Über die Existenz invarianter Tori in Hamiltonschen Systemen, die bis auf eine endlich oft differenzierbare Störung analytisch und integrabel sind

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor
der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Joachim Albrecht
geb. in Trier

Mainz, 2005

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation wird die Existenz invarianter Tori in Hamiltonschen Systemen bewiesen, die bis auf eine $2n$-mal stetig differenzierbare Störung analytisch und integrabel sind, wobei n die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, dass die Stetigkeitsmodule der $2n$-ten partiellen Ableitungen der Störung einer Endlichkeitsbedingung (Integralbedingung) genügen, welche die Hölderbedingung verallgemeinert. Bisher konnte die Existenz invarianter Tori nur unter der Voraussetzung bewiesen werden, dass die $2n$-ten Ableitungen der Störung hölderstetig sind.

Abstract

We proof the existence of invariant tori in Hamiltonian Systems, which are analytic and integrable except a $2n$-times continuously differentiable perturbation (n denotes the number of the degrees of freedom). It is assumed that the moduli of continuity of the $2n$-th partial derivatives of the perturbation satisfy a condition of finiteness (condition on an integral), which is more general than a Hölder condition. So far the existence of invariant tori could be proven only under the condition that the $2n$-th partial derivatives of the perturbation are Hölder continuous.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Formulierung des Existenzsatzes (Satz E)

Wir betrachten Hamiltonsche Differentialgleichungssysteme

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x, \tag{1.1}$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\dot{x}$ und $\dot{y}$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sind und $H = H(x, y)$ eine Funktion von $\mathbb{R}^{2n}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Differentialgleichungssysteme der Form (1.1) spielen in der klassischen Mechanik eine fundamentale Rolle.
Wir stellen uns die Aufgabe, die Existenz von Lösungen des Systems (1.1) zu beweisen, falls dieses durch eine kleine Störung aus einem analytischen, integrablen System hervorgeht. Somit nehmen wir an, dass sich H als Summe

$$H = \widetilde{H} + R$$

einer ungestörten Hamiltonfunktion $\widetilde{H} = \widetilde{H}(y)$ und eines Restterms $R = R(x, y)$ schreiben lasse. Mit der Zahl $a := \widetilde{H}(0) \in \mathbb{R}$, dem Frequenzvektor $\omega := \widetilde{H}_y(0) \in \mathbb{R}^n$ und der Hessematrix $C := \widetilde{H}_{yy}(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat $\widetilde{H}$ die Taylorentwicklung

$$\widetilde{H}(y) = a + \langle \omega , y \rangle + \frac{1}{2} \langle y C , y \rangle + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Hierbei benutzen wir das Produkt

$$\langle x , y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \quad (x, y \in \mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Fassen wir die Terme höherer Ordnung mit dem Restterm R zu einer Funktion h zusammen, so folgt für H die Gestalt

$$H(x, y) = a + \langle \omega , y \rangle + \frac{1}{2} \langle y C , y \rangle + h(x, y). \tag{1.3}$$

Das *Ziel* ist, die Existenz von Lösungen des Systems (1.1) unter einer möglichst schwachen Annahme an die Differenzierbarkeit von h zu beweisen.
Differenzierbare Probleme dieser Art wurden zuerst 1962 von Moser an Hand sogenannter Twistabbildungen eines Kreisringes gelöst [17]. Die hohe Differenzierbarkeitsvoraussetzung[1] konnte von Moser und Rüssmann schrittweise auf dreimalige Differenzierbarkeit plus Hölderstetigkeit abgeschwächt werden ([30], [20], [33]). Diese Regularität entspricht bei einem Hamiltonsystem von $n = 2$ Freiheitsgraden der 4-maligen Differenzierbarkeit plus Hölderstetigkeit.

In der Tat hat Moser die Existenz von Lösungen von (1.1) unter der Voraussetzung

[1] In [17] wird die 333-malige stetige Differenzierbarkeit der Twistabbildung vorausgesetzt. Moser hat darauf hingewiesen [21], dass ihm damals „16 bis 17-malige“ stetige Differenzierbarkeit genügt hätte, dass er aber die 333-malige stetige Differenzierbarkeit voraussetzte, um den veröffentlichten Beweis einfacher halten zu können.

gezeigt, dass $h \in \mathcal{C}^\ell$ mit $\ell > 2n + 2$ gilt[2], indem er eine geeignete Folge von Variablentransformationen konstruierte. Durch Verwendung eines verallgemeinerten Theorems über implizite Funktionen gelang es Zehnder, diese unendlich vielen Koordinatentransformationen zu vermeiden ([37], [38]). Jedoch muss bei diesem Vorgehen als Voraussetzung an die Störung $h \in \mathcal{C}^\ell$ mit $\ell > 4n + 6$ angenommen werden. Pöschel konnte die Gesamtheit der invarianten Tori von H als so genannte Cantor-Familie beschreiben ([26], siehe auch [6]), wobei allerdings $h \in \mathcal{C}^\ell$ mit $\ell > 3n - 1$ vorausgesetzt werden muss.

In der vorliegenden Arbeit konzentrieren wir uns auf eine schwächere Voraussetzung an die Regularität von h und beweisen nach einer Idee von Rüssmann[3] den folgenden

Satz E. *Die Hamiltonfunktion H habe die Gestalt (1.3), wobei ω mit einer Konstanten $\gamma > 0$ für alle $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ der Diophantischen Ungleichung*

$$|\langle \omega\,,\, k \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^{n-1}}$$

genüge[4] und C eine reguläre Matrix sei. Die Funktion $z = (x, y) \mapsto h(z)$ sei in allen Variablen 2π-periodisch[5] und besitze stetige partielle Ableitungen $\partial^{2n} h / \partial {z_j}^{2n}$, $j = 1, \ldots, 2n$, wobei die Stetigkeitsmodule

$$K_j(\delta) := \sup_{z, z' \in \mathbb{R}^{2n},\, |z - z'| \leq \delta} \left| \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z) - \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z') \right| \quad (\delta \geq 0) \tag{1.4}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ die Integralbedingung

$$\int_0^1 \frac{K_j(\delta)}{\delta}\, d\delta < \infty \tag{1.5}$$

erfüllen mögen. Dann gibt es eine positive Konstante C_1, die nur von n, γ, C und $K_1, \ldots, K_{2n}$ abhängt, so dass im Fall

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |h(z)| \leq C_1$$

ein Homöomorphismus

$$Z = (X, Y) : \mathbb{R}^n \longrightarrow Z(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

[2]Dieses Ergebnis findet sich mit einer Beweisskizze in [19]. Die Funktionenklasse $\mathcal{C}^\ell$ mit $\ell > 0$, wobei ℓ keine ganze Zahl ist und $[\ell]$ die größte ganze Zahl kleiner als ℓ bezeichnet, umfasst alle $[\ell]$-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren partielle Ableitungen $[\ell]$-ter Ordnung hölderstetig sind mit dem Hölderexponenten $\ell - [\ell]$. Moser hat für das Modellproblem „Vektorfelder auf dem Torus“ einen vollständigen Beweis gegeben [18]. Pöschel hat den Beweis für Hamiltonsche Systeme und $\ell > 2n$ durchgeführt [25]. Die Verbesserung von $2n + 2$ auf $2n$ folgt dabei aus besseren Abschätzungen für die Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf dem Torus (vergleiche [31], Theorem 1.1 gegenüber [18], Lemma 1 auf Seite 518).

[3]Vortrag von Helmut Rüssmann am 8. 3. 1979 im Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, im Seminar von David Ruelle und Dennis Sullivan.

[4]Für Vektoren verwenden wir die Maximumnorm, vergleiche Seite 16.

[5]Die Voraussetzung der 2π-Periodizität in $y_1, \ldots, y_n$ ist technisch und kann unterdrückt werden, siehe [25], Lemma 1.6 und [38], Lemma 3.1.

mit der Eigenschaft existiert, dass die auf $\mathbb{R}$ *definierten Funktionen*

$$x = X(\omega t + \textit{const.}), \quad y = Y(\omega t + \textit{const.}) \tag{1.6}$$

stetig differenzierbare Lösungen des Systems (1.1) sind. Die Funktionen

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto X(\xi) - \xi,\, Y(\xi) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sind 2π*-periodisch in* $\xi_1, \ldots, \xi_n$*, so dass die Funktionen*

$$t \mapsto X(\omega t + \textit{const.}) - \omega t,\, Y(\omega t + \textit{const.})$$

quasiperiodisch sind.
Ferner existiert eine stetig differenzierbare Funktion

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto U(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

deren Gradient 2π*-periodisch ist und die die Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$H(x, U_x(x)) = \textit{const.}$$

erfüllt. Durch die Gleichung

$$y = U_x(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

wird ein Torus im $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \times \mathbb{R}^n$ *definiert, der bezüglich des Systems (1.1) invariant ist; denn durch jeden seiner Punkte geht eine durch (1.6) definierte Trajektorie, die ganz auf ihm liegt und ihn außerdem dicht ausfüllt.*

Zum Beweis gehen wir wie Moser vor und verwenden ein KAM-Theorem für den Fall einer analytischen Störung, das sich in dieser Form nicht in der Literatur findet und deshalb in Kapitel 5 vollständig bewiesen wird. Um es auf den Fall einer endlich oft differenzierbaren Störung anwenden zu können, stellen wir in Kapitel 2 einen Satz über die Approximation endlich oft differenzierbarer Funktionen durch analytische Funktionen zur Verfügung. Mit diesen Ergebnissen erbringen wir in Kapitel 3 den Beweis von Satz E.
Schließlich weisen wir in Kapitel 4 durch eine explizite Beispielfunktion nach, dass die Klasse $\mathcal{L}^{2n}$ aller Funktionen h, die die Voraussetzungen des Satzes E erfüllen, die Klasse $\bigcup_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{2n+\alpha}$ echt enthält: $\bigcup_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{2n+\alpha} \subsetneqq \mathcal{L}^{2n}$.

2 Ein Approximationssatz

In diesem Kapitel beweisen wir den Approximationssatz 2.23, dessen Korollar 3.11 es uns erlauben wird, Satz E auf das analytische KAM-Theorem 3.6 zurückzuführen, das in Abschnitt 5 bewiesen wird. Da wir hier die Voraussetzung der Hölderstetigkeit der höchsten partiellen Ableitungen vermeiden wollen, können wir sie auch beim Approximationssatz nicht voraussetzen. Jedoch lassen sich die in [30], 4. bis 6., vorgestellten Methoden auf die von uns betrachtete allgemeinere Situation anwenden, was wir im Folgenden tun wollen.

2.1 Lemmata über trigonometrische Polynome

Bezeichnungen. Es sei e_j der j-te Vektor der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$). Somit gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$

$$x + 2t\, e_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 2t, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) bezeichne $\widehat{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}$ denjenigen Vektor, der aus x durch Weglassen der j-ten Komponente entsteht. Es gilt also

$$\widehat{x}_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Partielle Ableitungen werden im Folgenden meistens mit einem Subskript gekennzeichnet, zum Beispiel

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Definition 2.1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch in } x_1, \ldots, x_n\}.$$

Definition 2.2. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann definieren wir das m-te *Fejér-Polynom* von f bezüglich x_j durch

$$F_m^{[j]}(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x + 2t\, e_j) \left(\frac{\sin(mt)}{\sin t} \right)^2 dt. \tag{2.1}$$

Lemma 2.3. *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann ist die Funktion $F_m^{[j]}(f)$ in x_j ein trigonometrisches Polynom höchstens $(m-1)$-ter Ordnung und es gilt $F_m^{[j]}(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Beweis. Das Fejér-Polynom $F_m^{[j]}(f)$ hat die Darstellung (siehe [23], Seite 140, Formel (195))

$$F_m^{[j]}(f) = \frac{1}{m} \Big(S_0^{[j]}(f) + \ldots + S_{m-1}^{[j]}(f) \Big), \tag{2.2}$$

wobei $S_k^{[j]}(f)$ das k-te Fourier-Polynom von f bezüglich x_j ist $(0 \leq k \leq m-1)$. Dieses ist im Fall $n \geq 2$ mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_\ell(\widehat{x}_j) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1},\ldots,x_n)\cos(\ell t)\,dt, \quad (\ell \in \mathbb{N}_0),\\ b_\ell(\widehat{x}_j) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1},\ldots,x_n)\sin(\ell t)\,dt \quad (\ell \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} S_0^{[j]}(f)(x) &:= \frac{a_0(\widehat{x}_j)}{2},\\ S_k^{[j]}(f)(x) &:= \frac{a_0(\widehat{x}_j)}{2} + \sum_{\ell=1}^{k}\left(a_\ell(\widehat{x}_j)\cos(\ell x_j) + b_\ell(\widehat{x}_j)\sin(\ell x_j)\right)\ (k \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt

$$\begin{aligned} F_m^{[j]}(f)(x) &= \frac{1}{m}\left(\frac{a_0(\widehat{x}_j)}{2} + \right.\\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{a_0(\widehat{x}_j)}{2} + \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell(\widehat{x}_j)\cos(\ell x_j) + b_\ell(\widehat{x}_j)\sin(\ell x_j)\right)\right)\\ &= \frac{a_0(\widehat{x}_j)}{2} + \sum_{\ell=1}^{m-1}\left(\frac{m-\ell}{m}\left(a_\ell(\widehat{x}_j)\cos(\ell x_j) + b_\ell(\widehat{x}_j)\sin(\ell x_j)\right)\right). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} A_0 &:= \frac{a_0}{2}, \quad B_0 := 0,\\ A_k &:= \frac{m-k}{m}a_k, \quad B_k := \frac{m-k}{m}b_k \quad (1 \leq k \leq m-1), \end{aligned} \tag{2.4}$$

so erhalten wir für $F_m^{[j]}(f)$ die Darstellung

$$F_m^{[j]}(f)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(\widehat{x}_j)\cos(kx_j) + B_k(\widehat{x}_j)\sin(kx_j).$$

Insbesondere ist $F_m^{[j]}(f)$ in x_j ein trigonometrisches Polynom höchstens $(m-1)$-ter Ordnung.
Im Fall $n = 1$ muss $j = 1$ gelten, und a_ℓ, b_ℓ sind reelle Konstanten. Also sehen wir auch in diesem Fall, dass $F_m^{[1]}(f)$ ein trigonometrisches Polynom höchstens $(m-1)$-ter Ordnung ist.
Wegen der stetigen Abhängigkeit des Integrals von Parametern und der definierenden Formel (2.1) ist $F_m^{[j]}(f)$ stetig. Auf Grund der Periodizität von f und wegen (2.1) ist $F_m^{[j]}(f)$ 2π-periodisch in $x_1,\ldots,x_n$. Also folgt $F_m^{[j]}(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, womit alles bewiesen ist. □

In Definition 2.2 sieht man an der Formel (2.1), dass die Abbildung

$$F_m^{[j]} : \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

linear ist. Wenn die Funktion f stetig differenzierbar ist, folgt außerdem aus der differenzierbaren Abhängigkeit des Integrals von Parametern

$$\left(F_m^{[j]}(f)\right)_{x_\ell} = F_m^{[j]}\left(f_{x_\ell}\right) \qquad \forall \quad \ell \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definition 2.4. Es sei f eine auf einer Menge $\mathcal{M}$ definierte, beschränkte Funktion. Dann setzen wir

$$|f|_{\mathcal{M}} := \sup_{z \in \mathcal{M}} |f(z)|.$$

Lemma 2.5. *Es seien n, $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\left|F_m^{[j]}(f)\right|_{\mathbb{R}^n} \leq |f|_{\mathbb{R}^n}.$$

Beweis. Es gilt die Formel (siehe [23], Seite 141, Formel (196))

$$\frac{1}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin(mt)}{\sin t}\right)^2 dt = 1.$$

Zusammen mit der Definition 2.2 folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\left|F_m^{[j]}(f)(x)\right| &= \frac{1}{m\pi} \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x + 2t\, e_j) \left(\frac{\sin(mt)}{\sin t}\right)^2 dt \right| \\
&\leq \frac{1}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(x + 2t\, e_j)| \left(\frac{\sin(mt)}{\sin t}\right)^2 dt \\
&\leq \frac{1}{m\pi} |f|_{\mathbb{R}^n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin(mt)}{\sin t}\right)^2 dt \\
&= |f|_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 2.6. Es seien n, $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Wir definieren das m-te *de la Vallée Poussin-Polynom* von f bezüglich x_j durch

$$T_m^{[j]}(f) := 2F_{2m}^{[j]}(f) - F_m^{[j]}(f).$$

Lemma 2.7. *Es seien n, $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, a, $b \in \mathbb{R}$ und f, $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann ist $T_m^{[j]}(f)$ in x_j ein trigonometrisches Polynom höchstens $(2m-1)$-ter Ordnung, es gilt $T_m^{[j]}(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, sowie*

$$\left|T_m^{[j]}(f)\right|_{\mathbb{R}^n} \leq 3\,|f|_{\mathbb{R}^n}, \tag{2.5}$$

$$T_m^{[j]}(af + bg) = a\,T_m^{[j]}(f) + b\,T_m^{[j]}(g). \tag{2.6}$$

Ist f zusätzlich stetig differenzierbar, so gilt überdies für alle $\ell \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left(T_m^{[j]}(f)\right)_{x_\ell} = T_m^{[j]}\left(f_{x_\ell}\right). \tag{2.7}$$

Beweis. Nach Lemma 2.3 ist $F_{2m}^{[j]}(f)$ in x_j ein trigonometrisches Polynom höchstens $(2m-1)$-ter Ordnung und die Ordnung von $F_m^{[j]}(f)$ ist höchstens $m-1$. Somit ist die Ordnung von $T_m^{[j]}(f)$ als trigonometrisches Polynom in x_j höchstens $2m-1$. Da $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, folgt aus Lemma 2.3 und Definition 2.6 $T_m^{[j]}(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Abschätzung (2.5) erhalten wir mit Lemma 2.5, denn es ist

$$\left|T_m^{[j]}(f)\right|_{\mathbb{R}^n} = \left|2F_{2m}^{[j]}(f) - F_m^{[j]}(f)\right|_{\mathbb{R}^n} \leq 2\left|F_{2m}^{[j]}(f)\right|_{\mathbb{R}^n} + \left|F_m^{[j]}(f)\right|_{\mathbb{R}^n} \leq 3\,|f|_{\mathbb{R}^n}\,.$$

Die Linearität (2.6) und die Formel (2.7) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Fejér-Polynome. □

2.2 Approximation durch de la Vallée Poussin-Polynome

Definition 2.8. Es seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir setzen

$$\mathcal{E}_m(f) := \inf\left\{|f-h|_{\mathbb{R}} \mid h \text{ ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad } \leq m\right\}.$$

Die Zahl $\mathcal{E}_m(f)$ besagt also, wie gut eine Approximation von f durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad kleinergleich m bestenfalls werden kann.

Definition 2.9. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Wir definieren den *Stetigkeitsmodul* von f durch

$$K_f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \quad \delta \mapsto K_f(\delta) := \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n,\,|x-y|\leq\delta} |f(x)-f(y)|.$$

Bemerkung 2.10. Der Stetigkeitsmodul K_f einer gleichmäßig stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend, stetig und es gilt $K_f(0) = 0$. Aus der für beliebige x, $y \in \mathbb{R}^n$ und $N \in \mathbb{N}$ gültigen Gleichung

$$f(x+Ny) - f(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\big(f(x+(k+1)y) - f(x+ky)\big)$$

folgt außerdem

$$K_f(N\delta) \leq N\,K_f(\delta) \qquad \forall \quad \delta \geq 0,\ N \in \mathbb{N}.$$

Wir führen noch folgende Schreibweise für höhere Ableitungen einer r-mal differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein ($r \in \mathbb{N}$):

$$f^{(r)} := \frac{\partial^r}{\partial x^r} f, \quad f^{(0)} := f.$$

Mit diesen Definitionen können wir nun zwei Sätze zitieren, die im Beweis von Satz 2.13 benötigt werden. Der erste von de la Vallée Poussin ([23], Seite 150, Satz 1) besagt, dass die trigonometrischen Polynome $T_m^{[1]}(f)$ eine gegebene Funktion $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sehr gut approximieren.

Satz 2.11. *Es seien $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\left|f - T_m^{[1]}(f)\right|_{\mathbb{R}} \leq 4\,\mathcal{E}_m(f).$$

Zweitens formulieren wir das Theorem von Jackson, wie es Achieser ([1], 105. (1)) bewiesen hat:

Satz 2.12. *Es seien $r \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei, falls $r \geq 1$ ist, r-mal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\mathcal{E}_{m-1}(f) \leq \frac{3}{m^r} K_{f^{(r)}}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Das folgende Resultat erhalten wir durch die Kombination der Sätze 2.11 und 2.12. Dabei betrachten wir im Hinblick auf die weitere Verwendung statt des Stetigkeitsmoduls $K_{f^{(r)}}$ eine Funktion K, die $K_{f^{(r)}}$ majorisiert.

Satz 2.13. *Es seien $r \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei, falls $r \geq 1$ ist, r-mal stetig differenzierbar. Es gebe eine Funktion $K : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit*

$$\left|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)\right| \leq K(\delta) \qquad \forall \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| \leq \delta. \tag{2.8}$$

Dann gilt

$$\left|f - T_m^{[1]}(f)\right|_{\mathbb{R}} \leq \frac{12}{m^r} K\left(\frac{1}{m}\right).$$

Beweis. Aus den Sätzen 2.11 und 2.12 sowie Definition 2.8 folgt

$$\left|f - T_m^{[1]}(f)\right|_{\mathbb{R}} \leq 4\,\mathcal{E}_m(f) \leq 4\,\mathcal{E}_{m-1}(f) \leq \frac{12}{m^r} K_{f^{(r)}}\left(\frac{1}{m}\right). \tag{2.9}$$

Nach der Definition 2.9 des Stetigkeitsmoduls folgt aus der Voraussetzung (2.8)

$$K_{f^{(r)}}\left(\frac{1}{m}\right) \leq K\left(\frac{1}{m}\right).$$

Zusammen mit (2.9) folgt die Behauptung. □

Da mit f nach Lemma 2.7 auch das de la Vallée Poussin-Polynom von f bezüglich einer Koordinate stetig ist, kann man die Konstruktion dieser Polynome wie folgt iterieren:

Definition 2.14. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j_p \neq j_q$ für $p \neq q$. Ferner seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann setzen wir

$$T_{m_1,\ldots,m_k}^{[j_1,\ldots,j_k]}(f) := T_{m_1}^{[j_1]}\left(T_{m_2}^{[j_2]}\left(\ldots\left(T_{m_k}^{[j_k]}(f)\right)\ldots\right)\right)$$

und nennen diese Funktion *verallgemeinertes de la Vallée Poussin-Polynom.*

Insbesondere folgt aus Lemma 2.7

$$T^{[j_1,\ldots,j_k]}_{m_1,\ldots,m_k}(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Lemma 2.15. *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j_p \neq j_q$ für $p \neq q$. Ferner seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Es sei $(\pi(1), \ldots, \pi(k))$ eine Permutation von $(1, \ldots, k)$. Dann gilt*

$$T^{[j_1,\ldots,j_k]}_{m_1,\ldots,m_k}(f) = T^{[j_{\pi(1)},\ldots,j_{\pi(k)}]}_{m_{\pi(1)},\ldots,m_{\pi(k)}}(f).$$

Beweis. Da jede Permutation eine Hintereinanderausführung geeigneter Transpositionen ist, reicht es, die Behauptung des Lemmas für eine Transposition zu beweisen. Wir können uns also auf den Fall $k = 2$ beschränken und beweisen

$$T^{[j_1,j_2]}_{m_1,m_2}(f) = T^{[j_2,j_1]}_{m_2,m_1}(f). \tag{2.10}$$

Da die de la Vallée Poussin-Polynome gemäß Definition 2.6 Linearkombinationen von Fejér-Polynomen sind und wegen der Linearität (2.6) folgt (2.10) aus der entsprechenden Aussage für Fejér-Polynome, wir zeigen also:

$$F^{[j_1]}_{m_1}\left(F^{[j_2]}_{m_2}(f)\right) = F^{[j_2]}_{m_2}\left(F^{[j_1]}_{m_1}(f)\right).$$

Nun gilt nach Definiton 2.2 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
F^{[j_1]}_{m_1}\left(F^{[j_2]}_{m_2}(f)\right)(x) &= F^{[j_1]}_{m_1}\left(\frac{1}{m_2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t\,e_{j_2})\left(\frac{\sin(m_2t)}{\sin t}\right)^2 dt\right)\\
&= \frac{1}{m_1\pi}\frac{1}{m_2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t\,e_{j_2}+2s\,e_{j_1})\left(\frac{\sin(m_2t)}{\sin t}\right)^2 dt\left(\frac{\sin(m_1s)}{\sin s}\right)^2 ds\\
&= \frac{1}{m_1\pi}\frac{1}{m_2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t\,e_{j_2}+2s\,e_{j_1})\left(\frac{\sin(m_1s)}{\sin s}\right)^2 ds\left(\frac{\sin(m_2t)}{\sin t}\right)^2 dt\\
&= F^{[j_2]}_{m_2}\left(F^{[j_1]}_{m_1}(f)\right)(x) \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Nach unseren Vorüberlegungen folgt somit die Behauptung. □

Lemma 2.16. *Unter den Voraussetzungen der Definition 2.14 gilt für alle $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, dass $T^{[j_1,\ldots,j_k]}_{m_1,\ldots,m_k}(f)$ in x_ℓ ein trigonometrisches Polynom höchstens $(2m_\ell - 1)$-ter Ordnung ist.*

Beweis. Wir halten ein beliebiges $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ fest und wählen eine Permutation $(\pi(1), \ldots, \pi(k))$ von $(1, \ldots, k)$ mit $\pi(1) = \ell$. Aus Lemma 2.15 folgt

$$T^{[j_1,\ldots,j_k]}_{m_1,\ldots,m_k}(f) = T^{[j_{\pi(1)},\ldots,j_{\pi(k)}]}_{m_{\pi(1)},\ldots,m_{\pi(k)}}(f) = T^{[j_\ell]}_{m_\ell}\left(T^{[j_{\pi(2)},\ldots,j_{\pi(k)}]}_{m_{\pi(2)},\ldots,m_{\pi(k)}}(f)\right).$$

Dies ist nach Lemma 2.7 in x_ℓ ein trigonometrisches Polynom höchstens $(2m_\ell - 1)$-ter Ordnung. Da $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Um den folgenden Satz formulieren zu können, vereinbaren wir für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^0 f}{\partial {x_j}^0} := f.$$

Satz 2.17. *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}_0$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ und f sei, falls $r_j \geq 1$ ist, r_j-mal stetig differenzierbar nach x_j $(1 \leq j \leq n)$. Es gebe Funktionen $K_1, \ldots, K_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$, so dass für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [-\delta, \delta]$ gilt:*

$$\left| \frac{\partial^{r_j} f}{\partial {x_j}^{r_j}}(x) - \frac{\partial^{r_j} f}{\partial {x_j}^{r_j}}(x + t\, e_j) \right| \leq K_j(\delta). \tag{2.11}$$

Dann gilt

$$\left| f - T^{[1,\ldots,n]}_{m_1,\ldots,m_n}(f) \right|_{\mathbb{R}^n} \leq 4 \cdot 3^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{{m_j}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right).$$

Bemerkung 2.18. Nach Voraussetzung sind die Funktionen $\partial^{r_j} f / \partial {x_j}^{r_j}$ auf $\mathbb{R}^n$ stetig. Da sie 2π-periodisch sind, sind sie sogar gleichmäßig stetig. Gemäß Bemerkung 2.10 ist also der Stetigkeitsmodul von $\partial^{r_j} f / \partial {x_j}^{r_j}$ als Funktion K_j in (2.11) zulässig.

Beweis von Satz 2.17. Im Fall $n = 1$ reduziert sich die Aussage auf die Aussage von Satz 2.13. Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig. Wir beweisen sie für $n + 1$. Dazu wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die für jeden reellen Parameter x_1 definierten Funktionen $f(x_1, \cdot\,)$ an. Dies ergibt

$$\left| f(x_1, \cdot\,) - T^{[2,\ldots,n+1]}_{m_2,\ldots,m_{n+1}}(f)(x_1, \cdot\,) \right|_{\mathbb{R}^n} \leq 4 \cdot 3^n \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{{m_j}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right) \qquad \forall \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \quad \left| f - T^{[2,\ldots,n+1]}_{m_2,\ldots,m_{n+1}}(f) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq 4 \cdot 3^n \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{{m_j}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right). \tag{2.12}$$

Für die Funktionen $f(\,\cdot\,, \widehat{x}_1)$ $(\widehat{x}_1 \in \mathbb{R}^n)$ erhalten wir mit Satz 2.13

$$\left| f(\,\cdot\,, \widehat{x}_1) - T^{[1]}_{m_1}(f)(\,\cdot\,, \widehat{x}_1) \right|_{\mathbb{R}} \leq 4 \cdot 3 \frac{1}{{m_1}^{r_1}} K_1\left(\frac{1}{m_1}\right) \qquad \forall \quad \widehat{x}_1 \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Rightarrow \quad \left| f - T^{[1]}_{m_1}(f) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq 4 \cdot 3 \frac{1}{{m_1}^{r_1}} K_1\left(\frac{1}{m_1}\right). \tag{2.13}$$

Nun folgt nach Lemma 2.7, Definition 2.14 und (2.12)

$$\begin{aligned}
\left| T^{[1]}_{m_1}(f) - T^{[1,\ldots,n+1]}_{m_1,\ldots,m_{n+1}}(f) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} &= \left| T^{[1]}_{m_1}(f) - T^{[1]}_{m_1}\left(T^{[2,\ldots,n+1]}_{m_2,\ldots,m_{n+1}}(f)\right) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} \\
&= \left| T^{[1]}_{m_1}\left(f - T^{[2,\ldots,n+1]}_{m_2,\ldots,m_{n+1}}(f)\right) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq 4 \cdot 3^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{{m_j}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Die Abschätzungen (2.13) und (2.14) ergeben zusammen

$$\begin{aligned}
\left| f - T^{[1,\ldots,n+1]}_{m_1,\ldots,m_{n+1}}(f) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} &\leq \left| f - T^{[1]}_{m_1}(f) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} + \left| T^{[1]}_{m_1}(f) - T^{[1,\ldots,n+1]}_{m_1,\ldots,m_{n+1}}(f) \right|_{\mathbb{R}^{n+1}} \\
&\leq 4 \cdot 3 \frac{1}{{m_1}^{r_1}} K_1\left(\frac{1}{m_1}\right) + 4 \cdot 3^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{{m_j}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right) \\
&\leq 4 \cdot 3^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{{m_j}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 2.19. *Es sollen die Voraussetzungen von Satz 2.17 gelten und es sei zusätzlich $r_1 \geq 1, \ldots, r_n \geq 1$. Dann gilt für alle $\ell \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\left| f_{x_\ell} - \left(T^{[1,\ldots,n]}_{m_1,\ldots,m_n}(f)\right)_{x_\ell} \right|_{\mathbb{R}^n} \leq 4 \cdot 3^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{{m_j}^{r_j - 1}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right).$$

Beweis. Es sei $\ell \in \{1, \ldots n\}$ beliebig. Die Funktion f_{x_ℓ} erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.17, wobei dort r_ℓ durch $r_\ell - 1$ zu ersetzen ist. Mit (2.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| f_{x_\ell} - \left(T^{[1,\ldots,n]}_{m_1,\ldots,m_n}(f)\right)_{x_\ell} \right|_{\mathbb{R}^n} &= \left| f_{x_\ell} - T^{[1,\ldots,n]}_{m_1,\ldots,m_n}(f_{x_\ell}) \right|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq 4 \cdot 3^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} \frac{1}{{m_j}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right) + \frac{1}{{m_\ell}^{r_\ell - 1}} K_\ell\left(\frac{1}{m_\ell}\right) \right) \\ &\leq 4 \cdot 3^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{{m_j}^{r_j - 1}} K_j\left(\frac{1}{m_j}\right). \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

2.3 Der Approximationssatz

In diesem Abschnitt wollen wir das Hauptergebnis des Kapitels formulieren und beweisen. Im Beweis verwenden wir die Bernsteinsche Ungleichung (Satz 2.20), die zum Beispiel im Buch von Achieser ([1], 83. und 84.) bewiesen wird.

Satz 2.20. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein trigonometrisches Polynom höchstens m-ten Grades ($m \in \mathbb{N}$). Dann gilt*

$$\left| f^{(r)} \right|_{\mathbb{R}} \leq m^r \left| f \right|_{\mathbb{R}} \qquad \forall \quad r \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen aus diesem Satz eine Folgerung für trigonometrische Polynome in mehreren Veränderlichen ziehen. Wir bezeichnen die Dimension in diesem Abschnitt mit $\nu \in \mathbb{N}$ und definieren für einen Multiindex $s = (s_1, \ldots, s_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu$:

$$f^{(s)} := \frac{\partial^{s_1 + \ldots + s_\nu} f}{\partial {x_1}^{s_1} \ldots \partial {x_\nu}^{s_\nu}}.$$

Korollar 2.21. *Es sei $f : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ in jeder Koordinate ein trigonometrisches Polynom höchstens m-ten Grades ($m \in \mathbb{N}$). Dann gilt*

$$\left| f^{(s)} \right|_{\mathbb{R}^\nu} \leq m^{s_1 + \ldots + s_\nu} \left| f \right|_{\mathbb{R}^\nu} \qquad \forall \quad s = (s_1, \ldots, s_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu.$$

Beweis. Im Fall $\nu = 1$ ist dies die Aussage von Satz 2.20. Die Behauptung sei für ein $\nu \in \mathbb{N}$ richtig. Wir beweisen sie für $\nu + 1$. Dazu sei $s = (s_1, \ldots, s_{\nu+1}) \in \mathbb{N}_0^{\nu+1}$ beliebig. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt für die Funktionen $f(x_1, \cdot)$, wobei $x_1 \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter ist,

$$\left| f^{(s_2,\ldots,s_{\nu+1})}(x_1, \cdot) \right|_{\mathbb{R}^\nu} \leq m^{s_2 + \ldots + s_{\nu+1}} \left| f(x_1, \cdot) \right|_{\mathbb{R}^\nu} \leq m^{s_2 + \ldots + s_{\nu+1}} \left| f \right|_{\mathbb{R}^{\nu+1}} \ \ \forall \ \ x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \left|f^{(s_2,\ldots,s_{\nu+1})}\right|_{\mathbb{R}^{\nu+1}} \le m^{s_2+\ldots+s_{\nu+1}} \, |f|_{\mathbb{R}^{\nu+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|f^{(s_2,\ldots,s_{\nu+1})}(\,\cdot\,,\widehat{x}_1)\right|_{\mathbb{R}} \le m^{s_2+\ldots+s_{\nu+1}} \, |f|_{\mathbb{R}^{\nu+1}} \qquad \forall \quad \widehat{x}_1 \in \mathbb{R}^\nu.$$

Wenden wir den Satz 2.20 nun auf die Funktionen $x_1 \mapsto f^{(s_2,\ldots,s_{\nu+1})}(x_1,\widehat{x}_1)$ ($\widehat{x}_1 \in \mathbb{R}^\nu$) an, so folgt

$$\left|f^{(s)}(\,\cdot\,,\widehat{x}_1)\right|_{\mathbb{R}} \le m^{s_1} m^{s_2+\ldots+s_{\nu+1}} \, |f|_{\mathbb{R}^{\nu+1}} \qquad \forall \quad \widehat{x}_1 \in \mathbb{R}^\nu$$

$$\Rightarrow \quad \left|f^{(s)}\right|_{\mathbb{R}^{\nu+1}} \le m^{s_1+\ldots+s_{\nu+1}} \, |f|_{\mathbb{R}^{\nu+1}} \,.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 2.22. Es sei $r > 0$. Wir setzen

$$\mathcal{S}(r) := \{x \in \mathbb{C}^\nu \mid |\mathrm{Im}\, x| < r\}\,.$$

Ferner sei $\mathcal{P}(r)$ die Menge aller analytischen Funktionen $f : \mathcal{S}(r) \to \mathbb{C}$, die reelle Argumente auf reelle Werte abbilden und in allen Variablen die Periode 2π haben.

Zur Sprechweise. Die Aussage, dass eine Funktion $f \in \mathcal{P}(r)$ reelle Argumente auf reelle Werte abbildet, soll folgendes bedeuten:

$$f(x) \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \qquad \forall \quad x \in \mathcal{S}(r) \cap \mathbb{R}^\nu.$$

Wenn künftig gesagt wird, dass eine Funktion in der Vektorvariablen x die Periode 2π habe, ist stets gemeint, dass die Funktion in jeder Komponente des Vektors x die Periode 2π hat.

Satz 2.23. *Es seien $\nu \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^\nu,\mathbb{R})$, $r_1,\ldots,r_\nu \in \mathbb{N}$ und f sei r_j-mal stetig differenzierbar nach x_j ($1 \le j \le \nu$). Es gebe monoton wachsende Funktionen $K_1,\ldots,K_\nu : [0,\infty) \to [0,\infty)$, so dass für alle $j \in \{1,\ldots,\nu\}$, $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^\nu$ und $t \in [-\delta,\delta]$ gilt:*

$$\left|\frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}}(x) - \frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}}(x + t\, e_j)\right| \le K_j(\delta).$$

Es sei $(\varrho_k)_{k=0}^\infty$ eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen mit $\varrho_0 \le 1$. Dann gibt es positive, nur von ν abhängende Konstanten d_1, d_2 und d_3 sowie eine Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{P}(\varrho_k)$ ($k \in \mathbb{N}_0$) mit den Eigenschaften:

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^\nu} \le d_1 \sum_{j=1}^{\nu} \left(K_j(\varrho_k){\varrho_k}^{r_j}\right) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.15}$$

$$|f_{x_\ell} - f_{k\,x_\ell}|_{\mathbb{R}^\nu} \le d_1 \sum_{j=1}^{\nu} \left(K_j(\varrho_k){\varrho_k}^{r_j-1}\right) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,\, \ell \in \{1,\ldots,\nu\}, \tag{2.16}$$

$$|f_k - f_{k-1}|_{\mathcal{S}(\varrho_k)} \le d_2 \sum_{j=1}^{\nu} \left(K_j(\varrho_{k-1}){\varrho_{k-1}}^{r_j}\right) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.17}$$

$$|f_k|_{\mathcal{S}(\varrho_k)} \le d_3 \, |f|_{\mathbb{R}^\nu} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.18}$$

Beweis. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen m_k durch

$$m_k - 1 \leq \frac{1}{\varrho_k} < m_k. \tag{2.19}$$

Dies legt alle m_k eindeutig fest, und da die Folge der ϱ_k monoton fällt und $\varrho_0 \leq 1$ ist, gilt $m_k \geq 2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Nun setzen wir

$$f_k : \mathcal{S}(\varrho_k) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto f_k(x) := T^{[1,\dots,\nu]}_{m_k,\dots,m_k}(f)(x) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Man beachte, dass $T^{[1,\dots,\nu]}_{m_k,\dots,m_k}(f)$ nach Lemma 2.16 in allen Variablen ein trigonometrisches Polynom ist und daher erstens auf ganz $\mathbb{C}^\nu$, insbesondere auf $\mathcal{S}(\varrho_k)$, definiert werden kann. Zweitens folgt die 2π-Periodizität von f_k in allen Variablen. Ferner bildet f_k reelle Argumente auf reelle Werte ab, was insgesamt $f_k \in \mathcal{P}(\varrho_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ beweist.
Es sind die Voraussetzungen von Satz 2.17 erfüllt (man setze dort $n = \nu$ ein). Daher gilt mit (2.19) und da die Funktionen K_j monoton wachsen

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^\nu} \leq 4 \cdot 3^\nu \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{{m_k}^{r_j}} K_j\left(\frac{1}{m_k}\right) \leq 4 \cdot 3^\nu \sum_{j=1}^{\nu} {\varrho_k}^{r_j} K_j(\varrho_k) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit ist (2.15) bewiesen, wobei d_1 durch

$$d_1 := 4 \cdot 3^\nu \tag{2.20}$$

gegeben ist. Aus dem Korollar 2.19 folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \{1, \dots, \nu\}$

$$|f_{x_\ell} - f_{k\,x_\ell}|_{\mathbb{R}^\nu} \leq 4 \cdot 3^\nu \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{{m_k}^{r_j - 1}} K_j\left(\frac{1}{m_k}\right) \leq d_1 \sum_{j=1}^{\nu} {\varrho_k}^{r_j - 1} K_j(\varrho_k).$$

Dies ist die Abschätzung (2.16). Wir benutzen wieder, dass (ϱ_k) monoton fällt und die Funktionen K_j monoton wachsen und schätzen mit (2.15) im Hinblick auf (2.17) ab:

$$\begin{aligned} |f_k - f_{k-1}|_{\mathbb{R}^\nu} &\leq |f_k - f|_{\mathbb{R}^\nu} + |f - f_{k-1}|_{\mathbb{R}^\nu} \\ &\leq 4 \cdot 3^\nu \sum_{j=1}^{\nu} \left({\varrho_k}^{r_j} K_j(\varrho_k) + {\varrho_{k-1}}^{r_j} K_j(\varrho_{k-1})\right) \\ &\leq 8 \cdot 3^\nu \sum_{j=1}^{\nu} {\varrho_{k-1}}^{r_j} K_j(\varrho_{k-1}) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Um daraus eine Abschätzung auf $\mathcal{S}(\varrho_k)$ zu erhalten, verwenden wir unser Korollar 2.21 aus der Bernsteinschen Ungleichung. Da für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktion f_k in jeder Variablen ein trigonometrisches Polynom höchstens $(2m_k - 1)$-ter Ordnung ist und die Folge (m_k) monoton wächst, besagt Korollar 2.21

$$\left| f_k^{(s)} - f_{k-1}^{(s)} \right|_{\mathbb{R}^\nu} \leq (2m_k - 1)^{s_1 + \dots + s_\nu} \, |f_k - f_{k-1}|_{\mathbb{R}^\nu} \qquad \forall \quad s = (s_1, \dots, s_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu.$$

Da jede Zahl $m_k \geq 2$ ist, gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$2m_k - 1 \leq 2m_k - 1 + m_k - 2 = 3(m_k - 1). \tag{2.22}$$

Zusammen mit (2.19) und (2.21) folgt für alle $s \in \mathbb{N}_0^\nu$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left| f_k^{(s)} - f_{k-1}^{(s)} \right|_{\mathbb{R}^\nu} &\leq 3^{s_1+\ldots+s_\nu} (m_k - 1)^{s_1+\ldots+s_\nu} \left| f_k - f_{k-1} \right|_{\mathbb{R}^\nu} \\
&\leq 3^{s_1+\ldots+s_\nu} \varrho_k{}^{-s_1-\ldots-s_\nu} \left| f_k - f_{k-1} \right|_{\mathbb{R}^\nu} \\
&\leq 8 \cdot 3^{\nu+s_1+\ldots+s_\nu} \varrho_k{}^{-s_1-\ldots-s_\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \varrho_{k-1}{}^{r_j} K_j(\varrho_{k-1}).
\end{aligned}$$

Der Taylorsche Satz zeigt für alle $x \in \mathcal{S}(\varrho_k)$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|f_k(x) - f_{k-1}(x)| &= \left| \sum_{s \in \mathbb{N}_0^\nu} \left(f_k^{(s)} - f_{k-1}^{(s)} \right) (\operatorname{Re} x) \frac{(i \operatorname{Im} x)^{s_1+\ldots+s_\nu}}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_\nu!} \right| \\
&\leq \sum_{s \in \mathbb{N}_0^\nu} \left| f_k^{(s)} - f_{k-1}^{(s)} \right|_{\mathbb{R}^\nu} \frac{|i \operatorname{Im} x|^{s_1+\ldots+s_\nu}}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_\nu!} \\
&\leq \sum_{s \in \mathbb{N}_0^\nu} \left(\frac{8 \cdot 3^{\nu+s_1+\ldots+s_\nu}}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_\nu!} \sum_{j=1}^{\nu} \varrho_{k-1}{}^{r_j} K_j(\varrho_{k-1}) \right) \\
&= 8 \cdot 3^\nu (e^3)^\nu \sum_{j=1}^{\nu} \varrho_{k-1}{}^{r_j} K_j(\varrho_{k-1}).
\end{aligned}$$

Dies beweist (2.17) mit

$$d_2 := 8 \cdot 3^\nu e^{3\nu}. \tag{2.23}$$

Die Abschätzung (2.18) erhalten wir mit derselben Methode. Aus Korollar 2.21, (2.5), (2.22) und (2.19) folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\left| f_k^{(s)} \right|_{\mathbb{R}^\nu} &\leq (2m_k - 1)^{s_1+\ldots+s_\nu} \left| f_k \right|_{\mathbb{R}^\nu} \leq (2m_k - 1)^{s_1+\ldots+s_\nu} 3^\nu \left| f \right|_{\mathbb{R}^\nu} \\
&\leq 3^{\nu+s_1+\ldots+s_\nu} (m_k - 1)^{s_1+\ldots+s_\nu} \left| f \right|_{\mathbb{R}^\nu} \leq 3^{\nu+s_1+\ldots+s_\nu} \varrho_k{}^{-s_1-\ldots-s_\nu} \left| f \right|_{\mathbb{R}^\nu}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich aus dem Taylorschen Satz für alle $x \in \mathcal{S}(\varrho_k)$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
|f_k(x)| &= \left| \sum_{s \in \mathbb{N}_0^\nu} f_k^{(s)} (\operatorname{Re} x) \frac{(i \operatorname{Im} x)^{s_1+\ldots+s_\nu}}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_\nu!} \right| \\
&\leq \sum_{s \in \mathbb{N}_0^\nu} \frac{3^{\nu+s_1+\ldots+s_\nu}}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_\nu!} \left| f \right|_{\mathbb{R}^\nu} = 3^\nu (e^3)^\nu \left| f \right|_{\mathbb{R}^\nu}.
\end{aligned}$$

Es bleibt nur,

$$d_3 := 3^\nu e^{3\nu} \tag{2.24}$$

zu setzen, um den Beweis zu beenden. □

3 Beweis des Existenzsatzes (Satz E)

3.1 Erklärung der Beweisidee

Zum Beweis von Satz E gehen wir im Prinzip so vor, wie es Moser [19] vorgeschlagen hat. Wir arbeiten mit einer Folge (h_k) analytischer Funktionen, welche die Funktion h der in (1.3) gegebenen Hamiltonfunkiton

$$H(x,y) = a + \langle \omega \,,\, y \rangle + \frac{1}{2} \langle y\, C \,,\, y \rangle + h(x,y)$$

approximieren. Diese Folge erhalten wir mit einem Korollar aus dem Approximationssatz 2.23 (Korollar 3.11). Nun definieren wir Hamiltonfunktionen H_k durch

$$H_k(x,y) := a + \langle \omega \,,\, y \rangle + \frac{1}{2} \langle y\, C \,,\, y \rangle + h_k(x,y) = H(x,y) + (h_k - h)(x,y).$$

Es ist eine Folge von Variablentransformationen Z_k zu finden, deren Grenzwert (soweit existent) auf eine Lösung der Gleichungen (1.1)[6]

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x$$

führt. Nehmen wir an, wir haben die Transformation Z_k bereits konstruiert. Die Grundidee zur Konstruktion der nächsten Transformation Z_{k+1} ist, das KAM-Theorem für den Fall einer analytischen Störung, das wir im nächsten Abschnitt als Satz 3.6 formulieren, zu verwenden. Es habe Z_k die Eigenschaft, dass mit einer reellen Konstanten a_{k+1} und einer matrixwertigen Funktion Q_{k+1}

$$\begin{aligned} H_k \circ Z_k(\xi,\eta) \;&=\; \underbrace{a_{k+1} + \langle \omega \,,\, \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle \eta\, Q_{k+1}(\xi) \,,\, \eta \rangle}_{N_{k+1}(\xi,\eta)} + \mathcal{O}(|\eta|^3) \\ &=: \qquad\qquad N_{k+1}(\xi,\eta) \qquad\qquad + R_k^*(\xi,\eta) \end{aligned}$$

gilt, wobei wir N_{k+1} als die Summe der ersten drei Terme in der ersten Zeile definiert haben und R_k^* für die Terme dritter oder höherer Ordnung in η steht. Die Transformation soll so beschaffen sein, dass N_{k+1} als ungestörte Hamiltonfunktion im Sinne von Satz 3.6 in Frage kommt. – Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} H_{k+1} \circ Z_k \;&=\; H_k \circ Z_k + (H_{k+1} - H_k) \circ Z_k = H_k \circ Z_k + (h_{k+1} - h_k) \circ Z_k \\ &=\; N_{k+1} + R_k^* + (h_{k+1} - h_k) \circ Z_k. \end{aligned}$$

Satz 3.6 ist auf diese Funktion anzuwenden. Damit das möglich ist, muss der Restterm

$$R_{k+1} := R_k^* + (h_{k+1} - h_k) \circ Z_k$$

hinreichend klein sein. Wenn wir die Voraussetzungen von Satz 3.6 erfüllen können, so erhalten wir eine Transformation W mit

$$H_{k+1} \circ Z_k \circ W(\xi,\eta) = a_{k+2} + \langle \omega \,,\, \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle \eta\, Q_{k+2}(\xi) \,,\, \eta \rangle + \mathcal{O}(|\eta|^3),$$

wobei wieder a_{k+2} eine reelle Zahl und Q_{k+2} eine matrixwertige Funktion ist. Die gesuchte Transformation ist nun durch $Z_{k+1} := Z_k \circ W$ gegeben.

[6] Die Gleichungen (1.1) werden im Folgenden auch kanonische Gleichungen genannt.

3.2 Das analytische KAM-Theorem

In diesem Abschnitt formulieren wir das analytische KAM-Theorem, wie wir es im Beweis von Satz E verwenden wollen. Dazu sind zunächst einige Definitionen zu machen.

3.2.1 Vektoren, Matrizen und ihre Normen

Vektoren $z = (z_1, \dots, z_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ messen wir in der *Maximumnorm*

$$|z| := \max_{1 \le i \le \ell} |z_i|. \tag{3.1}$$

Für Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k1} & \dots & q_{k\ell} \end{pmatrix} = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{k \times \ell}$$

verwenden wir die *Zeilensummennorm*

$$|Q| := \max_{1 \le i \le k} \sum_{j=1}^{\ell} |q_{ij}|. \tag{3.2}$$

Die Zeilensummennorm ist submultiplikativ. Das bedeutet für beliebige Matrizen $Q \in \mathbb{C}^{k \times \ell}$ und $P \in \mathbb{C}^{\ell \times m}$ (k, ℓ, $m \in \mathbb{N}$)

$$|Q\,P| \le |Q|\,|P|.$$

Transponierte Vektoren und Matrizen bezeichnen wir mit einem hochgestellten „T“. Man beachte, dass für die Norm der transponierten Matrix gilt:

$$\left|Q^{\mathrm{T}}\right| \le k|Q| \qquad \forall \quad Q \in \mathbb{C}^{k \times \ell}. \tag{3.3}$$

Das Produkt zweier Vektoren x, $y \in \mathbb{C}^\ell$ definieren wir analog (1.2) durch

$$\langle\, x\,,\, y\,\rangle := \sum_{j=1}^{\ell} x_j\, y_j. \tag{3.4}$$

Dann gilt

$$|\,\langle\, x\,,\, y\,\rangle\,| \le \ell\,|x|\,|y|. \tag{3.5}$$

Schließlich hat man für das Produkt eines Vektors $x \in \mathbb{C}^\ell$ und einer Matrix $Q \in \mathbb{C}^{k \times \ell}$ die Abschätzung

$$|x\,Q^{\mathrm{T}}| \le |x|\,|Q|. \tag{3.6}$$

(Zum Beweis der letzten Ungleichung siehe Anhang A.1.)

3.2.2 Definitionsbereiche und Funktionen

Wir ergänzen Definition 2.22 wie folgt:

Definition 3.1. Es seien r und s positive Zahlen. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(r,s) &:= \left\{ z = (x,y) \in \mathbb{C}^{2n} \mid |\mathrm{Im}\, x| < r, |y| < s \right\}, \\
\mathcal{S}(r) &:= \{ x \in \mathbb{C}^{n} \mid |\mathrm{Im}\, x| < r \}, \\
\mathcal{S}'(r) &:= \left\{ z \in \mathbb{C}^{2n} \mid |\mathrm{Im}\, z| < r \right\}.
\end{aligned}$$

Mit $\mathcal{P}_m(r,s)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen

$$f : \mathcal{D}(r,s) \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad z = (x,y) \mapsto f(z),$$

die analytisch sind, reelle Argumente auf reelle Werte abbilden und in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ die Periode 2π haben.
Die Menge aller Funktionen $f : \mathcal{S}(r) \to \mathbb{C}^m$, die analytisch sind, reelle Argumente auf reelle Werte abbilden und in jeder Variablen die Periode 2π haben, bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_m(r)$.
Schließlich sei $\mathcal{P}'_m(r)$ die Menge aller Funktionen $f : \mathcal{S}'(r) \to \mathbb{C}^m$, die analytisch sind, reelle Argumente auf reelle Werte abbilden und in jeder Variablen die Periode 2π haben.

Die Definition soll auch für $m = n \times n$ gelten. Im Fall $m = 1$ schreiben wir $\mathcal{P}(r,s) := \mathcal{P}_1(r,s)$, $\mathcal{P}(r) := \mathcal{P}_1(r)$ und $\mathcal{P}'(r) := \mathcal{P}'_1(r)$.

Für die Einschränkung einer Funktion f auf eine Teilmenge $\mathcal{M}$ ihres Definitionsbereiches schreiben wir $f|_{\mathcal{M}}$. Zur Notation von Ableitungen. Ableitungen werden mit einem Subskript gekennzeichnet, für eine Funktion $f \in \mathcal{P}(r)$ zum Beispiel

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_x = (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}),$$

für Funktionen $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{P}_m(r)$ ist f_x dann die Jacobimatrix

$$f_x = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & \cdots & f_{1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{mx_1} & \cdots & f_{mx_n} \end{pmatrix}.$$

Für Funktionen $f \in \mathcal{P}_m(r,s)$ sei $f_z = (f_x, f_y)$, ausführlich:

$$f_z = (f_x, f_y) = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & \cdots & f_{1x_n} & f_{1y_1} & \cdots & f_{1y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{mx_1} & \cdots & f_{mx_n} & f_{my_1} & \cdots & f_{my_n} \end{pmatrix}.$$

Schließlich schreiben wir bei Funktionen $t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ die nur von einer Variablen abhängen,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = (x_{1t}, \ldots, x_{nt}).$$

Nach der Definition der Jacobimatrix haben wir also $\dot{x} = x_t^{\mathrm{T}}$.

3.2.3 Frequenzvektoren

Der als erste Ableitung der Hamiltonfunktion auftretende Vektor $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ wird *Frequenzvektor* genannt. Zum Beweis des Satzes 3.6 wird man fordern müssen, dass dieser Frequenzvektor einer Folge von *Diophantischen Ungleichungen* genügt, das heißt Element einer Menge des folgenden Typs ist:

Definition 3.2. Für $n \geq 2$, $\tau > 0$ und $\gamma > 0$ sei

$$\Omega(\gamma, \tau) := \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |\langle \omega\,,\, k \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

Bemerkung 3.3. Es gelten die Aussagen (siehe [31] und die Literaturangaben dort):

1. Ist $0 < \tau < n-1$, so sind alle Mengen $\Omega(\gamma, \tau)$, $\gamma > 0$, leer.

2. Für $\tau = n-1$ gilt, dass die Menge $\Omega(n-1) := \cup_{\gamma>0}\Omega(\gamma, n-1)$ n-dimensionales Lebesgue-Maß Null hat. Jedoch hat der Schnitt jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $\Omega(n-1)$ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$.

3. Ist $\tau > n-1$, so existiert für fast alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ ein $\gamma = \gamma(\omega) > 0$ mit $\omega \in \Omega(\gamma, \tau)$.

3.2.4 Einfache kanonische Transformationen

Definition 3.4. Es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ Gebiete. Eine stetig differenzierbare Abbildung

$$Z : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}, \quad \zeta = (\xi, \eta) \mapsto z = Z(\zeta)$$

nennen wir *kanonische Transformation*, wenn für alle ζ aus $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ mit der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, \quad E_n \text{ die } (n \times n)\text{-Einheitsmatrix}, \tag{3.7}$$

gilt:

$$Z_\zeta(\zeta)^{\mathrm{T}} \cdot J \cdot Z_\zeta(\zeta) = J. \tag{3.8}$$

Definition 3.5. Es seien $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ Gebiete. Eine analytische, kanonische Transformation

$$Z : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}, \quad \zeta = (\xi, \eta) \mapsto z = (x, y) = Z(\zeta) = (X(\zeta), Y(\zeta))$$

nennen wir *einfache kanonische Transformation*, wenn die Abbildung $\zeta = (\xi, \eta) \mapsto X(\zeta)$ nicht von η abhängt, also wenn gilt $X = X(\xi)$.

Sind Z_1 und Z_2 zwei einfache kanonische Transformationen mit der Eigenschaft, dass man die erste mit der zweiten verketten darf, so ist auch $Z_1 \circ Z_2$ eine einfache kanonische Transformation. Haben Z_1 und Z_2 die Eigenschaft, dass $(\xi, \eta) \mapsto Z_i(\xi, \eta) - (\xi, 0)$ in $\xi_1, \dots, \xi_n$ die Periode 2π hat $(i = 1, 2)$, so gilt das auch für $(\xi, \eta) \mapsto Z_2 \circ Z_1(\xi, \eta) - (\xi, 0)$. (Siehe dazu die Lemmata A.9 und A.20 im Anhang.)

Satz 3.6. Analytisches KAM-Theorem. *Es seien $\tau \geq n-1 \geq 1$, $\gamma > 0$ und $0 < s \leq r^{\tau+1} \leq 1$. Wir betrachten die Hamiltonfunktion $H \in \mathcal{P}(r,s)$,*

$$H(x,y) = a + \langle \omega, y \rangle + \frac{1}{2}\langle y \cdot Q(x), y \rangle + R(x,y), \tag{3.9}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega(\gamma,\tau)$, $Q \in \mathcal{P}_{n\times n}(r)$ und $R \in \mathcal{P}(r,s)$ gelte. Es gebe eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$|Q - C|_{\mathcal{S}(r)} \leq \frac{1}{4|C^{-1}|}. \tag{3.10}$$

Dann gibt es positive Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_5$, die nur von n, τ, γ und C abhängen, so dass für alle ϑ, $0 < \vartheta \leq c_1$ und

$$M := |R|_{\mathcal{D}(r,s)} \leq c_2 s^2 \vartheta \tag{3.11}$$

das Folgende richtig ist: Es gibt eine einfache kanonische Transformation

$$W = (U,V) : \mathcal{D}(r/2, s/2) \longrightarrow \mathcal{D}(r,s), \quad W - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r/2, s/2),$$

die der Abschätzung

$$|W_\zeta - E_{2n}|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)} \leq c_3 \vartheta \tag{3.12}$$

genügt. Die transformierte Hamiltonfunktion $H_+ := H \circ W$ ist aus $\mathcal{P}(r/2, s/2)$ und hat die Gestalt

$$H_+(\xi,\eta) = a_+ + \langle \omega, \eta \rangle + \frac{1}{2}\langle \eta \cdot Q_+(\xi), \eta \rangle + R^*(\xi,\eta), \tag{3.13}$$

wobei $a_+ \in \mathbb{R}$, $Q_+ \in \mathcal{P}_{n\times n}(r/2)$ und $R^* \in \mathcal{P}(r/2, s/2)$ ist. Die Funktionen Q_+ und R^* erfüllen die Abschätzungen

$$|Q_+ - Q|_{\mathcal{S}(r/2)} \leq c_4 \vartheta, \tag{3.14}$$

$$|R^*(\xi,\eta)| \leq c_5 M \frac{|\eta|^3}{s^3} \quad \text{für alle } (\xi,\eta) \in \mathcal{D}(r/2, s/2). \tag{3.15}$$

Behauptung (3.15) besagt natürlich, dass wir zu den durch die Hamiltonfunktion $H_+ = H \circ W$ gegebenen kanonischen Gleichungen

$$\dot{\xi} = H_{+\eta}, \quad \dot{\eta} = -H_{+\xi} \tag{3.16}$$

Lösungen finden können. In der Tat, mit dem Landau-Symbol $\mathcal{O}$ haben wir $R^* = \mathcal{O}(|\eta|^3)$, also ist (3.13) die Taylor-Entwicklung von H_+. Die Gleichungen (3.16) lassen sich also wie folgt schreiben:

$$\dot{\xi} = \omega + \mathcal{O}(|\eta|), \quad \dot{\eta} = \mathcal{O}(|\eta|^2),$$

und wir finden die Lösung $\eta = 0$, $\xi = \omega t + \text{const.}$ Aus dieser erhalten wir eine Lösung für die kanonischen Gleichungen zur ursprünglichen Hamiltonfunktion H,

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x.$$

Wir müssen lediglich $(\xi, \eta) = (\omega t + \text{const.}, 0)$ nehmen und darauf die Transformation W anwenden.

Die Tatsache, dass ω fest gehalten werden kann, liegt an der Voraussetzung (3.10), denn diese hat zur Folge, dass Q regulär ist. Die Regularität von Q ist mutatis mutandis die *Nichtdegeneriertheitsbedingung von Kolmogorov* (siehe [34], 2.5; [15], (2-4); und [36], § 36).

3.3 Existenz der Folgen

In diesem Abschnitt legen wir die Folgen (δ_k), (s_k) und (ϑ_k) fest, die den in Satz 3.12 zu formulierenden iterativen Prozess kontrollieren. Zunächst ist eine Vorüberlegung erforderlich.

Lemma 3.7.

Es sei $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ eine $2n$-mal stetig partiell differenzierbare, 2π-periodische Funktion und die gemäß (1.4) definierten Stetigkeitsmodule

$$K_j(\delta) = \sup_{|z-z'|\leq\delta} \left| \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z) - \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z') \right| \qquad (\delta \geq 0,\ 1 \leq j \leq 2n)$$

sollen für alle $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ die Integralbedingung (1.5) (3.17)

$$\int_0^1 \frac{K_j(\delta)}{\delta}\, d\delta < \infty$$

erfüllen.

Wir setzen

$$K := K_1 + \ldots + K_{2n}. \tag{3.18}$$

Dann bildet K von $[0, \infty)$ nach $[0, \infty)$ ab. K ist stetig und monoton wachsend. Es gilt $K(0) = 0$,

$$K(N\delta) \leq N\, K(\delta) \qquad \forall \quad N \in \mathbb{N},\ \delta \geq 0 \tag{3.19}$$

und

$$\int_0^1 \frac{K(\delta)}{\delta}\, d\delta < \infty. \tag{3.20}$$

Ferner gilt für alle $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, $\delta > 0$, $z \in \mathbb{R}^{2n}$ und $t \in [-\delta, \delta]$

$$\left| \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z) - \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z + t\, e_j) \right| \leq K(\delta). \tag{3.21}$$

Beweis. Auf Grund der Bemerkung 2.10 gilt für alle $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, dass $K_j : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend und stetig ist und dass $K_j(0) = 0$ sowie

$$K_j(N\delta) \leq N\, K_j(\delta) \qquad \forall \quad N \in \mathbb{N},\, \delta \geq 0$$

gilt. Nach Definition (3.18) hat auch K die entsprechenden Eigenschaften. Die Behauptung (3.20) folgt aus (1.5). Da in Satz E vorausgesetzt ist, dass K_j der Stetigkeitsmodul von $\partial^{2n} h / \partial {z_j}^{2n}$ ist, gilt

$$\sup_{|z-z'| \leq \delta} \left| \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z) - \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z') \right| \leq K_j(\delta) \qquad \forall \quad \delta \geq 0,\, j \in \{1, \ldots, 2n\}.$$

Weil die Funktion K gemäß (3.18) jeden Stetigkeitsmodul K_j majorisiert, impliziert dies (3.21). □

Wir setzen

$$\delta_k := q^k \delta_0 \text{ und } s_\ell := {\delta_\ell}^n \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N},\ \ell \in \mathbb{N}_0, \tag{3.22}$$

wobei $\delta_0 \in (0, 1)$ und $q \in (0, 1)$ sein sollen. Daraus folgt

$$\delta_{k+1} = q^{k+1} \delta_0 = q\, \delta_k \text{ und } s_{k+1} = {\delta_{k+1}}^n = q^n s_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{s_k}{s_{k+1}} = q^{-n} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.23}$$

Zur Definition von q setzen wir in Satz 3.6 die Zahlen γ, n und die Matrix C aus den Voraussetzungen von Satz E sowie $\tau = n - 1$ ein. Mit dieser Wahl hängen die durch Satz 3.6 gegebenen Konstanten c_1 bis c_5 nur von n, γ und C ab:

$$c_j = c_j(n, \gamma, C), \quad j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \tag{3.24}$$

Nun setzen wir

$$q := \min \left\{ (4c_5)^{-1/n}, \frac{1}{2} \right\}. \tag{3.25}$$

Somit gilt auch $q = q(n, \gamma, C)$. Schließlich ist noch eine Folge (ϑ_k) festzulegen. Es wird sich zeigen, dass sie folgenden Bedingungen genügen muss:

$$\vartheta_{k+1} \geq C_2 K(\delta_k) \left(\frac{s_k}{s_{k+1}} \right)^2 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.26}$$

$$\frac{\vartheta_{k+1}}{\vartheta_k} \geq C_3 \frac{s_{k+1}}{s_k} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.27}$$

$$0 < \vartheta_0 \leq C_4, \tag{3.28}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k \leq C_5. \tag{3.29}$$

Hierbei ist K die Funktion aus Lemma 3.7 und C_2, C_3, C_4 und C_5 sind positive, nur von n, γ und C abhängende Konstanten, die mit Hilfe der Konstanten c_1 bis c_5 aus Satz 3.6 (vergleiche (3.24)) sowie der in (3.25) definierten Zahl $q = q(n, \gamma, C)$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} &C_2 := \frac{64n3^{2n}e^{6n}}{c_2 q^{2n+1}},\ C_3 := 2\,c_5,\ C_4 := c_1, \\ &C_5 := \min\left\{\frac{1}{4\,c_4|C^{-1}|}, \frac{\ln 3 - \ln 2}{c_3}\right\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Auf Grund von (3.23) sind die Bedingungen (3.26) und (3.27) gleichbedeutend mit

$$\vartheta_{k+1} \geq C_2 K(\delta_k) q^{-2n} \text{ beziehungsweise } \frac{\vartheta_{k+1}}{\vartheta_k} \geq C_3 q^n \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lemma 3.8. *Die Bedingung (3.27) ist erfüllt, wenn*

$$\frac{\vartheta_{k+1}}{\vartheta_k} \geq \frac{1}{2} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.31}$$

gilt.

Beweis. Aus (3.23), (3.25) und (3.30) folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$C_3 \frac{s_{k+1}}{s_k} = C_3 q^n \leq C_3 \frac{1}{2\,C_3} = \frac{1}{2},$$

also ist (3.31) eine stärkere Bedingung als (3.27). □

Wir untersuchen nun die Folge der

$$\mathfrak{a}_k := C_2 K(\delta_k) q^{-2n} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.32}$$

Sie hängt wegen (3.22) und (3.25) nur von n, γ, C und K sowie der Wahl von δ_0 ab.

Lemma 3.9. *Es gibt eine positive, nur von n, γ, C und K abhängende Konstante C_6, so dass für alle $\delta_0 \in (0, C_6]$ gilt:*

$$4\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{a}_k \leq C_5.$$

Beweis. Die Funktion $K : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ist stetig und es gilt $K(0) = 0$. Folglich gibt es eine Konstante $C_7 = C_7(n, \gamma, C, K) > 0$ mit

$$5\,\mathfrak{a}_0 = 5\,C_2 K(\delta_0) q^{-2n} \leq \frac{C_5}{2} \qquad \forall \quad \delta_0 \in (0, C_7]. \tag{3.33}$$

Da K monoton wachsend ist, können wir $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}_k$ durch ein Integral abschätzen, wobei wir $\delta_k := q^k \delta_0$ für alle reellen Zahlen $k \geq 0$ setzen (vergleiche (3.22)):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}_k = \sum_{k=1}^{\infty} C_2 K(\delta_k) q^{-2n} \leq C_2 q^{-2n} \int_0^{\infty} K(\delta_k)\, dk = C_2 q^{-2n} \int_0^{\infty} K(q^k \delta_0)\, dk.$$

Mit der Substitution $s = q^k \delta_0$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}_k \leq \frac{C_2}{q^{2n} |\ln q|} \int_0^{\delta_0} \frac{K(s)}{s}\, ds.$$

Aus der Integralbedingung (3.20) folgt nun, dass das Integral auf der rechten Seite gegen Null geht, wenn δ_0 klein wird. Also existiert eine Konstante $C_8 = C_8(n, \gamma, C, K) > 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}_k \leq \frac{C_5}{2} \qquad \forall \quad \delta_0 \in (0, C_8]. \tag{3.34}$$

Setzen wir $C_6 := \min\{C_7, C_8\}$, so folgt aus (3.33) und (3.34)

$$4\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{a}_k = 5\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}_k \leq C_5 \qquad \forall \quad \delta_0 \in (0, C_6],$$

was zu zeigen war. □

Wir definieren nun die Folge (ϑ_k) induktiv. Es sei

$$\vartheta_0 := 2\,\mathfrak{a}_0 \text{ und } \vartheta_1 := \mathfrak{a}_0. \tag{3.35}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ machen wir eine Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} &\text{Falls } \mathfrak{a}_k \leq \frac{\mathfrak{a}_{k-1}}{2} \text{ ist, setzen wir } \vartheta_{k+1} := \frac{\vartheta_k}{2}. \\ &\text{Falls } \mathfrak{a}_k > \frac{\mathfrak{a}_{k-1}}{2} \text{ ist, setzen wir } \vartheta_{k+1} := \frac{\vartheta_k - \mathfrak{a}_{k-1}}{2} + \mathfrak{a}_k. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Satz 3.10. *Es gibt eine Konstante $C_9 = C_9(n, \gamma, C, K) > 0$, so dass die durch (3.35) und (3.36) festgelegte Folge (ϑ_k) für alle $\delta_0 \in (0, C_9]$ die Bedingungen (3.26) bis (3.29) erfüllt. Außerdem gilt*

$$q^{-1} \delta_0 \leq 1. \tag{3.37}$$

Beweis. (1) Wir beweisen (3.26). Wegen (3.23) und (3.32) ist die Bedingung (3.26) mit

$$\vartheta_{k+1} \geq \mathfrak{a}_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.38}$$

gleichbedeutend. Für $k = 0$ folgt dies aus (3.35). Sei nun (3.38) für ein $k \in \mathbb{N}_0$ richtig. Wir zeigen die Gültigkeit für $k+1$. Im Fall $\mathfrak{a}_{k+1} \leq \mathfrak{a}_k/2$ gilt nach (3.36)

$$\vartheta_{k+2} = \frac{\vartheta_{k+1}}{2} \geq \frac{\mathfrak{a}_k}{2} \geq \mathfrak{a}_{k+1}.$$

Im Fall $\mathfrak{a}_{k+1} > \mathfrak{a}_k/2$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\vartheta_{k+2} = \frac{\vartheta_{k+1} - \mathfrak{a}_k}{2} + \mathfrak{a}_{k+1} \geq \mathfrak{a}_{k+1}.$$

Dies zeigt (3.38), daraus folgt (3.26).
(2) Wir beweisen (3.27). Nach Lemma 3.8 ist (3.27) erfüllt, wenn

$$2\vartheta_{k+1} \geq \vartheta_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.39}$$

gilt. Für $k = 0$ folgt dies aus (3.35). Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Im Fall $\mathfrak{a}_k \leq \mathfrak{a}_{k-1}/2$ gilt nach (3.36)

$$2\vartheta_{k+1} = 2\left(\frac{\vartheta_k}{2}\right) = \vartheta_k.$$

Falls $\mathfrak{a}_k > \mathfrak{a}_{k-1}/2$ ist, folgt

$$2\vartheta_{k+1} = \vartheta_k - \mathfrak{a}_{k-1} + 2\,\mathfrak{a}_k > \vartheta_k,$$

also ist (3.39) und damit (3.27) richtig.
(3) Nun zeigen wir (3.28). Nach (3.35) gilt $\vartheta_0 = 2\,\mathfrak{a}_0$. Wegen der Eigenschaften der Funktion K (siehe Lemma 3.7) gibt es eine Konstante $C_{10} = C_{10}(n, \gamma, C, K) > 0$ mit

$$2\,\mathfrak{a}_0 = 2\,C_2 K(\delta_0) q^{-2n} \leq C_4 \qquad \forall \quad \delta_0 \in (0, C_{10}].$$

Ist also

$$C_9 \leq C_{10}, \tag{3.40}$$

so folgt (3.28).
(4) Wir beweisen (3.29). Dazu zeigen wir zunächst

$$\vartheta_{k+1} \leq \frac{\vartheta_k}{2} + \frac{\mathfrak{a}_{k-1}}{2} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.41}$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Im Fall $\mathfrak{a}_k \leq \mathfrak{a}_{k-1}/2$ gilt

$$\vartheta_{k+1} = \frac{\vartheta_k}{2} \leq \frac{\vartheta_k}{2} + \frac{\mathfrak{a}_{k-1}}{2},$$

da alle $\mathfrak{a}_k$ positiv sind. Im Fall $\mathfrak{a}_k > \mathfrak{a}_{k-1}/2$ beachten wir, dass die Folge $(\mathfrak{a}_k)$ monoton fallend ist. Dies folgt aus ihrer Definition (3.32), denn (δ_k) ist nach (3.22) eine monoton fallende Folge und K eine monoton wachsende Funktion. Also gilt

$$\vartheta_{k+1} = \frac{\vartheta_k - \mathfrak{a}_{k-1}}{2} + \mathfrak{a}_k = \frac{\vartheta_k}{2} + \frac{\mathfrak{a}_{k-1}}{2} + (\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_{k-1}) \leq \frac{\vartheta_k}{2} + \frac{\mathfrak{a}_{k-1}}{2}.$$

Demnach ist (3.41) richtig. Mit (3.35) und (3.41) folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N+1} \vartheta_k = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \sum_{k=2}^{N+1} \vartheta_k = 3\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{k=2}^{N+1} \vartheta_k \leq 3\,\mathfrak{a}_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \vartheta_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{a}_k,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} \vartheta_k + \frac{\vartheta_0}{2} + \vartheta_{N+1} \leq 3\,\mathfrak{a}_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{a}_k,$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} \vartheta_k \leq 6\,\mathfrak{a}_0 - \vartheta_0 - 2\vartheta_{N+1} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{a}_k = 4\,\mathfrak{a}_0 - 2\vartheta_{N+1} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{a}_k \leq 4\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{a}_k.$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt aus

$$C_9 \leq C_6 \tag{3.42}$$

mit Lemma 3.9

$$\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k \leq 4\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{a}_k \leq C_5.$$

Damit ist (3.29) bewiesen.
(5) Nun ist noch (3.37) zu zeigen. Aus $\delta_0 \leq C_9$ folgt

$$q^{-1}\delta_0 \leq q^{-1}C_9.$$

Diese Zahl soll kleinergleich 1 sein, was mit $C_9 \leq q$ gleichbedeutend ist. Nach unserer Definition (3.25) von q ist das der Fall, wenn

$$C_9 \leq \min\left\{(4c_5)^{-1/n}, \frac{1}{2}\right\}$$

gilt. Bei der Definition von C_9 haben wir noch (3.40) und (3.42) zu beachten, wir setzen daher

$$C_9 := \min\left\{(4c_5)^{-1/n},\, C_6,\, C_{10},\, \frac{1}{2}\right\}.$$

Dann gilt

$$q^{-1}\delta_0 \leq q^{-1}C_9 \leq q^{-1}q = 1.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

3.4 Das Induktionslemma

Bevor wir zur Formulierung des Induktionslemmas kommen, müssen wir noch den Approximationssatz 2.23 auf die in Satz E gegebene Situation anwenden. Dies tun wir in dem folgenden

Korollar 3.11. *Es sei $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ eine $2n$-mal stetig partiell differenzierbare, 2π-periodische Funktion und $K_1, \ldots, K_{2n}$ seien die gemäß (1.4) definierten Stetigkeitsmodule. Es sei K die in (3.18) definierte Funktion und die Folge (δ_k) sei gemäß (3.22), (3.25) mit*

$$\delta_0 := C_9$$

festgelegt. Dann gibt es eine positive, nur von n, γ und C abhängende Konstante C_{11} und eine Folge von Funktionen $h_k \in \mathcal{P}'(q^{-1}\delta_k)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mit den Eigenschaften

$$|h - h_k|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq C_{11}{\delta_k}^{2n} K(\delta_k) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.43}$$

$$|h_{z_\ell} - h_{k\, z_\ell}|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq C_{11}{\delta_k}^{2n-1} K(\delta_k) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,\ \ell \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{3.44}$$

$$|h_k - h_{k-1}|_{\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_k)} \leq C_{11}{\delta_{k-1}}^{2n} K(\delta_{k-1}) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.45}$$

$$|h_k|_{\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_k)} \leq C_{11}\, |h|_{\mathbb{R}^{2n}} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.46}$$

Zusatz. *Es gilt*

$$\frac{2C_{11}}{c_2} \leq C_2. \tag{3.47}$$

Beweis. Um Satz 2.23 anwenden zu können, setzen wir dort

$$\nu = 2n,\ f = h,\ r_1 = \ldots = r_{2n} = 2n,\ K_1 = \ldots = K_{2n} = K \text{ und } \varrho_k = q^{-1}\delta_k\ (k \in \mathbb{N}_0)$$

ein. Wegen (3.21) und (3.37) sind die Voraussetzungen von Satz 2.23 erfüllt und es gibt eine Funktionenfolge (f_k) mit $f_k \in \mathcal{P}'(\varrho_k) = \mathcal{P}'(q^{-1}\delta_k)$ (man beachte $\nu = 2n$) und den Abschätzungen (2.15) bis (2.18). Wir setzen $h_k := f_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und bezeichnen das Argument von h_k mit z. Es sei

$$N = N(q) \tag{3.48}$$

die kleinste natürliche Zahl, die größer oder gleich q^{-1} ist. Aus (2.15) und (3.19) folgt dann

$$\begin{aligned} |h - h_k|_{\mathbb{R}^{2n}} &\leq d_1 \sum_{j=1}^{2n} \left(K(q^{-1}\delta_k)(q^{-1}\delta_k)^{2n}\right) \leq 2nd_1 K(N\delta_k) q^{-2n}{\delta_k}^{2n} \\ &\leq 2nNd_1 q^{-2n}{\delta_k}^{2n} K(\delta_k) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Entsprechend erhält man aus (2.16) und (3.19)

$$\begin{aligned} |h_{z_\ell} - h_{k\, z_\ell}|_{\mathbb{R}^{2n}} &\leq d_1 \sum_{j=1}^{2n} \left(K(q^{-1}\delta_k)(q^{-1}\delta_k)^{2n-1}\right) \leq 2nd_1 K(N\delta_k) q^{-(2n-1)}{\delta_k}^{2n-1} \\ &\leq 2nNd_1 q^{-2n}{\delta_k}^{2n-1} K(\delta_k) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,\ \ell \in \{1, \ldots, 2n\}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Mit (2.17) und (3.19) sieht man

$$\begin{aligned} |h_k - h_{k-1}|_{\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_k)} &\leq d_2 \sum_{j=1}^{2n} \left(K(q^{-1}\delta_{k-1})(q^{-1}\delta_{k-1})^{2n}\right) \leq 2nd_2 K(N\delta_{k-1}) q^{-2n}{\delta_{k-1}}^{2n} \\ &\leq 2nNd_2 q^{-2n}{\delta_{k-1}}^{2n} K(\delta_{k-1}) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Schließlich folgt aus (2.18)

$$|h_k|_{\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_k)} \leq d_3 \, |h|_{\mathbb{R}^{2n}} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.52}$$

Ein Vergleich von (2.20), (2.23) und (2.24) zeigt, dass d_2 bei jedem Wert von $\nu = 2n$ größer als d_1 und d_3 ist. Folglich ist

$$C_{11} := 2nNd_2q^{-2n}$$

größer als $2nNd_1q^{-2n}$ und auch als d_3. Also folgen aus (3.49), (3.50), (3.51) und (3.52) die behaupteten Abschätzungen. Es bleibt nachzuprüfen, dass C_{11} nur von n, γ und C abhängt. In der Tat: Gemäß (3.24) hängt die Konstante c_5 nur von n, γ und C ab und q ist in (3.25) nur in Abhängigkeit von n und c_5 definiert, also gilt auch $q = q(n, \gamma, C)$. Mit (3.48) folgt auch $N = N(n, \gamma, C)$ und nach (2.23) gilt $d_2 = 8 \cdot 3^{2n}e^{6n}$, so dass aus der Definition von C_{11} folgt, dass C_{11} nur von n, γ und C abhängt. □

Beweis des Zusatzes. Da N als die kleinste natürliche Zahl definiert wurde, die größer oder gleich q^{-1} ist, gilt

$$N \leq q^{-1} + 1.$$

Folglich erhalten wir für C_{11} die Abschätzung

$$C_{11} \leq 2n(q^{-1} + 1)d_2q^{-2n} < 2n(q^{-1} + q^{-1})d_2q^{-2n} = 4nd_2q^{-(2n+1)}.$$

Setzen wir $d_2 = 8 \cdot 3^{2n}e^{6n}$ ein, ergibt sich mit (3.30)

$$\frac{2C_{11}}{c_2} \leq \frac{2}{c_2}\frac{4n}{q^{2n+1}} 8 \cdot 3^{2n}e^{6n} = \frac{64n3^{2n}e^{6n}}{c_2q^{2n+1}} = C_2,$$

wie es behauptet war. □

Satz 3.12. *Es sei h eine Funktion, welche die Voraussetzungen (3.17) erfüllt.*

Die Funktion

$$H(x,y) = a + \langle \omega \, , \, y \rangle + \frac{1}{2} \langle \, y \, C \, , \, y \, \rangle + h(x,y)$$

sei gemäß (1.3) gegeben. Hierbei gelte $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^n$ genüge mit einer Konstanten $\gamma > 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ der Diophantischen Ungleichung (3.53)

$$|\langle \omega \, , \, k \, \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^{n-1}}$$

und $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei eine reguläre Matrix.

Die Folgen (δ_k), (s_k) und (ϑ_k) seien gemäß (3.22), (3.25), (3.35) und (3.36) mit

$$\delta_0 = C_9$$

festgelegt. Es sei (h_k) die durch h in (3.17), K in (3.18) und Korollar 3.11 gegebene Funktionenfolge und (3.54)

$$H_k(x,y) := a + \langle \omega\,,\, y \rangle + \frac{1}{2}\langle y\,C\,,\, y \rangle + h_k(x,y).$$

Dann gibt es eine Konstante $C_1 = C_1(n,\gamma,C,K) > 0$, so dass im Fall

$$\boxed{|h|_{\mathbb{R}^{2n}} \le C_1} \tag{3.55}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: Es gibt eine einfache kanonische Transformation

$$Z_k : \mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2) \longrightarrow \mathcal{S}'(\delta_k), \quad Z_k - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(\delta_k/2, s_k/2), \tag{3.56}$$

welche die Abschätzung

$$|Z_{k\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2)} \le \exp\left(\sum_{\ell=0}^{k} c_3\vartheta_\ell\right) - 1 \tag{3.57}$$

erfüllt. Die transformierte Hamiltonfunktion $H_k \circ Z_k \in \mathcal{P}(\delta_k/2, s_k/2)$ hat die Gestalt

$$H_k \circ Z_k(\xi,\eta) = a_{k+1} + \langle \omega\,,\, \eta \rangle + \frac{1}{2}\langle \eta\, Q_{k+1}(\xi)\,,\, \eta \rangle + R_k^*(\xi,\eta) \tag{3.58}$$

mit $a_{k+1} \in \mathbb{R}$, $Q_{k+1} \in \mathcal{P}_{n\times n}(\delta_k/2)$ und $R_k^* \in \mathcal{P}(\delta_k/2, s_k/2)$. Es gelten die Abschätzungen

$$|Q_{k+1} - C|_{\mathcal{S}(\delta_k/2)} \le \sum_{\ell=0}^{k} c_4\vartheta_\ell, \tag{3.59}$$

$$|R_k^*(\xi,\eta)| \le c_5 M_k \frac{|\eta|^3}{{s_k}^3} \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2). \tag{3.60}$$

Hierbei ist

$$M_k := c_2 {s_k}^2 \vartheta_k \tag{3.61}$$

gesetzt und die Konstanten $c_2, \ldots, c_5$ sind durch Satz 3.6 gegeben.

Beweis. Da $\delta_0 = C_9$ ist, gilt nach (3.22) $s_0 = {C_9}^n$, und aus (3.32) und (3.35) folgt

$$\vartheta_0 = 2\,\mathfrak{a}_0 = 2C_2K(C_9)q^{-2n}.$$

Wir setzen

$$C_1 := {C_{11}}^{-1} c_2 {s_0}^2 \vartheta_0 = 2{C_{11}}^{-1} c_2 C_2 {C_9}^{2n} K(C_9) q^{-2n}. \tag{3.62}$$

Da nur c_5 und n in unsere Wahl (3.25) von q eingehen und C_{11} gemäß Korollar 3.11 nur von n, γ und C abhängt, ist die Konstante C_1 positiv und hängt nur von n, γ, C und K ab.
Wir beweisen die Behauptung für $k = 0$. In diesem Fall betrachten wir die Hamiltonfunktion

$$H_0(x, y) = a + \langle \omega , \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle yC , y \rangle + h_0(x, y),$$

wobei h_0 und damit H_0 auf $\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_0)$ definiert ist, also insbesondere auf $\mathcal{D}(\delta_0, s_0)$ (siehe Definition 3.1). Wegen Korollar 3.11, (3.55), (3.61) und (3.62) gilt

$$|h_0|_{\mathcal{D}(\delta_0,s_0)} \leq |h_0|_{\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_0)} \leq C_{11} |h|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq C_{11}C_1 = c_2 {s_0}^2 \vartheta_0 = M_0. \tag{3.63}$$

Wegen (3.28) und (3.30) gilt außerdem $0 < \vartheta_0 \leq c_1$. Also können wir Satz 3.6 anwenden. Dort ist

$$\tau = n-1,\ s = s_0,\ r = \delta_0,\ H = H_0,\ Q = C,\ R = h_0,\ \vartheta = \vartheta_0 \text{ und } M = |h_0|_{\mathcal{D}(\delta_0,s_0)}$$

einzusetzen. Aus Satz 3.6 folgt die Existenz einer einfachen kanonischen Transformation

$$W : \mathcal{D}(\delta_0/2, s_0/2) \longrightarrow \mathcal{D}(\delta_0, s_0), \quad W - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(\delta_0/2, s_0/2).$$

Setzen wir $Z_0 := W$, so folgt (3.56) für $k = 0$. Aus der Ungleichung $e^t \geq 1 + t$ für alle reellen t erhalten wir mit (3.12)

$$|Z_{0\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_0/2,s_0/2)} \leq c_3\vartheta_0 \leq e^{c_3\vartheta_0} - 1,$$

also (3.57) für $k = 0$. Setzen wir in (3.13)

$$a_1 := a_+,\ Q_1 := Q_+ \text{ und } R_0^* := R^*$$

ein, so hat die transformierte Hamiltonfunktion $H_0 \circ Z_0$ die Gestalt (3.58) und es gilt $a_1 \in \mathbb{R}$, $Q_1 \in \mathcal{P}_{n\times n}(\delta_0/2)$ sowie $R_0^* \in \mathcal{P}(\delta_0/2, s_0/2)$. Aus (3.14) folgt

$$|Q_1 - C|_{\mathcal{S}(\delta_0/2)} \leq c_4\vartheta_0,$$

das ist (3.59) für $k = 0$. Aus (3.15) und (3.63) folgt

$$|R_0^*(\xi, \eta)| \leq c_5 M_0 \frac{|\eta|^3}{{s_0}^3} \qquad \forall \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{D}(\delta_0/2, s_0/2),$$

womit für $k = 0$ alle Behauptungen bewiesen sind.
Der Satz sei nun für ein $k \in \mathbb{N}_0$ richtig. Wir zeigen, dass er dann auch für $k + 1$ gilt. Dazu betrachten wir die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H_{k+1}(x, y) &= a + \langle \omega , y \rangle + \frac{1}{2} \langle yC , y \rangle + h_{k+1}(x, y) \\ &= a + \langle \omega , y \rangle + \frac{1}{2} \langle yC , y \rangle + h_k(x, y) + (h_{k+1} - h_k)(x, y) \\ &= H_k(x, y) + (h_{k+1} - h_k)(x, y). \end{aligned}$$

Sie ist auf $\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_{k+1}) = \mathcal{S}'(\delta_k)$ definiert, und Z_k bildet nach $\mathcal{S}'(\delta_k)$ ab. Daher ist $H_{k+1} \circ Z_k$ auf $\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1}) \subseteq \mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2)$ wohldefiniert (man beachte (3.22) und $q \leq 1/2$ wegen (3.25)). Nach (3.54) und (3.58) gilt

$$\begin{aligned}(H_{k+1} \circ Z_k)(\xi, \eta) &= (H_k \circ Z_k)(\xi, \eta) + ((h_{k+1} - h_k) \circ Z_k)(\xi, \eta) \\ &= a_{k+1} + \langle\, \omega \,,\, \eta \,\rangle + \frac{1}{2} \langle\, \eta\, Q_{k+1}(\xi) \,,\, \eta \,\rangle + R_{k+1}(\xi, \eta),\end{aligned}$$

wenn wir

$$R_{k+1}(\xi, \eta) := R_k^*(\xi, \eta) + (h_{k+1} - h_k)(Z_k(\xi, \eta)) \tag{3.64}$$

definieren. Gemäß der Induktionsvoraussetzung gilt $Q_{k+1} \in \mathcal{P}_{n \times n}(\delta_k/2)$, $Z_k - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(\delta_k/2, s_k/2)$ und $R_k^* \in \mathcal{P}(\delta_k/2, s_k/2)$. Insbesondere ist $Q_{k+1} \in \mathcal{P}_{n \times n}(\delta_{k+1})$. Da nach dem Korollar 3.11 und wegen $q^{-1}\delta_{k+1} = \delta_k$ auch h_{k+1}, $h_k \in \mathcal{P}'(\delta_k)$ sind, folgt $R_{k+1} \in \mathcal{P}(\delta_{k+1}, s_{k+1})$. Um nun Satz 3.6 anwenden zu können, ist eine Abschätzung für R_{k+1} zu finden. Aus (3.60) für k folgt mit (3.61)

$$|R_k^*(\xi, \eta)| \leq c_5 M_k \frac{|\eta|^3}{{s_k}^3} \leq c_5 c_2 {s_k}^2 \vartheta_k \frac{{s_{k+1}}^3}{{s_k}^3} \qquad \forall \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1}). \tag{3.65}$$

Mit Korollar 3.11 erhalten wir

$$\begin{aligned}|(h_{k+1} - h_k) \circ Z_k|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1})} &\leq |h_{k+1} - h_k|_{\mathcal{S}'(q^{-1}\delta_{k+1})} \\ &\leq C_{11} K(\delta_k) {\delta_k}^{2n} = C_{11} K(\delta_k) {s_k}^2.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Jetzt verwenden wir Satz 3.10. Er besagt, dass die Abschätzungen (3.26) und (3.27) gelten. Aus (3.27) folgt mit (3.30)

$$c_5 c_2 {s_k}^2 \vartheta_k \frac{{s_{k+1}}^3}{{s_k}^3} = \frac{C_3}{2} c_2 \vartheta_k {s_{k+1}}^2 \left(\frac{s_{k+1}}{s_k} \right) \leq \frac{c_2}{2} \vartheta_{k+1} {s_{k+1}}^2.$$

Aus (3.26) und (3.47) ergibt sich

$$C_{11} K(\delta_k) {s_k}^2 \leq \frac{c_2}{2} C_2 K(\delta_k) \left(\frac{s_k}{s_{k+1}} \right)^2 {s_{k+1}}^2 \leq \frac{c_2}{2} \vartheta_{k+1} {s_{k+1}}^2.$$

Setzen wir dies beides in (3.65) beziehungsweise (3.66) ein, so erhalten wir aus (3.64) mit (3.61)

$$|R_{k+1}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1})} \leq \frac{c_2}{2} \vartheta_{k+1} {s_{k+1}}^2 + \frac{c_2}{2} \vartheta_{k+1} {s_{k+1}}^2 = c_2 \vartheta_{k+1} {s_{k+1}}^2 = M_{k+1}, \tag{3.67}$$

insbesondere gilt

$$|R_{k+1}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1})} \leq c_2 \vartheta_{k+1} {s_{k+1}}^2. \tag{3.68}$$

Wenn wir nun in Satz 3.6

$$\begin{aligned}&\tau = n{-}1,\ s = s_{k+1},\ r = \delta_{k+1},\ H = H_{k+1} {\circ} Z_k,\ Q = Q_{k+1}, \\ &R = R_{k+1},\ \vartheta = \vartheta_{k+1} \text{ und } M = |R_{k+1}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1})}\end{aligned} \tag{3.69}$$

einsetzen, so ist die dortige Voraussetzung (3.11) mit (3.68) gleichbedeutend. Die Voraussetzung (3.10) folgt aus (3.29), (3.30) und (3.59), denn es gilt

$$|Q_{k+1} - C|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})} \leq |Q_{k+1} - C|_{\mathcal{S}(\delta_k/2)} \leq \sum_{\ell=0}^{k} c_4 \vartheta_\ell \leq c_4 \sum_{\ell=0}^{\infty} \vartheta_\ell \leq c_4 C_5 \leq \frac{1}{4|C^{-1}|}.$$

Also ist Satz 3.6 anwendbar und es gibt eine einfache kanonische Transformation

$$W_{k+1} := W : \mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2) \longrightarrow \mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1}) \tag{3.70}$$

mit $W_{k+1} - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)$ und der Abschätzung

$$|W_{k+1,\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} \leq c_3 \vartheta_{k+1}. \tag{3.71}$$

Die transformierte Hamiltonfunktion hat die Gestalt

$$(H_{k+1} \circ Z_k \circ W_{k+1})(\xi, \eta) = a_{k+2} + \langle\, \omega\,,\, \eta \,\rangle + \frac{1}{2} \langle\, \eta\, Q_{k+2}(\xi)\,,\, \eta \,\rangle + R^*_{k+1}(\xi, \eta),$$

wobei wir

$$\begin{aligned} &a_{k+2} := a_+ \in \mathbb{R},\ Q_{k+2} := Q_+ \in \mathcal{P}_{n\times n}(\delta_{k+1}/2) \\ &\text{und } R^*_{k+1} := R^* \in \mathcal{P}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2) \end{aligned} \tag{3.72}$$

gesetzt haben. Somit gilt (3.58) für den Index $k+1$, wenn wir

$$Z_{k+1} := Z_k \circ W_{k+1} \tag{3.73}$$

definieren. Nach Lemma A.9 ist $Z_{k+1} - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)$. Für (3.56) bleibt zu zeigen, dass Z_{k+1} nach $\mathcal{S}'(\delta_{k+1})$ abbildet. Dazu prüfen wir zunächst (3.57) nach. Auf $\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)$ gilt

$$\begin{aligned} Z_{k+1,\zeta} - E_{2n} &= (Z_k \circ W_{k+1})_\zeta - E_{2n} = (Z_{k\zeta} \circ W_{k+1}) \cdot W_{k+1,\zeta} - E_{2n} \\ &= (Z_{k\zeta} \circ W_{k+1} - E_{2n}) \cdot W_{k+1,\zeta} + W_{k+1,\zeta} - E_{2n}. \end{aligned}$$

Für den Faktor $W_{k+1,\zeta}$ ergibt sich aus (3.71) die Abschätzung

$$|W_{k+1,\zeta}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} \leq |W_{k+1,\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} + |E_{2n}| \leq c_3 \vartheta_{k+1} + 1.$$

Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, der Inklusion
$\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1}) \subseteq \mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2)$, (3.70) und (3.71) folgt

$$\begin{aligned} &|Z_{k+1,\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} \leq \\ &\quad \leq |Z_{k\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1})} \cdot |W_{k+1,\zeta}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} + |W_{k+1,\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} \\ &\quad \leq \left(\exp\left(\sum_{\ell=0}^{k} c_3 \vartheta_\ell \right) - 1 \right) (c_3 \vartheta_{k+1} + 1) + c_3 \vartheta_{k+1} \\ &\quad = \left(\exp\left(\sum_{\ell=0}^{k} c_3 \vartheta_\ell \right) \right) (c_3 \vartheta_{k+1} + 1) - 1 - c_3 \vartheta_{k+1} + c_3 \vartheta_{k+1} \\ &\quad \leq \exp\left(\sum_{\ell=0}^{k} c_3 \vartheta_\ell \right) \exp(c_3 \vartheta_{k+1}) - 1 = \exp\left(\sum_{\ell=0}^{k+1} c_3 \vartheta_\ell \right) - 1. \end{aligned}$$

Das ist (3.57) für den Index $k+1$. Aus (3.29) und (3.30) folgt nun

$$\begin{aligned} |Z_{k+1,\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} &\leq \exp(c_3 C_5) - 1 \leq \exp(\ln(3/2)) - 1 \\ &< \exp(\ln 2) - 1 = 1. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Dies benutzen wir, um zu zeigen, dass Z_{k+1} nach $\mathcal{S}'(\delta_{k+1})$ abbildet. Da Z_{k+1} reelle Argumente auf reelle Werte abbildet, folgt mit Lemma A.2 und (3.74)

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\, Z_{k+1}(\zeta)| &\leq |\mathrm{Im}\,\zeta| + |\mathrm{Im}\,(Z_{k+1}(\zeta) - \zeta)| \\ &< \frac{\delta_{k+1}}{2} + \left| \mathrm{Im} \int_0^1 \frac{d}{ds}((Z_{k+1} - \mathrm{id})(\mathrm{Re}\,\xi + i\, s\mathrm{Im}\,\xi, s\,\eta)) ds \right| \\ &\leq \frac{\delta_{k+1}}{2} + \left| \int_0^1 (i\mathrm{Im}\,\xi, \eta) \cdot (Z_{k+1,\zeta}(\mathrm{Re}\,\xi + i\, s\mathrm{Im}\,\xi, s\,\eta) - E_{2n})^{\mathrm{T}}\ ds \right| \\ &\leq \frac{\delta_{k+1}}{2} + \int_0^1 |Z_{k+1,\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)} \cdot \frac{\delta_{k+1}}{2}\, ds \\ &\leq \delta_{k+1} \qquad \forall \quad \zeta \in \mathcal{D}\,(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2)\,. \end{aligned}$$

Damit ist (3.56) für $k+1$ bewiesen.
Aus (3.69), (3.72), (3.14) und (3.59) für den Index k folgt

$$|Q_{k+2} - C|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} \leq \sum_{\ell=0}^{k} c_4 \vartheta_\ell + c_4 \vartheta_{k+1} = \sum_{\ell=0}^{k+1} c_4 \vartheta_\ell.$$

Das ist (3.59) für $k+1$. Schließlich folgt aus (3.72) und (3.15)

$$\left| R^*_{k+1}(\xi, \eta) \right| \leq c_5 M \frac{|\eta|^3}{{s_{k+1}}^3} \qquad \forall \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2),$$

wobei hier für M nach (3.69)

$$M = |R_{k+1}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1})}$$

einzusetzen ist. Da mit (3.67)

$$|R_{k+1}|_{\mathcal{D}(\delta_{k+1}, s_{k+1})} \leq M_{k+1}$$

gilt, erhalten wir insgesamt

$$\left| R^*_{k+1}(\xi, \eta) \right| \leq c_5 M_{k+1} \frac{|\eta|^3}{{s_{k+1}}^3} \qquad \forall \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{D}(\delta_{k+1}/2, s_{k+1}/2).$$

Damit ist auch (3.60) für den Index $k+1$ gezeigt, und der Beweis ist beendet. □

3.5 Konvergenz der Transformationen und Existenz von Lösungen

Wir stellen zunächst das folgende Korollar des Satzes von Ascoli (siehe [9], (7.5.7)) zur Verfügung, welches die Aussage dieses Satzes auf die von uns betrachtete Situation 2π-periodischer Funktionen anpasst.

Korollar 3.13. *Es seien m_1, $m_2 \in \mathbb{N}$ und (f_k) eine Folge gleichmäßig beschränkter, gleichgradig stetiger 2π-periodischer Funktionen $f_k : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$. Dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (f_{k_ℓ}) mit stetiger 2π-periodischer Grenzfunktion $f : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktionenfolge zunächst auf der kompakten Menge $[0, 2\pi]^{m_1}$. Dort sind die Voraussetzungen des Satzes von Ascoli erfüllt und es gibt eine auf $[0, 2\pi]^{m_1}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge (f_{k_ℓ}) mit stetiger Grenzfunktion $\widetilde{f}$. Wegen der Periodizität aller f_k ist die Teilfolge (f_{k_ℓ}) sogar auf ganz $\mathbb{R}^{m_1}$ konvergent. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit f. Sie ist 2π-periodisch. Es ist also $\widetilde{f}$ die Einschränkung von f auf $[0, 2\pi]^{m_1}$. Aus der Periodizität folgt weiter:

$$|f - f_{k_\ell}|_{\mathbb{R}^{m_1}} = \left|\widetilde{f} - f_{k_\ell}\right|_{[0,2\pi]^{m_1}} \qquad \forall \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Also ist (f_{k_ℓ}) auch als Folge auf $\mathbb{R}^{m_1}$ gleichmäßig konvergent und die Grenzfunktion f ist stetig. Das war zu zeigen. □

Zur Bezeichnung. Wir haben in diesem Abschnitt verschiedentlich Teilfolgen einer gegebenen Folge auszuwählen. Ist etwa $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge, so bezeichnen wir die ausgewählte Teilfolge von (f_k) wie üblich mit $(f_{k_\ell})_{\ell=0}^{\infty}$. Um die Anzahl der Indizes zu beschränken, wollen wir für eine Teilfolge von (f_{k_ℓ}) die Bezeichnung $(f_{k'})$ gelten lassen, wobei der Index k' eine Teilmenge von $\{k_0, k_1, k_2, \ldots\}$ durchläuft.

Satz 3.14. *Unter den Voraussetzungen (3.17), (3.53), (3.54) und (3.55) gibt es eine Teilfolge $(Z_{k'}(\,\cdot\,, 0))$ von $(Z_k(\,\cdot\,, 0))$ (vergleiche (3.56)), die auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen einen Homöomorphismus*

$$Z = (X, Y) : \mathbb{R}^n \longrightarrow Z(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^{2n} \tag{3.75}$$

konvergiert. Die Abbildung $Z - (\mathrm{id}, 0)$ ist 2π-periodisch.

Zusatz. *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sind die Abbildungen*

$$X_k|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Diffeomorphismen. Die Abbildung

$$X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist ein Homöomorphismus und die Folge $\left(X_{k'}^{-1}\right)$ konvergiert gleichmäßig gegen X^{-1}. Die Folge $(Y_k(\,\cdot\,, 0))$ ist gleichmäßig beschränkt und es gelten die Abschätzungen

$$|Y_{k\xi}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.76}$$

$$\left|\left(X_k^{-1}\right)_x\right|_{\mathbb{R}^n} \le 2 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.77}$$

Beweis. In Satz 3.12, Formel (3.57) hatten wir

$$|Z_{k\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2)} \le \exp\left(\sum_{\ell=0}^{k} c_3 \vartheta_\ell\right) - 1 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0$$

bewiesen. Mit der nach (3.54) und Satz 3.10 geltenden Formel (3.29) und (3.30) folgt

$$|Z_{k\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2)} \le \exp\left(c_3 \frac{\ln 3 - \ln 2}{c_3}\right) - 1 = \frac{1}{2} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.78}$$

Wir betrachten die Folge der Funktionen

$$\widehat{Z}_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \xi \mapsto \widehat{Z}_k(\xi) := Z_k(\xi, 0) - (\xi, 0). \tag{3.79}$$

Nach Konstruktion (3.73) der Z_k nehmen die Funktionen $\widehat{Z}_k$ nur die Werte der Funktion $\widehat{Z}_0$ an, es gilt also

$$\left|\widehat{Z}_k\right|_{\mathbb{R}^n} \le \left|\widehat{Z}_0\right|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.80}$$

Die Funktion $\widehat{Z}_0$ ist auf Grund ihrer Periodizität und Stetigkeit beschränkt. Also ist die Folge $\left(\widehat{Z}_k\right)$ gleichmäßig beschränkt. Die Funktionen $\widehat{Z}_k$ sind stetig differenzierbar und ihre Ableitungen sind nach (3.78) alle durch $1/2$ beschränkt. Daher ist die Folge $\left(\widehat{Z}_k\right)$ gleichgradig stetig: In der Tat, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta := 2\varepsilon$. Dann folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$

$$\begin{aligned}\left|\widehat{Z}_k(\xi_1) - \widehat{Z}_k(\xi_2)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{ds} \widehat{Z}_k(\xi_2 + s(\xi_1 - \xi_2)) ds\right| \\ &\le \int_0^1 \left|\widehat{Z}_{k\xi}\right|_{\mathbb{R}^n} |\xi_1 - \xi_2| \, ds \le \frac{1}{2}\,\delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

Also gibt es nach unserem Korollar 3.13 aus dem Satz von Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\left(\widehat{Z}_{k_\ell}\right)$, die gegen eine stetige, 2π-periodische Funktion

$$\widehat{Z} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

konvergiert. Wir setzen $Z(\xi) := \widehat{Z}(\xi) + (\xi, 0)$ und verkleinern die Zielmenge von Z wie folgt:

$$Z = (X, Y) : \mathbb{R}^n \longrightarrow Z(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \quad \xi \mapsto Z(\xi) = (X(\xi), Y(\xi)). \tag{3.81}$$

Dann konvergiert die Teilfolge $(Z_{k_\ell}(\,\cdot\,, 0))$ auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen Z, Z ist stetig und $Z - (\mathrm{id}, 0)$ ist 2π-periodisch.

Wir betrachten nun die Koordinatenfunktion X genauer. Wegen (3.78) haben wir

$$|X_{k\xi}(\xi) - E_n| \le \frac{1}{2} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.82}$$

Wenn wir in Lemma A.3 $P = X_{k\xi}(\xi)$, $S = E_n$ und $h = 1/2$ einsetzen, folgt die Existenz von $X_{k\xi}^{-1}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und es gilt die Abschätzung

$$\left|X_{k\xi}(\xi)^{-1} - E_n\right| \leq 1 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.83}$$

Der Satz A.4 zeigt zusammen mit (3.82), dass alle Funktionen X_k injektiv sind. Aus (3.80) und Satz A.5 folgt, dass die X_k auch surjektiv sind. Folglich sind sie bijektiv. Weil $X_{k\xi}(\xi)$ regulär ist, gilt überdies $\det X_{k\xi}(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Also sind die Funktionen $X_k^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nach dem Hauptsatz über Umkehrfunktionen stetig differenzierbar. Insbesondere sind die Abbildungen

$$X_k\big|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ Diffeomorphismen. Wir setzen $\widehat{X}_k^{-1} := X_k^{-1} - \mathrm{id}$. Die Funktionen $\widehat{X}_k^{-1}$ sind stetig differenzierbar und ihre Ableitungen sind nach (3.83) beschränkt. Daher ist die Folge $\left(\widehat{X}_k^{-1}\right)$ gleichgradig stetig. Nach Hilfssatz A.8 sind die Funktionen $\widehat{X}_k^{-1}$ 2π-periodisch. Wir zeigen ihre gleichmäßige Beschränktheit. Dazu seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Auf Grund der Bijektivität von $X_k|_{\mathbb{R}^n}$ gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x = X_k(\xi)$. Somit gilt mit (3.80)

$$\begin{aligned}\left|\widehat{X}_k^{-1}(x)\right| &= \left|X_k^{-1}(x) - x\right| = \left|X_k^{-1}(X_k(\xi)) - X_k(\xi)\right| = |\xi - X_k(\xi)| = \left|\widehat{X}_k(\xi)\right| \\ &\leq \left|\widehat{Z}_0\right|_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

Das ist die gleichmäßige Beschränktheit. Es folgt, dass eine Teilfolge $\left(\widehat{X}_{k'}^{-1}\right)$ von $\left(\widehat{X}_{k_\ell}^{-1}\right)$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ konvergiert. Also konvergiert $\left(X_{k'}^{-1}\right)$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $\widetilde{X} := T + \mathrm{id}$. Daraus folgt

$$\widetilde{X} \circ X = \lim_{k' \to \infty} X_{k'}^{-1} \circ X_{k'} = \mathrm{id} \text{ und } X \circ \widetilde{X} = \lim_{k' \to \infty} X_{k'} \circ X_{k'}^{-1} = \mathrm{id}.$$

Also ist X bijektiv und besitzt eine stetige Umkehrfunktion $X^{-1} = \widetilde{X}$. X ist also ein Homöomorphismus.
Es bleibt zu zeigen, dass auch Z ein Homöomorphismus ist. Da wir bereits wissen, dass X injektiv ist, ist Z injektiv. Z ist nach Konstruktion (3.81) auch surjektiv. Wir hatten bereits festgestellt, dass Z stetig ist. Um die Stetigkeit von Z^{-1} zu zeigen, definieren wir eine Projektion P durch

$$P : Z(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto x.$$

Da X ein Homöomorphismus ist, ist P surjektiv. Somit ist

$$Z^{-1} = X^{-1} \circ P$$

wohldefiniert und als Verkettung stetiger Abbildungen stetig. Also ist Z ein Homöomorphismus. □

Beweis des Zusatzes. Für die zusätzlichen Aussagen ist noch zu zeigen, dass die Folge $(Y_k(\,\cdot\,,0))$ gleichmäßig beschränkt ist und dass die Abschätzungen (3.76) und (3.77) gelten. Nach (3.79) gilt

$$\widehat{Z}_k = (X_k - \mathrm{id}, Y_k(\,\cdot\,,0)) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Also erhalten wir mit (3.80)

$$|Y_k(\,\cdot\,,0)|_{\mathbb{R}^n} \leq \left|\widehat{Z}_k\right|_{\mathbb{R}^n} \leq \left|\widehat{Z}_0\right|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Somit ist die Folge $(Y_k(\,\cdot\,,0))$ gleichmäßig beschränkt. Aus (3.78) folgt

$$|Y_{k\xi}|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}} \leq |Z_{k\zeta} - E_{2n}|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Das ist die Abschätzung (3.76). Wenn wir

$$\left(X_k^{-1}\right)_x(x) = \left(X_{k\xi}(X_k^{-1}(x))\right)^{-1} \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n$$

beachten, zeigt (3.83)

$$\left|\left(X_k^{-1}\right)_x\right|_{\mathbb{R}^n} \leq \left|X_{k\xi}^{-1} - E_n\right|_{\mathbb{R}^n} + 1 \leq 2,$$

also die Abschätzung (3.77). Damit ist auch der Zusatz bewiesen. □

Wie man an Satz 3.14 sieht, erhalten wir im Limes keine kanonische Transformation. Die Grenzfunktion hängt ja gar nicht mehr von der Wirkungsvariablen ab. Ihre Ableitung kann also keine symplektische Matrix sein. Allerdings können wir aus der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ die Existenz stetig differenzierbarer Lösungen der kanonischen Gleichungen (1.1)

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x$$

folgern.

Satz 3.15. *Es sollen die Voraussetzungen (3.17), (3.53), (3.54), (3.55) gelten und $Z = (X, Y)$ sei die durch Satz 3.14 gegebene Abbildung. Dann ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion*

$$t \mapsto (X(\omega t + c), Y(\omega t + c)) \tag{3.84}$$

eine stetig differenzierbare Lösung von (1.1). Hierbei ist $c \in \mathbb{R}^n$ eine beliebige Konstante.

Beweis. Wir betrachten die Folge $(Z_{k'}(\,\cdot\,,0))$, die nach Satz 3.14 gleichmäßig gegen Z konvergiert und setzen $\widetilde{H}_{k'} := H_{k'} \circ Z_{k'}$. Dann lauten die kanonischen Gleichungen bezüglich $\widetilde{H}_{k'}$ wegen (3.58) und (3.60)

$$\dot{\xi} = \omega + \mathcal{O}(|\eta|), \quad \dot{\eta} = \mathcal{O}(|\eta|^2).$$

Mit einer beliebiegen Konstanten $c \in \mathbb{R}^n$ finden wir die Lösung

$$\xi(t) = \omega t + c, \quad \eta = 0.$$

Da alle $Z_{k'} = (X_{k'}, Y_{k'})$ kanonische Transformationen sind, folgt daraus die Existenz analytischer Lösungen

$$x = X_{k'}(\omega t + c), \quad y = Y_{k'}(\omega t + c, 0) \tag{3.85}$$

von

$$\dot{x} = H_{k'y}, \quad \dot{y} = -H_{k'x} \tag{3.86}$$

für alle Indizes k'. Mit der Matrix J aus Definition 3.4 und $z = (x, y)$ schreibt sich (3.86) kompakter

$$\dot{z} = H_{k'z}\, J^{\mathrm{T}}.$$

Da die Funktionen (3.85) dieses Differentialgleichungssystem lösen, gilt für alle k'

$$Z_{k'}(\omega t + c, 0) = Z_{k'}(c, 0) + \int_0^t H_{k'z}(Z_{k'}(\omega\sigma + c, 0))\, J^{\mathrm{T}} d\sigma. \tag{3.87}$$

Die linke Seite der Gleichung konvergiert für $k' \to \infty$ gegen $Z(\omega t + c)$. Wenden wir uns dem Integranden auf der rechten Seite zu. Nach den Formeln (3.53) und (3.54) für H und H_k sowie der Abschätzung (3.44) hat man

$$\begin{aligned}\left|H_{z_\ell} J^{\mathrm{T}} - H_{k\,z_\ell} J^{\mathrm{T}}\right|_{\mathbb{R}^{2n}} &\leq |H_{z_\ell} - H_{k\,z_\ell}|_{\mathbb{R}^{2n}} \left|J^{\mathrm{T}}\right| = |H_{z_\ell} - H_{k\,z_\ell}|_{\mathbb{R}^{2n}} \\ &\leq C_{11} \delta_k{}^{2n-1} K(\delta_k) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,\ \ell \in \{1, \ldots, 2n\}.\end{aligned}$$

Also konvergiert $\left(H_{k\,z} J^{\mathrm{T}}\right)$ gleichmäßig gegen $H_z J^{\mathrm{T}}$. Da $H_z J^{\mathrm{T}}$ stetig und 2π-periodisch in allen Variablen ist, ist $H_z J^{\mathrm{T}}$ gleichmäßig stetig. Nach Satz 3.14 konvergiert $(Z_{k'}(\,\cdot\,, 0))$ gleichmäßig gegen Z. Hilfssatz A.6 zeigt, dass $\left(H_{k'\,z}(Z_{k'}(\,\cdot\,, 0)) J^{\mathrm{T}}\right)$ auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen $H_z(Z(\,\cdot\,)) J^{\mathrm{T}}$ konvergiert. Insbesondere konvergiert der Integrand auf der rechten Seite von (3.87) auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$\sigma \mapsto H_z(Z(\omega\sigma + c)) J^{\mathrm{T}}.$$

Daher folgt für $k' \to \infty$

$$Z(\omega t + c) = Z(c) + \int_0^t H_z(Z(\omega\sigma + c)) J^{\mathrm{T}} d\sigma.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig differenzierbar. Also gilt das auch für die linke Seite und wir erhalten

$$\dot{Z}(\omega t + c) = H_z(Z(\omega t + c)) J^{\mathrm{T}} \qquad \forall \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die Funktion (3.84) stetig differenzierbar und sie löst (1.1). □

Auf Grund der $(2n - 1)$-maligen stetigen Differenzierbarkeit von $H_z J^{\mathrm{T}}$ ist klar, dass die Lösungen (3.84) von (1.1) sogar $2n$-mal stetig differenzierbar sind.

3.6 Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H(x, U_x) = \text{const.} \tag{3.88}$$

lösen. Wir suchen also eine stetig differenzierbare Funktion $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deren Gradient U_x 2π-periodisch ist und die (3.88) löst. Bei der Konstruktion von U machen wir uns die spezielle Gestalt einfacher kanonischer Transformationen zu Nutze.

Hilfssatz 3.16. *Es seien $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmige Gebiete. Dann ist auch $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ sternförmig.*

Beweis. Es seien $u^* \in \mathcal{U}$ und $v^* \in \mathcal{V}$ Sternmittelpunkte und $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt

$$u^* + t(u - u^*) \in \mathcal{U} \text{ und } v^* + t(v - v^*) \in \mathcal{V} \qquad \forall \quad t \in [0, 1].$$

Folglich ist

$$(u^* + t(u - u^*), v^* + t(v - v^*)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \qquad \forall \quad t \in [0, 1].$$

Dies zeigt, dass (u^*, v^*) ein Sternmittelpunkt von $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ ist. □

Satz 3.17. *Es seien $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmige Gebiete und*

$$Z : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad (\xi, \eta) \mapsto Z(\xi, \eta) = (X(\xi), Y(\xi, \eta))$$

sei eine zweimal stetig differenzierbare kanonische Transformation. Dann gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit

$$Y(\xi, \eta) = v_\xi(\xi) X_\xi(\xi)^{-1} + \eta X_\xi(\xi)^{-1} \qquad \forall \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Beweis. Da die Transformation Z kanonisch ist, ist die Differentialform

$$g = \sum_{j=1}^{n} Y_j(\xi, \eta)\, dX_j(\xi, \eta) - \eta_j\, d\xi_j$$

geschlossen. Aus der vorausgesetzten zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von Z folgt, dass g stetig differenzierbar ist. Außerdem ist nach Hilfssatz 3.16 mit $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ auch $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ ein sternförmiges Gebiet. Somit ist g wegen des Lemmas von Poincaré (siehe [10], § 18 Satz 4) exakt, das heißt es gibt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\widetilde{v} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ mit

$$d\widetilde{v} = g.$$

Nun gilt, da $X = (X_1, \ldots, X_n)$ nicht von η abhängt,

$$g = \sum_{j=1}^{n} \left(Y_j(\xi, \eta) \sum_{k=1}^{n} X_{j\,\xi_k}(\xi)\, d\xi_k \right) - \sum_{k=1}^{n} \eta_k\, d\xi_k.$$

Koeffizientenvergleich mit

$$d\,\widetilde{v} = \widetilde{v}_{\xi_1}(\xi,\eta)\,d\xi_1 + \ldots + \widetilde{v}_{\xi_n}(\xi,\eta)\,d\xi_n + \widetilde{v}_{\eta_1}(\xi,\eta)\,d\eta_1 + \ldots + \widetilde{v}_{\eta_n}(\xi,\eta)\,d\eta_n$$

zeigt

$$\widetilde{v}_{\eta_1} = \ldots = \widetilde{v}_{\eta_n} = 0 \tag{3.89}$$

sowie

$$\widetilde{v}_{\xi_k} = \sum_{j=1}^{n} Y_j X_{j\,\xi_k} - \eta_k \qquad \forall \quad k \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3.90}$$

Aus (3.89) und der Tatsache, dass $\mathcal{V}$ ein Sterngebiet ist, folgt, dass $\widetilde{v}$ gar nicht von η abhängt. Es gibt also eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit

$$v(\xi) = \widetilde{v}(\xi,\eta) \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Insbesondere gilt (3.90), wenn man $\widetilde{v}$ durch v ersetzt. Es folgt

$$v_\xi + \eta = Y \cdot X_\xi \;\Rightarrow\; Y = v_\xi \cdot X_\xi^{-1} + \eta \cdot X_\xi^{-1},$$

falls X_ξ invertierbar ist. Die Invertierbarkeit von X_ξ ergibt sich aus der Tatsache, dass nach (3.8) $\det Z_\zeta \neq 0$ gilt. Wegen der Blockstruktur

$$Z_\zeta = \begin{pmatrix} X_\xi & 0 \\ Y_\xi & Y_\eta \end{pmatrix}$$

muss demnach auch $\det X_\xi \neq 0$ sein, was den Beweis beendet. □

Satz 3.18. *Unter den Voraussetzungen (3.17), (3.53), (3.54) und (3.55) gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deren Ableitung 2π-periodisch ist und die (3.88) löst. Mit den Funktionen X und Y aus Satz 3.14 gilt*

$$Y = U_x \circ X. \tag{3.91}$$

Beweis. Da alle Transformationen Z_k in (3.56) einfache kanonische Transformationen[7] sind, erfüllen ihre Einschränkungen auf

$$\mathcal{D}(\delta_k/2, s_k/2) \cap \mathbb{R}^{2n}$$

die Voraussetzungen von Satz 3.17 mit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{V} = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y| < s_k/2\}$. Es gibt also für alle $k \in \mathbb{N}_0$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$Y_k(\xi, 0) = v_{k\xi}(\xi) X_{k\xi}(\xi)^{-1} \qquad \forall \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.92}$$

Wir setzen für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$U_k(x) := v_k(X_k^{-1}(x)) - v_k(X_k^{-1}(0)). \tag{3.93}$$

[7] Zum Begriff der einfachen kanonischen Transformation siehe Definition 3.5.

Zusammen mit (3.92) folgt

$$\begin{aligned} U_{kx}(x) &= v_{k\xi}(X_k^{-1}(x)) \, \left(X_k^{-1}\right)_x(x) = v_{k\xi}(X_k^{-1}(x)) \left(X_{k\xi}(X_k^{-1}(x))\right)^{-1} \\ &= Y_k(X_k^{-1}(x), 0) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach (3.56), dass die Funktion $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto X_k(\xi) - \xi$ 2π-periodisch ist. Aus dem Zusatz von Satz 3.14 folgt weiter, dass $X_k|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv ist. Somit ist die Funktion $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto X^{-1}(x) - x$ nach Hilfssatz A.8 ebenfalls 2π-periodisch. Da wegen (3.56) auch Y_k 2π-periodisch ist, erhalten wir mit (3.94) für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit den Einheitsvektoren e_ℓ

$$\begin{aligned} U_{kx}(x + 2\pi e_\ell) &= Y_k(X_k^{-1}(x + 2\pi e_\ell), 0) = Y_k(X_k^{-1}(x) + 2\pi e_\ell, 0) = Y_k(X_k^{-1}(x), 0) \\ &= U_{kx}(x). \end{aligned}$$

Also sind die Funktionen U_{kx} alle 2π-periodisch. Da die Funktionen $Y_k(\,\cdot\,, 0)$ nach dem Zusatz von Satz 3.14 gleichmäßig beschränkt sind, folgt mit (3.94) die gleichmäßige Beschränktheit von (U_{kx}). Da wir nach (3.94), (3.76) und (3.77)

$$|U_{kxx}|_{\mathbb{R}^n} \leq |Y_{k\xi}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \left| \left(X_k^{-1}\right)_x \right|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0$$

abschätzen können, ist auch die Folge (U_{kxx}) gleichmäßig beschränkt, die Folge (U_{kx}) mithin gleichgradig stetig. Es sei nun k' der Index, der die durch Satz 3.14 gegebene Teilfolge $(Z_{k'}(\,\cdot\,, 0))$ indiziert. Dann haben wir die gleichmäßige Beschränktheit und die gleichgradige Stetigkeit insbesondere für die Folge $(U_{k'x})$ gezeigt. Nach Korollar 3.13 existiert eine auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\left(U_{k'_\ell x}\right)$ mit stetiger 2π-periodischer Grenzfunktion $U_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Da nach (3.93) außerdem $U_{k'_\ell}(0) = 0$ für alle k'_ℓ ist, folgt weiter (siehe [9], (8.6.3)), dass auch $\left(U_{k'_\ell}\right)$ gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und erfüllt nach (3.94)

$$U_x(x) = \lim_{\ell \to \infty} U_{k'_\ell x}(x) = \lim_{\ell \to \infty} Y_{k'_\ell}(X_{k'_\ell}^{-1}(x), 0) = Y(X^{-1}(x)).$$

Damit ist (3.91) bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass die Funktion $x \mapsto H(x, U_x(x))$ konstant ist. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$H(x, U_x(x)) = H(X(X^{-1}(x)), Y(X^{-1}(x))).$$

Ist also $\xi \mapsto H(X(\xi), Y(\xi)) = H(Z(\xi))$ eine konstante Funktion, so sind wir fertig. Betrachten wir die auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\varphi(t) = Z(\omega t)$. Da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\varphi(t)) &= H_z(\varphi(t)) \, \varphi_t(t) = H_z(\varphi(t)) \, J \, H_z(\varphi(t))^{\mathrm{T}} \\ &= -\langle H_y(\varphi(t)) \, , \, H_x(\varphi(t)) \rangle + \langle H_x(\varphi(t)) \, , \, H_y(\varphi(t)) \rangle = 0 \end{aligned}$$

gilt, ist H längs dieser Lösung konstant, also $H \circ Z$ auf der Bildmenge von

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \omega t.$$

Um daraus zu folgern, dass $H \circ Z$ insgesamt konstant ist, betrachten wir den Torus

$$\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$$

und die Spurabbildung

$$P_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n, \tag{3.95}$$

die den Koordinaten eines Vektors $\xi \in \mathbb{R}^n$ die entsprechende Restklasse in $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ zuordnet. Wegen der Periodizität von H und $Z - (\mathrm{id}, 0)$ gibt es eine auf $\mathbb{T}^n$ definierte, stetige Funktion F mit

$$F \circ P_1 = H \circ Z. \tag{3.96}$$

Da $H \circ Z$ auf dem Bild von ψ konstant ist, ist F auf dem Bild von $P_1 \circ \psi$ konstant. Dieses liegt aber dicht in $\mathbb{T}^n$ ([5], 51 B Korollar 1). Da F auf $\mathbb{T}^n$ stetig ist, folgt, dass F konstant ist. Damit ist nach (3.96) auch $H \circ Z$ konstant, und der Beweis ist beendet. □

3.7 Existenz des invarianten Torus' und Eigenschaften der Lösungen

Korollar 3.19. *Es seien die Voraussetzungen (3.17), (3.53), (3.54), (3.55) erfüllt und Z sei die in (3.75) definierte Funktion. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{T} := Z(\mathbb{R}^n). \tag{3.97}$$

unter dem durch die Hamiltonfunktion (1.3) gegebenen Hamiltonschen Fluss invariant.

Beweis. Es sei $z = (x, y) \in \mathcal{T}$ beliebig. Da $Z : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}$ nach Satz 3.14 bijektiv ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $Z(c) = z$. Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$t \mapsto Z(\omega t + c) \tag{3.98}$$

ist nach Satz 3.15 eine Lösung der kanonischen Gleichungen (1.1). Die Lösung (3.98) hat für $t = 0$ den Wert z und sie verlässt die Menge $\mathcal{T}$ nicht. Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen liegen demnach alle Trajektorien von Lösungen durch den Punkt z ganz in $\mathcal{T}$. Da $z \in \mathcal{T}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Korollar 3.20. *Es sollen die Voraussetzungen (3.17), (3.53), (3.54) und (3.55) erfüllt sein. Mit der Funktion U aus Satz 3.18 und der Menge $\mathcal{T}$ aus (3.97) gilt*

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid y = U_x(x)\}.$$

Beweis. Es sei $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{T}$ beliebig. Nach Definition (3.97) gibt es ein $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$z_1 = (x_1, y_1) = Z(\xi_1) = (X(\xi_1), Y(\xi_1)).$$

Wegen (3.91) folgt

$$y_1 = Y(\xi_1) = U_x(X(\xi_1)) = U_x(x_1),$$

also liegt $z_1 = (x_1, y_1)$ in der durch die Gleichung $y = U_x(x)$ beschriebenen Menge.

Nun genüge andererseits $z_2 = (x_2, y_2)$ dieser Gleichung. Es gibt nach dem Zusatz von Satz 3.14 ein $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_2 = X(\xi_2)$. Die Gleichung (3.91) impliziert

$$Y(\xi_2) = U_x(X(\xi_2)).$$

Aus unserer Voraussetzung an z_2 folgt

$$y_2 = U_x(x_2) = U_x(X(\xi_2)).$$

Also gilt $y_2 = Y(\xi_2)$. Dies zeigt, dass

$$z_2 = (X(\xi_2), Y(\xi_2)) \in \mathcal{T}$$

ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Um die Menge $\mathcal{T}$ als Überlagerungsfläche eines Torus' erkennen zu können, müssen wir sie in die Menge

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \text{wobei } \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \text{ ist,}$$

projizieren. Mit der Spurabbildung P_1 aus (3.95) definieren wir die Spurabbildung

$$P_2 : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n, \quad P_2 := (P_1, \mathrm{id}). \tag{3.99}$$

Satz 3.21. *Es sollen die Voraussetzungen (3.17), (3.53), (3.54) und (3.55) erfüllt sein und es sei $\mathcal{T}$ durch (3.97) gegeben. Dann ist die Menge $P_2(\mathcal{T})$ homöomorph zum Torus $\mathbb{T}^n$. Es gibt einen Homöomorphismus $W : \mathbb{T}^n \to P_2(\mathcal{T})$, der*

$$W \circ P_1 = P_2 \circ Z \tag{3.100}$$

erfüllt, wobei die Projektionen P_1 und P_2 in (3.95) und (3.99) definiert sind.

Beweis. Wir konstruieren die Abbildung $W : \mathbb{T}^n \to P_2(\mathcal{T})$, von der wir zeigen, dass sie ein Homöomorphismus ist. Dazu sei $\tilde{\xi} \in \mathbb{T}^n$ beliebig. Da P_1 surjektiv ist, gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\xi} = P_1(\xi)$. Sind ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ zwei Überlagerungspunkte von $\tilde{\xi}$, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$\xi_2 = \xi_1 + 2k\pi.$$

Da $Z - (\mathrm{id}, 0)$ nach Satz 3.14 2π-periodisch ist, gilt

$$P_2(Z(\xi_2)) = P_2(Z(\xi_1) + (2k\pi, 0)) = P_2(Z(\xi_1)).$$

Also ist die Abbildung

$$W(\tilde{\xi}) := P_2(Z(\xi)), \quad \text{mit } \tilde{\xi} = P_1(\xi),$$

wohldefiniert. Um zu sehen, dass W stetig ist, beachten wir, dass P_1 als Überlagerungsabbildung ein lokaler Homöomorphismus ist. Zu einem beliebigen $\tilde{\xi} \in \mathbb{T}^n$ und einem $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\xi} = P_1(\xi)$ existiert also eine Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ von ξ, so dass P_1 als Abbildung von $\mathcal{U}$ nach $P_1(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{T}^n$ ein Homöomorphismus ist. Somit existiert P_1^{-1} auf $P_1(\mathcal{U})$, und $P_1(\mathcal{U})$ ist eine Umgebung von $\tilde{\xi}$. Es folgt, dass

$$W = P_2 \circ Z \circ P_1^{-1} \quad \text{auf } P_1(\mathcal{U})$$

als Verkettung stetiger Funktionen stetig ist. Da $\tilde{\xi} \in \mathbb{T}^n$ beliebig war, ist W stetig. Außerdem erfüllt W nach Konstruktion die Gleichung (3.100).
Wir definieren nun eine Abbildung $\widetilde{W} : P_2(\mathcal{T}) \to \mathbb{T}^n$, von der wir beweisen, dass sie stetig und die Umkehrabbildung von W ist. Es sei dazu $\tilde{z} \in P_2(\mathcal{T}) \subseteq \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ beliebig und für $z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ soll $P_2(z_1) = P_2(z_2)$ gelten. Die Koordinatenfunktion X von $Z = (X, Y)$ hat die Eigenschaft, dass $X - \mathrm{id}$ 2π-periodisch ist. Wegen des Zusatzes von Satz 3.14 existiert X^{-1}, und Hilfssatz A.8 besagt, dass $X^{-1} - \mathrm{id}$ ebenfalls 2π-periodisch ist. Da es ein $k \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$z_2 = z_1 + (2k\pi, 0)$$

gibt, folgt

$$P_1(Z^{-1}(z_2)) = P_1(Z^{-1}(z_1 + (2k\pi, 0))) = P_1(Z^{-1}(z_1) + 2k\pi) = P_1(Z^{-1}(z_1)).$$

Demnach ist die Abbildung

$$\widetilde{W}(\tilde{z}) := P_1(Z^{-1}(z)), \quad \text{mit } \tilde{z} = P_2(z),$$

wohldefiniert. Da P_2 als Spurabbildung ein lokaler Homöomorphismus ist, folgt wie oben die Stetigkeit von $\widetilde{W}$.
Es sei nun $\tilde{z} \in P_2(\mathcal{T})$ beliebig und z ein Überlagerungspunkt von $\tilde{z}$. Dann ist

$$W(\widetilde{W}(\tilde{z})) = W(P_1(Z^{-1}(z))) = P_2(Z(Z^{-1}(z))) = P_2(z) = \tilde{z}.$$

Geben wir uns ein beliebiges $\tilde{\xi} \in \mathbb{T}^n$ vor, so folgt, wobei ξ ein Überlagerungspunkt von $\tilde{\xi}$ sei,

$$\widetilde{W}(W(\tilde{\xi})) = \widetilde{W}(P_2(Z(\xi))) = P_1(Z^{-1}(Z(\xi))) = P_1(\xi) = \tilde{\xi}.$$

Also ist W bijektiv mit $W^{-1} = \widetilde{W}$. Folglich ist W ein Homöomorphismus. Daraus folgt die Behauptung. □

Hilfssatz 3.22. *Es seien T_1 und T_2 topologische Räume, $F : T_1 \to T_2$ eine stetige und surjektive Abbildung sowie $M \subseteq T_1$ eine dichte Teilmenge. Dann liegt $F(M) \subseteq T_2$ dicht.*

Beweis. Es sei $U \subseteq T_2$ eine beliebige nichtleere offene Menge. Zu zeigen ist, dass $U \cap F(M)$ nicht die leere Menge ist. Wegen der Stetigkeit von F ist $F^{-1}(U) \subseteq T_1$ offen. Da F surjektiv ist, ist $F^{-1}(U)$ nicht leer. Da M in T_1 dicht liegt, gibt es ein $m \in M$ mit $m \in F^{-1}(U)$. Also gilt $F(m) \in U$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 3.23. Wir nennen eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion φ *quasiperiodisch*, wenn es eine auf $\mathbb{R}^n$ definierte, in jeder Komponente 2π-periodische Funktion Φ und Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(t) = \Phi(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t).$$

Satz 3.24. *Es sollen die Voraussetzungen (3.17), (3.53), (3.54) und (3.55) erfüllt sein. Dann hat jede durch Satz 3.15 gegebene Lösung*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi(t) = Z(\omega t + c), \qquad c \in \mathbb{R}^n \textit{ eine Konstante,}$$

der kanonischen Gleichungen (1.1)

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x$$

die Eigenschaft, dass $t \mapsto \varphi(t) - (\omega t, 0)$ *eine quasiperiodische Funktion ist. Das Bild der Funktion* $P_2 \circ \varphi$ *liegt in der Menge* $P_2(\mathcal{T})$ *dicht.*

Beweis. Nach Satz 3.14 ist die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\xi \mapsto Z(\xi + c) - (\xi, 0)$ in jeder Komponente 2π-periodisch. Da für alle $t \in \mathbb{R}$ nach Definition von φ und Φ also $\varphi(t) - (\omega t, 0) = \Phi(\omega t)$ gilt, ist $t \mapsto \varphi(t) - (\omega t, 0)$ eine quasiperiodische Funktion.
Wir zeigen nun, dass $P_2 \circ \varphi(\mathbb{R})$ eine dichte Teilmenge von $P_2(\mathcal{T})$ ist. Dazu beachten wir, dass wir mit dem Homöomorphismus $W : \mathbb{T}^n \to P_2(\mathcal{T})$ aus Satz 3.21 wegen (3.100) für alle $t \in \mathbb{R}$

$$P_2 \circ \varphi(t) = P_2 \circ Z(\omega t + c) = W \circ P_1(\omega t + c)$$

schreiben können. Nun ist das Bild von $t \mapsto P_1(\omega t + c)$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{T}^n$, weil wegen der Voraussetzungen an den Frequenzvektor ω in Satz E dessen Komponenten über dem Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind (siehe [5], 51 B Korollar 1). Also liegt die Menge

$$\{W \circ P_1(\omega t + c) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

nach Hilfssatz 3.22 dicht in $P_2(\mathcal{T})$. Diese Menge ist aber gleich der Menge $P_2 \circ \varphi(\mathbb{R})$, woraus die Behauptung folgt. □

Insgesamt sind damit alle Behauptungen von Satz E bewiesen.

4 Beispielfunktionen zur Integralbedingung

4.1 Der Raum $\mathcal{K}$ der Stetigkeitsmodule und seine Teilräume $\mathcal{L}$ und $\mathcal{H}$

In den Voraussetzungen des Satzes E taucht die Integralbedingung

$$\int_0^1 \frac{K(s)}{s}\, ds < \infty \tag{4.1}$$

auf. Diese wollen wir im Folgenden diskutieren.

Definition 4.1. Es sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Funktionen $K : [0, \infty) \to [0, \infty)$, die monoton wachsen, stetig sind, für die $K(0) = 0$ gilt und die

$$K(Nx) \leq N\, K(x) \qquad \forall \quad N \in \mathbb{N},\, x \geq 0 \tag{4.2}$$

erfüllen.

Bemerkung 4.2. Der Stetigkeitsmodul einer jeden gleichmäßig stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Element von $\mathcal{K}$. Die Ungleichung (4.2) folgt aus

$$f(x + Ny) - f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \big(f(x + (k+1)y) - f(x + ky)\big) \qquad \forall \quad x, y \in \mathbb{R},\, N \in \mathbb{N}.$$

Die Menge $\mathcal{K}$ ist kein Vektorraum, denn für jede Funktion $K \in \mathcal{K}$, $K \not\equiv 0$ gilt $-K \notin \mathcal{K}$. Die Funktionen aus $\mathcal{K}$ dürfen ja nur positive Werte haben. Allerdings ist klar, dass für a, $b \geq 0$ und K_1, $K_2 \in \mathcal{K}$

$$aK_1 + bK_2 \in \mathcal{K}.$$

gilt.

Definition 4.3. Es sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Funktionen $K \in \mathcal{K}$, die die Bedingung (4.1) erfüllen.

Die Aussagen der nächsten beiden Lemmata folgen sofort aus der Linearität beziehungsweise Monotonie des Integrals.

Lemma 4.4. *Es seien a, $b \geq 0$ und K_1, $K_2 \in \mathcal{L}$. Dann gilt*

$$K := aK_1 + bK_2 \in \mathcal{L}.$$

Lemma 4.5. *Es seien $K_1 \in \mathcal{L}$ und $K_2 \in \mathcal{K}$ mit*

$$K_2(s) \leq K_1(s) \qquad \forall \quad s \geq 0.$$

Dann folgt $K_2 \in \mathcal{L}$.

Satz 4.6. *Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}$. Dann gilt*

$$K := K_1 + \ldots + K_m \in \mathcal{L}$$

genau dann, wenn $K_j \in \mathcal{L}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist.

Beweis. Weiß man $K \in \mathcal{L}$, so folgt nach Lemma 4.5 $K_j \in \mathcal{L}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ist umgekehrt $K_j \in \mathcal{L}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ bekannt, so folgt $K \in \mathcal{L}$ nach Lemma 4.4. Damit ist der Satz gezeigt. □

Wir wollen noch kurz die Stetigkeitsmodule hölderstetiger Funktionen betrachten.

Definition 4.7. Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Funktionen $K \in \mathcal{K}$, die die Eigenschaft haben, dass es Konstanten $L > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ gibt mit

$$K(s) \leq Ls^{\alpha} \qquad \forall \quad s \geq 0.$$

Liegt der Stetigkeitsmodul K_f einer gleichmäßig stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{H}$, so heißt f *hölderstetig* und man nennt die entsprechenden Konstanten L und α *Hölderkonstante* und *Hölderexponent* von f.

Lemma 4.8. *Es seien a, $b \geq 0$ und K_1, $K_2 \in \mathcal{H}$ beschränkt. Dann gilt*

$$K := aK_1 + bK_2 \in \mathcal{H}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Konstanten L_1, $L_2 > 0$ und α_1, $\alpha_2 \in (0, 1)$ mit

$$K_1(s) \leq L_1 s^{\alpha_1} \text{ und } K_2(s) \leq L_2 s^{\alpha_2} \qquad \forall \quad s \geq 0.$$

Es sei $M > 0$ eine Konstante, die K_1 und K_2 beschränkt. Wir setzen

$$L := \max\{aL_1 + bL_2, (a + b)M\} \text{ und } \alpha := \min\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Dann gilt $L > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$. Außerdem folgt für $s \in [0, 1]$

$$K(s) = aK_1(s) + bK_2(s) \leq aL_1 s^{\alpha_1} + bL_2 s^{\alpha_2} \leq aL_1 s^{\alpha} + bL_2 s^{\alpha} \leq Ls^{\alpha}.$$

Falls $s > 1$ ist, erhalten wir

$$K(s) = aK_1(s) + bK_2(s) \leq aM + bM \leq L \leq Ls^{\alpha}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

In dem gerade bewiesenen Lemma wird die Beschränktheit der betrachteten Funktionen K_1 und K_2 vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist für die Stetigkeitsmodule periodischer Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stets erfüllt, denn diese Funktionen sind beschränkt und nach der Definition 2.9 des Stetigkeitsmoduls K_f von f gilt dann

$$|K_f|_{[0,\infty)} \leq 2\,|f|_{\mathbb{R}} < \infty.$$

Lemma 4.9. *Es seien $K_1 \in \mathcal{H}$ und $K_2 \in \mathcal{K}$ mit*

$$K_2(s) \le K_1(s) \qquad \forall \quad s \ge 0.$$

Dann gilt $K_2 \in \mathcal{H}$.

Beweis. Es gibt Zahlen $L_1 > 0$ und $\alpha_1 \in (0,1)$ mit

$$K_2(s) \le K_1(s) \le L_1 s^{\alpha_1} \qquad \forall \quad s \ge 0.$$

Daraus folgt $K_2 \in \mathcal{H}$. □

4.2 Einordnung des Raumes $\mathcal{L}$

Im Folgenden beweisen wir $\mathcal{H} \subsetneqq \mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{K}$.

Lemma 4.10. *Es gilt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$.*

Beweis. Die Inklusion $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ folgt aus der Definition 4.3 von $\mathcal{L}$. Es sei nun $K \in \mathcal{H}$ beliebig. Wir zeigen $K \in \mathcal{L}$. Es gibt Konstanten $L > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ mit

$$K(s) \le L s^{\alpha} \qquad \forall \quad s \ge 0.$$

Folglich gilt

$$\int_0^1 \frac{K(s)}{s}\, ds \le \int_0^1 L s^{\alpha-1}\, ds = \frac{1}{\alpha} L s^{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{L}{\alpha} < \infty.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Hilfssatz 4.11. *Es sei $K : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion mit $K(0) = 0$. Ist K' monoton fallend und nichtnegativ*[8]*, so gilt*

$$K(Nx) \le N\, K(x) \qquad \forall \quad N \in \mathbb{N},\ x \ge 0.$$

Beweis. Wegen der Voraussetzungen an K' und K haben wir für alle $N \in \mathbb{N}$ und $x \ge 0$

$$K(Nx) = K(Nx) - K(0) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kx}^{(k+1)x} K'(t)\, dt \le \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^x K'(t)\, dt = N\, K(x).$$

Das war zu zeigen. □

Im Folgenden werden wir Grenzwerte von unten und von oben mit nach oben beziehungsweise nach unten weisenden Pfeilen darstellen. Wir schreiben also

$$\lim_{s \nearrow x} \text{ für } \lim_{s \to x,\, s < x} \quad \text{und} \quad \lim_{s \searrow x} \text{ für } \lim_{s \to x,\, s > x}.$$

[8] Der Deutlichkeit halber: Die Voraussetzungen des Lemmas besagen, dass es eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{M} \subseteq [0,\infty)$ ohne Häufungspunkt in $[0,\infty)$ gibt, so dass K auf $[0,\infty) \setminus \mathcal{M}$ stetig differenzierbar ist. Die Ableitung $K' : [0,\infty) \setminus \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ist monoton fallend und nichtnegativ.

Satz 4.12. *Die Funktion*

$$K : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \quad s \mapsto \begin{cases} 0, & \textit{falls } s = 0, \\ \dfrac{1}{|\ln s|}, & \textit{falls } s \in (0, e^{-2}), \\ \dfrac{1}{2}, & \textit{falls } s \geq e^{-2}, \end{cases}$$

liegt in $\mathcal{K}$, nicht aber in $\mathcal{L}$. Also ist $\mathcal{L}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{K}$.

Beweis. Auf $(0, e^{-2})$ ist K differenzierbar, dort gilt

$$K'(s) = \frac{1}{s(\ln s)^2} > 0. \tag{4.3}$$

Also ist K auf $(0, e^{-2})$ monoton wachsend. Weiter haben wir

$$\lim_{s \nearrow e^{-2}} K(s) = \lim_{s \nearrow e^{-2}} \frac{1}{|\ln s|} = \frac{1}{|\ln(e^{-2})|} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\lim_{s \searrow 0} K(s) = \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{|\ln s|} = 0.$$

Also ist die Funktion K auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig und monoton wachsend. Es gilt $K(0) = 0$. Wegen (4.3) ist die Ableitung K', soweit sie existiert, nichtnegativ. Wir zeigen, dass K' monoton fällt. Wegen $K' = 0$ auf (e^{-2}, ∞) und (4.3) können wir uns auf das Intervall $(0, e^{-2})$ beschränken. Dort gilt

$$K''(s) = -\frac{1}{s^2(\ln s)^2} + \frac{1}{s^2}\frac{2}{|\ln s|^3} = \frac{1}{s^2(\ln s)^2}\left(-1 + \frac{2}{|\ln s|}\right).$$

Nun ist K'' für diese Werte von s negativ, denn man hat ja

$$\frac{2}{|\ln s|} < \frac{2}{|\ln e^{-2}|} = 1 \qquad \forall \quad s \in (0, e^{-2}).$$

Also erfüllt K die Voraussetzungen von Hilfssatz 4.11 und somit die Bedingung (4.2). Es folgt $K \in \mathcal{K}$.
Es sei nun $\varepsilon \in (0, e^{-2})$ beliebig. Wir berechnen mit der Substitution $t = -\ln s$

$$\int_0^1 \frac{K(s)}{s}\, ds \geq \int_\varepsilon^{e^{-2}} \frac{1}{s|\ln s|}\, ds = \int_2^{|\ln \varepsilon|} \frac{1}{t}\, dt = \ln t \Big|_2^{|\ln \varepsilon|} = \ln|\ln \varepsilon| - \ln 2.$$

Da die rechte Seite mit $\varepsilon \to 0$ über alle Grenzen wächst, kann das links stehende Integral nicht endlich sein. Dies zeigt $K \notin \mathcal{L}$. Aus Lemma 4.10 folgt, dass $\mathcal{L}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{K}$ ist. Damit ist alles bewiesen. □

Satz 4.13. *Die Funktion*

$$K : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \quad s \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } s = 0, \\ \dfrac{1}{(\ln s)^2}, & \text{falls } s \in (0, e^{-3}), \\ \dfrac{1}{9}, & \text{falls } s \geq e^{-3}, \end{cases}$$

liegt in $\mathcal{L}$, nicht aber in $\mathcal{H}$. Also ist $\mathcal{H}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{L}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $K \in \mathcal{K}$, denn dies ist gemäß Definition 4.3 eine notwendige Bedingung für $K \in \mathcal{L}$. Auf $(0, e^{-3})$ ist die Funktion K differenzierbar. Dort ist ihre Ableitung

$$K'(s) = \frac{2}{s|\ln s|^3} > 0. \tag{4.4}$$

Das bedeutet, dass K auf $(0, e^{-3})$ monoton wachsend ist. Aus den Grenzbeziehungen

$$\lim_{s \searrow 0} K(s) = \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{(\ln s)^2} = 0$$

und

$$\lim_{s \nearrow e^{-3}} K(s) = \lim_{s \nearrow e^{-3}} \frac{1}{(\ln s)^2} = \frac{1}{(\ln(e^{-3}))^2} = \frac{1}{9}$$

folgen die Stetigkeit von K und dass K auf seinem ganzen Definitionsbereich monoton wachsend ist. Es gilt $K(0) = 0$. Dass die Bedingung (4.2) erfüllt ist, zeigen wir wieder mit Hilfssatz 4.11. Auf (e^{-3}, ∞) verschwindet K'. Auf Grund von (4.4) ist die Ableitung K', wo sie existiert, nichtnegativ und es reicht, ihr monotones Fallen auf $(0, e^{-3})$ nachzuprüfen. Dort hat man

$$K''(s) = -\frac{2}{s^2} \frac{1}{|\ln s|^3} + \frac{6}{s^2} \frac{1}{(\ln s)^4} = \frac{2}{s^2} \frac{1}{|\ln s|^3} \left(\frac{3}{|\ln s|} - 1 \right). \tag{4.5}$$

Wegen der für $s \in (0, e^{-3})$ geltenden Abschätzung

$$\frac{3}{|\ln s|} < \frac{3}{|\ln(e^{-3})|} = 1$$

ist K'' auf $(0, e^{-3})$ negativ, K' also monoton fallend. Somit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 4.11 erfüllt und K genügt (4.2). Es folgt $K \in \mathcal{K}$.
Mit der Substitution $t = -\ln s$ sehen wir, dass K die Integralbedingung (4.1) erfüllt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{K(s)}{s}\, ds &= \int_0^{e^{-3}} \frac{1}{s(\ln s)^2}\, ds + \int_{e^{-3}}^1 \frac{1}{9s}\, ds = \int_3^\infty \frac{1}{t^2}\, dt + \int_{e^{-3}}^1 \frac{1}{9s}\, ds \\ &= \left[-\frac{1}{t} \right]_3^\infty + \left[\frac{1}{9} \ln s \right]_{e^{-3}}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \ln(e^{-3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Somit ist $K \in \mathcal{L}$. Nehmen wir an, es wäre auch $K \in \mathcal{H}$. Dann gäbe es nach Definition 4.7 Konstanten $L > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ mit

$$K(s) = \frac{1}{(\ln s)^2} \leq Ls^\alpha \qquad \forall \quad s \in (0, e^{-3}).$$

Diese Ungleichung ist mit

$$\frac{1}{L} \leq \left(s^{\alpha/2} \ln s\right)^2 \qquad \forall \quad s \in (0, e^{-3}) \tag{4.6}$$

gleichbedeutend. Mit der Abkürzung $x = |\ln s|$ sieht man

$$\left(s^{\alpha/2} \ln s\right)^2 = \frac{x^2}{e^{\alpha x}} \longrightarrow 0 \quad (x = |\ln s| \to \infty).$$

Daher kann (4.6) nicht richtig sein und es folgt $K \notin \mathcal{H}$. Lemma 4.10 zeigt, dass $\mathcal{H}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{L}$ ist, und der Beweis ist fertig. $\square$

4.3 Beispiele 2π-periodischer Funktionen

Der Stetigkeitsmodul K_f einer jeden stetigen, 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liegt in $\mathcal{K}$. Die Funktion erfüllt genau dann die Integralbedingung, wenn $K_f \in \mathcal{L}$ liegt und sie ist genau dann hölderstetig, wenn $K_f \in \mathcal{H}$ ist. Somit folgt aus Lemma 4.10: Ist eine 2π-periodische, stetige Funktion hölderstetig, so erfüllt sie auch die Integralbedingung.

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass die Sätze 4.12 und 4.13 richtig bleiben, wenn wir die Betrachtung auf die Stetigkeitsmodule 2π-periodischer Funktionen einschränken. Dazu definieren wir die Projektion

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 2\pi],$$

die jedem $s \in \mathbb{R}$ das eindeutig bestimmte $p(s) \in (0, 2\pi]$ zuordnet, welches

$$\frac{s - p(s)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

erfüllt. Die Abbildung p ist 2π-periodisch. Argumente $s \in (0, 2\pi]$ lässt sie fest.

Satz 4.14. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{|\ln p(s)|}, & \textit{falls } p(s) \in (0, e^{-2}), \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{p(s) - e^{-2}}{2\pi - e^{-2}}\right), & \textit{falls } p(s) \in [e^{-2}, 2\pi], \end{cases}$$

ist gleichmäßig stetig und 2π-periodisch. Ihr Stetigkeitsmodul K_f ist ein Element von $\mathcal{K}$, nicht aber von $\mathcal{L}$.

Beweis. Die Funktion f ist nach Konstruktion 2π-periodisch. Um ihre Stetigkeit zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass sie auf $[0, 2\pi]$ stetig ist. Dazu sind die Punkte 0 und e^{-2} zu überprüfen. Man sieht

$$\lim_{s \searrow 0} f(s) = \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{|\ln s|} = 0 = f(2\pi) = f(0),$$

$$\lim_{s \nearrow e^{-2}} = \lim_{s \nearrow e^{-2}} \frac{1}{|\ln s|} = \frac{1}{2} = f(e^{-2}).$$

Daher ist f auf $[0, 2\pi]$ und wegen der Periodizität auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Aus der Periodizität folgt nun weiter, dass f gleichmäßig stetig ist. Somit gilt nach Bemerkung 4.2 $K_f \in \mathcal{K}$.

Wir zeigen, dass K_f eine Majorante der in Satz 4.12 genannten Funktion K ist. Es gilt

$$K_f(0) = K(0) = 0$$

und aus der Definition des Stetigkeitsmoduls folgt

$$K_f(s) \geq |f(s) - f(0)| = \frac{1}{|\ln s|} \qquad \forall \quad s \in (0, e^{-2}].$$

Da K_f als Element von $\mathcal{K}$ monoton wächst, haben wir

$$K_f(s) \geq K_f(e^{-2}) \geq \left|f(e^{-2}) - f(0)\right| = \frac{1}{2} \geq K(s) \qquad \forall \quad s \geq e^{-2}.$$

Somit ist K_f in der Tat eine Majorante von K. Da nach Satz 4.12 $K \in \mathcal{K}$ und $K \notin \mathcal{L}$ ist, gilt nach Lemma 4.5 $K_f \notin \mathcal{L}$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz 4.15. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln p(s))^2}, & \textit{falls } p(s) \in (0, e^{-3}), \\ \dfrac{1}{9}\left(1 - \dfrac{p(s) - e^{-3}}{2\pi - e^{-3}}\right), & \textit{falls } p(s) \in [e^{-3}, 2\pi], \end{cases}$$

ist gleichmäßig stetig und 2π-periodisch. Ihr Stetigkeitsmodul K_f ist ein Element von $\mathcal{L}$, nicht aber von $\mathcal{H}$.

Beweis. Dass die Funktion f 2π-periodisch ist, folgt nach Konstruktion. Wir überprüfen die Stetigkeit auf $[0, 2\pi]$. Dazu berechnen wir

$$\lim_{s \searrow 0} f(s) = \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{(\ln s)^2} = 0 = f(2\pi) = f(0),$$

$$\lim_{s \nearrow e^{-3}} f(s) = \lim_{s \nearrow e^{-3}} \frac{1}{(\ln s)^2} = \frac{1}{(\ln(e^{-3}))^2} = \frac{1}{9} = f(e^{-3}).$$

Also ist f auf $[0, 2\pi]$ stetig. Aus der 2π-Periodizität folgen erstens die Stetigkeit und zweitens die gleichmäßige Stetigkeit von f.

Nun beweisen wir, dass K_f mit der in Satz 4.13 gegebenen Funktion K übereinstimmt, woraus nach diesem Satz $K_f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{H}$ folgt. Es sei also K wie in Satz 4.13 definiert.
(1) Wir zeigen $K_f \geq K$. Es ist

$$K_f(0) = K(0) = 0. \tag{4.7}$$

Für $s \in (0, e^{-3})$ erhalten wir

$$K_f(s) \geq |f(s) - f(0)| = \frac{1}{(\ln s)^2} = K(s).$$

Da K_f monoton wachsend ist, gilt

$$K_f(s) \geq K_f(e^{-3}) \geq |f(e^{-3}) - f(0)| = \frac{1}{9} = K(s) \qquad \forall \quad s \geq e^{-3}.$$

Insgesamt folgt $K_f \geq K$.
(2) Wir diskutieren die Funktion f. Es gilt

$$f'(s) = \frac{2}{s} \frac{1}{|\ln s|^3} > 0 \qquad \forall \quad s \in (0, e^{-3}). \tag{4.8}$$

Also ist f auf $(0, e^{-3})$ monoton wachsend. Wegen $f(0) = 0$ und da f stetig ist, folgt $f \geq 0$ auf $[0, e^{-3}]$. Weiter haben wir

$$f'(s) = -\frac{1}{9(2\pi - e^{-3})} < 0 \qquad \forall \quad s \in (e^{-3}, 2\pi). \tag{4.9}$$

Daher ist f auf $(e^{-3}, 2\pi)$ monoton fallend. Aus der Stetigkeit von f und $f(2\pi) = 0$ folgt $f \geq 0$ auf $[e^{-3}, 2\pi]$. Außerdem folgt, dass f auf $[0, 2\pi]$ sein Maximum im Punkt e^{-3} annimmt, es ist $f(e^{-3}) = 1/9$. Die Periodizität von f impliziert

$$f(s) \in [0, 1/9] \qquad \forall \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

(3) Definieren wir eine Menge $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A} := \{2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{e^{-3} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\},$$

so ist nach (4.8) und (4.9) klar, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ differenzierbar ist und dass $|f'|$ dort mit der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{p(s)} \dfrac{1}{|\ln p(s)|^3}, & \text{falls } p(s) \in (0, e^{-3}), \\ \dfrac{1}{9(2\pi - e^{-3})}, & \text{falls } p(s) \in [e^{-3}, 2\pi], \end{cases}$$

übereinstimmt. Wir interessieren uns für g, da nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und nach der Standardabschätzung für Integrale

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_y^x g(s)\, ds \qquad \forall \quad x, y \in \mathbb{R},\, x \geq y, \tag{4.11}$$

gilt. Wir zeigen, dass die Funktion g auf $(0, 2\pi]$ monoton fallend ist. In der Tat: Auf $(0, e^{-3})$ gilt (vergleiche (4.5))

$$g'(s) = -\frac{2}{s^2}\frac{1}{|\ln s|^3} + \frac{6}{s^2}\frac{1}{(\ln s)^4} = \frac{2}{s^2}\frac{1}{|\ln s|^3}\left(\frac{3}{|\ln s|} - 1\right).$$

Da für $s \in (0, e^{-3})$ die Abschätzung

$$\frac{3}{|\ln s|} < \frac{3}{|\ln(e^{-3})|} = 1$$

besteht, ist g' dort negativ, g also monoton fallend. Man hat

$$\lim_{s \nearrow e^{-3}} g(s) = \lim_{s \nearrow e^{-3}} \frac{2}{s}\frac{1}{|\ln s|^3} = \frac{2e^3}{|\ln(e^{-3})|^3} > \frac{2 \cdot 2^3}{27} > \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

und

$$g(s) = \frac{1}{9(2\pi - e^{-3})} < \frac{1}{9(6-1)} = \frac{1}{45} < \frac{4}{7} \qquad \forall \quad s \in [e^{-3}, 2\pi].$$

Am Punkt e^{-3} springt die Funktion g demnach nach unten, auf $[e^{-3}, 2\pi]$ ist sie konstant. Damit ist gezeigt, dass g auf $(0, 2\pi]$ monoton fällt. Wegen der Periodizität gilt dies auch in jedem Intervall

$$(2\pi\, k, 2\pi(k+1)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(4) Wir beweisen nun $K \geq K_f$. Für $s = 0$ ist dies mit (4.7) klar. Es sei nun $s \in (0, e^{-3})$ beliebig. Nach der Definition des Stetigkeitsmoduls folgt $K(s) \geq K_f(s)$, wenn die Abschätzung

$$|f(x+\sigma) - f(x)| \leq K(s) \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R} \text{ und } \sigma \in (0, s] \tag{4.12}$$

gilt. Wegen der Periodizität von f können wir uns zum Beweis von (4.12) auf $x \in [0, 2\pi)$ beschränken. Im Fall $x + s \leq 2\pi$ folgt mit (4.11) und der Tatsache, dass g nach Beweisschritt **(3)** positiv ist und auf $(0, 2\pi]$ monoton fällt

$$|f(x+\sigma) - f(x)| \leq \int_x^{x+\sigma} g(\tau)\, d\tau \leq \int_x^{x+s} g(\tau)\, d\tau \leq \int_0^s g(\tau)\, d\tau.$$

Nun ist g nach Definition fast überall gleich $|f'|$ und f' wegen (4.8) auf $(0, e^{-3})$ positiv. Also gilt

$$|f(x+\sigma) - f(x)| \leq \int_0^s f'(\tau)\, d\tau = f(s) - f(0) = \frac{1}{(\ln s)^2} = K(s).$$

Falls $x + s > 2\pi$ ist, benutzen wir außerdem noch die 2π-Periodizität von g:

$$\begin{aligned} |f(x+\sigma) - f(x)| &\leq \int_x^{x+\sigma} g(\tau)\, d\tau \leq \int_x^{x+s} g(\tau)\, d\tau \\ &= \int_x^{2\pi} g(\tau)\, d\tau + \int_{2\pi}^{x+s} g(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^{x+s-2\pi} g(\tau)\, d\tau + \int_x^{2\pi} g(\tau)\, d\tau \\ &\leq \int_0^{x+s-2\pi} g(\tau)\, d\tau + \int_x^{2\pi} g(\tau - (2\pi - s))\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Bei der letzten Abschätzung beachte man, dass wegen $x + s > 2\pi$ für $\tau \in [x, 2\pi]$ gilt:

$$0 < x + s - 2\pi = x - (2\pi - s) \leq \tau - (2\pi - s) < \tau \leq 2\pi,$$

$$\Rightarrow \quad g(\tau - (2\pi - s)) \geq g(\tau).$$

Aus (4.13) folgt weiter:

$$\begin{aligned} |f(x+\sigma) - f(x)| &\leq \int_0^{x+s-2\pi} g(\tau)\, d\tau + \int_{x+s-2\pi}^{s} g(\tau)\, d\tau = \int_0^s g(\tau)\, d\tau \\ &= f(s) - f(0) = \frac{1}{(\ln s)^2} = K(s). \end{aligned}$$

Damit gilt (4.12) und es bleibt, $K(s) \geq K_f(s)$ für $s \in [e^{-3}, \infty)$ zu zeigen. Dies folgt aus (4.10), denn damit gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9} \qquad \forall \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet $K_f \leq 1/9$ und es ist $K(s) = 1/9$ für $s \geq e^{-3}$. Insgesamt ist $K \geq K_f$ bewiesen.

Da nach Beweisschritt **(1)** auch $K_f \geq K$ ist, haben wir $K = K_f$. Wie gesagt folgt daraus nach Satz 4.13 $K_f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{H}$, und der Beweis ist fertig. □

4.4 Folgerungen für Funktionen in mehreren Variablen

Wir betrachten nun Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei $n \geq 2$ sei. Wenn g stetig und 2π-periodisch ist, liegt der Stetigkeitsmodul K_g einer jeden solchen Funktion nach Bemerkung 2.10 in $\mathcal{K}$. Die Funktion g erfüllt genau dann die Integralbedingung, wenn $K_g \in \mathcal{L}$ liegt und sie ist genau dann hölderstetig, wenn $K_g \in \mathcal{H}$ ist. Somit folgt aus Lemma 4.10: Ist eine 2π-periodische, stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hölderstetig, so erfüllt sie auch die Integralbedingung.
Wir wollen die im vorigen Abschnitt erzielten Ergebnisse auf Funktionen in mehreren Variablen übertragen. Das ermöglicht uns der folgende

Satz 4.16. *Es sei $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine gleichmäßig stetige Funktion. Es sei*

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j).$$

Dann stimmen die Stetigkeitsmodule K_g und K_f von g und f überein: $K_g = K_f$.

Beweis. Offenbar ist g gleichmäßig stetig. Wir zeigen zunächst $K_g \leq K_f$. Dazu seien $\delta > 0$ und $x,\ x' \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x'| \leq \delta$ beliebig. Wir schreiben $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Da wir die Maximumnorm verwenden, gilt für alle $j = 1, \ldots, n$

$$|x_j - x'_j| \leq |x - x'| \leq \delta.$$

Mit der Definition (2.9) des Stetigkeitsmoduls folgt

$$|g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x'_j)| \leq \frac{1}{n} \cdot nK_f(\delta) = K_f(\delta).$$

Da x und $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x'| \leq \delta$ beliebig waren, folgt $K_g \leq K_f$. Um $K_f \leq K_g$ zu beweisen, seien nun $\delta > 0$ und $x_1,\ x'_1 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1 - x'_1| \leq \delta$ beliebig. Setzen wir $x_2 = \ldots = x_n = x_1$ und $x'_2 = \ldots = x'_n = x'_1$, so gilt mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$

$$|x - x'| = |x_1 - x'_1| \leq \delta.$$

Es folgt

$$|f(x_1) - f(x'_1)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - f(x'_j) \right| = |g(x) - g(x')| \leq K_g(\delta).$$

Da x_1 und $x'_1 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1 - x'_1| \leq \delta$ beliebig waren, zeigt dies $K_f \leq K_g$. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 4.17. *Es sei f die in Satz 4.14 definierte Funktion. Dann ist die die Funktion*

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

gleichmäßig stetig und 2π-periodisch. Ihr Stetigkeitsmodul K_g ist ein Element von $\mathcal{K}$, nicht aber von $\mathcal{L}$.

Beweis. Die gleichmäßige Stetigkeit und 2π-Periodizität von g sind klar. Nach Satz 4.16 gilt $K_g = K_f$. Also folgt mit Satz 4.14 die Behauptung. □

Korollar 4.18. *Es sei f die in Satz 4.15 definierte Funktion. Dann ist die die Funktion*

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

gleichmäßig stetig und 2π-periodisch. Ihr Stetigkeitsmodul K_g ist ein Element von $\mathcal{L}$, nicht aber von $\mathcal{H}$.

Beweis. Die gleichmäßige Stetigkeit und 2π-Periodizität von g sind klar. Nach Satz 4.16 gilt $K_g = K_f$. Also folgt mit Satz 4.15 die Behauptung. □

Da es in Satz E um die Stetigkeitsmodule der $2n$-ten partiellen Ableitungen einer Funktion $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ geht, behandeln wir auch diese Situation. Dazu beweisen wir zunächst ein einfaches Lemma.

Lemma 4.19. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und 2π-periodische Funktion. Dann gibt es eine m-mal stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$F^{(m)}(x) = f(x) + const.$$

Beweis. Im Fall $m = 1$ setzen wir

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - x[f],$$

wobei der Mittelwert $[f]$ von f durch

$$[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

gegeben ist. Dann ist F stetig differenzierbar, es gilt

$$F'(x) = f(x) - [f]$$

und F ist 2π-periodisch:

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt - (x+2\pi)[f] + x[f] = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt - 2\pi[f] = 0.$$

Die Behauptung sei nun für ein $m \in \mathbb{N}$ richtig. Wir zeigen sie für $m+1$. Dann dürfen wir die Existenz einer m-mal stetig differenzierbaren, 2π-periodischen Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$G^{(m)}(x) = f(x) + \text{const.}$$

voraussetzen. Wir definieren nun F durch

$$F(x) = \int_0^x G(t)\,dt - x[G].$$

Dann ist F $m+1$-mal stetig differenzierbar, 2π-periodisch und es gilt

$$F^{(m+1)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left(G(x) - [G]\right) = G^{(m)}(x) = f(x) + \text{const.}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.20. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{L}^{2n}$ die Klasse aller 2π-periodischen, $2n$-mal stetig differenzierbaren Funktionen $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, deren Stetigkeitsmodule (vergleiche (1.4))*

$$K_j(\delta) = \sup_{z,z' \in \mathbb{R}^{2n},\, |z-z'| \le \delta} \left| \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z) - \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z') \right| \quad (\delta \ge 0)$$

für alle $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ die Integralbedingung (vergleiche (1.5))

$$\int_0^1 \frac{K_j(\delta)}{\delta}\,d\delta < \infty$$

erfüllen. Dann gilt $\bigcup_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{2n+\alpha} \subsetneqq \mathcal{L}^{2n}$.

Beweis. Um die Inklusion $\bigcup_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{2n+\alpha} \subseteq \mathcal{L}^{2n}$ zu zeigen, betrachten wir eine beliebige Funktion $h \in \bigcup_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{2n+\alpha}$. Dann gibt es einen Hölderexponenten $\alpha \in (0,1)$, so dass für alle $m = (m_1, \ldots, m_{2n}) \in \mathbb{N}_0^{2n}$, $m_1 + \ldots + m_{2n} = 2n$ mit Konstanten $L(m) > 0$

$$K_{h^{(m)}}(\delta) \leq L(m)\delta^\alpha \quad (\delta \geq 0), \quad h^{(m)} = \frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_1}^{m_1} \ldots \partial {z_{2n}}^{m_{2n}}}$$

gilt, wobei $K_{h^{(m)}}$ gemäß Definition 2.9 den Stetigkeitsmodul von $h^{(m)}$ bezeichnet. Also folgt mit Definition 4.7 und Lemma 4.10

$$K_1 = K_{h^{(2n,0,\ldots,0)}}, \ldots, K_{2n} = K_{h^{(0,\ldots,0,2n)}} \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}.$$

Nach Definition 4.3 von $\mathcal{L}$ zeigt dies $h \in \mathcal{L}^{2n}$.
Nun zeigen wir, dass $\mathcal{L}^{2n}$ eine echte Obermenge von $\bigcup_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{2n+\alpha}$ ist. Dazu reicht es, eine Funktion h zu finden, für deren Stetigkeitsmodule K_j gilt, dass sie alle Elemente von $\mathcal{L}$ sind, dass aber einer dieser Stetigkeitsmodule kein Element von $\mathcal{H}$ ist (vergleiche die Definitionen 4.3 und 4.7). In der Tat werden wir im folgenden eine Funktion h konstruieren, für deren Stetigkeitsmodule

$$K_j \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{H} \qquad \forall \quad 1 \leq j \leq 2n$$

gilt. Dazu sei f die in Satz 4.15 definierte Funktion. Nach Lemma 4.19 gibt es eine 2π-periodische, $2n$-mal stetig differenzierbare Funktion F mit

$$F^{(2n)}(t) = f(t) + \text{const.} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir setzen nun

$$h : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(z_1, \ldots, z_{2n}) = \sum_{j=1}^{2n} F(z_j).$$

Es sei $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{\partial^{2n} h}{\partial {z_j}^{2n}}(z) = g_j(z) \text{ mit } g_j(z) = f(z_j) + \text{const.} \quad (z = (z_1, \ldots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}).$$

Wir zeigen $K_{g_j} = K_f$. Dazu seien $\delta > 0$ und $z = (z_1, \ldots, z_{2n})$, $z' = (z'_1, \ldots, z'_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $|z - z'| \leq \delta$ beliebig. Die Abschätzung

$$|g_j(z) - g_j(z')| = |f(z_j) - f(z'_j)| \leq K_f(\delta)$$

zeigt $K_{g_j} \leq K_f$. Betrachten wir nun andererseits beliebige $\delta > 0$ und t, $t' \in \mathbb{R}$ mit $|t - t'| \leq \delta$, so folgt für $z_1 = \ldots = z_{2n} := t$ und $z'_1 = \ldots = z'_{2n} := t'$

$$|f(t) - f(t')| = |g_j(z) - g_j(z')| \leq K_{g_j}(\delta),$$

mithin $K_f \leq K_{g_j}$. Somit gilt

$$K_j = K_{g_j} = K_f.$$

Da K_f nach Satz 4.15 ein Element von $\mathcal{L}$, aber nicht von $\mathcal{H}$ ist und $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Wie im Beweis deutlich wurde, impliziert $h \in \bigcup_{0<\alpha<1} \mathcal{C}^{2n+\alpha}$ Bedingungen an alle partiellen Ableitungen $2n$-ter Ordnung von h, insbesondere die gemischten partiellen Ableitungen. Auf diese kommt es in unserem Zusammenhang aber gar nicht an, da sie für Fragen der Approximation differenzierbarer Funktionen durch analytische Funktionen – zumindest bei dem von uns gewählten Zugang – keine Rolle spielen (siehe Satz 2.23).

5 Beweis des analytischen Existenzsatzes (Satz 3.6)

5.1 Einleitende Bemerkungen

Der Beweis von Satz 3.6 wird hier vollständig durchgeführt, weil der Parameter ϑ in den Abschätzungen (3.12) und (3.14) für den Beweis von Satz E unabhängig von s sein soll. In den in der Literatur vorhandenen Beweisen für einen Existenzsatz bei hölderstetigen höchsten partiellen Ableitungen der Störung wird stets eine Abhängigkeit angenommen wie zum Beispiel $\vartheta = s^\alpha$ (in [19]) mit dem Hölderexponenten $\alpha \in (0,1)$. Zum Beweis von Satz E muss ϑ jedoch von s unabhängig sein.

5.1.1 Formulierung des Newton-Verfahrens

Wir wollen Satz 3.6 mit dem Newton-Verfahren beweisen.[9] Dazu ist eine geeignete linearisierte Gleichung aufzustellen, die wir im Folgenden heuristisch herleiten wollen. Wir schreiben die Hamiltonfunktion (3.9) als Summe

$$H = N + R$$

mit der *Normalform*

$$N(x,y) = a + \langle \omega \, , \, y \rangle + \mathcal{O}(|y|^2),$$

und dem – kleinen – *Rest* $R(x,y)$. Nun ist eine Folge $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kanonischer Transformationen zu finden, so dass der Rest nach jeder Transformation kleiner wird: Man schreibe für $k \in \mathbb{N}_0$

$$H = H_0, \quad H_k = N_k + R_k, \quad H_{k+1} := H_k \circ Z_{k+1},$$

wobei N_k wieder eine Normalform (mit einem a_k statt a, aber gleichem ω) sein soll und R_k der Rest nach dem k-ten Schritt ist. Bilden wir die kanonische Transformation

$$W_k := Z_1 \circ \ldots \circ Z_k, \quad W_0 := \mathrm{id} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

so ist $H_k = H \circ W_k = N_k + R_k$, und wenn die Grenzwerte

$$R_k \longrightarrow 0, \quad W_k \longrightarrow W_\infty, \quad N_k \longrightarrow N_\infty \quad (k \to \infty),$$

mit einer kanonischen Transformation W_∞ und einer Normalform N_∞ existieren, dann ist

$$H \circ W_\infty = N_\infty,$$

und das Ziel ist erreicht. Mit anderen Worten: Wir suchen eine Nullstelle des Funktionals

$$\mathcal{R}(W,N) := H \circ W - N,$$

[9] Denn die starke Konvergenz dieses Verfahrens kompensiert den störenden Einfluss der sogenannten kleinen Nenner, siehe die Bemerkungen 5.4 (Seite 63), 5.7 (Seite 71) und 5.9 (Seite 76).

und eine solche Nullstelle ist dann durch ein Funktionenpaar (W, N) gegeben. Gemäß der obigen Überlegung versuchen wir, diese Nullstelle als Grenzwert

$$(W_\infty, N_\infty) = \lim_{k \to \infty} (W_k, N_k)$$

zu erhalten. Dies führt zu der Aufgabe, aus einer Näherungslösung (W_k, N_k) eine bessere Näherungslösung (W_{k+1}, N_{k+1}) zu konstruieren. Dazu schreiben wir für ein $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} W &:= W_k, & N &:= N_k, \\ W_+ &= W + \Delta W := W_{k+1}, & N_+ &= N + \Delta N := N_{k+1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Der neue Rest ergibt sich nach dem Taylorschen Satz zu

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(W_+, N_+) &= H \circ (W + \Delta W) - N - \Delta N \\ &= \mathcal{R}(W, N) + H_z(W)\Delta W - \Delta N + \text{Terme höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

Linearisierung bedeutet nun, die Gleichung

$$\mathcal{R}(W, N) + H_z(W)\Delta W - \Delta N = 0 \tag{5.2}$$

zu lösen. Da dies im Allgemeinen wegen des Terms $H_z(W)\Delta W$ aber nicht möglich ist, sind weitere Terme höherer Ordnung abzuspalten.

5.1.2 Vereinfachung der linearisierten Gleichung

Die folgenden Überlegungen sind eine einfachere Version des in [34] gemachten Ansatzes. (Die in [34] diskutierte Situation ist komplizierter, da dort die Voraussetzung (3.10) vermieden werden soll.) Wir konstruieren die kanonischen Transformationen durch Flüsse gewisser Hamiltonsysteme. Also arbeiten wir mit einer Funktion $\Delta S = \Delta S(x, y)$ und betrachten das Hamiltonsche System

$$\dot{x} = \Delta S_y, \quad \dot{y} = -\Delta S_x. \tag{5.3}$$

Die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems werde mit

$$z = (x, y) = (X(t, \xi, \eta), Y(t, \xi, \eta)) = Z(t, \xi, \eta), \quad Z(0, \xi, \eta) = (\xi, \eta) = \zeta$$

bezeichnet. Dann ist für ein festes t die Abbildung $\zeta \mapsto Z(t, \zeta)$, sofern sie existiert, eine kanonische Transformation (vergleiche Definition 3.4).

Definition 5.1. Es seien $f, g \in \mathcal{P}(r, s)$ oder $f, g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist die *Poissonklammer* von f und g durch

$$\{f\,,\,g\} := \langle\, f_x\,,\, g_y \,\rangle - \langle\, f_y\,,\, g_x \,\rangle$$

gegeben.

Wegen (5.3) kann man eine Zeitableitung wie folgt durch eine Poissonklammer ersetzen (F sei eine skalarwertige, differenzierbare Funktion):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(Z(t,\zeta)) &= \langle\, F_z(Z(t,\zeta))\,,\, Z_t(t,\zeta)\,\rangle \\ &= \langle\, F_x(Z(t,\zeta))\,,\, X_t(t,\zeta)\,\rangle + \langle\, F_y(Z(t,\zeta))\,,\, Y_t(t,\zeta)\,\rangle \\ &= \langle\, F_x(Z(t,\zeta))\,,\, \Delta S_y(Z(t,\zeta))\,\rangle - \langle\, F_y(Z(t,\zeta))\,,\, \Delta S_x(Z(t,\zeta))\,\rangle \\ &= \{F\,,\, \Delta S\}\,(Z(t,\zeta)). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Wir nehmen nun die Existenz der Abbildung $\zeta \mapsto Z(t,\zeta)$ für alle $0 \le t \le 1$ und eine Menge zugelassener ζ an. Die neue Transformation $W_+ = W + \Delta W$ (siehe (5.1)) soll durch $W_+(\zeta) := W(Z(1,\zeta))$ gegeben sein (die Zulässigkeit dieser Definition ist natürlich noch zu zeigen). Da vorausgesetzt ist, dass W eine kanonische Transformation ist, wird auch W_+ eine kanonische Transformation sein. Für die Änderung ΔW ergibt sich nach (5.4)

$$\begin{aligned}\Delta W(\zeta) &= W_+(\zeta) - W(\zeta) = W(Z(1,\zeta)) - W(\zeta) = \int_0^1 \frac{d}{dt}W(Z(t,\zeta))\,dt \\ &= \int_0^1 \left(\{W_1\,,\,\Delta S\}\,,\ldots,\{W_{2n}\,,\,\Delta S\}\right)(Z(t,\zeta))\,dt. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Um nun die Gleichung (5.2) zu vereinfachen, berechnen wir erneut $\mathcal{R}(W_+, N_+)$ und benutzen (5.4).

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(W_+,N_+)(\zeta) &= H\circ W_+(\zeta) - N_+(\zeta) = H\circ W(Z(1,\zeta)) - N(\zeta) - \Delta N(\zeta) \\ &= \mathcal{R}(W,N)(Z(1,\zeta)) + N(Z(1,\zeta)) - N(\zeta) - \Delta N(\zeta) \\ &= \big(\mathcal{R}(W,N) + \{N\,,\,\Delta S\} - \Delta N\big)(\zeta) \\ &\quad + \mathcal{R}(W,N)(Z(1,\zeta)) - \mathcal{R}(W,N)(\zeta) \\ &\quad + N(Z(1,\zeta)) - N(\zeta) - \frac{d}{dt}N(Z(t,\zeta))\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

(Das Zeichen $|_{t=0}$ im letzten Term soll bedeuten, dass die davor stehende Funktion im Punkt $t = 0$ auszuwerten ist.) Wie in (5.5) erhalten wir

$$\mathcal{R}(W,N)(Z(1,\zeta)) - \mathcal{R}(W,N)(\zeta) = \int_0^1 \{\mathcal{R}(W,N)\,,\,\Delta S\}\,(Z(t,\zeta))\,dt, \tag{5.6}$$

und aus der Taylorschen Formel folgt

$$N(Z(1,\zeta)) - N(\zeta) - \frac{d}{dt}N(Z(t,\zeta))\Big|_{t=0} = \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2}N(Z(t,\zeta))\,dt. \tag{5.7}$$

Setzen wir dies beides ein, so folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(W_+,N_+)(\zeta) &= \big(\mathcal{R}(W,N) + \{N\,,\,\Delta S\} - \Delta N\big)(\zeta) + \\ &\quad + \int_0^1 \left(\{\mathcal{R}(W,N)\,,\,\Delta S\}\,(Z(t,\zeta)) + (1-t)\frac{d^2}{dt^2}N(Z(t,\zeta))\right)dt. \end{aligned}$$

Die Zeitableitungen lassen sich mit (5.4) auflösen,

$$\frac{d^2}{dt^2} N(Z(t,\zeta)) = \frac{d}{dt} \{N\,,\,\Delta S\} (Z(t,\zeta)) = \{\{N\,,\,\Delta S\}\,,\,\Delta S\} (Z(t,\zeta)),$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{R}(W_+, N_+)(\zeta) = \big(\mathcal{R}(W,N) + \{N\,,\,\Delta S\} - \Delta N\big)(\zeta) + \\ + \int_0^1 \{\mathcal{R}(W,N) + (1-t)\{N\,,\,\Delta S\}\,,\,\Delta S\} (Z(t,\zeta))\,dt.$$

Somit lautet die vereinfachte linearisierte Gleichung:

$$\boxed{\mathcal{R}(W,N) + \{N\,,\,\Delta S\} - \Delta N = 0.} \tag{5.8}$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für ΔN und ΔS. Dann ist Z als Fluss von (5.3) zu berechnen, dies legt schließlich $W_+ = W \circ Z(1,\,\cdot\,)$ fest. Wenn (5.8) gelöst ist, gilt für den neuen Rest

$$\mathcal{R}(W_+, N_+)(\zeta) = \int_0^1 \{\mathcal{R}(W,N) + (1-t)\{N\,,\,\Delta S\}\,,\,\Delta S\} (Z(t,\zeta))\,dt.$$

Im Integranden kann man die innere Poissonklammer mit (5.8) umschreiben, denn nun ist

$$(1-t)\{N\,,\,\Delta S\} = (1-t)\Delta N - (1-t)\mathcal{R}(W,N),$$

damit erhalten wir

$$\boxed{\mathcal{R}(W_+, N_+)(\zeta) = \int_0^1 \{t\,\mathcal{R}(W,N) + (1-t)\Delta N\,,\,\Delta S\} (Z(t,\zeta))\,dt.} \tag{5.9}$$

5.2 Lösung der linearisierten Gleichung

Die Lösung der linearisierten Gleichung (5.8) stützt sich im Wesentlichen auf den folgenden Satz 5.3 aus [32] (dort ist es Satz 9.7).

Definition 5.2. Es sei $r > 0$ und $f : \mathcal{S}(r) \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion mit der Periode 2π in $x_1, \ldots, x_n$. Dann ist der *Mittelwert* $[f]$ von f gegeben durch

$$[f] := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Satz 5.3. *Es sei* $\tau \geq n-1 \geq 1$, $\gamma > 0$, $r > 0$, $M > 0$ *und die Funktion* $g : \mathcal{S}(r) \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *sei analytisch und* 2π*-periodisch mit* $|g|_{\mathcal{S}(r)} \leq M$ *und* $[g] = 0$. *Es sei* $\omega \in \Omega(\gamma, \tau)$ *(vergleiche Definition 3.2). Dann gibt es genau eine* 2π*-periodische analytische Funktion* $u : \mathcal{S}(r) \to \mathbb{C}$ *mit* $[u] = 0$ *und*

$$\langle\, u_\xi\,,\,\omega\,\rangle = g. \tag{5.10}$$

Zudem gibt es eine Konstante $c_6 = c_6(n,\tau) > 0$ *mit*

$$|u|_{\mathcal{S}(r-\delta)} \leq \frac{c_6 M}{\gamma \delta^\tau} \qquad \forall \quad \delta \in (0,r). \tag{5.11}$$

Wenn g *reelle Argumente auf reelle Werte abbildet, so gilt dies auch für* u.

Bemerkung 5.4. *Kleine Nenner.* Die gegebene Funktion g und die Lösung u lassen sich in ihre Fourierreihen entwickeln. Diese lauten mit Koeffizienten g_k bzw. $u_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$

$$g(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} g_k e^{i\langle\, k\,,\,\xi\,\rangle} \quad \text{und} \quad u(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} u_k e^{i\langle\, k\,,\,\xi\,\rangle} \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(r).$$

Das Verschwinden der Mittelwerte von g und u ist mit $g_0 = 0$ bzw. $u_0 = 0$ gleichbedeutend (da diese Koeffizienten gleich Null sind, wird der Index 0 in den Fourierreihen ausgeschlossen). Die Funktion u läßt sich gliedweise differenzieren, daher gilt in $\mathcal{S}(r)$

$$\langle\, u_\xi(\xi)\,,\,\omega\,\rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} i\,k\,u_k e^{i\langle\, k\,,\,\xi\,\rangle}\,,\,\omega \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} i\,\langle\, k\,,\,\omega\,\rangle\, u_k e^{i\langle\, k\,,\,\xi\,\rangle}.$$

Koeffizientenvergleich mit g zeigt nun $i\,\langle\, k\,,\,\omega\,\rangle\, u_k = g_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, also

$$u(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{g_k}{i\,\langle\, k\,,\,\omega\,\rangle} e^{i\langle\, k\,,\,\xi\,\rangle} \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(r). \tag{5.12}$$

Wenn man die Reihe (5.12) als Ansatz für die Lösung der Gleichung $\langle\, u_\xi\,,\,\omega\,\rangle = g$ nimmt, stellt sich die Frage, ob sie konvergiert. Allerdings sieht man ihr die Konvergenz nicht an, da die Nenner $i\,\langle\, k\,,\,\omega\,\rangle$ je nach k sehr klein werden – wenn die Einträge des Vektors ω über $\mathbb{Q}$ nicht linear unabhängig sind, gibt es sogar ein $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, für das $\langle\, k\,,\,\omega\,\rangle$ verschwindet: Daher kann es in diesem Fall keine 2π-periodische analytische Lösung der Gleichung (5.10) geben.
Satz 5.3 besagt nun, dass die Reihe (5.12) unter den Voraussetzungen des Satzes trotz der störenden kleinen Nenner konvergiert. Deren Einfluss kommt in dem Faktor $c_6/(\gamma\delta^\tau)$ der Abschätzung (5.11) zum Ausdruck.

Satz 5.5. *Es seien $\tau \geq n-1 \geq 1$, $\gamma > 0$, $r > 0$, $0 < \delta < r/4$ und $0 < s \leq \delta^{\tau+1} \leq 1$ gegeben. Die Funktion $f \in \mathcal{P}(r,s)$ erfülle mit einem $M > 0$*

$$|f|_{\mathcal{D}(r,s)} \leq M. \tag{5.13}$$

Für die Funktion $N \in \mathcal{P}(r,s)$ gelte

$$N(x,0) = N(0) \text{ und } N_y(x,0) = \omega \in \Omega(\gamma,\tau) \qquad \forall \quad x \in \mathcal{S}(r). \tag{5.14}$$

Außerdem gebe es eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$|N_{yy} - C|_{\mathcal{D}(r,s)} \leq \frac{1}{2|C^{-1}|}. \tag{5.15}$$

Dann besitzt die Gleichung

$$\boxed{f + \{N\,,\,\Delta S\} - \Delta N = 0} \tag{5.16}$$

eine Lösung, das ist ein Funktionenpaar $(\Delta S, \Delta N)$, mit den Eigenschaften:
Es ist $\Delta S(x,y) = \langle\, \lambda\,,\,x\,\rangle + U(x) + \langle\, V(x)\,,\,y\,\rangle$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und $U \in \mathcal{P}(r)$, $V \in \mathcal{P}_n(r)$.

Insbesondere liegt die Funktion $(x,y) \mapsto \Delta S(x,y) - \langle \lambda\,,\, x \rangle$ *in* $\mathcal{P}(r,s)$. *Es gilt* $\Delta N \in \mathcal{P}(r,s)$,

$$\Delta N(x,0) = \Delta N(0) \text{ und } \Delta N_y(x,0) = 0 \qquad \forall \quad x \in \mathcal{S}(r). \tag{5.17}$$

Es gibt Konstanten c_7, c_8, $\tilde{c}_9$, c_{10} *und* $c_{11} > 0$, *so dass die folgenden Abschätzungen gelten:*

$$|\Delta S_x|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s)} \le c_7 \frac{M}{s}, \tag{5.18}$$

$$|\Delta S_y|_{\mathcal{S}(r-3\delta)} \le c_8 \frac{M}{s\delta^\tau}, \tag{5.19}$$

$$|\Delta N(0)| \le \tilde{c}_9 \frac{M}{s}, \tag{5.20}$$

$$|\Delta N - \Delta N(0)|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s/2)} \le c_{10} M, \tag{5.21}$$

$$|\Delta N_{yy}|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s/4)} \le c_{11} \frac{M}{s^2}. \tag{5.22}$$

Die Konstanten c_j $(j \ne 9)$ *hängen nur von* n, τ, γ *und* C *ab. Die Konstante* $\tilde{c}_9$ *hängt zusätzlich noch von* $|\omega|$ *ab.*

Beweis. Wir machen für ΔS den Ansatz einer Funktion, die in y affin-linear ist,

$$\Delta S(x,y) = \langle \lambda\,,\, x \rangle + U(x) + \langle V(x)\,,\, y \rangle\,, \tag{5.23}$$

worin wir $U \in \mathcal{P}(r)$ und $V \in \mathcal{P}_n(r)$ mit $[U] = 0$ und $[V] = 0$ zu erhalten versuchen und $\lambda \in \mathbb{R}^n$ geeignet zu wählen ist. Nun gehen wir wie folgt vor:

1. Aufstellen einer Bestimmungsgleichung für U.
2. Lösung dieser Gleichung.
3. Aufstellen einer Bestimmungsgleichung für V.
4. Definition von λ und Lösung der Bestimmungsgleichung für V.
5. Definition von ΔN und Beweis der Eigenschaften von ΔS und ΔN.

(1) Wir leiten eine Bestimmungsgleichung für U her. Dazu setzen wir in der linken Seite von (5.16) $y = 0$ ein. Unter der Annahme $\Delta N(x,0) = \Delta N(0)$ für $x \in \mathcal{S}(r)$ (siehe (5.17)) folgt dann mit (5.14)

$$\begin{aligned} f(x,0) &+ \{N\,,\, \Delta S\}(x,0) - \Delta N(x,0) = \\ &= f(x,0) + \langle N_x\,,\, \Delta S_y \rangle (x,0) - \langle N_y\,,\, \Delta S_x \rangle (x,0) - \Delta N(0) \\ &= f(x,0) - \langle \Delta S_x(x,0)\,,\, \omega \rangle - \Delta N(0). \end{aligned}$$

Dies soll gleich Null sein. Nach unserem Ansatz (5.23) für ΔS bedeutet das

$$f(x,0) - \langle \lambda\,,\, \omega \rangle - \langle U_x(x)\,,\, \omega \rangle - \Delta N(0) = 0. \tag{5.24}$$

Mit dem Satz 5.3 können wir die folgende Gleichung lösen:

$$\langle\, U_x(x)\,,\,\omega\,\rangle = f(x,0) - [f(\,\cdot\,,0)]. \tag{5.25}$$

Dies nehmen wir als Bestimmungsgleichung für U.
Bemerkung zum Zusammenhang der Gleichungen (5.24) und (5.25): Offenbar sind die Gleichungen (5.24) und (5.25) gleichbedeutend, wenn

$$\Delta N(0) = [f(\,\cdot\,,0)] - \langle\, \lambda\,,\,\omega\,\rangle \tag{5.26}$$

gilt. Wir werden λ in Schritt **(4)** so festlegen, dass die Bestimmungsgleichung für V lösbar ist, und dann ΔN in Schritt **(5)** so definieren, dass die Bedingung (5.26) erfüllt ist.

(2) Lösung der Gleichung (5.25). Wegen (5.13) ist die rechte Seite von (5.25) durch $2M$ beschränkt, nach Satz 5.3 gibt es also eine Lösung $U \in \mathcal{P}(r)$ mit $[U] = 0$ und

$$|U|_{\mathcal{S}(r-\delta)} \leq \frac{c_6 2M}{\gamma\delta^\tau} \qquad \forall \quad \delta \in (0,r).$$

Mit der Cauchyschen Abschätzung (siehe Hilfssatz A.11 im Anhang) folgt

$$|U_x|_{\mathcal{S}(r-2\delta)} \leq \frac{2c_6 M}{\gamma\delta^{\tau+1}} \qquad \forall \quad \delta \in (0,r/2). \tag{5.27}$$

(3) Nun ist eine Bestimmungsgleichung für V zu finden. Differenzieren von (5.16) nach y und Einsetzen von $y = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= f_y(x,0) + \{N\,,\,\Delta S\}_y\,(x,0) - \Delta N_y(x,0) \\ &= f_y(x,0) + \langle\, N_x\,,\,\Delta S_y\,\rangle_y\,(x,0) - \langle\, N_y\,,\,\Delta S_x\,\rangle_y\,(x,0) - \Delta N_y(x,0) \\ &= f_y(x,0) + \Delta S_y(x,0)\cdot N_{xy}(x,0) + N_x(x,0)\cdot \Delta S_{yy}(x,0) \\ &\qquad - \Delta S_x(x,0)\cdot N_{yy}(x,0) - N_y(x,0)\cdot \Delta S_{xy}(x,0) - \Delta N_y(x,0). \end{aligned}$$

Der zweite Summand verschwindet wegen (5.14). Der dritte Summand ist nach dem Ansatz (5.23) ebenfalls gleich Null. Somit folgt aus (5.16) die Gleichung

$$f_y(x,0) - \Delta S_x(x,0)\cdot N_{yy}(x,0) - N_y(x,0)\cdot \Delta S_{xy}(x,0) - \Delta N_y(x,0) = 0. \tag{5.28}$$

Unter der Annahme $\Delta N_y(x,0) = 0$ für $x \in \mathcal{S}(r)$ (vergleiche 5.17) folgt mit (5.14) und (5.23)

$$f_y(x,0) - (\lambda + U_x(x))\cdot N_{yy}(x,0) - \omega\cdot V_x^{\mathrm{T}}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega\cdot V_x^{\mathrm{T}}(x) = f_y(x,0) - (\lambda + U_x(x))\cdot N_{yy}(x,0). \tag{5.29}$$

Dies ist ein System von n Gleichungen, die wir mit dem Satz 5.3 einzeln lösen können, sofern gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= [f_y(\,\cdot\,,0) - (\lambda + U_x)\cdot N_{yy}(\,\cdot\,,0)] \\ &= [f_y(\,\cdot\,,0)] - [U_x\cdot N_{yy}(\,\cdot\,,0)] - \lambda[N_{yy}(\,\cdot\,,0)] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda[N_{yy}(\,\cdot\,,0)] = [f_y(\,\cdot\,,0)] - [U_x \cdot N_{yy}(\,\cdot\,,0)]. \tag{5.30}$$

Diese Gleichung ist nach λ aufzulösen.

(4) Definition von λ und Lösung der Gleichung (5.29). Die Gleichung (5.30) kann nach λ aufgelöst werden, wenn die Matrix $[N_{yy}(\,\cdot\,,0)]$ invertierbar ist. Wir wenden das Lemma A.3 auf $[N_{yy}(\,\cdot\,,0)]$ an. Wegen (5.15) gilt

$$|[N_{yy}(\,\cdot\,,0)] - C| \leq \frac{1}{2|C^{-1}|},$$

daher können wir in Lemma A.3 $S = C$, $P = [N_{yy}(\,\cdot\,,0)]$ und $h = 1/2$ einsetzen und es folgt, dass $[N_{yy}(\,\cdot\,,0)]^{-1}$ existiert und die Abschätzung

$$\left|[N_{yy}(\,\cdot\,,0)]^{-1}\right| \leq 2|C^{-1}| \tag{5.31}$$

gilt. Also kann λ wie folgt definiert werden:

$$\lambda := ([f_y(\,\cdot\,,0)] - [U_x \cdot N_{yy}(\,\cdot\,,0)]) \cdot [N_{yy}(\,\cdot\,,0)]^{-1}.$$

Mit dieser Wahl verschwindet der Mittelwert der rechten Seite der Gleichung (5.29). Um den Satz 5.3 auf (5.29) anwenden zu können, muss eine Abschätzung für die rechte Seite von (5.29) gefunden werden. Wir beginnen damit, aus (5.13) mit der Cauchyschen Abschätzung

$$|f_y(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r)} \leq \frac{M}{s}$$

zu folgern. Für N_{yy} beachten wir

$$1 = \left|CC^{-1}\right| \leq |C||C^{-1}| \;\Rightarrow\; \frac{1}{|C^{-1}|} \leq |C|,$$

daher folgt mit (5.15)

$$|N_{yy}|_{\mathcal{D}(r,s)} \leq |N_{yy} - C|_{\mathcal{D}(r,s)} + |C| \leq \frac{1}{2|C^{-1}|} + |C| \leq 2|C|. \tag{5.32}$$

Zusammen mit (5.27) und $s \leq \delta^{\tau+1}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} |f_y(\,\cdot\,,0) - U_x \cdot N_{yy}(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r-2\delta)} &\leq \frac{M}{s} + \frac{2c_6 M}{\gamma\delta^{\tau+1}} 2|C| \\ &\leq \left(1 + \frac{4c_6|C|}{\gamma}\right)\frac{M}{s} = c_{12}\frac{M}{s}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

wobei wir

$$c_{12} := 1 + \frac{4c_6|C|}{\gamma} \tag{5.34}$$

setzen. Dies und (5.31) geben eine Abschätzung für λ:

$$|\lambda| \leq 2|C^{-1}|c_{12}\frac{M}{s}. \tag{5.35}$$

Hiermit, mit (5.32) und (5.33), gelangen wir zu der gesuchten Abschätzung für die rechte Seite von (5.29):

$$\begin{aligned} |f_y(\,\cdot\,,0) - (\lambda + U_x) \cdot N_{yy}(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r-2\delta)} &\le |f_y(\,\cdot\,,0) - U_x \cdot N_{yy}(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r-2\delta)} + \\ + |\lambda|\; |N_{yy}(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r)} &\le c_{12}\frac{M}{s} + 4|C|\,|C^{-1}|c_{12}\frac{M}{s}. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Nunmehr lässt sich (5.29) komponentenweise lösen, denn es ist ja

$$V(x) = (V_1(x), \dots, V_n(x)), \quad \omega \cdot V_x^{\mathrm{T}}(x) = (\langle\, \omega\,,\, V_{1x}(x)\,\rangle\,, \dots, \langle\, \omega\,,\, V_{nx}(x)\,\rangle)\,.$$

Da wir für Vektoren die Maximumnorm verwenden, werden Abschätzungen für jedes V_i $(1 \le i \le n)$ zu Abschätzungen für V. Da die rechte Seite von (5.29) wegen der Periodizität in x von f, U und N auf allen Teilstreifen $\mathcal{S}(r-\varepsilon)$ von $\mathcal{S}(r)$ beschränkt ist $(\varepsilon \in (0,r))$, existiert die Lösung auf $\mathcal{S}(r)$, also hat man $V \in \mathcal{P}_n(r)$ mit der Abschätzung

$$|V|_{\mathcal{S}(r-3\delta)} \le \frac{c_6}{\gamma\delta^\tau}\left(c_{12}\frac{M}{s} + 4|C|\,|C^{-1}|c_{12}\frac{M}{s}\right) = c_8\frac{M}{s\delta^\tau}, \tag{5.37}$$

mit einer positiven Konstanten $c_8 = c_8(n,\tau,\gamma,C)$. Weiter folgt aus der Cauchyschen Abschätzung

$$|V_x|_{\mathcal{S}(r-4\delta)} \le c_8\frac{M}{s\delta^{\tau+1}}. \tag{5.38}$$

(5) Wenn wir nun ΔS gemäß (5.23) definieren, sind die Behauptungen über die Gestalt von ΔS erfüllt. Mit der Definition

$$\Delta N := f + \{N\,,\,\Delta S\}$$

lösen wir die Gleichung (5.16) und es gilt auch $\Delta N \in \mathcal{P}(r,s)$. Die Behauptung (5.17) betrifft die Gestalt von ΔN. Mit (5.14), (5.23) und (5.25) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta N(x,0) &= f(x,0) + \{N\,,\,\Delta S\}\,(x,0) \\ &= f(x,0) + \langle\, N_x\,,\,\Delta S_y\,\rangle\,(x,0) - \langle\, N_y\,,\,\Delta S_x\,\rangle\,(x,0) \\ &= f(x,0) - \langle\, \omega\,,\,\Delta S_x(x,0)\,\rangle \\ &= f(x,0) - \langle\, \lambda\,,\,\omega\,\rangle - \langle\, U_x(x)\,,\,\omega\,\rangle \\ &= [f(\,\cdot\,,0)] - \langle\, \lambda\,,\,\omega\,\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.39}$$

was offenbar nicht von x abhängt. Daher gilt $\Delta N(x,0) = \Delta N(0)$ für alle $x \in \mathcal{S}(r)$. Übrigens zeigt diese Rechnung, dass die Bedingung (5.26) erfüllt ist und wir mit (5.25) auch die Gleichung (5.24) lösen. Im 3. Beweisschritt, Formel (5.28) hatten wir ausgerechnet, dass aus der Gleichung (5.16), die ja jetzt gelöst ist und daher gilt, folgt:

$$\Delta N_y(x,0) = f_y(x,0) - \Delta S_x(x,0) \cdot N_{yy}(x,0) - N_y(x,0) \cdot \Delta S_{xy}(x,0).$$

Deshalb gilt nach (5.23) und (5.29)

$$\Delta N_y(x,0) = f_y(x,0) - (\lambda + U_x(x)) \cdot N_{yy}(x,0) - \omega \cdot V_x^{\mathrm{T}}(x) = 0,$$

damit ist (5.17) bewiesen. Wir kommen zu den Abschätzungen für die Ableitungen von ΔS. Da nach Definition (5.23) $\Delta S_y = V$ ist, bedeutet (5.37)

$$|\Delta S_y|_{\mathcal{S}(r-3\delta)} \le c_8 \frac{M}{s\delta^\tau},$$

das ist die Abschätzung (5.19). Wir haben $\Delta S_x(x,y) = \lambda + U_x(x) + y \cdot V_x(x)$. Mit (5.35), (5.27) und (5.38) folgt

$$\begin{aligned} |\Delta S_x|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s)} &\le |\lambda| + |U_x|_{\mathcal{S}(r-2\delta)} + ns\,|V_x|_{\mathcal{S}(r-4\delta)} \\ &\le 2|C^{-1}|c_{12}\frac{M}{s} + \frac{2c_6 M}{\gamma s} + nsc_8\frac{M}{s^2} = c_7\frac{M}{s}, \end{aligned}$$

wobei $c_7 = c_7(n,\tau,\gamma,C)$ eine positive Konstante ist. Dies zeigt (5.18). Es sind noch die Abschätzungen für ΔN und ΔN_{yy} zu beweisen. In (5.39) hatten wir $\Delta N(0) = [f(\,\cdot\,,0)] - \langle\, \lambda \,,\, \omega \,\rangle$ bestimmt. Nach (5.13) und (5.35) folgt daraus

$$|\Delta N(0)| \le M + 2n|\omega||C^{-1}|c_{12}\frac{M}{s} \le \tilde{c}_9\frac{M}{s},$$

mit einer positiven Konstanten $\tilde{c}_9 = \tilde{c}_9(n,\tau,\gamma,C,|\omega|)$, also die Abschätzung (5.20). Zum Beweis von (5.21) berechnen wir zunächst mit (5.23), (5.25) und (5.39)

$$\begin{aligned} \langle\, \Delta S_x(x,y) \,,\, \omega \,\rangle &= \langle\, \lambda \,,\, \omega \,\rangle + \langle\, U_x(x) \,,\, \omega \,\rangle + \langle\, y \cdot V_x(x) \,,\, \omega \,\rangle \\ &= \langle\, \lambda \,,\, \omega \,\rangle + f(x,0) - [f(\,\cdot\,,0)] + \left\langle\, y \,,\, \omega \cdot V_x^{\mathrm{T}}(x) \,\right\rangle \\ &= f(x,0) + \left\langle\, y \,,\, \omega \cdot V_x^{\mathrm{T}}(x) \,\right\rangle - \Delta N(0). \end{aligned}$$

Mit (5.29) und (5.36) folgt

$$|\langle\, \Delta S_x \,,\, \omega \,\rangle + \Delta N(0)|_{\mathcal{D}(r-2\delta,s)} \le M + ns(c_{12} + 4|C|\,|C^{-1}|c_{12})\frac{M}{s} = c_{13}M \qquad (5.40)$$

mit

$$c_{13} := 1 + nc_{12}\left(1 + 4|C|\,|C^{-1}|\right). \qquad (5.41)$$

Wir bezeichnen die Funktion $y \mapsto \langle\, \omega \,,\, y \,\rangle$ für den Augenblick mit g_ω und schreiben ΔN in der Form

$$\begin{aligned} \Delta N &= f + \{N \,,\, \Delta S\} = f + \langle\, N_x \,,\, \Delta S_y \,\rangle - \langle\, N_y \,,\, \Delta S_x \,\rangle \\ &= f + \langle\, (N - g_\omega - N(0))_x \,,\, \Delta S_y \,\rangle \\ &\quad - \langle\, (N - g_\omega - N(0))_y \,,\, \Delta S_x \,\rangle - \langle\, \omega \,,\, \Delta S_x \,\rangle \\ &= f + \{N - g_\omega - N(0) \,,\, \Delta S\} - \langle\, \omega \,,\, \Delta S_x \,\rangle\,. \end{aligned} \qquad (5.42)$$

Nun betrachten wir den ersten Eintrag der Poissonklammer genauer. Wegen (5.14) können wir für alle $(x,y) \in \mathcal{D}(r,s)$

$$N(x,y) - \langle\, \omega \,,\, y \,\rangle - N(0) = N(x,y) - \langle\, N_y(x,0) \,,\, y \,\rangle - N(x,0) =: h(x,y) \quad (5.43)$$

schreiben. Die so definierte Funktion $h \in \mathcal{P}(r,s)$ erfüllt für alle $x \in \mathcal{S}(r)$ $h(x,0) = 0$ und $h_y(x,0) = 0$. Mit der Taylorschen Formel erhält man für $(x,y) \in \mathcal{D}(r,s)$ die Abschätzung

$$|h(x,y)| \leq \left| \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^2}{2} \langle\, y \cdot h_{yy}(x, \sigma y)\,,\, y \,\rangle\, d\sigma \right| \leq \frac{1}{2} n |s|^2 \, |h_{yy}(x, \,\cdot\,)|_{\{y \in \mathbb{C}^n \,|\, |y| < s\}} \,,$$

das bedeutet mit (5.32)

$$|h|_{\mathcal{D}(r,s)} \leq |C| n s^2.$$

Daraus kann man mit der Cauchyschen Abschätzung auf

$$|h_x|_{\mathcal{D}(r-\delta,s)} \leq \frac{|C| n s^2}{\delta}, \quad |h_y|_{\mathcal{D}(r,s/2)} \leq 2 |C| n s \tag{5.44}$$

schließen. Nun ist nach (5.42) und (5.43)

$$\begin{aligned}
\Delta N - \Delta N(0) &= f + \{N - g_\omega - N(0)\,,\, \Delta S\} - \langle\, \omega \,,\, \Delta S_x \,\rangle - \Delta N(0) \\
&= f + \{h \,,\, \Delta S\} - (\langle\, \omega \,,\, \Delta S_x \,\rangle + \Delta N(0)) \\
&= f + \langle\, h_x \,,\, \Delta S_y \,\rangle - \langle\, h_y \,,\, \Delta S_x \,\rangle - (\langle\, \omega \,,\, \Delta S_x \,\rangle + \Delta N(0))\,.
\end{aligned}$$

Wenn wir die soeben erzielten Abschätzungen (5.44) zusammen mit (5.40), (5.41) und den Abschätzungen für f, ΔS_y und ΔS_x einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\Delta N - \Delta N(0)|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s/2)} &\leq M + n \cdot \frac{|C| n s^2}{\delta} \cdot c_8 \frac{M}{s \delta^\tau} + n \cdot 2 |C| n s \cdot c_7 \frac{M}{s} + c_{13} M \\
&\leq c_{10} M,
\end{aligned}$$

wobei wir

$$c_{10} := 1 + n^2 |C| \, (2c_7 + c_8) + c_{13} \tag{5.45}$$

setzen. Also ist Abschätzung (5.21) bewiesen. Nun folgt (5.22) mit Hilfssatz A.11,

$$|\Delta N_{yy}|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s/4)} \leq \frac{8}{s} \, |\Delta N_y|_{\mathcal{D}(r-4\delta,(3/8)s)} \leq 64 \frac{M c_{10}}{s^2}.$$

Es bleibt nur noch, $c_{11} = c_{11}(n, \tau, \gamma, C) := 64 c_{10} > 0$ zu setzen, und alle Behauptungen sind bewiesen. □

5.3 Das Induktionslemma

In diesem Abschnitt wird die gesuchte Folge kanonischer Transformationen induktiv definiert. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor. Zunächst formulieren wir den folgenden Satz 5.6, in dem eine Transformation Z konstruiert wird, die eine vorgegebenen Hamiltonfunktion H in die Funktion $H_+ = H \circ Z$ transformiert. Dann legen wir Zahlenfolgen (r_k), (δ_k), (s_k) und (M_k) so fest, dass sich Satz 5.6 wiederholt anwenden lässt, dass man also die erhaltene Funktion H_+ als neue Funktion H in die Voraussetzungen des Satzes einsetzen kann. Das Ergebnis ist dann das Induktionslemma (Satz 5.14), in dem der induktive Prozess für alle $k \in \mathbb{N}_0$ beschrieben wird.

Satz 5.6. *Es seien $\tau \geq n-1 \geq 1$, $\gamma > 0$, $r > 0$, $0 < \delta < r/6$ und $0 < s \leq \delta^{\tau+1} \leq 1$, ferner $0 < r_+ \leq r - 6\delta$ und $0 < s_+ \leq s/8$. Wir betrachten die Funktion $H \in \mathcal{P}(r,s)$, $H = N + R$ mit N, $R \in \mathcal{P}(r,s)$ und*

$$N(x,y) = a + \langle \omega\,,\, y \rangle + \mathcal{O}(|y|^2), \tag{5.46}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega(\gamma,\tau)$ gelte. Es gebe eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$|N_{yy} - C|_{\mathcal{D}(r,s)} \leq \frac{1}{2|C^{-1}|}. \tag{5.47}$$

Der Rest R sei durch eine Konstante $M > 0$ beschränkt mit

$$|R|_{\mathcal{D}(r,s)} \leq M \leq \frac{1}{16}\frac{1}{c_7 + c_8}\, s^2, \tag{5.48}$$

wobei die Konstanten c_7 und c_8 durch Satz 5.5 (siehe (5.18) und (5.19)) gegeben sind. Dann gibt es eine einfache kanonische Transformation

$$\begin{aligned} Z : \mathcal{D}(r_+, s_+) &\longrightarrow \mathcal{D}(r - 5\delta, s/4), \quad Z - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r_+, s_+), \\ \zeta = (\xi,\eta) &\mapsto Z(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{5.49}$$

so dass die transformierte Hamiltonfunktion $H_+ = H \circ Z$ in $\mathcal{P}(r_+, s_+)$ liegt und $H_+ = N_+ + R_+$ gilt mit N_+, $R_+ \in \mathcal{P}(r_+, s_+)$,

$$N_+(\xi,\eta) = a_+ + \langle \omega\,,\, \eta \rangle + \mathcal{O}(|\eta|^2), \tag{5.50}$$

wobei $a_+ \in \mathbb{R}$ ist, und die folgenden Abschätzungen gelten:

$$|Z_\zeta|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \leq \exp\left(c_{14}\frac{M}{s^2}\right), \tag{5.51}$$

$$|Z_\zeta - E_{2n}|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \leq c_{14}\frac{M}{s^2}\exp\left(c_{14}\frac{M}{s^2}\right), \tag{5.52}$$

$$|a_+ - a| \leq \widetilde{c}_9 \frac{M}{s}, \tag{5.53}$$

$$|N_{+\eta\eta} - N_{\eta\eta}|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \leq c_{11}\frac{M}{s^2}, \tag{5.54}$$

$$|R_+|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \leq c_{15}\frac{M^2}{s^2}. \tag{5.55}$$

Hierbei sind die Konstanten $\widetilde{c}_9$ und c_{11} durch Satz 5.5 (siehe (5.20) und (5.22)) gegeben, und c_{14}, c_{15} sind positive Konstanten, die nur von n, τ, γ und C abhängen. Ist schließlich $W = W(\xi,\eta) : \mathcal{D}(r,s) \to \mathbb{C}^{2n}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit durch $K_1 > 0$ beschränkten Ableitungen W_ξ und W_η, so gilt für $\Delta W := W \circ Z - W$ die Abschätzung

$$|\Delta W|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \leq nK_1(c_7 + c_8)\frac{M}{s\delta^\tau}. \tag{5.56}$$

Bemerkung 5.7. Die Abschätzung (5.55) bringt zum Ausdruck, dass unser Ansatz erfolgreich war: Die Größe des alten Restes M geht in die Berechnung der Größe des neuen Restes quadratisch ein. Dies haben wir dem Newton-Verfahren zu verdanken. Der störende Einfluss der kleinen Nenner (vgl. Bemerkung 5.4) spiegelt sich in dem Faktor $1/s^2$ wider.

Beweis von Satz 5.6. Wir lösen die linearisierte Gleichung

$$R + \{N\,,\,\Delta S\} - \Delta N = 0 \tag{5.57}$$

mit Hilfe von Satz 5.5, dessen Voraussetzungen nachzuprüfen sind. Dazu setzen wir in Satz 5.5 die Konstanten τ, γ, δ, r, s und M aus der Voraussetzung ein. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes 5.5 über diese Konstanten alle erfüllt. Für die Funktionen f und N setzen wir $f = R$ und $N = H - R$ ein. Wir haben R, $N \in \mathcal{P}(r,s)$, und nach (5.46) gilt $N(x,0) = N(0) = a$ und $N_y(x,0) = \omega \in \Omega(\gamma,\tau)$ für alle $x \in \mathcal{S}(r)$. Mit (5.47) und (5.48) sind die Vorausetzungen von Satz 5.5 erfüllt. Somit erhalten wir eine Lösung $(\Delta S, \Delta N)$ der Gleichung (5.57) mit den in Satz 5.5 genannten Eigenschaften, insbesondere den Abschätzungen (5.18) bis (5.22).
Mit Satz A.26 (siehe Anhang A.4 über das Erzeugen von kanonischen Transformationen) können wir nun aus der Funktion ΔS die Transformation Z konstruieren. Dazu setzen wir in Satz A.26

$$K = (c_7 + c_8)\frac{M\delta}{s} > 0, \tag{5.58}$$

$$\varrho = r - 4\delta,\ \sigma = s/4 \text{ und } F = \Delta S|_{\mathcal{D}(\varrho,\sigma)} \in \mathcal{P}(\varrho,\sigma)$$

ein. Wegen $\delta < r/6$ ist dann $2\delta < \varrho$ und aus $0 < s \le \delta^{\tau+1} \le 1$ folgt $0 < \sigma \le \delta$. Aus (5.58) folgt zusammen mit der Voraussetzung (5.48)

$$\frac{\sigma\delta}{2K} = \frac{\sigma\delta}{2}\cdot\frac{s}{(c_7+c_8)M\delta} = \frac{s^2}{8(c_7+c_8)M} \ge 2 > 1.$$

Die Funktion F ist wie ΔS affin-linear in y. Mit (5.18) erhalten wir

$$|F_x|_{\mathcal{D}(\varrho,\sigma)} = |\Delta S_x|_{\mathcal{D}(\varrho,\sigma)} \le c_7\frac{M}{s} \le (c_7+c_8)\frac{M\delta}{s}\cdot\frac{1}{\delta} = \frac{K}{\delta},$$

und aus (5.19) folgt

$$|F_y|_{\mathcal{D}(\varrho,\sigma)} \le |\Delta S_y|_{\mathcal{S}(r-3\delta)} \le c_8\frac{M}{s\delta^\tau} \le (c_7+c_8)\frac{M\delta}{\delta^{\tau+1}}\cdot\frac{1}{s} \le \frac{K}{s} < \frac{4K}{s} = \frac{K}{\sigma},$$

daher genügt F den in Satz A.26 vorausgesetzten Ungleichungen (A.25). Somit sind alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt und wir erhalten gemäß (A.28) eine Schar von Abbildungen

$$\begin{aligned} &Z(t,\,\cdot\,) : \mathcal{D}(r-6\delta, s/8) \longrightarrow \mathcal{D}(r-5\delta, s/4),\\ &Z(t,\,\cdot\,) - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r-6\delta, s/8) \quad (0 \le t < 2), \end{aligned} \tag{5.59}$$

deren jede eine einfache kanonische Transformation ist. Wegen (5.58) haben wir

$$\frac{2nK}{\delta\sigma} = \frac{2 \cdot 4n(c_7 + c_8)M}{s^2} = c_{14}\frac{M}{s^2}$$

mit $c_{14} = 8n(c_7 + c_8)$. Setzen wir dies in die durch Satz A.26 gegebenen Abschätzungen (A.29) und (A.30) ein, so erhalten wir für die Abbildungen (5.59)

$$|Z_\zeta(t,\,\cdot\,)|_{\mathcal{D}(r-6\delta,s/8)} \leq \exp\left(c_{14}\frac{M}{s^2}\,t\right) \qquad \forall \quad t \in [0,2), \tag{5.60}$$

$$|Z_\zeta(t,\,\cdot\,) - E_{2n}|_{\mathcal{D}(r-6\delta,s/8)} \leq c_{14}\frac{M}{s^2}\exp\left(c_{14}\frac{M}{s^2}\,t\right) \qquad \forall \quad t \in [0,1]. \tag{5.61}$$

Wir definieren nun Z als die Funktion $Z(1,\,\cdot\,)$, eingeschränkt auf $\mathcal{D}(r_+, s_+)$. Dann hat Z nach (5.59) die Eigenschaften (5.49) und erfüllt wegen (5.60) und (5.61) die Abschätzungen (5.51) und (5.52).
Wir setzen für alle $\zeta \in \mathcal{D}(r_+, s_+)$

$$H_+(\zeta) := (H \circ Z)(\zeta), \quad N_+(\zeta) := N(\zeta) + \Delta N(\zeta), \quad R_+(\zeta) := H_+(\zeta) - N_+(\zeta),$$

(es war $N = H - R$). Aus den in Satz 5.5 formulierten Eigenschaften der Funktion ΔN folgern wir Eigenschaften von N_+. Da $\Delta N \in \mathcal{P}(r,s)$ gilt, haben wir $N_+ \in \mathcal{P}(r_+, s_+)$. Es gilt

$$N_+(\xi, 0) = N(\xi, 0) + \Delta N(\xi, 0) = a + \Delta N(0) =: a_+ \qquad \forall \quad \xi \in S(r_+).$$

Aus (5.20) folgt die Abschätzung (5.53):

$$|a_+ - a| = |\Delta N(0)| \leq \widetilde{c}_9\frac{M}{s}.$$

Weiter ergibt sich

$$N_{+y}(\xi, 0) = N_y(\xi, 0) + \Delta N_y(\xi, 0) = \omega \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(r_+).$$

Damit hat N_+ die Taylorentwicklung

$$N_+(\xi, \eta) = a_+ + \langle\, \omega\,,\, \eta \,\rangle + \mathcal{O}(|\eta|^2),$$

das ist die behauptete Gestalt (5.50). Wegen (5.22) folgt die Abschätzung (5.54):

$$|N_{+\eta\eta} - N_{\eta\eta}|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} = |\Delta N_{\eta\eta}|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \leq c_{11}\frac{M}{s^2}.$$

Es gilt auch $R_+ \in \mathcal{P}(r_+, s_+)$, denn R_+ ist analytisch, bildet reelle Argumente auf reelle Werte ab und erfüllt für alle $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} R_+(\xi + 2\pi e_j, \eta) &= H(Z(\xi + 2\pi e_j, \eta)) - N_+(\xi + 2\pi e_j, \eta) \\ &= H(Z(\xi, \eta) + (2\pi e_j, 0)) - N_+(\xi, \eta) \\ &= H(Z(\xi, \eta)) - N_+(\xi, \eta) = R_+(\xi, \eta), \end{aligned}$$

was die geforderte Periodizität ist. Zum Beweis von (5.55) berechnen wir das Analogon zu Formel (5.9), indem wir die heuristischen Rechnungen des Abschnittes 5.1.2 mit den inzwischen wohldefinierten Funktionen nachvollziehen und die Gleichungen (5.4), (5.6), (5.7) und (5.57) verwenden:

$$\begin{aligned}
R_+(\zeta) &= H_+(\zeta) - N_+(\zeta) = H \circ Z(\zeta) - N_+(\zeta) = H \circ Z(1,\zeta) - N(\zeta) - \Delta N(\zeta) \\
&= R(Z(1,\zeta)) + N(Z(1,\zeta)) - N(\zeta) - \Delta N(\zeta) \\
&= (R + \{N\,,\,\Delta S\} - \Delta N)\,(\zeta) + R(Z(1,\zeta)) - R(\zeta) \\
&\qquad + N(Z(1,\zeta)) - N(\zeta) - \frac{d}{dt} N(Z(t,\zeta))\Big|_{t=0} \\
&= \int_0^1 \{R\,,\,\Delta S\}\,(Z(t,\zeta))\,dt + \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2} N(Z(t,\zeta))\,dt \\
&= \int_0^1 \{R + (1-t)\,\{N\,,\,\Delta S\}\;,\,\Delta S\}\,(Z(t,\zeta))\,dt \\
&= \int_0^1 \{tR + (1-t)\Delta N\,,\,\Delta S\}\,(Z(t,\zeta))\,dt \qquad \forall \quad \zeta \in \mathcal{D}(r_+, s_+).
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Um den Integranden abzuschätzen, setzen wir für $t \in [0,1]$

$$F_{(t)} := tR + (1-t)(\Delta N - \Delta N(0)) \in \mathcal{P}(r,s).$$

Dann gilt nach unserer Voraussetzung (5.48) und mit (5.21)

$$\left|F_{(t)}\right|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s/2)} \le tM + (1-t)c_{10}M \le (1+c_{10})M \qquad \forall \quad t \in [0,1].$$

Daraus folgt mit der Cauchyschen Abschätzung für alle $t \in [0,1]$

$$\left|F_{(t)x}\right|_{\mathcal{D}(r-5\delta,s/2)} \le (1+c_{10})\frac{M}{\delta}, \quad \left|F_{(t)y}\right|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s/4)} \le 4(1+c_{10})\frac{M}{s}.$$

Zusammen mit (5.18) und (5.19) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|\left\{F_{(t)}\,,\,\Delta S\right\}\right|_{\mathcal{D}(r-5\delta,s/4)} &\le n\Big(\left|F_{(t)x}\right|_{\mathcal{D}(r-5\delta,s/2)}\left|\Delta S_y\right|_{\mathcal{S}(r-3\delta)} + \\
&\qquad + \left|F_{(t)y}\right|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s/4)}\left|\Delta S_x\right|_{\mathcal{D}(r-4\delta,s)}\Big) \\
&\le n(1+c_{10})\left(\frac{M}{\delta}c_8\frac{M}{s\delta^\tau} + \frac{4M}{s}c_7\frac{M}{s}\right) \le c_{15}\frac{M^2}{s^2}
\end{aligned}$$

mit

$$c_{15} := n(1+c_{10})(4c_7 + c_8) \tag{5.63}$$

für alle $t \in [0,1]$. Nun gilt

$$\{tR + (1-t)\Delta N\,,\,\Delta S\} = \left\{F_{(t)}\,,\,\Delta S\right\} \qquad \forall \quad t \in [0,1],$$

sowie nach (5.59) $Z(t,\zeta) \in \mathcal{D}(r-5\delta, s/4)$ für alle $t \in [0,1]$ und $\zeta \in \mathcal{D}(r_+, s_+)$. Somit ergibt sich aus (5.62) die gesuchte Abschätzung (5.55) für R_+.

Zuletzt ist noch (5.56) zu beweisen. Die vorausgesetzten Abschätzungen für W_ξ, W_η sind wegen der Zeilensummennorm Abschätzungen für $W_{j\xi}$, $W_{j\eta}$ $(1 \le j \le 2n)$. Die Voraussetzungen besagen also

$$|W_{j\xi}|_{\mathcal{D}(r,s)} \le K_1 \text{ und } |W_{j\eta}|_{\mathcal{D}(r,s)} \le K_1 \qquad \forall \quad 1 \le j \le 2n.$$

Aus (5.5) folgt für alle $1 \le j \le 2n$ und $\zeta \in \mathcal{D}(r_+, s_+)$

$$\Delta W_j(\zeta) = \int_0^1 \{W_j\,,\, \Delta S\}\,(Z(t,\zeta))\,dt.$$

Mit (5.18) und (5.19) erhalten wir daher, wenn wir $\Delta S_\xi := \Delta S_x$ und $\Delta S_\eta := \Delta S_y$ schreiben,

$$\begin{aligned}
|\Delta W_j|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} &= \left| \int_0^1 \{W_j\,,\, \Delta S\}\,(Z(t,\,\cdot\,))\,dt \right|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \\
&\le \int_0^1 |\{W_j\,,\, \Delta S\}|_{\mathcal{D}(r-5\delta,s/4)}\,dt \\
&\le |\langle\, W_{j\xi}\,,\, \Delta S_\eta\,\rangle|_{\mathcal{D}(r-5\delta,s/4)} + |\langle\, W_{j\eta}\,,\, \Delta S_\xi\,\rangle|_{\mathcal{D}(r-5\delta,s/4)} \\
&\le nK_1 \left(c_8 \frac{M}{s\delta^\tau} + c_7 \frac{M}{s} \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|\Delta W|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} = \max_{1\le j\le 2n} |\Delta W_j|_{\mathcal{D}(r_+,s_+)} \le nK_1(c_7+c_8)\frac{M}{s\delta^\tau}.$$

Damit ist alles gezeigt. □

5.3.1 Existenz der Folgen

Wir wollen nun Satz 5.6 allgemein für den k-ten Schritt formulieren und mit der Hamiltonfunktion (3.9) in Verbindung bringen. Dazu sind Folgen (r_k), (δ_k), (s_k) und (M_k) zu finden, so dass sich Satz 5.6 immer wieder anwenden lässt, wenn wir dort

$$r = r_k,\; r_+ = r_{k+1},\; \delta = \delta_k,\; s = s_k,\; s_+ = s_{k+1},\; M = M_k$$

einsetzen. Zunächst stellen wir sicher, dass die Folgen der r_k, δ_k und s_k richtig ineinandergreifen. Wir machen den Ansatz

$$\delta_k := q^k\delta_0, \quad s_k := {\delta_k}^{\tau+1}, \quad r_k := \frac{3}{4}r + 8\delta_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.64}$$

wobei r in den Voraussetzungen von Satz 3.6 gegeben ist, $\delta_0 \in (0,1)$ später noch genauer festgelegt wird und

$$q := \frac{1}{4} \tag{5.65}$$

sein soll. Aus (5.64) folgt sofort:

$$\delta_{k+1} = q^{k+1}\delta_0 = q\delta_k \text{ und } s_{k+1} = {\delta_{k+1}}^{\tau+1} = q^{\tau+1}s_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lemma 5.8. *Die in (5.64) und (5.65) definierten Folgen* $(r_k)_{k=0}^{\infty}$*,* $(\delta_k)_{k=0}^{\infty}$ *und* $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ *sind streng monoton fallend und genügen den Bedingungen*

$$r_k > \frac{3}{4}r, \quad 0 < \delta_k < \frac{r_k}{6}, \quad 0 < s_k \leq {\delta_k}^{\tau+1} \leq 1,$$

$$0 < r_{k+1} \leq r_k - 6\delta_k, \quad 0 < s_{k+1} \leq \frac{s_k}{8} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Dass die Folgen streng monoton fallen und $r_k > 3r/4$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, ist offensichtlich. Es gilt

$$\delta_k < \frac{8}{6}\delta_k < \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}r + 8\delta_k\right) = \frac{r_k}{6} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Ungleichungen $0 < s_k \leq {\delta_k}^{\tau+1} \leq 1$ folgen sofort aus der Definition von s_k und δ_k ($k \in \mathbb{N}_0$). Es ist $r_{k+1} = 3r/4 + 8\delta_{k+1}$ und $r_k - 6\delta_k = 3r/4 + 2\delta_k$. Also gilt $r_{k+1} \leq r_k - 6\delta_k$ genau dann, wenn

$$8\delta_{k+1} \leq 2\delta_k \;\Leftrightarrow\; 4q^{k+1}\delta_0 \leq q^k\delta_0 \;\Leftrightarrow\; 4q \leq 1$$

erfüllt ist, dies ist nach (5.65) der Fall. Da $\tau + 1 \geq 2$ ist, erhalten wir

$$s_{k+1} = \left(q^{k+1}\delta_0\right)^{\tau+1} = q^{\tau+1}s_k \leq q^2 s_k = \frac{s_k}{16} < \frac{s_k}{8}.$$

Damit ist alles bewiesen. □

Die angestrebte Formulierung von Satz 5.6 führt uns auf Folgen von Funktionen (H_k), (N_k) und (R_k), die dann entsprechend für H, N und R einzusetzen sind. Wenn wir die Existenz von Normalformen[10] N_ℓ auf $\mathcal{D}(r_\ell, s_\ell)$ annehmen ($0 \leq \ell \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$), die (5.54) erfüllen, und für N_0 eine Abschätzung der Art (3.10) annehmen, nämlich

$$|N_{0yy} - C|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)} \leq \frac{1}{4|C^{-1}|},$$

so gilt

$$\begin{aligned} |N_{k+1\eta\eta} - C|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} &\leq \sum_{\ell=0}^{k} |N_{\ell+1\eta\eta} - N_{\ell\eta\eta}|_{\mathcal{D}(r_{\ell+1},s_{\ell+1})} + |N_{0\eta\eta} - C|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)} \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{11}\frac{M_\ell}{{s_\ell}^2} + \frac{1}{4|C^{-1}|}. \end{aligned}$$

Im Hinblick auf (5.47) haben wir also zu fordern:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{{s_k}^2} \leq c_{17}, \quad c_{17} = \frac{1}{4c_{11}|C^{-1}|}. \tag{5.66}$$

[10] Zum Begriff der Normalform siehe Abschnitt 5.1.1 (Seite 59).

Aus (5.48) und (5.55) ergeben sich die Forderungen

$$c_{15}\frac{{M_k}^2}{{s_k}^2} \le M_{k+1} \text{ und } M_k \le c_{18}{s_k}^2 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,\ c_{18} = \frac{1}{16(c_7+c_8)}. \tag{5.67}$$

Insbesondere hängen c_{17} und c_{18} nur von n, τ, γ und C ab. Um (5.67) zu erfüllen, machen wir den Ansatz

$$M_k := \frac{{s_k}^2}{c_{15}}t_k, \quad t_k := {t_0}^{\mu^k} \equiv {t_0}^{(\mu^k)} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.68}$$

mit einem $t_0 \in (0,1)$ und

$$\mu := \frac{3}{2}. \tag{5.69}$$

Aus (5.68) ergibt sich sofort

$$t_{k+1} = {t_0}^{\mu^{k+1}} = {t_0}^{\mu\cdot\mu^k} = {t_k}^{\mu} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung 5.9. In den Formeln (5.65) und (5.69) hätte man auch jeden anderen Wert $q \in (0,1/4]$ beziehungsweise $\mu \in (1,2)$ setzen können.
Die Tatsache, dass für die Konstante μ, welche als Konvergenzgeschwindigkeit interpretiert werden kann, der Wert 2 nicht zulässig ist, liegt an dem Einfluss der kleinen Nenner (vergleiche die Bemerkungen 5.4 (Seite 63) und 5.7 (Seite 71)).

Lemma 5.10. *Es gilt* $c_{15} \cdot c_{18} \ge 1$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich, indem wir die Definition von c_{15} zurückverfolgen. Wir haben nach (5.34)

$$c_{12} = 1 + \frac{4c_6|C|}{\gamma} \ge 1,$$

also folgt mit $n \ge 2$ und $|C|\,|C^{-1}| \ge |C\,C^{-1}| = 1$ aus (5.41)

$$c_{13} = 1 + n\,c_{12}\left(1 + 4|C|\,|C^{-1}|\right) \ge 1 + 5n \ge 11.$$

Somit gilt für c_{10} (siehe Definition (5.45))

$$c_{10} = 1 + n^2|C|\,(2c_7 + c_8) + c_{13} \ge 12.$$

Die Konstante c_{15} wurde in (5.63) festgelegt, dies ergibt

$$c_{15} = n(1 + c_{10})(4c_7 + c_8) \ge 26(c_7 + c_8).$$

Nun berechnen wir

$$c_{15} \cdot c_{18} = \frac{c_{15}}{16(c_7+c_8)} \ge \frac{26}{16} \ge 1,$$

und das Lemma ist bewiesen. $\square$

Lemma 5.11. *Es seien $m > 1$ und $0 < t < 1$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^{m^k} \leq \frac{t}{1 - t^{m-1}}.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{t}{1 - t^{m-1}} = t \sum_{k=0}^{\infty} \left(t^{m-1}\right)^k,$$

daher reicht es, zu zeigen

$$t \left(t^{m-1}\right)^k \geq t^{m^k} \;\Leftrightarrow\; k(m-1) + 1 \leq m^k = (1 + (m-1))^k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

was nichts anderes als die Bernoullische Ungleichung ist. Daher folgt die Behauptung. □

Lemma 5.12. *Es gibt eine Konstante $c_{19} = c_{19}(n, \tau, \gamma, C) > 0$, so dass die durch (5.68) definierte Folge $(M_k)_{k=0}^{\infty}$ für alle Werte $t_0 \in (0, c_{19}]$ die Bedingungen (5.66) und (5.67) erfüllt. Außerdem gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{{s_k}^2} \leq \frac{2}{c_{15}} t_0. \tag{5.70}$$

Beweis. Nach Definition der t_k gilt $t_{k+1} = {t_k}^{\mu}$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Wir fordern $c_{19} \leq q^{(2\tau+2)/(2-\mu)}$, dann gilt $t_0 \leq q^{(2\tau+2)/(2-\mu)}$. Da die Folge der t_k streng monoton fällt, gilt $t_k \leq q^{(2\tau+2)/(2-\mu)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Das bedeutet ${t_k}^{2-\mu} \leq q^{2\tau+2}$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Ferner gilt

$$s_{k+1} = {\delta_{k+1}}^{\tau+1} = (q \cdot \delta_k)^{\tau+1} = q^{\tau+1} s_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Somit erhalten wir

$$c_{15} \frac{{M_k}^2}{{s_k}^2} = \frac{1}{c_{15}} {s_k}^2 {t_k}^2 = \frac{1}{c_{15}} \frac{{s_{k+1}}^2}{q^{2\tau+2}} {t_k}^{2-\mu} {t_k}^{\mu} \leq \frac{1}{c_{15}} {s_{k+1}}^2 t_{k+1} = M_{k+1} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

das ist die erste Ungleichung (5.67). Die zweite Ungleichung (5.67) ist äquivalent zu

$$t_k \leq c_{15} \cdot c_{18} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

was nach Lemma 5.10 erfüllt ist. Es ist $c_{19} < q = 1/4 = (1/2)^{1/(\mu-1)}$ wegen (5.65) und (5.69). Daher gilt ${t_0}^{\mu-1} \leq {c_{19}}^{\mu-1} \leq 1/2$, also mit (5.68) und Lemma 5.11

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{{s_k}^2} = \frac{1}{c_{15}} \sum_{k=0}^{\infty} {t_0}^{\mu^k} \leq \frac{1}{c_{15}} \frac{t_0}{1 - {t_0}^{\mu-1}} \leq \frac{2}{c_{15}} t_0,$$

das ist Formel (5.70). Verkleinern wir c_{19} durch

$$c_{19} := \min\left\{ q^{\frac{2\tau+2}{2-\mu}}, \frac{c_{15} c_{17}}{2} \right\},$$

so folgt aus $t_0 \le c_{19} \le c_{15}c_{17}/2$ und (5.70) noch (5.66) und alles ist gezeigt. $\square$

Wir legen die Konstanten aus den Voraussetzungen des Satzes 3.6 wie folgt fest:

$$c_1 := \min\left\{c_{19}, \frac{c_{15}}{32n^2(c_7+c_8)\exp(c_{14}c_{17})}\right\}, \quad c_2 := \frac{1}{32^{2(\tau+1)}c_{15}}. \tag{5.71}$$

Zur Erinnerung: In unseren bisherigen Rechnungen tauchten bislang die positiven Konstanten c_6 bis c_{19} auf. Die Konstanten c_1 und c_2 aus den Voraussetzungen des Satzes 3.6 haben wir soeben festgelegt, die Konstanten c_3, c_4 und c_5, die in den Behauptungen dieses Satzes vorkommen, werden wir weiter unten noch festlegen.

Lemma 5.13. *Mit den Konstanten r, s, M und ϑ aus den Voraussetzungen von Satz 3.6 und mit den Definitionen*

$$\delta_0 := \frac{1}{32}s^{\frac{1}{\tau+1}}, \quad t_0 := \vartheta \tag{5.72}$$

gilt für die Größen r_0, s_0 aus (5.64) und M_0 aus (5.68) für $k=0$

$$r_0 \le r, \quad s_0 \le s, \quad M_0 \ge M.$$

Beweis. Wegen $s \le r^{\tau+1}$ gilt nach Definition von δ_0

$$r_0 = \frac{3}{4}r + 8\delta_0 \le \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s^{\frac{1}{\tau+1}} \le r.$$

Auch folgt

$$s_0 = {\delta_0}^{\tau+1} = \frac{s}{32^{\tau+1}} < s.$$

Wegen $M \le c_2 s^2\vartheta$ reicht es, $M_0 \ge c_2 s^2 \vartheta$ zu zeigen, damit $M_0 \ge M$ bewiesen ist. Wir haben

$$c_2 s^2\vartheta \le \frac{1}{32^{2(\tau+1)}c_{15}}s^2\vartheta = \frac{1}{c_{15}}\left(\frac{s^{\frac{1}{\tau+1}}}{32}\right)^{2(\tau+1)} \cdot \vartheta = \frac{1}{c_{15}}{\delta_0}^{2(\tau+1)}\vartheta = \frac{1}{c_{15}}{s_0}^2 t_0 = M_0,$$

daraus folgt die Behauptung. $\square$

Wir sind nun in der Lage, den Satz 5.6 mit den Voraussetzungen von Satz 3.6 zu verbinden, das heißt das Induktionslemma zu formulieren.

Satz 5.14. (Induktionslemma) *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.6 und mit den in (5.64), (5.65), (5.68), (5.69), (5.72) festgelegten Folgen $(r_k)_{k=0}^\infty$, $(\delta_k)_{k=0}^\infty$, $(s_k)_{k=0}^\infty$ und $(M_k)_{k=0}^\infty$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:*
Es gibt einfache kanonische Transformationen

$$Z_{k+1} : \mathcal{D}(r_{k+1}, s_{k+1}) \longrightarrow \mathcal{D}(r_k - 5\delta_k, s_k/4), \quad Z_{k+1} - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r_{k+1}, s_{k+1}), \tag{5.73}$$

so dass die Funktionen

$$H_{k+1} := H_k \circ Z_{k+1} = H_0 \circ Z_1 \circ Z_2 \circ \ldots \circ Z_{k+1} \qquad \textit{mit } H_0 := H|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)} \tag{5.74}$$

jeweils Elemente aus $\mathcal{P}(r_{k+1}, s_{k+1})$ *sind und sich als Summe* $H_{k+1} = N_{k+1} + R_{k+1}$ *mit* N_{k+1}, $R_{k+1} \in \mathcal{P}(r_{k+1}, s_{k+1})$ *schreiben lassen, wobei*

$$N_{k+1}(\xi, \eta) = a_{k+1} + \langle\, \omega \,,\, \eta \,\rangle + \mathcal{O}(|\eta|^2), \quad a_{k+1} \in \mathbb{R} \tag{5.75}$$

gilt. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ *gelten die Abschätzungen*

$$|Z_{k+1,\zeta}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \leq \exp\left(c_{14}\frac{M_k}{{s_k}^2}\right), \tag{5.76}$$

$$|Z_{k+1,\zeta} - E_{2n}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \leq c_{14}\frac{M_k}{{s_k}^2} \exp\left(c_{14}\frac{M_k}{{s_k}^2}\right), \tag{5.77}$$

$$|a_{k+1} - a_k| \leq \widetilde{c}_9 \frac{M_k}{s_k}, \tag{5.78}$$

$$|N_{k+1\eta\eta} - N_{k\eta\eta}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \leq c_{11}\frac{M_k}{{s_k}^2} \qquad \Big(N_0 := (H-R)|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)}\Big), \tag{5.79}$$

$$|R_{k+1}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \leq c_{15}\frac{{M_k}^2}{{s_k}^2}. \tag{5.80}$$

Hierbei sind die Konstanten $\widetilde{c}_9$ *und* c_{11} *durch Satz 5.5,* c_{14} *und* c_{15} *durch Satz 5.6 gegeben. Schließlich erfüllt noch* $W_{k+1} := Z_1 \circ \ldots \circ Z_{k+1}$ *die Abschätzung*

$$|W_{k+1,\zeta}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \leq \exp\left(c_{14}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{M_\ell}{{s_\ell}^2}\right) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.81}$$

und für $\Delta W_{k+1} := W_{k+1} - W_k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\Delta W_1 := W_1 - \mathrm{id}$ *gilt mit einer Konstanten* $c_{20} = c_{20}(n, \tau, \gamma, C) > 0$

$$|\Delta W_{k+1}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \leq c_{20}\frac{M_k}{s_k{\delta_k}^\tau} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{5.82}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch wiederholtes Anwenden von Satz 5.6. Wegen Lemma 5.13 gilt $\mathcal{D}(r_0, s_0) \subseteq \mathcal{D}(r, s)$. Daher ist H_0 als Einschränkung auf $\mathcal{D}(r_0, s_0)$ der in (3.9) gegebenen Funktion

$$H(x, y) = a + \langle \omega, y\rangle + \frac{1}{2}\langle y \cdot Q(x), y\rangle + R(x, y)$$

wohldefiniert. Wir setzen $a_0 := a$ und $R_0 := R|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)}$ mit a und R aus (3.9). Zusammenfassend starten wir die Induktion in Übereinstimmung mit (5.74) und (5.79) also mit

$$\begin{gathered} H_0 = H|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)}\,,\ R_0 = R|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)}\,,\ a_0 = a \text{ und } N_0 = (H-R)|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)}\,, \\ \text{wobei } H,\ R \text{ und } a \text{ durch (3.9) gegeben sind.} \end{gathered} \tag{5.83}$$

Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz 5.6 nach. Die in Satz 5.6 gemachten Voraussetzungen über die Konstanten r, δ, s, r_+ und s_+ sind nach Lemma 5.8 für $k = 0$ erfüllt, wenn wir dort

$$r = r_0,\ \delta = \delta_0,\ s = s_0,\ r_+ = r_1,\ s_+ = s_1$$

einsetzen. Ferner setzen wir in Satz 5.6

$$H = H_0,\ N = N_0 = H_0 - R_0,\ R = R_0 \text{ und } M = M_0$$

mit H_0, N_0, R_0 aus (5.83) und M_0 aus (5.68) für $k = 0$

ein. Dann hat N in (5.46) wegen (3.9) die Gestalt

$$N(x,y) = a_0 + \langle \omega\, ,\, y \rangle + \frac{1}{2} \langle y \cdot Q(x)\, ,\, y \rangle \qquad \forall \quad (x,y) \in \mathcal{D}(r_0, s_0),$$

so dass die Voraussetzung (5.47) aus (3.10) folgt. Wegen Lemma 5.13 und (3.11) gilt:

$$|R_0|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)} = |R|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)} \leq |R|_{\mathcal{D}(r,s)} = M \leq M_0.$$

Außerdem folgt aus der gemäß Lemma 5.12 geltenden Abschätzung (5.67)

$$M_0 \leq c_{18} {s_0}^2 = \frac{1}{16(c_7 + c_8)} {s_0}^2,$$

daher erfüllen wir auch die Voraussetzung (5.48) von Satz 5.6 und können ihn anwenden. Wir erhalten eine Transformation Z und eine Funktion H_+, sowie a_+, N_+ und R_+. Setzen wir nun

$$Z_1 := Z,\ H_1 := H_+ \in \mathcal{P}(r_1, s_1),\ a_1 := a_+ \in \mathbb{R},$$

$$N_1 := N_+ \in \mathcal{P}(r_1, s_1) \text{ und } R_1 := R_+ \in \mathcal{P}(r_1, s_1),$$

so folgen die Behauptungen (5.73) bis (5.80) für $k = 0$. Wegen $W_1 = Z_1$ ist (5.81) im Fall $k = 0$ zu (5.76) äquivalent und damit gültig. Zum Beweis von (5.82) im Fall $k = 0$ beachten wir $\Delta W_1 = Z_1 - \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ Z_1 - \mathrm{id}$. Setzen wir in Satz 5.6 also $W = \mathrm{id}$ ein, so kann für die Konstante K_1 der Wert 1 gewählt werden und es folgt nach (5.56)

$$|\Delta W_1|_{\mathcal{D}(r_1,s_1)} \leq n(c_7 + c_8) \frac{M_0}{s_0 {\delta_0}^\tau}.$$

Wir setzen[11]

$$c_{20} := n(c_7 + c_8) \exp(c_{14} c_{17}), \tag{5.84}$$

dann ist (5.82) für $k = 0$ erfüllt.
Wir nehmen nun an, dass der zu beweisende Satz für alle ℓ, $0 \leq \ell \leq k - 1 \in \mathbb{N}_0$ richtig ist. Wenn wir nun in den Voraussetzungen von Satz 5.6

$$r = r_k,\ \delta = \delta_k,\ s = s_k,\ r_+ = r_{k+1},\ s_+ = s_{k+1}$$

[11]Der Grund für den letzten Faktor $\exp(c_{14}c_{17})$ wird am Schluss des Beweises ersichtlich.

einsetzen, sind die dortigen Voraussetzungen über diese Konstanten wegen Lemma 5.8 erfüllt. Weiter haben wir

$$H = H_k,\ a = a_k,\ N = H_k - R_k \text{ und } R = R_k$$

einzusetzen. Nach Lemma 5.12 gilt die Formel (5.66), das war

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{{s_k}^2} \leq \frac{1}{4c_{11}|C^{-1}|}.$$

Mit (5.79) für $k-1$ einschließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} |N_{k\eta\eta} - C|_{\mathcal{D}(r_k,s_k)} &\leq \sum_{\ell=0}^{k-1} |N_{\ell+1\eta\eta} - N_{\ell\eta\eta}|_{\mathcal{D}(r_{\ell+1},s_{\ell+1})} + |N_{0\eta\eta} - C|_{\mathcal{D}(r_0,s_0)} \\ &\leq c_{11}\frac{1}{4c_{11}|C^{-1}|} + \frac{1}{4|C^{-1}|} = \frac{1}{2|C^{-1}|}, \end{aligned}$$

also ist die Voraussetzung (5.47) erfüllt. Nach Lemma 5.12 gilt auch (5.67), insbesondere haben wir

$$c_{15}\frac{{M_{k-1}}^2}{{s_{k-1}}^2} \leq M_k \text{ und } M_k \leq \frac{1}{16(c_7+c_8)}{s_k}^2.$$

Aus (5.80) für $k-1$ folgt demnach

$$|R_k|_{\mathcal{D}(r_k,s_k)} \leq c_{15}\frac{{M_{k-1}}^2}{{s_{k-1}}^2} \leq \frac{1}{16(c_7+c_8)}{s_k}^2,$$

also die Voraussetzung (5.48). Also liefert Satz 5.6 eine Transformation Z und eine Funktion H_+, sowie a_+, N_+ und R_+. Setzen wir nun

$$Z_{k+1} := Z,\ H_{k+1} := H_+ \in \mathcal{P}(r_{k+1}, s_{k+1}),\ a_{k+1} := a_+ \in \mathbb{R},$$

$$N_{k+1} := N_+ \in \mathcal{P}(r_{k+1}, s_{k+1}) \text{ und } R_{k+1} := R_+ \in \mathcal{P}(r_{k+1}, s_{k+1}),$$

so folgen die Behauptungen (5.73) bis (5.80) für den Index k. Zum Beweis von (5.81) berechnen wir

$$W_{k+1,\zeta} = Z_{1\zeta}(Z_2 \circ \ldots \circ Z_{k+1}) \cdot Z_{2\zeta}(Z_3 \circ \ldots \circ Z_{k+1}) \cdot \ldots \cdot Z_{k+1,\zeta}.$$

Mit (5.76) für k einschließlich gilt daher

$$\begin{aligned} |W_{k+1,\zeta}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} &\leq |Z_{1\zeta}|_{\mathcal{D}(r_1,s_1)} \cdot |Z_{2\zeta}|_{\mathcal{D}(r_2,s_2)} \cdot \ldots \cdot |Z_{k+1,\zeta}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \\ &\leq \prod_{\ell=0}^{k} \exp\left(c_{14}\frac{M_\ell}{{s_\ell}^2}\right) = \exp\left(c_{14}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{M_\ell}{{s_\ell}^2}\right). \end{aligned}$$

Damit folgt (5.81) für den Index k. Ferner sieht man mit (5.81) für den Index $k-1$ und der gemäß Lemma 5.12 geltenden Abschätzung (5.66)

$$|W_{k\zeta}|_{\mathcal{D}(r_k,s_k)} \leq \exp\left(c_{14}\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{M_\ell}{{s_\ell}^2}\right) \leq \exp(c_{14}c_{17}).$$

Also dürfen wir in Satz 5.6, Formel (5.56), $K_1 = \exp(c_{14}c_{17})$ einsetzen, und es folgt (5.82) für den Index k. Insgesamt folgt die Behauptung. □

5.4 Konvergenz des Iterationsprozesses

In diesem Abschnitt beenden wir den Beweis des Satzes 3.6. Dies tun wir unter der *Annahme*:

> *Die Voraussetzungen des Satzes 3.6 seien erfüllt. Es seien Folgen* $(r_k)_{k=0}^{\infty}$, $(\delta_k)_{k=0}^{\infty}$, $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ *und* $(M_k)_{k=0}^{\infty}$ *gemäß (5.64), (5.65), (5.68), (5.69) und (5.72) festgelegt.*

Insbesondere gelten dann die Lemmata 5.8, 5.12, 5.13 und das Induktionslemma (Satz 5.14).

5.4.1 Konvergenz der kanonischen Transformationen

Satz 5.15. *Die durch Satz 5.14 gegebenen Abbildungen*

$$W_k = Z_1 \circ \ldots \circ Z_k \quad (k \in \mathbb{N}),$$

sind einfache kanonische Transformationen. Es gilt $W_k - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r_k, s_k)$.

Beweis. Die Abbildungen W_k sind wohldefiniert, da das Bild von Z_{k+1} für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen (5.73) im Definitionsbereich von Z_k liegt. Nach Lemma A.20 sind es einfache kanonische Transformationen. Nach Lemma A.9 gilt, für alle $k \in \mathbb{N}$, $W_k - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r_k, s_k)$. □

Da einfache kanonische Transformationen affin-linear in η sind, können sie stets für alle $\eta \in \mathbb{C}^n$ definiert werden. Genauer: Ist $W_k = (U_k, V_k)$ auf $\mathcal{D}(r_k, s_k)$ gemäß Satz A.17 durch

$$W_k(\xi,\eta) = (U_k(\xi), V_k(\xi,0) + \eta \cdot U_{k\xi}(\xi)^{-1}) \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{D}(r_k, s_k) \tag{5.85}$$

gegeben, so existiert eine einfache kanonische Transformation $\widetilde{W}_k$, die auf $\mathcal{S}(r_k) \times \mathbb{C}^n$ definiert ist und $\widetilde{W}_k\Big|_{\mathcal{D}(r_k,s_k)} = W_k$ erfüllt. Es gilt

$$\widetilde{W}_k(\xi,\eta) = (U_k(\xi), V_k(\xi,0) + \eta \cdot U_{k\xi}(\xi)^{-1}) \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{S}(r_k) \times \mathbb{C}^n. \tag{5.86}$$

Wenn man die Funktionsvorschriften in (5.85) und (5.86) miteinander vergleicht, sieht man $\widetilde{W}_k(\,\cdot\,,0) = W_k(\,\cdot\,,0)$. Schreibt man $\widetilde{W}_k = (\widetilde{U}_k, \widetilde{V}_k)$, so hat man weiter $\widetilde{U}_k = U_k$ und $\widetilde{V}_{k\eta} = V_{k\eta}$. Im nächsten Beweis machen wir davon Gebrauch.

Satz 5.16. *Eine Teilfolge* $\left(\widetilde{W}_{k_\ell}\right)_{\ell=1}^{\infty}$ *konvergiert auf* $\mathcal{S}(3r/4) \times \mathbb{C}^n$ *kompakt gegen eine einfache kanonische Transformation* W_∞*, die* $W_\infty - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(3r/4, s)$ *erfüllt.*

Beweis. Wegen (5.64) ist $r_k > 3r/4$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher sind alle Abbildungen $\widetilde{W}_k$ für $\zeta \in \mathcal{S}(3r/4) \times \mathbb{C}^n$ definiert. Im Hinblick auf die Voraussetzungen von Satz A.19 berechnen wir mit (5.82), $s_k \le {\delta_k}^\tau$ wegen Lemma 5.8 und (5.66)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |W_{k+1} - W_k|_{\mathcal{S}(3r/4)\times\{0\}} &\le \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta W_{k+1}|_{\mathcal{D}(r_{k+1},s_{k+1})} \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty} c_{20} \frac{M_k}{s_k \delta_k^\tau} \le c_{20} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{s_k^2} \le c_{17} c_{20}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Funktionen $\widetilde{W}_k(\,\cdot\,,0) = W_k(\,\cdot\,,0)$ auf $\mathcal{S}(3r/4)$ gleichmäßig, insbesondere kompakt, konvergieren. Weil wir die Zeilensummennorm verwenden, zeigt die Abschätzung (5.81) zusammen mit (5.66)

$$|V_{k\eta}|_{\mathcal{S}(3r/4)} \leq |W_{k\zeta}|_{\mathcal{S}(3r/4)\times\{0\}} \leq \exp(c_{14}c_{17}) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Satz von Montel (siehe [29], Satz 1.6) existiert daher eine auf $\mathcal{S}(3r/4)$ kompakt konvergente Teilfolge $(V_{k_\ell,\eta})_{\ell=1}^{\infty}$. Wenn wir nun in den Voraussetzungen von Satz A.19 als die Folge einfacher kanonischer Transformationen $\left(\widetilde{W}_{k_\ell}\right)_{\ell=1}^{\infty}$ und $\mathcal{U} = \mathcal{S}(3r/4)$ einsetzen, sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt und er besagt, dass die Folge $\left(\widetilde{W}_{k_\ell}\right)_{\ell=1}^{\infty}$ auf $\mathcal{S}(3r/4) \times \mathbb{C}^n$ kompakt gegen eine einfache kanonische Transformation

$$W_\infty = (U_\infty, V_\infty) : \mathcal{S}(3r/4) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}$$

konvergiert. Wegen (5.85), (5.86) und Satz 5.15 bilden die $\widetilde{W}_{k_\ell}$ reelle Argumente auf reelle Werte ab und die Funktionen $\widetilde{W}_{k_\ell} - \mathrm{id}$ sind in den ersten n Komponenten 2π-periodisch. Daher gilt $W_\infty - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(3r/4, s)$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz 5.17. *Für die Funktion W_∞ aus Satz 5.16 gilt*

$$W_\infty(\zeta) \in \mathcal{D}(r,s) \qquad \forall \quad \zeta \in \mathcal{D}(r/2, 5s/8). \tag{5.87}$$

Die Einschränkung

$$\boxed{W = (U,V) := W_\infty|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)}}$$

ist eine einfache kanonische Transformation und es gilt

$$W : \mathcal{D}(r/2, s/2) \longrightarrow \mathcal{D}(r,s), \quad W - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r/2, s/2).$$

Es gibt eine positive Konstante c_3, die nur von n, τ, γ und C abhängt, so dass gilt:

$$|W_\zeta - E_{2n}|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)} \leq c_3\vartheta.$$

Beweis. Die Aussagen $W - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r/2, s/2)$, und dass W eine einfache kanonische Transformation ist, folgen aus Satz 5.16 und der Definition von W. Nach der Definition in Satz 5.14 haben wir

$$W_k = Z_1 \circ \ldots \circ Z_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Schreiben wir $W_k = (U_k, V_k)$, so folgt, weil die Funktionen $Z_k = (X_k, Y_k)$ einfache kanonische Transformationen sind,

$$U_k = U_k(\xi) = X_1 \circ \ldots \circ X_k(\xi).$$

Insbesondere bilden die Funktionen U_k gemäß (5.73) alle nach $\mathcal{S}(r_0 - 5\delta_0)$ ab. Folglich bildet die auf $\mathcal{S}(r/2)$ definierte Funktion U als Grenzwert einer Teilfolge der U_k nach

$\mathcal{S}(r_0 - 4\delta_0)$ ab. Da wegen Lemma 5.13 $r_0 \leq r$ gilt, ist $\mathcal{S}(r_0 - 4\delta_0) \subseteq \mathcal{S}(r)$, was beweist, dass

$$U : \mathcal{S}(r/2) \longrightarrow \mathcal{S}(r)$$

gilt. Nach Definition von W ist $U = U_\infty|_{\mathcal{S}(r/2)}$. Daraus folgt

$$U_\infty(\xi) \in \mathcal{S}(r) \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(r/2).$$

Als nächstes ist (vergleiche (5.87))

$$|V_\infty(\xi, \eta)| < s \qquad \forall \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{D}(r/2, 5s/8)$$

zu zeigen. Dazu überlegen wir uns für $(\xi, \eta) \in \mathcal{D}(3r/4, 5s/8)$

$$V_\infty(\xi, \eta) = V_\infty(\xi, 0) + \eta\, U_{\infty\xi}(\xi)^{-1} = V_\infty(\xi, 0) + \eta + \eta \left(U_{\infty\xi}(\xi)^{-1} - E_n\right). \tag{5.88}$$

Betrachten wir zunächst $V(\,\cdot\,, 0)$ und rufen uns dazu in Erinnerung, dass jede Abbildung W_k ($k \in \mathbb{N}$) Argumente $(\xi, 0)$ aus $\mathcal{S}(r_k) \times \{0\}$ nach $\mathcal{D}(r_0 - 5\delta_0, s_0/4)$ abbildet, da dies für Z_1 gilt. Folglich ist $|V_k(\,\cdot\,, 0)|_{\mathcal{S}(r_k)} < s_0/4$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $|V(\,\cdot\,, 0)|_{\mathcal{S}(r/2)} \leq s_0/4$, und da nach Lemma 5.13 $s_0 \leq s$ ist, haben wir

$$|V(\xi, 0)| \leq \frac{s}{4} \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(r/2). \tag{5.89}$$

Eine Abschätzung für den Betrag von $U_\xi^{-1} - E_n$ kann mit Lemma A.3 gefunden werden. Dazu suchen wir zuerst eine Abschätzung für $U_\xi - E_n$. Es ist für $k \in \mathbb{N}$ und $\zeta \in \mathcal{D}(r_k, s_k)$

$$W_k(\zeta) - \zeta = \Delta W_1(\zeta) + \ldots + \Delta W_k(\zeta). \tag{5.90}$$

Aus (5.82) und der Cauchyschen Abschätzung folgt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$|\Delta W_{k+1,\xi}|_{\mathcal{D}(r_{k+1} - \delta_k, s_{k+1})} \leq c_{20} \frac{M_k}{s_k {\delta_k}^\tau \cdot \delta_k} \leq c_{20} \frac{M_k}{{s_k}^2},$$

außerdem folgt aus (5.64) und (5.65)

$$r_{k+1} - \delta_k = \frac{3r}{4} + 8\delta_{k+1} - \delta_k = \frac{3r}{4} + 8q\delta_k - \delta_k = \frac{3r}{4} + \delta_k > \frac{3r}{4} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Somit erhalten wir zusammen mit (5.70) und (5.90) die Abschätzung

$$\left| W_{k\xi} - \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{S}(3r/4) \times \{0\}} \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} |\Delta W_{\ell+1,\xi}|_{\mathcal{D}(r_{\ell+1} - \delta_\ell, s_{\ell+1})} \leq \frac{2c_{20}}{c_{15}} t_0. \tag{5.91}$$

Schreiben wir $\Delta W_k = (\Delta U_k, \Delta V_k)$, so folgt (vergleiche 3.2) insbesondere

$$|U_{k\xi} - E_n|_{\mathcal{S}(3r/4)} \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} |\Delta U_{\ell+1,\xi}|_{\mathcal{S}(r_{\ell+1} - \delta_\ell)} \leq \frac{2c_{20}}{c_{15}} t_0.$$

Ein Vergleich von (5.71) und (5.84) zeigt

$$c_1 \le \frac{c_{15}}{32nc_{20}}.$$

Da nach (5.72) $t_0 = \vartheta$ ist und in Satz 3.6 $\vartheta \le c_1$ vorausgesetzt wird, folgt schließlich

$$|U_{k\xi} - E_n|_{\mathcal{S}(3r/4)} \le \frac{2c_{20}}{c_{15}}\vartheta \le \frac{1}{16n} \le \frac{1}{16} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.92}$$

Nun wenden wir Lemma A.3 an. Dazu setzen wir dort $S = E_n$, $P = U_{k\xi}(\xi)$ ($\xi \in \mathcal{S}(3r/4)$) und $h = 2c_{20}\vartheta/c_{15}$ ein. Dann besagt das Lemma, dass $U_{k\xi}(\xi)^{-1}$ die Abschätzung

$$\left|U_{k\xi}(\xi)^{-1} - E_n\right| \le \frac{2c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta\,\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}\frac{2c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta \le \frac{1}{15n} \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(3r/4) \tag{5.93}$$

erfüllt. Daraus folgt

$$\left|U_{\infty\xi}^{-1} - E_n\right|_{\mathcal{S}(3r/4)} \le \frac{1}{15n} \quad \text{und} \quad \left|U_{\xi}^{-1} - E_n\right|_{\mathcal{S}(r/2)} \le \frac{1}{15n}.$$

Dies ergibt mit (5.88) und (5.89)

$$|V_\infty(\xi,\eta)| < \frac{s}{4} + \frac{5\,s}{8} + \frac{5\,s}{8}n\frac{1}{15n} = \frac{30+75+5}{120}\,s < s \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{D}(r/2, 5s/8).$$

Daraus folgt

$$W_\infty(\xi,\eta) \in \mathcal{D}(r,s) \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{D}(r/2, 5s/8),$$

und es gilt auch

$$W : \mathcal{D}(r/2, s/2) \longrightarrow \mathcal{D}(r,s).$$

Um eine Abschätzung für $|W_\zeta - E_{2n}|$ zu finden, beachten wir

$$W_\zeta - E_{2n} = \begin{pmatrix} U_\xi - E_n & 0 \\ V_\xi & \left(U_\xi^{-1}\right)^{\mathrm{T}} - E_n \end{pmatrix}.$$

Aus (5.92) folgt

$$|U_\xi - E_n|_{\mathcal{S}(r/2)} \le \frac{2c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta, \tag{5.94}$$

und mit (5.93) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left|\left(U_\xi^{-1}\right)^{\mathrm{T}} - E_n\right|_{\mathcal{S}(r/2)} &= \left|\left(U_\xi^{-1} - E_n\right)^{\mathrm{T}}\right|_{\mathcal{S}(r/2)} \\ &\le n\left|U_\xi^{-1} - E_n\right|_{\mathcal{S}(r/2)} \le n\,\frac{16}{15}\frac{2c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta < 3n\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta. \end{aligned} \tag{5.95}$$

Wenden wir uns V_ξ zu. Es ist $V = V_\infty|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)}$, und

$$V_\infty(\xi,\eta) = V_\infty(\xi,0) + (V_\infty(\xi,\eta) - V_\infty(\xi,0)) \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{D}(3r/4,s),$$

also mit (5.88)

$$\begin{aligned} V_{\infty\xi}(\xi,\eta) &= V_{\infty\xi}(\xi,0) + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(V_\infty(\xi,\eta) - V_\infty(\xi,0) - \eta\right) \\ &= V_{\infty\xi}(\xi,0) + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\eta\left(U_{\infty\xi}(\xi)^{-1} - E_n\right)\right) \ \forall \ (\xi,\eta) \in \mathcal{D}(3r/4,s). \end{aligned} \tag{5.96}$$

Aus (5.91) ergibt sich mit $t_0 = \vartheta$

$$|V_{k\xi}(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(3r/4)} \leq 2\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Diese Abschätzung gilt auch für die Grenzfunktion V_∞ und somit für V:

$$|V_\xi(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r/2)} \leq 2\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta.$$

Um den zweiten Summanden in (5.96) abzuschätzen, definieren wir:

$$u : \mathcal{D}(3r/4,s) \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad (\xi,\eta) \mapsto u(\xi,\eta) = \eta\left(U_{\infty\xi}(\xi)^{-1} - E_n\right).$$

Aus (5.93) folgt

$$\left|U_{\infty\xi}^{-1} - E_n\right|_{\mathcal{S}(3r/4)} \leq \frac{32}{15}\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta \leq 3\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta,$$

dies impliziert

$$|u|_{\mathcal{D}(3r/4,s)} \leq sn\left|U_{\infty\xi}^{-1} - E_n\right|_{\mathcal{S}(3r/4)} \leq 3n\frac{c_{20}}{c_{15}}\,s\vartheta.$$

Mit der Cauchyschen Abschätzung und aus $s \leq r^{\tau+1} \leq r$ folgt

$$|u_\xi|_{\mathcal{D}(r/2,s)} \leq 3n\frac{c_{20}}{c_{15}}\frac{4s}{r}\,\vartheta \leq 12n\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta.$$

Also schließen wir mit (5.96) auf

$$|V_\xi|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)} \leq |V_\xi(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r/2)} + |u_\xi|_{\mathcal{D}(r/2,s)} \leq 2\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta + 12n\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta \leq 13n\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta.$$

Da wir für Matrizen die Zeilensummennorm verwenden, zeigt diese Abschätzung zusammen mit (5.94) und (5.95)

$$\begin{aligned} |W_\zeta - E_{2n}|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)} &\leq \left|\begin{pmatrix} U_\xi - E_n & 0 \\ V_\xi & \left(U_\xi^{-1}\right)^{\mathrm{T}} - E_n \end{pmatrix}\right|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)} \\ &\leq \max\left\{|U_\xi - E_n|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)}\,,\, |V_\xi|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)} + \left|\left(U_\xi^{-1}\right)^{\mathrm{T}} - E_n\right|_{\mathcal{D}(r/2,s/2)}\right\} \\ &\leq (3n + 13n)\frac{c_{20}}{c_{15}}\,\vartheta = c_3\vartheta, \end{aligned}$$

wobei

$$c_3 = 16n\frac{c_{20}}{c_{15}}$$

gesetzt ist. Daraus folgt die Behauptung. □

5.4.2 Beweis der Eigenschaften der transformierten Hamiltonfunktion

Satz 5.18. *Die durch Satz 5.14 gegebenen Funktionen R_k $(k \in \mathbb{N})$ erfüllen*

$$|R_k|_{\mathcal{S}(r/2)\times\{0\}} \longrightarrow 0,\ |R_{k\eta}|_{\mathcal{S}(r/2)\times\{0\}} \longrightarrow 0 \text{ und } |R_{k\eta\eta}|_{\mathcal{S}(r/2)\times\{0\}} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

Beweis. Die Abschätzungen (5.67) und (5.80) zeigen

$$|R_k|_{\mathcal{D}(r_k,s_k)} \leq c_{15} \frac{{M_{k-1}}^2}{{s_{k-1}}^2} \leq M_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt mit den Cauchyschen Abschätzungen (Hilfssatz A.11)

$$|R_{k\eta}|_{\mathcal{D}(r_k,s_k/2)} \leq \frac{2M_k}{s_k}, \quad |R_{k\eta\eta}|_{\mathcal{D}(r_k,s_k/4)} \leq \frac{8M_k}{{s_k}^2} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Weil die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} M_k/{s_k}^2$ konvergiert, sind die Folgen $(M_k)_{k=0}^{\infty}$, $(2M_k/s_k)_{k=0}^{\infty}$ und $(8M_k/{s_k}^2)_{k=0}^{\infty}$ Nullfolgen. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 5.19. *Es sei H die Funktion aus den Voraussetzungen von Satz 3.6. Dann gibt es eine Zahl $a_+ \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $Q_+ \in \mathcal{P}_{n\times n}(r/2)$, so dass die Funktion $H \circ W : \mathcal{D}(r/2, s/2) \longrightarrow \mathbb{C}$ die folgende Taylorentwicklung hat:*

$$H \circ W(\xi,\eta) = a_+ + \langle\, \omega\,,\, \eta\,\rangle + \frac{1}{2}\langle\, \eta \cdot Q_+(\xi)\,,\, \eta\,\rangle + \mathcal{O}(|\eta|^3). \tag{5.97}$$

Beweis. Nach Satz 5.14 gilt

$$H_k = H \circ W_k = N_k + R_k \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.98}$$

Also ist für alle $\xi \in \mathcal{S}(r/2)$

$$H \circ W(\xi,0) = \lim_{\ell\to\infty} H \circ W_{k_\ell}(\xi,0) = \lim_{\ell\to\infty} \left(N_{k_\ell}(\xi,0) + R_{k_\ell}(\xi,0)\right).$$

Die Folge der $R_{k_\ell}(\xi,0)$ ist nach Satz 5.18 eine Nullfolge. Die Folge der $N_{k_\ell}(\xi,0) = a_{k_\ell}$ ist wegen (5.78) konvergent, der Grenzwert heiße

$$\boxed{a_+ := \lim_{\ell\to\infty} a_{k_\ell}.}$$

Als Grenzwert reeller Zahlen ist a_+ reell und es folgt

$$H \circ W(\xi,0) = a_+ \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(r/2).$$

Weiter haben wir mit (5.98) auf $\mathcal{S}(r/2)$

$$\begin{aligned}(H \circ W)_\eta(\xi,0) &= H_z(W(\xi,0)) \cdot W_\eta(\xi,0) = \lim_{\ell\to\infty} H_z(W_{k_\ell}(\xi,0))W_{k_\ell,\eta}(\xi,0)\\ &= \lim_{\ell\to\infty} \left(H \circ W_{k_\ell}\right)_\eta(\xi,0) = \lim_{\ell\to\infty} \left(N_{k_\ell,\eta}(\xi,0) + R_{k_\ell,\eta}(\xi,0)\right) = \omega.\end{aligned}$$

Nun gilt wegen (5.79), dass die Ableitungen $N_{k_\ell,\eta\eta}$ auf $\mathcal{S}(r/2) \times \{0\}$ konvergieren, der Grenzwert heiße

$$\boxed{Q_+(\xi) := \lim_{\ell\to\infty} N_{k_\ell,\eta\eta}(\xi,0) \qquad \forall \quad \xi \in \mathcal{S}(r/2).}$$

Da diese Konvergenz gleichmäßig auf $\mathcal{S}(r/2)$ ist und alle Funktionen $N_{k_\ell,\eta\eta}(\,\cdot\,,0)$ in $\mathcal{P}_{n\times n}(r/2)$ liegen, gilt $Q_+ \in \mathcal{P}_{n\times n}(r/2)$. Der Satz 5.16 impliziert nun

$$W_{k_\ell}(\,\cdot\,,0) \longrightarrow W(\,\cdot\,,0) \quad \text{kompakt auf } \mathcal{S}(r/2).$$

Setzen wir also in Hilfssatz A.7 als Funktionenfolge die Folge $\Big(W_{k_\ell}(\,\cdot\,,0)|_{\mathcal{S}(r/2)}\Big)$ sowie

$$\mathcal{U} = \mathcal{S}(r/2),\ \mathcal{V} = \mathcal{D}(r,s),\ f = W(\,\cdot\,,0) \text{ und } g = H$$

ein, so besagt er

$$H \circ W_{k_\ell}(\,\cdot\,,0) \longrightarrow H \circ W(\,\cdot\,,0) \quad \text{kompakt auf } \mathcal{S}(r/2).$$

Daher folgt mit (5.98) und dem Satz von Weierstraß für alle $\xi \in \mathcal{S}(r/2)$

$$\begin{aligned}(H\circ W)_{\eta\eta}(\xi,0) &= \lim_{\ell\to\infty} \left(H\circ W_{k_\ell}\right)_{\eta\eta}(\xi,0) = \lim_{\ell\to\infty}\left(N_{k_\ell,\eta\eta}(\xi,0) + R_{k_\ell,\eta\eta}(\xi,0)\right)\\ &= Q_+(\xi).\end{aligned}$$

Das beweist (5.97). □

Satz 5.20. *Es gibt eine Konstante $c_4 = c_4(n,\tau,\gamma,C) > 0$, so dass die Funktion Q_+ die Abschätzung (3.14) erfüllt, dass also gilt:*

$$|Q_+ - Q|_{\mathcal{S}(r/2)} \le c_4\vartheta.$$

Beweis. Mit (5.79), (5.70), $t_0 = \vartheta$, und da nach der Definition von N_0 in Satz 5.14 $N_{0,\eta\eta}(\xi,0) = Q(\xi)$ $(\xi \in \mathcal{S}(r/2))$ ist, folgt

$$|Q_+ - Q|_{\mathcal{S}(r/2)} \le \sum_{k=0}^{\infty} c_{11}\frac{M_k}{{s_k}^2} \le \frac{2c_{11}}{c_{15}}\,\vartheta.$$

Setzen wir also

$$c_4 = \frac{2c_{11}}{c_{15}},$$

so gilt die Abschätzung (3.14). □

Satz 5.21. *Es gibt eine Zahl $c_5 > 0$, so dass die für alle $(\xi,\eta) \in \mathcal{D}(r/2,s/2)$ definierte Funktion*

$$R^*(\xi,\eta) := (H\circ W)(\xi,\eta) - \left(a_+ + \langle\,\omega\,,\,\eta\,\rangle + \frac{1}{2}\,\langle\,\eta\cdot Q_+(\xi)\,,\,\eta\,\rangle\right) \tag{5.99}$$

die Abschätzung (3.15) erfüllt.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass $H \circ W_\infty(\xi, \eta)$ nach Satz 5.17 für alle $(\xi, \eta) \in \mathcal{D}(r/2, 5s/8)$ definiert werden kann. Dies liefert eine analytische Fortsetzung von $H \circ W$ auf die Menge $\mathcal{D}(r/2, 5s/8)$, die wir H^{**} nennen wollen. Daher können wir auch die Definition (5.99) auf $\mathcal{D}(r/2, 5s/8)$ ausdehnen. Die so erhaltene analytische Fortsetzung von R^* heiße R^{**}. Offenbar ist (3.15) äquivalent zu

$$|R^{**}(\xi, \eta)| \leq c_5 M \frac{|\eta|^3}{s^3} \quad \text{für alle } (\xi, \eta) \in \mathcal{D}(r/2, s/2),$$

was wir im Folgenden beweisen werden. Da die Ableitungen bezüglich η von $H \circ W$ und H^{**} für alle $(\xi, 0) \in \mathcal{S}(r/2) \times \{0\}$ übereinstimmen, zeigt Satz 5.19, dass $R^{**}(\xi, \eta) = \mathcal{O}(|\eta|^3)$ gilt. Außerdem ist R^{**} eine analytische Funktion. Wir halten ein beliebiges $\xi \in \mathcal{S}(r/2)$ fest und betrachten, mit $N := H - R$,

$$H^{**}(\xi, \eta) = H \circ W_\infty(\xi, \eta) = N \circ W_\infty(\xi, \eta) + R \circ W_\infty(\xi, \eta) \quad (|\eta| < 5s/8).$$

Nun ist $W_\infty(\xi, \eta)$ ein Polynom ersten Grades in η und N ist nach (3.9) ein Polynom zweiten Grades in η. Folglich ist $N \circ W_\infty(\xi, \eta)$ ein Polynom zweiten Grades in η und die Terme dritter oder höherer Ordnung in η der Funktionen $H^{**}(\xi, \cdot\,)$ und $R \circ W_\infty(\xi, \cdot\,)$ stimmen überein. Also gilt dasselbe auch für $R^{**}(\xi, \cdot\,)$ und $R \circ W_\infty(\xi, \cdot\,)$. Daher können wir Hilfssatz A.13 anwenden, wobei die Funktion $\eta \mapsto R \circ W_\infty(\xi, \eta)$ wegen (3.11) und Satz 5.17 für $|\eta| < 5s/8$ durch M beschränkt ist. Wenn wir in Hilfssatz A.13

$$\sigma = \frac{5s}{8}, \; f = R \circ W_\infty(\xi, \cdot\,) \text{ und } \varepsilon = \frac{4}{5}$$

einsetzen, so folgt

$$|R^{**}(\xi, \eta)| \leq 5M \frac{|\eta|^3}{(5s/8)^3} = \frac{512}{25} M \frac{|\eta|^3}{s^3} \qquad \forall \quad |\eta| < \frac{4}{5} \frac{5s}{8} = \frac{s}{2}.$$

Da nun $\xi \in \mathcal{S}(r/2)$ beliebig war, folgt mit

$$c_5 := \frac{512}{25}$$

die Behauptung. □

Insgesamt zeigen die Sätze 5.17, 5.19, 5.20 und 5.21, dass alle Behauptungen des Satzes 3.6 wahr sind.

A Anhang

A.1 Zur Norm und Invertierbarkeit von Matrizen

Definition A.1. Ist $\mathcal{Q} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ eine lineare Abbildung, so nennt man die Matrix $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ die *Matrixdarstellung* von $\mathcal{Q}$, wenn der Wert der Abbildung $\mathcal{Q}$ im Vektor $z \in \mathbb{C}^m$ durch

$$\mathcal{Q}z = zQ^{\mathrm{T}} = z \cdot Q^{\mathrm{T}}$$

gegeben ist ([13], Kapitel 1, § 2), wobei rechts die gewöhnliche Matrizenmultiplikation (also hier die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix) steht.

Die Zeilensummennorm einer Matrix Q (siehe (3.2)) ist gerade die Operatornorm der durch Q gegebenen linearen Abbildung, wenn man Vektoren in der Maximumnorm (siehe (3.1)) misst. Dies ist der Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma A.2. *Es sei $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ eine Matrix. Dann gilt*

$$|Q| = \max_{|z|\le 1} |zQ^{\mathrm{T}}| \qquad (z \in \mathbb{C}^m).$$

Beweis. Bezeichnen wir die Einträge von Q mit q_{ij}, also $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, dann ist $Q^{\mathrm{T}} = (q_{ji}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}^m$ mit $|z| \le 1$ gilt

$$\left|zQ^{\mathrm{T}}\right| = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^{m} z_j q_{ij}\right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |z_j||q_{ij}| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |q_{ij}| = |Q|.$$

Daraus folgt $\max_{|z|\le 1} |zQ^{\mathrm{T}}| \le |Q|$. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung stellt man zunächst fest, dass es ein $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |q_{ij}| = \sum_{j=1}^{m} |q_{i_0 j}|$$

gibt. Es bezeichne $\varphi(z) \in (-\pi, \pi]$ das Argument von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, weiter sei $\varphi(0) = 0$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} |Q| &= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |q_{ij}| = \sum_{j=1}^{m} |q_{i_0 j}| = \sum_{j=1}^{m} e^{-i\varphi(q_{i_0 j})} q_{i_0 j} \\ &= \left|\sum_{j=1}^{m} e^{-i\varphi(q_{i_0 j})} q_{i_0 j}\right| \le \max_{1\le k\le n} \left|\sum_{j=1}^{m} e^{-i\varphi(q_{i_0 j})} q_{kj}\right| \le \max_{|z|\le 1} |zQ^{\mathrm{T}}|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Aus diesem Lemma folgt die Abschätzung (3.6), denn für beliebige $x \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ und $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ gilt

$$\left|x\, Q^{\mathrm{T}}\right| = |x| \left|\frac{x}{|x|} Q^{\mathrm{T}}\right| \le |x|\, |Q|.$$

Wir hatten das Produkt zweier Vektoren x, $y \in \mathbb{C}^n$ in (3.4) durch

$$\langle\, x\,,\, y\,\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

definiert. Dieses Produkt ist zwar nicht positiv definit (zum Beispiel gilt $\langle\, 1+i\,,\, 1+i\,\rangle = 2i \notin \mathbb{R}$), aber für unsere Zwecke gut geeignet. Man beachte, dass die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung nach unseren Definitionen nicht gilt. Das liegt daran, dass die Norm der Vektoren nicht von dem Produkt (3.4) induziert ist. Stattdessen gilt (3.5), nämlich

$$|\,\langle\, x\,,\, y\,\rangle\,| \le n|x|\,|y|, \quad (x, y \in \mathbb{C}^n).$$

Ein Beispiel für Gleichheit in dieser Abschätzung ist durch $x = y = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$ gegeben. Für die Transponierte einer Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ hat man die Abschätzung (3.3), das ist $|Q^{\mathrm{T}}| \le n|Q|$. Ein Beispiel, in dem $|Q^{\mathrm{T}}| = n|Q|$ ist, liefert die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times m}.$$

Lemma A.3. *Es sei $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt für jede Matrix $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit*

$$|P - S| \le h \cdot \frac{1}{|S^{-1}|}, \qquad 0 < h < 1,$$

dass P ebenfalls invertierbar ist. Die inverse Matrix von P erfüllt die Abschätzungen

$$|P^{-1}| \le \frac{|S^{-1}|}{1-h} \quad \textit{und} \quad |P^{-1} - S^{-1}| \le \frac{h|S^{-1}|}{1-h}.$$

Beweis. Wir setzen $H := E_n - S^{-1}P$. Aus der Voraussetzung ergibt sich die Abschätzung

$$|H| = |E_n - S^{-1}P| \le |S^{-1}|\,|S - P| \le h < 1.$$

Also konvergiert die Neumannsche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} H^k = (E_n - H)^{-1} = (S^{-1}P)^{-1},$$

insbesondere ist $S^{-1}P$ invertierbar. Also gilt dies auch für $P = S \cdot S^{-1}P$. Für $P^{-1} = (S^{-1}P)^{-1}S^{-1}$ finden wir die Abschätzung

$$|P^{-1}| \le |S^{-1}| \sum_{k=0}^{\infty} |H|^k \le \frac{|S^{-1}|}{1-h}.$$

Für $P^{-1} - S^{-1} = (P^{-1}S - E_n)S^{-1}$ folgt mit

$$P^{-1}S - E_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} H^k\right) - E_n = \sum_{k=1}^{\infty} H^k$$

die Abschätzung

$$|P^{-1} - S^{-1}| \leq |S^{-1}| \sum_{k=1}^{\infty} |H|^k \leq \frac{h|S^{-1}|}{1-h},$$

wie es behauptet war. □

A.2 Hilfssätze über Abbildungen

Satz A.4. *Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\zeta \mapsto f(\zeta)$ sei stetig differenzierbar mit*

$$|f_\zeta - E_n|_{\mathbb{R}^n} < 1. \tag{A.1}$$

Dann ist f injektiv.

Beweis. Es seien ζ_1, $\zeta_2 \in \mathbb{R}^n$ zwei Argumente mit $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$. Dann gilt

$$0 = f(\zeta_1) - f(\zeta_2) = (f - \mathrm{id})(\zeta_1) - (f - \mathrm{id})(\zeta_2) + \zeta_1 - \zeta_2,$$

$$\Rightarrow \quad \zeta_1 - \zeta_2 = (f - \mathrm{id})(\zeta_2) - (f - \mathrm{id})(\zeta_1),$$

$$\Rightarrow \quad |\zeta_1 - \zeta_2| = |(f - \mathrm{id})(\zeta_2) - (f - \mathrm{id})(\zeta_1)|\,. \tag{A.2}$$

Nun schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
|(f - \mathrm{id})(\zeta_2) - (f - \mathrm{id})(\zeta_1)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left((f - \mathrm{id})(\zeta_1 + s(\zeta_2 - \zeta_1))\right) ds\right| \\
&= \left|\int_0^1 (\zeta_2 - \zeta_1) \cdot (f - \mathrm{id})_\zeta(\zeta_1 + s(\zeta_2 - \zeta_1))^{\mathrm{T}}\, ds\right| \\
&\leq |f_\zeta - E_n|_{\mathbb{R}^n}\, |\zeta_2 - \zeta_1|.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (A.2) ein, so folgt mit (A.1) $|\zeta_2 - \zeta_1| = 0$. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz A.5. *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f - \mathrm{id}$ beschränkt ist. Dann ist f surjektiv.*

Beweis. Wir führen den Beweis mit Hilfe des Brouwerschen Abbildungsgrades (siehe [7], § 8). Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $M > 0$ mit

$$|f - \mathrm{id}|_{\mathbb{R}^n} < M.$$

Wir geben uns ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ vor und zeigen, dass y unter f ein Urbild hat. Dazu setzen wir

$$\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < |y| + M\} \text{ und } \overline{\mathcal{U}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq |y| + M\}\,.$$

Nun definieren wir eine die Identität und $f - \mathrm{id}$ verbindende Homotopie A durch

$$A : [0,1] \times \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t,x) \mapsto x + t\,(f(x) - x).$$

Die Abbildung A ist stetig, also eine Homotopie. Wir zeigen weiter:

$$A(t,x) \neq y \qquad \forall \quad t \in [0,1] \text{ und } x \in \partial\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = |y| + M\}\,. \tag{A.3}$$

Im Fall $t = 0$ gilt $A(t,x) = x \neq y$ für alle $x \in \partial\mathcal{U}$. Im Fall $t \in (0,1]$ und $x \in \partial\mathcal{U}$ folgt (A.3) aus der Abschätzung

$$|A(t,x) - y| = |x - y + t\,(f(x) - x)| \geq |x - y| - t\,|f(x) - x| > M - tM \geq 0.$$

Ist $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\eta \in \mathbb{R}^n$, so bezeichnen wir den *Abbildungsgrad* von g auf $\mathcal{V}$ bezüglich η mit

$$d(g, \mathcal{V}, \eta).$$

Wir verwenden die Aussagen (1), (2) und (3) von Satz 1 aus [7], § 8. Auf Grund der Stetigkeit von A und wegen (A.3) folgt aus Aussage (3)

$$d(A(1,\,\cdot\,), \mathcal{U}, y) = d(A(0,\,\cdot\,), \mathcal{U}, y).$$

Nach Definition von A bedeutet das

$$d(f, \mathcal{U}, y) = d(\mathrm{id}, \mathcal{U}, y).$$

Weil $y \in \mathcal{U}$ ist, besagt Aussage (1)

$$d(\mathrm{id}, \mathcal{U}, y) = 1.$$

Es folgt $d(f, \mathcal{U}, y) = 1$. Das bedeutet nach Aussage (2), dass y unter f ein Urbild in $\mathcal{U}$ hat. Daraus folgt die Behauptung. □

Hilfssatz A.6. *Es seien m_1, m_2 und $m_3 \in \mathbb{N}$ beliebig und eine Folge von Funktionen $f_k : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$ sei gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$ konvergent. Eine weitere gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $g_k : \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_3}$ habe eine gleichmäßig stetige Grenzfunktion g. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(g_k \circ f_k)$ gleichmäßig gegen $g \circ f$.*

Beweis. Wir geben uns ein $\varepsilon > 0$ beliebig vor. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2},\ |y_1 - y_2| < \delta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolgen (f_k) und (g_k) gibt es Zahlen N_1 und $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x) - f_k(x)| < \delta \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}^{m_1},\ k \geq N_1 \text{ und}$$
$$|g(y) - g_k(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \quad y \in \mathbb{R}^{m_2},\ k \geq N_2.$$

Diese drei Abschätzungen zeigen für jedes $x \in \mathbb{R}^{m_1}$ und alle $k \geq N_1 + N_2$

$$|(g \circ f)(x) - (g_k \circ f_k)(x)| \leq |g(f(x)) - g(f_k(x))| + |g(f_k(x)) - g_k(f_k(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Für die kompakte Konvergenz einer Funktionenfolge (f_k) auf einer offenen Menge $\mathcal{U}$ gegen die Grenzfunktion f wollen wir im Folgenden

$$f_k \xRightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} f \qquad (k \to \infty)$$

schreiben. Bekanntlich ist im Fall $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ oder $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ die kompakte Konvergenz auf $\mathcal{U}$ zur lokal gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{U}$ äquivalent.

Hilfssatz A.7. *Es seien $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ offen und (f_k) eine Folge von Funktionen $f_k : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Es gelte*

$$f_k \xRightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} f$$

mit einer stetigen Grenzfunktion $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Die Funktion $g : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt

$$g \circ f_k \xRightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} g \circ f.$$

Beweis. Wir betrachten eine beliebige kompakte Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$ und geben uns ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor. Da f stetig ist, ist $f(\mathcal{K})$ kompakt (siehe [9], (3.17.9)), und da f nach $\mathcal{V}$ abbildet, gilt $f(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{V}$. Weil außerdem noch $\mathcal{V}$ offen ist, gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\mathcal{K}_{\delta_1} := \left\{ y \in \mathbb{C}^{2n} \,|\, \exists\, z \in f(\mathcal{K}) \text{ mit } |y - z| \leq \delta_1 \right\} \subseteq \mathcal{V}, \tag{A.4}$$

und auch $\mathcal{K}_{\delta_1}$ ist eine kompakte Menge. Daher ist g auf $\mathcal{K}_{\delta_1}$ gleichmäßig stetig und es gibt ein $\delta_2 > 0$ mit

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \qquad \forall \quad x, y \in \mathcal{K}_{\delta_1},\ |x - y| < \delta_2. \tag{A.5}$$

Wegen der kompakten Konvergenz der Folge (f_k) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_k - f|_{\mathcal{K}} < \min\{\delta_1,\, \delta_2\} \qquad \forall \quad k \geq N. \tag{A.6}$$

Es sei nun $x \in \mathcal{K}$ beliebig. Aus (A.4) und (A.6) folgt

$$f(x) \in \mathcal{K}_{\delta_1} \text{ und } f_k(x) \in \mathcal{K}_{\delta_1} \qquad \forall \quad k \geq N.$$

Nun erhalten wir mit (A.5) und (A.6)

$$|(g \circ f_k)(x) - (g \circ f)(x)| < \varepsilon \qquad \forall \quad k \geq N.$$

Daraus folgt die behauptete kompakte Konvergenz. $\square$

Hilfssatz A.8. *Es sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *bijektiv und* $f - \mathrm{id}$ 2π*-periodisch. Dann hat auch die Umkehrfunktion* f^{-1} *von* f *die Eigenschaft, dass* $f^{-1} - \mathrm{id}$ 2π*-periodisch ist.*

Beweis. Die 2π-Periodizität von $f - \mathrm{id}$ bedeutet

$$f(x + 2\pi e_j) - x - 2\pi e_j = f(x) - x \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ und } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Also gilt

$$f(x) + 2\pi e_j = f(x + 2\pi e_j) \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ und } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Es seien nun $y \in \mathbb{R}^n$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir haben zu zeigen, dass

$$f^{-1}(y + 2\pi e_j) - y - 2\pi e_j = f^{-1}(y) - y.$$

Da f bijektiv ist, gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $y = f(x)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(y + 2\pi e_j) - y - 2\pi e_j &= f^{-1}(f(x) + 2\pi e_j) - y - 2\pi e_j \\ &= f^{-1}(f(x + 2\pi e_j)) - y - 2\pi e_j \\ &= x + 2\pi e_j - y - 2\pi e_j \\ &= f^{-1}(y) - y. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma A.9. *Es seien Zahlen* r_1*,* r_2*,* s_1*,* $s_2 > 0$ *und Abbildungen* f_1*,* f_2 *mit* $f_1 - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r_1, s_1)$*,* $f_2 - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r_2, s_2)$ *gegeben. Ferner gelte*

$$f_1(\xi, \eta) \in \mathcal{D}(r_2, s_2) \qquad \forall \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{D}(r_1, s_1).$$

Dann gilt $f_2 \circ f_1 - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(r_1, s_1)$*.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass $f_2 \circ f_1$ eine analytische Funktion ist, die reelle Argumente auf reelle Werte abbildet. Außerdem berechnet man für $1 \le j \le n$ und $\zeta \in \mathcal{D}(r_1, s_1)$

$$(f_2 \circ f_1)(\zeta + 2\pi e_j) = f_2(f_1(\zeta + 2\pi e_j)) = f_2(f_1(\zeta) + 2\pi e_j) = f_2(f_1(\zeta)) + 2\pi e_j,$$

also

$$(f_2 \circ f_1)(\zeta + 2\pi e_j) - (\zeta + 2\pi e_j) = (f_2 \circ f_1)(\zeta) - \zeta.$$

Dies bedeutet, dass die Abbildung $f_2 \circ f_1 - \mathrm{id}$ in $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ die Periode 2π hat, woraus die Behauptung folgt. □

A.3 Abschätzungen für analytische Abbildungen

Definition A.10. Es seien $z \in \mathbb{C}^n$ und $s > 0$. Dann setzen wir

$$\mathcal{B}(s; z) := \{ y \in \mathbb{C}^n \mid |y - z| < s \} .$$

Der folgende Hilfssatz verallgemeinert die *Cauchysche Abschätzung* für die Ableitung einer holomorphen Funktion auf vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Hilfssatz A.11. *Es sei $M > 0$ und $f : \mathcal{B}(s; 0) \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ sei eine holomorphe Funktion mit*

$$|f|_{\mathcal{B}(s;0)} \leq M.$$

Dann genügt die Jacobimatrix von f für alle $0 < \varepsilon < s$ der Abschätzung

$$|f_x|_{\mathcal{B}(s-\varepsilon;0)} \leq \frac{M}{\varepsilon}.$$

Beweis. Wir halten ein beliebiges $x_0 \in \mathcal{B}(s - \varepsilon; 0)$ fest. Dann ist nach Lemma A.2

$$|f_x(x_0)| = \max_{|y|=1} |y f_x^{\mathrm{T}}(x_0)| = \max_{1 \leq k \leq m} \max_{|y|=1} | \langle f_{kx}(x_0) \, , \, y \rangle |,$$

wobei f_k die k-te Koordinatenfunktion von f bezeichnet. Wir nehmen uns ein beliebiges $k \in \{1, \ldots, m\}$ und ein beliebiges $y \in \mathbb{C}^n$ mit $|y| = 1$ und betrachten die Hilfsfunktion

$$g : \mathcal{B}(\varepsilon; 0) \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f_k(x_0 + ty).$$

Somit erhalten wir

$$g_t(t) = \langle f_{kx}(x_0 + ty) \, , \, y \rangle \quad \Rightarrow \quad g_t(0) = \langle f_{kx}(x_0) \, , \, y \rangle \, ,$$

und aus der Cauchyschen Abschätzung in einer Dimension folgt

$$| \langle f_{kx}(x_0) \, , \, y \rangle | = |g_t(0)| \leq \frac{M}{\varepsilon}.$$

Das beweist die Behauptung. □

Wir brauchen jetzt noch eine Abschätzung für das Taylor-Restglied dritter Ordnung einer holomorphen Funktion. Zuerst beweisen wir sie für den Fall einer Funktion in einer komplexen Variablen.

Hilfssatz A.12. *Es sei $\sigma > 0$ und $g : \mathcal{B}(\sigma; 0) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto g(z)$ eine holomorphe Funktion, die durch die Konstante $M > 0$ beschränkt ist. Dann erfüllt das Taylor-Restglied dritter Ordnung*

$$h^{(g)}(z) := \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k g}{\partial z^k}(0) \, z^k \quad (|z| < \sigma)$$

für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ die Abschätzung

$$|h^{(g)}(z)| \leq \frac{M}{1 - \varepsilon} \frac{|z|^3}{\sigma^3} \qquad \forall \quad |z| \leq \varepsilon\sigma.$$

Beweis. Die Cauchysche Formel für die Ableitungen ergibt für $0 < \tilde{\sigma} < \sigma$

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(0)\right| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\oint_{|z|=\tilde{\sigma}} \frac{g(z)}{z^{k+1}}\,dz\right| \le \frac{Mk!}{\tilde{\sigma}^k}.$$

Der Grenzübergang $\tilde{\sigma} \to \sigma$ liefert dann

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(0)\right| \le \frac{Mk!}{\sigma^k}.$$

Also erhalten wir für den Rest, wenn $|z| \le \varepsilon\sigma$ ist,

$$\begin{aligned}\left|h^{(g)}(z)\right| &\le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(0)\right| |z|^k \le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{Mk!}{\sigma^k}|z|^k = M\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k \\ &= M\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^3 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k \le M\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^3 \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k = \frac{M}{1-\varepsilon}\frac{|z|^3}{\sigma^3}.\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Hilfssatz A.13. *Es sei* $\sigma > 0$ *und* $f : \mathcal{B}(\sigma;0) \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $y \mapsto f(y)$ *holomorph und durch* $M > 0$ *beschränkt. Dann erfüllt das Taylor-Restglied dritter Ordnung*

$$h^{(f)}(y) = f(y) - \left(f(0) + \langle\, f_y(0)\,,\, y\,\rangle + \frac{1}{2}\langle\, y f_{yy}(0)\,,\, y\,\rangle\right), \tag{A.7}$$

für alle $\varepsilon \in (0,1)$ *die Abschätzung*

$$\left|h^{(f)}(y)\right| \le \frac{M}{1-\varepsilon}\frac{|y|^3}{\sigma^3} \qquad \forall \quad |y| \le \varepsilon\sigma. \tag{A.8}$$

Beweis. Wir halten ein ε mit $0 < \varepsilon < 1$ und ein $y \in \mathbb{C}^n$ mit $|y| \le \varepsilon\sigma$ fest. Falls $y = 0$ ist, folgt (A.8) direkt aus (A.7). Andernfalls definieren wir

$$y_0 := \varepsilon\sigma\frac{y}{|y|}.$$

Damit ist $|y_0| = \varepsilon\sigma$. Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathcal{B}(\varepsilon^{-1};0) \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) := f(zy_0).$$

Also ist $g(0) = f(0)$ und mit der Kettenregel erhalten wir

$$g_z(z) = \langle\, f_y(zy_0)\,,\, y_0\,\rangle\,, \quad g_{zz}(z) = \langle\, y_0 f_{yy}(zy_0)\,,\, y_0\,\rangle \qquad \forall \quad |z| < \varepsilon^{-1}.$$

Mit Hilfssatz A.12 folgt

$$\begin{aligned}\left|h^{(f)}(zy_0)\right| &= \left|f(zy_0) - f(0) - \langle\, f_y(0)\,,\, zy_0\,\rangle - \frac{1}{2}\langle\, zy_0 f_{yy}(0)\,,\, zy_0\,\rangle\right| \\ &= \left|g(z) - g(0) - g_z(0)z - \frac{1}{2}g_{zz}(0)z^2\right| = \left|h^{(g)}(z)\right| \\ &\le \frac{M}{1-\varepsilon}\frac{|z|^3}{(\varepsilon^{-1})^3} = \frac{M}{1-\varepsilon}|z|^3\varepsilon^3 \qquad \forall \quad |z| \le \varepsilon(\varepsilon^{-1}) = 1.\end{aligned}$$

In dieser Ungleichung darf man $z = |y|/(\varepsilon\sigma)$ einsetzen, dies ergibt

$$\left|h^{(f)}(zy_0)\right| = \left|h^{(f)}\left(\frac{|y|}{\varepsilon\sigma}\varepsilon\sigma\frac{y}{|y|}\right)\right| = \left|h^{(f)}(y)\right| \leq \frac{M}{1-\varepsilon}\frac{|y|^3}{\varepsilon^3\sigma^3}\varepsilon^3 = \frac{M}{1-\varepsilon}\frac{|y|^3}{\sigma^3},$$

wie wir behauptet hatten. □

A.4 Erzeugen von kanonischen Transformationen

A.4.1 Hilfsergebnisse über autonome Differentialgleichungen

Satz A.14. *Es sei $\varrho > 0$, $\mathcal{S}(\varrho) \subseteq \mathbb{C}^n$, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^m$ offen und*

$$f : \mathcal{S}(\varrho) \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+m}, \quad z = (x, y) \mapsto f(z)$$

stetig und der Gestalt, dass für die Differentialgleichung

$$\dot{z} = f(z) \tag{A.9}$$

Eindeutigkeit der Lösung gilt. Die Funktion f habe in $z_1 = x_1, \dots, z_n = x_n$ die Periode $T > 0$. Es gebe Zahlen $a, b, \tilde{\delta}$, $a \leq 0 < b$, $0 < \tilde{\delta} < \varrho$ und eine offene Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, so dass der Fluss φ der Differentialgleichung (A.9) auf $[a, b) \times \mathcal{S}(\varrho - \tilde{\delta}) \times \mathcal{U}$ existiert. Dann hat für alle $t \in [a, b)$ die Funktion

$$\varphi(t, \cdot\,) - \mathrm{id} : \mathcal{S}(\varrho - \tilde{\delta}) \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}(\varrho) \times \mathcal{V}, \quad \zeta = (\xi, \eta) \mapsto \varphi(t, \zeta) - \zeta$$

in $\zeta_1 = \xi_1, \dots, \zeta_n = \xi_n$ die Periode T.

Die Voraussetzungen über die Existenz des Flusses φ bedeuten: Es gilt

$$\varphi : [a, b) \times \mathcal{S}(\varrho - \tilde{\delta}) \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}(\varrho) \times \mathcal{V},$$

ferner ist $\varphi(0, \zeta) = \zeta$ und $\varphi(\,\cdot\,, \zeta)$ löst die Differentialgleichung (A.9).

Beweis von Satz A.14. Wir beweisen für alle $(t, \zeta) \in [a, b) \times \mathcal{S}(\varrho - \tilde{\delta}) \times \mathcal{U}$ die Gleichung

$$\varphi(t, \zeta) + T \cdot e_j = \varphi(t, \zeta + T \cdot e_j) \quad (1 \leq j \leq n). \tag{A.10}$$

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir setzen $h(t) := \varphi(t, \zeta) + T \cdot e_j$ und $g(t) := \varphi(t, \zeta + T \cdot e_j)$. Dann ist $h(0) = g(0) = \zeta + T \cdot e_j$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\dot{h}(t) &= \dot{\varphi}(t, \zeta) = f(\varphi(t, \zeta)) = f(\varphi(t, \zeta) + T \cdot e_j) = f(h(t)), \\
\dot{g}(t) &= \dot{\varphi}(t, \zeta + T \cdot e_j) = f(\varphi(t, \zeta + T \cdot e_j)) = f(g(t)),
\end{aligned}$$

also erfüllen beide Funktionen die Differentialgleichung. Folglich stimmen sie überein. Das beweist (A.10). Aus (A.10) folgt nun für alle $1 \leq j \leq n$

$$\varphi(t, \zeta + T \cdot e_j) - (\zeta + T \cdot e_j) = \varphi(t, \zeta) - \zeta,$$

daraus folgt die Behauptung. □

Hilfssatz A.15. *Es sei $a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{C}^m$, $m \in \mathbb{N}$, eine analytische Funktion. Es gebe Zahlen $a \leq a_0 < b_0 \leq b$, so dass die Einschränkung von f auf (a_0, b_0) nach $\mathbb{R}^m$ abbildet. Dann bildet auch f nach $\mathbb{R}^m$ ab.*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m = 1$ annehmen. Ist nämlich $f = (f_1, \dots, f_m) : (a,b) \to \mathbb{C}^m$ analytisch, so gilt das auch für jede Koordinatenfunktion f_i, $1 \leq i \leq m$, und wir können die Aussage im Fall $m = 1$ auf jede Koordinatenfunktion einzeln anwenden. Nehmen wir also $m = 1$ an.
Es sei $A \subseteq (a,b)$ das größte Intervall, das (a_0, b_0) enthält und auf dem f nach $\mathbb{R}^m$ abbildet. Die Menge A existiert, denn sie kann als Vereinigung aller Intervalle, die (a_0, b_0) enthalten, und auf denen f nach $\mathbb{R}^m$ abbildet, konstruiert werden. Die Menge der Intervalle, über die diese Vereinigung gebildet wird, ist nicht leer, da sie (a_0, b_0) enthält. Daher ist A nicht leer.

Das Intervall A ist abgeschlossen in (a,b). Dazu betrachten wir einen Häufungspunkt α von A und wählen eine Folge $(x_\ell)_{\ell=1}^\infty \subseteq A \setminus \{\alpha\}$, die gegen α konvergiert. Da f auf (a,b) insbesondere stetig ist, existiert der Grenzwert

$$f(\alpha) = \lim_{\ell \to \infty} f(x_\ell)$$

und ist als Grenzwert einer Folge reeller Zahlen reell. Also gilt $\alpha \in A$. Da A folglich seine Häufungspunkte enthält, ist A abgeschlossen.
A ist aber auch offen in (a,b). Dazu nehmen wir an, es gebe einen Randpunkt $\alpha \in A$. Dann ist α insbesondere ein Häufungspunkt von A. Nach Voraussetzung kann man f in α in eine konvergente Potenzreihe entwickeln, die durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k \tag{A.11}$$

gegeben ist. Darin bezeichnet $f^{(k)}(\alpha)$ die k-te Ableitung von f in α. Wir zeigen, dass $f^{(k)}(\alpha)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ eine reelle Zahl ist. Die Zahl $f^{(0)}(\alpha) = f(\alpha)$ ist nach Voraussetzung $\alpha \in A$ reell. Stimmt die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so auch für $k+1$: Um dies zu sehen, nehmen wir eine Folge $(x_\ell)_{\ell=1}^\infty \subseteq A \setminus \{\alpha\}$, die gegen α konvergiert und betrachten den Grenzwert

$$f^{(k+1)}(\alpha) = \lim_{\ell \to \infty} \frac{f^{(k)}(x_\ell) - f^{(k)}(\alpha)}{x_\ell - \alpha}.$$

Dies ist als Grenzwert einer Folge reeller Zahlen wieder eine reelle Zahl, also sind alle Koeffizienten der Reihe (A.11) reell, und es gibt eine Umgebung von α, auf der f nach $\mathbb{R}^m$ abbildet. Also ist α ein innerer Punkt von A, kann also kein Randpunkt von A sein. Dieser Widerspruch zeigt, dass A in (a,b) offen ist.
Da A nichtleer, offen und abgeschlossen in (a,b) ist, gilt $A = (a,b)$ und es folgt die Behauptung. $\square$

Satz A.16. *Es seien $\varrho > 0$, $\sigma > 0$ und $f \in \mathcal{P}_{2n}(\varrho, \sigma)$. Es gebe Zahlen $0 < \tilde{\delta} < \varrho$, $0 < \varepsilon < \sigma$ und $a \leq 0 < b$, so dass der Fluss φ der Differentialgleichung*

$$\dot{z} = f(z) \tag{A.12}$$

auf $[a, b) \times \mathcal{D}(\varrho - \tilde{\delta}, \sigma - \varepsilon)$ *existiert. Hat dann die Funktion* f *die Eigenschaft, dass sie reelle Argumente auf reelle Werte abbildet, so gilt dies auch für* φ*.*

Beweis. Zum Beweis betrachten wir die Einschränkung von f auf reelle Argumente, also die Funktion

$$g : \mathbb{R}^n \times \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y| < \sigma\} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad z \mapsto g(z) := f(z),$$

und die Differentialgleichung

$$\dot{z} = g(z). \tag{A.13}$$

Man beachte, dass der Definitionsbereich von g mit $\mathcal{D}(\varrho, \sigma) \cap \mathbb{R}^{2n}$ übereinstimmt. Es sei nun

$$\zeta \in \mathbb{R}^n \times \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y| < \sigma - \varepsilon\}$$

beliebig. Dann gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöf Zahlen $a_1 < 0 < b_1$ und eine Lösung

$$h : (a_1, b_1) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y| < \sigma\}$$

von (A.13). Klarerweise ist h auch eine Lösung von (A.12). Daher gilt

$$\varphi(t, \zeta) = h(t) \qquad \forall \quad t \in (a_1, b_1) \cap [a, b).$$

Die Menge der t, die in dieser Gleichung eingesetzt werden dürfen, enthält ein offenes Intervall. Daher bildet $\varphi(\,\cdot\,, \zeta)$ nach dem vorigen Hilfssatz nach $\mathbb{R}^{2n}$ ab. Daraus folgt die Behauptung. □

A.4.2 Einfache kanonische Transformationen

Satz A.17. *Es seien* $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ *Gebiete und* $Z = (X, Y) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}^{2n}$ *eine einfache kanonische Transformation.*[12] *Dann gilt für alle* $(\xi, \eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$

$$\det X_\xi(\xi) \neq 0, \tag{A.14}$$

$$Y(\xi, \eta) = Y(\xi, 0) + \eta X_\xi(\xi)^{-1}. \tag{A.15}$$

Beweis. Da X nicht von η abhängt, gilt

$$Z_\zeta = \begin{pmatrix} X_\xi & 0 \\ Y_\xi & Y_\eta \end{pmatrix}.$$

Somit folgt aus (3.8)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_\xi^{\mathrm{T}} & Y_\xi^{\mathrm{T}} \\ 0 & Y_\eta^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\xi & 0 \\ Y_\xi & Y_\eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -Y_\xi^{\mathrm{T}} & X_\xi^{\mathrm{T}} \\ -Y_\eta^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\xi & 0 \\ Y_\xi & Y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\xi^{\mathrm{T}} Y_\xi - Y_\xi^{\mathrm{T}} X_\xi & X_\xi^{\mathrm{T}} Y_\eta \\ -Y_\eta^{\mathrm{T}} X_\xi & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

[12] Zum Begriff der einfachen kanonischen Transformation siehe Definition 3.5.

Wir betrachten jeweils das rechte obere Kästchen der Matrizen ganz links und ganz rechts der Gleichungskette. Dies ergibt die Gleichung

$$X_\xi^{\mathrm{T}} Y_\eta = E_n. \tag{A.16}$$

Bildet man Determinanten, sieht man

$$\det X_\xi(\xi) \det Y_\eta(\xi,\eta) = 1 \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Daraus folgt (A.14). Außerdem folgt aus (A.16)

$$Y_\eta = \left(X_\xi^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(X_\xi^{-1}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{A.17}$$

Es hängt also Y_η nicht mehr von η ab, daher ist $Y_{\eta\eta} = 0$ und Y affin-linear in η. Die Taylor-Entwicklung von Y bezüglich η lautet also

$$Y(\xi,\eta) = Y(\xi,0) + \eta \cdot Y_\eta(\xi,0)^{\mathrm{T}} \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Zusammen mit (A.17) folgt (A.15), also die Behauptung. □

Zu den Voraussetzungen des folgenden Satzes bemerken wir:

Bemerkung A.18. Aus Satz A.17 folgt insbesondere, dass einfache kanonische Transformationen affin-linear in η sind. Sie lassen sich also stets für alle $\eta \in \mathbb{C}^n$ definieren. Außerdem folgt, dass die in Satz A.19 erwähnten Funktionen $Y_{k\eta}$ nicht von η abhängen.

Satz A.19. *Es sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und*

$$Z_k = (X_k, Y_k) : \mathcal{U} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{A.18}$$

eine Folge einfacher kanonischer Transformationen mit der Eigenschaft, dass die Funktionenfolgen $(Z_k(\,\cdot\,,0))_{k=1}^\infty$ und $(Y_{k\eta})_{k=1}^\infty$ auf $\mathcal{U}$ kompakt konvergieren. Dann konvergiert $(Z_k)_{k=1}^\infty$ auf $\mathcal{U} \times \mathbb{C}^n$ kompakt gegen eine einfache kanonische Transformation.

Beweis. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$Z_k(\xi,0) = (X_k(\xi), Y_k(\xi,0)).$$

Die Funktionen Z_k sind nach Voraussetzung insbesondere analytisch. Nach Voraussetzung und dem Konvergenzsatz von Weierstraß gibt es auf $\mathcal{U}$ definierte analytische Funktionen X, V und W mit

$$Z_k(\,\cdot\,,0) \xrightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} (X,V) \;\text{ und }\; Y_{k\eta} \xrightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} W, \qquad (k \to \infty). \tag{A.19}$$

Betrachten wir die beiden Vektorkomponenten der ersten Grenzbeziehung einzeln, so folgt insbesondere

$$X_k \xrightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} X \;\text{ und }\; Y_k(\,\cdot\,,0) \xrightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} V, \qquad (k \to \infty). \tag{A.20}$$

Mit dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt nun weiter

$$X_{k\xi} \xRightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} X_{\xi}, \qquad (k \to \infty).$$

Nun ergibt sich aus (A.15) $Y_{k\eta} = ((X_{k\xi})^{-1})^{\mathrm{T}}$, daher erhalten wir mit der zweiten Grenzbeziehung (A.19) für alle $\xi \in \mathcal{U}$

$$E_n = X_{k\xi}(\xi) Y_{k\eta}(\xi)^{\mathrm{T}} \longrightarrow X_{\xi}(\xi) W(\xi)^{\mathrm{T}}, \qquad (k \to \infty).$$

Folglich gilt $E_n = X_{\xi} W^{\mathrm{T}}$, also existiert $(X_{\xi})^{-1} = W^{\mathrm{T}}$ mit, wiederum nach (A.19),

$$(X_{k\xi})^{-1} \xRightarrow{\mathcal{U},\,\text{kompakt}} (X_{\xi})^{-1}, \qquad (k \to \infty). \tag{A.21}$$

Wir setzen

$$Y(\xi,\eta) := V(\xi) + \eta X_{\xi}(\xi)^{-1} \qquad \forall \quad (\xi,\eta) \in \mathcal{U} \times \mathbb{C}^n,$$

und zeigen für die Funktionen $Y_k(\xi,\eta) = Y_k(\xi,0) + \eta X_{k\xi}(\xi)^{-1}$

$$Y_k \xRightarrow{\mathcal{U}\times\mathbb{C}^n,\,\text{kompakt}} Y, \qquad (k \to \infty). \tag{A.22}$$

Dazu seien $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{U}$ und $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ beliebige kompakte Mengen, sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen (A.20) gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|Y_k(\,\cdot\,,0) - V|_{\mathcal{K}_1} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \quad k \geq N_1.$$

Da $\mathcal{K}_2$ kompakt ist, gibt es eine Zahl $K > 0$, so dass $\mathcal{K}_2$ in dem Ball $\mathcal{B}(K;0)$ enthalten ist. Aus (A.21) folgt die Existenz eines $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|(X_{k\xi})^{-1} - (X_{\xi})^{-1}\right|_{\mathcal{K}_1} < \frac{\varepsilon}{2nK} \qquad \forall \quad k \geq N_2.$$

Also gilt für alle $k \geq N_1 + N_2$

$$|Y_k - Y|_{\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2} \leq |Y_k(\,\cdot\,,0) - V|_{\mathcal{K}_1} + nK\left|(X_{k\xi})^{-1} - (X_{\xi})^{-1}\right|_{\mathcal{K}_1} < \varepsilon,$$

daraus folgt (A.22). Von (A.20) und (A.22) wissen wir, dass die Folge der Z_k auf $\mathcal{U} \times \mathbb{C}^n$ kompakt gegen die analytische Funktion $Z := (X, Y)$ konvergiert. Es bleibt zu zeigen, dass Z eine einfache kanonische Transformation ist. Da bereits bekannt ist, dass Z analytisch ist und seine Komponente X nicht von η abhängt, muss nur noch geprüft werden, ob Z eine kanonische Transformation ist. Aus dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt für alle $(\xi,\eta) \in \mathcal{U} \times \mathbb{C}^n$

$$J = Z_{k\zeta}(\xi,\eta)^{\mathrm{T}} \cdot J \cdot Z_{k\zeta}(\xi,\eta) \longrightarrow Z_{\zeta}(\xi,\eta)^{\mathrm{T}} \cdot J \cdot Z_{\zeta}(\xi,\eta), \qquad (k \to \infty),$$

also $Z_{\zeta}^{\mathrm{T}} \cdot J \cdot Z_{\zeta} = J$. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma A.20. *Es seien* $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ *Gebiete und*

$$Z_1 : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}_2, \quad Z_2 : \mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}$$

einfache kanonische Transformationen (siehe Definition 3.5). Dann ist auch die Abbildung

$$Z_2 \circ Z_1 : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}$$

eine einfache kanonische Transformation.

Beweis. Die Voraussetzungen besagen insbesondere, dass Z_1 und Z_2 analytische Funktionen sind. Also gilt dies auch für $Z_2 \circ Z_1$. Da Z_1 und Z_2 kanonische Transformationen sind, erhalten wir für $\zeta \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1$

$$\begin{aligned}(Z_2 \circ Z_1)_\zeta(\zeta)^{\mathrm{T}} J (Z_2 \circ Z_1)_\zeta(\zeta) &= (Z_{2\zeta}(Z_1(\zeta)) \cdot Z_{1\zeta}(\zeta))^{\mathrm{T}} J Z_{2\zeta}(Z_1(\zeta)) \cdot Z_{1\zeta}(\zeta) \\ &= Z_{1\zeta}(\zeta)^{\mathrm{T}} Z_{2\zeta}(Z_1(\zeta))^{\mathrm{T}} J Z_{2\zeta}(Z_1(\zeta)) \cdot Z_{1\zeta}(\zeta) = Z_{1\zeta}(\zeta)^{\mathrm{T}} J Z_{1\zeta}(\zeta) = J,\end{aligned}$$

also ist auch $Z_2 \circ Z_1$ eine kanonische Transformation. Schreibt man $Z_1 = (X_1, Y_1)$, $Z_2 = (X_2, Y_2)$, so folgt für alle $(\xi, \eta) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1$

$$Z_2 \circ Z_1(\xi, \eta) = Z_2(X_1(\xi), Y_1(\xi, \eta)) = (X_2(X_1(\xi)), Y_2(Y_1(\xi, \eta))),$$

also hängen die ersten n Komponenten von $Z_2 \circ Z_1$ nicht von η ab und $Z_2 \circ Z_1$ ist eine einfache kanonische Transformation, wie es behauptet war. □

A.4.3 Erzeugen der kanonischen Transformationen

Die Diskussion in diesem Abschnitt folgt [34]. Allerdings betrachten wir hier eine andere Klasse von Hamiltonfunktionen.

Satz A.21. *Es seien* $K > 0$, $\tilde{\varrho} > 0$, $0 < \delta < \tilde{\varrho}$ *und* $0 < \sigma \leq \delta$. *Die Funktion* $F : \mathcal{D}(\tilde{\varrho}, \sigma) \to \mathbb{C}$, $F = F(x, y)$ *sei analytisch und erfülle*

$$|F_x|_{\mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)} \leq \frac{K}{\delta}, \quad |F_y|_{\mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)} \leq \frac{K}{\sigma}. \tag{A.23}$$

Dann besitzt das Hamiltonsche System

$$\dot{x} = F_y, \quad \dot{y} = -F_x \tag{A.24}$$

einen eindeutig definierten, analytischen Fluss

$$Z : \left[0, \frac{\sigma\delta}{2K}\right) \times \mathcal{D}(\tilde{\varrho} - \delta, \sigma/2) \longrightarrow \mathcal{D}(\tilde{\varrho}, \sigma), \quad (t, \zeta) \mapsto Z(t, \zeta).$$

Insbesondere ist für alle $\zeta \in \mathcal{D}(\tilde{\varrho} - \delta, \sigma/2)$ die Funktion $Z(\,\cdot\,, \zeta)$ die eindeutige Lösung von (A.24) zum Anfangswert $Z(0, \zeta) = \zeta$. Mit der Matrix J aus Definition 3.4 schreibt sich (A.24) in der Form

$$\dot{z} = F_z J^{\mathrm{T}}.$$

Beweis von Satz A.21. Mit dem Existenzsatz von Cauchy (siehe [9], (10.4.5)) folgen die lokale Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen $t \mapsto Z(t,\zeta)$ zum Anfangswert $Z(0,\zeta) = \zeta \in \mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)$. Der Fluss Z ist analytisch in t und $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_{2n})$ ([9], (10.8.2)). Da eine Lösung von (A.24) definitionsgemäß nach $\mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)$ abbildet, bleibt bloß zu zeigen, dass die Lösungen mit Anfangswerten $\zeta \in \mathcal{D}(\tilde{\varrho}-\delta,\sigma/2)$ für $t \in [0,\sigma\delta/(2K))$ existieren.
Dazu sei $\zeta \in \mathcal{D}(\tilde{\varrho}-\delta,\sigma/2)$ beliebig. Wir nehmen an, die Lösung $Z(\,\cdot\,,\zeta) = (X(\,\cdot\,,\zeta), Y(\,\cdot\,,\zeta))$ existiere nur bis zu einem $b \in (0,\sigma\delta/(2K))$. Nach (A.24) gilt für alle $t \in [0,b)$

$$\begin{aligned}
X(t,\zeta) - \xi &= \int_0^t F_y(Z(\tau,\zeta))\,d\tau,\\
Y(t,\zeta) - \eta &= \int_0^t -F_x(Z(\tau,\zeta))\,d\tau.
\end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung (A.23) und $0 < b < \sigma\delta/(2K)$ folgt

$$\begin{aligned}
|X(\,\cdot\,,\zeta) - \xi|_{[0,b)} &\le \sup_{t\in[0,b)} \int_0^t |F_y|_{\mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)}\,d\tau \le b\frac{K}{\sigma} < \frac{\delta}{2},\\
|Y(\,\cdot\,,\zeta) - \eta|_{[0,b)} &\le \sup_{t\in[0,b)} \int_0^t |F_x|_{\mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)}\,d\tau \le b\frac{K}{\delta} < \frac{\sigma}{2}.
\end{aligned}$$

Es sei nun $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton wachsende Folge in $[0,b)$ mit $\lim_{k\to\infty} t_k = b$. Die Folge $(Z(t_k,\zeta))_{k=1}^{\infty}$ dürfte nach unserer Annahme über b einerseits keinen Häufungspunkt in $\mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)$ haben ([13], Kapitel 8, § 5). Andererseits liegt sie ganz in der kompakten Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} \mid |\operatorname{Im} x| \le \tilde{\varrho} - \delta + b\frac{K}{\sigma},\ |y| \le \frac{\sigma}{2} + b\frac{K}{\delta}\right\} \subseteq \mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma).$$

Daher hat die Folge einen Häufungspunkt in der kompakten Menge, also in $\mathcal{D}(\tilde{\varrho},\sigma)$. Dieser Widerspruch zeigt $b \ge \sigma\delta/(2K)$ und damit die Existenz der Lösungen für $t \in [0,\sigma\delta/(2K))$. □

Korollar A.22. *Es seien $K > 0$, $\varrho > 0$, $0 < 2\delta < \varrho$ und $0 < \sigma \le \delta$. Die Funktion $F : \mathcal{D}(\varrho,\sigma) \to \mathbb{C}$, $F = F(x,y)$ sei analytisch und erfülle*

$$|F_x|_{\mathcal{D}(\varrho,\sigma)} \le \frac{K}{\delta}, \quad |F_y|_{\mathcal{D}(\varrho,\sigma)} \le \frac{K}{\sigma}. \tag{A.25}$$

Dann besitzt das Hamiltonsche System

$$\dot{x} = F_y, \quad \dot{y} = -F_x \tag{A.26}$$

einen eindeutig definierten, analytischen Fluss

$$Z : \left[0, \frac{\sigma\delta}{2K}\right) \times \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2) \longrightarrow \mathcal{D}(\varrho - \delta, \sigma), \quad (t,\zeta) \mapsto Z(t,\zeta). \tag{A.27}$$

Beweis. Mit $\tilde{\varrho} = \varrho - \delta$ sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt. Daraus folgt schon die Behauptung. $\square$

Wenn wir in dem Fluss (A.27) die Zeit t festhalten und den Anfangswert variieren, so erhalten wir eine Schar von Abbildungen

$$Z(t,\,\cdot\,) : \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2) \longrightarrow \mathcal{D}(\varrho - \delta, \sigma), \qquad \left(0 \le t < \frac{\sigma\delta}{2K}\right). \tag{A.28}$$

Wir werden diese Abbildungen genauer untersuchen. Der nächste Satz gibt Abschätzungen für ihre Ableitungen. Im Beweis des Satzes wird ausgenutzt, dass wie in Korollar A.22 gegenüber Satz A.21 die Voraussetzung an δ verschärft ist.

Satz A.23. *Es seien $K > 0$, $\varrho > 0$, $0 < 2\delta < \varrho$ und $0 < \sigma \le \delta$ mit*

$$\frac{\sigma\delta}{2K} > 1.$$

Die Funktion $F : \mathcal{D}(\varrho, \sigma) \to \mathbb{C}$, $F = F(x, y)$ sei analytisch, affin-linear in y und erfülle die Abschätzungen (A.25). Dann gilt für die Funktionen (A.28):

$$|Z_\zeta(t,\,\cdot\,)|_{\mathcal{D}(\varrho-2\delta,\sigma/2)} \le \exp\left(\frac{2nK}{\delta\sigma}\,t\right) \qquad \forall \quad t \in \left[0, \frac{\sigma\delta}{2K}\right), \tag{A.29}$$

$$|Z_\zeta(t,\,\cdot\,) - E_{2n}|_{\mathcal{D}(\varrho-2\delta,\sigma/2)} \le \frac{2nK}{\delta\sigma}\exp\left(\frac{2nK}{\delta\sigma}\,t\right) \qquad \forall \quad t \in [0,1]. \tag{A.30}$$

Beweis. Wir verwenden das Lemma von Gronwall ([2], Korollar (6.2)). Dazu ist eine Abschätzung für F_{zz} zu finden. Mit den Cauchyschen Abschätzungen folgt aus (A.25)

$$|F_{xx}|_{\mathcal{D}(\varrho-\delta,\sigma)} \le \frac{K}{\delta^2} \le \frac{K}{\delta\sigma}, \quad |F_{yx}|_{\mathcal{D}(\varrho-\delta,\sigma)} \le \frac{K}{\delta\sigma}.$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt mit dem Satz von Schwarz

$$|F_{xy}|_{\mathcal{D}(\varrho-\delta,\sigma)} = \left|F_{yx}^{\mathrm{T}}\right|_{\mathcal{D}(\varrho-\delta,\sigma)} \le n\,|F_{yx}|_{\mathcal{D}(\varrho-\delta,\sigma)} \le \frac{nK}{\delta\sigma},$$

und weil F affin-linear in y ist, so gilt $F_{yy} = 0$. Insgesamt erhalten wir

$$|F_{zz}|_{\mathcal{D}(\varrho-\delta,\sigma)} \le (n+1)\frac{K}{\delta\sigma}. \tag{A.31}$$

Da $Z(\,\cdot\,, \zeta)$ für alle $\zeta \in \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2)$ die Gleichungen (A.26) löst, gilt für $0 \le t < \sigma\delta/(2K)$

$$Z_t^{\mathrm{T}}(t, \zeta) = F_z(Z(t, \zeta))J^{\mathrm{T}}.$$

(Auf der linken Seite muss der Zeilenvektor Z_t^{T} stehen; wir hatten auf Seite 17 ja $\dot{Z} = Z_t^{\mathrm{T}}$ definiert.) Ableiten nach ζ liefert

$$Z_{\zeta t}(t, \zeta) = (Z_t^{\mathrm{T}})_\zeta(t, \zeta) = JF_{zz}(Z(t, \zeta)) \cdot Z_\zeta(t, \zeta), \tag{A.32}$$

und nun folgt aus der Integration nach t

$$Z_\zeta(t,\zeta) = E_{2n} + \int_0^t JF_{zz}(Z(\tau,\zeta)) \cdot Z_\zeta(\tau,\zeta)\, d\tau. \tag{A.33}$$

Mit (A.31) erhalten wir die Abschätzung

$$|Z_\zeta(t,\zeta)| \leq 1 + \int_0^t |F_{zz}|_{\mathcal{D}(\varrho-\delta,\sigma)} |Z_\zeta(\tau,\zeta)|\, d\tau \leq 1 + \frac{(n+1)K}{\delta\sigma} \int_0^t |Z_\zeta(\tau,\zeta)|\, d\tau$$
$$\forall \quad \zeta \in \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2),\ t \in \left[0, \frac{\sigma\delta}{2K}\right).$$

Nach dem Lemma von Gronwall folgt

$$|Z_\zeta(t,\zeta)| \leq \exp\left(\frac{(n+1)K}{\delta\sigma}\, t\right) < \exp\left(\frac{2nK}{\delta\sigma}\, t\right)$$
$$\forall \quad \zeta \in \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2),\ t \in \left[0, \frac{\sigma\delta}{2K}\right).$$

Um die zweite Abschätzung zu erhalten, berechnen wir mit (A.33) für $t \in [0, \sigma\delta/(2K))$ und $\zeta \in \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2)$

$$Z_\zeta(t,\zeta) - E_{2n} = \int_0^t JF_{zz}(Z(\tau,\zeta))\, d\tau + \int_0^t JF_{zz}(Z(\tau,\zeta))(Z_\zeta(\tau,\zeta) - E_{2n})\, d\tau,$$

daher folgt mit (A.31)

$$\begin{aligned} |Z_\zeta(t,\zeta) - E_{2n}| &\leq \frac{(n+1)K}{\delta\sigma}\, t + \frac{(n+1)K}{\delta\sigma} \int_0^t |Z_\zeta(\tau,\zeta) - E_{2n}|\ d\tau \\ &\leq \frac{2nK}{\delta\sigma} + \frac{2nK}{\delta\sigma} \int_0^t |Z_\zeta(\tau,\zeta) - E_{2n}|\ d\tau \end{aligned}$$
$$\forall \quad \zeta \in \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2),\ t \in [0,1].$$

Das Lemma von Gronwall besagt hier

$$|Z_\zeta(t,\zeta) - E_{2n}| \leq \frac{2nK}{\delta\sigma} \exp\left(\frac{2nK}{\delta\sigma}\, t\right) \qquad \forall \quad \zeta \in \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2),\ t \in [0,1].$$

Damit ist alles bewiesen. □

Satz A.24. *Es seien $K > 0$, $\varrho > 0$, $0 < 2\delta < \varrho$ und $0 < \sigma \leq \delta$. Die Funktion $F : \mathcal{D}(\varrho,\sigma) \to \mathbb{C}$, $F = F(x,y)$ sei analytisch und erfülle die Abschätzungen (A.25). Dann sind die Abbildungen (A.28) kanonische Transformationen.*

Beweis. Es sind die Voraussetzungen von Korollar A.22 erfüllt. Daher existieren der Fluss (A.27) und die Abbildungen (A.28). Wir haben zu zeigen:

$$Z_\zeta(t,\zeta)^{\mathrm{T}} J Z_\zeta(t,\zeta) = J \qquad \forall \quad (t,\zeta) \in \left[0, \frac{\sigma\delta}{2K}\right) \times \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2). \tag{A.34}$$

Diese Gleichung ist für $t = 0$ sicher richtig, denn $Z(0,\,\cdot\,)$ ist die Identität und folglich ist $Z_\zeta(0,\zeta) = E_{2n}$ für alle $\zeta \in \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2)$.
Um die Aussage für alle $t \in [0, \sigma\delta/(2K))$ zu erhalten, zeigen wir, dass die linke Seite von (A.34) konstant in t ist. Dazu berechnen wir für $(t,\zeta) \in [0, \sigma\delta/(2K)) \times \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2)$ mit (A.32)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\big(Z_\zeta(t,\zeta)^{\mathrm{T}} J Z_\zeta(t,\zeta)\big) &= (Z_\zeta^{\mathrm{T}})_t(t,\zeta) J Z_\zeta(t,\zeta) + Z_\zeta(t,\zeta)^{\mathrm{T}} J Z_{\zeta t}(t,\zeta)\\ &= Z_\zeta(t,\zeta)^{\mathrm{T}} F_{zz}(Z(t,\zeta)) J^{\mathrm{T}} J Z_\zeta(t,\zeta) + Z_\zeta(t,\zeta)^{\mathrm{T}} J J F_{zz}(Z(t,\zeta)) Z_\zeta(t,\zeta)\\ &= Z_\zeta(t,\zeta)^{\mathrm{T}} F_{zz}(Z(t,\zeta)) Z_\zeta(t,\zeta) - Z_\zeta(t,\zeta)^{\mathrm{T}} F_{zz}(Z(t,\zeta)) Z_\zeta(t,\zeta) = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz A.25. *Es seien $K > 0$, $\varrho > 0$, $0 < 2\delta < \varrho$ und $0 < \sigma \le \delta$. Die Funktion $F : \mathcal{D}(\varrho, \sigma) \to \mathbb{C}$, $F = F(x,y)$ sei analytisch, erfülle die Abschätzungen (A.25) und sei affin-linear in y. Dann sind die Abbildungen (A.28) einfache kanonische Transformationen.*

Beweis. Die Voraussetzungen an die Funktion F bedeuten, dass sich F in der Form

$$F(x,y) = F_1(x) + \langle\, y\,,\, F_2(x)\,\rangle$$

schreiben lässt, wobei $F_1 : \mathcal{S}(\varrho) \to \mathbb{C}$ und $F_2 : \mathcal{S}(\varrho) \to \mathbb{C}^n$ analytische Funktionen sind. Also schreibt sich das System (A.26) in diesem Fall

$$\dot{x} = F_2(x), \quad \dot{y} = -F_{1x}(x) - y \cdot F_{2x}(x).$$

Die erste dieser beiden Gleichungen hat für alle Anfangswerte $\xi \in \mathcal{S}(\varrho - 2\delta)$ eine eindeutig definierte Lösung $\widetilde{X}(\,\cdot\,,\xi)$, $\widetilde{X}(0,\xi) = \xi$. Wie oben folgt die Existenz dieser Lösung für $0 \le t < \sigma\delta/(2K)$. Betrachten wir nun das System

$$\dot{x} = F_2(x), \quad \dot{y} = 0, \tag{A.35}$$

so ist klar, dass seine Lösungen durch $\widetilde{Z}(\,\cdot\,,\xi,\eta) = (\widetilde{X}(\,\cdot\,,\xi),\eta)$ gegeben sind. Sei nun $Z = (X,Y)$ eine Lösung von (A.26) zum Anfangswert $Z(0,\zeta) = \zeta = (\xi,\eta)$. Dann gilt $X(0,\zeta) = \xi$ und $t \mapsto (X(t,\zeta),\eta)$ löst (A.35). Also muss X die Werte der oben eingeführten Funktion $\widetilde{X}$ annehmen, das heißt

$$X(t,\xi,\eta) = \widetilde{X}(t,\xi) \qquad \forall \quad (t,\xi,\eta) \in \left[0, \frac{\sigma\delta}{2K}\right) \times \mathcal{D}(\varrho - 2\delta, \sigma/2).$$

Also hängt X nicht von η ab und die Abbildung (A.28) ist eine einfache kanonische Transformation. □

Wir fassen die Ergebnisse dieses Anhangs A.4 in dem folgenden Satz zusammen.

Satz A.26. *Es seien $K > 0$, $\varrho > 0$, $0 < 2\delta < \varrho$ und $0 < \sigma \le \delta$ mit*

$$\frac{\sigma\delta}{2K} > 1.$$

Die Funktion $F \in \mathcal{P}(\varrho, \sigma)$ erfülle die Abschätzungen (A.25) und sei affin-linear in y. Dann sind die Abbildungen (A.28) einfache kanonische Transformationen, für alle $0 \leq t < \sigma\delta/(2K)$ gilt $Z(t,\,\cdot\,) - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(\varrho - 2\delta, \sigma/2)$ und die Abschätzungen (A.29) und (A.30) sind erfüllt.

Beweis. Auf Grund von Korollar A.22 sind die Abbildungen (A.28) wohldefiniert und analytisch. Satz A.25 besagt, dass sie überdies einfache kanonische Transformationen sind. Es sind die Voraussetzungen von Satz A.14 erfüllt, man setze dort

$$\mathcal{V} = \mathcal{B}(\sigma; 0),\ f = F_z J^{\mathrm{T}},\ T = 2\pi,\ a = 0,\ b = \sigma\delta/(2K),$$

$$\tilde{\delta} = 2\delta,\ \mathcal{U} = \mathcal{B}(\sigma/2; 0) \text{ und } \varphi = Z$$

ein. Folglich hat $Z(t,\,\cdot\,) - \mathrm{id}$ für alle $0 \leq t < \sigma\delta/(2K)$ die Periode 2π in x. Die Voraussetzungen von Satz A.16 erfüllen wir mit

$$f = F_z J^{\mathrm{T}},\ \tilde{\delta} = 2\delta,\ \varepsilon = \sigma/2,\ a = 0,\ b = \sigma\delta/(2K) \text{ und } \varphi = Z.$$

Also bildet Z reelle Argumente auf reelle Werte ab. Dies zeigt $Z(t,\,\cdot\,) - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_{2n}(\varrho - 2\delta, \sigma/2)$. Schließlich folgt die Gültigkeit der Abschätzungen (A.29) und (A.30) aus Satz A.23. Daraus folgt die Behauptung. □

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$, natürliche Zahlen, $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$[a, b] = \{t \in \mathbb{R} \,|\, a \leq t \leq b\}$, $(a < b)$, abgeschlossenes Intervall.

$(a, b) = \{t \in \mathbb{R} \,|\, a < t < b\}$, $(a < b)$, offenes Intervall.

$[a, b) = \{t \in \mathbb{R} \,|\, a \leq t < b\}$, $(a < b)$, halboffenes Intervall.

id, die identische Abbildung $x \mapsto x$.

$f(\,\cdot\,, y)$, die Funktion $x \mapsto f(x, y)$.

$\mathcal{O}$, Landau-Symbol.

E_m, die $(m \times m)$-Einheitsmatrix.

e_j, Basisvektor des $\mathbb{R}^m$, Seite 4.

$\widehat{x}_j$, Vektor x ohne die j-te Komponente, Seite 4.

f_{x_j}, partielle Ableitung nach x_j, Seite 4.

$\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, Raum stetiger, 2π-periodischer Funktionen, Definition 2.1, Seite 4.

$F_m^{[j]}(f)$, m-tes Fejér-Polynom von f bezüglich x_j, Definition 2.2, Seite 4.

$S_k^{[j]}(f)$, k-tes Fourier-Polynom von f bezüglich x_j, Seite 5.

$|f|_{\mathcal{M}}$, Supremumnorm der Funktion f, Definition 2.4, Seite 6.

$T_m^{[j]}(f)$, m-tes de la Vallée Poussin-Polynom von f bzgl. x_j, Definition 2.6, Seite 6.

$\mathcal{E}_m(f)$, Abweichung der Bestapproximation von f, Definition 2.8, Seite 7.

K_f, Stetigkeitsmodul der gleichmäßig stetigen Funktion f, Definition 2.9, Seite 7.

$f^{(r)}$, r-te Ableitung der skalaren Funktion f, Seite 7.

$T_{m_1,\ldots,m_k}^{[j_1,\ldots,j_k]}(f)$, verallgemeinertes de la Vallée Poussin-Polynom, Definition 2.14, Seite 8.

$f^{(s_1,\ldots,s_n)}$, partielle Ableitung höherer Ordnung, Seite 11.

$|z|$, Maximumnorm eines Vektors z, Seite 16.

$|Q|$, Zeilensummennorm einer Matrix Q, Seite 16.

Q^{T}, v^{T}, Transponierte Matrix Q bzw. transponierter Vektor v, Seite 16.

$\langle\, x \,,\, y \,\rangle$, Produkt zweier Vektoren x und y, Definition 3.4, Seite 16.

$\mathcal{D}(r, s)$, Gebiet in $\mathbb{C}^{2n}$, Definition 3.1, Seite 17.

$\mathcal{S}(r)$, Streifengebiet in $\mathbb{C}^n$, Definition 3.1, Seite 17.

$\mathcal{S}'(r)$, Streifengebiet in $\mathbb{C}^{2n}$, Definition 3.1, Seite 17.

$\mathcal{P}_m(r, s)$, $\mathcal{P}_m(r)$, $\mathcal{P}(r, s)$, $\mathcal{P}(r)$, $\mathcal{P}'(r)$, Funktionenräume, Definition 3.1, Seite 17.

$f|_{\mathcal{M}}$, Einschränkung der Funktion f auf die Menge $\mathcal{M}$, Seite 17.

f_x, Ableitung der Funktion f, Seite 17.

$\dot{x} = dx/dt$, Zeitableitung der Funktion $x(t)$, Seite 17.

$\Omega(\gamma, \tau)$, Menge der Frequenzvektoren, Definition 3.2, Seite 18.

J, die Matrix, die die symplektische Gruppe definiert, Definition 3.4, Seite 18.

$\mathbb{T}^n$, n-dimensionaler Torus, Seite 41.

P_1, die Spurabbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, Formel (3.95), Seite 41.

$\mathcal{T}$, Überlagerungsfläche des invarianten Torus', Formel (3.97), Seite 41.

P_2, die Spurabbildung $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, Seite 42.

$\mathcal{K}$, Raum der Stetigkeitsmodule, Definition 4.1, Seite 45.

$\mathcal{L}$, Stetigkeitsmodule mit Integralbedingung, Definition 4.3, Seite 45.

$\mathcal{H}$, Stetigkeitsmodule mit Hölderbedingung, Definition 4.7, Seite 46.

$\lim_{s \nearrow x}$, Grenzwert von unten, Seite 47.

$\lim_{s \searrow x}$, Grenzwert von oben, Seite 47.

p, Projektion von $\mathbb{R}$ nach $(0, 2\pi]$, Seite 50.

$\{f\,,\,g\}$, Poissonklammer der Funktionen f und g, Definition 5.1, Seite 60.

$f(t)|_{t=0}$, Auswertung der Funktion f in $t = 0$, Seite 61.

$[f]$, Mittelwert der periodischen Funktion f, Definition 5.2, Seite 62.

Literatur

[1] N. I. Achieser: *Vorlesungen über Approximationstheorie.* Akademie-Verlag, Berlin 1967 (2. Auflage).

[2] Herbert Amann: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Walter de Gruyter, Berlin, New York 1983.

[3] Vladimir I. Arnold: Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russian Mathematical Surveys 18*, 9-36 (1963).

[4] Vladimir I. Arnold: Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys 18*, 85-191 (1963).

[5] Vladimir I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg et al. 1989 (2. Auflage).

[6] Hendrik W. Broer, George B. Huitema und Mikhail B. Sevryuk: Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. *Lecture Notes in Mathematics 1645*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1996.

[7] Klaus Deimling: *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

[8] Klaus Deimling: *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1985.

[9] J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York, London 1960.

[10] Otto Forster: *Analysis 3.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1992 (3. Auflage).

[11] G. H. Hardy: Weierstrass's non-differentiable function. *Transactions of the American Mathematical Society 17*, 301-325 (1916).

[12] Michael R. Herman: Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau 1. *Astérisque 103-104.* Société mathématique de France 1983.

[13] Morris W. Hirsch und Stephen Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, New York, London 1974.

[14] Urs Kirchgraber und Eduard Stiefel: *Methoden der analytischen Störungsrechnung und ihre Anwendungen.* B. G. Teubner, Stuttgart 1978.

[15] A. N. Kolmogorov: The general theory of dynamical systems and classical mechanics. In: Ralph Abraham und Jerrold E. Marsden: *Foundations of Mechanics,* 263-279. W. A. Benjamin, Reading, Mass. 1967.

[16] C. de la Vallée Poussin: *L'Approximation des fonctions d'une variable réelle.* Gauthier-Villars, Paris 1919.

[17] Jürgen Moser: On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften Göttingen, II. Mathematisch-Physikalische Klasse 1*, 1-20 (1962).

[18] Jürgen Moser: A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations I, II. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 20*, 265-315, 499-535 (1966).

[19] Jürgen Moser: On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations. In: *Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics*, 60-67. Tokyo 1969.

[20] Jürgen Moser: *Mathematical Reviews 42*, # 8037 (1971).

[21] Jürgen Moser: Recollections. In: Edward Bierstone, Boris Khesin, Askold Khovanskii und Jerrold E. Marsden (Herausgeber): *The Arnoldfest. Proceedings of a Conference in Honour of V. I. Arnold for his Sixtieth Birthday*, 19-21. American Mathematical Society, Providence, R. I. 1999.

[22] Jürgen Moser: *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Princeton University Press 1973 (Nachdruck Princeton University Press, Princeton, Oxford 2001).

[23] I. P. Natanson: *Konstruktive Funktionentheorie.* Akademie-Verlag, Berlin 1955.

[24] Henry Poincaré: *New Methods of Celestial Mechanics I.* National Aeronautics and Space Administration, Washington, D. C. 1967.

[25] Jürgen Pöschel: Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen Systemen. *Bonner mathematische Schriften 120.* Mathematisches Institut der Universität Bonn 1980.

[26] Jürgen Pöschel: Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets. *Communications on Pure and Applied Mathematics 35*, 653-696 (1982).

[27] Reinhold Remmert: *Funktionentheorie 1.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1995 (4. Auflage).

[28] Reinhold Remmert: *Funktionentheorie 2.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1995 (2. Auflage).

[29] W. Rothstein und K. Kopfermann: *Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher.* Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1982.

[30] Helmut Rüssmann: Kleine Nenner I: Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes. *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften Göttingen, II. Mathematisch-Physikalische Klasse 5*, 67-105 (1970).

[31] Helmut Rüssmann: On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus. In: Jürgen Moser (Herausgeber): Dynamical Systems, Theory and Applications. *Lecture Notes in Physics 38*, 598-624. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1975.

[32] Helmut Rüssmann: Konvergente Reihenentwicklungen in der Störungstheorie der Himmelsmechanik. In: Konrad Jacobs (Herausgeber): *Selecta Mathematica V,* 93-260. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1979.

[33] Helmut Rüssmann: On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus. In: J. Palis (Herausgeber): Geometric Dynamics. *Lecture Notes in Mathematics 1007*, 677-718. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1983.

[34] Helmut Rüssmann: Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems. *Regular and Chaotic Dynamics 6*, 119-204 (2001).

[35] Harold S. Shapiro: *Smoothing and Approximation of Functions.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne 1969.

[36] Carl Ludwig Siegel und Jürgen Moser: *Lectures on Celestial Mechanics.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1971 (Nachdruck Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1995).

[37] Eduard Zehnder: Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems I. *Communications on Pure and Applied Mathematics 28*, 91-140 (1975).

[38] Eduard Zehnder: Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems II. *Communications on Pure and Applied Mathematics 29*, 49-111 (1976).