

**Präparation eines reinen metastabilen  
 ${}^7\text{Li}^+$ -Ionenstrahls für die  
Präzisionsspektroskopie im Speicherring**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“  
am Fachbereich Physik  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz

Peter Merz  
geboren in Ludwigshafen am Rhein

Mainz 1999

Tag der Prüfung: 03.07.2000

## Zusammenfassung

1993 wurde am Testspeicherring TSR in Heidelberg ein spektroskopisches Präzisionsexperiment mit  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen bei 6.4% Lichtgeschwindigkeit durchgeführt. Die Resonanzfrequenz eines  $\Lambda$ -förmigen 3-Niveau Systems wurde mit einer Unsicherheit  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 6.2 \cdot 10^{-9}$  gemessen und daraus eine neue Gültigkeitsgrenze für den relativistischen Zeitdilationsfaktor in Form einer Obergrenze für einen sogenannten Testparameter  $\delta\alpha$  angegeben mit  $\delta\alpha < 8 \cdot 10^{-7}$ . Das Ergebnis ist im Rahmen der  $2\sigma$ -Unsicherheit mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar, es legt aber einen erneuten Test mit einer erhöhten Präzision nahe. In der vorliegenden Arbeit wurde untersucht, inwieweit durch ein spezielles Präparations- und Meßverfahren die Präzision des Experimentes erhöht werden kann. Dabei wird durch Laserkühlen und Bunchen des Ionenstrahls mit einem Radiofrequenzfeld die Kontrolle über den Phasenraum der Ionen erheblich verbessert. Die räumliche Struktur des kalten Ionenstrahls wird durch die zeitaufgelöste, umlaufsychrone Fluoreszenzlichtmessung direkt beobachtet und zur Rauschunterdrückung ausgenutzt. Bei der Spektroskopie werden Übergänge im Triplettssystem der heliumähnlichen Ionen angeregt. Wegen den störenden strahlinternen Wechselwirkungen werden in einem zustandselektiven Schritt die Ionen im  ${}^1\text{S}_0$  Grundzustand aus dem Speicherring entfernt, was einer Massentrennung mit einer Auflösung  $\frac{\Delta m}{m} < 10^{-8}$  entspricht. Zur sicheren Vermeidung interner Störungen wurden die Experimente mit wenigen gespeicherten Ionen durchgeführt, und dafür ein entsprechend empfindlicher Fluoreszenzlichtnachweis entwickelt.

Die beobachtete Signalstruktur gibt die Wechselwirkung der Ionen mit dem RF-Feld und den Lichtfeldern der Laser wieder. Dieses Verhalten konnte mit Hilfe von Simulationen geklärt werden und ermöglicht die sichere Interpretation der Signale. Die Heizrate in dem Wenig-Ionen System beträgt 1.4 K/s in Übereinstimmung mit den erwarteten Werten aufgrund der Streuung am Restgas.

Durch den Einsatz dieser Verfahren bei einem erneuten Experiment, die Konsistenz der gemessenen Resonanzfrequenz mit der speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt, kann eine verbesserte Obergrenze von  $\delta\alpha < 2 \cdot 10^{-7}$  erwartet werden. Der größte Fehlerbeitrag ist in dann durch die Unsicherheit der Literaturwerte zu den Übergangsfrequenzen im Ruhesystem des  ${}^7\text{Li}^+$ -Ions gegeben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Test der speziellen Relativitätstheorie</b>	<b>4</b>
2.1	Experimente zum Test der speziellen Relativitätstheorie . . . . .	5
2.2	Das TSR-Experiment . . . . .	7
2.3	Testtheorien . . . . .	10
2.4	Die Grenzen des TSR-Experiments 1993 und mögliche Verbesserungen .	16
<b>3</b>	<b>Experimente im Speicherring</b>	<b>23</b>
3.1	Der Speicherring TSR . . . . .	24
3.1.1	Die Strahldiagnose im TSR . . . . .	26
3.2	Die Ionendynamik im Speicherring . . . . .	27
3.2.1	Betatron-Oszillationen . . . . .	28

3.2.2	Die Betafunktion, Emittanz . . . . .	30
3.2.3	Dispersion . . . . .	31
3.2.4	Momentum Compaction, Transition Energy . . . . .	32
3.3	Der longitudinale Phasenraum gespeicherter Ionen . . . . .	33
3.3.1	Der kontinuierliche Ionenstrahl (Coasting Beam) . . . . .	34
3.3.2	Der gebunchte Ionenstrahl (Bunched beam) . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Strahlkühlung</b>	<b>41</b>
4.1	Elektronenkühlung . . . . .	42
4.2	Laserkühlung . . . . .	46
4.2.1	Prinzip der Laserkühlung . . . . .	48
4.2.2	Gebunchtes Laserkühlen . . . . .	53
4.3	Heizraten im Speicherring . . . . .	58
4.3.1	Strahlinterne Streuung . . . . .	58
4.3.2	Restgas-Streuung . . . . .	60
4.3.3	Weitere Heizeffekte . . . . .	63

<b>5</b>	<b>Das Präparationsverfahren und die Messungen am Ionenstrahl</b>	<b>71</b>
5.1	Isomerenseparation im Speicherring . . . . .	71
5.2	Die Messung des longitudinalen Phasenraumes . . . . .	76
5.2.1	Die Messung der räumlichen Ionenverteilung in den RF-Buckets .	76
5.2.2	Messung der Impulsverteilung . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Der Phasenraum des präparierten Ionenstrahls</b>	<b>91</b>
6.1	Simulation der Streuung am Restgas . . . . .	91
6.2	Die Ionentrajektorien bei der Laserspektroskopie und die Berechnung der Signale . . . . .	94
6.3	Simulationen zu optimierten Phasenraummessungen . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Kalibrierung des Detektors</b>	<b>121</b>
<b>B</b>	<b>Auswertung des Fluoreszenzlichts</b>	<b>127</b>
<b>C</b>	<b>Ionendrift bei der Zustandseparation</b>	<b>132</b>
<b>D</b>	<b>Die Fokker-Planck Gleichung</b>	<b>137</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Termschema von ${}^7\text{Li}^+$ (Auszug) . . . . .	8
2.2	Prinzip des Testexperiments zur speziellen Relativitätstheorie . . . . .	9
3.1	Der Speicherring TSR . . . . .	24
3.2	Die Koordinaten im Speicherring . . . . .	27
3.3	RF-Bunchen im Speicherring . . . . .	36
3.4	RF-Bucket . . . . .	38
3.5	Phasenraumtrajektorien beim RF-Bunchen . . . . .	40
4.1	Kühlkoeffizient $\alpha$ . . . . .	49
4.2	Der Phasenraum beim gebuchten Laserkühlen . . . . .	54
4.3	Heizen im RF-Bucket bei falscher Laser-Frequenz . . . . .	57
5.1	Die Impulsverteilung der ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen bei der Isomerentrennung . . . . .	72



5.2	Der Experimentablauf . . . . .	73
5.3	Die Laserkühlkraft und die Elektronenkühlkraft bei der Isomerentrennung	74
5.4	Test der Isomerentrennung . . . . .	75
5.5	Synchrone Fluoreszenzlichtmessung . . . . .	77
5.6	Elektronik zur synchronen Fluoreszenzlichtmessung . . . . .	78
5.7	Ortsaufgelöstes Fluoreszenzlichtspektrum der zustandselektierten Ionen- verteilung . . . . .	80
5.8	Fluoreszenz- und $^{127}\text{J}_2$ -Signal bei der Spektroskopie . . . . .	81
5.9	Ortsaufgelöstes Fluoreszenzlichtspektrum des $^7\text{Li}^+$ - Ionenstrahls . . . . .	84
5.10	Dreidimensionale Darstellung des ortsaufgelösten Fluoreszenzlichtspek- trums des vollständigen $^7\text{Li}^+$ - Ionenstrahls . . . . .	87
5.11	Dreidimensionale Darstellung des ortsaufgelösten Fluoreszenzlichtspek- trums . . . . .	87
5.12	Der Phasenraum in Abhängigkeit von der Verstimmung des Kühllasers . . .	89
6.1	Diffusive Entwicklung der Phasenraumtrajektorien lasergekühlter Ionen .	93
6.2	Zeitlicher Verlauf der Orts- und Impulsvarianz bei kleinem Detuning . . .	95
6.3	Zeitlicher Verlauf der Orts- und Impulsvarianz bei großem Detuning . . .	96

6.4	Laserkraft auf die Ionen bei der Laserspektroskopie . . . . .	97
6.5	Ionen-Trajektorie im RF-Bucket bei der Laserspektroskopie . . . . .	98
6.6	Trajektorien beim Durchstimmen des Testlasers von niedrigen zu hohen Frequenzen . . . . .	100
6.7	Phasenraumtrajektorie und berechnetes Signal, Detuning $-1 \cdot 10^{-5}$ eVs/m	102
6.8	Phasenraumtrajektorie, Detuning $-2 \cdot 10^{-5}$ eVs/m . . . . .	103
6.9	Phasenraumtrajektorie, Detuning $-3 \cdot 10^{-5}$ eVs/m . . . . .	104
6.10	Berechnetes Signal für 10 Ionen, Detuning $-2 \cdot 10^{-5}$ eVs/m . . . . .	105
6.11	Berechnetes Signal für 10 Ionen, Detuning $-3 \cdot 10^{-5}$ eVs/m . . . . .	106
6.12	Signale Messung/Simulation, Detuning $-1 \cdot 10^{-5}$ eVs/m . . . . .	107
6.13	Phasenraumtrajektorie bei der Spektroskopie mit einem gepulstem Laser .	110
6.14	Fluoreszenzsignal bei der Spektroskopie mit einem gepulsten Laser . . .	111
6.15	Simuliertes Fluoreszenzsignal von 36 Ionen, Messung mit gepulstem, schwa- chem Testlaser . . . . .	112
6.16	Simuliertes Signal bei dem optimierten Verfahren . . . . .	113
7.1	Aufheizung durch Restgasstreuung ohne Kühlung . . . . .	118

A.1	Schematischer Aufbau des Detektors . . . . .	122
A.2	Der spektrale Verlauf der Nachweiseffizienz . . . . .	124
A.3	Die räumliche Empfindlichkeit des Fluoreszenzlichtdetektors . . . . .	125
B.1	Das Detektorsignal . . . . .	128
B.2	Signaldauer vs. Bunchlänge . . . . .	129
B.3	Signalbreite vs. Impulsbreite . . . . .	131
C.1	Fluoreszenzlichtmessung bei der Ionendrift . . . . .	134
C.2	Fluoreszenzlichtmessung bei der Ionendrift . . . . .	135
E.1	$\Lambda$ -System in ${}^7\text{Li}^+$ . . . . .	147
E.2	Spektroskopie am $\Lambda$ -System . . . . .	149
E.3	Spektroskopie am $\Lambda$ -System . . . . .	150
E.4	Spektroskopie am $\Lambda$ -System . . . . .	150
E.5	Spektroskopie am $\Lambda$ -System . . . . .	151
E.6	Spektroskopie am $\Lambda$ -System . . . . .	151
E.7	Spektroskopie am $\Lambda$ -System . . . . .	152

E.8 AC-Stark Verschiebung . . . . .	152
-------------------------------------	-----

# Tabellenverzeichnis

2.1	Die Geschwindigkeiten in den Bezugssystemen $\Sigma, S$ und $S'$ . . . . .	13
2.2	Frequenzunsicherheiten beim Testexperiment zur speziellen Relativitätstheorie . . . . .	17

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Speicherung und Kühlung von Teilchen hat sich zu einer Schlüsseltechnologie bei atomphysikalischen Experimenten entwickelt. Die wichtigste Speichermethode für neutrale Atome ist die magnetooptische Falle (MOT), wobei die Atome gleichzeitig gekühlt werden. Davon ausgehend wird gegenwärtig an Atomuhren der nächsten Generation gearbeitet, die mit Hilfe von lasergekühlten Cäsiumatomen Stabilitäten im Bereich  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 10^{-15}$  erreichen sollen. Die Kombination von Laserkühlung (MOT) und Verdampfungskühlung hat zur Realisierung eines neuen Materiezustandes geführt, den Bose-Einstein-Kondensaten (BEC).

Geladene Teilchen können in Paul- und Penningfallen gespeichert und auf vielfältige Weise gekühlt werden. Die eingesetzten Kühlverfahren umfassen das Puffergaskühlen, die resistive Kühlung, die Laserkühlung und auch die Elektronenkühlung. Als herausragende Anwendungen seien hier die Massen- und g-Faktor-Messungen genannt.

Speicherringe sind ein etabliertes Konzept in der Beschleunigerphysik, das die Speicherung und Kühlung bewegter geladener Teilchen ermöglicht. Auch die Speicherring-Experimente sind sehr vielfältig, sodaß hier nur zwei Beispiele genannt seien. In Speicherringen sind auch die schwersten Elemente als hochgeladene Ionen verfügbar, bis hin

zu vollständig ionisierten Ladungszuständen. Mit Ausnahme der Super-EBIT am LLNL<sup>1</sup> können diese Ladungszustände bislang nur durch das „Abstreifen“ der Elektronen beim Durchgang relativistisch schneller Teilchen durch Targets hergestellt werden, also mit Hilfe von Beschleunigern. Die Schottky-Massenspektrometrie an der GSI<sup>2</sup> ermöglicht Massenmessungen auch instabiler Isotope und von Ionen in verschiedenen Ladungszuständen mit einer Auflösung  $\frac{\Delta m}{m} < 10^{-6}$ .

1993 wurde am Testspeicherring TSR in Heidelberg ein spektroskopisches Präzisionsexperiment mit  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen durchgeführt. Die Ionen wurden dabei mit 6.4% Lichtgeschwindigkeit gespeichert und die Resonanzfrequenz eines  $\Lambda$ -förmigen 3-Niveau Systems mit einer Unsicherheit  $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 6.2 \cdot 10^{-9}$  bestimmt. Anhand dieser Messung konnte eine neue Gültigkeitsgrenze für den relativistischen Zeitdilationsfaktor in Form einer Obergrenze für einen sogenannten Testparameter angegeben werden:  $\delta\alpha < 8 \cdot 10^{-7}$ . Das erzielte Ergebnis ist im Rahmen der  $2\sigma$ -Unsicherheit mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar, es legt aber einen erneuten Test mit einer erhöhten Präzision nahe.

Bei dem Experiment 1993 wurde der kontinuierliche Ionenstrahl durch Elektronenkühlung präpariert. In der vorliegenden Arbeit wird ein Präparationsverfahren vorgestellt, das einen durch ein Radiofrequenzfeld gebunchten Strahl aus lasergekühlten  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen bereitstellt. Bei der Spektroskopie werden Übergänge im Triplettsystem der heliumähnlichen Ionen angeregt. Wegen den störenden strahlinternen Wechselwirkungen beinhaltet das Präparationsverfahren einen zustandselektiven Schritt, durch den die Ionen im  ${}^1\text{S}_0$  Grundzustand aus dem Speicherring entfernt werden. Bei einer Ruhemasse von  $6.574 \text{ GeV}/c^2$  und einem Massenunterschied von  $59 \text{ eV}/c^2$  entspricht diese Massentrennung einer Selektivität von  $\frac{\Delta m}{m} < 10^{-8}$ . Zur sicheren Vermeidung interner Störungen wurden die Experimente mit wenigen gespeicherten Ionen durchgeführt, und dafür ein entsprechend empfindlicher Fluoreszenzlichtnachweis entwickelt.

Die präparierten Ionen wurden durch Laserspektroskopie in Verbindung mit einer zeitauf-

---

<sup>1</sup>Lawrence Livermore National Laboratory

<sup>2</sup>Gesellschaft für Schwerionenforschung, Darmstadt

gelösten und umlaufsynchronen Messung des Fluoreszenzlichts, also mit rein optischen Methoden untersucht. Die beobachtete Signalstruktur gibt die Wechselwirkung der Ionen mit dem RF-Feld und den Lichtfeldern der Laser wieder. Dieses Verhalten konnte mit Hilfe von Simulationen geklärt werden und ermöglicht die sichere Interpretation der Signale. Die Heizrate in dem Wenig-Ionen System beträgt 1.4 K/s. Sie ist unabhängig von der Phasenraumdicke der Ionen und in Übereinstimmung mit den erwarteten Werten aufgrund der Streuung am Restgas. Dieser Heizeffekt konnte daher bei der Simulierung der Ionenbewegung durch einen überlagerten Random Walk des Ionenimpulses berücksichtigt werden. Die gekoppelten Differentialgleichungen des Systems wurden numerisch gelöst und daraus die Fluoreszenzsignale berechnet<sup>3</sup>

Die erreichbare Präzision bei einem erneuten Testexperiment zur speziellen Relativitätstheorie mit einem zustandselektierten, RF-gebunchten und lasergekühlten Strahl unter Ausnutzung der zeitaufgelösten Fluoreszenzlichtmessung wird in Kapitel 2 und abschließend in Kapitel 7 diskutiert. Hierfür wurde der Einfluß der AC-Stark-Verschiebung bei der Spektroskopie an einem lasergekühlten Ionenstrahl durch numerische Rechnungen untersucht<sup>3</sup>. Insgesamt ergibt sich für ein neues Experiment eine erwartete Unsicherheit von  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1.7 \cdot 10^{-9}$  und entsprechend  $\delta\alpha < 2 \cdot 10^{-7}$ , wobei dann der größte Fehlerbeitrag durch die Unsicherheit der Literaturwerte zu den Übergangsfrequenzen im Ruhesystem des  ${}^7\text{Li}^+$ -Ions gegeben ist.

---

<sup>3</sup>Die Simulationen zur Spektroskopie beim gebunchten Laserkühlen sowie die Rechnungen zur AC-Stark Shift wurden mit Hilfe des Programms MATHEMATICA (Wolfram Research Inc. ) durchgeführt.



# Kapitel 2

## Test der speziellen Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie ist von grundlegender physikalischer Bedeutung, denn die bekannten Kernaussagen zur Längenkontraktion, Zeitdilatation, Geschwindigkeitsaddition und der relativistischen Massenzunahme in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit finden in nahezu allen Gebieten der Physik Eingang bzw. müssen berücksichtigt werden. Entsprechend wichtig ist die genaue Kenntnis des Gültigkeitsbereichs dieser Aussagen, insbesondere auch im Hinblick auf den Einfluß der Gravitation. Die spezielle Relativitätstheorie beschreibt die Physik in einer 4-dimensionalen flachen Raumzeit, ausgestattet mit der Minkowski-Metrik mit dem metrischen Tensor

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gravitation, also im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie Physik in einer gekrümmten Raumzeit, ist in der speziellen Relativitätstheorie nicht enthalten. Das Einstein'sche Äquivalenzprinzip besagt auf der anderen Seite, daß die Physik in frei fallenden Bezugssystemen die gleiche ist wie in einem System ohne Gravitation. Für jeden Raumzeitpunkt existieren daher Bezugssysteme, die sich nur in ihrer Geschwindigkeit relativ zueinander unterscheiden und die untereinander durch die Lorentztransformation der speziellen Relativitätstheorie verknüpft sind [Will93]. Mit anderen Worten: die 4-dimensionale Raumzeit ist lokal flach. Lokal bedeutet, daß diese Aussage in einer möglicherweise nur kleinen

Umgebung eines Raumzeitpunktes gilt. Dieses Prinzip der allgemeinen Relativitätstheorie heißt lokale Lorentzinvarianz und ist eine Konsequenz des Einsteinschen Äquivalenzprinzips.

Bei Experimenten, die mit hohen Geschwindigkeiten in begrenzten Raumbereichen durchgeführt werden, ist der Einfluß der Gravitation im allgemeinen vernachlässigbar (kinetische Energie sehr groß gegen die Energievariation aufgrund von Änderungen im Gravitationsfeld), sodaß diese Experimente näherungsweise als gravitationsfrei angesehen werden können, denn es ist eine grundlegende Forderung an Gravitationstheorien, daß im Falle verschwindender Gravitation die Verhältnisse der speziellen Relativitätstheorie reproduziert werden müssen: Theorien der Gravitation müssen „relativistisch“ sein [Will93]. Das TSR-Experiment zum Test der speziellen Relativitätstheorie fällt in diese Kategorie, denn der Einfluß der Gravitations-Rotverschiebung auf die Frequenzen der spektroskopierten Übergänge ist  $\frac{(\delta\nu)_{grav}}{\nu} < 2 \cdot 10^{-15}$  [Gri94b].

In diesem Sinne ist das hier beschriebene Experiment ein Test zur grundlegenden Struktur der Raumzeit, denn aus der Gültigkeit des Einstein'schen Äquivalenzprinzips folgt, daß die Raumzeit durch ihre Geometrie charakterisiert ist (d.h. durch ihre Krümmung) und daher durch eine metrische Theorie beschrieben werden muß <sup>1</sup>.

## 2.1 Experimente zum Test der speziellen Relativitätstheorie

Die Grundaussagen der speziellen Relativitätstheorie

- absolute Relativität
- Zeitdilatation

---

<sup>1</sup>Diese Zusammenhänge werden ausführlich in [Will93] diskutiert im Zusammenhang mit den Forderungen, die an eine relativistische Gravitationstheorie zu stellen sind. Insbesondere ist die Einstein'sche allgemeine Relativitätstheorie eine metrische Theorie

- Längenkontraktion
- relativistische Massenzunahme

waren bereits vor der Formulierung der Theorie Gegenstand physikalischer Experimente. Als kurze Einführung seien hier die Prinzipien der klassischen Experimente aufgeführt, zusammen mit Hinweisen auf die modernen Varianten. Alle Experimente haben bisher die Theorie bestätigt.

Ein grundlegender Test des Relativitätsprinzips ist das bekannte Michelson Morley Experiment, das die Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit bei geschlossenen Lichtwegen untersucht. Das klassische Experiment sollte die Geschwindigkeit der Erde im 'Äther' bestimmen. Die beobachtete Richtungsunabhängigkeit führte letztlich dazu, das Konzept des Äthers aufzugeben.

Bei dem Experiment von Kennedy und Thorndyke [Kenn32] wurde ebenfalls interferometrisch die Lichtausbreitung untersucht. Das Interferometer wurde dabei in einem hochstabilen Aufbau unverändert über mehrere Monate betrieben. Bei dieser Langzeitmessung wird nach einer Modulation des Interferenzmusters gesucht, die bei einer Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit aufgrund der Erdrotation auftreten würde. Darüber hinaus wird durch die Bahnbewegung der Erde die Position des Interferometers verändert, sodaß unter hinzunahme des Michelson Morley Experiments eine Aussage über die Längenkontraktion gemacht werden kann. Eine moderne Version, beruhend auf einem Laser-Frequenz-Normal, wurde 1990 von Hils und Hall [Hils90] durchgeführt.

Das Experiment von Ives-Stilwell untersuchte 1938 erstmalig direkt den transversalen Dopplereffekt durch Spektroskopie an einem angeregten Wasserstoff-Atomstrahl. Die Frequenz des in Bewegungsrichtung und entgegen emittierten Lichts wurde mit einem Spektralapparat analysiert und somit direkt die Dopplerverschiebung gemessen. Neuere Versionen sind das TSR-Experiment und das Experiment von Riis et.al. [Riis94]. Aus einer Reihe weiterer Experimente sind ebenfalls Aussagen über die Zeitdilatation verfügbar.

Für eine weitergehende Diskussion sei hier aber auf die Literatur verwiesen.

## 2.2 Das TSR-Experiment

Das Experiment am Testspeicherring TSR des MPI für Kernphysik in Heidelberg ist ein Experiment vom Ives-Stilwell Typ. Im Gegensatz zu dem klassischen Experiment sind die Rollen von Lichtquelle und Frequenzanalysator vertauscht. Als Analysator dienen im Ring gespeicherte  ${}^7\text{Li}^+$  Ionen, die sich mit 6.4% Lichtgeschwindigkeit im Laborsystem bewegen. Hier soll zunächst nur das Prinzip beschrieben werden, die speziellen Aspekte aufgrund des Speicherrings werden in Kapitel 3 behandelt.

Das Experiment wurde 1993 mit einem „coasting beam“ (kontinuierlicher Ionenstrahl) durchgeführt und 1994 veröffentlicht [Gri94a, Gri94b]. Licht von zwei Lasern wird in der Experimentierstrecke (Kapitel 3) parallel und antiparallel zur Bewegungsrichtung eingestrahlt und das Fluoreszenzlicht bei Resonanz mit einem  $\Lambda$ -förmigen 3-Niveau System senkrecht zur Bewegungsrichtung gemessen.

In Abbildung 2.1 ist ein Auszug des Termschemas des heliumähnlichen  ${}^7\text{Li}^+$  Ions gezeigt. Im linken Teil des Bildes sind Feinstrukturniveaus eingetragen und im rechten Teil deren Hyperfeinaufspaltung durch den Kernspin  $I = 3/2$ . Der Grundzustand  $1s^2 {}^1S_0$  ist ein Singlettzustand, die Niveaus  $1s2s {}^3S_1$  und  $1s2p {}^3P_2$  gehören zum Triplettssystem. Die angegebenen Frequenzen der Hyperfeinaufspaltung sind von Kowalski et al. [Kowa83] mit kombinierter Laser-Mikrowellen Spektroskopie präzise vermessen worden, die genaue Messung des  ${}^3S_1, F = \frac{5}{2} \rightarrow {}^3P_2, F = \frac{7}{2}$  Übergangs wurde von Riis et al. [Riis94] mit Sättigungsspektroskopie durchgeführt<sup>2</sup>. Die exakte Kenntnis dieser Frequenzen ist eine Voraussetzung für die genaue Messung der relativistischen Dopplerverschiebung, weil durch sie (d. h. die Kehrwerte der Frequenzen) die „bewegten Uhren“ in dem Experiment

---

<sup>2</sup> 1998 wurde von Rong et al. [Rong98] eine neue Messung veröffentlicht. Die gemessene Frequenz für den  ${}^3S_1, F = \frac{5}{2} \rightarrow {}^3P_2, F = \frac{7}{2}$ -Übergang von 546466.91649(87) GHz weicht um 2.3 MHz von der von Riis et al. angegebenen Frequenz (546466.91879(40) GHz) ab. Beide Ergebnisse stimmen innerhalb ihrer Unsicherheiten nicht miteinander überein.

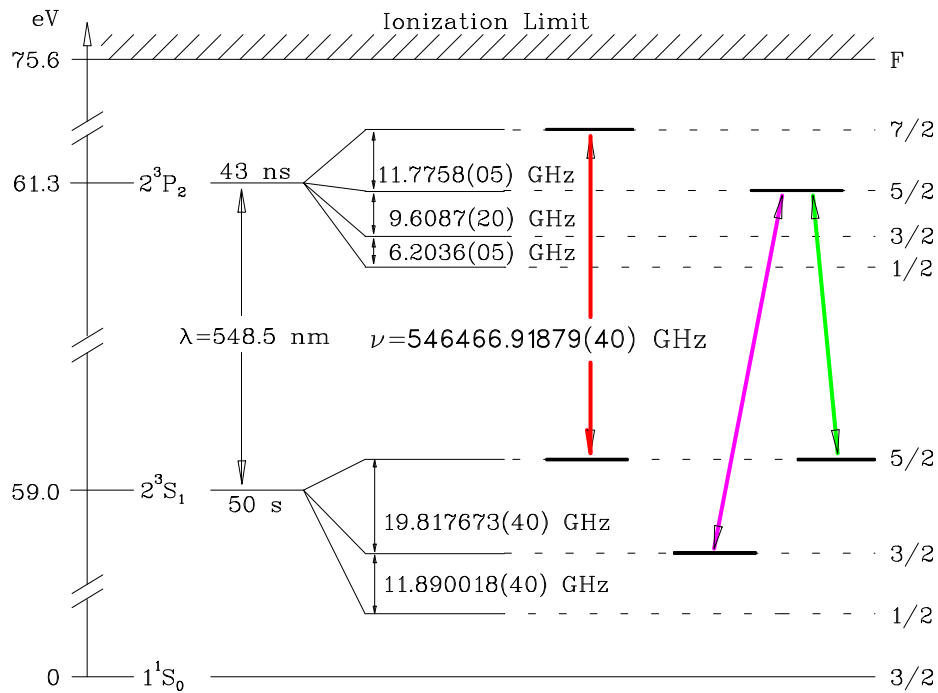


Abbildung 2.1: Auszug aus dem Termschema des heliumähnlichen  ${}^7\text{Li}^+$  Ions.

realisiert werden.

In Abbildung 2.2 ist die idealisierte Situation bei der Spektroskopie im Laborsystem dargestellt. Ein  ${}^7\text{Li}^+$  Ion bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\beta = v/c$  im feldfreien Raum und wird dabei durch parallel und antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung eingestrahelte ebene Lichtwellen angeregt. Die Anregung erfolgt zwischen den Hyperfeinstrukturniveaus des  $1s2s\ 3S_1 \rightarrow 1s2p\ 3P_2$  Feinstrukturübergangs, (vgl. Abbildung 2.1) deren Übergangsfrequenzen bzw. -Wellenlängen im Ruhesystem bei 548.5 nm sich nur um etwa  $\Delta\lambda/\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$  unterscheiden. Entsprechend der Dopplerverschiebung liegen die Wellenlängen im Laborsystem bei 514.5 nm für die parallele Anregung und bei 584.6 nm für die antiparallele Anregung.

Das Laserlicht der Wellenlänge 514.5 nm wird von einem Single Mode Argonionenlaser erzeugt [Gri94b, Merz91]. Durch die Stabilisierung auf die  $a_3$ -Komponente des P(13) 43 – 0 Hyperfeinübergangs in  ${}^{127}J_2$  gemäß der CIPM-Empfehlung [CIPM92] läuft der Laser auf der festen, präzise bekannten Frequenz  $\nu_p = 582.490603370(130)$  THz und

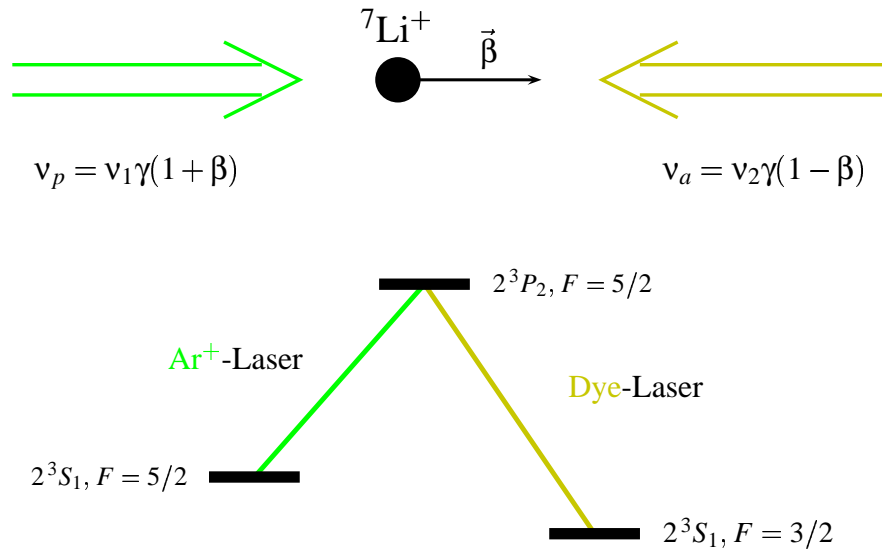


Abbildung 2.2: Prinzipielle Anordnung bei dem Testexperiment zur speziellen Relativitätstheorie am Speicherring TSR. Ein den feldfreien Raum der Experimentierstrecke durchfliegendes  ${}^7\text{Li}^+$  Ion wird parallel und antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung mit Laserlicht bestrahlt. Die Frequenzen der Laserstrahlen ( $\nu_a, \nu_p$ ) sind auf die Übergangsfrequenzen im Ruhesystem der Ionen ( $\nu_1, \nu_2$ ) abgestimmt.

legt über die Resonanzbedingung die Geschwindigkeit der Ionen im Speicherring fest:

$$v = \beta c = 19112.580(2) \text{ km/s.}$$

Das parallel eingestrahelte Licht der Wellenlänge 584.6 nm wird mit einem Farbstofflaser erzeugt. Der Laser wird in dem Experiment über die  $\Lambda$ -Resonanz durchgestimmt, die Frequenzkontrolle erfolgt dabei durch die synchron durchgeführte Sättigungsspektroskopie am  ${}^{127}\text{J}_2$ , sowie anhand von Frequenzmarken eines jodstabilisierten Fabry-Perot Spektrumanalysators [Gri94b]. Die absolute Frequenzkalibrierung konnte durchgeführt werden, nachdem die i-Komponente des R(99) 15 – 1 Hyperfeinübergangs in  ${}^{127}\text{J}_2$  interferometrisch vermessen wurde [Gri94c].

Durch die gewählte Geometrie ist im Ruhesystem der Ionen nur eine Geschwindigkeitsklasse resonant mit beiden Lasern, sodaß das Verfahren in 1. Ordnung dopplereffrei ist.

Bei der Spektroskopie der  $\Lambda$ -Resonanz kann kontinuierliche Fluoreszenz nur dann beobachtet werden, wenn beide dopplerverschobenen Laserfrequenzen mit den Resonanzfrequenzen im Ruhesystem der Ionen übereinstimmen. Andernfalls führt optisches Pumpen zum Aussterben der Fluoreszenz nach wenigen Absorptions-Emissions Zyklen. Im Rah-

men der speziellen Relativitätstheorie sind diese Bedingungen durch

$$\nu_a = \gamma(1 - \beta)\nu_1, \quad \nu_p = \gamma(1 + \beta)\nu_2 \quad (2.1)$$

gegeben, wobei  $\nu_a$  die Laserfrequenz für die Anregung des  $^3S_1, F = \frac{5}{2} \rightarrow ^3P_2, F = \frac{5}{2}$  Übergangs ist und  $\nu_p$  die Frequenz für den  $^3S_1, F = \frac{3}{2} \rightarrow ^3P_2, F = \frac{5}{2}$  Übergang (Abbildung 2.1).  $\beta$  bezeichnet die Geschwindigkeit der Ionen im Laborsystem in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit,  $\beta = v/c$ . Aus den Gleichungen 2.1 ergibt sich direkt mit  $\frac{1}{\gamma^2} = (1 + \beta)(1 - \beta)$

$$\nu_a = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_p} \quad (2.2)$$

falls die relativistische Zeitdilatation exakt durch die spezielle Relativitätstheorie beschrieben wird.

Das Experiment sucht nach eventuellen Abweichungen von Gleichung 2.2. Die Messungen ergaben eine Differenz zwischen der gemessenen und der berechneten Resonanzfrequenz<sup>3</sup> für den antiparallel eingestrahnten Laser von

$$\nu_a^{Exp} - \nu_a^{SRT} = 4.3 \pm 3.2 \text{ MHz} \quad (2.3)$$

Der theoretische Hintergrund zur quantitativen Analyse solcher Abweichungen soll daher im nächsten Abschnitt besprochen werden. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels erfolgt eine kurze Diskussion des Ergebnisses.

## 2.3 Testtheorien

Die spezielle Relativitätstheorie basiert auf dem Prinzip der Relativität: es gibt keine ausgezeichneten Bezugssysteme, in geradlinig zueinander bewegten Systemen laufen physikalische Prozesse gleich ab. Demzufolge können die Transformationsgleichungen für den Übergang zwischen zwei (Inertial-) Systemen nur von deren Relativgeschwindigkeit abhängen (und evtl. von Drehungen) und müssen daher unabhängig von der Raumrichtung

---

<sup>3</sup>Vgl. Fußnoten auf den Seiten 7 und 16.

sein, in der die Bewegung stattfindet. Hinzu kommt das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: die Geschwindigkeit des Lichts ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle und unabhängig von der Ausbreitungsrichtung [Jack75]. Als Folge dieser Prinzipien ergibt sich die Lorentztransformation als Verknüpfung zwischen verschiedenen Inertialsystemen.

Die Konsequenzen von eventuellen Verletzungen dieser Prinzipien wird in Testtheorien untersucht [Robe49, Mans77]. Dabei wird die Existenz eines ausgezeichneten Bezugssystems angenommen (Äthersystem  $\Sigma$ ), in dem die Lichtgeschwindigkeit als konstant und isotrop angenommen wird. Als Äthersystem wird dabei das System angenommen, in dem die Dipolanisotropie der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung verschwindet. In diesem kosmologisch ausgezeichneten System bewegt sich die Erde mit einer Geschwindigkeit von  $v' \approx 380$  km/s [Lubi85, Lynd86].

Für dazu bewegte Inertialsysteme  $S$  wird dagegen nur angenommen, daß sie durch eine „verallgemeinerte“ Transformation mit  $\Sigma$  verknüpft sind, die nach [Kret92] folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
 t &= aT + \frac{1}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{x} \\
 &= \left( a - \frac{b}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v} \right) T + \frac{b}{c} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X}) + \frac{d}{c} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot [\mathbf{X} - \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X})]) \\
 \mathbf{x} &= -bT \mathbf{v} + b \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X}) + d [\mathbf{X} - \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X})]
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Darin bezeichnen  $(T, \mathbf{X})$  die Koordinaten und  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit im Äthersystem  $\Sigma$ <sup>4</sup>,  $(t, \mathbf{x})$  die Koordinaten im relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten System  $S$ . Die Funktionen  $a = a(v^2)$ ,  $b = b(v^2)$ , und  $d = d(v^2)$  sind die Koeffizienten dieser Transformation und hängen nur quadratisch von  $v$  ab.

Die Funktion  $a$  ist der Zeitdilationsfaktor für den Übergang zwischen  $\Sigma$  und  $S$ ,  $b$  und  $d$  beschreiben die Längenkontraktion in Richtung und transversal zu  $\mathbf{v}$ . Der dimensionslose Vektor  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  ist durch die angewendete Methode der Uhrensynchronisation bestimmt.

<sup>4</sup> $c$  tritt in [Kret92] nicht explizit auf ( $c=1$ ), weil die Geschwindigkeiten in Einheiten von  $c$  angegeben werden.



Mansouri und Sexl [Mans77] zeigen, daß die Einstein'sche Konvention der Uhrensynchronisation (Austausch von Lichtsignalen) und die Synchronisation durch langsamen Uhrentransport (Methode der klassischen nichtrelativistischen Physik) genau dann äquivalent sind, wenn der Zeitdilationsfaktor  $a$  durch  $a = \frac{1}{\gamma} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}$  gegeben ist, also mit der speziellen Relativitätstheorie übereinstimmt.

Mit diesen Transformationsregeln ist die Lichtgeschwindigkeit nur noch in dem Äthersystem konstant, aber nicht mehr in dazu bewegten Bezugssystemen. Die Lichtgeschwindigkeit in  $S$  findet man, wenn man die Gleichung für den Lichtkegel  $T^2 - \mathbf{X}^2 = 0$  in die Koordinaten  $(t, \mathbf{x})$  umrechnet. Für die Lichtgeschwindigkeit  $c_v$  in Richtung des Einheitsvektors  $\hat{e}$  in  $S$  gilt dann [Kret92]

$$\frac{c}{c_v} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{e} + \frac{a}{b(1 - \beta^2)} \left( v \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - \beta^2) \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \theta} \right)$$

$\theta$  ist der Winkel zwischen  $\hat{e}$  und  $\hat{v}$  und  $\beta$  ist wieder der Betrag von  $\mathbf{v}$  in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit.

Die Gleichungen 2.4 beschreiben die allgemeinste lineare Transformation zwischen  $\Sigma$  und  $S$  unter der Annahme, daß es in der Raumzeit keine ausgezeichneten Richtungen gibt, sondern nur das ausgezeichnete Bezugssystem  $\Sigma$ . Sie reduziert sich auf die Lorentztransformation, wenn die auftretenden Funktionen durch

$$a(v^2) = \frac{1}{b(v^2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad d(v^2) = 1, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \quad (2.5)$$

gegeben sind:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\gamma} T - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \\ &= \gamma T - \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X}) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{X} - \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X})] \\ \mathbf{x} &= -\gamma T \mathbf{v} + \gamma \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X}) + \mathbf{X} - \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Bekannter ist der Fall, wenn die Relativbewegung nicht in beliebiger Richtung in den Bezugssystemen stattfindet, sondern entlang von Achsen erfolgt und die Bezugssysteme nicht gegeneinander verdreht sind. Erfolgt die Bewegung beispielsweise entlang der x-

	$\Sigma$ Äthersystem	$S$ Ruhesystem	$S'$ Laborsystem
$O(\Sigma)$	$0$	$-\frac{b}{a} \frac{1}{\gamma^2} v$	$-\frac{b'}{a'} \frac{1}{\gamma'^2} v'$
$O(S)$	$\mathbf{v}$	$0$	$\mathbf{w}'$
$O(S')$	$\mathbf{v}'$	$\mathbf{w}$	$0$

Tabelle 2.1: Die Geschwindigkeiten in den Bezugssystemen  $\Sigma, S$  und  $S'$ . In der 1. Zeile stehen die Bezugssysteme und darunter die Geschwindigkeiten in diesem System.  $O(\dots)$  bedeutet dabei den Ursprung des angegebenen Systems. Die Geschwindigkeit des Äthersystems  $\Sigma$  in dem dazu bewegten Inertialsystem  $S$  ist nur dann gleich  $-\mathbf{v}$ , wenn  $\frac{b}{a} = \gamma^2$  gilt, wie im Falle der speziellen Relativitätstheorie. I. allg. dagegen gilt  $v_\Sigma \neq -v$ . In der 2. Zeile sind zur Vereinfachung nur die Beträge der „inversen“ Geschwindigkeit angegeben für den speziellen Fall, daß die Relativbewegung entlang einer Achse in beiden Systemen erfolgt (z. B. x-Achse). Das Gleiche gilt sinngemäß für  $S'$ .

Achse,  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_x$ , dann ist mit  $\mathbf{X} = (X, Y, Z), \mathbf{x} = (x, y, z), \beta = \frac{v}{c}$ :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{X} = X, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = vx, \quad \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = v$$

und die Transformationgleichungen nehmen die bekanntere Form an:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct - \beta X) \\ x &= \gamma(X - \beta ct) \\ y &= Y \\ z &= Z \end{aligned} \tag{2.7}$$

Zur allgemeinen Analyse der Zeitdilatation muß noch ein weiteres bewegtes Bezugssystem eingeführt werden (Laborsystem), das im folgenden mit  $S'$  bezeichnet wird und das sich mit der Geschwindigkeit  $v'$  relativ zum Äthersystem bewege. Die Geschwindigkeit von  $S'$  im System  $S$  sei  $\mathbf{w}$  (Tabelle 2.1). Das System  $S'$  mit den Koordinaten  $(t', \mathbf{x}') = (t', x', y', z')$  ist über eine zu den Gleichungen 2.4 analoge Transformation mit  $\Sigma$  verbunden. Die Transformation von  $S'$  nach  $S$  ergibt sich dann, indem man die inverse Transformation  $S' \rightarrow \Sigma$  mit der Transformation  $\Sigma \rightarrow S$  kombiniert. Nach [Kret92] transformieren sich in  $S'$  gemessene Zeitintervalle  $\Delta t'$  gemäß

$$\Delta t = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \Delta t' \tag{2.8}$$

mit dem Zeitdilationsfaktor

$$\Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{a}{a'} + \frac{b}{a'c} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot [\hat{\mathbf{m}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}') - \mathbf{v}]) + \frac{d}{a'c} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot [\mathbf{v}' - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}')]) \quad (2.9)$$

Dabei ist  $w$  der Betrag der Geschwindigkeit von  $S'$  relativ zu  $S$  und  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{w}}{w}$  der Richtungsvektor von  $\mathbf{w}$  in  $S$ . Hierin treten alle in der Testtheorie enthaltenen Funktionen bzw. Testparameter auf, insbesondere hängt  $\Gamma$  von den Geschwindigkeiten der bewegten Systeme im Äthersystem und von der Uhrensynchronisation ab.

Wie in [Kret92] gezeigt wird, gilt das aber nicht mehr für die Dopplerformel. Ein Beobachter ( ${}^7\text{Li}^+$ -Ion) im Bezugssystem  $S$  registriert eine verschobene Frequenz  $\nu$ , wenn die Quelle im System  $S'$  (d. h. die Geschwindigkeit der Quelle in  $S$  ist  $\mathbf{w}$ ) mit der Frequenz  $\nu_0$  Licht in Richtung von  $\mathbf{w}$  („+“) oder entgegengesetzt aussendet („-“):

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{\alpha(\nu^2)}{\alpha(\nu'^2)} \frac{1 \pm \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.10)$$

Die Funktion  $\alpha$  beschreibt die Abweichungen von  $a$  und  $a'$  von ihren SRT-Werten

$$a = a(\nu^2) = \frac{1}{\gamma} \alpha(\nu^2), \quad a' = a(\nu'^2) = \frac{1}{\gamma'} \alpha(\nu'^2)$$

und  $\beta = w_{SRT}/c$  ist der Betrag der Geschwindigkeit  $\mathbf{w}$  von  $S'$  in  $S$  in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit. Bis auf den Quotienten  $\frac{\alpha(\nu^2)}{\alpha(\nu'^2)}$  stimmt dieses Ergebnis mit der speziellen Relativitätstheorie überein.

Bei dem Testexperiment am TSR (Abschnitt 2.2) wird ein 2-Photonen-Übergang ( $\Lambda$ -Resonanz) mit zwei unterschiedlichen Frequenzen  $\nu_1, \nu_2$  im System  $S$  untersucht. Die Übergänge werden von zwei Lasern (im System  $S'$ ) angeregt. Ein Laser wird mit fester Frequenz  $\nu_a$  parallel zur Bewegungsrichtung der Ionen eingestrahlt, der andere antiparallel (Frequenz  $\nu_p$  in  $S'$ ). Für die Frequenz der  $\Lambda$ -Resonanz beim Durchstimmen der Frequenz  $\nu_a$  gilt dann:

$$\nu_a = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_p} \left[ \frac{\alpha(\nu^2)}{\alpha(\nu'^2)} \right]^2 \quad (2.11)$$

wobei in der speziellen Relativitätstheorie der Term in der eckigen Klammer den Wert 1 hat. Die Dopplerformel ist also unabhängig von der verwendeten Uhrenkonvention ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) und unabhängig von den Längenkontraktionsfaktoren  $b$  und  $d$ .

Aufgrund aller bisherigen Beobachtungen ist klar, daß eventuelle Abweichungen klein sein werden. Für  $[\alpha(v^2)/\alpha(v'^2)]^2$  kann deshalb die Entwicklung bis zur 1.Ordnung in  $v^2$  bzw.  $v'^2$  verwendet werden

$$\left[ \frac{\alpha(v^2)}{\alpha(v'^2)} \right]^2 = [1 + \delta\alpha(v^2 - v'^2) + \dots]^2 = 1 + 2\delta\alpha(v^2 - v'^2) + \dots \quad (2.12)$$

Der Term  $(v^2 - v'^2)$  muß unter Bezug auf das Äthersystem berechnet werden durch die Anwendung von gekoppelten Transformationen nach Gl. 2.4. Da hier aber nur die 1. Ordnung betrachtet werden soll, kann dafür der Ausdruck  $(v^2 - v'^2)_{SRT}$  verwendet werden, der sich nach der speziellen Relativitätstheorie ergibt

$$(v^2 - v'^2)_{SRT} = 1 - v'^2 - \frac{(1 - v'^2)(1 - w'^2)}{(1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}')^2} \approx w'^2 + 2v'w' \cos \theta'$$

$\theta'$  ist der Winkel zwischen  $\mathbf{v}'$  und  $\mathbf{w}'$ :  $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = v'w' \cos \theta'$ . Die rechte Seite ergibt sich, indem das Skalarprodukt eingesetzt und alle höheren Ordnungen vernachlässigt werden, bei denen die Summe der Exponenten von  $\frac{v}{c}$  und  $\frac{w}{c}$  größer als 2 ist.

Mit diesen Näherungen ergibt sich schließlich für die Resonanzfrequenz

$$v_a = \frac{v_1 v_2}{v_p} [1 + 2\delta\alpha(w'^2 + 2v'w' \cos \theta')] \quad (2.13)$$

$\delta\alpha = 0$  entspricht der speziellen Relativitätstheorie. In diesem Fall ist das Produkt der Ruhfrequenzen gleich dem Produkt der durch  $\pm w'$  dopplerverschobenen Resonanzfrequenzen.

Für  $\delta\alpha \neq 0$  ergibt sich dagegen eine zusätzliche quadratische Abhängigkeit von  $w'$ , sowie ein Einfluß durch die Bewegung des Laborsystems relativ zum Äthersystem. Die Rotation der Erde führt außerdem zu einer sideralen Modulation des Terms  $2v'w' \cos \theta$ . Dieser Beitrag ist durch das Verhältnis von  $2v'/W' \approx 2 \cdot 380 \frac{km}{s} / 1.91 \cdot 10^4 \frac{km}{s} \approx 0.04$  klein gegen den ersten Term.

Die Ausführungen diese Abschnitts lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Aus der Theorie von Mansouri und Sexl ergeben sich im Falle einer Verletzung der speziellen Relativitätstheorie aufgrund der Existenz eines ausgezeichneten Bezugssystems (Äthersystem) die Abhängigkeit der Zeitdilatation und der gemessenen

Geschwindigkeiten von der Konvention zur Synchronisation der Uhren und von der Relativbewegung zum Äthersystem. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit im bewegten System nicht mehr isotrop.

2. Ein Experiment vom Ives-Stilwell Typ führt einen „Uhrenvergleich“ durch, d. h. es werden Zeitintervalle in zueinander bewegten Bezugssystemen verglichen und damit die Zeitdilatation untersucht. Eine Synchronisation von Uhren sowie Längenmessungen sind in einem solchen Experiment nicht beinhaltet. Demzufolge können keine Aussagen über eine eventuelle Abhängigkeit von der Konvention zur Uhrensynchronisation, der Längenkontraktion und der Richtungsabhängigkeit von Geschwindigkeiten gemacht werden.

## 2.4 Die Grenzen des TSR-Experiments 1993 und mögliche Verbesserungen

Die gemessene Resonanzfrequenz (Gl. 2.3) stimmt innerhalb der  $2\sigma$ -Unsicherheit mit der speziellen Relativitätstheorie überein. Daraus ergibt sich eine Obergrenze für den Testparameter  $\delta\alpha$  (vgl. Gl. 2.13) [Gri94a] von<sup>5</sup>

$$\delta\alpha < 8 \cdot 10^{-7} \quad . \quad (2.14)$$

Die Beobachtung einer sideralen Modulation gemäß dem 2. Term in Gleichung 2.11 erfordert nach den Ausführungen des vorherigen Abschnitts eine weitaus höhere Meßgenauigkeit (vgl. Gleichung 2.3), weil dieser Effekt nur etwa das 0.04-fache der richtungsunabhängigen Verschiebung beträgt. Darüber hinaus wäre eine Langzeitmessung oder eine gleichzeitige Messung in zwei verschiedenen Armen des Speicherrings erforderlich (Winkel  $90^\circ$ ) [Klei91, Klei92]. Solche Messungen wurden nicht durchgeführt, die gemachten Beobachtungen stellen daher einen zeitlichen Mittelwert bzgl. der sideralen Modulation dar.

---

<sup>5</sup> Die Berechnung der Übergangsfrequenz  $\nu_a$  gemäß der Messung von Rong et al. (Übergang  $^3S_{1,F} = 5/2 \rightarrow ^3P_{2,F} = 7/2$ , Fußnote auf Seite 7) führt auf eine Differenz von  $\nu_a^{exp} - \nu_a^{SRT} = 8.5(3.4)$  MHz. Wird dieses Ergebnis im Rahmen der  $3\sigma$ -Unsicherheit als konsistent mit der speziellen Relativitätstheorie angesehen, dann ergibt sich damit als Obergrenze ebenfalls  $\delta\alpha < 8 \cdot 10^{-7}$ .

Fehlerquelle	Unsicherheit [MHz]
Interpolation bei der Bestimmung der Farbstofflaser-Frequenz	< 0.85
Verschiebung durch Restwinkel zwischen der Ionen-Bewegungsrichtung und den Laserstrahlen	< 0.285
AC-Stark Verschiebung durch Unsicherheit der Elektronenkühler-Spannung	< 1.0
Verschiebung durch Photonen-Rückstoß	< 0.7
Phasenfrontstörungen in den Lichtfeldern	< 2.7
Signalkorrektur zur Kompensation der Lebensdauer	< 0.5
Fit-Fehler	< 0.08
Gesamtunsicherheit	< 3.1

Tabelle 2.2: Frequenzunsicherheiten beim Testexperiment zur speziellen Relativitätstheorie nach [Gri94b]

Das erzielte Ergebnis ist der zur Zeit genaueste Test des relativistischen Zeitdilationsfaktors, die gemessene Resonanzfrequenz  $\nu_a^{Exp}$  ist innerhalb des  $2\sigma$ -Fehlers mit der speziellen Relativitätstheorie verträglich. Eine verbessertes Testexperiment mit reduzierten Frequenzunsicherheiten zur gesicherten Verifikation oder ggf. Falsifikation der relativistischen Zeitdilatation erscheint daher sinnvoll. Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Experimentschemas, das durch die Verbesserung der Ionenstrahlpräparation und des Meßverfahrens zur Reduzierung der größten Frequenzunsicherheiten führen soll. Darüber hinaus sind weitere Arbeiten, hauptsächlich im Bereich der Frequenzkontrolle erforderlich, die aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sind.

Tabelle 2.2 gibt die Unsicherheiten in der Bestimmung der Resonanzfrequenz  $\nu_a^{Exp}$  an [Gri94a]. Die einzelnen Beiträge sollen im Folgenden kurz diskutiert und mögliche Verbesserungen dargelegt werden. Die größte Einzelunsicherheit resultiert aus Phasenfrontstörungen der Lichtfelder, die hauptsächlich durch Deformationen in den Eintrittsfenstern der TSR-Experimentierstrecke begründet sind [Gri94b]. Diese Fenster wurden inzwischen ausgetauscht. Vor und nach dem Ausheizen wurden die Oberflächen der Fenster mittels Shear-Interferometrie kontrolliert. Demnach sind die Abweichungen im Vergleich zu einer ideal ebenen Oberfläche im Bereich des Laserstrahl-Durchtritts  $< \frac{\lambda}{5}$ , die Phasenfrontunsicherheiten sind damit auf  $\Delta\nu < 93$  kHz reduziert, wobei die bisherige Unsi-

cherheit von  $235 \mu\text{rad}$  für den Winkel zwischen Laser- und Ionenstrahl angesetzt wurde<sup>6</sup>. Diese Unsicherheit ist mit dem alten Wert  $\Delta\nu < 2.7 \text{ MHz}$  zu vergleichen und kann weiter reduziert werden, wenn die Lagemessung des Laser- und vor allem des Ionenstrahls verbessert wird. Maßnahmen zur verbesserten geometrischen Kontrolle der Laserstrahlen und ggf. des Ionenstrahls (Scraper) ermöglichen eine Reduzierung der Unsicherheit durch Restwinkel. Die bisherige Messung der Ionenstrahllage durch das *Position Pick Up System* war bis auf  $\pm 0.2 \text{ mm}$  genau, bei einem Abstand der beiden Meßstellen in der Experimentierstrecke von  $2.4 \text{ m}$ . Die Kontrolle des geometrischen Überlapps zwischen dem Ionenstrahl und den Laserstrahlen mit Hilfe der externen Justage-Targets konnte auf  $\pm 2 \text{ mm}$  genau erfolgen, wobei deren Abstand  $14 \text{ m}$  beträgt. Der daraus resultierende mögliche Winkelfehler führt zu einer Frequenzunsicherheit von  $285 \text{ kHz}$  [Gri94b]. Mit Scrapern wäre eine Genauigkeit der Lagemessung im Bereich  $\leq 0.5 \text{ mm}$  möglich, und zwar sowohl für die Laserstrahlen als auch für den Ionenstrahl. Bei einer Gesamt-Winkelunsicherheit von  $\leq 200 \mu\text{rad}$  reduziert sich der Winkelfehler damit auf  $< 85 \text{ kHz}$ .

Bei dem 1993 durchgeführten Experiment war die Strahl-Lebensdauer mit  $8.8 \text{ sec}$  aufgrund von Vakuump Problemen sehr kurz. Bei der sonst beobachteten Lebensdauer von  $16 - 18 \text{ sec}$  wird der Fehler aufgrund der Lebensdauer vernachlässigbar sein.

Verbesserungen in der Kontrolle der optischen Frequenzen sind durch die Verwendung weiterer stabilisierter Laser möglich. Durch die elektronische Anbindung des Spektroskopielasers an diese Frequenzstandards lassen sich die Unsicherheiten in diesem Bereich von  $< 850 \text{ kHz}$  auf  $< 160 \text{ kHz}$  reduzieren.

Die Spektroskopie mit intensiven Laserfeldern an einem  $\Lambda$ -System läßt sich im Bild der *Dressed States* verstehen [CDG92]. Die Wechselwirkung mit den Lichtfeldern führt zur Aufspaltung der Niveaus. Wird ein Laser mit fester Frequenz eingestrahlt und der andere Laser über die Resonanz durchgestimmt, dann wird in dem 2-Photonen-Signal das Autler-

---

<sup>6</sup>Die Frequenzstörungen entstehen wegen  $\nu = \dot{\Phi}$  durch die Phasenverschiebungen, wenn die transversale Position in einer nicht ebenen Welle geändert wird (vgl. [Gri94b]). Die resultierende Frequenzunsicherheit ist daher proportional zum Winkel bzw. der Unsicherheit des Winkels zwischen Laser- und Ionenstrahl.

Townes Dublett sichtbar. Ist der Festfrequenzlaser dabei nicht exakt auf Resonanz, dann ergibt sich ein asymmetrisches Profil. Das im Experiment beobachtete Signal ist dabei die Faltung dieses Linienprofils mit der Geschwindigkeitsverteilung und ebenfalls asymmetrisch, wenn der Festfrequenzlaser nicht mit der zentralen Geschwindigkeitsklasse resonant ist. Darüber hinaus ist der Schwerpunkt des Signals verschoben, was als *AC-Stark Shift* bezeichnet wird. Nähere Einzelheiten hierzu werden in Anhang E beschrieben.

Die AC-Stark Verschiebung hängt von den experimentellen Bedingungen ab, insbesondere von der Impulsbreite der Ionenverteilung. Zur Vermeidung dieser Unsicherheit bei der in 1. Ordnung dopplerfreien Messung der Resonanzfrequenz sind zwei gegensätzliche Strategien möglich:

1. Das Experiment kann mit einer hinreichend breiten Impulsverteilung durchgeführt werden, sodaß im Bereich der Geschwindigkeitsklasse „0“ sicher eine symmetrische Impulsverteilung vorliegt und damit keine Verschiebung der Resonanz auftritt, oder
2. es kann mit einer möglichst schmalen, gut kontrollierten Impulsverteilung gearbeitet werden. Die Verschiebung ist in diesem Fall näherungsweise proportional zur Differenz der Geschwindigkeit der mit dem Festfrequenzlaser resonanten Ionen und der mittleren Geschwindigkeit der Ionenverteilung (Anhang E).

Im ersten Fall trägt zu dem dopplerfreien Signal nur ein kleiner Teil aller gespeicherter Ionen bei, das Signal ist also sehr schwach und mit einem hohen Hintergrund durch die Wechselwirkung der übrigen Ionen mit den Lasern behaftet. Bei dem bisherigen Experiment wurde zur Ionenpräparation (Kühlung und Geschwindigkeitsabstimmung) die Elektronenkühlung eingesetzt. Messungen ergaben AC-Stark Verschiebungen der Resonanz je nach Laserleistung bzw. Fokussierung von 660 kHz [Gri94b] bis zu 4.8 MHz [Klei91], wenn durch die Einstellung der Energie des Elektronenkühlers die Geschwindigkeit entsprechend einer Frequenzverstimmung von 1 GHz (paralleler Laser) geändert wurde. Ferner zeigte sich, daß aufgrund der Drift des Kathodenpotentials des Elektronenkühlers von bis zu 2 GHz mit einer Unsicherheit der Resonanzfrequenz von  $\pm 1.0$  MHz gerechnet werden muß [Gri94b] (Tabelle 2.2). Eine verbesserte Auflösung setzt bei die-



sem Verfahren also eine erheblich bessere Kontrolle der Potentiale des Elektronenkühlers voraus. Die letzte Problematik läßt sich umgehen, wenn das Experiment nicht mit einem kontinuierlichen Ionenstrahl sondern mit einem RF-gebunchten Strahl durchgeführt wird. Dabei durchläuft der Ionenstrahl ein Radiofrequenzfeld (RF-Feld), das auf einer Oberwelle der Umlauffrequenz eingestrahlt wird (vgl. Kapitel 5). In diesem Fall dient der Elektronenkühler nur zur Strahlkühlung, die Geschwindigkeit wird mit RF-Genauigkeit durch die Bunchfrequenz (Frequenz des RF-Feldes) einstellbar.

Im zweiten Fall muß mit wenigen Ionen gearbeitet werden, damit eine möglichst geringe Impulsunschärfe erzielt werden kann (vgl. Kapitel 4). Der Anteil der Ionen, die zu dem Signal beitragen steigt mit abnehmender Impulsbreite. Ein wesentlicher Fortschritt wird hierbei durch die verbesserte Kontrolle der Ionengeschwindigkeit erreicht, wobei die Breite der Geschwindigkeitsverteilung über das mit Elektronenkühlung erreichbare Maß hinaus durch Laserkühlung reduziert wird. Ein solch kalter Ionenstrahl ( $\sim 100 \text{ mK}$ )<sup>7</sup> ist natürlich auch in seiner räumlichen Ausdehnung stark komprimiert. Diese gut definierte räumliche Struktur kann bei diesem Verfahren für synchrone Techniken ausgenutzt werden. Ein Beispiel ist die auf die Ionenbewegung synchronisierte Anregung, die dadurch auf den feldfreien Raum begrenzt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird für diesen Ansatz ein spezielles Verfahren zur Ionenstrahlpräparation und die Möglichkeiten der Spektroskopie an einem solchen Strahl untersucht. An dieser Stelle soll kurz das Prinzip dargelegt werden, die genauen Details werden in den folgenden Kapiteln besprochen.

Zur Kühlung des Strahls wird das Schema des gebunchten Laserkühlens angewendet [Hang95], das gegenüber der Kühlung eines kontinuierlichen Ionenstrahls [Schr90, Klei91, Petr93] einige Vorzüge bietet. Die Ionen werden dabei simultan dem Radiofrequenzfeld zum Buchen des Strahls (Abschnitt 3.3.2) und dem Laserstrahl für die Kühlung ausgesetzt. Die erforderliche Gegenkraft der dispersiven Kraft des Kühllasers wird von dem RF-Feld bereitgestellt. Durch dieses Verfahren ist die mittlere Geschwindigkeit der Ionen

---

<sup>7</sup>Temperaturen in diesem Bereich sind mit  ${}^7\text{Li}^+$  im Speicherring bei den gegenwärtig zur Verfügung stehenden Kühlraten nur mit dünnen Ionenstrahlen erreichbar. In Abschnitt 4.3.1 werden die Heizraten eines solchen Strahls weniger Ionen mit der Situation bei einem „herkömmlichen“ Ionenstrahl verglichen.

gleich der Geschwindigkeit des *synchronen Teilchens*, dem Ion, das synchron zur RF-Phase umläuft. Dadurch wird die Ionengeschwindigkeit direkt und mit hoher Präzision durch die Wahl der RF-Frequenz einstellbar, die Funktion des Lasers besteht jetzt darin, die *Synchrotronoszillation* der Ionen in den *RF-Buckets* zu dämpfen.

Die räumliche Struktur des gebunchten Strahls kann dabei zur Verbesserung des Signal/Rausch-Verhältnisses genutzt werden: durch die zeitaufgelöste Messung des Fluoreszenzlichts synchron zum Umlauf der Ionen ist der Ort, an dem ein Photon emittiert wurde relativ zur Bucketmitte bestimmbar. Die Meßzeit kann daher ohne Signalverlust auf den Zeitraum reduziert werden, in dem Ionen die in den Detektor abgebildete Strecke durchfliegen. Die Untergrundzählrate reduziert sich in gleichem Maße wie die Meßzeit, sodaß das Signal/Untergrund-Verhältnis um den entsprechenden Faktor zunimmt. Darüber hinaus ermöglicht die zeitaufgelöste Messung des Fluoreszenzlichts gleichzeitig die räumliche Beobachtung der fluoreszierenden Ionen in den Buckets.

Das hier skizzierte Verfahren würde aber aufgrund des komprimierten Phasenraums, der den Ionen im gebunchten und gekühlten Strahl verbleibt, zu neuen Komplikationen führen. Die Strahlinterne Streuung der Ionen untereinander (Intra Beam Scattering) wäre nicht länger vernachlässigbar und würde zur dominierenden Heizrate werden (Abschnitt 4.3.1), des weiteren könnten Raumladungseffekte die räumliche Struktur des Ionenstrahls stören. Aus diesem Grund sollte ein Testexperiment mit einem gebunchten Ionenstrahl durchgeführt werden, der nur aus wenigen Ionen pro Bucket besteht. Für die Spektroskopie zugänglich sind nur Ionen im angeregten Triplett-Zustand (Abschnitt 2.2). Die Grundzustände, die etwa 80 - 90% des Ionenstrahls ausmachen, tragen nicht zum Signal bei, wohl aber zu den erwähnten Störeffekten. Es wurde deshalb ein Verfahren entwickelt, das diese isomeren Zustände im Speicherring zunächst im Geschwindigkeitsraum trennt, und dann die Grundzustände entfernt (Kapitel 5).

Die Entwicklung des Ionenstrahl-Präparationsverfahrens bestehend aus der Isomerentrennung, dem gebunchten Laserkühlen des Strahls und der hochempfindlichen, umlaufsynchronen und zeitaufgelösten Fluoreszenzlicht-Detektion ist der Gegenstand dieser Arbeit

und wird im folgenden beschrieben.

Die Sensitivität des hierfür entwickelten Fluoreszenzlichtdetektors (Anhang A) ist im Prinzip ausreichend, das Fluoreszenzlicht einzelner gespeicherter Ionen nachzuweisen. Ein Experiment, bei dem das Fluoreszenzlicht nur eines Ions beobachtet werden soll, wird aber erschwert durch die Zustandsmischung des  $^3P_2$ -Niveaus und den daraus resultierenden Zerfallskanal in den Singlett-Grundzustand. Dennoch ist bei einer optimierten Messung, bei der durch die orts aufgelöste Fluoreszenzlichtmessung eine maximale Reduktion der Untergundzählrate erreicht wird, ein Signal/Rausch-Verhältnis von 7.2 möglich (siehe Ausführungen am Ende von Abschnitt 5.2.1).

Die Impulsbreite der gespeicherten Ionen wird durch das noch im Einzelnen zu beschreibende Verfahren des gebunchten Laserkühlens drastisch reduziert. Die Unsicherheit durch die AC-Stark Verschiebung liegt bei der Spektroskopie mit „schwachen“ Lasern, d.h. gerade gesättigten Übergängen (Anhang E) im Bereich von 100 kHz.

Die Unsicherheit durch den Photonenrückstoß wirkt sich beim gekühlten, gebunchten Strahl nur als zusätzliche Impulsstörung aus und wird durch die Kühlung kompensiert. Dieser Effekt ist beim lasergekühlten Strahl in der Heizrate  $D^{(las)}$  enthalten (Kapitel 4).

Nach den obigen Ausführungen erscheint eine Gesamtunsicherheit in der Bestimmung der Resonanzfrequenz  $\nu_a^{Exp}$  von  $\Delta\nu_a^{Exp} < 250$  kHz realisierbar.

# Kapitel 3

## Experimente im Speicherring

Speicherringe für schwere Ionen sind ein etabliertes Verfahren zum Durchführen von Experimenten an bewegten Ionen. Im Gegensatz zu Atomstrahl- bzw. Ionenstrahl-Experimenten stehen die Ionen nicht nur für eine kurze, einmalige Durchflugszeit durch eine Wechselwirkungsstrecke zur Verfügung, sondern periodisch wiederkehrend innerhalb der Speicherzeit.

Die Speicherzeit oder Strahl-Lebensdauer ist die Zeit, in der der Ionen-Strom auf einen gewissen Bruchteil (üblicherweise das  $\frac{1}{e}$  - oder  $\frac{1}{2}$  - fache) des Anfangsstroms abgefallen ist. Bei stabilen Strahlen wird dieser Verlust hauptsächlich durch die Wechselwirkung mit dem Restgas (Coulomb-Stöße) und ggf. den Elektronen im Strahl eines Elektronenkühlers verursacht, die zur Änderung des Ladungszustandes führen können. Auch wenn es nicht zur Ladungsänderung kommt, kann diesen Restgasstößen eine dominierende Rolle zukommen, wie später noch deutlich wird. Die Speicherzeit ist daher ein für die verwendete Ionensorte, den Restgasdruck und das angewendete Experimentierverfahren charakteristisch. Sie kann im Bereich von Sekunden wie im Falle von  ${}^7\text{Li}^+$  und  ${}^9\text{Be}^+$  bis zu Stunden für höhergeladene Ionensorten liegen, etliche Größenordnungen über der Durchflugszeit.

Durch diese lange Experimentierzeit ermöglicht die Speicherung sonst nicht realisierbare Diagnoseverfahren und Manipulationen des Ionenstrahls, insbesondere die Strahlkühlung.

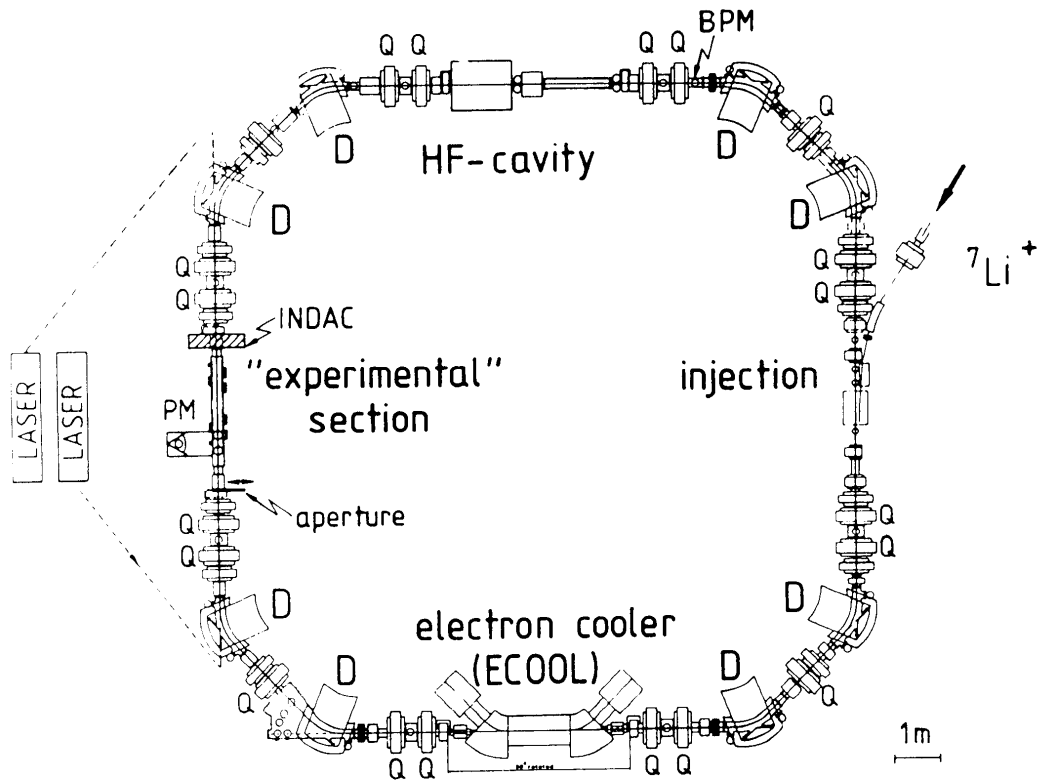


Abbildung 3.1: Der Speicherring TSR

### 3.1 Der Speicherring TSR

Der Speicherring TSR ist aus 8  $45^\circ$ -Dipolmagneten zur Strahlumlenkung und 20 Quadrupolmagneten zur Fokussierung in einer 4-fachen Symmetrie aufgebaut, der Umfang beträgt 55.4 m. Zur Korrektur der Chromatizität stehen ferner 8 Sextupolmagnete zur Verfügung. Jede Periode, bezeichnet als Sektion 1 - 4, besteht aus einem Quadrupoldoublet gefolgt von zwei Dipolen und einem zweiten Quadrupoldoublet. Die Dipole sind in Zweiergruppen an den Ecken angeordnet und lenken den Strahl um jeweils  $45^\circ$  um. Die geraden Strecken zwischen den Dipolgruppen gehören jeweils zur Hälfte zu einer Sektion. Zwischen den Dipolen einer Gruppe befindet sich ein horizontal fokussierender Quadrupolmagnet zur Einstellung der Dispersion.

Der Krümmungsradius der Sollbahn in den Dipolen beträgt  $\rho = 1.15$  m. Bei einem maximalen Magnetfeld  $B = 1.5$  T ergibt sich damit eine maximale magnetische Steifigkeit

von  $B \cdot \rho = 1.7 \text{ Tm}$ . Der Krümmungsradius eines Ions mit dem Impuls  $p$  und der Ladung  $e$  in einem senkrecht zur Bewegungsrichtung verlaufenden homogenen Magnetfeld ist

$$\rho = \frac{p}{eB} \Leftrightarrow \rho B = \frac{p}{e} \quad (3.1)$$

Bei der kinetischen Energie der verwendeten  ${}^7\text{Li}^+$  Ionen von 13.3 MeV entsprechend einem Impuls von 1.40 eVs/m ergibt sich damit eine erforderliche mag. Steifigkeit von 1.4 Tm.

Die erste Sektion beginnt mit der Injektion.  ${}^7\text{Li}^-$  Ionen aus einer Sputterquelle werden im MP Tandembeschleuniger beschleunigt und durch Abstreifen zweier Elektronen in einem Strippergas in  ${}^7\text{Li}^+$  Ionen überführt. Nach der Durchquerung des nicht aktiven Nachbeschleunigers werden die Ionen schließlich durch Multiturninjektion im TSR gespeichert. Nach der ersten Strahlumlenkung befindet sich in der geraden Strecke zwischen 1. und 2. Sektion der Elektronenkühler. Die Elektronenkühlung [Poth90] ist für diese Experimente ein wichtiges Präparationsverfahren und wird im nächsten Kapitel genauer beschrieben. In den Experimenten wurde der  ${}^7\text{Li}^+$ -Strahl nach der Injektion stets durch Elektronenkühlung vorgekühlt. Bezüglich der transversalen Freiheitsgrade wird keine weitere Präparation vorgenommen, die Manipulationen mittels Lichtkräften und Hochfrequenzfeldern betreffen ausschließlich den longitudinalen Freiheitsgrad.

In der 3. Sektion befindet sich schließlich die Experimentierstrecke. In dieser Sektion stehen 2 HV-Driftröhren, Potentialzylinder, ein Induktionsbeschleuniger und Fensterflansche für optische Detektoren zur Verfügung.

Innerhalb der Driftröhren ist die Ionengeschwindigkeit bei angelegter Spannung lokal verschoben. Aufgrund des Dopplereffekts erscheint die Resonanzfrequenz mit einem eingestrahlten Laser dann ebenfalls verschoben. Die Region im homogenen Feldbereich der Driftröhren kann mit Photomultipliern beobachtet werden, sodaß beim Durchstimmen der Spannung die Impulsverteilung der Ionen mit einem Festfrequenzlaser bestimmt werden kann [Petr93]. Dieses Diagnoseverfahren wird hauptsächlich bei Experimenten mit  ${}^9\text{Be}^+$  eingesetzt, da hierbei mit UV-Lasern gearbeitet werden muß und die Bereitstellung einer Kohärenten Strahlungsquelle sehr aufwendig ist [Mies95].

Der Induktionsbeschleuniger [Elle92] ist im wesentlichen ein Transformator, dessen Sekundärwindung aus dem Ionenstrom im TSR besteht. Wird der Strom in den Primärwindungen beispielsweise kontinuierlich erhöht  $i = konst \cdot (t - t_0)$ , dann hat das für die umlaufenden Ionen gemäß dem Induktionsgesetz eine Energieänderung von  $\delta E_{kin} = -q \frac{\Phi}{dt} \sim q \frac{di}{dt}$  pro Umlauf zur Folge. Für kleine Energieänderungen  $\frac{\delta E}{E} \ll 1$  bedeutet das eine proportionale Geschwindigkeitsänderung pro Umlauf mit  $\delta E = mv_0 \delta v$ , also eine konstante Kraft auf die Ionen. Diese Induktionskraft kann bei Laserkühlexperimenten mit einem Laser als Gegenkraft eingesetzt werden (Kapitel 4), die zur Verfügung stehende Kühlzeit ist aber begrenzt, da der Strom durch den Induktionsbeschleuniger dabei ständig ansteigen muß.

### 3.1.1 Die Strahldiagnose im TSR

Im TSR stehen verschiedene Diagnoseeinrichtungen zur Verfügung, mit deren Hilfe die Strahleigenschaften bestimmt werden können.

- Mit Schottky Pick Up-Elektroden kann das induzierte Rauschspektrum des Ionenstrahls gemessen und mit einem Spektrumanalysator ausgewertet werden [Bous87].
- Ein Beam Profile Monitor erstellt ein transversales Profil des Ionenstrahls. Dabei werden die in Restgasstößen erzeugten Ionen in einem homogenen transversalen elektrischen Feld auf einen ortsauflösenden Detektor abgebildet [Hoch94].
- Nach einem einfachen elektrostatischen Prinzip arbeiten die Position Pick Up's. Dabei werden die induzierten Spiegelladungen auf gegenüberliegenden Platten gemessen. Die Summe dieser Ladungen ist konstant, die Differenz hängt dagegen linear von der Strahllage zwischen den Elektroden ab. Die auftretenden Spannungen sind sehr klein, weshalb diese Messung nur bei gebunchten Ionenstrahlen einsetzbar ist.

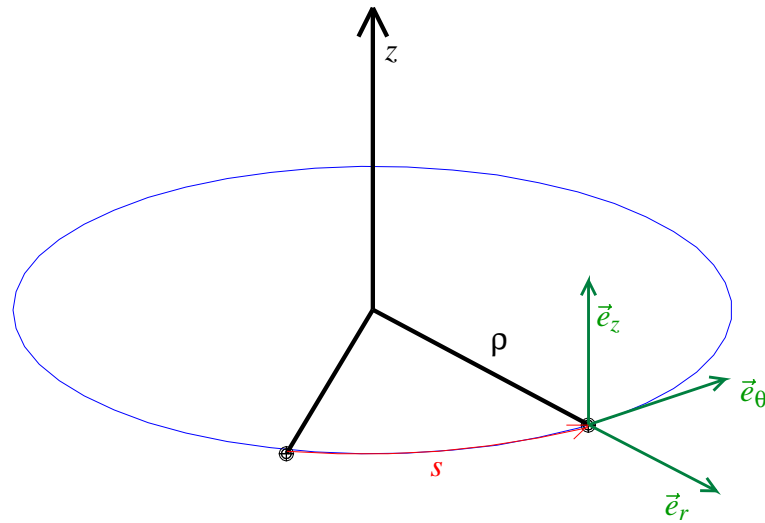


Abbildung 3.2: Die Koordinaten im Speicherring

### 3.2 Die Ionendynamik im Speicherring

Die Ionenbewegung im Speicherring ist bestimmt durch die Anordnung der magnetischen Führungsfelder, dem *lattice*. Diese Felder werden durch Magnete unterschiedlicher Multipolordnung erzeugt, wobei Dipolmagnete (homogenes  $\vec{B}$ -Feld) zur Strahlumlenkung und Quadrupolmagnete (radialer  $\vec{B}$ -Feld Gradient für kleine Abweichungen vom Zentrum) zur Fokussierung des Ionenstrahls unabdingbar sind. Sextupolfelder können zur Korrektur der Chromatizität eingesetzt werden, da ihre Fokallänge von dem Impuls der Ionen abhängt. Im TSR stehen zu diesem Zweck außer Sextupol- auch Octupolmagnete zur Verfügung.

Bei der Beschreibung der Ionenbewegung geht man zunächst von dem *Referenzorbit* (=Sollbahn) aus. Ein Ion, das sich zu einem Zeitpunkt mit dem richtigen Impuls (Sollimpuls) auf dieser Bahn befindet, folgt dieser geschlossenen Trajektorie auf unbestimmte Zeit. Die Bewegung eines Ions, das nicht der Sollbahn folgt, wird durch die Koordinaten  $(x, s, z)$  beschrieben (Abb. 3.2).  $x$  ist dabei die Abweichung des Bahnradius  $r$  vom Radius der Sollbahn  $\rho$ :  $r = \rho + x$ .  $s$  ist die Weglänge längs der Bahn, und  $z$  die vertikale Koordinate, wobei für die Sollbahn  $z = 0$  gilt. Die transversalen Geschwindigkeitskomponenten sind dabei klein gegenüber der longitudinalen Geschwindigkeit (tangential zur Bahn) und



werden in der linearen Näherung vernachlässigt:

$$s = vt = \frac{p_0}{m} \quad (3.2)$$

$p_0$  ist der Soll- oder Design-Impuls. Die möglichen Abweichungen  $\Delta p$  vom Sollimpuls liegen in einem relativ engen Bereich, weil sich dadurch der Krümmungsradius in den Dipolmagneten ändert und die Strahlage horizontal verschoben wird (Gleichung 3.1 und Abschnitt 3.2.3). Die mögliche Spanne  $\frac{\Delta p}{p}$  heißt RF-Akzeptanz und beträgt im TSR  $\sim \pm 4\%$  [MPI87]. Der Impuls eines beliebigen Teilchens kann dann geschrieben werden:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right) \quad (3.3)$$

Die möglichen Abweichungen des Krümmungsradius  $r$  eines beliebigen Teilchens in den Dipolmagneten ist ebenfalls relativ klein, so daß sich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) \quad (3.4)$$

schreiben läßt. Ein Teilchen der Ladung  $e$  und Masse  $m$ , das mit einem Impuls  $p$  und den transversalen Koordinaten  $(x, z)$  ein vertikal fokussierendes Quadrupolfeld durchfliegt, erfährt die transversale Bahnbeschleunigung  $x'' = \frac{d^2x}{ds^2}$  bzw.  $z''$  [Ross94]

$$\begin{aligned} x''_{Quad} &= kx = \frac{eg}{p}x \\ z''_{Quad} &= -kz = \frac{-eg}{p}z \end{aligned}$$

$g$  ist der Feldgradient:  $B_x = -gx$ ,  $B_z = -gz$  und  $k$  ist die Quadrupolstärke.  $k$  kann auch als der normierte Feldgradient bzgl. des Teilchenimpulses aufgefaßt werden.

Die Bewegungsgleichungen in linearer Approximation nehmen damit folgende Form an:

$$x'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right)x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} \quad (3.5)$$

$$z'' + kz = 0 \quad (3.6)$$

wobei die Größen  $\rho$  und  $k$  als Funktionen der Speicherringkoordinate  $s$  aufzufassen sind.

### 3.2.1 Betatron-Oszillationen

Auch wenn sich die Ionen mit dem Sollimpuls bewegen ist die Sollbahn nur eine mögliche Trajektorie. Im allgemeinen haben die Ionen eine horizontale- und transversale Ab-

weichung von der Sollbahn, was zu sogenannten *Betatron*-Oszillationen führt, wie im folgenden näher erläutert wird. Für  $\Delta p = 0$  sind die Gleichungen 3.5 und 3.6 beide von der Form

$$\begin{aligned} y'' + K(s)y &= 0 \\ K(s+L) &= K(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$K[s]$  ist eine periodische Funktion auf dem Speicherring-Umfang und wird durch das Lattice bestimmt:

$$K(s) = \begin{cases} -k(s) + \frac{1}{\rho(s)^2}; & \text{horizontal} \\ k(s); & \text{vertikal} \end{cases} \quad (3.8)$$

Dabei ist  $\rho(s)$  ist der Krümmungsradius entlang der Ionenbahn

$$\rho(s) = \begin{cases} \rho; & \text{in den Dipolmagneten} \\ 0; & \text{außerhalb} \end{cases}$$

und  $k(s)$  die Fokussierstärke

$$k(s) = \begin{cases} k; & \text{in den Quadrupolmagneten} \\ 0; & \text{außerhalb} \end{cases} .$$

Die Gleichung 3.7 ist eine Hill-Differentialgleichung und beschreibt die transversale Bewegung von Ionen mit  $\Delta p = 0$  in linearer Näherung. Die allgemeine Lösung hat die Form [Ross94]

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= a\sqrt{\beta(s)}e^{\pm i\Phi(s)} \\ \text{mit } a &= \text{konst.}, \quad \Phi'(s) = \frac{1}{\beta(s)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese Lösungen beschreiben die *Betatron-Oszillation*, quasi-harmonische Schwingungen um die Sollbahn mit der Amplitude  $a\sqrt{\beta(s)}$  und der Phase  $\int_{s_0}^s \frac{1}{\beta(t)} dt$ .  $\beta(s)$  ist die sogenannte *Beta-Funktion*, eine Ringstrukturfunktion auf die im nächsten Abschnitt näher eingegangen wird. Die Anzahl der Betatron-Oszillationen pro Umlauf ist

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{\beta(s)} ds \quad (3.10)$$

und heißt der horizontale- bzw. vertikale Betatune ( $Q_{h,v}$ ). Die Tunes dürfen keine rationalen Werte annehmen, da sich sonst Störungen bei einzelnen Umläufen kohärent aufsummieren und zu einem Verlust des Strahls durch Wand-Kontakte führen können. Solche Störungen sind dem Speicherring natürlich inhärent, weil es keine ideal homogenen Felder gibt und auch die Ausrichtung der Magnete nicht völlig exakt sein kann.

### 3.2.2 Die Betafunktion, Emittanz

Die Gleichung 3.7 hat die beiden linear unabhängigen Lösungen  $y_{1,2}$  (Gl. 3.9). Durch Linearkombination können damit sinus- und cosinusartige reelle Lösungen gebildet werden  $(y_s, y_c)$ , für die an einem Punkt  $s_0$

$$y_c(s_0) = 1, \quad y'_c(s_0) = 0$$

$$y_s(s_0) = 0, \quad y'_s(s_0) = 1$$

gilt. Der Wert einer speziellen Lösung  $y$  an einer Stelle  $s$  ist durch die Anfangsbedingungen in  $s_0$  bestimmt:

$$\begin{aligned} y(s) &= y_0 y_c(s) + y'_0 y_s(s) \\ y'(s) &= y_0 y'_c(s) + y'_0 y'_s(s) \end{aligned} \quad (3.11) \text{ Die Lösung an einer Stelle } s \text{ ergibt sich also}$$

durch eine lineare Transformation, und Gleichung 3.11 kann in Matrix-Form geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s = M(s|s_0) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s_0} \quad M(s|s_0) = \begin{pmatrix} y_c & y_s \\ y'_c & y'_s \end{pmatrix}_s \quad (3.12)$$

Die Transformationsmatrix für einen vollen Umlauf mit dem Startpunkt  $s$  kann in folgender Form geschrieben werden [Ross94]:

$$M(s) = M(s|s_0 + L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \mu + \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \sin \mu \quad (3.13)$$

wobei  $\alpha$  und  $\gamma$  wie die bereits vorgestellte Beta-Funktion periodische Funktionen auf dem Ringumfang  $L$  sind und  $\mu$  der sogenannte charakteristische Koeffizient der Hill-Differentialgleichung.  $\alpha, \gamma$  und  $\mu$  lassen sich auf die Beta-Funktion zurückführen:

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s) \quad (3.14)$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (3.15)$$

$$\mu = \int_s^{s+L} \frac{1}{\beta(t)} dt = \Phi(s+L) - \Phi(s) \quad (3.16)$$

Insbesondere wird aus Gleichung 3.16 die Bedeutung des Koeffizienten  $\mu$  deutlich:  $\mu$  ist der Phasenvorschub pro Speicherring-Umlauf.

Die Determinante der Transformationsmatrix  $M$  hat den Wert 1 woraus

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1 \quad (3.17)$$

folgt. Zur Betrachtung des transversalen Phasenraums  $(y, y')$  sollen jetzt spezielle reelle Lösungen der Hill-Differentialgleichung und deren Ableitung betrachtet werden. Mit Gleichung 3.9 ergibt sich

$$\begin{aligned} y(s) &= a\sqrt{\beta(s)} \cos(\Phi(s) - \delta) \\ y'(s) &= -\frac{a}{\sqrt{\beta}}(\alpha \cos(\Phi(s) - \delta) + \sin(\Phi(s) - \delta)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit einer willkürlichen Phase  $\delta$  die durch die Anfangsbedingungen festzulegen ist. Für jede feste Position  $s$  ist das die Darstellung einer Ellipse im Phasenraum an dieser Stelle,  $(y(s), y'(s))$ . Die eingeschlossene Fläche  $A_{y, y'}$  hat an den konstanten Wert

$$A_{y(s), y'(s)} = \pi a^2 \quad (3.19)$$

Der Phasenraum eines Ionenstrahls ergibt sich aus der Verteilung der Betatron-Amplituden dieses Ionenensembles. Da Betatron-Amplituden von 0 bis zu einem Maximalwert  $a_{max}\sqrt{\beta}$  auftreten, ergibt sich aus Gleichung 3.19, im Einklang mit dem Liouville-Theorem, daß die eingenommene Fläche im Phasenraum bei der Bewegung durch den Speicherring konstant ist. Diese Phasenraumfläche ist also ein Charakteristikum des vorliegenden Ionenstrahls und trägt die Bezeichnung *Emittanz*.

### 3.2.3 Dispersion

Bei den bisherigen Ausführungen wurden Ionen betrachtet, die sich mit dem Sollimpuls  $p_0$  im Speicherring bewegen, d. h.  $\Delta p = 0$ . In diesem Fall existiert eine geschlossene Trajektorie (Sollbahn), auf der Ionen zeitlich unbegrenzt umlaufen können. Auch für  $\Delta p \neq 0$  existiert eine geschlossene Trajektorie. Diese geschlossene Bahn führt aber nicht mehr durch die Mittelpunkte der ionenoptischen Elemente, sondern hat einen horizontalen Versatz. Die  $x$ -Koordinate (Abweichung von dem Radius der Sollbahn) läßt sich dann in zwei Anteile zerlegen:  $x = x_D + x_\beta$ . Dabei beschreibt  $x_D$  die Abweichung aufgrund

des geänderten Impulses und  $x_\beta$  ergibt sich durch die Betatron-Oszillation um diese neue geschlossene Bahn.

Mit Gleichung 3.5 ergibt sich die Gleichung für die *periodische Dispersion*, wenn man statt  $x$  die Größe  $D(s) = \frac{x_D}{\Delta p/p_0}$  betrachtet:

$$D''(s) + K(s)D(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

mit den periodischen Randbedingungen

$$D(s+L) = D(s), \quad D'(s+L) = D'(s)$$

Die periodische Dispersion, im folgenden nur noch Dispersion genannt, ist eine weitere Ringstrukturfunktion. Mit ihrer Kenntnis läßt sich angeben, wie weit sich bei einer Impulsänderung die geschlossene Bahn verschiebt:

$$x_D = D(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (3.20)$$

Auf dieser Eigenschaft des Speicherringes beruht das zustandsensitive Ionenpräparationsverfahren, das in einem späteren Abschnitt vorgestellt wird.

### 3.2.4 Momentum Compaction, Transition Energy

Bei Änderungen des Ionenimpulses ändert sich auch die Bahnlänge. Beispielsweise wird bei einem erhöhten Impuls der Krümmungsradius in den Dipolmagneten größer und damit auch die im Magnetfeld zurückgelegte Strecke. Der *Momentum Compaction*-Faktor  $\alpha$  gibt die relative Änderung der Bahnlänge  $L$  (oder des mittleren Bahnradius  $R = 2\pi L$ ) im Verhältnis zur relativen Änderung des Impulses an:

$$\alpha = \frac{dL/L}{dp/p} = \frac{dR/R}{dp/p} = \frac{p}{R} \frac{dR}{dp} \quad (3.21)$$

Anhand des obigen Beispiels ist klar, daß  $\alpha$  mit den horizontalen Abweichungen von der Sollbahn in den Magneten zusammenhängt, und wie gezeigt werden kann läßt sich  $\alpha$  aus der Dispersion  $D$  in den Magneten bestimmen ( $1/\rho \neq 0$ ) [Ledu94]:

$$\alpha = \frac{\langle D \rangle_m}{R}$$

Aufgrund der Bahnlängenänderung kann die Umlauffrequenz  $f_r$  nicht linear von dem Impuls abhängen (nichtrelativistisch). Um diesen Zusammenhang zu beschreiben wird der Parameter  $\eta$  eingeführt, der wiederum das Verhältnis der relativen Änderungen angibt, diesmal von Impuls und Umlauffrequenz:

$$\eta = \frac{df_r/f_r}{dp/p} = \frac{p}{f_r} \frac{df_r}{dp} \quad (3.22)$$

wobei  $\eta$  durch  $\eta = 1/\gamma^2 - \alpha$  mit  $\alpha$  verknüpft ist. Für eine bestimmte Ionenenergie  $E = \gamma_{tr}mc^2$  ( $m$ : Ruhemasse) mit  $\gamma_{tr} = \alpha$  bleibt demnach die Umlauffrequenz bei (infinitesimal) kleinen Impulsänderungen unverändert. Diese Energie heißt *Transition Energy*, das zugehörige  $\gamma_{tr}$  heißt *Transition Gamma*. Gleichung 3.22 kann demnach in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{df_r}{f_r} = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2} \right) \frac{dp}{p} \quad (3.23)$$

Die Bezeichnung rührt daher, daß sich das Verhalten grundlegend ändert, wenn  $\gamma_{tr}$  überschritten wird. Für  $\gamma < \gamma_{tr}$  wird die Umlauffrequenz mit zunehmendem Impuls größer, bei  $\gamma > \gamma_{tr}$  dagegen kleiner. Bei den Standardeinstellungen für  ${}^7\text{Li}^+$  im TSR ist  $\gamma_{tr} = 3.14$ .

### 3.3 Der longitudinale Phasenraum gespeicherter Ionen

In einem Speicherring ist die transversale Ionenbewegung durch magnetische Quadrupole und ggf. weitere fokussierende ionenoptische Elemente an die Sollbahn gebunden. Wie groß mögliche Abweichungen sein können, hängt von den individuellen Gegebenheiten des Rings ab. Der longitudinale Ionenimpuls dagegen unterliegt nur der Beschränkung durch die RF-Akzeptanz des Speicherrings. Er wird, zumindest in der linearen Näherung (Kapitel 3.1), durch die Speicherring-Umgebung nicht weiter beeinflusst. Für die longitudinale Ortskoordinate ergeben sich keine Randbedingungen und entsprechend füllt der Strahl, abgesehen von Fluktuationen aufgrund der endlichen Ionenanzahl, den gesamten Speicherring homogen aus.

### 3.3.1 Der kontinuierliche Ionenstrahl (Coasting Beam)

Die Homogenität des Coasting Beam (=Dauerstrich-Ionenstrahl) wird in kalten und dichten Ionenstrahlen durch Instabilitäten beeinträchtigt. Der Ionenstrom induziert Spiegelladungen und -Ströme in den Wänden, wodurch insbesondere in Kapazitäten und Induktivitäten Leistung eingekoppelt wird. Auch die Anregung von Resonanzen in entsprechenden Komponenten wie RF-Resonatoren o.ä. ist ein wichtiger Beitrag. Alle diese Effekte werden in der *Ringimpedanz*  $Z(\omega)$  zusammengefaßt, die eine Bestimmung der lokalen Felder aufgrund des Ionenstroms  $S_{||}$  möglich macht:

$$[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]_{||}(t, \theta) = \frac{-1}{2\pi\rho_0} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} Z_{||}(\omega) S_{||}(\omega, \theta) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.24)$$

$\theta$  ist der Polarwinkel der betrachteten Position im Ring,  $\rho_0$  der Radius der Sollbahn und  $S_{||}(\omega, \theta)$  ist die Fouriertransformierte des Ionenstroms im Ring an der Stelle  $\theta$ :

$$S_{||}(\omega, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{t=\infty} S_{||}(t, \omega) e^{-i\omega t} dt$$

Die Wechselwirkung der Ionen mit den Raumladungsfeldern des gesamten Strahls und induzierter Felder kann zu kohärenten Bewegungen aller Ionen führen. Die Folge ist das *self bunching* [Lac194], d. h. es kommt zu einer Modulation der Dichteverteilung des Strahls, die Homogenität geht verloren. Darüberhinaus führen die Ionen in diesen Feldern natürlich auch kompliziertere Bewegungen aus, die eine Verbreiterung der Impulsverteilung zur Folge haben.

Für ein Präzisionsexperiment wie den Test der speziellen Relativitätstheorie müssen solche Störungen der Ionenbewegung vermieden werden. Bei den im folgenden beschriebenen Experimenten wurde daher darauf geachtet, daß die Resonanzfrequenz der RF-Kavität im TSR soweit von den im Strom auftretenden Frequenzen (Schottky-Spektrum) verstimmt war, daß an der kapazitiv gekoppelten Meßstelle der Kavität kein kohärentes Signal zu beobachten war. Kohärente Störfelder sind nach Gleichung 3.24 proportional zum Ionenstrom. Die Experimente wurden mit 100 - 200 Ionen durchgeführt (s. Anhang), d.h. bei einem um ca. 4 Größenordnungen geringeren Strom gegenüber dem

SRT-Testexperiment [Gri94a], bei dem ca.  $10^6$  Ionen gespeichert waren. In den neuen Experimenten liegen diese Ionen als gebunchter Strahl vor. Das ausgefüllte Ring-Volumen ist dabei um einen Faktor  $\sim 20$  reduziert sodaß der lokale Strom nicht die Stärken in den vorangegangenen Experimenten erreicht. Mit Störungen durch Strahl-Instabilitäten ist daher nicht zu rechnen.

### 3.3.2 Der gebunchte Ionenstrahl (Bunched beam)

Für das *Bunchen* wird dem Ionenstrahl an einer Stelle im Ring ein harmonisches Hochfrequenzfeld der Frequenz  $\omega_{RF} = 2\pi\nu_{RF}$  überlagert [Ledu94]. Dies geschieht im allg. in einem Resonator, einer sogenannten RF-Kavität, sodaß das von den Ionen durchlaufene elektrische Feld im wesentlichen auf der kurzen Strecke im Spalt des Resonators vorliegt. Wenn nur kleine Bunchspannungen<sup>1</sup> erforderlich sind, kann auf einen Resonator verzichtet werden und die Bunchspannung direkt über Elektroden angelegt werden (vgl. [Mie96a]). Dieses Verfahren wurde bei den vorliegenden Experimenten angewendet, als Elektroden dienten im Ring vorhandene Ablenkplatten<sup>2</sup>. Die effektive Bunchspannung ist unter Vernachlässigung von Randfeldern durch die Potentialänderung während des Ein- und Austritts der Ionen aus dem näherungsweise feldfreien Bereich innerhalb der Platten gegeben. Eine Kalibrierung gegen die angelegte Spannungsamplitude wurde durch die Messung der Synchrotronfrequenz durchgeführt (siehe Gleichung 3.30).

Das Bunchen wird üblicherweise auf einer Oberwelle der Umlauffrequenz durchgeführt, sodaß  $\omega_{RF} = h \cdot \omega_r$  gilt, mit der Ordnung  $h$  der Harmonischen. Die Energieänderung der Ionen pro Durchflug durch den Resonator ist dann

$$(\Delta E)_{\text{turn}} = q\hat{V} \sin \phi_0 \quad (3.25)$$

$\phi_0$  ist die momentane Phase des Hochfrequenzfeldes beim Durchflug und  $q$  die Ladung

<sup>1</sup>d.h. kleine Potentialdifferenzen beim Durchflug durch das RF-Feld

<sup>2</sup>Bei diesen Elektroden, auch Kicker-Platten genannt, handelt es sich im wesentlichen um Kondensatorplatten, die üblicherweise benutzt werden, um für die Messung der *Beam Transfer Funktion* den Strahl transversal auszulenken



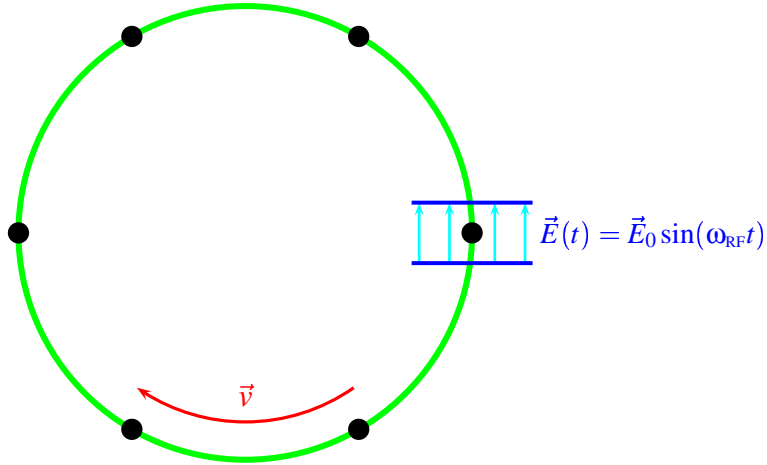


Abbildung 3.3: RF-Bunchen im Speicherring. Das Hochfrequenzfeld oszilliert auf der 6. Harmonischen der Umlauffrequenz. Ionen, die das Feld bei der Phase  $\omega_{RF} = 2n\pi$  ( $n$  ganzzahlig) durchfliegen erfahren keine Kraft. Eilt das Ion dagegen der Phase voraus oder nach wird es verzögert bzw. abgebremst wodurch, die Bunch-Struktur im Speicherring entsteht.

des Ions. Bei der Beschreibung der longitudinalen Bewegung eines Ions geht man von den Abweichungen bzgl. eines Referenzions aus. Das Referenzion hat genau den richtigen Impuls, sodaß es beim Durchflug durch den Resonator-Spalt immer die RF-Phase 0 „sieht“, d.h. es nimmt überhaupt kein Feld wahr. Das Referenzteilchen wird deshalb als das *synchrone* Teilchen bezeichnet. Die longitudinale Position eines Ions im Speicherring wird durch den Azimuthwinkel  $\Theta$  ausgedrückt:

$$\Theta = \Theta_s + \Delta\Theta$$

wobei  $\Theta_s$  der die entsprechende Koordinate des synchronen Teilchens ( $\Theta_s = \frac{1}{h}\omega_{RF}t$ ) und  $\Delta\Theta$  die Differenz zum Azimuthwinkel des synchronen Teilchens ist. Entsprechend lassen sich die Phase  $\phi$ , die Umlauffrequenz  $\omega_r$  und der Impuls schreiben als

$$\phi = \phi_s + \Delta\phi$$

$$\omega_r = \omega_{r,s} + \Delta\omega_r$$

$$p = p_s + \Delta p$$

wobei im Speicherring wie oben dargelegt  $\phi_s = 0$  gilt. Die zeitlichen Ableitungen der Koordinaten sind entsprechend durch die Ableitungen der Abweichungen von den Sollwerten gegeben, z.B.  $\dot{\phi} = \Delta\dot{\phi}$ . Da auf eine Umlaufperiode  $h$  Perioden des RF-Feldes entfallen

gilt

$$\Delta\phi = -h\Delta\Theta$$

und damit

$$\Delta\omega_r = \frac{d}{dt}(\Delta\Theta) = -\frac{1}{h} \frac{d\phi}{dt}$$

Damit und mit Gleichung 3.23 ergibt sich folgende Beziehung zwischen der Impulsabweichung  $\Delta p$  und der Phasenänderung  $\dot{\phi}$ :

$$\Delta p = -\frac{p_s}{h\eta\omega_{r,s}} \dot{\phi} \quad (3.26)$$

Aus Gleichung 3.25 und  $dE = \beta c dp = \omega_r R dp$  folgt andererseits

$$\dot{p} = f_r(\Delta p)_{\text{turn}} = \frac{q\hat{V}}{2\pi R} \sin\phi \quad (3.27)$$

Durch den Übergang zu der neuen Variablen  $W = 2\pi R_s \Delta p$  ergeben sich damit folgende, über den Ringumfang gemittelte Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= q\hat{V} \sin\phi \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{h\eta\omega_{r,s}}{p_s R_s} W \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\phi$  und  $W$  sind kanonische Variable, die Bewegungsgleichungen 3.28 können von der Hamiltonfunktion

$$H(\phi, W, t) = q\hat{V}[\cos\phi - 1] - \frac{1}{4\pi} \frac{h\eta\omega_{r,s}}{R_s p_s} W^2$$

abgeleitet werden. In der [Ledu94] tritt in den obigen Gleichungen auch  $\phi_s$  auf.  $\phi_s$  ist die von Null verschiedene Phase des Referenzteilchens beim Durchflug durch die Kavität im Falle einer variablen RF-Frequenz  $\omega_{RF}$ , d.h. im Synchrotronbetrieb. Hier werden dagegen ausschließlich Speicherringe betrachtet und in diesem Fall ist  $\omega'_{RF} = 0, \phi_s = 0$ . In allen Größen ist daher  $\phi_s$  entsprechend ersetzt, sodaß die Terme mit  $\sin\phi_s$  entfallen und  $\cos\phi_s = 1$  ist.

Die Bewegungsgleichungen 3.28 können zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung zusammengefaßt werden:

$$\ddot{\phi} + \Omega_s^2 \sin\phi = 0 \quad (3.29)$$

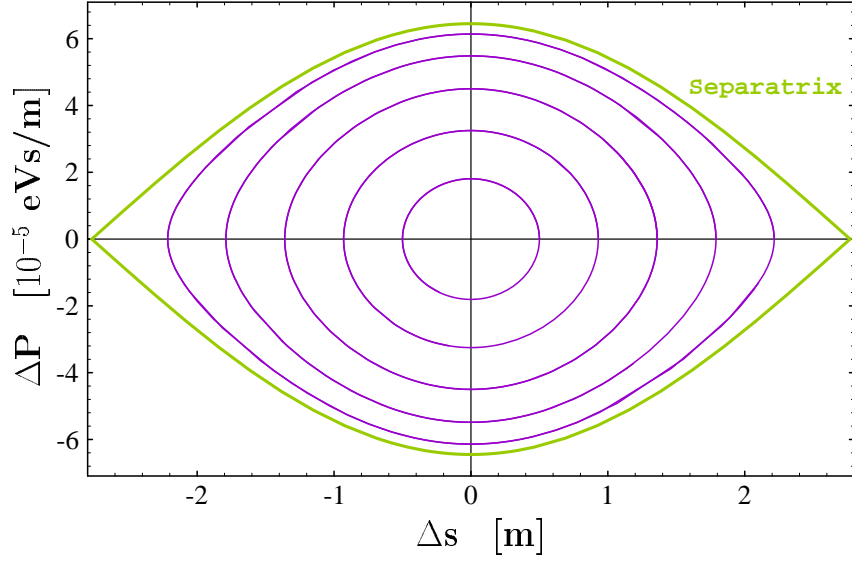


Abbildung 3.4: Phasenraumtrajektorien von Ionen im RF-Feld. Die Startwerte liegen innerhalb der RF-Akzeptanz, sodaß sich die Ionen mit dem mittleren Impuls im Speicherring bewegen, der auf der gewählten Harmonischen der RF-Frequenz entspricht. Die Oszillation ist für kleine Amplituden harmonisch, mit zunehmender Amplitude wird die Bewegung dagegen anharmonisch.

Das ist die bekannte Differentialgleichung eines Fadenpendels und  $\Omega_s$  ist die *Synchrotronfrequenz*, d.h. die Oszillationsfrequenz eines Ions, das nur kleine Phasenabweichungen aufweist ( $\sin \phi \approx \phi$ ):

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{q\hat{V}h\eta\omega_{r,s}}{2\pi p_s R_s}} \quad (3.30)$$

Die in dieser Arbeit gezeigten Phasenraumbilder sind allerdings nicht in  $W$  und  $\phi$  sondern in den Variablen  $\Delta p$  und  $x$  dargestellt.  $x$  ist dabei die räumliche Abweichung von der Bucketmitte ( $\phi = 0$ ). Mit  $\phi = (2\pi/L)x$  ( $L$ : Bucketlänge) wird dann Gleichung 3.29 zu

$$\ddot{x} + \frac{L}{2\pi}\Omega_s^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = 0 \quad (3.31)$$

und die Impulsabweichung (Gl. 3.26), ausgedrückt durch  $x$  lautet

$$\Delta p = -\frac{2\pi p_s}{Lh\eta\omega_s} \dot{x} \quad (3.32)$$

Die Bewegung von Ionen, die in dem RF-Feld oszillieren, ist in einer Phasenraumdarstellung in Abb. 3.4 gezeigt. Alle in dieser Arbeit gezeigten Phasenraumtrajektorien sind numerische Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungen, dargestellt als Abweichung

relativ zum Impuls bzw. der Phase des synchronen Teilchens.

Die Ionen sind in dem RF-Feld gespeichert oder „eingefangen“, solange die Impulsabweichung nicht zu groß wird. In diesem Fall legt also die RF-Frequenz die Umlauffrequenz der Ionen fest, entsprechend ist der mittlere Impuls der Ionen gerade der Impuls des synchronen Teilchens. In Synchrotrons wird dieser Sachverhalt ausgenutzt, indem durch adiabatisches Durchstimmen der RF-Frequenz der Ionenstrahl beschleunigt oder ggf. verzögert wird.

Für zunehmende Synchrotron-Oszillationsamplituden wird die Bewegung zunehmend unharmonisch. Die *Separatrix* gibt die Grenzlinie der Startwerte an, bei denen sich gerade noch gebundene Trajektorien ergeben. Startwerte jenseits der Separatrix führen zu ungebundenen Bewegungen, bei denen die räumliche Abweichung  $\phi$  zeitlich unbeschränkt ist und der mittlere Impuls nicht dem Impuls des synchronen Teilchens entspricht. In dem mechanischen Analogon Fadenpendel entspricht das der Situation, in der das Pendel durchschwingt.

Der Phasenraum innerhalb der Separatrix heißt *RF Bucket*. Die Ionen im RF Bucket oszillieren um die Bucket-Mitte, die durch den Nulldurchgang der RF-Phase festgelegt ist. Diese Verhältnisse sind in Abb. 3.5 dargestellt. Die maximal mögliche Impulsabweichung, bevor es zur ungebundenen Bewegung kommt, ist durch die Separatrix bei  $\phi = 0$  gegeben und heißt *RF-Akzeptanz*. Die RF-Akzeptanz wird gewöhnlich durch die maximale relative Energieabweichung angegeben:

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{max} = \pm \beta \frac{q\hat{V}}{\pi h \eta E_s} \quad (3.33)$$

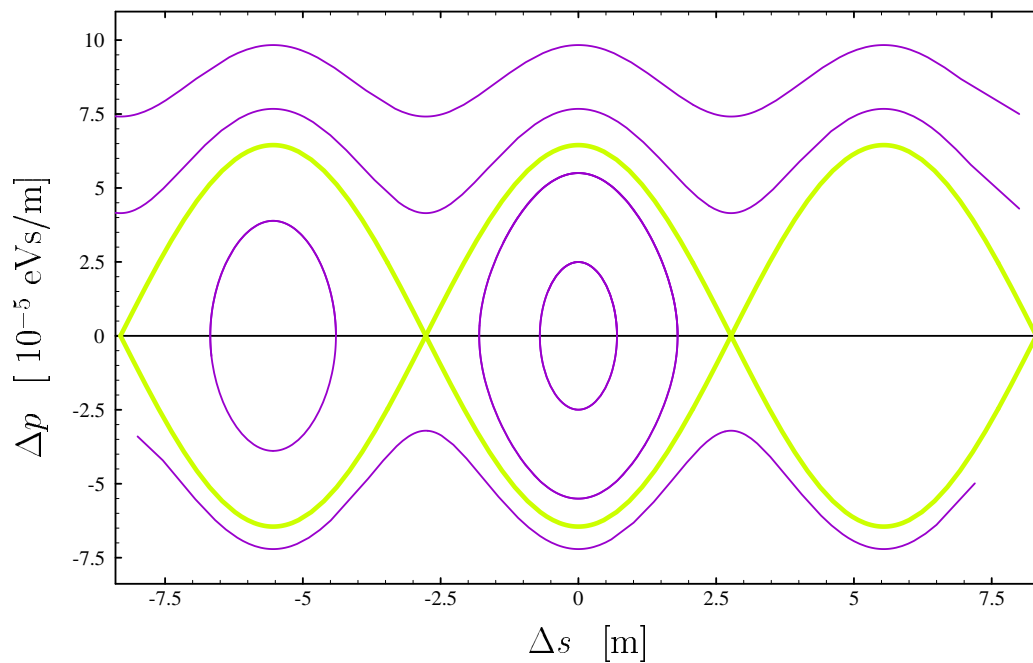


Abbildung 3.5: Phasenraumtrajektorien beim RF-Bunchen. Entsprechend den Startwerten ergeben sich gebundene oder ungebundene Trajektorien. Die hellere Linie ist die Separatrix, der Bereich innerhalb der Separatrix sind die RF-Buckets. Es sind 3 Buckets dargestellt, von denen das mittlere zwei Ionen enthält, das linke ein Ion und das rechte unbesetzt ist. Außerhalb der RF-Akzeptanz sind ungebundene Trajektorien zu sehen. Der mittlere Impuls der oberen Trajektorien ist größer als der Impuls des Soll-Ions, daher bewegen sich diese Ionen zu früheren Phasen hin, was in der Darstellung negative Ortskoordinaten bedeutet. Für die Trajektorie unterhalb der Buckets sind die Verhältnisse entsprechend umgekehrt.

# Kapitel 4

## Strahlkühlung

Zu Beginn von Kapitel 3 wurden die Vorteile eines Experiments an einem Speicherring gegenüber einem Strahl-Experiment dargelegt. Die zur Verfügung stehende erhöhte Wechselwirkungszeit eröffnet gänzlich neue Methoden der Strahlmanipulation, insbesondere der Strahlkühlung. Weiter ist es möglich, Ionen zu akkumulieren und dadurch den effektiven Strom gegenüber dem direkten Quellenstrom deutlich zu erhöhen. Eine weitere, spezialisierte Anwendung ist die in Kapitel 5 vorgestellte Isomerenseparation, die einer Massentrennung von  $\frac{\Delta m}{m} \sim 10^{-8}$  entspricht.

Die wichtigsten Kühlverfahren sind die stochastische Kühlung bei heißen und schnellen Ionenstrahlen niedriger Intensität [Möhl97], die Elektronenkühlung und die Laserkühlung.

Der Wirkungsbereich der Elektronen-Kühlkraft erstreckt sich über ein mehrere Größenordnungen ausgedehnteres Geschwindigkeitsintervall als die Laser-Kühlkraft. Das führt dazu, daß aufgrund der geringeren Steigung  $\frac{dF_{ECool}}{dv}$ , d. h. der geringeren Variation der Kraft in Abhängigkeit der Geschwindigkeit im allgemeinen eine deutlich schlechtere Kühlrate erreichbar ist als beim Laserkühlen. Die Elektronenkühlkraft ist ferner für alle Ionen im Speicherring gleich, wohingegen die Laserkühlkraft zustandselektiv ist, da die eingesetzten Frequenzen in der Regel für einen Übergang charakteristisch sind. Die Kombination aus beiden Kräften ermöglicht die Trennung der  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen im Singlett-Zustand

von denen im Triplettzustand, wie in Kapitel 5 gezeigt wird. Diese Kühlverfahren werden deshalb im folgenden detaillierter besprochen.

## 4.1 Elektronenkühlung

Das Prinzip dieses Kühlverfahrens beruht auf der Coulombwechselwirkung des Ionenensembles mit einem Elektronenensemble niedriger Temperatur. Dafür wird dem Ionenstrahl in einem sogenannten Elektronenkühler ein kalter Elektronenstrahl überlagert. Die Thermalisierung der Bewegungen durch Coulombstöße im Ruhesystem der Elektronen und Ionen<sup>1</sup> führt zu einer Reduktion der Impulsunschärfe des Ionenstrahls, und zwar in allen Raumrichtungen. Die wirksame Kraft auf Ionen in dem Elektronengas (*Elektronenkühlkraft*) setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen: dem nichtmagnetischen und dem magnetischen Anteil. Zur vollständigen Beschreibung des magnetischen Anteils muß auf die Plasmaphysik zurückgegriffen werden. Der Kühleffekt entsteht dabei durch die Reaktion des magnetisch eingeschlossenen Elektronen-Plasmas auf die Ionen.

Die nichtmagnetische Kraft läßt sich im Rahmen eines Modells binärer Elektron-Ion Stöße verstehen, ihr Beitrag ist näherungsweise [Poth90]

$$\mathbf{F}^{nm}(\mathbf{v}_i) = -\frac{3}{2}F_0c^2L_C\frac{\mathbf{v}_i}{v_i^3 + 2\Delta_e^3} \quad (4.1)$$

Darin bedeuten  $L_C$  der Coulomblogarithmus (typischer Wert:  $\sim 10$ ),  $\mathbf{v}_i$  die Ionengeschwindigkeit im Ruhesystem der Elektronen und  $v_i$  deren Betrag.

Die Stöße werden durch Rutherford-Streuung beschrieben, womit der Impulsübertrag bei gegebenem Stoßparameter  $b$  berechnet werden kann. Die Integration über alle möglichen Stoßparameter führt auf Integrale der Form

$$L_C = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \quad ,$$

---

<sup>1</sup>Die mittlere Geschwindigkeit der Ionen nach der Kühlung ist gleich der mittleren Elektronengeschwindigkeit

die nur unter Einschränkung der möglichen Stoßparameter endliche Werte annehmen<sup>2</sup>  $\Delta_e = \sqrt{\langle v_e^2 \rangle}$  ist die Breite der Elektronen-Geschwindigkeitsverteilung, die in diesem einfachen Ansatz als isotrop angenommen wurde.  $F_0$  ist bestimmt durch die Teilchendichte  $n_e$ , die Masse  $m_e$  und den klassischen Radius der Elektronen  $r_e$ , sowie durch die Ladungszahl der Ionen  $Z$ :

$$F_0 = 4\pi Z^2 n_e r_e^2 m_e c^2$$

Die Bezeichnung „nichtmagnetisch“ bedeutet, daß der Einfluß des Magnetfeldes auf die Bewegungen nicht berücksichtigt ist. Für schnelle Kollisionen, d.h. wenn die Kollisionsdauer klein ist gegen die Dauer der Zyklotronbewegung der Elektronen, stellt dies eine gute Näherung dar, weil dann die Elektronen als quasi frei betrachtet werden können.

Die nichtmagnetische Kühlkraft ist dominierend für  $v_i \gg \Delta_e$ . Für den Fall, daß sich die mittlere Ionengeschwindigkeit deutlich von der mittleren Elektronengeschwindigkeit unterscheidet ( $v_i \gg \Delta_e, v_i \approx v_{\parallel}$ ), ergibt sich somit:

$$F_{\parallel} \approx -\frac{3}{2} F_0 c^2 L_C \frac{1}{v_i^2} \quad (4.2)$$

Demnach fällt die Kraft für Geschwindigkeitsverstimmungen  $v_i$  zwischen Ionen- und Elektronenstrahl mit  $1/v_i^2$  ab. Der Index  $\parallel$  bezeichnet hierbei die longitudinale Komponente, d. h. die Komponente parallel zur Sollbahn. Entsprechend wird im folgenden der Index  $\perp$  zur Bezeichnung einer transversalen Komponente verwendet<sup>3</sup>.

Ist die Kollisionszeit in langreichweitigen Stößen dagegen groß gegen die Dauer der Zyklotronbewegung, kann das Elektron nicht mehr als frei betrachtet werden. Von langreichweitigen bzw. adiabatischen Stößen spricht man in diesem Zusammenhang, wenn der Stoßparameter größer als der Radius der Zyklotronbewegung  $r_c$  ist. In diesem Regime, das durch  $v_i < \Delta_{\perp}$  gekennzeichnet ist, wird durch die Mittelung über mehrere Zyklotronperioden der Effekt der transversalen Elektronenbewegung ( $\leftrightarrow \Delta_{\perp}$ ) unterdrückt, sodaß nur noch die longitudinale Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen eingeht [Poth90]. Der

<sup>2</sup>Problem der logarithmischen Divergenz bei in der Reichweite nicht beschränkten Wechselwirkungspotentialen.  $b_{min}$  ergibt sich direkt aufgrund des maximal möglichen Impulsübertrages (Rückstreuung).  $L_C$  hängt dann von der Relativgeschwindigkeit der streuenden Teilchen ab. Für  $b_{max}$  wird häufig die Abschirmlänge des Elektronengases bzw. Plasmas verwendet (Debyelänge)

<sup>3</sup>Die longitudinale Geschwindigkeitsunschärfe  $\Delta_{\parallel}$  ist aus kinematischen Gründen nach der Beschleunigung der Elektronen auf Strahlenergie im allgemeinen wesentlich kleiner als die transversale Breite  $\Delta_{\perp}$ .



Coulomblogarithmus bei dieser Untergrenze für den Stopparameter wird mit  $L_C^{ad}$  bezeichnet. Als Näherung für die Kühlkraft ergibt sich damit

$$F_{\parallel}^{ad} \approx -9F_0c^2L_C^{ad} \frac{v_{i\perp}^2 v_{i\parallel}}{6v_i^5 + \Delta_{\parallel}^3 v_{i\perp}^2} \quad (4.3)$$

Gleichung 4.3 ist aber nur dann eine gute Näherung, wenn  $v_i \ll \Delta_{\parallel}$  oder  $v_i \gg \Delta_{\parallel}$  gilt, weil zum einen Stöße mit Stoßparametern  $b \sim r_c$  nicht richtig erfaßt werden und zum anderen kollektive Plasmaeffekte in dem Modell binärer Stöße naturgemäß nicht beschrieben werden können.

Bessere Ergebnisse liefert die Plasmaphysik, angewendet auf das kalte Elektronengas. In dem Elektronenplasma lagern sich Elektronen um die Ionen an und schirmen deren Coulombfeld ab<sup>4</sup>, wodurch das Plasma lokal polarisiert wird. Die erzeugte lokale Änderung des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}_{ind}$  wirkt auf das Ion zurück und führt zum Energieverlust an das Plasma.

Das gesamte lokale Feld  $E_{tot}$  läßt sich schreiben als

$$E_{tot} = E_i + E_{ind} \quad , \quad (4.4)$$

wobei  $E_i$  das Coulombfeld des Ions ist. Gleichung 4.4 läßt sich auch durch die entsprechenden Potentiale  $\phi_{tot}, \phi_i, \phi_{ind}$  ausdrücken ( $E = e\phi$ ). Die Reaktion des Plasmas auf die bewegte Ladung läßt sich mit Hilfe der Fourier-Transformierte  $\phi(\mathbf{k}, \omega)$  des induzierten Potentials entsprechend

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \phi(\mathbf{k}, \omega) d^3k d\omega$$

und der dielektrischen Funktion des Plasmas ausdrücken:

$$\phi_{tot}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\phi_{ind}(\mathbf{k}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)}$$

Die damit verbundene Kraft  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}_{ind}$  auf das Ion kann dann mit Hilfe der dielektrischen

---

<sup>4</sup>Die Reichweite des Coulombfeldes eines Ions im Plasma ist der Debye Radius

Funktion<sup>5</sup> beschrieben werden

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}_i) = -F_0 \frac{c^2}{v_i^2} \int_0^{k_{max}} \mathbf{I}(\mathbf{k}) \frac{dk}{k} \quad (4.5)$$

mit

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi \omega_{e,pl}^2} \int \omega \text{Im} \left( \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)} \right) d\omega \quad (4.6)$$

$\omega_{e,pl} = (4\pi n r_e c^2)^{1/2}$  ist die Plasmafrequenz der Elektronen und  $k_{max}$  ergibt sich aus dem minimalen Stoßparameter  $b_{min}$  für  $v_i$  (Rückstreuung):  $k_{max} = 1/b_{min} = v_i^2 / (Z r_e c^2)$ . Mit Hilfe von Gleichung 4.5 kann die Kraft auf Ionen für alle Stoßparameter (i. a. numerisch) berechnet werden. Es zeigt sich jedoch, daß für  $v_i \gg \Delta_{||}$  (kleine Stoßparameter) die Verhältnisse aus dem binären Stoßmodell ohne Magnetfeld reproduziert werden.

Die Gesamt-Kraft kann somit als Summe aus einem nichtmagnetischem Anteil  $F^{nm}$  gemäß Gleichung 4.1 und dem magnetischen Anteil  $F^{ad}$  berechnet werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{ad} + \mathbf{F}^{nm} \quad ,$$

wobei der magnetische Anteil für  $v_i \gg \Delta_{||}$  vernachlässigbar wird. Der Übergang  $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i) \rightarrow \mathbf{F}^{ad}(\mathbf{v}_i)$  bedeutet, daß in Gleichung 4.5 die Integration bei  $k_{max} = 1/b_{mag} = \omega_{e,c} / v_i$  abgebrochen wird.  $\omega_{e,c} = eB / (\gamma m)$  ( $\gamma = (1 - \frac{v_i^2}{c^2})^{-1/2}$ ) ist die Zyklotronfrequenz der Elektronen und  $b_{mag}$  ist im wesentlichen die Strecke, die Ionen der Geschwindigkeit  $v_i$  innerhalb der Periodendauer der Zyklotronbewegung zurücklegen.

Im TSR beträgt die longitudinale Energieunschärfe des Elektronenstrahls  $kT_{||} = 0.5 \text{ meV}$  [Past95] womit sich eine longitudinale Geschwindigkeitsunschärfe  $\Delta_{||} \approx 1 \cdot 10^4 \text{ m/s}$  ergibt. Bei dem noch zu beschreibenden Verfahren zur Isomerentrennung wird die Geschwindigkeit der Elektronen gegen die Ionengeschwindigkeit verstimmt. Diese Verstimmung ist stets so groß ( $v_i > 2.7 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ ), daß die Kraft auf die Ionen durch den nichtmagnetischen

<sup>5</sup>Unter Vernachlässigung der endlichen Temperatur ist die dielektrische Funktion eines Elektronenplasmas im Magnetfeld [Poth90]

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\omega_{e,pl}^2}{k^2} \left( \frac{k_{||}^2}{\omega^2 + i\nu\omega} + \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - \omega_{e,c}^2 + i\nu\omega} \right)$$

Anteil  $F^{mm}$  gemäß Gleichung 4.1 beschrieben werden kann, d. h. durch eine einfache  $1/v_i^2$ -Abhängigkeit.

## 4.2 Laserkühlung

Der Einsatz von Laserlicht zur Manipulation gespeicherter Ionenstrahlen ist ein etabliertes Kühlverfahren an Speicherringen. Anwendung findet das sogenannte Dopplerkühlen (auch Kühlen mit der spontanen Kraft genannt), die auf der Absorption und der anschließenden spontanen Emission von Photonen beruht und mit dem Modell eines 2-Niveau-Atoms verstanden werden kann. Bei der Absorption findet ein gerichteter Impulsübertrag statt, wohingegen die spontane Emission eines Photons in einem nicht polarisierten Ionenstrahl zufällig in irgendeine Raumrichtung erfolgt und deshalb im zeitlichen Mittel nicht zur Impulsänderung führt. Zur Kühlung in einem Freiheitsgrad<sup>6</sup> ist eine dispersive Kraft erforderlich, die zudem ihr Vorzeichen ändert, je nachdem ob die Geschwindigkeit zu hoch oder zu niedrig ist. Demzufolge sind zur Kühlung zwei Laserstrahlen aus verschiedenen Richtungen erforderlich, oder ein Laserstrahl und eine nicht notwendigerweise dispersive Hilfskraft (vgl. Abbildung 4.1).

Der stochastische Charakter der spontanen Emission und der stimulierten Absorption (Anzahl der pro Zeiteinheit absorbierten Photonen) führt aufgrund des Photonenrückstoßes zu einer Diffusionsbewegung des Ionenimpulses. Die Verhältnisse sind dabei analog zur Brown'schen Bewegung eines kleinen Objektes in einer viskosen (d. h. die Bewegung dämpfenden) Flüssigkeit, deren Druckfluktuationen zu einer Zitterbewegung des Objektes führen. Die Impulsdiffusion ist gleichbedeutend mit einer Heizrate, und die erreichbare Temperatur in Abhängigkeit von der Kühlrate ist das Dopplerlimit.

Die Heizrate durch die Ion-Licht Wechselwirkung ist allerdings vernachlässigbar gegenüber den Speicherring-spezifischen Heizeffekten.

---

<sup>6</sup>Es ist im folgenden immer der longitudinale Freiheitsgrad gemeint, die direkte transversale Laserkühlung gespeicherter Ionenstrahlen wurde bisher noch nicht beobachtet

Bei den üblichen Ionenströmen ist die strahlinterne Steuerung oder *Intra Beam Scattering* der dominierende Heizprozeß. Ist die Phasenraumdichte der Ionen geringer<sup>7</sup>, dann führt die Streuung der Ionen am Restgas zu einer Heizrate, die bei den vorliegenden Verstimmungen des Kühllasers bezüglich der Sollgeschwindigkeit ( $\delta > 2\Gamma_{sat}$ ) mehr als 4 Größenordnungen über der Heizrate durch die Ion-Licht Wechselwirkung liegt.

Hochentwickelte Techniken zur Sub-Doppler-Kühlung oder sogar zur Unterschreitung der Rückstoßgrenze, namentlich die Polarisationsgradienten-Kühlung und die Herstellung nicht fluoreszierender (dunkler) Zustände durch kohärente Superposition (Nobelpreis 1997 an Chu, Cohen-Tannoudji und Phillips), haben bei Experimenten mit Atomen in magnetooptischen Fallen neue Temperaturbereiche erschlossen. Die hierbei auftretenden Heizraten sind jedoch nicht mit der Situation im Speicherring vergleichbar, weshalb eine Anwendung dieser Verfahren in einer solchen Umgebung keine vergleichbaren Ergebnisse hervorrufen kann.

Ein weiterer Nachteil der Laserkühlung in Speicherringexperimenten gegenüber Experimenten in Fallen ist das eingeschränkte Tastverhältnis, wodurch die effektive Laserkraft, vor allen Dingen in transversaler Richtung, reduziert wird. Die Laserkühlung am Speicherring wird meist nur auf einem kurzen Abschnitt in einer Sektion durchgeführt („Experimentierstrecke“). Eine Ausdehnung des Wechselwirkungsbereichs ist zwar in der Regel durch Einbeziehung weiterer Abschnitte möglich, doch gibt es erhebliche Einschränkungen durch Resonanz-Verschiebungen aufgrund der starken magnetischen Felder der verschiedenen Magnet-(Multipol-)Familien. Aufgrund dieser Problematik wurde bisher nur der longitudinale Freiheitsgrad direkt gekühlt, eine erfolgreiche direkte Kühlung der transversalen Impulse ist bisher nicht bekannt.

In Heidelberg konnte dagegen an  ${}^9\text{Be}^+$  Ionenstrahlen demonstriert werden, daß eine indirekte Laserkühlung der transversalen Freiheitsgrade dennoch effizient erfolgen kann [Mies95, Mie96b]. Die dafür erforderliche Kopplung zwischen longitudinalen und transversalen Freiheitsgraden wird durch das Intra Beam Scattering vermittelt, sodaß dieses Verfahren eine vergleichsweise hohe Phasenraumdichte erfordert.

---

<sup>7</sup>Wie z.B. bei der Trennung der Singlett- und Tripletzustände in der Geschwindigkeit beim Laserkühlen mit einer durch den Induktionsbeschleuniger im TSR erzeugten Hilfskraft

## 4.2.1 Prinzip der Laserkühlung

Die Kraft auf ein Zwei-Niveau-Atom, das einer ebenen elektromagnetischen Welle mit dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r})$  ausgesetzt ist, lässt sich schreiben als [Cohe92]

$$\mathbf{F} = \hbar \mathbf{k}_L \frac{\Gamma}{2} \frac{S}{1+S} \quad . \quad (4.7)$$

$\mathbf{k}_L$  ist der Wellenvektor und  $\Gamma = 1/\tau_{nat}$  die natürliche Linienbreite des Übergangs. Der Sättigungsparameter  $S = S(\delta)$  hängt von der Verstimmung gegen die Resonanzfrequenz des betrachteten Übergangs ( $\omega_0$ ) ab:

$$S(\delta) = \frac{\Omega_R^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (4.8)$$

wobei  $\delta$  die Verstimmung im Ruhesystem eines mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Ions ist und nichtrelativistisch durch

$$\delta = \omega_L - \omega_0 - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (4.9)$$

ausgedrückt werden kann.  $\Omega_R$  ist die Rabi-Frequenz des Übergangs,  $\Omega_R = -\frac{1}{\hbar} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0$  wobei  $\mathbf{d}$  das Matrixelement des Dipoloperators der beteiligten Zustände ist.

Die Kraft 4.7 ist die spontane Kraft. Sie beruht auf fortlaufenden Zyklen von Absorption und anschließender spontaner Emission. Im Falle einer einzigen ebenen Welle mit ortsunabhängiger Rabi-Frequenz  $\Omega_R$  ist das die gesamte Licht-Kraft, die auf das Teilchen wirkt. Ist die Rabifrequenz dagegen ortsabhängig, so tritt als weitere Komponente ein reaktiver Anteil, die sogenannte Dipolkraft, auf. Eine solche Ortsabhängigkeit ergibt sich beispielsweise, wenn zwei Laserstrahlen eingesetzt werden oder wenn die Näherung der ebenen Welle bei fokussierten Laserstrahlen unzureichend ist. Die Dipolkraft

$$\mathbf{F}_d = -\frac{\hbar \delta}{4} \frac{\nabla \Omega_R^2}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega_R^2/2} \quad (4.10)$$

beruht auf der Absorption von Photonen aus einer (ebenen) Teilwelle und anschließende stimulierte Emission in eine andere Teilwelle. In den hier betrachteten Experimenten wurde zur Strahlkühlung ein aufgeweiteter Laser verwendet, die Gegenkraft wird durch

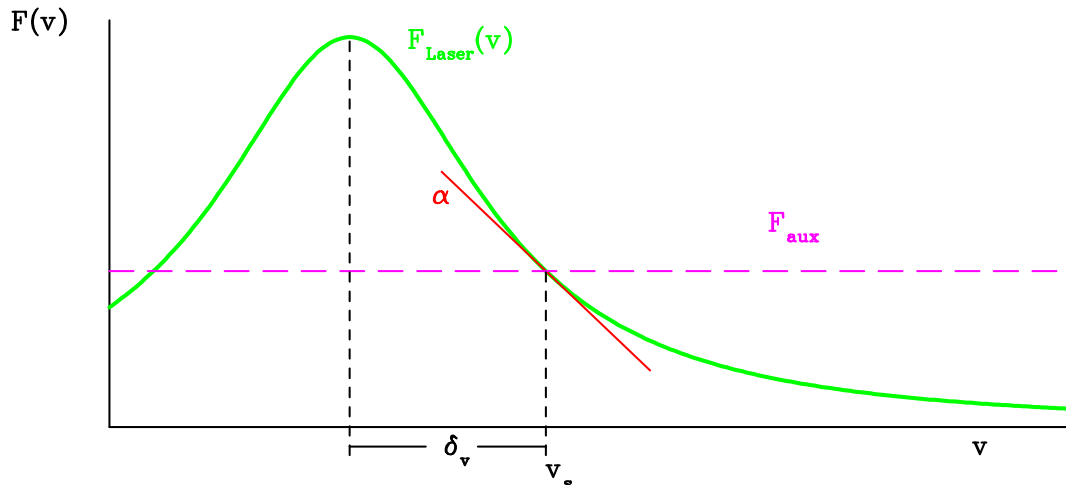


Abbildung 4.1: Der Kühlkoeffizient  $\alpha = -\left.\frac{\partial F}{\partial v}\right|_{v_s}$ . Die Verstimmung des Lasers ist entsprechend  $\delta_v = \vec{k} \cdot \vec{v}$  als Geschwindigkeitsverschiebung dargestellt. Die stabile Geschwindigkeit  $v_s$  ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht mit der Hilfskraft  $F_{aux}$ .

das nicht-dispersive Hochfrequenzfeld aufgebracht (gebunchtes Laserkühlen, Kapitel 5). Es erscheint daher gerechtfertigt, das Laserfeld in Bezug auf die Laserkühlung als ebene Welle zu betrachten, und die weiteren Ausführungen sind deshalb auf die spontane Kraft beschränkt.

Wie bereits angesprochen wurde, ist zur Kühlung eines Teilchenensembles eine dispersive Kraft erforderlich, die im Ruhesystem des Ensembles bei der Geschwindigkeit „0“ ihr Vorzeichen umkehrt. Diese Vorzeichenumkehr ist erforderlich, damit Teilchen, die zu schnell (zu langsam) sind abgebremst (beschleunigt) werden. Nachdem die mittlere Kraft eines Lichtfeldes in die Richtung des Wellenvektors weist, ist eine entgegengerichtete Kraft erforderlich, um die obige Bedingung zu erfüllen. Im TSR kann hierzu der Induktionsbeschleuniger [Elle92] verwendet werden, der durch Induktion eine über den Speicherring-Umfang gemittelte konstante Kraft auf alle gespeicherten Ionen ausübt<sup>8</sup>. Eine weitere Möglichkeit ist das gebunchte Laserkühlen (Laserkühlen eines gebunchten Ionenstrahls), bei dem die Gegenkraft durch das Hochfrequenzfeld bereitgestellt wird.

<sup>8</sup>Die Kraft ist für alle gespeicherten Ionen der gleichen Ladung und Geschwindigkeit gleich, d.h. für alle Ionen, sofern nicht verschiedene Ionensorten mit ähnlichem  $e/m$ -Verhältnis gespeichert werden.

Die Sollgeschwindigkeit beim Laserkühlen ist die Geschwindigkeit, bei der sich die an-greifenden Kräfte im stabilen Gleichgewicht befinden. Zur Beurteilung der Geschwin-digkeitsunschärfe bzw. der Temperatur ist die Breite der Geschwindigkeitsverteilung um die Sollgeschwindigkeit des Ensembles maßgeblich. Für kleine Abweichungen von der Sollgeschwindigkeit kann die Kühllkraft (spontane Kraft) entwickelt werden:

$$F(v) = F(0) - \alpha(v - v_s) + \dots \quad (4.11)$$

mit dem Kühlkoeffizienten  $\alpha$ , der durch die Steigung  $\frac{\partial F}{\partial v}$  bestimmt ist (Abbildung 4.1). Unter Berücksichtigung der Dopplerverschiebung kann der Kühlkoeffizient durch die Ver-stimmung von der exakten Resonanz im Ruhesystem der Ionen ausgedrückt werden. Nach entsprechender Rechnung ergibt sich

$$\alpha = -\hbar k_L^2 \frac{S}{(1+S)^2} \frac{\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (4.12)$$

Kühlung tritt gemäß dem Vorzeichen von  $\alpha$  in Gleichung 4.11 dann auf, wenn die La-serfrequenz  $\omega_L - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v}$  (Ruhesystem) rotverstimmt gegen die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ist, d.h. für  $\delta < 0$ . Der maximal erreichbare Kühlkoeffizient  $\alpha_{max}$  ergibt sich für  $\delta = -\frac{\Gamma}{2}$  mit  $S(-\delta/2) = 1$ :

$$\alpha_{max} = \frac{\hbar k_L^2}{4} \quad (4.13)$$

In der Näherung für kleine Abweichungen von der Sollgeschwindigkeit ergibt sich damit folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{dp}{dt} = F = -\alpha v = -\gamma_c p \quad (4.14)$$

mit  $\gamma_c = \alpha/m$ . Die Dämpfung der Teilchengeschwindigkeit geht daraus unmittelbar her-vor. Allerdings ist hierbei nicht der stochastische Charakter der Absorptions- und Emis-sionsprozesse berücksichtigt, der sich in einer zusätzlichen fluktuierenden Kraft  $F_{Lang}$  bemerkbar macht.

Die fluktuierende Kraft  $F_{Lang}$ , die *Langevin Kraft*, hat einen verschwindenden zeitlichen Mittelwert und ist „deltakorreliert“:

$$\langle F_{Lang}(t) \rangle = 0, \quad \langle F_{Lang}(t) F_{Lang}(t') \rangle = 2D_p \delta(t - t') \quad (4.15)$$

( $\delta(t)$ ) bedeutet hier nicht die Frequenzverstimmung sondern die Dirac'sche „Delta-Funktion“. Dabei ist zugrunde gelegt, daß die spontane Emission und auch die stimulierte Absorption einen Markov-Prozeß darstellt.

Ein Markov-Prozeß ist dadurch gekennzeichnet, daß die Wahrscheinlichkeit, mit der die betrachtete Zufallsvariable zu einem Zeitpunkt  $t_n$  einen bestimmten Wert annimmt nur von ihrem Wert an dem vorhergehenden Zeitpunkt  $t_{n-1}$  abhängt und nicht von weiter zurückliegenden Werten zu Zeitpunkten  $t_{n-2}, t_{n-3}, \dots$  [Risk89]. Das System hat demnach keine „Erinnerung“ an frühere Zeiten. Für den hier betrachteten Fall bedeutet das, daß die zufälligen Impulsänderungen in Zeiten erfolgen, die klein gegen die betrachtete Zeitskala sind und deshalb als instantan angenommen werden können. Die einzelnen Stöße sind dann unabhängig voneinander und damit auch die Übergangswahrscheinlichkeiten  $A[p(t_{n-1}) \rightarrow p(t_n)]$ . Der Diffusionskoeffizient  $D_p$  beschreibt die Stärke der fluktuierenden Kraft. Für ein Teilchen, das sich zur Zeit  $t = t_0$  mit der Sollgeschwindigkeit bewegt, d.h.  $v = 0$  im Ruhesystem, ist der Impuls scharf<sup>9</sup> definiert:  $\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle = 0$ . In der Näherung verschwindender Stoßzeiten nimmt das Quadrat des Impulses linear mit der Zeit zu, solange  $t \ll 1/\gamma_c$  gilt<sup>10</sup>, wobei  $1/\gamma_c$  die Zeitkonstante der Dämpfung nach Gleichung 4.14 ist:

$$\sigma_p^2 = 2D_p(t - t_0) \quad . \quad (4.16)$$

Das bedeutet ein diffusives Anwachsen des Impulses, und für die zeitliche Entwicklung ergibt sich

$$\left( \frac{d\sigma_p^2}{dt} \right)_{diff} = 2D_p \quad . \quad (4.17)$$

Entsprechend kann mit Gleichung 4.14 der Kühleffekt aufgrund der Dämpfung  $\alpha$  bzw.  $\gamma$  gefunden werden:

$$\left( \frac{dp^2}{dt} \right)_{cool} = -2p \frac{dp}{dt} = -2\gamma_c p^2 \quad . \quad (4.18)$$

Gleichung 4.17 gibt das Verhalten des zeitlichen Mittelwertes oder äquivalent dazu des Mittelwertes über ein Ensemble gleichartiger Teilchen an. Gleichung 4.18 hingegen resultiert aus einer rein deterministischen Beschreibung gemäß Gleichung 4.14, da die fluk-

<sup>9</sup>„Scharf“ ist hier in Bezug auf die zur Verfügung stehende Meßgenauigkeit zu verstehen

<sup>10</sup>Werden endliche Stoßzeiten  $\tau_s$  berücksichtigt, dann gilt Gleichung 4.16 nur für  $t \gg \tau_s$



tuierenden Anteile des Kühlmechanismus in der Langevin-Kraft  $F_{Lang}$  zusammengefaßt sind. Der Gleichgewichtszustand eines Ensembles ergibt sich durch das gleichsetzen beider Raten, wobei  $\left(\frac{dp^2}{dt}\right)_{cool}$  in den Mittelwert  $\left(\frac{d\sigma_p^2}{dt}\right)_{cool}$  übergeht zu

$$\frac{1}{2}kT = \frac{\sigma_p^2}{2m} = \frac{D_p}{2m\gamma_c} \iff D_p = m\gamma_c kT \quad (\text{Einstein-Gleichung}) . \quad (4.19)$$

Die Temperatur im Gleichgewicht ist unter Vernachlässigung der Faktoren demnach durch das Verhältnis von Heizrate zu Kühlrate bestimmt. Die Heizrate wird dabei durch die Diffusionskonstante  $D_p$  und die Kühlrate durch den Kühlkoeffizienten  $\alpha$  bzw. durch  $\gamma_c$  bestimmt.

Üblicherweise wird nicht  $D_p$  sondern die analoge Größe  $D_t = 2D_p/(mk) = dT/dt$  angegeben.  $D_t$  beschreibt die zeitliche Zunahme der Temperatur  $T$ <sup>11</sup> und hat demnach die Einheit K/s.

Der Diffusionskoeffizient  $D_p$  ist nach [Cohe92] durch zwei Anteile,  $D_p^{(vac)}$ ,  $D_p^{(las)}$  bestimmt:

$$D_p = D_p^{(vac)} + D_p^{(las)} \quad (4.20)$$

$D_p^{(vac)}$  resultiert aus den Fluktuationen in der Wechselwirkung des Atoms oder Ions mit dem Vakuumfeld  $E^{(vac)}$ , d.h. dieser Beitrag beschreibt die Impulsdiffusion aufgrund der zufälligen Richtung der spontanen Emission.  $D_p^{(vac)}$  ist gegeben durch [Cohe92]

$$D_p^{(vac)} = \hbar^2 k_L^2 \frac{\Gamma}{4} \frac{S}{1+S} = \frac{1}{2} \hbar k_L \cdot F \quad . \quad (4.21)$$

$D_p^{(las)}$  hingegen entspricht der Wechselwirkung mit dem Laserfeld. Für eine ebene Welle ist  $D_p^{(las)}$  nur durch einen Beitrag  $D_p^{(abs)}$  durch die Fluktuationen in der Anzahl absorbierter Photonen pro Zeiteinheit bestimmt:

$$D_p^{(abs)} = \frac{1}{4} \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{S}{1+S} \left( 1 + \frac{2\Omega_R^2(4\delta^2 - 3\Gamma^2)}{(2\Omega_R^2 + 4\delta^2 + \Gamma^2)^2} \right) \quad (4.22)$$

---

<sup>11</sup>Die Temperatur ist hier als mittlere Energie pro Freiheitsgrad zu verstehen, denn während der kombinierten Heiz- und Kühlprozesse ist es fraglich, ob sich wirklich ein thermisches Gleichgewicht mit entsprechend statistischer Verteilung der Energie auf die Freiheitsgrade einstellt. Zudem sind speziell bei diesem Experiment die betrachteten Ionenanzahlen sehr klein, sodaß der Temperaturbegriff auch in dieser Hinsicht vorsichtig verwendet werden muß

Ein weiterer Beitrag zur Heizrate aufgrund der Wechselwirkung mit dem Laserlicht ist  $D_p^{(dip)}$ , für das als Abschätzung [Coh92]

$$D_p^{(dip)} \sim \frac{\hbar^2}{4} \nabla \Omega_R^2 \frac{2}{\Gamma} \quad (4.23)$$

angegeben werden kann. Dieser Beitrag ist den Fluktuationen der Dipolkraft zuzuordnen. Da hier eine ebene Welle betrachtet wird (s. o.) ist  $\nabla \Omega_R^2 = 0$  und damit auch  $D_p^{(dip)}$ , sodaß  $D_p = D_p^{(vac)} + D_p^{(abs)}$  ist.

Die Gleichgewichtstemperatur kann jetzt gemäß den Gleichungen 4.12, 4.19, 4.20 (mit  $\gamma_c = \alpha/m$ ) bestimmt werden. Die mit der spontanen Kraft erreichbare minimale Temperatur  $T_D$  heißt *Dopplerlimit*. Mit  $\delta = -\Gamma/2$  und  $S = 1$  ist

$$kT_D = \frac{\hbar\Gamma}{2} \quad (4.24)$$

Für  ${}^7\text{Li}^+$  in Ruhe ist diese Untergrenze mit  $\Gamma = 2\pi \cdot 3.7\text{MHz}$  und  $\lambda_L = 2\pi/k_L = 548.5\text{ nm}$  durch  $T_D^{7\text{Li}^+} = 89\ \mu\text{K}$  gegeben. Beim gebunchten Laserkühlen dagegen wird aus technischen Gründen mit vergleichsweise hohen Laserintensitäten gearbeitet und Frequenzverstimnungen, die groß gegen die Linienbreite sind. Beispielsweise ergibt sich mit typischen Parametern  $\delta = -40\Gamma$  und  $S_0 = 65$  (Sättigungsparameter auf Resonanz  $S_0 = S(\delta = 0)$ ) als Temperaturlimit  $T_{lim} = 3.6\text{mK}$ .

## 4.2.2 Gebunchtes Laserkühlen

Laserkühlen eines gebunchten Ionenstrahls wurde erstmals mit  ${}^{24}\text{Mg}^+$ -Ionen am Speicherring ASTRID in Aarhus durchgeführt und ist in [Hang95] beschrieben. Dabei wird der Ionenstrahl gebuncht und zusätzlich ein Laser eingestrahlt. Die Bunchfrequenz und die Laserfrequenz müssen dabei so aufeinander abgestimmt werden, daß die Ionengeschwindigkeit, bei der die Resonanzbedingung mit dem Laser erfüllt ist, innerhalb der RF-Akzeptanz der Buckets liegt (Abbildung 4.2). Die Ionen erfahren daher zusätzlich zur Kraft des elektrischen RF-Feldes (Gl. 3.27) die spontane Kraft des Laserfeldes (Gl. 4.7). Da im folgenden der longitudinale Phasenraum der Ionen betrachtet werden soll ist es

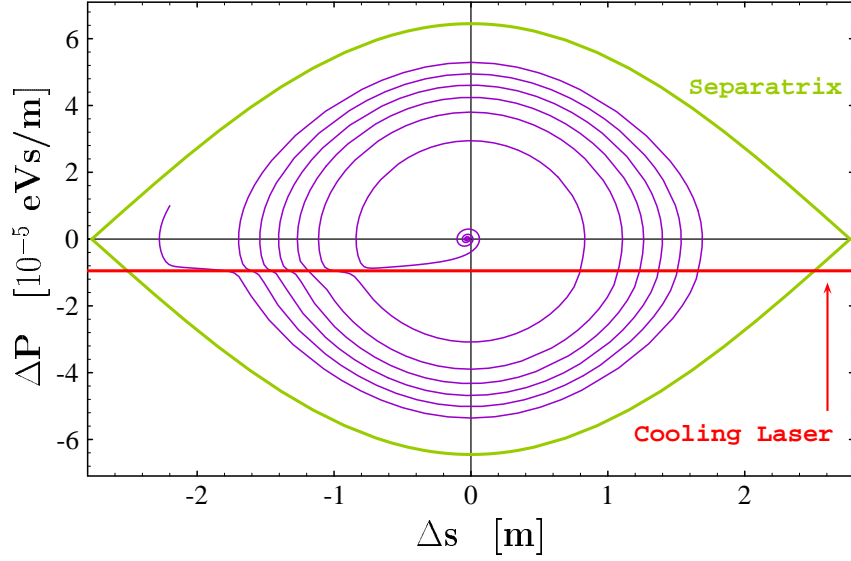


Abbildung 4.2: Der Phasenraum beim gebuchten Laserkühlen. Gezeigt ist eine numerische Lösung der Differentialgleichung 4.28. Zur Verdeutlichung der möglichen Ionenbewegungen wurde ein Startpunkt im äußeren Bucketbereich gewählt und der Sättigungsparameter auf Resonanz  $S_0 = 600$  gesetzt. Die Bunchspannung ist  $\hat{V} = 0.8$  V (Gleichung 3.25) und damit vergleichbar den im Experiment eingesetzten Spannungen. Weitere Erläuterungen sind im Text gegeben.

sinnvoll, die Frequenzverstimmung des Laserlichtes im Ruhesystem der Ionen<sup>12</sup> über den Dopplereffekt in Abhängigkeit des Ionenimpulses auszudrücken

$$F_L = \dot{p}_L = \eta_L \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{S_0} + \frac{(4\pi)^2}{S_0 \Gamma^2} \xi^2 (p - p_L)^2} . \quad (4.25)$$

$\eta_L$  ist der Duty-Cycle und berücksichtigt die Wechselwirkungslänge der Ionen mit dem Laserstrahl im Verhältnis zum Gesamtumfang des Speicherrings.  $\xi$  ist der Konversionsfaktor zur Umrechnung von kleinen Impulsintervallen in die entsprechenden Frequenzintervalle des Lasers und ergibt sich aus der Dopplerformel zu  $dv = \xi dp$  mit  $\xi = v_0/(mc)$ , wobei  $m$  die Ruhemasse der Ionen ist und verwendet wurde, daß im Ruhesystem der Ionen  $\beta \ll 1$  ist. Im Laborsystem ergibt sich für parallel ( $p$ ) und antiparallel ( $a$ ) eingestrahlte Laser

$$dv_a = -v_0/(mc)(1 - \beta)dp \quad \text{und} \quad dv_a = v_0/(mc)(1 + \beta)dp \quad (4.26)$$

oder

$$\frac{dp}{p} = \pm \frac{1}{\beta} \frac{dv_{p,a}}{v_{p,a}}, \quad (4.27)$$

<sup>12</sup>Das Bezugssystem, das synchron zu  $\omega_{rev} = 1/h\omega_{RF}$  im Speicherring umläuft.

wobei das „+“-Zeichen für den parallel eingestrahlenen Laser gilt. Ein Impulsintervall von  $\Delta p = 10^{-5}$  eVs/m entspricht damit Frequenzintervallen  $\Delta \nu = 249$  MHz bzw.  $\Delta \nu_a = 233$  MHz und  $\Delta \nu_p = 265$  MHz im Laborsystem.

Mit der Spontankraft lautet die Bewegungsgleichung eines Ions im RF-Bucket (Gleichung 3.31)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{L}{2\pi} \Omega_s^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{h\eta\eta_L}{2\pi} \frac{L\omega_s \hbar k \Gamma}{2p_s \left(1 + \frac{1}{S_0} + \frac{(4\pi)^2}{S_0 \Gamma^2} \xi^2 (p - p_L)^2\right)} &= 0 \\ p + \frac{2\pi p_s}{Lh\eta\omega_s} \dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

mit der unveränderten Gleichung 3.32 (hier ist  $\Delta p$  als  $p$  bezeichnet). Aufgrund der Impulsabhängigkeit der Laserkraft ist aus den beiden unabhängigen Gleichungen ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem entstanden.

Eine numerische Lösung dieses Gleichungssystems ist in Abbildung 4.2 gezeigt. Zur Verdeutlichung der Systematik der auftretenden Effekte wurde eine im Vergleich zum Experiment erhöhte Laserleistung von 1 W angesetzt, was einem Sättigungsparameter auf Resonanz von  $S_0 = 600$  entspricht (Experiment:  $S_0 = 65 - 100$ ). Aufgrund der Sättigung wird die Laserkraft dadurch nur unwesentlich erhöht, dafür aber sättigungsverbreitert. Auch die eingesetzte Bunchspannung ist mit  $\hat{V} = 0.8$  V gegenüber dem Experiment ( $\hat{V} = 0.3 - 0.5$  V) leicht erhöht.

In der Abbildung startet das Ion in der „vorderen“ Buckethälfte. Der vordere Bereich eines Buckets ist dadurch gekennzeichnet, daß die Phase relativ zu dem synchronen Teilchen negative Werte aufweist und daher der Phase der Bunch-Spannung vorausseilt. Wird extern eine bestimmte Stelle im Speicherring beobachtet (wie bei der Fluoreszenzlichtmessung auf einem Teilstück des Speicherrings), dann durchfliegt ein Ion mit negativer Phase diese Stelle bevor das synchrone Teilchen ankommt, das die Bucket-Mitte markiert. In dem vorderen Bucket-Bereich wirkt das RF-Feld verzögernd, sodaß sich das Ion zu niedrigeren Impulsen hin bewegt. Befindet sich das Ion dabei in der „oberen“ Buckethälfte, d.h. ist der Impuls größer als der Sollimpuls und das Ion zu schnell, so führt die Bewegung von

der Bucketmitte fort. Entsprechend ist die Bewegung in der unteren Buckethälfte (Ion zu langsam) auf die Bucketmitte hin gerichtet. In dem hinteren Bucket-Bereich ( $x > 0$ ) wirkt die Kraft des RF-Feldes dagegen beschleunigend. Analoge Überlegungen führen dann darauf, daß die Bewegung in der oberen Buckethälfte zur Mitte hingerrichtet ist und in der unteren Hälfte von der Mitte fort.

Das Ion in Abbildung 4.2 beginnt daher mit der Synchrotronoszillation, solange bis es in Resonanz mit dem parallel zur Bewegungsrichtung im Laborsystem eingestrahltten Laser-Licht gerät. Bei den gewählten Parametern überwiegt im äußeren und inneren Bucket-Bereich die Spontankraft die Kraft des RF-Feldes, und die Synchrotronoszillation des Ions wird gestoppt, weil die Spontankraft des parallelen Lasers beschleunigend wirkt. Entsprechend der Verstimmung des Lasers bewegt sich das Ion auf die Bucket-Mitte zu und durchquert dabei einen Bereich, in dem die RF-Kraft (sinusförmig) die Laser-Kraft überwiegt. Hier ist die Laserkraft zu schwach um die Synchrotronoszillation zu stoppen, das Ion verliert aber dennoch Impuls beim durchqueren der Resonanz. In dem hinteren Bucket-Bereich wird das Ion wieder mit dem Laser resonant und hier wird der Impuls erhöht. Dieser Impulsübertrag ist aber aufgrund der stark verkürzten Wechselwirkungszeit deutlich geringer als der Impulsverlust im vorderen Bucket-Bereich, wodurch es insgesamt zu einer Dämpfung der Synchrotronoszillation kommt.

Nachdem der Impuls des Ions ausreichend reduziert ist, kann die Laser-Kraft die RF-Kraft im inneren Bereich wieder kompensieren. Im Zentrum des Buckets gerät das Ion schließlich aus der Resonanz, weil in dem hinteren Bereich die Gegenkraft fehlt und demnach setzen erneut gedämpfte Synchrotronoszillationen ein. Nachdem in dem rein deterministischen Gleichungssystem 4.28 keine stochastischen Heizeffekte berücksichtigt sind, endet diese Bewegung mit dem Sollimpuls an der stabilen Phasenlage (stabiler Punkt). Der Ort der stabilen Phasenlage zur Kompensation der Laser-Kraft ist gegeben durch

$$\sin\left(\frac{2\pi}{L}x_{sp}\right) = -\frac{h\eta\eta_L\omega_f k\Gamma}{2p_s\Omega_s^2} \left(1 + \frac{1}{S_0} + \frac{(4\pi)^2}{S_0\Gamma^2}\xi^2\Delta p_L^2\right)^{-1}. \quad (4.29)$$

Bei typischen experimentellen Parametern ist  $x_{sp}$  um ca. 8 mm in den vorderen Bereich verschoben. Im Experiment war die RF-Spannung stets so gewählt (0.3 - 0.5 V), daß die Laserkraft die RF-Kraft im gesamten Bucket überwiegt und es daher immer zu dem

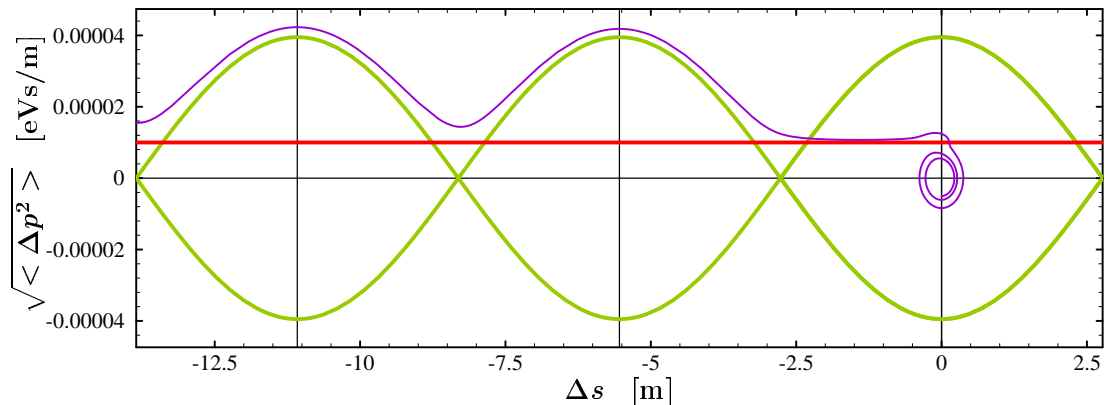


Abbildung 4.3: „Laser-Heizen“ von Ionen im RF-Bucket. Die Laserfrequenz ist so weit blauerstimmt, daß das Ion bei einem höheren Impuls als dem Sollimpuls resonant wird. Im vorderen Bucketbereich stellt sich wiederum ein Kräftegleichgewicht ein, die zu hohe Geschwindigkeit führt das Ion dann aber in die falsche Richtung. Die Amplitude der Impulsoszillation nimmt dadurch fortwährend zu und führt schließlich zum Verlassen des RF-Buckets. Ab diesem Zeitpunkt ist das Ion nicht mehr im RF-Feld gebunden, sodaß der mittlere Ionenimpuls nicht mehr dem Sollimpuls entspricht.

„direkten Einfang“ der Ionen kommt, d.h. die schnelle Driftbewegung der Ionen in das Bucketzentrum vorliegt.

Wird die Laserfrequenz dagegen soweit verstimmt, daß der resonante Impuls oberhalb des Sollimpulses liegt, denn führt die kombinierte Wechselwirkung mit dem Licht- und dem RF-Feld zur Entdämpfung der Synchrotronoszillation, was zum „herausheizen“<sup>13</sup> der Ionen aus dem Bucket führt (Abbildung 4.3). Das bedeutet, daß ein parallel eingestrahler, blauerstimmtener Kühlaser (in Bezug auf die Resonanzfrequenz eines synchronen Ions) zum Verlust der Ionen aus dem Bucket führt. Diese Verstimmung „0“ im Ruhesystem wird deshalb im folgenden auch mit Heizgrenze bezeichnet.

Der genaue Ablauf des Heizens hängt wiederum von den relativen Stärken der spontanen Laserkühlkraft und der RF-Kraft ab. In den Bereichen, in denen die RF-Kraft überwiegt, findet eine nach außen gerichtete spiralisierende Bewegung statt. Die spiralisierende Be-

<sup>13</sup>Es handelt sich dabei nicht um wirkliches Heizen. Durch die Energiezufuhr wird die Amplitude der Synchrotronoszillation der Ionen erhöht und damit nimmt die Varianz der Ionenimpulse unabhängig voneinander zu. Eine Thermalisierung in der Energieverteilung des gesamten Ionenensembles findet dagegen nicht statt.

wegung führt die Ionen langsamer aus dem Bucket als die direkte Drift, der Verlust der Ionen erfolgt aber bei typischen Experiment-Parametern dennoch innerhalb weniger ms, also schnell gegenüber der Integrationszeit bei der Fluoreszenzlichtmessung von mindestens 20 ms.

## 4.3 Heizraten im Speicherring

Eine Aussage über die Gleichgewichtssituation beim gebunchten Laserkühlen, d.h. über die Impulsunschärfe oder Temperatur des gekühlten Ionenensembles, setzt die Kenntnis der relevanten Heizeffekte mit den zugehörigen Heizraten voraus.

### 4.3.1 Strahlinterne Streuung

Die strahlinterne (Coulomb) Streuung, engl. intra beam scattering (IBS), stellt bei den in Speicherringen üblichen Strahlströmen von einigen  $\mu\text{A}$  - mA den dominierenden Heizprozeß dar.

Untersuchungen zum Intra Beam Scattering wurden in vielen Experimentiereinrichtungen durchgeführt. Entsprechende Experimente am TSR werden z.B. in [Hoch94] beschrieben, und ein Verfahren zur indirekten transversalen Laserkühlung von gespeicherten Ionenstrahlen beruht auf der durch IBS vermittelten Kopplung der transversalen Freiheitsgrade mit dem direkt gekühlten longitudinalen Freiheitsgrad [Mies95]. Ist bei der Spektroskopie am gebunchten Strahl die Sensitivität des Fluoreszenzlichtnachweises ausreichend, so daß mit wenigen Ionen pro Bucket gearbeitet werden kann (Kapitel 5), dann kann dieser Heizeffekt vernachlässigt werden.

Die Zeitkonstante  $\tau_{IBS}$  der strahlinternen Streuung ist definiert über die relative Zunahme der Varianz des Impulses  $\sigma_p^2 = \langle (p - \bar{p})^2 \rangle$  eines Testions, das in das Ionenensemble

eingebraucht wird [Mart84] und kann geschrieben werden als

$$\tau_{IBS}^{-1} = \frac{1}{\sigma_p^2} \frac{d}{dt} \sigma_p^2 \cong \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^2 q^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m}{p^3} \frac{N}{\sqrt{2\pi\epsilon_h\epsilon_v}\sigma_s} \frac{\sigma_p}{p} I$$

wobei  $\sigma_s = \sqrt{\langle (s - \bar{s})^2 \rangle}$  die Standardabweichung der Ortsverteilung der Ionen und  $N$  die Anzahl der Ionen ist.  $I$  ist ein Integralausdruck, der die Ringstrukturfunktionen und deren Ableitungen sowie die strahlcharakterisierenden Emittanzen ( $\epsilon_h, \epsilon_v$ ) bzw. die longitudinale Impulsunschärfe  $\sigma_p$  enthält.  $I$  muß numerisch berechnet werden, doch läßt sich durch Vergleich mit einem einfacheren Ansatz erkennen [Søre87] daß eine Abhängigkeit von dem Verhältnis der transversalen Temperatur zur longitudinalen Temperatur besteht, oder durch die Standardabweichungen ausgedrückt

$$I \sim \sqrt{\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}} = \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_p}$$

Damit ergibt sich unter Vernachlässigung der transversalen Freiheitsgrade als Abschätzung (mit Gleichung 4.17)

$$D_{IBS} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma_p^2 \sim \frac{mN}{\gamma p^2 \sigma_p} \quad (4.30)$$

In dem letzten Schritt wurde benutzt, daß für einen nichtraumladungsdominierten gebunchten Strahl für kleine Synchrotronamplituden die Varianzen von Impuls und Ortsabweichung (von der Bucketmitte) direkt ineinander umgerechnet werden können:  $\sigma_s \sim \sigma_p$ .

Eine Abschätzung der Heizrate kann anhand von Messungen an dichten Ionenstrahlen erfolgen.

Eine Messung an einem lasergekühlten, kontinuierlichen  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionenstrahl ergab eine Temperatur von 55 mK entsprechend einer Impulsbreite  $\sigma_p = 5.910 \cdot 10^{-7}$  eVs/m [Klei91]. Die Ionenzahl war  $N \approx 2 \cdot 10^6$ , was bei einer Bunchlänge von  $2\sigma_s \approx 20$  cm etwa 7200 Ionen pro Bucket entspricht. Die beobachtete Heizrate von 30 K/s ergibt in dem hier diskutierten Fall von maximal 40 Ionen pro Bucket bei  $T \approx 200$  mK eine Obergrenze von  $D_{IBS} < 0.09$  K/s.

Eine weitere Abschätzung kann anhand von  ${}^9\text{Be}^+$ -Daten erfolgen. In [Mies95] ist eine Messung beschrieben, die für einen lasergekühlten, gebunchten  ${}^9\text{Be}^+$ -Ionenstrahl eine Heizrate von 600 K/s ergab. Die Teilchenzahl pro Bucket war  $\sim 6 \cdot 10^5$  entsprechend einer



homogenen (kontinuierlichen) räumlichen Verteilung von  $5 \cdot 10^7$  Ionen im Speicherring. Die longitudinale Temperatur der Ionen war  $\leq 200$  mK und damit vergleichbar mit den hier beschriebenen Experimenten. Eine Skalierung ergibt als Obergrenze für den vorliegenden Fall mit 40 Ionen bei einer Bucketlänge von  $2\sigma_s = 20$  cm (200 mK)  $D_{IBS} = 0.07$  K/s. Die daraus resultierenden Bunchlängen und Impulsbreiten sind in Abbildung 5.12 eingezeichnet.

### 4.3.2 Restgas-Streuung

Der Durchgang eines Ions durch Materie führt aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung (im wesentlichen mit den Elektronen) zum Verlust an kinetischer Energie. Die Bethe-Bloch Formel gibt den Energieverlust  $d\varepsilon/dx$  beim Durchflug eines geladenen Teilchens durch ein Medium an und ist nach [PDG88]

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{DZ\rho}{A} \left( \frac{Z_{inc}}{\beta} \right)^2 \left[ \ln \left( \frac{2m_e \gamma^2 \beta^2 c^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right] [1 + v]$$

$D$  ist gegeben durch  $D = 4\pi N_A e^2 m_e c^2 = 0.3071$  MeV cm<sup>2</sup>/g,  $I, \delta, C, v$  sind phänomenologische Funktionen der Projektilgeschwindigkeit und  $Z, \rho, A$  sind die Ladungszahl, Dichte und Massenzahl des Mediums.

Für  $d\varepsilon/\varepsilon \ll 1$  ( $x$  klein) ist der mittlere Energieverlust auf dem Wegstück der Länge  $x$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^x \frac{d\varepsilon}{dx} dx \approx \frac{d\varepsilon}{dx} x \quad (4.31)$$

Bei einem gebunchten Ionenstrahl wird der mittlere Energieverlust  $\bar{\varepsilon}$  durch das RF-Feld ausgeglichen. Berücksichtigt werden muß dagegen der Einfluß der Fluktuationen in diesen Verlusten, der zu einer Energieaufstreuung der Ionen führt und damit eine weitere Heizrate bedingt.

Der mittlere Energieverlust ist andererseits unter Verwendung des in der Energie differentiellen Wirkungsquerschnitts beschrieben durch

$$\bar{\varepsilon} = nx \int_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon \quad (4.32)$$

$x$  ist die Weglänge in dem streuenden Medium (Target) und  $n$  die Teilchendichte.  $\epsilon_{max}$  ist der maximale Energieübertrag bei direkten Stößen (head-on collision) mit Elektronen des Targets:

$$\epsilon_{max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{m} + \left(\frac{m_e}{m}\right)^2} \quad (4.33)$$

Bei dem hier beschriebenen Experiment ist  $\epsilon_{max} = 4.2$  keV ( $\beta = 0.064, m/c^2 = 6.574$  GeV)

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Energieverlust bei der Streuung einer Punktladung an einem Elektron hat die Abhängigkeit [Ross52]

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = A \frac{1}{\beta^2 \epsilon^2} \left( 1 - \beta^2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{max}} \right) \quad (4.34)$$

Der Faktor  $A$  wird im folgenden durch Vergleich mit der Bethe-Bloch Formel bzw. Formel 4.31 bestimmt, wodurch die dort auftretenden phänomenologischen Funktionen berücksichtigt werden.

In der Näherung hoher Projektilgeschwindigkeit in Bezug auf die Bahngeschwindigkeit  $v_0$  der gebundenen Elektronen können die Target-Elektronen im wesentlichen als frei betrachtet werden („Free collision approximation“ [Betz72]). Die Geschwindigkeit der  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen ist  $v_{ion} = 19100$  km/s. Für Wasserstoff im Grundzustand ist  $v_0 = 2188$  km/s (Bohr'sche Geschwindigkeit), sodaß diese Bedingung erfüllt ist. Der Energieverlust wird daher im wesentlichen durch die Ionisation des Restgases hervorgerufen, und durch den Wirkungsquerschnitt gemäß Gleichung 4.34 beschrieben.

Der mittlere Energieverlust auf einem Wegstück  $x$  ist demnach

$$\bar{\epsilon} = nx \int_0^{\epsilon_{max}} \epsilon \frac{d\sigma}{d\epsilon} d\epsilon = Anx \frac{1}{\beta^2} \left[ \ln \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_i} - \beta^2 \right] \quad (4.35)$$

Die untere Integrationsgrenze  $\epsilon_i$  ergibt sich aus dem Ionisationspotential des betrachteten Mediums und ist für atomaren Wasserstoff bekanntlich 13.6 eV, für gasförmiges  $\text{H}_2$  hingegen 19.2 eV [HCP86]. Für andere Restgaszusammensetzungen sind in Gleichung 4.32 die Beiträge der einzelnen Schalen mit den entsprechenden Bindungsenergien aufzuaddieren. Dabei ergibt sich das Problem, daß für schwerere Kerne die Bahngeschwindigkeiten mit

der Projektilgeschwindigkeit vergleichbar werden. Für Stickstoff beispielsweise ist für 1s-Elektronen  $v_0 = 15320$  km/s bei einer Bindungsenergie von 410 eV. Wegen der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts ist aber deren Beitrag gering verglichen mit den äußeren 2p-Elektronen, deren Bindungsenergie 14.53 eV beträgt [HCP86] bei einer Bahngeschwindigkeit von 7660 km/s. Nach [PDG88] kann für  $Z_{med} > 1$  als mittlere Bindungsenergie  $I \approx 16(Z_{med})^{0.9}$  eV angesetzt werden.

Die Varianz des Energieverlustes beim Durchflug von Ionen durch ein Medium ist

$$\Delta\epsilon_{rms}^2 = nx \int_0^{\epsilon_{max}} \epsilon^2 \left( \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right) d\epsilon - \bar{\epsilon}^2 \quad . \quad (4.36)$$

Durch Vergleich der Gleichungen 4.32 und 4.31 ergibt sich der Faktor  $A$  und das Ergebnis wird in Gleichung 4.36 eingesetzt. Demnach ergibt sich unter Vernachlässigung interner Anregungen und kleiner spinabhängiger Beiträge [PDG88, Hint89] nach weiterer Rechnung

$$\Delta\epsilon_{rms}^2 = 0.1535 \left[ \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \right] \frac{Z_p^2 Z_m}{\beta^2 A_m} \rho x \epsilon_{max} \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \quad (4.37)$$

Der Term  $\frac{Z_m}{A_m}$  beschreibt das Verhältnis aus Kernladungs- zu Massenzahl des Mediums und  $\rho$  ist dessen Dichte. Im vorliegenden Fall ist das Medium das Restgas im Speicherring und  $A_m, Z_m$  und  $\rho$  sind dann als Mittelwerte gemäß der Partialdrücke der Konstituenten zu bestimmen. Weiter ist die Targetdicke  $x$  der Speicherring-Umfang, womit  $\Delta\epsilon_{rms}$  der Wert der Energieaufstreuung bei einem Umlauf ist.

Die zeitliche Änderung der im Laborsystem beobachteten Energiebreite kann damit durch

$$\frac{d\langle \Delta E_{lab}^2 \rangle}{dt} = v_{rev} \Delta\epsilon_{rms}^2 \quad (4.38)$$

berechnet werden, wobei  $v_{rev}$  die Umlauffrequenz der Ionen im Speicherring ist und der so berechnete Wert eine Mittelung auf einer Zeitskala beinhaltet, die durch die Dauer eines Umlaufs gegeben ist.

Die Streuung am Restgas ist ein dynamischer Prozeß, der in stochastischer Weise die Geschwindigkeiten bzw. Impulse der Ionen ändert. Damit die Diffusionskonstante dieses Heizprozesses angegeben werden kann, muß die Energieaufstreuung in die entsprechende

Breite der Impulsverteilung umgerechnet werden, wobei diese Umrechnung nichtrelativistisch erfolgen kann, da  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1.002$  nahe 1 ist. Dafür sollen gaußförmige Geschwindigkeitsverteilungen der Breite  $\sigma$  im Labor- und Ruhesystem betrachtet werden:

$$N(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2\sigma^2}}$$

wobei im Ruhesystem  $v_0 = 0$  ist. Dort ist die zugehörige Energiebreite  $\langle \Delta E_i^2 \rangle = 2(\frac{1}{2}m\sigma^2)^2$ , im Laborsystem hingegen ist

$$\langle \Delta E_{lab}^2 \rangle = \frac{1}{2}m^2\sigma^2(\sigma^2 + 2v_0^2) = \frac{1}{2m^2}\sigma_p^2(\sigma_p^2 + 2p^2) \quad . \quad (4.39)$$

Gleichung 4.38 kann damit in Abhängigkeit der Impulsbreite der Ionen geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \Delta E_{lab}^2 \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2m^2}(\sigma_p^4 + 2\sigma_p^2 p^2) \right) \\ &= \frac{1}{m^2}(\sigma_p^2 + p^2) \frac{d\sigma_p^2}{dt} \approx \left( \frac{p}{m} \right)^2 \frac{d\sigma_p^2}{dt} \end{aligned} \quad (4.40)$$

woraus der Diffusionskoeffizient für die Streuung am Restgas entnommen werden kann:

$$D_{RG} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_p^2}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{p} \right)^2 \frac{d\langle \Delta E_{lab}^2 \rangle}{dt} \quad (4.41)$$

Zur Abschätzung des Effekts sei eine Restgaszusammensetzung von 50% Wasserstoff und 50% Stickstoff bei einem mittleren Druck von  $10^{-10}$  mbar angenommen. Damit ergibt sich  $\frac{d\langle \Delta E_{lab}^2 \rangle}{dt} = 1.52 \cdot 10^4 \frac{\text{eV}^2}{\text{s}}$  und der Diffusionskoeffizient wird  $D = 4.15 \cdot 10^{-11} \frac{(\text{eVs})^2}{\text{m}^2\text{s}}$  oder  $D_t = 6.6 \frac{\text{K}}{\text{s}}$ . Besteht das Restgas dagegen zu 100% aus Wasserstoff, dann ergibt sich  $D_t = 1.1 \frac{\text{K}}{\text{s}}$ .

Simulationen zum gebunchten Laserkühlen mit Restgasstreuung werden in Kapitel 6 vorgestellt.

### 4.3.3 Weitere Heizeffekte

#### Frequenzjitter des Kühllasers

Die Schwankungen in der Verstimmung  $\delta$  des Kühllasers („Frequenzjitter“) bewirken Fluktuationen in der Lichtkraft auf die zu kühlenden Ionen. Mit  $\delta(t) = \delta + j(t)$  ergibt sich

$$F(t) = F(\delta(t)) \approx F(\delta) + \frac{dF}{d\delta}(\delta)j(t) \quad (4.42)$$

wobei  $j(t) \ll \delta$  angenommen wurde. Im Gleichgewicht wird  $F(\delta)$  von der RF-Kraft kompensiert, sodaß als effektiver Heizeffekt der Beitrag  $\delta F(\delta) = \frac{dF}{d\delta}j(t) = F'(\delta)j(t)$  wirksam wird. Damit die Heizrate angegeben werden kann muß die Autokorrelationsfunktion von  $\delta F$  bestimmt werden (Gleichung 4.15), und damit wegen

$$\langle \delta F(t)\delta F(t') \rangle = F'^2(\delta) \langle j(t)j(t') \rangle = F'^2(\delta) \langle j(t)j(t+\tau) \rangle \quad (4.43)$$

die Autokorrelationsfunktion der Frequenzschwankungen  $j(t)$ . In Gleichung 4.43 wurde auf der rechten Seite ein stationärer Prozeß vorausgesetzt.

$\langle j(t)j(t+\tau) \rangle$  kann berechnet werden, wenn die Art und die zugrundeliegende spektrale Verteilung der Frequenzschwankungen  $S(\omega)$  bekannt ist [Cutl66, Alla66]. Für Frequenzschwankungen rein statistischer Natur („weißes“ Frequenzrauschen) ist  $S(\omega) = \text{konst.}$  Zur Vereinfachung soll zunächst ein weißes Frequenzrauschen mit begrenzter Bandbreite untersucht werden mit

$$S(\omega) = \begin{cases} \hat{S} & ,|\omega| < \omega_c \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}$$

$\omega_c$  ist dabei die Maximalfrequenz der Rauschspektrums. Nach dem Wiener Khinchine Theorem ist die Autokorrelationsfunktion die Fouriertransformierte der spektralen Leistungsdichte  $S(\omega)$ . Die Autokorrelationsfunktion wird damit

$$\begin{aligned} \langle j(t)j(t+\tau) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{S} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{S} \cos \omega\tau d\omega \\ &= \hat{S} \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c\tau}{\omega_c\tau} \xrightarrow{\omega_c \rightarrow \infty} \hat{S} \delta(\tau) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Im letzten Schritt wurde die bekannte Darstellung für die  $\delta$ -Distribution benutzt:  $\sin(\omega\tau)/(\pi\omega) \xrightarrow{\omega_c \rightarrow \infty} \delta(\tau)$  Aus Gleichung 4.44 geht für große Bandbreiten des Rauschens eine Autokorrelationsfunktion der Form von Gleichung 4.15 hervor, woraus die Heizrate abgelesen werden kann.

Die zeitlich über  $\tau$  gemittelte Varianz des Frequenzjitters<sup>14</sup> ist [Cutl66]

$$\sigma^2[j]_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{S} \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2} d\omega = \frac{2\hat{S}}{\pi\tau^2} \cdot \frac{-1 + \cos \omega_c \tau + \omega_c \tau Si(\omega_c \tau)}{\omega_c} \quad \omega_c \tau \gg 1 \quad \frac{\hat{S}}{\tau} \quad (4.45)$$

$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy$  ist der Integralsinns und hat den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$ . Wird die Varianz des Frequenzjitters gemittelt über die Zeit  $\tau$  bestimmt, dann kann daraus die Rauschstärke  $\hat{S}$  und damit gemäß Gleichung 4.44 bzw. 4.15 die Heizrate bestimmt  $D$  bestimmt werden:

$$D_t = \frac{2D}{mk} = \frac{F'^2(\delta)\hat{S}}{mk} = \frac{F'^2(\delta)\sigma^2[j]_\tau\tau}{mk} = \frac{\sigma^2[j]_\tau\tau}{mk} \left( \hbar k_L \frac{\Gamma^3}{4} S_0 \frac{(-\delta)}{(\delta^2 + (1 + S_0)\Gamma^2/4)^2} \right)^2 \quad (4.46)$$

wobei  $F' = \frac{dF}{d\delta} = \alpha/k_L$  gemäß Gleichung 4.12 eingesetzt wurde.

Zur Abschätzung seien als typische Experiment-Parameter  $S_0 = 65$ ,  $\sigma^2[j]_\tau = (1\text{MHz})^2$ ,  $\tau = 1\text{ms}$  angenommen und damit wird

$$D_t = 3.8 \cdot 10^{-5} \left\{ \frac{(-\delta_p)}{(\delta_p^2 + 0.064^2)^2} \right\}^2 \quad \left[ \frac{\text{K}}{\text{s}} \right] \quad (4.47)$$

Der Index  $p$  an  $\delta$  und  $\Gamma$  bedeutet, daß diese Größen in Impulseinheiten eingesetzt werden müssen:  $[\delta_p] = [\Gamma_p] = 10^{-5} \text{ eVs/m}$  ( $10^{-5} \text{ eVs/m} \hat{=} 234 \text{ MHz}$  für den betrachteten Übergang in  ${}^7\text{Li}^+$ ).

Bei den Messungen war  $\delta_p \geq 8 \cdot 10^{-6} \text{ eVs/m}$ , sodaß die geschweifte Klammer in Gl. 4.47 den Wert  $< 1.93$  hat. Bei den beschriebenen Messungen ist damit der Einfluß des Frequenzjitters vernachlässigbar, auch wenn größere Werte für  $\sigma^2[j]_\tau$  angenommen werden.

Sehr kleine Verstimmungen können aber dennoch einen starken Heizeffekt zur Folge haben. Der Frequenzterm in der geschweiften Klammer erreicht sein Maximum für die Verstimmung  $\delta_p^m$ :

$$\left\{ \dots \right\}^2 \Big|_{\delta_p = \delta_p^m} = \frac{27}{4(1 + S_0)\Gamma_p^6}, \quad \delta_p^m = \frac{\sqrt{1 + S_0}\Gamma_p}{2\sqrt{3}} \quad (4.48)$$

<sup>14</sup> $\sigma^2[j]_\tau$  kann nur anhand endlich vieler Meßwerte bestimmt werden. Das Ergebnis einer solchen Messung ist  $\sigma^2(N, T, \tau) = \frac{N}{N-1} (< \Omega_\tau^2 >_N - < \Omega_\tau >_N^2)$ , wobei  $\Omega_\tau = \frac{1}{\tau}[\phi(t + \tau) - \phi(t)]$  die mittlere Frequenz des Oszillators auf einem Zeitintervall  $\tau$  ist.  $\phi$  ist die Phase des Oszillators und  $N$  die Anzahl der im zeitlichen Abstand  $T$  bestimmten Meßwerte. Die exakte Varianz entspricht dabei  $\sigma^2[j]_\tau = \sigma^2(\infty, T, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^2(N, T, \tau)$ . Die Allan-Varianz  $\sigma^2(2, T, \tau)$  ist eine Messung für  $\sigma^2[j]_\tau$ , die im Fall des weißen Frequenzrauschens bereits das exakte Ergebnis liefert [Alla66].

Für die angegebenen Parameter ist  $\delta_p^m = 3.7 \cdot 10^{-7}$  eVs/m  $\hat{=} 8.7$  MHz und  $\{\dots\}^2 \Big|_{\delta_p = \delta_p^m} = 1.49 \cdot 10^6$ , womit sich in diesem Extremfall eine Heizrate von 57 K/s ergibt

Mit Gleichung 4.46 kann die erreichbare Temperatur für den Fall angegeben werden, daß der Frequenzjitter den bestimmenden Heizeffekt darstellt. Nach Gleichung 4.19 gilt für die Temperatur  $T = D/(k\alpha)$ , sodaß sich mit 4.46

$$T_{lim} = \frac{D}{k\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{k_L^2 k} \alpha \sigma^2 [j] \tau \tau \quad (4.49)$$

ergibt. Für den maximal erreichbaren Kühlkoeffizienten  $\alpha_{max}$  gemäß Gleichung 4.13 wird damit in der beschriebenen Situation das Temperaturlimit

$$T_{lim} = \frac{1}{8} \frac{\hbar}{k} \sigma^2 [j] \tau \tau = 955 \mu\text{K} \quad (4.50)$$

und liegt damit rund eine Größenordnung über dem Dopplerlimit für  ${}^7\text{Li}^+$  von  $89 \mu\text{K}$ . Liegt dagegen die Standardabweichung der Frequenzfluktuationen in 1 ms bei 100 kHz, so tritt diese Temperaturgrenze mit  $T_{lim} = 9.55 \mu\text{K}$  hinter das Dopplerlimit zurück.

### Fluktuationen der Bahnlänge

Fluktuationen der Bahnlänge im Speicherring bewirken eine Phasenabweichung  $\phi$  in Bezug auf das RF-Feld. Eine Abweichung  $x = \frac{L}{2\pi} \phi$  hat (Kapitel 3.3.2) eine Kraft

$$F = -\frac{L}{2\pi} m \Omega_s^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \quad (4.51)$$

auf das Ion zur Folge.  $\Omega_s$  ist die Synchrotronfrequenz, Gleichung 3.30. Für die Fluktuationen gilt wieder

$$\delta F(t) = F'(x_{sp}) x(t) \quad (4.52)$$

wobei  $x_{sp}$  der stabile Punkt (Gleichung 4.29) ist und i. a. nahe an der Bucketmitte bei  $x = 0$  liegt. Damit wird

$$F'(x_{sp}) = -m \Omega_s^2 \cos\left(\frac{2\pi}{L} x_{sp}\right) \approx -m \Omega_s^2 \quad (4.53)$$

Wird wiederum weißes Frequenzrauschen der Stärke  $\hat{S}$  und der Bandbreite  $\omega_c$  vorausgesetzt, dann ergibt sich analog zu Gleichung 4.45 für die über  $\tau$  gemittelte Varianz der

räumlichen Abweichungen  $\sigma^2[x]_\tau$

$$\sigma^2[x]_\tau \stackrel{\omega_c \tau \gg 1}{\approx} \frac{\hat{S}}{\tau} \quad (4.54)$$

und damit, analog zu Gleichung 4.46

$$D_t = \frac{2D}{mk} = \frac{2m\Omega_s^4}{k} \sigma^2[x]_\tau \tau \quad (4.55)$$

Wird über die Zeit eines Umlaufs im Speicherring gemittelt, dann ergibt sich mit  $\tau = 2.9 \mu\text{s}$

$$D_t = 0.019 \sigma^2[x]_\tau \frac{\text{K}}{\text{s m}^2}$$

Ein relevanter Beitrag würde also räumliche Schwankungen im Bereich mehrerer m erfordern und ist somit vernachlässigbar. Auch für langsame Störungen, z.B. ausgelöst durch mechanische Schwingungen, ergibt sich kein nennenswerter Beitrag: für  $\tau = 100 \text{ ms}$  ist

$$D_t = 636 \sigma^2[x]_\tau \frac{\text{K}}{\text{s m}^2} \quad ,$$

sodaß ein Beitrag von 0.1 K/s eine Amplitude von 1.4 cm erfordern würde.

### **Einfluß der Betatronoszillationen**

Die Betatronoszillationen (Abschnitt 3.2.1) verursachen eine zusätzliche Unschärfe im Ort und Impuls der Ionen. Durch die Transversalbewegung wird der longitudinale Ionenimpuls moduliert, und dadurch entsteht eine Phasenabweichung in Bezug auf die RF-Phase, die eine entsprechende Impulsänderung zur Folge hat.

Streng genommen kann dieser Effekt in dem dargelegten Modell nicht beschrieben werden, weil die Phasen- und Impulsschwankungen durch die Abhängigkeit von der Betatronphase fest korreliert sind und damit kein Markov-Prozeß vorliegt. Andererseits ist der Verlauf der Phasenabweichung an einer Stelle  $z_0$  nicht periodisch mit dem Umlauf der Ionen im Speicherring, weil der Beta-Tune aus Stabilitätsgründen im Idealfall eine nicht-rationale Zahl ist und außerdem Phasenstörungen durch den nichtidealen Speicherring hinzukommen<sup>15</sup>. Die Betatronoszillation selbst ist natürlich kein Heizeffekt. Durch die

<sup>15</sup>Ursache für solche Störungen sind beispielsweise ein geringfügiger Versatz der ionenoptischen Elemente gegen die Sollbahn.



scheinbar fluktuierende Phase des Ions gegenüber dem synchronen Ion beim Durchgang durch das RF-Feld (idealisiert an der Stelle  $z_0$ ) ergibt sich aber aufgrund der Wechselwirkung mit dem Feld die gleiche Situation, wie sie im Zusammenhang mit Fluktuationen der Bahnlänge beschrieben wurde.

Für eine Abschätzung des Effekts soll daher im folgenden die Phasenabweichung eines Ions gegenüber dem synchronen Ion beim Durchgang durch das RF-Feld als stochastische Variable angenommen werden. Die zugehörige Heizrate kann dann gemäß den obigen Ausführungen berechnet werden (Gleichung 4.55). Als Obergrenze für die mögliche Stärke dieser Phasen- bzw. Ortsfluktuationen wird dabei die maximale Amplitude der Betatronoszillationen angesetzt, die maximal bei aufeinanderfolgenden Durchläufen durch das RF-Feld auftreten können. Als Mittelungszeit wird daher die Umlaufdauer der Ionen im Ring verwendet ( $2.9 \mu\text{s}$ ).

Zur Bestimmung der Amplitude der Ortsmodulation wird die Betatronoszillation vereinfachend als ungestörte harmonische Schwingung beschrieben, die auf einem Speicherringumfang in horizontaler Richtung  $Q_x = 2.854294$  und in vertikaler Richtung  $Q_y = 2.875052$  Schwingungen ausführt, also

$$\begin{aligned} x(z) &= a_x \sin(\omega_{s,x}z), & y(z) &= a_y \sin(\omega_{s,y}z + \delta) \\ \dot{x} &= a_x \omega_{s,x} \sin(\omega_{s,x}z) \dot{z}, & \dot{y} &= a_y \omega_{s,y} \sin(\omega_{s,y}z + \delta) \dot{z} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$z$  ist dabei die Koordinate längs der Sollbahn. Die Betatronoszillation wird horizontal ( $x$ ) und vertikal ( $y$ ) durch Frequenzen  $\omega_{s,x}$ ,  $\omega_{s,y}$  beschrieben mit

$$\omega_{s,x} = \frac{2\pi}{L} Q_x = 0.3237195 \frac{1}{\text{m}}, \quad \omega_{s,y} = \frac{2\pi}{L} Q_y = 0.3260737 \frac{1}{\text{m}}$$

wobei  $L$  die Speicherringlänge ist. Die Bahngeschwindigkeit ist  $v_m = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$  und für das synchrone Teilchen sowie außerhalb des RF-Feldes konstant. Mit Gl. 4.56 gilt

$$v_m = \dot{z} \sqrt{1 + a_x^2 \omega_{s,x}^2 \cos^2(\omega_{s,x}z) + a_y^2 \omega_{s,y}^2 \cos^2(\omega_{s,y}z)} \quad (4.57)$$

und in der Näherung kleiner Betatronamplituden folgt

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \frac{v_m}{\sqrt{\dots}} \approx v_m \left[ 1 - \frac{1}{2} a_x^2 \omega_{s,x}^2 \cos^2(\omega_{s,x} z) - \frac{1}{2} a_y^2 \omega_{s,y}^2 \cos^2(\omega_{s,y} z) \right] \\
&= v_m \left[ 1 - \frac{1}{2} a_x^2 \omega_{s,x}^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_{s,x} z) \right) - \frac{1}{2} a_y^2 \omega_{s,y}^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_{s,y} z + 2\delta) \right) \right] \quad (4.58) \\
&= v - \frac{v_m}{4} \left[ a_x^2 \omega_{s,x}^2 \cos(2\omega_{s,x} z) + a_y^2 \omega_{s,y}^2 \cos(2\omega_{s,y} z + 2\delta) \right] .
\end{aligned}$$

Dabei ist offensichtlich

$$v = v_m \left( 1 - \frac{1}{2} a_x^2 \omega_{s,x}^2 - \frac{1}{2} a_y^2 \omega_{s,y}^2 \right) = \langle \dot{z} \rangle_L = v_{rev} L \quad (4.59)$$

die mittlere longitudinale Bahngeschwindigkeit. Weil  $|\dot{z} - v| \ll v$  gilt kann die Näherung  $z(t) \rightarrow v_{rev} L t$  eingesetzt werden, wodurch die maximalen Abweichungen von  $\dot{z}$  gegenüber  $\langle \dot{z} \rangle = v$  nicht beeinflusst werden. Für  $\dot{z}$  kann damit geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= v - \frac{1}{4} v_m a_x^2 \omega_{s,x}^2 \cos(2\omega_x t) - \frac{1}{4} v_m a_y^2 \omega_{s,y}^2 \cos(2\omega_y t + 2\delta) \\
&= v \left( 1 - \frac{a_x^2 \omega_{s,x}^2}{4 \left( 1 - \frac{1}{2} a_x^2 \omega_{s,x}^2 - \frac{1}{2} a_y^2 \omega_{s,y}^2 \right)} \cos(2\omega_x t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_y^2 \omega_{s,y}^2}{4 \left( 1 - \frac{1}{2} a_x^2 \omega_{s,x}^2 - \frac{1}{2} a_y^2 \omega_{s,y}^2 \right)} \cos(2\omega_y t + 2\delta) \right) \quad (4.60)
\end{aligned}$$

mit

$$\omega_x = v_{rev} L \omega_{s,x} \quad , \quad \omega_y = v_{rev} L \omega_{s,y} \quad . \quad (4.61)$$

Für die z-Koordinate ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
z &= \int_0^t \dot{z}(t') dt' \\
&= vt - \frac{v_m a_x^2 \omega_{s,x}^2}{8\omega_x} \sin(2\omega_x t) - \frac{v_m a_y^2 \omega_{s,y}^2}{8\omega_y} \sin(2\omega_y t + 2\delta) \quad (4.62) \\
&= vt - \frac{1}{8 \left( 1 - \frac{1}{2} a_x^2 \omega_{s,x}^2 - \frac{1}{2} a_y^2 \omega_{s,y}^2 \right)} \left[ a_x^2 \omega_{s,x} \sin(2\omega_x t) + a_y^2 \omega_{s,y} \sin(2\omega_y t + 2\delta) \right]
\end{aligned}$$

und schließlich wird die Ortsabweichung  $\delta z$  in Bezug auf das synchrone Ion

$$\delta z = z - vt = - \frac{a_x^2 \omega_{s,x} \sin(2\omega_x t) + a_y^2 \omega_{s,y} \sin(2\omega_y t + 2\delta)}{8 \left( 1 - \frac{1}{2} a_x^2 \omega_{s,x}^2 - \frac{1}{2} a_y^2 \omega_{s,y}^2 \right)} \quad (4.63)$$

Der Strahldurchmesser eines elektronengekühlten Strahls beträgt typisch 1 mm, wohingegen der ungekühlte Strahl einen Durchmesser von typisch 1 cm hat, wenn die Blende in der Experimentierstrecke eingefahren ist. Nach Gleichung 4.63 bedeutet das für  $2a_x = 2a_y = 1$  mm einen Maximalwert von  $(\delta z)_{max} = 2.0 \cdot 10^{-8}$  m und für  $2a_x = 2a_y = 1$  cm ergibt sich  $(\delta z)_{max} = 2.0 \cdot 10^{-6}$  m.

Nach Gleichung 4.55 entspricht das mit  $\tau = 2.9 \mu\text{s}$  einer Heizrate von  $D_t < 10^{-17}$  K/s ( $2a = 1$  mm) bzw.  $D_t < 10^{-13}$  K/s ( $2a = 1$  cm) und ist damit völlig vernachlässigbar.

# Kapitel 5

## Das Präparationsverfahren und die Messungen am Ionenstrahl

In diesem Kapitel wird das Verfahren zur Isomerentrennung im Speicherring vorgestellt. Der resultierende gebunchte, lasergekühlte Ionenstrahl besteht ausschließlich aus Ionen im Triplettzustand  $1s^2\ ^3S_1$ , und damit sind alle Ionen der Manipulation durch die Lichtkraft zugänglich, bei gleichzeitiger Reduktion der Heizrate durch die strahlinterne Streuung aufgrund der reduzierten Teilchenzahlen (Abschnitt 2.4). Der longitudinale Phasenraum des Ionenstrahls wurde direkt durch die zeitaufgelöste Messung des Fluoreszenzlichts synchron zur RF-Phase bestimmt.

### 5.1 Isomerenseparation im Speicherring

Das Verfahren beruht auf der selektiven Verzögerung der Ionen, die sich im Singlettzustand befinden. Die dazu erforderliche Kraft wird durch die Kühlkraft des Elektronenkühlers bereitgestellt, der zu diesem Zweck durch die geeignete Wahl des Kathodenpotentials zu einer niedrigeren Sollenergie hin verstimmt wird. Die dabei wirksame Kraft  $F_{Ecool}$  kann gemäß Gleichung 4.1 bzw. der Näherung 4.2 aus dem nichtmagnetischen Anteil berechnet werden, da die Verstimmung bei typischen Experiment-Parametern groß gegen

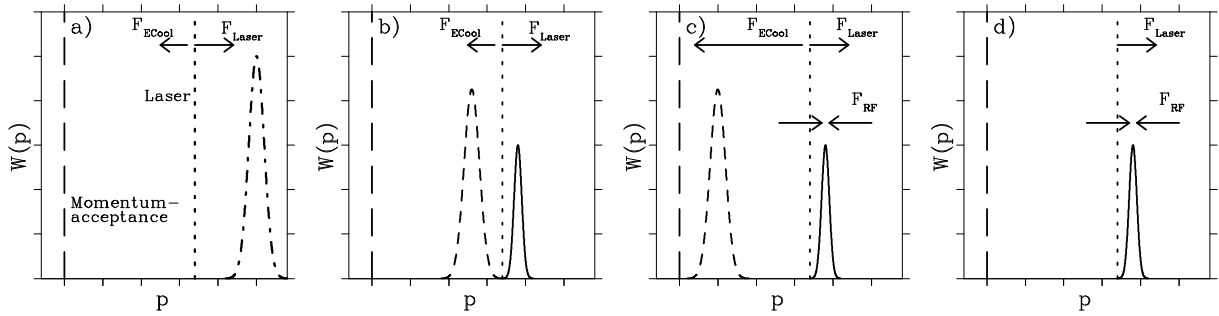


Abbildung 5.1: Die Impulsverteilung der  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen bei der Isomerentrennung. a) Das Kathodenpotential des Elektronenkühlers wird verstimmt, wodurch alle Ionen verzögert werden. b) Die spontane Licht-Kraft kompensiert die Elektronenkühlkraft auf die Ionen im Tripletzustand, während die Ionen im Singlettzustand weiter verzögert werden. c) Nach ausreichender Separierung in der Geschwindigkeit bzw. dem Impuls kann eine hohe Elektronenkühlkraft eingesetzt werden. Das Kathodenpotential wird dabei kontinuierlich durchgestimmt, sodass die Ionen im Singlettzustand aus der Impulsakzeptanz des Speicherringes herauslaufen und nur ein Strahl aus Ionen im Tripletzustand im Ring verbleibt (d).

die thermische Breite der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ist. Genauere Betrachtungen hierzu und eine Messung der Fluoreszenz, die von den verzögerten Ionen mit einem „Doppler-Scan“ aufgenommen wurde, finden sich in Anhang C.

Die Elektronen-Kühlkraft  $F_{Ecool}$  wirkt auf alle Ionen. Zur selektiven Verzögerung der Singlettzustände wird  $F_{Ecool}$  für die Tripletzustände durch die spontane Kraft  $F_L$  (Gleichung 4.7, multipliziert mit dem duty cycle  $\eta_L$ ) kompensiert. Die anhaltende Verzögerung der Singlettzustände bewirkt aufgrund der Dispersion im Speicherring einen horizontalen Strahlversatz gemäß Gleichung 3.20. Bei dem Experiment ist eine Blende in der Experimentierstrecke eingefahren, die den freien Durchmesser auf 18mm beschränkt. In der Ausgangslage verläuft der Ionenstrahl zentral durch diese Blende (mit einer Unsicherheit von  $< \pm 1\text{mm}$ ), sodass eine horizontale Verschiebung von 9mm zum Verlust der Ionen im Singlettzustand führt. Die Dispersion in der Experimentierstrecke ist  $D = 1.6\text{ m}$ , für das „herausfiltern“ der Singlettzustände ist damit eine Impulsverschiebung von  $\frac{\Delta p}{p} = 5.6 \cdot 10^{-3}$  bzw. eine Energieverschiebung von 151 KeV erforderlich.

Die praktische Durchführung zeigen die Abbildungen 5.1 und 5.2. Nach der Vorkühlung des Strahls mit dem Elektronenkühler wird das Kathodenpotential mit einem zusätzli-

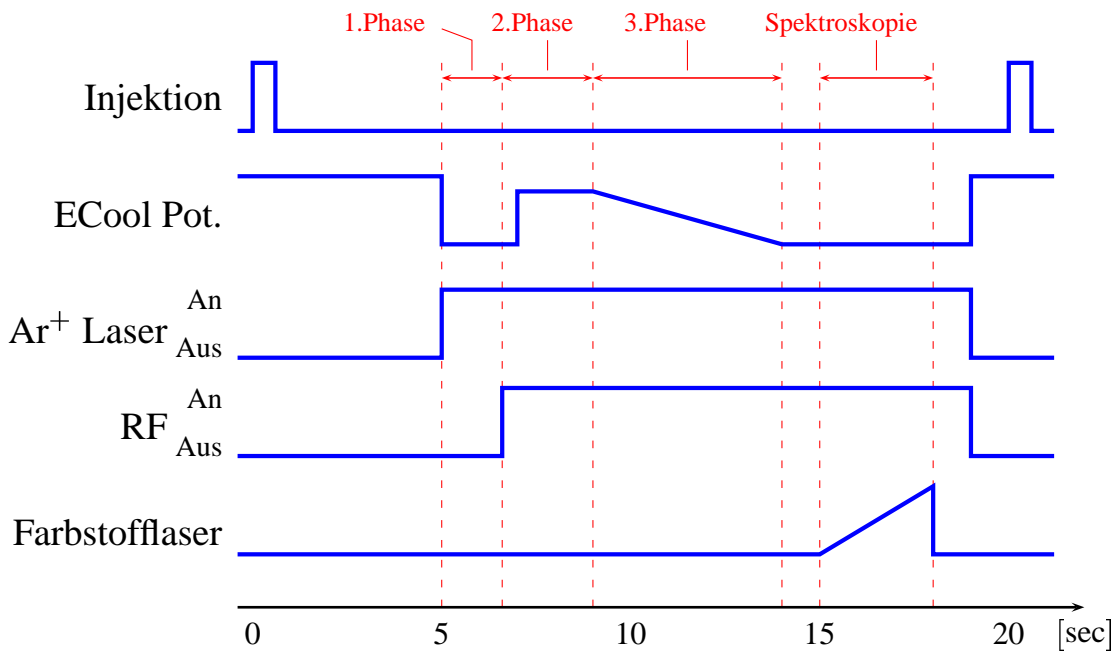


Abbildung 5.2: Der zeitliche Ablauf bei der Isomerentrennung. Nach dem Elektronen-Vorkühlen wird der Argonionenlaser eingeschaltet und gleichzeitig das Kathodenpotential verstimmt. Nach der Trennungsphase (ca. 1.7 s) wird das RF-Feld eingeschaltet. Nach weiteren 0.3 s wird die Verstimmung des Kathodenpotentials reduziert, wodurch die Verzögerung verstärkt wird. Nach weiteren 2 s werden die Ionen im Singlettzustand durch das Durchstimmen des Kathodenpotentials aus dem Speicherring entfernt. Nach dieser Präparation erfolgt schließlich die Spektroskopie der verbliebenen Ionen im Tripletzustand mit dem Farbstofflaser.

chen Spannungsgenerator sprunghaft um bis zu 30 V verstimmt, wobei der typische Wert ca. 20 V beträgt. Die „Sprungweite“ bei der Verstimmung muß so gewählt werden, daß  $F_L > F_{E_{cool}}$  gewährleistet ist, was die mögliche Verzögerung begrenzt (Abbildung 5.3 und Anhang C). Abhilfe schafft der zusätzliche Einsatz des Radiofrequenzfeldes.

In der *1. Phase* wird die verzögernde Elektronenkühlkraft durch eine entsprechende Sprungweite auf einen Wert gesetzt, bei dem die Laserkühlkraft die Ionen im Tripletzustand sicher halten kann (Abbildung 5.3). Nach der 2 s andauernden Verzögerung (Abbildung 5.2), in der die Ionen im Singlettzustand in der Geschwindigkeit von den Ionen im Tripletzustand getrennt werden, wird in der *2. Phase* das RF-Feld eingeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt sind die Singlett-Ionen in der Geschwindigkeit soweit verschoben, daß sie außerhalb der RF-Akzeptanz liegen. Die Triplet-Ionen sind dagegen in den RF-Buckets „gespeichert“, der Kühlprozeß beginnt daher unmittelbar mit dem Einschalten des RF-

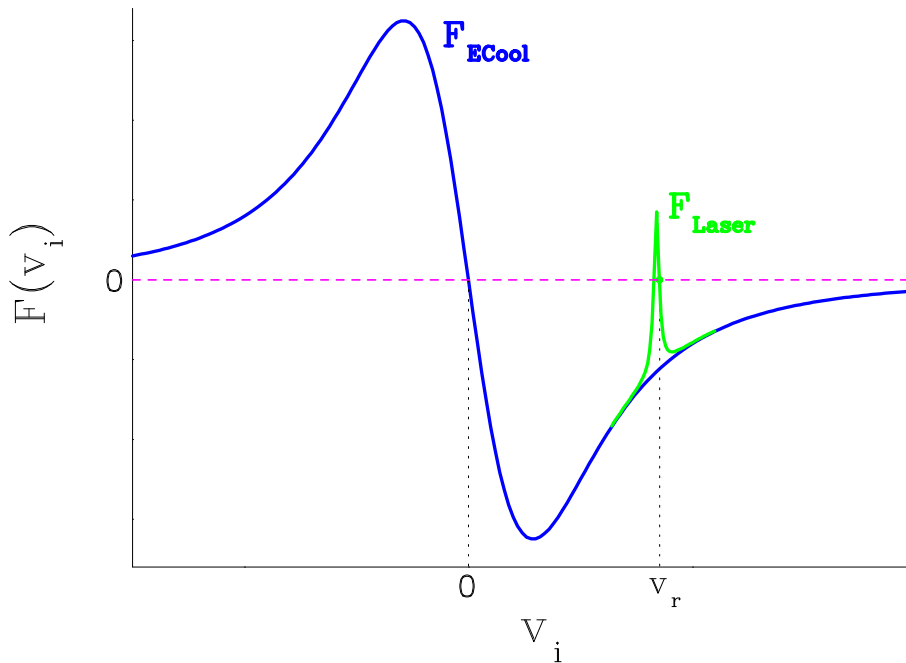


Abbildung 5.3: Die Laserkühlkraft (spontane Kraft) und die Elektronenkühlkraft bei der Isomerentrennung (schematisch). Gezeigt ist die Kraft nach dem Sprung des Kathodenpotentials um 20 V. Die Geschwindigkeitsklasse der  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen in Resonanz mit dem Laser wird bei dieser Geschwindigkeit  $v_r$  gehalten, die Ionen im Grundzustand werden hingegen forwährend verzögert, bis sie durch den Kontakt mit der Blende in der Experimentierstrecke aus dem Speicherring entfernt werden.

Feldes.

Die Geschwindigkeits-Verstimmung der Singlett-Ionen kann nach Gleichung C.2 berechnet werden. 100 ms nach dem Einschalten des RF-Feldes wird das Kathodenpotential auf eine Spannung eingestellt, bei der die maximale Kraft auf die Ionen im Grundzustand wirkt. Die erhöhte Kraft auf die Ionen im Tripletzustand wird dagegen von dem RF-Feld kompensiert. Das Kathodenpotential bleibt für typisch 2 s auf diesem Wert, wobei die Singlettzustände bei der entsprechenden Geschwindigkeit akkumuliert werden.

In der 3. Phase wird das Kathodenpotential innerhalb von 5 s kontinuierlich auf 30 V unterhalb der Sollspannung verstimmt, entsprechend 378 KeV Verschiebung der Ionenenergie. Da die Ionen bereits bei einer Verschiebung von 151 KeV nicht mehr speicherbar sind, ist somit ein reiner gebunchter Strahl lasergekühlter  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen im Tripletzustand hergestellt. Als Abschluß wurde mit einem antiparallel eingestrahlenen Farbstofflaser ein sogenannter „Probescan“ durchgeführt, d.h. der Laser wurde in der Frequenz durchge-

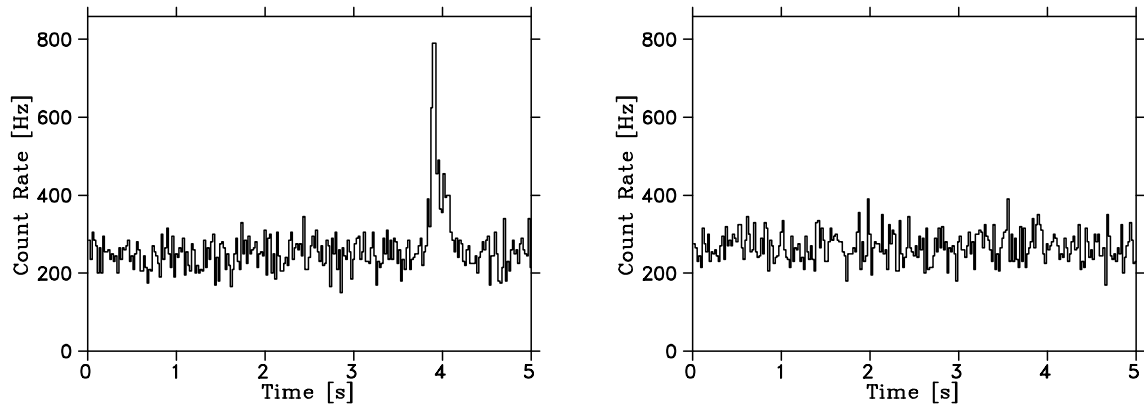


Abbildung 5.4: Fluoreszenzsignal bei der Spektroskopie mit dem Testlaser nach der Iso-merentrennung. In der 1. Messung wurde das Verfahren wie im Text beschrieben durch-geführt, in der 2. Messung war dagegen der Argonionenlaser während der Ionendrift ge- blockt. Es gibt dann keinen zustandsabhängigen Unterschied in der Ionenbewegung und das reine Untergrunds- signal zeigt an, daß keine Ionen in den Buckets verblieben sind.

stimmt und das Fluoreszenzlicht in Abhängigkeit von der Laserfrequenz gemessen.

Die Anpassung der Elektronenkühlkraft an die Laserkühlkraft und die Bestimmung der Driftzeit bis zum Einschalten des RF-Feldes wurde durch Testmessungen optimiert, wo- durch auf die zeitraubende Messung der aktuell wirksamen Kräfte verzichtet werden konnte<sup>1</sup>. Dabei dient die beobachtete Fluoreszenzrate als Indikator für die Anzahl der verbliebenen Triplet-Ionen. Zunächst wird die minimal erforderliche Sprungweite fest- gestellt, bei der die Laserkühlkraft die Elektronenkühlkraft kompensieren kann. Danach wird die erforderliche Driftzeit bestimmt. Ist die Driftzeit zu kurz gewählt, dann befin- den sich auch noch Singlettzustände in den RF-Buckets. Das kann dadurch getestet wer- den, daß der Kühllaser (parallel eingestrahler Argonionenlaser) während der Driftzeit geblockt wird und somit kein Unterschied in der Bewegung der Singlett- und Triplet- Zustände besteht. Wird bei dem Probe-Scan noch Fluoreszenz beobachtet, dann war die Driftzeit nicht ausreichend. Zwei solche Messungen sind in Abbildung 5.4 gezeigt. In der 1. Messung war der Argonionenlaser während der Driftzeit eingestrahlt worden, in der 2. Messung war er dagegen geblockt, und man sieht, daß ohne Argonionenlaser keine Ionen mehr verblieben sind.

<sup>1</sup>Solche Messungen sind z.B. in den Referenzen [Petr93, Past95] beschrieben.



## 5.2 Die Messung des longitudinalen Phasenraumes

Zur Messung der Phasenraumverteilung der präparierten  ${}^7\text{Li}^+$  Ionen wird das Fluoreszenzlicht zeitaufgelöst und synchron zur Phase des RF-Feldes gemessen. Der Zeitpunkt  $t_e$ , bei dem ein Photon gezählt wird, gibt die augenblickliche Phase des RF-Feldes  $\phi_e = v_{RF}(t_e - t_s)$  an, wobei  $t_s$  der Zeitpunkt des Durchgangs des synchronen Teilchens ist und damit der RF-Phase 0 bzw. der Bucketmitte entspricht. Die Position in dem RF-Bucket ergibt sich dann aus

$$s_e = L \frac{\phi_e}{2\pi} .$$

In dem hier beschriebenen Experiment ist der Strahl auf der 10. Harmonischen gebuncht, die Bucketlänge  $L$  ist demnach  $L = 5.54$  m.

Die Geschwindigkeits- bzw. Impulsverteilung wird, wie bereits beschrieben, durch einen „Probe-Scan“ mit dem Farbstofflaser ermittelt. Dafür wird der Farbstofflaser über die Resonanz der Ionenverteilung durchgestimmt und dabei das Fluoreszenzlicht gemessen. Anhand des Dopplereffekts gemäß Gleichung 2.1 kann aus der gemessenen FWHM-Linienbreite auf die FWHM-Geschwindigkeitsbreite der gaußförmigen Verteilung geschlossen werden.

### 5.2.1 Die Messung der räumlichen Ionenverteilung in den RF-Buckets

Die Fluoreszenzlichtmessung erfolgt mit Integrationszeiten (Kanaldauer oder Kanalbreite) von 10 - 50 ms, sodaß die gezählten Photonen aus allen Buckets über viele Umläufe aufaddiert werden (Umlauffrequenz  $v_{rev} = 345$  kHz). Es ist daher erforderlich, das Fluoreszenzlicht synchron zum Ionenumlauf bzw. zur RF-Phase aufzunehmen. Damit ist sichergestellt, daß in den Messungen alle räumlichen Bucketbereiche kohärent aufaddiert werden.

Zu diesem Zweck wurde in Zusammenarbeit mit dem Elektroniklabor des Instituts für

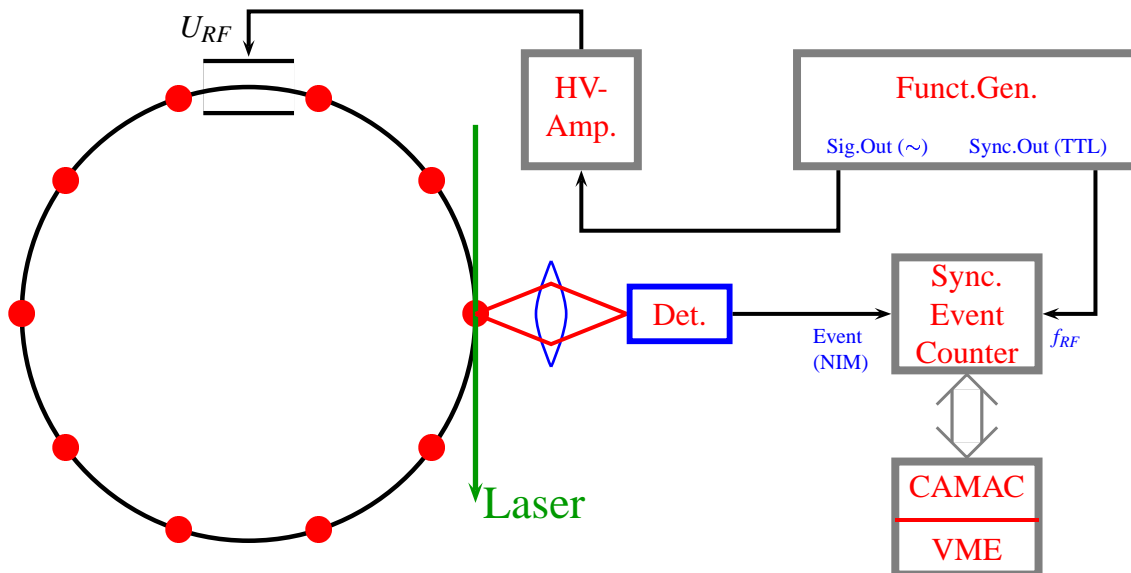


Abbildung 5.5: Messung des longitudinalen Phasenraums durch synchrone, zeitaufgelöste Fluoreszenzlichtmessung. Der Funktionsgenerator liefert ein sinusförmiges Signal, das verstärkt an den Kickerplatten angelegt wird. Das Triggersignal des Funktionsgenerators dient der Meßelektronik (Sync. Event Counter) zur Synchronisation auf die RF-Phase. Diese Komponente ist detaillierter in Abbildung 5.6 dargestellt. Die Meßelektronik sortiert die gezählten Ereignisse in zeitabhängig des in die 32 Scaler. Aufgrund der Synchronisation sind die Ereignisse in einem Scaler direkt einem Teilstück der Buckets zuzuordnen. Die damit erzielte räumliche Auflösung ist 17.3 cm.

Physik der Universität Mainz eine Messelektronik entwickelt, die registrierte Photonen-Ereignisse synchron in 32 sogenannte Scaler einliest (Abbildung 5.6). Die Taktfrequenz dieses Sortierprozesses (Fortschalten der Scaler) geschieht mit dem 32-fachen der Bunchfrequenz. Dabei wird von Scaler 32 auf Scaler 1 fortgeschaltet, sodaß jedes Bucket genau in den 32 Scalern dargestellt wird und die Messung die Summe aller Buckets zeigt, die während der Meßzeit aufgenommen wurden. Die Ionen waren vor dem Einschalten der Radiofrequenz als kontinuierlicher Strahl gespeichert. Es kann daher erwartet werden, daß alle Buckets die gleiche Anzahl Ionen enthalten, wobei die Poissonstatistik zu berücksichtigen ist. Für jeden Kanal zeigen die 32 Scaler demzufolge die zeitlich gemittelte räumliche Verteilungsfunktion für alle Buckets. Mit der Bucketlänge  $L = 5.54$  m ergibt sich damit eine räumliche Auflösung von 17.3 cm.

Blockschaltbilder der eingesetzten Elektronik sind in den Abbildungen 5.5 und 5.6 gezeigt. Zur Synchronisation mit der RF-Phase wird das TTL-Signal des Funktionsgenerators verwendet, der den HV-Verstärker ansteuert (vgl. Abbildung 5.5). Das erforderli-

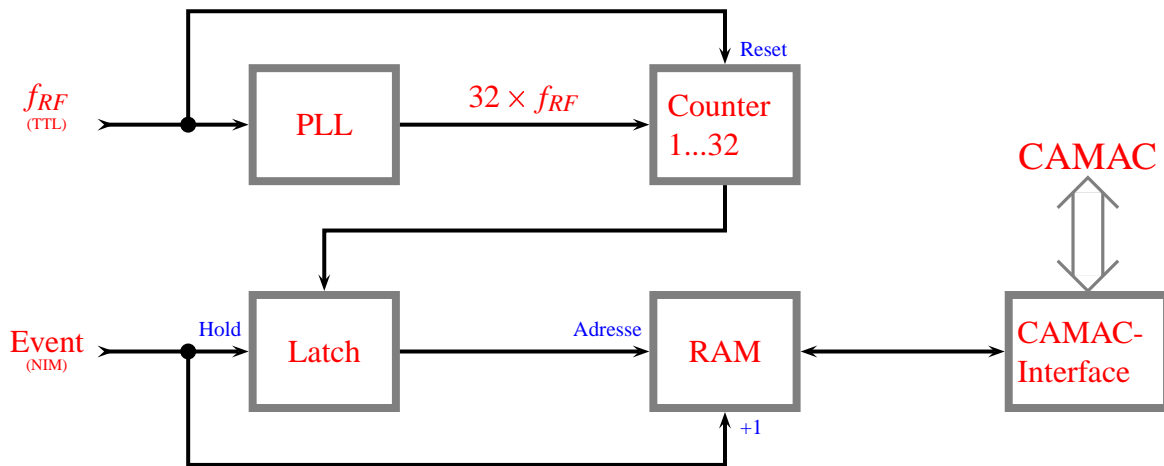


Abbildung 5.6: Die Elektronik zur synchronen Fluoreszenzlichtmessung. Der TTL-Eingang dient zur Synchronisation auf die Phase des RF-Feldes, der Signal-Eingang wird mit NIM-Pulsen entsprechend den gezählten Ereignissen angesteuert. Die RF-Buckets werden mit einer Auflösung von 32 Kanälen dargestellt. Das Fortschalten der Kanäle wird durch die elektronisch (PLL) erzeugte 32-fache Oberwelle des RF-Signals gesteuert. Die jeweils aktuelle Kanal-Nummer wird an ein Latch übergeben. Ein Ereignis am Signaleingang versetzt das Latch in den Hold-Status, wobei der augenblickliche Wert die Speicheradresse in einem RAM angibt, dessen Inhalt um 1 erhöht wird. Die Datenauslese erfolgt über CAMAC.

Das Steuersignal zum Fortschalten der Scaler wird intern mit einem sogenannten *Phase Lock Loop* (PLL) erzeugt (Abbildung 5.6). Dabei wird zunächst die Taktfrequenz des zu stabilisierenden lokalen Oszillators (VCO) auf  $1/32$  heruntergeteilt. Dieses Signal sowie das Eingangssignal werden in einem Phasendetektor verglichen. Der Spannungspegel am Ausgang des Phasendetektors ist ein Maß für die Abweichungen beider Phasen gegeneinander und wird als Meßgröße an einen Regler weitergegeben. Der Regler steuert die Frequenz des lokalen Oszillators, sodaß die Phasenabweichung minimiert wird und der PLL ein Ausgangssignal liefert, das phasenstarr mit der 32-fachen Frequenz des Eingangssignals (Bunchfrequenz) oszilliert. Die Bunchfrequenz liegt bei  $\nu_{RF} = 3.45 \text{ MHz}$  und die entsprechende Taktfrequenz ist  $\nu_{Takt} = 110.4 \text{ MHz}$ .

Der PLL liefert den Takt für einen Zähler. Der Zähler wird bei jedem Takt inkrementiert, bis er von der nächsten ansteigenden Flanke des RF-Signals (Beginn des nächsten Buckets) auf 0 zurückgesetzt wird. Sofern kein Ereignis erfolgt (Zählen eines Photons), übernimmt ein Latch den jeweils aktuellen Zählerstand. Wird ein Photon gezählt, so ver-

setzt dieses Signal das Latch in den Hold-Zustand (Halten des augenblicklichen Wertes). Gleichzeitig wird im RAM der Inhalt des Speicherplatzes, der durch den Wert des Latch festgelegt ist, um eins erhöht. Das Freischalten der Datenaufnahme erfolgt mit dem nächsten RF-Puls, pro Bucket kann also nur ein Photon gezählt werden. Diese Totzeit von maximal 290 ns ist für das Experiment vernachlässigbar, da die typischen Zählraten nur einige kHz betragen.

Die Messelektronik steht über CAMAC mit einem VME-Bus Rechner unter OS/9 in Verbindung, der den Experimentablauf steuert (vgl. Abbildung 5.2). In der letzten Phase wird der Farbstofflaser durchgestimmt und dabei das Fluoreszenzlicht gemessen. Wie bereits erwähnt, betragen dabei die Kanalbreiten  $t_m = 10 \dots 50$  ms. Nach dieser Messzeit wird die Messung durch ein INHIBIT-Signal unterbrochen und der RAM ausgelesen. Es werden dabei 32 Zahlen gelesen, die den Ereigniszahlen der 32 Scaler entsprechen. Die Zeit zur Datenauslese ist  $< 5$  ms, danach wird die Messung mit dem nächsten (Zeit-) Kanal fortgesetzt.

Abbildung 5.7 zeigt eine ortsauflösende Fluoreszenzlichtmessung mit einer Meßzeit von insgesamt 3 Sekunden. Entlang der  $\Delta s$ -Achse sind die 32 Scaler aufgetragen, wobei zur besseren Übersichtlichkeit zwischen jeweils 2 Scalern zusätzlich 3 Zeilen eingefügt sind. Die Achsenskala ist entsprechend der „Scaler-Länge“ von 17.3 cm in m angegeben und erstreckt sich über eine Bucketlänge (5.54 m).

Entlang der  $\Delta p$ -Achse sind die Signale in den Scalern dargestellt. Es ist die Summe aus zwei Messungen zu sehen, die Integrationszeit (pro Kanal) beträgt jeweils 30 ms. Der Farbstofflaser wurde bei dieser Messung um  $2.58 \text{ GHz}^2$  durchgestimmt, was einer Frequenzschrittweite von 51.6 MHz/Kanal bzw.  $2.2 \cdot 10^{-6} \text{ eVs/m}$  entspricht. Die Höhe der Einträge gibt die gezählten Ereignisse wieder. Im Maximum wurden 27 Photonen gezählt, das entspricht unter Berücksichtigung der Meßzeit einer Zählrate von 450 Hz.

---

<sup>2</sup>Die Einstellung an der Farbstofflaser-Steuerung war 3 GHz. Bei einer nachträglichen Kalibrierung anhand der simultan aufgenommenen  $^{127}\text{J}_2$  Feinstrukturlinien bei einem Scan über mehrere Jodlinien hinweg ergab sich jedoch der im Text angegebene Wert.

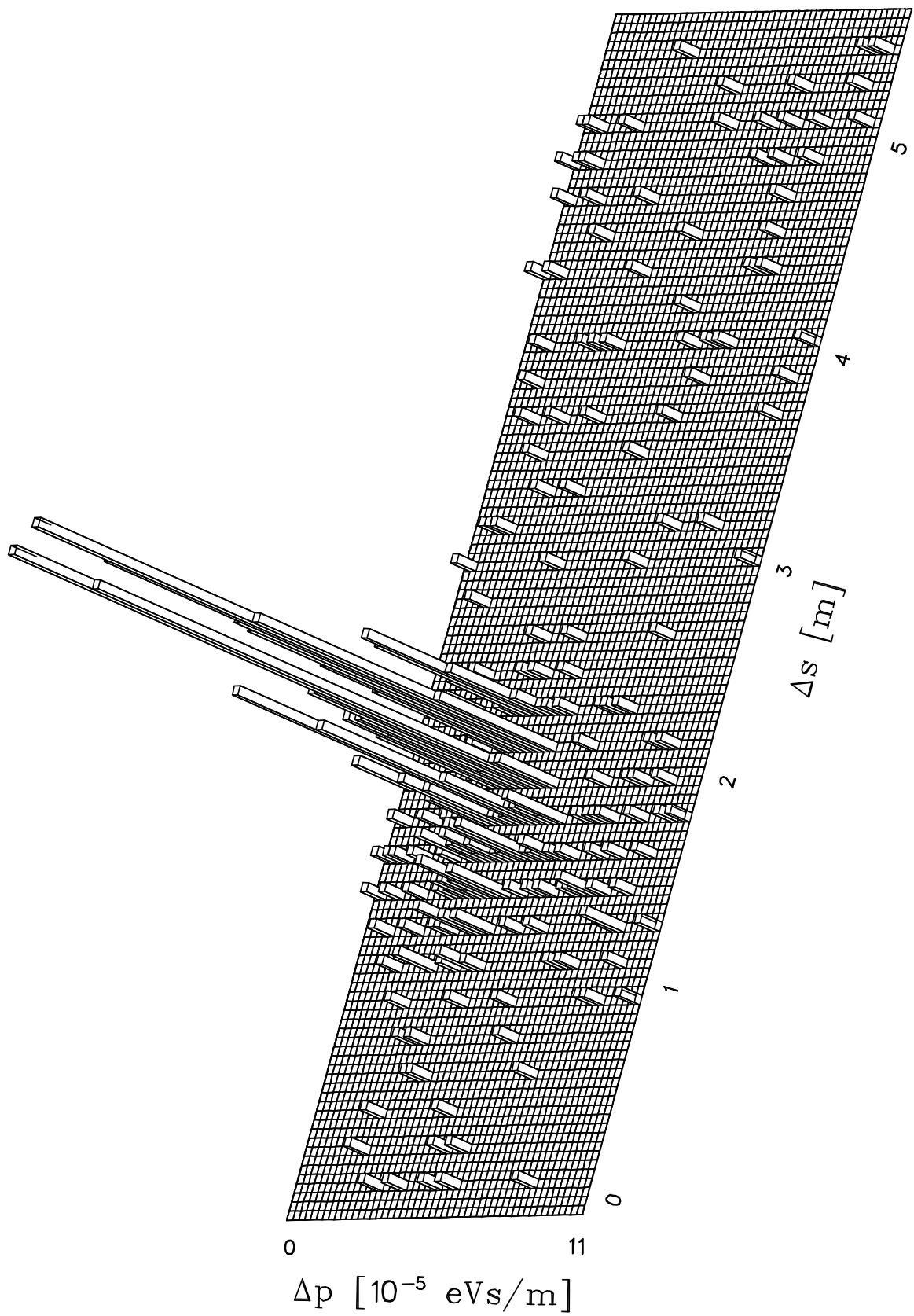


Abbildung 5.7: Ortsaufgelöstes Fluoreszenzlichtspektrum der zustandselektierten Ionenverteilung. Eine Beschreibung ist im Text gegeben.

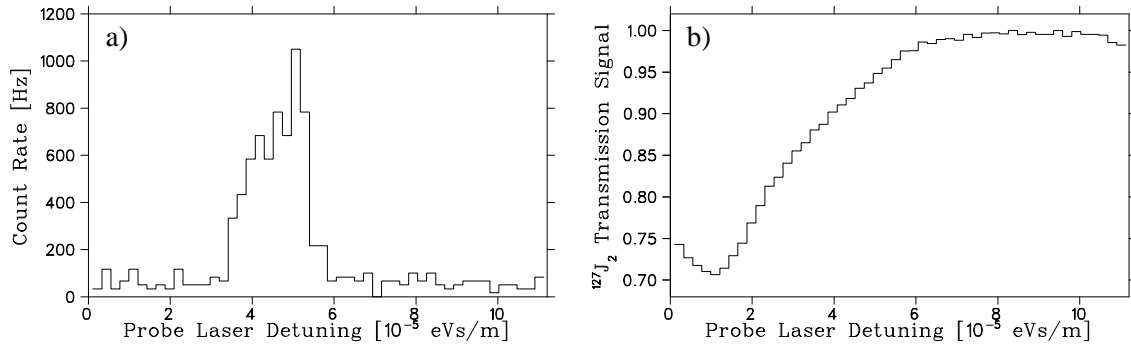


Abbildung 5.8: Fluoreszenz- und  $^{127}\text{J}_2$ -Signal bei der Spektroskopie.

Deutlich ist zu erkennen, daß die gekühlte Ionenverteilung erwartungsgemäß auf den inneren Bucket-Bereich konzentriert ist. Die Bestimmung der Bucketmitte muß allerdings direkt aus dem beobachteten Signal erfolgen. Die Messelektronik arbeitet zwar mit einer festen Phasenbeziehung zur RF-Spannung, diese Phase war aber nicht bekannt, da die Laufzeiten in den Signalleitungen und in der Meßelektronik nicht vermessen wurden.

In Abbildung 5.8a ist das insgesamt gemessene Fluoreszenzlicht gezeigt, das mit einem unabhängigen 100 MHz - Zähler gemessen wurde. Die Scaler 1 - 32 enthalten zusammen 1160 Ereignisse, der 100 MHz-Zähler hat 1169 Ereignisse registriert. Die Dunkelzählrate des Photomultipliers ist  $< 20$  Hz, sodaß weniger als 60 Untergrundereignisse vorliegen. Der Totzeitverlust beträgt bei dieser Messung demnach weniger als 0,8 %, was als typischer Wert anzusehen ist.

Abbildung 5.8b zeigt die gleichzeitig aufgenommene Absorption beim Durchgang des Laserlichts durch eine mit  $^{127}\text{J}_2$  gefüllte Küvette, im folgenden „Jodlinien“ genannt. Die nicht stabilisierte Jodtemperatur lag bei ca. 25° Celsius, entsprechend einem Jod-Dampfdruck von ca. 41 Pa. Zu sehen ist die Flanke der Feinstrukturlinie Nr. 876 gemäß der Referenz [Gers85] mit dem Absorptionsmaximum bei  $17100.8533 \text{ cm}^{-1}$ . Die Frequenzkalibrierungen wurden anhand der stets simultan gemessenen Jodlinien durchgeführt.

Die Verstimmung des Kühllasers gegen den Sollimpuls wurde ebenfalls anhand der Jodlinien ermittelt. Dafür wurde der kontinuierliche Ionenstrahl mit den beiden gegenläufigen Lasern gekühlt, wobei der Farbstofflaser in Kühlrichtung gegen den Argonionenlaser durchgestimmt wurde. Dieses bekannte Experimentschema (vgl. z.B. [Schr90, Klei91]) resultiert in ein schmalbandiges Laserkühlsignal, dessen abfallende Flanke die Frequenz

des Argonionenlasers bzgl. der Jodreferenz anzeigt. Mit der Position des Sollimpulses aus der Auswertung des Fluoreszenzsignals beim gebunchten Laserkühlen ergibt sich dann die gesuchte Verstimmung des Kühllasers. Der Argonionenlaser war auf die Absorptionsflanke der Jodlinie Nr. 4077 stabilisiert, wobei hierfür eine beheizte Jodzelle verwendet wurde. Durch den hohen Jod-Dampfdruck (Temperatur  $> 40\text{ °C}$ ) wird die Absorptionsflanke sehr steil und damit die Reproduzierbarkeit der Laserfrequenz soweit erhöht, daß diese Unsicherheit vernachlässigbar gegenüber der Auswertung der Fluoreszenzsignale beim Durchstimmen des Farbstofflasers wird. Die Wellenzahl des Argonionenlasers ist damit auf  $19429.836(3)\text{ cm}^{-1}$  festgelegt und ca. 470 MHz blauverschoben gegenüber der maximalen Jodabsorption der Linie 4077 bei  $19429.8204\text{ cm}^{-1}$  [Gers85]. Der Argonionenlaser wurde mit der Jodstabilisierung vom MPI für Kernphysik in Heidelberg für die Experimente bereitgestellt, an dieser Stelle sei der Arbeitsgruppe von Priv. Doz. Dr. R. Grimm dafür nochmals gedankt.

Im nächsten Kapitel wird ausführlich auf die durch die Wechselwirkung mit zwei Lasern bedingte Struktur des Fluoreszenzsignals eingegangen und numerische Simulationen hierzu vorgestellt. Hier sei vorgreifend dargelegt, daß die Bestimmung der Phasenraumverteilung aus der abfallenden Signalflanke im Bereich der Bucketmitte erfolgen muß, wenn der Farbstofflaser (Testlaser) von hohen zu niedrigen Frequenzen hin durchgestimmt wird. Das läßt sich grob dadurch begründen, daß der Farbstofflaser aufgrund seiner Einstrahl-Richtung in der unteren Buckethälfte heizt und in der oberen kühlt. Analog ist die ansteigende Signalflanke zu verwenden, wenn der Farbstofflaser von niedrigen zu hohen Frequenzen durchgestimmt wird.

Die Bucketmitte ergibt sich aus dem (räumlichen) Schwerpunkt des Fluoreszenzlichts auf diesem relevanten Signalteil. Die so gewonnenen Daten zur Bunchlänge sind aufgrund der räumlichen Abbildungseigenschaften des Detektors und durch die Signalverarbeitung verbreitert. Es ist daher eine weitere Aufbereitung erforderlich, die in Anhang B beschrieben wird.

Bei den Messungen werden natürlich auch Fluoreszenz-Photonen gezählt, die aufgrund

der Kühlung durch den Argonionenlaser mit großer Verstimmung induziert wurden. Wie die Messung in Abbildung 5.7 zeigt, ist dieser Beitrag zur Zählrate vernachlässigbar, was die geringe Heizrate in dem Wenig-Ionen-System widerspiegelt. Restgasstöße mit hohen Impulsüberträgen und daraus resultierender erhöhter Fluoreszenzrate durch Resonanz mit dem Kühllaser sind sehr selten aufgrund der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts ( $\sigma \sim 1/E^2$ , Abschnitt 4.3.2).

Anders sieht dies aus, wenn die Ionen im Singlettzustand nicht entfernt wurden. Eine entsprechende Messung ist in Abbildung 5.9 zu sehen. Die beobachteten Photonen aufgrund der Laserkühlung durch den Argonionenlaser sind in dem gesamten Bucket deutlich sichtbar und vor allem in dem vorderen inneren Bereich (Scaler 7-10). Hier ist nach den Ausführungen im Abschnitt 4.2.2 eine besonders hohe Zählrate zu erwarten, da die Ionen mit entsprechender Synchrotronamplitude mit dem Kühllaser resonant werden und dabei wegen des Kräfte-Gleichgewichts mit dem RF-Feld in die Bucketmitte driften. Ursache dafür, daß permanent Ionen mit großen Synchrotronamplituden in den Buckets vorhanden sind, ist die strahlinterne Streuung (Abschnitt 4.3.1). Aufgrund binärer Stöße der  ${}^7\text{Li}^+$  Ionen untereinander werden permanent Ionen aus dem inneren, gekühlten Bucketbereich auf äußere Bahnen herausgestoßen und müssen dann wieder zurückgekühlt werden.

Die Bestimmung der Nachweiseffizienz sowie der räumlichen Auflösung des Fluoreszenzdetektors wird in Anhang A beschrieben. Die Zählrate pro Ion ist  $10.4 \pm 1.0$  Hz<sup>3</sup>, womit die Zahl der beobachteten Ionen aus der maximalen totalen Zählrate bestimmt werden kann. In den Abbildungen 5.7 und 5.9 sind zwei aufeinanderfolgende Messungen mit und ohne den zustandselektiven Schritt gezeigt. Anhand der Zählrate kann man abschätzen, daß bei der Messung ohne Zustandselektion ca. 200 Ionen im Tripletzustand pro Bucket enthalten waren, bei der Messung mit der Zustandselektion dagegen nur ca. 95. Dabei ist zu berücksichtigen, daß durch die Zustandselektion die Messung erst 7.5 s später erfolgte, sodaß aufgrund der Halbwerts-Speicherzeit der Tripletzustände von 18 s ein Faktor 0.75 mit eingerechnet werden muß. Daraus ergibt sich, daß ca. 60 % der

---

<sup>3</sup>Das gilt, wenn der Übergang gesättigt ist. Wenn zur Bestimmung das Farbstofflaser-Signal herangezogen wird, ist diese Bedingung erfüllt, wie im nächsten Kapitel dargelegt wird



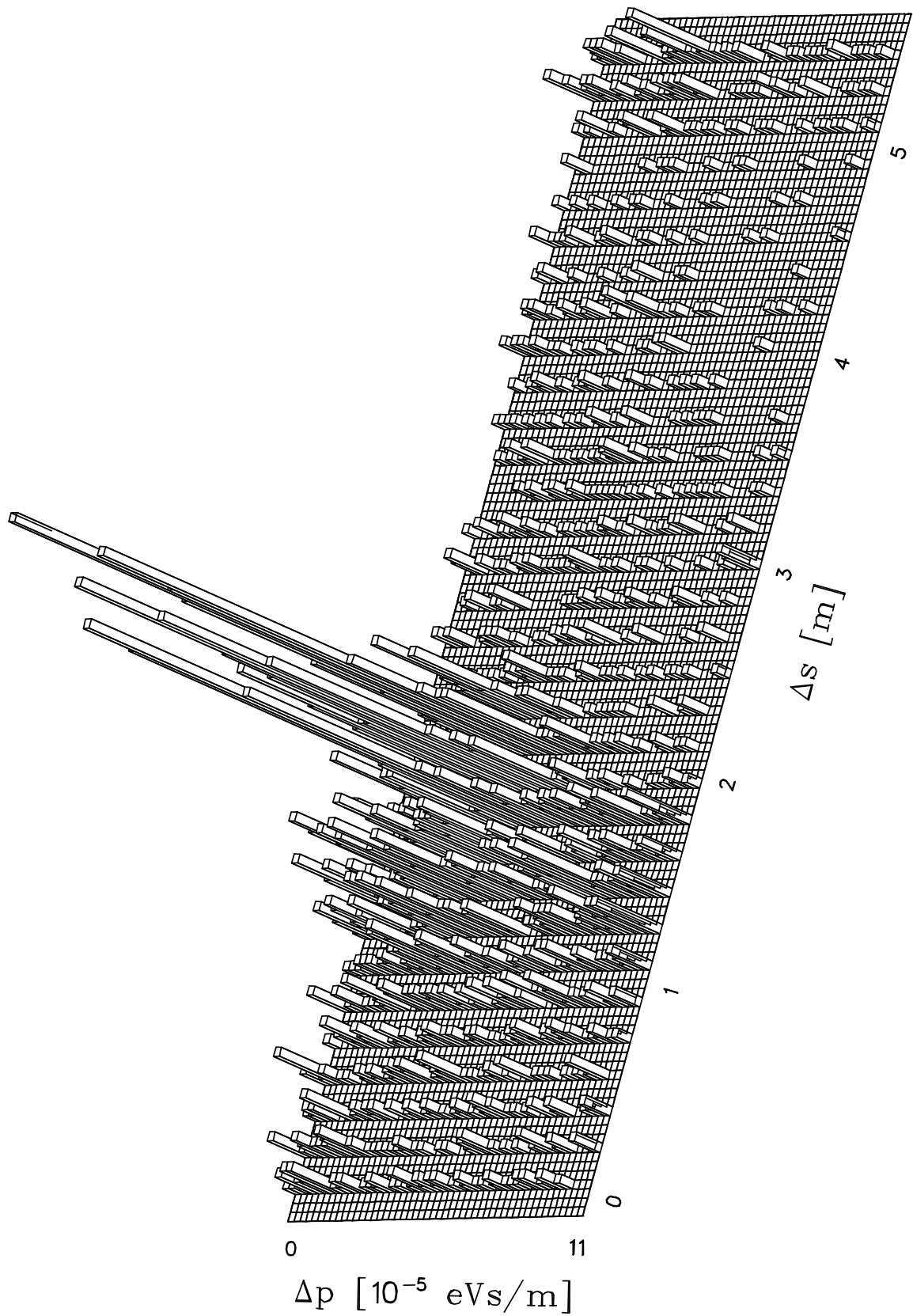


Abbildung 5.9: Ortsaufgelöstes Fluoreszenzlichtspektrum des  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionenstrahls. Gezeigt ist die Situation ohne den zustandselektierenden Präparationsschritt, d.h. mit allen Ionen.

Ionen im Triplettzustand bei dem Präparationsverfahren erhalten bleiben. Nachdem das Experiment mit wenigen Ionen pro Bucket durchgeführt werden soll, war die Verlustrate nicht Gegenstand systematischer Untersuchungen, doch liegen die beobachteten Fluoreszenzraten für diese Zeiten meist in dem angegebenen Bereich, sodaß mit 50 - 60 % „überlebender“ Ionen gerechnet werden kann.

Eine Ursache für den Ionenverlust ist die Beimischung des  $^1P_1$ -Zustandes zu dem  $^3P_2$ -Zustand. Der damit mögliche E1-Übergang (in Kombination mit dem entsprechenden M2-Übergang) in den  $1s^2\ ^1S_0$  Grundzustand wurde von [Prio80] mit einem Verzweigungsverhältnis von  $1.5 \cdot 10^{-5}$  in Bezug auf den E1-Übergang in den  $1s2s\ ^3S_1$ -Zustand angegeben. Eine Messung am TSR in Heidelberg ergab hingegen  $\sim 1.0 \cdot 10^{-6}$  [Luge96]. In den oben vorgestellten Messungen (Abbildung 5.7 und 5.9) wurde der Kühllaser während der zustandselektiven Präparation 7.5 s länger eingestrahlt als bei der Messung am gesamten Ionenstrahl. Anhand des Jodabsorptionssignals konnte die Verstimmung des Kühllasers bestimmt werden:  $\delta\nu = -485(26)$  MHz. Mit der natürlichen Linienbreite von  $\Delta\nu_{FWHM} = 3.7$  MHz und einem Sättigungsparameter auf Resonanz  $S_0 = 65$  ergibt sich unter Berücksichtigung des „Duty cycles“ (0.14) eine Obergrenze des Verzweigungsverhältnisses von ca.  $2 \cdot 10^{-5}$ . Der beobachtete Verlust dürfte daher eher auf Streuprozesse zurückzuführen sein (Restgasstreuung, strahlinterne Streuung), denn solange bei dem Zustands-Separationsverfahren das RF-Feld noch nicht eingeschaltet ist, führen Stöße aus dem Fangbereich der Laserkraft zum Verlust der Ionen. Dieses Problem tritt allgemein beim Laserkühlen kontinuierlicher Ionenstrahlen auf. Am MPI für Kernphysik in Heidelberg wurde deshalb für Experimente an kontinuierlichen Ionenstrahlen eine sogenannte „Fangbereichserweiterung“ entwickelt [Wann], wodurch dieser Verlust beim Laserkühlen vermieden werden kann, allerdings für den Preis einer stark reduzierten effektiven Kühlrate.

Wird von einem Verzweigungsverhältnis von  $1 \cdot 10^{-6}$  für den Verlustkanal ausgegangen, dann können von einem Ion im Mittel nur  $10^6$  Photonen erwartet werden, was bei einer Übergangsrate von 11.6 MHz (Übergang  $F = 5/2 \rightarrow F = 7/2$ , Anhang A) unter

Berücksichtigung des Duty-Cycles bei der Anregung einer Fluoreszenzdauer von ca. 0.6 s entspricht. Bei der Anregung des  $\Lambda$ -Systems ergibt sich unter Berücksichtigung der Clebsch-Gordan Koeffizienten entsprechend der relativen Intensität des langsamen Zweiges ( $F = 5/2 \rightarrow F = 5/2$ ) eine um den Faktor 0.5 reduzierte Rate von 5.8 MHz und entsprechend eine mittlere Fluoreszenzdauer von 1.2 s. Mit der Dunkelzählrate des Detektors von 20 Hz (Anhang A) und der Zählrate pro Ion von  $10.4 * 0.5 = 5.2$  Hz ergibt sich damit ein Signal/Rausch-Verhältnis von 1.3. Wird das gesamte Ionensignal durch ein verbessertes Verfahren in einem einzigen räumlichen Kanal (Scaler) gemessen (vgl. Abschnitt 6.3), dann reduziert sich entsprechend die Untergrundzählrate und es ergibt sich in diesem Fall ein Signal/Rausch-Verhältnis von 7.2.

## 5.2.2 Messung der Impulsverteilung

Wie zu Beginn des Abschnitts 5.2 dargelegt wurde, ist diese Information aufgrund des Dopplereffekts in dem beobachteten Signal enthalten. Das mit dem Farbstofflaser spektroskopierte Frequenzintervall kann nach Gl. 4.26 direkt in ein entsprechendes Impulsintervall umgerechnet werden. Für kleine Impulsintervalle  $\Delta p$  bzw. Frequenzintervalle  $\Delta \nu$  ergibt sich mit den Experiment-Parametern

$$\Delta p = 4.28 \cdot 10^{-8} \left( \frac{eVs/m}{MHz} \right) \Delta \nu \quad .$$

Messungen in dreidimensionaler Darstellung, bei denen die Frequenzachse gemäß den obigen Ausführungen in Impulseinheiten skaliert ist (Achse  $\Delta p$ ), sind in den Abbildungen 5.10 und 5.11 gezeigt. Entlang der mit  $\Delta s$  bezeichneten Achse sind die Signale in den Scaltern aufgetragen. Die Achse ist in m skaliert, entsprechend 17.3 cm pro Scaler. Die Achsenabschnitte sind so gewählt, daß der Schwerpunkt der beobachteten Fluoreszenz in der Bucketmitte ( $\Delta s = 0$ ) bzw. bei dem Sollimpuls ( $\Delta p = 0$ ) liegt. Auf diese Weise läßt sich der gesamte, durch die Messung beobachtete longitudinale Phasenraum der Ionen in einem Bild darstellen. Die so gewonnenen Darstellungen enthalten aber auch Zähl-Ereignisse, die durch das Verfahren selbst begründet sind. Dieses Problem ist schon im vorherigen Abschnitt (5.2.1) kurz angesprochen worden und wird im nächsten Ka-

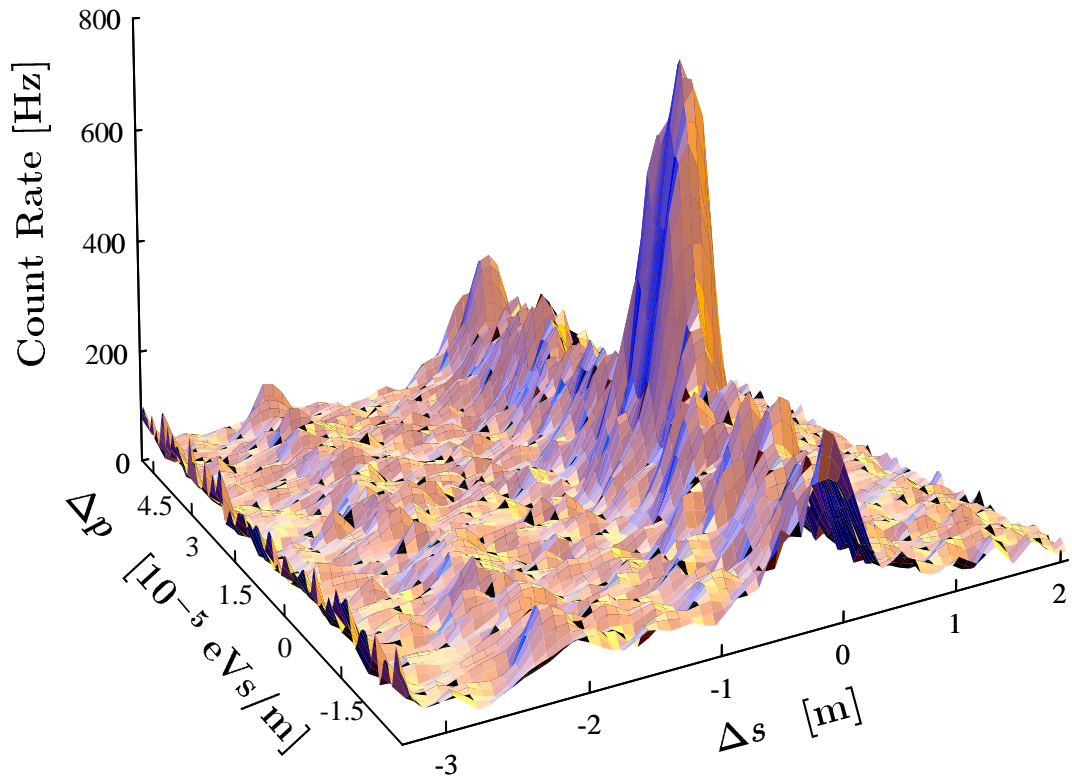


Abbildung 5.10: Ortsaufgelöstes Fluoreszenzlichtspektrum des unpräparierten  ${}^7\text{Li}^+$ - Ionenstrahls in interpolierter, dreidimensionaler Darstellung.

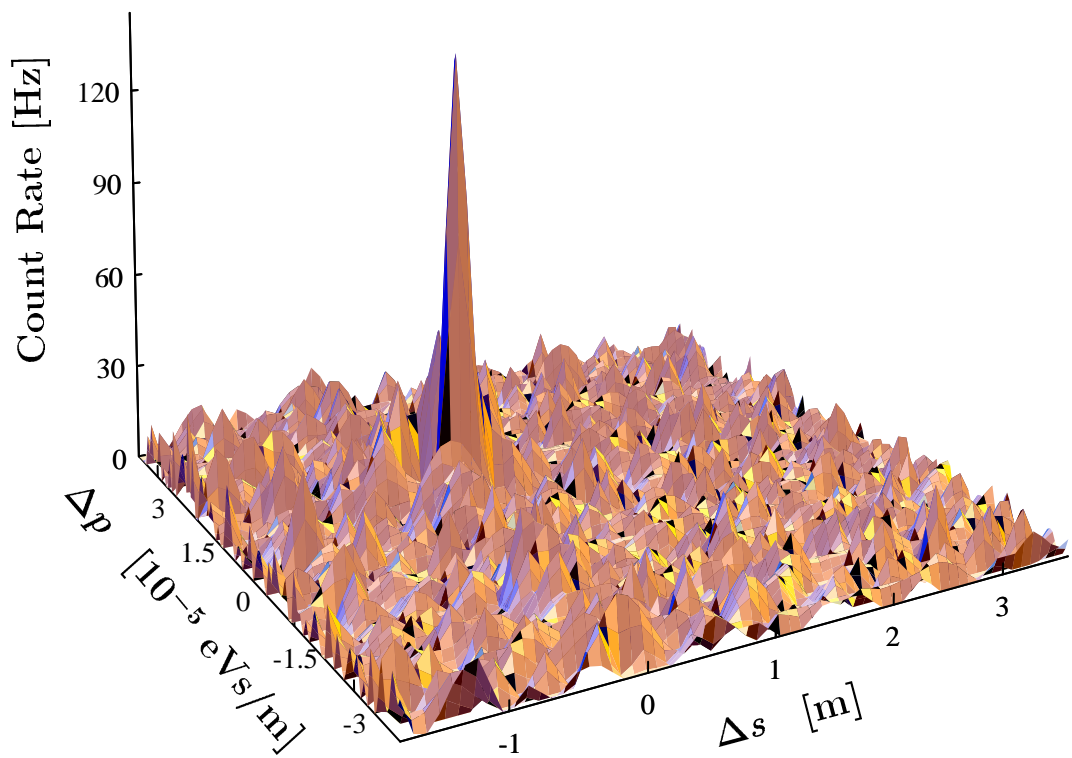


Abbildung 5.11: Ortsaufgelöstes Fluoreszenzlichtspektrum der Ionenverteilung in interpolierter, dreidimensionaler Darstellung.

pitel ausführlich diskutiert. Wie die Bestimmung der Bunchlänge muß auch die Breite der Impulsverteilung anhand der abfallenden Signalflanke erfolgen. An diese Flanke wird eine Gaußkurve angefitet, womit ein schnelles Verfahren zur Verfügung steht, das auch während dem Experiment eingesetzt werden kann. Die dabei gewonnenen Werte geben die Faltung von Impulsverteilung und gesättigter Linienbreite wieder (Voigt-Profil) und müssen daher nochmals korrigiert werden (Anhang B). Die direkten Darstellungen der Fluoreszenz-Verteilung geben daher den Phasenraum der Ionen nur näherungsweise wieder. Die zugrundeliegende tatsächliche Phasenraumverteilung läßt sich aber dennoch aus den Daten extrahieren (Kapitel 6 und Anhang B), und die entsprechenden Korrekturen sind in Abbildung 5.12 enthalten.

Abbildung 5.10 zeigt eine Messung an dem unpräparierten Ionenstrahl. Deutlich ist die erhöhte Untergrund-Fluoreszenz im Bereich der Bucket-Mitte zu erkennen. Diese Photonen sind ein Ergebnis der hohen Heizrate aufgrund der strahlinternen Streuung und permanent sichtbar, weil sie durch die Wechselwirkung mit dem Kühllaser entstehen.

Abbildung 5.11 zeigt eine entsprechende Messung an einem präparierten Ionenstrahl. Die Breite der Phasenraumverteilung der Ionen ist aufgrund der reduzierten Heizrate so klein, daß die Auflösungsgrenze fast erreicht ist. Der Untergrund durch den Kühllaser liegt im Bereich der Dunkelzählrate des Systems und ist in dieser Messung daher nicht mehr sichtbar.

Die Abbildung 5.12 zeigt die Ergebnisse von Messungen zu verschiedenen Verstimmungen des Kühllasers, d.h. mit abnehmender Kühlkraft für zunehmende Verstimmung (vgl. Abbildung 4.1). In den Darstellungen ist die Verstimmung wiederum in Impulseinheiten angegeben, sodaß ein direkter Vergleich mit den numerischen Rechnungen möglich ist (z.B. Abbildung 4.2). Wie in Kapitel 4, Abschnitt 4.2.1 dargelegt wurde, sind die Breiten der Orts- und Impulsverteilung durch das Verhältnis von Heizrate zu Kühlrate bestimmt. Die Kühlrate variiert gemäß Gleichung 4.12 mit der Verstimmung, sodaß bei Kenntnis der Heizrate gemäß Gleichung 4.19 die Impulsbreite berechnet werden kann. Die entspre-

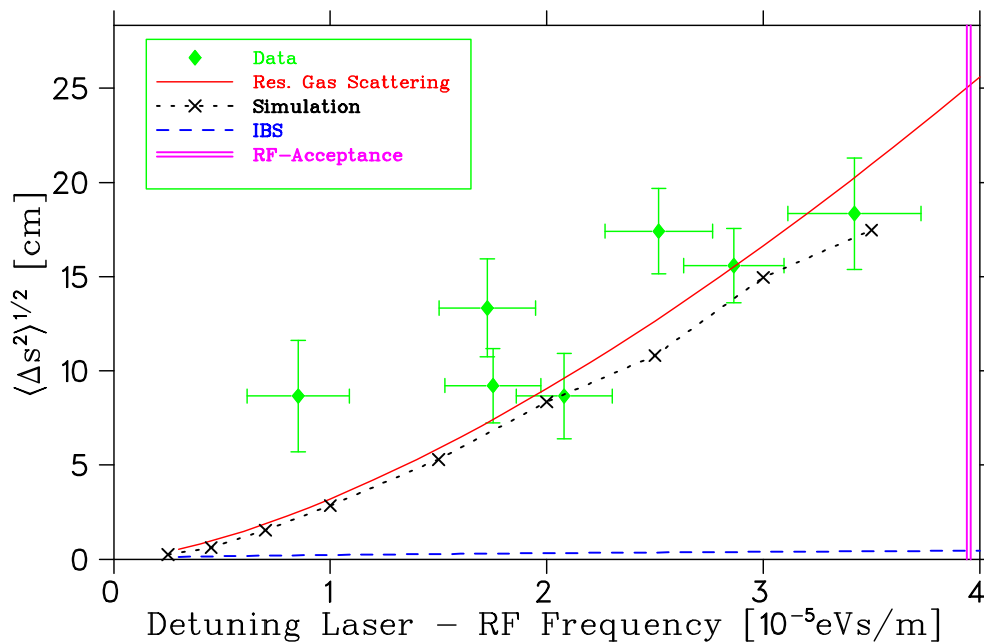
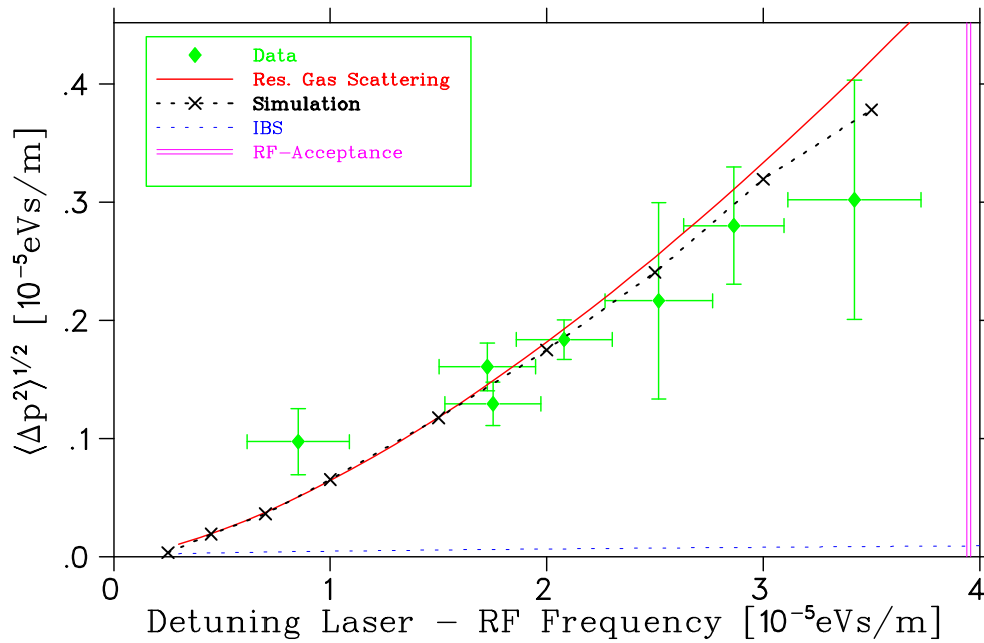


Abbildung 5.12: Der Phasenraum in Abhängigkeit von der Verstimmung des Kühllasers. Die Bedeutung der Kurven ist in der Legende angegeben. Die Restgasstreuung und das intra beam scattering wurden in der Näherung großer Verstimmung in Bezug auf die Linienbreite berechnet. Beide Kurven sind nur im Gültigkeitsbereich dieser Näherung eingezeichnet.

chende Ortsbreite läßt sich aus der zugehörigen Synchrotronamplitude berechnen (Gleichung 3.31 mit 3.32 in der Näherung  $x \ll L$ ). Die in den Abbildungen eingezeichneten Unsicherheiten der Meßwerte ergeben sich aus den Unsicherheiten beim Fitten der Breiten und der Position der Verteilungen relativ zum Schwerpunkt der Jodline.

Abbildung 5.12 zeigt, daß die gemessene Impulsverteilung deutlich breiter ist als die praktisch vernachlässigbare Breite durch die strahlinterne Streuung. Die Impulsverteilung ist von der Ionendichte nicht beeinflusst und kann durch Restgasstreuung beschrieben werden, und zwar sowohl durch das analytische Modell als auch durch die numerischen Simulationen (Kapitel 6). Die Messung der Ortsverteilung ist durch das Aufnahmesystem auf eine Auflösung von 6.7 cm ( $1\sigma$ -Wert) begrenzt (Anhang B), was offenbar für die sichere Bestimmung der Bunchlänge nicht ausreicht.

Der Fit an die Daten ergibt eine Heizrate der Restgasstreuung von

$$D_{RGS} = 1.4 \pm 0.2 \text{K/s} \quad .$$

Für die Anpassung an die Daten wurden dabei nur die Messwerte bis zu einer Verstimmung des Kühllasers von  $2.1 \cdot 10^{-5}$  herangezogen, weil die Messungen für größere Verstimmungen systematisch zu niedrige Werte liefern. Dieser Effekt ist durch die Dynamik bei der Wechselwirkung der Ionen mit den beiden Lasern und dem RF-Feld begründet und wird im nächsten Kapitel ausführlich behandelt.

Der Verlauf für die strahlinterne Streuung wurde gemäß Gleichung 4.30 angesetzt. Die Heizrate wurde anhand von Messungen an dichteren Ionenstrahlen skaliert (Abschnitt 4.3.1) mit dem Ergebnis  $D = 0.07 \text{ K/s}$ .

# Kapitel 6

## Der Phasenraum des präparierten Ionenstrahls

### 6.1 Simulation der Streuung am Restgas

Zum Verständnis der Struktur der Fluoreszenzsignale wurden numerische Simulationen durchgeführt. Nach den Ausführungen von Kapitel 4 und 5 ist der vorliegende Heizprozeß die Streuung der Ionen am Restgas. In den Simulationen wurde dieser Prozeß als Random Walk des Ionenimpulses modelliert. Den Ausführungen von Haken [Hake77] folgend, kann die durch vernachlässigbar kurze Stöße<sup>1</sup> bedingte Bewegung durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$m\dot{v} = \varphi\delta(t - t_j) \quad (6.1)$$

wobei der Stoß zur Zeit  $t_j$  erfolgt. Formell steht hier der Ausdruck  $\varphi(t) = \varphi\delta(t - t_j)$  als wirksame Kraft während des Stoßes, aber durch zeitliche Integration sieht man, daß  $\varphi$  gerade die Impulsänderung bei dem Stoß ist. Eine fluktuierende Kraft zur Beschreibung dieses Prozesses im Rahmen des Fokker-Planck Formalismus läßt sich also folgendermaßen formulieren:

$$\psi(t) = \varphi \sum_j (\pm 1)_j \delta(t - t_j) \quad (6.2)$$

---

<sup>1</sup>Das bedeutet, daß die Korrelationsfunktion der Stöße auf den relevanten Zeitskalen als Deltafunktion dargestellt werden kann, vgl. Kap. 4



Die Korrelationsfunktion von  $\psi$  wird mit  $\delta(t - t_j)\delta(t' - t_j) = 1/t_0\delta(t - t')$

$$\langle \psi(t)\psi(t') \rangle = \frac{\phi^2}{t_0} = 2D_p\delta(t - t') = mkD_t\delta(t - t') \quad (6.3)$$

[Hake77], wobei  $t_0$  die Zeit zwischen zwei Stößen ist. Praktisch werden die deterministischen Bewegungsgleichungen (Gleichungen 4.28) in dem Zeitraum zwischen zwei Stößen numerisch gelöst. An den Stoßzeitpunkten wird dann jeweils der Ionenimpuls zufällig um den Betrag  $\phi$  erhöht oder erniedrigt und anschließend mit den neuen Startbedingungen das nächste Teilstück der Trajektorie berechnet. Zur Modellierung der Restgasstreuung wurde für  $D_t = 1.4$  K/s (Kapitel 5) eingesetzt und der entsprechende Wert für  $\phi$  berechnet, wobei  $t_0$  vorgegeben wird. Bei Simulationen mit verschiedenen Werten von  $t_0$  wurde keine signifikante Abhängigkeit der Orts- und Impulsvarianzen festgestellt, sodaß in allen Rechnungen  $t_0 = 10$  ms und  $\phi = 2.97 \cdot 10^{-7}$  gesetzt wurde. Diese relativ hohe Stoßfrequenz hat den Vorteil, daß sich der Gleichgewichtszustand in deutlich kürzeren Zeiten einstellt als die meist verwendete Simulationszeit  $t_{sim} = 4$  s.

Die Beschreibung als Random Walk stellt natürlich eine grobe Vereinfachung dar, ermöglicht aber mit vergleichsweise geringem Aufwand die Beschreibung eines stochastischen Prozesses. Der maximal mögliche Impulsübertrag (Gleichung 4.33) ist  $\phi_{max} = 2.2 \cdot 10^{-4}$  eVs/m. Beispielsweise ist für Wasserstoff ( $H_2$ ) bei einem Druck von  $10^{-10}$  mbar der mittlere Impulsübertrag  $\bar{\phi}_{H_2} = 5.4 \cdot 10^{-6}$  eVs/m bei einem mittleren zeitlichen Stoßabstand von 29.9 s. Bei einer realistischen Simulation des Vorganges wäre demnach neben einer aufwendigeren Beschreibung der Stöße auch eine sehr viel längere Simulationszeit erforderlich, um vernünftige Ergebnisse zu erhalten. Die Rechnungen beschreiben daher nur den mittleren heizenden Effekt vieler Stöße, der Einfluß seltener Ereignisse mit hohem Impulsübertrag wird nicht erfaßt. Aus Abbildung 5.12 ist aber ersichtlich, daß die Simulationen im wesentlichen in guter Übereinstimmung mit dem analytisch berechneten Verlauf und den Messungen sind.

In Abbildung 6.1 sind Trajektorien gezeigt, die zur Zeit  $t = 0$  exakt im Bucket-Mittelpunkt beginnen ( $\Delta p = 0, \Delta s = 0$ ) und der Impulsdiffusion durch Restgasstreuung sowie der Laserkühlung unterliegen. Die Verstimmung des Kühllasers von  $p_L = -1.5 \cdot 10^{-5}$  eVs/m

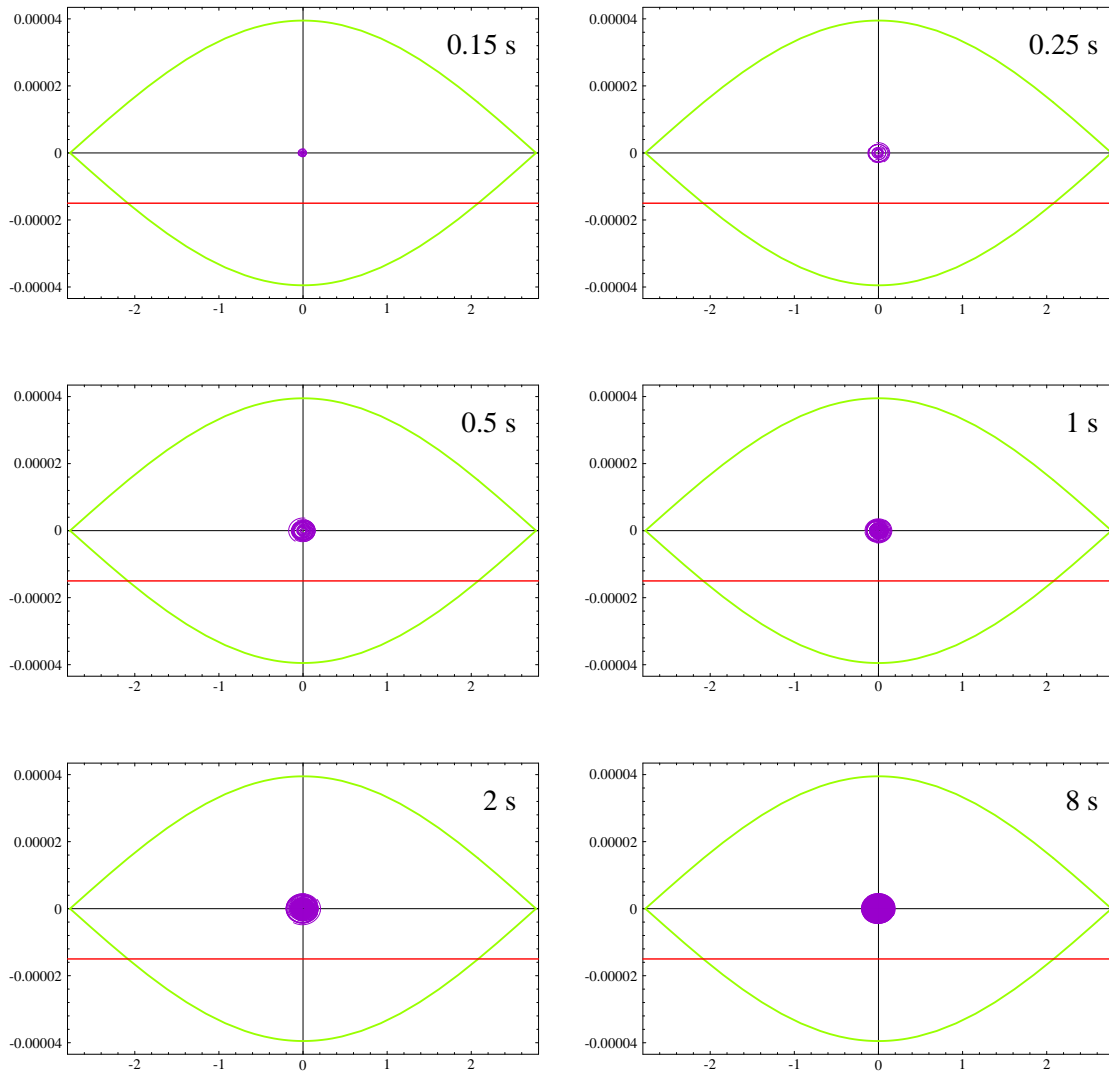


Abbildung 6.1: Diffusive Entwicklung der Phasenraumtrajektorien lasergekühlter Ionen. Die Abszisse gibt den Ort in Bezug auf die Bucketmitte in m an, auf der Ordinate ist die Impulsabweichung vom Sollimpuls in  $10^{-5}$  eVs/m angegeben. Zur Zeit  $t = 0$  startet das Ion in der Bucketmitte. Zur Verdeutlichung des Effekts wurde die Heizrate  $D = 3.9$  K/s eingesetzt.

( $\approx 350$  MHz), die RF-Spannung von  $U_{RF} = 0.3$  V und der Sättigungsparameter  $S_0 = 65$  entsprechen den typischen experimentellen Werten. Zur Hervorhebung des Effekts wurde als Heizrate  $D_t = 3.9$  K/s eingesetzt.

Der zeitliche Verlauf der so ermittelten Standardabweichungen für zwei verschiedene Verstimmungen des Kühllasers ist in den Abbildungen 6.2 und 6.3 zu sehen, hier für  $D_t = 1.4$  K/s. Für jeden Stützpunkt dieser Kurven wurden dabei 300 Trajektorien berechnet, und die Mittelwerte dieser Simulationen sind in den Abbildungen dargestellt.

Im Falle der kleinen Verstimmung des Kühllasers ( $p_L = 1 \cdot 10^{-5}$  eVs/m) und damit hoher Kühlkraft erreichen die simulierten Phasenraumverteilungen nach ca. 0.5 s ihre Gleichgewichtswerte, bei  $p_L = 3 \cdot 10^{-5}$  eVs/m ist dafür ca. 6 s erforderlich. Bei den Simulationen zur Ermittlung der Orts- und Impulsbreiten wurde auf ausreichende Präparationszeit geachtet, sodaß sich Werte für  $t_{sim}$  von 1s bis zu 7s bei großem Detuning ergaben. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.12 zusammen mit den aus den Messungen ermittelten Werten und der analytischen Beschreibung der Restgasstreuung dargestellt.

## 6.2 Die Ionentrajektorien bei der Laserspektroskopie und die Berechnung der Signale

Zur Berechnung der Signale muß die spontane Kraft des antiparallel eingestrahnten Testlasers (Farbstofflaser) zur Untersuchung der Phasenraumverteilung der Ionen berücksichtigt werden (Kapitel 5). Der Testlaser hatte zwar nur ca. die halbe Leistung des Kühllasers, sein Einfluß dominiert aber dennoch die Bewegung, weil er in Resonanz mit den Ionen tritt (Abbildung 6.4).

Eine entsprechende Simulation ist in Abbildung 6.5 zu sehen. Die Rotverstimmung des Kühllasers ist  $-1 \cdot 10^{-5}$  eVs/m, und wiederum startet das Ion in der Bucketmitte. Die eigentlichen Anfangsbedingungen der Simulation ergeben sich aus der Propagationszeit ohne den Einfluß des Testlasers von 0.8 s. Der antiparallel eingestrahlte Testlaser wird von hohen zu niedrigen Frequenzen hin durchgestimmt, sodaß der resonante Impuls von niedrigen zu hohen Impulsen hin verläuft. Der Sättigungsparameter und die Durchstimmgeschwindigkeit des Testlasers  $s_0^a = 35$ ,  $\dot{p}_L = 7.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eVs}}{\text{m}}/\text{s} \hat{=} 1.7 \text{ GHz/s}$  entsprechen den experimentellen Werten. Die Testlaser-Parameter, die Realisierung der Restgasstöße ( $\varphi = 2.97 \cdot 10^{-7}$  eVs/m,  $t_0 = 10 \text{ ms}$ ) und die Stärke des Kühllasers haben in diesem Abschnitt immer die genannten Werte.

Die Trajektorien zeigen zunächst das bereits besprochene Verhalten, bis das Ion in Reso-

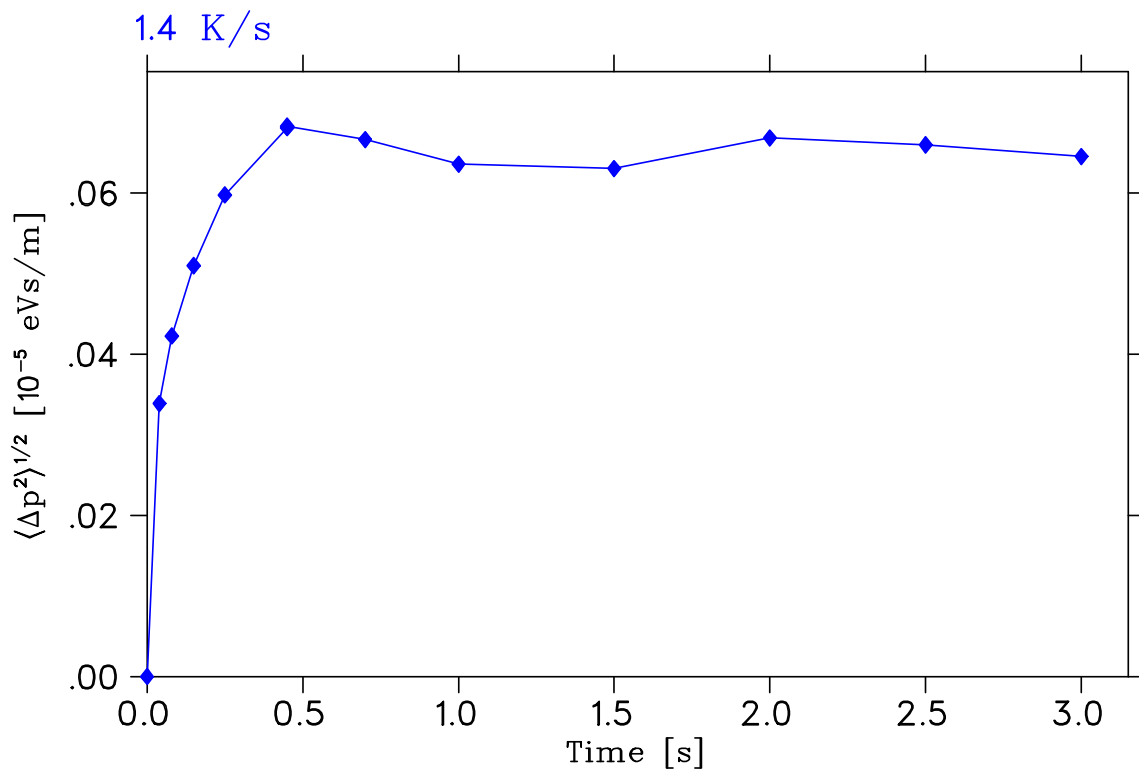
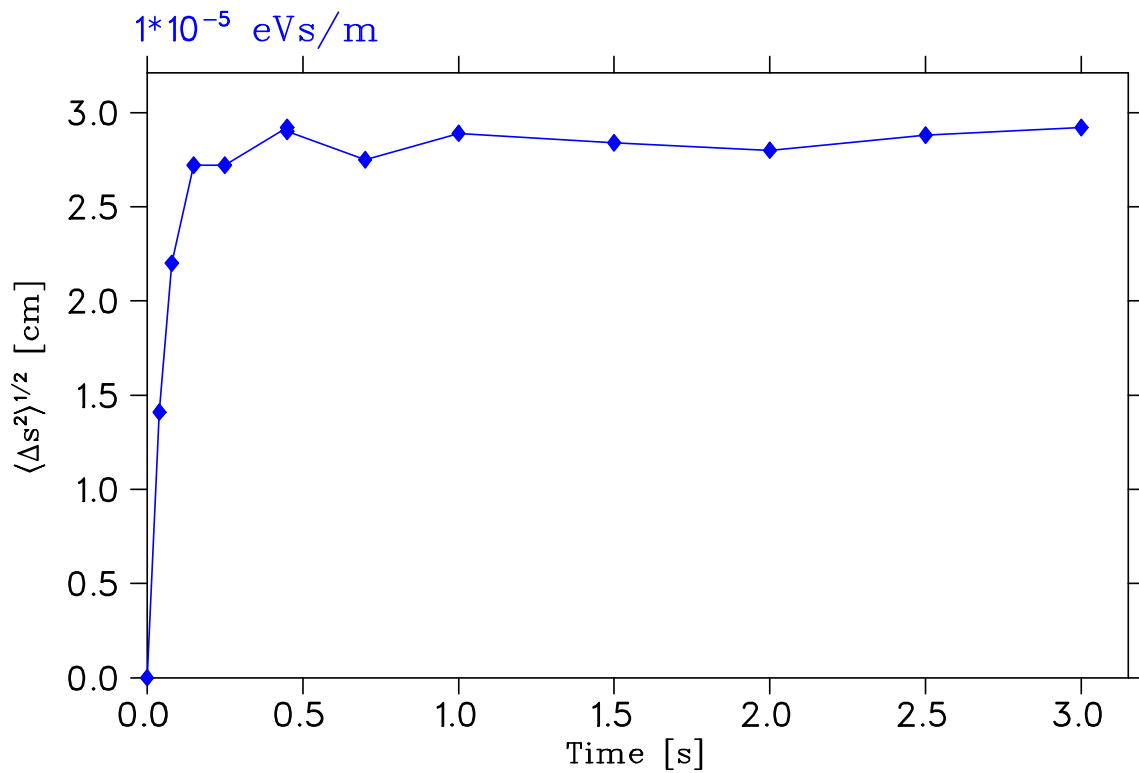


Abbildung 6.2: Zeitlicher Verlauf der Orts- und Impulsvarianz. Der Kühlaser ist  $1 \cdot 10^{-5} \text{ eVs/m}$  rotverstimmt und die zugrundeliegende Heizrate ist  $1.4 \text{ K/s}$ . Der Verlauf zeigt, daß die Phasenraumverteilung des Ions in ca.  $0.5 \text{ s}$  der Gleichgewichtsverteilung entspricht.

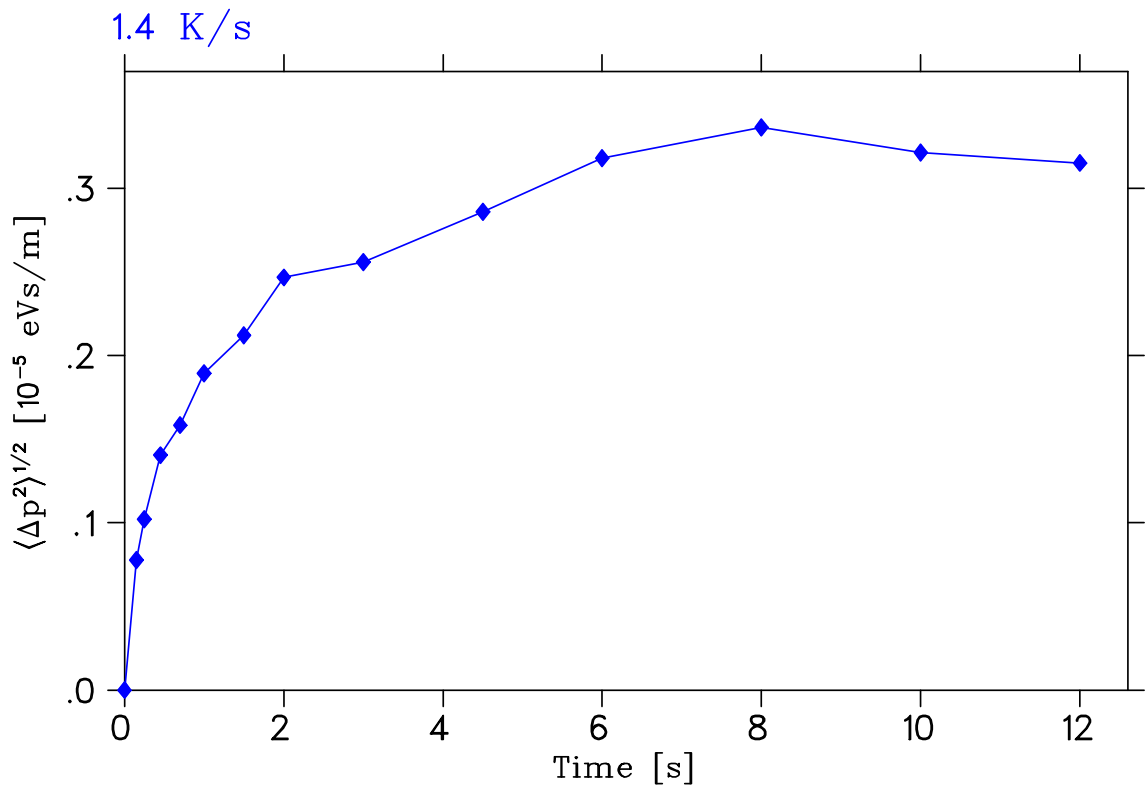
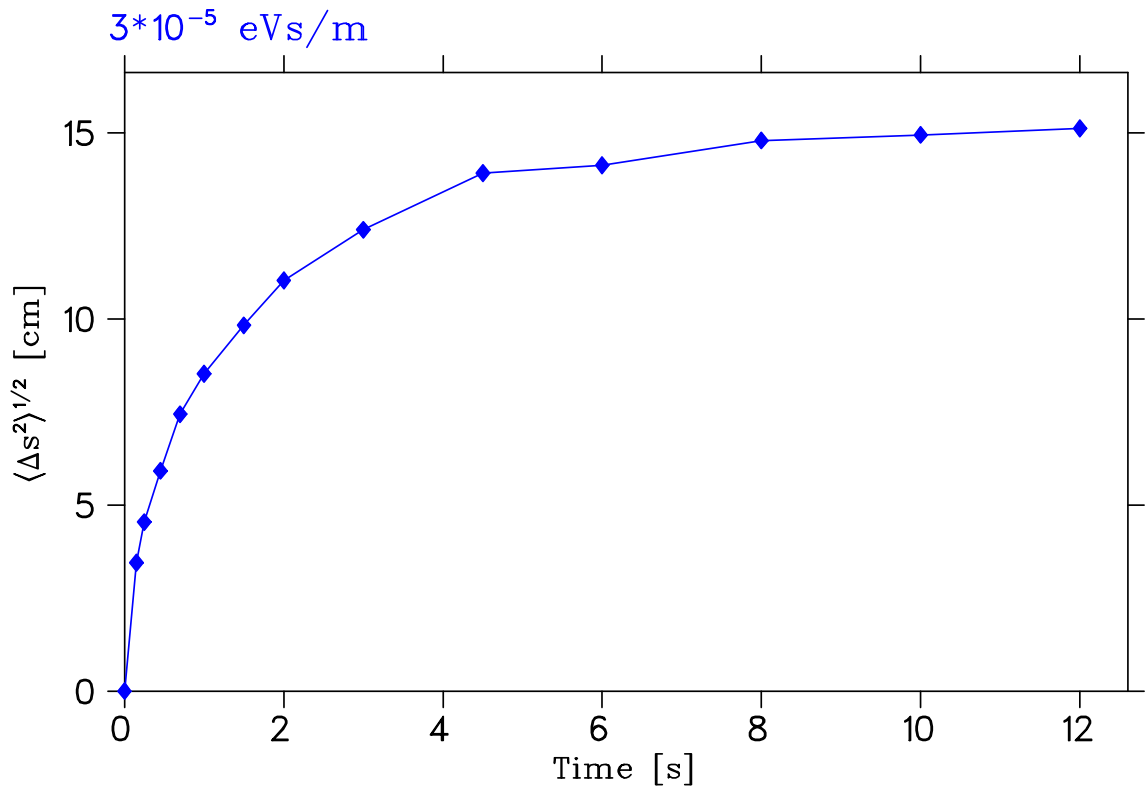


Abbildung 6.3: Zeitlicher Verlauf der Orts- und Impulsvarianz. Der Kühlaser ist  $3 \cdot 10^{-5} \text{ eVs/m}$  rotverstimmt und die zugrundeliegende Heizrate ist  $1.4 \text{ K/s}$ . Der Verlauf zeigt, daß die Phasenraumverteilung des Ions in ca. 7 s der Gleichgewichtsverteilung entspricht.

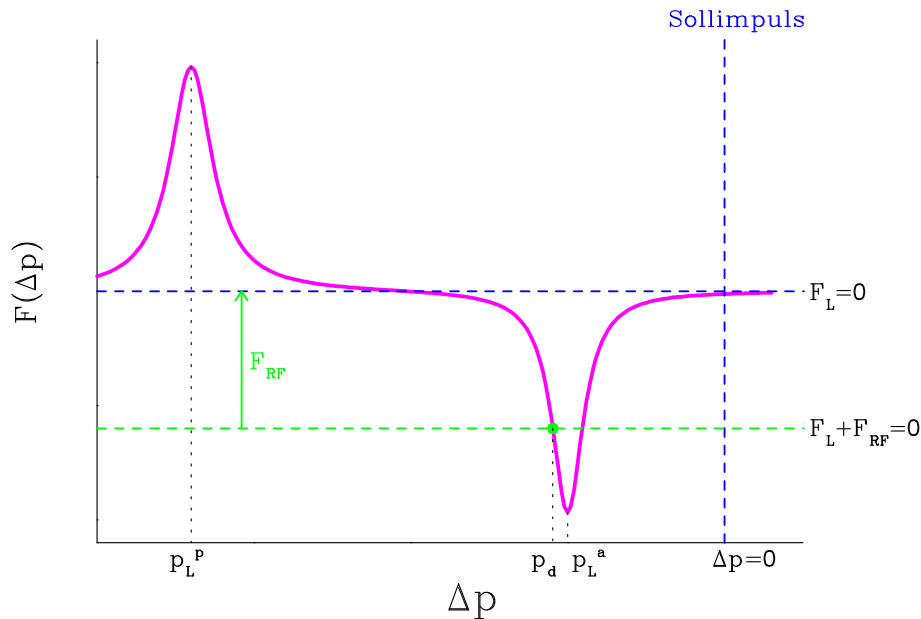


Abbildung 6.4: Schematische Darstellung der Laserkraft auf die Ionen bei der Laserspektroskopie. Gezeigt ist die Summe der spontanen Lichtkräfte  $F_L$ . Die Lichtkraft des parallel eingestrahlten Kühllasers mit resonantem Impuls  $p_L^p$  beschleunigt die Ionen, der antiparallel eingestrahlte Testlaser (resonanter Impuls  $p_L^a$ ) wirkt dagegen verzögernd.  $p_d$  ist der Impuls, bei dem die Laserkraft die Kraft des RF-Feldes im hinteren Bucketbereich ( $\Delta s > 0$ ) kompensiert. Die Ionen bewegen sich demzufolge mit der relativen Impulsabweichung  $\Delta p = p_d$  durch die RF-Buckets (Drift).  $p_d$  ist kleiner als  $p_L^a$ , weil sich die Ionen aufgrund der Synchrotronbewegung für  $\Delta s > 0$  dem resonanten Impuls von negativen Werten her annähern.

nanz mit dem Testlaser gerät. Die zusätzliche Laserkraft ändert die weitere Entwicklung grundlegend. Die Ionen werden durch die Wirkung des Testlasers in ihrer gedämpften Synchrotronoszillation gestoppt und driften zum Bucketende hin. Der zugrundeliegende Mechanismus wurde bereits in Kapitel 4 beschrieben („Heizen“ des Lasers). Weil der resonante Impuls mit der Zeit zunimmt, nähert sich die Trajektorie immer weiter dem Sollimpuls an. Mit dem Überschreiten des Sollimpulses kehrt sich die Driftrichtung um und somit werden die Ionen zur Bucketmitte zurückgeführt. Ab diesem Zeitpunkt wirkt der Farbstofflaser im Prinzip als weiterer Kühllaser.

Die Trajektorie verläuft nahezu symmetrisch zur Impulsachse, sodaß der Impuls des Ions bei der Rückkehr in den inneren Bucket-Bereich näherungsweise gleich dem Ausgangsimpuls ist, mit dem das Ion von dem Laser erfaßt wurde. Nach diesem Prozeß ist also die Ionenverteilung näherungsweise gleich der Ausgangsverteilung. Es kann daher davon aus-

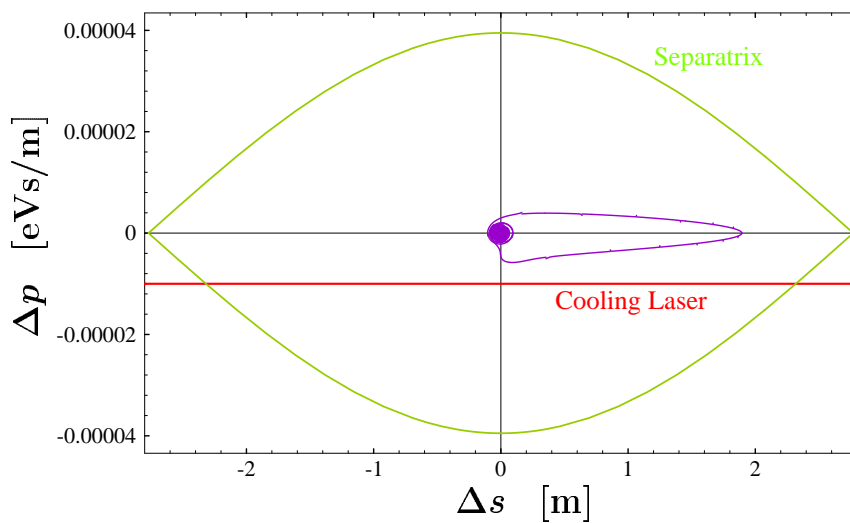
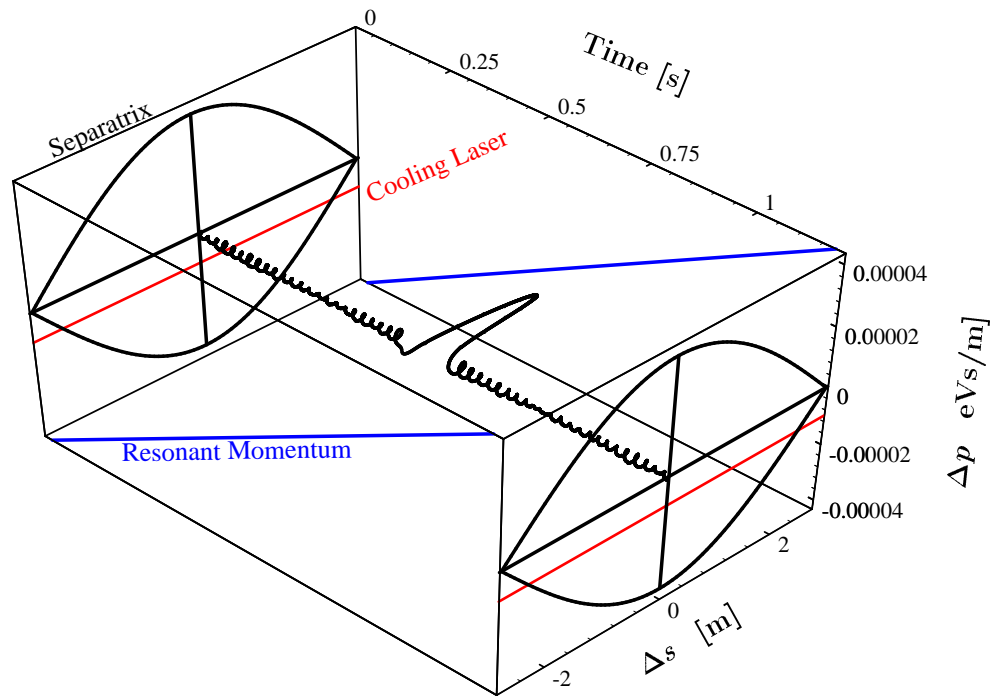


Abbildung 6.5: Ionen-Trajektorie im RF-Bucket bei der Laserspektroskopie mit dem Farbstofflaser. Im oberen Bild ist der zeitliche Verlauf der Trajektorie im longitudinalen Phasenraum mit der Zeit als zusätzlicher Achse dargestellt. Im unteren Bild ist die gleiche Trajektorie in einer Phasenraumdarstellung ohne die explizite Zeitabhängigkeit zu sehen. Im oberen Bild ist zusätzlich der resonante Impuls der Ionen beim Durchstimmen des Farbstofflasers angegeben. Das Ion führt Synchrotonoszillationen aus, die durch die Impulsfluktuationen aufgrund der Restgasstöße ( $D_t = 1.4$  K/s) angeregt werden und gleichzeitig der Dämpfung durch den Kühllaser unterliegen. Zu sehen ist die Wirkung eines zusätzlich eingestrahlichten, durchgestimmten Lasers zur Untersuchung der Ionenverteilung in den RF-Buckets. Weitere Details sind im Text beschrieben.

gegangen werden, daß diese geringe Störung der Gleichgewichtsverteilung innerhalb kurzer Zeit relaxiert ist<sup>2</sup>, sodaß das weitere Fluoreszenzsignal bei dem „Laserscan“ die Flanke der Verteilung zeigt. Die Phasenraumverteilung kann daher nur mit der abfallenden Flanke des Fluoreszenzsignals bestimmt werden, was bei der in Kapitel 5 beschriebenen Auswertung berücksichtigt wurde.

Wird der Testlaser in der anderen Frequenzrichtung durchgestimmt, d.h. von niedrigen zu hohen Frequenzen hin, dann kann die ansteigende Flanke des Signals zur Auswertung der Phasenraumverteilung genutzt werden. Das beobachtete Signal gibt aber nicht die ursprüngliche Verteilung wieder, weil der Testlaser die Ionen verzögert und gleichzeitig in der Frequenz nachgestimmt wird, sodaß die gesamte Phasenraumverteilung komprimiert wird. Zusätzlich führt diese Scanrichtung zu einem Ionenverlust aus den Buckets, wie aus der zweidimensionalen Darstellung in Abbildung 6.6 deutlich wird.

Anhand der simulierten Trajektorien kann das Fluoreszenzsignal berechnet werden. Als Maß für die Fluoreszenzrate werden dabei die Beträge der Laserkräfte verwendet, denn die Lichtkraft kann direkt in absorbierte Photonen (Impuls) pro Zeiteinheit umgerechnet werden und ist damit proportional zur Anzahl der gestreuten Photonen. Das Zeitintervall der Simulation wird in Zeitabschnitte von 30 ms unterteilt, und für jeden Abschnitt werden die Beträge der berechneten Lichtkräfte aufintegriert. Die Berechnung wird für räumliche Bereiche von 17.3 cm Länge (Scaler-Länge) getrennt durchgeführt<sup>3</sup>, das Ergebnis gibt die räumliche Verteilung des Fluoreszenzlichts wieder, wobei die Ortsauflösung der Auflösung bei den Messungen entspricht. Die gewählte zeitliche Kanalbreite von 30 ms sowie die Durchstimm-Geschwindigkeit des Testlasers entsprechen ebenfalls den experimentellen Einstellungen, sodaß die simulierten und gemessenen Spektren die gleiche Zeitauflösung besitzen und damit leicht vergleichbar sind.

---

<sup>2</sup>Die Abbildungen 6.2 und 6.3 zeigen, daß ca. 1/3 - 1/2 des Gleichgewichtswertes innerhalb der ersten 50 ms erreicht wird.

<sup>3</sup>Bei dieser Berechnung ist es erforderlich, für jedes Teilstück die Zeitintervalle zu bestimmen, in denen sich das Ion darin befindet. Programmtechnisch ist das mit Mathematica sehr komfortabel durch das Setzen von Nebenbedingungen möglich. Praktisch bedeutet das aber natürlich, daß die gesamte Trajektorie nach ihrer räumlichen Koordinate geprüft und segmentiert wird, sodaß diese Berechnungen den Hauptanteil der erforderlichen CPU-Zeit ausmachen. Typische Werte sind hier 15 min zur Berechnung der Trajektorien und 10 - 20 h zur Berechnung der Signale.



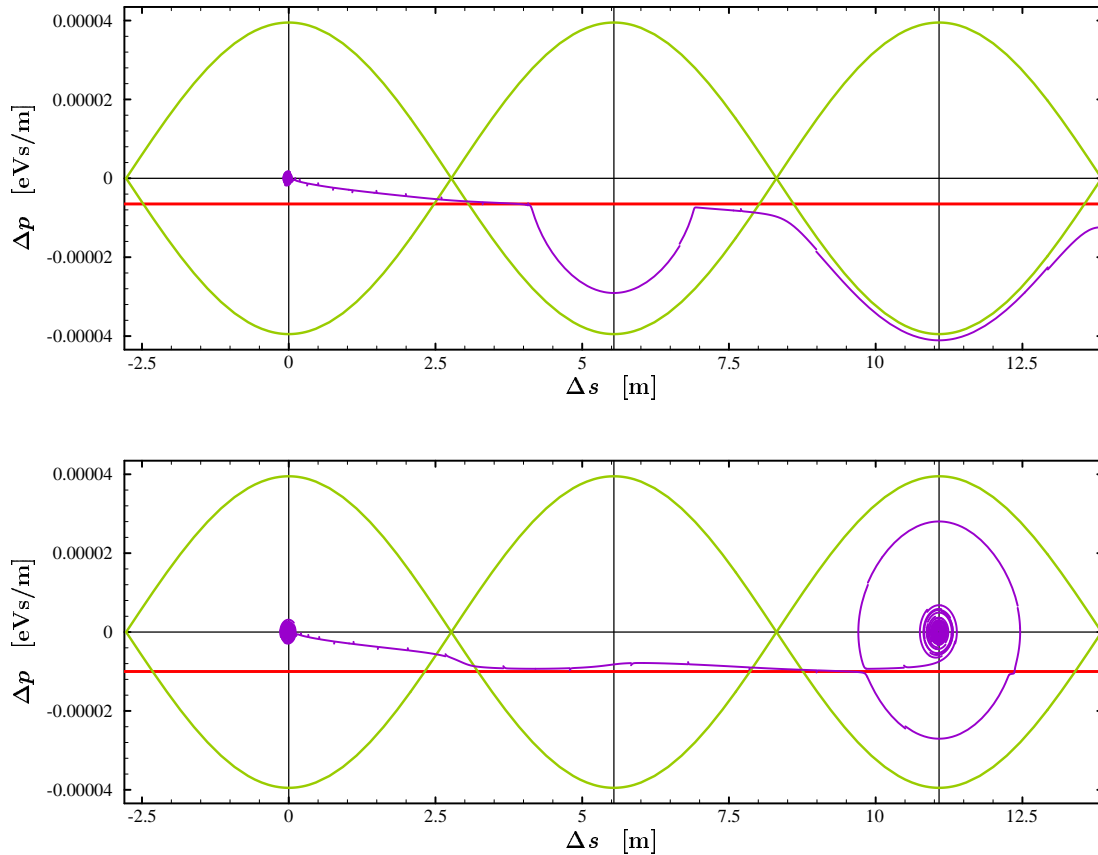


Abbildung 6.6: Trajektorien beim Durchstimmen des Testlasers von niedrigen zu hohen Frequenzen. Wenn der Farbstofflaser mit Impulsen unterhalb des Sollimpulses resonant wird, setzt eine Driftbewegung in Richtung Bucketende ein. Im oberen Bild führt die Trajektorie aus den Buckets hinaus, weil zu dem Zeitpunkt, an dem der Testlaser und der Kühllaser mit dem gleichen Impuls resonant sind (linke Hälfte des mittleren Buckets) die Laserkräfte im wesentlichen kompensiert sind. Das Ion folgt daher zunächst einer der Synchrotronbewegung entsprechenden Bahn, bis es wieder mit dem Testlaser in Resonanz gerät, diesmal aber mit einer hinreichenden Verstimmung zum Kühllaser, sodaß der mittlere Ionenimpuls entsprechend der Frequenz des Testlasers weiter verschoben wird. Im unteren Bild hat der Testlaser zu keinem Zeitpunkt, an dem sich das Ion mit dem resonanten Impuls des Kühllasers bewegt exakt den gleichen resonanten Impuls, sodaß keine vollständige Kompensation der Laserkräfte auftritt. In dem gezeigten Fall führt das dazu, daß die unbegrenzte Drift des Ionenimpulses durch den Kühllaser verhindert wird und das Ion schließlich im 3. Bucket wieder eingefangen wird.

In Abbildung 6.7 ist eine simulierte Trajektorie und das daraus berechnete Signal in den inneren 6 Scälern (räumliche Kanäle der Datenaufnahme) gezeigt. Für jeden Scaler ist hier der mittlere Abstand von der Bucketmitte angegeben, wobei negative Werte in Richtung des Bucketanfangs zeigen. Zur besseren Übersichtlichkeit ist hier wie auch in den weiteren dreidimensionalen Darstellungen zusätzlicher Leerraum zwischen den einzelnen Scälern eingesetzt. Die hellgraue Linie markiert die Position des Kühllasers (Argonionenlaser). Das Ion bewegt sich stets mit Impulsen oberhalb des resonanten Impulses des Kühllasers, und zu Beginn der Spektroskopie sind nur solche Photonen sichtbar, die bei der Kühlung erzeugt werden. Der starke Signalanstieg markiert den Zeitpunkt, an dem das Ion in Resonanz mit dem Testlaser gerät. Durch den einsetzenden Driftprozeß reißt das Signal in den inneren Scälern zunächst wieder ab, weil sich das Ion während der Drift nicht in diesem Bereich aufhält. Mit der Rückkehr des Ions in den inneren Bucketbereich wird auch hier wieder Fluoreszenz beobachtet, deren Verteilung, wie bereits dargelegt, ausgewertet werden kann. In dem gezeigten Fall wird in der vorderen Buckethälfte ( $\Delta s \leq -26$  cm) kein Signal beobachtet, in der hinteren Buckethälfte ( $\Delta s \geq 26$  cm) nur 2 Pulse. Diese ergeben sich, wenn das Ion beim Hinaus- bzw. Zurückdriften den entsprechenden Bucketbereich durchquert.

Mit zunehmender Verstimmung des Kühllasers wird eine größere Abweichung der Phasenraumkoordinate des Ions von der Bucketmitte immer wahrscheinlicher. Es kommt dann vor, daß die Bewegung des Ions nicht mehr auf ein Bucket beschränkt ist, sondern eine Drift in das folgende Bucket oder auch darüber hinaus stattfindet. Diese Situation ist in den Abbildungen 6.8 und 6.9 gezeigt.

Der Driftprozeß durch die Buckets erfolgt im wesentlichen mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten, die durch die Laserfrequenzen gegeben sind. Die Drift durch die vordere Bucketregion erfolgt mit dem resonanten Impuls des Kühllasers mit einer entsprechend großen Relativgeschwindigkeit und läuft deshalb meist in einer Zeit von weniger als 10 ms ab, also kurz gegenüber der Integrationszeit des Fluoreszenzlichts von 30 ms pro Kanal. Die hintere Bucketregion wird mit kleinerer Relativgeschwindigkeit (resonanter Impuls des Testlasers) durchquert, doch auch in diesem Fall wird meist weniger als

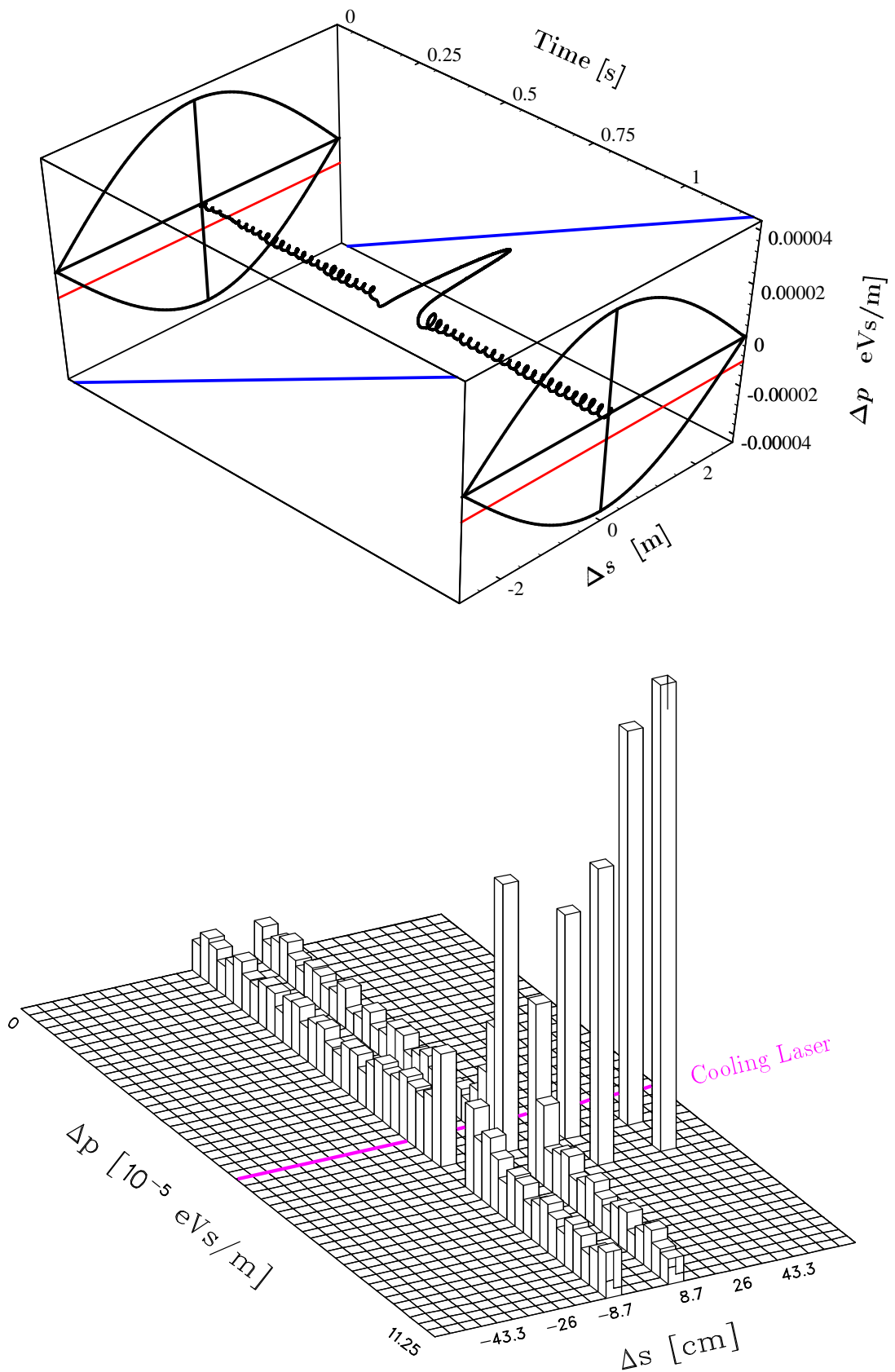


Abbildung 6.7: Ein-Teilchen Phasenraumtrajektorie und berechnetes Signal in den inneren 6 Scalern. Die Verstimmung des Kühllasers ist  $-1 \cdot 10^{-5}$  eVs/m. Die Signalhöhe ist ein Maß für die induzierte Fluoreszenz.

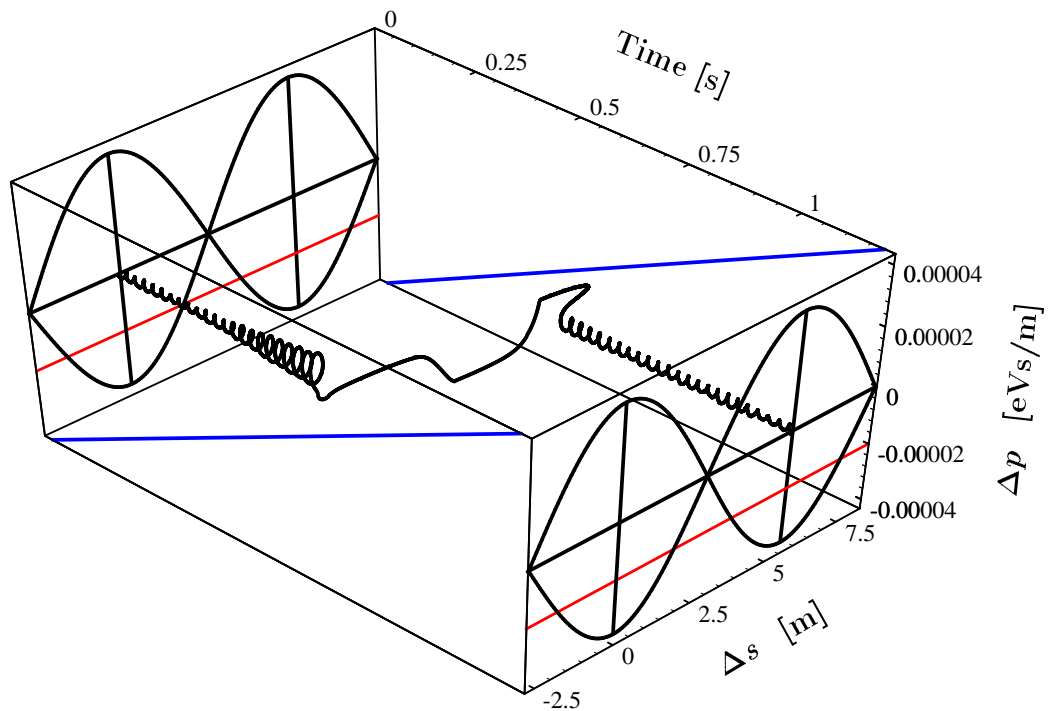


Abbildung 6.8: Ein-Teilchen Phasenraumtrajektorie. Das Detuning des Kühllasers ist  $p_L = -2 \cdot 10^{-5}$  eVs/m und die Heizrate  $D = 1.4$  K/s. Ein Signal, das mit 10 Trajektorien der gleichen Anfangsbedingungen berechnet wurde ist in Abbildung 6.10 gezeigt.

30 ms benötigt. Demzufolge erstreckt sich der Signalbereich, der dem Durchdriften eines Buckets zugeordnet ist, nur auf 1 - 2 Kanäle. Selbst in dem extremen Beispiel von Abb. 6.9 erstreckt sich dieser Bereich nur über 3 Kanäle. Durch diese schnelle Bewegung werden auf den einzelnen Teilstücken nur wenige Photonen emittiert, sodaß dieser Beitrag klein ist gegenüber der Zählrate aufgrund des „Einfangs“ durch den Testlaser zu Beginn des Driftprozesses und der wieder einsetzenden Kühlung danach. In den berechneten Spektren ist daher die Signalstruktur immer durch diese beiden Signalbeiträge dominiert, nur der zeitliche Abstand ändert sich mit zunehmender Verstimmung des Kühllasers.

Abbildung 6.7 zeigt die Phasenraumtrajektorie und das daraus resultierende Signal eines einzelnen Ions. Bei den Experimenten wurde zwar mit wenigen Ionen (typisch 3 - 10) pro Bucket gearbeitet, doch sind die gemessenen Signale die Summe mehrerer gleichartiger Messungen, sodaß zum Vergleich ein simuliertes Signal mit mehreren Ionen berechnet werden muß. Der Driftprozeß läuft für jedes Ion individuell ab, insbesondere ist der Startzeitpunkt von Ion zu Ion verschieden. Es ist daher zu erwarten, daß die beobachtete Signalstruktur an Schärfe verliert.

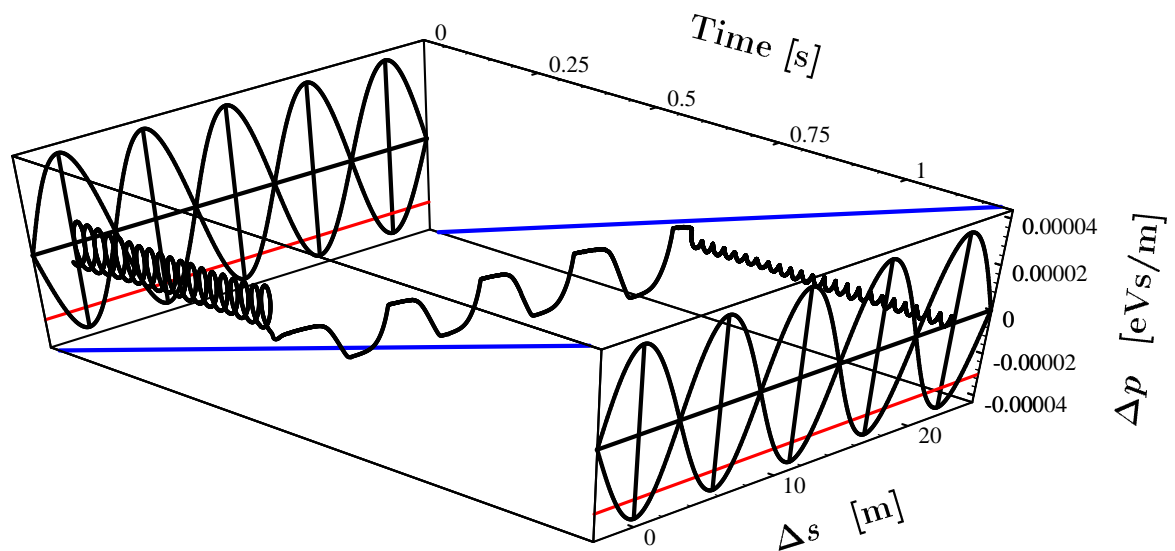


Abbildung 6.9: Ein-Teilchen Phasenraumtrajektorie. Das Detuning des Kühllasers ist  $p_L = -3 \cdot 10^{-5}$  eVs/m und die Heizrate  $D = 1.4$  K/s. Ein Signal, das mit 10 Trajektorien der gleichen Anfangsbedingungen berechnet wurde ist in Abbildung 6.11 gezeigt.

Abbildung 6.10 zeigt einen Vergleich zwischen einem simulierten und einem gemessenen Signal, wobei die Verstimmung des Kühllasers  $p_L = -2 \cdot 10^{-5}$  eVs/m beträgt. Es wurden 10 Trajektorien simuliert und daraus wiederum das Signal in dem inneren Bucketbereich bestimmt. Die gemessenen Signale zeigen das Fluoreszenzlicht aus dem gleichen Raumbereich, wobei die Bucketmitte natürlich nicht genau bei  $\Delta s = 0$  sondern mehr bei positiven Werten liegt. Bei Bedarf kann der genaue Wert durch einen Gaußfit an die räumliche Verteilung ermittelt werden (abfallende Signalflanke).

In der Messung ist die Signalstruktur mit zwei Maxima im inneren Bucketbereich gut erkennbar, vor allen Dingen die Zeitstruktur, ausgedrückt durch die Verstimmung des Testlasers, wird gut wiedergeben (unteres Bild). In dem hinteren Bucketbereich ist diese gute Übereinstimmung nicht mehr gegeben, hier wird das gemessene Signal deutlich unschärfer, bis hin zur teilweisen Überlagerung der verschiedenen Signalbeiträge. Hier macht sich vermutlich der Einfluß der Stöße mit erhöhtem Impulsübertrag bemerkbar, die in den Simulationen nicht berücksichtigt sind. Gerät das Ion durch eine entsprechend große Impulsänderung aus der Resonanz mit dem Testlaser, dann nimmt es zunächst die Synchrotron-Oszillationsbewegung wieder auf. Innerhalb einer Periode kommt es aber erneut in Resonanz und setzt die Driftbewegung fort. Durch diese Phasenstörung in der Driftbewegung wird die Signalstruktur ausgewaschen. Das macht sich vor allem in den

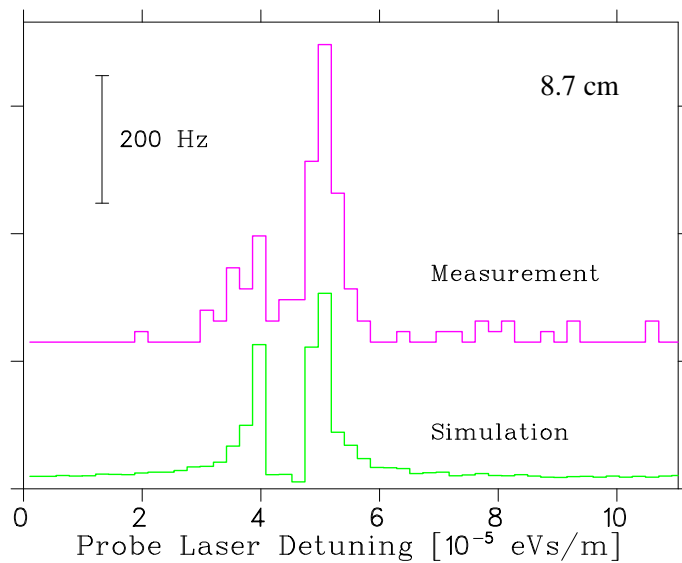
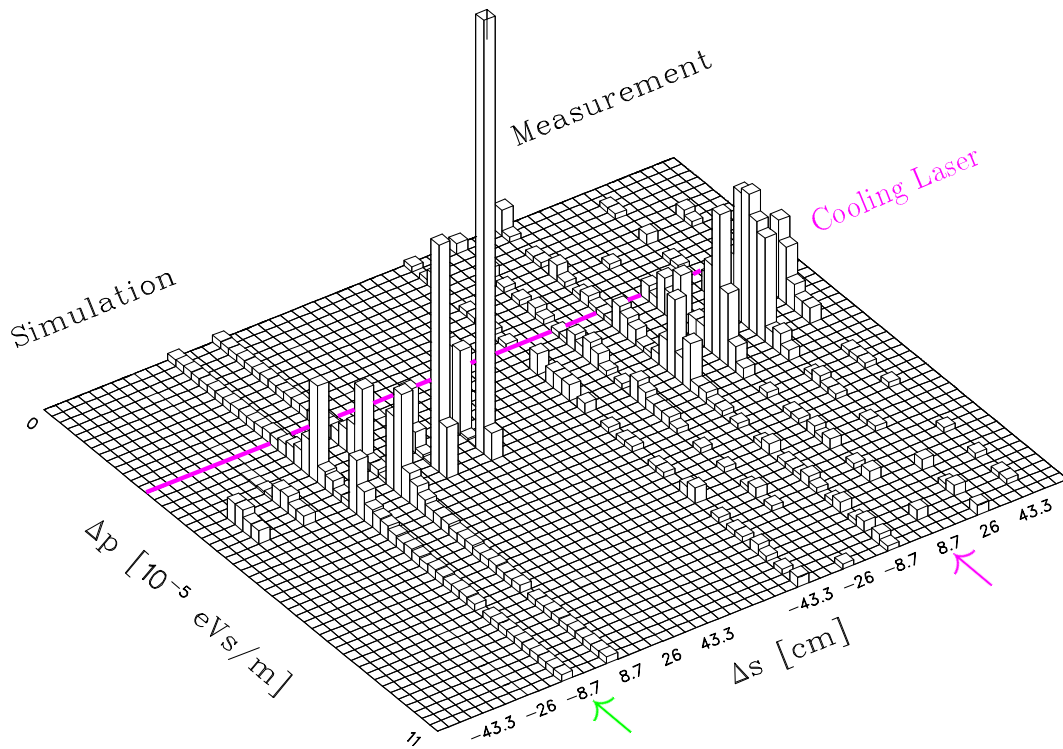


Abbildung 6.10: Berechnetes Signal für 10 Ionen. Die Heizrate ist  $D = 1.4 \text{ K/s}$ , die Verstimmung des Kühllasers ist  $p_L = -2 \cdot 10^{-5} \text{ eVs/m}$  in der Simulation und  $p_L \approx -2.1 \cdot 10^{-5} \text{ eVs/m}$  in der Messung, die Impulsskala ist entsprechend angepaßt. Die Kanalzeit ist 30 ms, wobei die Summe aus zwei Messungen dargestellt ist. Die maximale Signalthöhe der Messung entspricht einer Zählrate von 480 Hz. Die Signalthöhe der Simulation gibt nur die relativen Verhältnisse wieder und ist entsprechend angepaßt. Die markierten Kanäle bei 8.7 cm sind im unteren Bild genauer dargestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit sind die Frequenzskalen gegeneinander verschoben aber sonst unverändert. Ebenfalls aus Gründen der Darstellung wurde die Zählrate des simulierten Signals mit 0.8 multipliziert und die Grundlinie des gemessenen Signals um 230 Hz verschoben.

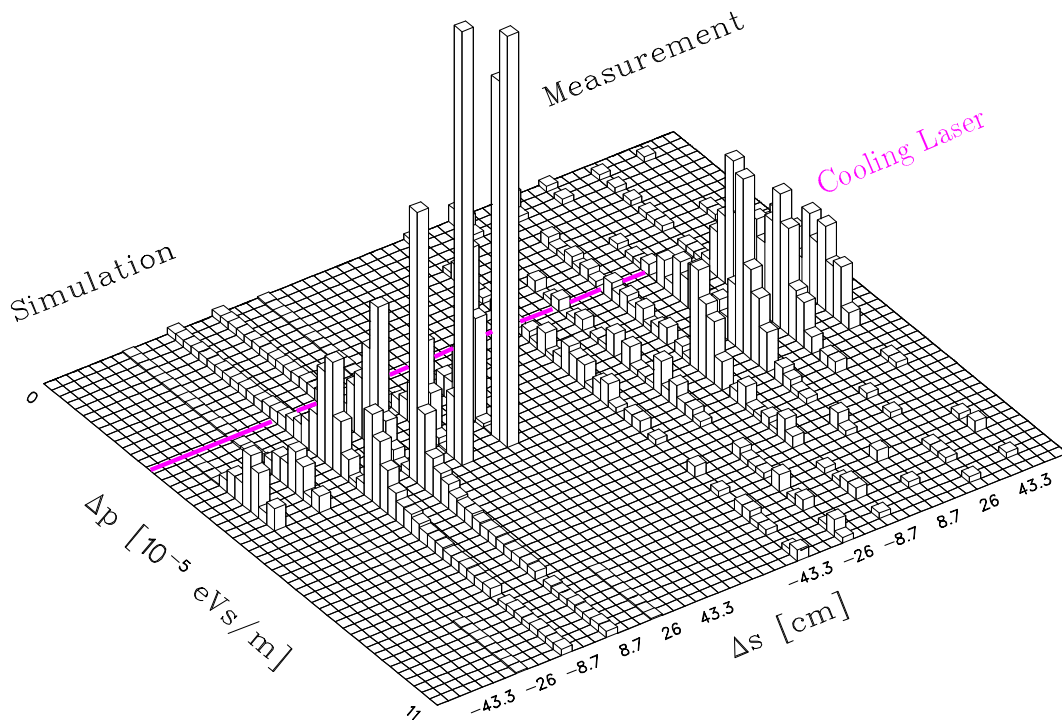


Abbildung 6.11: Berechnetes Signal für 10 Ionen. Die Heizrate ist  $D = 1.4 \text{ K/s}$ , die Verstimmung des Kühllasers ist  $p_L = -3 \cdot 10^{-5} \text{ eVs/m}$  in der Simulation und  $p_L \approx -2.9 \cdot 10^{-5} \text{ eVs/m}$  in der Messung, die Impulsskala ist entsprechend angepaßt. Die Kanalzeit ist 30 ms, wobei die Summe aus zwei Messungen dargestellt ist. Die maximale Signalthöhe der Messung entspricht einer Zählrate von 515 Hz. Die Signalthöhe der Simulation gibt nur die relativen Verhältnisse wieder und ist entsprechend angepaßt

Signalen bei 26cm und 43.5 cm bemerkbar, da die Fluoreszenz in diesem Bereich ausschließlich von der Driftbewegung stammt. Wie bereits dargelegt, ist die Fluoreszenz beim Herausdriften der Ionen im hinteren Bucketbereich sehr viel stärker als im vorderen Bereich beim Hereindriften, verursacht durch die unterschiedlichen Zeitskalen in der Bewegung.

Für die Auswertung der Phasenraumverteilung aus dem Fluoreszenzsignal ergeben sich natürlich Konsequenzen, wenn die Driftbewegung zwischen verschiedenen Buckets stattfindet. Da der Testlaser bei der Messung durchgestimmt wird, reduziert sich während der Driftbewegung die Impulsabweichung des Ions in Bezug auf den Sollimpuls. Die ursprüngliche Ionenverteilung bleibt in diesem Fall daher nicht mehr erhalten, sondern die abfallende Flanke des Signals repräsentiert eine komprimierte Phasenraumverteilung.

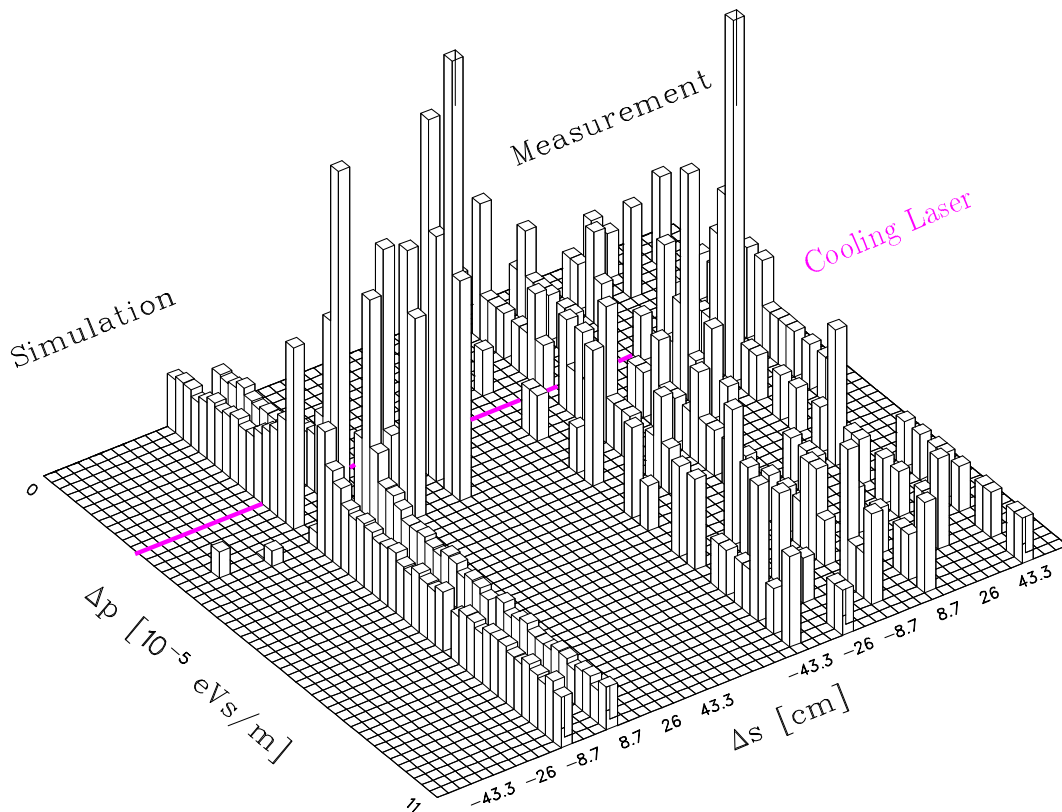


Abbildung 6.12: Simuliertes und gemessenes Signal für 10 Ionen. Die Heizrate ist  $D = 1.4$  K/s, die Verstimmung des Kühllasers ist  $p_L = -1 \cdot 10^{-5}$  eVs/m in der Simulation und  $p_L \approx -9 \cdot 10^{-6}$  eVs/m. in der Messung, die Impulsskala ist entsprechend angepaßt. Die Kanalzeit ist 30 ms, wobei die Summe aus zwei Messungen dargestellt ist. Die maximale Signalthöhe der Messung entspricht einer Zählrate von 132 Hz. Die Signalthöhe der Simulation gibt nur die relativen Verhältnisse wieder und ist entsprechend angepaßt

Da dieser Prozeß mit zunehmender Verstimmung des Kühllasers immer wahrscheinlicher wird, ergibt sich eine systematisch zu geringe Breite der Verteilung. Dieser Effekt ist in Abbildung 5.12 gut zu erkennen anhand der systematisch zunehmenden Abweichungen gegenüber dem analytisch berechneten und dem simulierten Verlauf. Für die Bestimmung der Heizrate wurden daher nur die Messungen bis zu einer Verstimmung von  $2.1 \cdot 10^{-5}$  eVs/m herangezogen.

Die Abbildungen 6.11 und 6.12 zeigen weitere Messungen im Vergleich mit Simulationen. Bei der Messung mit kleiner Kühlrate (große Verstimmung des Kühllasers, Abb. 6.11) wird die beobachtete Signalstruktur wie erwartet breiter und unschärfer, für größere Kühlrate (kleinere Verstimmung des Kühllasers, Abb. 6.12) wird die Struktur hingegen



schmäler und die einzelnen Signalbeiträge sind stärker ausgeprägt.

Das Signal ist bei dieser Verstimmung sehr schwach und entsprechend verrauscht. Diese Situation trat systematisch für relativ kleine Verstimmungen des Kühllasers auf, bei weiter reduzierter Verstimmung konnte sogar überhaupt kein Signal mehr beobachtet werden. Ein solches Verhalten wird im Prinzip erwartet, wenn der resonante Impuls des Kühllasers die Heizgrenze erreicht. Bei der gezeigten Einstellung ist der Impulsabstand zur Heizgrenze aber immer noch etwa 7 gesättigte Linienbreiten ( $\sim 210$  MHz), sodaß der beobachtete Verlust damit nicht zu erklären ist. Die Auflösung bei der Festlegung der Laserverstimmung mit Hilfe der simultan gemessenen  $^{127}\text{J}_2$ -Absorption (Kapitel 5) beträgt ca. eine gesättigte Linienbreite, sodaß eine fehlerhaft bestimmte Laserfrequenz als Ursache praktisch ausscheidet. In wieweit Frequenzverschiebungen in den Magnetfeldern oder andere Effekte als Ursache in Frage kommen, muß noch geklärt werden. Gegenwärtig ist der auftretende Verlustmechanismus ist noch nicht verstanden.

Durch Vergleich der Abbildungen 6.10 bis 6.12 sieht man, daß für kleine Verstimmungen des Kühllasers die Ionenbewegung fast immer auf ein Bucket beschränkt bleibt und demzufolge wird kein bzw. nur ein geringes Signal in den äußeren vorderen Scalern beobachtet. Bei der Simulation in Abbildung 6.12 ist das Signal bei  $-26$  cm und  $-43.3$  cm entsprechend schwach, und bei der Messung ist in den vorderen Scalern im wesentlichen nur die Untergrundzählrate zu sehen. Aus den bereits beschriebenen Gründen ist aufgrund des Driftprozesses in dem vorderen Bucketbereich nur eine kleine Zählrate zu erwarten, was durch die Abbildungen zu mittlerer und großer Verstimmung bestätigt wird. Die entsprechenden Zählereignisse heben sich dennoch vom Untergrund ab und zeigen damit deutlich, daß die Driftbewegung in diesen Fällen über mehrere Buckets stattgefunden hat.

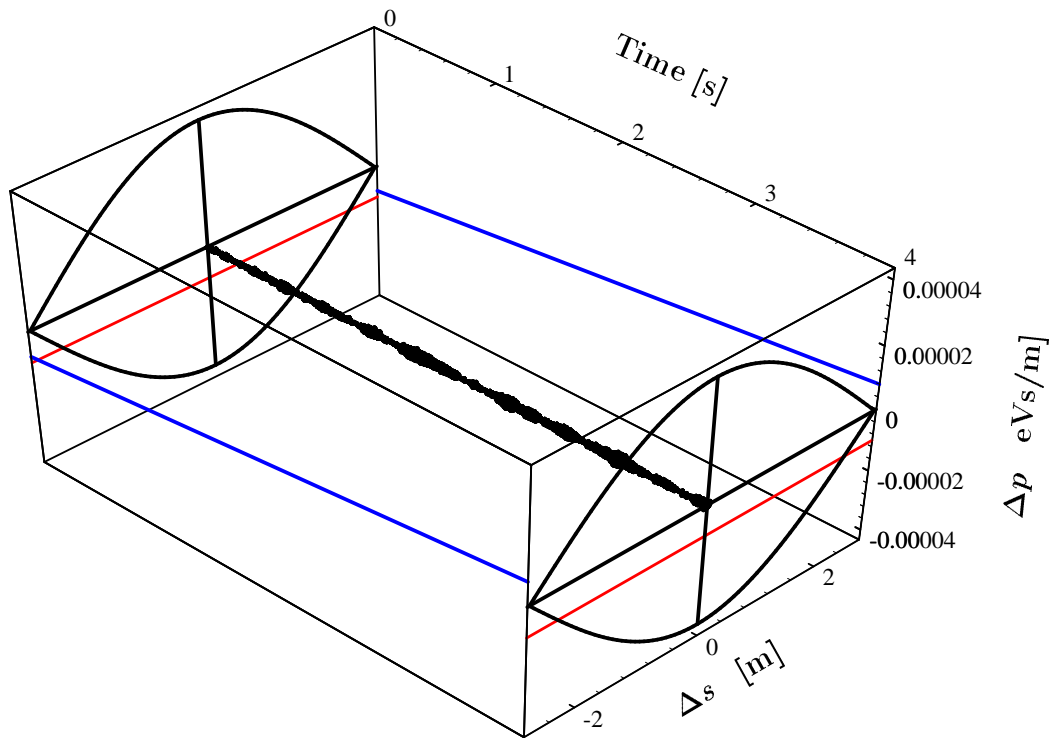
In den Messungen ist weiterhin ein geringfügig erhöhter Untergrund in dem vorderen Bucketbereich zu sehen. Diese Asymmetrie zeigt eine Wechselwirkung mit dem Kühllaser an (stärkere Fluoreszenz in dem vorderen Bucketbereich) und beruht vermutlich

auf den angesprochenen seltenen Restgasstößen mit höherem Impulsübertrag, bei denen Ionen aus dem gekühlten Ensemble herausgestoßen und dann wieder zurückgekühlt werden.

### 6.3 Simulationen zu optimierten Phasenraummessungen

Bei dem beschriebenen Verfahren zur Bestimmung der Phasenraumverteilung der gespeicherten  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen dominiert der Einfluß des Testlasers die Kühlung und die Bewegung aufgrund der Kraft des RF-Feldes, wodurch die komplexe Signalstruktur bedingt ist und eine direkte Zuordnung zwischen beobachteter Linienbreite und Breite der Impulsverteilung nicht möglich ist. Die Aufklärung dieses Sachverhaltes durch die Simulationen ermöglicht auch den Entwurf eines optimierten Verfahrens, das die genannten Schwierigkeiten vermeidet.

Abbildung 6.13 zeigt eine Simulation, bei der ein schwacher Testlaser verwendet wird, der zudem gepulst ist. Die Leistung des Testlasers beträgt in dieser Simulation nur noch 0.4 mW, entsprechend einem Sättigungsparameter  $S_0 = 0.25$ . Der Laser wird mit einem Tastverhältnis von 0.1 (Laser ist in 10% der Zeit an) und einer Repetitionsrate von 150 Hz gepulst. Dies kann z.B. leicht mit einem elektrooptischen Modulator erreicht werden. Durch den gepulsten Betrieb wird die Driftbewegung nach kurzer Zeit unterbrochen und das Ion nimmt die Synchrotronbewegung wieder auf. Mit  $S_0 = 0.25$  ist der Übergang nicht mehr gesättigt und die spektrale Breite der Kraft liegt nur geringfügig über der natürlichen Linienbreite. Das bedeutet, daß die erforderliche Zeit, in der das Ion aufgrund der Synchrotronbewegung aus der Resonanz gerät entsprechend reduziert ist, und daher der Laser nach einer kürzeren Zeit wieder eingeschaltet werden kann. Das Prinzip dieses Verfahrens liegt also darin, die Störung bei der Messung der Phasenraumverteilung auf ein Minimum zu beschränken, indem die Ionen nach kurzer Driftzeit wieder „freigelassen“ werden. Aufgrund der geringen mittleren Laserleistung ist das in Abbildung 6.14 gezeigte Signal eines Iones sehr verrauscht. Abbildung 6.15 zeigt ein Signal, das von 36 Ionen er-



**Trajektorie**

Präp.-Zeit 0.8 s  
 Simulationszeit 4 s  
 $U_{RF}$  0.3 V

**Stöße**

$D = 1.4$  K/s  
 $\Delta t_{Stoß} = 10$  ms  
 $\phi = 2.971 \cdot 10^{-7}$  eVs/m

**Kühl-Laser**

Verstimmung  $-1 \cdot 10^{-5}$   
 eVs/m  
 $s_0 = 65$

**Test-Laser**

Start  $-8 \cdot 10^{-6}$  eVs/m  
 Durchstimm-Geschwindigkeit  
 $4 \cdot 10^{-6} \frac{eVs}{m/s} \sim 94$  MHz/s  
 $s_0 = 0.25$   
 Rep.-Rate 150 Hz  
 Tastverhältnis 0.1

Abbildung 6.13: Ein-Teilchen Phasenraumtrajektorie beim gebunchten Laserkühlen und gleichzeitiger Untersuchung der Phasenraumverteilung mit einem gepulsten, schwachen Laser. Eine genaue Beschreibung ist im Text gegeben.

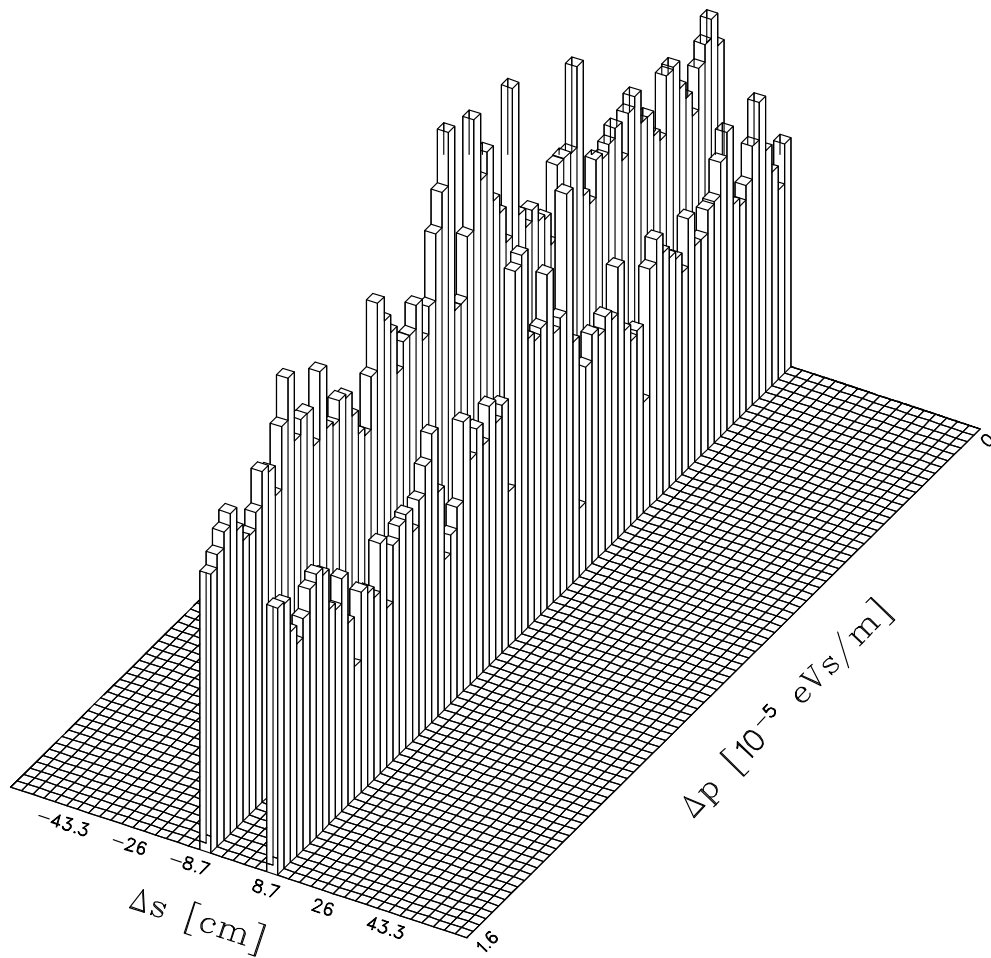


Abbildung 6.14: Fluoreszenzsignal bei der Untersuchung der Phasenraumverteilung eines simulierten Ions mit einem gebunchten, schwachen Laser. Eine genaue Beschreibung ist im Text gegeben.

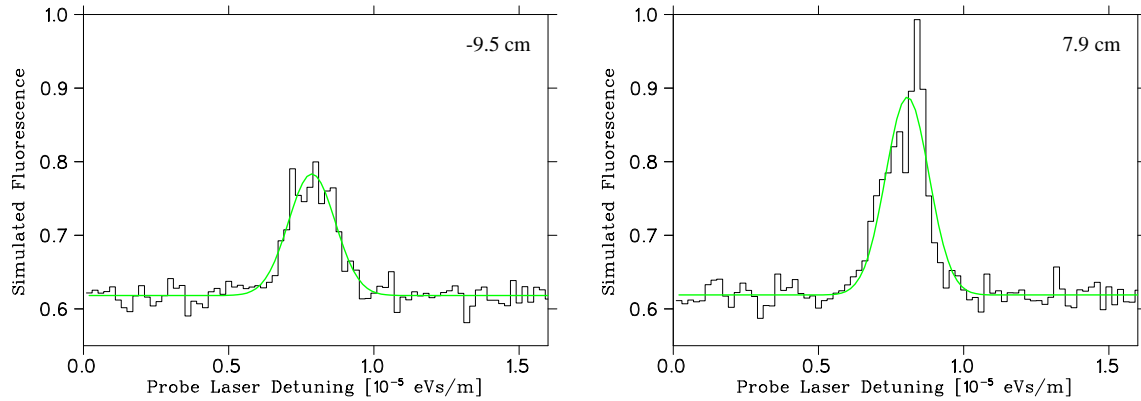


Abbildung 6.15: Simuliertes Fluoreszenzsignal von 36 Ionen, Messung mit gepulstem, schwachem Testlaser. Gezeigt sind die Signale in den inneren beiden Scalern, deren Grenze auf den stabilen Punkt  $x_{ss}$  gelegt wurde, wodurch die Mittelpunkte der Scaler nicht mehr symmetrisch um  $\Delta s = 0$  liegen. Die helle durchgezogene Linie in jeder Darstellung ist ein Gaußfit an das Signal und ergibt  $1\sigma$ -Breiten von 15 MHz ( $6.4 \cdot 10^{-7}$  eVs/m) im Scaler bei -9.5 cm und von 17 MHz ( $7.3 \cdot 10^{-7}$  eVs/m) im Scaler bei 7.9 cm. Die Resonanz des antiparallel eingestrahlt Testlasers wird von niedrigem zu hohem Ionenimpuls durchgestimmt. Der Einfluß des Testlasers ist in diesem Schema minimal, aber in dem Scaler bei 7.9 cm dennoch erkennbar und führt hier zu der erhöhten Linienbreite.

zeugt wurde. Für die Berechnung der Signale wurde hier die Grenze zwischen den beiden inneren Scalern auf den stabilen Punkt  $x_{ss} = -8.1$  mm für die Rotverstimmung des Kühl lasers von  $p_L = 1 \cdot 10^{-5}$  gesetzt. Das Signal bei -9.5 cm zeigt daher den Bucketbereich, in dem die Lichtkraft des Testlasers der Kraft des RF-Feldes gleichgerichtet ist und daher keine Driftbewegung verursacht. Das Signal bei 7.9 cm dagegen zeigt eine starke Fluoreszenzüberhöhung nach dem Überschreiten des Sollimpulses (Fit-Maximum). Bei dieser Verstimmung des Testlasers überwiegt dessen Lichtkraft nahe des stabilen Punktes dennoch die RF-Kraft und es kommt wieder zu einer Driftbewegung mit entsprechend hoher Fluoreszenzrate. Weil für kleine Abweichungen vom stabilen Punkt die Amplitude der Synchrotronbewegung entsprechend klein ist, kann das Ion dem Fangbereich des Lasers in der Dunkelzeit auch nicht mehr entkommen. Das Ergebnis ist die starke Fluoreszenzüberhöhung in der abfallenden Signalflanke bei 7.9 cm und die geringfügige Überhöhung bei -9.5 cm. Der gleiche Sachverhalt ist natürlich auch gegeben, wenn der Testlaser nahe des Sollimpulses ist aber eine negative Verstimmung aufweist. Es kommt dann in der Nähe des stabilen Punktes zu einer Driftbewegung aus der Bucketmitte heraus, was zu der Überhöhung in der ansteigenden Flanke des Signals nahe des Sollimpulses führt.

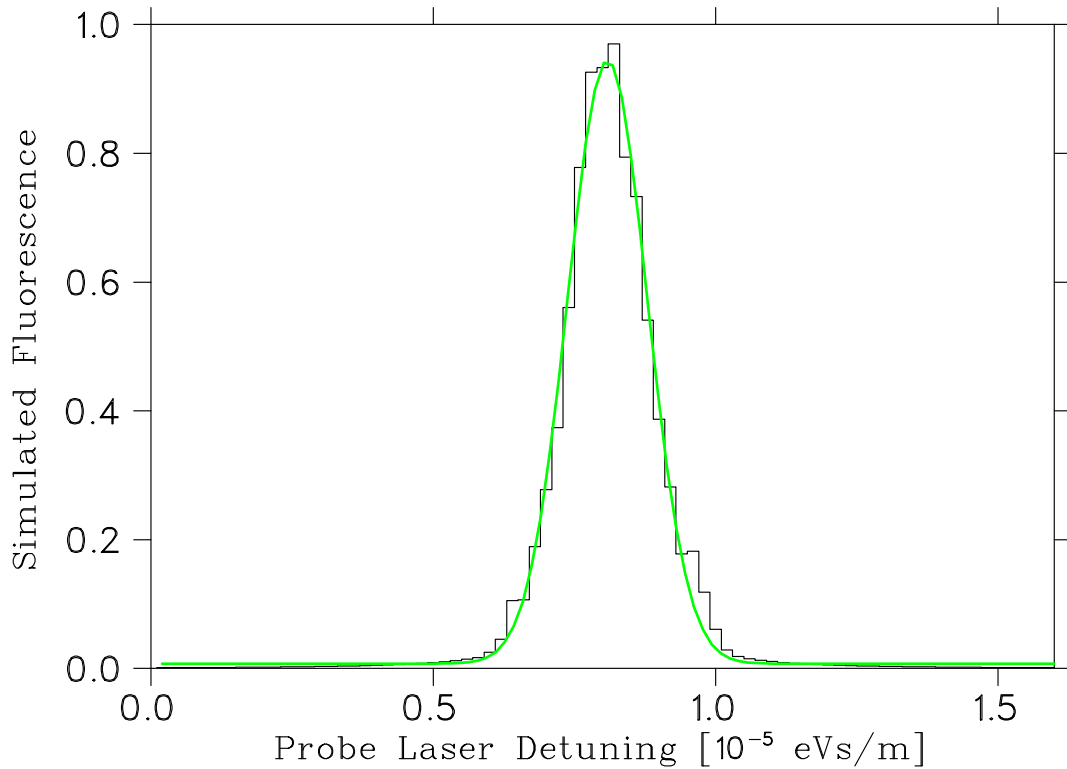


Abbildung 6.16: Simuliertes Signal bei dem optimierten Verfahren. Die Störung durch die Messung wird durch die Verwendung zweier gegenläufiger, gleichstarker Laser kompensiert. Aufgrund der kurzen Bunchlänge können die Ionen in einen Scaler abgebildet werden.

Die simulierte Linienform zeigt bei  $-9.5$  cm daher zwar mit zunehmender Teilchenzahl eine zunehmend gaußförmige Verteilung, ein Gaußfit ergibt aber eine  $1\sigma$ -Breite von  $19$  MHz  $\cong 8.1 \cdot 10^{-7}$  eVs/m. Aus den genannten Gründen ist das Signal verbreitert, die „wahre“ Breite beträgt nach Abbildung 6.2 ca.  $6.5 \cdot 10^{-7}$  eVs/m.

Zur störungsfreien Beobachtung des Phasenraums ist also eine vollständige Kompensation der Lichtkraft des Testlasers erforderlich. Abbildung 6.16 zeigt das Ergebnis einer Simulation, bei der zur Spektroskopie zwei gegenläufige, schwache Laser (jeweils  $S_0 = 1$ ) kontinuierlich eingestrahlt wurden. Für das gezeigte Signal wurden die berechneten Signale von 20 Ionen aufsummiert. Beide Laser sind gleich stark und bleiben beim Durchstimmen mit dem gleichen Ionenimpuls resonant, was bei einem experimentellen Einsatz dieser Methode eine sehr gute Kontrolle der Laserfrequenzen erfordert. In diesem Idealfall kompensieren sich die Kräfte beider Laser, sodaß dann tatsächlich die ungestörte Ionenverteilung beobachtet werden kann. Die Scaler-Grenzen wurden bei dieser Simulation so

gewählt, daß die Bucket-Mitte im Zentrum eines Scalers liegt. Die räumliche Ausdehnung des Bunchs liegt innerhalb eines Scalers, sodaß Abbildung 6.16 das gesamte Signal zeigt. Die helle Linie zeigt eine gefittete Gaußkurve der  $1\sigma$ -Breite  $7.07 \cdot 10^{-7}$  eVs/m, was in Laserfrequenzen einer FWHM-Linienbreite von 38.9 MHz entspricht. Dieser Wert befindet sich in Anbetracht der mit  $N = 20$  nicht sehr großen Teilchenzahl in Übereinstimmung mit dem in Abbildung 6.2 dargestellten Ergebnis. Tatsächlich wird bei diesem Meßverfahren die überlagerten Verteilungsfunktionen von gedämpften harmonischen Oszillatoren beobachtet, die gemäß dem zentralen Grenzwertsatz nur für große Teilchenzahlen durch eine Gaußverteilung beschrieben wird.

Bei der Auswertung der Daten hat sich gezeigt, daß die räumliche Auflösung bei den erreichbaren Bunchlängen nicht ausreicht, damit die räumliche Buchstruktur verlässlich abgeleitet werden kann. Für weitere Messungen sollte daher eine Elektronik entwickelt werden, die mit einer entsprechend höheren Taktfrequenz die räumliche Auflösung verbessert, wobei mindestens ein Faktor 4 erreicht werden sollte. Die Messzeit pro Scaler würde in diesem Fall 2.26 ns betragen, entsprechend einer Länge von 4.3 cm. Es wäre damit auch erforderlich, die Abbildungslänge des Detektors von jetzt 6.7 cm (Anhang A) deutlich zu verringern, was sich wiederum in einer schlechteren Nachweiseffizienz niederschlagen würde. Es wäre damit erforderlich, die Nachweiseffizienz des Detektors nochmals zu steigern oder alternativ mehrere Detektoren mit verkürzter Abbildungslänge zu verwenden. Von einer solchen Weiterentwicklung sind damit also alle Komponenten der Datenaufnahme betroffen. Bei der Verwendung mehrerer Detektoren sind außerdem auch konstruktive Maßnahmen in der Experimentierstrecke erforderlich, denn die Detektoren müssen alle den gleichen Raumbereich abbilden oder die Signalaufnahme muß getrennt erfolgen, wobei sich später das Problem stellt, die Einzelsignale phasenrichtig aufzuaddieren.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Diskussion

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Präparationsverfahren für einen  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionenstrahl entwickelt, das die Ionen im Zustand  ${}^1S_0$  (Singlettzustand) von den Ionen im Zustand  ${}^3S_1$  (Triplettzustand) trennt und aus dem Speicherring entfernt. Es wurde dabei beobachtet, daß ca. 50% der angeregten Ionen bei diesem Präparationsschritt gespeichert bleiben und danach als zustandsreiner Ionenstrahl für Experimente zur Verfügung stehen.

Die Phasenraumverteilung dieses Strahls wurde mit spektroskopischen Mitteln untersucht. Dafür wurde ein Fluoreszenzlichtdetektor aufgebaut, dessen Nachweisempfindlichkeit im Prinzip erlaubt, einzelne Ionen im Speicherring zu beobachten.

Die Messung der Ortsverteilung der Ionen wurde durch die zeitaufgelöste Messung des Fluoreszenzlichts synchron zum Umlauf der Ionen im Speicherring realisiert. Die erzielte Auflösung ist durch die Integrationszeit der Ausleseelektronik von 9.1 ns und die Abbildungseigenschaften des optischen Systems begrenzt. Das Auflösungsvermögen des Gesamtsystems beträgt für gaußförmige Ionenverteilungen  $\langle \Delta s^2 \rangle^{1/2} = 6.7 \text{ cm}$  (Anhang B). Eine Erhöhung der Auflösung ist durch den Einsatz einer schnelleren Elektronik bei einer gleichzeitigen Verkürzung der Abbildungslänge des Detektors möglich. Zur Erhaltung der Sensitivität werden damit aber auch Weiterentwicklungen an den optischen Komponenten erforderlich.



Die Impulsverteilung wurde durch Laserspektroskopie ermittelt. Durch die Ionendynamik in dem RF-Feld und der gleichzeitigen Wechselwirkung mit dem Festfrequenzlaser (Kühlaser) und dem Testlaser zeigt das beobachtete Fluoreszenzlicht eine detaillierte Struktur und gibt nicht direkt die Phasenraumverteilung wieder. Mit Hilfe von numerischen Simulationen der Ionentrajektorien und daraus berechneten Modell-Signalen konnte die Signalstruktur aufgeklärt werden. Die Differentialgleichungen des Systems wurden dabei numerisch gelöst, wobei als Heizmechanismus ein Random Walk des Ionenimpulses eingeführt wurde. Auf diese Weise lassen sich Heizeffekte beschreiben, die nicht auf internen Wechselwirkungen beruhen und damit unabhängig von der Phasenraumdichte des Ionenensembles sind. Dieser Ansatz ist gerechtfertigt, denn es konnte gezeigt werden, daß die internen Wechselwirkungen des präparierten Ionenstrahls geringer Intensität, der sich aus wenigen Ionen pro Bucket zusammensetzt, vernachlässigbar sind gegenüber den übrigen Heizeffekten im Speicherring. Durch den Vergleich mit den Simulationen konnte gezeigt werden, daß aus der abfallenden Signalflanke die Gleichgewichts-Phasenraumverteilung der gekühlten Ionen bestimmt werden kann. Die beobachtete Heizrate von 1.4 K/s ist für Speicherringexperimente sehr niedrig und kann durch die Streuung am Restgas erklärt werden. Bei bekannter Zusammensetzung des Restgases kann damit im Prinzip auf den mittleren Druck im Speicherring zurückgeschlossen werden.

Das Verfahren eignet sich als Diagnosemessung, da zumindest für kleine Verstimmungen des Kühlasers ( $\leq 10^{-5}$  eVs/m) die ursprüngliche Impulsverteilung nur leicht gestört wird und diese Störung innerhalb kurzer Zeit relaxiert. Es konnte durch Simulationen gezeigt werden, wie durch weitere technische Verfeinerungen des Verfahrens diese Störungen minimiert bzw. sogar völlig vermieden werden können.

Eine störungsfreie Spektroskopie ist eine Voraussetzung für ein verbessertes Testexperiment zur speziellen Relativitätstheorie. Das Ziel bei der Entwicklung des neuen Verfahrens war die Bereitstellung von Ionen mit geringer Impulsunschärfe, wobei Störungen der Ionenbewegung auf ein Minimum beschränkt werden sollten. Dieses Ziel ist mit dem zustandselektierten Strahl geringer Ionenzahl erreicht. Ausgehend von diesem Io-

nenstrahl sind unter Verwendung umlaufsynchrone Techniken weitere Entwicklungen zur Einschränkung der Spektroskopie auf den feldfreien Raum möglich<sup>1</sup> und damit eine Annäherung an ein idealisiertes Experiment, bei dem einzelne Ionen eine bis auf die Wechselwirkung mit den Lichtfeldern störungsfreie Bewegung ausführen.

Die Impulsbreite ist gegenüber dem elektronengekühlten Strahl des früheren Experiments von  $\frac{\Delta p}{p} = 3.6 \cdot 10^{-5}$  entsprechend  $T = 400$  K auf Werte im Bereich  $\frac{\Delta p}{p} = 7 \cdot 10^{-7}$  ( $T = 160$  mK) reduziert worden, weitere Verbesserungen müßten hier im Prinzip möglich sein. Die Frequenzunsicherheit durch die AC-Stark Verschiebung und den Photonenrückstoß kann dabei auf  $\sim 100$  kHz reduziert werden (Kapitel 2).

Die räumliche Struktur des kalten, gebunchten Ionenstrahls führt bei der synchronen Fluoreszenzlichtmessung zur Erhöhung des Signal/Rausch-Verhältnisses. Die Detektor-Zählrate pro Ion beträgt 10.4 Hz, die Untergrundzählrate des Detektors hingegen 12 - 18 Hz. Werden die Ionen räumlich auf einen Bereich um die Bucket-Mitte entsprechend einer Scaler-Länge eingeschränkt (17.3 cm = 1/32 Bucket: „Digitalisierungslänge“), dann wird dadurch die Untergrundzählrate um den Faktor 32 reduziert, bei unveränderter Signal-Zählrate. Das resultierende Signal/Rausch-Verhältnis wird dann  $S/N \approx 4.8$  für ein Ion bei einer Gesamt-Meßzeit von 100 ms.

Für das Testexperiment bedeutet aber die Driftbewegung der Ionen bei der Laserspektroskopie am gebunchten Strahl eine zusätzliche Komplikation. Bei der Spektroskopie des  $\Lambda$ -Systems ist das in Abschnitt 6.3 beschriebene, optimierte Verfahren im Prinzip realisiert, bei dem sich die Wirkung der Lichtkräfte der beiden gegenläufigen Laser kompensiert, doch diese Kompensation ist nicht vollständig. Zwar können die verschiedenen Stärken ( $A_{F=3/2 \rightarrow 5/2} / A_{F=5/2 \rightarrow 5/2} = 7/3$ ) und Impulsüberträge der beiden Übergänge durch entsprechend angepaßte Intensitäten der Laser ausgeglichen werden, diese Anpaßung ist aber abhängig von der Laserverstimmung und somit bei der Spektroskopie verletzt. In dem kri-

---

<sup>1</sup>Durch eine synchronisierte Anregung der Ionen ist es möglich, die Wechselwirkung auf den geraden Teil der Experimentierstrecke außerhalb der Magnete zu beschränken, wobei dieser Bereich zusätzlich abgeschirmt werden kann.

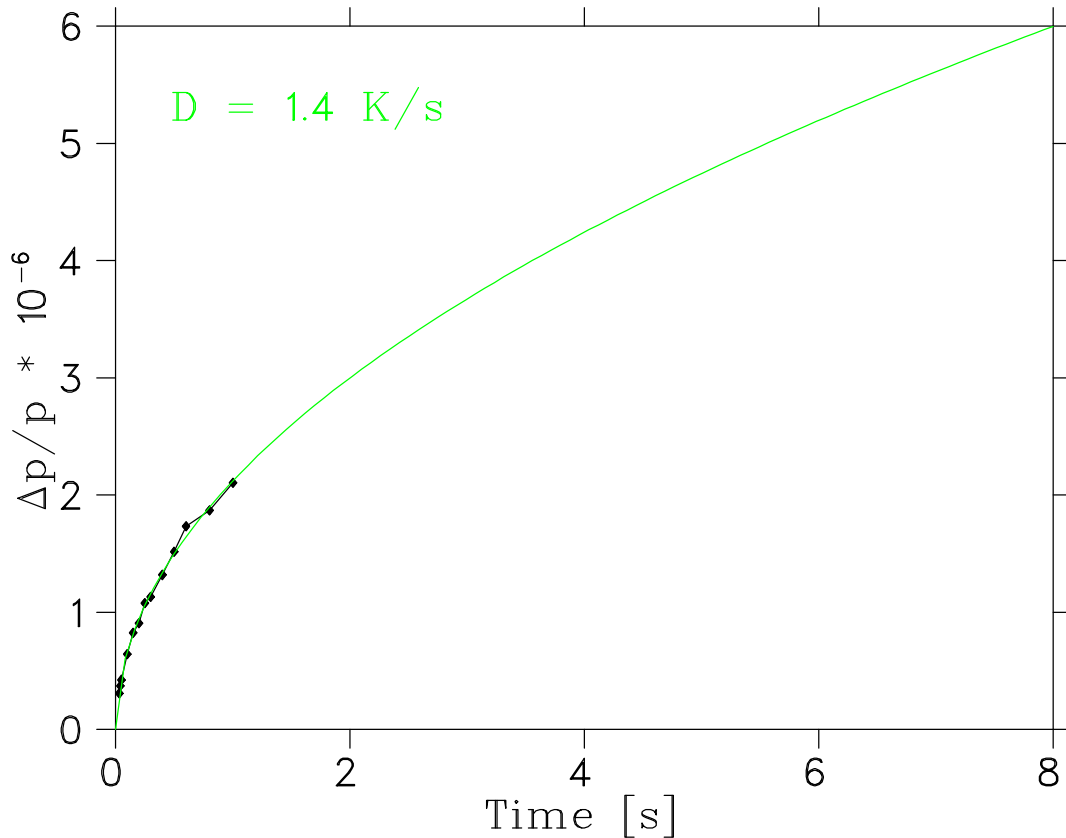


Abbildung 7.1: Aufheizung durch Restgasstreuung ohne Kühlung. Gezeigt ist der zeitliche Verlauf der Impuls-Standardabweichung von Test-Ionen unter dem Einfluß der Restgasstreuung mit der Heizrate 1.4 K/s. Der erwartete Verlauf ist gemäß Gleichung 4.16  $\sim \sqrt{t}^2$ . Die eingezeichneten Punkte sind das Ergebnis von Simulationen, bei denen jeweils 300 Ionentrajektorien ausgewertet wurden.

tischen inneren Bucketbereich kann diese Anpassung zumindest näherungsweise erreicht werden, der genaue Einfluß auf die Ionenbewegung unter diesen Bedingungen muß aber noch untersucht werden.

Falls eine zusätzliche Kompensation der Lichtkräfte erforderlich wäre, der damit einhergehende Aufwand durch zusätzliche Laser aber vermieden werden soll, könnte alternativ vor Beginn der Spektroskopie das RF-Feld abgeschaltet werden. Der Vorteil aufgrund der synchronen Fluoreszenzlichtmessung ginge verloren, dennoch könnte mit einem kalten Strahl gearbeitet werden, wie Abbildung 7.1 zeigt. Die Spektroskopie müßte dann unmittelbar nach Abschalten des RF-Feldes in sehr kurzer Zeit erfolgen. Ausgehend von der oben angegebenen Impulsbreite von  $\frac{\Delta p}{p} \sim 7 \cdot 10^{-7}$  kann aus Abbildung 7.1 entnommen

<sup>2</sup>Gleichung 4.16 ist ohne Kühlung für beliebig lange Zeiten gültig,  $\gamma_c$  ist in diesem Falle 0

werden, daß bei einer Meßzeit von beispielsweise 100 ms nur eine geringe Zunahme der Impulsunschärfe auftritt. Die erforderliche Gesamt-Meßzeit müßte dann durch aufaddieren von Einzelmessungen erreicht werden.

Die störende Driftbewegung der Ionen kann durch eine erhöhte RF-Spannung auf den innersten Bucketbereich begrenzt werden, insbesondere findet dann keine Bewegung zwischen verschiedenen Buckets statt. Dadurch wird aber auch gleichzeitig die Kühlung ineffizient, weil der direkte Einfang von Ionen hoher Impulsabweichung ebenfalls nicht mehr funktioniert. Das Situation im Zentrum der Buckets wird dadurch allerdings nicht grundsätzlich verbessert.

Am TSR werden Experimente mit gebunchten Ionenstrahlen durchgeführt, bei denen ein kastenförmiges Potential anstelle des sinusförmigen Verlaufs des RF-Feldes verwendet wird. Bei einem ebenen Potentialverlauf innerhalb des Buckets verschwindet die Kraft des RF-Feldes und die durch die Laser verursachte Driftbewegung ist vernachlässigbar, weil sich keine permanente Wechselwirkung einstellt. Der stabile Punkt einer solchen Anordnung befindet sich aber in der Randzone des Buckets, weil nach wie vor eine Gegenkraft zur Lichtkraft des Kühllasers erforderlich ist. Auch ist zumindest die räumliche Ionenverteilung im Gleichgewicht aufgrund des asymmetrischen Potentials nicht gaußförmig. Für das Testexperiment zur speziellen Relativitätstheorie könnte dies dennoch eine interessante Alternative sein, weil sich damit gekühlte Ionenstrahlen auch mit einem einfachen Verfahren weitgehend ungestört beobachten lassen. Zudem bleibt der Gewinn im Signal/Rausch-Verhältnis durch die ortsauflösende Messung des Fluoreszenzlichts erhalten.

Wird das Experiment mit einem Strahl geringer Impulsunschärfe durchgeführt, dann kann nach Kapitel 2 eine Unsicherheit bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz des antiparallel eingestrahnten Testlasers von  $\Delta\nu_a = 250$  kHz erreicht werden. Das Experiment untersucht die Gültigkeit von Gleichung 2.2:

$$\nu_a = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_p}$$

$\nu_1$  und  $\nu_2$  sind in Abbildung 2.1 angegeben. Die angegebenen Frequenzen ergeben sich aus  $\nu_{5/2 \rightarrow 7/2}$  [Riis94] bzw. [Rong98] und den entsprechenden Differenzfrequenzen nach [Kowa83], und der nach [Riis94] berechnete Wert wird  $\nu_a = 512667588.2(8)$  MHz, so daß der Fehler der Differenz zwischen Theorie- und Meßwert in diesem Fall 840 kHz beträgt. Für ein genaueres Experiment und zur Überprüfung der Messungen von Riis et al. und Rong et al. ist demnach eine neue, unabhängige und genauere Messung der Ruhfrequenzen erforderlich. Vorausgesetzt ein erneutes Experiment bestätigt die Theorie innerhalb der Fehlergrenzen, dann ergibt sich mit der bisherigen Unsicherheit und einer auf 250 kHz genau gemessenen Anregungsfrequenz  $\nu_a$  als Obergrenze für mögliche Verletzungen der speziellen Relativitätstheorie  $\delta\alpha < 2 \cdot 10^{-7}$ .

# Anhang A

## Kalibrierung des Detektors

Der Fluoreszenzlichtdetektor besteht aus einem Photomultiplier (Hamamatsu R 943-02), einer Abbildungsoptik bestehend aus 5 Linsen, 6 Farbglasfiltern und zwei Interferenzfiltern. Der Aufbau des Systems ist schematisch in Abbildung A gezeigt. Die erste Linse liegt direkt auf dem senkrecht stehenden Fensterflansch in der Experimentierstrecke auf. Das Fenster hat einen freien Durchmesser von  $d_F \approx 146$  mm und die Linse der Brennweite  $f = 241$  mm hat einen Durchmesser von  $d = 145$  mm. Die Linse sammelt das entlang der Ionenbahn emittierte Licht und führt es als paralleles Bündel durch das 1. Interferenzfilter. Das Interferenzfilter der Firma Hugo Anders GmbH hat bei  $548.6 \pm 2$  nm die maximale Transmission von 89% und eine Halbwertsbandbreite von 10.4 nm. Es besteht aus 6 Segmenten des Formats  $50$  mm  $\times$   $70$  mm (Chargen-Nr. 43278/9/94) und deckt insgesamt einen Bereich von  $150$  mm  $\times$   $210$  mm ab. Es folgt ein Linsenstapel bestehend aus 3 Linsen unterschiedlicher Form (Abbildung A, die Formen der Linsen sind qualitativ richtig wiedergegeben) mit einem freien Durchmesser von  $138 \pm 1$  mm. Die fest in einem Halter montierte Linsenordnung war eine Komponente eines kommerziellen Projektionsapparates der Firma Spindler & Hoyer und konnte als Ganzes übernommen werden. Der Fokus dieser Anordnung befindet sich 89 mm nach der (planen) Außenfläche der letzten Linse und entsprechend ist in diesem Abstand die Photokathode des Photomultipliers positioniert. Zur zusätzlichen Fokussierung in Ionenstrahl-Richtung dient eine Zylinderlinse die im Abstand ihrer Brennweite von 41 mm vor dem Photomultiplier angebracht ist.

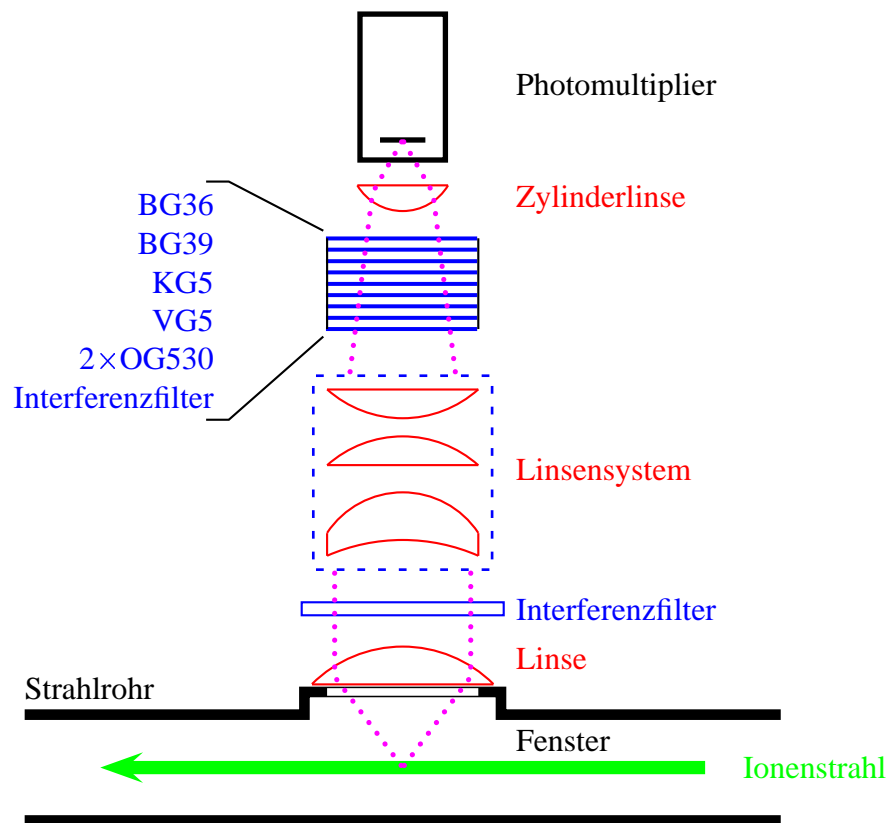


Abbildung A.1: Schematischer Aufbau des Detektors.

Zwischen dem Linsenstapel und der Zylinderlinse befinden sich das zweite Interferenzfilter (rund,  $\varnothing$  50 mm) und die Glasfilter (quadratisch,  $50 \times 50$  mm). Die Filter, 2 OG530 (3mm) und jeweils ein VG5 (1mm), KG5 (2mm), BG36 (1mm) und BG39 (3mm) der Firma Schott sind mit dem Einschlußmittel W15 der Firma Zeiss optisch kontaktiert.

Abbildung A.2 zeigt die gerechnete Transmissionskurve durch alle Komponenten des Detektors gemäß den Hersteller-Spezifikationen unter Berücksichtigung der Quanteneffizienz des Photomultipliers. Die Quanteneffizienz des Photomultipliers ist im Blauen ( $\lambda \sim 300$  nm) maximal bei über 20% und nimmt dann im logarithmischen Bild nahezu linear auf ca. 10% bei 850 nm ab. Darüber erfolgt ein starker Abfall um ca. einem Faktor 10 pro 50 nm. Die experimentell bestimmte Quanteneffizienz beträgt 15.5% bei 548.6 nm.

Abbildung A.2.a zeigt die anfangs verwendete Filterkombination und dazu Meßwerte, die mit Hilfe einer Glühlampe/Monochromator-Lichtquelle aufgenommen wurden. Die

beobachtete maximale Unterdrückung von ca.  $10^4$  entspricht laut Hersteller-Spezifikation (Yobin-Ivon) der spektralen Reinheit des Monochromatorlichts und gibt damit eine Obergrenze an. Es zeigte sich, daß mit dieser Filterkombination speziell durch das Licht des Argonionenlasers die Untergrundzählrate immer noch im Bereich von  $\sim 200$  Hz lag. Als Ursache wurden langwellige Stokes-Photonen vermutet, die in den Absorptionszentren der Glasfilter entstehen und aufgrund der reduzierten Unterdrückung bei Wellenlängen  $\lambda > 650$  nm den Photomultiplier erreichen können. Die Filterkombination wurde daraufhin auf den oben genannten Satz erweitert und der Einbau in der Reihenfolge der Absorptionskanten (kurzwelliger nach langwellig) vorgenommen. Durch diese Reihenfolge wird erreicht, daß das Stokes-Licht der Filter mit der größten Absorptionswahrscheinlichkeit bei den Laserwellenlängen noch durch Filter mit längerwelliger Absorptionskante unterdrückt werden kann.

Das Ergebnis ist in Abbildung A.2.b gezeigt. Die Unterdrückung bei den Laserwellenlängen (514.5 und 584.8 nm) und im längerwelligeren Bereich wurde deutlich verbessert und im Experiment ergab sich damit auch bei eingestrahltm Laserlicht eine Untergrundzählrate im Bereich der Dunkelzählrate von 20 Hz (Temperatur:  $-30^\circ$  C ).

Die räumlichen Abbildungseigenschaften wurden in einem Testaufbau in Mainz ermittelt. Dazu wurde vom Max Planck Institut für Kernphysik (Heidelberg) ein Strahlrohr-Teilstück mit dem entsprechenden Flansch zur Verfügung gestellt, wodurch mit entsprechenden Anbauten in der gleichen Geometrie wie am TSR mit dem Fluoreszenzlichtdetektor gemessen werden konnte. Als Testlichtquelle diente eine gelbe LED die innerhalb des Strahlrohrs positioniert wurde. Die transversale Ionenstrahlage im TSR ist wird mit dem Position Pick Up System bestimmt und kann mit einer Genauigkeit von typisch  $< 1$  mm auf die Strahlrohr-Mitte eingestellt werden. Entsprechend wurde die LED in der Mitte des Strahlrohrs positioniert und zunächst nur längs der Strahlrohrachse verschoben. Zur Kontrolle durchgeführte Messungen bei transversal veränderter Position im Bereich  $(\Delta x, \Delta y) \leq 5$  mm führen im Rahmen der Meßgenauigkeit nicht zu Änderungen der gemessenen Zählrate.



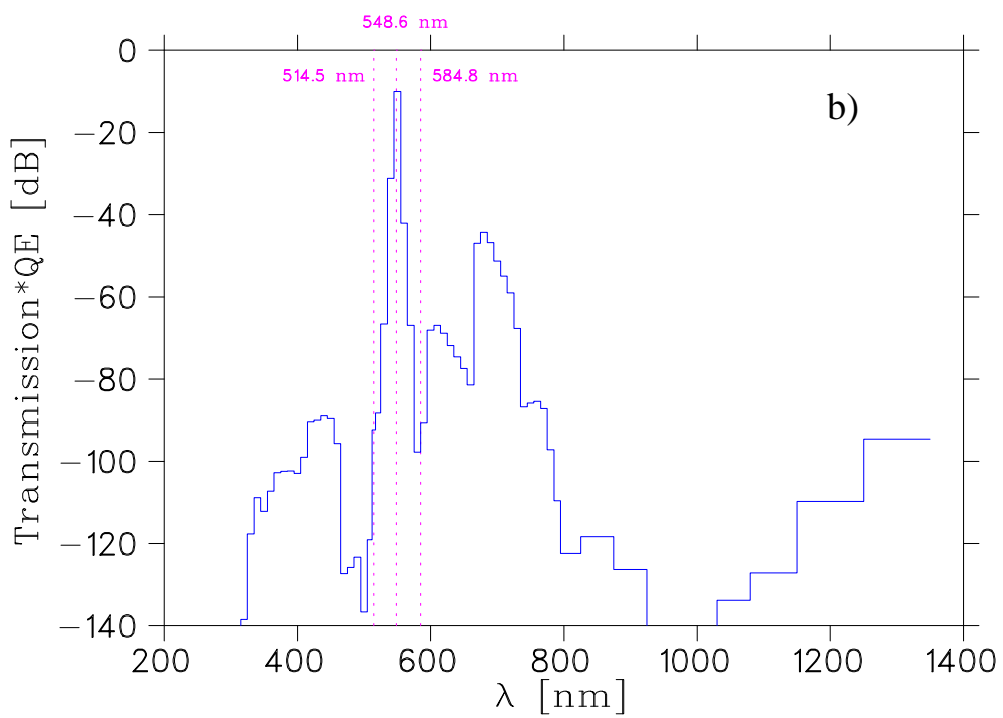
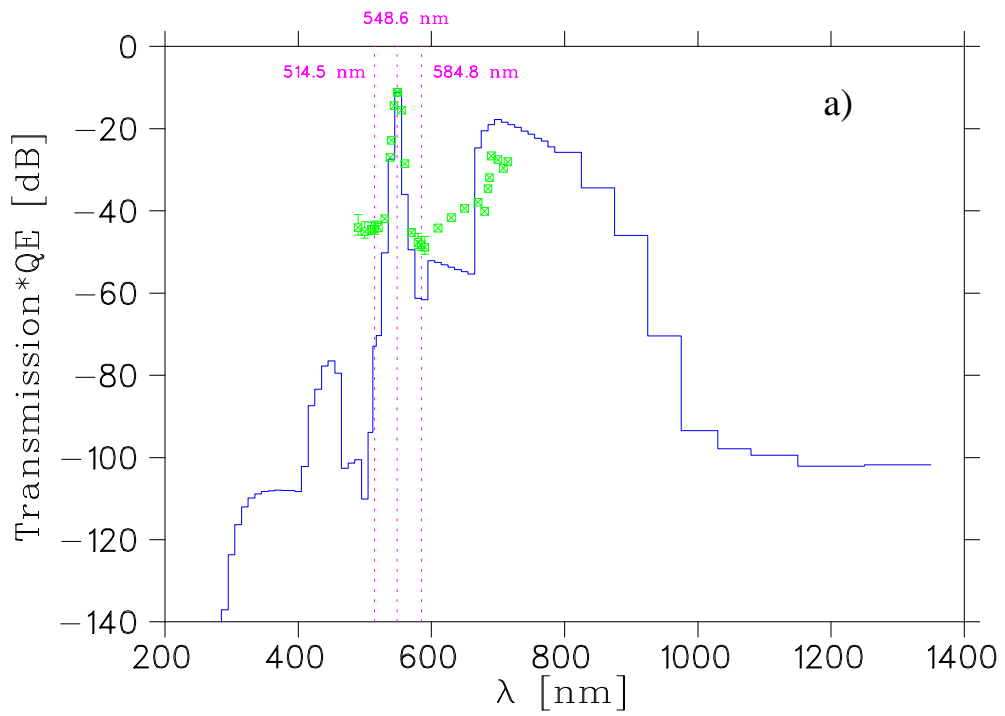


Abbildung A.2: Der spektrale Verlauf der Nachweiseffizienz. Die Beschreibung ist im Text gegeben.

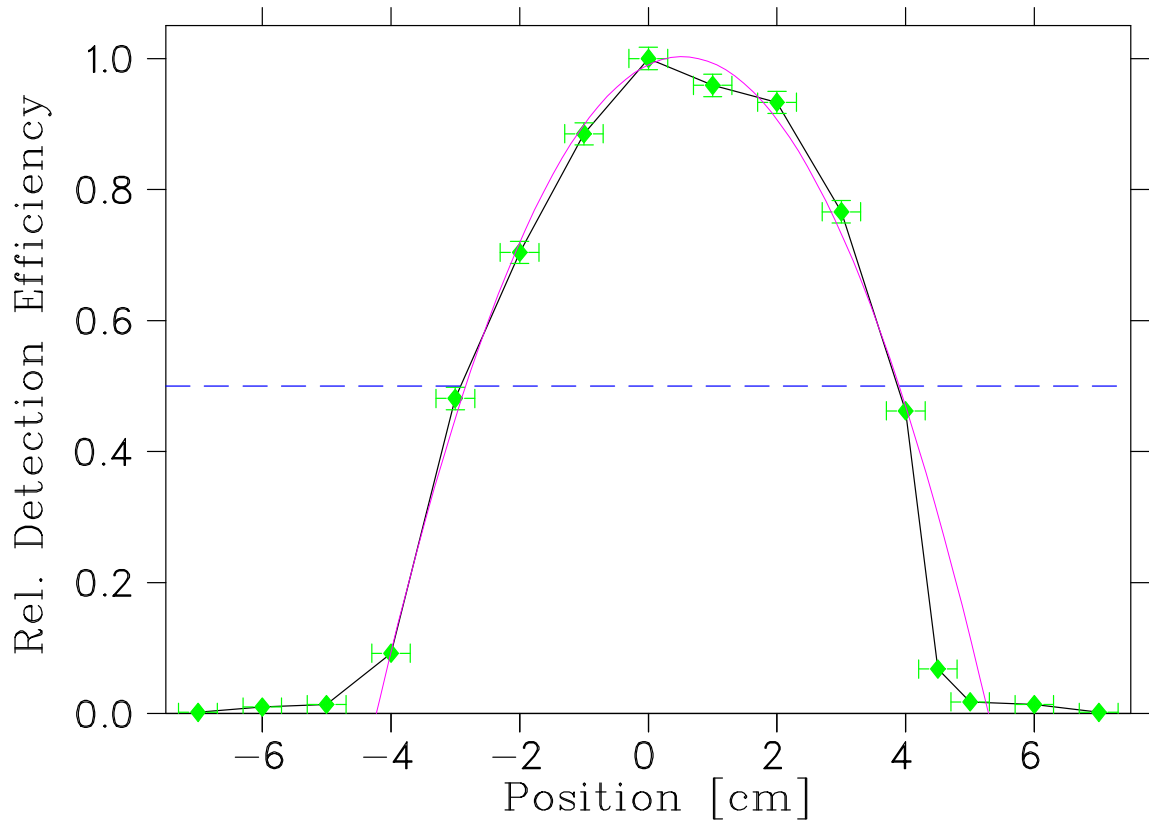


Abbildung A.3: Die räumliche Empfindlichkeit des Fluoreszenzlichtdetektors

Die so beobachteten Zählraten wurden bezüglich der Abstrahlungscharakteristik der LED korrigiert. Dazu wurde der Meßkopf eines optischen Leistungsmeßgerätes (Power Meter), dessen Photodiode einen kreisförmigen Querschnitt aufweist (Coherent Fieldmaster,  $\varnothing 8$  mm), in Abstand und longitudinaler Position bezüglich der LED so positioniert, daß für jede Meßposition die Leistung in dem Raumwinkel gemessen werden konnte, der dem Fenster aus Sicht der LED entspricht. D.h. die Messung wurde praktisch in verkleinertem Maßstab ein zweites Mal durchgeführt, wobei das Power Meter als Detektor fungierte. Die Photomultiplier-Zählrate wurde entsprechend korrigiert und auf 1 normiert, das Ergebnis ist in Abbildung A.3 dargestellt. In der Abbildung ist ein parabolischer Fit der Form  $Y = a_2(x - x_0) + a_0$  eingezeichnet (dünne Linie), der die räumliche Empfindlichkeit des Detektors mit  $a_0 = 1.0 \pm 0.01$ ,  $a_2 = -0.0446 \pm 0.002 \text{ 1/cm}^2$  und  $x_0 = 0.5 \pm 0.1$  cm im wesentlichen gut beschreibt. Aus dem Fit ergibt sich eine Halbwertsbreite von  $\Delta x_{FWHM} = 6.7 \pm 0.2$  cm gegenüber 6.8 cm, die direkt aus der interpolierten Kurve entnommen werden können.

Der Raumwinkel, unter dem der Detektor-Eintritt ( $A = 0.075 \text{ m}^2$ ) von der Sollbahn aus erscheint (Abstand  $h = 0.2465 \text{ m}$ ) ist  $\Omega = \frac{A}{h^2} = 0.290$ . Der mittlere Raumwinkel über ein Wegstück  $2x$  ist

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x (h^2 + s^2)^{-3/2} ds = \frac{A}{h} (h^2 + x^2)^{-1/2}$$

Mit  $\Delta x_{FWHM} = 6.7 \text{ cm}$  ergibt sich als mittlerer Raumwinkel  $\bar{\Omega} = 0.288$ . Unter Berücksichtigung der Transmissionseigenschaften und der Quanteneffizienz des Photomultipliers ergibt sich eine Detektoreffizienz von  $\varepsilon_d = 0.033$ . Die gesamte Nachweiswahrscheinlichkeit des Detektors ergibt sich damit zu

$$\varepsilon = \frac{\bar{\Omega}}{4\pi} \varepsilon_d = 7.3 \cdot 10^{-4} \quad .$$

Ein  ${}^7\text{Li}^+$  Ion in Sättigung fluoresziert mit der mittleren Rate  $\dot{N} = \frac{1}{2\tau} = 11.6 \text{ MHz}$  mit der Lebensdauer des angeregten Zustands  $\tau = 43 \text{ ns}$ . Die Anzahl der auf der Strecke von  $6.7 \text{ cm}$  unter dem Detektor in einer Sekunde abgestrahlten Photonen ist daher  $N = \frac{6.7 \text{ cm}}{0.064c} \cdot 3.45 \cdot 10^3 \cdot \dot{N} = 14200$ . Ein einzelnes Ion wird daher im Detektor mit einer Rate von

$$\dot{N}_d = 14.2 \text{ kHz} \cdot \varepsilon = 10.4 \text{ Hz}$$

gezählt.

# Anhang B

## Auswertung des Fluoreszenzlichts

In Kapitel 6 wurde dargelegt, daß die Breite der Phasenraumverteilung aus der abfallenden Signalflanke bestimmt werden muß, wenn der Testlaser von hohen zu niedrigen Frequenzen durchgestimmt wird. Die entsprechenden Werte wurden durch das Fitten von Gaußfunktionen ermittelt, da eine entsprechende Verteilung erwartet wird. Das Ergebnis beinhaltet aber noch Einflüsse meßtechnischer Natur, deren Korrektur im folgenden beschrieben wird.

### **Räumliche Verteilung**

Die räumliche Empfindlichkeit des Detektors läßt sich nach Anhang A näherungsweise durch eine Parabel mit einer Halbwertsbreite von 6.7 cm beschreiben. Der zeitliche Verlauf des Photomultiplier-Ausgangssignals (im folgenden nur Photomultipliersignal genannt) gibt daher zunächst die Faltung dieser Parabelfunktion mit der Gaußfunktion der Ionenverteilung wieder.

Als weiterer Effekt ist hier noch die Signalverbreiterung aufgrund der Unschärfe in der Transferzeit durch den Photomultiplier zu betrachten. Auf Anfrage wurde von Hamamatsu mitgeteilt, daß dieser „Transit Time Spread“ (TTS) bei voller Beleuchtung der Photokathode bis zu 5 ns beträgt. In der vorliegenden Anordnung wird die lange Achse der Photokathode vollständig beleuchtet, sodaß TTS nicht vernachlässigt werden kann. Bei

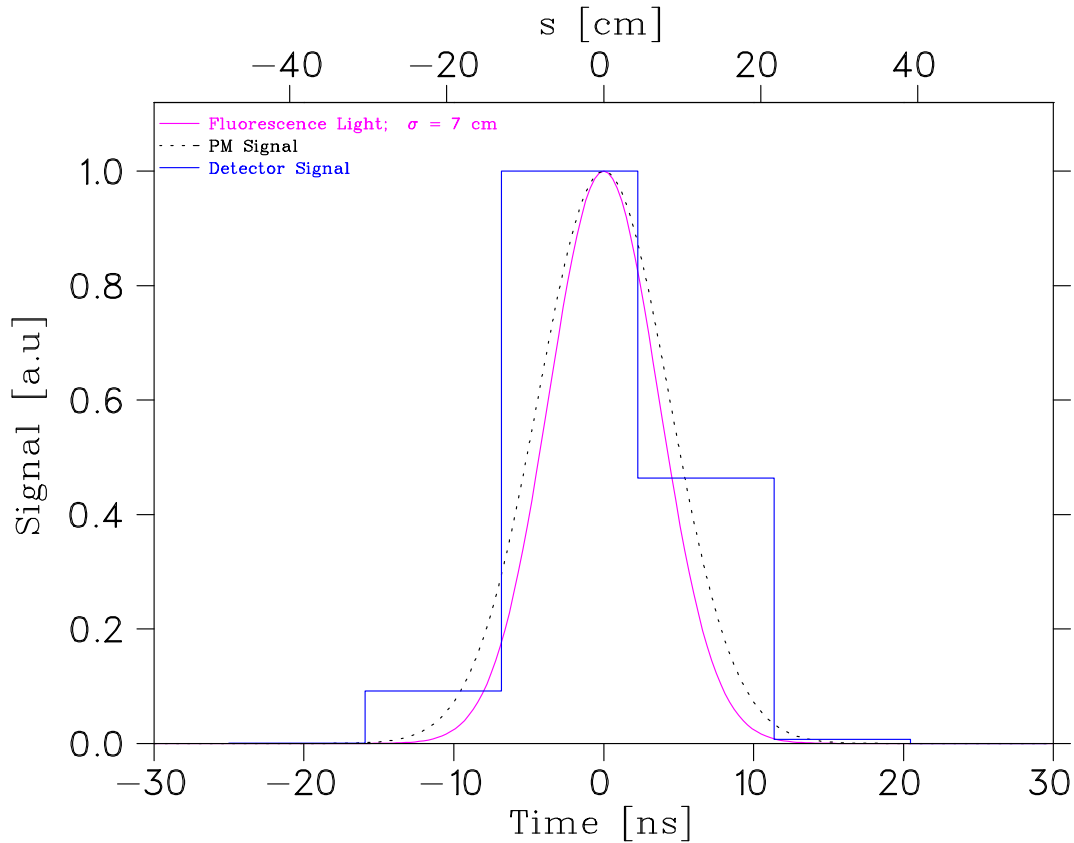


Abbildung B.1: Beispiel für ein Detektorsignal. Das Photomultipliersignal gibt die Faltung aus räumlicher Ionenverteilung und Detektorempfindlichkeit wieder. Die Skalierung der Ordinate an der unteren Achse ist die Signaldauer und an der oberen Achse die entsprechende räumliche Länge. Das resultierende Signal (PM Signal) wird von der Meßelektronik über jeweils 9.1 ns aufintegriert. Diese Scaler-Werte sind hier als Histogramm dargestellt (Detector Signal). Die Phase zwischen dem Radiofrequenzsignal (und damit der Bunchmitte) und der Scaler-Mitte beträgt  $90^\circ/32$  bzw.  $1/4$  Scaler. Die Signalamplituden sind auf 1 normiert.

den in Frage kommenden Bunchlängen weicht die Kurvenform der Faltung von Fluoreszenzlicht und räumlicher Detektor-Empfindlichkeit nur geringfügig von einer Gaußkurve ab. Im folgenden wird TTS näherungsweise durch eine gaußförmige Verteilung beschrieben. Die Berechnung des Photomultipliersignals kann dann vereinfacht werden, indem die resultierende  $1\sigma$ -Breite quadratisch zur  $1\sigma$ -Breite des Fluoreszenzlichts hinzuaddiert wird (Faltung zweier Gaußfunktionen).

Das endgültige Detektorsignal kann numerisch berechnet werden, indem dieses Photomultipliersignal innerhalb von Kanälen der Breite 9.1 ns aufintegriert wird (Integrationszeit der Meßelektronik, Kapitel 5). Ein Beispiel ist in Abbildung B.1 gezeigt. In dem Bei-

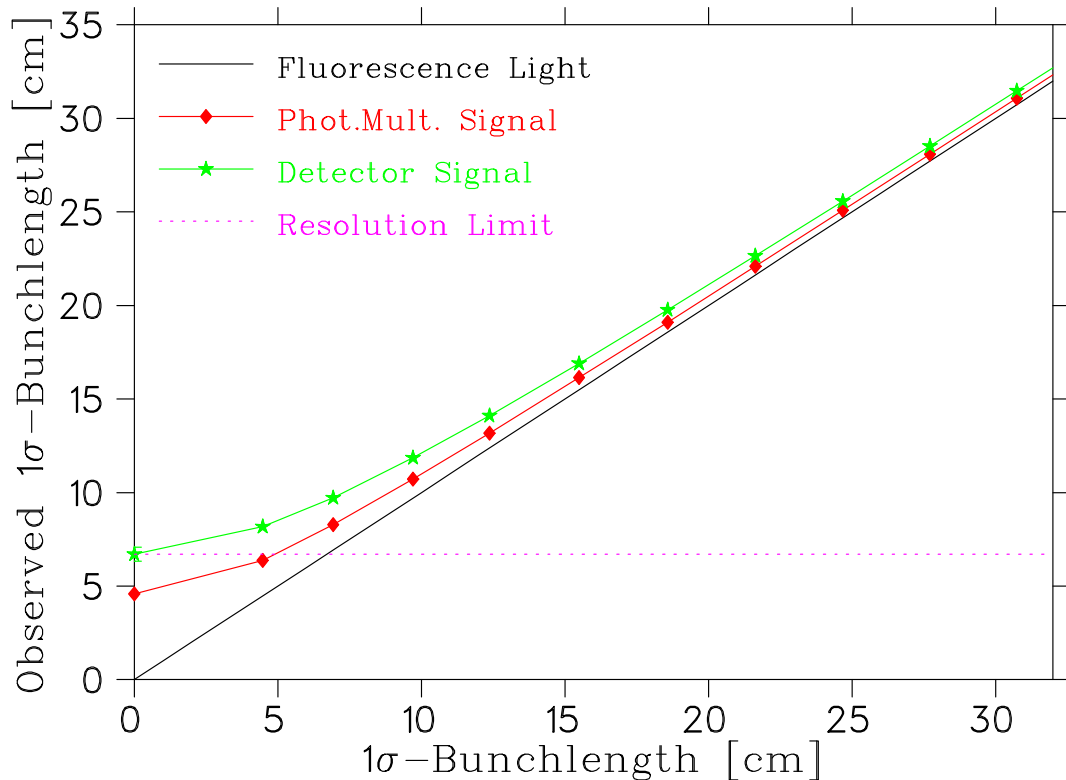


Abbildung B.2: Beobachtete Bunchlänge in Abhängigkeit von der Länge der Ionenverteilung. Die zeitliche Struktur der Signale ist hier bereits in die entsprechenden räumlichen Längen umgerechnet. Das Photomultipliersignal ergibt sich aus der Faltung der räumlichen Empfindlichkeit des Detektors mit der gaußförmigen Ionenverteilung unter Berücksichtigung der Unschärfe in der Photomultiplier-Transferzeit. Daraus wird durch Integration über die Meßzeit der Scaler (9.1 ns) das Detektorsignal berechnet. Anhand der berechneten Kurve wird die Umkehrfunktion interpoliert. Die Ionenverteilung wird durch den Verlauf des Fluoreszenzlichts repräsentiert.

spiel wurde eine relativ kurze  $1\sigma$ -Bunchlänge von 7 cm vorgegeben zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen Fluoreszenz- und Photomultipliersignal. Die Durchflugszeit für  $2\sigma = 14$  cm beträgt nur 7.3 ns, so daß das resultierende Detektorsignal nur eine sehr grobe Näherung der Bunchstruktur darstellt. Diese Rechnungen wurden für verschiedene Bunchlängen durchgeführt, und für jeden Wert wurden 9 verschiedene Phasen (vgl. Abbildung B.1) berechnet. Die Mittelwerte aus diesen Berechnungen sind in Abbildung B.2 gezeigt. Für die kürzeren Bunchlängen ergeben sich erhebliche Verbreiterungen. Obwohl die gaußförmige Signalform für sehr kurze Bunchlängen in dem Detektorsignal nicht mehr erkennbar ist, ist das Ergebnis in dem dargestellten Bereich nur mit geringen Fehlern behaftet. Diese Fehler, bestimmt aus der Mittelwertbildung für verschiedene Phasen, liegen in Abbildung B.2 im Bereich der Symbolgrößen und sind deshalb nicht

dargestellt. Aus der Abbildung läßt sich die Auflösungsgrenze der Datenaufnahme als minimal beobachtete  $1\sigma$ -Bunchlänge entnehmen:  $\sigma_{lim} = 6.7 \text{ cm}$ .<sup>1</sup>

Die in Abbildung B.2 gezeigten Werte wurden als Stützstellen zur Interpolation der Umkehrabbildung verwendet, und mit dieser Kennlinie wurden die aus den Gauß-Fits erhaltenen Bunchlängen korrigiert.

### **Impulsverteilung**

Die aus den Fluoreszenzsignalen zunächst ermittelte Impulsverteilung gibt das Voigt-Profil wieder, die Faltung aus der gesuchten gaußförmigen Impulsverteilung mit der lorentzförmigen Verteilung des Fluoreszenzlichts der Geschwindigkeitsklassen. Auch hier wurde die Umkehrung durch das Erstellen einer Kennlinie realisiert. Dafür wurde wiederum für verschiedene Vorgabewerte der Impulsbreite die durch einen Gaußfit ermittelte Breite des resultierenden Voigt-Profiles bestimmt, Abbildung B.3. Anhand dieser Werte wurde die Umkehrfunktion interpoliert und die direkt aus der Fluoreszenz bestimmten Werte für die Impulsbreite korrigiert.

---

<sup>1</sup>Zum Vergleich: für eine Rechteckverteilung der Breite 17.3 cm (1 Scaler) ist  $\langle \Delta s^2 \rangle^{1/2} = 5.0 \text{ cm}$ .

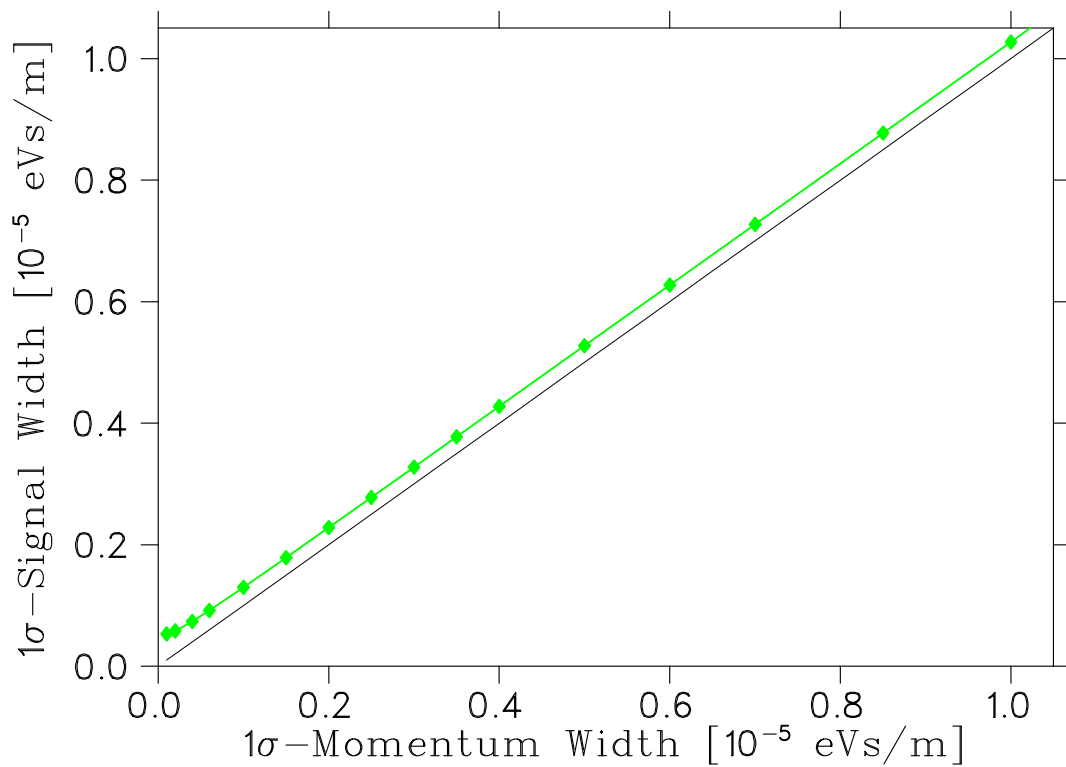


Abbildung B.3: Signalbreite in Abhängigkeit der Impulsbreite. Die Signalbreite wurde durch die numerische Berechnung der Voigtprofile bestimmt. Die Kurve wird verwendet, um durch die numerische Interpolation der Umkehrfunktion aus der gemessenen Signalbreite die zugrundeliegende Impulsbreite zu bestimmen.



# Anhang C

## Ionendrift bei der Zustandseparation

Zur Isomerentrennung im Speicherring wird die Dispersion ausgenutzt, die zu einem horizontalen Strahlversatz führt (Abschnitt 5.1), wenn die Strahlenergie geändert wird. Das Kathodenpotential des Elektronenkühlers wird dafür sprunghaft auf einen niedrigeren Wert gesetzt, sodaß die Ionen eine mittlere verzögernde Kraft erfahren, die sich gemäß Gleichung 4.2 berechnen läßt. Die Näherung  $v_i \gg \Delta_e$  ist gerechtfertigt, da nach Pastuszka et al. [Past95] die Geschwindigkeitsbreite des Elektronenstrahls nach der adiabatischen Expansion

$$kT_{\parallel} \approx 0.5 \text{ meV} \quad \Delta_{\parallel} \approx 1 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

beträgt, und die Reduzierung des Kathodenpotentials von 1 V zu einer Geschwindigkeitsänderung von  $8.89 \cdot 10^3$  m/s führt. Ferner ist nach den in Ref. [Past95] gezeigten Messungen die Kühlkraft für  $v_i \geq 5 \cdot 10^4$  m/s in guter Übereinstimmung mit der nichtmagnetischen Komponente  $F_{Ecool}^{nm}$ , und als Stützwert  $f_0$  für die Beschleunigung der  ${}^7\text{Li}^+$ -Ionen gemäß

$$a = \dot{v}_i = \frac{1}{m} F_{Ecool}(v_i) = -\frac{f_0}{v_i^2} \quad (\text{C.1})$$

ergibt sich  $f_0 = 9.2 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^4}$ . Diese Differentialgleichung läßt sich in der Form

$$-f_0 = v_i^2 \dot{v}_i = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} v_i^3$$

schreiben und die Lösung ist mit  $v_i(t=0) = v_{i0}$

$$v_i(t) = (v_{i0}^3 - 3f_0 t)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{C.2})$$

Die Zeit bis zum Erreichen der Geschwindigkeit  $v_{is}$ , bei der die Ionen mit der Blende in Kontakt kommen (Abschnitt 5.1), ist

$$t_{sep} = \frac{v_{i0}^3 - v_{is}^3}{3f_0} \quad . \quad (C.3)$$

Dieser Kontakt mit der Blende und damit die Abtrennung der Ionen aus dem Speicherring erfolgt bei einer Energieverschiebung von 151 keV, wenn der Strahl bei der Sollenergie so justiert ist, daß er am Ort der Blende ( $\varnothing 18$  mm) auf der Sollbahn verläuft. Diese Ringeinstellung ist mit Hilfe der Position Pick Up - Messungen mit einer Genauigkeit von  $\pm 2$  mm möglich. Die entsprechende Geschwindigkeitsverschiebung ist  $\Delta v = 1.065 \cdot 10^5$ , m/s was eine Verringerung des Kathodenpotentials um mindestens 12.0 V bedeutet. Für einen 23 V „Sprung“ des Kathodenpotentials ist  $v_{i0} = 2.065 \cdot 10^5$  m/s und damit  $v_{is} = 1 \cdot 10^5$  m/s. Diese Werte können im Rahmen der gemachten Näherungen betrachtet werden und resultieren gemäß Gleichung C.3 in einer Separationszeit von  $t_{sep} = 28$ s. Diese Zeitspanne ist knapp das Doppelte der Speicher-Halbwertszeit (ca. 18s), sodaß für den Selektionsschritt im Experiment die in Abschnitt 5.1 beschriebene Methode eingesetzt wurde.

Damit der „Spannungs-Sprung“ des Kathodenpotentials realisiert werden konnte war der Einsatz eines zusätzlichen Spannungsgenerators erforderlich. Der HV-Generator der Kathode ist zur Spannungsstabilisierung mit einer hohen Kapazität ausgestattet, zudem ist der mögliche Strom und damit die Geschwindigkeit von Spannungsänderungen gering. Der zusätzliche Spannungsgenerator mit einer Ausgangsspannung von maximal 29 V wurde dem HV-Generator nachgeschaltet, wodurch der Einbau auf der HV-Plattform des Elektronenkühlers erforderlich wurde. Die Ansteuerung erfolgte galvanisch entkoppelt über einen „Optolink“. Dieses System<sup>1</sup> besteht im Prinzip aus einem Paar mittels Lichtleiter verbundener Optokoppler. Auf diese Weise war es möglich, eine zusätzliche Spannungsänderung mit Schaltzeiten  $< 200$  ms vorzunehmen.

Die Drift der  ${}^7\text{Li}^+$  Ionen eines ungekühlten, kontinuierlichen Strahls nach erfolgtem Spannungssprung wurde durch die Anregung mit dem entgegen der Ionenbewegung eingestrahlt Farbstofflaser bei einer festen Frequenz beobachtet. Mit dem kontinuierlich

<sup>1</sup>„Lichtleitertransceiver“ der Firma Dr. Wituschek, Digitale Meßelektronik (DmE)

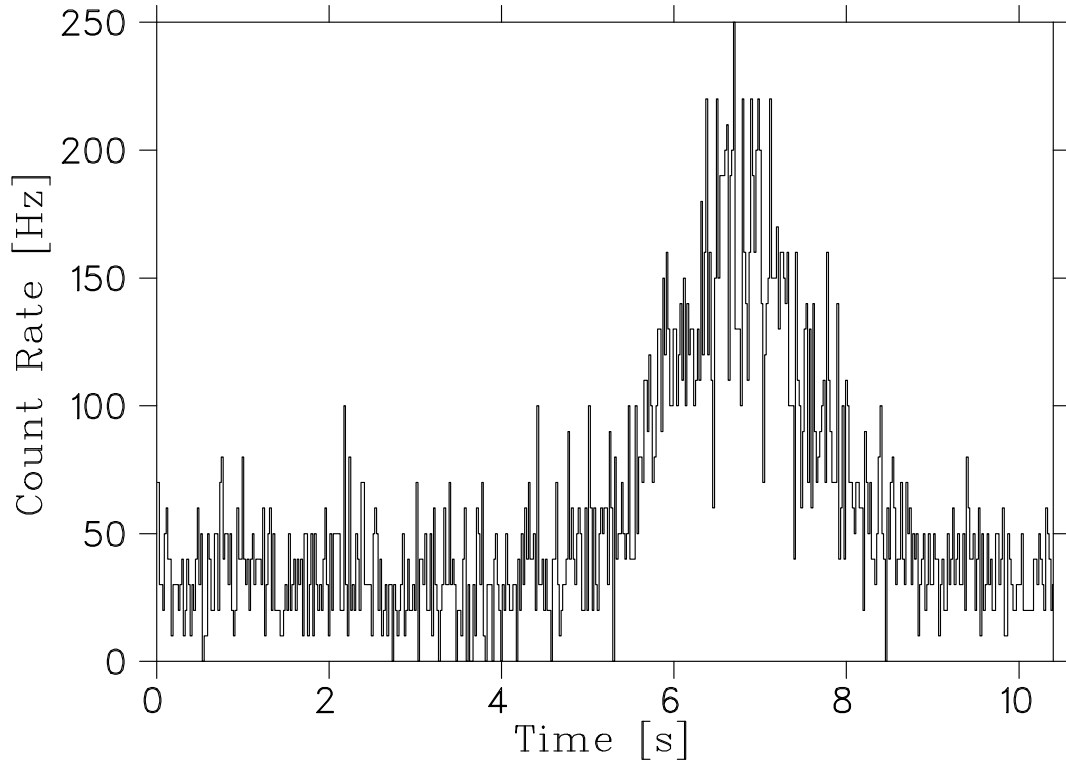


Abbildung C.1: Fluoreszenzlichtmessung bei der Ionendrift. Die Messung zeigt den zeitlichen Verlauf der Detektor-Zählrate. Das Kathodenpotential wurde mit Beginn der Messung um 24.7 V entsprechend einer Geschwindigkeitsdifferenz  $v_{i0} = 2.2 \cdot 10^5$  m/s reduziert. Der Farbstofflaser wird auf einer festen Frequenz eingestrahlt die einer Geschwindigkeitsdifferenz von  $v_r = 2.108 \cdot 10^5$  m/s entspricht.

ausgelesenen Detektor wird dabei zunächst die Dunkelzählrate gemessen. Die Driftzeit bis zum Auftreten der Resonanz ist abhängig von der Verstimmung des Farbstofflasers in Bezug auf die Anfangsgeschwindigkeit der Ionen. Es wird dann ein kurzes Signal beobachtet, wenn die Ionen bei der Drift den resonanten Impuls des Farbstofflaser passieren. Zwei Beispiele für diesen *Doppler Scan* sind in den Abbildungen C.1 und C.2 gezeigt. Das Kathodenpotential wurde bei der ersten Messung sprunghaft um 24.7 V ( $\Rightarrow v_{i0}^{(1)} = 2.2 \cdot 10^5$  m/s) gestellt, bei der zweiten Messung dagegen nur um 8.7 V ( $\Rightarrow v_{i0}^{(2)} = 7.8 \cdot 10^4$  m/s). Bei einer Testmessung mit dem Farbstofflaser wurde die volle Halbwertsbreite der ursprünglichen Verteilung zu 1.76 GHz bestimmt. Nach der Dopplerformel gilt für kleine Änderungen der Geschwindigkeit  $\Delta v$

$$\Delta v = \frac{\gamma^2}{\lambda} \Delta v \quad .$$

Mit  $\lambda = 548.6$  nm und  $\gamma = 1.002$  war demnach anfängliche Breite der Geschwindigkeits-

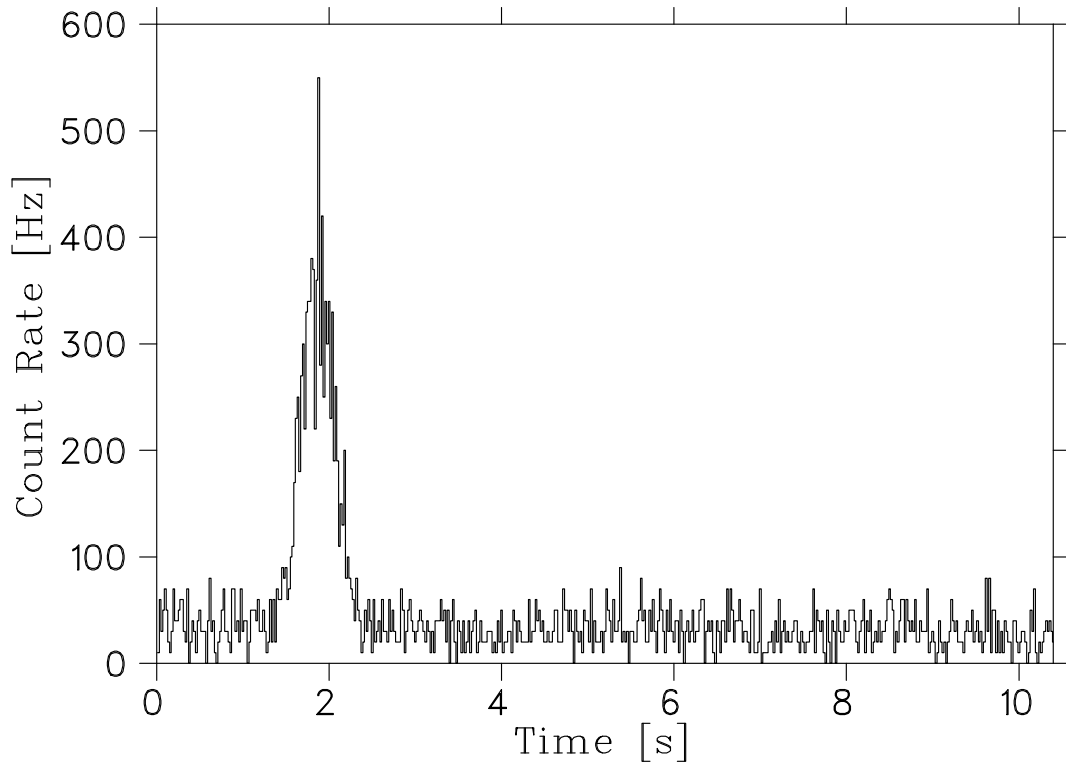


Abbildung C.2: Fluoreszenzlichtmessung bei der Ionendrift. Die Messung zeigt den zeitlichen Verlauf der Detektor-Zählrate. Das Kathodenpotential wurde mit Beginn der Messung um 8.7 V entsprechend einer Geschwindigkeitsdifferenz  $v_{i0} = 7.8 \cdot 10^4$  m/s reduziert. Der Farbstofflaser wird auf einer festen Frequenz eingestrahlt die einer Geschwindigkeitsdifferenz von  $v_r = 6.88 \cdot 10^4$  m/s entspricht.

verteilung 962 m/s. Der Offset wurde dann auf 16.9 GHz in Bezug auf den Schwerpunkt der Verteilung blauverstimmt, sodaß die Differenz zur resonanten Ionengeschwindigkeit 9230 m/s betragen hat. Die resonanten Ionengeschwindigkeiten in Bezug auf die neue Sollgeschwindigkeit des Elektronenkühlers nach dem Sprung ist in der ersten Messung  $v_r^{(1)} = 2.108 \cdot 10^5$  m/s und in der zweiten  $v_r^{(2)} = 6.88 \cdot 10^4$  m/s. Mit Gleichung C.3 sollte also die Driftzeit bis zur resonanten Geschwindigkeit  $t_d^{(1)} = 4.6$  s und  $t_d^{(2)} = 0.54$  s betragen. Die erwartete Differenz von ca. 4 s ist mit einer ca. 20-prozentigen Abweichung gemessen worden, wie aus den Abbildungen ersichtlich wird. Das um etwa 1.5 s verzögerte auftreten der Fluoreszenz in beiden Fällen deutet auf eine noch zu geringe Leistung des verwendeten Spannungsgenerators hin und müßte gegebenenfalls in weiteren Experimenten genauer untersucht werden.

Insgesamt läßt sich jedoch feststellen, daß die Ionenbewegung bei der Zustandseparati-

on mit dem Elektronenkühler verstanden ist und als zuverlässiges Verfahren eingesetzt werden kann.

# Anhang D

## Die Fokker-Planck Gleichung

Zufallsvariablen (stochastische Variablen) zeichnen sich dadurch aus, daß ihr Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht genau vorhersagbar ist sondern nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden können. Der Darstellung von Risiken [Risk89] folgend, sollen hier kurz die wichtigsten Begriffe erläutert und die Fokker-Planck Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable angegeben werden.

### Fokker-Planck-Gleichung für eine Variable

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable  $\xi$  zur Zeit  $t$  einen Wert innerhalb von  $[x, x + dx]$  annimmt ist  $W(x, t)dx$ , wobei  $W(x, t)$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable  $\xi$  ist: für eine beliebige Funktion  $F(\xi)$  von  $\xi$  ist der Erwartungswert gegeben durch

$$\langle F(\xi(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) F(x, t) dx \quad .$$

Wie in der Literatur üblich, wird im folgenden zwischen der Zufallsvariablen  $\xi$  und ihren Werten  $x$  nicht mehr unterschieden und die Zufallsvariable auch als  $x$  bezeichnet, sofern sie Unterscheidung nicht unbedingt erforderlich ist. Weiterhin ist die Zufallsvariable  $x$  durch die Übergangswahrscheinlichkeit (bedingte Wahrscheinlichkeit)  $\mathcal{P}(x, t + \tau | x', t)$  charakterisiert.  $\mathcal{P}$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß  $\xi$  zur Zeit  $t + \tau$  den Wert  $x$  annimmt, wenn zur Zeit  $t$  der Wert  $x'$  war.

Ein stochastischer Prozeß, für den  $\mathcal{P}$  in dieser Form dargestellt werden kann, also die Übergangswahrscheinlichkeit unabhängig von der Geschichte (frühere Werte) der Zufallsvariable ist, heißt ein Markov Prozeß. Im allgemeinen Fall dagegen hängt  $\mathcal{P}$  nicht nur vom Wert  $x$  am Zeitpunkt  $t$  ab, sondern auch von allen früheren Zuständen  $\{(x_i, t_i), i = 1, 2, \dots\}$ . Die folgende Diskussion soll aber auf Markov-Prozesse beschränkt bleiben. Im vorliegenden Fall werden die Fluktuationen der Zufallsvariablen (d.h. der Meßgrößen) durch Stöße verursacht. Eine Beschreibung als Markov Prozeß bedeutet hier eine Einschränkung der Zeitskala, auf der Aussagen gemacht werden können. Die Stoßzeiten  $\Delta t_{\text{Stoß}}$  müssen vernachlässigbar kurz gegenüber den betrachteten Zeitdifferenzen  $\tau$  sein und innerhalb von  $\tau$  müssen hinreichend viele Stöße erfolgen, sodaß die Stoßwahrscheinlichkeit (näherungsweise) unabhängig von der Zeit seit dem letzten Stoß ist.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W$  und die Übergangswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}$  hängen natürlich eng zusammen:

$$W(x, t + \tau) = \int \mathcal{P}(x, t + \tau | x', t) W(x', t) dx' \quad (\text{D.1})$$

Die charakteristische Funktion  $C(u, x', t, \tau)$  einer Zufallsvariable ist die Fouriertransformierte der Übergangswahrscheinlichkeit,

$$C(u, x', t, \tau) = \int e^{iu(x-x')} \mathcal{P}(x, t + \tau | x', t) dx \quad (\text{D.2})$$

und damit

$$\mathcal{P}(x, t + \tau | x', t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x-x')} C(u, x', t, \tau) du \quad (\text{D.3})$$

Die Momente sind definiert durch

$$M_n(x', t, \tau) = \int (x(t + \tau) - x(t))^n |_{x(t)=x'} \mathcal{P}(x, t + \tau | x', t) dx \quad (\text{D.4})$$

Nach Gleichung D.2 und D.4 ergibt sich die charakteristische Funktion aus den Momenten durch

$$C(u, x', t, \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} M_n(x', t, \tau) \quad (\text{D.5})$$

Mit Hilfe der Darstellung für die  $\delta$ -Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \int (iu)^n e^{-iu(x-x')} du = \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x - x') \quad (\text{D.6})$$

und Gleichung D.5 ergibt sich aus Gleichung D.3

$$\mathcal{P}(x, t + \tau | x', t) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x, t + \tau) \right] \delta(x - x') \quad (\text{D.7})$$

als Operator-Darstellung für die Übergangswahrscheinlichkeit. Damit und unter Verwendung von Gleichung D.1 ergibt sich für die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung am Punkt (Wert)  $x$

$$\begin{aligned} W(x, t + \tau) - W(x, t) &= \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \tau + O(\tau^2) \\ &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x, t + \tau) \right] W(x, t) \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Werden die Momente für kleine Zeiten  $\tau$  entwickelt gemäß

$$\frac{1}{n!} M_n(x, t + \tau) = D^{(n)}(x, t) \tau + \dots \quad (\text{D.9})$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L_{KM} W = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x, t) \right] W(x, t) \quad . \quad (\text{D.10})$$

$L_{KM}$  ist der Kramers-Moyal Operator, und für die (Kramer-Moyal-) Koeffizienten  $D^{(n)}$  gilt nach Gleichung D.9

$$D^{(n)}(x, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [\xi(t + \tau) - x]^n \rangle \Big|_{\xi(t)=x} \quad (\text{D.11})$$

Für einen Markov-Prozeß sind die Koeffizienten  $D^{(n)} = 0$  für  $n \geq 3$  [Risk89]. In diesem Fall nimmt Gleichung D.10 die folgende Form an:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L_{FP} W = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \right] W(x, t) \quad . \quad (\text{D.12})$$

Gleichung D.12 ist die *Fokker-Planck Gleichung* und  $L_{FP}$  heißt der Fokker-Planck-Operator.

Die Entwicklung einer Zufallsvariable, die zum Zeitpunkt  $t'$  den genauen Wert  $x'$  annimmt, läßt sich damit leicht angeben. Mit dieser Anfangsbedingung ist  $W(x, t)$  identisch mit  $\mathcal{P}(x, t | x', t')$ :

$$W(x, t') = \delta(x - x') = \mathcal{P}(x, t' | x', t') \quad . \quad (\text{D.13})$$



Die formale Lösung dieses Problems für kleine Zeiten  $\tau = t - t'$  ist näherungsweise gegeben durch

$$\mathcal{P}(x, t | x', t') = e^{L_{FP}(x, t')(t-t')} \delta(x - x') \quad . \quad (\text{D.14})$$

Ist  $L_{FP}$  zeitunabhängig, dann ist Gleichung D.14 für alle Zeiten richtig. Bei Beschränkung auf kleine Zeiten  $\tau$  läßt sich dieser Ausdruck durch Entwicklung bis zur ersten Ordnung weiter vereinfachen zu

$$\mathcal{P}(x, t | x', t') = [1 + L_{FP}(x, t) \cdot \tau] \delta(x - x') \quad . \quad (\text{D.15})$$

Unter Verwendung der obigen Darstellung der Delta-Funktion (Gleichung D.6) ergibt sich dann nach Ausführung der Differentiation für kleine Zeiten  $\tau$

$$\mathcal{P}(x, t + \tau | x', t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^{(2)}(x', t)\tau}} \exp\left(-\frac{[x - x' - D^{(1)}(x', t)\tau]^2}{4D^{(2)}(x', t)\tau}\right) \quad (\text{D.16})$$

Es ergeben sich in diesem Fall also gaußförmige Verteilungen, deren Varianz mit der Zeit  $\tau$  proportional zu  $D^{(2)}$  zunimmt:

$$\sigma_p^2 = D^{(2)} \cdot \tau \quad (\text{D.17})$$

Durch Vergleich mit den Ausführungen im Abschnitt 4.2.1 (Gleichung 4.16) sieht man, daß der Koeffizient  $D^{(2)}$  der Diffusionskoeffizient ist. Der Koeffizient  $D^{(1)}$  ist der Driftkoeffizient, da für  $D^{(1)} \neq 0$  der Erwartungswert  $\langle x \rangle$  eine lineare Bewegung ausführt:  $\langle x(\tau) \rangle = x' + D^{(1)} \cdot \tau$ .

## Fokker-Plack-Gleichung für N Variablen

Analoge Überlegungen zu dem Fall einer Variablen führen auf die Fokker-Plack-Gleichung für  $N$  Variable:

$$\frac{\partial W(\vec{x}, t)}{\partial t} = L_{FP}(\vec{x})W(\vec{x}, t) = \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{\partial}{\partial x_i} D_i(\vec{x}, t) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(\vec{x}, t) \right] W(\vec{x}, t) \quad (\text{D.18})$$

Die Kramer-Moyal-Koeffizienten sind (Verallgemeinerung von Gleichung D.11)

$$D_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [\xi_{i_1}(t + \tau) - x_{i_1}] \dots [\xi_{i_n}(t + \tau) - x_{i_n}] \rangle \Big|_{\vec{\xi}(t) = \vec{x}} \quad (\text{D.19})$$

wobei die für die Koeffizienten der 1. und 2. Ordnung wie in Gleichung D.18 auch  $D_i^{(1)} = D_i$ ,  $D_{ij}^{(2)} = D_{ij}$  geschrieben wird. Wiederum gilt für einen Markov-Prozeß:  $D_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} = 0$  für

$n \geq 3$ . Die Anfangsbedingung (Verallgemeinerung von Gleichung D.13)

$$W(\vec{x}, t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \mathcal{P}(\vec{x}, t' | \vec{x}', t') \quad .$$

führt dann analog auf die Verteilungsfunktion für kleine Zeiten  $\tau$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{x}, t + \tau | \vec{x}', t) &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^N \sqrt{\text{Det}(D^{(2)}(\vec{x}', t))}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{4\tau} \sum_{j,k=1}^N [D^{-1}(\vec{x}', t)]_{jk} [x_j - x'_j - D_j(\vec{x}', t)\tau] [x_k - x'_k - D_k(\vec{x}', t)\tau]\right) \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Wie direkt zu sehen ist, setzt diese formale Lösung voraus, daß die Diffusionsmatrix regulär ist, sodaß die Inverse der Diffusionsmatrix  $[D^{-1}]_{ij} = D^{(2)-1}$  existiert.

## Langevin-Gleichung

In den bisherigen Ausführungen war die stochastische Variable in abstrakter Weise durch die Drift- und Diffusionskoeffizienten bestimmt. Die zugrundeliegende Physik wird dabei durch eine stochastische Differentialgleichung, die Langevin-Gleichung bestimmt. Diese Differentialgleichung (Gleichungssystem für mehrere Variablen) soll im folgenden betrachtet werden um die Drift- und Diffusionskoeffizienten zu gewinnen, die zur Aufstellung der Fokker-Planck-Gleichung benötigt werden.

Die allgemeine Form der Langevin-Gleichung für  $N$  Variablen  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = \vec{\xi}$  ist ein Gleichungssystem:

$$\ddot{\xi}_i = h_i(\vec{\xi}, t) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(\vec{\xi}, t) \Gamma_j(t) \quad . \quad (\text{D.21})$$

Darin beschreibt  $h_i(\vec{\xi}, t)$  die deterministische Abhängigkeit der zeitlichen Änderung von  $\xi_i$  und  $g_{ij}(\vec{\xi}, t)$  die Stärke der fluktuierenden Kräfte (*Langevinkräfte*)  $\Gamma_i(t)$  sowie deren Ankopplung. Jedes  $\Gamma_i(t)$  hat einen verschwindenden Mittelwert und für einen Markov-Prozeß (keine „Erinnerung“ des Systems an frühere Zeiten, vgl. Abschnitt 4.2.1) eine deltaförmige Korrelationsfunktion (auf 2 „normiert“):

$$\langle \Gamma_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} \delta(t - t') \quad (\text{D.22})$$

Unter Verwendung der formalen Lösung der Gleichungen D.21

$$\xi_i(t + \tau) - x_i = \int_t^{t+\tau} [h_i(\vec{\xi}(t'), t') + \sum_{j=1}^N g_{ij}(\vec{\xi}(t'), t') \Gamma_j(t')] dt' \quad (\text{D.23})$$

und Gleichung D.11 für die Koeffizienten  $D_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}$  ergibt sich für  $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} D_i^{(1)}(\vec{x}, t) = D_i(\vec{x}, t) &= h_i(\vec{x}, t) + \sum_{k,j=1}^N g_{kj}(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\vec{x}, t) \\ D_{ij}^{(2)}(\vec{x}, t) = D_{ij}(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^N g_{ik}(\vec{x}, t) g_{jk}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$D_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(\vec{x}, t) = 0; \quad n \geq 3$$

wobei die dritte Gleichung von D.24 in Übereinstimmung mit dem vorherigen Abschnitt die Markov-Eigenschaft widerspiegelt.

Die Bedeutung der Koeffizienten wurde bereits beschrieben, interessant ist aber noch die Abhängigkeit des Driftkoeffizienten  $D^{(1)}$  von den Funktionen  $g$  und  $h$ . Die Funktionen  $h$  geben die deterministischen Differentialgleichungen wieder, und bestimmen bei Abwesenheit von fluktuierenden Störungen ( $g = 0$ ) die Drift der betrachteten Variablen (für kleine Zeiten). Für  $g \neq 0$  kommt es zu einer zusätzlichen Drift-Bewegung, falls die Funktionen  $g$  ortsveränderlich sind. Diese durch die Störung verursachte Bewegung heißt *noise induced drift*. Die Diffusionskoeffizienten  $D_{ij}$  hängen erwartungsgemäß nur von der Stärke der fluktuierenden Kräfte  $\sum_k g_{ik} g_{jk}$  ab.

## Ionenbewegung im RF-Bucket

Für den Fall kleiner Synchrotronamplituden und ausreichend großer Laserverstimmung stellt ein Ion im RF-Bucket einen gedämpften harmonischen Oszillator dar, der zusätzlich zu RF-Potential und Dämpfung eine fluktuierende Kraft  $\Gamma(t)$  erfährt (Restgasstreuung). Die folgenden Ausführungen haben zum Ziel, die stationäre Verteilungsfunktion der gekühlten Ionen im Zentrum des Buckets zu gewinnen. Die Standardabweichung  $(\langle \xi^2 \rangle)^{1/2}$  kann daher als klein gegenüber der Bucketlänge angesehen werden und somit das RF-Potential in der harmonischen Näherung verwendet werden. Entsprechend kann die Kühlkraft des Lasers ( $\alpha(v)$ ) bei ausreichender Laserverstimmung als konstant im Be-

reich ( $\langle \dot{\xi}^2 \rangle$ )<sup>1/2</sup> angenommen werden. Die entsprechenden Langevin-Gleichungen sind linear und lauten:

$$\begin{aligned} \dot{v} + \frac{\alpha}{m}v + \Omega_0^2 x &= \frac{\sqrt{q}}{m}\Gamma(t) \\ v - \dot{x} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{D.25}$$

Das homogene Gleichungssystem entspricht den deterministischen Differentialgleichungen eines gedämpften harmonischen Oszillators, geschrieben in zeitlichen Ableitungen erster Ordnung. Beim Übergang zu den inhomogenen Gleichungen nimmt das System den stochastischen Charakter an. Die Gleichungen sind ein Beispiel für einen Ornstein-Uhlenbeck Prozeß, bei dem die homogenen Gleichungen linear sind und die Funktionen  $g_{ij}$  nicht von den Variablen  $\xi_i$  abhängen.

Die wirksame Stärke der Kopplung  $q$  kann durch Energiebetrachtungen festgelegt werden. Hierzu wird am einfachsten die Situation ohne Potential betrachtet, d.h. die freie Brown'sche Bewegung gemäß

$$\dot{v}_B + (\alpha/m)v_B = 0 \quad .$$

Mit Hilfe der Lösung

$$v_B(t) = \int_0^t e^{-\alpha/m(t-t')} \frac{\sqrt{q}}{m}\Gamma(t') dt'$$

kann der Erwartungswert  $\langle v_B(t)^2 \rangle$  berechnet werden [Risk89]:  $\langle v_B(t)^2 \rangle = q/(m\alpha)$ .

Durch Vergleich mit dem Erwartungswert für die Energie findet man schließlich

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}m \langle v_B(t)^2 \rangle \Rightarrow q = \alpha kT \tag{D.26}$$

und damit lauten die Gleichungen D.25

$$\begin{aligned} \dot{v} + \frac{\alpha}{m}v + \Omega_0^2 x &= \frac{\sqrt{\alpha kT}}{m}\Gamma(t) \\ v - \dot{x} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{D.27}$$

Die Temperatur  $T$  ist die Gleichgewichtstemperatur, die sich nach der Einstein-Gleichung (Abschnitt 4.2.1) aus dem Verhältnis von Heizrate zu Kühlrate ergibt.

Die Langevingleichungen D.25 bzw. D.27 sind gekoppelte Differentialgleichungen für

die stochastischen Variablen  $x$  und  $v$ . Die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung für zwei Variable lautet nach Gleichung D.18

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, v, t)}{\partial t} = & \left[ -\frac{\partial}{\partial x} D_x(x, v, t) - \frac{\partial}{\partial v} D_v(x, v, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{xx}(x, v, t) \right. \\ & \left. + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial v} D_{xv}(x, v, t) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} D_{vv}(x, v, t) \right] W(x, t). \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Nach Gleichung D.24 sind die Drift- und Diffusionskoeffizienten

$$\begin{aligned} D_x = v & \quad ; \quad D_v = -\frac{\alpha}{m}v - \Omega_0^2 x \\ D_{xx} = D_{xv} = D_{vx} = 0 & \quad ; \quad D_{vv} = \frac{q}{m^2} = \frac{\alpha k T}{m^2} \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

sodaß die Phasenraumverteilung isolierter Ionen beim gebunchten Laserkühlen durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$\frac{\partial W(x, v, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\alpha}{m}v + \Omega_0^2 x \right) + \frac{\alpha k T}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] W(x, t). \quad (\text{D.30})$$

Hier stellt sich das Problem, daß die Diffusionsmatrix ( $D_{ij}$ ) nach D.29 singulär ist und die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung demnach nicht in der Form von Gleichung D.20 dargestellt werden kann. Eine geschlossene Lösung läßt sich für einen Ornstein-Uhlenbeck Prozeß entsprechend dem Gleichungssystem D.27 dennoch angeben. Durch Fourier-Transformation kann eine Gleichung für die Fourier-Transformierte der Übergangswahrscheinlichkeit  $\tilde{\mathcal{P}}$  gewonnen werden. Diese Gleichung kann mit Hilfe der Green'schen Funktionen  $G_{ij}$  für die Langevingleichung D.21 gelöst werden und durch Rücktransformation erhält man einen Ausdruck für  $\mathcal{P}$ , der von diesen Green-Funktionen abhängt. Die stationäre Lösung mit  $\partial \mathcal{P} / \partial t = 0$  kann für beliebig große Zeiten betrachtet werden ( $t \rightarrow \infty$ ), wobei die Green'schen Funktionen gegen 0 streben und damit ergibt sich

$$W_{st}(x, v) = \mathcal{P}(x, v, \infty | x', v', 0) = \frac{m\Omega_0}{2\pi k T} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{m\Omega_0^2 x^2}{2kT}\right). \quad (\text{D.31})$$

Die stationäre Phasenraumverteilung ist also auch in diesem Fall durch Gaußfunktionen gegeben. Die Geschwindigkeitsbreite hängt nur von der Temperatur (d.h. vom Verhältnis von Heiz- zu Kühlrate) ab, die räumliche Ausdehnung zusätzlich noch von der Stärke des RF-Potentials. Sind in dem RF-Bucket so viele Ionen gespeichert, daß die Raumladung

bedeutsam wird, dann ist der Potentialterm in Gleichung D.31 durch einen Raumladungs-  
term zu ergänzen entsprechend

$$m\Omega_0^2 x^2 \longrightarrow m\Omega_0^2 x^2 + U_{SC}(x) \quad ; \quad U_{SC}(x) = \int F_{SC}(x) dx \quad .$$

# Anhang E

## Spektroskopie an einem $\Lambda$ -System in ${}^7\text{Li}^+$

Die optischen Blochgleichungen in der Rotating Wave Approximation (RWA) für ein  $\Lambda$ -förmiges 3-Niveau System mit stabilen Grundzuständen lauten [De178, Hän70, Ori79]

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{00} &= \gamma_{10}(1 - \rho_{00} - \rho_{22}) + 2w_1\alpha_{10}^i \\ \dot{\rho}_{22} &= \gamma_{12}(1 - \rho_{00} - \rho_{22}) - 2w_2\alpha_{21}^i \\ \dot{\alpha}_{10}^r &= -\frac{1}{2}\Gamma_1\alpha_{10}^r - \delta_1\alpha_{10}^i + w_2\alpha_{20}^i \\ \dot{\alpha}_{10}^i &= -\frac{1}{2}\Gamma_1\alpha_{10}^i + \delta_1\alpha_{10}^r - w_2\alpha_{20}^r + w_1(1 - 2\rho_{00} - \rho_{22}) \\ \dot{\alpha}_{21}^r &= -\frac{1}{2}\Gamma_1\alpha_{21}^r + \delta_2\alpha_{21}^i - w_1\alpha_{20}^i \\ \dot{\alpha}_{21}^i &= -\frac{1}{2}\Gamma_1\alpha_{21}^i - \delta_2\alpha_{21}^r + w_1\alpha_{20}^r + w_2(\rho_{00} + 2\rho_{22} - 1) \\ \dot{\alpha}_{20}^r &= -(\delta_1 - \delta_2)\alpha_{20}^i - w_1\alpha_{21}^i + w_2\alpha_{10}^i \\ \dot{\alpha}_{20}^i &= (\delta_1 - \delta_2)\alpha_{20}^r + w_1\alpha_{21}^r - w_2\alpha_{10}^r \\ \rho_{11} &= 1 - \rho_{00} - \rho_{22}\end{aligned}\tag{E.1}$$

Die Gleichungen E.1 beschreiben ein geschlossenes Dreiniveausystem (vgl. Abbildung E.1). Die Summe der Besetzungszahlen ist hierbei konstant 1, womit die Dimension des Gleichungssystems um eins reduziert werden kann (letzte Gleichung in E.1). Für die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix  $\rho_{ij}$ ,  $i \neq j$  gilt dabei

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= e^{i\Omega_1 t} \rho_{10} \\ \alpha_{21} &= e^{-i\Omega_2 t} \rho_{21} \\ \alpha_{20} &= e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)t} \rho_{20}\end{aligned}\tag{E.2}$$

Der Hochindex ( $r$  oder  $i$ ) bezeichnet den Real- bzw. Imaginärteil des Matrixelements.  $\delta_1 = \Omega_1 - \omega_{10}$  und  $\delta_2 = \Omega_2 - \omega_{12}$  sind die Verstimmungen der Laserfrequenzen  $\Omega_1, \Omega_2$

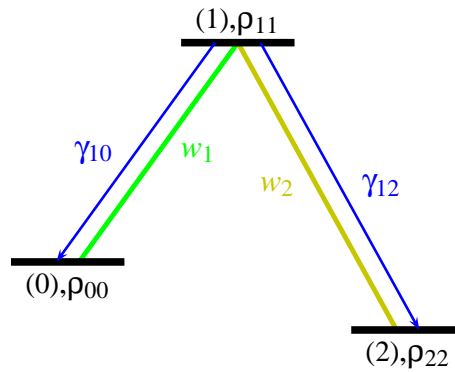


Abbildung E.1: Schematische Darstellung des  $\Lambda$ -Systems in  ${}^7\text{Li}^+$ . Die Zustände sind  $(1) \rightarrow {}^3P_2, F = 5/2$ ,  $(0) \rightarrow {}^3S_1, F = 5/2$ ,  $(2) \rightarrow {}^3S_1, F = 3/2$ . Die Pfeile geben die möglichen Zerfallskanäle durch spontane Emission des Zustands (1) an, die helleren Linien entsprechen den Kopplungen durch die eingestrahlenen Lichtfelder.

gegenüber den Übergangsfrequenzen  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{12}$ . Die Laser werden antiparallel zueinander eingestrahlt. Die Kopplungsstärken der Felder an die Übergänge wird durch die Rabi-frequenzen  $2w_i$  beschrieben, oder äquivalent dazu, durch die Sättigungsparameter auf Resonanz  $s_{i0}$  auf den betreffenden Übergängen mit  $w_i = \frac{1}{8}\gamma_{1i}^2 s_{i0}$ .  $\gamma_{10}$ ,  $\gamma_{12}$  sind die Zerfallsraten des oberen Niveaus (1) in die Grundzustände (0) und (2) durch spontane Emission,  $\Gamma_1$  ist die totale Zerfallsrate des oberen Niveaus.

Die Grundzustände sind als stabil angenommen ( $\Gamma_0 = \Gamma_2 = 0$ ) und es sind keine nicht radiativen Anregungsraten berücksichtigt. Bei den Zerfallsraten des oberen Zustandes wurden ebenfalls keine nicht radiativen Zerfallskanäle wie beispielsweise Stöße berücksichtigt, sodaß für das obere Niveau  $\Gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma_{10} + \gamma_{12})$  gilt und die Zerfallsraten der Kohärenzen zu  $\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j)$  berechnet werden. Insbesondere ist  $\Gamma_{02} = \Gamma_{20} = 0$ . Entsprechend der natürlichen Linienbreite wurde  $\Gamma_1 = 2\pi \cdot 3.7 \text{ MHz}$  angesetzt und aufgrund der Clebsch-Gordan Koeffizienten ist das Verzweungsverhältnis 7:3 mit  $\gamma_{10} = 0.3\Gamma_1$ ,  $\gamma_{12} = 0.7\Gamma_1$ .

Im folgenden wird die Besetzung des oberen Zustandes und damit die Fluoreszenzrate für den Fall untersucht, daß der erste Laser (Festfrequenzlaser,  $w_1$ ,  $\delta_1$ , Übergang  $0 \leftrightarrow 1$ ) mit fester Frequenz eingestrahlt und der 2. Laser wie im Experiment über den starken Übergang ( $w_2$ ,  $\delta_2$ , Übergang  $2 \leftrightarrow 1$ ) durchgestimmt wird.



Die Gleichgewichtslösung des Gleichungssystems E.1 ist ein sehr unübersichtlicher und langer Ausdruck, sodaß auf eine Darstellung hier verzichtet werden soll. Überschaubare Verhältnisse ergeben sich hingegen, wenn die Grundzustandskohärenz  $\rho_{20}$  vernachlässigt wird. Die Aufspaltung der Resonanz (Autler-Townes Doublet) sowie die Dunkelresonanz (Differenz der Laserfrequenzen entspricht dem Energieabstand der Grundzustände) ist hierin natürlich nicht enthalten, es ergeben sich aber gute Orientierungswerte für die Signalbreite und -stärke. Die Besetzung des oberen Zustandes  $\rho_{11}^{NC}$  wird in diesem Fall durch eine Lorentzkurve beschrieben

$$\rho_{11}^{NC} = \frac{\Gamma_1 \gamma_{12} s_{02} / 8}{\delta_2^2 + \frac{1}{4} \left( (4\delta_1^2 + \Gamma_1^2) \frac{\gamma_{12} s_{02}}{\gamma_{10} s_{01}} + \frac{3}{2} \Gamma_1 \gamma_{12} s_{02} + \Gamma_1^2 \right)} \quad (\text{E.3})$$

mit der vollen Halbwertsbreite

$$\Delta_2 = (\delta_2)_{FWHM} = \sqrt{(4\delta_1^2 + \Gamma_1^2) \frac{\gamma_{12} s_{02}}{\gamma_{10} s_{01}} + \frac{3}{2} \Gamma_1 \gamma_{12} s_{02} + \Gamma_1^2} \quad (\text{E.4})$$

Die Lösungen der Gleichungen E.1 beschreiben die Verhältnisse für eine Geschwindigkeitsklasse. Das endgültige Ergebnis erhält man durch die Faltung mit der Geschwindigkeitsverteilung der Ionen

$$w(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-(v-v_0)^2/2\sigma_v^2} \quad (\text{E.5})$$

und ist somit ein Ensemble-Mittelwert (Bezeichnung  $\overline{\rho_{ij}}$ ).  $v_0$  ist dabei die Ionengeschwindigkeit relativ zur Sollgeschwindigkeit im Speicherring.  $\overline{\rho_{11}}$  und auch  $\overline{\rho_{11}^{NC}}$  müssen numerisch berechnet werden, im 2. Fall ergibt sich dabei ein Voigt-Profil.

In den folgenden Abbildungen ist die schwarze Linie ( $\overline{\rho_{11}}$ ) die exakte Lösung, die helle Linie ( $\overline{\rho_{11}^{NC}}$ ) gibt das Ergebnis wieder, wenn die Grundzustandskohärenz nicht berücksichtigt wird. Die Lösung  $\overline{\rho_{11}^{NC}}$  wurde in allen Beispielen berechnet. Bei hohen Geschwindigkeits- bzw. Impulsbreiten<sup>1</sup> ergibt sich jedoch ein deckungsgleicher Verlauf beider Lösungen, sodaß die helle Linie nicht sichtbar ist.

Abbildung E.2 zeigt die Situation für eine sehr geringe Impulsbreite, sodaß die Autler-

<sup>1</sup>Im folgenden wird die Impulsbreite angegeben. Die Umrechnung in die entsprechende Geschwindigkeitsbreite kann mit  $10^{-7}$  eVs/m  $\hat{=} 1.368$  m/s erfolgen.

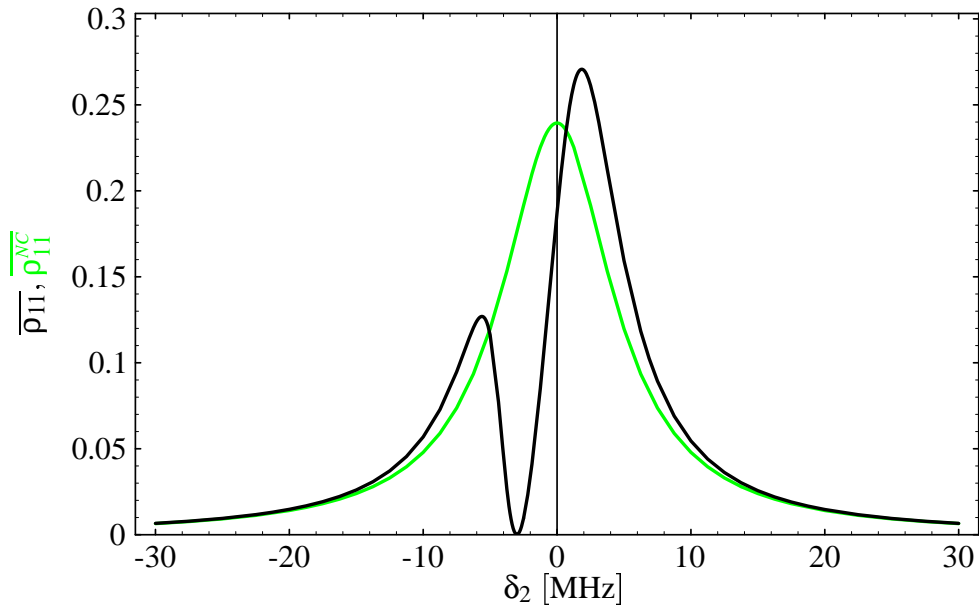


Abbildung E.2: Spektroskopie am  $\Lambda$ -System mit  $\nu_0 = 0$  und  $\delta_1 = -3$  MHz. Die Impulsbreite ist  $\sigma_p = 10^{-9}$  eVs/m und die Sättigungsparameter der Übergänge sind  $s_{01} = 40$ ,  $s_{02} = 5$ . Bei dieser geringen Impulsbreite ist die Autler-Townes Aufspaltung in  $\overline{\rho}_{11}$  gut sichtbar. Die Linie ist asymmetrisch, weil der Festfrequenzlaser um 3 MHz rotverstimmt ist. Die berechnete Linienform ohne Berücksichtigung der Grundzustandskohärenz ( $\overline{\rho}_{11}^{NC}$ , helle Linie) gibt die Signalstärke und -breite relativ gut wieder.

Townes Aufspaltung noch sichtbar ist und demzufolge ein erheblicher Unterschied zwischen  $\overline{\rho}_{11}$  und  $\overline{\rho}_{11}^{NC}$  besteht. Abbildung E.3 zeigt die Situation für eine mit Laserkühlung erreichbare Impulsbreite ( $10^{-6}$  eVs/m). Durch die Beiträge verschiedener Geschwindigkeitsklassen wird die Autler-Townes Aufspaltung weggemittelt, das Signal erheblich verbreitert sowie die Signalstärke entsprechend der Impulsbreite reduziert (vgl. Abschnitt 2.4).

Wie Abbildung E.4 zeigt, führt die Reduzierung der Laserleistung gleichzeitig zur Reduktion der Linienbreite und der Signalstärke, auch wenn die Übergänge noch gesättigt sind.

Die Abbildungen E.5 bis E.7 zeigen Rechnungen, bei denen der Festfrequenzlaser nicht mehr die zentrale Geschwindigkeitsklasse anregt. Diese Situation führt zur AC-Stark Verschiebung, d.h. der Verschiebung des Signalschwerpunktes. Abbildung E.8 zeigt die Verschiebung für verschiedene Werte der Geschwindigkeitsverstimmung.

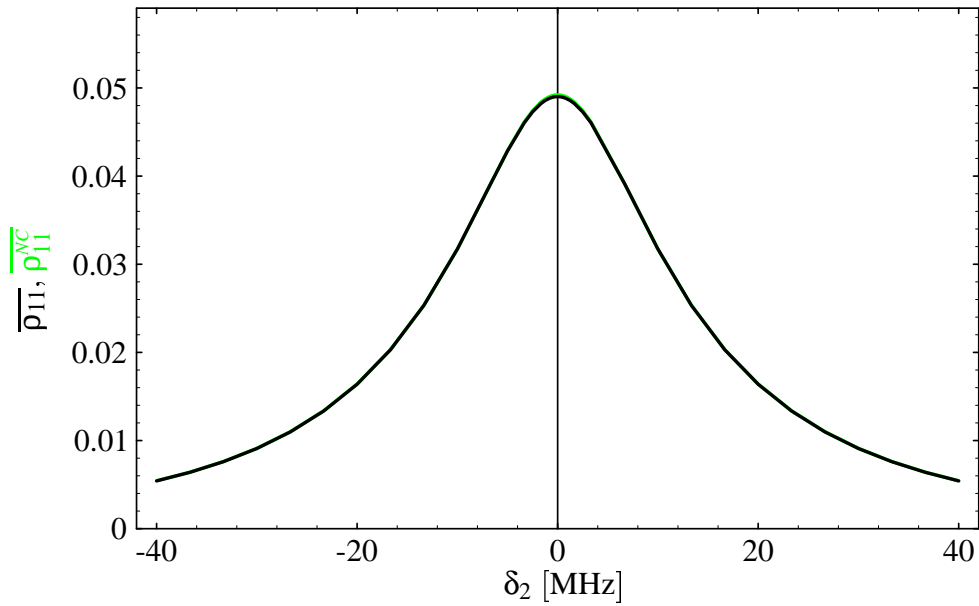


Abbildung E.3: Spektroskopie am  $\Lambda$ -System mit  $\nu_0 = 0$  und  $\delta_1 = 0$ . Die Impulsbreite ist  $\sigma_p = 10^{-6}$  eVs/m und die Sättigungsparameter der Übergänge sind  $s_{01} = 40$ ,  $s_{02} = 5$ . Bei dieser Impulsbreite wird die Autler-Townes Aufspaltung durch Beiträge verschiedener Geschwindigkeitsklassen weggemittelt, sodaß praktisch kein Unterschied mehr zwischen  $\overline{\rho_{11}}$  und  $\overline{\rho_{11}^{NC}}$  besteht. Der gleiche Effekt führt zu einer Verbreiterung der Linie.

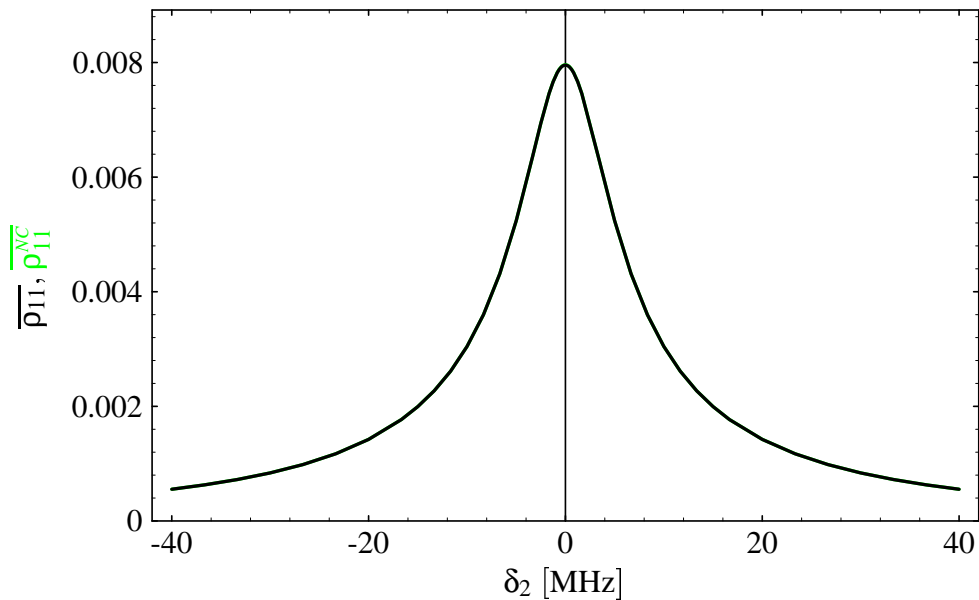


Abbildung E.4: Spektroskopie am  $\Lambda$ -System mit  $\nu_0 = 0$  und  $\delta_1 = 0$ . Die Impulsbreite ist  $\sigma_p = 10^{-6}$  eVs/m und die Sättigungsparameter der Übergänge sind  $s_{01} = 1$ ,  $s_{02} = 1$ . Durch die geringere Laserleistung im Vergleich zu Abbildung E.3 wird die Linienbreite, aber auch die Signalstärke erheblich reduziert.

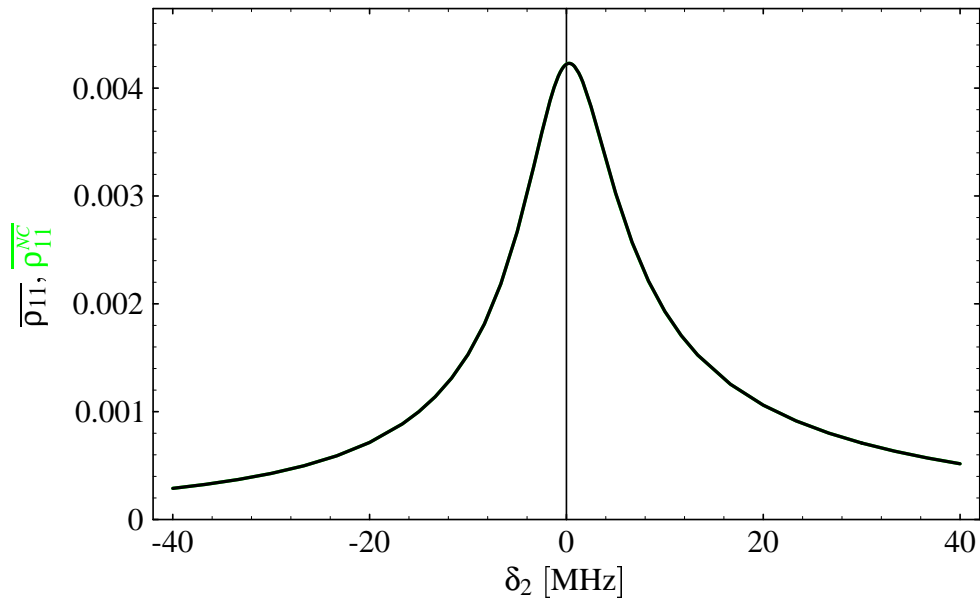


Abbildung E.5: Spektroskopie am  $\Lambda$ -System mit  $v_0 = -16$  m/s und  $\delta_1 = 0$ . Die Impulsbreite ist  $\sigma_p = 10^{-6}$  eVs/m und die Sättigungsparameter der Übergänge sind  $s_{01} = 1, s_{02} = 1$ . Durch die asymmetrische Anregung in Bezug auf die Impulsverteilung weist  $\overline{\rho_{II}}$  ebenfalls eine sichtbare Asymmetrie auf. Darüber hinaus ist der Signalschwerpunkt um 2.25 MHz blauverschoben (AC-Stark Verschiebung).

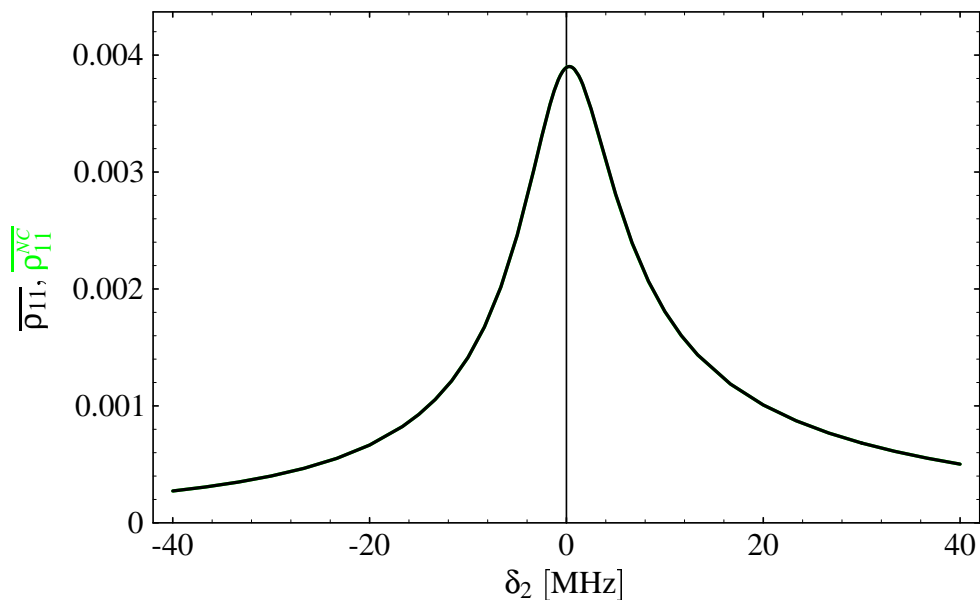


Abbildung E.6: Spektroskopie am  $\Lambda$ -System mit  $v_0 = -17$  m/s und  $\delta_1 = 0$ . Die Impulsbreite ist  $\sigma_p = 10^{-6}$  eVs/m und die Sättigungsparameter der Übergänge sind  $s_{01} = 1, s_{02} = 1$ . Die AC-Stark Verschiebung beträgt 2.40 MHz.

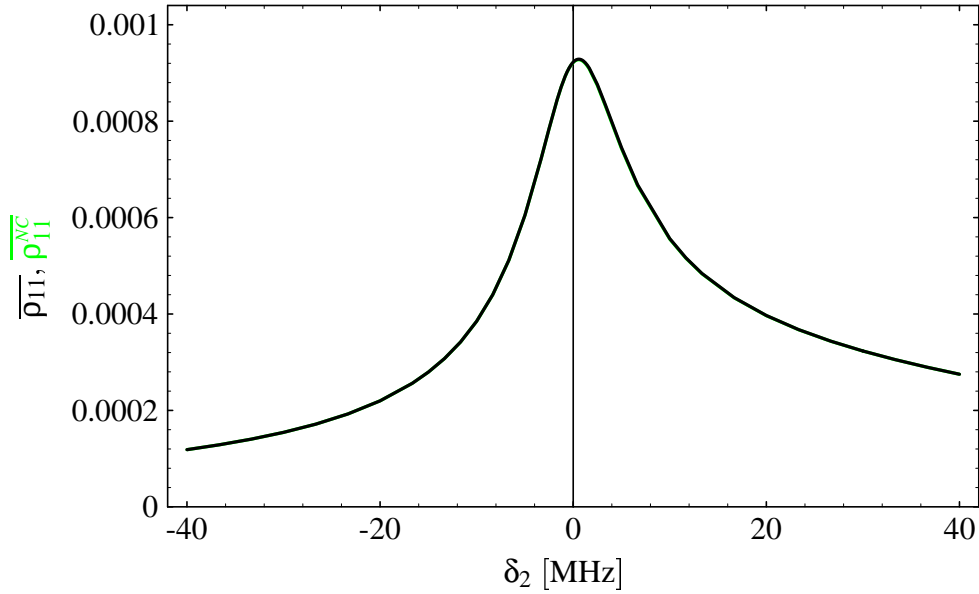


Abbildung E.7: Spektroskopie am  $\Lambda$ -System mit  $v_0 = -30$  m/s und  $\delta_1 = 0$ . Die Impulsbreite ist  $\sigma_p = 10^{-6}$  eVs/m und die Sättigungsparameter der Übergänge sind  $s_{01} = 1$ ,  $s_{02} = 1$ . Die Asymmetrie der Anregung ist im Vergleich zu Abbildung E.6 weiter erhöht, was zu einem stark deformierten Signal bei gleichzeitig geringer Signalstärke führt. Die AC-Stark Verschiebung ist 4.33 MHz.

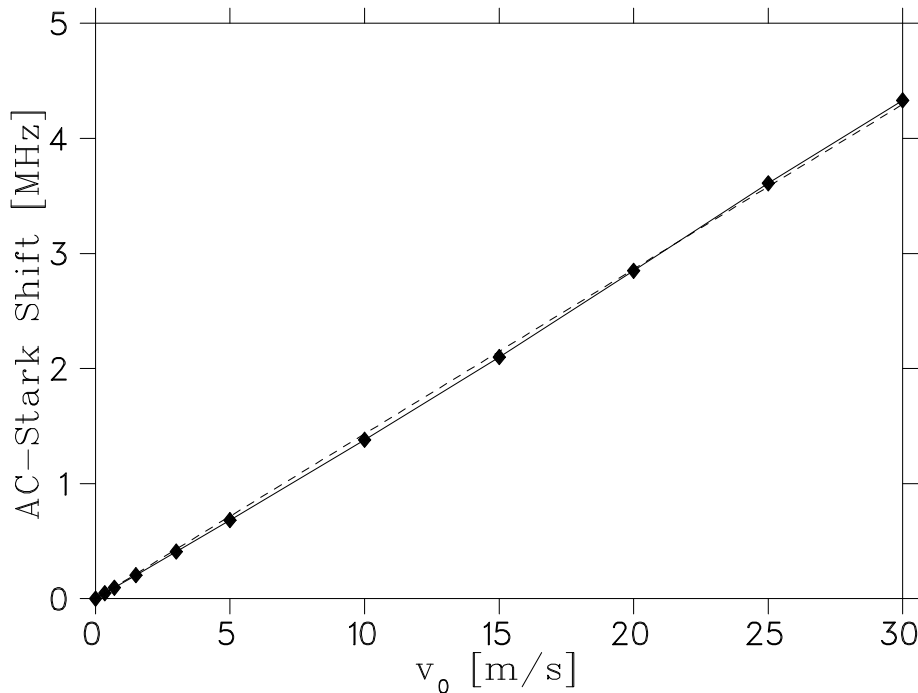


Abbildung E.8: AC-Stark Verschiebung bei der Spektroskopie am  $\Lambda$ -System  ${}^3S_1, F = 5/2 \leftrightarrow {}^3P_2, F = 5/2 \leftrightarrow {}^3S_1, F = 3/2$  in  ${}^7\text{Li}^+$  bei einer Impulsbreite von  $10^{-6}$  eVs/m und einfach gesättigten Übergängen ( $s_{01} = s_{02} = 1$ ). Ein linearer Fit (gestrichelte Kurve) ergibt eine Verschiebung in dem abgebildeten Bereich von  $143.2 \pm 0.2 \frac{\text{kHz}}{\text{m/s}}$ , oder, ausgedrückt durch die Frequenzverschiebung des Festfrequenzlasers  $83.7 \pm 0.1 \frac{\text{kHz}}{\text{MHz}}$ .

Die Anpassung der mittleren Ionengeschwindigkeit an die durch den Festfrequenzlaser vorgegebene Geschwindigkeitsklasse mit  $v_0 = 0$  kann dadurch erfolgen, daß die Ionengeschwindigkeit soweit variiert wird, bis die Signalhöhe auf  $\frac{1}{2}$  des Maximalwertes abgesunken ist (vgl. Abbildung E.4 und E.6). Auf diese Weise erhält man zwei Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  und die gesuchte Geschwindigkeit  $v_0 = 0 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ . Anhand der signifikant unterschiedlichen Signalhöhe in den Abbildungen E.5 und E.6 erkennt man, daß die Bestimmung der Geschwindigkeiten  $v_1, v_2$  mit einer Unsicherheit  $\Delta v < 1$  m/s erfolgen kann. Für die Unsicherheit der so eingestellten Geschwindigkeit gilt demzufolge  $\Delta v_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta v < 0.71$  m/s. Nach Abbildung E.8 bedeutet dies für die Unsicherheit durch die AC-Stark Verschiebung  $\Delta v < 143.2 \frac{\text{kHz}}{\text{m/s}} \cdot \Delta v_0$  und damit

$$\Delta v < 100\text{kHz} \quad \text{für} \quad s_{01} = s_{02} = 1, \sigma_p = 10^{-6} \frac{\text{eVs}}{\text{m}} \quad (\text{E.6})$$

# Literaturverzeichnis

- [Alla66] D. W. Allan, *Statistics of Atomic Frequency Standards*, Proc. of the IEEE, **54**, 2 (1966) 221
- [Betz72] H. D. Betz, *Charge States and Charge-Changing Cross Sections of Fast Heavy Ions Penetrating Through Gaseous and Solid Media*, Rev. Mod. Phys. **44**, 3 (1972) 465
- [Bous87] D. Boussard, *Schottky noise and beam transfer function diagnostics*, in CERN87-03 (1987) 416
- [CDG92] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom - Photon Interactions*, John Wiley & Sons 1992
- [CIPM92] Comité International des Poids et Mesures, 81<sup>e</sup> session, 1992, Recommendation 3, S.144
- [Cohe92] C. Cohen-Tannoudji, *Atomic motion in laser light in fundamental systems in quantum optics*, North-Holland 1992
- [Cutl66] L. S. Cutler, C. L. Searle, *Some Aspects of the Theory and Measurement of Frequency Fluctuations in Frequency Standards*, Proc. of the IEEE, **54**, 2 (1966) 136
- [Del78] C. Delsart, J.-C. Keller, *The Optical Autler-Townes Effect In Doppler-Broadened Three-Level Systems*, Journal de Physique **39** (1978) 350

- [Elle92] C. Ellert, D. Habs, E. Jaeschke, T. Kambara, M. Music, D. Schwalm, P. Sigray, A. Wolf, *An induction accelerator for the Heidelberg Test Storage Ring*, Nucl. Instr. & Meth. A **314** (1992) 399
- [Gers85] S. Gerstenkorn, P. Luc, *Atlas du Spectre d'Absorption de la Molecule d'Iode, Complement: Identification des transitions du système (B-X)*, Laboratoire Aimé-Cotton, CNRS II, 1985
- [Gri94a] R. Grieser, R. Klein, G. Huber, S. Dickopf, I. Kluft, P. Knobloch, P. Merz, F. Albrecht, M. Grieser, D. Habs, D. Schwalm, T. Kühl, *A test of special relativity with stored lithium ions*, Appl. Phys. B **59** (1994) 127
- [Gri94b] R. Grieser, *Test der lokalen Lorentz-Invarianz am Heidelberger Testspeicherring*, Dissertation Mainz 1994
- [Gri94c] R. Grieser, G. Bönsch, S. Dickopf, G. Huber, R. Klein, P. Merz, A. Nicolaus, H. Schnatz, *Precision measurement of two iodine lines at 585 nm and 549 nm*, Z. Phys. A **348** (1994) 147
- [Hake77] H. Haken, *Synergetics*, Springer 1977
- [Hang95] J. Hangst, J.S. Nielsen, O. Poulsen, J.P. Schiffer, P. Shi, *Laser Cooling of a Bunched Beam in a Synchrotron Storage Ring*, Phys. Rev. Lett. **74**, 22 (1995) 4432
- [Hän70] Th. Hänisch, P. Toschek, *Theory of a Three-Level Gas Laser Amplifier*, Z. Physik **236** (1970) 213
- [HCP86] Handbook of Chemistry and Physics, Nr. 67, CRC Press 1986
- [Hils90] D. Hils, J.L. Hall, *Improved Kennedy-Thorndyke Experiment to Test Special Relativity*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1697
- [Hint89] F. Hinterberger, D. Prasuhn, *Analysis of Internal Target Effects in Light Ion Storage Rings*, Nucl. Instr. & Meth. A **279** (1989) 413



- [Hoch94] B. Hochadel, *Untersuchungen zum Intrabeam Scattering am TSR*, Dissertation Heidelberg 1994, MPI H - V34 - 1994  
und  
B. Hochadel, F. Albrecht, M. Grieser, D. Habs, D. Schwalm, E. Szmola, A. Wolf, *A residual-gas ionization beam profile monitor for the Heidelberg Test Storage Ring TSR*, Nucl. Instr. & Meth. A **343** (1994) 401
- [Ives38] H. E. Ives, G. R. Stilwell, *An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock*, J. Opt. Soc. Am. **28** (1938) 215
- [Jack75] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons 1975,  
deutsche Übersetzung 1983
- [Kenn32] R.J. Kennedy, E.M. Thorndyke, *Experimental Establishment of the Relativity of Time*, Phys. Rev **42** (1932) 400
- [Klei91] R. Klein, Dissertation, *Präzisionsspektroskopie an gekühlten  $\text{Li}^+$  Ionen im Schwerionenspeicherring als experimenteller Test der speziellen Relativitätstheorie*, Mainz 1991
- [Klei92] R. Klein, R. Grieser, I. Hoog, G. Huber, I. Kluft, P. Merz, T. Kühl, S. Schröder, M. Grieser, D. Habs, W. Petrich, D. Schwalm, *Measurement of the transverse Doppler shift using a stored relativistic  $^7\text{Li}^+$  ion beam*, Z. Phys A **342** (1992) 455
- [Kowa83] J. Kowalski, R. Neumann, S. Noehte, K. Scheffzek, H. Suhr, G. zu Putlitz *Laser-Microwave Spectroscopy In The Excited  $1s2s\ ^3S_1$  and  $1s2p\ ^3P$  Hyperfine Multiplets Of Helium-Like  $^{6,7}\text{Li}^+$* , Hyp.Int. **15/16** (1983) 159  
und  
J. Kowalski, R. Neumann, S. Noehte, H. Suhr, G. zu Putlitz, R. Herman, *Triplet-Singlet Interaction in the  $1s\ 2s\ ^3S_1$  Hyperfine Splitting of He-Like  $\text{Li}^+$* , Z. Phys. A **313** (1983) 147
- [Kret92] M. Kretzschmar, *Doppler spectroscopy on relativistic particle beams in the light of a test theory of special relativity*, Z.Phys. A **342** (1992) 463

- [Lac194] J. L. Laclare, *Coasting beam longitudinal coherent instabilities* in CERN94-01 (1994) 349
- [Ledu94] J. Le Duff, *Longitudinal beam dynamics in circular accelerators* in CERN94-01 (1994) 289
- [Lubi85] P. Lubin, T. Villela, G. Epstein, G. Smoot, *A Map Of The Cosmic Background Radiation At 3 Millimeters*, *Astrophys. J.* **298** (1985) L1
- [Luge96] V. Luger, R. Grimm, I. Lauer, P. Lenisa, A. Peters, U. Schramm, D. Schwalm, M. Stöbel, *Investigation of the  $2^3P_2 \rightarrow 1^1S_0$  M2-decay of Metastable  $^7Li^+$* , MPI für Kernphysik Heidelberg, Jahresbericht 1996
- [Lynd86] D. Lynden-Bell, *How Smooth is the Hubble Flow?*, *Q.J. Astron. Soc.* **27** (1986) 319
- [Mans77] R. Mansouri, R. U. Sexl, *A Test Theory of Special Relativity I*, *Gen. Rel. and Grav.* **8**, (7) (1977) 497  
R. Mansouri, R. U. Sexl, *A Test Theory of Special Relativity II*, *Gen. Rel. and Grav.* **8**, (7) (1977) 515  
R. Mansouri, R. U. Sexl, *A Test Theory of Special Relativity III*, *Gen. Rel. and Grav.* **8**, (7) (1977) 809
- [Mart84] M. Martini, *Intrabeam Scattering in the ACOL-AA Machines*, CERN PS/84-9 (AA) (1984)
- [Merz91] P. Merz, *Frequenzstabilisierung eines Argonionenlasers auf  $^{127}J_2$ -Hyperfeinstrukturlinien*, Diplomarbeit, Mainz 1991
- [Mies95] H.-J. Miesner, *Laserkühlung dichter Ionenstrahlen*, Dissertation Heidelberg 1995, MPI H - V23 - 1995
- [Mie96a] H.J. Miesner, M. Grieser, R. Grimm, I. Lauer, V. Luger, P. Merz, A. Peters, U. Schramm, D. Schwalm, M. Stöbel, *Transverse laser cooling of a radio-frequency bunched ion beam in the storage ring TSR*, *Nucl. Instr. & Meth. A* **383** 634

- [Mie96b] H.J. Miesner, R. Grimm, M. Grieser, D. Habs, D. Schwalm, B. Wanner, A. Wolf, *Efficient, Indirect Transverse Laser Cooling of a Fast Stored Ion Beam*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4 (1996) 623
- [Möhl97] D. Möhl, *The status of stochastic cooling*, Nucl. Instr. & Meth. A **391** (1997) 164
- [MPI87] P. Baumann, M. Blum, A. Friedrich, C. Geyer, M. Grieser, B. Holzer, E. Jaeschke, D. Krämer, R. Mayer, C. Martin, K. Matl, W. Ott, B. Povh, R. Repnow, M. Steck, E. Steffens *The Heidelberg Heavy Ion Test Storage Ring TSR*, MPI H - 1987 - V 15
- [Ori79] G. Orriols, *Nonabsorption Resonances by Nonlinear Coherent Effects in a Three-Level System*, Nuovo Cimento **53 B**, 1 (1979) 1
- [Past95] S. Pastuzska, U. Schramm, M. Grieser, C. Broude, R. Grimm, D. Habs, J. Kenntner, H.-J. Miesner, T. Schüßler, D. Schwalm, A. Wolf, *Electron cooling and recombination experiments with an adiabatically expanded electron beam*, Nucl. Instr. & Meth. A **369** (1996) 11
- [PDG88] Particle Data Group, *Passage of Particles through matter*, Physics Letters **204 B** (1988) 64
- [PDG94] Particle Data Group, *Passage of Particles through matter*, Phys. Rev. D **50** (1994) 1173
- [Petr93] W. Petrich, M. Grieser, R. Grimm, A. Gruber, D. Habs, H.-J. Miesner, D. Schwalm, B. Wanner, H. Wernøe, A. Wolf, R. Grieser, G. Huber, S. Schröder, T. Kühl, R. Neumann, S. Schröder, *Laser cooling of stored high-velocity ions by means of the spontaneous force*, Phys. Rev. A **48**, No. 3 (1993) 2127
- [Piwi92] A. Piwinski, *Intra-Beam Scattering* in CERN92-01 (1992) 226
- [Poth90] H. Poth, *Electron Cooling: Theory, Experiment, Application*, Phys. Rep. **196** Nos. 3&4 (1990) 135

- [Prio80] M.A. Prior, R.D. Knight, *Fluorescence Of Optically Pumped Trapped Ions*, Opt. Comm. **35**, 1, (1980) 54
- [Riis94] E. Riis, A. G. Sinclair, O. Poulsen, G.W.F. Drake, W.R.C. Rowley, A.P. Levick, *Lamb shifts and hyperfine structure in  ${}^6\text{Li}^+$  and  ${}^7\text{Li}^+$ : Theory and Experiment*, Phys. Rev. A **49** (1994) 207
- [Risk89] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer Series in Synergetics, Springer 1989
- [Robe49] H.P. Robertson, *Postulate versus Observation in the Special Theory of Relativity*, Rev. Mod. Physics **21** (1949) 378
- [Rong98] H. Rong, S. Grafström, J. Kowalski, R. Neumann, G. zu Putlitz, *A new precise value of the absolute  $2^3S_1, F = 5/2 - 2^3P_2, F = 7/2$  transition in  ${}^7\text{Li}^+$* , Eur. Phys. J. D **3** (1998) 217
- [Ross94] J. Rossbach, P. Schmüser, *Basic course on accelerator optics*, CERN94-01 (1994) 17
- [Ross52] B. Rossi, *High Energy Particles*, Prentice Hall 1952
- [Schm95] P. Schmüser, *Feynman Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*, Springer 1995
- [Schr90] S. Schröder, R. Klein, N. Boos, M. Gerhard, R. Grieser, G. Huber, A. Karafillidis, M. Krieg, N. Schmidt, T. Kühl, R. Neumann, V. Balykin, M. Grieser, D. Habs, E. Jaeschke, D. Krämer, M. Kristensen, M. Music, W. Petrich, D. Schwalm, P. Sigray, M. Steck, B. Wanner, A. Wolf, *First Laser Cooling of Relativistic Ions in a Storage Ring*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2901
- [Søre87] A.H. Sørensen, *Introduction to Intrabeam Scattering*, CERN87-10 (1987) 135
- [Wann] B. Wanner, M. Grieser, R. Grimm, A. Gruber, D. Habs, H.J. Miesner, J.S. Nielsen, W. Petrich, D. Schwalm, H. Wernøe, *New Laser Cooling Schemes Based*

*On Optical Adiabatic Excitation*, in Workshop on Beam Cooling and related Topics, Montreux 1993 (Proceedings), CERN 94-03 (1994) 354

und

B. Wanner, R. Grimm, A. Gruber, D. Habs, H.J. Miesner, J.S. Nielsen, D. Schwalm, *Rapid adiabatic passage in laser cooling of fast stored ion beams*, Phys. Rev. A **58**, 3 (1998) 2242

[Will93] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press 1993

# Danksagung

Diese Arbeit wurde von April 1994 bis Juni 1999 am Institut für Physik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz durchgeführt. Ich möchte mich hier bei allen bedanken, die zum Erfolg der Arbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr. G. Huber danke ich für die Überlassung des interessanten Themas und für die tatkräftige Betreuung während der Arbeit.

Den aktiven und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, Herrn Dr. R. Grieser, Herrn Dipl.Phys. S. Karpuk, Herrn Dipl.Phys. V. Sebastian, Herrn Dipl.Phys. P. Seelig danke ich für die Unterstützung und gute Zusammenarbeit, insbesondere bei der Durchführung der Experimente.

Mein Dank gilt Herrn Dr. A. Dax, Herrn Dr. T. Engel, Herrn Dipl.Phys. M. Gerlach, Herrn Priv. Doz. Dr. T. Kühl und Herrn Dipl.Phys. H. Winter von der Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt, deren tatkräftige Mitarbeit bei der Durchführung der Experimente maßgeblich zum Gelingen beigetragen hat.

Den Mitarbeitern vom Max Planck Institut für Kernphysik in Heidelberg, Herrn Dr. M. Grieser, Herrn Dr. R. Grimm, Frau Dr. I. Lauer, Frau Dr. V. Luger, Herrn Dr. H. -J. Miesner, Herrn Prof. Dr. D. Schwalm, den Mitarbeitern der Elektronik- und mechanischen Werkstätten sowie Frau Krieger gilt mein Dank für die Unterstützung und geleistete Hilfe vor Ort , insbesondere für die Bereitstellung des jodstabilisierten Argonionenlasers.

Bei der Vorbereitung der Experimente in Mainz war die Mithilfe der mechanischen Werkstatt sowie der Elektronikwerkstatt unerlässlich. Mein Dank gilt allen Mitarbeitern beider Einrichtungen, insbesondere Herrn B. Baus und Herrn Prof. Dr. K.H. Georgi.

Schließlich möchte ich noch meinen Eltern und meinem Bruder danken, die mich stets in allen Belangen unterstützt haben.