

**Untersuchung des Lichts biologischer Proben  
hinsichtlich nichtklassischer Zustände**

**D i s s e r t a t i o n**  
zur Erlangung des Grades  
„Doktor der  
Naturwissenschaften“

**am Fachbereich Biologie  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz**

**Erich Schirmacher**  
geb. in Fulda am 24.09.1978

**Mainz, 09.06.2008**



# **Untersuchung des Lichts biologischer Proben hinsichtlich nichtklassischer Zustände**

**D i s s e r t a t i o n**  
zur Erlangung des Grades  
„Doktor der  
Naturwissenschaften“

**am Fachbereich Biologie  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz**

**Erich Schirmacher**  
**geb. in Fulda am 24.09.1978**

Dekan:

1. Berichterstatter:

2. Berichterstatter:

Tag der mündlichen Prüfung: 26.09.2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Quantenmechanische Grundlagen . . . . .	4
2.1.1	Heisenbergsche Unschärferelation . . . . .	6
2.1.2	Bosonen und Fermionen . . . . .	7
2.1.3	Korrespondenzprinzip . . . . .	8
2.1.4	Schrödinger-Gleichung . . . . .	9
2.1.5	Unitäre Transformation . . . . .	10
2.1.6	Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren . . . . .	11
2.1.7	Der Dichte-Operator . . . . .	12
2.2	Elektrodynamische Grundlagen . . . . .	16
2.2.1	Maxwellgleichungen . . . . .	16
2.2.2	Potentiale der Elektrodynamik . . . . .	17
2.2.3	Quantisierung des elektrischen Feldes . . . . .	18
2.2.4	Photonenprozesse . . . . .	24
2.2.5	Intensität . . . . .	26
2.2.6	Moden des elektromagnetischen Feldes . . . . .	31
2.3	Detektion von Licht . . . . .	41
2.3.1	Photomultiplier . . . . .	43
2.3.2	Das Rauschen des Photomultipliers . . . . .	48
2.3.3	Quantenmechanische Behandlung der Übergangswahrscheinlichkeit . . . . .	52
2.3.4	Multimodige Photonenverteilung . . . . .	58
2.3.5	Quanteneffizienz und Detektionseffizienz . . . . .	63
2.4	Zustände und ihre Zeitentwicklung . . . . .	64
2.4.1	Teilchenzahlzustände . . . . .	64
2.4.2	Kohärente Zustände . . . . .	68
2.4.3	Gequetschte Zustände . . . . .	75
2.4.4	Pseudowahrscheinlichkeiten . . . . .	81
2.4.5	Chaotische Strahlung . . . . .	83
2.5	Optische Anwendungen . . . . .	86
2.5.1	Kohärenz . . . . .	87
2.5.2	Kohärenz erster Ordnung . . . . .	88
2.5.3	Kohärenz zweiter Ordnung . . . . .	94
2.5.4	Fano-Faktoren . . . . .	100



<b>3</b>	<b>Simulationen</b>	<b>101</b>
3.1	Einfluss der Detektionseffizienz auf die Photonenstatistik . . . . .	101
3.1.1	Monomodiges Feld mit Super-Poisson-Statistik . . . . .	101
3.1.2	Monomodiges Feld mit Sub-Poisson-Statistik . . . . .	103
3.2	Simulation multimodiger Felder . . . . .	106
3.2.1	Multimodiger reiner Produktzustand . . . . .	106
3.2.2	Summe aus Produktzuständen . . . . .	113
3.3	Mögliche experimentelle Ansätze zum Nachweis von nichtklassischem Licht . . .	119
<b>4</b>	<b>Messergebnisse</b>	<b>121</b>
4.1	Messaufbau . . . . .	121
4.1.1	Photomultiplier und Vorverstärker . . . . .	122
4.1.2	Computer-Messkarte . . . . .	122
4.2	Ermittlung des Pulshöhenspektrums . . . . .	124
4.3	Messung des Rauschens . . . . .	126
4.3.1	Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms . . . . .	126
4.3.2	Zählstatistik des Dunkelstroms . . . . .	128
4.3.3	Korrelation der Dunkelstropmpulse . . . . .	130
4.4	Messung biologischer Proben . . . . .	133
4.4.1	Flechte ( <i>Lichen</i> ) . . . . .	135
4.4.2	Blutpflaume ( <i>Prunus cerasifera Nigra</i> ) . . . . .	141
4.4.3	Weißtanne ( <i>Abies alba</i> ) . . . . .	145
4.4.4	Gummibaum ( <i>Ficus microcarpa</i> ) . . . . .	149
4.4.5	Große Brennnessel ( <i>Urtica dioica</i> ) . . . . .	153
4.4.6	Stieleiche ( <i>Quercus robur</i> ) . . . . .	157
4.5	Vergleichsmessungen mit einem He-Ne-Laser . . . . .	161
4.5.1	Vergleich mit niedrigen Laserintensitäten . . . . .	161
4.5.2	Vergleich mit höheren Intensitäten . . . . .	165
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>169</b>
5.1	Interpretation der Simulationen . . . . .	169
5.2	Interpretation der Messergebnisse . . . . .	170
5.2.1	Vergleich mit den Simulationen . . . . .	170
5.2.2	Vergleich mit vorhandenen Veröffentlichungen . . . . .	171
5.2.3	Vergleich der gemessenen Daten untereinander . . . . .	172
<b>6</b>	<b>Ausblick und Zusammenfassung</b>	<b>175</b>
<b>7</b>	<b>Danksagung</b>	<b>179</b>
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>180</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>183</b>

<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>187</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>188</b>

# 1 Vorwort

Die Entdeckung der Biophotonen geht auf den russischen Embryologen Alexander Gurwitsch zurück, der um 1920 das Vorkommen physikalischer Felder in der Biologie postulierte. Seiner Idee zu Folge sollten diese Felder für die Gestaltgebung und das Zellwachstum verantwortlich sein. Durch Experimente an Zwiebeln gelangte er zu dieser Vorstellung. Da damals die technischen Möglichkeiten zur Detektion von ultraschwachen Intensitäten (Abstrahlleistung im UV-Bereich ca.  $10^{-17}$  W) nicht bestanden, verwendete er die Zwiebeln als Sender und Empfänger der Strahlung [Gur22].

Durch Strehler wurde erstmalig um 1951 die verzögerte Abstrahlung beobachtet [SA51]. Später erfolgten durch Professor F. A. Popp wissenschaftliche Nachweise über die ultraschwache Photonenemission [RP76], [PRB<sup>+</sup>81], die andere Arbeitsgruppen in Australien, Japan und Polen bestätigen konnten. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen der Doktorarbeit von Herren Ruth in der Arbeitsgruppe von Professor F. A. Popp ein extrem empfindlicher Photomultiplier konstruiert, der durch Kühl- und Abschirmvorrichtungen in der Lage war, die ultraschwache Strahlung reproduzierbar nachzuweisen. Aus dieser Entdeckung entwickelten sich zwei wissenschaftliche Lager, die unterschiedlicher Auffassung über den Sinn und die Herkunft dieser Strahlung sind.

Das eine Lager ist der Auffassung, dass die ultraschwache Photonenemission als Nebenprodukt von Stoffwechselreaktionen auftritt, siehe beispielsweise [HI91], [Til92] und [KTS<sup>+</sup>99]. Die Quellen des Feldes sollten demnach relativ unabhängig von einander sein. Diese Unabhängigkeit führt zu einer zufälligen Phasen- und Amplitudenfluktuation, die im Mittel einer Normalverteilung um den Erwartungswert Null entspricht. Somit befände sich das Feld in einem chaotischen Zustand.

Auf der anderen Seite entwickelte die Arbeitsgruppe um Professor Popp einen weiteren Zugang zum Verständnis der Biophotonen. Da in einer Körperzelle ca.  $10^7$  chemische Reaktionen pro Sekunde ablaufen, stellt sich die berechtigte Frage, wie es dem Körper gelingt, seine Funktionsfähigkeit beizubehalten. Damit chemische Reaktionen stattfinden können, müssen mehrere Bedingungen erfüllt sein. Zum einen muss den Molekülen die Aktivierungsenthalpie zugeführt werden [Mic99]. Im Reagenzglas geschieht dies über eine Erwärmung. Biologische Systeme können nicht beliebige Temperaturen im Inneren der Zellen nutzen, um die Aktivierungsenthalpie zu generieren und verwenden deshalb Enzyme zum Senken. Trotzdem muss bei fast allen Reaktionen die Aktivierungsenthalpie zugeführt werden. Dies kann über Stöße geschehen, oder durch das elektrische Feld. Ein Photon im optischen Bereich besitzt genügend Energie, um Reaktionen zwischen Molekülen zu ermöglichen. Aus diesem Grund wurde von Professor Popp vermutet, dass das Licht genutzt wird um die chemischen Reaktionen zu steuern. Es wäre über

das optische Feld möglich, die Reaktionen zum richtigen Zeitpunkt an geeigneter Stelle ablaufen zu lassen. Um Photonen gerichtet propagieren zu lassen, ist ein hoher Grad an Kohärenz nötig. Als wesentliche Ursache der Biophotonen konnte die DNA ermittelt werden [RPN81]. Zum Nachweis dienten Gurkenkeimlinge, die mit Ethidiumbromid versetzt wurden. Dies hatte zur Folge, dass sich der Spiralisierungszustand der DNA konzentrationsabhängig veränderte. Die abgestrahlte Intensität der Biophotonen korrelierte mit dem Spiralisierungszustand der DNA. Durch R. van Wijk wurden gezeigt, dass das isolierte Chromatin am stärksten strahlt. Die reine DNA strahlte hingegen kaum [PLG92]. Ein klarer Hinweis darauf, dass das Zusammenwirken von DNA und Histonen für die Erzeugung von Biophotonen verantwortlich ist. Dies erklärt aber noch nicht, wie die Kohärenz des Feldes entstehen könnte.

Um die Entstehung eines kohärenten Feldes nachzuvollziehen, muss die hohe Anzahl der beteiligten Atome und deren Anordnung in einem DNA-Molekül berücksichtigt werden. Polynukleotide (z.B. DNA und RNA) setzen sich aus Nukleotiden (Nukleotid = Nukleobase + Pentose + Phosphatrest) zusammen [Mic99]. Trotz der Verbindung durch die Phosphorsäuren besitzen die Makromoleküle nahezu die gleichen Absorptionsspektren wie die Nukleotide selbst, wenn man von Hypochromismus absieht [GEL74]. Äquivalent verhält es sich mit den Nukleotiden und den Nukleosiden (Nukleosid = Nukleobase + Pentose). Dies zeigt, dass die Elektronenkonfiguration der Nukleotide durch den Zusammenschluss zu Makromolekülen nur unbedeutend verändert wird. Die Elektronenkonfiguration der einzelnen Nukleinbasen ist damit quasi unabhängig von der Länge des Makromoleküls. Andererseits verbreitert sich das Emissionsspektrum in Abhängigkeit von der Länge des Makromoleküls zu größeren Wellenlängen hin [Bir76]. Ein Hinweis auf einen weiteren Abstrahlmechanismus, der durch die Bildung von Excimeren (für gleichartige Monomere) und Exciplexen (für unterschiedliche Monomere) erklärt werden kann. Wird eine Base angeregt, so kann sie durch die veränderte Elektronenverteilung Bindungen mit benachbarten Molekülen eingehen, wodurch Excimer und Exciplexe entstehen. Dabei handelt es sich um intramolekulare Excimere (Exciplexe), die bei wesentlich geringeren Schwellenspannungen stimuliert, kohärent emittieren als intermolekulare Excimer [Klö73]. Der geringe Abstand von ca.  $d = 0.35$  nm zwischen zwei benachbarten Basen führt zu einer „Kooperation“ [PLG92], die eine kohärente, spontane Abstrahlung erzeugen kann [Ern69]. Im Rahmen der Theorie treten zwei Phänomene auf, die von der Wellenlänge der Photonen und vom Abstand der Moleküle abhängen. Sie werden als „Superradianz“ [Dic54] und „Subradianz“ [FKC67] bezeichnet. Superradianz hat die Verkürzung der natürlichen Lebensdauer durch die Kooperation gleicher Moleküle zur Folge, während Subradianz zu einem Einfang (trapping) der Photonen führt. Die Dauer der „Gefangenschaft“ kann die natürliche Lebensdauer um Größenordnungen übersteigen. Besonders der subradiante Zustand ist in der Lage nichtklassische Effekte wie beispielsweise gequetschtes Licht zu erzeugen, da die Intensität des Feldes beliebig abgeschwächt werden kann und die Photonen Abstand halten [PLG92]. Dicke zeigte in [Dic54] dass sich im Falle von Superradianz eine erhöhte Wahrscheinlichkeit für eine richtungsabhängige Abstrahlung der Photonen ergibt, verglichen mit dem inkohärenten Fall. Zusammengefasst können die angeregten Basen der DNA intramolekulare Excimere (Exciplexe) bilden, die sich innerhalb kurzer Abstände  $d$  aperiologisch wiederholen. Die Abstände  $d$  sind wesentlich kleiner als die Emissionswellenlängen der Excimere (Exciplexe). Dies führt nach der Dicke-Theorie zur Kooperation, wodurch nichtklas-

sische Felder entstehen. Natürlich müssen nicht alle Biophotonen, die aus der Probe austreten, von der DNA stammen. Dieses Modell erklärt aber wie die DNA quantenmechanisches Licht erzeugen könnte.

Um dies zu überprüfen, wurden wiederholte Photonenmessungen an biologischen Präparaten durchgeführt. Prof. Bajpai zeigte anhand der bedingten Wahrscheinlichkeit kein Photon zu detektieren  $P_{bed}(0)$ , dass für eine LED und biologische Präparate  $P_{bed}^{led}(0) > P_{bed}^{bio}(0)$  gilt [Baj99], wobei die bedingte Wahrscheinlichkeit kein Photon zu messen für die verschiedenen verwendeten Blätter durch die Poisson-Verteilung gegeben war. Messungen der gesamten Verteilungsfunktion biologischer Präparate wiesen ebenfalls auf eine Poisson-Statistik hin [SLL93]. Diese Ergebnisse sind kein Nachweis für nichtklassisches Licht, sondern höchstens ein Hinweis auf eine mögliche Kohärenz des Feldes. In [PCH<sup>+</sup>02] wurde durch Koinzidenzmessungen gezeigt, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit kein Photon zu detektieren, um den Erwartungswert der Poisson-Statistik schwankt. Teilweise unterschritten die Wahrscheinlichkeiten den Wert der Poisson-Verteilung deutlich. Dies wurde als Hinweis auf quantenmechanisches bzw. gequetschtes Licht gewertet. Allerdings werden die Messergebnisse in der Fachwelt kontrovers diskutiert.

Die vorliegende Arbeit widmet sich diesem Problem. Da der experimentelle Aufbau vorgegeben ist, war zu klären, welche Möglichkeiten er zur Überprüfung des elektromagnetischen Feldes auf Quanteneffekte zulässt. Aus diesem Grund wurde als erstes die Theorie der Photodetektion auf quantenmechanischer Basis erarbeitet. Bekanntlich tätigt die Quantenmechanik nur statistische Aussagen über das Ensemble (z.B. Erwartungswerte, Varianzen,...), die mit den zeitlich ermittelten Werten zu vergleichen sind. Die Bedingungen für die Gültigkeit des Vergleichs sind grundlegend und werden deshalb genau betrachtet. Unter dieser Voraussetzung werden Vergleichsgrößen vorgestellt. Es wird ermittelt, welche Bedingungen vorliegen müssen, damit diese Größen zum Nachweis von quantenmechanischem bzw. gequetschtem Licht geeignet sind. Zwei Effekte sind hier zu berücksichtigen, zum einen die endliche Detektionseffizienz der Photomultiplier und zum anderen die Breite des Biophotonen-Spektrums, die sich auf die Modenzahl auswirkt. Beide Größen sind durch den experimentellen Aufbau und die biologische Probe vorgegeben. Über Simulationen kann ermittelt werden, wie sich diese Effekte auf den Nachweis quantenmechanischer Phänomene auswirken. Dazu soll die Photonenstatistik für gequetschte Zustände in Abhängigkeit von der Detektionseffizienz simuliert werden. Auch der Effekt der Multimodigkeit lässt sich über Simulationen untersuchen. Hierzu muss unter geeigneten Annahmen aus der Theorie eine multimodige Photonenstatistik hergeleitet werden, die dann für verschiedene Modenzahlen und Parameter simuliert wird. Da die Messungen bei sehr niedrigen Intensitäten stattfinden sind die Rauscheigenschaften des Messaufbaus, sowie deren mögliche Ursachen zu diskutieren. Aus den Simulationen und den theoretischen Betrachtungen können die Bedingungen für einen eindeutigen Nachweis nichtklassischer Effekte gewonnen werden. Das ist gleichbedeutend mit der Festlegung geeigneter Vergleichsgrößen und den Kriterien, unter denen sie eine eindeutige Entscheidung zwischen klassischem und nichtklassischem Licht zulassen. Die Messergebnisse der gewählten biologischen Proben sind dann durch die Vergleichsgrößen zu charakterisieren. Über die zuvor erarbeiteten Kriterien kann dann eine Entscheidung getroffen werden, ob quantenmechanisches Licht vorlag oder nicht.

## 2 Theorie

Da es sich um eine interdisziplinäre Arbeit handelt, fällt der Theorieteil sehr ausführlich aus. Zunächst soll auf die Grundlagen der Quantenmechanik und der Elektrodynamik eingegangen werden. Wesentlich sind hier aus quantenmechanischer Sicht die Schrödinger-Gleichung und der Dichte-Operator sowie aus elektrodynamischer Sicht die Maxwellgleichungen. Zur Beschreibung der Felder dienen Potentiale, die in die Schrödinger-Gleichung eingehen. Da nichtklassische Effekte des Feldes im Vordergrund stehen, ist die zweite Quantisierung zu verwenden. Es zeigt sich, dass das freie elektromagnetische Feld durch einen harmonischen Oszillator beschrieben wird. Entscheidend für den Nachweis elektromagnetischer Strahlung ist die Wechselwirkung zwischen Feld und Materie. Der Photoeffekt bildet die Grundlage zum Nachweis von Photonen im optischen Bereich. Auf der Basis des Photoeffekts kann die quantenmechanisch berechnete Wahrscheinlichkeit für die Detektion von  $n$  Photonen zum Zeitpunkt  $t$  im Zeitintervall  $\Delta t$  durch einen Detektor bestimmt werden. Als Detektoren dienen Photomultiplier. Wichtige Kenngrößen sowie Rauschursachen werden deshalb in diesem Kapitel diskutiert. Ziel der Messungen ist es quantenmechanische Effekte nachzuweisen. Ob diese vorhanden sind oder nicht, hängt unmittelbar mit dem Zustand des Feldes zusammen. Prinzipiell kann der Zustand des Feldes durch verschiedene Basissysteme dargestellt werden. Deshalb sollen die wichtigsten Zustände näher erläutert werden. Jeder Zustand und seine Zeitentwicklung lässt sich in einem Phasordiagramm veranschaulichen. Die Zustände und ihre Gewichtung bestimmen dann die Erwartungswerte der Observablen. In der Anwendung zeigt sich, dass nichtklassische Effekte sehr gut über Kohärenzphänomene nachgewiesen werden können. Auf diese wird deshalb gesondert eingegangen.

### 2.1 Quantenmechanische Grundlagen

Während des zwanzigsten Jahrhunderts stellte sich eine revolutionäre Veränderung im Verständnis der mikroskopischen Natur ein. An die Stelle der klassischen Physik trat eine neue Theorie, die ein viel weitreichenderes Anwendungsgebiet abdeckte, die Quantenphysik. Durch die Annahme, dass sich die physikalisch messbaren Größen wie Energie, Impuls, Drehimpuls usw. aus kleinsten Einheiten zusammensetzen, entstand ein gequanteltes Modell zur Beschreibung der mikroskopischen Realität. Diese kleinsten Einheiten, die immer proportional zu  $\hbar = 6,58211915 \cdot 10^{-16}$  eVs, dem reduzierten Planckschen Wirkungsquantum sind, können dann nur in ganzzahligen Vielfachen auftreten (Quantelung). Die Konsequenzen der gequantelten Natur sind weitreichend. Betrachten wir beispielsweise das Bohrsche Atommodell, so führt die Quantelung des Bahndrehimpulses zu diskreten Energieniveaus, deren Energiedifferenzen sich bei der Absorption und Emission von Photonen bemerkbar machen. Dies widerspricht ganz klar der klassischen Vorstellung, nach der das Elektron beliebige Energie- und Drehimpulswerte annehmen könn-

te und nach kurzer Zeit, unter ständiger Emission von elektromagnetischer Strahlung auf den Atomkern fallen müsste.

Die quantenmechanische Beschreibung ist in der Lage, alle bisherigen, klassisch nicht erklär-  
baren Phänomene des Mikrokosmos quantitativ wiederzugeben. Dies wird durch die statistische  
Interpretation der mikroskopischen Abläufe möglich. In der klassischen Mechanik kann bei-  
spielsweise die zeitliche Entwicklung eines Teilchens exakt vorhergesagt werden, vorausgesetzt,  
man kennt alle Anfangsbedingungen des Systems. Es handelt sich also um ein deterministisches  
Weltbild, dem die quantenmechanische Beschreibung klar widerspricht.

Wegen des Wellencharakters können nur Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für Observablen an-  
gegeben werden. Alle konjugiert kanonischen Größen (z.B. Ort und Impuls) sind mit einer Un-  
schärfe behaftet. Es wäre aber falsch zu glauben, es handle sich nur um eine bloße Unkenntnis.  
Betrachtet man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens im Impulsraum so zeigt sich,  
dass der Impuls über ein gewisses Intervall verteilt ist. Erst die Impulsmessung ermittelt einen  
exakten Wert für den Impuls des Teilchens, wodurch die Wellenfunktion zerstört wird.

Für einen Menschen, der durch den Alltag an die klassischen Naturgesetze gewöhnt ist, er-  
scheint dies unglaublich. Doch zeigen Interferenzexperimente mit Teilchen, die Richtigkeit der  
Beschreibung durch Wellenfunktionen. Mikroskopische Teilchen wie Elektronen sind wegen ih-  
rer Wellennatur über den ganzen Raum verteilt. Findet eine Ortsmessung statt, so werden sie  
instantan an einem Punkt lokalisiert. Dies führt zu der Frage, was beim Messprozess stattfindet.  
Ist das Teilchen wirklich über den ganzen Raum verteilt? Mit diesen Problemen haben sich schon  
viele bedeutende Physiker beschäftigt und es ist immer noch aktuelles Forschungsgebiet. Allge-  
meiner Konsens ist nach heutiger Auffassung die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik,  
nach der beim Messprozess ein Kollaps der Wellenfunktion auftritt und ansonsten dem Teilchen  
keine Realität zugebilligt wird. Unter dem Kollaps der Wellenfunktion wird ein Übergang des  
vorhandenen Zustands  $|\Psi\rangle$  in einen Eigenzustand der gemessenen Observablen verstanden.

Wird bei einer Ortsmessung festgestellt, dass sich das Teilchen in einem bestimmten Volumen-  
element  $dV$  am Ort  $\vec{r}$  befindet, so ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit dort gleich Eins und im  
restlichen Raum Null. Diesem Ort wird der Ortseigenzustand  $|\vec{r}\rangle$  zugeordnet. Folglich kann aus  
einer einzigen Messung kein Rückschluss auf die Wellenfunktion  $|\Psi\rangle$  gezogen werden. Weitere  
Messungen mit identisch präparierten Teilchen müssen durchgeführt werden. Bei jeder Messung  
erhält man eine ausreduzierte Wellenfunktion. D.h. jeder Messung entspricht ein bestimmter Ort  
 $\vec{r}$ . Aus der Häufigkeitsverteilung lässt sich dann ein Rückschluss auf die Aufenthaltswahrschein-  
lichkeit  $P(\vec{r})$

$$P(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV = |\langle \vec{r} | \Psi \rangle|^2 dV \quad (2.1)$$

ziehen, wobei  $\rho(\vec{r})$  für die ortsabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte steht, die sich aus dem Be-  
tragsquadrat der Projektion des Zustands  $|\Psi\rangle$  auf den Ortseigenzustand  $|\vec{r}\rangle$  ergibt.

Um die Messergebnisse auf mathematischem Wege erklären zu können werden quantenmechanische Observablen als Operatoren  $\hat{O}$  definiert, die auf den Zustand  $|\Psi\rangle$  des Systems wirken. Die mathematischen Ergebnisse quantenmechanischer Berechnungen beschreiben immer das Ensemble. Unter einem Ensemble versteht man in der Quantenmechanik die gedachte Gesamtheit aller identischer Teilchen die gleichartig präpariert sind. Würden an all diesen Teilchen gleichzeitig Messungen durchgeführt, so erhielte man genau die quantenmechanisch vorhergesagten Verteilungen.

Da man real nur endlich viele Messungen durchführt, sind oft Mittelwerte und Varianzen die Größen, die verglichen werden. Entsprechend der statistischen Gesetzmäßigkeiten schwanken die gemessenen Werte um die quantenmechanischen Erwartungswerte und Varianzen, die durch

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) \quad (2.2)$$

und

$$\sigma_O^2 = (\Delta O)^2 = \left\langle \left( \hat{O} - \langle \hat{O} \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2 \quad (2.3)$$

definiert sind. Hier steht  $\sigma_O$  für die Streuung des Operators  $\hat{O}$ ,  $\hat{\rho}$  für den Dichte-Operator und  $\text{Tr}(\dots)$  beschreibt die Spur (Summe aller Diagonalelemente). Wegen der Ensembleinterpretation, kann keine exakte Vorhersage über das Ergebnis einer einzelnen Messung gemacht werden. Misst man hingegen das ganze Ensemble so zeigt sich, dass im Mittel die Ergebnisse durch die Heisenbergsche Unschärferelation eingeschränkt sind.

### 2.1.1 Heisenbergsche Unschärferelation

In der Heisenbergschen Unschärferelation offenbart sich ein prinzipieller Charakter der Natur, es handelt sich um eine Ungenauigkeit, deren Ursache unabhängig von der Güte der Messtechnik auftritt. Allgemein ergibt sich für die Heisenbergsche Unschärferelation zweier beliebiger Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  [Böh03]

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| = \frac{1}{2} \left| \langle (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \rangle \right|, \quad (2.4)$$

wobei die eckigen Klammern  $\langle \dots \rangle$  wieder für den quantenmechanischen Mittelwert stehen. Die Unschärfe

$$\Delta A = \sigma_A = \sqrt{\left\langle \left( \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \right\rangle} \quad (2.5)$$

ist durch die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung gegeben. Folglich handelt es sich bei  $\Delta A$  um ein Maß für die Streuung der Messergebnisse. Vertauschen die Operatoren, so muss der Kommutator  $[\dots, \dots]$  gleich Null sein. Handelt es sich um inkommensurable Observablen,



also um Operatoren, die nicht vertauschen, so bestimmt der Betrag des Kommutators das minimale Unschärfeprodukt. Wie schon erwähnt, sind Ort  $x$  und Impuls  $p_x$  ein Beispiel für inkommensurable Observablen. Für ihre Unschärfen gilt:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \left| \frac{1}{2i} \cdot \langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle \right| = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.6)$$

Die Unschärferelation gilt auch für andere inkommensurable Observablen wie zum Beispiel Drehimpuls und Winkel oder Phase und Teilchenzahl. Es lässt sich allerdings noch eine weitere wichtige Beziehung aus der Heisenbergschen Unschärferelation herleiten. Dazu wird der Erwartungswert des zeitabhängigen Operators  $\hat{A}$  im Heisenberg-Bild betrachtet,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = i\hbar \langle \dot{\hat{A}} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle, \quad (2.7)$$

wobei  $\hat{H}$  für den Hamilton-Operator des beobachteten Systems steht. Durch Einsetzen von Gleichung (2.7) in Gleichung (2.4) folgt:

$$\Delta H \frac{\Delta A}{|\langle \dot{\hat{A}} \rangle|} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.8)$$

Nun wird  $\langle \dot{\hat{A}} \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}$  gesetzt, woraus sich sofort die Energie-Zeit-Unschärfereaktion ergibt:

$$\Delta H \cdot \Delta t = \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.9)$$

Damit ist aber auch die Bedeutung der Energie-Zeit-Unschärferelation festgelegt. Die zeitliche Veränderung des Mittelwerts der Observablen  $\hat{A}$  soll im Zeitintervall  $\Delta t$  gleich der Streuung der Observablen sein. Dies lässt zwei Interpretationen zu [Böh03]:

- Eine Energiemessung mit der Genauigkeit  $\Delta E$  benötigt mindestens die Zeit  $\tau = 2\Delta t = \hbar/\Delta E$ .
- Zwischen der mittleren Lebensdauer  $\tau$  eines angeregten Zustands und der Energiebreite  $\Delta E$  des beim Übergang emittierten Teilchens besteht der Zusammenhang  $\tau \approx \hbar/\Delta E$ .

## 2.1.2 Bosonen und Fermionen

Eine grundlegende Feststellung, die sich in der Statistik widerspiegelt, ist die Erkenntnis, dass es in der Natur nur zwei Teilchensorten gibt, Bosonen, die ganzzahligen Spin tragen und Fermionen, die halbzahligen Spin tragen [Sch05b]. Beide Teilchensorten gehorchen verschiedenen Verteilungen  $g(E, \mu, T)$ , die von der Energie  $E$ , der Temperatur  $T$  und dem chemischen Potential  $\mu$  abhängen:

$$g(E, \mu, T) = \frac{g_i}{\exp \left\{ \frac{E - \mu}{k_B T} \right\} \pm 1} \quad (2.10)$$

Das + steht für die Fermi-Dirac- und das – für die Bose-Einstein-Verteilung,  $g_i$  gibt die Entartung der Zustände an und  $k_B = 1,3806504(24) \cdot 10^{-23}$  J/K steht für die Boltzmann-Konstante. Die mittlere Besetzungszahl  $\langle n(E, \mu, T) \rangle$  eines Zustands der Energie  $E$  bei einer Temperatur  $T$  im thermodynamischen Gleichgewicht ist durch

$$\langle n(E, \mu, T) \rangle = g(E, \mu, T) \quad (2.11)$$

gegeben [Fli07]. Beide Verteilungen leiten sich aus der Boltzmann-Verteilung her. Dazu wird jeweils angenommen, dass die Teilchen ununterscheidbar sind. Nimmt man zusätzlich an, dass ein Zustand mehrfach besetzt werden kann, so erhält man die Bose-Einstein-Statistik. Hingegen erhält man die Fermi-Dirac-Statistik wenn jeder Zustand nur einfach besetzt werden darf. Unter Teilchenaustausch zeigen die zwei Teilchenarten ein spezifisches Symmetrie-Verhalten. Dies wird deutlich, wenn man den Teilchenvertauschungs-Operator  $P_{ij}$  auf die Zustandsfunktion  $\Psi$  anwendet. Er vertauscht das  $i$ -te mit dem  $j$ -ten Teilchen:

$$P_{ij}\Psi_{Fer}^{Bos}(1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots) = \Psi_{Fer}^{Bos}(1, 2, \dots, j, \dots, i, \dots) = \pm \Psi_{Fer}^{Bos}(1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots). \quad (2.12)$$

Jede Zahlen  $i = \vec{r}_i, \sigma_i$  steht für Ortskoordinaten und Spinfreiheitsgrade des  $i$ -ten Teilchens. Die Anwendung des Teilchenvertauschungs-Operators auf die Wellenfunktion überführt diese in sich selbst. Allerdings ändert sich für Fermionen das Vorzeichen der Wellenfunktion bei Teilchenaustausch. Fermionen verhalten sich unter Teilchenaustausch folglich antisymmetrisch (–). Im Falle der Bosonen bleibt das Vorzeichen unter Teilchenaustausch gleich und man spricht von einem symmetrischen (+) Verhalten.

### 2.1.3 Korrespondenzprinzip

Eine wichtige Forderung in der Physik ist die Konsistenz. Sie soll gewährleisten, dass die einzelnen Theorien miteinander verknüpft werden können. Leider ist dies für die Grundsäulen der heutigen Physik, die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantentheorie noch nicht gelungen, folglich korrespondieren diese Theorien nicht. Beide Theorien hatten einen gemeinsamen Vorgänger, die Newtonsche Physik. Das Korrespondenzprinzip stellt nun sicher, dass die Relativitätstheorie und die Quantentheorie in die Newtonsche Physik übergehen. In der klassischen Mechanik sind zwei Beschreibungsformen wichtig:

- Lagrange- und
- Hamilton-Formalismus,

die mittels Legendre-Transformation ineinander übergehen. Ein Vorteil des Lagrange-Formalismus besteht darin, dass man generalisierte Koordinaten  $q_i$  verwendet, wodurch Zwangsbedingungen implizit berücksichtigt werden [Fli00b]. Die Lagrange-Funktion  $L$  lautet für konservative Systeme (Energieerhaltung gilt) und holonome Zwangsbedingungen (Zwangsbedingung durch eine Gleichung darstellbar)

$$L = T - V, \quad (2.13)$$

wobei  $T$  für die kinetische und  $V$  für die potentielle Energie stehen. Die Hamilton-Funktion leitet sich daraus wie folgt ab:

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t). \quad (2.14)$$

Die konjugierten generalisierten Impulse  $p_i$  erhält man durch partielle Ableitung der Lagrange-Funktion  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  nach den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$ . Auf der Grundlage der Hamilton-Funktion kann nun der Übergang zur Quantenmechanik vollzogen werden. Dazu stellen wir die klassische Hamilton-Funktion für unser System auf und ersetzen die generalisierten Koordinaten und konjugierten generalisierten Impulse entsprechend dem Korrespondenzprinzip durch Operatoren.

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i, q_i \rightarrow \hat{q}_i \Rightarrow H \rightarrow \hat{H}. \quad (2.15)$$

Aus der Hamilton-Funktion wird dadurch der Hamilton-Operator  $\hat{H}$ . Die Operatoren werden durch das Dach über der Variablen gekennzeichnet. Eine weitere Größe, die nach dem Korrespondenzprinzip übertragen werden kann ist die Poisson-Klammer. Sie dient in der klassischen Mechanik zur Ermittlung von Erhaltungsgrößen. Hier lautet die Übersetzungsvorschrift [Sak94]:

$$\{\dots, \dots\}_{\text{klassisch}} \longrightarrow \frac{[\dots, \dots]}{i\hbar}. \quad (2.16)$$

Die Quantenmechanische Entsprechung ist der Kommutator  $[\dots, \dots]$ . Er überprüft die Vertauschbarkeit von Observablen.

## 2.1.4 Schrödinger-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung ist die fundamentale Grundgleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. In ihrer zeitabhängigen allgemeinen Form nimmt sie folgende Gestalt an [Sak94]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle. \quad (2.17)$$

$\hat{H}$  steht für den Hamilton-Operator und  $|\Psi\rangle$  für den Zustand. Je nach betrachtetem System besitzt der Hamilton-Operator eine andere Form. Nach dem Korrespondenzprinzip kann er aus der Lagrange-Funktion hergeleitet werden, allerdings sind Effekte wie der Spin des Elektrons nicht enthalten, da sie kein klassisches Analogon besitzen. Der Spin ergibt sich auf ganz natürliche Weise bei einer relativistisch korrekten Herleitung, wie die Dirac-Gleichung zeigt. Diese Korrektur kann oft im Rahmen einer Störungsrechnung behandelt werden.

Da die Lösung der Schrödinger-Gleichung in geschlossener Form nur selten möglich ist, bedarf es meist geeigneter Näherungen, um theoretische Resultate zu erhalten. Prinzipiell wird versucht, den Hamilton-Operator in unabhängige Anteile aufzuspalten:

$$\hat{H}(\hat{Q}_1, \hat{q}_2) = \hat{H}_1(\hat{Q}_1) + \hat{H}_2(\hat{q}_2) + \hat{H}_{int}(\hat{Q}_1, \hat{q}_2) \approx \hat{H}_1(\hat{Q}_1) + \hat{H}_2(\hat{q}_2). \quad (2.18)$$

Hier stellen  $\hat{Q}_1$  und  $\hat{q}_2$  Abkürzungen für die Operatoren der kompletten Koordinatensätze dar. Durch die Aufspaltung zerfällt die Schrödinger-Gleichung durch einen Separationsansatz in zwei Schrödinger-Gleichungen, die jede für sich gelöst werden können. Die Gesamtenergie ist dann die Summe der Einzelenergien. Da zwischen den einzelnen Hamilton-Operatoren  $\hat{H}_1$  und  $\hat{H}_2$  noch eine Kopplung  $\hat{H}_{int}$  besteht, stellt sich die Frage, wann diese Näherung gerechtfertigt ist. Gilt  $\hat{H}_{int} \ll \hat{H}(Q_1, q_2)$  so darf  $\hat{H}_{int}$  vernachlässigt und später als Störung behandelt werden. Ansonsten ist die Separation nicht erlaubt, da die Abweichungen des Modells von der Realität zu groß werden. Die Funktion von  $\hat{H}_{int}$  besteht darin, dass Energie vom System  $\hat{H}_1$  auf das System  $\hat{H}_2$  übertragen wird. Oftmals handelt es sich bei  $\hat{H}_{int}$  um einen zeitabhängigen Operator. Da die Zeit selbst kein Operator ist, wird die Zeitabhängigkeit in der Quantenmechanik durch unitäre Transformationen dargestellt.

## 2.1.5 Unitäre Transformation

Unter einer unitären Transformation kann man sich einen Basiswechsel vorstellen. Unitäre Transformationen sind nicht nur zur Darstellung der Zeitentwicklung unerlässlich. Auch andere physikalische Probleme können durch einen Basiswechsel gelöst werden. Dies ist möglich, da die Eigenwerte  $O$  eines Operators  $\hat{O}$  invariant unter unitären Transformationen sind. Vielteilchensysteme werden in der Quantenmechanik gerne im Fockraum beschrieben. Er stellt eine Erweiterung des Einteilchen-Hilbertraums dar. Ziel ist es in der Quantenmechanik, die Eigenwertgleichung

$$\hat{O} |\Psi\rangle = O |\Psi\rangle \quad (2.19)$$

zu lösen, da sich die messbaren Erwartungswerte  $\langle \hat{O} \rangle$  aus den Eigenwerten  $O$  ergeben. Dies kann durch eine unitäre Transformation  $\hat{U}$  erfolgen, wodurch der Operator  $\hat{O}$  diagonalisiert wird.

$$\hat{U}^+ \hat{O} |\Psi\rangle = \hat{U}^+ \hat{O} \hat{U} \cdot \hat{U}^+ |\Psi\rangle = \hat{O}' |\Psi'\rangle = O |\Psi'\rangle. \quad (2.20)$$

Wie aus dem vorletzten Teil der Gleichung (2.20) hervorgeht, ist zusätzlich zu unserem Operator auch der Zustand transformiert worden. Hier wurde genutzt, dass:

$$\hat{U} \hat{U}^+ = \hat{1} \quad (2.21)$$

gilt. Eine weitere Eigenschaft unitärer Transformation ist die Erhaltung der Metrik, was bedeutet, dass vor wie nach der Transformation die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der normierten Zustände gewährleistet ist. Außerdem sind unitäre Abbildungen linear und bijektiv. Der transformierte Zustand  $|\Psi'\rangle$  ist ein Eigenzustand des Operators  $\hat{O}'$ . Die Bedeutung der unitären Transformationen wird deutlich, wenn es beispielsweise um die Erzeugung kohärenter Zustände geht. Hier wird die Basis im Fockraum zur ursprünglichen verschoben, wodurch der kohärente Zustand generiert wird. Der Fockraum wird durch Teilchenzahlzustände aufgespannt, die Eigenzustände des Teilchenzahl-Operators sind. Der Teilchenzahl-Operator setzt sich aus Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren zusammen, die als Nächstes erläutert werden sollen.

## 2.1.6 Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren

Eine einfache und doch wichtige Fragestellung in der Quantenmechanik ist die nach dem ein-dimensionalen harmonischen Oszillator für ein Teilchen der Masse  $m$ . Der Hamilton-Operator wird in diesem Fall durch eine quadratische Funktion des Impuls-  $\hat{p}$  und des Orts-Operators  $\hat{x}$  dargestellt.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \cdot \hat{x}^2 = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) = \left( \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (2.22)$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ist die Kreisfrequenz des harmonischen Oszillators, die entsprechend der klassischen Beziehungen durch die Kraftkonstante  $k$  und die Masse des Teilchens gegeben ist. Orts- und Impuls-Operatoren wurden nach dem zweiten Gleichheitszeichen durch

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^+), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} (\hat{a} - \hat{a}^+) \quad (2.23)$$

ersetzt. Die neu eingeführten Operatoren sind folglich durch

$$\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad \hat{a}^+ = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \quad (2.24)$$

definiert. Sie werden als Erzeugungs-  $\hat{a}^+$  und Vernichtungs-Operatoren  $\hat{a}$  bezeichnet. Nun werden die Teilchenzahlzustände  $|n\rangle$  als Eigenzustände des Teilchenzahl- oder auch Besetzungszahl-Operators  $\hat{n}$  eingeführt, der als Produkt des Erzeugungs- und Vernichtungs-Operators definiert ist. Wendet man diesen auf einen Teilchenzahlzustand  $|n\rangle$  an, so folgt

$$\hat{n} |n\rangle = \hat{a}^+\hat{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.25)$$

woraus die Besetzungszahl  $n$  des Zustands erhalten wird. Diese Teilchenzahl  $n$  darf nicht mit dem Teilchen der Masse  $m$  verwechselt werden. Vernichtung und Erzeugung bedeuten, dass dem massebehafteten Teilchen eine gequantelte Energieportion entzogen oder zugeführt wird. Diese Energieportionen können natürlich auch wieder als Teilchen betrachtet werden. Damit lässt sich leicht zeigen, dass [Böh03]

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.26)$$

und

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (2.27)$$

gilt. Der Absteige-Operator  $\hat{a}$  führt den Teilchenzahlzustand  $|n\rangle$  auf den nächst niedrigeren  $|n-1\rangle$  und der Aufsteige-Operator auf den nächst höheren  $|n+1\rangle$  Zustand über. Wendet man den Vernichtungs-Operator auf den Vakuumzustand  $|0, 0, \dots\rangle = |0\rangle$  an

$$\hat{a} |0\rangle = 0, \quad (2.28)$$

so erhält man den Wert Null. D.h. wenn sich das System im Grundzustand befindet, ist es nicht mehr möglich ein Energiequant zu vernichten. Der Grundzustand ist per Definition der Zustand mit der niedrigsten möglichen Energie. Durch die Verwendung von Vernichtern und Erzeugern wird es möglich, die Schrödinger-Gleichung (2.22) algebraisch zu lösen. Dabei ist  $n$  der Eigenwert des Teilchenzahl-Operators  $\hat{n}$  für einen Teilchenzahlzustand  $|n\rangle$  und gibt die Anzahl der Energiequanten an. Daraus folgt für Gleichung (2.22), dass

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) |n\rangle \quad (2.29)$$

gilt, wobei  $E_n$  als Energieeigenwert bezeichnet wird. Erzeuger und Vernichter erfüllen die bosonischen Vertauschungsrelationen:

$$[a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^+, a_j^+] = 0, \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}. \quad (2.30)$$

Die Indizierung an den Erzeugern und Vernichtern stellt eine Erweiterung des Formalismus auf Vielteilchensysteme dar. Woraus deutlich wird, dass nur Vernichter und Erzeuger mit dem gleichen Index nicht vertauschen. Zwei weitere wichtige Eigenschaften der Teilchenzahlzustände sind die Orthogonalität

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.31)$$

und die Vollständigkeit

$$\hat{1} = \sum_n |n\rangle \langle n|. \quad (2.32)$$

Die Orthogonalität bewirkt, dass alle Zustände  $|n\rangle$  linear unabhängig sind und aus der Vollständigkeit folgt, dass jeder beliebige Zustand als Linearkombination der Zustände  $|n\rangle$  dargestellt werden kann.

## 2.1.7 Der Dichte-Operator

Aus der statistischen Physik kennt man das Problem, dass bei sehr großen Teilchenzahlen  $N$ , die genaue Vorhersage der zeitlichen Entwicklung im Phasenraum nur möglich ist, wenn man alle  $6N$  Anfangsbedingungen kennt. Dies ist in der Regel nicht der Fall, wodurch nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen getätigt werden können. Aus diesem Grund führt man die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(\vec{x}, t)$  im Phasenraum ein [Fli07], wobei  $\vec{x} \equiv (q_1, \dots, q_{3N}, p_1, \dots, p_{3N})$  ein  $6N$ -dimensionaler Vektor ist, der sich aus den generalisierten Koordinaten  $q_i$  und generalisierten Impulsen  $p_i$  zusammensetzt.  $\rho(\vec{x}, t) \cdot d^{6N}x$  gibt dann die Wahrscheinlichkeit an, das System zum Zeitpunkt  $t$  in dem Phasenraumelement  $d^{6N}x$  anzutreffen. In der Quantenmechanik steht man vor einem ähnlichen Problem. In vielen Fällen ist es nicht möglich Systeme in reinen Zuständen zu präparieren, man spricht dann von Gemischen. Der Dichte-Operator eines Gemischs setzt sich aus der gewichteten Summe von Projektoren  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  unterschiedlicher reiner Zustände zusammen. In der Regel schwanken bei einer idealen Messung die Ergebnisse um den

Mittelwert herum, diese Schwankung ist bei einem reinen Zustand ein quantenmechanischer Effekt. Ist die Präparation nicht rein, so kommt zusätzlich zur quantenmechanischen Mittelung noch eine statistische Mittelung über alle beteiligten reinen Ensembles hinzu. D.h. die beteiligten reinen Realisierungen müssen entsprechend ihres Anteils am Gemisch gewichtet werden. Da der Dichte-Operator die maximal zugängliche Information über das betrachtete System enthält, übernimmt er die Funktion der Gewichtung. Das Ziel einer jeden Messung ist es, den Dichte-Operator eines Systems zu ermitteln, um so einen Rückschluss auf die beteiligten Zustände zu ziehen.

### Der Dichte-Operator in der Teilchenzahlrepräsentation

In Gleichung (2.2) wurde der Dichte-Operator schon vorweggenommen. Es handelt sich bei ihm um einen positiv semidefiniten Operator, das heißt, alle Eigenwerte sind reell und größer oder gleich Null. Die Spur des Dichte-Operators ist immer gleich Eins. Er kann sowohl reine Zustände als auch Gemische beschreiben. Seine Form hängt von der gewählten Basis ab. Liegt ein reiner Zustand vor, so ist der Dichte-Operator idempotent ( $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ ). Der Erwartungswert einer physikalischen Observablen  $\hat{O}$  lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_{\Psi} W_{\Psi} \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle = \sum_{\Psi, n} W_{\Psi} \langle \Psi | n \rangle \langle n | \hat{O} | \Psi \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}). \quad (2.33)$$

Die Erwartungswerte der reinen Zustände  $\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$  werden mit  $W_{\Psi}$  gewichtet. Nach dem zweiten Gleichheitszeichen wurde die Vollständigkeit  $\hat{1} = \sum_n |n\rangle \langle n|$  des Hilbertraums ausgenutzt und zyklisch vertauscht. Die mathematische Struktur des Dichte-Operators ist dann durch

$$\hat{\rho} = \sum_{\Psi} W_{\Psi} |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad (2.34)$$

gegeben. Für die Gewichte  $W_{\Psi}$  gilt:

$$\sum_{\Psi} W_{\Psi} = 1. \quad (2.35)$$

Der Dichte-Operator lässt sich natürlich auch in der Basis der Teilchenzahlzustände, die im Kapitel (2.4) genauer betrachtet werden, darstellen

$$\hat{\rho} = \sum_{\Psi} \sum_{n,m} W_{\Psi} |n\rangle \underbrace{\langle n | \Psi \rangle}_{c_n} \underbrace{\langle \Psi | m \rangle}_{c_m} \langle m| = \sum_{n,m} \rho(n, m) |n\rangle \langle m|, \quad (2.36)$$

mit

$$\rho(n, m) = \sum_{\Psi} W_{\Psi} c_n c_m. \quad (2.37)$$

Falls für die Zustände  $|\Psi\rangle = |n_\Psi\rangle$  gilt, ist der Dichte-Operator in der Basis der Teilchenzahlzustände diagonal. Zur Darstellung multimodiger Felder kann der Dichte-Operator verallgemeinert werden. In der Basis der multimodigen Teilchenzahlzustände aus Gleichung (2.236) ist er durch:

$$\hat{\rho}_{mul} = \sum_{\{n\},\{m\}} \rho(\{n\},\{m\}) |\{n\}\rangle \langle\{m\}|. \quad (2.38)$$

gegeben. Um den Unterschied zwischen einem reinen Zustand und einem Gemisch zu verdeutlichen, wird ein System mit zwei Freiheitsgraden untersucht. Dazu betrachten wir ein Stern-Gerlach-Experiment (siehe Abb. 2.1). Wir verdampfen in einem Ofen Silberatome. Jedes dieser Silberatome trägt einen Spin von  $\frac{1}{2}\hbar$  der irgendwie im Raum orientiert ist. Es handelt sich also um ein Gemisch. Lassen wir diesen Atomstrahl durch ein inhomogenes Magnetfeld fliegen, so spaltet er sich, aufgrund seiner Quantennatur, in zwei Strahlen, wie auf dem Schirm sichtbar wird. Klassisch würde man nur einen verschmierten Strich erwarten. Das Magnetfeld gibt eine Vorzugsrichtung vor, die wir als z-Richtung definieren. Bezüglich dieser Richtung sind dann die reinen Zustände durch Spin up  $|\uparrow\rangle_z = |\uparrow\rangle$  und Spin down  $|\downarrow\rangle_z = |\downarrow\rangle$  gegeben. Die Dichtematrix, die das Gemisch aus dem Ofen beschreibt, ist dann:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow|] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Nach dem passieren des Magnetfelds sind die Silberatome in reinen Zuständen präpariert. Nun

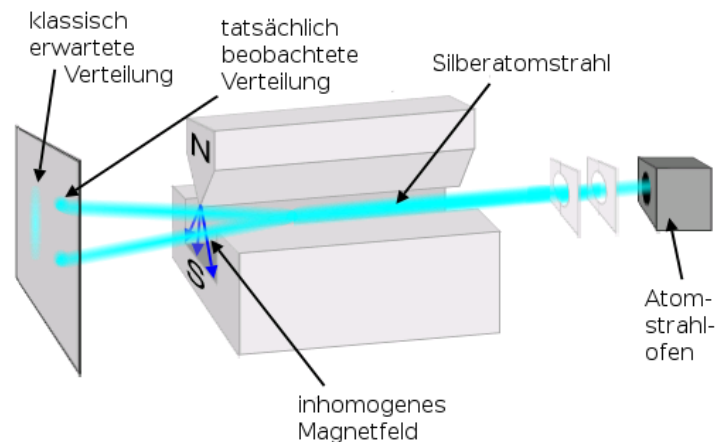


Abbildung 2.1: Stern-Gerlach-Experiment [Kno08].

wird der Spin down Strahl ausgeblendet und der Dichte-Operator des verbleibenden Strahls betrachtet:

$$\hat{\rho} = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Durch ein zweites Stern-Gerlach-Experiment kann der präparierte Strahl erneut untersucht werden. Die Richtung des Magnetfeldes soll sich gegenüber dem ersten verdrehen lassen. Sind die



Richtungen gleich, so erhalten wir weiterhin nur einen Strahl. Der präparierte Zustand wird durch die wiederholte richtungsgleiche Messung nicht verändert, weshalb die Polarisation erhalten bleibt. Verdrehen wir nun das Magnetfeld des nachgeschalteten Stern-Gerlach-Experiments, so erhalten wir einen zweiten Strahl, dessen Intensität sich in Abhängigkeit vom Winkel verändert. Durch die Drehung wird ein Teil der Polarisation senkrecht zur z-Richtung mitgemessen. Folglich ist ein in z-Richtung polarisierter Strahl in der Ebene senkrecht dazu vollkommen unpolarisiert. Mathematisch wird dieser Sachverhalt durch die Kommutatoren der Spin-Operatoren  $\hat{S}_i$ ,  $\hat{S}_j$  erfasst, die nur für  $i = j$  miteinander vertauschen ( $i, j = x, y, z$ ) und somit keine gemeinsame Eigenbasis besitzen. Es ist also unmöglich zwei senkrecht zueinander stehende Spin-Richtungen gleichzeitig scharf zu messen. Die Erwartungswerte des Spin-Operators ergeben sich für das Gemisch zu  $\langle \hat{\vec{S}} \rangle = \vec{0}$  und für den reinen, in z-Richtung polarisierten Zustand zu  $\langle \hat{\vec{S}} \rangle = \pm \frac{\hbar}{2} \vec{e}_z$ , wobei  $\vec{e}_z$  für den Einheitsvektor in z-Richtung steht. Die statistischen Messergebnisse unterscheiden sich für reine Zustände und Gemische. Natürlich können auch Gemische aus polarisierten Zuständen erzeugt werden. Es wäre beispielsweise möglich, dass die Atome unseres Strahls zu einem viertel in x-Richtung und zu dreiviertel in z-Richtung polarisiert sind usw. All diese Informationen werden durch die Dichtematrix erfasst. Bei elektromagnetischer Strahlung enthält der Dichte-Operator die Information über den Zustand des Feldes. Da sich das Feld mit der Zeit ändern kann, muss die zeitliche Entwicklung des Dichte-Operators untersucht werden.

## Zeitentwicklung des Dichte-Operators

Die Zeitentwicklung wird in der Quantenmechanik durch unitäre Transformationen  $\hat{U}$  dargestellt. Handelt es sich um einen Eigenzustand eines zeitunabhängigen Hamilton-Operators, so führt die Zeitentwicklung nur zu einem Phasenfaktor  $e^{i\omega t}$ . Allgemein wird die Zeitabhängigkeit eines Zustands  $|\Psi, t\rangle$  vom Zeitpunkt  $t_0$  bis  $t$  durch

$$|\Psi, t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi, t_0\rangle \quad (2.41)$$

beschrieben. Die Zeitentwicklung vom Zeitpunkt  $t_0$  bis  $t$  kann vollständig durch den unitären Operator  $\hat{U}(t, t_0)$  dargestellt werden, wobei  $|\Psi, t_0\rangle$  der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t_0$  ist. Setzt man den zeitabhängigen Zustand in die Schrödinger-Gleichung (2.17) ein, so erkennt man, dass die Schrödinger-Gleichung für beliebige Zustände  $|\Psi, t_0\rangle$  erfüllt ist, wenn

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (2.42)$$

gilt. Damit ergibt sich für den Dichte-Operator aus Gleichung (2.34) folgende Zeitabhängigkeit:

$$\hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0). \quad (2.43)$$

Daraus lässt sich die von-Neumann-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad (2.44)$$

herleiten, die die Zeitentwicklung des Dichte-Operators beschreibt. Es zeigt sich, aus dem Vergleich mit der Heisenbergschen Bewegungsgleichung, dass der Dichte-Operator keine explizite Zeitabhängigkeit aufweist. Somit ist die Gesamtwahrscheinlichkeit eine Erhaltungsgröße und die von-Neumann-Gleichung stellt das quantenmechanische Analogon zur Liouville-Gleichung der klassischen statistischen Mechanik dar. Sehr oft werden in der Physik stationäre Systeme betrachtet. Sie erfüllen folgende Gleichung [Peř85]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t + \Delta t). \quad (2.45)$$

Der Dichte-Operator eines stationären Systems muss zeitunabhängig sein. Die von-Neumann-Gleichung lässt sich auch auf das Wechselwirkungsbild übertragen, das für die zeitabhängige Störungsrechnung benötigt wird. Dazu wird der Zeitentwicklungs-Operator selbst einer unitären Transformation unterzogen. Für die von-Neumann-Gleichung ergibt sich dann folgende Form:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}_{int}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (2.46)$$

An die Stelle des Hamilton-Operators  $\hat{H}(t)$  ist nun der Wechselwirkungs-Hamiltonian  $\hat{H}_{int}(t)$  getreten. Durch die Berechnung des zeitabhängigen Dichte-Operators kann die Zustandsänderung des betrachteten Systems vorausgesagt werden.

## 2.2 Elektrodynamische Grundlagen

In der Punktmechanik steht die zeitliche Entwicklung der Trajektorien  $\vec{r}(t)$  im Vordergrund, deren Berechnung aus den Bewegungsgleichungen folgt. Die Trajektorien beschreiben die Bahn der Teilchen und können beispielsweise aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden. Im Gegensatz dazu sind in der Elektrodynamik die Felder die grundlegenden Größen. Definiert werden die Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  über die Kraft  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ , die sie auf eine Ladung  $q$  ausüben [Fli00a]:

$$\vec{F} = \vec{F}_L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + q \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t). \quad (2.47)$$

Hier steht  $\vec{r}$  für den Ort und  $\dot{\vec{r}}$  für die Geschwindigkeit des Teilchens der Masse  $m$ , das die Ladung  $q$  trägt. Die Kraft  $\vec{F}_L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  wird auch als Lorentzkraft bezeichnet. Ist man an dem raumzeitlichen Verlauf der Lorentzkraft interessiert, so muss der Feldverlauf in Abhängigkeit von Ort und Zeit ermittelt werden. Der Feldverlauf wird durch die Feldgleichungen beschrieben, die in der Elektrodynamik den gleichen Stellenwert einnehmen, wie die Bewegungsgleichungen in der Mechanik.

### 2.2.1 Maxwellgleichungen

Bei den Feldgleichungen der Elektrodynamik handelt es sich um vier partielle Differentialgleichungen, die den Namen Maxwellgleichungen tragen. Es ist prinzipiell zwischen den mikroskopischen und den makroskopischen Maxwellgleichungen zu unterscheiden, wobei die makroskopischen aus den mikroskopischen durch Mittelung hervorgehen [Nol02]. Die mikroskopischen

Maxwellgleichungen besitzen universelle Gültigkeit und werden deshalb betrachtet. In ihrer differentiellen Darstellung nehmen sie die folgenden Formen an:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t), \quad (2.48)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.49)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\dot{\vec{B}} \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}, \quad (2.51)$$

wobei  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}$  für elektrisches Feld, magnetische Induktion, Ladungsträgerdichte und Stromdichte stehen. Dielektrizitätskonstante und magnetische Feldkonstante des Vakuums sind durch  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$  und  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{kgm}}{(\text{sA})^2}$  gegeben.

## 2.2.2 Potentiale der Elektrodynamik

Zur weiteren Vereinfachung der Maxwellgleichungen werden das skalare Potential  $\Phi(\vec{r}, t)$  und das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  eingeführt. Die Definition der Potentiale erfolgt durch [Fli00a]:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (2.52)$$

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \Phi(\vec{r}, t). \quad (2.53)$$

Ersetzt man die Felder in den Maxwellgleichungen durch die Potentiale, so sind die Gleichungen (2.48) und (2.49) automatisch erfüllt. Übrig bleiben zwei gekoppelte Differentialgleichungen, die folgende Form annehmen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \left( \ddot{\vec{A}}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \dot{\Phi}(\vec{r}, t) \right) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (2.54)$$

$$\Delta \Phi(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t). \quad (2.55)$$

Aus den Gleichungen (2.52) und (2.53) geht hervor, dass die genaue mathematische Struktur der Potentiale nicht exakt festgelegt ist, allerdings müssen die physikalischen Wechselwirkungen unabhängig von der Wahl der Potentiale sein. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass elektrisches und magnetisches Feld invariant unter einer Lorentz-Transformation sind, während sich die Potentiale ändern. Es besteht also die Möglichkeit, die Potentiale so zu wählen, dass sich

die Berechnungen der Gleichungen (2.54) und (2.55) vereinfachen. Diese Vorgehensweise wird auch als Eichung bezeichnet. Eine günstige Wahl stellt die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}_\perp \quad (2.56)$$

dar, in der die longitudinale Komponente des Vektorpotentials  $\vec{A}_\parallel$  gleich Null gesetzt wird. Dadurch vereinfacht sich die Gleichung (2.55) zur Poisson-Gleichung. Das Vektorpotential  $\vec{A}$  geht in der Coulomb-Eichung in das transversale Vektorpotential  $\vec{A}_\perp$  über. Für das transversale elektrische Feld  $\vec{E}_\perp$  folgt daraus:

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_\perp(\vec{r}, t) = -\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t). \quad (2.57)$$

Da es sich bei elektromagnetischer Strahlung im Vakuum um transversale Wellen handelt, kann in der Coulomb-Eichung das transversale elektromagnetische Feld ausschließlich durch das Vektorpotential beschrieben werden. Unter dem transversalen elektrischen Feld versteht man den Anteil des Feldes, der senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle steht. Das longitudinale elektrische Feld  $\vec{E}_\parallel$ , welches parallel zur Ausbreitungsrichtung verläuft, wird vollständig durch das skalare Potential  $\Phi(\vec{r}, t)$  erfasst. Somit entspricht das skalare Potential in der Coulomb-Eichung dem Coulomb-Potential.

### 2.2.3 Quantisierung des elektrischen Feldes

Um Quanteneffekte in der Elektrodynamik zu beschreiben ist es notwendig, das elektromagnetische Feld zu quantisieren. Die Grundlagen der klassischen Elektrodynamik sind die oben beschriebenen Maxwellgleichungen sowie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für geladene Teilchen. Um die Beschreibung zu vereinheitlichen, bedient man sich der Lagrange-Funktion. Aus dieser kann dann, wie in Gleichung (2.14) gezeigt wurde, die Hamilton-Funktion abgeleitet und daraus unter Verwendung des Korrespondenzprinzips der Hamilton-Operator gewonnen werden.

#### Lagrange-Funktion

Die klassische Lagrange-Funktion  $L$ , aus der sich die drei relevanten Gleichungen (2.47), (2.54) und (2.55) herleiten lassen, kann unter Zuhilfenahme des Vektorpotentials wie folgt dargestellt werden [VW06]:

$$L = \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \epsilon_0 \left[ \dot{\vec{A}}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \right]^2 - \mu_0^{-1} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^2 + \int d^3r \left[ \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) - \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \right]. \quad (2.58)$$

Unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips der kleinsten Wirkung  $\delta \int dt L = 0$  lassen sich daraus die oben angeführten Gleichungen bestimmen. Wird zusätzlich die Coulomb-Eichung

(2.56) genutzt, so ist das skalare Potential  $\Phi(\vec{r})$  keine unabhängige Feldvariable mehr und die Lagrange-Funktion ist nur von  $\vec{r}_a$ ,  $\dot{\vec{r}}_a$ ,  $\vec{A}(\vec{r})$  und  $\dot{\vec{A}}(\vec{r})$  abhängig.

$$L = \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \epsilon_0 \dot{\vec{A}}^2(\vec{r}) - \mu_0^{-1} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^2 - W_{Coul} + \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}). \quad (2.59)$$

$W_{Coul}$  stellt die gegenseitige Coulomb-Wechselwirkungsenergie der Teilchen mit den Massen  $m_a$  und den Ladungen  $Q_a$  dar:

$$W_{Coul} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{a,a'} \frac{Q_a Q_{a'}}{|\vec{r}_a - \vec{r}_{a'}|}. \quad (2.60)$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  gleicht die doppelt gezählten Energien aus. Der Strich am Summenzeichen deutet an, dass über gleiche Indizes nicht summiert werden darf. Die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  und die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  sind durch

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a Q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (2.61)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_a Q_a \dot{\vec{r}}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \quad (2.62)$$

gegeben. Aus der Lagrange-Funktion folgt der kanonische Feldimpuls  $\vec{\Pi}(\vec{r}) = \epsilon_0 \dot{\vec{A}}(\vec{r})$  und die Hamilton-Funktion. Aufbauend auf diesen Grundlagen kann das Feld quantisiert werden.

## Modenentwicklung des Feldes

Der einfachste Fall ist das quantisierte freie elektromagnetische Feld in Coulomb-Eichung. Die Lagrange-Funktion  $L$  aus Gleichung (2.59) vereinfacht sich hier, da die hinteren Terme der Gleichung wegen ( $m_a = 0$  und  $Q_a = 0$ ) zu Null werden. Daraus kann dann unter Verwendung der Gleichungen (2.14) und (2.15) der Hamilton-Operator des freien elektromagnetischen Feldes  $\hat{H}_R$  hergeleitet werden [VW06]:

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \epsilon_0^{-1} \hat{\Pi}^2(\vec{r}) + \mu_0^{-1} \left[ \vec{\nabla} \times \hat{\vec{A}}(\vec{r}) \right]^2 \right\}. \quad (2.63)$$

Es handelt sich bei den verallgemeinerten Orts-  $\hat{\vec{A}}$  und Impuls-Operatoren  $\hat{\vec{\Pi}}$  um Feld-Operatoren. Zur weiteren Vereinfachung des Hamilton-Operators  $\hat{H}_R$  wird die zeitliche Entwicklung der Feld-Operatoren im Heisenberg-Bild ermittelt [VW06]

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\vec{A}} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{\vec{A}}, \hat{H}_R \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\vec{\Pi}}, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Pi} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\Pi}, \hat{H}_R] = \frac{1}{\mu_0} \Delta \hat{A}, \quad (2.65)$$

wobei  $\Delta = \vec{\nabla}^2$  für den Laplace-Operator steht. Hieraus folgt die Wellengleichung:

$$\Delta \hat{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.66)$$

Sie entspricht Gleichung (2.54) in quantisierter Form für ein Feld ohne Ladungen in Coulomb-Eichung. Für den kanonischen Feldimpuls-Operator ergibt sich eine ähnliche Gleichung. Zur Lösung dieser Gleichungen nutzt man die Modenentwicklung der Operatoren des Vektorfeldes  $\hat{A}$  und des kanonischen Impulses  $\hat{\Pi}$ . Dazu werden sie in Summen über alle Wellenvektoren und Polarisierungen des Feld zerlegt. Die Frage nach den möglichen Wellenvektoren wird im Unterkapitel 2.2.6 erörtert. Unter Verwendung von

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\lambda} c_{\lambda} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) \hat{q}_{\lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\lambda} c_{\lambda}^* \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r}) \hat{q}_{\lambda}^+(t) \quad (2.67)$$

zerfällt das Differenzialgleichungssystem (2.66) in die Differenzialgleichungssysteme der einzelnen Moden. Die Differenzialgleichung einer Mode lässt sich dann in einen zeitabhängigen und einen ortsabhängigen Anteil separieren:

$$\Delta \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) = 0, \quad (2.68)$$

$$\ddot{\hat{q}}_{\lambda}(t) + \omega_{\lambda}^2 \hat{q}_{\lambda}(t) = 0. \quad (2.69)$$

Für die ortsabhängigen Moden-Funktionen  $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$  ergibt sich die Helmholtz-Gleichung (2.68). Die Zeitentwicklung der Moden-Operatoren  $\hat{q}_{\lambda}(t)$  wird durch den harmonischen Oszillator aus Gleichung (2.69) beschrieben. Die Separationskonstanten  $\omega_{\lambda}$  sind gleichzeitig die Eigenfrequenzen der harmonischen Oszillatoren, also die Frequenzen mit denen die Moden schwingen. Da der Laplace-Operator ein hermitescher Operator ist, folgt für die ortsabhängigen Moden-Funktionen die Orthogonalität. Durch geeignete Wahl der Entwicklungskonstanten  $c_{\lambda}$  ergibt sich ein Orthonormal-System:

$$|c_{\lambda}|^2 \int d^3r \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r}) \vec{A}_{\lambda'}(\vec{r}) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.70)$$

Orthogonalität lässt sich auch für  $\vec{A}_{\lambda}, \vec{A}_{\lambda'}$  anstelle von  $\vec{A}_{\lambda}^*, \vec{A}_{\lambda'}$  erreichen [VW06]. In der gleichen Weise erhält man für den Feldimpuls-Operator  $\hat{\Pi}$

$$\hat{\Pi} = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{\lambda} c_{\lambda}^* \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r}) \hat{p}_{\lambda}(t) = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{\lambda} c_{\lambda} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) \hat{p}_{\lambda}^+(t), \quad (2.71)$$

wobei  $\hat{p}_\lambda$  die zu  $\hat{q}_\lambda$  kanonisch konjugierten nicht hermiteschen Moden-Operatoren sind. Setzt man die entwickelten Feld-Operatoren in den Hamilton-Operator  $\hat{H}_R$  aus Gleichung (2.63) ein und berücksichtigt die Beziehung der Moden-Operatoren  $\hat{q}_\lambda, \hat{p}_\lambda^+$  zu den Erzeugern  $\hat{a}_\lambda^+$  und Vernichtern  $\hat{a}_\lambda$

$$\hat{q}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}} \left\{ \hat{a}_\lambda + \sum_{\lambda'} \left[ \int d^3r c_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) c_{\lambda'} \vec{A}_{\lambda'}(\vec{r}) \right]^* \hat{a}_{\lambda'}^+ \right\}, \quad (2.72)$$

$$\hat{p}_\lambda = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}} \left\{ \hat{a}_\lambda^+ - \sum_{\lambda'} \left[ \int d^3r c_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) c_{\lambda'} \vec{A}_{\lambda'}(\vec{r}) \right] \hat{a}_{\lambda'} \right\}, \quad (2.73)$$

so erhält man:

$$\hat{H}_R = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left( \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2} \right) = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left( \hat{n}_\lambda + \frac{1}{2} \right). \quad (2.74)$$

Der Hamilton-Operator des freien elektromagnetischen Felds  $\hat{H}_R$  ist durch die Summe der modenbezogenen Teilchenzahl-Operatoren  $\hat{n}_\lambda$  gegeben. Woraus sich für den Energieeigenwert die Summe über die Anzahl der Photonen  $n_\lambda$  in der jeweiligen Mode  $\lambda$ , multipliziert mit  $\hbar\omega_\lambda$  ergibt. Der Energieeigenwert ist folglich wegen der Energie der Vakuumsfluktuationen  $\sum_\lambda \frac{1}{2}\hbar\omega_\lambda$  unendlich. Für die Detektion von Photonen spielt dies keine Rolle, da sowieso nur Energieänderungen betrachtet werden. Es lässt sich zeigen, dass die Eigenwerte  $n_\lambda$  des Teilchenzahl-Operators durch nichtnegative ganze Zahlen gegeben sind, worin sich die Quantennatur des Feldes widerspiegelt. Die Operatoren der Felder lassen sich ebenfalls durch die Erzeuger und Vernichter der Photonen darstellen. Es gilt:

$$\hat{\vec{A}} = \sum_\lambda \left\{ \vec{A}_\lambda(\vec{r}) \hat{a}_\lambda + \vec{A}_\lambda^*(\vec{r}) \hat{a}_\lambda^+ \right\}, \quad (2.75)$$

$$\hat{\vec{\Pi}} = -\epsilon_0 \sum_\lambda i\omega_\lambda \left\{ \vec{A}_\lambda(\vec{r}) \hat{a}_\lambda - \vec{A}_\lambda^*(\vec{r}) \hat{a}_\lambda^+ \right\}. \quad (2.76)$$

Offensichtlich handelt es sich bei  $\hat{\vec{A}}$  und  $\hat{\vec{\Pi}}$  um hermitesche Operatoren. Durch die Ersetzung des Moden-Operators  $\hat{q}_\lambda$  durch die Erzeugungs-  $\hat{a}_\lambda^+$  und Vernichtungs-Operatoren  $\hat{a}_\lambda$  hebt sich die normierte Entwicklungskonstante  $c_\lambda$  weg, wenn

$$c_\lambda = \sqrt{\frac{2\omega_\lambda\epsilon_0}{\hbar}} \quad (2.77)$$

gilt. Mit Gleichung (2.57) lässt sich zeigen, dass das transversale elektrische Feld proportional zum kanonischen Feldimpuls-Operator ist [VW06]:

$$\hat{\vec{E}}_\perp(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \hat{\vec{\Pi}}. \quad (2.78)$$

Für den Operator des magnetischen Felds gilt analog zur klassischen Beziehung

$$\hat{\vec{B}} = \nabla \times \hat{\vec{A}}, \quad (2.79)$$

wodurch die Feld-Operatoren beschrieben sind.

## Der Hamilton-Operator des elektromagnetischen Feldes mit geladenen Teilchen

Nachdem die Darstellung des Hamilton-Operators für das freie elektromagnetische Feld in Coulomb-Eichung bekannt ist, sollen auch noch die restlichen Terme aus Gleichung (2.59) berücksichtigt werden. Wir bilden wieder die Hamilton-Funktion und berücksichtigen sowohl die kanonischen Variablen des Feldes, als auch die der Teilchen. Nach dem Korrespondenzprinzip werden sie durch Operatoren ersetzt. Dabei zeigt sich, wie in Gleichung (2.18), dass der Hamilton-Operator  $\hat{H}$  in Coulomb-Eichung, in drei Hamiltonians zerlegt werden kann:

$$\hat{H} = \hat{H}_R + \hat{H}_C + \hat{H}_{int}. \quad (2.80)$$

$\hat{H}_R$  ist der Hamilton-Operator des transversalen elektromagnetischen Feldes und ist wie in Gleichung (2.74) definiert:

$$\hat{H}_R = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda}(\hat{n}_{\lambda} + \frac{1}{2}). \quad (2.81)$$

$\hat{H}_C$  ist der Hamiltonian der geladenen Teilchen, einschließlich ihrer gegenseitigen Coulomb-Wechselwirkung

$$\hat{H}_C = \sum_a \frac{\hat{p}_a^2}{2m_a} + \hat{W}_{Coul}, \quad (2.82)$$

und  $\hat{H}_{int}$  beschreibt die Kopplung zwischen freiem Feld und geladenen Teilchen:

$$\hat{H}_{int} = - \sum_a \frac{Q_a}{m_a} \hat{p}_a \hat{A}(\hat{r}_a) + \sum_a \frac{Q_a^2}{2m_a} \hat{A}^2(\hat{r}_a). \quad (2.83)$$

$\hat{H}_C$  und  $\hat{H}_R$  können zunächst unabhängig voneinander berechnet werden, wenn  $\hat{H}_{int}$  vernachlässigt wird. Durch  $\hat{H}_{int}$  entstehen Kopplungen, die zur Vernichtung oder Erzeugung von Photonen führen und im Rahmen einer Störungsrechnung betrachtet werden sollen. Dazu müssen wieder Näherungen eingeführt werden, die es ermöglichen, den Hamilton-Operator  $\hat{H}_{int}$  zu vereinfachen.

## Näherungen des Hamilton-Operators

Geht man nur von einem Atom aus, so bietet sich die Dipolnäherung für hinreichend große Wellenlängen an. Hierbei wird der Operator des Vektorfeldes  $\hat{A}(\hat{r}_a)$ , der von dem Orts-Operator  $\hat{r}_a$  des Teilchens  $a$  abhängt, als Reihe um den Operator des Schwerpunktes  $\hat{R}$  des atomaren Systems entwickelt. In Dipolnäherung werden nur die Terme bis zur nullten-Ordnung in der Reihenentwicklung berücksichtigt. Es wird so getan, als ob das Feld am Ort  $\vec{R}$  das gleiche ist, wie am Ort  $\vec{R} + \Delta\vec{r} = \vec{R} + (\vec{r}_a - \vec{R})$ . Dies ist gerechtfertigt, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  wesentlich größer ist als der Abstand zwischen dem Schwerpunkt des atomaren Systems und dem Aufenthaltsort



der Ladungen  $\lambda \gg |\Delta\vec{r}|$ . Betrachtet man beim Wasserstoffatom z.B. das Elektron im Grundzustand ( $1s^1$ ), so erhält man aus der quantenmechanischen Berechnung des mittleren Bahnradius  $\langle \hat{r} \rangle = 53$  pm. Ein Vergleich mit den Wellenlängen im optischen Bereich des Spektrums lässt erkennen, dass die Dipolnäherung als gerechtfertigt betrachtet werden kann. Somit folgt:

$$\hat{A}(\hat{r}_a) \rightarrow \hat{A}(\hat{R}_A) \rightarrow \hat{A}(\vec{R}_A). \quad (2.84)$$

Bei der letzten Näherung wurde angenommen, dass die Bewegung des Schwerpunktes zu vernachlässigen ist und somit der Operator  $\hat{R}_A$  durch einen konstanten Vektor  $\vec{R}_A$  ersetzt werden kann. Zusätzlich wird im Hamiltonian  $\hat{H}_{int}$  aus Gleichung (2.83) der letzte Term, in den das Vektorpotential quadratisch eingeht vernachlässigt. Dies ist erlaubt, wenn die Feldstärken des freien Feldes klein sind im Vergleich zu den inneratomischen Feldstärken ( $E_{atom} \approx 10^{10}$  V/m). Daraus folgt:

$$\hat{H}_{int} = - \sum_a \frac{Q_a}{m_a} \hat{p}_a \hat{A}(\vec{R}_A) = \frac{i}{\hbar} [\hat{d}, \hat{H}_C] \cdot \hat{A}(\vec{R}_A). \quad (2.85)$$

Hinter dem letzten Gleichheitszeichen wurde  $\hat{H}_{int}$  durch den Kommutator des Dipol-Operators  $\hat{d}$  und des Hamilton-Operators  $\hat{H}_C$  dargestellt, der in Gleichung (2.82) definiert ist. Für den Dipol-Operator gilt:

$$\hat{d} = \sum_a Q_a (\hat{r}_a - \vec{R}_A). \quad (2.86)$$

Die Eigenwerte  $\hbar\omega_m$  und Eigenvektoren  $|m\rangle$  lösen das Eigenwertproblem des atomaren Hamiltonian  $\hat{H}_C$ :

$$\hat{H}_C |m\rangle = \hbar\omega_m |m\rangle, \quad (2.87)$$

wobei  $m$  als ganzzahlig angenommen wird und den Zustand charakterisiert. Unter Ausnutzung der Vollständigkeit des Hilbertraumes kann Gleichung (2.85) als Matrix entwickelt werden, indem zweimal die Relation  $\hat{1} = \sum_n |n\rangle \langle n|$  eingefügt wird:

$$\hat{H}_{int} = \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} |n\rangle \langle n| (\hat{d}\hat{H}_C - \hat{H}_C\hat{d}) |m\rangle \langle m| \cdot \hat{A}(\vec{R}_A), \quad (2.88)$$

$$\hat{H}_{int} = -i \sum_{n,m} \omega_{nm} \hat{A}_{nm} \vec{d}_{nm} \cdot \hat{A}(\vec{R}_A). \quad (2.89)$$

Die Abkürzung  $\omega_{nm} = \omega_m - \omega_n$  steht für die Differenzfrequenz und  $\vec{d}_{nm} = \langle n| \hat{d} |m\rangle$  bezeichnet das Dipolmatrixelement für den Übergang vom atomaren Zustand  $|m\rangle$  in den Zustand  $|n\rangle$ .

$\hat{A}_{nm} = |n\rangle \langle m|$  ist der Flip-Operator des atomaren System. Als nächstes wird die Modenentwicklung von  $\hat{A}(\vec{R}_A)$  wie in Gleichung (2.75) durchgeführt. Hier bietet sich die rotierende Wellenapproximation zur weiteren Vereinfachung an. Da nicht alle Feldmoden gleich gut an das atomare System koppeln, ist es sinnvoll, in erster Linie nur die Moden zu berücksichtigen, für die die Resonanzbedingung  $\omega_{nm} \approx \omega_\lambda$  erfüllt ist. Im einfachsten Fall tritt das Feld nur mit einem atomaren Übergang, von  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  resonant in Wechselwirkung. Für Gleichung (2.89) folgt:

$$\hat{H}_{int} = -\vec{d}_{21} \cdot \hat{\vec{E}}_{\perp}^{(+)} \cdot \hat{A}_{21} - \vec{d}_{12} \cdot \hat{\vec{E}}_{\perp}^{(-)} \cdot \hat{A}_{12}. \quad (2.90)$$

Wegen der rotierenden Wellenapproximation konnte  $i\omega_{21}\hat{A}^{(+)} \cong \hat{\vec{E}}_{\perp}^{(+)}$  dem transversalen elektromagnetischen Feld-Operator gleich gesetzt werden [Man79]. Durch die Gesamtheit der Näherungen ist  $\hat{H}_{int}$  stark vereinfacht worden. Gleichung (2.90) beschreibt zwei wichtige Photonenprozesse. Der erste Term steht für die Absorption eines Photons und der zweite für die induzierte Emission. Beide Prozess sind in Abb. 2.2 zu sehen.

## 2.2.4 Photonenprozesse

Hinter dem Begriff Photon verbirgt sich das Quantenteilchen des elektromagnetischen Feldes. Es repräsentiert gewissermaßen den Teilchencharakter des Feldes. Die Energie  $E$  eines Photons beträgt:

$$E = \hbar \cdot \omega = h \cdot \nu. \quad (2.91)$$

Ursprünglich stieß Planck durch den Versuch, die Strahlungsformel für den schwarzen Körper theoretisch herzuleiten auf seine berühmte Quantenhypothese. Die später wiederum Albert Einstein dazu veranlasste, das elektromagnetische Feld selbst zu quanteln. Hierdurch war er dann in der Lage, den äußeren Photoeffekt zu erklären. Der alte Streit ob Licht ein Teilchen oder eine Welle sei, ist in der Quantentheorie des Lichts behoben. Zwar ist es immer noch nicht möglich sich eine bildhafte Vorstellung eines Photons zu machen, doch wird dies durch die geschickte formale Beschreibung in der Quantenmechanik, die ja bekanntermaßen nur Wahrscheinlichkeitsaussagen tätigt, umgangen.

Je nach Fragestellung muss das Wellen- oder Teilchenbild zur Beschreibung verwendet werden. Ist man beispielsweise an der Ausbreitung des Lichts interessiert, so muss das Wellenbild betrachtet werden. Den Photonen wird hierbei kein genauer Ort zugeschrieben, sondern eine Wahrscheinlichkeit, dass sie sich in einem bestimmten raumzeitlichen Volumen befinden. Tritt hingegen eine Wechselwirkung mit Materie auf, so muss auf das Teilchenbild zurück gegriffen werden. Es gibt viele Möglichkeiten für die Wechselwirkung zwischen Feld und Materie, die drei wesentlichen Prozesse sind in Abbildung 2.2 zu sehen. Hier sind zwei atomare Energieniveaus dargestellt, die mit  $E_1$  (Grundzustand) und  $E_2$  (angeregter Zustand) bezeichnet werden. Damit ein resonanter Wechselwirkungsprozess eintreten kann, muss die Energie der Photonen der Energiedifferenz  $\Delta E$  der atomaren Zustände entsprechen:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h \cdot \nu. \quad (2.92)$$

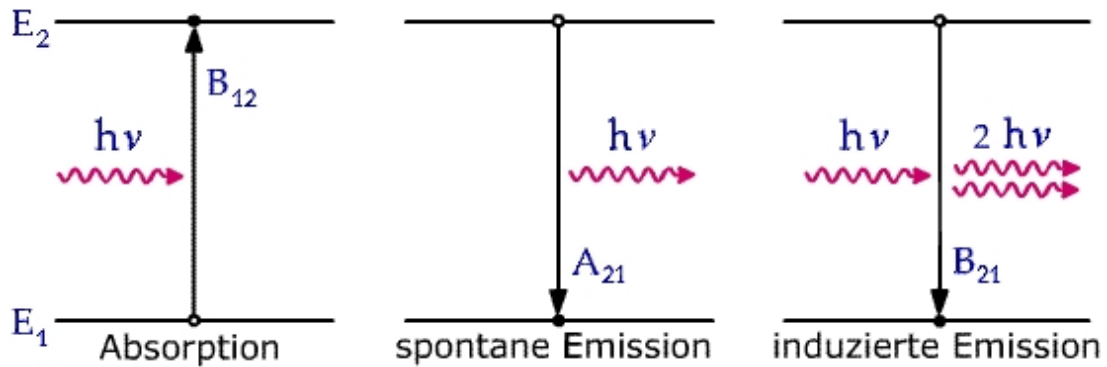


Abbildung 2.2: Wechselwirkungsprozesse des Feldes mit der Materie [20008].

Im ersten Teil des Bildes ist die Absorption eines Photons (gezeichnet als geringelter, magenta-farbener Pfeil) aus dem Feld dargestellt, also die Vernichtung eines Photons. Gleichzeitig wird ein Elektron in den energetisch höheren Zustand angeregt (schwarzer, durchgezogener Pfeil). Das heißt es wird Energie, Impuls und Drehimpuls aus dem Feld auf das atomare System übertragen.  $B_{ij}$  und  $A_{ij}$  stehen für die Einstein-Koeffizienten der Absorption bzw. der Emission aus dem  $i$ -ten in den  $j$ -ten Zustand. Sie sind die Proportionalitätskonstanten der Ratengleichungen. Die Ratengleichungen geben wiederum an, wie viele Atome pro Zeit vom  $i$ -ten in den  $j$ -ten Zustand übergehen [Dem03]. In den zwei darauf folgenden Bildern wird die spontane und die stimulierte Emission beschrieben. Bei der Emission befindet sich immer ein Elektron in einem angeregten Zustand und geht unter Aussendung eines Photons (Erzeugung) in einen energetisch niedrigeren Zustand über. Der Effekt der spontanen Emission beruht auf der Fluktuation des Vakuums. Im Vakuum sind zwar im Mittel keine Photonen enthalten,  $\langle 0 | a^+ a | 0 \rangle = 0$ , aber der Erwartungswert der Fluktuation des Feldes in einer Mode ist durch

$$\langle 0 | \left[ \Delta \hat{E}_k(\vec{r}) \right]^2 | 0 \rangle = \omega^2 |A_k(\vec{r})|^2 = \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \quad (2.93)$$

gegeben. Dies führt zu einer endlichen Lebensdauer  $\Delta\tau$  der angeregten Zustände. Ist ein Übergang erlaubt und keine weiteren Störungen (z.B. Stöße) vorhanden, so liegt die Lebensdauer für einen Dipolübergang in der Größenordnung von ca.  $\Delta\tau = 10^{-8}$  s und legt damit die Kohärenzzeit  $\tau_c \approx \Delta\tau$ , die in etwa gleich ist fest. Auf den Zusammenhang zwischen Linienbreite  $\Delta\nu$  eines atomaren Strahlers und Kohärenzzeit wird noch gesondert eingegangen. Bei der stimulierten Emission hingegen tritt als Störung das Feld selbst auf. Das Elektron im angeregten Zustand wird durch ein Photon, dessen Frequenz  $\nu$  die Resonanzbedingung (2.92) in etwa erfüllt veranlasst, seine Energie in Form eines zusätzlichen Photons abzugeben. Die Möglichkeit der stimulierten Emission ist eine Grundvoraussetzung für die Laser-Technologie. Für Messungen an elektromagnetischen Feldern spielt der Prozess der Absorption eine besondere Rolle. Durch ihn wird es möglich, Intensitäten zu ermitteln.

## 2.2.5 Intensität

Im optischen Bereich ist es aufgrund der hohen Frequenzen  $\nu \approx 10^{14}\text{Hz}$  nicht möglich dem Verlauf des Feldes direkt zu folgen. Um trotzdem Informationen über das Feld zu gewinnen, wird die Intensität gemessen. Sie lässt sich aus dem Poynting-Vektor  $\vec{S}$  ableiten, der als Kreuzprodukt der elektrischen und magnetischen Feldstärke definiert ist:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (2.94)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist auf reelle Felder  $\vec{a}$  beschränkt ( $\vec{a} = \vec{a}^*$ ). Die zeitabhängige Intensität  $I(\vec{r}, t)$  ist als Betrag des Poynting-Vektor definiert:

$$I(\vec{r}, t) = \left| \vec{S}(\vec{r}, t) \right|. \quad (2.95)$$

Reale Messungen der Intensität erfolgen immer über eine endliche Zeitspanne. Dies entspricht einer Mittelung über die zeitabhängige Intensität. Somit ist das zeitliche Mittel des Betrags des Poynting-Vektors, die physikalisch messbare Größe. Für das zeitliche Mittel gilt

$$\bar{I}(t, \Delta t) = \overline{|\vec{S}|(t)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} |\vec{S}|(t') dt' = \overline{|\text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H})|}, \quad (2.96)$$

wobei  $\Delta t$  für die Mittelungsdauer steht.

## Herleitung im Falle einer monochromatischen ebenen Welle

Um ein anschauliches Ergebnis zu erhalten, werden ebene elektromagnetische Wellen verwendet. Im einfachsten Fall der ebenen Welle im Vakuum gilt:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left\{ i \left( \vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi \right) \right\}, \quad (2.97)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp \left\{ i \left( \vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi \right) \right\}, \quad (2.98)$$

wie unter Zuhilfenahme von Gleichung (2.50) gezeigt werden kann, wobei  $\varphi$  für eine allgemeine Phasenverschiebung der Felder steht, durch die mögliche Anfangsbedingungen berücksichtigt werden. Verwenden wir zusätzlich die Gleichungen (2.48) und (2.49), so zeigt sich, dass  $\vec{E} \perp \vec{k} \perp \vec{B}$  gilt. Die Felder stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Für die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  im Vakuum gilt:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}, \quad (2.99)$$

wobei  $\omega$  für die Kreisfrequenz der elektromagnetischen Welle,  $k = |\vec{k}|$  für den Betrag des Wellenvektors  $\vec{k}$  und  $\vec{r}$  für den Ortsvektor steht. Aus Gründen der Bequemlichkeit hatten wir in den

Gleichungen (2.97) und (2.98) zur Berechnung komplexe Größen verwendet, physikalische Bedeutung steht aber nur den Realteilen der Felder zu. Da es sich beim Poynting-Vektor um einen nichtlinearen Ausdruck handelt, muss dies berücksichtigt werden. Für das Kreuzprodukt der Realteile folgt nach den Rechenregeln für komplexe Zahlen:

$$\operatorname{Re}(\vec{E}) \times \operatorname{Re}(\vec{H}) = \frac{1}{4} \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*) \times (\vec{H} + \vec{H}^*), \quad (2.100)$$

$$\operatorname{Re}(\vec{E}) \times \operatorname{Re}(\vec{H}) = \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} + \vec{E}^* \times \vec{H}^*). \quad (2.101)$$

Führt man nun die zeitliche Mittelung aus Gleichung (2.96) über eine Periode  $\Delta t$  mit  $\omega \Delta t = 2\pi$  durch, so zeigt sich, dass nur die gemischten Terme aus Gleichung (2.101) einen Beitrag leisten, da sich wegen der komplexen Konjugation die Phasen zu jedem Zeitpunkt zu Null aufaddieren. Dies hat zur Folge, dass das Produkt zeitunabhängig wird:

$$\overline{\operatorname{Re}(\vec{E}) \times \operatorname{Re}(\vec{H})} = \frac{1}{4} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 + \vec{E}_0 \times \vec{H}_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0). \quad (2.102)$$

Setzt man  $\vec{H}_0$  aus Gleichung (2.99) in den zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors ein, so folgt [No102]:

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_0 \times \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 \right) \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}_0^2 \frac{\vec{k}}{k} = c \cdot \bar{u}(\vec{r}, t) \frac{\vec{k}}{k}. \quad (2.103)$$

Nach dem letzten Gleichheitszeichen wurde noch die Beziehung zwischen dem zeitlichen Mittelwert der Energiedichte  $\bar{u}(\vec{r}, t)$  der elektromagnetischen Welle und dem zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors hergestellt. Das Produkt aus Energiedichte und Lichtgeschwindigkeit  $c$  steht für die Energieflussdichte des Feldes. Der Begriff der Energieflussdichte ist aber identisch mit dem physikalischen Begriff der Leistungsdichte, die gleich der Intensität ist. Für das zeitliche Mittel der Intensität  $\bar{I}(t, \Delta t)$  gilt in unserem Beispiel:

$$\bar{I}(t, \Delta t) = |\vec{S}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E} \cdot \vec{E}^*. \quad (2.104)$$

Die klassische Intensität ist also proportional zum Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke  $|\vec{E}|^2$ . Es sei nochmals bemerkt, dass dieses Ergebnis unter der Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit erzielt worden ist.

## Erweiterung auf multimodige Wellen

Reale Felder bestehen aus Superpositionen vieler harmonischer Wellen verschiedener Frequenzen, mit unterschiedlichen Amplituden  $\vec{E}_{0n}$  und Phasen  $\varphi_n$ . Zur Vereinfachung verwenden wir die komplexe Darstellung:

$$\vec{E} = \sum_n \vec{E}_{0n} \exp \left\{ i \left( \vec{k}_n \vec{r} - \omega_n t + \varphi_n \right) \right\}. \quad (2.105)$$

Amplituden und Phasen sind reelle Zahlen. Die Berechnung der Intensität wird im Vakuum durchgeführt. Damit ergibt sich für die magnetische Induktion unter Verwendung von Gleichung (2.50):

$$\vec{B} = \sum_n \vec{B}_{0n} \exp \left\{ i \left( \vec{k}_n \vec{r} - \omega_n t + \varphi_n \right) \right\} = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \vec{k}_n \times \vec{E}_{0n} \exp \left\{ i \left( \vec{k}_n \vec{r} - \omega_n t + \varphi_n \right) \right\}. \quad (2.106)$$

Welchen Wert nimmt die Intensität für diesen allgemeinen Fall an? Zur Berechnen wird Gleichung (2.95) und die Transversalität der elektromagnetischen Wellen im Vakuum verwendet:

$$I(t) = |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} |Re(\vec{E}) \times Re(\vec{B})| = \frac{1}{\mu_0} |Re(\vec{E})| \cdot |Re(\vec{B})| \underbrace{\sin(\varphi_{Re(\vec{E}) \cdot Re(\vec{B})})}_{=\pi/2}. \quad (2.107)$$

Bildet man nun die Beträge der Felder unter Berücksichtigung der Rechenregeln für komplexe Zahlen, so erhält man:

$$|Re(\vec{E})(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sum_{n,m} (\vec{E}_{0n} \cdot \vec{E}_{0m}) \underbrace{[\cos(\omega_{nm}^- t + \varphi_{nm}^-(\vec{r})) + \cos(\omega_{nm}^+ t + \varphi_{nm}^+(\vec{r}))]}_{C_{nm}(\vec{r}, t)}}, \quad (2.108)$$

$$|Re(\vec{B})(t)| = \frac{1}{c\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sum_{n,m} \frac{1}{k_n k_m} \left[ (\vec{k}_n \cdot \vec{k}_m)(\vec{E}_{0n} \cdot \vec{E}_{0m}) - (\vec{k}_n \cdot \vec{E}_{0m})(\vec{k}_m \cdot \vec{E}_{0n}) \right] C_{nm}(\vec{r}, t)}. \quad (2.109)$$

Zur verkürzten Schreibweise wurden  $\varphi_{nm}^\pm(\vec{r})$  und  $\omega_{nm}^\pm$  für Phase und Summen- bzw. Differenzfrequenzen eingeführt, die wie folgt definiert sind:

$$\varphi_{nm}^\pm(\vec{r}) = \left( \vec{k}_n \pm \vec{k}_m \right) \vec{r} + \varphi_n \pm \varphi_m, \quad (2.110)$$

$$\omega_{nm}^\pm = \omega_n \pm \omega_m. \quad (2.111)$$

Vereinfachend wird angenommen, dass alle Wellenvektoren parallel sind ( $\vec{k}_n \parallel \vec{k}_m$ ), woraus folgt, dass der Betrag der magnetischen Induktion proportional zum Betrag des elektrischen Feldes ist. Damit ergibt sich für die zeitabhängige Intensität:

$$I(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_{n,m} (\vec{E}_{0n} \cdot \vec{E}_{0m}) \underbrace{[\cos(\omega_{nm}^- t + \varphi_{nm}^-(\vec{r}))]}_{L_{nm}(t)} + \underbrace{[\cos(\omega_{nm}^+ t + \varphi_{nm}^+(\vec{r}))]}_{S_{nm}(t)}. \quad (2.112)$$

Andererseits kann mit Gleichung (2.105) gezeigt werden, dass für das Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = \sum_{n,m} \vec{E}_{0n} \vec{E}_{0m} \exp \{ i\omega_{nm}^- t + i\varphi_{nm}^-(\vec{r}) \} = \sum_{n,m} \vec{E}_{0n} \vec{E}_{0m} \cos (\omega_{nm}^- t + \varphi_{nm}^-(\vec{r})) \quad (2.113)$$

gilt. Das Ersetzen der komplexen Exponentialfunktion durch die Kosinusfunktion ist wegen des Symmetrieverhaltens der Funktionen aus den Gleichungen (2.110) und (2.111) unter Vertauschung der Indizes möglich:

$$\omega_{nm}^- = -\omega_{mn}^-, \quad \varphi_{nm}^- = -\varphi_{mn}^-. \quad (2.114)$$

Aus dem zeitlichen Verhalten der Terme  $L_{nm}(t)$  und  $S_{nm}(t)$  aus Gleichung (2.112) erkennt man, dass  $L_{nm}(t)$  langsam oszilliert, da hier die Differenzfrequenzen eingehen und das  $S_{nm}(t)$  wegen der Summenfrequenzen sehr schnell oszilliert. Wie schon zuvor erwähnt wurde, sind der Messung nur zeitliche Mittelwerte zugänglich. Mittelt man über ein kurzes Zeitintervall  $\Delta t_0$ , so ergibt sich:

$$\bar{I}(t, \Delta t_0) = \frac{1}{2\Delta t_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left\{ \int_{t-\Delta t_0/2}^{t+\Delta t_0/2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* dt' + \sum_{n,m} \vec{E}_{0n} \vec{E}_{0m} \int_{t-\Delta t_0/2}^{t+\Delta t_0/2} S_{nm}(t') dt' \right\}. \quad (2.115)$$

Sei nun  $\Delta\omega$  die Halbwertsbreite des Frequenzspektrums und  $\omega_0$  die Mittelfrequenz, so ergibt sich aus Gleichung (2.111) für die niedrigste Summen-  $\omega_{min}^+$  und größte Differenzfrequenz  $\omega_{max}^-$ :

$$\omega_{min}^+ \approx 2\omega_0 - \Delta\omega, \quad \omega_{max}^- \approx \Delta\omega. \quad (2.116)$$

Betrachten wir beispielsweise den grünen Spektralbereich mit  $\omega_0 \approx 2\pi \cdot 5,7 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$  und  $\Delta\omega \approx 2\pi \cdot 0,8 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , so folgt  $\omega_{min}^+ \approx 2\pi \cdot 1,1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  und  $\omega_{max}^- \approx 2\pi \cdot 0,8 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ . Offensichtlich ist die kleinste Summenfrequenz  $\omega_{min}^+$  um eine Größenordnung größer, als die größte Differenzfrequenz  $\omega_{max}^-$ .  $S_{nm}(t)$  oszilliert damit mindestens zehnmal schneller als  $L_{nm}(t)$ . In der Doppelsumme aus Gleichung (2.115) wird deshalb über eine größere Anzahl von Perioden gemittelt. Es wird gefordert, dass

$$\Delta t_0 \cdot \omega_{min}^+ \gg 2\pi \quad (2.117)$$

gelten soll. Da die Summenkreisfrequenzen in der Größenordnung von  $2\pi \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  liegen, wird  $\Delta t_0 \approx 10^{-14} \text{ s}$  gesetzt. Nach dieser Zeitspanne gibt es dann die Tendenz, dass sich der schnell fluktuierende zweite Term in Gleichung (2.115) heraushebt [SLLT97], weshalb er in Zukunft nicht weiter betrachtet wird. Bei Messungen im optischen Bereich liegt immer ein Zeitintervall  $\Delta t_1$  vor, für das gilt,  $\Delta t_1 \gg \Delta t_0$ . Damit stellt:

$$\bar{I}(t, \Delta t_1) \propto \overline{\vec{E} \cdot \vec{E}^*} \quad (2.118)$$

eine sehr gute Näherung der gemittelten zeitabhängigen Intensität dar. Von nun ab wird die kurzzeitig gemittelte Intensität (Mittlung über  $\Delta t_0$ ) mit  $I(t) \propto \vec{E} \cdot \vec{E}^*$  bezeichnet. Will man für diese

Näherung das zeitliche Mittel bestimmen, so folgt:

$$\bar{I}(t, \Delta t_1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left\{ \sum_n \vec{E}_{0n}^2 + \frac{1}{\Delta t_1} \sum_{n \neq m} \vec{E}_{0n} \vec{E}_{0m} \int_{t-\Delta t_1/2}^{t+\Delta t_1/2} \exp \{ i\omega_{nm}^- t' + i\varphi_{nm}^-(\vec{r}) \} dt' \right\}. \quad (2.119)$$

Die Intensität fluktuiert demzufolge um den konstanten ersten Term aus Gleichung (2.119) herum. Da sich die Frequenzen  $\omega_{nm}^-$  zwischen  $0 \text{ s}^{-1}$  und  $\Delta\omega$  bewegen, finden die Fluktuationen auf wesentlich größeren Zeitskalen statt. Aus diesem Grund kann dieser Term nicht vernachlässigt werden. Wählt man das Mittelungszeitintervall  $\Delta t_1$  klein, so liefern die Zeitintegrale annähernd konstante Werte ( $\text{sinc} \left[ \omega_{nm}^- \frac{\Delta t_1}{2} \right] \approx 1$ , siehe Abbildung 2.13). Für die zeitlich gemittelte Intensität gilt dann:

$$\bar{I}(t, \Delta t_1) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left\{ \sum_n \vec{E}_{0n}^2 + \sum_{n \neq m} \vec{E}_{0n} \vec{E}_{0m} \cos(\omega_{nm}^- t + \varphi_{nm}^-(\vec{r})) \right\}. \quad (2.120)$$

$\bar{I}(t, \Delta t_1)$  nimmt für unterschiedliche Mittelungszeitpunkte  $t$  verschiedene Werte an. Diese Näherung ist für Mittelungszeiten in der Größenordnung

$$\Delta t_1 \cdot \omega_{max}^- = \Delta t_1 \cdot \Delta\omega \leq \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_1 \leq \frac{\pi}{2\Delta\omega} \quad (2.121)$$

gültig, da hier die Beträge der Integrale Werte im kontinuierlichen Intervall  $[0.9; \dots; 1.0]$  annehmen. Betrachten wir nochmals unser Beispiel vom grünen Licht, so zeigt sich, dass  $\Delta t_1 \approx \Delta t_0$  wäre. Dies stellt den Grenzbereich unserer Näherung dar. Während sich die schnellen Fluktuationen ausgemittelt haben, sind die langsamen fluktuierenden Beiträge fast gleich geblieben.  $\Delta t_1$  entspricht in etwa der Kohärenzzeit  $\tau_c$ . Folglich ist während der Kohärenzzeit die Intensität des Lichts annähernd konstant. Die wesentlichen Ergebnisse der klassischen Betrachtungen sind:

- Die zeitabhängige Intensität, definiert auf der Basis des Poynting-Vektors setzt sich im multimodigen Fall aus schnell und langsam oszillierenden Anteilen zusammen.
- Wegen der endlichen Messdauer muss immer die zeitlich gemittelte Intensität betrachtet werden.
- Hier zeigt sich, dass in Abhängigkeit von der Breite des Frequenzspektrums und der Mittelfrequenz der schnell oszillierende Anteil der Intensität vernachlässigt werden kann.
- Innerhalb eines Zeitintervalls von der Größenordnung der Kohärenzzeit ist die Intensität der elektromagnetischen Strahlung annähernd konstant.

## Quantenmechanische Definition der Intensität

In der bisherigen Herleitung der Intensität wurde von klassischen Feldern ausgegangen. Diese Beschreibung ist aufgrund der Quantelung des Feldes oftmals unzureichend. Wird beispielsweise die Intensität des Feldes mit einem Photomultiplier bestimmt, so muss nach Gleichung



(2.164) die Energie der Photonen größer sein als die Austrittsarbeit der Photokathode. Dies widerspricht dem klassischen Bild, dem zufolge nur das Betragsquadrat des Feldes, unabhängig vom Spektrum maßgeblich ist. In Wirklichkeit sind aber die Frequenzen der Feldquanten, aus denen sich das Feld aufbaut ausschlaggebend. Ein weiterer Unterschied zwischen klassischer und quantenmechanischer Beschreibung zeigt sich am Beispiel der Vakuumfluktuation. Während im klassischen Fall das Feld im Vakuumzustand zu jedem Zeitpunkt gleich Null ist, finden quantenmechanisch betrachtet unauhörlich Fluktuationen statt. Um die Natur des Feldes richtig zu beschreiben, wird deshalb in der Quantenmechanik die zeitabhängige Intensität durch einen Operator  $\hat{I}$  dargestellt [VW06]:

$$\hat{I} = \hat{\vec{E}}^{(-)} \cdot \hat{\vec{E}}^{(+)} \quad (2.122)$$

$\hat{I}$  kann durch eine Störungsrechnung hergeleitet werden, wie im Unterkapitel 2.3 gezeigt wird. Der Operator besitzt formale Ähnlichkeit mit der Intensität aus Gleichung (2.118).  $\hat{\vec{E}}^{(+)}$  und  $\hat{\vec{E}}^{(-)}$  sind die Operatoren, aus denen sich der Operator des transversalen elektrischen Feldes  $\hat{\vec{E}}_{\perp}$ , aus Gleichung (2.57) bzw. (2.76) aufbaut. Für die Feld-Operatoren gilt:

$$\hat{\vec{E}}^{(+)} = i \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \vec{A}_{\lambda} \cdot \hat{a}_{\lambda}, \quad (2.123)$$

$$\hat{\vec{E}}^{(-)} = (\hat{\vec{E}}^{(+)})^{+} = -i \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \vec{A}_{\lambda}^{*} \cdot \hat{a}_{\lambda}^{+}. \quad (2.124)$$

Somit beschreibt  $\hat{\vec{E}}^{(-)}$  die negativen und  $\hat{\vec{E}}^{(+)}$  die positiven Frequenzanteile des elektromagnetischen Feldes. Welche Moden im Feld vorliegen, wird im nächsten Abschnitt geklärt.

## 2.2.6 Moden des elektromagnetischen Feldes

Der Begriff der Feldmoden tritt häufig im Zusammenhang mit Lasern oder Hohlleitern auf. Die entscheidende Eigenschaft einer Mode liegt darin, dass es sich bei ihr um ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad handelt [Pau99]. Der Zusammenhang mit der Elektrodynamik ergibt sich aus den Differenzialgleichungen (2.54) und (2.55), deren Lösungen durch geeignete Funktion und die Angabe von Rand- oder Anfangsbedingungen vollständig bestimmt sind. Handelt es sich um einen Resonator, wie im Falle des Lasers, so legen die geometrischen Abmaße, also die Form der Wände und deren dielektrische Eigenschaften die physikalischen Randbedingungen fest. Dies hat zur Folge, dass sich bestimmte räumliche Feldverteilungen ausbilden. Nur die Frequenzen können beitragen, die mit den Randbedingungen vereinbar sind. Jede dieser Frequenzen wird unter Berücksichtigung der Polarisierung als Mode bezeichnet.

### Moden eines rechteckigen Hohlraumresonators

Im Falle eines rechteckigen Hohlraumresonators, dessen Volumen durch Metallwände begrenzt wird, ergeben sich die Moden des elektromagnetischen Feldes aus der Kenntnis der Randbedingungen und den Maxwellgleichungen [Fli00a]. Die Abmaße des Resonators legen die Oberfläche

$S$  fest. Die Beträge der Abmaße sollen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  sein. Durch die ideale Leitfähigkeit der Wände werden die Randbedingungen des elektromagnetischen Feldes festgelegt:

$$\vec{E}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{t} = 0, \quad \vec{B}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.125)$$

$\vec{r}_0$  steht für alle Vektoren, die vom Ursprung des Koordinatensystems zu Punkten zeigen, die auf der Oberfläche  $S$  des Resonatorvolumens liegen. Der Tangentialvektor  $\vec{t}$  liegt parallel zur Oberfläche  $S$  wohingegen der Normalenvektor  $\vec{n}$  immer senkrecht auf ihr steht. Das bedeutet, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes und Normalkomponente des magnetischen Feldes auf der Oberfläche  $S$  den Wert Null annehmen. Setzt man diese Randbedingung in die Lösungsfunktion  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  ein, so erhält man aus den Separationskonstanten alle möglichen Frequenzen

$$\omega_{nml}^2 = c^2 |\vec{k}|^2 = c^2 \cdot \left[ \left( \frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{L_3} \right)^2 \right], \quad \wedge \quad n, m, l \in \mathbb{N}_0, \quad (2.126)$$

wobei  $\mathbb{N}_0$  für die Menge der natürlichen Zahlen, zuzüglich dem Element Null steht. Negative Zahlen müssen nicht berücksichtigt werden, da sie nur zu einem Vorzeichenwechsel der Amplitude führen und somit keine neuen Lösungen beinhalten. Im Volumen des Resonators bilden sich wegen der Randbedingungen stehende Wellen. Die stehenden Wellen werden auch als Eigenmoden des Resonators bezeichnet. Zu jeder Frequenz  $\omega_{nml}$  gibt es genau zwei Eigenmoden, wodurch die Polarisierung des Feldes berücksichtigt wird. Ist ein Zahlentripel festgelegt, so kann jeder unabhängigen Polarisationsrichtung eine komplexe Amplitude zugewiesen werden, deren Werte sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Die möglichen Moden des Hohlraumresonators sind damit bestimmt. Wie verhält es sich aber wenn ein freies Feld betrachtet wird?

### Moden des freien Feldes

Für ein freies Feld gibt es keine Randbedingungen und somit überabzählbar unendlich viele Moden. Um das Modenkonzept zu retten, werden fiktive Randbedingungen eingeführt. Zu diesem Zweck wird der Raum mit Periodizitätskuben der Kantenlänge  $L$  aufgefüllt und gefordert, dass die elektrische Feldstärke auf den Flächen zu allen Zeitpunkten gleich ist:

$$\vec{E}(x_0, y_0, z_0, t) = \vec{E}(x_0 + nL, y_0 + mL, z_0 + lL, t), \quad \wedge \quad n, m, l \in \mathbb{Z}. \quad (2.127)$$

$\mathbb{Z}$  steht für die Menge der ganzen Zahlen. Hier müssen auch die negativen Zahlen berücksichtigt werden. Die Lösungsfunktionen sind ebene Wellen und die möglichen Wellenvektoren sind durch

$$\vec{k}_{nml} = \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} n \\ m \\ l \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

gegeben. Der Wellenvektor gibt die Ausbreitungsrichtung der ebenen Wellen an. Für positive Zahlen zeigt der Wellenvektor in den ersten Oktanten des  $\vec{k}$ -Raums. Da der Kantenlänge  $L$  keine physikalische Bedeutung zukommt, führt man nach vollendeter Rechnung den Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  durch und erhält so abzählbar unendlich viele Moden. Prinzipiell kann das elektrische Feld eine beliebige Polarisationsrichtung besitzen, die durch den Vektor  $\vec{e}_i$  beschrieben wird. Wegen der Transversalität des elektromagnetischen Feldes muss aber gelten, dass das elektrische Feld immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht ( $\vec{e} \perp \vec{k}$ ). Zu jedem Wellenvektor gibt es folglich zwei unabhängige Polarisationsrichtungen. Jede mögliche Kombination aus einem Wellenvektor  $\vec{k}$  und einer unabhängigen Polarisationsrichtung ergibt eine Mode. Diese Moden werden auch als Normalmoden des Feldes bezeichnet.

Relevant für die lokale Wechselwirkung mit Materie ist jedoch die spektrale raumzeitliche Photonendichte. Bei der Durchführung des Grenzübergangs wurde das Volumen des Kubus unendlich. Jede Mode besitzt folglich eine unendliche Ausdehnung. Demnach bräuchte man unendlich viele Photonen um eine endliche Photonendichte zu erzeugen. Moden dieser Art sind praktisch nicht anregbar. Realistische Felder besitzen eine endliche raumzeitliche Ausdehnung und können beispielsweise durch Superpositionen von unendlich vielen ebenen Wellen verschiedener Frequenzen dargestellt werden. Dies entspricht einer multimodigen Darstellung der realen elektromagnetischen Felder. Eine multimodige Beschreibung erhöht den mathematischen Aufwand und es wäre zu überlegen, ob es nicht Möglichkeiten zur Vereinfachung gibt. Diese Frage ist unmittelbar mit der Definition des Modenvolumens verbunden.

## Modenvolumen realistischer Felder

Was passiert, wenn sich ein elektromagnetisches Feld aus verschiedenen harmonische Wellen zusammensetzt? Wie in Abb. 2.3 zu sehen ist, fängt das elektrische Feld durch die Überlagerung verschiedener Frequenzen an zu fluktuieren. Wird die Frequenzbreite  $\Delta\omega$ , aus der sich die Superposition zusammensetzt erhöht, so werden die Schwankungen des Feldes stärker. Überlagert man unendlich viele Frequenzen eines Lorentz-Spektrums wie es in Abb. 2.4 unter (b) zu sehen ist, so erhält man durch eine Fouriertransformation ein zeitlich exponentiell abklingendes Pulssignal (a). Offensichtlich schwingt das Wellenpaket mit der Mittelfrequenz und die Form des Frequenzspektrums bestimmt die Einhüllende des zeitlichen Signals. Eine weitere Beschreibungsmöglichkeit besteht darin, das Feld aus einzelnen Wellenpaketen aufzubauen, die zeitlich versetzt sind. Betrachten wir zunächst ein klassisches elektrisches Feld  $\vec{E}(t)$ , das sich aus vielen gleichverteilten Frequenzen  $\omega_n$  zusammensetzt. Das Frequenzspektrum soll eine endliche Breite  $\Delta\omega$  besitzen, die um eine zentrale Frequenz  $\omega_0$  verteilt ist:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sum_n \exp \{i(\omega_n t + \phi_n)\} = \vec{E}_0 \exp \{i\omega_0 t\} \sum_n \exp \{i(\omega_n - \omega_0)t + i\phi_n\}. \quad (2.129)$$

Es lässt sich zeigen, dass sich das elektrische Feld  $\vec{E}(t)$  innerhalb kurzer Zeitintervalle  $\Delta t_2$  wie eine Sinuswelle verhält, die mit der Frequenz  $\omega_0$  schwingt. Gilt:

$$t \leq \Delta t_2 \quad \wedge \quad |(\omega_n - \omega_0)t| \ll \frac{\pi}{2}, \quad (2.130)$$

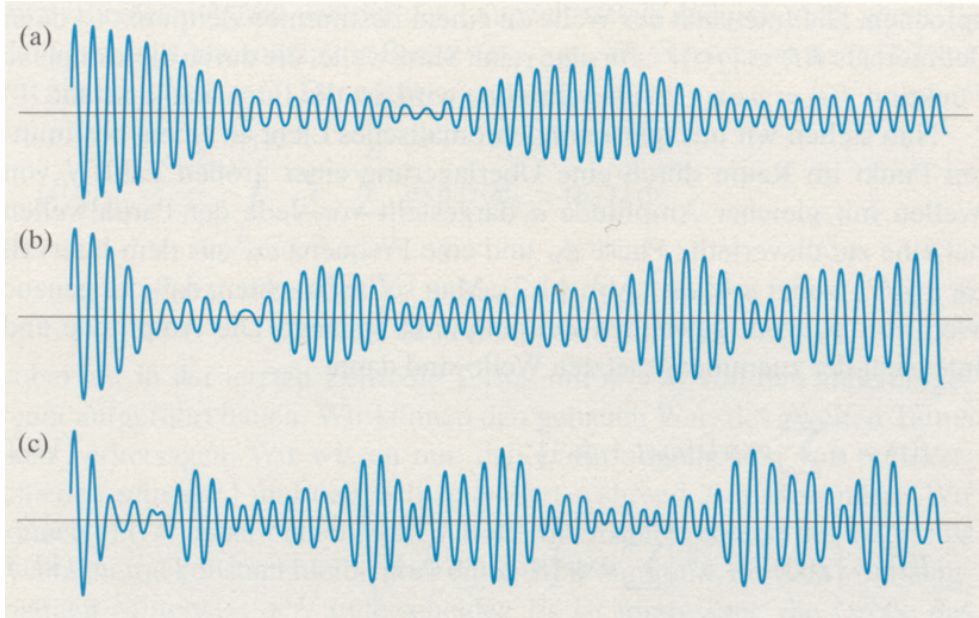


Abbildung 2.3: Superposition von fünf harmonischen Wellen, die zufällig aus dem Spektralbereich  $\pm\Delta\omega$  um die Zentralfrequenz  $\omega_0$  entnommen wurden. Die Werte von  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  betragen: (a) 0,04; (b) 0,08; (c) 0,16 [SLLT97].

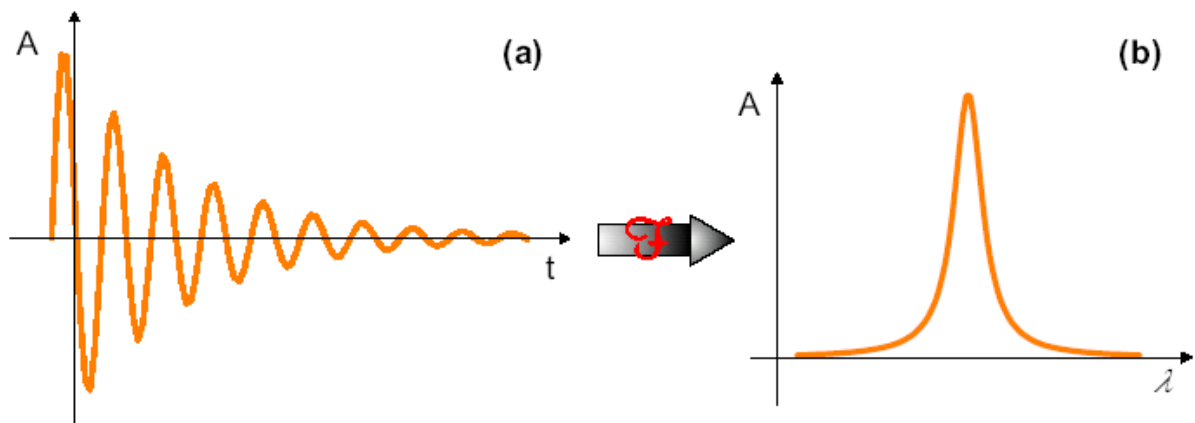


Abbildung 2.4: (a) Zeitliche Pulsform des Lorentz-Spektrums aus (b) [Ros03].

so kann das elektrische Feld folgendermaßen genähert werden:

$$\vec{E}(t) \approx \vec{E}_0 \exp \{i\omega_0 t\} \underbrace{\sum_n \exp \{i\phi_n\}}_{\alpha_1 \exp \{i\Phi_1\}} = \vec{E}_0 \alpha_1 \exp \{i\omega_0 t + i\Phi_1\}. \quad (2.131)$$

Wird das gleiche Feld zu einem späteren Zeitpunkt betrachtet, der um die Zeitdifferenz  $t_0$  verschoben ist, so erhält man innerhalb des gleichen Zeitintervalls  $\Delta t_2$  wieder die Sinusschwingung mit der Zentralfrequenz  $\omega_0$ , aber mit veränderten Werten für Amplitude und Phase der Summe, die wir deshalb mit  $\alpha_2$  und  $\Phi_2$  bezeichnen. Durch die zeitliche Verschiebung ergibt sich nämlich ein zusätzlicher Phasenfaktor  $(\omega_n - \omega_0) t_0$ , woraus folgt:

$$\alpha_2 \exp \{i\Phi_2\} = \sum_n \exp \{i(\omega_n - \omega_0) t_0 + i\phi_n\} \quad (2.132)$$

Die Feldamplitude bleibt während des Zeitintervalls  $\Delta t_2$  annähernd konstant, nimmt aber zu verschiedenen Zeitpunkten  $t_n = n \cdot t_0 \wedge t_0 > \Delta t_2$  jeweils andere Werte an. Aus Gleichung (2.130) lässt sich die Größenordnung von  $\Delta t_2$  abschätzen:

$$\Delta t_2 \ll \frac{\pi}{2|\omega_n - \omega_0|} \approx \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad (2.133)$$

Nun betrachten wir ein Zeitintervall  $\Delta t_3 = 2\Delta t_2$ . In diesem Zeitintervall würde unsere Näherung schon einen kleinen Fehler produzieren. Um dem entgegen zu wirken wird das Feld anders aufgeteilt:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \left[ \exp \{i\omega_1 t\} \sum_{n=1}^M \exp \{i(\omega_n - \omega_1) t + i\phi_n\} + \exp \{i\omega_2 t\} \sum_{m=M}^N \exp \{i(\omega_m - \omega_2) t + i\phi_m\} \right]. \quad (2.134)$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{4}, \quad \Delta\omega_1 = \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \omega_2 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{4}, \quad \Delta\omega_2 = \frac{\Delta\omega}{2}, \quad M = \frac{N}{2}. \quad (2.135)$$

Verdoppelt sich das Zeitintervall  $\Delta t$  der Betrachtung, so verdoppelt sich auch die Anzahl der Frequenzen, die zur Beschreibung des Feldes benötigt werden, bei gleich bleibendem Frequenzspektrum. Für beide Summen aus Gleichung (2.134) ist wieder die Bedingung aus Gleichung (2.133) erfüllt ( $\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_3, \Delta\omega \rightarrow \frac{\Delta\omega}{2}$ ). Nun ist die Forderung aus Gleichung (2.133) strenger als die Forderung, die zuvor in Gleichung (2.121) an die Intensität gestellt wurde, da

$$\Delta t_2 \ll \frac{\pi}{\Delta\omega} = 2\Delta t_1 \approx 2\tau_c \quad (2.136)$$

gilt. Bekanntermaßen sind die Amplituden- und Phasenbeziehungen des Strahlungsfeldes innerhalb der Kohärenzzeit  $\tau_c$  annähernd stabil, weshalb  $\Delta t_2 < \tau_c$  sein muss. In diesem Fall ist es

dann jedenfalls näherungsweise gerechtfertigt, eine Ein-Moden-Betrachtung vorzunehmen. Es kann also weiterhin mit monochromatischen Wellen gerechnet werden (unendliche raumzeitliche Ausdehnung), obwohl klar ist, dass sich die Gültigkeit auf ein endliches Raumzeitgebiet  $\Delta t_2$ ,  $\Delta V$  beschränkt. Das Raumzeitgebiet, in dem diese Näherung erlaubt ist, wird als Modenvolumen bezeichnet und kann in etwa mit dem Kohärenzvolumen  $V_c$  der elektromagnetischen Welle aus Gleichung (2.353) identifiziert werden. Da wir von einer ebenen Welle ausgingen, war es nicht notwendig, die Abmaße der Kohärenzfläche  $A_c$  zu beachten, die ebenfalls die Anzahl der Moden beeinflusst.

### Monochromatische Moden in der Quantenmechanik

Das Modenkonzept lässt sich problemlos auf die quantenmechanische Beschreibung der Felder übertragen. Im einfachsten Fall wird das Feld durch multimodige Teilchenzahlzustände  $|\{n_\lambda\}\rangle$  beschrieben [Pau99]. Dabei müssen die Photonenzahlen  $n_\lambda$  so gewählt werden, dass sie mit den Parametern des Lichtbündels übereinstimmen. Zur mathematischen Herleitung wird der Operator des Vektorpotentials in der Darstellung ebener Wellen verwendet:

$$\hat{A}(\vec{r}) = \sum_{l,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 c k_l V}} \left[ \vec{e}_{l,\sigma} \exp\{i\vec{k}_l \vec{r}\} \hat{a}_{l,\sigma} + \vec{e}_{l,\sigma} \exp\{-i\vec{k}_l \vec{r}\} \hat{a}_{l,\sigma}^\dagger \right]. \quad (2.137)$$

Die Dispersionsrelation aus Gleichung (2.126) behält weiterhin Gültigkeit, d.h. der Index  $l = (n, m, o)$  ist durch ein Zahlentripel gegeben, das die Ausbreitungsrichtung der Welle bestimmen:

$$\vec{k}_l = 2\pi \left( \frac{n}{L_1}, \frac{m}{L_2}, \frac{o}{L_3} \right)^T. \quad (2.138)$$

Für das Quantisierungsvolumen  $V$  gilt:

$$V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3. \quad (2.139)$$

Der Index  $\sigma$  summiert über die unabhängigen Polarisationsrichtungen. Die Polarisationsrichtungen werden für die gleiche Ausbreitungsrichtung senkrecht zueinander gewählt und stehen wegen der Coulomb-Eichung auch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Wellen.

$$\vec{e}_{l,\sigma} \cdot \vec{e}_{l,\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \vec{e}_{l,\sigma} \cdot \vec{k}_l = 0. \quad (2.140)$$

Für ein Volumenelement im  $k$ -Raum ergibt sich:

$$\Delta k^3 = \frac{(2\pi)^3}{V}. \quad (2.141)$$

Damit wird nun Gleichung (2.137) erweitert, woraus

$$\hat{A}(\vec{r}) = \sum_{l,\sigma} \Delta k^3 \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 c k_l (2\pi)^3}} \left[ \vec{e}_{l,\sigma} \exp\{i\vec{k}_l \vec{r}\} \frac{\hat{a}_{l,\sigma}}{\sqrt{\Delta k^3}} + \vec{e}_{l,\sigma} \exp\{-i\vec{k}_l \vec{r}\} \frac{\hat{a}_{l,\sigma}^\dagger}{\sqrt{\Delta k^3}} \right] \quad (2.142)$$

folgt. Analog zur klassischen Betrachtung führen wir den Limes des Modenvolumens durch  $V \rightarrow \infty$  und wandeln die Summe in ein Integral um  $\sum_l \Delta k^3 \rightarrow \int d^3 k$ .

$$\hat{A}(\vec{r}) = \sum_{\sigma} \int d^3 k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 c k (2\pi)^3}} \left[ \vec{e}_{\sigma}(k) \exp\{i\vec{k}\vec{r}\} \hat{a}_{\sigma}(k) + \vec{e}_{\sigma}(k) \exp\{-i\vec{k}\vec{r}\} \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(k) \right]. \quad (2.143)$$

Für den kontinuierlichen Moden-Operator  $\hat{a}_{\sigma}(k)$  gilt dann:

$$\hat{a}_{\sigma}(k) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\hat{a}_{l,\sigma}}{\sqrt{\Delta k^3}}. \quad (2.144)$$

Quantenmechanisch wird jede Mode durch einen Hamilton-Operator eines ungekoppelten harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz

$$\omega^2(\vec{k}_{\sigma}) = c^2 \cdot \vec{k}_{\sigma}^2 \quad (2.145)$$

beschrieben. Jede Mode kann theoretisch mit beliebig vielen Photonen besetzt werden. In Gleichung (2.74) wird die  $k$ -Summe  $\sum_{\lambda} \Delta k_{\lambda}^3 \rightarrow \sum_{\sigma} \int d^3 k$  über die einmodigen Hamilton-Operatoren ebenfalls zu einem Integral über den Teilchenzahldichte-Operator  $\hat{n}(\vec{k}_{\sigma})$ . Mit den kontinuierlichen Teilchenzahlzuständen  $|n_{\sigma}(\vec{k})\rangle$  gilt folgende Eigenwertgleichung

$$\hat{n}_{\sigma}(\vec{k}) |n_{\sigma}(\vec{k})\rangle = n_{\sigma}(\vec{k}) |n_{\sigma}(\vec{k})\rangle, \quad (2.146)$$

wobei  $n_{\sigma}(\vec{k})$  die Anzahldichte der Photonen mit der Polarisationsrichtung  $\sigma$  ist. Wird nun über ein bestimmtes Volumenelement  $d^3 k$  im  $k$ -Raum integriert, so erhält man die Anzahl der Photonen mit der Polarisationsrichtung  $\sigma$  und den  $\vec{k}$ -Vektoren, deren Enden in  $d^3 k$  liegen. Zu jeder Frequenz  $\omega$  aus Gleichung (2.145) gehört offenbar eine ganze Kugeloberfläche im  $k$ -Raum mit Zentrum im Ursprung. Betrachtet man eine ebene Welle, die sich in Richtung  $\vec{e}_{\vec{k}}$  ausbreitet, so ist es möglich die Moden über die Frequenzen zu charakterisieren. Diese Näherung ist in der Realität immer auf eine endliche Fläche  $A$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung beschränkt, innerhalb der das Feld konstant ist (Kohärenzfläche). Für den Operator der positiven Frequenzkomponenten des zeitabhängigen elektrischen Feldes folgt dann:

$$\hat{E}_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 c A}} [\vec{e}_{\sigma}(\omega)]_{\vec{k}} \exp\left\{-i\omega \left[t - \frac{r}{c} \cos(\varphi_{\vec{k},\vec{r}})\right]\right\} \hat{a}_{\sigma}(\omega), \quad (2.147)$$

mit:

$$\hat{a}_{\sigma}(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{a}_{l,\sigma}}{\sqrt{\Delta\omega}}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi c}{L}. \quad (2.148)$$

Hier steht  $\varphi_{\vec{k},\vec{r}}$  für den Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\vec{r}$ , der zu dem Punkt der Beobachtung zeigt und der Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  des Feldes. Durch die Gleichungen (2.143), (2.137) und (2.147) sind die monochromatischen Moden des Feldes für die quantenmechanische Betrachtung definiert. Realistische Felder können nun durch Superpositionen dieser monochromatischen Moden erzeugt werden.

## Nichtmonochromatische Moden in der Quantenmechanik

Im vorigen Abschnitt wurde das elektromagnetische Feld durch monochromatische Moden beschrieben. Die monochromatische Darstellung hat den Vorteil, dass in ihr der Hamilton-Operator des freien Feldes  $\hat{H}_R$  diagonal ist. Jeder Mode kann eine Kreisfrequenz  $\omega_\lambda$  zugeordnet werden. Es ist aber auch möglich nichtmonochromatische Moden zu benutzen, da jede Linearkombination monochromatischer Wellen Gleichung (2.66) erfüllt. Die nichtmonochromatischen Moden werden auch als Wellenpaketmoden bezeichnet. Um die Wellenpaket Vernichtungs-Operatoren  $\hat{a}'_\nu$  zu erhalten werden die monochromatischen Vernichtungs-Operatoren  $\hat{a}_\lambda$  durch eine unitäre Transformation  $\hat{U}$  mit den Matrixelementen  $U_{\nu\lambda}$  [TG66] umgeformt.

$$\hat{a}'_\nu = \sum_\lambda U_{\nu\lambda} \hat{a}_\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{a}_\lambda = \sum_\nu U_{\lambda\nu}^+ \hat{a}'_\nu = \sum_\nu U_{\nu\lambda}^* \hat{a}'_\nu, \quad (2.149)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass  $U_{\nu\lambda}^+ = U_{\lambda\nu}^*$  ist. Für die neuen Vernichter  $\hat{a}'_\nu$  und Erzeuger  $\hat{a}'_\nu^{++}$  gelten dann wieder die bosonischen Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{a}'_\nu, \hat{a}'_{\nu'}^{++}] = \delta_{\nu\nu'}, \quad [\hat{a}'_\nu^{++}, \hat{a}'_{\nu'}^{++}] = [\hat{a}'_\nu, \hat{a}'_{\nu'}] = 0. \quad (2.150)$$

Die monochromatischen Vernichter  $\hat{a}_\lambda$  lassen sich wegen der Unitarität der Abbildung durch die nichtmonochromatischen Vernichter  $\hat{a}'_\nu$  darstellen. Diese werden in den Vektorpotential-Operator, aus Gleichung (2.75) eingesetzt. Da die zeitliche Entwicklung im Heisenberg-Bild auf den Erzeugern und Vernichtern ruht und im Falle des freien Feldes durch [Peř85]

$$\hat{a}_\lambda(t) = \hat{a}_\lambda \cdot \exp\{-i\omega_\lambda t\} \quad (2.151)$$

gegeben ist, kann sie problemlos auf die monochromatischen Moden-Funktionen  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$  übertragen werden:

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) = \vec{A}_\lambda(\vec{r}) \cdot \exp\{-i\omega_\lambda t\}. \quad (2.152)$$

Damit folgt für den Operator des Vektorpotentials, wenn Gleichung (2.149) eingesetzt wird:

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \left\{ \vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) \hat{a}_\lambda + \vec{A}_\lambda^*(\vec{r}, t) \hat{a}_\lambda^+ \right\} = \sum_\nu \left\{ \sum_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) U_{\nu\lambda}^* \hat{a}'_\nu + \sum_\lambda \vec{A}_\lambda^*(\vec{r}, t) U_{\lambda\nu} \hat{a}'_\nu^{++} \right\}. \quad (2.153)$$

Offensichtlich lassen sich neue nichtmonochromatische Moden-Funktionen  $\vec{A}'_\nu(\vec{r}, t)$  durch

$$\vec{A}'_\nu(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) U_{\nu\lambda}^* = \sum_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) U_{\nu\lambda}^* \exp\{-i\omega_\lambda t\} \quad (2.154)$$

definieren. Die Wellenpaketmoden-Funktionen  $\vec{A}'_\nu(\vec{r}, t)$  erfüllen allerdings nicht mehr die Orthogonalitätsbedingung aus Gleichung (2.70). Für den Operator des elektrischen Feldes folgt

$$\hat{\vec{E}} = \sum_\nu \left\{ \vec{E}'_\nu(\vec{r}, t) \hat{a}'_\nu + \vec{E}'_\nu^*(\vec{r}, t) \hat{a}'_\nu^{++} \right\} = \hat{\vec{E}}^{(+)} + \hat{\vec{E}}^{(-)}, \quad (2.155)$$



wobei die nichtmonochromatischen Moden-Funktionen  $\vec{E}'_\nu(\vec{r}, t)$  durch

$$\vec{E}'_\nu(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \vec{E}_\lambda(\vec{r}, t) U_{\nu\lambda}^* = i \sum_\lambda \omega_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) U_{\nu\lambda}^* \exp\{-i\omega_\lambda t\} \quad (2.156)$$

gegeben sind. Um die Bedeutung dieser Transformation hervorzuheben, betrachten wir den Operator der zeitlich gemittelten Intensität aus Gleichung (2.122), [JP68]:

$$\begin{aligned} \bar{I}(\Delta t, t=0) &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{\mu\mu'} \int_0^{\Delta t} \vec{E}_\mu^*(\vec{r}, t) \vec{E}_{\mu'}(\vec{r}, t) \hat{a}_\mu^+ \hat{a}_{\mu'} dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{\mu\mu'} \sum_{\nu\nu'} U_{\nu'\mu}^* U_{\nu\mu'} \underbrace{\int_0^{\Delta t} \vec{E}'_{\nu'}^*(\vec{r}, t) \vec{E}'_\nu(\vec{r}, t) dt}_{=\Delta t \vec{E}'_{\nu'}^*(\vec{r}) \vec{E}'_\nu(\vec{r}) \delta_{\nu'\nu}} \hat{a}_\mu^+ \hat{a}_{\mu'}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Ziel ist es, die Modenfunktionen so zu wählen, dass der Operator der zeitlich gemittelten Intensität  $\bar{I}$  diagonal wird. Das Integral über die Zeitabhängigkeit der nichtmonochromatischen Modenfunktionen soll demnach ein Kronecker-Delta<sup>1</sup> ergeben. Offensichtlich wäre dies erfüllt, wenn

$$\vec{E}'_\nu(\vec{r}, t) = \vec{E}'_\nu(\vec{r}) \exp\{-i\omega_\nu t\} \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq \Delta t, \quad \omega_\nu = \frac{2\pi}{\Delta t} \nu, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad (2.158)$$

gelte. Andererseits ist die nichtmonochromatische Modenfunktion durch

$$\vec{E}'_\nu(\vec{r}, t) = \sum_\lambda U_{\nu\lambda}^* \vec{E}_\lambda(\vec{r}) \exp\{-i\omega_\lambda t\} = \exp\{-i\omega_\nu t\} \underbrace{\sum_\lambda U_{\nu\lambda}^* \vec{E}_\lambda(\vec{r}) \exp\{-i(\omega_\lambda - \omega_\nu)t\}}_{\vec{E}'_\nu(\vec{r}, t) \approx \vec{E}'_\nu(\vec{r}) \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq \Delta t} \quad (2.159)$$

gegeben, wie aus Gleichung (2.156) hervorgeht. Aufgrund der unitären Transformation  $\hat{U}$  werden die chromatischen Moden so gekoppelt, dass eine annähernd zeitlich konstante komplexe Amplitude  $\vec{E}'_\nu(\vec{r})$  im Zeitintervall  $0 \leq t \leq \Delta t$  entsteht. Dies ähnelt der klassischen Betrachtung aus Gleichung (2.134). Die Bedeutung des neuen Index  $\nu$  ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass wir es mit Wellenpaketen zu tun haben, die mit der Mittelfrequenz  $\omega_\nu$  schwingen.  $\nu$  indiziert alle auf dem Periodizitätsintervall  $\Delta t$  möglichen Mittelfrequenzen. Die Mittelfrequenz lässt keine Aussage über die zeitliche Ausdehnung des Wellenpaketes zu. Diese Information ist in der spektralen Zusammensetzung des Feldes enthalten, woraus sich nach Gleichung (2.340) die Kohärenzzeit bestimmen lässt. Für Messzeiten  $\Delta t \ll \tau_c$  ist  $\vec{E}'_\nu(\vec{r})$  zeitlich konstant und wir brauchen zur Beschreibung nur eine nichtmonochromatische Mode für jede unabhängige Polarisationsrichtung. Alle weiteren Moden sind effektiv nicht besetzt. Verbreitern wir das Spektrum,

<sup>1</sup>Allgemein ist die Orthogonalität der Wellenpaketmodenfunktionen  $\vec{E}'_\nu(\vec{r}, t)$  nicht erfüllt, selbst wenn zusätzlich eine räumliche Mittelung durchgeführt wird  $\iint \vec{E}'_{\nu'}^*(\vec{r}) \vec{E}'_\nu(\vec{r}) dt d^3r \neq \delta_{\nu'\nu}$ , siehe [SR07].

so wird die Kohärenzzeit kleiner als die Messdauer  $\Delta t > \tau_c$ . In diesem Fall fängt das Feld innerhalb unseres Zeitintervalls  $\Delta t$  an zu fluktuieren und weitere Wellenpaketmoden sind zur Beschreibung notwendig. Das Verhalten ist analog zu unserem klassischen Beispiel aus Gleichung (2.134). Zur Messung der Photonen muss noch der Aspekt der Zeitabhängigkeit berücksichtigt werden. Wiederholt sich das Signal periodisch mit  $\Delta t$  so sind immer die gleichen Moden besetzt. Ändert sich das Feld mit der Zeit, so müssen die Ergebnisse modifiziert werden, da nun in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen  $\Delta t$  immer wieder andere Moden besetzt sind. D.h. in jedem Integrationsintervall  $\Delta t$  tragen unterschiedliche Mittelfrequenzen  $\omega_\nu$  bei. Unter der Annahme, dass die Orthogonalität erfüllt ist, ergibt sich für den Operator der zeitlich gemittelten Intensität aus Gleichung (2.157) unter Verwendung von Gleichung (2.149):

$$\bar{I}(\vec{r}, \Delta t) = \sum_{\nu} \vec{E}'_{\nu}{}^*(\vec{r}) \vec{E}'_{\nu}(\vec{r}) \sum_{\mu} U_{\nu\mu}^* \hat{a}_{\mu}^+ \sum_{\mu'} U_{\nu\mu'} \hat{a}_{\mu'} = \sum_{\nu} |\vec{E}'_{\nu}(\vec{r})|^2 \hat{a}_{\nu}^+ \hat{a}_{\nu} = \sum_{\nu} |\vec{E}'_{\nu}(\vec{r})|^2 \hat{n}'_{\nu}. \quad (2.160)$$

Der Operator  $\bar{I}(\vec{r}, \Delta t)$  bezieht sich auf den Ort  $\vec{r}$  und entspricht damit einem punktförmigen Detektor.

Da ein realer Detektor eine endliche Ausdehnung besitzt, muss über alle punktförmigen Detektoratome an den Orten  $\vec{r}_i$  summiert, bzw. über das Detektorvolumen aufintegriert werden. Ein Wellenpaket besitzt natürlich auch eine räumliche Ausdehnung, die der Kohärenzfläche  $A_c$  gleichgesetzt werden kann. Die raumzeitliche Ausdehnung eines Wellenpakets entspricht angenähert dem Kohärenzvolumen  $V_c$  des Feldes aus Gleichung (2.352). Jeweils eine Mode pro unabhängiger Polarisationsrichtung kann dem Kohärenzvolumen zugeordnet werden [Kas64]. Stimmt die Kohärenzfläche  $A_c$  mit der bestrahlten Detektorfläche  $A_d$  überein, so messen alle bestrahlten Detektoratome das gleiche Wellenpaket. Das Detektionsvolumen  $V_d$  während eines Messintervalls  $\Delta t$  ist dann durch

$$V_d = A_d \cdot l_d = A_d \cdot c \Delta t, \quad (2.161)$$

gegeben. Für die Photonenmessung ergibt sich daraus eine einfache Möglichkeit zur Abschätzung der Anzahl der besetzten Moden  $M_{\sigma}$  in Abhängigkeit von der Polarisationsrichtung  $\sigma$ :

$$M_{\sigma} \approx \frac{V_d}{V_c} = \frac{A_d \cdot \Delta t}{A_c \cdot \tau_c}. \quad (2.162)$$

Entspricht die Kohärenzfläche der angestrahlten Detektorfläche  $A_d$  so bestimmt das Verhältnis aus Kohärenzzeit und Messzeit die Anzahl der besetzten Moden:

$$M_{\sigma} \approx \frac{\Delta t}{\tau_c}. \quad (2.163)$$

Eine einmodige Beschreibung ist also gerechtfertigt, wenn polarisiertes Licht gemessen wird, bei dem die Kohärenzfläche mit der bestrahlten Detektorfläche übereinstimmt und die Messzeit  $\Delta t$  viel kleiner ist als die Kohärenzzeit  $\tau_c$ . Die Formeln (2.162) und (2.163) sind nicht in jedem Fall anwendbar, wie sich am Beispiel eines gepulsten Pico- oder Femtosekundenlasers mit

Pulsabständen  $\Delta T \gg \Delta t$  zeigt. Handelt es sich um identische kohärente Einzelimpulse, so ist die einmodige Beschreibung ebenfalls gerechtfertigt [Pau99], obwohl  $\frac{\Delta t}{\tau_c} \approx 10 - 10^4$  sein kann. Folglich könnten während des Zeitintervalls  $\Delta t M_\sigma$  Wellenpakete auf den Detektor treffen, wegen der experimentellen Situation liegt aber nur ein Wellenpaket vor. Handelt es sich hingegen um thermisches Licht, so müssen alle  $M_\sigma$  Moden berücksichtigt werden, da nicht klar ist, wann die Photonen auftrafen. Während eines Messintervalls wird nur die mittlere Photonenzahl festgestellt, was einer Glättung der Fluktuationen entspricht.

## 2.3 Detektion von Licht

Das Licht ist ein Teil des elektromagnetischen Spektrums. Dieser erstreckt sich von ca. 380 bis 780 nm Wellenlänge, oder in Frequenzen ausgedrückt von 789 bis 385 THz, wie in Abbildung 2.5 zu sehen ist. Prinzipiell können verschiedene Aspekte des Lichts untersucht werden, wie zum

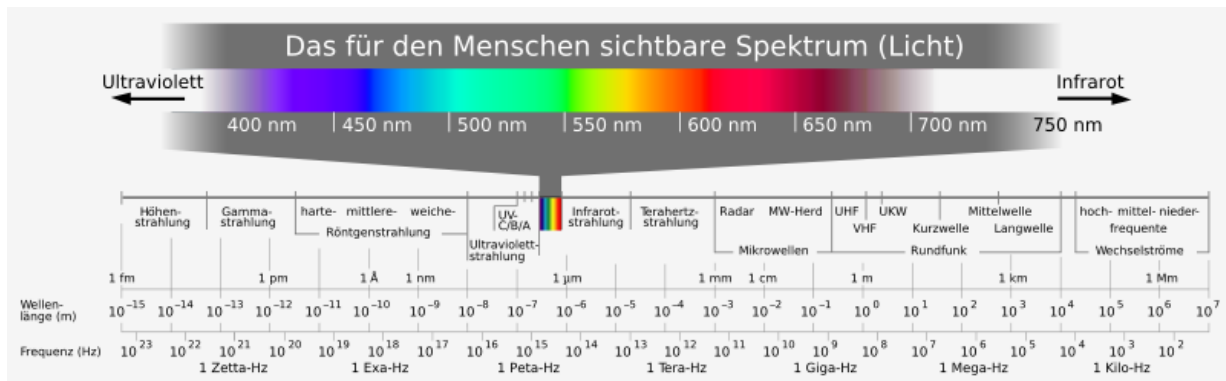


Abbildung 2.5: Elektromagnetisches Spektrum [Ano08].

Beispiel die spektrale Zusammensetzung, Polarisierungsgrad, Verschränkung von Photonen usw. Doch letzten Endes basieren all diese Untersuchungen auf dem Photoeffekt. Der Photoeffekt ist eine mögliche Wechselwirkung des Feldes mit der Materie. Dabei wird aus dem Feld eine ganze Energieportionen  $\Delta E = \hbar\omega$  auf ein gebundenes Elektron übertragen. Diese unteilbaren Energieportionen werden als Photonen bezeichnet. Die Energie der Photonen  $\Delta E$  muss größer sein als die Austrittsarbeit  $W$ , damit die Elektronen das Material verlassen können. Wegen der Energieerhaltung überträgt sich die restliche Energie als kinetische Energie  $E_{kin}$  auf die Elektronen:

$$E_{kin} = \hbar\omega - W, \quad (2.164)$$

womit der äußere Photoeffekt (Photoemission) erklärt ist (siehe Abbildung 2.6). Beim inneren Photoeffekt werden die Elektronen in einem Halbleiter vom Valenzband ins Leitungsband angehoben, wodurch die Leitfähigkeit steigt. In diesem Fall muss  $W$  der Energiedifferenz der Bandlücke gleichgesetzt werden. Die bewegten freien Ladungen entsprechen in beiden Fällen einem Strom, der nach geeigneter Verstärkung nachgewiesen werden kann. Der Photoeffekt bildet die Grundlage für den Nachweis von Licht und offenbart die Teilchennatur des elektromagnetischen

Feldes [Pau99]. Trotzdem ist es falsch sich die Photonen als lokalisierte Teilchen vorzustellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum bewegen. Vielmehr ist es so, dass die raumzeitliche Feldverteilung oder um genau zu sein, die Intensitätsverteilung die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Photonen vorgibt. Einem Photon kann kein genauer Ort zugeschrieben werden. Nur im Moment der Detektion wird es lokalisiert. Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen muss dagegen im Wellenbild betrachtet werden. Interferenz- und Beugungseffekte offenbaren den Wellencharakter des Feldes. Erst bei Wechselwirkung mit Materie tritt der korpuskulare Aspekt in den Vordergrund, indem die Übertragung der gesamten Energieportion auf beispielsweise ein Elektron quasi instantan stattfindet. Zumindest war es bisher nicht möglich, eine Zeitverzögerung messtechnisch zu erfassen [Pau99]. Auch die Frequenz eines Photons ist unbestimmt. Vielmehr ist es so, dass dem Ensemble ein Spektrum zugeordnet werden muss. Befindet sich unser atomares Ensemble im angeregten Zustand, so führt die Zeitentwicklung zur Abstrahlung der Energie. Die Weisskopf-Wigner-Lösung für spontane Emission [WW30] lässt

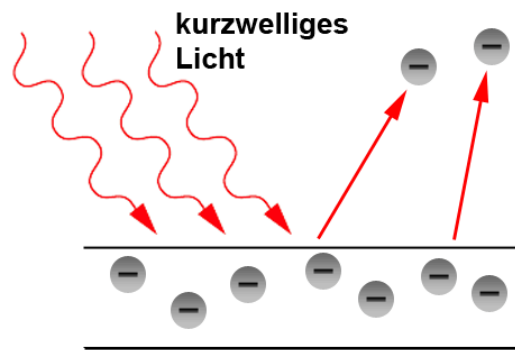


Abbildung 2.6: Schema des äußeren Photoeffekts [Fei08].

erkennen, dass durch die zeitliche Entwicklung des Systems (Atom und Feld) an alle Moden des Feldes gekoppelt wird. Die Photonen werden entsprechend der spektralen Gewichtung in alle Moden gleichzeitig abgestrahlt. Für die spektrale Verteilungsfunktion  $w(\omega)$  der Frequenzen  $\omega$  erhält man, bei ungestörter spontaner Emission [WW30] eine Lorentz-Verteilung

$$w(\omega) = \frac{\text{const.}}{(\omega - \omega_{gf})^2 + \left(\frac{1}{2T}\right)^2}, \quad \omega_{gf} = \frac{1}{\hbar}(E_f - E_g), \quad (2.165)$$

die um die Frequenz  $\omega_{gf}$  des atomaren Übergangs zentriert ist.  $E_f$  und  $E_g$  sind die Energieeigenwerte des angeregten Zustands und des Grundzustands. Die Halbwertsbreite der Lorentz-Verteilung ist durch  $\Gamma = T^{-1}$  gegeben, wobei  $T$  für die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustands steht und gleichzeitig die Kohärenzzeit des abgestrahlten Lichts festlegt ( $T = \tau_c$ ). Durch die Breite und Form des Spektrums wird eine endliche raumzeitliche Ausdehnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Photonen erzeugt, es entstehen folglich Wellenpakete. Auch Schwebungssignale auf dem Intensitätsverlauf können auftreten [AD73], wenn reine Zustände erzeugt werden. Dazu ist es notwendig, ein Ensemble aus Atomen kohärent anzuregen.

Liegt ein entartetes Energieniveau vor, das durch eine Wechselwirkung aufgespalten ist (z.B. Stark-Effekt), so entstehen eng benachbarte Energieniveaus. Bei kohärenter Anregung kommt es zur Superposition dieser eng benachbarten Energiezustände (reiner Zustand). Einem Atom kann kein einzelnes Energieniveau zugewiesen werden. Dieses Verhalten überträgt sich auf die emittierten Photonen. Somit oszillieren die Photonen mit mehreren Zentralfrequenzen gleichzeitig. Man muss sich von der Vorstellung verabschieden, dass Photonen eine exakte Frequenz tragen. Erst bei einer Frequenzmessung wird die Wellenfunktion ausreduziert und man misst eine konkrete Frequenz.

Natürlich sind Photonenmessungen nur möglich, wenn der Detektor im betrachteten Frequenzbereich sensitiv ist. Bei einem Photomultiplier hängt die spektrale Beschränkung von verschiedenen Faktoren ab. Zu kleinen Photonenenergien erfolgt die Beschränkung durch die Materialeigenschaften der Photokathode. Hier gilt, die Energie des Photons aus Gleichung (2.91) muss größer sein als die Austrittsarbeit  $W$  aus Gleichung (2.164). Nach oben erfolgt die Begrenzung der Detektoren meist durch die verwendeten Fenstermaterialien [Ham94].

Um die Detektion von Licht mathematisch zu formulieren, muss eine geeignete Modellvorstellung entwickelt werden. Eine quantenmechanische Beschreibung der Photonenmessung wurde durch Kelley und Kleiner [KK64] gegeben. Der einfachste Detektor ist ein einzelnes Atom. Einen Photomultiplier kann man sich demnach durch eine große Anzahl  $N$  atomarer Detektoren aufgebaut vorstellen.

### 2.3.1 Photomultiplier

Ein Instrument zur Photonenmessung ist der Photomultiplier. Er basiert, wie jeder Detektor im optischen Bereich auf dem Photoeffekt. Prinzipiell funktionieren die verschiedenen Photomultipliertypen ähnlich, weshalb die Funktionsweise an einem Linear-Fokussierten-Photomultiplier, wie er in Abb. 2.7 zu sehen ist, erklärt wird. Trifft ein Photon geeigneter Wellenlänge (geschlängeltes rotes Pfeil), auf die Photokathode, so kann es, der Quanteneffizienz entsprechend absorbiert werden. Durch das elektrische Feld, das zwischen der Photokathode und der ersten Dynode angelegt ist, erfolgt eine Beschleunigung der geladenen Teilchen gemäß der Lorentzkraft aus Gleichung (2.47). Wird bei der Absorption durch den Photoeffekt ein Elektron ausgeschlagen, so erhält es eine in Richtung der ersten Dynode fokussierte Beschleunigung (blauer Pfeil). Hier schlagen die stark beschleunigten Primärelektronen in Abhängigkeit von

- der angelegten Spannung,
- der Dynodenform
- und dem Dynodenmaterial

weitere Elektronen aus, die als Sekundärelektronen bezeichnet werden. Da von Dynode zu Dynode die Spannung um den gleichen Betrag zunimmt, vervielfältigen sich die Sekundärelektronen bei jedem Auftreffen. Es entsteht eine exponentielle Verstärkung des Eingangssignals, die von der

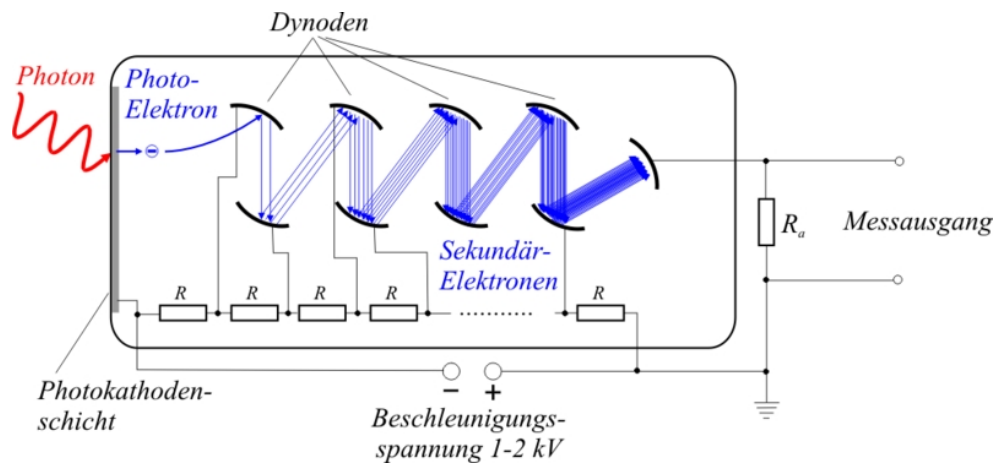


Abbildung 2.7: Aufbau eines Linear-Fokussierten-Photomultipliers [Kri07].

Anzahl der Dynoden und dem mittleren Verstärkungsverhältnis abhängt. Zuletzt trifft eine Elektronenlawine auf die Anode. Dieser Strompuls wird dann als Spannungssignal am Ausgangswiderstand  $R_a$  gemessen. Aus dem Spannungsverlauf kann dann auf die Anzahl der gemessenen Photonen zurückgeschlossen werden. Die Widerstände  $R$  erzeugen den charakteristischen Spannungsverlauf zwischen den Dynoden [Ham94]. Da der Photomultiplier die Frequenzen des eingestrahnten Spektrums nicht unterscheiden kann, ermittelt er nur die Anzahl der gemessenen Photonen. Zunächst sollen grundlegende Kenngrößen des Photomultipliers erklärt werden.

### Anstiegszeit, Abfallzeit und Elektronen Transitzeit

Um diese drei Größen zu detektieren, wird der Photomultiplier mit einem gepulsten Laser bestrahlt. Die zeitliche Pulsbreite des Lasers liegt im Bereich von einigen Picosekunden, was verglichen mit den erreichbaren Pulsbreiten der Elektronenlawine eines Photomultipliers als sehr schmal zu betrachten ist. Aus diesem Grund kann der im Detektor erzeugte Primärelektronenpuls als ein Delta Peak behandelt werden. Mit Hilfe eines Oszilloskops wird dann die Breite des elektronischen Signals aufgezeichnet. Wie aus Abbildung 2.8 zu erkennen ist, hat sich der Delta-Puls nach dem Durchlaufen des Detektors verbreitert. Die Anstiegszeit (rise time) und Abfallzeit (fall time) werden dadurch charakterisiert, dass der Puls bei 10% und 90% seiner Höhe parallel zur Zeitachse geschnitten wird. Die Differenzen der Schnittpunkte jeweils für die vordere und hintere Flanke legen Anstiegs- und Abfallzeit des Signals fest. Die Anstiegszeit und die Abfallzeit des Signals sind in der Regel unterschiedlich. Unter der Elektronen Transitzeit (electron transit time) versteht man die Zeit, die ein in der Photokathode entstandener Delta Peak benötigt, bis sein Pulsmaximum an der Anode eintrifft. Sie hängt stark von der geometrischen Anordnung und der Anzahl der Dynoden ab. Die Pulsbreite (FWHM) des elektronischen Signals an der Anode liegt, in Abhängigkeit vom Photomultipliertyp, zwischen 1 und 25 ns. Dies ist ca. das 2,5-fache der Anstiegszeit [Ham94]. Zur Verbreiterung kommt es durch die unterschiedlich langen Wege der Sekundärelektronen bis zur nächsten Dynode. Somit verbreitert sich das Signal von Dynode zu Dynode. Da die Anzahl der pro Einschlag erzeugten Elektronen statistisch

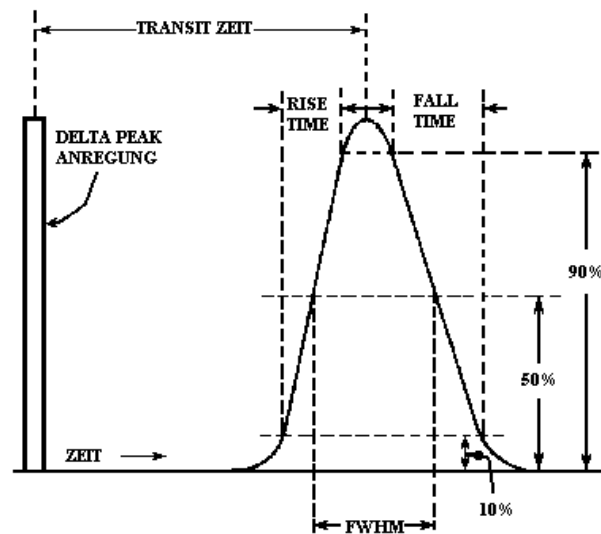


Abbildung 2.8: Anstiegszeit, Abfallzeit und Elektronen Transitzeit eines elektronischen Pulses.

schwankt, fluktuiert auch die Breite und Höhe der einzelnen Pulse.

### Transitzeit-Verbreiterung

Wird eine Photokathode vollständig ausgestrahlt und anschließend Messungen der Transitzeit durchgeführt, so stellt man fest, dass die Transitzeit schwankt. Diese Fluktuation nennt man die Transitzeit-Verbreiterung (transit time spread). Die Transitzeit-Verbreiterung wird in der Literatur entweder durch Standardabweichungen oder durch das FWHM gegeben und liegt zwischen 0,3 bis 10 ns. Sie nimmt damit starken Einfluss auf das zeitliche Auflösungsvermögen des Photomultipliers. Dies muss bei Korrelationsmessungen berücksichtigt werden. Die nachgeschalteten Systeme zum Verstärken und Zählen der Photonen sollten mindestens eine Zeitauflösung in der gleichen Größenordnung besitzen.

### Das Zählen von Photonen

Das Zählen der Photonen kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. Je nachdem, ob eine starke oder schwache Intensität vorliegt, verwendet man die Gleichstrom- (DC method) oder Wechselstrom-Methode (AC method) [Ham94]. Bei sehr schwachen Intensitäten wird neben der Wechselstrom-Methode, die eine analoge Form des Zählens darstellt, auch noch eine digitale Zählmethode verwendet (siehe Abbildung 2.9). Die digitale Zählmethode findet Einsatz, wenn einzelne Photonen aufgelöst und unterschieden werden können. Ist man an der Erstellung einer Photonenstatistiken bei niedrigen Intensitäten interessiert, so besitzt die digitale Zählmethode große Vorteile bezüglich des Rauschverhaltens [Ham94]. Sie ist stabil gegenüber Schwankungen der Versorgungsspannung und reagiert nicht auf niederfrequentes Rauschen. Die einzelnen Signale werden gezählt und statistisch ausgewertet.

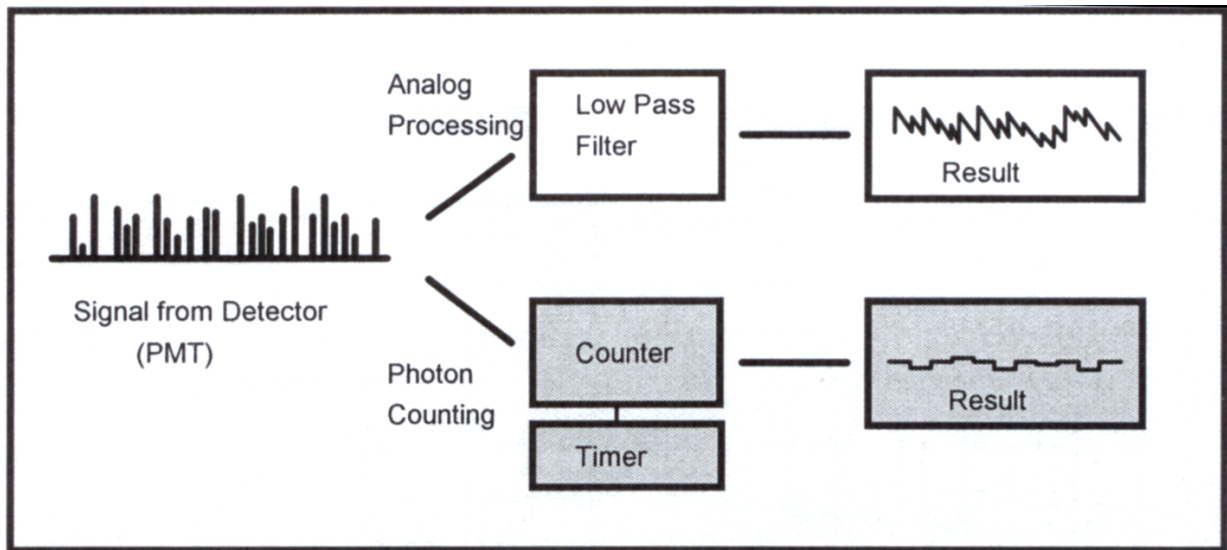


Abbildung 2.9: Analoge und digitale Messmethode [Gmb].

### Erstellung einer Verteilung

Allgemein werden bei statistischen Experimenten die Häufigkeiten von Ereignissen ermittelt. Die Zufallsvariable  $X_i$  ist eine Größe, die bei einem Zufallsexperiment auftreten kann [Sac74], z.B. die Anzahl der Photonen in einem vorgegebenen Zeitintervall  $\Delta t$ . Die Grundgesamtheit  $G$  ist die Menge aller möglichen Realisierungen der betrachteten Zufallsvariablen  $X_i$ . In unserem Beispiel ist die Grundgesamtheit  $G = \{\text{kein Photon pro Zeitintervall, ein Photon pro Zeitintervall, zwei Photonen pro Zeitintervall, ...}\}$ . Durch die Messungen werden der Zufallsvariablen  $X_i$  Realisierungen  $x_i$  zugeordnet.  $x_i$  nimmt während eines Messintervalls  $\Delta t$  immer einen Wert aus der Grundgesamtheit an. Das Ziel der Messungen besteht in der Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_i$  der Zufallsvariablen  $X_i$ . Zu diesem Zweck werden der Grundgesamtheit Stichproben der Dauer  $T$  entnommen. Jede Stichprobe ist eine  $N$ -fache Realisierung [Sac74]. Dabei treten die Ereignisse  $X_i$  der Grundgesamtheit mit den Häufigkeiten  $n_i$  auf, woraus sich die relativen Häufigkeiten  $h_i$  bestimmen lassen. Es gilt:

$$N = \sum_i n_i, \quad h_i = \frac{n_i}{N} = h_i(\Delta t, t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} h_i(\Delta t, t) dt. \quad (2.166)$$

Allgemein hängt die relative Häufigkeit  $h_i$  vom Zeitpunkt  $t_0$  der Messung, der Mittelungszeit  $T$  und dem Integrationsintervall  $\Delta t$  ab. Die gemessene relative Häufigkeit schwankt zum einen wegen der endlichen Mittelungszeit  $T$  und zum anderen durch die Zeitabhängigkeit der Intensität.

Eine wichtige Eigenschaft physikalischer Systeme ist die Ergodizität, deren Gültigkeit quasi immer angenommen wird. Die Ergodenhypothese besagt, dass das Zeitmittel  $\bar{X}$  dem Ensemblemittel  $\langle X \rangle$  gleicht. Da die Quantenmechanik immer Aussagen über das Ensemble tätigt, ist es durch die Ergodenhypothese möglich, einen Zusammenhang zwischen den gemessenen zeitli-



chen Mittelwerten und den quantenmechanischen Erwartungswerten herzustellen:

$$h_i(\Delta t, t, T) \approx \overline{h_i(\Delta t, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} h_i(\Delta t, t') dt' = \langle h_i(\Delta t, t) \rangle = P_i(\Delta t, t). \quad (2.167)$$

$P_i(\Delta t, t)$  steht für die quantenmechanisch berechnete Wahrscheinlichkeit,  $i$  Photonen im Zeitintervall  $\Delta t$  zum Zeitpunkt  $t$  vorzufinden. Damit ist der Zusammenhang zwischen den gemessenen relativen Häufigkeiten  $h_i(\Delta t, t, T)$  und den quantenmechanisch vorhergesagten Wahrscheinlichkeiten gegeben.

Betrachten wir nun Photonenmessungen. Im einfachsten Fall liegt ein stationäres Feld vor. Hier kann der statistische Charakter des Feldes durch eine Stichprobe der Dauer  $T$  ermittelt werden.  $N$  ist dann durch:

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (2.168)$$

gegeben. Bei einem stationären System schwankt  $h_i(\Delta t, t_0, T) = h_i(\Delta t, T)$  wegen der endlichen Stichprobendauer  $T$  unabhängig vom Zeitpunkt  $t_0$ , zu dem die Messung stattfindet. Um die Wahrscheinlichkeit  $P_i(\Delta t)$  zu messen, müsste für das zeitliche Mittel

$$P_i(\Delta t) = \overline{h_i(\Delta t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} h_i(\Delta t, t') dt' = \lim_{T \rightarrow \infty} h_i(\Delta t, T) \quad (2.169)$$

gelten. Experimentell stellt die relative Häufigkeit  $h_i(\Delta t, T)$  bei hinreichender Stichprobenlänge

$$N \approx 10^4 - 10^5 \quad (2.170)$$

eine gute Näherung der Wahrscheinlichkeit  $P_i(\Delta t)$  dar.

Handelt es sich um einen nichtstationären Prozess so ist die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten  $P_i(\Delta t, t)$  komplizierter. Hier muss berücksichtigt werden, dass sich die gemittelte Intensität  $I(\Delta t, t)$  zeitlich ändert, was sich auf die Statistik auswirkt. Zusätzlich zur quantenmechanischen Fluktuation kommt noch die zeitliche Veränderung der Intensität hinzu. Für eine beliebige Stichprobendauer  $T$  ergibt sich zwar eine Häufigkeitsverteilung, nur sagt diese wenig über den Quantencharakter des Feldes aus, da die Ergodizität nicht erfüllt ist. Es gibt zwei Möglichkeiten hier eine Statistik zu erhalten, die die Ergodizität in Abhängigkeit vom Zeitpunkt  $t$  erfüllt. Handelt es sich um ein langsam veränderliches Signal, so muss  $T$  so klein gewählt werden, dass:

$$\overline{I}(\Delta t, t_0, T) = I(\Delta t, t) \quad \wedge \quad t_0 \leq t < t_0 + T \quad (2.171)$$

gilt. In diesem Fall kann für das Intervall  $T$  eine zeitliche Häufigkeitsverteilung bestimmt werden, vorausgesetzt die Anzahl der Realisierungen ist ausreichend. Es wird also angenommen, dass sich das Signal während der Dauer  $T$  quasistationär verhält. Unter quasistationär wird verstanden, dass das Ensemble-Mittel bezogen auf das Integrationszeitintervall  $\Delta t$  innerhalb von  $T$

unabhängig vom Zeitpunkt erhoben werden kann und immer zu den gleichen Werten führt. Die gemessene Häufigkeitsverteilung während  $T$  stellt dann gleichzeitig eine Stichprobe des Ensembles darstellt. Dieser Bereich wird hier als quasistationär definiert, obwohl die Bedingung der Stationarität nicht erfüllt ist. Damit kann die quantenmechanische Interpretation auf die zeitlichen Messergebnisse angewendet werden, wobei der Gültigkeitsbereich auf  $T$  beschränkt ist. Im anderen Extrem verändert sich das Signal so schnell, dass  $T$  verkleinert werden muss. Die Grenze ist hier durch  $T = \Delta t$  gegeben. In Abhängigkeit von der Periodizität des Signals müssen die Messungen bei identischer Präparation wiederholt werden, um Bedingung (2.170) zu erfüllen. Die Besetzung der Moden ist in jedem Integrationsintervall  $\Delta t$  unterschiedlich.

Durch die relativen Häufigkeiten  $h_i$  sind die Momente  $m_k$   $k$ -ter Ordnung der Stichprobe bestimmt:

$$m_k(r) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot (X_i - r)^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - r)^k. \quad (2.172)$$

Durch den Parameter  $r$  wird eine Zentrierung der Momente erzeugt. Die  $i$ -te diskrete Zufallsvariable  $X_i$  kann im Falle der Photonenmessung durch  $X_i = i$  ersetzt werden. Summiert wird dann über alle möglichen Ereignisse  $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$  der Grundgesamtheit. Für  $k = 1$  und  $r = 0$  erhält man den Mittelwert  $m_1(0)$ , der auch als Lagemaß bezeichnet wird und für  $k = 2$ ,  $r = m_1(r' = 0)$  folgt die Varianz (Streuungsmaß) der gemessenen Verteilung:

$$E(X) = m_1(0) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.173)$$

$$\text{Var}(X) = m_2(m_1(0)) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot (i - m_1)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m_1)^2. \quad (2.174)$$

Liegt eine kontinuierliche Zufallsvariable  $x_i \rightarrow x$  vor, so werden die Summen zu Integralen und die relativen Häufigkeiten  $h_i \rightarrow h(x)$  zu Verteilungsdichten [LP98].

### 2.3.2 Das Rauschen des Photomultipliers

Bei der Photodetektion gibt es mehrere Rauschquellen. In Abb. 2.10 wird ein schematischer Überblick über die möglichen beitragenden Effekte gegeben. Von links trifft das Signal auf den Photomultiplier. Aufgrund der Quantelung des Feldes enthält es das Quantenrauschen. Da das Rauschverhalten des Feldes untersucht werden soll, wird es zum Signal gezählt und nicht als gesonderte Rauschquelle eingezeichnet. Das Signal wird im Flussdiagramm weiß und das Rauschen schwarz gepunktet dargestellt. Die erste Rauschkomponente ist das Hintergrundrauschen. Darunter wird Licht verstanden, das nicht von der Quelle kommt, aber trotzdem gemessen wird. Beide Signale treffen auf die Photokathode oder eine Dynode und erzeugen dort Photoelektronen. Dieser Bereich ist durch senkrechte Striche eingezeichnet. Zusätzlich entsteht dort durch

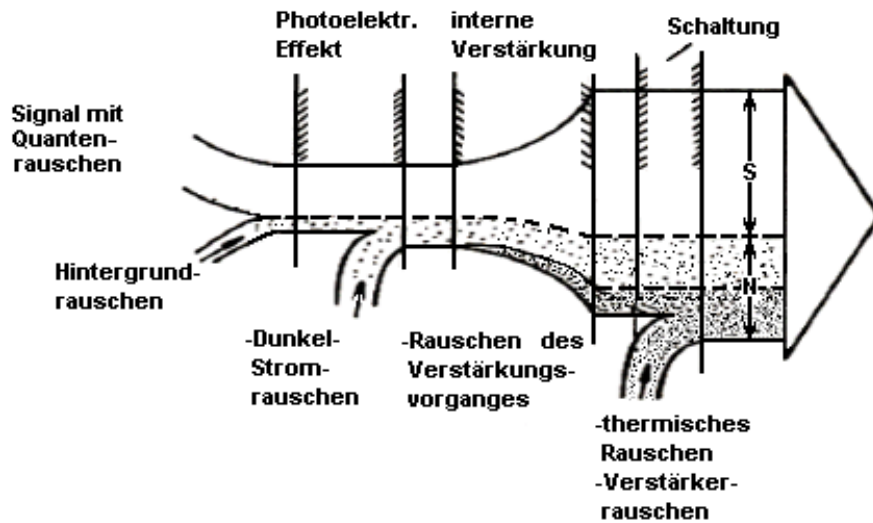


Abbildung 2.10: Ursachen des Rauschens bei der Photodetektion.

den Dunkelstrom eine weitere Rauschkomponente [Mül90]. Die interne Verstärkung durch die Dynoden führt aufgrund des statistischen Charakters des Verstärkungsprozess selbst zu Rauschen (stark gepunkteter Bereich). Neben dem Signal wird dort auch das eingekoppelte Rauschen verstärkt. Durch nachgeschaltete Verstärker und Zählapparaturen kommt es durch thermische Rauscheffekte [Nyq28] zu einer weiteren Rauschquelle. Da der experimentelle Aufbau sicherstellt, dass kein Hintergrundrauschen auftritt, stellt das Dunkelstromrauschen die wichtigste Rauschquelle dar und wird deshalb gesondert betrachtet.

### Ursachen des Dunkelstromrauschens

Das Dunkelstromrauschen des Photomultipliers stellt vor allem bei Messungen im Bereich extrem geringer Intensitäten ein Problem dar. Die Ursachen für diese Rauschquelle sind dabei sehr verschieden [Ham94]:

- Thermische Emissionsströme der Photokathode beziehungsweise der Dynoden.
- Ohmsche Kriechströme zwischen der Anode und anderen Elektroden.
- Szintillation, die von der Hülle des Photomultipliers stammen.
- Feldemission.
- Ionisationsströme durch verbleibende Gase (ion feedback).
- Photoelektronen, die auf kosmische bzw. radioaktive Strahlung zurückgeführt werden können.

Alle diese Effekte zusammen erzeugen an der Anode ein Rauschsignal, das mit zunehmender Versorgungsspannung ansteigt. Die Charakteristik des spannungsabhängigen Anstiegs des Rauschsignals an der Anode ist in Abb. 2.11 zu sehen. Der Graph unterteilt sich in drei Regionen, die mit a, b und c bezeichnet werden.

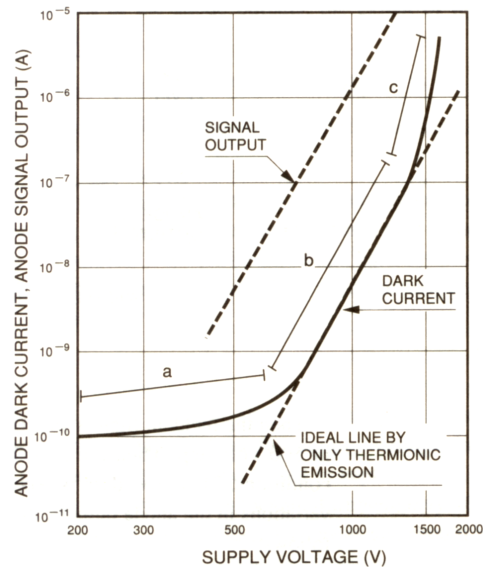


Abbildung 2.11: Spannungscharakteristik [Ham94].

die mit a, b und c bezeichnet werden. Generell gilt, dass Region b das beste Signal-zu-Rausch Verhältnis ermöglicht. Die thermische Emission ist hier der entscheidende Beitrag zum Rauschsignal und wurde deshalb gesondert, als gestrichelte Linie unterhalb des Graphen eingezeichnet. Die Abhängigkeit der thermisch emittierten Elektronen von der Temperatur  $T$  wird durch die Richardson Gleichung [IL02]

$$j = A_0 T^2 \exp \left\{ -\frac{W}{kT} \right\} \quad (2.175)$$

beschrieben. Hier steht  $j$  für die Stromdichte,  $W$  bezeichnet die Austrittsarbeit,  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $A_0$  die Richardson-Konstante. Die Höhe des Rauschsignals hängt exponentiell von der Betriebstemperatur  $T$  des Photodetektors ab.

Wird die Spannung weiter erhöht, so kommt es im Bereich c zur direkten Emission von Elektronen durch die Feldemission. Was zu einer deutlichen Verkürzung der Lebensdauer des Photomultipliers führt [Ham94]. Dies hängt unmittelbar mit dem Punkt „Ionisationsströme durch verbleibende Gase“ zusammen, die deshalb gesondert betrachtet werden.

### Nachpulsieren des Photomultipliers

Da im Inneren der Photomultiplerröhre ein Ultrahochvakuum von ungefähr  $10^{-6}$  Pa herrscht, was ca.  $10^9$  Molekülen pro Kubikzentimeter entspricht, kommt es immer wieder zu Stoßionisierungen dieser Moleküle. Die positiv geladenen Ionen werden dann zu den negativ geladenen

Dynoden oder zur Photokathode beschleunigt und erzeugen dort eine große Anzahl von Sekundärelektronen, die wiederum einen weiteren Puls erzeugen, der kurz nach dem photoneninduzierten eintrifft. Deshalb wird dieser Puls auch als Nachpuls (afterpulse) bezeichnet. Liegt eine kontaminierte Röhre vor, so entstehen Messfehler, da Pulse gezählt werden, die nicht vorhanden sind. Die Zeitverzögerung dieses Nachpulsierens kann bis in den Mikrosekundenbereich dauern [Ham94]. Wird der Photomultiplier bei sehr hohen Spannungen betrieben und kommt es zusätzlich zu einer Überbelichtung, so können sehr hohen Ströme zwischen den Dynoden entstehen. Diese führen zur Überhitzung, wodurch sich Ionen aus den Dynoden lösen können mit der Folge, dass sich das Vakuum verschlechtert. Die Häufigkeit des Nachpulsierens nimmt somit stark zu.

Es gibt noch einen weiteren Nachpuls-Typ, dessen zeitliche Verzögerung bis zu einigen  $10^{-8}$  s betragen kann [Ham94]. Die Ursache ist hier eine andere. Er entsteht zum einen durch Elektronen, die an der vordersten Dynode in Richtung der Kathode zurückreflektiert werden und somit zweimal Sekundärelektronen auslösen können. Zum anderen kommt es vor, dass während der Erzeugung von Sekundärelektronen im Photomultiplier Photonen emittiert werden. Ist die Energie der Photonen ausreichend, so können sie, falls sie von der Photokathode absorbiert werden, weitere Elektronenlawinen erzeugen, die dann kurz nach dem eigentlichen Puls an der Anode eintreffen.

Das Nachpulsieren ist gerade bei der Ermittlung von Quanteneffekten störend, da es zu Bunching führt (siehe Unterkapitel 2.5.3) und somit die Photonstatistik verbreitert.

## Signal-Rausch-Verhältnis

Zur Beobachtung des Signals eines Photomultipliers schließt man an den Ausgang ein Oszilloskop an. Nun ist es möglich, das elektronische Signal in Abhängigkeit vom zeitlichen Verlauf darzustellen. Sind einzelne Pulse unterscheidbar, so kann die digitale Zählmethode angewandt werden. Das Auftreten eines Pulses ist dann als diskretes Ereignis messbar und man spricht in diesem Zusammenhang von einem diskreten Signalmodus. Die Anzahl der elektronisch gemessenen Pulse  $n_g$  im Zeitintervall  $\Delta t$  ist durch

$$n_g = n_{Ph} + n_{bg} \quad (2.176)$$

gegeben.  $n_g$  setzt sich additiv aus der Anzahl der Photonenpulse  $n_{Ph}$  und der Anzahl der Dunkelstrompulse  $n_{bg}$  zusammen. Der Unterschied zwischen Photonen- und Dunkelstrompulsen liegt in der Pulshöhe, wie sich experimentell zeigen lässt. Dazu wird die Pulszahl bei geöffnetem und geschlossenem Shutter detektiert. Zur Bestrahlung des geöffneten Photomultipliers setzt man eine kalibrierte Quelle ein. Erstellt man für beide Fälle eine Häufigkeitsverteilung der Pulshöhe, so zeigt sich, dass die Dunkelstrompulse eine geringere Höhe besitzen, wie in Abbildung 2.12 zu sehen ist. Ein großer Teil der Rauschpulse kann deshalb durch einen Pulshöhen-Diskriminator eliminiert werden. Sowohl  $n_{Ph}$  als auch  $n_{bg}$  schwanken bei stationärem Betrieb von Zeitintervall zu Zeitintervall. Um das Signal-Rausch-Verhältnis (signal-to-noise ratio)  $S/N$  zu bestimmen, werden die zeitlichen Mittelwerte und Varianzen aus den Gleichungen (2.173) und (2.174) ver-

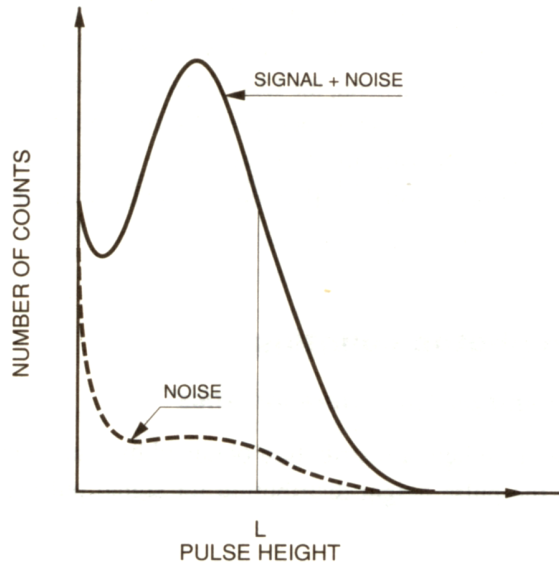


Abbildung 2.12: Pulshöhenverteilung [Ham94].

wendet [Ham94]:

$$S/N = \frac{\overline{n_{Ph}}}{\sigma_g} = \frac{\overline{n_g} - \overline{n_{bg}}}{\sqrt{\sigma_{Ph}^2 + \sigma_{bg}^2}}, \quad \sigma_i = \sqrt{\text{Var}(X_i)}, \quad \overline{n_i} = E(X_i), \quad (2.177)$$

wobei angenommen wurde, dass keinerlei Hintergrundstrahlung vorliegt. Die Zerlegung  $\sigma_g = \sigma_{Ph+bg} = \sigma_{Ph} + \sigma_{bg}$  ist nur erlaubt, wenn die Dunkelstimpulse  $n_{bg}$  unabhängig von den Photonenpulsen  $n_{Ph}$  sind. Eine Abhängigkeit  $n_{bg}(n_{Ph})$  entsteht durch das Nachpulsieren des Photomultipliers, also durch Kontamination des Vakuums. Ist diese Abhängigkeit nicht vorhanden, so kann  $\sigma_{bg}$  bei geschlossenem Shutter bestimmt werden.

Das Signal-Rausch-Verhältnis kann benutzt werden, um die optimalen Werte für die Versorgungsspannung und die Schwellenspannung des Diskriminators einzustellen. Dazu werden die Spannungswerte systematisch verändert und zu jedem Wertepaare das Signal-Rausch-Verhältnis bestimmt.

### 2.3.3 Quantenmechanische Behandlung der Übergangswahrscheinlichkeit

Um die Modellvorstellung weiter auszubauen, berechnen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Detektoratome quantenmechanisch. Zunächst wird angenommen, dass die mittlere Anzahl der Photoelektronen  $\bar{n}$  klein ist im Vergleich zur Anzahl der atomaren Detektorsysteme  $N$  und dass jedes Atom maximal ein Elektron im Zeitintervall  $\Delta t$  emittiert. Zu diesem Zweck spalten wir den Hamilton-Operator aus Gleichung (2.80) in zwei Teile

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (2.178)$$

wobei  $\hat{H}_0$  die Detektoratome, das elektromagnetische Feld, die Quellen des Feldes als auch der Wechselwirkung zwischen Feld und Quellen beschreibt.  $\hat{H}_{int}$  enthält nur die Wechselwirkung zwischen den  $N$  Detektoratomen und dem Feld. Somit setzt sich  $\hat{H}_{int}$  aus einer Summe von atomaren Wechselwirkungs-Hamilton-Operatoren  $\hat{H}_{int}^{(i)}$  zusammen, die alle, wie im Unterkapitel (2.2.3) beschrieben, genähert werden:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_{int}^{(i)}. \quad (2.179)$$

Jedem Detektoratom  $i$  wird ein Operator  $\hat{H}_{int}^{(i)}$  zugeordnet, dessen Form entsprechend Gleichung (2.90) gegeben ist. Der Index  $i$  nummeriert die Detektoratome und weist ihnen über Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  Plätze zu.

### Zeitentwicklung des Dichte-Operators im Wechselwirkungsbild

Die Zeitentwicklung erfolgt im Wechselwirkungsbild. Durch eine unitäre Transformation wird der Zeitentwicklungs-Operator auf die Zustände und Operatoren verteilt. Der neue Zeitentwicklungs-Operator  $\hat{U}_{int}(t + \Delta t, t)$  im Wechselwirkungsbild ist dann durch

$$\hat{U}_{int}(t + \Delta t, t) = T_+ \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\Delta t} d\tau \hat{H}_{int}(\tau) \right\} \quad (2.180)$$

gegeben. Für die Zeitabhängigkeit von  $\hat{H}_{int}(\tau)$  gilt:

$$\hat{H}_{int}(\tau) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(\tau - t) \right\} \hat{H}_{int} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(\tau - t) \right\}. \quad (2.181)$$

$T_+$  ist der Zeitordnungs-Operator, dessen Funktion im Unterkapitel (2.5.1) erläutert wird. Da sich das Detektorsystem zum Zeitpunkt  $t$  im Grundzustand  $|G\rangle$  befinden soll, kann der Dichte-Operator des gesamten Systems  $\hat{\rho}_{ges}(t)$  wie folgt zerlegt werden

$$\hat{\rho}_{ges}(t) = |G\rangle \langle G| \hat{\rho}_{S+R}(t) = |G\rangle \hat{\rho}_{S+R}(t) \langle G|, \quad (2.182)$$

wobei  $\hat{\rho}_{S+R}(t)$  für den Dichte-Operator des Feldes, der Quellen des Feldes, sowie deren Wechselwirkung steht. Um die Dynamik des gesamten Systems zu berechnen, wendet man den Zeitentwicklungs-Operator  $\hat{U}_{int}(t + \Delta t, t)$  wie in Gleichung (2.43) auf den Dichte-Operator  $\hat{\rho}_{ges}(t)$  an [VW06]. Der Zeitentwicklungs-Operator  $\hat{U}_{int}(t + \Delta t, t)$  koppelt den Detektor mit dem restlichen System. Aus der Kenntnis der Zeitentwicklung des Dichte-Operators lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ansprechen bestimmter Detektoratome berechnen.

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

Um die bedingte Wahrscheinlichkeit für die Anregung einer vorgegebenen Anzahl von Detektoratomen an den Orten  $\vec{r}_i$  im Zeitintervall  $t$  bis  $t + \Delta t$  zu berechnen, müssen sämtliche Kopplungen

zwischen Feld, Detektor und den Quellen des Feldes berücksichtigt werden. Das heißt, es muss über alle möglichen Endzustände jedes beteiligten atomaren Detektorsystems summiert werden. Eine Anregung kann nur erfolgen, wenn sich das Feld in einem passenden Zustand befindet. Deshalb muss zusätzlich die Spur  $Tr \{ \dots \}$  über die Eigenzustände  $|\Psi_{Rest}^{(n)}\rangle$  des restlichen Systems genommen werden. Man erhält so alle Kopplungsmatrixelemente zwischen den vorgegebenen Detektoratomen und dem Feld. Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $p_{\{F\}}(t, \Delta t)$  für photoelektrische Übergänge des atomaren Detektorsystems vom Grundzustand  $|G\rangle$  zum Zeitpunkt  $t$  in einen kontinuierlichen Endzustand  $|F\rangle$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  ist durch

$$p_{\{F\}}(t, \Delta t) = \sum_{\{F\}} Tr \left\{ \hat{\rho} \langle G | \hat{U}_{int}^+(t + \Delta t, t) | F \rangle \langle F | \hat{U}_{int}(t + \Delta t, t) | G \rangle \right\} \quad (2.183)$$

gegeben. Beim Grund- und Endzustand des Detektors handelt es sich um Produkte der Energieeigenzustände  $|g_i\rangle$  bzw.  $|f_i\rangle$  der Detektoratome.

$$|G\rangle = \prod_{l'=1}^N |g_{i_{l'}}\rangle, \quad |F\rangle = \prod_{l=1}^m |f_i\rangle \prod_{l'=m+1}^N |g_{i_{l'}}\rangle. \quad (2.184)$$

Da in der Quantenmechanik jede Funktion von Operatoren durch ihre Reihendarstellung definiert ist, wird der Zeitentwicklungs-Operator  $\hat{U}_{int}(t + \Delta t, t)$  für die Wechselwirkung mit  $m$ -Atomen durch seinen  $m$ -ten Entwicklungsterm angenähert [VW06]. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich aus der Annahme, dass jedes Atom nur einmal im Zeitintervall  $\Delta t$  an der Photoemission beteiligt ist. Damit wird  $p_{\{F\}}(t, \Delta t)$  zu [VW06]:

$$p_{i_1, \dots, i_m}(t, \Delta t) = \sum_{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_m}} Tr \left\{ \hat{\rho}_{S+R} \left[ T_- \prod_{l=1}^m \frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\Delta t} d\tau_l \langle g_{i_l} | \hat{H}_{int}^{(i_l)}(\tau_l) | f_{i_l} \rangle \right] \right. \\ \left. \times \left[ T_+ \prod_{l=1}^m \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_t^{t+\Delta t} d\tau_l \langle f_{i_l} | \hat{H}_{int}^{(i_l)}(\tau_l) | g_{i_l} \rangle \right] \right\}. \quad (2.185)$$

Nun ist dieser Ausdruck für die bedingte Wahrscheinlichkeit noch immer sehr unhandlich und kompliziert. Weitere Vereinfachungen sind notwendig.

### Vereinfachung der bedingten Wahrscheinlichkeit

Zu diesem Zweck werden die Matrixelemente vom Typ  $\langle f_{i_l} | \hat{H}_{int}^{(i_l)}(\tau_l) | g_{i_l} \rangle$  genauer betrachtet und die genäherte Form des Wechselwirkungs-Hamilton-Operators aus Gleichung (2.90) eingesetzt.

$$\hat{H}_{int}^{(i_l)} = \hat{H}_{int}(\vec{r}_{i_l}) \approx \sum_{nm} \hat{A}_{nm} \vec{d}_{nm} \hat{E}(\vec{r}_{i_l}) = \sum_{nm\lambda} \hat{A}_{nm} \vec{d}_{nm} \left\{ \vec{E}_\lambda \hat{a}_\lambda + \vec{E}_\lambda^* \hat{a}_\lambda^\dagger \right\}. \quad (2.186)$$

Wegen der Symmetrie der Matrixelemente und der benutzten Näherungen sind sämtliche Matrixelemente der Form  $\langle g_{i_l} | \hat{H}_{int}^{(i_l)}(\tau_l) | g_{i_l} \rangle = 0$  gleich Null und wurden deshalb in Gleichung (2.185)



vernachlässigt. Wie in Gleichung (2.181) dargestellt, wird die Zeitentwicklung von  $\hat{H}_{int}$  im Wechselwirkungsbild durch den Hamilton-Operator  $\hat{H}_0$  bestimmt, der sich, wie oben beschrieben, aus dem Hamiltonian der Detektoratome  $\hat{H}_D$  und  $\hat{H}_{R+S}$  zusammensetzt.  $\hat{H}_{R+S}$  beschreibt die Quellen der Strahlung, das Strahlungsfeld selbst und deren Wechselwirkung. Da der Kommutator

$$\left[ \hat{H}_{R+S}, \hat{H}_D \right] = 0 \quad (2.187)$$

erfüllt, kann der unitäre Zeitentwicklungs-Operator

$$\hat{U}_0 = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(\tau - t) \right\} = \underbrace{\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{R+S}(\tau - t) \right\}}_{\hat{U}_{R+S}} \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_D(\tau - t) \right\} \quad (2.188)$$

zerlegt werden. Es sei nochmals vermerkt, dass  $\hat{U}_0$  keine Exponentialfunktion ist, sondern dass es sich um eine verkürzte Darstellung einer Reihenentwicklung von Operatoren handelt. Die Zerlegung war, unter Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel möglich, da Gleichung (2.187) erfüllt ist. Der Zeitentwicklungs-Operator  $\hat{U}_{R+S}$  wird auf den Operator des elektrischen Feldes übertragen. Es gilt:

$$\hat{E}(\vec{r}_{i_l}, \tau_l) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \hat{H}_{R+S}(\tau_l - t) \right\} \hat{E}(\vec{r}_{i_l}) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{R+S}(\tau_l - t) \right\}. \quad (2.189)$$

Im Wechselwirkungs-Hamilton-Operator aus Gleichung (2.186) sind sowohl Vernichter als auch Erzeuger des Feldes vorhanden. Wertet man die zeitliche Entwicklung von  $\hat{H}_{int}^{(i_l)}(\tau_l)$  aus, so zeigt sich, dass schnell und langsam oszillierende Summenfrequenzen  $\Delta\omega_{\pm\lambda}$  auftreten

$$\Delta\omega_{\pm\lambda} = \omega_{nm} \pm \omega_\lambda, \quad (2.190)$$

die sich aus den Resonanzfrequenzen der atomaren Übergänge  $\omega_{nm} = \omega_m - \omega_n$  und den Photonenfrequenzen  $\omega_\lambda$  berechnen. Wird anschließend die Integration über das Zeitintervall  $\Delta t$  durchgeführt, so ergibt sich für die Zeitabhängigkeit in Gleichung (2.185), wie aus der zeitabhängigen Störungsrechnung bekannt [Sch05a] die sinc-Funktion, multipliziert mit der Messintervalllänge  $\Delta t$  und einem Phasenfaktor.

$$\exp \left\{ -\frac{i}{2} \Delta\omega_{\pm\lambda} \Delta t \right\} \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} \Delta\omega_{\pm\lambda} \cdot \Delta t \right]}{\frac{1}{2} \Delta\omega_{\pm\lambda} \cdot \Delta t} \cdot \Delta t = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \Delta\omega_{\pm\lambda} \Delta t \right\} \text{sinc} \left[ \frac{1}{2} \Delta\omega_{\pm\lambda} \cdot \Delta t \right] \Delta t. \quad (2.191)$$

Die sinc-Funktion wird auch als Kardinalsinus bezeichnet. Wie in der Abbildung 2.13 zu sehen ist, nähert sich die sinc-Funktion mit steigendem  $|x|$ -Wert oszillierend dem Funktionswert Null an. Da reale Photomultiplier im optimalen Fall eine Zeitauflösung von  $\Delta t_{min} = 10^{-10}$  s besitzen [Pau99], aber erst auf Photonen mit einer Kreisfrequenzen in der Größenordnung von ca.  $\omega_{f_i g_i} > 2\pi \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$  ansprechen, können nur die Differenzfrequenzen  $\Delta\omega_{-\lambda}$  aus Gleichung

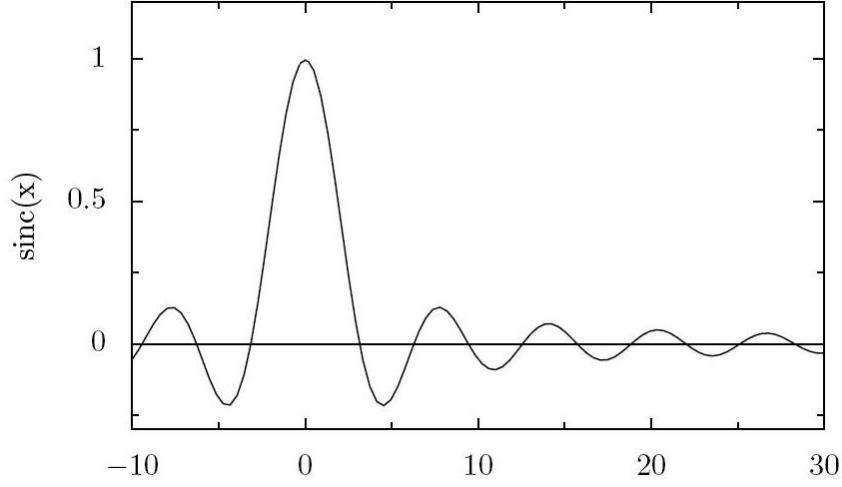


Abbildung 2.13: Graphische Darstellung der sinc-Funktion.

(2.190) einen endlichen Beitrag leisten, wenn  $\omega_\lambda \approx \omega_{nm}$  gilt. Alle anderen Beiträge werden durch den Kardinalsinus unterdrückt. Es ist deshalb gerechtfertigt, in Gleichung (2.186) die entsprechenden Frequenzanteile zu vernachlässigen [CTDRG92]. Dadurch erhalten die Operatoren in Gleichung (2.185) Normalordnung. Normalordnung und Zeitordnung werden in der Notation zusammengefasst und als  $\circ$  dargestellt, siehe Sektion (2.5). Die Spur über die Dichtematrix  $Tr \{ \hat{\rho}_{S+R\dots} \} = \langle \dots \rangle$  wird durch die eckigen Klammern dargestellt, woraus folgt:

$$p_{i_1, \dots, i_m}(t, \Delta t) = \left\langle \circ \prod_{l=1}^m \int_t^{t+\Delta t} d\tau_l \int_t^{t+\Delta t} d\tau'_l S^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l) \cdot \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_{i_l}, \tau_l) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_{i_l}, \tau'_l) \circ \right\rangle, \quad (2.192)$$

wobei  $S^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l)$  durch

$$\hat{S}^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{f_i} \vec{d}_{g_i f_i} \otimes \vec{d}_{f_i g_i} \exp \{ i\omega_{f_i g_i}(\tau - \tau') \} = S^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l) \cdot \hat{1}_{3 \times 3} \quad (2.193)$$

gegeben ist.  $\hat{1}_{3 \times 3}$  steht für die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix. Die Funktion  $S^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l)$  beschreibt die Reaktion des  $i_l$ -ten Detektoratoms auf das Feld, während der Zeitdifferenz  $\tau_l - \tau'_l$ . Da über alle Orientierungen der Dipolmatrixelemente  $\vec{d}_{f_i g_i}$  summiert wurde ( $\sum_{f_i}$ ) und keine Vorzugsrichtung in unserem einfachen Modell existiert, ist  $\hat{S}^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l)$  richtungsunabhängig<sup>2</sup>. Als nächstes wird die Fourier-Transformierte von  $S^{(i_l)}$  eingeführt:

$$S^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \exp \{ -i\omega(\tau_l - \tau'_l) \} S^{(i_l)}(\omega). \quad (2.194)$$

<sup>2</sup>Bei realen Detektoren ist aufgrund der Gitterstruktur eine Vorzugsrichtung für jedes Atom vorgegeben, woraus sich eine winkelabhängige Sensitivität ergibt [Ham94]. Deshalb kann die Verwendung der skalaren Funktion  $S^{(i_l)}(\tau_l - \tau'_l)$  nur als Näherung betrachtet werden.

$S^{(i)}(\omega)$  ist ein Maß für die spektrale Response-Charakteristik der Detektoratome. Nähert man  $S^{(i)}(\omega) = S^{(i)}$  als frequenzunabhängige Funktion an, so kann sie vor das Integral gezogen werden und man erhält

$$S^{(i)}(\tau_l - \tau'_l) \approx S^{(i)} \cdot \delta(\tau_l - \tau'_l) \quad (2.195)$$

eine Diracsche-Deltafunktion. Man spricht in diesem Zusammenhang von Breitbandphotodetektoren [VW06], bzw. Breitbanddetektornäherung.

## Herleitung der Photonenstatistik

Bei  $p_{i_1, \dots, i_m}(t, \Delta t)$  handelt es sich um die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall  $t$  bis  $t + \Delta t$ ,  $m$  Atome an den Positionen  $\vec{r}_{i_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$  jeweils ein einzelnes Photoelektron absorbieren. Nun muss die bedingte Wahrscheinlichkeit  $p_{i_1, \dots, i_m}(t, \Delta t)$  mit der Wahrscheinlichkeit  $P_m(t, \Delta t)$ ,  $m$  Photonen im Zeitintervall  $t, t + \Delta t$  zu detektieren in Zusammenhang gebracht werden. Es lässt sich zeigen [VW06], dass das  $m$ -te faktorielle Moment  $F_m(t, \Delta t)$  durch

$$F_m(t, \Delta t) = \sum_{i_1, \dots, i_m}' p_{i_1, \dots, i_m}(t, \Delta t) \quad (2.196)$$

gegeben ist. Der Strich an der Summe untersagt die Summation über gleiche Indexwerte. Das faktorielle Moment  $F_m(t, \Delta t)$  ergibt sich aus der Summe über alle bedingten Wahrscheinlichkeiten  $p_{i_1, \dots, i_m}(t, \Delta t)$ . Der Strich bewirkt, dass kein Atom in einem Summanden mehrfach auftritt. Dies entspricht der Forderung, dass jedes Atom nur ein Photoelektron während des Zeitintervalls  $\Delta t$  beiträgt. Wird der Strich an der Summe vernachlässigt, so entsteht ein Fehler in der Größenordnung  $m/N$ , der im Falle einer großen Anzahl von Detektoratomen  $N \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Da

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{N, \dots, N} \hat{\gamma}_{i_1}(t, \Delta t) \cdot \hat{\gamma}_{i_2}(t, \Delta t) \cdot \dots \cdot \hat{\gamma}_{i_m}(t, \Delta t) = \left[ \sum_i^N \hat{\gamma}_i(t, \Delta t) \right]^m \quad (2.197)$$

gilt, kann mit Gleichung (2.192) die Abkürzung

$$\hat{\Gamma}(t, \Delta t) = \sum_i^N \hat{\gamma}_i(t, \Delta t) = \sum_{i=1}^N \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_t^{t+\Delta t} d\tau' S^{(i)}(\tau - \tau') \cdot \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_i, \tau) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_i, \tau'), \quad (2.198)$$

in die faktoriellen Momente

$$F_m(t, \Delta t) = \left\langle \circ \left[ \hat{\Gamma}(t, \Delta t) \right]^m \circ \right\rangle \quad (2.199)$$

eingesetzt werden. Über die erzeugende Funktion erhält man auf eine sehr elegante Weise den Zusammenhang zwischen faktoriellen Momenten und der Wahrscheinlichkeit  $P_m(t, \Delta t)$ ,  $m$  Photonen zum Zeitpunkt  $t$  im Zeitintervall  $\Delta t$  zu messen [VW06], woraus folgt:

$$P_m(t, \Delta t) = \frac{1}{m!} \left\langle \circ \left[ \hat{\Gamma}(t, \Delta t) \right]^m \exp \left\{ -\hat{\Gamma}(t, \Delta t) \right\} \circ \right\rangle. \quad (2.200)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_m(t, \Delta t)$  hat eine strukturelle Ähnlichkeit mit der Poisson-Verteilung, gibt aber noch keinen Aufschluss über die wahre Verteilungsfunktion der gemessenen Photonen. Welche Form die Verteilungsfunktion letzten Endes annimmt, hängt von der Länge des Messzeitintervalls  $\Delta t$ , dem Dichte-Operator und dem Zeitpunkt der Messung ab. Die analytische Auswertung von Gleichung (2.200) kann äußerst schwierig sein und generell ist es nicht möglich,  $P_m(t, \Delta t)$  geschlossen zu lösen [BCM67]. Setzt man in Gleichung (2.198) die Breitbandnäherung aus Gleichung (2.195) ein, so folgt:

$$\hat{\Gamma}(t, \Delta t) = \sum_i^N S^{(i)} \int_t^{t+\Delta t} d\tau \underbrace{\hat{E}^{(-)}(\vec{r}_i, \tau) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_i, \tau)}_{\hat{I}(\vec{r}_i, \tau)} = \sum_i^N S^{(i)} \cdot \hat{I}(\vec{r}_i, t, \Delta t). \quad (2.201)$$

Hier wurde die Intensität  $\hat{I}(\vec{r}_i, \tau)$  aus Gleichung (2.122) eingesetzt. Durch das Integral über das Zeitintervall  $\Delta t$  erhält man über Gleichung (2.157) den Zusammenhang mit der zeitlich gemittelten Intensität:

$$\hat{I}(\vec{r}_i, t, \Delta t) = \Delta t \cdot \bar{\hat{I}}(\vec{r}_i, \Delta t, t). \quad (2.202)$$

Folglich ist  $\hat{\Gamma}$  durch:

$$\hat{\Gamma}(t, \Delta t) = \sum_i^N S^{(i)} \Delta t \cdot \bar{\hat{I}}(\vec{r}_i, \Delta t, t) = \xi' \Delta t \cdot \bar{\hat{I}}(\vec{r}, \Delta t, t) \quad (2.203)$$

gegeben. Im letzten Teil der Gleichung wurde der Detektor als punktförmig am Ort  $\vec{r}$  genähert und die spektrale Response  $\xi'$  zur unnormierten Detektionseffizienz zusammengefasst.

### 2.3.4 Multimodige Photonerverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_m(t, \Delta t)$  aus Gleichung (2.200) beschreibt sowohl den monomodigen, als auch den multimodigen Fall. Zur weiteren Vereinfachung wird gefordert, dass

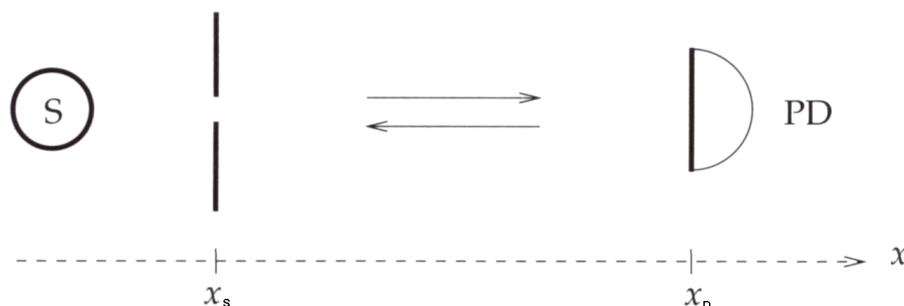


Abbildung 2.14: Detektoranordnung [VW06].

es sich bei dem freien elektromagnetischen Feld um polarisierte ebene Wellen, mit einer Strahlfläche  $A$  handelt. Die Propagation soll senkrecht zur Detektorfläche  $A_D$  erfolgen, die sich an

der Position  $x_D$  befindet (siehe Abb. 2.14). Damit sind Detektorfläche  $A_D$  und Strahlfläche  $A$  zueinander parallel. Zusätzlich wird durch das Messzeitintervall  $\Delta t$  eine Periodizitätsbedingung vorgegeben

$$\hat{E}^{(\pm)}(\tau, x_D) = \hat{E}^{(\pm)}(\tau + \Delta t, x_D), \quad (2.204)$$

die einer chromatischen Modenentwicklung des Feldes entspricht [VW06]. Aus den Randbedingungen 2.204, die durch das Messintervall  $\Delta t$  festgelegt sind, folgt:

$$\omega_\lambda = \frac{2\pi}{\Delta t} \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \omega_{\lambda+1} - \omega_\lambda = \frac{2\pi}{\Delta t}, \quad \lambda \in \mathbb{N}. \quad (2.205)$$

$\mathbb{N}$  steht für die Menge der natürlichen Zahlen. Betrachten wir eine Zeitauflösung von  $\Delta t = 10^{-9}$  s, so bedeutet dies, dass sich im Wellenlängenbereich  $\Delta\lambda$  von 1000 bis 1001 nm ca. 300 Moden mit einem Modenabstand  $\Delta\omega$  befinden. In Tabelle 2.1 sind weitere Modenzahlen für verschiedene Wellenlängenbereiche und Integrationszeiten  $\Delta t$  aufgetragen. Das gemessene Signal wird

Anzahl der Moden in Abhängigkeit von Detektionszeit $\Delta t$ und Wellenlänge $\lambda$				
Detektionszeit	1000-1001 nm	800-801 nm	600-601 nm	400-401 nm
$10^{-8}$ s	$3,0 \cdot 10^3$	$4,7 \cdot 10^3$	$8,3 \cdot 10^3$	$19 \cdot 10^3$
$10^{-7}$ s	$3,0 \cdot 10^4$	$4,7 \cdot 10^4$	$8,3 \cdot 10^4$	$19 \cdot 10^4$
$10^{-6}$ s	$3,0 \cdot 10^5$	$4,7 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^5$	$19 \cdot 10^5$

Tabelle 2.1: Modenzahl in einem Wellenlängenbereich  $\Delta\lambda = 1$  nm in Abhängigkeit von der Detektionszeit  $\Delta t$  und der Wellenlänge  $\lambda$ .

dann entsprechend der spektralen Zusammensetzung auf die einzelnen Moden verteilt. Kann das Feld durch eine stationäre Mode beschrieben werden, so folgt nach weiteren Vereinfachungen für  $\hat{\Gamma}$ :

$$\hat{\Gamma}(\Delta t) = \xi \hat{a}^+ \hat{a}, \quad (2.206)$$

woraus sich  $P_m(\Delta t)$  für den monomodigen Fall berechnen lässt [WM94]:

$$P_m(\Delta t) = \frac{1}{m!} \langle \bullet : (\xi \hat{a}^+ \hat{a})^m \exp \{ -\xi \hat{a}^+ \hat{a} \} \bullet : \rangle = \sum_{n=m}^{\infty} P_n \binom{n}{m} \xi^m (1 - \xi)^{n-m}. \quad (2.207)$$

Wobei  $P_n = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$  der Erwartungswert des Dichte-Operators in den Teilchenzahlzuständen ist und  $\bullet$  die Normalordnung der Operatoren anzeigt.

Betrachten wir nun den multimodigen Fall unter der Annahme, dass es keine Rückkoppelung zwischen Photomultiplier und Quelle gibt. Die Wellen propagieren nur in Richtung des Detektors. Die Fourier-Reihendarstellung des Feld-Operators ist dann durch [VW06]

$$\hat{E}^{(+)}(\tau, x_D) = \frac{i}{\sqrt{\Delta t}} \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mu}}{2\epsilon_0 c A}} \exp \left\{ -i\omega_{\mu} \left( \tau - \frac{x_D}{c} \right) + i\varphi_{0\mu} \right\} \hat{a}_{\mu}, \quad \hat{E}^{(-)} = \left( \hat{E}^{(+)} \right)^{\dagger} \quad (2.208)$$

gegeben. Diese wird zusammen mit Gleichung (2.194) in Gleichung (2.198) eingesetzt. Unter der Annahme, dass die atomaren Detektoren gleich sind  $S^{(i)}(\omega) = S(\omega)$  und in der Fläche, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung an der Koordinate  $x_D$  liegen (siehe Abb. 2.14), folgt:

$$\hat{\Gamma}(t, \Delta t) = \sum_{\lambda\lambda'} \frac{N' \cdot E_\lambda^* E_{\lambda'}}{2\pi} \exp \{i\Phi_{\lambda\lambda'}(\Delta t, x_D)\} \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_{\lambda'} \cdot \int d\omega \left\{ S(\omega) \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_t^{t+\Delta t} d\tau' \exp \{i(\omega_\lambda \tau - \omega_{\lambda'} \tau') - i\omega(\tau - \tau')\} \right\}, \quad (2.209)$$

wobei die Phase  $\Phi_{\lambda\lambda'}(\Delta t, x_D)$  durch

$$\Phi_{\lambda\lambda'}(\Delta t, x_D) = (\omega_\lambda - \omega_{\lambda'}) \left( \frac{\Delta t}{2} - \frac{x_D}{c} \right) + \varphi_{0\lambda'} - \varphi_{0\lambda} \quad (2.210)$$

gegeben ist. Da sich die spektrale Response-Funktion  $S(\omega)$  des Photomultipliers sehr langsam innerhalb eines Wellenlängenbereichs von wenigen Nanometer ändert, wird vorgeschlagen, die Funktion durch den konstanten Term der Taylor-Reihe am Punkt  $\omega_\lambda$  zu nähern:

$$S(\omega) \approx S(\omega_\lambda). \quad (2.211)$$

So kann  $S(\omega_\lambda)$  vor das Integral gezogen werden und wir erhalten aus der Integration über  $\omega$  in Gleichung (2.209) genähert eine Deltafunktion  $\delta(\tau - \tau')$ . Dies entspricht der Breitbanddetektor-Betrachtung aus Gleichung (2.195), für  $S(\omega_\lambda) = S = const.$  unabhängig vom Modenindex  $\lambda$ . Die Zeitintegrale ergeben in diesem Fall eine sinc-Funktion:

$$\text{sinc} \left[ \frac{\Delta t}{2} (\omega_\lambda - \omega_{\lambda'}) \right] = \text{sinc} [\pi \cdot (\lambda - \lambda')] = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (2.212)$$

die sich zu einem Kronecker-Delta reduziert ( $\lambda, \lambda' \in \mathbb{N}$ ), da die Funktionswerte des Kardinalsinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$  gleich Null sind. Unter der Annahme, dass die Näherung aus Gleichung (2.211) gerechtfertigt ist, vereinfacht sich  $\hat{\Gamma}(t, \Delta t)$  zu:

$$\hat{\Gamma}(t, \Delta t) = \sum_{\lambda} \frac{N' \hbar \omega_\lambda \cdot S(\omega_\lambda)}{2\epsilon_0 c A} \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda = \sum_{\lambda} \xi_\lambda \hat{n}_\lambda. \quad (2.213)$$

$N'$  gibt die Anzahl der Detektoratome innerhalb der bestrahlten Fläche  $A$  an. Die Faktoren wurden zur Detektionseffizienz  $\xi_\lambda$  zusammengefasst, auf deren Bedeutung gesondert im Kapitel (2.3.5) eingegangen wird. Diese Näherung scheint sinnvoll zu sein, wenn sich das Feld aus schmalbandigen raumzeitlich getrennten Wellenpaketen zusammensetzt, die unterschiedliche Mittelfrequenzen besitzen. In allen anderen Fällen wird die Breitbanddetektornäherung angewendet:

$$S(\omega_\lambda) = S = const. \quad \Rightarrow \quad \hat{\Gamma}(t, \Delta t) = \sum_{\lambda} \frac{N' \hbar \omega_\lambda \cdot S}{2\epsilon_0 c A} \hat{n}_\lambda = \sum_{\lambda} \xi_\lambda \hat{n}_\lambda. \quad (2.214)$$

## Zeitabhängigkeit der Vernichter und Erzeuger

Die Funktion  $\hat{\Gamma}(t, \Delta t)$  aus Gleichung (2.213) scheint auf den ersten Blick keinerlei Zeitabhängigkeit aufzuweisen. Da aber das einfallende Feld durch Gleichung (2.147) gegeben ist, steckt die Zeitabhängigkeit in den Erzeugern  $\hat{a}_\lambda^+$  und Vernichtern  $\hat{a}_\lambda$ , was unmittelbar klar wird, wenn man bedenkt, dass die Operatoren aus Gleichung (2.208) durch Fourier-Transformation erzeugt wurden:

$$\hat{a}_\lambda = -\frac{i}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c A}{\hbar \omega_\lambda}} \int_t^{t+\Delta t} d\tau \hat{E}_{k_x}^{(+)}(\tau, x_D) \exp \left[ i\omega_\lambda \left( \tau - \frac{x_D}{c} \right) \right]. \quad (2.215)$$

Die Fourier-Transformation wurde nur über ein endliches Intervall  $\Delta t$  ausgeführt. Dem entspricht die Annahme, dass sich der Feld-Operator  $\hat{E}_{k_x}^{(+)}(\tau, x_D)$  aus diskreten Moden aufbaut, die periodisch mit  $\Delta t$  sind. Allgemein betrachtet besitzt der Feld-Operator ein kontinuierliches Spektrum, weshalb die Verwendung des Operators aus Gleichung (2.147) gerechtfertigt ist. Folglich setzt sich jeder diskrete „chromatische“ Vernichtungs-Operator  $\hat{a}_\lambda$  aus einer Überlagerung kontinuierlicher chromatischer Vernichtungs-Operatoren  $\hat{a}(\omega)$  zusammen.

$$\begin{aligned} \hat{a}_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\omega_\lambda}} \int_t^{t+\Delta t} d\tau \exp \left[ i\omega_\lambda \left( \tau - \frac{x_D}{c} \right) \right] \int_0^\infty d\omega \sqrt{\omega} \exp \left[ -i\omega \left( \tau - \frac{x_D}{c} \right) \right] \hat{a}(\omega) \\ &= \sqrt{\frac{\Delta t}{2\pi\omega_\lambda}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\omega} \exp \left[ i(\omega_\lambda - \omega) \cdot \left( t - \frac{\Delta t}{2} - \frac{x_D}{c} \right) \right] \text{sinc} \left[ \frac{\Delta t}{2}(\omega_\lambda - \omega) \right] \hat{a}(\omega). \end{aligned} \quad (2.216)$$

Aus welchen kontinuierlichen Moden sich die diskreten Moden ergeben, bestimmt der Dichte-Operator  $\hat{\rho}_{R+S}(t) = \hat{\rho}$ , der ebenfalls vom Zeitpunkt  $t$  der Betrachtung abhängt. Der Teilchenzahl-Operator ist dann durch

$$\begin{aligned} \hat{n}_\lambda &= \frac{\Delta t}{2\pi\omega_\lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \sqrt{\omega\omega'} \exp \left[ i(\omega' - \omega) \left( t - \frac{\Delta t}{2} - \frac{x_D}{c} \right) \right] \\ &\quad \cdot \text{sinc} \left[ \frac{\Delta t}{2}(\omega_\lambda - \omega) \right] \text{sinc} \left[ \frac{\Delta t}{2}(\omega_\lambda - \omega') \right] \hat{a}^+(\omega') \hat{a}(\omega) \end{aligned} \quad (2.217)$$

gegeben. Mit den Substitutionen  $\Delta\omega = \omega' - \omega$  und  $\omega'' = \omega + \frac{1}{2}\Delta\omega$  können wir den Teilchenzahl-Operator durch:

$$\hat{n}_\lambda = \int_0^\infty d\Delta\omega \left[ e^{i\Delta\omega \left( t - \frac{\Delta t}{2} - \frac{x_D}{c} \right)} \hat{B}_\lambda(\Delta\omega, \Delta t) + e^{-i\Delta\omega \left( t - \frac{\Delta t}{2} - \frac{x_D}{c} \right)} \hat{B}_\lambda^+(\Delta\omega, \Delta t) \right] \quad (2.218)$$

darstellen, wobei für den zeitunabhängigen Operator

$$\begin{aligned} \hat{B}_\lambda(\Delta\omega, \Delta t) &= \frac{\Delta t}{2\pi\omega_\lambda} \int_{-\infty}^\infty d\omega \sqrt{\omega^2 - \left( \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2} \text{sinc} \left[ \frac{\Delta t}{2} \left( \omega_\lambda - \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right] \\ &\quad \cdot \text{sinc} \left[ \frac{\Delta t}{2} \left( \omega_\lambda - \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right] \hat{a}^+ \left( \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \hat{a} \left( \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.219)$$

gilt. Es ist zu beachten, dass das Integral nur für  $|\omega| \geq \frac{|\Delta\omega|}{2}$  definiert ist. Der Erwartungswert des Teilchenzahl-Operators  $\langle \hat{n}_\lambda \rangle$  gewährt einen Einblick auf das zeitliche Verhalten eines freien Feldes:

$$\langle \hat{n}_\lambda(t, \Delta t) \rangle = \int_0^\infty d\Delta\omega |B_\lambda(\Delta\omega, \Delta t)| \cdot \cos \left( \Delta\omega \left( t - \frac{\Delta t}{2} - \frac{x_D}{c} \right) + \varphi(\Delta\omega) \right). \quad (2.220)$$

Da das Integral nur eine kontinuierliche Form der Summe ist, verhält sich der zeitabhängige Teilchenzahl-Operator  $\hat{n}_\lambda(t, \Delta t)$  ähnlich wie die zeitlich gemittelte Intensität aus Gleichung (2.119), nur dass hier über Differenzfrequenzen integriert wird. Ob eine zeitliche Abhängigkeit von  $\langle n \rangle$  vorliegt und wie sie explizit aussieht, wird durch die Teilchenzahldichte  $|B_\lambda(\Delta\omega, \Delta t)| \cdot e^{i\varphi(\Delta\omega)} = \langle \hat{B}_\lambda(\Delta\omega, \Delta t) \rangle$  bestimmt.

### Bestimmung der multimodigen Photonverteilung

Um eine multimodige Photonstatistik zu beschreiben wird der Operator  $\hat{\Gamma}(t, \Delta t)$  aus Gleichung (2.213) in Gleichung (2.200) eingesetzt. Da keine Rückkopplung zwischen Photomultiplier und Quelle angenommen wurde, vertauschen Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren zu verschiedenen Zeitpunkten. Der Zeitordnungs-Operator kann deshalb weggelassen werden, und die Operatoren sind nur noch der Normalordnung unterworfen  $\circ \rightarrow \bullet$ . Damit erhalten wir aus Gleichung (2.200):

$$P_m(t, \Delta t) = \frac{1}{m!} \left\langle \bullet : \left[ \sum_\lambda \xi_\lambda \hat{n}_\lambda \right]^m \exp \left\{ - \sum_\lambda \xi_\lambda \hat{n}_\lambda \right\} \bullet : \right\rangle. \quad (2.221)$$

Unter Verwendung der Vertauschungsrelationen aus Gleichung (2.150) und der multinomialen Formel

$$\left[ \sum_{\lambda=1}^n \xi_\lambda \hat{n}_\lambda \right]^m = k_0! \prod_{\lambda=1}^n \sum_{k_\lambda}^{k_{\lambda-1}} \frac{(\xi_\lambda \hat{n}_\lambda)^{k_{\lambda-1}-k_\lambda}}{(k_{\lambda-1}-k_\lambda)!} \quad \wedge k_0 = m, k_n = 0 \quad (2.222)$$

kann Gleichung 2.221 umgeformt werden:

$$\begin{aligned} P_m(t, \Delta t) &= \left\langle \bullet : \prod_{\lambda=1}^n \sum_{k_\lambda}^{k_{\lambda-1}} \frac{(\xi_\lambda \hat{n}_\lambda)^{k_{\lambda-1}-k_\lambda}}{(k_{\lambda-1}-k_\lambda)!} \exp \{ -\xi_\lambda \hat{n}_\lambda \} \bullet : \right\rangle \\ &= \left\langle \bullet : \prod_{\lambda=1}^n \sum_{k_\lambda}^{k_{\lambda-1}} \hat{P}_{k_{\lambda-1}-k_\lambda} \bullet : \right\rangle \quad \wedge k_0 = m, k_n = 0. \end{aligned} \quad (2.223)$$

Falls der multimodige Dichte-Operator  $\hat{\rho}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\infty)$  separiert werden kann, gilt:

$$\hat{\rho}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\infty) = \hat{\rho}(\lambda_1) \cdot \hat{\rho}(\lambda_2) \cdot \dots \cdot \hat{\rho}(\lambda_\infty). \quad (2.224)$$



In diesem Fall reduziert sich  $P_m(t, \Delta t)$  aus Gleichung (2.223) zu:

$$P_m(t, \Delta t) = \prod_{\lambda=1}^n \sum_{k_\lambda}^{k_{\lambda-1}} \langle \vdots \hat{P}_{k_{\lambda-1}-k_\lambda} \vdots \rangle = \prod_{\lambda=1}^n \sum_{k_\lambda}^{k_{\lambda-1}} P_{k_{\lambda-1}-k_\lambda} \quad \wedge \quad k_0 = m, \quad k_n = 0. \quad (2.225)$$

Für  $P_{k_{\lambda-1}-k_\lambda}$  kann  $P_{n_\lambda} \wedge n_\lambda = k_{\lambda-1} - k_\lambda$  aus Gleichung (2.207) eingesetzt werden, wodurch die multimodige Photonenzustandswahrscheinlichkeit auf die monomodige zurückgeführt wird.

### 2.3.5 Quanteneffizienz und Detektionseffizienz

Die Photokathode soll die Energie der einfallenden Photonen in freie Elektronen mit kinetischer Energie entsprechend Formel (2.164) umwandeln. Wie effizient dieser Umwandlungsprozess abläuft, hängt von der Wellenlänge der einfallenden Photonen ab. Die Photonen übertragen ihre Energie auf die Elektronen des Valenz- oder Leitungsbandes. Aber nicht jedes angeregte Elektron tritt als Photoelektron aus der Photokathode aus. Der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Reaktion des Kathodenmaterials wird auch als spektrale Response-Charakteristik bezeichnet. Eine Möglichkeit, die spektrale Response-Charakteristik des Detektors darzustellen, besteht in der wellenlängenabhängigen Quanteneffizienz. Unter der Quanteneffizienz versteht man das Verhältnis von emittierten Photoelektronen zur Anzahl der eingestrahlenen Photonen. Sie wird mit dem Symbol  $\eta(\nu)$  bezeichnet und ist eine Funktion der Frequenz  $\nu$  der eingestrahlenen Photonen. Die Quanteneffizienz eines Detektors lässt sich experimentell bestimmen. Dazu wird der Strahlungsfluss  $\Phi$  [Ham94]

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (2.226)$$

mit einem kalibrierten Detektor in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$  festgestellt ( $Q$  steht für die Strahlungsenergie). Danach wird der zu messende Detektor mit der gleichen Quelle wellenlängenabhängig bestrahlt und der Photostrom  $I$  gemessen. Für die Quanteneffizienz gilt

$$\eta = \frac{h \cdot c}{\lambda \cdot e \cdot \alpha} \cdot \frac{I}{\Phi}. \quad (2.227)$$

Dabei steht  $e$  für die Elementarladung,  $h$  für das Plancksche Wirkungsquantum und  $c$  für die Lichtgeschwindigkeit.  $\alpha$  beschreibt die Sammeffizienz (collection efficiency) des Photomultipliers, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photoelektron von der Photokathode zur ersten Dynode gelangt und dort Sekundärelektronen ausschlägt. Daraus lässt sich die Detektionseffizienz  $\xi$  wie folgt bestimmen:

$$\xi = \alpha \cdot \eta. \quad (2.228)$$

Die Detektionseffizienz beschreibt, wie viele Photonen im Mittel als Pulse gezählt werden.

## 2.4 Zustände und ihre Zeitentwicklung

Die Physik wird auch als die Lehre der Zustandsänderungen bezeichnet, da der Zustand eines Systems und seine Änderung die zentrale Rolle in der Betrachtung einnimmt. Ein Zustand wird als minimaler Satz physikalischer Größen, aus deren Kenntnis sich maximal mögliche Information über das System ableiten lässt definiert [Nol91]. In der Quantenmechanik wird er durch ein abstraktes Zeichen  $|\Psi\rangle$  dargestellt, das den Namen Ket- oder Zustandsvektor trägt. Je nach Fragestellung nimmt man eine geeignete Abbildung durch einen Projektor  $|\phi\rangle\langle\phi|$  vor. Wollen wir beispielsweise den Spin von Elektronen messen, so projizieren wir auf einen Zustand des Spinraums:

$$|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\Psi\rangle = \underbrace{c_{\uparrow\Psi}}_{c_{\uparrow\Psi}} |\uparrow\rangle. \quad (2.229)$$

Das Betragsquadrat der komplexen Zahl  $|c_{\uparrow\Psi}|^2$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung des Ensembles den Zustand  $|\uparrow\rangle$  vorzufinden. Je nach Orientierung der Messapparatur und Präparation erhalten wir für die Erwartungswerte des Spin-Operators unterschiedliche Ergebnisse (siehe Unterkapitel 2.1.7). Offensichtlich war nur ein Teilaspekt des Zustandes von Interesse. Wir hätten stattdessen auch nach der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen fragen können. Alle Operatoren, die miteinander vertauschen

$$[A, B] = AB - BA = 0, \quad (2.230)$$

besitzen ein gemeinsames Eigensystem und können deshalb gleichzeitig scharf gemessen werden. Wir könnten folglich auch die Frage stellen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, Elektronen eines Ensembles anzutreffen, die Spin up und gleichzeitig den Impuls  $\vec{p}$  tragen, da der Impuls- und Spin-Operator miteinander vertauschen. Misst man alle kommensurablen Operatoren, so ist der Zustand bestimmt. Jeder dieser Operatoren liefert einen Eigenwert, der von den Quantenzahlen des Zustands abhängt. Die Quantenzahlen legen somit den Zustand fest [Sch05a]. Von besonderem Interesse sind in Bezug auf diese Doktorarbeit die Zustände des elektromagnetischen Feldes. Allgemein setzt sich ein Zustand immer aus einer gewichteten Superposition von Basiszuständen zusammen. Deshalb stellt sich natürlich immer die Frage, welche Basis am besten geeignet ist, um ein System zu beschreiben.

### 2.4.1 Teilchenzahlzustände

Bei Einführungen in die Quantenmechanik werden für gewöhnlich nur die kanonisch konjugierten Koordinaten der massebehafteten Teilchen durch Operatoren ersetzt. Die Felder behandelt man der Einfachheit halber klassisch (semi-klassisches-Modell oder erste Quantisierung). Für Vielteilchensysteme erfolgt die Berechnung der Zustandsfunktionen durch das Lösen der Schrödinger-Gleichung (2.18). Dies geschieht, im Falle eines Vielteilchenproblems, in der Regel durch Lösen des Einteilchenproblems. Wegen der Vollständigkeit des Einteilchen-Hilbertraums kann aus den direkten Produkten der Einteilchenzustände ein Basissystem, unter Berücksichtigung der Symmetrieforderung (2.12), für die Vielteilchenzustände gewonnen werden. Die sym-

metriegerechten Eigenfunktionen eines  $N$ -Teilchenproblems setzten sich jeweils aus  $N!$  Summanden zusammen. Eine Darstellung im Teilchenzahlformalismus umgeht das Problem der Permutationen, da die Permutationen implizit im Zustand enthalten sind [Sch05b].

Im Unterkapitel 2.1.6 wurden die Teilchenzahlzustände am Beispiel eines harmonischen Oszillators eines Teilchens der Masse  $m$  eingeführt. Aus dem Betragsquadrat der Wahrscheinlichkeitsamplitude in der Ortsdarstellung

$$|\langle x | n \rangle|^2 = |\psi_n(x)|^2 = \rho_n(x) \quad (2.231)$$

ergibt sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte  $\rho_n(x)$  im eindimensionalen Ortsraum für das Teilchen der Masse  $m$  im Zustand  $n$ . Durch Integration erhält man daraus die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P_n(\Delta x) = \int_{\Delta x} \rho_n(x) dx$  des Teilchens im Raumgebiet  $\Delta x$ . In Abbildung (2.15) sind die Wahrscheinlichkeitsamplituden  $\psi_n(x)$  für die Zustände  $n = 0, 1, 2, 3$  über den Ort  $x$  aufgetragen zu sehen. Es handelt sich um stehende Wellen. Wie im Unterkapitel 2.2.3 ge-

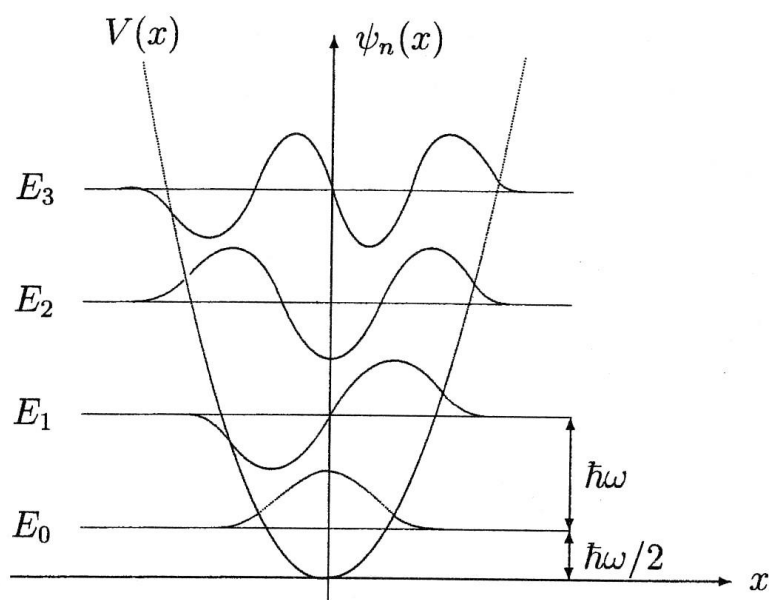


Abbildung 2.15: Ortsdarstellung der Teilchenzahlzustände  $\psi_n(x) = \langle x | n \rangle$  in einem quadratischem Potential  $V(x)$  [Böh03].

zeigt wurde, besitzt eine Mode des elektromagnetischen Feldes die gleiche mathematische Struktur, obwohl kein massebehaftetes Teilchen vorhanden ist. Daraus kann geschlossen werden, dass eine Mode des freien Feldes einem massebehafteten Teilchen entspricht. Auch hier sind die Besetzungszustände die Energieeigenzustände. Betrachtet man die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in der Ortsdarstellung  $\rho_n(x) = |\psi_n(x)|^2$ , so stellt sich die Frage nach der Bedeutung. Im Fall unseres massebehafteten Teilchens ist  $\rho_n(x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte das Teilchen im Zustand  $n$  bei einer Auslenkung  $x$  anzutreffen.  $x$  entspricht also einer Ortskoordinate. Bezogen auf das Feld muss bedacht werden, dass es sich um verallgemeinerte Koordinaten handelt,

die nicht direkt mit einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Ortsraum in Verbindung gebracht werden können. Vielmehr muss die Auslenkung  $x$  mit der Auslenkung der Amplitude des Feldes in Verbindung gebracht werden. Dabei gibt  $P_{n_\lambda}(\Delta x)$  die Wahrscheinlichkeit an, in der Mode  $\lambda$  eine Amplitude im Intervall  $[x, \dots, x + \Delta x]$  zu messen, wenn sich die Mode im Zustand  $|n_\lambda\rangle$  befindet. Worin besteht nun der Zusammenhang zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Photonen? Dazu erinnern wir uns an die Definition des Modenvolumens im Unterkapitel 2.2.6. Innerhalb dieses Modenvolumens ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Photonen durch das Betragsquadrat des Modenprofils (Feldverlauf) gegeben. Es ist also nicht möglich, einem Photon einen genauen Ort zuzuweisen. Das Modenprofil hängt von der Verteilung der beitragenden Amplituden und somit von den Zuständen der einzelnen Moden  $|\varphi_\lambda\rangle$  ab. Allgemein ist eine multichromatische Beschreibung (Vielteilchenproblem) mit multimodigen Teilchenzahlzuständen notwendig.

### Multimodige Teilchenzahlzustände

Sendet ein Atom durch einen elektrischen Dipolübergang ein Photon aus, so koppelt es gleichzeitig an unendlich viele Moden des Feldes, die entsprechend der Linienbreite des Übergangs und der Richtungscharakteristik verteilt sind. Der Zustand eines solchen Photons kann, wie im Unterkapitel (2.2.6) erklärt, durch

$$|1\rangle_{j\sigma} = \hat{a}'_{j\sigma} | \text{Vakuum} \rangle = \sum_{\vec{k}} U_{j\vec{k}} \hat{a}'_{\vec{k}\sigma} |0\rangle_{\vec{k}\sigma} = \sum_{\vec{k}} U_{j\vec{k}} |1\rangle_{\vec{k}\sigma} \quad (2.232)$$

dargestellt werden [SR07].  $|1\rangle_{j\sigma}$  beschreibt den Anregungszustand des Wellenpakets mit der  $j$ -ten Mittelfrequenz und der Polarisation  $\sigma$ . Andererseits setzt sich das Wellenpaket aus unendlich vielen Normalmoden  $|1\rangle_{\vec{k}\sigma}$  zusammen, die durch den Wellenvektor  $\vec{k}$  und die zugehörige Polarisation  $\sigma$  definiert werden. Bei den Zustandsvektoren handelt es sich um Abkürzungen von multimodigen Teilchenzahlzuständen der Form:

$$|1\rangle_{\vec{k}'\sigma'} = |0\rangle_{\vec{k}_1\sigma_1} \cdot |0\rangle_{\vec{k}_2\sigma_2} \cdots |1\rangle_{\vec{k}'\sigma'} \cdots |0\rangle_{\vec{k}_\infty\sigma_\infty}. \quad (2.233)$$

Realistische Felder müssen demnach durch multimodige Teilchenzahlzustände beschrieben werden. Die monomodige Darstellung ist demnach ein Spezialfall der multimodigen, bei der alle weiteren Moden vernachlässigt werden, da sie keinen Einfluss auf die Ergebnisse der Messungen nehmen. Der Teilchenzahl-Operator  $\hat{N}$  nimmt im multimodigen Fall eine genauso wichtige Stellung ein wie im monomodigen Fall. Er ist durch

$$\hat{N} = \sum_{\lambda} \hat{n}_{\lambda}, \quad \hat{N} |\{n_{\lambda}\}\rangle = \sum_{\lambda} n_{\lambda} |\{n_{\lambda}\}\rangle \quad (2.234)$$

definiert, mit den Eigenzuständen  $|\{n_{\lambda}\}\rangle$ , die als multimodige Teilchenzahlzustände bezeichnet werden. Der Teilchenzahl-Operator  $\hat{N}$  vertauscht mit dem multimodigen Hamilton-Operator des freien elektromagnetischen Felds aus Gleichung (2.63):

$$\hat{H}_{mul} = \sum_{\lambda} \hat{H}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} (\hat{n}_{\lambda} + \frac{1}{2}) \quad \left[ \hat{H}_{mul}, \hat{N} \right] = 0. \quad (2.235)$$

Damit ist gezeigt, dass die Besetzungszustände  $|\{n_\lambda\}\rangle$  auch die Energieeigenzustände sind. Wendet man  $\hat{H}_{mul}$  auf die multimodigen Teilchenzahlzustände  $|\{n_\lambda\}\rangle$ :

$$|\{n_\lambda\}\rangle = |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots, n_{\lambda_m}, \dots\rangle = \prod_\lambda |n_\lambda\rangle = |n_{\lambda_1}\rangle \cdot |n_{\lambda_2}\rangle \cdot \dots \cdot |n_{\lambda_m}\rangle \cdot \dots \quad (2.236)$$

an, so erhält man die Energieeigenwerte des freien Feldes  $E_{mul}$ :

$$E_{mul} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(n_\lambda + \frac{1}{2}\right). \quad (2.237)$$

$E_{mul}$  setzt sich additiv aus den Eigenwerten der einmodigen Hamilton-Operatoren zusammen. Da es sich um ungekoppelte Oszillatoren handelt, wirkt der Operator  $\hat{n}_\lambda$  nur auf den Zustand  $|n_\lambda\rangle$  (gleicher Index). Stimmen die Indizes nicht überein  $\lambda \neq \lambda'$ , so kann der Teilchenzahlzustand am Besetzungszahl-Operator vorbeigezogen werden  $\hat{n}_{\lambda'} |n_\lambda\rangle = |n_\lambda\rangle \hat{n}_{\lambda'}$ . Befindet sich das Feld in einem multimodigen Besetzungszustand, so ergibt der Erwartungswert des transversalen multimodigen elektrischen Feld-Operators (siehe Gleichung (2.76)):

$$\langle\{n_\lambda\}|\hat{\vec{E}}(\vec{r})|\{n_\lambda\}\rangle = 0, \quad \hat{\vec{E}}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\hat{\vec{\Pi}}(\vec{r}). \quad (2.238)$$

Betrachtet man hingegen die Varianz des Feldes [VW06]

$$\langle\{n_\lambda\}|(\Delta\vec{E})^2|\{n_\lambda\}\rangle = \sum_\lambda \omega_\lambda^2 |\vec{A}_\lambda|^2 (2n_\lambda + 1), \quad (2.239)$$

so fällt auf, dass trotz eines verschwindenden Mittelwerts die Fluktuationen des Feldes mit steigender Photonenzahl zunehmen. Befindet sich das Feld im Vakuumzustand ( $n_\lambda = 0$ ), so verbleiben die Vakuumsfluktuationen. Diese sind in Abbildung (2.15) für eine Mode im Zustand  $\psi_0$  zu sehen. Dort erkennt man, dass die Amplitude im Vakuumzustand, entsprechend einer Gauss-Verteilung, um den Wert Null fluktuiert [Böh03]. Für den Erwartungswert des Teilchenzahl-Operators  $\hat{N}$  aus Gleichung (2.122) gilt:

$$\langle\{n_\lambda\}|\hat{N}|\{n_\lambda\}\rangle = \sum_\lambda n_\lambda. \quad (2.240)$$

Der Erwartungswert des Teilchenzahl-Operators ist durch die Summe der Anregungsquanten in den einzelnen Moden gegeben. Die Schwankung der Teilchenzahl  $N$  in einem multimodigen Teilchenzahlzustand wird durch das mittlere Schwankungsquadrat erfasst:

$$\langle\{n_\lambda\}|(\Delta\hat{N})^2|\{n_\lambda\}\rangle = 0. \quad (2.241)$$

Offensichtlich unterliegt die Teilchenzahl im Mittel keiner Schwankung, wenn ein Teilchenzahlzustand vorliegt. Da für einen reinen multimodigen Teilchenzahlzustand Gleichung (2.225) gilt, reicht es den monomodigen Fall zu betrachten. Durch einsetzen von

$$P_{n_\lambda} = \langle n_\lambda | \hat{\rho}_\lambda | n_\lambda \rangle = |\langle i_\lambda | n_\lambda \rangle|^2 = \delta_{i_\lambda n_\lambda}, \quad \hat{\rho}_\lambda = |i_\lambda\rangle \langle i_\lambda| \quad (2.242)$$

in Gleichung (2.207) erhält man das Ergebnis. Eine weitere wichtige Klasse von Feldzuständen sind die kohärenten Zustände, die sich durch die Besetzungszustände darstellen lassen.

## 2.4.2 Kohärente Zustände

Der kohärente Zustand  $|\alpha\rangle$  kann als der Eigenzustand des Vernichtungs-Operators mit dem komplexen Eigenwert  $\alpha$  definiert werden [Peř85]:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.243)$$

Da der Vernichtungs-Operator kein hermitescher Operator ist, handelt es sich bei seinem Eigenwert  $\alpha$  um keine physikalisch messbare Größe. Der Betrag von  $|\alpha|$  entspricht der klassischen Feldamplitude. Um die kohärenten Zustände zu erzeugen, wird der Verschiebe-Operator  $\hat{D}(\alpha)$  (displacement operator) auf den Vakuumzustand  $|0\rangle$  angewendet:

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (2.244)$$

Der Verschiebe-Operator ist wie folgt definiert:

$$\hat{D} = \exp\{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}\}. \quad (2.245)$$

Es handelt sich bei  $\hat{D}$  um einen unitären Operator. Der kohärente Zustand kann nun in den Teilchenzahlzuständen entwickelt werden [Gla63]:

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle. \quad (2.246)$$

In diesem Fall interessieren uns natürlich die Entwicklungskoeffizienten  $\langle n|\alpha\rangle$ . Für sie gilt:

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2}\right\}. \quad (2.247)$$

Der kohärente Zustand ist eine gewichtete Superposition aller Teilchenzahlzustände. Bei den Entwicklungskoeffizienten handelt es sich um komplexe Zahlen, deren Betragsquadrat

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp\{-|\alpha|^2\} = P_n, \quad (2.248)$$

gerade der Poisson-Verteilung entspricht. Ist der Dichte-Operator durch einen reinen kohärenten Zustand gegeben  $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ , so ist durch Gleichung (2.248) die monomodige Photonenstatistik aus Gleichung (2.207) bestimmt. Das Betragsquadrat  $|\alpha|^2$  kann mit dem Erwartungswert der Photonenzahl im kohärenten Zustand identifiziert werden [WM94]:

$$|\alpha|^2 = \langle\hat{n}\rangle. \quad (2.249)$$

Vorteilhaft für die formale Beschreibung sind orthonormale Basissysteme wie in Gleichung (2.31). Zu diesem Zweck wird das Produkt zweier kohärenter Zustände ausgewertet:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 + \frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\right\}. \quad (2.250)$$

Offensichtlich sind zwei beliebige kohärente Zustände nicht orthogonal zueinander. Die Vollständigkeit ist jedoch erfüllt [Gla63]:

$$\hat{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (2.251)$$

Diese Eigenschaften werden später zur mathematischen Umformung des Dichte-Operators verwendet. Nachdem die mathematische Struktur der kohärenten Zustände erläutert wurde, soll noch auf die anschaulichen Aspekte eingegangen werden. Dazu werden die kohärenten Zustände durch die Quadraturkomponenten des Feldes dargestellt.

### Die Quadraturkomponenten des Feldes

In der klassischen Physik werden die Moden des elektromagnetischen Feldes in Abhängigkeit von den gegebenen Randbedingungen durch Amplituden  $A$  und Phasen  $\phi_0$  beschrieben

$$\vec{E} = \vec{e}_k \underbrace{A \exp \left\{ i(\omega t + \vec{k}\vec{r} + \phi_0) \right\}}_{A(\vec{r},t)}, \quad (2.252)$$

wobei  $\vec{e}_k$  für die Polarisationsrichtung der Mode steht. Offensichtlich wird das Feld durch eine orts- und zeitabhängige Amplitude  $A(\vec{r}, t)$  vollständig festgelegt. Wie lässt sich dieses einfache Konzept auf die quantenmechanische Beschreibung übertragen? Hier muss natürlich der Operatorcharakter berücksichtigt werden. Für das einmodige freie elektrische Feld gilt:

$$\hat{E}_k = i\omega [A_k(\vec{r})\hat{a} - A_k^*(\vec{r})\hat{a}^+] = \omega |A_k(\vec{r})| \hat{X}(\varphi). \quad (2.253)$$

Es wurde, analog zur klassischen Darstellung, der Operator der phasengedrehten Quadraturkomponente  $\hat{X}(\varphi)$  eingeführt [VW06], der in Abhängigkeit vom Modenindex  $\lambda$  durch

$$\hat{X}_\lambda(\varphi_\lambda(\vec{r}, t)) = \hat{a}_{0\lambda} \exp \{i\varphi_\lambda\} + \hat{a}_{0\lambda}^+ \exp \{-i\varphi_\lambda\} \quad (2.254)$$

dargestellt werden kann. Die Zeitabhängigkeit der Erzeuger und Vernichter, die entsprechend der Heisenbergschen Bewegungsgleichung für ein freies Feld durch

$$\dot{\hat{a}}_\lambda = \frac{i}{\hbar} [\hat{a}_\lambda, \hat{H}_{mul}] = -i\omega_\lambda \hat{a}_\lambda \Rightarrow \hat{a}_\lambda = \hat{a}_{0\lambda} \exp \{-i\omega_\lambda \cdot t\} \quad (2.255)$$

gegeben ist, wurde auf die allgemeine Phase  $\varphi_\lambda(\vec{r}, t)$  übertragen. Bei genauer Betrachtung sieht man, dass es sich bei der klassischen Beschreibung aus Gleichung (2.252) um eine Polardarstellung des elektrischen Feldes handelt (siehe Abb. 2.16). Anstelle von Amplitude und Phase können genauso gut die Variablen  $X$  und  $Y$  zur Beschreibung verwendet werden. Bei ihnen handelt es sich um die Projektionen der Amplitude auf die Koordinatenachsen. Für die klassische Amplitude ergibt sich:

$$A \exp \left\{ i(\omega t + \vec{k}\vec{r} + \phi_0) \right\} = X \cdot \cos(\omega t + \vec{k}\vec{r}) + Y \sin(\omega t + \vec{k}\vec{r}). \quad (2.256)$$

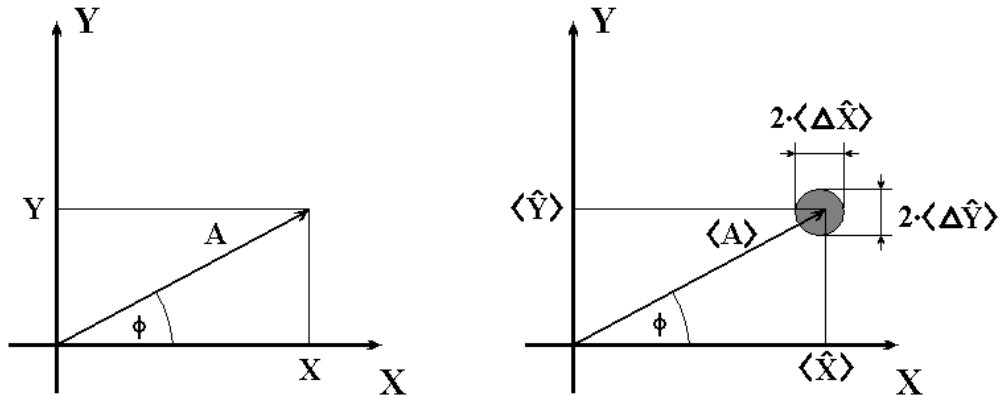


Abbildung 2.16: Phasordiagramme, links für ein monomodiges klassisches Feld und rechts für einen kohärenten Zustand  $|\alpha\rangle$  mit eingezeichnetem Unscharfereich (graue Kreisfläche).

Somit ist die Phase  $\phi_0$  auf die Größen  $X$  und  $Y$  übertragen worden.  $X$  und  $Y$  werden auch als Quadraturkomponenten des Feldes bezeichnet und in der Quantenmechanik durch kanonisch konjugierte Operatoren

$$\hat{X}_\lambda = \hat{a}_\lambda^+ + \hat{a}_\lambda, \quad (2.257)$$

$$\hat{Y}_\lambda = i(\hat{a}_\lambda^+ - \hat{a}_\lambda), \quad (2.258)$$

dargestellt. Sie sind spezielle Fälle des allgemeiner definierten Operators<sup>3</sup> der phasengedrehten Quadraturkomponente aus Gleichung (2.254)

$$\hat{X}_\lambda = \hat{X}_\lambda(\varphi_\lambda = -\omega_\lambda t), \quad \hat{Y}_\lambda = \hat{X}_\lambda(\varphi'_\lambda = -\omega_\lambda t - \frac{\pi}{2}), \quad (2.259)$$

die um die relative Phasen  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$  zu einander verschoben sind. Durch Adjunktion wird sofort sichtbar, dass es sich bei den phasengedrehten Quadraturkomponenten um hermitesche Operatoren handelt, für die folgende Vertauschungsrelation

$$\left[ \hat{X}_\lambda(\varphi_\lambda), \hat{X}_\lambda(\varphi'_\lambda) \right] = 2i \sin(\varphi_\lambda - \varphi'_\lambda) \quad (2.260)$$

gilt [VW06]. Bei den Quadraturkomponenten  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$  handelt es sich um verallgemeinerte Orte und Impulse. Sie beschreiben die Amplitude des Feldes und deren zeitliche Änderung.

<sup>3</sup>Die Operatoren der Quadraturkomponenten werden zukünftig zur Vereinfachung nur noch als Quadraturkomponenten bezeichnet.



In welchem Verhältnis steht nun der Vektorfeld-Operator aus Gleichung (2.75) zu den Operatoren der Quadraturkomponenten? Um dies zu zeigen, übertragen wir zunächst die Zeitabhängigkeit von den Operatoren auf die Modenfunktion

$$A_\lambda(\vec{r}, t) = A_\lambda(\vec{r}) \exp\{-i\omega_\lambda \cdot t\} = \text{Re}(A_\lambda(\vec{r}, t)) + i \cdot \text{Im}(A_\lambda(\vec{r}, t)) \quad (2.261)$$

und spalten danach  $A_\lambda(\vec{r}, t)$  in Realteil  $\text{Re}(\dots)$  und Imaginärteil  $\text{Im}(\dots)$  auf. Daraus folgt für das Vektorpotential  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} = \sum_\lambda \left\{ \text{Re}(A_\lambda(\vec{r}, t)) \cdot \hat{X}_{0\lambda} - \text{Im}(A_\lambda(\vec{r}, t)) \cdot \hat{Y}_{0\lambda} \right\}. \quad (2.262)$$

Das transversale elektrische Feld ergibt sich aus der zeitlichen Ableitung zu:

$$\hat{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \omega_\lambda \left\{ \text{Im}(A_\lambda(\vec{r}, t)) \cdot \hat{X}_{0\lambda} + \text{Re}(A_\lambda(\vec{r}, t)) \cdot \hat{Y}_{0\lambda} \right\}. \quad (2.263)$$

Anhand eines einmodigen kohärenten Zustandes soll nun die Verschiebung in einem Phasordiagramm (siehe Abbildung 2.16) veranschaulicht werden. Hier wird der kohärente Zustand, sowie sein Unschärfebereich in der komplexen X-Y-Ebene dargestellt [Cav81]. Für die Unschärfe der Quadraturkomponenten gilt im einmodigen Fall

$$\Delta \hat{X} \cdot \Delta \hat{Y} \geq 1, \quad (2.264)$$

wie durch Einsetzen von Gleichung (2.260) in Gleichung (2.4) gezeigt werden kann. Im Fall der kohärenten Zustände erhält man  $\Delta \hat{X} = \Delta \hat{Y} = 1$  [WM94], unabhängig vom Parameter  $\alpha$ . Da der kohärente Zustand für  $\alpha \rightarrow 0$  in den Vakuumzustand übergeht, werden beide Zustände im Phasordiagramm als kreisrunde Unschärfebereiche minimaler Fläche dargestellt. Innerhalb dieser Kreisfläche finden die Fluktuationen der Quadraturkomponenten des Ensembles statt. Im Gegensatz dazu besitzt das klassische Feld, fälschlicherweise, keine Unschärfe und wird deshalb durch einen scharfen Punkt im Phasordiagramm dargestellt. Der Verschiebe-Operator  $\hat{D}(\alpha)$ , der den kohärenten Zustand erzeugt, bewirkt eine Versetzung der Unschärfefläche in Abhängigkeit von  $\alpha_\lambda = |\alpha_\lambda| \cdot \exp\{i\varphi_{\alpha_\lambda}\}$ .

## Zeitabhängigkeit der Quadraturkomponenten

Verbleibt die Zeitabhängigkeit wie in Gleichung (2.254) dargestellt beim Operator, so wird die Zeitentwicklung des kohärenten Zustands im Phasordiagramm sichtbar (siehe Abbildung 2.17). Der kohärente Zustand ist ein nichtstationärer Zustand. In [MS66] wird gezeigt, welche funktionale Zeitabhängigkeit der Hamiltonian aufweisen muss, damit der kohärente Zustand kohärent bleibt. Die zeitabhängigen Erwartungswerte der Quadraturkomponenten verhalten sich wie Real- und Imaginärteil des Verschiebungsparameters  $\alpha$ , skaliert mit dem Faktor Zwei. Für das freie Feld gilt:

$$\langle \hat{Y}_\lambda(t) \rangle = \left\langle \hat{X}_\lambda \left( t + \frac{\pi}{2\omega_\lambda} \right) \right\rangle = 2 \cdot |\alpha_\lambda| \sin(\varphi_{\alpha_\lambda} - \omega_\lambda t) \quad (2.265)$$

$$\langle \hat{X}_\lambda(t) \rangle = 2 \cdot |\alpha_\lambda| \cos(\varphi_{\alpha_\lambda} - \omega_\lambda t). \quad (2.266)$$

Folglich ist die eingezeichnete Länge des Zeigers im Phasordiagramm gleich  $2 \cdot |\alpha|$ . Der Winkel

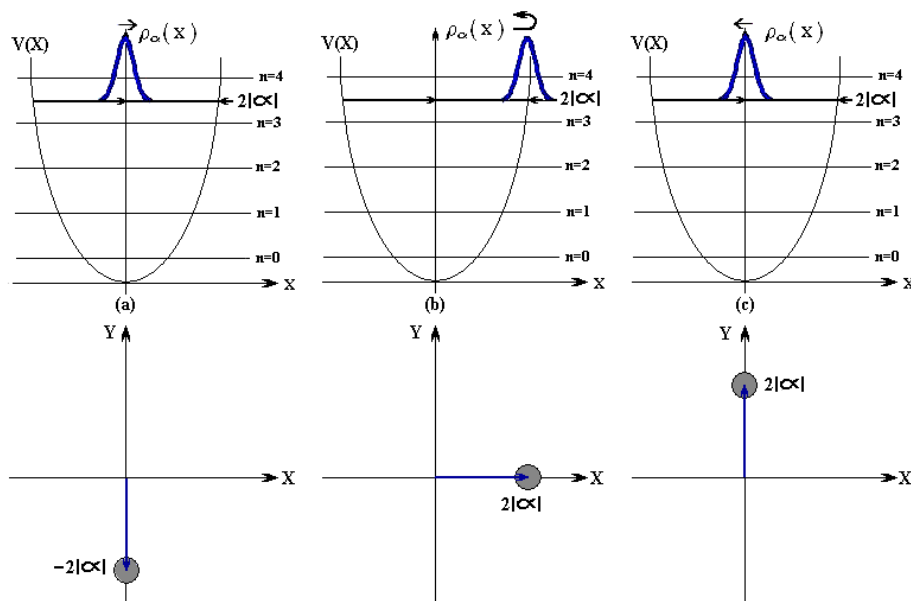


Abbildung 2.17: Dargestellt wird die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustands  $|\alpha\rangle$ , oben als Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\langle X | \alpha \rangle|^2 = |\psi_\alpha(X)|^2$  über den Potentialverlauf  $V(X)$ , des verallgemeinerten Ortes  $X$ , unten als Phasordiagramm über verallgemeinerte Orts-  $X$  und Impulskoordinaten  $Y$ . Die Phase  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$  nimmt die folgenden Werte an. (a):  $\varphi = \varphi_0$ , (b):  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ , (c):  $\varphi = \varphi_0 + \pi$ .

zum Zeitpunkt  $t = 0$  s ist durch die Phase  $\varphi_{\alpha_\lambda}$  gegeben. Die Zeitentwicklung bewirkt eine Rotation des Zeigers im Gegenuhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz  $\omega_\lambda$ . Ein Vorzeichenwechsel in der Frequenz führt zu einer Drehung im Uhrzeigersinn. Die Zeitentwicklung der Amplitude lässt sich auch unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitsdichte über dem Potentialverlauf  $V(X)$  auftragen. Dazu wird das Skalarprodukt des kohärenten Zustands  $|\alpha\rangle$  und des Quadratureigenzustands  $|X, \varphi\rangle$  gebildet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  ist dann durch eine phasenabhängige Gaussverteilung

$$\rho_\alpha(X, \varphi) = |\langle \alpha | X, \varphi \rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ X - \langle \hat{X}_\lambda(\varphi) \rangle \right]^2 \right\}, \quad (2.267)$$

gegeben [VW06]. Für  $\varphi = 0$  geht die phasengedrehte Quadraturkomponente  $\hat{X}_\lambda(\varphi_\lambda(\vec{r}, t))$  in den verallgemeinerten Orts-Operator aus Gleichung (2.257) über. Damit entspricht der Zustand  $|X, \varphi = 0\rangle = |X\rangle$  dem zeitunabhängigen Ortszustand (Amplitudenzustand). Die Zeitentwicklung von  $\rho_\alpha(X, \varphi)$  ergibt sich durch einsetzen von  $\langle \hat{X}_\lambda(t) \rangle$  aus Gleichung (2.266) für den Erwartungswert  $\langle \hat{X}_\lambda(\varphi) \rangle$  in Gleichung (2.267). Die Phase  $\varphi_{\alpha_\lambda}$  bezieht sich auf die  $X$ -Achse und legt den Anfangszustand fest. Man könnte natürlich auch den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho_\alpha(Y, \varphi)$  betrachten, wodurch die zeitliche Entwicklung des verallgemeinerten Impulses

beschrieben wird (zeitliche Änderung der Amplitude). Dazu müsste man nur den Erwartungswert von  $\hat{Y}$  in Gleichung (2.267) einsetzen. Die Phasordiagramme ermöglichen es gleichzeitig die konjugierten Variablen des Feldes darzustellen.

### Multimodige kohärente Zustände

Der kohärente Zustand kann natürlich auch für multimodige Felder definiert werden [Gla63]. Er entsteht, indem mehrere Moden  $\lambda$  einer Verschiebung um  $\alpha_\lambda$  unterzogen werden. Folglich muss für jede relevante Mode ein Verschiebe-Operator auf den Vakuumzustand angewendet werden. Damit ist der multimodige Verschiebe-Operator durch

$$\hat{D}_{\{\lambda\}}(\{\alpha_\lambda\}) = \prod_{\lambda} \hat{D}_{\lambda}(\alpha_\lambda) = \exp \left\{ \sum_{\lambda} \alpha_\lambda a_{\lambda}^{\dagger} - \alpha_{\lambda}^* a_{\lambda} \right\} \quad (2.268)$$

gegeben. Die Darstellung der multimodigen kohärenten Zustände erfolgt in Analogie zu den Teilchenzahlzuständen aus Gleichung (2.236):

$$|\{\alpha_\lambda\}\rangle = \prod_{\lambda} |\alpha_\lambda\rangle. \quad (2.269)$$

Wendet man den Operator  $\hat{E}^{(+)}$  aus Gleichung (2.123) auf den multimodigen kohärenten Zustand an

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) |\{\alpha_\lambda\}\rangle = \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) |\{\alpha_\lambda\}\rangle, \quad (2.270)$$

so erkennt man, dass der multimodige kohärente Zustand auch der Eigenzustand des Operators der positiven Frequenzkomponenten des Feldes ist [Gla63]. Betrachten wir nun den Erwartungswert und die Varianz des Operators  $\hat{E}$ :

$$\langle \{\alpha_\lambda\} | \hat{E} | \{\alpha_\lambda\} \rangle = i \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \left( \vec{A}_{\lambda} \alpha_{\lambda} - \vec{A}_{\lambda}^* \alpha_{\lambda}^* \right) = 2 \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} |\vec{A}_{\lambda} \alpha_{\lambda}| \vec{e}_{\lambda} \sin(\omega_{\lambda} t + \varphi_{\lambda}), \quad (2.271)$$

$$\langle \{\alpha_\lambda\} | (\Delta \hat{E})^2 | \{\alpha_\lambda\} \rangle = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda}^2 |\vec{A}_{\lambda}|^2. \quad (2.272)$$

Offensichtlich verhält sich der Erwartungswert des multimodigen elektrischen Feldes wie eine Superposition von ebenen Wellen, also Analog zu einem klassischen Feld (siehe Realteil von Gleichung (2.105)). Vergleicht man das Ergebnis von Gleichung (2.272) mit Gleichung (2.93) so zeigt sich, dass die Fluktuation exakt der Vakuumsschwankung entspricht. Da der Teilchenzahl-Operator in der Photodetektion eine wichtige Rolle einnimmt, werden Mittelwert und Varianz des multimodigen kohärenten Zustands betrachtet:

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \{\alpha_\lambda\} | \sum_{\lambda} \hat{n}_{\lambda} | \{\alpha_\lambda\} \rangle = \sum_{\lambda} |\alpha_{\lambda}|^2, \quad (2.273)$$

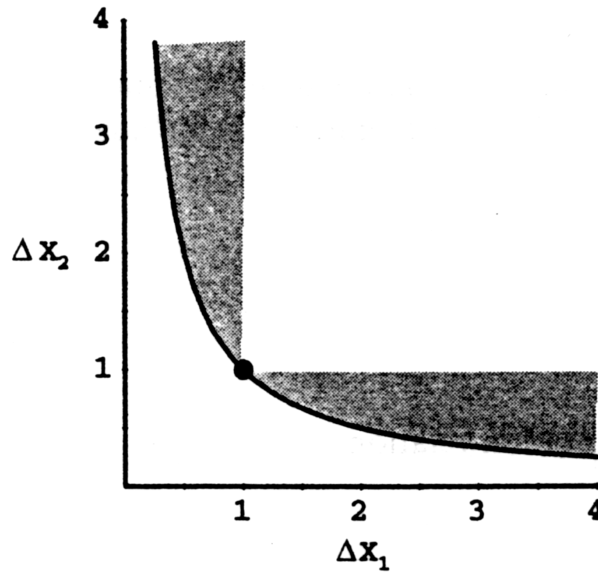


Abbildung 2.18: Graphische Darstellung von  $\Delta X_1 = \Delta X$  und  $\Delta X_2 = \Delta Y$  für Zustände minimaler Unschärfe. Der kohärente Zustand ist als schwarzer Punkt zu erkennen, während die schattierten Bereiche die gequetschten Zustände darstellen [WM94].

$$\langle \{\alpha_\lambda\} | (\Delta \hat{N})^2 | \{\alpha_\lambda\} \rangle = \langle \{\alpha_\lambda\} | \hat{N} | \{\alpha_\lambda\} \rangle = \sum_\lambda |\alpha_\lambda|^2. \quad (2.274)$$

Im Falle des kohärenten multimodigen Zustandes ist die Varianz des Teilchenzahl-Operators gleich dem Erwartungswert. Da sich die multimodige Photonverteilung aus Gleichung (2.225) aus der monomodigen aufbaut, erhält man für den multimodigen Fall wieder eine Poisson-Verteilung.

Beim kohärenten Zustand handelt es sich um einen Zustand minimaler Unschärfe. Damit gilt in Gleichung (2.264) das Gleichheitszeichen. Zusätzlich ist die Unschärfe in den beiden Quadraturkomponenten gleich groß  $\Delta X = \Delta Y = 1$ . Die Unschärferelation lässt noch eine weitere Klasse von Zuständen minimaler Unschärfe zu. Dazu verkleinert man die Unschärfe in einer Quadraturkomponente auf Kosten der Anderen. Damit gilt beispielsweise:

$$\Delta X \cdot \Delta Y = 1 \quad 0 \leq \Delta X < 1 \quad \wedge \quad 1 < \Delta Y = \frac{1}{\Delta X}. \quad (2.275)$$

Es handelt sich immer noch um einen Zustand minimaler Unschärfe. Allerdings ist die Unschärfe nun asymmetrisch auf die Quadraturkomponenten verteilt. Diese Zustände sind in Abbildung 2.18 durch eine hyperbolische Kurve dargestellt. Dem geschwärtzten Punkt entspricht der kohärente Zustand. Noch allgemeiner wird gefordert, dass  $\Delta X < 1 < \Delta Y$  bzw.  $\Delta Y < 1 < \Delta X$  gilt [WM94], ohne dass die Unschärferelation minimal wird (schattierte Regionen). Diese Zustände bezeichnen wir als gequetschte Zustände [Wal86].

### 2.4.3 Gequetschte Zustände

Der kohärente Zustand ist in Gleichung (2.243) als Eigenzustand des Vernichtungs-Operators  $\hat{a}$  definiert worden. Durch eine unitäre Transformation können neue Vernichter und Erzeuger gebildet werden, die Quasiphotonen erzeugen bzw. vernichten [Yue76]. Die gequetschten Zustände sind dann die Eigenzustände des neuen Vernichtungs-Operators  $\hat{b}$ . Um ihn zu erhalten, wird zunächst ein unitärer Operator  $\hat{S}(\xi)$  definiert, der als Quetschungs-Operator bezeichnet wird.

$$\hat{S}(\xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{+2}) \right\}. \quad (2.276)$$

Wenden wir den Quetschungs-Operator auf den Vernichtungs-Operator  $\hat{a}$  an, so erhalten wir den transformierten Vernichtungs-Operator  $\hat{b}$ :

$$\hat{b} = \hat{S}(\xi) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\xi) = \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^+, \quad (2.277)$$

und durch Adjunktion den entsprechenden Erzeugungs-Operator  $\hat{b}^+$ :

$$\hat{b}^+ = \mu \hat{a}^+ + \nu^* \hat{a}. \quad (2.278)$$

Bei den Quasiphotonen-Operatoren handelt es sich um Linearkombinationen der Photonen Erzeuger  $\hat{a}^+$  und Vernichter  $\hat{a}$ . Da  $\hat{b}$  und  $\hat{b}^+$  durch eine unitäre Transformation entstanden sind, gilt die Kommutatorrelation

$$[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1 \quad (2.279)$$

weiterhin, wenn folgende Bedingung

$$\mu^2 - |\nu|^2 = 1 \quad (2.280)$$

erfüllt ist. Dies wird durch

$$\mu^2 - |\nu|^2 = \cosh^2(|\xi|) - \sinh^2(|\xi|), \quad \nu = e^{i\varphi_\xi} \sinh(|\xi|) \quad (2.281)$$

gewährleistet. Für den transformierten Vernichtungs-Operator gilt dann:

$$\hat{b} = \cosh(|\xi|) \hat{a} + \exp(i\varphi_\xi) \sinh(|\xi|) \hat{a}^+. \quad (2.282)$$

Hier steht  $|\xi|$  für den Betrag des Quetschungsparameters und  $\varphi_\xi$  für seine Phase. Von besonderem Interesse sind die gequetschten kohärenten Zustände, die durch den unitären Operator  $\hat{U}(\xi, \alpha)$  erzeugt werden:

$$\hat{U}(\xi, \alpha) = \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha), \quad (2.283)$$

der sich aus dem Produkt des Quetschungs- und des Verschiebe-Operators aus Gleichung (2.245) ergibt. Wird dieser Operator auf den Vakuumzustand  $|0\rangle$  angewandt, so folgt:

$$\hat{U}(\xi, \alpha) |0\rangle = \hat{S}(\xi) |\alpha\rangle = |\xi, \alpha\rangle. \quad (2.284)$$

Der gequetschte kohärente Zustand  $|\xi, \alpha\rangle$  ist der Eigenzustand des transformierten Vernichtungs-Operators  $\hat{b}$ :

$$\hat{b}|\xi, \alpha\rangle = \alpha|\xi, \alpha\rangle, \quad (2.285)$$

mit dem Eigenwert  $\alpha$ . Analog zu den kohärenten Zuständen sind die gequetschten kohärenten Zustände nicht orthogonal und übervollständig [Sto70]:

$$\langle\xi, \beta|\xi, \alpha\rangle = \langle\beta|\hat{S}^+(\xi)\hat{S}(\xi)|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle, \quad \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\xi, \alpha\rangle \langle\xi, \alpha| = \hat{1}. \quad (2.286)$$

Um Aufschluss über die Photonenzahlstatistik eines gequetschten Zustands zu erhalten, wird wieder auf den Teilchenzahlzustand  $|n\rangle$  projiziert [Yue76]:

$$\langle n|\xi, \alpha\rangle = \frac{[\nu/(2\mu)]^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\mu n!}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - \frac{\nu^*}{\mu}\alpha^2\right)\right\} H_n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu\nu}}\right). \quad (2.287)$$

$H_n$  steht für das n-te Hermite-Polynom. Nimmt man nun das Betragsquadrat von Gleichung (2.287), so folgt

$$P_n = |\langle n|\xi, \alpha\rangle|^2, \quad (2.288)$$

das in Gleichung (2.207) eingesetzt die Photonenzahlstatistik des Zustands  $|\xi, \alpha\rangle$  ergibt. Für die Erwartungswerte des einmodigen Teilchenzahl-Operators  $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$  gilt [VW06]:

$$\langle\xi, \alpha|\hat{n}|\xi, \alpha\rangle = |\alpha'|^2 + |\nu|^2 \quad (2.289)$$

und für den in k-Richtung polarisierten Feld-Operator:

$$\langle\xi, \alpha|\hat{E}_k(\vec{r})|\xi, \alpha\rangle = i\omega [A_k(\vec{r})\alpha' - A_k^*(\vec{r})\alpha'^*]. \quad (2.290)$$

Hier wurde der gequetschte Verschiebeparameter  $\alpha'$  verwendet, der durch

$$\alpha' = \mu\alpha - \nu\alpha^* \quad (2.291)$$

gegeben ist. Folglich verhält sich die mittlere Amplitude des elektrischen Feldes so, als würde sich das Feld in dem kohärenten Zustand  $|\alpha'\rangle$  befinden. Dies wird auch durch die Umformung von Gleichung (2.284) deutlich<sup>4</sup>:

$$\hat{U}(\xi, \alpha)|0\rangle = \underbrace{\hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)\hat{S}^+(\xi)}_{\hat{D}(\alpha')} \hat{S}(\xi)|0\rangle = \hat{D}(\alpha')|\xi, 0\rangle = |\xi, \alpha\rangle. \quad (2.293)$$

<sup>4</sup>Abweichend von der Definition der gequetschten kohärenten Zustände in Gleichung (2.284) findet man auch folgende Definition [WM94]:

$$|\xi, \alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (2.292)$$

Diese Darstellung führt zu anderen Ergebnissen, wie am Beispiel des Erwartungswerts des Teilchenzahl-Operators  $\langle\hat{n}\rangle = \langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle = |\alpha|^2 + |\nu|^2 \neq |\alpha'|^2 + |\nu|^2$  deutlich wird. Die Bedeutung des Verschiebeparameters  $\alpha$  in  $|\xi, \alpha\rangle$  hängt somit von der Definition des Zustands ab.

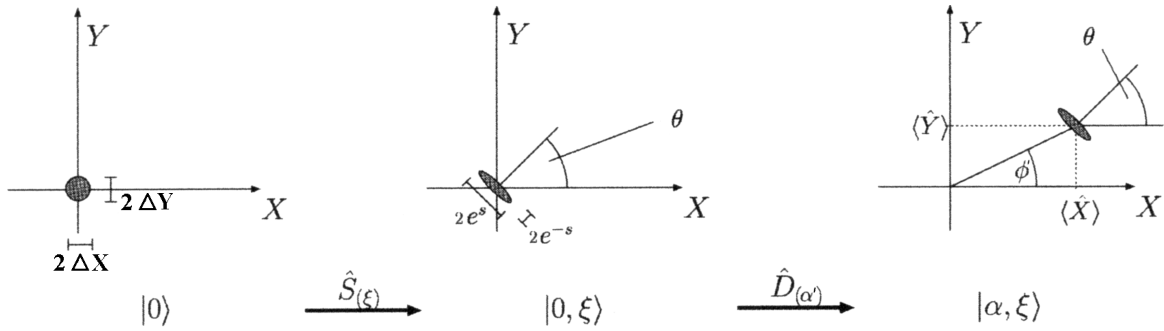


Abbildung 2.19: Erzeugung eines gequetschten, kohärenten Zustands  $||\xi\rangle e^{i\theta}, |\alpha\rangle e^{i\phi}\rangle$ .

Hier wird zuerst der Quetschungs-Operator  $\hat{S}(\xi)$  auf den Vakuumzustand  $|0\rangle$  angewendet. Dadurch entsteht ein gequetschtes Vakuum  $|\xi, 0\rangle$ . Um den gleichen Zustand wie zuvor zu erzeugen, muss der Verschiebe-Operator  $\hat{D}(\alpha')$  mit dem transformierten Verschiebungsparameter  $\alpha'$  verwendet werden. Offensichtlich ist die Reihenfolge der Operatoren zu beachten, da Verschiebe- und Quetschungs-Operator nicht vertauschen.

### Betrachtung der Quadraturkomponenten von gequetschten Zuständen

Um wieder ein anschauliches Bild der gequetschten kohärenten Zustände zu erhalten, wenden wir zunächst den Quetschungs-Operator auf das Vakuum an. Wie in Abbildung 2.19 zu sehen ist, bewirkt der Quetschungs-Operator eine Verformung des Unschärfekreises zu einer Ellipse. Zusätzlich werden die Hauptachsen der Ellipse gegenüber dem Koordinatensystem um den Winkel  $\varphi_\xi = \theta$  verdreht [Wal83]. Bei der Verformung bleibt die Unschärfefläche erhalten. Als nächstes wird der Verschiebe-Operator  $\hat{D}(\alpha')$  auf das gequetschte Vakuum angewendet. Wie schon zuvor erklärt wurde, bewirkt der Verschiebe-Operator eine Versetzung des Unschärfebereichs um den Wert  $|\alpha'| \cdot e^{i\phi'}$ . Für weitere Betrachtungen wird der Erwartungswert der phasengedrehten Quadraturkomponenten aus Gleichung (2.254) für den gequetschten kohärenten Zustand berechnet

$$\langle \xi, \alpha | \hat{X}(\varphi) | \xi, \alpha \rangle = \alpha'_0 \exp\{i\varphi\} + \alpha_0'^* \exp\{-i\varphi\} = 2|\alpha'_0| \cos(\varphi + \varphi_{\alpha'_0}), \quad (2.294)$$

wobei  $\varphi_{\alpha'_0}$  für die Phase des Verschiebungsparameters  $\alpha'_0$  steht. Im Fall des freien Feldes ist der Erwartungswert des elektrischen Feld-Operators aus Gleichung (2.253) durch die Phase  $\varphi = \omega t + \frac{\pi}{2} + \phi_{A_k(\vec{r})}$  bestimmt. Bleibt noch die Frage nach der zeitlichen Schwankung der Amplitude. Dazu definieren wir den Operator der Amplitudenschwankung  $\Delta\hat{X}(\varphi)$ , für die phasengedrehte Quadraturkomponente:

$$\Delta\hat{X}(\varphi) = \hat{X}(\varphi) - \langle \hat{X}(\varphi) \rangle. \quad (2.295)$$

Für die Varianz der phasengedrehten Quadraturkomponente gilt dann:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \alpha | (\Delta\hat{X}(\varphi))^2 | \xi, \alpha \rangle &= |\mu - |\nu| \exp\{i(2\varphi + \varphi_\xi)\}|^2 \\ &= 1 + 2|\nu|^2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{1 + |\nu|^2}{|\nu|^2}} \cos(2\varphi + \varphi_\xi) \right]. \end{aligned} \quad (2.296)$$

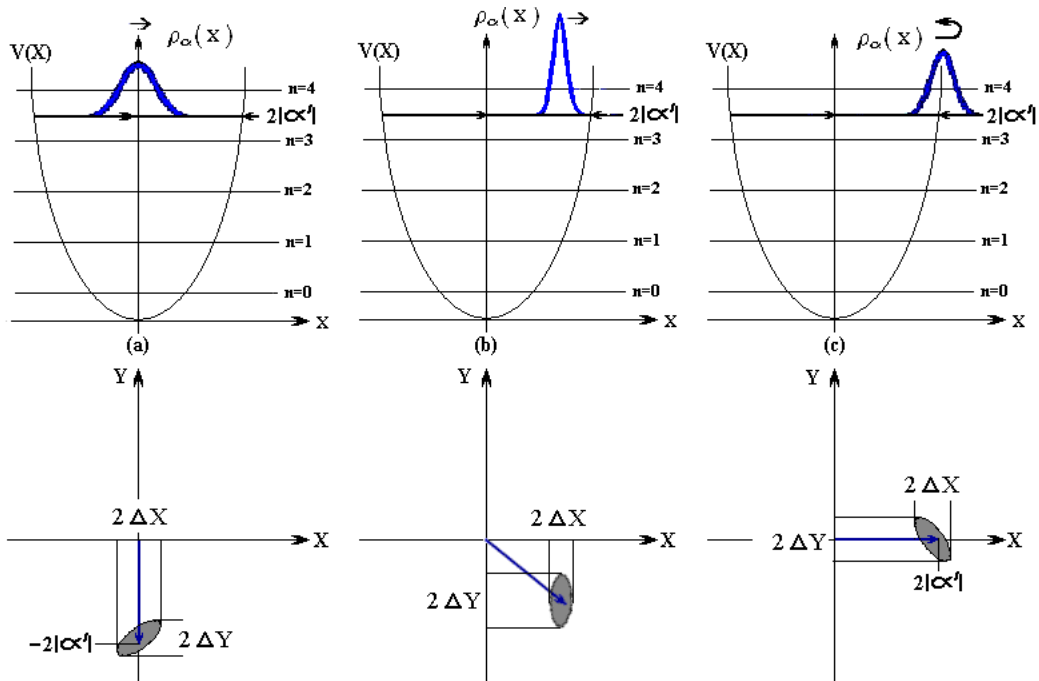


Abbildung 2.20: Zeitentwicklung eines gequetschten kohärenten Zustands  $|\xi, \alpha\rangle$ , (a):  $\varphi = \varphi_0$ , (b):  $\varphi \approx \varphi_0 + 0,3\pi$ , (c):  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ .

Im Falle des freien Feldes kann die zeitliche Entwicklung des Schwankungsquadrats der Amplitude direkt über die Phase  $\varphi$  dargestellt werden. Da in Gleichung (2.296) der Faktor Zwei im Argument der Kosinusfunktion steht, oszilliert die Unschärfe des elektrischen Feldes mit der doppelten Frequenz der Feldamplitude ( $|\nu| > 0$ ). Demnach dreht sich die Unschärfeellipse um ihr Zentrum mit der Frequenz  $\omega$ . Da gleichzeitig der Zeiger  $\alpha'$  mit der selben Frequenz um den Koordinatenursprung rotiert, ändert sich die relative Lage der Hauptachsen des Unschärfereichs zum Zeiger nicht, siehe Abbildung 2.20. Die Unschärfe in den Quadraturkomponenten oszilliert jedoch mit der doppelten Frequenz  $2\omega$ . Die Zeitabhängigkeit des gequetschten Zustands ist für ein freies Feld durch [Sto70]

$$|\xi(t), \alpha(t)\rangle = |\xi_0 \cdot e^{i2\omega t}, \alpha_0 \cdot e^{-i\omega t}\rangle \quad (2.297)$$

gegeben. Folglich wird die Unschärfe des freien elektrischen Feldes während der zeitlichen Entwicklung im gequetschten Zustand ( $\nu \neq 0$ ) größer und kleiner als Eins. Betrachten wir nun das quadratische Unschärfeprodukt der Operatoren  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$  [VW06]:

$$\langle \xi, \alpha | \Delta \hat{X}^{\prime 2}(\varphi) | \xi, \alpha \rangle \underbrace{\langle \xi, \alpha | \Delta \hat{X}^{\prime 2}(\varphi + \frac{\pi}{2}) | \xi, \alpha \rangle}_{\Delta \hat{Y}^{\prime 2}(\varphi)} = 1 + 4\mu^2 |\nu|^2 \sin^2(2\varphi + \varphi_\xi). \quad (2.298)$$

Sind wir an den Winkeln  $\varphi$  interessiert, die minimale Unschärfeprodukte erzeugen, so muss das Argument des Kosinus in Gleichung (2.296) gleich einem ganzzahligen Vielfachen  $n$  von  $2\pi$



sein:

$$\varphi_{min} = n\pi - \frac{1}{2}\varphi_\xi \quad \Rightarrow \quad \langle \xi, \alpha | \left[ \Delta \hat{X}(\varphi_{min}) \right]^2 | \xi, \alpha \rangle = \exp \{-2|\xi|\}. \quad (2.299)$$

Für die um  $\frac{\pi}{2}$  verdrehte Quadraturkomponente ergibt sich:

$$\varphi_{max} = (n + \frac{1}{2})\pi - \frac{1}{2}\varphi_\xi \quad \Rightarrow \quad \langle \xi, \alpha | \left[ \Delta \hat{X}(\varphi_{max}) \right]^2 | \xi, \alpha \rangle = \exp \{2|\xi|\}. \quad (2.300)$$

Setzt man in Gleichung (2.298)  $\varphi = \varphi_{min}$  ein, so erhält man das minimale Unschärfeprodukt. Die Lage des Unschärfebereichs für den Winkel  $\varphi_{min}$  ist auch in Abbildung 2.20 unter (b) zu sehen. Hier handelt es sich um einen Zustand, der sowohl in der Phase als auch in der Amplitude gequetscht ist. Die zwei extremalen Fälle sind in Abbildung 2.21 zu sehen. Links ist ein amplitudengequetschter Zustand dargestellt. Im Phasordiagramm (oben) erkennt man, dass die kürzere Hauptachse der Ellipse genau parallel zum Zeiger liegt. Im zeitlichen Verlauf des Feldes ist zu sehen, dass die Amplitude bei maximaler Auslenkung eine minimale Unschärfe  $\Delta E_{min}$  von

$$\Delta E_{min} = \omega |A_k| e^{-|\xi|} \quad (2.301)$$

besitzt. Auf der rechten Seite der Abbildung 2.21 ist ein phasengequetschter Zustand gezeichnet. Hier sind Zeiger und große Hauptachse der Ellipse parallel. Dies hat zur Folge, dass die Amplitude des Feldes bei maximaler Auslenkung maximale Unschärfe besitzt. Andererseits besitzt die Phase beim Nulldurchgang des Feldes eine reduzierte Unschärfe. Um die Phase eines Zustands zu ermitteln, benötigt man einen hermiteschen Phasen-Operator, der in [PB89] definiert ist. Dort wird auch auf die Problematik der Phasen-Besetzungszahl-Unschärfe eingegangen.

Es soll noch kurz auf die Erzeugung gequetschter Zustände hingewiesen werden. Man benötigt dazu einen optischen Prozess, dessen Zeitentwicklung durch

$$\hat{U}(t, \Delta t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\Delta t} \hat{H} dt \right\} = \hat{S}(\xi(t, \Delta t)) \quad (2.302)$$

beschrieben wird. Es muss sich dabei um einen nichtlinearen Prozess handeln, da die Erzeuger und Vernichter quadratisch im Argument der Exponentialfunktion auftreten. Wird nämlich  $a^{+2}$  bzw.  $a^2$  auf einen Zustand angewandt, so hat dies die gleichzeitige Erzeugung bzw. Vernichtung von zwei Photonen in einer Mode zur Folge. Ein Typischer Prozess, der gequetschtes Licht dieser Art erzeugt, ist die entartete parametrische Verstärkung [Yue76].

## Multimodige gequetschte Zustände

Auch für die gequetschten Zustände lässt sich das monomodige Konzept ohne Schwierigkeiten auf ein multimodiges erweitern [LS93]. Der multimodige Quetschungs-Operator  $\hat{S}_m$  ist durch

$$\hat{S}_m = \exp \left\{ \sum_{\lambda\lambda'} (\xi_{\lambda\lambda'}^* \hat{a}_\lambda \hat{a}_{\lambda'} - \xi_{\lambda\lambda'} \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_{\lambda'}^+) \right\} \quad (2.303)$$

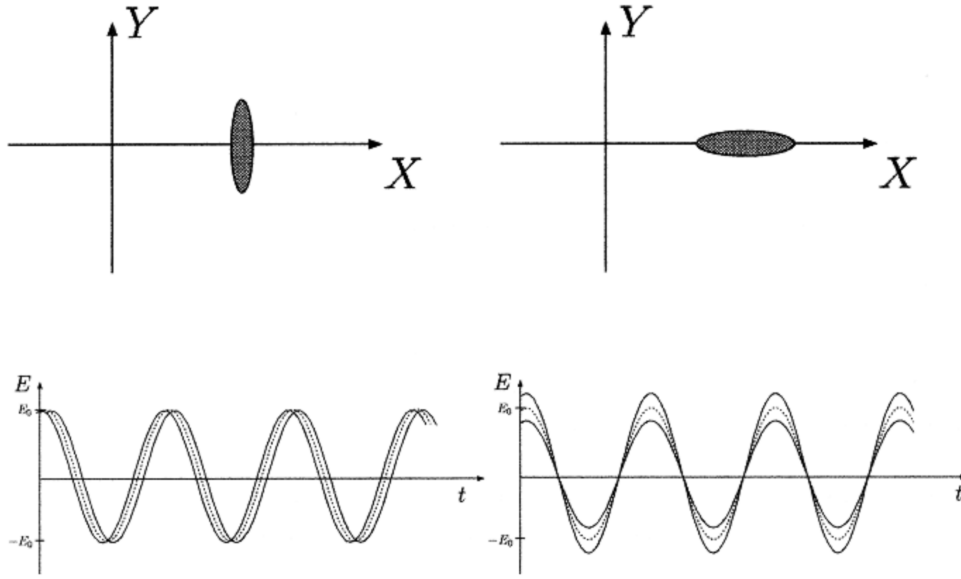


Abbildung 2.21: Phasordiagramme (oben) und zeitliche Verläufe der elektrischen Felder (unten), für Zustände mit reduzierter Amplitudenfluktuation (links) und Phasenfluktuation (rechts). Der zeitliche Mittelwert des Feldes  $E_0$  ist durch die gepunktete Linie dargestellt, während der zeitabhängige Unschärfbereich durch die Einhüllenden gegeben ist [Wal83].

gegeben. Es fällt sofort auf, dass hier auch Kopplungen zwischen verschiedenen Moden auftreten. Die Stärke der Kopplung hängt von den Matrixelemente  $\xi_{\lambda\lambda'}$  ab, die im multimodigen Fall die Funktion des Quetschungsparameters  $\xi$  übernehmen. Die Nebendiagonalelemente der Matrix erzeugen verschränkte Zustände [VW06]. Für den Fall einer Diagonalmatrix

$$\xi_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{\xi_\lambda}{2}, \quad (2.304)$$

ergeben sich keine Kopplungen der einzelnen Moden und wir erhalten:

$$\hat{S}_{m,red} = \exp \left\{ \sum_{\lambda} (\xi_{\lambda}^* \hat{a}_{\lambda}^2 - \xi_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{+2}) \right\} = \prod_i \exp \{ (\xi_{\lambda_i}^* \hat{a}_{\lambda_i}^2 - \xi_{\lambda_i} \hat{a}_{\lambda_i}^{+2}) \}. \quad (2.305)$$

Die Zerlegung in ein Produkt aus einmodigen Quetschungs-Operatoren ist erlaubt, da nach Gleichung (2.30) die Vernichter und Erzeuger unterschiedlicher Moden vertauschen. Dieser multimodige Quetschungs-Operator kann nun auf einen multimodigen kohärenten Zustand angewendet werden, woraus ein multimodiger gequetschter kohärenter Zustand entsteht. Er lässt sich als Produktzustand darstellen:

$$\hat{S}_{m,red} \hat{D}_{\{\lambda\}} |0\rangle = |\{\xi_{\lambda}\}, \{\alpha_{\lambda}\}\rangle = |\xi_{\lambda_1}, \alpha_{\lambda_1}\rangle \cdot |\xi_{\lambda_2}, \alpha_{\lambda_2}\rangle \cdot \dots \cdot |\xi_{\lambda_{\infty}}, \alpha_{\lambda_{\infty}}\rangle. \quad (2.306)$$

Für diesen reinen Zustand ist die Photonenzahlstatistik über Gleichung (2.225) bestimmt und lässt sich deshalb auf den einmodigen Fall zurückführen.

## 2.4.4 Pseudowahrscheinlichkeiten

In den vorangegangenen Unterkapiteln wurden verschiedene reine Zustände des Feldes vorgestellt. Zur allgemeinen Beschreibung der messbaren Größen muss der Dichte-Operator  $\hat{\rho}$  verwendet werden. Der Dichte-Operator wurde in Gleichung (2.38) in der Basis der multimodigen Teilchenzahlzustände dargestellt. Durch eine geeignete Wahl der Basis kann sich die mathematische Beschreibung stark vereinfachen (unitäre Transformation). Will man beispielsweise den Erwartungswert eines Operators  $\hat{O}(\hat{a}^+, \hat{a})$  bestimmen, so lohnt es sich, auf die Anordnung der Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren  $\hat{a}^+$  und  $\hat{a}$  zu achten. Bei Photonenmessungen liegen häufig normal geordnete Operatoren  $\hat{O}_N(\hat{a}^+, \hat{a})$  vor. In Normalordnung sind die Erzeugungs-Operatoren links von den Vernichtungs-Operatoren positioniert [Peř85]:

$$\hat{O}_N(\hat{a}^+, \hat{a}) = \sum_{nm} c_{nm} (\hat{a}^+)^n \hat{a}^m. \quad (2.307)$$

In diesem Fall gilt für den Erwartungswert eines kohärenten Zustands  $|\alpha\rangle$ :

$$O_N(\alpha^*, \alpha) = \langle \alpha | \hat{O}_N(\hat{a}^+, \hat{a}) | \alpha \rangle = \sum_{nm} c_{nm} (\alpha^*)^n \alpha^m. \quad (2.308)$$

Offensichtlich lässt sich der Erwartungswert des normal geordneten Operators durch die komplexe Funktion  $O_N(\alpha^*, \alpha)$  beschreiben. Drückt man den Dichte-Operator in der Basis der kohärenten Zustände aus, so wird der Erwartungswert eines normal geordneten Operators zu einer komplexen Funktion.

### P-Repräsentation des Dichte-Operators im monomodigen Fall

Um die Darstellung des Dichte-Operators in der Basis der kohärenten Zustände zu erhalten, wird die Vollständigkeit aus Gleichung (2.251) zweimal ausgenutzt [Gla63]:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \iint |\alpha\rangle \underbrace{\langle \alpha | \hat{\rho} | \beta \rangle}_{P(\alpha, \beta)} \langle \beta | d^2\alpha d^2\beta \quad (2.309)$$

Es handelt sich um eine nicht diagonale Darstellung des Dichte-Operators. Durch das Einsetzen von Gleichung (2.36) für die Dichtematrix erhält man den Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion  $P(\alpha, \beta)$  und den Matrixelementen  $\rho(n, m)$  in der Teilchenzahldarstellung. Unter Verwendung von Gleichung (2.247) folgt daraus:

$$P(\alpha, \beta) = \sum_{n,m} \rho(n, m) \langle \alpha | n \rangle \langle m | \beta \rangle = \sum_{n,m} \rho(n, m) \frac{\alpha^{*n} \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \right\}. \quad (2.310)$$

Mit dem Dichte-Operator  $\hat{\rho}$  aus Gleichung (2.309) lässt sich der Erwartungswert eines Operators  $\hat{O}(\hat{a}^+, \hat{a})$  wie folgt bestimmen:

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr \left\{ \hat{\rho} \hat{O}(\hat{a}^+, \hat{a}) \right\} = \frac{1}{\pi^2} \iint P(\alpha, \beta) \langle \beta | \hat{O}(\hat{a}^+, \hat{a}) | \alpha \rangle d^2\alpha d^2\beta. \quad (2.311)$$

Bringt man den Operator unter Verwendung der Kommutatorrelationen aus Gleichung (2.30) in Normalform  $\hat{O}_N$ , so gilt:

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{\pi^2} \iint P(\alpha, \beta) O_N(\beta^*, \alpha) \langle \beta | \alpha \rangle d^2\alpha d^2\beta. \quad (2.312)$$

Die Verteilungsfunktion  $P(\alpha, \beta)$  hängt von zwei komplexen Zahlen ab. Da die kohärenten Zustände übervollständig sind, ist es nach Glauber [Gla63] möglich, für die Verteilungsfunktion eine Diagonalform anzugeben, die als P-Repräsentation bezeichnet wird:

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P_N(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (2.313)$$

Die Herleitung kann in [Peř85] nachvollzogen werden. Sudarshan zeigte [Sud63], dass es zumindest formal möglich ist, jeden beliebigen Dichte-Operator  $\hat{\rho}$  durch die P-Repräsentation auszudrücken. Die Funktion  $P_N(\alpha)$  kann jedoch hochgradig singular werden oder negative Funktionswerte aufweisen [KK64], weshalb auch der Begriff Pseudo- bzw. Quasiwahrscheinlichkeitsfunktion verwendet wird. Die Frage nach der Existenz der  $P$  Funktion wird in [Peř85] und [Gla72] ausführlich diskutiert. Prinzipiell gibt es die Funktion  $P_N(\alpha)$  immer [Peř85]. Andererseits kann die  $P$  Funktion auch als die Fourier-Transformierte der normalgeordneten charakteristischen Funktion  $\chi_N(\eta)$  definiert werden [WM94]:

$$\chi_N(\eta) = Tr \left\{ \hat{\rho} e^{\eta \hat{a}^+} e^{-\eta^* \hat{a}} \right\} = \int P_N(\alpha) e^{\eta \alpha^* - \eta^* \alpha} d^2\alpha, \quad (2.314)$$

$$P_N(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \chi_N(\eta) e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} d^2\eta. \quad (2.315)$$

Das Kriterium für die Existenz der  $P$  Funktion ist dann das Vorhandensein einer Fourier-Transformierten der Funktion  $\chi_N(\eta)$ . Im Falle der gequetschten Zustände ist es nicht möglich, eine Fourier-Transformierte von  $\chi_N(\eta)$  zu finden, die ein angenehmes mathematisches Verhalten aufweist [Yue76]. In diesem Sinne wird die  $P$  Funktion als nicht existent angesehen. Ist eine Fourier-Transformierte vorhanden, so kann sie zur Beschreibung physikalischer System verwendet werden. Jeder quantenmechanische Erwartungswert eines normal geordneten Operators  $\hat{O}_N$  kann als „klassischer“ Erwartungswert in einem generalisierten Phasenraum mit der „Wahrscheinlichkeitsfunktion“  $P_N(\alpha)$  dargestellt werden [Peř85]:

$$\langle \hat{O}_N \rangle = \frac{1}{\pi} \int P_N(\alpha) O_N(\alpha) d^2\alpha. \quad (2.316)$$

Weist die  $P$  Funktion eine unangenehme mathematische Struktur auf, so ist die Integration über die komplexe  $\alpha$ -Ebene praktisch nicht durchführbar [Yue76]. Andererseits bietet sich damit ein Kriterium zur Erfassung von Feldern, die kein klassisches Analogon besitzen [Man86]. Gibt es eine klassische Verteilungsfunktion  $P_{klass}(\alpha)$  die

$$P_N(\alpha) \equiv P_{klass}(\alpha) \quad (2.317)$$

erfüllt, so besitzt die  $P$  Funktion alle Eigenschaften der klassischen Verteilung. Trotzdem muss es sich nicht um ein klassisches Feld handeln [Vog00]. Wird die  $P$  Funktion singulär, oder nimmt sie negative Funktionswerte an, so ist es nicht möglich die beobachteten Felder durch eine klassische Verteilung  $P_{klass}(\alpha)$  zu beschreiben. In diesen Fällen handelt es sich eindeutig um nichtklassische Felder<sup>5</sup>. Dies ist auch in Abbildung 2.18 verdeutlicht [MG67]. Aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation aus Gleichung (2.275) liefert nur der Bereich oberhalb und auf der Hyperbel physikalisch erlaubte Zustände. In dem schattierten Bereich existiert keine  $P$  Funktion, die nur positive Funktionswerte annimmt. Damit repräsentiert der schattierte Bereich die Felder, die kein klassisches Analogon besitzen.

## P-Repräsentation multimodiger Zustände

Für multimodige Felder kann die P-Repräsentation wie folgt definiert werden [Sud63]:

$$\hat{\rho} = \int P_N(\{\alpha\}) |\{\alpha\}\rangle \langle\{\alpha\}| \prod_{\lambda} d^2\alpha_{\lambda}. \quad (2.318)$$

Der Index  $\lambda$  läuft über alle Moden.  $P_N(\{\alpha\}) = P_N(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  ist wieder die Gewichtungsfunktion. Sowohl im mono-, als auch im multimodigen Fall muss die  $P$  Funktion normiert sein. Es gilt die Normierungsbedingung:

$$1 = \int P_N(\{\alpha\}) \prod_{\lambda} d^2\alpha_{\lambda}. \quad (2.319)$$

Mit positiv-semidefiniten  $P$  Funktionen können chaotische Felder dargestellt werden [TG65], die folglich ein klassisches Analogon besitzen.

### 2.4.5 Chaotische Strahlung

Das chaotische Feld ist der natürlichste Zustand des Feldes. Solche Felder werden durch thermische Quellen erzeugt, die sich aus vielen unabhängigen atomaren Strahlern zusammensetzen. Jedes thermische Feld besteht aus einer Superposition von Wellen verschiedenster Frequenzen, die alle innerhalb eines kontinuierlichen Spektrums liegen. Diese, als unabhängig zu betrachtenden Wellen besitzen statistisch unbestimmte Phasen. Aus dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik [LP98] folgt, dass die komplexe Amplitude um den Mittelwert Null normalverteilt ist, wie durch van Cittert [Cit34], [Cit39] und Janossy [Jan57], [Jan59] gezeigt wurde. Lichtquellen wie Sonne, Feuer, Glühlampen oder LEDs erzeugen chaotische Strahlung. Die Spektren und Kohärenzzeiten  $\tau_c$  können dabei sehr unterschiedlich sein. Der Dichte-Operator eines multimodigen chaotischen Feldes ist durch [Peř85]

$$\hat{\rho} = \prod_{\lambda} \frac{\langle \hat{n}_{\lambda} \rangle^{\hat{n}_{\lambda}}}{(1 + \langle \hat{n}_{\lambda} \rangle)^{\hat{n}_{\lambda}+1}} = \sum_{\{n_{\lambda'}\}} \prod_{\lambda} \frac{\langle \hat{n}_{\lambda} \rangle^{\hat{n}_{\lambda}}}{(1 + \langle \hat{n}_{\lambda} \rangle)^{\hat{n}_{\lambda}+1}} |\{n_{\lambda'}\}\rangle \langle\{n_{\lambda'}\}| \quad (2.320)$$

<sup>5</sup> $P_{klass}(\alpha)$  ist eine reelle normierte Funktion, siehe Gleichung (2.319), deren Funktionswerte  $P_{klass}(\alpha) \geq 0$  erfüllen.

gegeben. Er beschreibt ein Gemisch. Daraus kann die multimodige  $P$  Funktion

$$P_N(\{\alpha_\lambda\}) = \prod_\lambda \frac{\exp\left\{-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{\langle \hat{n}_\lambda \rangle}\right\}}{\pi \langle \hat{n}_\lambda \rangle} \quad (2.321)$$

erhalten werden [Peř85]. Es handelt sich um eine Gaussverteilung der Amplituden  $\alpha_\lambda$  die unabhängig von der Phase ist. Damit ist das chaotische Feld stationär in Raum und Zeit. Mit der  $P$  Funktion kann die Photonenstatistik  $P_n(t, \Delta t) = P_n(\Delta t)$  aus Gleichung (2.200) bestimmt werden. Die Berechnung der Photonenstatistik ergibt eine sehr komplizierte Formel, die von Bedard bestimmt wurde [B66]. Eine sehr gute Näherung stellt die Mandel-Rice-Formel dar [Man59]:

$$P_n(\Delta t) = \frac{\Gamma(n+M)}{n! \Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{\langle n \rangle}\right)^{-n} \left(1 + \frac{\langle n \rangle}{M}\right)^{-M}, \quad (2.322)$$

welche die Verteilung in Abhängigkeit von der Modenzahl  $M$  und dem Mittelwert der Photonen  $\langle n \rangle$  wiedergibt. Die Gammafunktion ist durch [BSMM01]

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \wedge \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.323)$$

definiert und wird für ganzzahlige  $y = n$  zur Fakultät. Die Modenzahl  $M(\Delta t)$  hängt von der Mittelungszeit  $\Delta t$  und vom Spektrum ab. In [BCM67] wurde gezeigt, dass für

$$M(\Delta t) = \frac{\Delta t^2}{2 \int_0^{\Delta t} (\Delta t - t') |\gamma(t')|^2 dt'} = \frac{\Delta t}{\xi(\Delta t)} \quad (2.324)$$

Gleichung (2.322), für alle Messzeiten  $\Delta t$  eine gute Näherung darstellt, vorausgesetzt es handelt sich um polarisierte, senkrecht auf den Detektor einfallende Strahlung, bei der Strahldurchmesser und Kohärenzfläche  $A_c$  gleich sind. Für  $\Delta t \ll \tau_c$  erhalten wir dann aus Gleichung (2.322) (monomodiger Fall,  $M = 1$ ):

$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{1+n}}. \quad (2.325)$$

Ist  $\Delta t \gg \frac{1}{\Delta \nu} \approx \tau_c$ , so folgt  $\xi(\Delta t) \rightarrow \tau_c$  und  $M = \frac{\Delta t}{\tau_c}$ , wobei die Kohärenzzeit  $\tau_c$  wie in Gleichung (2.340) berechnet werden kann. Dies ist auch in Abbildung 2.22 dargestellt, wo die Verteilungen für verschiedene Werte des Verhältnisses  $M \approx \frac{\Delta t}{\tau_c}$  zu sehen sind. Der Vorteil von Gleichung (2.322) liegt darin, dass sich die spektrale Form nur auf den Faktor  $M$  auswirkt. Offensichtlich geht die Verteilung  $P_n$  für große Modenzahlen in die Poisson-Verteilung über:

$$P_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\Gamma(n+M)}{(\langle n \rangle + M)^n \Gamma(M)}}_{\rightarrow 1} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \underbrace{\left(1 + \frac{\langle n \rangle}{M}\right)^{-M}}_{\rightarrow e^{-\langle n \rangle}} \approx \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (2.326)$$

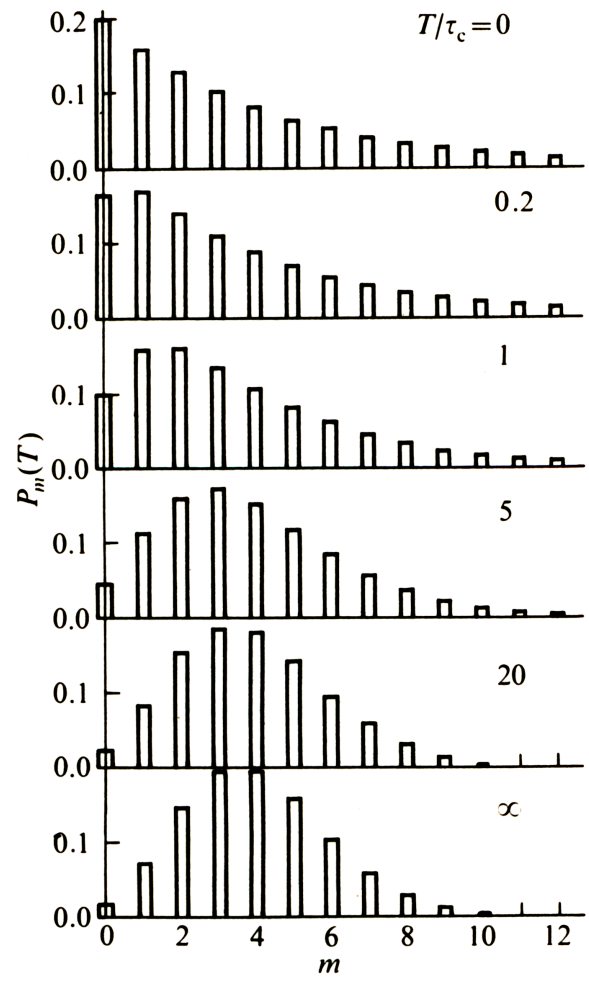


Abbildung 2.22: Photonenstatistik für  $\langle n \rangle = 4$  in Abhängigkeit von dem Verhältnis  $M \approx \frac{T}{\tau_c} = \frac{\Delta t}{\tau_c}$ , [Lou91].

Dies ist ganz unten in Abbildung 2.22 zu sehen.  $M$  gibt die Anzahl der Zellen im Phasenraum an, über die die gemessenen Photonen verteilt werden. Treffen also mehrere räumliche Moden, beziehungsweise unabhängige Polarisationsrichtungen auf den Detektor so muss dies in  $M$  Berücksichtigung finden [Peř85]. Folglich nähert sich die Verteilung thermischer Strahlung mit steigender Modenzahl der Photonenzahlstatistik des kohärenten Lichts an. Experimentell kann die Verteilung aus Gleichung (2.325) bei thermischem Licht mit hoher Kohärenzzeit nachgewiesen werden. Andererseits kann aus der Photonenzahlstatistik durch Variation der Messzeit  $\Delta t$  die Kohärenzzeit bestimmt werden [JOP68]. Eine Unterscheidung zwischen thermischem und kohärentem Licht ist demnach gut möglich, wenn  $\Delta t \ll \tau_c$  gilt und sichergestellt wird, dass nur eine Mode auf den Detektor fällt. Ab 20 Moden sind kohärentes und thermisches Licht sehr ähnlich, wie aus den letzten beiden Statistiken in Abbildung 2.22 zu erkennen ist. Es sei noch erwähnt, dass die Detektionseffizienz wegen des Skalierungsverhaltens  $\langle n \rangle \rightarrow \xi \langle n \rangle$  keinen Einfluss auf die Verteilungsform nimmt, da nur der Mittelwert verringert wird [WM94].

## 2.5 Optische Anwendungen

Die Optik entwickelte sich zunächst als eigenständiger Teil der Physik bis zu dem Zeitpunkt, als James Clerk Maxwell die damaligen Erkenntnisse zusammenfasste und daraus die Maxwellgleichungen schuf. Aus ihnen schloss er auf die Existenz elektromagnetischer Wellen, deren Nachweis später durch Heinrich Hertz erfolgte. Zu dieser Zeit kam man auch zu der Überzeugung, dass es sich bei Licht um elektromagnetische Wellen handle. Es stellte sich heraus, dass Licht aus elektromagnetischen Wellen im optischen Spektralbereich besteht. Somit ist die Optik heute ein Teilgebiet der Elektrodynamik. Allerdings ist die Elektrodynamik nicht in der Lage, alle Effekte richtig wiederzugeben, da sie die Quantennatur des Lichts vernachlässigt. Im Be-

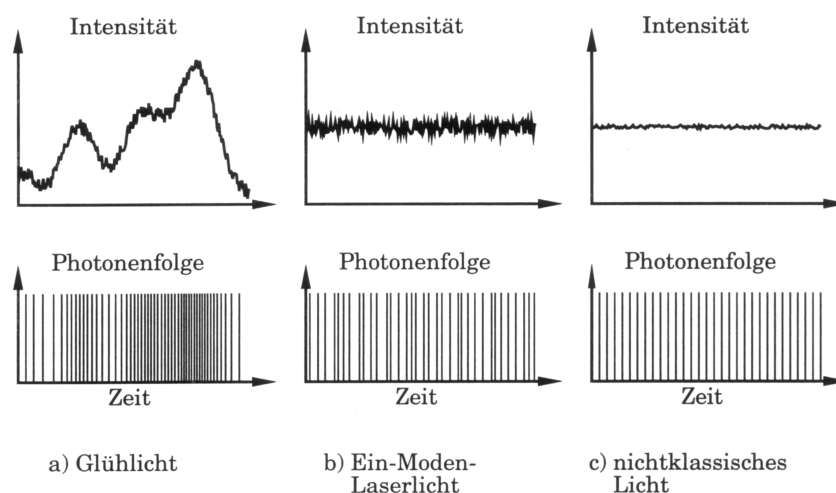


Abbildung 2.23: Photonenzahlstatistik und die entsprechenden Intensitätsschwankungen für: a) eine Glühlampe, b) einen einmodigen Laser und c) nichtklassisches Licht [LK93].



reich der statistischen Optik werden Photonen mit hochempfindlichen Detektoren gezählt oder Korrelationsmessungen durchgeführt. Dabei zeigen sich Effekte wie das Antibunching, die klassisch nicht erklärbar sind. Erfasst werden diese Effekte durch eine quantenmechanische Beschreibung. Abbildung 2.23 zeigt die Intensitätsverläufe verschiedener Quellen und die zugehörigen Photonenfolgen. Unter c) ist zu erkennen, dass die einzelnen Pulse einen ähnlichen Abstand besitzen. Die Fluktuationen in der Intensität unterschreiten das klassische Limit und können deshalb nur quantenmechanisch erklärt werden.

## 2.5.1 Kohärenz

Kohärenz ist ein Phänomen, das in der Optik zunächst bei Spaltexperimenten beobachtet wurde. Im ursprünglichen Sinne bezog sich der Begriff Kohärenz auf die Fähigkeit, Interferenzerscheinungen hervorzurufen. Heute ist diese einfache Betrachtung überholt, da mittlerweile die Gesamtheit der Korrelationseigenschaften des optischen Feldes als Kohärenz definiert wird. Die Beschreibung erfolgt deshalb über Korrelationsfunktionen  $G_{\{k_i, k_j\}}^{(m, n)}(\{\vec{r}_i, t_i, \vec{r}_j, t_j\})$  der Ordnung  $m + n$  [VW06]:

$$G_{\{k_i, k_j\}}^{(m, n)}(\{\vec{r}_i, t_i, \vec{r}_j, t_j\}) = \left\langle \circ \prod_{i=1}^m \prod_{j=m+1}^{m+n} \hat{F}_{k_i}^{(-)}(\vec{r}_i, t_i) \hat{F}_{k_j}^{(+)}(\vec{r}_j, t_j) \circ \right\rangle. \quad (2.327)$$

$\hat{F}_{k_i}^{(\pm)}(\vec{r}_i, t_i)$  ist die  $k_i$ -Komponente (Polarisation) des Feld-Operators am Ort  $\vec{r}_i$ , die zum Zeitpunkt  $t_i$  betrachtet wird.  $(-)$  und  $(+)$  bezeichnen wieder die Frequenzanteile der Operatoren. Die eckigen Klammern  $\langle \dots \rangle = Tr(\hat{\rho} \dots)$  stehen für das Ensemble-Mittel und  $\circ \circ$  ist eine abkürzende Schreibweise für die folgende Operator-Ordnung:

1. Normalordnung der Operatoren, d.h.  $\hat{F}_k^{(-)}$ -Operatoren stehen links von  $\hat{F}_k^{(+)}$ -Operatoren.
2. Zeitordnung der Operatoren, d.h. für  $\hat{F}_k^{(+)}$ -Operatoren nimmt die Zeit nach links zu, für  $\hat{F}_k^{(-)}$ -Operatoren nimmt die Zeit nach rechts zu.

Die zeitliche Ordnung wird durch die Zeitordnungs-Operatoren  $T_{\pm}$  hergestellt.  $T_+$  wirkt dabei auf  $\hat{F}_k^{(+)}$  und  $T_-$  auf  $\hat{F}_k^{(-)}$  [VW06]. Mit der Korrelationsfunktion  $G^{(n, n)}$  können Kohärenzphänomene der Ordnung  $n$  beschrieben werden. Es bestehen zwei wichtige Klassen von elektromagnetischen Feldern. Zum einen die stationären Felder für die der Dichte-Operator wie in Gleichung (2.45) beschrieben unabhängig von der Zeit  $t$  ist. Zum anderen die ergodischen Felder. Bei ergodischen Feldern darf das Ensemblemittel durch das Zeitmittel ersetzt werden. Es gilt

$$\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \dots dt, \quad (2.328)$$

wie zuvor schon beschrieben wurde. Natürlich kann auch beides zugleich vorliegen. Für die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung ( $n = m = 1$ ) gilt dann für ein polarisiertes Feld:

$$G_{\{k_1, k_2\}}^{(1, 1)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = G_{\{k_1, k_1\}}^{(1, 1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E_{k_1}^*(\vec{r}_1, t) E_{k_1}(\vec{r}_2, t + \tau) dt. \quad (2.329)$$

Im ersten Schritt in Gleichung (2.329) wurden Polarisation und Stationarität des Feldes genutzt. Im letzten Schritt wurde wie in Gleichung (2.328) beschrieben das Ensemble- gegen das Zeitmittel ersetzt.

## 2.5.2 Kohärenz erster Ordnung

Die Kohärenz erster Ordnung kann in räumliche, zeitliche und raumzeitliche Kohärenzeffekte untergliedert werden. Um die Unterschiede zu verdeutlichen, wird auf die einzelnen Effekte gesonderte eingegangen. Über die Kohärenz erster Ordnung lässt sich das Modenvolumen verstehen.

### Zeitliche Kohärenz

Die zeitliche Kohärenz kann besonders gut durch das Michelson-Interferometer verdeutlicht werden (siehe Abbildung 2.24). Hier wird der einfallende Strahl durch einen Strahlteiler zu gleichen

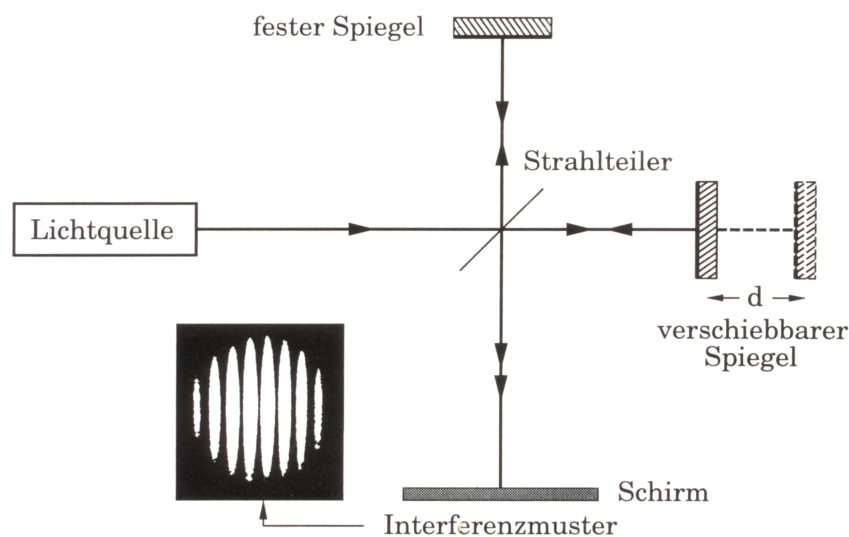


Abbildung 2.24: Michelson-Interferometer [LK93].

Anteilen aufgespalten. Strahl 1 wird an einem fest installierten Spiegel reflektiert und Strahl 2 an einem verschiebbaren. Danach werden die Strahlen wieder durch den Strahlteiler vereinigt. Verkippt man einen der Spiegel leicht, so entsteht auf dem Schirm ein räumliches Interferenzmuster. Um Informationen über die Kohärenzzeit  $\tau_c$  zu erhalten, muss der bewegliche Spiegel systematisch verschoben werden. Der Verschiebeweg  $d$  des Spiegels kann direkt über:

$$\tau = \frac{2d}{c} \quad (2.330)$$

in eine Zeitverschiebung  $\tau$  umgerechnet werden. Die Information über die Kohärenzzeit steckt im Intensitätsunterschied aufeinander folgender Maxima  $I_{max}$  und Minima  $I_{min}$ . Über die Defi-

tion der Kontrastfunktion  $K(\tau)$  lässt sich dies verdeutlichen.

$$K(\tau) = \frac{I_{max}(\tau) - I_{min}(\tau + \delta\tau)}{I_{max}(\tau) + I_{min}(\tau + \delta\tau)}. \quad (2.331)$$

Die maximale bzw. minimale Intensität kann durch die Korrelationsfunktion aus Gleichung (2.327) ausgedrückt werden. Dazu Betrachten wir die Operatoren des elektrischen Feldes am Ort  $\vec{r}$  des Detektors:

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t, \tau) = \hat{E}_1^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}_2^{(+)}(\vec{r}, t - \tau). \quad (2.332)$$

Das Feld setzt sich aus zwei Anteilen zusammen.  $\hat{E}_1^{(+)}$  stammt vom fest installierten Spiegel und  $\hat{E}_2^{(+)}$  besitzt eine Zeitverzögerung durch die Verschiebung des beweglichen Spiegels. Da der Detektor die Intensität misst, gilt nach Gleichung (2.122)  $\hat{I} = \hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}$ . Man erhält für den Erwartungswert eines stationären, ergodischen und polarisierten Feldes:

$$I = \langle \hat{I} \rangle = 2G^{(1,1)}(\vec{r}, t) + 2Re(G^{(1,1)}(\vec{r}, t, t + \tau)) = 2I_0 + 2 \cos(\Psi(\tau)) |G^{(1,1)}(t, t + \tau)|. \quad (2.333)$$

Im Falle der maximalen und der minimalen Intensität  $I_{\min}^{max}$  wird die Kosinusfunktion zu  $\pm 1$ , woraus folgt:

$$I_{\min}^{max} = 2I_0 \pm 2 \left| \langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t + \tau) \rangle \right|. \quad (2.334)$$

Die Kontrastfunktion  $K(\tau)$  aus Gleichung (2.331) kann demnach vollständig durch Korrelationsfunktionen beschrieben werden:

$$K(\tau) = \frac{|G_{(k_1, k_1)}^{(1,1)}(t, t + \tau)|}{G_{(k_1, k_1)}^{(1,1)}(t, t)} = \frac{\left| \langle \hat{E}_{k_1}^{(-)}(t)\hat{E}_{k_1}^{(+)}(t + \tau) \rangle \right|}{\left| \langle \hat{E}_{k_1}^{(-)}(t)\hat{E}_{k_1}^{(+)}(t) \rangle \right|}. \quad (2.335)$$

Die Kohärenzzeit  $\tau_c$  ist als die zeitliche Verschiebung  $\tau$  definiert, bei der die Kontrastfunktion auf den Wert  $1/e$  abfällt [LK93], [SLLT97].  $e = 2,718281828459\dots$  steht für die Eulersche Zahl. Experimentell lässt sich dies leicht realisieren. Man misst die Intensität aufeinanderfolgender Interferenzmaxima und -minima in Abhängigkeit vom Verschiebeweg  $d$  und trägt die Kontrastfunktion über die zeitliche Verschiebung  $\tau$  auf. Der Zeitpunkt, an dem  $K(\tau)$  auf  $1/e$  abgefallen ist, entspricht der Kohärenzzeit.

Andererseits kann aus den Korrelationsfunktionen auf mathematischem Wege die Kohärenzzeit bestimmt werden. Da praktisch immer die Fourier-Transformierte  $E(\nu)$  der Feldkomponente existiert

$$E(t) = \int_0^\infty E(\nu) \exp\{-i2\pi\nu t\} d\nu, \quad (2.336)$$

kann diese in Gleichung (2.329) eingesetzt werden. Damit ergibt sich nach der zeitlichen Mittelung

$$G^{(1,1)}(\tau) = \int_0^\infty \underbrace{|E(\nu)|^2}_{W(\nu)} \exp\{-i2\pi\nu\tau\} d\nu, \quad (2.337)$$

dass die Korrelationsfunktion die Fourier-Transformierte der spektralen Leistungsdichte  $W(\nu)$  (Leistungsspektrum) ist. Nun führen wir den komplexen Selbstkohärenzgrad  $\gamma(\tau)$  ein, der durch die normierte Autokorrelationsfunktion gegeben ist.

$$\gamma(\tau) = \frac{G^{(1,1)}(\tau)}{G^{(1,1)}(0)} = \int_0^\infty g(\nu) \exp\{-i2\pi\nu\tau\} d\nu. \quad (2.338)$$

$\gamma(\tau)$  entspricht der Fourier-Transformierten des Spektrums  $g(\nu)$ . Die Kontrastfunktion ist dann der Betrag des komplexen Selbstkohärenzgrads:

$$K(\tau) = |\gamma(\tau)|. \quad (2.339)$$

Über die Kontrastfunktion kann der Grad der Kohärenz festgelegt werden [LK93]:

- $|\gamma(\tau)| = 1$  vollkommen kohärent,
- $0 \leq |\gamma(\tau)| \leq 1$  partiell kohärent,
- $|\gamma(\tau)| = 0$  vollkommen inkohärent,

wobei  $\tau \neq 0$  vorausgesetzt wird. Ist das Spektrum bekannt, so kann hieraus die Kohärenzzeit  $\tau_c$  bestimmt werden, indem man  $K(\tau_c) = 1/e$  setzt. Es gibt noch weitere Möglichkeiten, um die Kohärenzzeit zu definieren. Eine sehr praktische ist

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau, \quad (2.340)$$

bei der über das Betragsquadrat des zeitlichen Selbstkohärenzgrads integriert wird [Man59]. Die beiden Definitionen können leicht unterschiedliche Ergebnisse für Kohärenzzeiten gleicher Spektren liefern. Für weitere Anwendungen verwenden wir deshalb die Definition aus Gleichung (2.340). Zur Veranschaulichung betrachten wir ein rechteckiges  $g_r(\nu)$ , ein gaussförmiges  $g_g(\nu)$  und ein lorentzförmiges  $g_l(\nu)$  Spektrum mit der Mittelfrequenz  $\nu_0$  [Peř85]:

$$g_r(\nu) = \frac{\pi}{\Gamma} \quad \wedge \quad |\nu - \nu_0| \leq \frac{\Gamma}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \gamma_r(\tau) = \exp\{-i2\pi\nu_0\tau\} \frac{\sin(\Gamma\tau)}{\Gamma\tau}, \quad (2.341)$$

$$g_g(\nu) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma} \exp\left\{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\frac{\Gamma}{2\pi}}\right)^2\right\} \quad \Rightarrow \quad \gamma_g(\tau) = \exp\left\{-i2\pi\nu_0\tau - \frac{\Gamma^2\tau^2}{4}\right\}, \quad (2.342)$$

$$g_l(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma}{2\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2} \Rightarrow \gamma_l(\tau) = \exp\{-i2\pi\nu_0\tau - \Gamma|\tau|\}. \quad (2.343)$$

Hieraus erhalten wir unter Verwendung von Gleichung (2.340) die Kohärenzzeiten.

$$\tau_c^r = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma} \quad \tau_c^g = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma} = \sqrt{\pi} \cdot \sigma_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_\nu} \quad \tau_c^l = \frac{1}{\Gamma}. \quad (2.344)$$

Wegen der geringen Breite der Spektren  $\Gamma \ll \nu_0$  konnte die untere Integrationsgrenze für das gauss- und lorentzförmige Spektrum in Gleichung (2.338) durch  $0 \rightarrow -\infty$  ersetzt werden. Die Bedeutung von  $\Gamma$  ist in allen drei Fällen eine andere. Für das lorentzförmige Profil gibt  $\Gamma/\pi$  die Halbwertsbreite (FWHM) des Spektrums an und im Falle der Gleichverteilung entspricht  $\Gamma/\pi$  dem Bereich, in dem die Verteilung größer als Null ist.  $\sigma_t$  und  $\sigma_\nu$  sind die Standardabweichungen der Gaussverteilung im Zeit- und im Frequenzraum, woraus sich der Zusammenhang zu  $\Gamma$  ergibt.

Über die Gleichungen (2.338) und (2.340) können wir die Kohärenzzeit von weißem Licht abschätzen. Dazu verwenden wir das rechteckige Spektrum und setzen für die spektrale Breite  $\Delta\nu = \Gamma/\pi \approx 0,3 \cdot 10^{15}$  Hz ein, woraus sich eine Kohärenzzeit von

$$\tau_c^r = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ s} \quad (2.345)$$

ergibt. Siehe dazu [Hec01] ( $\tau_c = 3 \cdot 10^{-15}$  s, ohne Angaben der spektralen Form). Die Kohärenzlänge  $l_c$  lässt sich über den Zusammenhang mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bestimmen:

$$l_c = c \cdot \tau_c. \quad (2.346)$$

Für die Kohärenzlänge des Gleichverteilten Spektrums ergibt sich  $l_c^r \approx 600$  nm. Dieses Ergebnis lässt sich angenähert auf Sonnenlicht übertragen. Das Leistungsspektrum ist hier durch die Planck-Verteilung gegeben, die eine exponentielle Abhängigkeit von der Temperatur aufweist. Aufgrund der Breite und Form des Spektrums sollte die Kohärenzlänge des Sonnenlichts in der Größenordnung von ca. einem Mikrometer  $l_c \approx 1 \mu\text{m}$  liegen.

## Räumliche Kohärenz

Trotz der geringen Kohärenzlänge von weißem Licht ist es bei einem Doppellochexperiment möglich, Interferenzphänomene zu beobachten. Dies ist eine Folge der räumlichen Kohärenz. Bei Messungen der räumlichen Kohärenz werden Felder an zwei unterschiedlichen Orten zur gleichen Zeit verglichen. Ein Beispiel wäre die Vermessung einer Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, innerhalb der Phasen und Amplituden des Feldes, unabhängig vom Zeitpunkt der Betrachtung, annähernd vergleichbar sind. Diese Fläche wird dann als Kohärenzfläche  $A_c$  bezeichnet. Entstehen die Wellenfronten aus vielen unabhängigen Punktstrahlern, die mit unterschiedlichen Frequenzen und Phasenbeziehungen emittieren, so verkleinert sich wegen der starken Fluktuation die Kohärenzfläche. Experimentell kann die Vermessung der Kohärenzfläche durch ein Doppelspaltexperiment erfolgen, wie es in Abbildung 2.25 zu sehen ist. Werden

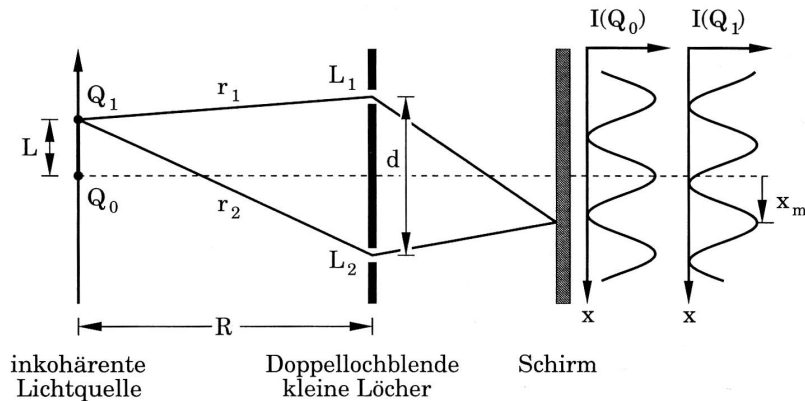


Abbildung 2.25: Doppelspaltexperiment mit einer Doppelochblende für eine inkohärente Quelle [LK93].

die Spalten an den Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  verschoben, so könnte man die Kohärenzfläche direkt ermitteln, wenn es möglich wäre, dem zeitlichen Verlauf von Phase und Amplitude des Feldes an diesen Orten zu folgen. Man erhielte die komplexe Selbstkohärenzfunktion

$$\gamma_{12} = \frac{G^{(1)}(1, 2)}{\sqrt{G^{(1)}(1)G^{(1)}(2)}} = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t) \rangle}{\sqrt{\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t) \rangle}}, \quad (2.347)$$

die die räumliche Kohärenz beschreibt. Dies ist experimentell im optischen Spektralbereich nicht möglich. Stattdessen bringt man die Wellenfronten auf dem Schirm zur Interferenz. Dabei zeigt sich, dass folgende Bedingung für den Abstand der Löcher  $d$  erfüllt sein muss (siehe Abb. 2.25)

$$d < \frac{\lambda R}{2L}, \quad (2.348)$$

damit Interferenzmuster sichtbar werden [LK93].  $R$  bezeichnet den Abstand zwischen Lichtquelle und Doppelochblende,  $L$  steht für die Abmaße der inkohärenten Lichtquelle und  $\lambda$  gibt die Wellenlänge der verwendeten Strahlung an. Wie kommt es nun, dass die Interferenzphänomene nur zu sehen sind, wenn die Bedingung (2.348) erfüllt ist? Dies lässt sich anschaulich sehr einfach erklären, Quelle  $Q_1$  erzeugt ein Interferenzmuster mit dem Zentrum an der Stelle  $x = x_m$ , während die Quelle  $Q_0$  das Maximum 0-ter Ordnung an der Stelle  $x = 0$  besitzt. Fällt nun das Maximum von  $Q_1$  auf ein Minimum von  $Q_0$  so ist es nicht mehr möglich Interferenzen zu erkennen. Die geometrische Anordnung des experimentellen Aufbaus muss bei der Untersuchung von räumlichen Interferenzphänomenen berücksichtigt werden. In Gleichung (2.348) wurde aus Gründen der Anschaulichkeit eine eindimensionale Betrachtung vorgenommen. Eigentlich müssten auch die weiteren Raumrichtungen untersucht werden, um die Kohärenzfläche  $A_c$  zu erhalten. Handelt es sich um ein räumlich stationäres Feld, so kann die Kohärenzfläche in

Analogie zur Kohärenzzeit durch [Peř85]

$$A_c = \iint_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{12}(x, y)|^2 dx dy \quad (2.349)$$

definiert werden. Wegen der räumlichen Stationarität hängt  $|\gamma_{12}(x, y)|$  nur relativ von den Koordinaten der Beobachtungspunkte ab, weshalb in der Integration nur über die Abstände  $x = x_1 - x_2$  und  $y = y_1 - y_2$  integriert wird. Aus Gleichung (2.349) erhält man für eine quadratische Quelle der Seitenlänge  $L$  [Peř85]

$$A_c = \frac{(R\lambda)^2}{L^2}, \quad (2.350)$$

woraus folgt, dass die Kohärenzfläche  $A_c$  mit zunehmendem Abstand  $R$  von der Quelle quadratisch wächst und reziprok zur Fläche  $L^2$  des Strahlers abnimmt.

Der Grundgedanke, elektromagnetische Felder an verschiedenen Orten zu vergleichen, konnte beim Doppelspaltexperiment nur indirekt über ein Interferenzmuster auf dem Schirm verwirklicht werden. Durch die unterschiedlich langen Strecken  $s_1, s_2$  von den Spalten  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  zum Beobachtungsort auf dem Schirm entsteht ein zusätzlicher zeitlicher Phasenfaktor  $\tau = \frac{1}{c}(s_1 - s_2)$ , der natürlich in der Selbstkohärenzfunktion  $\gamma_{12}(\tau)$  berücksichtigt werden muss. Genau genommen handelt es sich beim Doppelspaltexperiment um eine raumzeitliche Kohärenzuntersuchung.

### Raumzeitliche Kohärenz

Unter raumzeitlicher Kohärenz versteht man die Kombination aus zeitlicher und räumlicher Kohärenz. Zur Verdeutlichung sei nochmals auf die Unterschiede hingewiesen. Bei der zeitlichen Kohärenz wurde das Feld mit sich selbst, zu einem späteren Zeitpunkt, am gleichen Ort verglichen. Bei der räumlichen Kohärenz sollen die Eigenschaften des Feldes zum gleichen Zeitpunkt an zwei räumlich getrennten Punkten untersucht werden, deren Verbindungslinie parallel zur Wellenfront liegt. In dem oben angeführten Beispiel der Doppellochblende wurde im Experiment beides getan. Der Nachweis der räumlichen Kohärenz kann nur in Verbindung mit zeitlicher Kohärenz erfolgen, worin sich die enge Verknüpfung dieser beiden Begriffe zeigt. Die Selbstkohärenzfunktion  $\gamma_{12}(\tau)$ , die zur Beschreibung der raumzeitlichen Kohärenz dient, erhält man, indem  $G^{(1,1)}$  in Gleichung (2.347) durch

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = G^{(1)}(\vec{r}_1, t, \vec{r}_2, t + \tau) = \left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t + \tau) \right\rangle \quad (2.351)$$

ersetzt wird. Auch hier lässt sich wieder der Grad der raumzeitlichen Kohärenz über die Selbstkohärenzfunktion bestimmen. Für den zeitlich stationären Fall gilt [LK93]:

- $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$  vollkommen kohärent,
- $0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$  partiell kohärent,
- $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$  vollkommen inkohärent.

Natürlich ist von den Argumenten  $\tau = 0$  und  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$  abzusehen.

Betrachten wir als Beispiel das Sonnenlicht. Wir wollen zur Verdeutlichung unter Zuhilfenahme von Formel (2.348) den Abstand der Spalten berechnen, bei dem wir auf der Erde noch Interferenzeffekte wahrnehmen. Bekanntermaßen hat die Sonne einen Durchmesser von  $L \approx 1,4 \cdot 10^9$  m und ist im Mittel ca.  $R = 1,5 \cdot 10^{11}$  m von der Erde entfernt. Daraus errechnet sich bei einer Wellenlänge von  $\lambda_m = 500 \cdot 10^{-9}$  m ein Abstand von  $d_{max} \approx 27 \mu\text{m}$ . Im Absatz zeitliche Kohärenz hatten wir die Kohärenzlänge von Sonnenlicht abgeschätzt. Sie liegt laut [Hec01] bei  $l_c \approx 900$  nm. Teilt man die Kohärenzlänge des Sonnenlichts durch die Wellenlänge  $\lambda_m$ , so sieht man, dass ca. 1,8 Wellenzüge kohärent sind. Da der Abstand  $d$  kleiner als  $d_{max}$  gewählt wird, können höchstens die Maxima bis zur ersten Ordnung gesehen werden. Somit bestimmt die zeitliche Kohärenz beim Doppelspaltexperiment die Anzahl der sichtbaren Maxima unter der Bedingung, dass die räumliche Kohärenz gegeben ist. Die charakteristischen Größen Kohärenzlänge  $l_c$  und Kohärenzfläche  $A_c$  ergeben zusammen das Kohärenzvolumen  $V_c$ .

### Kohärenzvolumen

Aus dem Produkt von Kohärenzlänge und Kohärenzfläche gewinnt man das Kohärenzvolumen  $V_c$  des betrachteten Feldes:

$$V_c = A_c \cdot l_c = A_c \cdot c \cdot \tau_c. \quad (2.352)$$

Es lässt sich für den raumzeitlich stationären Fall über den Betrag der Selbstkohärenzfunktion  $|\gamma_{12}(\tau)|$  bestimmen [Peř85]:

$$V_c = c \iiint_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{12}(x, y, \tau)|^2 dx dy d\tau. \quad (2.353)$$

Das Kohärenzvolumen definiert eine Mode des elektromagnetischen Feldes, bzw. eine Zelle im Phasenraum [MW65].

### 2.5.3 Kohärenz zweiter Ordnung

Im vorangegangenen Unterkapitel wurden Kohärenzeffekte erster Ordnung betrachtet. Dabei hat man elektromagnetische Felder an unterschiedlichen Raumzeitpunkten miteinander verglichen. Genauso können Intensitäten an verschiedenen Raumzeitpunkten verglichen werden, woraus sich Intensitätskorrelationen bestimmen lassen. Dies geschieht durch die Korrelationsfunktion vierter Ordnung. Setzt man voraus, dass keine Rückkopplung zwischen Photomultiplier und Quelle besteht, so gilt:

$$\begin{aligned} G^{(2,2)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) &= \left\langle \bullet \hat{I}(\vec{r}_1, t_1) \hat{I}(\vec{r}_2, t_2) \bullet \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) \right\rangle \\ &= \sum_{k,l,m,n} E_k^*(\vec{r}_1, t_1) E_n(\vec{r}_1, t_1) E_l^*(\vec{r}_2, t_2) E_m(\vec{r}_2, t_2) \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_l^+ \hat{a}_m \hat{a}_n \rangle. \end{aligned} \quad (2.354)$$



Gleichung (2.354) beschreibt die raumzeitliche Korrelation der Intensitäten. Da wir die Intensität nur indirekt über Photomultiplier ermitteln, muss die Korrelation über die Photoelektronen festgestellt werden. Die Varianz der Photonenstatistik steht ebenfalls in direkter Verbindung mit der Intensitätskorrelation. Um sie zu erhalten, wird zuerst der zeitliche Mittelwert der gemessenen elektronischen Pulse  $\overline{n(t, \Delta t)}$  mit dem theoretischen Erwartungswert des Ensembles in Zusammenhang gebracht:

$$\begin{aligned}\overline{n(t, \Delta t)} &= \sum_n n \cdot h_n(t, \Delta t, T) \approx \sum_n n \cdot P_n(t, \Delta t) = \xi' \left\langle \hat{I}(\vec{r}, t, \Delta t) \right\rangle \\ &= \xi' \Delta t \left\langle \hat{I}(\vec{r}, t) \right\rangle = \xi' \int_t^{t+\Delta t} dt' G^{(1,1)}(\vec{r}, t').\end{aligned}\quad (2.355)$$

Die gemessene Häufigkeit  $h_n(t, \Delta t, T)$  wurden wie in Gleichung (2.167) durch die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit  $P_n(t, \Delta t)$  ersetzt (Ergodizität), zusätzlich wurde der Zusammenhang zwischen der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung und dem Erwartungswert der zeitlich gemittelten Intensität hergestellt. Für das zweite Moment  $\overline{n^2(t, \Delta t)}$  erhält man [VW06]:

$$\begin{aligned}\overline{n^2(t, \Delta t)} &= \overline{n(t, \Delta t)} + \xi'^2 \left\langle \hat{I}^2(\vec{r}, t, \Delta t) \right\rangle \\ &= \overline{n(t, \Delta t)} + \xi'^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' G^{(2,2)}(\vec{r}, t', t'').\end{aligned}\quad (2.356)$$

Sowohl der Erwartungswert, als auch die Varianz  $\text{Var}(n) = \overline{n^2} - \overline{n}^2$  sind durch zeitliche Integrale über die Korrelationsfunktionen gegeben. Für die Intensitätskorrelation an zwei verschiedenen Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  erhält man:

$$\begin{aligned}\overline{n_1(t, \Delta t) \cdot n_2(t + \tau, \Delta t)} &= \sum_{m_1, m_2} m_1 m_2 P_{m_1 m_2}(t, \Delta t, \tau) = \xi'^2 \left\langle \hat{I}(\vec{r}_1, t, \Delta t) \hat{I}(\vec{r}_2, t + \tau, \Delta t) \right\rangle \\ &= \xi'^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_{t+\tau}^{t+\tau+\Delta t} dt'' G^{(2,2)}(\vec{r}_1, t', \vec{r}_2, t'').\end{aligned}\quad (2.357)$$

Gleichung (2.357) erfasst die raumzeitliche Intensitätskorrelation. Praktisch wird die Intensität an zwei verschiedenen Orten gemessen und mit einer Zeitverzögerung  $\tau$  korreliert.

Wird nur ein einzelner Photomultiplier zur Korrelationsmessung verwendet, oder ein Strahl auf zwei Detektoren aufgespalten, so sind die Orte gleich. Für  $\tau < \Delta t$  überlappen die Beobachtungsintervalle, was in der Berechnung der Autokorrelation berücksichtigt werden muss:

$$\begin{aligned}\overline{n(t, \Delta t) \cdot n(t + \tau, \Delta t)} &= \theta(\Delta t - \tau) \cdot \overline{n(t + \tau, \Delta t - \tau)} \\ &\quad + \xi'^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_{t+\tau}^{t+\tau+\Delta t} dt'' G^{(2,2)}(\vec{r}, t', t'').\end{aligned}\quad (2.358)$$

Da die Theta-Funktion durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \wedge x \geq 0 \\ 0 \wedge x < 0 \end{cases}\quad (2.359)$$

definiert ist, unterdrückt sie den Erwartungswert  $\overline{n(t+\tau, \Delta t - \tau)}$ , sobald  $\tau > \Delta t$  gilt. Gleichung (2.358) geht für  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \wedge \tau > \Delta t$  in Gleichung (2.357) über. Andererseits wird Gleichung (2.358) für  $\tau = 0$  zum Moment zweiter Ordnung aus Gleichung (2.356).

Ein wichtiger Fall soll noch erwähnt werden. Sind die Messzeitintervalle  $\Delta t$  so kurz, dass die Intensität  $\hat{I}(\vec{r}, t)$  als konstant angenommen werden kann, so gilt:

$$\hat{I}(\vec{r}, t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \hat{I}(\vec{r}, t') dt' = \Delta t \cdot \hat{I}(\vec{r}, t). \quad (2.360)$$

Dies hat zur Folge, dass die Intensitätskorrelation direkt messbar wird anstelle der zeitlich gemittelten:

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_{t+\tau}^{t+\tau+\Delta t} dt'' G^{(2,2)}(\vec{r}, t', t'') \Rightarrow \Delta t^2 \cdot G^{(2,2)}(\vec{r}, t, t + \tau). \quad (2.361)$$

## Bunching

Zum Messen von zeitlichen Intensitätskorrelationen verwendet man in der Praxis einen Aufbau, wie er von Hanbury Brown und Twiss genutzt wurde (siehe Abbildung 2.26). Durch den Koinzi-

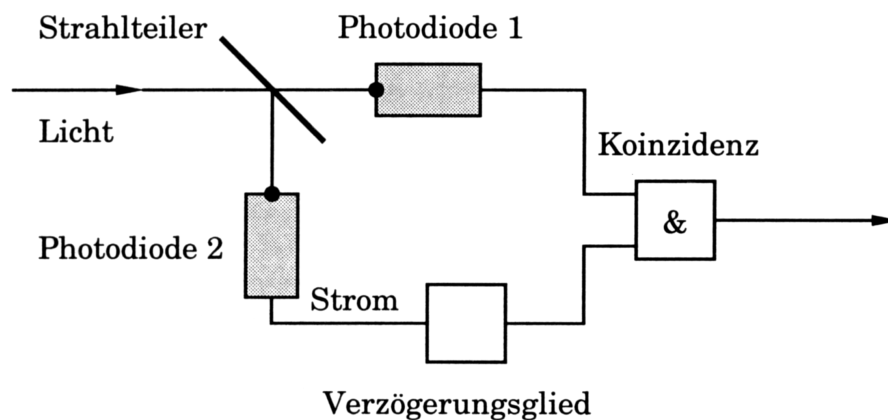


Abbildung 2.26: Hanbury-Brown-Twiss Experiment [LK93].

denzzähler werden die Korrelationen der Photoelektronen festgestellt, was  $\overline{n(t, \Delta t) \cdot n(t + \tau, \Delta t)}$  aus Gleichung (2.358) entspricht. Die zeitliche Verzögerung  $\tau$  wird durch das Verzögerungsglied erzeugt. Befindet man sich im Bereich des Kurzzeitlimits aus Gleichung (2.361), so ist die Korrelation der Intensitäten über  $G^{(2,2)}(\vec{r}, t, t + \tau) = G^{(2)}(t, t + \tau)$  direkt bestimmt. Dabei zeigt sich für den klassischen Fall unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung [VW06]:

$$G_{kl}^{(2)}(t, t + \tau) \leq G_{kl}^{(2)}(t, t). \quad (2.362)$$

Offensichtlich gilt im klassischen Fall für steigendes  $\tau$ , dass die Intensitätskorrelation abnimmt, oder gleich bleibt. Sehr oft wird die normierte Form der Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(\tau)$  verwendet, die als Grad der zeitlichen Kohärenz zweiter Ordnung über [Lou91]

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{G^{(2)}(\tau)}{|G^{(1)}(0)|^2} \quad (2.363)$$

definiert ist. Für thermisches Licht zeigt sich, dass  $g^{(2)}(\tau)$  in der Kurzzeitnäherung aus Gleichung (2.361) auf den komplexen Selbstkohärenzgrad  $\gamma(\tau)$  aus Gleichung (2.338) zurückgeführt werden kann [WM94]:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |\gamma(\tau)|^2. \quad (2.364)$$

Folglich ist die zeitliche Kohärenz zweiter Ordnung für thermisches Licht durch die zeitliche Kohärenz erster Ordnung bestimmt. Da  $\gamma(0) = 1$  ist und für  $\tau > 0$  gegen Null konvergiert, fällt  $g^{(2)}(\tau)$  in Abhängigkeit von  $\tau$  von Zwei auf Eins<sup>6</sup>. Dies ist in Abbildung 2.27 für ein gauss-

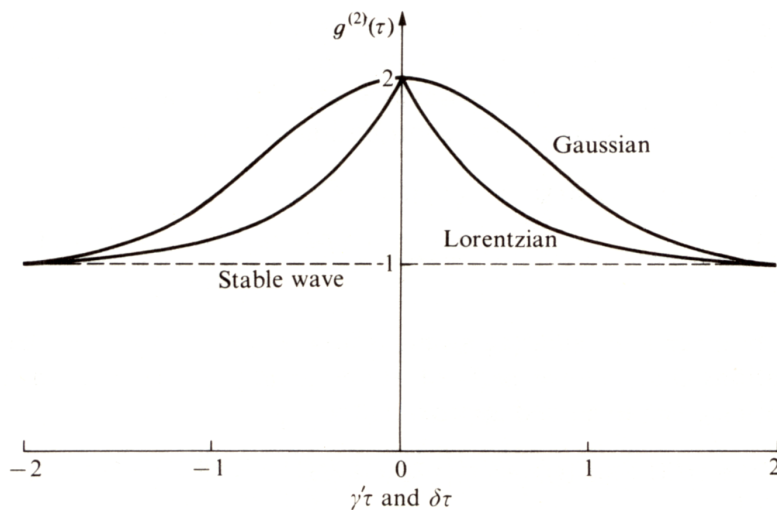


Abbildung 2.27: Zeitliche Kohärenz zweiter Ordnung, für ein lorentz- und ein gaussförmiges Spektrum. Mit dem Parameter  $\Gamma$  aus Gleichung (2.344) gilt für lorentz- und gaussförmige spektrale Verteilung  $\gamma' = \frac{1}{2\Gamma}$  und  $\delta = \frac{2\pi}{\Gamma}$ . Zusätzlich ist noch der kohärente Fall eingezeichnet (Stable wave) [Lou91].

und lorentzförmiges Spektrum zu sehen. Zusätzlich ist noch der kohärente Fall eingezeichnet.

<sup>6</sup>Für klassische Felder kann  $g_{clas}^{(2)}(\tau)$  auch Werte annehmen, die Größer als Zwei sind. Im Mittel sollen  $\bar{n}$  Atome zum Feld beitragen, dann gilt für ein lorentzförmiges Spektrum [Lou80]:

$$g_{clas}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(\tau)I(0) \rangle}{\langle I \rangle^2} = 1 + \left(1 + \frac{1}{\bar{n}}\right) e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} \Rightarrow g_{clas}^{(2)}(0) = 2 + \frac{1}{\bar{n}}. \quad (2.365)$$

Für ihn gilt  $g^{(2)}(\tau) = 1$ , unabhängig von  $\tau$ . Experimentell wurde durch Arecchi, Gatti und Sona 1966 der Vergleich zwischen quasi thermischem und kohärentem Licht durchgeführt [ABS66]. Für sehr schmale Spektren kann der Bunching-Effekt auch mit einem einzigen Photomultiplier nachgewiesen werden [MM66]. Wird das Spektrum verbreitert, so ist für thermisches Licht die Kurzzeitnäherung aus Gleichung (2.361) nicht mehr gültig. Es gilt dann:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_{t+\tau}^{t+\tau+\Delta t} dt'' G^{(2)}(\vec{r}, t', t'')}{\left| \int_t^{t+\Delta t} dt' G^{(1)}(\vec{r}, t') \right|^2} \approx 1 \quad \wedge \quad \Delta t \gg \tau_c. \quad (2.366)$$

Eine Unterscheidung zwischen kohärentem und thermischen Licht ist nur möglich, wenn  $\Delta t < \tau_c$  sichergestellt wird. Bei der Verwendung eines einzelnen Detektor zur Messung macht sich die Totzeit  $\tau_T$  bemerkbar, es muss gelten  $\tau_c \gg \tau_T$ . Natürlich kann auch der normierte raumzeitliche Kohärenzgrad zweiter Ordnung  $g_{12}^{(2)}(\tau)$  im Kurzzeitlimit gebildet werden. Er ist durch

$$g_{12}^{(2)}(\tau) = \frac{G^{(2,2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{G^{(1)}(\vec{r}_1, 0) \cdot G^{(1)}(\vec{r}_2, 0)} \quad (2.367)$$

gegeben. Über ihn ist es möglich die Kohärenzfläche, das Kohärenzvolumen sowie die Kopplungen von unterschiedlichen räumlichen Moden zu untersuchen.

## Antibunching

Zum ersten Mal gelang es 1977 Kimble und Dagenais den Antibunching-Effekt nachzuweisen [KDM77]. Sie benutzten einen Na-Strahl sehr geringer Intensität, der senkrecht zum Gang eines Laserstrahls verlief. Durch diesen Aufbau war es möglich, nur sehr wenige Atome gleichzeitig anzuregen (im Mittel weniger als ein Atom). Die Fluoreszenzphotonen wurden gesammelt, auf zwei Detektoren geschickt und mit Hilfe der Elektronik konnte eine Statistik der zeitlichen Abstände erstellt werden. Die Resultate wiesen einen eindeutigen Antibunching-Effekt für kurze Zeitverschiebungen  $\tau$  auf. Für größere Zeitabstände sank die Korrelation wieder. Betrachtet man Gleichung (2.358), so wird klar, dass die Intensitätskorrelation im Experiment mit zunehmender zeitlicher Verschiebung  $\tau$  zunächst anstieg. Das bedeutet, kurz nachdem ein Photon gemessen wurde, ist die Wahrscheinlichkeit kein weiteres Photon zu messen erhöht. Der experimentelle Aufbau stellte sicher, dass maximal ein bis zwei Atome im Feld des Lasers Fluoreszenzphotonen aussenden konnten. Dies führt dazu, dass zwischen den Photonen ein Abstand vorlag, wie auch in Abbildung 2.23 unter c) zu sehen ist. Allerdings handelt es sich dort um Licht, das eine Sub-Poisson-Statistik besitzt. In diesem Fall ist  $g^{(2)}(\tau) < 1$ , unabhängig von  $\tau$  [WM94]. Andererseits kann Antibunching  $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$  auch für Felder mit Super-Poisson-Statistik auftreten, zumindest in einem gewissen Zeitbereich von  $\tau$  [WM94]. Liegt ein stationäres Feld  $G^{(2)}(t, t + \tau) = G^{(2)}(\tau)$  vor, dann gilt nach Gleichung (2.358) und (2.363) für die experimentell gemessenen Photonenpulse:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{G^{(2)}(\tau)}{|G^{(1)}(0)|^2} = \frac{\overline{n(\Delta t)n(\Delta t, \tau)}}{(\overline{n(\Delta t)})^2} - \theta(\Delta t - \tau) \cdot \frac{\overline{n(\Delta t - \tau)}}{(\overline{n(\Delta t)})^2}. \quad (2.368)$$

Eine einfache Möglichkeit zum Nachweis nichtklassischen Lichts bietet  $g^{(2)}(0)$ . Hier gilt:

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\text{Var}(n(\Delta t)) - \overline{n(\Delta t)}}{\overline{n(\Delta t)}^2}. \quad (2.369)$$

Wird die Varianz kleiner als der Mittelwert, dann nimmt  $g^{(2)}(0)$  Werte an, die kleiner als Eins sind. In diesem Fall liegt mit Sicherheit Antibunching vor.

### Untersuchung der Korrelationseffekte über Zeitabstände

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung von Intensitätskorrelationen besteht in der Untersuchung des Zeitabstands zwischen zwei Pulsen. Ist der zeitliche Abstand zwischen zwei Pulsen exponentialverteilt, so folgt direkt eine poissonverteilte Photonenstatistik. Mit der Lebensdauer  $\tau$  ist die Verteilungsdichte  $f(t)$  der zeitlichen Abstände  $t$  bestimmt:

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.370)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $f(t)dt$ , dass der zeitliche Abstand  $t$  vorliegt, kann genutzt werden, um die Wahrscheinlichkeit  $P_0(\Delta t)$  zu bestimmen, dass kein Puls im Zeitintervall  $\Delta t$  vorliegt:

$$P_0(\Delta t) = \int_{\Delta t}^{\infty} f(t)dt = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}. \quad (2.371)$$

Will man die Wahrscheinlichkeit  $P_1(\Delta t)$  ermitteln, dass ein Puls im Zeitintervall  $\Delta t$  detektiert wird, so ist das die Summe über alle  $f(t)dt \wedge t \leq \Delta t$  multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, im verbleibenden Intervall kein Photon zu registrieren  $P_0(\Delta t - t)$ . Wegen der kontinuierlichen Zeitabstände wird aus der Summe ein Integral:

$$P_1(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} f(t) \cdot P_0(\Delta t - t)dt = \frac{\Delta t}{\tau} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = \langle n \rangle e^{-\langle n \rangle} \quad (2.372)$$

$$P_2(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} f(t) \cdot P_1(\Delta t - t)dt = \frac{\langle n \rangle^2}{2} e^{-\langle n \rangle}. \quad (2.373)$$

Offensichtlich erhält man für exponentialverteilte Zeitabstände eine poissonverteilte Photonenstatistik. Dieser Umstand kann genutzt werden, um Bunching, bzw. Antibunching festzustellen. Handelt es sich um gebunchtes Licht, so steigt die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Photonen gleichzeitig oder kein Photon gemessen wird. Folglich übersteigt die Wahrscheinlichkeit kleinerer und größerer zeitlicher Abstände die der exponentialverteilten Zeitabstände, während sie für mittlere Zeitdifferenzen kleiner ist. Im Falle des Antibunchings verhalten sich die zeitlichen Abstände genau entgegengesetzt. Aus dem Vergleich der gemessenen Zeitabstände mit der Exponentialverteilung kann dann auf Intensitätskorrelationen geschlossen werden.

## 2.5.4 Fano-Faktoren

Eine weitere Möglichkeit zur Klassifizierung der Felder bietet der Fano-Faktor. Die wesentlichen Größen, die dazu verwendet werden, sind die zeitlichen Mittelwerte  $\bar{n}$  und Varianzen  $\overline{(\Delta n)^2}$  der gemessenen Pulse. Der elektronische Fano-Faktor  $F_{el}$  ist durch [VW06]

$$F_{el} = \frac{\overline{(\Delta n)^2}}{\bar{n}} \quad (2.374)$$

gegeben.  $F_{el}$  entspricht dem gemessenen Fano-Faktor. Dieser muss nun mit dem Fano-Faktor der Photonen  $F_{ph}$

$$F_{ph} = \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} \quad (2.375)$$

in Zusammenhang gebracht werden. Dabei erhält man für den Fall eines Breitbanddetektors mit der Quanteneffizienz  $\eta$ :

$$F_{el} - 1 = \eta(F_{ph} - 1) \quad \Rightarrow \quad F_{ph} = \frac{\overline{(\Delta n)^2} - \bar{n}}{\eta \bar{n}} + 1. \quad (2.376)$$

Daraus folgt, dass der Fano-Faktor  $F_{ph} < 1$  ist, wenn  $F_{el} < 1$  statistisch signifikant gemessen wird. Dies ist aber gleichbedeutend mit einer Sub-Poisson-Statistik [VW06], und könnte auf gequetschte Zustände hindeuten. In jedem Fall wäre es ein Beweis für nichtklassisches Licht. Ist der Fano-Faktor größer als Eins, so kann es sich um nichtklassisches Licht handeln.

## 3 Simulationen

Ein probates Mittel zur theoretischen Beschreibung ist die Simulation. Durch sie ist es möglich zu prüfen, ob die Grundannahmen unter den experimentellen Bedingungen zu messbaren Effekten führen. Dazu wurde Gleichung (2.288) in Python 2.5 programmiert. Setzt man  $P_n$  aus Gleichung (2.207) ein, so erhält man die gemessene monomodige Verteilung für gequetschtes Licht. Durch die parametrische Abhängigkeit der Statistik von der Detektionseffizienz  $\xi$  kann deren Auswirkung auf die Verteilung ermittelt werden. Andererseits können über Gleichung (2.225) multimodige Verteilungen verschiedener Zustände betrachtet werden. Die Ergebnisse der Simulationen sind in diesem Kapitel graphisch dargestellt. Anschließend werden Folgerungen aus der Theorie und den Simulationen über die möglichen Experimente gezogen. Da der Messaufbau gegeben ist, soll geklärt werden unter welchen Bedingungen ein eindeutiger Nachweis nichtklassischer Effekte möglich ist.

### 3.1 Einfluss der Detektionseffizienz auf die Photonenstatistik

Normalerweise besitzen Detektoren eine Detektionseffizienz  $\xi < 1$ . Im Falle des thermischen und des kohärenten Lichts verändert die Detektionseffizienz nicht die Art der Statistik [WM94]. Das bedeutet, eine thermische Statistik bleibt eine thermische Statistik, allerdings ist der Mittelwert um den Faktor  $\xi$  kleiner und verschiebt als Lagemaß der Verteilung. Im Falle des gequetschten Lichts verhält es sich anders.

#### 3.1.1 Monomodiges Feld mit Super-Poisson-Statistik

Um dies zu verdeutlichen, wird zunächst Licht mit Super-Poisson-Statistik betrachtet. In Tabelle 3.1 sind oben die Quetschungs-  $\xi = r \cdot e^{i\theta}$  und Verschiebungsparameter  $\alpha = |\alpha| \cdot e^{i\phi}$ ,  $\alpha' = |\alpha'| \cdot e^{i\phi'}$  aufgelistet. Aus Gleichung (2.207) folgt damit die Photonenstatistik  $P_{geque}(n)$  des gequetschten Lichts, woraus sich über die Formeln (2.173) und (2.174) Mittelwert und Varianz berechnen lassen. Die erhaltene Verteilung  $P_{geque}(n)$  wird zusätzlich durch die Poisson-Verteilung  $P_{Poiiss}(n)$  approximiert. Aus den genäherten Werten kann ebenfalls der Mittelwert (Mittel.Poiss) bestimmt werden. Um nicht nur Mittelwerte und Varianzen zu vergleichen, wird in Anlehnung an den  $\chi^2$ -Test die normierte Summe der quadratischen Abweichungen  $\Sigma$  eingeführt:

$$\Sigma = \sum_{n=0}^m \frac{(P_{geque}(n) - P_{Poiiss}(n))^2}{P_{geque}(n)}. \quad (3.1)$$

Parameter: $r = 1.2,  \alpha  = 9,43,  \alpha'  = 4, \phi = 0,69 \phi' = \frac{\pi}{2}, \theta = 0$				
Detektionseffizienz $\xi$	quad. Abweichung $\Sigma$	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz
1.00	1.437010	17.97433	17.55574	177.82251
0.90	1.322943	16.17690	15.56206	145.65392
0.80	1.204856	14.37947	13.61109	116.68230
0.70	1.081860	12.58203	11.70397	90.90764
0.60	0.952904	10.78460	9.84229	68.32994
0.50	0.816595	8.98717	8.02712	48.94921
0.40	0.671091	7.18973	6.25764	32.76544
0.30	0.514104	5.39230	4.53103	19.77864
0.20	0.342515	3.59487	2.86035	9.98879
0.10	0.149806	1.79743	1.36688	3.39592
0.05	0.052562	0.89872	0.72762	1.29834
0.01	0.002547	0.17974	0.17165	0.19573

Tabelle 3.1: Mittelwert und Varianz einer monomodigen Verteilung in Abhängigkeit von der Detektionseffizienz  $\xi$  sowie der Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und die Summe der quadratischen Abweichung aus Gleichung (3.1).

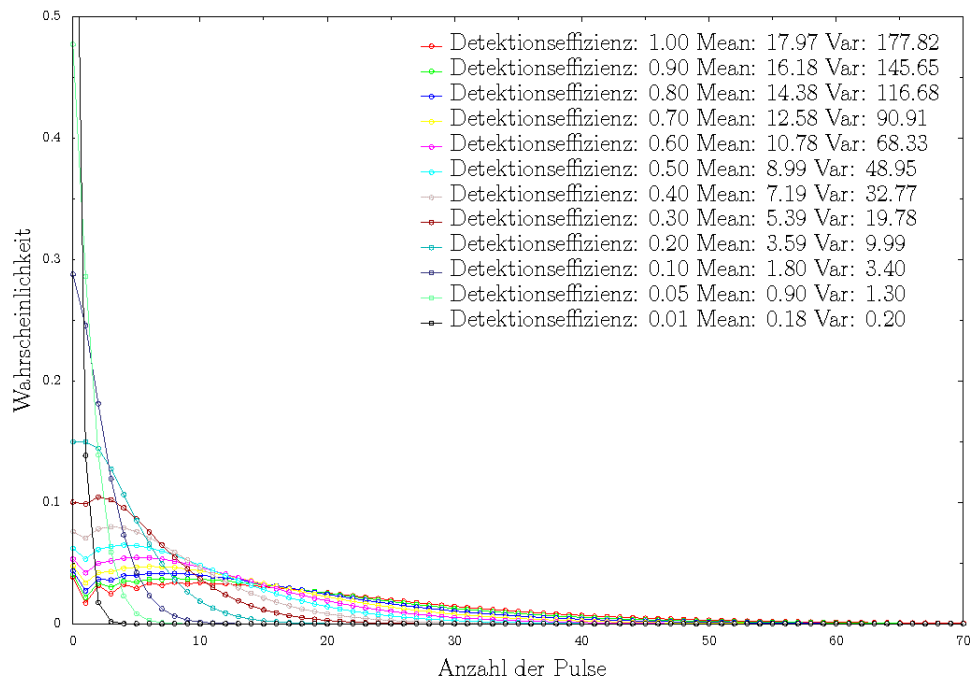


Abbildung 3.1: Auswirkung der Detektionseffizienz auf eine Super-Poisson-Verteilung.



$\Sigma$  erfasst die Abweichung der Statistik von der Poisson-Verteilung. Dabei gibt  $m = 70$  die obere Grenze an, bis zu der verglichen wird. Die Verteilungen des Zustands in Abhängigkeit von der Detektionseffizienz  $\xi$  (siehe Tabelle 3.1) sind in Abb. 3.1 dargestellt. Wie aus der Tabelle zu erkennen ist, nimmt die Varianz der gequetschten Verteilung für eine sinkende Detektionseffizienz  $\xi$  stärker ab als der Mittelwert, bis sie annähernd dem Mittelwert der Poisson-Verteilung gleicht. Gleichzeitig geht die quadratische Abweichung um fast drei Zehnerpotenzen zurück. Eine Reduktion der Detektionseffizienz führt im Falle eines Zustands mit Super-Poisson-Statistik zu einem Angleich an die Poisson-Verteilung. Liegt eine optimale Detektivität von  $\xi = 1$  vor, so sind auf der Photonenstatistik Oszillationen zu erkennen, die mit sinkender Detektivität verschwinden. Folglich kann eine einmodige Super-Poisson-Statistik nur von einer Poisson-Statistik unterschieden werden, wenn die Detektionseffizienz ausreichend gut ist.

### 3.1.2 Monomodiges Feld mit Sub-Poisson-Statistik

Betrachten wir nun ein Feld mit Sub-Poisson-Statistik. Dazu wird der Parameter  $r$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  so optimiert, dass die Varianz der Verteilung minimal wird (siehe [WM94]). Zusätzlich werden beide Winkel gleich Null gesetzt. Dies entspricht der Darstellung aus Abbildung 2.21 links. Dort fällt die minimale Fluktuation der Feldamplitude mit der maximalen Auslenkung zusammen, wodurch die Intensitätsschwankung stark reduziert wird. Wie aus Tabelle 3.2 zu erkennen ist, beträgt die Varianz für eine Detektionseffizienz  $\xi = 1$  in etwa ein Drittel des Mittelwerts. Wird die Detektionseffizienz gesenkt, so schrumpft der Unterschied. Auch in diesem Fall lässt sich bei einer Detektionseffizienz von wenigen Prozent nur sehr schwer ein signifikanter Unterschied feststellen. In Abbildung 3.2 sind die simulierten Statistiken entsprechen der Tabelle 3.2 dargestellt.

Die Annahme, einen optimalen Wert für den Parameter  $r$  vorzufinden, ist unwahrscheinlich. Aus diesem Grund betrachten wir noch einen willkürlichen Wert für  $r$ . Tabelle 3.3 zeigt, dass die Varianz bei einer Detektivität  $\xi \approx 0.10$  fast dem Mittelwert gleicht. In Abbildung 3.3 sind die zugehörigen simulierten Statistiken dargestellt. Während für eine Detektionseffizienz von Eins ausgeprägte Oszillationen zu erkennen sind, verschwinden diese für kleinere Werte. Abschließend kann gesagt werden, dass sich die Detektionseffizienz sehr stark auf die Messbarkeit von gequetschten Zuständen auswirkt. In allen betrachteten Fällen zeigte sich das gleiche Verhalten. Zusätzlich zur Reduktion des Lagemaßes entwickelt sich mit sinkender Detektionseffizienz  $\xi$  die Statistik  $P_{geque}(n)$  zur Poisson-Verteilung  $P_{Poiiss}(n)$  hin:

$$P_{geque}(n) \rightarrow P_{Poiiss}(n) \quad \wedge \quad \xi \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Das Absinken von  $\Sigma$  aus Gleichung (3.1) erfasst diese Annäherung. Da immer  $P(n) \leq 1$  gilt, erzeugt beispielsweise eine Abweichung vor  $P_{geque}(n) - P_{Poiiss}(n) = 0.1$  einen Beitrag in  $\Sigma$  von  $\frac{0.01}{P_{geque}(n)}$ . Die Gewichtung durch  $P_{geque}(n)$  bestimmt den effektiven Beitrag. Ist  $P_{geque}(n) = 0.01$  so erhält man einen Beitrag von Eins zu  $\Sigma$ . Die Abweichungen bei kleineren Wahrscheinlichkeiten  $P_{geque}(n)$  werden demnach stärker gewichtet. Mit sinkender Detektionseffizienz konvergiert  $\Sigma \rightarrow 0$ , was einer verbesserten Übereinstimmung mit der Poisson-Verteilung entspricht.

Parameter: $r = 0.69,  \alpha  = 8,00,  \alpha'  = 4, \phi = 0, \phi' = 0, \theta = 0$				
Detektionseffizienz $\xi$	quad. Abweichung $\Sigma$	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz
1.00	18.954078	16.56250	16.74583	5.75781
0.90	1.106872	14.90625	15.07867	6.15445
0.80	0.644028	13.25000	13.40951	6.33500
0.70	0.396527	11.59375	11.73861	6.29945
0.60	0.241009	9.93750	10.06605	6.04781
0.50	0.140166	8.28125	8.39196	5.58008
0.40	0.075692	6.62500	6.71652	4.89625
0.30	0.036232	4.96875	5.03980	3.99633
0.20	0.013969	3.31250	3.36202	2.88031
0.10	0.003296	1.65625	1.68387	1.54820
0.05	0.000857	0.82813	0.84121	0.80111
0.01	0.000026	0.16563	0.16639	0.16454

Tabelle 3.2: Parameter der Verteilung, Mittelwerte, Varianzen, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und  $\Sigma$  in Abhängigkeit von der Detektionseffizienz  $\xi$ .

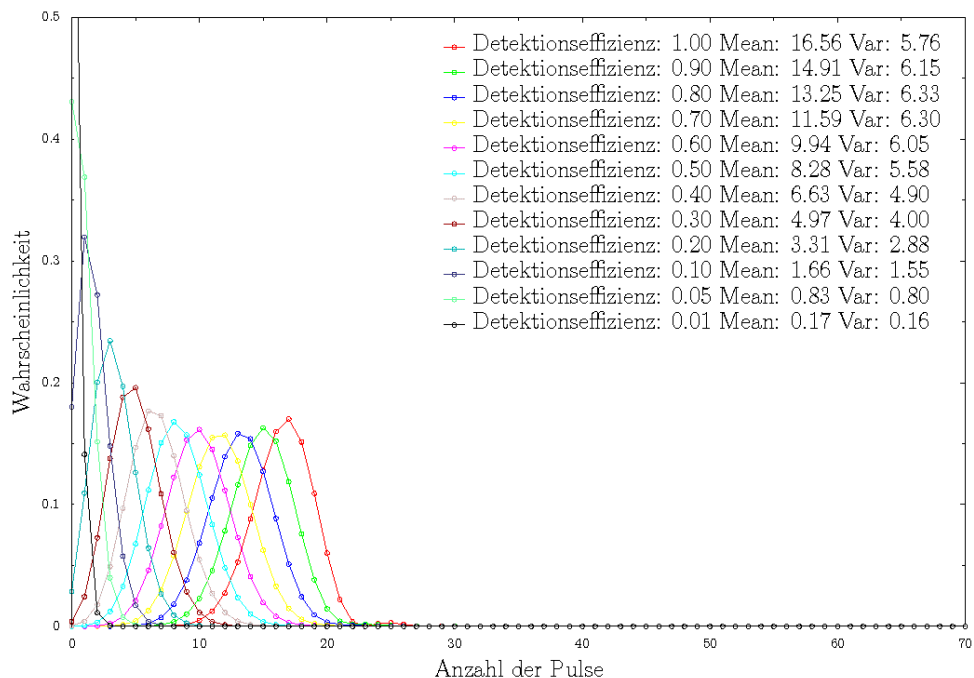


Abbildung 3.2: Auswirkung der Detektionseffizienz auf eine Sub-Poisson-Verteilung mit minimierter Varianz.

Parameter: $r = 1.2,  \alpha  = 13, 3,  \alpha'  = 4, \phi = 0, \phi' = 0, \theta = 0$				
Detektionseffizienz	quad. Abweichung	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz
1.00	7.836263	18.27839	17.57628	16.38466
0.90	1.052024	16.45055	15.88096	14.91663
0.80	0.423441	14.62271	14.17210	13.41072
0.70	0.201628	12.79487	12.45019	11.86695
0.60	0.102336	10.96704	10.71542	10.28529
0.50	0.052042	9.13920	8.96742	8.66576
0.40	0.025105	7.31136	7.20582	7.00836
0.30	0.010662	5.48352	5.42990	5.31308
0.20	0.003426	3.65568	3.63859	3.57993
0.10	0.000531	1.82784	1.83062	1.80890
0.05	0.000095	0.91392	0.91752	0.90919
0.01	0.000001	0.18278	0.18296	0.18259

Tabelle 3.3: Mittelwerte und Varianzen der monomodigen Verteilung, aufgetragen über die Detektionseffizienz  $\xi$  sowie der Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und  $\Sigma$ .

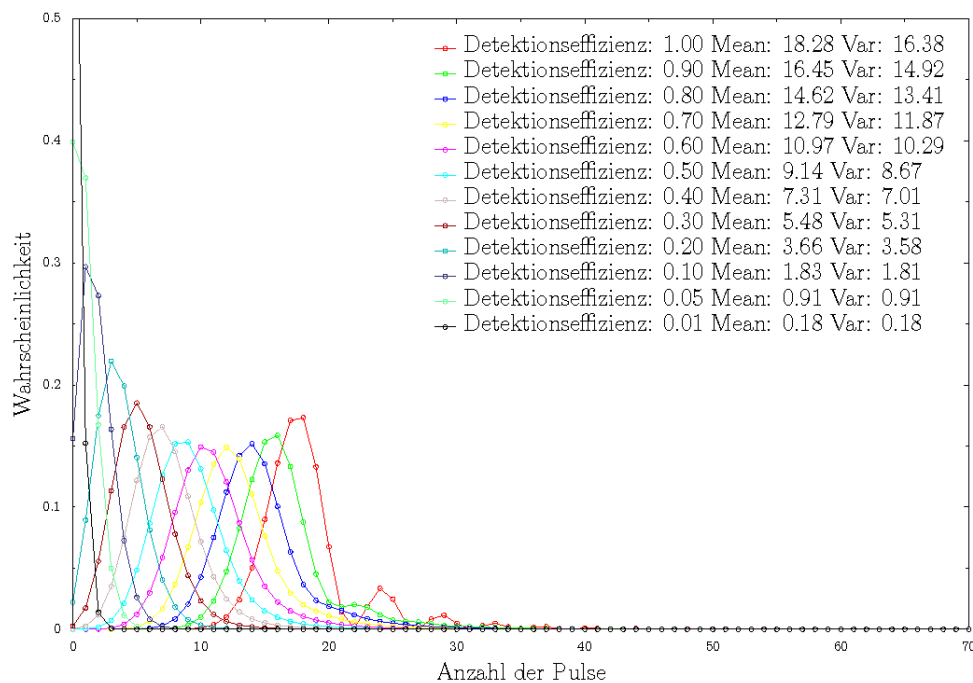


Abbildung 3.3: Auswirkung der Detektionseffizienz  $\xi$  auf eine Sub-Poisson-Verteilung.

## 3.2 Simulation multimodiger Felder

Natürlich kann sich auch die Modenzahl auf die Form der Statistik auswirken. Im Fall der thermischen Strahlung bewirkt die gesteigerte Modenzahl eine Annäherung an die Poisson-Verteilung, wie in Abbildung 2.22 zu sehen ist. Dies hat zur Folge, dass thermisches Licht experimentell nur von kohärentem unterschieden werden kann, wenn eine geringe Modenzahl sichergestellt wird. Um die Abhängigkeit der Statistik von der Modenzahl zu simulieren, wird angenommen, dass Gleichung (2.221) Gültigkeit besitzt. Liegt ein reiner multimodiger Zustand in Produktform vor, so kann über Gleichung (2.225) eine Simulation der Statistik angefertigt werden. Da es sich um einen reinen Zustand handeln soll, ist der Dichte-Operator  $\hat{\rho}$  durch

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi| \quad (3.3)$$

gegeben. Es muss nur noch die explizite Form von  $|\Psi\rangle$  eingesetzt werden.

### 3.2.1 Multimodiger reiner Produktzustand

Als erstes wird der Dichte-Operator aus einfachen Produktzuständen gebildet. Für den reduzierten, kohärenten, gequetschten Fall besitzt  $|\Psi\rangle$  nach Gleichung (2.306) folgende Form:

$$|\Psi\rangle = |\{\xi_\lambda\}, \{\alpha_\lambda\}\rangle. \quad (3.4)$$

Der multimodige Dichte-Operator  $\hat{\rho}$  ist dann durch

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi| = |\{\xi_\lambda\}, \{\alpha_\lambda\}\rangle \langle\{\xi_\lambda\}, \{\alpha_\lambda\}| \quad (3.5)$$

gegeben. In den Simulationen wird die Modenzahl systematisch von zwei auf  $n_{max} = 24$  erhöht. Die Detektionseffizienz  $\xi$  blieb allerdings immer gleich Eins, um nur den Effekt der Multimodigkeit zu demonstrieren. Eine Reduktion der Detektionseffizienz wirkt auf multimodige Produktzustände genauso wie auf monomodige. Verglichen werden wieder Varianz (Var), Mittelwert (Mean), Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und die Summe der quadratischen Abweichungen  $\Sigma$ . Zusätzlich wird noch das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz angezeigt, das ebenfalls die Veränderung der Statistik erfassen kann. Es entspricht dem reziproken Fano-Faktor der Photonenstatistik  $F_{ph}^{-1}$ .

### Homogener Zustand mit Super-Poisson-Statistik

Der Begriff „homogen“ soll hier die Bedeutung besitzen, dass alle Moden mit den gleichen Quetschungsparametern versehen werden. Für den Zustand gilt:

$$\begin{aligned} |\{\xi_\lambda\}, \{\alpha_\lambda\}\rangle &= |\xi_{\lambda_1}, \alpha_{\lambda_1}\rangle \cdot |\xi_{\lambda_2}, \alpha_{\lambda_2}\rangle \cdot \dots \cdot |\xi_{\lambda_n}, \alpha_{\lambda_n}\rangle \\ \wedge \alpha_{\lambda_i} &= \alpha_{\lambda_j} \quad \xi_{\lambda_i} = \xi_{\lambda_j} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$n$  steht für die Anzahl der Moden. Zunächst soll ein Zustand mit Super-Poisson-Statistik simuliert werden. Die genutzten Parameter sind in Tabelle 3.4 oben angegeben. Die zugehörige graphische Darstellung der Photonenstatistiken ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

Parameter: $r = 0.5,  \alpha  = 1.24,  \alpha'  = 1, \phi = 0, 43, \phi' = \frac{\pi}{2}, \theta = 0, \xi = 1$					
Modenzahl	quad. Abweichung $\Sigma$	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz	$\frac{\text{Mittelwert}}{\text{Varianz}}$
2	25.92	2.54	1.75	6.82	0.37
3	11.50	3.81	3.25	10.23	0.37
4	11.00	5.09	4.57	13.64	0.37
5	8.85	6.36	5.85	17.04	0.37
6	7.96	7.63	7.13	20.45	0.37
7	7.09	8.90	8.40	23.86	0.37
8	6.48	10.17	9.68	27.27	0.37
9	5.96	11.44	10.95	30.68	0.37
10	5.54	12.72	12.23	34.09	0.37
11	5.17	13.99	13.50	37.50	0.37
12	4.86	15.26	14.77	40.91	0.37
13	4.58	16.53	16.04	44.31	0.37
14	4.34	17.80	17.32	47.72	0.37
15	4.12	19.07	18.59	51.13	0.37
16	3.93	20.34	19.86	54.54	0.37
17	3.75	21.62	21.13	57.95	0.37
18	3.59	22.89	22.41	61.36	0.37
19	3.45	24.16	23.68	64.77	0.37
20	3.32	25.43	24.95	68.18	0.37
21	3.20	26.70	26.22	71.59	0.37
22	3.08	27.97	27.49	74.99	0.37
23	2.98	29.25	28.77	78.40	0.37
24	2.89	30.52	30.04	81.81	0.37

Tabelle 3.4: Parameter der Verteilung,  $\Sigma$ , Mittelwert, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung, Varianz sowie das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz in Abhängigkeit von der Modenzahl für eine Super-Poisson-Verteilung.

Wie aus Tabelle 3.4 hervorgeht, hat die Erhöhung der Modenzahl keine Auswirkung auf das Verhältnis von Mittelwert und Varianz. Die geringfügige Reduktion von  $\Sigma$  mit steigender Modenzahl weist darauf hin, dass sich im Bereich kleiner Wahrscheinlichkeiten  $P_{geque}(n) \ll 0.1$  die Differenz  $[P_{geque}(n) - P_{Poiss}(n)]^2$  verändert. Da aber das Verhältnis von Mittelwert und Varianz unabhängig von der Modenzahl konstant bleibt, wird keinerlei Übereinstimmung mit der Poisson-Verteilung erreicht.

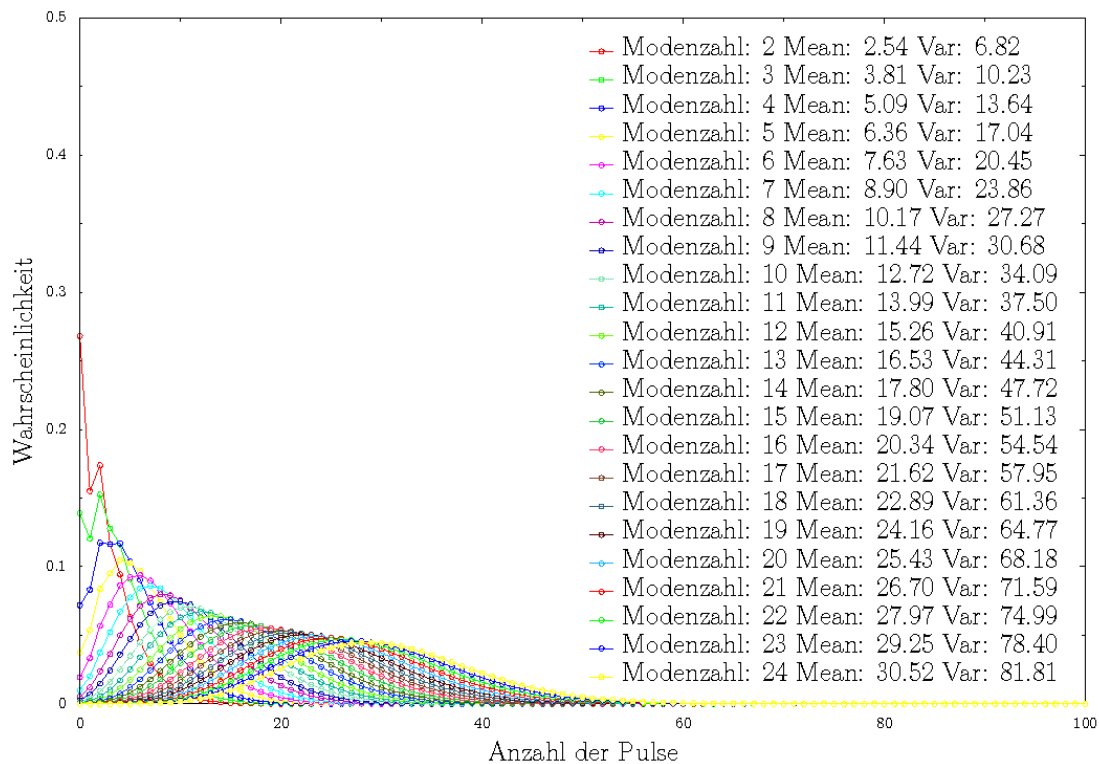


Abbildung 3.4: Homogener multimodiger Zustand mit Super-Poisson-Statistik.

### Homogener Zustand mit Sub-Poisson-Statistik

Nun soll das Verhalten eines homogenen Zustands mit Sub-Poisson-Statistik ermittelt werden. Die Parameter der Simulation sind wieder in der ersten Zeile der Tabelle 3.5 eingefügt.  $r$  wurde so gewählt, dass die Varianz jeder einzelnen Mode minimal wird. Es zeigt sich das gleiche Verhalten wie im Falle der Super-Poisson-Statistik. Offensichtlich bleibt die Art der Statistik trotz der Multimodigkeit erhalten, wenn Gleichung (2.225) gültig ist und der Dichte-Operator wie in Gleichung (3.5) gebildet wird. Gilt zusätzlich die Ergoden-Hypothese, so sollte es, wie im vorigem Unterkapitel gezeigt, bei ausreichender Detektionseffizienz möglich sein, die simulierte Statistik zu messen.

Parameter: $r = 0.23,  \alpha  = 1.26,  \alpha'  = 1, \phi = 0, \phi' = 0, \theta = 0, \xi = 1$					
Modenzahl	quad. Abweichung	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz	$\frac{\text{Mittelwert}}{\text{Varianz}}$
2	8.63	2.11	2.22	1.49	1.42
3	10.13	3.16	3.27	2.23	1.42
4	10.55	4.22	4.32	2.98	1.42
5	10.51	5.27	5.37	3.72	1.42
6	10.28	6.33	6.42	4.47	1.42
7	9.97	7.38	7.48	5.21	1.42
8	9.64	8.43	8.53	5.96	1.42
9	9.32	9.49	9.58	6.70	1.42
10	9.00	10.54	10.64	7.45	1.42
11	8.70	11.60	11.69	8.19	1.42
12	8.41	12.65	12.75	8.93	1.42
13	8.14	13.71	13.80	9.68	1.42
14	7.89	14.76	14.85	10.42	1.42
15	7.65	15.82	15.91	11.17	1.42
16	7.43	16.87	16.96	11.91	1.42
17	7.22	17.92	18.02	12.66	1.42
18	7.03	18.98	19.07	13.40	1.42
19	6.84	20.03	20.13	14.15	1.42
20	6.66	21.09	21.18	14.89	1.42
21	6.50	22.14	22.23	15.64	1.42
22	6.34	23.20	23.29	16.38	1.42
23	6.19	24.25	24.34	17.12	1.42
24	6.05	25.30	25.40	17.87	1.42

Tabelle 3.5: Parameter der Verteilung,  $\Sigma$ , Mittelwert, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung, Varianz sowie das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz in Abhängigkeit von der Modenzahl für eine Sub-Poisson-Statistik.

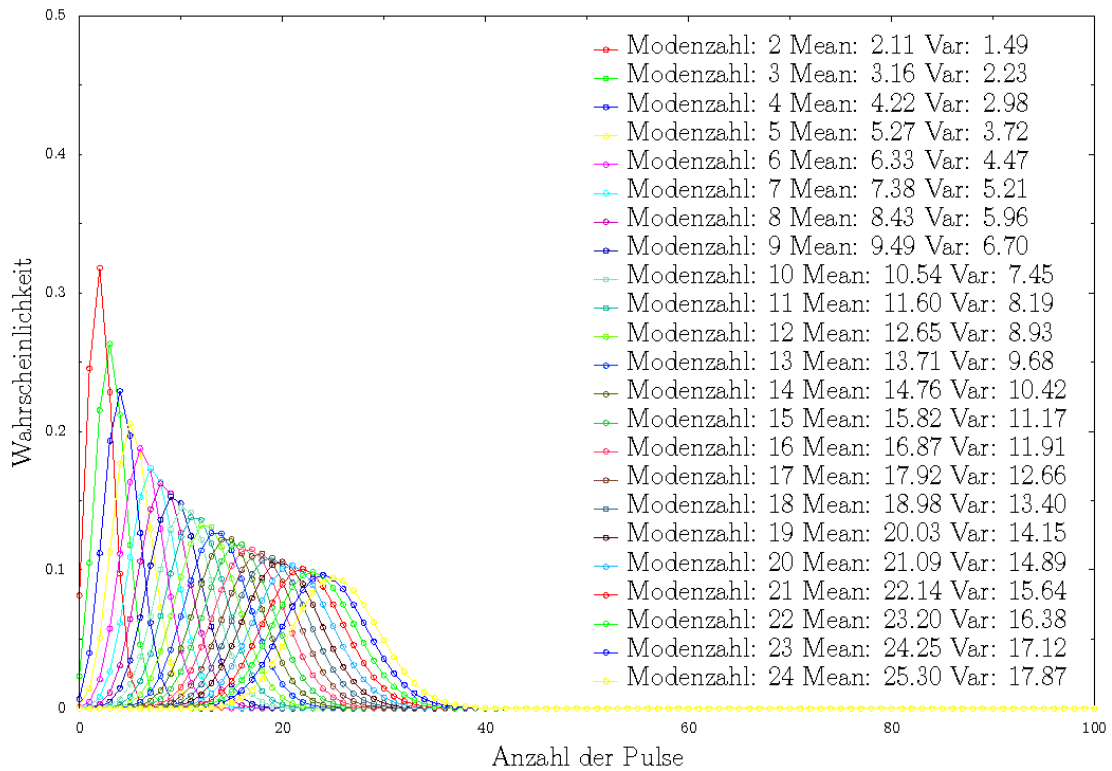


Abbildung 3.5: Homogener multimodiger Zustand mit Sub-Poisson-Statistik.

### Produktzustand mit inhomogenen Parametern

Die Form des Dichte-Operators ist wieder durch Gleichung (3.5) gegeben. Nur sind nun alle Parameter unterschiedlich zu wählen:

$$\begin{aligned}
 |\{\xi_\lambda\}, \{\alpha_\lambda\}\rangle &= |\xi_{\lambda_1}, \alpha_{\lambda_1}\rangle \cdot |\xi_{\lambda_2}, \alpha_{\lambda_2}\rangle \cdot \dots \cdot |\xi_{\lambda_n}, \alpha_{\lambda_n}\rangle \\
 &\wedge \alpha_{\lambda_i} \neq \alpha_{\lambda_j}, \quad \xi_{\lambda_i} \neq \xi_{\lambda_j}, \quad i \neq j, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Da sowohl Sub- als auch Super-Poisson-Moden beitragen, schwankt das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz, wie aus Tabelle 3.6 hervorgeht. Die zugehörige graphische Darstellung ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Liegen in den einzelnen Moden unterschiedliche Quetschungsparameter vor, so kann die Statistik stark um die Poisson-Verteilung schwanken. Eine Übereinstimmung mit der Poisson-Verteilung kann nur für geeignete Parameter erreicht werden. Da die Parameter der einzelnen Moden willkürlich gewählt wurden, ist die multimodigen Verteilung sowohl Sub- als auch Super-Poisson verteilt, wie aus dem Verhältnis aus Mittelwert und Varianz geschlossen werden kann.



Modenzahl	quad. Abweichung $\Sigma$	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz	$\frac{\text{Mittelwert}}{\text{Varianz}}$
2	7.72	3.05	3.11	2.23	1.37
3	6.78	4.76	4.78	3.45	1.38
4	20.36	7.74	7.77	5.52	1.40
5	1295.83	13.24	13.31	8.21	1.61
6	310.89	13.91	13.85	10.39	1.34
7	8960.89	18.65	18.61	12.75	1.46
8	6940.69	20.66	20.58	15.65	1.32
9	2505.32	21.31	21.23	16.49	1.29
10	1548.63	22.35	22.26	17.37	1.29
11	12560.67	27.67	27.05	31.93	0.87
12	6926.80	28.67	28.07	32.98	0.87
13	3128.98	29.23	28.64	33.41	0.87
14	1127.90	29.41	28.82	33.67	0.87
15	3906.50	32.69	32.15	36.44	0.90
16	5188.25	35.17	34.51	42.74	0.82
17	4231.84	36.44	35.77	44.28	0.82
18	2282.39	37.16	36.50	45.40	0.82
19	1929.75	38.39	37.75	46.50	0.83
20	38353.49	43.78	43.21	49.53	0.88
21	19350.16	44.42	43.84	50.63	0.88
22	10665.83	44.99	44.41	51.08	0.88
23	9846.28	46.72	46.11	55.04	0.85
24	12699.54	48.82	48.16	59.28	0.82

Tabelle 3.6:  $\Sigma$ , Mittelwert, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung, Varianz und das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz in Abhängigkeit von der Modenzahl für gemischte Parameter.

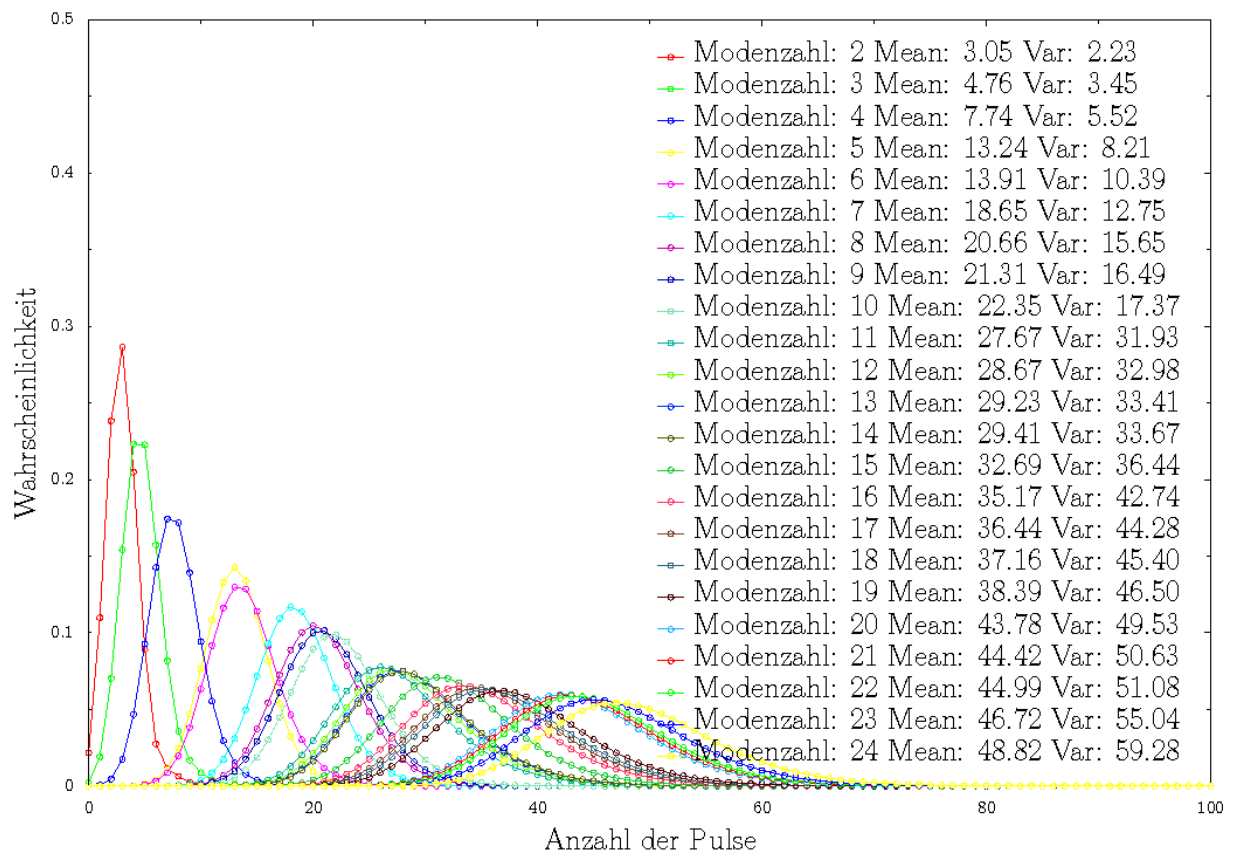


Abbildung 3.6: Multimodiger Produktzustand für gemischte Parameter.

### 3.2.2 Summe aus Produktzuständen

Der reine Zustand kann auch durch eine Summation über Produktzustände erzeugt werden. Zur Vereinfachung der Simulation soll die Anzahl der Summanden gleich der Anzahl der Moden sein. Jeder Summand (Produktzustand  $|\alpha_n, \xi_n\rangle_m$ ) besteht aus so vielen Faktoren  $|\dots\rangle$  wie Moden vorhanden sind. Für den Zustand  $|\Psi\rangle$  gilt

$$|\Psi\rangle_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^m |\alpha_n, \xi_n\rangle_m, \quad (3.8)$$

wobei die Produktzustände durch

$$|\alpha_n, \xi_n\rangle_m = |0_1\rangle \cdot |0_2\rangle \cdot \dots \cdot |\alpha_n, \xi_n\rangle \cdot \dots \cdot |0_m\rangle \quad (3.9)$$

gegeben sind.  $m$  gibt die Modenzahl an. Der Index  $n$  bestimmt, welche der Moden durch die Parameter  $\alpha_n$  und  $\xi_n$  besetzt wird. Um die Wahrscheinlichkeitsinterpretation von  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$  zu gewährleisten, bedarf es einer Renormierung des Zustands  $|\Psi\rangle_m$ . Diese geschieht über die Normierungskonstante  $N$ . Bei den Simulationen zeigte sich, dass der Parameter  $\Sigma$  bei sehr großen Werten stark schwankte, obwohl die Verteilungen praktisch gleich blieben. Dieses Verhalten ist auf größere Abweichungen bei sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten zurückzuführen. Die Abweichungen bei größeren Wahrscheinlichkeiten werden nur ersichtlich, wenn  $\Sigma$  klein ist. Aus diesem Grund wird der Parameter  $\Delta$  definiert:

$$\Delta = \sum_n \sqrt{[P_{geque}(n) - P_{Poiiss}(n)]^2} \geq 0. \quad (3.10)$$

$\Delta$  ist unempfindlich gegenüber Differenzen bei kleinen Wahrscheinlichkeiten  $P_{geque}(n) \ll 0.1$ . Es werden wieder zwei Fälle betrachtet.

#### Homogener Summenzustand

Dazu werden in den besetzten Moden der Produktzustände  $|\alpha_n, \xi_n\rangle_m$  die gleichen Parameter verwendet. Für die Parameter gilt folglich:

$$\alpha_n = \alpha_j \wedge \xi_n = \xi_j \quad \forall j, n \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (3.11)$$

Für den homogenen Summenzustand zeigt sich ein interessantes Verhalten. Ist der Parameter  $\alpha'$  relativ klein, so verändert sich aufgrund der Renormierung in Abhängigkeit von der Modenzahl die Statistik. Das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz nähert sich, wie aus Tabelle 3.7 folgt, dem Wert Eins an. Der Parameter  $\Delta$  zeigt uns aber, dass keine Übereinstimmung mit der Poisson-Verteilung vorliegt. Betrachtet man Abbildung 3.7, so erkennt man, dass mit steigender Modenzahl die Wahrscheinlichkeit kein Photon zu messen  $P_{geque}(0)$  steigt, während die anderen Wahrscheinlichkeiten  $P_{geque}(n)$ ,  $n > 0$  leicht abnehmen.

Parameter: $r = 0.46,  \alpha  = 3.17,  \alpha'  = 2, \phi = 0, \phi' = 0, \theta = 0, \xi = 1$					
Modenzahl	$\Delta$	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz	$\frac{\text{Mittelwert}}{\text{Varianz}}$
2	0.35	4.22	4.39135	2.20	1.92
3	0.34	4.20	4.39084	2.24	1.88
4	0.34	4.19	4.39038	2.29	1.83
5	0.34	4.18	4.38986	2.33	1.79
6	0.34	4.17	4.38933	2.37	1.76
7	0.34	4.16	4.38881	2.42	1.72
8	0.34	4.14	4.38828	2.46	1.68
9	0.34	4.13	4.38776	2.50	1.65
10	0.34	4.12	4.38723	2.54	1.62
11	0.34	4.11	4.38670	2.59	1.59
12	0.34	4.10	4.38612	2.63	1.56
13	0.34	4.09	4.38560	2.67	1.53
14	0.35	4.07	4.38507	2.71	1.51
15	0.35	4.06	4.38454	2.74	1.48
16	0.35	4.05	4.38401	2.78	1.46
17	0.35	4.04	4.38348	2.82	1.43
18	0.35	4.03	4.38295	2.86	1.41
19	0.35	4.02	4.38247	2.90	1.39
20	0.35	4.01	4.38193	2.93	1.37
21	0.35	3.99	4.38139	2.97	1.35
22	0.35	3.98	4.38085	3.00	1.33
23	0.35	3.97	4.38031	3.04	1.31
24	0.35	3.96	4.37976	3.07	1.29

Tabelle 3.7: Mittelwerte und Varianzen der multimodigen Verteilungen im Vergleich zu den Mittelwerten der genäherten Poisson-Verteilungen für homogene Summenzustände. Der Parameter  $\Delta$  ist in Gleichung (3.10) definiert.

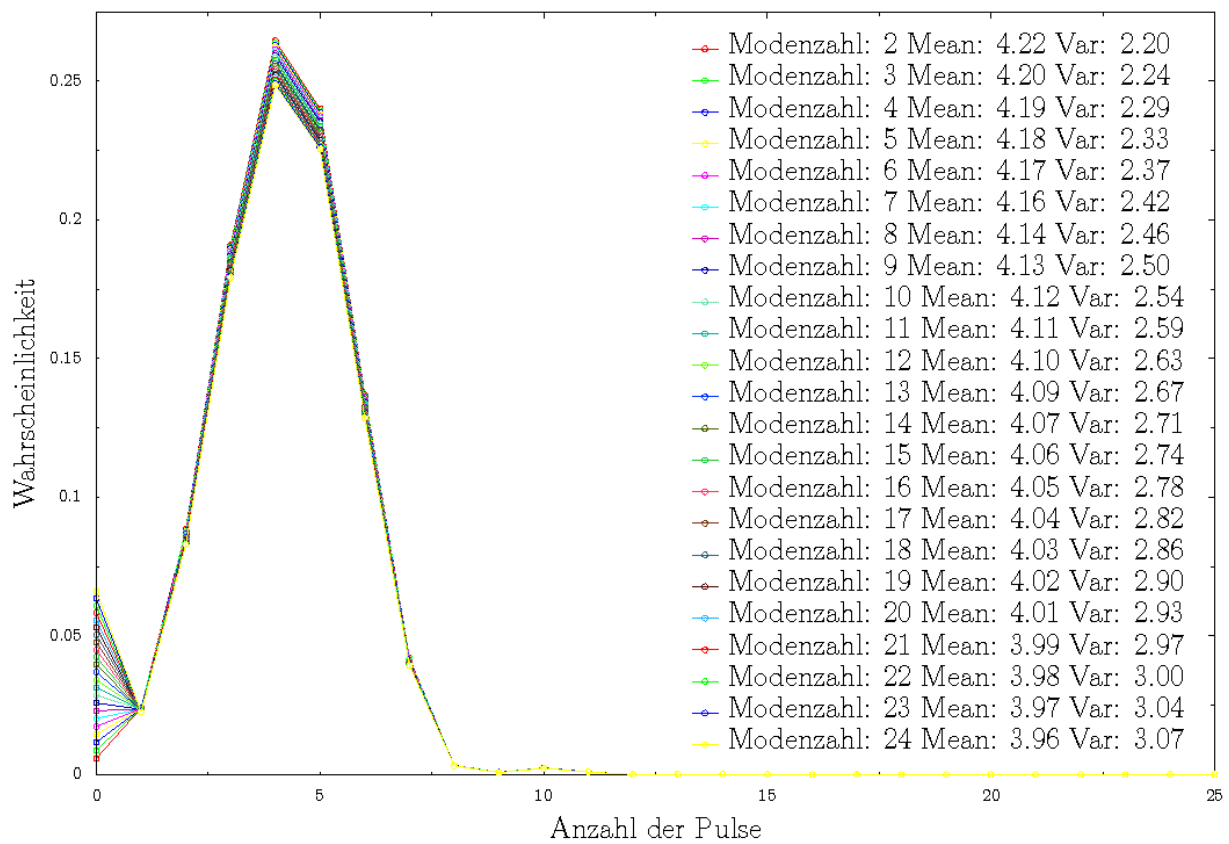


Abbildung 3.7: Homogener multimodiger Summenzustand.

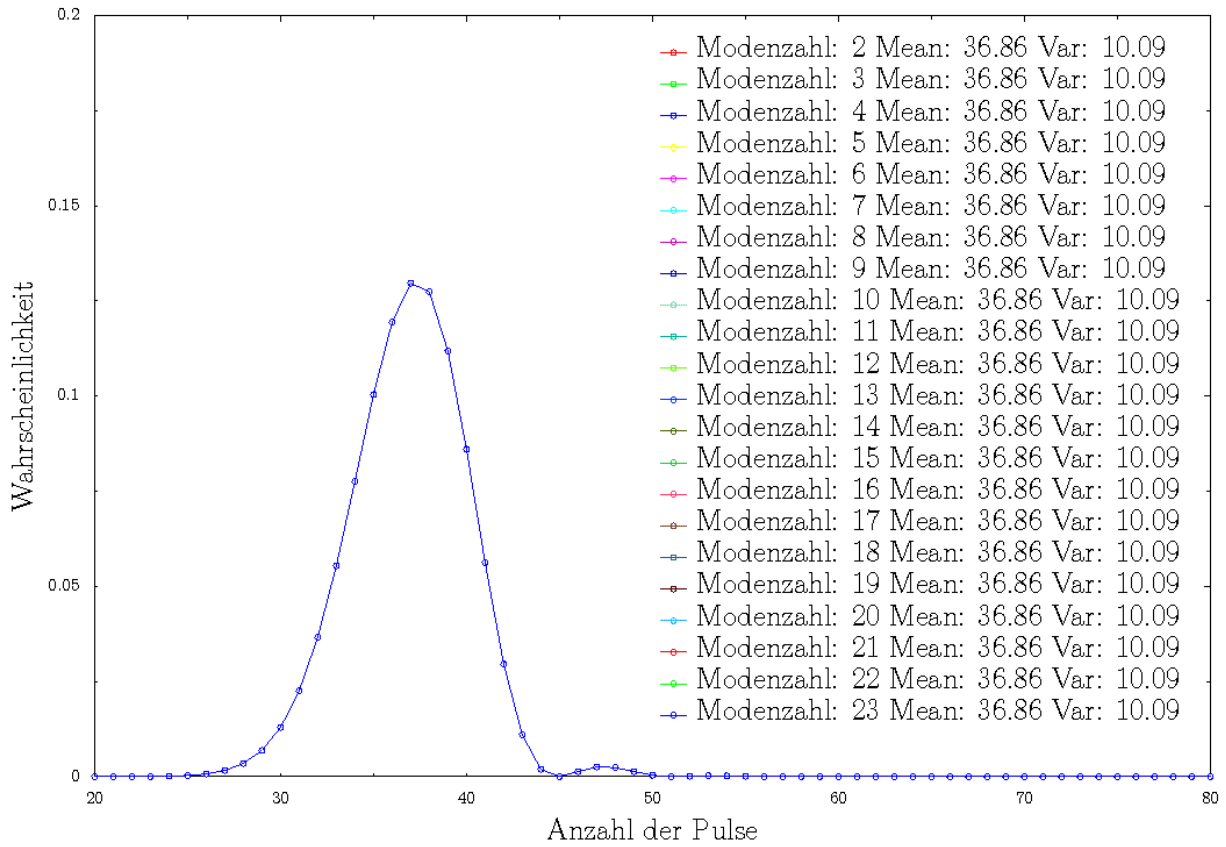


Abbildung 3.8: Homogener multimodiger Summenzustand, Parameter:  $r = 0.83$ ,  $|\alpha| = 13.7$ ,  $|\alpha'| = 6$ ,  $\phi = 0$ ,  $\phi' = 0$ ,  $\theta = 0$ , Detektionseffizienz:  $\xi = 1$ .

Wird hingegen ein relativ großer Wert für  $\alpha$  gewählt, dann zeigt sich ein völlig anderes Verhalten. Aus Abbildung 3.8 ist zu erkennen, dass unabhängig von der Modenzahl die Photonenzahlstatistik gleich bleibt. Die Normierungskonstante  $N$  hat praktisch keinen Effekt mehr. Die Tabelle wurde aus Platzgründen nicht aufgeführt, da alle Werte unabhängig von der Modenzahl sind.  $\Delta$  nimmt den Wert 0.64 an.

### Gemischter Summenzustand

Zuletzt wird noch der gemischte Summenzustand betrachtet. Dazu werden in allen besetzten Moden unterschiedliche Werte für den Parameter  $|\alpha_n|$  verwendet. Der Parameter  $r_n$  wird optimal für eine Sub-Poisson-Verteilung angepasst. Für die Parameter gilt dann:

$$|\alpha_n| \neq |\alpha_j|, \quad r_n \neq r_j \quad \forall j, n \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (3.12)$$

Unter diesen Bedingungen zeigt sich (siehe Abbildung 3.9), dass die Photonenzahlstatistik ein sehr kompliziertes Verhalten annehmen kann. In Tabelle 3.8 sind die Simulationsparameter aufgelistet. Oben stehen die Beträge des Verschiebungs- und des Quetschungsparameters  $|\alpha'_1|$ ,  $r_1$  der

ersten Mode sowie die verwendeten Winkel, für alle weiteren Moden sind  $|\alpha'_n|$  und  $r_n$  in der Tabelle aufgelistet. Wie aus der Abbildung zu erkennen ist, besitzt die Verteilung mehrere Maxima, die auf die unterschiedlichen Parameter der Moden zurückzuführen sind. Trotz der optimierten Wahl von  $r_n$  handelt es sich um eine Super-Poisson-Statistik, obwohl jede Mode für sich betrachtet eine reduzierte Breite besitzt. Durch die Superposition entstehen mehrere Maxima, die insgesamt zu einer starken Verbreiterung der Statistik führen. Wird die Detektionseffizienz auf  $\xi = 0.1$  reduziert, so verschwinden die Maxima wie in Abbildung 3.10 zu sehen ist. Es gilt  $\Delta \approx 0.1$ , wobei die Abweichung für eine höhere Modenzahl zunimmt. Bei einer nochmaligen Absenkung auf  $\xi = 0.01$  wird eine sehr gute Übereinstimmung mit der Poisson-Statistik erreicht.

Parameter: $r_1 = 0.46$ , $ \alpha  = 4.55$ , $ \alpha'_1  = 2.6$ , $\phi = 0$ , $\phi' = 0$ , $\theta = 0$ , $\xi = 1$							
Modenzahl	$\Delta$	Mittelwert	Mittel.Poiss	Varianz	$\frac{\text{Mittelwert}}{\text{Varianz}}$	$ \alpha'_n $	$r_n$
2	0.51	4.74	4.35969	7.82	0.61	1.50	0.37
3	0.84	9.23	5.45779	47.74	0.19	4.20	0.71
4	0.88	10.47	15.89420	41.74	0.25	3.70	0.67
5	0.83	9.48	6.17951	37.85	0.25	2.30	0.51
6	0.66	8.49	5.15431	36.53	0.23	1.90	0.45
7	0.58	8.21	5.67799	32.25	0.25	2.50	0.54
8	0.60	7.30	4.97768	32.93	0.22	1.40	0.34
9	0.74	9.52	5.12266	70.84	0.13	5.20	0.78
10	0.84	8.10	4.62388	70.58	0.11	0.90	0.20
11	0.78	7.75	4.69918	65.73	0.12	2.10	0.48
12	0.72	7.38	4.54209	61.75	0.12	1.95	0.45
13	0.88	6.05	4.08991	58.24	0.10	0.70	0.11
14	0.95	6.44	4.33901	57.57	0.11	3.50	0.65
15	0.89	6.14	4.02001	54.61	0.11	1.80	0.43
16	0.87	6.09	4.42708	51.91	0.12	2.30	0.51
17	0.90	5.20	0.98232	48.44	0.11	0.94	0.21
18	0.91	5.97	1.04268	60.36	0.10	4.80	0.75

Tabelle 3.8: Mittelwerte und Varianzen der multimodigen Verteilungen in Abhängigkeit von den Parametern  $|\alpha'_n|$  und  $r_n$  sowie der Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und  $\Delta$ .

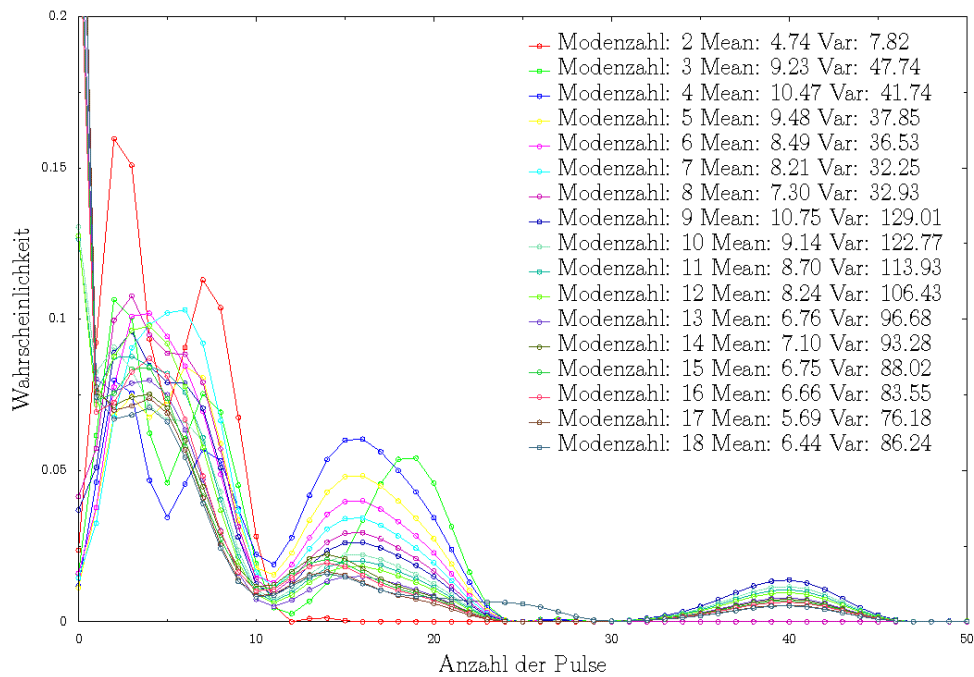


Abbildung 3.9: Gemischte, multimodige Summenzustände bei einer Detektionseffizienz  $\xi = 1$ .

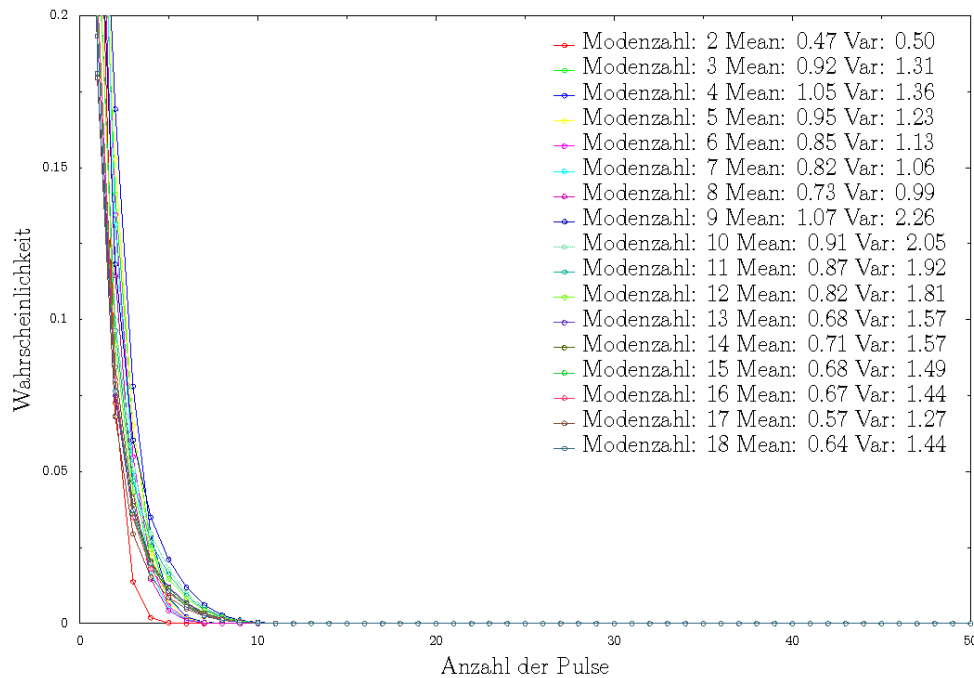


Abbildung 3.10: Die gleichen gemischten, multimodigen Summenzustände bei einer Detektionseffizienz  $\xi = 0.1$ .



### 3.3 Mögliche experimentelle Ansätze zum Nachweis von nichtklassischem Licht

Im Kapitel Theorie sind verschiedene grundlegende Experimente, die zum Nachweis von Quanteneffekten dienen können vorgestellt worden. Bleibt noch zu klären, ob und unter welchen Umständen mit dem gegebenen Messaufbau ein eindeutiger Nachweis von nichtklassischem Licht möglich ist. Mit der Messapparatur lassen sich folgende Versuche durchführen:

- Messung der Photonenstatistik  $P_n(\Delta t)$ .
- Bestimmung des zeitlichen Kohärenzgrads zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ .
- Auswertung des raumzeitlichen Kohärenzgrads zweiter Ordnung  $g_{12}^{(2)}(\tau)$ .

Weitere Größen, wie Fano-Faktoren  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$ , lassen sich aus der Photonenstatistik berechnen.

Über die Ermittlung der Photonenstatistik kann auf die Gegenwart von quantenmechanischem Licht geschlossen werden. Eine Super-Poisson-Verteilung ist jedoch kein eindeutiger Nachweis, da auch klassisches Licht eine solche Statistik erzeugen kann. Dies wird im Unterkapitel 2.4.5 am Beispiel des thermischen Lichts diskutiert. Ein eindeutiger Nachweis für quantenmechanisches Licht ist nur durch eine Sub-Poisson-Statistik gewährleistet. Ist die Abweichung der gemessenen Verteilung von der Poisson-Statistik gering, so muss ein statistischer Fehler über eine Erhöhung der Realisierungen ausgeschlossen werden. Die Anzahl der Realisierungen ist durch den quasistationären Bereich und die Zeitauflösung beschränkt. Über den ersten Nachweis einer Sub-Poisson-Photonenstatistik für Resonanzfluoreszenz von einzelnen Atomen wurde in [SM83] berichtet.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Detektion von  $g^{(2)}(\tau)$ . Hier steht man vor einem ähnlichen Problem. Es gibt nichtklassische Felder die Bunching zeigen ( $g^{(2)}(0) > 1 \wedge g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$ ,  $\tau > 0$ ). Das gleiche Verhalten kann aber auch durch klassische Felder erklärt werden. Ein eindeutiger Nachweis für nichtklassisches Licht ist deshalb ausschließlich die Beobachtung von Antibunching.

Über  $g_{12}^{(2)}(\tau)$  können raumzeitliche Kohärenzeffekte zweiter Ordnung beobachtet werden. Da die Positionen der Detektoren vorgegeben waren, konnte nur das Präparat verschoben werden. Eine Verschiebung des Präparats bewirkt zwei Effekte. Einerseits variiert der gemessene Raumwinkel jedes Strahlers des Blattes. Dies verändert die Anzahl der gemessenen räumlichen Moden. Wird beispielsweise das Blatt unmittelbar vor den Detektor positioniert, so erreichen alle abgestrahlten Photonen der zugewendeten Blattoberfläche das Eintrittsfenster. Der Raumwinkel  $\Omega$  ist in diesem Fall durch  $\Omega \approx 2\pi$  gegeben. Entfernt man das Blatt systematisch vom Detektor, so schrumpft der Raumwinkel. Jeder Punkt  $\vec{r}_b$  des Blattes besitzt einen anderen Raumwinkel, der durch das Integral  $\Omega(\vec{r}_b) = \oint_{S(\vec{r}, \vec{r}_b)} d\Omega$  zu bestimmen ist, wobei  $S(\vec{r}, \vec{r}_b)$  für die Detektoroberfläche steht. Eine Entfernung des Blattes vom Detektor führt zu kleineren Raumwinkeln und so zu

einer geringeren messbaren Intensität. Andererseits bewirkt der gesteigerte Abstand  $s = |\vec{r} - \vec{r}_b|$  zwischen Detektor und Präparat einen Phasenfaktor  $\varphi_{\vec{k}} = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_b)$  für die detektierten Moden. Je nach Position des Präparats treten andere Moden in die beiden Detektoren (siehe Abbildung 4.1). Die Abmaße der quadratischen Box belaufen sich auf  $d = 30$  cm. Der Abstand zwischen den Symmetrieachsen der Photomultiplier beträgt ca.  $b = 20$  cm. Über die Lichtgeschwindigkeit  $c$  lässt sich dieser Abstand in die maximal mögliche zeitliche Verzögerung  $t_{max} = \frac{b}{c} = 0.7$  ns umrechnen, die durch eine Verschiebung des Präparats realisiert werden kann. Die minimale Integrationszeit der Messkarte beträgt  $\Delta t_{min} = 250$  ns. Offensichtlich gilt  $\Delta t_{min} \gg t_{max}$ , weshalb die Phasenverschiebung  $\varphi_{\vec{k}}$  vernachlässigt werden kann.  $g_{12}^{(2)}(\tau)$  ist aufgrund des experimentellen Aufbaus ungeeignet, um aus der Veränderung der Detektionsgeometrie eine Information über die Kohärenzfläche zu beziehen. Über  $g_{12}^{(2)}(\tau)$  kann nur die Korrelation verschiedener räumlicher Moden für Verschiebezeiten  $\tau \geq 250$  ns untersucht werden.

Wie die Theorie zeigt, hängen alle messbaren Größen von der Detektionseffizienz ab. Eine Sub-Poisson-Statistik entwickelt sich durch die Verringerung der Detektionseffizienz zu einer Poisson-Verteilung hin. Dies wurde durch die Simulationen der gequetschten Zustände gezeigt. Die Simulationen ergaben auch, dass bei Gültigkeit von Gleichung (2.225) der nichtklassische Charakter erhalten bleibt. Sind beispielsweise alle Moden so gequetscht, dass eine Sub-Poisson-Statistik entsteht, so ist ein experimenteller Nachweis des Quantencharakters mit dem Messaufbau möglich. Eine niedrige Detektionseffizienz erschwert diesen Nachweis. Die Anzahl der Realisierungen muss in diesem Fall erhöht werden, um die statistische Sicherheit zu gewährleisten.

## 4 Messergebnisse

Mit der vorhandenen Messapparatur wurden an verschiedenen biologischen Proben Messungen durchgeführt. Das Ziel der Messungen war es, Hinweise auf die quantenmechanische, möglicherweise gequetschte Natur der Biophotonen zu gewinnen [PCH<sup>+</sup>02]. Dies sollte, unter Verwendung der im theoretischen Teil geschilderten statistischen Methoden geschehen. Die Natur stellt prinzipiell unzählige Präparate zur Verfügung, doch die Erfahrung zeigt, dass Blätter eine erhöhte spontane Emission besitzen. Aus diesem Grund dienten in erster Linie die Blätter von Bäumen als biologische Proben. Die Messungen erfolgten mit der gegebenen Apparatur, die zunächst erklärt wird. Nach der Untersuchung des Dunkelstromsignals mit den im Unterkapitel 3.3 erläuterten experimentellen Methoden, erfolgte die Messung der biologischen Präparate. Um die Ergebnisse zu überprüfen, wurden zusätzlich Vergleichsmessungen mit einem Laser durchgeführt.

### 4.1 Messaufbau

Zur Messung der Photonen diente der Messaufbau aus Abbildung 4.1. Er besteht aus einer lichtdicht verschließbaren Aluminiumbox, an der zwei Photomultiplier (PM) angebracht sind. Vor jedem PM ist ein mechanischer Shutter (SH) installiert, das über die externe Kontrolle (CN) pneumatisch gesteuert wird. Die Spannungspulse der PM werden in den nachgeschalteten Vor-

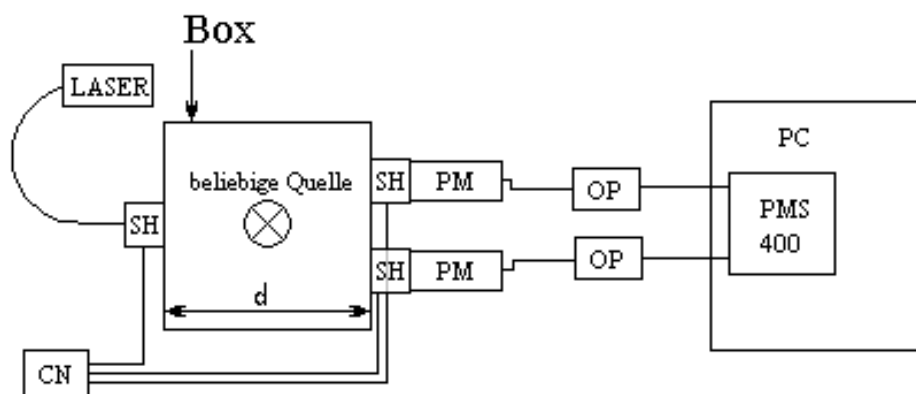


Abbildung 4.1: Schematischer Aufbau der Messapparatur.

verstärkern (OP) intensiviert. Das verstärkte Signal wird über die Computer-Messkarte (PMS 400) ausgelesen, die in einen Rechner (PC) eingebaut ist. Zusätzlich gibt es noch einen weiteren

Shutter, der sich auf der gegenüberliegenden Seite befindet. Über ihn kann bei Bedarf Laser-Licht in den Innenraum der verschlossenen Box geleitet werden.

### 4.1.1 Photomultiplier und Vorverstärker

Die Wahl des richtigen Photomultipliers hängt vom Verwendungszweck ab. Da die Messungen bei sehr niedrigen Intensitäten durchgeführt werden, sollte der Photomultiplier eine relativ große Photokathode besitzen, um möglichst viele Photonen zu sammeln. Deshalb wurde ein Photomultiplier vom Jalousien-Typ (venetian blind type) verwendet, der in Abbildung 4.2 zu sehen ist. Die Datenblätter des Photomultipliers sind in Anhang 8.2, 8.3 beigefügt. Daraus geht hervor,

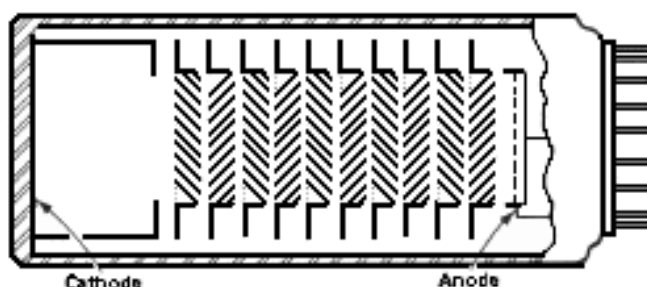


Abbildung 4.2: Photomultiplier vom Jalousien-Typ.

dass der Photomultiplier ein FWHM von 22 ns und eine Anstiegszeit von 10 ns für ein einzelnes Photoelektron besitzt. Als Vorverstärker wurde ein Breitband-Verstärker von Phillips Scientific, Modell 6954 eingesetzt, dessen Spezifikationen im Datenblatt, Anhang 8.1 zu finden sind. Laut Datenblatt bewirkt die Verstärkung praktisch keine Veränderung der Pulsform, die Anstiegszeit liegt bei 220 ps, wodurch schnelle Reaktionen möglich werden.

### 4.1.2 Computer-Messkarte

Die verwendete Computer-Messkarte PMS-400 stammt von der Firma Becker & Hickel GmbH. Von den vielen Funktionen die sie besitzt, werden nur die erklärt, die für die Photonenmessung von Nutzen waren. Auf der schematischen Zeichnung 4.3 sind die zusammengefassten Komponenten der Messkarte zu sehen. Zu jedem Signal-Eingang gibt es zusätzlich einen Gate-Eingang. Die Gate-Eingänge wurden nicht verwendet. Die Signal-Eingänge (Inp) werden mit A und B bezeichnet. Hinter jedem Signal-Eingang liegt ein Diskriminator (Discriminator), dargestellt durch einen grauen Kasten. Die Schwellenspannung des Diskriminators kann über die Software zwischen +1 V und -1 V variiert werden [Gmb]. Die Reaktionszeiten der Diskriminatoren liegen im Sub-Nanosekundenbereich. Ist die Pulshöhe ausreichend, so wird der Puls zum Gate weitergeleitet. Die Kontrolleinheit (Control Logic), die mit dem Timer verbunden ist, öffnet nach einem Softwarebefehl das Gate und leitet das Signal an den 32 Bit Zähler (32 bit Counter) weiter [Gmb]. Hier werden die Pulse entsprechend des Operationsmodus verarbeitet. An der Karte



die Totzeit von Photomultipliern, die zwischen 5–20 ns liegt. Unter Totzeit wird die Zeit verstanden, die das System braucht, um nach der Messung eines Photons wieder ein Photon detektieren zu können. Trifft ein Photon während der Totzeit auf die Photokathode, so kann es nicht registriert werden. Natürlich wird die Totzeit des gesamten Systems durch die Systemkomponente beschränkt, die die größte Totzeit besitzt. Da ein Photomultiplier vom Jalousie-Typ verwendet wird, besitzen die Pulse eine mittlere Halbwertsbreite von ca.  $\text{FWHM} = 22 \text{ ns}$ . Liegen zwei gleich große Pulse vor, so können sie nur unterschieden werden, wenn ihre Maxima ungefähr 20 ns Abstand voneinander besitzen. Das bedeutet, dass die Totzeit der gesamten Messapparatur bei ca. 20 ns liegt. Die maximale Pulszahl, die während eines minimalen Zeitintervalls  $\Delta t = 250 \text{ ns}$  auftreten kann ist dann durch ca. 13 Pulse gegeben.

Wird ein Strahl über zwei Photomultiplier gemessen, so ist die Zeitauflösung von der Transitzeit-Verbreiterung (TTS) abhängig. Da die zeitliche Schwankung durch die TTS wesentlich geringer ausfällt als die Zeitauflösung, die durch das minimale Speicherzeitfenster von  $\Delta t = 250 \text{ ns}$  vorgegeben wird, kann die TTS vernachlässigt werden.

## 4.2 Ermittlung des Pulshöhenspektrums

Wie im Abschnitt 2.3.2 erklärt wurde, kann das Pulshöhenspektrum ermittelt werden (siehe Abbildung 2.12). Normalerweise wird dazu ein Speicheroszilloskop verwendet. Da dieses nicht vorhanden war, konnte die Verteilung nur über die Variation der Schwellenspannung der Messkarte ermittelt werden. Dazu musste die Schwellenspannung systematisch erhöht werden. Alle Pulse deren Spannungen größer als die Schwellenspannung  $V_i$  waren, wurden aufaddiert und bezüglich dem Zeitintervall  $\Delta t$  gemittelt. Daraus ergab sich die Anzahl der kumulierten Pulse zu:

$$\Delta n(V_i) = n(V_i) - n(V_j) \quad \wedge \quad V_j > V_i. \quad (4.1)$$

$\Delta n(V_i)$  ist für die beiden Photomultiplier als Balkendiagramm in den Abbildungen 4.4 und 4.5 dargestellt. Als Strahlungsquelle wurde ein Laser verwendet. Das Pulshöhenspektrum des Lasers zuzüglich des Dunkelstroms ist durch die grüne Linie gegeben. Die rote Linie steht für das Pulshöhenspektrum des Dunkelstroms, das bei geschlossenen Shuttern ermittelt wurde. Es handelt sich um halblogarithmische Darstellungen, aus denen man erkennt, dass die Höhenspektren des Lasers wie die vertikal verschobenen Spektren des Dunkelstroms aussehen. Aus den Pulshöhenspektren der beiden Photomultiplier kann folglich kein Unterschied zwischen Dunkelstrom- und Laserpulsen ermittelt werden. Deshalb wurde die Schwellenspannung auf den kleinsten, möglichen Wert gesetzt, der bei  $V_1 = 4 \text{ mV}$  lag. Dieser Wert entspricht dem Ende des ersten Balkens. Mit dieser Einstellung erfolgten die Messungen.

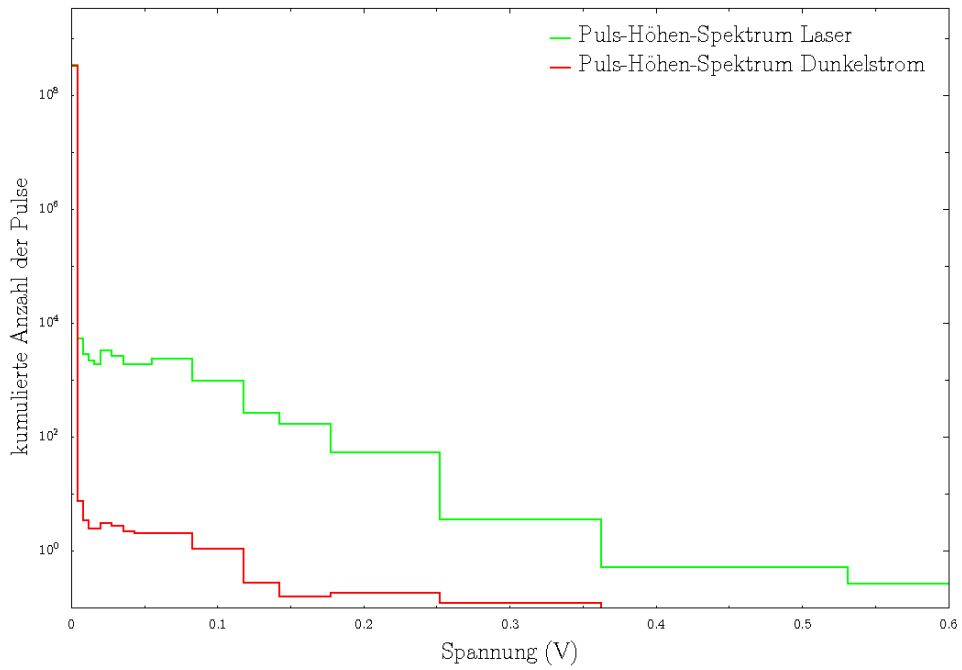


Abbildung 4.4: Pulshöhenspektrum des Photomultipliers A für  $\Delta t = 1$  s.

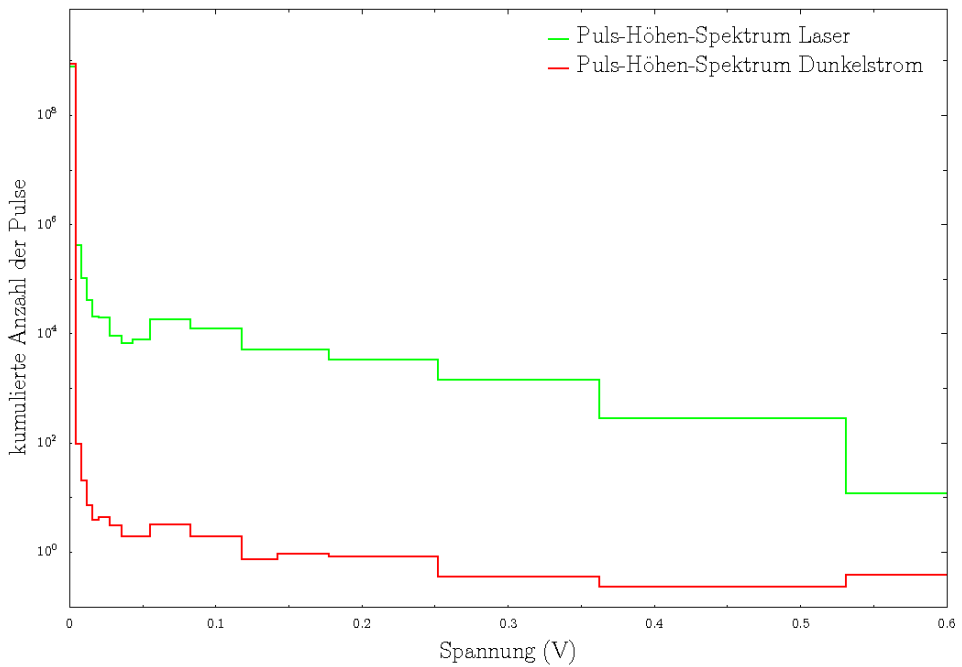


Abbildung 4.5: Pulshöhenspektrum des Photomultipliers B für  $\Delta t = 1$  s.

## 4.3 Messung des Rauschens

Da die Messungen bei sehr niedrigen Intensitäten stattfinden, ist es notwendig das Rauschen des Photomultipliers zu berücksichtigen. Die Ursachen für das Rauschen wurden im Unterkapitel 2.3.2 erklärt. Durch sie entsteht ein temperaturabhängiger Dunkelstrom. Um den Dunkelstrom so gering wie möglich zu halten, wurde der Photomultiplier vor jeder Messung auf eine Temperatur von  $T = -25^\circ \text{C}$  gekühlt. Die Ermittlung des optimalen Signal-Rausch-Verhältnisses erfolgte nach Gleichung (2.177) in Abhängigkeit von der Diskriminatorschwelle und der Versorgungsspannung des Photomultipliers. Durch die Shutter war es möglich zu prüfen, ob Hintergrundstrahlung vorhanden ist. Dazu wurde der Hintergrund bei geschlossenem und geöffnetem Shutter gemessen. Da kein Unterschied auftrat, konnte die Hintergrundstrahlung als Rauschquelle ausgeschlossen werden. Unter diesen Voraussetzungen wurden die Messungen durchgeführt. Es zeigte sich, dass beide Photomultiplier ähnliche Ergebnisse liefern. Aus Platzgründen werden nur die Resultat von Photomultiplier A dargestellt.

### 4.3.1 Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms

Um den Dunkelstrom mathematisch in der Auswertung berücksichtigen zu können, müssen einige Bedingungen erfüllt sein. Zum einen sollte der Dunkelstrom unabhängig von der einfallenden Intensität sein. Nach Gleichung (2.176) gilt dann, dass die Funktion  $n_{bg}(n_{Ph})$  eine Konstante ist:

$$n_{bg}(n_{Ph}) = \text{const.} \quad (4.2)$$

Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn ein Photomultiplier ohne Nachpulsieren vorliegt. Zum anderen ist eine zeitlich konstante Statistik des Rauschens notwendig. Durch diese beiden Bedingungen wird es möglich, den Beitrag des Rauschens, zum gemessenen Signal zeitlich versetzt zu ermitteln. Um die zeitliche Konstanz des Rauschsignals zu ermitteln wurde der Dunkelstrom mehrfach über Zeiträume von einigen Stunden bis Tagen ermittelt. In Abbildung 4.6 ist der zeitliche Verlauf einer einzelnen Messung über eine Zeit  $T$  von ca. 16 Stunden zu sehen. Die Detektion erfolgte im Ereignismodus, mit dem minimalen Speicherzeitfenster von  $\Delta t = 250 \text{ ns}$ . Die schwarze Linie in Abbildung 4.6 zeigt den Signalverlauf für eine Integrationszeit von  $\Delta t = 10 \text{ s}$ . Das Signal fluktuiert sehr stark. Die Rote Linie zeigt den zeitlichen Verlauf für eine Glättung über  $\Delta t = 1000 \text{ s}$ , was einer Mittelung über 100 Intervalle entspricht. Die zugehörige Varianz, bezogen auf diese zwei Kurven, ist durch die grüne Linie dargestellt. Wie zu erkennen ist, nimmt die rote Linie mit steigender Zeit  $t$  leicht ab.



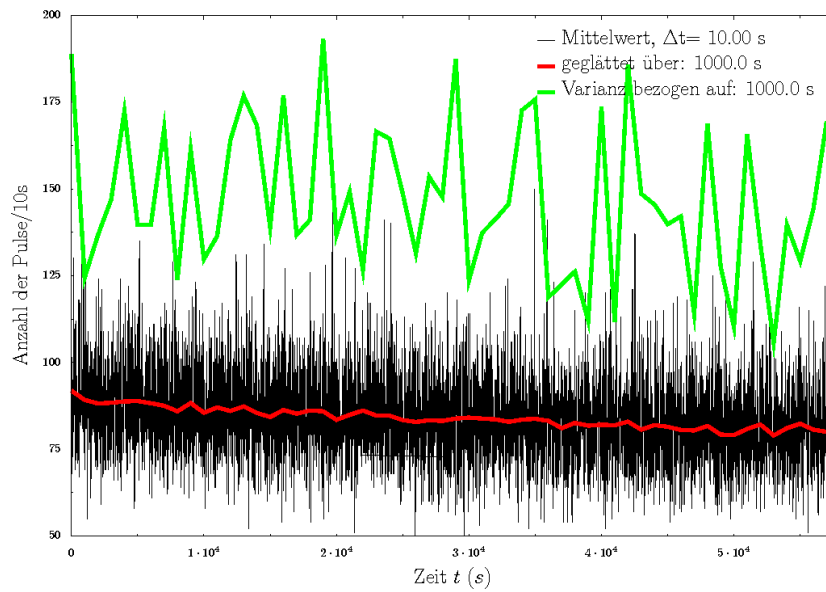


Abbildung 4.6: Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms bei einer Integrationszeit von  $\Delta t = 10$  s (schwarze Linie) sowie Mittelwert (rote Linie) und Varianz (grüne Linie) bezogen auf  $T = 1000$  s.

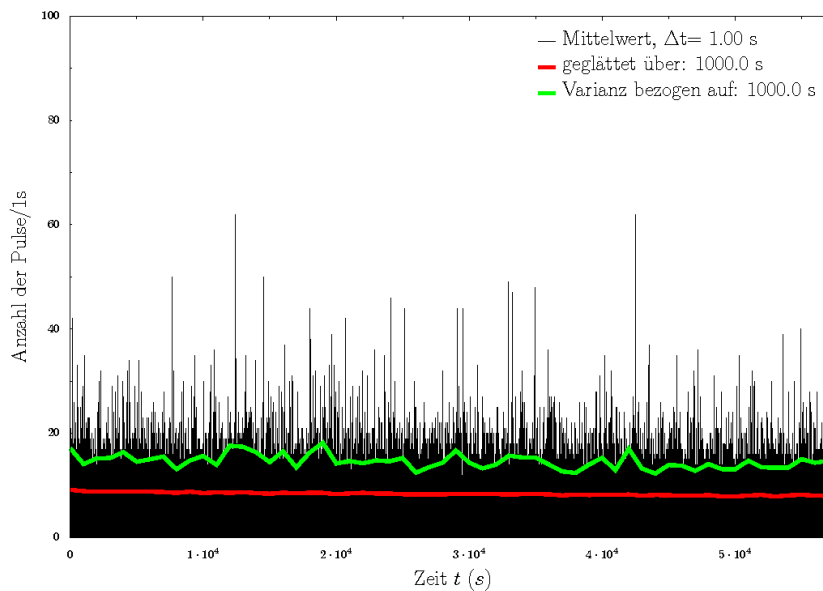


Abbildung 4.7: Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms bei einer Integrationszeit von  $\Delta t = 1$  s (schwarze Linie) sowie Mittelwert (rote Linie) und Varianz (grüne Linie) bezogen auf  $T = 1000$  s.

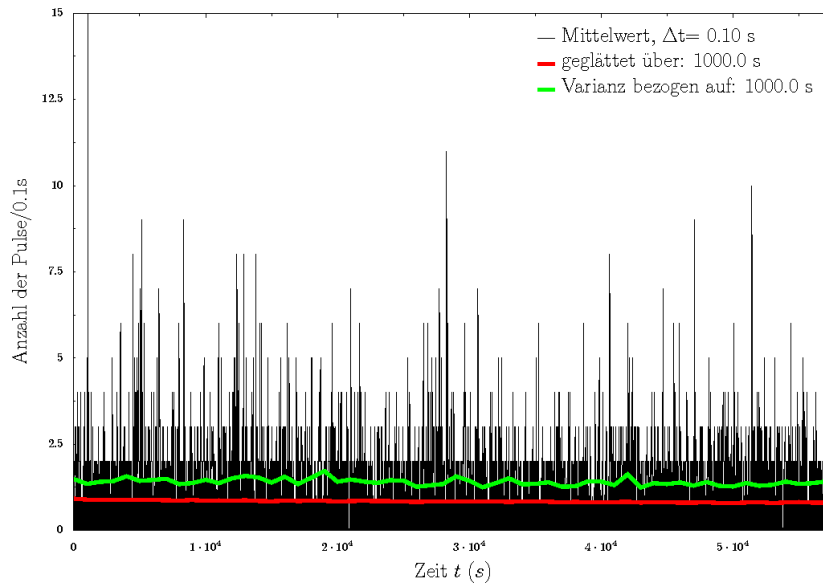


Abbildung 4.8: Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms bei einer Integrationszeit von  $\Delta t = 0.1$  s (schwarze Linie) sowie Mittelwert (rote Linie) und Varianz (grüne Linie) bezogen auf  $T = 1000$  s.

Wird eine Photonenmessung über eine Dauer von  $T = 1000$  s durchgeführt, so ist der Mittelwert des Dunkelstroms, bezogen auf Integrationsintervalle der Länge  $\Delta t = 10$  s in guter Näherung konstant. Die Varianz unterliegt noch starken Schwankungen. Um diese zu reduzieren, ist es notwendig, die Anzahl der Intervalle zu erhöhen. Wird der gleiche Datensatz für eine Integrationszeit von  $\Delta t = 1$  s ausgewertet, so nehmen die Schwankungen von Varianz und Mittelwert ab. Dies ist in Abbildung 4.7 zu sehen. Die rote Linie stellt nun die Mittelung über 1000 Intervalle dar. Der zeitliche Abfall des Dunkelstroms ist noch erkennbar. Wird die Integrationszeit auf  $\Delta t = 0.1$  s reduziert, so sind Mittelwert und Varianz zeitlich annähernd konstant. Dies ist in Abbildung 4.8 zu erkennen. Hier wurden 10000 Datenpunkte zur Berechnung von Mittelwert und Varianz verwendet. Da der Dunkelstrom gemittelt über 1000 s eine sehr geringe Zeitabhängigkeit zeigt, scheint es gerechtfertigt, ein quasi stationäres Verhalten anzunehmen. Werden zusätzlich mehr als 10000 Datenpunkte zur Berechnung von Mittelwert und Varianz verwendet, so ist die statistische Fluktuation gering.

### 4.3.2 Zählstatistik des Dunkelstroms

Wie im vorausgegangenen Unterkapitel gezeigt wurde, reduzieren sich die Schwankungen des Lagemaßes und der Varianz mit steigender Anzahl der Realisierungen  $N = \frac{T}{\Delta t}$ . Handelt es sich um ein quasi stationäres Signal, so kann zum Zeitpunkt  $t$  eine Häufigkeitsverteilung für eine Stichprobe der Dauer  $T$  erstellt werden, die auch zu einem späteren Zeitpunkt  $t'$  Gültigkeit besitzt. Für den zuvor benutzten Datensatz erstellen wir für eine Stichprobendauer von ca.  $T = 10000$  s an den Zeitpunkt  $t_1 = 0$  s und  $t_2 = 45000$  s Zählstatistiken.

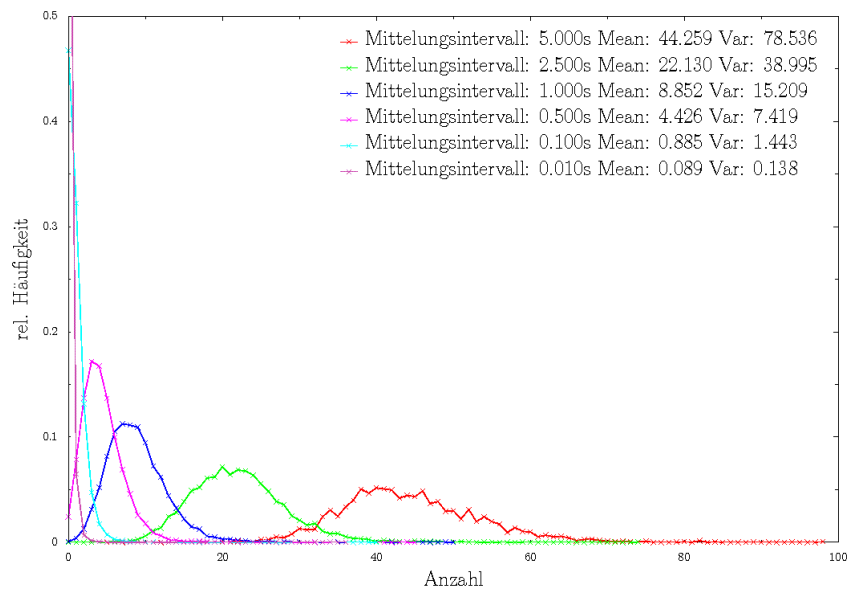


Abbildung 4.9: Zählstatistiken des Dunkelstroms für verschiedene Mittelungsintervalle  $\Delta t$  über eine Stichprobenlänge von ca.  $T = 10000$  s zum Zeitpunkt  $t_1$ .

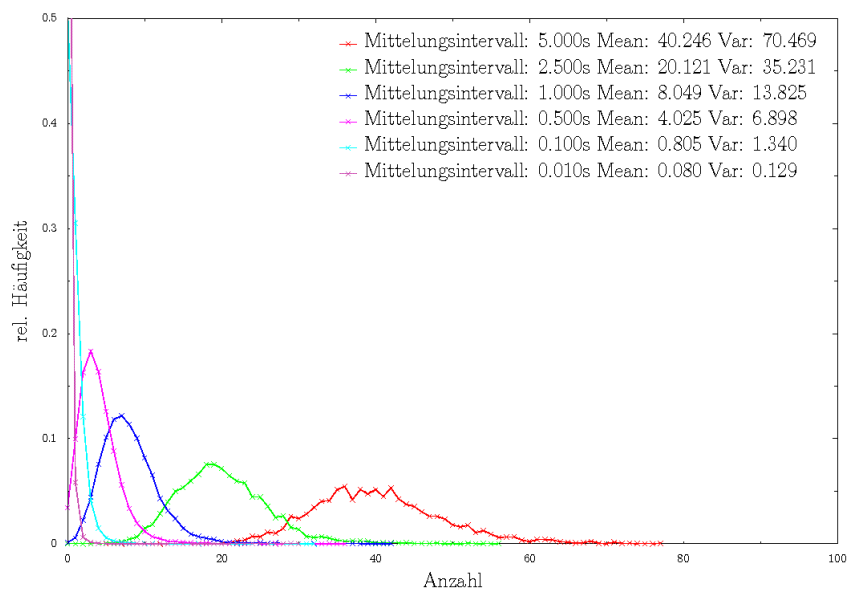


Abbildung 4.10: Zählstatistiken des Dunkelstroms für verschiedene Mittelungsintervalle  $\Delta t$  über eine Stichprobenlänge von ca.  $T = 10000$  s zum Zeitpunkt  $t_2$ .

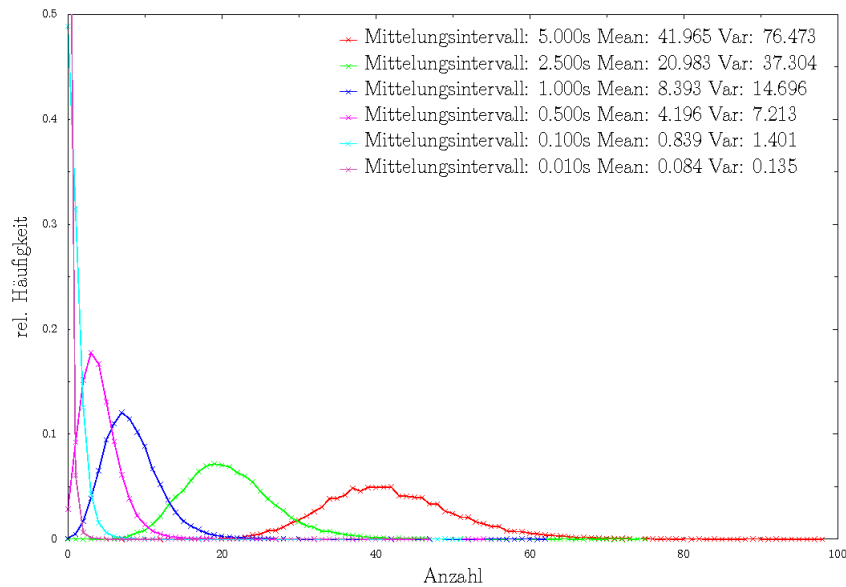


Abbildung 4.11: Zählstatistiken des Dunkelstroms für verschiedene Mittelungsintervalle  $\Delta t$  über den gesamten zeitlichen Verlauf.

Diese sind in den Abbildungen 4.9 und 4.10 zu sehen. Es wurden verschiedene Integrationszeiten  $\Delta t$  verwendet. Zu kleineren Zeitintervallen  $\Delta t$  gehen die statistischen Schwankungen im Verteilungsverlauf zurück. Aus den Mittelwerten und Varianzen der Verteilungen, die ebenfalls in den Graphiken eingetragen sind, geht hervor, dass eine geringfügige zeitliche Drift des Dunkelstroms vorliegt. Diese war auch im zeitlichen Verlauf zu erkennen. Betrachten wir nun die rote Kurve in Abbildung 4.9. Die höchste auftretende Pulszahl  $n$  in einem Zeitintervall  $\Delta t$  liegen hier bei  $n = 98$ . In Abbildung 4.10 erreicht die maximale Anzahl nur den Wert  $n = 77$ . Wird die Stichprobenlänge  $T$  auf die gesamte Messdauer erhöht, so reduzieren sich die Fluktuationen der Zählstatistik (siehe Abbildung 4.11). Dieser Effekt ist besonders gut an der roten und grünen Kurven zu erkennen. Die rote Kurve in Abbildung 4.11 entspricht ca. 10000 Datenpunkten. Ist der Datensatz zu gering, so treten, auch bei quasi stationären Signalen statistische Schwankungen auf. Damit eine Hintergrundkorrektur durchgeführt werden kann, muss ein ausreichend großer Datensatz verwendet werden. Trotzdem gibt es immer wieder Ausreißer zu großen Pulszahlen  $n$ . Da diese Pulse eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit besitzen, werden die verwendeten Datensätze so gewählt, dass keine Ausreißer vorhanden sind. Der Fano-Faktor ist für den Hintergrund größer als Eins, wie aus dem Verhältnis von Varianz und Mittelwert sichtbar wird. Um die Drift so gering wie möglich zu halten müssen die Dunkelstrommessungen direkt vor und nach der Messung der biologischen Probe erfolgen.

### 4.3.3 Korrelation der Dunkelstimpulse

Mit dem experimentellen Aufbau konnte das Signal auf Korrelationen untersucht werden. Hier stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Zum einen die Autokorrelation des Signals, die in

ihrer normierten Form über  $g^{(2)}(\tau)$ , aus Gleichung (2.363) bzw. (2.366) erfasst wird. Zum anderen die Kreuzkorrelation,  $g_{12}^{(2)}(\tau)$  zwischen den Photomultipliern an den Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  (siehe Abbildung 4.1), welche die Koppelung unterschiedlicher Moden erfasst.

## Autokorrelation des Dunkelstroms

Natürlich kann die Autokorrelation auch für den Dunkelstrom ermittelt werden. Zu diesem Zweck wurde aus dem obigen Datensatz, bei  $t = 29000$  s eine Stichprobe der Dauer  $T = 10000$  s mittels  $g^{(2)}(\tau)$  untersucht. In Abbildung 4.12 ist  $g^{(2)}(\tau)$  für verschiedene Integrationszeiten  $\Delta t$  doppellogarithmisch dargestellt. Für Integrationszeiten  $\Delta t < 100 \mu\text{s}$  nehmen die Schwankungen für  $\tau > \Delta t$  stark zu. Für Integrationszeiten  $\Delta t < 1$  s zeigt der Dunkelstrom immer einen Bunching-Effekt. Das Auftreten der Dunkelstimpulse ist folglich korreliert. Im Bereich niedriger Intensitäten ist es notwendig, die Korrelation des Dunkelstroms bei der Auswertung der Intensitätskorrelation zu berücksichtigen. Da sich die gemessene Anzahl der Pulse  $n_g(\Delta t, t) = n_g$ , bei Gültigkeit von Gleichung (4.2), durch Gleichung (2.176) ergibt, ist der zeitliche Kohärenzgrad zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$  unter quasi stationären Bedingungen durch

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\overline{n_g \cdot n_g(\tau)} - \overline{n_{bg} \cdot n_{bg}(\tau)} - 2\overline{n_{bg}} \cdot (\overline{n_g} - \overline{n_{bg}})}{[\overline{n_g} - \overline{n_{bg}}]^2} - \theta(\Delta t - \tau) \cdot \frac{\overline{n'_g} - \overline{n'_{bg}}}{[\overline{n_g} - \overline{n_{bg}}]^2} \quad (4.3)$$

gegeben, wobei gilt, dass  $n'_i = n_i(\Delta t - \tau, t)$  ist. Hier wurde genutzt, dass sich  $n(t)$  durch  $n(t) = \overline{n} + \Delta n(t)$  beschreiben lässt, woraus sich

$$\overline{n_{Ph} \cdot n_{bg}(\tau)} = \overline{(\overline{n_{Ph}} + \Delta n_{Ph}) \cdot (\overline{n_{bg}} + \Delta n_{bg}(\tau))} = \overline{n_{Ph}} \cdot \overline{n_{bg}} + \overline{\Delta n_{Ph} \cdot \Delta n_{bg}(\tau)} \quad (4.4)$$

ergibt. Der Korrelationsterm  $\overline{\Delta n_{Ph} \cdot \Delta n_{bg}}$  wird theoretisch zu Null, wenn das Dunkelstromsignal unabhängig von der Photonenzählrate ist. Praktisch kann ein geringer, schwankender Beitrag in der Auswertung vorhanden sein, da die Messungen eine endliche Dauer besitzen. Liegt im Mittel eine Gesamtzahl der gemessenen Pulse  $\overline{n_g}$  vor, die wesentlich größer ist als die mittlere Anzahl der Dunkelstimpulse  $\overline{n_{bg}}$ , so können in Gleichung 4.3 alle Terme, die  $n_{bg}$  enthalten, vernachlässigt werden. Bei niedrigen Pulsraten ist die Korrelation des Dunkelstroms zu berücksichtigen. Wie aus Abbildung 4.12 hervorgeht, fängt der Verlauf von  $g^{(2)}(\tau)$  für Integrationszeiten  $\Delta t < 1$  ms und  $\tau > \Delta t$  stark an zu fluktuieren. In diesem Bereich kann eine Hintergrundkorrektur zur Verschlechterung führen, weshalb Korrekturen dann nur für  $\tau < \Delta t$  sinnvoll sind. Die Ursache für diese Schwankung liegt an der zu geringen Datenmenge.

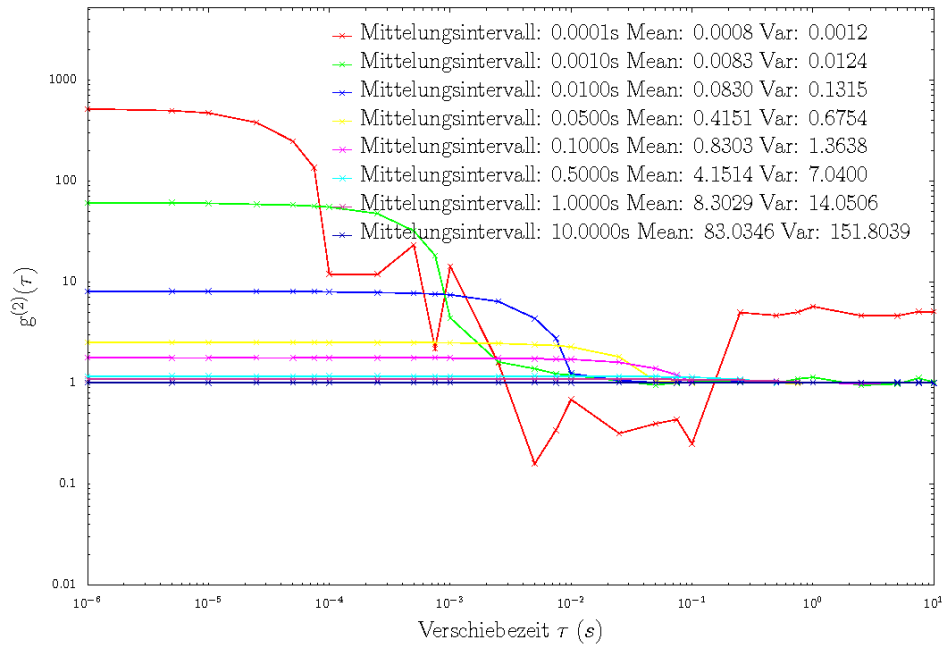


Abbildung 4.12: Autokorrelation des Dunkelstroms für verschiedene Integrationszeitintervalle  $\Delta t$ . Da eine doppellogarithmische Auftragung verwendet wurde, ist  $g^{(2)}(0)$  nicht aufgetragen.

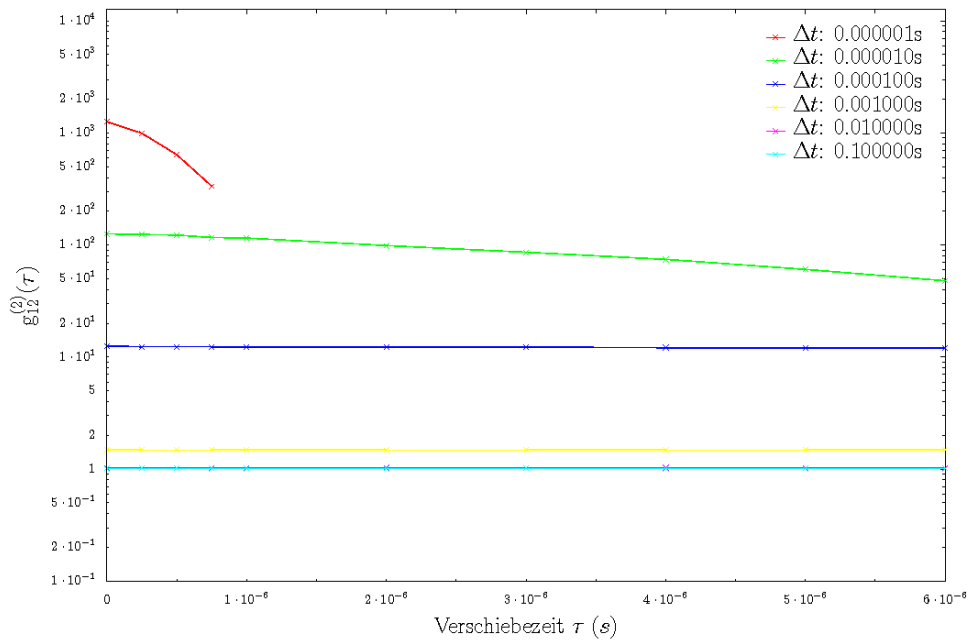


Abbildung 4.13: Normierte Kreuzkorrelation des Dunkelstromsignals für verschieden Integrationszeiten  $\Delta t$ .

## Kreuzkorrelation des Dunkelstroms

Wenn die Ursache des Rauschens in den beiden Photomultipliern unabhängig ist, dann muss der raumzeitliche Kohärenzgrad zweiter Ordnung unabhängig von  $\tau$  sein. In diesem Fall gilt:

$$g_{12}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1 \cdot n_2(\tau) \rangle}{\langle n_1 \rangle \cdot \langle n_2 \rangle} = 1. \quad (4.5)$$

Um dies zu zeigen, wurde auch die Kreuzkorrelation programmiert. Die graphische Darstellung ist in Abbildung 4.13 zu sehen. Wie dort zu erkennen ist, zeigt der Dunkelstrom eine klare Kreuzkorrelation für kleinere Integrationszeiten  $\Delta t$ . Dies hat zur Folge, dass Kreuzkorrelationsmessungen, bei niedrigen Intensitäten fehlerhaft werden. Die Kreuzkorrelation des Dunkelstroms wird höchstwahrscheinlich durch die Hochspannungsversorgung verursacht. Unter der Voraussetzung, dass der Dunkelstrom im Photomultiplier A unabhängig vom Photonensignal im Photomultiplier B ist, kann dieser Mangel ausgeglichen werden. In diesem Fall gilt für die Kreuzkorrelation des Photonensignals:

$$\begin{aligned} g_{12}^{(2)}(\tau) &= \frac{\overline{n_{Ph1} \cdot n_{Ph2}(\tau)}}{\overline{n_{Ph1}} \cdot \overline{n_{Ph2}}} = \frac{\overline{n_{g1} \cdot n_{g2}(\tau)} + \overline{n_{bg1} \cdot n_{bg2}(\tau)} - \overline{n_{g1} \cdot n_{bg2}(\tau)} - \overline{n_{g2}(\tau) \cdot n_{bg1}}}{(\overline{n_{g1}} - \overline{n_{bg1}}) \cdot (\overline{n_{g2}} - \overline{n_{bg2}})} \\ &= \frac{\overline{n_{g1} \cdot n_{g2}(\tau)} - \overline{n_{bg1} \cdot n_{bg2}(\tau)} - (\overline{n_{g1}} - \overline{n_{bg1}}) \cdot \overline{n_{bg2}} - (\overline{n_{g2}} - \overline{n_{bg2}}) \cdot \overline{n_{bg1}}}{(\overline{n_{g1}} - \overline{n_{bg1}}) \cdot (\overline{n_{g2}} - \overline{n_{bg2}})}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

## 4.4 Messung biologischer Proben

In Abbildung 4.1 wurde der Messplatz schematisch dargestellt. Zu Beginn der Messungen wird die gereinigte biologische Probe in der Box positioniert. Bei geschlossener Box kann eine Bestrahlung durch verschiedene Quellen erfolgen. Danach werden die Shutter geöffnet und die Intensität wird detektiert. Das abgestrahlte Signal der biologischen Probe lässt sich in zwei Bereiche einteilen:

- verzögerter Abstrahlung (delayed luminescence),
- spontane Emission (spontaneous emission).

Diese sind in Abbildung 4.14 dargestellt. Im vorderen Bereich der verzögerten Abstrahlung (DL) klingt das Signal rasch ab und geht dann in die spontane Emission (SE) über [PLG92]. Im Bereich der spontanen Emission ist die Anzahl der gemessenen Pulse im Mittel über einen längeren Zeitraum (bis zu einigen Tagen) annähernd konstant. Unter der Annahme, dass dieser Bereich als quasi stationär genähert werden kann, erfolgten statistische Auswertungen. Für die Photonens Statistik gilt dann

$$P_n(\Delta t, t) \approx P_n(\Delta t) \quad (4.7)$$

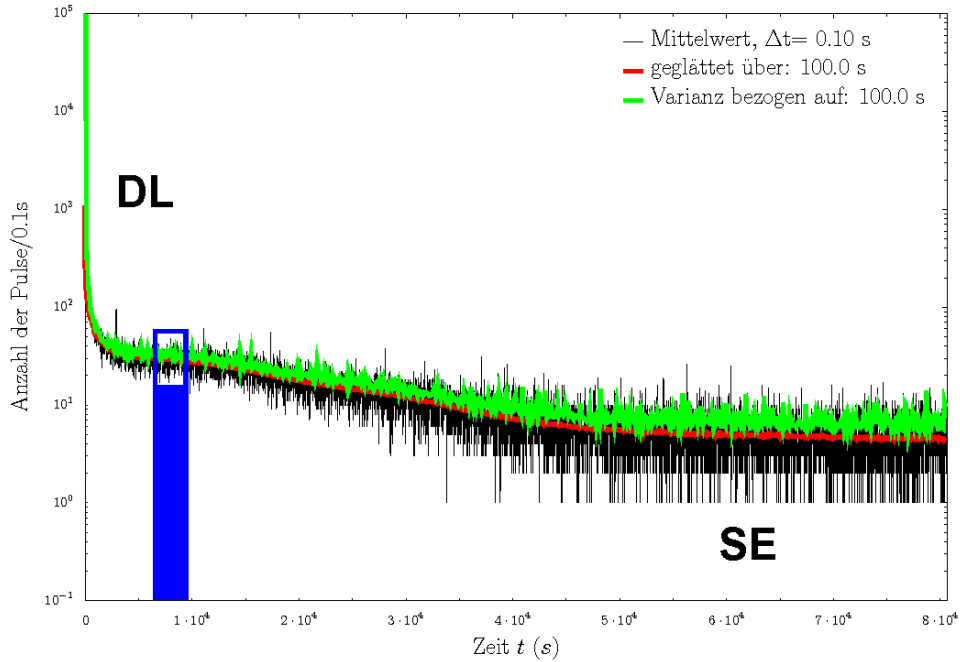


Abbildung 4.14: Gemessener Intensitätsverlauf eines Eichenblatts nach der Bestrahlung mit thermischem Licht einer Glühbirne. Zu sehen ist die verzögerte Abstrahlung (DL) und die spontane Emission (SE).

und die Nutzung von  $g^{(2)}(\tau)$  aus Gleichung (4.3) ist gerechtfertigt. Aus der Kenntnis der Verteilung des Dunkelstroms  $P_{bg}(n)$  und der gemessenen Häufigkeiten  $P_g(n)$  kann die Verteilung der Photonen  $P_{Ph}(n)$  ermittelt werden. Nimmt man an, dass Dunkelstrom- und Photonensignal voneinander unabhängig sind, dann sind die gemessenen Häufigkeiten des gesamten Signals  $P_g(n)$  durch

$$P_g(n) = \sum_{i=0}^n P_{bg}(n-i) \cdot P_{Ph}(i) \quad (4.8)$$

gegeben. Die indirekt gemessene Verteilung der Photonen  $P_{Ph}(n)$  kann durch eine theoretische Photonverteilung  $P_{th}(n)$  genähert werden. Folglich lassen sich die gemessenen Häufigkeiten  $P_g(n)$  durch  $P_{cal}(n)$  approximieren, wobei

$$P_{cal}(n) = \sum_{i=0}^n P_{bg}(n-i) \cdot P_{th}(i) \quad (4.9)$$

gilt. Unter Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate [Baj04] erhält man die Fitparameter der theoretischen Verteilung.

Die Verteilung der Hintergrundpulse  $P_{bg}(n)$  wurde wie im Unterkapitel 4.3.2 gezeigt, zeitversetzt ermittelt. Für die theoretische Fit-Funktion  $P_{th}(n)$  des Photonensignals wird  $P_n(\Delta t)$  aus



Gleichung (2.207) mit  $P_n$  aus Gleichung (2.288) verwendet. Da nur ein Fit erstellt wird, kann die Detektionseffizienz  $\xi=1$  gesetzt werden. Folglich erhält man vier Fitparameter  $|\alpha|$ ,  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$ , welche die gemessene Photonenstatistik beschreiben. Aus den Parametern folgt  $g^{(2)}(\tau=0\text{ s})$ , sowie der Fano-Faktor  $F_{el}$  des gemessenen Photonensignals aus Gleichung (2.374).

Zur Messung standen verschiedene biologische Proben zur Verfügung. Während der Messung wurde darauf geachtet, dass die Temperatur  $T$  konstant in einem Bereich von  $T = (22.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$  blieb. Da gelegentlich Ausreißer auf dem Dunkelstromsignal vorlagen, war es stets notwendig, vor der Auswertung den zeitlichen Verlauf der gemessenen Pulse zu kontrollieren, um solche Bereiche von der statistischen Erfassung auszuschließen.

#### 4.4.1 Flechte (*Lichen*)

Als biologisches Präparat diente ein Stück Baumrinde, das von einer Flechte überzogen war. Bei der Flechte handelte es sich höchstwahrscheinlich um eine Schüsselflechte (*Parmelia phytodes*), wie aus der Farbe und Oberflächenstruktur geschlossen wurde. Nach einer Verweilzeit der Flechte in der geschlossenen Box von ca. einer Stunde starteten die Messungen. Aus dem zeitlichen Verlauf wurde ein Bereich ausgewählt, in dem das Signal im Mittel relativ konstant ist und keine Ausreißer besitzt. Dieser Bereich ist in Abbildung 4.15 zu sehen. Aus dem Vergleich mit Abbildung 4.8 wird deutlich, dass das Signal im Mittel dreimal so intensiv ist wie das Dunkelstromsignal. Die Glättung in Abbildung 4.15 erfolgte jeweils über 1000 Realisierungen. Für

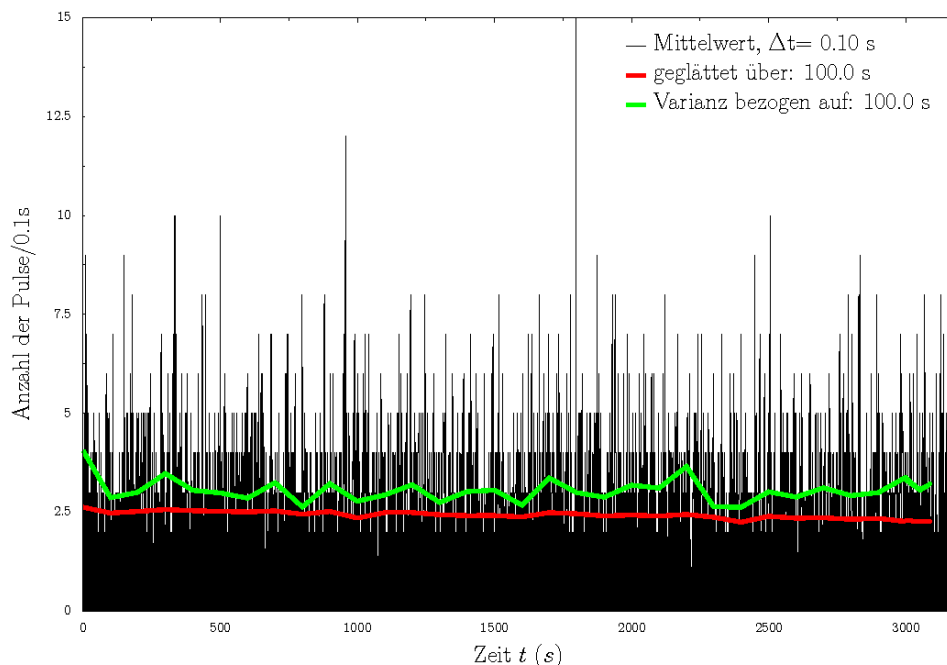


Abbildung 4.15: Zeitlicher Verlauf des SE-Signals einer Flechte, sowie Mittelwert und Varianz bezogen auf 1000 Integrationsintervalle  $\Delta t$ .

die weitere Auswertung betrachten wir das Zeitintervall aus Abbildung 4.15, als Stichprobe der Dauer  $T$ .

## Photonenstatistik

Die Pulsstatistik wird für alle biologischen Präparate entsprechend [Baj04] ausgewertet. Da die Daten im Ereignismodus aufgenommen wurden, liegt die kleinste Integrationszeit  $\Delta t_{min}$  bei 250 ns. Alle größeren Integrationsintervalle  $\Delta t > \Delta t_{min}$  können durch ein Zusammenfassen der kleineren Intervalle erhalten werden. Die Fitparameter  $|\alpha|$ ,  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$  sind in Tabelle 4.1 eingetragen. Daraus können  $|\alpha'|$  und  $\phi'$  durch Gleichung (2.291) berechnet werden. Da der Fitparameter  $|\alpha'|$  nach Gleichung (2.289) über den gemessenen Mittelwert  $\langle n_{Ph} \rangle = \langle n_g \rangle - \langle n_{bg} \rangle$  der Photonen und den Parameter  $r$  festgelegt ist, stehen effektiv nur die drei Fitparameter  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$  zur Verfügung. Die Parameter beschreiben das Photonensignal ohne den Dunkelstrom. Um die Übereinstimmung zwischen der empirischen Verteilung  $P_g(n)$  aus Gleichung (4.8) und der berechneten Verteilung  $P_{cal}(n)$  aus Gleichung (4.9) zu ermitteln, wurde ein  $\chi^2$ -Test durchgeführt. Für  $\chi^2$  gilt:

$$\chi^2 = \sum_n \frac{\left(P_g(n) - P_{cal}(n)\right)^2}{P_{cal}(n)} \cdot N = \sum_n X_n. \quad (4.10)$$

In  $\chi^2$  wurden nur Häufigkeiten  $H_n = N \cdot P_g(n)$  berücksichtigt, die  $H_n > 3$  erfüllten. Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  ist ebenfalls angegeben. Wie aus Tabelle 4.1 zu erkennen ist, wären bei einer Grenzwahrscheinlichkeit von 1% die ersten vier Verteilungen abzulehnen. Durch die erhöhte Anzahl der Realisierungen reduziert sich die Schwankung der gemessenen relativen Häufigkeiten  $P_g(n)$ . Da die Dauer der Stichprobe  $T \approx 3300$  s beträgt, liegen bei einer Integrationszeit von  $\Delta t = 1 \mu s$  nach Gleichung (2.168)  $N \approx 3.3 \cdot 10^9$  Realisierungen vor. Um die Abweichung  $P_g(n) - P_{cal}(n) = \Delta_n$ , der relativen Häufigkeiten für die gegebenen Parameter zu schätzen, nehmen wir an, dass im Mittel 100 Pulse pro Sekunde detektiert werden. Zur Vereinfachung wird vorausgesetzt, dass in dem Integrationsintervalle  $\Delta t = 1 \mu s$  nur ein Puls oder kein Puls vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit, genau einen Puls in  $\Delta t$  zu detektieren, ist dann  $P_g(1) = 10^{-4}$ . Real treten auch zwei oder mehr Pulse in einem Intervall auf, weshalb  $P_g(1) \leq 10^{-4}$  gerechtfertigt ist. Für  $\Delta_n$  gilt bei einem Beitrag von  $X_n = 100$  zu  $\chi^2 = \sum_n X_n$ :

$$\Delta_n = \sqrt{\frac{P_{cal}(n) \cdot X_n}{N}} \Rightarrow \Delta_n \approx 1.7 \cdot 10^{-6}. \quad (4.11)$$

Trotz des großen Beitrags  $X_n = 100$  zu  $\chi^2$  handelt es sich um eine geringe Abweichung  $\Delta_n \approx 1.7 \cdot 10^{-6}$ . Zum Fitten wurde in Python die Funktion „leastsq“ aus dem Modul „scipy.optimize.minpack“ verwendet, die eine Modifizierung des Levenberg-Marquardt Algorithmus darstellt. Die Genauigkeit von  $P_{cal}(n)$  hängt auch von der Wahl der Anfangsparameter. Da es sich um eine numerische Berechnung handelt, kann nie ausgeschlossen werden, dass die ermittelten Fitparameter ein lokales Minimum beschreiben.

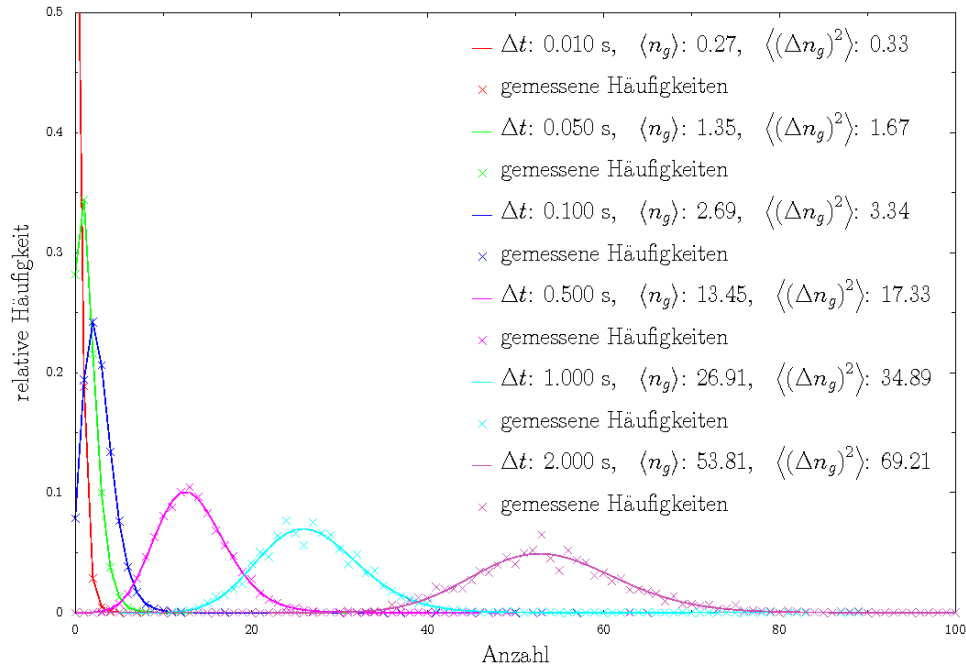


Abbildung 4.16: Berechnete  $P_{cal}(n)$  (Linie) und gemessene Häufigkeitsverteilungen (Kreuze) einer Flechte für unterschiedliche Integrationszeiten  $\Delta t$ .

Aus den Parametern folgt  $P_{th}(n)$ , woraus sich über die Gleichungen (2.374) und (2.369) der Fano-Faktor  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  bestimmen lassen. Da der gemessene Mittelwert mit in die Berechnung einging, gilt  $\langle n_{Ph}^{gem} \rangle = \langle n_{Ph}^{cal} \rangle$ . Die aus  $P_{cal}(n)$  geschätzte Varianz  $\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$  weicht geringfügig von der gemessenen  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$  ab (siehe Tabelle 4.2). Diese geringfügige Abweichung wirkt sich jedoch stark auf die Abweichung von  $g_{cal}^{(2)}(0)$  von  $g_{gem}^{(2)}(0)$  aus. Offensichtlich ist der Fano-Faktor immer größer als Eins. Auch  $g^{(2)}(0)$  nimmt für Integrationszeiten  $\Delta t < 1$  s Werte an, die Eins übersteigen. Diese zwei Faktoren weisen auf eine Super-Poisson-Statistik hin.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	$r$	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	$f$
250 ns	0.002	0.002	0.0004	14127.38	28257.81	2.32	33.7	6
1 $\mu s$	0.004	0.004	0.0008	-348.51	-688.06	3.09	33.7	6
10 $\mu s$	0.013	0.013	0.0027	4.75	-9.52	3.04	34.7	6
100 $\mu s$	0.042	0.042	-0.0100	1.57	0.00	-0.01	33.5	8
1 ms	0.127	0.130	-0.0491	15.31	-29.07	2.39	9.3	9
10 ms	0.427	0.439	-0.0581	38.23	14.97	2.35	10.2	8
50 ms	0.959	0.880	-0.0992	214.72	352.64	0.83	17.6	10
100 ms	1.358	1.524	0.1153	5.33	-9.87	2.69	8.5	11
500 ms	3.043	3.463	-0.1801	247.39	260.80	3.07	10.1	22
1 s	4.307	4.895	-0.1864	-129.46	-477.37	0.02	38.7	28
2 s	6.095	6.677	-0.1343	21.41	-31.25	0.07	39.9	36

Tabelle 4.1: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$ , aufgetragen über die Integrationszeit  $\Delta t$  für eine Flechte.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$4.64 \cdot 10^{-6}$	$4.80 \cdot 10^{-6}$	$4.82 \cdot 10^{-6}$	1.03	1.04	7374.75	8585.25
1 $\mu s$	$1.86 \cdot 10^{-5}$	$1.92 \cdot 10^{-5}$	$1.93 \cdot 10^{-5}$	1.03	1.04	1843.31	2145.64
10 $\mu s$	$18.58 \cdot 10^{-5}$	$19.22 \cdot 10^{-5}$	$19.33 \cdot 10^{-5}$	1.03	1.04	186.94	218.01
100 $\mu s$	$185.66 \cdot 10^{-5}$	$192.17 \cdot 10^{-5}$	$192.65 \cdot 10^{-5}$	1.04	1.04	19.90	21.27
1 ms	0.0186	0.0195	0.0199	1.05	1.07	3.63	4.91
10 ms	0.1858	0.1955	0.2008	1.05	1.08	1.28	1.44
50 ms	0.9289	0.9903	1.0014	1.07	1.08	1.07	1.08
100 ms	1.8579	1.9644	2.0057	1.06	1.08	1.03	1.04
500 ms	9.2907	10.1831	10.3226	1.10	1.11	1.01	1.01
1 s	18.583	20.773	21.408	1.12	1.15	1.01	1.01
2 s	37.168	40.870	44.721	1.10	1.20	1.00	1.01

Tabelle 4.2: Gemessene (gem) und aus den Fitparametern berechnete (cal) Größen des Photosignals wie Mittelwert  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  einer Flechte in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$ .

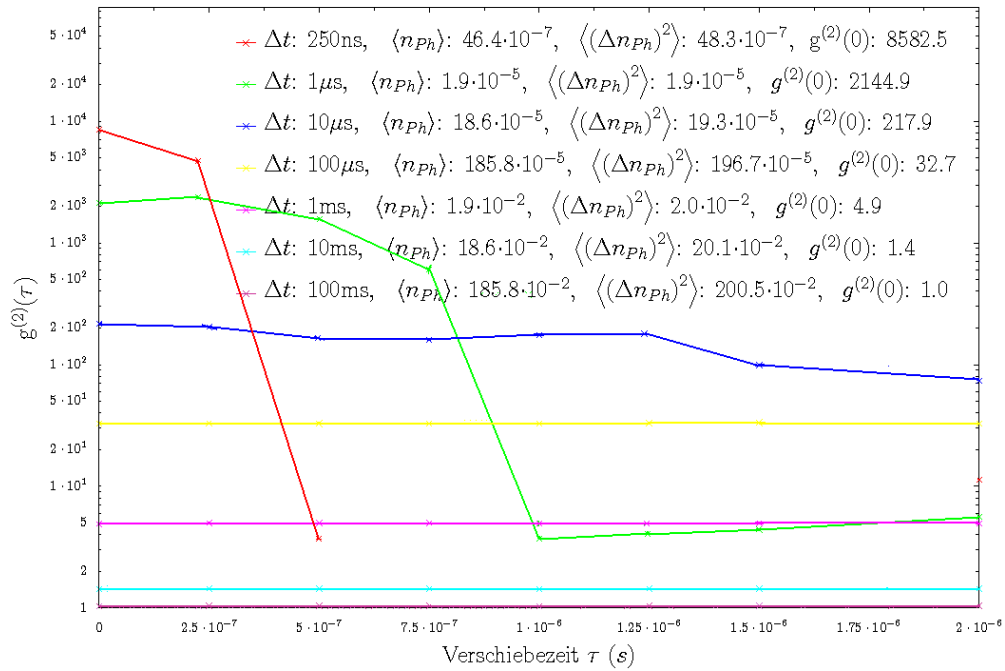


Abbildung 4.17: Autokorrelation des gemessenen Photonensignals einer Flechte für unterschiedliche Integrationszeiten  $\Delta t$ .

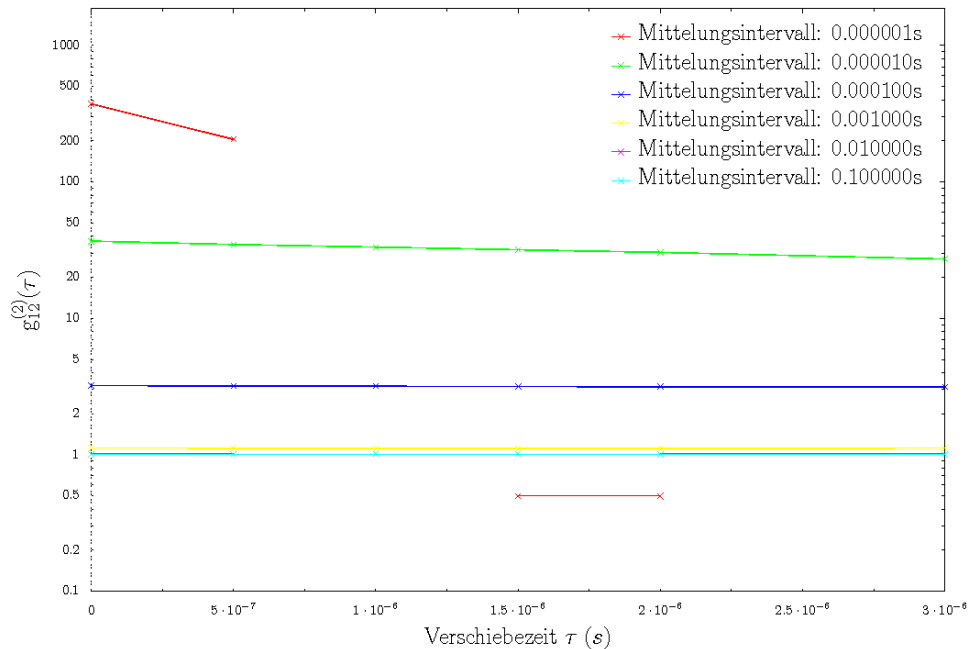


Abbildung 4.18: Kreuzkorrelation der Photonensignale einer Flechte für unterschiedliche Integrationszeiten  $\Delta t$ .

## Intensitätskorrelation

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung des Signals besteht in der Betrachtung der Intensitätskorrelation. Dazu wurde  $g^{(2)}(\tau)$  aus Gleichung (4.3) für verschiedene Verschiebezeiten  $\tau$  und Integrationszeiten  $\Delta t$  ausgewertet. In Abbildung 4.17 sind die Ergebnisse der Autokorrelation halblogarithmisch dargestellt. Für die kleinste mögliche Integrationszeit  $\Delta t = 250$  ns gibt es Ausfälle im Verlauf. In diesen Bereichen fällt  $g^{(2)}(\tau)$  auf sehr kleine Werte, die wegen der halblogarithmischen Darstellung nicht angezeigt werden. Diese Einbrüche im Graphen entstehen durch die zu geringe Datendichte. Ein Antibunching-Effekt konnte nicht festgestellt werden. Offensichtlich weist auch die Autokorrelation des Photonensignal auf eine Super-Poisson-Statistik hin. Die in der Graphik eingetragenen Werte für  $g^{(2)}(0)$  können mit Tabelle 4.2 verglichen werden. In Abbildung 4.18 ist die Kreuzkorrelation der beiden Photomultiplier zu sehen, die nach Gleichung (4.6) ausgewertet wurde. Für zeitliche Verschiebungen  $\tau > \Delta t$  fängt das Signal ab  $\Delta t < 100$   $\mu$ s stark an zu fluktuieren. In diesen Fällen können sogar negative Funktionswerte für  $g_{12}^{(2)}(\tau)$  auftreten, deren Ursachen in der Dunkelstromkorrektur und den statistischen Schwankungen liegen. Da für kleine zeitliche Verschiebungen ( $\tau < \Delta t$ )  $g_{12}^{(2)}(0) > 1$  gilt, liegt eine Korrelation der gemessenen Signale vor. Prinzipiell kann es sich dabei um eine Korrelation der räumlichen Moden handeln, oder um eine Abhängigkeit des Rauschens in Photomultiplier A vom detektierten Signal in Photomultiplier B und umgekehrt.

#### 4.4.2 Blutpflaume (*Prunus cerasifera Nigra*)

Um auch Blätter einer anderen Farbe zu untersuchen, wurde ein Blatt der Blutpflaume gemessen. Der zeitliche Verlauf eines Ausschnitts der Messung ist in Abbildung 4.19 zu sehen. Wie zu

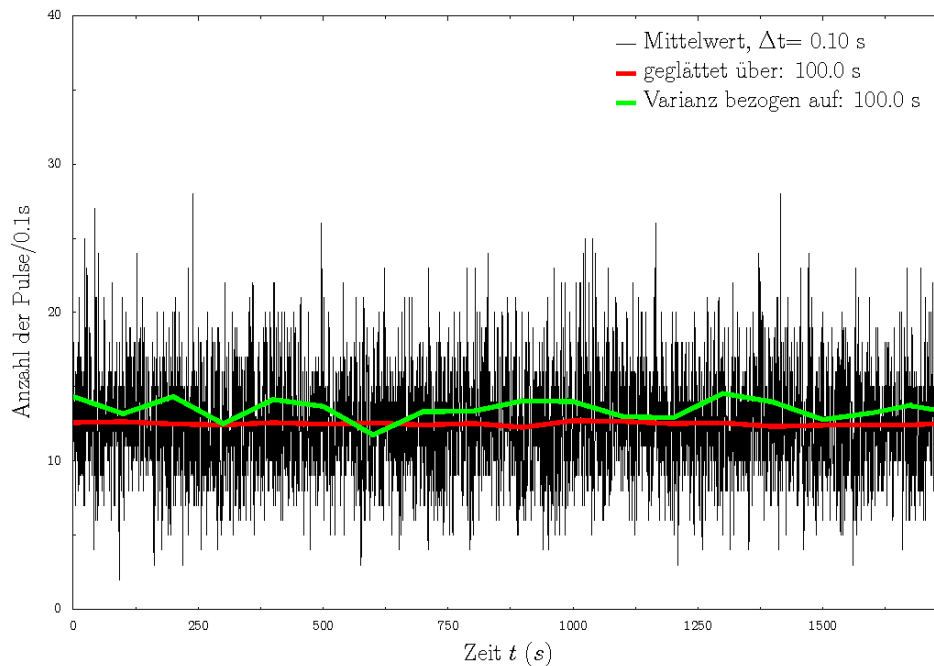


Abbildung 4.19: Ausschnitt des zeitlichen Signalverlaufs eines Blattes der Blutpflaume.

erkennen ist, liegt ein sehr intensives Signal vor, das zusätzlich über einen längeren Zeitraum konstant ist.

#### Photonenstatistik

Die Fitparameter, die entsprechend Gleichung (4.9) berechnet wurden, sind in Tabelle 4.3 aufgelistet. Wie zu erkennen ist, nimmt  $\chi^2$  große Werte für die ersten sechs Verteilungen an. In Tabelle 4.4 sind die charakteristischen Größen der berechneten sowie der gemessenen Verteilung eingetragen. Die gemessenen, wie auch die berechneten Fano-Faktoren sind immer größer als Eins.  $g^{(2)}(0)$  ist ebenfalls für alle verwendeten Integrationszeiten größer als Eins. Offensichtlich handelt es sich wieder um eine Super-Poisson-Statistik. Für die größeren Integrationszeiten  $\Delta t$  sind die berechneten Verteilungen  $P_{cal}(n)$  in Abbildung 4.20 als durchgezogene Linien dargestellt. Die gemessenen Häufigkeiten wurden als Kreuze eingetragen.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	r	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	f
250 ns	0.005	0.005	0.0011	-1619.85	-3210.03	0.68	731.6	3
1 $\mu s$	0.011	0.011	0.0023	9.97	-30.14	1.28	721.7	3
10 $\mu s$	0.033	0.033	-0.0082	2.39	-4.64	1.65	609.6	3
100 $\mu s$	0.102	0.105	-0.0348	13.38	-26.64	-1.49	146.0	3
1 ms	0.336	0.354	0.0545	3.16	-218.14	1.75	35.8	5
10 ms	1.078	1.095	-0.0166	3.17	-6.16	0.12	31.0	7
50 ms	2.406	2.430	0.1358	217.36	-6.74	-0.60	16.8	14
100 ms	3.407	3.123	0.1212	241.08	163.30	0.02	23.5	20
250 ms	5.382	6.581	-0.2900	21.40	-46.91	-3.14	37.0	31
500 ms	7.622	7.635	0.0094	196.41	339.41	0.12	51.7	37

Tabelle 4.3: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$  für ein Blatt der Blutpflaume.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$29.05 \cdot 10^{-6}$	$30.29 \cdot 10^{-6}$	$30.66 \cdot 10^{-6}$	1.04	1.06	1475.84	1904.31
1 $\mu s$	$11.62 \cdot 10^{-5}$	$12.12 \cdot 10^{-5}$	$12.26 \cdot 10^{-5}$	1.04	1.06	369.03	475.96
10 $\mu s$	$116.20 \cdot 10^{-5}$	$121.09 \cdot 10^{-5}$	$122.51 \cdot 10^{-5}$	1.04	1.05	37.28	47.74
100 $\mu s$	$1161.96 \cdot 10^{-5}$	$1213.45 \cdot 10^{-5}$	$1224.60 \cdot 10^{-5}$	1.04	1.05	4.81	5.64
1 ms	0.1162	0.1219	0.1224	1.05	1.05	1.42	1.46
10 ms	1.1620	1.2013	1.2341	1.03	1.06	1.03	1.05
50 ms	5.8097	6.1406	6.1342	1.06	1.06	1.01	1.01
100 ms	11.6199	11.9803	12.1770	1.03	1.05	1.00	1.00
250 ms	29.0477	31.1543	30.7437	1.07	1.06	1.00	1.00
500 ms	58.0998	59.2011	61.1692	1.02	1.05	1.00	1.00

Tabelle 4.4: Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwerte  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianzen  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktoren  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  für ein Blatt der Blutpflaume.



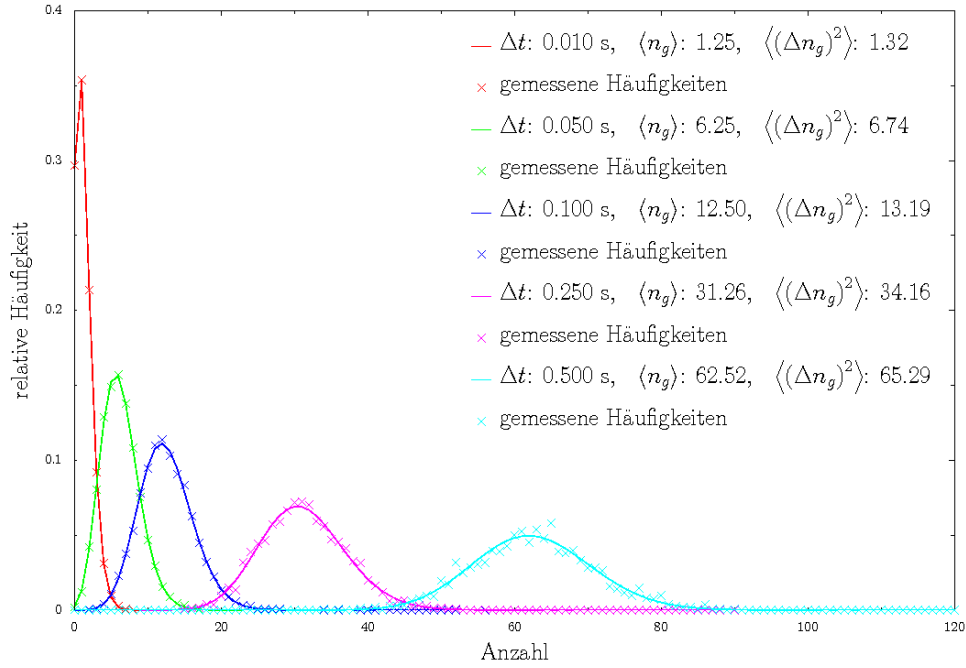


Abbildung 4.20: Berechnete  $P_{cal}(n)$  (Linie) und gemessene Häufigkeiten (Kreuze), für unterschiedliche Integrationszeiten  $\Delta t$ . Mittelwerte  $\langle n_g \rangle$  und Varianzen  $\langle (\Delta n_g)^2 \rangle$ , berechnet aus  $P_{cal}(n)$  nach Gleichung (4.9) für ein Blutpflaumenblatt.

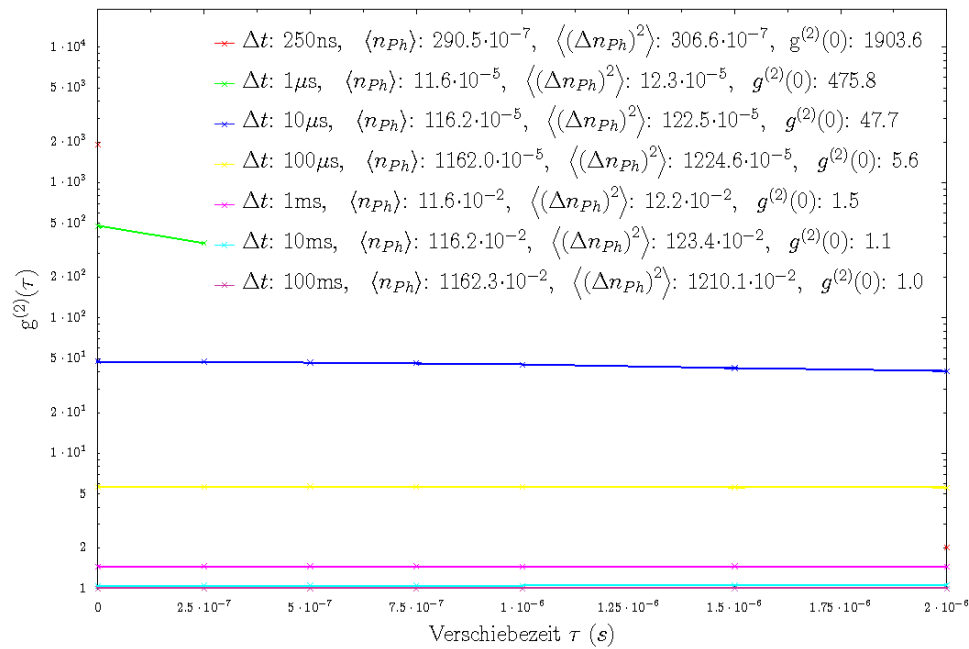


Abbildung 4.21: Autokorrelation des Photonensignals eines Blutpflaumenblatts für verschiedene Integrationszeiten  $\Delta t$ .

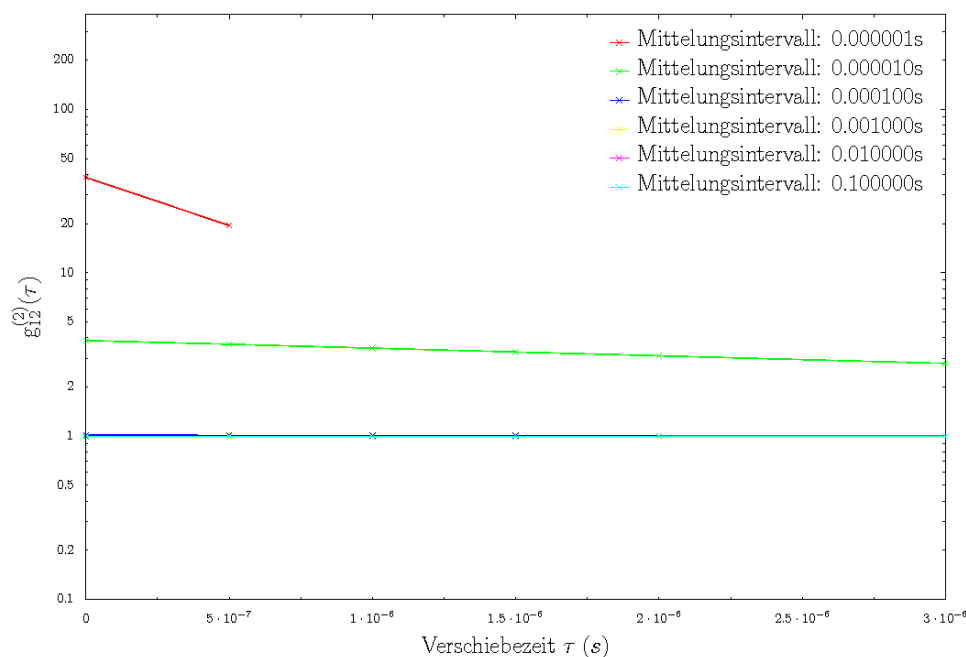


Abbildung 4.22: Kreuzkorrelation der Signale eines Blutpflaumenblatts für verschiedene Integrationszeiten  $\Delta t$ .

### Intensitätskorrelation

Wie aus Abbildung 4.21 zu erkennen ist, zeigt die Autokorrelation des gemessenen Photonensignals ein Bunchingverhalten, entsprechend der gemessenen Super-Poisson-Statistik aus Abbildung 4.20. Im Falle der Integrationszeit  $\Delta t = 250$  ns ist nur ein Punkt eingezeichnet. Die anderen Werte sind Null und deshalb in der halblogarithmischen Darstellung nicht vorhanden. Auch die Kreuzkorrelation der Intensitäten zeigt eine Abhängigkeit bei kleineren Integrationszeiten  $\Delta t$ . Für  $\Delta t > 100 \mu s$  wird die Kreuzkorrelation der beiden Photomultiplier zu Eins. Ab  $\Delta t < 100 \mu s$  nehmen auch hier die Schwankungen erheblich zu. Gleichzeitig tritt für diese Integrationszeiten trotz der Dunkelstromkorrektur Bunching auf.

### 4.4.3 Weißtanne (*Abies alba*)

Als biologische Probe eines Nadelbaums diente ein junger, mit Nadeln besetzter Zweig einer Weißtanne. Das Abklingsignal des Zweiges wurde nach einer 10-sekündigen Bestrahlung mit thermischem Licht gemessen. In Abbildung 4.23 ist ein Ausschnitt dieses Signals dargestellt. Da zwischenzeitlich ein Defekt an der Apparatur vorlag, erhöhte sich der Dunkelstrom trotz neu eingestelltem Signal-Rausch-Verhältnis. Da das Dunkelsignal vor und nach jeder Messung bestimmt wurde, hat dies keinen Einfluss auf die Resultate.

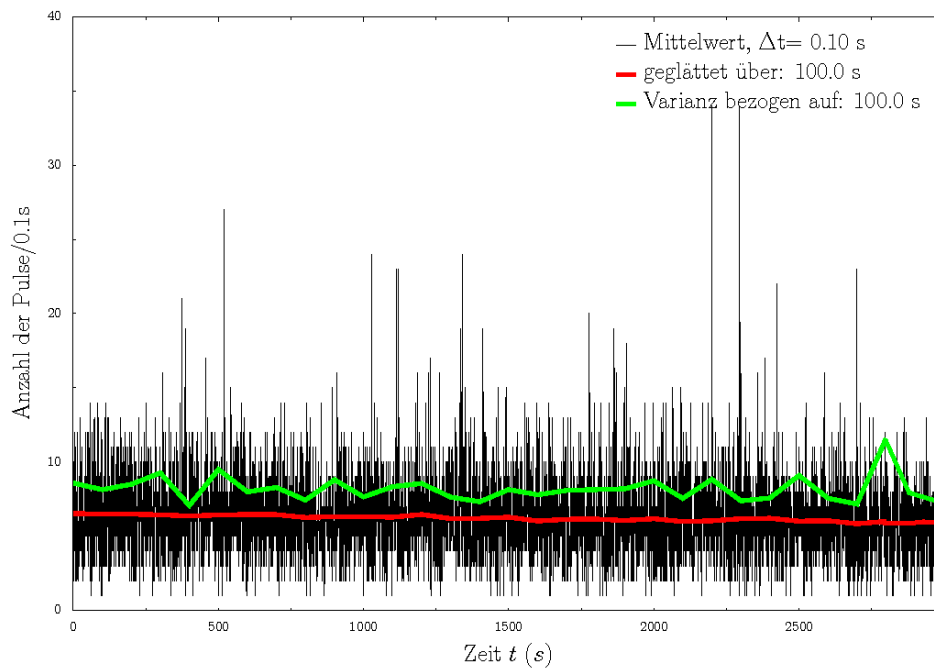


Abbildung 4.23: Zeitlicher Verlauf des Signals einer Weißtanne.

### Photonenstatistik

Die zugehörigen Verteilungen der gemessenen Pulse zum zeitlichen Verlauf aus Abbildung 4.23 sind in Abbildung 4.24 dargestellt. Aus Tabelle 4.5 ist zu erkennen, dass  $\chi^2$  für die ersten vier Verteilungen sehr große Werte annimmt. Trotzdem wirkt sich dies auf die geschätzten Varianzen nur geringfügig aus (siehe Tabelle 4.6) wie schon zuvor diskutiert wurde. Es handelt sich wieder um Super-Poisson-Statistiken. Folglich konnte auch für diese Probe kein eindeutiger Hinweis auf nichtklassische Effekte festgestellt werden.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	r	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	f
250 ns	0.003	0.003	0.0009	9505.55	19064.71	1.53	1009089.2	10
1 $\mu s$	0.006	0.006	0.0018	1702.73	3443.38	0.19	252599.6	10
10 $\mu s$	0.020	0.020	0.0061	21.97	-37.75	-0.05	25634.3	10
100 $\mu s$	0.063	0.064	-0.0216	11.26	-18.31	0.55	4089.2	10
1 ms	0.204	0.198	-0.0514	19.62	-40.92	3.02	56.4	12
10 ms	0.664	0.649	-0.0348	31.15	-75.94	-0.57	59.3	15
50 ms	1.487	1.430	-0.0445	12.72	-24.82	0.34	87.9	20
100 ms	2.103	2.019	-0.0412	6.27	-12.60	-0.03	58.6	23
250 ms	3.326	3.364	-0.0440	-126.26	-13.76	-1.24	59.0	29
500 ms	4.701	5.597	0.1746	66.04	26.71	1.59	51.7	36
1 s	6.642	8.928	0.3250	118.46	-418.01	2.83	43.6	50

Tabelle 4.5: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$  für einen jungen Weißtannenzweig.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$11.06 \cdot 10^{-6}$	$11.88 \cdot 10^{-6}$	$12.24 \cdot 10^{-6}$	1.07	1.11	6676.27	9583.27
1 $\mu s$	$4.43 \cdot 10^{-5}$	$4.75 \cdot 10^{-5}$	$4.89 \cdot 10^{-5}$	1.07	1.11	1668.72	2395.21
10 $\mu s$	$44.26 \cdot 10^{-5}$	$47.49 \cdot 10^{-5}$	$48.91 \cdot 10^{-5}$	1.07	1.11	166.23	238.57
100 $\mu s$	$442.57 \cdot 10^{-5}$	$472.65 \cdot 10^{-5}$	$483.14 \cdot 10^{-5}$	1.07	1.09	16.36	21.72
1 ms	0.0443	0.0474	0.0475	1.07	1.07	2.60	2.65
10 ms	0.4426	0.4756	0.4741	1.07	1.07	1.17	1.16
50 ms	2.2128	2.4206	2.3974	1.09	1.08	1.04	1.04
100 ms	4.4256	4.8071	4.7086	1.09	1.06	1.02	1.01
250 ms	11.0634	12.0817	11.2692	1.09	1.02	1.01	1.00
500 ms	22.1273	22.5974	22.3647	1.02	1.01	1.00	1.00
1 s	44.229	51.134	45.778	1.16	1.04	1.00	1.00

Tabelle 4.6: Aus den Fitparametern berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwerte  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianzen  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktoren  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  in Abhängigkeit von  $\Delta t$  für einen jungen Weißtannenzweig.

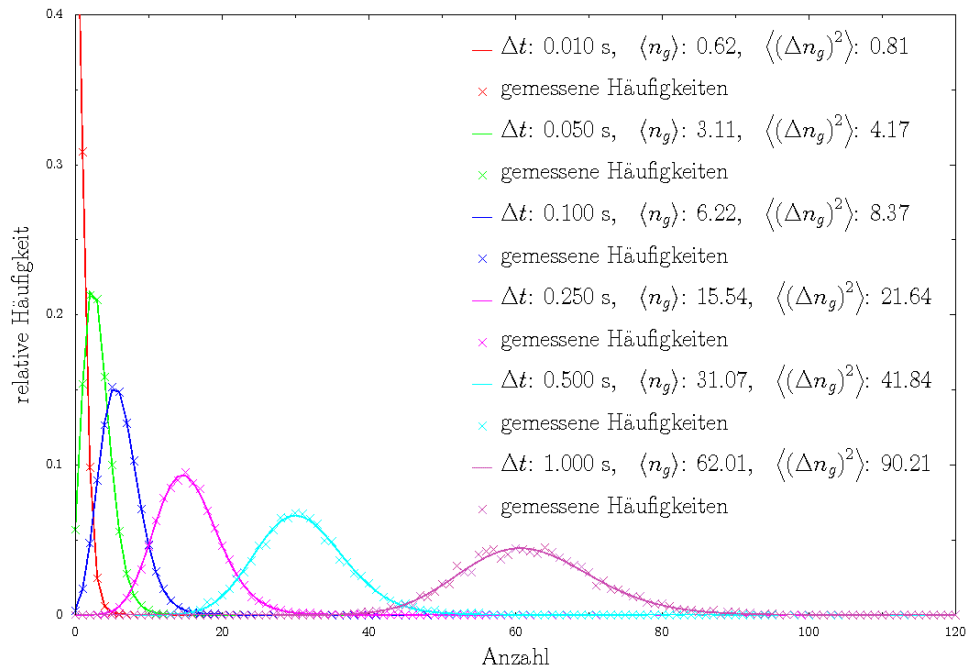


Abbildung 4.24: Gemessene Häufigkeiten (Kreuze) und approximierte Verteilungen  $P_{cal}(n)$  (durchgezogene Linien) eines Weißtannenzweiges für verschiedene Integrationszeiten  $\Delta t$ .

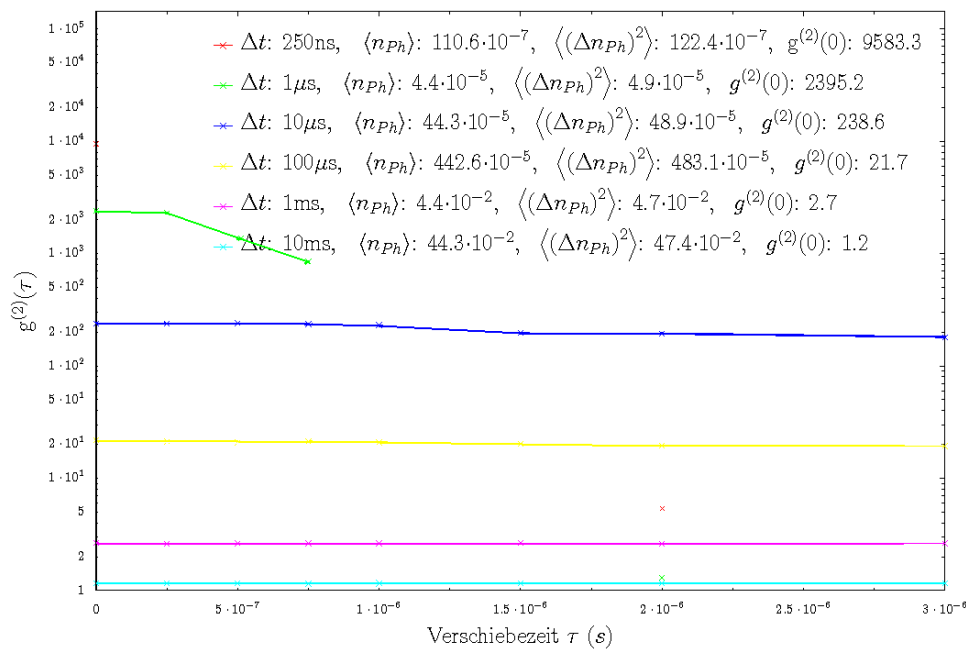


Abbildung 4.25: Autokorrelation des Signals eines jungen Weißtannenzweiges in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

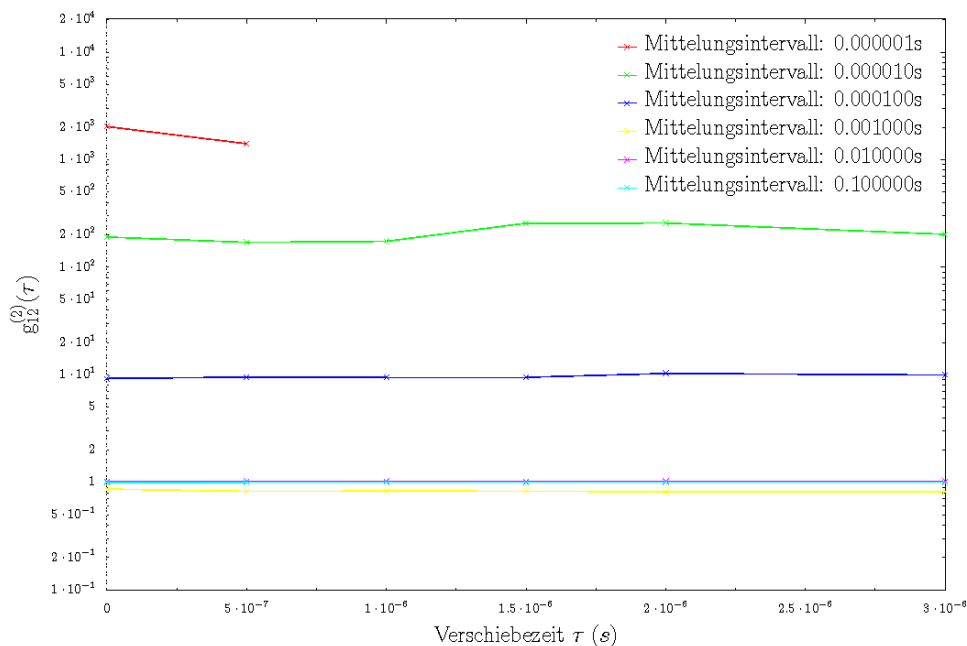


Abbildung 4.26: Kreuzkorrelation der gemessenen Signale eines jungen Weißtannenzweiges in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

### Intensitätskorrelation

Der Verlauf von  $g^{(2)}(\tau)$  kann in Abbildung 4.25 betrachtet werden. Wie dort zu erkennen ist, gilt  $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$ , was als klarer Nachweis für Bunching gewertet werden kann. Wegen der geringen Datendichte für kleine Integrationszeiten wird die rote Linie nur durch zwei Punkte repräsentiert. Das Gleiche gilt für die grüne Linie. Dennoch ist die negative Steigung klar zu erkennen. Die Kreuzkorrelation der Signale zeigt ein ähnliches Verhalten (siehe Abbildung 4.26). Trotz der Dunkelstromkorrektur ist hier eine Abhängigkeit für kleine Integrationszeiten zu sehen. Da die Datendichte wieder zu gering ist, nimmt  $g_{12}^{(2)}(\tau)$  sogar negative Werte an, die wegen der halblogarithmischen Auftragung nicht eingezeichnet werden können. Die negativen Werte resultieren aus der Subtraktion durch die Dunkelstromkorrektur (siehe Gleichung (4.6)) und der zu geringen Datenmenge. Gleichwohl zeigen die Werte von  $g_{12}^{(2)}(0) > 1$ , dass eine Koppelung der gemessenen Signale vorliegt.

#### 4.4.4 Gummibaum (*Ficus microcarpa*)

Das Blatt eines Gummibaums war eine weitere biologische Probe, die zur Untersuchung genutzt werden konnte. In Abbildung 4.27 ist ein Ausschnitt des gemessenen Intensitätsverlaufs zu sehen. Wie zu erkennen ist, besitzt der Mittelwert (rote Linie) eine leicht abfallende Steigung. Um

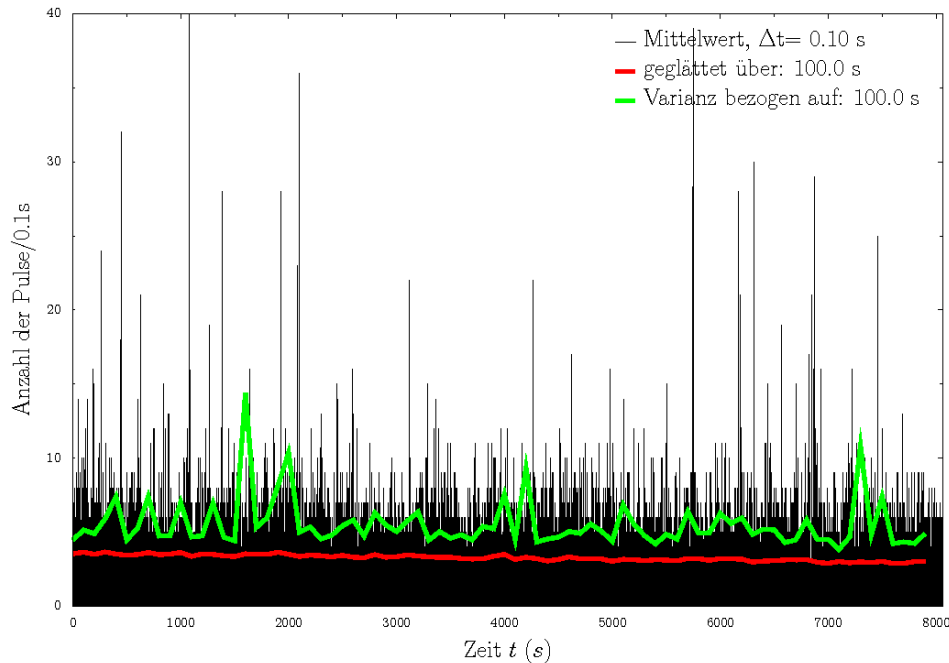


Abbildung 4.27: Detektierter Intensitätsverlauf eines Gummibaumblattes.

quasi stationäre Bedingungen zu erhalten, wurde nur ein kleinerer Bereich, zwischen  $t_1 = 4500$  s und  $t_2 = 7000$  s statistisch ausgewertet, in dem die Varianz (grüne Linie) geringfügig schwankte.

#### Photonenstatistik

Die Verteilung der gemessenen Pulse ist in Abbildung 4.28 dargestellt. Aus Tabelle 4.7 geht hervor, dass  $\chi^2$ , für alle Verteilungen zu große Werte annimmt. Die berechneten und gemessenen Größen wie  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  weichen teilweise stark voneinander ab (siehe Tabelle 4.6). Offensichtlich war in diesem Fall die Fitfunktion ungeeignet. Es handelte sich wieder um eine Super-Poisson-Statistiken, wie aus den gemessenen Daten folgt. Die zeitliche Drift des mittleren Photonensignals führt natürlich auch zu einer leichten Verbreiterung der Statistik.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	$r$	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	$f$
250 ns	0.003	0.003	0.0009	8249.99	16631.88	0.28	2790168.9	11
1 $\mu s$	0.005	0.005	0.0018	11.28	-22.61	2.53	698817.8	11
10 $\mu s$	0.016	0.016	0.0058	41.22	-55.81	0.75	71393.7	11
100 $\mu s$	0.051	0.051	-0.0202	12.16	-16.53	2.30	6839.1	11
1 ms	0.151	0.139	0.0857	-47.02	-483.59	0.24	1370.7	14
10 ms	0.533	0.544	0.1305	66.71	-459.10	-0.56	770.9	13
50 ms	1.215	1.447	0.1747	-17.54	-520.82	0.67	257.6	15
100 ms	1.723	1.393	0.2130	234.41	-163.95	-0.58	174.6	18
250 ms	2.724	3.416	0.3341	258.98	-146.43	-2.16	80.8	25
500 ms	3.863	4.972	-0.3778	234.93	-254.25	3.09	29.8	29
1 s	5.470	8.510	-0.4626	192.85	-187.67	0.70	62.1	39

Tabelle 4.7: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$  für das Blatt eines Gummibaums.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$7.54 \cdot 10^{-6}$	$8.30 \cdot 10^{-6}$	$9.35 \cdot 10^{-6}$	1.10	1.24	13355.23	31850.67
1 $\mu s$	$3.01 \cdot 10^{-5}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$	$3.74 \cdot 10^{-5}$	1.10	1.24	3339.33	7962.08
10 $\mu s$	$30.15 \cdot 10^{-5}$	$33.18 \cdot 10^{-5}$	$37.39 \cdot 10^{-5}$	1.10	1.24	334.93	797.69
0 ms	0.0030	0.0033	0.0038	1.10	1.26	34.74	86.82
1 ms	0.0301	0.0340	0.0407	1.13	1.35	5.26	12.65
10 ms	0.3015	0.3531	0.4217	1.17	1.40	1.57	2.32
50 ms	1.5074	1.8155	2.1572	1.20	1.43	1.14	1.29
100 ms	3.0148	3.6708	4.3265	1.22	1.44	1.07	1.14
250 ms	7.5371	9.6651	11.1036	1.28	1.47	1.04	1.06
500 ms	15.0739	20.0466	22.6114	1.33	1.50	1.02	1.03
1 s	30.149	43.328	46.029	1.44	1.53	1.01	1.02

Tabelle 4.8: Aus den Fitparametern berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  für ein Gummibaumblatt (Mittelwert  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$ ).



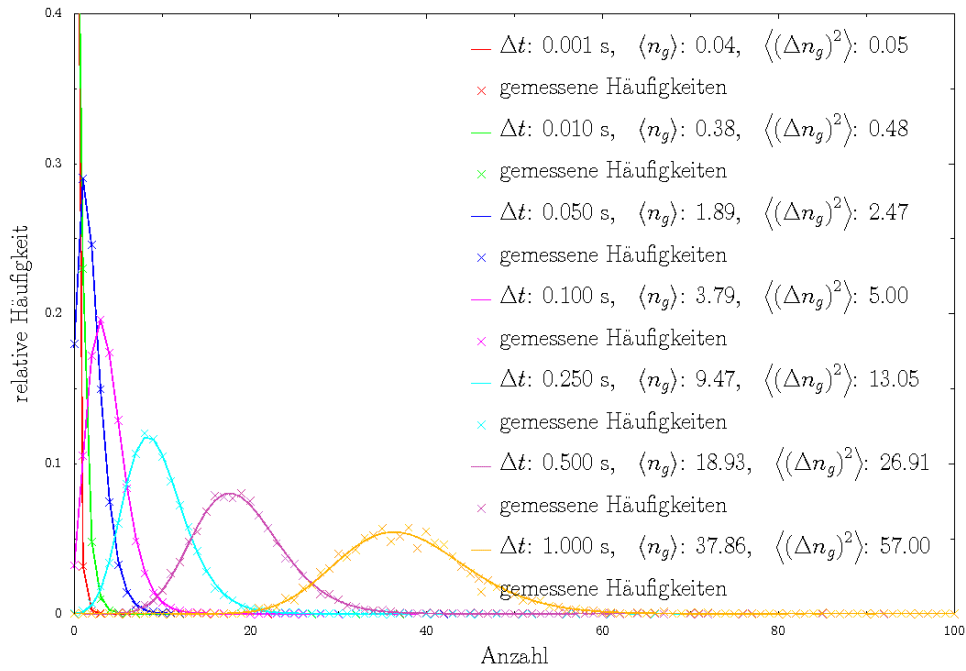


Abbildung 4.28: Gemessene und approximierte Häufigkeitsverteilungen des Pulssignals eines Gummibaumblattes in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

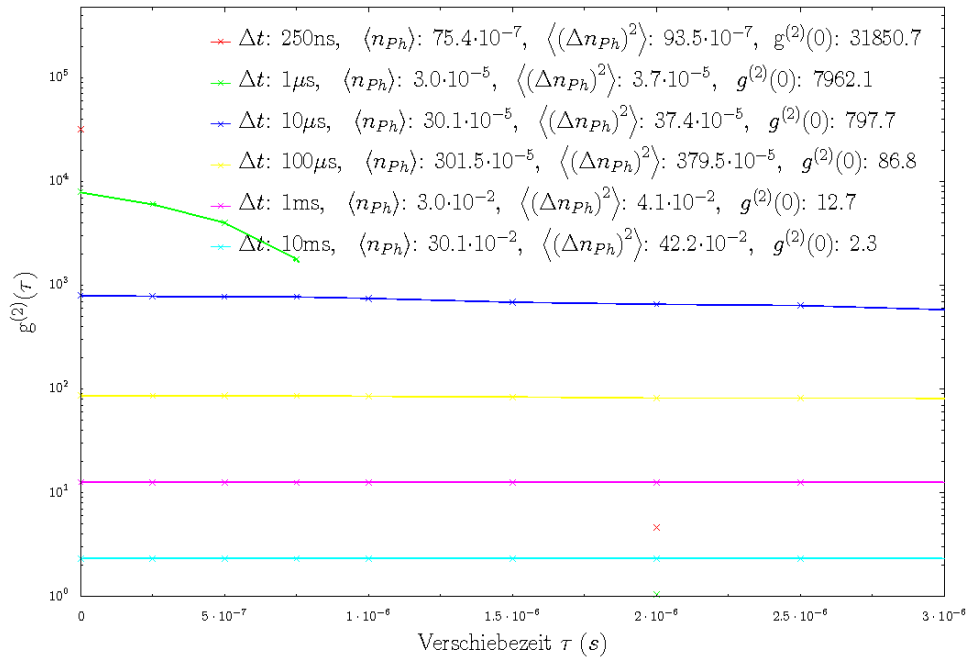


Abbildung 4.29: Autokorrelation der Intensität eines Gummibaumblattes in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

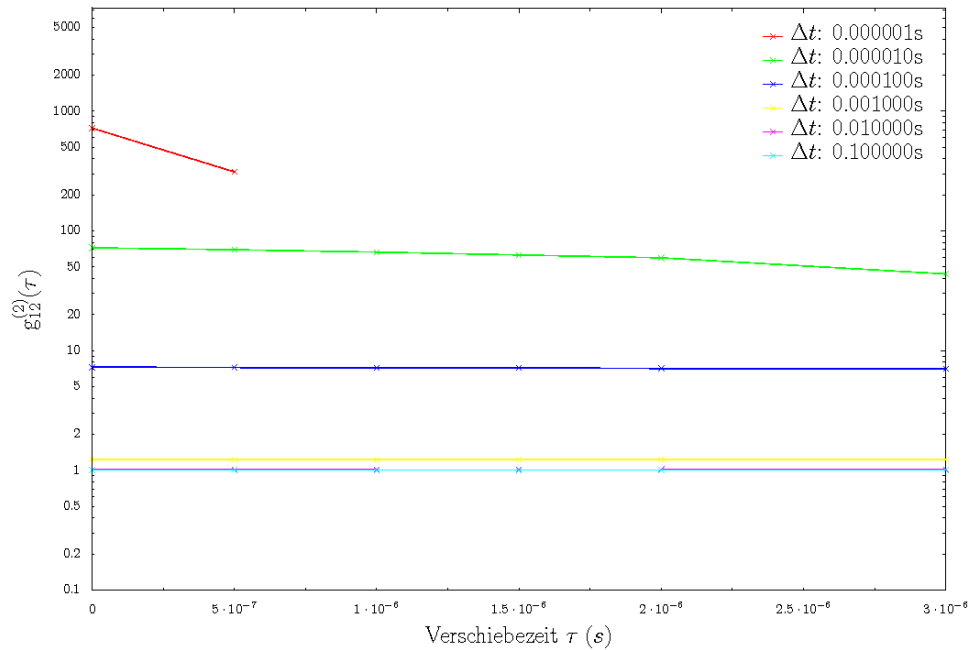


Abbildung 4.30: Kreuzkorrelation der Signale für ein Gummibaumblatt in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

### Intensitätskorrelation

Auch im Falle des Gummibaumblatts wurden die Intensitätskorrelationen untersucht. Für kleine Integrationszeiten fehlen aus oben genannten Gründen wieder mehrere Datenpunkte. Trotzdem weist die Autokorrelation der Intensität auf einen Bunching-Effekt hin, wie aus den grünen und blauen Linien geschlossen werden kann (siehe Abbildung 4.29). Für größere Integrationszeiten  $\Delta t$  ist das Absinken von  $g^{(2)}(\tau)$  für  $\tau > 0$  nicht sichtbar, da hier  $\Delta t \gg \tau$  gilt. Auch die Kreuzkorrelation der Signale zeigt eine klare Abhängigkeit für Integrationszeiten  $\Delta t > 1$  ms. Aus den roten und grünen Linien ist auch hier zu erkennen, dass mit der zeitlichen Verschiebung  $\tau$  die Korrelation abnimmt.

#### 4.4.5 Große Brennnessel (*Urtica dioica*)

Als weitere biologische Probe diente das Blatt einer Brennnessel. Der ausgewertete Intensitätsabschnitt ist in Abbildung 4.31 dargestellt. Wie zu erkennen ist, strahlte das Brennnesselblatt

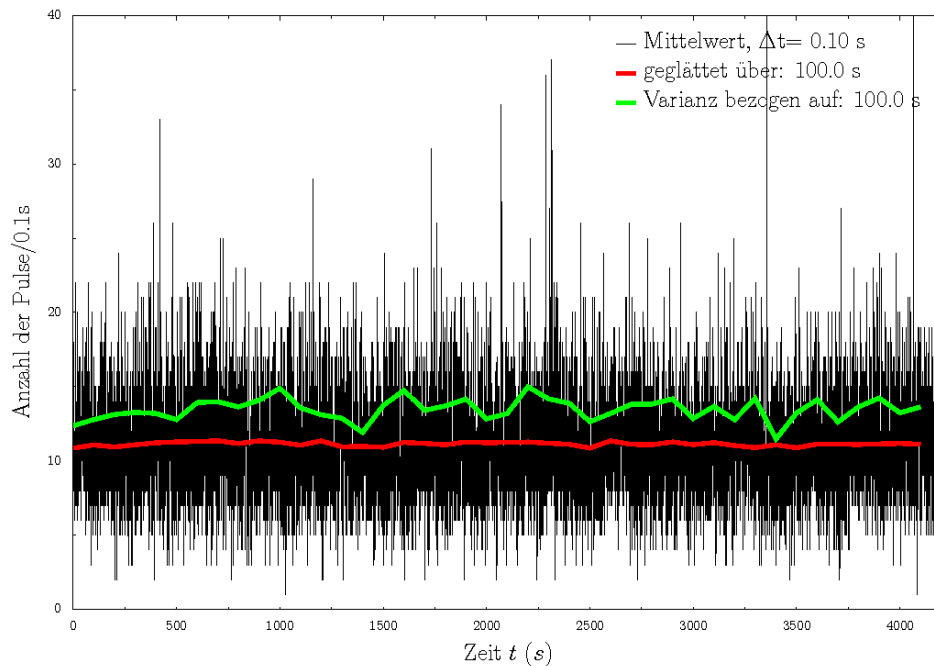


Abbildung 4.31: Ausschnitt aus dem zeitlichen Verlauf des gemessenen Signals eines Brennnesselblatts.

über einen längeren Zeitraum im Mittel gleich viele Photonen ab.

#### Photonenstatistik

In Abbildung 4.32 ist die gemessene und die genäherte Häufigkeitsverteilung der detektierten Pulse in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  aufgetragen. Tabelle 4.9 kann entnommen werden, dass  $\chi^2$  für die ersten fünf Verteilungen große Werte annimmt. Trotzdem wirkt sich dies nur geringfügig auf die geschätzten Varianzen aus, wie Tabelle 4.10 zeigt. Auch in diesem Fall handelt es sich um eine Super-Poisson-Statistik.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	r	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	f
250 ns	0.005	0.005	0.0014	-807.35	-1596.05	-0.12	776.6	13
1 $\mu s$	0.009	0.009	0.0027	4.73	-59.75	3.08	767.1	13
10 $\mu s$	0.029	0.029	0.0093	1.60	-3.09	-3.08	651.7	13
100 $\mu s$	0.091	0.093	-0.0347	5.48	-11.02	1.52	80.9	13
1 ms	0.306	0.294	0.0386	234.21	244.41	-0.63	26.9	13
10 ms	0.973	0.982	-0.0297	11.09	-21.80	-2.92	23.7	16
50 ms	2.177	2.244	-0.0337	17.64	-33.83	-2.40	29.9	23
100 ms	3.079	3.146	-0.0374	-78.87	112.44	-0.63	37.4	28
250 ms	4.869	4.993	-0.0358	-3.41	-195.32	-0.52	52.8	40
500 ms	6.884	6.086	-0.1282	26.00	12.88	0.28	47.8	48

Tabelle 4.9: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$  für ein Brennnesselblatt.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$23.71 \cdot 10^{-6}$	$25.47 \cdot 10^{-6}$	$25.44 \cdot 10^{-6}$	1.07	1.07	3141.22	3091.09
1 $\mu s$	$9.48 \cdot 10^{-5}$	$10.19 \cdot 10^{-5}$	$10.18 \cdot 10^{-5}$	1.07	1.07	785.31	772.44
10 $\mu s$	$94.83 \cdot 10^{-5}$	$101.82 \cdot 10^{-5}$	$101.65 \cdot 10^{-5}$	1.07	1.07	78.69	76.82
100 $\mu s$	$948.32 \cdot 10^{-5}$	$1013.82 \cdot 10^{-5}$	$1006.73 \cdot 10^{-5}$	1.07	1.06	8.28	7.50
1 ms	0.0948	0.1007	0.1006	1.06	1.06	1.66	1.64
10 ms	0.9483	1.0073	1.0020	1.06	1.06	1.07	1.06
50 ms	4.7416	5.0731	5.0188	1.07	1.06	1.01	1.01
100 ms	9.4831	10.2214	10.1027	1.08	1.07	1.01	1.01
250 ms	23.7077	25.4677	25.1555	1.07	1.06	1.00	1.00
500 ms	47.4091	50.7174	49.6838	1.07	1.05	1.00	1.00

Tabelle 4.10: Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  (Mittelwert  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$ ) für ein Brennnesselblatt.

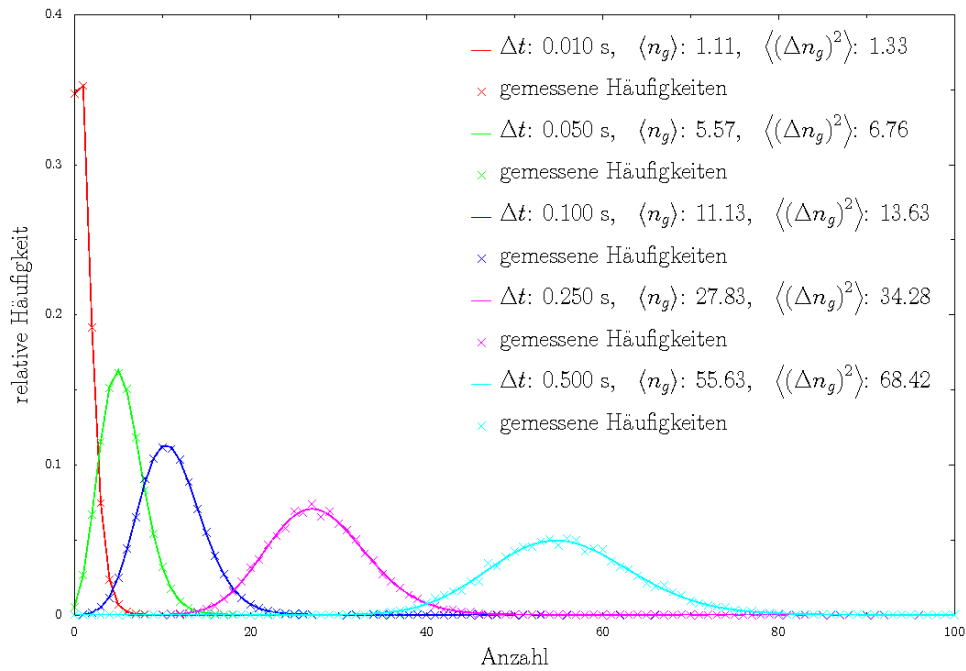


Abbildung 4.32: Gemessene (Kreuzchen) und genäherte Pulsverteilung (Linie) für ein Brennesselblatt in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

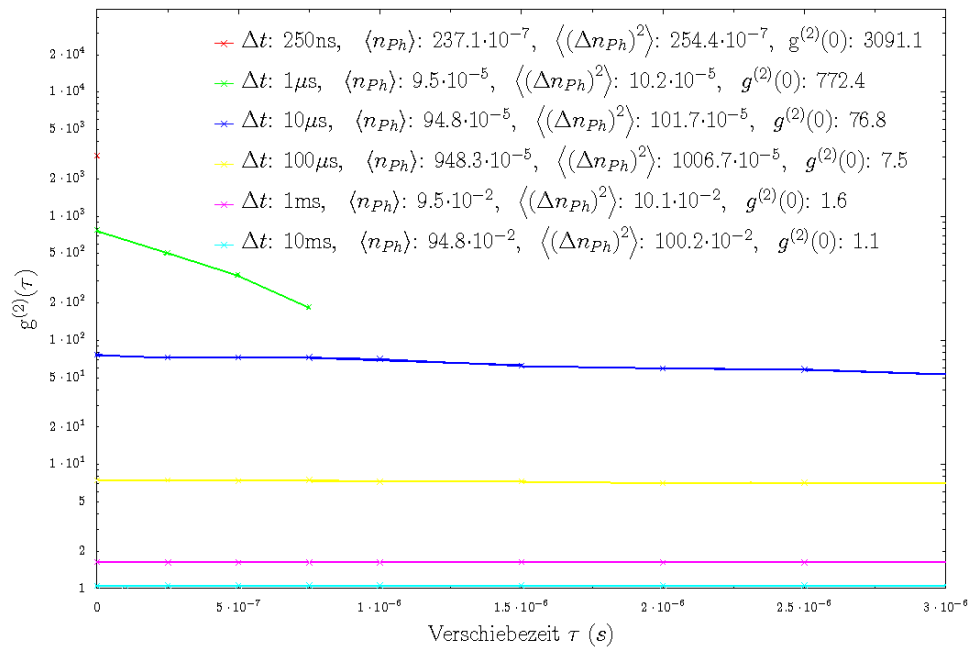


Abbildung 4.33: Autokorrelation der Intensität eines Brennesselblattes in Abhängigkeit vom Integrationszeitintervall  $\Delta t$ .

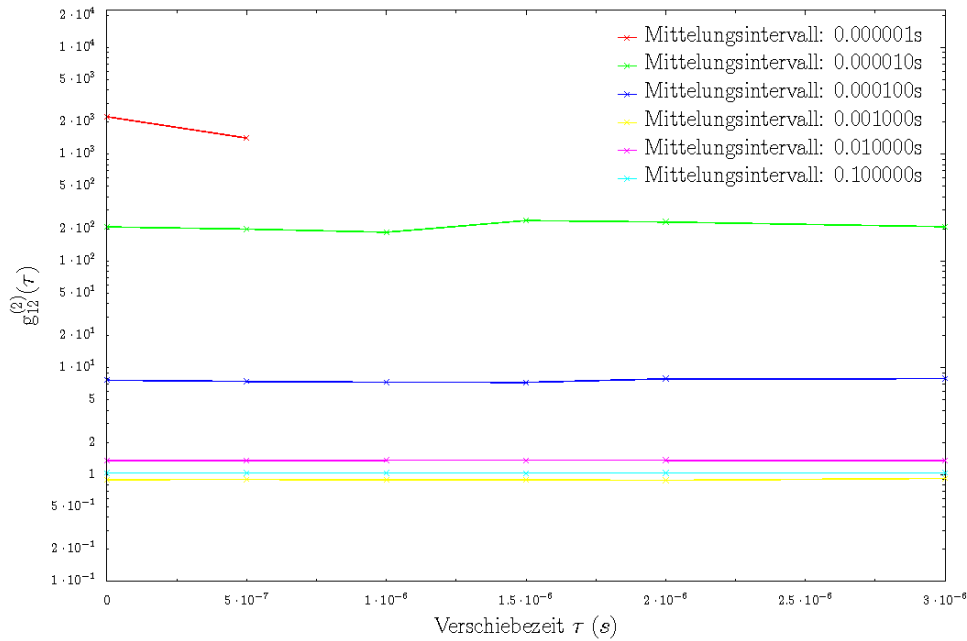


Abbildung 4.34: Kreuzkorrelation der Signale eines Brennesselblattes in Abhängigkeit vom Integrationszeitintervall  $\Delta t$ .

### Intensitätskorrelation

Die Intensitätskorrelationen erbrachten keine neuen Ergebnisse. Unabhängig von den fehlenden Datenpunkten zeigten die dunkelstrombereinigten Autokorrelationen wieder Hinweise auf Bunching. Wie aus Abbildung 4.33 zu erkennen ist, besitzt die blaue und die grüne Linie eine negative Steigung. Auch die Kreuzkorrelationen zeigten, dass die Signale der Photomultiplier voneinander abhängen (siehe Abbildung 4.34). Offensichtlich gilt für die gelbe Linie ( $\Delta t = 1$  ms)  $g_{12}^{(2)}(0) < 1$ . Für alle weiteren Integrationszeiten ist  $g_{12}^{(2)}(0) \geq 1$ . Durch die Dunkelstromkorrektur werden vom fluktuierenden Korrelationsterm des Gesamtsignals  $\langle n_{g1} \cdot n_{g2}(\tau) \rangle$  konstante Terme abgezogen wie zum Beispiel  $\bar{n}_{bg2} \cdot (\bar{n}_{g1} - \bar{n}_{bg1})$ . Da  $\langle n_{g1} \cdot n_{g2}(\tau) \rangle$  natürlichen Schwankungen unterliegt, kommt es immer zu Abweichungen vom wahren Erwartungswert. Für die gelbe Linie zeigt sich ein schwaches Antibunching  $g_{12}^{(2)}(\tau) < 1 \wedge \tau < \Delta t$ . Da alle weiteren Integrationszeiten für kleinere und größere zeitliche Verschiebungen  $g_{12}^{(2)}(\tau) > 1$  ergeben, kann von einer statistischen Fluktuation ausgegangen werden.

#### 4.4.6 Stieleiche (*Quercus robur*)

Die letzte verwendete biologische Probe war ein Stieleichenblatt. Der gesamte gemessene Intensitätsverlauf des Abklingsignals konnte schon in Abbildung 4.14 betrachtet werden. Um das Biophotonensignal bei höheren Intensitäten zu messen, wurde der blau eingezeichnete Abschnitt ausgewertet. Zwar liegt dieser Ausschnitt im Bereich der verzögerten Abstrahlung, da aber, wie

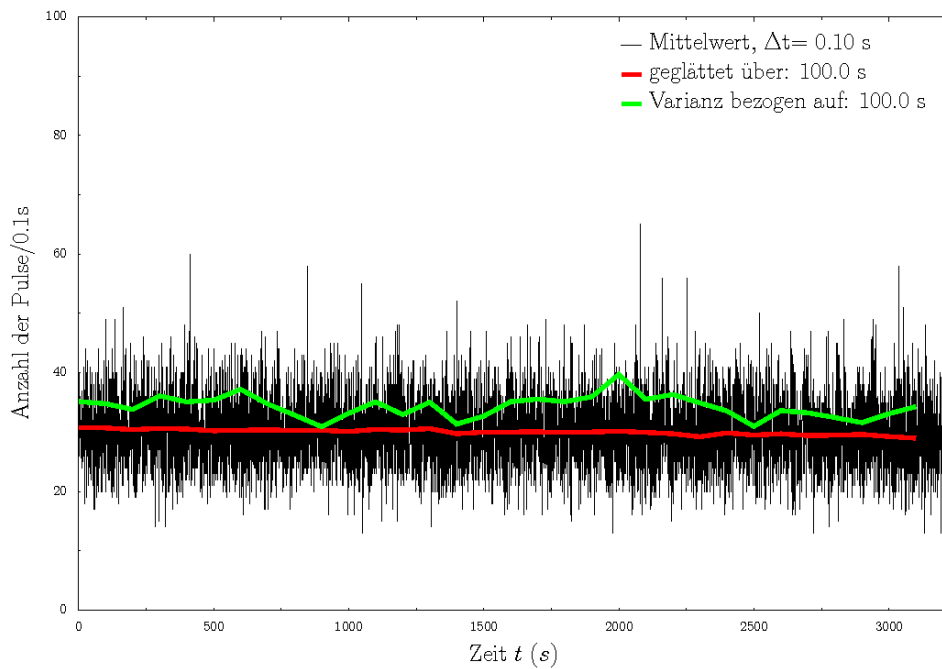


Abbildung 4.35: Blau eingezeichneter Ausschnitt des Intensitätsverlaufs aus Abbildung (4.14).

Abbildung 4.35 zeigt, das Pulssignal im Mittel annähernd konstant ist, können auch hier die Auswertungen wie zuvor erfolgen.

#### Photonenstatistik

Die zugehörigen Verteilungen der gemessenen Pulse sind in Abbildung 4.36 dargestellt. Aus Tabelle 4.11 ist zu entnehmen, dass  $\chi^2$  für die ersten vier Verteilungen große Werte annimmt. Dies wirkt sich vor allem auf die geschätzten Varianzen für eine Integrationszeit von  $\Delta t = 250$  ns aus (siehe Tabelle 4.12), die sich von den gemessenen unterscheidet. Ab  $\Delta t = 100 \mu\text{s}$  halten sich die Abweichungen in Grenzen. Auch im Falle des Eichenblatts weisen Fano-Faktoren  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  auf Super-Poisson-Statistiken hin.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	$r$	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	$f$
250 ns	0.008	0.008	0.0026	11.79	-81.63	0.05	9846.7	12
1 $\mu s$	0.016	0.016	0.0055	4.84	-9.16	-2.88	9234.5	12
10 $\mu s$	0.050	0.050	-0.0189	25.79	-33.24	-1.81	4382.9	12
100 $\mu s$	0.161	0.165	0.0476	131.27	-178.83	-2.94	161.5	13
1 ms	0.531	0.552	0.0420	247.58	107.88	1.08	56.4	14
10 ms	1.682	1.805	0.0731	51.16	-147.06	-2.57	20.4	19
50 ms	3.764	3.903	-0.0395	15.57	-31.70	-0.26	30.3	31
100 ms	5.323	5.034	-0.0569	60.30	-73.62	1.77	42.1	41
250 ms	8.412	10.066	0.2668	244.29	78.68	3.09	59.8	55

Tabelle 4.11: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$  für ein Eichenblatt.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$70.83 \cdot 10^{-6}$	$77.59 \cdot 10^{-6}$	$78.48 \cdot 10^{-6}$	1.10	1.11	1347.65	1525.44
1 $\mu s$	$28.33 \cdot 10^{-5}$	$31.03 \cdot 10^{-5}$	$31.39 \cdot 10^{-5}$	1.10	1.11	337.26	381.30
10 $\mu s$	$283.33 \cdot 10^{-5}$	$309.96 \cdot 10^{-5}$	$313.06 \cdot 10^{-5}$	1.09	1.10	34.18	38.04
100 $\mu s$	0.0283	0.0306	0.0307	1.08	1.08	3.88	3.96
1 ms	0.2833	0.3014	0.3037	1.06	1.07	1.23	1.25
10 ms	2.8333	3.0192	3.0380	1.07	1.07	1.02	1.03
50 ms	14.1662	15.3333	15.3531	1.08	1.08	1.01	1.01
100 ms	28.3327	31.2323	31.1431	1.10	1.10	1.00	1.00
250 ms	70.8321	78.3369	77.2431	1.11	1.09	1.00	1.00

Tabelle 4.12: Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwert  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  für ein Eichenblatt.



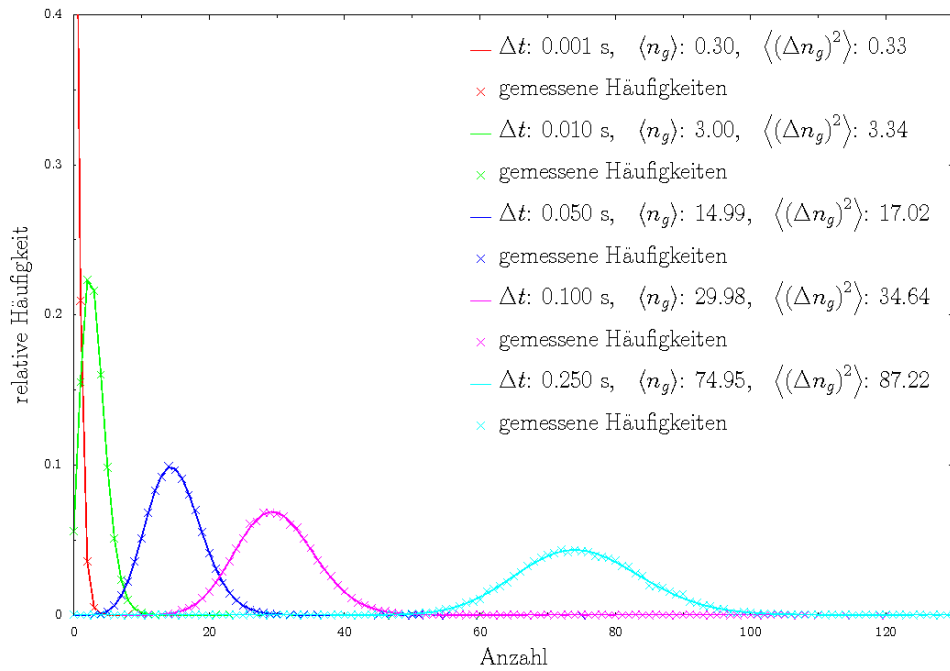


Abbildung 4.36: Gemessene (Kreuze) und genäherte Pulsverteilung (Linien) für das Blatt einer Eiche in Abhängigkeit von der angegebenen Integrationszeit  $\Delta t$ .

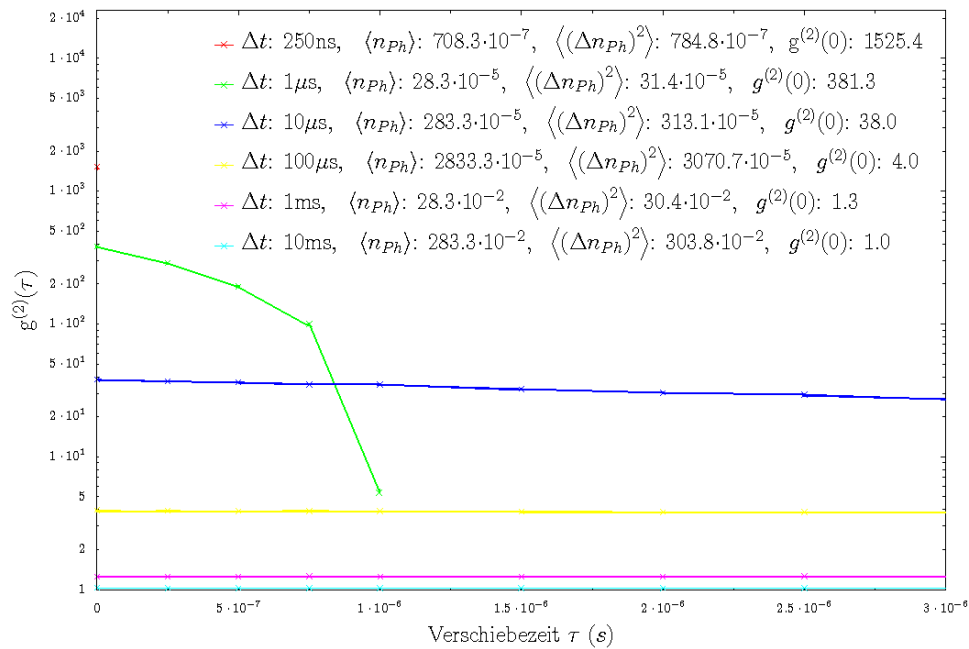


Abbildung 4.37: Autokorrelation der Intensität eines Eichenblattes in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$ .

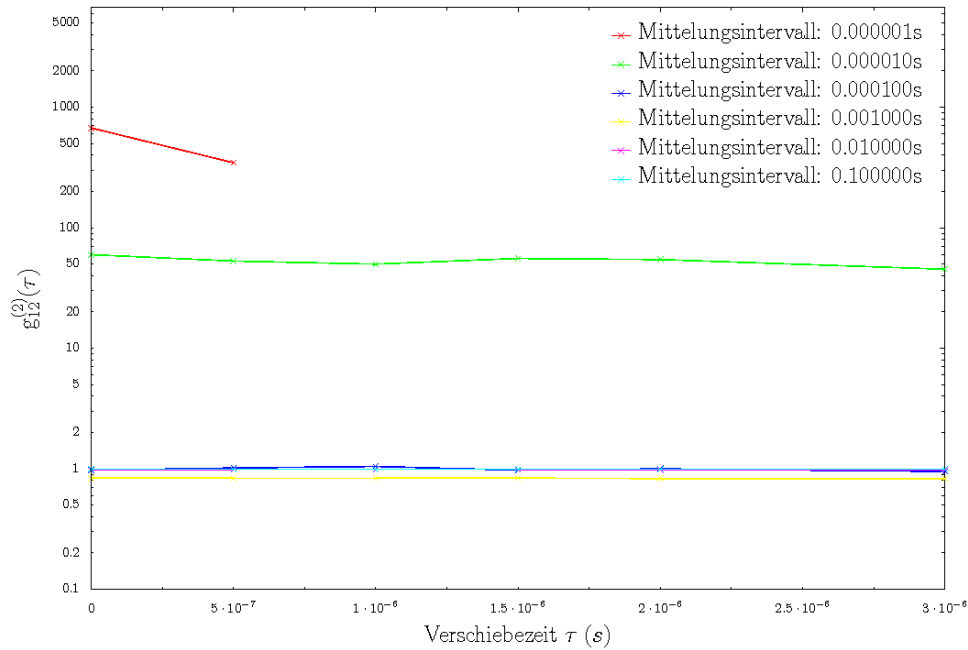


Abbildung 4.38: Kreuzkorrelation der Signale eines Eichenblattes in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$ .

### Intensitätskorrelation

Die graphische Darstellung der Intensitätskorrelationen kann in den Abbildungen 4.37 und 4.38 betrachtet werden. Offensichtlich handelt es sich in beiden Fällen um Bunching, wenn man von der gelben Linie in Abbildung 4.38 absieht. Da die Graphen abgesehen von den absoluten Werten nur eine strukturelle Wiederholung der Intensitätskorrelationen aus Unterabschnitt 4.4.5 darstellen, kann die Diskussion der Ergebnisse von dort übernommen werden.

## 4.5 Vergleichsmessungen mit einem He-Ne-Laser

Alle Messungen der biologischen Proben wiesen auf eine Super-Poisson-Statistik hin. Um eine Kontrolle der Ergebnisse durchzuführen, wurden Messungen mit einem Helium-Neon-Laser vorgenommen, der bei einer Wellenlänge  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  emittiert. Die Ankoppelung des Laserstrahls an die Box erfolgte über ein Glasfaserkabel wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Da die Intensität um Größenordnungen zu hoch war, mussten zusätzlich Absorber in den Strahlengang eingebracht werden.

### 4.5.1 Vergleich mit niedrigen Laserintensitäten

Zunächst soll das Signal des Lasers bei niedrigen Intensitäten ausgewertet werden. Der gemessene zeitliche Verlauf des Lasersignals ist in Abbildung 4.39 dargestellt.

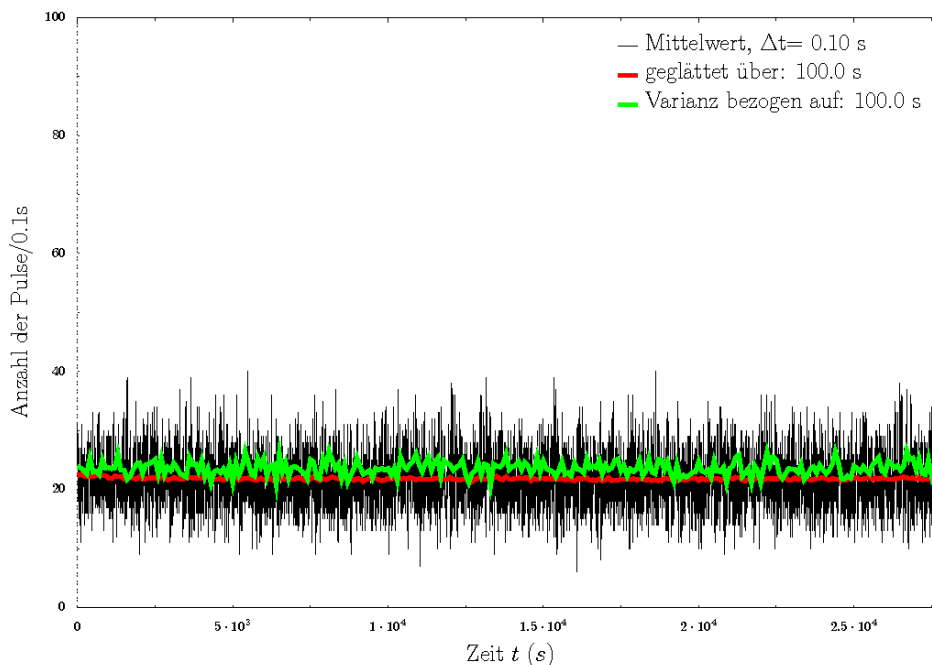


Abbildung 4.39: Gemessener zeitlicher Verlauf des Signals eines abgeschwächten Lasers bei niedriger Intensität.

### Photonenstatistik

Die Verteilungen der gemessenen Pulse in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  sind in Abbildung 4.40 zu sehen. Aus Tabelle 4.13 geht hervor, dass  $\chi^2$  für die ersten vier Verteilungen sehr große Werte annimmt. Sowohl die gemessenen, als auch die geschätzten Varianzen sind immer größer als die Mittelwerte (siehe Tabelle 4.14). Dies steht im Widerspruch zu theoretischen Voraussagen. Für einen Laser sollte eine Poisson-Statistik gemessen werden. Auch  $g^{(2)}(0)$

müsste gleich Eins sein. Da die verwendete Fitfunktion für  $r = 0$  in die Poisson-Verteilung übergeht, ist sie geeignet, die Häufigkeitsverteilung der Laserpulse oberhalb der Laserschwelle zu beschreiben.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	r	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	f
250 ns	0.007	0.007	0.0020	5.93	-56.04	0.51	17315.2	9
1 $\mu s$	0.014	0.014	0.0041	-1.37	10.47	-2.09	16575.7	9
10 $\mu s$	0.043	0.043	0.0145	134.81	30.86	-0.57	10004.3	9
100 $\mu s$	0.133	0.136	-0.0564	19.71	-39.49	-1.74	904.0	9
1 ms	0.455	0.465	0.0507	28.89	-101.21	-0.72	159.1	10
10 ms	1.446	1.542	0.0712	-70.11	-468.83	2.44	15.8	14
100 ms	4.579	4.694	-0.0325	7.76	-16.17	2.65	32.6	34
200 ms	6.476	6.372	-0.0314	33.84	-39.13	-1.40	61.1	45
400 ms	9.155	9.512	0.2265	232.92	49.68	-0.37	77.7	60

Tabelle 4.13: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$  für Laserlicht bei niedriger Intensität.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$52.43 \cdot 10^{-6}$	$56.40 \cdot 10^{-6}$	$57.10 \cdot 10^{-6}$	1.08	1.09	1447.40	1700.51
1 $\mu s$	$20.97 \cdot 10^{-5}$	$22.56 \cdot 10^{-5}$	$22.84 \cdot 10^{-5}$	1.08	1.09	362.12	425.08
10 $\mu s$	$20.97 \cdot 10^{-4}$	$22.53 \cdot 10^{-4}$	$22.79 \cdot 10^{-4}$	1.07	1.09	36.61	42.53
100 $\mu s$	$20.97 \cdot 10^{-3}$	$22.41 \cdot 10^{-3}$	$22.45 \cdot 10^{-3}$	1.07	1.07	4.29	4.37
1 ms	0.2097	0.2202	0.2205	1.05	1.05	1.24	1.25
10 ms	2.0971	2.2161	2.2090	1.06	1.05	1.03	1.03
100 ms	20.9709	22.3259	22.4337	1.06	1.07	1.00	1.00
200 ms	41.9417	44.6573	44.6227	1.06	1.06	1.00	1.00
400 ms	83.8410	89.9690	88.8479	1.07	1.06	1.00	1.00

Tabelle 4.14: Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwert  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  für Laserlicht bei niedriger Intensität.

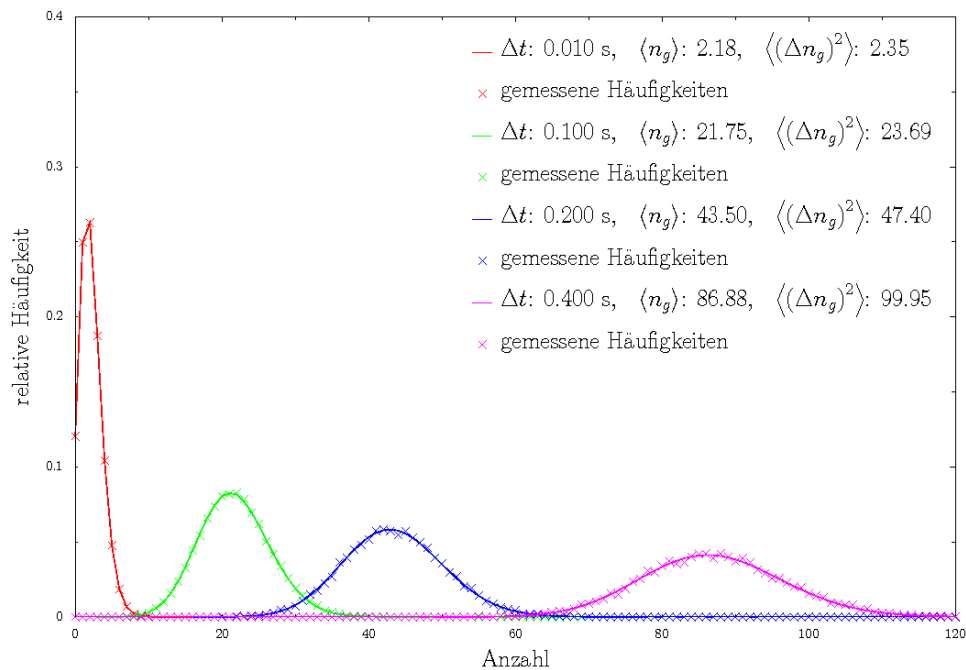


Abbildung 4.40: Gemessene und genäherte Verteilungen für Laserlicht bei niedriger Intensität in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$ .

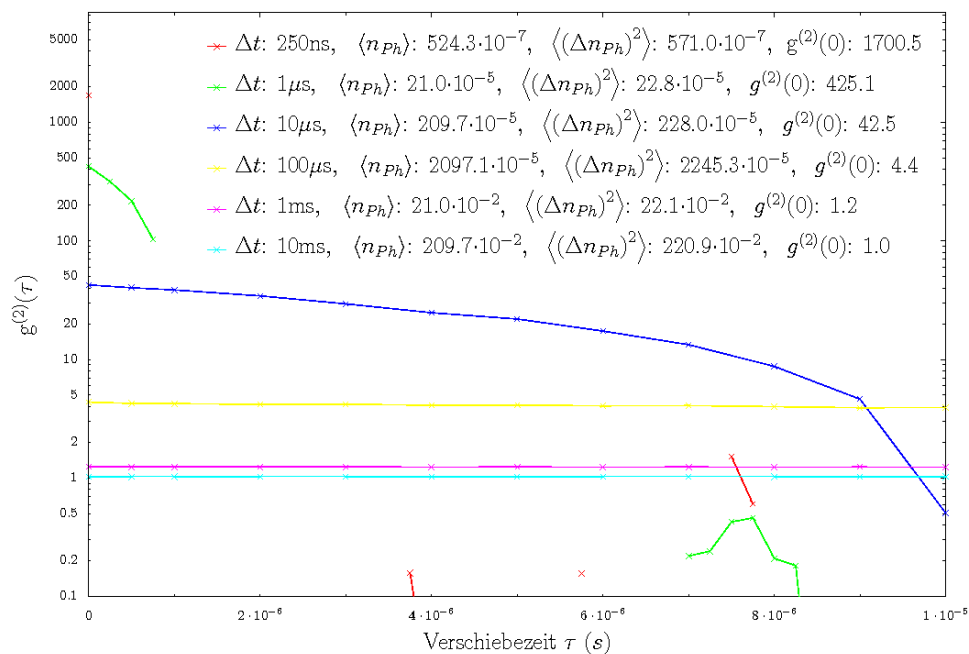


Abbildung 4.41: Intensitätskorrelation von Laserlicht bei niedriger Intensität, aufgetragen über die Integrationszeit  $\Delta t$ .

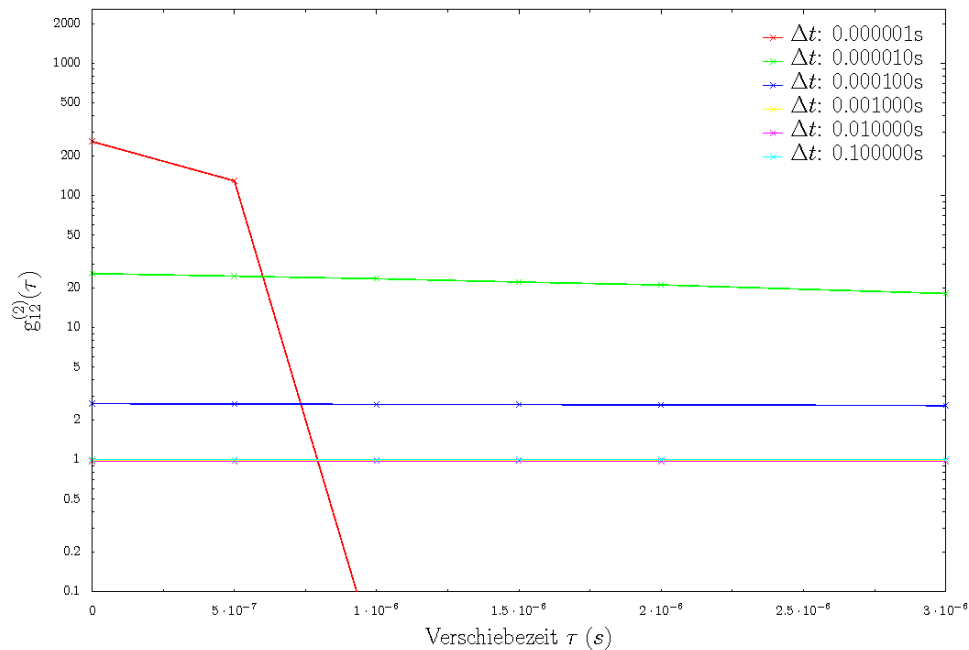


Abbildung 4.42: Kreuzkorrelation der Signale von Laserlicht bei niedriger Intensität, aufgetragen über die Integrationszeit  $\Delta t$ .

### Intensitätskorrelation

Wie aus Abbildung 4.41 zu erkennen ist, zeigt die Autokorrelation für einen Laser ein untypisches Verhalten. Der Theorie nach sollte  $g^{(2)}(\tau) = 1$  für beliebige  $\tau$ -Werte und Integrationsintervalle  $\Delta t$  gelten. Dies ist offensichtlich nicht erfüllt. Stattdessen zeigt die Intensitätskorrelation wie im Falle der biologischen Proben ein Absinken von  $g^{(2)}(\tau)$  für  $\tau > 0$ . Auch die Kreuzkorrelation sollte unabhängig von  $\Delta t$  und  $\tau$  immer den Wert Eins besitzen. Aus Abbildung 4.42 geht hervor, dass nur für Integrationszeiten  $\Delta t > 1$  ms  $g_{12}^{(2)}(\tau) = 1$  erfüllt ist. Offensichtlich zeigt auch die Kreuzkorrelation, trotz Dunkelstromkorrektur Abweichungen vom theoretisch vorhergesagten Wert. Dies ist ein klarer Hinweis auf eine Koppelung des Signals aus Photomultiplier A an das Signal in Photomultiplier B und umgekehrt.

## 4.5.2 Vergleich mit höheren Intensitäten

Durch die Erhöhung der Intensität füllte sich der Datenspeicher der Messkarte schneller. Die Auswertungsprogramme konnten nur eine gewisse Dateienzahl verarbeiten. Aus diesem Grund musste die Stichprobendauer  $T$  verkleinert werden. Die Anzahl der Messpunkte blieb dabei gleich. Der zeitliche Verlauf der Stichprobe ist in Abbildung 4.43 dargestellt. Wie sich hier zeigt,

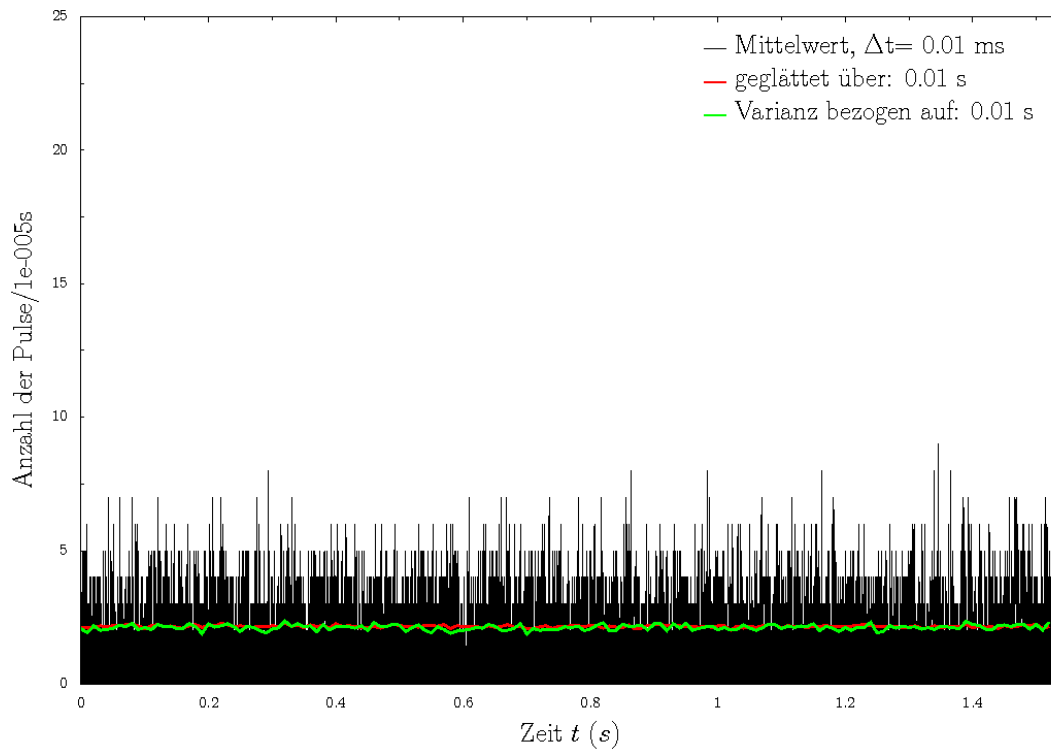


Abbildung 4.43: Zeitlicher Verlauf der Lasermessung bei höherer Intensität.

fluktuiert die Varianz um den Mittelwert und liegt in einigen Bereichen über „längere“ Zeitintervalle unterhalb des Mittelwerts.

### Photonenstatistik

Die Verteilungen der gemessenen Pulse sind in Abbildung 4.44 zu sehen. Aus Tabelle 4.15 geht hervor, dass  $\chi^2$  nur für die Integrationszeit  $\Delta t = 100 \mu\text{s}$  einen überdurchschnittlichen Wert annimmt. Die anderen Verteilungen stimmen sehr gut mit den gemessenen relativen Häufigkeiten überein. Sowohl die gemessenen als auch die geschätzten Varianzen gleichen praktisch den Mittelwerten (siehe Tabelle 4.16). Damit stimmen die gemessenen und genäherten Werte mit den theoretischen Voraussagen überein. Auch  $g^{(2)}(0)$  übersteigt nur für  $\Delta t = 250$  ns den theoretisch vorhergesagten Wert von Eins. Es liegt eindeutig eine Poisson-Verteilung vor.

$\Delta t$	$ \alpha' $	$ \alpha $	r	$\theta$	$\phi'$	$\phi$	$\chi^2$	f
250 ns	0.233	0.232	-0.0057	2.00	-8.58	-2.29	4.8	1
1 $\mu s$	0.466	0.464	0.0071	6.19	7.25	0.96	1.2	2
10 $\mu s$	1.474	1.484	0.0072	0.03	0.13	0.13	10.1	7
50 $\mu s$	3.294	3.090	0.0674	-6.19	14.04	1.45	11.0	21
100 $\mu s$	4.660	4.689	0.0062	-0.04	-0.05	-0.05	72.9	32
250 $\mu s$	7.368	7.339	0.0201	-16.16	36.79	-0.92	42.8	41
500 $\mu s$	10.419	10.331	-0.0107	-25.35	15.28	2.70	55.6	54

Tabelle 4.15: Parameter der Fitfunktion sowie  $\chi^2$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  in Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$  für Laserlicht bei höherer Intensität.

$\Delta t$	$\langle n_{Ph} \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{cal})^2 \rangle$	$\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$	$F_{el}^{cal}$	$F_{el}^{gem}$	$g_{cal}^{(2)}(0)$	$g_{gem}^{(2)}(0)$
250 ns	$54.28 \cdot 10^{-3}$	$54.93 \cdot 10^{-3}$	$54.91 \cdot 10^{-3}$	1.01	1.01	1.22	1.22
1 $\mu s$	0.217	0.215	0.215	0.99	0.99	0.98	0.97
10 $\mu s$	2.17	2.14	2.13	0.99	0.98	0.99	0.99
50 $\mu s$	10.85	10.55	10.57	0.97	0.97	1.00	1.00
100 $\mu s$	21.71	21.44	21.01	0.99	0.97	1.00	1.00
250 $\mu s$	54.28	52.14	52.26	0.96	0.96	1.00	1.00
500 $\mu s$	108.56	106.25	107.62	0.98	0.99	1.00	1.00

Tabelle 4.16: Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwert  $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz  $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor  $F_{el}$  und  $g^{(2)}(0)$  in Abhängigkeit vom Integrationsintervall  $\Delta t$  für Laserlicht bei höherer Intensität.



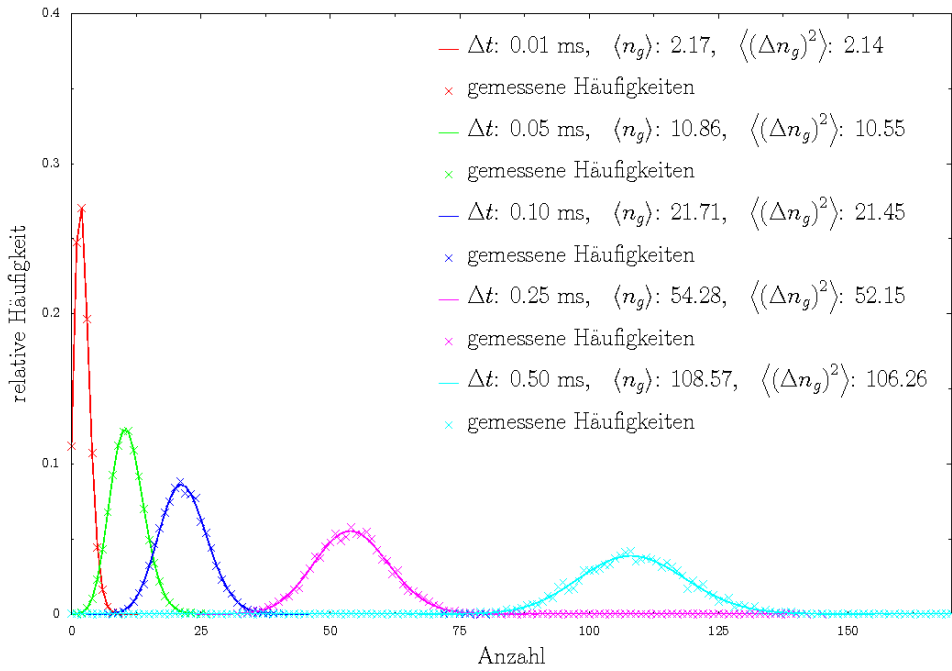


Abbildung 4.44: Gemessene und genäherte Verteilungen für Laserlicht bei höherer Intensität in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

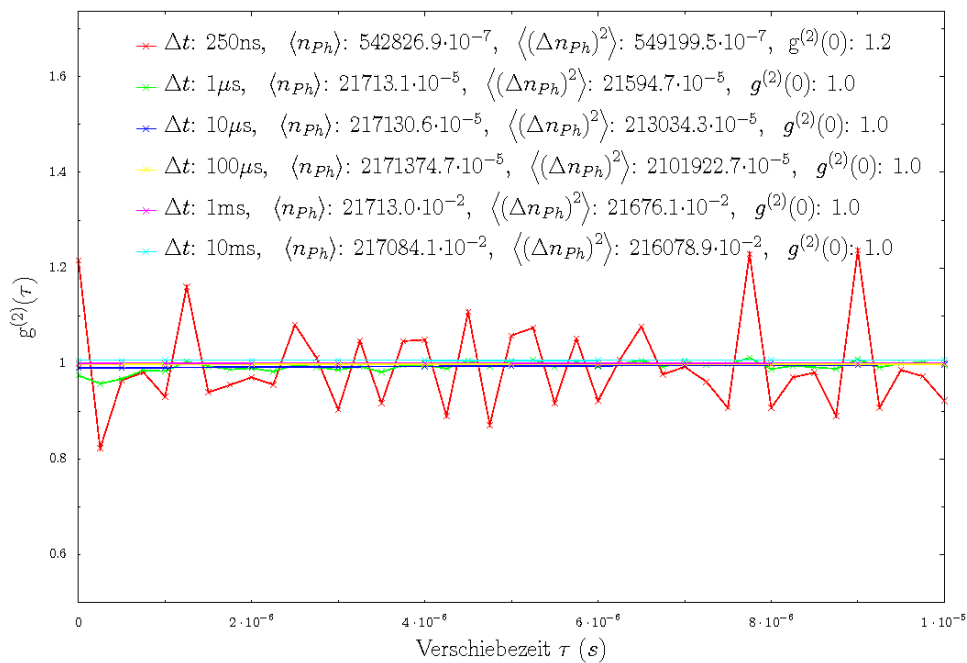


Abbildung 4.45: Autokorrelation von Laserlicht bei höherer Intensität für verschiedene  $\Delta t$ .

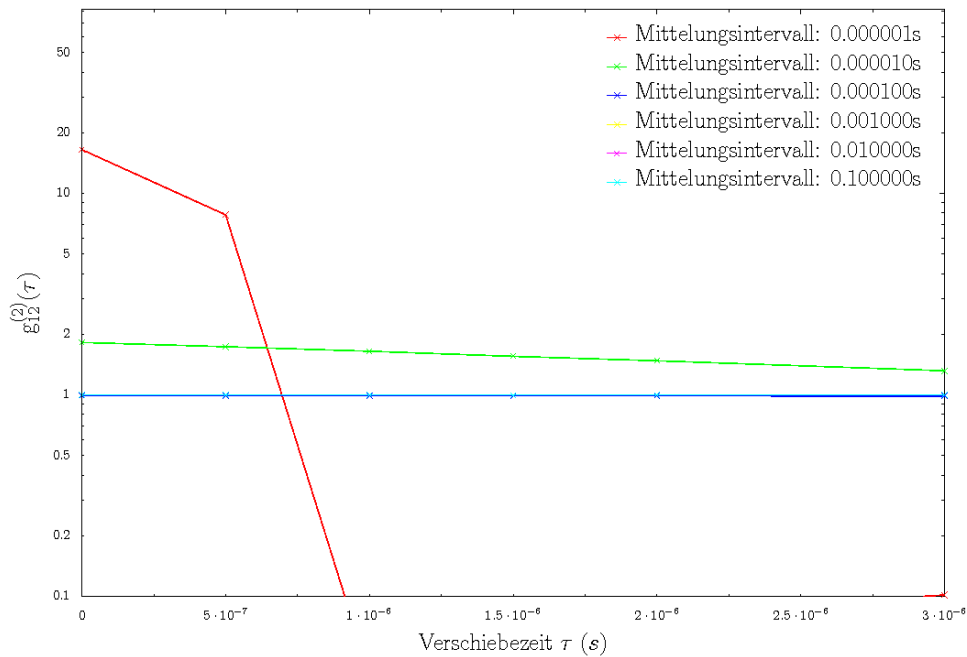


Abbildung 4.46: Kreuzkorrelation von Laserlicht bei höherer Intensität in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

### Intensitätskorrelation

Wie aus Abbildung 4.41 zu erkennen ist, zeigt die Autokorrelation für einen Laser bei höherer Intensität ein typisches Verhalten. Der Theorie zu Folge sollte  $g^{(2)}(\tau) = 1$  für beliebige  $\tau$ -Werte und Integrationsintervalle  $\Delta t$  gelten. Dieses Verhalten kann beobachtet werden. Die Schwankungen für die Integrationszeit  $\Delta t = 250$  ns sind statistischer Natur. Durch die höheren Intensitäten unterblieben die Einbrüche für  $g^{(2)}(\tau)$  unabhängig vom Integrationszeitintervall  $\Delta t$ . Die Kreuzkorrelation zeigte ebenfalls eine Veränderung im Verhalten. Für  $\Delta t > 100 \mu\text{s}$  verhielt sich das Signal wie von der Theorie vorhergesagt. Die Abweichungen bei kleineren Integrationszeiten sind gering. Liegen höhere Intensitäten vor, so scheint die Korrelation zu verschwinden. Dieser Sachverhalt muss genau diskutiert werden, da er grundlegend für das Verständnis der vorausgegangenen Messungen und deren Interpretation ist.

# 5 Diskussion

Nachdem die Simulationen durchgeführt wurden, können die Messergebnisse unter diesen Gesichtspunkten diskutiert werden. Zusätzlich sollen vorhandene Publikationen in die Betrachtungen mit einbezogen werden.

## 5.1 Interpretation der Simulationen

Die Simulationen der gequetschten Zustände bauen alle auf Gleichung (2.225) auf, die unter mehreren Annahme hergeleitet wurde. Wie in Unterkapitel 2.3.4 gezeigt werden konnte, liegt die Zeitabhängigkeit in den Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren. Dies kann zur Folge haben, dass in zeitlich versetzten Integrationsintervallen  $\Delta t$  die Moden unterschiedlich besetzt sind. Da es sich bei gequetschten wie auch kohärenten Zuständen um nichtstationäre Zustände handelt, ist die Frage berechtigt, wie die Detektion der Photonen dadurch beeinflusst wird. Die Nichtstationarität bewirkt im Falle der gequetschten Zustände für ein freies Feld eine Rotation der Amplitude und des Unschärfebereichs wie in Abbildung 2.20 im Unterkapitel 2.4.3 gezeigt wurde. Folglich ändern sich von Zeitpunkt zu Zeitpunkt die Winkel der Parameter. Die Rotation findet im Phasordiagramm mit der Eigenfrequenz  $\omega_\lambda = 2\pi\nu_\lambda$  statt, die im optischen Bereich ca.  $2\pi \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$  beträgt. Da die Integrationsintervalle  $\Delta t$  in der Größenordnung von  $10^{-7} \text{ s}$  liegen, wird über ca.  $10^7$  Oszillationen gemittelt. Das Resultat der Mittelung ist unabhängig vom Zeitpunkt, zu dem die Ensemblemessung stattfindet, da die Phaseninformation verloren geht. Durch die Messung der Photonenstatistik ist es unmöglich auf den Zustand des Feldes zu schließen, es sei den, man stellte sicher, das ein stationärer gequetschter Zustand vorlag, bei dem die relative Phasenlage der Winkel konstant blieb. In diesem Fall sind die Winkel vom Parameter  $\alpha$  gleichverteilt, zu jedem Winkel  $\varphi_\alpha$  muss es dann einen eindeutigen Winkel  $\varphi_\xi$  geben. Könnte man das Integrationsintervall  $\Delta t \ll \frac{1}{\nu_\lambda}$  wählen, so würde die Auswirkung der zeitabhängigen Phase und damit der Nichtstationarität sichtbar werden und es läge eine zeitabhängige Photonenstatistik vor. Ähnlich verhält es sich, wenn weitere chromatische Moden hinzukommen. Sie führen zu Schwebungserscheinungen auf dem Signalverlauf (siehe Abbildung 2.3). Über Gleichung (2.225) ist es möglich, die zeitabhängige Photonenstatistik  $P_n(t, \Delta t)$  für das Ensemble zu ermitteln. Die Modenzahl und deren zeitabhängige Besetzung hängen vom Spektrum ab. Dieses Feld ist nichtstationär, trotzdem kann unter quasistationären Bedingungen eine Häufigkeitsverteilung aus direkt aufeinanderfolgenden Integrationsintervallen  $\Delta t$  erstellen werden, die mit der simulierten Wahrscheinlichkeit übereinstimmt. Dies entspricht der Annahme, dass sich der Intensitätsverlauf periodisch mit  $\Delta t$  wiederholt bzw., dass die Periode wesentlich kleiner ist als  $\Delta t$ . Durch die Mittelung über  $\Delta t$  geht die Phaseninformation verloren. Allerdings kann aus der Kenntnis des Spektrums die Modenzahl und der Betrag der Gesamtamplitude bestimmt werden,

die in die Häufigkeitsverteilung einfließen. Weiterhin bleibt zu klären, ob es gerechtfertigt ist, das Feld als frei zu beschreiben. In der Regel liegen Abklingprozesse in den einzelnen Moden vor. Prof. Bajpai zeigte, dass sich das Abklingsignal angenähert wie der Erwartungswert des Teilchenzahl-Operators eines gequetschten Zustands für einen frequenzstabilisierten, gedämpften, harmonischen Oszillators verhält [Baj04]. In diesem Fall besitzt der Mittelwert neben einem abklingenden einen konstanten Anteil, der der spontanen Emission zugeordnet werden kann. Ob in diesem Bereich eine Beschreibung als freies Feld gerechtfertigt ist, bleibt zu klären.

## 5.2 Interpretation der Messergebnisse

Im Unterkapitel 4.4 wurde anhand von Beispielen gezeigt, dass sich für die gemessenen relativen Häufigkeiten der gewählten biologischen Proben immer Super-Poisson-Statistiken ergaben. Da die Stichprobendauer  $T > 2000$  s betrug, ist für Integrationszeiten  $\Delta t \leq 0.1$  s eine hinreichende statistische Sicherheit gegeben. Die Anzahl der Realisierungen  $N = \frac{T}{\Delta t}$  überschritt in diesen Fällen 20000. Die dunkelstrombereinigten Fano-Faktoren  $F_{el}$  zeigten, dass die Varianzen für die betrachteten Integrationszeiten  $\Delta t$  immer größer als der Mittelwert waren. Wegen der hohen Anzahl der Realisierungen sind statistische Schwankungen unwahrscheinlich. Die gemessenen Ergebnisse sollen mit simulierten Verteilungen und vorhandenen Publikationen verglichen werden.

### 5.2.1 Vergleich mit den Simulationen

Als erstes wurde die Abhängigkeit der Statistik von der Detektionseffizienz untersucht. Dabei zeigte sich, dass die Detektionseffizienz  $\xi$  einen starken Einfluss auf die Form der Statistik hat, wenn gequetschte Zustände vorliegen. Niedrige  $\xi$ -Werte bewirken einen Übergang zur Poisson-Statistik. Diese Verteilung tritt aber auch für kohärente Zustände und thermisches Licht bei höheren Modenzahlen auf (siehe Abbildung 2.22). Da die Quanteneffizienz im Wellenlängenbereich um  $\lambda \approx 400$  nm maximal 20% erreicht, wie aus Anhang 8.2 hervorgeht, erschwert sich der Nachweis gequetschter Zustände erheblich, siehe dazu die Tabellen 3.1, 3.2 und 3.3.

In Unterkapitel 3.2 zeigte sich, dass auch die Multimodigkeit des Feldes Auswirkungen auf die Form der Verteilung haben kann. Liegt ein reiner Produktzustand mit inhomogenen Parametern vor, so hängt die Form der gemessenen Verteilung von den Verschiebe- und Quetschungsparametern der einzelnen Moden ab. In diesem Fall lägen zwar gequetschte Zustände vor, durch die geringe Quanteneffizienz und die Inhomogenität der Parameter wäre es erschwert, einen Rückschluss auf die Quantennatur des Feldes zu ziehen. Andererseits zeigt sich, dass bei optimalen Parametern durch die Multimodigkeit die Form der Statistik nicht verändert wird, wenn die Breitbanddetektornäherung gültig ist (siehe Sektion 3.2.1). Da sich das Spektrum vieler biologischer Proben über den gesamten optischen Bereich erstreckt, muss davon ausgegangen werden, dass die Breitbanddetektornäherung nicht erfüllt ist. Trotzdem sollte der Effekt detektierbar bleiben. Wesentlich problematischer ist die Annahme, dass quasistationäre Bedingungen vorliegen. Wegen der sehr breiten, kontinuierlichen Spektren ist anzunehmen, dass sich der Intensitätsverlauf

von Integrationsintervall zu Integrationsintervall ändert. Aus physikalischer Sicht müssten die Messungen unter gleichen Bedingungen wiederholt werden, um eine Statistik zu erhalten. Dies erweist sich bei biologischen Präparaten als schwierig. Ändert sich der Intensitätsverlauf trotz gleichbleibender Bedingungen mit der Zeit, so muss der Dichte-Operator durch ein Gemisch beschrieben werden. Auch in diesem Fall können gequetschte Zustände vorliegen.

## 5.2.2 Vergleich mit vorhandenen Veröffentlichungen

In mehreren Veröffentlichungen wurde darauf hingewiesen, dass im Falle verschiedener biologischer Proben Poisson-Statistiken ermittelt wurden. In [SLL93] fanden beispielsweise Untersuchungen der spontanen Emission (SE) von Sojabohnen über Häufigkeitsverteilungen statt. Die Integrationszeiten betragen dort  $\Delta t = 100$  ms, 250 ms und 500 ms, wobei jeweils  $N = 1000$  Realisierungen vorlagen. Die graphischen Darstellungen in [SLL93] zeigten eine gute Übereinstimmung mit der Poisson-Verteilung. Leider wurde kein  $\chi^2$  angegeben. Zum Vergleich mit weiteren Proben nutzte man dort auch die Größe  $\delta$ , die über

$$\delta = F_{el}^{gem} - 1 \quad (5.1)$$

unmittelbar mit dem gemessenen Fano-Faktor  $F_{el}^{gem}$  verbunden ist. Die biologischen Proben fluktuieren im Rahmen der statistischen Schwankungen um  $\delta = 0$ . Das gleiche Bild ergab sich für einen Laser. Thermalisiertes Laserlicht zeigte, wie von der Theorie vorhergesagt  $\delta > 0$ . Allerdings waren keine Angaben über die gemessenen mittleren Laserintensitäten gegeben. Insgesamt wurde in [SLL93] verdeutlicht, dass sich die gemessenen Häufigkeiten der Pulse und  $\delta$  für die verwendeten biologischen Präparate entsprechend einer Poisson-Verteilung verhielten.

In [Baj99] wurden Untersuchungen der bedingten Wahrscheinlichkeit keinen Puls mit einem Korrelator zu zählen  $P_0(\Delta t)$  beschrieben. Dazu nutzte man die verzögerte Abstrahlung (DL) von Blättern verschiedener Pflanzen und zum Vergleich eine Leuchtdiode (LED) im grünen Spektralbereich. Durch die Entladung eines Kondensators über die LED konnte ein abklingendes LED-Signal erhalten werden. Die Stichprobendauer betrug  $T = 100$  ms, wodurch quasi stationäre Bedingungen entstanden. Zwischen 1000 und 10000 Realisierungen dienten der statistischen Erhebung, aus der sich  $P_0(\Delta t)$  und der Mittelwert  $\langle n(\Delta t, T) \rangle$  bestimmen ließen. Im Falle der Poisson-Verteilung gilt:

$$P_0^{pois}(\Delta t) = \exp \{ - \langle n(\Delta t) \rangle \}. \quad (5.2)$$

Andererseits wurde auch  $P_0^{ther}(\Delta t)$  aus Gleichung (2.325) zur theoretischen Beschreibung genutzt (monomodiger Fall):

$$P_0^{ther}(\Delta t) = \frac{1}{1 + \langle n(\Delta t) \rangle}. \quad (5.3)$$

Ein Vergleich der gemessenen Häufigkeiten  $P_0^{gem}(\Delta t)$  mit den theoretischen Wahrscheinlichkeiten  $P_0^{th}(\Delta t)$  erfolgte in [Baj99] durch

$$V_1 = \frac{P_0^{gem}(\Delta t)}{P_0^{th}(\Delta t)}, \quad V_2 = \frac{1 - P_0^{gem}(\Delta t)}{1 - P_0^{th}(\Delta t)}, \quad (5.4)$$

wobei  $1 - P_0(\Delta t)$  für die bedingte Wahrscheinlichkeit Photonen zu detektieren steht. Hier zeigte sich für die Strahlung der thermischen Quelle, dass im Mittel  $V_1 > 1$  für Integrationszeiten  $\Delta t < 100 \mu\text{s}$  galt. Folglich erfüllte die gemessene bedingte Wahrscheinlichkeit der thermischen Quelle im Mittel  $P_0^{gem} > P_0^{pois}$ . Im Vergleich ergab sich für die Blätter  $V_1 \approx 1 \Rightarrow P_0^{gem} \approx P_0^{pois}$ . Durch die Division werden in  $V_1$  gleichgroße Abweichungen bei kleineren Wahrscheinlichkeiten stärker gewichtet. Dies könnte zu einer Fehlinterpretation führen, wenn die Mittelwerte  $\langle n(\Delta t) \rangle$  für die thermische und die biologische Quelle unterschiedlich verteilt sind. Prinzipiell besteht das Problem, dass es sich bei der LED um eine thermische Quelle handelte. Normalerweise beträgt die spektrale Halbwertsbreite einer LED mehrere Nanometer. Für eine Abschätzung nehmen wir an, dass das Spektrum eine Halbwertsbreite (FWHM) von  $\Delta\lambda \approx 10 \text{ nm}$  besitzt. Folglich liegt die Kohärenzzeit  $\tau_c$  bei einer mittleren Wellenlänge von  $\bar{\lambda} = 550 \text{ nm}$  bei  $\tau_c \approx 10^{-13} \text{ s}$ . Die kleinste mögliche Integrationszeit betrug  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ , woraus sich die Anzahl der Freiheitsgrade  $M$  nach Unterkapitel 2.4.5 zu

$$M = \frac{\Delta t}{\tau_c} \approx 10^8 \quad (5.5)$$

ergibt. Da kein Polarisator genutzt wurde, muss  $M$  noch mit einem Faktor zwei multipliziert werden. Unter diesen Umständen sollte es nicht möglich sein, Unterschiede in der Statistik zwischen thermischen und kohärenten Quellen zu ermitteln (siehe Gleichung (2.326)). Die Detektion fand jedoch bei sehr niedrigen Intensitäten statt. Dies könnte die Breite des LED-Spektrums verringert haben. Für das modenabhängige theoretische Verhältnis  $V_1$  gilt nach Gleichung (2.322)

$$V_1(M) = \frac{\left(1 + \frac{\langle n \rangle}{2M}\right)^{-2M}}{\exp\{-\langle n \rangle\}}, \quad (5.6)$$

wobei der Faktor Zwei die unabhängigen Polarisationsrichtungen berücksichtigt. Die Kohärenzzeit  $\tau_c$  kann bei Kenntnis von  $\langle n \rangle$  und  $V_1$  durch:

$$\tau_c \approx \frac{4\Delta t}{\langle n \rangle^2} \cdot \ln(V_1^{gem}) \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{\langle n \rangle^2}. \quad (5.7)$$

abgeschätzt werden. Die Reihenentwicklung des Logarithmus erfolgte bis zur zweiten Ordnung. Eingesetzt wurden die Werte aus Tabelle 1 in [Baj99] für die beste zeitliche Auflösung ( $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ ). Da sich der Mittelwert wegen des abklingenden Signals ständig änderte, wird er spekulativ gleich Drei gesetzt, woraus sich eine Kohärenzzeit von  $\tau_c \approx 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  ergäbe, die effektiv ein fünftel der Integrationszeit  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$  beträgt. Es müsste sich für eine thermische Quelle um eine sehr lange Kohärenzzeit gehandelt haben. Auch der Bereich der spontanen Emission wurde untersucht, hier ergab sich für die Häufigkeitsverteilung der Photonen ebenfalls eine Poisson-Statistik.

### 5.2.3 Vergleich der gemessenen Daten untereinander

In mehreren Veröffentlichungen wurde gezeigt, dass das Feld verschiedener biologischer Proben eine Poisson-Statistik liefert. Im Gegensatz dazu konnten bei den durchgeführten Messungen

nur Super-Poisson-Statistiken ermittelt werden. Die Verteilungen der unterschiedlichen biologischen Präparate ähnelten sich. Eine Super-Poisson-Statistik ist kein Nachweis für nichtklassisches Licht, da diese Verteilungen auch durch klassische Quellen erzeugt werden können. Um trotzdem nichtklassische Effekte nachzuweisen, wurde zusätzlich die Autokorrelation der Intensitätsverläufe hinsichtlich Antibunching untersucht. Wieder zeigten sich bei allen biologischen Proben gleichartige Verläufe. Da die Steigungen der Graphen, abgesehen von Fluktuationen immer kleiner oder gleich Null waren, handelte es sich eindeutig um Bunching. Wurde die Integrationszeit sehr klein gewählt, so fluktuierten die Intensitätskorrelationen sehr stark. Der Bunchingeffekt kann für die biologischen Proben nicht durch statistische Fluktuation erklärt werden, da er sich bei allen Präparaten gleichartig wiederholte.

Um das Verhalten der Photomultiplier zu überprüfen, wurden Vergleichsmessungen mit dem Laser durchgeführt. Im Unterkapitel 4.5 zeigte sich für niedrige Intensitäten, dass der Fano-Faktor immer größer als Eins war. Hier erzeugte der Laser ebenfalls eine Super-Poisson-Statistik wie im Falle der biologischen Proben. Zwei Möglichkeiten sind denkbar:

- durch die Absorber entstehen nichtlineare Effekte,
- der Dunkelstrom ist intensitätsabhängig.

Um ein Lasersignal zu erhalten, das gleich viele Pulse liefert wie das Signal der biologischen Proben, wurden Absorber in den Strahlengang gestellt. Normalerweise funktionieren Absorber im Linearitätsbereich wie Strahlteiler [Pau99] und verändern deshalb den statistischen Charakter eines poissonverteilten Feldes nicht. Es könnte aber auch sein, dass der Linearitätsbereich überschritten wurde und deshalb eine Änderung des statistischen Charakters auftrat, die zu einer Verbreiterung der Verteilung führte. Die andere Möglichkeit besteht darin, dass der Laser trotz der Abschwächung ein poissonverteiltes Feld lieferte. Besitzt der Photomultiplier im Bereich niedriger Intensitäten ein nichtlineares Verhalten, so ist der Dunkelstrom eine intensitätsabhängige Größe. Dies hat auch zur Folge, dass die durchgeführten Hintergrundkorrekturen nicht ausreichend sind und die Vernachlässigung des Korrelationsterms  $\Delta n_{ph} \cdot \Delta n_{bg}$  in Gleichung (4.4) zu Fehlern führt.

Um niedrige Laserintensitäten zu erhalten, wurden mehrere Absorber hintereinander in den Strahlengang gebracht. Durch das Entfernen von einigen Absorbern erhöhte sich die gemessene Intensität. Die dunkelstrombereinigten Häufigkeitsverteilungen des Lasers, sowie  $g_{gem}^{(2)}(0)$  stimmten bei höheren Intensitäten vollkommen mit der Theorie überein. Dies weist darauf hin, dass keine nichtlinearen Effekte durch die Absorber entstanden. Es muss also eine andere Ursache für den Bunching-Effekt geben, die sich mit steigender Intensität verliert. Unterstützt wird diese These durch die Dunkelstrommessungen. Hier zeigte sich ein klarer Bunching-Effekt für alle verwendeten Integrationszeiten  $\Delta t$ , wie aus Unterkapitel 4.3 hervorgeht. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit mehrere Pulse gleichzeitig oder keinen Puls zu messen gegenüber der Poisson-Verteilung erhöht. Es muss ein Effekt vorliegen der bei sehr geringen Pulszahlen die Pulse vermehrt. Dieser Effekt funktioniert anscheinend auch bei der Detektion extrem niedriger Intensitäten und reduziert sich für höhere Photonenzahlen. Die Häufigkeitsverteilungen niedriger

Intensitäten werden dadurch verfälscht. Deshalb müssen die gemessenen Ergebnisse aus Unterkapitel 4.4 für niedrige Intensitäten diesen Aspekt berücksichtigen. Da die Fano-Faktoren von Laser und biologischen Proben bei annähernd gleichen Intensitäten ähnliche Größen annehmen, kann angenommen werden, dass es sich bei den wirklichen Verteilungen der biologischen Proben um Poisson-Statistiken handelte. Diese Annahme wird auch durch die bereits vorhandenen Publikationen unterstützt.

Ein weiterer Hinweis auf nichtklassische Phänomene wäre über die Kopplung verschiedener räumlicher Moden möglich. Dies kann über Kreuzkorrelationen der Intensitäten erfasst werden. Die Kreuzkorrelation des Dunkelstroms zeigte allerdings, dass eine Korrelation des Rauschens der Photomultiplier vorliegt. Die Ursache für diese Korrelation liegt an der verwendeten Hochspannungsquelle. Betrachtet man das Ausgangssignal der Hochspannungsquelle über einen Spannungsteiler auf einem Oszilloskop, so stellt man fest, dass immer wieder Spannungsspitzen auftreten. Diese Spannungsspitzen liegen an beiden Photomultipliern an und verursachen so eine Korrelation des Rauschens. Zum Ausgleich wurde eine mathematische Dunkelstromkorrektur durchgeführt (siehe Gleichung (4.6)). Die Korrektur ist gültig, wenn der Dunkelstrom in Photomultiplier A unabhängig vom Signal in Photomultiplier B ist. Die Messungen der Kreuzkorrelationen zeigten bei kleinen Integrationszeiten trotz Dunkelstromkorrektur für alle biologischen Proben Bunching. Das gleiche Verhalten wurde auch für den Abgeschwächten Laser beobachtet (siehe Abbildung 4.42). Deshalb war es nicht möglich räumliche Kopplungen der Moden nachzuweisen. Für höhere Laserintensitäten verringerte sich das Bunching, wie aus Abbildung 4.46 zu erkennen ist. Außerdem hatte die Dunkelstromkorrektur in diesem Fall keinerlei Auswirkungen auf den Funktionsverlauf von  $g_{12}^2(\tau)$ . Da die Bestrahlung des Photomultipliers zu einer intensitätsabhängigen Belastung der Hochspannungsquelle führt, ist davon auszugehen, dass die Häufigkeit der Ausreißer auf dem Spannungsverlauf von der Stromstärke abhängen. Die Stromstärke hängt wiederum von der Photonenzahl ab, wodurch ein intensitätsabhängiges Rauschen entsteht.



## 6 Ausblick und Zusammenfassung

Die Existenz von Biophotonen ist hinreichend oft belegt worden. Interessanter ist die Frage, ob es sich um Felder handelt, die einer quantenmechanischen Beschreibung bedürfen oder nicht. Dies sollte im Rahmen der Arbeit untersucht werden. Da der Messaufbau vorgegeben war musste zuerst geklärt werden, welche Experimente unter dieser Voraussetzung überhaupt geeignet sind, um quantenmechanische Effekte nachweisen zu können. Aus diesem Grund wurde die Theorie der Photodetektion ausführlich diskutiert. In der Literatur sind viele Experimente zum Nachweis nichtklassischer Effekte beschrieben, jedoch wird dort durch den Messaufbau garantiert, dass die verwendeten Spektren sehr schmalen sind, was einer geringen Modenzahl entspricht. Die Biophotonenspektren sind im Gegensatz dazu sehr breit [PWKP89], weshalb eine multimodige Beschreibung des Feldes unerlässlich ist. In dieser Doktorarbeit wurden deshalb die theoretischen Grundlagen und Näherungen, die für multimodige Felder genutzt werden betrachtet. Prinzipiell zeigte sich, dass die gegebene Apparatur für drei verschiedene Experimenttypen geeignet ist (siehe Unterkapitel 3.3). Diese sind:

- Ermittlung der Häufigkeitsverteilung der Photonen.
- Überprüfung des Intensitätsverlaufs auf Autokorrelation.
- Messung der Kreuzkorrelationen.

Die gemessene Häufigkeitsverteilung kann dann mit der theoretisch vorhergesagten Photonenzustatsstatistik verglichen werden, die durch Formel (2.200) für den multimodigen Fall gegeben ist. Da die Formel alle möglichen Fälle beinhaltet, ist sie sehr kompliziert und allgemein nicht geschlossenen analytisch lösbar. Sie muss für konkrete Fragestellung vereinfacht werden, woraus sich unter weiteren Annahmen Gleichung (2.225) ergibt. Diese Formel beschreibt die multimodige Photonenzustatsstatistik  $P_n(t, \Delta t)$  eines Breitbanddetektors. Natürlich bezieht sich diese Formel, wie alle quantenmechanischen Aussagen auf das Ensemble.  $P_n(t, \Delta t)$  diene zur Simulation von verschiedenen Verteilungen, die im Kapitel 3 dargestellt sind. Dabei zeigten sich zwei wesentliche Effekte. Zum einen bleibt bei geeigneten Parametern trotz der Multimodigkeit der Quantencharakter der Verteilung erhalten. Im Gegensatz dazu verändert sich für thermische Strahlung die Form der Statistik, wie in Unterkapitel 2.4.5 gezeigt wurde. Zum anderen bewirkt eine niedrige Quanteneffizienz, dass die gequetschten Verteilungen in eine Poisson-Statistik übergehen.

Die Ergebnisse der Simulation verdeutlichen, dass es zumindest unter den angenommenen Bedingungen möglich ist, nichtklassisches Licht bei hinreichender Detektionseffizienz über die Photonenzustatsstatistik nachzuweisen. Allerdings bezieht sich diese Aussage auf das Ensemble. Die Messung an einer einzelnen biologischen Probe erzeugt eine Stichprobe bestehend aus zeitlich

aufeinanderfolgenden Realisierungen. Die Ergodenhypothese besagt nun, dass das zeitliche Mittel dem Ensemblemittel gleicht. Wesentlich ist deshalb die Frage, unter welchen Bedingungen Ergodizität vorliegt, beziehungsweise wie sie erhalten werden kann. Deshalb wurden im Abschnitt 2.3.1 quasistationäre Bedingungen definiert, was nicht mit Stationarität zu verwechseln ist. Die Bedeutung quasistationärer Bedingungen ist, dass die quantenmechanischen Erwartungswerte bezogen auf ein Integrationszeitintervall  $\Delta t$  für verschiedene Zeitpunkte  $t$  innerhalb eines Zeitintervalls  $t_0$  bis  $t_0 + T$  gleich bleiben. Dies garantiert, dass die gemessenen zeitlichen Mittelwerte während der Stichprobendauer  $T$  mit den quantenmechanischen Erwartungswerten verglichen werden können.  $T$  muss deshalb wesentlich größer als  $\Delta t$  sein. Unter dieser Bedingung besteht die Möglichkeit, die zeitlich gemessenen Stichproben statistisch auszuwerten und mit den quantenmechanischen Erwartungswerten zu vergleichen.

Da die abgestrahlten Intensitäten der Proben sehr niedrigen sind, war es notwendig den Dunkelstrom zu berücksichtigen. Deshalb wurde das Dunkelstromsignal durch die drei verwendeten Experimenttypen untersucht. Die Häufigkeitsverteilung der Dunkelstrompulse ergab eine Super-Poisson-Verteilung, welche die gemessene Photonerverteilung bei niedrigen Intensitäten verbreitert. Um diese Effekte zu berücksichtigen wurde die Häufigkeitsverteilung des Dunkelstroms unter der Annahme der Unabhängigkeit aus dem gemessenen Gesamtsignal extrahiert. Die Autokorrelation des Dunkelstroms zeigte Bunching. Natürlich überträgt sich dies bei niedrigen Intensitäten ebenfalls auf die Messergebnisse. Über Gleichung (4.3) konnte dieser Mangel unter der Annahme der Unabhängigkeit von Dunkelstrom und Photonensignal ausgeglichen werden. Die möglichen Rauschquellen des Photomultipliers sind in Abschnitt 2.3.2 näher erläutert. Hier zeigte sich, dass besonders das Nachpulsieren Bunching verursacht. Andererseits ergab die Kreuzkorrelation des Dunkelstroms, dass eine weitere Rauschquelle existiert, die Bunching zwischen verschiedenen räumlichen Moden erzeugt. Es stellte sich heraus, dass der zeitliche Verlauf des Hochspannungssignals Spannungsspitzen zeigte. Da dieses Signal an beiden Photomultipliern anlag, erzeugte es eine Korrelation, die sich den anderen Rauschquellen überlagert. Über Gleichung (4.6) sollte dieser Effekt mathematisch korrigiert werden, wobei die Unabhängigkeit des Dunkelstroms in Photomultiplier A vom Photonensignal in Photomultiplier B vorausgesetzt wurde.

Ausgehend von der Annahme der Unabhängigkeit des Dunkelstroms vom Photonensignal erfolgten die Messungen der Photonenzählstatistik. Als Fitfunktion für die Photonenzählstatistik diente  $P_n(t, \Delta t) = |\langle n | \alpha, \xi \rangle|^2$ , die über Gleichung (4.9) zur Approximation der gemessenen Verteilung verwendet wurde. Alle untersuchten biologischen Proben lieferten trotz Dunkelstromkorrektur Super-Poisson-Statistiken. Die gleichen Verteilungstypen ergaben sich auch für den abgeschwächten Laser bei niedrigen Intensitäten. Durch weitere Lasermessungen bei höheren Intensitäten konnte nachgewiesen werden, dass die Ursache der Verbreiterung eine Kopplung der Photomultiplier ist, die zusätzlich eine Intensitätsabhängigkeit aufweist.

Dieses nichtlineare Verhalten spiegelte sich auch in den Autokorrelationsmessungen wider, da für alle Proben Bunching auftrat, wenn man von der Lasermessung bei höheren Intensitäten absieht. Das Bunching könnte zum Teil auf Nachpulsieren zurückgeführt werden. Andererseits

ergab sich für die Messungen der Kreuzkorrelation ebenfalls Bunching. Die Kopplung ist hier etwas komplizierter, da sie über die Hochspannungsquelle erfolgt. Jedes Photon führt zu einer Belastung der Hochspannungsquelle. Hängt das Auftreten der Spannungsspitzen von der benötigten Stromstärke ab, so wird eine stromabhängige Korrelation erzeugt. Bei intensiver Bestrahlung wird die Belastung der Spannungsquelle relativ konstant. In diesem Bereich geht auch die Kreuzkorrelation zurück, was auf eine Stromabhängigkeit hinweist. Leider konnte die defekte Spannungsquelle nicht ersetzt werden.

Betrachtet man die Fano-Faktoren des Lasers und vergleicht sie mit denen der biologischen Proben bei annähernd gleichen Intensitäten, so liegt die Annahme nah, dass es sich auch bei den Häufigkeitsverteilungen der biologischen Proben um Poisson-Verteilungen handeln könnte. Diese Hypothese wird auch durch bereits vorhandene Publikationen gestützt. Prinzipiell zeigt die vorliegende Doktorarbeit, dass es unter bestimmten Bedingungen möglich wäre quantenmechanische Phänomene mit einem gleichartigen, funktionierenden Versuchsaufbau nachzuweisen. Wie im Unterkapitel 3.3 erörtert ist, kommt für einen eindeutigen Nachweis nur Antibunching oder eine Sub-Poisson-Statistik in Frage.

Für weiterführende Versuche sollte der Messaufbau optimiert werden. Wie die Simulationen im Abschnitt 3.1 zeigten, wäre eine verbesserte Detektionseffizienz zum Nachweis von quantenmechanischem Licht außerordentlich wichtig. Will man Photonenstatistiken erstellen, so ist es sinnvoll die minimale Integrationszeit der Apparatur zu verkürzen, wodurch die Anzahl der benötigten Moden reduziert wird. Darüber hinaus sollte ein beruhigtes Spannungsnetz zur Versorgung der Messapparatur verwendet werden um dies als Rauschquelle auszuschließen. Da der Dunkelstrom die größte Fehlerquelle darstellt, wäre eine verbesserte Kühlung die tiefere Temperaturen ermöglicht von Vorteil. Bleibt noch zu klären, ob nicht die gesamten abstrahlten Photonen der biologischen Probe zur Erhebung der Statistik verwendet werden sollten. Dazu müsste ein Blatt direkt zwischen zwei großflächige Photomultiplier gebracht werden, die einen sehr geringen Abstand zu einander haben. Der schmale Schlitz, in dem sich das Blatt befände, würde dann durch eine reflektierende Hülle geschlossen. So würden fast alle Photonen auf die Photokathoden treffen. Diese Anordnung eignet sich auch zur Messung von Korrelationen. Will man hingegen die Korrelation verschiedener räumlicher Moden messen, so sind verschiebbare Photomultiplier von Vorteil. Gerade für Korrelationsmessungen ist es nötig, eine wesentlich bessere Zeitauflösung zu besitzen, da so der Zeitpunkt des Eintreffens der Photonen genauer lokalisieren werden könnte. In diesem Fall wäre es interessant, eine Statistik über die zeitlichen Abstände zu ermitteln, wie es im Abschnitt 2.5.3 beschrieben ist. Über eine derart verbesserte Apparatur müsste es leicht möglich sein, eventuell vorhandene Quanteneffekte nachzuweisen.

Sollten sich diese Phänomene zeigen, so hätte dies weitreichende Folgen für das Verständnis biologischer Systeme. Besonders interessant wäre die Korrelation zwischen dem Zustand des Feldes und dem Zustand der biologischen Probe. Eventuell würden sich daraus neue Möglichkeiten zur Diagnose von Krankheiten eröffnen. Auch im Bereich der Lebensmittelanalyse könnten sich Anwendungen ergeben, wenn eine Korrelation zwischen der Lebensmittelqualität und dem Feldzustand existiert. Um die Informationen schnell und unkompliziert aus dem Intensitätsver-

lauf auszulesen, bedarf es neuer Detektoren, die in der Lage sein sollten, bei niedrigen Intensitäten die Teilchenzahlen mit einer hohen Detektionseffizienz zu messen und gleichzeitig die Information über die Frequenzen der Photonen zu ermitteln. Natürlich sollte die Zeitauflösung der Detektoren ausreichend gut sein. Dies böte die Möglichkeit modenabhängige Photonenzustände zu erstellen.

## 7 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all meinen Verwandten, Freunden und Bekannten bedanken, die mich in den Jahren der Erstellung der Dissertation vor allem moralisch unterstützten und somit zum Gelingen beigetragen haben. Die Anfertigung dieser Doktorarbeit ist nur durch ihre Hilfe möglich gewesen.

# 8 Anhang

<b>Phillips Scientific</b>	<b>Fast Pulse Preamplifier</b>	<b>MODEL 6954</b>
----------------------------	--------------------------------	-------------------

**FEATURES**

- \* Ideal for Fast Solid State and Channel Plate Detectors
- \* Wideband Performance 100 KHz to 1.8 GHz
- \* Gains Available from 5 to 100
- \* Low Pulse Distortion
- \* Bipolar Operation

**DESCRIPTION**

The Model 6954 is a fast risetime, bipolar preamplifier intended for use with fast Solid State and Channel Plate Detectors. Standard fixed voltage gains of 5, 10, 20, 50 or 100 are available to optimize system performance. The bipolar capability makes it useful for most detector types or beam pick-off schemes. The amplifier's design exhibits low noise, low distortion and excellent stability, making it ideal for both energy and timing measurements. Both the inputs and outputs are protected for reliable operation.

**SPECIFICATIONS**

**Input** : One; AC Coupled, Impedance 50 ohms; Input protected with back to back diodes.  
**Output** : One; AC Coupled, Drives  $\pm 2$  Volts across single 50 ohm load.

<b>Voltage Gain</b> : 5 or 10	20, 50 or 100
<b>Bandwidth (3db)</b> : 100 KHz to 1.8 GHz	100 KHz to 1.5 GHz
<b>Risetime</b> : 180 pSec	220 pSec
<b>Insertion Delay</b> : Typically 1.0 nSec	Typically 1.2 nSec

**Wideband Noise** : Less than 40  $\mu$ Volts RMS referred to input, for gains of 10 or 100.  
 Less than 70  $\mu$ Volts RMS for gains of 5, 20 and 50.

**Power Supply Requirements** : +10 Volts to +28 Volts @ 120 mA for gains of 10 and below.  
 +10 Volts to +28 Volts @ 200 mA for voltage gains above 10.

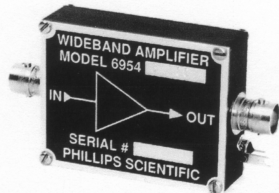
\* **Note:** Internal supply is regulated. A heatsink is recommended for 24 Volts and above.

**Operating Temp.** : 0 °C to 60 °C ambient.

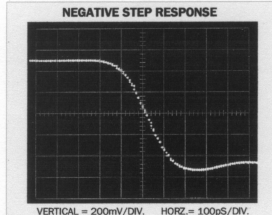
**Connector Type** : SMA female or BNC female. (Specify when ordering)

**Packaging** : Black anodized aluminum enclosure. 2.25" x 1.75" x .75", (5.72cm x 4.45cm x 1.9cm)

**Ordering Information** : Please specify **Model**, **Gain** and **Connector** type when ordering.  
 (e.g., Part Number **6954 - S - 20**), Connector: **SMA**, (B for BNC), Gain: 5, 10, **20**, etc.



3/96



VERTICAL = 200mV/DIV.    HORZ. = 100ps/DIV.

**Phillips Scientific**    "A THEORY DEVELOPMENT COMPANY"  
 31 Industrial Ave. \* Mahwah, NJ 07430 \* (201) 934-8015 \* Fax (201) 934-8269

Abbildung 8.1: Datenblatt des Vorverstärkers [Pre].

# 52 mm (2 ") photomultiplier 9558B series data sheet



## 1 description

The 9558B is a 52mm (2") diameter end window photomultiplier, with S20 infra-red sensitive photocathode, and 11 high gain, high stability, SbCs dynodes of the long-established venetian blind design providing a low afterpulse rate. The 9558WB and 9558QB are variants for applications requiring uv sensitivity.

## 2 applications

- wide range of applications

## 3 features

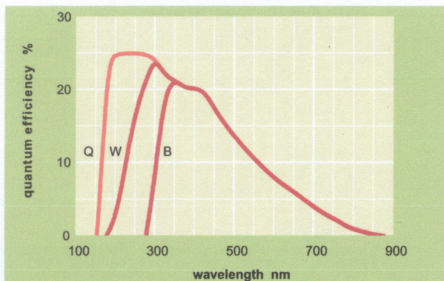
- high gain
- low afterpulsing

## 4 window characteristics

	9558B borosilicate	9558WB uv glass	9558QB* fused silica
spectral range**(nm)	290 - 870	185 - 870	160 - 870
refractive index (n <sub>v</sub> )	1.49	1.48	1.46
K (ppm)	300	8500	<10
Th (ppb)	250	30	<10
U (ppb)	100	30	<10

\* note that the sidewall of the envelope contains graded seals of high K content  
\*\* wavelength range over which quantum efficiency exceeds 1 % of peak

## 5 typical spectral response curves



## 6 characteristics

	unit	min	typ	max
<b>photocathode: S20</b>				
active diameter	mm		46	
quantum efficiency at peak	%		21	
luminous sensitivity	μA/lm		200	
with CB filter		6	9	
with CR filter			90	
with IR filter		7	13	
<b>dynodes: 11VBSbCs</b>				
<b>anode sensitivity in divider A:</b>				
nominal anode sensitivity	A/lm		200	
max. rated anode sensitivity	A/lm		2000	
overall V for nominal A/lm	V		1050	1500
overall V for max. rated A/lm	V		1400	
gain at nominal A/lm	x 10 <sup>6</sup>		1	
<b>dark current at 20 °C:</b>				
dc at nominal A/lm	nA		2	20
dc at max. rated A/lm	nA		20	
dark count rate	s <sup>-1</sup>		15000	
<b>pulsed linearity (-5% deviation):</b>				
divider A	mA		2	
rate effect (I <sub>a</sub> for Δg/g=1%):	μA		20	
<b>magnetic field sensitivity:</b> the field for which the output decreases by 50 %				
most sensitive direction	T x 10 <sup>-4</sup>		1.7	
temperature coefficient:	% °C <sup>-1</sup>		± 0.5	
<b>timing:</b>				
single electron rise time	ns		10	
single electron fwhm	ns		22	
transit time	ns		65	
weight:	g		180	
<b>maximum ratings:</b>				
anode current	μA			100
cathode current	nA			1000
gain	x 10 <sup>6</sup>			10
sensitivity	A/lm			2000
temperature	°C	-80		60
V (k-a) <sup>(1)</sup>	V			2300
V (k-d1)	V			450
V (d-d) <sup>(2)</sup>	V			300
ambient pressure (absolute)	kPa			202

<sup>(1)</sup> subject to not exceeding max. rated sensitivity <sup>(2)</sup> subject to not exceeding max rated V(k-a)

## 7 typical voltage gain characteristics

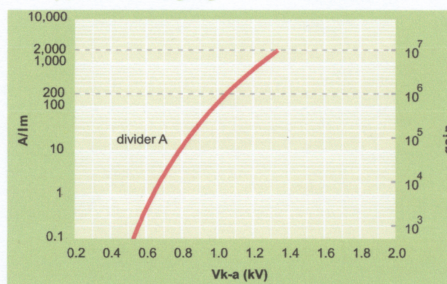


Abbildung 8.2: Datenblatt der Photomultiplier [ele].

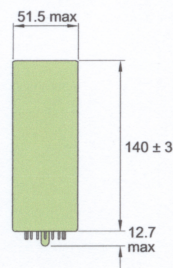


### 8 voltage divider distribution

k	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	.....	d <sub>8</sub>	d <sub>9</sub>	d <sub>10</sub>	d <sub>11</sub>	a	
A	150V	R	.....	R	R	R	2R	R	Standard

Characteristics contained in this data sheet refer to divider A unless stated otherwise.

### 9 external dimensions mm



### 10 base configuration (viewed from below)



'ic' indicates an internal connection

Our range of B19A sockets is available to suit the B19A hardpin base. The range includes versions with or without a mounting flange, and versions with contacts for mounting directly onto printed circuit boards.

### 11 ordering information

The 9558B meets the specification given in this data sheet. You may order **variants** by adding a suffix to the type number. You may also order **options** by adding a suffix to the type number. You may order product with **specification options** by discussing your requirements with us. If your selection option is for one-off order, then the product will be referred to as 9558A. For a repeat order, Electron Tubes will give the product a two digit suffix after the letter B, for example B21. This identifies your specific requirement.

**9558** ■ ■ ■

**window variants**

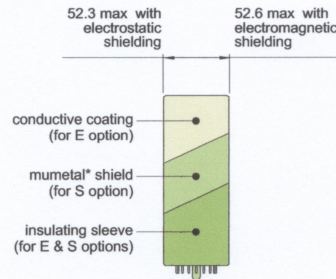
- W UV glass
- Q fused silica

**options**

- E electrostatic shielding
- S see drawing below
- S electromagnetic shielding
- M see drawing below
- M supplied with spectral response calibration

**specification options**

- B as given in data sheet
- A single order to selected specification
- Bnn repeat order to selected specification



### 12 voltage dividers

The standard voltage dividers available for these pmts are tabulated below:

k	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	.....	d <sub>7</sub>	d <sub>8</sub>	d <sub>9</sub>	d <sub>10</sub>	d <sub>11</sub>	a
C679A	2R	R	.....	R	R	R	R	R	
C679D	300V	R	.....	R	R	R	R	R	

R = 330 kΩ

\*mumetal is a registered trademark of Magnetic Shield Corporation

**Electron Tubes**  
Bury Street Ruislip  
Middx HA4 7TA UK  
tel: +44 (0) 1895 630773  
fax: +44 (0) 1895 631774  
e-mail: info@electron-tubes.co.uk  
Division of ET Enterprises Ltd

**Electron Tubes**  
100 Forge Way Unit F  
Rockaway NJ 07866 USA  
tel: (973) 586 9594  
toll free: (800) 521 8382  
fax: (973) 586 9771  
e-mail: sales@electron-tubes.com

choose accessories for this pmt on our website

[www.electrontubes.com](http://www.electrontubes.com)  
an ISO 9001 registered company

The company reserves the right to modify these designs and specifications without notice. Developmental devices are intended for evaluation and no obligation is assumed for future manufacture. While every effort is made to ensure accuracy of published information the company cannot be held responsible for errors or consequences arising therefrom.



© ET Enterprises Ltd, 2007  
DS\_9558B Issue 2 (05/04/07)

Abbildung 8.3: Datenblatt der Photomultiplier.



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Stern-Gerlach-Experiment [Kno08]. . . . .	14
2.2	Wechselwirkungsprozesse des Feldes mit der Materie [20008]. . . . .	25
2.3	Superposition von fünf harmonischen Wellen, die zufällig aus dem Spektralbereich $\pm\Delta\omega$ um die Zentralfrequenz $\omega_0$ entnommen wurden. Die Werte von $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ betragen: (a) 0,04; (b) 0,08; (c) 0,16 [SLLT97]. . . . .	34
2.4	(a) Zeitliche Pulsform des Lorentz-Spektrums aus (b) [Ros03]. . . . .	34
2.5	Elektromagnetisches Spektrum [Ano08]. . . . .	41
2.6	Schema des äußeren Photoeffekts [Fei08]. . . . .	42
2.7	Aufbau eines Linear-Fokussierten-Photomultipliers [Kri07]. . . . .	44
2.8	Anstiegszeit, Abfallzeit und Elektronen Transitzeit eines elektronischen Pulses. . . . .	45
2.9	Analoge und digitale Messmethode [Gmb]. . . . .	46
2.10	Ursachen des Rauschens bei der Photodetektion. . . . .	49
2.11	Spannungscharakteristik [Ham94]. . . . .	50
2.12	Pulshöhenverteilung [Ham94]. . . . .	52
2.13	Graphische Darstellung der sinc-Funktion. . . . .	56
2.14	Detektoranordnung [VW06]. . . . .	58
2.15	Ortsdarstellung der Teilchenzahlzustände $\psi_n(x) = \langle x n\rangle$ in einem quadratischem Potential $V(x)$ [Böh03]. . . . .	65
2.16	Phasordiagramme, links für ein monomodiges klassisches Feld und rechts für einen kohärenten Zustand $ \alpha\rangle$ mit eingezeichnetem Unschärfebereich (graue Kreisfläche). . . . .	70
2.17	Dargestellt wird die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustands $ \alpha\rangle$ , oben als Wahrscheinlichkeitsdichte $ \langle X \alpha\rangle ^2 =  \psi_\alpha(X) ^2$ über den Potentialverlauf $V(X)$ , des verallgemeinerten Ortes $X$ , unten als Phasordiagramm über verallgemeinerte Orts- $X$ und Impulskoordinaten $Y$ . Die Phase $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ nimmt die folgenden Werte an. (a): $\varphi = \varphi_0$ , (b): $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ , (c): $\varphi = \varphi_0 + \pi$ . . . . .	72
2.18	Graphische Darstellung von $\Delta X_1 = \Delta X$ und $\Delta X_2 = \Delta Y$ für Zustände minimaler Unschärfe. Der kohärente Zustand ist als schwarzer Punkt zu erkennen, während die schattierten Bereiche die gequetschten Zustände darstellen [WM94]. . . . .	74
2.19	Erzeugung eines gequetschten, kohärenten Zustands $ \xi e^{i\theta},  \alpha e^{i\phi}\rangle$ . . . . .	77
2.20	Zeitentwicklung eines gequetschten kohärenten Zustands $ \xi, \alpha\rangle$ , (a): $\varphi = \varphi_0$ , (b): $\varphi \approx \varphi_0 + 0, 3\pi$ , (c): $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ . . . . .	78

2.21	Phasordiagramme (oben) und zeitliche Verläufe der elektrischen Felder (unten), für Zustände mit reduzierter Amplitudenfluktuation (links) und Phasenfluktuation (rechts). Der zeitliche Mittelwert des Feldes $E_0$ ist durch die gepunktete Linie dargestellt, während der zeitabhängige Unschärfebereich durch die Einhüllenden gegeben ist [Wal83]. . . . .	80
2.22	Photonenstatistik für $\langle n \rangle = 4$ in Abhängigkeit von dem Verhältnis $M \approx \frac{T}{\tau_c} = \frac{\Delta t}{\tau_c}$ , [Lou91]. . . . .	85
2.23	Photonenfolge und die entsprechenden Intensitätsschwankungen für: a) eine Glühlampe, b) einen einmodigen Laser und c) nichtklassisches Licht [LK93]. . . . .	86
2.24	Michelson-Interferometer [LK93]. . . . .	88
2.25	Doppelspaltexperiment mit einer Doppellochblende für eine inkohärente Quelle [LK93]. . . . .	92
2.26	Hanbury-Brown-Twiss Experiment [LK93]. . . . .	96
2.27	Zeitliche Kohärenz zweiter Ordnung, für ein lorentz- und ein gaussförmiges Spektrum. Mit dem Parameter $\Gamma$ aus Gleichung (2.344) gilt für lorentz- und gaussförmige spektrale Verteilung $\gamma' = \frac{1}{2\Gamma}$ und $\delta = \frac{2\pi}{\Gamma}$ . Zusätzlich ist noch der kohärente Fall eingezeichnet (Stable wave) [Lou91]. . . . .	97
3.1	Auswirkung der Detektionseffizienz auf eine Super-Poisson-Verteilung. . . . .	102
3.2	Auswirkung der Detektionseffizienz auf eine Sub-Poisson-Verteilung mit minimierter Varianz. . . . .	104
3.3	Auswirkung der Detektionseffizienz $\xi$ auf eine Sub-Poisson-Verteilung. . . . .	105
3.4	Homogener multimodiger Zustand mit Super-Poisson-Statistik. . . . .	108
3.5	Homogener multimodiger Zustand mit Sub-Poisson-Statistik. . . . .	110
3.6	Multimodiger Produktzustand für gemischte Parameter. . . . .	112
3.7	Homogener multimodiger Summenzustand. . . . .	115
3.8	Homogener multimodiger Summenzustand, Parameter: $r = 0.83$ , $ \alpha  = 13.7$ , $ \alpha'  = 6$ , $\phi = 0$ , $\phi' = 0$ , $\theta = 0$ , Detektionseffizienz: $\xi = 1$ . . . . .	116
3.9	Gemischte, multimodige Summenzustände bei einer Detektionseffizienz $\xi = 1$ . . . . .	118
3.10	Die gleichen gemischten, multimodigen Summenzustände bei einer Detektionseffizienz $\xi = 0.1$ . . . . .	118
4.1	Schematischer Aufbau der Messapparatur. . . . .	121
4.2	Photomultiplier vom Jalousien-Type. . . . .	122
4.3	Aufbau der Messkarte [Gmb]. . . . .	123
4.4	Pulshöhenspektrum des Photomultipliers A für $\Delta t = 1$ s. . . . .	125
4.5	Pulshöhenspektrum des Photomultipliers B für $\Delta t = 1$ s. . . . .	125
4.6	Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms bei einer Integrationszeit von $\Delta t = 10$ s (schwarze Linie) sowie Mittelwert (rote Linie) und Varianz (grüne Linie) bezogen auf $T = 1000$ s. . . . .	127
4.7	Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms bei einer Integrationszeit von $\Delta t = 1$ s (schwarze Linie) sowie Mittelwert (rote Linie) und Varianz (grüne Linie) bezogen auf $T = 1000$ s. . . . .	127

4.8	Zeitlicher Verlauf des Dunkelstroms bei einer Integrationszeit von $\Delta t = 0.1$ s (schwarze Linie) sowie Mittelwert (rote Linie) und Varianz (grüne Linie) bezogen auf $T = 1000$ s. . . . .	128
4.9	Zählstatistiken des Dunkelstroms für verschiedene Mittelungsintervalle $\Delta t$ über eine Stichprobenlänge von ca. $T = 10000$ s zum Zeitpunkt $t_1$ . . . . .	129
4.10	Zählstatistiken des Dunkelstroms für verschiedene Mittelungsintervalle $\Delta t$ über eine Stichprobenlänge von ca. $T = 10000$ s zum Zeitpunkt $t_2$ . . . . .	129
4.11	Zählstatistiken des Dunkelstroms für verschiedene Mittelungsintervalle $\Delta t$ über den gesamten zeitlichen Verlauf. . . . .	130
4.12	Autokorrelation des Dunkelstroms für verschiedene Integrationszeitintervalle $\Delta t$ . Da eine doppellogarithmische Auftragung verwendet wurde, ist $g^{(2)}(0)$ nicht aufgetragen. . . . .	132
4.13	Normierte Kreuzkorrelation des Dunkelstromsignals für verschieden Integrationszeiten $\Delta t$ . . . . .	132
4.14	Gemessener Intensitätsverlauf eines Eichenblatts nach der Bestrahlung mit thermischem Licht einer Glühbirne. Zu sehen ist die verzögerte Abstrahlung (DL) und die spontane Emission (SE). . . . .	134
4.15	Zeitlicher Verlauf des SE-Signals einer Flechte, sowie Mittelwert und Varianz bezogen auf 1000 Integrationsintervalle $\Delta t$ . . . . .	135
4.16	Berechnete $P_{cal}(n)$ (Linie) und gemessene Häufigkeitsverteilungen (Kreuze) einer Flechte für unterschiedliche Integrationszeiten $\Delta t$ . . . . .	137
4.17	Autokorrelation des gemessenen Photonensignals einer Flechte für unterschiedliche Integrationszeiten $\Delta t$ . . . . .	139
4.18	Kreuzkorrelation der Photonensignale einer Flechte für unterschiedliche Integrationszeiten $\Delta t$ . . . . .	139
4.19	Ausschnitt des zeitlichen Signalverlaufs eines Blattes der Blutpflaume. . . . .	141
4.20	Berechnete $P_{cal}(n)$ (Linie) und gemessene Häufigkeiten (Kreuze), für unterschiedliche Integrationszeiten $\Delta t$ . Mittelwerte $\langle n_g \rangle$ und Varianzen $\langle (\Delta n_g)^2 \rangle$ , berechnet aus $P_{cal}(n)$ nach Gleichung (4.9) für ein Blutpflaumenblatt. . . . .	143
4.21	Autokorrelation des Photonensignals eines Blutpflaumenblatts für verschiedene Integrationszeiten $\Delta t$ . . . . .	143
4.22	Kreuzkorrelation der Signale eines Blutpflaumenblatts für verschiedene Integrationszeiten $\Delta t$ . . . . .	144
4.23	Zeitlicher Verlauf des Signals einer Weißtanne. . . . .	145
4.24	Gemessene Häufigkeiten (Kreuze) und approximierte Verteilungen $P_{cal}(n)$ (durchgezogene Linien) eines Weißtannenzweiges für verschiedene Integrationszeiten $\Delta t$ . . . . .	147
4.25	Autokorrelation des Signals eines jungen Weißtannenzweiges in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	147
4.26	Kreuzkorrelation der gemessenen Signale eines jungen Weißtannenzweiges in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	148
4.27	Detektierter Intensitätsverlauf eines Gummibaumblattes. . . . .	149

4.28	Gemessene und approximierte Häufigkeitsverteilungen des Pulssignals eines Gummibaumblattes in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	151
4.29	Autokorrelation der Intensität eines Gummibaumblattes in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	151
4.30	Kreuzkorrelation der Signale für ein Gummibaumblatt in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	152
4.31	Ausschnitt aus dem zeitlichen Verlauf des gemessenen Signals eines Brennesselblatts. . . . .	153
4.32	Gemessene (Kreuzchen) und genäherte Pulsverteilung (Linie) für ein Brennesselblatt in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	155
4.33	Autokorrelation der Intensität eines Brennesselblattes in Abhängigkeit vom Integrationszeitintervall $\Delta t$ . . . . .	155
4.34	Kreuzkorrelation der Signale eines Brennesselblattes in Abhängigkeit vom Integrationszeitintervall $\Delta t$ . . . . .	156
4.35	Blau eingezeichneter Ausschnitt des Intensitätsverlaufs aus Abbildung (4.14). . . . .	157
4.36	Gemessene (Kreuze) und genäherte Pulsverteilung (Linien) für das Blatt einer Eiche in Abhängigkeit von der angegebenen Integrationszeit $\Delta t$ . . . . .	159
4.37	Autokorrelation der Intensität eines Eichenblattes in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ . . . . .	159
4.38	Kreuzkorrelation der Signale eines Eichenblattes in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ . . . . .	160
4.39	Gemessener zeitlicher Verlauf des Signals eines abgeschwächten Lasers bei niedriger Intensität. . . . .	161
4.40	Gemessene und genäherte Verteilungen für Laserlicht bei niedriger Intensität in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ . . . . .	163
4.41	Intensitätskorrelation von Laserlicht bei niedriger Intensität, aufgetragen über die Integrationszeit $\Delta t$ . . . . .	163
4.42	Kreuzkorrelation der Signale von Laserlicht bei niedriger Intensität, aufgetragen über die Integrationszeit $\Delta t$ . . . . .	164
4.43	Zeitlicher Verlauf der Lasermessung bei höherer Intensität. . . . .	165
4.44	Gemessene und genäherte Verteilungen für Laserlicht bei höherer Intensität in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	167
4.45	Autokorrelation von Laserlicht bei höherer Intensität für verschiedene $\Delta t$ . . . . .	167
4.46	Kreuzkorrelation von Laserlicht bei höherer Intensität in Abhängigkeit von $\Delta t$ . . . . .	168
8.1	Datenblatt des Vorverstärkers [Pre]. . . . .	180
8.2	Datenblatt der Photomultiplier [ele]. . . . .	181
8.3	Datenblatt der Photomultiplier. . . . .	182

# Tabellenverzeichnis

2.1	Modenzahl in einem Wellenlängenbereich $\Delta\lambda = 1$ nm in Abhängigkeit von der Detektionzeit $\Delta t$ und der Wellenlänge $\lambda$ . . . . .	59
3.1	Mittelwert und Varianz einer monomodigen Verteilung in Abhängigkeit von der Detektionseffizienz $\xi$ sowie der Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und die Summe der quadratischen Abweichung aus Gleichung (3.1). . . . .	102
3.2	Parameter der Verteilung, Mittelwerte, Varianzen, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und $\Sigma$ in Abhängigkeit von der Detektionseffizienz $\xi$ . . . . .	104
3.3	Mittelwerte und Varianzen der monomodigen Verteilung, aufgetragen über die Detektionseffizienz $\xi$ sowie der Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und $\Sigma$ . . . . .	105
3.4	Parameter der Verteilung, $\Sigma$ , Mittelwert, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung, Varianz sowie das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz in Abhängigkeit von der Modenzahl für eine Super-Poisson-Verteilung. . . . .	107
3.5	Parameter der Verteilung, $\Sigma$ , Mittelwert, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung, Varianz sowie das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz in Abhängigkeit von der Modenzahl für eine Sub-Poisson-Statistik. . . . .	109
3.6	$\Sigma$ , Mittelwert, Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung, Varianz und das Verhältnis aus Mittelwert und Varianz in Abhängigkeit von der Modenzahl für gemischte Parameter. . . . .	111
3.7	Mittelwerte und Varianzen der multimodigen Verteilungen im Vergleich zu den Mittelwerten der genäherten Poisson-Verteilungen für homogene Summenzustände. Der Parameter $\Delta$ ist in Gleichung (3.10) definiert. . . . .	114
3.8	Mittelwerte und Varianzen der multimodigen Verteilungen in Abhängigkeit von den Parametern $ \alpha'_n $ und $r_n$ sowie der Mittelwert der genäherten Poisson-Verteilung und $\Delta$ . . . . .	117
4.1	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ , aufgetragen über die Integrationszeit $\Delta t$ für eine Flechte. . . . .	138
4.2	Gemessene (gem) und aus den Fitparametern berechnete (cal) Größen des Photonensignals wie Mittelwert $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ einer Flechte in Abhängigkeit vom Integrationsintervall $\Delta t$ . . . . .	138
4.3	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ für ein Blatt der Blutpflaume. . . . .	142

4.4	Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwerte $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianzen $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktoren $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ in Abhängigkeit vom Integrationsintervall $\Delta t$ für ein Blatt der Blutpflaume. . . . .	142
4.5	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ für einen jungen Weißtannenzweig. . . . .	146
4.6	Aus den Fitparametern berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwerte $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianzen $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktoren $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ in Abhängigkeit von $\Delta t$ für einen jungen Weißtannenzweig. . . . .	146
4.7	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ für das Blatt eines Gummibaums. . . . .	150
4.8	Aus den Fitparametern berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen in Abhängigkeit vom Integrationsintervall $\Delta t$ für ein Gummibaumblatt (Mittelwert $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ ). . . . .	150
4.9	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ für ein Brennesselblatt. . . . .	154
4.10	Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen in Abhängigkeit vom Integrationsintervall $\Delta t$ (Mittelwert $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ ) für ein Brennesselblatt. . . . .	154
4.11	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ für ein Eichenblatt. . . . .	158
4.12	Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwert $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ in Abhängigkeit vom Integrationsintervall $\Delta t$ für ein Eichenblatt. . . . .	158
4.13	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ für Laserlicht bei niedriger Intensität. . . . .	162
4.14	Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwert $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ in Abhängigkeit vom Integrationsintervall $\Delta t$ für Laserlicht bei niedriger Intensität. . . . .	162
4.15	Parameter der Fitfunktion sowie $\chi^2$ und die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ in Abhängigkeit von der Integrationszeit $\Delta t$ für Laserlicht bei höherer Intensität. . . . .	166
4.16	Berechnete (cal) und gemessene (gem) Größen wie Mittelwert $\langle n_{Ph} \rangle$ , Varianz $\langle (\Delta n_{Ph}^{gem})^2 \rangle$ , Fano-Faktor $F_{el}$ und $g^{(2)}(0)$ in Abhängigkeit vom Integrationsintervall $\Delta t$ für Laserlicht bei höherer Intensität. . . . .	166

# Literaturverzeichnis

- [20008] Prozesse schematisch. [www.pcttheory.uni-ulm.de](http://www.pcttheory.uni-ulm.de), 2 2008.
- [ABS66] F. T. Arecchi, A. Berné, and A. Sona. Measurement of the time evolution of a radiation field by joint photocount distributions. *Phys. Rev. Lett.*, 17(5):260–263, Aug 1966.
- [AD73] M. J. Alguard and C. W. Drake. Stark beats in lyman-series emission. *Phys. Rev. A*, 8(1):27–36, Jul 1973.
- [Ano08] Horst Frank / Phrood / Anony. Electromagnetic wave spectrum. Wikipedia, 3 2008.
- [B66] Gabriel Bédard. Photon counting statistics of gaussian light. *Phys. Rev.*, 151(4):1038–1039, Nov 1966.
- [Baj99] R. P. Bajpai. Coherent nature of the radiation emitted in delayed luminescence of leaves. *Journal of Theoretical Biology*, 198:287–299, 1999.
- [Baj04] R. P. Bajpai. Biophoton emission in a squeezed state from a sample of *parmelia tinctorum*. *Physics Letters A*, 322:131–136, 2004.
- [BCM67] Gabriel Bédard, Jane C. Chang, and L. Mandel. Approximate formulas for photoelectric counting distributions. *Phys. Rev.*, 160(5):1496–1500, Aug 1967.
- [Böh03] M. Böhm. Manuskript zur Vorlesung Quantentheorie 1 (Theoretische Physik iii). Technical report, Universität Würzburg, 2003.
- [Bir76] John B. Birks. *Excited states of biological molecules*. John Wiley and Sons Ltd, 1976.
- [BSMM01] Bronstein, Semendjajew, Musiol, and Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001.
- [Cav81] Carlton M. Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. D*, 23(8):1693–1708, Apr 1981.
- [Cit34] P. H. van Cittert. *Physica*, 1:201, 1934.
- [Cit39] Van Cittert. Kohärenz-Probleme. *Physica*, 6:1129, 1939.

- [CTDRG92] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, and Gilbert Grynberg. *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*. Wiley-Interscience, March 1992.
- [Dem03] Wolfgang Demtröder. *Molekülphysik, Theoretische Grundlagen und experimentelle Methoden*. Oldenbourg Verlag München Wien, 2003.
- [Dic54] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93(1):99, Jan 1954.
- [ele] Data sheet. <http://www.electrontubes.com/pdf/9558B.pdf>.
- [Ern69] V. Ernst. Coherent emission of a photon by many atoms. *Z. Physik*, 218:111–128, 1969.
- [Fei08] Feitscher. Schema Photoeffekt. Wikipedia, 2 2008.
- [FKC67] Helen Freedhoff, J. Van Kranendonk, and J. Can. *Phys./Rev. can. phys.*, 45(5):1833–1859, 1967.
- [Fli00a] Torsten Fließbach. *Elektrodynamik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
- [Fli00b] Torsten Fließbach. *Mechanik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
- [Fli07] Torsten Fließbach. *Statistische Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2007.
- [GEL74] M. Gueron, J. Eisinger, and A. A. Lamola. *The basic principles of nucleic acid chemistry*. Academy Press, 1974.
- [Gla63] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131(6):2766–2788, Sep 1963.
- [Gla72] R. J. Glauber. *Laser Handbook*. Elsevier, New York, 1972.
- [Gmb] Becker & Hickl GmbH. PMS-300 PMS-400 800 MHz gated photon counters/multiscalers.
- [Gur22] A. Gurwitsch. *Arch. Entw. Mech. Org.*, 51:383, 1922.
- [Ham94] Hamamatsu. *Photomultiplier Tube*. Hamamatsu, 1994.
- [Hec01] Eugene Hecht. *Optik*. Oldenbourg Verlag München Wien, 2001.
- [HI91] Eva Hideg and Humio Inaba. Biophoton emission (ultraweak photoemission) from dark adapted spinach chloroplasts. *Photochemistry and Photobiology*, 53:137–142, 1991.
- [IL02] Ibach and Lüth. *Festkörperphysik. Einführung in die Grundlagen*. Springer Verlag, 2002.



- [Jan57] L. Janossy. *Nouvo Cim.*, 6:125, 1957.
- [Jan59] L. Janossy. *Nuovo Cim.*, 12:369, 1959.
- [JOP68] E. Jakeman, C. J. Oliver, and E. R. Pike. LETTERS TO THE EDITOR: A measurement of optical linewidth by photon-counting statistics. *Journal of Physics A Mathematical General*, 1:406–408, May 1968.
- [JP68] E. Jakeman and E. R. Pike. The intensity-fluctuation distribution of gaussian light. *Journal of Physics A: General Physics*, 1(1):128–138, 1968.
- [Kas64] A. Kastler. Quantum electronics. (*Proceedings of the Third International Congress*), 1964.
- [KDM77] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, 39(11):691–695, Sep 1977.
- [KK64] P. L. Kelley and W. H. Kleiner. Theory of electromagnetic field measurement and photoelectron counting. *Phys. Rev.*, 136(2A):A316–A334, Oct 1964.
- [Kl673] W. Klöpffer. *Organic Molecular Photophysics*, 1, 1973.
- [Kno08] Theresa Knott. Stern-Gerlach Experiment. Wikipedia, 2 2008.
- [Kri07] J. Krieger. Photomultiplier schema. Internet, 5 2007.
- [KTS<sup>+</sup>99] Masaki Kobayashi, Motohiro Takeda, Tomoo Sato, Yoshihiko Yamazaki, Kenya Kaneko, Ken-Ichi Ito, Hiroshi Kato, and Humio Inaba. In vivo imaging of spontaneous ultraweak photon emission from a rat's brain correlated with cerebral energy metabolism and oxidative stress. *Neuroscience Research*, 34:103–113, 1999.
- [LK93] Werner Lauterborn and Thomas Kurz. *Kohärente Optik, Grundlagen für Physiker und Ingenieure*. Springer Verlag, 1993.
- [Lou80] Rodney Loudon. Non-classical effects in the statistical properties of light. *Rep. Proc. Phys.*, 1980.
- [Lou91] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 1991.
- [LP98] Lang and Pucker. *Mathematische Methoden in der Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, 1998.
- [LS93] C. F. Lo and R. Sollie. Generalized multimode squeezed states. *Phys. Rev. A*, 47(1):733–735, Jan 1993.
- [Man59] L. Mandel. *Proc. Phys. Soc. (Lond.)*, 74:233, 1959.
- [Man79] L. Mandel. Electric dipole interaction in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 20(4):1590–1592, Oct 1979.

- [Man86] L Mandel. Non-classical states of the electromagnetic field. *Physica Scripta*, T12:34–42, 1986.
- [MG67] B. R. Mollow and R. J. Glauber. Quantum theory of parametric amplification. ii. *Phys. Rev.*, 160(5):1097–1108, Aug 1967.
- [Mic99] Gerhard Michal. *Biochemical pathways*. Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- [Mül90] Rudolf Müller. *Rauschen*. Springer Verlag, zweite edition, 1990.
- [MM66] B. L. Morgan and L. Mandel. Measurement of photon bunching in a thermal light beam. *Phys. Rev. Lett.*, 16(22):1012–1015, May 1966.
- [MS66] C. L. Mehta and E. C. G. Sudarshan. Time evolution of coherent states. *Physics Letters*, 22:574–576, September 1966.
- [MW65] L. Mandel and E. Wolf. Coherence properties of optical fields. *Rev. Mod. Phys.*, 37(2):231–287, Apr 1965.
- [Nol91] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik, Bd.2, Analytische Mechanics*. Zimmermann-Neufang, 1991.
- [Nol02] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3 Elektrodynamik*. Springer Verlag, 2002.
- [Nyq28] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32(1):110–113, Jul 1928.
- [Pau99] Harry Paul. *Photonen. Eine Einführung in die Quantenoptik*. Teubner Studienbücher, 2 edition, 1999.
- [PB89] D. T. Pegg and S. M. Barnett. Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. A*, 39(4):1665–1675, Feb 1989.
- [PCH<sup>+</sup>02] F.A. Popp, J.J. Chang, A. Herzog, Z. Yan, and Y. Yan. Evidence of non-classical (squeezed) light in biological systems. *Physics Letters A*, 293:98–102, 2002.
- [Peř85] Jan Peřina. *Coherence of light*. D. Reidel Publishing Company, 1985.
- [PLG92] F. A. Popp, K. H. Li, and Q. Gu, editors. *RECENT ADVANCES IN BIOPHOTON RESEARCH AND ITS APPLICATIONS*. World Scientific, 1992.
- [PRB<sup>+</sup>81] F.A. Popp, B. Ruth, W. Bahr, J. Böhm, P. Graß, G. Grolig, M. Rattemeyer, H. G. Schmidt, and P. Wulle. Emission of visible and ultraviolet radiation by active biological systems. *Collective Phenomena(Gordon and Breach)*, 3:187–214, 1981.
- [Pre] Preamplifier. <http://www.phillipsscintific.com/pdf/6954ds.pdf>.

- [PWKP89] F.A. Popp, Ulrich Warnke, Herbert L. König, and Walter Peschka, editors. *Electromagnetic Bio-Information*. Urban&Schwazenberg, 1989.
- [Ros03] Mark Rossi. Lorentzverbreiterung bei spektralen Linien. [de.wikipedia.org/wiki/Quantenpunkt](http://de.wikipedia.org/wiki/Quantenpunkt), 2003.
- [RP76] B. Ruth and F.A. Popp. Experimentelle Untersuchungen zur ultraschwachen Photonenemission biologischer Systeme. *Z. Naturforsch.*, 31C:741–745, 1976.
- [RPN81] M. Rattemeyer, F. A. Popp, and W. Nagl. Evidence of photon emission from DNA in living systems. *Naturwissenschaften*, 68:572–573, 1981.
- [SA51] B.L. Strehler and W. Arnold. Light production by green plants. *J.Gen.Physiol.*, 34:809–820, 1951.
- [Sac74] Lothar Sachs. *Angewandte Statistik*. Springer Verlag, 1974.
- [Sak94] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics revised edition*. Addison Wesley Publishing Company, 1994.
- [Sch05a] Udo Scherz. *Quantenmechanik. Eine kompakte Einführung*. Teubner Studienbücher, 2005.
- [Sch05b] Schwabel. *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*. Springer Verlag, 2005.
- [SLL93] X. Shen, F. Liu, and X. Y. Li. Experimental study on photocount statistics of the ultraweak photon emission from some living organisms. *Birkhäuser Basel*, 49:291–295, 1993.
- [SLLT97] Prof. Dr. Stephen, G. Lipson, Prof. Dr. Henry S. Lipson, and Prof. Dr. David S. Tannhauser. *Optik*. Springer Verlag, 3 edition, 1997.
- [SM83] R. Short and L. Mandel. Observation of sub-poissonian photon statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 1983.
- [SR07] Brian J. Smith and M. G. Raymer. Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory. 2007.
- [Sto70] David Stoler. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys. Rev. D*, 1(12):3217–3219, Jun 1970.
- [Sud63] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10(7):277–279, Apr 1963.
- [TG65] U. M. Titulaer and R. J. Glauber. Correlation functions for coherent fields. *Phys. Rev.*, 140(3B):B676–B682, Nov 1965.

- [TG66] U. M. Titulaer and R. J. Glauber. Density operators for coherent fields. *Phys. Rev.*, 145(4):1041–1050, May 1966.
- [Til92] R. N. Tilbury. The effect of stress factors on the spontaneous photon emission from microorganisms. *Cellular and Molecular Life Sciences*, 48:1030–1041, 1992.
- [Vog00] Werner Vogel. Nonclassical states: an observable criterion. *Phys. Rev. Lett.*, 84(9):1849–1852, Feb 2000.
- [VW06] Werner Vogel and Dirk-Gunnar Welsch. *Quantum optics*. Wiley VCH Verlag GmbH, 3 rev. and enl. ed. w. 69 figs. 24,5 cm edition, 5 2006.
- [Wal83] D. F. Walls. Squeezed states of light. *nature*, 306:141, 1983.
- [Wal86] D. F. Walls. Growing expectation from squeezed state of light. *Nature*, 324:210, 1986.
- [WM94] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum optics*. Springer Verlag, 1994.
- [WW30] V. Weisskopf and E. Wigner. Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators. *Zeitschrift für Physik A*, 65:18–29, 1930.
- [Yue76] H. P. Yuen. Two-photon coherent states of the radiation field. *Phys. Rev. A*, 13:2226–2243, June 1976.

## **Eidesstattliche Versicherung**

Ich versichere an Eides Statt durch meine Unterschrift, dass ich die Dissertation selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, die Programme implementiert und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Ich habe die Arbeit in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Mainz, den \_\_.\_\_.\_\_\_\_\_

(Erich Schirmacher)