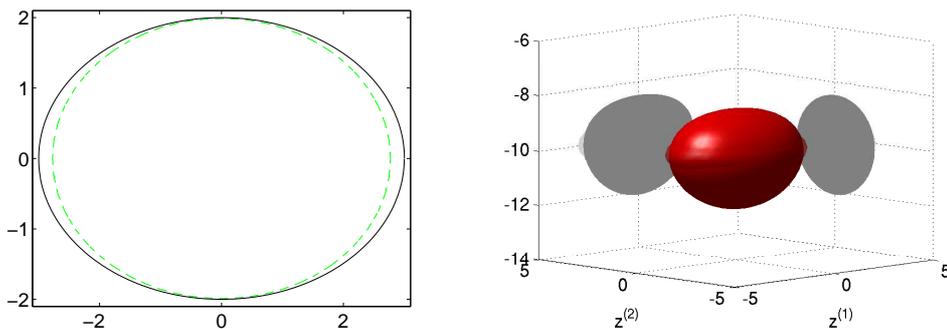


Abbildung 4.33.: Rekonstruktion mit der Faktorisierungsmethode zu Konfiguration 2 mit  $c_\infty = 3.02$  und 8 Summanden.

Die Rekonstruktionen der beiden Ellipsoide aus Abbildung 4.28 mit der Methode aus diesem Abschnitt sehen wir in Abbildung 4.34. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Rekonstruktionen der beiden Ellipsoide nun getrennt sind. In Abbildung 4.34(b) sehen wir dann noch die ebenfalls im Vergleich zu Abbildung 4.28(b) glatteren Rekonstruktionen

bei Verwendung von 65 Summanden. Für den Fall der zwei Ellipsoide in verschiedenen

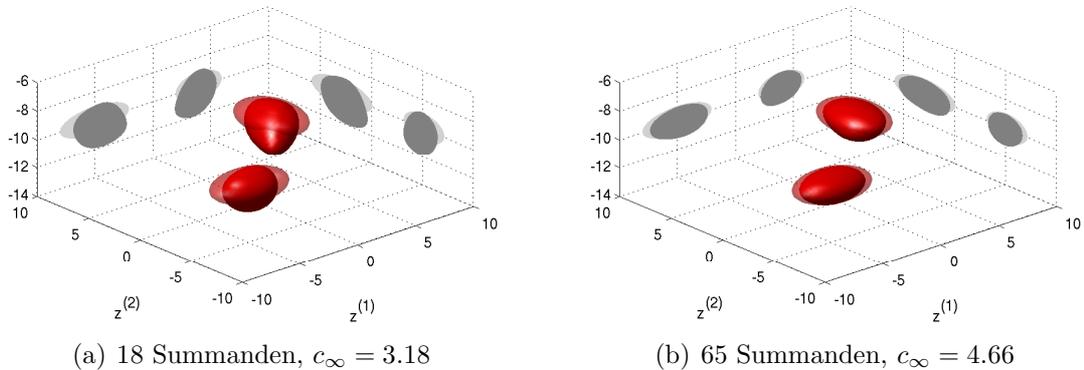


Abbildung 4.34.: Rekonstruktionen zweier Ellipsoide in Konfiguration 2 mit der Faktorisierungsmethode und unterschiedlich vielen Summanden der Picard-Summe.

Tiefen aus Abbildung 4.29 wird der untere bei der Wahl von  $c_\infty$  bzgl. des oberen Ellipsoiden gar nicht rekonstruiert und der obere ähnelt in seiner Form der Rekonstruktion des oberen Ellipsoiden aus Abbildung 4.29(b), d.h. er weist eine deutliche Ausbuchtung in Richtung des weiter unten liegenden Ellipsoiden auf.

Schließlich betrachten wir noch die beiden Tori in Konfiguration 2 aus Abbildung 4.31. Für den gedrehten Torus in Abbildung 4.35 haben wir wieder die gleiche Schranke  $c_\infty$  gewählt wie für den Torus parallel zur Trennschicht. Auch hier zeigt sich, dass tiefer liegende Teile nicht mehr rekonstruiert werden.

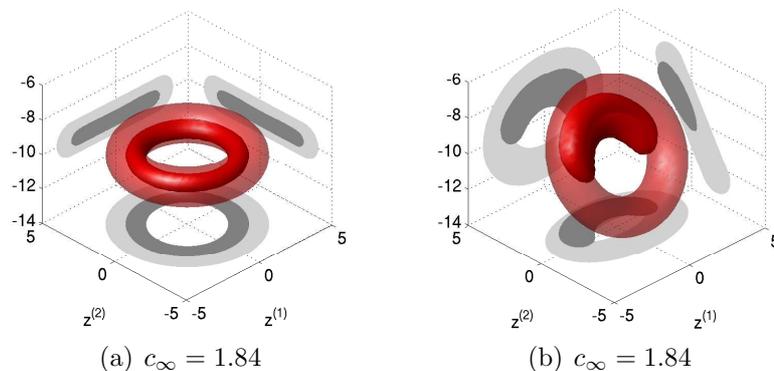


Abbildung 4.35.: Rekonstruktionen zweier Tori in Konfiguration 2 mit 17 Summanden der Picard-Summe mit vertikaler Polarisation der Testfunktion.

### Ein heuristisches Verfahren

Wir untersuchen nun ein Verfahren, das in [Brü99] vorgeschlagen und auch in [Sch05] untersucht wurde. Abbildung 4.36 zeigt in logarithmischer Darstellung als blaue Punkte

die normierten Singulärwerte des diskreten Messoperators für den Ellipsoiden, dessen Zentrum sich 10cm unterhalb der Trennschicht befindet (vgl. Abb. 4.27). Die blaue, gestrichelte Gerade stellt die Kleinste-Quadrate-Ausgleichsgerade für den Logarithmus der ersten 64 normierten Singulärwerte dar. Die roten ( $\nabla$ ) und grünen ( $\triangle$ ) Dreiecke, die zur besseren Übersicht durch Linien verbunden sind, zeigen den Zähler der Summanden der Picard-Summe für verschiedene Testpunkte für eine Testfunktion mit Polarisation  $p = e_3$ . D.h. mit  $z_1 = (10\text{cm}, -10\text{cm}, -10\text{cm})^T$  und  $z_2 = (1\text{cm}, 0\text{cm}, -10\text{cm})^T$  entsprechen die roten Dreiecke  $K_l^{(1)} := |\mathbf{h}_{z_1}^{e_3} \cdot \overline{D_h u_{h,l}}|^2 / \sum_{k=1}^{64} |\mathbf{h}_{z_1}^{e_3} \cdot \overline{D_h u_{h,k}}|^2$  und die grünen Dreiecke  $K_l^{(2)} := |\mathbf{h}_{z_2}^{e_3} \cdot \overline{D_h u_{h,l}}|^2 / \sum_{k=1}^{64} |\mathbf{h}_{z_2}^{e_3} \cdot \overline{D_h u_{h,k}}|^2$  für  $l = 1, \dots, 64$  mit den approximierten Singulärvektoren  $u_{h,l}$  und der Gewichtsmatrix  $D_h$  (vgl. (4.7)). Die schwarzen, gestrichelten Linien stellen jeweils die Kleinste-Quadrate-Ausgleichsgerade für den Logarithmus dieser Koeffizienten dar.

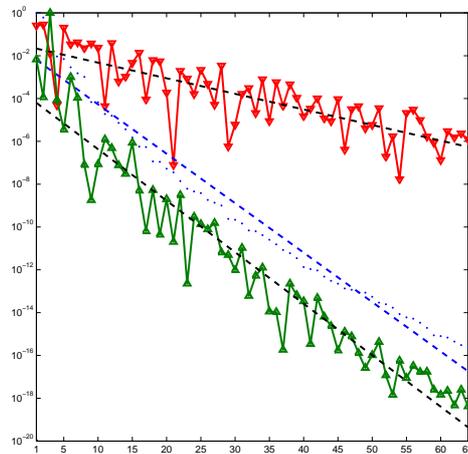


Abbildung 4.36.: Singulärwerte blau ( $\cdot$ ) und Zähler der Picard-Summe für verschiedene Testpunkte. rot ( $\nabla$ ): Zähler der Picard-Summe für  $z_1$ . grün ( $\triangle$ ): Zähler der Picard-Summe für  $z_2$ .

Da die Picard-Reihe für einen Punkt aus einem Einschluß konvergiert, ist zu erwarten, dass die Koeffizienten im Zähler der Summanden schneller fallen als die Koeffizienten im Nenner. Wie wir allerdings sehen, oszillieren die Koeffizienten sehr stark. Wir nutzen daher den augenscheinlich exponentiellen Abfall der Koeffizienten und Singulärwerte aus und legen eine Kleinste-Quadrate-Ausgleichsgerade durch den Logarithmus der Koeffizienten und den Logarithmus der Singulärwerte. Betrachten wir nun den Quotienten der Steigungen dieser Geraden für die beiden Punkte  $z_1$  und  $z_2$ .

Der Punkt  $z_1$  liegt weit außerhalb des Ellipsoiden. An den Ausgleichsgeraden für die Singulärwerte und für die Koeffizienten  $K_l^{(1)}$  ( $\nabla$ ) ist zu sehen, dass der Quotient aus der Steigung der Geraden zu den Koeffizienten und der Geraden zu den Singulärwerten kleiner als eins ist, da die Gerade für die Singulärwerte schneller fällt. Der Punkt  $z_2$  liegt innerhalb des Ellipsoiden und der Quotient aus den Steigungen der Geraden ist größer

als 1, da die Gerade für die Singulärwerte etwas langsamer fällt, als die Gerade für die Koeffizienten  $K_l^{(2)}$  ( $\Delta$ ).

Da der Unterschied in den Steigungen für den inneren Punkt  $z_2$  nur sehr gering ist, betrachten wir wie zu Beginn des Abschnitts die Picard-Reihe (4.10) bzw. ihre Approximation analog zu Abschnitt 4.2 (vgl. (4.7)). Das heuristische Verfahren besteht nun darin, für jeden Testpunkt  $z \in \mathbb{R}_-^3$  für die Koeffizienten und die Singulärwerte die Ausgleichsgeraden wie oben zu bestimmen und den Quotienten der Steigungen zu betrachten. Ist dieser kleiner als 1, so nehmen wir an, dass der Punkt nicht zum Streukörper gehört. Ist er größer oder gleich 1, so nehmen wir an, dass der Punkt im Streukörper liegt. Da die Koeffizienten allerdings stark oszillieren, sind wir gezwungen diese Oszillationen durch Verwendung vieler Koeffizienten und damit auch vieler Singulärwerte auszugleichen.

In Abbildung 4.37 sehen wir Schnitte durch das Testgebiet  $\mathcal{T}$  für den bereits betrachteten Ellipsoiden in Konfiguration 2. Die linke Abbildung zeigt einen Schnitt parallel zur Trennschicht in 10cm Tiefe, die rechte einen vertikalen Schnitt entlang der  $e_1$ -Achse. Die Graustufen entsprechen den Werten des Quotienten der Steigungen in den Testpunkten. Dunklere Werte zeigen größere Quotienten. Wir haben hier wieder 64 Summanden betrachtet. Wie wir sehen, ist der Ellipsoid gut zu erkennen. Die Fläche der Punkte mit dem Wert 1 der Quotienten, d.h. die Rekonstruktion, zeigt Abbildung 4.39(a). Die Rekonstruktion weist noch mehr Artefakte auf, als in Abbildung 4.27(b) und es fehlt ein Teil entlang der  $e_2$ -Achse.

Die Schnitte durch das Testgebiet für den gedrehten Torus sehen wir in Abbildung 4.38 und die Rekonstruktion in Abbildung 4.39(b). Auch hier haben wir nur eine Testfunktion mit Polarisation  $p = e_3$  verwendet. Für die Berechnung der Ausgleichsgeraden haben wir 70 Singulärwerte und Koeffizienten herangezogen. Im Vergleich zu den Rekonstruktionen in Abbildung 4.31(d) und 4.35(b) erhalten wir ein deutlich besseres Bild vom eigentlichen Objekt. Insbesondere ist das Loch noch gut zu erkennen, was bei den anderen beiden Verfahren für 70 Summanden in den Picard-Summen nicht der Fall ist.

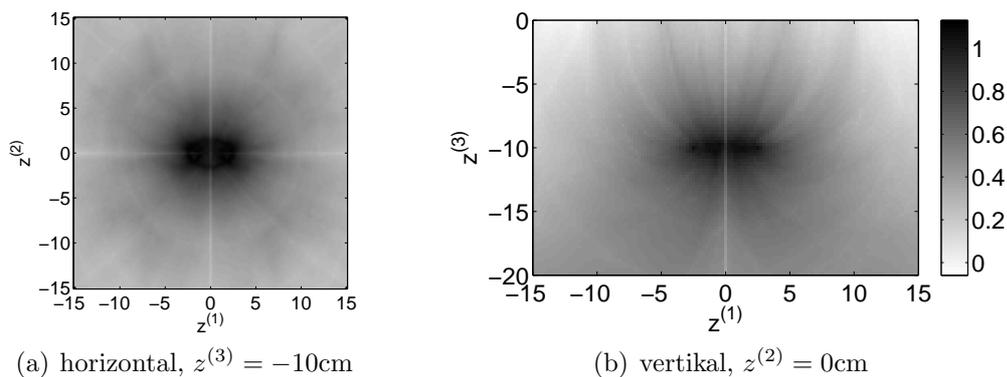


Abbildung 4.37.: Schnitte durch das Testgebiet für den Ellipsoiden.

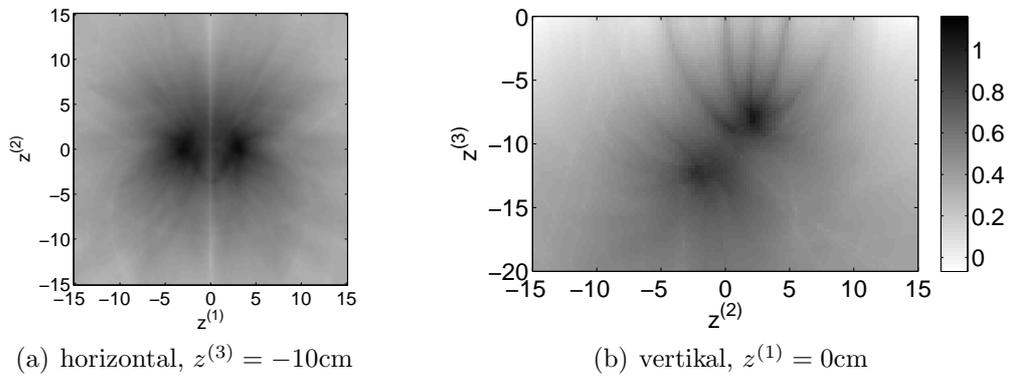


Abbildung 4.38.: Schnitte durch das Testgebiet für den gekippten Torus.

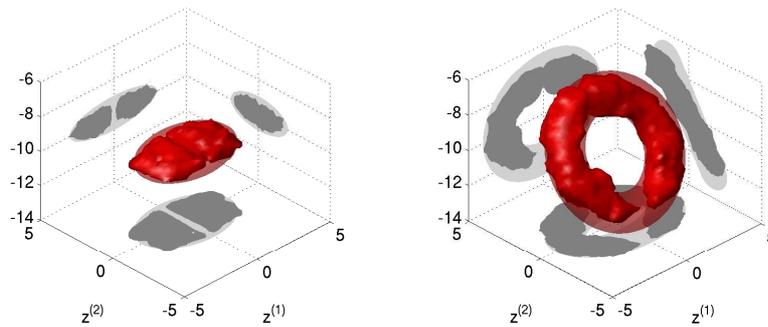


Abbildung 4.39.: Rekonstruktionen verschiedener Objekte in Konfiguration 2 mit vertikaler Polarisation der Testfunktion.

### Homogene Testfunktionen

Zum Abschluß des Teilabschnitts beschäftigen wir uns mit der Frage, was geschieht, wenn wir die Testfunktion des Vakuums statt der Testfunktion des Zweischichtmediums verwenden, d.h. wenn wir in Konfiguration 2 mit der Testfunktion für Konfiguration 1 testen. Die Antwort auf die Frage ist, dass wir die Rekonstruktionen in wenigen Minuten erhalten, statt in einigen Stunden. Dies ist damit zu erklären, dass die Auswertung der Testfunktion für das Zweischichtmedium im Vergleich zur Auswertung im Vakuum sehr aufwendig ist. Der wesentlich Teil der Antwort ist jedoch, dass wir vergleichbare Rekonstruktionen erhalten, wie wir in Abbildung 4.40 sehen. Das linke Bild zeigt die Rekonstruktion des Ellipsoids aus Abbildung 4.27(a) mit der Testfunktion zu Konfiguration 1 und das rechte Bild entsprechend den Torus aus Abbildung 4.31(d). Wir haben

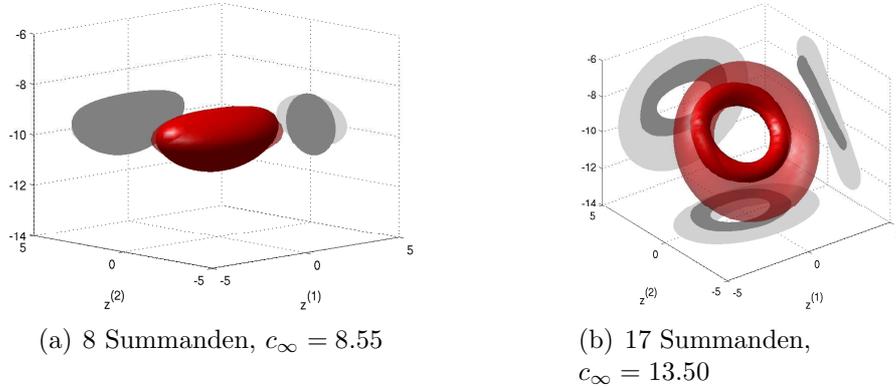


Abbildung 4.40.: Rekonstruktionen in Konfiguration 2 mit der Testfunktion für Konfiguration 1.

wieder die Summe der Picard-Summen zu den kanonischen Polarisationsrichtungen verwendet und für  $c_\infty$  die gleichen Werte wie für die Rekonstruktionen in Abschnitt 4.3.7.

Dies begründen wir wie folgt: Wenn wir uns die Parameter  $\epsilon_r^-, \mu_r^-$  für die beiden Konfigurationen ansehen (s. S. 46), fällt auf, dass sie sich im Wesentlichen nur durch den Parameter  $\epsilon_r^-$  unterscheiden. In Abschnitt 4.5 betrachten wir die Entwicklung der Testfunktion des Zweischichtmediums  $h_z^p = \mathbb{G}^m(\cdot, z)p$  für  $\omega \rightarrow 0$ , d.h. für kleine Frequenzen. Diese Entwicklung entspricht auch der Entwicklung der Testfunktion des Vakuums, wenn wir die Parameter  $\epsilon_r^\pm = \mu_r^\pm = 1$  setzen. Wir können die Entwicklung also zum Vergleich der Testfunktionen bei kleinen Frequenzen verwenden. Es zeigt sich, dass sich die Entwicklungen für den Fall, dass  $\mu_r^\pm = 1$  und  $0 = \sigma_+ \neq \sigma_-$  gilt, um einen Term  $\mathcal{O}(\omega)$  unterscheiden. Für den Fall  $\mu_r^\pm = 1$  und  $\sigma_+ = \sigma_- = 0$  unterscheiden sie sich um einen Term  $\mathcal{O}(\omega^2)$ . Da sich im Fall von Konfiguration 2 und auch in den Fällen der anderen Böden aus Tabelle 2.1  $\sigma_-$  und  $\mu_r^-$  nicht stark von 0 bzw. 1 unterscheiden, schließen wir aus Abschnitt 4.5 und Abbildung 4.49, dass sich die Testfunktionen bei der von uns verwendeten Frequenz  $\omega = 4\pi \cdot 10^4 \text{Hz}$  höchstens um einen Term der Größenordnung  $10^{-4}$  unterscheiden. Dies entspricht in etwa dem von uns angenommenen Fehler

der Vorwärtsdaten und erklärt damit, warum wir bei Verwendung der Testfunktion für das Vakuum vergleichbare Resultate erzielen wie mit der korrekten Testfunktion für das Zweischichtmedium.

### 4.3.8. Spulen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Beispiele für die Verwendung von Spulen, statt der bisher verwendeten Dipole zur Erzeugung und Messung des elektromagnetischen Feldes. Dazu legen wir um jeden der 36 Punkte des bisher betrachteten Messgitters eine Spule in Kreisform. D.h. wir haben 36 kreisförmige Spulen parallel zur Messebene zum Messen und Erzeugen des Feldes, deren Mittelpunkte die Gitterpunkte unseres Messgitters bilden. Die Anregung der Spulen erfolgt dabei für alle mit der selben Spannung. Der diskretisierte Messoperator ist daher wie für den Fall rein vertikaler Anregung und Messung eine  $36 \times 36$  Matrix. Die Daten einer Messung, bei der die Spule im  $j$ -ten Gitterpunkt das Feld erzeugt, stehen in der  $j$ -ten Spalte dieser Matrix (vgl. Abschnitt 4.2). Wir haben also maximal 36 Summanden für die Picard-Summe (4.7) mit der Testfunktion  $h_{u,z}^p$  aus (3.23) zur Verfügung. Zur Auswertung der Testfunktion müssen wir die Funktion  $\mathbb{G}^m(\cdot, z)p$ , d.h. das  $H$ -Feld eines magnetischen Dipols mit Polarisation  $p$ , auf den Flächen der Spulen integrieren. Dies können wir unter Verwendung des Induktionsgesetzes von Faraday und der homogenen Maxwell-Gleichungen auf ein Integral über den Rand der Spule reduzieren, denn für eine Spulenfläche  $\mathcal{F}$  mit Rand  $\gamma$  gilt (vgl. Abschnitt 3.4 und 4.4.2)

$$i\kappa\mu_r^+ \int_{\mathcal{F}} (\mathbb{G}^m(x, z)p) \cdot e_3 \, d\Sigma(x) = \frac{i}{\kappa\epsilon_r^+} \oint_{\gamma} (\text{rot}_x (\mathbb{G}^m(x, z)p)) \cdot \tau \, d\gamma(x), \quad z \in \mathbb{R}_-^3.$$

Dabei sei  $\tau$  das Tangentialfeld der Kurve  $\gamma$ . Die Approximation des Integrals über den Rand der Spule erfolgt dann mit Hilfe der Trapez-Regel.

Wir betrachten wieder Rekonstruktionen der Objekte aus den letzten Abschnitten. Das heißt wir zeigen Rekonstruktionen der Kugel mit Radius 2cm, des Ellipsoids mit den Halbachsen 3cm, 2cm und 1cm und des um die  $e_1$ -Achse gedrehten Torus. Das Zentrum der Objekte befindet sich wieder 15cm unterhalb der Messebene und damit den Spulen. Wir untersuchen die Rekonstruktionen für zwei Fälle. Im ersten Fall verwenden wir Spulen mit einem Radius von 2cm und approximieren das Integral zur Auswertung der Testfunktion mit 60 Stützstellen. Für den zweiten Fall nutzen wir Spulen mit einem Radius von 12cm, der dem einer Spule eines Metalldetektors entspricht. Für diesen Fall approximieren wir das Kurvenintegral mit 120 Stützstellen. Wir zeigen nur Rekonstruktionen für Konfiguration 1. Für Konfiguration 2 erhalten wir, im Vergleich zu den vorigen Abschnitten, keine besseren Ergebnisse.

In Abbildung 4.41 sehen wir alle 36 Singulärwerte des diskreten Messoperators für die Fälle der verschieden großen Spulen und alle drei Objekte. Da der größte Singulärwert in der Größenordnung des Symmetriefehlers (vgl. (4.6)) liegt, können wir leider keine

Aussage zur Genauigkeit des Vorwärtslösers treffen. Wir gehen daher wie im Fall der Dipole (s. Abschnitt 4.3.1) von einem relativen Fehler von  $10^{-4}$  aus, um die Anzahl der Summanden in der Picard-Summe zu bestimmen. Dieser Wert ist in den beiden Graphen als horizontale Linie in der entsprechenden Farbe gekennzeichnet. Der so angenommene

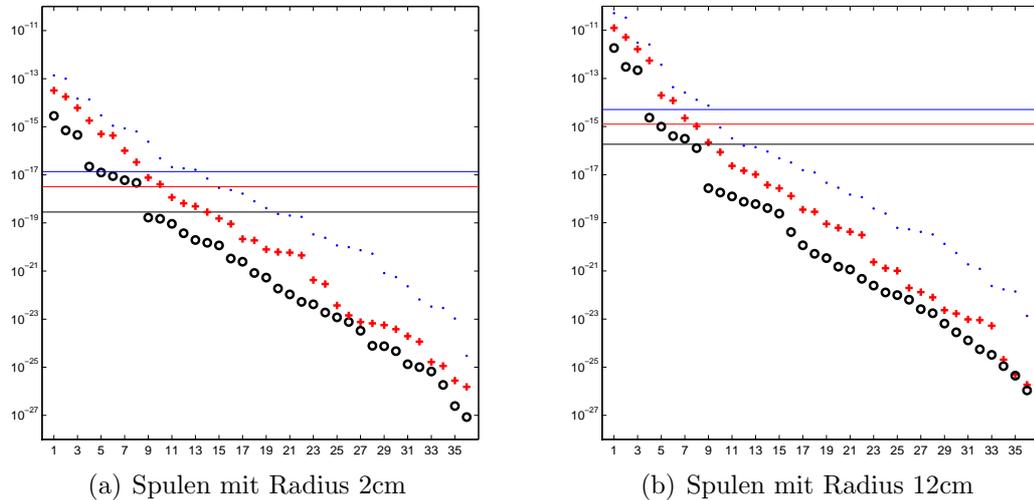


Abbildung 4.41.: Singulärwerte und relative Fehler von  $10^{-4}$  für verschiedene Objekte in Konfiguration 1: Schwarz (o): Kugel mit Radius 2cm, rot (+): Ellipsoid und blau (·): gedrehter Torus.

Fehler erlaubt uns im Fall der Spulen mit 2cm Radius für die Kugel 8 Summanden, 10 Summanden für den Ellipsoiden und 13 Summanden für den Torus in den Picard-Summen zu verwenden. Diese Anzahlen behalten wir auch für den Fall der Spulen mit Radius 12cm bei, da wir mit 8 bzw. 9 Summanden nur kugelförmige Objekte rekonstruieren.

Zunächst untersuchen wir wieder am Beispiel der Kugel wie in Abschnitt 4.3.2 welche Auswirkung die Wahl der Polarisationsrichtung der Testfunktion hat. In Abbildung 4.42 sehen wir die Ergebnisse für den Fall der Spulen mit 2cm Radius. Die Ergebnisse für die Anregung und Messung mit den größeren Spulen haben wir in Abbildung 4.43 dargestellt. Wie bisher sind in dunklem Rot die Rekonstruktionen dargestellt und ihre Projektion auf die Koordinatenebenen in dunklem Grau. Entsprechend sind die hellgrauen Flächen die Projektion der Kugel, die jeweils in hellem, transparenten Rot dargestellt ist. Die linke Graphik in beiden Abbildungen zeigt die Rekonstruktion für die Polarisation  $p = e_2$ , die mittlere für die Polarisation  $p = e_3$ . Die rechte Graphik zeigt schließlich die Rekonstruktion für die Summe der Picard-Summen zu allen drei kanonischen Polarisierungen (vgl. (4.9)). Für die Polarisation  $p = e_1$  erhalten wir eine ähnliche Rekonstruktion wie für  $p = e_2$ , die allerdings um  $90^\circ$  um die vertikale Achse gedreht ist. Die Schranke  $c_\infty$  haben wir wieder so gewählt, dass die Konturlinie der Rekonstruktion in 10cm Tiefe gerade noch in dem Kreis mit 2cm Radius enthalten ist.

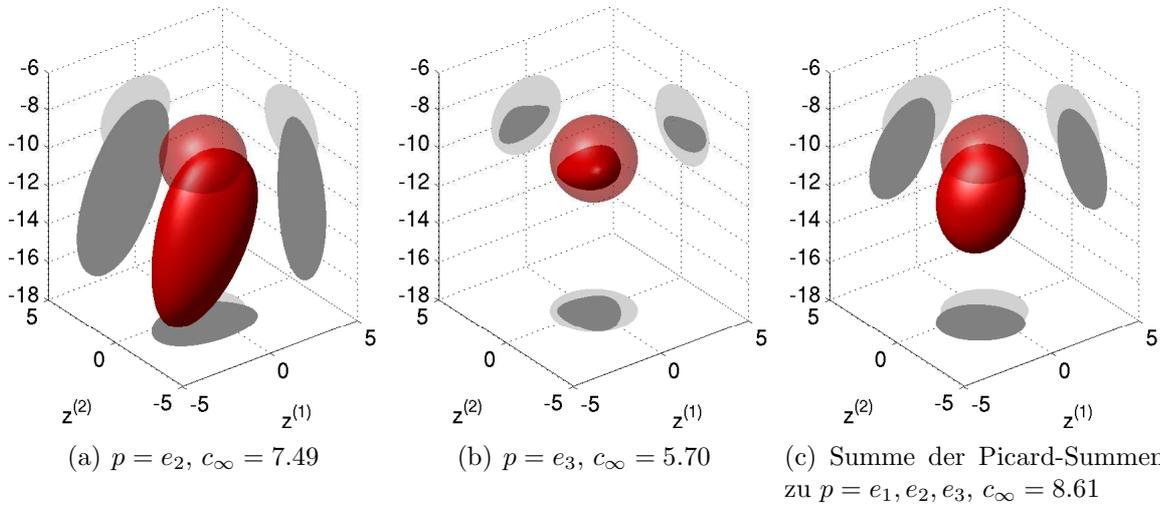


Abbildung 4.42.: Rekonstruktionen für Spulen mit einem Radius von 2cm und verschiedenen Polarisationen  $p$  der Testfunktion.

Wie wir sehen, liefert die Summe der Picard-Summen zu den drei kanonischen Polarisationen eine Rekonstruktion mit der größten Ähnlichkeit zur gesuchten Kugel. Wir verwenden daher im Folgenden zur Rekonstruktion des Ellipsoids und des Torus die Summe der drei Picard-Summen.

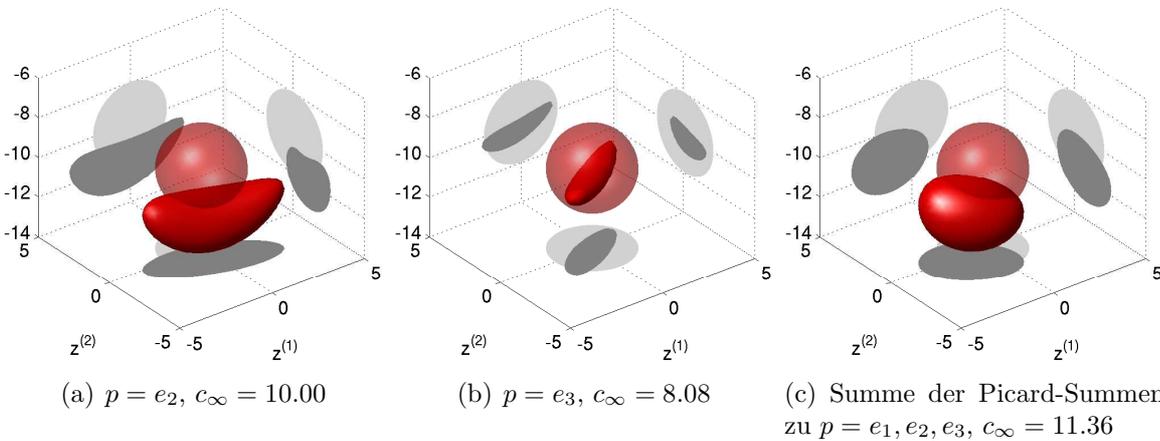


Abbildung 4.43.: Rekonstruktionen für Spulen mit einem Radius von 12cm und verschiedenen Polarisationen  $p$  der Testfunktion.

Wir möchten an dieser Stelle noch einmal festhalten, dass wir im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten, in denen wir direkt das Magnetfeld herangezogen haben, keine Aussage darüber haben, in welcher Beziehung unsere Rekonstruktion zum gesuchten Objekt steht. Die folgenden Bilder zeigen jedoch, dass wir die Objekte relativ gut re-

konstruieren können. Es ist allerdings unklar, ob die Ungenauigkeiten auf den hohen Datenfehler oder ein generelles Problem der Methode zurückzuführen sind.

In den folgenden Abbildungen betrachten wir nun Rekonstruktionen des Ellipsoiden und des gedrehten Torus für die beiden Fälle mit unterschiedlichen Spulenradien. Wir verwenden dazu das bereits bei der Kugel angewandte Sampling-Verfahren und das in Abschnitt 4.3.7 eingeführte Verfahren nach der Faktorisierungsmethode. D.h. wir verwenden in den Picard-Summen im Nenner statt des Quadrats der Singulärwerte nur die Singulärwerte. Das heuristische Verfahren aus Abschnitt 4.3.7 liefert keine brauchbaren Resultate, da sich durch die geringe Anzahl an Summanden die Oszillationen nicht hinreichend ausgleichen.

Die Abbildungen 4.44 und 4.45 zeigen nun die Rekonstruktionen des Ellipsoiden mit den beiden eben genannten Verfahren für 10 Summanden, sowie das Verfahren nach der Faktorisierungsmethode mit allen 36 Summanden. Die Schranke  $c_\infty$  wurde wieder wie bisher anhand der Konturlinie in 10cm Tiefe bestimmt. Wenn wir die beiden Abbil-

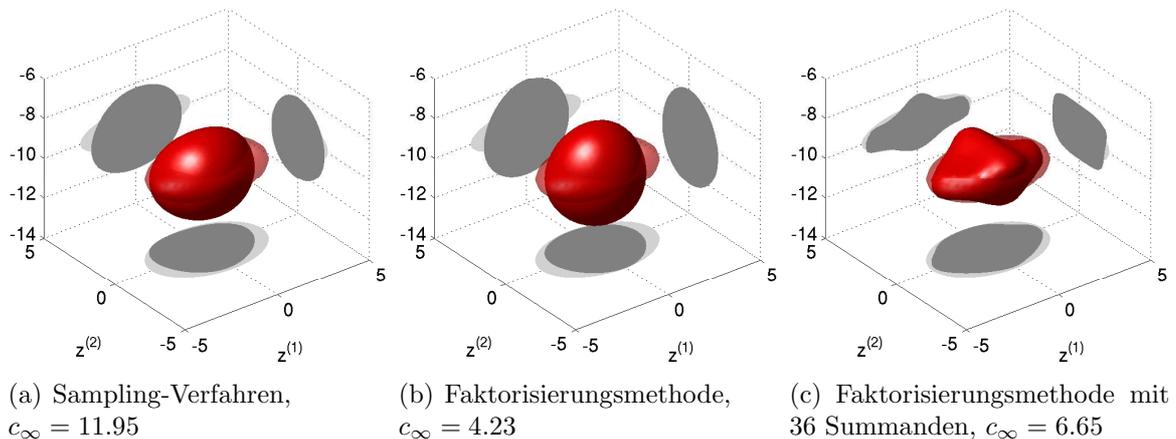


Abbildung 4.44.: Rekonstruktionen des Ellipsoiden für Spulen mit einem Radius von 2cm.

dungen vergleichen, sehen wir, dass sich der größere Spulenradius negativ auf die Rekonstruktionen auswirkt. Die Rekonstruktionen in Abbildung 4.45 zeigen eine deutliche Streckung in vertikaler Richtung. Die Graphik in der letzten Spalte der beiden Abbildungen zeigt aber, dass wir dennoch eine relativ gute Rekonstruktion erhalten können.

In den letzten beiden Abbildungen 4.46 und 4.47 betrachten wir nun den um die  $e_1$ -Achse gedrehten Torus. Wir verwenden wieder das Sampling-Verfahren und das Verfahren nach der Faktorisierungsmethode. Die Rekonstruktionen zeigen wir entsprechend wieder in der ersten bzw. zweiten Spalte der Abbildungen. Die dritte Spalte ist wieder als Referenz für die Verwendung aller Daten zu sehen.  $c_\infty$  haben wir diesmal aufgrund der unförmigen Resultate nach eigenem Ermessen gewählt. Wir sehen, dass in beiden Fällen die Drehrichtung des Torus richtig erkannt wird und sich auch in etwa eine Schei-

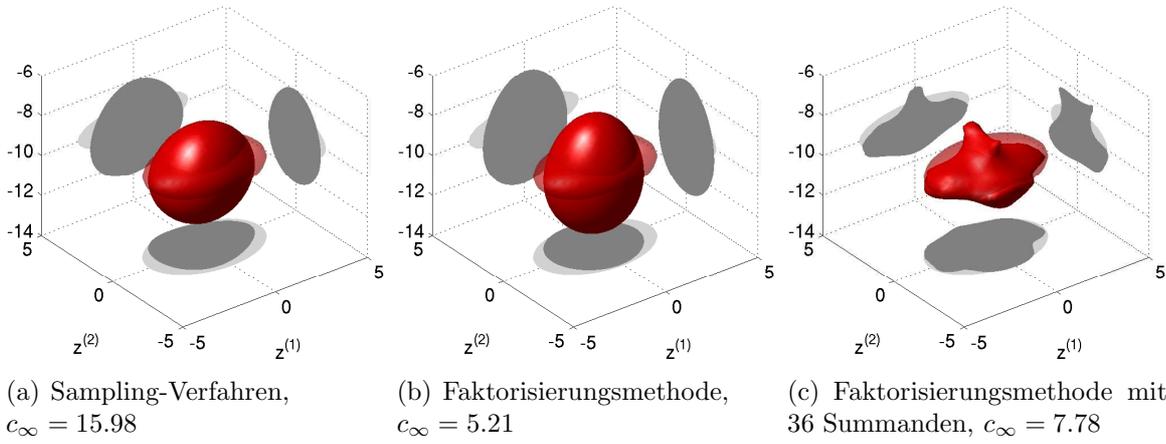


Abbildung 4.45.: Rekonstruktionen des Ellipsoids für Spulen mit einem Radius von 12cm.

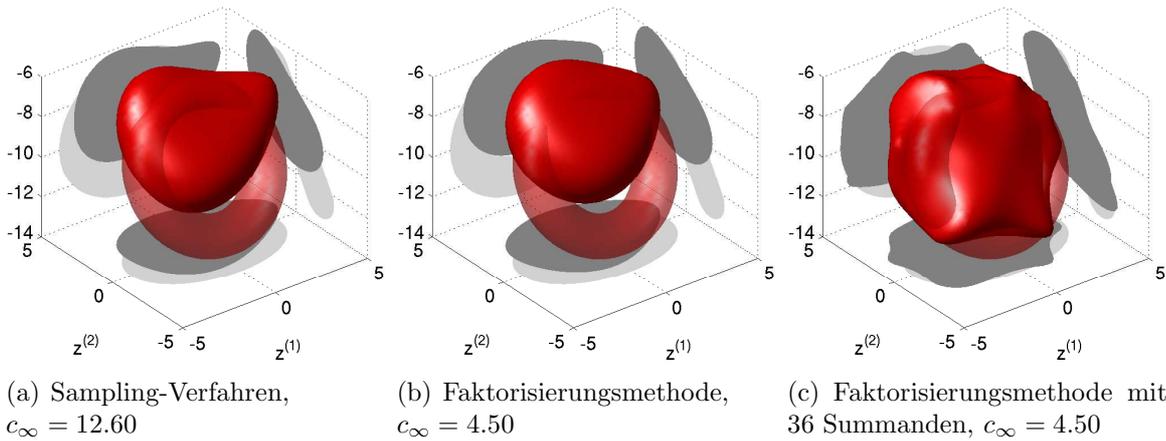


Abbildung 4.46.: Rekonstruktionen des gedrehten Torus für Spulen mit einem Radius von 2cm.

be der richtigen Größe rekonstruieren lässt. Der Unterschied zwischen den kleineren und den größeren Spulen fällt hier erst bei Verwendung aller Daten auf und fällt diesmal zu Gunsten der größeren Spulen aus.

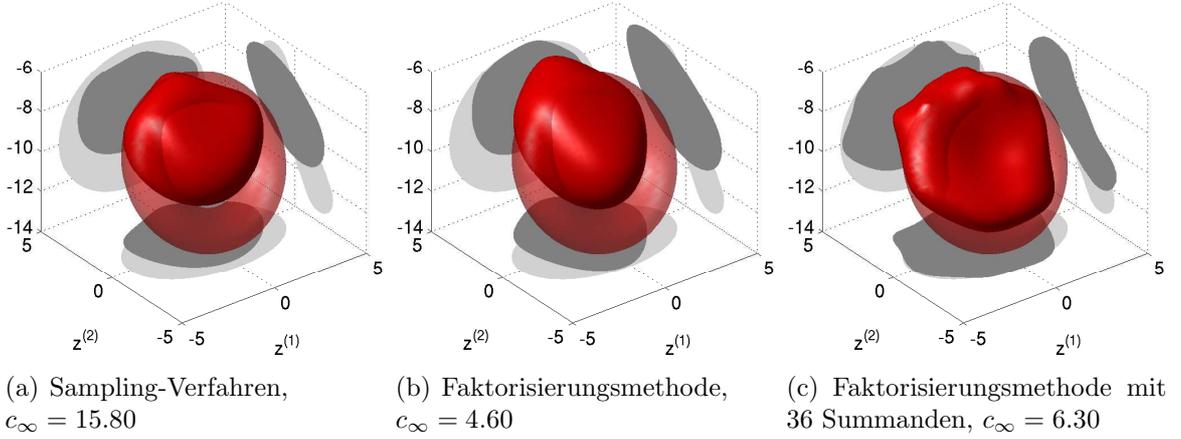


Abbildung 4.47.: Rekonstruktionen des gedrehten Torus für Spulen mit einem Radius von 12cm.

## 4.4. Greensche Funktionen

In diesem Abschnitt geben wir die Greensche Funktion, auch Fundamentallösung genannt, der Maxwell-Gleichungen für das homogene und das Zweischichtmedium an. Unter dieser Fundamentallösung verstehen wir (vgl. [Nèd01, S. 179]) die Lösung  $U$  des Systems  $LU = \delta_y \mathcal{I}_{6 \times 6}$  mit

$$L := \begin{pmatrix} \nu\kappa\epsilon_r & 0 & 0 & 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \nu\kappa\epsilon_r & 0 & \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ 0 & 0 & \nu\kappa\epsilon_r & -\partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & -\partial_3 & \partial_2 & -\nu\kappa\mu_r & 0 & 0 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 & 0 & -\nu\kappa\mu_r & 0 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 & -\nu\kappa\mu_r \end{pmatrix}.$$

Dabei sei  $\delta_y$  die Delta-Distribution mit Masse im Punkt  $y$  und  $\mathcal{I}_{n \times n}$  die Einheitsmatrix mit  $n$  Zeilen und Spalten.  $y$  liege nicht in der Trennschicht  $\Sigma_0$ . Dieses System lässt sich in die beiden Systeme

$$\begin{aligned} \nu\kappa\epsilon_r \mathbb{E}^e + \text{rot } \mathbb{H}^e &= \delta_y \mathcal{I}_{3 \times 3} & \nu\kappa\epsilon_r \mathbb{E}^m + \text{rot } \mathbb{H}^m &= 0 \\ \text{rot } \mathbb{E}^e - \nu\kappa\mu_r \mathbb{H}^e &= 0 & \text{rot } \mathbb{E}^m - \nu\kappa\mu_r \mathbb{H}^m &= \delta_y \mathcal{I}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (4.11)$$

zerlegen.  $\text{rot}$  ist dabei Spaltenweise zu verstehen und die Funktionen  $\mathbb{E}^{m/e}$  und  $\mathbb{H}^{m/e}$  mit Werten in  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$  heißen dyadische Greensche Funktionen. Damit wir die eindeutige

physikalisch sinnvolle Lösung erhalten, fordern wir noch die Ausstrahlungsbedingung

$$\iint_{\partial B_R} \left| \nu \times \mathbb{E}^e(\cdot, y)p - \sqrt{\mu_r/\epsilon_r} \operatorname{rot}_x \mathbb{H}^e(\cdot, y)p \right|^2 d\Sigma = o(1), \quad R \rightarrow \infty$$

bzw.

$$\iint_{\partial B_R} \left| \nu \times \mathbb{H}^m(\cdot, y)p + \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} \operatorname{rot}_x \mathbb{E}^m(\cdot, y)p \right|^2 d\Sigma = o(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

$\mathbb{E}^e$  und  $\mathbb{H}^e$  beschreiben das elektromagnetische Feld eines elektrischen Dipols. Entsprechend beschreiben  $\mathbb{E}^m$  und  $\mathbb{H}^m$  das Feld eines magnetischen Dipols.

#### 4.4.1. Greensche Funktion im Vollraum

Die Lösung der Systeme (4.11) im Vollraum erhalten wir analog zu [Nèd01, Thm 5.2.1]. Es ist

$$\mathbb{E}^e(x, y) = \mathbb{G}_0^e(x, y) := \frac{i}{\kappa\epsilon_r} \left( \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G_{\kappa_r}(x, y) \mathcal{I}_{3 \times 3} + D_x^2 G_{\kappa_r}(x, y) \right), \quad x \neq y \in \mathbb{R}^3 \quad (4.12)$$

und

$$\mathbb{H}^e(x, y) = \frac{1}{i\kappa\mu_r} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}_0^e(x, y) = \operatorname{rot}_x G_{\kappa_r}(x, y) \mathcal{I}_{3 \times 3} \quad (4.13)$$

mit  $\kappa_r := \kappa \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , der ausstrahlenden Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung  $G_{\kappa_r}$  aus (C.2) und der  $3 \times 3$  Einheitsmatrix  $\mathcal{I}_{3 \times 3}$ . Entsprechend ergibt sich

$$\mathbb{H}^m(x, y) = \mathbb{G}_0^m(x, y) := \frac{1}{i\kappa\mu_r} \left( \kappa^2 \epsilon_r \mu_r G_{\kappa_r}(x, y) \mathcal{I}_{3 \times 3} + D_x^2 G_{\kappa_r}(x, y) \right), \quad x \neq y \in \mathbb{R}^3 \quad (4.14)$$

und

$$\mathbb{E}^m(x, y) = \frac{i}{\kappa\epsilon_r} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}_0^m(x, y) = \operatorname{rot}_x G_{\kappa_r}(x, y) \mathcal{I}_{3 \times 3}. \quad (4.15)$$

#### 4.4.2. Greensche Funktion im geschichteten Medium

Eine Herleitung der Greenschen Funktion für das Zweischichtmedium geben wir in Anhang D. Da keine geschlossene Form der Lösung für das Zweischichtmedium bekannt ist, geben wir in Abschnitt D.2.3 nur die von uns verwendete dyadische Greensche Funktion für einen magnetischen Dipol im unteren Halbraum an. Die Felder im oberen Halbraum sind dann durch

$$\mathbb{H}^m(x, y) = \mathbb{G}^m(x, y) \text{ und } \mathbb{E}^m(x, y) = \frac{i}{\kappa\epsilon_r} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^m(x, y)$$

für  $x \cdot e_3 > 0$  und  $y \cdot e_3 < 0$  gegeben. Die jeweiligen Spalten ergeben sich aus (D.37), (D.38) und (D.33) bzw. (D.35), (D.36) und (D.34).

## 4.5. Vergleich der Greenschen Funktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich der transmittierte Teil der Fundamentallösung eines magnetischen Dipols im geschichteten Medium für kleine Frequenzen von dem des magnetischen Dipols im Vollraum unterscheidet. Wir betrachten dazu das Feld in einem Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ , das von einem magnetischen Dipol im Punkt  $(0, 0, -h) \in \mathbb{R}_-^3$  mit  $h > 0$  erzeugt wird. Wir nutzen dabei die in Anhang D hergeleitete Darstellung über Hankel-Transformationen. Die kartesischen Komponenten des  $E$ - und  $H$ -Feldes sind in Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  mit  $x = \rho \cos \phi$  und  $y = \rho \sin \phi$  als Summen von Hankel-Transformierten der Form

$$T_0(\phi) [\mathcal{H}_0(\lambda \mapsto g_0(\lambda, z; \omega))] (\rho) + T_1(\phi) [\mathcal{H}_1(\lambda \mapsto g_1(\lambda, z; \omega))] (\rho)$$

gegeben. Dabei sind  $g_0$  und  $g_1$  je nach betrachtetem Feld und betrachteter kartesischer Komponente verschiedene Kombinationen der Funktionen  $f_0^+$ ,  $f_1^+$  und  $f_2^+$  aus (D.32).  $T_0$  und  $T_1$  sind entsprechend verschiedene Kombinationen trigonometrischer Funktionen. Wir entwickeln daher nun für die drei Komponenten der beiden Felder die einzigen von  $\omega$  abhängenden Funktionen  $g_0$  und  $g_1$  für  $\omega \rightarrow 0$  und verwenden dabei die folgenden Bezeichner:

$$\kappa := \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad \beta_{\pm} := \sqrt{\kappa^2 \epsilon_r^{\pm} \mu_r^{\pm} - \lambda^2}, \quad \epsilon_r^{\pm} := \frac{1}{\epsilon_0} (\epsilon_{\pm} + i \frac{\sigma_{\pm}}{\omega}), \quad \tilde{e} := e^{-\lambda(z+h)}$$

mit  $\epsilon_{\pm}, \mu_r^{\pm} > 0$ ,  $\lambda, \sigma_{\pm} \geq 0$  und  $\Im \beta_{\pm} \geq 0$ .

Wir betrachten zunächst das  $H$ -Feld im oberen Halbraum, das von einem vertikalen Dipol im unteren Halbraum erzeugt wird. Bis auf Konstanten und Potenzen von  $\lambda$ , die nicht von der Frequenz  $\omega$  abhängen, erhalten wir aus (D.33) für die ersten beiden Komponenten des Feldes  $\beta_+ f_0^+ / \kappa$  als zu transformierende Funktion und  $f_0^+ / \kappa$  für die dritte Komponente. Es ergeben sich dann bis auf konstante Faktoren die folgenden Entwicklungen:

$$\frac{\beta_+ f_0^+}{\kappa} \sim \frac{\tilde{e}}{\kappa} \left( \frac{2}{\mu_r^+ + \mu_r^-} + i \frac{\epsilon_0 \mu_0}{(\mu_r^+ + \mu_r^-)^2 \lambda^2} \left( \lambda (\mu_r^+ \sigma_+ z + \mu_r^- \sigma_- h) (\mu_r^+ + \mu_r^-) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_r^+ (\mu_r^- \sigma_- - \mu_r^+ \sigma_+) \right) \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \right)$$

und

$$\frac{f_0^+}{\kappa} \sim \frac{\tilde{e}}{\kappa} \left( \frac{2}{i(\mu_r^+ + \mu_r^-) \lambda} + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{(\mu_r^+ + \mu_r^-)^2 \lambda^3} \left( \lambda (\mu_r^+ \sigma_+ z + \mu_r^- \sigma_- h) (\mu_r^+ + \mu_r^-) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_r^+ \mu_r^- (\sigma_+ + \sigma_-) \right) \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \right). \quad (4.16)$$

Für Dipole mit zur Trennschicht tangentialer Polarisation erhalten wir aus (D.37) und (D.38)  $\frac{\lambda}{\kappa\mu_r^-}f_1^+ + \beta_+f_2^+$  und  $\kappa\epsilon_r^+f_1^+$  für die ersten beiden Komponenten und  $\lambda f_2^+ - \frac{\beta_+}{\kappa\mu_r^-}f_1^+$  für die dritte Komponente des  $H$ -Feldes als die wesentlichen Funktionen. Bis auf konstante Faktoren ergeben sich für ihre Entwicklung nach  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\kappa\mu_r^-}f_1^+ + \beta_+f_2^+ &\sim \frac{\tilde{\epsilon}}{\kappa} \left( \frac{2}{i(\mu_r^+ + \mu_r^-)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon_0\mu_0}{(\sigma_+ + \sigma_-)(\mu_r^+ + \mu_r^-)^2\lambda^2} \left( \lambda(\mu_r^+\sigma_+z + \mu_r^-\sigma_-h)(\sigma_+ + \sigma_-)(\mu_r^+ + \mu_r^-) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_+\sigma_-(\mu_r^+ + \mu_r^-)^2 - (\mu_r^+\sigma_+ - \mu_r^-\sigma_-)^2 \right) \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \right), \\ \kappa\epsilon_r^+f_1^+ &\sim \frac{\tilde{\epsilon}}{\kappa} \left( \frac{\mu_0\mu_r^-}{\mu_r^+} \frac{2\sigma_+\sigma_-}{(\sigma_+ + \sigma_-)\lambda} \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda f_2^+ - \frac{\beta_+}{\kappa\mu_r^-}f_1^+ &\sim \frac{\tilde{\epsilon}}{\kappa} \left( -\frac{2}{\mu_r^+ + \mu_r^-} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon_0\mu_0}{i(\mu_r^+ + \mu_r^-)^2\lambda^2} \left( \lambda(\mu_r^+\sigma_+z + \mu_r^-\sigma_-h)(\mu_r^+ + \mu_r^-) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_r^-(\mu_r^+\sigma_+ - \mu_r^-\sigma_-) \right) \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \right). \quad (4.17) \end{aligned}$$

Betrachten wir die Terme der Entwicklungen, so fällt auf, dass der Term zur Potenz  $\omega^0$  jeweils nur von  $\mu_r^\pm$  abhängt und der zur Potenz  $\omega^1$  zusätzlich noch von  $\sigma_\pm$  aber nicht von  $\epsilon_\pm$ . Berücksichtigen wir, dass die Herleitung der Fundamentallösung in Kapitel D nicht voraussetzt, dass diese Parameter verschieden sind, so entsprechen die obigen Entwicklungen für  $\mu_r^+ = \mu_r^-$ ,  $\sigma_+ = \sigma_-$  und  $\epsilon_r^+ = \epsilon_r^-$  Entwicklungen für die entsprechenden Komponenten der Greenschen Funktion im Vollraum. Insbesondere sehen wir, dass sich die Entwicklungen für die Greensche Funktion im Vollraum und für die Greensche Funktion des Zweischichtmediums für  $\mu_r^+ = \mu_r^-$  erst ab dem Term zur Potenz  $\omega^1$  und für zusätzlich gleiche  $\sigma_+ = \sigma_-$  erst nach diesem Term unterscheiden. Es gilt somit für einen Polarisationsvektor  $0 \neq p \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{|\mathbb{G}_0^m(x, y)p - \mathbb{G}^m(x, y)p|}{|\mathbb{G}_0^m(x, y)p|} = \begin{cases} \mathcal{O}(\omega), & \mu_r^+ = \mu_r^-, \\ \mathcal{O}(\omega^2), & \mu_r^+ = \mu_r^- \text{ und } \sigma_+ = \sigma_-. \end{cases}$$

Für kleine Frequenzen und ähnliche Materialparameter in beiden Halbräumen ist die Greensche Funktion im Vollraum mit den Parametern für einen der beiden Halbräume

daher eine gute Näherung an die Greensche Funktion des Zweischichtmediums. Somit ist das  $H$ -Feld eines magnetischen Dipols im Vollraum für kleine Frequenzen und ähnliche Materialparameter in beiden Halbräumen eine gute Näherung an das  $H$ -Feld eines magnetischen Dipols im Zweischichtmedium.

Im folgenden Abschnitt verifizieren wir die eben hergeleitete Asymptotik auch für unsere numerische Approximation der Greenschen Funktion im Zweischichtmedium.

Betrachten wir nun das zugehörige  $E$ -Feld im oberen Halbraum  $\frac{i}{\kappa\epsilon_r^+} \text{rot}_x \mathbb{G}^m$ , das von einem magnetischen Dipol im unteren Halbraum erzeugt wird. Eine Entwicklung die wie im Falle des  $H$ -Feldes eine ähnlich gute Näherung der Rotation der Greenschen Funktion im Vollraum an die Rotation der Greenschen Funktion des Zweischichtmediums liefert, erhalten wir nur für einen vertikalen Dipol. Die wesentliche zu entwickelnde Funktion ist hier nach (D.34)  $f_0^+$  für die ersten beiden Komponenten des Feldes. Die dritte Komponente des  $E$ -Feldes ist konstant Null. Die Entwicklung von  $f_0^+$  für  $\omega \rightarrow 0$  ergibt sich analog zu der von  $f_0^+/\kappa$  im Falle des  $H$ -Feldes (4.16). Wir erhalten also die Gleichheit der ersten Terme für die Entwicklungen der Rotation der Greenschen Funktion im Vollraum und der Rotation der Greenschen Funktion des Zweischichtmediums. Für den Term zur Potenz  $\omega^0$  gilt die Gleichheit für  $\mu_r^+ = \mu_r^-$  und für den Term zur Potenz  $\omega^1$ , wenn weiterhin  $\sigma_+ = \sigma_-$  ist. Wir erhalten also

$$\frac{|\text{rot}_x \mathbb{G}_0^m(x, y)e_3 - \text{rot}_x \mathbb{G}^m(x, y)e_3|}{|\text{rot}_x \mathbb{G}_0^m(x, y)e_3|} = \begin{cases} \mathcal{O}(\omega), & \mu_r^+ = \mu_r^-, \\ \mathcal{O}(\omega^2), & \mu_r^+ = \mu_r^- \text{ und } \sigma_+ = \sigma_-. \end{cases}$$

Die Entwicklungen der Rotation der Greenschen Funktion im Vollraum und der Rotation der Greenschen Funktion des Zweischichtmediums für die ersten beiden Komponenten des  $E$ -Feldes magnetischer Dipole parallel zur Trennschicht unterscheiden sich schon für  $\mu_r^+ = \mu_r^-$  im Term zur Potenz  $\omega^0$ , wie wir in (4.18) sehen. Die wesentlichen Funktionen sind hier nach (D.35) und (D.36)  $\kappa f_2^+$  und  $\beta_+ f_1^+/\mu_r^- - \lambda \kappa f_2^+$  für die ersten beiden Komponenten und  $f_1^+$  für die dritte Komponente des  $E$ -Feldes. Bis auf konstante Faktoren erhalten wir für die Entwicklungen nach  $\omega$ :

$$f_1^+ \sim 2\tilde{\epsilon} \frac{\sigma_-}{i(\sigma_+ + \sigma_-)\lambda} + \mathcal{O}(\omega) \quad \text{und} \quad \kappa f_2^+ \sim 2\tilde{\epsilon} \frac{\sigma_+ \mu_r^+ - \sigma_- \mu_r^-}{(\mu_r^+ + \mu_r^-)(\sigma_+ + \sigma_-)\lambda} + \mathcal{O}(\omega). \quad (4.18)$$

Die Entwicklung von  $\beta_+ f_1^+/\mu_r^- - \lambda \kappa f_2^+$  ergibt sich analog zur Entwicklung von  $\lambda f_2^+ - \frac{\beta_+}{\kappa \mu_r^-} f_1^+$  (4.17).

## Vergleich der numerischen Approximationen

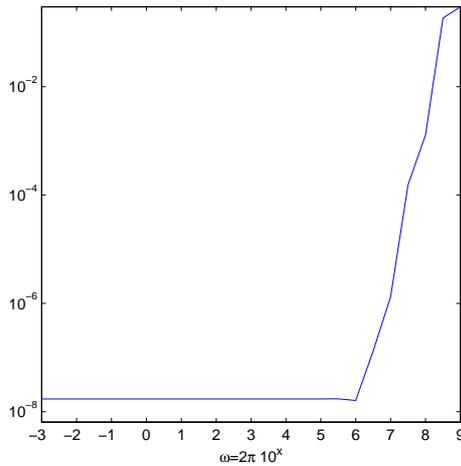
Betrachten wir zunächst, wie sich unsere Approximation der Greenschen Funktion des Zweischichtmediums und deren Rotation für die Materialparameter des Vakuums im Vergleich zur exakten Lösung für verschiedene Frequenzen verhält. Dazu werten wir

$$\frac{|\mathbb{G}_0^m(x, y)p - \mathbb{G}^m(x, y)p|}{|\mathbb{G}_0^m(x, y)p|} \quad (4.19a)$$

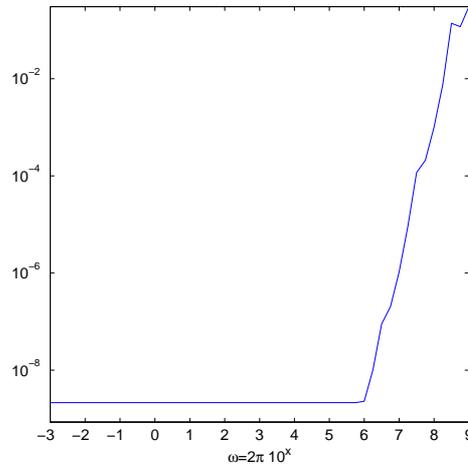
und

$$\frac{|\operatorname{rot}_x \mathbb{G}_0^m(x, y)p - \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^m(x, y)p|}{|\operatorname{rot}_x \mathbb{G}_0^m(x, y)p|} \quad (4.19b)$$

für verschiedene Frequenzen im Punkt  $x = (0.05, 0.03, 0.01)^T$  für einen Dipol in  $y = (0, 0, -0.1)^T$  mit Polarisation  $p = (1, 1, 1)^T$  und  $\epsilon_r^\pm = \mu_r^\pm = 1$  aus. Wir verwenden für  $\mathbb{G}^m$  und  $\operatorname{rot}_x \mathbb{G}^m$  die Approximation mittels schneller Hankel-Transformation (vgl. Anhang B.3) und für  $\mathbb{G}_0^m$  und  $\operatorname{rot}_x \mathbb{G}_0^m$  eine Implementierung der expliziten Darstellung der Funktionen (4.14), (4.15). Abbildung 4.48 zeigt die Graphen bzgl. doppelt logarithmi-



(a) (4.19a)



(b) (4.19b)

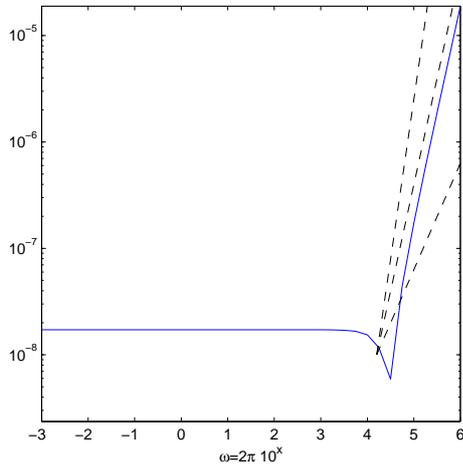
Abbildung 4.48.: Relativer Fehler der Greenschen Funktionen im Vakuum.

scher Achsen. Wir sehen daran, dass wir bis zu einer Frequenz von  $10^6$  Hz eine Approximation im Bereich einfacher Genauigkeit erhalten. Eine höhere Genauigkeit können wir aufgrund der von uns verwendeten Methode zur Berechnung der Hankel-Transformierten auch nicht erwarten (vgl. Abb. B.2). Da die Genauigkeit für höhere Frequenzen rapide abnimmt, untersuchen wir das asymptotische Verhalten unserer Approximation nur bis zur Frequenz von  $10^6$  Hz.

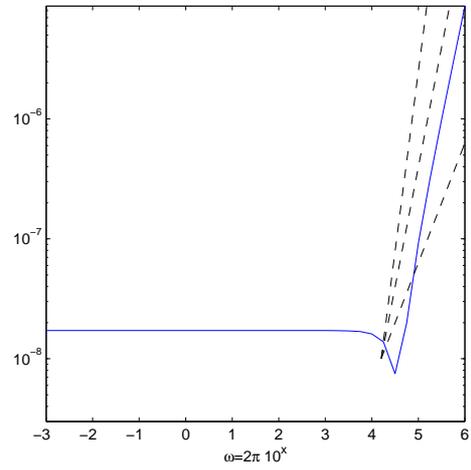
Die doppelt logarithmisch aufgetragenen Graphen in Abbildung 4.49 belegen das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion des Zweischichtmediums, das wir im letzten Abschnitt analytisch gesehen haben, auch für unsere numerische Approximation der Greenschen Funktion des Zweischichtmediums. D.h. für  $\mu_r^+ = \mu_r^-$  ist die Greensche Funktion des Vollraums eine Approximation der Greenschen Funktion des Zweischichtmediums bis auf  $\mathcal{O}(\omega)$ . Gilt zusätzlich noch  $\sigma_+ = \sigma_-$ , so approximiert die Greensche Funktion im Vollraum die Greensche Funktion des Zweischichtmediums bis auf  $\mathcal{O}(\omega^2)$ . Um diese Asymptotik zu verdeutlichen, entsprechen die gestrichelten schwarzen Linien Geraden mit den Steigungen 1,2 und 3. Die blauen Linien zeigen wieder die Werte von

#### 4. Numerische Ergebnisse und Experimente

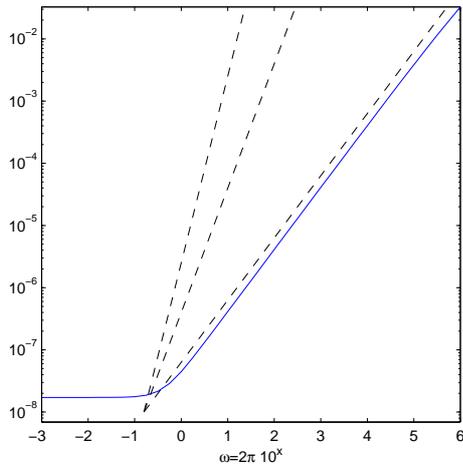
---



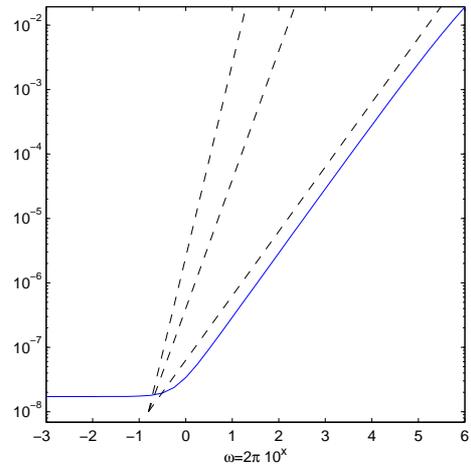
(a)  $\sigma_+ = \sigma_- = 0$



(b)  $\sigma_+ = \sigma_- = 1$

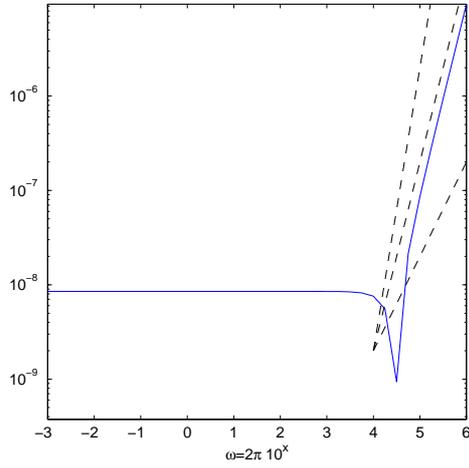


(c)  $\sigma_+ = 0, \quad \sigma_- = 1$

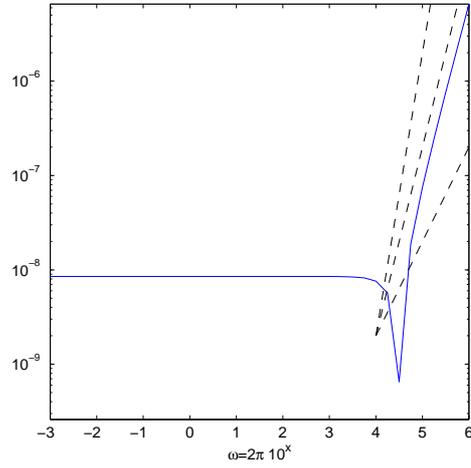


(d)  $\sigma_+ = 1, \quad \sigma_- = 2$

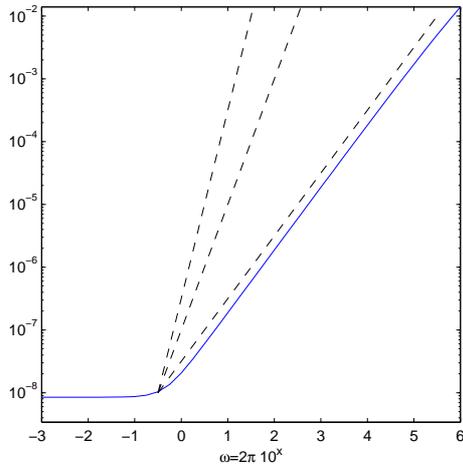
Abbildung 4.49.: Relative Differenz der Greenschen Funktionen für verschiedene Frequenzen und Materialparameter (4.19a). Schwarz gestrichelt sind Geraden mit den Steigungen 1,2 und 3.



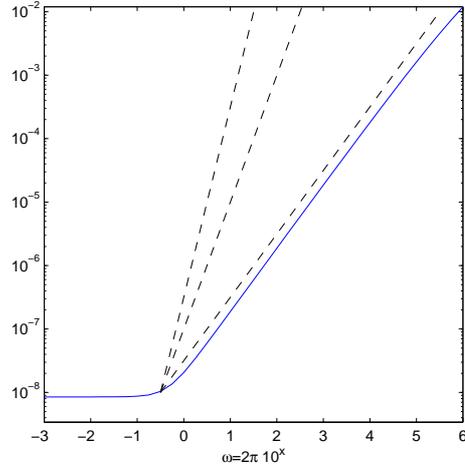
(a)  $\sigma_+ = \sigma_- = 0$



(b)  $\sigma_+ = \sigma_- = 1$



(c)  $\sigma_+ = 0, \quad \sigma_- = 1$



(d)  $\sigma_+ = 1, \quad \sigma_- = 2$

Abbildung 4.50.: Relative Differenz der Rotation der Greenschen Funktionen für verschiedene Frequenzen und Materialparameter (4.19b). Schwarz gestrichelt sind Geraden mit den Steigungen 1,2 und 3.

(4.19a) für den gleichen Punkt  $x$  und den gleichen Dipol in  $y$  wie zu Beginn des Abschnitts. Die Materialparameter haben wir nun mit  $\mu_r^\pm = 1$ ,  $\epsilon_r^+ = 1 + i\frac{\sigma_+}{\epsilon_0\omega}$ ,  $\epsilon_r^- = 10 + i\frac{\sigma_-}{\epsilon_0\omega}$  und  $\sigma_\pm$  wie in der Abbildung angegeben angenommen.

Abbildung 4.50 zeigt entsprechend die Werte von (4.19b) für  $p = e_3$  und belegt das gleiche asymptotische Verhalten für das  $E$ -Feld, d.h. die Rotation der Greenschen Funktion, eines vertikal polarisierten magnetischen Dipols. Die anderen Parameter wurden nicht verändert.

# A. Formelsammlung

## A.1. Notationen

Wir bezeichnen mit  $(e_1, e_2, e_3)$  die kanonischen Basisvektoren des  $\mathbb{R}^3$  und mit  $\mathcal{I}_{n \times n}$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix.

### A.1.1. Mengen

$B_R(x), B_R$	Ball mit Radius $R$ um den Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ , bzw. 0
$\mathbb{C}^n$	$n$ -dimensionaler komplexer Euklidischer Raum
$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \geq 0, \Im z \geq 0\}$	1. Quadrant
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen ohne 0, natürliche Zahlen mit 0
$\mathcal{M}$	Messebene, $\mathcal{M} \subset \Sigma_d, d > 0$
$\mathfrak{N}(A)$	Kern der linearen Abbildung $A$
$\Omega$	Einschlüsse mit $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}_+^3$ und zshgd. Komplement
$\mathbb{R}^n$	$n$ -dimensionaler reeller Euklidischer Raum
$\mathbb{R}_\pm^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 \gtrless 0\}$	oberer bzw. unterer Halbraum
$\mathfrak{R}(A)$	Bildraum der linearen Abbildung $A$
$\Sigma_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot e_3 = d\}$	Ebene der Höhe $d$
$\bar{D}$	Abschluß der Menge $D$
$\partial D$	Rand der Menge $D$
$ D $	Volumen der Menge $D$
$o(\cdot), \mathcal{O}(\cdot)$	Landau-Symbole

### A.1.2. Abbildungen und Operatoren

$ x $	Euklidische Norm für $x \in \mathbb{C}^n$
$x \cdot y = y \cdot x$	Euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und Bilinearform auf $\mathbb{C}^n, x, y \in \mathbb{C}^n$
$x \wedge y = -y \wedge x$	Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$
$(\cdot)^T$	Transponieren eines Vektors oder einer Matrix, dualer Operator
$\Re z, \Im z$	Real- bzw. Imaginärteil einer Zahl $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$	komponentenweise Komplexkonjugation, $z \in \mathbb{C}^n$

Sei  $\mathcal{F}$  eine Fläche mit Normalenfeld  $\nu$  und  $\gamma$  eine Kurve mit Tangentialfeld  $\tau$  in  $\mathbb{R}^3$ . Weiterhin sei  $f$  eine skalare Funktion und  $F, G$  seien Vektorfelder in  $\mathbb{R}^3$ .

$\operatorname{div} F, \operatorname{grad} f, \operatorname{rot} F$	Differentialoperatoren (vgl. Abschnitt A.3.1 und A.3.2)
$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$	Laplace-Operator
$\operatorname{div}_{\mathcal{F}} F, \operatorname{grad}_{\mathcal{F}} f, \operatorname{rot}_{\mathcal{F}} F, \vec{\operatorname{rot}}_{\mathcal{F}} f$	Differentialoperatoren auf der Fläche $\mathcal{F}$ (vgl. S. 23)
$[F]_{\mathcal{F}} = \lim_{h \rightarrow 0} [F(\cdot + \nu h) - F(\cdot - \nu h)]$	Sprung des Feldes $F$ an der Fläche $\mathcal{F}$
$[\mathcal{H}_n(f)]$	Hankel-Transformation der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$
$\int_A f(x) dx$	Lebesgue-Integral über die Menge $A$
$\int_{\mathcal{F}} F(x) \cdot \nu d\Sigma(x), \int_{\mathcal{F}} f(x) d\Sigma(x)$	Flächenintegral bzw. Lebesgue-Integral über die Fläche $\mathcal{F}$
$\int_{\gamma} F(x) \cdot \tau d\gamma$	Kurvenintegral über die Kurve $\gamma$
$(F   G)_{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{M}} F(x) \cdot G(x) d\Sigma$	Bilinearform auf $L^2(\mathcal{M})$
$(F   \overline{G})_{\mathcal{M}}$	Skalarprodukt auf $L^2(\mathcal{M})$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$	duale Paarung zwischen dem Raum $A$ und seinem Dualraum

### Spezielle Operatoren und Funktionen

$\mathbb{G}_0^m$	magnetische dyadische Greensche Funktion im homogenen Medium	S. 81
$\mathbb{G}^m$	magnetische dyadische Greensche Funktion im Zweischichtmedium	S. 81
$h_z^p$	Testfunktion	S. 34
$h_{t,z}^p$	Testfunktion für tangentielle Felder	S. 34
$h_{n,z}^p$	Testfunktion für normale Felder	S. 34
$h_{u,z}^p$	Testfunktion für Spannungen	S. 37
$L$	Operator der Faktorisierung von $M$	S. 26
$M$	Messoperator	S. 25
$M_t$	Messoperator für tangentielle Felder	S. 26
$M_n$	Messoperator für normale Felder	S. 26
$M_u$	Messoperator für Spannungen	S. 34
$\mathbb{M}_h$	diskretisierter Messoperator	S. 41

### A.1.3. Funktionenräume

$H(\text{rot}; \Omega)$	Sobolev-Raum für komplexwertige Vektorfelder mit quadratisch integrierbarer Rotation	S. 23
$H_{\text{loc}}(\text{rot}; \Omega)$	Sobolev-Raum für komplexwertige Vektorfelder mit lokal quadratisch integrierbarer Rotation	S. 23
$H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$	Spurraum von $\nu \wedge (\cdot) _{\partial\Omega}$ auf $H(\text{rot}; \Omega)$ oder $H_{\text{loc}}(\text{rot}; \Omega)$	S. 23
$H_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$	Spurraum von $(\nu \wedge (\cdot) _{\partial\Omega}) \wedge \nu$ auf $H(\text{rot}; \Omega)$ oder $H_{\text{loc}}(\text{rot}; \Omega)$	S. 23
$L^2(\mathcal{M})$	quadratisch integrierbare komplexwertige Vektorfelder auf $\mathcal{M}$	S. 25
$L_t^2(\mathcal{M})$	quadratisch integrierbare komplexw. Tangentialfelder auf $\mathcal{M}$	S. 25
$L_n^2(\mathcal{M})$	quadratisch integrierbare komplexwertige Normalfelder auf $\mathcal{M}$	S. 25

### A.1.4. Physikalische Parameter

$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit	S. 6
$\epsilon_0$	elektrische Permittivität im Vakuum	S. 6
$\mu_0$	magnetische Permeabilität im Vakuum	S. 6
$\omega, \omega_0$	Winkelgeschwindigkeit	S. 7
$\kappa$	Wellenzahl	S. 8
$\epsilon_r^\pm$	relative elektrische Permittivität im oberen bzw. unteren Halbraum	S. 8
$\mu_r^\pm$	relative magnetische Permeabilität im oberen bzw. unteren Halbraum	S. 8

## A.2. Vektorgleichungen

Seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  Vektoren.

$$u \wedge (v \wedge w) = v(u \cdot w) - w(u \cdot v) \quad (\text{A.1})$$

$$u \cdot (v \wedge w) = v \cdot (w \wedge u) = w \cdot (u \wedge v) \quad (\text{A.2})$$

## A.3. Koordinatensysteme

### A.3.1. Kartesische Koordinaten

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Basisvektoren:

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Differentialoperatoren:

$$\text{grad } f = e_1 \partial_1 f + e_2 \partial_2 f + e_3 \partial_3 f e_3 \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta F = e_1 \Delta F_1 + e_2 \Delta F_2 + e_3 \Delta F_3 \quad (\text{A.5})$$

$$\text{div } F = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 \quad (\text{A.6})$$

$$\text{rot } F = \text{grad} \wedge F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)e_1 + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)e_2 + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)e_3 \quad (\text{A.7})$$

### A.3.2. Zylinderkoordinaten

$$f : \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \mapsto f(\rho, \phi, z) : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F : \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \mapsto F_\rho(\rho, \phi, z)\hat{\rho} + F_\phi(\rho, \phi, z)\hat{\phi} + F_z(\rho, \phi, z)\hat{z} : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Basisvektoren:

$$\hat{\rho} := \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\phi} := \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{z} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Differentialoperatoren:

$$\text{grad } f = \hat{\rho} \partial_\rho f + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \partial_\phi f + \hat{z} \partial_z f \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho f) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 f + \partial_z^2 f \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta F = \hat{\rho} \left( \Delta F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \partial_\phi F_\phi \right) + \hat{\phi} \left( \Delta F_\phi - \frac{1}{\rho^2} F_\phi + \frac{2}{\rho^2} \partial_\phi F_\rho \right) + \hat{z} \Delta F_z \quad (\text{A.10})$$

$$\text{div } F = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\phi F_\phi + \partial_z F_z = \partial_\rho F_\rho + \frac{1}{\rho} (F_\rho + \partial_\phi F_\phi) + \partial_z F_z \quad (\text{A.11})$$

$$\text{rot } F = \left( \frac{1}{\rho} \partial_\phi F_z - \partial_z F_\phi \right) \hat{\rho} + (\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z) \hat{\phi} + \left( \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho} \partial_\phi F_\rho \right) \hat{z} \quad (\text{A.12})$$

# B. Die Hankel-Transformation

## B.1. Definition und Eigenschaften

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  und ein  $n \in \mathbb{N}_0$  ist die Hankel-Transformation  $n$ -ter Ordnung durch

$$[\mathcal{H}_n(f)](\lambda) := \tilde{f}_n(\lambda) := \int_0^\infty \rho f(\rho) J_n(\lambda \rho) d\rho, \quad \lambda \in (0, \infty) \quad (\text{B.1})$$

definiert. Dabei ist  $J_n$  die  $n$ -te Besselfunktion 1. Art mit (vgl. [Wat58, Kap. 2])

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi - t \sin \varphi) d\varphi = \left(\frac{1}{2}t\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}t^2)^k}{k!(k+n)!}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.2})$$

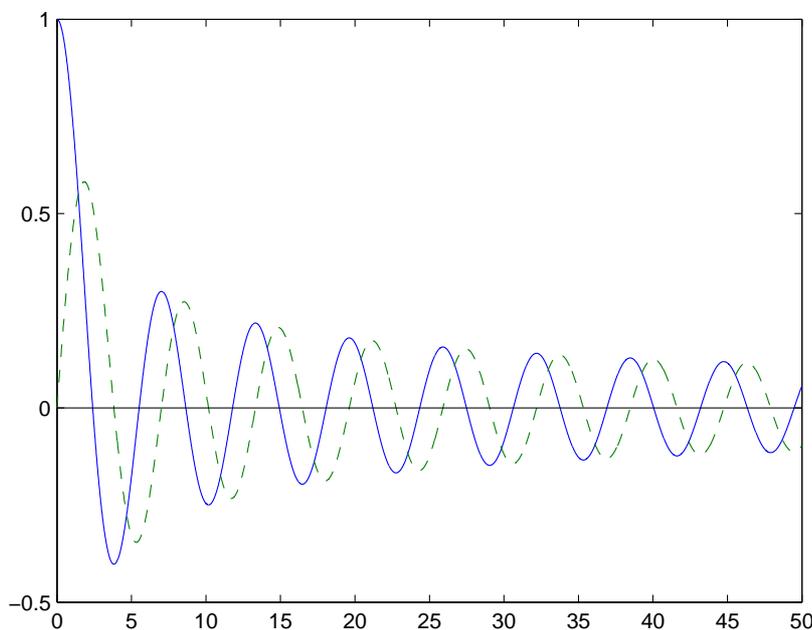


Abbildung B.1.:  $J_0$  und  $J_1$  (gestrichelt)

Ihre Umkehrung

$$\left[ \mathcal{H}_n^{-1} \left( \tilde{f}_n \right) \right] (\rho) := \int_0^\infty \lambda \tilde{f}_n(\lambda) J_n(\lambda \rho) d\lambda, \quad \rho \in (0, \infty) \quad (\text{B.3})$$

ergibt sich aus

**Satz B.1** (Hankels Integralformel): *Sei*

$$\int_0^\infty |f(\rho)| \sqrt{\rho} d\rho < \infty$$

und  $f$  von beschränkter Variation in einer Umgebung von  $r \in \mathbb{R}^+$ , dann gilt

$$\frac{1}{2}(f(r+0) + f(r-0)) = \int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r) \int_0^\infty \rho f(\rho) J_n(\lambda \rho) d\rho d\lambda.$$

(vgl. [Wat58, §14.4])

Dabei ist die erste Bedingung an  $f$  hinreichend für die Existenz der Hankel-Transformation.

**Definition B.2:** Gilt  $\left| \int_0^\infty f(\rho) d\rho \right| < \infty$ , so sagen wir, dass das Integral bedingt existiert. Ist  $f \in L^1((0, \infty), \mathbb{C})$ , so sagen wir, dass das Integral absolut existiert.

**Satz B.3:** *Sei*  $\int_0^\infty |f(\rho)| \sqrt{\rho} d\rho < \infty$ , *dann existiert die Hankel-Transformation*  $\tilde{f}_n$  *und das Integral (B.1) existiert absolut.*

*Beweis.* Seien  $\lambda, C > 0$  beliebig. Nach [AS72, (9.2.1)] ist  $J_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ . Wähle daher  $a > 0$ , so dass  $|J_n(\lambda \rho) \sqrt{\lambda \rho}| < C$  für alle  $\rho > a$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \infty &> \sqrt{\lambda} \int_0^a |f(\rho) \rho J_n(\lambda \rho)| d\rho + C \int_0^\infty |f(\rho) \sqrt{\rho}| d\rho \\ &\geq \sqrt{\lambda} \int_0^a |f(\rho) \rho J_n(\lambda \rho)| d\rho + \int_a^\infty |f(\rho) \sqrt{\rho}| |J_n(\lambda \rho) \sqrt{\lambda \rho}| d\rho \\ &= \sqrt{\lambda} \left( \int_0^\infty |f(\rho) \rho J_n(\lambda \rho)| d\rho \right) \geq \sqrt{\lambda} \left| \int_0^\infty f(\rho) \rho J_n(\lambda \rho) d\rho \right|. \end{aligned}$$

□

**Satz B.4:** *Es sei*  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho f(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho f'(\rho) = 0$  *und*  $f$  *sowie*  $f'$  *erfüllen die Voraussetzung von Satz B.3, dann gilt*

$$\left[ \mathcal{H}_n \left( \rho \mapsto \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} f(\rho) \right) - \frac{n^2}{\rho^2} f(\rho) \right) \right] (\lambda) = -\lambda^2 [\mathcal{H}_n(f)](\lambda). \quad (\text{B.4})$$

*Beweis.* Sei  $\lambda > 0$  und  $0 < a < b$ . Nach [Wat58, 2.13 (1)] gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \rho J'_n(\lambda \rho) + (\lambda \rho)^2 J''_n(\lambda \rho) + ((\lambda \rho)^2 - n^2) J_n(\lambda \rho) = \lambda \rho \frac{d}{d\rho}(\rho J'_n(\lambda \rho)) + ((\lambda \rho)^2 - n^2) J_n(\lambda \rho). \\ &\implies 0 = \lambda \frac{d}{d\rho}(\rho J'_n(\lambda \rho)) + \rho(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2}) J_n(\lambda \rho). \end{aligned} \quad (*)$$

Mit zweimaliger partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} f(\rho) \right) J_n(\lambda \rho) \rho \, d\rho - \int_a^b \frac{n^2}{\rho^2} f(\rho) J_n(\lambda \rho) \rho \, d\rho \\ &= [\rho f'(\rho) J_n(\lambda \rho)]_a^b - \lambda \int_a^b \rho f'(\rho) J'_n(\lambda \rho) \, d\rho - \int_a^b \frac{n^2}{\rho^2} f(\rho) J_n(\lambda \rho) \rho \, d\rho \\ &= [\rho f'(\rho) J_n(\lambda \rho)]_a^b - \lambda [\rho f(\rho) J'_n(\lambda \rho)]_a^b + \lambda \int_a^b f(\rho) \frac{d}{d\rho}(\rho J'_n(\lambda \rho)) \, d\rho - \int_a^b \frac{n^2}{\rho^2} f(\rho) J_n(\lambda \rho) \rho \, d\rho \\ &\stackrel{(*)}{=} [\rho f'(\rho) J_n(\lambda \rho)]_a^b - \lambda [\rho f(\rho) J'_n(\lambda \rho)]_a^b - \lambda^2 \int_a^b f(\rho) \rho J_n(\lambda \rho) \, d\rho. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} f(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} f'(\rho) = 0$  und nach [AS72, (9.2.1)]  $J_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$  für  $\rho \rightarrow \infty$  gilt, folgt die Behauptung aus dem Grenzübergang  $a \rightarrow 0$  und  $b \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Satz B.5:** Seien  $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ ,  $x > 0$  und  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\int_0^\infty |f(\rho)| e^{-\Im \beta x} \, d\rho < \infty,$$

und beschränkt in einer Umgebung von  $\sqrt{\zeta}$  falls  $\zeta > 0$ , dann existiert das Sommerfeld-Integral

$$\int_0^\infty f(\rho) \frac{e^{i\beta x}}{i\beta} \rho J_n(\lambda \rho) \, d\rho, \quad \lambda \geq 0. \quad (\text{B.5})$$

mit  $\beta^2 = \zeta - \rho^2$  und  $\Im \beta \geq 0$  absolut. Für  $x = 0$  und

$$\int_0^\infty |f(\rho)| \sqrt{\rho} \, d\rho < \infty$$

existiert das Sommerfeld-Integral (B.5) für  $\lambda > 0$  absolut.

*Beweis.* Wir zeigen die Voraussetzung von Satz B.3, d.h.

$$\int_0^\infty \left| f(\rho) \frac{e^{i\beta x}}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} \, d\rho < \infty.$$

## B. Die Hankel-Transformation

---

Sei  $x > 0$ . Für  $\zeta < 0$  oder  $\Im\zeta \neq 0$  ist  $\beta \neq 0$  und daher ist  $1/|\beta|$  beschränkt auf  $[0, \infty)$ . Weiterhin gilt für  $\rho \geq 0$

$$0 \leq \frac{\sqrt{\rho}}{|\beta|} = \sqrt{\frac{\rho}{|\zeta - \rho^2|}} = \sqrt{\frac{1/\rho}{|\zeta/\rho^2 - 1|}} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0.$$

Wir erhalten somit  $|\sqrt{\rho}/\beta| < C$  für ein  $C > 0$  auf  $[0, \infty)$  und damit

$$\infty > C \int_0^\infty |f(\rho)| e^{-\Im\beta x} d\rho \geq \int_0^\infty |f(\rho)| e^{-\Im\beta x} \frac{\sqrt{\rho}}{|\beta|} d\rho = \int_0^\infty \left| f(\rho) \frac{e^{i\beta x}}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho.$$

Für  $x = 0$  sei  $|1/\beta| < C$  auf  $[0, \infty)$ . Wir folgern dann analog

$$\infty > C \int_0^\infty |f(\rho)| \sqrt{\rho} d\rho \geq \int_0^\infty |f(\rho)| \frac{\sqrt{\rho}}{|\beta|} d\rho = \int_0^\infty \left| \frac{f(\rho)}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho.$$

Sei nun  $\zeta > 0$  und  $|f| e^{-\Im\beta x}$  auf  $[a, b]$  beschränkt durch  $c$  mit  $a < \sqrt{\zeta} < b$ . Nach Lemma D.1 ist der Pol von  $|\sqrt{\rho}/\beta|$  integrierbar. Wir erhalten also für  $x > 0$

$$\begin{aligned} \infty > C \int_b^\infty |f(\rho)| e^{-\Im\beta x} d\rho + c \int_a^b \frac{\sqrt{\rho}}{|\beta|} d\rho + C \int_0^a |f(\rho)| e^{-\Im\beta x} d\rho \\ \geq \int_b^\infty \left| f(\rho) \frac{e^{i\beta x}}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho + \int_0^b \left| f(\rho) \frac{e^{i\beta x}}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho = \int_0^\infty \left| f(\rho) \frac{e^{i\beta x}}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho \end{aligned}$$

für ein  $C > 0$ , so dass  $|\sqrt{\rho}/\beta| < C$  für  $\rho \notin [a, b]$ . Für  $x = 0$  folgt mit  $|1/\beta| < C$  für  $\rho \notin [a, b]$  analog

$$\begin{aligned} \infty > C \int_b^\infty |f(\rho)| \sqrt{\rho} d\rho + c \int_a^b \frac{\sqrt{\rho}}{|\beta|} d\rho + C \int_0^a |f(\rho)| \sqrt{\rho} d\rho \\ \geq \int_b^\infty \left| \frac{f(\rho)}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho + \int_0^b \left| \frac{f(\rho)}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho = \int_0^\infty \left| \frac{f(\rho)}{i\beta} \right| \sqrt{\rho} d\rho. \end{aligned}$$

Der nicht in Satz B.3 enthaltene Fall  $\lambda = 0$  und  $x > 0$  folgt direkt und analog unter Betrachtung von  $|\rho/\beta|$  statt  $|\sqrt{\rho}/\beta|$ .  $\square$

**Satz B.6:** Sei  $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ , dann existiert das Sommerfeld-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\rho}{i\beta} J_n(\lambda\rho) d\rho, \quad \lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit  $\beta^2 = \zeta - \rho^2$  und  $\Im\beta \geq 0$  bedingt.

*Beweis.* Für hinreichend große  $\rho$  gibt es ein  $c > 0$  mit  $\left| \sqrt{1 - \frac{\zeta}{\rho^2}} \right| \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{\zeta}{\rho^2}} \right| > c$  und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{\rho}{i\beta} + 1 \right| &= \left| \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - \zeta}}{\sqrt{\rho^2 - \zeta}} \right| = \frac{|\zeta|}{\left| (\sqrt{\rho^2 - \zeta})(\rho + \sqrt{\rho^2 - \zeta}) \right|} \\ &= \frac{|\zeta|}{\rho^2 \left| \sqrt{1 - \frac{\zeta}{\rho^2}} \right| \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{\zeta}{\rho^2}} \right|} \leq \frac{|\zeta|}{c\rho^2}. \end{aligned}$$

Wähle nun  $a > 0$ , so dass diese Ungleichung für  $\rho > a$  erfüllt ist, sowie  $|J_n(\lambda\rho)| \leq C \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho}}$  für ein  $C > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \infty > \frac{C|\zeta|}{c\sqrt{\lambda}} \int_a^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^5}} &\geq \frac{|\zeta|}{c} \int_a^\infty \frac{1}{\rho^2} |J_n(\lambda\rho)| d\rho \geq \int_a^\infty \left| \left( \frac{\rho}{i\beta} + 1 \right) J_n(\lambda\rho) \right| d\rho \\ &\geq \left| \int_a^\infty \frac{\rho}{i\beta} J_n(\lambda\rho) d\rho \right| - \left| \int_a^\infty J_n(\lambda\rho) d\rho \right|. \end{aligned}$$

Nach [Luk62, 8.5 (6)] ist  $\left| \int_0^\infty J_n(\lambda\rho) d\rho \right| < \infty$  und somit folgt die Behauptung mit partieller Integration und der Integrierbarkeit von  $\frac{\rho}{\beta}$  auf  $[0, r]$  für alle  $r > 0$ . (vgl. Lemma D.1).  $\square$

**Lemma B.7:** Sei  $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ ,  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  in einer Umgebung von 0 absolut integrierbar. Sei weiterhin

$$I := \int_0^\infty |f(\rho)| \rho d\rho < \infty$$

und

$$S(\lambda, x) := \int_0^\infty f(\rho) e^{i\beta|x|} J_k(\lambda\rho) d\rho, \quad \lambda \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

mit  $\beta^2 = \zeta - \rho^2$ ,  $\Im\beta \geq 0$ .

Dann existiert  $S$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \geq 0$  absolut und es ist

1.

$$\partial_\lambda S(\lambda, x) = \int_0^\infty \rho f(\rho) e^{i\beta|x|} \left( \frac{k}{\lambda\rho} J_k(\lambda\rho) - J_{k+1}(\lambda\rho) \right) d\rho, \quad \lambda \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

2.

$$\partial_x S(\lambda, x) = \frac{ix}{|x|} \int_0^\infty \beta f(\rho) e^{i\beta|x|} J_k(\lambda\rho) d\rho, \quad \lambda \geq 0 \neq x \in \mathbb{R}.$$

Die Integrale existieren alle absolut und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \partial_x S(\lambda, x) = \pm \int_0^\infty \imath \beta f(\rho) J_k(\lambda \rho) d\rho.$$

Weiterhin sind die partiellen Ableitungen für  $x \neq 0$  und alle  $\lambda \geq 0$  stetig.

*Beweis.* Die Existenz von  $S$  folgt aus

$$|S(\lambda, x)| \leq \int_0^1 |f(\rho)| d\rho + \int_0^\infty |f(\rho)| \rho d\rho < \infty.$$

Da nach (B.2)  $J_k(-t) = (-1)^k J_k(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist, existiert  $S$  auch für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  absolut. Weiterhin ist  $g_\rho(\lambda, x) := f(\rho) e^{\imath \beta |x|} J_k(\lambda \rho)$  für alle  $\rho \geq 0$  in  $x \neq 0$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Außerdem ist  $J_k(\lambda \rho)/\lambda$  beschränkt für  $\lambda \rightarrow 0$ . Insgesamt gilt also

$$|\partial_\lambda g_\rho(\lambda, x)| = \left| f(\rho) \rho \left( \frac{k}{\lambda \rho} J_k(\lambda \rho) - J_{k+1}(\lambda \rho) \right) \right| e^{-\Im \beta |x|} \leq \begin{cases} C_1 |f(\rho)|, & 0 \leq \rho \leq 1, \\ C_2 |f(\rho)| \rho, & 1 < \rho \end{cases}$$

nach [Wat58, 2.12 (4)] und Kettenregel für geeignete  $C_{1,2} > 0$  und alle  $\rho \geq 0$ , sowie

$$|\partial_x g_\rho(\lambda, x)| = \left| \imath \beta \frac{x}{|x|} f(\rho) J_k(\lambda \rho) \right| e^{-\Im \beta |x|} \leq |f(\rho)| \beta$$

für alle  $\rho \geq 0$ .

Nach B.2 ist  $(1 - \varepsilon)\rho < |\beta| \leq (1 + \varepsilon)\rho$  für alle  $\varepsilon > 0$  und hinreichend große  $\rho$ . Sei nun  $C_4 > 0$  und wähle  $a > 0$ , so dass  $|\beta| < C_4 \rho$  für alle  $\rho \geq a$  gilt, dann ist

$$|f(\rho)| \beta \leq \begin{cases} C_3 |f(\rho)|, & 0 \leq \rho \leq a, \\ C_4 |f(\rho)| \rho, & \rho > a \end{cases}$$

für ein  $C_3 > 0$ .

Da  $I < \infty$  ist, sind  $|\partial_\lambda g_\rho|$  und  $|\partial_x g_\rho|$  somit durch absolut integrierbare Funktionen beschränkt und nach dem Differentiationssatz für parameterabhängige Integrale aus [Kön02, 8.4] und dem Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue folgen die Behauptungen.  $\square$

## B.2. Eigenschaften von $\beta$

Es seien  $\lambda \geq 0$ ,  $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ . Definiere  $\beta^2 := \zeta - \lambda^2$  und  $\beta$  mit  $\Im \beta \geq 0$ .

Es ist

$$\frac{\beta}{\lambda} = \sqrt{\frac{\zeta - \lambda^2}{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{\zeta}{\lambda^2} - 1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \imath.$$

Somit ist  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Re \beta = 0$ . Weiterhin folgt, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\lambda_0$  mit  $||\beta| - \lambda| \leq \varepsilon \lambda$  für alle  $\lambda > \lambda_0$  existiert und daher ist  $(1 - \varepsilon)\lambda \leq |\beta| \leq (1 + \varepsilon)\lambda$ .

Insbesondere ist also  $(1 - \varepsilon)\lambda - |\Re \beta| \leq \Im \beta \leq |\beta| \leq (1 + \varepsilon)\lambda$ .

## B.3. Die schnelle Hankel-Transformation

Im Allgemeinen gibt es keine geschlossene Darstellung der Hankel-Transformierten  $n$ -ter Ordnung der Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{f}_n(\lambda) = \int_0^\infty \rho f(\rho) J_n(\lambda \rho) d\rho, \quad \lambda > 0.$$

Zu ihrer numerischen Approximation wird in geophysikalischen Anwendungen häufig die schnelle Hankel-Transformation verwendet [And79, JS79, And82, And84, Chr90]. Da auch wir dieses Verfahren anwenden, geben wir hier eine kurze Zusammenfassung.

Statt obiges Integral direkt zu approximieren, wird es zunächst durch die Substitutionen

$$\rho = \exp(u), \quad \lambda = \exp(v)$$

in das Faltungsintegral

$$H_n(v) := \int_{-\infty}^{\infty} F(u) G_n(v - u) du$$

mit

$$F(u) := \exp(-u) f(\exp(-u)) \text{ und } G_n(v) := \exp(v) J_n(\exp(v))$$

überführt. Damit gilt dann  $\tilde{f}_n(\exp(v)) = H_n(v) / \exp(v)$ .

Nun approximieren wir  $F$  auf einem äquidistanten Gitter  $\Delta := s\mathbb{Z}$  mit einer Schrittweite  $s > 0$  durch

$$F^*(u) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(ms) P\left(\frac{u}{s} - m\right)$$

mit der Interpolationsfunktion

$$P(u) := \text{sinc}(u) = \begin{cases} 1, & u = 0, \\ \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eingesetzt in das Faltungsintegral erhalten wir durch Vertauschung von Summation und Integration eine Näherung für  $H_n$  durch

$$H_n^*(v) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(ms) w_n(v - ms)$$

mit den von  $f$  unabhängigen Gewichten.

$$w_n(v) := \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{u}{s}\right) G_n(v - u) du.$$

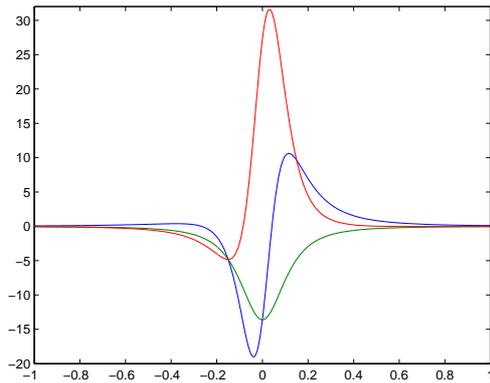
Mit den im Voraus berechneten Gewichten erhalten wir dann auf effiziente Weise eine Näherung  $H_n^*$  durch Abbrechen der Reihe. Für das Verfahren gilt bei Verwendung der

Trapez-Regel zur Approximation der Hankel-Transformierten eine exponentielle Fehlerabschätzung, wenn die Funktion  $f$  in einem offenen Kegel der komplexen Ebene, der die positive reelle Achse enthält, analytisch ist, für  $\lambda \rightarrow \infty$  wie  $\mathcal{O}(\lambda^{-2})$  abklingt und in einer Umgebung der 0 beschränkt ist (vgl. [Ste81, Example 4.9]).

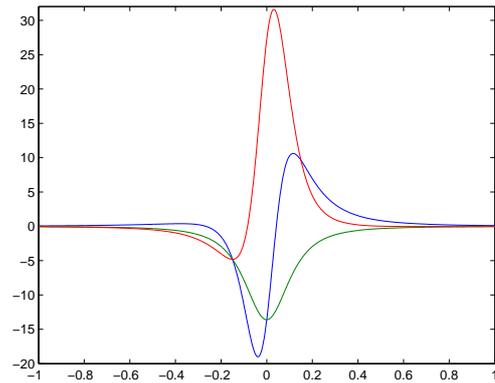
Für die Berechnung der Hankel-Transformierten der Funktionen aus Abschnitt D verwenden wir einen `MATLAB®`-Code von Brain Borchers [Bor01], der 801 Gewichte verwendet, die nach dem Verfahren in [And79] berechnet wurden. Dieser liefert für unsere Anwendung hinreichend gute Werte, auch wenn die zu integrierende Funktion einen integrierbaren Pol auf der reellen Achse besitzt und wir diese Tatsache ignorieren.

Mit obigem Verfahren ist es nicht möglich den Wert der Hankel-Transformierten für  $\lambda = 0$  zu berechnen. Statt der Behandlung dieses Spezialfalles, wie in [Pet93] vorgeschlagen, verwenden wir als Näherungswert den Wert für  $\lambda = 10^{-10}$ . Dieses Vorgehen führt zu der guten Näherung, die wir in Abbildung B.2 sehen.

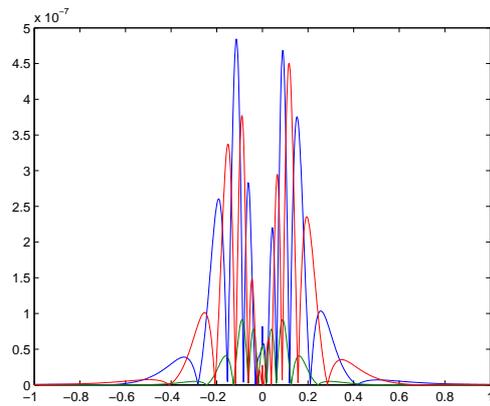
Die Abbildungen zeigen den Realteil der  $e_1, e_2$  und  $e_3$  Komponenten der Fundamentallösung im Vakuum für einen Dipol mit Polarisation  $p = (1, 1, 1)^T / \sqrt{3}$  in  $y = (0, 0, -1/10)^T$  entlang der Linie  $x \in [-1, 1]$ ,  $y = 0$ ,  $z = 5/100$ . Die Frequenz beträgt 1 kHz, d.h.  $\kappa^2 \epsilon_r \mu_r \approx 4,39 \times 10^{-10}$ . Der Imaginärteil liegt im Bereich von  $10^{-16}$  und wird daher vernachlässigt. Die Komponenten wurden dabei für Abbildung B.2(a) mit der exakten Lösung und für Abbildung B.2(b) mit der durch Hankel-Transformationen approximierten Lösung berechnet.



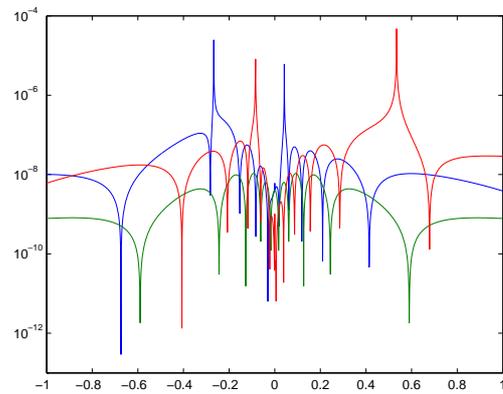
(a) exakte Lösung



(b) approximierte Lösung



(c) absoluter Fehler



(d) relativer Fehler

Abbildung B.2.: Komponenten der Fundamentallösung im Vakuum,  
blau  $e_1$ , grün  $e_2$ , rot  $e_3$



# C. Lösungen der Helmholtz-Gleichung

## C.1. Die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung

### C.1.1. Definition und Eigenschaften

Sei  $0 \neq \kappa \in \mathbb{C}^+$ , dann lässt sich die Fundamentallösung  $G_\kappa$  der Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + \kappa^2 u = -\delta_y \quad (\text{C.1})$$

mit  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  schreiben als

$$G_\kappa(x, y) := \frac{1}{4\pi} g_\kappa(|x - y|), \quad x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{C.2})$$

Dabei ist

$$g_\kappa(r) := \frac{e^{i\kappa r}}{r}, \quad r > 0$$

und  $\delta_y$  die Delta-Distribution mit Masse in  $y$ .

Es gilt:

- $G_\kappa(\cdot, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{y\})$ .
- $G_\kappa$  ist kugelsymmetrisch bzgl. einer Kugel mit Mittelpunkt  $y$ , d.h.  $G_\kappa(x, y) = G_\kappa(z, y)$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  mit  $|x - y| = |z - y| \neq 0$ .
- $G_\kappa$  ist translationsinvariant, d.h.  $G_\kappa(x, y + z) = G_\kappa(x - z, y)$  für  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ ,  $x \neq y + z$ . Wir betrachten daher im Folgenden nur  $G_\kappa(x) := G_\kappa(x, 0)$ .
- Es gilt  $g_\kappa = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$  und  $g'_\kappa - i\kappa g_\kappa = o\left(\frac{1}{r}\right)$  für  $r \rightarrow \infty$ .
- Für  $\Im\kappa > 0$  gilt sogar  $g_\kappa = o\left(\frac{1}{r}\right)$  für  $r \rightarrow \infty$ .

Seien  $x \neq y \in \mathbb{R}^3$  mit  $x = (x_1, x_2, x_3)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Nach [Som78, §21 B, §31 B] lässt sich  $G_\kappa$  in Zylinderkoordinaten schreiben als

$$G_\kappa(\rho, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\beta|z|}}{i\beta} \lambda J_0(\lambda\rho) d\lambda \quad (\text{C.3})$$

mit  $\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ,  $z = x_3 - y_3$ ,  $\beta^2 = \kappa^2 - \lambda^2$  und  $\Im\beta \geq 0$ . Für  $z \neq 0$  existiert das Integral nach Satz B.5 für alle  $\rho \geq 0$  absolut und für  $z = 0$  nach Satz B.6 für alle  $\rho > 0$  bedingt.

### C.1.2. Die Hesse-Matrix

Wir leiten nun eine Darstellung der Hesse-Matrix von  $G_\kappa$  her. Dazu berechnen wir zunächst die Ableitungen von  $g_\kappa$ .

$$g'_\kappa(r) = (\nu\kappa - \frac{1}{r})g_\kappa(r) \implies g''_\kappa(r) = \frac{1}{r^2}g_\kappa(r) + (\nu\kappa - \frac{1}{r})g'_\kappa(r) = (\frac{2}{r^2} - \frac{2\nu\kappa}{r} - \kappa^2)g_\kappa(r)$$

Die partiellen Ableitungen der Euklidnorm sind

$$\partial_i |x| = \frac{x_i}{|x|} \text{ und damit } \partial_j \partial_i |x| = \frac{1}{|x|} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir daraus für einen Eintrag der Hesse-Matrix

$$\begin{aligned} 4\pi \partial_j \partial_i G_\kappa(x) &= g''_\kappa(|x|) \partial_j |x| \partial_i |x| + g'_\kappa(|x|) \partial_j \partial_i |x| \\ &= \frac{g_\kappa(|x|)}{|x|} \left( \left( \frac{2}{|x|^2} - \frac{2\nu\kappa}{|x|} - \kappa^2 \right) \frac{x_i x_j}{|x|} + \left( \nu\kappa - \frac{1}{|x|} \right) \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \right) \\ &= \frac{g_\kappa(|x|)}{|x|} \left( \frac{x_i x_j}{|x|} \left( \frac{3}{|x|^2} - \frac{3\nu\kappa}{|x|} - \kappa^2 \right) + \delta_{ij} \left( \nu\kappa - \frac{1}{|x|} \right) \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix im Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  lautet damit

$$[D^2 G_\kappa](x) = \frac{g_\kappa(|x|)}{4\pi |x|^2} \left( \frac{3}{|x|^2} - \frac{3\nu\kappa}{|x|} - \kappa^2 \right) x x^* + \frac{g_\kappa(|x|)}{4\pi |x|} \left( \nu\kappa - \frac{1}{|x|} \right) \mathcal{I}. \quad (\text{C.4})$$

**Lemma C.1:** Sei  $0 \neq d \in \mathbb{R}^3$ . Das Vektorfeld  $[[D^2 G_\kappa](\cdot)]d : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  ist rotations-symmetrisch bzgl. der Achse  $d$ .

*Beweis.* Sei  $U \in (\mathbb{R})_{3 \times 3}$  eine unitäre Matrix dann gilt

$$\begin{aligned} &U^* [[D^2 G_\kappa](Ux)] U d \\ &= \frac{g_\kappa(|x|)}{4\pi |x|^2} \left( \frac{3}{|x|^2} - \frac{3\nu\kappa}{|x|} - \kappa^2 \right) U^*(Ux)(Ux)^* U d + \frac{g_\kappa(|x|)}{4\pi |x|} \left( \nu\kappa - \frac{1}{|x|} \right) U^* U d \\ &= \frac{g_\kappa(|x|)}{4\pi |x|^2} \left( \frac{3}{|x|^2} - \frac{3\nu\kappa}{|x|} - \kappa^2 \right) x x^* d + \frac{g_\kappa(|x|)}{4\pi |x|} \left( \nu\kappa - \frac{1}{|x|} \right) d \\ &= [[D^2 G_\kappa](x)] d. \end{aligned}$$

Für eine Drehung  $U$  um die Achse  $d$  gilt  $Ud = d$ . Damit ist das Vektorfeld  $[[D^2 G_\kappa](x)]d$  rotationssymmetrisch bzgl. der Achse  $d$ .  $\square$

## C.2. Lösungen im Zweischichtmedium

Im folgenden Abschnitt betrachten wir Lösungen für die homogene Helmholtz-Gleichung im oberen und unteren Halbraum, die an der Trennschicht Sprungbedingungen erfüllen.

Wir suchen Lösungen  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  von

$$\Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^3 \text{ und } \Delta u + k_-^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_-^3,$$

mit  $k_\pm^2 \in \mathbb{C}^+$  und  $[au]_{\Sigma_0} = f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[b\partial_3 u]_{\Sigma_0} = g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei seien

$$a = \begin{cases} a_+, & x_3 \geq 0, \\ a_-, & x_3 < 0, \end{cases} \quad b = \begin{cases} b_+, & x_3 \geq 0, \\ b_-, & x_3 < 0, \end{cases} \quad a_\pm, b_\pm \in \mathbb{C}.$$

In Zylinderkoordinaten lautet die Gleichung entsprechend (vgl. A.3.2)

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho u) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 u + \partial_z^2 u + k_\pm^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3 \text{ und } [au]_{\Sigma_0} = f, [b\partial_z u]_{\Sigma_0} = g$$

mit  $f = f(\rho, \phi)$  und  $g = g(\rho, \phi)$ .

### C.2.1. Radialsymmetrische Lösungen

Für eine radialsymmetrische Lösung d.h.  $u = u(\rho, z)$  lautet die Helmholtz-Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho u) + \partial_z^2 u + k_\pm^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3 \text{ und } [au]_{\Sigma_0} = f, [b\partial_z u]_{\Sigma_0} = g$$

mit  $f = f(\rho)$  und  $g = g(\rho)$ . Wenden wir nun die Hankel-Transformation 0-ter Ordnung auf diese an, so erhalten wir mit (B.4) und  $\tilde{u}_0(\lambda, z) = [\mathcal{H}_0(\rho \mapsto u(\rho, z))](\lambda, z)$

$$\partial_z^2 \tilde{u}_0 + (k_\pm^2 - \lambda^2) \tilde{u}_0 = 0 \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3.$$

Sei  $\beta_\pm^2 := k_\pm^2 - \lambda^2$  und  $\Im \beta_\pm \geq 0$ . Damit sich die Lösung für  $|z| \rightarrow \infty$  wie die Fundamentallösung verhält, setzen wir als Lösung dieser Gleichung  $\tilde{u}_0(\lambda, z) = A_\pm(\lambda) e^{i\beta_\pm |z|}$  an. Durch Rücktransformation ergibt sich dann

$$u(\rho, z) = \begin{cases} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i\beta_+ |z|} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, & z > 0, \\ \int_0^\infty A_-(\lambda) e^{i\beta_- |z|} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, & z < 0. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

$A_\pm$  ergibt sich aus den Sprungbedingungen

$$f(\rho) = \int_0^\infty (a_+ A_+(\lambda) - a_- A_-(\lambda)) \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

$$g(\rho) = \int_0^\infty i (b_+ A_+(\lambda) \beta_+ + b_- A_-(\lambda) \beta_-) \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda.$$

### C.2.2. Lösungen mit gegebener Winkelabhängigkeit

Wir betrachten nun den Fall  $u(\rho, \phi, z) = \cos(\phi)u^*(\rho, z)$ . Die Helmholtz-Gleichung für  $u^*$  lautet dann

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho u^*) - \frac{1}{\rho^2}u^* + \partial_z^2 u^* + k_\pm^2 u^* = 0 \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3 \text{ und } [au^*]_{\Sigma_0} = f, [b\partial_z u^*]_{\Sigma_0} = g$$

mit  $f = f(\rho)$  und  $g = g(\rho)$ . Wenden wir nun die Hankel-Transformation 1-ter Ordnung auf diese an, so erhalten wir mit (B.4) und  $\tilde{u}_1^*(\lambda, z) = [\mathcal{H}_1(\rho \mapsto u^*(\rho, z))](\lambda, z)$

$$\partial_z^2 \tilde{u}_1^* + (k_\pm^2 - \lambda^2)\tilde{u}_1^* = 0 \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3.$$

Sei  $\beta_\pm^2 := k_\pm^2 - \lambda^2$  und  $\Im\beta_\pm \geq 0$ . Damit sich die Lösung für  $|z| \rightarrow \infty$  wie die Fundamentallösung verhält, setzen wir als Lösung dieser Gleichung  $\tilde{u}_1^*(\lambda, z) = A_\pm(\lambda)e^{i\beta_\pm|z|}$  an. Durch Rücktransformation ergibt sich dann

$$u(\rho, \phi, z) = \cos(\phi) \begin{cases} \int_0^\infty A_+(\lambda)e^{i\beta_+|z|}\lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, & z > 0, \\ \int_0^\infty A_-(\lambda)e^{i\beta_-|z|}\lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, & z < 0. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

$A_\pm$  ergibt sich aus den Sprungbedingungen

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \int_0^\infty (a_+ A_+(\lambda) - a_- A_-(\lambda)) \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ g(\rho) &= \int_0^\infty i(b_+ A_+(\lambda)\beta_+ + b_- A_-(\lambda)\beta_-) \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda. \end{aligned}$$

# D. Die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im Zweischichtmedium

Das folgende Kapitel basiert auf einer Herleitung von Wagner Muniz und orientiert sich dabei an der Vorgehensweise in [Mon03]. Eine Herleitung für mehrere parallele Schichten mit Einschränkungen an die Parameter findet sich in der Dissertation von Martin Petry [Pet93], der Spezialfall für zwei Schichten im Anhang von [DEK<sup>+</sup>08].

Wir leiten nun die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen für ein aus zwei homogenen Schichten bestehendes unbeschränktes Medium her. Der  $\mathbb{R}^3$  sei dazu wie folgt aufgeteilt.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_+^3 \cup \Sigma_0 \cup \mathbb{R}_-^3$$

Für die Materialparameter gelte weiterhin

$$\epsilon_r(x) = \begin{cases} \epsilon_r^+ \in \mathbb{C}^+, & x \in \mathbb{R}_+^3, \\ \epsilon_r^- \in \mathbb{C}^+, & x \in \mathbb{R}_-^3, \end{cases} \quad \mu_r(x) = \begin{cases} \mu_r^+ > 0, & x \in \mathbb{R}_+^3, \\ \mu_r^- > 0, & x \in \mathbb{R}_-^3 \end{cases}$$

mit  $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \geq 0, \Im z \geq 0\}$

## D.1. Der Hertz-Vektor

Betrachten wir die Maxwell-Gleichungen zweiter Ordnung (2.8), so haben diese in jedem Halbraum  $\mathbb{R}_\pm^3$  die Form

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} V - \kappa^2 \epsilon_r \mu_r V = W \tag{D.1}$$

mit Vektorfeldern  $V$  und  $W$ .

Definieren wir den Hertz-Vektor  $\mathbf{\Pi}$  als Lösung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \mathbf{\Pi} = -\frac{1}{\kappa^2 \epsilon_r \mu_r} W, \tag{D.2}$$

d.h.  $\Delta$  ist komponentenweise zu verstehen, so ist  $V := \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \mathbf{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}$  in jedem Halbraum eine Lösung von (D.1), denn mit  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = -\Delta + \operatorname{grad} \operatorname{div}$  gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} V &= \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} = \kappa^2 \epsilon_r \mu_r (-\Delta \mathbf{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}) \\ &= \kappa^2 \epsilon_r \mu_r (\kappa^2 \epsilon_r \mu_r \mathbf{\Pi} + \frac{1}{\kappa^2 \epsilon_r \mu_r} W + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}) = \kappa^2 \epsilon_r \mu_r V + W. \end{aligned}$$

## D.2. Dipole im Zweischichtmedium

Im Fall eines Dipols mit Polarisation  $p$  im Punkt  $y$  (vgl. Abschnitt 2.2), erhalten wir für  $W$ ,  $E$  und  $H$  aus dem vorigen Abschnitt die Beziehungen wie in Tabelle D.1.

	magn. Dipol	elektr. Dipol
$W$	$-i\kappa\epsilon_r\delta_y p$	$i\kappa\mu_r\delta_y p$
$H$	$V$	$\frac{1}{i\kappa\mu_r} \text{rot } V$
$E$	$\frac{i}{\kappa\epsilon_r} \text{rot } V$	$V$

Tabelle D.1.: Felder der verschiedenen Dipole

Fordern wir nun noch die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $E$  und  $H$  an  $\Sigma_0$  (vgl. (2.14)), so erhalten wir an der Trennschicht die Sprungbedingungen

$$[V \wedge \nu]_{\Sigma_0} = [(d \text{rot } V) \wedge \nu]_{\Sigma_0} = 0 \quad (\text{D.3})$$

mit  $d = \frac{i}{\kappa\epsilon_r}$  bzw.  $d = \frac{1}{i\kappa\mu_r}$  und  $\nu = e_3$  der Normalen von  $\Sigma_0$ . Insgesamt erhalten wir also das Problem

$$\begin{aligned} (\Delta + \kappa^2\epsilon_r\mu_r)\mathbf{\Pi} &= -\tilde{d}\delta_y p \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3 \\ &\text{und} \\ [(\kappa^2\epsilon_r\mu_r\mathbf{\Pi} + \text{grad div } \mathbf{\Pi}) \wedge \nu]_{\Sigma_0} &= [(d\epsilon_r\mu_r \text{rot } \mathbf{\Pi}) \wedge \nu]_{\Sigma_0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

mit  $\tilde{d} = \frac{1}{i\kappa\mu_r}$  im Falle eines magnetischen Dipols und  $\tilde{d} = \frac{i}{\kappa\epsilon_r}$  im Falle eines elektrischen Dipols. Da  $d$  und  $\tilde{d}$  in jedem Halbraum andere Werte haben können, bezeichnen wir im Weiteren analog zu  $\epsilon_r$  und  $\mu_r$  mit  $d_\pm$  und  $\tilde{d}_\pm$  die jeweiligen Konstanten im oberen oder unteren Halbraum.

Aufgrund der Symmetrie des Modells nehmen wir nun o.B.d.A. an, dass sich der Dipol im unteren Halbraum in  $y := (y_1, y_2, y_3)^T = (0, 0, -h)^T$  für ein  $h > 0$  befindet. Weiterhin gehen wir von den kartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)^T$  zu Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  über.

Im Folgenden werden wir nun den Hertzvektor für einen Dipol im Zweischichtmedium und damit dann die Felder für einen elektrischen bzw. magnetischen Dipol berechnen. Dazu unterscheiden wir die Fälle eines Dipols mit Polarisation senkrecht zu  $\Sigma_0$  und eines Dipols mit Polarisation parallel zu der Trennschicht. Da die Helmholtz-Gleichung die zeitharmonische Form der Wellengleichung ist, werden wir  $\mathbf{\Pi}$  als eine Überlagerung der von einem Dipol im unteren Halbraum erzeugten Welle, einer an der Trennschicht gebrochenen Welle im oberen Halbraum und einer an der Trennschicht reflektierten Welle im unteren Halbraum ansetzen.

### D.2.1. Vertikaler Dipol

Bei einer Polarisation  $p = e_3$ , setzen wir  $\mathbf{\Pi} = \pi_3 e_3$  als eine Lösung an. Wir erhalten dann aus (D.4) in kartesischen Koordinaten das skalare Problem

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \pi_3 = -\tilde{d} \delta_y \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3 \quad (\text{D.5})$$

und  $[\partial_2 \partial_3 \pi_3]_{\Sigma_0} = [\partial_1 \partial_3 \pi_3]_{\Sigma_0} = [d\epsilon_r \mu_r \partial_1 \pi_3]_{\Sigma_0} = [d\epsilon_r \mu_r \partial_2 \pi_3]_{\Sigma_0} = 0$ . Dabei sind die Randbedingungen sicher erfüllt, falls

$$[\partial_3 \pi_3]_{\Sigma_0} = [d\epsilon_r \mu_r \pi_3]_{\Sigma_0} = 0. \quad (\text{D.6})$$

Da wir annehmen, dass sich der Dipol im unteren Halbraum befindet, setzen wir die Lösung jetzt in Zylinderkoordinaten radialsymmetrisch mit

$$\frac{\pi_3(\rho, z)}{\tilde{d}_-} = \begin{cases} G_{k_-}(\rho, z) + \pi_3^r(\rho, z), & z \leq 0, \\ \pi_3^t(\rho, z), & z > 0 \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

als Überlagerung der Fundamentallösung  $G_{k_-}$  mit einer an der Trennschicht reflektierten Welle  $\pi_3^r$  und einer an ihr gebrochenen Welle  $\pi_3^t$  an.  $G_{k_-}$  sei die Fundamentallösung im Vollraum mit den Parametern für den unteren Halbraum, d.h. mit den Bezeichnungen aus (C.2)

$$G_{k_-}(\rho, z) := G_{\kappa \sqrt{\epsilon_r^- \mu_r^-}}(\rho, z + h) \quad (\text{D.8})$$

und nicht negativem Imaginärteil der Wurzel. Die reflektierte und die gebrochene Welle lösen die homogene Gleichung im jeweiligen Halbraum, d.h. (unter Mißbrauch der Notation)

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r^- \mu_r^-) \pi_3^r = 0 \text{ in } \mathbb{R}_-^3 \text{ und } (\Delta + \kappa^2 \epsilon_r^+ \mu_r^+) \pi_3^t = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^3.$$

Wir erhalten nun mit (C.3) und Abschnitt C.2.1

$$G_{k_-}(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\beta_- |z+h|}}{i\beta_-} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad \pi_3^r(\rho, z) = \int_0^\infty A_-(\lambda) e^{i\beta_- |z|} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

$$\pi_3^t(\rho, z) = \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i\beta_+ |z|} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda.$$

Dabei ist  $\beta_\pm^2 = \kappa^2 \epsilon_r^\pm \mu_r^\pm - \lambda^2$  und  $\Im \beta_\pm \geq 0$ .  $A_\pm$  ergeben sich dann aus den Sprungbedingungen  $[\partial_z \pi_3]_{\Sigma_0} = [d\epsilon_r \mu_r \pi_3]_{\Sigma_0} = 0$ , d.h.

$$d_- \epsilon_r^- \mu_r^- \left( \frac{-e^{i\beta_- |h|}}{4\pi i \beta_-} + A_-(\lambda) \right) = d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+ A_+(\lambda) \text{ und } A_+(\lambda) \beta_+ = \left( \frac{-e^{i\beta_- |h|}}{4\pi i \beta_-} - A_-(\lambda) \right) \beta_-.$$

Mit  $T_V(\lambda) := A_+(\lambda) \frac{-4\pi i \beta_-}{e^{i\beta_- |h|}}$  und  $R_V(\lambda) := A_-(\lambda) \frac{-4\pi i \beta_-}{e^{i\beta_- |h|}}$  ergibt sich

$$d_- \epsilon_r^- \mu_r^- (1 + R_V(\lambda)) = d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+ T_V(\lambda) \text{ und } T_V(\lambda) \beta_+ = (1 - R_V(\lambda)) \beta_-$$

und daher mit  $D_{\pm} := d_{\pm} \epsilon_r^{\pm} \mu_r^{\pm}$

$$R_V(\lambda) = \frac{D_+ \beta_- - D_- \beta_+}{D_+ \beta_- + D_- \beta_+} \text{ und } T_V(\lambda) = \frac{D_-}{D_+} (1 + R_V(\lambda)) = \frac{2D_- \beta_-}{D_+ \beta_- + D_- \beta_+}. \quad (\text{D.9})$$

Wir erhalten somit

$$\pi_3^r(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} R_V(\lambda) e^{i\beta_- |z|} \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad z \leq 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\pi_3^t(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} T_V(\lambda) e^{i\beta_+ |z|} \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad z > 0 \quad (\text{D.11})$$

für  $\rho \geq 0$ .

*Bemerkung:* Für  $\epsilon_r^+ = \epsilon_r^-$  und  $\mu_r^+ = \mu_r^-$  gilt  $R_V = 0$  und somit  $T_V = 1$ . Wir erhalten in diesem Fall also die Lösung für den Vollraum und  $\pi_3^t$  entspricht dem Sommerfeld-Integral (C.3) im oberen Halbraum.

Zum Beweis der Existenz dieser Integrale benötigen wir noch das

**Lemma D.1:** *Seien  $0 \neq \zeta_{\pm} \in \mathbb{C}$  und  $x > 0$ , dann ist  $\lambda \mapsto \frac{\lambda^s}{\beta_+} e^{i\beta_- x} \in L^1([0, \infty), \mathbb{C})$  für alle  $s > 0$  mit  $\beta_{\pm}^2 = \zeta_{\pm} - \lambda^2$  und  $\Im \beta_{\pm} \geq 0$ . Für  $x = 0$  ist  $\lambda \mapsto \frac{\lambda^s}{\beta_+} \in L^1([0, r], \mathbb{C})$  für alle  $r > 0$ .*

*Beweis.* Für  $\zeta_+ < 0$  oder  $\Im \zeta_+ \neq 0$  ist  $\inf_{\lambda > 0} |\beta_+| > 0$  und daher ist  $|1/\beta_+|$  beschränkt auf  $[0, \infty)$ . Für das Integral gilt somit, da  $\Im \beta_- = \mathcal{O}(\lambda)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\infty > C \int_0^{\infty} \lambda^s e^{-\Im \beta_- x} d\lambda \geq \int_0^{\infty} \frac{\lambda^s |e^{i\beta_- x}|}{|\beta_+|} d\lambda, \quad s > 0$$

für ein  $C > 0$  und  $x > 0$ .

Sei also  $\zeta_+ > 0$  und  $0 < a < \sqrt{\zeta_+} < b < c$ . Wir betrachten nun das Integral auf den Intervallen  $[0, a]$ ,  $[b, c]$  und  $[c, \infty)$ . Mit der Substitution  $\lambda = \sqrt{\zeta_+} \sin t$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^a \left| \frac{e^{i\beta_- x}}{\beta_+} \right| \lambda^s d\lambda &= \int_0^a \frac{e^{-\Im \beta_- x}}{\sqrt{\zeta_+ - \lambda^2}} \lambda^s d\lambda \\ &\leq \int_0^a \frac{\lambda^s}{\sqrt{\zeta_+ - \lambda^2}} d\lambda = \zeta_+^{\frac{s}{2}} \int_0^{\arcsin(\frac{a}{\sqrt{\zeta_+}})} (\sin t)^s dt. \end{aligned}$$

Weiterhin folgern wir mit der Substitution  $\lambda = \sqrt{\zeta_+} \cosh t$

$$\begin{aligned} \int_b^c \left| \frac{e^{i\beta_- x}}{\beta_+} \right| \lambda^s d\lambda &= \int_b^c \frac{e^{-\Im \beta_- x}}{\sqrt{\lambda^2 - \zeta_+}} \lambda^s d\lambda \\ &\leq \int_b^c \frac{\lambda^s}{\sqrt{\lambda^2 - \zeta_+}} d\lambda = \zeta_+^{\frac{s}{2}} \int_{\text{Arccosh}(\frac{b}{\sqrt{\zeta_+}})}^{\text{Arccosh}(\frac{c}{\sqrt{\zeta_+}})} (\cosh t)^s dt. \end{aligned}$$

Auf dem Intervall  $[c, \infty)$  ist  $|1/\beta_+|$  wieder beschränkt, so dass auch dieses Integral für  $x > 0$  existiert. Die Grenzübergänge  $a, b \rightarrow \sqrt{\zeta_+}$  liefern dann die Integrabilität der Singularität und somit erhalten wir insgesamt die absolute Existenz des Integrals.  $\square$

**Lemma D.2:** Die Integrale  $\pi_3^r$  und  $\pi_3^t$  existieren für alle  $\epsilon_r^\pm \in \mathbb{C}^+$  und  $\mu_r^\pm > 0$  absolut. Weiterhin gelten für die partiellen Ableitungen die folgenden Beziehungen mit  $\rho \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\partial_\rho \pi_3^r(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty R_V(\lambda) e^{i\beta_-(|z|+|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_z \pi_3^r(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty R_V(\lambda) e^{i\beta_-(|z|+|h|)} \lambda J_0(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_\rho \partial_z \pi_3^r(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty R_V(\lambda) e^{i\beta_-(|z|+|h|)} \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda = \partial_z \partial_\rho \pi_3^r(\rho, z), \\ \partial_z^2 \pi_3^r(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty i\beta_- R_V(\lambda) e^{i\beta_-(|z|+|h|)} \lambda J_0(\lambda\rho) d\lambda,\end{aligned}$$

für  $z \leq 0$  und

$$\begin{aligned}\partial_\rho \pi_3^t(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty T_V(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_z \pi_3^t(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty T_V(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\beta_+}{\beta_-} \lambda J_0(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_\rho \partial_z \pi_3^t(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty T_V(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\beta_+}{\beta_-} \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda = \partial_z \partial_\rho \pi_3^t(\rho, z), \\ \partial_z^2 \pi_3^t(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty T_V(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{i\beta_+^2}{\beta_-} \lambda J_0(\lambda\rho) d\lambda.\end{aligned}$$

für  $z > 0$ . Die Integrale existieren alle absolut und die Funktionen  $\pi_3^r$  und  $\pi_3^t$  sind für  $z \neq 0$  analytisch.

Seien  $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$  und  $\Psi$  eine der Funktionen  $\pi_3^{r,t}$  oder eine ihrer partiellen Ableitungen und  $\Im \epsilon_r^\pm > 0$ , dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^n \Psi(ra, rb) = 0$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* 1. Wir zeigen, dass  $R_V$  und  $T_V$  auf  $[0, \infty)$  beschränkt sind. Damit existieren die Integrale

$$\int_0^\infty |R_V(\lambda) e^{i\beta_-|z|}| e^{-\Im \beta_-|h|} d\lambda \quad \text{und} \quad \int_0^\infty |T_V(\lambda) e^{i\beta_+|z|}| e^{-\Im \beta_-|h|} d\lambda$$

## D. Die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im Zweischichtmedium

---

und aus Satz B.5 folgt die absolute Existenz von  $\pi_3^r$  und  $\pi_3^t$ , da  $h \neq 0$  gilt.

Für  $\epsilon_r^+ = \epsilon_r^-$  und  $\mu_r^+ = \mu_r^-$  gilt  $R_V = 0$  und  $T_V = 1$ . Im Folgenden seien also  $\epsilon_r^+ \neq \epsilon_r^-$  oder  $\mu_r^+ \neq \mu_r^-$ .

Es sind  $\Re \epsilon_r^\pm, \mu_r^\pm > 0$  und  $\Im \epsilon_r^\pm \geq 0$  und somit  $D_\pm \neq 0$ . Angenommen  $D_+\beta_- + D_-\beta_+ = 0$ .

1. Fall:  $\exists \lambda \geq 0 : 0 = \beta_+ = \beta_- = \beta_\pm = \sqrt{\kappa^2 \epsilon_r^\pm \mu_r^\pm - \lambda^2} \Leftrightarrow \epsilon_r^+ \mu_r^+ = \epsilon_r^- \mu_r^- > 0$ . D.h.  $\beta_+ = \beta_- \forall \lambda > 0$ . In diesem Fall sind aber  $R_V = \frac{D_- - D_+}{D_- + D_+}$  und  $T_V = \frac{2D_-}{D_- + D_+}$  konstant und somit beschränkt.

2. Fall:  $\exists \lambda \geq 0 : -\beta_+ = \frac{D_+}{D_-} \beta_- \neq 0$ . Aus  $\Im \epsilon_r^\pm \geq 0$  folgt  $\Im(\kappa^2 \epsilon_r^\pm \mu_r^\pm - \lambda^2) \geq 0$ . Da  $\Im \beta_\pm \geq 0$  ist, gilt somit auch  $\Re \beta_\pm \geq 0$ . Nun ist

$$\frac{D_+}{D_-} = \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} = \begin{cases} \mu_r^+ / \mu_r^-, & \text{magn. Dipol,} \\ \epsilon_r^+ / \epsilon_r^-, & \text{elektr. Dipol,} \end{cases}$$

und somit gilt  $\Re\left(\frac{D_+}{D_-}\right) = \Re\left(\frac{D_+ \overline{D_-}}{|D_-|^2}\right) > 0$ . Sei  $\frac{D_+}{D_-} = a + ib$  mit  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  und  $\beta_- = x + iy$  mit  $x, y \geq 0$ , dann  $\frac{D_+}{D_-} \beta_- = (ax - by) + i(ay + bx) = -\beta_+$ . Es gilt also  $ax \leq by$  und  $ay \leq -bx$  und da weiterhin  $xy \neq 0$  folgt  $a \leq 0$ . Widerspruch zu  $a > 0$ ! Es ist also  $D_+\beta_- + D_-\beta_+ \neq 0$ .

Weiterhin ist  $\beta_\pm = \lambda \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 \epsilon_r^\pm \mu_r^\pm - 1}$  und damit  $|D_+\beta_- + D_-\beta_+| = \mathcal{O}(\lambda)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ . Da  $|D_+\beta_- + D_-\beta_+|$  auf  $[0, \infty)$  stetig ist, gibt es ein  $0 < c < |D_+\beta_- + D_-\beta_+|$ .

Durch Einsetzen sehen wir ferner, dass  $|R_V(0)| < \infty$  und  $|T_V(0)| < \infty$  gilt. Nun fehlt noch die Beschränktheit für  $\lambda \rightarrow \infty$ . Es ist  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |R_V| = \left| \frac{D_+ - D_-}{D_+ + D_-} \right| < \infty$  und

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |T_V| = \left| \frac{D_-}{D_+} (1 + R_V) \right| < \infty$ . Insgesamt erhalten wir damit die Beschränktheit von  $R_V$  und  $T_V$ .

2. Die Beziehungen folgen aus der Beschränktheit von  $R_V$  und  $T_V$ , Lemma D.1 sowie (mehrmaliger) Anwendung von Lemma B.7. Aufgrund der Rekursionsformeln für die Besselfunktionen (vgl. [Wat58, 2.12]) sehen wir somit auch, dass die einzelnen Funktionen für  $z \neq 0$  analytisch sind.

3. Nach B.2 ist  $(1 - \varepsilon)\lambda < |\beta_\pm| \leq (1 + \varepsilon)\lambda$  für alle  $\varepsilon > 0$  und hinreichend große  $\lambda$ . Sei nun  $C_2 > 0$  und wähle  $t > 0$ , so dass  $|\beta_\pm| < C_2 \lambda$  für alle  $\lambda \geq t$  gilt, dann ist

$$|\beta_\pm| \leq \begin{cases} C_1, & 0 \leq \lambda \leq t, \\ C_2 \lambda, & \lambda > t \end{cases}$$

für ein  $C_1 > 0$ .

Sei also  $\Psi$  eine der Funktionen  $\pi_3^{r,t}$  oder eine ihrer partiellen Ableitungen,  $\Im \epsilon_r^\pm > 0$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b > 0$ , dann gilt aufgrund der Beschränktheit von  $R_V$  und  $T_V$  für  $r > 0$

$$|\Psi(ra, rb)| \leq C_3 \int_0^\infty \frac{|\beta_\pm|^q}{|\beta_-|} e^{-\Im \beta_\pm r |b|} e^{-\Im \beta_- |h|} \lambda^s |J_k(\lambda ra)| d\lambda$$

$$\leq \tilde{C}_3 + \tilde{C}_4 \int_0^\infty \frac{\lambda^{s+q}}{|\beta_-|} e^{-\Im \beta_- |h|} d\lambda < \infty$$

mit  $k = 0, 1$ ,  $\tilde{C}_{3,4}$ ,  $s > 0$  und  $q \geq 0$  geeignet. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue, da

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^n e^{-\Im \beta_\pm r |b|} J_k(\lambda ra) = 0, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

punktweise für alle  $\lambda \geq 0$ . □

Zusammengefasst erhalten wir für den Hertz-Vektor  $\mathbf{\Pi} = \pi_3 e_3$  aus (D.7) bis (D.11)

$$\pi_3^-(\rho, z) := \pi_3(\rho, z) = \tilde{d}_- G_{k_-}(\rho, z) - \frac{\tilde{d}_-}{4\pi} \int_0^\infty R_V(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \frac{\lambda}{i\beta_-} J_0(\lambda\rho) d\lambda \quad (D.12)$$

für  $z \leq 0$  und

$$\pi_3^+(\rho, z) := \pi_3(\rho, z) = -\frac{\tilde{d}_-}{4\pi} \int_0^\infty T_V(\lambda) e^{i(\beta_+ |z| + \beta_- |h|)} \frac{\lambda}{i\beta_-} J_0(\lambda\rho) d\lambda \quad (D.13)$$

für  $z > 0$  als Lösung von (D.5) mit den Sprungbedingungen (D.6).

Nachdem wir nun den Hertz-Vektor berechnet haben, berechnen wir die Vektorfelder  $V = \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \mathbf{\Pi} + \text{grad div } \mathbf{\Pi}$  und  $\text{rot } V$ .

**Proposition D.3:** Seien  $\epsilon_r^\pm \in \mathbb{C}^+$  und  $\mu_r^\pm > 0$ . Für jedes  $s > 0$  sind  $V$  und  $d \text{rot } V$  in  $H_{loc}(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_s(y)})$  die ausstrahlende Lösung der Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } H + i\kappa \epsilon_r E = 0 \quad \text{rot } E - i\kappa \mu_r H = \delta_y e_3$$

in  $\mathbb{R}_\pm^3$  und den Sprungbedingungen (D.3) mit  $H = V$  und  $E = \frac{i}{\kappa \epsilon_r} \text{rot } V = d \text{rot } V$  im Falle eines magnetischen Dipols und

$$\text{rot } H + i\kappa \epsilon_r E = \delta_y e_3 \quad \text{rot } E - i\kappa \mu_r H = 0$$

in  $\mathbb{R}_\pm^3$  und den Sprungbedingungen (D.3) mit  $E = V$  und  $H = \frac{1}{i\kappa \mu_r} \text{rot } V = d \text{rot } V$  im Falle eines elektrischen Dipols.

Die Vektorfelder sind dabei durch

$$V(\rho, \phi, z) = \partial_\rho \partial_z \pi_3(\rho, z) (\cos \phi e_1 + \sin \phi e_2) + (\kappa^2 \epsilon_r \mu_r \pi_3(\rho, z) + \partial_z^2 \pi_3(\rho, z)) e_3, \quad (D.14)$$

$$\text{rot } V(\rho, \phi, z) = \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \partial_\rho \pi_3(\rho, z) (\sin \phi e_1 - \cos \phi e_2) \quad (D.15)$$

gegeben und für  $z \neq 0$  in jeder Komponente analytisch.

*Bemerkung:* Wie auch [Mon03, DEK<sup>+</sup>08] und [CH98] beweisen wir nicht, dass die Lösung die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Wir verweisen aber wie Cutzach und Hazard auf [BG99]. Dort werden asymptotische Entwicklungen für die Sommerfeldintegrale wie in Lemma D.2 für die Lösung der Helmholtz-Gleichung im Zweischichtmedium hergeleitet. Diese kann man dann für den Fall reeller Parameter verwenden, um die Ausstrahlungsbedingung nachzuweisen. Der Fall für komplexe Parameter folgt aus dem in Lemma D.2 gezeigten exponentiellen Abfall der Funktionen.

*Beweis von Proposition D.3.* In Zylinderkoordinaten gilt  $\text{grad div } \mathbf{\Pi} = \text{grad div } \hat{z}\pi_3 = \hat{\rho}\partial_\rho\partial_z\pi_3 + \hat{z}\partial_z^2\pi_3$  (vgl. A.3.2) und wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} V &= \kappa^2\epsilon_r\mu_r\pi_3\hat{z} + \text{grad div } \pi_3\hat{z} = (\kappa^2\epsilon_r\mu_r\pi_3 + \partial_z^2\pi_3)\hat{z} + \hat{\rho}\partial_\rho\partial_z\pi_3, \\ \text{rot } V &= \kappa^2\epsilon_r\mu_r\text{rot}(\pi_3\hat{z}) = -\kappa^2\epsilon_r\mu_r\hat{\phi}\partial_\rho\pi_3 \end{aligned}$$

in jedem Halbraum  $\mathbb{R}_\pm^3$ . Mit der Definition der Basisvektoren in Zylinderkoordinaten ergeben sich dann (D.14) und (D.15). Da  $\pi_3$  nach Lemma D.2 für  $z \neq 0$  analytisch ist, gilt dies auch für die Vektorfelder.

Mit Hilfe von Lemma B.7 sehen wir, dass die Komponenten von  $V$  in jedem Halbraum (bis auf den Punkt  $y$ ) stetige partielle Ableitungen besitzen. Somit gilt  $V \in H_{\text{loc}}\left(\text{rot}; \mathbb{R}_\pm^3 \setminus \overline{B_s(y)}\right)$  für jedes  $s > 0$ . Aus Lemma D.2 folgt, dass unsere Umformungen zur Herleitung des Hertz-Vektors gerechtfertigt waren. Nach Konstruktion sind die Tangentialkomponenten von  $V$  also stetig an der Trennschicht  $\Sigma_0$  (vgl. (D.3) und (D.6)). Analog zum Beweis von [Mon03, Thm. 5.3 (2)] folgt nun  $V \in H_{\text{loc}}\left(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_s(y)}\right)$ . Auf die gleiche Art erhalten wir auch  $d \text{rot } V \in H_{\text{loc}}\left(\text{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_s(y)}\right)$ .

Da  $V$  in  $\mathbb{R}_\pm^3 \setminus \{y\}$  zweimal stetig differenzierbar ist, löst  $V$  dort im klassischen Sinne nach Konstruktion die homogenen Maxwell-Gleichungen. Die distributionelle Lösung im Punkt  $y$  folgt nach Konstruktion mit (D.1) und den Bezeichnungen aus Tabelle D.1.

Die Eindeutigkeit der Lösung zeigt man analog zu Proposition C.2 in [Gri08]:

Für alle  $\epsilon_r \in \mathbb{C}^+$  und  $\mu_r > 0$  seien  $E, H \in H_{\text{loc}}(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$  eine ausstrahlende Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } H + \imath\kappa\epsilon_r E = 0, \quad \text{rot } E - \imath\kappa\mu_r H = 0$$

in  $\mathbb{R}^3$ , dann gilt  $E = H = 0$  in ganz  $\mathbb{R}^3$ .

Zum Beweis benötigt man noch eine Regularitätsaussage der Lösungen in jedem Halbraum. Siehe ebenfalls [Gri08] S. 49.  $\square$

**Bemerkung D.4:** Für die Lösung des Problems mit einem Dipol im oberen Halbraum – d.h.  $y = (0, 0, h)^T$  – müssen wir nur in allen Ausdrücken die Indizes  $+$  und  $-$  vertauschen.

### D.2.2. Horizontaler Dipol

Ist die Polarisation des Dipols  $p = e_1$  oder  $p = e_2$ , so treten aufgrund von Reflektionen an der Trennschicht auch Komponenten in  $e_3$ -Richtung auf, so dass wir für diese Fälle  $\mathbf{\Pi} = \pi_j e_j + \pi_3 e_3$ ,  $j = 1, 2$  als Lösung ansetzen. Wir erhalten dann aus (D.4) in kartesischen Koordinaten die skalaren Probleme

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \pi_j = -\tilde{d} \delta_y \text{ und } (\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \pi_3 = 0 \text{ in } \mathbb{R}_{\pm}^3 \quad (\text{D.16})$$

mit den Sprungbedingungen

$$\begin{aligned} [\kappa^2 \epsilon_r \mu_r \pi_1 + \partial_1^2 \pi_1 + \partial_1 \partial_3 \pi_3]_{\Sigma_0} &= [\partial_2 \partial_1 \pi_1 + \partial_2 \partial_3 \pi_3]_{\Sigma_0} = 0, \\ [d\epsilon_r \mu_r (\partial_3 \pi_1 - \partial_1 \pi_3)]_{\Sigma_0} &= [d\epsilon_r \mu_r \partial_2 \pi_3]_{\Sigma_0} = 0 \end{aligned}$$

für  $j = 1$  und

$$\begin{aligned} [\kappa^2 \epsilon_r \mu_r \pi_2 + \partial_2^2 \pi_2 + \partial_2 \partial_3 \pi_3]_{\Sigma_0} &= [\partial_1 \partial_2 \pi_2 + \partial_1 \partial_3 \pi_3]_{\Sigma_0} = 0, \\ [d\epsilon_r \mu_r (\partial_3 \pi_2 - \partial_2 \pi_3)]_{\Sigma_0} &= [d\epsilon_r \mu_r \partial_1 \pi_3]_{\Sigma_0} = 0 \end{aligned}$$

für  $j = 2$ . Dabei sind die Sprungbedingungen sicher erfüllt, falls

$$\begin{aligned} [\epsilon_r \mu_r \pi_j]_{\Sigma_0} &= [\text{div } \mathbf{\Pi}]_{\Sigma_0} = 0, \\ [d\epsilon_r \mu_r \partial_3 \pi_j]_{\Sigma_0} &= [d\epsilon_r \mu_r \pi_3]_{\Sigma_0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

für  $j = 1, 2$ . Mit diesen Sprungbedingungen sind  $\pi_1$  und  $\pi_2$  Lösungen der gleichen Differentialgleichung

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \pi_j = -\tilde{d} \delta_y \text{ in } \mathbb{R}_{\pm}^3 \text{ und } [\epsilon_r \mu_r \pi_j]_{\Sigma_0} = [d\epsilon_r \mu_r \partial_3 \pi_j]_{\Sigma_0} = 0.$$

Wir nehmen daher wie im letzten Abschnitt an, dass  $\pi_{1,2}$  rotationssymmetrisch zur  $e_3$ -Achse ist, d.h. es gilt in Zylinderkoordinaten  $\pi_{1,2} = \pi_{1,2}(\rho, z)$ . Wir erhalten  $\pi_3$  dann als Lösung von

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \pi_3 = 0 \text{ in } \mathbb{R}_{\pm}^3 \text{ und } [d\epsilon_r \mu_r \pi_3]_{\Sigma_0} = [\text{div } \mathbf{\Pi}]_{\Sigma_0} = 0.$$

In Zylinderkoordinaten gilt

$$\mathbf{\Pi}(\rho, \phi, z) = \begin{cases} \pi_1(\rho, z) \cos(\phi) \hat{\rho} - \pi_1(\rho, z) \sin(\phi) \hat{\phi} + \pi_3(\rho, \phi, z) \hat{z}, & \text{für } j = 1, \\ \pi_2(\rho, z) \sin(\phi) \hat{\rho} + \pi_2(\rho, z) \cos(\phi) \hat{\phi} + \pi_3(\rho, \phi, z) \hat{z}, & \text{für } j = 2, \end{cases}$$

so dass

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{\Pi}(\rho, \phi, z) &= \begin{cases} \cos(\phi) \partial_\rho \pi_1(\rho, z) + \partial_z \pi_3(\rho, \phi, z), & \text{für } j = 1, \\ \sin(\phi) \partial_\rho \pi_2(\rho, z) + \partial_z \pi_3(\rho, \phi, z), & \text{für } j = 2, \end{cases} \\ &= \cos(\phi_j) \partial_\rho \pi_j(\rho, z) + \partial_z \pi_3(\rho, \phi, z) \end{aligned}$$

mit

$$\phi_j := \phi - \frac{\pi}{2}(j-1), \quad j = 1, 2 \quad (\text{D.18})$$

$\pi_3$  soll also

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \pi_3 = 0 \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3 \text{ und } [d\epsilon_r \mu_r \pi_3]_{\Sigma_0} = 0, [\partial_z \pi_3]_{\Sigma_0} = -\cos(\phi_j) [\partial_\rho \pi_j]_{\Sigma_0}$$

für ein festes  $j = 1, 2$  lösen. Wir nehmen daher an, dass  $\pi_3(\rho, \phi, z) = \cos(\phi_j) \pi_3^*(\rho, z)$  mit

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r \mu_r) \pi_3^* = 0 \text{ in } \mathbb{R}_\pm^3 \text{ und } [d\epsilon_r \mu_r \pi_3^*]_{\Sigma_0} = 0, [\partial_z \pi_3^*]_{\Sigma_0} = -[\partial_\rho \pi_j]_{\Sigma_0}.$$

Das Problem für  $\pi_j$  ist vom gleichen Typ wie für den Fall eines vertikalen Dipols. Wir gehen daher analog zum letzten Abschnitt vor und setzen

$$\frac{\pi_j(\rho, z)}{\tilde{d}_-} = \begin{cases} G_{k_-}(\rho, z) + \pi_j^r(\rho, z), & z \leq 0, \\ \pi_j^t(\rho, z), & z > 0 \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

an mit

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon_r^- \mu_r^-) \pi_j^r = 0 \text{ in } \mathbb{R}_-^3 \text{ und } (\Delta + \kappa^2 \epsilon_r^+ \mu_r^+) \pi_j^t = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^3$$

und den Sprungbedingungen  $[\epsilon_r \mu_r \pi_j]_{\Sigma_0} = [d\epsilon_r \mu_r \partial_z \pi_j]_{\Sigma_0} = 0$ . Daraus ergeben sich dann die zu (D.10) und (D.11) analogen Formeln

$$\pi_j^r(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty R_H(\lambda) e^{i\beta_- |z|} \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad z \leq 0, \quad (\text{D.20})$$

$$\pi_j^t(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty T_H(\lambda) e^{i\beta_+ |z|} \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad z > 0 \quad (\text{D.21})$$

für  $\rho \geq 0$  mit  $\beta_\pm^2 = \kappa^2 \epsilon_r^\pm \mu_r^\pm - \lambda^2$  und  $\Im \beta \geq 0$  sowie

$$R_H(\lambda) = \frac{d_- \beta_- - d_+ \beta_+}{d_- \beta_- + d_+ \beta_+} \text{ und } T_H(\lambda) = \frac{\epsilon_r^- \mu_r^-}{\epsilon_r^+ \mu_r^+} (1 + R_H(\lambda)). \quad (\text{D.22})$$

Die Existenz der Integrale liefert uns das folgende

**Lemma D.5:** *Die Integrale  $\pi_j^r$  und  $\pi_j^t$  existieren für alle  $\epsilon_r^\pm \in \mathbb{C}^+$  und  $\mu_r^\pm > 0$  absolut. Weiterhin gelten für die partiellen Ableitungen die folgenden Beziehungen mit  $\rho \geq 0$ .*

$$\begin{aligned} \partial_\rho \pi_j^r(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty R_H(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_1(\lambda \rho) d\lambda, \\ \partial_z \pi_j^r(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty R_H(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \\ \partial_\rho \partial_z \pi_j^r(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty R_H(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \lambda^2 J_1(\lambda \rho) d\lambda, \\ \partial_\rho^2 \pi_j^r(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty R_H(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \frac{\lambda^3}{i\beta_-} J_0(\lambda \rho) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{4\pi \rho} \int_0^\infty R_H(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_1(\lambda \rho) d\lambda \end{aligned}$$

für  $z \leq 0$  und

$$\begin{aligned}\partial_\rho \pi_j^t(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty T_H(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_z \pi_j^t(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty T_H(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\beta_+}{\beta_-} \lambda J_0(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_\rho \partial_z \pi_j^t(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty T_H(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\beta_+}{\beta_-} \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_\rho^2 \pi_j^t(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty T_H(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\lambda^3}{i\beta_-} J_0(\lambda\rho) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^\infty T_H(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_1(\lambda\rho) d\lambda\end{aligned}$$

für  $z > 0$ . Die Integrale existieren alle absolut und die Funktionen  $\pi_j^r$  und  $\pi_j^t$  sind für  $z \neq 0$  analytisch.

Seien  $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$  und  $\Psi$  eine der Funktionen  $\pi_j^{r,t}$  oder eine ihrer partiellen Ableitungen und  $\Im \epsilon_r^\pm > 0$ , dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^n \Psi(ra, rb) = 0$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* Es ist

$$\frac{d_-}{d_+} = \begin{cases} \mu_r^+ / \mu_r^-, & \text{elektr. Dipol,} \\ \epsilon_r^+ / \epsilon_r^-, & \text{magn. Dipol.} \end{cases}$$

Die Behauptung folgt somit analog zum Beweis von Lemma D.2.

2. Die Beziehungen folgen aus der Beschränktheit von  $R_H$  und  $T_H$ , Lemma D.1 sowie (mehrmaliger) Anwendung von Lemma B.7 und  $J_2(\lambda\rho) = \frac{2}{\lambda\rho} J_1(\lambda\rho) - J_0(\lambda\rho)$  (siehe [Wat58, 2.12 (2)]). Aufgrund der Rekursionsformeln für die Besselfunktionen sehen wir somit auch, dass die einzelnen Funktionen für  $z \neq 0$  analytisch sind.

3. Das Verhalten von  $\Psi$  für  $r \rightarrow \infty$  folgt analog zu Lemma D.2.  $\square$

Da wir nun  $\pi_j$  berechnet haben, wenden wir uns  $\pi_3(\rho, \phi, z) = \cos(\phi_j) \pi_3^*(\rho, z)$  zu und setzen gemäß Abschnitt C.2.2 und passend zu den vorherigen Ansätzen

$$\pi_3^*(\rho, z) = \begin{cases} \pi_3^{*-}(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty A_-(\lambda) e^{i\beta_-|z|} \frac{e^{i\beta_-|h|}}{i\beta_-} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, & z \leq 0, \\ \pi_3^{*+}(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i\beta_+|z|} \frac{e^{i\beta_-|h|}}{i\beta_-} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, & z > 0 \end{cases}$$

#### D. Die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im Zweischichtmedium

für  $\rho \geq 0$  an. Aus den Sprungbedingungen  $[d\epsilon_r \mu_r \pi_3^*]_{\Sigma_0} = 0$  und  $[\partial_z \pi_3^*]_{\Sigma_0} = -[\partial_\rho \pi_j]_{\Sigma_0}$  erhalten wir mit  $\partial_\rho J_0(\lambda\rho) = -\lambda J_1(\lambda\rho)$  und

$$\begin{aligned}\partial_\rho G_{k_-}(\rho, 0) + \partial_\rho \pi_j^r(\rho, 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (1 + R_H(\lambda)) \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_\rho \pi_j^t(\rho, 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty T_H(\lambda) \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon_r^- \mu_r^-}{\epsilon_r^+ \mu_r^+} (1 + R_H(\lambda)) \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda\end{aligned}$$

für  $\rho \geq 0$ ,  $d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+ A_+ = d_- \epsilon_r^- \mu_r^- A_-$  und  $i\beta_+ A_+(\lambda) + i\beta_- A_-(\lambda) = \tilde{d}_- \left( \frac{\epsilon_r^- \mu_r^-}{\epsilon_r^+ \mu_r^+} - 1 \right) (1 + R_H(\lambda)) \lambda$ . Somit gilt

$$A_+(\lambda) = \frac{i}{\kappa^2} \left( 1 - \frac{\epsilon_r^- \mu_r^-}{\epsilon_r^+ \mu_r^+} \right) (1 + R_H(\lambda)) \frac{\lambda}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^- \beta_+ + d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+ \beta_-} \quad (\text{D.23})$$

und es folgt

$$\pi_3^{*-}(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i\beta_- |z|} \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \quad z \leq 0 \quad (\text{D.24})$$

$$\pi_3^{*+}(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i\beta_+ |z|} \frac{e^{i\beta_- |h|}}{i\beta_-} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \quad z > 0. \quad (\text{D.25})$$

**Lemma D.6:** Die Integrale  $\pi_3^{*+}$  und  $\pi_3^{*-}$  existieren für alle  $\epsilon_r^\pm \in \mathbb{C}^+$  und  $\mu_r^\pm > 0$  absolut. Weiterhin gelten für die partiellen Ableitungen die folgenden Beziehungen mit  $\rho \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\partial_\rho \pi_3^{*-}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} A_+(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_0(\lambda\rho) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^\infty \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} A_+(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \frac{\lambda}{i\beta_-} J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_z \pi_3^{*-}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} A_+(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_\rho \partial_z \pi_3^{*-}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} A_+(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \lambda^2 J_0(\lambda\rho) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} A_+(\lambda) e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\ \partial_z^2 \pi_3^{*-}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d_+ \epsilon_r^+ \mu_r^+}{d_- \epsilon_r^- \mu_r^-} A_+(\lambda) i\beta_- e^{i\beta_- (|z|+|h|)} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda\end{aligned}$$

für  $z \leq 0$  und

$$\begin{aligned}
 \partial_\rho \pi_3^{*+}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\lambda^2}{i\beta_-} J_0(\lambda\rho) d\lambda \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\lambda}{i\beta_-} J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\
 \partial_z \pi_3^{*+}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\beta_+}{\beta_-} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\
 \partial_\rho \partial_z \pi_3^{*+}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\beta_+}{\beta_-} \lambda^2 J_0(\lambda\rho) d\lambda \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{z}{|z|} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{\beta_+}{\beta_-} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda, \\
 \partial_z^2 \pi_3^{*+}(\rho, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty A_+(\lambda) e^{i(\beta_+|z|+\beta_-|h|)} \frac{i\beta_+^2}{\beta_-} \lambda J_1(\lambda\rho) d\lambda
 \end{aligned}$$

für  $z > 0$ . Die Integrale existieren alle absolut und die Funktionen  $\pi_3^{*+}$  und  $\pi_3^{*-}$  sind für  $z \neq 0$  analytisch.

Seien  $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$  und  $\Psi$  eine der Funktionen  $\pi_3^{*\pm}$  oder eine ihrer partiellen Ableitungen und  $\Im \epsilon_r^\pm > 0$ , dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^n \Psi(ra, rb) = 0$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* Die Beschränktheit der Faktoren von  $A_+$  folgt analog zum Beweis von Lemma D.2 und somit auch der Rest der Behauptung.

2. Die Beziehungen folgen aus der Beschränktheit von  $A_+$ , Lemma D.1 sowie (mehrmaliger) Anwendung von Lemma B.7. Aufgrund der Rekursionsformeln für die Besselfunktionen (vgl. [Wat58, 2.12]) sehen wir somit auch, dass die einzelnen Funktionen für  $z \neq 0$  analytisch sind.

3. Das Verhalten von  $\Psi$  für  $r \rightarrow \infty$  folgt analog zu Lemma D.2.  $\square$

Nachdem wir nun die Komponenten des Hertz-Vektors berechnet haben, berechnen wir die Vektorfelder  $V = \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \mathbf{\Pi} + \text{grad div } \mathbf{\Pi}$  und  $\text{rot } V$ . Wir erhalten aus dem Ansatz für  $\mathbf{\Pi}$  mit (D.18)

$$\text{grad div } \mathbf{\Pi}(\rho, \phi, z) = \text{grad div} \left( \pi_j(\rho, \phi, z) (\cos(\phi_j) \hat{\rho} - \sin(\phi_j) \hat{\phi}) + \cos(\phi_j) \pi_3^*(\rho, \phi, z) \hat{z} \right)$$

für  $j = 1, 2$  und daraus mit A.3.2

$$\begin{aligned}
 V(\rho, \phi, z) &= \cos(\phi_j) \left( \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \pi_j(\rho, z) + \partial_\rho^2 \pi_j(\rho, z) + \partial_\rho \partial_z \pi_3^*(\rho, z) \right) \hat{\rho} \\
 &\quad - \sin(\phi_j) \left( \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \pi_j(\rho, z) + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho \pi_j(\rho, z) + \partial_z \pi_3^*(\rho, z)) \right) \hat{\phi} \\
 &\quad + \cos(\phi_j) \left( \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \pi_3^*(\rho, z) + \partial_\rho \partial_z \pi_j(\rho, z) + \partial_z^2 \pi_3^*(\rho, z) \right) \hat{z} \\
 &=: \cos(\phi_j) \mathcal{V}_\rho(\rho, z) \hat{\rho} - \sin(\phi_j) \mathcal{V}_\phi(\rho, z) \hat{\phi} + \cos(\phi_j) \mathcal{V}_z(\rho, z) \hat{z},
 \end{aligned} \tag{D.26}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} V(\rho, \phi, z) &= \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}(\rho, \phi, z) \\
 &= \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \left( \sin(\phi_j) \left( \partial_z \pi_j(\rho, z) - \frac{1}{\rho} \pi_3^*(\rho, z) \right) \hat{\rho} \right. \\
 &\quad \left. + \cos(\phi_j) \left( \partial_z \pi_j(\rho, z) - \partial_\rho \pi_3^*(\rho, z) \right) \hat{\phi} \right. \\
 &\quad \left. - \sin(\phi_j) \left( \partial_\rho \pi_j(\rho, z) \right) \hat{z} \right) \\
 &=: \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \left( \sin(\phi_j) \mathfrak{Y}_\rho(\rho, z) \hat{\rho} + \cos(\phi_j) \mathfrak{Y}_\phi(\rho, z) \hat{\phi} \right. \\
 &\quad \left. - \sin(\phi_j) \mathfrak{Y}_z(\rho, z) \hat{z} \right)
 \end{aligned} \tag{D.27}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 V(\rho, \phi, z) &= \left( \cos(\phi_j) \cos(\phi) \mathcal{V}_\rho(\rho, z) + \sin(\phi_j) \sin(\phi) \mathcal{V}_\phi(\rho, z) \right) e_1 \\
 &\quad + \left( \cos(\phi_j) \sin(\phi) \mathcal{V}_\rho(\rho, z) - \sin(\phi_j) \cos(\phi) \mathcal{V}_\phi(\rho, z) \right) e_2 \\
 &\quad + \cos(\phi_j) \mathcal{V}_z(\rho, z) e_3,
 \end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} V(\rho, \phi, z) &= \kappa^2 \epsilon_r \mu_r \left( \left( \sin(\phi_j) \cos(\phi) \mathfrak{Y}_\rho(\rho, z) - \cos(\phi_j) \sin(\phi) \mathfrak{Y}_\phi(\rho, z) \right) e_1 \right. \\
 &\quad \left. + \left( \sin(\phi_j) \sin(\phi) \mathfrak{Y}_\rho(\rho, z) + \cos(\phi_j) \cos(\phi) \mathfrak{Y}_\phi(\rho, z) \right) e_2 \right. \\
 &\quad \left. - \sin(\phi_j) \mathfrak{Y}_z(\rho, z) e_3 \right).
 \end{aligned} \tag{D.29}$$

**Proposition D.7:** Seien  $\epsilon_r^\pm \in \mathbb{C}^+$ ,  $\mu_r^\pm > 0$  mit  $\Re\{(\epsilon_r^+ \overline{\epsilon_r^-})^2\} > 0$ . Für jedes  $s > 0$  sind  $V$  und  $d \operatorname{rot} V$  in  $H_{loc}(\operatorname{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_s(y)})$  die ausstrahlende Lösung der Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} H + \iota \kappa \epsilon_r E = 0 \quad \operatorname{rot} E - \iota \kappa \mu_r H = \delta_y e_j$$

in  $\mathbb{R}_{\pm}^3$  und den Sprungbedingungen (D.3) mit  $H = V$  und  $E = \frac{\iota}{\kappa\epsilon_r} \operatorname{rot} V = d \operatorname{rot} V$  im Falle eines magnetischen Dipols und

$$\operatorname{rot} H + \iota\kappa\epsilon_r E = \delta_y e_j \quad \operatorname{rot} E - \iota\kappa\mu_r H = 0$$

in  $\mathbb{R}_{\pm}^3$  und den Sprungbedingungen (D.3) mit  $E = V$  und  $H = \frac{1}{\iota\kappa\mu_r} \operatorname{rot} V = d \operatorname{rot} V$  im Falle eines elektrischen Dipols mit Polarisationsvektor  $e_j, j = 1, 2$ .

Die Vektorfelder sind dabei durch (D.28) und (D.29) gegeben und für  $z \neq 0$  in jeder Komponente analytisch.

*Bemerkung:* Zum Beweis und zur Ausstrahlungsbedingung siehe Proposition D.3.

**Bemerkung D.8:** Für die Lösung des Problems mit einem Dipol im oberen Halbraum – d.h.  $y = (0, 0, h)^T$  – müssen wir nur in allen Ausdrücken die Indizes + und – vertauschen.

### D.2.3. Die dyadischen Greenschen Funktionen

Wir fassen nun die Ergebnisse aus den letzten beiden Abschnitten zusammen und geben damit die Fundamentallösungen von (4.11) für den magnetischen bzw. den elektrischen Fall an.

Wir definieren die matrixwertigen dyadischen Greenschen Funktionen  $\mathbb{G}^m$  und  $\mathbb{G}^e$  als Lösung von

$$\operatorname{rot}_x \frac{1}{\epsilon_r(x)} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^m(x, y) - \kappa^2 \mu_r(x) \mathbb{G}^m(x, y) = -\iota\kappa \delta_y \mathcal{I}_{3 \times 3} \quad (\text{D.30})$$

$$\operatorname{rot}_x \frac{1}{\mu_r(x)} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^e(x, y) - \kappa^2 \epsilon_r(x) \mathbb{G}^e(x, y) = \iota\kappa \delta_y \mathcal{I}_{3 \times 3} \quad (\text{D.31})$$

mit  $x \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_0, \mathbb{G}^m(\cdot, y), \mathbb{G}^e(\cdot, y) \in H_{\text{loc}}\left(\operatorname{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_s(y)}, \mathbb{C}^{3 \times 3}\right)$  und ebenso  $\frac{1}{\epsilon_r(\cdot)} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^m(\cdot, y), \frac{1}{\mu_r(\cdot)} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^e(\cdot, y) \in H_{\text{loc}}\left(\operatorname{rot}; \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_s(y)}, \mathbb{C}^{3 \times 3}\right)$  für jedes  $s > 0$ . Dabei bedeute  $\operatorname{rot}_x$  die spaltenweise Anwendung von  $\operatorname{rot}$  bzgl. der ersten Variablen. Weiterhin gelte die Ausstrahlungsbedingung

$$\iint_{\partial B_R} \left| \nu \times \mathbb{G}^{m/e}(\cdot, y)p + \frac{\iota}{\kappa\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^{m/e}(\cdot, y)p \right|^2 d\Sigma = o(1), \quad R \rightarrow \infty$$

für jeden Polarisationsvektor  $0 \neq p \in \mathbb{R}^3$ .

Somit ist das Vektorfeld  $\mathbb{G}^m(\cdot, y)p$  in jedem Halbraum eine Lösung von (D.1) mit rechter Seite  $-\iota\kappa\epsilon_r\delta_y p$ . Weiterhin erfüllen  $\mathbb{G}^m(\cdot, y)p$  und  $\frac{1}{\epsilon_r(\cdot)} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}^m(\cdot, y)p$  die Sprungbedingungen (D.3). Die analoge Aussage gilt für  $\mathbb{G}^e(\cdot, y)p$ , so dass aufgrund der Linearität der Differentialgleichung und der Eindeutigkeit der Fundamentallösungen aus den letzten beiden Abschnitten die Spalten von  $\mathbb{G}^{m/e}(\cdot, y)$  durch die Vektorfelder aus den letzten beiden Abschnitten gegeben sind.

### Darstellung durch Hankel-Transformationen

Da wir die Komponenten der dyadischen Funktionen in Integralform hergeleitet haben und diese gerade einer Hankel-Transformation entsprechen, werden wir nun die Komponenten als solche angeben. Dazu führen wir zunächst die Funktionen ein, für die die Komponenten durch eine Hankel-Transformation gegeben sind. Nach den Lemmata D.2, D.5 und D.6 existieren diese Hankel-Transformierten für  $\Re\{(\epsilon_r^+ \epsilon_r^-)^2\} > 0$ . Dann listen wir noch einmal alle Komponentenfunktionen als Hankel-Transformation auf und geben schließlich die von uns benötigten Spalten von  $\mathbb{G}^m$  und  $\text{rot}_x \mathbb{G}^m$  für  $x_3 > 0$  an. Wir verwenden im Folgenden die abkürzende Schreibweise  $[\mathcal{H}_n(g)](\rho, z)$  für die Hankel-Transformation  $n$ -ter Ordnung der Funktion  $\lambda \mapsto g(\lambda, z)$  statt  $[\mathcal{H}_n(\lambda \mapsto g(\lambda, z))](\rho, z)$ .

Mit den Bezeichnungen aus (D.9), (D.22) und (D.23) definieren wir die folgenden Funktionen für  $\lambda \geq 0$  und  $z \in \mathbb{R}$ . In der linken Spalte sei  $z \leq 0$  und in der rechten sei  $z > 0$ .

$$\begin{aligned} f_0^-(\lambda, z) &:= -\frac{1}{4\pi} R_V(\lambda) \frac{e^{\imath\beta_-(|z|+|h|)}}{\imath\beta_-}, & f_0^+(\lambda, z) &:= -\frac{1}{4\pi} T_V(\lambda) \frac{e^{\imath\beta_+|z|+\imath\beta_-|h|}}{\imath\beta_-}, \\ f_1^-(\lambda, z) &:= -\frac{1}{4\pi} R_H(\lambda) \frac{e^{\imath\beta_-(|z|+|h|)}}{\imath\beta_-}, & f_1^+(\lambda, z) &:= -\frac{1}{4\pi} T_H(\lambda) \frac{e^{\imath\beta_+|z|+\imath\beta_-|h|}}{\imath\beta_-}, \\ f_2^-(\lambda, z) &:= -\frac{1}{4\pi} A_+(\lambda) \frac{e^{\imath\beta_-(|z|+|h|)}}{\imath\beta_-}, & f_2^+(\lambda, z) &:= -\frac{1}{4\pi} A_+(\lambda) \frac{e^{\imath\beta_+|z|+\imath\beta_-|h|}}{\imath\beta_-}, \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Mit  $\rho^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ ,  $\phi = \arctan(x_2/x_1)$ ,  $|z| = x_3$  und  $|h| = -y_3$  lassen sich die Komponentenfunktionen für die dritte Spalte wie folgt schreiben (vgl. (D.12) bis (D.14)).

$$\begin{aligned} \frac{\pi_3^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= G_{\kappa_-}(\rho, z) + [\mathcal{H}_0(f_0^-)](\rho, z) & \frac{\pi_3^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= [\mathcal{H}_0(f_0^+)](\rho, z) \\ \frac{\partial_\rho \pi_3^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= \partial_\rho G_{\kappa_-}(\rho, z) & \frac{\partial_\rho \pi_3^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= -[\mathcal{H}_1(\lambda f_0^+)](\rho, z) \\ &\quad - [\mathcal{H}_1(\lambda f_0^-)](\rho, z) \\ \frac{\partial_\rho \partial_z \pi_3^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= \partial_\rho \partial_z G_{\kappa_-}(\rho, z) & \frac{\partial_\rho \partial_z \pi_3^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= -\imath \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_1(\lambda \beta_+ f_0^+)](\rho, z) \\ &\quad - \imath \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_1(\lambda \beta_- f_0^-)](\rho, z) \\ \frac{\partial_z^2 \pi_3^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= \partial_z^2 G_{\kappa_-}(\rho, z) & \frac{\partial_z^2 \pi_3^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= -[\mathcal{H}_0(\beta_+^2 f_0^+)](\rho, z) \\ &\quad - [\mathcal{H}_0(\beta_-^2 f_0^-)](\rho, z) \end{aligned}$$

Wir erhalten also mit  $\beta_+^2 = \kappa^2 \epsilon_r^+ \mu_r^+ - \lambda^2$  und  $\tilde{d}_- = 1/i\kappa\mu_r^-$  für die letzte Spalte von  $\mathbb{G}^m$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_3^m(\rho, \phi, z) := & -\frac{1}{\kappa\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(\lambda\beta_+ f_0^+)](\rho, z)(\cos\phi e_1 + \sin\phi e_2) \\ & -\frac{i}{\kappa\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\lambda^2 f_0^+)](\rho, z)e_3, \quad z > 0. \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Für die 3-te Spalte von  $\text{rot}_x \mathbb{G}^m$  gilt

$$\frac{i}{\kappa\epsilon_r^+} \text{rot}_x \mathbb{G}_3^m(\rho, \phi, z) := -\frac{\mu_r^+}{\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(\lambda f_0^+)](\sin\phi e_1 - \cos\phi e_2). \quad (\text{D.34})$$

Die Komponentenfunktionen für die  $j$ -te Spalte,  $j = 1, 2$ , lassen sich wie folgt schreiben (vgl. (D.20) bis (D.28)).

$$\begin{aligned} \frac{\pi_j^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= G_{k-}(\rho, z) + [\mathcal{H}_0(f_1^-)](\rho, z) & \frac{\pi_j^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= [\mathcal{H}_0(f_1^+)](\rho, z) \\ \frac{\partial_\rho \pi_j^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= \partial_\rho G_{k-}(\rho, z) & \frac{\partial_\rho \pi_j^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= -[\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) \\ & - [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^-)](\rho, z) \\ \frac{\partial_z \pi_j^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= \partial_z G_{k-}(\rho, z) & \frac{\partial_z \pi_j^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= i \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_0(\beta_+ f_1^+)](\rho, z) \\ & + i \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_0(\beta_- f_1^-)](\rho, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\rho \partial_z \pi_j^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= \partial_\rho \partial_z G_{k-}(\rho, z) & \frac{\partial_\rho \partial_z \pi_j^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= -i \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_1(\lambda\beta_+ f_1^+)](\rho, z) \\ & - i \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_1(\lambda\beta_- f_1^-)](\rho, z) \\ \frac{\partial_\rho^2 \pi_j^-(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= \partial_\rho^2 G_{k-}(\rho, z) & \frac{\partial_\rho^2 \pi_j^+(\rho, z)}{\tilde{d}_-} &= -[\mathcal{H}_0(\lambda^2 f_1^+)](\rho, z) \\ & - [\mathcal{H}_0(\lambda^2 f_1^-)](\rho, z) & & + \frac{1}{\rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) \\ & + \frac{1}{\rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^-)](\rho, z) \end{aligned}$$

D. Die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im Zweischichtmedium

---

$$\begin{aligned}
\pi_3^{*-}(\rho, z) &= \frac{d_+\epsilon_r^+\mu_r^+}{d_-\epsilon_r^-\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(f_2^-)] & \pi_3^{*+}(\rho, z) &= [\mathcal{H}_1(f_2^+)] \\
\partial_\rho\pi_3^{*-}(\rho, z) &= \frac{d_+\epsilon_r^+\mu_r^+}{d_-\epsilon_r^-\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^-)] & \partial_\rho\pi_3^{*+}(\rho, z) &= [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^+)] \\
&\quad - \frac{1}{\rho} \frac{d_+\epsilon_r^+\mu_r^+}{d_-\epsilon_r^-\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(f_2^-)] & &\quad - \frac{1}{\rho} [\mathcal{H}_1(f_2^+)] \\
\partial_z\pi_3^{*-}(\rho, z) &= i \frac{z}{|z|} \frac{d_+\epsilon_r^+\mu_r^+}{d_-\epsilon_r^-\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(\beta_- f_2^-)] & \partial_z\pi_3^{*+}(\rho, z) &= i \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)] \\
\partial_\rho\partial_z\pi_3^{*-}(\rho, z) &= i \frac{z}{|z|} \frac{d_+\epsilon_r^+\mu_r^+}{d_-\epsilon_r^-\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\lambda\beta_- f_2^-)] & \partial_\rho\partial_z\pi_3^{*+}(\rho, z) &= i \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_0(\lambda\beta_+ f_2^+)] \\
&\quad - i \frac{1}{\rho} \frac{z}{|z|} \frac{d_+\epsilon_r^+\mu_r^+}{d_-\epsilon_r^-\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(\beta_- f_2^-)] & &\quad - i \frac{1}{\rho} \frac{z}{|z|} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)] \\
\partial_z^2\pi_3^{*-}(\rho, z) &= - \frac{d_+\epsilon_r^+\mu_r^+}{d_-\epsilon_r^-\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(\beta_-^2 f_2^-)] & \partial_z^2\pi_3^{*+}(\rho, z) &= - [\mathcal{H}_1(\beta_+^2 f_2^+)]
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für die erste Spalte von  $\text{rot}_x \mathbb{G}^m$  mit  $\phi_1 = \phi$  und  $\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi$

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\kappa\epsilon_r^+} \text{rot}_x \mathbb{G}_1^m(\rho, \phi, z) &:= i\kappa\mu_r^+ \sin \phi \cos \phi \left( [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(f_2^+)](\rho, z) \right) e_1 \\
&\quad + i\kappa\mu_r^+ \sin^2 \phi \left( [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(f_2^+)](\rho, z) \right) e_2 \\
&\quad + i\kappa\mu_r^+ \left( \frac{1}{\kappa\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\beta_+ f_1^+)](\rho, z) - [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^+)](\rho, z) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{\rho} [\mathcal{H}_1(f_2^+)](\rho, z) \right) e_2 \\
&\quad + \left( \frac{\mu_r^+}{\mu_r^-} \sin \phi [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) \right) e_3.
\end{aligned} \tag{D.35}$$

Für die zweite Spalte ergibt sich mit  $\phi_2 = \phi - \frac{\pi}{2}$  und  $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$

$$\begin{aligned}
 \frac{\iota}{\kappa\epsilon_r^+} \operatorname{rot}_x \mathbb{G}_2^m(\rho, \phi, z) &:= -\iota\kappa\mu_r^+ \cos^2 \phi \left( [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(f_2^+)](\rho, z) \right) e_1 \\
 &\quad - \iota\kappa\mu_r^+ \left( \frac{1}{\kappa\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\beta_+ f_1^+)](\rho, z) - [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^+)](\rho, z) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{1}{\rho} [\mathcal{H}_1(f_2^+)](\rho, z) \right) e_1 \\
 &\quad - \iota\kappa\mu_r^+ \sin \phi \cos \phi \left( [\mathcal{H}_0(\lambda f_2^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(f_2^+)](\rho, z) \right) e_2 \\
 &\quad - \left( \frac{\mu_r^+}{\mu_r^-} \cos \phi [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) \right) e_3.
 \end{aligned} \tag{D.36}$$

Schließlich erhalten wir wieder mit  $\beta_+^2 = \kappa^2 \epsilon_r^+ \mu_r^+ - \lambda^2$ ,  $\phi_1 = \phi$  und  $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$  für die erste Spalte von  $\mathbb{G}^m$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G}_1^m(\rho, \phi, z) &:= \iota \cos^2 \phi \left( \frac{1}{\kappa\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\lambda^2 f_1^+)](\rho, z) + [\mathcal{H}_0(\lambda\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\kappa\mu_r^- \rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right) e_1 \\
 &\quad + \iota \left( \frac{1}{\kappa\mu_r^- \rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) - \kappa\epsilon_r^+ \frac{\mu_r^+}{\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(f_1^+)](\rho, z) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{1}{\rho} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right) e_1 \\
 &\quad + \iota \cos \phi \sin \phi \left( \frac{1}{\kappa\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\lambda^2 f_1^+)](\rho, z) + [\mathcal{H}_0(\lambda\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \frac{2}{\kappa\mu_r^- \rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right) e_2 \\
 &\quad + \cos \phi \left( [\mathcal{H}_1(\lambda^2 f_2^+)](\rho, z) - \frac{1}{\kappa\mu_r^-} [\mathcal{H}_1(\lambda\beta_+ f_1^+)](\rho, z) \right) e_3.
 \end{aligned} \tag{D.37}$$

*D. Die Fundamentallösung der Maxwell-Gleichungen im Zweischichtmedium*

---

Für die zweite Spalte ergibt sich ebenso mit  $\phi_2 = \phi - \frac{\pi}{2}$  und  $\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi$

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_2^m(\rho, \phi, z) := & \iota \cos \phi \sin \phi \left( \frac{1}{\kappa \mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\lambda^2 f_1^+)](\rho, z) + [\mathcal{H}_0(\lambda \beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right. \\
& \left. - \frac{2}{\kappa \mu_r^- \rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right) e_1 \\
& + \iota \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\kappa \mu_r^-} [\mathcal{H}_0(\lambda^2 f_1^+)](\rho, z) + [\mathcal{H}_0(\lambda \beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right. \\
& \left. - \frac{2}{\kappa \mu_r^- \rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) - \frac{2}{\rho} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right) e_2 \quad (\text{D.38}) \\
& + \iota \left( \frac{1}{\kappa \mu_r^- \rho} [\mathcal{H}_1(\lambda f_1^+)](\rho, z) - \kappa \epsilon_r^+ \frac{\mu_r^+}{\mu_r^-} [\mathcal{H}_0(f_1^+)](\rho, z) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho} [\mathcal{H}_1(\beta_+ f_2^+)](\rho, z) \right) e_2 \\
& + \sin \phi \left( [\mathcal{H}_1(\lambda^2 f_2^+)](\rho, z) - \frac{1}{\kappa \mu_r^-} [\mathcal{H}_1(\lambda \beta_+ f_1^+)](\rho, z) \right) e_3.
\end{aligned}$$

# Zusammenfassung/Abstract

Wir untersuchen die numerische Lösung des inversen Streuproblems der Rekonstruktion der Form, Position und Anzahl endlich vieler perfekt leitender Objekte durch Nahfeldmessungen zeitharmonischer elektromagnetischer Wellen mit Hilfe von Metalldetektoren. Wir nehmen an, dass sich die Objekte gänzlich im unteren Halbraum eines unbeschränkten zweischichtigen Hintergrundmediums befinden. Wir nehmen weiter an, dass der obere Halbraum mit Luft und der untere Halbraum mit Erde gefüllt ist. Wir betrachten zuerst die physikalischen Grundlagen elektromagnetischer Wellen, aus denen wir zunächst ein vereinfachtes mathematisches Modell ableiten, in welchem wir direkt das elektromagnetische Feld messen. Dieses Modell erweitern wir dann um die Messung des elektromagnetischen Feldes von Sendespulen mit Hilfe von Empfangsspulen. Für das vereinfachte Modell entwickeln wir, unter Verwendung der Theorie des zugehörigen direkten Streuproblems, ein nichtiteratives Verfahren, das auf der Idee der sogenannten Faktorisierungsmethode beruht. Dieses Verfahren übertragen wir dann auf das erweiterte Modell. Wir geben einen Implementierungsvorschlag der Rekonstruktionsmethode und demonstrieren an einer Reihe numerischer Experimente die Anwendbarkeit des Verfahrens. Weiterhin untersuchen wir mehrere Abwandlungen der Methode zur Verbesserung der Rekonstruktionen und zur Verringerung der Rechenzeit.

We investigate the numerical solution of the inverse scattering problem to reconstruct the shape, position and number of a collection of finitely many perfectly conducting scatterers using near field measurements of time-harmonic electromagnetic waves obtained by metal detectors. The scatterers are assumed to be buried within the lower half-space of an unbounded two-layered background medium. We further assume the upper half-space to be filled with air and the lower half-space to be filled with soil. Recalling the physical foundations of electromagnetic waves, we first deduce a simplified mathematical model, which involves measurements of the electromagnetic field itself. Then we extend this model by incorporating measurements of the electromagnetic field by means of emitter and receiver coils. Based on theoretical results for the corresponding direct scattering problem, we derive a non-iterative method for the simplified model which is based on the idea of the so-called factorisation method. Then we apply this scheme to our extended model, propose a numerical implementation of this reconstruction method and demonstrate its viability in a series of numerical experiments. Furthermore, we investigate several modifications of the method for improving the quality of the reconstructions as well as reducing the computation time.



# Literaturverzeichnis

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach den Referenzmarken sortiert.

- [And79] W. L. ANDERSON: *Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering*. Geophysics, 44(7):1287–1305, 1979.
- [And82] W. L. ANDERSON: *Fast Hankel Transforms using related and lagged convolutions*. ACM Trans. Math. Softw., 8(4):344–368, 1982.
- [And84] W. L. ANDERSON: *Computation of Green's tensor integrals for three-dimensional electromagnetic problems using fast Hankel transforms*. Geophysics, 49(10):1754–1759, 1984.
- [AS72] M. ABRAMOWITZ und I. A. STEGUN (Herausgeber): *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., 1972.
- [BCS02] A. BUFFA, M. COSTABEL und D. SHEEN: *On traces for  $H(\text{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains*. J. Math. Anal. Appl., 276(2):845–867, 2002.
- [BG99] L. BREKHOVSKIKH und O. GODIN: *Acoustics of Layered Media II*. Springer-Verlag, 1999.
- [Bor01] B. BORCHERS: *Hankel Transform Routines in MATLAB®*. <http://infohost.nmt.edu/~borchers/hankel.html>, 9. Juli 2001.
- [Brü99] M. BRÜHL: *Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie*. Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, 1999.
- [Bru02] C. BRUSCHINI: *A Multidisciplinary Analysis of Frequency Domain Metal Detectors for Humanitarian Demining*. Doktorarbeit, Vrije Univeriteit Brussel, 2002.
- [Ces96] M. CESSENAT: *Mathematical Methods in Electromagnetism*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1996.
- [CFH06] F. CAKONI, M. FARES und H. HADDAR: *Analysis of two linear sampling methods applied to electromagnetic imaging of buried objects*. Inverse Problems, 22(3):845–867, 2006.

- [CH98] P.-M. CUTZACH und C. HAZARD: *Existence, uniqueness and analyticity properties for electromagnetic scattering in a two-layered medium*. Math. Methods Appl. Sci., 21(5):433–461, 1998.
- [CHP03] D. COLTON, H. HADDAR und M. PIANA: *The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering theory*. Inverse Problems, 19(6):S105–S137, 2003.
- [Chr90] N. B. CHRISTENSEN: *Optimized Fast Hankel Transform Filters*. Geophysical Prospecting, 38(5):545–568, 1990.
- [CK92] D. COLTON und R. KRESS: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Krieger Publishing Company, 1992. Reprint with corrections.
- [CK98] D. COLTON und R. KRESS: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag, 1998.
- [CK06] D. COLTON und R. KRESS: *Using fundamental solutions in inverse scattering*. Inverse Problems, 22(3):R49–R66, 2006.
- [Coy00] J. COYLE: *Locating the support of objects contained in a two-layered background medium in two dimensions*. Inverse Problems, 16(2):275–292, 2000.
- [DEK<sup>+</sup>08] F. DELBARY, K. ERHARD, R. KRESS, R. POTTHAST und J. SCHULZ: *Inverse electromagnetic scattering in a two-layered medium with an application to mine detection*. Inverse Problems, 24(1):015002 (18 pp.), 2008.
- [Dem95] W. DEMTRÖDER: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer-Verlag, 1995.
- [DL90] R. DAUTRAY und J.-L. LIONS: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Band 1. Springer-Verlag, 1990.
- [ENH96] H. W. ENGL, A. NEUBAUER und M. HANKE: *Regularization for Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [GHK<sup>+</sup>05] B. GEBAUER, M. HANKE, A. KIRSCH, W. MUNIZ und C. SCHNEIDER: *A sampling method for detecting buried objects using electromagnetic scattering*. Inverse Problems, 21(6):2035–2050, 2005.
- [GHS08] B. GEBAUER, M. HANKE und C. SCHNEIDER: *Sampling methods for low-frequency electromagnetic imaging*. Inverse Problems, 24(1):015007 (18 pp.), 2008.
- [Gri08] R. GRIESMAIER: *Detection of Small Buried Objects: Asymptotic Factorization and MUSIC*. Doktorarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2008.

- [GSLB03] D. M. GUELLE, A. L. SMITH, A. M. LEWIS und T. J. BLOODWORTH: *EUR 20837 Metal Detector Handbook for Humanitarian Demining*. European Commission, 2003. [http://serac.jrc.it/publications/pdf/metal\\_detector\\_handbook.pdf](http://serac.jrc.it/publications/pdf/metal_detector_handbook.pdf).
- [GvL96] G. H. GOLUB und C. F. VAN LOAN: *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3. Auflage, 1996.
- [HEP06] M. F. B. HASSAN, K. ERHARD und R. POTTHAST: *The point-source method for 3D reconstructions for the Helmholtz and Maxwell equations*. Inverse Problems, 22(1):331–353, 2006.
- [Hol05] D. HOLDER: *Electrical impedance tomography: methods, history, and applications*. CRC Press, 2005.
- [HUM07] *Projektverbund HuMin/MD — Metalldetektoren für Humanitäres Minenräumen: Entwicklungspotenziale bei Datenanalyse und Messtechnik*. <http://www.humin-md.de>, 2007.
- [IP05] J. IGEL und H. PREETZ: *Elektromagnetische Bodenparameter und ihre Abhängigkeit von den Bodeneigenschaften*. Technischer Bericht 1, Leibniz-Institut für Angewandte Geophysik, Hannover, 2005. Zwischenbericht Projektverbund Humanitäres Minenräumen.
- [Jel94] R. J. JELITTO: *Elektrodynamik*. AULA-Verlag, 3. Auflage, 1994.
- [JS79] H. JOHANSEN und K. SORENSEN: *Fast Hankel Transforms*. Geophysical Prospecting, 27(4):876–901, 1979.
- [KG08] A. KIRSCH und N. GRINBERG: *The Factorization Method for Inverse Problems*. Oxford University Press, 2008.
- [Kir96] A. KIRSCH: *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, 1996.
- [Kir07] A. KIRSCH: *An Integral Equation for Maxwell's Equations in a Layered Medium with an Application to the Factorization Method*. J. Integral Equations and Appl., 19(3):333–359, 2007.
- [Kön02] K. KÖNIGSBERGER: *Analysis 2*. Springer-Verlag, 2002.
- [Kre02a] R. KRESS: *Scattering. Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, Kapitel Electromagnetic waves scattering: Specific theoretical tools. Academic Press, 2002.

- [Kre02b] R. KRESS: *Scattering. Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, Kapitel Acoustic scattering: Specific theoretical tools. Academic Press, 2002.
- [LM10] *Landmine Monitor*.  
<http://lm.icbl.org/index.php/LM/The-Issues/FAQs>, 13. März 2010.
- [Luk62] Y. L. LUKE: *Integrals of Bessel Functions*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- [Max54] J. C. MAXWELL: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover Publ., 1954.
- [MDC03] *Geneva International Centre for Humanitarian Demining: Metal Detectors Catalogue*, 2003. <http://www.gichd.ch>.
- [Mon03] P. MONK: *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford University Press, 2003.
- [Nèd01] J.-C. NÈDÈDELEC: *Acoustic and Electromagnetic Equations*. Springer-Verlag, 2001.
- [Pet93] M. PETRY: *Über die Streuung zeitharmonischer Wellen im geschichteten Raum*. Doktorarbeit, Georg-August-Universität zu Göttingen, 1993.
- [Pot06] R. POTTHAST: *A survey on sampling and probe methods for inverse problems*. *Inverse Problems*, 22(2):R1–R47, 2006.
- [RR04] M. RENARDY und R. C. ROGERS: *An introduction to partial differential equations*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2004.
- [Sch05] B. SCHAPPEL: *Die Faktorisierungsmethode für die elektrische Impedanztomographie*. Doktorarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2005.
- [Som78] A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Verlag Harri Deutsch, 1978.
- [Ste81] F. STENGER: *Numerical Methods Based on Whittaker Cardinal, or Sinc Functions*. *SIAM Review*, 23(2):165–224, 1981.
- [Wat58] G. N. WATSON: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1958.
- [Web81] C. WEBER: *Regularity theorems for Maxwell's equations*. *Math. Methods Appl. Sci.*, 3(4):523–536, 1981.
- [Zag06] S. ZAGLMAYR: *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. Doktorarbeit, Johannes Kepler Universität Linz, 2006.