

**QCD-Strahlungskorrekturen zu
Polarisationsobservablen in semileptonischen
Zerfällen schwerer Quarks**

Dissertation

zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Martin Fischer

geboren in Frankfurt am Main

Mainz, 2005

Datum der mündlichen Prüfung: 28.7.2005

D77 (Dissertation an der Universität Mainz)

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die QCD-Strahlungskorrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ für verschiedene Polarisationsobservablen zu semileptonischen Zerfällen eines bottom-Quarks in ein charm-Quark und ein Leptonpaar berechnet. Im ersten Teil wird der Zerfall $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$ eines unpolarisierten b -Quarks in ein polarisiertes c -Quark sowie ein geladenes Lepton und ein Antineutrino im Ruhesystem des b -Quarks analysiert. Es werden die Strahlungskorrekturen für den unpolarisierten und den polarisierten Beitrag zur differentiellen Zerfallsrate nach der Energie des c -Quarks berechnet, wobei das geladene Lepton als leicht angesehen und seine Masse daher vernachlässigt wird. Die inklusive differentielle Rate wird durch zwei Strukturfunktionen in analytischer Form dargestellt. Anschließend werden die Strukturfunktionen und die Polarisation des c -Quarks numerisch ausgewertet. Nach der Einführung der Helizitätsprojektoren befaßt sich der zweite Teil mit dem kaskadenartigen Zerfall $b^\dagger \rightarrow c + W^-$ eines polarisierten b -Quarks in ein unpolarisiertes c -Quark und ein virtuelles W -Boson, welches über $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$ weiter in ein Paar leichter Leptonen zerfällt. Es werden die inklusiven Strahlungskorrekturen zu drei unpolarisierten und fünf polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen in analytischer Form berechnet, welche die Winkelverteilung für die differentielle Zerfallsrate nach dem Viererimpulsquadrat des W -Bosons beschreiben. Die Strukturfunktionen enthalten die Informationen sowohl über die polare Winkelverteilung zwischen dem Spinvektor des b -Quarks und dem Impulsvektor des W -Bosons als auch über die räumliche Winkelverteilung zwischen den Impulsen des W -Bosons und des Leptonpaares. Der Impuls und der Spinvektor des b -Quarks sowie der Impuls des W -Bosons werden im b -Ruhesystem analysiert, während die Impulse des Leptonpaares im W -Ruhesystem ausgewertet werden. Zusätzlich zu den genannten Strukturfunktionen werden noch die unpolarisierte und die polarisierte skalare Strukturfunktion angegeben, die in Anwendungen bei hadronischen Zerfällen eine Rolle spielen. Anschließend folgt eine numerische Auswertung aller berechneten Strukturfunktionen. Im dritten Teil werden die nichtperturbativen HQET-Korrekturen in $\mathcal{O}(1/m_b^2)$ zu inklusiven semileptonischen Zerfällen schwerer Hadronen diskutiert, welche ein b -Quark enthalten. Sie beschreiben hadronische Korrekturen, die durch die feste Bindung des b -Quarks in Hadronen hervorgerufen werden. Es werden insgesamt fünf unpolarisierte und neun polarisierte Helizitäts-Strukturfunktionen in analytischer Form angegeben, die auch eine endliche Masse und den Spin des geladenen Leptons berücksichtigen. Die Strukturfunktionen werden sowohl in differentieller Form in Abhängigkeit des quadrierten Viererimpulses des W -Bosons als auch in integrierter Form präsentiert. Zum Schluß werden die zuvor erhaltenen Resultate auf die semi-inklusive hadronischen Zerfälle $\bar{B} \rightarrow X_c + (D_s^-, D_s^{*-})$ und $\Lambda_b^\dagger \rightarrow X_c + (D_s^-, D_s^{*-})$ eines polarisierten Λ_b -Baryons oder eines \bar{B} -Mesons in ein D_s^- - oder ein D_s^{*-} -Meson unter Berücksichtigung der D_s^* -Polarisation angewandt. Für die zugehörigen Winkelverteilungen werden die inklusiven QCD- und die nichtperturbativen HQET-Korrekturen zu den Helizitäts-Strukturfunktionen in analytischer Form angegeben und anschließend numerisch ausgewertet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Motivation	5
1.3	Gliederung	8
2	Das Standardmodell	13
2.1	Einleitung	13
2.2	Elektroschwache Wechselwirkungen der Leptonen	16
2.3	Der Higgs-Mechanismus	22
2.4	Elektroschwache Wechselwirkungen von Quarks	27
2.5	Die starke Wechselwirkung	32
2.6	Lagrange-Dichte des Standardmodells	33
2.7	Experimentelle Tests des Standardmodells	36
3	Polarisationsobservable im b-Ruhesystem	39
3.1	Einleitung	39
3.2	Bornsche Näherung	42
3.2.1	Übergangsamplitude	43
3.2.2	Phasenraumintegration und Zerfallsrate	46
3.3	QCD-Schleifenbeiträge 1. Ordnung	50
3.3.1	Vertexkorrektur	50
3.3.2	Selbstenergie-Korrekturen der Quarks	64
3.3.3	Renormierung	68
3.3.4	Renormierte Übergangsamplitude	78
3.3.5	Phasenraumintegration und Zerfallsrate	81
3.4	Gluon-Bremsstrahlung in erster Ordnung α_s	85
3.4.1	Übergangsamplitude	85
3.4.2	Phasenraumintegration und Zerfallsrate	91
3.5	Inklusive Zerfallsrate	103
3.6	Numerische Resultate	106
4	Polarisation und Helizitäts-Projektoren	115
4.1	Einleitung	115

4.2	Definition der Helizitäts-Projektoren	117
4.2.1	Explizite Darstellung des Lepton-Tensors	117
4.2.2	Explizite Darstellung der Helizitäts-Projektoren	120
4.2.3	Entwicklung des Lepton-Tensors nach den Helizitäts-Projektoren	125
4.2.4	Kovariante Darstellung der Helizitäts-Projektoren	128
4.3	Helizitäts-Strukturfunktionen	131
4.4	Berechnung der Zerfallsrate	140
4.5	Winkelverteilungen	142
5	Polarisationsobservable im W-Ruhesystem	145
5.1	Einleitung	145
5.2	Bornsche Näherung	147
5.2.1	Übergangsamplitude und Helizitäts-Strukturfunktionen	148
5.2.2	Phasenraum-Integration und Helizitäts-Raten	152
5.2.3	Analytische Resultate der Helizitäts-Raten	155
5.3	QCD-Einschleifen-Korrekturen	156
5.3.1	Matrixelemente und Übergangsraten	157
5.3.2	Phasenraum-Integration und analytische Resultate	161
5.4	Gluon-Bremsstrahlung in $\mathcal{O}(\alpha_s)$	164
5.4.1	Matrixelemente und Übergangsraten	165
5.4.2	Phasenraum-Integration und Helizitäts-Raten	169
5.4.3	Integration des Soft-Gluon-Faktors	175
5.4.4	Integration der infrarot-endlichen Terme	183
5.4.5	Zusammenfassung der analytischen Resultate	186
5.5	Inklusive Zerfallsrate	194
5.6	Numerische Resultate	202
6	Nichtperturbative Beiträge	211
6.1	Einleitung	211
6.2	Hadronische Matrixelemente	213
6.3	Helizitäts-Strukturfunktionen und Winkelverteilungen	217
6.3.1	Definition der Strukturfunktionen	217
6.3.2	Winkelverteilungen	218
6.3.3	Helizitäts-Strukturfunktionen	221
6.4	Polarisation des geladenen Leptons	223
6.5	Reduzierte Zerfallsraten und ξ -Integration	225
6.5.1	Integration der Strukturfunktionen über ξ	225
6.5.2	Reduzierte Zerfallsraten	227
6.5.3	ξ -Integration und Winkelverteilungen	229
6.6	Vollständig integrierte Raten und Winkelverteilungen	230
6.6.1	Integrierte reduzierte Raten	231
6.6.2	Integrierte Winkelverteilungen	240

7	Anwendungen in hadronischen Zerfällen	241
7.1	Einleitung	241
7.2	Winkelverteilungen der semi-inklusiven Zerfälle	244
7.3	Analytische Resultate	247
7.4	Numerische Resultate	254
8	Zusammenfassung und Ausblick	257
	Anhang	262
A	Notation	263
A.1	Physikalische Konstanten	263
A.2	Metrik und Vierervektoren	264
A.3	Dirac-Matrizen	265
A.4	Dirac-Gleichung und Dirac-Spinoren	266
A.5	Die <i>CKM</i> -Matrix	267
A.6	Gell-Mann-Matrizen	268
A.7	Phasenraum-Formeln	269
A.8	Feynman-Regeln	269
A.8.1	Äußere Linien	270
A.8.2	Propagatoren	271
A.8.3	Vertices	271
B	Berechnung von Schleifenintegralen	273
B.1	Definition der Schleifenintegrale	273
B.2	Reduktion auf skalare Integrale	274
B.3	Berechnung der skalaren Integrale	280
C	Der Dilogarithmus	289
C.1	Definition und Eigenschaften	289
C.2	Dilogarithmen mit einer Variablen	289
C.3	Dilogarithmen mit zwei Variablen	290
D	Grundintegrale	291
D.1	Definition der Grundintegrale	291
D.2	Explizite Darstellung der auftretenden Integrale	292
E	Entwicklungskoeffizienten der Grundintegrale	299
	Literaturverzeichnis	305

Abbildungsverzeichnis

3.1	Feynman-Diagramm für die Bornsche Näherung zu dem semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$	43
3.2	Feynman-Diagramme für die QCD-Einschleifen-Korrekturen zu dem semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$	51
3.3	Einteilchen-irreduzible Diagramme zum Quark-Propagator in der QCD	69
3.4	Einteilchen-irreduzible Diagramme zum Quark-Propagator in der QCD in erster Ordnung α_s	71
3.5	Feynman-Diagramme für die QCD-Bremsstrahlungsbeiträge in erster Ordnung α_s zu dem semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l + g$	85
3.6	Phasenraumgrenzen der Energien von Gluon und c -Quark für die Bremsstrahlung zum semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l + g$	97
3.7	Unpolarisierter und polarisierter Anteil der inklusiven differentiellen Zerfallsrate für den semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$	107
3.8	Einfluß der QCD-Strahlungskorrekturen auf den unpolarisierten Beitrag der Zerfallsrate zum semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$	108
3.9	Einfluß der QCD-Strahlungskorrekturen auf den polarisierten Beitrag der Zerfallsrate zum semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$	110
3.10	Longitudinale Polarisation des c -Quarks	111
3.11	Einfluß der QCD-Strahlungskorrekturen auf die longitudinale Polarisation des c -Quarks	112
4.1	Kinematik des Zerfalls $b^\dagger \rightarrow c + W^-$, $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$ und Definition der verschiedenen Winkel	118
5.1	Feynman-Diagramm für die Bornsche Näherung zum Zerfall $b \rightarrow c + W^-$	148
5.2	Feynman-Diagramme für die QCD-Einschleifen-Korrekturen zum Zerfall $b \rightarrow c + W^-$	157
5.3	Feynman-Diagramme für die QCD-Bremsstrahlungsbeiträge in erster Ordnung α_s zum Zerfall $b \rightarrow c + W^- + g$	165
5.4	Phasenraumgrenzen der Energien von Gluon und W -Boson für die Bremsstrahlung zum Zerfall $b \rightarrow c + W^- + g$	173
5.5	Einfluß der endlichen Gluonmasse auf die Phasenraumgrenzen	174
5.6	Reduzierte differentielle Helizitäts-Raten nach dem skalierten Impulsquadrat des W -Bosons zum Zerfall $b^\dagger \rightarrow c + W^-$	204

5.7	Relative Änderungen der inklusiven reduzierten Strukturfunktionen durch die $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Strahlungskorrekturen für den Zerfall $b^\dagger \rightarrow c + W^-$	207
6.1	Kinematik des semileptonischen Zerfalls $\Lambda_b^\dagger \rightarrow X_c + l^- + \bar{\nu}_l$ und Definition der verschiedenen Winkel	219
7.1	Feynman-Diagramme für Bornsche Näherung sowie Vertex-Korrektur und Gluon-Bremsstrahlung in erster Ordnung α_s zum hadronischen Zerfall $b \rightarrow c + (D_s^-, D_s^{*-})$	242
7.2	Kinematik der semi-inklusive Zerfälle $\bar{B}, \Lambda_b^\dagger \rightarrow X_c + D_s^{*-} (\rightarrow D_s^- + \gamma, \pi^0)$ und Definition der verschiedenen Winkel	243
B.1	Wickrotation	281

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

1.1 Einleitung

In der Elementarteilchenphysik werden die fundamentalen Bausteine der Materie sowie deren grundlegende Wechselwirkungen durch das sogenannte Standardmodell [1, 2, 3, 4, 5] beschrieben, das bislang in zahlreichen Experimenten glänzend bestätigt wurde. Das Standardmodell wird auf der Basis der Quantenfeldtheorie [6, 7, 8, 9] formuliert, die drei wichtige Gebiete der modernen Physik miteinander verbindet. Zum ersten bewegen sich die Elementarteilchen bei Energien, wie sie in heutigen Beschleunigeranlagen erreicht werden, mit sehr hohen Geschwindigkeiten, die nahe an die Lichtgeschwindigkeit heranreichen. Deshalb gehorchen sie den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie, die natürlich bei der Beschreibung von Teilchenreaktionen berücksichtigt werden müssen. Zweitens finden Streuprozesse bei sehr kleinen Abständen statt, bei denen die Eigenschaften der Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielen. Schließlich benötigt man drittens auch die Konzepte der klassischen Feldtheorie, die beispielsweise zur Aufstellung der Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik geführt haben. Trotz einiger Schwierigkeiten, die bei der Vereinigung dieser drei wichtigen Teilgebiete der theoretischen Physik aufgetreten sind, und bis heute nicht vollständig gelöster mathematischer Probleme, haben sich die Konzepte der Quantenfeldtheorie aufgrund ihrer großen Erfolge beim Vergleich mit den Experimenten durchgesetzt, da sie bis heute die beste bekannte Theorie zur Natur der Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen darstellen.

In der Quantenfeldtheorie geht man gewöhnlich so vor, daß man alle Materiebausteine und alle zwischen ihnen wirkenden Grundkräfte zunächst im Rahmen der klassischen relativistischen Feldtheorie mit Hilfe des Lagrange-Formalismus beschreibt. Man beginnt mit der Aufstellung einer relativistisch kovarianten Lagrange-Dichte, aus der mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung die klassischen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können. Liegt für die Lagrange-Dichte eine bestimmte Symmetrie vor, so kann man daraus mit Hilfe des Noether-Theorems eine zugehörige Erhaltungsgröße gewinnen.

Um nun die Gesetze der Quantenmechanik in die Theorie einzuarbeiten, unterwirft man die klassischen Felder einem Verfahren, das man Quantisierung nennt. Es gibt mehrere verschiedene Quantisierungsverfahren, von denen zwei besonders häufig verwendet werden. Das ältere dieser beiden Verfahren wird *Zweite Quantisierung* genannt, wobei jede klassische Feldfunktion durch einen Feldoperator ersetzt wird, der bestimmte quantenmechanische Vertauschungsregeln erfüllt. Dadurch kann man jedes Feld mit einer charakteristischen Art von Feldquanten identifizieren, die bei der Beschreibung physikalischer Prozesse als Teilchen interpretiert werden können. Auf diese Weise kann man jeder elementaren Materie und jeder fundamentalen Kraft eine bestimmte Teilchensorte zuordnen, die deswegen auch als Elementarteilchen bezeichnet wird. Das zweite, modernere Quantisierungsverfahren beruht auf dem Pfadintegral-Formalismus und führt zum selben Resultat wie die Zweite Quantisierung.

Das Standardmodell basiert auf einer lokalen Eichtheorie, bei der man verlangt, daß die Lagrange-Dichte für die Elementarteilchen unter bestimmten Symmetrie-Transformationen der Felder, die als Eichtransformationen bezeichnet werden, invariant ist. Diese Forderung nach Invarianz gewährleistet, daß die physikalischen Observablen, welche man aus der Lagrange-Dichte ableiten kann, nicht von der Wahl einer bestimmten Eichung abhängen. Läßt man sogar lokale Eichtransformationen zu, die im Gegensatz zu den globalen Eichtransformationen von den Raumzeit-Koordinaten abhängen, so ist es unmöglich, eine eichinvariante Lagrange-Dichte allein für die Felder, welche die Materiebausteine beschreiben, zu konstruieren. Die lokale Eichinvarianz kann aber wieder hergestellt werden, indem man ein neues Feld einführt, das deshalb mit dem Begriff Eichfeld bezeichnet wird. Seine Eigenschaften sind durch die Forderung nach lokaler Eichinvarianz festgelegt. Es stellt sich heraus, daß die Eichfelder die fundamentalen Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen beschreiben.

Bei der Berechnung von physikalischen Observablen wie Wirkungsquerschnitten von Streuprozessen oder Zerfallsraten für Teilchenzerfälle spielt die sogenannte S-Matrix eine herausragende Rolle. Sie beschreibt die quantenfeldtheoretische Übergangsamplitude für die unterschiedlichen Teilchenprozesse, aus der man durch Bildung des Betragsquadrates die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit pro Teilchenimpuls berechnen kann. Die Übergangsrate ergibt sich aus dem Betragsquadrat der Amplitude durch Integration über alle kinematisch erlaubten Viererimpulse der Teilchen im Endzustand. Daraus können schließlich die Wirkungsquerschnitte oder Zerfallsraten berechnet werden, indem man die Resultate mit einem Flußfaktor multipliziert, der aus dem Kehrwert für den Strom der Teilchen im Anfangszustand hervorgeht.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie ist es aber nicht möglich, die S-Matrix in geschlossener Form zu berechnen. Deshalb ist es notwendig, eine geeignete Näherungsmethode zu finden, mit deren Hilfe man die Amplituden bestimmen kann. Man bedient sich dafür der Methode der Störungstheorie, bei der die Amplitude in eine Potenzreihe der Kopplungskonstanten, die ein Maß für die Stärke der betrachteten Wechselwirkung ist, entwickelt wird. Ist diese Kopplungskonstante wesentlich kleiner als eins, so erwartet man, daß mit jeder weiteren Ordnung der Störungsreihe die Genauigkeit der zu berechnenden Amplitude zunimmt. Die einzelnen Terme der Störungsreihe können mit Hilfe von Feynman-Diagrammen ver-

anschaulicht werden, die sich als Raumzeit-Diagramme für die zugehörigen Streuprozesse interpretieren lassen. Diese Diagramme bestehen aus verschiedenen Linien, denen jeweils ein bestimmtes Teilchen zugeordnet wird, und Vertex-Punkten, an denen unterschiedliche Linien zusammentreffen, und die eine Wechselwirkung der betreffenden Teilchen beschreiben. Dabei werden jedem Vertex und jeder Linie des Diagramms bestimmte analytische Ausdrücke zugeordnet, welche die Grundlage der Berechnung für die S-Matrix darstellen. Die niedrigste Ordnung der Störungsreihe wird als Bornsche Näherung bezeichnet, und alle Korrekturen höherer Ordnung nennt man Strahlungskorrekturen.

Bei der Berechnung von Strahlungskorrekturen gibt es Diagramme, bei denen die Linien geschlossene Schleifen bilden, denen eine Integration über den in der Schleife umlaufenden Teilchen-Viererimpuls zugeordnet ist. Bei der Durchführung der Integration stellt sich heraus, daß einige Integrale und damit die Übergangsamplituden divergent werden können, was zu einem unsinnigen physikalischen Resultat führt. Man kann aber einen Weg finden, um diese Divergenzen zu beseitigen, indem man die in der Lagrange-Dichte auftretenden Massen und Ladungen nicht als physikalische Größen, sondern als Parameter interpretiert, in welche man die Divergenzen absorbiert. Anschließend setzt man die Parameter in bestimmter Art und Weise mit den tatsächlich gemessenen Werten für Massen und Ladungen in Beziehung. Man nennt dieses Verfahren Renormierung und kann damit den angesprochenen divergenten Termen endliche Werte zuordnen. Aus den renormierten Amplituden berechnet man anschließend die Übergangsraten und bestimmt schließlich die Wirkungsquerschnitte oder Zerfallsraten.

Neben den oben erwähnten gibt es noch eine weitere Art von Divergenzen, die bei der Anwesenheit virtueller masseloser Teilchen in den Schleifen auftreten. Sie können dadurch behoben werden, indem man neben den Schleifenkorrekturen auch Bremsstrahlungsbeiträge berücksichtigt, bei denen dieselben masselosen Teilchen nicht in geschlossenen Schleifen vorkommen, sondern als reelle Teilchen abgestrahlt werden. Analog zu den Schleifendiagrammen berechnet man für den Bremsstrahlungsprozeß aus den Feynman-Regeln die Übergangsamplitude, aus der sich die Wirkungsquerschnitte oder Zerfallsraten ergeben. Man kann zeigen, daß das Ergebnis ein entgegengesetztes Divergenzverhalten zum ursprünglich betrachteten Prozeß besitzt. Nach der Summation beider Beiträge heben sich die Divergenzen gegenseitig auf, und für das Resultat ergibt sich ein endlicher Wert, mit dessen Hilfe physikalische Observablen berechnet und mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden können. Die aus diesen Resultaten berechneten Observablen nennt man inklusive Größen.

In einigen Fällen ist es nicht möglich, für bestimmte Teilchenprozesse Streuamplituden mit Hilfe der Störungstheorie zu berechnen, beispielsweise wenn die Kopplungskonstante der zugrunde liegenden Wechselwirkung größer als eins wird. Unter gewissen Voraussetzungen kann man auch nichtstörungstheoretische Verfahren entwickeln, indem man zum Beispiel aus den grundlegenden Feldtheorien bestimmte effektive Theorien ableitet oder verschiedene Grenzfälle der Theorie betrachtet. Es gibt auch noch einen weiteren Zugang zur Berechnung von Streuamplituden im Rahmen einer sogenannten Gitter-Eichtheorie, in der man die Raumzeit durch ein Gitter diskreter Punkte darstellt und versucht, die Amplituden der vollständigen Theorie mit numerischen Methoden zu berechnen.

Die elementaren Materiebausteine des Standardmodells gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik und werden aus diesem Grund Fermionen genannt. Dazu gehören die Quarks, aus denen beispielsweise Proton und Neutron aufgebaut sind, und die Leptonen, zu denen auch die Elektronen zählen. Die genannten Elementarteilchen wechselwirken über vier elementare Kräfte, welche im Rahmen der Quantenfeldtheorie durch quantisierte Eichfelder beschrieben werden, die der Bose-Einstein-Statistik genügen. Die zugehörigen Feldquanten nennt man deshalb Eichbosonen. Das Standardmodell beschäftigt sich mit drei der vier Grundkräfte. Die bekannteste ist die elektromagnetische Kraft, deren quantisierte Eichtheorie als *Quantenelektrodynamik* oder kurz QED bezeichnet wird und deren Eichbosonen die masselosen Photonen sind. Sie wirkt auf alle elektrisch geladenen Teilchen, und die Kopplungskonstante ist die Ladung q der betreffenden Elementarteilchen. Die zugrunde liegende Symmetriegruppe ist eine $U(1)$, und die Lagrange-Dichte der QED ist invariant unter lokalen $U(1)$ -Eichtransformationen. Die $U(1)$ ist eine kommutative oder abelsche Gruppe. Deshalb wird die QED als abelsche Eichtheorie bezeichnet.

Die Eichtheorie der starken Wechselwirkung, die unter anderem die Kräfte im Innern von Atomkernen beschreibt, nennt man *Quantenchromodynamik* oder QCD. Sie bestimmt die Wechselwirkung zwischen den Quarks, und wird durch masselose Eichbosonen vermittelt, die man Gluonen nennt. Sie koppelt an alle Teilchen, die eine sogenannte Farbladung besitzen. Die Kopplungsstärke ist durch die starke Kopplungskonstante g_s gegeben. Die Eichgruppe der QCD ist die $SU(3)$, deren Elemente nicht miteinander vertauschen und die deshalb als nichtabelsch bezeichnet wird. Die QCD ist also eine nichtabelsche Eichtheorie. Aus diesem Grunde können die Gluonen auch untereinander wechselwirken, was eine kompliziertere Struktur der starken im Vergleich zur elektromagnetischen Wechselwirkung zur Folge hat. Die starke Wechselwirkung ist vermutlich auch dafür verantwortlich, daß Quarks nur in gebundenen Zuständen existieren können, deren Gesamtfarbladung neutral ist.

Die schwache Wechselwirkung, die beispielsweise für den Beta-Zerfall verantwortlich ist, wird im Rahmen des Standardmodells durch die Theorie von Glashow, Weinberg und Salam beschrieben. In dieser Theorie werden die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung durch eine vereinheitlichte $SU(2) \times U(1)$ -Eichtheorie beschrieben. Die Feldquanten der schwachen Wechselwirkung sind im Unterschied zur QED und zur QCD massive Eichbosonen, welche durch die elektrisch geladenen W - und die neutralen Z -Bosonen gegeben sind. Wie auch die QCD ist die elektroschwache Wechselwirkung eine nichtabelsche Eichtheorie. Man ordnet dabei den Elementarteilchen eine schwache Hyperladung und einen schwachen Isospin zu. Die Stärke der Wechselwirkung wird durch zwei Kopplungskonstanten g_1 und g_2 parametrisiert. Bei der Konstruktion einer Lagrange-Dichte für die elektroschwache Theorie ist es zunächst nicht möglich, für die W - und Z -Bosonen eichinvariante Massenterme zu erhalten. Diese Schwierigkeit kann man dadurch beheben, indem man das Konzept der spontanen Symmetriebrechung und den Higgs-Mechanismus verwendet. Dadurch wird es möglich, sowohl den Fermionen als auch den Eichbosonen in eichinvarianter Weise eine Masse zuzuordnen. Man muß dazu allerdings ein weiteres Teilchen, nämlich das sogenannte Higgs-Boson in die Theorie einführen. Nach der Symmetriebrechung ergibt sich eine eichinvariante $U(1)$ -Theorie mit masselosen Eichbosonen, mit der man die QED identifizieren

kann, und drei massive Eichbosonen für die schwache Wechselwirkung. Aus bestimmten Linearkombinationen der schwachen Hyperladung und des schwachen Isospins ergibt sich die elektrische Ladung, und man erhält eine schwache Kopplungskonstante g_w , die über einen Parameter, den man Weinbergwinkel nennt, mit der Elementarladung zusammenhängt.

Die vierte fundamentale Wechselwirkung ist die Gravitation. Aufgrund ihrer geringen Stärke im Vergleich zu den anderen Grundkräften spielt sie in Teilchenreaktionen bei Strahlenergien, wie sie in modernen Beschleunigeranlagen erreicht werden, keine Rolle und wird daher nicht im Rahmen des Standardmodells beschrieben. Bis heute ist es noch nicht gelungen, die Gravitation und die Quantenmechanik auf der Grundlage einer einheitlichen Theorie konsistent zu formulieren.

1.2 Motivation

Obwohl das Standardmodell bisher experimentell glänzend bestätigt wurde, ist man daran interessiert, die Genauigkeit beim Vergleich mit dem Experiment weiter zu erhöhen, und die Überprüfung auf weitere Bereiche des Standardmodells auszudehnen, um auf diese Weise möglicherweise eine Abweichung von den theoretischen Vorhersagen feststellen zu können. Weil die Genauigkeit vieler Experimente in der Elementarteilchenphysik in den letzten Jahren stetig zugenommen hat, ist es beispielsweise erforderlich, zu bestimmten Teilchenprozessen Berechnungen von Strahlungskorrekturen in zweiter oder sogar höheren Ordnungen durchzuführen, um sie mit den Resultaten aus Messungen an modernen Beschleunigeranlagen vergleichen zu können. Aber bereits in der ersten Ordnung der Störungsrechnung gibt es verschiedene aus dem Standardmodell abgeleitete Meßgrößen, welche noch nicht ausreichend durch Experimente getestet wurden. Dazu gehören auch verschiedene Observablen der Polarisierung von Elementarteilchen, die aus bestimmten Eigenschaften des Teilchenspins resultieren. Man kann sie in geeigneten Experimenten durch Analysieren der Winkelverteilungen verschiedener Teilchenprozesse messen. Diese Experimente sind aber schwieriger durchzuführen als Messungen von totalen Raten. Um die Richtungsinformationen der produzierten Teilchen zu bestimmen, ist es nämlich notwendig, eine ausreichend hohe Produktionsrate zu gewährleisten, damit man für eine statistische Analyse genügend Teilchen pro Raumwinkelelement nachweisen kann. Dazu ist es erforderlich, Beschleuniger mit einer möglichst hohen Luminosität zu konstruieren und leistungsstarke Teilchendetektoren zu entwickeln. Dies ist mit einigen existierenden Anlagen bereits gelungen und wird sich bei in naher Zukunft geplanten Experimenten weiter verbessern. Mit Hilfe der Messungen von Polarisationsobservablen könnten unter anderem mögliche Abweichungen von einigen im Standardmodell vorkommenden Kopplungen zwischen bestimmten Elementarteilchen nachgewiesen werden.

Insbesondere die Eigenschaften der starken Wechselwirkung sind wegen ihrer Komplexität noch nicht so gut erforscht wie beispielsweise die elektromagnetische Wechselwirkung. Da die Quarks nicht als freie Teilchen existieren, sondern lediglich in Hadronen genannten gebundenen Zuständen vorkommen, ist es oft nur indirekt möglich, ihre Eigenschaften experimentell zu bestimmen. Bei niedrigen Energien wird zum Beispiel die starke Kopp-

lungskonstante so groß, daß man die Störungstheorie nicht mehr anwenden kann und auf bestimmte Näherungsverfahren angewiesen ist. Außerdem hadronisieren die Quarks, welche bei Streuexperimenten erzeugt werden, und erzeugen Schauer aus Hadronen, in denen es schwierig ist, Teilchen mit bestimmten Eigenschaften zu identifizieren.

Neben der starken Wechselwirkung nehmen die Quarks auch an der schwachen Wechselwirkung teil und können daher auch über diese Wechselwirkung zerfallen. Als Zerfallsprodukte können neben leichteren Quarks auch Leptonen auftreten. Eine spezielle Klasse von Zerfällen bilden die sogenannten semileptonischen Zerfälle, bei denen ein Quark in ein leichteres Quark und ein Paar von Leptonen zerfällt. Dieser Zerfallsprozeß wird im Standardmodell durch eine Wechselwirkung beschrieben, deren Struktur durch die Differenz eines Vektor- und eines Axialvektor-Stromes beschrieben wird und die deshalb als $V - A$ -Kopplung bezeichnet wird. Die Berechnung bestimmter Polarisationsobservablen zu dieser Art von Zerfällen ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Durch Vergleich mit modernen Experimenten ist es möglich, eine Abweichung von der Vorhersage des Standardmodells für diese Kopplung und damit Hinweise auf bisher unbekannte physikalische Effekte zu entdecken.

In dieser Arbeit werden wir speziell die semileptonischen Zerfälle eines Bottom-Quarks behandeln. Das b -Quark zählt zu den schweren Quarks, deren Massen im Vergleich zur Energieskala λ_{QCD} der QCD groß sind. Konkret handelt es sich hier um den elementaren Prozeß, bei dem ein Bottom-Quark in ein Charm-Quark und ein virtuelles W -Boson zerfällt, welches dann selbst in ein Leptonpaar weiterzerfällt, das aus einem geladenen Lepton und einem Antineutrino besteht. Im Unterschied zu einem rein leptonen Zerfall wie dem eines Myons, bei dem nur Leptonen beteiligt sind, bezeichnet man solche Zerfälle, bei denen im Anfangszustand Quarks oder Hadronen auftreten, als semileptonisch. Da das b -Quark zu den schweren Quarks zählt, ist seine Hadronisierung weniger ausgeprägt als bei leichteren Quarks und man kann es näherungsweise wie ein freies Teilchen behandeln. Die Korrekturen, welche durch die hadronischen Eigenschaften hervorgerufen werden, lassen sich bei schweren Quarks sehr gut im Rahmen einer effektiven Theorie beschreiben. Diese Theorie wird nach dem englischen Ausdruck "*Heavy Quark Effective Theory*" kurz als *HQET* bezeichnet. Dies ist ein Vorteil des b -Quark-Zerfalls gegenüber Zerfällen leichter Quarks, weil dessen Zerfallsraten mit störungstheoretischen Methoden der Quantenfeldtheorie berechnet werden können und die zugehörigen hadronischen Korrekturen gleichzeitig einer fundierten theoretischen Beschreibung zugänglich sind.

Um die für den Vergleich mit neueren Experimenten erforderliche Präzision zu erreichen, ist es erforderlich, bei den störungstheoretischen Berechnungen neben der Bornschen Näherung auch Strahlungskorrekturen zu berücksichtigen. Es stellt sich heraus, daß von allen Standardmodell-Korrekturen die QCD-Korrekturen den größten Beitrag liefern, da der Wert für die starke Kopplungskonstante α_s selbst relativ groß ist. Für den Vergleich mit experimentellen Resultaten ist bei dem hier diskutierten b -Quark-Zerfall bereits die Berechnung der ersten Ordnung α_s ausreichend. Außerdem gestaltet sich die Berechnung von Korrekturen zweiter Ordnung wesentlich schwieriger als die der Korrekturen erster Ordnung. Deshalb werden wir uns in dieser Arbeit auf die Berechnung der inklusiven QCD-Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ beschränken, die sich sowohl aus den Schleifen- als auch aus

den Bremsstrahlungsbeiträgen zusammensetzen. Die elektroschwachen Korrekturen sind schon deutlich kleiner als die QCD-Resultate, so daß wir sie nicht berücksichtigen werden.

Das zerfallende b -Quark oder das c -Quark im Endzustand können beide eine nicht-verschwindende Polarisation besitzen, die aus den Spineigenschaften der Quarks resultiert und bei der Berechnung der Zerfallsraten berücksichtigt werden muß. In unserem Fall beschränken wir uns auf die Polarisation jeweils eines der beiden Quarks und nehmen das andere als unpolarisiert an. Auch die Polarisation des virtuellen W -Bosons ist bei dem untersuchten b -Zerfall von Interesse, weil sich daraus Rückschlüsse auf die Winkelabhängigkeiten des entstehenden Leptonpaares ziehen lassen. Deshalb sollen auch die Polarisationsobservablen für das W -Boson diskutiert werden.

Wie bereits in der Einleitung gesagt wurde, sind Quarks immer in hadronischen Zuständen gebunden, so daß man in Experimenten nur hadronische Prozesse untersuchen kann. Bei Elektron-Positron-Kollisionen und vor allem bei Experimenten an Proton-Antiproton- oder Proton-Proton-Beschleunigern werden sehr große Mengen an Hadronen erzeugt. Weil die Produktionsrate für leichte Hadronen höher als für schwerere Hadronen ist, eignen sich leichtere Hadronen besonders gut für experimentelle Untersuchungen, bei denen eine hohe Statistik erforderlich ist. Unter den Baryonen, welche ein schweres b -Quark enthalten, zählen die Λ_b -Baryonen zu den leichtesten, weil sie neben dem b - noch aus einem u - und einem d -Quark bestehen. Die \bar{B} -Mesonen setzen sich aus einem b -Quark und einem leichteren Antiquark zusammen und besitzen eine kleinere Masse als die angesprochenen Baryonen. Da die genannten Hadronen aufgrund ihrer relativ geringen Masse für experimentelle Untersuchungen besser geeignet sind als schwerere Hadronen, werden wir in dieser Arbeit die hadronischen Zerfälle von \bar{B} -Mesonen und polarisierten Λ_b -Baryonen diskutieren.

Die Zerfälle von Λ_b -Baryonen und \bar{B} -Mesonen sind eine mögliche Anwendung des b -Quark-Zerfalls, der den betrachteten hadronischen Prozessen zugrunde liegt. Die mit Hilfe der QCD berechneten Resultate für den Zerfall des b -Quarks tragen im Rahmen der HQET in führender Ordnung zu den genannten hadronischen Zerfällen bei, und die hadronischen Korrekturen sind durch nichtperturbative Beiträge gegeben, welche proportional zum Kehrwert der b -Masse sind. Daher kann der b -Zerfall in ein c -Quark und ein Lepton-Paar unter anderem für die Behandlung des semileptonischen Λ_b -Zerfalls herangezogen werden. Aufgrund der gleichen Struktur des Matrixelementes ist es auch möglich, für den Zerfall von Λ_b -Baryonen oder auch von \bar{B} -Mesonen anstelle eines Leptonpaares einen hadronischen Endzustand zu betrachten, welcher durch ein D_s - oder ein D_s^* -Meson gegeben ist. Die hadronischen Zerfallsprodukte sind allerdings wegen ihres Kaskaden-Zerfalls in stabile Endzustände im Experiment schwerer nachzuweisen als Leptonen, die im wesentlichen bereits stabile Teilchen darstellen.

Bei den Experimenten *BELLE* in Japan und *BarBar* in den USA werden in ausreichender Anzahl $B\bar{B}$ -Paare erzeugt, um die oben erwähnten Zerfälle in hadronische Endzustände untersuchen zu können. Diese Experimente dienen in erster Linie der Erforschung der CP-Verletzung, ihre Daten können jedoch auch für die Messung von Observablen aus dem Zerfall von B - oder \bar{B} -Mesonen verwendet werden. Die Λ_b -Baryonen sind bereits im LEP-Beschleuniger am europäischen Forschungszentrum CERN bei Genf beim Zerfall von

Z^0 -Bosonen in relativ hoher Anzahl produziert worden, so daß man Daten der semileptonischen Zerfälle gewinnen konnte. Diese Anzahl kann bei den geplanten Beschleunigern TEVATRON und LHC weiter erhöht werden, um auch für die hadronischen Zerfallsprodukte eine hinreichend große Statistik zu erhalten. Bilden sich die Λ_b -Baryonen aus b -Quarks, welche beim Zerfall eines Topquarks entstehen, so besitzen sie einen hohen Polarisationsgrad, und man muß bei der Berechnung der Zerfallsraten auch den Λ_b -Spin berücksichtigen.

1.3 Gliederung

In der vorliegenden Arbeit werden semileptonische Zerfälle eines Bottom-Quarks in ein Charm-Quark und ein Lepton-Paar sowie deren Anwendungen in hadronischen Zerfallsprozessen diskutiert. Der Hauptanteil ist die Berechnung von QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung der starken Kopplungskonstanten α_s zu verschiedenen Polarisationsobservablen des b -Zerfalls. Anschließend werden nichtperturbative HQET-Korrekturen für hadronische Prozesse, die in führender Ordnung durch den Zerfall eines b -Quarks beschrieben werden, angegeben. Zum Abschluß werden die gewonnenen Resultate für die Beschreibung semi-inklusiver Zerfälle von \bar{B} -Mesonen und Λ_b -Baryonen verwendet.

Alle hier diskutierten Zerfallsprozesse werden im Rahmen des Standardmodells der Elementarteilchenphysik beschrieben, das deshalb in Kapitel 2 kurz zusammengefaßt wird. Es werden die darin vorkommenden Elementarteilchen aufgelistet und deren Wechselwirkungen untereinander beschrieben. Danach erfolgt eine Diskussion des elektroschwachen Sektors, der die schwache Wechselwirkung mit dem Elektromagnetismus vereinigt. Es folgt eine Behandlung des Higgs-Mechanismus, der für die Erzeugung der Teilchenmassen verantwortlich ist. Anschließend erfolgt eine Beschreibung der starken Wechselwirkung, die zwischen den Quarks in den Hadronen wirkt. Schließlich wird die gesamte Lagrange-Dichte des Standardmodells angegeben, aus der sich die Feynman-Regeln herleiten lassen, welche bei der Berechnung von physikalischen Streuprozessen oder von Zerfallsraten benötigt werden. Abschließend werden noch einige experimentelle Ergebnisse zum Testen des Standardmodells vorgestellt.

In Kapitel 3 werden die Bornsche Näherung sowie die QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung der Kopplungskonstanten α_s für den Zerfall $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$ zur differentiellen Rate $d\Gamma/dE_c$ nach der Energie des c -Quarks berechnet. Dabei wird der Spin des c -Quarks berücksichtigt, während der b -Spin unbeobachtet bleiben soll. Um die Rechnungen vereinfachen zu können, werden im Endzustand nur leichte Leptonen betrachtet, so daß deren Masse gegenüber der b -Masse vernachlässigt werden kann. Die QCD-Korrekturen setzen sich aus den Schleifenkorrekturen und den Gluon-Bremsstrahlungsbeiträgen zusammen, die jeweils in unterschiedlichen Abschnitten diskutiert werden. Die Schleifenkorrekturen besitzen eine Ultraviolett-Divergenz, welche mit Hilfe der Renormierung behoben wird. Diese Prozedur wird im Rahmen der Einschleifen-Korrekturen kurz vorgestellt werden. Neben der UV-Singularität treten bei den QCD-Korrekturen auch Infrarot-Divergenzen auf, die sowohl die Schleifen- als auch die Bremsstrahlungsbeiträge betreffen. Diese Singularitäten heben sich bei der Summation beider Anteile zur inklusiven Rate gegenseitig auf.

Die inklusive Rate enthält keine Divergenzen mehr und wird im Anschluß an die QCD-Strahlungskorrekturen angegeben.

Um die differentielle Rate zu erhalten, wird bei der Bornschen Rate und den QCD-Korrekturen bis auf triviale Winkelintegrationen nicht über den Phasenraum des c -Quarks integriert, während der Phasenraum der Leptonen und der des reellen Gluons bei der Bremsstrahlung vollständig ausintegriert werden. Das Resultat für die differentielle Rate wird durch eine unpolarisierte und eine polarisierte Strukturfunktion ausgedrückt. Die erste beschreibt die Rate, bei der über den c -Quark-Spin summiert wird, und die zweite enthält den Anteil, der vom Spin des c -Quarks abhängt. Beide werden in analytischer Form dargestellt und hängen neben der Energie des c -Quarks nur von den Quarkmassen ab.

Im letzten Abschnitt von Kapitel 3 werden die Resultate der inklusiven differentiel- len Rate numerisch ausgewertet. Die beiden Strukturfunktionen werden in Abhängigkeit der mit der b -Masse skalierten c -Energie graphisch dargestellt und mit den zugehörigen Bornschen Raten verglichen. Außerdem wird der Einfluß der Strahlungskorrekturen auf die Bornsche Näherung diskutiert und die dadurch hervorgerufenen prozentualen Ände- rungen der Strukturfunktionen angegeben. Am Ende wird die longitudinale Polarisati- on des c -Quarks mit Hilfe der beiden Strukturfunktionen bestimmt und ihr Verlauf in Abhängigkeit der skalierten c -Energie graphisch dargestellt. Auch hier wird der Einfluß der QCD-Strahlungskorrekturen diskutiert, indem die relativen prozentualen Änderungen der Bornschen Näherung angegeben werden.

Als Vorbereitung auf die Ausführungen in den beiden nachfolgenden Kapiteln wird in Kapitel 4 der Formalismus der Helizitäts-Projektoren eingeführt, welche zur Beschreibung der unterschiedlichen Helizitäts-Zustände des virtuellen W -Bosons benötigt werden. Sie bil- den einen Satz von Basis-Tensoren, in die der Lepton-Tensor für den Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein Leptonpaar entwickelt werden kann, und setzen sich aus bestimmten Kombinationen der Polarisationsvektoren für das virtuelle W -Boson zusammen. Es wird gezeigt, daß auch der Hadron-Tensor für den b -Zerfall in einen vollständigen Satz dieser Projektoren entwickelt werden kann. Damit ist es möglich, das betragsquadrierte Matrix- element des Zerfallsprozesses durch den mit den Projektoren kontrahierten Hadron-Tensor auszudrücken. Anschließend wird dies dafür verwendet, um die Winkelverteilung für die differentielle Rate des b -Quark-Zerfalls anzugeben. Dazu wird der Zerfallsprozeß in den Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein virtuelles W -Boson und den anschließenden Zerfall des W -Bosons in ein Leptonpaar aufgespalten. Nach Einsetzen des betragsquadrier- ten Matrixelementes erhält man eine vierfach differentielle Rate, deren Winkelkoeffizienten ebenfalls durch den mit den Projektoren kontrahierten Hadron-Tensor gegeben sind. Diese Winkelkoeffizienten und die zugehörigen reduzierten Raten werden am Ende von Kapitel 4 angegeben und bilden die Grundlage für die Berechnungen in den folgenden Kapiteln.

In Kapitel 5 werden die Bornsche Näherung und die QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung der starken Kopplungskonstanten α_s zu Polarisationsobservablen für den Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein Leptonpaar berechnet. Im Gegensatz zu Kapitel 3 wird hier über den Phasenraum des c -Quarks integriert, während man die In- tegration über den Phasenraum der Leptonen nicht ausführt und die Winkelvariablen zur Analyse der Polarisation des virtuellen W -Bosons verwendet. Wegen einer Anwendung

auf den Zerfall eines polarisierten Λ_b -Baryons in Kapitel 7 wird der Spin des b -Quarks berücksichtigt. Der Spin des c -Quarks dagegen wird nicht betrachtet, so daß über diesen summiert werden kann. Als Resultat werden die inklusiven $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Strahlungskorrekturen zu drei unpolarisierten und fünf polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen in analytischer Form angegeben, welche die Polarisation des W -Bosons im Zerfall $b^\dagger \rightarrow c + W^-$ vollständig beschreiben. Darüberhinaus werden auch die unpolarisierte und die polarisierte skalare Helizitäts-Rate angegeben, die bei den Anwendungen auf hadronische Zerfälle in Kapitel 7 eine Rolle spielen.

In Kapitel 6 werden die nichtperturbativen Korrekturen zu semileptonischen Zerfallsprozessen von Hadronen diskutiert, in denen das zerfallende Hadron ein schweres b -Quark enthält. Diese Zerfälle werden im Rahmen der HQET in führender Ordnung durch den Zerfall des b -Quarks beschrieben, und die hadronischen Korrekturen sind von der Ordnung $1/m_b^2$. Es werden die hadronischen Matrixelemente angegeben und mit deren Hilfe die Helizitäts-Strukturfunktionen und die Winkelverteilungen für die hadronischen Zerfälle bestimmt. In führender Ordnung sind die Strukturfunktionen mit den Resultaten der Bornschen Näherung in der QCD aus Kapitel 3 identisch. In Kapitel 6 werden neben den Strukturfunktionen für den Zerfall in masselose Leptonen auch die für massive Leptonen einschließlich des Lepton-Spins angegeben, um damit auch den Zerfall in Tau-Leptonen beschreiben zu können. Insgesamt erhält man somit fünf unpolarisierte und neun polarisierte Strukturfunktionen, die den semileptonischen Zerfall eines polarisierten Hadrons vollständig beschreiben. Durch Normierung auf die totale Rate für den Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$ im Grenzfall verschwindender c -Masse werden reduzierte differentielle Raten definiert, die vom Viererimpulsquadrat des virtuellen W -Bosons abhängen. Für den Zerfall in Leptonen negativer Helizität werden drei unpolarisierte und fünf polarisierte reduzierte Raten angegeben, und für den Zerfall in Leptonen positiver Helizität ergeben sich vier unpolarisierte und acht polarisierte Raten. Am Ende von Kapitel 6 werden die erwähnten reduzierten Raten über das Viererimpulsquadrat des W -Bosons integriert und die resultierenden unpolarisierten und polarisierten integrierten Raten in analytischer Form dargestellt. Abschließend werden die integrierten Winkelverteilungen für den Zerfall in Leptonen negativer und positiver Helizität in Abhängigkeit der integrierten Raten angegeben, welche nur noch drei Winkelvariablen enthalten.

Nach der Diskussion der QCD-Strahlungskorrekturen und der nichtperturbativen Beiträge in den beiden vorangegangenen Kapiteln werden in Kapitel 7 Anwendungen dieser zuvor berechneten Resultate in hadronischen Zerfällen behandelt, bei denen das zerfallende Hadron ein b -Quark enthält. Im einzelnen werden die semi-inklusive Zerfälle eines polarisierten Λ_b -Baryons $\Lambda_b^\dagger \rightarrow X_c + (D_s, D_s^*)$ oder eines \bar{B} -Mesons $\bar{B} \rightarrow X_c + (D_s, D_s^*)$ in ein D_s - oder ein D_s^* -Meson untersucht. Zunächst werden die Winkelverteilungen dieser Prozesse angegeben, wobei die Winkelkoeffizienten durch einige der in Kapitel 5 und 6 berechneten Helizitäts-Strukturfunktionen gegeben sind. Anschließend werden die analytischen Resultate der für die hadronischen Zerfälle benötigten Strukturfunktionen auf die zugehörige Bornsche Rate normiert und in Abhängigkeit der QCD-Korrekturen sowie der nichtperturbativen Beiträge angegeben. Zum Schluß werden die normierten Helizitäts-Strukturfunktionen für die Zerfälle des Λ_b und des \bar{B} numerisch ausgewertet. Die numeri-

schon Resultate der unterschiedlichen Korrekturen aus der QCD und der HQET werden für die verschiedenen Helizitäten diskutiert, wobei auf die Größenordnung der Korrekturen relativ zum Born-Term etwas näher eingegangen wird.

Am Ende dieser Arbeit werden in Kapitel 8 die wichtigsten Resultate zusammengefaßt. Außerdem wird ein kurzer Ausblick auf verschiedene Berechnungen gegeben, welche die hier präsentierten Ergebnisse weiterführen und vervollständigen könnten, so daß man in Zukunft genauere Vergleiche mit neueren Experimenten durchführen kann.

Kapitel 2

Das Standardmodell

2.1 Einleitung

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik besteht aus drei Anteilen. Der erste Teil sind die fundamentalen Konstituenten der Materie. Dies sind jeweils sechs Quarks und Leptonen, die in drei Familien eingeteilt werden und sich durch ihre Massen und elektrischen Ladungen voneinander unterscheiden. Zu jedem dieser Teilchen gibt es ein Antiteilchen, das sich von ihm im wesentlichen durch die entgegengesetzte Ladung unterscheidet. Jede der drei Leptonfamilien besteht aus einem geladenen Lepton, das eine negative elektrische Elementarladung trägt, und einem elektrisch neutralen Neutrino. So enthält die erste Lepton-Familie das Elektron und das Elektron-Neutrino, die beiden anderen Familien werden aus dem Myon und dem Tau und den zugehörigen Neutrinos gebildet. Das Elektron ist das leichteste der geladenen Leptonen und ist ein stabiles Teilchen, während das Myon und das Tau nur eine endliche Lebensdauer besitzen. Die Neutrinos galten lange Zeit als masselos, neuere Experimente zeigen jedoch eine starke Evidenz, daß ihre Masse sehr klein, aber von null verschieden ist. In der Beschreibung des Standardmodells im Rahmen dieser Arbeit werden die Neutrinomassen null gesetzt, da die Masseneffekte zu klein sind, um messbare Korrekturen hervorzurufen. Die Quarks sind die Bestandteile aller Hadronen, zu denen auch die Nukleonen, das Proton und das Neutron, gehören. Jede Familie von Quarks enthält jeweils ein up-type Quark, das zwei Drittel der elektrischen Elementarladung trägt, und ein down-type Quark mit einer negativen Drittel Elementarladung. Die erste Familie enthält das up-Quark und das down-Quark, aus denen die Protonen und Neutronen aufgebaut sind. Die zweite Familie besteht aus dem charm- und dem strange-Quark und die dritte Familie schließlich aus dem top- und dem bottom-Quark. Außerdem kommen alle sechs Quarks in jeweils drei verschiedenen Ladungszuständen vor, die in Anlehnung an die Optik Farben genannt werden, weil sich drei unterschiedliche Farbladungen gegenseitig auslöschen können. Quarks existieren in der Natur nicht als freie Teilchen, sondern bilden die Baryonen, die aus drei Quarks bestehen, und die Mesonen, die einen Verbund aus einem Quark und einem Antiquark darstellen. Das Proton ist das einzige stabile Baryon, während die Mesonen alle eine endliche Lebensdauer haben. Baryonen und Mesonen

werden unter dem Begriff der Hadronen zusammengefaßt. Sie bilden Quarkzustände, die bezüglich der Farbladung neutral sind. Eine weitere Eigenschaft der Elementarteilchen ist ihr Eigendrehimpuls oder Spin. Sowohl alle Quarks als auch die Leptonen tragen in Einheiten des Drehimpulsquants \hbar den Spin $1/2$, sie gehorchen also der Fermi-Dirac-Statistik und werden deshalb als Fermionen bezeichnet. Die Eigenschaften der Quarks und Leptonen sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Den zweiten Teil des Standardmodells bilden die Grundkräfte zwischen den Materieteilchen. Sie werden im Rahmen einer lokalen Eichtheorie formuliert, und die Wechselwirkungen werden durch quantisierte Eichfelder übermittelt. Man kennt heute vier unterschiedliche Wechselwirkungen. Die elektromagnetische Kraft ist seit langer Zeit bekannt. Ihre Beschreibung im Rahmen der Quantenfeldtheorie erfolgt durch die *Quantenelektrodynamik* oder *QED* [10, 11], und das zugeordnete Feldquant wird als Photon bezeichnet. Es ist ein masseloses Teilchen, welches eine unendliche Reichweite der elektromagnetischen Wechselwirkung zur Folge hat. Das Photon koppelt an alle geladenen Elementarteilchen, ist aber selbst elektrisch neutral. Die elektromagnetische Kraft bestimmt alle chemischen Reaktionen von Atomen und Molekülen. Die schwache Wechselwirkung ist eine sehr kurzreichweitige Kraft. Sie ist für bestimmte radioaktive Zerfälle verantwortlich und wurde aufgrund ihrer geringen Stärke erst relativ spät entdeckt. Sie wurde bereits im Rahmen des Standardmodells erfolgreich mit der elektromagnetischen zur elektroschwachen Wechselwirkung vereinigt, die durch die Symmetriegruppe $SU(2) \times U(1)$ beschrieben wird. Die Feldquanten der elektroschwachen Theorie sind neben dem Photon die elektrisch geladenen *W*-Bosonen und das neutrale *Z*-Boson, die alle große Massen besitzen, die im Bereich von fast 100 Protonenmassen liegen. Neben der schwachen gibt es außerdem noch die starke Wechselwirkung. Sie vermittelt die Kräfte innerhalb der Atomkerne und ist bei niedrigen Energien die stärkste aller Kräfte. Die ihr zugeordnete Eichgruppe ist die $SU(3)$, und sie koppelt an alle Teilchen, welche eine Farbladung besitzen. Die Feldquanten der starken Wechselwirkung werden als Gluonen bezeichnet. Sie besitzen keine Masse und sind elektrisch neutral. Sie tragen allerdings eine Farbladung und sind daher in der Lage, untereinander stark wechselwirken zu können. Die Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung wird *Quantenchromodynamik* oder *QCD* genannt [12].

Die am längsten bekannte und vertrauteste aller Wechselwirkungen ist die Gravitation. Obwohl sie die schwächste der vier Grundkräfte der Natur ist, hat sie einen großen Einfluß auf unseren Alltag, weil sie eine unendliche Reichweite besitzt und im Gegensatz zur elektromagnetischen Kraft ausschließlich anziehend wirkt. Die Schwerkraft wird sehr erfolgreich durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Es ist aber bis heute nicht gelungen, die Gravitation mit den Grundlagen der Quantentheorie zu vereinigen. Da sie so schwach ist, daß sie im Rahmen von Experimenten an Beschleunigern vernachlässigt werden kann, gehört sie streng genommen nicht zum Standardmodell und wird neben den anderen drei Kräften als klassisches Feld angefügt. Man führt zusätzlich ein hypothetisches Teilchen ein, das als Feldquant der Gravitation angesehen und Graviton genannt wird.

Die Quanten aller vier Wechselwirkungen besitzen einen ganzzahligen Spin und genügen somit der Bose-Einstein-Statistik. Sie werden daher als Bosonen bezeichnet. Ihre Eigenschaften sind in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Die dritte Komponente des Standardmodells ist der Higgs-Mechanismus, der im Zusammenhang mit der spontanen Symmetriebrechung auftritt und mit dessen Hilfe die Massen der Elementarteilchen erzeugt werden. Es zeigt sich nämlich, daß Massenterme für die Felder die Lagrange-Dichte nicht eichinvariant lassen, so daß man neben den bekannten Feldern für die Materie und ihre Wechselwirkungen ein neues Feld einführen muß, um die Eichinvarianz aufrecht erhalten zu können. Das zugeordnete Feldquant ist das Higgs-Boson. Seine wichtigsten Eigenschaften sind in Tabelle 2.1 gezeigt.

Elementarteilchen		Symbol	Masse (MeV)	el. Ladung (e)	Spin (\hbar)
Quarks	up	u	3	$2/3$	$1/2$
	down	d	6	$-1/3$	$1/2$
	charm	c	1 250	$2/3$	$1/2$
	strange	s	125	$-1/3$	$1/2$
	top	t	174 300	$2/3$	$1/2$
	bottom	b	4 200	$-1/3$	$1/2$
Leptonen	Elektron-Neutrino	ν_e	$< 3 \times 10^{-6}$	0	$1/2$
	Elektron	e^-	0.510 999	-1	$1/2$
	Myon-Neutrino	ν_μ	< 0.19	0	$1/2$
	Myon	μ^-	105.658	-1	$1/2$
	Tau-Neutrino	ν_τ	< 18.2	0	$1/2$
	Tau	τ^-	1 777	-1	$1/2$
Eichbosonen	Photon	γ	0	0	1
	W-Bosonen	W^\pm	80 400	± 1	1
	Z-Boson	Z^0	90 190	0	1
	Gluon	g	0	0	1
	Graviton	G	0	0	2
	Higgs-Boson	H	$> 95\,300$	0	0

Tabelle 2.1: Die fundamentalen Teilchen des Standardmodells und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften. Die elektrische Ladung der Teilchen ist in Vielfachen der positiven Elementarladung e angegeben, der Spin als Vielfaches des Drehimpulsquants \hbar . Die Materie-Teilchen sind Fermionen und besitzen alle den Spin $1/2$. Die Wechselwirkungs- und das Higgs-Teilchen haben bosonischen Charakter und daher einen ganzzahligen Spin. Die Fermionen können in Quarks, die an der starken Wechselwirkung teilhaben, und nicht stark wechselwirkende Leptonen unterteilt werden. Die Leptonen ihrerseits treten als negativ geladene Leptonen und elektrisch neutrale Neutrinos auf. Die Quarks besitzen eine drittelzahlige Elementarladung und kommen außerdem in drei verschiedenen Farbzuständen vor.

Die Gültigkeit des Standardmodells ist für die Konstituenten der Materie und die nichtgravitativen Wechselwirkungen experimentell mit großer Genauigkeit bestätigt worden. Das Spektrum der drei Quark- und Leptonen-Familien als Feldquanten der Materie ist bereits nachgewiesen worden. Ebenso verhält es sich mit den Quanten der fundamentalen

Kräfte, dem Photon, den W - und Z -Bosonen sowie den Gluonen. Die Wechselwirkungen von Materie mit diesen Kräften sind zum Teil mit Genauigkeiten im Bereich einiger Promille getestet worden. Dazu haben zahlreiche Experimente an verschiedenen Beschleunigern beigetragen, von denen insbesondere der e^+e^- -Speicherring LEP am CERN in Genf, e^-p -Speicherring HERA am DESY in Hamburg und der $p\bar{p}$ -Collider Tevatron am Fermi-Laboratorium in Chicago zu nennen sind. Die Entdeckung des Higgs-Bosons ist bislang noch nicht gelungen. Dennoch ist seine Masse durch verschiedene Experimente auf Werte zwischen etwa 100 und 200 GeV eingegrenzt worden.

Das Standardmodell der Elementarteilchen wurde im wesentlichen in den sechziger und siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelt. In den Jahren von 1961 bis 1968 wurden die Grundlagen der elektroschwachen Wechselwirkung [13, 14, 15] und des Higgs-Mechanismus [16] beschrieben. Nachdem das Quarkmodell 1964 vorgeschlagen wurde [17, 18], konnte bis 1973 die QCD als Theorie der starken Wechselwirkung formuliert werden [19, 20, 21]. In den nachfolgenden Abschnitten wollen wir das Standardmodell für die elektroschwache und die starke Wechselwirkung zusammenfassen mit dem Ziel, eine Lagrange-Dichte zu konstruieren, welche die Grundlage für die Formulierung einer Quantenfeldtheorie und der Ableitung der Feynman-Regeln bildet, aus denen man physikalische Größen wie Zerfallsraten oder Wirkungsquerschnitte berechnen und anschließend mit experimentellen Resultaten vergleichen kann. Wir folgen dabei im wesentlichen den Ausführungen im Buch von W. N. Cottingham und D. A. Greenwood [1] und verwenden an einigen Stellen zur Vertiefung außerdem die Bücher von C. Quigg [2] und O. Nachtmann [4].

Bei der Konstruktion einer Lagrange-Dichte für das Standardmodell geht man zunächst von einer klassischen Feldtheorie aus. Man verlangt neben der Lorentz-Invarianz, daß die Lagrange-Dichte eine reelle Größe sein soll und daß die aus ihr abgeleiteten Bewegungsgleichungen partielle Differentialgleichungen von maximal zweiter Ordnung sein dürfen. Darüber hinaus spielen Symmetrien eine wichtige Rolle bei der Konstruktion der Lagrange-Dichte, denn die Invarianz unter bestimmten Symmetrietransformationen schränkt die Anzahl der möglichen theoretischen Modelle weiter ein. Von herausragender Bedeutung sind dabei die Eichsymmetrien, welche die Grundlage für die fundamentalen Wechselwirkungen bilden. Man verlangt, daß die Lagrange-Dichte unter lokalen Eichtransformationen der Felder invariant ist, wobei die Transformationen von Raum und Zeit abhängen. Die Eichsymmetrie ist das fundamentale Prinzip, das die Form der Lagrange-Dichte bestimmt.

2.2 Elektroschwache Wechselwirkungen der Leptonen

Wir beginnen mit der Lagrange-Dichte für den elektroschwachen Sektor des Standardmodells und beschreiben zunächst die Wechselwirkungen der Leptonen. Dazu beschränken wir uns im ersten Schritt der Übersichtlichkeit wegen nur auf eine Lepton-Familie und wenden uns am Ende dieses Abschnittes der Verallgemeinerung auf drei Familien zu.

Da die schwache Wechselwirkung die Parität, also die Transformation der Raumspiegelung, maximal verletzt, ist es sinnvoll, zwischen links- und rechtshändigen Leptonfeldern zu unterscheiden. Die Leptonen sind Fermionen mit Spin $1/2$ und werden deshalb durch

einen vierkomponentigen Dirac-Spinor beschrieben, der im folgenden zur Abkürzung mit dem Symbol des betreffenden Leptons bezeichnet wird. Jede Leptonfamilie besteht aus einem negativ geladenen massiven Lepton l^- und einem masselosen elektrisch neutralen Neutrino ν_l . Die links- und rechtshändigen Komponenten der Spinoren sind durch

$$\begin{aligned} l_L(x) &:= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) l(x), & l_R(x) &:= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) l(x) \\ \nu_{l,L}(x) &:= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \nu_l(x), & \nu_{l,R}(x) &:= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \nu_l(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

gegeben. Da das Neutrino im Standardmodell als masselos angesehen wird, kann es nur eine links- oder rechtshändige Komponente besitzen. Da in der Natur nur linkshändige Neutrinos beobachtet werden, verschwindet also die rechtshändige Komponente. Man definiert nun ein linkshändiges Lepton-Dublett und ein rechtshändiges Lepton-Singulett

$$L(x) := \begin{pmatrix} \nu_{l,L}(x) \\ l_L(x) \end{pmatrix}, \quad R(x) := l_R(x) \quad (2.2)$$

bezüglich des schwachen Isospins. Wenn man die Massen der Leptonen vernachlässigt, hat der kinetische Term der Lagrange-Dichte die folgende Gestalt

$$\mathcal{L}_0^{(l)} = \bar{R}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu R(x) + \bar{L}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu L(x). \quad (2.3)$$

und ist offensichtlich invariant unter einer globalen $SU(2)$ -Eichtransformation

$$L'(x) = \mathbf{U} L(x), \quad R'(x) = R(x). \quad (2.4)$$

Jedes Element dieser Gruppe kann durch

$$\mathbf{U} = \exp \left(-i \sum_{i=1}^3 \alpha^i \tau^i \right) \quad (2.5)$$

parametrisiert werden, wobei die drei Generatoren durch die Pauli-Matrizen τ^i gegeben sind, deren Standard-Darstellung im Anhang (A.26) angegeben ist. Die drei Parameter α_i hängen nicht von den Raum- und Zeitkoordinaten ab. Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_0^{(l)}$ ist außerdem invariant unter globalen $U(1)$ -Transformation für die links- und rechtshändigen Komponenten

$$L'(x) = e^{-i\theta_1} L(x), \quad R'(x) = e^{-i\theta_2} R(x) \quad (2.6)$$

mit konstanten Parametern θ_1 und θ_2 . In (2.3) besteht noch eine weitgehende Symmetrie zwischen dem linkshändigen Elektron- und Neutrinfeld.

Im nächsten Schritt verlangt man, daß die Lagrange-Dichte auch unter lokalen Eichtransformationen invariant sein soll. Dazu werden die Parameter α^i und θ_1, θ_2 als Funktionen von Raum und Zeit aufgefaßt. Wie man durch Einsetzen sofort sieht, ist die Lagrange-Dichte (2.3) nicht invariant unter lokalen Eichtransformationen, weil durch die Ableitung

der Parameter Zusatzterme erzeugt werden, die die Eichinvarianz zerstören. Um diese Invarianz wiederherzustellen, führt man für jeden Parameter der Eichsymmetriegruppe ein sogenanntes Eichfeld ein. In der schwachen Wechselwirkung werden entsprechend der Anzahl der $SU(2)$ -Generatoren drei Eichfelder benötigt, die eine Konsequenz aus der Forderung nach Invarianz unter lokalen $SU(2)$ -Eichtransformationen sind. Man bezeichnet sie mit W_μ^i und faßt sie gewöhnlich in der Form

$$\mathbf{W}_\mu = \sum_{i=1}^3 W_\mu^i \tau^i \quad (2.7)$$

zusammen. Das Photonfeld vermittelt die elektromagnetische Wechselwirkung und ist eine Konsequenz aus der Eichinvarianz unter lokalen $U(1)$ -Transformationen. Da in der Natur nur eine Sorte Photonen beobachtet wird, können die beiden Parameter θ_1 und θ_2 nicht voneinander unabhängig sein, da dies sonst auf zwei verschiedene Photonfelder führen würde. Man macht daher den Ansatz

$$\theta_1 = Y_L \theta, \quad \theta_2 = Y_R \theta. \quad (2.8)$$

Die Größen Y_L und Y_R für die links- und rechtshändigen Komponenten der Leptonfelder sind feste Zahlen und werden als schwache Hyperladung bezeichnet. Das zugehörige Eichfeld bezeichnet man mit B_μ . Nun kann man beginnen, eine Lagrange-Dichte der Fermion- und Bosonfelder zu konstruieren, die unter lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Transformationen invariant ist. Die Eichtransformationen der Leptonfelder sind durch

$$L'(x) = e^{-iY_L \theta(x)} \mathbf{U}(x) L(x), \quad R'(x) = e^{-iY_R \theta(x)} R(x) \quad (2.9)$$

und die der Eichfelder durch

$$\begin{aligned} B'_\mu(x) &= e^{-i\theta(x)} B_\mu(x) e^{i\theta(x)} + \frac{2i}{g_1} \left(\partial_\mu e^{-i\theta(x)} \right) e^{i\theta(x)} = B_\mu(x) + \frac{2}{g_1} \partial_\mu \theta(x) \\ \mathbf{W}'_\mu(x) &= \mathbf{U}(x) \mathbf{W}_\mu(x) \mathbf{U}^\dagger(x) + \frac{2i}{g_2} \left(\partial_\mu \mathbf{U}(x) \right) \mathbf{U}^\dagger(x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

gegeben. Um die lokale Eichinvarianz zu gewährleisten, verwendet man das Prinzip der minimalen Kopplung. Dabei werden die Eichfelder an die Felder der Leptonen gekoppelt, indem man in der Lagrange-Dichte (2.3) die partiellen Ableitungen durch kovariante Ableitungen der Form

$$\begin{aligned} \partial_\mu R(x) &\longrightarrow \mathcal{D}_\mu R(x) := \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_R \right) R(x) \\ \partial_\mu L(x) &\longrightarrow \mathcal{D}_\mu L(x) := \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_L + \frac{ig_2}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \right) L(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

ersetzt. Man erhält dann eine eichinvariante Lagrange-Dichte, die die Leptonfelder und ihre Kopplungen an die Eichfelder enthält:

$$\mathcal{L}_{Leptonen}^{(l)} = \bar{R}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R(x) + \bar{L}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L(x). \quad (2.12)$$

Dieses Resultat kann man als Summe der ursprünglichen Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 und eines Wechselwirkungsanteils \mathcal{L}_{int} darstellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Leptonen}^{(l)} &= \bar{R}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu R(x) + \bar{L}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu L(x) \\ &\quad - \frac{g_1}{2} \left[Y_R \bar{R}(x) \gamma^\mu R(x) + Y_L \bar{L}(x) \gamma^\mu L(x) \right] B_\mu(x) - \frac{g_2}{2} \bar{L}(x) \gamma^\mu \mathbf{W}_\mu(x) L(x) \\ &\equiv \mathcal{L}_0^{(l)} + \mathcal{L}_{int}^{(l)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Setzt man die Eichtransformationen (2.9) und (2.10) in die Lagrange-Dichte (2.12) ein, so kann man sehen, daß sie unter diesen Transformationen invariant ist. Dazu zeigt man durch direktes Ausrechnen, daß sich die kovarianten Ableitungen der Leptonfelder in der gleichen Weise transformieren wie die Felder selbst:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu L'(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B'_\mu(x) Y_L + \frac{ig_2}{2} \mathbf{W}'_\mu(x) \right) L'(x) = e^{-iY_L \theta(x)} \mathbf{U}(x) \mathcal{D}_\mu L(x) \\ \mathcal{D}'_\mu R'(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_2}{2} B'_\mu(x) Y_R \right) R'(x) = e^{-iY_R \theta(x)} \mathcal{D}_\mu R(x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Daraus ergibt sich dann sofort die Invarianz der Lagrange-Dichte unter lokalen Eichtransformationen. Bisher sind die schwachen Hyperladungen Y_L und Y_R der links- und rechtshändigen Leptonen noch unbestimmt. Man kann sie dadurch festlegen, daß man den Wechselwirkungsanteil in der Lagrange-Dichte der Leptonen (2.13) ausmultipliziert und anschließend an die Wechselwirkungsterme in der Lagrange-Dichte für den Elektromagnetismus anpaßt. Mit

$$\mathbf{W}_\mu = \sum_{i=1}^3 W_\mu^i \tau^i = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

erhält man für $\mathcal{L}_{int}^{(l)}$ den expliziten Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{(l)} &= -\bar{l}_R \gamma^\mu \left(\frac{g_1}{2} Y_R B_\mu \right) l_R - \bar{l}_L \gamma^\mu \left(\frac{g_1}{2} Y_L B_\mu - \frac{g_2}{2} W_\mu^3 \right) l_L \\ &\quad - \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left(\frac{g_1}{2} Y_L B_\mu + \frac{g_2}{2} W_\mu^3 \right) \nu_L \\ &\quad - \frac{g_2}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left(W_\mu^1 - iW_\mu^2 \right) l_L - \frac{g_2}{2} \bar{l}_L \gamma^\mu \left(W_\mu^1 + iW_\mu^2 \right) \nu_L. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Linearkombinationen der reellen Felder, die an die Leptonströme in den ersten beiden Zeilen koppeln, können in der Form

$$J_\mu = \frac{g_1}{2} Y B_\mu + g_2 I_3 W_\mu^3 \quad (2.17)$$

geschrieben werden, wobei die dritte Komponente I_3 des schwachen Isospins als Vorfaktor des Feldes W_μ^3 direkt aus $\mathcal{L}_{int}^{(l)}$ abgelesen werden kann. Die Komponenten der schwachen Hyperladung Y sind durch Y_L und Y_R gegeben. Um nun die Terme aus $\mathcal{L}_{int}^{(l)}$ mit den Kopplungen des Elektromagnetismus zu vergleichen, betrachtet man statt der reellen Felder B_μ und W_μ^3 zwei normierte orthogonale Linearkombinationen dieser Felder, die durch

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu), \quad A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu) \quad (2.18)$$

gegeben sind und sich als die physikalischen Felder herausstellen. Das Photon koppelt nicht an den Strom der linkshändigen Neutrinos, so daß die entsprechende Linearkombination von Feldern nur einen Anteil des Z -Feldes besitzen kann. Setzt man in (2.16) für $Y_L = -1$, so erhält man die Kombination von W^3 - und B -Feld aus der Definition (2.18) des Z -Feldes. Definiert man den schwachen Mischungswinkel, der auch als Weinberg-Winkel bezeichnet wird, durch

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (2.19)$$

so kann man die Transformation der Felder als zweidimensionale Drehung

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

darstellen, bei der der Ausdruck

$$(W^3)^2 + B^2 = Z^2 + A^2 \quad (2.21)$$

invariant bleibt. Die inverse Transformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Die Felder W_μ^1 und W_μ^2 können zu zwei zueinander komplex konjugierten Feldern

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (2.23)$$

zusammengefaßt werden, weil sie nur in dieser Kombination auftreten und an die geladenen Leptonströme ankoppeln. Transformiert man B_μ und W_μ^3 auf die neuen Felder Z_μ und A_μ , so ergibt sich für den Ausdruck (2.17) in Abhängigkeit der beiden Parameter g_2 und θ_W

$$J_\mu = g_2 \left(\frac{Y}{2} + I_3 \right) \sin \theta_W A_\mu + g_2 \sin \theta_W \left(I_3 \cot \theta_W - \frac{Y}{2} \tan \theta_W \right) Z_\mu. \quad (2.24)$$

Der Parameter g_2 wird auch als schwache Kopplungskonstante bezeichnet und durch das Symbol g_W gekennzeichnet. Bezeichnet man mit e den Betrag der elektrischen Elementarladung und mit Q die Ladung der Teilchen in Einheiten von e , so erhält man durch Vergleich mit der Kopplung des elektromagnetischen Feldes

$$q A_\mu \equiv e Q A_\mu, \quad (2.25)$$

die proportional zur Ladung der Leptonen ist, die *Gell-Mann–Nishijima*-Beziehung

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3. \quad (2.26)$$

Außerdem kann man die Kopplungskonstanten g_1 und g_2 durch die Relationen

$$g_1 \cos \theta_W = g_2 \sin \theta_W = e \quad (2.27)$$

mit der elektrischen Elementarladung verknüpfen. Aus der Beziehung (2.26) ergeben sich nun die Werte der schwachen Hyperladung für die Komponenten des geladenen Leptons und des Neutrinos, weil deren Ladung und Isospin-Komponente bekannt sind. Die Zahlenwerte von Q , Y und I_3 sind für alle drei Komponenten der Leptonfelder in Tabelle 2.2 zusammengestellt. Die Felder A_μ und Z_μ sind das physikalische Photonfeld des Elektromagnetismus und das neutrale Z^0 -Feld, das an die neutralen Ströme in der schwachen Wechselwirkung koppelt. Setzt man für die Kombination der Felder W_μ^3 und B_μ in (2.17) die entsprechende Kombination der A - und Z -Felder aus (2.24) ein, so ergibt sich für den Anteil der Lagrange-Dichte, der die Wechselwirkung der Leptonen mit den Eichfeldern enthält, das Resultat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[\bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ l + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \nu_l \right] \\ & + e \bar{l} \gamma^\mu A_\mu l - \frac{e}{2 \sin(2\theta_W)} \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) Z_\mu \nu_l \\ & - \frac{e}{2 \sin(2\theta_W)} \bar{l} \gamma^\mu \left[(2 \sin^2 \theta_W - 1) (1 - \gamma_5) + 2 \sin^2 \theta_W (1 + \gamma_5) \right] Z_\mu l. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Der zweite Teil der Lagrange-Dichte enthält den kinetischen Term für die Eichbosonen. Er lautet

$$\mathcal{L}_{Bosonen} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{8} \text{Sp} [\mathbf{W}_{\mu\nu}(x) \mathbf{W}^{\mu\nu}(x)] \quad (2.29)$$

mit den Feldstärketensoren

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) \\ \mathbf{W}_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \mathbf{W}_\nu(x) - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu(x) + \frac{ig_2}{2} [\mathbf{W}_\mu(x), \mathbf{W}_\nu(x)]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Man kann sich davon überzeugen, daß auch (2.29) unter den lokalen Eichtransformation (2.10) invariant ist. Dazu betrachtet man die Transformation der Feldstärketensoren

$$\begin{aligned} B'_{\mu\nu} &= \partial_\mu B'_\nu - \partial_\nu B'_\mu = B_{\mu\nu} \\ \mathbf{W}'_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{W}'_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}'_\mu + \frac{ig_2}{2} [\mathbf{W}'_\mu, \mathbf{W}'_\nu] = \mathbf{U} \mathbf{W}_{\mu\nu} \mathbf{U}^\dagger \end{aligned} \quad (2.31)$$

unter Verwendung der Eigenschaft

$$\mathbf{0} = \partial_\mu \mathbf{1} = \partial_\mu (\mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger) = (\partial_\mu \mathbf{U}) \mathbf{U}^\dagger + \mathbf{U} (\partial_\mu \mathbf{U}^\dagger) \Rightarrow (\partial_\mu \mathbf{U}) \mathbf{U}^\dagger = -\mathbf{U} (\partial_\mu \mathbf{U}^\dagger) \quad (2.32)$$

und der dazu hermitesch konjugierten Gleichung. Drückt man die Lagrange-Dichte (2.29) durch die physikalischen Felder in (2.22) und (2.23) aus, so ergibt sich nach Auswertung der Kontraktionen und der Spur unter Verwendung von (2.27)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Bosonen}} = & -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} \\
& + \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} \left(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+ \right) \left(W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{-\nu} W^{+\mu} \right) \\
& + \frac{ie}{2 \sin \theta_W} \left(A_{\mu\nu} \sin \theta_W + Z_{\mu\nu} \cos \theta_W \right) \left(W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{-\nu} W^{+\mu} \right) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W \left(Z_\mu Z^\mu W_\nu^- W^{+\nu} - Z_\mu Z^\nu W_\nu^- W^{+\mu} \right) \\
& + \frac{ie}{2} \cot \theta_W \left[\left(Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^- \right) W^{+\mu\nu} - \left(Z_\mu W_\nu^+ - Z_\nu W_\mu^+ \right) W^{-\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2} \cot \theta_W \left[\left(Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^- \right) \left(A^\mu W^{+\nu} - A^\nu W^{+\mu} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(Z_\mu W_\nu^+ - Z_\nu W_\mu^+ \right) \left(A^\mu W^{-\nu} - A^\nu W^{-\mu} \right) \right] \\
& - \frac{ie}{2} \left[\left(A_\mu W_\nu^+ - A_\nu W_\mu^+ \right) W^{-\mu\nu} - \left(A_\mu W_\nu^- - A_\nu W_\mu^- \right) W^{+\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2} \left(A_\mu W_\nu^- - A_\nu W_\mu^- \right) \left(A^\mu W^{+\nu} - A^\nu W^{+\mu} \right). \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Die drei Summanden in der ersten Zeile sind die kinetischen Terme für die W - und Z -Bosonen. Alle anderen Terme beschreiben die Wechselwirkungen der Eichbosonen untereinander, die als Drei- und Vier-Eichboson-Kopplungen vorkommen.

Feldkomponenten	Leptonen			Quarks				Higgs	
	$\nu_{e,L}$	e_L	e_R	u_L	d_L	u_R	d_R	ϕ_A	ϕ_B
Q	0	-1	-1	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3	+1	0
I_3	+1/2	-1/2	0	+1/2	-1/2	0	0	+1/2	-1/2
Y	-1	-1	-2	+1/3	+1/3	+4/3	-2/3	+1	+1

Tabelle 2.2: Quantenzahlen von Ladung, schwachem Isospin und schwacher Hyperladung für die erste Familie von Leptonen und Quarks sowie die beiden Komponenten des Higgsfeldes.

2.3 Der Higgs-Mechanismus

In der bisher beschriebenen Theorie sind sowohl die Eichbosonen als auch die Leptonen masselos. Da aber experimentell nachgewiesen wurde, daß sie eine Masse besitzen, ist es

notwendig, in der Lagrange-Dichte Massenterme einzuführen. Tut man dies direkt durch Addition von Termen, die quadratisch in den Eichfeldern und proportional zu den entsprechenden Massenfaktoren $m^2/2$ sind, so stellt man fest, daß diese Ausdrücke nicht eichinvariant und daher für die Theorie ungeeignet sind. Auch ein Massenterm für das geladene Lepton verletzt die Eichsymmetrie, da das linkshändige $SU(2)$ -Dublett nur dann invariant ist, wenn das geladene Lepton und das Neutrino dieselbe Masse besitzen, was aber im Widerspruch zur Beobachtung steht. Um Massenterme in einer eichinvarianten Form zu konstruieren, bedient man sich einer Methode, die als Higgs-Mechanismus bezeichnet wird. In der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung führt man dazu ein schwaches $SU(2)$ -Dublett von komplexen Skalarfeldern

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

und ein Potential

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2]^2, \quad (2.35)$$

das als Higgs-Potential bezeichnet wird, ein. Die Größen m und ϕ_0 sind reelle freie Parameter und können als Masse des physikalischen Higgs-Bosons und dessen Grundzustandsenergie interpretiert werden. Die Ladung der beiden Feldkomponenten sowie ihre Quantenzahlen der schwachen Hyperladung und des schwachen Isospins sind in Tabelle 2.2 angegeben. Aus dem Feld Φ ergibt sich ein dritter Anteil zur Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (2.36)$$

der eichinvariant unter $SU(2) \times U(1)$ -Transformationen ist. Das Feld $\Phi(x)$ transformiert sich nach

$$\Phi'(x) = e^{-iY_H \theta(x)} \mathbf{U}(x) \Phi(x). \quad (2.37)$$

Die kovariante Ableitung ist durch

$$\mathcal{D}_\mu \Phi(x) = \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_H + \frac{ig_2}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \right) \Phi(x) \quad (2.38)$$

definiert und verhält sich unter lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Transformationen wie das Feld Φ

$$\mathcal{D}'_\mu \Phi'(x) = \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B'_\mu(x) Y_H + \frac{ig_2}{2} \mathbf{W}'_\mu(x) \right) \Phi'(x) = e^{-iY_H \theta(x)} \mathbf{U}(x) \mathcal{D}_\mu \Phi(x). \quad (2.39)$$

Der Wert der schwachen Hyperladung ergibt sich auch für das Higgsfeld aus der *Gell-Mann-Nishijima*-Beziehung (2.26) und ist in Tabelle 2.2 angegeben. Das Higgs-Potential $V(\Phi^\dagger \Phi)$ besteht bis auf eine Konstante aus einem linearen sowie einem quadratischen Term in $\Phi^\dagger \Phi$. Die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{Higgs} ist ebenfalls invariant unter lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Eichtransformationen. Die minimale Feldenergie für das Feld Φ bei verschwindenden Eichfeldern ist bei konstantem Φ gegeben durch die Bedingung

$$|\Phi| = \sqrt{\Phi^\dagger \Phi} = \phi_0. \quad (2.40)$$

Es gibt daher unendlich viele Vakuumzustände, die durch den Zustand niedrigster Energie gegeben sind. Um einen festen Grundzustand festzulegen, wählt man eine bestimmte Eichung, indem man in der $SU(2)$ -Transformationsmatrix (2.5) die drei Parameter α^i so festlegt, daß man die Transformation in der Form

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

schreiben kann. Dann verschwindet die erste Komponente, $\phi_A = 0$, und die zweite ϕ_B wird reell. Der Grundzustand ist in diesem Fall eindeutig durch

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

gegeben. Angeregte Zustände können in der Form

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \Phi_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

geschrieben werden, wobei das Feld $h(x)$ reell ist. Die Wahl eines bestimmten Grundzustandes zerstört die ursprüngliche Eichsymmetrie unter der Gruppe $SU(2)$ und wird daher als spontane Symmetriebrechung bezeichnet. Der ausgewählte Grundzustand hat nicht mehr dieselben Symmetrien wie die Lagrange-Dichte. Die lokale $U(1)$ -Symmetrie bleibt ungebrochen, so daß die Felder Φ unter der speziellen $SU(2) \times U(1)$ -Transformation

$$e^{-i\theta/2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invariant bleiben. In einer Feldtheorie entwickelt man die Lagrange-Dichte um den Grundzustand, so daß nun \mathcal{L}_{Higgs} durch das Feld Φ_0 ausgedrückt werden muß. Setzt man für $\Phi(x)$ den Ausdruck (2.43) ein und transformiert die Eichfelder gemäß (2.22) und (2.23) auf die physikalischen Felder, so erhält man mit der Definition des Potentials

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = m^2 h^2 + \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} + \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} \equiv V(h) \quad (2.44)$$

für die Lagrange-Dichte des Higgs-Sektors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) + \frac{g_2^2}{2} W_\mu^- W^{+\mu} \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right)^2 - V(h) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) - m^2 h^2 + \frac{1}{4} \phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu + \frac{g_2^2}{2} \phi_0^2 W_\mu^- W^{+\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{4} h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 h \right) \left(g_2^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right) \\
& - \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Mit Hilfe von (2.27) kann man die Kopplungskonstanten g_1 und g_2 durch die elektrische Elementarladung und den Weinberg-Winkel ausdrücken. Man erkennt, daß die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{Higgs} nach der spontanen Symmetriebrechung die Massenterme für die W - und Z -Bosonen erzeugt, während das Photon masselos bleibt. Außerdem enthält sie ein massives Skalarfeld h , das mit sich selbst wechselwirkt und als Higgsfeld bezeichnet wird. Der Parameter m aus dem Higgspotential kann nun mit der Higgs-Masse identifiziert werden. Die erste Zeile in (2.45) enthält den kinetischen Term für das Higgs-Boson sowie die Massenterme der W - und Z -Bosonen. In der zweiten Zeile treten die Wechselwirkungsterme zwischen dem Higgs und den Eichbosonen auf, während in der dritten Zeile die Selbstwechselwirkung des Higgs-Teilchens beschrieben wird. Man kann die Massen der geladenen W -Bosonen und des neutralen Z -Bosons aus der Lagrange-Dichte (2.45) direkt ablesen und erhält

$$M_W = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right), \quad M_Z = \sqrt{\frac{g_1^2 + g_2^2}{2}} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right). \tag{2.46}$$

Daraus ergibt sich für das Massenverhältnis der massiven Eichbosonen die Relation

$$\frac{M_W}{M_Z} = \sqrt{\frac{g_2^2}{g_1^2 + g_2^2}} = \cos \theta_W. \tag{2.47}$$

Die Z -Masse ist also größer als die Masse der W -Bosonen.

Schließlich gibt es noch einen vierten Term der Lagrange-Dichte, der für die Erzeugung der Leptonmassen verantwortlich ist. Er wird als Yukawa-Term bezeichnet und beschreibt außerdem noch die Wechselwirkungen zwischen den Leptonen und dem Higgsfeld. Es gibt zwei Kombinationen der linkshändigen Leptonfelder mit dem Higgsfeld, die unter $SU(2)$ -Transformationen invariant sind und einen Skalar bilden:

$$\Phi^\dagger L = \phi_A^\dagger \nu_{l,L} + \phi_B^\dagger l_L, \quad \Phi^T \epsilon L = \phi_A l_L - \phi_B \nu_{l,L}. \tag{2.48}$$

Die antisymmetrische Matrix ϵ ist durch

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

definiert. Da das Neutrino masselos ist, benötigt man nur einen Massenterm für das geladene Lepton, der aus der ersten Invarianten aufgebaut ist. Der Yukawa-Term hat dann die Form

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{(l)} = -G_l [\bar{R} (\Phi^\dagger L) + (\bar{L} \Phi) R] \tag{2.50}$$

und ist eichinvariant unter den lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Transformationen der Felder (2.9) und (2.37). Hier bezeichnet G_l eine dimensionslose Kopplungskonstante. Nach der spontanen Symmetriebrechung geht der Yukawa-Term nach Einsetzen des Feldes (2.43) in die Form

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{(l)} = -G_l \phi_0 (l_L^\dagger l_R + l_R^\dagger l_L) - \frac{G_l h}{\sqrt{2}} (l_L^\dagger l_R + l_R^\dagger l_L) \quad (2.51)$$

über. Der erste Term kann als Massenterm des geladenen Leptons l^- identifiziert werden. Die Leptonmasse ist

$$m_l = G_l \phi_0. \quad (2.52)$$

Der zweite Term beschreibt die Kopplung zwischen dem Lepton und dem Higgsfeld h .

Bisher haben wir uns nur auf eine Leptonfamilie beschränkt. Die Verallgemeinerung auf alle drei bekannten Familien besteht darin, daß man die Summe der kinetischen Terme über die drei Leptonfamilien bildet

$$\mathcal{L}_{Leptonen} = \sum_{l=e,\mu,\tau} \mathcal{L}_{Leptonen}^{(l)} = \sum_{i=1}^3 [\bar{L}_i(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_i(x) + \bar{R}_i(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_i(x)] \quad (2.53)$$

und den Yukawa-Term in der Form

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{R}_i G_{l,ij} \Phi^\dagger L_j + \bar{L}_i \Phi G_{l,ij}^\dagger R_j \right) \quad (2.54)$$

ansetzt. Die Summationsindices i und j bezeichnen die drei Leptonfamilien. Nach der Symmetriebrechung hat das Higgsfeld die Gestalt (2.43), wodurch sich der Yukawa-Term zu

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right) \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{l}_{R,i} G_{l,ij} l_{L,j} + \bar{l}_{L,i} G_{l,ij}^\dagger l_{R,j} \right) \quad (2.55)$$

vereinfacht. Um nun die Massenterme für die Leptonen zu erhalten, transformiert man die links- und rechtshändigen Leptonfelder auf eine Darstellung äquivalenter Felder

$$l'_{R,i} = W_{R,ij} l_{R,j}, \quad l'_{L,i} = W_{L,ij} l_{L,j}, \quad \nu'_{L,i} = V_{L,ij} \nu_{L,j}, \quad (2.56)$$

wobei \mathbf{W}_L , \mathbf{W}_R und \mathbf{V}_L zunächst drei beliebige unitäre Matrizen sind. Durch spezielle Wahl dieser Matrizen ist es möglich, die Matrix der Kopplungskoeffizienten G_l auf Diagonalgestalt zu bringen. Die beiden Matrizen, die die geladenen Leptonfelder transformieren, sind dann bis auf Multiplikation von links mit einer unitären Diagonalmatrix

$$\mathbf{U}_D = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_3} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

eindeutig bestimmt. Die Matrix V_L kann beliebig gewählt werden. Auf diese Weise erreicht man eine Transformation auf die Masseneigenzustände der Leptonen. Mit Hilfe der Diagonalmatrix

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{W}_R \mathbf{G}_l \mathbf{W}_L^\dagger \quad (2.58)$$

läßt sich nun der Yukawa-Term schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} &= - \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right) \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{l}'_{R,i} M_{l,ij} l'_{L,j} + \bar{l}'_{L,i} M_{l,ij}^\dagger l'_{R,j} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^3 m_i \left(\bar{l}'_{R,i} l'_{L,i} + \bar{l}'_{L,i} l'_{R,i} \right) - \frac{h}{\sqrt{2} \phi_0} \sum_{i=1}^3 m_i \left(\bar{l}'_{R,i} l'_{L,i} + \bar{l}'_{L,i} l'_{R,i} \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die Leptonmassen ergeben sich zu $m_i = \phi_0 M_{l,ii}$. Der erste Anteil des Yukawa-Terms entspricht also dem Massenterm für die Leptonfelder, der zweite Term beschreibt die Wechselwirkung des Higgsfeldes mit den Leptonen.

Schließlich muß noch der leptonische Anteil der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{Leptonen}$ auf die neuen Felder transformiert werden. Wählt man nun $\mathbf{V}_L = \mathbf{W}_L$, so ändern sich die Kopplungsterme von Leptonen und Eichbosonen in $\mathcal{L}_{Leptonen}$ nicht, wenn man auf die Masseneigenzustände transformiert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Leptonen} &= \sum_{l=e,\mu,\tau} \left[\bar{L}'(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L'(x) + \bar{R}'(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R'(x) \right] \\ &= \sum_{l=e,\mu,\tau} \left\{ \bar{l}' i\gamma^\mu \partial_\mu l' + \bar{\nu}'_l i\gamma^\mu \partial_\mu \nu'_l \right. \\ &\quad - \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[\bar{\nu}'_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ l' + \bar{l}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \nu'_l \right] \\ &\quad + e \bar{l}' \gamma^\mu A_\mu l' - \frac{e}{2 \sin(2\theta_W)} \bar{\nu}'_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) Z_\mu \nu'_l \\ &\quad \left. - \frac{e}{2 \sin(2\theta_W)} \bar{l}' \gamma^\mu \left[(2 \sin^2 \theta_W - 1) (1 - \gamma_5) + 2 \sin^2 \theta_W (1 + \gamma_5) \right] Z_\mu l' \right\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

2.4 Elektroschwache Wechselwirkungen von Quarks

Neben den drei Leptonfamilien gibt es im Standardmodell noch drei Familien von Quarks, die auch an der elektroschwachen Wechselwirkung teilhaben. Daher benötigt man einen weiteren Term in der Lagrange-Dichte, der den Quarksektor berücksichtigt. Die Ähnlichkeit zwischen dem Zerfallsprozeß des d -Quarks und dem Myon-Zerfall legt es nahe, die Quarkfelder in der gleichen Weise zusammenzufassen wie die Leptonfelder. Dazu führt man die links- und rechtshändigen Komponenten der Quarkfelder

$$q_L(x) := \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) q(x), \quad q_R(x) := \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) q(x) \quad (2.61)$$

ein und faßt die linkshändigen Komponenten einer Familie in einem $SU(2)$ -Dublett zusammen, während die rechtshändigen Komponenten $SU(2)$ -Singulets bilden. Für die erste Generation von Quarks schreibt man daher

$$L_q(x) := \begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix}, \quad R_u(x) := u_R(x), \quad R_d(x) := d_R(x). \quad (2.62)$$

Im Unterschied zu den Leptonen existiert für das u -Quark auch eine rechtshändige Komponente, da es im Gegensatz zum Neutrino eine Masse besitzt. Wie im Falle der Leptonen führt man nun einen kinetischen Term für die Quarks ein und verlangt, daß dieser unter lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Eichtransformationen invariant sein soll. Dazu muß man eine kovariante Ableitung für die Quarkfelder definieren, die die bekannten Eichfelder für die elektroschwache Wechselwirkung enthält. Für die erste Generation von Quarks ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu L_q(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_L + \frac{ig_2}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \right) L_q(x) \\ \mathcal{D}_\mu R_u(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_{u,R} \right) R_u(x) \\ \mathcal{D}_\mu R_d(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_{d,R} \right) R_d(x). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Damit lautet der kinetische Term der Lagrange-Dichte für die Quarkfelder der ersten Familie

$$\mathcal{L}_{Quarks}^{(q)} = \bar{L}_q(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_q(x) + \bar{R}_u(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_u(x) + \bar{R}_d(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_d(x). \quad (2.64)$$

Er ist invariant unter den lokalen Eichtransformationen der Quarkfelder

$$L'_q(x) = e^{-iY_{q,L}\theta(x)} \mathbf{U}(x) L(x), \quad R'_u(x) = e^{-iY_{u,R}\theta(x)} R_u(x), \quad R'_d(x) = e^{-iY_{d,R}\theta(x)} R_d(x). \quad (2.65)$$

Das läßt sich leicht überprüfen, indem man die Transformationseigenschaft der kovarianten Ableitung betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu L'_q(x) &= e^{-iY_{q,L}\theta(x)} \mathbf{U}(x) \mathcal{D}_\mu L_q(x) \\ \mathcal{D}'_\mu R'_u(x) &= e^{-iY_{u,R}\theta(x)} \mathcal{D}_\mu R_u(x), \quad \mathcal{D}'_\mu R'_d(x) = e^{-iY_{d,R}\theta(x)} \mathcal{D}_\mu R_d(x). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Man sieht auch hier, daß sich die kovariante Ableitung auf dieselbe Art transformiert wie die Felder selbst. Die Zahlenwerte für die schwache Hyperladung der Quarks ergeben sich wie bei den Leptonen aus der *Gell-Mann–Nishijima*-Beziehung (2.26), die durch Anpassung des Wechselwirkungsanteils der Lagrange-Dichte (2.64) an den entsprechenden QED-Term abgeleitet wird. Sie sind in Tabelle 2.2 angegeben. Neben dem kinetischen Term gibt es für Quarkfelder noch einen Yukawa-Term, der den Quarks eine Masse zuordnet und die Kopplung mit dem Higgsfeld beschreibt. Für die erste Familie von Quarks benötigt man

zwei Massenterme, da sowohl das u -Quark als auch das d -Quark eine Masse besitzen. Deshalb braucht man bei der Konstruktion des Yukawa-Terms beide Invarianten (2.48) und kann diesen dann schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa}^{(q)} &= G_u \left[\bar{R}_u(x) \Phi^T(x) \epsilon L_q(x) + \bar{L}_q(x) \epsilon^T \Phi^*(x) R_u(x) \right] \\ &\quad - G_d \left[\bar{R}_d(x) \Phi^\dagger(x) L_q(x) + \bar{L}_q(x) \Phi(x) R_d(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Er ist invariant unter den Eichtransformationen (2.65) und (2.37) der Quarkfelder und des Higgsfeldes. Die beiden Zahlen G_u und G_d sind dimensionslose Kopplungskonstanten. Nach spontaner Symmetriebrechung ist das Higgsfeld durch (2.43) gegeben. Damit ergibt sich für den Yukawa-Term der Quarkfelder in Abhängigkeit des Feldes h

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa}^{(q)} &= -G_u \phi_0 \left(u_L^\dagger u_R + u_R^\dagger u_L \right) - G_d \phi_0 \left(d_L^\dagger d_R + d_R^\dagger d_L \right) \\ &\quad - \frac{G_u h}{\sqrt{2}} \left(u_L^\dagger u_R + u_R^\dagger u_L \right) - \frac{G_d h}{\sqrt{2}} \left(d_L^\dagger d_R + d_R^\dagger d_L \right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Die ersten beiden Terme sind die Massenterme für das u - und das d -Quark mit den Quarkmassen

$$m_u = G_u \phi_0, \quad m_d = G_d \phi_0, \quad (2.69)$$

während der dritte und vierte Term die Wechselwirkung der Quarks mit dem Higgsfeld beschreiben.

Die Verallgemeinerung auf drei Generationen von Quarks ergibt für den kinetischen Term der Quarkfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Quarks} &= \sum_{q=1}^3 \mathcal{L}_{Quarks}^{(q)} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\bar{L}_{q,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_{q,i}(x) + \bar{R}_{u,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_{u,i}(x) + \bar{R}_{d,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_{d,i}(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Der Yukawa-Term kann allgemein in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} &= \sum_{i,j=1}^3 \left[\bar{R}_{u,i}(x) G_{u,ij} \Phi^T(x) \epsilon L_{q,i}(x) + \bar{L}_{q,j}(x) \epsilon^T \Phi^*(x) G_{u,ij}^\dagger R_{u,j}(x) \right] \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^3 \left[\bar{R}_{d,i}(x) G_{d,ij} \Phi^\dagger(x) L_{q,j}(x) + \bar{L}_{q,i}(x) \Phi(x) G_{d,ij}^\dagger R_{d,j}(x) \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

angesetzt werden, wobei die Indizes i und j die drei verschiedenen Familien kennzeichnen. Die Indizes u und d an den Quarkfeldern sollen verdeutlichen, daß es sich um up-type- und

down-type-Quarks handelt. Nach der spontanen Symmetriebrechung erhält das Higgsfeld Φ die spezielle Form (2.43) und der Yukawa-Term geht über in den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} = & - \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right) \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{u}_{R,i} G_{u,ij} u_{L,j} + \bar{u}_{L,i} G_{u,ij}^\dagger u_{R,j} \right) \\ & - \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right) \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{d}_{R,i} G_{d,ij} d_{L,j} + \bar{d}_{L,i} G_{d,ij}^\dagger d_{R,j} \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Dies kann man wie im Falle der Leptonfelder auf die Masseneigenzustände der Quarks transformieren, wobei man aber nun sechs massive Quarkfelder benötigt. Transformiert man die Quarkfelder bezüglich des schwachen Isospins in die neuen Felder

$$\begin{aligned} u'_{R,i} &= U_{R,ij} u_{R,j}, & u'_{L,i} &= U_{L,ij} u_{L,j} \\ d'_{R,i} &= D_{R,ij} d_{R,j}, & d'_{L,i} &= D_{L,ij} d_{L,j}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

so kann man durch eine geeignete Wahl der unitären Matrizen \mathbf{U}_R , \mathbf{U}_L , \mathbf{D}_R und \mathbf{D}_L erreichen, daß die beiden Matrizen \mathbf{G}_u und \mathbf{G}_d durch reelle Diagonalmatrizen dargestellt werden können. Die Diagonalelemente kann man anschließend den Quarkmassen zuordnen. Die vier Transformationsmatrizen sind bis auf eine linksseitige Multiplikation mit einer unitären Diagonalmatrix eindeutig bestimmt. Die Diagonalmatrizen lauten

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{U}_R \mathbf{G}_u \mathbf{U}_L^\dagger, \quad \mathbf{M}_d = \mathbf{D}_R \mathbf{G}_d \mathbf{D}_L^\dagger. \quad (2.74)$$

Damit erhält man für den Yukawa-Term der Quarkfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} = & - \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right) \sum_{i,j=1}^3 \left[\left(\bar{u}'_{R,i} M_{u,ij} u'_{L,j} + \bar{u}'_{L,i} M_{u,ij}^\dagger u'_{R,j} \right) \right. \\ & \left. + \left(\bar{d}'_{R,i} M_{d,ij} d'_{L,j} + \bar{d}'_{L,i} M_{d,ij}^\dagger d'_{R,j} \right) \right] \\ = & - \sum_{i=1}^3 \left[m_{u,i} (\bar{u}'_{R,i} u'_{L,i} + \bar{u}'_{L,i} u'_{R,i}) + m_{d,i} (\bar{d}'_{R,i} d'_{L,i} + \bar{d}'_{L,i} d'_{R,i}) \right] \\ & - \frac{h}{\sqrt{2} \phi_0} \sum_{i=1}^3 \left[m_{u,i} (\bar{u}'_{R,i} u'_{L,i} + \bar{u}'_{L,i} u'_{R,i}) + m_{d,i} (\bar{d}'_{R,i} d'_{L,i} + \bar{d}'_{L,i} d'_{R,i}) \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Die Massen der up-type- und der down-type-Quarks sind durch $m_{u,i} = \phi_0 M_{u,ii}$ und $m_{d,i} = \phi_0 M_{d,ii}$ gegeben. Da die Matrizen der Transformationen auf die Masseneigenzustände der Quarks bis auf unitäre Diagonalmatrizen festgelegt sind, hat man im Wechselwirkungsanteil von \mathcal{L}_{Quarks} , der die Wechselwirkung mit den Eichbosonen beinhaltet, nicht mehr die Freiheit, diese Matrizen so zu wählen, daß die entsprechenden Terme der

Lagrange-Dichte für die transformierten Felder ungeändert bleiben. Die nichtdiagonalen Elemente der Matrix \mathbf{W}_μ , die die Eichbosonfelder W_μ^+ und W_μ^- enthalten, sind dafür verantwortlich, daß die up-type- und die down-type-Quarks in den geladenen Strömen gemischt auftreten. Drückt man diese Ströme durch die Masseneigenzustände der Quarks aus, so ergibt sich für den Strom, der an das W^+ koppelt, der folgende Ausdruck:

$$J_+^\mu = \sum_{j,k=1}^3 \bar{u}'_{L,j} \left(U_L D_L^\dagger \right)_{jk} \gamma^\mu d'_{L,k}. \quad (2.76)$$

Der dazu komplex konjugierte Strom J_-^μ koppelt an das W^- . Die auftretende Matrix

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_L \mathbf{D}_L^\dagger \quad (2.77)$$

wird als *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*-Matrix oder abgekürzt *CKM*-Matrix bezeichnet und ist durch die Theorie unbestimmt. Sie kann durch vier reelle Parameter dargestellt werden, die zusätzlich zu den bereits im Standardmodell vorhandenen dazukommen. Diese neuen Parameter müssen experimentell bestimmt werden. Die Eigenschaften der *CKM*-Matrix sind im Anhang A.5 angegeben. Die geladenen Ströme der Quarks sind die einzigen Terme der Lagrange-Dichte, in denen die *CKM*-Matrix auftritt. Transformiert man auf die Masseneigenzustände der Quarks, so erhält man für den kinetischen Term

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Quarks} &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \bar{u}'_i i\gamma^\mu \partial_\mu u'_i + \bar{d}'_i i\gamma^\mu \partial_\mu d'_i \right. \\ &- \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_{j=1}^3 \left[\bar{u}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{ij} W_\mu^+ d'_j + \bar{d}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{ij}^\dagger W_\mu^- u'_j \right] \\ &- \frac{2}{3} e \bar{u}'_i \gamma^\mu A_\mu u'_i + \frac{1}{3} e \bar{d}'_i \gamma^\mu A_\mu d'_i \\ &- \frac{e}{2 \sin(2\theta_W)} \bar{u}'_i \gamma^\mu \left[\left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right) (1 - \gamma_5) - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W (1 + \gamma_5) \right] Z_\mu u'_i \\ &\left. - \frac{e}{2 \sin(2\theta_W)} \bar{d}'_i \gamma^\mu \left[\left(-1 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) (1 - \gamma_5) + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W (1 + \gamma_5) \right] Z_\mu d'_i \right\}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Alle weiteren bereits diskutierten Beiträge zur Lagrange-Dichte werden durch die Transformation auf die Masseneigenzustände der Quarks nicht verändert.

Wir haben nun alle Terme der Lagrange-Dichte für den elektroschwachen Sektor des Standardmodells diskutiert. Sie beschreiben die kinetischen Terme der Fermionen und der Eichbosonen sowie deren Wechselwirkungen untereinander. Außerdem sind auch die Massenterme aller Teilchen enthalten, die nur durch die Einführung des Higgsfeldes in eichinvarianter Form konstruiert werden können. Die Kopplung der Fermion- und Eichbosonfelder an das Higgsfeld liefert nach der spontanen Symmetriebrechung die Teilchenmassen sowie die Wechselwirkungen der Teilchen mit dem Higgs-Boson.

2.5 Die starke Wechselwirkung

Das Standardmodell beschreibt neben den elektroschwachen Kräften auch die starke Wechselwirkung, die nur zwischen den Quarks wirkt. Diese wird aber nicht im Rahmen einer einheitlichen Feldtheorie eingebaut, sondern als unabhängige Feldtheorie hinzugenommen. Die Theorie der starken Wechselwirkung ist die anfangs erwähnte QCD, in der die starke Kraft durch Eichbosonen vermittelt wird, die als Folge der Invarianz einer Eichtheorie unter lokalen $SU(3)$ -Transformationen auftreten. Wir wollen nun als letzten fehlenden Anteil des Standardmodells die Lagrange-Dichte der QCD diskutieren. Dazu gehen wir von sogenannten colour-Tripletts für die Felder der sechs bekannten Quarks aus, die man als dreikomponentigen Vektor darstellen kann:

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_r(x) \\ q_g(x) \\ q_b(x) \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

wobei die Indizes r , g und b die drei Farbzustände der Quarks kennzeichnen, die gewöhnlich als rot, grün und blau bezeichnet werden. Das Feld q stellt einen der verschiedenen Quarkflavours u , d , s , c , b oder t dar. Der kinetische Term der Lagrange-Dichte für die Quarkfelder kann in der bekannten Dirac-Form von Spin-1/2-Teilchen geschrieben werden:

$$\mathcal{L}_{0,Quarks} = \sum_{q=u,d,s,c,b,t} \left[\bar{q}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu q(x) - m_q \bar{q}(x) q(x) \right]. \quad (2.80)$$

Dieser Term ist invariant unter globalen $SU(3)$ -Transformationen. Geht man nun zu lokaler Eichinvarianz über

$$q \rightarrow q' = \mathbf{U} q, \quad (2.81)$$

wobei \mathbf{U} eine Matrix aus der Gruppe $SU(3)$ ist, so muß man entsprechend der Anzahl von $SU(3)$ -Generatoren acht Eichfelder einführen, die man analog zur Matrix \mathbf{W}_μ aus der elektroschwachen Eichtheorie in der Form

$$\mathbf{G}_\mu = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \lambda_a \quad (2.82)$$

zusammenfassen kann. Die acht Generatoren der $SU(3)$ können durch die *Gell-Mann*-Matrizen dargestellt werden, die wir mit λ_a bezeichnen. Ihre Eigenschaften sind im Anhang A.6 zusammengefaßt. Die acht reellen unabhängigen Eichfelder G_μ^a sind die Gluonfelder. Die Matrix \mathbf{G}_μ ist ebenso wie \mathbf{W}_μ hermitesch und spurlos. Sie transformiert sich unter lokalen $SU(3)$ -Eichtransformationen nach

$$\mathbf{G}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x) \mathbf{G}_\mu(x) \mathbf{U}^\dagger(x) + \frac{i}{g_s} \left(\partial_\mu \mathbf{U}(x) \right) \mathbf{U}^\dagger(x). \quad (2.83)$$

Wir definieren die kovariante Ableitung als

$$\mathcal{D}_\mu q(x) = \left(\partial_\mu + ig_s \mathbf{G}_\mu(x) \right) q(x). \quad (2.84)$$

Der Parameter g_s ist die starke Kopplungskonstante. Ersetzt man in dem kinetischen Anteil der Lagrange-Dichte für die Quarks (2.80) die partielle Ableitung durch die kovariante, so ist das Resultat unter lokalen $SU(3)$ -Transformationen eichinvariant. Dies liefert

$$\mathcal{L}_{Quarks} = \sum_{q=u,d,s,c,b,t} \left[\bar{q}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu q(x) - m_q \bar{q}(x) q(x) \right]. \quad (2.85)$$

Die Eichinvarianz folgt sofort aus dem Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung

$$\mathcal{D}'_\mu q'(x) = \mathbf{U}(x) \mathcal{D}_\mu q(x), \quad (2.86)$$

die sich wieder in der selben Weise wie die Felder selbst transformiert. Der Feldstärketensor ist definiert durch

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathbf{G}_\nu(x) - \partial_\nu \mathbf{G}_\mu(x) + ig \left[\mathbf{G}_\mu(x), \mathbf{G}_\nu(x) \right] \quad (2.87)$$

und transformiert sich in der Form

$$\mathbf{G}'_{\mu\nu}(x) = \mathbf{U}(x) \mathbf{G}_{\mu\nu}(x) \mathbf{U}^\dagger(x). \quad (2.88)$$

Damit kann man einen eichinvarianten kinetischen Term für die Gluonfelder in der QCD-Lagrange-Dichte konstruieren. Er ist gegeben durch den Ausdruck

$$\mathcal{L}_{Gluonen} = -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[\mathbf{G}_{\mu\nu}(x) \mathbf{G}^{\mu\nu}(x) \right] = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a(x) G^{a,\mu\nu}(x). \quad (2.89)$$

Die Gluonen sind masselose Teilchen, so daß man im Gegensatz zur elektroschwachen Theorie keine Massenterme für die Eichbosonen benötigt. Daher ist es nicht notwendig, den Higgs-Mechanismus auch in der QCD zu verwenden. Die gesamte Lagrange-Dichte der QCD besteht also nur aus den beiden kinetischen Termen für die Quarks und die Gluonen. Man erhält damit

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{Quarks} + \mathcal{L}_{Gluonen}. \quad (2.90)$$

2.6 Lagrange-Dichte des Standardmodells

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir noch einmal die gesamte Lagrange-Dichte des Standardmodells in kompakter Form zusammenfassen. Der elektroschwache Anteil des Standardmodells enthält die eichinvarianten kinetischen Terme für drei Generationen von Leptonen (2.53) und Quarks (2.70). Die dort auftretenden linkshändigen Dubletts und rechtshändigen Singulettts sind Eigenzustände des schwachen Isospins. Die Wechselwirkungen mit den Eichbosonen sind in der kovarianten Ableitung der Fermionfelder enthalten. Die kinetischen Terme der Eichbosonen wurden in (2.29) angegeben und sind ebenfalls explizit eichinvariant. Um die Massen für die Eichbosonen in eichinvarianter Form zu erzeugen, wurde das Higgsfeld eingeführt, dessen kinetischer und Selbstwechselwirkungsanteil

durch den Ausdruck (2.36) gegeben ist. Die kovariante Ableitung im kinetischen Term beschreibt die Wechselwirkungen des Higgsfeldes mit den Eichbosonen. Die Massen der Leptonen und der Quarks werden schließlich durch die eichinvarianten Yukawa-Terme (2.54) und (2.71) erzeugt, die außerdem die Kopplungen der Fermionen mit dem Higgsfeld enthalten. Bildet man die Summe aller dieser Terme, so erhält man die Lagrange-Dichte für den elektroschwachen Sektor des Standardmodells, der explizit eichinvariant unter lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Transformationen ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EW} &= \mathcal{L}_{Leptonen} + \mathcal{L}_{Bosonen} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} \\
&= \sum_{i=1}^3 [\bar{L}_i(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_i(x) + \bar{R}_i(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_i(x)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 [\bar{L}_{q,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_{q,i}(x) + \bar{R}_{u,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_{u,i}(x) + \bar{R}_{d,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_{d,i}(x)] \\
&\quad - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{8} \text{Sp}[\mathbf{W}_{\mu\nu}(x) \mathbf{W}^{\mu\nu}(x)] \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{R}_i(x) G_{l,ij} \Phi^\dagger(x) L_j(x) + \bar{L}_i(x) \Phi(x) G_{l,ij}^\dagger R_j(x) \right) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^3 \left[\bar{R}_{u,i}(x) G_{u,ij} \Phi^T(x) \epsilon L_{q,i}(x) + \bar{L}_{q,j}(x) \epsilon^T \Phi^*(x) G_{u,ij}^\dagger R_{u,j}(x) \right] \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^3 \left[\bar{R}_{d,i}(x) G_{d,ij} \Phi^\dagger(x) L_{q,j}(x) + \bar{L}_{q,i}(x) \Phi(x) G_{d,ij}^\dagger R_{d,j}(x) \right]. \tag{2.91}
\end{aligned}$$

Die Lagrange-Dichte der QCD ist die Summe aus dem kinetischen Term der sechs verschiedenen Quarks (2.85), der auch die Massenterme für die Quarks enthält, und dem kinetischen Term der Gluonen (2.89). Da die Gluonen masselos sind, ist es in der QCD nicht erforderlich, mit Hilfe eines Higgs-Mechanismus Eichbosonenmassen zu erzeugen. Die Lagrange-Dichte der QCD ist explizit eichinvariant unter lokalen $SU(3)$ -Transformationen und lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_{Quarks} + \mathcal{L}_{Gluonen} \\
&= \sum_{q=u,d,s,c,b,t} \left[\bar{q}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu q(x) - m_q \bar{q}(x) q(x) \right] - \frac{1}{2} \text{Sp}[\mathbf{G}_{\mu\nu}(x) \mathbf{G}^{\mu\nu}(x)] \tag{2.92}
\end{aligned}$$

Um die Lagrange-Dichte des Standardmodells zu konstruieren, geht man von einer Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ bezüglich der drei Farbzustände, der linkshändigen Dubletts und der schwachen Hyperladung aus, was jeweils durch die Indices C , L und Y angedeutet werden soll. Die beiden Anteile für den elektroschwachen Sektor (2.91) und die

QCD (2.92) können zusammengefaßt werden, indem man in (2.91) alle Quarkfelder, die in den $SU(2)$ -Singulets und -Dubletts vorkommen, durch die dreikomponentigen Felder

$$q(x) \rightarrow \mathbf{q}(x) \equiv \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} (x) \quad (2.93)$$

ersetzt. Jedes Quarkfeld $q_i(x)$ ist ein vierkomponentiger Dirac-Spinor, und die Indices $i = r, g, b$ bezeichnen die drei Farbzustände rot, grün und blau, die jedes Quark besitzen kann. Die eichkovarianten Ableitungen (2.63) der Quarkfelder $q(x)$ werden ersetzt durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \mathbf{L}_{q,i}(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_L + \frac{ig_2}{2} \mathbf{W}_\mu(x) + ig_s \mathbf{G}_\mu(x) \right) \mathbf{L}_{q,i}(x) \\ \mathcal{D}_\mu \mathbf{R}_u(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_{u,R} + ig_s \mathbf{G}_\mu(x) \right) \mathbf{R}_u(x) \\ \mathcal{D}_\mu \mathbf{R}_d(x) &= \left(\partial_\mu + \frac{ig_1}{2} B_\mu(x) Y_{d,R} + ig_s \mathbf{G}_\mu(x) \right) \mathbf{R}_d(x), \end{aligned} \quad (2.94)$$

während die kovarianten Ableitungen (2.11) der Leptonfelder und die des Higgsfeldes (2.38) unverändert bleiben. Die Eichfelder B_μ gehören zur $U(1)$ -Eichgruppe, und die Felder \mathbf{W}_μ sind die Eichfelder der $SU(2)$. Sie wirken nur auf die Dubletts der Quark- und Leptonfelder. Die Gluonfelder \mathbf{G}_μ schließlich sind die $SU(3)$ -Eichfelder und wirken nur auf die dreikomponentigen Quarkfelder \mathbf{q} . Nun können wir die vollständige Lagrange-Dichte des Standardmodells in kompakter Form schreiben. Sie lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} &= \sum_{i=1}^3 [\bar{L}_i(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_i(x) + \bar{R}_i(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu R_i(x)] \\ &+ \sum_{i=1}^3 [\bar{\mathbf{L}}_{q,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \mathbf{L}_{q,i}(x) + \bar{\mathbf{R}}_{u,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \mathbf{R}_{u,i}(x) + \bar{\mathbf{R}}_{d,i}(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \mathbf{R}_{d,i}(x)] \\ &- \frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{8} \text{Sp} [\mathbf{W}_{\mu\nu}(x) \mathbf{W}^{\mu\nu}(x)] - \frac{1}{2} \text{Sp} [\mathbf{G}_{\mu\nu}(x) \mathbf{G}^{\mu\nu}(x)] \\ &- \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{R}_i(x) G_{l,ij} \Phi^\dagger(x) L_j(x) + \bar{L}_i(x) \Phi(x) G_{l,ij}^\dagger R_j(x) \right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \left[\bar{\mathbf{R}}_{u,i}(x) G_{u,ij} \Phi^T(x) \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{L}_{q,i}(x) + \bar{\mathbf{L}}_{q,j}(x) \boldsymbol{\epsilon}^T \Phi^*(x) G_{u,ij}^\dagger \mathbf{R}_{u,j}(x) \right] \\ &- \sum_{i,j=1}^3 \left[\bar{\mathbf{R}}_{d,i}(x) G_{d,ij} \Phi^\dagger(x) \mathbf{L}_{q,j}(x) + \bar{\mathbf{L}}_{q,i}(x) \Phi(x) G_{d,ij}^\dagger \mathbf{R}_{d,j}(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.95)$$

2.7 Experimentelle Tests des Standardmodells

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist in der Vergangenheit immer wieder experimentell getestet worden. Dabei wurden die theoretischen Vorhersagen, die auf der Grundlage des Standardmodells getroffen wurden, bisher immer in überzeugender Weise bestätigt. Trotzdem ist es natürlich notwendig, das Standardmodell weiterhin zu testen, um herauszufinden, ob sich in den Experimenten neue physikalische Effekte entdecken lassen, die nicht im Rahmen des Standardmodells beschrieben werden können. Dazu werden die Experimente weiter verbessert, um die Genauigkeit der Resultate immer weiter zu erhöhen. Außerdem versucht man, andere Observablen zu messen, die bislang noch nicht getestet wurden.

Mit zunehmender Genauigkeit der Experimente ist es auch auf theoretischer Seite notwendig, die Genauigkeit der Rechnungen zu unterschiedlichen Observablen weiter zu erhöhen. Im Rahmen der Störungstheorie müssen daher für bestimmte Prozesse Strahlungskorrekturen von mindestens erster oder zweiter Ordnung in der Kopplungskonstanten berechnet werden, um die erforderliche Genauigkeit zu erreichen. Eine Zusammenfassung der experimentellen Tests und der Vergleich mit den theoretischen Vorhersagen des Standardmodells findet man bei der *ParticleDataGroup* am CERN [22].

In der Quantenelektrodynamik wurden bereits in den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts sehr große Erfolge bei Vergleichen mit Präzisionsexperimenten erzielt. Die QED beschreibt alle bis heute bekannten rein elektromagnetischen Phänomene in sehr guter Übereinstimmung mit den Experimenten. Insbesondere beschreibt sie sehr genau die winzigen Abweichungen des magnetischen Moments des Elektrons von dem Wert, der aus der Dirac-Gleichung folgt [23, 24] sowie die Lamb-shift im Spektrum des Wasserstoffatoms [25, 26]. Darüberhinaus kann auch die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung an den gebundenen Zuständen Positronium und Myonium mit Hilfe der QED mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Die Experimente, die in Übereinstimmung mit der Theorie sind, gehören zu den genauesten Tests in der Teilchenphysik überhaupt.

Aus dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons sowie aus dem Quanten-Hall-Effekt und anderer Messungen ist in jüngerer Vergangenheit auch die Feinstruktur-Konstante α bei Energien, die der Elektronenmasse entsprechen, zu

$$\alpha = 1/137.03599976(50)$$

gemessen worden [27].

Die schwache Wechselwirkung zeigt sich beispielsweise beim β -Zerfall in Atomkernen oder beim Neutron-Zerfall. Im Standardmodell wird sie durch den Austausch von W - und Z -Bosonen beschrieben, die in den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts bei Experimenten am CERN in Genf experimentell nachgewiesen wurden.

Ein wichtiger Parameter des Standardmodells ist die Fermi-Konstante G_F , die aus der Formel für die Myon-Lebensdauer [28, 29] zu

$$G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} GeV^{-2}$$

bestimmt wurde. Sie tritt als Kopplungskonstante bei Prozessen der schwachen Wechselwirkung auf. Dazu ist es notwendig, die Zerfallsrate des Myon-Zerfalls möglichst genau zu kennen. Die Strahlungskorrekturen zum Myon-Zerfall bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ sind seit einiger Zeit bekannt [29].

Auch die Masse des Z -Bosons ist ein wichtiger Parameter des Standardmodells, der ebenfalls experimentell bestimmt werden muß. Aus der Form der Z -Linie wurde die Z -Masse bei LEP 1 zu

$$M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

gemessen [30].

Mit Hilfe der experimentell bestimmten Werte von α , G_F und M_Z können der Weinbergwinkel θ_w und die Masse des W -Bosons M_W berechnet werden, da sie über gewisse Relationen mit den oben genannten Parametern zusammenhängen. Dazu müssen allerdings die Massen des Topquarks m_t und des Higgs-Bosons M_H bekannt sein. Der Wert von $\sin^2 \theta_w$ kann aus Observablen des z -Pols und aus Prozessen neutraler Ströme bestimmt werden [30,31] und hängt vom Renormierungsverfahren ab.

Die Genauigkeit der Experimente ist inzwischen so hoch, daß auf theoretischer Seite die vollständigen $\mathcal{O}(\alpha)$ -Strahlungskorrekturen gerechnet werden müssen. Für neutrale Ströme und Prozesse des Z -Pols werden diese Korrekturen gewöhnlich in zwei Klassen eingeteilt. Die erste Klasse enthält reine QED-Korrekturen, die sich aus reellen Photonen in Bremsstrahlungs-Beiträgen und virtuellen Photonen in Schleifen-Korrekturen zusammensetzen. Vakuum-Polarisations-Diagramme sind hier nicht enthalten. Zur zweiten Klasse gehören elektroschwache Korrekturen wie $\gamma\gamma$ -, γZ -, ZZ - und WW -Vakuum-Polarisation, außerdem Vertex-Korrekturen und Box-Graphen, die virtuelle W - und Z -Bosonen enthalten. Viele dieser Korrekturen gehen in die renormierte Fermi-Konstante ein, während andere das Bornsche Matrixelement neutraler Ströme oder des Z -Pols verändern [31].

Um das Standardmodell zu testen, wurden auch eine Reihe Wirkungsquerschnitte und Asymmetrie-Beziehungen gemessen. Alle Experimente, die vorwiegend am CERN durchgeführt wurden, zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie. Darüberhinaus sind auch die Breiten des W - und des Z -Bosons bestimmt worden. Die theoretischen Vorhersagen des Standardmodells für diese Werte betragen $\Gamma_Z = 2.4961 \pm 0.0012 \text{ GeV}$ für die Z -Breite und $\Gamma_W = 2.0921 \pm 0.0025 \text{ GeV}$ für die W -Breite. Die entsprechenden experimentellen Werte von $\Gamma_z = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV}$ und $\Gamma_W = 2.114 \pm 0.042 \text{ GeV}$ [30] stimmen damit sehr gut überein. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß alle Experimente bisher noch keine Abweichungen von den theoretischen Vorhersagen des Standardmodells gefunden haben.

Die experimentelle Überprüfung der QCD als Grundlage der starken Wechselwirkung gestaltet sich schwieriger als im Falle der elektroschwachen Theorie. Die QCD ist eine nicht-abelsche Eichtheorie, deren Feldquanten, die Gluonen, auch untereinander wechselwirken können. Es wird vermutet, daß diese Eigenschaft dafür verantwortlich ist, daß man Quarks in der Natur nicht als freie Teilchen beobachtet und sie immer als farbladungs-neutraler hadronischer Zustand gebunden sind. Deshalb bleibt nur das experimentelle Studium der Hadronen, deren Wechselwirkungen untereinander sehr komplex ausfallen können.

Das Prinzip der *asymptotischen Freiheit* führt dazu, daß die renormierte QCD-Kopplung α_s bei steigenden Energien zunehmend kleiner wird. Daher ist es nur bei hohen Energien möglich, störungstheoretische Rechnungen auszuführen. Präzisionstests der QCD, ähnlich denen in der QED, können also nur in diesem Bereich, der störungstheoretisch zugänglich ist, durchgeführt werden. Bei niedrigen Energien versucht man durch bestimmte Näherungen oder effektive Theorien einen besseren Zugang zur Berechnung von QCD-Observablen zu erhalten.

Trotzdem hat es im Verständnis der QCD bei niedrigen Energien im nichtperturbativen Bereich in den letzten Jahren einige Fortschritte gegeben, zum Beispiel im Studium weicher hadronischer Prozesse oder bei Rechnungen mit Hilfe der Gitter-Eichtheorie [32], bei der die Raumzeit diskretisiert und die Observablen damit numerisch berechnet werden.

Die Bestimmung der starken Kopplungskonstanten ist einer der wichtigsten Präzisionstests der QCD. Die Abhängigkeit der effektiven QCD-Kopplung ist durch die β -Funktion gegeben, welche die Lösung der Renormierungsgruppen-Gleichung ist. Bei der Lösung dieser Gleichung tritt eine Integrationskonstante auf, die eine fundamentale Größe der QCD ist und experimentell bestimmt werden muß. Sie kann als Wert von α_s bei einer festen Referenzskala μ_0 gewählt werden. Man hat sich darauf geeinigt, den Wert $\mu_0 = M_Z$ als Referenzskala festzusetzen.

Die experimentellen Resultate für $\alpha_s(M_Z)$ können aus verschiedenen Prozessen wie tief-inelastischer Streuung, dem Zerfall des τ -Leptons, Hadron-Kollisionen bei hohen Energien und anderen bestimmt werden. Ein Durchschnitt der verschiedenen experimentellen Ergebnisse für die starke Kopplungskonstante beträgt $\alpha_s(M_Z) = 0.1171 \pm 0.0014$. Eine Zusammenfassung der unterschiedlichen Experimente zur Bestimmung von $\alpha_s(M_Z)$ findet man bei der *ParticleDataGroup* [22].

Kapitel 3

Polarisationsobservable im Ruhesystem des b -Quarks

3.1 Einleitung

Quarks und Gluonen sind die Elementarteilchen, die an der starken Wechselwirkung teilnehmen, sie bilden die grundlegenden Bausteine der Quantenchromodynamik (QCD). Aufgrund einer Eigenschaft dieser Teilchen, die als *confinement* bezeichnet wird, treten sie in der Natur nicht als freie Teilchen auf, sondern sind in hadronischen Zuständen gebunden, die eine Gesamt-Farbladung von null besitzen. Trotzdem kann man Prozesse wie beispielsweise den Zerfall von Hadronen näherungsweise durch den grundlegenden Quark-Zerfall im Rahmen der QCD beschreiben, und es ist möglich, die hadronischen Eigenschaften durch zusätzliche Korrekturen zum QCD-Prozeß zu berücksichtigen. Auf diese Weise erhält man für verschiedene Observable hadronischer Prozesse theoretische Resultate von ausreichender Genauigkeit, um sie experimentell überprüfen und mit Vorhersagen des Standardmodells vergleichen zu können. Weil die Resultate der QCD-Rechnungen in vielen Fällen bereits einen großen prozentualen Anteil an den Gesamtergebnissen für die hadronischen Prozesse ausmachen, sind die grundlegenden QCD-Prozesse von Quarks und Gluonen für theoretische Berechnungen von großem Interesse. Besonders der Zerfall von Hadronen, die ein schweres bottom-Quark enthalten, eignen sich gut für den Vergleich mit dem Experiment, weil die zugehörigen hadronischen Korrekturen mit Hilfe der effektiven Theorie schwerer Quarks (HQET) in relativ einfacher Weise berechnet werden können. In diesem Kapitel wollen wir daher den semileptonischen Zerfall eines bottom-Quarks in ein charm-Quark und ein Leptonpaar diskutieren, wobei der Spin des c -Quarks berücksichtigt werden soll. Wir berechnen die QCD-Strahlungskorrekturen für den spinunabhängigen und den spinabhängigen Anteil zur differentiellen Zerfallsrate bezüglich der Energie des c -Quarks in analytischer Form und verwenden die Resultate, um diese beiden Anteile und die longitudinale Polarisation des c -Quarks graphisch darzustellen und den Einfluß der Strahlungskorrekturen numerisch auszuwerten. Es gibt im wesentlichen zwei wichtige Anwendungen

des b -Quark-Zerfalls. Dies sind zum einen die Fragmentations-Funktionen und zum anderen Vergleiche mit leptonischen Zerfällen. Beide Anwendungen sollen im folgenden kurz diskutiert werden.

Bei typischen Experimenten in Beschleuniger-Anlagen zeigen sich die Quarks und die Gluonen als Jets von Hadronen, deren Achse die Richtung des ursprünglichen Partons kennzeichnet. Der Prozeß der Umwandlung eines Partons in Hadronen wird Fragmentation genannt. Bei diesem Vorgang kann die störungstheoretische Behandlung in der QCD normalerweise nicht angewandt werden, was die Analyse der Fragmentation sehr schwierig macht. Trotzdem ist ihr Verständnis wichtig für die Erforschung der zugrunde liegenden physikalischen Prozesse. Die Information über Fragmentation ist in den sogenannten Fragmentations-Funktionen [33, 34] enthalten, die die Wahrscheinlichkeit angeben, daß ein Quark in ein bestimmtes Hadron mit festem longitudinalen Impuls fragmentiert. Die Fragmentation und die Berechnung der Fragmentations-Funktionen sind nicht Gegenstand dieser Arbeit und sollen nur als mögliche Anwendung für die in diesem Kapitel angegebenen Resultate erwähnt werden. Die Fragmentations-Funktionen können auch spin-abhängig sein [35, 36], um Prozesse wie die Produktion von Baryonen mit Spin $1/2$ zu beschreiben. Sie geben die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür an, ein Spin- $1/2$ -Baryon mit einer Polarisation in Richtung der longitudinalen oder transversalen Polarisation des ursprünglich vorhandenen Quarks relativ zu dessen Impuls zu finden. Diese Fragmentations-Funktionen enthalten wichtige Informationen über Spin-Übergänge während des Fragmentations-Vorgangs. Sie beinhalten Details des nichtperturbativen Mechanismus, bei dem die Polarisation der Partonen teilweise in diejenige der Hadronen übergeht. Eine typische Problemstellung ist die Frage, wie sich der Spin von Hadronen aus dem der Partonen zusammensetzt.

In dieser Arbeit interessieren wir uns für den semileptonischen Zerfall eines unpolarisierten b -Quarks $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$ in ein polarisiertes c -Quark und ein leichtes Lepton-Paar, dessen Massen sehr klein gegenüber der b -Masse sind. Dies ist der elementare Prozeß für den hadronischen Zerfall eines \bar{B} -Mesons oder eines Λ_b -Baryons in einen hadronischen Endzustand X_c , der ein c -Quark enthält, und in ein D_s - oder ein D_s^* -Meson. Eine weitere Anwendung ist der Zerfall eines B -Mesons in ein polarisiertes Λ_c -Baryon. Die Fragmentations-Funktion $F_{c(\uparrow) \rightarrow \Lambda_c(\uparrow)}(E_c)$ eines solchen Prozesses hängt von der Energie des c -Quarks im zugrundeliegenden Prozeß ab. Deshalb ist es notwendig, die polarisierte differentielle Zerfallsrate $d\Gamma/dE_c$ zu berechnen. Der elementare QCD-Prozeß des b -Quark-Zerfalls kann als Näherung zur Bestimmung der Fragmentations-Funktion herangezogen werden. Dazu berechnet man die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung der Kopplungskonstanten α_s . Sie enthalten sowohl Schleifenkorrekturen als auch Bremsstrahlungsbeiträge. Mit Hilfe der HQET können dazu nichtperturbative Korrekturen berechnet werden. Ein B -Meson oder ein Λ_b -Baryon zerfallen in führender Ordnung der HQET wie ein b -Quark. Eine Anwendung auf hadronische Prozesse wird in Kapitel 6 diskutiert.

Eine weitere Anwendung des b -Zerfalls ist der Vergleich der analytischen Resultate mit denen der rein leptonischen Zerfälle, bei denen ein geladenes Myon oder Tau-Lepton gemäß

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad \tau^- \rightarrow \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu, \quad \tau^- \rightarrow e^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_e \quad (3.1)$$

in ein zugehöriges Neutrino und ein Leptonpaar zerfällt, das sich aus einem weiteren,

leichteren geladenen Lepton und dem Antineutrino derselben Familie zusammensetzt. Die Analogie des b -Zerfalls zu den rein leptonischen Zerfällen kann dadurch erreicht werden, daß man das Matrixelement des leptonischen Zerfalls mittels einer Fierz-Transformation in eine Form bringt, die mit der des b -Zerfalls identisch ist. Die Amplitude des Myon-Zerfalls beispielsweise geht in die Amplitude des b -Zerfalls über, wenn man die Ersetzungen

$$b \leftrightarrow \mu^-, \quad c \leftrightarrow e^-, \quad e^- \leftrightarrow \nu_\mu, \quad \bar{\nu}_e \leftrightarrow \bar{\nu}_e \quad (3.2)$$

durchführt. Außerdem muß man beim semileptonischen b -Zerfall das CKM-Matrixelement berücksichtigen, mit dem der Quark-Strom multipliziert wird. Bei den Strahlungskorrekturen gibt es schließlich noch einen Unterschied in den Kopplungskonstanten von QED und QCD, die durch die Ersetzung $\alpha_s C_F \leftrightarrow \alpha$ ineinander überführt werden können, wobei $C_F = 4/3$ der Farbfaktor für die Quarks ist.

Die unpolarisierte differentielle Rate $d\Gamma/dE_e$ für den Myon-Zerfall ist bereits 1956 berechnet worden [37]. Das Ergebnis enthielt allerdings einen Fehler, der erst 1959 korrigiert werden konnte [38]. Das Resultat für die differentielle Rate beinhaltet die virtuellen und die reellen Strahlungskorrekturen bis einschließlich $\mathcal{O}(\alpha)$ sowie die vollständige Abhängigkeit von der Elektron-Masse. Eine kurze historische Übersicht zu diesen Berechnungen der $\mathcal{O}(\alpha)$ -Strahlungskorrekturen für den leptonischen Myon-Zerfall findet man in [39]. Eine Erweiterung der Resultate auf polarisierte Myonen in Form einer polarisierten und einer unpolarisierten Strukturfunktion unter der vollen Berücksichtigung der Elektron-masse wurde 2002 angegeben [40]. Die unpolarisierte Strukturfunktion beschreibt die bereits bekannte unpolarisierte Rate, während die polarisierte Strukturfunktion die Effekte der Myon-Polarisation angibt. Beide Strukturfunktionen wurden ebenfalls mit endlicher Elektron-Masse und bis zur ersten Ordnung in der Kopplungskonstanten α gerechnet, was einen direkten Vergleich mit den Ergebnissen des b -Zerfalls erlaubt, bei dem man die Masse des c -Quarks nicht gegenüber der b -Masse vernachlässigen kann. Zusätzlich zu den differentiellen Raten sind in [40] die totalen Raten für die beiden Strukturfunktionen berechnet worden. Sie gehen direkt durch Integration über die Elektron-Energie aus den differentiellen Raten hervor. Eine ausführliche Diskussion des Myon-Zerfalls einschließlich der Polarisati-on von Myon und Elektron wurde 2003 [41] behandelt. Die Resultate enthalten insgesamt 5 Strukturfunktionen, wobei neben den beiden bereits bekannten auch drei neue berechnet wurden, die die Polarisation des Elektrons sowie Spin-Spin-Korrelationen zwischen den Spin-Vektoren des Elektrons und des Myons beschreiben. Die 5 zugehörigen Strukturfunktionen für die totalen Raten sind dort ebenfalls berechnet worden. Eine endliche Elektronen-Masse wurde bei allen Rechnungen beibehalten. Die Strahlungskorrekturen für die Strukturfunktionen sind bis zur ersten Ordnung α berechnet worden. Die Bildung der Grenzwerte der unterschiedlichen Strukturfunktionen für verschwindende Elektron-Masse $m_e \rightarrow 0$ erlaubt es, die Resultate mit den seit 1974 bekannten Strukturfunktionen für masselose Elektronen [42] zu vergleichen.

Das Vorgehen bei der Berechnung der Raten für den b -Zerfall ist völlig identisch mit den Rechnungen für den Myon-Zerfall, so daß die einzelnen Schritte zur Berechnung direkt übernommen werden können. Wir werden in diesem Kapitel nur die beiden Struktur-funktionen der differentiellen Raten für den Zerfall eines unpolarisierten b -Quarks in ein

polarisiertes c -Quark und ein Leptonpaar berechnen, die den unpolarisierten Anteil und die Polarisation des c beschreiben. Eine Verallgemeinerung auf Polarisation von b - und c -Quark einschließlich Spin-Spin-Korrelation und die Angabe der entsprechenden totalen Raten können aus [41] übernommen werden, wenn man die oben genannten Unterschiede in den Matrixelementen zwischen leptonischen und semileptonischen Zerfällen (3.2) berücksichtigt und die unterschiedlichen Kopplungen ersetzt.

In den folgenden Abschnitten werden die polarisierte und die unpolarisierte Strukturfunktion G_0 und G_P für die differentielle Rate des semileptonischen Zerfalls $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$ bezüglich der Energie des c -Quarks berechnet. Die Strukturfunktionen werden im Ruhesystem des b -Quarks ausgewertet und die Resultate in analytischer Form angegeben. Zunächst diskutieren wir die Bornsche Näherung dieses Zerfallsprozesses. Anschließend werden die QCD-Einschleifen-Korrekturen und die Beiträge zur Bremsstrahlung in erster Ordnung der starken Kopplungskonstanten α_s berechnet. Im Rahmen der Schleifen-Rechnungen werden die auftretenden IR - und UV -Divergenzen regularisiert und letztere mit Hilfe der Renormierung beseitigt. Schließlich werden alle Beiträge aus Bornscher Rate und Schleifen-Rechnung sowie der Bremsstrahlungs-Korrektur zur inklusiven Rate aufsummiert, um ein endliches Ergebnis zu erhalten, in dem sich die IR -Singularitäten der einzelnen Beiträge gegenseitig aufheben. Am Ende dieses Kapitels werden die Resultate numerisch ausgewertet und in verschiedenen Schaubildern als Funktionen der skalierten c -Energie graphisch dargestellt. Es folgt abschließend eine Diskussion der gezeigten Resultate.

Alle in diesem sowie in den folgenden Kapiteln durchgeführten analytischen und numerischen Berechnungen wurden mit dem Computeralgebra-System *Mathematica* [43] durchgeführt, um den Rechenaufwand, besonders für die Integrationen und das Zusammenfassen größerer analytischer Ausdrücke, weitgehend zu automatisieren. Für das Ausführen und die Vereinfachung von Spuren über Produkte von Diracschen Gamma-Matrizen, welche bei der Bestimmung der Zerfallsraten auftreten, wurde außerdem das Programmpaket *HIP* [44] für symbolische Rechnungen in der Hochenergiephysik verwendet. Die Feynman-Diagramme und einige Schaubilder wurden mit dem $C++$ -Programm *FeynDiagram* [45] erzeugt.

3.2 Bornsche Näherung

In diesem Abschnitt wird die differentielle Rate für den Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein Leptonpaar in Bornscher Näherung berechnet, wobei die Polarisation des c -Quarks berücksichtigt werden soll. Die Neutrinomasse wird bei allen Rechnungen null gesetzt, und die Masse des geladenen Leptons kann gegenüber der b -Masse vernachlässigt werden, wenn das Massenverhältnis entsprechend klein ist. Für Elektronen ist dies in sehr guter Näherung erfüllt. Auch für das Myon kann diese Näherung angewandt werden, während die Tau-Masse dafür zu groß ist. Wir betrachten bei den folgenden Rechnungen nur leichtere Leptonen, bei denen die Vernachlässigung der Masse erlaubt ist.

Die Resultate werden im wesentlichen durch zwei Strukturfunktionen G_0 und G_P dargestellt, die den unpolarisierten Anteil beziehungsweise den Beitrag der Polarisation des c -Quarks beschreiben. Da die Resultate über den Azimuth-Winkel ϕ integriert werden,

gibt es nur einen Beitrag zur longitudinalen Polarisation, der transversale Anteil hingegen verschwindet bei der Winkelintegration, weil er proportional zu $\sin \phi$ oder $\cos \phi$ ist. Die differentielle Rate für longitudinale Polarisation parallel oder antiparallel zum Impuls des c -Quarks ergibt sich schließlich bis auf Vorfaktoren aus der Summe oder aus der Differenz $G_0 \pm G_P$ der unpolarisierten und der polarisierten Strukturfunktion.

In der Quantenfeldtheorie bestimmt man zunächst die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den vorliegenden Zerfallsprozeß, aus der man durch Bildung des Betragsquadrates und anschließender Integration die Zerfallsrate bestimmen kann. Die Amplitude wird mit Hilfe der Störungstheorie ausgerechnet, wobei man eine Entwicklung in eine Potenzreihe nach der starken Kopplungskonstanten α_s vornimmt, die bei einer Energie in der Größenordnung der b -Masse einen numerischen Wert von etwa 0.2 besitzt. Damit ist sichergestellt, daß die erste Ordnung der Störungsreihe betragsmäßig deutlich kleiner als die Bornsche Näherung ist. Der hier diskutierte b -Zerfall kann also störungstheoretisch behandelt werden.

3.2.1 Übergangsamplitude

In diesem Abschnitt wird die niedrigste Ordnung der Störungstheorie, die auch als Bornsche Rate bezeichnet wird, berechnet. Die Amplitude für den Zerfall $b \rightarrow c^+ + l^- + \bar{\nu}_l$ eines bottom-Quarks in ein charm-Quark und ein Leptonpaar ist durch das Übergangsmatrixelement \mathcal{M} gegeben. Man rechnet es mit Hilfe der in Anhang A.8 angegebenen Feynman-Regeln aus. Das entsprechende Feynman-Diagramm, das zu dem betrachteten Zerfalls-Prozeß beiträgt, ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Mit Hilfe der Feynman-Regeln

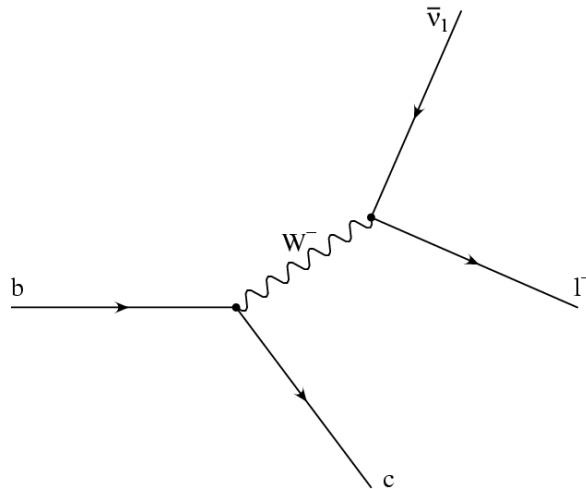


Abbildung 3.1: Feynman-Diagramm für den Bornterm zum Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$

ergibt sich für das Übergangs-Matrixelement

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_c, s_c) \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} V_{bc} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] u(p_b, s_b) \left[\frac{i(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \bar{u}(p_l, s_l) \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\
& = \frac{-ig_w^2}{8} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \\
& \quad \times \bar{u}(p_l, s_l) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\
& = \frac{-ig_w^2}{8} V_{bc} H_\mu \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} L_\nu, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
H_\mu & = \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \\
L_\nu & = \bar{u}(p_l, s_l) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \tag{3.4}
\end{aligned}$$

für den Quark- beziehungsweise den Lepton-Strom verwendet werden. Mit $g_w = e / \sin \theta_w$ wird die schwache Kopplungskonstante bezeichnet, und V_{bc} ist das CKM -Matrixelement für das b - und das c -Quark. Die äußeren Linien hängen von den Impulsen der Teilchen und deren Spinvektoren ab. Zur Kennzeichnung wird das jeweilige Symbol des betreffenden Teilchens als Index an die Impuls- und Spinvariablen p und s geschrieben. Wegen der Energie-Impuls-Erhaltung $q = p_b - p_c = p_l + p_{\nu_l}$ kann man die $q^\mu q^\nu$ -Terme im Zähler des W -Propagators durch Anwendung der Dirac-Gleichung auf die Spinoren wirken lassen und erhält damit Terme, die proportional zu Quadraten von Massenverhältnissen der Form $m_q m_l / M_W^2$ sind, wo m_q und m_l die Massen der Quarks und der Leptonen sind. Weil nun jedoch die Quark- und die Leptonmassen sehr viel kleiner als die W -Masse sind, kann der $q^\mu q^\nu$ -Term in guter Näherung gegenüber dem $g^{\mu\nu}$ -Term vernachlässigt werden. Außerdem kann man im Propagatordenner q^2 gegenüber M_W^2 vernachlässigen, weil der maximale Wert $q^2 = (m_b - m_c)^2$ beträgt und damit auch wesentlich kleiner als M_W^2 ist. Mit diesen Vereinfachungen lautet nun das Matrixelement

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} & = \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\
& = \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} H_\mu L^\mu \tag{3.5}
\end{aligned}$$

und sein komplex konjugierter Wert

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^* & = \frac{ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_b, s_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu u(p_c, s_c) \bar{v}(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u(p_l, s_l) \\
& = \frac{ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc}^* H_\nu^* L^{\nu*}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Daraus berechnet sich die Übergangsamplitude als Betragsquadrat des Matrixelementes

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^4}{64M_W^4} |V_{bc}|^2 H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

mit dem Hadron- und dem Lepton-Tensor

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= H_\mu H_\nu^* = \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \bar{u}(p_b, s_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu u(p_c, s_c) \\ L^{\mu\nu} &= L^\mu L^{*\nu} = \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \bar{v}(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u(p_l, s_l). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Im hier betrachteten Fall sollen die Spins des zerfallenden b -Quarks sowie der beiden Leptonen nicht beobachtet werden, während der Spin des c -Quarks gemessen werden soll. Man summiert deshalb die Übergangsamplitude über die Spins der auslaufenden Leptonen und mittelt den Spin des bottom-Quarks, um die gewünschte Amplitude für ein polarisiertes charm-Quark zu erhalten. Das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes läßt sich dann in der Form

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 := \frac{1}{2} \sum_{s_b, s_l, s_{\nu_l}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^4}{64M_W^4} |V_{bc}|^2 \bar{H}_{\mu\nu} \bar{L}^{\mu\nu} \quad (3.9)$$

darstellen, wobei der spingemittelte Hadron- und der spinsummierte Lepton-Tensor durch

$$\bar{H}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \sum_{s_b} H_{\mu\nu}, \quad \bar{L}^{\mu\nu} := \sum_{s_l, s_{\nu_l}} L^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

definiert werden. Dies kann man als Spur von Diracschen Gamma-Matrizen schreiben. Ihre Eigenschaften sind im Anhang A.3 dargestellt. Verwendet man die Clifford-Algebra, so lassen sich die Spuren etwas vereinfachen, und man erhält für den Hadron- und Lepton-Tensor das folgende Resultat:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \text{Sp} [(p_c + m_c) (1 + \gamma_5 \not{s}_c) (1 + \gamma_5) \gamma_\mu (\not{p}_b + m_b) \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} [(p_c - m_c \not{s}_c) (1 + \gamma_5) \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu] \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} [\not{p}_c \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \\ \bar{L}^{\mu\nu} &= \text{Sp} [(p_l + m_l) (1 + \gamma_5) \gamma^\mu \not{p}_{\nu_l} \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \\ &= 2 \text{Sp} [\not{p}_l \gamma^\mu \not{p}_{\nu_l} \gamma^\nu (1 - \gamma_5)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hier wurde zur Abkürzung $\bar{p}_c = p_c - m_c s_c$ gesetzt. Der Vierervektor s_c beschreibt den Spin des c -Quarks. Er erfüllt die Relationen

$$s_c^2 = -1, \quad p_c \cdot s_c = 0.$$

Für die Auswertung der Spuren benutzt man die Spurensätze (A.33) für Gamma-Matrizen und erhält schließlich für den spinsummierten Hadron- und Lepton-Tensor Ausdrücke, die nur von den Viererimpulsen der am Zerfallsprozeß beteiligten Teilchen und vom Spinvektor s_c des c -Quarks abhängen:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu} &= 2 [g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}] \bar{p}_c^\rho p_b^\sigma \equiv 2 T_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{p}_c^\rho p_b^\sigma \\ \bar{L}^{\mu\nu} &= 8 [g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}] p_{l,\alpha} p_{\nu_l,\beta} \equiv 8 T^{\mu\nu\alpha\beta} p_{l,\alpha} p_{\nu_l,\beta}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Der Tensor $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ wurde zur Abkürzung der Ausdrücke in eckigen Klammern, die den metrischen Tensor und den Levi-Civita-Tensor enthalten, definiert. Die Kontraktion

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} T^{\mu\nu\alpha\beta} = 4 \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta \quad (3.13)$$

liefert für das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_w^4}{M_W^4} |V_{bc}|^2 (\bar{p}_c \cdot p_l) (p_b \cdot p_{\nu_l}). \quad (3.14)$$

Um die Zerfallsrate zu berechnen, muß man nun über den Phasenraum der Teilchen im Endzustand integrieren. Die differentielle Zerfallsrate erhält man aus der Übergangsamplitude, wenn man die Erhaltung des Viererimpulses durch eine vierdimensionale Delta-Funktion berücksichtigt und für jeden Impuls-Endzustand einen invarianten Phasenraumfaktor

$$2\pi \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}$$

hinzufigt. Schließlich dividiert man den gesamten Ausdruck durch einen Flußfaktor, der für den Zerfall eines Teilchens gerade das Doppelte seiner Energie ist. Im Ruhesystem des b -Quarks vereinfacht sich die Rechnung, und die Zerfallsrate nimmt folgende Form an:

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_b} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q - p_l - p_{\nu_l}) |\overline{\mathcal{M}}|^2 d^3 \vec{p}_c d^3 \vec{p}_l d^3 \vec{p}_{\nu_l}}{8(2\pi)^9 E_c E_l E_{\nu_l}}. \quad (3.15)$$

Es gilt wieder die Relation $q = p_b - p_c$.

3.2.2 Phasenraumintegration und Zerfallsrate

Im folgenden soll die differentielle Zerfallsrate nach der Energie des c -Quarks berechnet werden. Dazu wird zuerst über den Phasenraum der Leptonen integriert. Das Neutrino wird bei den Rechnungen als masselos angenommen. Da die Masse des geladenen Leptons, solange man keine Tau-Leptonen betrachtet, viel kleiner als die des b -Quarks ist, kann man auch diese als masselos ansehen. Dadurch kann die Integration über den Phasenraum der Leptonen deutlich vereinfacht werden. Es ist hier von Vorteil, die Integration nur über den Lepton-Tensor durchzuführen, da nur dort die Integrationsvariablen enthalten sind und diese Rechnung auch bei der Integration der strahlungskorrigierten Zerfallsrate verwendet werden kann. Eine ausführliche Diskussion über Phasenraumintegration findet man im Buch von E. Byckling und K. Kajantie [46]. Man kann die Integration des Lepton-Tensors über den Lepton-Phasenraum in Lorentz-kovarianter Weise ausführen. Dazu geht man zurück zum Ausdruck (3.9) und definiert das kovariante Tensor-Integral

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{p_{l,\alpha} p_{\nu_l,\beta} \delta^4(q - p_l - p_{\nu_l})}{E_l E_{\nu_l}} d^3 \vec{p}_l d^3 \vec{p}_{\nu_l}. \quad (3.16)$$

Damit und mit der Definition (3.12) des Lepton-Tensors läßt sich die Zerfallsrate schreiben als

$$d\Gamma = \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{\bar{H}_{\mu\nu} T^{\mu\nu\alpha\beta}}{2 (2\pi)^5 m_b E_c} I_{\alpha\beta} d^3\vec{p}_c. \quad (3.17)$$

Zur Auswertung des Tensor-Integrals $I_{\alpha\beta}$ macht man einen allgemeinen Ansatz für symmetrische Tensoren 2. Stufe, indem man diese in eine Basis aus dem metrischen Tensor und dem einzigen weiteren Basis-Tensor, der aus dem vorhandenen Impulsvektor q gebildet werden kann, entwickelt. Dann kann man das Integral als Linearkombination

$$I_{\alpha\beta} = A(q^2) g_{\alpha\beta} + B(q^2) q_\alpha q_\beta \quad (3.18)$$

schreiben. Durch Kontraktion mit $g^{\alpha\beta}$ oder $q^\alpha q^\beta$ bekommt man zwei Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten A und B , die man durch das skalare Integral

$$I = \int \frac{\delta^4(q - p_l - p_{\nu_l})}{E_l E_{\nu_l}} d^3\vec{p}_l d^3\vec{p}_{\nu_l}$$

ausdrücken kann, das aus der Kontraktion des Tensor-Integrals hervorgeht, wenn man $q^2 = 2 p_l \cdot p_{\nu_l}$ benutzt und damit die Impulse p_l und p_{ν_l} im Integranden eliminiert. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= 4 A + q^2 B = \frac{q^2}{2} I \\ q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta} &= q^2 A + (q^2)^2 B = \frac{(q^2)^2}{4} I \end{aligned} \quad (3.19)$$

hat die Lösungen

$$A = \frac{q^2}{12} I, \quad B = \frac{1}{6} I. \quad (3.20)$$

Nun bleibt noch die Berechnung des skalaren Integrals I . Da I ein Lorentz-Skalar ist, kann man es in jedem Bezugssystem berechnen. Die Berechnung von I ist am einfachsten, wenn man als Bezugssystem das Ruhesystem des Leptonpaares wählt, in dem $\vec{q} = \vec{0}$ gilt. Unter Berücksichtigung von $E_l = \sqrt{(\vec{q} - \vec{p}_{\nu_l})^2} = |\vec{p}_{\nu_l}|$ und $E_{\nu_l} = |\vec{p}_{\nu_l}|$ kann man schließlich das Integral berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\delta(q^0 - E_l - E_{\nu_l})}{E_l E_{\nu_l}} d^3\vec{p}_{\nu_l} = 4\pi \int \frac{\delta(q^0 - E_l - E_{\nu_l})}{E_l E_{\nu_l}} |\vec{p}_{\nu_l}|^2 d|\vec{p}_{\nu_l}| \\ &= 4\pi \int \frac{\delta(q^0 - 2|\vec{p}_{\nu_l}|)}{|\vec{p}_{\nu_l}|^2} |\vec{p}_{\nu_l}|^2 d|\vec{p}_{\nu_l}| = 2\pi \int \delta(|\vec{p}_{\nu_l}| - q^0/2) d|\vec{p}_{\nu_l}| = 2\pi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Damit ist

$$A = \frac{\pi}{6} q^2, \quad B = \frac{\pi}{3}$$

und das Tensor-Integral hat die Gestalt

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\alpha\beta} + 2 q_\alpha q_\beta). \quad (3.22)$$

Setzt man dies in den Ausdruck (3.17) ein und verwendet die Kontraktion

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= \frac{\pi}{6} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) (q^2 g_{\alpha\beta} + 2 q_\alpha q_\beta) \\ &= \frac{2\pi}{3} (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

so erhält man nach der Integration über den Lepton-Phasenraum für die differentielle Zerfallsrate

$$d\Gamma = \frac{g_w^4}{M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{(\bar{p}_c \cdot p_b) q^2 + 2 (\bar{p}_c \cdot q) (p_b \cdot q)}{192 (2\pi)^4 m_b E_c} d^3 \vec{p}_c \quad (3.24)$$

mit $q = p_b - p_c$.

Unser Ziel ist es, die differentielle Zerfallsrate bezüglich der Energie des c -Quarks auszurechnen. Dazu wird das Ergebnis (3.24) noch über den Raumwinkelanteil des Phasenraumes für das c -Quark integriert. Zur einfacheren Berechnung der Integration wählt man für den räumlichen Anteil des c -Impulses Kugelkoordinaten. Dann gilt für das räumliche Integrationselement

$$d^3 \vec{p}_c = |\vec{p}_c|^2 d|\vec{p}_c| d\Omega_c = |\vec{p}_c| E_c dE_c d\Omega_c$$

mit $|\vec{p}_c| = \sqrt{E_c^2 - m_c^2}$. Die Auswertung der Skalarprodukte führt man am einfachsten im Ruhesystem des b -Quarks durch, da die parametrisierten Viererimpulse dort eine einfache Form haben. Außerdem kann man den räumlichen Impuls des c -Quarks frei wählen. Zur Vereinfachung der Rechnung richtet man ihn parallel zur z -Richtung aus. Der Spin des c -Quarks wird durch den Vierervektor s_c beschrieben. Man kann ihn in zwei Anteile parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung des c -Quarks $s_c = s_{c,l} + s_{c,t}$ aufteilen, die mit den Indizes l beziehungsweise t bezeichnet werden. Die beiden möglichen Einstellungen des longitudinalen c -Spins parallel oder antiparallel zum c -Quark-Impuls werden durch unterschiedliche Vorzeichen $\pm s_{c,l}$ gekennzeichnet. Die parametrisierten Viererimpulse haben dann die folgende Form:

$$p_b = (m_b, 0, 0, 0), \quad p_c = (E_c, 0, 0, |\vec{p}_c|), \quad s_{c,l} = \pm \frac{1}{m_c} (|\vec{p}_c|, 0, 0, E_c), \quad s_{c,t} = (0, s_x, s_y, 0). \quad (3.25)$$

Daraus können die benötigten Skalarprodukte

$$\begin{aligned} p_b \cdot p_c &= m_b E_c, \quad p_b \cdot q = m_b (m_b - E_c), \quad p_c \cdot q = m_b E_c - m_c^2 \\ q^2 &= m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c \\ p_b \cdot s_{c,l} &= s_{c,l} \cdot q = \pm \frac{m_b}{m_c} |\vec{p}_c|, \quad p_b \cdot s_{c,t} = s_{c,t} \cdot q = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

berechnet werden. Die Skalarprodukte des transversalen Polarisationsvektors $s_{c,t}$ mit den Impulsvektoren der Quarks verschwinden, so daß es keinen Beitrag zur Zerfallsrate mit transversaler Polarisation gibt. Daher braucht man in den folgenden Rechnungen nur den longitudinalen Anteil der c -Polarisation zu berücksichtigen.

Das Raumwinkelintegral läßt sich nun trivial ausführen, und man erhält für die differentielle Zerfallsrate mit longitudinaler Polarisation

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{dE_c} &= \frac{g_w^4}{M_W^4} |V_{bc}|^2 \int \frac{(\vec{p}_c \cdot p_b) q^2 + 2(\vec{p}_c \cdot q)(p_b \cdot q)}{192 (2\pi)^4 m_b} |\vec{p}_c| d\Omega_c \\
&= \frac{g_w^4}{M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{4\pi |\vec{p}_c|}{192 (2\pi)^4 m_b} [m_b (E_c \mp |\vec{p}_c|) (m_b^2 + m_c^2 - 2m_b E_c) \\
&\quad + 2m_b (m_b (E_c \mp |\vec{p}_c|) - m_c^2) (m_b - E_c)], \tag{3.27}
\end{aligned}$$

wobei das unterschiedliche Vorzeichen \pm die beiden oben beschriebenen Einstellungen des longitudinalen c -Spins bezeichnet. Zur kompakteren Darstellung dieses Ergebnisses verwendet man die mit der Masse des b -Quarks skalierten Parameter

$$x = \frac{2E_c}{m_b}, \quad y = \frac{m_c}{m_b}, \quad \beta = \frac{|\vec{p}_c|}{E_c} = \frac{\sqrt{x^2 - 4y^2}}{x}. \tag{3.28}$$

Außerdem kann man mit Hilfe der Relation

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8M_W^2} \tag{3.29}$$

die schwache Kopplungskonstante g_w durch die Fermikonstante G_F ausdrücken. Damit kann man schließlich für die Zerfallsrate in Bornscher Näherung

$$\frac{d\Gamma_{\pm}^{(Born)}}{dx} = \Gamma_b \beta x \left(G_0^{(Born)} \pm G_P^{(Born)} \right) \tag{3.30}$$

mit

$$\begin{aligned}
G_0^{(Born)} &= x(3 - 2x) - (4 - 3x)y^2 \\
G_P^{(Born)} &= -\beta x(3 - 2x + y^2)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

schreiben. Die Konstante Γ_b ist die totale Bornsche Rate für unpolarisierte c -Quarks im Grenzfall verschwindender c -Masse und ist gegeben durch

$$\Gamma_b = \frac{g_w^4}{32M_W^4} \frac{m_b^5}{192\pi^3} |V_{bc}|^2 = \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{bc}|^2}{192\pi^3}. \tag{3.32}$$

Die Strukturfunktion $G_0^{(Born)}$ beschreibt den unpolarisierten Anteil der Zerfallsrate, während $G_P^{(Born)}$ den polarisierten Anteil enthält. Dieser beschreibt die Polarisation des c -Quarks, dessen Spinvektor parallel oder antiparallel zu seiner Geschwindigkeit projiziert wurde. Die beiden Einstellungen des c -Quark-Spins führen zu den unterschiedlichen Vorzeichen.

Die Funktionen $G_0^{(Born)}$ und $G_P^{(Born)}$ hängen quadratisch von der skalierten b -Masse y ab. Für $m_c = 0$ oder $y = 0$ gilt

$$G_0^{(Born)} = -G_P^{(Born)} = x(3 - 2x), \quad (3.33)$$

was von der Tatsache herrührt, daß ein masseloses links-chirales c -Quark linkshändig ist. Die kinematischen Grenzen für die skalierte c -Energie sind durch $2y \leq x \leq 1 + y^2$ gegeben. Für die Werte der Bornschen Spektrum-Funktionen an der unteren und an der oberen Grenze gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2y} \beta x G_0^{(Born)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 2y} \beta x G_P^{(Born)}(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1+y^2} \beta x G_0^{(Born)}(x) &= -\lim_{x \rightarrow 1+y^2} \beta x G_P^{(Born)}(x) = (1 - y^2)^3. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Beide Funktionen verschwinden somit an der unteren Grenze. An der oberen Grenze sind sie betragsmäßig gleich und besitzen ein unterschiedliches Vorzeichen. Die x -Abhängigkeit von $G_{0,P}^{(Born)}$ wird in Abschnitt (3.6) graphisch dargestellt und anschließend noch etwas ausführlicher diskutiert werden.

3.3 QCD-Schleifenbeiträge 1. Ordnung

In diesem Abschnitt werden die Beiträge zu den QCD-Einschleifenkorrekturen berechnet. Sie setzen sich aus den Selbstenergie-Korrekturen für das b - und das c -Quark sowie der Vertexkorrektur zusammen. Die Diagramme, die dazu beitragen, sind in Abbildung 3.2 dargestellt.

3.3.1 Vertexkorrektur

Zunächst bestimmen wir das Matrixelement für die Vertexkorrektur. Das zugehörige Diagramm ist in Abbildung 3.2 (c) gezeigt. Durch Einsetzen der Ausdrücke für die Vertices, die Propagatoren und die äußeren Linien, welche sich aus den Feynman-Regeln ergeben, erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{u}(p_c, s_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-ig_s \gamma_\rho \frac{\lambda^a}{2} \right] \left[\frac{i(\not{p}_c - \not{k} + m_c)}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right] \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} V_{bc} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{i(\not{p}_b - \not{k} + m_b)}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \right] \left[-ig_s \gamma_\sigma \frac{\lambda^b}{2} \right] \left[-i\delta_{ab} \frac{g^{\rho\sigma}}{k^2} \right] u(p_b, s_b) \\ &\quad \times \left[\frac{i(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \right] \bar{u}(p_l, s_l) \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\ &= \frac{-ig_w^2}{8} V_{bc} \left(\frac{-ig_s^2 \lambda^a \lambda_a}{4} \right) \bar{u}(p_c, s_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_c - \not{k} + m_c}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2} u(p_b, s_b) \times \left(\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \right) L_\nu. \quad (3.35)$$

Weil die Vertexkorrektur nur die Linien der Quarks betrifft, ist der Lepton-Strom L_ν derselbe wie bei der Bornschen Rate. Er wurde bereits in (3.4) definiert. Wie bei der Berechnung

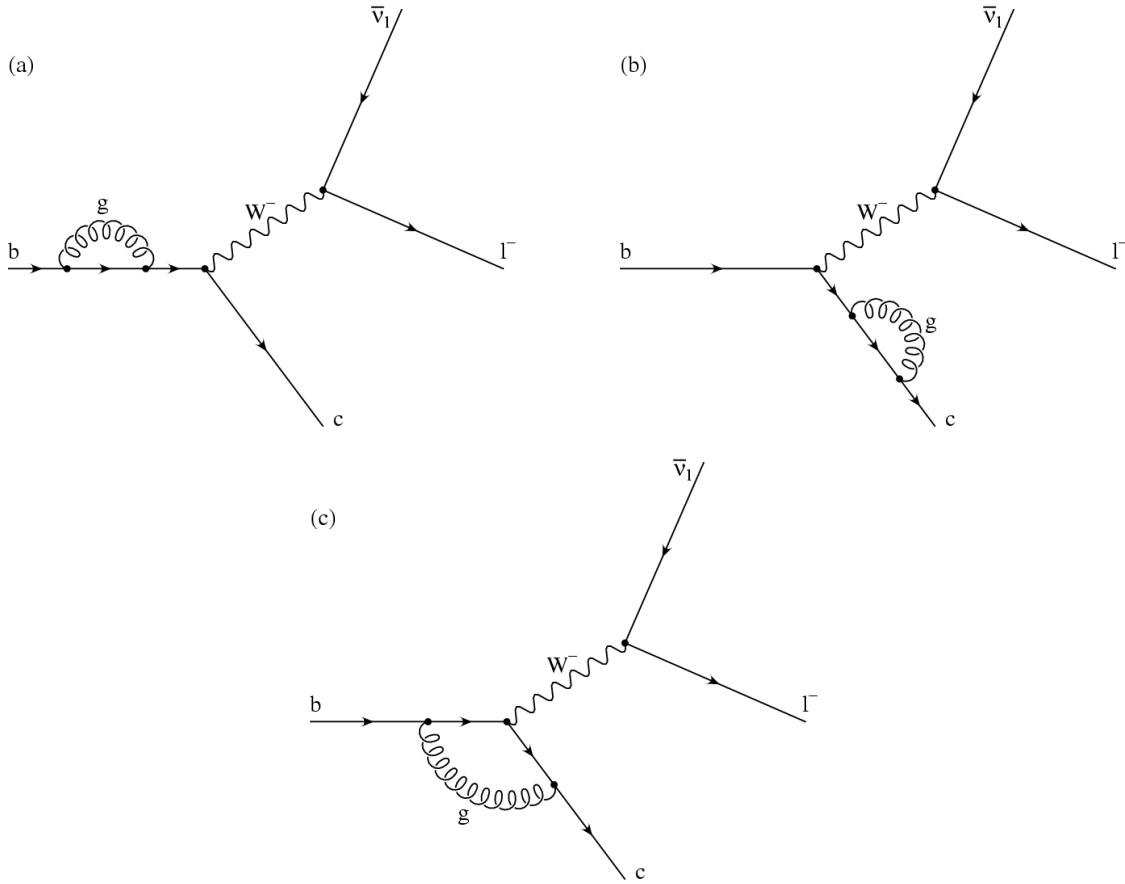


Abbildung 3.2: Feynman-Diagramme für die QCD-Einschleifen-Korrekturen zum semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$. Die Diagramme (a) und (b) zeigen jeweils die Beiträge der Selbstenergie für das b - und das c -Quark, in Diagramm (c) ist die Vertexkorrektur gezeigt.

der Bornschen Rate kann man auch hier die Näherung $q^2 \ll M_W^2$ machen, wodurch im W -Propagator der $q^\mu q^\nu$ -Term im Zähler vernachlässigt und der Nenner durch $-M_W^2$ ersetzt werden kann. Das vereinfachte Matrixelement sieht dann folgendermaßen aus

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \left(\frac{-ig_s^2 \lambda^a \lambda_a}{4} \right) \bar{u}(p_c, s_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_c - \not{k} + m_c}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \\ &\times \left(\frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2} u(p_b, s_b) \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \end{aligned}$$

$$= \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \Lambda_\mu u(p_b, s_b) \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}), \quad (3.36)$$

wobei der strahlungskorrigierte Vertex durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\Lambda_\mu = \frac{-ig_s^2}{4} \lambda^a \lambda_a \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_c - \not{k} + m_c}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \left(\frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2}. \quad (3.37)$$

Hier bezeichnet k den Impuls des in der Schleife umlaufenden Gluons, g_w die schwache Kopplungskonstante, und λ_a steht für die acht *Gell-Mann*-Matrizen. Das virtuelle Gluon in der Schleife kann acht unterschiedliche Farbzustände besitzen, über die man summieren muß. Mit den Relationen (A.63) aus dem Anhang erhält man

$$\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda_a}{2} \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{(\lambda^a)_i^j}{2} \frac{(\lambda_a)_j^k}{2} = \frac{4}{3} \delta_i^k \equiv C_F I, \quad (3.38)$$

wobei I die 3×3 -Einheitsmatrix und $C_F = 4/3$ der Farbfaktor ist. Nach Summation über die Farben ergibt sich also aus (3.37) die Kopplung des Vertex durch die Ersetzung

$$\frac{-ig_s^2}{4} \lambda^a \lambda_a \rightarrow -ig_s^2 C_F I = \frac{-4ig_s^2}{3} I.$$

Da die Vertexfunktion Λ_μ im Matricelement zwischen Spinoren äußerer Teilchen steht, kann man durch Anwendung der Dirac-Gleichung den Zähler des Integranden vereinfachen. Um die γ -Matrizen algebraisch weiter auszuwerten und das Integral über $d^4 k$ zu berechnen, muß man beachten, daß diese Integration sowohl für sehr große als auch für sehr kleine Werte von k divergent ist. Für große k -Werte kann man sich davon am einfachsten durch Abzählen der Potenzen von k überzeugen. Es gilt nämlich im Grenzfall $k \rightarrow \infty$

$$\Lambda_\mu(k \rightarrow \infty) \propto \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \frac{\not{k}}{k^2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\rho \frac{1}{k^2}, \quad (3.39)$$

wenn man die Massen und äußeren Impulse gegenüber k vernachlässigt. Nach einer Wick-Rotation, wie sie im Anhang B.3 durchgeführt wird, geht die Minkowski-Metrik in die Euklidische Metrik über, und man kann das Quadrat des Gluonimpulses als $k_E^2 := k_{0,E}^2 + \vec{k}_E^2$ und das Integrationsmaß in der Form $d^4 k = |k_E|^3 d|k_E| d\Omega_4$ schreiben. Der Nenner des Integranden enthält damit sechs Potenzen von k , während der Zähler insgesamt fünf Potenzen von k enthält. Dies liefert bei der Integration eine logarithmische Singularität. Bei kleinen Werten von k kann nun umgekehrt in den Propagator-Zählern von (3.37) der Gluonimpuls k gegenüber den Quarkimpulsen p_b und p_c vernachlässigt werden. Außerdem gilt für kleine k im Propagatornenner $(p - k)^2 - m^2 = k^2 - 2p \cdot k \approx -2p \cdot k$. Damit lautet das Integral (3.37)

$$\Lambda_\mu(k \rightarrow 0) \propto \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \frac{\not{p}_c + m_c}{2p_c \cdot k} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_b + m_b}{2p_b \cdot k} \gamma^\rho \frac{1}{k^2}. \quad (3.40)$$

Weil die Skalarprodukte im Nenner nach einer Wick-Rotation als $p \cdot k = |p_E| |k_E| \cos \theta$ geschrieben werden können, treten alle Potenzen von k multiplikativ auf, und es gibt insgesamt drei k -Potenzen im Zähler und vier k -Potenzen im Nenner, so daß das Integral auch für kleine Impulse eine logarithmische Divergenz aufweist.

Um einen endlichen Wert für die Integration der Vertexfunktion zu erhalten, muß man sie zunächst regularisieren. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Regularisierung durchzuführen. Wir beginnen mit der Behandlung der Divergenz bei großen Impulsen, die man als Ultraviolett- oder kurz *UV*-Singularität bezeichnet. Im vorliegenden Fall ist es günstig, die UV-Divergenz mit Hilfe der dimensional Regularisierung zu behandeln, weil dadurch die Integration relativ einfach durchzuführen ist, ohne daß dabei die Symmetrien der Theorie verletzt werden. Hierbei verallgemeinert man den vierdimensionalen Impulsraum zu $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen. Der Parameter ϵ kann eine beliebige reelle Zahl sein. Der Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ liefert wieder das divergente Integral für $D = 4$. Beim Ausrechnen von Kontraktionen über Lorentzindices bei Tensoren und Gamma-Matrizen muß man dann beachten, daß die Dimensionszahl nun ungleich vier ist. Außerdem wird man eine Integration über das D -dimensionale Volumenelement ausführen müssen.

Die Singularität bei kleinen Impulsen, die auch Infrarotsingularität oder kurz *IR*-Singularität genannt wird, soll durch Einführung einer sehr kleinen, aber endlichen Gluonmasse im Propagatorenner regularisiert werden. Bei der Gluonmassen-Regularisierung nimmt man an, daß für den Impuls des Gluons die Relation $k^2 = m^2$ gültig ist. Diese Regularisierung hat den Vorteil, daß man die Infrarotsingularität von der UV-Singularität unterscheiden kann. Die Integration wird durch die zusätzliche Masse allerdings etwas komplizierter, kann aber durch technische Vereinfachungen noch analytisch ausgeführt werden. Ein weiterer Vorteil der Regularisierung mit einer Gluonmasse gegenüber der dimensional Regularisierung tritt bei Diagrammen mit geschlossenen Fermionlinien auf, weil es dort Probleme mit der Definition von γ_5 -Matrizen in $D \neq 4$ Dimensionen geben kann.

Man kann den Zähler des Integranden in (3.37) noch etwas vereinfachen, indem man ausnutzt, daß der Vertex zwischen den Spinoren der äußeren Quarks steht, die sich auf der Massenschale befinden. Wenn man unter Verwendung der Clifford-Algebra (A.17) die Matrizen γ_ρ und γ^ρ mit den benachbarten Quarkpropagatoren vertauscht, kann man anschließend durch Anwendung der Dirac-Gleichung für das b - und das c -Quark $\not{p}_{b,c} = m_{b,c}$ setzen. Danach tauscht man den Faktor $1 - \gamma_5$ mit Hilfe der Relation (A.19) nach rechts und kontrahiert über den Index α .

Um die *UV*-Divergenzen zu regularisieren, benutzt man die Verallgemeinerung der Relationen (A.29) für die Kontraktionen von Gamma-Matrizen in D Dimensionen. Sie lauten

$$\gamma_\rho \gamma^\rho = D \mathbf{1}, \quad \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho = (2 - D) \gamma_\mu \quad (3.41)$$

und folgen aus der Clifford-Algebra, die auch in beliebigen Dimensionen $D \neq 4$ gültig bleibt. Dies kann man einsehen, wenn man die Spur des verallgemeinerten metrischen Tensors $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = D$ bildet, die bei der Kontraktion $\gamma_\mu \gamma^\mu$ auftritt. Für die Regularisierung der *IR*-Divergenzen ersetzt man im Nenner des Gluon-Propagators k^2 durch $k^2 - m^2$. Nach Ausführung der genannten Vereinfachungen und der Regularisierung lautet der Ausdruck

für die Vertexkorrektur (3.37)

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu(p_b, p_c) &= -ig_s^2 C_F I \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \frac{1}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \\
&\times \left[4p_b \cdot (p_c - k) \gamma_\mu + 2 \not{k} (\not{p}_b - \not{p}_c) \gamma_\mu + 4(p_{c,\mu} \not{k} - k_\mu \not{p}_c) \right. \\
&\quad \left. + (2 - D) (2k_\mu \not{k} - k^2 \gamma_\mu) \right] (1 - \gamma_5). \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Der Parameter μ hat die Dimension einer Masse und wurde eingeführt, damit die Massendimension des Integrationselementes $d^D k \mu^{4-D}$ gleich vier bleibt.

Das auftretende Integral kann durch unterschiedliche Typen von Grundintegralen ausgedrückt werden, die entsprechend der Anzahl der Potenzen von k im Zähler entweder skalarwertig sind oder Vektor- sowie Tensorcharakter haben. Definiert man diese Grundintegrale als

$$\begin{aligned}
I_3 &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p_c - k)^2 - m_c^2] [(p_b - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m^2]}, \\
I_3^\mu &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[(p_c - k)^2 - m_c^2] [(p_b - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m^2]}, \\
I_3^{\mu\nu} &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{[(p_c - k)^2 - m_c^2] [(p_b - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m^2]}, \tag{3.43}
\end{aligned}$$

so kann man die Vertexkorrektur (3.42) mit deren Hilfe in der Form

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu &= -ig_s^2 C_F I [4p_b \cdot p_c \gamma_\mu I_3 + (-4p_{b,\rho} \gamma_\mu + 2\gamma_\rho (\not{p}_b - \not{p}_c) \gamma_\mu) I_3^\rho \\
&\quad + 4p_{c,\mu} \gamma_\rho I_3^\rho - 4\not{p}_c I_{3\mu} + (2 - D) (2\gamma_\rho I_{3\mu}^\rho - g_{\rho\sigma} \gamma_\mu I_3^{\rho\sigma})] (1 - \gamma_5) \tag{3.44}
\end{aligned}$$

darstellen. Der Index 3 soll andeuten, daß es sich hier um sogenannte Dreipunkt-Integrale handelt, das heißt um solche, die drei Propagatornennern enthalten. Das skalare Integral ist UV-endlich, aber IR-divergent, das Vektorintegral ist sowohl UV- als auch IR-endlich, und das Tensorintegral ist UV-divergent, jedoch IR-endlich. Während das skalare Integral direkt ausgerechnet werden kann, ist es von Vorteil, die Vektor- und Tensor-Integrale in geeigneter Weise durch einfachere skalare Integrale darzustellen, die leichter zu berechnen sind als die einzelnen Komponenten von I_3^μ und $I_3^{\mu\nu}$. Man benutzt dazu die Lorentz-Kovarianz der zu berechnenden Integrale und berücksichtigt, daß sie nur von den äußeren Impulsen abhängen können, die im Integranden stehen und über die nicht integriert wird. Dann kann man die Vektor-Integrale als eine Linearkombination aller dieser Vierervektoren darstellen, wobei die Entwicklungskoeffizienten Skalare sein müssen, die ebenfalls nur aus denselben Vektoren oder den Massen der entsprechenden Teilchen gebildet werden dürfen. In der gleichen Weise stellt man die Tensor-Integrale durch Linearkombination aller Tensoren dar, die sich aus den Impulsvektoren bilden lassen und die symmetrisch in beiden Indices

sind, damit man auch die Symmetrieeigenschaften der Tensor-Integrale berücksichtigen kann. Dazu kann man auch den metrischen Tensor benutzen, der ebenfalls die gewünschte Symmetrie zeigt und der nur konstante Komponenten besitzt. Diese Methode der Zerlegung der auftretenden Vektor- und Tensor-Integrale in skalare Integrale geht auf G. Passarino und M. Veltman zurück, die sie auf die Berechnung der Einschleifen-Strahlungskorrekturen zu dem Prozeß $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ angewandt haben [47]. Die skalaren Integrale selbst sowie deren Berechnung wurden von G. 't Hooft und M. Veltman diskutiert [48].

Die Reduktion der auftretenden Vektor- und Tensor-Integrale auf skalare Integrale wird im Anhang B.2 durchgeführt. Die bei der Zerlegung auftretenden skalaren Integrale werden definiert als

$$\begin{aligned}
I_1(m^2) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2} \\
I_2(p_q^2, m_q^2, m^2) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]} \\
I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2]} \\
&= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(q - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m_c^2]} \\
I_3(q^2, m_b^2, m_c^2, m^2) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

mit $q = p_b - p_c$. Ihre Berechnung wird im Anhang B.3 durchgeführt. Die Identitäten für das erste und das dritte Integral ergeben sich aus der Translationsinvarianz mit der Substitution $k \rightarrow k - p$ und mit $k \rightarrow p_c + k$, wenn man berücksichtigt, daß das Integrationsgebiet der gesamte D -dimensionale Raum ist.

Für das Vektor-Integral stehen als Basisvektoren nur die beiden Viererimpulse p_b und p_c zur Verfügung. Da das Integral ebenfalls ein Vierervektor sein muß, der nur die beiden Teilchenimpulse enthalten kann, bleibt als einzige Möglichkeit die Darstellung

$$I_3^\mu = A p_b^\mu + B p_c^\mu \tag{3.46}$$

übrig. Kontrahiert man diese Gleichung jeweils mit $p_{b,\mu}$ und $p_{c,\mu}$, so erhält man ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
I_3^\mu p_{b,\mu} &= A m_b^2 + B (p_b \cdot p_c) \\
I_3^\mu p_{c,\mu} &= A (p_b \cdot p_c) + B m_c^2,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

das man nach den Entwicklungskoeffizienten auflösen kann:

$$A = \frac{(p_b \cdot p_c) I_3^\mu p_{c,\mu} - m_c^2 I_3^\mu p_{b,\mu}}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2}$$

$$B = \frac{(p_b \cdot p_c) I_3^\mu p_{b,\mu} - m_b^2 I_3^\mu p_{c,\mu}}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2}. \quad (3.48)$$

Die mit den Impulsvektoren zu Skalaren kontrahierten Integrale im Zähler von A und B kann man nun in einfachere skalare Integrale zerlegen, indem man die Zerlegungsmethode nach Passarino und Veltman benutzt, in der die auftretenden Skalarprodukte in der Form

$$\begin{aligned} k \cdot p_b &= -\frac{1}{2} \left[(p_b - k)^2 - m_b^2 - k^2 + m^2 - m^2 \right] \\ k \cdot p_c &= -\frac{1}{2} \left[(p_c - k)^2 - m_c^2 - k^2 + m^2 - m^2 \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

darstellt werden, so daß sich die einzelnen Terme dieser Zerlegung mit den entsprechenden Faktoren der Propagatordenner im Integranden gegenseitig aufheben. Die ausführliche Rechnung ist in Anhang B.2 durchgeführt. Als Ergebnis erhält man schließlich für die kontrahierten Vektor-Integrale

$$\begin{aligned} I_3^\mu p_{b,\mu} &= \frac{1}{2} \left[I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) - I_2(m_c^2) \right] \\ I_3^\mu p_{c,\mu} &= \frac{1}{2} \left[I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) - I_2(m_b^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Da die Integrale IR-endlich sind, kann die Gluonmasse null gesetzt werden. Wenn man die im Anhang B.3 berechneten skalaren Integrale einsetzt, erhält man für die oben genannten Kontraktionen

$$\begin{aligned} I_3^\mu p_{b,\mu} &= \frac{i}{32\pi^2} \left[\left(1 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \\ I_3^\mu p_{c,\mu} &= \frac{i}{32\pi^2} \left[\left(-1 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

und schließlich für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{q^2} \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(\frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} - 1 \right) \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \\ B &= \frac{-i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{q^2} \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

mit

$$\lambda \equiv \lambda(q^2, m_b^2, m_c^2) = (q^2)^2 + m_b^4 + m_c^4 - 2(q^2 m_b^2 + q^2 m_c^2 + m_b^2 m_c^2).$$

Das Tensor-Integral ist gemäß seiner Definition symmetrisch in den beiden Indices und setzt sich auch aus den beiden Impulsvektoren p_b und p_c zusammen. Außerdem kann es noch, wie bereits kurz geschildert, den metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ enthalten, da er auch symmetrisch ist und nur konstante Komponenten enthält. Der allgemeine Ansatz für eine Entwicklung in Basis-Tensoren ist somit

$$I_3^{\mu\nu} = C_1 p_b^\mu p_b^\nu + C_2 p_c^\mu p_c^\nu + C_3 (p_b^\mu p_c^\nu + p_c^\mu p_b^\nu) + C_4 g^{\mu\nu}. \quad (3.53)$$

Um die Koeffizienten C_1 , C_2 , C_3 und C_4 zu berechnen, kontrahiert man das Tensor-Integral nacheinander mit allen möglichen Kombinationen der Vierervektoren p_b und p_c sowie mit dem metrischen Tensor zu Skalaren. Dann erhält man zunächst das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{b,\nu} &= C_1 m_b^4 + C_2 (p_b \cdot p_c)^2 + 2 C_3 m_b^2 (p_b \cdot p_c) + C_4 m_b^2 \\ I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{c,\nu} &= C_1 (p_b \cdot p_c)^2 + C_2 m_c^4 + 2 C_3 m_c^2 (p_b \cdot p_c) + C_4 m_c^2 \\ I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{c,\nu} &= I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{b,\nu} \\ &= C_1 m_b^2 (p_b \cdot p_c) + C_2 m_c^2 (p_b \cdot p_c) + C_3 [(p_b \cdot p_c)^2 + m_b^2 m_c^2] + C_4 (p_b \cdot p_c) \\ I_3^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= C_1 m_b^2 + C_2 m_c^2 + 2 C_3 (p_b \cdot p_c) + D C_4, \end{aligned} \quad (3.54)$$

das mit den nachfolgend definierten Skalaren

$$\begin{aligned} F_1 &= C_1 m_b^2 + C_3 (p_b \cdot p_c) + C_4 \\ F_2 &= C_2 (p_b \cdot p_c) + C_3 m_b^2 \\ F_3 &= C_1 (p_b \cdot p_c) + C_3 m_c^2 \\ F_4 &= C_2 m_c^2 + C_3 (p_b \cdot p_c) + C_4 \\ F_5 &= C_1 m_b^2 + C_2 m_c^2 + 2 C_3 (p_b \cdot p_c) + D C_4 \end{aligned} \quad (3.55)$$

teilweise entkoppelt und in ein System aus fünf Gleichungen übergeht, das folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{b,\nu} &= F_1 m_b^2 + F_2 (p_b \cdot p_c) \\ I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{b,\nu} &= F_1 (p_b \cdot p_c) + F_2 m_c^2 \\ I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{c,\nu} &= F_3 m_b^2 + F_4 (p_b \cdot p_c) \\ I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{c,\nu} &= F_3 (p_b \cdot p_c) + F_4 m_c^2 \\ I_3^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= F_5. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Die ersten 4 Gleichungen dieses Systems können ohne Schwierigkeiten nach den neuen Koeffizienten F_1 , F_2 , F_3 und F_4 aufgelöst werden, während die fünfte Gleichung unverändert bestehen bleibt. Es ist

$$F_1 = \frac{(p_b \cdot p_c) I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{b,\nu} - m_c^2 I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{b,\nu}}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2}$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{(p_b \cdot p_c) I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{b,\nu} - m_b^2 I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{b,\nu}}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2} \\
F_3 &= \frac{(p_b \cdot p_c) I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{c,\nu} - m_c^2 I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{c,\nu}}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2} \\
F_4 &= \frac{(p_b \cdot p_c) I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{c,\nu} - m_b^2 I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{c,\nu}}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2} \\
F_5 &= I_3^{\mu\nu} g_{\mu\nu}. \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Nun kann man diese expliziten Ausdrücke benutzen, um (3.55) nach den Entwicklungskoeffizienten des Tensor-Integrals C_i mit $i = 1, 2, 3, 4$ aufzulösen und bekommt damit das folgende Ergebnis

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{D-2} \frac{(D-2)(p_b \cdot p_c) F_3 - m_c^2 [(D-1) F_1 - F_5 + F_4]}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2} \\
C_2 &= \frac{1}{D-2} \frac{(D-2)(p_b \cdot p_c) F_2 - m_b^2 [(D-1) F_4 - F_5 + F_1]}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2} \\
C_3 &= \frac{1}{D-2} \frac{(p_b \cdot p_c) [(D-1) F_1 - F_5 + F_4] - (D-2) m_b^2 F_3}{(p_b \cdot p_c)^2 - m_b^2 m_c^2} \\
C_4 &= \frac{F_5 - F_4 - F_1}{D-2}. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten (3.57) enthalten die kontrahierten Tensor-Integrale, die im Anhang (B.22) in Abhängigkeit der skalaren Grundintegrale berechnet wurden. Wenn man die skalaren Integrale aus B.3 benutzt, kann man die kontrahierten Tensor-Integrale explizit angeben. Die Gluonmasse kann null gesetzt werden, weil die Tensorintegrale IR-endlich sind. Man erhält

$$\begin{aligned}
I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{b,\nu} &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ m_b^2 \left[\Delta + 1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right] \right. \\
&\quad - \frac{\lambda}{2q^2} \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{q^2} \left[m_b^2(m_b^2 + m_c^2) - \frac{1}{2}(m_b^2 + m_c^2 - q^2)^2 - \frac{m_b^2 - m_c^2}{2q^2} \lambda \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right\} \\
I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{c,\nu} &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} (m_b^2 + m_c^2 - q^2) \left[\Delta + 1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{2q^2} \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_b^2 - m_c^2}{2q^2} \left(m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \frac{\lambda}{q^2} \right) \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \Big\} \\
I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{c,\nu} &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ m_c^2 \left[\Delta + 1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right] \right. \\
& - \frac{\lambda}{2q^2} \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \\
& \left. + \frac{1}{q^2} \left[\frac{1}{2} (m_b^2 + m_c^2 - q^2)^2 - m_c^2 (m_b^2 + m_c^2) - \frac{m_b^2 - m_c^2}{2q^2} \lambda \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right\} \\
I_3^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\Delta + 2 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \tag{3.59}
\end{aligned}$$

mit

$$\Delta = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi). \tag{3.60}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (3.57) ein, dann ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ \Delta + 1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) + \frac{1}{q^2} \left[2m_b^2 - \frac{(m_b^2 - m_c^2)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right. \\
& \left. + \left(1 - \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\} \\
F_2 &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{q^2} \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2)^2}{q^2} - 2m_b^2 \right) \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\} \\
F_3 &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ - \left[1 + \frac{1}{q^2} \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2)^2}{q^2} - 2m_b^2 \right) \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right. \\
& \left. + \left(1 - \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ \Delta + 1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) + \frac{1}{q^2} \left[\frac{(m_b^2 - m_c^2)^2}{q^2} - 2m_c^2 \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\} \\
F_5 &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\Delta + 2 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right]. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Man kann durch kurzes Nachrechnen zeigen, daß diese Koeffizienten den Symmetriebeziehungen

$$\begin{aligned}
F_1(m_b^2, m_c^2, q^2) &= F_4(m_c^2, m_b^2, q^2) \\
F_2(m_b^2, m_c^2, q^2) &= F_3(m_c^2, m_b^2, q^2) \tag{3.62}
\end{aligned}$$

genügen.

Um schließlich die Entwicklungskoeffizienten des Tensor-Integrals zu erhalten, setzt man die Ausdrücke (3.61) in (3.58) ein. Das liefert

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ \frac{4m_c^2}{\lambda} + \frac{2}{q^2} \left(1 - \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2q^2}{\lambda} \left[1 - \frac{2m_b^2}{q^2} + \frac{(m_b^2 - m_c^2)^2}{(q^2)^2} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\} \\
C_2 &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ \frac{4m_b^2}{\lambda} - \frac{2}{q^2} \left(1 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \right) \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2q^2}{\lambda} \left[1 - \frac{2m_c^2}{q^2} + \frac{(m_b^2 - m_c^2)^2}{(q^2)^2} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\} \\
C_3 &= \frac{i}{64\pi^2} \left\{ -\frac{2}{\lambda} (m_b^2 + m_c^2 - q^2) + \frac{2}{q^2} \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\lambda} \left[\frac{(m_b^2 - m_c^2)^2}{q^2} - (m_b^2 + m_c^2) \right] \left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & \frac{i}{64\pi^2} \left[\Delta + 3 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right]. \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Die Gluonmasse m wurde in der Ordnung $\mathcal{O}(m)$ und höheren Ordnungen wieder vernachlässigt, da die infrarotdivergenten Terme logarithmisch von m abhängen und bei der Multiplikation mit m im Grenzfall $m \rightarrow 0$ verschwinden. Sie taucht dann in den Entwicklungskoeffizienten C_1, \dots, C_4 nicht mehr auf.

Nun hat man sämtliche Koeffizienten berechnet, die in die Entwicklung der Vektor- und Tensor-Integrale eingehen. Dann kann man die Darstellungen (3.46) und (3.53) der Dreipunkt-Integrale benutzen und setzt sie in den Ausdruck (3.44) für die Vertexfunktion ein. Unter Verwendung der Eigenschaften für Gamma-Matrizen aus dem Anhang A.3 ergibt sich eine Darstellung, die nur noch das skalare Dreipunkt-Integral sowie die Entwicklungskoeffizienten des Vektor- und des Tensor-Integrals enthält:

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu = & -2ig_s^2 C_F I \left\{ 2p_b \cdot p_c I_3 \gamma_\mu - 2(m_b^2 A + p_b \cdot p_c B) \gamma_\mu \right. \\
& + [(m_b^2 - 2p_b \cdot p_c) A + (A + B) \not{p}_c \not{p}_b - m_c^2 B] \gamma_\mu \\
& + 2p_{c,\mu} (A \not{p}_b + B \not{p}_c) - 2\not{p}_c (A p_{b,\mu} + B p_{c,\mu}) \\
& - 2(1 - \epsilon) [C_1 \not{p}_b p_{b,\mu} + C_2 \not{p}_c p_{c,\mu} + C_3 (\not{p}_b p_{c,\mu} + \not{p}_c p_{b,\mu}) + C_4 \gamma_\mu] \\
& \left. + (1 - \epsilon) [m_b^2 C_1 + m_c^2 C_2 + 2p_b \cdot p_c C_3 + 2(2 - \epsilon) C_4] \gamma_\mu \right\} (1 - \gamma_5). \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Das Resultat für das Dreipunkt-Integral ist im Anhang (B.49) angegeben. Wenn man bedenkt, daß der Vertex Λ_μ zwischen zwei Spinoren der äußeren Quarks steht, kann man durch Anwendung der Relationen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$$

die Größe \not{p}_c nach links durchtauschen, so daß sie auf den Spinor $\bar{u}(p_c, s_c)$ trifft und mit der Dirac-Gleichung zu m_c vereinfacht werden kann. Ebenso kann \not{p}_b nach rechts durchgetauscht und zu m_b vereinfacht werden. Ordnet man das Ergebnis nach Vektoranteilen $\gamma_\mu, p_{b,\mu}$ und $p_{c,\mu}$ sowie nach den zugehörigen Axialvektoranteilen, die zusätzlich ein γ_5 enthalten, und entwickelt es schließlich in eine Potenzreihe in ϵ , so kann das Resultat in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu = & -2ig_s^2 C_F I \left\{ [2p_b \cdot p_c I_3 - m_b^2 A - m_c^2 B - (2p_b \cdot p_c + m_b m_c) (A + B) \right. \\
& \left. + m_b^2 C_1 + m_c^2 C_2 + 2p_b \cdot p_c C_3 + 2C_5] \gamma_\mu \right. \\
& \left. + 2[(m_c B - m_b C_1 - m_c C_3) p_{b,\mu} + (m_b A - m_c C_2 - m_b C_3) p_{c,\mu}] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[2 p_b \cdot p_c I_3 - m_b^2 A - m_c^2 B - (2 p_b \cdot p_c - m_b m_c) (A + B) \right. \\
& \quad \left. + m_b^2 C_1 + m_c^2 C_2 + 2 p_b \cdot p_c C_3 + 2 C_5 \right] \gamma_\mu \gamma_5 \\
& - 2 \left[(m_c B + m_b C_1 - m_c C_3) p_{b,\mu} + (-m_b A - m_c C_2 + m_b C_3) p_{c,\mu} \right] \gamma_5 \Big\} \\
& + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{3.65}
\end{aligned}$$

mit der Definition

$$C_5 = C_4 - \frac{2i}{64 \pi^2}. \tag{3.66}$$

Im Grenzfall sehr kleiner Werte von ϵ kann die Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ vernachlässigt werden. Setzt man die Ausdrücke für die Entwicklungskoeffizienten (3.52) und (3.63) und für das skalare Dreipunkt-Integral (B.49) in diesen Vertex ein, dann ergibt sich für die regularisierte Vertexfunktion

$$\Lambda_\mu(p_b, p_c) = \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F I \left\{ \Lambda_1 \gamma_\mu + \Lambda_2 p_{b,\mu} + \Lambda_3 p_{c,\mu} - [\Lambda_4 \gamma_\mu + \Lambda_5 p_{b,\mu} + \Lambda_6 p_{c,\mu}] \gamma_5 \right\} \tag{3.67}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= - \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{m_b^2 m_c^2}{m^4} \right) \right. \\
& \quad \left. + \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{2 m_b^2} \right) \ln \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2 + \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2}{(m_b^2 - m_c^2 - \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 + q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right] \\
& \quad + \left[\Delta + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right] - \frac{m_b^2 - m_c^2}{2 q^2} \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
& \quad + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b + m_c)^2 - q^2 \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2 q^2} \right] \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \\
\Lambda_2 &= \frac{2}{q^2} (m_b - m_c) - \frac{1}{q^2} \left[(m_b + 2 m_c) - (m_b + m_c) \frac{(m_b - m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
& \quad + \frac{1}{q^2} \left[(m_b - m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} - \frac{m_c}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b - m_c) (3 m_b + m_c) + q^2 \right) \right] \\
& \quad \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_3 = & -\frac{2}{q^2}(m_b - m_c) + \frac{1}{q^2} \left[(2m_b + m_c) - 2(m_b + m_c) \frac{(m_b - m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
& - \frac{1}{q^2} \left[(m_b - m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} - \frac{m_b}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b - m_c)(m_b + 3m_c) - q^2 \right) \right] \\
& \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_4 = & -\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{m_b^2 m_c^2}{m^4} \right) \right. \\
& + \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{2m_b^2} \right) \ln \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2 + \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2}{(m_b^2 - m_c^2 - \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2} \right) \\
& \left. - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 + q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right] \\
& + \left[\Delta + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) \right] - \frac{m_b^2 - m_c^2}{2q^2} \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
& + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b - m_c)^2 - q^2 \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \right] \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_5 = & -\frac{2}{q^2}(m_b + m_c) + \frac{1}{q^2} \left[(m_b - 2m_c) - (m_b - m_c) \frac{(m_b + m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
& - \frac{1}{q^2} \left[(m_b + m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} + \frac{m_c}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b + m_c)(3m_b - m_c) + q^2 \right) \right] \\
& \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_6 = & \frac{2}{q^2}(m_b + m_c) - \frac{1}{q^2} \left[(2m_b - m_c) - (m_b - m_c) \frac{(m_b + m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
& + \frac{1}{q^2} \left[(m_b + m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} - \frac{m_b}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b + m_c)(m_b - 3m_c) - q^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \quad (3.68)$$

mit $\Delta = 1/\epsilon - \gamma + \ln(4\pi)$ und $q = p_b - p_c$. Die durch $1/\epsilon$ regularisierte UV -Divergenz ist in Δ enthalten und tritt nur bei den Koeffizienten Λ_1 und Λ_4 auf, welche mit den Born-Term-artigen Strukturen der Amplitude multipliziert werden. In Bornscher Näherung besitzt der Vertex die $V-A$ -Struktur $\gamma_\mu (1-\gamma_5)$, während die UV -divergenten Anteile der Einschleifen-Korrektur durch $\gamma_\mu (\Lambda_1 - \Lambda_4 \gamma_5)$ gegeben sind. Diese Tatsache ist die Voraussetzung dafür, daß sich die Singularitäten im renormierten Vertex gegenseitig aufheben. Die beiden Koeffizienten Λ_1 und Λ_4 sind auch die einzigen, die neben der UV - auch eine Infrarot-Divergenz besitzen, welche mit der Gluonmasse m regularisiert ist. Sie unterscheiden sich voneinander nur durch ein einziges relatives Vorzeichen im Vorfaktor eines der einfach logarithmischen Terme, ihre Differenz ist gegeben durch die Relation

$$\Lambda_1 - \Lambda_4 = \frac{4 m_b m_c}{\sqrt{\lambda}} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right). \quad (3.69)$$

Man kann sich durch Ausrechnen leicht davon überzeugen, daß die Koeffizienten Λ_2 und Λ_3 sowie Λ_5 und Λ_6 jeweils durch die Vertauschung $m_b \leftrightarrow m_c$ der beiden Quarkmassen auseinander hervorgehen. Der Grund für diese Eigenschaft liegt in der CP -Symmetrie des W -Zerfalls in ein Quark-Antiquark-Paar unter Ladungskonjugation und Parität. Die Abhängigkeit der Koeffizienten Λ_1 und Λ_4 von den Regularisierungsparametern ϵ und m für die UV - und IR -Divergenzen darf sich natürlich nicht auf die endgültigen physikalischen Ergebnisse übertragen, weil diese keine solchen Parameter mehr enthalten sollen. Man muß sich deshalb überlegen, wie man aus den regularisierten die physikalischen Größen bestimmen kann. Vorher sollen aber noch die übrigen Beiträge berechnet werden, die neben der Vertexkorrektur zu den Einschleifen-Korrekturen beitragen, nämlich die Selbstenergie für das b - und das c -Quark.

3.3.2 Selbstenergie-Korrekturen der Quarks

Für den Zerfall $b \rightarrow c + W^-$ trägt neben der Vertexkorrektur auch die Selbstenergie der Quarks zu den Strahlungskorrekturen der Ordnung α_s bei. Sie wird durch eine Korrektur der äußeren Quark-Linien bestimmt. Es gibt zwei Diagramme, die zur Selbstenergie beitragen, jeweils eines für das b -Quark und das c -Quark. Sie sind in Abbildung (3.2) (a) und (b) dargestellt. Der Beitrag der c -Selbstenergie ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{u}(p_c, s_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-ig_s \gamma_\rho \frac{\lambda^a}{2} \right] \left[\frac{i(\not{p}_c - \not{k} + m_c)}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right] \left[-ig_s \gamma_\sigma \frac{\lambda^b}{2} \right] \left[\frac{i(\not{p}_c + m_c)}{p_c^2 - m_c^2} \right] \\ &\times \left[-i\delta_{ab} \frac{g^{\rho\sigma}}{k^2} \right] \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} V_{bc} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \right] u(p_b, s_b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{i(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \right] \bar{u}(p_l, s_l) \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\
& = \frac{-ig_w^2}{8} V_{bc} \left(\frac{-ig_s^2 \lambda^a \lambda_a}{4} \right) \bar{u}(p_c, s_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_c - \not{k} + m_c}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2} \left(\frac{\not{p}_c + m_c}{p_c^2 - m_c^2} \right) \\
& \quad \times \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \left(\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \right) \bar{u}(p_l, s_l) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}). \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Nach Vernachlässigung von q^2 -Termen gegenüber der W -Masse kann man das vereinfachte Matrixelement schreiben als

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} & = \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \left(\frac{-ig_s^2 \lambda^a \lambda_a}{4} \right) \bar{u}(p_c, s_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_c - \not{k} + m_c}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2} \left(\frac{\not{p}_c + m_c}{p_c^2 - m_c^2} \right) \\
& \quad \times \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \bar{u}(p_l, s_l) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\
& = \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) (\Sigma_c) \left(\frac{\not{p}_c + m_c}{p_c^2 - m_c^2} \right) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \\
& \quad \times \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}), \quad (3.71)
\end{aligned}$$

wobei man mit Σ_c die Selbstenergie bezeichnet. Sie ist durch

$$\Sigma_c = \frac{-ig_s^2 \lambda^a \lambda_a}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_c - \not{k} + m_c}{(p_c - k)^2 - m_c^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2} \quad (3.72)$$

gegeben. Entsprechend ergibt sich der Beitrag zur Selbstenergie des b -Quarks zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} & = \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \left(\frac{\not{p}_b + m_b}{p_b^2 - m_b^2} \right) (\Sigma_b) u(p_b, s_b) \\
& \quad \times \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \quad (3.73)
\end{aligned}$$

mit

$$\Sigma_b = \frac{-ig_s^2 \lambda^a \lambda_a}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2}, \quad (3.74)$$

wobei Σ_b aus Σ_c durch die Ersetzungen $p_c \rightarrow p_b$ und $m_c \rightarrow m_b$ der Viererimpulse und der Quarkmassen hervorgeht. Nachdem man wie bei der Vertex-Korrektur über die Farbindices der Gluonen summiert hat, erhält man mit (3.38) einen Faktor $4C_F I$ anstelle von $\lambda^a \lambda_a$.

Es sei bemerkt, daß bei den Ausdrücken für die Selbstenergie-Beiträge das Impulsquadrat nicht sofort mit dem Massenquadrat gleichgesetzt werden darf, da man die Masse zuvor renormieren muß. Deshalb darf man auch nicht, wie bei der Vertexkorrektur, die Dirac-Gleichung zum Vereinfachen der Terme, die Gamma-Matrizen enthalten, im Zähler von Σ verwenden. Die Renormierung wird im nächsten Abschnitt (3.3.3) ausführlicher behandelt.

Die Selbstenergie ist wie der Vertex UV -divergent, aber im Gegensatz zu diesem IR -endlich. Sie muß ebenfalls regularisiert werden, was wieder mittels dimensionaler Regularisierung geschieht. Dann erhält man folgenden Ausdruck:

$$\Sigma(p_q, m_q) = -ig_s^2 C_F I \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma_\rho \left(\frac{\not{p}_q - \not{k} + m_q}{(p_q - k)^2 - m_q^2} \right) \gamma^\rho \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (3.75)$$

Der Index q steht wieder für die beiden Quarks b und c . Führt man außerdem noch eine endliche Gluonmasse m ein, so erhält man dieselben Integraltypen wie bei der Vertexkorrektur und kann die bekannten Resultate verwenden. Um den Zähler des Integranden zu vereinfachen, benutzt man die Kontraktionen von Gamma-Matrizen in D Dimensionen (3.41). Dann läßt sich die Selbstenergie-Korrektur schreiben als

$$\Sigma(p_q, m_q) = -ig_s^2 C_F I \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)(\not{p}_q - \not{k}) + m_q D \mathbb{1}}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]}. \quad (3.76)$$

Zur Berechnung des Integrals geht man genauso vor wie bei der Vertexkorrektur. Man zerlegt den Integranden so, daß er durch elementare Zweipunkt-Integrale ausgedrückt werden kann, die selbst auf noch einfachere skalare Integrale zurückgeführt werden können. Mit der Definition des skalaren und des vektoriiellen Zweipunkt-Integrals

$$\begin{aligned} I_2 &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]} \\ I_2^\mu &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (3.77)$$

läßt sich die Selbstenergie darstellen als

$$\Sigma(p_q, m_q) = -ig_s^2 C_F I \left\{ \left[(2-D)\not{p}_q + m_q D \right] I_2 - (2-D) \gamma_\mu I_2^\mu \right\}. \quad (3.78)$$

Das Vektor-Integral enthält nur einen Impulsvektor p_q , so daß man den Ansatz

$$I_2^\mu(p_q, m_q^2, m^2) = A p_q^\mu$$

machen kann. Kontrahiert man dies mit $p_{q,\mu}$, so kann man A bestimmen zu

$$A = \frac{1}{p_q^2} I_2^\mu p_{q,\mu}.$$

Das auftretende Skalarprodukt des Vektor-Integrals mit dem Quark-Impuls kann man mit

$$p_q \cdot k = -\frac{1}{2} \left[(p_q - k)^2 - p_q^2 - k^2 + m_q^2 - m_q^2 + m^2 - m^2 \right] \quad (3.79)$$

vereinfachen und erhält eine Reduktion auf skalare Integrale, die im Anhang B.2 angegeben sind, mit dem Resultat

$$\begin{aligned} I_2^\mu p_{q,\mu} &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-\frac{1}{2} [(p_q - k)^2 - p_q^2 - k^2 + m_q^2 - m_q^2 + m^2 - m^2]}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]} \\ &= -\frac{1}{2} [I_1(m^2) - I_1(m_q^2) - (p_q^2 - m_q^2 + m^2) I_2(p_q^2, m_q^2, m^2)]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Damit ergibt sich für das vektorielle Zweipunkt-Integral

$$I_2^\mu(p_q, m_q^2, m^2) = -\frac{p_q^\mu}{2p_q^2} [I_1(m^2) - I_1(m_q^2) - (p_q^2 - m_q^2 + m^2) I_2(p_q^2, m_q^2, m^2)]. \quad (3.81)$$

Wie man mit Hilfe der Resultate für das skalare Einpunkt- und Zweipunkt-Integral (B.36) und (B.41) leicht sehen kann, existiert der Grenzfall verschwindender Gluonmasse, so daß man sie hier vernachlässigen kann. Das liefert

$$I_2^\mu(p_q, m_q^2, 0) = \frac{p_q^\mu}{2p_q^2} [I_1(m_q^2) + (p_q^2 - m_q^2) I_2(p_q^2, m_q^2)]. \quad (3.82)$$

Setzt man dieses Resultat in den Ausdruck (3.78) ein, so erhält man das Ergebnis

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p}_q, m_q) &= -ig_s^2 C_F I \left\{ \not{p}_q \left[(2-D) I_2(p_q^2, m_q^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (2-D) \frac{1}{2p_q^2} \left(I_1(m_q^2) + (p_q^2 - m_q^2) I_2(p_q^2, m_q^2) \right) \right] + m_q D I_2(p_q^2, m_q^2) \right\} \\ &= -ig_s^2 C_F I \left\{ \not{p}_q (D-2) \left[\frac{1}{2p_q^2} I_1(m_q^2) + \left(\frac{p_q^2 - m_q^2}{2p_q^2} - 1 \right) I_2(p_q^2, m_q^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + m_q D I_2(p_q^2, m_q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Die Selbstenergie kann offensichtlich in zwei Anteile aufgespalten werden, von denen einer zu \not{p}_q und der andere zu m_q proportional ist. Zur weiteren Auswertung setzt man die skalaren Integrale ein, die in Anhang (B.41) angegeben sind. Danach entwickelt man mit $D = 4 - 2\epsilon$ alle auftretenden Terme in eine Potenzreihe in ϵ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$. Man erhält

$$\Sigma(\not{p}_q, m_q) = \not{p}_q \Sigma_p(p_q^2, m_q^2) + m_q \Sigma_m(p_q^2, m_q^2) \quad (3.84)$$

mit

$$\begin{aligned} \Sigma_p(p_q^2, m_q^2) &= -\frac{g_s^2 C_F I}{16\pi^2} \left\{ \Delta + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_q^2} \right) + \frac{p_q^2 + m_q^2}{p_q^2} \left[1 + \frac{m_q^2 - p_q^2}{p_q^2} \ln \left(\frac{m_q^2 - p_q^2}{m_q^2} \right) \right] \right\} \\ \Sigma_m(p_q^2, m_q^2) &= \frac{g_s^2 C_F I}{4\pi^2} \left[\Delta + \frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_q^2} \right) + \frac{m_q^2 - p_q^2}{p_q^2} \ln \left(\frac{m_q^2 - p_q^2}{m_q^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Alle Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ sind vernachlässigt worden.

3.3.3 Renormierung

Wir wollen in diesem Abschnitt die Summe aus dem Bornterm und den Einschleifenkorrekturen zur Zerfallsrate berechnen. Da die Beiträge der Strahlungskorrekturen divergent sind, wenn man den Regularisierungsparameter gegen null gehen läßt, müssen wir uns überlegen, wie man die Divergenzen beseitigt. Die physikalischen Ergebnisse dürfen nicht mehr von den Regularisierungsparametern abhängen, so daß man ein Verfahren angeben muß, das diese Parameter durch physikalische Überlegungen aus den Matrixelementen entfernen kann. Dieses Verfahren, das die UV -Singularitäten beseitigt, nennt man Renormierung. Die Diskussion der Infrarot-Singularitäten ist nicht Gegenstand der Renormierung. Die Einschleifen-Korrekturen sowie die Beiträge zur Bremsstrahlung, die in Abschnitt 3.4 berechnet werden, bleiben zunächst infrarotdivergent. Erst bei der Aufsummation beider Anteile zur inklusiven Zerfallsrate werden sich die Infrarot-Divergenzen gegenseitig aufheben. Die inklusive Rate wird in Abschnitt 3.5 genauer diskutiert.

Das Matrixelement für den b -Quark-Zerfall ergibt sich, wenn man alle Einschleifenkorrekturen berücksichtigt, aus der Summe von Born-Term (3.5) sowie der Vertexkorrektur (3.36) und den beiden Selbstenergiebeiträgen (3.71) und (3.73) der Quarks zu

$$\mathcal{M} = \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \Gamma_\mu u(p_b, s_b) \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \quad (3.86)$$

mit

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_\mu + \frac{\Sigma_c}{\not{p} - m_c} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\Sigma_b}{\not{p} - m_b}. \quad (3.87)$$

Der Vertex Λ_μ ist in (3.67) definiert, und die Selbstenergiebeiträge Σ_q sind in (3.84) angegeben. Diese Größen stellen die regularisierten Ausdrücke für das Matrixelement dar, die im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ divergieren. Um nun endliche physikalische Ergebnisse zu bekommen, müssen diese renormiert werden. Dazu werden die divergenten Größen Λ_μ und Σ_q durch die zugehörigen renormierten Ausdrücke $\Lambda_{\mu,R}$ und $\Sigma_{q,R}$ ersetzt:

$$\Gamma_\mu \longrightarrow \Gamma_{\mu,R} = \gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_{\mu,R} + \frac{\Sigma_{c,R}}{\not{p} - m_{c,R}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\Sigma_{b,R}}{\not{p} - m_{b,R}}. \quad (3.88)$$

Das Ziel ist im folgenden, die renormierten Ausdrücke aus den unrenormierten zu berechnen. Dazu wird ein spezielles Renormierungsverfahren, das sogenannte Massenschalenverfahren, verwendet. Man geht davon aus, daß die in den regularisierten Ausdrücken vorkommenden Quarkmassen nicht die physikalischen, sondern sogenannte *nackte*, das heißt unrenormierte und daher divergente, Massen darstellen. Durch Definition der physikalischen Masse als Pol des Quarkpropagators ist es möglich, einen endlichen Wert für die Beiträge zum Matrixelement zu erhalten.

Man geht zunächst vom vollständigen regularisierten Quarkpropagator aus. Berücksichtigt man formal alle Ordnungen der Störungstheorie, so kann man die Störungsreihe resumieren und durch eine geometrische Reihe sogenannter eiteilchen-irreduzibler (1PI für 1 particle irreducible) Beiträge ausdrücken. Eiteilchen-irreduzible Diagramme sind solche, die man durch Zerschneiden einer einzelnen Linie nicht in zwei neue Diagramme

$$\begin{array}{c}
 \bullet \longrightarrow \bullet \quad + \quad \bullet \longrightarrow \textcircled{\Sigma_{1PI}} \longrightarrow \bullet \quad + \quad \bullet \longrightarrow \textcircled{\Sigma_{1PI}} \longrightarrow \textcircled{\Sigma_{1PI}} \longrightarrow \bullet \quad + \quad \dots \\
 \hspace{15em} (3.89)
 \end{array}$$

Abbildung 3.3: Beiträge einteilchen-irreduzibler Diagramme zum Quark-Propagator in der QCD

aufspalten kann. Die gesamte Störungsreihe kann man dann in einer Weise zusammenfassen, wie in Abbildung 3.3 gezeigt ist. Jeder der mit Σ_{1PI} bezeichneten schattierten Kreise enthält die Summe aus allen einteilchen-irreduziblen Diagrammen in allen Ordnungen der Störungstheorie, angefangen mit der ersten Ordnung in α_s . Der $n+1$ -te Summand in Abbildung 3.3 besteht aus einer Kette von n solcher Beiträge Σ_{1PI} . Auf diese Weise erhält man die gesamte Störungsreihe formal durch Aufsummieren der gezeigten Diagramme in einer geometrischen Reihe. Dies entspricht einer Umsortierung oder Resummation der Summe aus Beiträgen zu einer festen Ordnung der Kopplungskonstanten in eine Summe aus Ketten einteilchen-irreduzibler Diagramme.

Die explizite Form dieser Reihe kann nun folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\not{p}) &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} \left[-i \Sigma_{1PI}(\not{p}) \right] \frac{i}{\not{p} - m} \\
 &\quad + \frac{i}{\not{p} - m} \left[-i \Sigma_{1PI}(\not{p}) \right] \frac{i}{\not{p} - m} \left[-i \Sigma_{1PI}(\not{p}) \right] \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m} \left(1 - \frac{\Sigma_{1PI}(\not{p})}{\not{p} - m} \right)^{-1} = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma_{1PI}(\not{p})}, \tag{3.90}
 \end{aligned}$$

wo p den Impuls der Quarks und m deren Masse bezeichnet.

Die berechnete geometrische Reihe enthält noch alle divergenten Ausdrücke und muß deshalb durch die dazugehörigen renormierten Größen ausgedrückt werden. Man kann genau die gleiche Resummation natürlich auch für die renormierten Graphen durchführen und gelangt zu demselben Ergebnis, wobei die Funktion Σ_{1PI} und die Masse m durch die entsprechenden renormierten Ausdrücke ersetzt werden. Der Zusammenhang zwischen dem nackten und dem renormierten vollständigen Propagator wird nun durch den Renormierungsfaktor Z_2 hergestellt. Es gilt

$$\Delta(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma_{1PI}(\not{p})} = \frac{i Z_2}{\not{p} - m_R - \Sigma_{1PI,R}(\not{p})} = Z_2 \Delta_R(\not{p}), \tag{3.91}$$

wobei der Index R die renormierten Größen bezeichnet. Die Singularitäten des unrenormierten Propagators werden somit alle in den abgespaltenen Faktor Z_2 absorbiert. Die nackte und die renormierte Masse stehen durch die Relation $m_R = m + \delta m$ miteinander in

Beziehung. Mit Gleichung (3.91) kann man nun die renormierte Funktion Σ_{1PI} durch die unrenormierte ausdrücken:

$$\Sigma_{1PI,R}(\not{p}) = Z_2 \Sigma_{1PI}(\not{p}) - (Z_2 - 1)(\not{p} - m_R) - Z_2 \delta m. \quad (3.92)$$

Um nun die Funktion $\Sigma_{1PI,R}$ explizit angeben zu können, benötigt man die Werte von Z_2 und δm . Diese werden nun im *on-shell*-Verfahren durch die Forderungen bestimmt, daß der renormierte Propagator einen Pol an der physikalischen Masse m_R hat und ein Residuum von i besitzt. Dementsprechend verlangt man, daß er in der Form

$$S_R = \frac{i}{\not{p} - m_R} \quad (3.93)$$

geschrieben werden kann. Dies vergleicht man anschließend mit dem Ausdruck für Δ_R in (3.91). Dazu entwickelt man die renormierte Funktion $\Sigma_{1PI,R}$ in eine Potenzreihe in $(\not{p} - m_R)$, weil man den Grenzfall $\not{p} \rightarrow m_R$ eines Quarks auf der Massenschale betrachten möchte, in dem der Nenner des Propagators verschwinden soll. Es gilt

$$\Sigma_{1PI,R}(\not{p}) = \Sigma_{1PI,R}(m_R) + (\not{p} - m_R) \left. \frac{\partial \Sigma_{1PI,R}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_R} + \mathcal{O}\left((\not{p} - m_R)^2\right) \quad (3.94)$$

und damit für den Nenner des vollständigen Propagators Δ_R

$$\begin{aligned} \not{p} - m_R - \Sigma_{1PI,R}(\not{p}) &= (\not{p} - m_R) \left(1 - \left. \frac{\partial \Sigma_{1PI,R}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_R} \right) \\ &\quad - \Sigma_{1PI,R}(m_R) + \mathcal{O}\left((\not{p} - m_R)^2\right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Verlangt man nun, daß der konstante sowie der in $(\not{p} - m_R)$ lineare Term verschwinden,

$$\Sigma_{1PI,R}(m_R) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Sigma_{1PI,R}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_R} = 0, \quad (3.96)$$

so geht Δ_R für Quarks auf der Massenschale in den Ausdruck S_R über, denn für den Propagatornenner ergibt sich die gewünschte Form

$$i\Delta_R^{-1} = \not{p} - m_R + \mathcal{O}\left((\not{p} - m_R)^2\right) = iS_R^{-1} + \mathcal{O}\left((\not{p} - m_R)^2\right),$$

die eine Nullstelle bei $\not{p} = m_R$ besitzt. Mit Hilfe der beiden Bedingungen (3.96) können die Größen Z_2 und δm eindeutig bestimmt werden. Dazu benutzt man für $\Sigma_{1PI,R}(\not{p})$ die Beziehung (3.92) und erhält

$$\begin{aligned} \Sigma_{1PI,R}(m_R) &= Z_2 (\Sigma_{1PI}(m_R) - \delta m) \stackrel{!}{=} 0 \implies \Sigma_{1PI}(m_R) = \delta m \\ \left. \frac{\partial \Sigma_{1PI,R}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_R} &= Z_2 \left. \frac{\partial \Sigma_{1PI}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_R} - (Z_2 - 1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies Z_2^{-1} &= 1 - \left. \frac{\partial \Sigma_{1PI}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_R}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Damit lassen sich die Faktoren δm und Z_2 durch die regularisierten eiteilchen-irreduziblen Selbstenergiebeiträge und deren Ableitung ausdrücken.

Abbildung 3.4: Beiträge eiteilchen-irreduzibler Diagramme zum Quark-Propagator der Ordnung α_s in der QCD

Wenn wir uns auf die erste Ordnung der Störungstheorie beschränken, können wir die hergeleiteten Beziehungen noch weiter vereinfachen. In Ordnung α_s trägt zum Propagator nur die bereits berechnete Selbstenergiekorrektur Σ bei. In derselben Ordnung ist dies aber gleich der aufsummierten geometrischen Reihe, deren Diagramme in Abbildung 3.4 gezeigt sind. Alle folgenden Berechnungen sind analog zu den bereits für beliebige Ordnungen in α_s durchgeführten, wobei die dort auftretende Funktion Σ_{1PI} durch Σ ersetzt werden muß. Dann ergibt sich wieder der Zusammenhang (3.92) zwischen renormierter und unrenormierter Funktion. Entwickelt man nun die beiden Ausdrücke δm und Z_2 auch in eine Störungsreihe in der Kopplungskonstanten α_s , so findet man, daß sie die Form

$$\delta m = \mathcal{O}(\alpha_s), \quad Z_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s)$$

hat. Berücksichtigt man außerdem, daß Σ auch von der Ordnung α_s ist, erhält man in erster Ordnung die gegenüber (3.92) einfachere Beziehung

$$\Sigma_R(\not{p}) = \Sigma(\not{p}) - (Z_2 - 1)(\not{p} - m_R) - \delta m \quad (3.99)$$

zwischen der renormierten und der unrenormierten Selbstenergie.

Wir wollen im folgenden noch die Beiträge der renormierten Funktion Σ_R in (3.88) berechnen. Wie wir oben gesehen haben, kann man Σ_R in eine Potenzreihe in $\not{p} - m_R$ entwickeln, wobei das konstante und lineare Glied aufgrund der Bedingung für die Renormierung der Masse verschwinden. Die Beiträge zur Selbstenergie in (3.88) sind also von der Ordnung $(\not{p} - m_R)$, also explizit von der Form

$$\frac{\Sigma_R(\not{p})}{\not{p} - m_R} = \frac{1}{2} (\not{p} - m_R) \left. \frac{\partial^2 \Sigma_R}{\partial \not{p}^2} \right|_{\not{p} = m_R} + \mathcal{O}\left((\not{p} - m_R)^2\right). \quad (3.100)$$

Die Funktion Σ_R muß zur Berechnung der renormierten Selbstenergiebeiträge für das b - und das c -Quark in die Matrixelemente (3.73) und (3.71) eingesetzt werden. Dort steht sie zwischen den Spinoren, die die Quarks auf der Massenschale beschreiben. Durch Anwendung der Dirac-Gleichung $(\not{p} - m_R)u(p, s)$ kann der Ausdruck \not{p} daher durch die Masse m_R ersetzt werden. Das bedeutet, daß im *on-shell*-Schema nach (3.100) die Beiträge zur

renormierten Selbstenergie verschwinden,

$$\left. \frac{\Sigma_R(\not{p})}{\not{p} - m_R} \right|_{\not{p} = m_R} = 0, \quad (3.101)$$

so daß man sie bei der Berechnung der Einschleifenkorrekturen nicht berücksichtigen muß.

Neben den Selbstenergiekorrekturen der äußeren Quark-Linien muß nun noch die Vertexkorrektur renormiert werden. Dazu führt man eine Renormierungskonstante Z_1 ein, die die unrenormierte Vertexfunktion Λ_μ durch die renormierte $\Lambda_{\mu,R}$ ausdrückt:

$$\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_\mu(p_b, p_c) = Z_1 \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_{\mu,R}(p_b, p_c) \right]. \quad (3.102)$$

Hierbei wurde auch der Anteil des Bornterms berücksichtigt. Die Konstante Z_1 kann mit Hilfe der Ward-Identität [49]

$$Z_1 = \sqrt{Z_{2,b}} \sqrt{Z_{2,c}} \quad (3.103)$$

durch die bekannten Konstanten $Z_{2,b}$ und $Z_{2,c}$ der Selbstenergiebeiträge der beiden Quarks ausgedrückt werden. Damit gilt für den renormierten Vertex

$$\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_{\mu,R}(p_b, p_c) = Z_{2,b}^{-1/2} \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_\mu(p_b, p_c) \right] Z_{2,c}^{-1/2}. \quad (3.104)$$

Wenn man berücksichtigt, daß die Selbstenergiekorrekturen nicht zur Amplitude beitragen, erhält man das renormierte Übergangsmatrixelement in erster Ordnung, indem man den Ausdruck (3.88) durch den renormierten Vertex (3.104) ersetzt und die Faktoren $Z_{2,b}$ und $Z_{2,c}$ in eine Potenzreihe in α_s entwickelt. Da die Z_2 -Faktoren für den Bornschen Ausdruck gleich 1 sind, kann man sie für den strahlungskorrigierten Fall in der Form

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2$$

schreiben, wobei δZ_2 von der Ordnung α_s ist. Da der korrigierte unrenormierte Vertex Λ_μ ebenfalls von erster Ordnung ist, kann man den renormierten Vertex in derselben Ordnung entwickeln. Er ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_{\mu,R}(p_b, p_c) &= \gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_\mu(p_b, p_c) - \frac{1}{2} (\delta Z_{2,c} + \delta Z_{2,b}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \\ &\quad + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Setzt man diesen Vertex in das Matrixelement ein, so ergibt sich

$$\mathcal{M}_R = \mathcal{M} - \frac{1}{2} (\delta Z_{2,c} + \delta Z_{2,b}) \mathcal{M}_B + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (3.106)$$

wobei \mathcal{M} das gesamte unrenormierte Matrixelement bis einschließlich erster Ordnung und \mathcal{M}_B das Bornsche Matrixelement ist, das den Vertex $\gamma_\mu (1 - \gamma_5)$ enthält. Der Anteil δZ_2

ist nun proportional zu α_s und ergibt sich aus der Ableitung der Selbstenergie in derselben Ordnung

$$\delta Z_2 = - \left. \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m}. \quad (3.107)$$

Die Ableitung kann unter Benutzung von $\not{p}^2 = p^2$ mit der Kettenregel umgeschrieben werden zu

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} = 2 \not{p} \frac{\partial}{\partial p^2}. \quad (3.108)$$

Die Ableitung des Selbstenergiebeitrages ist, anders als Σ selbst, infrarotdivergent. Für die Berechnung der Ableitung von Σ_q ist es deshalb günstiger, nicht den vollständig integrierten regularisierten Ausdruck (3.84) zu benutzen, sondern von (3.78) auszugehen. Mit dem Resultat für das vektorielle Zweipunkt-Integral (3.81) ist dann der Selbstenergiebeitrag

$$\begin{aligned} \Sigma_q = & -ig_s^2 C_F I \left\{ (2-D) \not{p}_q \left[I_2 + \frac{1}{2p_q^2} (I_1(m^2) - I_1(m_q^2) - (p_q^2 - m_q^2 + m^2) I_2) \right] \right. \\ & \left. + D m_q I_2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

wo das skalare Zweipunkt-Integral $I_2(p_q^2, m_q^2, m^2)$ auch von der Gluonmasse abhängt. Die Dimension D ist wiederum durch $D = 4 - 2\epsilon$ gegeben, womit

$$D = 2(2 - \epsilon), \quad 2 - D = -2(1 - \epsilon)$$

gilt. Nun können wir die Ableitung von Σ_q nach \not{p}_q bilden. Mit Anwendung der Produktregel und (3.108) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \not{p}_q} = & -ig_s^2 C_F I \left\{ (2-D) \left[I_2 + \frac{1}{2p_q^2} (I_1(m^2) - I_1(m_q^2) - (p_q^2 - m_q^2 + m^2) I_2) \right] \right. \\ & + 2p_q^2 (2-D) \frac{\partial}{\partial p_q^2} \left[I_2 + \frac{1}{2p_q^2} (I_1(m^2) - I_1(m_q^2) - (p_q^2 - m_q^2 + m^2) I_2) \right] \\ & \left. + 2D m_q \not{p}_q \frac{\partial}{\partial p_q^2} I_2 \right\} \\ = & -ig_s^2 C_F I \left\{ (2-D) \left[(p_q^2 + m_q^2 - m^2) \frac{\partial I_2}{\partial p_q^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2p_q^2} (I_1(m^2) - I_1(m_q^2) - (p_q^2 - m_q^2 + m^2) I_2) \right] + 2D m_q \not{p}_q \frac{\partial I_2}{\partial p_q^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Entwickelt man dieses Ergebnis in eine Potenzreihe in der Gluonmasse m und vernachlässigt alle Terme der Ordnung $\mathcal{O}(m)$ im Grenzfall $m \rightarrow 0$, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \not{p}_q} &= -ig_s^2 C_F I \left\{ (2-D) \left[(p_q^2 + m_q^2) \frac{\partial I_2}{\partial p_q^2} + \frac{1}{2p_q^2} \left(I_1(m_q^2) + (p_q^2 - m_q^2) I_2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2D m_q \not{p}_q \frac{\partial I_2}{\partial p_q^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Mit der Ersetzung $\not{p}_q = m_q$ gilt

$$\left. \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \not{p}_q} \right|_{\not{p}_q = m_q} = -ig_s^2 C_F I \left[4m_q^2 \left. \frac{\partial I_2}{\partial p_q^2} \right|_{\not{p}_q = m_q} - \frac{D-2}{2m_q^2} I_1(m_q^2) \right]. \quad (3.112)$$

Das skalare Einpunkt-Integral I_1 ist im Anhang in (B.36) angegeben. Die Ableitung des skalaren Zweipunkt-Integrals I_2 wird am einfachsten aus der Darstellung (B.37) berechnet, da man sowohl die Ableitung als auch die Ersetzung $\not{p}_q = m_q$ direkt im Integranden durchführen kann. Man erhält für die Ableitung des skalaren Zweipunkt-Integrals

$$\frac{\partial I_2}{\partial p_q^2} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{x^2 p_q^2 + x(m_q^2 - m^2 - p_q^2) + m^2} \quad (3.113)$$

und nach Einsetzen von $\not{p}_q = m_q$

$$\left. \frac{\partial I_2}{\partial p_q^2} \right|_{\not{p}_q = m_q} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{x^2 m_q^2 - x m^2 + m^2} = \frac{-i}{16\pi^2 m_q^2} \left[1 + \ln \left(\frac{m}{m_q} \right) \right] + \mathcal{O}(m). \quad (3.114)$$

Setzt man dies in (3.112) ein und entwickelt das Resultat in eine Potentreihe in ϵ , so ergibt sich

$$\left. \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \not{p}_q} \right|_{\not{p}_q = m_q} = \frac{-g_s^2}{16\pi^2} C_F I \left[\Delta + 4 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_q^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{m^2}{m_q^2} \right) \right] \quad (3.115)$$

mit $\Delta = 1/\epsilon - \gamma + \ln(4\pi)$. Damit kann man nun das renormierte Matrixelement (3.106) mit (3.107) in erster Ordnung der Kopplungskonstanten berechnen. Aus dem regularisierten Matrixelement (3.86) ergibt sich unter Berücksichtigung, daß die beiden Anteile der Selbstenergie in erster Ordnung der Kopplungskonstanten nicht beitragen, der folgende Ausdruck für das renormierte Matrixelement:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_R &= \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Lambda_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\delta Z_{2,b} + \delta Z_{2,c}) \right] u(p_b, s_b) \\ &\quad \times \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) + \mathcal{O}(\alpha_s). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern entspricht dem renormierten Vertex bis einschließlich erster Ordnung α_s . Mit der Darstellung (3.67) kann der korrigierte Beitrag zum Vertex in

der Form

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu &= \Lambda_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\delta Z_{2,b} + \delta Z_{2,c}) \\
&= \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F I \left\{ \left[\Lambda_1 \gamma_\mu + \Lambda_2 p_{b,\mu} + \Lambda_3 p_{c,\mu} - (\Lambda_4 \gamma_\mu + \Lambda_5 p_{b,\mu} + \Lambda_6 p_{c,\mu}) \gamma_5 \right] \right. \\
&\quad \left. - \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \left[\Delta + 4 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) + \ln \left(\frac{m^4}{m_b^2 m_c^2} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F I \left\{ (\Lambda_1 - K) \gamma_\mu + \Lambda_2 p_{b,\mu} + \Lambda_3 p_{c,\mu} \right. \\
&\quad \left. - [(\Lambda_4 - K) \gamma_\mu + \Lambda_5 p_{b,\mu} + \Lambda_6 p_{c,\mu}] \gamma_5 \right\} \tag{3.117}
\end{aligned}$$

mit

$$K = \Delta + 4 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b m_c} \right) + \ln \left(\frac{m^4}{m_b^2 m_c^2} \right) \tag{3.118}$$

geschrieben werden. Wenn man die Vorfaktoren zu γ_μ und zu $\gamma_\mu \gamma_5$ zusammenfaßt, kann das Ergebnis dargestellt werden als

$$\Gamma_\mu = \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F I \left[A_1 \gamma_\mu + A_2 p_{b,\mu} + A_3 p_{c,\mu} - (A_4 \gamma_\mu + A_5 p_{b,\mu} + A_6 p_{c,\mu}) \gamma_5 \right] \tag{3.119}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
A_1 &= \Lambda_1 - K \\
&= - \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{m_b^2 m_c^2}{m^4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{2 m_b^2} \right) \ln \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2 + \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2}{(m_b^2 - m_c^2 - \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 + q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right] \\
&\quad - \left[4 + \ln \left(\frac{m^4}{m_b^2 m_c^2} \right) \right] - \frac{m_b^2 - m_c^2}{2 q^2} \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
&\quad + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b + m_c)^2 - q^2 \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2 q^2} \right] \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$A_2 = \Lambda_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{q^2} (m_b - m_c) - \frac{1}{q^2} \left[(m_b + 2m_c) - (m_b + m_c) \frac{(m_b - m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
&+ \frac{1}{q^2} \left[(m_b - m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} - \frac{m_c}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b - m_c) (3m_b + m_c) + q^2 \right) \right] \\
&\quad \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \Lambda_3 \\
&= -\frac{2}{q^2} (m_b - m_c) + \frac{1}{q^2} \left[(2m_b + m_c) - (m_b + m_c) \frac{(m_b - m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
&- \frac{1}{q^2} \left[(m_b - m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} - \frac{m_b}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b - m_c) (m_b + 3m_c) - q^2 \right) \right] \\
&\quad \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \Lambda_4 - K \\
&= -\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{m_b^2 m_c^2}{m^4} \right) \right. \\
&+ \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{2m_b^2} \right) \ln \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2 + \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2}{(m_b^2 - m_c^2 - \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2} \right) \\
&- 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 + q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \left. \right] \\
&- \left[4 + \ln \left(\frac{m^4}{m_b^2 m_c^2} \right) \right] - \frac{m_b^2 - m_c^2}{2q^2} \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
&+ \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b - m_c)^2 - q^2 \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \right] \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 &= \Lambda_5 \\
&= -\frac{2}{q^2} (m_b + m_c) + \frac{1}{q^2} \left[(m_b - 2m_c) - (m_b - m_c) \frac{(m_b + m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{q^2} \left[(m_b + m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} + \frac{m_c}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b + m_c) (3m_b - m_c) + q^2 \right) \right] \\
& \quad \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \\
A_6 &= \Lambda_6 \\
&= \frac{2}{q^2} (m_b + m_c) - \frac{1}{q^2} \left[(2m_b - m_c) - (m_b - m_c) \frac{(m_b + m_c)^2}{q^2} \right] \ln \left(\frac{m_c^2}{m_b^2} \right) \\
& \quad + \frac{1}{q^2} \left[(m_b + m_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} - \frac{m_b}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b + m_c) (m_b - 3m_c) - q^2 \right) \right] \\
& \quad \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right).
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Der Term K aus der Renormierung hebt die mit $1/\epsilon$ regularisierten Ausdrücke gerade auf, so daß der gesamte renormierte Vertex UV-endlich wird. Er enthält aber immer noch die Infrarot-Singularitäten, die sich erst gegen die entsprechenden Terme der Bremsstrahlungsdiagramme herauskürzen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Schleifenbeiträge rein reell sind, wie man an den Koeffizienten A_i aus (3.120) ablesen kann. Im allgemeinen besitzen Schleifenbeiträge sowohl einen Real- als auch einen Imaginärteil. Die Bedingungen dafür, ob sie reell oder komplex sind, werden durch die Landau-Gleichungen [50] und die Cutkosky-Regeln [51] gegeben. Im hier diskutierten Fall der Vertexkorrektur, deren Graph in Abbildung 3.2 (c) dargestellt ist und die mit Hilfe einer Gluonmasse regularisiert wurde, führen diese Bedingungen am bbg -, dem ccg - und dem bcW -Vertex auf drei Ungleichungen

$$p_b^2 \geq (m_b \pm m)^2, \quad p_c^2 \geq (m \pm m_c)^2, \quad q^2 \geq (m_b \pm m_c)^2, \tag{3.121}$$

von denen mindestens eine erfüllt sein muß, damit die Schleifenbeiträge einen Imaginärteil enthalten. Entscheidend ist hierbei die jeweilige Gleichung mit der Massensumme. Für b - und c -Quarks auf der Massenschale sowie ein virtuelles W -Boson gilt

$$p_b^2 = m_b^2, \quad p_c^2 = m_c^2, \quad 0 \leq q^2 \leq (m_b - m_c)^2,$$

so daß alle drei Ungleichungen nicht erfüllt sein können. Damit gibt es für die in diesem Abschnitt berechnete Vertexkorrektur keinen Imaginärteil.

Die Entwicklungskoeffizienten A_i in (3.120) erfüllen einige Symmetriebeziehungen, die durch folgende Relationen gegeben sind:

$$A_2(m_c, m_b) = A_3(m_b, m_c), \quad A_5(m_c, m_b) = -A_6(m_b, m_c). \tag{3.122}$$

A_2 und A_3 sowie A_5 und $-A_6$ gehen also durch Vertauschen der Quarkmassen $m_b \leftrightarrow m_c$ ineinander über. Außerdem erfüllen sie noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} A_4(-m_b, m_c) &= A_1(m_b, m_c), & A_5(-m_b, m_c) &= A_2(m_b, m_c), \\ A_6(-m_b, m_c) &= A_3(m_b, m_c). \end{aligned} \quad (3.123)$$

Das bedeutet, daß die Koeffizienten des Axialvektor-Anteils aus denen für den Vektoranteil durch die Transformation $m_b \rightarrow -m_b$ hervorgehen. Ähnliche Beziehungen erhält man auch für die Transformation $m_c \rightarrow -m_c$. Sie lauten

$$\begin{aligned} A_4(m_b, -m_c) &= A_1(m_b, m_c), & A_5(m_b, -m_c) &= -A_2(m_b, m_c), \\ A_6(m_b, -m_c) &= -A_3(m_b, m_c). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Schließlich gilt auch eine zu (3.69) analoge Relation

$$A_1 - A_4 = \frac{4 m_b m_c}{\sqrt{\lambda}} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right), \quad (3.125)$$

die später zum Vereinfachen der Einschleifen-Beiträge benutzt wird.

Die Vertexkorrektur kann mit analytischen Ergebnissen aus der Literatur verglichen werden. Im Resultat von Paschalis und Gounaris [52] wird die Vertexkorrektur nach γ_μ , $\sigma_{\mu\nu} q^\nu$ und q_μ sowie nach $\gamma_\mu \gamma_5$, $\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5$ und $q_\mu \gamma_5$ entwickelt und die dazugehörigen Formfaktoren F_1 , F_2 und F_3 sowie H_1 , H_2 und H_3 angegeben. $q = p_1 - p_2$ ist der Impulsübertrag zwischen den beiden Quarks. Mit Hilfe der Gordon-Identität [53]

$$\bar{u}(p) \gamma_\mu u(q) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p) \left[(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p-q)_\nu \right] u(q) \quad (3.126)$$

kann man die Formfaktoren F_j und H_j auf die in dieser Arbeit berechneten Koeffizienten A_i umrechnen. Das Ergebnis ist eine Linearkombinationen der Formfaktoren aus [52]. Bei dem Vergleich beider Resultate wurde in [52] ein Fehler in den Formfaktoren $F_3(q^2)$ und $H_3(q^2)$ gefunden. Er wird korrigiert, indem man in der letzten Zeile von Gleichung (A 8) den Faktor $(m_2 - m_1)/q^2$ durch $(m_2 - m_1)/(2q^2)$ ersetzt. Nach der Korrektur dieses Fehlers stimmen beide Resultate miteinander überein.

3.3.4 Renormierte Übergangsamplitude

Das Matrixelement für die renormierte Vertexkorrektur (3.116) läßt sich nun durch Einsetzen der renormierten Vertexfunktion (3.119) berechnen. Die Vertexfunktion kann mit Hilfe der Abkürzung

$$T_\mu = A_1 \gamma_\mu + A_2 p_{b,\mu} + A_3 p_{c,\mu} - (A_4 \gamma_\mu + A_5 p_{b,\mu} + A_6 p_{c,\mu}) \gamma_5 \quad (3.127)$$

in der kompakten Form

$$\Gamma_\mu = \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F I T_\mu = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I T_\mu \quad (3.128)$$

geschrieben werden. Das renormierte Matrixelement (3.116) bis einschließlich erster Ordnung in der Kopplungskonstanten ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_R &:= \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} H_\mu L^\mu \\ &= \frac{-ig_w^2}{8M_W^2} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I T_\mu \right] u(p_b, s_b) L^\mu,\end{aligned}\quad (3.129)$$

wobei man wie bei der Bornschen Näherung wieder einen Hadron-Strom H_μ und einen Lepton-Strom L^μ einführen kann. Der Lepton-Strom ist derselbe wie bei der Bornschen Rate (3.4). Der Hadron-Strom

$$H_\mu = \bar{u}(p_c, s_c) \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I T_\mu \right] u(p_b, s_b) \equiv H_\mu^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I H_\mu^{(1)} \quad (3.130)$$

besteht aus dem Bornschen Anteil $H_\mu^{(0)}$ und einem strahlungskorrigierten Beitrag $H_\mu^{(1)}$. Der Bornsche Anteil ist ebenfalls in (3.4) definiert und wird zur Unterscheidung vom korrigierten Anteil mit einem Index 0 gekennzeichnet. Der Anteil in erster Ordnung der Störungstheorie ist definiert als

$$H_\mu^{(1)} = \bar{u}(p_c, s_c) T_\mu u(p_b, s_b). \quad (3.131)$$

Die Rate ergibt sich zunächst durch Bildung des Betragsquadrates des Matrixelementes und kann als Kontraktion eines strahlungskorrigierten Hadron-Tensors mit dem Lepton-Tensor der Bornschen Rate (3.8) in folgender Form geschrieben werden:

$$|\mathcal{M}_R|^2 = \frac{g_w^4}{64M_W^4} |V_{bc}|^2 H_{\mu\nu} L^{\mu\nu}. \quad (3.132)$$

Der Hadron-Tensor ergibt sich durch

$$H_{\mu\nu} = H_\mu H_\nu^* = \left(H_\mu^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I H_\mu^{(1)} \right) \left(H_\nu^{*(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I H_\nu^{*(1)} \right) \quad (3.133)$$

und kann ebenfalls in den Bornschen und einen strahlungskorrigierten Anteil aufgeteilt werden. Dazu entwickelt man $H_{\mu\nu}$ in eine Potenzreihe in der Kopplungskonstanten α_s und vernachlässigt den Term der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. Man erhält

$$\begin{aligned}H_{\mu\nu} &= H_\mu^{(0)} H_\nu^{*(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I \left(H_\mu^{(0)} H_\nu^{*(1)} + H_\mu^{(1)} H_\nu^{*(0)} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \\ &= H_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F I H_{\mu\nu}^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2).\end{aligned}\quad (3.134)$$

Der Bornsche Hadron-Tensor $H_{\mu\nu}^{(0)}$ ist in (3.8) angegeben und wird im folgenden auch mit einem Index 0 gekennzeichnet. Der strahlungskorrigierte Anteil ist durch

$$\begin{aligned}H_{\mu\nu}^{(1)} &= \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \bar{u}(p_b, s_b) \bar{T}_\nu u(p_c, s_c) \\ &\quad + \bar{u}(p_c, s_c) T_\mu u(p_b, s_b) \bar{u}(p_b, s_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu u(p_c, s_c)\end{aligned}\quad (3.135)$$

gegeben, wobei

$$\bar{T}_\nu = A_1^* \gamma_\nu + A_2^* p_{b,\nu} + A_3^* p_{c,\nu} + \gamma_5 (A_4^* \gamma_\nu + A_5^* p_{b,\nu} + A_6^* p_{c,\nu}) \quad (3.136)$$

gilt. Da die Entwicklungskoeffizienten A_i aus (3.120) reell sind, kann man $A_i^* = A_i$ setzen. Im nächsten Schritt wird über den Spin des b -Quarks gemittelt und über die Spins der Leptonen summiert. Außerdem mittelt man über die drei Farbzustände des b -Quarks im Anfangszustand. Das führt dazu, daß man in (3.38) die beiden freien Indices der 3×3 -Matrizen kontrahiert und anschließend das Resultat durch die Anzahl der Farbzustände dividiert. Dies liefert

$$\frac{1}{3} \sum_{i,j} \frac{(\lambda^a)_i^j}{2} \frac{(\lambda_a)_j^i}{2} = \frac{1}{3} \text{Sp} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda_a}{2} \right) = \frac{1}{3} \sum_i C_F \delta_i^i = C_F. \quad (3.137)$$

Benutzt man dieses Ergebnis, so erhält man nach Mittelung über den b -Spin und Summation über die Spins der Leptonen für das Betragsquadrat des Matrixelementes (3.132) den Ausdruck

$$|\overline{\mathcal{M}}_R|^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{s_b, s_l, s_{\nu_l}} |\mathcal{M}_{\mathcal{R}}|^2 = \frac{g_w^2}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \bar{H}_{\mu\nu} \bar{L}^{\mu\nu} \quad (3.138)$$

mit

$$\bar{H}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_b} H_{\mu\nu}, \quad \bar{L}^{\mu\nu} = \sum_{s_l, s_{\nu_l}} L^{\mu\nu}. \quad (3.139)$$

Das Ergebnis kann als Spur ausgedrückt werden. Der Lepton-Tensor $\bar{L}^{\mu\nu}$ ist in (3.11) berechnet worden. Der spinsummierte Hadron-Tensor kann mit (3.134) geschrieben werden als

$$\bar{H}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_b} \left(H_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F H_{\mu\nu}^{(1)} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) = \bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (3.140)$$

Der mit $\bar{H}_{\mu\nu}^{(0)}$ bezeichnete Anteil ist der Bornsche über den Spin gemittelte Hadron-Tensor (3.11). Der korrigierte Anteil in erster Ordnung der Kopplungskonstanten ist

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ (\not{p}_c + m_c) (1 + \gamma_5 \not{\epsilon}_c) \right. \\ &\quad \left. \times [\gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}_b + m_b) \bar{T}_\nu + T_\mu (\not{p}_b + m_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu] \right\}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Im nächsten Schritt kann man die Spuren auswerten. Für den Lepton-Tensor und den Bornschen Anteil des spingemittelten Hadron-Tensors ergibt sich das Resultat (3.12). Der strahlungskorrigierte Teil des Hadron-Tensors hat die Form

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} &= 2 g_{\mu\nu} [m_b m_c (A_1 - A_4) - (p_b \cdot \bar{p}_c) (A_1 + A_4)] \\ &\quad + 2 [m_c (A_2 + A_5) p_{b,\mu} p_{b,\nu} + (A_1 + A_4) (p_{b,\mu} \bar{p}_{c,\nu} + \bar{p}_{c,\mu} p_{b,\nu})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_b (A_3 - A_6) p_{c,\mu} p_{c,\nu} + (A_3 + A_6) (p_b \cdot s_c) p_{c,\mu} p_{c,\nu}] \\
& + [m_b (A_2 - A_5) + m_c (A_3 + A_6) + (A_2 + A_5) (p_b \cdot s_c)] (p_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} p_{b,\nu}) \\
& - [m_b m_c (A_2 - A_5) + (A_2 + A_5) (p_b \cdot p_c)] (p_{b,\mu} s_{c\nu} + s_{c\mu} p_{b,\nu}) \\
& - [m_b m_c (A_3 - A_6) + (A_3 + A_6) (p_b \cdot p_c)] (p_{c,\mu} s_{c\nu} + s_{c\mu} p_{c,\nu}) \\
& + 2i [(A_1 + A_4) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_b^\rho \bar{p}_c^\sigma + (A_1 - A_4) m_b \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_c^\rho s_c^\sigma] \\
& - i [(A_2 + A_5) p_{b,\mu} + (A_3 + A_6) p_{c,\mu}] \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} p_b^\rho p_c^\sigma s_c^\tau \\
& + i [(A_2 + A_5) p_{b,\nu} + (A_3 + A_6) p_{c,\nu}] \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau} p_b^\rho p_c^\sigma s_c^\tau, \tag{3.142}
\end{aligned}$$

wobei wieder die Abkürzung $\bar{p}_c = p_c - m_c s_c$ verwendet wurde.

3.3.5 Phasenraumintegration und Zerfallsrate

Die Zerfallsrate ergibt sich aus dem spingemittelten Bertagsquadrat des renormierten Matrixelementes (3.138) durch Phasenraumintegration und anschließender Multiplikation mit dem Flußfaktor. Da es sich bei dem betrachteten Prozeß um einen Dreikörper-Zerfall handelt, kann man die bei der Berechnung der Bornschen Rate abgeleitete Phasenraumformel (3.15) für $q = p_b - p_c$ benutzen und setzt das spingemittelte Betragsquadrat des renormierten Matrixelementes (3.138) ein. Zur Auswertung des Integrals geht man genauso vor wie auf Born-Niveau, indem man zuerst den Phasenraum der Leptonen kovariant ausintegriert. Dazu benutzt man das Tensor-Integral (3.16), dessen Resultat in (3.22) angegeben wurde. Verwendet man schließlich die Kontraktion (3.23), dann ist die Zerfallsrate bis zur ersten Ordnung in α_s

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{1}{2 (2\pi)^5 m_b E_c} \left(\bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} \right) T^{\mu\nu\alpha\beta} I_{\alpha\beta} d^3 \vec{p}_c \\
&= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{1}{6 (2\pi)^4 m_b E_c} \left(\bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} \right) (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) d^3 \vec{p}_c \\
&= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{1}{6 (2\pi)^4 m_b E_c} \left[S^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F S^{(1)} \right] d^3 \vec{p}_c \tag{3.143}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
S^{(0)} &= \bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) = 2 [2 (p_b \cdot q) (\bar{p}_c \cdot q) + q^2 (p_b \cdot \bar{p}_c)] \equiv 2 T^{(0)} \\
S^{(1)} &= \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \equiv -2 T^{(1)}. \tag{3.144}
\end{aligned}$$

Der erste Anteil ist genau die Bornsche Rate (3.24). Das Resultat für den Einschleifen-Anteil $S^{(1)}$ kann in Abhängigkeit der Koeffizienten A_1, \dots, A_6 dargestellt werden mit

$$S^{(1)} = c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4 + c_5 A_5 + c_6 A_6, \tag{3.145}$$

wobei die Konstanten c_1, \dots, c_6 folgende Form haben:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left((m_b - m_c)^2 - q^2 \right) \left((m_b + m_c)^2 + 2q^2 \right) - 2m_c (m_b^2 - m_c^2 + 2q^2) (p_b \cdot s_c) \\
c_2 &= \frac{1}{2} \left((m_b + m_c)^2 - q^2 \right) \left[(m_b + m_c) \left((m_b - m_c)^2 - q^2 \right) - 2m_c (m_b - m_c) (p_b \cdot s_c) \right] \\
c_3 &= c_2 \\
c_4 &= c_1 + 12m_b m_c q^2 \\
&= \left((m_b + m_c)^2 - q^2 \right) \left((m_b - m_c)^2 + 2q^2 \right) - 2m_c (m_b^2 - m_c^2 + 2q^2) (p_b \cdot s_c) \\
c_5 &= -\frac{1}{2} \left((m_b - m_c)^2 - q^2 \right) \left[(m_b - m_c) \left((m_b + m_c)^2 - q^2 \right) - 2m_c (m_b + m_c) (p_b \cdot s_c) \right] \\
c_6 &= c_5
\end{aligned} \tag{3.146}$$

Nach Einsetzen und Zusammenfassen der logarithmischen Terme kann man dann einen Ausdruck für $T^{(1)}$ angeben, der nur noch von den Quarkmassen und von den Skalarprodukten q^2 und $p_b \cdot s_c$ abhängt:

$$\begin{aligned}
T^{(1)} &= \left[(m_b^2 - m_c^2)^2 + (m_b^2 + m_c^2) q^2 - 2(q^2)^2 - 2m_c (m_b^2 - m_c^2 + 2q^2) (p_b \cdot s_c) \right] \\
&\quad \times A_0(m_b, m_c, m, q^2) \\
&\quad + \left[3(m_b^2 - m_c^2) (m_b^2 + m_c^2 - q^2) - 2m_c (3m_b^2 - m_c^2) (p_b \cdot s_c) \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \\
&\quad - \left[3q^2 \sqrt{\lambda} + 2m_c \left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (m_b^2 + m_c^2 - q^2) (m_b^2 - m_c^2 + 2q^2) \right) (p_b \cdot s_c) \right] \\
&\quad \times \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right).
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Die Ergebnisse sind nach den auftretenden Logarithmen geordnet, die in den Koeffizienten A_1, \dots, A_6 vorkommen. Der Faktor A_0 ist implizit durch

$$\begin{aligned}
A_1 &= -A_0 - \frac{m_b^2 - m_c^2}{2q^2} \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \\
&\quad + \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left((m_b + m_c)^2 - q^2 \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \right] \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned} \tag{3.148}$$

gegeben. Er ergibt sich also aus dem Koeffizienten A_1 bis auf ein Vorzeichen durch Weglassen der einfach logarithmischen Terme, die nicht von der Gluonmasse abhängen. Wenn man die Logarithmen, die m enthalten, etwas vereinfacht, lautet A_0 in expliziter Form

$$A_0 = \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{\sqrt{\lambda}} \left[\ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{m_b m_c}{m^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{2 m_b^2} \right) \ln \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2 + \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2}{(m_b^2 - m_c^2 - \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2} \right) \\
& - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 + q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \\
& + 2 \left[\ln \left(\frac{m^2}{m_b m_c} \right) + 2 \right]. \tag{3.149}
\end{aligned}$$

Der Vorteil bei der Einführung von A_0 ist eine Verkürzung der analytischen Resultate für die Raten. Das liegt daran, daß sich die einfach logarithmischen Terme in A_1 teilweise gegen ähnliche Terme in den übrigen infrarotendlichen Ausdrücken der Vertex-Funktion herausheben. Das Vorzeichen von A_0 ist so gewählt, daß im Intervall $2y \leq x \leq 1 + y^2$ für kleine Werte der Gluonmasse $A_0 > 0$ gilt.

Zur vollständigen Berechnung der differentiellen Zerfallsrate geht man genauso vor wie bei der Bornschen Rate. Man setzt die parametrisierten Viererimpulse (3.25) ein und führt die Phasenraumintegration in Kugelkoordinaten

$$d^3 \vec{p}_c = 4\pi |\vec{p}_c|^2 d|\vec{p}_c| = 4\pi |\vec{p}_c| E_c dE_c$$

aus. Da die hier vorkommenden Viererimpulse dieselben sind wie bei der Bornschen Rate, verschwinden auch bei der Einschleifenkorrektur alle Skalarprodukte von $s_{c,t}$ mit den Impulsvektoren der Quarks. Somit gibt es ebenfalls keinen transversalen Anteil der c -Quark-Polarisation, und man betrachtet nur den durch $s_c = 0$ gegebenen unpolarisierten Anteil, sowie den longitudinal polarisierten $s_{c,l}$. Die Anteile des Born-Terms und des Einschleifen-Anteils (3.144) sind dann durch

$$\begin{aligned}
T^{(0)} &= m_b (E_c \mp |\vec{p}_c|) (3 m_b^2 - 4 m_b E_c + m_c^2) - 2 m_b m_c^2 (m_b - E_c) \\
T^{(1)} &= 2 \left\{ \left[m_b (E_c \mp |\vec{p}_c|) (3 m_b^2 - 4 m_b E_c + m_c^2) - 2 m_b m_c^2 (m_b - E_c) \right] A_0 \right. \\
&+ \left[3 m_b E_c (m_b^2 - m_c^2) \mp m_b |\vec{p}_c| (3 m_b^2 - m_c^2) \right] \ln \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \\
&- \left. \left[3 m_b |\vec{p}_c| (m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c) \mp m_b (3 m_b E_c (m_b - 2 E_c) + m_c^2 (E_c + 2 m_b)) \right] \right. \\
&\quad \left. \times \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \right\} \tag{3.150}
\end{aligned}$$

gegeben, wobei die Funktion A_0 nach Einsetzen der parametrisierten Viererimpulse die folgende Form hat:

$$A_0 = \frac{E_c}{|\vec{p}_c|} \left[\ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \ln \left(\frac{m_b m_c}{m^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{m_b} \right) \ln \left(\frac{m_b - E_c + |\vec{p}_c|}{m_b - E_c - |\vec{p}_c|} \frac{m_b (E_c + |\vec{p}_c|) - m_c^2}{m_b (E_c - |\vec{p}_c|) - m_c^2} \right) \\
& - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2 |\vec{p}_c|}{m_b - E_c + |\vec{p}_c|} \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2 m_b |\vec{p}_c|}{m_b (E_c + |\vec{p}_c|) - m_c^2} \right) \\
& + 2 \left[\ln \left(\frac{m^2}{m_b m_c} \right) + 2 \right]. \tag{3.151}
\end{aligned}$$

Die Zerfallsrate (3.143) ist damit

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{1}{3 (2\pi)^4 m_b E_c} \left[T^{(0)} - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F T^{(1)} \right] d^3 \vec{p}_c \\
&= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{4\pi |\vec{p}_c| E_c}{3 (2\pi)^4 m_b E_c} \left[T^{(0)} - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F T^{(1)} \right] dE_c, \tag{3.152}
\end{aligned}$$

woraus die differentielle Zerfallsrate in Abhängigkeit der Energie des c -Quarks

$$\frac{d\Gamma}{dE_c} = \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \frac{|\vec{p}_c|}{12\pi^3 m_b} \left[T^{(0)} - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F T^{(1)} \right] \tag{3.153}$$

bestimmt werden kann. Durch Einführung der dimensionslosen Größen (3.28) und mit der Relation (3.29) erhält man folgende kompaktere Darstellung des Resultates:

$$\frac{d\Gamma_{\pm}^{(\alpha_s)}}{dx} = \frac{d\Gamma_{\pm}^{(Born)}}{dx} + \frac{d\Gamma_{\pm}^{(loop)}}{dx} = \Gamma_b \beta x \left[\left(G_0^{(Born)} \pm G_P^{(Born)} \right) - \frac{\alpha_s}{3\pi} \cdot 2 \left(G_0^{(loop)} \pm G_P^{(loop)} \right) \right]. \tag{3.154}$$

Die Funktionen $G_0^{(Born)}$ und $G_P^{(Born)}$ beschreiben den Bornschen Anteil (3.31) der Rate, und die Funktionen der korrigierten Raten in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ sind durch

$$\begin{aligned}
G_0^{(loop)} &= [x(3-2x) - (4-3x)y^2] A_0 \\
&+ 3x(1-y^2) \ln(y) - 3\beta x(1-x+y^2) \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \\
G_P^{(loop)} &= -\beta x(3-2x+y^2) A_0 \\
&- \beta x(3-y^2) \ln(y) + [3x(1-x) + (4+x)y^2] \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \tag{3.155}
\end{aligned}$$

gegeben. Sie beschreiben jeweils den unpolarisierten und den polarisierten Teil der Rate. Der Faktor A_0 kann mit $\Lambda = m/m_b$ in der Form

$$A_0 = \frac{1}{\beta} \left[2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\beta x}{x-2y^2+\beta x} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\beta x}{2-x+\beta x} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \left(\frac{x(1+\beta)}{2} \right) \ln \left(\frac{2-x+\beta x}{2-x-\beta x} \frac{x-2y^2+\beta x}{x-2y^2-\beta x} \right) \Big] \\
& + \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \ln \left(\frac{y}{\Lambda^2} \right) + 4
\end{aligned} \tag{3.156}$$

geschrieben werden. Zur Vereinfachung von A_0 wurden die Terme umgruppiert und die infrarotdivergenten Ausdrücke zusammengefaßt.

3.4 Gluon-Bremsstrahlung in erster Ordnung α_s

Wir wollen in diesem Abschnitt den Anteil der Gluon-Bremsstrahlung in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zur differentiellen Rate für den b -Quark-Zerfall berechnen. Hierbei kann sowohl das b -Quark als auch das c -Quark jeweils ein reelles Gluon abstrahlen. Dieser Prozeß trägt neben den Schleifenkorrekturen ebenfalls zur strahlungskorrigierten Zerfallsrate bei und sorgt dafür, daß sich die Infrarot-Divergenzen in der inklusiven Rate aufheben. Die beiden Feynman-Diagramme für die Bremsstrahlung sind in Abbildung 3.5 dargestellt.

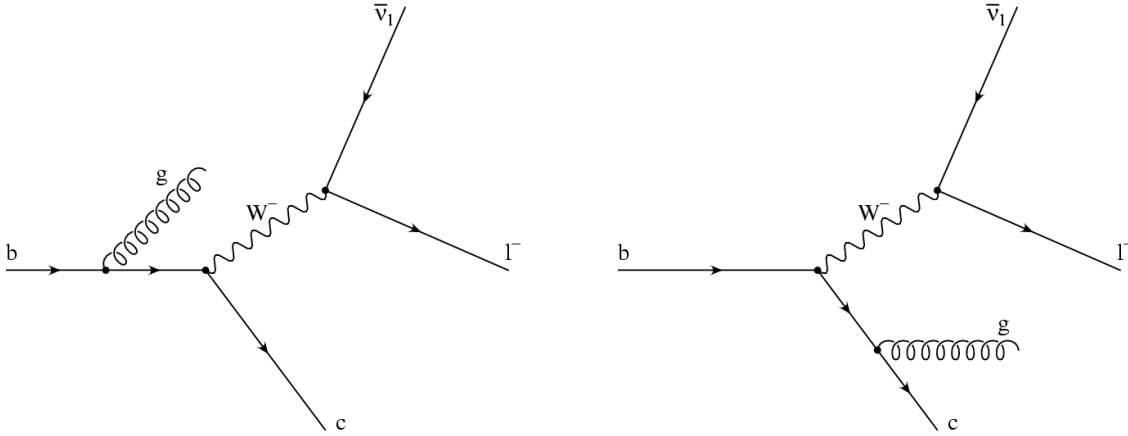


Abbildung 3.5: Feynman-Diagramme für die Bremsstrahlungsbeiträge zum Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$

3.4.1 Übergangsamplitude

Das Matrixelement für die Gluon-Bremsstrahlung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, die jeweils der Abstrahlung eines reellen Gluons durch das b - oder das c -Quark entsprechen. Mit Hilfe der Feynman-Regeln aus Anhang A.8 läßt sich die Übergangsamplitude folgendermaßen darstellen:

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_c, s_c) \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} V_{bc} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \right] \left[\frac{i(\not{p}_b - \not{k} + m_b)}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \right] \left[-ig_s \gamma_\rho \frac{\lambda_a}{2} \right] u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{i(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \right] \bar{u}(p_l, s_l) \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\
& + \bar{u}(p_c, s_c) \left[-ig_s \gamma_\rho \frac{\lambda_a}{2} \right] \left[\frac{i(\not{p}_c + \not{k} + m_c)}{(p_c + k)^2 - m_c^2} \right] \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} V_{bc} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k) \\
& \times \left[\frac{i(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \right] \bar{u}(p_l, s_l) \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \\
= & \frac{-ig_w^2}{8} V_{bc} \left(g_s \frac{\lambda_a}{2} \right) \bar{u}(p_c, s_c) \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \gamma_\rho \right. \\
& \left. + \gamma_\rho \frac{\not{p}_c + \not{k} + m_c}{(p_c + k)^2 - m_c^2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right] u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k) \\
& \times \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} L_\nu, \tag{3.157}
\end{aligned}$$

wo L_ν der Lepton-Strom (3.4) der Bornschen Amplitude ist. Nach Weglassen des Terms $q^\mu q^\nu / M_W^2$ und Vernachlässigung von q^2 gegenüber M_W^2 im W -Propagator und mit Benutzung der Massenschalenbedingungen $p_q^2 = m_q^2$ und $k^2 = 0$ in den Quark-Propagatoren vereinfacht sich das Matrixelement, so daß man den folgenden Ausdruck erhält:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = & \frac{ig_w^2}{8 M_W^2} V_{bc} \left(g_s \frac{\lambda_a}{2} \right) \bar{u}(p_c, s_c) \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{2 p_b \cdot k} \gamma_\rho \right. \\
& \left. - \gamma_\rho \frac{\not{p}_c + \not{k} + m_c}{2 p_c \cdot k} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right] u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k) L^\mu. \tag{3.158}
\end{aligned}$$

Verwendet man die Clifford-Algebra für Gamma-Matrizen, um die Ausdrücke der Quark-Impulse in den Propagatorzählern in einer Weise zu vertauschen, daß sie auf die äußeren Spinoren wirken, so kann man die Dirac-Gleichung anwenden, um das Matrixelement zu vereinfachen. Verwendet man außerdem die Orthogonalität zwischen dem Polarisationsvektor und dem entsprechenden Viererimpuls $k \cdot \epsilon(k) = 0$, so erhält man die Relation

$$\not{k} \not{\epsilon}^* = -\not{\epsilon}^* \not{k}.$$

Das Matrixelement hat dann die Form

$$\mathcal{M} = \frac{-ig_w^2}{8 M_W^2} V_{bc} \times \left(-\frac{g_s}{4} \lambda_a \right) H_\mu^{(g)} L^\mu \tag{3.159}$$

mit dem Hadron-Strom

$$\begin{aligned}
H_\mu^{(g)} = & \bar{u}(p_c, s_c) \left[\frac{1}{p_b \cdot k} \gamma_\mu (2 p_{b,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) - \frac{1}{p_c \cdot k} (2 p_{c,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) \gamma_\mu \right] \\
& \times (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k). \tag{3.160}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Bildung des Betragsquadrates die Übergangsamplitude

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{16} g_s^2 \lambda^a \lambda_a \right) H_{\mu\nu}^{(g)} L^{\mu\nu} \quad (3.161)$$

mit dem Hadron-Tensor

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(g)} &= H_{\mu}^{(g)} H_{\nu}^{*(g)} \\ &= \bar{u}(p_c, s_c) \left[\frac{1}{p_b \cdot k} \gamma_{\mu} (2p_{b,\rho} - \not{k} \gamma_{\rho}) - \frac{1}{p_c \cdot k} (2p_{c,\rho} - \not{k} \gamma_{\rho}) \gamma_{\mu} \right] (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \\ &\quad \times \bar{u}(p_b, s_b) (1 + \gamma_5) \left[\frac{1}{p_b \cdot k} (2p_{b,\sigma} - \gamma_{\sigma} \not{k}) \gamma_{\nu} - \frac{1}{p_c \cdot k} \gamma_{\nu} (2p_{c,\sigma} - \gamma_{\sigma} \not{k}) \right] u(p_c, s_c) \\ &\quad \times \epsilon^{*\rho}(k) \epsilon^{\sigma}(k). \end{aligned} \quad (3.162)$$

Der Lepton-Tensor ist derselbe wie bei der Bornschen Rate und wurde in (3.8) definiert.

Nach Summation über die Gluon-Farbfreiheitsgrade und Mittelung über die Farbzustände des b -Quarks erhält man mit (3.38) und (3.137) aus dem Faktor $\lambda^a \lambda_a$ den Ausdruck $1/3 \text{Sp}[\lambda^a \lambda_a] = 4 C_F$. Da die Polarisation des abgestrahlten Gluons nicht beobachtet wird, muß über die zwei möglichen Einstellungen des Gluonspins summiert werden. Für masselose Gluonen erhält man in der Feynman-Eichung als Polarisationssumme

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon^{*\rho}(k, \lambda) \epsilon^{\sigma}(k, \lambda) = -g^{\rho\sigma}. \quad (3.163)$$

Technisch gesehen hat die Ersetzung $\sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_{\rho}^{*}(k, \lambda) \epsilon_{\sigma}(k, \lambda) \rightarrow -g_{\rho\sigma}$ große rechnerische Vorteile, weil man dadurch die Anzahl der zu integrierenden Terme deutlich reduzieren kann. Sie ist im Rahmen der QED beispielsweise in [10] diskutiert worden. Man kann sie sich durch folgende Überlegung klarmachen.

Man betrachtet das Matrixelement (3.159), das den Hadron-Strom (3.160) enthält, und stellt es als Kontraktion mit dem Polarisationsvektor des Gluons dar. Dies führt auf die Definition

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_{\rho} \epsilon^{*\rho}, \quad (3.164)$$

wobei \mathcal{M}_{ρ} als Abkürzung für die restlichen Faktoren des Matrixelementes steht. Schreibt man den Hadron-Strom (3.162) ein wenig um und stellt ihn in der Form

$$\begin{aligned} H_{\mu}^{(g)} &= H_{\mu\rho}^{(g)} \epsilon^{*\rho} \\ &\equiv \bar{u}(p_c, s_c) \left[2 \left(\frac{p_{b,\rho}}{p_b \cdot k} - \frac{p_{c,\rho}}{p_c \cdot k} \right) \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \frac{\not{k} \gamma_{\rho}}{p_b \cdot k} + \frac{\not{k} \gamma_{\rho}}{p_c \cdot k} \gamma_{\mu} \right] (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k) \end{aligned} \quad (3.165)$$

dar, so erkennt man mit der Identität $\not{k} \not{k} = k^2 = 0$ leicht, daß die Relation $H_{\mu\rho}^{(g)} k^{\rho} = 0$ und damit ebenfalls

$$\mathcal{M}_{\rho} k^{\rho} = 0 \quad (3.166)$$

erfüllt ist. Der erste Term des Ausdrucks in eckigen Klammern aus (3.165) ist proportional zum Matrixelement in Bornscher Näherung und wird *Soft-Gluon-Näherung* genannt, da er aus dem Hadron-Strom durch Vernachlässigung des Gluonimpulses hervorgeht, was für sehr kleine Gluonimpulse eine gute Näherung ist. Wie sich bei der Durchführung der Phasenraumintegration zeigen wird, handelt es sich bei dem Soft-Gluon-Anteil um den infrarot-divergenten Teil der Zerfallsrate. Nach Bildung des Betragsquadrates von \mathcal{M} und anschließender Summation über die beiden transversalen Polarisationszustände des Gluons ergibt sich

$$\sum_{\lambda=\pm 1} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{\lambda=\pm 1} \mathcal{M}_\rho \mathcal{M}_\sigma^* \epsilon^{*\rho}(k, \lambda) \epsilon^\sigma(k, \lambda). \quad (3.167)$$

Mit (3.166) erhält man die beiden Identitäten

$$\mathcal{M}_\rho \mathcal{M}_\sigma^* k^\rho \epsilon^\sigma(k, \lambda) = 0, \quad \mathcal{M}_\rho \mathcal{M}_\sigma^* \epsilon^{*\rho}(k, \lambda) k^\sigma = 0, \quad (3.168)$$

welche man in jedem beliebigen Bezugssystem auswerten kann. Zur Vereinfachung der Rechnungen wählt man ein Bezugssystem, in dem der Gluon-Impuls in z -Richtung zeigt, also

$$k^\rho = |\vec{k}| (1, 0, 0, 1) \quad (3.169)$$

ist. Als Basisvektoren kann man vier linear unabhängige Polarisationsvektoren $\epsilon(k, \lambda)$ des Gluons definieren, die die Relationen

$$\epsilon(k, \lambda) \cdot \epsilon^*(k, \lambda') = g_{\lambda, \lambda'}, \quad \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda \lambda'} \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^{*\nu}(k, \lambda') = g^{\mu\nu} \quad (3.170)$$

erfüllen. In unserem oben gewählten Bezugssystem (3.169) haben sie die explizite Form

$$\epsilon(k, t) = (1, 0, 0, 0), \quad \epsilon(k, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \mp 1, i, 0), \quad \epsilon(k, 0) = (0, 0, 0, 1). \quad (3.171)$$

Die skalare Polarisation $\lambda = t$ sowie die longitudinale Polarisation $\lambda = 0$ haben keine physikalische Bedeutung, während die beiden Werte $\lambda = \pm 1$ die transversalen Einstellungen der Polarisation masseloser Gluonen beschreiben.

Setzt man den parametrisierten Gluonimpuls (3.169) in die Gleichungen (3.168) ein, so vereinfachen sich die beiden Identitäten zu

$$(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_3) \mathcal{M}_\sigma^* \epsilon^\sigma(k, \lambda) = 0, \quad \mathcal{M}_\rho (\mathcal{M}_0^* + \mathcal{M}_3^*) \epsilon^{*\rho}(k, \lambda) = 0, \quad (3.172)$$

welche für alle Werte λ der Polarisationsvektoren $\epsilon^\sigma(k, \lambda)$ und $\epsilon^{*\rho}(k, \lambda)$ erfüllt sind. Wählt man nun für $\epsilon^\sigma(k, \lambda) = \epsilon^\sigma(k, t) = (1, 0, 0, 0)$ und für $\epsilon^{*\rho}(k, \lambda) = \epsilon^{*\rho}(k, 0) = (0, 0, 0, 1)$, so lauten die beiden Identitäten schließlich

$$(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_3) \mathcal{M}_0^* = 0, \quad \mathcal{M}_3 (\mathcal{M}_0^* + \mathcal{M}_3^*) = 0. \quad (3.173)$$

Subtrahiert man dann die erste Gleichung von der zweiten, so ergibt sich das Resultat

$$- \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^* + \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_3^* = 0. \quad (3.174)$$

Unter Verwendung dieser Relation kann man das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes (3.167) nach Einsetzen der parametrisierten Polarisationsvektoren (3.171) schreiben als

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=\pm 1} |\mathcal{M}|^2 &= \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^* + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2^* = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^* + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2^* - \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^* + \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_3^* \\ &= \mathcal{M}_\rho \mathcal{M}_\sigma^* (-g^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (3.175)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (3.167), so ergibt sich die Gleichung (3.163). Man kann die Polarisationssumme über die transversalen Freiheitsgrade der Gluon-Polarisation demnach durch den negativen metrischen Tensor ersetzen. Das bedeutet, daß sich der longitudinale Anteil des Matrixelementes $\mathcal{M}_3 \mathcal{M}_3^*$ für die Polarisation des Gluons gegen den skalaren Anteil $-\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^*$ heraushebt. Dieses Verfahren ist in der QED als *Gupta-Bleuler-Formalismus* bekannt und wird in verschiedenen Lehrbüchern beschrieben [11]. Das Resultat besagt, daß sich die Beiträge der unphysikalischen skalaren und longitudinalen Polarisierungen gegenseitig aufheben.

Neben der Summation über die Polarisierungen des Gluons wird in (3.161) auch über die Spins der auslaufenden Leptonen summiert sowie über den Spin des zerfallenden b -Quarks gemittelt. Der Spin des c -Quarks soll dagegen ausgerechnet werden, weshalb nicht über ihn summiert wird. Bei der Berechnung der Spinsumme verwendet man wieder die Darstellung der Projektoren für die Energie und den Spin von Teilchen und Antiteilchen, die im Anhang (A.49) angegeben sind. Schreibt man das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes als Spur über Gamma-Matrizen, so kann man es wie bei der Bornschen Näherung und bei den Einschleifen-Korrekturen als Kontraktion eines Hadron-Tensors mit dem Lepton-Tensor (3.11) darstellen und erhält

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_b, s_l, s_{\nu_l}} \sum_{\lambda=\pm 1} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{4} g_s^2 C_F \right) \bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} \bar{L}^{\mu\nu}, \quad (3.176)$$

wobei der spingemittelte Hadron-Tensor explizit durch

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} &= \frac{1}{2} \sum_{s_b} \sum_{\lambda=\pm 1} H_{\mu\nu}^{(g)} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Sp} \left\{ (\not{p}_c + m_c) (1 + \gamma_5 \not{\epsilon}_c) \left[\frac{1}{p_b \cdot k} \gamma_\mu (2p_{b,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) - \frac{1}{p_c \cdot k} (2p_{c,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) \gamma_\mu \right] \not{p}_b \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{p_b \cdot k} (2p_b^\rho - \gamma^\rho \not{k}) \gamma_\nu - \frac{1}{p_c \cdot k} \gamma_\nu (2p_c^\rho - \gamma^\rho \not{k}) \right] (1 - \gamma_5) \right\}. \end{aligned} \quad (3.177)$$

gegeben ist. Dabei wurde ausgenutzt, daß $(1 + \gamma_5)(1 - \gamma_5) = 0$ ist. Danach wurde der Faktor $(1 - \gamma_5)$ nach rechts getauscht. Der spingemittelte Hadron-Tensor läßt sich weiter vereinfachen, indem man die Zyklizität der Spur benutzt und den Term $(1 - \gamma_5)$ an den Anfang schreibt, so daß folgendes Produkt auftritt:

$$(1 - \gamma_5) (\not{p}_c + m_c) (1 + \gamma_5 \not{\epsilon}_c).$$

Da in der Spur nur Terme beitragen, die eine gerade Anzahl von Gamma-Matrizen enthalten, bleibt dabei nur der Ausdruck

$$(1 - \gamma_5) (\not{p}_c + m_c \gamma_5 \not{s}_c)$$

übrig, da alle anderen zu einer ungeraden Anzahl Gamma-Matrizen führen. Multipliziert man dies aus und verwendet $(\gamma_5)^2 = 1$, so reduziert sich das Produkt zu

$$(1 - \gamma_5) (\not{p}_c - m_c \not{s}_c).$$

Nachdem man den Faktor $(1 - \gamma_5)$ wieder zyklisch nach rechts getauscht hat, kann man den spingemittelten Hadron-Tensor in der Form

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} = & -\frac{1}{2} \text{Sp} \left\{ \not{p}_c \left[\frac{1}{p_b \cdot k} \gamma_\mu (2p_{b,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) - \frac{1}{p_c \cdot k} (2p_{c,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) \gamma_\mu \right] \right. \\ & \left. \times \not{p}_b \left[\frac{1}{p_b \cdot k} (2p_b^\rho - \gamma^\rho \not{k}) \gamma_\nu - \frac{1}{p_c \cdot k} \gamma_\nu (2p_c^\rho - \gamma^\rho \not{k}) \right] (1 - \gamma_5) \right\} \end{aligned} \quad (3.178)$$

darstellen, wobei zur Abkürzung $\bar{p}_c = p_c - m_c s_c$ gesetzt wurde. Benutzt man nun die Kontraktionen von Gamma-Matrizen in vier Dimensionen

$$\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho = -2\gamma_\mu, \quad \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\rho = 4g_{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma^\rho = -2\gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\mu, \quad (3.179)$$

so vereinfacht sich (3.178) schließlich zu

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} = & \text{Sp} \left\{ \left[\frac{1}{(p_b \cdot k)^2} \not{p}_c \gamma_\mu (2m_b^2 \not{k} - 2m_b^2 \not{p}_b + 2(p_b \cdot k) \not{k}) \gamma_\nu \right. \right. \\ & - \frac{1}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} \not{p}_c \gamma_\mu (-2(p_b \cdot p_c) \not{p}_b \gamma_\nu + \not{p}_b \gamma_\nu \not{p}_b \not{k} + \not{k} \not{p}_c \not{p}_b \gamma_\nu) \\ & - \frac{1}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} \not{p}_c (-2(p_b \cdot p_c) \gamma_\mu \not{p}_b + \gamma_\mu \not{p}_b \not{p}_c \not{k} + \not{k} \not{p}_b \gamma_\mu \not{p}_b) \gamma_\nu \\ & \left. + \frac{1}{(p_c \cdot k)^2} \not{p}_c (-2m_c^2 \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu + \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu \not{p}_c \not{k} + \not{k} \not{p}_c \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu + \not{k} \gamma_\nu \not{p}_b \gamma_\mu \not{k}) \right] \\ & \left. \times (1 - \gamma_5) \right\}. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Nachdem man die Spuren ausgewertet hat, kann man das Resultat durch die Impulse sowie durch den metrischen und den Levi-Civita-Tensor ausdrücken. Man erhält so für den spingemittelten Hadron-Tensor

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} = & \frac{8}{(p_b \cdot k)^2} \left\{ \left[-m_b^2 (\bar{p}_c \cdot k) - (p_b \cdot k) (\bar{p}_c \cdot k) + m_b^2 (p_b \cdot \bar{p}_c) \right] g_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + (m_b^2 + p_b \cdot k) (\bar{p}_{c,\mu} k_\nu + k_\mu \bar{p}_{c,\nu}) - m_b^2 (\bar{p}_{c,\mu} p_{b,\nu} + p_{b,\mu} \bar{p}_{c,\nu}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[m_b^2 (k^\rho \bar{p}_c^\sigma - p_b^\rho \bar{p}_c^\sigma) + (p_b \cdot k) k^\rho \bar{p}_c^\sigma \right] \Big\} \\
& + \frac{8}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} \left\{ \left[(m_b^2 + p_b \cdot p_c) (\bar{p}_c \cdot k) + (p_b \cdot \bar{p}_c) (p_c \cdot k) - 2 (p_b \cdot p_c) (p_b \cdot \bar{p}_c) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (p_c \cdot \bar{p}_c) (p_b \cdot k) \right] g_{\mu\nu} + (p_b \cdot \bar{p}_c) (p_{b,\mu} k_\nu + k_\mu p_{b,\nu}) - 2 (\bar{p}_c \cdot k) p_{b,\mu} p_{b,\nu} \right. \\
& \quad \left. - (p_b \cdot p_c) (\bar{p}_{c,\mu} k_\nu + k_\mu \bar{p}_{c,\nu}) - (p_b \cdot k + p_c \cdot k - 2 p_b \cdot p_c) (p_{b,\mu} \bar{p}_{c,\nu} + \bar{p}_{c,\mu} p_{b,\nu}) \right. \\
& \quad \left. + (p_b \cdot k) (p_{c,\mu} \bar{p}_{c,\nu} + \bar{p}_{c,\mu} p_{c,\nu}) \right. \\
& \quad \left. + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[(2 p_b \cdot p_c - p_c \cdot k) p_b^\rho \bar{p}_c^\sigma - (m_b^2 + p_b \cdot p_c) k^\rho \bar{p}_c^\sigma + (p_b \cdot k) p_c^\rho \bar{p}_c^\sigma \right] \right. \\
& \quad \left. + i (p_{b,\mu} \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} - p_{b,\nu} \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}) k^\rho p_b^\sigma \bar{p}_c^\tau \right\} \\
& + \frac{8}{(p_c \cdot k)^2} \left\{ \left[(m_c^2 - p_c \cdot k) (p_b \cdot \bar{p}_c) - (p_b \cdot k + p_b \cdot p_c) (\bar{p}_c \cdot k) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\bar{p}_c \cdot p_c) (p_b \cdot k) \right] g_{\mu\nu} + (\bar{p}_c \cdot k - \bar{p}_c \cdot p_c) (p_{b,\mu} k_\nu + k_\mu p_{b,\nu}) \right. \\
& \quad \left. + (\bar{p}_c \cdot k) (p_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} p_{b,\nu}) + (p_c \cdot k - m_c^2) (p_{b,\mu} \bar{p}_{c,\nu} + \bar{p}_{c,\mu} p_{b,\nu}) \right. \\
& \quad \left. + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[(p_b \cdot p_c - p_c \cdot k) k^\rho \bar{p}_c^\sigma + (p_c \cdot k - m_c^2) p_b^\rho \bar{p}_c^\sigma - (p_b \cdot k) p_c^\rho \bar{p}_c^\sigma \right] \right. \\
& \quad \left. + i (k_\mu \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} - k_\nu \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}) (k^\rho p_b^\sigma \bar{p}_c^\tau - p_b^\rho p_c^\sigma \bar{p}_c^\tau) \right. \\
& \quad \left. - i (p_{c,\mu} \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} - p_{c,\nu} \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}) k^\rho p_b^\sigma \bar{p}_c^\tau \right\}. \tag{3.181}
\end{aligned}$$

Man beachte wiederum, daß p_c anders als beim Born-Term nicht immer in der Kombination $\bar{p}_c = p_c - m_c s_c$ auftritt, während der Spin des c -Quarks aber ausschließlich in \bar{p}_c enthalten ist. Das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes (3.176) kann nun durch Einsetzen des spingemittelten Hadron-Tensors (3.181) und des Lepton-Tensors (3.11) mit anschließender Kontraktion durch die Impulse ausgedrückt werden. Bevor man die Kontraktion ausführt, ist es von Vorteil, zuerst die Phasenraumintegration über die beiden Lepton-Endzustände durchzuführen, da die Lepton-Impulse nur im Lepton-Tensor vorkommen. Dadurch läßt sich die Phasenraumintegration etwas einfacher durchführen.

3.4.2 Phasenraumintegration und Zerfallsrate

Man berechnet nun die differentielle Zerfallsrate aus dem betragsquadierten und spinsummierten Matrixelement (3.176) durch Integration über den Phasenraum der Teilchen im Endzustand und durch nachfolgende Multiplikation mit dem Flußfaktor. Man erhält

$$d\Gamma = \frac{1}{2 m_b} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - p_l - p_{\nu_l} - k) |\overline{\mathcal{M}}|^2 d^3\vec{p}_c d^3\vec{p}_l d^3\vec{p}_{\nu_l} d^3\vec{k}}{16 (2\pi)^{12} E_c E_l E_{\nu_l} \omega}. \tag{3.182}$$

Im Unterschied zu Bornscher Rate und Einschleifenkorrektur handelt es sich hier um einen Phasenraum, der vier Teilchen im Endzustand enthält. Der einzige Unterschied zur Berechnung der Bornschen Rate und der Einschleifen-Korrektur ist das zusätzliche Auftreten des Gluon-Impulses in der Definition $q = p_b - p_c - k$. Für $k = 0$ erhält man das Resultat der Bornschen Rate. Man benutzt zur Integration wieder das kovariante Integral (3.16), das bei Vernachlässigung der Leptonmasse in (3.22) ausgerechnet wurde. Mit Hilfe des spinsummierten Lepton-Tensors (3.12) kann man die Zerfallsrate in der Form

$$d\Gamma = \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{4} g_s^2 C_F \right) \frac{\bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} T^{\mu\nu\alpha\beta} I_{\alpha\beta}}{4 (2\pi)^8 m_b E_c \omega} d^3 \vec{p}_c d^3 \vec{k} \quad (3.183)$$

angeben. Benutzt man noch die Kontraktion (3.23), so ist die differentielle Zerfallsrate gegeben durch

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{4} g_s^2 C_F \right) \frac{\bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})}{12 (2\pi)^7 m_b E_c \omega} d^3 \vec{p}_c d^3 \vec{k} \\ &= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{4} g_s^2 C_F \right) \frac{2S}{3 (2\pi)^7 m_b E_c \omega} d^3 \vec{p}_c d^3 \vec{k} \end{aligned} \quad (3.184)$$

mit der Definition

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{8} H_{\mu\nu} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \\ &= - \left[\frac{m_b^2}{(p_b \cdot k)^2} + \frac{m_c^2}{(p_c \cdot k)^2} - \frac{2p_b \cdot p_c}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} \right] [2(p_b \cdot q)(\bar{p}_c \cdot q) + q^2(p_b \cdot \bar{p}_c)] \\ &\quad + \frac{1}{p_b \cdot k} [2(k \cdot q)(\bar{p}_c \cdot q) + q^2(\bar{p}_c \cdot k)] + \frac{\bar{p}_c \cdot k}{(p_c \cdot k)^2} [2(k \cdot q)(p_b \cdot q) + q^2(p_b \cdot k)] \\ &\quad + q^2 \left\{ \frac{1}{(p_b \cdot k)^2} [m_b^2(\bar{p}_c \cdot k) - (p_b \cdot \bar{p}_c)(p_b \cdot k)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(p_c \cdot k)^2} [(\bar{p}_c \cdot k)(p_b \cdot p_c) - (p_b \cdot k)(p_c \cdot q)] \right\} \\ &\quad + 2 \frac{\bar{p}_c \cdot q}{(p_b \cdot k)^2} [m_b^2(k \cdot q) - (p_b \cdot q)(p_b \cdot k)] \\ &\quad - 2 \frac{p_b \cdot q}{(p_c \cdot k)^2} [(k \cdot q)(p_c \cdot \bar{p}_c) - (\bar{p}_c \cdot k)(p_c \cdot q)] \\ &\quad + \frac{q^2}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} [(p_b \cdot \bar{p}_c)(p_b \cdot k) - (p_c \cdot \bar{p}_c)(p_b \cdot k)] - (\bar{p}_c \cdot k)(m_b^2 + p_b \cdot p_c) \\ &\quad + \frac{2p_b \cdot q}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} [(k \cdot q)(p_b \cdot \bar{p}_c) - (k \cdot \bar{p}_c)(p_b \cdot q)] \\ &\quad - \frac{2\bar{p}_c \cdot q}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} [(k \cdot q)(p_b \cdot p_c) - (p_c \cdot q)(p_b \cdot k)], \end{aligned} \quad (3.185)$$

wobei $q = p_b - p_c - k$ und $\bar{p}_c = p_c - m_c s_c$ ist.

Im nächsten Schritt wird die Integration über den Gluon-Impuls k durchgeführt. Es stellt sich als zweckmäßig heraus, den Ausdruck (3.185) für S in zwei Anteile aufzuspalten, die durch die Abhängigkeit vom Impuls k charakterisiert sind. Der Term in eckigen Klammern in der ersten Zeile von (3.185) ist der einzige, der im Nenner quadratisch im Gluon-Impuls k ist und nicht mit einem weiteren k -abhängigen Ausdruck multipliziert wird. Alle anderen Terme besitzen höhere Potenzen von k , da sie auch die Variable k im Zähler enthalten. Die $1/k^2$ -Abhängigkeit der ersten Zeile führt nach der Parametrisierung (3.25) und (3.189) der Impulse bei der Integration im Grenzfall $k \rightarrow 0$ auf eine logarithmische Singularität, die man geeignet regularisieren muß, während die übrigen Ausdrücke endlich bleiben. Diese Singularität nennt man Infrarot-Singularität. Weil sie wie erwähnt aus dem ersten Term in (3.185) stammt, definiert man den universellen Soft-Gluon-Faktor

$$A := - \left[\frac{m_b^2}{(p_b \cdot k)^2} + \frac{m_c^2}{(p_c \cdot k)^2} - \frac{2 p_b \cdot p_c}{(p_b \cdot k)(p_c \cdot k)} \right], \quad (3.186)$$

der die Divergenz enthält, und mit dem Born-Term

$$B := 2(p_b \cdot q)(\bar{p}_c \cdot q) + q^2(p_b \cdot \bar{p}_c), \quad (3.187)$$

multipliziert wird. Der Faktor B unterscheidet sich nur durch den Gluonimpuls k in der Definition von q vom Born-Term und geht im Grenzfall $k \rightarrow 0$ in diesen über. Die Summe aller anderen endlichen Terme in (3.185) wird mit F bezeichnet. Dann läßt sich S in einen divergenten und einen endlichen Teil aufteilen und kann als

$$S = S_{sing} + S_{reg} \equiv A \cdot B + F \quad (3.188)$$

geschrieben werden.

Zur weiteren Auswertung parametrisiert man die Viererimpulse der Teilchen, die am betrachteten Zerfall beteiligt sind. Man kann dafür dasselbe Bezugssystem und die gleiche Parametrisierung wie bei der Bornschen Rate (3.25) benutzen und führt für den Viererimpuls des Gluons die Darstellung

$$k = (\omega, k_x, k_y, k_z) \quad (3.189)$$

ein, wobei jetzt für den Impulsvektor k die Massenschalenbedingung $k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 = m^2$ gilt, die sich für den Fall $m \rightarrow 0$ zu $k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 = 0$ vereinfacht.

Das Lorentz-invariante Phasenraumelement von k ist in Kugelkoordinaten durch

$$\frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} = \frac{1}{2|\vec{k}|} |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| dz d\phi = \frac{1}{2} \omega d\omega dz d\phi \quad (3.190)$$

gegeben, wenn das Gluon als masselos angenommen wird. Dabei ist $z = \cos \theta$ der Polarwinkel des Vektors \vec{k} . Wie bereits erwähnt, tritt die Infrarot-Singularität nur bei der Integration des Soft-Gluon-Faktors A auf. Setzt man nämlich in $S_{sing} = A \cdot B$ die parametrisierten

Impulse ein und multipliziert das Resultat anschließend mit dem Phasenraumelement des Gluons, so ist der Integrand proportional zu $1/\omega$. Das führt nach der Integration über die Gluon-Energie ω an der unteren Grenze $\omega = 0$ zu einer logarithmischen Divergenz. Bei den endlichen Termen $S_{reg} = F$ gibt es keine Singularitäten, und man kann dort die Gluonmasse null setzen. Im Falle einer endlichen Masse des Gluons ändert sich das Phasenraumelement gegenüber dem masselosen Fall in folgender Weise:

$$\frac{d^3\vec{k}}{2\omega} = \frac{|\vec{k}|^2}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} d|\vec{k}| dz d\phi. \quad (3.191)$$

Nach Einsetzen der parametrisierten Viererimpulse bekommt man für die oben definierten Terme, aus denen das Matrixelement S aufgebaut ist, Funktionen, die im allgemeinen von den Integrationsvariablen $|\vec{k}|$ und z sowie von dem Parameter m , der für die Gluonmasse steht, abhängen. Es gilt also

$$A \equiv a(|\vec{k}|, z, m), \quad B \equiv b(|\vec{k}|, z, m), \quad F \equiv f(|\vec{k}|, z, m).$$

Für den Grenzfall masseloser Gluonen gilt $|\vec{k}| = \omega$. Damit kann man die einfacheren Funktionen

$$a(\omega, z) := a(|\vec{k}|, z, 0), \quad b(\omega, z) := b(|\vec{k}|, z, 0), \quad f(\omega, z) := f(|\vec{k}|, z, 0)$$

definieren. Da die Funktion f nur zu endlichen Ergebnissen führt, kann dort von vornherein $m = 0$ gesetzt werden. Der Faktor b hat keinen Nenner und kann in eine Reihe in Potenzen der Gluonmasse

$$b(|\vec{k}|, z, m) = b(|\vec{k}|, z, 0) + \mathcal{O}(m^2)$$

entwickelt werden. Da aber die Singularität nur logarithmisch in m ist, liefern die Beiträge proportional zu m^2 im Grenzfall verschwindender Masse keinen Beitrag, und (3.188) kann in der Form

$$S \equiv a(|\vec{k}|, z, m) \cdot b(\omega, z) + f(\omega, z) \quad (3.192)$$

dargestellt werden mit $|\vec{k}| = \sqrt{\omega^2 - m^2}$.

Bevor nun die Integration durchgeführt wird, ist es von Vorteil, die Teilintegration des divergenten Ausdrucks zu vereinfachen. Dazu schreibt man

$$b(\omega, z) = [b(\omega, z) - b(0, 0)] + b(0, 0).$$

Nach Einsetzen der Impulse sieht man, daß der erste Term in eckigen Klammern proportional zu w ist, so daß die Integration nach Multiplikation mit a ein endliches Ergebnis liefert und somit die Gluonmasse null gesetzt werden kann. Der zweite Term ist proportional zum entsprechenden Born-Term und hängt nicht mehr von den Integrationsvariablen ab. Daher muß nur noch der universelle Faktor A mit endlicher Gluonmasse integriert werden. Für den Fall transversaler Polarisation $s_{c,t}$ des c -Quarks stellt man fest, daß die

Summe der endlichen Terme proportional zu $s_x k_x + s_y k_y$ ist. Da es außerdem keine weitere Abhängigkeit von den Variablen k_x und k_y gibt, ist diese infrarotendliche Summe wegen

$$k_x = |\vec{k}| \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = |\vec{k}| \sin \theta \sin \phi$$

eine Linearkombination von $\sin \phi$ und $\cos \phi$. Die Integration über den Azimutwinkel ϕ im Intervall $[0, 2\pi]$ liefert daher keinen Beitrag, und der transversale Anteil der c -Polarisation verschwindet, was schon beim Born-Term und den Schleifenkorrekturen festgestellt wurde. Da der divergente Soft-Gluon-Faktor mit dem Born-Term multipliziert wird, verschwindet dieser Anteil ebenfalls. Damit liefert dieser Polarisationsanteil in erster Ordnung der Kopplungskonstanten α_s keinen Beitrag zur Zerfallsrate des c -Quarks.

Für die longitudinale Polarisation und den unpolarisierten Anteil ist das parametrisierte Matrixelement nicht mehr vom Azimutwinkel abhängig, so daß man die Integration über ϕ sofort ausführen kann. Das Phasenraumelement für das Gluon kann daher in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} &= \pi \omega d\omega dz \quad \text{für } m = 0 \\ \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} &= \pi \frac{|\vec{k}|^2}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} d|\vec{k}| dz \quad \text{für } m \neq 0 \end{aligned} \quad (3.193)$$

geschrieben werden. Die Integration des divergenten Anteils von (3.192) kann nun in der folgenden Art ausgeführt werden:

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} a(|\vec{k}|, z, m) b(\omega, z) = b(0, 0) \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} a(|\vec{k}|, z, m) + \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} a(\omega, z) [b(\omega, z) - b(0, 0)]. \quad (3.194)$$

Die Integration des gesamten divergenten und endlichen Anteils läßt sich dann in der folgenden Weise schreiben:

$$\begin{aligned} I_{ges} &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} \left[a(|\vec{k}|, z, m) \cdot b(\omega, z) + f(\omega, z) \right] \quad (3.195) \\ &= \pi \left\{ b(0, 0) \int_{-1}^1 dz \int_0^{k_{max}} d|\vec{k}| \frac{|\vec{k}|^2}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} a(|\vec{k}|, z, m) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 dz \int_0^{\omega_{max}} d\omega a(\omega, z) [b(\omega, z) - b(0, 0)] + \int_{-1}^1 dz \int_0^{\omega_{max}} d\omega f(\omega, z) \right\}. \end{aligned}$$

Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, betrachtet man den erlaubten Bereich des Phasenraums, dessen Grenzen durch die Kinematik der beim Zerfall beteiligten Teilchen bestimmt ist. Hier interessieren die Grenzen für die Energie ω oder den Betrag $|\vec{k}|$ des räumlichen Impulses des Gluons. Um sie zu bestimmen, ist es zweckmäßig, eine Lorentz-Invariante

zu finden, in der die Gluon-Energie vorkommt und mit den übrigen Variablen aus den parametrisierten Viererimpulsen verknüpft sind. Aus der Viererimpuls-Erhaltung ergibt sich der Impulsübertrag zwischen dem Quark- und dem Lepton-Strom, der dem Impuls des virtuellen W -Bosons entspricht:

$$q = p_b - p_c - k = p_l + p_{\nu_l}.$$

Die zugehörige Invariante ist durch das Impulsquadrat $q^2 = (p_l + p_{\nu_l})^2$ gegeben. Der Vollständigkeit wegen und um den Einfluß endlicher Massen erkennen zu können, diskutieren wir im folgenden den allgemeinen Fall, in dem die Leptonmassen nicht vernachlässigt werden. Aus kinematischen Gründen muß q^2 größer als $(m_l + m_{\nu_l})^2$ sein, was man am einfachsten im Ruhesystem des Leptonpaares sehen kann, das durch die Bedingung $\vec{q} = \vec{0}$ definiert ist. Durch Ausnutzen der Energie-Impuls-Erhaltung erhält man dann eine Relation zwischen den verschiedenen kinematischen Größen der Teilchen:

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_l + p_{\nu_l})^2 = (p_b - p_c - k)^2 \\ &= m_b^2 + m_c^2 + m^2 - 2 m_b (E_c + \omega) + 2 (E_c \omega - |\vec{p}_c| |\vec{k}| z) \geq (m_l + m_{\nu_l})^2. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Dies kann man nach ω auflösen und erhält die Obergrenze der Gluon-Energie

$$\begin{aligned} \omega \leq \omega_{max} &= \frac{1}{2 (Q^2 + |\vec{p}_c|^2 (1 - z^2))} \left[(m_b - E_c) (Q^2 + m^2 - (m_l + m_{\nu_l})^2) \right. \\ &\quad \left. - |\vec{p}_c| z \sqrt{(Q^2 - (m_l + m_{\nu_l} - m)^2) (Q^2 - (m_l + m_{\nu_l} + m)^2) - 4 m^2 |\vec{p}_c|^2 (1 - z^2)} \right] \end{aligned} \quad (3.197)$$

mit

$$Q^2 \equiv (p_b - p_c)^2 = m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c, \quad |\vec{p}_c| = \sqrt{E_c^2 - m_c^2}.$$

Sie ist offensichtlich von der Summe der Leptonmassen $m_l + m_{\nu_l}$ als auch von der Winkelvariablen z abhängig. Die untere Grenze der Energie des Gluons ist durch seine Masse gegeben, $m = \omega_{min} \leq \omega$. Die Masse des Gluons wurde nur zum Regularisieren der IR-Singularität von null verschieden gewählt und kann als beliebig klein angesehen werden. Deshalb genügt es, die obere Grenze der Gluon-Energie in eine Potenzreihe in m zu entwickeln. Glieder der Ordnung m^2 oder höher kann man vernachlässigen, weil die Singularität logarithmisch in m ist und der divergente Ausdruck nach Einsetzen der oberen Grenze mit Potenzen von m multipliziert wird, so daß er im Grenzfall masseloser Gluonen nicht beiträgt. Man erhält

$$\omega_{max} = \frac{Q^2 - (m_l + m_{\nu_l})^2}{2 (m_b - E_c + |\vec{p}_c| z)} + \mathcal{O}(m^2). \quad (3.198)$$

Durch Verwendung der Massenschalenbedingung $\omega^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$ lassen sich die Integrationsgrenzen für den Betrag des räumlichen Gluon-Impulses bestimmen. Da die Infrarot-Divergenz wie oben gesagt logarithmisch in m ist, kann man höhere Ordnungen in m auch hier vernachlässigen, da die zugehörigen Terme im Grenzfall verschwindender Gluonmasse

ebenfalls keinen Beitrag liefern. Daher sind die Integrationsgrenzen bei endlicher Gluonmasse in erster Ordnung m dieselben wie im Falle verschwindender Gluonmasse, es gilt also

$$0 \leq |\vec{k}| \leq k_{max} = \omega_{max} + \mathcal{O}(m^2).$$

Der Polarwinkel θ läuft von 0 bis π , so daß die Grenzen für $z = \cos \theta$

$$-1 \leq z \leq 1 \quad (3.199)$$

lauten. Schließlich ist auch die Energie des c -Quarks begrenzt, die auch in die maximale Gluon-Energie ω_{max} eingeht. Die Grenzen von E_c bestimmt man, indem man verlangt, daß die Wurzeln, die in (3.197) auftreten, reell sein müssen. Eine Entwicklung in der Gluonmasse ergibt

$$m_c \leq E_c \leq \frac{m_b^2 + m_c^2 - (m_l + m_\nu)^2}{2m_b} + \mathcal{O}(m). \quad (3.200)$$

Der Phasenraum für die Integration, der durch den kinematisch erlaubten Bereich der Energien des c -Quarks E_c und des Gluons ω definiert ist, wird zur Veranschaulichung in Abbildung 3.6 gezeigt, wobei die Neutrinomasse zu null gesetzt wurde. An der unteren

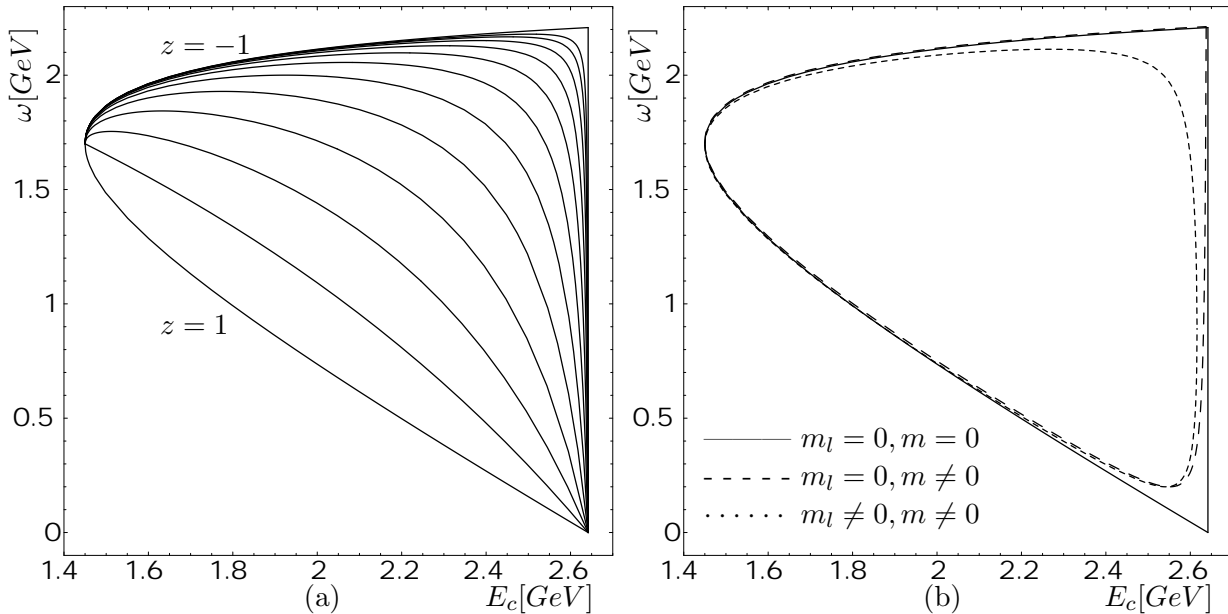


Abbildung 3.6: Phasenraumgrenzen für die Energien von Gluon und c -Quark. (a) Phasenraumgrenzen für $m = 0$ und $m_l = 0$. Die verschiedenen Linien entsprechen unterschiedlichen Werten von $z = \cos \theta$, und zwar (von oben nach unten) $z = -1, -1 + 1/2^{10}, -1 + 1/2^9, \dots, (-1 + 1/2^3 = -7/8), -3/4, -1/2, 0, 1$. (b) Einfluß von endlicher Gluon- und Leptonmasse. Die drei Kurven entsprechen den Phasenraumgrenzen mit $(m_l \neq 0, m \neq 0), (m_l = 0, m \neq 0), (m_l = 0, m = 0)$. Zur besseren Veranschaulichung wurden unnatürlich große Werte von $m_l = 0.3$ GeV und $m = 0.2$ GeV gewählt.

Spitze des Phasenraumes befindet sich der sogenannte IR-Punkt, da an dieser Stelle bei der

Integration über den Phasenraum die IR-Singularität entsteht, wenn man die Gluonmasse gleich null setzt.

Nachdem wir nun die Integrationsgrenzen bestimmt haben, kommen wir zur Durchführung der Integration (3.195) zurück. Im nächsten Schritt setzt man die parametrisierten Ausdrücke für a , b und f in den Integranden ein. Die endlichen Leptonmassen dienen nur der Veranschaulichung des Phasenraumes und können bei der folgenden Rechnung wieder null gesetzt werden. Wir beginnen mit der Integration des divergenten Terms, der von der Gluonmasse abhängt. Mit der Bedingung $\omega = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ nimmt der universelle Faktor A die Gestalt

$$A \equiv a(|\vec{k}|, z, m) = \frac{|\vec{p}_c|^2 [|\vec{k}|^2 (1 - z^2) + m^2]}{(|\vec{k}|^2 + m^2) (E_c \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} - |\vec{k}| |\vec{p}_c| z)^2} \quad (3.201)$$

an. Die Funktion a hängt also explizit von dem Parameter m ab, der die Gluonmasse beschreibt.

Bei Ausführung der Integration über $|\vec{k}|$ stellt man fest, daß im Integranden einige Terme auftreten, in denen Wurzeln vorkommen, die die Variable $|\vec{k}|$ enthalten. Es ist sinnvoll, die Substitution

$$|\vec{k}| = \frac{m}{2} \frac{t^2 - 1}{t}, \quad d|\vec{k}| = \frac{m}{2} \frac{t^2 + 1}{t^2} dt$$

einzuführen, um die Integration zu vereinfachen. Die Grenzen lauten dann in erster Ordnung der Gluonmasse m

$$1 \leq t \leq \frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{m (m_b - E_c + |\vec{p}_c| z)} + \mathcal{O}(m) \equiv t_{max}. \quad (3.202)$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$g(|\vec{k}|) := \frac{|\vec{k}|^2}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} a(|\vec{k}|, z, m) = \frac{|\vec{p}_c|^2 |\vec{k}|^2 [|\vec{k}|^2 (1 - z^2) + m^2]}{(|\vec{k}|^2 + m^2)^{3/2} (E_c \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} - |\vec{k}| |\vec{p}_c| z)^2},$$

so führt die Integration über t und anschließende Entwicklung in eine Potenzreihe nach der Gluonmasse um $m = 0$ schließlich zu dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \int_0^{k_{max}} g(|\vec{k}|) d|\vec{k}| &= \int_1^{t_{max}} g(|\vec{k}|(t)) \frac{d|\vec{k}|}{dt} dt \quad (3.203) \\ &= \frac{2 E_c (E_c^4 - |\vec{p}_c|^2 (2 E_c^2 - |\vec{p}_c|^2) z^2)}{|\vec{p}_c| z (E_c^2 - |\vec{p}_c|^2 z^2)^2} \ln \left(\frac{E_c - |\vec{p}_c| z}{E_c} \right) \\ &\quad + \frac{|\vec{p}_c|^2 (1 - z^2)}{(E_c - |\vec{p}_c| z)^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{2 m (m_b - E_c + |\vec{p}_c| z)} \right) \\ &\quad + \frac{|\vec{p}_c|^2 (1 - z^2) (E_c^2 + |\vec{p}_c|^2 z^2)}{(E_c^2 - |\vec{p}_c|^2 z^2)^2} \ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 E_c^3 - |\vec{p}_c| z (E_c^2 - |\vec{p}_c|^2 z^2) - E_c |\vec{p}_c|^2 (1 + z^2)}{(E_c - |\vec{p}_c| z)^2 (E_c + |\vec{p}_c| z)} \\
& + m^2 \frac{2 |\vec{p}_c|^2 (m_b - E_c + |\vec{p}_c| z) (E_c - 2 E_c z^2 + |\vec{p}_c| z^3)}{(m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c)^2 (E_c - |\vec{p}_c| z)^3} + \mathcal{O}(m^4).
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß das Resultat nur gerade Potenzen der Gluonmasse m enthält. Weil diese als sehr klein angenommen wird, können alle höheren Potenzen von m vernachlässigt werden. Insbesondere braucht der Term proportional zu m^2 nicht berücksichtigt zu werden.

Nun muß der Ausdruck (3.203) noch über z integriert werden. Diejenigen Terme, die keinen von der Integrations-Variablen abhängigen Logarithmus enthalten, lassen sich relativ einfach integrieren. Sie sind im wesentlichen durch die Hilfsintegrale

$$I_1 := \int_{-1}^1 \frac{|\vec{p}_c|^2 (1 - z^2)}{(E_c - |\vec{p}_c| z)^2} dz = \frac{2 E_c}{|\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) - 4 \quad (3.204)$$

$$\begin{aligned}
I_2 & := \int_{-1}^1 \frac{2 E_c^3 - E_c |\vec{p}_c|^2 - E_c^2 |\vec{p}_c| z - E_c |\vec{p}_c|^2 z^2 + |\vec{p}_c|^3 z^3}{(E_c - |\vec{p}_c| z)^2 (E_c + |\vec{p}_c| z)} dz \\
& = \frac{m_c^2}{2 E_c |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) + 3
\end{aligned}$$

$$I_3 := \int_{-1}^1 \frac{|\vec{p}_c|^2 (1 - z^2) (E_c^2 + |\vec{p}_c|^2 z^2)}{(E_c^2 - |\vec{p}_c|^2 z^2)^2} dz = \frac{2 E_c}{|\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) - 4 = I_1$$

gegeben, wobei $E_c^2 - |\vec{p}_c|^2 = m_c^2$ verwendet wurde. Die komplizierteren Integranden, die noch einen z -abhängigen Logarithmus enthalten, liefern Ausdrücke, die die Dilogarithmusfunktion sowie Produkte von Logarithmen enthalten. Die Definition des Dilogarithmus und einige wichtige Eigenschaften und Umrechnungsformeln sind im Anhang C angegeben. Unter Verwendung dieser Eigenschaften kann man für die logarithmischen Integranden folgende Hilfsintegrale angeben:

$$\begin{aligned}
I_4 & := \int_{-1}^1 \frac{2 E_c (E_c^4 - |\vec{p}_c|^2 (2 E_c^2 - |\vec{p}_c|^2) z^2)}{|\vec{p}_c| z (E_c^2 - |\vec{p}_c|^2 z^2)^2} \ln \left(\frac{E_c - |\vec{p}_c| z}{E_c} \right) dz \quad (3.205) \\
& = - \frac{2 E_c}{|\vec{p}_c|} \text{Li}_2 \left(\frac{2 |\vec{p}_c|}{E_c + |\vec{p}_c|} \right) + \frac{E_c}{|\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{m_c}{E_c + |\vec{p}_c|} \right) \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \\
& \quad + \frac{E_c^2 + |\vec{p}_c|^2}{2 E_c |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) - 1
\end{aligned}$$

$$I_5 := \int_{-1}^1 \frac{|\vec{p}_c|^2 (1 - z^2)}{(E_c - |\vec{p}_c| z)^2} \ln \left(\frac{m_b - E_c + |\vec{p}_c| z}{m_b} \right) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 E_c}{|\vec{p}_c|} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{E_c - |\vec{p}_c|}{m_b} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{m_b} \right) \right] + \frac{m_c^2}{m_b |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \\
&\quad + \frac{m_b^2 - m_c^2}{m_b |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{m_b - E_c - |\vec{p}_c|}{m_b - E_c + |\vec{p}_c|} \right) - 2 \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{m_b^2} \right) + 2.
\end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir als Beispiel noch das Integral des zu m^2 proportionalen Anteils, um explizit zu sehen, daß es keine Divergenz enthält. Es ist

$$\begin{aligned}
I_6 &:= \int_{-1}^1 \frac{2 |\vec{p}_c|^2 (m_b - E_c + |\vec{p}_c| z) (E_c - 2 E_c z^2 + |\vec{p}_c| z^3)}{(m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c)^2 (E_c - |\vec{p}_c| z)^3} dz \quad (3.206) \\
&= \frac{m_b - E_c}{(m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c)^2} \left[\frac{2 E_c}{|\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) - 4 \right] = \frac{m_b - E_c}{(m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c)^2} I_1.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist offenbar konvergent, womit gezeigt wurde, daß der Term der Ordnung m^2 im Falle verschwindender Gluonmasse keinen Beitrag zu der Integration des Soft-Gluon-Faktors liefert.

Unter Benutzung der Hilfsintegrale I_1, \dots, I_5 läßt sich der gesamte integrierte Soft-Gluon-Faktor darstellen als

$$A_g = I_1 \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{m m_b} \right) + I_2 + I_4 - I_5 + \mathcal{O}(m^2). \quad (3.207)$$

Nach Zusammenfassung und Umformung der einzelnen Teilergebnisse erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
A_g &:= \int_{-1}^1 dz \int_1^{t_{max}} dt g(|\vec{k}|(t)) \frac{d|\vec{k}|}{dt} \\
&= \frac{2 E_c}{|\vec{p}_c|} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{m_b} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{E_c - |\vec{p}_c|}{m_b} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2 |\vec{p}_c|}{E_c + |\vec{p}_c|} \right) \right] \\
&\quad + \frac{E_c}{|\vec{p}_c|} \left[\ln \left(\frac{m_c}{E_c + |\vec{p}_c|} \right) + 1 \right] \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \\
&\quad + 2 \left[\frac{E_c}{|\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) - 2 \right] \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{m m_b} \right) \\
&\quad + \frac{m_b^2 - m_c^2}{m_b |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{m_b - E_c + |\vec{p}_c|}{m_b - E_c - |\vec{p}_c|} \right) + 2 \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{m_b^2} \right) \\
&\quad - \frac{m_c^2}{m_b |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right). \quad (3.208)
\end{aligned}$$

Der gesamte singuläre Anteil ist durch Multiplikation dieses Faktors A_g mit der Funktion $b(0,0)$ gegeben, die dem zugehörigen Born-Term entspricht. Der explizite Ausdruck des

Faktors B hat die Form

$$\begin{aligned}
B &\equiv b(\omega, z) \\
&= m_b \left\{ 3 E_c (m_b^2 + m_c^2) - 2 m_b (2 E_c^2 + m_c^2) \right. \\
&\quad \left. + 2 \omega [2 E_c^2 - 3 m_b E_c + m_c^2 + (m_b - 2 E_c) |\vec{p}_c| z] + 2 \omega^2 (E_c - |\vec{p}_c| z) \right\} \\
&\mp m_b \left\{ |\vec{p}_c| (3 m_b^2 + m_c^2 - 4 m_b E_c) \right. \\
&\quad \left. + 2 \omega [|\vec{p}_c| (2 E_c - 3 m_b) + (m_b E_c + m_c^2 - 2 E_c^2) z] + 2 \omega^2 (|\vec{p}_c| - E_c z) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.209}$$

Die Ausdrücke, die in (3.195) durch die letzte Zeile gegeben sind, sind endlich und können ohne weitere Probleme integriert werden. Faßt man die Ergebnisse der drei Teilintegrationen aus (3.195) zusammen, so erhält man für das gesamte Integral

$$\begin{aligned}
I_{ges} &= \pi \left\{ \frac{2 E_c}{|\vec{p}_c|} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{m_b} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{E_c - |\vec{p}_c|}{m_b} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2 |\vec{p}_c|}{E_c + |\vec{p}_c|} \right) \right] \right. \\
&\quad + \frac{E_c}{|\vec{p}_c|} \left[\ln \left(\frac{m_c}{E_c + |\vec{p}_c|} \right) + 1 \right] \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \\
&\quad + 2 \left[\frac{E_c}{|\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) - 2 \right] \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{m m_b} \right) \\
&\quad + \frac{m_b^2 - m_c^2}{m_b |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{m_b - E_c + |\vec{p}_c|}{m_b - E_c - |\vec{p}_c|} \right) + 2 \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c}{m_b^2} \right) \\
&\quad \left. - \frac{m_c^2}{m_b |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \right\} \\
&\times m_b [3 E_c (m_b^2 + m_c^2) - 2 m_b (2 E_c^2 + m_c^2) \mp |\vec{p}_c| (3 m_b^2 + m_c^2 - 4 m_b E_c)] \\
&\quad + \frac{\pi}{3} (m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c) \left\{ 34 m_b E_c - 11 m_b^2 - 11 m_c^2 \right. \\
&\quad + \frac{5 (m_b^2 + m_c^2)^2 + 34 m_b E_c (m_b^2 + m_c^2) - 136 m_b^2 E_c^2}{8 m_b |\vec{p}_c|} \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \\
&\quad \pm \left[\frac{1}{4 m_b |\vec{p}_c|} (5 m_b^4 + 30 m_b^3 E_c - 128 m_b^2 E_c^2 + 104 m_b^2 m_c^2 - 14 m_b E_c m_c^2 + 3 m_c^4) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8 m_b^2 (E_c^2 - m_c^2)} (-4 m_c^2 (m_b^2 + m_c^2)^2 - 136 m_b^3 E_c^3 + 2 m_b^2 E_c^2 (17 m_b^2 - 9 m_c^2) \right. \\
&\quad \left. \left. + m_b E_c (5 m_b^4 + 116 m_b^2 m_c^2 + 15 m_c^4) \right) \ln \left(\frac{E_c + |\vec{p}_c|}{E_c - |\vec{p}_c|} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$- \frac{m_c^2}{2 m_b^2 (E_c^2 - m_c^2)} (m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c)^2 \ln \left(\frac{m_b - E_c - |\vec{p}_c|}{m_b - E_c + |\vec{p}_c|} \right) \Bigg\}. \quad (3.210)$$

Die differentielle Zerfallsrate (3.183) kann über den Winkelanteil des Phasenraumes für das c -Quarks integriert werden, da der Integrand nicht von den Winkeln abhängt. Mit

$$d^3 \vec{p}_c \rightarrow 4\pi |\vec{p}_c|^2 d|\vec{p}_c| = 4\pi |\vec{p}_c| E_c dE_c$$

erhält man also

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{6} g_s^2 C_F \right) \frac{1}{m_b} (2 I_{ges}) \frac{d^3 \vec{p}_c}{(2\pi)^7 E_c} \\ &= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{6} g_s^2 C_F \right) \frac{1}{m_b} (2 I_{ges}) \frac{4\pi |\vec{p}_c| dE_c}{(2\pi)^7}. \end{aligned} \quad (3.211)$$

Setzt man das Integral (3.210) in diesen Ausdruck ein und verwendet wieder die Skalierungen (3.28) der Bornschen Rate und die Relation (3.29), so bekommt man für die differentielle Zerfallsrate bezüglich der Energie des c -Quarks den kompakten Ausdruck

$$\frac{d\Gamma^{(g)}}{dx} = \Gamma_b \cdot \frac{\alpha_s}{3\pi} 4 \left(G_0^{(g)} \pm G_P^{(g)} \right) \quad (3.212)$$

mit

$$\begin{aligned} G_0^{(g)} &= A_g \cdot \frac{\beta x}{2} \left[x(3 - 2x) - (4 - 3x)y^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} (1 - x + y^2) \left\{ \beta x (17x - 11 - 11y^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left[5(1 + y^2)^2 + 17x(1 + y^2) - 34x^2 \right] \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right\} \\ G_P^{(g)} &= A_g \cdot \frac{\beta x}{2} \left[-\beta x (3 - 2x + y^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} (1 - x + y^2) \left\{ \frac{1}{2} (5 + 15x - 32x^2 + 104y^2 - 7xy^2 + 3y^4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\beta x} \left[-8y^2(1 + y^2)^2 - 34x^3 + x^2(17 - 9y^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x(5 + 116y^2 + 15y^4) \right] \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2y^2}{\beta x} (1 - x + y^2)^2 \ln \left(\frac{2 - x + \beta x}{2 - x - \beta x} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.213)$$

Die starke Kopplungskonstante α_s hängt mit g_s über die Relation $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ zusammen. Der Soft-Gluon-Faktor A_g wurde in (3.208) angegeben. Man kann ihn ebenfalls durch die

skalierten Größen (3.28) ausdrücken. Außerdem verwendet man die Definition $\Lambda = m/m_b$ für die skalierte Gluonmasse. Mit Hilfe dieser Relationen läßt sich der Soft-Gluon-Faktor in der Form

$$\begin{aligned}
A_g &= \frac{2}{\beta} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{x(1+\beta)}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{x(1-\beta)}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2\beta}{1+\beta} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{\beta} \left[\ln \left(\frac{2y}{x(1+\beta)} \right) + 1 \right] \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \\
&+ 2 \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \ln \left(\frac{1-x+y^2}{\Lambda} \right) \\
&+ \frac{2}{\beta x} \left[(1-y^2) \ln \left(\frac{2-x+\beta x}{2-x-\beta x} \right) - y^2 \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] \\
&+ 2 \ln(1-x+y^2)
\end{aligned} \tag{3.214}$$

schreiben.

3.5 Inklusive Zerfallsrate

Nachdem wir in den vorherigen Abschnitten die Einschleifenkorrekturen und die Bremsstrahlungsbeiträge zur Zerfallsrate des b -Quark-Zerfalls in ein c -Quark und ein Leptonpaar berechnet haben, können wir nun die Summe aus beiden Anteilen bilden, um die inklusive Zerfallsrate zu bestimmen. Wie schon vorher angemerkt, enthalten die Integrale der Einschleifen-Korrekturen zur Zerfallsrate zwei unterschiedliche Arten von Divergenzen. Zum einen gibt es die sogenannten Ultraviolett-Divergenzen, die für sehr große Schleifen-Impulse auftreten, und zum anderen enthalten diese Integrale Infrarot-Divergenzen bei sehr kleinen Impulsen. Die Beiträge zur Bremsstrahlung sind zwar UV -konvergent, weil der Phasenraum endlich ist, sie sind für kleine Gluon-Impulse aber ebenfalls infrarot-divergent. Die UV -Singularitäten konnten durch das Verfahren der Renormierung beseitigt werden, bei dem die Massen der Quarks im *on-shell*-Verfahren durch bestimmte physikalische Annahmen redefiniert wurden. Allerdings enthalten die Ergebnisse noch immer die Infrarot-Singularitäten. Diese müssen in der inklusiven Zerfallsrate nach dem Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem [54] verschwinden. Um dies direkt zu sehen, werden die beiden Ausdrücke für die Einschleifenkorrekturen (3.154) und für die Bremsstrahlung (3.212) aufsummiert. Die Infrarot-Divergenzen beider Ausdrücke sind jeweils in der Funktion A_0 (3.156) sowie dem Soft-Gluon-Faktor A_g (3.214) enthalten. Man kann dort leicht erkennen, daß die Terme, welche proportional zu $\ln(\Lambda)$ sind, denselben Vorfaktor besitzen. Die inklusive Rate hängt nur noch von der Differenz $A_0 - A_g$ ab, die offensichtlich konvergent ist, da sich die darin vorkommenden Infrarot-Singularitäten gegenseitig aufheben. Das Auftreten der Differenz anstatt der Summe von A_0 und A_g hängt mit der Einführung von A_0 gemäß (3.148) zusammen, die gegenüber A_1 einige technische Vorteile beim Zusammenfassen der

einfach logarithmischen Terme besitzt. Das Vorzeichen von A_0 wurde so gewählt, daß A_0 im kinematisch erlaubten x -Bereich positiv ist. Bei Verwendung des Entwicklungskoeffizienten A_1 anstelle von A_0 würde die inklusive Rate von der Summe $A_1 + A_g$ abhängen. Das physikalische Resultat ist natürlich unabhängig davon, ob man A_1 oder A_0 verwendet.

Die inklusive Zerfallsrate ist explizit durch

$$\frac{d\Gamma_{\pm}^{(incl)}}{dx} = \frac{d\Gamma_{\pm}^{(\alpha_s)}}{dx} + \frac{d\Gamma_{\pm}^{(g)}}{dx} = \Gamma_b \left[\beta x \left(G_0^{(Born)} \pm G_P^{(Born)} \right) - \frac{\alpha_s}{3\pi} \left(G_0^{(\alpha_s+g)} \pm G_P^{(\alpha_s+g)} \right) \right] \quad (3.215)$$

gegeben. Die unpolarisierte und die polarisierte Strukturfunktion der Bornschen Rate $G_0^{(Born)}$ und $G_P^{(Born)}$ sind in (3.31) angegeben. Die entsprechenden Funktionen der inklusiven strahlungskorrigierten Rate sind durch

$$\begin{aligned} G_0^{(\alpha_s+g)} &= 2\beta x \left[x(3-2x) - (4-3x)y^2 \right] \cdot A \\ &\quad - \frac{4}{3}\beta x (1-x+y^2) \left[17x - 11(1+y^2) \right] + 6\beta x^2 (1-y^2) \ln(y) \\ &\quad - \frac{1}{3}(1-x+y^2) \left[5 - 16x^2 + 17x(1+y^2) - y^2(62-5y^2) \right] \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \\ G_P^{(\alpha_s+g)} &= -2\beta^2 x^2 (3-2x+y^2) \cdot A \\ &\quad - \frac{2}{3}(1-x+y^2) \left[5 - 32x^2 + x(15-7y^2) + y^2(104+3y^2) \right] \\ &\quad - 2\beta^2 x^2 (3-y^2) \ln(y) \\ &\quad + \frac{1}{3\beta x} \left[16x^4 - x^3(33+19y^2) + 12x^2(1+y^2)(1-2y^2) \right. \\ &\quad \quad \left. + x(5+57y^2+123y^4+23y^6) \right. \\ &\quad \quad \left. - 8y^2(1+15y^2+3y^4+y^6) \right] \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \\ &\quad - \frac{8y^2}{3\beta x} (1-x+y^2)^3 \ln\left(\frac{2-x+\beta x}{2-x-\beta x}\right) \end{aligned} \quad (3.216)$$

definiert. Die Differenz der beiden Funktionen A_0 und A_g läßt sich etwas verkürzen, indem man die Identität

$$\begin{aligned} L &\equiv \text{Li}_2\left(\frac{x(1+\beta)}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{x(1-\beta)}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) \\ &= \text{Li}_2\left(\frac{2\beta x}{2-x+\beta x}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2\beta x}{x-2y^2+\beta x}\right) - \ln\left(\frac{2-x+\beta x}{2}\right) \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \end{aligned} \quad (3.217)$$

der Dilogarithmus-Funktionen verwendet und die logarithmischen Terme zusammenfaßt.

Dann erhält man

$$\begin{aligned}
A := A_0 - A_g &= \frac{2}{\beta} \left[2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\beta x}{x - 2y^2 + \beta x} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2\beta x}{2 - x + \beta x} \right) \right. \\
&+ \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \ln \left(\frac{x - 2y^2 + \beta x}{2(1 - x + y^2)} \right) + \ln \left(\frac{x + \beta x}{2} \right) \ln \left(\frac{2 - x + \beta x}{2 - x - \beta x} \right) \left. \right] \\
&+ 2 \ln \left(\frac{1 - x + y^2}{y} \right) - \frac{2(1 - y^2)}{\beta x} \ln \left(\frac{2 - x + \beta x}{2 - x - \beta x} \right) - \frac{x - 2y^2}{\beta x} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) + 4.
\end{aligned} \tag{3.218}$$

Man erkennt, daß A in der letzten Zeile dieselben einfachen Logarithmen enthält, die auch in den anderen Termen der korrigierten Strukturfunctionen $G_0^{(\alpha_s+g)}$ und $G_P^{(\alpha_s+g)}$ vorkommen. Man könnte sie also mit jenen zusammenfassen. Es zeigt sich jedoch, daß das Endresultat die kompakteste Form erhält, wenn man die einfach logarithmischen Terme in A beläßt.

Das Ergebnis (3.216) hat dieselbe Struktur wie die inklusive differentielle Rate des Myon-Zerfalls $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. Beide Ergebnisse können daher durch Ersetzung der entsprechenden Massen $m_\mu \rightarrow m_b$, $m_e \rightarrow m_c$ und der Kopplungen $\alpha \rightarrow C_F \alpha_s$ ineinander übergeführt werden. Das CKM-Matrixelement V_{bc} muß bei diesem Vergleich gleich eins gesetzt werden. Die Massen der übrigen Leptonen sind bei beiden Resultaten vernachlässigt worden. Bei dem Vergleich mit den analytischen Ergebnissen für die Rate des Myon-Zerfalls mit endlicher Elektron-Masse [40, 41] wurde sowohl für die unpolarisierte als auch für die polarisierte Strukturfunction G_0 und G_P exakte Übereinstimmung festgestellt. Der Vergleich mit der unpolarisierten Rate [38] lieferte ebenfalls eine Übereinstimmung der analytischen Ergebnisse.

Die strahlungskorrigierten Strukturfunctionen $G_0^{(\alpha_s+g)}$ und $G_P^{(\alpha_s+g)}$ hängen quadratisch von der skalierten c -Masse y ab, da sich der Logarithmus $\ln(y)$ in einfacher Weise immer in $1/2 \ln(y^2)$ umschreiben läßt. Im Grenzfall $y \rightarrow 0$ sind sie logarithmisch massendivergent. Diese Divergenzen verschwinden erst in den über y integrierten Strukturfunctionen, aus denen sich die polarisierte totale Rate zusammensetzt [42, 41]. An der unteren Grenze des Energiespektrums $x = 2y$ verschwinden die korrigierten Funktionen, es gilt also $G_{0,P}^{(\alpha_s+g)} = 0$ wie im Falle der Bornschen Rate (3.34). Damit verschwindet auch die inklusive Rate $d\Gamma_\pm^{(incl)}/dx$ an der unteren Grenze. An der oberen Grenze der skalierten c -Energie x sind die beiden korrigierten Funktionen $G_{0,P}^{(\alpha_s+g)}$ logarithmisch divergent. Für den Grenzfall $x \rightarrow 1 + y^2 - \epsilon$ erhält man somit Terme, die proportional zu $\ln(\epsilon)$ sind und für $\epsilon \rightarrow 0$ divergieren [41]. Für die zur Bornschen Näherung (3.34) gehörenden korrigierten Strukturfunctionen erhält man an der unteren und an der oberen Grenze die Relationen

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2y} G_0^{(\alpha_s+g)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 2y} G_P^{(\alpha_s+g)}(x) = 0 \\
\lim_{x \rightarrow 1+y^2} G_0^{(\alpha_s+g)}(x) &= - \lim_{x \rightarrow 1+y^2} G_P^{(\alpha_s+g)}(x) = 8(1 - y^2)^2 \left\{ (1 - y^2) \left[1 + \ln \left(\frac{\epsilon}{1 - y^2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.219}$$

$$+ (1 + y^2) \ln(y) \left[\frac{3}{4} + \ln \left(\frac{\epsilon}{1 - y^2} \right) \right] \Big\}.$$

Diese Divergenz tritt auf, da am Rande des Phasenraumes die Infrarot-Singularität des Bremsstrahlungsanteils offensichtlich nicht vollständig gegen den Einschleifenbeitrag gekürzt wird. Die differentielle Rate als beobachtbare Größe ist deshalb ebenfalls divergent. Man kann zeigen, daß die korrigierten Strukturfunktionen an der oberen Grenze gegen null gehen, wenn man alle Ordnungen der Störungstheorie aufsummiert.

Polarisationsobservable sind Ausdrücke der Form Z/N , wobei der Zähler Z und der Nenner N in der Ordnung α_s beide am Rand des Phasenraumes divergieren. Der resultierende Quotient ist allerdings konvergent, weil sich die Divergenzen gegenseitig kürzen [41]. In allen Bereichen des Phasenraumes, die innerhalb des Randes liegen, treten bei der inklusiven Rate in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ keine Divergenzen auf. Die beiden Strukturfunktionen G_0 und G_P sind in Abschnitt 3.6 graphisch dargestellt. Dort werden sowohl die Bornschen als auch die strahlungskorrigierten Funktionen gezeigt. Außerdem wird auf die longitudinale Polarisation des c -Quarks eingegangen. Im Anschluß daran folgt eine Diskussion der numerischen Ergebnisse.

3.6 Numerische Resultate

Im letzten Abschnitt wurde die inklusive Zerfallsrate für den Zerfall des bottom-Quarks in ein polarisiertes charm-Quark und ein Leptonpaar $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$ bis einschließlich erster Ordnung der starken Kopplungskonstanten analytisch berechnet. Es handelt sich dabei um die differentielle Zerfallsrate in Abhängigkeit der mit der b -Masse skalierten Energie x des c -Quarks. Dieses ist longitudinal polarisiert, während sich seine transversale Polarisation durch die azimuthale Integration weghebt.

Die differentielle Zerfallsrate kann in einem Schaubild graphisch dargestellt werden. Dazu wird sie über dem Intervall $2y \leq x \leq 1 + y^2$ der skalierten c -Energie x aufgetragen. Der unpolarisierte und der polarisierte Anteil der Zerfallsrate

$$\frac{d\Gamma_0}{dx} = \Gamma_b \left[\beta x G_0^{(Born)} - \frac{\alpha_s}{3\pi} G_0^{(\alpha_s+g)} \right], \quad \frac{d\Gamma_P}{dx} = \Gamma_b \left[\beta x G_P^{(Born)} - \frac{\alpha_s}{3\pi} G_P^{(\alpha_s+g)} \right] \quad (3.220)$$

sind durch die beiden inklusiven Strukturfunktionen G_0 und G_P gegeben, die sich aus einem Bornschen und einem strahlungskorrigierten Anteil der Ordnung α_s zusammensetzen. Um den Beitrag, der durch die Strahlungskorrekturen hervorgerufen wird, veranschaulichen zu können, ist es sinnvoll, die Bornsche und die korrigierte Rate in dem selben Schaubild zu zeigen. Außerdem ist es sinnvoll, die differentiellen Raten auf die totale Rate Γ_b im Grenzfall $m_b \rightarrow 0$ zu normieren. Sie sind durch die Relationen

$$\frac{d\hat{\Gamma}_{0,P}}{dx} = \frac{1}{\Gamma_b} \frac{d\Gamma_{0,P}}{dx} = \beta x G_{0,P}^{(Born)} - \frac{\alpha_s}{3\pi} G_{0,P}^{(\alpha_s+g)} \quad (3.221)$$

gegeben. Auf diese Weise erkennt man direkt die Abweichungen von der totalen Rate Γ_b . Die entsprechenden Graphen für die normierten Raten sind in Abbildung 3.7 dargestellt.

Die verwendeten Werte für die Quarkmassen sind $m_b = 4.85 \text{ GeV}$ und $m_c = 1.45 \text{ GeV}$ [55]. Die starke Kopplungskonstante bei Energien, die der b -Masse entsprechen, beträgt $\alpha_s(m_b) = 0.219$ [56], und für das CKM-Matrixelement wird $V_{bc} = 0.041$ angenommen. Die Fermi-Konstante hat schließlich den numerischen Wert $G_F/(\hbar c)^3 = 1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ [22]. Die Zerfallsraten besitzen in natürlichen Einheiten, für die $\hbar = c = 1$ gesetzt wird, die Dimension $[\Gamma] = \text{GeV}$. Zur Umrechnung auf SI -Einheiten, in denen $[\Gamma] = 1/s$ gilt, benötigt man den Kehrwert des reduzierten Planckschen Wirkungsquantums $\hbar = 6.58211889 \times 10^{25} \text{ GeV} \cdot s$ als Umrechnungsfaktor [22]. Die Konstante Γ_b hat damit den numerischen Wert $\Gamma_b = 1.03 \times 10^{-13} \text{ GeV} = 1.566 \times 10^{11} s^{-1}$. Das Massenverhältnis von c - und b -Masse beträgt $y = 0.299$. Im Vergleich zum Myon-Zerfall, wo $y = m_e/m_\mu = 0.0048$ gilt, ist dies ein sehr großer Wert, was natürlich Auswirkungen auf den Verlauf der Graphen hat. Der kinematisch erlaubte Bereich für die skalierte Energie ist das Intervall $x_{min} = 0.598 \leq x \leq 1.089 = x_{max}$.

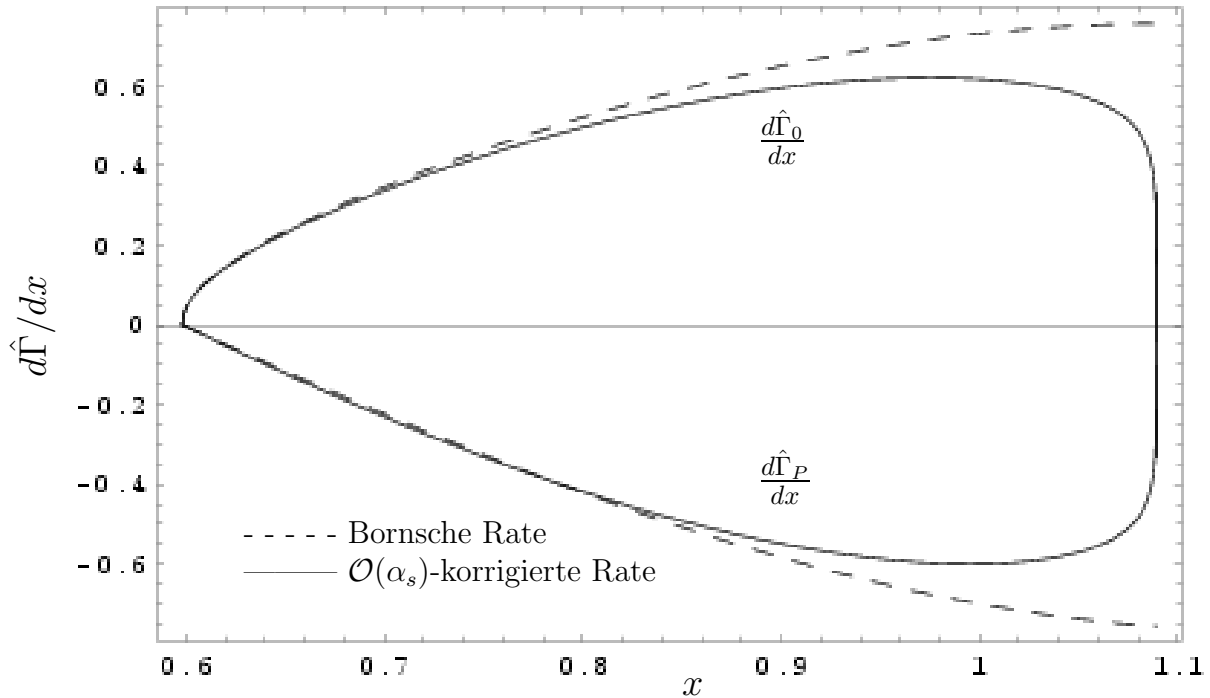


Abbildung 3.7: Unpolarisierter und polarisierter Anteil der inklusiven differentiellen Zerfallsrate für den Zerfall $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$. Vergleich der Bornschen Näherung und der korrigierten Raten. Der Index 0 beschreibt den unpolarisierten Anteil und der Index P den polarisierten Anteil der Zerfallsrate. Die Divergenzen der $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Raten an der oberen Grenze sind hier nicht eingezeichnet.

Die Auswertung der Raten $d\hat{\Gamma}_0/dx$ und $d\hat{\Gamma}_P/dx$ ist numerisch relativ stabil. Die polarisierte Rate $d\hat{\Gamma}_P/dx$ bildet für sehr kleine Werte von x nahe der Schwelle $x = 2y$ eine Ausnahme. Der Grund dafür sind Terme proportional zu $1/\beta$, die für $x \rightarrow 2y$ für sich alleine divergent sind. Der gesamte Ausdruck für die Rate ist allerdings endlich, da der Zähler stärker gegen null konvergiert als β . Um die Region nahe der Schwelle näher zu untersuchen,

kann man G_P in eine Potenzreihe um $\beta = 0$ entwickeln. Der führende ist Term unabhängig von β , alle weiteren enthalten gerade Potenzen von β . In dieser Darstellung ist die numerische Auswertung an der Schwelle stabil. Eine Untersuchung der Strukturfunktionen an der Schwelle soll im folgenden jedoch nicht weiter diskutiert werden.

Die strahlungskorrigierten Beiträge zeigen eine deutliche y -Abhängigkeit, was zum großen Teil auf die $\ln(y)$ -Terme zurückzuführen ist. Sie sind in weiten Bereichen relativ klein, außer am oberen Ende des Energiespektrums. An der oberen Grenze $x_{max} = 1 + y^2$ werden sie sogar divergent, wie im letzten Abschnitt dargestellt wurde. Die Beiträge, die aus den $\ln(y)$ -Termen stammen, steigen mit zunehmendem x an und machen bei etwa $x = 1$ schon einen beachtlichen Teil der Strahlungskorrekturen aus. Bei noch größeren Werten von x werden die Strahlungskorrekturen allerdings von den Termen dominiert, welche an der oberen Grenze divergent werden.

Man erkennt in Abbildung 3.7, daß in der Bornschen Näherung der unpolarisierte Beitrag der Zerfallsrate für alle erlaubten Werte von x positiv ist, während umgekehrt der polarisierte Beitrag für alle x negativ ist. An der unteren Schwelle der skalierten Energie x verschwinden beide Beiträge, wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt wurde. An der oberen Grenze besitzt der unpolarisierte Beitrag einen Maximalwert von $d\hat{\Gamma}_0^{(Born)}/dx = 0.755$. Der polarisierte Beitrag besitzt an der oberen Grenze ein Minimum von $d\hat{\Gamma}_P^{(Born)}/dx = -0.755$. Die Summe beider Werte verschwindet an der oberen Grenze $x_{max} = 1 - y^2$, wie man an den analytischen Ausdrücken (3.30) und (3.31) durch Einsetzen von x_{max} sehen kann.

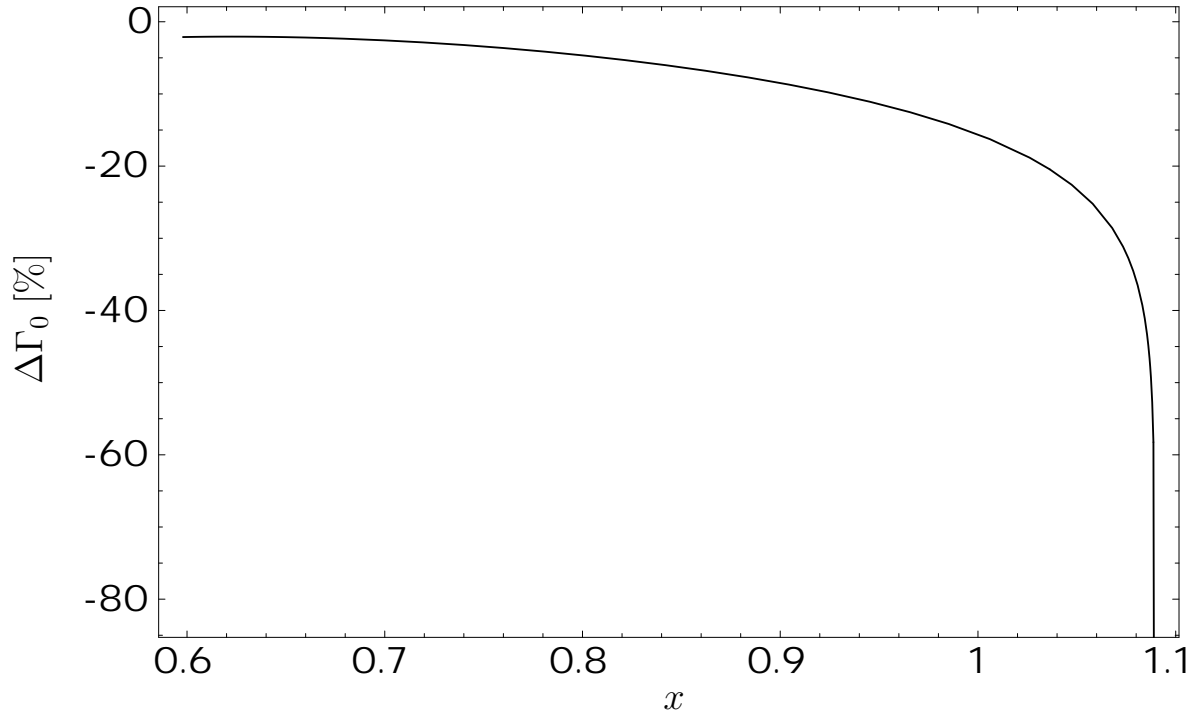


Abbildung 3.8: Relative prozentuale Änderung für den unpolarisierten Beitrag der Zerfallsrate $d\Gamma_0/dx$ durch die inklusiven Strahlungskorrekturen in erster Ordnung α_s

Für die inklusiven strahlungskorrigierten Raten ändert sich das Verhalten mit zunehmendem x . Wie auch die Bornschen Raten, verschwinden sie an der Schwelle $x_{min} = 2y = 0.598$. Bei kleinen Werten für x , in der Nähe der Schwelle, unterscheiden sie sich kaum von den Bornschen Raten. Die unpolarisierte Rate $d\hat{\Gamma}_0/dx$ steigt mit zunehmenden x an und erreicht bei etwa $x = 0.975$ ein Maximum von 0.714, um anschließend zunächst leicht, in der Nähe der oberen Schwelle $x_{max} = 1 + y^2 = 1.089$ dann immer steiler abzufallen. Wie im letzten Abschnitt diskutiert wurde, divergiert sie an der oberen Grenze gegen $-\infty$. Die strahlungskorrigierte polarisierte Rate $d\hat{\Gamma}_P/dx$ zeigt fast das analoge Verhalten wie die negative unpolarisierte Rate. Sie fällt bis etwa $x = 0.996$ stetig ab, erreicht dort ein Minimum von -0.696 , und steigt anschließend wieder leicht an. Bei x -Werten in Richtung der oberen Schwelle wird der Anstieg immer steiler, und an der oberen Grenze divergiert die polarisierte Rate gegen $+\infty$. Bei Werten von x , die größer als etwa 0.8 oder 0.9 sind, verringern die Strahlungskorrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ den Betrag der Bornschen Raten mit steigendem x immer deutlicher. Wie man aus den analytischen Resultaten für den Born-Term (3.34) und für die Strahlungskorrekturen (3.219) ableiten kann, gilt im Grenzfall $x \rightarrow x_{max}$ die Relation $d\hat{\Gamma}_0/dx = -d\hat{\Gamma}_P/dx$ zwischen der unpolarisierten und der polarisierten differentiellen Rate, wenn man x_{max} durch $x_{max} - \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ ersetzt und den Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ betrachtet.

Es ist zu bemerken, daß beide Raten $d\Gamma_0/dx$ und $d\Gamma_P/dx$ und damit natürlich auch die entsprechenden auf Γ_b normierten Raten, an der Stelle $x \approx x_{max} - 10^{-6}$ unmittelbar vor der oberen Grenze eine Nullstelle besitzen, an der sich die Graphen schneiden. Dieser hohe Wert von x liegt darin begründet, daß das Massenverhältnis y von c - und b -Quark relativ groß ist. Würde man $y = 10^{-8}$ setzen, so wären die Nullstellen und auch der Schnittpunkt der Graphen bei etwa $x \approx 0.737$, noch deutlich unterhalb der oberen Grenze bei $x = 1$. Für einen Wert von $y = 0.01$, was etwa der Größenordnung des Verhältnisses m_e/m_μ beim Myon-Zerfall entspricht, steigt der x -Wert der Nullstellen auf etwa 0.9 an. Gleichzeitig steigt der Betrag der lokalen Extremwerte für die strahlungskorrigierten Raten weiter an und erreicht beispielsweise für $y = 0.001$ einen Wert von über 1. Im Grenzfall gleicher Massen, also beispielsweise für $y = 0.999$, wird der Phasenraum fast auf einen Punkt zusammengezogen, und die Nullstellen liegen praktisch an der oberen Grenze. Man beobachtet also, daß sich die Nullstellen und die lokalen Extremwerte mit zunehmendem y immer mehr der oberen Grenze von x annähern, und die Beträge der Raten fallen zunehmend schneller ab. Dabei nimmt der Bereich der erlaubten x -Werte wegen $x_{max} - x_{min} = (1 - y)^2$ ebenfalls immer weiter ab. Außerdem verringert sich bei größeren Werten von y auch der Betrag der lokalen Extremwerte der beiden Raten. Die Fläche zwischen den Graphen von $d\Gamma_0/dx$ und $d\Gamma_P/dx$ im Intervall von x_{min} bis zum gemeinsamen Schnittpunkt konvergiert also gegen null für den Grenzfall $y \rightarrow 1$.

Eine weitere Größe, die den Verlauf der Graphen der beiden differentiellen Raten bestimmt, ist die Kopplungskonstante α_s . Für sehr kleine Werte der Kopplung unterscheiden sich die Graphen optisch praktisch gar nicht von den Bornschen Raten. Trotzdem zeigen sie noch dasselbe Divergenzverhalten im Grenzwert $x \rightarrow x_{max}$. Sie knicken aber erst sehr nahe an der oberen Grenze ab, so daß man es bei der gewählten Skala erst bei Kopplungsstärken von etwa 0.01 erkennen kann. Steigt die Kopplung bei festem $y = m_c/m_b$ an, so verschie-

ben sich die Nullstellen der beiden Raten ein wenig zu kleineren x -Werten hin. Die Beträge der Raten im Intervall zwischen x_{min} und dem Schnittpunkt reduzieren sich entsprechend, und die lokalen Extremwerte verschieben sich zu kleineren x -Werten. Ein ganz analoges Verhalten zeigt sich bei kleineren Werten von y , wenn man die Kopplungskonstante variiert. Vergleicht man die Graphen aus Abbildung 3.7 mit den entsprechenden Graphen für den Myon-Zerfall [41], so erkennt man einen deutlich unterschiedlichen Verlauf. Dies ist dadurch zu erklären, daß dort sowohl das Massenverhältnis y als auch die Kopplungskonstante α wesentlich kleiner sind als beim b -Zerfall. Alle Graphen mit verschiedenem y oder unterschiedlicher Kopplung zeigen allerdings das gleiche qualitative Verhalten. Sie verschwinden an der unteren Grenze x_{min} , ihre Beträge steigen dann bis zu einem Maximalwert an und fallen danach wieder, bis sie sich in einer gemeinsamen Nullstelle treffen. Danach wechseln die Raten ihr Vorzeichen, und im Grenzfall $x \rightarrow x_{max}$ zeigen sie schließlich ein divergentes Verhalten.

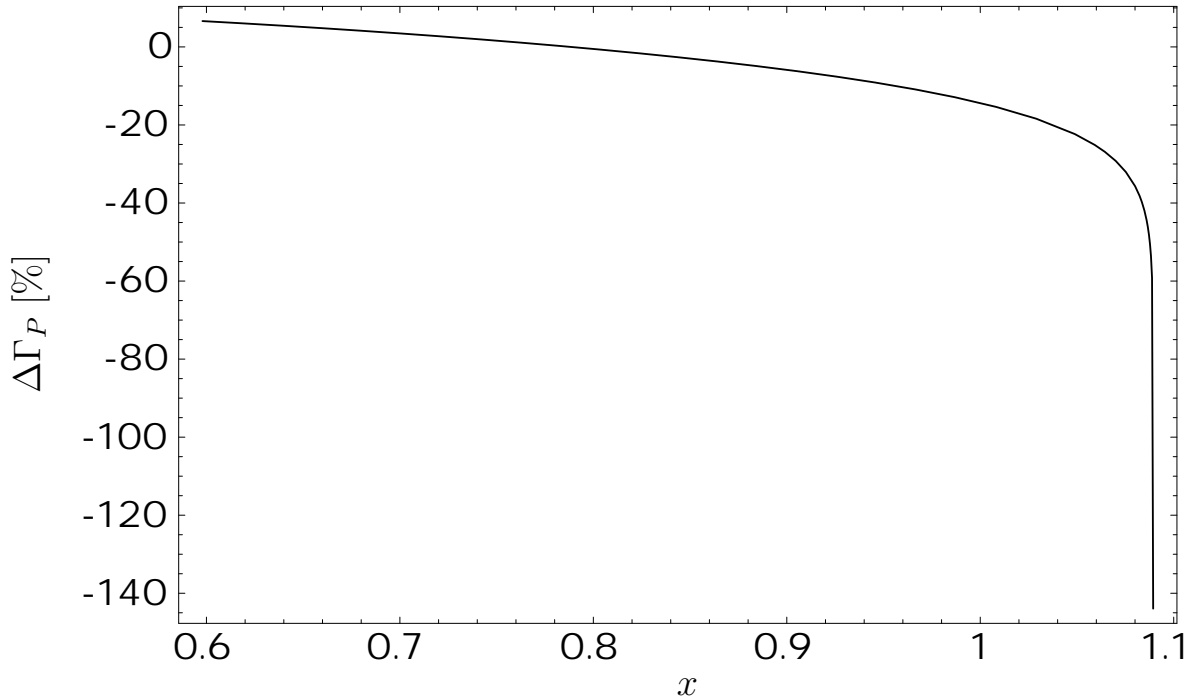


Abbildung 3.9: Relative prozentuale Änderung für den polarisierten Beitrag der Zerfallsrate $d\Gamma_P/dx$ durch die inklusiven Strahlungskorrekturen in erster Ordnung α_s

Um die Effekte der Strahlungskorrekturen auf die unpolarisierte und die polarisierte Rate genauer zu studieren, ist es vorteilhaft, die relative Änderung der Raten bezogen auf die Bornsche Näherung graphisch zu veranschaulichen. Für die differentielle Rate ist die relative Änderung definiert durch

$$\Delta\Gamma := \frac{d\Gamma^{(incl)}/dx - d\Gamma^{(Born)}/dx}{d\Gamma^{(Born)}/dx} = \frac{d\Gamma^{(\alpha_s+g)}/dx}{d\Gamma^{(Born)}/dx} - 1. \quad (3.222)$$

Die Graphen der relativen Änderungen $\Delta\Gamma_0$ der unpolarisierten Rate sowie $\Delta\Gamma_P$ der polarisierten Rate sind in den Abbildungen 3.8 und 3.9 gezeigt. Bei der unpolarisierten Rate vermindern die Strahlungskorrekturen die Bornsche Rate an der Schwelle $x = x_{min}$ um etwa 2.12%. Die relative Änderung $\Delta\Gamma_0$ ist im gesamten Energiebereich $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ negativ und fällt mit zunehmendem x immer stärker ab. Bei $x = 1$ betragen die Korrekturen bereits über 15% und divergieren an der oberen Grenze gegen $-\infty$. In der Nähe der oberen Grenze fällt der Graph von $\Delta\Gamma_0$ so steil ab, daß die relative Änderung bei $x = x_{max} - 0.001$ erst etwa -54.67% beträgt.

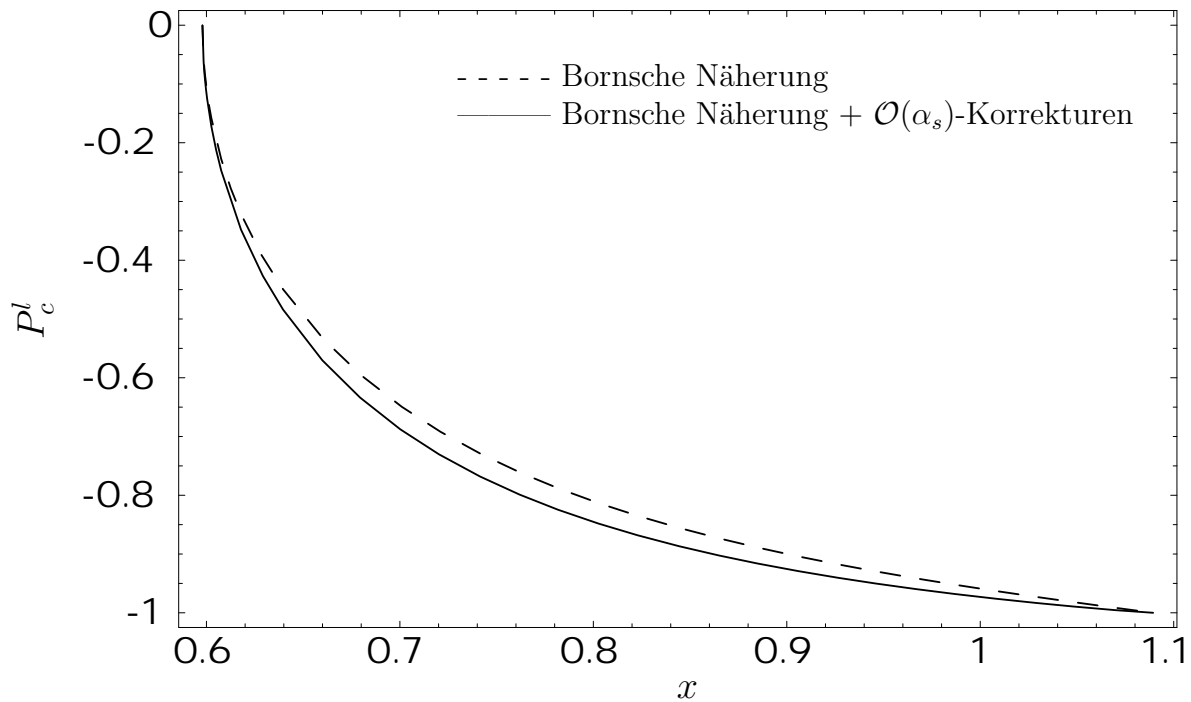


Abbildung 3.10: Longitudinale Polarisation des c -Quarks. Vergleich von Bornschem und inklusivem strahlungskorrigiertem Resultat. Die Polarisation fällt mit zunehmender skaliertes c -Energie x von 0 auf -1 .

Die relative Änderung der polarisierten Rate $\Delta\Gamma_P$ zeigt ein ähnliches Verhalten wie die der unpolarisierten Rate. Es gibt allerdings einen wichtigen Unterschied, nämlich die Tatsache, daß die Strahlungskorrekturen bei niedrigen Werten von x einen positiven Beitrag ergeben und ab einer bestimmten Energie ihr Vorzeichen wechseln. Die relative Änderung $\Delta\Gamma_P$ beträgt bei $x = x_{min}$ etwa $+6.62\%$. Sie fällt mit wachsendem x wie im Falle der unpolarisierten Rate monoton ab und erreicht bei etwa $x = 0.788$ eine Nullstelle. Mit weiterem Anstieg der Energie fällt $\Delta\Gamma_P$ immer steiler ab und ist an der oberen Grenze $x = x_{max}$ ebenfalls divergent. Bei $x = x_{max} - 0.001$ beträgt die relative Änderung der Bornschen Rate etwa -54.65% , was fast exakt dem Wert im unpolarisierten entspricht.

Die Strahlungskorrekturen der polarisierten und der unpolarisierten Raten haben die Tendenz, sich in der Summe $G_0 + G_P$ gegenseitig aufzuheben. Die polarisierte Struktur-

funktion G_P ist für alle physikalischen Werte der c -Energie betragsmäßig etwas größer als die unpolarisierte G_0 . Die Summe $G_0 + G_P$ ist daher immer negativ, und sie erreicht bei etwa $x = 0.83$ ein Minimum.

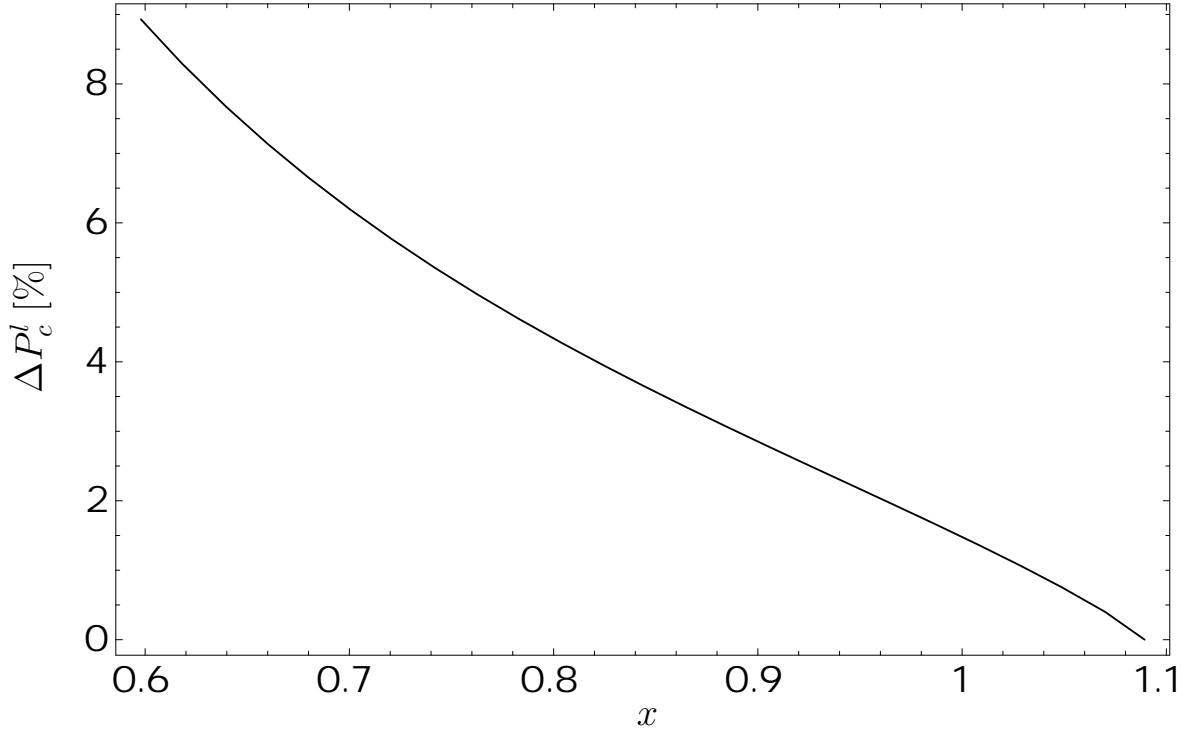


Abbildung 3.11: Relative Änderung der Polarisation des c -Quarks durch die Effekte der Strahlungskorrekturen

Beim Vergleich mit den entsprechenden numerischen Resultaten des Myon-Zerfalls fällt auf, daß die Existenz der Nullstellen für die korrigierten Strukturfunktionen offenbar vom Massenverhältnis y abhängen. Bei Werten von etwa $y < 0.27$ wechseln die Strahlungskorrekturen beider Strukturfunktionen ihr Vorzeichen, bei $y > 0.27$ ist G_0 immer negativ, und für etwa $y > 0.51$ wird auch G_P negativ. Bei kleinen Werten von y ist die Nullstelle fast unabhängig von x , während sie sich mit wachsendem x immer weiter in Richtung kleinerer x -Werte verschiebt. Man kann den Vorzeichenwechsel der Strahlungskorrekturen qualitativ durch die Dominanz der $\ln(y)$ -Terme verstehen. Bei der Integration über die Energie x kürzen sich die $\ln(y)$ -Terme gegenseitig, und die totale Rate ist daher unabhängig von diesen Ausdrücken.

Eine wichtige Observable für den Zerfall des b -Quarks in ein polarisiertes c -Quark ist die Polarisation des c -Quarks. Nach Integration über die azimuthale Winkelabhängigkeit verschwindet der transversale Anteil der Polarisation, so daß nur der longitudinale Anteil P_c^l diskutiert wird. Die longitudinale c -Polarisation ist durch

$$P_c^l = \frac{d\Gamma_+/dx - d\Gamma_-/dx}{d\Gamma_+/dx + d\Gamma_-/dx} = \frac{d\Gamma_P/dx}{d\Gamma_0/dx} \quad (3.223)$$

definiert und ist in Abbildung 3.10 über die skalierte c -Energie x aufgetragen. Das Bild zeigt die Polarisation sowohl in Bornscher Näherung als auch einschließlich der inklusiven Korrekturen erster Ordnung. Wie bereits diskutiert wurde, verschwinden die polarisierte und die unpolarisierte Rate $d\Gamma_0/dx$ und $d\Gamma_P/dx$ am unteren Ende des Energiespektrums und divergieren an der oberen Grenze. In der oben angegebenen Definition (3.223) der longitudinalen Polarisation existieren beide Grenzwerte $x \rightarrow x_{min}$ und $x \rightarrow x_{max}$. Die Divergenzen heben sich gegenseitig auf, und die Polarisation ist für alle Werte von x endlich. An der unteren Grenze $x = x_{min}$ gilt für die c -Polarisation sowohl in Bornscher Näherung als auch für die Strahlungskorrekturen $P_c^l = 0$. Für die obere Grenze $x = x_{max}$ gilt in beiden Fällen $P_c^l = -1$.

In Abbildung 3.10 erkennt man, daß die Strahlungskorrekturen die Polarisation im gesamten Energiebereich um einen relativ geringen Beitrag reduzieren. Der Graph der longitudinalen Polarisation fällt mit wachsendem x deutlich ab, wobei die Abnahme bei großen x -Werten immer kleiner wird. Bei unterschiedlichen Werten des Massenverhältnisses y zeigt sich ein ähnliches Verhalten, allerdings nimmt die Polarisation bei kleinen y schneller ab als bei großen y . An der unteren Grenze verschwindet die Polarisation bei allen Werten von y , und je kleiner y ist, desto schneller fällt sie auf -1 an der oberen Grenze ab.

Um die Effekte der Strahlungskorrekturen zu veranschaulichen, wird schließlich noch die relative Änderung der Polarisation P_c^l , die durch die Korrekturen hervorgerufen wird, graphisch dargestellt. Der prozentuale Anteil ΔP_c^l der Strahlungskorrekturen bezogen auf die Bornsche Näherung ist definiert durch

$$\Delta P_c^l = \frac{P_c^{l(incl)} - P_c^{l(Born)}}{P_c^{l(Born)}} = \frac{P_c^{l(incl)}}{P_c^{l(Born)}} - 1, \quad (3.224)$$

und wird in Abbildung 3.11 gezeigt. Man erkennt, daß der relative Beitrag der Korrekturen mit steigenden Energien x fast konstant abnimmt. Die Steigung des Graphen ist im mittleren Energiebereich etwas geringer als bei kleinen und bei großen Werten von x . Die maximale relative Änderung an der unteren Grenze von x beträgt etwa 8.93% und fällt an der oberen Grenze auf null ab. Die Effekte der Strahlungskorrekturen sind also an der unteren Energieschwelle am größten und haben bei hohen Werten von x praktisch keinen Einfluß auf die Polarisation.

Kapitel 4

Polarisation und Helizitäts-Projektoren

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden wir die Helizitäts-Projektoren einführen, die wir in Kapitel 5 bei der Diskussion verschiedener Polarisationsobservable für den Zerfall eines polarisierten b -Quarks benötigen werden. Anschließend werden mit Hilfe dieser Projektoren die Helizitäts-Strukturfunktionen definiert. Wie werden im folgenden nicht näher auf die allgemeinen Eigenschaften der Polarisation von Elementarteilchen im Rahmen der Quantenfeldtheorie eingehen. Für eine ausführliche Diskussion der theoretischen Behandlung von Polarisationsphänomenen sei auf das Buch von B. A. Robson [57] verwiesen.

Die Helizitäts-Projektoren werden zur Beschreibung von Polarisations-eigenschaften in Teilchenprozessen im Rahmen des Helizitäts-Formalismus verwendet [58]. Sie werden aus den Polarisations-Vierervektoren des W -Bosons konstruiert und bilden eine vollständige Basis, aus der der Lepton-Tensor, der in (3.12) angegeben wurde, aufgebaut werden kann. Auch der Hadron-Tensor kann in ähnlicher Weise wie der Lepton-Tensor in einen Satz von Basis-Tensoren entwickelt werden, die sich aus den Impuls- und Spin-Vierervektoren der beim b -Zerfall auftretenden Teilchen sowie dem metrischen Tensor zusammensetzen. Die Entwicklungskoeffizienten sind Lorentz-Invarianten, so daß man insgesamt einen kovarianten Ausdruck für den Hadron-Tensor erhält. Durch Multiplikation des Hadron-Tensors mit den Projektoren erhält man die Helizitäts-Strukturfunktionen, mit denen man die Winkelverteilung der differentiellen Zerfallsrate für den b -Zerfall beschreiben kann. Man kann die Strukturfunktionen auch durch die invarianten Koeffizienten für den Hadron-Tensor ausdrücken.

Am Ende dieses Kapitels soll die vierfach differentielle Zerfallsrate des b -Zerfalls angegeben werden, die sowohl vom Quadrat des W -Viererimpulses q^2 als auch von drei Winkeln abhängt, welche die Information über die Polarisation des virtuellen W -Bosons enthält, das weiter in ein Leptonpaar zerfallen kann. Um die q^2 -Abhängigkeit berechnen zu können, ist es notwendig, den Zerfall des b -Quarks in ein c -Quark und ein Leptonpaar in zwei

Zerfallsprozesse zu faktorisieren, welche den Zerfall des b -Quarks in ein c -Quark und ein virtuelles W -Boson und den anschließenden Zerfall des W in ein Leptonpaar beschreiben. Am Ende setzt man die oben angesprochenen Entwicklungen des Hadron- und des Lepton-Tensors in den Ausdruck für die faktorisierte Zerfallsrate ein und erhält die Winkelverteilung für den gesamten semileptonischen Zerfallsprozess $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$.

Für die Berechnung der Zerfallsrate geht man vom Betragsquadrat der nicht spinsummierten Übergangsamplitude aus, die wie in (3.7) als Kontraktion des Hadron-Tensors mit dem Lepton-Tensor (3.8) geschrieben werden kann. Im Unterschied zur Annahme in Kapitel 3 betrachtet man nun ein polarisiertes b -Quark im Anfangszustand, während über den Spin des c -Quarks summiert werden soll. Daher ändert sich auch das spinsummierte Betragsquadrat der Amplitude. Es kann formal wieder in der Form von (3.9) als Kontraktion eines spinsummierten Hadron-Tensors mit einem ebenfalls spinsummierten Lepton-Tensor dargestellt werden, wobei sich aber ein anderer Hadron-Tensor als in Kapitel 3 ergibt. Für die unpolarisierte Rate müssen beide Ausdrücke für $\bar{H}_{\mu\nu}$ identisch sein. Für eine spätere Diskussion von Masseneffekten in Kapitel 6 und der transversalen Polarisation des geladenen Leptons in Abschnitt 6.4 soll der Lepton-Tensor verallgemeinert werden, indem nicht über den Spin s_l des geladenen Leptons summiert und die Leptonmasse nicht vernachlässigt werden soll. Man erhält nach ähnlicher Rechnung und mit den analogen Rechenschritten wie in Kapitel 3 schließlich für den Hadron- und den Lepton-Tensor in Bornscher Näherung

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} &= \sum_{s_c} \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \bar{u}(p_b, s_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu u(p_c, s_c) \quad (4.1) \\
&= \text{Sp} [\not{p}_c \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] = 4 [p_{c,\mu} \bar{p}_{b,\nu} + \bar{p}_{b,\mu} p_{c,\nu} - g_{\mu\nu} p_c \cdot \bar{p}_b - i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_c^\rho \bar{p}_b^\sigma] \\
\bar{L}^{\mu\nu} &= \sum_{s_{\nu_l}} \bar{u}(p_l, s_l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \bar{v}(p_{\nu_l}, s_{\nu_l}) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u(p_l, s_l) \\
&= \text{Sp} [\not{p}_l \gamma^\mu \not{p}_{\nu_l} \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] = 4 [\bar{p}_l^\mu p_{\nu_l}^\nu + p_{\nu_l}^\mu \bar{p}_l^\nu - g^{\mu\nu} p_{\nu_l} \cdot \bar{p}_l - i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{p}_{l,\rho} p_{\nu_l,\sigma}]
\end{aligned}$$

mit $\bar{p}_b = p_b - m_b s_b$ und $\bar{p}_l = p_l - m_l s_l$. Vergleicht man diese Resultate mit dem Hadron- und dem Lepton-Tensor aus (3.11) und (3.12), so sieht man, daß der Unterschied im Spin der Quarks und des geladenen Leptons liegt. In Kapitel 3 wurde der c -Spin berücksichtigt, während über den Spin des b -Quarks gemittelt wurde. Hier wird umgekehrt über den c -Spin summiert und der b -Spin berücksichtigt. Der fehlende Vorfaktor $1/2$ des Hadron-Tensors in (4.1) kommt daher, daß man hier nicht wie in (3.11) über den Quark-Spin zu mitteln braucht, da das polarisierte Quark im Endzustand auftritt. Der Unterschied des Lepton-Tensors aus dem letzten Kapitel ist in der Summation über den Spin des geladenen Leptons begründet, während in diesem Kapitel polarisierte Leptonen angenommen werden.

Das Betragsquadrat des Matrixelementes in Bornscher Näherung wird durch Kontraktion des Hadron-Tensors mit dem Lepton-Tensor in (4.1) berechnet. Das Resultat ist analog zu (3.9) durch

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 := \sum_{s_c, s_{\nu_l}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^4}{64M_W^4} |V_{bc}|^2 \bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} \bar{L}^{\mu\nu} \quad (4.2)$$

gegeben. Aus diesem Ergebnis läßt sich anschließend die differentielle Zerfallsrate bestimmen. Wie wir oben erwähnt hatten, wollen wir eine differentielle Rate nach dem Viererimpulsquadrat des virtuellen W -Bosons angeben. Die Berechnung der differentiellen Rate wird in Abschnitt 4.4 diskutiert werden. Um die Winkelabhängigkeit des Zerfallsprozesses $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$ angeben zu können, ist es aber notwendig, zuvor die Helizitäts-Projektoren einzuführen. Dazu werden wir im folgenden Abschnitt den Lepton-Tensor im Ruhesystem des virtuellen W -Bosons auswerten und anschließend seine explizite Winkelabhängigkeit betrachten.

4.2 Definition der Helizitäts-Projektoren

Wir wollen nun die Helizitäts-Projektoren für den Zerfallsprozeß eines polarisierten b -Quarks in ein unpolarisiertes c -Quark und ein unpolarisiertes Lepton-Paar $b \rightarrow c^\dagger + l^- + \bar{\nu}_l$ bestimmen, die aus bestimmten Polarisationszuständen des virtuellen W -Bosons konstruiert werden. Das Betragsquadrat der Amplitude dieses Zerfalls ist durch (4.2) gegeben und wird als Kontraktion des Hadron-Tensors mit dem Lepton-Tensor in (4.1) ausgedrückt. Obwohl der Hadron-Tensor in (4.2) für die Bornsche Näherung angegeben ist, gilt die dort angegebene Beziehung zur Berechnung des betragsquadrierten Matrixelementes auch für den QCD-strahlungskorrigierten Fall. Die Entwicklung des Hadron-Tensors in einen Satz invarianter Strukturfunktionen wird in Abschnitt 4.3 diskutiert und spielt für die folgenden Betrachtungen keine Rolle.

4.2.1 Explizite Darstellung des Lepton-Tensors

Um die Helizitäts-Projektoren bestimmen zu können, betrachten wir zunächst den Lepton-Tensor, der sich durch die Projektoren ausdrücken läßt. Zu Beginn werten wir den Lepton-Tensor im Ruhesystem des virtuellen W -Bosons aus. Wegen der Diskussion der Polarisation des geladenen Leptons in Abschnitt 6.4 soll zunächst auch der Spin des geladenen Leptons berücksichtigt werden, der jedoch bei der Berechnung der QCD-Korrekturen in Kapitel 5 nicht mehr betrachtet werden wird. Man erkennt aber bei der Diskussion der Helizitäts-Projektoren weiter unten in diesem Abschnitt, welche dieser Projektoren für die Beschreibung der Spinkomponenten des geladenen Leptons verwendet werden. Die Kinematik des b -Zerfalls in ein c -Quark und ein Paar unpolarisierter Leptonen sowie die Definition der Winkel sind in Abbildung 4.1 veranschaulicht. Der Zerfall des b -Quarks in ein c -Quark und ein virtuelles W -Boson wird im b -Ruhesystem ausgewertet, und der nachfolgende Zerfall des W -Bosons in ein Leptonpaar wird im W -Ruhesystem betrachtet. Dementsprechend ist der Winkel θ_P im b -Ruhesystem, und die Winkel θ und ϕ sind im Ruhesystem des W -Bosons definiert. Als Richtung der z -Achse des Koordinatensystems wurde die Richtung des räumlichen W -Impulses im b -Ruhesystem gewählt. Die Viererimpulse der beiden Leptonen und des virtuellen W -Bosons können in der Form

$$p_l = (E_l, |\vec{p}| \vec{e}), \quad p_{\nu_l} = (E_{\nu_l}, -|\vec{p}| \vec{e}), \quad q = (\sqrt{q^2}, \vec{0}) \quad (4.3)$$

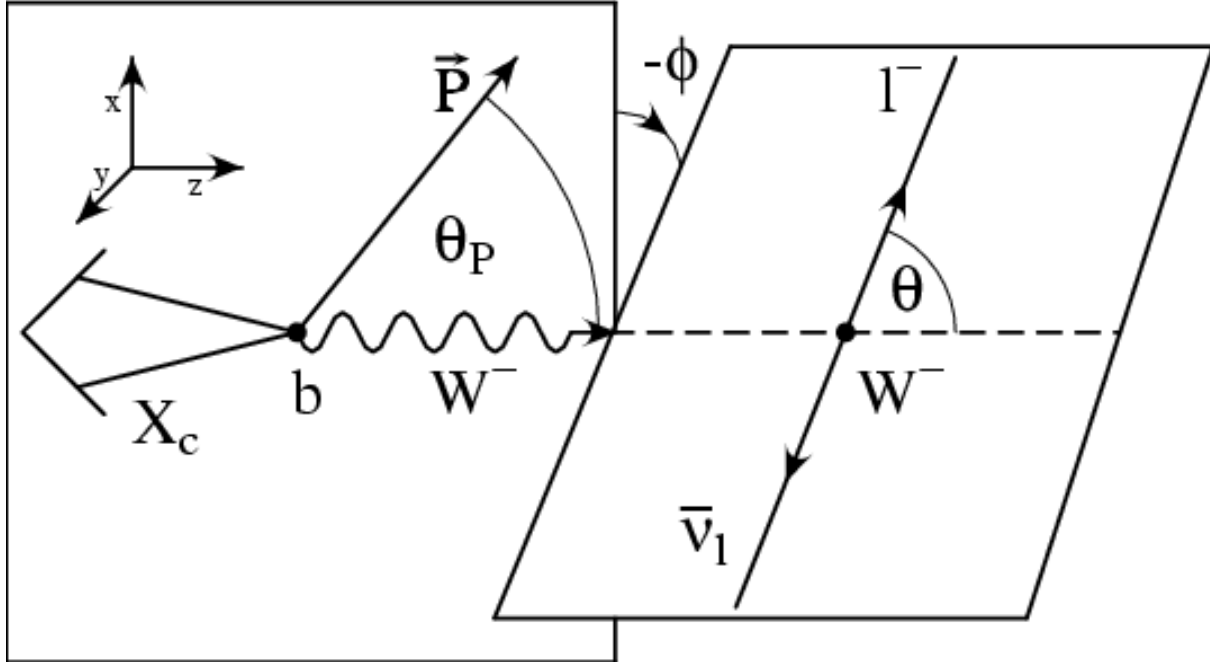


Abbildung 4.1: Kinematik des Zerfalls des b -Quarks und Definition der verschiedenen Winkel. Das zerfallende b wird im Ruhesystem betrachtet und die z -Achse in Richtung des W -Impulses gewählt. Die Hadron-Ebene wird durch den W -Impuls und den Polarisationsvektor des b aufgespannt. Der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren wird mit θ_P bezeichnet. Die Impulse der Leptonen werden im Ruhesystem des W ausgewertet, so daß ihre Impulse entgegengesetzt gleich sind. Sie definieren zusammen mit dem Impuls des W im b -Ruhesystem (z -Richtung) die Leptonebene. Der Winkel zwischen der z -Richtung und dem Impuls des geladenen Leptons wird mit θ bezeichnet. Die Hadron-Ebene und die Leptonebene sind im allgemeinen um einen Winkel ϕ gegeneinander gedreht.

parametrisiert werden. Der räumliche Vektor \vec{e} ist ein Einheitsvektor in Richtung des Lepton-Impulses. Er hängt von den Winkeln θ und ϕ ab und ist in Kugelkoordinaten durch

$$\vec{e} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (4.4)$$

gegeben. Durch Lösen der Gleichungen

$$E_l + E_{\nu_l} = \sqrt{q^2}, \quad E_l^2 - |\vec{p}|^2 = m_l^2, \quad E_{\nu_l}^2 - |\vec{p}|^2 = m_{\nu_l}^2 \quad (4.5)$$

für die Energieerhaltung und die Massenschalenbedingungen der Leptonen kann man leicht die explizite Form der Leptonenergien E_l und E_{ν_l} sowie des Impulsbetrages $|\vec{p}|$ bestimmen. Man erhält

$$E_l = \frac{q^2 + m_l^2 - m_{\nu_l}^2}{2\sqrt{q^2}}, \quad E_{\nu_l} = \frac{q^2 - m_l^2 + m_{\nu_l}^2}{2\sqrt{q^2}}, \quad |\vec{p}| = \frac{\sqrt{\lambda(q^2, m_l^2, m_{\nu_l}^2)}}{2\sqrt{q^2}}, \quad (4.6)$$

wobei die Funktion λ durch $\lambda(q^2, m_l^2, m_{\nu_l}^2) = (q^2)^2 + m_l^4 + m_{\nu_l}^4 - 2(q^2 m_l^2 + q^2 m_{\nu_l}^2 + m_l^2 m_{\nu_l}^2)$ definiert ist. In den folgenden Abschnitten werden die Neutrinomasse oder beide Leptonmassen null gesetzt, so daß sich die oben angegebenen Ausdrücke vereinfachen. Für den Zerfall des virtuellen W -Bosons in ein Quark-Antiquark-Paar anstelle eines Lepton-Paars dürfen die Quarkmassen nicht immer vernachlässigt werden, und man muß für die Energien und den Impulsbetrag der Quarks die zu (4.6) analogen Ausdrücke verwenden.

Um den Spin des geladenen Leptons zu beschreiben, definiert man den Spin-Vektor s_l , der im W -Ruhesystem durch

$$s_l = \left(\frac{|\vec{p}| \vec{e} \cdot \vec{n}}{m_l}, \vec{n} + \frac{|\vec{p}| \vec{e} \cdot \vec{n}}{m_l (E_l + m_l)} \right) \quad (4.7)$$

gegeben ist. \vec{n} ist der räumliche Spin-Vektor des Leptons in dessen Ruhesystem und beschreibt die Richtung des Lepton-Spins. Er ist vom Betrag eins, es gilt also $|\vec{n}| = 1$. Mit Hilfe eines Lorentz-Boostes in Richtung $-\vec{p}$ erhält man aus dem Spin-Vierervektor $s_l = (0, \vec{n})$ im Lepton-Ruhesystem den oben angegebenen Vektor im W -Ruhesystem.

Spaltet man den Lepton-Tensor aus (4.1) in einen unpolarisierten Anteil $\bar{L}_0^{\mu\nu}$ und einen polarisierten Anteil $\bar{L}_P^{\mu\nu}$ auf, die aus $\bar{L}^{\mu\nu}$ jeweils durch die Ersetzungen $\bar{p}_l \rightarrow p_l$ und $\bar{p}_l \rightarrow -m_l s_l$ hervorgehen, so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{L}_0^{\mu\nu} &= 4 [p_l^\mu p_{\nu_l}^\nu + p_{\nu_l}^\mu p_l^\nu - g^{\mu\nu} p_{\nu_l} \cdot p_l - i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{l,\rho} p_{\nu_l,\sigma}] \\ \bar{L}_P^{\mu\nu} &= -4 m_l [s_l^\mu p_{\nu_l}^\nu + p_{\nu_l}^\mu s_l^\nu - g^{\mu\nu} p_{\nu_l} \cdot s_l - i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} s_{l,\rho} p_{\nu_l,\sigma}], \end{aligned} \quad (4.8)$$

und es gilt $\bar{L}^{\mu\nu} = \bar{L}_0^{\mu\nu} + \bar{L}_P^{\mu\nu}$. Da der Lepton-Tensor hermitesch ist, kann man mit Hilfe der Bedingung $\bar{L}^{*\nu\mu} = \bar{L}^{\mu\nu}$ abzählen, daß er zehn reelle und sechs imaginäre unabhängige Komponenten besitzt. Für die einzelnen Komponenten des unpolarisierten und des polarisierten Anteils des Lepton-Tensors ergibt sich nach Aufspaltung in räumliche und zeitliche Anteile mit Hilfe der parametrisierten Viererimpulse (4.3) folgendes Resultat

$$\begin{aligned} \bar{L}_0^{00} &= 4 (E_l E_{\nu_l} - |\vec{p}|^2) \\ \bar{L}_0^{0i} &= \bar{L}_0^{i0} = -4 |\vec{p}| (E_l - E_{\nu_l}) e^i \\ \bar{L}_0^{ij} &= 4 \left[-2 |\vec{p}|^2 e^i e^j + \delta^{ij} (E_l E_{\nu_l} + |\vec{p}|^2) + i |\vec{p}| \sqrt{q^2} \epsilon^{ijk} e_k \right] \\ \bar{L}_P^{00} &= 4 |\vec{p}| (E_l - E_{\nu_l}) \vec{e} \cdot \vec{n} \\ \bar{L}_P^{0i} &= \bar{L}_P^{*i0} = 4 \left[|\vec{p}|^2 \vec{e} \cdot \vec{n} \left(1 - \frac{E_{\nu_l}}{E_l + m_l} \right) e^i - m_l E_{\nu_l} n^i - i m_l |\vec{p}| \epsilon^{ijk} n_j e_k \right] \\ \bar{L}_P^{ij} &= 4 \left\{ m_l |\vec{p}| (e^i n^j + n^i e^j) + 2 |\vec{p}| (E_l - m_l) \vec{e} \cdot \vec{n} e^i e^j - \delta^{ij} |\vec{p}| \sqrt{q^2} \vec{e} \cdot \vec{n} \right. \\ &\quad \left. - i \epsilon^{ijk} \left[|\vec{p}|^2 \vec{e} \cdot \vec{n} \left(1 + \frac{E_{\nu_l}}{E_l + m_l} \right) e_k + m_l E_{\nu_l} n_k \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei alle lateinischen Indizes i, j, k die Werte 1, 2 oder 3 annehmen können. Diese Resultate sind noch für beliebige Leptonmassen gültig und können leicht in die Grenzfälle mit ein oder zwei masselosen Leptonen überführt werden. Aus (4.9) ist zu erkennen, daß die Komponenten \bar{L}^{0i} nur durch den Lepton-Spin einen antisymmetrischen Beitrag erhalten. Aus dem entsprechenden Term proportional zu $\epsilon^{ijk} n_j e_k$ sieht man sofort, daß nur der transversale Lepton-Spin beiträgt, da für den longitudinalen Spin die Quantisierungsachse in Richtung des Leptonimpulses zeigt, also $\vec{n} = \vec{e}$ gilt, und damit die Kontraktion mit dem ϵ -Tensor verschwindet. Der transversale Lepton-Spin wird später im Rahmen der nichtperturbativen Korrekturen in Abschnitt 6.4 kurz diskutiert werden. Im Grenzfall masseloser Leptonen $m_l = m_{\nu_l} = 0$ gilt $E_l = E_{\nu_l} = |\vec{p}|$, und man kann in (4.9) leicht sehen, daß alle Komponenten des Lepton-Tensors, die einen zeitlichen Index 0 besitzen, verschwinden. Man kann also an obiger Darstellung ablesen, daß die reellen Komponenten \bar{L}^{0i} durch die Masse der Leptonen und die imaginären Komponenten \bar{L}^{0i} durch den Lepton-Spin erzeugt werden.

4.2.2 Explizite Darstellung der Helizitäts-Projektoren

Im folgenden wollen wir den Lepton-Tensor $\bar{L}^{\mu\nu}$ in eine Linearkombination bestimmter Basis-Tensoren entwickeln. Er ist ein Tensor zweiter Stufe im vierdimensionalen Minkowski-Raum. Aufgrund seiner Aufteilung in einen reellen symmetrischen und einen imaginären antisymmetrischen Anteil besitzt er im Ruhesystem des W -Bosons insgesamt 16 unabhängige Komponenten, von denen zehn den symmetrischen und sechs den antisymmetrischen Anteil beschreiben. Eine Basis für den Lepton-Tensor in diesem Koordinatensystem kann damit aus zehn symmetrischen und sechs hermiteschen 4×4 -Matrizen aufgebaut werden. Der Lepton-Tensor ergibt sich aus einer Linearkombination dieser Matrizen mit 16 reellen Entwicklungskoeffizienten.

Für den Minkowski-Raum bilden beispielsweise die Polarisationsvektoren des virtuellen W -Bosons eine vollständige Basis. Da ein virtuelles Vektor-Boson nicht auf der Massenschale sitzt, besitzt es neben zweier transversaler und einer longitudinalen Spinprojektion noch einen weiteren Freiheitsgrad, der als skalare Spinprojektion bezeichnet wird. Zu jedem dieser vier Polarisationszustände gibt es einen zugehörigen Polarisationsvektor. Alle Polarisationsvektoren hängen im allgemeinen vom Viererimpuls des virtuellen W -Bosons ab. Bezeichnet man die Polarisationszustände mit $\lambda = t, +1, 0, -1$, so erfüllen die zugehörigen Polarisationsvektoren die Relationen

$$\epsilon^{*\mu}(q, \lambda) \epsilon_\mu(q, \lambda') = g_{\lambda\lambda'} , \quad \sum_{\lambda, \lambda'} \epsilon^{*\mu}(q, \lambda) \epsilon^\nu(q, \lambda') g_{\lambda\lambda'} = g^{\mu\nu} , \quad \epsilon^\mu(q, \lambda) q_\mu = \sqrt{q^2} \delta_{\lambda t}. \quad (4.10)$$

Hier bezeichnet q den Viererimpuls des virtuellen W -Bosons, und $t, 0, \pm 1$ sind jeweils die skalare, die longitudinale und die transversalen Spinprojektionen. Die zweite Beziehung wird als Vollständigkeitsrelation bezeichnet und ist eine Verallgemeinerung der Polarisationssumme (3.163) für reelle W -Bosonen mit $\lambda = 0, \pm 1$ auf eine zusätzliche skalare Polarisation $\lambda = t$. Um die vier Polarisationsvektoren explizit darzustellen, ist es sinnvoll, sie im

Ruhesystems des b -Quarks anzugeben. Wie in Abbildung (4.1) gezeigt, wählen wir die z -Achse in Richtung des räumlichen W -Impulses. Dann kann der Viererimpuls des virtuellen W -Bosons in der Form

$$q = (q^0, 0, 0, |\vec{q}|) \quad (4.11)$$

parametrisiert werden. Die zu diesem Impuls gehörenden Polarisationsvektoren sind durch

$$\begin{aligned} \epsilon_t &\equiv \epsilon(q, t) = \frac{1}{\sqrt{q^2}} (q^0, 0, 0, |\vec{q}|) \quad , \quad \epsilon_0 \equiv \epsilon(q, 0) = \frac{1}{\sqrt{q^2}} (|\vec{q}|, 0, 0, q^0) \quad , \\ \epsilon_{\pm} &\equiv \epsilon(q, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \mp 1, -i, 0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

gegeben und hängen nur von den Komponenten q^0 und $|\vec{q}|$ des W -Impulses ab.

Aus den Polarisationsvektoren des virtuellen W -Bosons kann man eine orthogonale Basis für den Lepton-Tensor $\bar{L}^{\mu\nu}$ konstruieren, deren Elemente sich aus verschiedenen Kombinationen dieser Polarisationsvektoren zusammensetzen. Die Basis ist wie bereits erwähnt durch 16 linear unabhängige 4×4 -Matrizen gegeben, die als Helizitäts-Projektoren bezeichnet werden. Sie lassen sich in folgender Form durch die Polarisationsvektoren ausdrücken:

$$\begin{aligned} P_U^{\mu\nu} &= \epsilon_+^{*\mu} \epsilon_+^\nu + \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_-^\nu \\ P_L^{\mu\nu} &= \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_0^\nu \\ P_F^{\mu\nu} &= \epsilon_+^{*\mu} \epsilon_+^\nu - \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_-^\nu \\ P_T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_-^\nu + \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_+^\nu \right) \\ P_5^{\mu\nu} &= -\frac{i}{2} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_-^\nu - \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_+^\nu \right) \\ P_I^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_0^\nu + \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_+^\nu - \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_0^\nu - \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right) \\ P_7^{\mu\nu} &= -\frac{i}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_0^\nu - \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_+^\nu - \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_0^\nu + \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right) \\ P_A^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_0^\nu + \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_+^\nu + \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_0^\nu + \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right) \\ P_9^{\mu\nu} &= -\frac{i}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_0^\nu - \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_+^\nu + \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_0^\nu - \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right) \\ P_S^{\mu\nu} &= \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_t^\nu \\ P_{SL}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_t^{*\mu} \epsilon_0^\nu + \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_t^\nu \right) \\ P_{12}^{\mu\nu} &= -\frac{i}{2} \left(\epsilon_t^{*\mu} \epsilon_0^\nu - \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_t^\nu \right) \\ P_{ST}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_t^\nu + \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_+^\nu - \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_t^\nu - \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{14}^{\mu\nu} &= -\frac{i}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_t^\nu - \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_+^\nu - \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_t^\nu + \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right) \\
P_{ST'}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_t^\nu + \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_+^\nu + \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_t^\nu + \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right) \\
P_{16}^{\mu\nu} &= -\frac{i}{4} \left(\epsilon_+^{*\mu} \epsilon_t^\nu - \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_+^\nu + \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_t^\nu - \epsilon_t^{*\mu} \epsilon_-^\nu \right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Der Projektor für ein unpolarisiertes reelles W -Boson wird durch

$$P_{U+L}^{\mu\nu} = P_U^{\mu\nu} + P_L^{\mu\nu} = \epsilon_+^{*\mu} \epsilon_+^\nu + \epsilon_-^{*\mu} \epsilon_-^\nu + \epsilon_0^{*\mu} \epsilon_0^\nu \tag{4.14}$$

beschrieben. Er ist identisch mit der Polarisationssumme (3.163) und kann als Summe aus den beiden Projektoren P_U und P_L geschrieben werden. Die meisten der Projektoren besitzen eine physikalische Bedeutung und werden deshalb mit einem Buchstaben indiziert, der auf diese Bedeutung hinweisen soll. Im folgenden bedeutet U unpolarisiert-transversal, L longitudinal, F „forward-backward“-asymmetrisch, T transversal, I longitudinal-transversal-Interferenz und A Parität-antisymmetrisch. Die zugehörigen Projektoren enthalten keine skalaren Polarisationsvektoren. Für die anderen Projektoren bedeutet S skalar, SL skalar longitudinal und ST und ST' skalar transversal. Die übrigen Projektoren, die durch eine Zahl indiziert sind, haben keine physikalische Bedeutung.

Nun wollen wir die Helizitäts-Projektoren (4.13) im Ruhesystem des b -Quarks auswerten. Dazu verwenden wir die Parametrisierung (4.12) der Polarisationsvektoren des virtuellen W -Bosons und erhalten daraus für die Projektoren die explizite Darstellung

$$P_U^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L^{\mu\nu} = \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} |\vec{q}|^2 & 0 & 0 & q^0 |\vec{q}| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^0 |\vec{q}| & 0 & 0 & (q^0)^2 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$P_F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_I^{\mu\nu} = \frac{-1}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & |\vec{q}| & 0 & 0 \\ |\vec{q}| & 0 & 0 & q^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_7^{\mu\nu} = \frac{i}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & -|\vec{q}| & 0 & 0 \\ |\vec{q}| & 0 & 0 & q^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_A^{\mu\nu} = \frac{i}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -|\vec{q}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ |\vec{q}| & 0 & 0 & q^0 \\ 0 & 0 & -q^0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
P_9^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & |\vec{q}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ |\vec{q}| & 0 & 0 & q^0 \\ 0 & 0 & q^0 & 0 \end{pmatrix}, & P_S^{\mu\nu} &= \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} (q^0)^2 & 0 & 0 & q^0 |\vec{q}| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^0 |\vec{q}| & 0 & 0 & |\vec{q}|^2 \end{pmatrix}, \\
P_{SL}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2q^2} \begin{pmatrix} 2q^0 |\vec{q}| & 0 & 0 & (q^0)^2 + |\vec{q}|^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (q^0) + |\vec{q}|^2 & 0 & 0 & 2q^0 |\vec{q}| \end{pmatrix}, & P_{12}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
P_{ST}^{\mu\nu} &= \frac{-1}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & q^0 & 0 & 0 \\ q^0 & 0 & 0 & |\vec{q}| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{q}| & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{14}^{\mu\nu} &= \frac{-i}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & q^0 & 0 & 0 \\ -q^0 & 0 & 0 & -|\vec{q}| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{q}| & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
P_{ST'}^{\mu\nu} &= \frac{-i}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^0 & 0 & 0 & -|\vec{q}| \\ 0 & 0 & |\vec{q}| & 0 \end{pmatrix}, & P_{16}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\sqrt{2}q^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^0 & 0 & 0 & |\vec{q}| \\ 0 & 0 & |\vec{q}| & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß die zehn Matrizen der Projektoren P_i für $i = U, L, T, 5, I, 9, S, SL, ST, 16$ symmetrisch sind, während die übrigen sechs für $i = F, 7, A, 12, 14, ST'$ hermitesch sind.

Kontrahiert man die Projektoren miteinander, so ergeben sich die folgenden Orthogonalitätsrelationen

$$P_i^{\mu\nu} P_{j,\mu\nu} = c_i \delta_{ij}, \quad (4.16)$$

wobei die Indices i und j jeweils alle 16 Projektoren durchnummerieren. Die konstanten Koeffizienten c_i lauten

$$\begin{aligned}
c_U &= 2, & c_L &= 1, & c_F &= -2, & c_T &= \frac{1}{2}, & c_5 &= \frac{1}{2}, & c_I &= \frac{1}{4}, & c_7 &= -\frac{1}{4} \\
c_A &= -\frac{1}{4}, & c_9 &= \frac{1}{4}, & c_S &= 1, & c_{SL} &= -\frac{1}{2}, & c_{12} &= \frac{1}{2}, & c_{ST} &= -\frac{1}{4}, & c_{14} &= \frac{1}{4} \\
c_{ST'} &= \frac{1}{4}, & c_{16} &= -\frac{1}{4}.
\end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Matrizen P_i besitzen nicht die Eigenschaft $(P_i)^2 = P_i$, wodurch die Bezeichnung als Projektoren eigentlich nicht gerechtfertigt ist. Trotzdem werden wir sie im folgenden als Projektoren bezeichnen, weil sie bei der Kontraktion mit dem Hadron-Tensor die entsprechenden Helizitäts-Strukturfunktionen herausprojizieren. Außerdem wird die Projektoreigenschaft bei den nachfolgenden Rechnungen nicht mehr benötigt.

Als nächstes wollen wir die Projektoren im Ruhesystem des virtuellen W -Bosons bestimmen, um den Lepton-Tensor (4.9) als Linearkombination dieser Projektoren schreiben

zu können. Bei der Transformation in das Ruhesystem des W -Bosons geht der Viererimpuls des virtuellen W in

$$q = \sqrt{q^2} (1, 0, 0, 0) \quad (4.18)$$

über. Durch Vergleich mit demselben Vektor (4.11) im b -Ruhesystem sieht man, daß man bei dieser Transformation nur die Ersetzungen

$$q^0 \rightarrow \sqrt{q^2}, \quad |\vec{q}| \rightarrow 0$$

machen muß. Wendet man diese Regel auf die Matrizen (4.15) an, so verschwinden alle Komponenten, die proportional zu $|\vec{q}|$ sind und man erhält für die Projektoren im W -Ruhesystem folgende Ausdrücke:

$$P_U^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_5^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_I^{\mu\nu} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_7^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_A^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad P_9^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_S^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{SL}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{12}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{ST}^{\mu\nu} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{14}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{ST'}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{16}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Dies sind die gesuchten orthogonalen Basis-Matrizen, aus denen sich der Lepton-Tensor (4.9) im Ruhesystem des W -Bosons zusammensetzt. Entwickelt man ihn in diese Basis, so kann man formal

$$\bar{L}^{\mu\nu} = \sum_i l_i P_i^{\mu\nu} \quad (4.20)$$

schreiben. Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen (4.16) für die Projektoren und der zugehörigen Koeffizienten (4.17) kann man die Entwicklungskoeffizienten l_i berechnen, indem man die Orthogonalitätsrelationen mit dem Projektor $P_{j,\mu\nu}$ kontrahiert. Nach Division durch die Zahlenwerte c_j erhält man

$$l_j = \frac{1}{c_j} L^{\mu\nu} P_{j,\mu\nu}. \quad (4.21)$$

Da die Projektoren nur ein oder zwei von null verschiedene Komponenten besitzen, ist es auch möglich, die Koeffizienten direkt abzulesen.

4.2.3 Entwicklung des Lepton-Tensors nach den Helizitäts-Projektoren

Wir wollen nun die Entwicklung des unpolarisierten und des polarisierten Anteils des Lepton-Tensors (4.8) nach den Helizitäts-Projektoren angeben und wählen dazu für das geladene Lepton eine nichtverschwindende Masse, während das Neutrino masselos bleibt. In diesem Fall erhält man für die Energien und den Impulsbetrag der Leptonen (4.6) die einfacheren Ausdrücke

$$E_l = \frac{q^2 + m_l^2}{2\sqrt{q^2}}, \quad E_{\nu_l} = |\vec{p}| = \frac{q^2 - m_l^2}{2\sqrt{q^2}} \quad (4.22)$$

und kann damit die Komponenten (4.9) für den unpolarisierten und den polarisierten Anteil des Lepton-Tensors berechnen. Daraus läßt sich die Entwicklung beider Anteile nach den Projektoren bestimmen. Sie kann in kompakter Schreibweise folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \bar{L}_0^{\mu\nu} = & \frac{2}{q^2} (q^2 - m_l^2) \left\{ m_l^2 P_S^{\mu\nu} - m_l^2 \sum_i e^i \mathcal{P}_i^{\mu\nu} + \sum_{i \leq j} \left[q^2 \delta^{ij} - (q^2 - m_l^2) e^i e^j \right] \mathcal{P}_{ij}^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + q^2 \sum_{i \leq j} \epsilon^{ijk} e_k \bar{\mathcal{P}}_{ij}^{\mu\nu} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{L}_P^{\mu\nu} = & \frac{2}{q^2} (q^2 - m_l^2) \left\{ m_l^2 (\vec{e} \cdot \vec{n}) P_S^{\mu\nu} + m_l \sum_i \left[\left(\sqrt{q^2} - m_l \right) (\vec{e} \cdot \vec{n}) e^i - \sqrt{q^2} n^i \right] \mathcal{P}_i^{\mu\nu} \right. \\
& - m_l \sqrt{q^2} \sum_i \epsilon^{ijk} n_j e_k \bar{\mathcal{P}}_i^{\mu\nu} \\
& + \sum_{i \leq j} \left[m_l \sqrt{q^2} (e^i n^j + n^i e^j) - q^2 (\vec{e} \cdot \vec{n}) \delta^{ij} + \left(\sqrt{q^2} - m_l \right)^2 (\vec{e} \cdot \vec{n}) e^i e^j \right] \mathcal{P}_{ij}^{\mu\nu} \\
& \left. - \sqrt{q^2} \sum_{i \leq j} \epsilon^{ijk} \left[\left(\sqrt{q^2} - m_l \right) (\vec{e} \cdot \vec{n}) e_k + m_l n_k \right] \bar{\mathcal{P}}_{ij}^{\mu\nu} \right\}. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Die Projektoren $\mathcal{P}_i^{\mu\nu}$ und $\bar{\mathcal{P}}_i^{\mu\nu}$ beschreiben jeweils den reellen und den imaginären Anteil der Komponenten \bar{L}^{0i} des Lepton-Tensors. In analoger Weise werden jeweils der Real- und der Imaginärteil der Komponenten \bar{L}^{ij} durch die Projektoren $\mathcal{P}_{ij}^{\mu\nu}$ und $\bar{\mathcal{P}}_{ij}^{\mu\nu}$ dargestellt. Alle Projektoren in (4.23) sind so definiert, daß die reellen Projektoren die nichtverschwindenden Komponenten ± 1 und alle imaginären Projektoren die nichtverschwindenden Komponenten $\pm i$ besitzen. Sie hängen mit den Helizitäts-Projektoren (4.19) über die Relationen

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1^{\mu\nu} &= -2\sqrt{2} P_{ST}^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_2^{\mu\nu} &= 2\sqrt{2} P_{16}^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_3^{\mu\nu} &= 2 P_{SL}^{\mu\nu} \\
\bar{\mathcal{P}}_1^{\mu\nu} &= -2\sqrt{2} P_{14}^{\mu\nu}, & \bar{\mathcal{P}}_2^{\mu\nu} &= -2\sqrt{2} P_{ST'}^{\mu\nu}, & \bar{\mathcal{P}}_3^{\mu\nu} &= -2 P_{12}^{\mu\nu} \\
\mathcal{P}_{11}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} P_U^{\mu\nu} - P_T^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_{12}^{\mu\nu} &= 2 P_5^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_{13}^{\mu\nu} &= -2\sqrt{2} P_I^{\mu\nu}, \\
\mathcal{P}_{22}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} P_U^{\mu\nu} + P_T^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_{23}^{\mu\nu} &= 2\sqrt{2} P_9^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_{33}^{\mu\nu} &= P_L^{\mu\nu} \\
\bar{\mathcal{P}}_{12}^{\mu\nu} &= P_F^{\mu\nu}, & \bar{\mathcal{P}}_{13}^{\mu\nu} &= 2\sqrt{2} P_7^{\mu\nu}, & \bar{\mathcal{P}}_{23}^{\mu\nu} &= 2\sqrt{2} P_A^{\mu\nu} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

zusammen. Sie wurden nur aus dem Grund eingeführt, um den Lepton-Tensor in kompakter Schreibweise darstellen zu können.

Betrachtet man die Ausdrücke (4.23) für den unpolarisierten und den polarisierten Anteil des Lepton-Tensors, so fällt auf, daß die Projektoren $\bar{\mathcal{P}}_i^{\mu\nu}$ nur im polarisierten Anteil auftreten, während alle anderen Projektoren in beiden Anteilen vorkommen. Somit beschreiben $P_{12}^{\mu\nu}$, $P_{14}^{\mu\nu}$ und $P_{ST'}^{\mu\nu}$ den transversalen Spin des geladenen Leptons. Im Grenzfall $m_l = 0$ tragen auch die Terme, welche die Projektoren $P_S^{\mu\nu}$ und $P_i^{\mu\nu}$ enthalten, nicht zum Lepton-Tensor bei. Deshalb treten die Projektoren $P_S^{\mu\nu}$, $P_{SL}^{\mu\nu}$, $P_{ST}^{\mu\nu}$ und $P_{16}^{\mu\nu}$ nur auf, wenn man eine endliche Leptonmasse berücksichtigt. Die Masse und die transversale Polarisation des geladenen Leptons spielen in Kapitel 6 eine Rolle, wo die nichtperturbativen Beiträge zu hadronischen Zerfällen, die ein b -Quark enthalten, diskutiert werden. Während die Lepton-Polarisation nur in Abschnitt 6.4 erwähnt wird, werden die Beiträge massiver Leptonen auch in den Resultaten der übrigen Abschnitte von Kapitel 6 verwendet. Die Beiträge der skalaren Polarisation, die mit dem Projektor P_S zusammenhängt, wird außerdem in den Anwendungen auf hadronische Prozesse in Kapitel 7 benötigt.

Bei der Berechnung der QCD-Strahlungskorrekturen in Kapitel 5 werden wir nur den Fall masseloser und unpolarisierter Leptonen betrachten, so daß wir im folgenden nur den entsprechend vereinfachten Lepton-Tensor diskutieren werden. Er geht aus $\bar{L}^{\mu\nu} = \bar{L}_0^{\mu\nu} + \bar{L}_P^{\mu\nu}$ durch Summation über den Leptonspin und Vernachlässigung der Leptonmasse hervor. Summiert man über den Spin des geladenen Leptons, so ergibt sich für den unpolarisierten Lepton-Tensor, der für den Rest dieses Abschnittes einfach mit $L^{\mu\nu}$ bezeichnet werden soll,

$$L^{\mu\nu} = (\bar{L}_0^{\mu\nu} + \bar{L}_P^{\mu\nu}) + (\bar{L}_0^{\mu\nu} - \bar{L}_P^{\mu\nu}) = 2\bar{L}_0^{\mu\nu}. \quad (4.25)$$

Im Grenzfall $m_l = 0$ lauten die parametrisierten Viererimpulse (4.3) für das geladene Lepton und das Antineutrino im Ruhesystem des W -Bosons mit (4.6)

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{\sqrt{q^2}}{2} (1, \sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \\ p_{\nu_l} &= \frac{\sqrt{q^2}}{2} (1, -\sin\theta \cos\phi, -\sin\theta \sin\phi, -\cos\theta) \end{aligned} \quad (4.26)$$

und der Lepton-Tensor für unpolarisierte Leptonen kann explizit in der Form

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= 4q^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sin^2\theta \cos^2\phi & -\sin^2\theta \cos\phi \sin\phi & -\cos\theta \sin\theta \cos\phi \\ 0 & -\sin^2\theta \cos\phi \sin\phi & 1 - \sin^2\theta \sin^2\phi & -\cos\theta \sin\theta \sin\phi \\ 0 & -\cos\theta \sin\theta \cos\phi & -\cos\theta \sin\theta \sin\phi & \sin^2\theta \end{pmatrix} \\ &+ 4iq^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \sin\phi \\ 0 & -\cos\theta & 0 & \sin\theta \cos\phi \\ 0 & \sin\theta \sin\phi & -\sin\theta \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

geschrieben werden. Der symmetrische Realteil und der antisymmetrische Imaginärteil sind separat angegeben, so daß man die Entwicklung in die Helizitäts-Projektoren (4.19) relativ leicht ablesen kann. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= 8q^2 \left[\frac{1}{4} (1 + \cos^2\theta) P_U^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sin^2\theta P_L^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \cos\theta P_F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos(2\phi) P_T^{\mu\nu} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin^2\theta \sin(2\phi) P_5^{\mu\nu} + \sqrt{2} \sin\theta \cos\theta \cos\phi P_I^{\mu\nu} - \sqrt{2} \sin\theta \sin\phi P_7^{\mu\nu} \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \sin\theta \cos\phi P_A^{\mu\nu} - \sqrt{2} \sin\theta \cos\theta \sin\phi P_9^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Man kann dieses Resultat auch aus dem unpolarisierten Anteil in (4.23) erhalten, indem man die Leptonmasse $m_l = 0$ setzt und die parametrisierten Komponenten e^i des Einheitsvektors in Richtung des Leptonimpulses aus (4.4) einsetzt. Außerdem verwendet man die

Definitionen (4.24) und benutzt die Relation $e_i = -e^i$, welche die kovarianten räumlichen Vektorkomponenten eines Vierervektors durch die kontravarianten ausdrückt.

Für masselose und unpolarisierte Leptonen benötigt man also, wie man in (4.28) sehen kann, nur neun der ursprünglich sechzehn Projektoren, um den Lepton-Tensor darstellen zu können. Es sind nämlich nur die rein räumlichen Komponenten L^{ij} des Lepton-Tensors von null verschieden, so daß er wegen der Hermitezität insgesamt sechs reelle und drei imaginäre voneinander unabhängige Komponenten besitzt, welche als Entwicklungskoeffizienten der Projektoren dienen können.

4.2.4 Kovariante Darstellung der Helizitäts-Projektoren

Es ist häufig von Vorteil, wenn die Projektoren (4.13) in einer kovarianten und daher vom Bezugssystem unabhängigen Form gegeben sind. Daher sollen im folgenden die kovarianten Darstellungen der Projektoren bestimmt werden. Man kann die Richtigkeit dieser Darstellungen überprüfen, indem man sie im Ruhesystem des b -Quarks oder des W -Bosons auswertet. Die Viererimpulse für das b -Quark und das virtuelle W -Boson lauten im b -Ruhesystem

$$p_b = (m_b, 0, 0, 0), \quad q = (q^0, 0, 0, |\vec{q}|). \quad (4.29)$$

Zur Bestimmung der kovarianten Projektoren beginnen wir mit der Darstellung der Polarisationssumme des reellen W -Bosons, die mit dem unpolarisierten Projektor identisch ist und in kovarianter Form durch

$$P_{U+L}^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0,\pm 1} \epsilon_\lambda^{*\mu} \epsilon_\lambda^\nu = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (4.30)$$

gegeben ist. Im Ruhesystem des W -Bosons mit $q = (\sqrt{q^2}, 0, 0, 0)$ geht dies in

$$P_{U+L}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

über und ist identisch mit der Darstellung in (4.19). Für die Darstellungen der übrigen Projektoren versucht man, kovariante Ausdrücke für die Polarisationsvektoren (4.12) des W -Bosons zu finden, und setzt diese direkt in (4.13) ein. Zunächst benötigt man eine kovariante Darstellung des longitudinalen W -Polarisationsvektors ϵ_0 . Dazu betrachtet man den Anteil des Viererimpulses für das b -Quark, der im Minkowski-Raum orthogonal zum W -Viererimpuls ist. Der longitudinale Polarisationsvektor des W -Bosons wird nun proportional zu diesem Anteil angesetzt. Er lautet in kovarianter Form

$$\epsilon_0^\mu = -\frac{\sqrt{q^2}}{m_b |\vec{q}|} \left(p_b^\mu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\mu \right), \quad (4.32)$$

und der Normierungsfaktor ist so gewählt, daß ϵ_0^μ im b -Ruhesystem mit der Parametrisierung (4.29) in die bekannte Form (4.12) übergeht. Der Betrag des räumlichen W -Impulses

$|\vec{q}|$ kann mit Hilfe der Beziehung $q^2 = q_0^2 - |\vec{q}|^2$ und dem Skalarprodukt $p_b \cdot q = m_b q_0$ im Ruhesystem des b -Quarks auch in kovarianter Form dargestellt werden. Dies liefert für das Produkt $m_b |\vec{q}|$ im Nenner von (4.32)

$$m_b |\vec{q}| = \sqrt{(p_b \cdot q)^2 - m_b^2 q^2}. \quad (4.33)$$

Durch Einsetzen von ϵ_0 kann der Projektor $P_L^{\mu\nu}$ aus (4.13) ebenfalls in kovarianter Form angegeben werden. Der Projektor $P_U^{\mu\nu}$ ergibt sich anschließend aus der Differenz von $P_{U+L}^{\mu\nu}$ und $P_L^{\mu\nu}$.

Im nächsten Schritt suchen wir eine Darstellung der transversalen Polarisationsvektoren ϵ_{\pm} . Es ist sinnvoll, anstelle von ϵ_{\pm} die beiden Linearkombinationen

$$\epsilon_x = \frac{-1}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ - \epsilon_-), \quad \epsilon_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ + \epsilon_-) \quad (4.34)$$

zu betrachten. In der Parametrisierung (4.12) gehen sie in die Einheitsvektoren in x - und y -Richtung

$$\epsilon_x = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon_y = (0, 0, 1, 0) \quad (4.35)$$

über. Der Vektor ϵ_y kann durch ϵ_x ausgedrückt werden, indem man berücksichtigt, daß ϵ_y senkrecht zu ϵ_x und zum W -Impuls q sein muß. Verlangt man außerdem, daß er im Minkowski-Raum auch senkrecht zum Impuls des b -Quarks p_b ist, so ergibt sich

$$\epsilon_y^\mu = \frac{-1}{m_b |\vec{q}|} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{x,\nu} p_{b,\rho} q_\sigma, \quad (4.36)$$

wobei der Nenner wieder durch (4.33) gegeben ist. Dies sieht man ein, wenn man diese Gleichung im b -Ruhesystem auswertet. Dann gibt es nur eine nichtverschwindende Komponente von ϵ_y :

$$\epsilon_y^2 = \frac{-1}{m_b |\vec{q}|} \epsilon^{2103} (-1) (m_b) (-|\vec{q}|) = 1. \quad (4.37)$$

Damit hat man nur noch die Freiheit, den Vektor ϵ_x festzulegen. Alle Projektoren, welche die transversalen Polarisationsvektoren enthalten, werden nun durch diesen Vektor ausgedrückt.

Der Projektor $P_F^{\mu\nu}$ läßt sich am einfachsten finden, wenn man seine Definition in (4.13) durch die Vektoren (4.34) ausdrückt und mit dem Vektor $\epsilon_{x,\nu}$ kontrahiert. Mit der kovarianten Definition (4.36) von ϵ_y liefert dies

$$P_F^{\mu\nu} \epsilon_{x,\nu} = i \epsilon_y^\mu = \frac{-i}{m_b |\vec{q}|} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{x,\nu} p_{b,\rho} q_\sigma. \quad (4.38)$$

Auch hier ist der Nenner durch den kovarianten Ausdruck (4.33) gegeben. Durch einen Koeffizientenvergleich von $\epsilon_{x,\nu}$ erhält man für den Projektor $P_F^{\mu\nu}$ den kovarianten Ausdruck

$$P_F^{\mu\nu} = \frac{-i}{m_b |\vec{q}|} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{b,\rho} q_\sigma, \quad (4.39)$$

der im Ruhesystem des b -Quarks mit den Impulsvektoren (4.29) in die Matrixdarstellung (4.15) übergeht. Dann tragen für $\rho = 0$ und $\sigma = 3$ nur die beiden Komponenten $\mu = 1, \nu = 2$ und $\mu = 2, \nu = 1$ bei und es gilt

$$P_F^{12} = i, \quad p_F^{21} = -i. \quad (4.40)$$

Die kovarianten Darstellungen der beiden Projektoren $P_I^{\mu\nu}$ und $P_A^{\mu\nu}$ erhält man, indem man die Ausdrücke in (4.13) in der folgenden Art und Weise umschreibt

$$\begin{aligned} P_I^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\epsilon_+^{*\mu} - \epsilon_-^{*\mu}) \epsilon_0^\nu + \frac{1}{4} (\epsilon_+^\nu - \epsilon_-^\nu) \epsilon_0^{*\mu} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} (\epsilon_x^{*\mu} \epsilon_0^\nu + \epsilon_x^\nu \epsilon_0^{*\mu}) \\ P_A^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\epsilon_+^{*\mu} + \epsilon_-^{*\mu}) \epsilon_0^\nu + \frac{1}{4} (\epsilon_+^\nu + \epsilon_-^\nu) \epsilon_0^{*\mu} = \frac{i}{2\sqrt{2}} (\epsilon_y^{*\mu} \epsilon_0^\nu - \epsilon_y^\nu \epsilon_0^{*\mu}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

und durch die Vektoren ϵ_x und ϵ_y ausdrückt. Einsetzen der kovarianten Vektoren (4.32) und (4.36) liefert den kovarianten Ausdruck für die Projektoren P_I und P_A . Der Vektor ϵ_x ist unbestimmt und kann in einem speziellen Bezugssystem als Einheitsvektor in x -Richtung parametrisiert werden.

Zum Schluß benötigen wir noch die kovariante Darstellung für den skalaren Polarisationsvektor ϵ_t , um die übrigen Projektoren in kovarianter Form darstellen zu können. In den Parametrisierungen (4.11) und (4.12) erkennt man, daß ϵ_t bis auf die Normierung mit dem Viererimpuls des W -Bosons identisch ist. Man kann damit ϵ_t durch q ausdrücken und erhält

$$\epsilon_t^\mu = \frac{1}{\sqrt{q^2}} q^\mu. \quad (4.42)$$

Der skalare Projektor ergibt sich dann aus (4.13) zu

$$P_S^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}. \quad (4.43)$$

Auch die anderen Projektoren können durch Einsetzen der kovarianten Polarisationsvektoren in (4.13) bestimmt werden. Während das bei dem Projektor $P_{SL}^{\mu\nu}$ direkt möglich ist, muß man die Projektoren $P_{ST}^{\mu\nu}$ und $P_{ST'}^{\mu\nu}$ zuvor in analoger Weise wie $P_I^{\mu\nu}$ und $P_A^{\mu\nu}$ umschreiben und die transversalen Polarisationsvektoren ϵ_\pm durch ϵ_x und ϵ_y ausdrücken.

Jetzt haben wir für alle Projektoren, welche eine physikalische Bedeutung besitzen, eine kovariante Darstellung gefunden. Man kann die Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} P_U^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{q^2}{m_b^2 |\vec{q}|^2} \left(p_b^\mu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p_b^\nu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \\ P_L^{\mu\nu} &= \frac{q^2}{m_b^2 |\vec{q}|^2} \left(p_b^\mu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p_b^\nu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \\ P_{U+L}^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_F^{\mu\nu} &= \frac{i}{m_b |\vec{q}|} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{b,\rho} q_\sigma \\
P_I^{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2} m_b |\vec{q}|} \left[\epsilon_x^\mu \left(p_b^\nu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\nu \right) + \epsilon_x^\nu \left(p_b^\mu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \right] \\
P_A^{\mu\nu} &= -\frac{i\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2} m_b^2 |\vec{q}|^2} \left[\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau} \left(p_b^\nu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\nu \right) - \epsilon^{\nu\rho\sigma\tau} \left(p_b^\mu - \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \right] \epsilon_{x,\rho} p_{b,\sigma} q_\tau \\
P_S^{\mu\nu} &= \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \\
P_{SL}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2 m_b |\vec{q}|} \left(p_b^\mu q^\nu + q^\mu p_b^\nu - 2 \frac{p_b \cdot q}{q^2} q^\mu q^\nu \right) \\
P_{ST}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2\sqrt{2} q^2} \left(\epsilon_x^{*\mu} q^\nu + q^\mu \epsilon_x^\nu \right) \\
P_{ST'}^{\mu\nu} &= -\frac{i}{2 m_b |\vec{q}| \sqrt{2} q^2} \left(\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau} q^\nu - \epsilon^{\nu\rho\sigma\tau} q^\mu \right) \epsilon_{x,\rho} p_{b,\sigma} q_\tau. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Wir haben auch die Summe der Projektoren $P_{U+L}^{\mu\nu} = P_U^{\mu\nu} + P_L^{\mu\nu}$ in die Liste aufgenommen, da sie ein unpolarisiertes W -Boson beschreibt und neben den anderen Polarisations-Observablen in Kapitel 5 vorkommt. Alle anderen Projektoren, die in (4.13) angegeben sind, brauchen nicht in kovarianter Form dargestellt zu werden, da sie, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, bei der Kontraktion mit dem Hadron-Tensor keinen Beitrag liefern werden. Die diagonalen Helizitäts-Projektoren P_U, P_L sowie der Projektor P_F projizieren auf den longitudinal polarisierten Anteil des Hadron-Tensors, während die nichtdiagonalen Projektoren P_I und P_A auf den transversal polarisierten Anteil projizieren. Die Projektoren P_S, P_{SL}, P_{ST} und $P_{ST'}$ tragen nur dann bei, wenn man die Masse des geladenen Leptons berücksichtigt, was zum Beispiel bei Tau-Leptonen erforderlich ist. Dieser Fall wird im Rahmen der nichtperturbativen Beiträge in Kapitel 6 diskutiert. Der Projektor $P_{ST'}$ schließlich tritt nur bei transversaler Polarisation des geladenen Leptons auf und spielt nur bei den Betrachtungen in Abschnitt 6.4 von Kapitel 6 eine Rolle. In Kapitel 5 werden die Leptonmassen vernachlässigt, so daß man nur die fünf Projektoren P_i für $i = U, L, F, I, A$ benötigt. Die Projektoren P_S und P_{U+L} braucht man bei Anwendungen in hadronischen Prozessen, die in Kapitel 7 behandelt werden.

4.3 Helizitäts-Strukturfunktionen

Auf ähnliche Weise wie den Lepton-Tensor kann man auch den Hadron-Tensor als Linearkombination der Projektoren $P_i^{\mu\nu}$ schreiben. Dazu entwickelt man ihn zunächst in einen Satz invarianter Strukturfunktionen. Der Hadron-Tensor der Bornschen Rate (4.1)

für den Zerfall eines polarisierten b -Quarks in ein c -Quark und ein virtuelles W -Boson, das weiter in ein Leptonpaar zerfällt, ist ein Tensor zweiter Stufe und hängt nur von den äußeren Quarkimpulsen p_b und p_c sowie dem Polarisationsvektor s_b des b -Quarks ab. Der entsprechende Hadron-Tensor für die Schleifenkorrekturen enthält dieselben äußeren Impulse, während der Hadron-Tensor für die Bremsstrahlungs-Korrekturen zusätzlich noch vom Gluonimpuls k abhängt. Um den Zerfall des b -Quarks und den nachfolgenden Zerfall des W -Bosons getrennt untersuchen zu können, betrachten wir den Zerfall $b^\dagger \rightarrow c + W^-$, der ebenfalls durch den Hadron-Tensor beschrieben wird. Der Zerfall $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$ wird entsprechend durch den Lepton-Tensor beschrieben. Als äußeren Impuls für den Hadron-Tensor wählen wir den W -Impuls q anstatt des c -Impulses und drücken p_c mit Hilfe der Viererimpuls-Erhaltung durch die übrigen Impulse aus.

Für die Entwicklung des Hadron-Tensors in eine Linearkombination aus Basis-Tensoren zweiter Stufe stehen neben den äußeren Impulsen und dem Polarisationsvektor nur der metrische Tensor und der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe zur Verfügung. Diese Größen müssen so kombiniert werden, daß sie einen vollständigen Satz von Basis-Tensoren bilden. Es stellt sich heraus, daß die symmetrischen Anteile des Hadron-Tensors nur aus dem metrischen Tensor und den Vierervektoren aufgebaut werden, die antisymmetrischen Terme hingegen den Levi-Civita-Tensor enthalten. Die übrigen Kombinationen treten nur bei CP-verletzenden Prozessen außerhalb des Standardmodells der Elementarteilchen auf und brauchen deshalb nicht berücksichtigt zu werden, da hier nur Standardmodell-Rechnungen durchgeführt werden. Die Koeffizienten der Basis-Tensoren sind skalare Invarianten unter Lorentz-Transformationen und werden mit H_i und G_j bezeichnet, wobei die H_i die unpolarisierten Anteile des Hadron-Tensors und die G_j diejenigen Beiträge beschreiben, welche proportional zum Polarisationsvektor s_b des b -Quarks sind. Sie werden als invariante Strukturfunktionen bezeichnet und können nur von Skalarprodukten abhängen, welche aus den oben genannten Vierervektoren gebildet werden. Wir betrachten nun der Einfachheit wegen nur den Hadron-Tensor für die Bornsche Rate und für die Schleifenkorrekturen, die beide nur aus den Vierervektoren p_b , q und s_b sowie dem metrischen und dem Levi-Civita-Tensor gebildet werden können. Der Hadron-Tensor kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &\equiv H_{\mu\nu}(q_0, q^2, s_b) \\
&= -g_{\mu\nu} H_1 + p_{b,\mu} p_{b,\nu} H_2 - i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_b^\rho q^\sigma H_3 + q_\mu q_\nu H_4 + (p_{b,\mu} q_\nu + q_\mu p_{b,\nu}) H_5 \\
&\quad - (q \cdot s_b) [-g_{\mu\nu} G_1 + p_{b,\mu} p_{b,\nu} G_2 - i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_b^\rho q^\sigma G_3 + q_\mu q_\nu G_4 \\
&\quad\quad + (p_{b,\mu} q_\nu + q_\mu p_{b,\nu}) G_5] \\
&\quad + (s_{b,\mu} p_{b,\nu} + s_{b,\nu} p_{b,\mu}) G_6 + (s_{b,\mu} q_\nu + q_\mu s_{b,\nu}) G_7 \\
&\quad + i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_b^\rho s_b^\sigma G_8 + i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho s_b^\sigma G_9.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Die invarianten Strukturfunktionen hängen von zwei kinematischen Variablen ab, für welche man das Skalarprodukt $p_b \cdot q$ und das Viererimpulsquadrat des virtuellen W -Bosons q^2 wählen kann. Im Ruhesystem des b -Quarks können sie durch q_0 und q^2 ausgedrückt werden. Weil nicht über den Spin des b -Quarks summiert wird, gibt es darüberhinaus auch eine

Abhängigkeit vom Spinvektor s_b . Man benötigt insgesamt fünf unpolarisierte und neun polarisierte Strukturfunktionen, um den Hadron-Tensor darzustellen. Bei einer Kontraktion mit dem Lepton-Tensor liefern die Terme proportional zu H_4 und H_5 sowie G_4 , G_5 und G_7 für masselose Leptonen keinen Beitrag, so daß man in diesem Fall nur drei unpolarisierte und sechs polarisierte Invarianten braucht.

Bei der Diskussion des b -Zerfalls in ein c -Quark und ein Leptonpaar in Kapitel 3 hatten wir das Betragsquadrat des Matrixelementes als Kontraktion von Hadron- und Lepton-Tensor ausgedrückt, indem wir annahmen, daß man den W -Propagator aufgrund der großen W -Masse im Vergleich zu den Massen der Quarks und Leptonen vereinfachen kann. Aus dem Bornschen Matrixelement mit vollständigem W -Propagator, das in (3.3) angegeben ist, läßt sich durch Bildung des Betragsquadrates wieder ein Ausdruck der Form (3.7) für den vereinfachten W -Propagator gewinnen, indem man die Ersetzung

$$H_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{H}_{\mu\nu} = H^{\rho\sigma} \left(g_{\mu\rho} + \frac{q_\mu q_\rho}{q^2} \right) \left(g_{\nu\sigma} + \frac{q_\nu q_\sigma}{q^2} \right) \quad (4.46)$$

durchführt. Der neue Hadron-Tensor $\tilde{H}_{\mu\nu}$ besitzt aber dieselbe Entwicklung (4.45), weil der W -Propagator nur aus dem metrischen Tensor und dem W -Impuls q aufgebaut ist, die bereits als Basis-Tensoren in der Entwicklung des Hadron-Tensors vorkommen. Die oben angegebene Entwicklung (4.45) bleibt also auch im Falle des nicht vereinfachten W -Propagators und damit auch für endliche Leptonmassen gültig. Der Unterschied der beiden Entwicklungen ist nur durch eine Änderung der Werte der Invarianten H_i und G_j gegeben.

Möchte man den Hadron-Tensor für die Bremsstrahlungs-Korrekturen durch die Invarianten darstellen, so benötigt man weitere Basis-Tensoren, welche den zusätzlichen Impulsvektor k des Gluons enthalten. Auf diese Weise erhöht sich die Anzahl der Invarianten, und die Entwicklung des Hadron-Tensors enthält deutlich mehr Terme. Für den symmetrischen unpolarisierten Anteil erhält man beispielsweise sechs Kombinationen aus den drei Impulsvektoren p_b , q und k . Außerdem gibt es für den polarisierten symmetrischen Anteil jeweils sechs Terme, die durch Multiplikation der entsprechenden unpolarisierten Kombinationen mit den Skalarprodukten $s_b \cdot q$ und $s_b \cdot k$ gebildet werden. Für die antisymmetrischen Anteile gibt es schließlich auch eine Reihe unpolarisierter und polarisierter Terme, die aber nicht weiter diskutiert werden sollen. Im folgenden werden wir nur die Entwicklung (4.45) betrachten.

Für den Fall unpolarisierter Leptonen stellt man fest, daß die 14 invarianten Strukturfunktionen in (4.45) nicht unabhängig voneinander sind, denn aufgrund der Schouten-Identität

$$g_{\kappa\lambda} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + g_{\kappa\mu} \epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda} + g_{\kappa\nu} \epsilon_{\rho\sigma\lambda\mu} + g_{\kappa\rho} \epsilon_{\sigma\lambda\mu\nu} + g_{\kappa\sigma} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = 0 \quad (4.47)$$

kann eine der Strukturfunktionen durch die übrigen ausgedrückt werden. Kontrahiert man diese Identität mit den vier Impulsvektoren q^κ , p_b^λ , q^μ und s_b^ν , so ergibt sich die Bedingung

$$(p_b \cdot q) \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} q^\mu s_b^\nu - q^2 \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_b^\mu s_b^\nu + (q \cdot s_b) \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_b^\mu q^\nu + (q_\rho \epsilon_{\sigma\lambda\mu\nu} - q_\sigma \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu}) p_b^\lambda q^\mu s_b^\nu = 0. \quad (4.48)$$

Nach Umbenennung der Indices $\mu \leftrightarrow \rho$ und $\nu \leftrightarrow \sigma$ ist der dritte Term identisch mit dem Vorfaktor von iG_3 in der Entwicklung (4.45) des Hadron-Tensors, und die beiden

letzten Terme proportional zu dem W -Impulsvektor q verschwinden bei der Kontraktion mit dem unpolarisierten Lepton-Tensor $\bar{L}_0^{\mu\nu}$ aus (4.8). Dies kann man leicht sehen, da die Summe dieser beiden Terme antisymmetrisch ist und daher bei der Kontraktion mit dem symmetrischen Teil von $\bar{L}_0^{\mu\nu}$ identisch null ist. Auch die Kontraktion von q_μ oder q_ν mit dem antisymmetrischen Teil aus $\bar{L}_0^{\mu\nu}$ liefert keinen Beitrag, da wegen $q = p_l + p_{\nu_l}$ der ϵ -Tensor je zweimal mit demselben Vektor kontrahiert wird. In diesem Fall kann man in der Relation (4.48) die beiden Terme proportional zum Impuls q weglassen und nach dem dritten Term auflösen. Anschließend setzt man dies für den Vorfaktor von iG_3 in die Entwicklung (4.45) ein und erhält zwei neue nichtverschwindende Invarianten, die aus den alten Invarianten durch die Ersetzung

$$G_3 \rightarrow G'_3 = 0, \quad G_8 \rightarrow G'_8 = G_8 + q^2 G_3, \quad G_9 \rightarrow G'_9 = G_9 - (p_b \cdot q) G_3$$

hervorgehen. Im Falle unpolarisierter Leptonen benötigt man also nur 13 unabhängige Invarianten, um den Hadron-Tensor zu entwickeln. Berücksichtigt man jedoch den Spin des geladenen Leptons, so sind für die Entwicklung des Hadron-Tensors alle 14 Invarianten aus (4.45) notwendig.

Als nächstes betrachten wir die Kontraktionen des Hadron-Tensors (4.45) mit den verschiedenen Helizitäts-Projektoren (4.44). Die Resultate bezeichnet man als Helizitäts-Strukturfunktionen. Mit deren Hilfe werden wir den Hadron-Tensor in eine Linearkombination der Projektoren entwickeln. Es ist vorteilhaft, die Kontraktionen im Ruhesystem des b -Quarks durchzuführen. Die Kinematik des b -Zerfalls ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Die parametrisierten Polarisationsvektoren des W -Bosons im b -Ruhesystem sind durch (4.12) gegeben. Der Spinvektor des b -Quarks lautet im b -Ruhesystem

$$s_b = (0, s_x, s_y, s_z) = P (0, \sin \theta_P, 0, \cos \theta_P). \quad (4.49)$$

Er besitzt aufgrund der Kinematik des Zerfallsprozesses eine azimuthale Symmetrie um die z -Achse, so daß der Azimutwinkel frei gewählt werden kann. Wenn man ihn gleich null wählt, so verschwindet daher auch die y -Komponente des Spin-Vektors. Der Wert P gibt den Grad der b -Polarisation an, der durch das Verhältnis

$$P = \frac{N(\uparrow) - N(\downarrow)}{N(\uparrow) + N(\downarrow)} \quad (4.50)$$

gegeben ist und betragsmäßig Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Die Zahlen $N(\uparrow)$ und $N(\downarrow)$ bezeichnen jeweils die Anzahl der b -Quarks mit Spin $+1/2$ und Spin $-1/2$. Für eine 100-prozentige Polarisation ist $P = \pm 1$, und für unpolarisierte b -Quarks gilt $N(\uparrow) = N(\downarrow)$ oder $P = 0$. Der Spin-Vierervektor des b -Quarks (4.49) im b -Ruhesystem enthält jeweils eine Komponente parallel und senkrecht zur Richtung des räumlichen W -Impulses. Man definiert daher einen longitudinalen und einen transversalen Vierervektor für den b -Spin, die im b -Ruhesystem jeweils in der Form

$$s_b^l = (0, 0, 0, 1), \quad s_b^t = (0, 1, 0, 0) \quad (4.51)$$

parametrisiert werden. Der Spin-Vierervektor des b -Quarks (4.49) kann als Linearkombination des longitudinalen und des transversalen Spinvektors geschrieben werden. Das liefert

$$s_b = P \sin \theta_P s_b^t + P \cos \theta_P s_b^l. \quad (4.52)$$

Man kann den longitudinalen und den transversalen Spinvektor des b -Quarks ebenso wie die Polarisationsvektoren des W -Bosons in kovarianter Form darstellen. Dazu schreibt man

$$s_b^{l,\mu} = \frac{1}{|\vec{q}|} \left(q^\mu - \frac{p_b \cdot q}{m_b^2} p_b^\mu \right), \quad s_b^{t,\mu} = (0, 1, 0, 0). \quad (4.53)$$

Im Ruhesystem des b -Quarks gehen die kovarianten Ausdrücke für den longitudinalen und den transversalen Spinvektor in (4.51) über. Der transversale Spinvektor bleibt dabei unverändert.

Nun werden wir die Helizitäts-Strukturfunktionen durch Kontraktionen des Hadron-Tensors (4.45) mit den unterschiedlichen Helizitäts-Projektoren (4.44) berechnen und die Resultate in Abhängigkeit der Invarianten H_i und G_j angeben. In der Entwicklung (4.45) beschreiben die Terme, welche die Invarianten H_i enthalten, den vom b -Spin unabhängigen Teil des Hadron-Tensors, während der spinabhängige Anteil durch die Terme, welche die Invarianten G_j enthalten, gegeben ist. In (4.45) ist der spinunabhängige Teil durch die erste Zeile und der spinabhängige Anteil durch die übrigen vier Zeilen gegeben. Für spätere Anwendungen des Helizitäts-Formalismus in Kapitel 5 und Kapitel 6 ist es sinnvoll, den spinunabhängigen und den spinabhängigen Anteil der Helizitäts-Strukturfunktionen voneinander zu unterscheiden. Dazu schreibt man den Hadron-Tensor als eine Summe, indem man

$$H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}^0 + H_{\mu\nu}^P(s_b) \quad (4.54)$$

definiert, wobei der erste Term den spinunabhängigen und der zweite Term den spinabhängigen Teil beschreibt. Der zweite Term hängt explizit vom Spinvektor des b -Quarks s_b ab. Die Helizitäts-Strukturfunktionen sind durch die Kontraktionen

$$\bar{H}_i := H_{\mu\nu} P_i^{\mu\nu} = [H_{\mu\nu}^0 + H_{\mu\nu}^P(s_b)] P_i^{\mu\nu} \quad (4.55)$$

gegeben. Um die Abhängigkeit vom Spin des b -Quarks hervorzuheben, werden wir im folgenden anstelle der Strukturfunktion \bar{H}_i für alle Helizitäten i eine unpolarisierte und eine polarisierte Strukturfunktion definieren, wobei die polarisierte den spinabhängigen Anteil enthält. Setzt man in (4.55) den allgemeinen Spinvektor s_b aus (4.49) ein, so stellt man fest, daß die polarisierten Strukturfunktionen für die Helizitäten $i = U, L, F, S, SL$ proportional zu der Spin-Komponente s_z sind, während die polarisierten Strukturfunktionen für $i = I, A, ST, ST'$ proportional zu s_x sind. Daher ist es ausreichend, wenn wir bei der Berechnung der Helizitäts-Strukturfunktionen zur Beschreibung des b -Spins jeweils nur den longitudinalen oder den transversalen Spinvektor verwenden. Die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen werden nun folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} H_i &= H_{\mu\nu}^0 P_i^{\mu\nu}, & i &= U, L, F, S, SL \\ H_{iP} &= H_{\mu\nu}^P(s_b^l) P_i^{\mu\nu}, & i &= U, L, F, S, SL \\ H_{iP} &= H_{\mu\nu}^P(s_b^t) P_i^{\mu\nu}, & i &= I, A, ST, ST'. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Alle Helizitäts-Strukturfunktionen, die aus den Kontraktionen des Hadron-Tensors mit den Projektoren $i = T, 5, 7, 9, 12, 14, 16$ aus (4.13) hervorgehen, verschwinden, wie wir weiter unten durch explizites Nachrechnen sehen werden. Der Index i kennzeichnet die unterschiedlichen Helizitäten. Man beachte, daß die unpolarisierten Strukturfunktionen H_i hier nicht mit den Invarianten aus der Entwicklung (4.45) des Hadron-Tensors verwechselt werden dürfen. Die polarisierten Strukturfunktionen enthalten die Abhängigkeit vom Spin des b -Quarks und werden durch einen Index i^P gekennzeichnet, um sie vom spinunabhängigen Anteil unterscheiden zu können. Die unpolarisierten Strukturfunktionen verschwinden für die Helizitäten $i = I, A, ST, ST'$. Die polarisierten Strukturfunktionen erhält man, indem man im spinabhängigen Anteil des Hadron-Tensors (4.54) den Spinvektor s_b durch die Vektoren s_b^l oder s_b^t ersetzt. Aufgrund der Tatsache, daß der Hadron-Tensor (4.45) nur linear vom Spinvektor s_b abhängt, und mit Hilfe der Relation (4.52) kann man die Helizitäts-Strukturfunktionen (4.55) durch die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen (4.56) ausdrücken und erhält

$$\begin{aligned}\bar{H}_i &= H_i + P \cos \theta_P H_{i^P}, & i &= U, L, F, S, SL \\ \bar{H}_i &= P \sin \theta_P H_{i^P}, & i &= I, A, ST, ST'\end{aligned}\quad (4.57)$$

Für die explizite Berechnung der einzelnen Strukturfunktionen H_i und H_{i^P} bestimmt man die Kontraktionen in (4.56) im Ruhesystem des b -Quarks. Dazu verwendet man die parametrisierten Viererimpulse (4.29) und die kovarianten Ausdrücke der Projektoren (4.44) und der Spin-Vierervektoren (4.53). Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}H_U &= 2 H_1, & H_{UP} &= 2 |\vec{q}| G_1 \\ H_L &= H_1 + \frac{m_b^2}{q^2} |\vec{q}|^2 H_2, & H_{LP} &= |\vec{q}| \left[G_1 + \frac{m_b^2}{q^2} |\vec{q}|^2 G_2 - 2 \frac{m_b}{q^2} q^0 G_6 \right] \\ H_F &= 2 m_b |\vec{q}| H_3, & H_{FP} &= 2 [m_b |\vec{q}|^2 G_3 - m_b G_8 - q^0 G_9] \\ H_I &= 0, & H_{IP} &= \frac{m_b}{\sqrt{2} q^2} |\vec{q}| G_6 \\ H_A &= 0, & H_{AP} &= -\frac{1}{\sqrt{2} q^2} [m_b q^0 G_8 + q^2 G_9] \\ H_S &= -H_1 + \frac{m_b^2}{q^2} q_0^2 H_2 + q^2 H_4, \\ H_{SP} &= |\vec{q}| \left[-G_1 + \frac{m_b^2}{q^2} q_0^2 G_2 + q^2 G_4 + 2 m_b q^0 G_5 - 2 \frac{m_b}{q^2} q^0 G_6 - 2 G_7 \right] \\ H_{SL} &= \frac{m_b^2}{q^2} q^0 |\vec{q}| H_2, \\ H_{SLP} &= \left[\frac{m_b^2}{q^2} q^0 |\vec{q}|^2 G_2 + m_b |\vec{q}|^2 G_5 - \frac{m_b}{q^2} (q_0^2 + |\vec{q}|^2) G_6 - q^0 G_7 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{ST} &= 0, & H_{ST^P} &= \frac{1}{\sqrt{2}q^2} \left[m_b q^0 G_6 + q^2 G_7 \right] \\
H_{ST'} &= 0, & H_{ST'^P} &= -\frac{m_b}{\sqrt{2}q^2} |\vec{q}| G_8.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Für die Projektoren $P_i^{\mu\nu}$ mit $i = T, 5, 7, 9, 12, 14, 16$, die in (4.13) definiert wurden, ergibt sich $H_i = H_{i^P} = 0$. Daher liefern die Strukturfunktionen dieser Helizitäten keinen Beitrag zu der Entwicklung des Hadron-Tensors in eine Linearkombination der Projektoren. Damit bleiben fünf unpolarisierte und neun polarisierte nichtverschwindende Helizitäts-Strukturfunktionen übrig, entsprechend der Anzahl der Invarianten H_i und G_j . Nach (4.56) beschreiben die polarisierten Strukturfunktionen für die Helizitäten U^P, L^P, F^P, S^P und SL^P , den longitudinalen Spin des b -Quarks, während die Strukturfunktionen für die Helizitäten I^P, A^P, ST^P und ST'^P den transversalen b -Spin enthalten. Wie aus der Entwicklung (4.45) des Hadron-Tensors hervorgeht, treten die Invarianten H_1, \dots, H_5 nur in den unpolarisierten und die Invarianten G_1, \dots, G_9 nur in den polarisierten Strukturfunktionen auf.

Als nächstes werden wir den Hadron-Tensor mit Hilfe der unpolarisierten und der polarisierten Strukturfunktionen in eine Linearkombination der Helizitäts-Projektoren entwickeln. Dazu verwenden wir zunächst die Definition (4.55) sowie die Orthogonalitätsrelationen der Projektoren (4.16) und erhalten

$$H_{\mu\nu} P_i^{\mu\nu} = \bar{H}_i = \sum_j \bar{H}_j \delta_{ij} = \sum_j \bar{H}_j \left(\frac{1}{c_j} P_i^{\mu\nu} P_{j,\mu\nu} \right) = \left(\sum_j \frac{1}{c_j} \bar{H}_j P_{j,\mu\nu} \right) P_i^{\mu\nu}. \tag{4.59}$$

Vergleicht man die Koeffizienten der Helizitäts-Projektoren $P_i^{\mu\nu}$ für den linken und den rechten Teil dieser Gleichung, so kann man die Entwicklung des Hadron-Tensors in die Projektoren direkt angeben. Es gilt

$$H_{\mu\nu} = \sum_j \frac{1}{c_j} \bar{H}_j P_{j,\mu\nu}. \tag{4.60}$$

Der Index j läuft über die Helizitäten $U, L, F, I, A, S, SL, ST, ST'$. Mit den Relationen (4.57) lassen sich schließlich die \bar{H}_i durch die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen (4.56) ausdrücken, und die Entwicklung (4.60) kann in der Form

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(H_U + P \cos \theta_P H_{U^P} \right) P_{U,\mu\nu} + \left(H_L + P \cos \theta_P H_{L^P} \right) P_{L,\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(H_F + P \cos \theta_P H_{F^P} \right) P_{F,\mu\nu} + 4 P \sin \theta_P H_{I^P} P_{I,\mu\nu} - 4 P \sin \theta_P H_{A^P} P_{A,\mu\nu} \\
&\quad + \left(H_S + P \cos \theta_P H_{S^P} \right) P_{S,\mu\nu} - 2 \left(H_{SL} + P \cos \theta_P H_{SL^P} \right) P_{SL,\mu\nu} \\
&\quad - 4 P \sin \theta_P H_{ST^P} P_{ST,\mu\nu} + 4 P \sin \theta_P H_{ST'^P} P_{ST',\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

geschrieben werden. Im Grenzfall masseloser Leptonen tragen die vier Terme in den beiden letzten Zeilen nicht bei. Während die Entwicklung des Lepton-Tensors (4.23) alle 16

Projektoren enthält, benötigt man für die Entwicklung des Hadron-Tensors nur noch 9 Projektoren, weil die übrigen aufgrund der Struktur (4.45) bei der Kontraktion mit den Helizitäts-Projektoren keinen Beitrag liefern.

Man kann noch einen anderen Satz von Helizitäts-Strukturfunktionen definieren, indem man von einer verallgemeinerten Form des betragsquadrirten Matrixelementes ausgeht. Der Hadron-Tensor für den b -Zerfall kann allgemein geschrieben werden als

$$H_{\mu\nu} = \sum_{s_{X_c}} \left[\bar{u}(p_c, s_c) T_\mu(X_c) u(p_b, s_b) \right] \left[\bar{u}(p_b, s_b) \bar{T}_\nu(X_c) u(p_c, s_c) \right], \quad (4.62)$$

wobei s_{X_c} die Spins des hadronischen Endzustandes sind und T_μ den matrixwertigen Anteil des Hadronenstroms bezeichnet. Dieser ist vom Endzustand X_c abhängig, der im Falle der Bornschen Näherung und der Schleifenkorrekturen ein c -Quark und im Falle der Bremsstrahlungs-Korrekturen ein c -Quark und ein Gluon enthält. Außerdem hängt er vom Spin des b -Quarks s_b ab. Entsprechend sind die Faktoren $T_\mu(X_c)$ Produkte von Gamma-Matrizen für die Bornsche und die korrigierten Raten, die den elektroschwachen Vertex enthalten. Die neuen Helizitäts-Strukturfunktionen werden nun definiert als Kontraktion eines solchen Hadron-Tensors mit zwei Polarisationsvektoren des W -Bosons, wo allerdings die beiden Spinoren u und \bar{u} des b -Quarks nicht vom selben Spin abhängen:

$$H_{\lambda\lambda'}^{s_b s_b'} = \sum_{s_{X_c}} \left[\bar{u}(p_c, s_c) T_\mu(X_c) u(p_b, s_b) \epsilon^{*\mu}(q, \lambda) \right] \left[\bar{u}(p_b, s_b') \bar{T}_\nu(X_c) u(p_c, s_c) \epsilon^\nu(q, \lambda') \right]. \quad (4.63)$$

Die b -Spins können die Werte $\pm 1/2$ annehmen, die Helizitäten des virtuellen W -Bosons besitzen als mögliche Einstellungen $\lambda = t, 0, \pm 1$. Man kann die Helizitäts-Strukturfunktionen jeweils als Matrix mit den Indizes $+$, $-$ für den b -Spin oder $t, 0, +, -$ für die Helizität des W schreiben. Deshalb spricht man auch von der *doppelten Dichtematrix*. Die Matrixelemente $H_{\lambda\lambda'}^{s_b s_b'}$ sind hermitesch bei Vertauschung von Anfangs- und Endzustand:

$$\left(H_{\lambda\lambda'}^{s_b s_b'} \right)^* = H_{\lambda'\lambda}^{s_b' s_b}. \quad (4.64)$$

Weil die Matrixelemente für den b -Zerfall reell sind, kann man die komplexe Konjugation weglassen, und die Hermitezität geht in eine Symmetrie über. Die Hermitezität kann man leicht durch komplexe Konjugation nachweisen. Sie überträgt sich auch auf den Hadron-Tensor (4.45). Nach Einsetzen der parametrisierten Viererimpulse (4.29) und des b -Polarisationsvektors (4.49) ergibt sich für die einzelnen Komponenten des Hadron-Tensors

$$\begin{aligned} H_{00} &= -H_1 + m_b^2 H_2 + q_0^2 H_4 + 2 m_b q^0 H_5 - |\vec{q}| s_z (G_1 - m_b^2 G_2 - q_0^2 G_4 - 2 m_b q^0 G_5) \\ H_{11} &= H_{22} = H_1 + |\vec{q}| s_z G_1 \\ H_{33} &= H_1 + |\vec{q}|^2 H_4 + |\vec{q}| s_z (G_1 + |\vec{q}|^2 G_4 + 2 G_7) \\ H_{01} &= (H_{10})^* = -s_x (m_b G_6 + q^0 G_7) \\ H_{02} &= (H_{20})^* = -i |\vec{q}| s_x G_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{03} &= (H_{30})^* = -q^0 |\vec{q}| H_4 - m_b |\vec{q}| H_5 - s_z (q^0 |\vec{q}|^2 G_4 + m_b |\vec{q}|^2 G_5 + m_b G_6 + q^0 G_7) \\
H_{12} &= (H_{21})^* = i [m_b |\vec{q}| H_3 + s_z (m_b |\vec{q}|^2 G_3 - m_b G_8 - q^0 G_9)] \\
H_{13} &= (H_{31})^* = |\vec{q}| s_x G_7 \\
H_{23} &= (H_{32})^* = -i s_x (m_b G_8 + q^0 G_9). \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Für masselose Leptonen tragen die Invarianten H_4 und H_5 sowie G_4 , G_5 und G_7 nicht bei, weil die zugehörigen Terme bei der Kontraktion mit dem Lepton-Tensor verschwinden.

Weil beim Zerfall eines polarisierten b -Quarks über den Spin des Endzustandes X_c summiert wird, sind der b -Quark-Spin und die Helizität des W -Bosons nicht voneinander unabhängig. Aus der Erhaltung des Drehimpulses folgen die Auswahlregeln für die Differenzen der Helizitäten

$$s_b - \lambda = s'_b - \lambda'. \tag{4.66}$$

Für die Bornsche Amplitude mit einem c -Quark im Endzustand $X_c = c$ vereinfacht sich die Differenz zu

$$s_b - \lambda = s'_b - \lambda' = \pm \frac{1}{2}.$$

Im masselosen Grenzfall ist das c -Quark nur linkshändig, so daß nur der Wert $-1/2$ für die Differenz erlaubt ist.

Abschließend geben wir den Zusammenhang zwischen den Komponenten der Dichtematrix (4.63) und den Helizitäts-Strukturfunktionen (4.56) und (4.58) an. Es ergeben sich folgende Linearkombinationen

$$\begin{aligned}
H_U &= H_{++}^{++} + H_{++}^{--} + H_{--}^{++} + H_{--}^{--} \\
H_{UP} &= H_{++}^{++} - H_{++}^{--} + H_{--}^{++} - H_{--}^{--} \\
H_L &= H_{00}^{++} + H_{00}^{--} \\
H_{LP} &= H_{00}^{++} - H_{00}^{--} \\
H_F &= H_{++}^{++} + H_{++}^{--} - H_{--}^{++} - H_{--}^{--} \\
H_{FP} &= H_{++}^{++} - H_{++}^{--} - H_{--}^{++} + H_{--}^{--} \\
H_{IP} &= \frac{1}{4} (H_{+0}^{+-} + H_{0+}^{-+} - H_{-0}^{-+} - H_{0-}^{+-}) = \frac{1}{2} (H_{+0}^{+-} - H_{-0}^{-+}) \\
H_{AP} &= \frac{1}{4} (H_{+0}^{+-} + H_{0+}^{-+} + H_{-0}^{-+} + H_{0-}^{+-}) = \frac{1}{2} (H_{+0}^{+-} + H_{-0}^{-+}) \\
H_S &= H_{tt}^{++} + H_{tt}^{--} \\
H_{SP} &= H_{tt}^{++} - H_{tt}^{--} \\
H_{SL} &= H_{0t}^{++} + H_{0t}^{--} \\
H_{SLP} &= H_{0t}^{++} - H_{0t}^{--} \\
H_{STP} &= \frac{1}{4} (H_{+t}^{+-} + H_{t+}^{-+} - H_{-t}^{-+} - H_{t-}^{+-}) = \frac{1}{2} (H_{+t}^{+-} - H_{-t}^{-+})
\end{aligned}$$

$$H_{ST'P} = \frac{1}{4} (H_{+t}^{+-} + H_{t+}^{-+} + H_{-t}^{+} + H_{t-}^{+-}) = \frac{1}{2} (W_{+t}^{+-} + W_{-t}^{-+}). \quad (4.67)$$

Die Diagonalelemente der Dichtematrix ($H_{\lambda\lambda'}^{s_b s_b'}$) sind durch gleiche Helizitäten $\lambda = \lambda'$ gegeben, die nichtdiagonalen Elemente durch verschiedene Helizitäten. Aufgrund der Symmetrie des Hadron-Tensors (4.64) und wegen der Auswahlregeln (4.66) verschwinden die Strukturfunktionen $H_T, H_5, H_7, H_9, H_{12}, H_{14}$ und H_{16} . Außerdem können die Funktionen H_I^P und H_A^P sowie H_{STP} und $H_{ST'P}$ wegen der Symmetrie des Hadron-Tensors vereinfacht werden. Insgesamt gibt es fünf unpolarisierte und neun polarisierte Strukturfunktionen. Die Funktion $H_{ST'P}$ liefert nur einen Beitrag für die transversale Polarisation des geladenen Leptons. Im Falle masseloser Leptonen tragen die Strukturfunktionen $H_S, H_{SP}, H_{SL}, H_{SLP}, H_{STP}$ und $H_{ST'P}$ nicht bei, da sie bei der Kontraktion mit dem Lepton-Tensor verschwinden.

4.4 Berechnung der Zerfallsrate

In den beiden vorangegangenen Abschnitten haben wir den Lepton-Tensor und den Hadron-Tensor als Linearkombination der Helizitäts-Projektoren geschrieben. Im nächsten Schritt werden wir durch Kontraktion beider Tensoren das betragsquadrierte Matrixelement bestimmen und daraus schließlich die Winkelverteilung der Zerfallsrate berechnen. Man kann die totale Zerfallsrate dieses Dreikörper-Zerfalls in ein Produkt aus den totalen Zerfallsraten zweier Zweikörper-Zerfälle aufspalten, die den Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein W^- -Boson und den anschließenden W -Zerfall in ein Lepton-Paar beschreiben, wobei sich das W^- -Boson nicht auf der Massenschale befindet. Man spaltet somit den Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$ in zwei aufeinander folgende Zerfälle $b \rightarrow c + W^-$ und $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$ auf.

Im allgemeinen Fall massiver und polarisierter Leptonen ist der Hadron-Tensor durch (4.61) und der Lepton-Tensor durch (4.23) als Linearkombination der Helizitäts-Projektoren gegeben. Mit den kompakten Darstellungen (4.60) und (4.20) lassen sich Hadron- und Lepton-Tensor durch

$$H_{\mu\nu} = \sum_i \frac{1}{c_i} \bar{H}_i(q_0, q^2, \cos \theta_P) P_{i,\mu\nu}, \quad L^{\mu\nu} = \sum_j l_j(q^2, \cos \theta, \phi) P_j^{\mu\nu} \quad (4.68)$$

abkürzen, wobei die Koeffizienten die Abhängigkeit von den Winkeln sowie vom Impulsquadrat q^2 enthalten. Alle kinematischen Größen sind in Abbildung 4.1 definiert. Die Kontraktion von Hadron- und Lepton-Tensor kann mit den Relationen (4.16) vereinfacht werden und lautet

$$H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = \sum_{i,j} \frac{1}{c_i} \bar{H}_i l_j P_{i,\mu\nu} P_j^{\mu\nu} = \sum_{i,j} \frac{1}{c_i} \bar{H}_i l_j c_i \delta_{ij} = \sum_i \bar{H}_i l_i. \quad (4.69)$$

Das betragsquadrierte Matrixelement erhält man daraus nach (4.2) durch Multiplikation mit einem konstanten Vorfaktor, der im wesentlichen durch die Kopplung gegeben ist. Es lautet

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \sum_i \bar{H}_i l_i. \quad (4.70)$$

Die totale Zerfallsrate ergibt sich dann durch Integration über den Phasenraum der Teilchen im Endzustand und anschließender Multiplikation mit dem Flußfaktor zu

$$\Gamma = \frac{1}{2 m_b} \int \frac{d^3 \vec{p}_c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}_{\nu_l}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - p_l - p_{\nu_l})}{8 E_c E_l E_{\nu}} |\overline{\mathcal{M}}|^2. \quad (4.71)$$

Um diesen Ausdruck in ein Produkt der beiden Zerfallsraten für die Teilzerfälle des b -Quarks und des W -Bosons umzuschreiben, schiebt man die Identität

$$1 = \int d^4 q \delta^4(q - p_l - p_{\nu_l}) = \int dq^2 \int \frac{d^3 \vec{q}}{2 q^0} \delta^4(q - p_l - p_{\nu_l}) \quad (4.72)$$

ein und vertauscht die Integrations-Reihenfolge, so daß man nach Einsetzen des betragsquadrirten Matrixelementes (4.70) folgendes Ergebnis erhält:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{g_w^4}{64 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left[\frac{1}{2 m_b} \int \frac{d^3 \vec{p}_c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}_{\nu_l}}{(2\pi)^3} \int dq^2 \int \frac{d^3 \vec{q}}{2 q^0} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - p_l - p_{\nu_l})}{8 E_c E_l E_{\nu}} \delta^4(q - p_l - p_{\nu_l}) H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{M_W^4} \sum_i \int \frac{dq^2}{\pi} \frac{\sqrt{q^2}}{c_i} \left[\frac{1}{2 m_b} \int \frac{d^3 \vec{p}_c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - q)}{4 E_c q^0} \left(\frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_i \right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2\sqrt{q^2}} \int \frac{d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}_{\nu_l}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q - p_l - p_{\nu_l})}{4 E_l E_{\nu}} \left(\frac{g_w^2}{8} c_i l_i \right) \right] \\ &\equiv \frac{1}{M_W^4} \sum_i \int \frac{dq^2}{\pi} \frac{\sqrt{q^2}}{c_i} \Gamma_{b,i} \Gamma_{W,i}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Die Zerfallsraten $\Gamma_{b,i}$ und $\Gamma_{W,i}$ beschreiben jeweils den Zerfall des b -Quarks in ein c -Quark und ein W -Boson sowie den anschließenden W -Zerfall in ein Leptonpaar. Das W -Boson besitzt für jeden einzelnen Summanden i einen Polarisationszustand, der durch den zugehörigen Projektor P_i gegeben ist. Nach Ausintegrieren der δ -Funktion und Einführung sphärischer Polarkoordinaten für die Integration sind die Raten durch

$$\begin{aligned} \Gamma_{b,i} &= \frac{1}{2 m_b} \int \frac{d^3 \vec{p}_c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - q)}{4 E_c q^0} \left(\frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_i \right) \\ &= \int d\phi_P \int d \cos \theta_P \frac{|\vec{q}|}{32\pi^2 m_b^2} \left(\frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_i(q_0, q^2, \theta_P) \right) \\ \Gamma_{W,i} &= \frac{1}{2\sqrt{q^2}} \int \frac{d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}_{\nu_l}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q - p_l - p_{\nu_l})}{4 E_l E_{\nu}} \left(\frac{g_w^2}{8} c_i l_i \right) \end{aligned}$$

$$= \int d\phi \int d\cos\theta \frac{|\vec{p}_l|}{32\pi^2 q^2} \left(\frac{g_w^2}{8} c_i l_i(q^2, \theta, \phi) \right) \quad (4.74)$$

gegeben, wobei für die Bornsche Rate

$$|\vec{q}| = \frac{1}{2m_b} \sqrt{\lambda(m_b^2, m_c^2, q^2)}, \quad |\vec{p}_l| = \frac{q^2 - m_l^2}{2\sqrt{q^2}} \quad (4.75)$$

gilt, wenn man die Masse des geladenen Leptons nicht vernachlässigt. Die auftretenden Winkelvariablen sind in Abbildung 4.1 veranschaulicht. Wie man dort erkennen kann, ist θ_P im Ruhesystem des b -Quarks, und θ und ϕ sind im W -Ruhesystem definiert. Aufgrund der Azimuthal-Symmetrie hängt der Integrand für den b -Zerfall nicht vom Winkel ϕ_P ab. Nach Einsetzen der Raten (4.74) in die totale Rate (4.73) erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{M_W^4} \sum_i \int \frac{dq^2}{\pi} \frac{\sqrt{q^2}}{c_i} \int d\cos\theta_P \frac{|\vec{q}|}{16\pi m_b^2} \left(\frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_i(q_0, q^2, \theta_P) \right) \\ & \times \int d\phi \int d\cos\theta \frac{|\vec{p}_l|}{32\pi^2 q^2} \left(\frac{g_w^2}{8} c_i l_i(q^2, \theta, \phi) \right). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Auf das weitere Auswerten der Integrale wird hier verzichtet, da wir die totale Rate in den nachfolgenden Kapiteln nicht benötigen. Stattdessen werden wir die differentielle Form von (4.76) diskutieren und deren Winkelverteilung angeben.

4.5 Winkelverteilungen

Zum Abschluß dieses Kapitels werden wir die Winkelverteilung für die vierfach differentielle Rate des b -Quark-Zerfalls berechnen. Sie geht aus der totalen Rate (4.76) hervor, indem man auf die Integrationen verzichtet, und sie hängt noch von den Winkeln und von q^2 ab. Sie lautet

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dq^2 d\cos\theta_P d\cos\theta d\phi} &= \frac{1}{M_W^4} \sum_i \frac{\sqrt{q^2}}{c_i \pi} \frac{|\vec{q}|}{16\pi m_b^2} \left(\frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_i(q_0, q^2, \theta_P) \right) \\ & \quad \times \frac{|\vec{p}_l|}{32\pi^2 q^2} \left(\frac{g_w^2}{8} c_i l_i(q^2, \theta, \phi) \right) \\ &= \frac{\sqrt{q^2}}{\pi} \frac{|\vec{q}|}{16\pi m_b^2} \frac{|\vec{p}_l|}{32\pi^2 q^2} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (4.77)$$

und kann mit Hilfe der Relation (4.70) wieder durch das Betragsquadrat des Matrixelements ausgedrückt werden. Für die Anwendungen in Kapitel 5 genügt es, den Fall masseloser Leptonen zu behandeln, so daß wir im folgenden nur diesen Fall diskutieren werden. Das

spinsummierte Betragsquadrat der Amplitude ergibt sich aus dem spinsummierten Matrixelement (3.9) und den Darstellungen des Hadron-Tensors (4.61) und des Lepton-Tensors (4.28) mit Hilfe der Orthogonalitäts-Relationen der Projektoren (4.16):

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{g_w^4 q^2}{12 M_W^4} |V_{bc}|^2 \left[\left(H_U + P \cos \theta_P H_{UP} \right) \times \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) \right. \\
&+ \left(H_L + P \cos \theta_P H_{LP} \right) \times \frac{3}{4} \sin^2 \theta + \left(H_F + P \cos \theta_P H_{FP} \right) \times \frac{3}{4} \cos \theta \\
&\left. + \left(P \sin \theta_P H_{IP} \right) \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin(2\theta) \cos \phi + \left(P \sin \theta_P H_{AP} \right) \times \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \phi \right]. \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Das Resultat besteht aus der Summe von Produkten des hadronischen und des leptonischen Anteils, die jeweils aus den Entwicklungskoeffizienten des Hadron- und des Lepton-Tensors stammen. Die Winkel-Koeffizienten wurden so normiert, daß die Integration über θ und ϕ entweder 2π oder 0 ergibt. Nach Einsetzen von (4.78) für das gemittelte Betragsquadrat des Matrixelementes in die Beziehung (4.77) und der Umrechnung der schwachen Kopplungskonstanten auf die Fermi-Konstante $g_w^4/(64 M_W^4) = G_F^2/2$ lautet die Winkelverteilung des b -Zerfalls für masselose Leptonen

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{dq^2 d \cos \theta_P d \cos \theta d \phi} &= \frac{1}{4\pi} \frac{G_F^2 |V_{bc}|^2}{192 \pi^3 m_b^3} q^2 \sqrt{\lambda(m_b^2, m_c^2, q^2)} \\
&\times \left[\frac{3}{8} \left(H_U + P \cos \theta_P H_{UP} \right) (1 + \cos^2 \theta) + \frac{3}{4} \left(H_L + P \cos \theta_P H_{LP} \right) \sin^2 \theta \right. \\
&+ \frac{3}{4} \left(H_F + P \cos \theta_P H_{FP} \right) \cos \theta \\
&\left. + \frac{3}{\sqrt{2}} \left(P \sin \theta_P H_{IP} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \phi + \frac{3}{\sqrt{2}} \left(P \sin \theta_P H_{AP} \right) \sin \theta \cos \phi \right]. \quad (4.79)
\end{aligned}$$

Man kann dieses Resultat auf die totale unpolarisierte Rate im Grenzfall masseloser c -Quarks, die in (3.32) angegeben ist, normieren, indem man sowohl die Quarkmassen als auch die Variable q^2 und die Helizitäts-Raten H_i durch Einführung der dimensionslosen Größen

$$x^2 = \frac{q^2}{m_b^2}, \quad y = \frac{m_c}{m_b}, \quad \hat{H}_i = \frac{H_i}{m_b^2}$$

mit der b -Masse skaliert. Definiert man außerdem für alle Helizitäten i die reduzierten Raten

$$\frac{d\hat{\Gamma}_i}{dx^2} = x^2 \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \hat{H}_i, \quad (4.80)$$

so läßt sich das Resultat in der Form

$$\frac{d\Gamma}{dx^2 d \cos \theta_P d \cos \theta d \phi} = \frac{\Gamma_b}{4\pi}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{3}{8} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_U}{dx^2} + P \cos \theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{UP}}{dx^2} \right) (1 + \cos^2 \theta) + \frac{3}{4} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_L}{dx^2} + P \cos \theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{LP}}{dx^2} \right) \sin^2 \theta \right. \\
& + \frac{3}{4} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_F}{dx^2} + P \cos \theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{FP}}{dx^2} \right) \cos \theta \\
& \left. + \frac{3}{\sqrt{2}} \left(P \sin \theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{IP}}{dx^2} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \phi + \frac{3}{\sqrt{2}} \left(P \sin \theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{AP}}{dx^2} \right) \sin \theta \cos \phi \right] \quad (4.81)
\end{aligned}$$

schreiben. Aus diesem Ergebnis kann man die totale Zerfallsrate berechnen, indem man über die Winkel und über die Variable x^2 integriert. Die Winkelintegration ist relativ leicht durchzuführen, und man erhält

$$\frac{d\Gamma}{dx^2} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_{-1}^1 d \cos \theta_P \frac{d\Gamma}{dx^2 d \cos \theta_P d \cos \theta d\phi} = \Gamma_b \left(\frac{d\hat{\Gamma}_U}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_L}{dx^2} \right). \quad (4.82)$$

Für die x^2 -Integration bestimmt man die Integrationsgrenzen am einfachsten durch Quadrieren der Viererimpuls-Erhaltung $p_b - p_c = q = p_l + p_{\nu_l}$. Die erste Relation liefert im Ruhesystem des b

$$q^2 = (p_b - p_c)^2 = m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b E_c \leq (m_b - m_c)^2, \quad (4.83)$$

die zweite ergibt für masselose Leptonen im W -Ruhesystem

$$q^2 = (p_l + p_{\nu_l})^2 = 4 |\vec{p}_l|^2 \geq 0. \quad (4.84)$$

Nach der Skalierung mit der b -Masse erhält man schließlich

$$0 \leq x^2 \leq (1 - y)^2. \quad (4.85)$$

Damit lautet das Resultat für die totale Zerfallsrate

$$\Gamma = \int_0^{(1-y)^2} dx^2 \frac{d\Gamma}{dx^2} = \Gamma_b \left(\hat{\Gamma}_U + \hat{\Gamma}_L \right). \quad (4.86)$$

Kapitel 5

Polarisationsobservable im Ruhesystem des virtuellen W -Bosons

5.1 Einleitung

In Kapitel 3 haben wir die QCD-Strahlungskorrekturen zur inklusiven differentiellen Zerfallsrate für den Zerfall eines unpolarisierten b -Quarks in ein polarisiertes c -Quark und ein Lepton-Paar berechnet. Dabei wurde der Phasenraum der Leptonen total ausintegriert und die differentielle Rate nach der skalierten Energie des c -Quarks in analytischer Form angegeben. Wir wollen uns in diesem Kapitel den Zerfall eines polarisierten b -Quarks in ein unpolarisiertes c -Quark ansehen. Das Ziel ist die Berechnung der inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen zur differentiellen Zerfallsrate nach dem skalierten Viererimpulsquadrat des W -Bosons. Dazu teilt man den gesamten Zerfallsprozeß auf in einen Zerfall des b -Quarks in ein c -Quark und ein virtuelles W -Boson, gefolgt vom Zerfall des virtuellen W in ein Lepton-Paar. Im Unterschied zu Kapitel 3 wird hier aber nicht über die räumliche Orientierung der Leptonen integriert, sondern sie wird statt dessen zur Analyse der Polarisation des off-shell W -Bosons herangezogen. Es erweist sich als vorteilhaft, diese Analyse im Ruhesystem des virtuellen W -Bosons durchzuführen.

Die vollständige Winkelabhängigkeit des diskutierten Zerfallsprozesses wird durch die Helizitäts-Strukturfunktionen beschrieben, die in Abschnitt 4.3 angegeben wurden. Für masselose Leptonen gibt es insgesamt drei unpolarisierte und fünf polarisierte Strukturfunktionen, die beim Zerfall eines polarisierten b -Quarks in ein unpolarisiertes c -Quark und ein virtuelles W -Boson benötigt werden. In diesem Kapitel werden die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung α_s zu diesen Helizitäts-Strukturfunktionen berechnet, die sowohl die Schleifenkorrekturen als auch die Bremsstrahlungsbeiträge beinhalten. Darüberhinaus werden auch die Strahlungskorrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zur unpolarisierten und polarisierten Strukturfunktion der skalaren Polarisation berechnet, die nur bei massiven Leptonen eine Rolle spielt und in den Anwendungen auf hadronische Zerfälle in Kapitel 6 benötigt wird.

Die Winkelverteilung des Zerfallsprozesses wird wie erwähnt in Kaskadenform beschrieben. Daher ist es sinnvoll, den Zerfall $b^\dagger \rightarrow c + W^-$ im Ruhesystem des b zu analysieren, während der nachfolgende Zerfall des W -Bosons $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$ im W -Ruhesystem ausgewertet wird. Nach Integration über die Winkelvariablen erhält man die differentielle Rate $d\Gamma/dq^2$ nach dem Impulsquadrat des W -Bosons, die nach nochmaliger Integration über q^2 die totale Zerfallsrate liefert. Die totale Zerfallsrate kann natürlich auch aus der differentiellen Rate $d\Gamma/dx$ nach der skalierten c -Energie, welche in Kapitel 3 diskutiert wurde, berechnet werden, indem man über x integriert. Diese Integration ist für den Zerfall eines polarisierten Myons in ein polarisiertes Elektron bereits durchgeführt worden [41] und kann sofort auf den b -Zerfall übertragen werden, da beide Resultate dieselbe analytische Struktur besitzen. Die q^2 -Integration der strahlungskorrigierten Helizitäts-Strukturfunktionen ist jedoch im allgemeinen sehr schwierig und geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Allerdings ist es relativ leicht möglich, die totale Zerfallsrate in Bornscher Näherung zu berechnen. Damit kann man das Resultat für den Born-Term aus Kapitel 3 mit dem aus diesem Kapitel vergleichen.

Im Zerfall eines polarisierten b -Quarks in ein off-shell W -Boson und ein unpolarisiertes c -Quark besitzt das W eine nichtverschwindende Polarisation, die durch eine sogenannte Spin-Dichtematrix beschrieben werden kann. Die W -Polarisation geht in die Winkelverteilung des nachfolgenden Zerfalls des W in ein Lepton-Paar ein. Um den Zerfall eines b -Quarks zu beschreiben, benötigt man drei unpolarisierte Strukturfunktionen, die die Informationen des unpolarisierten oder spingemittelten b -Quarks enthalten und die mit H_U , H_L und H_F bezeichnet werden. Außerdem werden zusätzlich fünf polarisierte Strukturfunktionen zur Beschreibung der Polarisation des b benötigt, die man mit H_{UP} , H_{LP} , H_{FP} , H_{IP} und H_{AP} bezeichnet. Sie können mit Hilfe der Analyse der Spin-Impuls-Korrelationen zwischen dem Polarisationsvektor des b -Quarks und den Impulsen seiner Zerfallsprodukte gemessen werden. Für spätere Anwendungen auf hadronische Zerfälle in Kapitel 6 werden außerdem die unpolarisierte und die polarisierte skalare Helizitäts-Strukturfunktion H_S und H_{SP} benötigt.

In diesem Kapitel studieren wir die Impuls-Impuls- und die Spin-Impuls-Korrelationen im Kaskaden-Zerfall $b \rightarrow c + W^-$, gefolgt von $W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$. Die erste Stufe dieses Zerfalls wird im Ruhesystem des b -Quarks ausgewertet, wo die Korrelation zwischen dem Spin des b -Quarks und dem Impulsvektor des W -Bosons diskutiert wird. Im zweiten Schritt untersuchen wir die Korrelation zwischen dem Impuls des geladenen Leptons und der anfänglichen Richtung des W -Impulses im Ruhesystem des W -Bosons. Vom theoretischen Standpunkt aus ist die Analyse in Form dieses Kaskaden-Zerfalls vorteilhaft, weil man damit den longitudinalen Anteil des W -Bosons isolieren kann, welcher wichtig ist für das Verständnis der elektroschwachen Symmetriebrechung im Standardmodell. Die Ergebnisse der Analysen in beiden Bezugssystemen können durch einen Lorentz-Boost entlang der Richtung des W -Impulses miteinander in Beziehung gesetzt werden, wobei die azimuthale Winkelabhängigkeit dadurch nicht geändert wird.

Wir berechnen in diesem Kapitel für die Helizitäts-Strukturfunktionen die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung der starken Kopplungskonstanten α_s in analytischer Form. Aufgrund des relativ großen Verhältnisses der Quarkmassen m_c/m_b ist

es notwendig, die endliche c -Masse in den Berechnungen zu berücksichtigen. Unsere analytischen Resultate für den hadronischen Anteil können direkt mit denen des Topquark-Zerfalls verglichen werden, wenn man die Ersetzungen $p_b \leftrightarrow p_t$, $p_c \leftrightarrow p_b$, $s_b \leftrightarrow s_t$ für die Viererimpulse und den Polarisationsvektor durchführt. Der leptonische Anteil unterscheidet sich durch das Vorzeichen des paritäts-verletzenden Anteils. Dies liegt daran, daß beim Top-Zerfall anstelle eines W^- ein virtuelles W^+ -Boson auftritt, das in ein Neutrino und ein geladenes Antilepton zerfällt. Die vollständige Analyse der Winkelverteilung des Top-Zerfalls einschließlich der Berücksichtigung einer endlichen b -Masse ist in [59] angegeben, deren Resultate für die Strukturfunktionen beim Vergleichen mit unseren Resultaten herangezogen werden können. Ein Teil der berechneten Strukturfunktionen kann mit bereits existierenden Berechnungen einiger Spezialfälle oder Massengrenzwerte verglichen werden. Beispielsweise ist die totale Rate in [60] mit endlicher b -Masse gerechnet worden. Weil das Massenverhältnis m_b/m_t sehr klein ist, wurden einige der Helizitäts-Strukturfunktionen bereits früher im Grenzfall $m_b \rightarrow 0$ berechnet [61], weil die Resultate für vernachlässigte b -Masse eine bedeutend einfachere analytische Form annehmen. Sie können mit unseren Resultaten für $m_c \rightarrow 0$ verglichen werden. Für den Top-Zerfall existieren auch analytische Resultate der totalen Rate [62, 63, 64] im Grenzfall verschwindender b -Masse, und es wurden auch einige numerische Berechnungen für $m_b \rightarrow 0$ durchgeführt [65, 66, 67]. Auch damit können unsere Resultate verglichen werden, wenn man die Masse des c -Quarks vernachlässigt.

In den folgenden Abschnitten werden wir die kovarianten Helizitäts-Projektoren (4.44) aus Kapitel 4 verwenden, um daraus die erwähnten unpolarisierten und polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen zu berechnen, welche die winkelabhängigen Koeffizienten der Winkelverteilung des b -Zerfalls darstellen. Diese Projektoren können dazu verwendet werden, die entsprechenden Helizitäts-Strukturfunktionen aus dem Hadron-Tensor herauszuprojizieren. Das hat den Vorteil, daß man die Helizitäts-Strukturfunktionen direkt berechnen kann und dabei aus dem Hadron-Tensor einen Skalar bildet, was die Integration der Bremsstrahlungs-Beiträge deutlich vereinfacht. Anschließend werden die Strukturfunktionen zuerst in Bornscher Näherung berechnet, danach folgen die Berechnungen der Einschleifen-Korrekturen sowie der Bremsstrahlungsbeiträge.

Am Ende dieses Kapitels werden die numerischen Resultate diskutiert. Anstelle der Helizitäts-Strukturfunktionen kann man auch die reduzierten Raten (4.80) verwenden, die auf die totale Zerfallsrate für masselose c -Quarks (3.32) normiert sind. Es wird der graphische Verlauf dieser Raten in Abhängigkeit des skalierten W -Impulsquadrates x^2 diskutiert. Außerdem wird auf den Einfluß der Strahlungskorrekturen auf die Bornschen Raten eingegangen.

5.2 Bornsche Näherung

Wir berechnen in diesem Abschnitt im Rahmen der QCD die Bornsche Näherung zu den Helizitäts-Raten für den Zerfall eines polarisierten b -Quarks in ein c -Quark und ein virtuelles W^- -Boson. Dazu bestimmen wir aus der Übergangsamplitude die Helizitäts-

Strukturfunktionen dieses Zerfallsprozesses für die unterschiedlichen Helizitäten des W -Bosons, welche mit Hilfe der in Kapitel 4 definierten Helizitäts-Projektoren ausgerechnet werden können. Die Raten erhält man aus den Strukturfunktionen durch Integration über den Phasenraum der Teilchen im Endzustand und nachfolgender Multiplikation mit dem Flußfaktor. Das Feynman-Diagramm, mit dessen Hilfe die Amplitude für den betrachteten Zerfall berechnet wird, ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

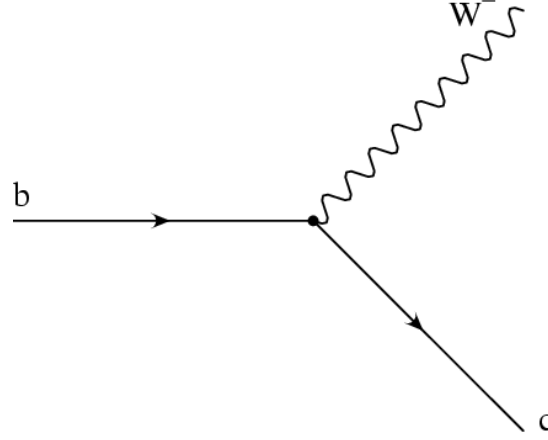


Abbildung 5.1: Feynman-Diagramm für das Matrixelement der Bornschen Näherung zum Zerfall $b \rightarrow c + W^-$ eines Bottom-Quarks in ein Charm-Quark und ein virtuelles W -Boson

5.2.1 Übergangsamplitude und Helizitäts-Strukturfunktionen

Das Matrixelement für diesen Zerfallsprozeß ergibt sich aus den in Anhang A.8 angegebenen Feynman-Regeln und lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{u}(p_c, s_c) \left[-\frac{i g_w}{\sqrt{2}} V_{bc} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] u(p_b, s_b) \epsilon^{*\mu}(q) \\ &= -\frac{i g_w}{\sqrt{8}} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \epsilon^{*\mu}(q) \equiv -\frac{i g_w}{\sqrt{8}} V_{bc} H_\mu \epsilon^{*\mu}(q). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Der Hadron-Strom in Bornscher Näherung H_μ ist derselbe wie in (3.4). Der dort auftretende Lepton-Strom L^μ wird hier durch den W -Polarisationsvektor $\epsilon^{*\mu}$ ersetzt. Das W -Boson ist nicht auf der Massenschale, da die W -Masse wesentlich größer ist als die Massen von b - und c -Quark. Die beiden Spinoren beschreiben das b - und das c -Quark, während der Polarisationsvektor ϵ die Polarisation des auslaufenden W -Bosons angibt. Da das W^- off-shell ist, wird die quadrierte W -Masse M_W^2 durch das Quadrat des Impulses q^2 ersetzt, das Werte im kinematisch erlaubten Bereich $0 \leq q^2 \leq (m_b - m_c)^2$ annehmen kann.

Für die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich nach Quadrieren des Matrixelementes

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 H_{\mu\nu} \epsilon^{*\mu}(q) \epsilon^\nu(q) \quad (5.2)$$

$$= \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \bar{u}(p_b, s_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu u(p_c, s_c) \epsilon^{*\mu}(q) \epsilon^\nu(q).$$

Der Hadron-Tensor $H_{\mu\nu}$ ist in Kapitel 3 durch (3.8) definiert worden. Der dort ebenfalls angegebene Lepton-Tensor wird im hier vorliegenden Fall durch das Produkt der beiden Polarisations-Vektoren ersetzt. In diesem Fall ist außerdem im Unterschied zu Kapitel 3 das zerfallende b -Quark polarisiert, dessen Spin durch einen Spinvektor s_b beschrieben wird. Der Spin des c -Quarks wird nicht gemessen, so daß man die Summe über seine möglichen Spinzustände bilden muß. Die Spineinstellung des virtuellen W kann neben einer longitudinalen und zweier transversaler Richtungen eines physikalischen W -Bosons, das sich auf der Massenschale befindet, zusätzlich einen skalaren Beitrag besitzen. Die Übergangswahrscheinlichkeit wird also über den Spin des c -Quarks summiert und das Ergebnis in einen Ausdruck umgeschrieben, der durch eine Spur von Gamma-Matrizen ausgedrückt wird. Man erhält für das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \equiv \sum_{s_c} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_{\mu\nu} \epsilon^{*\mu}(q) \epsilon^\nu(q) \quad (5.3)$$

mit dem spinsummierten Hadron-Tensor

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu} &= \sum_{s_c} H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Sp} [(\not{p}_c + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}_b + m_b) (1 + \gamma_5 \not{s}_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu] \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} [(\not{p}_c + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}_b - m_b \not{s}_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu] = \text{Sp} [\not{p}_c \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \\ &= 4 \left[\bar{p}_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} \bar{p}_{b,\nu} - g_{\mu\nu} (\bar{p}_b \cdot p_c) + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{p}_b^\rho p_c^\sigma \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei $\bar{p}_b = p_b - m_b s_b$ gilt. Schreibt man den Hadron-Tensor nach (4.54) als eine Summe eines spinunabhängigen und eines spinabhängigen Anteils, so ergibt sich für die beiden Summanden

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^0 &= 4 \left[p_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} p_{b,\nu} - g_{\mu\nu} (p_b \cdot p_c) + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_b^\rho p_c^\sigma \right] \\ H_{\mu\nu}^P(s_b) &= -4 m_b \left[s_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} s_{b,\nu} - g_{\mu\nu} (s_b \cdot p_c) + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s_b^\rho p_c^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Der spinunabhängige und der spinabhängige Anteil des Hadron-Tensors können jeweils bei der Berechnung der unpolarisierten und der polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen herangezogen werden.

Vergleicht man den spinsummierten Hadron-Tensor (5.4) mit dem Resultat (3.11) aus Kapitel 3, so stellt man fest, daß dort ein zusätzlicher Faktor $1/2$ auftritt, der aus der Mittelung über den Spin des b -Quarks kommt. Hier ist eine Mittelung nicht gegeben, da man den b -Spin im Anfangszustand berücksichtigt und statt dessen den Spin des c -Quarks als unbeobachtet betrachtet. Die unterschiedlichen Eigenschaften in Bezug auf den Spin der Quarks zeigen sich dadurch, daß der spingemittelte Hadron-Tensor aus Kapitel 3 vom

Vierervektor \bar{p}_c abhängt, der implizit den c -Spin enthält, während hier \bar{p}_b auftritt, das den b -Spin enthält. Im Falle unpolarisierter Quarks sind beide Ausdrücke für $\bar{H}_{\mu\nu}$ identisch.

Zur Berechnung der Helizitäts-Strukturfunktionen werden nun in (5.3) für das Produkt der Polarisationsvektoren die Helizitäts-Projektoren (4.13) eingesetzt, welche bestimmte Linearkombinationen aus Produkten der Polarisationsvektoren darstellen, die den unterschiedlichen Helizitäten zugeordnet sind. Man führt also im Matrixelement lediglich die Ersetzung $\epsilon^{*\mu}(q) \epsilon^\nu(q) \rightarrow P^{\mu\nu}$ durch. Die Projektoren können entweder explizit in Abhängigkeit der W -Polarisationsvektoren (4.13) oder auch in kovarianter Form (4.44) angegeben werden. Mit Hilfe dieser Projektoren kann man dann das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes für die verschiedenen Helizitäten in der Form

$$|\overline{\mathcal{M}}|_X^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_{\mu\nu} P_X^{\mu\nu} = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_X \quad (5.6)$$

angeben, wobei die Definition (4.55) verwendet wurde. Der Index $X = U, L, U+L, S, F, I, A$ bezeichnet die unterschiedlichen Helizitäten. Für spätere Anwendungen in hadronischen Zerfällen von B -Mesonen oder polarisierten Λ_b -Baryonen in D_s - oder D_s^* -Mesonen, welche in Kapitel 7 diskutiert werden, benötigt man nur die Raten zu den Helizitäten $X = U, L, S, I$. Trotzdem sollen hier der Vollständigkeit wegen auch die Helizitäts-Raten $X = F, A$ angegeben werden, welche zur vollständigen Beschreibung der Winkelverteilung für den b -Quark-Zerfall in ein c -Quark und ein Paar masseloser Leptonen benötigt werden. Außerdem wird die Summe der Helizitäten $X = U + L$ aufgelistet, die bei der Berechnung der totalen Rate auftritt und die auch bei der Diskussion der hadronischen Zerfälle in Kapitel 7 eine Rolle spielt.

Nach Einsetzen des Hadron-Tensors (5.4) und der Projektoren (4.44) in den Ausdruck für das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes (5.6) ergibt sich für die unterschiedlichen Helizitäts-Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} \bar{H}_U &= 4\bar{p}_b \cdot p_c + \frac{8}{q^2} (\bar{p}_b \cdot q) (p_c \cdot q) - \frac{4}{q_z^2} \left\{ -q^2 \bar{p}_b \cdot p_c + \frac{2}{m_b^2 q^2} (p_b \cdot q)^2 (\bar{p}_b \cdot q) (p_c \cdot q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_b^2} \left[2q^2 (p_b \cdot \bar{p}_b) (p_b \cdot p_c) + (p_b \cdot q)^2 (\bar{p}_b \cdot p_c) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(p_b \cdot p_c) (p_b \cdot q) (\bar{p}_b \cdot q) - 2(\bar{p}_b \cdot p_b) (p_b \cdot q) (p_c \cdot q) \right] \right\} \\ \bar{H}_L &= \frac{4}{q_z^2} \left\{ -q^2 \bar{p}_b \cdot p_c + \frac{2}{m_b^2 q^2} (p_b \cdot q)^2 (\bar{p}_b \cdot q) (p_c \cdot q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_b^2} \left[2q^2 (p_b \cdot \bar{p}_b) (p_b \cdot p_c) + (p_b \cdot q)^2 (\bar{p}_b \cdot p_c) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(p_b \cdot p_c) (p_b \cdot q) (\bar{p}_b \cdot q) - 2(\bar{p}_b \cdot p_b) (p_b \cdot q) (p_c \cdot q) \right] \right\} \\ \bar{H}_{U+L} &= 4\bar{p}_b \cdot p_c + \frac{8}{q^2} (\bar{p}_b \cdot q) (p_c \cdot q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{H}_S &= -4\bar{p}_b \cdot p_c + \frac{8}{q^2} (\bar{p}_b \cdot q) (p_c \cdot q) \\
\bar{H}_F &= \frac{8}{m_b q_z} \left[(\bar{p}_b \cdot q) (p_b \cdot p_c) - (\bar{p}_b \cdot p_b) (p_c \cdot q) \right] \\
\bar{H}_I &= \frac{4}{\sqrt{2} q^2 m_b q_z} \left\{ q^2 \left[(\epsilon_x \cdot p_c) (\bar{p}_b \cdot p_b) + (\epsilon_x \cdot \bar{p}_b) (p_b \cdot p_c) - (\epsilon_x \cdot p_b) (\bar{p}_b \cdot p_c) \right] \right. \\
&\quad \left. + (\epsilon_x \cdot q) (p_b \cdot q) (\bar{p}_b \cdot p_c) - (\epsilon_x \cdot p_c) (p_b \cdot q) (\bar{p}_b \cdot q) - (\epsilon_x \cdot \bar{p}_b) (p_b \cdot q) (p_c \cdot q) \right\} \\
\bar{H}_A &= \frac{4}{\sqrt{2} q^2 m_b^2 q_z^2} \left\{ q^2 \left[m_b^2 (\epsilon_x \cdot p_c) (\bar{p}_b \cdot q) - m_b^2 (\epsilon_x \cdot \bar{p}_b) (p_c \cdot q) \right. \right. \\
&\quad \left. - (\epsilon_x \cdot p_b) (\bar{p}_b \cdot q) (p_b \cdot p_c) + (\epsilon_x \cdot p_b) (\bar{p}_b \cdot p_b) (p_c \cdot q) \right] \\
&\quad + (p_b \cdot q) \left[(\epsilon_x \cdot q) (p_b \cdot p_c) (\bar{p}_b \cdot q) - (\epsilon_x \cdot p_c) (p_b \cdot q) (\bar{p}_b \cdot q) \right. \\
&\quad \left. \left. - (\epsilon_x \cdot q) (\bar{p}_b \cdot p_b) (p_c \cdot q) + (\epsilon_x \cdot \bar{p}_b) (p_b \cdot q) (p_c \cdot q) \right] \right\}. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Der Spin des b -Quarks wird durch den Spinvektor s_b beschrieben, der implizit in dem Vierervektor $\bar{p}_b = p_b - m_b s_b$ enthalten ist. Der vom b -Spin unabhängige und der spinabhängige Anteil der Helizitäts-Strukturfunktionen \bar{H}_X ergeben sich durch Einsetzen der beiden in (5.5) angegebenen Anteile des Hadron-Tensors anstelle von $\bar{H}_{\mu\nu}$ in das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes (5.6). Die Resultate für den spinunabhängigen und den spinabhängigen Teil ergeben sich aus (5.7) jeweils durch Ersetzung von \bar{p}_b durch p_b oder $-m_b s_b$. Daraus können die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen H_X und H_{X^P} , welche in (4.56) definiert wurden, bestimmt werden, wenn man für den Vierervektor s_b den longitudinalen oder transversalen Spinvektor s_b^l und s_b^t verwendet.

Zur Auswertung der Skalarprodukte in (5.7) parametrisiert man die auftretenden Viererimpulse in einem bestimmten Bezugssystem. Um die folgenden Berechnungen zu vereinfachen, wählt man dazu das Ruhesystem des zerfallenden b -Quarks, weil dort die räumlichen Komponenten des b -Impulses verschwinden und nur die 0-Komponente zu den Skalarprodukten beiträgt. Den Impuls des W -Bosons wählt man zweckmäßigerweise so, daß er in Richtung einer Koordinatenachse, zum Beispiel der z -Achse, zeigt. Der Impuls des c -Quarks ergibt sich dann durch Verwendung der Energie-Impuls-Erhaltung aus den beiden anderen Impulsen. Explizit kann man die Viererimpulse der betrachteten Teilchen in der Form

$$p_b = (m_b, 0, 0, 0), \quad q = (E, 0, 0, q_z), \quad p_c = p_b - q = (m_b - E, 0, 0, -q_z) \tag{5.8}$$

schreiben. Der Einheitsvektor ϵ_x und der Spinvektor des b -Quarks sind in (4.35) und (4.49) parametrisiert worden, wobei der Spinvektor die Relationen $p_b \cdot s_b = 0$ und $s_b^2 = -1$ erfüllt.

Wie bereits oben erwähnt wurde, bestimmt man die unpolarisierten und die polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen durch die Relationen (4.56) unter Verwendung des spi-

unabhängigen und des spinabhängigen Anteils des Hadron-Tensors (5.5). Man ersetzt zur Berechnung der polarisierten Strukturfunktionen H_{iP} den Spinvektor s_b durch den longitudinalen und den transversalen Anteil s_b^l und s_b^t des Spinvektors bezüglich des W -Impulses, deren parametrisierte Form in (4.51) angegeben wurde, und setzt sie in den spinabhängigen Teil des Hadron-Tensors $H_{\mu\nu}^P$ ein. Wir werden im folgenden jedoch die Strukturfunktionen \bar{H}_X angeben und dafür den allgemeinen Spinvektor $s_b = (0, s_x, s_y, s_z)$ aus (4.49) verwenden, um explizit zu sehen, daß der polarisierte Teil dieser Strukturfunktionen proportional zu den longitudinalen oder transversalen Komponenten des Spinvektors s_x und s_z ist. Mit Hilfe der Parametrisierung des Spinvektors s_b sowie der parametrisierten Viererimpulse (5.8) erhält man für die Helizitäts-Strukturfunktionen (5.7) die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
\bar{H}_U &= 4 \left[m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda} s_z \right] \\
\bar{H}_L &= \frac{2}{q^2} \left[(m_b^2 - m_c^2)^2 - q^2 (m_b^2 + m_c^2) + (m_b^2 - m_c^2) \sqrt{\lambda} s_z \right] \\
\bar{H}_{U+L} &= \frac{2}{q^2} \left[(m_b^2 - m_c^2)^2 + (m_b^2 + m_c^2) q^2 - 2 (q^2)^2 + (m_b^2 - m_c^2 - 2q^2) \sqrt{\lambda} s_z \right] \\
\bar{H}_S &= \frac{2}{q^2} \left[(m_b^2 - m_c^2)^2 - q^2 (m_b^2 + m_c^2) + (m_b^2 - m_c^2) \sqrt{\lambda} s_z \right] \\
\bar{H}_F &= -4 \left[\sqrt{\lambda} - (m_b^2 + m_c^2 - q^2) s_z \right] \\
\bar{H}_I &= -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}q^2} m_b s_x \\
\bar{H}_A &= \frac{2}{\sqrt{2}q^2} m_b (m_b^2 - m_c^2 - q^2) s_x.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Die Funktion λ hängt von den Massen der Quarks und vom W -Impuls ab und ist definiert durch

$$\lambda(m_b^2, m_c^2, q^2) = m_b^4 + m_c^4 + (q^2)^2 - 2(m_b^2 m_c^2 + m_b^2 q^2 + m_c^2 q^2). \tag{5.10}$$

Man erkennt, daß die Strukturfunktionen \bar{H}_X nur linear von den Spinkomponenten s_x und s_z abhängen. Setzt man $s_x = 0$ und $s_z = 0$, so gehen die Strukturfunktionen \bar{H}_X in die in (4.56) definierten unpolarisierten Strukturfunktionen H_X über, während die Anteile von \bar{H}_X , die proportional zu s_x oder s_z sind, durch die polarisierten Strukturfunktionen H_{XP} gegeben sind. Somit können die polarisierten und die unpolarisierten Strukturfunktionen (4.56) auch direkt aus den Ergebnissen (5.9) abgelesen werden.

5.2.2 Phasenraum-Integration und Helizitäts-Raten

Nun integrieren wir das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes (5.6) mit den Helizitäts-Strukturfunktionen (5.7) über den Phasenraum und berechnen anschließend die Raten für die verschiedenen Helizitäten $X = U, L, U + L, S, F, I, A$. Im vorliegenden Fall

liegt ein Zweikörper-Zerfall vor, für den das infinitesimale Phasenraumelement durch

$$d(P S) := (2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - q) \frac{d^3 \vec{q}}{2 E (2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_c}{2 E_c (2\pi)^3} \quad (5.11)$$

gegeben ist. Die auftretenden Energien sind durch die Massenschalenbedingung festgelegt:

$$E = \sqrt{\vec{q}^2 + q^2}, \quad E_c = \sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2}.$$

Weil das W -Boson aus kinematischen Gründen nicht auf der Massenschale ist, kann man die Invariante q^2 nicht durch M_W^2 ersetzen, sondern muß sie in den nachfolgenden Rechnungen als variable Größe behandeln. Im Gegensatz dazu kann man beim Zerfall des t -Quarks das W -Boson in guter Näherung als on-shell ansehen, so daß man dort $q^2 = M_W^2$ setzen darf.

Die Zerfallsrate ergibt sich aus dem über den Phasenraum integrierten Betragsquadrat des Matrixelementes durch Multiplikation mit dem Flußfaktor, der im b -Ruhesystem die einfache Form

$$\Phi = \frac{1}{2 m_b}$$

hat. Damit kann die Zerfallsrate durch

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 m_b} \frac{\delta^4(p_b - p_c - q) |\overline{\mathcal{M}}|^2}{\sqrt{q^2 + q^2} \sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2}} d^3 \vec{q} d^3 \vec{p}_c \quad (5.12)$$

ausgedrückt werden. Um die totale Rate zu berechnen, muß dies über den gesamten Phasenraum integriert werden. Im ersten Schritt führt man die Integration über die Komponenten des Impulses \vec{q} aus, indem man den räumlichen Anteil der δ -Funktion ausintegriert. Man erhält

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 m_b} \frac{\delta(m_b - \sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2} - \sqrt{\vec{p}_c^2 + q^2}) |\overline{\mathcal{M}}|^2}{\sqrt{\vec{p}_c^2 + q^2} \sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2}} d^3 \vec{p}_c. \quad (5.13)$$

Die Integration über die δ -Funktion führte zu der Ersetzung

$$\vec{q} = \vec{p}_b - \vec{p}_c = -\vec{p}_c$$

im b -Ruhesystem. Zur weiteren Auswertung des Integrals schreibt man das verbliebene Integrationselement $d^3 \vec{p}_c$ über die drei Komponenten des Impulsvektors in Kugelkoordinaten gemäß

$$d^3 \vec{p}_c = |\vec{p}_c|^2 d|\vec{p}_c| d\Omega_c.$$

Da der Integrand nicht vom Raumwinkelelement $d\Omega_c$ abhängt, ergibt die Integration einen Faktor 4π , und man braucht nur die Integration des Impulsbetrages auszuführen. Dazu schreibt man die verbliebene δ -Funktion mit Hilfe der Identität

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_{0,i})|} \delta(x - x_{0,i}) \quad (5.14)$$

um, wo $x_{0,i}$ die Nullstellen der Funktion $f(x)$ und $f'(x)$ deren Ableitung bezeichnen. Benutzt man noch die Substitution

$$|\vec{p}_c| = \sqrt{E_c^2 - m_c^2}, \quad |\vec{p}_c| d|\vec{p}_c| = E_c dE_c,$$

so kann man die Integration in folgender Weise durchführen:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{32\pi^2 m_b} \int_0^\infty d|\vec{p}_c| |\vec{p}_c|^2 \int d\Omega_c \frac{\delta\left(m_b - \sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2} - \sqrt{\vec{p}_c^2 + q^2}\right) |\overline{\mathcal{M}}|^2}{\sqrt{\vec{p}_c^2 + q^2} \sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2}} \\ &= \frac{1}{8\pi m_b} \int_{m_c}^\infty dE_c \frac{\sqrt{E_c^2 - m_c^2}}{\sqrt{E_c^2 - m_c^2 + q^2}} \delta\left(m_b - E_c - \sqrt{E_c^2 - m_c^2 + q^2}\right) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi m_b^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die λ -Funktion ist durch (5.10) gegeben. Die Funktion im Argument der δ -Funktion ist

$$f(E_c) = m_b - E_c - \sqrt{E_c^2 - m_c^2 + q^2},$$

die für positive Energie eine Nullstelle bei

$$E_{c,0} = \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{2m_b}$$

hat. Der Betrag ihrer Ableitung ist

$$|f'(E_c)| \equiv \left| \frac{d}{dE_c} f(E_c) \right| = \frac{E_c + \sqrt{E_c^2 - m_c^2 + q^2}}{\sqrt{E_c^2 - m_c^2 + q^2}},$$

woraus sich nach Einsetzen der Nullstelle

$$|f'(E_{c,0})| = \frac{2m_b^2}{m_b^2 - m_c^2 + q^2}$$

ergibt. Die Nullstelle $E_{c,0}$ ergibt den physikalischen Wert der c -Energie, daraus läßt sich mit der Energie- und Impulserhaltung die Energie des W -Bosons E berechnen. Damit ist

$$E_c = \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{2m_b}, \quad E = \frac{m_b^2 - m_c^2 + q^2}{2m_b}. \quad (5.16)$$

Die Energie-Impulserhaltung legt also zusammen mit der Massenschalenbedingung die Energien und Impulse der Teilchen im Endzustand fest. Man kann sie somit durch die verschiedenen Teilchenmassen ausdrücken.

5.2.3 Analytische Resultate der Helizitäts-Raten

Setzt man das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes (5.6) in die Rate (5.15) ein und verwendet die Helizitäts-Strukturfunktionen (5.9), so erhält man die entsprechenden Raten für die unterschiedlichen Helizitäten $X = U, L, U + L, S, F, I, A$. Verwendet man die Relationen (4.57), um die Strukturfunktionen in einen vom b -Spin unabhängigen und einen spinabhängigen Anteil aufzuspalten, so ergeben sich die zugehörigen unpolarisierten und die polarisierten Helizitäts-Raten durch Einsetzen von H_X oder H_{XP} anstelle von \bar{H}_X in die Rate (5.15). Das Ergebnis kann man etwas vereinfachen, indem man wie in Kapitel 3 eine Skalierung mit der b -Masse

$$x = \frac{\sqrt{q^2}}{m_b}, \quad y = \frac{m_c}{m_b}, \quad |\vec{q}| = \frac{m_b}{2} \sqrt{\lambda} \quad (5.17)$$

verwendet, wobei die Funktion λ nun von den skalierten Massen abhängt und durch

$$\lambda(1, x^2, y^2) = 1 + x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2 + x^2 y^2) \quad (5.18)$$

definiert ist. Nach der Umrechnung der schwachen Kopplungskonstanten auf die Fermikonstante $G_F = g_w^2 \sqrt{2}/(8M_W^2)$ läßt sich das Ergebnis in der folgenden kompakten Weise darstellen:

$$\Gamma_X^{(Born)} = \frac{G_F M_W^2 m_b \sqrt{\lambda}}{8\sqrt{2} \pi} |V_{bc}|^2 B_X, \quad (5.19)$$

wenn man $B_X = H_X/(2m_b^2)$ setzt. Der Index X läuft nun zur Vereinfachung der Notation sowohl über die unpolarisierten als auch über die polarisierten Helizitäten. Die mit der b -Masse skalierten Strukturfunktionen B_X in Bornscher Näherung sind durch

$$\begin{aligned} B_U &= 2(1 - x^2 + y^2), & B_{UP} &= -2\sqrt{\lambda} \\ B_L &= \frac{1}{x^2} [\lambda + x^2(1 - x^2 + y^2)], & B_{LP} &= \frac{1}{x^2} (1 - y^2) \sqrt{\lambda} \\ B_{U+L} &= \frac{1}{x^2} [\lambda + 3x^2(1 - x^2 + y^2)], & B_{U^P+L^P} &= \frac{1}{x^2} (1 - 2x^2 - y^2) \sqrt{\lambda} \\ B_S &= \frac{1}{x^2} [\lambda + x^2(1 - x^2 + y^2)], & B_{SP} &= \frac{1}{x^2} (1 - y^2) \sqrt{\lambda} \\ B_F &= -2\sqrt{\lambda}, & B_{FP} &= 2(1 - x^2 + y^2) \\ B_I &= 0, & B_{IP} &= \frac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}x} \\ B_A &= 0, & B_{AP} &= \frac{1}{\sqrt{2}x} (1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (5.20)$$

gegeben. Durch Summation der beiden Beiträge $X = U + L$ kann daraus die Rate für ein unpolarisiertes W -Boson für den Zerfall $b \rightarrow c + W^-$ berechnet werden. Sie lautet

$$\Gamma_{U+L}^{(Born)} = \frac{G_F M_W^2 m_b}{8\sqrt{2} \pi} |V_{bc}|^2 \sqrt{\lambda} B_{U+L}$$

$$= \frac{G_F M_W^2 m_b}{8\sqrt{2}\pi} |V_{bc}|^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} \left[(1-y^2)^2 + (1+y^2)x^2 - 2x^4 \right]. \quad (5.21)$$

Mit der Definition (4.80) der reduzierten Raten kann man die Bornsche Strukturfunktion B_{U+L} in die Beziehung (4.82) für die einfach differentielle Zerfallsrate einsetzen, um nach einer Integration über x^2 die totale Zerfallsrate eines b -Quarks in ein c -Quark und ein Paar masseloser Leptonen in Bornscher Näherung zu erhalten. Andererseits ergibt sich dieselbe totale Bornsche Zerfallsrate aus den Resultaten (3.30) der differentiellen Zerfallsraten in Kapitel 3, indem man ihre Summe über die Variable x integriert. Auf diese Weise kann man überprüfen, ob sich für beide Rechenwege dieselben Resultate für die totale Zerfallsrate ergeben. Nach Ausführung der Integrationen erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\Gamma_b \int_{2y}^{1+y^2} dx \beta x G_0^{(Born)}(x) = 2\Gamma_b \int_0^{(1-y)^2} dx^2 x^2 \sqrt{\lambda} B_{U+L}(x^2) \\ &= \Gamma_b \left[(1-y^4)(1-8y^2+y^4) - 24y^2 \ln(y) \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

und stellt somit eine Übereinstimmung beider Resultate fest.

Man kann die Resultate für die Strukturfunktionen in Bornscher Näherung (5.20) mit den entsprechenden Ergebnissen des Top-Zerfalls in [59] vergleichen. Im Falle nichtverschwindender b -Masse findet man exakte Übereinstimmung. Die Helizitäts-Strukturfunktionen B_L und B_{LP} sind identisch mit B_S und B_{SP} . Diese Gleichheit ist eine Folge der Dynamik der Born-Terme und ist im allgemeinen Falle nicht mehr gültig, insbesondere auch für die Strahlungskorrekturen in erster Ordnung α_s , die in den nächsten Abschnitten diskutiert werden.

Im Grenzfall verschwindender c -Masse, der allerdings für den b -Zerfall keine gute Näherung ist, kann man einige einfache Relationen zwischen den unpolarisierten und den polarisierten Strukturfunktionen B_X und B_{XP} erkennen. Es gilt nämlich $B_X = B_{XP}$ für $X = L, S$ und $B_X = -B_{XP}$ für $X = U$. Diese Eigenschaften resultieren aus der Tatsache, daß ein masseloses c -Quark, das an einem (V - A)-Vertex auftritt, nur linkshändig sein kann. Aus der Erhaltung der Drehimpulses erhält man für die Helizitäten der Quarks und des W -Bosons $\lambda_b = \lambda_W - \lambda_c$. Daraus ergibt sich mit $\lambda_c = -1/2$ die Bedingung $\lambda_b - \lambda_W = 1/2$. Das führt dazu, daß nur die beiden Helizitäts-Konfigurationen $(\lambda_b = -1/2, \lambda_W = -1)$ und $(\lambda_b = +1/2, \lambda_W = 0)$ nichtverschwindende Beiträge liefern. Diese einfachen Relationen sind im Falle der Bremsstrahlungs-Korrekturen auch für masselose c -Quarks wegen der zusätzlichen Emission eines reellen Gluons nicht mehr gültig.

5.3 QCD-Einschleifen-Korrekturen

In diesem Abschnitt werden wir die Schleifenkorrekturen in erster Ordnung der Störungstheorie zu den im letzten Abschnitt berechneten Helizitäts-Raten des Zerfalls $b \rightarrow c + W^-$ bestimmen. Es gibt drei Diagramme, die zu diesem Prozeß beitragen. Sie sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Wie wir in Kapitel 3.3 gesehen haben, sind die Schleifendiagramme

divergent und müssen renormiert werden. Dazu rechnet man die regularisierte Vertexkorrektur aus und multipliziert sie mit einem Faktor $Z_2^{-1/2}$ für jede äußere Quarklinie. Dieser Faktor kann, wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, aus der Ableitung des Selbstenergie-Beitrages berechnet werden.

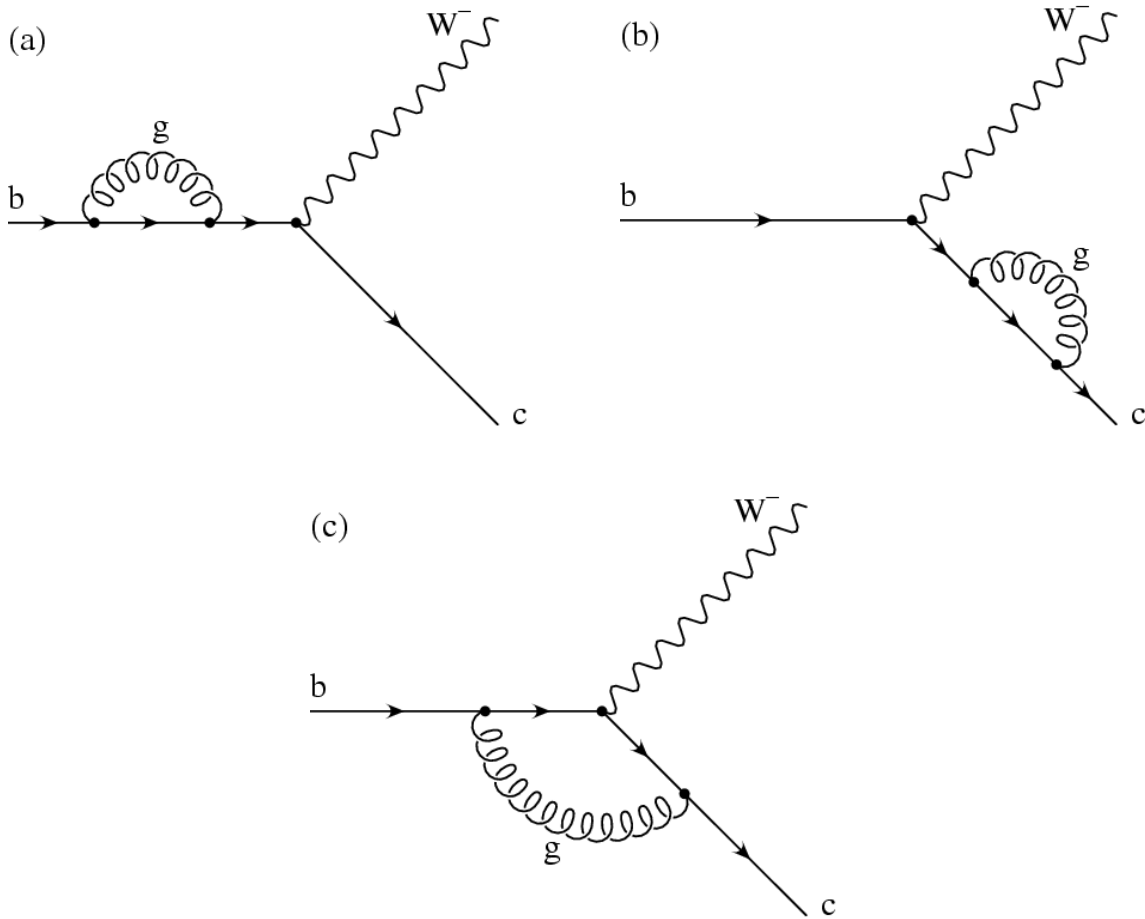


Abbildung 5.2: Feynman-Diagramme für die Einschleifen-Korrekturen zum Zerfall $b \rightarrow c + W^-$

5.3.1 Matrixelemente und Übergangsraten

Wir beginnen mit der Berechnung des Matrixelementes für die Vertexkorrektur. Aus dem Diagramm (c) in Abbildung 5.2 ergibt sich aus den im Anhang A.8 angegebenen Feynman-Regeln und mit der Definition der Vertexfunktion Λ_μ aus (3.37)

$$\mathcal{M} = -\frac{i g_w}{\sqrt{8}} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) \Lambda_\mu u(p_b, s_b) \epsilon^{*\mu}. \quad (5.23)$$

Der Hadron-Strom ist derselbe wie in (3.36), der dort auftretende Lepton-Strom wird wie im Falle der Bornschen Übergangsamplitude durch den Polarisations-Vektor $\epsilon^{*\mu}$ des W -Bosons ersetzt.

Der unrenormierte Vertex Λ_μ , der bei der Integration über den Schleifenimpuls UV -Divergenzen liefert, wurde bereits in Kapitel 3 im Abschnitt 3.3 ausführlich diskutiert. Das Resultat kann daher aus (3.67) übernommen werden. Die Durchführung der Renormierung ist in Abschnitt 3.3.3 explizit vorgestellt worden und kann ebenfalls unverändert übernommen werden. Es wurde gezeigt, daß der renormierte Vertex in der Form (3.119) geschrieben werden kann. Die Entwicklungskoeffizienten sind in (3.120) angegeben.

Das renormierte Matrixelement in erster Ordnung der starken Kopplungskonstanten α_s ergibt sich aus dem Bornschen Matrixelement und dem Beitrag aus dem renormierten Vertex:

$$\mathcal{M} = -\frac{i g_w}{\sqrt{8}} V_{bc} \bar{u}(p_c, s_c) [\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Gamma_\mu] u(p_b, s_b) \epsilon^{*\mu} = -\frac{i g_w}{\sqrt{8}} V_{bc} H_\mu \epsilon^{*\mu}. \quad (5.24)$$

Der Hadron-Strom H_μ wurde bereits in Kapitel 3 eingeführt und ist in (3.130) definiert, wobei der Vertex in der Form (3.128) und (3.127) geschrieben wird. Die Übergangswahrscheinlichkeit erhält man aus dem Matrixelement \mathcal{M} durch Bildung des Betragsquadrates

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{u}(p_c, s_c) [\gamma_\mu (1 - \gamma_5) + \Gamma_\mu] u(p_b, s_b) \\ &\quad \times \bar{u}(p_b, s_b) [(1 + \gamma_5) \gamma_\nu + \bar{\Gamma}_\nu] u(p_c, s_c) \epsilon^{*\mu} \epsilon^\nu = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 H_{\mu\nu} \epsilon^{*\mu} \epsilon^\nu, \end{aligned} \quad (5.25)$$

wobei der Hadron-Tensor ebenfalls in Kapitel 3 definiert wurde. Er ist durch (3.133) und (3.134) gegeben. Im Gegensatz zu Kapitel 3 wird hier nicht der Spin des c -Quarks, sondern der des b -Quarks beobachtet. Deshalb wird $|\mathcal{M}|^2$ nicht über den b -Spin gemittelt, sondern über den Spin des c -Quarks summiert. In $\mathcal{O}(\alpha_s)$ ergibt sich für das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \sum_{s_c} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \bar{H}_{\mu\nu} \epsilon^{*\mu} \epsilon^\nu \\ &= \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \left\{ \text{Sp} [\not{p}_c \gamma_\mu \not{p}_b \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Sp} [(\not{p}_c + m_c) \Gamma_\mu (\not{p}_b + m_b) (1 - \not{p}_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} [(\not{p}_c + m_c) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (1 - \not{p}_b) (\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_\nu] \right\} \epsilon^{*\mu} \epsilon^\nu + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \end{aligned} \quad (5.26)$$

mit der Definition $\bar{p}_b = p_b - m_b s_b$. Der spinsummierte Hadron-Tensor ist ähnlich wie in (3.140) durch

$$\bar{H}_{\mu\nu} = \sum_{s_c} H_{\mu\nu} \quad (5.27)$$

gegeben. Teilt man das Ergebnis in einen Bornschen Anteil und einen Einschleifen-Beitrag auf, so kann man den spinsummierten Hadron-Tensor in der Form

$$\bar{H}_{\mu\nu} = \bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} \quad (5.28)$$

schreiben. Hier wurde die gleiche Notation wie in Kapitel 3 benutzt, indem der Hadron-Tensor der Bornschen Näherung mit dem Index 0 und der Hadron-Tensor für die Einschleifen-Korrekturen mit 1 gekennzeichnet wird. Der explizite Ausdruck für den Bornschen Hadron-Tensor ist durch (5.4) gegeben. Der strahlungskorrigierte Hadron-Tensor lautet

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2} \text{Sp} \left\{ (\not{p}_c + m_c) [\Gamma_\mu (\not{p}_b + m_b) (1 - \not{s}_b) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (1 - \not{s}_b) (\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_\nu] \right\} \\ &= 4 g_{\mu\nu} [m_b m_c (A_1 - A_4) - (\bar{p}_b \cdot p_c) (A_1 + A_4)] \\ &\quad + 4 [m_c (A_2 + A_5) + (p_c \cdot s_b) (A_2 - A_5)] p_{b,\mu} p_{b,\nu} \\ &\quad + 4 [(A_1 + A_4) (\bar{p}_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} \bar{p}_{b,\nu}) + m_b (A_3 - A_6) p_{c,\mu} p_{c,\nu}] \\ &\quad + 2 [m_b (A_2 - A_5) + m_c (A_3 + A_6) + (A_3 - A_6) (p_c \cdot s_b)] (p_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} p_{b,\nu}) \\ &\quad - 2 [m_b m_c (A_3 + A_6) + (A_3 - A_6) (p_b \cdot p_c)] (p_{c,\mu} s_{b\nu} + s_{b\mu} p_{c,\nu}) \\ &\quad - 2 [m_b m_c (A_2 + A_5) + (A_2 - A_5) (p_b \cdot p_c)] (p_{b,\mu} s_{b\nu} + s_{b\mu} p_{b,\nu}) \\ &\quad + 4i [(A_1 + A_4) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{p}_b^\rho p_c^\sigma - (A_1 - A_4) m_c \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_b^\rho s_b^\sigma] \\ &\quad - 2i [(A_2 - A_5) p_{b,\mu} + (A_3 - A_6) p_{c,\mu}] \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} p_b^\rho p_c^\sigma s_b^\tau \\ &\quad + 2i [(A_2 - A_5) p_{b,\nu} + (A_3 - A_6) p_{c,\nu}] \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau} p_b^\rho p_c^\sigma s_b^\tau. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Er hat dieselbe Form wie in (3.142), hängt aber nicht vom Spin des c -Quarks, sondern vom b -Quark-Spin ab. Außerdem tritt hier ein zusätzlicher Faktor 2 auf, weil nicht über den b -Spin gemittelt wird. Für unpolarisierte Quarks sind die beiden Ausdrücke für den Hadron-Tensor identisch.

Für die Berechnung der verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen wird im spinsummierten Betragsquadrat des Matrixelementes (5.26) wieder die Ersetzung $\epsilon^{*\mu} \epsilon^\nu \rightarrow P^{\mu\nu}$ durchgeführt, also das Produkt der Polarisationsvektoren durch die zugehörigen Helizitäts-Projektoren ersetzt. Man erhält damit

$$|\overline{\mathcal{M}}|_X^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \left[\bar{H}_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \bar{H}_{\mu\nu}^{(1)} \right] P_X^{\mu\nu}, \quad (5.30)$$

wobei der Index $X = U, L, U + L, S, F, I, A$ die unterschiedlichen Helizitäten bezeichnet, welche bereits bei der Diskussion der Bornschen Näherung betrachtet wurden. Der erste Term, der den Hadron-Tensor $\bar{H}_{\mu\nu}^{(0)}$ enthält, ist der Born-Term (5.6), während der Anteil proportional zu $\bar{H}_{\mu\nu}^{(1)}$ den Beitrag für die Einschleifenkorrekturen beschreibt. In Analogie

zum spinsummierten Matrixelement (5.6) in Bornscher Näherung kann man die Kontraktion des Hadron-Tensors mit den Helizitäts-Projektoren mit \bar{H}_X abkürzen und erhält

$$|\overline{\mathcal{M}}|_X^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \left[\bar{H}_X^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \bar{H}_X^{(1)} \right]. \quad (5.31)$$

Hier bezeichnet $\bar{H}_X^{(0)}$ die Bornschen Helizitäts-Strukturfunktionen und $\bar{H}_X^{(1)}$ die zugehörigen strahlungskorrigierten Strukturfunktionen. Verwendet man die Darstellungen des Hadron-Tensors (5.4) und der Helizitäts-Projektoren (4.44), so ergeben sich für $\bar{H}_X^{(0)}$ die expliziten Ausdrücke (5.7). Ebenso kann man mit Hilfe des Hadron-Tensors (5.29) Ausdrücke für die $\bar{H}_X^{(1)}$ erhalten, welche hier jedoch wegen ihrer Länge nicht explizit angegeben werden sollen.

Als nächstes werten wir die Skalarprodukte aus, indem wir die parametrisierten Viererimpulse (5.8) und den b -Spinvektor (4.49) einsetzen. Für die Bornsche Näherung hatten wir das Resultat (5.9) erhalten. Die analogen Ergebnisse für den korrigierten Anteil $\bar{H}_{\mu\nu}^{(1)}$ kann man als Linearkombination der Entwicklungskoeffizienten A_i schreiben. Deren Vorfaktoren hängen nur von den Massen der Quarks und vom Impulsquadrat q^2 des W -Bosons ab. Man erhält für die unterschiedlichen Helizitäten

$$\begin{aligned} \bar{H}_U^{(1)} &= 4 \left\{ [(m_b - m_c)^2 - q^2] A_1 - [(m_b + m_c)^2 - q^2] A_4 - (A_1 - A_4) \sqrt{\lambda} s_z \right\} \\ \bar{H}_L^{(1)} &= \frac{1}{q^2} \left\{ 2(m_b + m_c)^2 [(m_b - m_c)^2 - q^2] A_1 + (m_b + m_c) \lambda (A_2 + A_3) \right. \\ &\quad \left. - 2(m_b - m_c)^2 [(m_b + m_c)^2 - q^2] A_4 + (m_b - m_c) \lambda (A_5 + A_6) \right\} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} \left\{ 2(m_b^2 - m_c^2) A_1 + (m_b - m_c) [(m_b + m_c)^2 - q^2] (A_2 + A_3) \right. \\ &\quad \left. - 2(m_b^2 - m_c^2) A_4 + (m_b + m_c) [(m_b - m_c)^2 - q^2] (A_5 + A_6) \right\} s_z \\ \bar{H}_{U+L}^{(1)} &= \frac{1}{q^2} \left\{ 2[(m_b - m_c)^2 - q^2] [(m_b + m_c)^2 + 2q^2] A_1 + (m_b + m_c) \lambda (A_2 + A_3) \right. \\ &\quad \left. - 2[(m_b + m_c)^2 - q^2] [(m_b - m_c)^2 + 2q^2] A_4 + (m_b - m_c) \lambda (A_5 + A_6) \right\} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} \left\{ 2(m_b^2 - m_c^2 - 2q^2) A_1 + (m_b - m_c) [(m_b + m_c)^2 - q^2] (A_2 + A_3) \right. \\ &\quad \left. - 2(m_b^2 - m_c^2 - 2q^2) A_4 + (m_b + m_c) [(m_b - m_c)^2 - q^2] (A_5 + A_6) \right\} s_z \\ \bar{H}_S^{(1)} &= \frac{1}{q^2} \left\{ 2(m_b - m_c)^2 [(m_b + m_c)^2 - q^2] A_1 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (m_b - m_c) [(m_b + m_c)^2 - q^2] [(m_b^2 - m_c^2 + q^2) A_2 + (m_b^2 - m_c^2 - q^2) A_3] \\
& - 2 (m_b + m_c)^2 [(m_b - m_c)^2 - q^2] A_4 \\
& + (m_b + m_c) [(m_b - m_c)^2 - q^2] [(m_b^2 - m_c^2 + q^2) A_5 + (m_b^2 - m_c^2 - q^2) A_6] \Big\} \\
& + \frac{\sqrt{\lambda}}{q^2} \left\{ 2 (m_b^2 - m_c^2) A_1 + (m_b + m_c) [(m_b^2 - m_c^2 + q^2) A_2 + (m_b^2 - m_c^2 - q^2) A_3] \right. \\
& \left. - 2 (m_b^2 - m_c^2) A_4 + (m_b - m_c) [(m_b^2 - m_c^2 + q^2) A_5 + (m_b^2 - m_c^2 - q^2) A_6] \right\} s_z \\
\bar{H}_F^{(1)} &= 4 (A_1 - A_4) \sqrt{\lambda} + 4 \left\{ - [(m_b - m_c)^2 - q^2] A_1 + [(m_b + m_c)^2 - q^2] A_4 \right\} s_z \\
\bar{H}_I^{(1)} &= - \sqrt{\frac{\lambda}{8 q^2}} \left\{ 4 m_b A_1 + [(m_b + m_c)^2 - q^2] (A_2 + A_3) \right. \\
& \left. - 4 m_b A_4 + [(m_b - m_c)^2 - q^2] (A_5 + A_6) \right\} s_x \\
\bar{H}_A^{(1)} &= - \frac{1}{\sqrt{8 q^2}} \left\{ 4 (m_b + m_c) [(m_b - m_c)^2 - q^2] A_1 + \lambda (A_2 + A_3) \right. \\
& \left. - 4 (m_b - m_c) [(m_b + m_c)^2 - q^2] A_4 + \lambda (A_5 + A_6) \right\} s_x. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Aus diesen Ergebnissen kann man die unpolarisierten und die polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen ablesen. Man erkennt auch hier, daß die polarisierten Strukturfunktionen proportional zu der longitudinalen oder transversalen Komponente s_x und s_z des Spinvektors s_b sind. Die unpolarisierten Strukturfunktionen ergeben sich aus $\bar{H}_X^{(1)}$ durch $s_x = 0$ und $s_z = 0$. Man kann die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen auch direkt mit Hilfe der Definition (4.56) berechnen, indem man den Hadron-Tensor (5.29) in einen spinunabhängigen und einen spinabhängigen Anteil aufspaltet, wobei der spinabhängige Teil alle Terme enthält, die von s_b abhängen, und der spinunabhängige Teil durch die übrigen Terme gegeben ist. Anstelle des Spinvektors s_b setzt man dann den longitudinalen oder den transversalen Spinvektor (4.53) ein. Die Strukturfunktionen für die Schleifenkorrekturen $\bar{H}_X^{(1)}$ können dann auch durch die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen ausgedrückt und in der Form (4.57) geschrieben werden.

5.3.2 Phasenraum-Integration und analytische Resultate

Die Phasenraumintegration ist dieselbe wie bei der Bornschen Zerfallsrate und kann daher aus (5.11) übernommen werden. Dort wurde auch gezeigt, wie die Integration durchgeführt wird und wie man daraus die Zerfallsrate berechnet. Das Ergebnis wurde in (5.15) ange-

geben und lautet

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi m_b^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2.$$

Setzt man in diesen Ausdruck das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes aus (5.31) ein, so erhält man die korrigierte Rate bis einschließlich erster Ordnung in α_s . Der Term, welcher $\bar{H}_X^{(0)}$ enthält, ergibt die Bornsche Näherung. Der Anteil für die Schleifenkorrekturen, der mit Hilfe von $\bar{H}_X^{(1)}$ berechnet wird, lautet nach Umrechnung $G_F = g_w^2 \sqrt{2}/(8M_W^2)$ der schwachen Kopplungskonstanten auf die Fermi-Konstante

$$\Gamma_X^{(1)} = \frac{M_W^2 G_F}{16 \sqrt{2} \pi m_b^3} \sqrt{\lambda} |V_{bc}|^2 \times \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \bar{H}_X^{(1)}. \quad (5.33)$$

Nach Einsetzen von (5.32) ergeben sich die Raten für die verschiedenen Helizitäten in Abhängigkeit der Entwicklungskoeffizienten A_i . Zur weiteren Auswertung benutzt man die Relation (3.125), um A_4 durch A_1 auszudrücken. Für die übrigen infrarot-endlichen Koeffizienten A_2 , A_3 , A_5 und A_6 verwendet man die expliziten Ausdrücke (3.120), in denen nur noch zwei verschiedene Logarithmen auftreten. Dann enthalten die Raten nur noch diese beiden Logarithmen und den Koeffizienten A_1 . Mit Hilfe der Relationen (4.57) können die Strukturfunktionen $\bar{H}_X^{(1)}$ durch die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen ausgedrückt werden, und die entsprechenden Helizitäts-Raten erhält man, indem man in (5.33) die $\bar{H}_X^{(1)}$ durch $H_X^{(1)}$ oder $H_{X^P}^{(1)}$ ersetzt.

Schließlich skaliert man die Ergebnisse für die Raten nach (5.17) mit der b -Masse und verwendet den Farbfaktor $C_F = 4/3$. Dann lassen sich die Resultate der Helizitäts-Raten für die Schleifenkorrekturen in folgender Form schreiben

$$\Gamma_X^{(1)} = \frac{G_F M_W^2 m_b \sqrt{\lambda}}{8 \sqrt{2} \pi} |V_{bc}|^2 \times \frac{\alpha_s}{3\pi} R_X, \quad (5.34)$$

wenn man $R_X = H_X/(2m_b^2)$ definiert. Der Index X läuft zur Vereinfachung wieder über die unpolarisierten und die polarisierten Helizitäten. Die skalierte Funktion $\lambda \equiv \lambda(1, x^2, y^2)$ ist durch (5.18) definiert. Die dimensionslosen Helizitäts-Strukturfunktionen R_X sind gegeben durch

$$\begin{aligned} R_U &= -2 \left\{ 2(1-x^2+y^2) A_0 + \frac{2}{x^2} (1-y^2) (1-x^2+y^2) \ln(y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{x^2} \sqrt{\lambda} (1-3x^2+y^2) \ln(w_1) \right\} \\ R_{UP} &= 2 \left\{ 2\sqrt{\lambda} A_0 + \frac{2}{x^2} \sqrt{\lambda} (1-y^2) \ln(y) - \left[\frac{\lambda}{x^2} - 2(1-x^2+y^2) \right] \ln(w_1) \right\} s_z \\ R_L &= -\frac{2}{x^2} \left\{ \left[\lambda + x^2(1-x^2+y^2) \right] A_0 + (1-y^2) (1-x^2+y^2) \ln(y) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\lambda} (1 + y^2) \ln(w_1) \Big\} \\
R_{LP} &= -\frac{2}{x^2} \left\{ \sqrt{\lambda} (1 - y^2) A_0 + \sqrt{\lambda} (1 + y^2) \ln(y) \right. \\
& \quad \left. + (1 - y^2) (1 - x^2 + y^2) \ln(w_1) \right\} s_z \\
R_{U+L} &= -\frac{2}{x^2} \left\{ \left[\lambda + 3x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] A_0 + 3 (1 - y^2) (1 - x^2 + y^2) \ln(y) \right. \\
& \quad \left. + 3x^2 \sqrt{\lambda} \ln(w_1) \right\} \\
R_{UP+LP} &= -\frac{2}{x^2} \left\{ \sqrt{\lambda} (1 - 2x^2 - y^2) A_0 - \sqrt{\lambda} (1 - 3y^2) \ln(y) \right. \\
& \quad \left. + \left[\lambda + (1 - 2x^2 - y^2) (1 - x^2 + y^2) \right] \ln(w_1) \right\} s_z \\
R_S &= -\frac{2}{x^2} \left\{ \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] (A_0 - 2) \right. \\
& \quad \left. - (1 - y^2) \left[\frac{2\lambda}{x^2} - (1 - x^2 + y^2) \right] \ln(y) + \frac{1}{x^2} \sqrt{\lambda} (1 - y^2)^2 \ln(w_1) \right\} \\
R_{SP} &= -\frac{2}{x^2} \left\{ \sqrt{\lambda} (1 - y^2) (A_0 - 2) - \sqrt{\lambda} \left[\frac{2\lambda}{x^2} + (1 - 2x^2 + y^2) \right] \ln(y) \right. \\
& \quad \left. + (1 - y^2) \left[\frac{\lambda}{x^2} + (1 - x^2 + y^2) \right] \ln(w_1) \right\} s_z \\
R_F &= 2 \left\{ 2\sqrt{\lambda} A_0 + \frac{2}{x^2} \sqrt{\lambda} (1 - y^2) \ln(y) - \frac{1}{x^2} \left[\lambda - 2x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] \ln(w_1) \right\} \\
R_{FP} &= -2 \left\{ 2 (1 - x^2 + y^2) A_0 + \frac{2}{x^2} (1 - y^2) (1 - x^2 + y^2) \ln(y) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{x^2} \sqrt{\lambda} (1 - 3x^2 + y^2) \ln(w_1) \right\} s_z \\
R_I &= 0 \\
R_{IP} &= \frac{1}{\sqrt{2}x} \left\{ 2\sqrt{\lambda} A_0 + \frac{1}{x^2} \sqrt{\lambda} (1 + x^2 - y^2) \ln(y) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{\lambda}{2x^2} - 2(1 - x^2 + y^2) \right] \ln(w_1) \Big\} s_x \\
R_A & = 0 \\
R_{AP} & = - \frac{1}{\sqrt{2}x} \left\{ 2(1 - x^2 - y^2) A_0 + \frac{1}{x^2} \left[\lambda + 2x^2(1 - x^2 + 3y^2) \right] \ln(y) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sqrt{\lambda}}{2x^2} (1 - 5x^2 - y^2) \ln(w_1) \right\} s_x. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Die auftretende Funktion A_0 geht durch die Relation (3.148) aus A_1 hervor. Diese Definition erlaubt es, einige der Koeffizienten von $\ln(w_1)$ in den analytischen Ausdrücken (5.35) etwas zu vereinfachen. Obwohl diese Vereinfachungen nicht für alle R_X zutreffen, soll A_0 hier trotzdem eingeführt werden, um eine gewisse Konsistenz mit den Resultaten (3.154) aus Kapitel 3 herzustellen. Außerdem gilt $A_0 > 0$ im gesamten kinematisch erlaubten Bereich $0 \leq x \leq 1 - y$ für die Variable x . In Abhängigkeit der skalierten Größen (5.17) lautet die Funktion A_0 explizit

$$\begin{aligned}
A_0 & = \frac{1 - x^2 + y^2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ -2 \operatorname{Li}_2(1 - w_2) + 2 \operatorname{Li}_2(1 - w_3) - \ln(w_1) \ln\left(\frac{y}{\Lambda^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \ln\left[\frac{1}{2}(1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda})\right] \ln(w_2 w_3) \right\} - 2 \left[\ln\left(\frac{y}{\Lambda^2}\right) - 2 \right]. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Die auftretenden Abkürzungen sind definiert durch

$$w_1 = \frac{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}}, \quad w_2 = \frac{1 + x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 + x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}}, \quad w_3 = \frac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}}, \tag{5.37}$$

und die skalierte Gluonmasse ist durch $\Lambda = m/m_b$ gegeben.

Die Strukturfunktionen R_X beschreiben den unpolarisierten Anteil, während R_{XP} den polarisierten Anteil der Helizitäts-Raten darstellen. Diese Strukturfunktionen enthalten ausschließlich Beiträge zu Einschleifenkorrekturen der Zerfallsrate. Zusammen mit dem Bornschen Resultat (5.19) ergeben sich die korrigierten Strukturfunktionen

$$\Gamma_X^{(\alpha_s)} = \Gamma_X^{(Born)} + \Gamma_X^{(1)}$$

bis einschließlich erster Ordnung in der starken Kopplungskonstanten α_s .

5.4 Gluon-Bremsstrahlung in $\mathcal{O}(\alpha_s)$

Nachdem nun die Schleifenkorrekturen zum Zerfall des b -Quarks in erster Ordnung der Störungstheorie berechnet wurden, sind noch die Bremsstrahlungsbeiträge zu bestimmen.

Die Rechnung ist analog zu der in Kapitel 3.4, wobei der dort vorkommende Lepton-Tensor in den nun folgenden Resultaten durch die Polarisationsvektoren des W -Bosons oder die kovarianten Projektoren ersetzt wird. Es gibt zwei Diagramme, die zur Amplitude des Bremsstrahlungsprozesses beitragen. Sie sind in Abbildung 5.3 dargestellt.

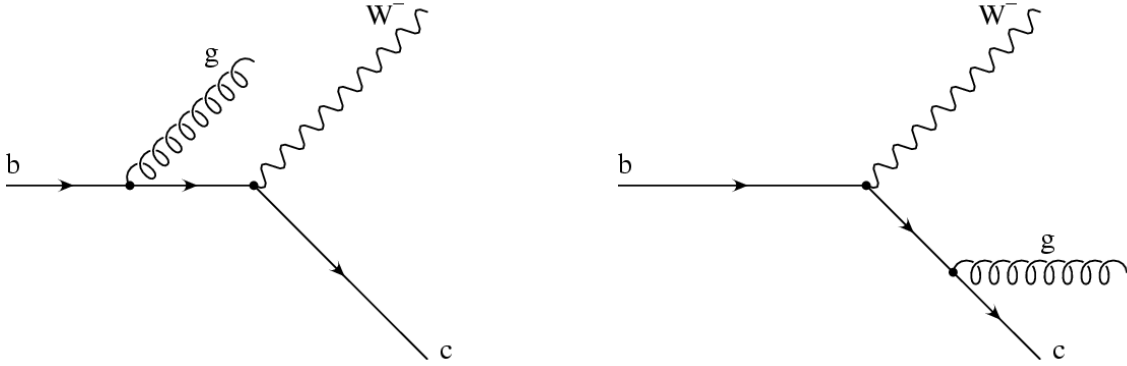


Abbildung 5.3: Feynman-Diagramme für die Bremsstrahlungs-Korrekturen zum Zerfall $b \rightarrow c + W^- + g$

5.4.1 Matrixelemente und Übergangrate

Das Übergangs-Matrixelement ergibt sich aus den in Anhang A.8 angegebenen Feynman-Regeln und sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{-i g_w}{4\sqrt{2}} V_{bc} g_s \lambda^a \bar{u}(p_c, s_c) \left[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{(p_b - k)^2 - m_b^2} \gamma_\rho \right. \\ & \left. + \gamma_\rho \frac{\not{p}_c + \not{k} + m_c}{(p_c + k)^2 - m_c^2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right] u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k) \epsilon^{*\mu}(q). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Unter Benutzung der Massenschalenbedingung lassen sich die Nenner der auftretenden Propagatoren vereinfachen. Außerdem kann man mit Hilfe der Clifford-Algebra für Gamma-Matrizen die Propagatorzähler in einer Weise umschreiben, daß die Spinoren der äußeren Teilchen auf die entsprechenden Impulsvektoren wirken, so daß man sie durch Anwendung der Dirac-Gleichung auf eine einfachere Gestalt bringen kann. Man erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{i g_w}{\sqrt{8}} V_{bc} \left(\frac{g_s}{4} \lambda^a \right) \bar{u}(p_c, s_c) \left[\frac{1}{p_b \cdot k} \gamma_\mu (2 p_{b,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) - \frac{1}{p_c \cdot k} (2 p_{c,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) \gamma_\mu \right] \\ & \times (1 - \gamma_5) u(p_b, s_b) \epsilon^{*\rho}(k) \epsilon^{*\mu}(q) \\ = & \frac{i g_w}{\sqrt{8}} V_{bc} \left(\frac{g_s}{4} \lambda^a \right) H_\mu^{(g)} \epsilon^{*\mu}(q), \end{aligned} \quad (5.39)$$

wobei $H_\mu^{(g)}$ der in (3.160) definierte Hadron-Strom ist. Der Unterschied zu der Übergangsamplitude in Kapitel 3 besteht, wie auch beim Born-Term und den Einschleifen-Rechnungen, in der Ersetzung des Lepton-Stromes durch den Polarisations-Vektor des W^- . Da die Strahlungskorrekturen nur in dem hadronischen Anteil enthalten sind, kann man aus dem Ergebnis für das Betragsquadrat des Matrixelementes (3.161) den Hadron-Tensor (3.162) übernehmen. Dann ist

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{16} g_s^2 \lambda^a \lambda_a \right) H_{\mu\nu}^{(g)} \epsilon^{*\mu}(q) \epsilon^\nu(q). \quad (5.40)$$

Anschließend summiert man über den Spin des c -Quarks und bildet die Polarisationssumme (3.163) des Gluonspins, die in Abschnitt (3.4) hergeleitet wurde. Das zerfallende b -Quark soll polarisiert sein, so daß man nicht über den Spin des Anfangszustandes mitteln darf. In Kapitel 3.4 war im Unterschied dazu das c -Quark polarisiert, während das b -Quark unpolarisiert war. Die verschiedenen Helizitäts-Kombinationen des W -Bosons werden bestimmt, indem man das Produkt der beiden Polarisationsvektoren durch die Projektoren (4.44) ersetzt. Schließlich summiert man noch über die Gluon-Farbfreiheitsgrade unter Verwendung der Relation (3.38) und mittelt über die drei Farbzustände des b -Quarks im Anfangszustand, wobei man die Beziehung (3.137) benutzt. Das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes für die verschiedenen Helizitäten $X = U, L, U + L, S, F, I, A$ lautet dann

$$|\overline{\mathcal{M}}|_X^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{4} g_s^2 C_F \right) \bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} P_X^{\mu\nu} \quad (5.41)$$

mit der Definition des spinsummierten Hadrontensors

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} &= \sum_{s_c} \sum_{\epsilon} H_{\mu\nu}^{(g)} \quad (5.42) \\ &= -\text{Sp} \left\{ \not{p}_c \left[\frac{1}{p_b \cdot k} \gamma_\mu (2p_{b,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) - \frac{1}{p_c \cdot k} (2p_{c,\rho} - \not{k} \gamma_\rho) \gamma_\mu \right] \not{p}_b \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{p_b \cdot k} (2p_b^\rho - \gamma^\rho \not{k}) \gamma_\nu - \frac{1}{p_c \cdot k} \gamma_\nu (2p_c^\rho - \gamma^\rho \not{k}) \right] (1 - \gamma_5) \right\}, \end{aligned}$$

wobei $\bar{p}_b = p_b - m_b s_b$ gilt. Das Resultat ist analog zur Spinsumme des Hadron-Tensors (3.178) in Kapitel 3. Weil dort über den Spin des b -Quarks gemittelt und hier über den c -Spin summiert wird, erhält man in (3.178) einen zusätzlichen Faktor $1/2$. Die Abhängigkeit des Hadron-Tensors vom Spin des Quarks ist hier in \bar{p}_b und dort in \bar{p}_c enthalten.

Im nächsten Schritt wertet man die Spur in (5.42) aus und ordnet das Resultat nach den auftretenden symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren zweiter Stufe. Die symmetrischen Anteile können durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ sowie die Vierervektoren p_b, p_c, \bar{p}_b und k ausgedrückt werden, während die antisymmetrischen Anteile durch Kontraktion des Levi-Civita-Tensors $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ mit den genannten Vierervektoren entstehen. Der spinsummierte

Hadron-Tensor lautet damit

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{\mu\nu}^{(g)} = & \frac{16}{(p_b \cdot k)^2} \left\{ \left[- (p_c \cdot k) (\bar{p}_b \cdot p_b) - (\bar{p}_b \cdot k) (p_c \cdot k) + (\bar{p}_b \cdot k) (p_b \cdot p_c) \right. \right. \\
& + (m_b^2 - p_b \cdot k) (\bar{p}_b \cdot p_c) \Big] g_{\mu\nu} \\
& + \bar{p}_b \cdot (p_b + k) (p_{c,\mu} k_\nu + k_\mu p_{c,\nu}) - (\bar{p}_b \cdot k) (p_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} p_{b,\nu}) \\
& + (p_b \cdot k - m_b^2) (\bar{p}_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} \bar{p}_{b,\nu}) \\
& \left. + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[\bar{p}_b \cdot (p_b + k) k^\rho p_c^\sigma - (\bar{p}_b \cdot k) p_b^\rho p_c^\sigma + (p_b \cdot k - m_b^2) \bar{p}_b^\rho p_c^\sigma \right] \right\} \\
& + \frac{16}{(p_b \cdot k) (p_c \cdot k)} \left\{ \left[(p_b \cdot k - 2 p_b \cdot p_c) (\bar{p}_b \cdot p_c) + \bar{p}_b \cdot (p_b + 2 p_c) (p_c \cdot k) \right. \right. \\
& - (p_b \cdot p_c + m_c^2) (\bar{p}_b \cdot k) \Big] g_{\mu\nu} \\
& + 2 (p_b \cdot p_c) (\bar{p}_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} \bar{p}_{b,\nu}) + 2 (\bar{p}_b \cdot k) p_{c,\mu} p_{c,\nu} \\
& + (p_b \cdot p_c) (\bar{p}_{b,\mu} k_\nu + k_\mu \bar{p}_{b,\nu}) - (p_c \cdot k) (\bar{p}_{b,\mu} p_{b,\nu} + p_{b,\mu} \bar{p}_{b,\nu}) \\
& - (\bar{p}_b \cdot p_c) (p_{c,\mu} k_\nu + k_\mu p_{c,\nu}) - k \cdot (p_b + p_c) (\bar{p}_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} \bar{p}_{b,\nu}) \\
& - i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[\bar{p}_b \cdot (p_b + p_c) k^\rho p_c^\sigma - (\bar{p}_b \cdot k) p_b^\rho p_c^\sigma + \left((p_b + p_c) \cdot k - 2 p_b \cdot p_c \right) \bar{p}_b^\rho p_c^\sigma \right] \\
& - i (k_\mu \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} - k_\nu \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}) p_b^\rho \bar{p}_b^\sigma p_c^\tau + i (p_{b,\mu} \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} - p_{b,\nu} \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}) k^\rho \bar{p}_b^\sigma p_c^\tau \Big\} \\
& + \frac{16}{(p_c \cdot k)^2} \left\{ \left[(\bar{p}_b \cdot k) (m_c^2 - p_c \cdot k) + (\bar{p}_b \cdot p_c) (m_c^2 - 2 p_c \cdot k) \right] g_{\mu\nu} \right. \\
& + (p_c \cdot k - m_c^2) (\bar{p}_{b,\mu} k_\nu + k_\mu \bar{p}_{b,\nu}) + (2 p_c \cdot k - m_c^2) (\bar{p}_{b,\mu} p_{c,\nu} + p_{c,\mu} \bar{p}_{b,\nu}) \\
& + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left[\bar{p}_b \cdot (k - p_c) k^\rho p_c^\sigma + (p_c \cdot k - m_c^2) \bar{p}_b^\rho p_c^\sigma \right] \\
& \left. + i (k_\mu \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} - k_\nu \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}) k^\rho \bar{p}_b^\sigma p_c^\tau - i (p_{c,\mu} \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} - p_{c,\nu} \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}) k^\rho \bar{p}_b^\sigma p_c^\tau \right\}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Dies ist bis auf die Summation über unterschiedliche Quark-Spins und dem bereits erwähnten Faktor 1/2 aus der Mittelung über den b -Spin identisch mit dem Hadron-Tensor (3.181) aus Kapitel 3. Die Helizitäts-Strukturfunktionen ergeben sich durch Kontraktion des Hadron-Tensors mit den entsprechenden Helizitäts-Projektoren aus (4.44). Das spin-summierte Betragsquadrat des Matrixelementes (5.41) kann damit in der Form

$$|\overline{\mathcal{M}}|_X^2 = \frac{g_w^2}{8} |V_{bc}|^2 \left(\frac{1}{4} g_s^2 C_F \right) \bar{H}_X^{(g)}. \tag{5.44}$$

geschrieben werden. Führt man die Kontraktion aus, so enthalten die Ergebnisse $\bar{H}_X^{(g)}$ Skalarprodukte, die aus den Viererimpulsen der am Zerfall beteiligten Teilchen gebildet werden, sowie Terme, welche den ϵ -Tensor enthalten. Da sie aufgrund ihrer Länge relativ unübersichtlich darzustellen sind, soll hier darauf verzichtet werden, sie explizit anzugeben.

In Kapitel 3 hatten wir gesehen, daß bei der Integration über den Phasenraum des Gluons in den Bremsstrahlungsbeiträgen eine Infrarot-Divergenz aufgetreten ist. Es hat sich herausgestellt, daß der divergente Anteil proportional zu dem universellen Soft-Gluon-Faktor A ist, welcher in (3.186) definiert wurde. Dieser Faktor wird mit einem Ausdruck multipliziert, der formal dem Anteil der Bornschen Näherung entspricht. In analoger Weise spaltet man nun die oben genannten Strukturfunktionen $\bar{H}_X^{(g)}$ in einen divergenten und einen konvergenten Anteil auf und schreibt den divergenten Anteil als Produkt des Soft-Gluon-Faktors mit den Bornschen Strukturfunktionen. Dann ergibt sich

$$\bar{H}_X^{(g)} = \bar{H}_{X,sin}^{(g)} + \bar{H}_{X,reg}^{(g)} = 4A \bar{H}_X^{(Born)} + \bar{H}_{X,reg}^{(g)}, \quad (5.45)$$

wobei $\bar{H}_X^{(Born)}$ die in (5.7) angegebenen Bornschen Strukturfunktionen darstellen. Weil der Soft-Gluon-Faktor universell ist, hängt er nicht von den Helizitäten X ab.

Zur Auswertung der Skalarprodukte in (5.45) bestimmt man zunächst aus der Kinematik des Zerfallsprozesses die parametrisierten Viererimpulse der Quarks sowie des W -Bosons und des Gluons. Bei dem betrachteten Prozeß zerfällt ein b -Quark in einen Endzustand, der aus drei Teilchen besteht. Um eine einfachere Darstellung zu erhalten, wertet man die Impulse wie auch bei der Bornschen Näherung und den Schleifenkorrekturen im Ruhesystem des b -Quarks aus. Außerdem wählt man die z -Achse wieder in Richtung des räumlichen W -Impulses. Das liefert

$$p_b = (m_b, 0, 0, 0), \quad q = (E, 0, 0, q_z), \quad k = (\omega, k_x, k_y, k_z), \quad p_c = p_b - q - k. \quad (5.46)$$

Im Unterschied zu den parametrisierten Viererimpulsen der Bornschen Näherung (5.8) tritt hier zusätzlich der Gluon-Viererimpuls auf, der auch implizit in die Parametrisierung des Impulses für das c -Quark eingeht. Der Spinvektor des b -Quarks ist in (4.49) parametrisiert worden. Die räumlichen Komponenten des Gluonimpulses werden in Kugelkoordinaten ausgedrückt und sind durch

$$k_x = |\vec{k}| \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = |\vec{k}| \sin \theta \sin \phi, \quad k_z = |\vec{k}| \cos \theta \quad (5.47)$$

gegeben. Aus der Massenschalenbedingung des Gluons folgt $\omega^2 - \vec{k}^2 = 0$, so daß es möglich ist, den Betrag $|\vec{k}|$ des räumlichen Gluonimpulses mit der Gluonenergie ω gleichzusetzen. Im Falle einer angenommenen Gluonmasse zur Regularisierung der Infrarot-Singularitäten gilt die verallgemeinerte Beziehung $\omega^2 - \vec{k}^2 = m^2$. Der Viererimpuls des c -Quarks genügt ebenfalls der Massenschalenbedingung, so daß die Beträge der räumlichen Impulse durch die Energien und die Massen ausgedrückt werden können. Da das W -Boson off-shell ist, kann sein Impulsquadrat nicht durch die W -Masse ausgedrückt werden.

Zur weiteren Auswertung der Strukturfunktionen (5.45) setzt man im nächsten Schritt die parametrisierten Impulse (5.46) und den Spinvektor (4.49) ein und erhält ein Resultat,

das explizit von den Energien und Impulskomponenten der Teilchen abhängt. Man kann sie für die unterschiedlichen Helizitäten X in der folgenden Form darstellen

$$\bar{H}_X^{(g)} \equiv 8 s_X(E, \omega) = 8 \left[a(E, \omega) b_X(E, \omega) + f_X(E, \omega) \right], \quad (5.48)$$

wobei explizit nur die Abhängigkeit von den nichttrivialen Integrationsvariablen angegeben wurde. Die Funktionen a , b_X und f_X entsprechen den parametrisierten Ausdrücken für A , $\bar{H}_X^{(Born)}$ und $\bar{H}_{X,reg}^{(g)}$ auf der rechten Seite von (5.45), wobei die Zahlenfaktoren zur bequemerem Schreibweise für die später angegebenen Resultate eingeführt wurden. Nach Verwendung der Massenschalenbedingung für das Gluon und Integration über den Azimutwinkel, der nur in den Impulskomponenten (5.47) auftritt, stellt sich heraus, daß die spinabhängigen Anteile der parametrisierten Strukturfunktionen s_X nur zu der longitudinalen oder der transversalen Spinkomponente s_z und s_x proportional sind. Die Integration wird im nächsten Abschnitt noch etwas genauer betrachtet werden. Die unpolarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen (4.56) ergeben sich aus den parametrisierten Ausdrücken $\bar{H}_X^{(g)}$, wenn man $s_x = s_z = 0$ setzt, und die polarisierten Strukturfunktionen sind durch die zu s_x oder s_z proportionalen Terme von $\bar{H}_X^{(g)}$ gegeben. Man kann die unpolarisierten und die polarisierten Strukturfunktionen auch direkt berechnen, wenn man den Hadron-Tensor (5.43) nach (4.54) in einen spinunabhängigen und einen spinabhängigen Teil aufspaltet und die Relation (4.56) verwendet. Anschließend setzt man den longitudinalen oder den transversalen Spinvektor (4.53) anstelle des allgemeinen Spin-Vektors s_b ein.

5.4.2 Phasenraum-Integration und Helizitäts-Raten

Aus den parametrisierten Ausdrücken (5.48) des kontrahierten Hadron-Tensors berechnen wir im folgenden durch Phasenraumintegration die Helizitäts-Raten für die unterschiedlichen Helizitäten X . Die Phasenraumintegration unterscheidet sich hier etwas von der in Abschnitt (3.4) durchgeführten, weil wir dort insgesamt vier Teilchen im Endzustand hatten und den Phasenraum der Leptonen vollständig ausintegriert haben. Hier haben wir es mit einem Dreikörper-Zerfall zu tun, bei dem anstelle des Leptonpaares ein off-shell W -Boson im Endzustand auftritt, über dessen Phasenraum zu integrieren ist. Außerdem wurde in Abschnitt (3.4) nicht über die Energie des c -Quarks integriert, während hier über dessen gesamten Phasenraum integriert wird.

Die Zerfallsrate ergibt sich durch Integration über das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelementes und nachfolgender Multiplikation mit dem Flußfaktor, der im b -Ruhezustand durch $\Phi = 1/(2m_b)$ gegeben ist. Die Phasenraumintegration des vorliegenden Drei-Teilchen-Endzustandes kann in der Form

$$d(PS) := (2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - k - q) \frac{d^3\vec{p}_c}{2E_c (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{k}}{2\omega (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{2E (2\pi)^3} \quad (5.49)$$

geschrieben werden mit den Energien

$$E_c = \sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2}, \quad \omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad E = \sqrt{\vec{q}^2 + q^2}.$$

Weil einige der zu integrierenden Terme divergent werden, ist es notwendig, eine endliche Gluonmasse m einzuführen, die bei der Integration der konvergenten Terme null gesetzt werden kann. Die differentielle Zerfallsrate ergibt sich aus $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ durch Multiplikation mit dem Phasenraumelement (5.49) und dem Flußfaktor:

$$d\Gamma = \frac{1}{16 (2\pi)^5 m_b} \frac{\delta^4(p_b - p_c - k - q) |\overline{\mathcal{M}}|^2}{\sqrt{\vec{p}_c^2 + m_c^2} \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \sqrt{\vec{q}^2 + q^2}} d^3\vec{p}_c d^3\vec{k} d^3\vec{q}. \quad (5.50)$$

Zuerst wird die Integration über die drei Komponenten des Impulses \vec{p}_c ausgeführt, indem man die räumlichen Komponenten der δ -Funktion auswertet, was im b -Ruhesystem zu

$$\vec{p}_c = \vec{p}_b - \vec{k} - \vec{q} = -(\vec{k} + \vec{q})$$

führt. Dann vereinfacht sich der differentielle Ausdruck der Zerfallsrate zu

$$d\Gamma = \frac{1}{16 (2\pi)^5 m_b} \frac{\delta \left(m_b - \sqrt{(\vec{k} + \vec{q})^2 + m_c^2} - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - \sqrt{\vec{q}^2 + q^2} \right) |\overline{\mathcal{M}}|^2}{\sqrt{(\vec{k} + \vec{q})^2 + m_c^2} \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \sqrt{\vec{q}^2 + q^2}} d^3\vec{k} d^3\vec{q}. \quad (5.51)$$

Zur weiteren Integration drückt man die Integrationsvariablen der \vec{k} - und \vec{q} -Integration durch Kugelkoordinaten aus und erhält

$$d^3\vec{k} = |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| d\cos\theta d\phi, \quad d^3\vec{q} = |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| d\cos\theta_q d\phi_q,$$

wobei θ und θ_k sowie ϕ und ϕ_k die Polar- und die Azimutwinkel für die Impulse \vec{k} und \vec{q} sind. Wählt man zur Auswertung der Integration ein spezielles Koordinatensystem, in dem \vec{q} in z -Richtung zeigt, so wird das Matrixelement unabhängig von ϕ_q und θ_q sein, und θ ist der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{q} . Die trivialen Integrationen über die Winkel ϕ_q und θ_q ergeben einen Faktor 4π für den Raumwinkel.

An dieser Stelle ist es vorteilhaft, zunächst die Integration über den Azimutwinkel ϕ zu betrachten, weil sich die weitere Phasenraumintegration dadurch einfacher durchführen läßt. Der Winkel ϕ kommt lediglich in den Komponenten k_x und k_y des Gluonimpulses vor, welche höchstens quadratisch in das Matrixelement eingehen. Die von ϕ unabhängigen Terme des Matrixelementes werden bei der ϕ -Integration im Intervall $[0, 2\pi]$ nur mit einem Faktor 2π multipliziert. Die in k_x oder k_y linearen Terme sind proportional zu $\cos\phi$ oder $\sin\phi$ und verschwinden bei der Integration über ϕ . Die Ausdrücke, die zu k_x^2 oder zu k_y^2 proportional sind, liefern ebenfalls einen Beitrag bei der ϕ -Integration. Durch Verwendung der Massenschalenbedingung für das Gluon ist es möglich, eine Beziehung zwischen k_x^2 und k_y^2 herzustellen. Setzt man beispielsweise in das betragsquadierte Matrixelement $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ die Beziehung $k_x^2 = \omega^2 - k_y^2 - k_z^2$ ein, so kürzen sich für die meisten Helizitäten die Abhängigkeiten von k_x^2 und k_y^2 gegenseitig heraus, da in den entsprechenden Integranden nur die Summe $k_x^2 + k_y^2$ auftritt. Eine Ausnahme bilden die Ausdrücke für die Helizitäten $X = I^P, A^P$, denn das Ergebnis enthält noch ϕ -abhängige Terme, die proportional zu k_y^2

sind. Mit Hilfe der Darstellung (5.47) läßt sich k_y^2 durch die Winkel θ und ϕ ausdrücken, und man erhält $k_y^2 = |\vec{k}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin^2 \phi$. Die Integration über den Azimuthwinkelanteil $\sin^2 \phi$ im Intervall $[0, 2\pi]$ ergibt einen Faktor π . Wir können die ϕ -Integration also folgendermaßen zusammenfassen. Die in k_x und k_y linearen Terme liefern keinen Beitrag. Die übrigen Ausdrücke können in der beschriebenen Art und Weise umgeschrieben werden, so daß die Integration entweder einen Faktor π oder einen Faktor 2π ergibt.

Für die einheitliche Durchführung der Phasenraumintegration mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems ist es nützlich, wenn man die oben beschriebenen Schritte zur Vereinfachung der zu integrierenden Terme so programmiert, daß die ϕ -Integration für alle nichtverschwindenden Ausdrücke einen Faktor 2π liefert. Dazu wendet man nacheinander die folgenden Ersetzungen auf den Integranden an:

$$\begin{aligned} (1) \quad k_x^2 &\rightarrow w^2 - k_y^2 - k_z^2, & (2) \quad k_y^2 &\rightarrow \frac{1}{2} |\vec{k}|^2 (1 - \cos^2 \theta), \\ (3) \quad k_x &\rightarrow 0, & (4) \quad k_y &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Damit hat man erreicht, daß man anstelle der ϕ -Integration den Integranden nur mit einem globalen Faktor 2π zu multiplizieren braucht, man kann also den vereinfachten Integranden so auffassen, als ob er vom Winkel ϕ unabhängig wäre.

Für die gesamte Integration über alle Winkel θ_q , ϕ_q und ϕ erhält man somit insgesamt einen Faktor $8\pi^2$. Die totale Zerfallsrate lautet damit

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{8(2\pi)^3 m_b} \int_0^\infty d|\vec{k}| |\vec{k}|^2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d|\vec{q}| |\vec{q}|^2 |\overline{\mathcal{M}}|^2 \\ &\quad \times \frac{\delta \left(m_b - \sqrt{(\vec{k} + \vec{q})^2 + m_c^2} - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - \sqrt{\vec{q}^2 + q^2} \right)}{\sqrt{(\vec{k} + \vec{q})^2 + m_c^2} \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \sqrt{\vec{q}^2 + q^2}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Die Variable z ist definiert durch $z = \cos \theta$. Um die folgende Integration zu vereinfachen, ist es zweckmäßig, die Substitutionen

$$|\vec{k}| = \sqrt{\omega^2 - m^2}, \quad |\vec{q}| = \sqrt{E^2 - q^2} \quad (5.54)$$

einzuführen, für die die Identität

$$|\vec{k}| d|\vec{k}| = \omega d\omega, \quad |\vec{q}| d|\vec{q}| = E dE$$

gilt. Führt man zunächst die Integration über z aus, so muß man die δ -Funktion mit Hilfe der Relation

$$\delta(f(z)) = \sum_i \frac{1}{|f'(z_{0,i})|} \delta(z - z_{0,i})$$

umschreiben, um sie direkt ausintegrieren zu können. In diesem Fall ist die Funktion f durch

$$f(z) = m_b - \omega - E - \sqrt{\omega^2 + E^2 + 2\sqrt{\omega^2 - m^2} \sqrt{E^2 - q^2} z + m_c^2 - m^2 - q^2}$$

gegeben und besitzt eine Nullstelle bei

$$z_0 = \frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - m^2}\sqrt{E^2 - q^2}} \left(m_b^2 - m_c^2 + q^2 + m^2 + 2\omega E - 2m_b(\omega + E) \right).$$

Ihre Ableitung ist

$$|f'(z)| = \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}\sqrt{E^2 - q^2}}{\sqrt{\omega^2 + E^2 + 2\sqrt{\omega^2 - m^2}\sqrt{E^2 - q^2}z + m_c^2 - m^2 - q^2}}$$

und hat nach Einsetzen der Nullstelle den Wert

$$|f'(z_0)| = \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}\sqrt{E^2 - q^2}}{m_b - \omega - E}.$$

Dieser Ausdruck kürzt zusammen mit der Substitution (5.54) den Nenner des Integranden in (5.53) heraus. Die Zerfallsrate ist nach Umschreiben der Delta-Funktion durch

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{8(2\pi)^3 m_b} \int_m^\infty d\omega \int_{\sqrt{q^2}}^\infty dE \int_{-1}^1 dz |\overline{\mathcal{M}}|^2 \\ &\quad \times \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}\sqrt{E^2 - q^2} \delta(f(z))}{\sqrt{\omega^2 + E^2 + 2\sqrt{\omega^2 - m^2}\sqrt{E^2 - q^2}z + m_c^2 - m^2 - q^2}} \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^3 m_b} \int_m^\infty d\omega \int_{\sqrt{q^2}}^\infty dE \int_{-1}^1 dz |\overline{\mathcal{M}}|^2 \delta(z - z_0) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^3 m_b} \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega |\overline{\mathcal{M}}|^2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

gegeben. Beim letzten Schritt wurde die Integrationsreihenfolge vertauscht. Durch die Integration über die δ -Funktion wird der erlaubte Bereich des Phasenraumes eingeschränkt, weil der Cosinus nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen darf. Man hat daher die einschränkende Bedingung

$$|z_0| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - m^2}\sqrt{E^2 - q^2}} \left(m_b^2 - m_c^2 + q^2 + m^2 + 2\omega E - 2m_b(\omega + E) \right) \right| \leq 1 \quad (5.56)$$

zu beachten. Löst man dies nach ω auf, so ergeben sich zwei Ungleichungen, aus denen sich die Grenzen $\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$ bestimmen lassen. Es gilt

$$\omega_{max} = \frac{1}{2(m_b^2 + q^2 - 2m_b E)} \left[(m_b - E)(m_b^2 - m_c^2 + q^2 + m^2 - 2m_b E) + \sqrt{E^2 - q^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{(m_b^2 + q^2 - 2 m_b E - (m_c - m)^2)(m_b^2 + q^2 - 2 m_b E - (m_c + m)^2)} \\
\omega_{min} = & \frac{1}{2(m_b^2 + q^2 - 2 m_b E)} \left[(m_b - E)(m_b^2 - m_c^2 + q^2 + m^2 - 2 m_b E) - \sqrt{E^2 - q^2} \right. \\
& \left. \times \sqrt{(m_b^2 + q^2 - 2 m_b E - (m_c - m)^2)(m_b^2 + q^2 - 2 m_b E - (m_c + m)^2)} \right], \tag{5.57}
\end{aligned}$$

wenn man eine endliche Gluonmasse m annimmt.

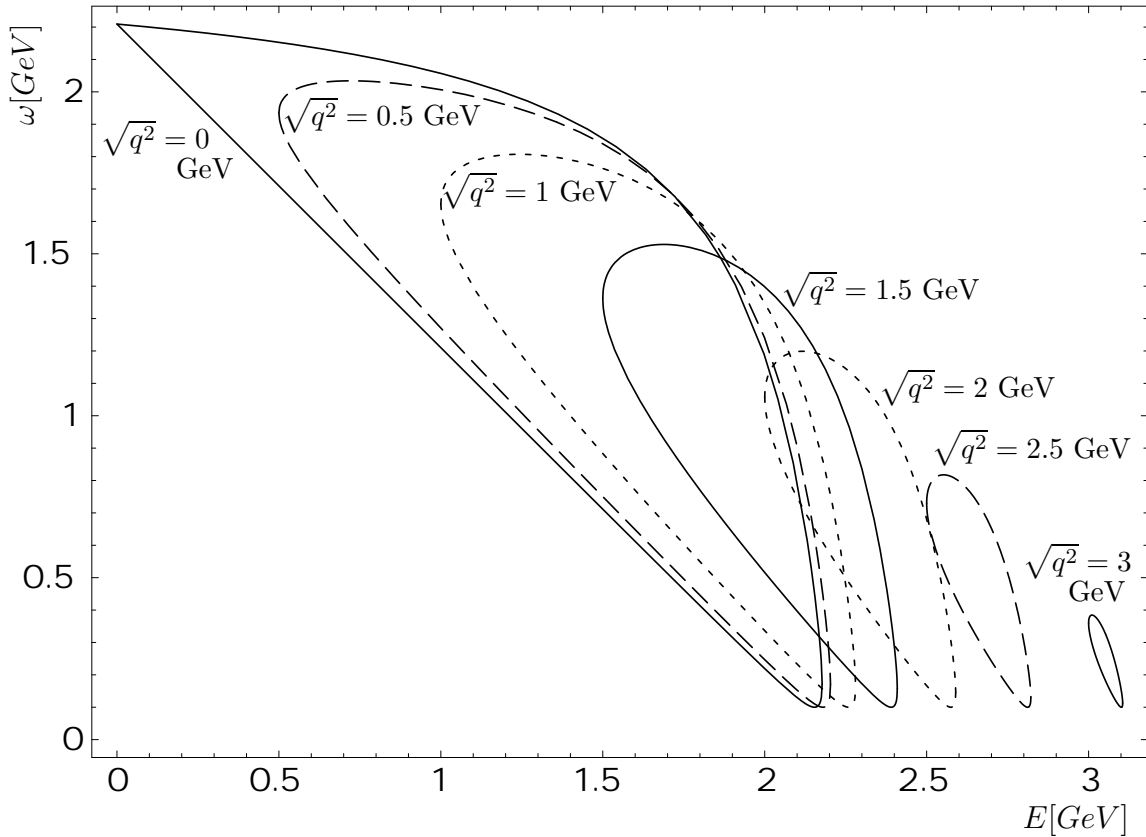


Abbildung 5.4: Phasenraum der Energien des Gluons und des off-shell- W -Bosons zur Bremsstrahlung des Zerfalls $b \rightarrow c + W^- + g$. Die einzelnen Gebiete entsprechen unterschiedlichen Werten von $\sqrt{q^2} = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ GeV mit endlicher Gluonmasse $m = 0.1$ GeV, die zur besseren Veranschaulichung relativ groß gewählt wurde.

Der Phasenraum ist in Abbildung 5.4 veranschaulicht. Er wird durch die beiden Funktionen $\omega_{max}(E)$ und $\omega_{min}(E)$ nach oben und nach unten begrenzt. Daher lassen sich die Grenzen der W -Boson-Energie E am einfachsten bestimmen, indem man die beiden Funk-

tionen ω_{\max} und ω_{\min} gleichsetzt und anschließend nach E auflöst. Dies liefert

$$E_{\max} = \frac{m_b^2 + q^2 - (m_c + m)^2}{2m_b}, \quad E_{\min} = \sqrt{q^2}. \quad (5.58)$$

Im masselosen Grenzfall vereinfachen sich die Grenzen zu

$$\omega_{\max, \min} = \frac{m_b^2 + q^2 - m_c^2 - 2m_b E}{2(m_b^2 + q^2 - 2m_b E)} \left[(m_b - E) \pm \sqrt{E^2 - q^2} \right] \quad (5.59)$$

und

$$\sqrt{q^2} \leq E \leq \frac{m_b^2 + q^2 - m_c^2}{2m_b}. \quad (5.60)$$

Der Einfluß der endlichen Gluonmasse m ist in Abbildung 5.5 veranschaulicht, wo zur besseren Darstellung der Wert $m = 0.1$ GeV relativ hoch gewählt worden ist. Man erkennt, daß die untere rechte Ecke des Phasenraumes im masselosen Grenzfall spitz zulaufend, während sie bei endlicher Gluonmasse abgerundet ist.

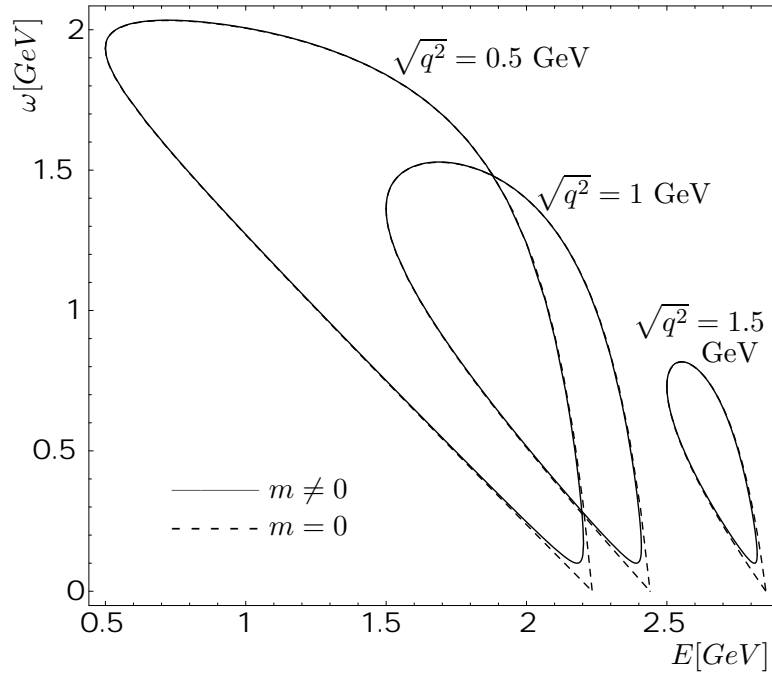


Abbildung 5.5: Einfluß der endlichen Gluonmasse $m = 0.1$ GeV auf die Grenzen des Phasenraumes für verschiedene Werte $\sqrt{q^2} = 0.5, 1.5, 2.5$ GeV.

Die Helizitäts-Raten können schließlich nach Einsetzen des quadrierten Matrixelementes (5.44) in die Rate (5.55) und mit Benutzung der Definition (5.48) in folgender Form geschrieben werden:

$$\Gamma_X = \frac{g_w^2}{16 (2\pi)^3 m_b} |V_{bc}|^2 (g_s^2 C_F) \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\omega s_X(E, \omega). \quad (5.61)$$

Der Integrand wurde gemäß (5.48) durch die parametrisierten Viererimpulse ausgedrückt. Die dort durchgeführte Aufspaltung des Integranden in einen divergenten Term $a \cdot b_X$ und einen konvergenten Anteil f_X wird nun verwendet, um die Infrarot-Singularität zu parametrisieren und anschließend die Integrale für den divergenten und den konvergenten Anteil der Helizitäts-Rate zu berechnen.

5.4.3 Integration des Soft-Gluon-Faktors

Wir behandeln zunächst den singulären Anteil der Integration in (5.61). Die Singularität steckt in dem Soft-Gluon-Faktor a , der universell, also unabhängig von der Polarisation der Quarks ist. Er unterscheidet sich von dem in Kapitel 3 in Abschnitt 3.4 berechneten Faktor (3.208) durch die Verwendung unterschiedlicher kinematischer Variablen, weil er dort für die differentielle Rate nach der c -Energie E_c berechnet wurde, hier aber die differentielle Rate nach dem quadrierten Viererimpuls des W -Bosons q^2 berechnet werden soll. Erst bei der Berechnung der totalen Rate, die in beiden Fällen eine Integration über die letzte verbliebene Variable erfordert, gehen die beiden Ausdrücke ineinander über. Die in diesem Abschnitt verbleibende Integration über q^2 ist schwierig [68] und soll hier nicht weiter behandelt werden.

Der im folgenden diskutierte singuläre Integrand ist der erste Term in (5.48), der als Produkt des Soft-Gluon-Faktors a mit dem Born-Term b_X geschrieben werden kann. Der Soft-Gluon-Faktor besteht aus drei Summanden. Seine parametrisierte Form lautet

$$a(E, \omega, m) = \frac{4(m_b - E - \omega)}{\omega(m_b^2 - m_c^2 + q^2 - m^2 - 2m_b E)} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{4m_c^2}{(m_b^2 - m_c^2 + q^2 - m^2 - 2m_b E)^2}, \quad (5.62)$$

wobei m die Gluonmasse ist. Die Funktion a hängt also neben den Integrationsvariablen auch von dem Parameter m ab. Dasselbe gilt für die Funktion b_X , die den Born-Term beschreibt. Da die Integration über das Produkt beider Funktionen sehr schwierig ist, erweist es sich als zweckmäßig, eine Aufspaltung in zwei Terme vorzunehmen, die einzeln einfacher zu integrieren sind. Dazu schreibt man

$$a(E, \omega, m) b_X(E, \omega, m) = a(E, \omega, m) \left[b_X(E, \omega, m) - b_X(E_0, 0, 0) \right] + a(E, \omega, m) b_X(E_0, 0, 0). \quad (5.63)$$

Der zusätzliche Term $b_X(E_0, 0, 0)$, der von dem ursprünglichen abgezogen und danach wieder dazugezählt wird, ist der echte Born-Term, der aus der Funktion $b_X(E, \omega, m)$ dadurch hervorgeht, daß man die Variablen und Parameter, die zum Gluon-Impulsvektor gehören, null setzt und für die Energie des W -Bosons diejenige aus dem Zerfall ohne Gluon-Bremsstrahlung einsetzt, die den Wert

$$E_0 = \frac{m_b^2 - m_c^2 + q^2}{2m_b}$$

besitzt. Der Term in der ersten Zeile von (5.63) ist infrarot-endlich, so daß die Gluonmasse null gesetzt werden kann. Dadurch wird die Integration wesentlich einfacher und kann

auf die gleiche Art berechnet werden wie die übrigen endlichen Terme. Der zweite Anteil enthält die Infrarot-Singularität. Da der Faktor $b_X(E_0, 0, 0)$ von der Integrationsvariablen unabhängig ist, kann er bei der Integration vor das Integral gezogen werden. Dann braucht man nur den Soft-Gluon-Faktor $a(E, \omega, m)$ mit endlicher Gluonmasse zu regularisieren. Der integrierte Soft-Gluon-Faktor ist durch

$$A_g = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega a(E, \omega, m) \quad (5.64)$$

gegeben und ist für alle betrachteten Helizitäten X identisch. Er soll nun explizit berechnet werden. Die parametrisierte Form (5.62) des Integranden besteht aus drei Termen, die im folgenden einzeln aufintegriert werden sollen. Sie werden mit a_1 , a_2 und a_3 bezeichnet. Die Integration über die Gluonenergie ω ist sehr einfach, da alle drei Terme nur Potenzen von ω enthalten. Nach dem Einsetzen der Integrationsgrenzen für ω erhält man wieder ein Ergebnis, das aus drei unterschiedlichen Termen besteht:

$$a(E, m) := \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega a(E, \omega, m) = a_1(E, m) + a_2(E, m) + a_3(E, m) \quad (5.65)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1(E, m) &= \frac{1}{\omega_{max}(E, m)} - \frac{1}{\omega_{min}(E, m)} \\ a_2(E, m) &= \frac{-4(m_b^2 + q^2 - m^2 - 2m_b E)}{(m_b^2 - m_c^2 + q^2 - m^2 - 2m_b E)^2} \left[\omega_{max}(E, m) - \omega_{min}(E, m) \right] \\ a_3(E, m) &= \frac{4(m_b - E)}{(m_b^2 - m_c^2 + q^2 - m^2 - 2m_b E)} \ln \left[\frac{\omega_{max}(E, m)}{\omega_{min}(E, m)} \right]. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Die drei Funktionen a_i hängen nun in relativ komplizierter Weise von der Integrationsvariablen E ab. Aufgrund der Gluonmasse m treten einige Wurzeln auf, die nicht leicht zu integrieren sind. Um die Funktionen etwas zu vereinfachen, führt man zuerst eine Substitution der Energie E durch, die die Wurzeln in eine übersichtliche Form bringt. Sie lautet

$$E' = m_b^2 + q^2 - 2m_b E.$$

Die neuen Integrationsgrenzen für die Variable E' sind durch

$$E'_{min} = (m_c + m)^2 \leq (m_b - \sqrt{q^2})^2 = E'_{max}$$

gegeben. Das Integral des Soft-Gluon-Faktors ändert sich dadurch in der folgenden Art

$$A_g = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE a(E, m) = \frac{1}{2m_b} \int_{E'_{min}}^{E'_{max}} dE' a(E', m), \quad (5.67)$$

wobei Einfachheit halber für den transformierten Integranden derselbe Buchstabe a verwendet wurde, um nicht zu viele neue Abkürzungen einführen zu müssen. Der Integrand hat die explizite Form

$$\begin{aligned}
a(E', m) &= \frac{8 m_b E' \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 \lambda_2 - (E' + m_b^2 - q^2)^2 (E' - m_c^2 + m^2)^2} - \frac{2}{m_b} \frac{(E' - m^2) \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{E' (E' - m_c^2 - m^2)^2} \\
&+ \frac{2}{m_b} \frac{E' + m_b^2 - q^2}{E' - m_c^2 - m^2} \ln \left[\frac{(E' + m_b^2 - q^2) (E' - m_c^2 + m^2) + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{(E' + m_b^2 - q^2) (E' - m_c^2 + m^2) - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \right]
\end{aligned} \tag{5.68}$$

mit den Definitionen der beiden λ -Funktionen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lambda(E', m_c^2, m^2) = E'^2 + m_c^4 + m^4 - 2(E' m_c^2 + E' m^2 + m_c^2 m^2) \\
\lambda_2 &= \lambda(E', m_b^2, q^2) = E'^2 + m_b^4 + (q^2)^2 - 2(E' m_b^2 + E' q^2 + m_b^2 q^2).
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Die Integration der Funktion $a(E', m)$ ist trotz der Substitution aufgrund der endlichen Gluonmasse m nur schwer durchzuführen. Zur Vereinfachung spaltet man sie wieder in zwei Anteile auf, die einzeln wesentlich einfacher zu integrieren sind. Dazu subtrahiert man von der ursprünglichen Funktion eine andere von ähnlicher Gestalt und addiert sie anschließend wieder. Man kann den Integranden somit in der Form

$$\begin{aligned}
a(E', m) &= \left[a(E', m) - a_0(E', m) \right] + a_0(E', m) \\
&\longrightarrow \left[a(E', 0) - a_0(E', 0) \right] + a_0(E', m) \equiv a_{reg}(E') + a_{sing}(E', m)
\end{aligned} \tag{5.70}$$

schreiben, wobei a_0 so gewählt wird, daß die Differenz $a - a_0$ in der zweiten Zeile nicht mehr infrarot-divergent ist und deshalb für $m = 0$ integriert werden kann. Die Funktion a_0 hat dasselbe Divergenzverhalten wie a und geht aus a durch geeignete Vernachlässigung der Gluonmasse hervor, was im folgenden genauer erläutert werden soll.

Um a_0 zu bestimmen, ist es sinnvoll, eine weitere Substitution der Integrationsvariablen durchzuführen, weil man dann im Integranden leicht sehen kann, wo man die Gluonmasse vernachlässigen darf. Mit

$$E' = E'' \frac{m_c m}{m_b^2} + (m_c + m)^2$$

erhält man aus $a(E', m)$ eine neue Funktion, die proportional zu $1/m$ und daher im Grenzfalle verschwindender Gluonmasse divergent ist. Abgesehen von dieser $1/m$ -Singularität darf man die Gluonmasse überall null setzen, weil sie in diesen Fällen nur additiv auftritt und gegenüber den Quarkmassen m_b und m_c vernachlässigt werden kann. Die Funktion a_0 hat dann die Form

$$a_0(E'', m) = \frac{-2 m_b m_c \sqrt{E'' (E'' + 4 m_b^2) \lambda_0}}{m [(E'')^2 m_c^2 + 4 E'' m_b^2 m_c^2 + m_b^2 (m_b^2 + m_c^2 - q^2)^2]} \tag{5.71}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2 m_b \sqrt{E'' (E'' + 4 m_b^2)} \lambda_0}{m m_c (E'' + 2 m_b^2)^2} + \frac{2 m_b}{m_c m} \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{E'' + 2 m_b^2} \\
& \quad \times \ln \left[\frac{(E'' + 2 m_b^2) (m_b^2 + m_c^2 - q^2) + \sqrt{E'' (E'' + 4 m_b^2)} \lambda_0}{(E'' + 2 m_b^2) (m_b^2 + m_c^2 - q^2) - \sqrt{E'' (E'' + 4 m_b^2)} \lambda_0} \right]
\end{aligned}$$

mit der Definition

$$\lambda_0 = \lambda(m_b^2, m_c^2, q^2) = m_b^4 + m_c^4 + (q^2)^2 - 2(m_b^2 m_c^2 + m_b^2 q^2 + m_c^2 q^2).$$

Nach der Rücksubstitution

$$E'' = \frac{m_b^2}{m_c m} \left(E' - (m_c + m)^2 \right)$$

bekommt man dann die gesuchte Funktion $a_0(E', m)$. Sie lautet

$$\begin{aligned}
a_0(E', m) &= \frac{-2 m_b \sqrt{\lambda_1 \lambda_0}}{m_b^2 (E' - m_c^2)^2 + m^2 [\lambda_0 + 2 m_b^2 (m_c^2 - E')] + m^4 m_b^2} \quad (5.72) \\
& - \frac{2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_0}}{m_b (E' - m_c^2 - m^2)^2} + \frac{2}{m_b} \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{E' - m_c^2 - m^2} \\
& \quad \times \ln \left[\frac{(E' - m_c^2 - m^2) (m_b^2 + m_c^2 - q^2) + \sqrt{\lambda_0 \lambda_1}}{(E' - m_c^2 - m^2) (m_b^2 + m_c^2 - q^2) - \sqrt{\lambda_0 \lambda_1}} \right].
\end{aligned}$$

Der Zwischenschritt über die Substitution mit der neuen Variablen E'' diente nur dem Zweck, den Integranden in eine übersichtliche Form zu bringen, in der man die Gluonmasse in geeigneter Weise vernachlässigen kann.

Nun kann man die Funktion a_0 in den Integranden (5.70) einsetzen, wobei man, wie bereits gesagt wurde, bei den Differenztermen die Gluonmasse null setzen darf, weil sie konvergent sind. Man erhält den infrarot-endlichen Integranden aus

$$\begin{aligned}
a_{reg}(E') &= a(E', 0) - a_0(E', 0) \\
&= \frac{4}{m_b} \frac{\sqrt{\lambda_0} - \sqrt{\lambda_2}}{E' - m_c^2} + \frac{2}{m_b} \frac{E' + m_b^2 - q^2}{E' - m_c^2} \ln \left(\frac{E' + m_b^2 - q^2 + \sqrt{\lambda_2}}{E' + m_b^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_2}} \right) \\
& - \frac{2}{m_b} \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{E' - m_c^2} \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda_0}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_0}} \right). \quad (5.73)
\end{aligned}$$

Der zweite Logarithmus enthält keine Integrationsvariable E' mehr und sorgt dafür, daß das Integral endlich ist. Der Vorfaktor vor dem ersten Logarithmus kann mit

$$\frac{E' + m_b^2 - q^2}{E' - m_c^2} = 1 + \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{E' - m_c^2} \quad (5.74)$$

in eine Form gebracht werden, die leichter zu integrieren ist. Der konvergente Integrand a_{reg} hängt von der Integrationsvariablen E' ab. Diese Abhängigkeit wird durch bestimmte Grundfunktionen beschrieben, die auch im Rahmen der übrigen endlichen Terme auftreten, welche nicht proportional zum Soft-Gluon-Faktor sind und weiter unten diskutiert werden. Sie sind in (5.92) angegeben, und der Integrand $a_{reg}(E')$ kann als Linearkombination dieser Grundfunktionen geschrieben werden. Man erhält

$$\begin{aligned} a_{reg}(E') &= \frac{2}{m_b} \left[2\sqrt{\lambda_0} - (m_b^2 + m_c^2 - q^2) \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda_0}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_0}} \right) \right] T(0) \\ &\quad - \frac{4}{m_b} T(1/2) + \frac{2}{m_b} (m_b^2 + m_c^2 - q^2) U(0) + \frac{2}{m_b} S(0, 0). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Neben den oben diskutierten infrarot-endlichen Termen benötigt man noch den divergenten Anteil des Soft-Gluon-Faktors. Nach (5.70) ist er durch

$$a_{sing}(E', m) = a_0(E', m) \quad (5.76)$$

gegeben. Aus dem konvergenten und dem divergenten Integranden ergibt sich mit (5.67) und (5.70) der Soft-Gluon-Faktor durch die Integration

$$A_g = \frac{1}{2m_b} \int_{E'_{min}}^{E'_{max}} dE' \left[a_{reg}(E') + a_{sing}(E', m) \right] \equiv A_g^{(reg)} + A_g^{(sing)}, \quad (5.77)$$

wobei bei dem konvergenten Teil die Gluonmasse in der unteren Integrationsgrenze vernachlässigt werden kann.

Zur Auswertung des konvergenten Anteils benötigt man die Integrale der Grundfunktionen (5.92) bezüglich der Variablen E' . Verwendet man die weiter unten eingeführte Skalierung (5.95) der Integrationsvariablen sowie der c -Masse und des Impulsquadrates q^2 , so sind die Integrale durch die Ausdrücke (5.96) gegeben. Das Integral über a_{reg} kann somit als Linearkombination dieser Grundintegrale geschrieben werden. Für den konvergenten Anteil des Soft-Gluon-Faktors ergibt sich damit

$$\begin{aligned} A_g^{(reg)} &= \frac{1}{2m_b} \int_{E'_{min}}^{E'_{max}} a_{reg}(E') dE' \\ &= \frac{1}{m_b^2} \left[2\sqrt{\lambda_0} + (m_b^2 + m_c^2 - q^2) \ln(w_1) \right] \mathcal{T}(0) \\ &\quad - 2\mathcal{T}(1/2) + \frac{1}{m_b^2} (m_b^2 + m_c^2 - q^2) \mathcal{U}(0) + \mathcal{S}(0, 0). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Die Grundintegrale können mit Hilfe der Substitution (5.97) berechnet werden und sind in Anhang D angegeben. Das Argument des Logarithmus in (5.75) wurde durch die Funktion w_1 aus (5.89) ausgedrückt.

Bei den divergenten Beiträgen ist es sinnvoll, eine Substitution einzuführen, die die Wurzeln im Integranden a_{sing} vereinfacht. Sie ist durch

$$E' = m_c^2 + m^2 + m_c m \frac{v+1}{\sqrt{v}}, \quad dE' = \frac{m_c m}{2} \frac{v-1}{\sqrt{v^3}} dv$$

gegeben, und die zugehörigen Integrationsgrenzen lauten

$$1 = v_{min} \leq v \leq v_{max} = \left(\frac{(m_b - \sqrt{q^2})^2 - m_c^2 - m^2 + \sqrt{\lambda_3}}{2 m_c m} \right)^2 \quad (5.79)$$

mit der Definition

$$\lambda_3 = \lambda \left((m_b - \sqrt{q^2})^2, m_c^2, m^2 \right).$$

Der infrarot-divergente Integrand in (5.77) geht dann in den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 m_b} a_{sing}(v, m) \frac{dE'}{dv} &= - \frac{m_c^2 \sqrt{\lambda_0}}{2} \frac{(v-1)^2}{v [\lambda_0 v + m_b^2 m_c^2 (v+1)^2]} - \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2 m_b^2} \frac{(v-1)^2}{v (v+1)^2} \\ &\quad + \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{2 m_b^2} \frac{v-1}{v (v+1)} \ln \left(\frac{a v + b}{b v + a} \right) \end{aligned} \quad (5.80)$$

über, wobei Einfachheit halber für den transformierten Integranden wieder dieselbe Variable verwendet wurde. Die Konstanten a und b sind durch

$$a = m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda_0}, \quad b = m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_0}$$

gegeben. Die im Integranden a_{sing} auftretenden gebrochen rationalen Funktionen, die von der Integrationsvariablen v abhängen, können durch eine Partialbruchzerlegung in eine Form gebracht werden, in der die Integrale relativ einfach berechnet werden können. Mit der Zerlegung

$$\lambda_0 v + m_b^2 m_c^2 (v+1)^2 = m_b^2 m_c^2 (v+v_1)(v+v_2)$$

und der Definition

$$v_1 = 1 + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2 m_b^2 m_c^2} \left(m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda_0} \right), \quad v_2 = 1 - \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2 m_b^2 m_c^2} \left(m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_0} \right) \quad (5.81)$$

kann auch der Nenner des ersten Terms in (5.80) faktorisiert und anschließend durch Partialbruchzerlegung vereinfacht werden.

Es ist sinnvoll, die Integrationsgrenze v_{max} in eine Potenzreihe nach der Gluonmasse zu entwickeln, da man nur am Grenzfall $m \rightarrow 0$ interessiert ist. Es gilt

$$v_{max} = \frac{[(m_b - \sqrt{q^2})^2 - m_c^2]^2}{m^2 m_c^2} - 2 \frac{(m_b - \sqrt{q^2})^2}{m_c^2} + \mathcal{O}(m^2), \quad (5.82)$$

wobei man in der Praxis nur den ersten Term benötigt, weil dieser bereits die Divergenz enthält. Nach Einsetzen in das unbestimmte Integral sorgt die obere Grenze dafür, daß das Integral logarithmisch von der Gluonmasse abhängt. In allen Ausdrücken, in denen der Grenzwert $m = 0$ existiert, kann die Gluonmasse vernachlässigt werden.

Nach Durchführung der Partialbruchzerlegung im Integranden (5.80) und anschließender Integration über die Variable v läßt sich das Resultat im Grenzfall verschwindender Gluonmasse als Linearkombination der folgenden drei Grundintegrale schreiben:

$$I_1 = \int dv \left[\frac{2}{v} - \frac{4}{(v+1)^2} \right] = \frac{4}{v+1} + 2 \ln(v) \Big|_1^{v_{max}} \quad (5.83)$$

$$= 4 \ln \left(\frac{(m_b - \sqrt{q^2})^2 - m_c^2}{m m_c} \right) - 2 + \mathcal{O}(m^2)$$

$$I_2 = \int dv \left(\frac{1}{v+v_1} - \frac{1}{v+v_2} \right) = \ln \left(\frac{v+v_1}{v+v_2} \right) \Big|_1^{v_{max}}$$

$$= \ln(w_1) + \mathcal{O}(m^2)$$

$$I_3 = \int dv \left(-\frac{1}{v} + \frac{2}{v+1} \right) \ln \left(\frac{av+b}{bv+a} \right)$$

$$= 2 \text{Li}_2 \left(-\frac{av+b}{a-b} \right) + 2 \text{Li}_2 \left[-\frac{b(v+1)}{a-b} \right] + \text{Li}_2 \left(-\frac{av}{b} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{bv}{a} \right)$$

$$+ 2 \ln(av+b) \ln \left[\frac{a(v+1)}{a-b} \right] - 2 \ln(a-b) \ln \left[\frac{b(v+1)}{a-b} \right] - \ln \left(\frac{b}{a} \right) \ln(v) \Big|_1^{v_{max}}$$

$$= -2 \text{Li}_2(1-w_1) - \frac{1}{2} \ln^2(w_1) - 2 \ln \left(\frac{(m_b - \sqrt{q^2})^2 - m_c^2}{m m_c} \right) \ln(w_1) + \mathcal{O}(m^2).$$

Das Argument w_1 ist in (5.89) definiert. Die beiden Integrale I_1 und I_2 sind leicht zu berechnen. Bei I_3 ist zu beachten, daß man vor Einsetzen der oberen Grenze alle auftretenden Dilogarithmen, beispielsweise mit der neunten Dilogarithmus-Identität aus Anhang C.2, transformiert, so daß deren transformierte Argumente proportional zu m^2 sind und daher im betrachteten Grenzfall vernachlässigt werden können. Nach Einsetzen der unteren Grenze können die Dilogarithmen so umgeschrieben werden, daß man die 14. Identität aus C.2 mit $x = b/a$ verwenden kann, um das Ergebnis so zu vereinfachen, daß es nur noch einen Dilogarithmus enthält.

Mit Hilfe der oben angegebenen Grundintegrale I_1 , I_2 und I_3 ergibt sich der singuläre Anteil des Soft-Gluon-Faktors aus der Integration von (5.80) zu

$$A_g^{(sing)} = \frac{1}{2m_b} \int_1^{v_{max}} a_{sing}(v, m) \frac{dE'}{dv} dv = -\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2m_b^2} I_1 - \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{2m_b^2} (I_2 - I_3). \quad (5.84)$$

Der gesamte integrierte Soft-Gluon-Faktor ergibt sich nach (5.77) aus der Summe des infrarot-endlichen Anteils $A_g^{(reg)}$ und des divergenten Teils $A_g^{(sing)}$. Der konvergente Anteil ist unabhängig von der Gluonmasse m , während sie im divergenten Anteil in Form logarithmischer Terme enthalten ist. Die expliziten Ausdrücke der beiden Anteile sind in (5.78) und (5.84) angegeben. Nach deren Aufsummation erhält man

$$A_g = \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{2m_b^2} \left[I_3 + 2\mathcal{U}(0) + 2 \ln(w_1) \mathcal{T}(0) - I_2 \right] - \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2m_b^2} I_1 + \mathcal{S}(0,0) + \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{m_b^2} \mathcal{T}(0) - 2\mathcal{T}(1/2). \quad (5.85)$$

Das Resultat enthält Dilogarithmen und Produkte von Logarithmen, die in der Summe $I_3 + 2\mathcal{U}(0) + 2 \ln(w_1) \mathcal{T}(0)$ enthalten sind. Alle anderen Grundintegrale enthalten nur einfache Logarithmen und konstante Terme. Nach Einsetzen der Grundintegrale aus (5.83) und aus Anhang D läßt sich das Resultat für A_g weiter vereinfachen, indem man die Argumente der Logarithmen in (5.89) auf die Variablen η und x aus dem Anhang umschreibt. Es gilt

$$w_1 = \frac{\eta(1-\eta x)}{\eta-x}, \quad w_2 = \frac{1}{\eta^2}, \quad w_3 = \frac{1-\eta x}{\eta(\eta-x)}. \quad (5.86)$$

Außerdem ergibt sich $1-w_1 = \sqrt{\lambda_0} \eta / (\eta-x)$. Nun kann man die Identität von Schaeffer, die in Anhang C angegeben ist, benutzen, um die Argumente der Dilogarithmen gemäß

$$\begin{aligned} \text{Li}_2 \left[\frac{1-\eta x}{\eta(\eta-x)} \right] &= \text{Li}_2(\eta x) - \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1}{\eta^2} \right) + \text{Li}_2 \left[\frac{\eta(1-\eta x)}{\eta-x} \right] \\ &\quad - \frac{\pi^2}{6} + \ln(\eta x) \ln \left[\frac{\eta(1-\eta x)}{\eta-x} \right]. \end{aligned} \quad (5.87)$$

umschreiben zu können. Anschließend ersetzt man die Argumente wieder durch die w_i und transformiert diejenigen der Dilogarithmen auf $1-w_i$. Am Schluß faßt man die einfach logarithmischen Terme und die Dilogarithmen zusammen. Nach dieser Umrechnung kann man den Soft-Gluon-Faktor in folgender kompakter Form darstellen, die nur noch drei Dilogarithmen enthält:

$$\begin{aligned} A_g &= \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2}{m_b^2} \left\{ -2 \text{Li}_2(1-w_1) + \text{Li}_2(1-w_2) - \text{Li}_2(1-w_3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln(w_1) \left[2 \ln \left(\frac{\lambda_0 \sqrt{w_3}}{m m_b m_c \sqrt{q^2}} \right) + 1 \right] - \frac{1}{4} \ln^2(w_1) \right\} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{m_b^2} \left[2 - \ln \left(\frac{\lambda_0}{m m_b m_c \sqrt{q^2}} \right) \right] - \ln(w_2) + \frac{m_c^2}{m_b^2} \ln(w_3). \end{aligned} \quad (5.88)$$

Wir verwenden wieder dieselben Abkürzungen wie bei der Berechnung der Einschleifen-Beiträge (5.37), die in unskalierten Größen die Form

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_0}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda_0}}, & w_2 &= \frac{m_b^2 - m_c^2 + q^2 - \sqrt{\lambda_0}}{m_b^2 - m_c^2 + q^2 + \sqrt{\lambda_0}} \\ w_3 &= \frac{m_b^2 - m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_0}}{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda_0}}, & \sqrt{w_3} &= \frac{m_b^2 - m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda_0}}{2 m_c \sqrt{q^2}} \end{aligned} \quad (5.89)$$

besitzen. Bei der Vereinfachung des Soft-Gluon-Faktors ist es nützlich, daß dieser bereits für der Zerfall des Topquarks in ein Bottom-Quark und ein W^+ -Boson berechnet worden ist [60]. Deshalb bietet es sich an, die Dilogarithmen in unserem Resultat auf die dort auftretenden zu transformieren. Ersetzt man in unserem Resultat die Massen $m_b \rightarrow m_t$ und $m_c \rightarrow m_b$, so kann es in den Soft-Gluon-Faktor aus [60] überführt werden.

5.4.4 Integration der infrarot-endlichen Terme

Nachdem wir im letzten Abschnitt den integrierten Soft-Gluon-Faktor A_g nach Parametrisierung mit endlicher Gluonmasse berechnet haben, wollen wir nun den infrarot-endlichen Anteil der Helizitäts-Raten (5.61) bestimmen. Wir setzen dazu den Integranden (5.48) unter Verwendung der Aufspaltung (5.63) in den Ausdruck für die Helizitäts-Raten ein und benutzen die Definition (5.64) für den integrierten Soft-Gluon-Faktor. Dann kann man die Helizitäts-Raten (5.61) in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} \Gamma_X &= \frac{g_w^2}{16 (2\pi)^3 m_b} |V_{bc}|^2 (g_s^2 C_F) \left\{ b_X(E_0, 0, 0) A_g \right. \\ &\quad \left. + \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega \left[a(E, \omega, 0) \left(b_X(E, \omega, 0) - b_X(E_0, 0, 0) \right) + f_X(E, \omega) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Die Infrarot-Divergenz steckt nur im Soft-Gluon-Faktor A_g , der in (5.88) angegeben wurde und mit dem Born-Term b_X multipliziert wird. Alle anderen Beiträge sind konvergent und brauchen daher nicht mit der Gluonmasse regularisiert zu werden. Das Integral in der zweiten Zeile von (5.90) enthält die endlichen Beiträge, die zunächst über die Gluonenergie ω integriert werden. Da der Integrand nur ganzzahlige Potenzen von ω im Intervall von -2 bis 1 enthält, ist die Stammfunktion eine Linearkombination der Funktionen

$$\frac{1}{\omega}, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \ln(\omega)$$

mit Koeffizienten, die nur von den Teilchenmassen und der W -Energie E abhängen, über die noch zu integrieren ist. Es stellt sich heraus, daß diese letzte Integration einfacher auszuführen ist, wenn man die bekannte Substitution

$$E = \frac{m_b^2 + q^2 - E'}{2 m_b}$$

verwendet. Dadurch ändern sich die Grenzen der ω -Integration ebenfalls, und nach Einsetzen in die Stammfunktion ergeben sich dann folgende elementare Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{min}} - \frac{1}{\omega_{max}} &= \frac{2}{m_b} \frac{\sqrt{\lambda_2}}{E' - m_c^2}, & \omega_{max} - \omega_{min} &= \frac{1}{2m_b} \frac{\sqrt{\lambda_2} (E' - m_c^2)}{E'} \\ \omega_{max}^2 - \omega_{min}^2 &= \frac{m_b^2 - q^2 + E'}{4m_b^2} \frac{\sqrt{\lambda_2} (E' - m_c^2)^2}{E'^2} \\ \ln \left(\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} \right) &= \ln \left(\frac{m_b^2 - q^2 + E' + \sqrt{\lambda_2}}{m_b^2 - q^2 + E' - \sqrt{\lambda_2}} \right) \end{aligned} \quad (5.91)$$

mit $\lambda_2 = \lambda(E', m_b^2, q^2)$, die bei der Integration über E' berücksichtigt werden müssen. Sie werden noch mit E' -abhängigen Koeffizienten multipliziert, die nur positive ganzzahlige Potenzen von E' enthalten. Damit ergibt sich dann für den Integranden eine Linearkombination von Grundfunktionen mit jeweils konstanten Koeffizienten, die nur noch die Massen der Quarks und das Impulsquadrat des W -Bosons enthalten. Diese Grundfunktionen können folgendermaßen klassifiziert werden:

$$\begin{aligned} R(m, n) &= (\lambda_2)^m (E')^n, & S(m, n) &= (\lambda_2)^m (E')^n \ln \left(\frac{m_b^2 - q^2 + E' + \sqrt{\lambda_2}}{m_b^2 - q^2 + E' - \sqrt{\lambda_2}} \right) \\ T(m) &= \frac{(\lambda_2)^m}{E' - m_c^2}, & U(m) &= \frac{(\lambda_2)^m}{E' - m_c^2} \ln \left(\frac{m_b^2 - q^2 + E' + \sqrt{\lambda_2}}{m_b^2 - q^2 + E' - \sqrt{\lambda_2}} \right) \end{aligned} \quad (5.92)$$

mit ganzzahligen oder halbzahligen Werten für m und n . Das Integral in der letzten Zeile von (5.90) ergibt das Resultat für die infrarot-endlichen Terme. Kürzt man den Integranden mit

$$g_0(E', \omega) := a'(E', \omega, 0) \left(b'(E', \omega, 0) - b(E_0, 0, 0) \right) + f(E', \omega) \quad (5.93)$$

ab, wobei die auf die Variable E' transformierten Funktionen auch mit einem Strich bezeichnet werden, so kann man das Integral in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} I_0 &:= \frac{1}{2m_b} \int_{E'_{min}}^{E'_{max}} dE' \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega g_0(E', \omega) \\ &= \int_{E'_{min}}^{E'_{max}} dE' \left\{ \sum_{m,n} \left[r(m, n) R(m, n) + s(m, n) S(m, n) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_m \left[t(m) T(m) + u(m) U(m) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Die Koeffizienten r , s , t und u hängen ausschließlich von den Massen der Teilchen ab. Bei der Summation sind einige der Koeffizienten gleich null. Die Integration über E' kann nun

als Linearkombination der Integrale über die Grundfunktionen R , S , T und U geschrieben werden. Zur Vereinfachung werden die auftretenden Massen und die Variable E' mit der b -Masse skaliert, so daß nun

$$z = \frac{E'}{m_b^2}, \quad x = \frac{\sqrt{q^2}}{m_b}, \quad y = \frac{m_c}{m_b} \quad (5.95)$$

gilt. Die vorkommenden Grundintegrale haben damit die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(m, n) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \lambda^m z^n, & \mathcal{S}(m, n) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \lambda^m z^n \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda}} \right) \\ \mathcal{T}(m) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \frac{\lambda^m}{z-y^2}, & \mathcal{U}(m) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \frac{\lambda^m}{z-y^2} \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda}} \right) \end{aligned} \quad (5.96)$$

mit

$$\lambda \equiv \lambda(1, x^2, z) = 1 + x^4 + z^2 - 2(x^2 + z + x^2 z).$$

Ihre analytischen Resultate sind in Anhang D angegeben. Zur einfacheren Berechnung ist es sinnvoll, die Substitution

$$z = 1 + x^2 - x \frac{u^2 + 1}{u} \quad (5.97)$$

einzuführen, damit man die Wurzeln im Integranden beseitigen kann. Die Integration erstreckt sich nun über das Intervall $[1 + \epsilon', u_{max} - \epsilon]$, wobei

$$u_{max} = \frac{1 + x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)}}{2x}$$

die obere Integrationsgrenze bezeichnet. In den Grundintegralen werden wir die obere Grenze der Kürze wegen als $u_{max} \equiv \eta$ schreiben. Aufgrund der Aufspaltung der Integration in diese Grundintegrale mittels Partialbruchzerlegung gibt es einige Integrale, die an der oberen oder an der unteren Integrationsgrenze divergent sind. Dies sind aber nur Scheinsingularitäten, die eine Folge der Partialbruchzerlegung sind und sich in der Zerfallsrate wieder gegenseitig aufheben. Zur Parametrisierung dieser Singularitäten werden die Konstanten ϵ und ϵ' eingeführt.

Die skalierten Koeffizienten $r(m, n)$, $s(m, n)$, $t(n)$ und $u(n)$ hängen nur noch von x und y ab. Die Bremsstrahlungs-Beiträge zu den unterschiedlichen Helizitäts-Raten werden als Linearkombination der Grundintegrale mit diesen Koeffizienten dargestellt. Die verschiedenen Koeffizienten sind in Anhang E angegeben.

Durch die Aufspaltung der Integration in eine Linearkombination von Grundintegralen kann das Resultat, das eine relativ komplexe Gestalt besitzt, leichter integriert und in einer relativ übersichtlichen Form dargestellt werden. Außerdem ist diese Art der Darstellung vorteilhaft bei der weiteren Zusammenfassung und Vereinfachung der Resultate zu kompakteren Ausdrücken.

5.4.5 Zusammenfassung der analytischen Resultate

Summiert man alle Beiträge in (5.94) auf und addiert noch den mit der b -Masse skalierten divergenten Anteil aus (5.90), der einem Produkt aus der Bornschen Rate mit dem Soft-Gluon-Faktor entspricht, so erhält man schließlich die gesamten Bremsstrahlungsbeiträge zur Zerfallsrate. Man drückt sie durch die skalierten Größen x und y aus, um die Resultate etwas zu vereinfachen. Mit der Definition der Fermi-Konstanten $G_F = g_w^2 \sqrt{2} / (8M_W^2)$ und dem Farbfaktor $C_F = 4/3$ lautet das Resultat für die Helizitäts-Raten

$$\Gamma_X^{(g)} = \frac{G_F M_W^2 m_b}{8 \sqrt{2} \pi} |V_{bc}|^2 \frac{\alpha_s}{3\pi} G_X, \quad (5.98)$$

wobei der Index X auch wieder sowohl über die unpolarisierten als auch über die polarisierten Helizitäten läuft. Die Helizitäts-Strukturfunktionen G_X sind durch die folgenden Linearkombinationen der Grundintegrale gegeben:

$$\begin{aligned} G_U &= 2 \left[4 (1 - x^2 + y^2) A_g + r_{U,0}(-1/2, -2) \mathcal{R}(-1/2, -2) \right. \\ &\quad + r_{U,0}(-1/2, -1) \mathcal{R}(-1/2, -1) + r_{U,0}(-1/2, 0) \mathcal{R}(-1/2, 0) \\ &\quad + r_{U,0}(-1/2, 1) \mathcal{R}(-1/2, 1) + r_{U,0}(-1/2, 2) \mathcal{R}(-1/2, 2) \\ &\quad + s_{U,0}(-1, 0) \mathcal{S}(-1, 0) + s_{U,0}(-1, 1) \mathcal{S}(-1, 1) \\ &\quad \left. + s_{U,0}(-1, 2) \mathcal{S}(-1, 2) + s_{U,0}(-1, 3) \mathcal{S}(-1, 3) \right] \\ G_{UP} &= -2 \left[4 \sqrt{\lambda} A_g + r_{U,P}(-1, -2) \mathcal{R}(-1, -2) + r_{U,P}(-1, -1) \mathcal{R}(-1, -1) \right. \\ &\quad + r_{U,P}(-1, 0) \mathcal{R}(-1, 0) + r_{U,P}(-1, 1) \mathcal{R}(-1, 1) + r_{U,P}(-1, 2) \mathcal{R}(-1, 2) \\ &\quad + r_{U,P}(-1, 3) \mathcal{R}(-1, 3) + s_{U,P}(0, 0) \mathcal{S}(0, 0) \\ &\quad + s_{U,P}(-3/2, 0) \mathcal{S}(-3/2, 0) + s_{U,P}(-3/2, 1) \mathcal{S}(-3/2, 1) \\ &\quad + s_{U,P}(-3/2, 2) \mathcal{S}(-3/2, 2) + s_{U,P}(-3/2, 3) \mathcal{S}(-3/2, 3) \\ &\quad + s_{U,P}(-3/2, 4) \mathcal{S}(-3/2, 4) + t_{U,P}(0) \mathcal{T}(0) + t_{U,P}(1/2) \mathcal{T}(1/2) \\ &\quad \left. + u_{U,P}(-1/2) \mathcal{U}(-1/2) + u_{U,P}(0) \mathcal{U}(0) \right] \\ G_L &= \frac{1}{x^2} \left\{ 4 \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] A_g + r_{L,0}(-1/2, -2) \mathcal{R}(-1/2, -2) \right. \\ &\quad + r_{L,0}(-1/2, -1) \mathcal{R}(-1/2, -1) + r_{L,0}(-1/2, 0) \mathcal{R}(-1/2, 0) \\ &\quad + r_{L,0}(-1/2, 1) \mathcal{R}(-1/2, 1) + r_{L,0}(-1/2, 2) \mathcal{R}(-1/2, 2) \\ &\quad + s_{L,0}(-1, 0) \mathcal{S}(-1, 0) + s_{L,0}(-1, 1) \mathcal{S}(-1, 1) \\ &\quad \left. + s_{L,0}(-1, 2) \mathcal{S}(-1, 2) + s_{L,0}(-1, 3) \mathcal{S}(-1, 3) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{LP} = & \frac{1}{x^2} \left[4 (1 - y^2) \sqrt{\lambda} A_g + r_{L,P}(-1, -2) \mathcal{R}(-1, -2) + r_{L,P}(-1, -1) \mathcal{R}(-1, -1) \right. \\
& + r_{L,P}(-1, 0) \mathcal{R}(-1, 0) + r_{L,P}(-1, 1) \mathcal{R}(-1, 1) + r_{L,P}(-1, 2) \mathcal{R}(-1, 2) \\
& + r_{L,P}(-1, 3) \mathcal{R}(-1, 3) + s_{L,P}(0, 0) \mathcal{S}(0, 0) \\
& + s_{L,P}(-3/2, 0) \mathcal{S}(-3/2, 0) + s_{L,P}(-3/2, 1) \mathcal{S}(-3/2, 1) \\
& + s_{L,P}(-3/2, 2) \mathcal{S}(-3/2, 2) + s_{L,P}(-3/2, 3) \mathcal{S}(-3/2, 3) \\
& + s_{L,P}(-3/2, 4) \mathcal{S}(-3/2, 4) + t_{L,P}(0) \mathcal{T}(0) + t_{L,P}(1/2) \mathcal{T}(1/2) \\
& \left. + u_{L,P}(-1/2) \mathcal{U}(-1/2) + u_{L,P}(0) \mathcal{U}(0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{U+L} = & \frac{1}{x^2} \left\{ 4 \left[\lambda + 3x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] A_g + r_{U+L,0}(1/2, -2) \mathcal{R}(1/2, -2) \right. \\
& + r_{U+L,0}(1/2, -1) \mathcal{R}(1/2, -1) + r_{U+L,0}(1/2, 0) \mathcal{R}(1/2, 0) \\
& \left. + s_{U+L,0}(0, 0) \mathcal{S}(0, 0) + s_{U+L,0}(0, 1) \mathcal{S}(0, 1) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{UP+LP} = & \frac{1}{x^2} \left[4 (1 - 2x^2 - y^2) \sqrt{\lambda} A_g + r_{U+L,P}(0, -2) \mathcal{R}(0, -2) \right. \\
& + r_{U+L,P}(0, -1) \mathcal{R}(0, -1) + r_{U+L,P}(0, 0) \mathcal{R}(0, 0) \\
& + r_{U+L,P}(0, 1) \mathcal{R}(0, 1) + s_{U+L,P}(0, 0) \mathcal{S}(0, 0) \\
& + s_{U+L,P}(-1/2, 0) \mathcal{S}(-1/2, 0) + s_{U+L,P}(-1/2, 1) \mathcal{S}(-1/2, 1) \\
& + s_{U+L,P}(-1/2, 2) \mathcal{S}(-1/2, 2) + t_{U+L,P}(0) \mathcal{T}(0) + t_{U+L,P}(1/2) \mathcal{T}(1/2) \\
& \left. + u_{U+L,P}(-1/2) \mathcal{U}(-1/2) + u_{U+L,P}(0) \mathcal{U}(0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_S = & \frac{1}{x^2} \left\{ 4 \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] A_g + r_{S,0}(1/2, -2) \mathcal{R}(1/2, -2) \right. \\
& + r_{S,0}(1/2, -1) \mathcal{R}(1/2, -1) + r_{S,0}(1/2, 0) \mathcal{R}(1/2, 0) \\
& \left. + s_{S,0}(0, 0) \mathcal{S}(0, 0) + s_{S,0}(0, 1) \mathcal{S}(0, 1) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{SP} = & \frac{1}{x^2} (1 - y^2) \left[4 \sqrt{\lambda} A_g + r_{S,P}(0, -2) \mathcal{R}(0, -2) + r_{S,P}(0, -1) \mathcal{R}(0, -1) \right. \\
& + r_{S,P}(0, 0) \mathcal{R}(0, 0) + r_{S,P}(0, 1) \mathcal{R}(0, 1) + s_{S,P}(0, 0) \mathcal{S}(0, 0) \\
& + s_{S,P}(-1/2, 0) \mathcal{S}(-1/2, 0) + s_{S,P}(-1/2, 1) \mathcal{S}(-1/2, 1) \\
& \left. + s_{S,P}(-1/2, 2) \mathcal{S}(-1/2, 2) + t_{S,P}(0) \mathcal{T}(0) + t_{S,P}(1/2) \mathcal{T}(1/2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_{S,P}(-1/2)\mathcal{U}(-1/2) + u_{S,P}(0)\mathcal{U}(0) \Big] \\
G_F &= -2 \Big[4\sqrt{\lambda}A_g + r_{F,0}(0, -2)\mathcal{R}(0, -2) \\
& + r_{F,0}(0, -1)\mathcal{R}(0, -1) + r_{F,0}(0, 0)\mathcal{R}(0, 0) \\
& + r_{F,0}(0, 1)\mathcal{R}(0, 1) + s_{F,0}(0, 0)\mathcal{S}(0, 0) \\
& + s_{F,0}(-1/2, 0)\mathcal{S}(-1/2, 0) + s_{F,0}(-1/2, 1)\mathcal{S}(-1/2, 1) \\
& + s_{F,0}(-1/2, 2)\mathcal{S}(-1/2, 2) + t_{F,0}(0)\mathcal{T}(0) + t_{F,0}(1/2)\mathcal{T}(1/2) \\
& + u_{F,0}(-1/2)\mathcal{U}(-1/2) + u_{F,0}(0)\mathcal{U}(0) \Big] \\
G_{FP} &= 2 \Big[4(1 - x^2 + y^2)A_g + r_{F,P}(-1/2, -2)\mathcal{R}(-1/2, -2) \\
& + r_{F,P}(-1/2, -1)\mathcal{R}(-1/2, -1) + r_{F,P}(-1/2, 0)\mathcal{R}(-1/2, 0) \\
& + r_{F,P}(-1/2, 1)\mathcal{R}(-1/2, 1) + r_{F,P}(-1/2, 2)\mathcal{R}(-1/2, 2) \\
& + s_{F,P}(-1, 0)\mathcal{S}(-1, 0) + s_{F,P}(-1, 1)\mathcal{S}(-1, 1) \\
& + s_{F,P}(-1, 2)\mathcal{S}(-1, 2) + s_{F,P}(-1, 3)\mathcal{S}(-1, 3) \Big] \\
G_I &= 0 \\
G_{IP} &= -\frac{1}{\sqrt{2}x} \Big[4\sqrt{\lambda}A_g + r_{I,P}(-1, -2)\mathcal{R}(-1, -2) + r_{I,P}(-1, -1)\mathcal{R}(-1, -1) \\
& + r_{I,P}(-1, 0)\mathcal{R}(-1, 0) + r_{I,P}(-1, 1)\mathcal{R}(-1, 1) + r_{I,P}(-1, 2)\mathcal{R}(-1, 2) \\
& + s_{I,P}(0, 0)\mathcal{S}(0, 0) + s_{I,P}(-3/2, 0)\mathcal{S}(-3/2, 0) \\
& + s_{I,P}(-3/2, 1)\mathcal{S}(-3/2, 1) + s_{I,P}(-3/2, 2)\mathcal{S}(-3/2, 2) \\
& + s_{I,P}(-3/2, 3)\mathcal{S}(-3/2, 3) + t_{I,P}(0)\mathcal{T}(0) + t_{I,P}(1/2)\mathcal{T}(1/2) \\
& + u_{I,P}(-1/2)\mathcal{U}(-1/2) + u_{I,P}(0)\mathcal{U}(0) \Big] \\
G_A &= 0 \\
G_{AP} &= \frac{1}{\sqrt{2}x} \Big[4(1 - x^2 - y^2)A_g + r_{A,P}(-1/2, -2)\mathcal{R}(-1/2, -2) \\
& + r_{A,P}(-1/2, -1)\mathcal{R}(-1/2, -1) + r_{A,P}(-1/2, 0)\mathcal{R}(-1/2, 0) \\
& + r_{A,P}(-1/2, 1)\mathcal{R}(-1/2, 1) + s_{A,P}(-1, 0)\mathcal{S}(-1, 0) \\
& + s_{A,P}(-1, 1)\mathcal{S}(-1, 1) + s_{A,P}(-1, 2)\mathcal{S}(-1, 2) \Big]. \tag{5.99}
\end{aligned}$$

Der zusätzliche Index P bezeichnet zur Unterscheidung vom unpolarisierten Anteil die polarisierten Strukturfunktionen. Die Funktion λ ist definiert als $\lambda(1, x^2, y^2)$ und hängt nur von den skalierten Größen der Quarkmassen und des Quadrates des W -Impulses ab. Die Raten für die unterschiedlichen Helizitäten setzen sich aus Linearkombinationen der Grundintegrale \mathcal{R} , \mathcal{S} , \mathcal{T} und \mathcal{U} zusammen. Diese sind in Anhang D angegeben. Der Soft-Gluon-Faktor (5.88) lautet in skalierten Größen (5.17)

$$\begin{aligned}
A_g = & (1 - x^2 + y^2) \left\{ -2 \operatorname{Li}_2(1 - w_1) + \operatorname{Li}_2(1 - w_2) - \operatorname{Li}_2(1 - w_3) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \ln(w_1) \left[2 \ln \left(\frac{\lambda \sqrt{w_3}}{\Lambda x y} \right) + 1 \right] - \frac{1}{4} \ln^2(w_1) \right\} \\
& + 2\sqrt{\lambda} \left[2 - \ln \left(\frac{\lambda}{\Lambda x y} \right) \right] - \ln(w_2) + y^2 \ln(w_3)
\end{aligned} \tag{5.100}$$

wobei die skalierte Gluonmasse durch $\Lambda = m/m_b$ und die w_i durch (5.37) gegeben sind.

Man kann die Resultate (5.99), wie bereits oben erwähnt wurde, in eine kompakte Form bringen. Dazu betrachtet man die Logarithmen und Dilogarithmen in den verschiedenen Grundintegralen, von denen die entsprechenden Helizitäts-Raten abhängen, und drückt jede Rate als Linearkombination dieser Funktionen aus. Man erkennt zunächst, daß alle Integrale $\mathcal{R}(m, n)$ und $\mathcal{S}(m, n)$ für gleiche Werte m im wesentlichen die selben logarithmischen und dilogarithmischen Terme enthalten. Es ist von Vorteil, wenn man die Relationen

$$\begin{aligned}
\ln \left[\frac{(1-x)^2}{(\eta-x)(1-\eta x)} \right] &= 2 \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) - \ln(\eta) \\
\ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right) &= \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) - \frac{1}{2} \left[\ln(\eta) + \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \right] \\
\ln \left(\frac{\eta \sqrt{\lambda}}{x \epsilon'} \right) &= \ln(\eta) + \ln \left[\frac{(1-x)^2 - y^2}{\sqrt{\lambda} \epsilon'} \right] + \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right]
\end{aligned} \tag{5.101}$$

verwendet, um die Anzahl der vorkommenden logarithmischen Terme zu verringern. Im nächsten Schritt setzt man die Vorfaktoren aus Anhang E und die Grundintegrale aus Anhang D in (5.99) ein und bestimmt die Vorfaktoren aller vorkommenden Logarithmen und Dilogarithmen für jede Helizitäts-Rate. Zum Schluß vereinfacht man die Vorfaktoren und stellt jede Helizitätsrate als Linearkombination der Logarithmen und Dilogarithmen dar. Damit ergeben sich für die unterschiedlichen Helizitäts-Strukturfunktionen in (5.99) folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
G_U = & 2 \left\{ 4 (1 - x^2 + y^2) A_g - \sqrt{\lambda} (27 - 7x^2 + 3y^2) \right. \\
& \left. + \left[19 + 22x^2 - x^4 - 2(11 - 4x^2)y^2 - 3y^4 \right] \ln(\eta) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(1-x^2)^2 + 2(3+2x^2)y^2 - y^4 \right] \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \\
& - 4(7+x^2-y^2)\mathcal{N}_1 - \frac{2}{x} [(1-x)^2 - y^2] [(1-x)(5+x) + y^2] \mathcal{N}_2 \\
& - \frac{2}{x} [(1+x)^2 - y^2] [(1+x)(5-x) + y^2] \mathcal{N}_3 \Big\} \\
G_{UP} = & -2 \left\{ 4\sqrt{\lambda} A_g + \frac{1}{x} [(1-x)^2 - y^2] [12 - 63x - 10x^2 - 9x^3 - (12-5x)y^2] \right. \\
& + 8\lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] + \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} [6 + 19x^2 - 3x^4 - (6-7x^2)y^2] \ln(\eta) \\
& - \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} [3(2+9x^2-x^4) - (6+x^2)y^2] \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \\
& + \frac{4}{x^2} \left[(1-x^2)(3+14x^2-2x^4) \right. \\
& \quad \left. - (6-7x^2-x^4)y^2 + (3-x^2)y^4 \right] \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) \\
& \left. + 4 \left[11 + 3x^2 + x^4 - 2(3+x^2)y^2 + y^4 \right] \mathcal{N}_0 + 4\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2)\mathcal{N}_4 \right\} \\
G_L = & \frac{1}{x^2} \left\{ 4 \left[\lambda + x^2(1-x^2+y^2) \right] A_g \right. \\
& - \sqrt{\lambda} \left[3 - 55x^2 + 4x^4 + (6-7x^2)y^2 + 3y^4 \right] \\
& - \left[1 + 38x^2 + 57x^4 + (5-48x^2+5x^4)y^2 + (5-6x^2)y^4 + y^6 \right] \ln(\eta) \\
& + \left[(1-x^2)^2 + (5-16x^2-3x^4)y^2 + (5+2x^2)y^4 + y^6 \right] \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \\
& + 8x^2(7+x^2-y^2)\mathcal{N}_1 + 4x[(1-x)^2 - y^2] [(1-x)(5+x) + y^2] \mathcal{N}_2 \\
& \left. + 4x[(1+x)^2 - y^2] [(1+x)(5-x) + y^2] \mathcal{N}_3 \right\} \\
G_{LP} = & \frac{1}{x^2} \left\{ 4(1-y^2)\sqrt{\lambda} A_g - [(1-x)^2 - y^2] \right. \\
& \quad \left. \times \left[23 - 6x + 113x^2 - 24x^3 + 4x^4 - (28-6x+9x^2)y^2 + 5y^4 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 \lambda (1 - y^2) \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + \sqrt{\lambda} \left[13 + 49 x^2 - 3 (2 - x^2) y^2 - 7 y^4 \right] \ln(\eta) \\
& - \sqrt{\lambda} \left[7 (3 + 7 x^2) - (22 - 3 x^2) y^2 + y^4 \right] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \\
& + 4 \left[(1 - x^2) (11 + 24 x^2) - (13 - 15 x^2) y^2 + 2 y^4 \right] \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right) \\
& + 4 \left[2 + 22 x^2 + 11 x^4 - (5 + 12 x^2 + x^4) y^2 + 2 (2 + x^2) y^4 - y^6 \right] \mathcal{N}_0 \\
& + 4 (1 - y^2) \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \Big\} \\
G_{U+L} &= \frac{1}{x^2} \left\{ 4 \left[\lambda + 3 x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] A_g - \sqrt{\lambda} (1 - 2 x^2 + y^2) (3 + 5 x^2 + 3 y^2) \right. \\
& - \left[1 + 13 x^4 + 2 x^6 + (5 - 4 x^2 - 11 x^4) y^2 + 5 y^4 + y^6 \right] \ln(\eta) \\
& + \left. \left[(1 - x^2)^2 (1 + 2 x^2) + (5 - 4 x^2 + 5 x^4) y^2 + 5 y^4 + y^6 \right] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \right\} \\
G_{UP+LP} &= \frac{1}{x^2} \left\{ 4 (1 - 2 x^2 - y^2) \sqrt{\lambda} A_g - [(1 - x)^2 - y^2] \right. \\
& \quad \times \left[23 + 18 x - 13 x^2 - 44 x^3 - 14 x^4 - (28 + 18 x - x^2) y^2 + 5 y^4 \right] \\
& + 8 \lambda (1 - 2 x^2 - y^2) \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + \sqrt{\lambda} \left[1 + 11 x^2 + 6 x^4 + (6 - 11 x^2) y^2 - 7 y^4 \right] \ln(\eta) \\
& - \sqrt{\lambda} \left[9 - 5 x^2 + 6 x^4 - 5 (2 - x^2) y^2 + y^4 \right] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \\
& + 4 \left[(1 - x^2) (5 - 4 x^2 + 4 x^4) \right. \\
& \quad \left. - (1 - x^2 + 2 x^4) y^2 - 2 (2 - x^2) y^4 \right] \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right) \\
& + 4 \left[2 + 5 x^4 - 2 x^6 - (5 - 3 x^4) y^2 + 4 y^4 - y^6 \right] \mathcal{N}_0 \\
& + 4 \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) (1 - 2 x^2 - y^2) \mathcal{N}_4 \Big\}
\end{aligned}$$

$$G_S = \frac{1}{x^2} \left\{ 4 \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] A_g - 3 \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) (1 + y^2) \right. \\ \left. - (1 + y^2) \left[(1 - x^2)^2 + 2 (2 - x^2) y^2 + y^4 \right] \left[\ln(\eta) - \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \right] \right\}$$

$$G_{SP} = \frac{1}{x^2} (1 - y^2) \left\{ 4 \sqrt{\lambda} A_g - [(1 - x)^2 - y^2] (23 + 18x + 5x^2 - 5y^2) \right. \\ \left. + 8 \lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] + \sqrt{\lambda} (1 - 3x^2 + 7y^2) \ln(\eta) \right. \\ \left. - \sqrt{\lambda} \left[3(3 - x^2) - y^2 \right] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \right. \\ \left. + 4 \left[(1 - x^2) (5 - 2x^2) + 2(2 - x^2) y^2 \right] \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right) \right. \\ \left. + 4 \left[2 + x^4 - (3 + 2x^2) y^2 + y^4 \right] \mathcal{N}_0 + 4 \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \right\}$$

$$G_F = -2 \left\{ 4 \sqrt{\lambda} A_g + 2 [(1 - x)^2 - y^2] (1 + 12x + 4x^2 - y^2) \right. \\ \left. - 8 \lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] + \sqrt{\lambda} (11 + 3x^2 - 7y^2) \ln(\eta) \right. \\ \left. - \sqrt{\lambda} \left[3(1 + x^2) + y^2 \right] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \right. \\ \left. + 4 \left[(1 - x^2) (1 + 2x^2) - (1 + x^2) y^2 \right] \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right) \right. \\ \left. + 4 (1 + 3x^2 - x^4 + 2x^2 y^2 - y^4) \mathcal{N}_0 - 4 \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \right\}$$

$$G_{FP} = 2 \left\{ 4 (1 - x^2 + y^2) A_g - 2 \sqrt{\lambda} (5x^2 - 2y^2) \right. \\ \left. - \left[7 - 26x^2 - x^4 - 2(1 - 4x^2) y^2 - y^4 \right] \ln(\eta) \right. \\ \left. - \left[(1 - x^2)^2 - 2(3 - 2x^2) y^2 + y^4 \right] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \right. \\ \left. + 4 (1 - 5x^2 + y^2) \mathcal{N}_1 + \frac{4}{x} (1 - x) (1 + 2x) [(1 - x)^2 - y^2] \mathcal{N}_2 \right. \\ \left. + \frac{4}{x} (1 + x) (1 - 2x) [(1 + x)^2 - y^2] \mathcal{N}_3 \right\}$$

$$\begin{aligned}
G_I &= 0 \\
G_{IP} &= -\frac{1}{\sqrt{2}x} \left\{ 4\sqrt{\lambda} A_g - 2[(1-x)^2 - y^2] (16 + x + 16x^2 - 13y^2) \right. \\
&\quad + 8\lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] + 2\sqrt{\lambda} [3(2+x^2) - y^2] \ln(\eta) \\
&\quad - 2\sqrt{\lambda} (10 + 3x^2 - 5y^2) \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \\
&\quad + 2 \left[(1-x^2)(21 + 5x^2) - (11 - 15x^2)y^2 - 4y^4 \right] \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) \\
&\quad + 2 \left[7 + 15x^2 + 4x^4 - (11 + 8x^2)y^2 + 4y^4 \right] \mathcal{N}_0 \\
&\quad \left. + 4\sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \right\} \\
G_A &= 0 \\
G_{AP} &= \frac{1}{\sqrt{2}x} \left\{ 4(1 - x^2 - y^2) A_g + 6\sqrt{\lambda} (1 - 2x^2) \right. \\
&\quad + \left[1 - 4x^2 + 15x^4 + (5 - 11x^2)y^2 \right] \ln(\eta) \\
&\quad - (1 - x^2)(1 - x^2 + 5y^2) \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \\
&\quad + 2 \left[1 - 3x^2 - 2x^4 - (1 - 2x^2)y^2 \right] \mathcal{N}_1 \\
&\quad - 2(1 - x)(1 + 2x) [(1 - x)^2 - y^2] \mathcal{N}_2 \\
&\quad \left. + 2(1 + x)(1 - 2x) [(1 + x)^2 - y^2] \mathcal{N}_3 \right\}. \tag{5.102}
\end{aligned}$$

Der Soft-Gluon-Faktor A_g , welcher die Infrarot-Singularitäten enthält, wurde in (5.100) angegeben. Um die Resultate etwas übersichtlicher darzustellen, wurden alle dilogarithmischen Terme durch die Funktionen \mathcal{N}_i mit $i = 0, 1, 2, 3, 4$ abgekürzt. Sie sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\mathcal{N}_0 = \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + \text{Li}_2(x\eta) - 2\text{Li}_2(x) \tag{5.103}$$

$$\mathcal{N}_1 = \text{Li}_2(x\eta) - \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + 2 \ln(1 - \eta x) \ln \left[\frac{(\eta + 1)x}{1 + x} \right] + \ln \left(\frac{\eta}{\eta - x} \right) \ln \left[\frac{x^2(\eta - 1)^2}{\eta(\eta - x)} \right]$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_2 &= \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta-1)x}{\eta-x} \right] + \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta-1)x}{1-x} \right] - \frac{1}{2} \ln^2(1-x) + \ln \left(\frac{\eta}{\eta-x} \right) \ln \left[\frac{(\eta-1)x}{\eta-x} \right] \\
&\quad + \ln(1-x) \ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right) + \ln(1-\eta x) \ln \left[\frac{(\eta+1)x}{1+x} \right] \\
\mathcal{N}_3 &= \text{Li}_2 \left(\frac{1-\eta x}{1+x} \right) - \text{Li}_2 \left[\frac{\eta-x}{\eta(1+x)} \right] - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\eta}{\eta-x} \right) \ln \left[\frac{\eta(\eta-1)^2(1+x)^2}{(\eta+1)^2(\eta-x)} \right] \\
\mathcal{N}_4 &= 4 \text{Li}_2 \left(\frac{\eta\sqrt{\lambda}}{\eta-x} \right) - 2 \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta-1)x}{1-x} \right] - 2 \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta-1)x}{\eta-x} \right] + \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) - \text{Li}_2(x\eta) \\
&\quad - \ln^2(1-x) + \ln \left(\frac{\eta}{\eta-x} \right) \ln \left[\frac{\eta(\eta+1)^2}{\eta-x} \right] + 2 \ln(1-\eta x) \ln \left[\frac{(1-x)(\eta+1)}{\eta-x} \right].
\end{aligned}$$

Die analytischen Ausdrücke für die \mathcal{N}_i sind alle relativ kurz, und die Argumente der Dilogarithmen enthalten nur die Konstanten η und x .

Man erkennt, daß die Resultate (5.102) für die physikalischen Strukturfunktionen nicht mehr von den Parametern ϵ und ϵ' abhängen und daher, wie zu erwarten ist, im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ und $\epsilon' \rightarrow 0$ konvergent sind. Beim Zusammenfassen der logarithmischen Terme haben sich die Logarithmen $\ln[(\eta+1)/2]$ und $\ln[(\eta-1)/\epsilon]$ aus den Grundintegralen gegenseitig aufgehoben. Darüberhinaus kommen die Integrale $\mathcal{T}(m)$ und $\mathcal{U}(m)$ immer in derselben Linearkombination vor, so daß sich auch die Logarithmen $\ln(\epsilon')$ gegenseitig aufheben.

Die Resultate (5.102) werden auch in die inklusive Rate eingehen, die in den folgenden Abschnitten diskutiert wird. Sie besitzen gegenüber der weiter oben angegebenen Darstellung als Linearkombination bestimmter Grundintegrale den Vorteil, daß sie direkt angegeben werden können und eine wesentlich kompaktere Struktur besitzen, was in erster Linie zu einer besseren Übersichtlichkeit beiträgt.

5.5 Inklusive Zerfallsrate

Nachdem in den vergangenen Abschnitten dieses Kapitels die QCD-Strahlungskorrekturen zu den Helizitäts-Strukturfunktionen für den Zerfall $b \rightarrow c + W^-$ in erster Ordnung der Störungstheorie berechnet wurden, soll im folgenden die Summe aus diesen Beiträgen angegeben werden. Die inklusive Zerfallsrate besteht aus dem Born-Term und den QCD-Einschleifen-Korrekturen sowie dem Bremsstrahlungsbeitrag, der die Abstrahlung eines reellen Gluons enthält. Die Schleifenbeiträge sind renormiert worden, um die UV -Singularitäten zu beseitigen, die bei der Integration großer Schleifenimpulse aufgetreten sind. Sie enthalten aber noch, genauso wie der Bremsstrahlungsanteil, Infrarot-Singularitäten, die bei kleinen Gluonimpulsen auftreten. In der Summe aus virtuellen und reellen Beiträgen heben sich diese Singularitäten gegenseitig auf, so daß das Resultat endlich ist.

Die inklusiven Helizitäts-Raten ergeben sich aus der Summe der Bornschen Raten (5.19), der Einschleifen-Korrekturen (5.34) und der Bremsstrahlungs-Beiträge (5.98) zu

$$\Gamma_X^{(incl)} = \frac{G_F M_W^2 m_b}{8\sqrt{2}\pi} |V_{bc}|^2 \left[\sqrt{\lambda} B_X + \frac{\alpha_s}{3\pi} \left(\sqrt{\lambda} R_X + G_X \right) \right]. \quad (5.104)$$

Die Infrarot-Singularitäten aus den Einschleifen- und Bremsstrahlungs-Beiträgen sind nur in den Faktoren A_0 und A_g enthalten, die in (5.36) und (5.100) angegeben sind. Bei der Aufsummation aller Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ erhält man ein Resultat, das nur noch von der Linearkombination

$$A = \frac{4}{\sqrt{\lambda}} A_g - 2 A_0 \quad (5.105)$$

der Funktionen A_0 und A_g abhängt. Dieses Resultat ist unabhängig von der skalierten Gluonmasse Λ und daher infrarot-endlich. Man sieht direkt, daß sich die Singularitäten gegenseitig aufheben, indem man die Summe der $\ln(\Lambda)$ -abhängigen Terme aus A_0 und A_g bildet. Wenn man alle Massen sowie q^2 mit der b -Masse skaliert, erhält man für den Faktor A die folgende explizite Gestalt

$$\begin{aligned} A = & \frac{2}{\sqrt{\lambda}} (1 - x^2 + y^2) \left\{ -4 \operatorname{Li}_2(1 - w_1) + 4 \operatorname{Li}_2(1 - w_2) - 4 \operatorname{Li}_2(1 - w_3) \right. \\ & \left. - \ln(w_1) \left[\ln \left(\frac{\lambda^2 w_3}{x^2 y^3} \right) + 1 \right] - \frac{1}{2} \ln^2(w_1) + \ln \left[\frac{1}{2} (1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}) \right] \ln(w_2 w_3) \right\} \\ & + 4 \left[\ln \left(\frac{x^2 y^3}{\lambda^2} \right) + 2 \right] - \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \ln(w_2) + \frac{4 y^2}{\sqrt{\lambda}} \ln(w_3), \end{aligned} \quad (5.106)$$

wobei die einzelnen Terme aus A_0 und A_g , die dieselben Logarithmen oder Dilogarithmen enthalten, zusammengefaßt wurden. Die Argumente w_i sind in (5.37) definiert worden. Anstelle von A kann man auch eine Funktion wählen, die ein konstantes Vielfaches von A ist. Hier wurde diese Konstante so gewählt, daß der Term, der zu A proportional ist, bis auf den Faktor $\alpha_s/(3\pi)$ genau dem Bornschen Term entspricht.

Um die inklusiven Raten in eine Form zu bringen, die möglichst einfach ist, ist es sinnvoll, die einfach logarithmischen Terme in der Funktion A aus (5.106) mit denen aus den übrigen Termen, die nicht proportional zu A sind, zu verrechnen. Den verbliebenen Anteil aus A , der die dilogarithmischen Terme enthält, bezeichnen wir mit dem Symbol \mathcal{A} . Er lautet explizit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \frac{2}{\sqrt{\lambda}} (1 - x^2 + y^2) \left\{ -4 \operatorname{Li}_2(1 - w_1) + 4 \operatorname{Li}_2(1 - w_2) - 4 \operatorname{Li}_2(1 - w_3) \right. \\ & \left. - \ln(w_1) \ln \left(\frac{\lambda^2 w_3}{x^2 y^3} \right) - \frac{1}{2} \ln^2(w_1) + \ln \left[\frac{1}{2} (1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}) \right] \ln(w_2 w_3) \right\}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Um die Anzahl der einfachen Logarithmen auf ein Minimum zu reduzieren, benutzt man die Umrechnungen

$$\ln\left(\frac{\eta-x}{1-\eta x}\right) = \ln(\eta) - \ln(w_1), \quad \ln\left(\frac{x^2 y^3}{\lambda^2}\right) = \ln(y) + 2 \ln\left(\frac{x y}{\lambda}\right) \quad (5.108)$$

und die Identitäten $w_2 = 1/\eta^2$ und $w_3 = w_1 w_2$. Die Logarithmen $\ln(w_1)$ und $\ln(y)$ stammen aus den Einschleifen-Korrekturen, während $\ln[(\eta-x)/(1-\eta x)]$ und $\ln(u)$ in den Bremsstrahlungs-Beiträgen enthalten sind. Der Term $\ln(x^2 y^3/\lambda^2)$ kommt nur in der Funktion A vor.

Jetzt kann man alle Resultate der inklusiven Helizitäts-Raten als Linearkombination von Logarithmen und Dilogarithmen darstellen. Setzt man die expliziten Ausdrücke (5.20) für die Bornsche Rate sowie (5.35) für die Einschleifen-Korrekturen und (5.102) für die Beiträge zur Bremsstrahlung in (5.104) ein, so ergibt sich das Resultat

$$\Gamma_X^{(incl)} = \frac{G_F M_W^2 m_b}{8 \sqrt{2} \pi} |V_{bc}|^2 T_X \quad (5.109)$$

mit den Raten

$$\begin{aligned} T_U &= 2(1-x^2+y^2)\sqrt{\lambda} + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times 2 \left\{ (1-x^2+y^2)\sqrt{\lambda} \mathcal{A} \right. \\ &\quad - 4(7+x^2-y^2)\mathcal{N}_1 - \frac{2}{x} \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \left[(1-x)(5+x) + y^2 \right] \mathcal{N}_2 \\ &\quad - \frac{2}{x} \left[(1+x)^2 - y^2 \right] \left[(1+x)(5-x) + y^2 \right] \mathcal{N}_3 \\ &\quad - \frac{2}{x^2} (1-x^2+y^2) (1-2x^2-y^2) \sqrt{\lambda} \ln(y) + 8(1-x^2+y^2) \sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{x y}{\lambda}\right) \\ &\quad + \frac{1}{x^2} \left[(1-x^2)^2 (1-6x^2) \right. \\ &\quad \quad \left. - (1+4x^2-3x^4)y^2 - (1+2x^2)y^4 + y^6 \right] \ln(w_1) \\ &\quad \left. + 4 \left[7+3x^2 - (4-5x^2)y^2 - 3y^4 \right] \ln(\eta) - \sqrt{\lambda} (19+x^2-5y^2) \right\} \\ T_{UP} &= -2\lambda + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times (-2) \left\{ \lambda \mathcal{A} \right. \\ &\quad + 4 \left[11+3x^2+x^4 - 2(3+x^2)y^2 + y^4 \right] \mathcal{N}_0 + 4\sqrt{\lambda} (1-x^2+y^2) \mathcal{N}_4 \\ &\quad - \frac{2}{x^2} (1-2x^2-y^2) \lambda \ln(y) + 8\lambda \ln\left(\frac{x y}{\lambda}\right) \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} \left[7+21x^2+2x^4 - (8+3x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(w_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8\lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + \frac{4}{x^2} \left[(1-x^2)(3+14x^2-2x^4) \right. \\
& \quad \left. - (6-7x^2-x^4)y^2 + (3-x^2)y^4 \right] \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) \\
& + \frac{1}{x} \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \left[12 - 55x + 6x^2 - x^3 - 3(4+x)y^2 \right] \Big\} \\
T_L = & \frac{1}{x^2} \left[\lambda + x^2(1-x^2+y^2) \right] \sqrt{\lambda} + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{1}{x^2} \left\{ \left[\lambda + x^2(1-x^2+y^2) \right] \sqrt{\lambda} \mathcal{A} \right. \\
& + 8x^2(7+x^2-y^2) \mathcal{N}_1 + 4x \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \left[(1-x)(5+x) + y^2 \right] \mathcal{N}_2 \\
& + 4x \left[(1+x)^2 - y^2 \right] \left[(1+x)(5-x) + y^2 \right] \mathcal{N}_3 \\
& + 2 \left[1-x^2 - (4+3x^2)y^2 + 3y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln(y) \\
& + 8 \left[1-x^2 - (2+x^2)y^2 + y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln \left(\frac{xy}{\lambda} \right) \\
& - \left[5(1-x^2)^2 - (3+20x^2-x^4)y^2 + (9-2x^2)y^4 + y^6 \right] \ln(w_1) \\
& + 8(1+x^2-y^2) \left[1-7x^2 - (2+x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(\eta) \\
& + \sqrt{\lambda} \left[5+47x^2-4x^4 - (22+x^2)y^2 + 5y^4 \right] \Big\} \\
T_{LP} = & \frac{1}{x^2} (1-y^2) \lambda + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{1}{x^2} \left\{ (1-y^2) \lambda \mathcal{A} \right. \\
& + 4 \left[2+22x^2+11x^4 - (5+12x^2+x^4)y^2 + 2(2+x^2)y^4 - y^6 \right] \mathcal{N}_0 \\
& + 4(1-y^2) \sqrt{\lambda} (1-x^2+y^2) \mathcal{N}_4 \\
& + 2(1-3y^2) \lambda \ln(y) + 8(1-y^2) \lambda \ln \left(\frac{xy}{\lambda} \right) \\
& + \sqrt{\lambda} \left[17+53x^2 - (18+x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(w_1) \\
& + 8\lambda (1-y^2) \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + 4 \left[(1-x^2)(11+24x^2) - (13-15x^2)y^2 + 2y^4 \right] \ln \left(\frac{1-x}{y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \\
& \quad \times \left[15 - 22x + 105x^2 - 24x^3 + 4x^4 - (12 - 22x + x^2)y^2 - 3y^4 \right] \Big\} \\
T_{U+L} &= \frac{1}{x^2} \left[\lambda + 3x^2(1-x^2+y^2) \right] \sqrt{\lambda} + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{1}{x^2} \left\{ \left[\lambda + 3x^2(1-x^2+y^2) \right] \sqrt{\lambda} \mathcal{A} \right. \\
& - 2 \left[(1-x^2)(1-4x^2) + (4+x^2)y^2 - 5y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln(y) \\
& + 8 \left[(1-x^2)(1+2x^2) - (2-x^2)y^2 + y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\
& - \left[3(1-x^2)^2(1+4x^2) \right. \\
& \quad \left. - (1+12x^2+5x^4)y^2 + (11+2x^2)y^4 - y^6 \right] \ln(w_1) \\
& + 8(1-y^2) \left[1+x^2-4x^4 - (2-x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(\eta) \\
& \left. + \sqrt{\lambda} \left[5+9x^2-6x^4 - (22-9x^2)y^2 + 5y^4 \right] \right\} \\
T_{UP+LP} &= \frac{1}{x^2} (1-2x^2-y^2) \lambda + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{1}{x^2} \left\{ (1-2x^2-y^2) \lambda \mathcal{A} \right. \\
& + 4 \left[2+5x^4-2x^6 - (5-3x^4)y^2 + 4y^4 - y^6 \right] \mathcal{N}_0 \\
& + 4\sqrt{\lambda} (1-x^2+y^2) (1-2x^2-y^2) \mathcal{N}_4 \\
& + 2\lambda (3-4x^2-5y^2) \ln(y) + 8\lambda (1-2x^2-y^2) \ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\
& + (3-x^2+y^2) (1+4x^2-y^2) \sqrt{\lambda} \ln(w_1) \\
& + 8\lambda (1-2x^2-y^2) \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + 4 \left[(1-x^2) (5-4x^2+4x^4) \right. \\
& \quad \left. - (1-x^2+2x^4)y^2 - 2(2-x^2)y^4 \right] \ln\left(\frac{1-x}{y}\right) \\
& - \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \\
& \quad \times \left[15 + 2x - 5x^2 - 12x^3 + 2x^4 - (12 + 2x + 7x^2)y^2 - 3y^4 \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_S = & \frac{1}{x^2} \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] \sqrt{\lambda} + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{1}{x^2} \left\{ \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] \sqrt{\lambda} \mathcal{A} \right. \\
& + \frac{2}{x^2} \left[(1 - x^2) (2 - x^2) - (6 + 4x^2 + 5x^4) y^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + (6 + 7x^2) y^4 - 2y^6 \right] \sqrt{\lambda} \ln(y) \right. \\
& + 8 \left[1 - x^2 - (2 + x^2) y^2 + y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln \left(\frac{xy}{\lambda} \right) \\
& - \frac{1}{x^2} \left[(1 - x^2)^2 (2 + 3x^2) - (8 - 3x^2 + 4x^4 - 3x^6) y^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + 3(4 + 5x^2) y^4 - (8 + 5x^2) y^6 + 2y^8 \right] \ln(w_1) \right. \\
& + 8(1 - y^2) \left[1 - x^2 - (2 + x^2) y^2 + y^4 \right] \ln(\eta) \\
& \left. + 3\sqrt{\lambda} \left[3(1 - x^2) - (10 + 3x^2) y^2 + 3y^4 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{SP} = & \frac{1}{x^2} (1 - y^2) \lambda + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{1}{x^2} (1 - y^2) \left\{ \lambda \mathcal{A} \right. \\
& + 4 \left[2 + x^4 - (3 + 2x^2) y^2 + y^4 \right] \mathcal{N}_0 + 4\sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \\
& + \frac{2}{x^2} \frac{1}{1 - y^2} \left[2 - x^2 - (4 + 5x^2) y^2 + 2y^4 \right] \lambda \ln(y) + 8\lambda \ln \left(\frac{xy}{\lambda} \right) \\
& - \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} \left[2 - 9x^2 + x^4 - (4 + 3x^2) y^2 + 2y^4 \right] \ln(w_1) + 8\lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + 4 \left[(1 - x^2) (5 - 2x^2) + 2(2 - x^2) y^2 \right] \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) \\
& \left. - \left[(1-x)^2 - y^2 \right] (11 - 6x - 7x^2 + 7y^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_F = & -2\lambda + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times (-2) \left\{ \lambda \mathcal{A} \right. \\
& + 4(1 + 3x^2 - x^4 + 2x^2 y^2 - y^4) \mathcal{N}_0 - 4\sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \\
& - \frac{2}{x^2} \lambda (1 - 2x^2 - y^2) \ln(y) + 8\lambda \ln \left(\frac{xy}{\lambda} \right) \\
& \left. + \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} \left[1 - 3x^2 + 8x^4 - (2 + x^2) y^2 + y^4 \right] \ln(w_1) - 8\lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 16(1-y^2)\sqrt{\lambda}\ln(\eta) + 4\left[(1-x^2)(1+2x^2) - (1+x^2)y^2\right]\ln\left(\frac{1-x}{y}\right) \\
& + 2\left[(1-x)^2 - y^2\right](5+20x+8x^2-5y^2)\left. \vphantom{\ln\left(\frac{1-x}{y}\right)}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{FP} = & 2\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2) + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times 2\left\{\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2)\mathcal{A}\right. \\
& + 4(1-5x^2+y^2)\mathcal{N}_1 + \frac{4}{x}(1-x)(1+2x)\left[(1-x)^2 - y^2\right]\mathcal{N}_2 \\
& + \frac{4}{x}(1+x)(1-2x)\left[(1+x)^2 - y^2\right]\mathcal{N}_3 \\
& - \frac{2}{x^2}\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2)(1-2x^2-y^2)\ln(y) + 8\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2)\ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\
& + \frac{1}{x^2}\left[(1-x^2)^2(1-4x^2)\right. \\
& \quad \left. - (1+4x^2-11x^4)y^2 - (1+2x^2)y^4 + y^6\right]\ln(w_1) \\
& \left. + 4\left[5x^2 + (2-x^2)y^2 - 2y^4\right]\ln(\eta) + 2\sqrt{\lambda}(4-9x^2+6y^2)\right\}
\end{aligned}$$

$$T_I = 0$$

$$\begin{aligned}
T_{IP} = & -\frac{1}{\sqrt{2}x}\lambda + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{-1}{\sqrt{2}x}\left\{\lambda\mathcal{A}\right. \\
& + 2\left[7+15x^2+4x^4 - (11+8x^2)y^2 + 4y^4\right]\mathcal{N}_0 \\
& + 4\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2)\mathcal{N}_4 \\
& - \frac{1}{x^2}(1-3x^2-y^2)\lambda\ln(y) + 8\lambda\ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\
& + \frac{\sqrt{\lambda}}{2x^2}\left[1+30x^2+21x^4 - 2(1+11x^2)y^2 + y^4\right]\ln(w_1) \\
& + 8\lambda\ln\left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x}\right] \\
& + 2\left[(1-x^2)(21+5x^2) - (11-15x^2)y^2 - 4y^4\right]\ln\left(\frac{1-x}{y}\right) \\
& \left. - 2\left[(1-x)^2 - y^2\right](12-7x+12x^2-9y^2)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_A &= 0 \\
T_{AP} &= \frac{1}{\sqrt{2}x} \sqrt{\lambda} (1 - x^2 - y^2) + \frac{\alpha_s}{3\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}x} \left\{ \sqrt{\lambda} (1 - x^2 - y^2) \mathcal{A} \right. \\
&\quad + 2 \left[1 - 3x^2 - 2x^4 - (1 - 2x^2)y^2 \right] \mathcal{N}_1 \\
&\quad - 2(1-x)(1+2x) \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \mathcal{N}_2 \\
&\quad + 2(1+x)(1-2x) \left[(1+x)^2 - y^2 \right] \mathcal{N}_3 \\
&\quad - \frac{1}{x^2} \sqrt{\lambda} \left[(1-x^2)(1-3x^2) - 2(1-4x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(y) \\
&\quad + 8\sqrt{\lambda} (1-x^2-y^2) \ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2x^2} \left[(1-x^2)^2 (1-7x^2) \right. \\
&\quad \quad \left. - (1-9x^2)(3-x^2)y^2 + (3-7x^2)y^4 - y^6 \right] \ln(w_1) \\
&\quad + 2 \left[4 - 5x^2 + 7x^4 - (8-x^2)y^2 + 4y^4 \right] \ln(\eta) \\
&\quad \left. + 2\sqrt{\lambda} (7 - 10x^2 - 4y^2) \right\}. \tag{5.110}
\end{aligned}$$

Der Index P an den Bezeichnungen für die verschiedenen Helizitäten kennzeichnet wie vorher den Anteil des b -Quark-Spins. Die Funktion w_1 ist in (5.37) definiert. Sie ist dimensionslos und ändert sich deshalb nicht, wenn man die dort auftretenden Massen und das Impulsquadrat des virtuellen W -Bosons durch die entsprechenden mit der b -Masse skalierten Größen ersetzt. Die λ -Funktion hängt von den skalierten Quarkmassen und vom skalierten Impulsquadrat des W -Bosons ab, es ist also $\lambda = \lambda(1, x^2, y^2)$. Die dilogarithmischen Terme \mathcal{N}_i sind in (5.103) angegeben.

Die analytischen Resultate der in (5.109) definierten Helizitäts-Strukturfunktionen $\Gamma_X^{(incl)}$ und $\Gamma_{X^P}^{(incl)}$ können mit bereits bekannten Ergebnissen in der Literatur verglichen werden. Man kann dabei auf die Berechnungen der QCD-Strahlungskorrekturen zum Zerfall des Topquarks in ein Bottom-Quark und ein W^+ -Boson zurückgreifen, weil die Struktur der analytischen Resultate für die Strukturfunktionen dieselbe ist wie im hier behandelten Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein W^- -Boson. Man braucht lediglich die Massen und das Impulsquadrat der Quarks $m_t \leftrightarrow m_b$, $m_b \leftrightarrow m_c$ und $M_W^2 \leftrightarrow q^2$ sowie den Quark-Spinvektor $s_t \leftrightarrow s_b$ auszutauschen. Berücksichtigt man das unterschiedliche CKM-Matrixelement und definiert die skalierten Variablen x und y bei beiden Zerfallsprozessen in derselben Weise, indem man mit der Masse des zerfallenden Quarks skaliert, so kann man die jeweiligen Resultate direkt miteinander identifizieren. Da in der Literatur zum Topzerfall eine größere Menge von Abhandlungen existiert als für den b -Zerfall, stehen entsprechend mehr Literaturwerte zum Vergleichen zur Verfügung.

Eine wichtige Quelle ist die Diskussion der QCD-Strahlungskorrekturen zum vollständigen Satz der Helizitäts-Strukturfunktionen für den Zerfall $t^{(1)} \rightarrow b + W^+$, bei der auch eine endliche b -Masse berücksichtigt wurde [59]. Nach einigen Umrechnungen der Dilogarismus-Terme und Zusammenfassung nach den Grundintegralen findet man eine Übereinstimmung aller hier behandelten Strukturfunktionen mit den dort aufgeführten Resultaten. Für die totale Rate, die durch die Summe der Strukturfunktionen $U + L$ gegeben ist, kann man die Ergebnisse in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ mit denen von Denner und Sack [60] vergleichen, die ebenfalls eine endliche b -Masse berücksichtigt haben. Auch in diesem Fall findet man eine Übereinstimmung mit den hier berechneten Ergebnissen. Bildet man den Grenzwert verschwindender c -Masse, so kann man die Resultate für die totale Rate mit denen in [62, 63, 64] vergleichen. Auch hier findet man Übereinstimmung, ebenso mit dem entsprechenden Resultat in [61]. Die Strukturfunktionen U , U^P , L und L^P für $m_b \rightarrow 0$ sind auch in [61] aufgelistet. Sie stimmen mit den hier angegebenen Resultaten überein. Die zu diesen Werten gehörenden numerischen Werte sind in [65, 66, 67] angegeben. Ein Vergleich zeigt, daß auch die numerischen Resultate der Strukturfunktionen für den Topquark-Zerfall im Grenzfall $m_b \rightarrow 0$ mit den in diesem Kapitel berechneten Ergebnissen übereinstimmen, wenn man wie oben beschrieben die Quarkmassen ersetzt. Die Resultate für die Strukturfunktionen I^P und A^P sind neu und nur in [59] angegeben. Für die beiden Linearkombinationen $T_+ = \frac{1}{2}(U + F)$ und $T_- = \frac{1}{2}(U - F)$ der unpolarisierten transversalen Strukturfunktionen sind explizite Resultate im masselosen Grenzfall in [69] angegeben. Schließlich wurde auch die unpolarisierte skalare Strukturfunktion S mit Resultaten aus der Literatur verglichen [70] und auch hier für verschwindende c -Masse Übereinstimmung festgestellt. Die polarisierte skalare Strukturfunktion S^P ist ebenfalls neu und nur in [59] angegeben.

5.6 Numerische Resultate

Im letzten Abschnitt wurden die inklusiven Raten für die Helizitäts-Strukturfunktionen zum Zerfall eines Bottom-Quarks in ein Charm-Quark und ein virtuelles W -Boson bestimmt. Die analytischen Resultate für die unterschiedlichen Helizitäten wurden sowohl für polarisierte als auch für unpolarisierte b -Quarks in (5.109) und (5.110) angegeben. Sie enthalten die Bornsche Näherung sowie die Einschleifen-Korrekturen und die Beiträge zur Bremsstrahlung in $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

Im folgenden sollen die Resultate der Helizitäts-Raten numerisch ausgewertet und anschließend genauer diskutiert werden. Anstelle der Helizitäts-Raten (5.109) werden wir die reduzierten Raten $d\hat{\Gamma}/(dx^2)$ betrachten, die in (4.80) definiert wurden. Sie gehen direkt als normierte Koeffizienten in die Winkelverteilung (4.81) für die differentielle Rate ein und hängen vom skalierten Viererimpulsquadrat des W -Bosons ab, das durch $x^2 = q^2/m_b^2$ gegeben ist, wobei q den Viererimpuls des W -Bosons bezeichnet. Daher ist es sinnvoll, die reduzierten Raten in Abhängigkeit der Variablen x^2 in einem Schaubild graphisch darzustellen. Für spätere Anwendungen in hadronischen Zerfällen werden sieben unterschiedliche Helizitäts-Raten benötigt. Dieses sind die transversalen Raten U und U^P , die longitudinalen Raten L und L^P , außerdem die skalaren Raten S und S^P und schließlich die Rate I^P ,

die die Interferenz zwischen longitudinaler und transversaler Helizität beschreibt. Der Index P beschreibt den Anteil der Helizitäts-Raten, die durch polarisierte b -Quarks bestimmt werden. Die Raten ohne diesen Index beschreiben entsprechend unpolarisierte b -Quarks. Der Vollständigkeit halber werden auch die übrigen Helizitäts-Raten F , F^P und A^P gezeigt sowie die Summen $U + L$ und $U^P + L^P$, die bei bestimmten Winkelverteilungen in hadronischen Zerfällen auftreten.

Die Graphen der angegebenen reduzierten Helizitäts-Raten sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Um nicht immer zwischen X und X^P unterscheiden zu müssen, wird für den Rest dieses Abschnittes einfachheitshalber die Notation

$$\Gamma_X = \frac{G_F M_W^2 m_b}{8 \sqrt{2} \pi} |V_{bc}|^2 T_X \quad (5.111)$$

für die unterschiedlichen Helizitäten $X = U, U^P, L, L^P, S, S^P, F, F^P, I^P, A^P$ verwendet, wobei die Funktionen T_X in (5.110) angegeben sind. Die reduzierten Raten ergeben sich aus den T_X durch die Beziehung

$$\frac{d\hat{\Gamma}_X}{dx^2} = 2 x^2 T_X. \quad (5.112)$$

Die verwendeten Werte für die Quarkmassen sind wie in Abschnitt 3.6 aus Kapitel 3 durch $m_b = 4.85 \text{ GeV}$ und $m_c = 1.45 \text{ GeV}$ gegeben. Auch die anderen Konstanten besitzen dieselben Werte wie in Abschnitt 3.6. Die starke Kopplungskonstante beträgt $\alpha_s = 0.219$, und das CKM-Matrixelement ist $V_{bc} = 0.041$. Die Fermi-Konstante hat schließlich den Wert $G_F/(\hbar c)^3 = 1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. Der kinematisch erlaubte Bereich für die Variable x^2 ist $0 \leq x^2 \leq (1 - y)^2$, wobei $y = m_c/m_b$ die skalierte Masse des c -Quarks ist. Die unterschiedlichen reduzierten Raten sind nach ihrer Definition dimensionslos.

In allen Schaubildern werden sowohl die Bornschen als auch die strahlungskorrigierten Raten gezeigt, um den Einfluß der Korrekturen qualitativ ablesen zu können. Auf den Einfluß der Strahlungskorrekturen und deren quantitativen Wert wird weiter unten näher eingegangen. Die unpolarisierten und die zugehörigen polarisierten Raten werden für die meisten Helizitäten in demselben Schaubild gezeigt, eine Ausnahme bilden die Helizitäten L , L^P , S und S^P , weil sie sich jeweils nur um einen kleinen Betrag unterscheiden, der in den gezeigten Schaubildern nicht mehr sichtbar wäre. Die beiden polarisierten Raten I^P und A^P besitzen keinen entsprechenden Beitrag für unpolarisierte b -Quarks und werden deshalb in einem einzigen Bild zusammengefaßt.

Bei der Betrachtung der Graphen für die unterschiedlichen reduzierten Raten in Abbildung 5.6 fällt zunächst auf, daß die QCD-Strahlungskorrekturen bei allen gezeigten Raten alle Werte von x^2 betragsmäßig reduzieren. Einige der Helizitäts-Raten zeigen einen sehr ähnlichen Verlauf, was aus der Tatsache folgt, daß für die Bornschen Raten einige Raten identisch sind. Es gilt nämlich $B_U = B_{F^P}$, $B_{U^P} = B_F$, $B_L = B_S$ und $B_{L^P} = B_{S^P}$, wie man aus (5.20) ablesen kann. Die entsprechenden strahlungskorrigierten Raten unterscheiden sich also nur in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ voneinander. Die Hälfte aller Raten verschwindet an der unteren Grenze $x^2 = 0$, während alle anderen Raten dort einen positiven endlichen Wert besitzen. An der oberen Grenze des Intervalls $x_{max}^2 = 0.491$ erreichen alle hier diskutierten Helizitäts-Raten den Wert null. Die Raten, welche an beiden Enden des kinematisch erlaubten

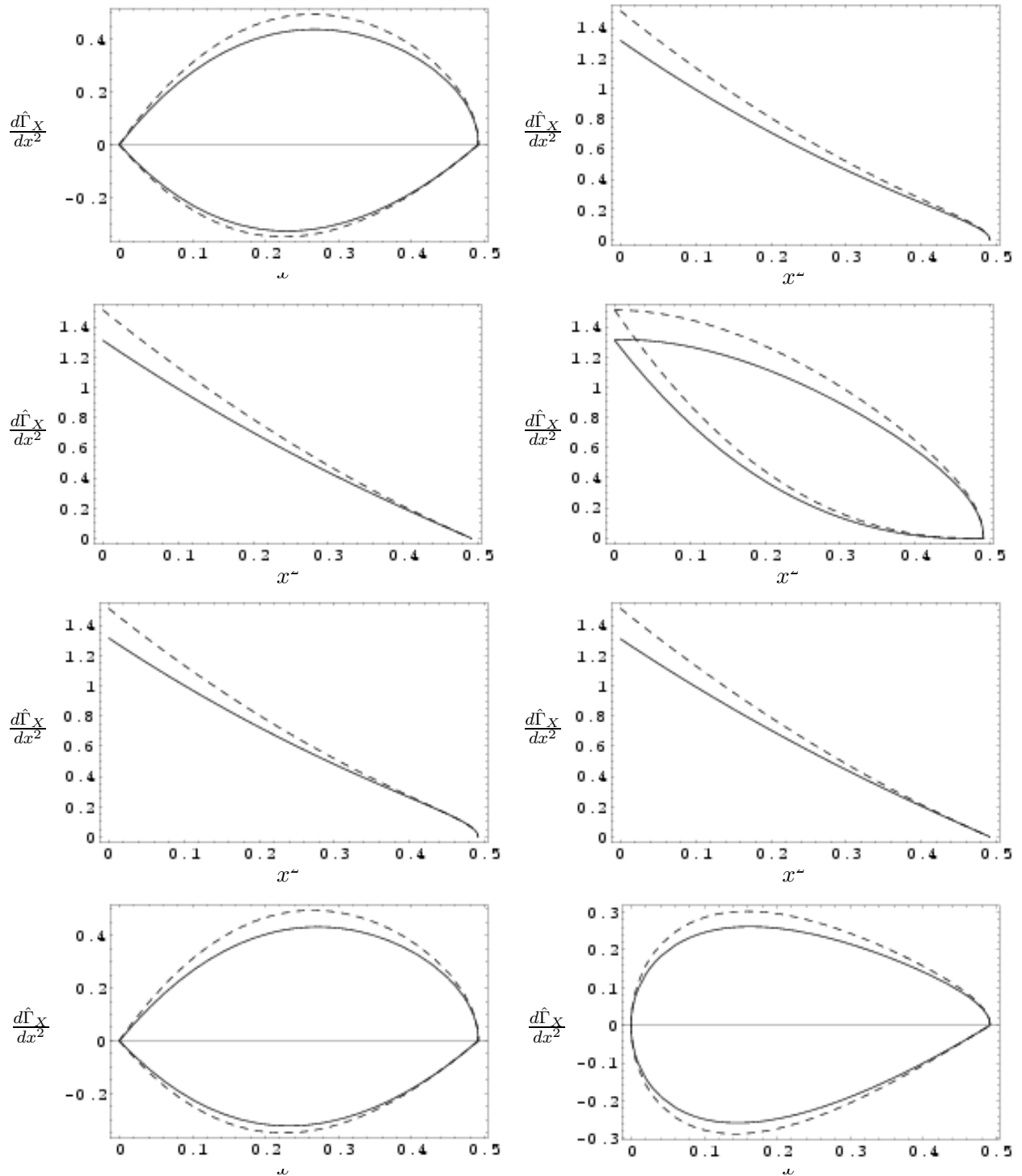


Abbildung 5.6: Reduzierte differentielle Helizitäts-Raten $d\hat{\Gamma}_X/dx^2$ nach dem skalierten Impulsquadrat des W -Bosons $x^2 = q^2/m_b^2$ für die Helizitäten $X = U, U^P, L, L^P, U + L, U^P + L^P, S, S^P, F, F^P, I^P, A^P$ in Bornscher Näherung und bis einschließlich $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

x^2 -Intervalls verschwinden, steigen oder fallen mit wachsendem x^2 bis zu einem lokalen Extremum, um am Ende wieder den Wert null zu erreichen. Die übrigen Raten fallen mit steigendem x^2 von einem endlichen Wert stetig und relativ gleichmäßig auf null ab.

Wir werden im folgenden die einzelnen reduzierten Raten aus Abbildung 5.6 etwas genauer diskutieren. Die Rate $d\hat{\Gamma}_U/dx^2$ hat an der unteren Grenze $x^2 = 0$ den Wert 0, wächst mit steigendem x^2 an und erreicht bei $x^2 = 0.268$ einen maximalen Wert von 0.438. Bei weiter zunehmendem x^2 fällt der Graph wieder ab und erreicht an der oberen Grenze x_{max}^2 wieder den Wert null. Die polarisierte Rate $d\hat{\Gamma}_{U^P}/dx^2$ verschwindet ebenfalls bei $x^2 = 0$, fällt dann jedoch stetig ab und erreicht bei $x^2 = 0.229$ ein Minimum von -0.329 . Mit weiter steigendem x^2 wächst auch die Rate wieder und besitzt am oberen Endpunkt den Wert null. Insgesamt ist die polarisierte Rate betragsmäßig kleiner als die unpolarisierte.

Die Raten $d\hat{\Gamma}_L/dx^2$ und $d\hat{\Gamma}_{L^P}/dx^2$ unterscheiden sich nicht wesentlich in ihrem Verlauf. Die unpolarisierte Rate besitzt an der unteren Grenze $x^2 = 0$ den Wert 1.315 und fällt mit zunehmendem x^2 stetig ab. Kurz von der oberen Grenze x_{max}^2 nimmt das Gefälle weiter zu, und an der oberen Grenze verschwindet die unpolarisierte Rate. Die polarisierte Rate zeigt ein ähnliches Verhalten wie die unpolarisierte. Sie fällt von 1.309 an der unteren Grenze auf null an der oberen Grenze. Der Verlauf des Graphen ist noch gleichmäßiger als bei der unpolarisierten Rate und ähnelt bis auf eine leichte Krümmung dem einer Geraden.

Das Verhalten des Graphen von $d\hat{\Gamma}_{U+L}/dx^2$ wird durch die Summe der Raten für $X = U$ und $X = L$ bestimmt. An der unteren Grenze $x^2 = 0$ ergibt sich der Wert 1.315. Mit steigendem x^2 fällt der Graph zunehmend steiler ab und erreicht bei x_{max}^2 den Wert null. Er besitzt eine relativ gleichmäßige Krümmung, die am oberen Ende des x^2 -Intervalls etwas größer ist. Der Graph der polarisierten Rate $d\hat{\Gamma}_{U^P+L^P}/dx^2$ verhält sich fast spiegelbildlich zu dem der unpolarisierten Rate. Bei $x^2 = 0$ hat er den Wert 1.309, was also nur unwesentlich geringer ist als im unpolarisierten Fall. Er fällt unter relativ konstanter Krümmung mit steigendem x^2 ab. Bei x^2 -Werten über 0.43 tritt eine Besonderheit auf, die wegen des kleinen Maßstabes in der Graphik nicht zu erkennen ist. Der Graph besitzt bei $x^2 = 0.438$ eine Nullstelle, fällt mit weiter steigendem x^2 auf ein lokales Minimum von -0.00347 an der Stelle $x^2 = 0.4645$, um anschließend wieder zu steigen. Bei $x^2 = 0.4646$ existiert eine zweite Nullstelle, und der Graph steigt an der oberen Grenze auf null an.

Für die Graphen der Helizitäts-Raten $d\hat{\Gamma}_S/dx^2$ und $d\hat{\Gamma}_{S^P}/dx^2$ ist der Verlauf mit denen für $X = L$ und $X = L^P$ fast identisch. Sie fallen von der unteren Grenze $x^2 = 0$ fast linear bis zur oberen Grenze ab. Die Werte an der unteren Grenze sind mit 1.315 für $X = S$ und 1.309 für $X = S^P$ mit denen für $X = L$ und $X = L^P$ identisch. Da auch die jeweiligen Bornschen Raten identisch sind, unterscheiden sich die entsprechenden Werte nur um sehr kleine Beträge, die nicht weiter diskutiert werden müssen.

Auch die Helizitäts-Raten $d\hat{\Gamma}_F/dx^2$ und $d\hat{\Gamma}_{F^P}/dx^2$ brauchen nicht ausführlich diskutiert zu werden, da sie dieselben Bornschen Raten besitzen wie im Falle $X = U$ und $X = U^P$. Beide Raten verschwinden an der unteren Grenze. Die unpolarisierte Rate fällt mit zunehmendem x^2 auf ein Minimum von -0.324 bei $x^2 = 0.232$ und steigt mit wachsendem x^2 wieder bis auf den Wert null. Die polarisierte Rate steigt zu größeren Werten von x^2 an und besitzt bei $x^2 = 0.272$ einen Maximalwert von 0.433. Bei weiter steigendem x^2 fällt

die Rate wieder und verschwindet schließlich an der oberen Grenze.

Die reduzierte Rate $d\hat{\Gamma}_{IP}/dx^2$ hat bei $x^2 = 0$ den Wert null und fällt mit wachsendem x^2 zunächst steil, dann etwas flacher ab. Bei $x^2 = 0.145$ erreicht sie ein Minimum von -0.259 und steigt mit ansteigendem x^2 stetig bis auf null an der oberen Grenze. Die polarisierte Rate $d\hat{\Gamma}_{AP}/dx^2$ verschwindet ebenfalls bei $x^2 = 0$. Sie wächst mit steigendem x^2 erst steil, dann etwas flacher, an und erreicht ein Maximum von 0.261 bei $x^2 = 0.163$. Bei höheren Werten von x^2 fällt die Rate erst langsam, bei hohen Werten von x^2 steiler, ab und verschwindet bei x_{max}^2 .

Die Helizitäts-Raten hängen auch vom Verhältnis der Quarkmassen $y = m_c/m_b$ ab. Vergleicht man die hier diskutierten numerischen Resultate des Zerfalls eines b -Quarks in ein c -Quark und ein virtuelles W -Boson mit denen des Topquark-Zerfalls [59], so stellt man fest, daß das Massenverhältnis beim b -Zerfall etwa 0.3 beträgt, während es dort wegen $m_b/m_t = 0.028$ etwa um einen Faktor zehn kleiner ist. Die Abhängigkeit der Ergebnisse vom Massenverhältnis y verändert somit auch den Verlauf der graphischen Darstellungen, obwohl die analytischen Ausdrücke identisch sind. Zum einen verschiebt sich die obere Grenze des kinematisch erlaubten Bereiches für die Variable x^2 , da sie wegen $x_{max}^2 = (1-y)^2$ selbst auch vom Massenverhältnis abhängt. Zum anderen wird der Betrag fast aller Raten mit wachsendem y immer kleiner. Bezeichnet man die unterschiedlichen Massenverhältnisse mit $y_1 < y_2$, so gilt also die Beziehung $x_{max}(y_1) > x_{max}(y_2)$ für die oberen Grenzen von x . Außerdem ist für die meisten der betrachteten Raten $\delta d\hat{\Gamma}_X := |d\hat{\Gamma}_X(y_1)| - |d\hat{\Gamma}_X(y_2)| > 0$. Die Ausnahmen beziehen sich auf meistens relativ kleine x^2 -Intervalle bei den Helizitäten $X = U^P + L^P, F, F^P, A^P$, wenn man die Massenverhältnisse aus dem b -Zerfall und aus dem Top-Zerfall zugrunde legt.

Betrachtet man die absoluten Differenzen $\delta d\hat{\Gamma}_X$ etwas genauer, so erkennt man, daß sie für alle Helizitäten außer den oben genannten Ausnahmen an der unteren Grenze $x^2 = 0$ relativ klein sind, aber mit steigendem x^2 zunehmend stärker anwachsen und bei $x_{max}(y_2)$ einen maximalen Wert erreichen. Für noch größere x^2 -Werte verschwindet $\Gamma_X(y_2)$ und $\delta d\hat{\Gamma}_X$ ist daher in diesem Bereich nur durch den Betrag von $d\hat{\Gamma}_X(y_1)$ gegeben.

Wir wollen zum Abschluß dieses Abschnittes noch die prozentualen Änderungen der Helizitäts-Raten diskutieren, die durch den Einfluß der Strahlungskorrekturen hervorgerufen werden. Die Strahlungskorrekturen setzen sich aus den Einschleifen-Korrekturen und den Beiträgen zur Bremsstrahlung in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zusammen. Um einen Eindruck von der Größe der Strahlungskorrekturen zu erhalten, ist es sinnvoll, die relative Änderung der Korrekturen in Bezug auf die Bornsche Näherung graphisch darzustellen. Die relativen Korrekturen sind definiert durch

$$\Delta \frac{d\hat{\Gamma}_X}{dx^2} = \frac{d\hat{\Gamma}_X^{(incl)}/dx^2 - d\hat{\Gamma}_X^{(Born)}/dx^2}{d\hat{\Gamma}_X^{(Born)}/dx^2} = \frac{d\hat{\Gamma}_X^{(incl)}/dx^2}{d\hat{\Gamma}_X^{(Born)}/dx^2} - 1. \quad (5.113)$$

Die Graphen dieser Funktionen für die unpolarisierten und die polarisierten Helizitäten $X = U, U^P, L, L^P, U + L, U^P + L^P, S, S^P, F, F^P, I^P, A^P$ in Abhängigkeit der Variablen x^2 sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Die relative Änderung der Raten ist in % angegeben.

Der graphische Verlauf der relativen Strahlungskorrekturen $\Delta d\hat{\Gamma}_X/dx^2$ zeigt für die verschiedenen Helizitäten einige Unterschiede, die im folgenden beschrieben werden. Für

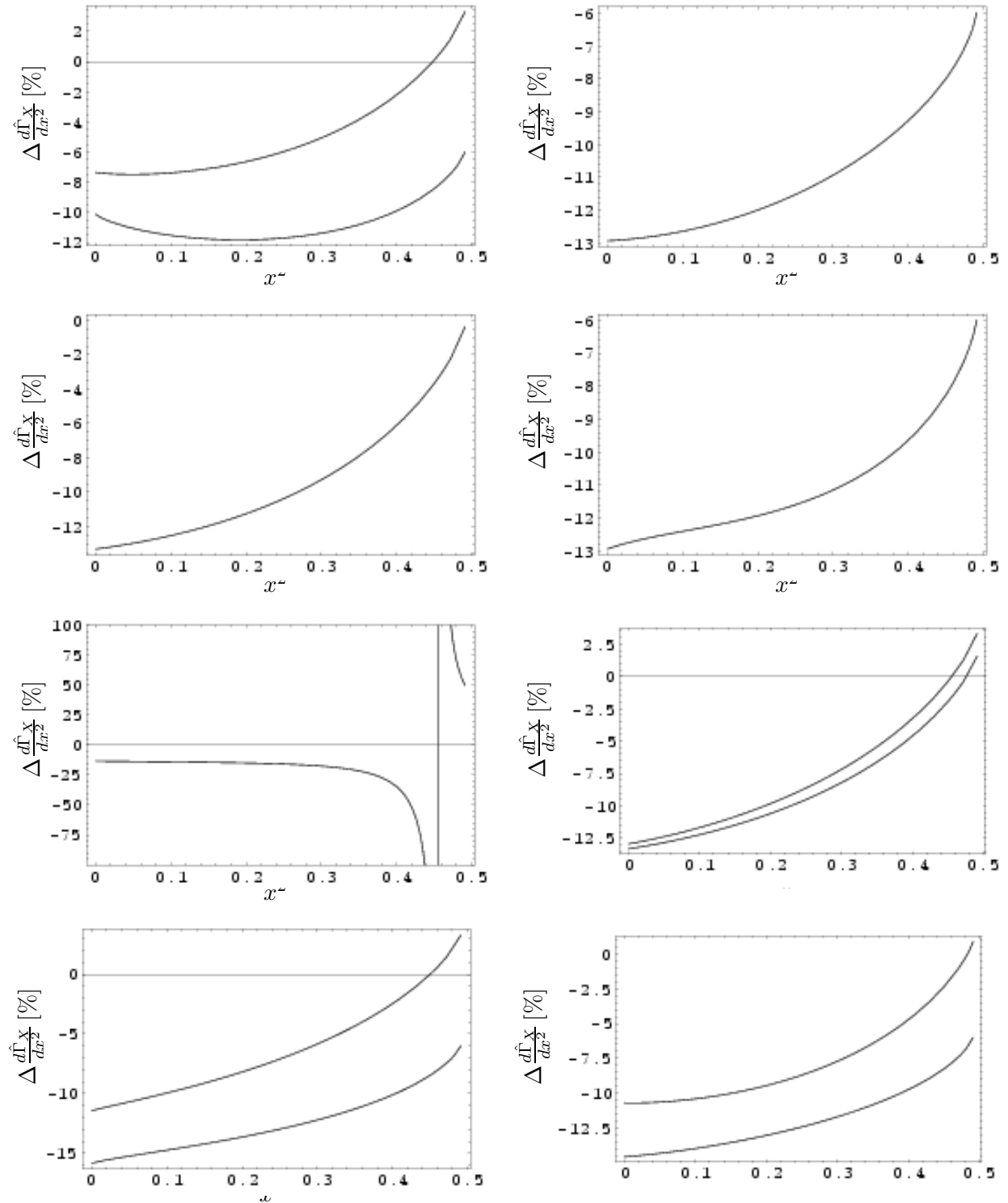


Abbildung 5.7: Relative Änderungen der inklusiven reduzierten Strukturfunktionen durch die $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Strahlungskorrekturen bezogen auf die Bornsche Näherung. Es gilt $x^2 = q^2/m_b^2$.

$X = U$ sind die relativen Strahlungskorrekturen im gesamten kinematisch erlaubten Bereich $0 \leq x^2 \leq (1 - y)^2$ negativ. Sie reduzieren also für alle x^2 -Werte die Bornsche Rate. Die Größenordnung beträgt mehrere Prozent. An der unteren Grenze $x = 0$ betragen die Korrekturen etwa -10.11% , für ansteigende x fällt der Graph etwas ab und erreicht bei etwa $x^2 = 0.192$ ein Minimum von -11.82% . Mit weiter anwachsendem x^2 steigt der Graph immer steiler an und erreicht an der oberen Grenze $x^2 = (1 - y)^2$ den maximalen Wert von -5.99% . Für die polarisierte Rate $X = U^P$ gibt es sowohl positive als auch negative Beiträge der relativen Strahlungskorrekturen. Bei $x^2 = 0$ betragen die Korrekturen etwa -7.35% . Mit steigendem x^2 fällt der Graph leicht ab. Bei $x^2 = 0.0489$ erreichen die Korrekturen ein Minimum von -7.48% . Für weiter steigende x^2 -Werte steigen die Korrekturen zunehmend steiler an. Sie besitzen bei $x^2 = 0.449$ eine Nullstelle und erreichen an der oberen Grenze $x^2 = (1 - y)^2$ den Maximalwert 3.31% .

Die relativen Strahlungskorrekturen für $X = L$ sind durchgehend negativ und steigen mit wachsendem x^2 immer steiler an. Für $x^2 = 0$ beträgt der minimale Wert etwa -12.93% und wächst bei $x^2 = (1 - y)^2$ auf das Maximum von etwa -5.99% . Für $X = L^P$ zeigt der Graph einen ähnlichen Verlauf wie im Falle $X = L$. Bei $x^2 = 0$ betragen die relativen Korrekturen -13.3% und steigen mit wachsendem x^2 stetig an, wobei die Steigung immer größer wird. An der oberen Grenze x_{max}^2 erreichen die Korrekturen den Maximalwert von etwa -0.377% und bleiben daher immer negativ.

Für die Helizitäts-Rate $X = U + L$ steigen die relativen Korrekturen von -12.93% bei $x^2 = 0$ auf -5.99% bei x_{max}^2 stetig an, wobei mit zunehmendem x^2 die Steigung auch größer wird. Die relativen Korrekturen der polarisierten Rate $X = U^P + L^P$ zeigen ein außergewöhnliches Verhalten, da sie an der Stelle $x^2 = 0.455$ einen Pol besitzen. Das liegt daran, daß die Bornsche Rate im Nenner des analytischen Ausdrucks bei $x^2 = (1 - y^2)/2$ eine Nullstelle aufweist. Bei $x^2 = 0$ betragen die Korrekturen -13.31% und fallen mit steigendem x^2 zunächst flach, dann immer steiler ab und erreichen an der Polstelle $-\infty$. An der oberen Grenze von x^2 betragen die relativen Korrekturen 49.73% und steigen mit abnehmendem x^2 steil an, bis sie am Pol $+\infty$ betragen.

Die relativen Korrekturen für die beiden Raten $X = S, S^P$ zeigen auch einen ähnlichen Verlauf. Die Korrekturen für $X = S$ steigen von einem minimalen Wert bei $x^2 = 0$ auf ein Maximum bei x_{max}^2 an. Die Steigung des Graphen wird auch hier mit zunehmendem x^2 größer. Das Minimum der Strahlungskorrekturen beträgt etwa -12.93% . Bei $x^2 = 0.456$ findet ein Vorzeichenwechsel statt, und das Maximum hat einen Wert von 3.31% . Der Unterschied für $X = S^P$ im Vergleich zu X^S besteht in einer kleinen Änderung der numerischen Werte. Der minimale Wert bei $x^2 = 0$ beträgt -13.31% , ist also etwas niedriger als bei $X = S$. Die relativen Strahlungskorrekturen haben einen Vorzeichenwechsel bei etwa $x^2 = 0.477$, was etwas größer ist als im Fall $X = S$. Das Maximum am oberen Ende des Bereiches ist 1.55% und damit etwas niedriger als bei $X = S$.

Die Korrekturen der Helizität $X = F$ an der unteren Grenze $x^2 = 0$ betragen -14.42% , steigen mit wachsendem x^2 relativ gleichmäßig an, besitzen bei $x^2 = 0.450$ eine Nullstelle und erreichen bei x_{max}^2 den Maximalwert von 3.31% . Die Korrekturen der polarisierten Rate $X = F^P$ steigen ebenfalls relativ gleichmäßig an, sind aber insgesamt kleiner als die der unpolarisierten Rate. Sie betragen -15.84% an der unteren Grenze und erreichen bei

x_{max}^2 den Wert -5.99% . Es ist bemerkenswert, daß die Werte der Korrekturen für $X = F$ und $X = F^P$ dieselben numerischen Werte besitzen wie die jeweiligen Korrekturen für $X = U^P$ und $X = U$.

Die relativen Korrekturen der Rate $X = I^P$ schließlich haben am unteren Ende $x = 0$ einen Wert von etwa -10.704% . Mit wachsendem x fallen sie zunächst ganz leicht ab und erreichen im Punkt $x = 0.107$ ein Minimum von etwa -10.713% . In diesem Bereich sind die Korrekturen damit fast konstant. Mit weiter ansteigendem x wachsen auch die Strahlungskorrekturen an, wobei die Steigung auch in diesem Fall immer größer wird. Bei $x = 0.695$ befindet sich eine Nullstelle, an der die Korrekturen ihr Vorzeichen wechseln. An der oberen Grenze $x^2 = (1 - y)^2$ erreichen sie schließlich ein Maximum, das den Wert 0.915% besitzt.

Die relativen Korrekturen für die Helizität $X = A^P$ schließlich steigen relativ gleichmäßig von -14.59% an der unteren Grenze $x^2 = 0$ auf einen Maximalwert von -5.99% an der oberen Grenze x_{max}^2 .

Abschließend kann man feststellen, daß sie relativen Strahlungskorrekturen in den meisten Fällen negativ sind und die Bornschen Raten vermindern. Sie haben an der unteren Grenze $x^2 = 0$ Werte zwischen etwa -7.3% für $X = U^P$ und -15.8% für $X = F^P$. Bis auf wenige Ausnahmen steigen die relativen Korrekturen mit wachsenden x^2 -Werten stetig an und besitzen an der oberen Grenze x_{max}^2 Werte zwischen etwa -6.0% für die Helizitäten $X = U, L, U + L, F^P, A^P$ und $+3.3\%$ für $X = U^P, S, F$. Die relativen Korrekturen für die letztgenannten Helizitäten sowie für $X = S^P, I^P$ besitzen eine Nullstelle, an der die Korrekturen ihr Vorzeichen wechseln. Sie befinden sich alle in einem sehr kleinen Bereich bei $x^2 = 0.45$ bis $x^2 = 0.48$ etwas unterhalb der oberen Grenze für x^2 . Die relativen Strahlungskorrekturen der Helizitäts-Raten für $X = U, U^P, I^P$ besitzen bei relativ kleinen Werten zwischen $x^2 = 0.01$ und $x^2 = 0.2$ ein lokales Minimum, steigen für größere x^2 -Werte aber wie die Korrekturen für die übrigen Raten stetig an und besitzen an der oberen Grenze x_{max}^2 einen Maximalwert. Die einzige Ausnahme von diesem Verhalten zeigen die relativen Korrekturen für die Helizität $X = U^P + L^P$, die eine Polstelle besitzen und daher dort divergent werden. Dies liegt, wie oben erwähnt wurde, am Verschwinden der Bornschen Rate an dieser Stelle, die im Nenner der Definitionsgleichung für die relativen Strahlungskorrekturen steht.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei noch bemerkt, daß die diskutierten Raten Γ_X keine physikalischen Größen darstellen. Die Meßgrößen werden durch normierte Ausdrücke wie beispielsweise $\hat{\Gamma}_U/\hat{\Gamma}_{U+L}$ gegeben. Die relativen Korrekturen zu den unnormierten Raten, die in vielen Fällen für bestimmte Werte von x^2 betragsmäßig größer als 10% sind, stellen somit auch keine physikalischen Resultate dar. Es stellt sich heraus, daß die Beträge der Korrekturen physikalischer Observablen gegenüber den unnormierten Raten reduziert werden. Sie betragen beispielsweise für $\hat{\Gamma}_U/\hat{\Gamma}_{U+L}$ maximal 3.24% bei $x^2 = 0$ gegenüber maximal 11.8% für $\hat{\Gamma}_U$ bei $x^2 = 0.19$.

Kapitel 6

Nichtperturbative Beiträge

6.1 Einleitung

In Kapitel 5 haben wir den semileptonischen Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein W -Boson diskutiert, wobei das W off-shell war und weiter in ein Lepton-Paar zerfiel. Dabei wurden die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen bis zur ersten Ordnung in α_S zu den Helizitäts-Strukturfunktionen berechnet, welche in die Winkelverteilung des betrachteten Zerfallsprozesses eingehen. In diesem Kapitel werden wir weitere nichtperturbative Korrekturen besprechen, die bei hadronischen Prozessen auftreten, in die der in Kapitel 5 behandelte b -Zerfall eingebunden ist. Die Quarks sind bekanntlich in der Natur bisher nicht als freie Teilchen beobachtet worden, sondern bilden die Konstituenten der Hadronen. Möchte man also einen Teilchenprozeß untersuchen, in dem der Zerfall eines b -Quarks eine Rolle spielt, so muß man sich entsprechende Zerfälle von Hadronen anschauen, die ein b -Quark enthalten. Eine Möglichkeit bietet der semileptonische Zerfall des Λ_b -Baryons, das den Quarkinhalt udb besitzt. Es ist elektrisch neutral und hat Spin $1/2$. Seine Masse beträgt etwa 5.62 GeV, und seine Lebensdauer ist etwa 1.23×10^{-12} Sekunden [22]. Eine andere Möglichkeit zur Untersuchung hadronischer Prozesse, in denen der b -Zerfall eine Rolle spielt, bieten semileptonische Zerfälle von B -Mesonen, die aus zwei Quarks bestehen, von denen eines ein b oder ein \bar{b} ist. Ein neutrales B^0 - oder \bar{B}^0 -Meson besteht jeweils aus der Kombination $\bar{b}d$ oder $b\bar{d}$, und die geladenen Mesonen B^\pm sind aus den Quarks $\bar{b}u$ beziehungsweise $b\bar{u}$ aufgebaut. Alle diese B -Mesonen besitzen Spin 0. Ihre Massen betragen etwa 5.28 GeV, wobei die Masse des B^0 um etwa 0.3 MeV größer ist als die der B^\pm -Mesonen. Die Lebensdauer der neutralen und der geladenen B -Mesonen beträgt jeweils 1.54×10^{-12} s und 1.67×10^{-12} s [22].

Die semileptonischen Zerfalls-Prozesse des Λ_b -Baryons oder der B -Mesonen werden im Rahmen der *Effektiven Theorie schwerer Quarks* (*“Heavy Quark Effective Theory”, HQET*) in führender Ordnung durch den elementaren b -Quark-Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$ beschrieben. Die in der HQET berechneten Korrekturen sind proportional zu Potenzen von $1/m_b$. Sie basieren im Gegensatz zur QCD nicht auf der Störungstheorie, bei der man

die Korrekturen in eine Potenzreihe von α_s entwickelt, und werden daher als nichtperturbative Korrekturen bezeichnet. Die in Kapitel 5 berechneten Resultate für die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen zum b -Zerfall können also auch für die Anwendungen in hadronischen Prozessen verwendet werden. Da das Hauptaugenmerk dieser Arbeit in der Berechnung der QCD-Strahlungskorrekturen liegt, wird die Beschreibung der Berechnung für die nichtperturbativen Beiträge nur in knapper Form zusammengefaßt. Wir verweisen für eine ausführlichere Diskussion der Methodik für hadronische Korrekturen auf [71], wo die inklusiven semileptonischen Zerfälle des Λ_b -Baryons in polarisierte τ -Leptonen diskutiert werden. Bei den unten folgenden Ausführungen werden wir uns im Wesentlichen auf diese Referenz beziehen. Die dortigen Berechnungen wurden ab initio noch einmal durchgeführt. Dabei wurden in den Resultaten von [71] einige Fehler gefunden und in diesem Kapitel korrigiert. Es ist zu beachten, daß sich die Definition der z -Richtung des Koordinatensystems in [71] von der im folgenden verwendeten unterscheidet, was zu unterschiedlichen Vorzeichen in den Beiträgen zur Λ_b -Polarisation führt. Außerdem werden wir die Notation aus Kapitel 5, die mit derjenigen aus [59] übereinstimmt, verwenden. Neben der Definition der z -Richtung des Koordinatensystems gibt es auch Unterschiede bei der Definition der polarisierten Strukturfunktionen für $X = I^P, A^P$, welche man beim Vergleich der Resultate berücksichtigen muß.

Bei den inklusiven semileptonischen Zerfällen $B \rightarrow X_c + l^- + \bar{\nu}_l$ und $\Lambda_b \rightarrow X_c + l^- + \bar{\nu}_l$ spielen nichtperturbative Beiträge in der $1/m_b$ -Entwicklung der Zerfallsmatrixelemente eine wichtige Rolle. Der führende Term in der $1/m_b$ -Entwicklung ist durch den freien Zerfall des b -Quarks $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$ gegeben, während die Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(1/m_b^2)$ mit Hilfe der *Operatorproduktentwicklung* im Rahmen der HQET bestimmt werden können. Diese nichtperturbativen Beiträge spielen in der Faktorisierungsnäherung auch eine Rolle bei den inklusiven nichtleptonischen Zerfällen $B \rightarrow X_c + D_s^*$ und $\Lambda_b \rightarrow X_c + D_s^*$, wobei das Λ_b -Baryon polarisiert sein kann. Diese inklusiven nichtleptonischen Zerfälle wurden in [72] diskutiert.

Das Λ_b kann unter anderem bei Zerfällen neutraler Z^0 -Bosonen entstehen, die beispielsweise bei Elektron-Positron-Annihilation erzeugt werden. Bei Experimenten am e^+e^- -Collider LEP am CERN wurden zum Beispiel bei einer Schwerpunktsenergie, die der Masse des Z^0 entsprach, größere Mengen von Λ_b -Baryonen erzeugt, die ausreichen, um statistische Aussagen über semileptonische Λ_b -Zerfälle machen zu können. Bei zukünftigen Beschleunigern wird ebenfalls eine hohe Produktionsrate dieser Hadronen erwartet. Durch experimentelle Fortschritte in der Detektor-Technologie ist es gelungen, die Identifizierung des Λ_b immer weiter zu verbessern und es daher einer genaueren Untersuchung zugänglich zu machen. Beispielsweise zerfielen bei LEP etwa 22 % der erzeugten Z -Bosonen in $b\bar{b}$ -Paare. Davon gingen etwa 10 % in die Bildung von Λ_b -Baryonen, von denen wiederum etwa 20 % semileptonisch zerfallen. Dabei wird im Endzustand ein Lepton-Paar aus einem geladenen Lepton und einem Antineutrino sowie ein hadronischer Zustand erzeugt. Man kann also etwa 4000 inklusive semileptonische Λ_b -Zerfälle in 10^6 Z^0 -Zerfällen erwarten.

Die Λ_b -Baryonen auf der Z -Resonanz sind zu einem hohen Grade polarisiert [73]. Bei einer theoretischen Betrachtung der Λ_b -Zerfälle ist es daher notwendig, die Polarisation des Λ_b zu berücksichtigen. Etwa 10 % der bei den semileptonischen Zerfällen produzier-

ten Lepton-Paare enthalten ein τ -Lepton, dessen Masse von derselben Größenordnung wie die Massen des b - und des c -Quarks ist. In diesem Fall darf die Lepton-Masse nicht vernachlässigt werden, da sich die Resultate sonst merklich verfälschen. Der Großteil der Zerfälle des Λ_b produziert aber Elektronen oder Myonen im Endzustand, deren Massen in sehr guter Näherung null gesetzt werden können.

6.2 Hadronische Matrixelemente

Die Dynamik der Hadronen wird im vorliegenden Prozeß genau wie bei der Berechnung der QCD -Korrekturen zum b -Zerfall durch einen Hadron-Tensor beschrieben, der die Viererimpulse p des Λ_b und q des Lepton-Paares sowie den Polarisationsvektor s des Λ_b enthält. Er ist durch

$$W_c^{\mu\nu}(q_0, q^2, s) = (2\pi)^3 \sum_X \delta^4(p - q - p_x) \langle \Lambda_b(p, s) | J_c^{\mu\dagger} | X_c(p_x) \rangle \langle X_c(p_x) | J_c^\nu | \Lambda_b(p, s) \rangle \quad (6.1)$$

definiert, wobei J_c^μ der Hadron-Strom ist, der den Übergang $b \rightarrow c$ induziert. Der Hadron-Tensor kann als Funktion der beiden Variablen q_0 und q^2 aufgefaßt werden, und seine Tensorstruktur kann durch eine Entwicklung in einen Standardsatz von Kovarianten ausgedrückt werden, die aus den Vierervektoren $v = p/m_{\Lambda_b}$, q und s sowie dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ und dem Levi-Civita-Tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ gebildet werden. Der allgemeine Ansatz für einen Hadron-Tensor zweiter Stufe ist

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} = & -g^{\mu\nu} W_1 + v^\mu v^\nu W_2 - i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho q_\sigma W_3 + q^\mu q^\nu W_4 + (q^\mu v^\nu + v^\mu q^\nu) W_5 \\ & - (q \cdot s) [-g^{\mu\nu} G_1 + v^\mu v^\nu G_2 - i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\alpha q_\beta G_3 + q^\mu q^\nu G_4 + (q^\mu v^\nu + v^\mu q^\nu) G_5] \\ & + (s^\mu v^\nu + s^\nu v^\mu) G_6 + (s^\mu q^\nu + s^\nu q^\mu) G_7 + i (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\alpha s_\beta G_8 + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha s_\beta G_9) \\ & + (s^\mu v^\nu - s^\nu v^\mu) G_{10} + (s^\mu q^\nu - s^\nu q^\mu) G_{11} + (v^\mu \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} + v^\nu \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}) q_\alpha v_\beta s_\gamma G_{12} \\ & + (q^\mu \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} + q^\nu \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}) q_\alpha v_\beta s_\gamma G_{13}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die letzten vier Invarianten G_{10}, \dots, G_{13} sind sogenannte T -ungerade Invarianten, die CP -ungerade oder imaginäre Beiträge enthalten. Im Standardmodell verschwinden diese Beiträge, da die Schleifenbeiträge reell sind und der $(b \rightarrow c)$ -Übergang CP -erhaltend ist. Deshalb werden diese Beiträge im folgenden nicht betrachtet. Die Invarianten $W_4, W_5, G_4, G_5, G_7, G_{11}$ und G_{13} tragen nicht zu den semileptonischen Zerfällen bei, wenn man die Masse der geladenen Leptonen vernachlässigt, da die Kontraktion des Lepton-Tensors mit q^μ oder q^ν in diesem Fall null ergibt. Dies kann man an der expliziten Form des Lepton-Tensors (3.12) erkennen, wenn man $q = p_l + p_{\nu_l}$ setzt. Wie schon zuvor erwähnt, kann man diese Beiträge im Fall der tauonischen semileptonischen Zerfälle wegen der im Vergleich zur b -Masse relativ großen Masse des τ -Leptons nicht vernachlässigen.

Die Entwicklung von $W^{\mu\nu}$ nach Kovarianten ist dieselbe wie beim Hadron-Tensor $H_{\mu\nu}$ (4.45), der in die Berechnung der QCD -Rate eingeht. Dort wurden die T -ungeraden Invarianten nicht angegeben, weil der semileptonische b -Zerfall im Rahmen des Standardmodells

diskutiert wurde. Bei der Diskussion der nichtperturbativen Beiträge werden auch die Invarianten, die bei endlicher Leptonmasse beitragen, beibehalten, weil dies eine Diskussion von τ -Leptonen im Endzustand erlaubt.

Die Invarianten W_1, \dots, W_5 beschreiben die spinunabhängigen Beiträge zum semileptonischen Zerfall, während die Strukturfunktionen G_1, \dots, G_9 vom Spin des Λ_b abhängen. Sie werden mit Hilfe der Operatorprodukt-Entwicklung (OPE) in der HQET berechnet. Diese Rechnung wird hier nicht explizit durchgeführt. Da die dazu notwendigen Techniken in der Literatur bereits ausführlich behandelt wurden [74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82], brauchen wir darauf nicht einzugehen und werden nur die endgültigen Resultate der OPE-Analyse angeben. Der Hadron-Tensor kann durch den absorptiven Anteil

$$W^{\mu\nu} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} (T^{\mu\nu}) \quad (6.3)$$

eines Matrixelementes ausgedrückt werden, das durch

$$T^{\mu\nu}(q_0, q^2) = -i \langle \Lambda_b(p, s) | \int d^4x e^{-iq \cdot x} \text{T} J^{\mu\dagger}(x) J^\nu(0) | \Lambda_b(p, s) \rangle \quad (6.4)$$

gegeben ist. Es kann ebenfalls in einen Satz von Kovarianten analog (6.2) entwickelt werden. Die zugehörigen 14 nichtverschwindenden invarianten Formfaktoren werden mit T_i und S_j bezeichnet, wobei $i = 1, \dots, 5$ und $j = 1, \dots, 9$ gilt, und entsprechen den Invarianten W_i und G_j aus (6.2). Sie können mit entsprechenden Methoden, die in der HQET entwickelt wurden, berechnet werden. In der Ordnung $1/m_b^2$ erhält man damit

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2\Delta_0} (m_b - v \cdot q) (1 + X_b) + \frac{2m_b}{3} (K_b + G_b) \left(\frac{-1}{2\Delta_0} + \frac{q^2 - (v \cdot q)^2}{\Delta_0^2} \right) \\ &\quad + \frac{m_b (K_b + G_b)}{2\Delta_0} - \frac{m_b^2 G_b}{3\Delta_0^2} (m_b - v \cdot q) \\ T_2 &= \frac{m_b}{\Delta_0} (1 + X_b) + \frac{2m_b}{3} (K_b + G_b) \left(\frac{1}{\Delta_0} + \frac{2m_b (v \cdot q)}{\Delta_0^2} \right) + \frac{m_b (K_b + G_b)}{\Delta_0} \\ &\quad + \frac{4m_b^2 K_b (v \cdot q)}{3\Delta_0^2} + \frac{2m_b^3 G_b}{3\Delta_0^2} \\ T_3 &= \frac{1}{2\Delta_0} (1 + X_b) - \frac{2m_b}{3} (K_b + G_b) \frac{m_b - v \cdot q}{\Delta_0^2} + \frac{2m_b^2 K_b}{3\Delta_0^2} - \frac{m_b^2 G_b}{3\Delta_0^2} \\ T_4 &= \frac{4m_b}{3\Delta_0^2} (K_b + G_b) \\ T_5 &= \frac{-1}{2\Delta_0} (1 + X_b) - \frac{2m_b}{3} (K_b + G_b) \frac{2m_b + v \cdot q}{\Delta_0^2} + \frac{m_b^2 G_b}{3\Delta_0^2} \\ S_1 &= -\frac{1 + \epsilon_b}{2\Delta_0} - \frac{5m_b}{3\Delta_0^2} (v \cdot q) K_b + \frac{4m_b^2 K_b}{3\Delta_0^3} (q^2 - (v \cdot q)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{4 m_b^2 K_b}{3 \Delta_0^2} \\
S_3 &= \frac{2 m_b K_b}{3 \Delta_0^2} \\
S_4 &= 0 \\
S_5 &= -\frac{2 m_b K_b}{3 \Delta_0^2} \\
S_6 &= -\frac{m_b (1 + \epsilon_b)}{2 \Delta_0} - \frac{5 m_b K_b}{6 \Delta_0} - \frac{5 m_b^2}{3 \Delta_0^2} (v \cdot q) K_b + \frac{4 m_b^3 K_b}{3 \Delta_0^3} (q^2 - (v \cdot q)^2) \\
S_7 &= \frac{1 + \epsilon_b}{2 \Delta_0} + \frac{(2 m_b + 3 v \cdot q) m_b K_b}{3 \Delta_0^2} - \frac{4 m_b^2 K_b}{3 \Delta_0^3} (q^2 - (v \cdot q)^2) \\
S_8 &= \frac{m_b (1 + \epsilon_b)}{2 \Delta_0} + \frac{m_b K_b}{6 \Delta_0} + \frac{5 m_b^2}{3 \Delta_0^2} (v \cdot q) K_b - \frac{4 m_b^3 K_b}{3 \Delta_0^3} (q^2 - (v \cdot q)^2) \\
S_9 &= -\frac{1 + \epsilon_b}{2 \Delta_0} - \frac{(2 m_b + 3 v \cdot q) m_b K_b}{3 \Delta_0^2} + \frac{4 m_b^2 K_b}{3 \Delta_0^3} (q^2 - (v \cdot q)^2) \tag{6.5}
\end{aligned}$$

mit

$$X_b = -\frac{2 (m_b - v \cdot q) m_b (K_b + G_b)}{\Delta_0} - \frac{8 m_b^2 K_b}{3 \Delta_0^2} (q^2 - (v \cdot q)^2) + \frac{2 m_b^2 K_b}{\Delta_0}. \tag{6.6}$$

Die Größe K_b beschreibt die kinetische Energie des schweren Quarks, also in unserem Fall des b -Quarks, das im Λ_b -Baryon enthalten ist. Es gilt

$$K_b = -\sum_s \langle \Lambda_b(p, s) | \bar{b}_v(x) \frac{(iD)^2}{2 m_b^2} b_v(x) | \Lambda_b(p, s) \rangle = \frac{\mu_\pi^2}{2 m_b^2}, \tag{6.7}$$

wobei $\mu_\pi^2 \simeq 0.06$ ist. Der spinabhängige Anteil ϵ_b ist definiert durch

$$\langle \Lambda_b(p, s) | \bar{b} \gamma^\lambda \gamma_5 b | \Lambda_b(p, s) \rangle = (1 + \epsilon_b) s^\lambda. \tag{6.8}$$

Schließlich gibt es noch einen Anteil G_b , der die chromomagnetischen Beiträge beschreibt. Es ist durch

$$G_b = \sum_s \langle \Lambda_b(p, s) | \bar{b}_v(x) \left(\frac{-g F_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}}{4 m_b^2} \right) b_v(x) | \Lambda_b(p, s) \rangle \tag{6.9}$$

definiert. Für den Zerfall des Λ_b sind diese Beiträge null, aber bei der Diskussion der B -Mesonen gilt $G_b \neq 0$. Der Propagatornenner Δ_0 ist gegeben durch

$$\Delta_0 = (m_b v - q)^2 - m_c^2 + i\epsilon. \tag{6.10}$$

Die Berechnung der Strukturfunktionen des Hadron-Tensors, W_i und G_j , ist gemäß der Beziehung (6.3) durch

$$W_i = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(T_i), \quad G_j = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(S_j) \quad (6.11)$$

für $i = 1, \dots, 5$ und $j = 1, \dots, 9$ gegeben. Dazu müssen der Imaginärteil des Propagators $1/\Delta_0$ sowie seine zweite und dritte Potenz bestimmt werden. Aus der Definition des Imaginärteils erhält man

$$\text{Im} \left(\frac{1}{x + i\epsilon} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x + i\epsilon} - \frac{1}{x - i\epsilon} \right) = \frac{-\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}. \quad (6.12)$$

Dies verschwindet offenbar im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$, solange $x \neq 0$ ist. Um dies auf beliebige reelle Werte für x ausdehnen zu können, bildet man das Integral

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a dx \frac{-\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-2 \arctan \left(\frac{a}{\epsilon} \right) \right] = -\pi \quad (6.13)$$

für beliebiges $a > 0$. Da das Integrationsintervall den Punkt $x = 0$ enthält, sieht man, daß der Integrand die Eigenschaft einer Delta-Distribution hat. Man kann daher schreiben

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left(\frac{1}{x + i\epsilon} \right) = -\pi \delta(x). \quad (6.14)$$

Um dieses Resultat auf den Propagator anzuwenden, setzt man $x = (m_b v - q)^2 - m_c^2$ und wertet dies im Ruhesystem des b -Quarks aus, in dem $\vec{v} = \vec{0}$ gilt. Das liefert schließlich

$$\text{Im} \left(\frac{1}{\Delta_0} \right) = -\pi \delta \left(m_b^2 - 2 m_b q_0 + q^2 - m_c^2 \right) = \frac{-\pi}{2 m_b} \delta \left[q_0 - \left(\frac{m_b^2 - m_c^2 + q^2}{2 m_b} \right) \right]. \quad (6.15)$$

Die Imaginärteile der zweiten und dritten Potenz des Propagators können durch eine äquivalente Rechnung bestimmt werden, wenn man die Eigenschaften

$$\frac{1}{\Delta_0^2} = \frac{1}{2 m_b} \frac{d}{dq_0} \left(\frac{1}{\Delta_0} \right), \quad \frac{1}{\Delta_0^3} = \frac{1}{8 m_b^2} \frac{d^2}{dq_0^2} \left(\frac{1}{\Delta_0} \right) \quad (6.16)$$

benutzt und die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauscht. Das Resultat für die Imaginärteile der zweiten und dritten Potenz des Propagators ist

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\frac{1}{\Delta_0^2} \right) &= \frac{1}{2 m_b} \frac{d}{dq_0} \left(\text{Im} \frac{1}{\Delta_0} \right) = \frac{-\pi}{4 m_b^2} \frac{d}{dq_0} \delta \left[q_0 - \left(\frac{m_b^2 - m_c^2 + q^2}{2 m_b} \right) \right] \\ \text{Im} \left(\frac{1}{\Delta_0^3} \right) &= \frac{1}{8 m_b^2} \frac{d^2}{dq_0^2} \left(\text{Im} \frac{1}{\Delta_0} \right) = \frac{-\pi}{16 m_b^3} \frac{d^2}{dq_0^2} \delta \left[q_0 - \left(\frac{m_b^2 - m_c^2 + q^2}{2 m_b} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Mit Hilfe dieser Resultate können wir nun die 14 Strukturfunktionen W_i und G_j angeben. Sie ergeben sich aus (6.11), indem man die berechneten Imaginärteile (6.15) und (6.17) in die Invarianten T_i und S_j aus (6.5) einsetzt. Dann kann man sie durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2m_b} T_i \left| \left\{ \frac{1}{\Delta_0} \rightarrow \delta(q_0 - E_q), \quad \frac{1}{\Delta_0^2} \rightarrow \frac{1}{2m_b} \delta'(q_0 - q), \quad \frac{1}{\Delta_0^3} \rightarrow \frac{1}{8m_b^2} \delta''(q_0 - E_q) \right\} \right. \\ G_j &= \frac{1}{2m_b} S_j \left| \left\{ \frac{1}{\Delta_0} \rightarrow \delta(q_0 - E_q), \quad \frac{1}{\Delta_0^2} \rightarrow \frac{1}{2m_b} \delta'(q_0 - E_q), \quad \frac{1}{\Delta_0^3} \rightarrow \frac{1}{8m_b^2} \delta''(q_0 - E_q) \right\} \right. \end{aligned} \quad (6.18)$$

ausdrücken. Hier bezeichnet der Strich die Ableitung nach q_0 . Zur Abkürzung wurde $E_q = (m_b^2 - m_c^2 + q^2)/(2m_b)$ gesetzt, wobei E_q die Energie des virtuellen W -Bosons ist. Die Strukturfunktionen W_i und G_j sind Lorentz-Invarianten, die nicht vom Koordinatensystem abhängen.

6.3 Helizitäts-Strukturfunktionen und Winkelverteilungen

6.3.1 Definition der Strukturfunktionen

Die Funktionen (6.18) beschreiben den hadronischen Zerfallsprozeß $\Lambda_b(s) \rightarrow X_c$ eines polarisierten Λ_b -Baryons in einen Endzustand, der ein c -Quark enthält, vollständig. Um die gesamte Verteilung für den semileptonischen Zerfall $\Lambda_b(s) \rightarrow X_c + l^-(s_l) + \bar{\nu}_l$ zu erhalten, ist es notwendig, den Hadron-Tensor $W^{\mu\nu}$ mit dem Lepton-Tensor $L_{\mu\nu}$ zu kontrahieren. Wir benutzen dazu die Helizitäts-Techniken, die auch bei der Diskussion der QCD -Korrekturen verwendet wurden. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß man die Winkelverteilung der differentiellen Zerfallsrate als Linearkombination der Helizitäts-Strukturfunktionen darstellen kann. Diese Strukturfunktionen sind definiert durch

$$W_{\lambda_W \lambda'_W}^{\lambda_{\Lambda_b} \lambda'_{\Lambda_b}} := (2\pi)^3 \sum_X \delta^4(p - q - p_x) \langle X_c | J_c^\mu | \Lambda_b, \lambda_{\Lambda_b} \rangle \epsilon_\mu^*(\lambda_W) \langle \Lambda_b, \lambda'_{\Lambda_b} | J_c^{\nu\dagger} | X_c \rangle \epsilon_\nu(\lambda'_W) \quad (6.19)$$

und hängen mit W_i und G_j über die Relationen

$$\begin{aligned} W_{++}^{++} &= W_1 - |\vec{q}| W_3 + |\vec{q}| G_1 - |\vec{q}|^2 G_3 + G_8 + q_0 G_9 \\ W_{++}^{--} &= W_1 - |\vec{q}| W_3 - |\vec{q}| G_1 + |\vec{q}|^2 G_3 - G_8 - q_0 G_9 \\ W_{--}^{++} &= W_1 + |\vec{q}| W_3 + |\vec{q}| G_1 + |\vec{q}|^2 G_3 - G_8 - q_0 G_9 \\ W_{--}^{--} &= W_1 + |\vec{q}| W_3 - |\vec{q}| G_1 - |\vec{q}|^2 G_3 + G_8 + q_0 G_9 \\ W_{tt}^{++} &= -W_1 + \frac{q_0^2}{q^2} W_2 + q^2 W_4 + 2q_0 W_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - |\vec{q}| \left(G_1 - \frac{q_0^2}{q^2} G_2 - q^2 G_4 - 2 q_0 G_5 + \frac{2 q_0}{q^2} G_6 + 2 G_7 \right) \\
W_{tt}^{--} &= -W_1 + \frac{q_0^2}{q^2} W_2 + q^2 W_4 + 2 q_0 W_5 \\
& + |\vec{q}| \left(G_1 - \frac{q_0^2}{q^2} G_2 - q^2 G_4 - 2 q_0 G_5 + \frac{2 q_0}{q^2} G_6 + 2 G_7 \right) \\
W_{00}^{++} &= W_1 + \frac{|\vec{q}|^2}{q^2} W_2 + |\vec{q}| G_1 + \frac{|\vec{q}|^3}{q^2} G_2 - \frac{2 q_0 |\vec{q}|}{q^2} G_6 \\
W_{00}^{--} &= W_1 + \frac{|\vec{q}|^2}{q^2} W_2 - |\vec{q}| G_1 - \frac{|\vec{q}|^3}{q^2} G_2 + \frac{2 q_0 |\vec{q}|}{q^2} G_6 \\
W_{0t}^{++} &= \frac{|\vec{q}| q_0}{q^2} W_2 + |\vec{q}| W_5 + \frac{q_0 |\vec{q}|^2}{q^2} G_2 + |\vec{q}|^2 G_5 - \frac{|\vec{q}|^2 + q_0^2}{q^2} G_6 - q_0 G_7 \\
W_{0t}^{--} &= \frac{|\vec{q}| q_0}{q^2} W_2 + |\vec{q}| W_5 - \frac{q_0 |\vec{q}|^2}{q^2} G_2 - |\vec{q}|^2 G_5 + \frac{|\vec{q}|^2 + q_0^2}{q^2} G_6 + q_0 G_7 \\
W_{+0}^{+-} &= \sqrt{\frac{2}{q^2}} (|\vec{q}| G_6 + q_0 G_8 + q^2 G_9) \\
W_{-0}^{-+} &= -\sqrt{\frac{2}{q^2}} (|\vec{q}| G_6 - q_0 G_8 - q^2 G_9) \\
W_{+t}^{+-} &= \sqrt{\frac{2}{q^2}} (q_0 G_6 + q^2 G_7 + |\vec{q}| G_8) \\
W_{-t}^{-+} &= -\sqrt{\frac{2}{q^2}} (q_0 G_6 + q^2 G_7 - |\vec{q}| G_8) \tag{6.20}
\end{aligned}$$

zusammen. Mit $\lambda_{\Lambda_b} = \pm 1/2$ werden die Helizitäten des Λ_b -Baryons bezeichnet, und $\lambda_W = 0, \pm 1, t$ sind die Helizitäten des virtuellen W -Bosons, dessen Viererimpuls nicht die Massenschalen-Bedingung $q^2 = M_W^2$ erfüllt.

6.3.2 Winkelverteilungen

Zur analytischen Auswertung der Helizitäts-Strukturfunktionen und zur Berechnung der Winkelverteilungen für den semileptonischen Zerfall eines polarisierten Λ_b -Baryons in ein Leptonpaar wählt man der Einfachheit halber das Λ_b -Ruhesystem. Die Kinematik dieses Prozesses sowie die Definitionen der Winkel und der übrigen kinematischen Größen sind in Abbildung 6.1 veranschaulicht. Der Winkel θ_P ist durch die Richtung des Λ_b -Polarisationsvektors in Bezug auf die z -Achse definiert, die in Richtung des räumlichen W -Impulses gelegt wurde. Die Winkel θ und ϕ legen die Richtung des Impulses des geladenen Leptons bezüglich der z -Achse fest und werden im W -Ruhesystem bestimmt. Vergleicht man die Resultate mit denjenigen aus [71], so muß man die unterschiedliche Definition des

Koordinatensystems berücksichtigen. Die dort angegebenen Helizitäts-Strukturfunktionen gehen in die Ausdrücke (6.20) über, indem man die Helizitäten des Λ_b -Baryons gemäß $\lambda_{\Lambda_b} \rightarrow -\lambda_{\Lambda_b}$, $\lambda'_{\Lambda_b} \rightarrow -\lambda'_{\Lambda_b}$ oder stattdessen die Funktionen G_j durch $G_j \rightarrow -G_j$ ersetzt. Der Grund für die Änderung der Vorzeichen ist, daß die z -Achse in jeweils entgegengesetzter Richtung definiert ist und sich die Helizitäten daher in entsprechender Weise ändern. Wie bereits gesagt wurde, sind die Helizitäts-Strukturfunktionen keine Invarianten und hängen vom gewählten Koordinatensystem ab.

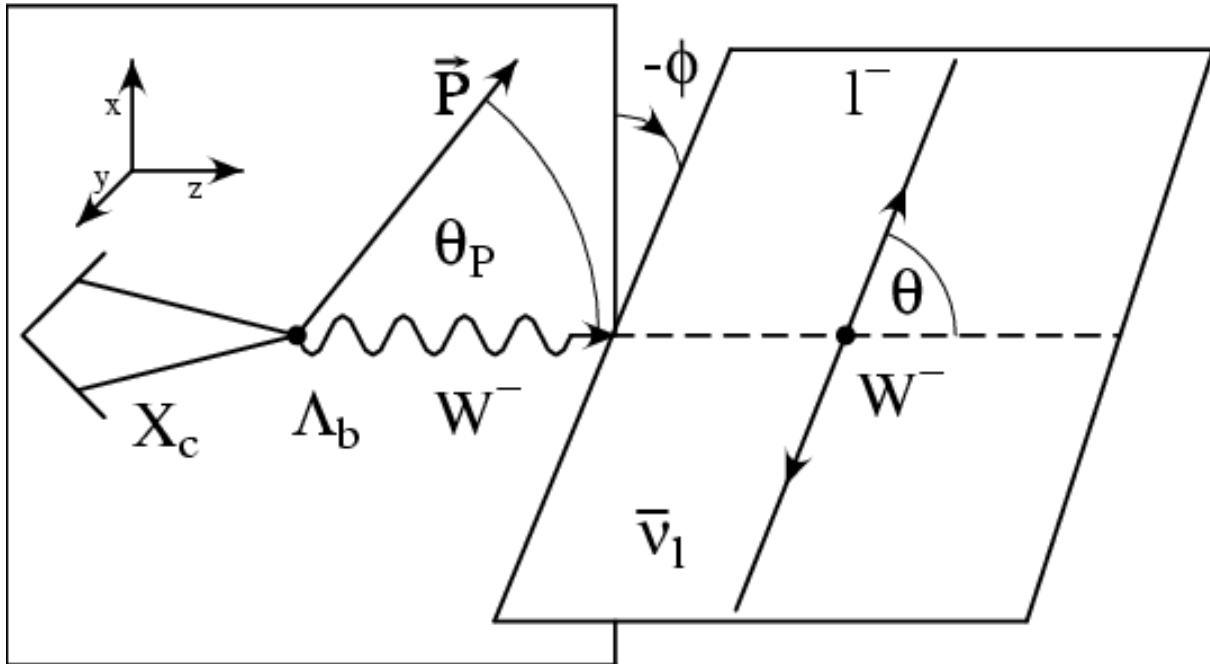


Abbildung 6.1: Definition der Polarwinkel θ_P und θ sowie des Azimutwinkels ϕ im semileptonischen Zerfall des Λ_b -Baryons $\Lambda_b^\uparrow \rightarrow X_c + l^- + \bar{\nu}_l$ im Ruhesystem des Λ_b . \vec{P} ist der Polarisationsvektor des Λ_b .

Aus der Definition (6.19) ergibt sich durch Bildung des komplex konjugierten Ausdrucks die Relation

$$W_{\lambda_W \lambda'_W}^{\lambda_{\Lambda_b} \lambda'_{\Lambda_b} *} = W_{\lambda'_W \lambda_W}^{\lambda'_{\Lambda_b} \lambda_{\Lambda_b}}, \quad (6.21)$$

die Helizitäts-Strukturfunktionen sind also hermitesch bezüglich Vertauschen der Helizitäten $\lambda_{\Lambda_b} \leftrightarrow \lambda'_{\Lambda_b}$ und $\lambda_W \leftrightarrow \lambda'_W$. In dem hier vorliegenden Fall sind die Strukturfunktionen reell, so daß sie unter Vertauschung der Helizitäten symmetrisch sind.

Die Winkelverteilung des Zerfallsprozesses $\Lambda_b^\uparrow \rightarrow X_c + l^- + \bar{\nu}_l$ einschließlich aller Polarisationseffekte des Λ_b und des geladenen Leptons ist vollständig durch die 14 Strukturfunktionen bestimmt. Aus diesen Funktionen läßt sich die fünffach differentielle Zerfallsrate in

$q_0, q^2, \cos \theta, \cos \theta_P$ und ϕ berechnen gemäß

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma^-}{dq_0 dq^2 d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} &= \frac{2 G_F^2 |V_{bc}|^2 (q^2 - m_l^2)^2 \sqrt{q_0^2 - q^2}}{3 (2\pi)^4 q^2} \\
&\times \left\{ \left[\rho_{++} (W_{--}^{++} + W_{++}^{++}) + \rho_{--} (W_{--}^{--} + W_{++}^{--}) \right] \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) \right. \\
&\quad + (\rho_{++} W_{00}^{++} + \rho_{--} W_{00}^{--}) \frac{3}{4} \sin^2 \theta \\
&\quad + \left[\rho_{++} (W_{++}^{++} - W_{--}^{++}) + \rho_{--} (W_{++}^{--} - W_{--}^{--}) \right] \frac{3}{4} \cos \theta \\
&\quad \left. + \frac{3}{2\sqrt{2}} \rho_{+-} (W_{+0}^{+-} - W_{-0}^{-+}) \sin \theta \cos \theta \cos \phi \right\} \\
&\quad + \frac{3}{2\sqrt{2}} \rho_{+-} (W_{+0}^{+-} + W_{-0}^{-+}) \sin \theta \cos \phi, \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma^+}{dq_0 dq^2 d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} &= \frac{2 G_F^2 |V_{bc}|^2 (q^2 - m_l^2)^2 \sqrt{q_0^2 - q^2} m_l^2}{3 (2\pi)^4 q^2} \frac{m_l^2}{2 q^2} \\
&\times \left\{ \left[\rho_{++} (W_{--}^{++} + W_{++}^{++}) + \rho_{--} (W_{--}^{--} + W_{++}^{--}) \right] \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right. \\
&\quad + (\rho_{++} W_{00}^{++} + \rho_{--} W_{00}^{--}) \frac{3}{2} \cos^2 \theta \\
&\quad + \frac{3}{2} (\rho_{++} W_{tt}^{++} + \rho_{--} W_{tt}^{--}) + 3 (\rho_{++} W_{0t}^{++} + \rho_{--} W_{0t}^{--}) \cos \theta \\
&\quad + \frac{3\sqrt{2}}{2} \rho_{+-} (W_{+t}^{+-} - W_{-t}^{-+}) \sin \theta \cos \phi \\
&\quad \left. + \frac{3\sqrt{2}}{2} \rho_{+-} (W_{+0}^{+-} - W_{-0}^{-+}) \sin \theta \cos \theta \cos \phi \right\}. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Das Minuszeichen in der Rate $d\Gamma^-$ bezeichnet den Zerfall in Leptonen negativer Helizität, während das Pluszeichen in $d\Gamma^+$ entsprechend den Zerfall in Leptonen positiver Helizität kennzeichnet. Die Leptonenmasse ist mit m_l bezeichnet. Die Koeffizienten der Dichtematrix für das Λ_b -Baryon bezüglich der z -Achse sind durch

$$\boldsymbol{\rho}^{\Lambda_b} = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P \cos \theta_P & P \sin \theta_P \\ P \sin \theta_P & 1 - P \cos \theta_P \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

definiert und beschreiben die Λ_b -Polarisation, die im Λ_b -Ruhesystem durch den Polarisationsvektor

$$s = (0, \vec{P}) = (0, P \sin \theta_P, 0, P \cos \theta_P) \tag{6.25}$$

gegeben ist. Es sei darauf hingewiesen, daß durch die unterschiedliche Definition der z -Richtung in unseren Resultaten im Vergleich zu [71] auch eine unterschiedliche Definition der Richtung des Polarisationsvektors des Λ_b -Baryons resultiert. Um die jeweiligen Ergebnisse ineinander umzurechnen, muß man die Ersetzungen $\theta_P \rightarrow \pi - \theta_P$ oder $\cos \theta_P \rightarrow -\cos \theta_P$, $\sin \theta_P \rightarrow \sin \theta_P$ berücksichtigen.

6.3.3 Helizitäts-Strukturfunktionen

Die Linearkombinationen der Helizitäts-Strukturfunktionen in den Zerfallsraten (6.22) und (6.23) des semileptonischen Λ_b -Zerfalls hängen nur von den Variablen q_0 und q^2 ab. Man definiert nun fünf unpolarisierte und neun polarisierte Helizitäts-Strukturfunktionen

$$\begin{aligned}
W_U &= W_{++}^{++} + W_{--}^{++} + W_{++}^{--} + W_{--}^{--} = 4W_1 \\
W_{UP} &= W_{++}^{++} + W_{--}^{++} - W_{++}^{--} - W_{--}^{--} = 4|\vec{q}|G_1 \\
W_L &= W_{00}^{++} + W_{00}^{--} = 2\left(W_1 + \frac{|\vec{q}|^2}{q^2}W_2\right) \\
W_{LP} &= W_{00}^{++} - W_{00}^{--} = 2|\vec{q}|\left(G_1 + \frac{|\vec{q}|^2}{q^2}G_2 - 2\frac{q_0}{q^2}G_6\right) \\
W_F &= W_{++}^{++} - W_{--}^{++} + W_{++}^{--} - W_{--}^{--} = -4|\vec{q}|W_3 \\
W_{FP} &= W_{++}^{++} - W_{--}^{++} - W_{++}^{--} + W_{--}^{--} = -4(|\vec{q}|^2G_3 - G_8 - q_0G_9) \\
W_{IP} &= \frac{1}{2}(W_{+0}^{+-} - W_{-0}^{-+}) = \sqrt{\frac{2}{q^2}}|\vec{q}|G_6 \\
W_{AP} &= \frac{1}{2}(W_{+0}^{+-} + W_{-0}^{-+}) = \sqrt{\frac{2}{q^2}}(q_0G_8 + q^2G_9) \\
W_S &= W_{tt}^{++} + W_{tt}^{--} = -2\left(W_1 - \frac{q_0^2}{q^2}W_2 - q^2W_4 - 2q_0W_5\right) \\
W^{SP} &= W_{tt}^{++} - W_{tt}^{--} = -2|\vec{q}|\left(G_1 - \frac{q_0^2}{q^2}G_2 - q^2G_4 - 2q_0G_5 + 2\frac{q_0}{q^2}G_6 + 2G_7\right) \\
W_{SL} &= W_{0t}^{++} + W_{0t}^{--} = 2|\vec{q}|\left(\frac{q_0}{q^2}W_2 + W_5\right) \\
W_{SLP} &= W_{0t}^{++} - W_{0t}^{--} = 2\left(q_0\frac{|\vec{q}|^2}{q^2}G_2 + |\vec{q}|^2G_5 - \frac{|\vec{q}|^2 + q_0^2}{q^2}G_6 - q_0G_7\right) \\
W_{STP} &= \frac{1}{2}(W_{+t}^{+-} - W_{-t}^{-+}) = \sqrt{\frac{2}{q^2}}(q_0G_6 + q^2G_7) \\
W_{ST'P} &= \frac{1}{2}(W_{+t}^{+-} + W_{-t}^{-+}) = \sqrt{\frac{2}{q^2}}|\vec{q}|G_8, \tag{6.26}
\end{aligned}$$

die mit Hilfe der Relationen (6.20) durch die Invarianten W_i und G_j ausgedrückt werden können. Beim Vergleichen mit den Ausdrücken aus [71] ist zu beachten, daß hier bei der Definition der polarisierten Strukturfunktionen W_{IP} und W_{STP} zusätzlich ein Faktor $-1/2$ und bei der Definition von W_{AP} und $W_{ST'P}$ ein Faktor $1/2$ auftritt. Außerdem sind jeweils die Bezeichnungen I^P und A^P vertauscht. Diese unterschiedlichen Vorfaktoren werden durch die Koeffizienten in den unten angegebenen Winkelverteilungen für die differentiellen Raten wieder kompensiert.

Zur weiteren Vereinfachung führt man die mit der b -Masse skalierten Variablen und Parameter

$$x = \frac{\sqrt{q^2}}{m_b}, \quad \xi = \frac{q_0}{m_b}, \quad y = \frac{m_c}{m_b}, \quad \zeta = \frac{m_l}{m_b} \quad (6.27)$$

ein. Die differentiellen Raten (6.22) und (6.23) können nun mit den Helizitäts-Strukturfunktionen (6.26) in der Form

$$\frac{d\Gamma^-}{d\xi dx^2 d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} = \frac{G_F^2 m_b^6 |V_{bc}|^2 (x^2 - \zeta^2)^2 \sqrt{\xi^2 - x^2}}{3(2\pi)^4 x^2} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(W_U + P \cos\theta_P W_{UP} \right) \frac{3}{8} (1 + \cos^2\theta) + \left(W_L + P \cos\theta_P W_{LP} \right) \frac{3}{4} \sin^2\theta \right. \\ & \quad + \left(W_F + P \cos\theta_P W_{FP} \right) \frac{3}{4} \cos\theta \\ & \quad \left. + \frac{3}{\sqrt{2}} P \sin\theta_P W_{IP} \sin\theta \cos\theta \cos\phi + \frac{3}{\sqrt{2}} P \sin\theta_P W_{AP} \sin\theta \cos\phi \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\Gamma^+}{d\xi dx^2 d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} = \frac{G_F^2 m_b^6 |V_{bc}|^2 (x^2 - \zeta^2)^2 \sqrt{\xi^2 - x^2}}{3(2\pi)^4 x^2} \frac{\zeta^2}{2x^2}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(W_U + P \cos\theta_P W_{UP} \right) \frac{3}{4} \sin^2\theta + \left(W_L + P \cos\theta_P W_{LP} \right) \frac{3}{2} \cos^2\theta \right. \\ & \quad + \frac{3}{2} \left(W_S + P \cos\theta_P W_{SP} \right) + 3 \left(W_{SL} + P \cos\theta_P W_{SLP} \right) \cos\theta \\ & \quad \left. + 3\sqrt{2} P \sin\theta_P W_{STP} \sin\theta \cos\phi + 3\sqrt{2} P \sin\theta_P W_{IP} \sin\theta \cos\theta \cos\phi \right]. \end{aligned}$$

geschrieben werden. Sie hängen von drei unterschiedlichen Winkeln sowie von den beiden kinematischen Variablen ξ und x^2 ab, die durch die mit der b -Masse skalierten Werte von q_0 und q^2 gegeben sind. Man beachte, daß die Zerfallsraten (6.28) nicht von der Helizitäts-Strukturfunktion $W_{ST'P}$ abhängt. Diese Kombination kann nur durch die transversale Spin-Komponente des geladenen Leptons bestimmt werden, die im folgenden Abschnitt diskutiert werden wird. Wie bereits oben erwähnt, besitzen die Terme, welche die polarisierten

Helizitäts-Strukturfunktionen W_{IP} , W_{AP} und W_{STP} enthalten, einen anderen Koeffizienten als diejenigen in [71]. Dies hat seine Ursache in einer anderen Definition dieser Strukturfunktionen. Der Grund für die Wahl dieser abweichenden Definition ist deren Verwendung in [59], die auch mit derjenigen aus Kapitel 5 übereinstimmt.

6.4 Polarisation des geladenen Leptons

In diesem Abschnitt werden die Resultate für die Polarisation des geladenen Leptons im Endzustand angegeben. Es gibt eine longitudinale und zwei transversale Komponenten der Lepton-Polarisation. Die beiden transversalen Komponenten werden gewöhnlich in eine transversal-senkrechte Komponente in der Lepton-Hadron-Ebene und eine transversalnormale Komponente außerhalb dieser Ebene aufgespalten. Im $(l^- \bar{\nu}_l)$ -Schwerpunktsystem ist die longitudinale Lepton-Polarisation durch

$$P^l = \frac{d\Gamma^+ - d\Gamma^-}{d\Gamma^+ + d\Gamma^-} \quad (6.29)$$

gegeben, wobei die Zerfallsraten in (6.28) angegeben sind.

Für die Berechnung der transversalen Spinkomponenten des geladenen Leptons benötigt man die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \{W(\theta, \phi, \theta_P)\}^x &= \frac{m_l}{\sqrt{2}q^2} (q^2 - m_l^2) \\ &\times \left\{ \left[\rho_{++} (W_{++}^{++} - W_{--}^{++}) + \rho_{--} (W_{++}^{--} - W_{--}^{--}) \right] \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin \theta \right. \\ &\quad - \left[\rho_{++} (W_{++}^{++} + W_{--}^{++} - 2W_{00}^{++}) + \rho_{--} (W_{++}^{--} + W_{--}^{--} - 2W_{00}^{--}) \right] \\ &\quad \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{2}} (\rho_{++} W_{0t}^{++} + \rho_{--} W_{0t}^{--}) \sin \theta \\ &\quad - \frac{3}{2} \rho_{+-} (W_{+0}^{+-} - W_{-0}^{-+}) \cos(2\theta) \cos \phi \\ &\quad - \frac{3}{2} \rho_{+-} (W_{+0}^{+-} + W_{-0}^{-+} - W_{+t}^{+-} + W_{-t}^{-+}) \cos \theta \cos \phi \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \rho_{+-} (W_{+t}^{+-} + W_{-t}^{-+}) \cos \phi \right\} \quad (6.30) \end{aligned}$$

für die Bestimmung der transversal-senkrechten Spinkomponente und

$$\{W(\theta, \phi, \theta_P)\}^y = \frac{m_l}{\sqrt{2}q^2} (q^2 - m_l^2)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{3}{2} \rho_{+-} (W_{+0}^{+-} + W_{-0}^{-+} + W_{+t}^{+-} - W_{-t}^{-+}) \sin \phi \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \rho_{+-} (W_{+0}^{+-} - W_{-0}^{-+} + W_{+t}^{+-} + W_{-t}^{-+}) \cos \theta \sin \phi \right] \quad (6.31) \end{aligned}$$

zur Berechnung der transversal-normalen Spinkomponente. Die Komponenten der Dichtematrix sind in (6.24) definiert, und die Helizitäts-Strukturfunktionen sind in (6.20) angegeben. Die zugehörigen fünffach differentiellen Zerfallsraten ergeben sich analog zu (6.22) und (6.23) aus

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^x}{dq_0 dq^2 d \cos \theta d \cos \theta_P d\phi} &= \frac{2 G_F^2 |V_{bc}|^2 (q^2 - m_l^2) \sqrt{q_0^2 - q^2}}{3 (2\pi)^4 q^2} \{W\}^x \\ \frac{d\Gamma^y}{dq_0 dq^2 d \cos \theta d \cos \theta_P d\phi} &= \frac{2 G_F^2 |V_{bc}|^2 (q^2 - m_l^2) \sqrt{q_0^2 - q^2}}{3 (2\pi)^4 q^2} \{W\}^y. \quad (6.32) \end{aligned}$$

Setzt man nun die Ausdrücke (6.30) und (6.31) ein, drückt sie durch die Helizitäts-Strukturfunktionen (6.26) aus, und benutzt die skalierten Variablen (6.27), so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^x}{d\xi dx^2 d \cos \theta d \cos \theta_P d\phi} &= \frac{G_F^2 m_b^6 |V_{bc}|^2 (x^2 - \zeta^2)^2 \sqrt{\xi^2 - x^2}}{3 (2\pi)^4 x^2} \frac{\zeta}{\sqrt{2x^2}} \\ & \times \left\{ \frac{3}{2\sqrt{2}} (W_F + W_{FP} P \cos \theta_P) \sin \theta \right. \\ & - \frac{3}{2\sqrt{2}} [W_U + W_{UP} P \cos \theta_P - 2 (W_L + W_{LP} P \cos \theta_P)] \sin \theta \cos \theta \\ & + \frac{3}{\sqrt{2}} (W_{SL} + W_{SLP} P \cos \theta_P) \sin \theta - 3 W_{IP} P \sin \theta_P \cos(2\theta) \cos \phi \\ & \left. - 3 (W_{AP} + W_{STP}) P \sin \theta_P \cos \theta \cos \phi - 3 W_{ST'P} P \sin \theta_P \cos \phi \right\} \\ \frac{d\Gamma^y}{d\xi dx^2 d \cos \theta d \cos \theta_P d\phi} &= \frac{G_F^2 m_b^6 |V_{bc}|^2 (x^2 - \zeta^2)^2 \sqrt{\xi^2 - x^2}}{3 (2\pi)^4 x^2} \frac{\zeta}{\sqrt{2x^2}} \\ & \times \left[3 (W_{AP} + W_{STP}) P \sin \theta_P \sin \phi \right. \\ & \left. + 3 (W_{IP} + W_{ST'P}) P \sin \theta_P \cos \theta \sin \phi \right]. \quad (6.33) \end{aligned}$$

Hier tritt im Gegensatz zu (6.28) die Strukturfunktion $W_{ST'P}$ auf. Sie kann also nur durch Messung des transversalen Leptonspins bestimmt werden.

6.5 Reduzierte Zerfallsraten und ξ -Integration

In diesem Abschnitt wollen wir die Winkelverteilungen der fünffach differentiellen Raten für den semileptonischen Λ_b -Zerfall und für die transversalen Spinkomponenten des geladenen Leptons, die im letzten Abschnitt angegeben wurden, über die skalierte Energie ξ des W -Bosons integrieren, um eine vierfach differentielle Rate zu erhalten, die neben den drei Winkelvariablen nur vom skalierten Quadrat des W -Impulses x^2 abhängt. Wie wir sehen werden, ist die ξ -Integration nicht besonders schwierig, da man im wesentlichen über Delta-Funktionen integrieren muß.

6.5.1 Integration der Strukturfunktionen über ξ

In den Winkelverteilungen (6.28) und (6.33) ist die ξ -Abhängigkeit nur in den Helizitäts-Strukturfunktionen W_X und in dem Vorfaktor $\sqrt{\xi^2 - x^2}$ enthalten. Daher ist es ausreichend, die ξ -Integration nur für die mit diesem Faktor multiplizierten Strukturfunktionen durchzuführen. Wie man in (6.26) sieht, sind alle Strukturfunktionen W_X Linearkombinationen der Funktionen W_i und G_j , welche nach (6.18) nur die Delta-Funktion sowie deren erste und zweite Ableitung nach der Energie q_0 enthalten. Nach einer partiellen Integration können die Ableitungen der Delta-Funktion in die Delta-Funktion selbst umgewandelt werden. Die dabei erzeugten Oberflächenterme liefern keinen Beitrag, so daß die q_0 -Integration sehr einfach auszuführen ist, denn man braucht nur die Variable q_0 durch die Energie E_q des virtuellen W -Bosons zu ersetzen. Verwendet man die skalierten Variablen (6.27), so geht die Integration über q_0 in eine ξ -Integration über. Die ξ -Integration über die Strukturfunktionen W_X ergibt

$$I(W_X) := m_b \int \sqrt{\xi^2 - x^2} W_X(\xi) d\xi, \quad (6.34)$$

wobei $W_X(\xi)$ die mit der b -Masse skalierten Linearkombinationen in (6.26) sind. Man erhält für die unterschiedlichen Helizitäten folgende Resultate:

$$\begin{aligned} I_U &= I(W_U) = I(W_{++}^{++} + W_{--}^{++} + W_{++}^{--} + W_{--}^{--}) \\ &= \frac{1}{4} (1 - K_b) \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) + \frac{2}{3} K_b \sqrt{\lambda} \\ &\quad + \frac{G_b}{3\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{\lambda}{4} [15(x^2 - y^2) - 11] + x^2 (3x^2 - 3y^2 - 7) - 4y^2 + 4 \right\} \\ I_{UP} &= I(W_{UP}) = I(W_{++}^{++} + W_{--}^{++} - W_{++}^{--} - W_{--}^{--}) \\ &= -\frac{1}{4} (1 + \epsilon_b) \lambda + \frac{1}{3} K_b \left(\frac{3}{4} \lambda + 2x^2 \right) \\ I_L &= I(W_L) = I(W_{00}^{++} + W_{00}^{--}) \\ &= (1 - K_b) \frac{\sqrt{\lambda}}{8x^2} \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] - \frac{2}{3} K_b \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

$$+ \frac{G_b}{6\sqrt{\lambda}x^2} \left\{ \frac{\lambda}{4} \left[15(-\lambda + x^4 - x^2y^2) - 59x^2 - 12y^2 + 12 \right] \right. \\ \left. + x^2 \left[x^2 \left(3(x^2 - y^2) - 7 \right) - 4y^2 + 4 \right] \right\}$$

$$I_{LP} = I(W_{LP}) = I(W_{00}^{++} - W_{00}^{--}) \\ = (1 + \epsilon_b) \frac{\lambda}{8x^2} (1 - y^2) - K_b \frac{1 - y^2}{6x^2} \left(\frac{3}{4} \lambda + 2x^2 \right)$$

$$I_F = I(W_F) = I(W_{++}^{++} - W_{--}^{++} + W_{++}^{--} - W_{--}^{--}) \\ = -\frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{3} K_b \left(\frac{3}{4} \lambda + 2x^2 \right) + \frac{1}{3} G_b \left[\frac{15}{4} \lambda + 4x^2 - 6(1 - y^2) \right]$$

$$I_{FP} = I(W_{FP}) = I(W_{++}^{++} - W_{--}^{++} - W_{++}^{--} + W_{--}^{--}) \\ = (1 + \epsilon_b) \frac{\sqrt{\lambda}}{4} (1 - x^2 + y^2) + K_b \frac{\sqrt{\lambda}}{12} (3x^2 - 3y^2 + 5)$$

$$I_{IP} = I(W_{IP}) = I(1/2(W_{+0}^{+-} - W_{-0}^{-+})) \\ = -(1 + \epsilon_b) \frac{\lambda}{8\sqrt{2}x} - K_b \frac{\lambda - 4x^2}{12\sqrt{2}x}$$

$$I_{AP} = I(W_{AP}) = I(1/2(W_{+0}^{+-} + W_{-0}^{-+})) \\ = (1 + \epsilon_b) \frac{\sqrt{\lambda}}{8\sqrt{2}x} (1 - x^2 - y^2) - K_b \frac{\sqrt{\lambda}}{12\sqrt{2}x} (1 + x^2 - y^2)$$

$$I_S = I(W_S) = I(W_{tt}^{++} + W_{tt}^{--}) \\ = (1 - K_b) \frac{\sqrt{\lambda}}{8x^2} \left[\lambda + x^2(1 - x^2 + y^2) \right] \\ + \frac{G_b}{2\sqrt{\lambda}x^2} \left\{ \frac{1}{4} \lambda \left[-5(\lambda - x^4 + x^2y^2) - 9x^2 - 4y^2 + 4 \right] - x^4(1 - x^2 + y^2) \right\}$$

$$I_{SP} = I(W_{SP}) = I(W_{tt}^{++} - W_{tt}^{--}) \\ = (1 + \epsilon_b) \frac{\lambda}{8x^2} (1 - y^2) - K_b \frac{1 - y^2}{6x^2} \left(\frac{3}{4} \lambda + 2x^2 \right)$$

$$I_{SL} = I(W_{SL}) = I(W_{0t}^{++} + W_{0t}^{--}) \\ = \frac{\lambda}{8x^2} (1 - y^2) - K_b \frac{1 - y^2}{6x^2} \left(\frac{3}{4} \lambda + 2x^2 \right) - G_b \frac{1 - 5y^2}{6x^2} \left(\frac{3}{4} \lambda + 2x^2 \right)$$

$$I_{SLP} = I(W_{SLP}) = I(W_{0t}^{++} - W_{0t}^{--})$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \epsilon_b) \frac{\sqrt{\lambda}}{8x^2} \left[\lambda + x^2 (1 - x^2 + y^2) \right] \\
&\quad - K_b \frac{\sqrt{\lambda}}{24x^2} \left[3\lambda - x^2 (3x^2 - 3y^2 - 11) \right] \\
I_{ST^P} &= I(W_{ST^P}) = I(1/2(W_{+t}^{+-} - W_{-t}^{-+})) \\
&= -(1 + \epsilon_b) \frac{\sqrt{\lambda}}{8\sqrt{2}x} (1 - x^2 - y^2) - K_b \frac{\sqrt{\lambda}}{12\sqrt{2}x} (1 + x^2 - y^2) \\
I_{ST'^P} &= I(W_{ST'^P}) = I(1/2(W_{+t}^{+-} + W_{-t}^{-+})) \\
&= (1 + \epsilon_b) \frac{\lambda}{8\sqrt{2}x} - K_b \frac{\lambda + 4x^2}{12\sqrt{2}x}. \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Der mit der b -Masse skalierte Betrag des räumlichen Impulses des virtuellen W -Bosons ist gegeben durch die Größe

$$\begin{aligned}
\frac{|\vec{q}|}{m_b} &= \frac{1}{m_b} \sqrt{q_0^2 - q^2} = \sqrt{\xi^2 - x^2} \Big|_{\xi=(1-y^2+x^2)/2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(1 - y^2 + x^2)^2 - 4x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(1, y^2, x^2)}. \tag{6.36}
\end{aligned}$$

Beim Vergleich mit den Resultaten in [71] konnten dort einige Fehler gefunden und anschließend korrigiert werden. Dabei müssen ebenfalls die Unterschiede in der Definition des Koordinatensystems und der polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen W_{IP} , W_{AP} , W_{ST^P} und $W_{ST'^P}$ berücksichtigt werden.

6.5.2 Reduzierte Zerfallsraten

Man kann die Winkelverteilungen (6.28) auf die totale unpolarisierte Zerfallsrate im Grenzfalle verschwindender b -Masse aus (3.32) normieren, indem man sogenannte reduzierte Raten für die Winkelkoeffizienten einführt. Dazu schreibt man den Vorfaktor für $d\Gamma^-$ in der Form

$$\frac{G_F^2 m_b^6 |V_{bc}|^2 (x^2 - \zeta^2)^2 \sqrt{\xi^2 - x^2}}{3(2\pi)^4 x^2} = \frac{\Gamma_b}{4\pi} \times 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} \times m_b \sqrt{\xi^2 - x^2}. \tag{6.37}$$

Für $d\Gamma^+$ ergibt sich zusätzlich ein Faktor $\zeta^2/(2x^2)$ und für $d\Gamma^x$ und $d\Gamma^y$ in (6.33) ein Faktor $\zeta/\sqrt{2x^2}$. Der dritte Faktor in (6.37) wird bei der ξ -Integration in (6.34) verwendet. Der zweite Faktor geht in die Definition der reduzierten Zerfallsraten ein. Sie lautet für den Zerfall in Leptonen mit negativer Helizität

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\Gamma}_{\bar{U}}^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_U(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{\bar{U}^P}^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{UP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{\bar{L}}^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_L(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{\bar{L}^P}^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{LP}(x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\Gamma}_F^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_F(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{FP}^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{FP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{IP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{AP}^-}{dx^2} &= 16 \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{AP}(x^2), & & (6.38)
\end{aligned}$$

und entsprechend sind die reduzierten differentiellen Zerfallsraten für den Zerfall in Leptonen mit positiver Helizität definiert:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\Gamma}_U^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_U(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{UP}^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{UP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_L^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_L(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{LP}^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{LP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_S^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_S(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{SP}^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{SP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{SL}^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{SL}(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{SLP}^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{SLP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{STP}^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{STP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^+}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta^2}{2x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{IP}(x^2). & & (6.39)
\end{aligned}$$

Der Index P bezeichnet die Raten, die die Polarisation des Λ_b enthalten und proportional zum Betrag $P = |\vec{P}|$ des Polarisationsvektors sind. Auf die gleiche Art und Weise wie für den Zerfall in Leptonen positiver und negativer Helizität werden die reduzierten Raten der transversalen Lepton-Polarisationen definiert. Man erhält für die transversal-senkrechte Spin-Komponente

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\Gamma}_U^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_U(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{UP}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{UP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_L^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_L(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{LP}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{LP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_F^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_F(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{FP}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{FP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{SL}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{SL}(x^2), & \frac{d\hat{\Gamma}_{SLP}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{SLP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{IP}(x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\Gamma}_{AP}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{AP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{STP}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{STP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{ST'P}^x}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{ST'P}(x^2)
\end{aligned} \tag{6.40}$$

und für die transversal-normale Komponente

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^y}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{IP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{AP}^y}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{AP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{STP}^y}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{STP}(x^2) \\
\frac{d\hat{\Gamma}_{ST'P}^y}{dx^2} &= 16 \frac{\zeta}{\sqrt{2}x^2} \frac{(x^2 - \zeta^2)^2}{x^2} I_{ST'P}(x^2).
\end{aligned} \tag{6.41}$$

6.5.3 ξ -Integration und Winkelverteilungen

Integriert man die differentiellen Zerfallsraten (6.28) über die Variable ξ , so kann man das Ergebnis in Abhängigkeit der reduzierten Raten (6.38) und (6.39) ausdrücken und erhält

$$\frac{d\Gamma^-}{dx^2 d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} = \frac{\Gamma_b}{4\pi} \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}
&\times \left[\frac{3}{8} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_U^-}{dx^2} + P \cos\theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{UP}^-}{dx^2} \right) (1 + \cos^2\theta) + \frac{3}{4} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_L^-}{dx^2} + P \cos\theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{LP}^-}{dx^2} \right) \sin^2\theta \right. \\
&\quad + \frac{3}{4} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_F^-}{dx^2} + P \cos\theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{FP}^-}{dx^2} \right) \cos\theta \\
&\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^-}{dx^2} P \sin\theta_P \sin\theta \cos\theta \cos\phi + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{d\hat{\Gamma}_{AP}^-}{dx^2} P \sin\theta_P \sin\theta \cos\phi \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d\Gamma^+}{dx^2 d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} = \frac{\Gamma_b}{4\pi}$$

$$\times \left[\frac{3}{4} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_U^+}{dx^2} + P \cos\theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{UP}^+}{dx^2} \right) \sin^2\theta + \frac{3}{2} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_L^+}{dx^2} + P \cos\theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{LP}^+}{dx^2} \right) \cos^2\theta \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_S^+}{dx^2} + P \cos \theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{SP}^+}{dx^2} \right) + 3 \left(\frac{d\hat{\Gamma}_{SL}^+}{dx^2} + P \cos \theta_P \frac{d\hat{\Gamma}_{SLP}^+}{dx^2} \right) \cos \theta \\
& + 3\sqrt{2} \frac{d\hat{\Gamma}_{STP}^+}{dx^2} P \sin \theta_P \sin \theta \cos \phi + 3\sqrt{2} \frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^+}{dx^2} P \sin \theta_P \sin \theta \cos \theta \cos \phi \Big].
\end{aligned}$$

Durch die Integration erhält man eine vierfach differentielle Rate, die von den drei Winkeln θ_P , θ und ϕ sowie vom skalierten Quadrat des W -Viererimpulses x^2 abhängt. Ebenso integriert man die differentiellen Raten (6.33) über ξ und drückt die Resultate durch die reduzierten Raten (6.40) und (6.41) aus. Das liefert

$$\frac{d\Gamma^x}{dx^2 d \cos \theta d \cos \theta_P d \phi} = \frac{\Gamma_b}{4\pi} \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_F^x}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_{FP}^x}{dx^2} P \cos \theta_P \right) \sin \theta \right. \\
& - \frac{3}{2\sqrt{2}} \left[\frac{d\hat{\Gamma}_U^x}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_{UP}^x}{dx^2} P \cos \theta_P - 2 \left(\frac{d\hat{\Gamma}_L^x}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_{LP}^x}{dx^2} P \cos \theta_P \right) \right] \sin \theta \cos \theta \\
& + \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{d\hat{\Gamma}_{SL}^x}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_{SLP}^x}{dx^2} P \cos \theta_P \right) \sin \theta - 3 \frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^x}{dx^2} P \sin \theta_P \cos(2\theta) \cos \phi \\
& \left. - 3 \left(\frac{d\hat{\Gamma}_{AP}^x}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_{STP}^x}{dx^2} \right) P \sin \theta_P \cos \theta \cos \phi - 3 \frac{d\hat{\Gamma}_{ST'P}^x}{dx^2} P \sin \theta_P \cos \phi \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\Gamma^y}{dx^2 d \cos \theta d \cos \theta_P d \phi} = \frac{\Gamma_b}{4\pi}$$

$$\times \left[3 \left(\frac{d\hat{\Gamma}_{AP}^y}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_{STP}^y}{dx^2} \right) P \sin \theta_P \sin \phi + 3 \left(\frac{d\hat{\Gamma}_{IP}^y}{dx^2} + \frac{d\hat{\Gamma}_{ST'P}^y}{dx^2} \right) P \sin \theta_P \cos \theta \sin \phi \right].$$

6.6 Vollständig integrierte Raten und Winkelverteilungen

Aus den vierfach differentiiellen Winkelverteilungen (6.42) für die Zerfallsraten in Leptonen negativer und positiver Helizität ergeben sich durch Integration über das skalierte Impulsquadrat x^2 die dreifach differentiiellen Raten, die nur noch von den Winkeln θ , θ_P und ϕ abhängen. Da die x^2 -Abhängigkeit nur in den reduzierten differentiiellen Zerfallsraten (6.38) und (6.39) auftritt, genügt es also, nur diese nach x^2 zu integrieren, um die Winkelverteilung der dreifach differentiiellen Rate zu erhalten.

6.6.1 Integrierte reduzierte Raten

Die Integrationsgrenzen ergeben sich im Fall massiver Leptonen zu

$$\zeta^2 \leq x^2 \leq (1-y)^2, \quad (6.44)$$

und die totalen Raten sind durch

$$\hat{\Gamma} = \int_{\zeta^2}^{(1-y)^2} \frac{d\hat{\Gamma}}{dx^2} dx^2 \quad (6.45)$$

gegeben. Setzt man für $d\hat{\Gamma}/dx^2$ die differentiellen Raten (6.38) und (6.39) ein, so erhält man mit den Abkürzungen

$$u_1 = \frac{1 - \zeta^2 + y^2 - \sqrt{R}}{2y}, \quad u_2 = \frac{1 + \zeta^2 - y^2 - \sqrt{R}}{2\zeta}, \quad u_3 = \frac{(1-y)^2}{\zeta^2} \quad (6.46)$$

das Resultat für die Zerfallsraten in Leptonen negativer Helizität

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{U^-} &= \frac{1}{3} \sqrt{R} \left[(1+y^2)(1-8y^2+y^4) - (7-12y^2+7y^4)\zeta^2 - 7(1+y^2)\zeta^4 + \zeta^6 \right] \\ &\quad - 8y^4(1-\zeta^4)\ln(u_1) - 8(1-y^4)\zeta^4\ln(u_2) \\ &+ K_b \left\{ \frac{1}{9} \sqrt{R} \left[13 + 181y^2 + 37y^4 - 3y^6 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (59 + 116y^2 - 21y^4)\zeta^2 - (11 - 21y^2)\zeta^4 - 3\zeta^6 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} y^2 \left[8 + 11y^2 - 16\zeta^2 + (8 - 3y^2)\zeta^4 \right] \ln(u_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{3} (1-y^2)(5-3y^2)\zeta^4 \ln(u_2) \right\} \\ &+ G_b \left\{ \frac{1}{9} \sqrt{R} \left[41 + 185y^2 + 65y^4 - 15y^6 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (127 + 124y^2 - 105y^4)\zeta^2 + (41 + 105y^2)\zeta^4 - 15\zeta^6 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} y^2 \left[12 + 11y^2 - 16\zeta^2 + (4 - 15y^2)\zeta^4 \right] \ln(u_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{3} (5 - 4y^2 + 15y^4)\zeta^4 \ln(u_2) \right\} \\ \hat{\Gamma}_{U^P}^- &= (1 + \epsilon_b) \left\{ \frac{1}{3} \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \left[(1-y)^4 (1 + 6y + y^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-y)^2 (7 + 26y + 7y^2)\zeta^2 - (7 + 2y + 7y^2)\zeta^4 + \zeta^6 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4(1-y^2)^2 \zeta^4 \ln(u_3) \Big\} \\
& - K_b \left\{ \frac{1}{9} \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \left[(1-y)^4 (35 + 18y + 3y^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (1-y)^2 (85 + 78y + 21y^2) \zeta^2 + (11 - 6y - 21y^2) \zeta^4 + 3\zeta^6 \right] \right. \\
& \quad \left. - 4(1-y^2)^2 \zeta^4 \ln(u_3) \right\} \\
\hat{\Gamma}_L^- &= \frac{2}{3} \sqrt{R} \left[(1+y^2)(1-8y^2+y^4) + 10(1-y^2+y^4)\zeta^2 + (1+y^2)\zeta^4 \right] \\
& - 8y^4 \left[2 - (3-y^2)\zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
& + 8\zeta^2(1-y^2) \left[(1-y^2)^2 + (1+y^2)\zeta^2 \right] \ln(u_2) \\
& + K_b \left\{ -\frac{2}{9} \sqrt{R} \left[11 + 59y^2 - 13y^4 + 3y^6 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 10(1+7y^2-3y^4)\zeta^2 - (13-3y^2)\zeta^4 \right] \right. \\
& - \frac{8}{3} y^2 \left[2(4+y^2) - (16-9y^2+3y^4)\zeta^2 + (8-3y^2)\zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
& \left. - \frac{8}{3} \zeta^2(1-y^2) \left[3(1-y^2)^2 - (5-3y^2)\zeta^2 \right] \ln(u_2) \right\} \\
& + G_b \left\{ -\frac{2}{9} \sqrt{R} \left[7 + 115y^2 - 53y^4 + 15y^6 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2(1+97y^2-75y^4)\zeta^2 - (17-15y^2)\zeta^4 \right] \right. \\
& - \frac{8}{3} y^2 \left[2(6+y^2) - (28-33y^2+15y^4)\zeta^2 + (16-15y^2)\zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
& \left. - \frac{8}{3} \zeta^2 \left[3(1-y^2)^2(1-5y^2) - (5-16y^2+15y^4)\zeta^2 \right] \ln(u_2) \right\} \\
\hat{\Gamma}_{L^P}^- &= (1+\epsilon_b) \left\{ \frac{2}{3} (1-y^2) \left[(1-y)^2 - \zeta^2 \right] \right. \\
& \quad \times \left[(1-y)^2(1+4y+y^2) + 10(1+y+y^2)\zeta^2 + \zeta^4 \right] \\
& \quad \left. - 4(1-y^2)\zeta^2 \left[(1-y^2)^2 + (1+y^2)\zeta^2 \right] \ln(u_3) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - K_b \left\{ \frac{2}{3} (1-y^2) \left[(1-y)^2 - \zeta^2 \right] \right. \\
& \quad \times \left[(1-y)^2 (5+4y+y^2) - 2(1-5y-5y^2)\zeta^2 + \zeta^4 \right] \\
& \quad \left. - \frac{4}{3} (1-y^2) \zeta^2 \left[3(1-y^2)^2 - (1-3y^2)\zeta^2 \right] \ln(u_3) \right\} \\
\hat{\Gamma}_F^- &= -\frac{1}{3} \left[(1-y)^2 - \zeta^2 \right] \left[(1-y)^4 (1+6y+y^2) \right. \\
& \quad \left. - (1-y)^2 (7+26y+7y^2)\zeta^2 - (7+2y+7y^2)\zeta^4 + \zeta^6 \right] \\
& \quad - 4(1-y^2)^2 \zeta^4 \ln(u_3) \\
& + K_b \left\{ \frac{1}{9} \left[(1-y)^2 - \zeta^2 \right] \left[(1-y)^4 (35+18y+3y^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (1-y)^2 (85+78y+21y^2)\zeta^2 + (11-6y-21y^2)\zeta^4 + 3\zeta^6 \right] \right. \\
& \quad \left. + 4(1-y^2)^2 \zeta^4 \ln(u_3) \right\} \\
& + G_b \left\{ -\frac{1}{9} \left[(1-y)^2 - \zeta^2 \right] \left[(1-y)^3 (65+133y+75y^2+15y^3) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (1-y) (199+275y+285y^2+105y^3)\zeta^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (41+30y+105y^2)\zeta^4 - 15\zeta^6 \right] \right. \\
& \quad \left. - 4(1-y^2) (3+5y^2)\zeta^4 \ln(u_3) \right\} \\
\hat{\Gamma}_{FP}^- &= (1+\epsilon_b) \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{R} \left[(1+y^2) (1-8y^2+y^4) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (7-12y^2+7y^4)\zeta^2 - 7(1+y^2)\zeta^4 + \zeta^6 \right] \right. \\
& \quad \left. - 8y^4 (1-\zeta^4) \ln(u_1) - 8\zeta^4 (1-y^4) \ln(u_2) \right\} \\
& + K_b \left\{ \frac{1}{9} \sqrt{R} \left[13+181y^2+37y^4-3y^6 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (59+116y^2-21y^4)\zeta^2 - (11-21y^2)\zeta^4 - 3\zeta^6 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} y^2 \left[8+11y^2-16\zeta^2 + (8-3y^2)\zeta^4 \right] \ln(u_1) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8}{3} \zeta^4 (1 - y^2) (5 - 3y^2) \ln(u_2) \Big\} \\
\hat{\Gamma}_{I^P}^- &= - (1 + \epsilon_b) \frac{16\sqrt{2}}{105} (1 - y - \zeta)^4 \left[(1 - y) (1 + 5y + y^2) \right. \\
& \quad \left. + 4(1 + 5y + y^2)\zeta - 4(1 - y)\zeta^2 - \zeta^3 \right] \\
& + K_b \frac{16\sqrt{2}}{315} (1 - y - \zeta)^3 \left[(1 - y)^2 (19 - 10y - 2y^2) \right. \\
& \quad \left. + 3(1 - y)(19 - 10y - 2y^2)\zeta + 8(9 + 3y + 2y^2)\zeta^2 \right. \\
& \quad \left. - 6(1 - y)\zeta^3 - 2\zeta^4 \right] \\
\hat{\Gamma}_{A^P}^- &= (1 + \epsilon_b) \left\{ \frac{8\sqrt{2}}{105} \zeta \sqrt{R} \left[2 - 13y^2 - 5y^4 + 11(4 - 3y^2)\zeta^2 + 2\zeta^4 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{8\sqrt{2}}{105} (1 + y) \left[2 - 17y^2 - 108y^4 - 5y^6 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 14(2 - 7y^2 - 3y^4)\zeta^2 - 35(2 - y^2)\zeta^4 \right] \left[E(k^2) - E(\varphi, k^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{16\sqrt{2}}{105} y \left[(1 + y)(2 - 3y - 13y^2 - 45y^3 - 5y^4) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 14(1 + y)(2 - 3y - 3y^2)\zeta^2 - 35(2 - y)\zeta^4 \right] \left[K(k^2) - F(\varphi, k^2) \right] \right\} \\
& - K_b \left\{ \frac{16\sqrt{2}}{315} \zeta \sqrt{R} \left[5 + 13y^2 - 2y^4 + 11(3 - 4y^2)\zeta^2 - 2\zeta^4 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{16\sqrt{2}}{315} (1 + y) \left[5 + 108y^2 + 17y^4 - 2y^6 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 14(3 + 7y^2 - 2y^4)\zeta^2 - 35(1 - 2y^2)\zeta^4 \right] \left[E(k^2) - E(\varphi, k^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{32\sqrt{2}}{315} y \left[(1 + y)(5 + 45y + 13y^2 + 3y^3 - 2y^4) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 14(1 + y)(3 + 3y - 2y^2)\zeta^2 - 35(1 - 2y)\zeta^4 \right] \left[K(k^2) - F(\varphi, k^2) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Entsprechend ergeben sich die Zerfallsraten in Leptonen positiver Helizität zu

$$\hat{\Gamma}_U^+ = \frac{2}{3} \sqrt{R} \zeta^2 \left[(1 - y^2)^2 + 10(1 + y^2)\zeta^2 + \zeta^4 \right] \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}
 & - 8 \frac{y^4 \zeta^4}{1-y^2} (1-y^2-\zeta^2) \ln(u_1) \\
 & + 8 \frac{\zeta^4}{1-y^2} \left[(1-y^2)^2 (1+y^2) + (1+y^4) \zeta^2 \right] \ln(u_2) \\
 + & K_b \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{R} \zeta^2 \left[3 + 6y^2 - y^4 + 10(1-y^2) \zeta^2 - \zeta^4 \right] \right. \\
 & + \frac{8}{3} \frac{y^2 \zeta^2}{1-y^2} \left[4(1-y^2) - (1-y^2)(8-3y^2) \zeta^2 + (4-3y^2) \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
 & + \left. \frac{8}{3} \frac{\zeta^4}{1-y^2} \left[(1-y^2)^2 (5-3y^2) + (1+4y^2-3y^4) \zeta^2 \right] \ln(u_2) \right\} \\
 + & G_b \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{R} \frac{\zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(7+6y^2-5y^4) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2(3+14y^2-25y^4) \zeta^2 - 5(1-y^2) \zeta^4 \right] \right. \\
 & + \frac{8}{3} \frac{y^2 \zeta^2}{(1-y^2)^2} \left[4(1-y^2)^2 - (1-y^2)^2 (4-15y^2) \zeta^2 \right. \\
 & \quad \left. - y^2 (23-15y^2) \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
 & + \frac{8}{3} \frac{\zeta^4}{(1-y^2)^2} \left[(1-y^2)^2 (5-4y^2+15y^4) \right. \\
 & \quad \left. - (7+y^2+23y^4-15y^6) \zeta^2 \right] \ln(u_2) \left. \right\} \\
 \hat{\Gamma}_{UP}^+ & = (1+\epsilon_b) \left\{ \frac{2}{3} \zeta^2 \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \right. \\
 & \quad \times \left[(1-y)^2 (1+4y+y^2) + 10(1+y+y^2) \zeta^2 + \zeta^4 \right] \\
 & \quad \left. + 4\zeta^4 \left[(1-y^2)^2 + (1+y^2) \zeta^2 \right] \ln(u_3) \right\} \\
 - & K_b \left\{ \frac{2}{3} \zeta^2 \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \left[(1-y)^2 (5+4y+y^2) - 2(1-5y-5y^2) \zeta^2 + \zeta^4 \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4}{3} \zeta^4 \left[3(1-y^2)^2 - (1-3y^2) \zeta^2 \right] \ln(u_3) \right\} \\
 \hat{\Gamma}_L^+ & = -\sqrt{R} \zeta^2 \left[3 - 4y^2 + 3y^4 + 3(1+y^2) \zeta^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \frac{y^4 \zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(3-y^2) - 4(1-y^2)\zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
& - 2 \frac{\zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)^4 + 4(1-y^2)^2(1+y^2)\zeta^2 + (1+y^4)\zeta^4 \right] \ln(u_2) \\
+ & K_b \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{R} \zeta^2 \left[1 - 20y^2 + 9y^4 - (31 - 9y^2)\zeta^2 \right] \right. \\
& - \frac{2}{3} \frac{y^2 \zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(16 - 9y^2 + 3y^4) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4(1-y^2)(8 - 3y^2)\zeta^2 + (16 - 3y^2)\zeta^4 \right] \ln(u_1) \right. \\
& + \frac{2}{3} \frac{\zeta^2}{1-y^2} \left[3(1-y^2)^4 - 4(1-y^2)^2(5 - 3y^2)\zeta^2 \right. \\
& \quad \left. \left. - (13 + 16y^2 - 3y^4)\zeta^4 \right] \ln(u_2) \right\} \\
+ & G_b \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{R} \frac{\zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(3 - 58y^2 + 45y^4) - (37 - 86y^2 + 45y^4)\zeta^2 \right] \right. \\
& - \frac{2}{3} \frac{y^2 \zeta^2}{(1-y^2)^2} \left[(1-y^2)^2(28 - 33y^2 + 15y^4) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4(1-y^2)^2(16 - 15y^2)\zeta^2 + (36 - 47y^2 + 15y^4)\zeta^4 \right] \ln(u_1) \right. \\
& + \frac{2}{3} \frac{\zeta^2}{(1-y^2)^2} \left[3(1-y^2)^4(1 - 5y^2) - 4(1-y^2)^2(5 - 16y^2 + 15y^4)\zeta^2 \right. \\
& \quad \left. \left. - (17 + 23y^2 - 47y^4 + 15y^6)\zeta^4 \right] \ln(u_2) \right\} \\
\hat{\Gamma}_{LP}^+ = & (1 + \epsilon_b) \left\{ \zeta^2 \frac{1+y}{1-y} \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \right. \\
& \quad \times \left[(1-y)^2(3 + 4y + 3y^2) + (3 - 4y + 3y^2)\zeta^2 \right] \\
& \quad \left. + (1-y^2)\zeta^2 \left[(1-y^2)^2 + 4(1+y^2)\zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_3) \right\} \\
- & K_b \left\{ \frac{1}{3} \zeta^2 \frac{1+y}{1-y} \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \right. \\
& \quad \times \left[(1-y)^2(1 + 12y + 9y^2) + (1 - 12y + 9y^2)\zeta^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} (1 - y^2) \zeta^2 \left[3 (1 - y^2)^2 - 4 (1 - 3 y^2) \zeta^2 + 3 \zeta^4 \right] \ln(u_3) \Big\} \\
 \hat{\Gamma}_S^+ & = -\sqrt{R} \zeta^2 \left[3 - 4 y^2 + 3 y^4 + 3 (1 + y^2) \zeta^2 \right] \\
 & - 2 \frac{y^4 \zeta^2}{1 - y^2} \left[(1 - y^2) (3 - y^2) - 4 (1 - y^2) \zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
 & - 2 \frac{\zeta^2}{1 - y^2} \left[(1 - y^2)^4 + 4 (1 - y^2)^2 (1 + y^2) \zeta^2 + (1 + y^4) \zeta^4 \right] \ln(u_2) \\
 + K_b & \left\{ \sqrt{R} \zeta^2 \left[3 - 4 y^2 + 3 y^4 + 3 (1 + y^2) \zeta^2 \right] \right. \\
 & + 2 \frac{y^4 \zeta^2}{1 - y^2} \left[(1 - y^2) (3 - y^2) - 4 (1 - y^2) \zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
 & + 2 \frac{\zeta^2}{1 - y^2} \left[(1 - y^2)^4 + 4 (1 - y^2)^2 (1 + y^2) \zeta^2 + (1 + y^4) \zeta^4 \right] \ln(u_2) \Big\} \\
 + G_b & \left\{ \sqrt{R} \frac{\zeta^2}{1 - y^2} \left[(1 - y^2) (1 - 14 y^2 + 15 y^4) + (9 + 2 y^2 - 15 y^4) \zeta^2 \right] \right. \\
 & - 2 \frac{y^2 \zeta^2}{(1 - y^2)^2} \left[(1 - y^2)^2 (4 - 11 y^2 + 5 y^4) \right. \\
 & \quad \left. + 20 y^2 (1 - y^2)^2 \zeta^2 - (4 + 5 y^2 - 5 y^4) \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
 & + 2 \frac{\zeta^2}{(1 - y^2)^2} \left[(1 - y^2)^4 (1 - 5 y^2) \right. \\
 & \quad \left. + 4 (1 - y^2)^2 (1 - 5 y^4) \zeta^2 + (5 + 3 y^2 + 5 y^4 - 5 y^6) \zeta^4 \right] \ln(u_2) \Big\} \\
 \hat{\Gamma}_{SP}^+ & = (1 + \epsilon_b) \left\{ \zeta^2 \frac{1 + y}{1 - y} \left[\zeta^2 - (1 - y)^2 \right] \right. \\
 & \quad \times \left[(1 - y)^2 (3 + 4 y + 3 y^2) + (3 - 4 y + 3 y^2) \zeta^2 \right] \\
 & \quad \left. + \zeta^2 (1 - y^2) \left[(1 - y^2)^2 + 4 (1 + y^2) \zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_3) \right\} \\
 - K_b & \left\{ \frac{1}{3} \zeta^2 \frac{1 + y}{1 - y} \left[\zeta^2 - (1 - y)^2 \right] \right. \\
 & \quad \times \left[(1 - y)^2 (1 + 12 y + 9 y^2) + (1 - 12 y + 9 y^2) \zeta^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \zeta^2 (1 - y^2) \left[3 (1 - y^2)^2 - 4 (1 - 3y^2) \zeta^2 + 3 \zeta^4 \right] \ln(u_3) \Big\} \\
\hat{\Gamma}_{SL}^+ & = \zeta^2 \frac{1+y}{1-y} \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \left[(1-y)^2 (3+4y+3y^2) + (3-4y+3y^2) \zeta^2 \right] \\
& + \zeta^2 (1-y^2) \left[(1-y^2)^2 + 4(1+y^2) \zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_3) \\
& + K_b \left\{ -\frac{1}{3} \zeta^2 \frac{1+y}{1-y} \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \right. \\
& \quad \times \left[(1-y)^2 (1+12y+9y^2) + (1-12y+9y^2) \zeta^2 \right] \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} \zeta^2 (1-y^2) \left[3(1-y^2)^2 - 4(1-3y^2) \zeta^2 + 3 \zeta^4 \right] \ln(u_3) \right\} \\
& + G_b \left\{ -\frac{1}{3} \zeta^2 \frac{1-5y^2}{(1-y)^2} \left[\zeta^2 - (1-y)^2 \right] \right. \\
& \quad \times \left[(1-y)^2 (1+12y+9y^2) + (1-12y+9y^2) \zeta^2 \right] \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} \zeta^2 (1-5y^2) \left[3(1-y^2)^2 - 4(1-3y^2) \zeta^2 + 3 \zeta^4 \right] \ln(u_3) \right\} \\
\hat{\Gamma}_{SLP}^+ & = -(1+\epsilon_b) \left\{ \sqrt{R} \zeta^2 \left[3-4y^2+3y^4+3(1+y^2) \zeta^2 \right] \right. \\
& \quad + 2 \frac{y^4 \zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(3-y^2) - 4(1-y^2) \zeta^2 + \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
& \quad \left. + 2 \frac{\zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)^4 + 4(1-y^2)^2 (1+y^2) \zeta^2 + (1+y^4) \zeta^4 \right] \ln(u_2) \right\} \\
& + K_b \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{R} \zeta^2 \left[5-16y^2+9y^4-(11-9y^2) \zeta^2 \right] \right. \\
& \quad - \frac{2}{3} \frac{y^2 \zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(8-9y^2+3y^4) \right. \\
& \quad \quad \left. - 4(4-7y^2+3y^4) \zeta^2 + (8-3y^2) \zeta^4 \right] \ln(u_1) \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} \frac{\zeta^2}{1-y^2} \left[3(1-y^2)^4 - 4(1-y^2)^2 (1-3y^2) \zeta^2 \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - (5+8y^2-3y^4) \zeta^4 \right] \ln(u_2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}_{STP}^+ &= (1 + \epsilon_b) \left\{ \frac{4\sqrt{2}}{15} \sqrt{R} \frac{\zeta^3}{1-y^2} \left[(1-y^2)(8-7y^2) + (8-3y^2)\zeta^2 \right] \right. \\
 &\quad - \frac{4\sqrt{2}}{15} \frac{\zeta^2}{1-y} \left[(1-y^2)(2-7y^2-3y^4) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 10(2-3y^2+y^4)\zeta^2 + 5(2-y^2)\zeta^4 \right] \left[E(k^2) - E(\varphi, k^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8\sqrt{2}}{15} \frac{y\zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(1+y)(2-3y-3y^2) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 10(1-y^2)(2-y)\zeta^2 + 5(2-y)\zeta^4 \right] \left[K(k^2) - F(\varphi, k^2) \right] \right\} \\
 + K_b &\left\{ \frac{8\sqrt{2}}{45} \sqrt{R} \frac{\zeta^3}{1-y^2} \left[(1-y^2)(7-8y^2) - (3-8y^2)\zeta^2 \right] \right. \\
 &\quad - \frac{8\sqrt{2}}{45} \frac{\zeta^2}{1-y} \left[(1-y^2)(3+7y^2-2y^4) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 10(1-y^2)(1-2y^2)\zeta^2 - 5(1-2y^2)\zeta^4 \right] \left[E(k^2) - E(\varphi, k^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16\sqrt{2}}{45} \frac{y\zeta^2}{1-y^2} \left[(1-y^2)(1+y)(3+3y-2y^2) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 10(1-y^2)(1-2y)\zeta^2 - 5(1-2y)\zeta^4 \right] \left[K(k^2) - F(\varphi, k^2) \right] \right\} \\
 \hat{\Gamma}_{IP}^+ &= (1 + \epsilon_b) \frac{8\sqrt{2}}{15} \frac{\zeta^2}{1-y} (1-y-\zeta)^4 \left[1+3y+y^2 - (1-y)\zeta \right] \\
 &\quad - K_b \frac{8\sqrt{2}}{45} \frac{\zeta^2}{1-y} (1-y-\zeta)^3 \\
 &\quad \quad \times \left[(1-y)(3-6y-2y^2) + (19+2y+4y^2)\zeta - 2(1-y)\zeta^2 \right].
 \end{aligned}$$

Die in den Raten vorkommende Funktion R ist gegeben durch

$$R = \lambda(1, y^2, \zeta^2) = 1 + y^4 + \zeta^4 - 2(y^2 + \zeta^2 + y^2\zeta^2). \quad (6.49)$$

In den polarisierten Raten $\hat{\Gamma}_{IP}^-$ und $\hat{\Gamma}_{STP}^+$ treten die elliptischen Integrale E , F und K auf, die durch

$$\begin{aligned}
 E(\varphi, k^2) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt, & E(k^2) &= E\left(\frac{\pi}{2}, k^2\right) \\
 F(\varphi, k^2) &= \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, & K(k^2) &= F\left(\frac{\pi}{2}, k^2\right)
 \end{aligned} \quad (6.50)$$

definiert sind. Das Argument φ und der Parameter k der elliptischen Integrale lauten

$$k = \frac{1-y}{1+y}, \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{\zeta}{1-y}\right). \quad (6.51)$$

6.6.2 Integrierte Winkelverteilungen

Abschließend sollen noch die dreifach differentiellen Zerfallsraten für Leptonen negativer oder positiver Helizität angegeben werden. Sie werden aus (6.42) durch Integration über die Variable x^2 bestimmt. Weil die x^2 -Abhängigkeit nur in den reduzierten differentiellen Raten $d\hat{\Gamma}^\pm/(dx^2)$ auftaucht, braucht man diese in (6.42) nur durch die integrierten Raten (6.47) und (6.48) zu ersetzen. Damit erhält man für die entsprechenden Winkelverteilungen

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^-}{d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} &= \frac{\Gamma_b}{4\pi} \quad (6.52) \\ &\times \left[\frac{3}{8} \left(\hat{\Gamma}_U^- + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_{UP}^- \right) (1 + \cos^2\theta) + \frac{3}{4} \left(\hat{\Gamma}_L^- + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_{LP}^- \right) \sin^2\theta \right. \\ &\quad + \frac{3}{4} \left(\hat{\Gamma}_F^- + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_{FP}^- \right) \cos\theta \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{2}} \hat{\Gamma}_{IP}^- P \sin\theta_P \sin\theta \cos\theta \cos\phi + \frac{3}{\sqrt{2}} \hat{\Gamma}_{AP}^- P \sin\theta_P \sin\theta \cos\phi \right] \\ \frac{d\Gamma^+}{d\cos\theta d\cos\theta_P d\phi} &= \frac{\Gamma_b}{4\pi} \\ &\times \left[\frac{3}{4} \left(\hat{\Gamma}_U^+ + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_{UP}^+ \right) \sin^2\theta + \frac{3}{2} \left(\hat{\Gamma}_L^+ + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_{LP}^+ \right) \cos^2\theta \right. \\ &\quad + \frac{3}{2} \left(\hat{\Gamma}_S^+ + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_{SP}^+ \right) + 3 \left(\hat{\Gamma}_{SL}^+ + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_{SLP}^+ \right) \cos\theta \\ &\quad \left. + 3\sqrt{2} \hat{\Gamma}_{STP}^+ P \sin\theta_P \sin\theta \cos\phi + 3\sqrt{2} \hat{\Gamma}_{IP}^+ P \sin\theta_P \sin\theta \cos\theta \cos\phi \right]. \end{aligned}$$

In analoger Weise zu den Resultaten (6.47) und (6.48) kann man auch die vollständig integrierten reduzierten Raten für die transversalen Lepton-Polarisationen berechnen, indem man die reduzierten differentiellen Raten (6.40) und (6.41) über x^2 integriert. Die zugehörige Winkelverteilung ergibt sich aus (6.43) durch Ersetzung der differentiellen reduzierten Raten $d\hat{\Gamma}/(dx^2)$ durch die integrierten Raten $\hat{\Gamma}$. Auf die Berechnung dieser Ausdrücke soll aber verzichtet werden, da die transversalen Lepton-Polarisationen im folgenden nicht mehr betrachtet werden.

Kapitel 7

Anwendungen in hadronischen Zerfällen

7.1 Einleitung

In den letzten Abschnitten wurden sowohl die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen als auch die nichtperturbativen Beiträge zur partonischen Zerfallsrate eines polarisierten b -Quarks in ein c -Quark und ein W -Boson diskutiert. Es wurden die analytischen Resultate für die unterschiedlichen Helizitäts-Strukturfunktionen präsentiert, die den weiteren Zerfall des W -Bosons in ein Quark- oder Leptonpaar beschreiben. Die QCD-Korrekturen wurden mit Hilfe der Störungstheorie bis zur ersten Ordnung der starken Kopplungskonstanten α_s berechnet und beinhalten sowohl Schleifen-Korrekturen als auch Beiträge zur Gluon-Bremsstrahlung. Die nichtperturbativen Beiträge wurden aus der Operatorprodukt-Entwicklung in der HQET bestimmt und sind von der Ordnung $\mathcal{O}(1/m_b^2)$. Sie hängen von den drei Parametern für den spinabhängigen Anteil ϵ_b und den Erwartungswert der kinetischen Energie K_b sowie für die chromomagnetische Wechselwirkung G_b des schweren b -Quarks innerhalb des Hadrons ab. In diesem Kapitel sollen die semi-inklusive hadronischen Zerfälle eines Λ_b -Baryons oder eines B -Mesons in die charm-strangeness-Mesonen D_s und D_s^* diskutiert werden. Der dominante Anteil dieser Zerfälle ist durch den erwähnten partonischen Prozeß $b \rightarrow c + (D_s^-, D_s^{*-})$ gegeben, wobei auch die Polarisation des zerfallenden b -Quarks berücksichtigt wird [72, 83]. Mit der Bezeichnung semi-inklusiv soll angedeutet werden, daß die Zerfallsprodukte, die das c -Quark enthalten, nicht beobachtet werden. Die inklusiven $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -QCD-Strahlungskorrekturen für den b -Quark-Zerfall wurden in den Abschnitten 5.3 und 5.4 diskutiert. Die analytischen Resultate für die inklusiven Helizitäts-Raten wurden in Abschnitt 5.5 angegeben. Die nichtperturbativen Korrekturen für die hadronischen Zerfallsprozesse, an denen ein schweres b -Quark beteiligt ist, wurden in Kapitel 6 behandelt. Dort wurden in Abschnitt 6.5 auch die analytischen $\mathcal{O}(1/m_b^2)$ -Resultate für die Helizitäts-Raten angegeben. Diese Resultate sollen nun benutzt werden,

um die QCD- und die nichtperturbativen Korrekturen zu den Helizitäts-Raten für die semi-inklusiven Zerfälle des Λ_b oder eines B -Mesons in die Mesonen D_s und D_s^* zu bestimmen.

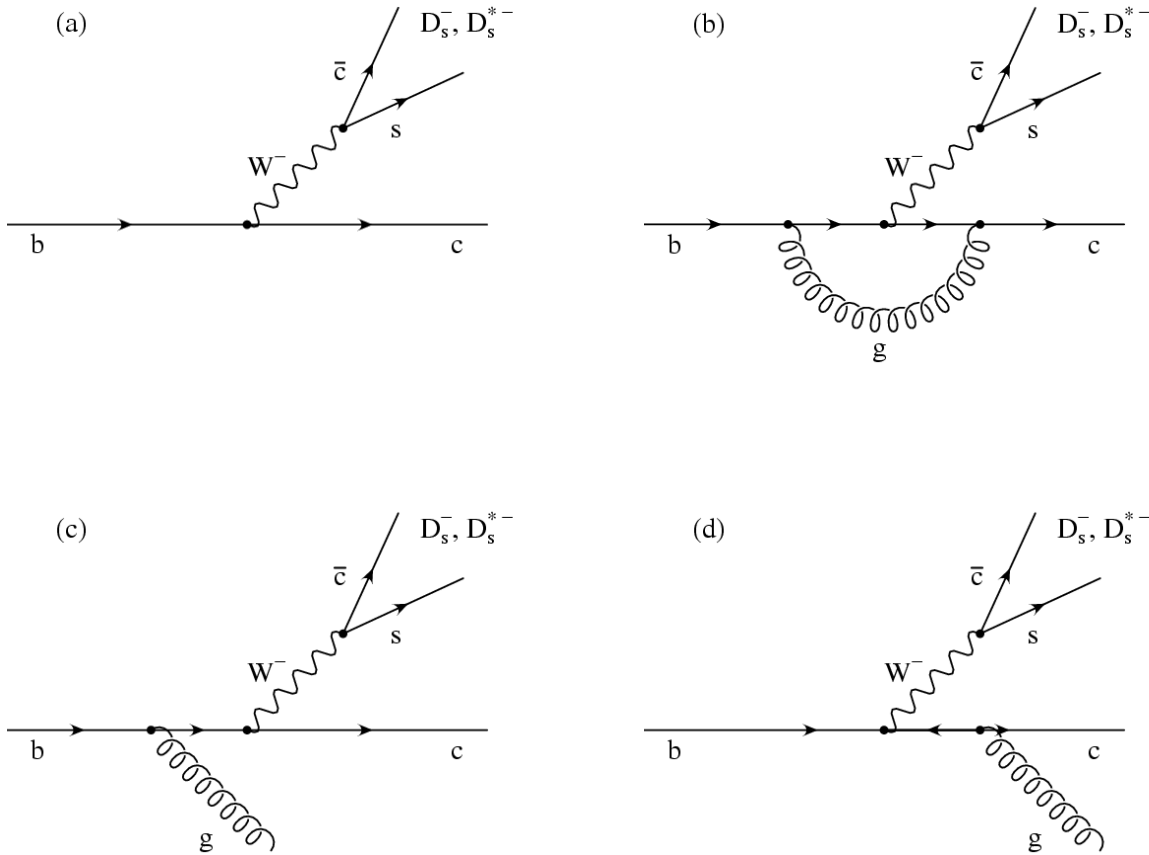


Abbildung 7.1: Feynman-Diagramme für Bornsche Näherung (a) sowie Vertex-Korrektur (b) und Gluon-Bremsstrahlung (c, d) in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zum hadronischen Zerfallsprozeß $b \rightarrow c + (D_s^-, D_s^{*-})$

Wir werden in diesem Abschnitt die Winkelverteilungen der betrachteten Zerfälle berechnen, die durch bestimmte Helizitäts-Raten gegeben sind. Die Kinematik der hier diskutierten Zerfälle und die Definition der unterschiedlichen Winkel ist in Abbildung 7.2 gezeigt. In den semi-inklusiven hadronischen Zerfällen eines Λ_b -Baryons $\Lambda_b^\uparrow \rightarrow X_c + (D_s, D_s^*)$ und eines B -Mesons $\bar{B} \rightarrow X_c + (D_s, D_s^*)$ in die charm-strangeness-Mesonen D_s und D_s^* enthält das zerfallende Hadron jeweils ein schweres b -Quark, das in ein c -Quark und ein virtuelles W -Boson zerfällt. Das W zerfällt schließlich weiter in ein $\bar{c}s$ -Paar, das in ein D_s - oder D_s^* -Meson fragmentiert. Der dominierende Beitrag in diesen beiden Prozessen ist durch den partonischen Zerfall $b \rightarrow c + (D_s^-, D_s^{*-})$ gegeben, wie für den Fall des \bar{B} -Zerfalls in [84] über-

zeugend dargelegt wurde. Die grundlegende Annahme ist dabei, daß auch für den nicht-leptonischen Zerfall des \bar{B} -Mesons oder des Λ_b -Baryons die Faktorisierung gültig bleibt. Dann kann der semi-inklusive Zerfall in einen strom-induzierten $\bar{B}, \Lambda_b \rightarrow X_c$ -Übergang und einen strom-induzierten Vakuum-Ein-Meson-Übergang faktorisiert werden. Benutzt man die Methode der Operatorprodukt-Entwicklung in der HQET, so kann man zeigen, daß die niedrigste Ordnung in der $1/m_b$ -Entwicklung mit dem partonischen $b \rightarrow c$ -Zerfall identisch ist. Das gilt für alle Ordnungen in der QCD-Störungstheorie. Die Diagramme, die zu dem partonischen b -Zerfall beitragen, sind bis einschließlich $\mathcal{O}(\alpha_s)$ in Abbildung 7.1 gezeigt. Nichtperturbative Korrekturen zur führenden Ordnung in der Entwicklung nach der schweren b -Masse im Rahmen der HQET sind von der Ordnung $1/m_b^2$.

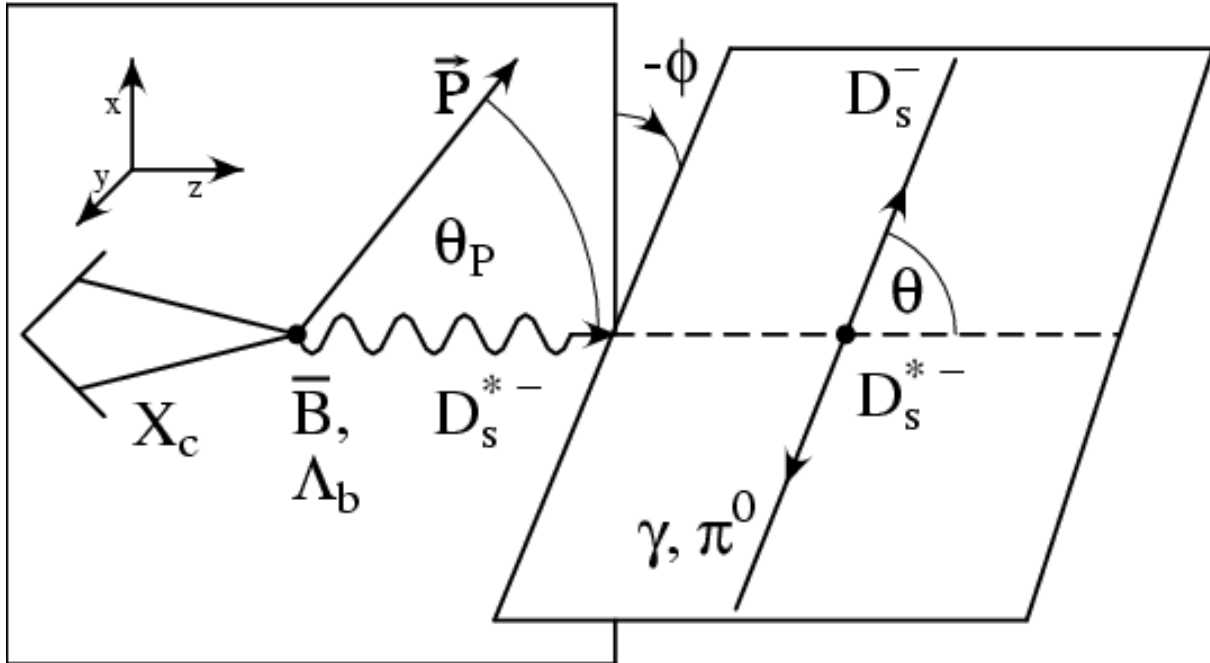


Abbildung 7.2: Definition der Polarwinkel θ_P und θ sowie des Azimutwinkels ϕ in den semi-inklusiven Zerfällen $\bar{B}, \Lambda_b^\uparrow \rightarrow X_c + D_s^{*-} (\rightarrow D_s^- + \gamma, \pi^0)$ eines \bar{B} -Mesons oder eines Λ_b -Baryons in ein D_s^{*-} -Meson, das weiter in ein D_s^- und ein Photon oder ein π^0 -Meson zerfällt. \vec{P} ist der Polarisationsvektor des Λ_b , das \bar{B} ist unpolarisiert. Der Polarwinkel θ ist definiert im Ruhesystem des D_s^{*-} relativ zur Richtung des räumlichen D_s^{*-} -Impulses im Ruhesystem des \bar{B} oder Λ_b .

Für den semi-inklusiven Zerfall des \bar{B} -Mesons ist es interessant, den longitudinalen und den transversalen Anteil des Spin-1-Mesons D_s^{*-} zu berechnen und mit experimentellen Ergebnissen zu vergleichen. Das Verhältnis der beiden Anteile wurde bereits in Bornscher Näherung berechnet [84]. Dieselben Autoren bestimmten darüberhinaus für den \bar{B} -Zerfall auch QCD-Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zu den Raten in ein D_s^- mit Spin 0 und ein D_s^{*-} mit Spin 1, ohne jedoch die longitudinale und transversale Spin-Komponente zu separieren [85]. Hier sollen deshalb sowohl analytische als auch numerische Resultate für beide Komponenten

des Spin-1-Anteils präsentiert werden. Es soll noch erwähnt werden, daß es auch nicht-faktorisierte Beiträge zu den $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Korrekturen gibt, wie für die Zerfälle $\bar{B} \rightarrow \pi\pi$ und $\bar{B} \rightarrow D^{(*)}$ explizit gezeigt worden ist [86, 87]. Diese Beiträge sind aber farb-unterdrückt und deshalb relativ klein, wie in [86] gezeigt wurde. Auch für die nichtperturbativen $1/m_b^2$ -Beiträge sollen die analytischen und numerischen Resultate zu den Raten des D_s mit Spin 0 und des D_s^* mit Spin 1 berechnet werden. Es gibt insgesamt drei Helizitäts-Raten S , U und L , welche zu den unterschiedlichen Spin-Anteilen beitragen. Erwartungsgemäß sind die QCD-Korrekturen und die nichtperturbativen Korrekturen in der Größenordnung von jeweils $\approx 10\%$ [84, 83] und $\approx 1\%$ [83].

Im Falle unpolarisierter Λ_b -Baryonen ist der semi-inklusive Zerfall des Λ_b dem \bar{B} -Zerfall sehr ähnlich. In der führenden Ordnung der $1/m_b$ -Entwicklung und in jeder Ordnung der perturbativen QCD-Korrekturen sind die beiden Prozesse sogar identisch. Wenn man aber die Polarisation des Λ_b berücksichtigt, gibt es zusätzlich vier neue polarisierte Strukturfunktionen, so daß man insgesamt sieben Helizitäts-Raten erhält, die die Winkelverteilung beim Λ_b -Zerfall beschreiben. Man kann somit beim semi-inklusive Zerfall eines polarisierten Λ_b -Baryons vier Strukturfunktionen mehr untersuchen als beim B -Meson-Zerfall. Polarisierte b -Quarks und damit auch polarisierte Λ_b -Baryonen treten in natürlicher Weise bei schwachen Zerfällen wie beispielsweise dem Z -Zerfall $Z^0 \rightarrow b\bar{b}$ oder dem Topquark-Zerfall $t \rightarrow W^+b$ auf. Wenn das polarisierte b -Quark in ein Λ_b -Baryon fragmentiert, behält es etwa 70% seiner Polarisation [73, 88]. Damit ist es möglich, die analytischen Ergebnisse der polarisierten Strukturfunktionen mit entsprechenden Experimenten zu vergleichen. In Experimenten an Beschleunigern entstehen Λ_b -Baryonen beispielsweise bei Proton-Antiproton-Kollisionen. Es wird erwartet, daß große Mengen an Λ_b -Baryonen bei den laufenden Experimenten am $p\bar{p}$ -Collider Tevatron 2 produziert werden. Die ersten Λ_b sind bereits durch die CDF-Kollaboration am Fermilab mit Hilfe verbesserter tracking-Kapazität des neuen Silikon-Vertex-Triggers nachgewiesen worden [89].

7.2 Winkelverteilungen der semi-inklusive Zerfälle

In der Faktorisierungs-Näherung werden die semi-inklusive Zerfälle eines B -Mesons oder eines polarisierten Λ_b -Baryons durch drei beziehungsweise sieben Strukturfunktionen beschrieben. Sie können durch eine Analyse der Winkelverteilungen des Zerfallsprozesses experimentell gemessen werden. Im Fall des Λ_b -Baryons gibt es noch zwei weitere paritäts-verletzende Strukturfunktionen, die aber nicht bestimmt werden können, weil die dominierenden Zerfälle des D_s^{*-} paritäts-erhaltend sind. Die Winkelverteilungen werden in den nachfolgenden Zerfällen $D_s^{*-} \rightarrow D_s^- + \gamma, \pi^0$ analysiert. Das Verzweigungsverhältnis beträgt $(94.2 \pm 2.5)\%$ für ein Photon und $(5.8 \pm 2.5)\%$ für ein π^0 -Meson im Endzustand [22]. Die verschiedenen Winkel sind in Abbildung 7.2 definiert.

Die Winkelverteilungen für den Zerfall eines \bar{B} -Mesons sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\frac{d\Gamma_{\bar{B} \rightarrow X_c + D_s^{*-} (\rightarrow D_s^- + \gamma)}}{d \cos \theta} = BR(D_s^{*-} \rightarrow D_s + \gamma) \times \left[\frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) \Gamma_U + \frac{3}{4} \sin^2 \theta \Gamma_L \right]$$

$$\frac{d\Gamma_{\bar{B} \rightarrow X_c + D_s^{*-} (\rightarrow D_s^- + \pi^0)}}{d \cos \theta} = BR(D_s^{*-} \rightarrow D_s + \pi^0) \times \left(\frac{3}{4} \sin^2 \theta \Gamma_U + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \Gamma_L \right). \quad (7.1)$$

Sie hängen nur vom Polarwinkel θ des D_s^- im Ruhesystem des D_s^{*-} ab, der die Richtung zum ursprünglichen Impuls des D_s^{*-} angibt. Um die Winkelverteilung experimentell bestimmen zu können, ist es notwendig, an Beschleunigern eine hohe Anzahl von \bar{B} -Mesonen zu erzeugen. In den letzten Jahren haben einige solcher B -Fabriken ihren Betrieb aufgenommen. Die beiden wichtigsten Experimente sind *BaBar* am SLAC bei Stanford in Kalifornien und *Belle* am KEK-Beschleuniger in der Nähe von Tokio. Bei beiden Beschleunigern werden die B - und \bar{B} -Mesonen durch Kollision von Elektronen und Positronen erzeugt. Bei dem Experiment *Belle* werden zum Beispiel etwa $10^6 B\bar{B}$ -Paare pro Tag produziert, wobei seit Betriebsbeginn des Beschleunigers bis zum Sommer 2004 insgesamt bereits etwa $2.75 \times 10^8 B\bar{B}$ -Paare erzeugt wurden [90]. Auch beim *BaBar*-Experiment wurden bisher etwa $2.27 \times 10^8 B\bar{B}$ -Paare produziert, so daß man in beiden Fällen mit einer Größenordnung von einigen $10^8 B$ -Meson-Paaren rechnen kann. Weil das erwartete Verzweungsverhältnis für den Zerfall eines B -Mesons in ein D_s^* in der Größenordnung von etwa 5% liegt, wird es nicht schwierig sein, eine ausreichend hohe Statistik zu erreichen, um die Winkelkoeffizienten experimentell bestimmen zu können.

In analoger Weise kann man die Winkelverteilungen für den Λ_b -Zerfall angeben. Sie lauten

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\Lambda_b^{\uparrow} \rightarrow X_c + D_s^{*-} (\rightarrow D_s^- + \gamma)}}{d \cos \theta_P d \cos \theta d\phi} &= \frac{1}{4\pi} BR(D_s^{*-} \rightarrow D_s + \gamma) \times \left[\frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) (\Gamma_U + \Gamma_{UP} P \cos \theta_P) \right. \\ &\quad + \frac{3}{4} \sin^2 \theta (\Gamma_L + \Gamma_{LP} P \cos \theta_P) \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{2}} \cos \phi \cos \theta \sin \theta \Gamma_{IP} P \sin \theta_P \right] \\ \frac{d\Gamma_{\Lambda_b^{\uparrow} \rightarrow X_c + D_s^{*-} (\rightarrow D_s^- + \pi^0)}}{d \cos \theta_P d \cos \theta d\phi} &= \frac{1}{4\pi} BR(D_s^{*-} \rightarrow D_s + \pi^0) \times \left[\frac{3}{4} \sin^2 \theta (\Gamma_U + \Gamma_{UP} P \cos \theta_P) \right. \\ &\quad + \frac{3}{2} \cos^2 \theta (\Gamma_L + \Gamma_{LP} P \cos \theta_P) \\ &\quad \left. - 3\sqrt{2} \cos \phi \cos \theta \sin \theta \Gamma_{IP} P \sin \theta_P \right]. \quad (7.2) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum \bar{B} -Zerfall hängen sie neben dem Polarwinkel auch vom Azimutwinkel ϕ und vom Winkel θ_P ab, der die Richtung des D_s^{*-} -Impulses relativ zum Polarisationsvektor des Λ_b angibt. Das liegt daran, daß das Λ_b -Baryon polarisiert ist, während das \bar{B} -Meson als Spin-0-Teilchen keine Polarisation besitzt.

Die Winkelverteilungen für die semi-inklusive Zerfälle eines \bar{B} -Mesons oder eines Λ_b -Baryons in ein D_s^- unterscheiden sich von denjenigen der Zerfälle in ein D_s^{*-} durch den

unterschiedlichen Spin des D_s . Weil das D_s im Gegensatz zum D_s^* Spin 0 besitzt, wird der analytische Ausdruck für die Winkelverteilung wesentlich einfacher, da die unterschiedlichen Spin-Kombinationen des Λ_b nach der Drehimpuls-Erhaltung durch den D_s -Spin festgelegt werden, der nur eine mögliche Einstellung, nämlich den Wert 0, hat. Die Helizität λ_{D_s} des D_s^- wird im folgenden mit S für *skalar* bezeichnet. Die Winkelverteilung für den \bar{B} -Zerfall in ein D_s hängt nicht mehr von den oben beschriebenen Winkeln ab und ist durch die Funktion Γ_S gegeben. Für den Zerfall eines polarisierten Λ_b benötigt man zusätzlich noch die polarisierte Funktion Γ_{S^P} , welche die Abhängigkeit vom Winkel θ_P beschreibt. Man erhält die beiden Winkelverteilungen für den \bar{B} -Zerfall

$$\Gamma_{\bar{B} \rightarrow X_c + D_s^-} = \Gamma_S \quad (7.3)$$

und für den Λ_b -Zerfall

$$\frac{d\Gamma_{\Lambda_b^{(\uparrow)} \rightarrow X_c + D_s^-}}{d \cos \theta_P} = \frac{1}{2} \left(\Gamma_S + \Gamma_{S^P} P \cos \theta_P \right). \quad (7.4)$$

Die erste ist wie erwähnt winkelunabhängig, und die zweite hängt nur vom Polarwinkel θ_P ab. Die Koeffizienten Γ_S und Γ_{S^P} beschreiben den polarisierten beziehungsweise den unpolarisierten Anteil der skalaren Helizität. Integriert man die Winkelverteilungen (7.2) über die Winkel θ und ϕ und addiert beide Beiträge, so ergibt sich ein ähnliches Resultat, das nur von θ_P abhängt. Es lautet

$$\frac{d\Gamma_{\Lambda_b^{(\uparrow)} \rightarrow X_c + D_s^{*-}}}{d \cos \theta_P} = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{U+L} + \Gamma_{U^P+L^P} P \cos \theta_P \right) \quad (7.5)$$

und enthält nur noch die unpolarisierte und die polarisierte totale Helizitätsrate Γ_{U+L} und $\Gamma_{U^P+L^P}$. Der longitudinale und transversale Anteil des D_s^{*-} -Spins kann am einfachsten bestimmt werden, indem man die $\cos \theta$ -Abhängigkeit der Winkelverteilung analysiert, nachdem man sie über die Winkel θ_P und ϕ integriert hat.

Die Winkel-Koeffizienten Γ_X für $X = U, U^P, L, L^P, S, S^P, I^P$, die in den analytischen Ausdrücken der Winkelverteilungen auftreten, können aus den Helizitäts-Strukturfunktionen H_X , die nach (4.67) Linearkombinationen der Helizitäts-Komponenten sind, bestimmt werden und sind definiert durch

$$\begin{aligned} \Gamma_X(\bar{B}, \Lambda_b \rightarrow X_c + D_s^-) &= \frac{G_F^2}{8\pi} |V_{bc} V_{cs}^*|^2 f_{D_s}^2 m_b^2 |\vec{p}_{D_s}| a_1^2 H_X \\ \Gamma_X(\bar{B}, \Lambda_b \rightarrow X_c + D_s^{*-}) &= \frac{G_F^2}{8\pi} |V_{bc} V_{cs}^*|^2 f_{D_s^*}^2 m_b^2 |\vec{p}_{D_s^*}| a_1^2 H_X. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Hier bezeichnen V_{bc} und V_{cs} die CKM-Matrixelemente der entsprechenden Quark-Übergänge. Die pseudoskalare und die Vektormeson-Kopplungskonstante f_{D_s} und $f_{D_s^*}$ sind definiert durch

$$\langle D_s^- | A^\mu | 0 \rangle = i f_{D_s} p_{D_s}^\mu, \quad \langle D_s^{*-} | V^\mu | 0 \rangle = f_{D_s^*} m_{D_s^*} \epsilon^{*\mu}, \quad (7.7)$$

wobei p_{D_s} und $p_{D_s^*}$ die Viererimpulse des D_s - und des D_s^* -Mesons bezeichnen. Der Parameter a_1 hängt mit den Wilson-Koeffizienten der renormierten Strom-Strom-Wechselwirkung zusammen und kann aus einem kombinierten Fit verschiedener Zerfallsmoden erhalten werden [85]. Sein Wert beträgt $|a_1| = 1.00 \pm 0.06$. Integriert man die Winkelverteilungen (7.2) und (7.4) über die Winkel $\cos\theta_P$ und ϕ , welche die Orientierung des Polarisationsvektors des Λ_b -Baryons beschreiben, so erhält man den Fall $P = 0$ eines unpolarisierten Λ_b , dessen Rate nur durch die drei Strukturfunktionen H_U , H_L und H_S beschrieben wird. In dieser Form sind die Winkelverteilungen für den Zerfall $\Lambda_b \rightarrow X_c + (D_s^-, D_s^{*-})$ analog zu denen des Zerfalls $\bar{B} \rightarrow X_c + (D_s^-, D_s^{*-})$.

7.3 Analytische Resultate

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß die Zerfälle $\bar{B}, \Lambda_b^\dagger \rightarrow X_c + (D_s^-, D_s^{*-})$ eines unpolarisierten \bar{B} -Mesons oder eines polarisierten Λ_b -Baryons insgesamt durch sieben Helizitäts-Strukturfunktionen H_X mit $X = U, U^P, L, L^P, S, S^P, I^P$ beschrieben werden. Sie setzen sich aus zwei unterschiedlichen Beiträgen zusammen. Zum einen benötigt man die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen zum Zerfall $b^\dagger \rightarrow c + (D_s^-, D_s^{*-})$ eines polarisierten b -Quarks, deren Resultate in (5.109) und (5.110) angegeben sind. Weil das virtuelle W -Boson in ein Quark-Antiquark-Paar zerfällt, welches das D_s^- - oder das D_s^{*-} -Meson bildet, ersetzt man den Viererimpuls q des W -Bosons durch den D_s^- - beziehungsweise den D_s^{*-} -Impuls p_{D_s} oder $p_{D_s^*}$. Damit gilt

$$x^2 = q^2/m_b^2 = p_{D_s^*}^2/m_b^2 = m_{D_s^*}^2/m_b^2.$$

Der zweite Anteil der Strukturfunktionen setzt sich aus den nichtperturbativen Beiträgen zusammen. Sie enthalten den Born-Term und Korrekturen der Ordnung $1/m_b^2$, die durch die Konstanten ϵ_b , K_b und G_b parametrisiert sind. Ihre analytischen Resultate sind in (6.35) und (6.38) angegeben. Um alle Korrekturen für die betrachteten hadronischen Zerfälle zu berücksichtigen, summiert man die beiden Anteile auf, um die korrigierten Resultate zu erhalten. Es ist vorteilhaft, die Ergebnisse in einer Form anzugeben, in der die Bornschen Raten ausfaktorisiert sind, weil man dann die relativen Größen der einzelnen Korrekturen ablesen kann.

Bezeichnet man die durch die zugehörigen Bornschen Raten dividierten Raten mit $\hat{\Gamma}_X$, so kann man die analytischen Resultate in der Form

$$\hat{\Gamma}_X = \frac{\Gamma_X}{\Gamma_X^{(Born)}} = 1 + \frac{\alpha_s}{3\pi} \tilde{\Gamma}_X + a_X^\epsilon \epsilon_b + a_X^K K_b + a_X^G G_b \quad (7.8)$$

angeben. Der Beitrag $\tilde{\Gamma}_X$ beschreibt die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$, ϵ_b parametrisiert den spin-abhängigen Anteil des schweren b -Quarks im betrachteten zerfallenden Hadron, und K_b und G_b bezeichnen jeweils die Erwartungswerte der kinetischen Energie und der chromomagnetischen Wechselwirkung des schweren b -Quarks. Die ersten

beiden Terme in (7.8) ergeben sich aus den inklusiven Raten (5.110) und den entsprechenden Bornschen Raten (5.20) durch die Relation

$$1 + \frac{\alpha_s}{3\pi} \tilde{\Gamma}_X = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{T_X}{B_X}. \quad (7.9)$$

Auf entsprechende Weise kann man die drei weiteren Terme aus den nichtperturbativen Beiträgen (6.35) und den Bornschen Raten (5.20) erhalten, indem man die Identität

$$1 + a_X^\epsilon \epsilon_b + a_X^K K_b + a_X^G G_b = \frac{8}{\sqrt{\lambda}} \frac{I_X}{B_X} \quad (7.10)$$

verwendet. Hier taucht der Anteil der Bornschen Rate, der durch den Term 1 gegeben ist, ein weiteres Mal auf. Bei der Summation aller Beiträge in (7.8) darf er natürlich nur einmal gezählt werden. Die analytischen Resultate für die QCD-Korrekturen der unterschiedlichen Helizitäten $X = U, U^P, L, L^P, U+L, U^P+L^P, S, S^P, I^P$ in (7.9) können in folgender Weise zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_U &= \mathcal{A} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{1-x^2+y^2} \left\{ -4(7+x^2-y^2) \mathcal{N}_1 \right. \\ &\quad - \frac{2}{x} \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \left[(1-x)(5+x) + y^2 \right] \mathcal{N}_2 \\ &\quad - \frac{2}{x} \left[(1+x)^2 - y^2 \right] \left[(1+x)(5-x) + y^2 \right] \mathcal{N}_3 \\ &\quad - \frac{2}{x^2} (1-x^2+y^2) (1-2x^2-y^2) \sqrt{\lambda} \ln(y) + 8(1-x^2+y^2) \sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\ &\quad + \frac{1}{x^2} \left[(1-x^2)^2 (1-6x^2) \right. \\ &\quad \quad \left. - (1+4x^2-3x^4)y^2 - (1+2x^2)y^4 + y^6 \right] \ln(w_1) \\ &\quad \left. + 4 \left[7+3x^2 - (4-5x^2)y^2 - 3y^4 \right] \ln(\eta) - \sqrt{\lambda} (19+x^2-5y^2) \right\} \\ \tilde{\Gamma}_{U^P} &= \mathcal{A} + \frac{1}{\lambda} \left\{ 4 \left[11+3x^2+x^4 - 2(3+x^2)y^2 + y^4 \right] \mathcal{N}_0 + 4\sqrt{\lambda} (1-x^2+y^2) \mathcal{N}_4 \right. \\ &\quad - \frac{2}{x^2} (1-2x^2-y^2) \lambda \ln(y) + 8\lambda \ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} \left[7+21x^2+2x^4 - (8+3x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(w_1) \\ &\quad + 8\lambda \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\ &\quad \left. + \frac{4}{x^2} \left[(1-x^2)(3+14x^2-2x^4) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (6 - 7x^2 - x^4)y^2 + (3 - x^2)y^4 \Big] \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) \\
& + \frac{1}{x} \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \left[12 - 55x + 6x^2 - x^3 - 3(4+x)y^2 \right] \Big\} \\
\tilde{\Gamma}_L = & \mathcal{A} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\lambda + x^2(1-x^2+y^2) \right]^{-1} \left\{ 8x^2(7+x^2-y^2)\mathcal{N}_1 \right. \\
& + 4x \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \left[(1-x)(5+x) + y^2 \right] \mathcal{N}_2 \\
& + 4x \left[(1+x)^2 - y^2 \right] \left[(1+x)(5-x) + y^2 \right] \mathcal{N}_3 \\
& + 2 \left[1 - x^2 - (4+3x^2)y^2 + 3y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln(y) \\
& + 8 \left[1 - x^2 - (2+x^2)y^2 + y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln \left(\frac{xy}{\lambda} \right) \\
& - \left[5(1-x^2)^2 - (3+20x^2-x^4)y^2 + (9-2x^2)y^4 + y^6 \right] \ln(w_1) \\
& + 8(1+x^2-y^2) \left[1 - 7x^2 - (2+x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(\eta) \\
& \left. + \sqrt{\lambda} \left[5 + 47x^2 - 4x^4 - (22+x^2)y^2 + 5y^4 \right] \right\} \\
\tilde{\Gamma}_{LP} = & \mathcal{A} + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1-y^2} \\
& \times \left\{ 4 \left[2 + 22x^2 + 11x^4 - (5+12x^2+x^4)y^2 + 2(2+x^2)y^4 - y^6 \right] \mathcal{N}_0 \right. \\
& + 4(1-y^2) \sqrt{\lambda} (1-x^2+y^2) \mathcal{N}_4 \\
& + 2(1-3y^2) \lambda \ln(y) + 8(1-y^2) \lambda \ln \left(\frac{xy}{\lambda} \right) \\
& + \sqrt{\lambda} \left[17 + 53x^2 - (18+x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(w_1) \\
& + 8\lambda(1-y^2) \ln \left[\frac{(1+x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + 4 \left[(1-x^2)(11+24x^2) - (13-15x^2)y^2 + 2y^4 \right] \ln \left(\frac{1-x}{y} \right) \\
& - \left[(1-x)^2 - y^2 \right] \\
& \left. \times \left[15 - 22x + 105x^2 - 24x^3 + 4x^4 - (12 - 22x + x^2)y^2 - 3y^4 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{U+L} &= \mathcal{A} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\lambda + 3x^2(1-x^2+y^2) \right]^{-1} \\
&\times \left\{ -2 \left[(1-x^2)(1-4x^2) + (4+x^2)y^2 - 5y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln(y) \right. \\
&+ 8 \left[(1-x^2)(1+2x^2) - (2-x^2)y^2 + y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\
&- \left[3(1-x^2)^2(1+4x^2) \right. \\
&\quad \left. - (1+12x^2+5x^4)y^2 + (11+2x^2)y^4 - y^6 \right] \ln(w_1) \\
&+ 8(1-y^2) \left[1+x^2-4x^4 - (2-x^2)y^2 + y^4 \right] \ln(\eta) \\
&\left. + \sqrt{\lambda} \left[5+9x^2-6x^4 - (22-9x^2)y^2 + 5y^4 \right] \right\} \\
\tilde{\Gamma}_{U^P+L^P} &= \mathcal{A} + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1-2x^2-y^2} \left\{ 4 \left[2+5x^4-2x^6 - (5-3x^4)y^2 + 4y^4 - y^6 \right] \mathcal{N}_0 \right. \\
&+ 4\sqrt{\lambda} (1-x^2+y^2) (1-2x^2-y^2) \mathcal{N}_4 \\
&+ 2\lambda (3-4x^2-5y^2) \ln(y) + 8\lambda (1-2x^2-y^2) \ln\left(\frac{xy}{\lambda}\right) \\
&+ (3-x^2+y^2) (1+4x^2-y^2) \sqrt{\lambda} \ln(w_1) \\
&+ 8\lambda (1-2x^2-y^2) \ln\left[\frac{(1+x)^2-y^2}{x}\right] \\
&+ 4 \left[(1-x^2) (5-4x^2+4x^4) \right. \\
&\quad \left. - (1-x^2+2x^4)y^2 - 2(2-x^2)y^4 \right] \ln\left(\frac{1-x}{y}\right) \\
&- [(1-x)^2-y^2] \\
&\quad \left. \times \left[15+2x-5x^2-12x^3+2x^4 - (12+2x+7x^2)y^2 - 3y^4 \right] \right\} \\
\tilde{\Gamma}_S &= \mathcal{A} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\lambda + x^2(1-x^2+y^2) \right]^{-1} \\
&\times \left\{ \frac{2}{x^2} \left[(1-x^2)(2-x^2) - (6+4x^2+5x^4)y^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (6+7x^2)y^4 - 2y^6 \right] \sqrt{\lambda} \ln(y) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 \left[1 - x^2 - (2 + x^2) y^2 + y^4 \right] \sqrt{\lambda} \ln \left(\frac{x y}{\lambda} \right) \\
& - \frac{1}{x^2} \left[(1 - x^2)^2 (2 + 3 x^2) - (8 - 3 x^2 + 4 x^4 - 3 x^6) y^2 \right. \\
& \quad \left. + 3 (4 + 5 x^2) y^4 - (8 + 5 x^2) y^6 + 2 y^8 \right] \ln(w_1) \\
& + 8 (1 - y^2) \left[1 - x^2 - (2 + x^2) y^2 + y^4 \right] \ln(\eta) \\
& + 3 \sqrt{\lambda} \left[3 (1 - x^2) - (10 + 3 x^2) y^2 + 3 y^4 \right] \left. \right\} \\
\tilde{\Gamma}_{SP} = & \mathcal{A} + \frac{1}{\lambda} \left\{ 4 \left[2 + x^4 - (3 + 2 x^2) y^2 + y^4 \right] \mathcal{N}_0 + 4 \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \right. \\
& + \frac{2}{x^2} \frac{1}{1 - y^2} \left[2 - x^2 - (4 + 5 x^2) y^2 + 2 y^4 \right] \lambda \ln(y) + 8 \lambda \ln \left(\frac{x y}{\lambda} \right) \\
& - \frac{\sqrt{\lambda}}{x^2} \left[2 - 9 x^2 + x^4 - (4 + 3 x^2) y^2 + 2 y^4 \right] \ln(w_1) + 8 \lambda \ln \left[\frac{(1 + x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + 4 \left[(1 - x^2) (5 - 2 x^2) + 2 (2 - x^2) y^2 \right] \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right) \\
& \left. - \left[(1 - x)^2 - y^2 \right] (11 - 6 x - 7 x^2 + 7 y^2) \right\} \\
\tilde{\Gamma}_{IP} = & \mathcal{A} + \frac{1}{\lambda} \left\{ 2 \left[7 + 15 x^2 + 4 x^4 - (11 + 8 x^2) y^2 + 4 y^4 \right] \mathcal{N}_0 \right. \\
& + 4 \sqrt{\lambda} (1 - x^2 + y^2) \mathcal{N}_4 \\
& - \frac{1}{x^2} (1 - 3 x^2 - y^2) \lambda \ln(y) + 8 \lambda \ln \left(\frac{x y}{\lambda} \right) \\
& + \frac{\sqrt{\lambda}}{2 x^2} \left[1 + 30 x^2 + 21 x^4 - 2 (1 + 11 x^2) y^2 + y^4 \right] \ln(w_1) \\
& + 8 \lambda \ln \left[\frac{(1 + x)^2 - y^2}{x} \right] \\
& + 2 \left[(1 - x^2) (21 + 5 x^2) - (11 - 15 x^2) y^2 - 4 y^4 \right] \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right) \\
& \left. - 2 \left[(1 - x)^2 - y^2 \right] (12 - 7 x + 12 x^2 - 9 y^2) \right\}. \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Die QCD-Beiträge $\tilde{\Gamma}_X$ und die zugehörige Bornsche Näherung können sowohl für die semi-inklusiven Zerfälle des \bar{B} -Mesons als auch für den Zerfall des Λ_b -Baryons verwendet werden, weil beide Prozesse in niedrigster Ordnung der Operatorprodukt-Entwicklung in der HQET durch den Zerfall des b -Quarks beschrieben werden. In den nichtperturbativen Korrekturen unterscheiden sich beide Prozesse in einigen Punkten. Zunächst hängen die Beiträge für den \bar{B} -Zerfall vom Erwartungswert der chromomagnetischen Wechselwirkung G_b ab, während für den Λ_b -Zerfall $G_b = 0$ gilt. Umgekehrt enthalten die Helizitäten für den Λ_b -Zerfall den Parameter ϵ_b , der die Abhängigkeit der Beiträge vom Spin des Λ_b beschreibt. Weil das \bar{B} -Meson Spin 0 besitzt, gibt es für dessen Zerfallsprozess hingegen keine spinabhängigen Beiträge. Die analytischen Resultate (7.10) für den Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_c + (D_s^-, D_s^{*-})$ sind somit durch die Ausdrücke a_X^K und a_X^G gegeben. Für die drei Helizitäten $X = U, L, S$ und die Summe $X = U + L$ erhält man

$$\begin{aligned}
a_U^K &= -1 + \frac{8}{3} \frac{1}{1 - x^2 + y^2} & (7.12) \\
a_U^G &= \frac{4}{3\lambda} \frac{1}{1 - x^2 + y^2} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\lambda}{4} [15(x^2 - y^2) - 11] + x^2(3x^2 - 3y^2 - 7) - 4y^2 + 4 \right\} \\
a_L^K &= -1 - \frac{16x^2}{3} [\lambda + x^2(1 - x^2 + y^2)]^{-1} \\
a_L^G &= \frac{4}{3\lambda} [\lambda + x^2(1 - x^2 + y^2)]^{-1} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\lambda}{4} [15(-\lambda + x^4 - x^2y^2) - 59x^2 - 12y^2 + 12] \right. \\
&\quad \left. + x^2 [x^2(3(x^2 - y^2) - 7) - 4y^2 + 4] \right\} \\
a_{U+L}^K &= -1 \\
a_{U+L}^G &= [\lambda + 3x^2(1 - x^2 + y^2)]^{-1} \\
&\quad \times \left\{ \frac{4x^2}{\lambda} [(1 - x^2)(4 - 3x^2) - (4 + 3x^2)y^2] \right. \\
&\quad \left. - [1 + 17x^2 - 10x^4 - (6 - 5x^2)y^2 + 5y^4] \right\} \\
a_S^K &= -1 \\
a_S^G &= \frac{4}{\lambda} [\lambda + x^2(1 - x^2 + y^2)]^{-1}
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{4} \lambda \left[-5 (\lambda - x^4 + x^2 y^2) - 9x^2 - 4y^2 + 4 \right] - x^4 (1 - x^2 + y^2) \right\}.$$

Für den Zerfall $\Lambda_b^\dagger \rightarrow X_c + (D_s^-, D_s^{*-})$ eines polarisierten Λ_b -Mesons sind die analytischen Resultate (7.10) durch die Ausdrücke a_X^ϵ und a_X^K gegeben, während $a_X^G = 0$ ist. Für die sieben Helizitäten $X = U, U^P, L, L^P, S, S^P, I^P$ und die Summen $X = U+L, U^P+L^P$ erhält man

$$\begin{aligned} a_U^\epsilon &= 0, & a_U^K &= -1 + \frac{8}{3} \frac{1}{1-x^2+y^2} \\ a_{U^P}^\epsilon &= 1, & a_{U^P}^K &= -\left(1 + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\lambda}\right) \\ a_L^\epsilon &= 0, & a_L^K &= -1 - \frac{16x^2}{3} \left[\lambda + x^2(1-x^2+y^2)\right]^{-1} \\ a_{L^P}^\epsilon &= 1, & a_{L^P}^K &= -\left(1 + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\lambda}\right) \\ a_{U+L}^\epsilon &= 0, & a_{U+L}^K &= -1 \\ a_{U^P+L^P}^\epsilon &= 1, & a_{U^P+L^P}^K &= -\left(1 + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\lambda}\right) \\ a_S^\epsilon &= 0, & a_S^K &= -1 \\ a_{S^P}^\epsilon &= 1, & a_{S^P}^K &= -\left(1 + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\lambda}\right) \\ a_{I^P}^\epsilon &= 1, & a_{I^P}^K &= \frac{2}{3} \left(1 - 4 \frac{x^2}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Die Resultate stimmen mit denen in [83] überein. Die Beiträge zur Polarisation des Λ_b -Baryons entsprechen den Bornschen Raten und sind daher für die polarisierten Helizitäten auf 1 normiert, während sie für die unpolarisierten Helizitäten verschwinden. Man erkennt auch, daß die Beiträge der kinetischen Energie für die polarisierten Helizitäten $X = U^P, L^P, U^P + L^P, S^P$ identisch sind. Das gleiche gilt für die unpolarisierten Helizitäten $X = U + L, S$.

Alle in diesem Abschnitt diskutierten Beiträge hängen von der Variablen x ab, die durch das mit der b -Masse skalierte Viererimpulsquadrat des W -Bosons $x^2 = q^2/m_b^2$ gegeben ist. Bei den betrachteten hadronischen Zerfällen eines \bar{B} -Mesons oder eines Λ_b -Baryons in ein D_s - oder ein D_s^* -Meson geht der gesamte W -Impuls auf das Meson über, so daß man hier q^2 durch das Quadrat der entsprechenden Mesonmasse ersetzen muß. Wie man aus den Relationen (7.1) für den Zerfall des \bar{B} und (7.2) für den Zerfall des Λ_b erkennen kann, hängen die Winkelverteilungen für diese Zerfälle mit einem D_s^* -Meson als Endzustand von

den unpolarisierten Helizitäts-Raten Γ_U und Γ_L sowie von den polarisierten Raten Γ_{U^P} , Γ_{L^P} und Γ_{I^P} ab. Die Winkelverteilungen (7.3) für die Zerfälle der \bar{B} -Mesonen und (7.4) für die Zerfälle der Λ_b -Baryonen in ein D_s -Meson hängen hingegen nur von der unpolarisierten und der polarisierten Helizitätsrate Γ_S und Γ_{S^P} ab. Aus diesem Grunde gilt für die Helizitäts-Raten Γ_X mit $X = U, U^P, L, L^P, I^P$ die Beziehung $x = m_{D_s^*}/m_b$, während für die Raten Γ_X mit $X = S, S^P$ die Relation $x = m_{D_s}/m_b$ gilt. Diese Werte für die Variable x werden im folgenden Abschnitt bei der Berechnung der numerischen Resultate benötigt.

7.4 Numerische Resultate

Zum Abschluß wollen wir noch die numerischen Resultate, die sich aus den analytischen Ergebnissen in Abschnitt (7.3) ergeben, diskutieren. Für die numerische Auswertung benutzen wir den Wert $K_b = 0.013$ für die kinetische Energie des schweren b -Quarks innerhalb des \bar{B} -Mesons oder des Λ_b -Baryons [71]. Eine Abschätzung des spin-abhängigen Parameters ϵ_b wurde in [91] gegeben mit dem Resultat $\epsilon_b = -2/3 K_b$, basierend auf der Annahme, daß die Beiträge von Termen, die aus dem zweifachen Einsetzen des chromomagnetischen Operators stammen, vernachlässigt werden können. Eine Analyse mit Hilfe der Summenregel für den Fall verschwindenden Rückstoßes führt zu der Bedingung $\epsilon_b \leq -2/3 K_b$ [92], so daß man insgesamt die Bedingung $\epsilon_b = -2/3 K_b$ aus [91] erhält. Wir werden diesen Wert für die numerische Analyse verwenden, obwohl der numerische Wert für ϵ_b in einigen realistischeren Rechnungen noch etwas reduziert sein kann.

Die Werte für die Quarkmassen wurden bereits in Abschnitt (3.6) angegeben und betragen $m_b = 4.85 \text{ GeV}$ und $m_c = 1.45 \text{ GeV}$. Der numerische Wert der starken Kopplungskonstanten ist $\alpha_s(m_b) = 0.219$. Nach obigen Ausführungen ergeben sich die Werte für die Parameter der kinetischen Energie des b -Quarks sowie für den spin-abhängigen Anteil zu $\epsilon_b = -0.00867$ und $K_b = 0.013$. Der Parameter für die chromomagnetische Wechselwirkung beträgt $G_b = -0.0065$ [71]. Neben den erwähnten Massen, Konstanten und Parametern hängen die analytischen Resultate auch vom skalierten Quadrat des Viererimpulses des W -Bosons $x^2 = q^2/m_b^2$ ab. Wie am Ende des letzten Abschnittes dargelegt wurde, ist für die Helizitäten $X = U, U^P, L, L^P, I^P$ die Beziehung $x = m_{D_s^*}/m_b$ zu verwenden. Für die Helizitäten $X = S, S^P$ gilt dagegen die Relation $x = m_{D_s}/m_b$. Die Massen der D_s - und D_s^* -Mesonen sind in [22] aufgelistet und betragen $m_{D_s} = 1968.5 \text{ MeV}$ und $m_{D_s^*} = 2112.4 \text{ MeV}$.

Nachfolgend sollen die einzelnen Beiträge aus (7.8) für die hadronischen Zerfälle des \bar{B} -Mesons und des Λ_b -Baryons in ein D_s - oder ein D_s^* -Meson numerisch ausgewertet werden. Wir beginnen mit der Angabe der numerischen Werte für den \bar{B} -Zerfall. Die auf den Born-Term normierten Raten enthalten drei Korrekturterme, welche durch die QCD-Strahlungskorrekturen (7.11) zum b -Zerfall sowie durch die nichtperturbativen HQET-Korrekturen zur kinetischen Energie und zur chromomagnetischen Wechselwirkung des schweren b -Quarks (7.12) gegeben sind. Mit (7.8) erhält man für den \bar{B} -Zerfall

$$\hat{\Gamma}_X(\bar{B} \rightarrow X_c + D_s, D_s^*) = 1 + \frac{\alpha_s}{3\pi} \tilde{\Gamma}_X + K_b a_X^K + G_b a_X^G, \quad (7.14)$$

wobei $X = U, L, U + L, S$ ist. Die entsprechenden numerischen Werte für den Zerfall

$\bar{B} \rightarrow X_c + D_s^-$ in ein D_s sind in der gleichen Reihenfolge gegeben durch

$$\hat{\Gamma}_S = 1 - 0.1055 - 0.0130 + 0.0047, \quad (7.15)$$

und für den Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_c + D_s^{*-}$ in ein D_s^* ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_U &= 1 - 0.1182 + 0.0255 - 0.0277 \\ \hat{\Gamma}_L &= 1 - 0.1208 - 0.0341 + 0.0097 \\ \hat{\Gamma}_{U+L} &= 1 - 0.1199 - 0.0130 - 0.0036. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Die Strahlungskorrekturen reduzieren die Bornschen Raten für die unterschiedlichen Helizitäten relativ einheitlich um etwas mehr als 10%. Die nichtperturbativen Korrekturen zur kinetischen Energie bewegen sich zwischen 2.6% für $\hat{\Gamma}_U$ und -3.4% für $\hat{\Gamma}_L$, ohne ein einheitliches Verhalten zu zeigen. Die chromomagnetischen Korrekturen betragen zwischen -2.8% für $\hat{\Gamma}_U$ und 0.97% für $\hat{\Gamma}_L$.

Die numerischen Werte für die normierten Raten des Λ_b -Zerfalls enthalten ebenfalls drei Korrekturterme, die durch die QCD-Strahlungskorrekturen sowie die nichtperturbativen Korrekturen zur Λ_b -Polarisation und zur kinetischen Energie des b -Quarks gegeben sind. Für den Λ_b -Zerfall erhält man mit (7.8)

$$\hat{\Gamma}_X(\Lambda_b^\uparrow \rightarrow X_c + D_s, D_s^*) = 1 + \frac{\alpha_s}{3\pi} \tilde{\Gamma}_X + K_b a_X^K + \epsilon_b a_X^\epsilon, \quad (7.17)$$

wobei $X = U, U^P, L, L^P, U+L, U^P+L^P, S, S^P, I^P$ ist. Die zugehörigen numerischen Werte für den Zerfall $\Lambda_b^\uparrow \rightarrow X_c + D_s^-$ sind in der gleichen Reihenfolge gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_S &= 1 - 0.1055 - 0.0130 + 0 \\ \hat{\Gamma}_{S^P} &= 1 - 0.1124 - 0.0245 - 0.0087, \end{aligned} \quad (7.18)$$

und für den Zerfall $\Lambda_b^\uparrow \rightarrow X_c + D_s^{*-}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_U &= 1 - 0.1182 + 0.0255 + 0 \\ \hat{\Gamma}_{U^P} &= 1 - 0.0674 - 0.0276 - 0.0087 \\ \hat{\Gamma}_L &= 1 - 0.1208 - 0.0341 + 0 \\ \hat{\Gamma}_{L^P} &= 1 - 0.1142 - 0.0276 - 0.0087 \\ \hat{\Gamma}_{U+L} &= 1 - 0.1199 - 0.0130 + 0 \\ \hat{\Gamma}_{U^P+L^P} &= 1 - 0.1476 - 0.0276 - 0.0087 \\ \hat{\Gamma}_{I^P} &= 1 - 0.0959 - 0.0059 - 0.0087. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Betrachtet man die Strahlungskorrekturen, so erkennt man, daß sie nicht so einheitlich sind wie beim \bar{B} -Zerfall. Sie betragen 6.7% für die Rate $\hat{\Gamma}_{U^P}$ und erreichen 14.8% für $\hat{\Gamma}_{U^P+L^P}$.

Alle Beiträge der Strahlungskorrekturen reduzieren die Bornschen Raten und besitzen somit ein negatives Vorzeichen. Für die unpolarisierten Raten sind sie identisch mit denen des \bar{B} -Zerfalls. Die nichtperturbativen Korrekturen für die kinetische Energie bewegen sich wie beim Zerfall des \bar{B} -Mesons zwischen 2.6% für $\hat{\Gamma}_U$ und -3.4% für $\hat{\Gamma}_L$. Bis auf $\hat{\Gamma}_U$ sind alle Korrekturen der kinetischen Energie negativ. Da die Korrekturen des spinabhängigen Anteils proportional zur Bornschen Rate sind, haben sie für alle polarisierten Helizitäten denselben Wert von -0.87% und verschwinden für alle unpolarisierten Helizitäten.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir die QCD-Strahlungskorrekturen sowie nichtperturbative Korrekturen aus der HQET zu Polarisationsobservablen für die semileptonischen Zerfälle des b -Quarks in ein c -Quark und ein Leptonpaar diskutiert. Anschließend wurden die berechneten Resultate auf hadronische Zerfälle von Λ_b -Baryonen und \bar{B} -Mesonen angewandt. Der ausführlichste Teil beschäftigte sich mit der Berechnung der Strahlungskorrekturen, während die nichtperturbativen Korrekturen nach [71] noch einmal berechnet und dabei einige dort gefundene Fehler korrigiert wurden. Neben der Berechnung der Zerfallsrate $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$ für polarisierte c -Quarks, bei der über den gesamten Phasenraum der Leptonen integriert wurde, beschäftigte sich der Großteil dieser Arbeit hauptsächlich mit der Berechnung der Helizitäts-Raten, wobei der Lepton-Phasenraum nicht ausintegriert wurde, und die Winkelvariablen zur Analyse der Polarisationsobservablen verwendet wurden. Als direkte Anwendung der berechneten Resultate für die QCD- und die HQET-Korrekturen dienten im letzten Kapitel die erwähnten hadronischen Prozesse.

Weil alle hier präsentierten Berechnungen im Rahmen des Standardmodells der Elementarteilchen durchgeführt wurden, ist am Anfang in Kapitel 2 zunächst eine kurze Zusammenfassung des Standardmodells gegeben worden mit dem Ziel, dessen Lagrange-Dichte anzugeben. Diese Zusammenfassung enthielt eine Übersicht über die im Standardmodell vorkommenden elementaren Teilchen sowie deren Wechselwirkungen untereinander. Anschließend wurden die zugrunde liegenden Eichtheorien behandelt, die im Standardmodell eine wichtige Rolle spielen. Schließlich wurde der Higgs-Mechanismus diskutiert, mit dessen Hilfe die Eichbosonen und auch die Fermionen ihre Masse erhalten.

In Kapitel 3 wurden die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen zu dem semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c + l^- + \bar{\nu}_l$ berechnet. Dabei wurde der Spin des c -Quarks berücksichtigt, während über den Spin des b -Quarks und der Leptonen gemittelt beziehungsweise summiert wurde. Weil im Endzustand nur Elektronen oder Myonen betrachtet wurden, konnten alle Leptonmassen in guter Näherung vernachlässigt werden, wodurch der Aufwand bei den erforderlichen Berechnungen reduziert werden konnte. Die Masse des c -Quarks hat dieselbe Größenordnung wie die b -Masse und kann daher nicht vernachlässigt werden. Als Resultat wurde die differentielle Rate nach der mit der b -Masse skalierten Energie des c -Quarks in analytischer Form angegeben. Sie setzt sich aus zwei Spektrum-Funktionen zusammen,

welche den unpolarisierten und den polarisierten Anteil für das c -Quark beschreiben. Wir haben zu diesen Spektrum-Funktionen neben der Bornschen Näherung auch die QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung der starken Kopplungskonstanten α_s berechnet, die sich aus den Einschleifen-Korrekturen und den Bremsstrahlungs-Beiträgen zusammensetzen. Die Strahlungskorrekturen hängen von der mit der b -Masse skalierten Masse des c -Quarks y ab und werden durch die logarithmischen Terme $\ln(y)$ dominiert. Die Korrekturen vermindern die Bornschen Spektrum-Funktionen betragsmäßig für alle Werte der skalierten c -Energie x und divergieren an der oberen Grenze $x = x_{max}$. An der unteren Grenze verschwinden beide Spektrum-Funktionen, und an der oberen Grenze sind sie entgegengesetzt gleich, wenn man die Singularität durch einen Parameter ϵ regularisiert. Das singuläre Verhalten an der oberen Grenze ist eine Eigenschaft der Störungstheorie endlicher Ordnung. Durch Aufsummieren aller Ordnungen kann man zeigen, daß diese Singularitäten verschwinden, und die Spektrum-Funktionen gehen auch an der oberen Grenze gegen null.

Wir haben die analytischen Resultate für die Spektrum-Funktionen mit den Ergebnissen des Myon-Zerfalls [41] verglichen, da beide Prozesse dieselbe analytische Struktur besitzen. Es wurde für beide Spektrum-Funktionen Übereinstimmung festgestellt. Es wurde auch der Grenzfall $y \rightarrow 0$ verschwindender c -Masse betrachtet, um ihn mit bereits bekannten Resultaten des Myon-Zerfalls bei vernachlässigter Elektronmasse [42] vergleichen zu können. Auch für diese Resultate wurde bei den beiden Spektrum-Funktionen Übereinstimmung festgestellt. Der wichtigste Unterschied in den numerischen Auswertungen zwischen dem Myon-Zerfall und dem b -Zerfall ist die unterschiedliche Größenordnung von y , das beim Myonzerfall durch $m_e/m_\mu = 0.005$ und beim Zerfall des b -Quarks durch $m_c/m_b = 0.3$ gegeben ist. Außerdem ist die starke Kopplungskonstante α_s bei Energien, die äquivalent zu der Masse des b -Quarks sind, etwa 30 mal so groß wie die Feinstrukturkonstante α , wodurch die Beträge der QCD-Strahlungskorrekturen deutlich über denen in der QED liegen.

Neben der differentiellen Rate wurde auch die longitudinale Polarisation des c -Quarks diskutiert. Sie ist durch den Quotienten aus der polarisierten und der unpolarisierten differentiellen Rate gegeben. Die bei den Raten auftretenden Singularitäten an der oberen Grenze des Spektrums heben sich bei der Quotientenbildung gegenseitig auf, und die longitudinale Polarisation bleibt in allen Bereichen von x endlich. Sie fällt von 0 bei $x = x_{min}$ auf den Wert -1 bei $x = x_{max}$. Die Strahlungskorrekturen vermindern die Bornsche Näherung im gesamten x -Bereich, und ihre relativen Änderungen betragen zwischen etwa 8.9% an der unteren Grenze und 0% an der oberen Grenze.

Wir haben in Kapitel 3 nur zwei Spektrum-Funktionen berechnet, welche den unpolarisierten b -Zerfall und den Spin des c -Quarks beschreiben. Man kann diese Berechnungen auf den allgemeineren Fall ausdehnen, in dem sowohl der Spin des c -Quarks als auch der Spin des zerfallenden b -Quarks berücksichtigt werden. In diesem Fall gibt es im Standardmodell insgesamt fünf Spektrum-Funktionen. Neben den beiden bereits angesprochenen gibt es noch eine, die den Spin des b -Quarks beschreibt und zwei weitere, die Korrelationen zwischen dem b -Spin und dem c -Spin beschreiben. Auch zu den drei neuen Spektrum-Funktionen können die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung α_s berechnet werden. Für den Myon-Zerfall mit Berücksichtigung einer endlichen Elektronmasse

ist dies in [41] bereits durchgeführt worden. Da die analytischen Ausdrücke für alle dort angegebenen Spektrum-Funktionen identisch sind, können sie auch für den b -Zerfall übernommen werden, wobei die Massen und Energien von Myon und Elektron jeweils durch diejenigen von b - und c -Quark ersetzt werden müssen.

In [41] wurde nicht nur die differentielle Rate für den Zerfall polarisierter Myonen in polarisierte Elektronen berechnet, sondern es wurden auch analytische Resultate für die totale Rate angegeben. Dabei werden alle fünf Spektrum-Funktionen über die skalierte Elektronenergie integriert, und man erhält fünf Raten-Funktionen, die sowohl den unpolarisierten Beitrag als auch die Polarisation des Myons und des Elektrons sowie Spin-Spin-Korrelationen beschreiben. Auch diese Resultate für die integrierten Spektrum-Funktionen können für den b -Zerfall übernommen werden, so daß man eine gewisse Vollständigkeit der Ergebnisse erreichen kann. Man kann damit neben den Spektrum-Funktionen für die differentielle Rate auch die Raten-Funktionen für die totale Rate bei Berücksichtigung des b - und des c -Spins und die vollständige Massenabhängigkeit von den Quarkmassen angeben. Die QCD-Strahlungskorrekturen zu den fünf differentiellen und fünf integrierten Spektrum-Funktionen können damit alle bis zur ersten Ordnung der starken Kopplungskonstanten in analytischer Form angegeben werden.

Bei dem semileptonischen Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein Lepton-Paar ist es interessant, die differentielle Rate nicht nur nach der c -Energie, sondern auch nach der Energie des geladenen Leptons zu berechnen, weil dieses im Detektor relativ einfach zu identifizieren ist. Für den Zerfall eines ruhenden polarisierten Topquarks in ein unpolarisiertes b -Quark und ein Lepton-Paar sind die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen zur differentiellen Rate bereits berechnet worden [93, 94], und die entsprechenden Rechnungen für die azimuthale Korrelation wurden vor kurzer Zeit vollendet [95], wobei man sich nicht, wie in dieser Arbeit, auf das Ruhesystem des W -Bosons bezogen hat. In allen diesen Berechnungen sind die Massen der Leptonen vernachlässigt worden.

Als Vorbereitung für die Berechnung verschiedener Polarisationsobservablen in Kapitel 5 wurde in Kapitel 4 der Formalismus der Helizitäts-Projektoren entwickelt. Er erlaubt die Bestimmung unterschiedlicher Polarisationszustände des virtuellen W -Bosons durch Kontraktion des Hadron-Tensors für den b -Zerfall mit den verschiedenen Projektoren. Dadurch gelingt es, die Winkelverteilung der Leptonen anzugeben, welche durch den Zerfall des W -Bosons entstehen. Die Helizitäts-Projektoren bilden eine Basis aus insgesamt $16 \times 4 \times 4$ -Matrizen, und der Lepton-Tensor des W -Zerfalls kann in eine Linearkombination dieser Basiselemente entwickelt werden. Für unpolarisierte masselose Leptonen reduziert sich die benötigte Anzahl der Projektoren auf neun. Am Ende von Kapitel 4 wurde das betragsquadrierte Matrixelement für den Zerfall eines b -Quarks in ein c -Quark und ein Leptonpaar durch die Helizitäts-Projektoren ausgedrückt und daraus die Winkelverteilung für diesen Zerfallsprozeß abgeleitet.

In Kapitel 5 wurden die inklusiven QCD-Strahlungskorrekturen in erster Ordnung der Kopplungskonstanten α_s zu drei unpolarisierten und fünf polarisierten Strukturfunktionen berechnet, die bei dem semileptonischen Zerfall eines polarisierten b -Quarks in ein unpolarisiertes c -Quark und ein virtuelles W -Boson benötigt werden, wobei das W -Boson weiter in ein Leptonpaar zerfällt und die Massen der Leptonen vernachlässigt werden. Außer-

dem wurden noch die polarisierte und die unpolarisierte skalare Strukturfunktion angegeben, die später bei den hadronischen Anwendungen eine Rolle spielen. Alle angegebenen Strukturfunktionen wurden mit Hilfe der in Kapitel 4 eingeführten Helizitäts-Projektoren ausgerechnet. Hierbei wurde der Phasenraum der Leptonen nicht ausintegriert, um mit den Winkelvariablen die Winkelverteilung der Leptonen angeben zu können. Die Resultate für die Strukturfunktionen hängen neben den Quarkmassen vom skalierten Viererimpulsquadrat des W -Bosons $x^2 = q^2/m_b^2$ ab. Sie wurden in analytischer Form dargestellt und anschließend numerisch ausgewertet. Aufgrund der relativ großen Masse des c -Quarks im Vergleich zur b -Masse wurde die vollständige Abhängigkeit von den Quarkmassen berücksichtigt.

Beim Zerfall des b -Quarks betragen die relativen Änderungen der Bornschen Näherung, welche durch die Strahlungskorrekturen hervorgerufen werden, zwischen 3.3% für die polarisierten Strukturfunktionen $d\hat{\Gamma}_{UP}/dx^2$ und $d\hat{\Gamma}_{SP}/dx^2$ an der oberen Grenze $x^2_{max} = (1-y)^2$ und -15.8% für die polarisierte Strukturfunktion $d\hat{\Gamma}_{FP}/dx^2$ bei $x^2 = 0$. Alle Helizitäts-Strukturfunktionen werden durch die Strahlungskorrekturen für alle Werte von x^2 betragsmäßig verringert. Die ungefähre Gleichmäßigkeit der Strahlungskorrekturen hat ihre Ursache darin, daß ein Großteil der Strahlungskorrekturen von Beiträgen herrührt, welche aus dem Gebiet des Phasenraumes in der Nähe der Infrarot-Singularität stammen, wo die Strahlungskorrekturen universell sind. Trotzdem gibt es bei den Korrekturen eine Spanne von einigen Prozent, die bei einem Vergleich mit zukünftigen Experimenten berücksichtigt werden müssen. Die physikalischen Observablen sind nicht durch die Strukturfunktionen selbst, sondern durch entsprechende normierte Funktionen gegeben, welche als Quotient zweier Strukturfunktionen geschrieben werden können. Es stellt sich heraus, daß die Beiträge der relativen Strahlungskorrekturen für die Observablen gegenüber den nicht normierten Strukturfunktionen betragsmäßig verringert werden. Beispielsweise sind sie für $\hat{\Gamma}_U/\hat{\Gamma}_{U+L}$ an der unteren Grenze $x^2 = 0$ nur etwa 3.2% anstelle von 11.8% für $\hat{\Gamma}_U$.

Aufgrund der identischen Struktur der Matrixelemente für den b -Zerfall und den Zerfall des Topquarks konnten die Resultate für die Helizitäts-Strukturfunktionen aus Kapitel 5 mit den Ergebnissen aus [59] verglichen werden, wo der Zerfall $t^\dagger \rightarrow b + W^+$ diskutiert wurde. Nach Vertauschen der Quarkmassen $m_t \leftrightarrow m_b$ und $m_b \leftrightarrow m_c$ und der Masse des W -Bosons $M_W^2 \leftrightarrow q^2$ sowie des CKM-Matrixelementes $V_{tb} \leftrightarrow V_{bc}$ gehen die analytischen Ausdrücke für die Strukturfunktionen ineinander über und man kann sie für alle unterschiedlichen Helizitäten miteinander vergleichen. Berücksichtigt man noch den Unterschied beider Zerfallsprozesse, der dadurch entsteht, daß beim b -Zerfall ein virtuelles W^- - und beim Topquark-Zerfall ein reelles W^+ -Boson auftritt, so wurde bei den polarisierten und den unpolarisierten Strukturfunktionen für den b - und den t -Zerfall Übereinstimmung festgestellt. Ebenso stimmen die Resultate im Grenzfall verschwindender c -Quark-Masse mit einigen bereits vorher berechneten Ausdrücken [60, 61, 62] überein.

In Kapitel 5 haben wir nur die QCD-Strahlungskorrekturen erster Ordnung in der starken Kopplungskonstanten zu den Strukturfunktionen für masselose Leptonen berechnet. Diejenigen Strukturfunktionen zu den Helizitäten $X = SL, SL^P, ST^P, ST'^P$ sind zwar in Kapitel 6 diskutiert worden, allerdings wurden dort nur die nichtperturbativen Beiträge angegeben, während die entsprechenden QCD-Korrekturen noch nicht berechnet wurden.

Weil die dort auftretenden Projektoren keine neuen Integraltypen produzieren, können die QCD-Korrekturen mit denselben Methoden wie in Kapitel 5 berechnet werden. Daher wird es nicht besonders schwierig sein, die Liste der Strukturfunktionen zu vervollständigen. Dann können beim semileptonischen b -Zerfall im Endzustand auch τ -Leptonen betrachtet werden, deren Masse gegenüber den Quarkmassen nicht mehr vernachlässigbar ist.

Um die Genauigkeit der Strukturfunktionen weiter zu steigern, ist es notwendig, QCD-Strahlungskorrekturen zweiter Ordnung in α_s zu berechnen und darüberhinaus auch elektroschwache Korrekturen zu implementieren. Die Größenordnung dieser zusätzlichen Korrekturen kann durch einen erneuten Vergleich mit Resultaten für den Topquark-Zerfall abgeschätzt werden, da dieser wie erwähnt dieselbe analytische Struktur wie der b -Quark-Zerfall besitzt. Die QCD-Korrekturen erster Ordnung ergeben für die totale Rate des Topquark-Zerfalls einen numerischen Wert von -8.5% [59], und der entsprechende Wert für den b -Zerfall beträgt -11.7% , wie man durch Integration der unpolarisierten differentiellen Rate aus Kapitel 3 feststellen kann. In zweiter Ordnung haben die QCD-Korrekturen der totalen Top-Zerfallsrate im Grenzfall verschwindender b -Masse bezogen auf die Bornsche Rate die Größenordnung -2% [96], was im Vergleich zu den Korrekturen erster Ordnung relativ groß ist. Die elektroschwachen Korrekturen in erster Ordnung der Kopplungskonstanten α erhöhen die totale Rate um etwa $+1.7\%$ [60, 97]. Für einen Vergleich mit Präzisionsexperimenten auf dem Prozent-Level ist es daher erforderlich, sowohl die QCD-Zweischleifen-Korrekturen und Bremsstrahlungsbeiträge in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ als auch die elektroschwachen Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha)$ für die unterschiedlichen Strukturfunktionen zu berechnen. Während die QCD-Zweischleifen-Rechnungen sehr schwierig auszuführen sind und daher in den nächsten Jahren voraussichtlich noch nicht abgeschlossen werden können, sind die elektroschwachen Korrekturen zu den acht Strukturfunktionen für masselose Leptonen bereits ausgerechnet worden [98, 99].

Neben der Steigerung der Genauigkeit ist es auch von Interesse, die Helizitäts-Strukturfunktionen über die Variable x^2 zu integrieren, um damit die Winkelverteilung des b -Zerfalls beschreiben zu können, die durch eine dreifach differentielle Zerfallsrate gegeben ist, welche nur noch von Winkelvariablen abhängt und die nach Integration über die Winkel in die totale Zerfallsrate übergeht. Es hat sich herausgestellt, daß die Integration über x^2 für die QCD-Korrekturen erster Ordnung schwierig ist und teilweise nur numerisch ausgewertet werden kann [68]. Mit Hilfe der vereinfachten Ausdrücke für die differentiellen Raten $d\hat{\Gamma}/dx^2$ in Kapitel 5, die ohne die explizite Angabe der verschiedenen Grundintegrale auskommen, ist es sicherlich möglich, die x^2 -Integration etwas zu vereinfachen.

In Kapitel 6 wurden die nichtperturbativen Korrekturen zu fünf unpolarisierten und neun polarisierten Strukturfunktionen zu dem semileptonischen Zerfall eines b -Quarks angegeben. In der HQET sind nämlich die führenden Beiträge für den Zerfall eines Λ_b -Baryons oder eines B -Mesons durch den QCD-Zerfallsprozeß des b -Quarks und die hadronischen Korrekturen für diese Zerfälle durch die nichtperturbativen Beiträge gegeben. Die zugehörigen hadronischen Matrixelemente können mit Hilfe der Operatorprodukt-Entwicklung im Rahmen der HQET berechnet werden und wurden aus [71] entnommen, wo inklusive semileptonische Zerfälle des Λ_b -Baryons in polarisierte τ -Leptonen diskutiert wurden. Aus diesen Matrixelementen wurden die Helizitäts-Strukturfunktionen und die integrierten He-

lizitäts-Raten analog zu [71] berechnet, wobei dort einige Fehler gefunden wurden und nachfolgend auch korrigiert werden konnten. Die nichtperturbativen Korrekturen sind von der Ordnung $1/m_b^2$ und enthalten drei unterschiedliche Beiträge, die proportional zu den drei Parametern K_b , ϵ_b und G_b sind, welche jeweils die kinetische Energie des b -Quarks, das spinabhängige Matrixelement für das b -Quark und einen chromomagnetischen Beitrag beschreiben. In einem kurzen Abschnitt wurde auch die Polarisation des geladenen Leptons diskutiert, weil dort im Gegensatz zum Λ_b -Zerfall in unpolarisierte Leptonen die polarisierte Strukturfunktion $d\hat{\Gamma}_{ST'}/dx^2$ vorkommt. Alle 14 Strukturfunktionen gehen in die Winkelverteilungen für den Λ_b -Zerfall ein und hängen wie die QCD-korrigierten Funktionen in Kapitel 5 vom skalierten Viererimpulsquadrat $x^2 = q^2/m_b^2$ des W -Bosons ab. Nach Integration über x^2 erhält man die integrierten Helizitäts-Raten, die als Winkelkoeffizienten in die Winkelverteilung eingehen, welche durch die dreifach differentielle Zerfallsrate gegeben ist.

In Kapitel 7 wurden schließlich die analytischen Resultate zu den Helizitäts-Strukturfunktionen für die QCD-Korrekturen aus Kapitel 5 und für die nichtperturbativen Korrekturen aus Kapitel 6 verwendet, um sie auf die semi-inklusiven Zerfälle eines polarisierten Λ_b -Baryons $\Lambda_b^+ \rightarrow X_c + (D_s, D_s^*)$ oder eines \bar{B} -Mesons $\bar{B} \rightarrow X_c + (D_s, D_s^*)$ anzuwenden. Damit bietet sich beispielsweise der Zerfall des Λ_b an, um sieben der angegebenen Strukturfunktionen experimentell zu messen und mit den theoretischen Werten zu vergleichen.

Für die angesprochenen hadronischen Zerfälle werden insgesamt drei unpolarisierte und vier polarisierte Strukturfunktionen benötigt, welche zu den Helizitäten $X = U, U^P, L, L^P, S, S^P, I^P$ gehören. Außerdem ist es günstig, die Summe aus den unpolarisierten und den polarisierten Strukturfunktionen $X = U + L, U^P + L^P$ explizit anzugeben. Alle auf die Bornsche Näherung normierten Strukturfunktionen zu diesen Helizitäten sind in analytischer Form angegeben worden, wobei jede einzelne in eine Linearkombination aus den unterschiedlichen Korrekturen entwickelt wurde. Anschließend wurden diese Resultate numerisch ausgewertet, indem für die Variable x jeweils die mit der b -Masse skalierte Masse des D_s - und des D_s^* -Mesons eingesetzt wurde.

Für alle in Kapitel 7 diskutierten Zerfälle sind die Beiträge der QCD-Korrekturen zu den auf die Bornsche Rate normierten Strukturfunktionen immer negativ. In den meisten Fällen gilt dies auch für die nichtperturbativen Korrekturen, die ungefähr um einen Faktor 5 kleiner als die QCD-Korrekturen sind. Für den Zerfall eines \bar{B} -Mesons bewegen sich die QCD-Korrekturen zwischen etwa -10% und -12% , beim Λ_b -Zerfall betragen sie etwa zwischen -7% und -15% . Die nichtperturbativen Korrekturen betragen für beide Zerfallsprozesse zwischen -3.4% und 2.6% . Wenn die Strukturfunktionen auf die totale Rate $X = U + L$ oder $X = S$ normiert werden, wie es für die Berechnung physikalischer Observablen notwendig ist, reduzieren sich die Gesamtkorrekturen etwa um die Hälfte.

Alle in dieser Arbeit angegebenen Resultate wurden auf verschiedene Weisen auf ihre Richtigkeit geprüft. Die analytischen Integrationen sind mit Hilfe numerischer Integration überprüft worden, und die Ergebnisse für die berechneten Raten sowie einige ihrer Grenzfälle wurden mit bereits veröffentlichten Resultaten, soweit diese vorhanden sind, verglichen. In allen Fällen wurde Übereinstimmung festgestellt.

Anhang A

Notation

A.1 Physikalische Konstanten

Die wichtigsten Naturkonstanten, die in der Quantenfeldtheorie auftreten, sollen im folgenden aufgelistet werden.

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

Plancksche Konstante:

$$h = 6.626\,068\,76(52) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

reduzierte Plancksche Konstante:

$$\hbar \equiv h/(2\pi) = 1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

elektrische Elementarladung:

$$e = 1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19} \text{ C} \tag{A.1}$$

Bei störungstheoretischen Rechnungen in der Quantenfeldtheorie ist es üblich, die Lichtgeschwindigkeit und die reduzierte Plancksche Konstante gleich eins zu setzen,

$$c = 1, \quad \hbar = 1.$$

Die Massen und Energien der Teilchen werden in Vielfachen von Elektronenvolt (eV) angegeben. Um die numerischen Werte für physikalische Größen wie Wirkungsquerschnitte und Zerfallsraten in *SI*-Einheiten angeben zu können, ist es daher erforderlich, die berechneten Ergebnisse mit bestimmten Umrechnungsfaktoren zu multiplizieren. Diese sollen nachfolgend angegeben werden.

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19} \text{ J} \\ \hbar &= 6.582\,118\,89(26) \times 10^{-22} \text{ MeV s} \\ \hbar c &= 197.326\,960\,2(77) \text{ MeV fm} \\ (\hbar c)^2 &= 0.389\,379\,292(30) \text{ GeV}^2 \text{ mbarn} \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.2 Metrik und Vierervektoren

Der kovariante und der kontravariante metrische Tensor im Minkowski-Raum haben die Form

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Ein kontravarianter Vierervektor ist folgendermaßen definiert:

$$V \equiv V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3) = (V^0, \vec{V}), \quad (\text{A.4})$$

der zugehörige kovariante Vierervektor ist

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu = (V^0, -\vec{V}). \quad (\text{A.5})$$

Partielle Ableitungen nach kontravarianten und kovarianten Koordinaten können in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (\text{A.6})$$

Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren lautet in der Summenkonvention:

$$V \cdot W = V_\mu W^\mu = V^\mu W_\mu = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = g^{\mu\nu} V_\mu W_\nu = V^0 W^0 - \vec{V} \cdot \vec{W}. \quad (\text{A.7})$$

Der räumliche Anteil eines Vierervektor ist

$$\vec{V} = (V^i, i = 1, 2, 3) = (V_x, V_y, V_z), \quad (\text{A.8})$$

der Nabla-Operator lautet

$$\vec{\nabla} = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z) = \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(-\partial^i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.9})$$

Der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor in vier Dimensionen ist definiert als:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ eine gerade Permutation von } \{0, 1, 2, 3\} \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ eine ungerade Permutation von } \{0, 1, 2, 3\} \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.11})$$

Er erfüllt folgende wichtige Relationen:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2 (\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\rho \delta_\alpha^\sigma) \quad (\text{A.12})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha} = -6 \delta_\alpha^\sigma \quad (\text{A.13})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24. \quad (\text{A.14})$$

Der entsprechende antisymmetrische Tensor dritter Stufe im dreidimensionalen Raum ist durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } \{ijk\} \text{ eine gerade Permutation von } \{1, 2, 3\} \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } \{ijk\} \text{ eine ungerade Permutation von } \{1, 2, 3\} \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk}. \quad (\text{A.16})$$

definiert.

A.3 Dirac-Matrizen

Die γ -Matrizen genügen der folgenden Clifford-Algebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

Die Definition von γ_5 lautet:

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (\text{A.18})$$

Die γ -Matrizen erfüllen folgende Kommutator- und Antikommutator-Relationen:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.20})$$

$$[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (\text{A.21})$$

Die hermitesch Konjugierte einiger Kombinationen von γ -Matrizen ist

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{A.22})$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 = -\gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 \quad (\text{A.23})$$

$$(\gamma_5 \gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 (\gamma_5 \gamma^\mu) \gamma^0 \quad (\text{A.24})$$

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0. \quad (\text{A.25})$$

Die Pauli-Matrizen sind gegeben durch:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Damit kann man die γ -Matrizen in der Dirac-Darstellung schreiben als

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Die Kontraktionen von γ -Matrizen lauten

$$\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4 \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = -2 \gamma^\mu \quad (\text{A.30})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\alpha = 4 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.31})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\alpha = -2 \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu. \quad (\text{A.32})$$

Die Spuren von γ -Matrizen sind

$$\text{Sp}(I) = 4, \quad \text{Sp}(\gamma^\mu) = 0, \quad \text{Sp}(\gamma_5) = 0. \quad (\text{A.33})$$

Die Spur über eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen verschwindet. Weitere Spuren von γ -Matrizen sind

$$\text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^5) = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$\text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.35})$$

$$\text{Sp}(\sigma^{\mu\nu}) = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$\text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0 \quad (\text{A.37})$$

$$\text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{A.38})$$

$$\text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = 4 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.39})$$

Das Skalarprodukt von Vierervektoren und γ -Matrizen wird in der folgenden Art und Weise abgekürzt:

$$\gamma \cdot a \equiv \gamma_\mu a^\mu \equiv \not{a}. \quad (\text{A.40})$$

A.4 Dirac-Gleichung und Dirac-Spinoren

Ein freies Spin-1/2-Teilchen der Masse m mit Viererimpuls p und Spin s wird durch einen vierkomponentigen Spinor $u(p, s)$ positiver Energie beschrieben. Für den Spinvektor s gilt $s \cdot p = 0$ und $s^2 = -1$. Im Ruhesystem des Teilchens gilt

$$s^\mu = (0, \vec{s}), \quad (\vec{s})^2 = 1. \quad (\text{A.41})$$

Das zugehörige Antiteilchen wird durch den Spinor $v(p, s)$ negativer Energie beschrieben. Die Dirac-Gleichung für Teilchen und Antiteilchen hat folgende Form:

$$(\not{p} - m) u(p, s) = 0, \quad (\not{p} + m) v(p, s) = 0. \quad (\text{A.42})$$

Die adjungierten Spinoren

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0, \quad \bar{v} = v^\dagger \gamma^0 \quad (\text{A.43})$$

genügen der konjugierten Dirac-Gleichung

$$\bar{u}(p, s) (\not{p} - m) = 0, \quad \bar{v}(p, s) (\not{p} + m) = 0. \quad (\text{A.44})$$

Für diese Teilchen gilt die Massenschalenbedingung

$$p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \equiv E_p^2 - (\vec{p})^2 = m^2. \quad (\text{A.45})$$

In der Helizitätsbasis sind die Spinoren $u_\lambda(p)$ Eigenzustände des Operators $\gamma_5 \not{p}$ mit Eigenwerten $\lambda = \pm 1$ für den Spin parallel oder antiparallel zur Bewegungsrichtung des Teilchens. Die Normierung der Spinoren in dieser Basis ist

$$\bar{u}_\lambda(p) u_\mu(p) = 2m \delta_{\lambda\mu} \quad (\text{A.46})$$

$$\bar{v}_\lambda(p) v_\mu(p) = -2m \delta_{\lambda\mu} \quad (\text{A.47})$$

$$\bar{u}_\lambda(p) v_\mu(p) = \bar{v}_\lambda(p) u_\mu(p) = 0. \quad (\text{A.48})$$

Die Projektoren für Energie und Spin sind gegeben durch

$$2m \Lambda(p) = \sum_\lambda u_\lambda(p) \bar{u}_\lambda(p) = \not{p} + m \quad (\text{A.49})$$

$$2m \Lambda(-p) = -\sum_\lambda v_\lambda(p) \bar{v}_\lambda(p) = m - \not{p} \quad (\text{A.50})$$

$$2m \Lambda_\lambda(p) = u_\lambda(p) \bar{u}_\lambda(p) = (\not{p} + m) \left(\frac{1 + \lambda \gamma_5 \not{p}}{2} \right) \quad (\text{A.51})$$

$$2m \Lambda_\lambda(-p) = -v_\lambda(p) \bar{v}_\lambda(p) = (m - \not{p}) \left(\frac{1 - \lambda \gamma_5 \not{p}}{2} \right). \quad (\text{A.52})$$

Die hermitesch Konjugierte von Matrixelementen kann folgendermaßen geschrieben werden

$$[\bar{u}(p') \Gamma u(p)]^\dagger = \bar{u}(p) \bar{\Gamma} u(p'), \quad (\text{A.53})$$

wobei $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ ist.

Einige spezielle Beispiele für Γ sind

$$\bar{I} = \gamma^0 I \gamma^0 = I, \quad \bar{\gamma}^\mu = \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu, \quad \bar{\gamma}^5 = \gamma^0 (\gamma^5)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^5. \quad (\text{A.54})$$

A.5 Die CKM-Matrix

Die Zustände von schwach wechselwirkenden Quarks werden durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) in ihre Masseneigenzustände transformiert. Es gilt beispielsweise

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (\text{A.55})$$

Die CKM-Matrix ist unitär, das heißt, es gilt

$$V V^\dagger = V^\dagger V = I. \quad (\text{A.56})$$

Sie kann durch drei Winkel θ_i und eine Phase δ parametrisiert werden. Mit den Definitionen

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i$$

kann man die CKM-Matrix in folgender Form darstellen:

$$V = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.57})$$

A.6 Gell-Mann–Matrizen

Die Gell-Mann–Matrizen sind die Erzeugenden der Lie-Algebra der Gruppe $SU(3)$. In der kanonischen Basis haben sie die Standarddarstellung

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Sie erfüllen die folgenden Kommutator- und Spurrelationen:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = \frac{i}{2} f_{abc} \lambda_c \quad (\text{A.59})$$

$$\text{Sp}(\lambda_a) = 0, \quad \text{Sp}(\lambda_a \lambda_b) = 2 \delta_{ab}. \quad (\text{A.60})$$

Die Strukturkonstanten f_{abc} sind total antisymmetrisch und besitzen die nichtverschwindenden Elemente

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{147} &= f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2}, \\ f_{156} &= f_{367} = -\frac{1}{2}, & f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Für die Quadrate der Komponenten der Gell-Mann-Matrizen gilt folgende Identität

$$\frac{(\lambda^a)_i^j}{2} \frac{(\lambda_a)_k^l}{2} = \frac{1}{2} \left(\delta_i^l \delta_k^j - \frac{1}{N_C} \delta_i^j \delta_k^l \right), \quad (\text{A.62})$$

wobei über den Index $a = 1, \dots, 8$ summiert wird. Aus dieser Beziehung ergibt sich durch schrittweises Summieren über die Matrix-Indizes

$$\frac{(\lambda^a)_i^j}{2} \frac{(\lambda_a)_j^l}{2} \equiv \frac{\lambda^a \lambda_a}{2 \cdot 2} = \frac{N_C^2 - 1}{2 N_C} I = C_F I = \frac{4}{3} I \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{(\lambda^a)_i^j}{2} \frac{(\lambda_a)_j^i}{2} \equiv \text{Sp} \left(\frac{\lambda^a \lambda_a}{2 \cdot 2} \right) = C_F N_C = 4. \quad (\text{A.64})$$

Die Konstante $N_C = 3$ bezeichnet die Anzahl der Farben, der Faktor $C_F = 4/3$ ist der Casimir-Operator und I die 3×3 -Einheitsmatrix.

A.7 Phasenraum-Formeln für Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitte

Die differentielle Zerfallsrate für den Zerfall eines Teilchens mit Impuls p in n Teilchen mit Impuls q_1, \dots, q_n ist

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(\sum_{i=1}^n q_n - p) |\mathcal{M}|^2}{2 p^0} \prod_{i=1}^n \frac{\tilde{q}_i}{(2\pi)^3} \cdot S \quad (\text{A.65})$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraum-Volumenelement

$$\tilde{q}_i = \frac{d^3 \vec{q}_i}{2 \sqrt{(\vec{q}_i)^2 + m_i^2}} \quad (\text{A.66})$$

und dem Symmetriefaktor

$$S = \prod_k \frac{1}{n_k!}, \quad \sum_k n_k = n \quad (\text{A.67})$$

für jeweils n_k identische Teilchen bei k Teilchensorten im Endzustand.

Entsprechend ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für einen Zwei-Teilchen-Anfangszustand mit Impuls p_1 und p_2 und einen n -Teilchen-Endzustand mit Impulsen q_1, \dots, q_n

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(\sum_{i=1}^n q_n - p_1 - p_2) |\mathcal{M}|^2}{2 \lambda(\sqrt{s}, m_1, m_2)} \prod_{i=1}^n \frac{\tilde{q}_i}{(2\pi)^3} \cdot S \quad (\text{A.68})$$

mit

$$\lambda(\sqrt{s}, m_1, m_2) = \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}, \quad (\text{A.69})$$


wobei $s = (p_1 + p_2)^2$ die quadrierte Schwerpunktsenergie ist.

A.8 Feynman-Regeln


In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Feynman-Regeln des Standardmodells angegeben, die zur Übergangsamplitude des Zerfalls von Elementarteilchen beitragen.


A.8.1 Äußere Linien

Für jedes Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermion oder -Antifermion und für jedes Spin-1-Boson ergeben sich die folgenden Faktoren:

einlaufendes Fermion	p 	$u(p, s)$	(A.70)
----------------------	--	-----------	--------


auslaufendes Fermion	p' 	$\bar{u}(p', s')$	(A.71)
----------------------	---	-------------------	--------

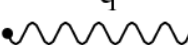
einlaufendes Antifermion	p 	$\bar{v}(p, s)$	(A.72)
--------------------------	--	-----------------	--------

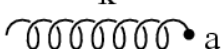
auslaufendes Antifermion	p' 	$v(p', s')$	(A.73)
--------------------------	---	-------------	--------

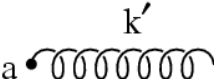
einlaufendes Photon	k 	$\epsilon_\mu(k, \lambda)$	(A.74)
---------------------	---	----------------------------	--------

auslaufendes Photon	k' 	$\epsilon_\mu^*(k', \lambda')$	(A.75)
---------------------	---	--------------------------------	--------

einlaufendes W - oder Z -Boson	q 	$\epsilon_\mu(q, \lambda)$	(A.76)
------------------------------------	--	----------------------------	--------

auslaufendes W - oder Z -Boson	q' 	$\epsilon_\mu^*(q', \lambda')$	(A.77)
------------------------------------	---	--------------------------------	--------

einlaufendes Gluon	k 	$\epsilon_\mu(k, \lambda) C^a$	(A.78)
--------------------	--	--------------------------------	--------

auslaufendes Gluon	k' 	$\epsilon_\mu^*(k', \lambda') (C^a)^*$	(A.79)
--------------------	---	--	--------

Die Spinoren u , v , \bar{u} und \bar{v} hängen vom Impulsvektor p und vom Spinvektor s ab. Der Polarisationsvektor ϵ der Bosonen hängt von deren Impuls k oder q und deren Polarisationszustand λ ab. Die C^a für $a = 1, \dots, 8$ beschreiben die verschiedenen Farbzustände der Gluonen. Die masselosen Bosonen wie das Photon besitzen nur zwei transversale Polarisationszustände, während die massiven Eichbosonen noch zusätzlich einen longitudinalen Polarisationszustand haben. Unterscheiden sich zwei Graphen voneinander nur durch den Austausch zweier identischer Fermion-Linien, so erhalten sie ein relatives Vorzeichen. Dasselbe gilt für den Austausch eines Fermions im Anfangszustand und eines Antifermions im Endzustand.

A.8.2 Propagatoren

Die inneren Linien für Fermionen und Bosonen entsprechen den folgenden Ausdrücken:

Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermion  $\frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$ (A.80)

Photon  $-\frac{i g^{\mu\nu}}{k^2}$ (A.81)

massives Vektorboson  $\frac{i(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M^2)}{q^2 - M^2}$ (A.82)

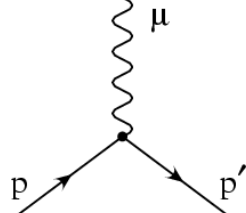
Gluon  $\frac{-i g^{\mu\nu} \delta_{ab}}{k^2}$ (A.83)

Die Propagatoren des Photons und des Gluons sind in Feynman-Eichung $\xi = 1$ angegeben.

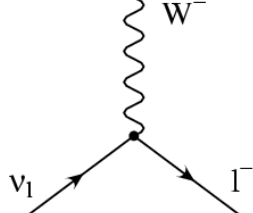
A.8.3 Vertices

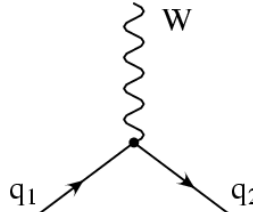
Im folgenden werden die wichtigsten Vertices angegeben, die zwei Fermionlinien und eine Bosonlinie enthalten.

QED-Vertex:

Photon  $-ie \gamma_\mu$ (A.84)

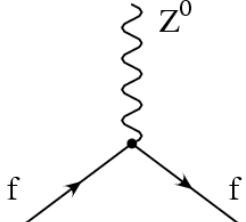
Geladene Ströme:

W-Boson und Leptonen  $-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2}$ (A.85)

W-Boson und Quarks  $-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} V_{q_1 q_2} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2}$ (A.86)

Neutrale Ströme:

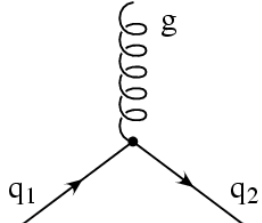
Z-Boson und Fermionen



$$\frac{-ig_w}{2 \cos \theta_W} \gamma_\mu [g_V - g_A \gamma_5] \quad (\text{A.87})$$

Quark-Gluon-Vertex in der QCD:

Gluon und Quarks



$$-ig_s \gamma_\mu \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \quad (\text{A.88})$$

Der Vollständigkeit wegen wurden alle Vertex-Graphen angegeben, die Fermionen enthalten. Die Koeffizienten der Vektor- und Axialvektor-Anteile des neutralen Stromes haben für unterschiedliche Fermionen die in folgender Tabelle angegebenen Werte:

f	g_V	g_A
l^-	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$
ν_l	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$q_1 (+2/3)$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$\frac{1}{2}$
$q_2 (-1/3)$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$

Im Standardmodell gibt es allerdings noch eine Reihe weiterer Diagramme, nämlich die Drei- und Vier-Eichboson-Vertices sowie solche, die das skalare Higgs-Boson mit Spin 0 enthalten. Sie tragen aber nicht zu den QCD-Korrekturen erster Ordnung der betrachteten Quark-Zerfälle bei und werden deshalb nicht aufgeführt.

Anhang B

Berechnung von Schleifenintegralen

B.1 Definition der Schleifenintegrale

Zur Berechnung der Vertexkorrektur und der Selbstenergiebeiträge werden verschiedene Typen von Grundintegralen benötigt, aus denen man die gewünschten Schleifenintegrale zusammensetzen kann. Im Fall der QCD-Korrekturen zum Zerfall des b -Quarks braucht man im wesentlichen 3 Integraltypen: Zunächst gibt es die skalaren 1-Punkt-Integrale, das sind solche vom Typ

$$I_1 = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{P(k)}, \quad (\text{B.1})$$

wobei $P(k)$ ein Propagatornenner der Form $(p_q - k)^2 - m_q^2$ oder $k^2 - m^2$ ist. Weiterhin werden Integrale mit zwei unterschiedlichen Propagatornennern, sogenannte 2-Punkt-Integrale benötigt, von denen es sowohl skalare als auch Vektorintegrale geben kann:

$$\begin{aligned} I_2 &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{P_1(k) P_2(k)} \\ I_2^\mu &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{P_1(k) P_2(k)}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Schließlich hat man noch die 3-Punkt-Integrale mit 3 verschiedenen Propagatornennern auszurechnen. Hier gibt es skalare, Vektor- und Tensorintegrale, die sich als

$$\begin{aligned} I_3 &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{P_1(k) P_2(k) P_3(k)} \\ I_3^\mu &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{P_1(k) P_2(k) P_3(k)} \\ I_3^{\mu\nu} &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{P_1(k) P_2(k) P_3(k)}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

schreiben lassen. Die verschiedenen Integraltypen haben die Eigenschaft, daß sie für sehr große oder sehr kleine Werte von k divergieren können. Deshalb führt man zwei Parameter

ein, mit denen die Integrale regularisiert werden und damit einen endlichen Wert erhalten. Der Parameter ϵ beschreibt eine Abweichung von der Raumzeitdimension 4 und ist durch $D = 4 - 2\epsilon$ definiert, und mit dem Parameter m wird eine endliche Gluonmasse bezeichnet. Im Grenzfall, wenn diese Parameter gegen null gehen, erhält man wieder die ursprünglichen divergenten Integrale.

Die Berechnung der regularisierten Integrale erfordert im wesentlichen zwei Schritte. Zuerst werden die Vektor- und Tensorintegrale auf skalare reduziert, indem man sie als Linearkombination der Impulsvektoren und des metrischen Tensors ansetzt und anschließend die skalaren Entwicklungskoeffizienten bestimmt, die relativ einfach nach einem bestimmten Berechnungsschema ausgewertet werden können. Im zweiten Schritt führt man die Berechnung der skalaren Integrale explizit aus, indem man auch hier wieder auf ein bestimmtes Schema zurückgreifen kann. Diese beiden Berechnungsschritte sollen im folgenden näher betrachtet werden.

B.2 Reduktion auf skalare Integrale

Wie bereits angesprochen, ist es einfacher, die auftretenden Vektor- und Tensorintegrale auf skalare Integrale zu reduzieren, als sie direkt auszurechnen. Zu diesem Zweck entwickelt man die Integrale in eine Linearkombination von allen Vektoren oder Tensoren, aus denen sie sich zusammensetzen können. Das sind üblicherweise die äußeren Viererimpulse p_b und p_c der Quarks sowie der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$. Die Reduktion wird nun nach der Methode von Passarino und Veltman durchgeführt, wobei die zu berechnenden Integrale mit den äußeren Impulsen und dem metrischen Tensor zu Skalaren kontrahiert werden, die direkt in die Formeln für die Entwicklungskoeffizienten eingehen. Danach werden die so entstandenen Zähler der Integranden in bestimmter Art und Weise zerlegt, so daß man einen der Propagatornennern herauskürzen kann. Die zu Skalaren kontrahierten Integrale bestimmen die Entwicklungskoeffizienten vollständig. Die benötigten skalaren Integrale sind in (3.45) definiert.

Es gibt zunächst zwei Typen von vektoriellen 2-Punkt-Integralen

$$\begin{aligned} I_2^\mu(p_q, m_q^2, m^2) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[(p_q - k)^2 - m_q^2][k^2 - m^2]}, \\ I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[(q - k)^2 - m_b^2][k^2 - m_c^2]} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

mit $p_q^2 = m_q^2$ im ersten und $q^2 = (p_b - p_c)^2 \neq m_b^2$ im zweiten Integral. Der Index q steht für die beiden Quarks b und c . Die Integranden enthalten alle nur noch einen äußeren Impulsvektor, so daß die Integrale durch den kovarianten Ansatz

$$I_2^\mu(p) = A(p^2) p^\mu \quad (\text{B.5})$$

dargestellt werden können, wobei p dieser äußere Impuls ist, über den nicht integriert wird. Wird diese Identität mit dem entsprechenden kovarianten Vektor p_μ kontrahiert, so

kann man nach dem skalaren Koeffizienten A auflösen und bekommt schließlich für die vektoriellen 2-Punkt-Integrale die Ausdrücke

$$\begin{aligned} I_2^\mu(p_q, m_q^2, m^2) &= \frac{p_q^\mu}{m_q^2} I_2^\nu(m_q^2, m^2) p_{q,\nu} \\ I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) &= \frac{q^\mu}{q^2} I_2^\nu(q^2, m_b^2, m_c^2) q_\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

die noch die Kontraktionen $I_2^\nu(p_q, m_q^2, m^2) p_{q,\nu}$ und $I_2^\nu(q, m_b^2, m_c^2) q_\nu$ enthalten. Für die erste Kontraktion mit dem Quark-Impuls p_q kann man durch Umformen des Skalarproduktes von k mit diesem Impuls

$$k \cdot p_q = -\frac{1}{2} [(p_q - k)^2 - m_q^2 - k^2 + m^2 - m^2] \quad (\text{B.7})$$

die folgende Vereinfachung auf skalare Integrale erreichen:

$$\begin{aligned} I_2^\mu(p_q, m_q^2, m^2) p_{q,\mu} &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p_b \cdot k}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-\frac{1}{2} [(p_q - k)^2 - m_q^2 - k^2 + m^2 - m^2]}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{(p_q - k)^2 - m_q^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m^2}{[(p_q - k)^2 - m_q^2] [k^2 - m^2]} \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} [I_1(m^2) - I_1(m_q^2) - m^2 I_2(m_q^2, m^2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Für die zweite Kontraktion mit q erhält man mit der Umformung

$$k \cdot q = -\frac{1}{2} [(q - k)^2 - m_b^2 - q^2 + m_b^2 - m_c^2 - k^2 + m_c^2] \quad (\text{B.9})$$

die entsprechende Darstellung

$$\begin{aligned} I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) q_\mu &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{q \cdot k}{[(q - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m_c^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-\frac{1}{2} [(q - k)^2 - m_b^2 - q^2 + m_b^2 - m_c^2 - k^2 + m_c^2]}{[(q - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m_c^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2 - m_c^2} - \frac{1}{(q - k)^2 - m_b^2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{q^2 - m_b^2 + m_c^2}{[(q-k)^2 - m_b^2][k^2 - m_c^2]} \right\} \\
= & -\frac{1}{2} \left[I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right]. \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung der 3-Punkt-Integrale treten zusätzlich noch vier weitere Kontraktionen auf, bei denen der Impulsvektor, mit dem das Vektorintegral kontrahiert wird, nicht derselbe ist, der im Integranden vorkommt. Man bestimmt sie einfach dadurch, indem man die Ausdrücke (B.6) direkt mit den entsprechenden Impulsvektoren multipliziert und anschließend die Zerlegungen (B.7) und (B.9) benutzt. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
I_2^\mu(p_b, m_b^2, m^2) p_{c,\mu} &= -\frac{p_b \cdot p_c}{2m_b^2} \left[I_1(m^2) - I_1(m_b^2) - m^2 I_2(m_b^2, m^2) \right] \quad (\text{B.11}) \\
I_2^\mu(p_c, m_c^2, m^2) p_{b,\mu} &= -\frac{p_b \cdot p_c}{2m_c^2} \left[I_1(m^2) - I_1(m_c^2) - m^2 I_2(m_c^2, m^2) \right] \\
I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) p_{b,\mu} &= -\frac{p_b \cdot q}{2q^2} \left[I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right] \\
I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) p_{c,\mu} &= -\frac{p_c \cdot q}{2q^2} \left[I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right].
\end{aligned}$$

Weil die endliche Gluonmasse m nur zur Regularisierung eingeführt wurde, kann sie in den Ergebnissen überall vernachlässigt werden, wo dies nicht zu einer Singularität führt. Es stellt sich heraus, daß alle 1- und 2-Punkt-Integrale nicht infrarotdivergent sind. Außerdem kürzen sich die UV -Singularitäten in der Differenz $I_1(m^2) - m^2 I_2$ gegeneinander heraus, wie man durch explizites Einsetzen der skalaren Integrale sieht. Deshalb kann man in den oben angegebenen Kontraktionen die Gluonmasse überall gleich 0 setzen. Damit lauten die unterschiedlichen Kontraktionen des vektoriellen 2-Punkt-Integrals:

$$\begin{aligned}
I_2^\mu(p_b, m_b^2, m^2) p_{b,\mu} &= \frac{1}{2} I_1(m_b^2) \quad (\text{B.12}) \\
I_2^\mu(p_c, m_c^2, m^2) p_{c,\mu} &= \frac{1}{2} I_1(m_c^2) \\
I_2^\mu(p_b, m_b^2, m^2) p_{c,\mu} &= \frac{p_b \cdot p_c}{2m_b^2} I_1(m_b^2) \\
I_2^\mu(p_c, m_c^2, m^2) p_{b,\mu} &= \frac{p_b \cdot p_c}{2m_c^2} I_1(m_c^2) \\
I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) p_{b,\mu} &= -\frac{p_b \cdot q}{2q^2} \left[I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right] \\
I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) p_{c,\mu} &= -\frac{p_c \cdot q}{2q^2} \left[I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right] \\
I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) q_\mu &= -\frac{1}{2} \left[I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right].
\end{aligned}$$

Die Zerlegung der 3-Punkt-Integrale basiert auch auf den Identitäten (B.7) und (B.9), ist

aber teilweise mehrfach anzuwenden. Es gibt zunächst zwei Möglichkeiten, das Vektorintegral

$$I_3^\mu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2, m^2) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \quad (\text{B.13})$$

zu einem Skalar zu kontrahieren, nämlich mit den Impulsvektoren p_b oder p_c . Man kann dann für die Kontraktion mit p_b

$$\begin{aligned} I_3^\mu p_{b,\mu} &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p_b \cdot k}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-\frac{1}{2} [(p_b - k)^2 - m_b^2 - k^2 + m^2 - m^2]}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{[(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2]} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m^2}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} [I_2(m_c^2, m^2) - I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) - m^2 I_3(q^2, m_b^2, m_c^2, m^2)] \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

schreiben, wenn man die Definitionen (3.45) der skalaren Integrale verwendet. Man erhält analog

$$I_3^\mu p_{c,\mu} = -\frac{1}{2} [I_2(m_b^2, m^2) - I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) - m^2 I_3(q^2, m_b^2, m_c^2, m^2)] \quad (\text{B.15})$$

für die Kontraktion mit p_c . Auch bei diesen Integralen kann man die Gluonmasse in allen Termen, die proportional zu m^2 sind, null setzen, ohne die UV -Divergenzen zu verändern, da sie sich auch in diesen Fall gegenseitig aufheben. Die kontrahierten vektoriellen 3-Punkt-Integrale kann man dann schreiben als

$$\begin{aligned} I_3^\mu p_{b,\mu} &= \frac{1}{2} [I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) - I_2(m_c^2)] \\ I_3^\mu p_{c,\mu} &= \frac{1}{2} [I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) - I_2(m_b^2)]. \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

Schließlich bleibt noch die Reduktion des Tensorintegrals. Dessen Kontraktion mit den beiden Impulsen p_b und p_c muß in zwei Schritten berechnet werden. Im ersten reduziert man es durch Multiplikation mit p_b

$$I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(p_b \cdot k) k^\nu}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-\frac{1}{2} [(p_b - k)^2 - m_b^2 + m^2 - m^2] k^\nu}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \\
&= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{k^\nu}{[(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{k^\nu}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2]} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{m^2 k^\nu}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} [I_2^\nu(p_c, m_c^2, m^2) - I_2^\nu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2) - m^2 I_3^\nu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2, m^2)] \quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$

und entsprechend durch Multiplikation mit p_c

$$I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} = -\frac{1}{2} [I_2^\nu(p_b, m_b^2, m^2) - I_2^\nu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2) - m^2 I_3^\nu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2, m^2)], \quad (\text{B.18})$$

auf ein Vektorintegral. Durch die Substitution $k \rightarrow k + p_c$ kann man nun unter Berücksichtigung der Translationsinvarianz des Volumenelementes das dabei auftretende unbekannte Integral

$$\begin{aligned}
I_2^\mu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2]} \\
&= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu + p_c^\mu}{[(p_b - p_c - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m_c^2]} \\
&= p_c^\mu I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) + I_2^\mu(q, m_b^2, m_c^2) \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

auf bekannte Integrale zurückführen, die schon im Rahmen der vektoriellen 2-Punkt-Integrale diskutiert wurden. Dann sind alle benötigten Integrale bekannt, und man kann sie zu weiteren Vereinfachungen verwenden. Im zweiten Schritt reduziert man dann die Vektorintegrale auf skalare, indem man die Gleichungen (B.17) und (B.18) nochmals mit den Vektoren $p_{b,\nu}$ oder $p_{c,\nu}$ kontrahiert und die Formeln (B.8), (B.10) und (B.11) für die Reduktion der vektoriellen 2-Punkt-Integrale benutzt. Dann bekommt man schließlich die gewünschten skalaren Kontraktionen

$$\begin{aligned}
I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{b,\nu} &= -\frac{1}{2} [I_2^\nu(p_c, m_c^2, m^2) p_{b,\nu} - I_2^\nu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2) p_{b,\nu} - m^2 I_3^\nu p_{b,\nu}] \quad (\text{B.20}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_b \cdot p_c}{2m_c^2} [I_1(m^2) - I_1(m_c^2) - m^2 I_2(m_c^2, m^2)] + (p_b \cdot p_c) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{p_b \cdot q}{2q^2} [I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2)] + m^2 I_3^\nu p_{b,\nu} \right\} \\
I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{c,\nu} &= -\frac{1}{2} [I_2^\nu(p_c, m_c^2, m^2) p_{c,\nu} - I_2^\nu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2) p_{c,\nu} - m^2 I_3^\nu p_{c,\nu}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [I_1(m^2) - I_1(m_c^2) - m^2 I_2(m_c^2, m^2)] + m_c^2 I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{p_c \cdot q}{2q^2} [I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2)] + m^2 I_3^\mu p_{c,\nu} \right\} \\
I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{c,\nu} &= -\frac{1}{2} [I_2^\nu(p_b, m_b^2, m^2) p_{c,\nu} - I_2^\nu(p_b, p_c, m_b^2, m_c^2) p_{c,\nu} - m^2 I_3^\nu p_{c,\nu}] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_b \cdot p_c}{2m_b^2} [I_1(m^2) - I_1(m_b^2) - m^2 I_2(m_b^2, m^2)] + m_c^2 I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{p_c \cdot q}{2q^2} [I_1(m_c^2) - I_1(m_b^2) - (q^2 - m_b^2 + m_c^2) I_2(q^2, m_b^2, m_c^2)] + m^2 I_3^\mu p_{c,\nu} \right\},
\end{aligned}$$

wobei die Kontraktionen des 3-Punkt-Vektorintegrals durch (B.14) und (B.15) gegeben sind. Die Kontraktion des Tensorintegrals mit dem metrischen Tensor kann direkt ausgerechnet werden und lautet:

$$\begin{aligned}
I_3^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 - m^2 + m^2}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \\
&= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \right] \\
&= I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) + m^2 I_3(q^2, m_b^2, m_c^2, m^2). \tag{B.21}
\end{aligned}$$

Im Grenzfall verschwindender Gluonmasse kann man wegen Herausfallen der entsprechenden UV -divergenten Anteile auch die kontrahierten Tensorintegrale vereinfachen, und erhält dann die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{b,\nu} &= \frac{p_b \cdot q}{4q^2} I_1(m_b^2) - \frac{1}{4} \left(\frac{p_b \cdot q}{q^2} + \frac{p_b \cdot p_c}{m_c^2} \right) I_1(m_c^2) - \frac{\lambda}{8q^2} I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \\
I_3^{\mu\nu} p_{b,\mu} p_{c,\nu} &= \frac{p_c \cdot q}{4q^2} I_1(m_b^2) - \frac{p_b \cdot q}{4q^2} I_1(m_c^2) - \frac{\lambda}{8q^2} I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \\
I_3^{\mu\nu} p_{c,\mu} p_{c,\nu} &= \frac{1}{4} \left(\frac{p_c \cdot q}{q^2} - \frac{p_b \cdot p_c}{m_b^2} \right) I_1(m_b^2) - \frac{p_c \cdot q}{4q^2} I_1(m_c^2) - \frac{\lambda}{8q^2} I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \\
I_3^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) \tag{B.22}
\end{aligned}$$

mit der Definition der λ -Funktion

$$\lambda = \lambda(q^2, m_b^2, m_c^2) = (q^2)^2 + m_b^4 + m_c^4 - 2(q^2 m_b^2 + q^2 m_c^2 + m_b^2 m_c^2). \tag{B.23}$$

B.3 Berechnung der skalaren Integrale

Wir wollen in diesem Abschnitt die elementaren skalaren Integrale berechnen. Es treten in unserem Fall drei unterschiedliche Integraltypen auf, die einen, zwei oder drei Propagatornenner enthalten. Bevor wir mit der eigentlichen Berechnung beginnen, wollen wir noch zwei Hilfsformeln angeben, mit denen sich die Integrale leichter ausrechnen lassen. Ein wichtiges Hilfsmittel aller dieser Berechnungen ist die Feynman-Parametrisierung, mit der man ein Produkt von Funktionen im Nenner eines Ausdruckes geeignet umschreiben kann, um später die Integration besser durchführen zu können. Für unsere Zwecke reicht es, keine höheren Potenzen der Funktionen im Nenner zu betrachten. Die Feynman-Parametrisierung lautet dann

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\Gamma(n) \delta(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n)}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)^n}, \quad (\text{B.24})$$

wobei die Propagatornenner die Form $(p_q - k)^2 - m_q^2$ haben. Der n -dimensionale Integrationsbereich wird durch die Deltafunktion auf eine $n - 1$ -dimensionale Hyperfläche eingeschränkt, die durch die Gleichung $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ beschrieben wird. Dadurch ändern sich auch die Integrationsgrenzen, so daß

$$0 \leq x_n \leq 1 - x_1 - \dots - x_{n-1}, \dots, \quad 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1$$

gilt. In unseren Berechnungen brauchen wir diese Ausdrücke bis zu $n = 3$.

Die zweite wichtige Formel ist das Hilfsintegral

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n}$$

über den D -dimensionalen Phasenraum mit einem reellen Parameter $\epsilon > 0$. Nehmen wir vorläufig an, daß D eine natürliche Zahl sei. Dann kann der Viererimpuls-Vektor in der Form $k_\mu = (k_0, k_1, \dots, k_{D-1})$ geschrieben werden, und sein Betrag ist durch $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ gegeben mit $\vec{k}^2 = \sum_{i=1}^{D-1} k_i^2$. Die Pole des Integranden sind durch die Nullstellen des Nenners $k^2 - A + i\epsilon = 0$ gegeben. Zur Auswertung des Integrals beginnt man mit der k_0 -Integration, die mit Hilfe des Residuensatzes durch Fortsetzung in die komplexe Ebene durchgeführt wird. Die Pole in der k_0 -Ebene liegen bei

$$k_0 = \pm \omega_0 \equiv \pm \sqrt{\vec{k}^2 + A - i\epsilon}.$$

Der infinitesimale Beitrag $i\epsilon$ verschiebt die Pole um ein kleines Stück von der reellen Achse nach oben beziehungsweise nach unten. Ihre Position ist in Abbildung B.1 dargestellt. Legt man den Integrationsweg über die dort ebenfalls gezeigte geschlossene Kurve C , so enthält der von der Kurve eingeschlossene Bereich keine Pole. Deshalb ist nach dem Residuensatz

$$\int_C dk_0 \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} = 0. \quad (\text{B.25})$$

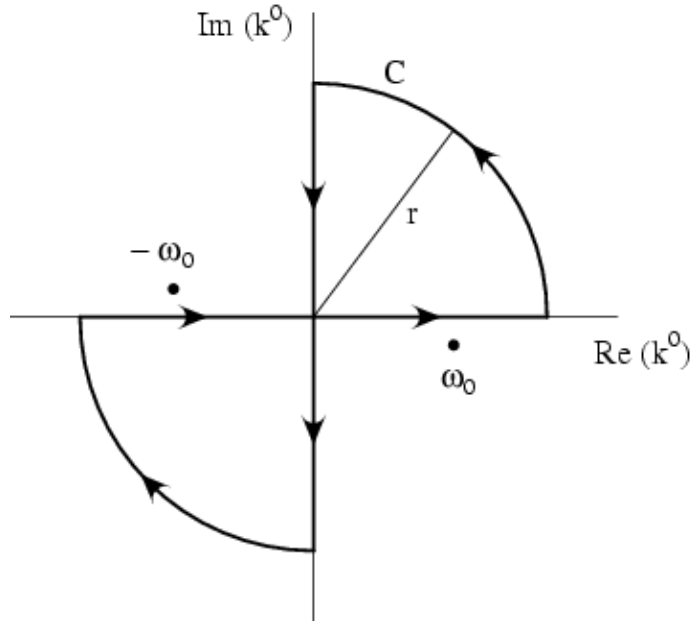


Abbildung B.1: Wick-Rotation und Integrationswege in der komplexen k_0 -Ebene. Die Pole werden um einen kleinen Betrag von der reellen Achse nach $k_0 = \pm \omega_0$ verschoben.

Die Beiträge der beiden Kreissegmente von C verschwinden im Grenzfall eines unendlich großen Radius $r \rightarrow \infty$, weil mit der Parametrisierung $k_0 = r e^{i\phi}$ der Betrag des Integranden

$$\left| \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} \right| = \left| \frac{1}{(a^2 e^{2i\phi} - \vec{k}^2 - A + i\epsilon)^n} \right| = \frac{1}{a^{2n}} \frac{1}{\left| \left[e^{2i\phi} - \frac{1}{a^2} (\vec{k}^2 + A - i\epsilon) \right]^n \right|} \quad (\text{B.26})$$

gegen null konvergiert. Somit kann das Integral über die Kurve C zu einem über die reelle und die imaginäre Achse vereinfacht werden. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} + \int_{i\infty}^{-i\infty} dk_0 \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} = 0$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} = \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n}. \quad (\text{B.27})$$

Das Integral auf der rechten Seite, das dem Teil der Kurve C entlang der imaginären Achse entspricht, kann durch eine Wick-Rotation in eines entlang der reellen Achse transformiert werden. Dabei dreht man den Integrationsweg um den Winkel $-\pi/2$, indem man die Substitution

$$k_0 = i k_{E,0}, \quad k_i = k_{E,i}$$

verwendet und damit den Vektor k im Minkowski-Raum auf einen euklidischen Vektor k_E transformiert. Auf diese Weise werden bei der Wick-Drehung die Pole in der komplexen

Ebene nicht überstrichen. Das Integral kann dann als

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{(k_0^2 - \vec{k}^2 - A + i\epsilon)^n} = i \int_{-\infty}^{\infty} dk_{E,0} \frac{1}{(-k_{E,0}^2 - \vec{k}_E^2 - A + i\epsilon)^n} \quad (\text{B.28})$$

geschrieben werden. Das wird benutzt, um das Ausgangsintegral über den gesamten D -dimensionalen Impulsraum zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int d^{D-1} \vec{k} \frac{1}{(k_0^2 - \vec{k}^2 - A + i\epsilon)^n} \\ &= \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \int d^{D-1} \vec{k} \frac{1}{(k_0^2 - \vec{k}^2 - A + i\epsilon)^n} \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} dk_{E,0} \int d^{D-1} \vec{k}_E \frac{1}{(-k_{E,0}^2 - \vec{k}_E^2 - A + i\epsilon)^n} \\ &= i(-1)^n \int d^D k_E \frac{1}{(k_E^2 + A - i\epsilon)^n} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

mit $k_E^2 = k_{E,0}^2 + \vec{k}_E^2$. Das euklidische Integrationselement kann nun mit D -dimensionalen Polarkoordinaten ausgerechnet werden. Dazu schreibt man

$$d^D k_E = k_E^{D-1} dk_E d\Omega_D = (k_E^2)^{\frac{D-1}{2}} dk_E d\Omega_D = \frac{1}{2} (k_E^2)^{\frac{D}{2}-1} d(k_E^2) d\Omega_D \quad (\text{B.30})$$

mit dem Betrag des euklidischen Impulsvektors k_E und dem D -dimensionalen Raumwinkelement. Der Integrand hängt, wie man sofort sieht, nicht vom Raumwinkel ab. Deshalb kann dieser sofort integriert werden und ergibt die Oberfläche der D -dimensionalen Kugel

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})}.$$

Das gesuchte Integral ist dann

$$\begin{aligned} I_n &= \int d^D k \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} \\ &= i(-1)^n \int d\Omega_D \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (k_E^2)^{\frac{D}{2}-1} \frac{1}{(k_E^2 + A - i\epsilon)^n} d(k_E^2) \\ &= i(-1)^n \int d\Omega_D \int_0^{\infty} d\left(\frac{k_E^2}{A - i\epsilon}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{k_E^2}{A - i\epsilon}\right)^{\frac{D}{2}-1} \left(1 + \frac{k_E^2}{A - i\epsilon}\right)^{-n} (A - i\epsilon)^{\frac{D}{2}-n} \\ &= i(-1)^n \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{2} B\left(\frac{D}{2}, n - \frac{D}{2}\right) (A - i\epsilon)^{\frac{D}{2}-n} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

mit der Definition der Beta-Funktion

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Das Endergebnis ist demnach

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - A + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} (A - i\epsilon)^{\frac{D}{2} - n}. \quad (\text{B.32})$$

Dieser Ausdruck ist für beliebige komplexe D analytisch fortsetzbar. Damit kann das gesuchte Hilfsintegral auch bei beliebiger Dimension $D = 4 - 2\epsilon$ berechnet werden. Da der infinitesimale Imaginärteil $i\epsilon$ im Nenner des Integranden nur aus dem Grunde eingeführt wurde, um bei der Integration die Pole in der geeigneten Art und Weise zu umgehen, kann nach Ausführung der Integration $\epsilon \rightarrow 0$ gesetzt werden, und man bekommt dann einen expliziten Ausdruck, der nicht mehr von ϵ abhängt.

Wir werden uns jetzt der Berechnung des skalaren 1-Punkt-Integrals zuwenden. Dazu kann man direkt das Hilfsintegral (B.32) für $n = 1$ und $A = m^2$ verwenden und erhält

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1(m^2) \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2} \\ &= \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} (-i) \pi^{D/2} \Gamma(-1 + \epsilon) (m^2)^{D/2-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Um nun die UV -Singularität explizit anzugeben, entwickelt man das Resultat um $D = 4$ in eine Taylor-Reihe erster Ordnung. Dazu schreibt man gemäß Definition $D = 4 - 2\epsilon$ und entwickelt alle Ausdrücke, die D enthalten, bis zur Ordnung ϵ . Dafür verwendet man die Reihendarstellungen um $x = 0$ für die Exponentialfunktion

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

sowie für die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x)$$

und die Potenz-Funktion

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Hier ist γ die Euler-Konstante und α ist eine beliebige reelle Zahl. Unter Benutzung der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

der Gamma-Funktion kann man dann die Entwicklung von

$$\Gamma(-1 + \epsilon) = \frac{\Gamma(\epsilon)}{-1 + \epsilon} = -\Gamma(\epsilon)(1 - \epsilon)^{-1} = -\frac{1}{\epsilon} - 1 + \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

angeben. Die Reihenentwicklung der übrigen Faktoren in I_1 hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \pi^{D/2} &= \pi^{2-\epsilon} = \pi^2 \exp[-\epsilon \ln(\pi)] = \pi^2 [1 - \epsilon \ln(\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\ A^{D/2-n} &= A^{2-n-\epsilon} = A^{2-n} \exp[-\epsilon \ln(A)] = A^{2-n} [1 - \epsilon \ln(A) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\ \mu^{4-D} &= \mu^{2\epsilon} = \exp[\epsilon \ln(\mu^2)] = 1 + \epsilon \ln(\mu^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ (2\pi)^{-D} &= (2\pi)^{2\epsilon-4} = (2\pi)^{-4} \exp[\epsilon \ln(4\pi^2)] = (2\pi)^{-4} [1 + \epsilon \ln(4\pi^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Das Produkt dieser Faktoren hat nun in erster Ordnung ϵ folgende Form

$$\pi^{D/2} A^{D/2-n} \mu^{4-D} (2\pi)^{-D} = \frac{A^{2-n}}{16\pi^2} \left[1 + \epsilon \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{A}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]. \quad (\text{B.35})$$

Damit kann man schließlich das skalare Integral (B.33) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} I_1(m^2) &= \frac{-im^2}{16\pi^2} \left[1 + \epsilon \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \left(-\frac{1}{\epsilon} - 1 + \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\ &= \frac{im^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &= \frac{im^2}{16\pi^2} \left[\Delta + 1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

wenn man höhere Ordnungen in ϵ vernachlässigt und die Definition $\Delta = 1/\epsilon - \gamma + \ln(4\pi)$ verwendet.

Als nächstes wollen wir das skalare 2-Punkt-Integral berechnen. Dazu brauchen wir die Feynman-Parametrisierung (B.24) für den Fall $n = 2$. Wir verwenden außerdem wieder das Hilfsintegral (B.32) und benutzen anschließend die Taylor-Entwicklungen der Gamma-Funktion und der Faktoren in (B.35). Wenn man noch die Translationsinvarianz des Integrals berücksichtigt, lautet das skalare Integral

$$\begin{aligned} I_2 &= I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(q - k)^2 - m_b^2] [k^2 - m_c^2]} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{[((q - k)^2 - m_b^2)x + (k^2 - m_c^2)(1 - x)]^2} \\ &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xqk + x(q^2 - m_b^2) - (1 - x)m_c^2]^2} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k-xq)^2 - x^2 q^2 + x(q^2 - m_b^2) - (1-x)m_c^2]^2} \\
 &= \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + x(1-x)q^2 - xm_b^2 - (1-x)m_c^2]^2} \\
 &= i \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \pi^{D/2} \Gamma(\epsilon) [xm_b^2 + (1-x)m_c^2 - x(1-x)q^2]^{D/2-2} \\
 &= i\Gamma(\epsilon) \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[1 + \epsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{xm_b^2 + (1-x)m_c^2 - x(1-x)q^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{xm_b^2 + (1-x)m_c^2 - x(1-x)q^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi\mu^2) - \int_0^1 dx \ln(x^2 q^2 + x(m_b^2 - m_c^2 - q^2) + m_c^2) \right] + \mathcal{O}(\epsilon).
 \end{aligned}$$

Um das verbliebene Integral auszuwerten, zerlegt man das Argument des Logarithmus in ein Produkt, das die Form

$$q^2 x^2 + x(m_b^2 - m_c^2 - q^2) + m_c^2 = q^2(x+x_1)(x+x_2) \quad (\text{B.38})$$

hat mit

$$x_1 = \frac{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{2q^2}, \quad x_2 = \frac{m_b^2 - m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}}{2q^2},$$

wobei die Funktion λ in (B.23) definiert wurde. Damit ist das Integral in der letzten Zeile von (B.37)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dx \ln[q^2(x+x_1)(x+x_2)] \quad (\text{B.39}) \\
 &= \ln(q^2) + (x+x_1) [\ln(x+x_1) - 1] \Big|_0^1 + (x+x_2) [\ln(x+x_2) - 1] \Big|_0^1 \\
 &= \ln(q^2) + \ln[(1+x_1)(1+x_2)] + x_1 \ln\left(\frac{1+x_1}{x_1}\right) + x_2 \ln\left(\frac{1+x_2}{x_2}\right) - 2 \\
 &= \ln(q^2) + \ln[(1+x_1)(1+x_2)] - 2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[(x_1+x_2) \ln\left(\frac{x_1}{1+x_1} \frac{x_2}{1+x_2}\right) + (x_1-x_2) \ln\left(\frac{1+x_2}{1+x_1} \frac{x_1}{x_2}\right) \right] \\
 &= \ln(m_b^2) - \frac{m_b^2 - m_c^2 - q^2}{2q^2} \ln\left(\frac{m_c^2}{m_b^2}\right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln\left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}}\right) - 2.
 \end{aligned}$$

Setzt man dieses Resultat in (B.37) ein, so erhält man für das skalare 2-Punkt-Integral

$$I_2(q^2, m_b^2, m_c^2) = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 2 + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_b^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_b^2 - m_c^2 - q^2}{2q^2} \ln\left(\frac{m_c^2}{m_b^2}\right) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln\left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}}\right) \Big] \\
= & \frac{i}{16\pi^2} \left[\Delta + 2 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_b m_c}\right) + \frac{m_b^2 - m_c^2}{q^2} \ln\left(\frac{m_c}{m_b}\right) \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\lambda}}{2q^2} \ln\left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}}\right) \right] \quad (\text{B.40})
\end{aligned}$$

mit $\Delta = 1/\epsilon - \gamma + \ln(4\pi)$. Es werden außerdem 2 Spezialfälle dieses Integrals benötigt, die man am schnellsten aus (B.37) berechnen kann. Das erste dieser Integrale geht aus $I_2(q^2, m_b^2, m_c^2)$ hervor, indem eine der beiden Massen null gesetzt wird. Man erhält

$$\begin{aligned}
I_2(p_q^2, m_q^2) & \equiv I_2(p_q^2, m_q^2, 0) \\
& = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi\mu^2) - \int_0^1 dx \ln(x^2 p_q^2 + x(m_q^2 - p_q^2)) \right] \\
& = \frac{i}{16\pi^2} \left[\Delta + 2 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_q^2}\right) + \frac{m_q^2 - p_q^2}{p_q^2} \ln\left(\frac{m_q^2 - p_q^2}{m_q^2}\right) \right]. \quad (\text{B.41})
\end{aligned}$$

Im zweiten Integral sind die ersten beiden Argumente gleich und das dritte ist null, so daß

$$\begin{aligned}
I_2(m_q^2) & \equiv I_2(m_q^2, m_q^2, 0) = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi\mu^2) - \int_0^1 dx \ln(x^2 m_q^2) \right] \\
& = \frac{i}{16\pi^2} \left[\Delta + 2 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_q^2}\right) \right] \quad (\text{B.42})
\end{aligned}$$

ist.

Zum Schluß wollen wir das skalare 3-Punkt-Integral berechnen. Wir verwenden wieder die Feynman-Parametrisierung (B.24) für $n = 3$, um den Nenner des Integranden in geeigneter Weise umzuschreiben. Wie im Fall der 1- und 2-Punkt-Integrale benötigen wir auch das Hilfsintegral (B.32). Die einzelnen Schritte bei der Berechnung sind analog zu denen des 2-Punkt-Integrals. Man beachte, daß das 3-Punkt-Integral nicht UV -divergent ist, wie sich am schnellsten durch Abzählen der Potenzen von k einsehen läßt. Man kann daher schon zu Beginn $D = 4$ setzen. Außerdem kann man, da sich die Quarks in diesem Fall auf der Massenschale befinden, die Massenschalenbedingung $p_q^2 = m_q^2$ benutzen, um die Propagatornenner zu vereinfachen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
I_3 & = I_3(q^2, m_b^2, m_c^2, m^2) \\
& = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p_b - k)^2 - m_b^2] [(p_c - k)^2 - m_c^2] [k^2 - m^2]} \\
& = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p_b) (k^2 - 2p_c \cdot k) (k^2 - m^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2}{[x(k^2 - 2p_b \cdot k) + y(k^2 - 2p_c \cdot k) + (1-x-y)(k^2 - m^2)]^3} \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2}{[k^2 - (2xp_b + 2yp_c) \cdot k - (1-x-y)m^2]^3} \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{[(k - xp_b - yp_c)^2 - m^2(1-x-y) - (xp_b + yp_c)^2]^3} \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{[k^2 - m^2(1-x-y) - (xp_b + yp_c)^2]^3} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{m^2(1-x-y) + (xp_b + yp_c)^2} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{u}{m^2(1-u) + u^2(vp_b + (1-v)p_c)^2}, \tag{B.43}
 \end{aligned}$$

wo im letzten Schritt die Substitution

$$x = uv, \quad y = u(1-v)$$

mit der Funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

verwendet wurde. Es ist zweckmäßig, nun zuerst die u -Integration auszuführen. Mit der Abkürzung $p = vp_b + (1-v)p_c$ kann man das Integral

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{u}{m^2(1-u) + p^2 u^2} du \tag{B.44} \\
 &= \frac{1}{2p^2} \left[\frac{2m}{\sqrt{4p^2 - m^2}} \arctan \left(\frac{2p^2 u - m^2}{m\sqrt{4p^2 - m^2}} \right) + \ln(m^2(1-u) + p^2 u^2) \right] \Big|_0^1
 \end{aligned}$$

berechnen und entwickelt es dann bis zur ersten Ordnung in der Gluonmasse m . Der Arcustangens-Term kann nach Einsetzen der Integrationsgrenzen als

$$\frac{1}{\sqrt{4p^2 - m^2}} \arctan \left(\frac{2p^2 u - m^2}{m\sqrt{4p^2 - m^2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4\sqrt{p^2}} + \mathcal{O}(m) \tag{B.45}$$

geschrieben werden. Damit fällt der erste Term des Integrals (B.44) weg, da er von der Ordnung m ist. Der zweite Term ergibt schließlich

$$\frac{1}{2p^2} \ln[m^2(1-u) + p^2 u^2] \Big|_0^1 = \frac{1}{2p^2} [\ln(p^2) - \ln(m^2)] = \frac{1}{2p^2} \ln \left(\frac{p^2}{m^2} \right). \tag{B.46}$$

Für die weitere Auswertung schreibt man

$$p^2 = (v p_b + (1 - v) p_c)^2 = q^2 v^2 - 2v(m_c^2 - p_b \cdot p_c) + m_c^2 = q^2(v + v_1)(v + v_2) \quad (\text{B.47})$$

mit

$$v_{1,2} = \frac{m_b^2 - m_c^2 - q^2 \pm \sqrt{\lambda}}{2q^2}, \quad (\text{B.48})$$

wobei die Lambda-Funktion in (B.23) angegeben wurde. Mit diesen Resultaten kann man das skalare 3-Punkt-Integral (B.43) weiter vereinfachen und erhält schließlich nach Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(m^2)$

$$\begin{aligned} I_3 &= I_3(q^2, m_b^2, m_c^2, m^2) = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{dv}{2(v p_b + (1 - v) p_c)^2} \ln \left[\frac{(v p_b + (1 - v) p_c)^2}{m^2} \right] \\ &= \frac{-i}{16\pi^2} \times \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dv}{q^2(v + v_1)(v + v_2)} \ln \left[\frac{q^2(v + v_1)(v + v_2)}{m^2} \right] \\ &= \frac{-i}{16\pi^2} \times \frac{1}{2q^2} \int_0^1 \frac{dv}{(v + v_1)(v + v_2)} \left[\ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \ln(v + v_1) + \ln(v + v_2) \right] \\ &= \frac{-i}{16\pi^2} \frac{1}{2q^2} \frac{1}{v_1 - v_2} \left\{ \ln \left(\frac{v + v_2}{v + v_1} \right) \ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{v + v_2}{v + v_1} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \ln [(v + v_1)^3(v + v_2)] - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{v_1 - v_2}{v + v_1} \right) \right\} \Big|_0^1 \\ &= \frac{-i}{16\pi^2} \frac{1}{2q^2} \frac{1}{v_1 - v_2} \left[\ln \left(\frac{1 + v_2}{1 + v_1} \frac{v_1}{v_2} \right) \ln \left(\frac{m_b m_c}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{v_1}{1 + v_1} \right) \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \frac{1 + v_1}{1 + v_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{v_1 - v_2}{1 + v_1} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1} \right) \right] \\ &= \frac{-i}{16\pi^2} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[\ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{m_b^2 + m_c^2 - q^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{m_b m_c}{m^2} \right) \right. \\ &\quad + \ln \left(\frac{m_b^2 + m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}}{2m_b^2} \right) \ln \left(\frac{(m_b^2 - m_c^2 + \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2}{(m_b^2 - m_c^2 - \sqrt{\lambda})^2 - (q^2)^2} \right) \\ &\quad \left. - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 + q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{m_b^2 - m_c^2 - q^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right]. \end{aligned}$$

In der vorletzten Identität wurden die beiden Relationen $(1 + v_1)(1 + v_2) = m_b^2/q^2$ und $v_1 v_2 = m_c^2/q^2$ benutzt.

Anhang C

Der Dilogarithmus

In diesem Anhang sollen die wichtigsten Relationen zwischen Dilogarithmen angegeben werden. Eine ausführliche Behandlung findet man im Buch von Lewin [100].

C.1 Definition und Eigenschaften

Definition des Dilogarithmus:

$$\operatorname{Li}_2(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad |x| \leq 1 \quad (\text{C.1})$$

Eigenschaften:

$$\operatorname{Li}_2(0) = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\operatorname{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{C.3})$$

$$\operatorname{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12} \quad (\text{C.4})$$

C.2 Dilogarithmen mit einer Variablen

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x) \quad (\text{C.5})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(-\frac{x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2(1-x), \quad x < 1 \quad (\text{C.6})$$

$$\operatorname{Li}_2(1-x) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln(x) \ln\left[\frac{x}{(x-1)^2}\right] - \frac{\pi^2}{6}, \quad x > 1 \quad (\text{C.7})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_2(-x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln(1+x) \ln\left(\frac{1+x}{x^2}\right) \quad (\text{C.8})$$

$$\operatorname{Li}_2(-x) + \operatorname{Li}_2\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2(x) - \frac{\pi^2}{6}, \quad x > 0 \quad (\text{C.9})$$

$$\operatorname{Li}_2(-x) - \operatorname{Li}_2(1-x) = -\frac{1}{2} \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln(x) \ln\left(\frac{x-1}{x}\right), \quad x > 1 \quad (\text{C.10})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(-x) = \frac{1}{2} \operatorname{Li}_2(x^2) \quad (\text{C.11})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2(x) + \frac{\pi^2}{3} - i\pi \ln(x), \quad x > 1 \quad (\text{C.12})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2(x-1) + \frac{\pi^2}{2} + i\pi \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right), \quad x > 1 \quad (\text{C.13})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) - \operatorname{Li}_2(-x) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ln(x) + \frac{\pi^2}{4} \quad (\text{C.14})$$

C.3 Dilogarithmen mit zwei Variablen

Identität von Abel:

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1-x} \frac{y}{1-y}\right) &= \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1-y}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{1-x}\right) - \operatorname{Li}_2(x) - \operatorname{Li}_2(y) \\ &\quad - \ln(1-x) \ln(1-y) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Identität von Hill:

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2(xy) &= \operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(y) - \operatorname{Li}_2\left[\frac{x(1-y)}{1-xy}\right] - \operatorname{Li}_2\left[\frac{y(1-x)}{1-xy}\right] \\ &\quad - \ln\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) \ln\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Identität von Schaeffer:

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2\left[\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right] &= \operatorname{Li}_2(x) - \operatorname{Li}_2(y) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{x}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{1-y}\right) \\ &\quad + \ln(x) \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Anhang D

Grundintegrale

Im folgenden werden alle Integraltypen aufgelistet, die bei der Berechnung der Bremsstrahlungskorrekturen zu den Helizitätsraten für den Prozeß $b \rightarrow c + W^-$ vorkommen.

D.1 Definition der Grundintegrale

Die Grundintegrale sind definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(m, n) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \lambda^m z^n, & \mathcal{S}(m, n) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \lambda^m z^n \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda}} \right) \\ \mathcal{T}(m) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \frac{\lambda^m}{z-y^2}, & \mathcal{U}(m) &= \int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz \frac{\lambda^m}{z-y^2} \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda}} \right)\end{aligned}\tag{D.1}$$

mit

$$\lambda \equiv \lambda(1, x^2, z) = 1 + x^4 + z^2 - 2(x^2 + z + x^2 z) \text{ und } \epsilon_1, \epsilon_2 > 0,$$

wobei die Grenzwerte $\epsilon_1 \rightarrow 0$ und $\epsilon_2 \rightarrow 0$ zu bilden sind, wenn sie existieren. Einige der Integrale besitzen logarithmische Singularitäten in ϵ_1 oder ϵ_2 , welche allerdings nur Scheinsingularitäten darstellen, die sich in den Helizitäts-Raten wieder gegenseitig aufheben. Nach der Substitution

$$z = 1 + x^2 - x \frac{u^2 + 1}{u}, \quad dz = x \frac{u^2 - 1}{u^2} du\tag{D.2}$$

gehen die Integrale über in

$$\int_{y^2+\epsilon_1}^{(1-x)^2-\epsilon_2} dz f(z) = \int_{1+\epsilon}^{u_{max} (1-\epsilon')} du \frac{dz}{du} f(z(u))\tag{D.3}$$

mit

$$u_{max} \equiv \eta = \frac{1 + x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}}{2x}\tag{D.4}$$

und

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{x}} + \mathcal{O}(\epsilon_2), \quad \epsilon' = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\lambda}} + \mathcal{O}(\epsilon_1^2). \quad (\text{D.5})$$

Die Funktion λ ist definiert durch

$$\lambda(1, x^2, y^2) = 1 + x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2 + 2x^2y^2). \quad (\text{D.6})$$

D.2 Explizite Darstellung der auftretenden Integrale im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon' \rightarrow 0$

Integrale vom Typ $\mathcal{R}(m, n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-1, -2) &= \frac{(1-x)^2 - y^2}{y^2(1-x)^4(1+x)^2} - \frac{1}{2x(1+x)^4} \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + \frac{1}{2x(1-x)^4} \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon}\right) \\ &+ \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^4} \ln\left[\frac{(1-x)^2}{(\eta-x)(1-\eta x)}\right] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-1, -1) &= -\frac{1}{2x(1+x)^2} \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + \frac{1}{2x(1-x)^2} \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon}\right) \\ &+ \frac{1}{(1-x^2)^2} \ln\left[\frac{(1-x)^2}{(\eta-x)(1-\eta x)}\right] \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\mathcal{R}(-1, 0) = -\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon}\right) \quad (\text{D.9})$$

$$\mathcal{R}(-1, 1) = -\frac{(1+x)^2}{2x} \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + \frac{(1-x)^2}{2x} \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon}\right) + \ln(\eta) \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-1, 2) &= (1-x)^2 - y^2 - \frac{(1+x)^4}{2x} \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + \frac{(1-x)^4}{2x} \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon}\right) \\ &+ 2(1+x^2) \ln(\eta) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-1, 3) &= \frac{1}{2} \left[(1-x)^2 - y^2 \right] (5 - 2x + 5x^2 + y^2) - \frac{(1+x)^6}{2x} \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) \\ &+ \frac{(1-x)^6}{2x} \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon}\right) + (3+x^2)(1+3x^2) \ln(\eta) \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\mathcal{R}(-1/2, -2) = \frac{\sqrt{\lambda}}{y^2 (1-x^2)^2} + \frac{1+x^2}{(1-x^2)^3} \ln\left(\frac{\eta-x}{1-\eta x}\right) \quad (\text{D.13})$$

$$\mathcal{R}(-1/2, -1) = \frac{1}{1-x^2} \ln\left(\frac{\eta-x}{1-\eta x}\right) \quad (\text{D.14})$$

$$\mathcal{R}(-1/2, 0) = \ln(\eta) \quad (\text{D.15})$$

$$\mathcal{R}(-1/2, 1) = -\sqrt{\lambda} + (1+x^2) \ln(\eta) \quad (\text{D.16})$$

$$\mathcal{R}(-1/2, 2) = -\frac{1}{2} (3+3x^2+y^2) \sqrt{\lambda} + (1+4x^2+x^4) \ln(\eta) \quad (\text{D.17})$$

$$\mathcal{R}(0, -2) = \frac{(1-x)^2 - y^2}{(1-x)^2 y^2} \quad (\text{D.18})$$

$$\mathcal{R}(0, -1) = 2 \ln\left(\frac{1-x}{y}\right) \quad (\text{D.19})$$

$$\mathcal{R}(0, 0) = (1-x)^2 - y^2 \quad (\text{D.20})$$

$$\mathcal{R}(0, 1) = \frac{1}{2} (1-x)^4 - \frac{y^4}{2} \quad (\text{D.21})$$

$$\mathcal{R}(1/2, -2) = \frac{\sqrt{\lambda}}{y^2} + \ln(\eta) - \frac{1+x^2}{1-x^2} \ln\left(\frac{\eta-x}{1-\eta x}\right) \quad (\text{D.22})$$

$$\mathcal{R}(1/2, -1) = -\sqrt{\lambda} - (1+x^2) \ln(\eta) + (1-x^2) \ln\left(\frac{\eta-x}{1-\eta x}\right) \quad (\text{D.23})$$

$$\mathcal{R}(1/2, 0) = \frac{1}{2} (1+x^2-y^2) \sqrt{\lambda} - 2x^2 \ln(\eta) \quad (\text{D.24})$$

Integrale vom Typ $\mathcal{S}(m, n)$:

$$\mathcal{S}(-3/2, 0) = \frac{1}{2x(1-x)} - \frac{1}{2x(1+x)} \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + \frac{1}{2x(1-x)} \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon}\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(1-x^2)} \ln \left[\frac{(1-x)^2}{(\eta-x)(1-\eta x)} \right] + \frac{\eta}{2x\sqrt{\lambda}} \ln(\eta) + \frac{1}{2x^2} \ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right) \\
& - \frac{1}{2\eta x\sqrt{\lambda}} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \tag{D.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-3/2, 1) & = \frac{1-x}{2x} - \frac{1+x}{2x} \ln \left(\frac{\eta+1}{2} \right) + \frac{1-x}{2x} \ln \left(\frac{\eta-1}{\epsilon} \right) \\
& - \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(1-x)^2}{(\eta-x)(1-\eta x)} \right] + \frac{\eta}{2x} \left(1 + \frac{y^2}{\sqrt{\lambda}} \right) \ln(\eta) \\
& + \frac{1}{2x^2} \ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\eta x} \left(1 - \frac{y^2}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \tag{D.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-3/2, 2) & = \frac{(1-x)^3}{2x} - \frac{(1+x)^3}{2x} \ln \left(\frac{\eta+1}{2} \right) + \frac{(1-x)^3}{2x} \ln \left(\frac{\eta-1}{\epsilon} \right) \\
& + \frac{1}{2x^2} \left[1 + 6x^2 + x^4 + \frac{(1-x)^4}{2(\eta-1)} - \frac{(1+x)^4}{2(\eta+1)} \right] \ln(\eta) \\
& + \frac{1-x^4}{2x^2} \ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left[-(3+x^2) - \frac{(1-x)^4}{2x^2(\eta-1)} + \frac{(1+x)^4}{2x^2(\eta+1)} \right] \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \\
& + \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + \text{Li}_2(x\eta) - 2\text{Li}_2(x) \tag{D.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-3/2, 3) & = \frac{(1-x)^5}{2x} - [(1-x)^2 - y^2] - \frac{(1+x)^5}{2x} \ln \left(\frac{\eta+1}{2} \right) \\
& + \frac{(1-x)^5}{2x} \ln \left(\frac{\eta-1}{\epsilon} \right) \\
& + \left[\frac{1+17x^2+13x^4+x^6}{2x^2} + \sqrt{\lambda} + \frac{(1-x)^6}{4x^2(\eta-1)} - \frac{(1+x)^6}{4x^2(\eta+1)} \right] \ln(\eta) \\
& + \frac{1-x^2}{2x^2} (1+10x^2+x^4) \ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1}{2} (3 + 12x^2 + x^4) + \sqrt{\lambda} + \frac{(1-x)^6}{4x^2(\eta-1)} - \frac{(1+x)^6}{4x^2(\eta+1)} \right] \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \\
& + 3(1+x^2) \left[\text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + \text{Li}_2(x\eta) - 2\text{Li}_2(x) \right]
\end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-3/2, 4) &= \frac{\lambda}{4} + \frac{(1-x)^7}{2x} - \frac{1}{2} (7 + 9x^2) [(1-x)^2 - y^2] \\
& - \frac{(1+x)^7}{2x} \ln \left(\frac{\eta+1}{2} \right) + \frac{(1-x)^7}{2x} \ln \left(\frac{\eta-1}{\epsilon} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + 35x^2 + 70x^4 + 21x^6 + x^8}{x^2} + \sqrt{\lambda} [7(1+x^2) + y^2] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(1-x)^8}{2x^2(\eta-1)} - \frac{(1+x)^8}{2x^2(\eta+1)} \right\} \ln(\eta) \\
& + \frac{1-x^4}{2x^2} (1 + 28x^2 + x^4) \ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right) \\
& - \frac{1}{2} \left\{ x^2 (35 + 28x^2 + x^4) + \sqrt{\lambda} [7(1+x^2) + y^2] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(1-x)^8}{2x^2(\eta-1)} - \frac{(1+x)^8}{2x^2(\eta+1)} \right\} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \\
& + 6(1 + 3x^2 + x^4) \left[\text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + \text{Li}_2(x\eta) - 2\text{Li}_2(x) \right]
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-1, 0) &= \frac{1}{2x} \left\{ \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta-1)x}{\eta-x} \right] + \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta-1)x}{1-x} \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \ln^2(1-x) + \ln \left(\frac{\eta}{\eta-x} \right) \ln \left[\frac{(\eta-1)x}{\eta-x} \right] \\
& \quad \left. + \ln(1-x) \ln \left(\frac{1-x}{\eta-x} \right) + \ln(1-\eta x) \ln \left[\frac{(\eta+1)x}{1+x} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{2x} \left\{ \text{Li}_2 \left(\frac{1-\eta x}{1+x} \right) - \text{Li}_2 \left[\frac{\eta-x}{\eta(1+x)} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\eta}{\eta-x} \right) \ln \left[\frac{\eta(\eta-1)^2(1+x)^2}{(\eta+1)^2(\eta-x)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{D.30}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-1, 1) &= \operatorname{Li}_2(x\eta) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right) + 2 \ln(1 - \eta x) \ln\left[\frac{(\eta + 1)x}{1 + x}\right] \\
&+ \ln\left(\frac{\eta}{\eta - x}\right) \ln\left[\frac{x^2(\eta - 1)^2}{\eta(\eta - x)}\right] \\
&+ \frac{(1 - x)^2}{2x} \left\{ \operatorname{Li}_2\left[\frac{(\eta - 1)x}{\eta - x}\right] + \operatorname{Li}_2\left[\frac{(\eta - 1)x}{1 - x}\right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln^2(1 - x) + \ln\left(\frac{\eta}{\eta - x}\right) \ln\left[\frac{(\eta - 1)x}{\eta - x}\right] \right. \\
&\quad \left. + \ln(1 - x) \ln\left(\frac{1 - x}{\eta - x}\right) + \ln(1 - \eta x) \ln\left[\frac{(\eta + 1)x}{1 + x}\right] \right\} \\
&+ \frac{(1 + x)^2}{2x} \left\{ \operatorname{Li}_2\left(\frac{1 - \eta x}{1 + x}\right) - \operatorname{Li}_2\left[\frac{\eta - x}{\eta(1 + x)}\right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\eta}{\eta - x}\right) \ln\left[\frac{\eta(\eta - 1)^2(1 + x)^2}{(\eta + 1)^2(\eta - x)}\right] \right\} \tag{D.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-1, 2) &= \sqrt{\lambda} - (2x^2 - y^2) \ln(\eta) - y^2 \ln\left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x}\right) \\
&+ 2(1 + x^2) \left\{ \operatorname{Li}_2(x\eta) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right) + 2 \ln(1 - \eta x) \ln\left[\frac{(\eta + 1)x}{1 + x}\right] \right. \\
&\quad \left. + \ln\left(\frac{\eta}{\eta - x}\right) \ln\left[\frac{x^2(\eta - 1)^2}{\eta(\eta - x)}\right] \right\} \\
&+ \frac{(1 - x)^4}{2x} \left\{ \operatorname{Li}_2\left[\frac{(\eta - 1)x}{\eta - x}\right] + \operatorname{Li}_2\left[\frac{(\eta - 1)x}{1 - x}\right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln^2(1 - x) + \ln\left(\frac{\eta}{\eta - x}\right) \ln\left[\frac{(\eta - 1)x}{\eta - x}\right] \right. \\
&\quad \left. + \ln(1 - x) \ln\left(\frac{1 - x}{\eta - x}\right) + \ln(1 - \eta x) \ln\left[\frac{(\eta + 1)x}{1 + x}\right] \right\} \\
&+ \frac{(1 + x)^4}{2x} \left\{ \operatorname{Li}_2\left(\frac{1 - \eta x}{1 + x}\right) - \operatorname{Li}_2\left[\frac{\eta - x}{\eta(1 + x)}\right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\eta}{\eta - x}\right) \ln\left[\frac{\eta(\eta - 1)^2(1 + x)^2}{(\eta + 1)^2(\eta - x)}\right] \right\} \tag{D.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-1, 3) &= \frac{1}{4} \sqrt{\lambda} (9 + 13x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \left[2x^2 (6 + 5x^2) - 4(1 + x^2)y^2 - y^4 \right] \ln(\eta) \\
&\quad - \frac{1}{2} y^2 \left[4(1 + x^2) + y^2 \right] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) \\
&\quad + (3 + x^2)(1 + 3x^2) \left\{ \text{Li}_2(x\eta) - \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + 2 \ln(1 - \eta x) \ln \left[\frac{(\eta + 1)x}{1 + x} \right] \right. \\
&\quad \quad \left. + \ln \left(\frac{\eta}{\eta - x} \right) \ln \left[\frac{x^2(\eta - 1)^2}{\eta(\eta - x)} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{(1 - x)^6}{2x} \left\{ \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta - 1)x}{\eta - x} \right] + \text{Li}_2 \left[\frac{(\eta - 1)x}{1 - x} \right] \right. \\
&\quad \quad - \frac{1}{2} \ln^2(1 - x) + \ln \left(\frac{\eta}{\eta - x} \right) \ln \left[\frac{(\eta - 1)x}{\eta - x} \right] \\
&\quad \quad \left. + \ln(1 - x) \ln \left(\frac{1 - x}{\eta - x} \right) + \ln(1 - \eta x) \ln \left[\frac{(\eta + 1)x}{1 + x} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{(1 + x)^6}{2x} \left\{ \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \eta x}{1 + x} \right) - \text{Li}_2 \left[\frac{\eta - x}{\eta(1 + x)} \right] \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\eta}{\eta - x} \right) \ln \left[\frac{\eta(\eta - 1)^2(1 + x)^2}{(\eta + 1)^2(\eta - x)} \right] \right\} \tag{D.33}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}(-1/2, 0) = \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + \text{Li}_2(x\eta) - 2\text{Li}_2(x) \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-1/2, 1) &= -[(1 - x)^2 - y^2] + \sqrt{\lambda} \ln(\eta) \\
&\quad - \sqrt{\lambda} \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) + 2(1 - x^2) \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right) \\
&\quad + (1 + x^2) \left[\text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + \text{Li}_2(x\eta) - 2\text{Li}_2(x) \right] \tag{D.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(-1/2, 2) &= -\frac{1}{4} [(1 - x)^2 - y^2] (5 - 2x + 9x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} [3(1 + x^2) + y^2] \ln(\eta) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} [3(1 + x^2) + y^2] \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) + 3(1 - x^4) \ln \left(\frac{1 - x}{y} \right)
\end{aligned}$$

$$+ (1 + 4x^2 + x^4) \left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right) + \operatorname{Li}_2(x\eta) - 2\operatorname{Li}_2(x) \right] \quad (\text{D.36})$$

$$\mathcal{S}(0,0) = \sqrt{\lambda} - (2x^2 - y^2) \ln(\eta) - y^2 \ln\left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x}\right) \quad (\text{D.37})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(0,1) &= \frac{1}{4} \sqrt{\lambda} (1 + 5x^2 + y^2) - \frac{1}{2} [2x^2(2 + x^2) - y^4] \ln(\eta) \\ &\quad - \frac{1}{2} y^4 \ln\left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Integrale vom Typ $\mathcal{T}(m)$:

$$\mathcal{T}(0) = \ln \left[\frac{(1-x)^2 - y^2}{\sqrt{\lambda} \epsilon'} \right] \quad (\text{D.39})$$

$$\mathcal{T}(1/2) = -\sqrt{\lambda} - 2\eta x \ln(\eta) + \sqrt{\lambda} \ln \left(\frac{\eta \sqrt{\lambda}}{x \epsilon'} \right) \quad (\text{D.40})$$

Integrale vom Typ $\mathcal{U}(m)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(-1/2) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2\operatorname{Li}_2\left(\frac{\eta \sqrt{\lambda}}{\eta - x}\right) - 2\operatorname{Li}_2\left[\frac{(\eta - 1)x}{1 - x}\right] - 2\operatorname{Li}_2\left[\frac{(\eta - 1)x}{\eta - x}\right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln^2\left[\frac{\eta(1 - \eta x)}{\eta - x}\right] - \ln^2\left(\frac{1 - x}{1 - \eta x}\right) \\ &\quad \left. + \ln\left[\frac{\eta(1 - \eta x)}{\eta - x}\right] \ln\left[\frac{(\eta + 1)\epsilon'}{\eta - 1}\right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0) &= -2\operatorname{Li}_2\left(\frac{\eta \sqrt{\lambda}}{\eta - x}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right) + \operatorname{Li}_2(x\eta) \\ &\quad + 2\ln(\eta) \ln(1 - \eta x) - \frac{1}{2} \ln^2\left[\frac{\eta(1 - \eta x)}{\eta - x}\right] \\ &\quad + \ln\left[\frac{\eta(1 - \eta x)}{\eta - x}\right] \ln\left(\frac{\epsilon'}{\eta^2 - 1}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Anhang E

Entwicklungskoeffizienten der Grundintegrale

Die Bremsstrahlungsbeiträge (5.99) für die verschiedenen Helizitäten können als Linearkombinationen der Grundintegrale aus Anhang D dargestellt werden. Im folgenden werden die Entwicklungskoeffizienten für die unterschiedlichen Helizitätsraten aufgelistet.

Unpolarisierte transversale Rate $\mathbf{X} = \mathbf{U}$

$$\begin{aligned} r_{U,0}(-1/2, -2) &= -(1-x^2)^3 y^2 \\ r_{U,0}(-1/2, -1) &= (1-x^2) \left[(1-x^2)^2 - (1-5x^2) y^2 - 2y^4 \right] \\ r_{U,0}(-1/2, 0) &= 1 - 6x^2 + 5x^4 - 3(5-x^2) y^2 - 2y^4 \\ r_{U,0}(-1/2, 1) &= 17 - 5x^2 + y^2 \\ r_{U,0}(-1/2, 2) &= 1 \\ s_{U,0}(-1, 0) &= 2y^2 \left[5 - x^2(4+x^2) + 2y^2 \right] \\ s_{U,0}(-1, 1) &= -2 \left[5 - x^2(4+x^2) - 2(2+x^2) y^2 \right] \\ s_{U,0}(-1, 2) &= -2(6 + 2x^2 + y^2) \\ s_{U,0}(-1, 3) &= 2 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Polarisierte unpolarisiert-transversale Rate $\mathbf{X} = \mathbf{U}^P$

$$\begin{aligned} r_{U,P}(-1, -2) &= -(1-x^2)^4 y^2 \\ r_{U,P}(-1, -1) &= (1-x^2)^2 \left[(1-x^2)^2 + 2(1+3x^2) y^2 - 2y^4 \right] \\ r_{U,P}(-1, 0) &= 2 \left[(1-x^2)^2(3+x^2) - 2(1+3x^4) y^2 - 2(5-x^2) y^4 \right] \\ r_{U,P}(-1, 1) &= -2 \left[9 + 10x^2 + 5x^4 - (27 + 5x^2) y^2 + y^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{U,P}(-1, 2) &= -(10 - 10x^2 + 3y^2) \\
r_{U,P}(-1, 3) &= -3 \\
s_{U,P}(0, 0) &= -4\sqrt{\lambda} \\
s_{U,P}(-3/2, 0) &= -2(1-x^2) \left[4x^2(1-x^2)^2 + (1+4x^2-5x^4)y^2 - 2(4-x^2)y^4 \right] \\
s_{U,P}(-3/2, 1) &= -2 \left[3 - 11x^2 - 3x^4 + 11x^6 + (9 - 22x^2 - 11x^4)y^2 \right. \\
&\quad \left. - 2(1-2x^2)y^4 \right] \\
s_{U,P}(-3/2, 2) &= 2 \left[13 + 11x^4 - (15 + 7x^2)y^2 + 2y^4 \right] \\
s_{U,P}(-3/2, 3) &= 2(1 - 5x^2 + y^2) \\
s_{U,P}(-3/2, 4) &= 2 \\
t_{U,P}(0) &= -8\lambda \\
t_{U,P}(1/2) &= 8\sqrt{\lambda} \\
u_{U,P}(-1/2) &= 4\lambda(1-x^2+y^2) \\
u_{U,P}(0) &= -4\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2) \tag{E.2}
\end{aligned}$$

Longitudinale Rate $\mathbf{X} = \mathbf{L}$

$$\begin{aligned}
r_{L,0}(-1/2, -2) &= -(1-x^2)^3 y^2 (1+y^2) \\
r_{L,0}(-1/2, -1) &= (1-x^2) \left[(1-x^2)^2 + (6+x^2-3x^4)y^2 + (5+3x^2)y^4 \right] \\
r_{L,0}(-1/2, 0) &= - \left[5 - 2x^2 - 7x^4 + 4x^6 + (12 - 33x^2 + x^4)y^2 + (7+x^2)y^4 \right] \\
r_{L,0}(-1/2, 1) &= 7 - 31x^2 + 4x^4 + (10+x^2)y^2 + 3y^4 \\
r_{L,0}(-1/2, 2) &= -3(1+y^2) \\
s_{L,0}(-1, 0) &= -2y^2 \left[1 + 10x^2 - 11x^4 + (1+x^2)^2 y^2 \right] \\
s_{L,0}(-1, 1) &= 2 \left[1 + 10x^2 - 11x^4 + (3 - 4x^2 + x^4)y^2 + 2(1+x^2)y^4 \right] \\
s_{L,0}(-1, 2) &= -2 \left[2 - 6x^2 + (3+2x^2)y^2 + y^4 \right] \\
s_{L,0}(-1, 3) &= 2(1+y^2) \tag{E.3}
\end{aligned}$$

Polarisierte longitudinale Rate $\mathbf{X} = \mathbf{L}^P$

$$\begin{aligned}
r_{L,P}(-1, -2) &= -(1-x^2)^4 y^2 (1-y^2) \\
r_{L,P}(-1, -1) &= (1-x^2)^2 \left[(1-x^2)^2 + (7-2x^2+3x^4)y^2 - 4(2+x^2)y^4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{L,P}(-1, 0) &= 2 \left[2x^2 (3 - x^2) (1 - x^2)^2 - (7 - 5x^4 + 6x^6) y^2 \right. \\
&\quad \left. + (7 - 18x^2 + 3x^4) y^4 \right] \\
r_{L,P}(-1, 1) &= -2 \left[5 + 10x^2 + 13x^4 - 4x^6 - (9 + 48x^2 + 11x^4) y^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(2 + x^2) y^4 \right] \\
r_{L,P}(-1, 2) &= 4(4 - 5x^2 - x^4) - (17 + 20x^2) y^2 + y^4 \\
r_{L,P}(-1, 3) &= -7(1 - y^2) \\
s_{L,P}(0, 0) &= -4\sqrt{\lambda}(1 - y^2) \\
s_{L,P}(-3/2, 0) &= -2(1 - x^2) \left[4x^2(1 - x^2)^2 + (7 - 10x^2 + 7x^4 - 4x^6) y^2 \right. \\
&\quad \left. - (9 + 8x^2 - 5x^4) y^4 + 2(1 - x^2) y^6 \right] \\
s_{L,P}(-3/2, 1) &= 2 \left[3 - 5x^2 + 17x^4 - 15x^6 + (12 - 9x^2 + 18x^4 + 11x^6) y^2 \right. \\
&\quad \left. - (19 + 14x^2 + 11x^4) y^4 + 4(1 + x^2) y^6 \right] \\
s_{L,P}(-3/2, 2) &= -2 \left[5 - 14x^2 - 7x^4 + (4 + 21x^2 + 11x^4) y^2 \right. \\
&\quad \left. - (11 + 7x^2) y^4 + 2y^6 \right] \\
s_{L,P}(-3/2, 3) &= 2(1 + 3x^2 + 5x^2 y^2 - y^4) \\
s_{L,P}(-3/2, 4) &= 2(1 - y^2) \\
t_{L,P}(0) &= -8\lambda(1 - y^2) \\
t_{L,P}(1/2) &= 8\sqrt{\lambda}(1 - y^2) \\
u_{L,P}(-1/2) &= 4\lambda(1 - x^2 + y^2)(1 - y^2) \\
u_{L,P}(0) &= -4\sqrt{\lambda}(1 - x^2 + y^2)(1 - y^2) \tag{E.4}
\end{aligned}$$

Totale Rate $\mathbf{X} = \mathbf{U} + \mathbf{L}$

$$\begin{aligned}
r_{U+L,0}(1/2, -2) &= -y^2(1 - x^2)(1 + 2x^2 + y^2) \\
r_{U+L,0}(1/2, -1) &= (1 - x^2)(1 + 2x^2) + (4 - 3x^2)y^2 + 3y^4 \\
r_{U+L,0}(1/2, 0) &= -(3 - 2x^2 + 3y^2) \\
s_{U+L,0}(0, 0) &= -2y^2(1 + 2x^2 + y^2) \\
s_{U+L,0}(0, 1) &= 2(1 + 2x^2 + y^2) \tag{E.5}
\end{aligned}$$

Polarisierte totale Rate $\mathbf{X} = \mathbf{U}^P + \mathbf{L}^P$

$$r_{U+L,P}(0, -2) = -y^2(1 - x^2)^2(1 - 2x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned}
r_{U+L,P}(0, -1) &= (1 - x^2)^2 (1 - 2x^2) + (5 - 4x^2 - 5x^4) y^2 - 2(3 - x^2) y^4 \\
r_{U+L,P}(0, 0) &= 2(1 + 2x^2)(1 - 3x^2) - 3y^2 + y^4 \\
r_{U+L,P}(0, 1) &= -7 + 6x^2 + 7y^2 \\
s_{U+L,P}(0, 0) &= -4\sqrt{\lambda}(1 - 2x^2 - y^2) \\
s_{U+L,P}(-1/2, 0) &= -2 \left[4x^2(1 - x^2)(1 - 2x^2) + (7 - 5x^2 - 6x^4) y^2 \right. \\
&\quad \left. - (9 + x^2) y^4 + 2y^6 \right] \\
s_{U+L,P}(-1/2, 1) &= 2 \left[3 - x^2 + 6x^4 - (2 - x^2) y^2 - y^4 \right] \\
s_{U+L,P}(-1/2, 2) &= 2(1 - 2x^2 - y^2) \\
t_{U+L,P}(0) &= -8\lambda(1 - 2x^2 - y^2) \\
t_{U+L,P}(1/2) &= 8\sqrt{\lambda}(1 - 2x^2 - y^2) \\
u_{U+L,P}(-1/2) &= 4\lambda(1 - x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - y^2) \\
u_{U+L,P}(0) &= -4\sqrt{\lambda}(1 - x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - y^2)
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Skalare Rate $\mathbf{X} = \mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
r_{S,0}(1/2, -2) &= -(1 - x^2) y^2 (1 + y^2) \\
r_{S,0}(1/2, -1) &= (1 + y^2)(1 - x^2 + 3y^2) \\
r_{S,0}(1/2, 0) &= -3(1 + y^2) \\
s_{S,0}(0, 0) &= -2y^2(1 + y^2) \\
s_{S,0}(0, 1) &= 2(1 + y^2)
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Polarisierte skalare Rate $\mathbf{X} = \mathbf{S}^P$

$$\begin{aligned}
r_{S,P}(0, -2) &= -(1 - x^2)^2 y^2 \\
r_{S,P}(0, -1) &= (1 - x^2)^2 + 2(3 - x^2) y^2 \\
r_{S,P}(0, 0) &= 2 + 10x^2 - y^2 \\
r_{S,P}(0, 1) &= -7 \\
s_{S,P}(0, 0) &= -4\sqrt{\lambda} \\
s_{S,P}(-1/2, 0) &= -2 \left[4x^2(1 - x^2) + (7 + 5x^2) y^2 - 2y^4 \right] \\
s_{S,P}(-1/2, 1) &= 2(3 - 3x^2 + y^2) \\
s_{S,P}(-1/2, 2) &= 2 \\
t_{S,P}(0) &= -8\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{S,P}(1/2) &= 8\sqrt{\lambda} \\
u_{S,P}(-1/2) &= 4\lambda(1-x^2+y^2) \\
u_{S,P}(0) &= -4\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2)
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Vorwärts-rückwärts-asymmetrische Rate $X = F$

$$\begin{aligned}
r_{F,0}(0, -2) &= (1-x^2)^2 y^2 \\
r_{F,0}(0, -1) &= -\left[(1-x^2)^2 + 4x^2 y^2\right] \\
r_{F,0}(0, 0) &= -4(2+x^2) + 7y^2 \\
r_{F,0}(0, 1) &= 1 \\
s_{F,0}(0, 0) &= 4\sqrt{\lambda} \\
s_{F,0}(-1/2, 0) &= 2\left[4x^2(1-x^2) + (1+5x^2)y^2 - 2y^4\right] \\
s_{F,0}(-1/2, 1) &= 2\left[3(1+x^2) - y^2\right] \\
s_{F,0}(-1/2, 2) &= -2 \\
t_{F,0}(0) &= 8\lambda \\
t_{F,0}(1/2) &= -8\sqrt{\lambda} \\
u_{F,0}(-1/2) &= -4\lambda(1-x^2+y^2) \\
u_{F,0}(0) &= 4\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2)
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Polarisierte vorwärts-rückwärts-asymmetrische Rate $X = F^P$

$$\begin{aligned}
r_{F,P}(-1/2, -2) &= (1-x^2)^3 y^2 \\
r_{F,P}(-1/2, -1) &= -(1-x^2)\left[(1-x^2)^2 - (1-5x^2)y^2\right] \\
r_{F,P}(-1/2, 0) &= -(1-x^2)(1-5x^2) + (11+x^2)y^2 \\
r_{F,P}(-1/2, 1) &= -(11+x^2+5y^2) \\
r_{F,P}(-1/2, 2) &= 5 \\
s_{F,P}(-1, 0) &= -2(1-x^2)(5+x^2)y^2 \\
s_{F,P}(-1, 1) &= 2\left[(1-x^2)(5+x^2) - 2x^2 y^2\right] \\
s_{F,P}(-1, 2) &= 2(2x^2+y^2) \\
s_{F,P}(-1, 3) &= -2
\end{aligned} \tag{E.10}$$

Polarisierte longitudinal-transversal-Interferenz-Rate $X = I^P$

$$r_{I,P}(-1, -2) = -(1-x^2)^4 y^2$$

$$\begin{aligned}
r_{I,P}(-1, -1) &= (1 - x^2)^2 \left[(1 - x^2)^2 + (3 + 5x^2)y^2 + 2y^4 \right] \\
r_{I,P}(-1, 0) &= (1 - x^2)^2 (5 + 3x^2) - (25 - 38x^2 + 29x^4)y^2 + 8(1 + x^2)y^4 \\
r_{I,P}(-1, 1) &= - \left[1 + 50x^2 - 3x^4 - (21 + 23x^2)y^2 + 10y^4 \right] \\
r_{I,P}(-1, 2) &= - (5 + 7x^2 - 2y^2) \\
s_{I,P}(0, 0) &= -4\sqrt{\lambda} \\
s_{I,P}(-3/2, 0) &= -2(1 - x^2) \left[4x^2(1 - x^2)^2 - (1 - 9x^2 + 8x^4)y^2 + 2(1 + 2x^2)y^4 \right] \\
s_{I,P}(-3/2, 1) &= -2 \left[5 - 18x^2 + 5x^4 + 8x^6 - 2(5 + x^2 + 8x^4)y^2 + 2(1 + 4x^2)y^4 \right] \\
s_{I,P}(-3/2, 2) &= 2 \left[4 + 12x^2 + 4x^4 - (11 + 8x^2)y^2 + 4y^4 \right] \\
s_{I,P}(-3/2, 3) &= 2 \\
t_{I,P}(0) &= -8\lambda \\
t_{I,P}(1/2) &= 8\sqrt{\lambda} \\
u_{I,P}(-1/2) &= 4\lambda(1 - x^2 + y^2) \\
u_{I,P}(0) &= -4\sqrt{\lambda}(1 - x^2 + y^2)
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Polarisierte paritäts-asymmetrische Rate $X = A^P$

$$\begin{aligned}
r_{A,P}(-1/2, -2) &= (1 - x^2)^3 y^2 \\
r_{A,P}(-1/2, -1) &= - (1 - x^2) \left[(1 - x^2)^2 + 4y^2 \right] \\
r_{A,P}(-1/2, 0) &= 4(1 - x^2) + (3 - 7x^2)y^2 \\
r_{A,P}(-1/2, 1) &= - (3 - 7x^2) \\
s_{A,P}(-1, 0) &= 2(1 - x^2)(1 + 2x^2)y^2 \\
s_{A,P}(-1, 1) &= -2 \left[(1 - x^2)(1 + 2x^2) + (1 - 2x^2)y^2 \right] \\
s_{A,P}(-1, 2) &= 2(1 - 2x^2)
\end{aligned} \tag{E.12}$$

Literaturverzeichnis

- [1] W. N. Cottingham und D. A. Greenwood, An Introduction to the Standard Model of Particle Physics, Cambridge University Press, Cambridge 1998.
- [2] C. Quigg, Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, Addison Wesley, Redwood City, California, 1983
- [3] P. Renton, Elektroweak Interactions, Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [4] O. Nachtmann, Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik, Vieweg, 1986.
- [5] M. Böhm, A. Denner und H. Joos, Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction, B. G. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2001.
- [6] C. Itzykson und J. B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [7] F. Mandl, G. Shaw, Quantum Field Theory, John Wiley and Sons, Chichester, England 1984.
- [8] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1995.
- [9] L. H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [10] A. I. Achieser und W. B. Berestezki, Quanten-Elektrodynamik, Frankfurt/M., 1962.
- [11] G. Köpp und F. Krüger, Einführung in die Quanten-Elektrodynamik, S. 159 ff., Teubner, Stuttgart, 1997.
- [12] T. Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics, World Scientific, Singapur/New Jersey/London/Hong Kong 1998.
- [13] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [14] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [15] A. Salam, Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity (8 th Nobel Symposium), Stockholm 1968, S. 367.

- [16] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964), Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964) und Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [17] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [18] G. Zweig, CERN-TH 401 und 402 (1964).
- [19] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [20] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett **30**, 1346 (1973).
- [21] H. Fritzsche, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. **47B**, 365 (1973).
- [22] Review of Particle Physics, K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. **D66**, 010001 (2002).
- [23] R. Robiscoe und T. Shyn, Phys. Rev. Let. **24** (1970) 559.
- [24] A. Peterman, Phys. Let. **38B** (1972) 330
- [25] R. S. Van Dyck *et al.*, Phys. Pev. Lett. **38** (1977) 310.
- [26] B. E. Lautrup, und A. Peterman, Phys. Rep. **3C** (1972) 193.
- [27] P. J. Mohr und B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **72**, 351 (2000).
- [28] W. J. Marciano und A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **61** 1815 (1988).
- [29] T. van Ritbergen und R. G. Stuart, Phys. Rev. Lett. **82**, 488 (1999).
- [30] E. Tournefier für die LEP-Kollaboration, präsentiert bei der *XXXVI th Rencontre de Moriond session devoted to Electroweak Interactions and Unified Theories* (Les Arcs, 2001).
- [31] U. Amaldi *et al.*, Phys. Rev. **D36**, 1385 (1987); G. Costa *et al.*, Nucl. Phys. **B297**, 244 (1988); G. L. Fogli und D. Haidt, Z. Phys. **C40**, 379 (1988); P. Langacker und M. Luo, Phys. Rev. **D44**, 817 (1991).
- [32] A. S. Kronfeld und P. B. Mackenzie, Ann. Rev. Nucl. and Part. Sci. **43**, 793 (1993); H. Wittig, Int. J. Mod. Phys. **A12**, 4477 (1997).
- [33] K. Chen, G. R. Goldstein, R. L. Jaffe und X. Ji, Nucl.Phys. **B445** 380 (1995).
- [34] A. D. Adamov und G. Goldstein, Phys.Rev. **D56** 7381-7391 (1997).
- [35] A. D. Adamov und G. Goldstein, TUFTS-TH-96-G02 [hep-ph/9612443].
- [36] G. R. Goldstein, MIT-CTP-3056 [hep-ph/0012034].
- [37] R. E. Behrends, R. J. Finkelstein und A. Sirlin, Phys. Rev. **101** (1956) 866.

- [38] T. Kinoshita und A. Sirlin, Phys. Rev. **113** (1959) 1652.
- [39] J. G. Körner, hep-ph/0402236, 2004.
- [40] A. B. Arbuzov, Phys. Lett. **B524** (2002) 99.
- [41] M. Fischer, S. Groote, J. G. Körner und M. C. Mauser, Phys. Rev. **D67**, 113008 (2003).
- [42] W. E. Fischer und F. Scheck, Nucl. Phys. **B325** (1994) 509.
- [43] S. Wolfram, Mathematica (fifth edition), Wolfram Media 2003.
- [44] A. Hsieh und E. Yehudai, HIP - Symbolic High Energy Physics Calculations, Comput. Phys. **6**, 253 (1992).
- [45] B. Dimm, FeynDiagram, Version 2.6, <http://feyndiagram.com>, Tutorial (2003).
- [46] E. Byckling und K. Kajantie, Particle Kinematics, John Wiley and Sons, London 1973.
- [47] G. Passarino und M. Veltman, Nucl. Phys. **B160**, 151, (1979).
- [48] G. 't Hooft und M. Veltman, Nucl. Phys. **B153**, 365 (1979).
- [49] A. Denner und T. Sack, Z. Phys. **C46**, 653 (1990).
- [50] L. D. Landau, Nucl. Phys. **13**, 181, (1959).
- [51] R. E. Cutkosky, J. Math. Phys. **1**, 429, (1960).
- [52] G. J. Gounaris und J. E. Paschalis, Nucl. Phys. **B222**, 473 (1983).
- [53] W. Gordon, Z. Physik, **50**, 630 (1928).
- [54] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650; T.D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. **133** (1964).
- [55] A. A. Penin und A. A. Pivovarov, Nucl. Phys **B 549**, 217 (1999).
- [56] K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl und M. Steinhauser, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 353; *ibid.*, Report No. MPI/PhT/97-041, hep-ph/9708255.
- [57] B. A. Robson, The Theory of Polarization Phenomena, Clarendon Press, Oxford 1974.
- [58] J. G. Körner und D. H. Schiller, *preprint* DESY, **81-043** (1981).
- [59] M. Fischer, S. Groote, J. G. Körner und M. C. Mauser, Phys. Rev. **D65**, 054036 (2002).
- [60] A. Denner und T. Sack, Nucl. Phys. **B358**, 46 (1991).

- [61] M. Fischer, S. Groote, J. G. Körner, B. Lampe und M. C. Mauser, Phys. Lett. **B 451**, 406 (1999).
- [62] J. Liu und Y.-P. Yao, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 4925 (1991).
- [63] A. Czarnecki, Phys. Lett. **B 252**, 467 (1990).
- [64] M. Jezabek und J. H. Kühn, Nucl. Phys. **B314**, 1, (1989).
- [65] B. Lampe, Nucl. Phys. **B458**, 23 (1996).
- [66] B. Lampe, Nucl. Phys **B454**, 506 (1995).
- [67] B. Lampe, hep-ph/9801346.
- [68] D. Kubistin, Strahlungskorrekturen zu Zerfallswinkelverteilungen in semileptonischen Bottom-Quarkzerfällen, Diplomarbeit, Mainz 2003.
- [69] M. Fischer, S. Groote, J. G. Körner und M. C. Mauser, Phys. Rev. **D 63**, 031501 (2001).
- [70] A. Czarnecki und S. Davidson, Phys. Rev. **D 47**, 3063 (1993); **48**, 4183 (1993).
- [71] S. Balk, J. G. Körner und D. Pirjol, Eur. Phys. J. **C 1**, 221 (1998).
- [72] M. Fischer, J. G. Körner, M. C. Mauser und S. Groote, Phys. Lett. **B480**, 265 (2000).
- [73] F. E. Close, J. G. Körner, R. J. N. Phillips und D. J. Summers, J. Phys. **G18**, 1716 (1992).
- [74] M. Gremm, G. Köpp und L. M. Sehgal, Phys. Rev. **D52**, 1588 (1995).
- [75] A. V. Manohar und M. B. Wise, Phys. Rev. **D49**, 1310 (1994).
- [76] J. Chay, H. M. Georgi und B. Grinstein, Phys. Lett. **B247**, 399 (1990).
- [77] I. I. Bigi, M. Shifman, N. G. Uraltsev und A. I. Vainshtein, Phys. Rev. Lett. **71**, 496 (1993).
- [78] B. Blok, L. Koyrakh, M. Shifman und A. I. Vainshtein, Phys. Rev. **D49**, 3356 (1994); Erratum: *ibid.*, **D50**, 3572 (1994).
- [79] T. Mannel, Nucl. Phys. **B413**, 396 (1994).
- [80] L. Koyrakh, Phys. Rev. **D49**, 3379 (1994).
- [81] S. Balk, J. G. Körner, D. Pirjol und K. Schilcher, Z. Phys. **C64**, 37 (1994).
- [82] A. F. Falk, Z. Ligeti, M. Neubert und Y. Nir, Phys. Lett. **B326**, 145 (1994).

- [83] M. Fischer, S. Groote, J. G. Körner, M. C. Mauser, Phys. Rev. **D70**, 094026 (2004).
- [84] R. Aleksan, M. Zito, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène und J.-C. Raynal, Phys. Rev. **D62** (2000) 093017.
- [85] R. Aleksan, M. Zito, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène, J.-C. Raynal, preprint LPT-Orsay 99-36, hep-ph/9906505.
- [86] J. Chay, Phys. Lett. **B476**, 339 (2000).
- [87] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert, C. T. Sachrajda, Phys. Rev. Lett. **83**, 1914 (1999).
- [88] A. F. Falk und M. E. Peskin, Phys. Rev. **D49**, 3320 (1994).
- [89] I. Vila für die CDF-Kollaboration, hep-ph/0307165.
- [90] G.Leder, *Neue Ergebnisse von Belle*, Vortrag beim Seminar über Eichtheorien, Mainz (2004).
- [91] A. F. Falk und M. Neubert, Phys. Rev. **D47**, 2982 (1993).
- [92] J. G. Körner und D. Pirjol, Phys. Lett. **B334**, 339 (1994).
- [93] M. Jezabek und J. H. Kühn, Nucl. Phys. **B320**, 20 (1989).
- [94] A. Czarnecki, M. Jezabek und J. H. Kühn, Nucl. Phys. **B351** 70, (1991).
- [95] W. Huo, $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Strahlungskorrekturen für Polarisationsobservable in semileptonischen Zerfällen schwerer Quarks, Diplomarbeit, Mainz 2005.
- [96] I. Blokland, A. Czarnecki, M. Slusarczyk und F. Tkachov, Phys. Rev. Lett. **93**, 062001 (2004). K. G. Chetyrkin, R. Harlander, T. Seidensticker und M. Steinhauser, Phys. Rev. D **60**, 114015 (1999).
- [97] G. Eilam, R. R. Mendel, R. Migneron und A. Soni, Phys. Rev. Lett. **66**, 3105 (1991).
- [98] M. C. Mauser, Polarisationseffekte in semileptonischen Zerfällen schwerer Quarks, Dissertation, Mainz 2001.
- [99] H. S. Do, S. Groote, J. G. Körner und M. C. Mauser, Phys. Rev. D **67**, 091501 (2003).
- [100] L. Lewin, Polylogarithms and Associated Functions, North Holland, New York 1981.

