

Präzisionsmessung des
magnetischen Moments des Elektrons
in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff

Dissertation zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Hartmut Häffner
geb. in Mainz
Mainz, im Januar 2000

2

Datum der mündlichen Prüfung: 26.04.2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	7
1.1	Einleitung	7
1.2	Die Quantenelektrodynamik für hochgeladene Ionen	8
1.2.1	Rechnungen in der Quantenelektrodynamik	9
1.2.2	Rechenmethoden der Bound-State-Quantum Electrodynamics	10
1.2.3	Der g-Faktor des gebundenen Elektrons	11
2	Experimenteller Aufbau	15
3	Theoretisches	21
3.1	Bestimmung des g-Faktors des gebundenen Elektrons	21
3.2	Die Penning-Falle	22
3.3	Das elektrische Speicherfeld	24
3.3.1	Abschätzung der elektrischen Feldfehler	25
3.3.2	Die Eigenfrequenzen in einer realen Penning-Falle	27
3.3.3	Die Abhängigkeit des gemessenen g-Faktors von der Zyklotronenergie	29
3.4	Linienformen	30
3.4.1	Grundlegende Linienform	30
3.4.2	Die Linienform der g-Faktor-Resonanz	31
3.4.3	Sättigung der Larmor-Resonanz	35
4	Elektronischer Nachweis	39
4.1	Wechselwirkung eines Ions mit der Elektronik	39
4.1.1	Kühlen der Ionenbewegung	41
4.1.2	Die Bewegung eines kalten Ions	41
4.1.3	Grenzen des Modells	43
4.2	Anschauliche Erklärung der Signalformen	43
4.2.1	Kühlen der Ionenbewegung	43
4.2.2	Das Ion im Gleichgewicht	44
4.2.3	Abweichungen vom Idealfall	46
4.3	Anforderungen an den elektronischen Aufbau	47
5	Experimentelles	49
5.1	Erzeugen einer Ionenwolke	49
5.2	Messung der axialen Frequenz	50
5.2.1	Beschleunigung des axialen Nachweises	50
5.2.2	Massenspektren	50

5.3	Messung der Zyklotronfrequenz	54
5.3.1	Direkter Nachweis der Zyklotronbewegung	55
5.3.2	Indirekte Methoden	56
5.4	Messung der Magnetronfrequenz	57
5.5	Kopplung der Bewegungsmoden	58
5.5.1	Nichtresonante Kopplung	61
5.5.2	Messung der Magnetronfrequenz mittels Seitenbandkopplung .	61
5.5.3	Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz mittels Seitenband	63
5.6	Präparation einer reinen Ionenwolke	64
5.7	Präparation eines einzelnen Ions	64
5.8	Transport des Ions	66
5.9	Kühlen der Ionen	66
5.9.1	Widerstandskühlen	66
5.9.2	Seitenbandkühlen	69
5.10	Thermische Verteilung der Energie des Ions	69
5.10.1	Temperatureichung	70
5.10.2	Messung der axialen Temperatur in der Präzisions-Falle	73
5.11	Optimieren des elektrischen Feldes	73
5.11.1	Optimieren mit Hilfe der Ionenfrequenz	75
5.11.2	Optimieren mit Hilfe der Güte der Ionenschwingung	75
5.12	Bestimmung des Verlaufs des Magnetfeldes	78
5.12.1	Verschieben des Ions	78
5.12.2	Messung des B_2 -Terms	80
5.12.3	Abhängigkeit des Magnetfeldes von der mittleren axialen Energie	81
5.13	Detektion von spin-flips in der Analyse-Falle	83
5.13.1	Bestimmung des g-Faktors in der Analyse-Falle	83
6	Ergebnisse	87
6.1	Messablauf	87
6.1.1	Bestimmung der Ausrichtung des Spins in der Analyse-Falle .	88
6.1.2	Induzieren von spin-flips in der Präzisions-Falle	90
6.1.3	Erneute Bestimmung der Ausrichtung des Spins in der Analyse-Falle	94
6.2	Systematische Fehlerquellen	95
6.2.1	Inhomogenitäten des Magnetfeldes	95
6.2.2	Zeitliche Drift des Magnetfeldes	100
6.2.3	Elektrische Feldfehler	103
6.2.4	Drift des elektrischen Feldes	105
6.2.5	Fehler bei der Bestimmung der Zyklotronenergie	106
6.2.6	Verschiebung der Zyklotronresonanz	107
6.2.7	Die Asymmetrie der g-Faktor-Resonanz	107
6.2.8	Relativistische Effekte	107
6.2.9	Cavity-QED-Effekte	110
6.2.10	Räumliche Inhomogenität der Mikrowellen	114
6.2.11	Einfluss des Mikrowellensignals	114
6.2.12	Dämpfung der Ionenbewegung	116
6.2.13	Ungenauigkeiten der Uhren-Quarze	116

6.2.14	Das Massenverhältnis des Elektrons und Ions	117
6.3	Bestimmung des g-Faktors	117
6.3.1	Variation der Zyklotronenergie	119
6.3.2	Iteration der Auswertung	120
6.3.3	Gemessene Form der g-Faktor-Resonanz	124
6.3.4	Variation der axialen Energie	127
6.4	Endergebnis der Messungen	129
6.5	Einordnung des Messergebnisses	129
6.5.1	Test der Bound-State-QED	129
6.5.2	Atomare Masse des Elektrons	133
7	Zusammenfassung und Ausblick	135
7.1	Verbesserungen der g-Faktor-Messungen	136
7.1.1	Optimieren der Homogenität des Magnetfeldes	136
7.1.2	Stabilisieren des Magnetfeldes	136
7.1.3	Entkoppeln der axialen Bewegung vom Wärmereservoir	136
7.1.4	Seitenbandkühlen der axialen Bewegung	137
7.2	Test der Bound-State-QED	137
7.3	Bestimmung von magnetischen Kernmomenten	139
7.3.1	Realisierung der Messmethode für kleine Ordnungszahlen	140
7.3.2	Realisierung der Messmethode für größere Ordnungszahlen	141
7.4	Messung von Bindungsenergien	143
7.5	Seitenbandkühlen	143
A	Anhang	145
A.1	Selbstinduzierte Kraft eines Ions in einem Zylinder	145

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

1.1 Einleitung

Die Quantenelektrodynamik (QED) gilt zur Zeit als eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien [Kin90]. Sie beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung. Diese ist von den vier bekannten Wechselwirkungen die einzige, die in allen Naturwissenschaften von fundamentaler Bedeutung ist. Die Vorhersagen der QED wurden in einigen Experimenten mit einer außerordentlich hohen Präzision überprüft. Eines der herausragenden Experimente zum Test der QED wurde von Dehmelt et al. Ende der 70er bis Mitte der 80er Jahre durchgeführt [Dyc77, Dyc86b]. Ihre Messung des magnetischen Moments (oder der des g-Faktors) des Elektrons wurde 1989 mit dem Nobelpreis für Physik gewürdigt. Sie erreichte eine relative Präzision von $4 \cdot 10^{-12}$ für den g-Faktor des „freien“ Elektrons und verifiziert damit die Voraussage der QED mit einer relativen Genauigkeit von einigen 10^{-11} [Dyc86b, Hug99].

Für große Feldstärken des elektromagnetischen Feldes liegen bis heute jedoch nur wenige Tests der QED vor. Besonders interessant ist die Frage, ob die QED in dem Bereich, bei dem die elektromagnetische Feldenergie mit der Ruhemasse des Elektrons vergleichbar wird, in ihrer bisherigen Form experimentelle Ergebnisse richtig voraussagt. Da die Eigenschaften hochgeladener Ionen durch diese extremen Feldstärken maßgeblich beeinflusst werden, wurden in den letzten Jahren verstärkt Bemühungen unternommen, die QED an hochgeladenen Ionen zu überprüfen.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Messung des g-Faktors des Elektrons in wasserstoffähnlichem hochgeladenem Kohlenstoff ($^{12}\text{C}^{5+}$) vor. Die Messmethode lehnt sich an die Dehmelts an, die den kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekt [Deh86] nutzt, um die beiden Spin-Eigenzustände des Elektrons in einer Penning-Falle¹ zu unterscheiden. Die Messgenauigkeit dieser Messmethode wird durch das notwendig inhomogene Magnetfeld (*magnetische Flasche*) beschränkt [Dyc86b]. Daher versuchten Van Dyck et al. die Messung des g-Faktors des freien Elektrons zu verbessern, indem sie eine magnetische Flasche verwendeten, die nach Belieben ein- und ausgeschaltet werden kann [Dyc86a]. Die damit verbundenen technischen Schwierigkeiten konnten aber nicht befriedigend gelöst werden.

Wegen der wesentlich höheren Masse des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions gegenüber der des freien Elektrons ist für die Detektion eines spin-flips des Elektrons in einem $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion ei-

¹In einer Penning-Falle können elektrisch geladene Teilchen gespeichert werden (siehe dazu Abschnitt 3.2).

ne noch viel stärkere magnetische Flasche als für das freie Elektron nötig [Die99]. In einer von Stefan Stahl und Wolfgang Quint konzipierten und aufgebauten Apparatur wurde mit solch einer starken magnetischen Flasche im Frühjahr 1998 eine Messgenauigkeit von 10^{-6} erreicht. Nikolaus Hermanspahn schlug vor, die Beschränkungen der Messgenauigkeit durch die magnetische Flasche zu umgehen, indem nicht die magnetische Flasche selbst ein- und ausgeschaltet werden sollte, sondern stattdessen ein gespeichertes Ion zwischen einem homogenen und einem inhomogenen Magnetfeld hin und her transportiert werden sollte. Dabei tritt allerdings das Problem auf, dass zum Nachweis der Einstellung des Spins extreme Forderungen an die Konstanz der Speicherspannungen und der Bewegungsamplituden des Ions über den Transport hinweg gestellt werden müssen. Diese Arbeit zeigt, wie dieses Problem durch eine absolute Messung der Ausrichtung des Spins umgangen werden kann. Die so realisierte „Transport-Methode“ erlaubt es, eine um drei Größenordnungen höhere Präzision von 10^{-9} im g-Faktor des im $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion gebundenen Elektrons zu erreichen, als dies mit der in [Her00] verwendeten Methode möglich ist.

1.2 Motivation: Quantenelektrodynamik für hochgeladene Ionen

Motivation für die Messung des g-Faktors des gebundenen Elektrons ist die Untersuchung, ob die gegenwärtige Formulierung der QED im Bereich hoher Feldstärken versagt oder ob sogar die QED als physikalische Theorie erweitert werden muss [Ion88]. Durch die Möglichkeit, hochgeladene Ionen zu erzeugen, wurden sowohl viele experimentelle als auch theoretische Arbeiten stimuliert, in denen die Eigenschaften hochgeladener Ionen und damit die QED für extreme Feldstärken untersucht werden. Für die Rechenmethoden der QED in hochgeladenen Ionen wurde der Begriff Bound-State-QED (BS-QED) gebildet. Für einen Test der BS-QED sind vor allem die Hyperfeinstrukturaufspaltung [Kla94, See98, Tom98, Sha98], die Lambshift [Stö93, Bey95, Bei93, Per96, Che95, Sha99] und der g-Faktor [Her00, Qui95, Win99, Joh80, Tie77] der Elektronen-Hülle hochgeladener Ionen interessant. Die Messungen dieser drei Größen sind komplementär, da verschiedene Matrixelemente in ihre Berechnungen eingehen:

- für die Hyperfeinstrukturaufspaltung: $\sim \langle \cdot | \frac{1}{r^2} | \cdot \rangle$
- für die Bindungsenergie: $\sim \langle \cdot | \frac{1}{r} | \cdot \rangle$
- für den g-Faktor der Elektronen-Hülle: $\sim \langle \cdot | r | \cdot \rangle$.

Durch die $1/r^2$ -Abhängigkeit der Hyperfeinstrukturaufspaltung (siehe Abbildung 1.1) tragen die hohen Feldstärken hier mehr als bei den anderen Messgrößen bei. Allerdings bedingt dies auch, dass die Berechnung der Hyperfeinstrukturaufspaltung in hochgeladenen Ionen sehr stark von den Eigenschaften des Kerns abhängt. Diese Komplikation ist beim g-Faktor des Elektrons am geringsten [Per97]. Daher eignet sich die Messung des g-Faktors hervorragend, die BS-QED zu überprüfen, wohingegen die anderen beiden Messgrößen eher auf über die QED hinausgehende Physik empfindlich sind. Ein weiterer Vorteil von Messungen des g-Faktors des gebundenen Elektrons zum Test der BS-QED ist, dass er im Gegensatz zu Hyperfeinstruktur und

Lambshift in wasserstoffähnlichen Ionen aller Kernladungszahlen experimentell mit hoher Präzision zugänglich ist.

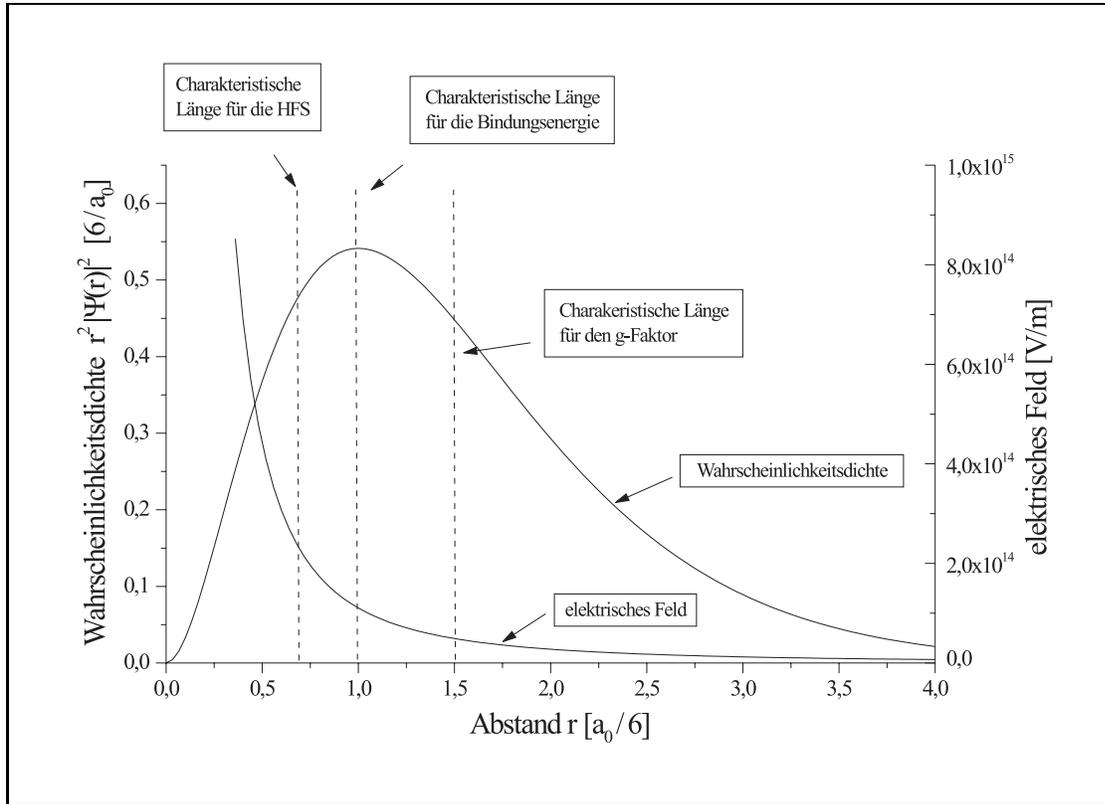


Abbildung 1.1: **Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des 1s-Elektrons in $^{12}\text{C}^{5+}$ als Funktion des Abstands vom Kern**

Als natürliche Skala wurde der Bohrsche Radius in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff $a_0/6$ gewählt. Eingezeichnet sind die charakteristischen Längen der Hyperfeinstruktur $\langle \cdot | 1/r^2 | \cdot \rangle^{-1/2}$, der Bindungsenergie $\langle \cdot | 1/r | \cdot \rangle^{-1}$ und des g-Faktors $\langle \cdot | r | \cdot \rangle$. Es ist zu erkennen, dass zur Hyperfeinstrukturaufspaltung die Wechselwirkungseigenschaften des Elektrons nahe am Kern, wo das elektrische Feld am größten ist ($E(\langle \text{Hfs} \rangle) = 2,3 \cdot 10^{14} \text{ V/m}$), mehr beitragen, als dies z.B. für den g-Faktor der Fall ist ($E(\langle g \rangle) = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ V/m}$).

1.2.1 Rechnungen in der Quantenelektrodynamik

Zur Zeit ist keine Möglichkeit bekannt, Vorhersagen der QED in mathematisch geschlossener Form anzugeben. Daher stützen sich alle Berechnungen in der QED auf störungstheoretische Methoden. In den meisten Fällen können die einzelnen Terme der Störungsreihe in der Feinstrukturkonstanten α durch Feynman-Graphen eindeutig charakterisiert werden. Ein Feynman-Graph besteht aus durchgezogenen Linien, die geladene Teilchen darstellen, und Wellenzügen, die das Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung, das Photon, darstellen (siehe Abbildung 1.2). Die Anzahl der inneren Photon-Linien gibt die Ordnung in der Entwicklung nach α an. Trotz der mit der Potenz von α stark anwachsenden Anzahl der möglichen Kopplungen und daher der beitragenden Terme, wird, da $\alpha \approx 1/137 \ll 1$ ist, der

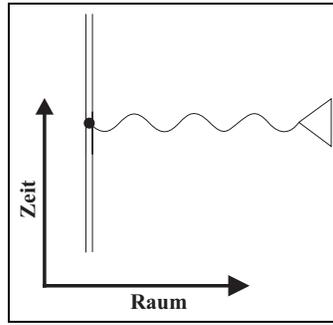


Abbildung 1.2: **Feynman-Graph 0. Ordnung**

Dieser Feynman-Graph stellt die direkte Ankopplung eines gebundenen Systems (Doppelinie) über ein virtuelles Photon (Wellenzug) an ein äußeres Magnetfeld (Dreieck) dar.

Beitrag jeder höheren Ordnung kleiner. Diese notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihen wurde bisher aber noch nicht mathematisch bewiesen.

1.2.2 Rechenmethoden der Bound-State-QED

Um den Rechenaufwand im Rahmen zu halten, werden in den meisten Fällen zur Auswertung der Matrixelemente die Wellenfunktionen der freien Dirac-Gleichung, also ebene Wellen, benutzt. Falls die beteiligten Teilchen aber noch an andere Teilchen gebunden sind, wie es für ein Elektron in einem hochgeladenen Ion der Fall ist, müssen die dadurch entstehenden Korrekturen mit Hilfe einer zusätzlichen Störungsreihe berücksichtigt werden. Für hochgeladene Ionen ist dies eine Reihe in $Z\alpha$, wobei Z die Kernladungszahl des Atomkerns bezeichnet. Für schwere Ionen ist $Z\alpha$ allerdings nicht mehr klein gegen 1 und die Reihe in $Z\alpha$ konvergiert nur noch langsam. Daher werden in neueren Berechnungen für Hoch- Z -Systeme die Eigenfunktionen der Dirac-Gleichung für das gebundene System als Grundlage für die Berechnung der Matrixelemente benutzt. Die auftretenden Integrale sind aber meist nur numerisch und schwerer zu berechnen als die Integrale einer freien Theorie.

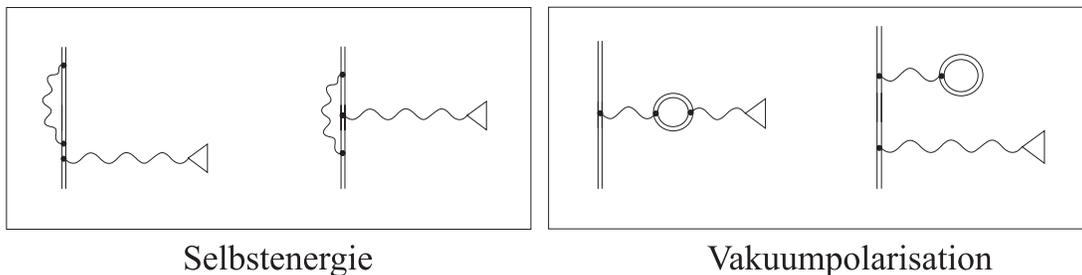


Abbildung 1.3: **1-Photon-Strahlungskorrekturen zum g-Faktor des gebundenen Elektrons**

Die zeitgespiegelten Graphen wurden weggelassen.

1.2.3 Der g-Faktor des gebundenen Elektrons

Eine der fundamentalen Eigenschaften des Elektrons ist sein mit seiner Ladung und seinem inneren Drehimpuls (Spin) verbundenes magnetisches Moment. Wird es in natürlichen Einheiten, dem Bohrschen Magneton μ_B , ausgedrückt, spricht man vom g-Faktor des Elektrons. Die Übereinstimmung des von Van Dyck, Schwinberg, Dehmelt et al. gemessenen g-Faktors des freien Elektrons

$$g_{\text{ex}} = 2,002\,319\,304\,376\,6 \quad (87) \quad (1.1)$$

[Dyc87a] mit der theoretischen Vorhersage von

$$g_{\text{th}} = 2,002\,319\,304\,432\,0 \quad (12) \quad (678) \quad (1.2)$$

[Hug99] auf 10 Stellen gilt als einer der größten Erfolge der QED. Dabei rührt der erste Fehler der Berechnungen von Hughes und Kinoshita von den numerischen Ungenauigkeiten der Berechnungen der $(\alpha/\pi)^4$ -Terme und unberücksichtigten nicht-elektronischen QED und nicht-QED Effekten her. Ihre zweite Unsicherheit ist durch die Genauigkeit gegeben, mit der die Feinstrukturkonstante α bekannt ist.

In Anwesenheit eines starken elektrischen Feldes, z.B. eines Atomkerns, wird der g-Faktor des Elektrons modifiziert. Ziel unseres Experimentes ist es, genau diese Modifikationen zu untersuchen. Folgende Effekte beeinflussen den g-Faktor des gebundenen Elektrons:

- **relativistische Korrekturen**, verursacht durch die Spin-Bahn-Kopplung des gebundenen Elektrons [Bre28]. Eine L-S-Kopplung tritt in der Dirac-Gleichung zwischen den grossen und kleinen Komponenten auch für s-Zustände auf.
- Änderung der **Strahlungskorrekturen** durch die Möglichkeit des Elektrons, während der Wechselwirkung mit dem äusserem Magnetfeld auch mit dem Kern Photonen austauschen zu können [Gro71, Per97, Blu97].

Da diese Einflüsse von der Stärke und Form des elektrischen Feldes abhängen, das seinerseits von der Kernstruktur abhängt, müssen bei den Rechnungen zusätzlich noch die Mitbewegung und die Ausdehnung des Kerns berücksichtigt werden. In Abbildung 1.4 sind die einzelnen Beiträge zur Änderung des g-Faktors des gebundenen Elektrons für wasserstoffähnliche Ionen als Funktion der Kernladungszahl Z aufgetragen. Man erkennt, dass mit der geplanten Messgenauigkeit von etwa 10^{-7} für den g-Faktor des gebundenen Elektrons in wasserstoffähnlichem Uran ($^{238}\text{U}^{91+}$) die BS-QED-Strahlungskorrekturen schon im Promille-Bereich verifiziert werden könnten. Da es aber aufwendig ist, das für die hier vorgestellte Messmethode nötige einzelne, wasserstoffähnliche Uran-Ion zu präparieren und in einer Penning-Falle einzufangen, wurden zunächst Messungen an wasserstoffähnlichem Kohlenstoff ($^{12}\text{C}^{5+}$) durchgeführt. In Tabelle 1.1 sind die einzelnen Beiträge der verschiedenen Korrekturen zum g-Faktor des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff aufgelistet. Mit der von uns bereits erreichten Messgenauigkeit von 10^{-6} konnte bei $Z = 6$ ($^{12}\text{C}^{5+}$) der relativistische Spin-Bahn-Kopplungsterm mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-3} verifiziert werden [Her00, Her99]. Mit der hier präsentierten Messgenauigkeit des g-Faktors des gebundenen Elektrons von $5 \cdot 10^{-9}$ können schon die BS-QED-Strahlungskorrekturen in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff mit einer relativen Genauigkeit von 0,6% und der relativistische Spin-Bahn-Kopplungsterm mit $4 \cdot 10^{-6}$

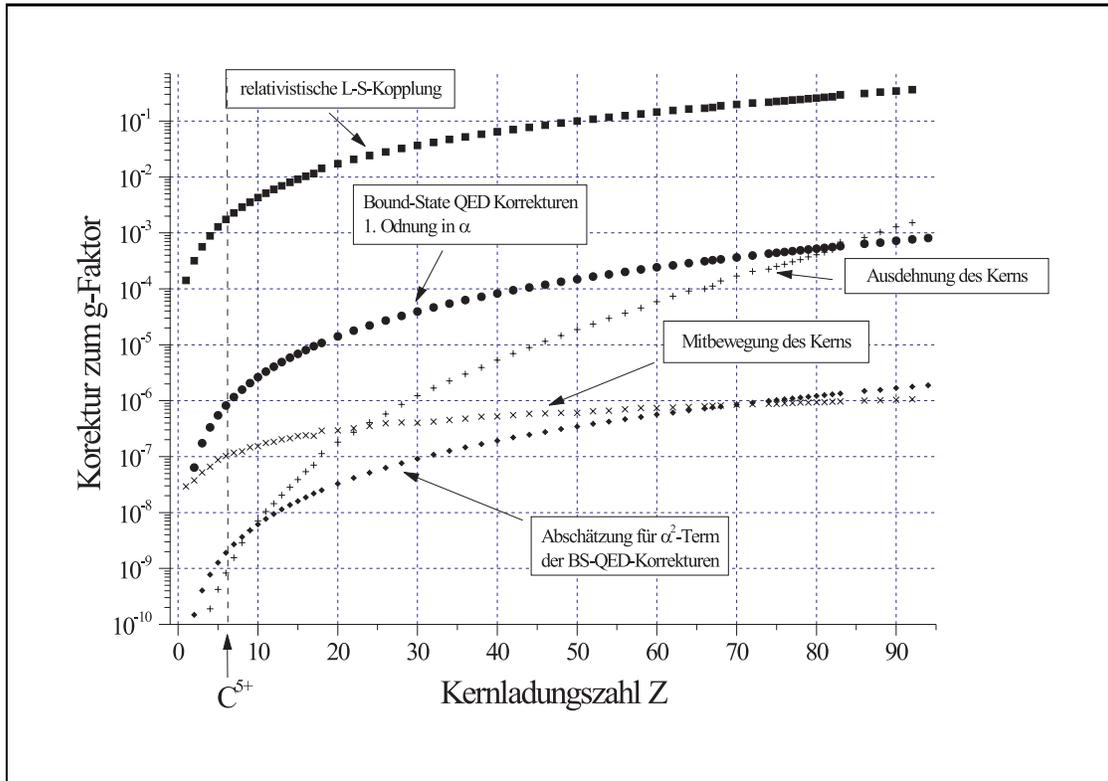


Abbildung 1.4: **Korrekturen zum g-Faktor des gebundenen Elektrons**

Aufgetragen sind die wichtigsten Korrekturen des g-Faktors des im 1-s-Zustand gebundenen Elektrons in wasserstoffähnlichen Ionen zu dem des freien Elektrons (aus [Bei00b], siehe dazu auch [Bre28, Gro71, Per97, Bei00a]). Es wurde nur der Betrag der Korrekturen aufgetragen.

g =	2	freie Dirac-Theorie
-	0,001 278 645 8	Dirac-Gleichung für gebundenen Zustand
+	0,002 319 304 4	QED freies Elektron
+	0,000 000 844 4 (12)	BS-QED 1. Ordnung
+	0,000 000 087 5 (09)	Mitbewegung des Kerns
+	0,000 000 000 4	Ausdehnung des Kerns
+	0,000 000 000 0	Polarisation des Kerns
-	(50)	Abschätzung BS-QED 2. Ordnung
g =	2,001 041 590 9 (21) (50)	Theoriewert für $^{12}\text{C}^{5+}$

Tabelle 1.1: **Korrekturen zum g-Faktor des in $^{12}\text{C}^{5+}$ gebundenen Elektrons**

Auflistung der in den Rechnungen berücksichtigten Korrekturen zum g-Faktor in $^{12}\text{C}^{5+}$ [Bei99, Bei00b]. Um einer möglichen Abhängigkeit der numerischen Berechnung der Mitbewegung des Kerns von der der BS-QED 1. Ordnung Rechnung zu tragen, wurden die Fehler dieser beiden Rechnungen linear aufaddiert. Der zweite Fehler im Theoriewert für den g-Faktor ist eine obere Abschätzung für die noch nicht berechneten BS-QED-Korrekturen 2. Ordnung in α [Bei99].

aufgelöst werden. Gleichzeitig werden schon die Mitbewegung des Kohlenstoffkerns und die BS-QED-Strahlungskorrekturen 2. Ordnung in α wichtig. Allerdings sind die Feldstärken, die das 1-s-Elektron im Kohlenstoff erfährt, für hochgeladene Ionen noch relativ gering, sodass sich eventuelle Nichtlinearitäten der QED im Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ noch nicht so stark bemerkbar machen [Ion88]. Somit verifiziert die hier vorgestellte Messung vor allem die Rechenmethoden der BS-QED (siehe Abschnitt 1.2).

Kapitel 2

Experimenteller Aufbau

Das Experiment wurde von Wolfgang Quint und Stefan Stahl geplant. Der Aufbau erfolgte durch Stefan Stahl, Nikolaus Hermanspahn und Manfred Tönges. Eine detaillierte Beschreibung des Aufbaus befindet sich in der Dissertation von Stefan Stahl [Sta98] und den Diplomarbeiten von Nikolaus Hermanspahn [Her96] und Manfred Tönges [Tön96]. Daher wird an dieser Stelle nur kurz auf den Aufbau des Experiments eingegangen. Erste Tests und Messungen wurden von Nikolaus Hermanspahn [Her96, Her99], Michael Diederich [Die97], Hartmut Häffner [Häf98] und Marcel Immel [Imm98] durchgeführt. Die erste direkte Bestimmung des g-Faktors des Elektrons in einem hochgeladenen Ion ($^{12}\text{C}^{5+}$) gelang Nikolaus Hermanspahn [Her00, Her99] und Hartmut Häffner Anfang 1998.

Im Experiment wird ein einzelnes wasserstoffähnliches Ion mit Hilfe eines magnetischen und eines elektrischen Feldes – einer so genannten Penning-Falle – gespeichert (siehe zur Erklärung der Penning-Falle Abschnitt 3.2) und elektronisch nachgewiesen (siehe Kapitel 4). Im Folgenden wird versucht, einen kurzen Überblick über die dazu verwendete Apparatur zu geben:

Überblick über den experimentellen Aufbau

Die Apparatur besteht aus folgenden Komponenten:

- der Fallenkammer mit der zylindrischen Dreifach-Falle
- den Schwingkreisen und Verstärkern an der Fallenkammer, um die Ionensignale zu verstärken
- einem supraleitenden Magneten, um das Magnetfeld für die Penning-Falle bereitzustellen
- den Behältern für flüssiges Helium und für Stickstoff, um die Fallenkammer auf 4 Kelvin abzukühlen
- der Auswertelektronik zur Fourier-Analyse der Ionenbewegungen
- einer Präzisionsspannungsquelle, um eine konstante Fallenspannung gewährleisten zu können

- ca. 10 Frequenzgeneratoren zur Analyse und zur Manipulation der Ionenbewegungen
- der Elektronik, um die Fallenspannungen zu steuern
- einer Mikrowellenanlage zum Induzieren von spin-flips
- einem Personal Computer, um den komplexen Messablauf zu kontrollieren und zu steuern.

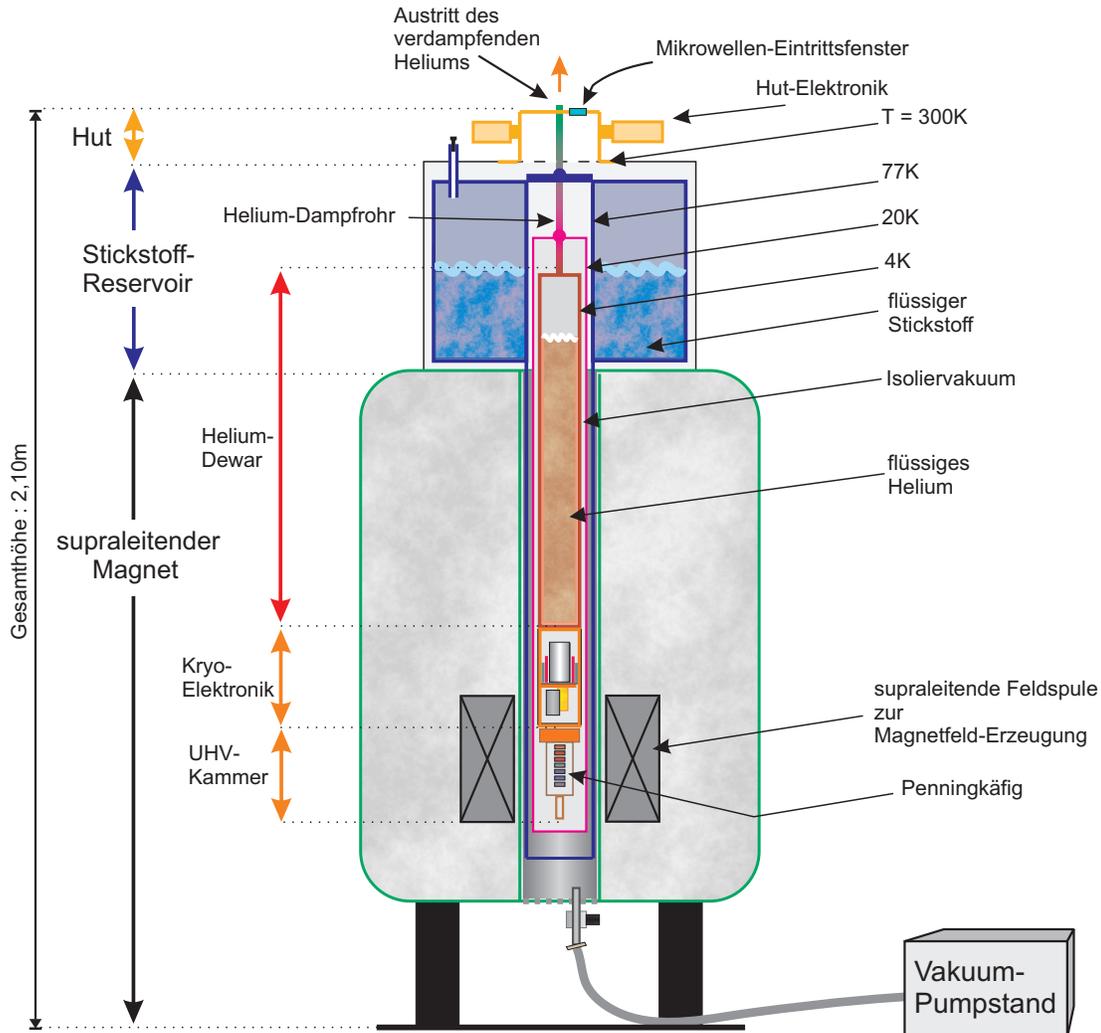


Abbildung 2.1: Übersicht über den mechanischen Teil der Apparatur

Das Kernstück der Apparatur bilden drei Ionenfallen. Diese dienen dazu, eine Ionenwolke zu speichern, daraus ein einzelnes Ion zu präparieren, und schließlich dieses für eine lange Zeit für die Messungen bereitzustellen. Die Fallen bestehen aus insgesamt 13 aufeinander gestapelten ringförmigen Elektroden (siehe Abbildung 2.2). Werden an die Ringe geeignete Gleichspannungen angelegt, so können geladene Teilchen im Innern der Fallen in Richtung der Symmetrieachse (z -Achse) nicht entweichen. Um die Teilchen auch in radialer Richtung zu speichern, werden sie durch ein starkes magnetisches Feld auf Zyklotronbahnen gezwungen (siehe Abschnitt 3.2). Das

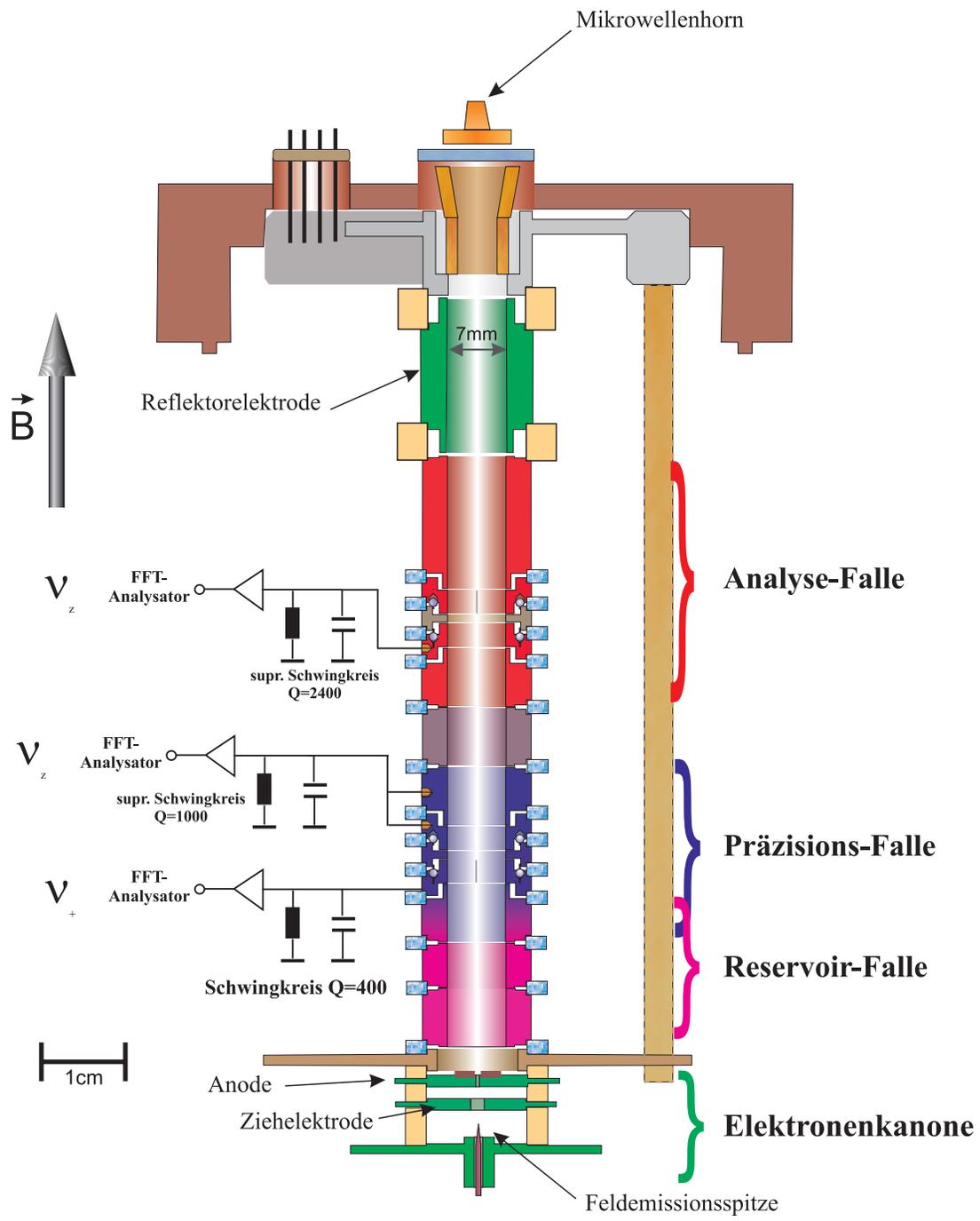


Abbildung 2.2: **Aufbau der Elektroden**

Die Distanz zwischen dem Mittelpunkt der Analyse- und dem der Präzisions-Falle beträgt 28,7 mm.

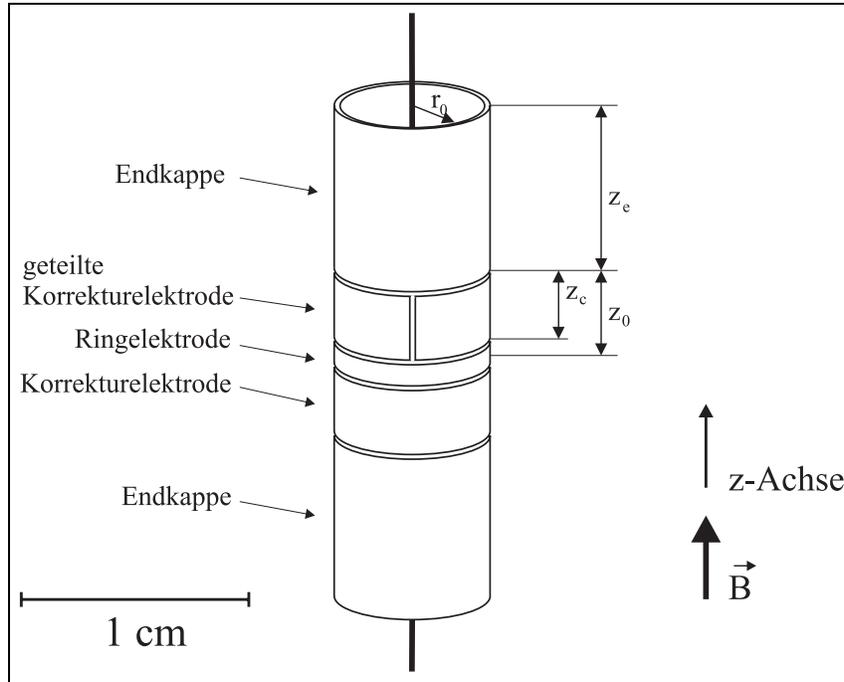


Abbildung 2.3: **Geometrie sowohl der Präzisions- als auch der Analyse-Falle**
In Tabelle 2.1 sind die Maße der Fallen angegeben.

Größe	Abmessung [mm]
Radius r_0	$3,50 \pm 0,02$
Spaltbreite b	$0,140 \pm 0,002$
Länge der Ringelektrode z_r	$0,92 \pm 0,02$
Länge der Korrektorelektroden z_c	$2,75 \pm 0,02$
Länge der Endkappen z_e	$> 6,80$
charakteristische Fallendimension $d = \frac{1}{2} \sqrt{z_0^2 + \frac{1}{2} r_0^2}$	$2,99 \pm 0,03$

Tabelle 2.1: **Abmessungen der Präzisions- und Analyse-Falle**
Vergleiche dazu Abbildung 2.3.

Magnetfeld von 3,8 T wird von einem kommerziellen NMR-Magneten bereitgestellt, dessen Spulen aus supraleitendem Material (NbTi) gefertigt sind. Supraleitende Magneten zeichnen sich dadurch aus, dass mit ihnen starke (bis zu 12 T), extrem stabile ($\Delta B/B \approx 10^{-9}$ pro Monat) und auch sehr homogene Magnetfelder erzeugt werden können. Eine hohe Stabilität und Homogenität des Magnetfeldes sind für das Experiment von entscheidender Bedeutung, da nur so eine geringe Breite der Resonanzen und damit eine hohe Präzision erreicht werden kann. Eine der Fallen, die Analysefalle, wurde mit einem Nickel-Ring ausgestattet, der eine Inhomogenität im Magnet-

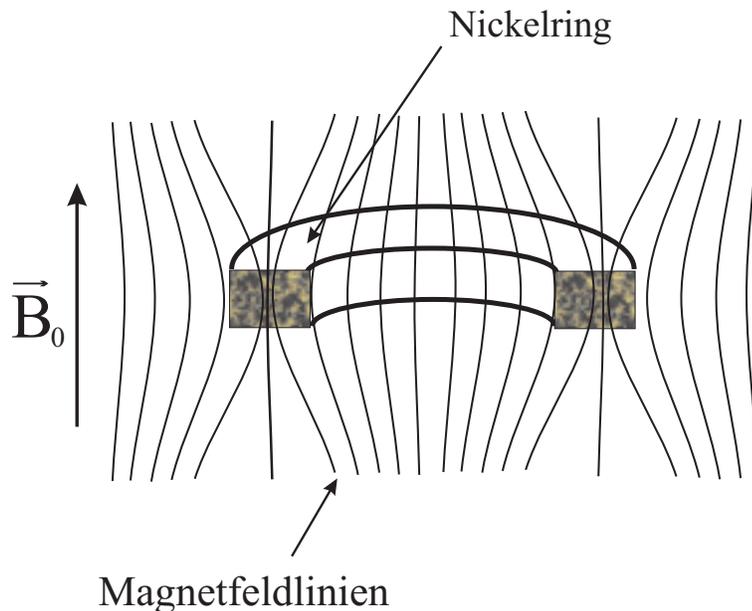


Abbildung 2.4: **Verformung der Magnetfeldlinien durch den Nickel-Ring**

Die Ringelektrode aus Nickel verändert die magnetische Flussdichte, indem anschaulich gesprochen die Magnetfeldlinien in das ferromagnetische Material hineingezogen werden. Die Dichte der Feldlinien gibt die Stärke des Magnetfeldes an.

feld (magnetische Flasche) erzeugt. Dies ist zum Nachweis der Einstellung des Spins des Elektrons notwendig (siehe die Gleichungen 3.16 und 3.27). Um die störenden Einflüsse der restlichen unvermeidbaren Magnetfeld-Inhomogenitäten und die der elektrischen Feldfehler klein zu halten, werden die Bewegungsamplituden der Ionen durch Widerstandskühlen [Win75] auf wenige Mikrometer begrenzt. Das Kühlen der Fallenkammer auf 4 K mittels flüssigem Helium ermöglicht durch das Kryopumpen ein extrem gutes Vakuum mit einem Druck von weniger als 10^{-16} mbar. Dies macht es überhaupt erst möglich, hochgeladene Ionen wie C^{5+} über Monate hinweg zu speichern. Wäre das Vakuum schlechter, rekombinierten die hochgeladenen Ionen schnell mit den Elektronen des Hintergrundgases.

Der Nachweis der Ionen erfolgt über die von ihrer Bewegung zwischen den Fallenelektroden induzierten Spiegelströme (siehe Kapitel 4). Damit diese Ströme gemessen werden können, sind die Elektroden mit Spulen, die zum Teil aus bei 4 K supraleitendem NbTi bestehen, verbunden, die zusammen mit den Kapazitäten der Falle und den Zuleitungen Resonanzkreise bilden. Die Resonanzkreise haben bei ihren Resonanzfrequenzen einen hohen Ohmschen Widerstand (bis zu 20 M Ω), über den durch den induzierten Strom in der Größenordnung von Femtoampère eine

Spannung im Bereich von einigen Nanovolt abfällt. Da Kapazitäten gute Wechselstromleiter sind und somit einen Teil der Signalspannung kurzschließen, wird die Impedanz des Signals nahe an der Falle noch im kalten Bereich mit einem Feldeffekt-Transistor gewandelt. So wird erreicht, dass die Kapazität der immerhin 1 m langen Signalleitungen aus der Apparatur (vergleiche Abbildung 2.1) keine Rolle spielt. Zwei rauscharme Verstärkerstufen ($U_{\text{rausch}} \approx 1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$) im Raumtemperaturbereich sorgen für eine weitere Verstärkung des Signals. Anschließend wird eine Fourier-Transformation durchgeführt und die erhaltenen Spektren werden in den Personal-Computer eingelesen. Das von uns selbst geschriebene Programm erlaubt eine automatische Auswertung der Spektren z.B. durch Fits. Die daraus gewonnenen Informationen über die Bewegung des Ions werden dann vom Computer genutzt, um z.B. flexibel auf die Energie des Ions oder die Einstellung des Spins des Elektrons zu reagieren. Diese Flexibilität ist eine Grundvoraussetzung für das Gelingen des in dieser Dissertation beschriebenen komplizierten Messablaufs. Zusätzliche Elektronik, wie Synthesizer, Spannungsversorgungen und ein Oszilloskop werden vom Computer über ein IEEE-Interface gesteuert. Auch die gesamte von Stefan Stahl [Sta98] entwickelte Auswerteelektronik kann vom Computer ferngesteuert werden. Außerhalb der Apparatur ist auch die Mikrowellenanlage aufgebaut, die aus einem kommerziellen Mikrowellengenerator, der ein Mikrowellensignal bei 17 GHz bereitstellt, einem Verstärker und einem Versechsfacher besteht. Die Mikrowellenanlage erzeugt bei 105 GHz $10 \mu\text{W}$ an Strahlungsleistung. Sie ist in [Sta98, Tön96, Imm98] beschrieben.

Für detaillierte Beschreibungen des Aufbaus möchte ich hier nochmals auf die am Anfang des Kapitels genannten Arbeiten verweisen (insbesondere [Sta98] und [Her96]).

Kapitel 3

Theoretisches

Ziel des Experiments ist die Bestimmung des g-Faktors des Elektrons in extrem starken elektrischen Feldern. Als Quelle eines starken elektrischen Feldes eignen sich hervorragend Atomkerne. Mit mehr als 10^{17} V/m (am Erwartungswert des Ortes des 1-s-Elektrons in U^{91+}) sind die erreichbaren Feldstärken um zehn Größenordnungen höher als die, die sich makroskopisch erreichen lassen. Um Messergebnisse sicher interpretieren zu können, bevorzugt man physikalisch einfache Systeme. Daher sind Messungen des g-Faktors eines Elektrons anvisiert worden, das in einem wasserstoffähnlichem Ion gebunden ist, dessen Kern keinen Eigendrehimpuls hat. In diesem speziellen Fall wird das gesamte magnetische Moment des Ions nur vom Elektron verursacht. Daher ist dann eine Messung des magnetischen Moments des Ions eine Messung des magnetischen Moments des gebundenen Elektrons. Als erstes Testobjekt wurde $^{12}C^{5+}$ ausgewählt.

3.1 Bestimmung des g-Faktors des gebundenen Elektrons

Der g-Faktor des Elektrons verknüpft sein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ mit seinem inneren Drehimpuls (Spin) \vec{S} wie folgt:

$$\vec{\mu}_s = -g \frac{e}{2m_e} \vec{S}. \quad (3.1)$$

Die vom inneren Drehimpuls herrührende magnetische Energie des Elektrons in einem äußeren magnetischen Feld $\vec{B} = B_z e_z$ ist durch

$$E_{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -g \frac{e}{2m_e} S_z B_z = -g m_S \mu_B B_z \quad (3.2)$$

gegeben. In Gleichung 3.2 bezeichnet m_S die Eigenwerte des Spin-Operators \vec{S} . Da das Elektron ein Spin-1/2-System ist, nimmt die magnetische Spin-Quantenzahl die Werte $\pm 1/2$ an. Um den g-Faktor zu bestimmen, ist es gemäß Gleichung 3.2 nötig, die Energieaufspaltung E_{mag} und das Magnetfeld B zu messen. Die Energieaufspaltung E_{mag} wird über das Induzieren von spin-flips durch Einstrahlen von Mikrowellen der Energie

$$E_{\text{mag}} = \hbar \omega_L \quad (3.3)$$

unter Beobachtung der spin-flip-Rate als Funktion der Mikrowellenfrequenz gemessen. ω_L bezeichnet die Larmor-Präzessionsfrequenz des Elektrons. Das Magnetfeld kann über die Messung der Zyklotronfrequenz ω_c^e eines freien Elektrons

$$\omega_c^e = \frac{e}{m_e} B_z \quad (3.4)$$

kalibriert werden. Aus diesen Messgrößen ergibt sich der g-Faktor des Elektrons mit den Gleichungen 3.2 und 3.3 zu:

$$g = 2 \frac{\omega_L}{\omega_c^e} . \quad (3.5)$$

Da das Elektron im Ion gebunden ist, ist es einfacher, die Zyklotronfrequenz des gespeicherten Ions zu messen. Dieses Vorgehen hat den zusätzlichen Vorteil, dass das Magnetfeld auch dort gemessen wird, wo sich das gebundene Elektron während des spin-flips aufhält. Mit dem Verhältnis der Zyklotronfrequenzen des Ions und des Elektrons ω_c^i/ω_c^e , dessen Wert für das $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion den Veröffentlichungen von Van Dyck et al. [Far95, Dyc95, Nis99] entnommen werden kann¹, lässt sich der g-Faktor wie folgt umschreiben:

$$g = 2 \frac{\omega_L}{\omega_c^i} \left(\frac{\omega_c^i}{\omega_c^e} \right) . \quad (3.6)$$

Dies bedeutet, dass sich der g-Faktor des Elektrons aus der Messung der Larmor-Präzessionsfrequenz des Elektrons und der der Zyklotronfrequenz des Ions ergibt.

3.2 Die Penning-Falle

Die zur Messung des g-Faktors nötige Energieaufspaltung zwischen den beiden Spin-Einstellungen wird durch ein Magnetfeld hervorgerufen. Überlagert man diesem Magnetfeld zusätzlich ein geeignetes elektrisches Feld, kann eine Speicherung und damit eine praktisch beliebig lange Beobachtungszeit geladener Teilchen erreicht werden: Das Magnetfeld zwingt die Teilchen auf eine Zyklotronbahn, sodass sie senkrecht zu diesem (radiale Richtung) nicht entweichen können. Für die Speicherung in Richtung des Magnetfeldes sorgt ein elektrisches Feld, das so gewählt ist, dass für das Teilchen entlang der z -Achse ein Potentialminimum vorliegt. Diese Kombination aus magnetischen und elektrischen Feldern wird als Penning-Falle bezeichnet. In einer idealen Penning-Falle (homogenes Magnetfeld und harmonisches elektrisches Potential) führt ein geladenes Teilchen drei voneinander unabhängige Oszillationen aus (siehe auch Abbildung 3.1):

- Die **axiale Schwingung** in Richtung des Magnetfeldes, verursacht durch das elektrische Feld:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial z^2}}(0) = \sqrt{\frac{q}{m} \frac{C_2 V_0}{d^2}} \approx 2\pi \cdot 1 \text{ MHz} . \quad (3.7)$$

¹Für schwere hochgeladene Ionen sind diese Verhältnisse noch nicht bekannt. Mit unserer Apparatur lässt sich jedoch das Verhältnis der Zyklotronfrequenzen des zu vermessenden hochgeladenen Ions und eines Referenzions (z.B. $^{12}\text{C}^{6+}$) mit hinreichender Genauigkeit bestimmen, sodass dann auch das Verhältnis der Zyklotronfrequenzen des zu vermessenden Ions und des Elektrons bekannt ist [Häf00].

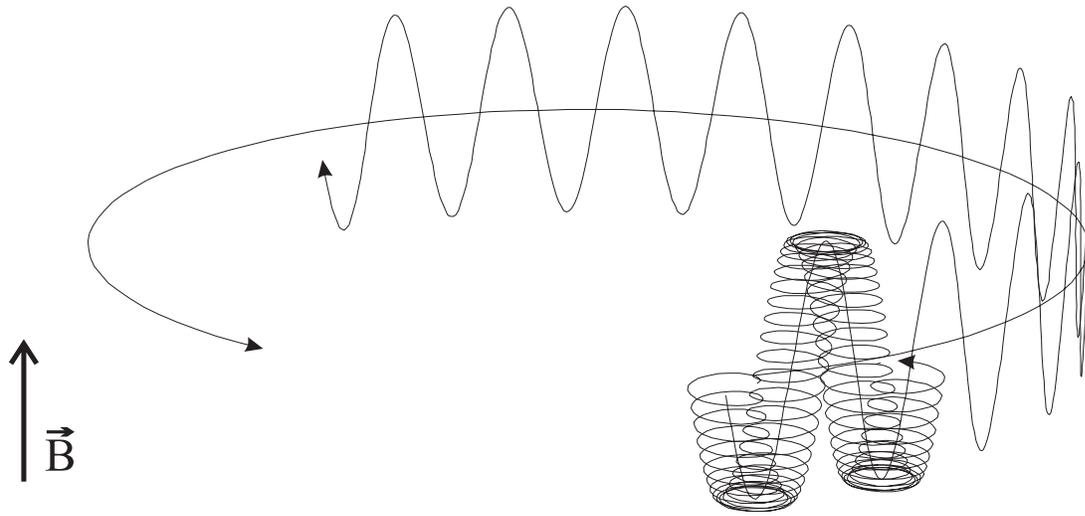


Abbildung 3.1: **Trajektorie eines geladenen Teilchens in einer idealen Penning-Falle**

Es sind die schnelle kreisförmige Zyklotronbewegung, die axiale Oszillation entlang der Magnetfeldlinien und die langsame Magnetrondrift um das Zentrum der Falle zu sehen.

Hier wurde die z -Achse in Richtung des Magnetfeldes gelegt und ihr Nullpunkt fällt mit dem Minimum der potentiellen Energie E_{pot} zusammen. q/m bezeichnet das Verhältnis der Ladung zur Masse des Teilchens und V_0 die Spannungsdifferenz U_{Ring} zwischen der Ringelektrode und den Endkappen (siehe Abbildung 2.3). C_2 (siehe Gleichung 3.19) und d (siehe Tabelle 2.1) sind geometrische Größen der Falle. Angegeben ist weiterhin die in unserem Experiment für $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ionen typische axiale Frequenz.

- Die kreisförmige **reduzierte Zyklotronbewegung** senkrecht zum Magnetfeld:

$$\omega_+ = \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \approx \omega_c - \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} \approx 2\pi \cdot 24 \text{ MHz} . \quad (3.8)$$

- Die ebenfalls kreisförmige **Magnetronbewegung** senkrecht zum Magnetfeld:

$$\omega_- = \frac{\omega_c}{2} - \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \approx \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} \approx 2\pi \cdot 0,02 \text{ MHz} . \quad (3.9)$$

Die Näherungen gelten nur für die auch in unserem Experiment erfüllte Relation:

$$\omega_+ \gg \omega_z \gg \omega_- . \quad (3.10)$$

Für eine ideale Penning-Falle, d.h. homogenes Magnetfeld und quadrupolförmiges elektrisches Feld mit der gleichen Symmetrieachse, lässt sich die freie Zyklotronfrequenz ω_c eines gespeicherten Teilchens aus den Eigenfrequenzen des Teilchens wie folgt bestimmen:

$$\omega_c = \omega_+ + \frac{\omega_z^2}{2\omega_+} . \quad (3.11)$$

Ferner kann man zeigen [Bro82, Bro86a], dass auch für nicht ganz ideale Verhältnisse (einer Verkippung der Fallenachse gegenüber der Magnetfeldachse und einer

Elliptizität des elektrischen Feldes) die im Folgenden „Invarianztheorem“ genannte Gleichung erfüllt ist:

$$\omega_c^2 = \omega_+^2 + \omega_z^2 + \omega_-^2 . \quad (3.12)$$

Diese Beziehung ist hilfreich, da sie es erlaubt, die gesuchte freie Zyklotronfrequenz, die in einer Penning-Falle keine Eigenfrequenz ist, in einem homogenen Magnetfeld mit hoher Präzision zu bestimmen. Dazu müssen allerdings alle drei Eigenfrequenzen ω_+ , ω_z und ω_- des Teilchens gemessen werden. Der Einfluss der Messunsicherheiten der einzelnen Frequenzen auf die so berechnete freie Zyklotronfrequenz beträgt:

$$\Delta\omega_c = \frac{\omega_+}{\omega_c} \Delta\omega_+ + \frac{\omega_z}{\omega_c} \Delta\omega_z + \frac{\omega_-}{\omega_c} \Delta\omega_- . \quad (3.13)$$

Es muss für eine präzise Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz also vor allem die reduzierte Zyklotronfrequenz genau gemessen werden.

Um die Einstellung des Elektronen-Spins detektieren zu können, kann das Magnetfeld bewusst inhomogen gemacht werden[Deh86]. Die potentielle Energie E_{pot} aus Gleichung 3.7 setzt sich in diesem Fall aus der elektrischen und der magnetischen potentiellen Energie (E_{el} und E_{mag}) zusammen:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} + E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 - \mu_z B_z . \quad (3.14)$$

Hierbei bezeichnet μ_z die z -Komponente des magnetischen Moments des Teilchens. Nimmt man das Magnetfeld als symmetrisch zur Ebene $z = 0$ an und berücksichtigt nur die niedrigsten zwei Ordnungen in einer Entwicklung nach der z -Koordinate, so wird das Magnetfeld in z -Richtung durch

$$B(z) \approx B_0^z + B_2^z z^2 + \dots \quad (3.15)$$

charakterisiert. Nach Einsetzen der Gleichungen 3.15 und 3.14 in 3.7 folgt:

$$\omega_{z,\text{mag}} = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial z^2}(0)} = \sqrt{\omega_z^2 - \frac{2}{m} \mu_z B_2^z} \approx \omega_z - \frac{1}{m\omega_z} \mu_z B_2^z . \quad (3.16)$$

Das bedeutet, dass ein spin-flip, der das Vorzeichen des magnetischen Moments μ_z ändert, sich durch die Änderung der axialen Rückstellkraft bemerkbar macht. Genauso ändert auch eine von Null verschiedene Zyklotronenergie über ihr magnetisches Bahnmoment die axiale Frequenz (siehe auch Gleichung 3.28). Damit ist sowohl eine Änderung der Ausrichtung des Spins als auch eine Änderung der Zyklotronenergie mittels einer Messung der axialen Frequenz des Teilchens messbar.

3.3 Das elektrische Speicherfeld

Für die Optimierung des elektrischen Speicherfeldes und die Abschätzung eventueller systematischer Fehler ist es wichtig, eine möglichst präzise Beschreibung des elektrischen Speicherfeldes zu besitzen. Eine Berechnung des Potentials Φ , das durch zylindrische Elektroden, wie wir sie benutzen (siehe Abbildungen die 2.3,2.2 und Tabelle 2.1), erzeugt wird, ist in [Gab89] skizziert. Für die Berechnungen werden die Randbedingungen nach den Eigenfunktionen der Laplace-Gleichung entwickelt. In

zylindrischen Koordinaten (r, ϕ, z) lauten die zylindersymmetrischen Eigenfunktionen der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$:

$$\Phi_\lambda = J_0(i\lambda r) \sin(\lambda z). \quad (3.17)$$

Hier bezeichnet J_0 die Bessel-Funktion 0. Ordnung. Um das Potential in einer zylindrischen Falle zu erhalten, wird zuerst das Potential im Innern eines unendlich langen Zylinders berechnet, der in der Mitte einen Potentialsprung von V aufweist. In [Häf98] wird zusätzlich angenommen, dass dieser Potentialsprung nicht auf unendlich kleinem Raum erfolgen kann. Das Potential innerhalb eines solchen Zylinders ist dann gegeben durch [Häf98]:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{lV}{n^2 b \pi^2} \frac{\sin(n \frac{b}{2l} \pi) + \sin(n(1 - \frac{b}{2l}) \pi) + \sin(n\pi)}{J_0(i \frac{n\pi}{l} r_0)} J_0(i \frac{n\pi}{l} r) \sin(\frac{n\pi}{l} z). \quad (3.18)$$

b bezeichnet die Breite des Spalts zwischen den beiden Halbzylindern und r_0 ihren Radius. Die Periodenlänge l taucht notwendig auf, da die Randbedingungen in eine Fourier-Reihe entwickelt wurden. Sie sollte für Berechnungen mindestens viermal so groß wie die Abmessung der zu berechnenden Elektrodenkonfiguration gewählt werden. Die Randbedingungen für das Potential in einer zylindrischen Falle können durch Überlagern vieler solcher Zylindersegment-Lösungen mit unterschiedlichen Mittenpositionen entlang der z -Achse erfüllt werden. In Abbildung 3.2 ist das Potential für die von uns verwendete 5-polige Zylinderfalle (siehe Abbildung 2.3) auf der z -Achse dargestellt. Dabei sind die Endkappen auf Potential 0, die Ringelektrode auf Potential V_0 und die Korrektorelektroden auf Potential $0,876 V_0$ gelegt worden. Dieses Verhältnis aus Spannung an den Korrektorelektroden und der Ringelektrode wird im Folgenden tuning-ratio genannt. Die besondere Wahl der Spannungen hat die bestmögliche Harmonizität des Potentials zur Folge. Dies bedeutet, dass die Bewegungsfrequenz der Ionen nahezu unabhängig von ihrer Bewegungsamplitude ist.

3.3.1 Abschätzung der elektrischen Feldfehler

Als Feldfehler, die dann zu einem systematischen Fehler bei der Bestimmung des g -Faktors führen (siehe Abschnitt 6.2.3), werden im Folgenden Abweichungen des elektrischen Feldes von dem eines harmonischen Potentials bezeichnet. Axialsymmetrische Feldfehler können klassifiziert werden, indem das elektrische Feld durch die polfreien axialsymmetrischen Eigenfunktionen des Laplace-Operators charakterisiert wird. In Zylinderkoordinaten z, r, ϕ sind dies die Legendre-Polynome P_l , multipliziert mit $(r/d)^k$:

$$\Phi(z, r) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \left(\frac{r}{d}\right)^k P_l \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right). \quad (3.19)$$

Für ein harmonisches Potential gilt $C_2 = 1$ und $C_l = 0$ für alle anderen l . Falls C_4 beziehungsweise C_6 nicht verschwinden, gilt für die axiale Frequenz ω_z eines gespeicherten Teilchens (siehe auch Gleichung 3.25) [Gab89, Bro86a]:

$$\omega_z = \omega_{z, E_z=0} \left[1 + \frac{3 C_4}{2 C_2} \frac{E_z}{E_{\max}} + \frac{15 C_6}{4 C_2} \left(\frac{E_z}{E_{\max}}\right)^2 \right]. \quad (3.20)$$

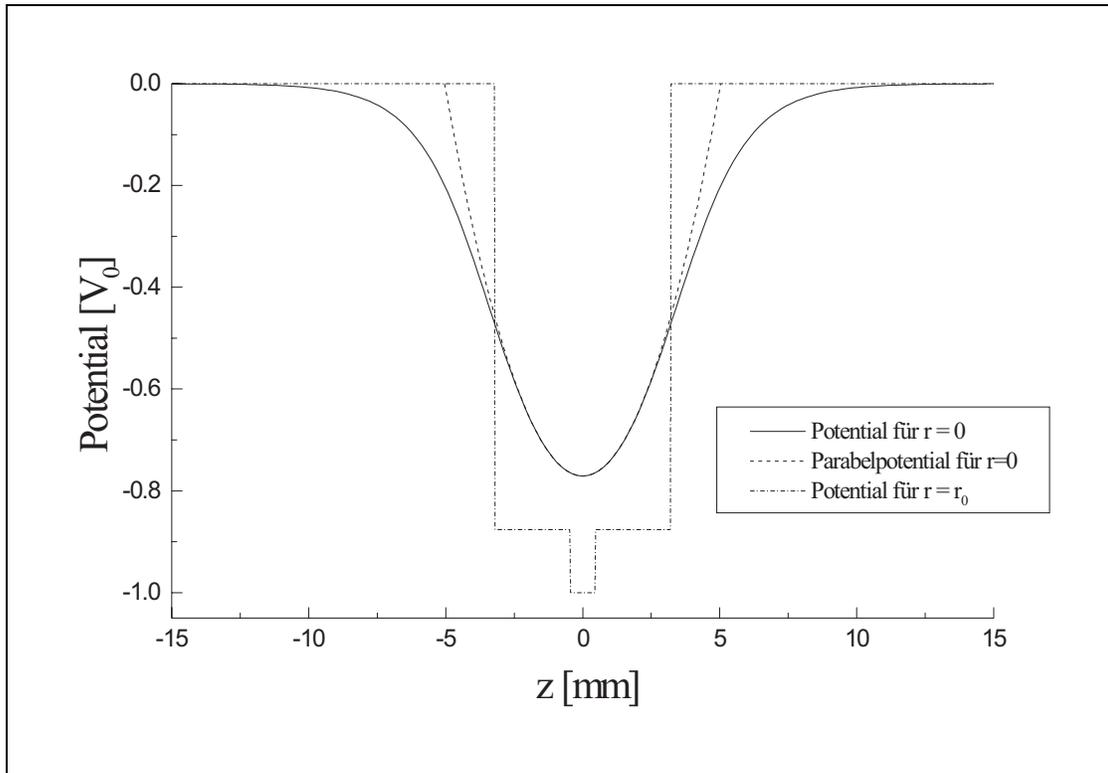


Abbildung 3.2: **Potential in einer zylindrischen Falle**

Der Vergleich mit einem Parabelpotential zeigt, dass für kleine Abstände vom Fallenzentrum ein gespeichertes Teilchen eine lineare Rückstellkraft erfährt. Dies gilt aber nur bei geeigneter Wahl des tuning-ratios (siehe Abschnitt 3.3 und 3.3.1)

Hier bezeichnet E_z die maximale kinetische Energie des Teilchens in z -Richtung und E_{\max} die maximale Energie, bei der das Teilchen gespeichert bleibt. Diese Beschreibung reicht bei unserer Fallengeometrie für Energien kleiner als 1 eV bei einer Fallenspannung von 10 V aus. Bei höheren Energien muss wegen des schnell zunehmenden Einflusses der höheren Ordnungen der Entwicklung des Potentials die Berechnung der Bewegungsfrequenz numerisch durchgeführt werden [Häf98].

Aus dem Potentialverlauf in einer zylindrischen Falle nach Gleichung 3.18 ergibt sich mit Gleichung 3.19 für unsere Falle folgende Abhängigkeit des C_4 -Terms vom tuning-ratio:

$$\Delta C_4 = 0,54(1) \cdot \Delta tr . \quad (3.21)$$

Hier bezeichnet Δtr die Abweichung des tuning-ratios vom optimalen Wert von 0,876. Die Unsicherheit von 2% rührt von den Fertigungstoleranzen der Elektroden her. Für die typischen im Experiment vorkommenden Energien kleiner 100 meV spielt der C_6 -Term noch keine Rolle. Er wird daher hier vernachlässigt. Gleichung 3.21 eingesetzt in Gleichung 3.20 ($C_2 = 0,54(1)$) ergibt dann:

$$\frac{\Delta \omega_z}{\omega_{z,E_z=0}} = 1,49(1) \cdot \frac{E_z}{E_{\max}} \Delta tr . \quad (3.22)$$

Da diese Gleichung angibt, wie genau das tuning-ratio eingestellt sein muss, um eine bestimmte Genauigkeit der Messung der axialen Frequenz erreichen zu können, ist diese Gleichung im Hinblick auf einen eventuellen systematischen Fehler bei der Bestimmung der axialen Frequenz und damit bei der Bestimmung des g-Faktors relevant (siehe Abschnitt 6.2.3).

3.3.2 Die Eigenfrequenzen in einer realen Penning-Falle

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsfrequenzen eines Teilchens in einer realen Penning-Falle noch etwas allgemeiner als im letzten Abschnitt angegeben. Die Störungen der Bewegung werden vor allem durch ein nicht homogenes Magnetfeld und einen nicht ganz quadrupolförmigen Verlauf des elektrischen Speicherpotentials hervorgerufen. Da die (klassischen) nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines Teilchens in den nicht-idealen Feldern schwer zu lösen sind, verwendeten Brown und Gabrielse Störungstheorie 1. Ordnung zur Berechnung der Frequenzverschiebungen [Bro86a]. Zur kompakteren Darstellung werden dort die Abhängigkeiten der Eigenfrequenzen ω_i (inklusive der Larmor-Präzessionsfrequenz) von den Energien E_j der Eigenbewegungen durch Matrizen M_k dargestellt:

$$\begin{pmatrix} \Delta \omega_+ / \omega_+ \\ \Delta \omega_z / \omega_z \\ \Delta \omega_- / \omega_- \\ \Delta \omega_L / \omega_L \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} E_+ \\ E_z \\ E_- \end{pmatrix} . \quad (3.23)$$

Anharmonizitäten des elektrischen Feldes: Besitzt das Speicherpotential neben einem Quadrupolanteil einen Anteil der Form (vergleiche Gleichung 3.19)

$$\Delta V = V_0 C_4 \frac{z^4 - 2z^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4}{2d^4} , \quad (3.24)$$

so werden die Frequenzverschiebungen durch

$$M_E = \frac{6C_4}{qV_0} \begin{pmatrix} +\frac{1}{4}(\omega_z/\omega_+)^4 & -\frac{1}{2}(\omega_z/\omega_+)^2 & -(\omega_z/\omega_+)^2 \\ -\frac{1}{2}(\omega_z/\omega_+)^2 & \frac{1}{4} & 1 \\ -(\omega_z/\omega_+)^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

beschrieben.

Magnetfeld-Inhomogenitäten: Ist dem homogenen Magnetfeld $B = B_0 e_z$ eines der Form

$$\Delta \vec{B} = B_2 \left[\frac{z^2 - r^2}{2} \hat{e}_z - z \vec{r} \right] \quad (3.26)$$

überlagert (eine so genannte *magnetische Flasche*), so lassen sich die Frequenzverschiebungen eines Ions mit Masse m durch

$$M_B = \frac{1}{m\omega_z^2} \frac{B_2}{B_0} \frac{1}{\hbar\omega_+} \begin{pmatrix} -(\omega_z/\omega_+)^2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -(\omega_z/\omega_+)^2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

charakterisieren² (vergleiche auch Gleichung 3.16). Für Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen ist es jedoch einfacher, die Zyklotronenergie in Einheiten der axialen Frequenzverschiebung $\Delta\omega_z$ zu messen. Der Vorfaktor in Gleichung 3.27 ist dann einfach durch $1/\omega_z$ zu ersetzen. Umgekehrt kann aus Gleichung 3.27 die Verschiebung der axialen Frequenz $\Delta\omega_z$ als ein experimentell einfach zugängliches Maß für die Energie der Zyklotronbewegung gefunden werden:

$$E_+ = \frac{m\omega_z \Delta\omega_z}{B_2} B_0 = 4\pi^2 m\nu_z \frac{B_0}{B_2} \Delta\nu_z. \quad (3.28)$$

Relativistische Korrekturen: Die Matrix, die die relativistischen Korrekturen angibt, lautet:

$$M_R = -\frac{1}{mc^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -(\omega_z/\omega_+)^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4}(\omega_z/\omega_+)^2 \\ -(\omega_z/\omega_+)^2 & -\frac{1}{4}(\omega_z/\omega_+)^2 & \frac{1}{4}(\omega_z/\omega_+)^4 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Die hier nicht dargestellte Abhängigkeit der Larmor-Präzessionsfrequenz von den Energien wird z.B. in [Men55, Bar58, Com79] beschrieben (siehe auch Abschnitt 6.2.8).

²Um diese einfache Form zu gewinnen, wurde die Näherung $\omega_c \approx \omega_+$ gemacht. Eine genauere Darstellung der Frequenzverschiebungen findet sich in [Her96, Her99].

3.3.3 Die Abhängigkeit des gemessenen g-Faktors von der Zyklotronenergie

In diesem Abschnitt soll der Einfluss der Inhomogenitäten des Magnetfeldes auf die Messung g-Faktors untersucht werden. Im Experiment werden zur Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz sowohl die reduzierte Zyklotronfrequenz ν_+ als auch die axiale Frequenz ν_z bei einer Energie der Zyklotronbewegung von 2 – 10 eV gemessen. Die beiden Frequenzen verschieben sich durch die Zyklotronenergie nach den Gleichungen 3.27 und 3.28 wie folgt (als Maß für die Zyklotronenergie wird die axiale Frequenzverschiebung $\Delta\nu_z$ benutzt):

$$\nu_+ \rightarrow \nu_+ - \frac{\nu_z}{\nu_+} \Delta\nu_z, \quad (3.30)$$

$$\nu_z \rightarrow \nu_z + \Delta\nu_z. \quad (3.31)$$

Da die Magnetronfrequenz im Experiment bei sehr viel kleineren Zyklotronenergien bestimmt wird, muss ihre Verschiebung nicht berücksichtigt werden. Mit diesen Gleichungen folgt für die Verschiebung freien Zyklotronfrequenz, die mittels Gleichung 3.12 berechnet wird:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_c &= \sqrt{(\nu_+ + \Delta\nu_+)^2 + (\nu_z + \Delta\nu_z)^2 + \nu_-^2} - \nu_c \\ &\approx \sqrt{\nu_+^2 - 2\nu_z \Delta\nu_z + \nu_z^2 + 2\nu_z \Delta\nu_z + \nu_-^2} - \nu_c \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dies bedeutet, dass mittels des Invarianztheorems das Magnetfeld im Zentrum der Zyklotronbewegung berechnet wird³. Die Larmor-Präzessionsfrequenz des Ions ändert sich hingegen durch die endliche Energie der Zyklotronbewegung nach Gleichung 3.27 wie folgt:

$$\Delta\nu_L = -\frac{\nu_z}{\nu_+^2} \nu_L \Delta\nu_z. \quad (3.33)$$

Dies ist Ausdruck dessen, dass sich das vom Ion erfahrene mittlere Magnetfeld mit dem Radius der Zyklotronbewegung ändert. Wird der g-Faktor nach Gleichung 3.6 berechnet, so folgt für die Änderung des gemessenen g-Faktors g_v durch die Energie der Zyklotronbewegung:

$$\begin{aligned} \Delta g_v &\approx \frac{\partial g_v}{\partial \nu_L} \Delta\nu_L + \frac{\partial g_v}{\partial \nu_c} \Delta\nu_c = \frac{g_v}{\nu_L} \Delta\nu_L - \frac{g_v}{\nu_c} \Delta\nu_c \\ &= -g_v \frac{\nu_z}{\nu_+^2} \Delta\nu_z. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dieses Ergebnis schließt noch nicht die relativistischen Korrekturen gemäß Gleichung 3.29 ein. Diese sind in unserem Fall jedoch um eine Größenordnung kleiner als die eben diskutierten Korrekturen durch die Magnetfeld-Inhomogenitäten.

³Dies gilt nur für den nicht-relativistischen Grenzfall.

3.4 Linienformen

3.4.1 Grundlegende Linienform

In [Bro84a, Bro84b] wird von Brown die Linienform sowohl für die Zyklotron- als auch für die Larmor-Resonanz in einem homogenen Magnetfeld, dem eine magnetischen Flasche überlagert ist (siehe Gleichungen 3.15 und 3.26), dargestellt. Grundlegend wird die Linienform der beiden magnetfeldabhängigen Größen durch folgenden Effekt bestimmt: Bei z.B. positivem B_2 ist das über eine Periode der axialen Schwingung T gemittelte Magnetfeld um so größer je größer die axiale Amplitude z_0 ist:

$$\begin{aligned}
 \overline{B} &= \frac{1}{T} \int_0^T B_0 + B_1 z(t) + B_2 z^2(t) dt \\
 &= B_0 + \frac{1}{T} \int_0^T B_1 z_0 \sin(\omega_z t) + B_2 z_0 \sin^2(\omega_z t) dt \\
 &= B_0 + \frac{1}{2} B_2 z_0^2 \\
 &= B_0 + B_2 \frac{E_z}{m\omega_z^2}. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Daher sollte sich in den Linienformen der Zyklotron- und Larmor-Resonanz direkt die zeitliche Verteilung der axialen Energie (des Quadrats der Bewegungsamplitude), in unserem Fall eine Boltzmann-Verteilung (siehe Abschnitt 5.10), wieder finden. Dies ist aber nur richtig, falls die Änderung der betrachteten Bewegungsfrequenz hinreichend langsam ist.

Folgende Gleichung gibt die Linienform $\chi(\omega)$ unter Annahme einer Boltzmann-Verteilung der axialen Energie in allgemeiner Form wieder [Bro84a, Bro84b]:

$$\chi(\omega) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \frac{\gamma' \gamma}{(\gamma' + \gamma)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma' - \gamma)^{2n} (\gamma' - \gamma)^{-2n}}{(n + \frac{1}{2}) \gamma' - \frac{1}{2} \gamma - i(\omega - \omega_0)}. \tag{3.36}$$

Hierbei ist ω_0 die Resonanzfrequenz für eine verschwindende axiale Energie, γ die Kopplungskonstante der axialen Bewegung an ein thermisches Bad (siehe Gleichung 4.6) und γ' ist wie folgt definiert:

$$\gamma' = \sqrt{\gamma^2 + 4i\gamma\Delta\omega}. \tag{3.37}$$

$\Delta\omega$ beschreibt die Linienverschiebung, die nach Gleichung 3.35 stattfindet, falls das Teilchen konstant die axiale Energie des Erwartungswerts seiner axialen Energie hat.

Kleine Kopplung

Für den Fall $\Delta\omega \gg \gamma$, also einer im Vergleich zur inversen Linienbreite langsamen Änderung der Energie, erhält man aus Gleichung 3.36 den Grenzwert

$$\chi(\omega) = \frac{\theta(\omega - \omega_0)}{\Delta\omega} \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right). \tag{3.38}$$

Diese Näherung ist in unserem Experiment für die Larmor-Resonanz mit $\Delta\omega_L \approx 80\gamma$ gerechtfertigt. Somit spiegelt die Larmor-Resonanz im Einklang mit Gleichung 3.35 die axiale Energie-Verteilung (bzw. die Verteilung des Magnetfeldes) direkt wider (siehe Abbildung 3.3).

Starke Kopplung

Im anderen Grenzfall $\Delta\omega \ll \gamma$, also im Vergleich einer zur inversen Linienbreite schnellen Energieänderung, erhält man aus Gleichung 3.36 dagegen:

$$\chi(\omega) = \frac{\Delta\omega^2/\pi\gamma}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\Delta\omega^2/\gamma)^2} . \quad (3.39)$$

Dies ist eine Lorentz-Funktion, die um $\Delta\omega$ verschoben ist. Sie ist schmaler, als man aufgrund der vom Ion erfahrenen Magnetfeldfluktuationen erwartet (siehe Abbildung 3.3). Dies drückt aus, dass das Teilchen die Extrema des Magnetfeldes durch die im Verhältnis zur Periodendauer $2\pi/\omega_0$ schnellen Änderungen der Energie kürzer „spürt“, als es nötig ist, die Frequenz ω zu definieren. Diese Unterdrückung der Flanken der Resonanzkurve findet bei uns für die Zyklotronfrequenz statt ($\Delta\omega_c \approx 1/5 \gamma$). Solch eine „Verschmälerung“ einer magnetfeldabhängigen Resonanz wird in der Literatur als *motional narrowing* bezeichnet [Blo48, Wat76, Bre69].

Intermediäre Kopplung

Um systematische Effekte zu untersuchen wird im Experiment die axiale Temperatur gezielt erhöht. Schon bei 360 K axialer Temperatur ist für die Zyklotronresonanz $\Delta\omega_c \approx \gamma$. Daher ist weder die für Gleichung 3.38, noch die für Gleichung 3.39 durchgeführte Näherung anwendbar, und die Linienform muss mit Gleichung 3.36 bestimmt werden. Die Kurve für $T = 360$ K in Abbildung 3.4 ist eine Mischung aus einer reinen Lorentz-Funktion und einer Boltzmann-Kurve. Wegen des Boltzmann-Schwanzes auf der höherfrequenten Seite liegt der Erwartungswert weit neben dem Maximum der Kurve (ähnlich der Larmor-Resonanz-Kurve in Abbildung 3.3). Eine dennoch angepasste Lorentz-Funktion liefert eine Mittenfrequenz von $2\pi \cdot 530$ MHz $+ \omega_{c0}$, gegenüber dem Erwartungswert von $2\pi \cdot 750$ MHz $+ \omega_{c0}$. Hierbei wurden die für das Experiment typischen Werte von $\omega_{c0} = 2\pi \cdot 24$ MHz und $1/\gamma = 233$ ms angenommen. Bei einer axialen Temperatur von 60 K ist die Übereinstimmung mit einer Lorentz-Funktion besser ($\Delta\omega_c \approx 1/5 \gamma$). Hier liefert ein Lorentz-Fit eine Mittenfrequenz von $2\pi \cdot 119$ MHz $+ \omega_{c0}$, gegenüber dem Erwartungswert von $2\pi \cdot 125$ MHz $+ \omega_{c0}$. Durch so genanntes *motional narrowing* sind beide Linien schmaler als man aufgrund der Fluktuationen des Magnetfeldes, die das Ion erfährt, erwartet.

3.4.2 Die Linienform der g-Faktor-Resonanz

Der g-Faktor lässt sich durch das Verhältnis der eingestrahlten Mikrowellen- und der gemessenen freien Zyklotronfrequenz ausdrücken (siehe Gleichung 3.6). Damit zeitliche Drifts des Magnetfeldes die Larmor-Resonanz nicht verbreitern, wird im Experiment bei jedem Einstrahlen der Mikrowellen das Magnetfeld über die Messung der Zyklotronfrequenz neu bestimmt. Durch Auftragen der spin-flip-Rate gegen das Verhältnis der Mikrowellenfrequenz und der Zyklotronfrequenz erhält man direkt

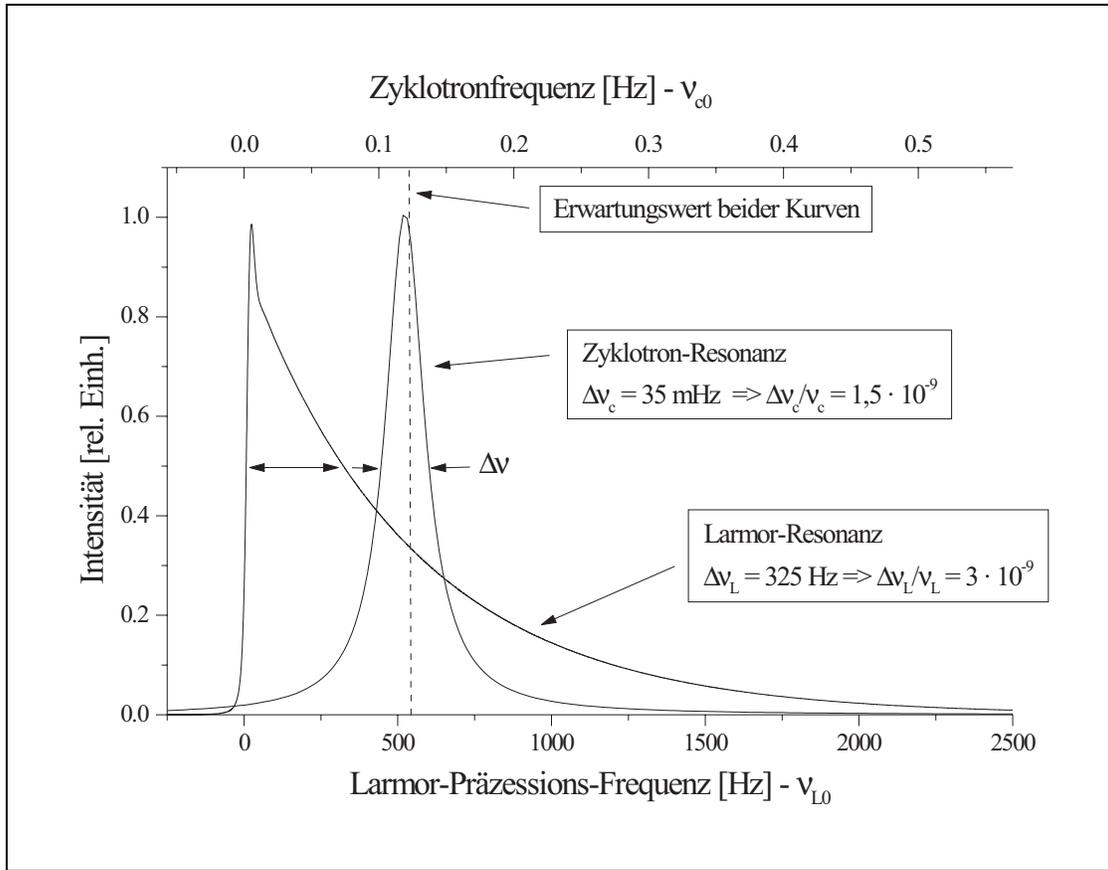


Abbildung 3.3: **Erwartete Linienformen der Larmor- und Zyklotron-Resonanz**

Die Linienformen sind nach Gleichung 3.36 berechnet worden. Als Parameter wurden die für das Experiment typischen Werte angenommen ($1/\gamma = 233$ ms, $\Delta\nu/\nu = 5,2 \cdot 10^{-9}$). Die Larmor-Resonanz bei $\nu_{L0} = 105$ GHz spiegelt direkt die Energie-Verteilung des Ions wider. Die Zyklotronresonanz bei $\nu_{c0} = 24$ MHz ist durch so genanntes *motional narrowing* um einen Faktor 2 schmaler und vor allem auch symmetrischer als die Larmor-Resonanz.

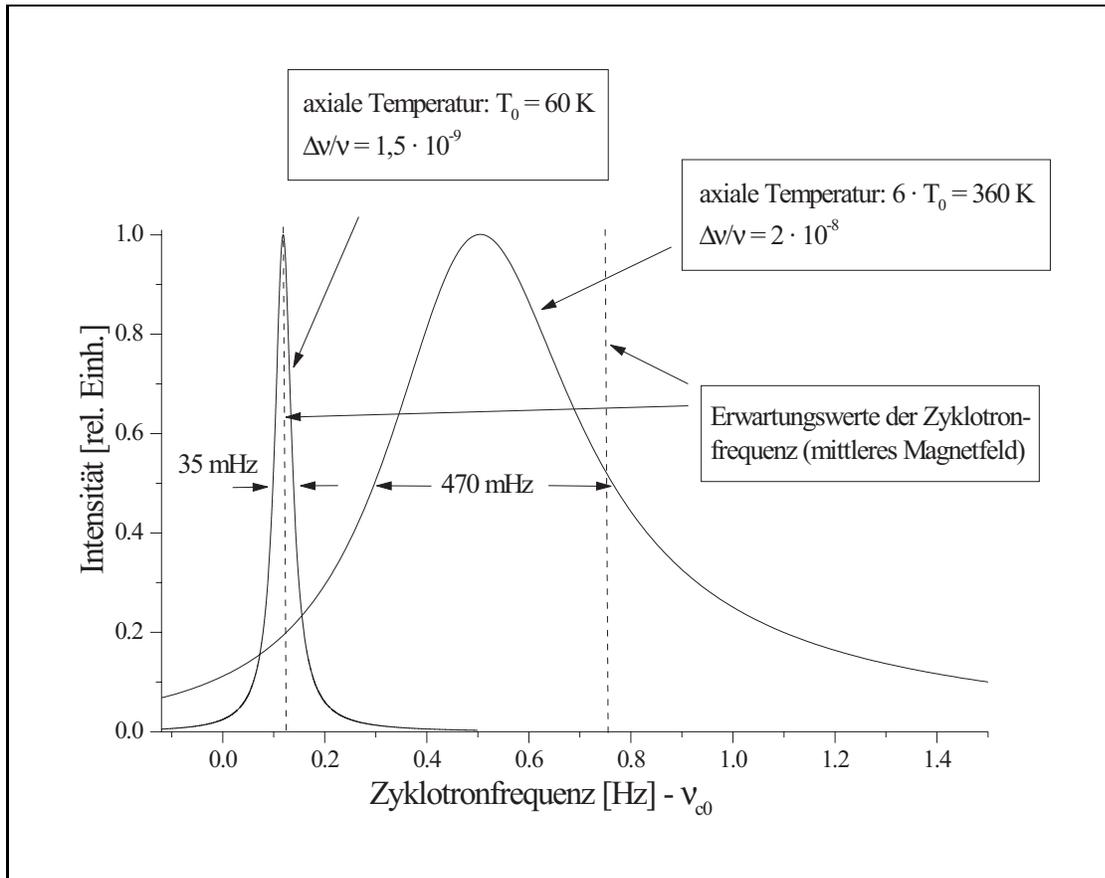


Abbildung 3.4: **Erwartete Linienform der Zyklotronresonanzen bei zwei verschiedenen axialen Energien**

Die Linienformen wurden mit Gleichung 3.36 berechnet. Als Zyklotronfrequenz wurde $\omega_{c0} = 2\pi \cdot 24\text{MHz}$ und als Dämpfungskonstante $1/\gamma = 233\text{ms}$ angenommen. Diese Werte entsprechen weitgehend den experimentellen Bedingungen.

g-Faktor-Resonanzen, aus denen der g-Faktor extrahiert wird (siehe Gleichung 3.6). In diesem Abschnitt wird die theoretische Linienform dieser Resonanz bestimmt. Die Unsicherheiten der Larmor-Präzessionsfrequenz $\delta\omega_L$ und der Zyklotronfrequenz $\delta\omega_c$ machen sich im g-Faktor nach Gleichung 3.6 wie folgt bemerkbar:

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{1}{g} \delta \left(\frac{\omega_L}{\omega_c} \right) = \frac{\delta\omega_L}{\omega_L} - \frac{\delta\omega_c}{\omega_c}. \quad (3.40)$$

Zuerst seien die Änderungen der Larmor-Präzessionsfrequenz $\delta\omega_L/\omega_L$ betrachtet: Die Wahrscheinlichkeit $P_L(\delta\omega_L/\omega_L)$, dass ein spin-flip induziert wird, ist nach [Bro86a] gegeben durch:

$$P_L \left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} \right) = \frac{\pi}{2} \Omega_L^2 (t_2 - t_1) \chi_L(\omega_L + \delta\omega_L). \quad (3.41)$$

Hierbei bezeichnet Ω_L die Rabi-Frequenz und ist gegeben durch [Bro86a]:

$$\Omega_L = \omega_L \frac{|b|}{|B|}. \quad (3.42)$$

B bezeichnet die Stärke des konstanten Magnetfeldes der Penning-Falle und b die Amplitude des magnetischen Feldes der Mikrowellen. Gleichung 3.41 in Verbindung mit Gleichung 3.42 bedeutet, dass die Übergangsrate des Spins quadratisch von der Amplitude der Mikrowellen abhängen sollte. Die Wahrscheinlichkeit eines spin-flips lässt sich nach Gleichung 3.38 wie folgt ausdrücken:

$$P_L \left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} \right) = \frac{\theta(\delta\omega_L)}{\Delta\omega_L} \exp \left(-\frac{\delta\omega_L}{\Delta\omega_L} \right). \quad (3.43)$$

Im Gegensatz zur Larmor-Resonanz erhalten wir bereits bei einer Messung der Zyklotronfrequenz eine vollständige Resonanz nach Gleichung 3.36 und können so direkt die mittlere Zyklotronfrequenz bestimmen. Durch eine ungenügende Mittelung und statistische Magnetfeldfluktuationen sind die extrahierten Zyklotronfrequenzen jedoch nicht exakt. Diese Unsicherheit der Zyklotronfrequenz wird hier als Gauß-Prozess modelliert:

$$P_c \left(\frac{\delta\omega_c}{\omega_c} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_c} \exp \left(-\frac{\delta\omega_c^2}{\Delta\omega_c^2} \right). \quad (3.44)$$

Die Varianz der Fluktuationen der Zyklotronfrequenzmessung wird durch $\Delta\omega_c$ charakterisiert. An dieser Stelle muss mit einbezogen werden, dass die gemessene Zyklotronfrequenz ein Maß für das mittlere Magnetfeld ist, wohingegen die Larmor-Resonanz auf $z = 0$ bezogen ist (siehe Abbildung 3.3). Die mittlere Verschiebung $\overline{\Delta B}$ des Magnetfeldes ist direkt mit dem Erwartungswert der Larmor-Resonanz verknüpft (siehe Abbildung 3.3):

$$\frac{\overline{\Delta B}}{B_0} = \frac{\Delta\omega_L}{\omega_L}. \quad (3.45)$$

Wird diese Verschiebung der Zyklotronfrequenz in Gleichung 3.44 berücksichtigt, erhält man:

$$P_c \left(\frac{\delta\omega_c}{\omega_c} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_c} \exp \left(-\frac{(\delta\omega_c - \frac{\Delta\omega_L}{\omega_L} \omega_c)^2}{\Delta\omega_c^2} \right). \quad (3.46)$$

Nach Gleichung 3.40 ist die Wahrscheinlichkeit, einen spin-flip bei einer Abweichung δg vom „wahren“ g-Faktor g zu erhalten, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{\delta g}{g}\right) &= P\left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} - \frac{\delta\omega_c}{\omega_c}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_L\left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L}\right) \cdot P_c\left(\frac{\delta\omega_c}{\omega_c}\right) d\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} d\frac{\delta\omega_c}{\omega_c} \Bigg|_{\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} - \frac{\delta\omega_c}{\omega_c} = \frac{\delta g}{g}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_L\left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L}\right) \cdot P_c\left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} - \frac{\delta g}{g}\right) d\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} \\
&= \frac{\theta(\delta\omega_L)}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_L\Delta\omega_c} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta\omega_L}{\Delta\omega_L}\right) \times \\
&\quad \exp\left(-\frac{\omega_c^2}{\Delta\omega_c^2} \left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} - \frac{\delta g}{g} - \frac{\Delta\omega_L}{\omega_L}\right)^2\right) d\frac{\delta\omega_L}{\omega_L}. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Ausgeführt ergibt sich das Integral aus Gleichung 3.47 zu:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{\delta g}{g}\right) &= \frac{\omega_L}{2\delta\omega_L} \exp\left(-1 + \frac{\delta\omega_c^2}{\omega_c^2} \frac{4\omega_L^2}{\delta\omega_c^2} - \frac{\omega_L^2}{\delta\omega_L^2} \frac{\delta g}{g}\right) \times \\
&\quad \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} \frac{\omega_c}{\delta\omega_c} - \frac{\delta\omega_c}{\omega_c} \frac{\omega_L}{2\delta\omega_L} + \frac{\omega_c^2}{\delta\omega_c^2} \frac{\delta g}{g}\right) - 1 \right]. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\operatorname{erf}(x)$ die so genannte *error*-Funktion. Sie ist wie folgt definiert:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.49)$$

Diese Wahrscheinlichkeit $P(\delta g/g)$ ist direkt proportional zur Übergangsrate R des Spins. Die Kurvenform von Gleichung 3.48 wird maßgeblich durch die Verbreiterungen durch die Inhomogenität des Magnetfeldes $\delta\omega_L/\omega_L$ und durch die Unsicherheiten in der Messung der Zyklotronfrequenz $\delta\omega_c/\omega_c$ beschrieben. Im Grenzfall $\delta\omega_c/\omega_c \ll \delta\omega_L/\omega_L$ erhält man Gleichung 3.43. Gilt dagegen $\delta\omega_L/\omega_L < \delta\omega_c/\omega_c$, so kann ihr Verlauf durch eine Gauß-Kurve gut beschrieben werden. In jedem Fall aber ist in Gleichung 3.48 der Erwartungswert von $\delta g/g$ gleich 0. Dies ist für das Experiment wichtig, da deshalb der aus den Resonanzen extrahierte g-Faktor nur wenig von dem Verhältnis der Verbreiterungen durch die Magnetfeld-Inhomogenität und der Unsicherheit in der Messung der Zyklotronfrequenz abhängt.

3.4.3 Sättigung der Larmor-Resonanz

Im Experiment wird nur festgestellt, ob sich die Einstellung des Elektronen-Spins von der vor dem Einstrahlen der Mikrowellen unterscheidet. Daher wird eine gerade

Anzahl von spin-flips als kein spin-flip interpretiert. Um dies zu berücksichtigen, wird hier die „echte“ spin-flip-Rate R in eine „beobachtete Rate“ R_b durch die Lösung der entsprechenden Ratengleichungen umgerechnet (vergleiche hierzu auch [Bro86a]).

Seien n_+ und n_- die Besetzungszahldichten für spin-up bzw. spin-down und R die spin-flip-Rate, dann schreiben sich die Ratengleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{n}_+ &= -Rn_+ + Rn_- \\ \dot{n}_- &= Rn_+ - Rn_- \end{aligned} \quad (3.50)$$

Führt man den Vektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_+ \\ n_- \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -R & R \\ R & -R \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

ein, so schreibt sich Gleichung 3.50:

$$\dot{\vec{n}} = A\vec{n} \quad (3.53)$$

Macht man den Ansatz

$$\vec{n}(t) = \vec{n}_0 e^{\lambda t}, \quad (3.54)$$

so folgt aus Gleichung 3.53:

$$\lambda \vec{n}_0 = A\vec{n}_0 \quad \implies \quad (A - \lambda \mathbb{1})\vec{n}_0 = 0. \quad (3.55)$$

Diese Eigenwertgleichung hat genau dann eine Lösung, wenn die Determinante verschwindet. Es muss also

$$\det \begin{pmatrix} -R - \lambda & R \\ R & -R - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (3.56)$$

gelten. Dies ist äquivalent zu:

$$(-R - \lambda)^2 - R^2 = \lambda(\lambda + 2R) = 0. \quad (3.57)$$

Daraus folgt, dass λ die Werte 0 und $-2R$ annehmen kann:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2R. \quad (3.58)$$

Die zu λ_i gehörenden Eigenvektoren \vec{n}_i sind

$$\vec{n}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

und

$$\vec{n}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Hierbei sind c_i beliebige Konstanten. Somit ist die allgemeine Lösung von Gleichung 3.53 durch

$$\vec{n}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2Rt} \quad (3.61)$$

gegeben. Geht man o.B.d.A. davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Besetzungsdichte durch

$$\vec{n}(t = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

gegeben ist, d.h. das System befindet sich im spin-up-Zustand, so erhält man die spezielle Lösung

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2Rt} . \quad (3.63)$$

Die beobachtbare Übergangsrate R_b ist dann durch die Besetzungswahrscheinlichkeit des spin-down-Zustandes n_- gegeben:

$$R_b(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2Rt} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2Rt}) . \quad (3.64)$$

Für eine gute Beschreibung der Larmor-Resonanz sollten die aus den Gleichungen 3.38 und 3.48 erhaltenen Raten R in Gleichung 3.64 eingesetzt werden. Diese Berücksichtigung der Sättigungseffekte der beobachteten Spin-Übergänge gewährleistet insbesondere, dass in der theoretischen Beschreibung keine spin-flip-Rate von mehr als 50% erhalten werden kann. Die beobachtete spin-flip-Rate R_b muss in unserem Experiment kleiner als 50% sein, da die spin-flips durch die im Verhältnis zur Breite der Larmor-Resonanz schmalbandige Mikrowellenquelle nicht kohärent getrieben werden.

Kapitel 4

Elektronischer Nachweis

Da die Ionen nur elektronisch nachgewiesen werden, ist der zerstörungsfreie elektronische Nachweis von zentraler Bedeutung und wird daher hier ausführlich dargestellt. Zur Vereinfachung wird zunächst die Wechselwirkung eines einzelnen, geladenen Teilchens (z.B. eines Ions) mit der „Elektronik“, die durch ihre Impedanz Z charakterisiert sei, dargestellt. Dies geschieht hier mit folgendem Modell [Deh68, Win75] (siehe auch [Sta98, Häf98]): Das Ion befindet sich zwischen zwei unendlich ausgedehnten leitenden Platten, die miteinander über die Impedanz Z der Elektronik verbunden sind. Ruht das Ion, ordnen sich die freien Ladungsträger so an, dass das vom Ion verursachte Potentialgefälle auf den Platten ausgeglichen wird. Bewegt sich das Ion jedoch, so ändert sich die vom Ion influenzierte Spiegelladungsdichte, und es fließt ein Strom (siehe Abbildung 4.1). Die Größe des Stroms hängt im Wesentlichen von der Ladung q , der Geschwindigkeit \dot{z} des Ions und dem Abstand D der Platten ab [Sho38]. Für die Berechnung des induzierten Stroms kann man annehmen, dass sich das Ion gleichförmig von der einen zu der anderen Platte bewegt. Dabei ändert sich die Ladung auf einer Platte um $dQ = q$. Bei der Geschwindigkeit \dot{z} benötigt das Ion die Zeit $dt = D/\dot{z}$. Zusammengefasst fließt also der Strom:

$$I_{Ind} = \frac{dQ}{dt} = \frac{q}{D} \dot{z} . \quad (4.1)$$

Da in einer realen Falle die Platten aber nicht durch ebene Elektroden unendlicher Ausdehnung realisiert sind, führt man D als den effektiven Elektrodenabstand ein, der dadurch bestimmt ist, dass die reale Elektrodenkonfiguration am Ort des Ions das gleiche elektrische Feld wie die beiden virtuellen Platten mit dem Abstand D erzeugt. In [Häf98] wird die Berechnung des effektiven Elektrodenabstands D für die im Experiment verwendeten Fallen durchgeführt.

4.1 Wechselwirkung eines Ions mit der Elektronik

Die Bewegung eines einzelnen von einem harmonischen Potential gespeicherten Ions wird durch die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators beschrieben. Um die Wechselwirkung des Ions mit der Elektronik zu beschreiben, muss zusätzlich die an den Elektroden anliegende Spannung U_g (siehe Abbildung 4.2) berücksichtigt werden. Diese setzt sich aus einer externen Spannung U_a und der vom Ion durch seinen induzierten Strom (siehe Gleichung 4.1) selbst induzierten Spannung $U_{ind} = Z(\omega)I_{ind}$

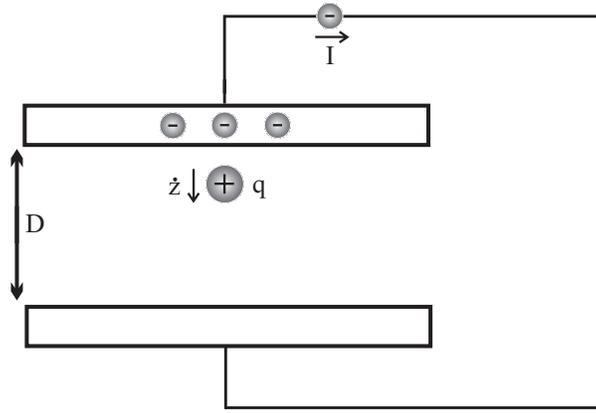


Abbildung 4.1: **Wechselwirkung eines Ions mit den Elektronen in den Elektroden einer Falle**

Durch die Bewegung des Ions wird zwischen den Elektroden ein Strom induziert.

zusammen. Hier beschreibt $Z(\omega)$ die Impedanz der angeschlossenen Elektronik. Man erhält damit folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{z}(t) + q\frac{C_2V_0}{d^2}z(t) = -\frac{q}{D}[U_{\text{ind}}(\dot{z}) + U_a(t)] . \quad (4.2)$$

Die z -Koordinate beschreibt hier den Abstand des Ions vom Zentrum der Falle senkrecht zu den beiden als Platten idealisierten Elektroden. m und q sind die Masse und die Ladung des Ions. Die Rückstellkraft durch das elektrische Speicherpotential der Falle wird durch den Term C_2V_0/d^2 charakterisiert (siehe Gleichung 3.7). Die Kraft, die auch auf ein ruhendes Ion durch die induzierten Spiegelladungen wirkt, ist für ein einzelnes Ion und kleine Auslenkungen gegenüber der charakteristischen Dimension der Falle (siehe Tabelle 2.1) klein und wird daher im Gegensatz zu Abschnitt 6.2.9 hier vernachlässigt.

Mit Hilfe von Gleichung 4.1 kann die durch die Bewegung des Ions induzierte Spannung U_{ind} wie folgt umgeschrieben werden:

$$U_{\text{ind}}(\dot{z}) = Z(\omega)I_{\text{ind}}(\dot{z}) = Z\frac{q}{D}\dot{z}(t) . \quad (4.3)$$

Wird zusätzlich noch die Resonanzfrequenz des ungedämpften harmonischen Oszillators

$$\omega_r^2 = \frac{q}{m}C_2V_0 \quad (4.4)$$

eingeführt, so erhält man die folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{z}(t) + Z(\omega)\frac{q^2}{mD^2}\dot{z}(t) + \omega_r^2z(t) = -\frac{q}{mD}U_a(t) . \quad (4.5)$$

Der Vergleich mit der Differentialgleichung für einen gedämpften harmonischen Oszillator zeigt, dass der Koeffizient vor \dot{z} als Dämpfung aufgefasst werden kann:

$$\gamma = \frac{q^2}{mD^2}Z(\omega) . \quad (4.6)$$

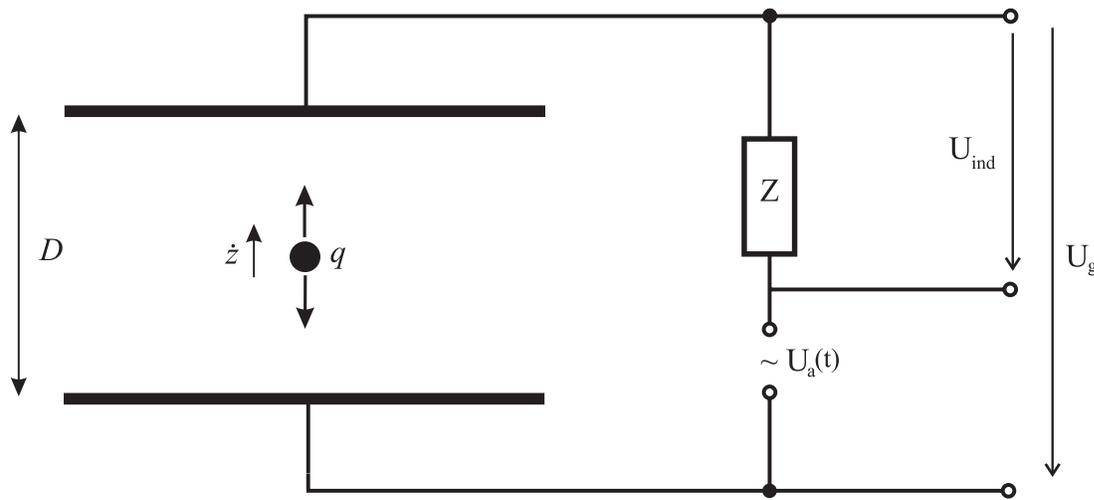


Abbildung 4.2: **Wechselwirkung des Ions mit der Elektronik**

Z stellt die Impedanz der Elektronik dar. Die Spannung $U_a(t)$ beschreibt die externe Spannung. Diese setzt sich aus der Rauschspannung, die vom Temperaturrauschen der Elektronen in der Impedanz Z verursacht wird, und aus einer Spannung, die mittels eines Synthesizers an die Elektroden zusätzlich angelegt werden kann, zusammen.

Mit dieser zusätzlichen Definition schreibt sich die Bewegungsgleichung 4.5 nun endgültig:

$$\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + \omega_r^2 z(t) = -\frac{q}{mD} U_a(t). \quad (4.7)$$

Anhand dieser Differentialgleichung sollen nun im Folgenden die Bewegung eines Ions und die dadurch induzierten Signale analysiert werden.

4.1.1 Kühlen der Ionenbewegung

Der Lösungsraum der Differentialgleichung 4.7 ist in Abwesenheit einer treibenden Spannung ($U_a(t) = 0$) gegeben durch:

$$z(t) = e^{-\gamma t} (c_1 \sin(\omega_r t) + c_2 \cos(\omega_r t)). \quad (4.8)$$

Dies bedeutet, dass die Schwingung eines Ions mit der Zeitkonstanten γ exponentiell gedämpft wird. Diese durch den induzierten Strom verursachte Energieabgabe an die Impedanz kann als Spannungsabfall über die Impedanz U_{ind} beobachtet werden. Eine Fourier-Transformation dieser Spannung liefert dann die Bewegungsfrequenz des Ions.

In der Realität liegt aber an den Elektroden der Falle, bedingt durch die endliche Temperatur der Elektronen der Impedanz, die die Elektroden der Falle verbindet, immer eine Rauschspannung an. Dies führt dazu, dass die Ionenbewegung nur solange gekühlt wird, bis die mittlere Energie der Ionenbewegung des betrachteten Freiheitsgrades vergleichbar mit der der Elektronen in der Impedanz ist.

4.1.2 Die Bewegung eines kalten Ions

Solange die Energie des Ions größer als die mittlere Energie der Elektronen in der Impedanz ist, lässt sich der vom Ion erzeugte Spiegelstrom durch einen erhöhten

Spannungsabfall U_g über die Impedanz $Z(\omega)$ messen. In diesem Abschnitt wird nun gezeigt werden, dass auch ein Ion, das sich im Gleichgewicht mit der Impedanz befindet, noch elektronisch nachgewiesen werden kann (siehe auch [Win75]). Um das Spannungsrauschen der Impedanz auf einfache Art in die Differentialgleichung 4.7 einzubringen, kann eine Fourier-Transformation aller zeitabhängigen Größen durchgeführt werden:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_r^2 \right) \int d\omega e^{-i\omega t} z(\omega) = -\frac{q}{mD} \int d\omega e^{-i\omega t} U_a(\omega). \quad (4.9)$$

Dabei ist $z(\omega)$ die zu $z(t)$ gehörige Fourier-Transformierte. Entsprechendes gilt für die Spannung $U_a(\omega)$, die im Folgenden „anregende Spannungsdichte“ genannt wird. Werden die Differentiationen in Gleichung 4.9 ausgeführt und wird ausgenutzt, dass die Funktionen $e^{-i\omega t}$ linear unabhängig sind, so erhält man im Frequenzraum die folgende einfache Gleichung:

$$(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_r^2) z(\omega) = -\frac{q}{mD} U_a(\omega). \quad (4.10)$$

Diese kann nach $z(\omega)$ aufgelöst werden, und man erhält:

$$z(\omega) = \frac{-\frac{q}{mD} U_a(\omega)}{(\omega_r^2 - i\gamma\omega - \omega^2)}. \quad (4.11)$$

$z(\omega)$ beschreibt die Bewegungsamplitude des Ions bei der Frequenz ω . Mit dieser Lösung für $z(\omega)$ kann nun über Gleichung 4.1 die vom Ion induzierte Stromdichte zu

$$I_{\text{ind}}(\omega) = \frac{q}{D} \frac{d}{dt} z(\omega) = (-i\omega) \frac{q}{D} \frac{-\frac{q}{mD} U_a(\omega)}{(\omega_r^2 - i\gamma\omega - \omega^2)} \quad (4.12)$$

berechnet werden. Die zu messende Spannungsdichte $U_g(\omega)$ (siehe Abbildung 4.2), die über die Impedanz $Z(\omega)$ abfällt, setzt sich aus der anregenden Spannungsdichte U_a und der vom Ion induzierten Spannungsdichte $U_{\text{ind}}(\omega) = Z(\omega)I(\omega)$ zusammen. Durch Einsetzen und nach kurzer Rechnung folgt:

$$U_g(\omega) = U_a(\omega) + U_{\text{ind}}(\omega) = U_a \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{(\omega_r^2 - i\gamma\omega - \omega^2)}. \quad (4.13)$$

Berücksichtigt man, dass im Experiment nur der Betrag der Spannungsdichte gemessen wird, erhält man:

$$|U_g(\omega)| = |U_a(\omega)| \left| \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{\omega_r^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \right|. \quad (4.14)$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Ion bei seiner Resonanzfrequenz $\omega = \omega_r$ eine Spannung induziert, die die Spannung U_a kompensiert. Daher kann die Resonanzfrequenz eines Ions, das sich im thermischen Gleichgewicht mit der Impedanz befindet, durch die Frequenz, bei der ein Minimum („Ionen-Dip“) in der spektralen Analyse der Spannungsdichte U_g auftritt, bestimmt werden.

In [Win75, Fen96, Sta98] kann man einen anderen Zugang zu diesem Phänomen finden. Dort wird das Ion mittels der Differentialgleichung 4.7 als ein serieller Schwingkreis modelliert und so ein Ersatzschaltbild für das Ion hergeleitet. Aus einer Analyse des Schaltbildes kann dann auch Gleichung 4.14 abgeleitet werden.

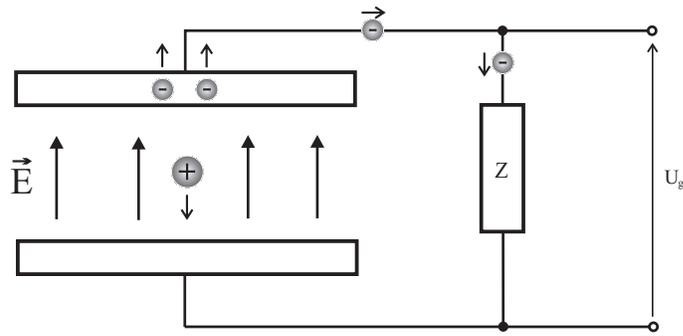


Abbildung 4.3: **Veranschaulichung des Widerstandskühlens**

Durch die Bewegung des Ions wird eine Spannung $U_{\text{ind}} = U_g$ induziert, die immer eine rücktreibende Kraft auf das Ion ausübt.

4.1.3 Grenzen des Modells

Das obige Modell zur Wechselwirkung des Ions mit einer angeschlossenen Impedanz liefert nur unter bestimmten Voraussetzungen eine gute Beschreibung:

- Die Resonanzfrequenz des Ions hängt nicht von der Amplitude des Ions ab. Die Bewegung des Ions kann daher durch einen harmonischen Oszillator erfolgen. Weiterhin stellt dies auch sicher, dass der Wert der auf das Ion wirkenden Impedanz nicht von der Energie des Ions abhängt. Daher ändert sich dann während des Kühlens des Ions die charakteristische Kühlzeitkonstante γ nicht (siehe Gleichung 4.6).
- Die Auslenkung des Ions ist gegenüber der Größe der Falle klein. Dadurch ist gewährleistet, dass der vom Ion induzierte Strom linear von der Amplitude abhängt und durch Gleichung 4.1 gegeben ist.
- Es findet kein Austausch von Energie mit anderen Freiheitsgraden, z.B. für eine Ionenwolke mit ihren inneren Moden, statt.

4.2 Anschauliche Interpretation der Wechselwirkung des Ions mit der Elektronik

In diesem Teil des Kapitels werden einige intuitive Betrachtungen, die das Verständnis der Ionenbewegung und der dadurch induzierten Signale fördern, dargestellt. Ferner werden auch die Anforderungen an die Falle und die Elektronik diskutiert.

4.2.1 Kühlen der Ionenbewegung

Die Kühlung eines Ions kann leicht verstanden werden: Das Ion induziert bei seiner Bewegung in den Elektroden einen Strom, der sich durch die angeschlossene Impedanz auch als Spannung bemerkbar macht.

Da an der Fallenelektrode, von sich das positive Ion fortbewegt, durch den Widerstand der Impedanz ein Elektronenüberschuss herrscht (siehe Abbildung 4.3), übt

das durch diese Spannung entstehende elektrische Feld eine der Bewegung entgegengesetzte Kraft aus. Dies bedeutet, dass das Ion immer langsamer wird, also Energie verliert. Je höher der Wechselstromwiderstand ist, um so höher ist die induzierte Spannung, und um so stärker ist die Kühlkraft. Einen abstrakteren aber schnelleren Zugang zu diesem Phänomen findet man, wenn man sich vergegenwärtigt, dass der vom Ion induzierte Strom teilweise in der angeschlossenen Impedanz $Z(\omega)$ dissipiert wird. Dieser Energieverlust muss durch die Reduktion der Bewegungsenergie des Ions kompensiert werden.

4.2.2 Das Ion im Gleichgewicht

Befindet sich das Ion im Gleichgewicht, d.h., es hat eine mit den Elektronen in der Impedanz vergleichbare Energie, macht sich dies nach Gleichung 4.14 durch ein Minimum in der spektralen Analyse der über der Impedanz $Z(\omega)$ gemessenen Spannung U_a bemerkbar (siehe Abbildung 4.4). Dies kann man auch anschaulich

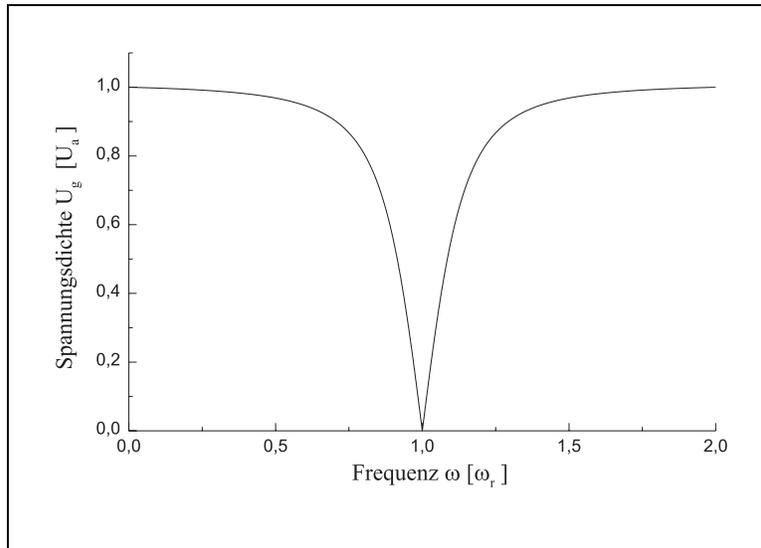


Abbildung 4.4: **Das Ion schließt bei seiner Bewegungsfrequenz die äußere externe Anregungsspannung kurz**

Diese Kurve erhält man, wenn man die Frequenz der Anregungsspannung kontinuierlich durchstimmt und in Gleichung 4.14 einsetzt. Der Kurzschluss der Anregungsspannung bei der Resonanzfrequenz des Ions wird im Folgenden auch als Dip bezeichnet.

verstehen, wenn man sich die Phasenbeziehung zwischen der vom Ion induzierten Spannungsichte $U_{\text{ind}}(\omega)$ und der externen anregenden Spannungsichte $U_a(\omega)$ als Funktion der Frequenz ω vergegenwärtigt. Zur Vereinfachung sei die Impedanz als rein reell angenommen. Da das Ion in der Falle durch einen harmonischen Oszillator beschrieben werden kann, beträgt die Phasenverschiebung des eingeschwungenen Ions bei Anregung mit seiner Resonanzfrequenz ω_r gegenüber dieser $\pi/2$. In diesem Beispiel sei das Ion positiv geladen. Dann bedeutet die Phasenverschiebung von $\pi/2$, dass sich das Ion mit maximaler Geschwindigkeit durch das Zentrum der Falle nach unten bewegt, wenn die untere Platte durch die anregende Spannung maximal negativ geladen ist (siehe Abbildung 4.5). Durch seine Bewegung induziert das Ion in diesem Augenblick in den Elektroden einen maximalen Strom von Elektronen

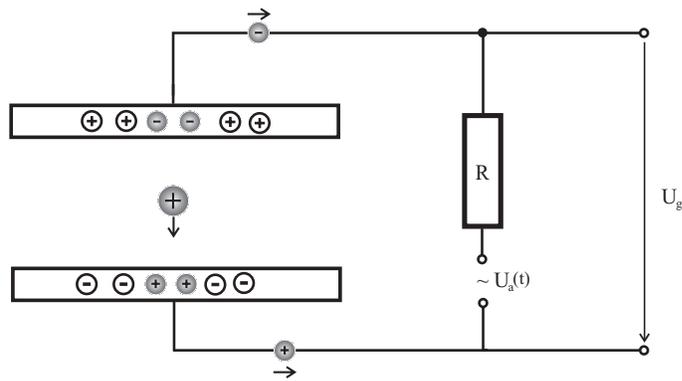


Abbildung 4.5: **Momentaufnahme der Ladungsverteilung in den Fallenelektroden**

Die Ladungsträger, die die Anregung symbolisieren, sind weiß unterlegt. Das von der Bewegung des Ions induzierte Ladungsungleichgewicht, ist grau unterlegt. Für den Fall, dass die Anregungsfrequenz nahe bei der Bewegungsfrequenz ist, kompensieren sich die Ladungsträger teilweise und die gemessene Spannungsdichte U_g ist kleiner als die anregende Spannungsdichte U_a .

von der oberen zur unteren Platte. Da dieser über den Widerstand R fließt, fällt eine Spannung ab, die, wie aus Abbildung 4.5 ersichtlich ist, das umgekehrte Vorzeichen wie die Anregung hat und somit einen Teil der Anregung kompensiert. Ist die vom Ion induzierte Spannung kleiner als die anregende Spannung, so wirkt auf das Ion immer eine beschleunigende Kraft und die vom Ion induzierte Spannung nimmt solange zu, bis die induzierte und anregende Spannung sich ausgleichen. Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ wird daher die Spannung $U_g = 0$ gemessen. Verstimmt man die Anregung leicht, tritt keine vollständige Kompensation der Spannungen mehr auf, weil die Phasenverschiebung von $\pi/2$ verschieden ist. Dadurch ist zum einen die Bewegungsamplitude des Ions und damit der induzierte Strom reduziert, zum anderen ist dann die induzierte Spannung nicht mehr genau dann maximal, wenn die anregende Spannung ein Maximum hat. Betrachtet man eine von der Frequenz ω unabhängige anregende Spannung U_a , erhält man Abbildung 4.4. Im Falle eines nicht reellen Widerstands ist das Spektrum wegen der zusätzlichen durch die komplexe Impedanz verursachten Phasenverschiebung komplizierter. Näheres dazu lässt sich in [Win75, Häf98] finden.

Ein anderer Zugang ist es, sich zu vergegenwärtigen, dass das Ion bei seiner Resonanzfrequenz ein fast unendlich guter Leiter ist. Wird nämlich Wechselspannung mit der Resonanzfrequenz des Ions angelegt, fängt das Ion an, mit großer Amplitude zu schwingen. Da praktisch keine Dämpfung der Bewegung des Ions vorliegt, wird der Wechselstrom vom Ion verlustfrei zwischen den Elektroden übertragen. Dies ist genau das Verhalten eines Kurzschlusses. Dies macht sich dann in den Fourier-Spektren durch eine Reduktion der Spannungsdichte bei der Resonanzfrequenz des Ions bemerkbar.

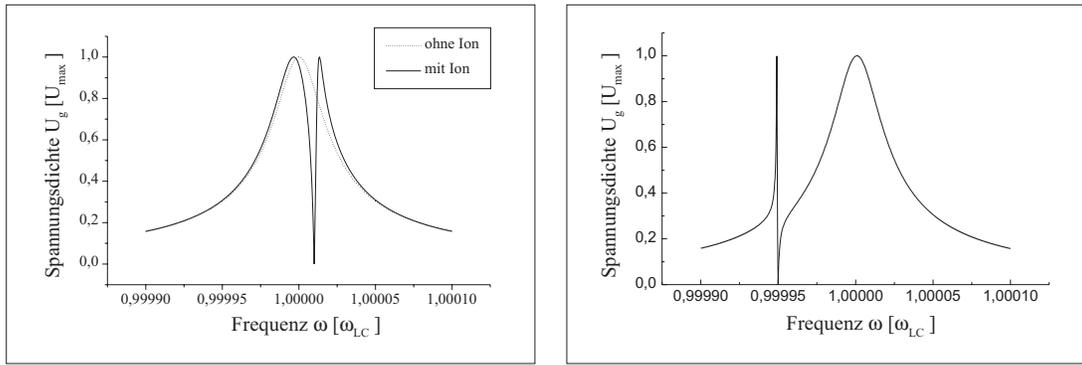


Abbildung 4.6: **Berechnete Spektren für einen Schwingkreis als Impedanz**

Die anregende Spannungsdichte ist proportional zum Realteil der Impedanz des Schwingkreises. Links stimmen die Resonanzfrequenzen des Ions und des Schwingkreises fast überein (d.h. die Bewegung des Ions wird vom reellen Teil des Widerstandes des Schwingkreises bestimmt). Rechts sind die beiden Resonanzfrequenzen stärker gegeneinander verstimmt, und die Bewegung des Ions wird von dem komplexen Anteil der Impedanz des Schwingkreises dominiert. In beiden Fällen fällt das Minimum der Spannungsdichte $U_g(\omega)$ mit der Resonanzfrequenz des Ions zusammen. Die Erhöhung der Spannungsdichte im linken Bild in der Nähe der Resonanzfrequenz des Ions kommt durch das Zusammenspiel der verschiedenen Phasenverschiebungen zustande.

4.2.3 Abweichungen vom Idealfall

Die oben gemachten Betrachtungen gelten nur für ideale Verhältnisse, insbesondere nur für einzelne Ionen mit konstanter Bewegungsfrequenz ω_r . Im Experiment sind diese Verhältnisse aber nicht gegeben. Da in diesem Abschnitt nur Ionen oder Ionenwolken, die im thermischen Gleichgewicht mit der Impedanz sind, betrachtet werden sollen, ist ihre Energie und damit ihr mittlerer Abstand vergleichsweise gering, sodass sie kinematisch aneinander koppeln. Haben alle Ionen zusätzlich das gleiche q/m -Verhältnis, erfolgt ihre Bewegung kohärent und die Ionenwolke lässt sich durch einen Massenpunkt mit der Masse $n \cdot m$ und der Ladung $n \cdot q$ beschreiben. Nach Gleichung 4.6 ist daher γ durch $n \cdot \gamma$ zu ersetzen:

$$\gamma \rightarrow n\gamma. \quad (4.15)$$

Schwankungen der Resonanzfrequenz durch z.B. die Anharmonizität der Bewegung der Ionen oder Schwankungen im elektrischen Speicherpotential machen sich durch eine Verbreiterung der Resonanz bemerkbar. Den gleichen Effekt hätte eine zusätzliche Dämpfung der Bewegung der Ionen durch dissipative Elemente, also eine endliche Güte Q der Bewegung der Ionen. Daher wird die Verbreiterung der Resonanz durch eine endliche Güte der Bewegung der Ionen modelliert. In der mathematischen Beschreibung erreicht man dies, indem man der Resonanzfrequenz ω_r einen Imaginärteil hinzufügt:

$$\omega_r \rightarrow \omega_r \left(1 + \frac{in}{Q} \right). \quad (4.16)$$

Der Imaginärteil in/Q sorgt für die Beschreibung einer zusätzlichen Dämpfung in der Bewegung $e^{(i\omega - n/Q)t}$. Damit die Güte auf die Schwingung eines einzelnen Ions bezogen ist, ist hier auch die Anzahl n der Ionen eingeführt worden. Diese Modellierung

mit einer endlichen Güte der Schwingung der Ionen ist nicht ganz befriedigend, da eine Schwankung des Speicherpotentials kein dissipativer Effekt ist. Trotzdem lassen sich die beobachteten Spektren mit diesem Modell sehr gut beschreiben [Fen96].

Werden in Gleichung 4.14 die Anzahl der Ionen und die von Anharmonizitäten und Speicherfeldfluktuationen herrührenden zusätzlichen Verbreiterungen der Resonanz berücksichtigt, so erhält man die folgende und für das Experiment wichtige Beschreibung für die von den Ionen zu erwartenden Spektren der Spannungsdichte:

$$|U_g(\omega)| = |U_a(\omega)| \left| \frac{\omega_r^2 \left(1 + \frac{in}{Q}\right)^2 - \omega^2}{\omega_r^2 \left(1 + \frac{in}{Q}\right)^2 - in\gamma\omega - \omega^2} \right|. \quad (4.17)$$

Zu beachten ist, dass das Minimum der Spannungsdichte jetzt nur noch für reelle Impedanzen mit der Resonanzfrequenz ω_r des Ions zusammenfällt. Gleichung 4.17 zeigt, dass man aus dem Spektrum der Spannungsdichte einige Informationen gewinnen kann: So ist z.B. zu erkennen, dass aus der Breite der Ionenresonanz, die maßgeblich durch den Term $n\gamma$ charakterisiert wird, die Anzahl der gespeicherten Ionen bestimmt werden kann. Die Tiefe der Resonanz dagegen ergibt Informationen über die Konstanz der Resonanzfrequenz der Ionen und damit über die Harmonizität und Stabilität des Speicherfeldes.

4.3 Anforderungen an den elektronischen Aufbau

Um eine hohe Nachweiseffizienz zu gewährleisten, ist vor allem ein hohes Signal-zu-Rausch-Verhältnis erforderlich:

- Analysiert man Gleichung 4.6 in Verbindung mit Gleichung 4.17, so erkennt man, dass desto stärkere Signale gemessen werden können, je kleiner die Falle und je größer der Widerstand der angeschlossenen Impedanzen ist. Wegen der invers quadratischen Abhängigkeit von γ vom effektiven Elektrodenabstand ist besonderes Augenmerk auf eine möglichst kleine Falle zu legen. Ein großer Widerstand hat neben einer schnellen Kühlung und einem größeren Signal den Vorteil, dass er es ermöglicht, das thermische Rauschen seiner Elektronen

$$U_{\text{Rausch}} = \sqrt{4kT\text{Re}(Z(\omega))d\nu} \quad (4.18)$$

direkt zu messen und so die Bewegungsfrequenz des Ions bei den sehr kleinen thermischen Energien des Ions (\approx meV) zu bestimmen.

Aus diesen Gründen ist es von entscheidender Bedeutung, große Wechselstromwiderstände zu erreichen. Da Kapazitäten gute Wechselstromleiter sind, wurde die Kapazität der Beschaltung der Elektroden durch möglichst kurz gehaltene Zuleitungen mit 10-15 pF gering gehalten. Diese kurz zu haltenden Zuleitungen machen es notwendig, dass eine erste Verstärkereinheit möglichst nahe an den Fallenelektroden plaziert ist. Zusätzlich wird eine Spule parallel geschaltet, die durch ihre Induktivität den Blindwiderstand der Kapazität bei der Resonanzfrequenz des so entstandenen Resonanzkreises kompensiert. Da die Güte des Schwingkreises in den Resonanzwiderstand linear eingeht, wurden die Drähte der Spulen für den axialen Nachweis aus bei 4 K supraleitendem

NbTi gefertigt. Mit diesen Methoden werden in unserem Experiment bei einer Resonanzfrequenz des Schwingkreises von $\omega_{LC} = 2\pi \cdot 350 \text{ kHz}$ Wechselstromwiderstände von mehr als $20 \text{ M}\Omega$ erreicht.

- Zusätzlich ist es wichtig, eine rauscharme Verstärkereinheit einzusetzen. Wegen der kurzen Zuleitungen ist die erste Stufe, die im Wesentlichen aus einem Feldeffekttransistor besteht, in der 4-K-Umgebung der Fallenkammer plaziert. Da in Silizium bei diesen Temperaturen die Ladungsträger ausfrieren, werden in diesem Experiment GaAs-Transistoren verwandt. Diese erste Verstärkerstufe hat eine Spannungsverstärkung von weniger als 5 und fungiert hauptsächlich als Impedanzwandler. Daher spielen die Kapazitäten der Leitungen zur Raumtemperatur-Elektronik keine Rolle mehr. Ein rauscharme, bei Raumtemperatur betriebene, Elektronik ermöglicht dann die Detektion des Signals.
- Ein anderer, leicht zu übersehender Punkt ist, dass es von großem Vorteil ist, wenn die Elektronik zuverlässig und leicht zu bedienen ist¹. Dies wurde durch einen übersichtlichen Aufbau und eine vollständige Dokumentation erreicht.

Näheres zur elektronischen Beschaltung und Wahl der elektronischen Bauteile lässt sich in [Sta98] finden.

¹An dieser Stelle möchte ich meinen Dank explizit Dr. Stefan Stahl und Dr. Nikolaus Hermanspahn aussprechen.

Kapitel 5

Experimentelles

In diesem Kapitel werden die für das Experiment wichtigsten experimentellen Methoden vorgestellt.

5.1 Erzeugen einer Ionenwolke

Erzeugt werden die Ionen durch Elektronenstoßionisation. Dazu wird an eine aus Wolfram gefertigte Feldemissionsspitze (FEP-Spitze) gegenüber Erde eine Spannung von -600 V angelegt (siehe Abbildung 5.1). Durch die an die so genannte

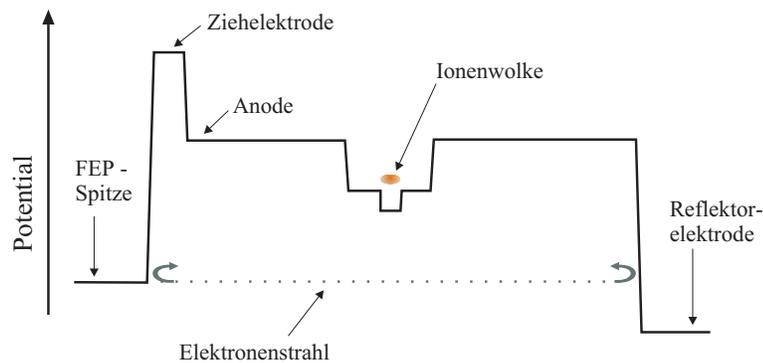


Abbildung 5.1: Verlauf des Potentials beim Erzeugen einer Ionenwolke

Ziehelektrode gegenüber der FEP-Spitze angelegte Spannung von ca. 1000 V werden Elektronen herausgelöst. Dieser Elektronenstrom von ca. 10 nA wird am oberen Ende der Fallenkammer mit Hilfe der Reflektorelektrode reflektiert und oszilliert so lange zwischen der Feldemissionsspitze und der Reflektorelektrode hin und her, bis er sich durch die Stöße der Elektronen untereinander so weit aufgeweitet hat, dass die äußersten Elektronen auf die ringförmige Anode, die als Blende fungiert, auftreffen (siehe Abbildung 2.2). Dort ist Kohlenstoff durch Besprühen mit Graphitspray aufgebracht worden. Durch die auftreffenden Elektronen werden nun unter anderem Kohlenstoffatome und -ionen abgelöst und durch die negative Ladung des Elektronenstrahls in diesen hineingezogen, wo sie dann weiter ionisiert werden. Nach ca. 1 s haben sich genügend positive Ionen im negativen Potentialminimum der Präzisionsfalle angesammelt und der Elektronenstrahl kann abgeschaltet werden.

Da in unserer Apparatur der elektronische Nachweis die einzige Möglichkeit darstellt, etwas über die gespeicherten Ionen in Erfahrung zu bringen, nutzen alle Messmethoden die Signale des elektronischen Nachweises. Daher werden im Folgenden zuerst die wichtigsten Messprinzipien zum elektronischen Nachweis diskutiert, mit denen Informationen über die Bewegungsfrequenzen der Ionenwolke und über die Anzahl und Sorte der Ionen gewonnen werden können. Später werden dann weitere Verfahren diskutiert, die zur Untersuchung systematischer Fehlerquellen und für die Bestimmung des g -Faktors notwendig sind.

5.2 Messung der axialen Frequenz

Die axiale Frequenz wird mittels des in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Effektes bestimmt, bei dem sich die Frequenz des Ions durch ein Minimum in der spektralen Analyse des Schwingkreissignals bemerkbar macht. Der große Vorteil dieser Methode ist, dass die Energie der Ionenbewegung während des Nachweises sehr klein sein kann. Das untere Limit der Temperatur beim Nachweis ist die thermische Energie der Elektronen im Schwingkreis. Die erwartete Linienform wird durch Gleichung 4.17 beschrieben. Abbildung 5.2 zeigt eine Messung, bei der ca. 50 C^{5+} -Ionen bei einer axialen Temperatur, die der thermischen Elektronen im Schwingkreis entspricht, nachgewiesen wurden. Mit dieser Messmethode kann neben der sehr präzisen Bestimmung der axialen Frequenz auch aus der Breite des Dips (charakterisiert durch $\delta\omega = \gamma = 1/\tau$ / siehe Gleichung 4.17) die Anzahl der Ionen auf wenige Prozent genau bestimmt werden. In Abbildung 5.3 ist das Signal eines einzelnen Ions gezeigt. Aus dieser Messung ergibt sich die Kühlzeitkonstante mittels eines Fits nach Gleichung 4.17 zu:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2\pi\Delta\nu_z} = 234,8 (86) \text{ ms} . \quad (5.1)$$

5.2.1 Beschleunigung des axialen Nachweises

Will man das Ion bei der Temperatur nachweisen, die dem Kühllimit entspricht, muss in Kauf genommen werden, dass die anregende Spannungsdichte U_a durch die in diesem Fall thermische Bewegung der Elektronen statistischer Natur ist. Daher muss für eine verlässliche Detektion der axialen Frequenz einzelner Ionen ca. 1 Minute lang gemittelt werden. Regt man den Schwingkreis aber zusätzlich mit einer festen Signalform an, reduziert sich der statistische Anteil am Gesamtsignal [Sta98]. Als zweckmäßige Signalform erweist sich ein Rechteck im Frequenzraum. Ein solches von uns generiertes Signal besteht aus 800 Frequenzen konstanter Amplitude mit einem festen Frequenzabstand zueinander. Abbildung 5.4 veranschaulicht den Gewinn an Signal-Rausch-Verhältnis. Nachteil dieser Methode ist allerdings, dass das Ion beim Nachweis eine höhere Energie als am Kühllimit hat.

5.2.2 Massenspektren

Nach dem Erzeugen einer Ionenwolke sind zunächst viele verschiedene Ionensorten in der Falle gespeichert. Um den Inhalt der Falle zu analysieren und so das Reinigen der Wolke von unerwünschten Ionensorten (siehe Abschnitt 5.6) zu kontrollieren, machen wir uns das (in den meisten Fällen) unterschiedliche q/m -Verhältnis

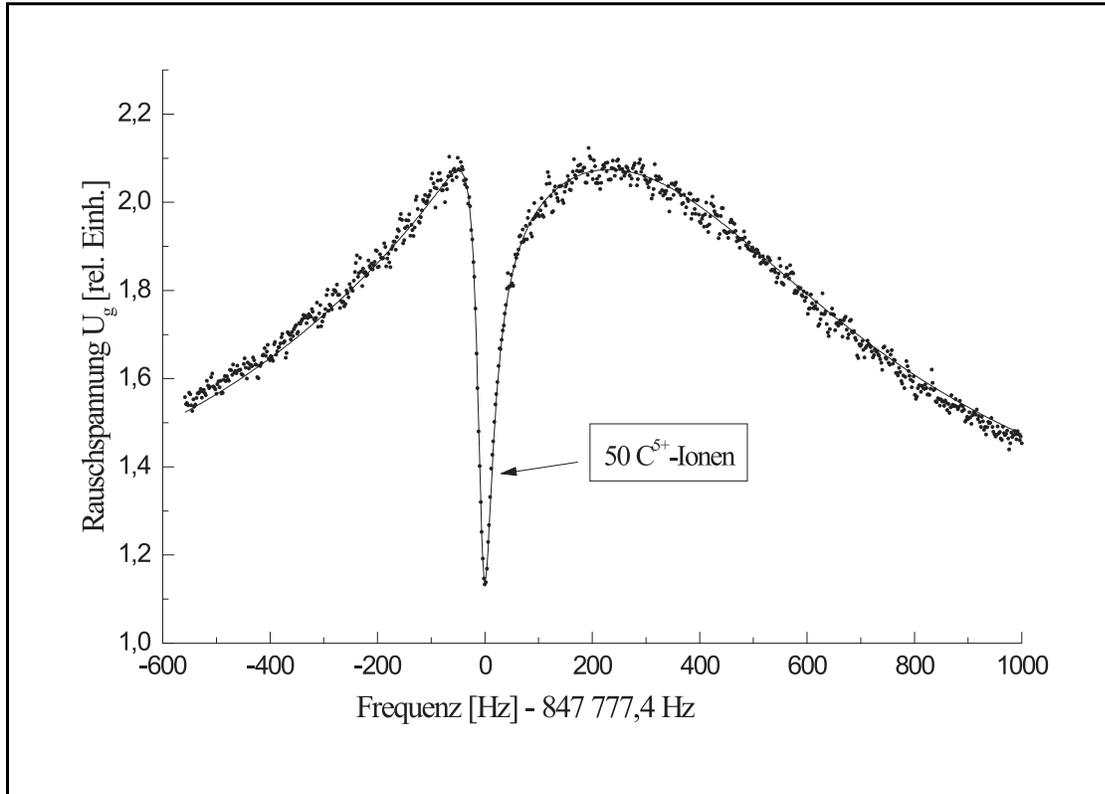


Abbildung 5.2: **Axiales Signal von 50 Ionen**

Zur Bestimmung der Anzahl der Ionen wurde eine Kurve nach Gleichung 4.17 angepasst. Die Abweichungen der Fit-Kurve bei hohen beziehungsweise niedrigen Frequenzen kommen dadurch zustande, dass das Signal zur Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses mehrere Filter durchläuft.

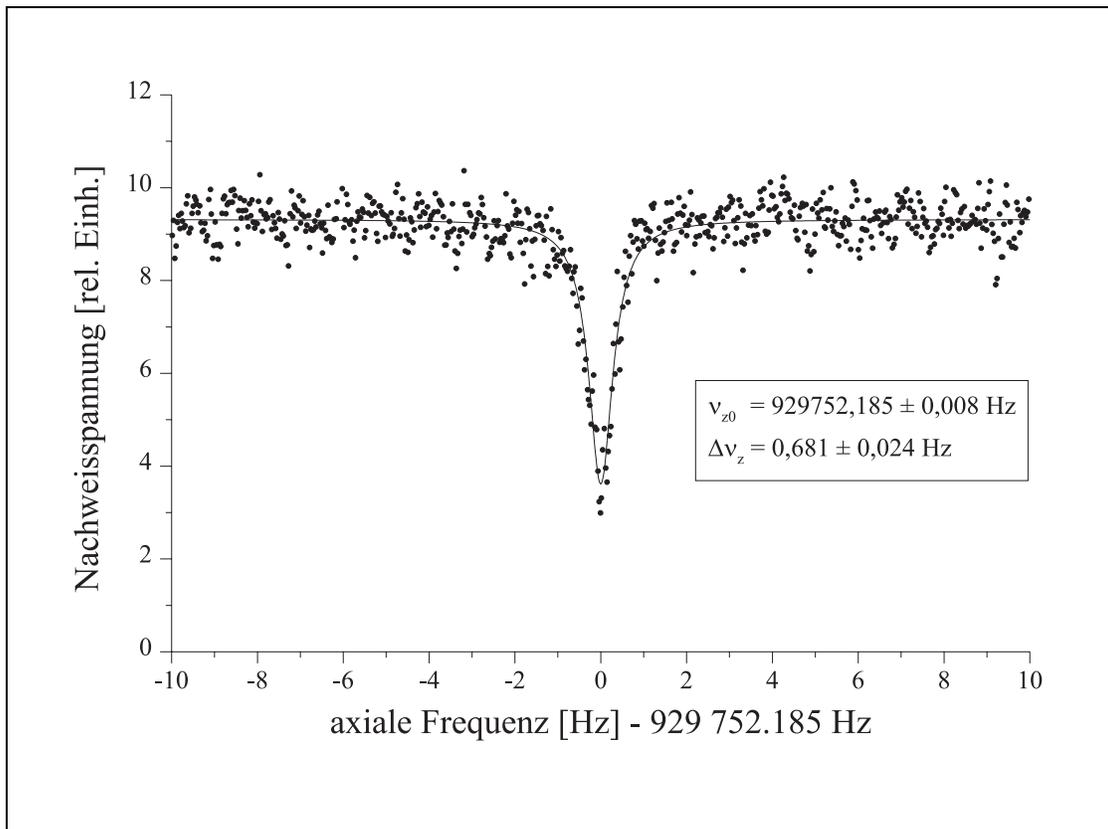


Abbildung 5.3: **Axiales Signal eines einzelnen Ions**

Die Messzeit betrug 1/2 Stunde. Der Fit erfolgte nach Gleichung 4.17. Aus der Breite des Signals lässt sich die Kühlzeitkonstante $\tau = 1/\gamma$ zu 234,8 (86) ms abschätzen.

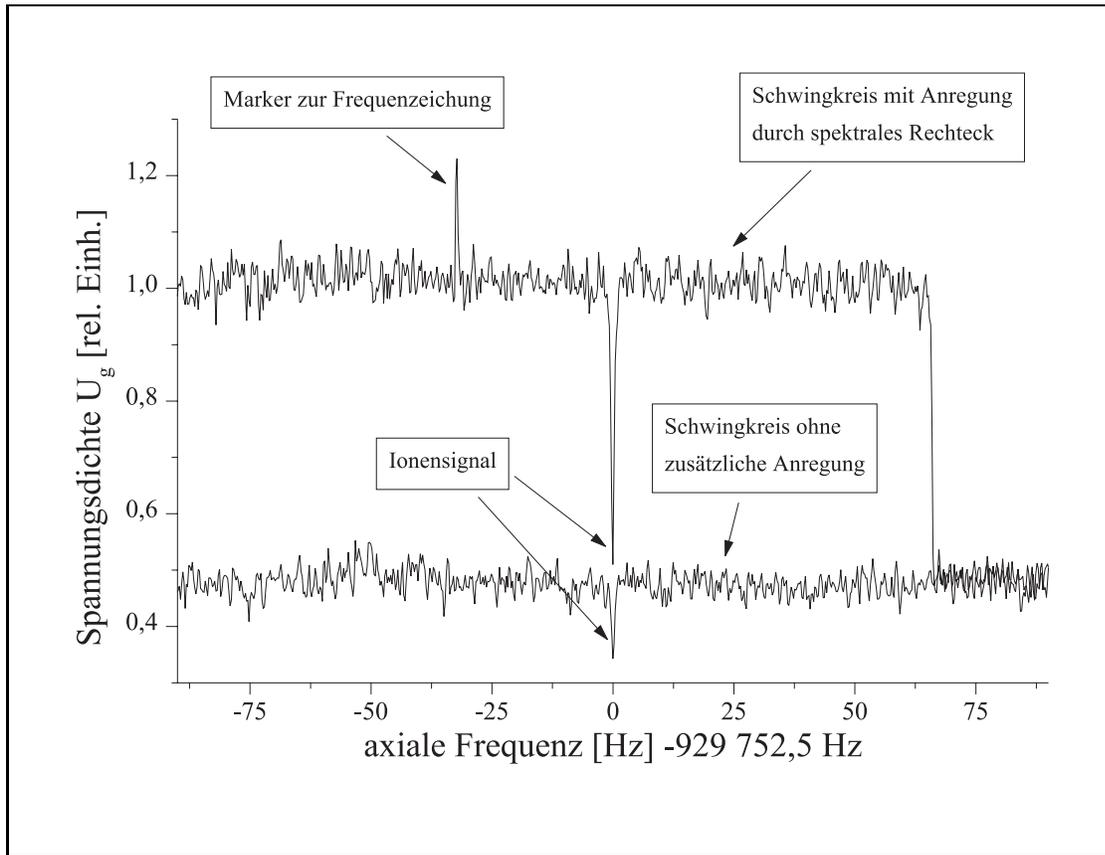


Abbildung 5.4: **Beschleunigung des axialen Nachweises**

Die Messzeit für beide Spektren betrug 5 Minuten. Diese Abbildung verdeutlicht das wesentlich bessere Signal-Rausch-Verhältnis der Messung mit Anregung gegenüber der ohne zusätzliche Anregung.

der einzelnen Ionenspezies zunutze. Dazu wird die Fallenspannung linear von einer betragsmäßig hohen zu einer niedrigen Spannung durchgestimmt. Kommt eine Ionensorte mit bestimmten q/m -Verhältnis in Resonanz mit dem axialen Nachweisschwingkreis (siehe Gleichung 3.7), so kann, da die Ionen nach dem Erzeugen eine hohe kinetische Energie haben, nach Gleichung 4.3 ein Spannungsabfall über dem Schwingkreis beobachtet werden. Beim Durchfahren der Spannungsrampe geschieht dies für jede Ionensorte bei einer ganz bestimmten Speicherspannung. Ein so erhaltenes Massenspektrum ist in Abbildung 5.5 zu sehen.

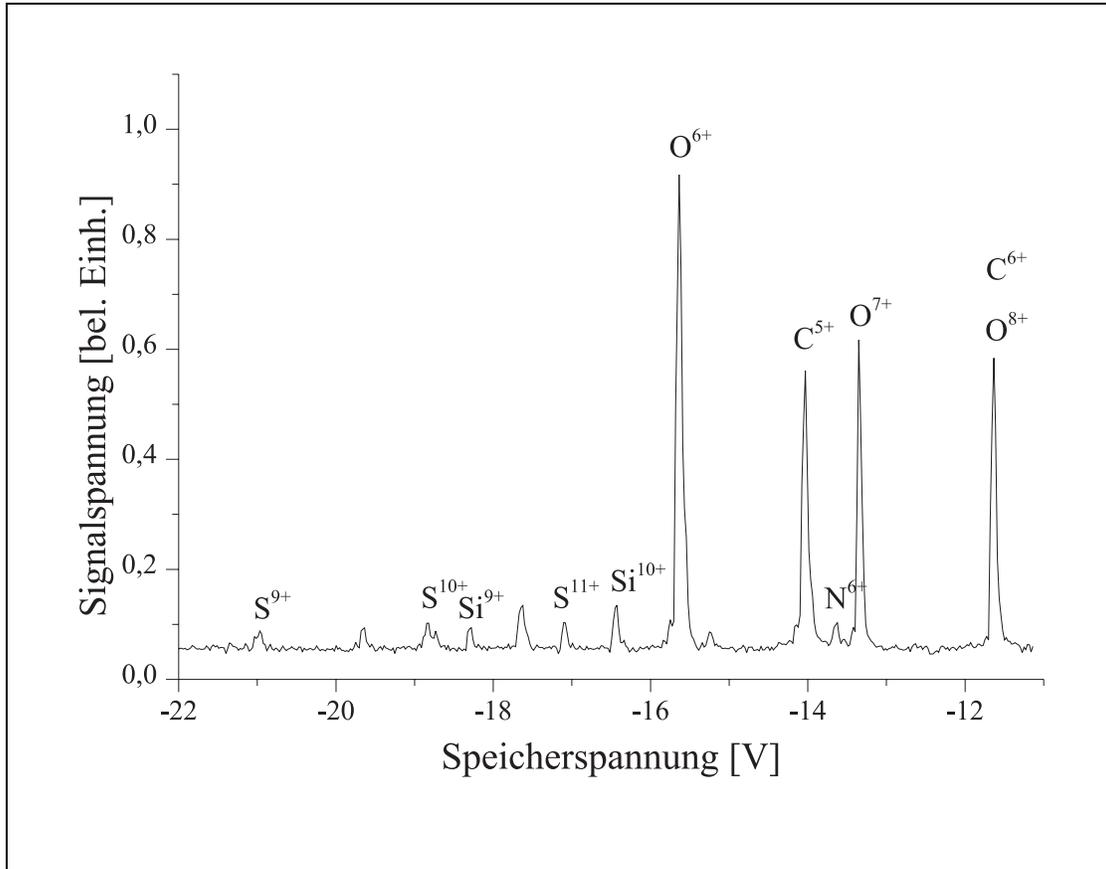


Abbildung 5.5: **Massenspektrum einer Ionenwolke**

Die Ionen wurden mit einem Elektronenstrom von 5 nA bei einer Energie der Elektronen von 1,4 keV erzeugt.

5.3 Messung der Zyklotronfrequenz

Für die Bestimmung des g-Faktors ist in unserem Experiment die genaue Kenntnis der freien Zyklotronfrequenz des Ions von entscheidender Bedeutung. Aus Gleichung 3.13 ist ersichtlich, dass die reduzierte Zyklotronfrequenz von den drei Eigenfrequenzen am genauesten bestimmt werden muss. Eine Bestimmung der reduzierten Zyklotronfrequenz kann bei unserem Experiment vom Prinzip her auf zwei Arten geschehen:

- direkter Nachweis des induzierten Spiegelstroms

- indirekter Nachweis über die axiale Bewegung.

5.3.1 Direkter Nachweis der Zyklotronbewegung

Damit ein genügend großer Strom induziert wird, ist zum direkten Nachweis der reduzierten Zyklotronbewegung bei den gegebenen experimentellen Parametern mindestens eine Energie der Zyklotronbewegung des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions von ca. 1 eV nötig. Dieser Strom verursacht über den an die geteilte Elektrode der Präzisions-Falle angeschlossenen Schwingkreis ($Q \approx 400$, $\nu_r \approx 24$ MHz) einen Spannungsabfall, von dem nach einer entsprechenden Verstärkung eine Fourier-Transformation durchgeführt wird. Die reduzierte Zyklotronfrequenz eines Ions macht sich so in einem Peak im Frequenzspektrum bemerkbar. Der große Vorteil dieser Methode ist die äußerst kur-

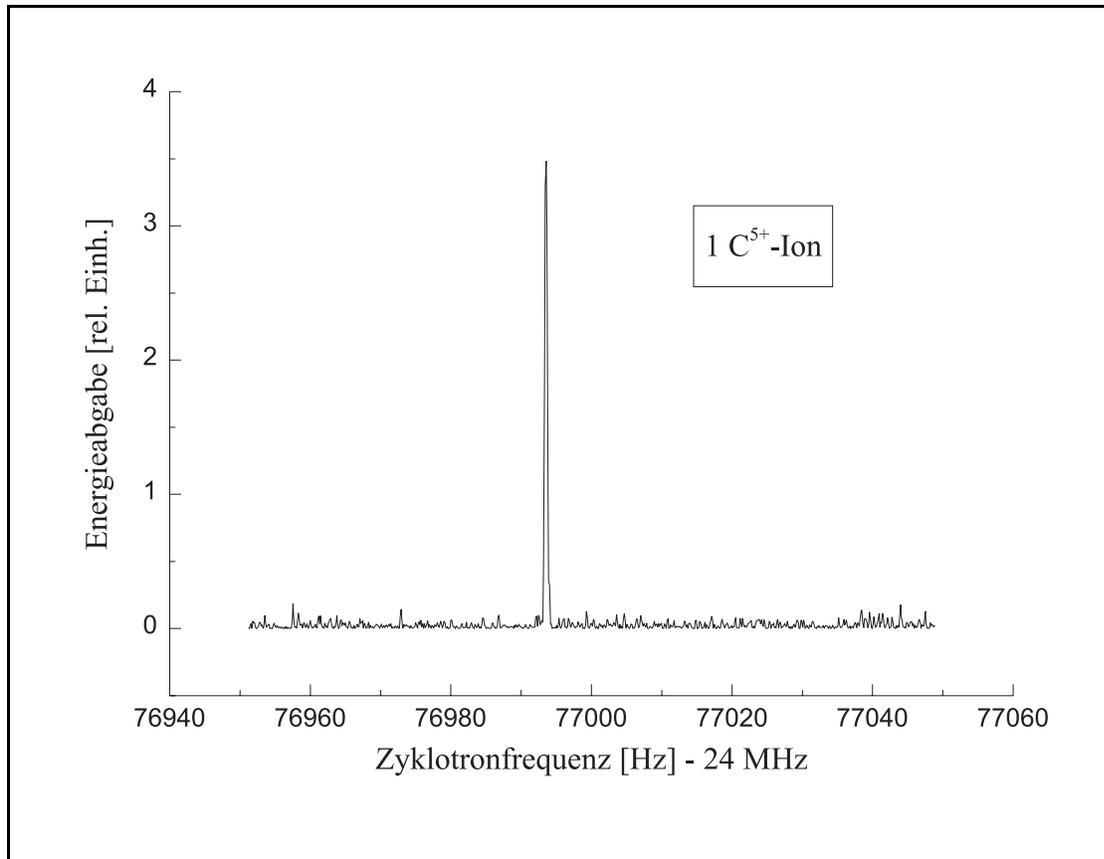


Abbildung 5.6: **Frequenzanalyse des von der Zyklotronbewegung eines $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions induzierten Stromes**

Die Energie des Ions beträgt ca. 100 eV. Sie ist direkt proportional zu der vom Ion an den Schwingkreis abgegebenen Leistung.

ze Messzeit, die nur durch das Fourier-Limit beschränkt ist. Mit einer Messzeit von 1 Minute erreichen wir so eine Auflösung von 20 mHz, entsprechend einer relativen Auflösung von 10^{-9} . Von Nachteil ist, dass die Energie der Zyklotronbewegung des Ions zum Nachweis etwa 1 eV betragen muss. Im Prinzip genügt die Empfindlichkeit der Elektronik zwar auch für eine Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz mittels der „Dip-Methode“ mit der die axiale Frequenz nachgewiesen werden kann. Allerdings wird im idealen Fall nach den Gleichungen 4.14 und 4.6 eine Breite des

Dips von ca. 5 mHz erwartet¹. Da durch Fluktuationen des Magnetfeldes und der axialen Energie des Ions die Zyklotronresonanz innerhalb der durch Mittelungen nötigen Messzeit von ca. 10 min auf ca. 200 mHz (vergleiche Abbildung 6.9) verbreitert wird, die Gesamtfläche des Signals jedoch gleich bleibt, ist der „Dip“ nicht tief genug, um nachgewiesen zu werden.

5.3.2 Indirekte Methoden

Bei indirekten Nachweismethoden ist es nötig, die Zyklotronbewegung des Ions oder der Ionenwolke an die axiale Bewegung zu koppeln. Da die indirekten Methoden nur einen axialen Nachweis benötigen, sind sie in vielerlei Hinsicht einfacher und flexibler als der direkte Nachweis einzusetzen. Wir verwenden folgende Kopplungsmechanismen:

Kopplung durch ein inhomogenes Magnetfeld: Bei dieser Methode nutzen wir aus, dass durch eine Erhöhung der Energie der Zyklotronbewegung sich das magnetische Moment des Ions erhöht (siehe Gleichung 3.28). Nach Gleichung 3.16 erhöht sich dadurch auch die axiale Frequenz des Ions (siehe auch Gleichung 3.27). Wird nun ein elektromagnetische Wechselfelder mit einer bestimmten Frequenz eingestrahlt, erhält man eine maximale Verschiebung der axialen Frequenz genau dann, wenn die Frequenz des Anregungsfeldes mit der reduzierten Zyklotronfrequenz übereinstimmt. In der Analyse-Falle sind wegen der extrem starken Magnetfeld-Inhomogenität von $B_2 = 10 \text{ mT/mm}^2$ bereits Energieaufnahmen von weniger als 1 meV beobachtbar. Daher genügen relativ kleine Anregungen, und die Änderung der Zyklotronfrequenz des Ions durch die Anregung ist klein. Diese Methode wurde für die g-Faktor-Messungen in der Analyse-Falle [Her99, Her00] eingesetzt.

Kopplung durch Stöße zwischen den Ionen: Diese Methode nutzt aus, dass in Ionenwolken durch Stöße der Ionen untereinander Energie ausgetauscht und ein Energiegleichgewicht angestrebt wird. Wird daher die Zyklotronbewegung angeregt, kann dies als Energieabgabe auf dem axialen Schwingkreis (siehe Abschnitt 4.2.1) beobachtet werden. Diese Methode eignet sich vor allem für eine grobe Bestimmung des Magnetfeldes.

Kopplung durch Seitenbandkopplung: Diese Methode wird in Abschnitt 5.5 besprochen. Sie könnte bei zukünftigen g-Faktor-Messungen zum Einsatz kommen.

Die indirekten Methoden haben zwar gegenüber dem direkten Nachweis die Nachteile, zeitaufwendiger zu sein und eine kompliziertere Linienform zu liefern, aber sie benötigen keine Abstimmung eines Zyklotronschwingkreises und sind daher flexibler einzusetzen.

¹Diese geringe erwartete Breite des Dips kommt hauptsächlich dadurch zustande, dass im Frequenzbereich von 24 MHz die unvermeidlichen parasitären Kapazitäten den Strom besser als bei 1 MHz leiten, und damit nur relativ kleine Resonanzwiderstände zu erreichen sind. Zusätzlich sind durch den Skin-Effekt die erreichbaren Güten der Resonanzkreise kleiner. Dies resultiert im Vergleich zur axialen Bewegung in einer wesentlich schwächeren Kopplung der Zyklotronbewegung an das thermische Bad.

5.4 Messung der Magnetronfrequenz

Eine schnelle Methode, die Magnetronfrequenz zu bestimmen, ist es, das untere Seitenband $\nu_z - \nu_-$ einzustrahlen. Im Resonanzfall absorbiert das Ion im Mittel Photonen der Energie $h\nu_z - h\nu_-$, und es wird sowohl die Amplitude der Magnetron-² als auch die der Axial-Bewegung aufgeweitet. Die hohe Axialenergie verursacht dann auf dem axialen Nachweis einen Peak bei der axialen Frequenz (siehe Abbildung 5.7). Die Magnetronfrequenz ergibt sich aus der Differenzfrequenz des eingestrahlten Feldes und des Peaks. Der Peak bei der axialen Frequenz des Ions verschiebt sich beim Verstimmen der Frequenz des Kopplungsfeldes mit (siehe Abbildung 5.8). Daher ist die Differenz der beiden Frequenzen konstant und die Magnetronfrequenz kann aus nur einer Messung mit einer Genauigkeit von 0,2 Hz extrahiert werden.

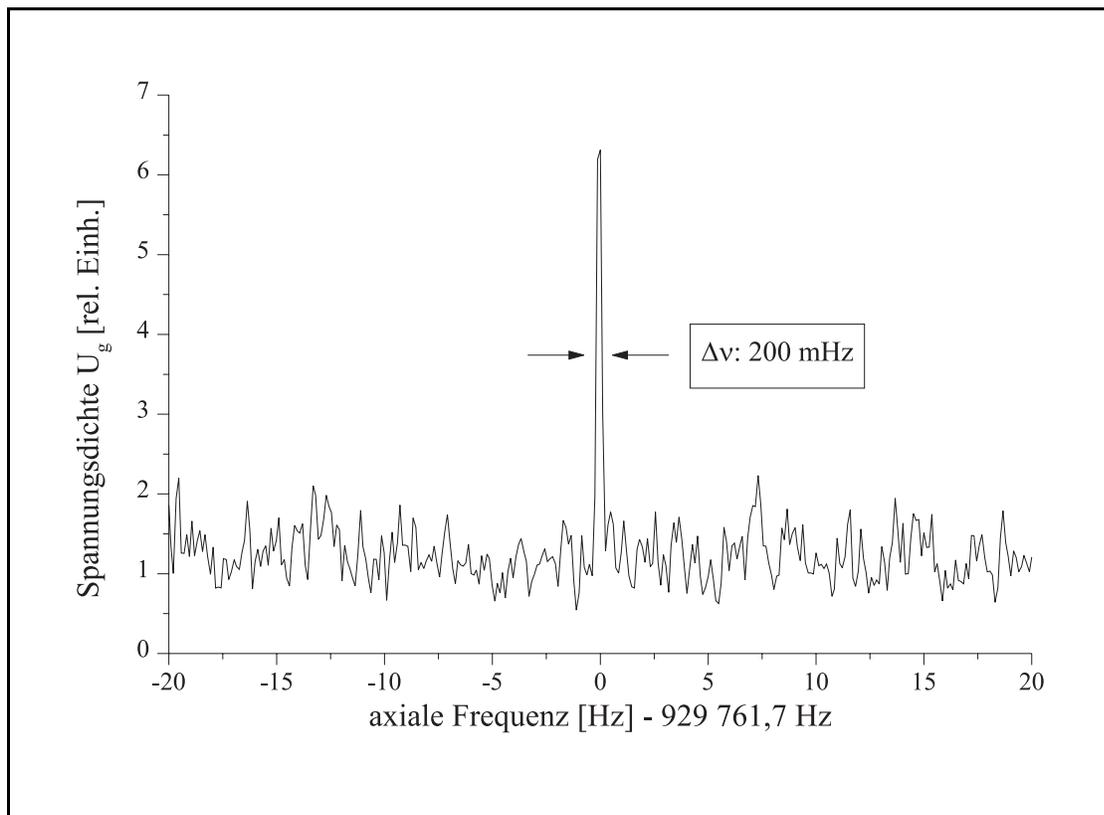


Abbildung 5.7: **Messung der Magnetronfrequenz durch Seitenbandanregung**

Wird das untere Magnetronseitenband der axialen Bewegung $\nu_z - \nu_-$ eingestrahlt, heizt sich die axiale Bewegung auf. Dies wird dann als Peak bei der axialen Frequenz ν_z auf dem axialen Nachweisschwingkreis sichtbar.

²Vergrößert sich der Radius der Magnetronbewegung, wird, da sich die elektrostatische Energie erniedrigt, Energie abgegeben.

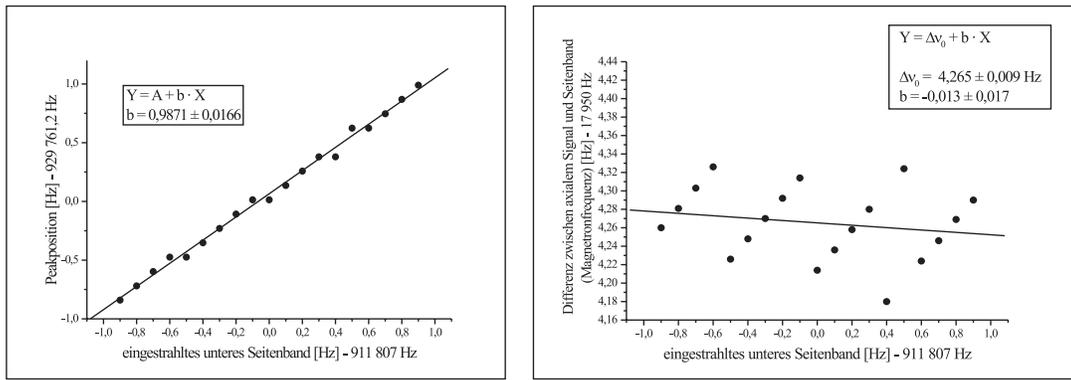


Abbildung 5.8: Position des axialen Peaks als Funktion der Frequenz des Magnetronseitenbandes

Die Differenzfrequenz (ν_-) ist unabhängig von der Frequenz des Seitenbands $\nu_z - \nu_-$. Werden alle Frequenzpunkte zur Auswertung herangezogen, ergibt sich die Magnetronfrequenz zu 17 954,265 (9) (10) Hz. Der erste Fehler ergibt sich aus dem Fit, der zweite Fehler aus der Treppenstruktur in der linken Grafik. Diese ist durch die endliche Auflösung der Fourier-Analyse und damit der Bestimmung der axialen Frequenz verursacht. In der rechten Grafik macht sich dies durch den sägezahnartigen Verlauf der Magnetronfrequenz bemerkbar. Der Nullpunkt der x-Achse wurde so gewählt, dass der Peak bei der ungestörten axialen Frequenz zu liegen kommt (siehe linke Grafik).

5.5 Kopplung der Bewegungsmoden

Resonante Kopplung

Werden in einer Penning-Falle zwei der Eigenbewegungen durch ein elektromagnetisches Wechselfeld geeignet gekoppelt, kommt es zu einem interessanten Phänomen, das in einer Penning-Falle zuerst von Pritchard et al. [Cor90] (ein sehr theoretischer Zugang findet sich in [Kre99]) genauer untersucht wurde³: Beide zuvor harmonischen Eigenbewegungen erfolgen nicht mehr mit einer Frequenz, sondern die Bewegung wird nun durch die von der Kopplung verursachte Amplitudenänderung moduliert. Die klassischen Bewegungsgleichungen eines Ions mit der zusätzlichen Kopplung an eine andere Mode ist formal die eines getriebenen, quantenmechanischen Zwei-Niveau-Systems. Die Frequenzen der beiden Moden entsprechen dabei den Phasenentwicklungsfrequenzen $e^{-i\omega_n t}$ der Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung [Cor90, Coh77]. Stimmt die die Frequenz des Störfeldes mit einem geeigneten Seitenband⁴ überein, variiert die Amplitude beider Moden mit $\cos(\Omega t + \phi)$. Dabei beträgt die Phasenverschiebung zwischen den beiden Moden $\pi/2$ und Ω ist die „Rabi“-Frequenz, die im Wesentlichen durch die Stärke des koppelnden Wechselfeldes gegeben ist. Die Entwicklung einer der beiden Moden (hier der axialen

³Die Kopplung zweier Bewegungs-Moden in einer Penning-Falle wurde schon vorher häufig eingesetzt. So spielt sie z.B. bei den g-Faktor-Messungen des Elektrons und auch bei fast allen Massmessungen eine bedeutende Rolle.

⁴Im Normalfall die Differenzfrequenz.

Schwingung) lässt sich also durch

$$z(t) = \cos(\Omega t + \phi) \sin(\omega_z t) = \frac{1}{2} (\sin((\omega_z + \Omega)t) + \sin((\omega_z - \Omega)t)) \quad (5.2)$$

beschreiben. Bei einer Frequenzanalyse der Moden kann also eine Aufspaltung der Bewegung in zwei Frequenzen beobachtet werden (siehe Abbildung 5.9), wobei der Frequenzunterschied 2Ω zwischen den beiden Frequenzkomponenten linear von der Kopplungsstärke und damit von der Amplitude \mathbf{V} des koppelnden Wechselfeldes abhängt (siehe Abbildung 5.10).

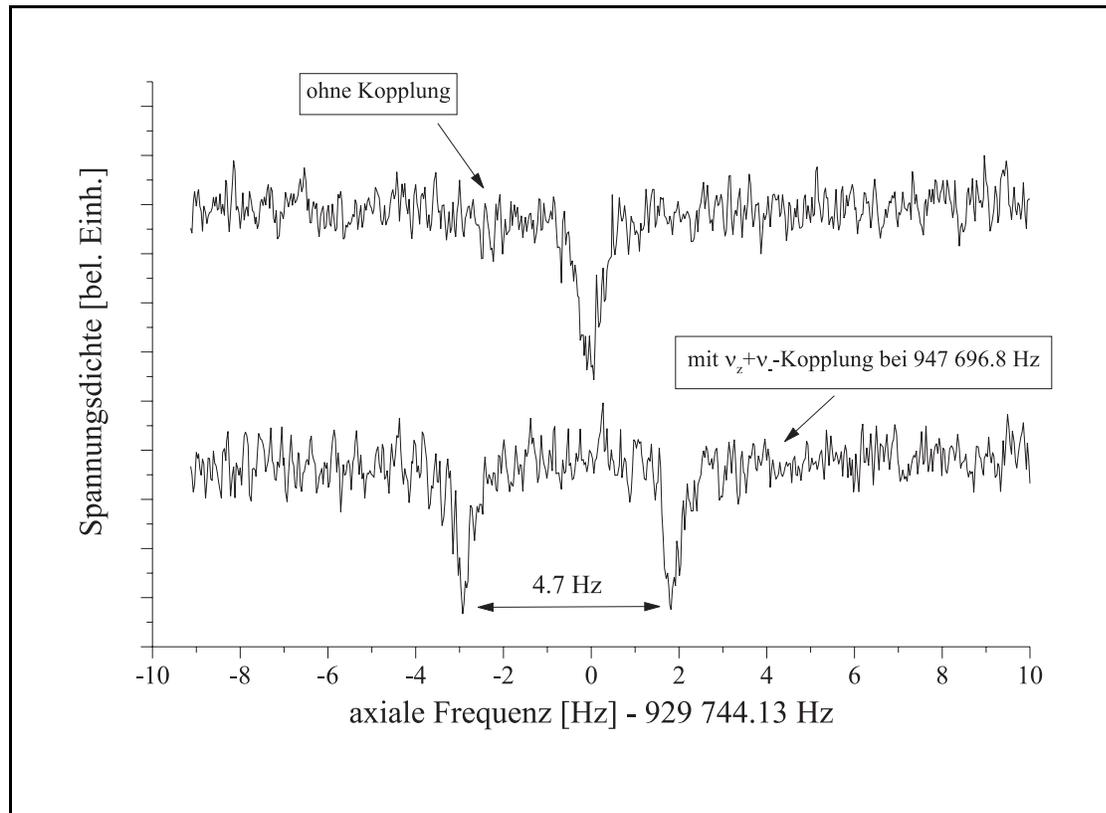


Abbildung 5.9: **Aufspaltung der axialen Frequenz durch Seitenbandkopplung an die Magnetronbewegung**

Werden die Axial- und Magnetronbewegung mit einem elektromagnetischem Wechselfeld bei ihrer Summenfrequenz gekoppelt, spaltet das axiale Signal in zwei Dips auf. Da die eingestrahlte Kopplungsfrequenz leicht gegenüber dem Seitenband verstimmt ist, ist die Aufspaltung leicht asymmetrisch (siehe Abbildung 5.11).

Bei jeder Absorption eines Photons aus dem Kopplungs-Feld wird die Quantenzahl n der einen Bewegung um 1 erhöht und die der anderen Bewegung k um 1 erniedrigt. Erfolgt die Absorption der Photonen kohärent, so erhöht sich die Quantenzahl der einen Mode kontinuierlich, während sich die der anderen bis auf 0 erniedrigt. Dann setzt der umgekehrte Prozess ein. Daher sind nicht die maximalen Energien beider Bewegungen gleich, sondern deren Quantenzahlen, und man erhält für beide Quantenzahlen den gleichen Erwartungswert. Mit dieser Argumentation kann wie folgt eine Beziehung zwischen den Erwartungswerten der Energien E_n und

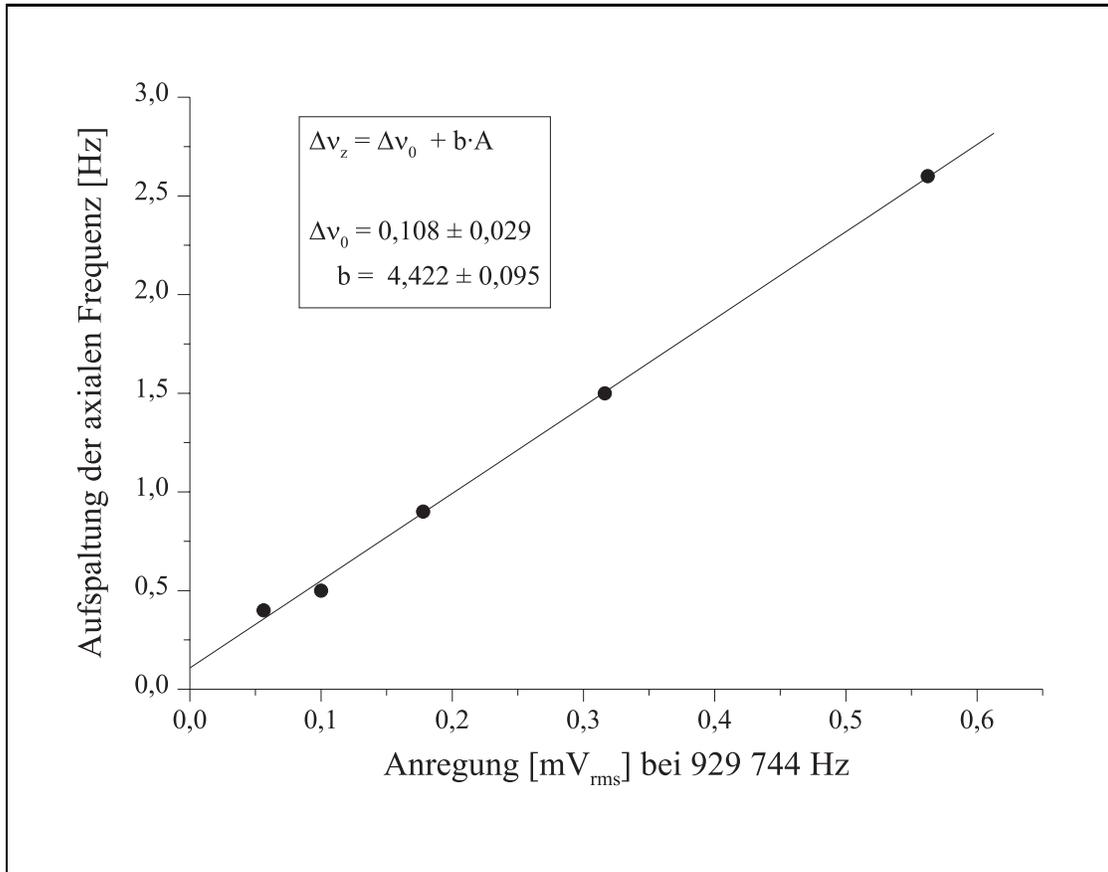


Abbildung 5.10: **Aufspaltung der axialen Frequenz eines einzelnen Ions als Funktion der Amplitude V des Seitenbandes**

Aus der Aufspaltung der Frequenz lässt sich der am Ort des Ions anliegende entsprechende Quadrupol-Anteil (hier $Y_{+1}^2 + Y_{-1}^2$) des elektrischen Wechselfeldes bestimmen. Diese Größe lässt sich sonst nur durch eine wegen der gebrochenen axialen Symmetrie aufwendige Analyse der Elektrodenkonfiguration bestimmen.

E_k der beiden Bewegungen für den Gleichgewichts-Fall hergeleitet werden:

$$\langle E_n \rangle = \hbar\omega_n \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_n \left(k + \frac{1}{2} \right) = \frac{\omega_n}{\omega_k} \hbar\omega_k \left(k + \frac{1}{2} \right) = \frac{\omega_n}{\omega_k} \langle E_k \rangle. \quad (5.3)$$

Gleichung 5.3 zeigt, dass diese Methode zum gezielten Kühlen oder Heizen einer Bewegungs-mode eingesetzt werden kann, indem die Energie der anderen Mode während der Seitenbandkopplung durch elektronisches Anregen des entsprechenden Schwingkreises eingestellt wird. Damit dies erreicht werden kann, muss die Energie eines Photons genau der Differenz der Energie der beiden Zustände $E(n, k) - E(n + 1, k - 1)$ entsprechen. Im Normalfall muss also die Differenzfrequenz der beiden Bewegungen eingestrahlt werden. Da die Magnetronbewegung aber bei höheren Bewegungsamplituden eine kleinere Energie hat als bei kleinen, muss die Summenfrequenz benutzt werden, sobald eine der beiden Moden die Magnetronbewegung ist.

Diese Methode der Seitenbandkopplung kann auf vielfältige Weise eingesetzt werden:

- indirekte Messung von Bewegungsfrequenzen (siehe Abschnitte 5.5.2 und 5.5.3)
- Kühlen einer Bewegungs-mode (Abschnitt 5.9.2)
- Messung der axialen Temperatur (Abschnitt 5.10.2)
- gezielte Einstellung der Energie einer Bewegungs-mode (Abschnitt 5.10).

5.5.1 Nichtresonante Kopplung

Wird die Frequenz des Kopplungsfeldes um die Frequenz δ gegenüber dem Seitenband verstimmt, werden die Frequenzkomponenten $\omega + \epsilon_{1,2}$ einer der beiden Eigenbewegungen nach [Cor90] durch folgende Gleichung beschrieben (siehe auch Abbildung 5.11):

$$\epsilon_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\delta^2 + |V|^2}. \quad (5.4)$$

Dies ist ganz analog zum „Avoided Crossing“ eines beinahe resonant getriebenen Zwei-Niveau-Systems.

5.5.2 Messung der Magnetronfrequenz mittels Seitenbandkopplung

Mittels der oben beschriebenen Methode der Seitenbandkopplung kann die Magnetronfrequenz auch wie folgt bestimmt werden: Es wird im Gegensatz zur der in Abschnitt 5.4 beschriebenen Methode das obere Magnetron-Seitenband der axialen Bewegung ($\nu_z + \nu_-$) eingestrahlt und die Frequenz der beiden axialen Dips (siehe Abbildung 5.9) als Funktion des eingestrahlteten Seitenbandes (siehe Abbildung 5.11) bestimmt. Da beim Einstrahlen des oberen Seitenbandes die Quantenzahlen der Magnetronbewegung und der axialen Bewegung angeglichen werden (siehe Gleichung 5.3 und Abschnitt 5.9.2) und die axiale Bewegung über den Schwingkreis gekühlt wird, ist die Amplitude der Magnetronbewegung im Gegensatz zu der in Abschnitt

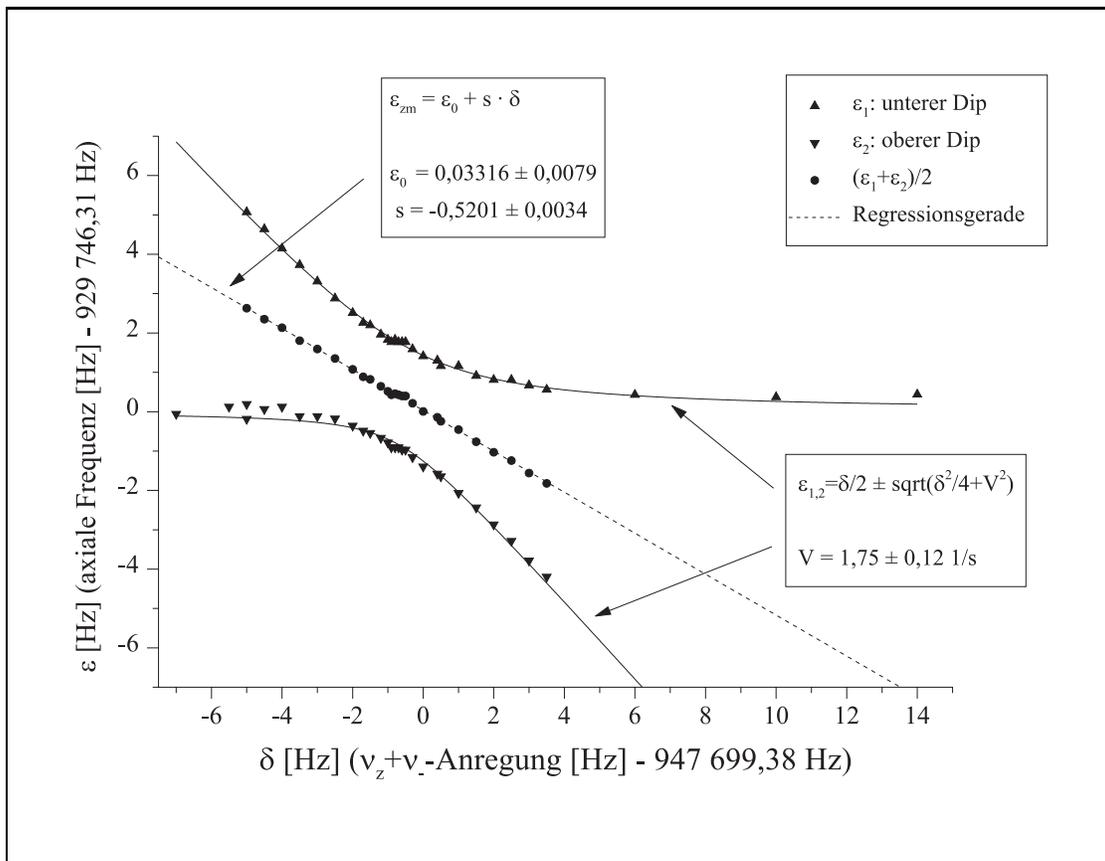


Abbildung 5.11: „Avoided Crossing“ der beiden Frequenzkomponenten der axialen Bewegung

Bei dieser Messung wurde die Magnetronbewegung an die axiale Bewegung mittels des Seitenbandes $\nu_z + \nu_-$ gekoppelt. An die Messdaten ist Gleichung 5.4 angepasst worden. Die Magnetronfrequenz ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Geraden, die an den Mittelwert der beiden axialen Frequenzen (gestrichelte Linie) angefitet ist, mit der x-Achse zu 17 953,1 (1) Hz.

5.4 beschriebenen Methode bei der Messung sehr klein. Zur Bestimmung der Magnetronfrequenz mit einem Fehler von kleiner als 1 Hz sind mindestens 3-5 Messpunkte nötig. Da innerhalb des Messfehlers beide Methoden das gleiche Ergebnis liefern, benutzen wir in der Praxis die schnellere, in Abschnitt 5.4 beschriebene Methode.

5.5.3 Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz mittels Seitenband

Hierbei wird die Zyklotronbewegung des Ions mit der axialen Bewegung durch Einstrahlen der Frequenz $\omega_+ - \omega_z$ gekoppelt. Analog zur Kopplung an die Magnetronbewegung werden dann auch zwei Frequenzkomponenten der axialen Bewegung beobachtet (siehe Abbildung 5.12). Wird das Seitenband durchgestimmt, kann ein

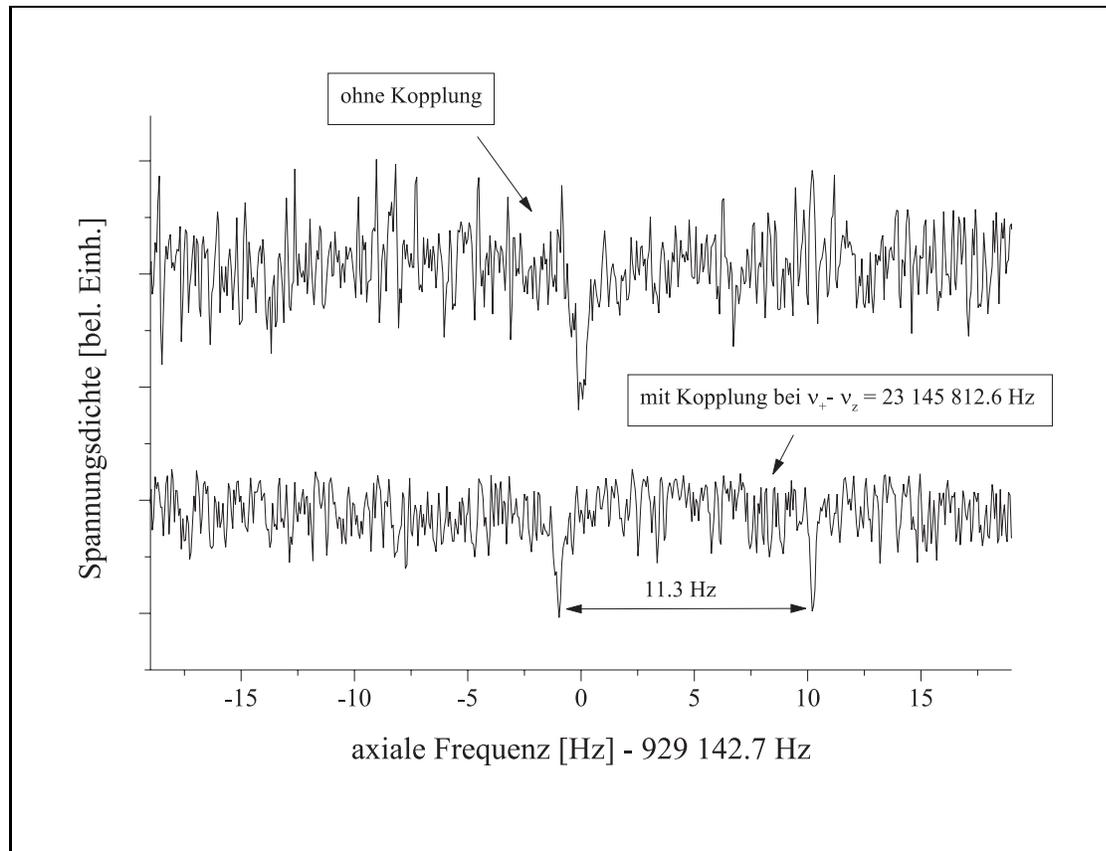


Abbildung 5.12: **Kopplung der Axial- und Zyklotronbewegung**

Beim Einstrahlen des unteren axialen Seitenbandes der reduzierten Zyklotronbewegung spaltet die axiale Bewegungsfrequenz auf. Grund für die asymmetrische Verschiebung der Dips ist, dass die Frequenz des angelegten Wechselfeldes leicht gegenüber dem Seitenband verstimmt ist (vergleiche dazu die Abbildungen 5.9 und 5.11).

ähnliches Bild wie Abbildung 5.11 erhalten werden. Ein großer Vorteil dieser Methode, die Zyklotronfrequenz zu bestimmen, ist, dass der Erwartungswert der Energie der Zyklotronbewegung während des Nachweises in unserer Präzisions-Falle nach Gleichung 5.3 konstant bei

$$\langle E_+ \rangle = \frac{\nu_+}{\nu_z} \langle E_z \rangle = 129 (14) \text{ meV} \quad (5.5)$$

bleibt ($\langle E_z \rangle = 5 \text{ meV} \hat{=} 60 \text{ K}$). Daher sind systematischen Verschiebungen durch die Zyklotronenergie der mit dieser Methode gemessenen Zyklotronfrequenz kleiner. Zu diesen Verschiebungen gehören insbesondere der Einfluss von Inhomogenitäten des Magnetfeldes und relativistische Effekte (siehe Abschnitte 6.2.1 und 6.2.8).

5.6 Präparation einer reinen Ionenwolke

Um eine Wolke einer einzigen Ionensorte zu erhalten, müssen alle unerwünschten Ionensorten aus der Wolke entfernt werden. Dazu benutzen wir ein äußerst effizientes und einfach zu handhabendes Schema: Mit einem handelsüblichen Synthesizer wird Rauschen, d.h. ein breites Frequenzband von ca. 100 kHz bis 10 MHz, bereitgestellt. Dieses Rauschen wird über einen Kerbfilter, der die axiale Frequenz der erwünschten Ionensorte herausfiltert, an eine der Endkappen der Präzisions-Falle angelegt. Dadurch wird die axiale Energie aller Ionensorten außer der erwünschten Ionensorte stark angeregt und alle unerwünschten Ionensorten verlassen die Falle. Mit der in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Methode kann der Erfolg des „Putzens“ der Falle kontrolliert werden.

5.7 Präparation eines einzelnen Ions

Um eine hohe Präzision erreichen zu können, beziehungsweise überhaupt spin-flips beobachten zu können, ist es wichtig, mit einem einzelnen Ion zu arbeiten. Daher muss die Anzahl der Ionen auf eins reduziert werden. Dazu werden die Energien der reduzierten Zyklotron-Bewegung der in der Falle verbliebenen Ionen stark angeregt und anschließend das Speicherpotential auf etwa die Hälfte abgesenkt. Da die Ionen untereinander nichtlinear wechselwirken, wird Energie zwischen dem Axial- und dem Zyklotronfreiheitsgrad ausgetauscht und die Ionen verlassen in axialer Richtung die Falle [Gab95]. Diese Kopplung nimmt mit der Anzahl der Ionen ab und fehlt bei einem einzelnen Ion theoretisch sogar ganz. Daher kann die Anzahl der gewünschten Ionen grob durch die Stärke der Absenkung bestimmt werden. Der Prozess der Ionenanzahl-Reduktion wird durch regelrechtes „Abzählen“ der Ionen im Zyklotronspektrum kontrolliert (siehe Abbildung 5.13). Das Abzählen der Ionen ist möglich, da die Ionen bei der Anregung verschiedene Zyklotronenergien erhalten und sie auf verschiedenen Orbits um das Zentrum der Falle kreisen. In dem auch in der Präzisions-Falle inhomogenen Magnetfeld unterscheiden sich daher die reduzierten Zyklotronfrequenzen der Ionen um bis zu 10^{-4} .

Eine andere Möglichkeit festzustellen, ob man ein einzelnes Ion präpariert hat, ist es, die Stärke des axialen Signals (also die Dip-Breite) zu analysieren (siehe auch [Häf98]). Für ein einzelnes Ion erwarten wir in der Analyse-Falle nach Gleichung 4.17 eine Breite des Dips von 2 Hz. Die Breite der beobachteten Dips einzelner Ionen liegt bei den aktuellen experimentellen Parametern je nach Harmonizität und Konstanz der Speicherspannung im Bereich von 2,2-3 Hz. Da die Breite des Dips für zwei Ionen schon mindestens 4 Hz beträgt, ist das Signal mehrerer Ionen leicht von dem eines einzelnen Ions zu unterscheiden.

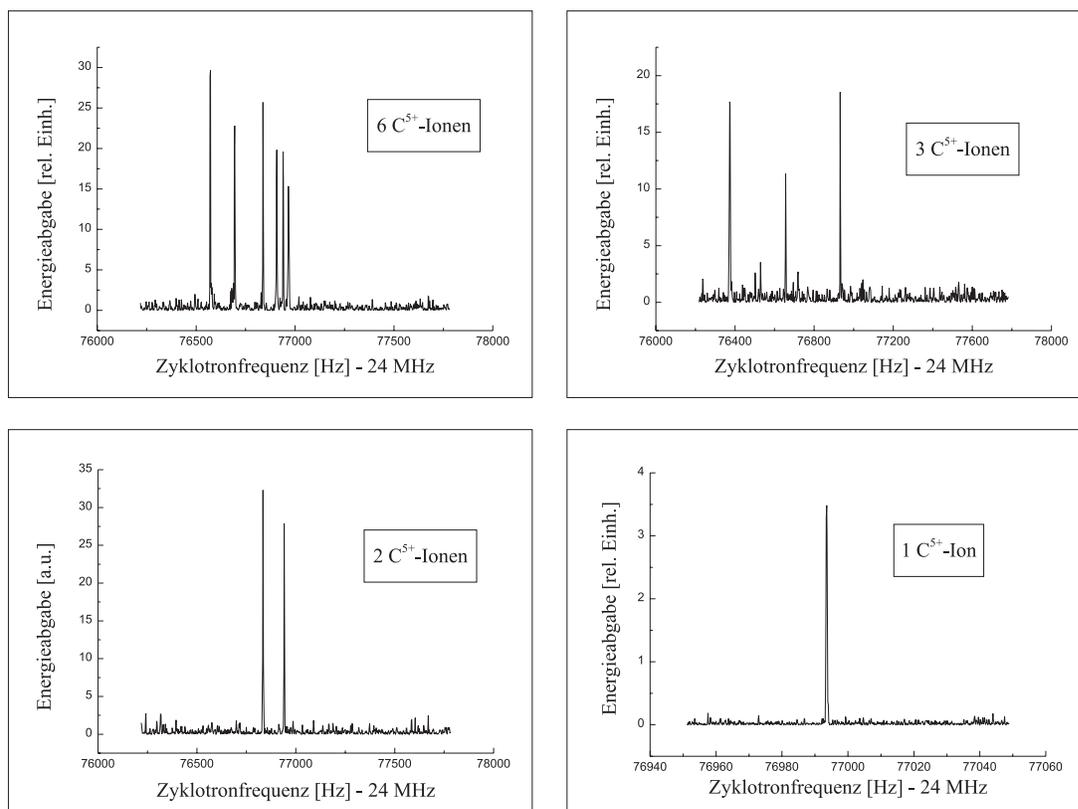


Abbildung 5.13: **Zyklotronspektren für verschiedene Ionenzahlen**

Je höher die Energie eines Ions ist, desto geringer ist seine reduzierte Zyklotronfrequenz in dem auch in der Präzisions-Falle nicht ganz homogenen Magnetfeld (vergleiche Abbildung 5.14).

5.8 Transport des Ions

Um die drei Fallen (siehe Abbildung 2.2) sinnvoll einsetzen zu können, müssen die Ionen zuverlässig zwischen den einzelnen Fallen transferiert werden. Dies wird dadurch erreicht, dass durch geeignete Wahl der Spannungen an den Elektroden ein Potentialminimum geschaffen wird, das adiabatisch, d.h. langsam im Vergleich zur aktuellen axialen Frequenz des Ions, von der einen zur anderen Falle verschoben wird. Mit dieser Methode wurden sowohl Ionenwolken als auch einzelne Ionen viele Male (ca. 10 000 mal) zwischen den Fallen hin- und hertransportiert, ohne jemals einen Ionenverlust zu beobachten.

5.9 Kühlen der Ionen

5.9.1 Widerstandskühlen

Sowohl die Axial- als auch die Zyklotronbewegung der Ionen können durch Widerstandskühlen auf die Temperatur der Elektronen im jeweiligen Schwingkreis gekühlt werden. Dazu verwenden wir insgesamt drei Schwingkreise:

1. Der Schwingkreis für zum Kühlen der axialen Bewegung in der Analyse-Falle ist an eine der Korrektorelektroden und die zugehörige Endkappe der Analyse-Falle (siehe Abbildung 2.2) angeschlossen. Der Schwingkreis hat eine Güte von ca. 2500 bei einer Resonanzfrequenz von $\omega_{LC} = 2\pi \cdot 369$ kHz. Damit können bei dem effektiven Elektrodenabstand (siehe Kapitel 4) von $D = 5,5$ mm und dem erreichten Resonanzwiderstand von mehr als 20 M Ω C⁵⁺-Ionen mit einer Kühlzeitkonstante von weniger als 100 ms gekühlt werden. Da man nur dann eine schnelle Kühlung erreicht, wenn die Frequenz des Ions gut mit der des Schwingkreises übereinstimmt, ist es wichtig, die beiden Frequenzen aufeinander abzustimmen. Für die axiale Bewegung erreichen wir dies durch die Wahl des Speicherpotentials.
2. Der Schwingkreis zum Kühlen der axialen Bewegung in der Präzisions-Falle ist analog zu dem in der Analyse-Falle an eine Korrektorelektrode und die zugehörige Endkappe angeschlossen. Er besitzt eine Güte von ca. 1000, eine Resonanzfrequenz von $\omega_{LC} = 2\pi \cdot 930$ kHz und einen Resonanzwiderstand von 10 M Ω . Experimentell ergibt sich in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert eine Kühlzeitkonstante von $\tau = 235$ ms (siehe Abbildung 5.3).
3. Der Schwingkreis zum Kühlen der Zyklotronbewegung ist an die geteilte Korrektorelektrode der Präzisions-Falle angeschlossen und hat eine Güte von ca. 400 bei einer Resonanzfrequenz von 24 MHz. Mittels GaAs-Schaltern kann die Kapazität des Schwingkreises um knapp 1 pF verändert werden. Damit ist es uns möglich, die Resonanzfrequenz des Schwingkreises um 1 MHz und damit auch den Kühl-Widerstand gezielt zu verändern. Bei gutem Abgleich der Resonanzfrequenz des Schwingkreises auf die reduzierte Zyklotronfrequenz, was durch das Abkühlen der Apparatur auf 4 K und der damit verbundenen Änderung der Kapazitäten erschwert wird, kann so die Kühlzeitkonstante mit zwei GaAs-Schaltern im Bereich von 1 h bis 10 s variiert werden.

Das Kühlen der Zyklotronbewegung eines einzelnen Ions lässt sich gut durch die in Kapitel 4 dargelegte Theorie beschreiben. Abbildung 5.14 zeigt, dass der zeitliche Verlauf der Energie des Ions sehr gut durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann. Als Maß für die Energie des Ions dient die vom Ion im Schwingkreis dissipierte Leistung (siehe Abbildung 5.6). Für die Verschiebung der reduzierten Zyklotronfrequenz erwartet man nach Gleichung 3.27 eine lineare Abhängigkeit von der Zyklotronenergie. Der Verlauf der reduzierten Zyklotronfrequenz lässt sich allerdings nur für kleine Energien durch eine Exponentialfunktion beschreiben. Dies liegt daran, dass das Magnetfeld auch Inhomogenitäten in 4. und höherer Ordnung im Radius r aufweist. Daher ist die Frequenzverschiebung $\Delta\nu_+$ nur für kleine Energien ein lineares Maß für die Energie. Die Widerstandskühlung einer Ionenwolke

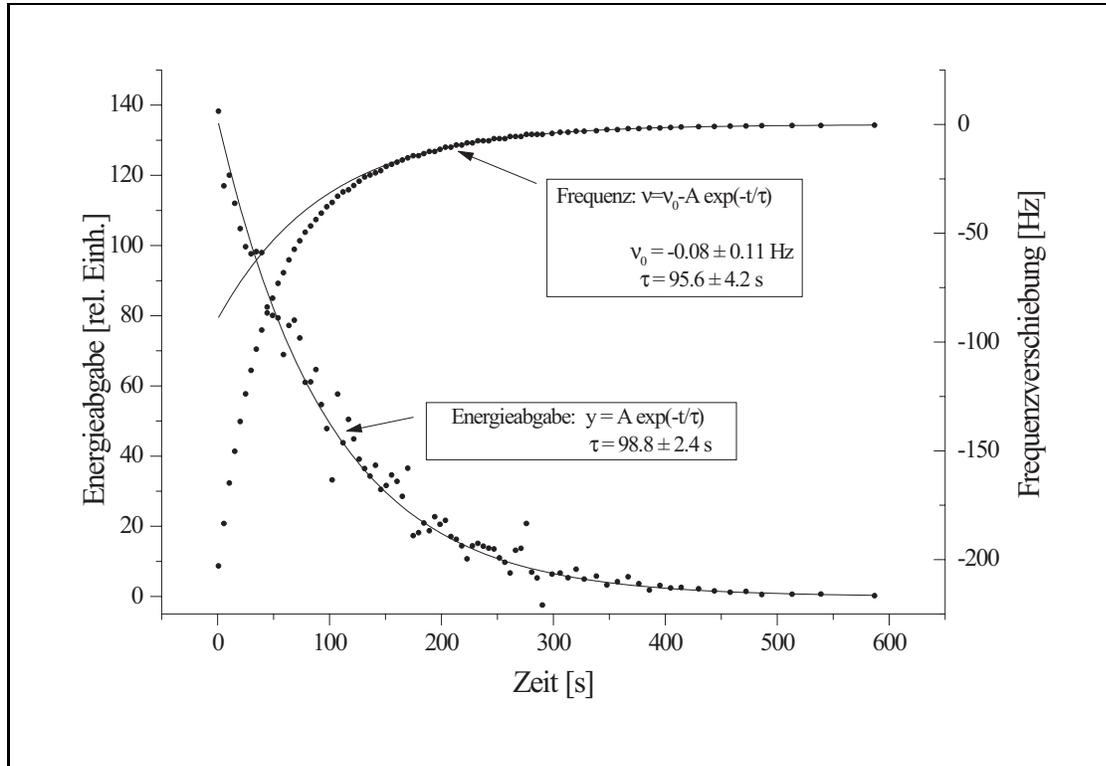


Abbildung 5.14: **Kühlen der Zyklotronbewegung eines Ions**

Als Maß für die Energieabgabe, beziehungsweise Energie des Ions, wird gemäß Gleichung 4.3 das Quadrat der induzierten Spannungsdichte benutzt.

– insbesondere ihrer axialen Bewegung – ist weitaus komplizierter. Dies illustriert Abbildung 5.15, in der das Kühlen der axialen Bewegung einer Wolke aus 30 Ionen mit jeweils einer mittleren axialen Energie von 13 eV (dies entspricht 1/3 der Speichertopftiefe) dargestellt ist. Dies hat vor allem zwei Gründe:

- Die Frequenz der Ionenwolke ist nicht konstant, da die Ionen wegen ihrer hohen Energie anharmonisch gebunden sind. Da zu Beginn des Kühlens die mittlere axiale Energie der Ionen etwa 1/3 der Speichertopftiefe beträgt (13 eV beziehungsweise 150 000 K), ist zu Anfang nur der Teil der Ionen, die eine axiale Energie von weniger als 4 eV besitzen, mit dem Schwingkreis in Resonanz. Daher hängt die Ankopplung der Ionenwolke an den Schwingkreis von der Energie

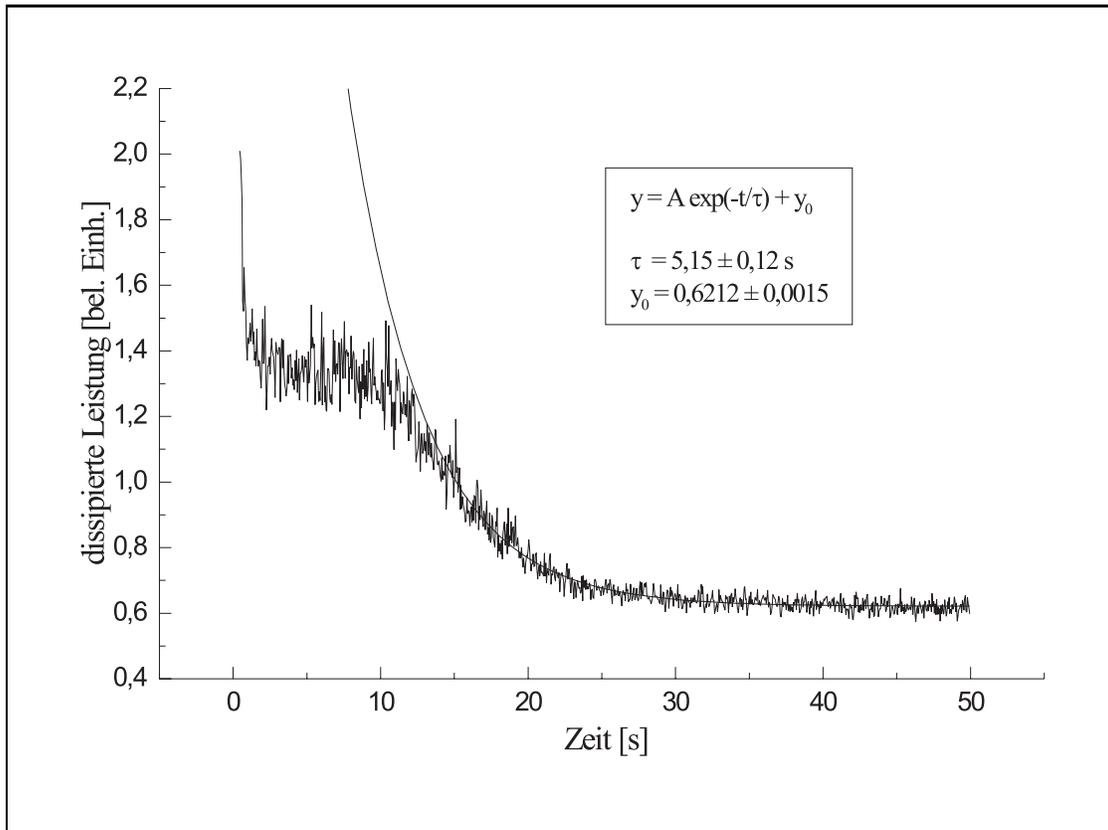


Abbildung 5.15: **Kühlen der axialen Bewegung einer Ionenwolke**

Die dissipierte Leistung ist in diesem Fall kein lineares Maß für die Energie der Ionenwolke (siehe Text). Es ist deutlich zu erkennen, dass am Anfang ein Teil der (ohnehin schon relativ kalten) Ionen schnell gekühlt wird. Der langsame Abfall des induzierten Stroms für große Zeiten kann mit der Überkopplung von Energie aus den Nicht-Schwerpunktsmoden der Ionenwolke in Zusammenhang gebracht werden.

ab und somit ist auch die im Schwingkreis dissipierte Leistung kein lineares Maß mehr für die Energie der Ionenwolke.

- Da von allen Bewegungsmoden einer Ionenwolke nur die Schwerpunktsbewegung einen Strom induziert, kann durch Widerstandskühlen nur diese direkt gekühlt werden. Die Energie der anderen Schwingungsmoden wird nur über einen Energieaustausch mit der Schwerpunktsbewegung gekühlt [Win75]. Aus diesem Grund erhält man eine Überlagerung von vielen verschiedenen Kühlkurven mit verschiedenen „Zeitkonstanten“.

Die genauere Untersuchung der Widerstandskühlung extrem heißer Ionenwolken ist vor allem in Hinblick auf das geplante HITRAP-Projekt [Qui98] interessant. Bei dieser Einrichtung sollen am Ionenbeschleuniger der GSI Darmstadt erzeugte hochgeladenen Ionen in einer Penning-Falle eingefangen und auf 4 K abgekühlt werden. Der Vorteil gegenüber einer EBIT liegt darin, dass eine viel größere Anzahl von hochgeladenen schweren Ionen untersucht werden kann.

5.9.2 Seitenbandkühlen

In Abschnitt 5.5 wurde gezeigt, wie zwei Moden der Bewegung eines einzelnen Teilchens in einer Penning-Falle gekoppelt werden können und sich die Erwartungswerte der Energien nach Gleichung 5.3 einstellen. Wird ein Freiheitsgrad gekühlt, kann diese Beziehung ausgenutzt werden, um einen der anderen Freiheitsgrade zu kühlen. Da wir die axiale Bewegung am schnellsten kühlen können, nutzen wir diese Technik, um mittels Kopplung an den axialen Freiheitsgrad sowohl die Amplitude der Zyklotron- als auch die der Magnetronbewegung zu reduzieren. Beim Kühlen der Zyklotronbewegung ist allerdings zu beachten, dass, da die axiale Frequenz mit der Zyklotronenergie ansteigt, die Kopplungsfrequenz von niedrigen zu höheren Frequenzen durchgestimmt werden muss. Zudem muss darauf geachtet werden, dass die Zyklotronenergie viel kleiner als $E_+ < \omega_+/\omega_z E_z^{\max} \approx 1$ keV ist, da ansonsten das Ion eine zu hohe axiale Energie erhalten kann und dann nicht mehr in Resonanz mit dem Schwingkreis ist oder sogar ganz verloren geht. Dieses Problem war in der Tat der Grund, weshalb wir diese Methode lange Zeit nicht eingesetzt haben. Das Kühl-limit der Seitenbandkühlung der Zyklotronbewegung in der Präzisions-Falle liegt bei 129 (14) meV. Bei dieser Energie hat die Bahn des Ions einen Zyklotronradius von etwa 10 μm .

Die Amplitude der Magnetronbewegung kann im Gegensatz zur Axial- und auch der Zyklotronbewegung nur mittels der Seitenbandkopplung reduziert werden. Das Kühl-limit für die Magnetronbewegung liegt in der Präzisions-Falle bei $-0,102$ (13) meV. Der Magnetronradius beträgt dann auch etwa 10 μm .

5.10 Thermische Verteilung der Energie des Ions

Ein gespeichertes Ion, das sich mit einem Schwingkreis in Resonanz befindet, tauscht nur über elektromagnetische Kräfte Energie mit den Elektronen des Schwingkreises aus. Diese Situation ist qualitativ mit der eines Ions oder Elektrons, das in einem Kristall gebunden ist, vergleichbar. Daher erwartet man im Gleichgewicht für die

Energieverteilung $P(E)$ eines Freiheitsgrades des Ions eine Boltzmann-Verteilung:

$$P(E) = \frac{1}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE . \quad (5.6)$$

Hier ist k die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur der Elektronen im Schwingkreis. In [Her99] wird eine unserer Messungen diskutiert, bei wir zeigen konnten, dass die Verteilung der Zyklotronenergie tatsächlich der Boltzmann-Verteilung gehorcht, die man von einem Ion erwartet, das auf 4 K gekühlt ist. Die thermische Energie des Ions fluktuiert mit der Kühlzeitkonstanten γ , die in Gleichung 4.6 definiert wurde. Der Erwartungswert $\langle E \rangle$ der Energie des Ions ist durch

$$\langle E \rangle = kT \quad (5.7)$$

gegeben und entspricht dem der freien Ladungsträger im relevanten Schwingkreis.

Mittels eines Synthesizers kann die Energie der Elektronen im Leiter des Schwingkreises leicht beeinflusst werden. Um eine quasi-thermische Energieverteilung der Elektronen zu erhalten, verwenden wir das von einem DS-345-Gerät der Firma Stanford Research Systems bereitgestellte „weiße“ Rauschen oder ein von uns speziell generiertes Signal, das aus 800 Frequenzen mit gleicher Amplitude und fester Frequenzdifferenz von ca. 0,1 Hz zueinander besteht (vergleiche auch 5.2.1). Mit diesen Methoden ist es möglich, dem Schwingkreis eine höhere, virtuelle Temperatur zu geben.

Diese Kontrolle der mittleren axialen Energie des Ions kann dazu verwendet werden, Anharmonizitäten der Speicherfelder zu untersuchen (siehe [Häf98]). Da die Anharmonizitäten des elektrischen Feldes unsere Messung des g-Faktors verfälschen können, wird hier speziell auf die Energieverteilung der axialen Bewegung eingegangen:

Um die axiale Energieverteilung zu untersuchen, ist es notwendig, die axiale Energie zu messen. Da alle Messzeiten sehr viel länger sind als die axialen Kühlzeitkonstanten und damit als die Geschwindigkeit der zu beobachtenden Energieänderungen, erscheint dieses Unterfangen aussichtslos. Man kann aber mittels Seitenbandkopplung durch das Seitenband $\nu_+ - \nu_z$ (siehe Abschnitt 5.5) schnell die Energie der axialen Bewegung in den Zyklotronfreiheitsgrad transferieren. Schaltet man die Kopplung ab, bleibt die Zyklotronenergie nahezu konstant. Die Zyklotronenergie kann dann, wie aus Gleichung 3.28 ersichtlich ist, durch eine Messung der axialen Frequenz bestimmt werden. Die ursprüngliche axiale Energie kann nun aus Gleichung 5.3 berechnet werden. Abbildung 5.16 zeigt eine Messung, bei der die axiale Energie des Ions sowohl mit „weißen“ Rauschen als auch mit der generierten spektralen Rechteckverteilung erhöht wurde, während sie gleichzeitig an die Zyklotronbewegung gekoppelt wurde. Danach wurde zuerst die Kopplung und anschließend die Axial-Anregung abgeschaltet und anschließend die axiale Frequenz bestimmt. Die Messungen zeigen, dass in beiden Fällen die Energieverteilung durch eine Boltzmann-Verteilung gut beschrieben werden kann.

5.10.1 Temperatureichung

Eine Aussage über die erreichte mittlere Energie des Ions lässt sich auch direkt aus der gemessenen Amplitude der Spannungsdichte über den Schwingkreis gewinnen.

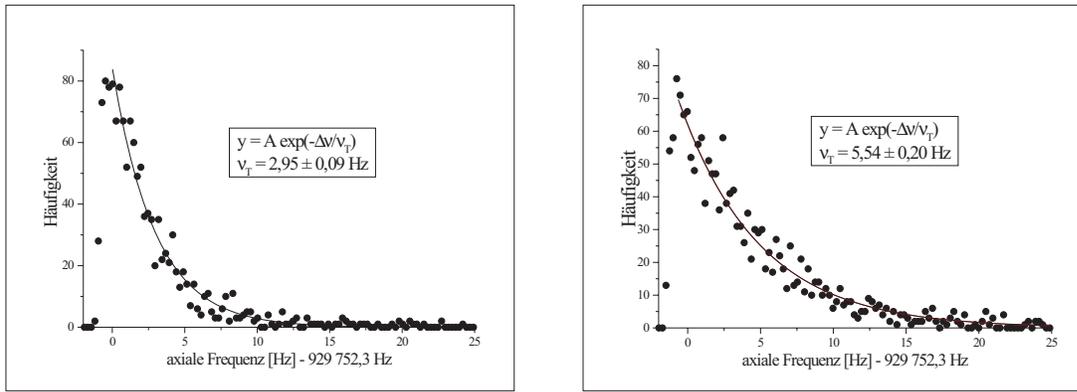


Abbildung 5.16: **Energieverteilung des axialen Freiheitsgrades gemessen über die Zyklotronenergie**

Links wurde die axiale Bewegung des Ions mit „weißem“ Rauschen und rechts mit dem im Text beschriebenen spektralen Rechteck angeregt. In beiden Fällen lässt sich die Verteilung der axialen Energie gut durch eine Boltzmann-Verteilung beschreiben. Die so bestimmte axiale Temperatur beträgt 6 beziehungsweise 10 eV.

Dazu wird zunächst der Beitrag des Rauschens des Schwingkreises, ohne dass irgendeine äußere Anregung stattfindet, gemessen. Das gemessene Signal entspricht dem Rauschen, das durch die Elektronen im Schwingkreis induziert wird. Anschließend wird „weißes“ Rauschen verschiedener Amplitude zusätzlich eingekoppelt und die Rauschamplitude gemessen. Abbildung 5.17 zeigt eine solche Messung. Da das thermische Rauschen der Elektronen und die externe Anregung unabhängig voneinander sind, addieren sich die Amplituden quadratisch. Daher sind in Abbildung 5.17 die Quadrate aufgetragen. Die erreichte Temperatur lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$T(U_{\text{an}}) = \frac{P_0 + b(U_{\text{an}})^2}{P_0} T_0 . \quad (5.8)$$

Hier bezeichnet P_0 die gemessene Leistung ohne externe Anregung und b ist die Steigung der Geraden in Abbildung 5.17. U_{an} steht für das anregende externe Rauschen und T_0 für die Temperatur der Elektronen ohne externe Anregung. In unserem Fall wird der Schwingkreis mit flüssigem Helium auf 4 K gekühlt. Daher würde man für T_0 4 K einsetzen. Es gibt aber einige Messungen und Hinweise, dass die Elektronen der axialen Schwingkreise bei 370 kHz bzw. 930 kHz durch eine noch nicht identifizierte elektronische Rauschquelle eine höhere Temperatur haben (siehe dazu das Ende von Abschnitt 5.10.2). Insbesondere die in Abschnitt 5.10.2 beschriebene Messung ergibt für ein in der Präzisions-Falle gespeichertes Ion eine axiale Temperatur von 60 ± 10 K. Auch die in der Analyse-Falle gemessenen Larmor-Resonanzen lassen auf eine axiale Temperatur von ca. 60 K in der Analyse-Falle schließen [Her99]. Weiterhin ergibt sich für die im Folgenden genannten Messungen nur für eine axiale Temperatur von ca. 60 K ein konsistentes Bild:

1. Vergleich der gemessenen mittleren axialen Energie mit der in Abschnitt 5.10 beschriebenen Methode mit der Eichung in Abbildung 5.17
2. Abhängigkeit des vom Ion erfahrenen mittleren Magnetfeldes von der axialen Amplitude (siehe Abschnitt 5.12.3).

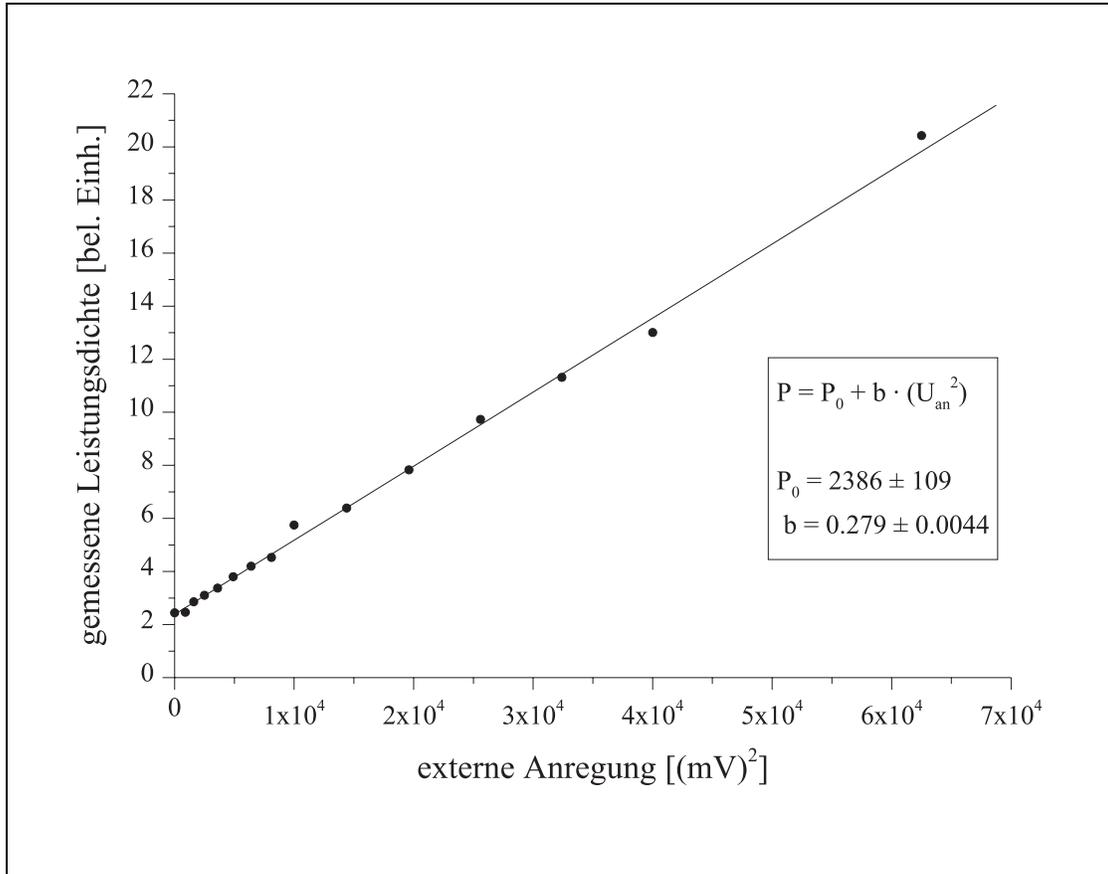


Abbildung 5.17: **Temperatureichung der anregende Spannungsichte**

Wird das Quadrat der über dem Schwingkreis gemessenen Spannungsichte (also der Leistungsdichte) gegen das Quadrat der anregenden Spannungsichte aufgetragen, erhält man eine Gerade. Bei bekannter elektronischer Temperatur des Schwingkreises ohne externe Anregung kann daraus die elektronische Temperatur des Schwingkreises bei jeder Anregungsspannung bestimmt werden.

Daher wird im Folgenden von einer axialen Temperatur von 60 K ausgegangen.

Diese erhöhte Temperatur ist umso verwunderlicher, da die Spulen aus NbTi bestehen und daher nur für Temperaturen kleiner als 8 K überhaupt ein Signal zu detektieren ist. Dies bedeutet, dass die Atome des Schwingkreises selbst sehr kalt sind, die freien Ladungsträger (Cooper-Paare) dagegen eine höhere Temperatur haben – also eine Rauschanregung vorliegt. Im Fall der Zyklotronenergie konnte dagegen gezeigt werden, dass die Energie des Ions tatsächlich auf Energien vergleichbar mit 4 K gekühlt wurde und damit die freien Ladungsträger wirklich kalt sind [Her99]. Allerdings hat der Zyklotronschwingkreis eine um einen Faktor 25 höhere Resonanzfrequenz und die Spule ist nicht aus supraleitendem Material sondern aus einem Kupferdraht mit Goldbeschichtung gefertigt. Auch ist der Zyklotronschwingkreis anders beschaltet.

Auch in anderen Arbeitsgruppen wurde für die axiale Bewegung eine stark erhöhte minimale Temperatur beobachtet [DiF95, Gab98]. Dort glaubt man, dass die erhöhte Temperatur der Elektronen im Leiter durch die zur Messung notwendige Verbindung an eine aktive Verstärkerschaltung zustande kommt. Messungen von uns, bei denen die Verstärker abgeschaltet wurden, konnten dies an unserer Apparatur aber nicht bestätigen.

5.10.2 Messung der axialen Temperatur in der Präzisions-Falle

Um die minimal erreichbare axiale Temperatur zu bestimmen, wird durch Einstrahlen des Seitenbands $\nu_+ - \nu_-$ der Erwartungswert der Quantenzahl der Zyklotronbewegung dem der axialen Bewegung angeglichen (vergleiche die Abschnitte 5.5 und 5.10). Nach dem Transport in die Analyse-Falle kann wegen des großen B_2 -Terms durch die Messung der axialen Frequenz eine extrem hohe Energieauflösung der Zyklotronbewegung von 0,1 meV erreicht werden. Mit der so erlangten absoluten Kenntnis der Zyklotronenergie kann dann mit Gleichung 5.3 die ursprüngliche axiale Energie in der Präzisions-Falle errechnet werden. In Abbildung 5.18 ist die Frequenz- und Energie-Verteilung von über 2000 Einzelmessungen zu sehen. Aus diesen Messungen ergibt sich die axiale Temperatur in der Präzisions-Falle zu $T_0 = 61,3 (2,3)(6,1)$ K. Der erste Fehler bezeichnet die statistische Unsicherheit. Der zweite Fehler kommt durch die Unsicherheit der Berechnungen und der Messungen des B_2 -Terms [Her99] der Analyse-Falle zustande.

5.11 Optimieren des elektrischen Feldes

Für die Messungen des g-Faktors ist ein harmonisches Potential aus folgenden Gründen von entscheidender Bedeutung:

1. Der axiale Nachweis der Ionen durch einen Dip ist nur möglich, wenn die axiale Bewegung eine gewisse Mindestharmonizität aufweist.
2. Die Einstellung des Spins kann nur bestimmt werden, wenn die axiale Frequenz mit einer Präzision genauer als 10^{-6} bestimmt wird. Damit dies überhaupt gelingen kann, muss die axiale Frequenz hinreichend gut definiert sein. Dies

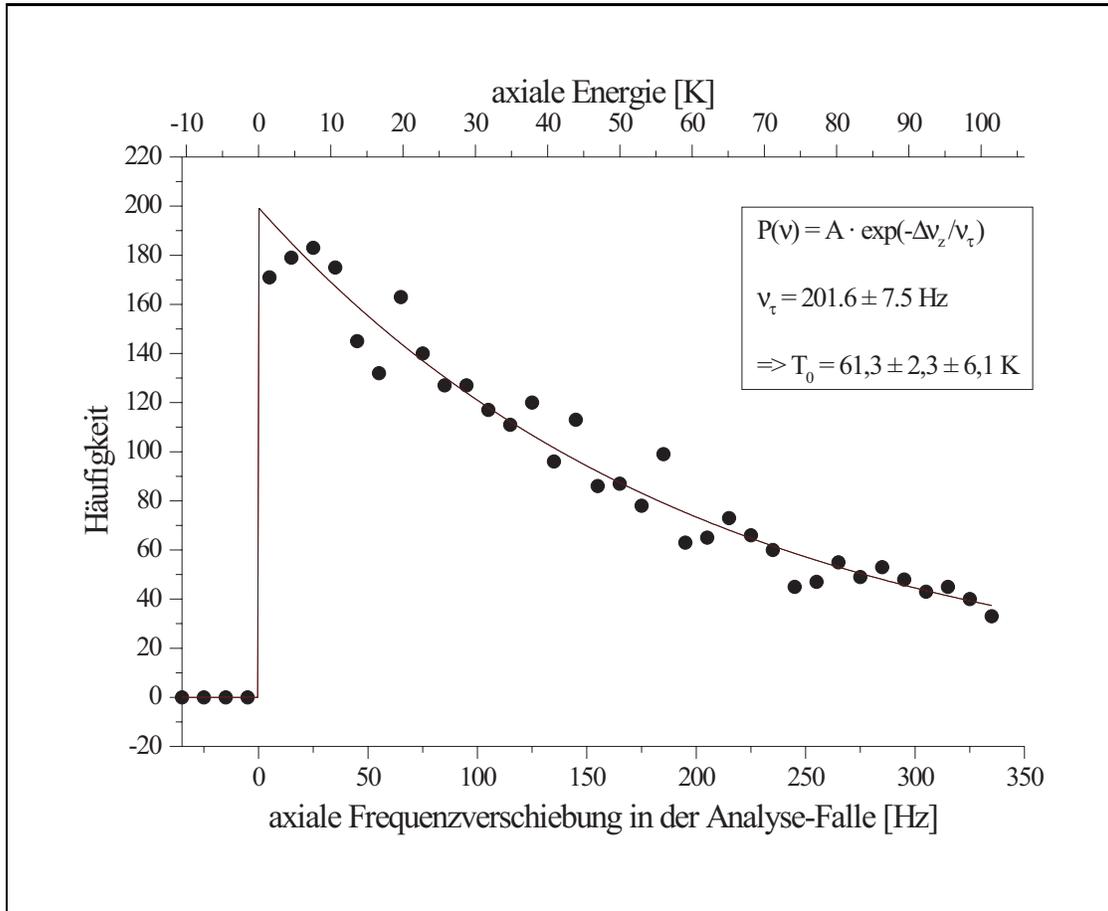


Abbildung 5.18: **Bestimmung der axialen Temperatur in der Präzisions-Falle mit Hilfe der Seitenbandkopplung und Transport des Ions**

Die Messmethode ist in Abschnitt 5.10.2 beschrieben. Durch die große magnetische Flasche in der Analyse-Falle wurden sehr große Verschiebungen der axialen Frequenz gemessen. Wegen der durch den Schwingkreis begrenzten Frequenzbreite von ca. 400 Hz der Messung der axialen Frequenz ist nur ein Ausschnitt der Boltzmann-Verteilung zu sehen. Aus der Anpassung einer Exponentialfunktion kann die axiale Temperatur bestimmt werden. Der erste Fehler rührt dabei von der statistischen Unsicherheit her, der zweite von der ungenauen Energieeichung der Zyklotronenergie. Die Energieeichung ist durch die Unsicherheit von 10% der Größe des B_2 -Terms der Analyse-Falle limitiert.

ist aber wegen der unvermeidbaren Fluktuationen der axialen Energie nur für äußerst harmonische Potentialverläufe der Fall.

3. In der Präzisions-Falle wird zur Beschleunigung des axialen Nachweises die axiale Frequenz gemessen, während die axiale Bewegung durch ein spektrales Rechteck angeregt wird (siehe Abschnitt 5.2.1). Um eine schmale Linie zu erhalten, sollten die reduzierte Zyklotron- und Larmor-Präzessions-Frequenz bei möglichst niedrigen axialen Energien gemessen werden (siehe Abschnitt 5.12.3 und insbesondere Gleichung 3.35). Deshalb ist es sinnvoll, für diese Messungen die axiale Anregung auszuschalten. Daher es es wichtig, dass sich die axiale Frequenz bei der Anregung durch das spektrale Rechteck nicht verschiebt. Anharmonische Potentialbeiträge bewirken aber genau solch eine Verschiebung der axialen Frequenz durch eine Anregung der axialen Bewegung.

Um überhaupt einen Dip zu erhalten, kann die Signalform, die man bei Massenspektren (siehe Abbildung 5.2.2) erhält, auf die minimale Linienbreite optimiert werden. Dazu wird systematisch das tuning-ratio (siehe Abschnitt 3.3) variiert. Danach kann das Optimieren mit Hilfe der Analyse des Ionen-Dips erfolgen. Der Dip liefert vor allem zwei Informationen:

- Frequenz der Schwingung der Ionen
- Güte der Schwingung der Ionen (siehe Abschnitt 4.2.3).

Beide Informationen können zum Optimieren des tuning-ratios und damit des elektrischen Feldes herangezogen werden und liefern ähnlich gute Resultate. Beide Optimierungsmethoden werden im Folgenden beschrieben:

5.11.1 Optimieren mit Hilfe der Ionenfrequenz

Bei dieser Methode wird die axiale Frequenz der Ionenwolke oder die des Ions in Abhängigkeit der axialen Temperatur bestimmt. Für ein perfekt harmonisches Potential erwartet man keine Abhängigkeit der axialen Frequenz von der axialen Temperatur. Steigt die axiale Frequenz mit der mittleren Energie an, weiß man, dass das Potential nach außen zu stark ansteigt. In diesem Fall ist das tuning-ratio zu groß gewählt. Das optimale tuning-ratio ist dann eingestellt, wenn die axiale Frequenz keine Abhängigkeit von dem tuning-ratio aufweist. Das gegenüber Abbildung 5.19 deutlich größere optimale tuning-ratio in Abbildung 5.20 kommt durch Aufladungen der Elektroden oder der Isolatoren zwischen den Elektroden durch den zum Erzeugen nötigen Elektronenstrahl zustande. Da das tuning-ratio für die g-Faktor-Messungen sehr genau eingestellt werden muss, ist es nötig, nach jedem Erzeugen das tuning-ratio neu einzustellen. Nur so kann gewährleistet werden, dass bei den g-Faktor-Messungen die systematische relative Verschiebung der axialen Frequenz kleiner als 10^{-7} ist.

5.11.2 Optimieren mit Hilfe der Güte der Ionenschwingung

Bei dieser Methode das elektrische Feld zu optimieren, wird einfach die Güte der Ionenschwingung (siehe Abschnitt 4.2.3) als Funktion des tuning-ratios bestimmt. Wurde eine gute Einstellung gefunden (es kann eine Güte der Ionenschwingung

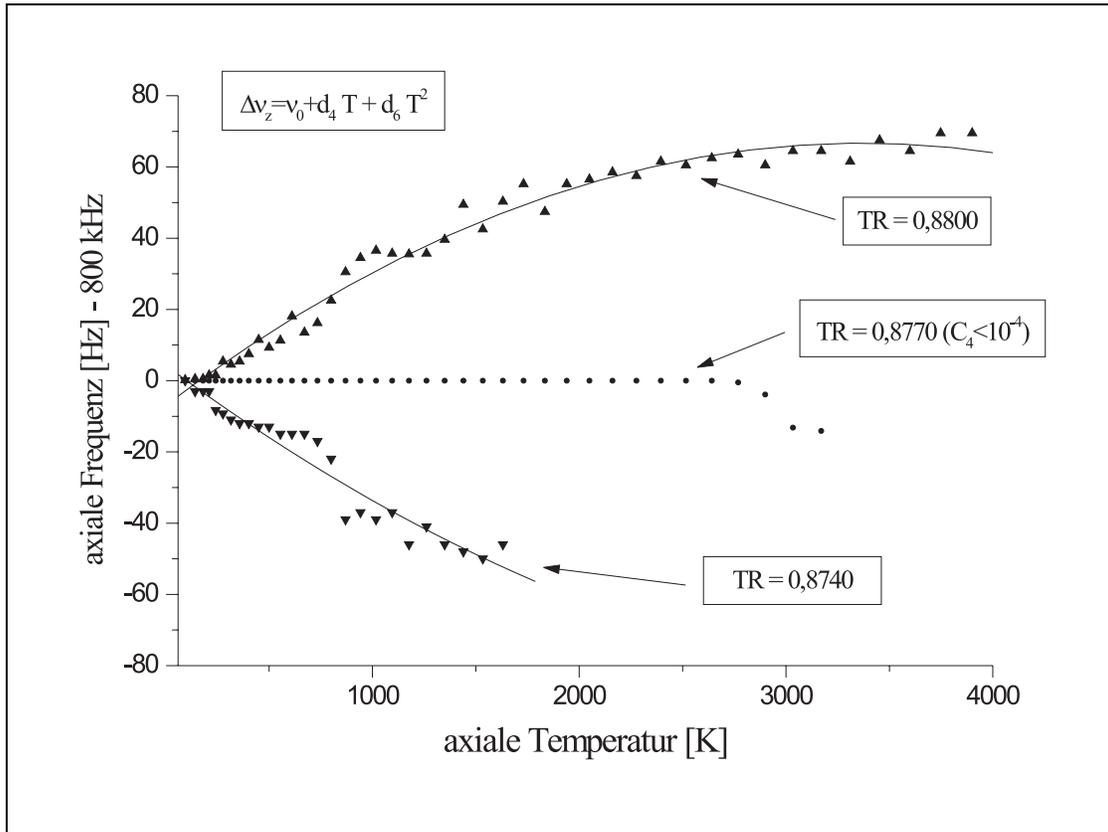


Abbildung 5.19: **Abhängigkeiten der axialen Frequenz von der axialen Energie**

Für ein tuning-ratio von 0,8770 ist die axiale Frequenz fast unabhängig von der axialen Energie. Dieses tuning-ratio entspricht dem Berechnetem (siehe Abbildung 3.3). Ist das tuning-ratio zu groß gewählt, erhöht sich die axiale Frequenz mit der axialen Energie.

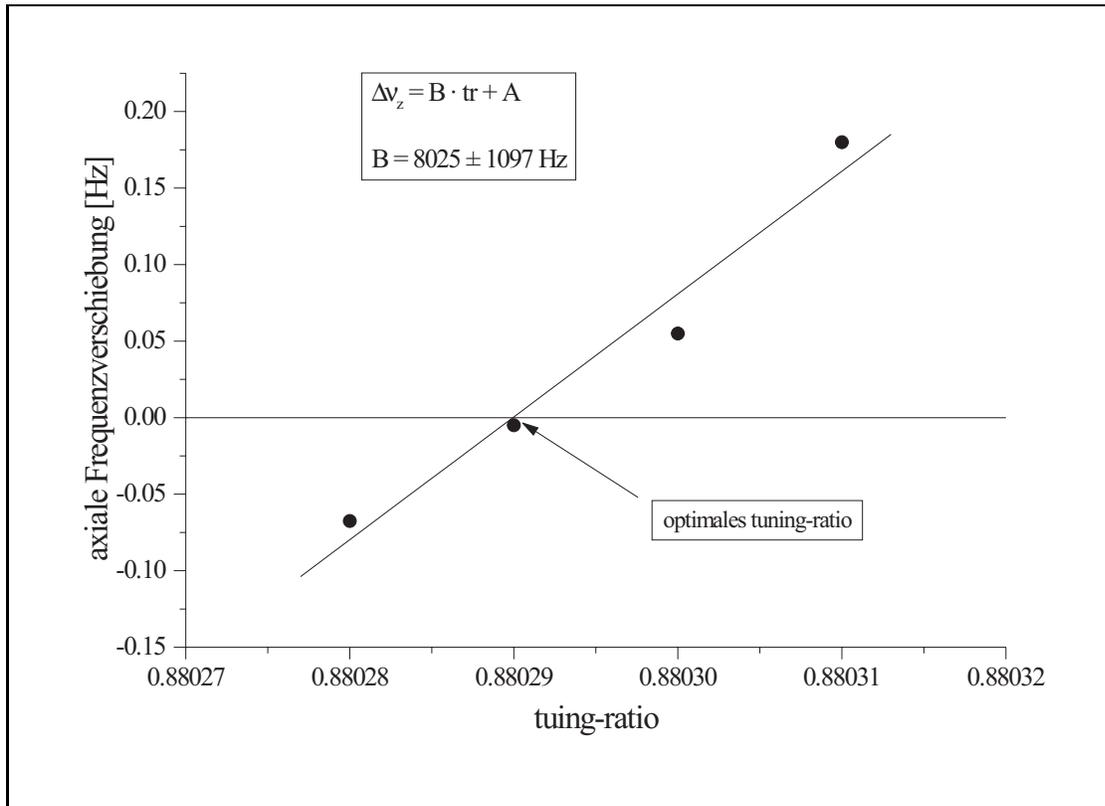


Abbildung 5.20: **Optimieren des tuning-ratios**

Aufgetragen ist die Differenz der axialen Frequenzen eines einzelnen C^{5+} -Ions zwischen einer niedrigen ($2,7 T_0$) und einer höheren axialen Temperatur ($27,5 T_0$) als Funktion des tuning-ratios. Beim optimalen tuning-ratio beträgt die relative Verschiebung der axialen Frequenz weniger als 10^{-7} .

von mehr als 10^6 erreicht werden), wird die axiale Temperatur mit einer Anregung durch ein spektrales Rechteck erhöht und erneut die Güte der Ionenschwingung als Funktion des tuning-ratios untersucht. Anharmonizitäten machen sich bei der dann größeren Bewegungsamplitude stärker bemerkbar.

Die Optimierung mittels der Ionenfrequenz und die mittels der Güte der Ionenschwingung liefern die gleichen Resultate. Mit diesen beiden Methoden kann das tuning-ratio so eingestellt werden, dass die 4. Ordnung der Entwicklung des Potentials (C_4 -Term) kleiner als $10^{-5} \cdot C_2$ ist.

Alle drei Methoden, das elektrische Potential zu optimieren (Optimieren durch Massenspektren, durch die Ionenfrequenz und durch die Güte der Ionenschwingung), sind ausführlich in [Häf98] diskutiert.

5.12 Bestimmung des Verlaufs des Magnetfeldes

Um die erwarteten systematischen Verschiebungen bei der Messung des g-Faktors zu verstehen und abzuschätzen, ist es wichtig, den räumlichen Verlauf und damit die Inhomogenitäten des Magnetfeldes zu bestimmen. Im Wesentlichen verwenden wir drei Methoden:

- Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz eines Ions an verschiedenen Orten
- Messung des B_2 -Terms über die Verschiebung der axialen Frequenz bei bekannter Zyklotronenergie
- Verschiebung des mittleren Magnetfeldes durch Erhöhung der axialen Energie.

5.12.1 Verschieben des Ions

Bei dieser Methode, die Inhomogenitäten des Magnetfeldes auszumessen, wird das Ion durch einen dem harmonischen Potential überlagerten zusätzlichen elektrischen Feldgradienten in Richtung der z -Achse verschoben und dann die freie Zyklotronfrequenz als Maß für die Stärke des Magnetfeldes bestimmt (siehe Abbildung 5.21). Der Ort des Ions wird ermittelt, indem zuerst mit Hilfe von Gleichung 3.18 der Verlauf des Potentials berechnet und anschließend das Minimum dieses Verlaufs numerisch bestimmt wird. Diese Berechnungen wurden mit der Software Mathematica Version 2.2.1 durchgeführt.

Um die freie Zyklotronfrequenz des Ions zu bestimmen, ist die Kenntnis der reduzierten Zyklotronfrequenz und die der axialen Frequenz nötig. Die axiale Frequenz wurde zwecks eines besseren Signal-Rausch-Verhältnisses an einer Ionenwolke bestimmt.

Die Koeffizienten der Entwicklung des Magnetfeldes können dem Fit eines Polynoms 2. Ordnung an den Magnetfeldverlauf entnommen werden (siehe Abbildung 5.21). Da schon ein kleiner systematischer Fehler bei der Messung der axialen Frequenz eine Krümmung des Magnetfeldverlaufs vortäuscht, ist die Bestimmung des B_2 -Koeffizienten mit so starker Unsicherheit belastet, dass sogar das Vorzeichen des Koeffizienten mit dieser Messung nicht bestimmt werden konnte. Um mit dieser Messmethode eine Aussage über den B_2 -Term zu erhalten, wäre eine Messung der

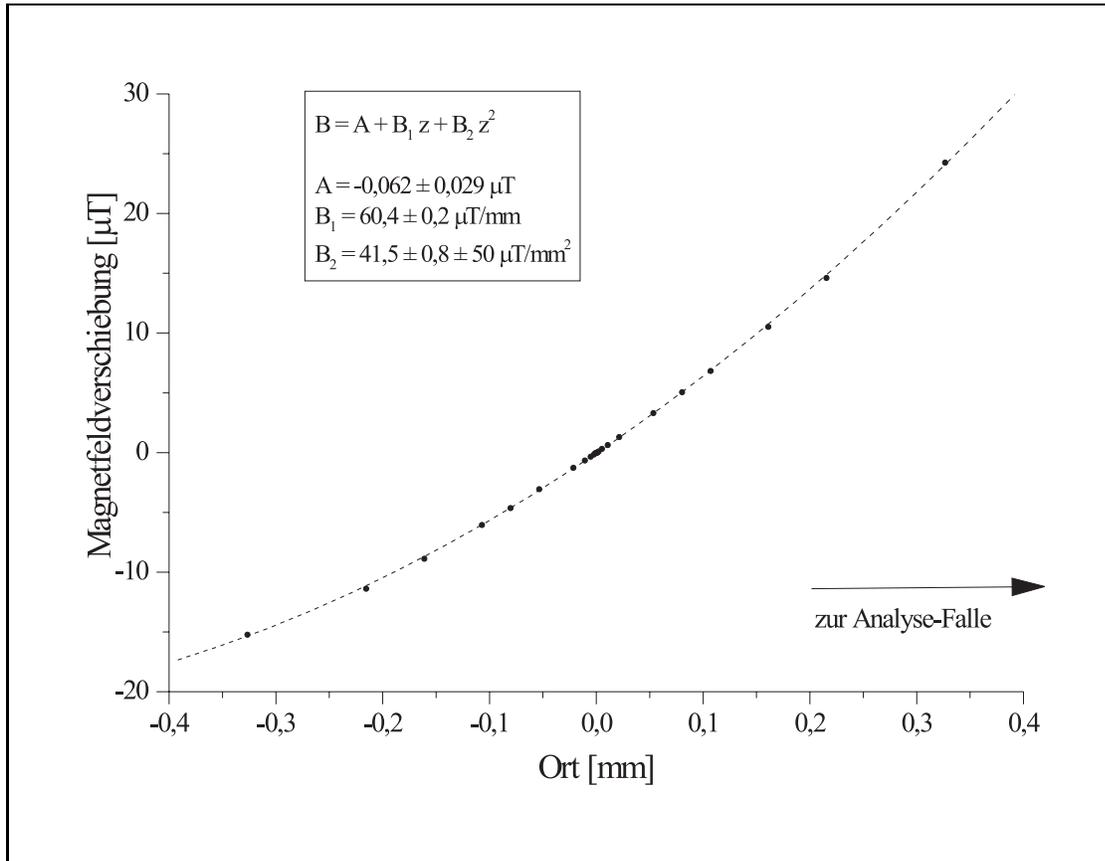


Abbildung 5.21: **Verlauf des Magnetfeldes in der Präzisions-Falle**

Der erste Fehler des B_2 -Koeffizienten resultiert aus dem Fit an das berechnete Magnetfeld. Der zweite Fehler rührt von der Unsicherheit von 10% der Verschiebung der axialen Frequenz durch das Verschieben des Ions her. Da dieser Einfluss symmetrisch in der Verschiebung ist, spielt er für die Bestimmung des B_z^1 -Koeffizienten keine Rolle.

axialen Frequenz als Funktion der Verschiebung mit einem einzelnen Ion, das zusätzlich die gleiche Zyklotronenergie hat wie beim Nachweis der reduzierten Zyklotronfrequenz, wünschenswert. Allerdings ist nicht zu erwarten, dass diese Messungen die Genauigkeit, mit der der B_2 -Term bestimmt werden kann, wesentlich erhöhen. Da die im nächsten Abschnitt erläuterte Methode einfacher zu handhaben ist und schneller ausgeführt werden kann, wurde auf diese Messung der axialen Frequenz eines einzelnen Ions als Funktion der Verschiebung verzichtet.

Da Unsicherheit der axialen Frequenz symmetrisch in der Verschiebung ist, fällt sie bei asymmetrischen Magnetfeld-Inhomogenitäten heraus. Daher kann der B_1 -Term aus den Messungen mit hoher Genauigkeit extrahiert werden: $B_1 = 60,4 \pm 0,2 \mu\text{T}/\text{mm}^2$. Berechnungen zum Einfluss des Nickel-Rings der Analyse-Falle auf das Magnetfeld in der Präzisions-Falle, die von Nikolaus Hermanspahn durchgeführt wurden [Her96], ergaben $B_1 = 67 \mu\text{T}/\text{mm}$. Dies legt nahe, dass der Gradient des Magnetfeldes in der Präzisions-Falle durch den Nickel-Ring der Analyse-Falle hervorgerufen wird.

5.12.2 Messung des B_2 -Terms

In diesem Abschnitt wird ein genaueres Verfahren vorgestellt, um den B_2 -Term zu bestimmen, als es die in Abschnitt 5.12.1 beschriebene Methode ist. Dazu werden die Verschiebungen der axialen Frequenz für eine bestimmte Zyklotronenergie (siehe Gleichung 3.28) in der Präzisions- und in der Analyse-Falle miteinander verglichen. Da der B_2 -Term in der Analyse-Falle sowohl aus Berechnungen [Her96] als auch aus Messungen [Her99] bekannt ist, kann der B_2 -Term in der Präzisions-Falle berechnet werden. Ein Problem hierbei ist allerdings, dass sich die B_2 -Terme in den beiden Fallen und damit die Frequenzverschiebungen um drei Größenordnungen unterscheiden. Zum einen macht die Größe des B_2 -Terms in der Analyse-Falle zwar seine Berechnung und auch seine direkte Messungen möglich, zum anderen führt er aber dazu, dass die axiale Frequenz des Ions in der Analyse-Falle nur gemessen werden kann, wenn die Zyklotronenergie kleiner als ca. 1 eV ist. Bei größeren Energien der Zyklotronbewegung ist das Ion durch den großen magnetischen Anteil an der potentiellen Energie zu anharmonisch gebunden und der Dip verschwindet. Bei der in der Analyse-Falle maximal detektierbaren Zyklotronenergie von 1 eV wird in der Präzisions-Falle allerdings nur eine Verschiebung $\Delta\nu_z^P$ der axialen Frequenz von weniger als 1 Hz erreicht. Da die axiale Frequenz nur auf 50 mHz genau gemessen werden kann, hat die Bestimmung des B_2 -Terms daher einen Fehler von ca. 10%.

$\Delta\nu_z^P$ [Hz]	$\Delta\nu_z^A$ [Hz]	$\frac{\Delta\nu_z^A}{\Delta\nu_z^P}$	B_2 [$\frac{\mu\text{T}}{\text{mm}^2}$]
0,48	1561	3253	7,74
0,61	1761	2886	8,73
0,81	2670	3104	8,11

Tabelle 5.1: **Gemessene Verschiebungen der axialen Frequenzen in der Präzisions-Falle ($\Delta\nu_z^P$) und in der Analyse-Falle ($\Delta\nu_z^A$)**

Legt man den in [Her96] berechneten und in [Her99] gemessenen Wert des B_2 -Terms der Analyse-Falle von 10 (1) mT/mm² zugrunde, so ergibt sich aus der

Mittelung der Messungen der B_2 -Term in der Präzisions-Falle zu:

$$B_2 = 8,20 (50) (82) \mu\text{T}/\text{mm}^2 . \quad (5.9)$$

Der erste Fehler bezeichnet die Standardabweichung des Verhältnisses der Frequenzverschiebungen. Der zweite Fehler beschreibt die Unsicherheit durch die Kenntnis des B_2 -Terms der Analyse-Falle [Her99]. Berechnungen des vom Nickel-Ring der Analyse-Falle in der Präzisions-Falle induzierten B_2 -Terms ergaben $B_2 = 4,3 \mu\text{T}/\text{mm}^2$ [Her96]. Dies belegt, dass ein erheblicher Teil der in der Präzisions-Falle gemessenen Magnetfeldinhomogenität auf den Nickel-Ring zurückzuführen ist.

Mit dem gemessenen B_2 -Term ergibt sich aus Gleichung 3.28 für die Präzisions-Falle:

$$E_+ = 2,18 (24) \frac{\text{eV}}{\text{Hz}} \Delta\nu_z . \quad (5.10)$$

5.12.3 Abhängigkeit des Magnetfeldes von der mittleren axialen Energie

Eine andere Möglichkeit den B_2 -Term auszumessen, ist es die Abhängigkeit des gemessenen Magnetfeldes von der axialen Energie zu bestimmen. Dazu wurde bei 5 verschiedenen Axialtemperaturen die freie Zyklotronfrequenz des Ions bestimmt. Dies wurde erreicht, indem die drei Eigenfrequenzen des Ions bei jeweils 20 zufälligen Zyklotronenergien bestimmt wurde und dann durch eine Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie das Magnetfeld für ein in der Zyklotronbewegung kaltes Ion berechnet wurde. Um den Effekt einer Drift des Magnetfeldes auszuschalten, wurden die Messungen wechselweise durchgeführt. Abbildung 5.22 zeigt, dass selbst beim gekühlten Ion ($T = T_0 = 60 \text{ K}$) das mittlere Magnetfeld um ca. 70 mHz nach oben verschoben ist. Dieser Effekt kann qualitativ verstanden werden, wenn man das über eine Periode der axialen Schwingung (mit der Energie $E_z = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z_0^2$) gemittelte Magnetfeld berechnet (siehe Gleichung 3.35). Da sich die axiale Energie durch einen Nachweis der axialen Frequenz ständig um etwa die thermische Energie von 60 K ändert, verursacht eine in der z-Achse symmetrische Magnetfeld-Inhomogenität entsprechende Verbreiterungen und Verschiebungen der Zyklotron- und Larmor-Resonanz (siehe Abschnitt 3.4.1). Mit den dort dargestellten Annahmen erhält man aus der Messung $B_2 = 7,0 (8) (20) \mu\text{T}/\text{mm}^2$. Wobei der erste Fehler von der statistischen Ungenauigkeit der Messung her rührt und der zweite Fehler durch die Unsicherheiten in der elektronischen Temperatureichung (siehe Abschnitt 5.10.1) zustande kommt. Dieser Wert befindet sich in Übereinstimmung mit der in Abschnitt 5.12.2 beschriebenen Messung. Da die Aussagekraft dieser Messung in quantitativer Hinsicht durch die hierfür notwendige Eichung der elektronischen Temperatur des Schwingkreises (siehe Abschnitt 5.10.1) nicht so direkt ist, wie die in Abschnitt 5.12.2 beschriebene Messung mittels der Bestimmung des Verhältnisses der axialen Frequenzverschiebungen in der Analyse- und der Präzisions-Falle, wird für weitere Rechnungen das Ergebnis letzterer Methode verwandt (siehe Gleichung 5.9). Arbeitet man mit hohen axialen Anregungen, kann man jedoch mit dieser Methode schnell eine Aussage über die Größenordnung des B_2 -Terms machen. Daher ist sie für das Optimieren des Magnetfeldes besonders geeignet.

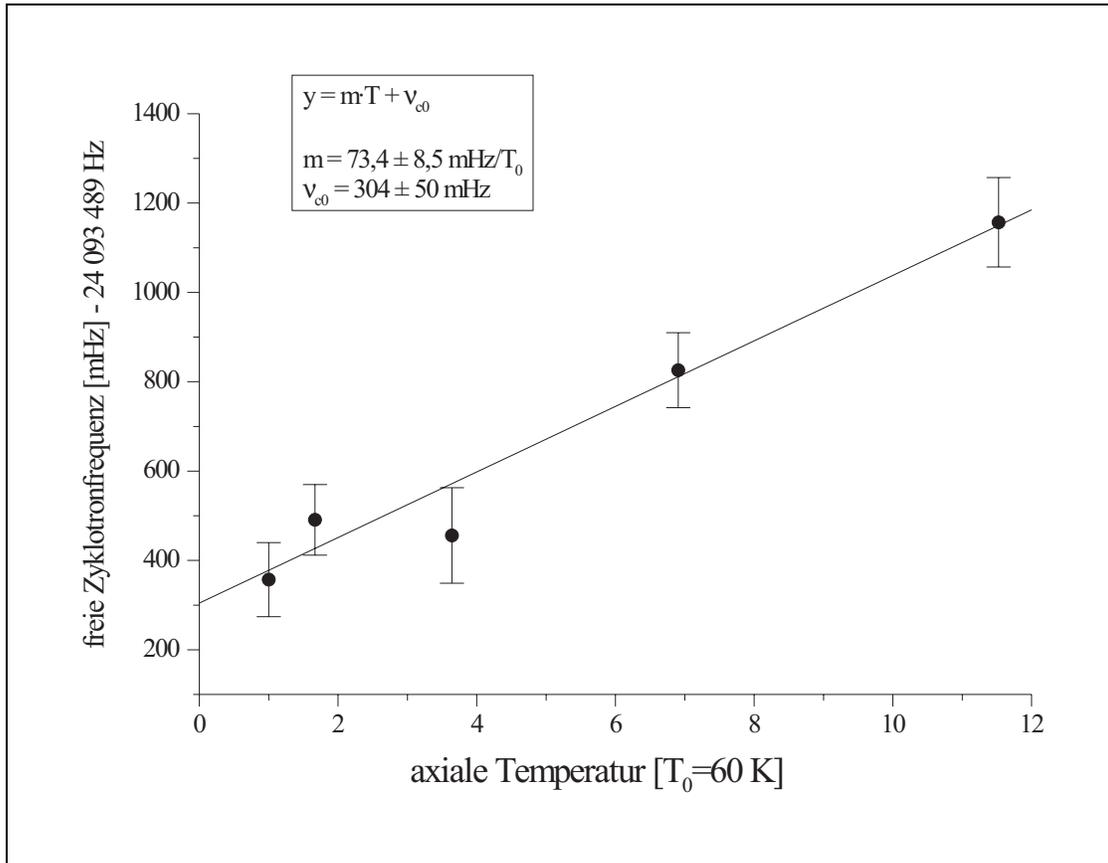


Abbildung 5.22: **Das mittlere Magnetfeld als Funktion der Axialtemperatur**
 Eine Erhöhung der axialen Energie von 60 K führt durch den positiven B_2 -Term zu einer Erhöhung des mittleren Magnetfeldes um $\Delta B/B = 4,5 \cdot 10^{-9}$. Da sich auch ohne externe Anregung die mittlere axiale Energie durch die Wechselwirkung mit dem Schwingkreis ständig ändert, verbreitert dieser Effekt die Zyklotronresonanz.

5.13 Detektion von spin-flips in der Analyse-Falle

Da zur Messung des g-Faktors die Larmor-Präzessionsfrequenz bestimmt wird, ist die Detektion von spin-flips von entscheidender Wichtigkeit. Für fast alle hochgeladenen Ionen kommt wegen der fehlenden optischen Übergänge kein Nachweis der Einstellung des Spins mittels optischer Doppelresonanzspektroskopie in Frage. Daher weisen wir die Einstellung des Spins mittels einer starken Inhomogenität des Magnetfeldes nach. Die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Eigendrehimpulses des Elektrons mit dem B_2 -Term der Magnetfeld-Inhomogenität ändert die Steilheit des in axialer Richtung bindenden Potentials (siehe Gleichung 3.14). Dies kann über eine Änderung der axialen Frequenz nachgewiesen werden (siehe Gleichung 3.16). Diese Methode, spin-flips zu detektieren, wurde zuerst von Dehmelt et al. für die Bestimmung des g-Faktors des freien Elektrons genutzt [Dyc77]. In Anlehnung an die Trennung der Spin-Eigenzustände von Stern und Gerlach 1922 [Ger22a, Ger22b] bezeichnete Dehmelt diesen Effekt als kontinuierlichen Stern-Gerlach-Effekt [Deh90]. Die Änderung der Rückstellkraft durch die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Spins mit dem inhomogenen Magnetfeld ist sehr klein. Im Fall des Elektrons, gebunden in einem Ion, ist, da die Masse des Ions sehr viel größer ist als die des Elektrons, die relative Änderung der axialen Frequenz zusätzlich um das Massenverhältnis kleiner (siehe Gleichung 3.16). Daher wurde für die Messungen an $^{12}\text{C}^{5+}$ zusätzlich zu einem präzisen Nachweis der axialen Frequenz (siehe Abschnitt 5.2)) auf 10^{-6} mit einer sehr starken Magnetfeld-Inhomogenität ($B_2 = 10 \text{ mT/mm}^2$) gearbeitet. Abbildung 5.23 zeigt Messungen der axialen Frequenz eines $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions in der Analyse-Falle, bei denen jeweils zwischen den Messungen der axialen Frequenz durch ein Mikrowellenfeld bei 104 GHz versucht wurde, spin-flips zu induzieren. Eine Änderung der axialen Frequenz von 0,7 Hz zeigt an, dass dies tatsächlich gelang. Da durch die Messung der Spin-Eigenzustand nicht geändert wird, spricht man hier von einem *quantum-non-demolition measurement*. Es handelt sich um die Realisierung des (fast) „optimalen“ Messprozesses [Deh86, Ste96] in der Quantenmechanik.

5.13.1 Bestimmung des g-Faktors in der Analyse-Falle

Die Messung des g-Faktors in der Analyse-Falle ist der Inhalt der Dissertation von Nikolaus Hermanspahn [Her99]. Für diese Messungen sind nach Gleichung 3.6 die Bestimmung der Larmor-Präzessions- und der Zyklotron-Frequenz nötig. Die Larmor-Präzessionsfrequenz wurde bestimmt, indem die spin-flip-Rate aus Messungen ähnlich derer, die in Abbildung 5.23 gezeigt ist, extrahiert wird. Die spin-flip-Rate als Funktion der eingestrahlten Mikrowellenfrequenz ergibt dann die Larmor-Resonanz. Die Zyklotronfrequenz wird durch die indirekte Methode „durch ein inhomogenes Magnetfeld“ (siehe Abschnitt 5.3.2) bestimmt.

Die Messgenauigkeit ist durch die notwendig starke Inhomogenität des Magnetfeldes im Zusammenhang mit der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie (siehe Abschnitt 3.4) limitiert. Die relativen Verbreiterungen durch diesen Effekt betragen sowohl für die Larmor- als auch für die Zyklotron-Resonanz in der Analyse-Falle 10^{-5} [Her99]. Weiterhin macht sich eine eventuelle Änderung des Radius der Magnetronbewegung während der Messung durch das sehr inhomogene Magnetfeld stark bemerkbar. In [Her00, Her99] wird für den g-Faktor des in $^{12}\text{C}^{5+}$ gebundenen Elektrons

$$g = 2,001\,041\,8 \quad (14) \quad (5.11)$$

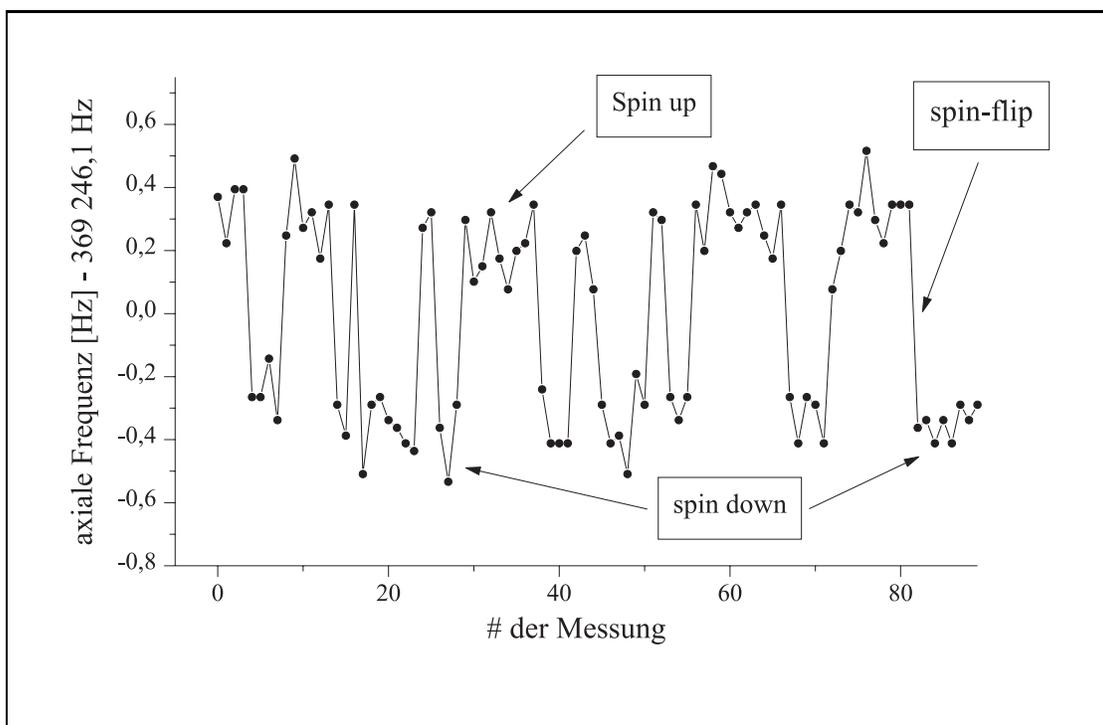


Abbildung 5.23: **Spin-flips eines Elektrons gebunden in einem $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion**

Jeder Punkt stellt die Messung der axialen Frequenz in der Analyse-Falle mittels der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Methode dar. Zwischen jeder Messung der axialen Frequenz wurden resonant Mikrowellen eingestrahlt. Die Einstellung des Spins des Elektrons kann durch die Änderung der axialen Frequenz beobachtet werden.

angegeben. Der erste Fehler bezeichnet die statistische, der Zweite die systematische Unsicherheit. Die relative Messgenauigkeit beträgt damit 10^{-6} . Dieses Ergebnis verifiziert die relativistische L-S-Kopplung auf 0,1% und stellt den präzisesten Test der relativistischen L-S-Kopplung dar.

Kapitel 6

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die durchgeführten Messungen des g-Faktors des in $^{12}\text{C}^{5+}$ gebundenen Elektrons diskutiert. Die dabei verwandte Methode, die „Transport-Methode“, zeichnet sich dadurch aus, dass die Linienverbreiterungen der notwendigen magnetischen Flasche vermieden werden, indem die eigentliche Messung im homogenen Teil des Magnetfeldes stattfinden. Da die so erreichte Messgenauigkeit sehr hoch ist, muss besonderes Augenmerk auf die systematischen Fehlerquellen gelegt werden.

6.1 Messablauf

Für die Messung des g-Faktors des Elektrons in $^{12}\text{C}^{5+}$ wird zunächst ein einzelnes $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion präpariert:

1. Erzeugen einer Ionenwolke mit $U_{\text{FEP}} = -600 \text{ V}$, $U_{\text{Zieh}} = 800 \text{ V}$ und $I_{\text{FEP}} \approx 2 \text{ nA}$ (siehe Abschnitt 5.1)
2. Präparieren einer reinen $^{12}\text{C}^{5+}$ -Wolke („Putzen“, siehe Abschnitt 5.6)
3. Reduzieren der Anzahl der $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ionen auf ein einzelnes $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion (siehe Abschnitt 5.7)
4. Kühlen der axialen Bewegung, der Zyklotronbewegung und Reduktion des Magnetronradius (siehe Abschnitte 5.9.1 und 5.9.2).

Diese Schritte können leicht innerhalb von 5 Minuten durchgeführt werden. Da sich beim Erzeugen der Ionenwolke Aufladungen auf den Fallenelektroden bilden, muss anschließend das elektrische Potential neu optimiert werden (siehe Abschnitt 5.11). Danach steht ein einzelnes $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion praktisch für unbegrenzte Zeit zur Messung des g-Faktors zur Verfügung (Speicherzeit $\tau > 1/2$ Jahr [Her99]). Die Messung des g-Faktors umfasst im Wesentlichen folgende Schritte:

1. Bestimmung der Ausrichtung des Spins in der Analyse-Falle
2. Versuch, in der Präzisions-Falle bei einem vorgegeben Frequenzverhältnis ν_L/ν_c spin-flips zu induzieren
3. Erneute Bestimmung der Ausrichtung des Spins in der Analyse-Falle.

Zu betonen ist hier, dass die Larmor-Präzessions- und die freie Zyklotron-Frequenz in der Präzisions-Falle gemessen werden, d.h. fast alle wichtigen Messgrößen werden im gegenüber dem der Analyse-Falle sehr viel homogeneren Magnetfeld der Präzisions-Falle bestimmt. Da beide Frequenzen sogar gleichzeitig gemessen werden können, verbreitern zeitliche Änderungen des Magnetfeldes die Resonanz wenig und die Messgenauigkeit wird weiter erhöht. Dies ist ein klarer Vorteil gegenüber den Messungen des g-Faktors des freien Elektrons [Dyc86b] und dem bisher von uns angewandten Verfahrens [Her00, Her99], bei dem die Larmor-Präzessionsfrequenz in der Falle mit der zur spin-flip-Detektion notwendigen magnetischen Flasche (d.h. mit einer sehr starken Inhomogenität) bestimmt wird. Das in der Präzisions-Falle im Vergleich zur Analyse-Falle um drei Größenordnungen homogenere Magnetfeld schlägt sich direkt in der um drei Größenordnungen schmalere Linienbreite nieder. Die Funktion der Analyse-Falle ist es lediglich, die Ausrichtung des Spins vor und nach dem Einstrahlen der Mikrowellen festzustellen (siehe Abbildung 6.1). Um eine ausreichende Statistik zu erhalten, musste daher das Ion einige 1000-mal zwischen den beiden Fallen hin und her transportiert werden. Da sich beim Transport die Speicherspannungen in der Analyse-Falle und auch die Bewegungsamplituden des Ions (insbesondere die der reduzierten Zyklotronbewegung) ändern, kann nicht einfach aus der Differenz der axialen Frequenzen des Ions in der Analyse-Falle vor und nach dem Transport auf einen spin-flip geschlossen werden: Die vor und nach dem Hin- und Rück-Transport gemessenen Änderungen der axialen Frequenz ohne Spinumkehr betragen ca. 0,5 Hz und lassen es daher nicht zu, eine Änderung der Ausrichtung des Spins von 0,7 Hz sicher zu detektieren (siehe Abbildung 6.1). Daher muss für eine Detektion eines spin-flips in der Präzisions-Falle die Einstellung des Elektronen-Spins in der Analyse-Falle bestimmt werden. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte zur Messung des g-Faktors näher erläutert (siehe auch Tabelle 6.1):

6.1.1 Bestimmung der Ausrichtung des Spins in der Analyse-Falle

Wegen der starken Inhomogenität des Magnetfeldes in der Analyse-Falle hängt dort die axiale Frequenz nach Gleichung 3.16 von der Einstellung des magnetischen Moments des Ions ab. Dies erlaubt es uns, die beiden Einstellungen des Spins des Elektrons über einen Unterschied in der axialen Frequenz zu unterscheiden. Zu Beginn werden zur Spin-Analyse in der Analyse-Falle Mikrowellen bei 105 GHz eingestrahlt und anschließend die axiale Frequenz bestimmt. Dies wird solange durchgeführt bis ein spin-flip durch eine Änderung der axialen Frequenz von 0,7 Hz (siehe auch Abschnitt 5.13) detektiert wurde. Aus der Richtung der Änderung kann gefolgert werden, welche Einstellung der Spin des Elektrons jetzt hat, beziehungsweise zu Beginn hatte (vergleiche Abbildungen 5.23 und 6.1). Damit eventuelle Schwankungen der Speicherspannung und Fehler bei der automatischen Frequenzbestimmung besser erkannt werden können, wird nach dem Erkennen eines spin-flips die axiale Frequenz nochmals bestimmt. Anschließend wird noch ein zweiter spin-flip induziert, sodass die Einstellung des Elektronen-Spins die gleiche Ausrichtung wie zu Beginn der Spin-Analyse hat. Dies dient dazu, Fehlinterpretationen der Ausrichtung des Spins zu vermeiden zu können. Danach wird das Ion in die Präzisions-Falle transferiert.

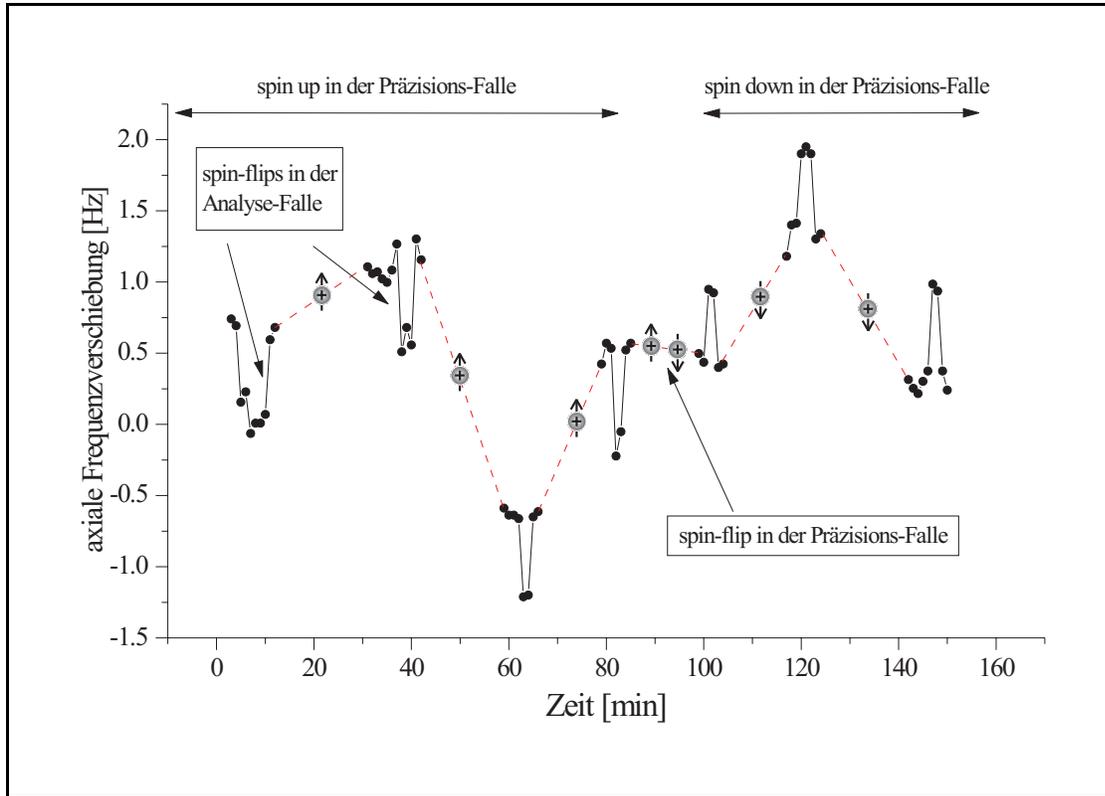


Abbildung 6.1: **Detektion eines spin-flips in der Präzisions-Falle**

Diese Abbildung zeigt, wie die spin-flips in der Präzisions-Falle detektiert wurden. Dazu wird zuerst die Ausrichtung des Spins des Elektrons in der Analyse-Falle bestimmt, indem dort wiederholt die axiale Frequenz des Ions gemessen wird und jeweils zwischen den Messungen Mikrowellen eingestrahlt werden. (siehe Abschnitt 5.13). Anschließend wird das Ion in die Präzisions-Falle transportiert und dort ein bestimmtes Frequenzverhältnis ν_L/ν_c getestet (gestrichelte Linie). Nach dem Rücktransport in die Analyse-Falle kann hier festgestellt werden, ob in der Präzisions-Falle ein spin-flip stattfand. Zu erkennen ist auch, daß sich die axiale Frequenz nach dem Rücktransport zu viel geändert hat, um durch eine Frequenzmessung zu entscheiden, ob ein spin-flip in der Präzisions-Falle stattfand. Daher muss die Ausrichtung des Spins immer absolut bestimmt werden.

6.1.2 Induzieren von spin-flips in der Präzisions-Falle

In der Präzisions-Falle wird als erstes die reduzierte Zyklotronbewegung mit einem spektralen Rechtecksignal mit Mittenfrequenz bei der reduzierten Zyklotronfrequenz ν_+ angeregt. Die Anregung wird über die geteilte Korrektorelektrode eingekoppelt, die so ein Wechselfeld erzeugt, das am Ort des Ions den zur Anregung der Zyklotronbewegung nötigen radialen Dipol-Anteil besitzt. Danach wird die Zyklotronenergie des Ions über die Stärke des vom Ion induzierten Spiegelstroms ständig bestimmt (vergleiche Abbildung 5.6). Wenn die Energie unter einen bestimmten Schwellenwert gefallen ist, beginnt die eigentliche Messphase:

Zunächst wird die axiale Frequenz bestimmt: Da die axiale Frequenz nach Gleichung 3.28 auch von der Zyklotronenergie abhängt, wird, damit diese möglichst konstant bleibt, der Zyklotron-Schwingkreis verstimmt, sodass er sich nicht mehr in Resonanz mit dem Ion befindet. Dies ist unbedingt nötig, da ansonsten durch die Änderung der axialen Frequenz während ihrer Messung kein oder nur ein schwaches axiales Signal (Dip) gemessen werden kann. Um ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis zu erhalten, wird der axiale Schwingkreis mit einem spektralen Rechteck angeregt (siehe Abschnitt 5.2.1). Die axiale Frequenz macht sich nach Gleichung 4.17 durch ein Minimum in der Spannungsdichte bemerkbar (siehe Abbildung 6.2). Um wieder ein messbares Zyklotronsignal zu erhalten, wird anschließend der Zyklotron-Schwingkreis wieder in Resonanz gebracht. Danach werden gleichzeitig Mikrowellen zum Induzieren eines spin-flips eingestrahlt und die reduzierte Zyklotronfrequenz gemessen (siehe Abbildung 6.3). Die Frequenz-Auflösung der Fourier-Transformation betrug bei der Messung $\Delta\nu = 12$ mHz, sodass die beiden für die Bestimmung des g-Faktors wichtigsten Prozesse (Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz und Einstrahlen der Mikrowellen) gleichzeitig innerhalb von $t = 1/\Delta\nu = 83$ s (Fourier-Limit) durchgeführt wurden. Die Gleichzeitigkeit der beiden Messungen hat den Vorteil, dass eine Verbreiterung der g-Faktor-Resonanz und systematische Fehler durch die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes oder durch eine Änderung des Ortes, an dem sich das Ion befindet, vermieden werden. Zum Abschluss der engeren Messphase wird nochmals, wie oben beschrieben, die axiale Frequenz gemessen. Für die Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz ist die Magnetronfrequenz von untergeordneter Bedeutung, sodass das Verhältnis aus eingestrahelter Mikrowellenfrequenz und freier Zyklotronfrequenz innerhalb kürzester Zeit (≈ 3 min) bestimmt ist. Abbildung 6.4 veranschaulicht die Bewegung des Ions während der Messphase.

Danach wird die Zyklotronbewegung des Ions, um es in der Analyse-Falle nachweisen zu können, durch Seitenbandkühlung (siehe Abschnitt 5.9.2) innerhalb von weniger als 1 Minute auf ca. 130 meV abgekühlt. Um ein Maß für die Zyklotronenergie des Ions, bei der die eigentliche Messung stattfand, zu erhalten, wird die axiale Frequenz bei dieser relativ geringen Energie der Zyklotronbewegung nochmals bestimmt. Aus der Änderung der axialen Frequenz, die durch andere Zyklotronenergie des Ions verursacht wird, kann so mittels Gleichung 3.28 die ursprüngliche Zyklotronenergie bestimmt werden.

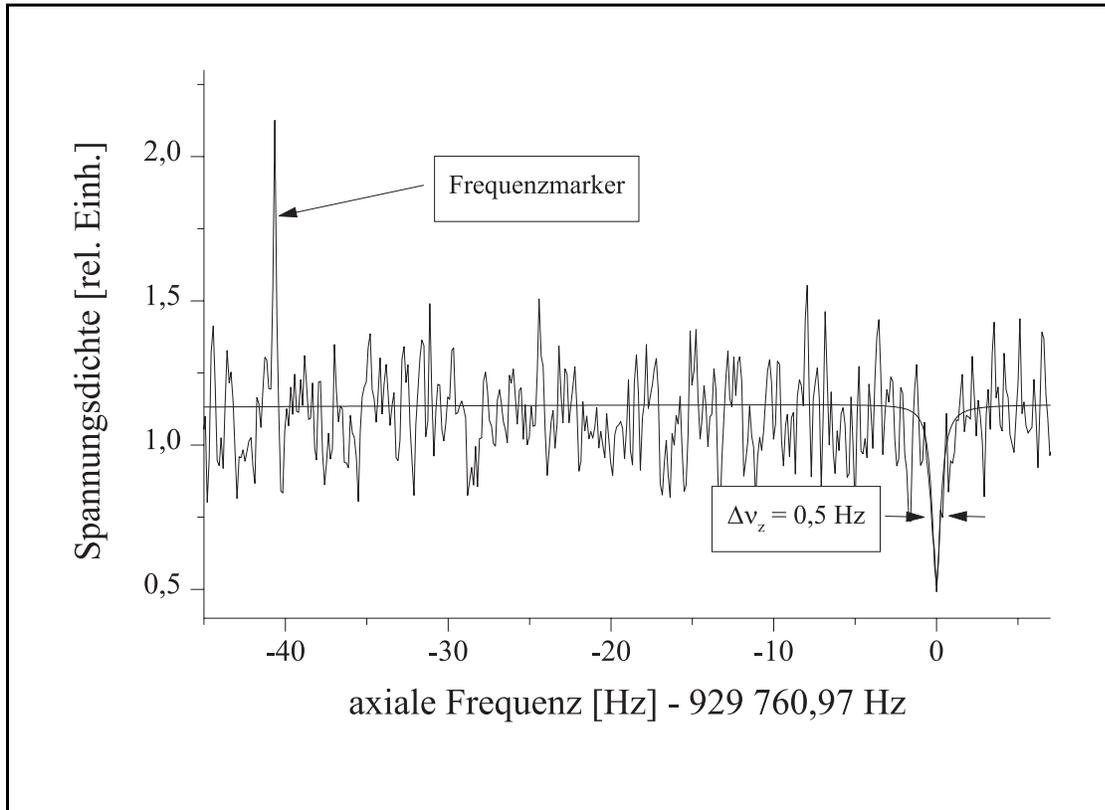


Abbildung 6.2: **Typisches Nachweissignal der axialen Frequenz für die g-Faktor-Messungen**

Die Auflösung der Fourier-Transformation beträgt 124 mHz. Für die Messung wurde 50 s lang gemittelt. Zur Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses wurde das Ion mit einem spektralem Rechteck angeregt (siehe Abschnitt 5.2.1). Die axiale Temperatur des Ions betrug daher während des axialen Nachweises etwa $8 \cdot T_0 \approx 8 \cdot 60 \text{ K} \approx 500 \text{ K}$ (siehe Abschnitt 5.10).

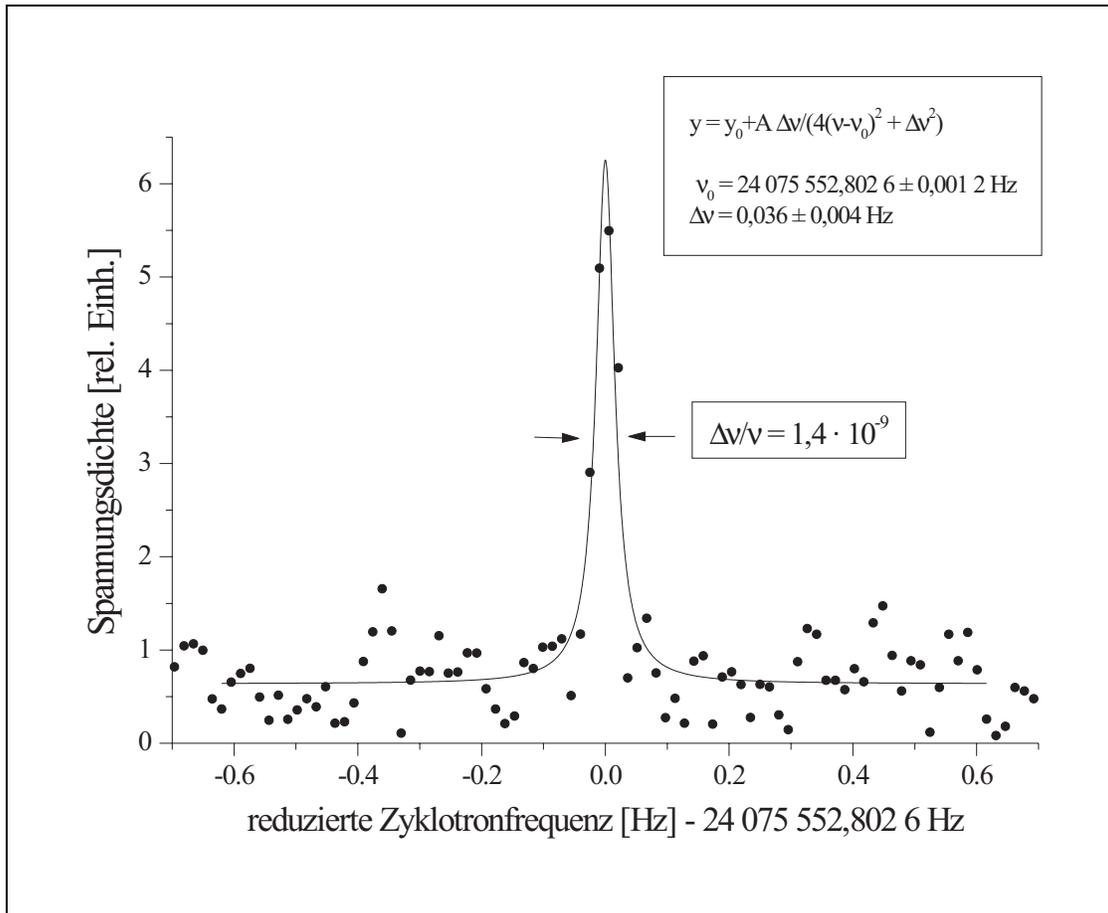


Abbildung 6.3: **Typische Zyklotronresonanz**

Die Fourier-Transformation wurde mit einer Auflösung von 12 mHz durchgeführt. Die Messzeit betrug dementsprechend $\tau = 1/\Delta\nu = 83$ s. Die Linienbreite von 36 mHz entspricht den Erwartungen von 35 mHz aus Abschnitt 3.4.1 (siehe die Abbildungen 3.3, 3.4 und 6.12).

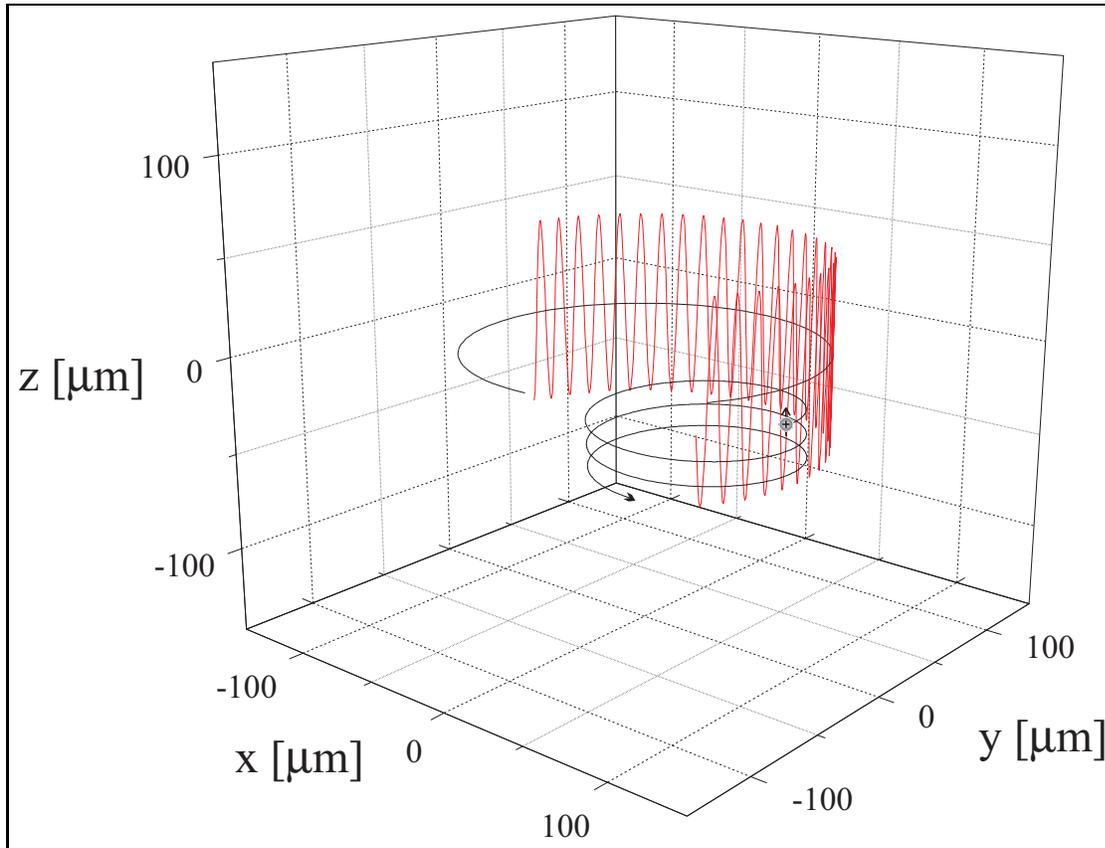


Abbildung 6.4: **Trajektorie eines C^{5+} -Ions in der Präzisions-Falle mit während der Messphase typischen Parametern**

Vergleiche dazu Abbildung 3.1.

Bewegungsamplituden:	$r_+ = 46 \mu\text{m}$	$z_0 = 50 \mu\text{m}$	$r_- = 93 \mu\text{m}$
Bewegungsfrequenzen:	$\nu_+ = 24\,075 \text{ kHz}$	$\nu_z = 929 \text{ kHz}$	$\nu_- = 18 \text{ kHz}$
Energien:	$E_+ = 3 \text{ eV}$	$E_z = 5 \text{ meV}$	$E_- = -10 \text{ meV}$

	Zeit[<i>min</i>]
Bestimmung der Ausrichtung des Spins in der Analyse-Falle	13
Transport des Ions in die Präzisions-Falle	0
Anregen der Zyklotronbewegung auf ca. 10-30 eV	1
Widerstandskühlen der Zyklotronbewegung auf 1 - 20 eV	4
Messen der axialen Frequenz	1
Messen der reduzierten Zyklotronfrequenz und gleichzeitiges Einstrahlen der Mikrowellen	1
Messen der axialen Frequenz	1
Seitenbandkühlen auf $E_+ = 0, 13$ eV	1
Messen der axialen Frequenz	1
Transport in die Analyse-Falle	0
Erneute Bestimmung der Ausrichtung des Spins	nächster Zyklus
Summe:	23

Tabelle 6.1: Ablauf der g-Faktor-Messungen

Diese Tabelle gibt einen Überblick über die einzelnen Schritte zur Messung des g-Faktors. Die Messungen der Größen, die unmittelbar in das Verhältnis der Frequenzen zur Bestimmung des g-Faktors eingehen, sind fett gedruckt. Sie zeigt, dass ca. 1/2 Stunde Messzeit benötigt wurde, um ein bestimmtes Verhältnis von Larmor-Präzessions- und Zyklotron-Frequenz zu testen.

6.1.3 Erneute Bestimmung der Ausrichtung des Spins in der Analyse-Falle

Nach dem Transport des Ions von der Präzisions-Falle in die Analyse-Falle wird, wie in Abschnitt 6.1.1 beschrieben, die Einstellung des Spins erneut analysiert. Die Kenntnis der Einstellung des Spins vor und nach dem Aufenthalt des Ions in der Präzisions-Falle erlaubt es dann, eine Aussage über einen eventuellen spin-flip beim Einstrahlen der Mikrowellen in der Präzisions-Falle zu machen (siehe Abbildung 6.1). Damit diese Aussage überhaupt zuverlässig getroffen werden kann, ist es wichtig, zu zeigen, dass während des Transports des Ions zwischen den Fallen kein spin-flip auftritt. Dies konnte erstmals Ende Januar 1999 gezeigt werden, indem, ohne Mikrowellen einzustrahlen, die Ausrichtung des Elektronen-Spins in der Analyse direkt vor und nach dem Transport in die Präzisions-Falle bestimmt wurde.

6.2 Systematische Fehlerquellen

In diesem Abschnitt werden Effekte diskutiert, die den gemessenen Wert des g -Faktors verfälschen können:

1. Inhomogenitäten des Magnetfeldes (Abschnitt 6.2.1)
2. Zeitliche Drift des Magnetfeldes (Abschnitt 6.2.2)
3. Abweichungen des elektrischen Feldes vom Quadrupolverlauf (Abschnitt 6.2.3)
4. Zeitliche Drift des elektrischen Feldes (Abschnitt 6.2.4)
5. Fehler bei der Bestimmung der Zyklotronenergie (Abschnitt 6.2.5)
6. Verschiebung der Zyklotronresonanz (Abschnitt 6.2.6)
7. Asymmetrie der g -Faktor-Resonanz (Abschnitt 6.2.7)
8. Relativistische Korrekturen (Abschnitt 6.2.8)
9. Cavity-QED-Effekte (Abschnitt 6.2.9)
10. Räumliche Inhomogenität der Mikrowellen (Abschnitt 6.2.10)
11. Intensität und Form des Mikrowellensignals (Abschnitt 6.2.11)
12. Dämpfung der Bewegung des Ions (Abschnitt 6.2.12)
13. Ungenauigkeiten der Uhren-Quarze (Abschnitt 6.2.13)
14. Massenverhältnis des Elektrons und des Ions (Abschnitt 6.2.14).

6.2.1 Inhomogenitäten des Magnetfeldes

Neben Verbreiterungen der Resonanzen führen Inhomogenitäten des Magnetfeldes durch Änderungen der Bahnparameter des Ions auch zu Verschiebungen der Larmor- und Zyklotron-Frequenz. Daher wird in der Penning-Fallen-Massenspektrometrie sehr viel Wert darauf gelegt, Ferromagnetika in der Nähe der Apparatur zu vermeiden und mit zusätzlichen Spulen ein möglichst homogenes Magnetfeld bereitzustellen. In unserem Fall spielt dieser Effekt der Magnetfeld-Inhomogenitäten keine so entscheidende Rolle, da die Larmor-Präzessions- und Zyklotron-Frequenz gleichzeitig bestimmt werden können und daher die Messgrößen durch das selbe mittlere Magnetfeld bestimmt werden. Bei genauerer Betrachtung können aber zwei Prozesse ausgemacht werden, die den gemessenen g -Faktor trotzdem verfälschen:

- Da die freie Zyklotronfrequenz keine Eigenfrequenz in einer Penning-Falle ist, muss sie aus den drei Eigenfrequenzen des Ions in der Falle berechnet werden. Dabei ergibt sich das Problem, dass diese Formeln nicht ohne weiteres für inhomogene Magnetfelder anwendbar sind. Dies kann man leicht einsehen, da das magnetische Moment des Ions, das z.B. durch die kreisförmige reduzierte Zyklotronbewegung zustande kommt, in einem inhomogenen Magnetfeld eine

zusätzliche Kraft erzeugt. Um diese Verfälschung des aus der Zyklotronfrequenz gewonnenen Magnetfeldes zu untersuchen, wurde die Zyklotronenergie und damit das magnetische Bahnmoment des Ions gezielt variiert (siehe Abschnitt 6.3.1).

- Die Mittelungsprozesse über das Magnetfeld sind für die Larmor- und Zyklotron-Bewegung durch ihre stark unterschiedlichen Frequenzen verschieden (siehe Abschnitt 3.4.1). Zusätzlich kann die Larmor- im Gegensatz zur Zyklotron-Resonanz gesättigt werden. Daher kann die Inhomogenität, die die Hauptursache für die endliche Linienbreite ist, die jeweilige Linienmitte unterschiedlich beeinflussen (siehe Abschnitte 6.3.3 und 6.3.4).

Aus diesen Gründen ist der Einfluss der Magnetfeld-Inhomogenitäten auf die g-Faktor-Messungen eine der größten Unsicherheiten bei der Bestimmung des g-Faktors. Um diese Einflüsse zu untersuchen, wurden folgende Messungen durchgeführt:

1. Messung der g-Faktor-Resonanz bei verschiedenen Zyklotronenergien (siehe Abschnitt 6.3.1)
2. Messung der g-Faktor-Resonanz bei verschiedenen mittleren axialen Energien (siehe Abschnitt 6.3.4)
3. Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz als Funktion der Zyklotronenergie (siehe Abbildung 6.5)
4. Untersuchung der freien Zyklotronfrequenz als Funktion der Zyklotronenergie (siehe Abbildung 6.6)
5. Messung der Magnetronfrequenz als Funktion der Zyklotronenergie (siehe Abbildung 6.7)
6. Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz als Funktion der axialen Energie (siehe Abschnitt 5.12.3).

Die theoretischen Verschiebungen der Eigenfrequenzen wurden in Abschnitt 3.3.2 diskutiert.

Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz als Funktion der Zyklotronenergie

Bei dieser Messung wurde die Zyklotronenergie gezielt angeregt und anschließend sowohl die reduzierte Zyklotronfrequenz als auch die axiale Frequenz, deren Verschiebung als Maß für die Zyklotronenergie dient, gemessen. Die Zyklotronenergien wurden zufällig gewählt, damit sich eine Magnetfelddrift nur durch eine breitere Streuung in den Messwerten niederschlagen kann. Nach Gleichung 3.27 erwartet man folgenden Zusammenhang:

$$\Delta\nu_+/\nu_+ = -1,604 \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z/\text{Hz} . \quad (6.1)$$

Die Messungen sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Die gemessene Abhängigkeit ist mit $-2,363(98) \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z/\text{Hz}$ um fast 50% größer. Dies lässt sich durch Anteile des Magnetfeldes erklären, die nicht axialsymmetrisch sind.

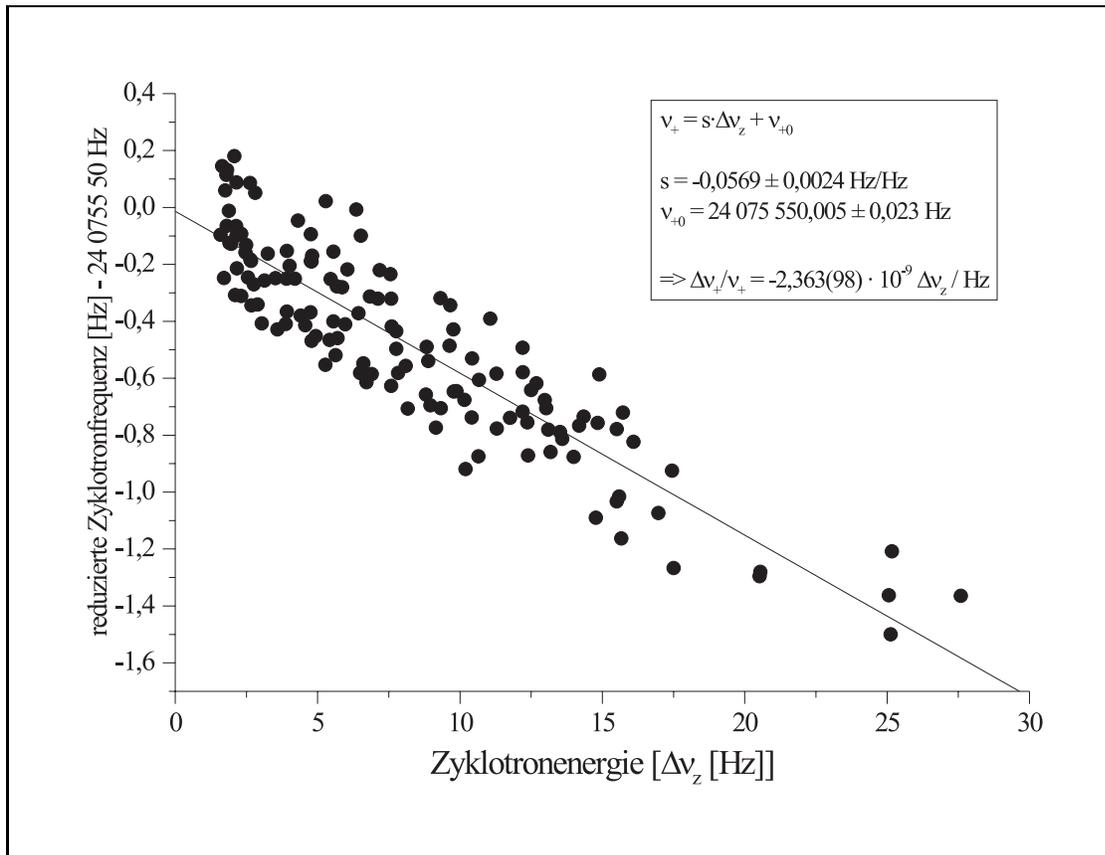


Abbildung 6.5: Die gemessene reduzierte Zyklotronfrequenz als Funktion der Energie der Zyklotronbewegung

Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz als Funktion der Zyklotronenergie

In Abbildung 6.6 ist zu erkennen, dass die Abhängigkeit der nach Gleichung 3.12 berechneten freien Zyklotronfrequenz von der Zyklotronenergie (in Einheiten der Verschiebung der axialen Frequenz) wesentlich geringer ist, als es für die reduzierte Zyklotronfrequenz (siehe Abbildung 6.5) der Fall ist ($\Delta\nu_c/\nu_c = -5,40(99) \cdot 10^{-10} \Delta\nu_z/\text{Hz}$). Nach Gleichung 3.32 wird jedoch keinerlei Abhängigkeit von der Zyklotronenergie erwartet. Eine Abhängigkeit lässt sich durch relativistische Verschiebungen erklären. Setzt man für die Energie bei 1 Hz axialer Frequenzverschiebung 2,18(24) eV (siehe Gleichung 5.10) ein, so erhält man als theoretische Abhängigkeit $\Delta\nu_c/\nu_c = -1,84(19) \cdot 10^{-10} \Delta\nu_z/\text{Hz}$ (siehe auch Gleichung 3.29). Die Größenordnung der Verschiebung wird korrekt wiedergegeben. Die verbleibende Diskrepanz kann wiederum durch das nicht perfekt axialsymmetrische Feld erklärt werden.

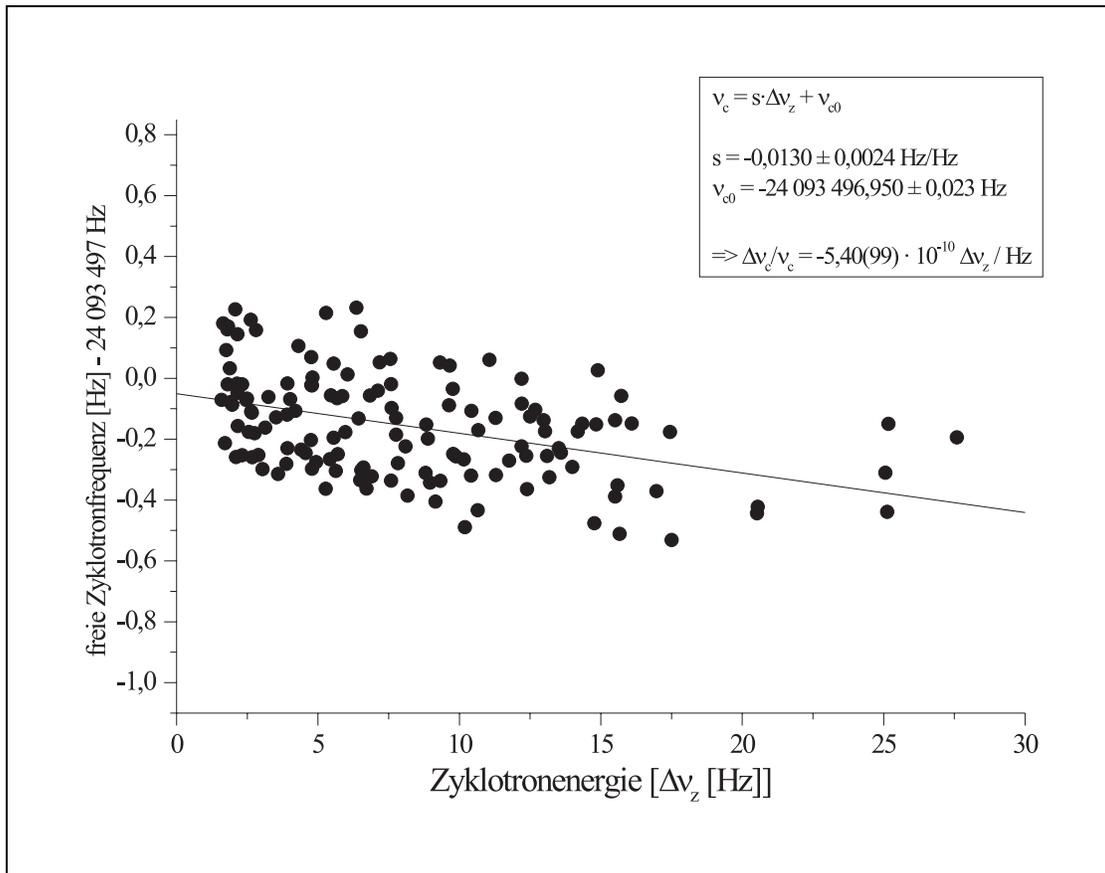


Abbildung 6.6: Die freie Zyklotronfrequenz als Funktion der Energie der Zyklotronbewegung

Aus dem Vergleich zu Abbildung 6.5 kann entnommen werden, dass die Abhängigkeit der nach Gleichung 3.12 berechneten freien Zyklotronfrequenz von der Zyklotronenergie kleiner ist als die der reduzierten Zyklotronfrequenz. Dies liegt daran, dass die berechnete freie Zyklotronfrequenz theoretisch das Magnetfeld im Zentrum der Zyklotronbewegung widerspiegeln sollte, während die reduzierte Zyklotronfrequenz direkt von der Bahn des Ions bestimmt wird.

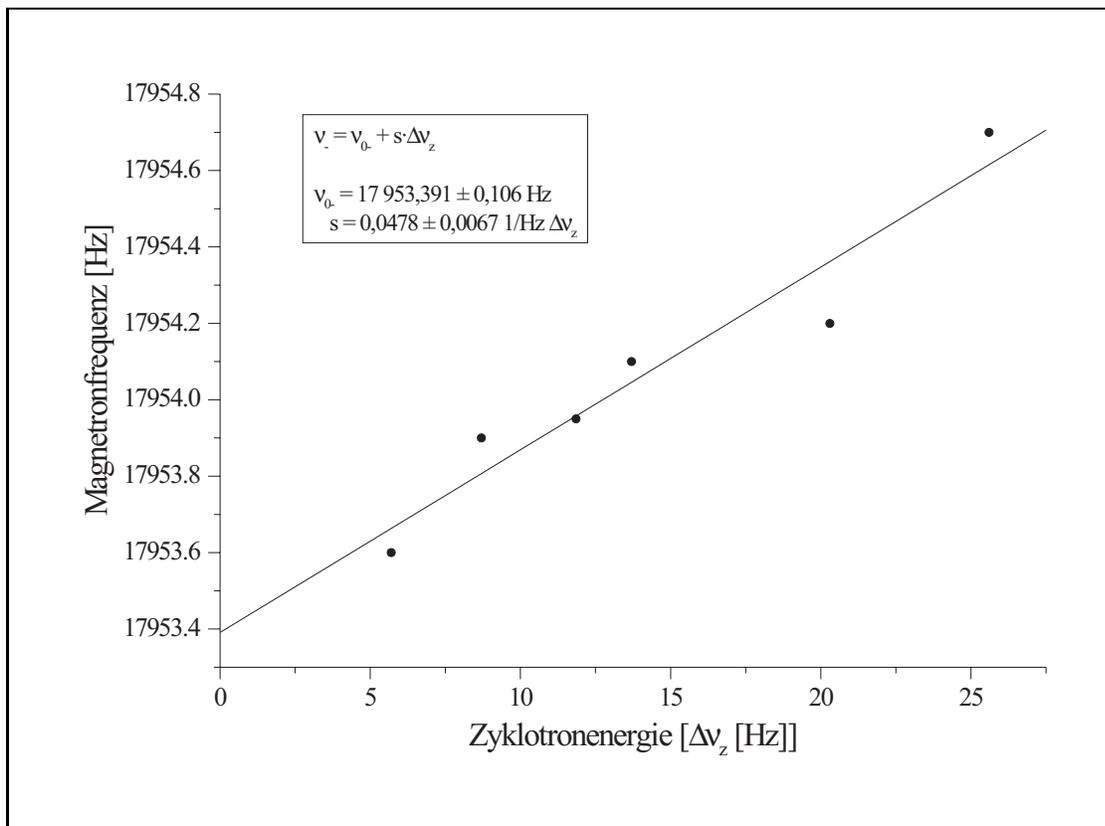


Abbildung 6.7: **Die gemessene Magnetronfrequenz als Funktion der Energie der Zyklotronbewegung**

Die gemessene Magnetronfrequenz hängt linear von der Zyklotronenergie ab.

Messung der Magnetronfrequenz als Funktion der Zyklotronenergie

In Abbildung 6.7 ist eine Messung gezeigt, bei der die Magnetronfrequenz durch Anregen mit dem unteren Seitenband $\nu_z - \nu_-$ (siehe Abschnitt 5.4) als Funktion der axialen Energie bestimmt wurde. Nach Gleichung 3.27 erwartet man als Abhängigkeit der Magnetronfrequenz von der Zyklotronenergie $\Delta\nu_-/\nu_- = 0,038 \Delta\nu_z/\text{Hz}$. Wiederum wurde im Experiment mit $\Delta\nu_-/\nu_- = 0,048$ (7) $\Delta\nu_z/\text{Hz}$ eine etwas größere Abhängigkeit beobachtet.

Einfluss des endlichen Magnetronradius

Der Einfluss des endlichen Magnetronradius und des damit verbundenen magnetischen Moments auf die Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz kann aus folgendem Grund vernachlässigt werden: Als Maß für die Kraft des magnetischen Moments kann – wie im Fall einer endlichen Energie der Zyklotronbewegung – die Verschiebung der axialen Frequenz herangezogen werden. In der Analyse-Falle wurden bei Magnetronradien ($\approx 100 \mu\text{m}$), die größer sind als diejenigen, bei denen die g-Faktor-Resonanzen aufgenommen wurden, Verschiebungen der axialen Frequenz von ca. 2 Hz beobachtet. Da die magnetische Flasche in der Präzisions-Falle um 3 Größenordnungen kleiner als die in der Analyse-Falle ist, entspricht dieser Magnetronradius einer Verschiebung der axialen Frequenz von weniger als 2 mHz in

der Präzisions-Falle. Daher hat der Radius der Magnetronbewegung nach Gleichung 3.27 einen Einfluss von weniger als 0,1 mHz auf die berechnete freie Zyklotronfrequenz. Somit ist der Einfluss der endlichen Energie der Magnetronbewegung auf den Messwert des g -Faktors mit 10^{-11} vernachlässigbar klein.

Die durch die räumliche Imperfektion des Magnetfeldes verursachten Frequenzverschiebungen konnten verstanden werden. Der nicht axialsymmetrische Anteil des Magnetfeldes macht aber Extrapolationen der g -Faktor-Resonanz-Messungen auf eine verschwindende Zyklotronenergie notwendig. Diese wird in Abschnitt 6.3.1 besprochen.

6.2.2 Zeitliche Drift des Magnetfeldes

Da die magnetfeldabhängigen Größen gleichzeitig bestimmt werden, wird die g -Faktor-Resonanz durch eine Drift des Magnetfeldes nicht verschoben. Trotzdem ist sie, wie in allen Penning-Fallen-Experimenten, in denen Zyklotronfrequenzen mit extrem hohen Genauigkeiten bestimmt werden, eine der Hauptlimitierungen der Messgenauigkeit¹ [Gab88, Bro86a, DiF94, Dyc95, Nat93, Dyc86b, Car95]. Die Drift des Magnetfeldes wirkt sich bei diesen Experimenten zur Bestimmung von Massenverhältnissen vor allem dadurch aus, dass sich das Magnetfeld zwischen der Bestimmung der freien Zyklotronfrequenzen zweier verschiedener Ionen geändert hat.

In Abbildung 6.8 ist die Entwicklung unseres Magnetfeldes über einen Zeitraum von 12 Tagen gezeigt. Diese Drift wird durch das vom Nachweis der Zyklotronbewegung verursachte Kühlen bewirkt (siehe Gleichung 3.27). In anderen Arbeitsgruppen werden mit ähnlichen sich selbst abschirmenden Magnetsystemen um eine Größenordnung kleinere Schwankungen des Magnetfeldes von weniger als 10^{-9} pro Stunde beobachtet [Gab88, Car95]. Allerdings wird bei diesen Experimenten darauf geachtet, kein ferromagnetisches Material im Innern und in der Nähe des Magneten zu plazieren. Meiner Ansicht nach ist der verwendete Nickel-Ring, beziehungsweise die von ihm verursachte Inhomogenität des Magnetfeldes, die Ursache für die relative Änderung des Magnetfeldes von bis zu 10^{-7} auf einer Zeitskala von Tagen: Bei dem gemessenen linearen Gradienten des Magnetfeldes von $60 \mu\text{T}/\text{mm}$ (siehe Abschnitt 5.12.1) reicht bereits eine Verschiebung der Falle von $1 \mu\text{m}$ aus, dass sich das Magnetfeld im Zentrum der Falle um 10^{-8} ändert. Da sich die Falle aber nur als Ganzes, d.h. zusammen mit dem Nickel-Ring, im Magneten verschieben kann, ist der Haupteffekt wohl eher darin zu suchen, dass der Nickel-Ring in den Spulen des Magneten durch eine Bewegung einen Gegenstrom induziert. Dieser Effekt liegt in der gleichen Größenordnung wie der, bei dem sich die Position des Ions im Magnetfeld verschiebt. Positionsänderungen der Falle im μm -Bereich können leicht durch Erschütterungen oder Änderungen der Temperatur der Aufhängung der Falle verursacht werden. Diese Temperaturänderungen der Aufhängung der Falle kommen hauptsächlich durch Änderungen des Druckes über dem Helium- und Stickstoff-Dewar-Gefäß der Apparatur und damit des Siedepunktes des Heliums bzw. des Stickstoffs zustande [Gab88]. Daher ist, um die Magnetfelddrift zu senken, eine Stabilisierung des Druckes über dem Helium-Dewar-Gefäß geplant. Ähnlich bewirkt eine Änderung der Temperatur

¹Aus diesem Grund benutzen Van Dyck et al. für ihre Massenmessungen eine aktive Driftstabilisierung [Dyc99a, Dyc99b], mit der sie relative Drifts des Magnetfeldes von nur wenigen 10^{-11} pro Stunde erreichen.

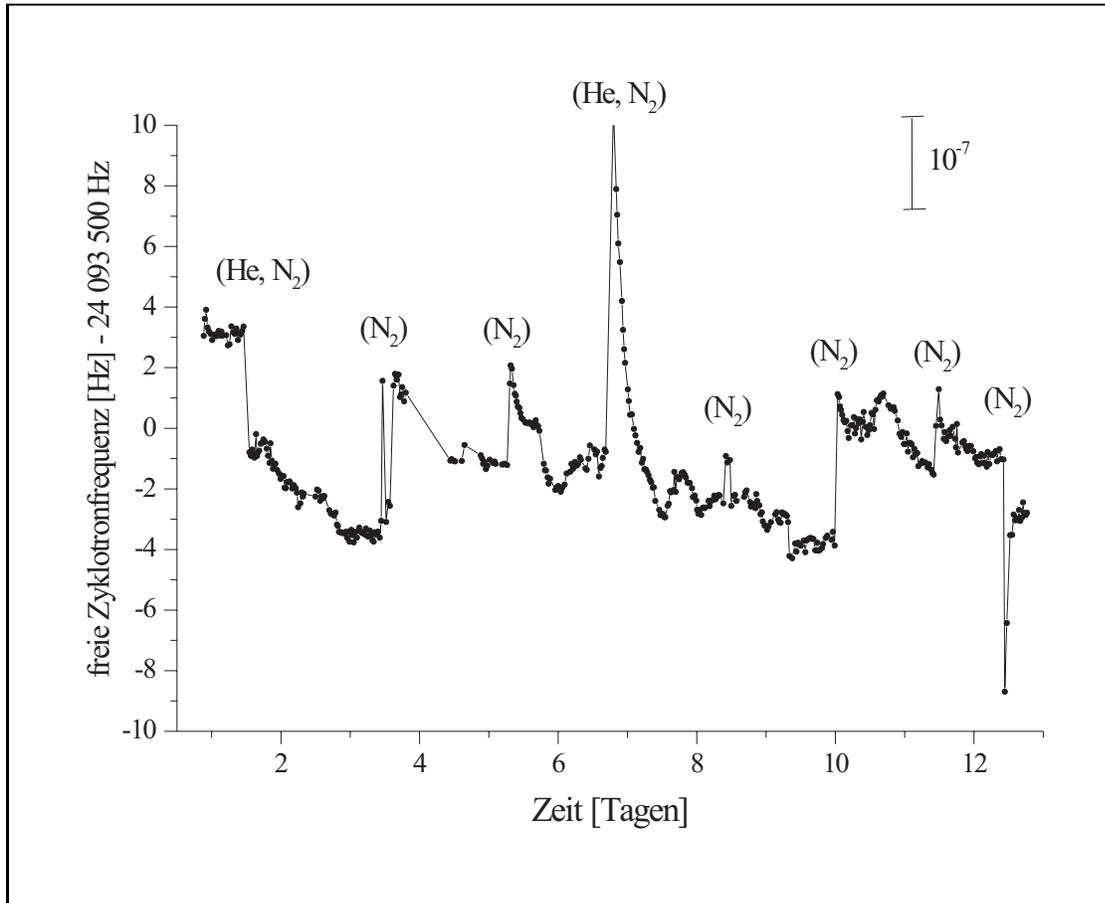


Abbildung 6.8: **Zeitliche Drift des Magnetfeldes am Ort des Ions**

Die Sprünge im Magnetfeld kommen zum überwiegenden Teil durch Befüllen der Dewar-Gefäße der Apparatur mit flüssigem Helium beziehungsweise Stickstoff zustande. (He,N₂) zeigt das Befüllen des Helium-Dewars der Apparatur und des Stickstoff-Dewars des Magneten an. (N₂) zeigt das Befüllen des Stickstoff-Dewars der Apparatur an.

der Spulen des Magneten eine Änderung ihrer Querschnitte und ändert damit, da der Gesamtfluss konstant bleibt, die magnetische Flussdichte. Daher ist auch eine Stabilisierung des Druckes über dem Helium-Dewar-Gefäß des Magneten geplant.

Die relative Änderung der Sättigungsmagnetisierung des Nickel-Rings mit der Temperatur beträgt nach dem Bloch-Modell $2,4 \cdot 10^{-5}/\text{K}$. Da der Beitrag des Nickel-Rings in der Präzisions-Falle im Bereich von 10^{-5} liegt, spielt dieser Einfluss auf das Magnetfeld von weniger als 10^{-10} in diesem Zusammenhang keine Rolle.

In Abbildung 6.9 ist auch zu sehen, dass das Magnetfeld auf einer Zeitskala von 2 Minuten um ca. 10^{-8} schwankt. Daher wurde ein Messschema entwickelt, das es erlaubt, die beiden magnetfeldabhängigen Größen Larmor- und Zyklotronfrequenz gleichzeitig zu bestimmen. So führt lediglich die Änderung des Magnetfeldes auf einer Zeitskala von 1 Minute zu einer Verbreiterung der Resonanz. Die g-Faktor-Resonanz wird durch die Drift des Magnetfeldes nicht verschoben. Weitaus kritischer für die Messungen sind daher die oben beschriebenen Einflüsse der Magnetfeld-Inhomogenitäten.

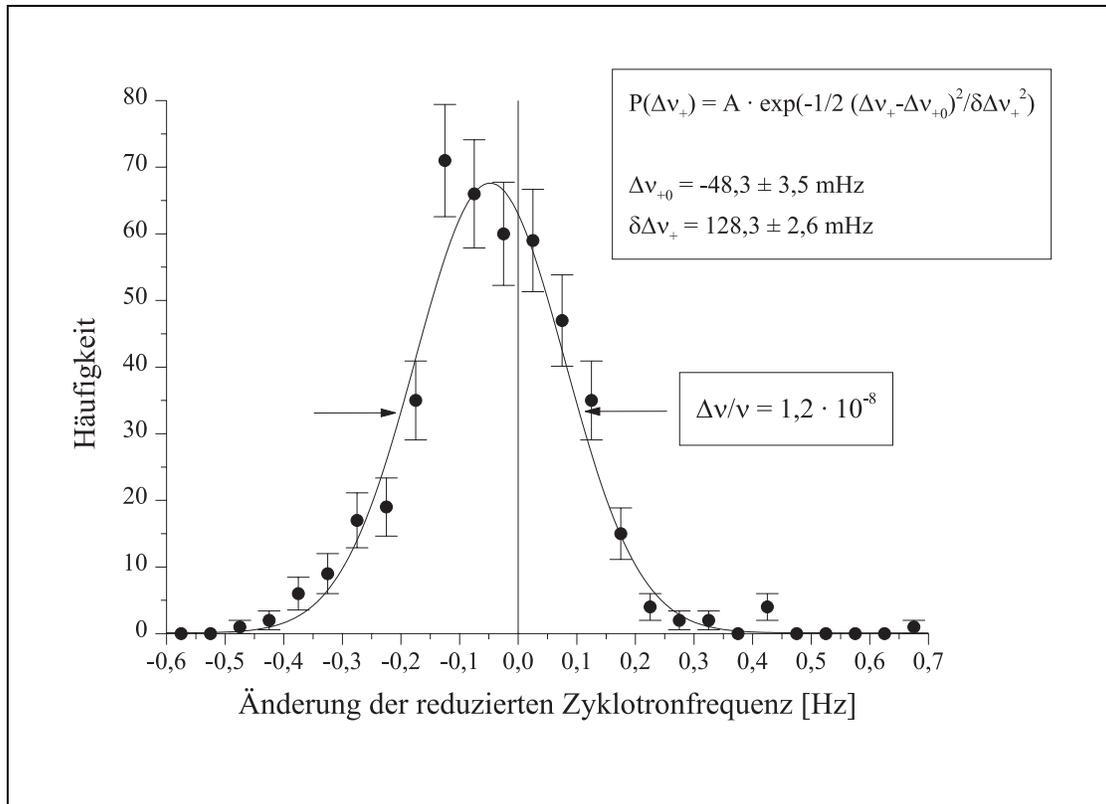


Abbildung 6.9: **Fluktuationen des Magnetfeldes am Ort des Ions im Zeitraum von 2 Minuten**

Bei dieser Messung wurde die reduzierte Zyklotronfrequenz im Abstand von 2 Minuten gemessen und jeweils die Differenz aufgetragen. Die mittlere Drift der reduzierten Zyklotronfrequenz innerhalb dieser Zeit beträgt 48 mHz. Sie wird durch das Widerstandskühlen verursacht. Größer sind aber die statistisch überlagerten Fluktuationen der reduzierten Zyklotronfrequenz von ca. 125 mHz.

6.2.3 Elektrische Feldfehler

Die elektrischen Feldfehler können in drei Kategorien unterteilt werden:

- Anharmonizitäten des Feldes
- Abweichungen von der Zylindersymmetrie
- Verkippung der Symmetrieachse des elektrischen Feldes gegenüber dem Magnetfeld.

Anharmonizitäten des elektrischen Feldes

Anharmonizitäten des Speicherfeldes führen zu einer Abhängigkeit der Eigenfrequenzen des Ions von seinen Bewegungsamplituden (siehe Gleichungen 3.20 und 3.25). Diese Abhängigkeit ist bei uns deshalb von Interesse, da zur Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses die axiale Temperatur des Ions beim Nachweis der axialen Frequenz gegenüber der bei der Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz um fast eine Größenordnung erhöht wurde. Eine Anharmonizität führt daher zu einem systematischen Fehler bei der Bestimmung der axialen Frequenz (siehe Abbildung 6.10). Da das tuning-ratio mit den in Abschnitt 5.11 beschriebenen Methoden mit einer Genauigkeit von 10^{-5} eingestellt wurde (siehe Abbildung 6.10), ist das elektrische Potential sehr harmonisch: Das Verhältnis C_4/C_2 ist kleiner als $2 \cdot 10^{-5}$. Wegen der kleinen Bewegungsamplitude von weniger als $200 \mu\text{m}$ sind die höheren Ordnungen zu vernachlässigen. Diese Abschätzung liefert als obere Grenze für die Verschiebung der axialen Frequenz durch die Anharmonizität des elektrischen Speicherfeldes 50 mHz (siehe Gleichungen 3.20 und 3.24, vergleiche auch Abbildung 6.10). Damit beträgt der Beitrag der Anharmonizitäten des Speicherfeldes zum systematischen Fehler des g-Faktors $2 \cdot 10^{-10}$.

Der Einfluss der Anharmonizitäten des Speicherfeldes auf die reduzierte Zyklotronfrequenz ist kleiner. Zusätzlich hängt er in 1. Ordnung nur von der Zyklotronenergie ab. Er wird daher schon bei der Extrapolation auf eine verschwindende Zyklotronenergie berücksichtigt.

Verkippung der Fallachse und Abweichungen von der Zylindersymmetrie

Um eine mögliche Verkippung der Achse des Elektrodenturms gegenüber dem Magnetfeld zu bestimmen, wurde folgende Messung durchgeführt: Zuerst wurde der Radius der Magnetronbewegung in der Präzisions-Falle weitestgehend reduziert (siehe Abschnitt 5.9.2). Anschließend wurde das Ion in die Analyse-Falle transferiert. Dort wurde die axiale Frequenz gemessen und anschließend erneut der Magnetronradius reduziert. Aus der gemessenen Verschiebung der axialen Frequenz von $1,95 (20) \text{ Hz}$ zu niedrigeren Frequenzen folgt mit Gleichung 3.27, dass das Ion in der Magnetronbewegung eine Energie von 10 meV und damit einen Magnetronradius von ca. $93 (9) \mu\text{m}$ hatte (im Kühllimit beträgt der Magnetronradius in der Analyse-Falle $16 \mu\text{m}$). Da das Ion beim adiabatischen Transport den Magnetfeldlinien folgt, das Zentrum der Bewegung des Ions aber durch die Symmetrieachse der Fallenelektroden gegeben ist, folgt eine radiale Verschiebung des Zentrums der Ionenbewegung

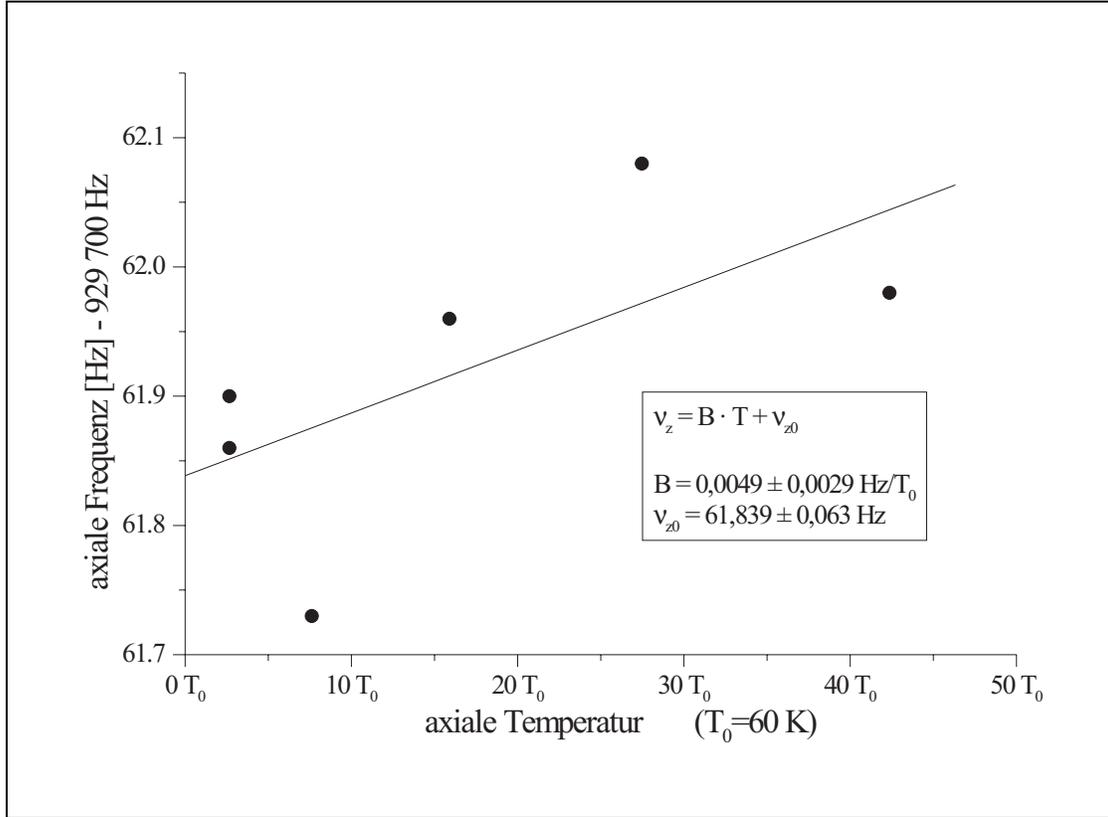


Abbildung 6.10: **Die axiale Frequenz eines C^{5+} -Ions als Funktion der axialen Temperatur**

Bei der g-Faktor-Messung fand der Nachweis der axialen Frequenz bei einer axialen Temperatur von $11 T_0$ statt. Die Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz wurde jedoch bei $T = T_0 = 60$ K durchgeführt. Dies bedeutet, dass die axiale Frequenz für ein axial kaltes Ion in diesem Fall um 54 ± 3 mHz überschätzt worden wäre. Bei dieser Messung wurde das tuning-ratio jedoch bewusst um $2 \cdot 10^{-5}$ zu hoch gewählt.

von $77 \mu\text{m}$. Damit ist der Tangens der Verkippung durch

$$\tan \alpha = \frac{\Delta r_-}{\Delta l} = \frac{77 \mu\text{m}}{28,7 \text{ mm}} \quad (6.2)$$

gegeben und der Winkel der Verkippung errechnet sich daraus zu

$$\alpha = 0,15 (2)^\circ . \quad (6.3)$$

Diese Verkippung beinhaltet jedoch nur die Verkippung der Verbindungslinie zwischen den beiden Fallen gegenüber der Symmetrieachse des Magnetfeldes. Damit gibt diese Methode nur einen Anhaltspunkt für die Verkippung der Fallachsen zur Symmetrieachse des Magnetfeldes.

Eine Möglichkeit, die Verkippung der Fallachsen selbst zu bestimmen, ist es, auszunutzen, dass Gleichungen 3.7, 3.8 und 3.9 nur im idealen Fall gelten. Das sogenannte Invarianztheorem (Gleichung 3.12) gilt dagegen auch für kleine Verkippungen der Fallachsen und Abweichungen von der Zylindersymmetrie. Brown und Gabrielse [Bro86a] leiten für eine kleine Verkippung ($\theta \ll 1$) und Elliptizität ($\epsilon \ll 1$) des Speicherfeldes folgende Beziehung aus diesem Umstand ab:

$$\theta^2 - \frac{2}{9}\epsilon^2 = \frac{16}{9} \left(\frac{\nu_+}{\nu_z} \right)^4 \left[\frac{\nu_c}{\nu_+} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 - 1 \right] . \quad (6.4)$$

Werden die gemessenen Frequenzen (ν_c muss mittels Gleichung 3.12 bestimmt werden) eingesetzt, erhält man für den Term $\theta^2 - \frac{2}{9}\epsilon^2$:

$$\theta^2 - \frac{2}{9}\epsilon^2 = 0,000\,032 (3) . \quad (6.5)$$

Da der Wert dieses Terms positiv ist, ist der Einfluss der Verkippung größer als der der Elliptizität. Wird die Elliptizität vernachlässigt, erhält man einen Anhaltspunkt für den Winkel der Verkippung θ der Fallachsen gegenüber der Symmetrieachse des Magnetfeldes:

$$\theta = 0,32 (1)^\circ . \quad (6.6)$$

Die Differenz zu dem vorher berechneten Wert von $0,15 (2)^\circ$ zeigt, dass zusätzlich zur Verkippung der Achse des Elektrodenturms die Elektroden der Präzisions-Falle zueinander nicht ideal angeordnet sind.

Die beschriebenen Abweichungen der Symmetrieachse des elektrischen Feldes von der des Magnetfeldes sind klein. Daher ist das Invarianztheorem (Gleichung 3.12) gültig und die freie Zyklotronfrequenz kann aus ihm mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Somit ist der Beitrag zum systematischen Fehler durch eine Verkippung der Fallachsen und einer Elliptizität des Speicherfeldes bei Verwendung des Invarianztheorems verschwindend klein. Die Bestimmung der Zyklotronfrequenz mit Gleichung 3.11 ist dagegen weniger verlässlich, da sie nur für ideale elektrische (und magnetische) Felder gilt.

6.2.4 Drift des elektrischen Feldes

Zur Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz des Ions ist es wegen Gleichung 3.12 nötig, auch die axiale Frequenz, die durch das elektrische Feld bestimmt wird, zu

messen. Daher tragen systematische Änderungen des elektrischen Feldes zwischen der Messung der axialen Frequenz und der der reduzierten Zyklotronfrequenz zum systematischen Fehler bei. Um diesen Beitrag zu minimieren, wurde die axiale Frequenz direkt vor und nach der Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz gemessen und der Mittelwert beider Messungen zur Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz herangezogen. Eine lineare zeitliche Veränderung des elektrischen Feldes mittelt sich daher heraus. Änderungen des elektrischen Feldes aber, die mit dem Messprozess korreliert sind, verursachen eine systematische Verschiebung der axialen Frequenz. So wurde bei den Messungen beobachtet, dass sich die axiale Frequenz durch das Ansprechen verschiedener Geräte über den IEEE-Bus systematisch veränderte. Dies gilt insbesondere für das Ansprechen des Synthesizers für die Mikrowellenerzeugung und das Auslesen von Daten vom Spektrumanalysator. Es wurden Änderungen der axialen Frequenz von bis zu 2 Hz beobachtet. Dies entspricht einem Beitrag von 10^{-8} zum g-Faktor. Grund für die Änderung der axialen Frequenz sind Masseschleifen. Durch Ansprechen der verschiedenen Geräte änderte sich die Erdung und dadurch das Bezugspotential der Ringelektrode um bis zu $300 \mu\text{V}$. Durch Minimierung der Masseschleifen konnte diese systematische Verschiebung der axialen Frequenz von 2 Hz auf ca. 50 mHz begrenzt werden. Da die Rest-Verschiebung des Potentials zu $1,6(8) \mu\text{V}$ bestimmt werden konnte, kann eine Korrektur des g-Faktor-Messwertes vorgenommen werden. Diese beträgt $-1,5 \cdot 10^{-10}$ mit einem Restfehler von $8 \cdot 10^{-11}$.

6.2.5 Fehler bei der Bestimmung der Zyklotronenergie

Verursacht durch die Inhomogenität des Magnetfeldes, hängt der g-Faktor des gebundenen Elektrons von der Energie der Zyklotronbewegung ab. Daher muss der g-Faktor durch eine Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie bestimmt werden. Skaliert die Messgröße, aus der die Zyklotronenergie abgeleitet wird, nicht linear mit dieser oder liegt ein Offset vor, kommt es zu einem Fehler bei der Bestimmung des extrapolierten Wertes für den g-Faktor. Bei unseren Messungen kann der g-Faktor entweder aus der Stärke des von der Zyklotronbewegung verursachten Signals oder aus der durch das magnetische Moment der Zyklotronbewegung verursachten Verschiebung der axialen Frequenz bestimmt werden. Da die induzierten Signale sehr klein und durch das Rauschen des Zyklotronschwingkreises nicht konstant sind, benutzen wir als Maß für die Energie der Zyklotronbewegung die Verschiebung der axialen Frequenz (siehe Gleichung 3.28). Weil dieser Effekt bei den Messungen die axiale Frequenz nur im Bereich von 10^{-5} ändert, ist eine sehr gute Linearität gewährleistet.

Um eine g-Faktor-Resonanz zu erhalten, müssen mindestens 100 Einzelmessungen zu einer Gruppe zusammengefasst werden (siehe Abschnitt 6.3). Mit einem Nachweis der reduzierten Zyklotronbewegung ist ein Kühlen des Ions und damit eine Änderung des Magnetfeldes verbunden. Da für hohe Energien der Zyklotronbewegung die Änderung des Magnetfeldes durch die dann starke Kühlkraft groß ist, ist die spektrale Dichte des vom Ion gesehenen Mikrowellenfeldes dann kleiner. Es finden also bevorzugt spin-flips bei niedrigen Zyklotronenergien statt. Bei der Durchsicht der Daten wurde z.B. festgestellt, dass bei Zyklotronenergien, die axialen Frequenzverschiebungen von mehr als 8 Hz ($\hat{=} 20 \text{ eV}$) entsprechen, keine spin-flips induziert wurden. Wird eine Gleichverteilung der getesteten g-Faktoren angenommen, tragen nur diejenigen Messungen zur Resonanzkurve bei, bei denen ein spin-flip induziert

wurde. Daher wird ein besseres Maß für die Zyklotronenergie der Gruppe gewonnen, wenn nur die Messungen, bei denen ein spin-flip induziert wurde, zur Bildung des Mittelwerts der Energie der Zyklotronbewegung herangezogen werden. Der verbleibende Fehler kann mit einem Iterationsverfahren (siehe Abschnitt 6.3.2) reduziert werden. Dieses Iterationsverfahren liefert auch für den Fall, dass die Energie der Zyklotronbewegung einer Gruppe aus allen Messungen bestimmt wird, den gleichen g-Faktor.

Neben der Nichtlinearität des Zyklotronmaßes verfälscht ein Offset die Bestimmung der Zyklotronenergie. Dieser Offset kommt bei uns dadurch zustande, dass die Verschiebung der axialen Frequenz nicht absolut bestimmt werden kann. Mittels Seitenbandkühlen wurde die Zyklotronenergie des Ion nur auf eine Energie von 129 (14) meV reduziert (siehe Abschnitt 5.9.2). Daher liefert die gemessene relative Frequenzverschiebung im Durchschnitt eine um 60 mHz zu kleine absolute Frequenzverschiebung, entsprechend einer um 129 (14) meV zu klein gemessenen Zyklotronenergie. Um diesen Effekt zu korrigieren, muss bei der gemessenen Abhängigkeit des gemessenen g-Faktors von der Zyklotronenergie von $-2,39(33) \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z/\text{Hz}$ daher $1,5(4) \cdot 10^{-10}$ zum gemessenen g-Faktor hinzuaddiert werden.

6.2.6 Verschiebung der Zyklotronresonanz

Abbildung 6.11 zeigt, dass die in [Bro84b, Bro84a] entwickelte Theorie (siehe auch Abschnitt 3.4.1) die Linienform der Zyklotronresonanz befriedigend wiedergibt. Um die Linienform besser sichtbar zu machen, wurde die axiale Temperatur elektronisch auf 350 K angehoben. Die Theorie-Kurve liegt lediglich in den Flanken der Resonanz zu hoch. Dies ist ein Hinweis, dass zum *motional narrowing* ein zusätzlicher nicht in der Theorie berücksichtigter Mittelungsprozess stattfindet.

Die Übereinstimmung des Mittelwertes der Breiten der gemessenen Zyklotronresonanzen bei einer axialen Temperatur von 60 K (siehe Abbildung 6.12) mit den erwarteten 35 mHz aus Abbildung 3.3 bestätigt die theoretischen Betrachtungen aus Abschnitt 3.4.1 zusätzlich. Nach dieser Theorie (siehe Abschnitt 3.4.1) wird für eine axiale Energie von 60 K die freie Zyklotronfrequenz um 6 mHz gegenüber der freien Zyklotronfrequenz des Erwartungswertes des Magnetfeldes (der in Gleichung 3.48 eingesetzt ist) zu niedrig gemessen (siehe Abbildung 3.4). Wird Gleichung 3.48 zur Auswertung herangezogen, muss daher vom gemessenen g-Faktor $5 \cdot 10^{-10}$ subtrahiert werden. Für höhere axiale Energien wären die anzubringenden Korrekturen noch größer (siehe Abbildung 3.4).

6.2.7 Die Asymmetrie der g-Faktor-Resonanz

Die Diskussion des Fehlerbeitrags der asymmetrischen g-Faktor-Resonanz wird in Abschnitt 6.3.3 nach der Besprechung der g-Faktor-Resonanzen nachgeholt. Es zeigt sich, dass ein systematischer Fehler von $4 \cdot 10^{-10}$ anzugeben ist.

6.2.8 Relativistische Effekte

Da das Verhältnis der Larmor-Präzessionsfrequenz und der Zyklotron-Frequenz sehr genau bestimmt wird (genauer als 10^{-9}), muss trotz der niedrigen Bewegungsenergien von weniger als 10 eV ($v^2/c^2 \approx 10^{-9}$) die Bewegung relativistisch beschrieben

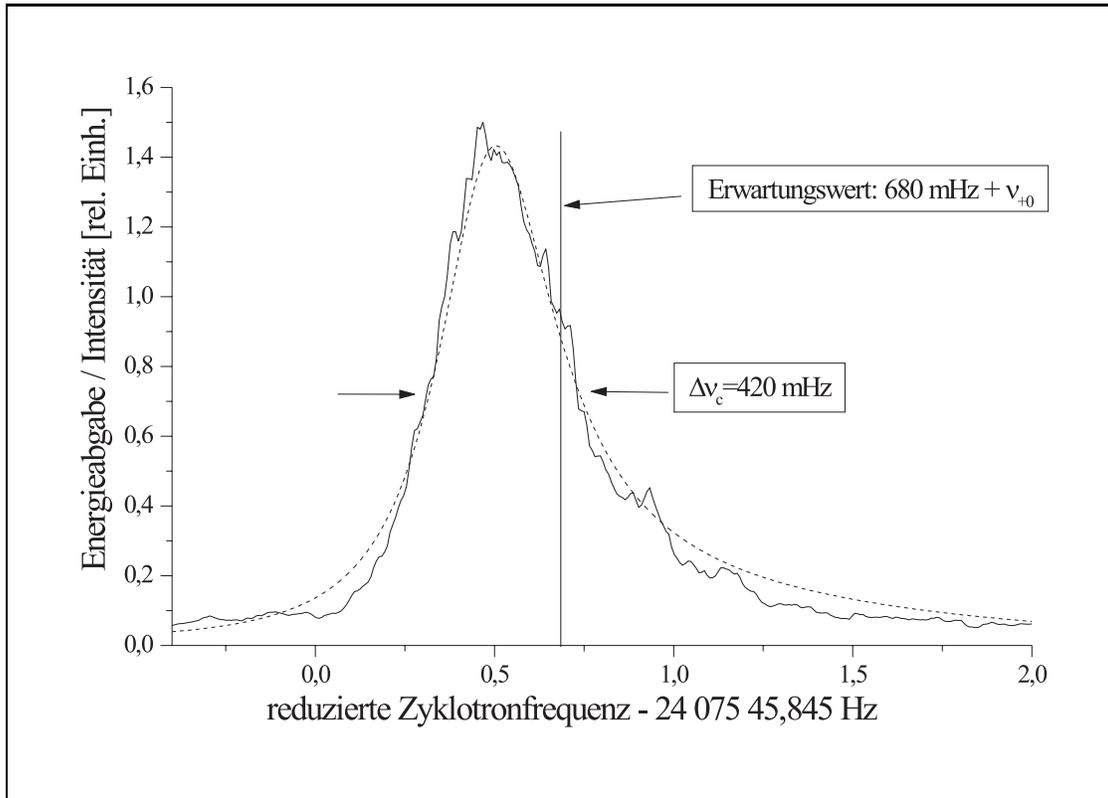


Abbildung 6.11: **Zyklotronsinal bei 350 K**

Diese Messung bestätigt die leicht asymmetrische Linienform der Zyklotronresonanz (vergleiche Abbildung 3.4). Für diese Messung gilt $\Delta\omega_c \approx \gamma$ (siehe Abschnitt 3.4.1). Grundlage für eine Anpassung ist Gleichung 3.36. Angepasst wurden die Resonanzfrequenz, die Temperatur, die Amplitude und der Untergrund. Aus dieser Anpassung ergibt sich die axiale Temperatur zu 330 (33) K. Der Fehler rührt von dem Fehler des B_2 -Terms her. Die elektronische Bestimmung der Temperatur ergibt 350 K (siehe Abschnitt 5.10.1).

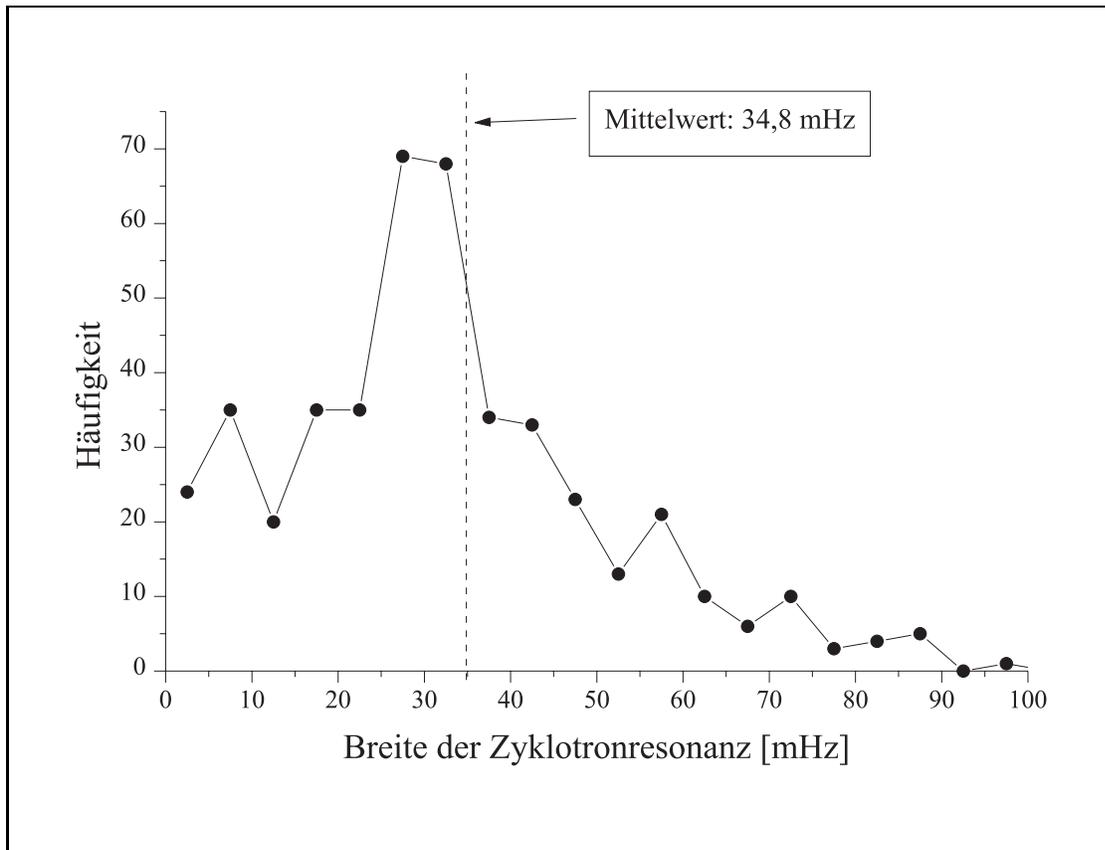


Abbildung 6.12: **Verteilung der Breiten der Zyklotronresonanzen**

Der Mittelwert der Breite der an die Zyklotronresonanzen angepassten Lorentz-Funktionen von 34,8 mHz entspricht den aus Abschnitt 3.4.1 erwarteten 35 mHz. Der exponentielle Abfall der Verteilung zu großen Breiten spiegelt wider, dass große Veränderungen des vom Ion erfahrenen Magnetfeldes unwahrscheinlicher sind als kleine. Genauso sind auch sehr kleine Veränderungen des Magnetfeldes weniger wahrscheinlich als mittlere Veränderungen.

werden. Die folgende Diskussion zeigt jedoch, dass beide Messgrößen (Zyklotron- und Larmor-Präzessions-Frequenz) in ähnlichem Maße verschoben werden. Relativistisch schreibt sich die Zyklotronfrequenz:

$$\omega_c(\gamma) = \frac{q}{\gamma m} B_z = \frac{1}{\gamma} \omega_c(\gamma = 1) . \quad (6.7)$$

Hierbei beschreibt

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (6.8)$$

die Änderung des Magnetfeldes durch die Koordinatentransformation in das Ruhesystem des kreisenden Ions und beschreibt einen rein elektrodynamischen Effekt. Die Transformation der Larmor-Präzessionsfrequenz ω_L ist dagegen komplizierter. Folgt man [Men55] (vergleiche auch [Com79, Bar58]), muss man zwei Fälle unterscheiden und erhält so:

1. Für eine Bewegung parallel zum Magnetfeld:

$$\omega_L(\gamma) = (1 + a)\omega_c^e(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \omega_L(\gamma = 1) . \quad (6.9)$$

Hier bezeichnet $a = g/2 - 1$ die Anomalie des magnetischen Moments des Elektrons. Der Vergleich mit Gleichung 6.7 zeigt, dass die axiale Bewegung des Ions die Larmor-Präzessions- und die Zyklotron-Frequenz des Ions in gleicher Weise verschiebt. Daher ist ihr Verhältnis unabhängig von der axialen Energie.

2. Für eine Bewegung senkrecht zum Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \omega_L(\gamma) &= (1 + \gamma a)\omega_c^e(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \omega_L(\gamma = 1) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) a \\ &= \frac{1}{\gamma} \omega_L(\gamma = 1) + \frac{v^2}{2c^2} a . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Dies bedeutet, dass das Transformationsverhalten für die Larmor-Präzessions- und Zyklotron-Frequenz sowohl für die reduzierte Zyklotron- als auch die Magnetronbewegung unterschiedlich ist. Da die Anomalie a mit ca. 10^{-3} klein ist, ist der Unterschied des Transformationsverhaltens aber gering.

Während der Messung hat das Ion mit 10 eV die bei weitem größte kinetische Energie in der Zyklotronbewegung. Diese Energie bedeutet für das C^{5+} -Ion $v^2/c^2 \approx 10^{-9}$ und damit eine vernachlässigbare Korrektur des g -Faktors in der Größenordnung von 10^{-12} . Durch die Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie wird dieser Effekt aber ohnehin schon berücksichtigt.

6.2.9 Cavity-QED-Effekte

Da sich das Ion während der Messung innerhalb einer Falle befindet, werden seine Bewegungsfrequenzen durch die Wechselwirkung mit den leitenden Elektroden verändert:

- Es kommt zu einer Wechselwirkung des Ions mit den von ihm selbst influenzierten Spiegelladungen

- Es ändern sich die QED-Strahlungskorrekturen und damit die Masse des Ions [New54].

Die Änderung der Masse spielt sich in einem Bereich von $\alpha(E/mc^2)^2 < 10^{-20}$ ab und kann daher bedenkenlos vernachlässigt werden.

Die Wechselwirkung des Ions mit seinen Spiegelladungen, die von Purcell [Pur46] zuerst in Betracht gezogen wurde, muss dagegen wegen des hohen Ladungszustandes des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions etwas sorgfältiger analysiert werden. Zur Analyse wird das von der Spiegelladung des Ions induzierte elektrische Feld in eine transversale und in eine longitudinale Komponente zerlegt. Dabei ist die Vorzugsrichtung (die Richtung des longitudinalen Anteils) durch die Normale vom Ion auf die Elektrodenoberfläche gegeben.

Die **transversale Komponente des elektrischen Feldes** kommt durch die Zeitverzögerung, mit der die Spiegelladung dem Ion folgt, zustande. Dieser Einfluss der Retardierungseffekte auf die Bewegung des Ions durch die endliche Lichtgeschwindigkeit wurde von theoretischer Seite her in [Bou85, Fis84, Bro85, Bro86b] untersucht. Experimentell wurden sie durch eine Verkürzung der Lebensdauer von Energieeigenzuständen der Zyklotronbewegung eines Elektrons in einer Penning-Falle beobachtet [Dyc87b]. Diese Untersuchungen fanden im Hinblick auf eventuelle systematische Effekte bei der äußerst präzisen Messung des g-Faktors des freien Elektrons statt. Der für uns interessante Einfluss auf die Bewegungsfrequenzen wird in [Bou85] mit folgendem Modell abgeschätzt: Das Ion bewege sich im Abstand r_0 von einer unendlich langen Platte. Durch seine Ladung induziert es eine Spiegelladung im Abstand $-R$, die ihrerseits ein Strahlungsfeld erzeugt, das auch eine Kraft auf das Ion ausübt. Mit diesem Modell erhalten sie sowohl auf quantenelektrodynamische als auch auf klassische Weise folgende Gleichung für die relative Änderung der reduzierten Zyklotronfrequenz eines freien Elektrons:

$$\left(\frac{\Delta\omega_c}{\omega_c}\right)_e = \frac{r_e}{4r_0} \left[1 + \left(\hat{e}_r \hat{B}\right)^2\right] \cos(2\omega_c r_0/c) \approx 10^{-13}. \quad (6.11)$$

Hierbei ist $r_e = e^2/2\pi m_e c^2 \approx 2,8 \cdot 10^{-15}$ m der klassische Elektronenradius, \hat{e}_r und \hat{B} sind Einheitsvektoren der Normalen der gedachten Platte beziehungsweise des Magnetfeldes. Dieser Effekt der cavity-QED von 10^{-13} auf die Zyklotronfrequenz des Elektrons gilt zur Zeit als einer der Hauptgründe dafür, dass die Genauigkeit der Messungen des g-Faktors des freien Elektrons innerhalb der letzten 10 Jahre nicht weiter gesteigert werden konnte. Für ein Ion lässt sich eine zu Gleichung 6.11 analoge Beziehung aufstellen und man erhält folgende Beziehung für die Verschiebung der freien Zyklotronfrequenz $\Delta\omega_c$ des Ions:

$$\left(\frac{\Delta\omega_c}{\omega_c}\right)_{Ion} \approx \frac{q^2/e^2}{m_{Ion}/m_e} \left(\frac{\Delta\omega_c}{\omega_c}\right)_e. \quad (6.12)$$

Diese Gleichung bedeutet, dass die Einflüsse der Wechselwirkung mit dem induzierten transversalen elektrischen Feld für $^{12}\text{C}^{5+}$ 50 mal kleiner als die für ein freies Elektron sind. Daher muss bei einer Messgenauigkeit von 10^{-10} dieser Einfluss der cavity-QED auf die Bewegung des Ions nicht berücksichtigt werden. Dieses Modell berücksichtigt jedoch nur die transversale Komponente des elektrischen Feldes (Retardierungseffekte) auf die Bewegung des Ions.

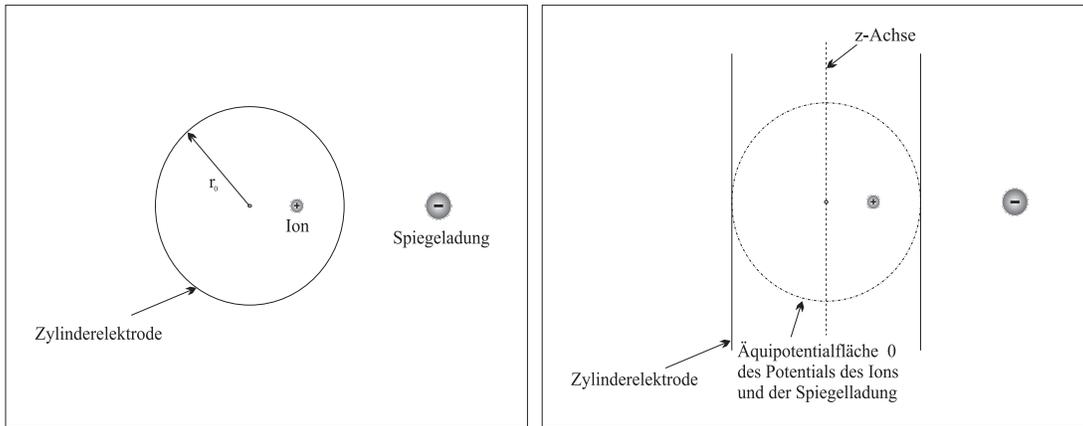


Abbildung 6.13: **Anordnung der Spiegelladung**

Es sind die Schnitte durch die $z = 0$ -Ebene (links) und die $\phi = 0$ -Ebene (rechts) zu sehen. Der Ort und die Stärke der Spiegelladung kann so gewählt werden, dass das von beiden Ladungen induzierte Potential auf der Sphäre $r = r_0$ verschwindet. Diese Anordnung erfüllt die Randbedingungen zwar nicht vollständig, gibt aber dennoch die resultierende Kraft zwischen dem Ion und der von ihm influenzierten Spiegelladung korrekt wieder (siehe Anhang A.1). Da die Anordnung in z -Richtung translationsinvariant ist, wirkt im Gegensatz zu einer hyperbolischen Falle in z -Richtung keine resultierende Kraft.

Im Folgenden sei nun der Einfluss der **longitudinalen Komponente des elektrischen Feldes** auf die Bewegung des Ions analysiert. Dieser Effekt ist für Elektronen zu vernachlässigen [Bro86b], kann aber für Ionen wegen ihrer größeren Masse und des damit verbundenen größeren Einflusses des elektrischen Feldes auf die Zyklotronbewegung eine bedeutende Rolle spielen. Messungen und ein einfaches Modell dazu werden in [Dyc89] dargestellt: Dort werden die Elektroden einer hyperbolischen Falle als leitende Kugel, in der das Ion die Spiegelladungen influenziert, modelliert.

Da für eine offene zylindrische Falle in z -Richtung die nächste leitende Oberfläche im Verhältnis zum Radius der Falle sehr weit weg ist ($z_0/r_0 \approx 5$), ist dieses Modell hier ungeeignet. Wegen der einfacheren Geometrie der zylindrischen Fall ist es jedoch einfacher als für hyperbolische Elektroden möglich, die Randwertaufgabe exakt zu lösen. Dies wird in Anhang A.1 skizziert. Dort wird das gleiche Ergebnis wie mit folgender wesentlich übersichtlicheren Näherungslösung erhalten. Befindet sich das Ion am Ort $(r, \phi = 0, z = 0)$, so können die Randbedingungen auf dem leitenden Zylinder für $z = 0$ durch die Einführung einer Spiegelladung der Größe $-q r_0/r$ am Ort $(r_0^2/r, 0, 0)$ gewährleistet werden (siehe Abbildung 6.13). Hier beschreibt r_0 den Radius der zylindrischen Elektroden. Da die Retardierungseffekte oben schon analysiert wurden, werden sie hier vernachlässigt. Durch Einsetzen des von dem Ion und des von der Spiegelladung induzierten Potentials

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - (r, 0, 0)|} - \frac{q r_0/r}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - (r_0^2/r, 0, 0)|} \quad (6.13)$$

kann man sich überzeugen, dass das Potential tatsächlich für $r = r_0$, $z = 0$ und alle ϕ konstant ist und somit die Randbedingungen für $r = r_0$ und $z = 0$ erfüllt sind².

²Für $z \neq 0$ sind die Randbedingungen nicht erfüllt. Daher ist diese Lösung vorläufig nur als Näherung zu betrachten.

Nach dem Coulombschen Gesetz wirkt zwischen diesen beiden Ladungen folgende Kraft:

$$\vec{F}(r) = \frac{q^2 r_0/r}{4\pi\epsilon_0|r - r_0^2/r|^2} \hat{e}_r \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \vec{r}. \quad (6.14)$$

Hier bezeichnet \hat{e}_r den Einheitsvektor in r -Richtung und für die Näherung wurde $r \ll r_0$ ausgenutzt. In Richtung der z -Achse wirkt keine Kraft und somit wird die axiale Frequenz in einer zylindrischen Penning-Falle (im Gegensatz zu der in einer Hyperbolischen) durch die Spiegelladung nicht beeinflusst. Für die radialen Bewegungen kann die Anziehung des Ions durch die Spiegelladung durch die Modifikation der radialen elektrostatischen Energie $V_r(r)$

$$V_r(r) = \frac{1}{2}V_z(z = r) = \frac{1}{4}m\omega_z^2 r^2 \quad (6.15)$$

berücksichtigt werden:

$$V_v(r) = V_r(r) + \int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4}m\omega_z^2 r^2 + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} r^2. \quad (6.16)$$

Da der von der Spiegelladung herrührende Term auch eine in r quadratische Abhängigkeit aufweist, kann dieser Term in die radialen Bewegungsgleichungen³

$$\ddot{\vec{\rho}} - \vec{\omega}_c \times \dot{\vec{\rho}} - \frac{1}{2}\omega_z^2 \vec{\rho} = 0 \quad (6.17)$$

integriert werden, indem dort ω_z^2 durch den folgenden Term ersetzt wird:

$$\omega_{z,v}^2 \rightarrow \omega_z^2 + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m r_0^3}. \quad (6.18)$$

Wird Gleichung 6.18 in die Gleichungen 3.8 und 3.9 eingesetzt, so erhält man für die Änderungen der radialen Bewegungsfrequenzen:

$$\Delta\omega_+ \approx \left[\omega_c - \frac{\omega_{z,v}^2}{2\omega_c} \right] - \left[\omega_c - \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} \right] \approx -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m r_0^3 \omega_c}, \quad (6.19)$$

$$\Delta\omega_- \approx \frac{\omega_{z,v}^2}{2\omega_c} - \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} = +\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m r_0^3 \omega_c}. \quad (6.20)$$

Die axiale Bewegungsfrequenz bleibt im Gegensatz dazu konstant:

$$\Delta\omega_z = 0. \quad (6.21)$$

Eingesetzt in Gleichung 3.13 ergeben die Gleichungen 6.19, 6.20 und 6.21 eine relative Verschiebung der nach Gleichung 3.12 berechneten freien Zyklotronfrequenz ω_c von:

$$\frac{\Delta\omega_c}{\omega_c} = \left(-\frac{\omega_+}{\omega_c} + \frac{\omega_-}{\omega_c} \right) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m r_0^3 \omega_c^2}. \quad (6.22)$$

³Die Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen in einer Penning-Falle sind z.B. in [Bro86a] beschrieben.

Somit gibt die berechnete freie Zyklotronfrequenz des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions in unserem Fall relativ gesehen das Magnetfeld um $0,292 \cdot 10^{-9}$ zu niedrig wieder. Der gemessene g-Faktor ist also um $0,583(47) \cdot 10^{-9}$ nach unten zu korrigieren. Um eine Abschätzung für die Genauigkeit der Berechnungen zu gewinnen, wurde als Fehler von r_0 die Ausdehnung der Bewegung des Ions von ca. $100 \mu\text{m}$ (siehe Abbildung 6.4) angenommen. Die Fertigungstoleranzen von $20 \mu\text{m}$ können dagegen vernachlässigt werden.

Die im Anhang A.1 skizzierte exakte Lösung des Problems liefert innerhalb der Fehlergrenzen der dort durchgeführten Näherungen von 1% das gleiche Ergebnis. Daher kann das hier berechnete Ergebnis als hinreichend genau angenommen werden. Trotz der daher im Prinzip genauen Berechnung ist es im Hinblick auf höher geladene Ionen wünschenswert, diesen Effekt der Wechselwirkung eines Ions mit seinen eigenen Spiegelladungen experimentell zu untersuchen. Um die entstehende Unsicherheit zu umgehen, kann alternativ der Radius der Präzisions-Falle vergrößert werden. Wegen der $1/r_0^3$ -Abhängigkeit der Verschiebung der berechneten freien Zyklotronfrequenz senkt eine Verdoppelung des Radius die Korrekturen schon um eine Größenordnung ab. Der Verlust an elektronischer Signalstärke (siehe Gleichung 4.6) wird durch die höhere Ladung der Ionen mehr als ausgeglichen.

6.2.10 Räumliche Inhomogenität der Mikrowellen

Das elektromagnetische Feld der Mikrowellenquelle bildet in der Falle eine stehende Welle aus. Daher ist die Intensität des Feldes nicht homogen. Zusammen mit Inhomogenitäten des Magnetfeldes, also unterschiedlichen Larmor-Präzessionsfrequenzen des Ions an verschiedenen Orten, kann es dazu kommen, dass bevorzugt dort spin-flips geschehen, wo die Intensität des Mikrowellenfeldes groß ist. Während des Einstrahlens der Mikrowellen hat das C^{5+} -Ion bei seiner axialen Temperatur von ca. 60 K eine axiale Bewegungsamplitude von $50 \mu\text{m}$. Bei einer Wellenlänge von 3 mm der Mikrowellen bei 105 GHz variiert die Intensität über die vom Ion überstrichene Bewegung im Mittel um 3%. Ereigneten sich spin-flips auf einer Zeitskala vergleichbar mit der Periodendauer der axialen Bewegung, würden sie bevorzugt entweder am oberen oder unteren Umkehrpunkt der axialen Bewegung durch das dort stärkere Mikrowellenfeld induziert werden. Da sich das Magnetfeld nach Abbildung 5.21 zwischen dem oberen und unteren Umkehrpunkt um 10^{-6} unterscheidet, wäre dann die erwartete Verschiebung etwa $0,03 \cdot 10^{-6}$. Bei den Messungen wurde aber mit so niedrigen Mikrowellenleistungen gearbeitet, dass sich ein spin-flip auf einer Zeitskala einiger Sekunden ereignet. Daher wird sowohl bei der Messung des Magnetfeldes als auch bei der der Larmor-Präzession über 10^6 axiale Schwingungsperioden gemittelt. Die so erwartete Verschiebung ist daher kleiner als 10^{-13} .

6.2.11 Einfluss des Mikrowellensignals

Sowohl die Form als auch die Amplitude des Mikrowellensignals kann die Form und Lage der g-Faktor-Resonanz beeinflussen (siehe dazu auch die Abschnitte 6.3.3 und 6.2.10). Die endliche Breite des Mikrowellensignals von $5 \cdot 10^{-11}$ (siehe Abbildung 6.14) verbreitert die g-Faktor-Resonanz kaum und wird daher hier nicht näher betrachtet.

Die endliche Stärke des Mikrowellensignals jedoch kann die Lage der g-Faktor-Resonanz verschieben. Dies wird in Abschnitt 6.3.3 im Zusammenhang mit der Li-

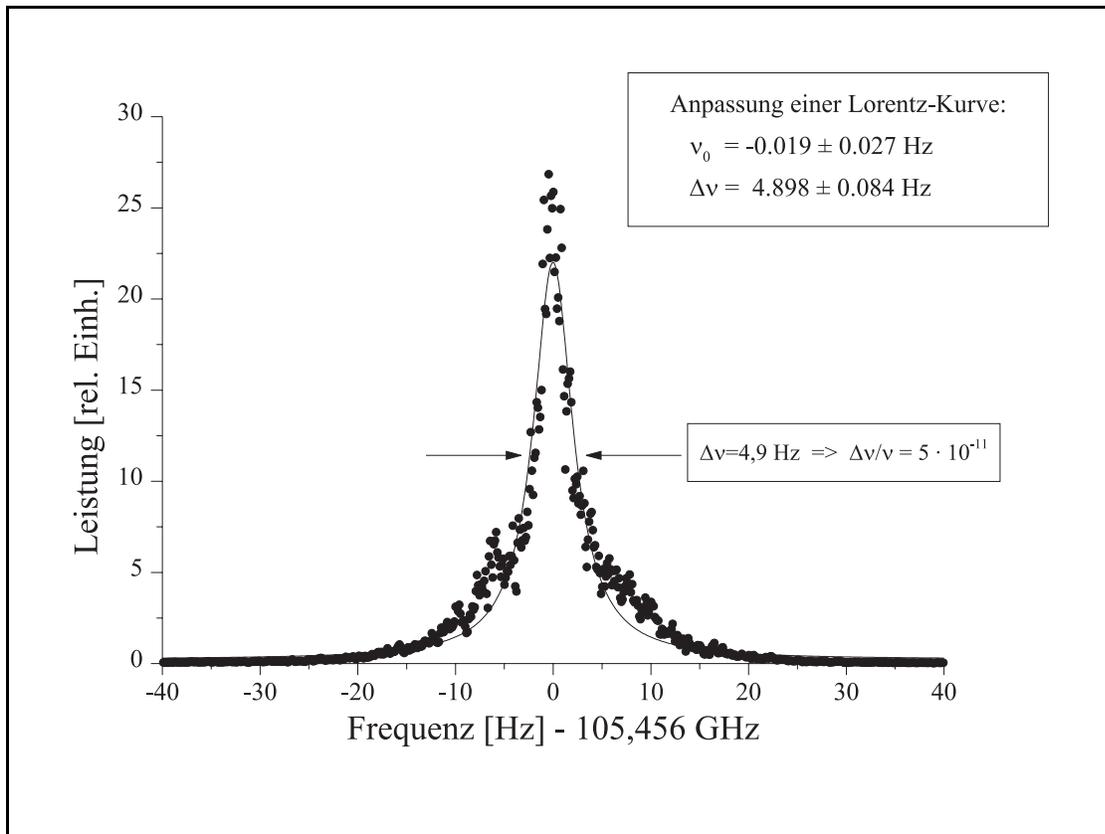


Abbildung 6.14: **Frequenzspektrum des Mikrowellensignals bei 105 GHz.** Zur Messung wurde das Mikrowellensignal mit einem Oberwellenmischer auf 60 kHz herunter gemischt. Da die beiden zur Messung verwendeten Synthesizer den gleichen Zeitstandard benutzten, weicht die durch den Lorentz-Fit bestimmte Mittenfrequenz des Signals innerhalb ihres Fehler von 27 mHz nicht von den erwarteten 105,456 GHz ab. Dies entspricht einer relativen Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-13}$. Es ist deutlich zu erkennen, die angepasste Lorentz-Funktion das Leistungsspektrum der Mikrowellenanlage nicht gut beschreibt. Es sind auch Andeutungen von Seitenbändern zu sehen.

nienform diskutiert. Ein starkes Mikrowellenfeld wirkt außerdem auf ein geladenes Teilchen wie eine Paul-Falle [Mit99]. Dadurch werden die Bewegungsfrequenz des Ions modifiziert und es kann zu einer systematischen Fehlbestimmung des g-Faktors kommen. Bei den Leistungen der Mikrowellestrahlung in der Falle von ≈ 1 nW spielt dieser Effekt für uns allerdings keine Rolle.

6.2.12 Dämpfung der Ionenbewegung

Um ein Ionensignal zu erhalten, wird zur Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz die Zyklotronbewegung des Ions mittels eines Schwingkreises gedämpft. Dieses Kühlen der Zyklotronbewegung verringert den Zyklotronradius des Ions. Dadurch verschiebt sich das vom Ion erfahrene mittlere Magnetfeld. Da sich aber sowohl die Larmor-Präzessions- als auch reduzierte Zyklotron-Frequenz gleichermaßen verschieben (siehe Gleichung 3.27), wird das Verhältnis der beiden Frequenzen nicht beeinflusst.

Zusätzlich zu diesem Effekt vermindert die Dämpfung der Zyklotronbewegung des Ions direkt die gemessene Zyklotronfrequenz ω_c gegenüber der des ungedämpften Falls ω_0 wie folgt:

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} . \quad (6.23)$$

Mit einer Dämpfungskonstanten von $\gamma = 1/\tau \approx 1/100$ 1/s (siehe Abbildung 5.14) folgt eine relative Verschiebung der gemessenen reduzierten Zyklotronfrequenz von ca. 10^{-20} .

Da sich die axiale Bewegung im Gegensatz zur Zyklotronbewegung im Gleichgewicht mit dem Schwingkreis befindet, erfolgt durch den axialen Schwingkreis keine Verschiebung der axialen Frequenz. Dies kommt auch in Gleichung 4.14 zum Ausdruck. Die axiale Frequenz wird jedoch nach Gleichung 3.27 durch das Widerstandskühlen der Zyklotronbewegung verschoben. Um diesen Einfluss auf die berechnete freie Zyklotronfrequenz zu minimieren, wurde die axiale Frequenz vor und nach der Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz bestimmt. Der Mittelwert der beiden gemessenen axialen Frequenzen gibt dann die mittlere axiale Frequenz gut wieder. Die eventuelle systematische Restverschiebung skaliert linear mit der Zyklotronenergie und wird daher bei der in Abschnitt 6.3.1 durchgeführten Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie mit berücksichtigt. Daher können die Effekte der Dämpfungen der Ionenbewegungen durch die Schwingkreise vernachlässigt werden.

6.2.13 Ungenauigkeiten der Uhren-Quarze

Da im Wesentlichen das Verhältnis zweier Frequenzen gemessen wird, genügt es im Prinzip, einen beliebigen Frequenzstandard zu benutzen. Trotzdem wurde ein Rubidium-Frequenznormal, das zusätzlich das DCF77-Zeitsignal auswertet, verwandt. Alle benutzten Synthesizer besitzen einen 10 MHz-Referenz-Ein- und Ausgang. Einzig der verwendete Spektrumanalysator lässt sich nicht an ein 10 MHz-Frequenznormal anschließen. Daher wird das Signal bei der Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz von 24 MHz auf 1 kHz mit einem Synthesizer herunter gemischt und zusätzlich eine Eichung des Quarzes des Frequenzanalysators durchgeführt. Somit wird der Einfluss der Ungenauigkeit des Quarzes von gemessenen $3 \cdot 10^{-6}$ hinsichtlich der reduzierten Zyklotronfrequenz relativ auf einen Beitrag von 10^{-10} begrenzt.

Für die Messung der axialen Frequenz wird ein Sinussignal mit einem Synthesizer an eine Fallenelektrode angelegt, sodass das gemessene Ionensignal direkt mit einer bekannten Frequenz verglichen werden kann und hier keine Unsicherheit auftritt. Daher lassen sich die Effekte der Ungenauigkeiten der Uhren-Quarze auf den gemessenen g-Faktor zu insgesamt $2 \cdot 10^{-10}$ abschätzen.

6.2.14 Das Massenverhältnis des Elektrons und Ions

Da im Experiment die Zyklotronfrequenz des Elektrons über die des C^{5+} -Ions bestimmt wird (siehe Gleichung 3.6), ist es nötig, das Verhältnis beider Zyklotronfrequenzen zu kennen. Von der Gruppe um Van Dyck wurde das Verhältnis der Zyklotronfrequenzen des C^{6+} -Ions und des Elektrons in einer Penning-Falle gemessen und in [Far95, Dyc95] 1995 veröffentlicht:

$$\frac{\nu_c(C^{6+})}{\nu_c(e^-)} = 0,000\,274\,365\,185\,89 \quad (60) . \quad (6.24)$$

Der $1\text{-}\sigma$ -Fehler beträgt 2,2 ppb. Von denselben Autoren wurden kurz zuvor in [Dyc95] zwei miteinander innerhalb einer Standardabweichung verträgliche Werte für das Verhältnis der Zyklotronfrequenzen des C^{5+} - und des C^{6+} -Ions angegeben. Gemittelt beträgt dieser Wert:

$$\frac{\nu_c(C^{5+})}{\nu_c(C^{6+})} = 0,833\,295\,265\,17 \quad (22) . \quad (6.25)$$

Hier beträgt der $1\text{-}\sigma$ -Fehler 0,26 ppb. Aus diesen zwei Werten errechnet sich das Verhältnis der Zyklotronfrequenzen des C^{5+} -Ions und des Elektrons zu

$$\frac{\nu_c(C^{5+})}{\nu_c(e^-)} = 0,000\,228\,627\,210\,33 \quad (50) . \quad (6.26)$$

So lange nicht direkt die Zyklotronfrequenz des Elektrons gemessen wird, stellt dieser relative Fehler von 2,2 ppb eine Art natürliche Grenze für die Bestimmung des g-Faktors dar. Da sowohl die Gruppe um Van Dyck als auch die um Gabrielse eine um eine Größenordnung genauere Messung der e^- -Masse planen, wird der g-Faktor des Elektrons in $^{12}C^{5+}$ in Zukunft genauer angegeben werden können. Weiterhin wird es durch die Messung des g-Faktors des Elektrons in anderen hochgeladenen Ionen möglich sein, Verhältnisse von g-Faktoren zu bilden, bei denen die Elektronenmasse herausfällt, aber nicht die Einflüsse der Bound-State-QED. Dadurch wird eine von der Elektronenmasse unabhängige Überprüfung der Bound-State-QED möglich.

6.3 Bestimmung des g-Faktors

In den folgenden Abschnitten wird die Auswertung der Daten beschrieben.

Grundlegend für die Bestimmung des g-Faktors des gebundenen Elektrons ist Gleichung 3.6:

$$g = 2 \frac{\nu_L}{\nu_c^i} \left(\frac{\nu_c^i}{\nu_c^e} \right) . \quad (6.27)$$

Da das Magnetfeld zeitlich nicht konstant ist, wurde die Zyklotronfrequenz während des Einstrahlens der Mikrowellen gemessen. Daher erhält man Verhältnisse der

beiden Frequenzen bei denen sich dann eventuell ein spin-flip ereignet hat. Werden die beiden gemessenen Frequenzen jeweils in Gleichung 6.27 eingesetzt und die nach Gleichung 6.27 berechneten „g-Faktoren“ in Intervalle unterteilt, kann in jedem g-Faktor-Intervall eine spin-flip-Rate bestimmt werden (siehe Abbildung 6.15). Der

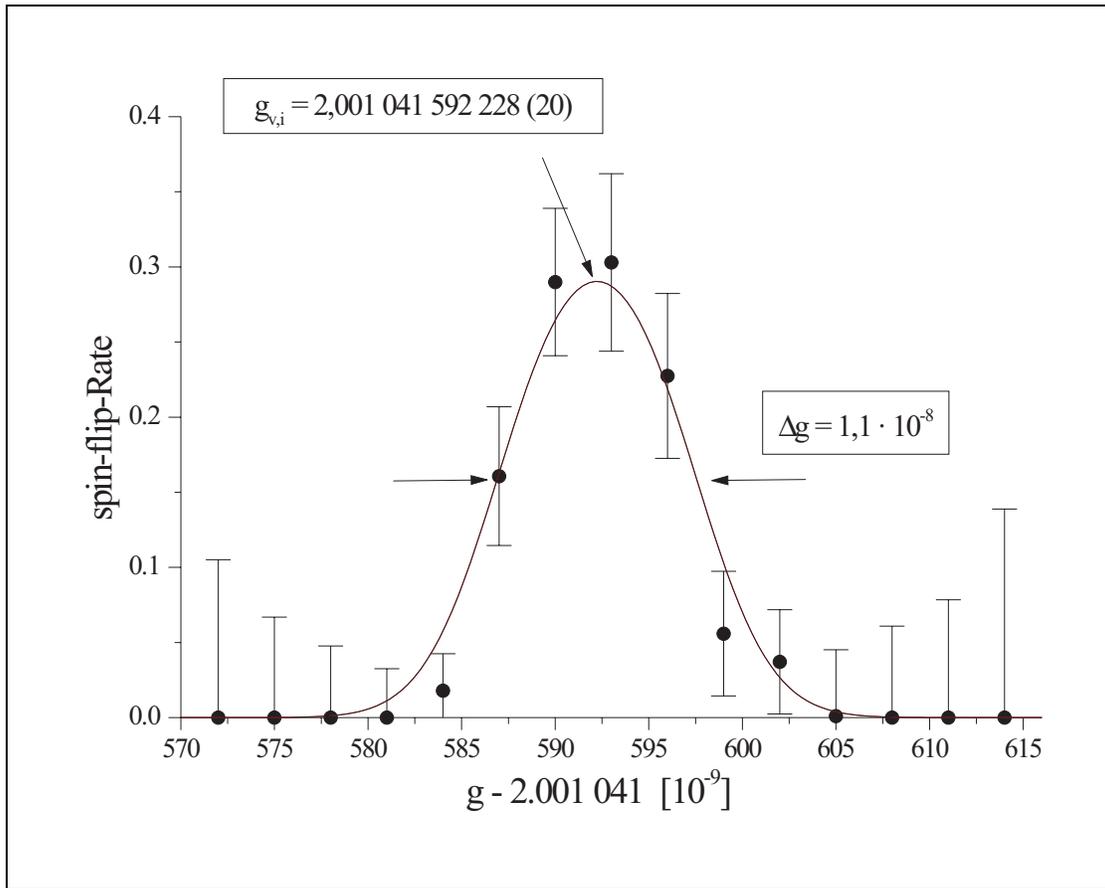


Abbildung 6.15: **g-Faktor-Resonanz**

Aufgetragen ist die Wahrscheinlichkeit eines spin-flips gegen das Verhältnis aus Larmor-Präzessions- und Zyklotron-Frequenz. Die mittlere Zyklotronenergie des Ions betrug 4,4 eV. Angepasst wurde wegen der geringen Statistik eine Kurve nach Gleichung 6.29. Die Berechnung der Fehler der einzelnen Messpunkte erfolgt unter der Annahme, dass den spin-flips eine Binominal-Verteilung zugrunde liegt (siehe Abschnitt 6.3).

Fehler jedes Messpunktes wird durch die Annahme einer Binominal-Verteilung abgeschätzt. Um eine untere Grenze für die „wahre“ spin-flip-Rate p zu erhalten, wird bei festen angenommenen Wahrscheinlichkeiten p'_u für spin-flips berechnet, wie hoch die Wahrscheinlichkeit Σ ist, dass bei der vorgegebenen Anzahl an Versuchen im g-Faktor-Intervall sich mehr spin-flips ereignen als beobachtet. p'_u wird dann solange abgesenkt, bis diese Wahrscheinlichkeit Σ unter $(1 - 0,66)/2$ fällt. Damit wurde eine Wahrscheinlichkeit p_u für spin-flips gefunden, die so klein ist, dass nur in 17% der Fälle eine höhere als die beobachtete spin-flip-Rate gemessen werden würde. In analoger Weise wird für die obere Grenze p_o verfahren. Somit erhält man ein Intervall $p_u < p < p_o$ außerhalb dessen die „wahre“ spin-flip-Rate p mit einer Wahrscheinlichkeit von kleiner 0,33 liegt. Dies bedeutet, dass die angegebenen Fehler nur in erster Näherung $1\text{-}\sigma$ -Fehler sind. Um $1\text{-}\sigma$ -Fehler zu erhalten, müssten die Grenzen p_u und

p_u gleichzeitig variiert werden. Die Lösung der damit entstehenden Schwierigkeiten lohnt meiner Meinung nach in diesem Zusammenhang nicht. Daher habe ich darauf verzichtet, einen entsprechenden Algorithmus zu implementieren.

In Abschnitt 3.4.2 wurde Gleichung 3.48 als erwartete Linienform für die g-Faktor-Resonanzen hergeleitet. Da die Resonanz-Kurven für kleine axiale Energien dem Auge nach praktisch keine Asymmetrie erkennen lassen, kann vorerst in Gleichung 3.48 $\delta\omega_L/\omega_L = 0$ gesetzt werden. Dies ist sinnvoll, da für die einzeln auszuwertenden Spektren, wegen ihrer geringen Statistik, nur wenige Punkte zur eigentlichen Resonanz beitragen. Daher ist es wichtig, die Anzahl der freien Parameter so gering wie möglich zu halten. Somit werden in den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.4 zur Auswertung der einzelnen Spektren nur die symmetrischen linienverbreiternden Effekte durch statistische Prozesse in Betracht gezogen. Dieses Modell geht also davon aus, dass sowohl die Zyklotron- als auch die Larmor-Resonanz durch den gleichen Mittelungsprozess entstehen. Man erhält so als Grundlage für eine Resonanzkurve im Grenzfall $\delta\omega_L/\omega_L \rightarrow 0$ von Gleichung 3.48 eine Gauß-Funktion:

$$\hat{P}(g) = \frac{\hat{A}}{\Delta g \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(g - g_{v,i})^2}{\Delta g^2}\right). \quad (6.28)$$

Hier ist g das nach Gleichung 6.27 berechnete Verhältnis, $g_{v,i}$ beschreibt die Lage und Δg die Breite der g-Faktor-Resonanz. \hat{A} ist ein Amplitudenfaktor. Um Sättigungseffekte zu berücksichtigen wird die Gauß-Funktion als Übergangsrate R in Gleichung 3.64 eingesetzt, und man erhält als theoretische Beschreibung für die Wahrscheinlichkeit eines spin-flips:

$$P(g) = \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left(-A \exp\left(-\frac{(g - g_{v,i})^2}{\Delta g^2}\right)\right) \right]. \quad (6.29)$$

Hierbei wurden die Zeit t , während der die Mikrowellen eingestrahlt werden, und die Vorfaktoren der Gauß-Funktion im Amplitudenfaktor A zusammengefasst. Ein Fit an die gemessene Resonanzkurve ergibt dann einen vorläufigen g-Faktor $g_{v,i}$. Um einen verlässlicheren g-Faktor und Fehler zu erhalten wurde die Mitte der Intervalle, in denen die spin-flip-Rate berechnet wurde, variiert und jeweils eine Resonanzkurve angepasst (siehe Abbildung 6.15). Der vorläufige g-Faktor g_v wurde dann aus dem Mittelwert der so erhaltenen g-Faktoren $g_{v,i}$ und der Fehler aus deren Standardabweichung gewonnen.

Da bei dieser Auswertung noch nicht die endliche Energie des Ions berücksichtigt wurde, müssen mehrere Spektren bei verschiedenen Zyklotron- und Axialenergien aufgenommen und ausgewertet werden:

6.3.1 Variation der Zyklotronenergie

Da bei der Messung der reduzierten Zyklotronfrequenz das Ion angeregt sein muss und das Invarianztheorem (Gleichung 3.12) das Magnetfeld nicht am Ort des Ions sondern im Zentrum der Zyklotronbewegung wiedergibt (siehe Abschnitt 3.3.3), wird bei der Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz ein Fehler von einigen 10^{-9} gemacht. Werden die Frequenzen unserer Falle in Gleichung 3.34 eingesetzt, so erhält man für diese Verschiebung:

$$\Delta g_v = -3,212 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{Hz}} \Delta \nu_z. \quad (6.30)$$

Nach der dort entwickelten Theorie ist die freie Zyklotronfrequenz allerdings unabhängig von der Zyklotronenergie. In Abbildung 6.6 wurde hingegen eine Abhängigkeit von der Zyklotronenergie von $\Delta\nu_c/\nu_c = -0,540(99) \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z/\text{Hz}$ gemessen. Wird der relativistische Effekt der Änderung der freien Zyklotronfrequenz, um den auch die Larmor-Präzessionsfrequenz verschoben wird, von relativ gesehen $-0,184(19) \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z/\text{Hz}$ von dieser Abhängigkeit abgezogen (siehe Abschnitt 6.2.1), so erhält man eine theoretische Abhängigkeit des g-Faktors von:

$$\Delta g_v = -2,52(22) \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{Hz}} \Delta\nu_z. \quad (6.31)$$

Um diese Verschiebungen weitgehend unabhängig von Gleichung 6.31 zu berücksichtigen, werden die einzelnen Messpunkte (die Verhältnisse der Mikrowellen- und der freien Zyklotronfrequenz und die Information, ob bei diesem Frequenzverhältnis ein spin-flip stattgefunden hat) nach Zyklotronenergien sortiert und in 4-6 Gruppen zusammengefasst. Als Maß für die Zyklotronenergie wird die Differenz der axialen Frequenz $\Delta\nu_z$ beim Einstrahlen der Mikrowellen und der des kalten Ions ($E_+ \approx 150 \text{ meV}$) benutzt⁴ (siehe Gleichung 3.28). Gemäß Gleichung 6.31 wird ein linearer Zusammenhang zwischen den vorläufigen Resonanz-g-Faktoren g_v und der Zyklotronenergie erwartet. Daher kann der g-Faktor des gebundenen Elektrons g_0 dem y -Achsenabschnitt der Regressionsgeraden entnommen werden (siehe Abbildungen 6.16 und 6.17). Da die Zyklotronenergie in jeder Gruppe nicht konstant und die spin-flip-Rate nicht unabhängig von dieser ist (siehe Abschnitt 6.2.5), ist bei der Bestimmung der Zyklotronenergie der Gruppe Vorsicht angebracht. Ich habe den Weg gewählt, als Maß für die Zyklotronenergie einer Gruppe den Mittelwert der Zyklotronenergien, bei denen ein spin-flip stattgefunden hat, zu benutzen. Diese Wahl liefert einen Wert für den g-Faktor, der sehr nahe an dem mit dem in Abschnitt 6.3.2 erklärten Iterationsverfahren gewonnenen Wert für den g-Faktor liegt. Die Abhängigkeit des gemessenen g-Faktors von der Zyklotronenergie von $-2,39(33) \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z/\text{Hz}$ (siehe Tabelle 6.2) stimmt innerhalb ihrer Fehlergrenzen mit der in Gleichung 6.31 bestimmten Abhängigkeit von $-2,52(22) \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z/\text{Hz}$ überein.

6.3.2 Iteration der Auswertung

Mit dem aus der Steigung der Regressionsgeraden gewonnenen Korrekturfaktor m_0 (siehe Abschnitt 6.3.1, z.B. Abbildung 6.16 und Tabelle 6.2), können alle Einzelmessungen getrennt korrigiert werden. In Abbildung 6.18 sind alle „g-Faktoren“ mit einem Korrekturfaktor $m_0 = -2,39 \cdot 10^{-9}$ korrigiert und dann aufgetragen worden. Wiederum in Zyklotronenergieintervalle unterteilt, kann einer angefitteten Geraden der g-Faktor g_1 und die Steigung m_1 entnommen werden (siehe Abbildung 6.19). Die so ermittelten g-Faktoren sind innerhalb der Fehler mit denen, die ohne Iteration gewonnen wurden, verträglich. Damit ist dieses Verfahren bereits nach dem ersten Schritt konvergiert. Wird die Energie der Zyklotronbewegung einer Gruppe allerdings aus dem Mittelwert aller Messungen in der Gruppe gebildet (vergleiche Abschnitt 6.2.5), liegt der aus der Extrapolation der unkorrigierten g-Faktoren g_v

⁴Da die im Zyklotronnachweis induzierten Ströme sich kaum vom Rauschen abheben, ist die Verschiebung der axialen Frequenz ein sehr viel zuverlässigeres Maß für die Energie der Zyklotronbewegung als der von ihr induzierte Strom.

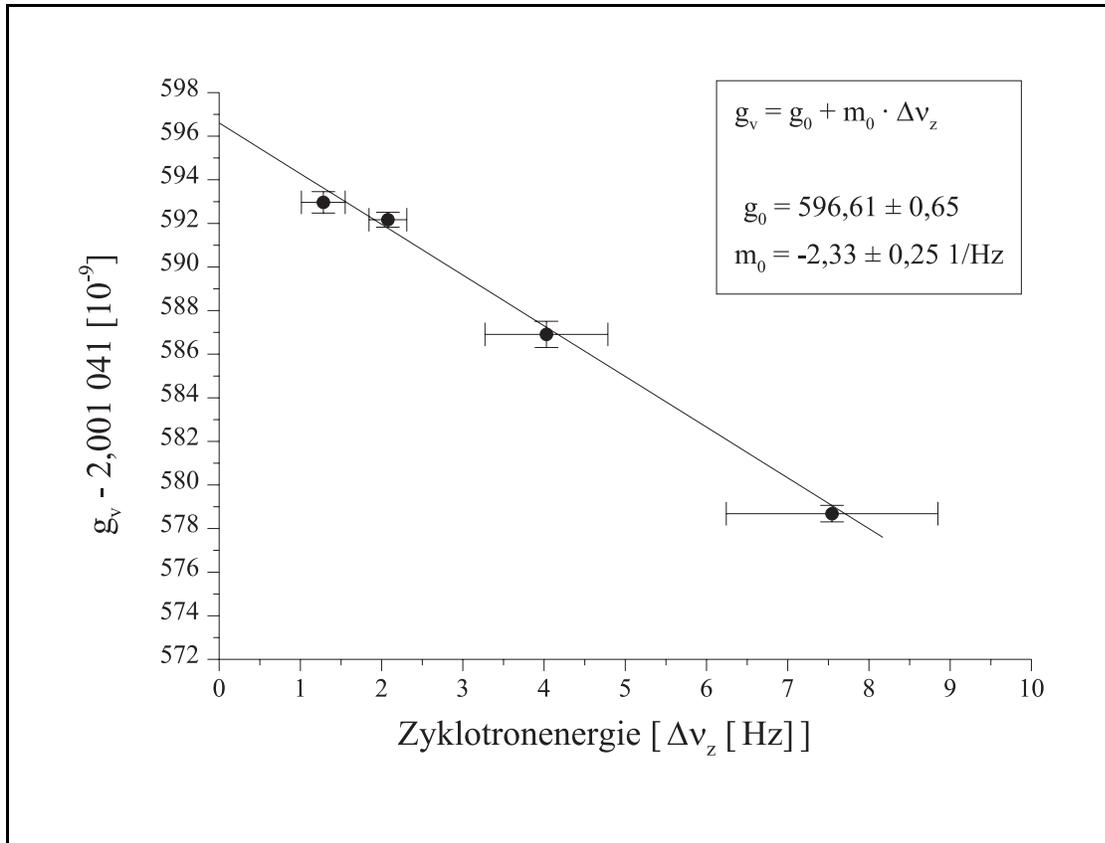


Abbildung 6.16: **Extrapolation der g-Faktor-Resonanz auf verschwindende Zyklotronenergie**

Aufgetragen sind die vorläufigen Resonanz-g-Faktoren g_v , wie sie aus Messungen ähnlich der in Abbildung 6.15 bestimmt werden, gegen die Zyklotronenergie. Um dieses Bild zu erhalten, wurde die Gesamtheit aller Meßwerte (ca. 1000) nach Zyklotronenergien sortiert und dann in 4 Gruppen aufgeteilt. Die Zyklotronenergie einer Gruppe wurde aus dem Mittelwert der Zyklotronenergien ihrer Messpunkte bestimmt, bei denen auch tatsächlich ein spin-flip induziert wurde (vergleiche Abschnitt 6.3.1). Als Fehler der Zyklotronenergie einer Gruppe wurde die Standardabweichung der Zyklotronenergien der Messpunkte, die zur Gruppe beitragen, angegeben.

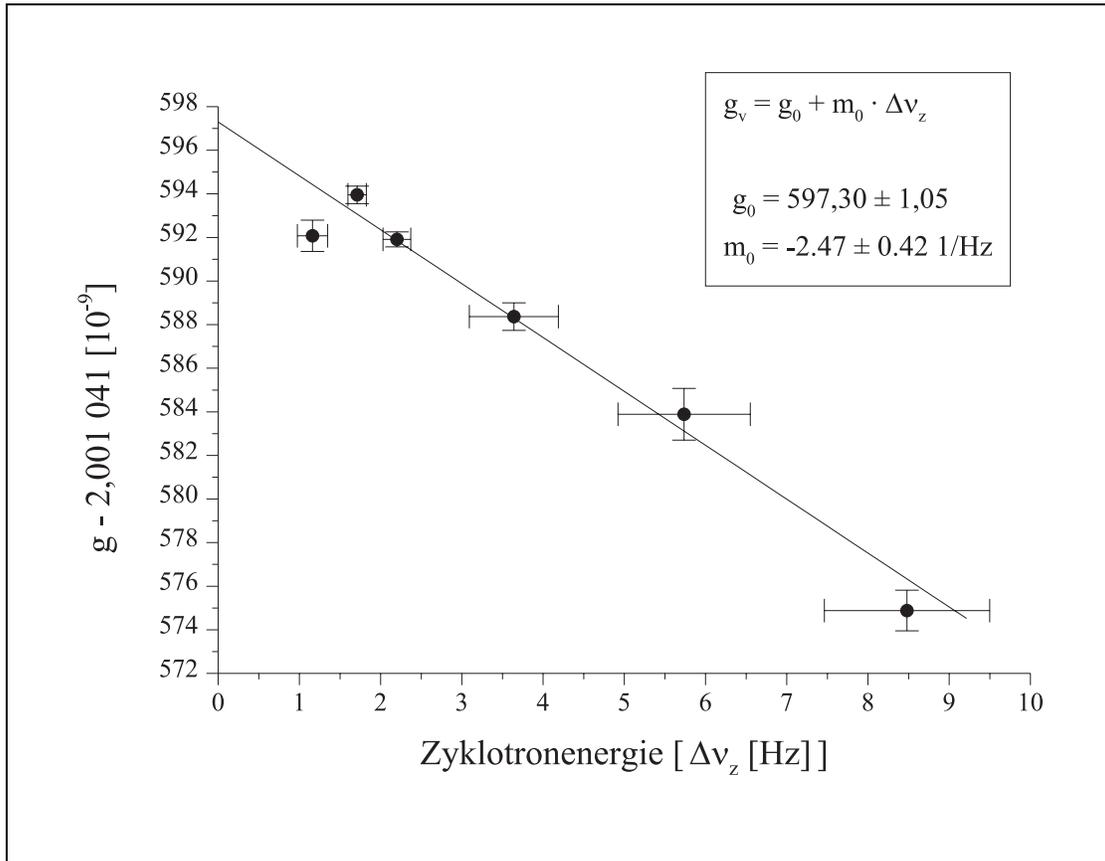


Abbildung 6.17: **Extrapolation der g-Faktor-Resonanz auf verschwindende Zyklotronenergie**

Im Gegensatz zu Abbildung 6.16 wurde hier die Gesamtheit aller Messwerte in 6 Gruppen aufgeteilt.

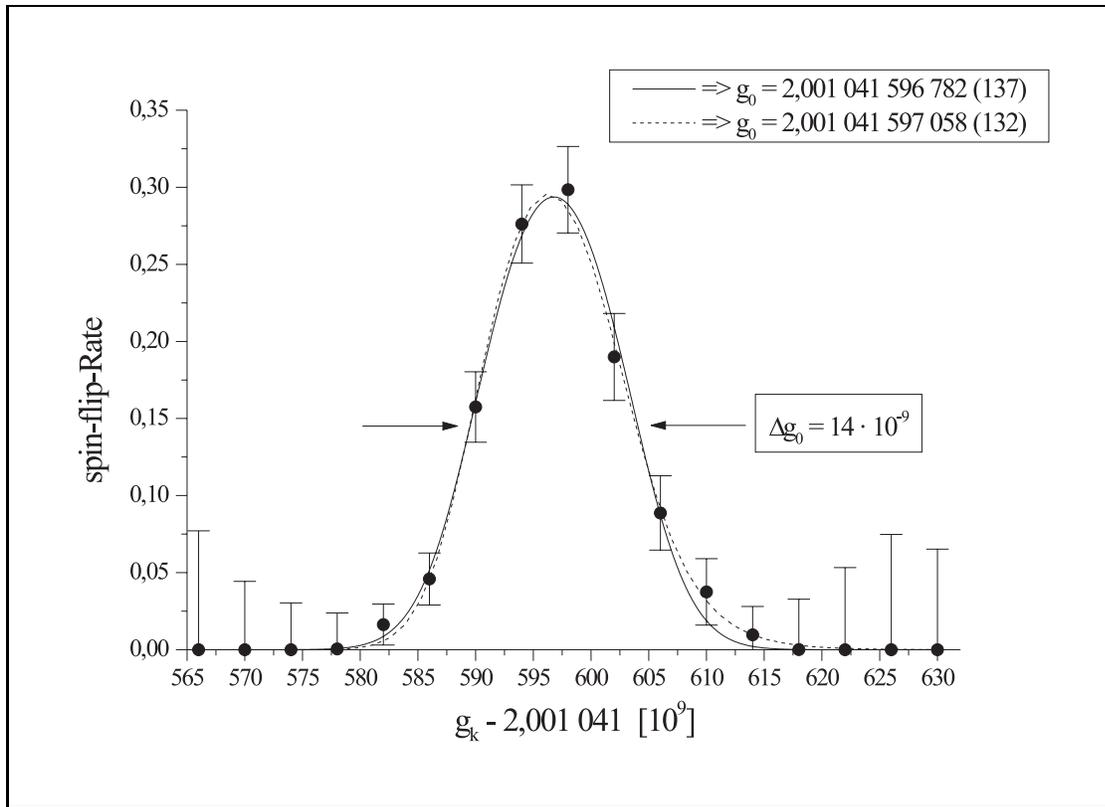


Abbildung 6.18: **g-Faktor-Resonanz mit nach der Zyklotronenergie korrigierten Messwerten**

Solch ein Spektrum benötigt zur Zeit mindestens 1 Monat ununterbrochene Messzeit. Um von der Energie der Zyklotronbewegung unabhängig zu werden, wurde zu jedem einzelnen Frequenzverhältnis g_v der Korrekturfaktor $m_0 = -2,39 \cdot 10^{-9} \Delta\nu_z$ addiert. Ein symmetrischer Fit (durchgezogene Kurve) nach Gleichung 6.29 ergibt $g_0 = 2,001\,041\,596\,782\ (137)$. Wendet man als Grundlage für die Anpassung an die Resonanz Gleichung 3.48 an (gestrichelte Kurve), so erhält man $g_0 = 2,001\,041\,597\,058\ (132)$. Für die Parameter, die die Linienbreiten durch die Inhomogenität des Magnetfeldes $\delta\omega_L/\omega_L$ und die Ungenauigkeiten der Zyklotronfrequenzmessung (ω_c/ω_c) beschreiben, ergibt sich $\delta\omega_L/\omega_L = 1,64\ (18) \cdot 10^{-9}$ und $\delta\omega_c/\omega_c = 3,18\ (13) \cdot 10^{-9}$.

gewonnene g -Faktor für verschwindende Zyklotronenergien g_0 um $1,5 \cdot 10^{-9}$ zu niedrig. Das Verfahren konvergiert in diesem Fall erst nach dem zweiten Schritt gegen die gleichen Werte wie in Tabelle 6.2.

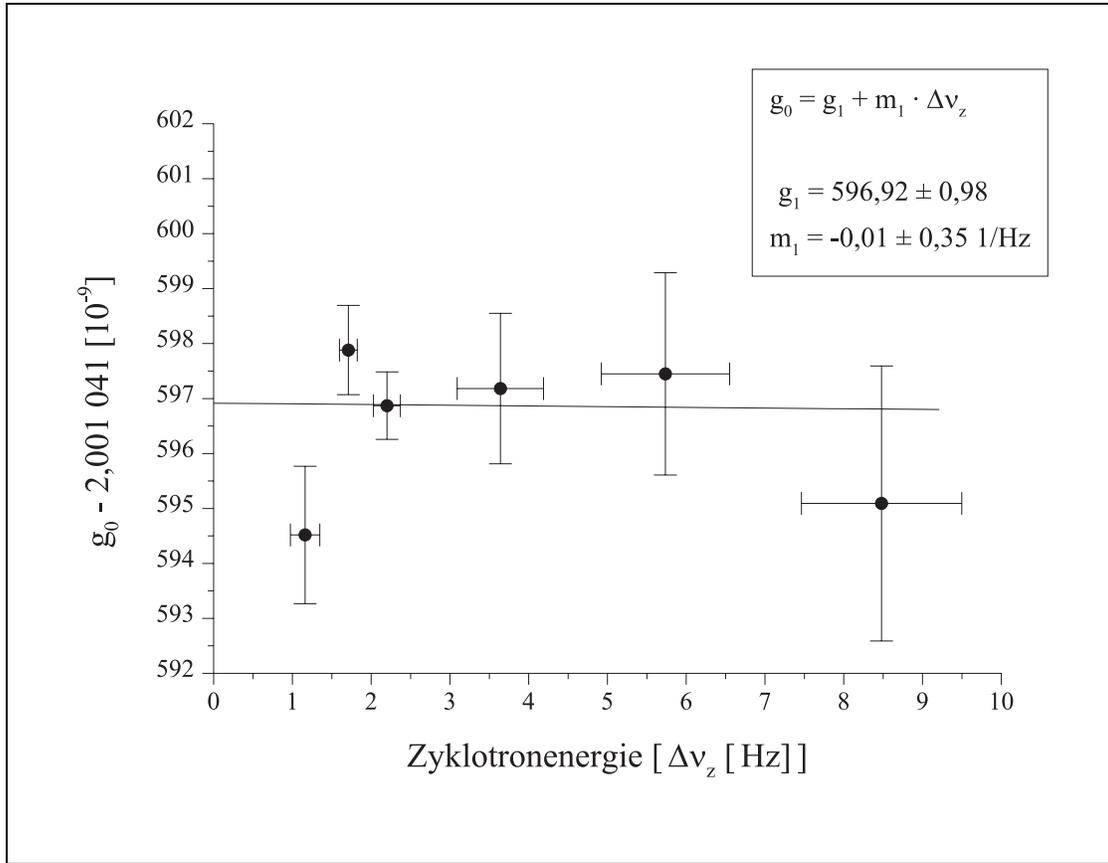


Abbildung 6.19: **Der korrigierte g_0 -Faktor als Funktion der Zyklotronenergie**

Die Steigung der Geraden ist mit 0 verträglich.

6.3.3 Gemessene Form der g -Faktor-Resonanz

Die Asymmetrie der g -Faktor-Resonanz

Durch die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie ist sowohl die Larmor-Resonanz als auch die Zyklotron-Resonanz asymmetrisch (siehe Gleichung 3.48 in Abschnitt 3.4.1). Zusätzlich hängt das Maximum des Zyklotronspektrums nicht linear von dem mittleren Magnetfeld ab (siehe Abbildung 3.4). Mit den in den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 gewonnenen Informationen über Abhängigkeit des „ g -Faktors“ von der Zyklotronenergie können nun alle Messungen für eine axiale Energie von 60 K zusammengefasst werden (siehe Abbildung 6.18). Mit der so erhaltenen Statistik kann nun ein Fit nach Gleichung 3.48 durchgeführt werden. Es ergibt sich für den Anteil der Verbreiterungen durch die Inhomogenität des Magnetfeldes $\delta\omega_L/\omega_L = 1,64(18) \cdot 10^{-9}$ und für die der Fluktuationen der Zyklotronfrequenzmessungen $\delta\omega_c/\omega_c = 3,18(13) \cdot 10^{-9}$. Aus den Messungen aus den Abschnitten 5.12.2 und 5.10.2 folgt, dass $\delta\omega_L/\omega_L = 5,2(5) \cdot 10^{-9}$ sein sollte. Diese Diskrepanz um einen

Größe		4 Gruppen	5 Gruppen	6 Gruppen	Mittelwert
g_0	$[10^{-9}]$	$596,61 \pm 0,65$	$596,78 \pm 0,88$	$597,30 \pm 1,05$	$596,84 \pm 0,81$
m_0	$[10^{-9}/\text{Hz}]$	$-2,33 \pm 0,25$	$-2,40 \pm 0,32$	$-2,47 \pm 0,42$	$-2,39 \pm 0,33$
g_1	$[10^{-9}]$	$596,83 \pm 0,54$	$597,41 \pm 0,98$	$596,92 \pm 0,99$	$597,01 \pm 0,83$
m_1	$[10^{-9}/\text{Hz}]$	$-0,01 \pm 0,17$	$-0,19 \pm 0,32$	$-0,01 \pm 0,35$	$-0,06 \pm 0,28$

Tabelle 6.2: **Ergebnisse der Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie**

g_0 ist der aus den vorläufigen g-Faktoren g_v direkt auf verschwindende Zyklotronenergie extrapolierte g-Faktor (siehe Abbildungen 6.16 und 6.17). m_0 bezeichnet die Abhängigkeit des g-Faktors von der Zyklotronenergie (in Einheiten der Verschiebung der axialen Frequenz). g_1 ist der Wert, den man erhält, wenn die Abhängigkeit der gemessenen Frequenzverhältnisse von der Zyklotronenergie mittels m_0 vor der Extrapolation korrigiert wurde (siehe Abschnitt 6.3.2 und Abbildung 6.19). Die Anzahl der Gruppen gibt an, in wieviele Gruppen die Daten zur Extrapolation unterteilt wurden. Die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der verschiedenen Einteilungen geben einen unabhängigen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der Extrapolationen.

Faktor 3 lässt sich nur durch einen zusätzlichen Mittelungsprozess erklären, der in der Theorie nicht berücksichtigt wurde (vergleiche auch Abbildung 6.11). Der mit Hilfe der asymmetrischen Linienform gewonnene g-Faktor weicht allerdings nur um $+3 \cdot 10^{-10}$ von dem mit einer symmetrischen Fit-Funktion gewonnenen g-Faktor ab (siehe Abbildung 6.18). Da für die Herleitung von Gleichung 3.48 nicht von einer gleichartigen Mittelung der Zyklotron- und Larmor-Resonanz ausgegangen wurde, sondern von der theoretischen Linienform, muss der beim Lorentz-Fit an die Zyklotronspektren in 6.2.6 beschriebene systematische Fehler zusätzlich berücksichtigt werden. Dieser beträgt für die axiale Temperatur von 60 K, bei der die Messung stattfand, $+5 \cdot 10^{-10}$ (im g-Faktor), sodass sich der aus diesem theoretischen Modell gewonnene g-Faktor zu $g_0 = 2,001\,041\,596\,558\,(137)$ ergibt. Damit kommt er um $2 \cdot 10^{-10}$ unter dem mit der symmetrischen Fit-Funktionen gewonnenen zu liegen. Der durch die unbekanntene Asymmetrie der g-Faktor-Resonanz zustande kommende Fehler wird mit $5 \cdot 10^{-10}$ abgeschätzt.

Die Sättigung der g-Faktor-Resonanz

Eine zusätzliche mögliche Fehlerquelle ist die Sättigung der Larmor-Resonanz. Eine Sättigung der Larmor-Resonanz bewirkt, dass der Spin des Elektrons auch bei den nur kurz vorliegenden hohen axialen Energien und damit auch hohen Magnetfeldern umgeklappt werden kann. Dadurch verschiebt sich die Larmor-Resonanz zu höheren Frequenzen, während die Zyklotronresonanz von der erhöhten Mikrowellenleistung weitgehend unbeeinflusst bleibt. Eine Messung dieses Effekts ist in Abbildung 6.20 dargestellt. Nimmt man an, dass die Verschiebung der g-Faktor-Resonanz linear von der Intensität der Mikrowellen abhängt, kann man folgern, dass die Restverschiebung für ungesättigte Kurven, die bei $1/3$ der axialen Temperatur dieser Messung aufgenommen werden, $1/3 \cdot 20 \cdot 10^{-9}/1000 < 1 \cdot 10^{-11}$ beträgt.

Wegen dieser Unwägbarkeiten einer asymmetrischen g-Faktor-Resonanz und einer möglichen Sättigungsverschiebung wurde, um eventuelle Verschiebungen der g-

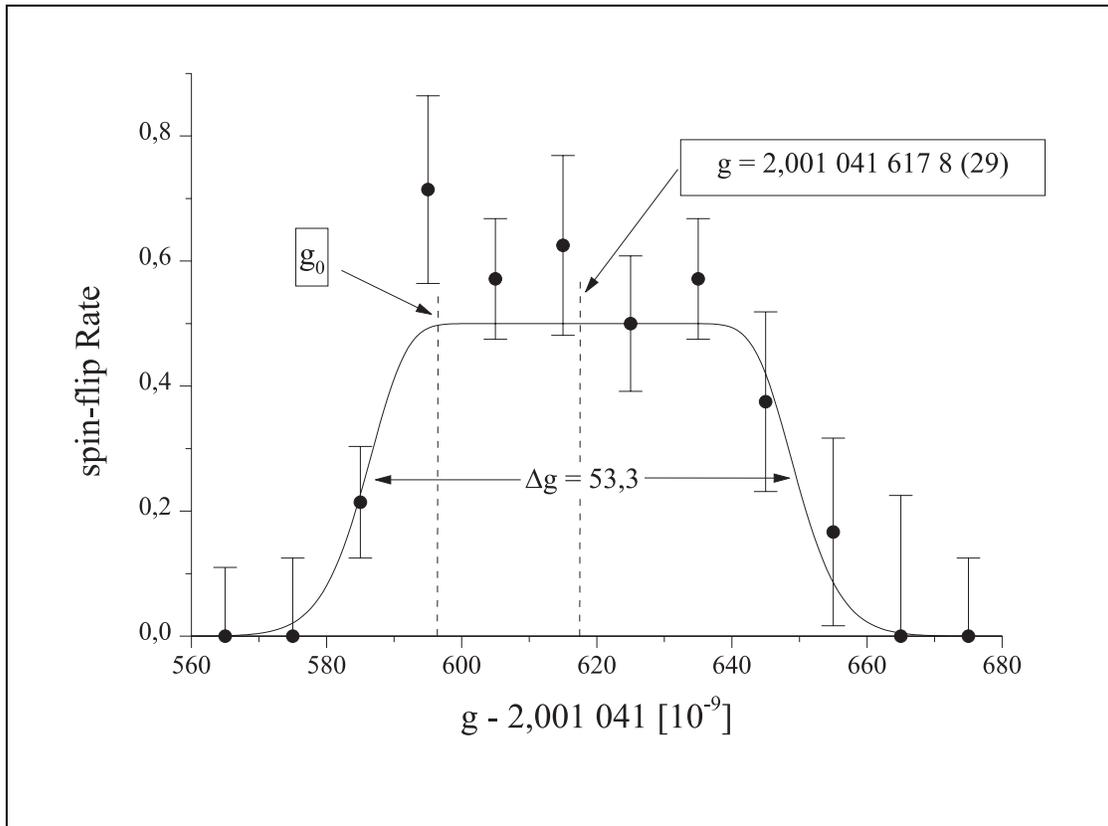


Abbildung 6.20: **Sättigung der g-Faktor-Resonanz durch eine hohe Intensität der Mikrowellen**

Angepasst ist eine Kurve nach Gleichung 6.29. Die Lage der Resonanz hat sich durch die Erhöhung der Intensität der Mikrowellen um einen Faktor 1000 um $20 \cdot 10^{-9}$ (gestrichelte Linie) gegenüber der Lage der Resonanz bei niedriger Intensität (gepunktete Linie) zu größeren Werten verschoben (siehe Abschnitt 6.3.3). Um die Verschiebung zu vergrößern, wurde die axiale Temperatur während des Einstrahlens der Mikrowellen auf $3 \cdot T_0$ erhöht.

Faktor-Resonanz mit der Linienbreite festzustellen, die g-Faktor-Resonanz bei verschiedenen axialen Temperaturen des Ions gemessen (siehe Abschnitt 6.3.4):

6.3.4 Variation der axialen Energie

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt 6.3.3 diskutierten eventuellen systematischen Verschiebungen der g-Faktor-Resonanz durch die Magnetfeld-Inhomogenitäten mit Hilfe einer Variation der Breite der g-Faktor-Resonanzen untersucht. Effekte, die den gemessenen g-Faktor durch das inhomogene Magnetfeld im Zusammenhang mit einer endlichen axialen Energie verschieben, sollten sich dann auch stärker bemerkbar machen. So ist in Abbildung 6.21 zu sehen, dass sich der Parameter $\delta\omega_L/\omega_L$, der die durch die Magnetfeldinhomogenitäten entstehenden Verbreiterung der Resonanz beschreibt, von $1,64(18) \cdot 10^{-9}$ bei 60 K auf $11,7(14) \cdot 10^{-9}$ bei 343 K erhöht hat. Dies entspricht fast genau dem Verhältnis der axialen Temperaturen. Das Verhältnis von $\delta\omega_L/\omega_L$ zu $\delta\omega_c/\omega_c$, das die Asymmetrie der Kurve beschreibt, ist um etwa einen Faktor 3 größer geworden. Der

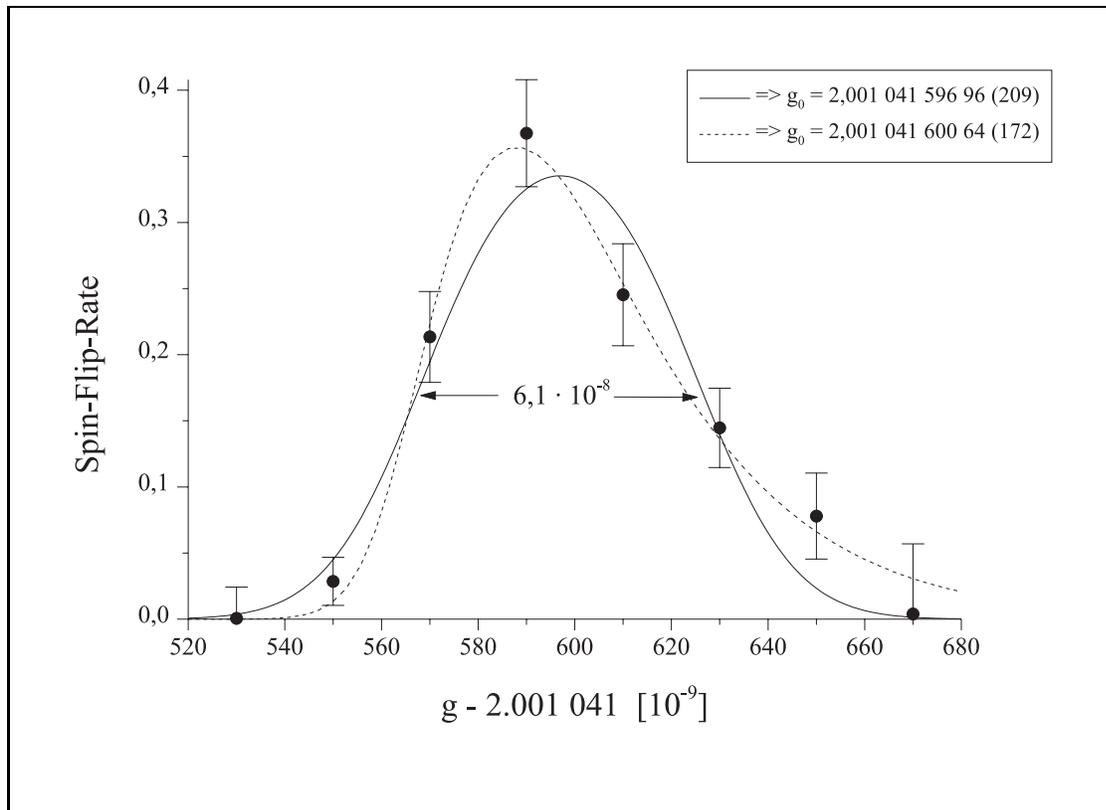


Abbildung 6.21: **g-Faktor-Resonanz für eine axiale Energie von 343 K**

Ein symmetrischer Fit (durchgezogene Kurve) nach Gleichung 6.29 ergibt $g_0 = 2,001\,041\,596\,96(209)$. Die Resonanz hat sich für einen symmetrischen Fit innerhalb der Fehlergrenzen gegenüber Abbildung 6.18 ($T = 60$ K) nicht verschoben. Wendet man als Grundlage für die Anpassung an die Resonanz Gleichung 3.48 an (gestrichelte Kurve), so erhält man $g_0 = 2,001\,041\,600\,64(172)$ mit $\delta\omega_L/\omega_L = 11,7(14) \cdot 10^{-9}$ und $\delta\omega_c/\omega_c = 8,4(14) \cdot 10^{-9}$.

aus der Messung mit der höheren Temperatur extrahierte g-Faktor hat sich auch

um entsprechend $4 \cdot 10^{-9}$ erhöht. Wird allerdings der in Abschnitt 6.2.6 beschriebene systematische Fehler bei der Bestimmung der Zyklotronenergie berücksichtigt, liegt der so bestimmte g-Faktor um $5 \cdot 10^{-9}$ niedriger als beim symmetrischen Fit: $g_0 = 2,001\,041\,592\,30$ (480). Da die in Abschnitt 6.2.6 beschriebene Verschiebung der Zyklotronfrequenz für $T = 343$ K nur schlecht vorhergesagt werden kann, ist der Fehler größer geworden. Dies liegt daran, dass für $T = 5,6 \cdot T_0$ $\Delta\omega \approx \gamma$ ist (siehe Abschnitt 3.4.1).

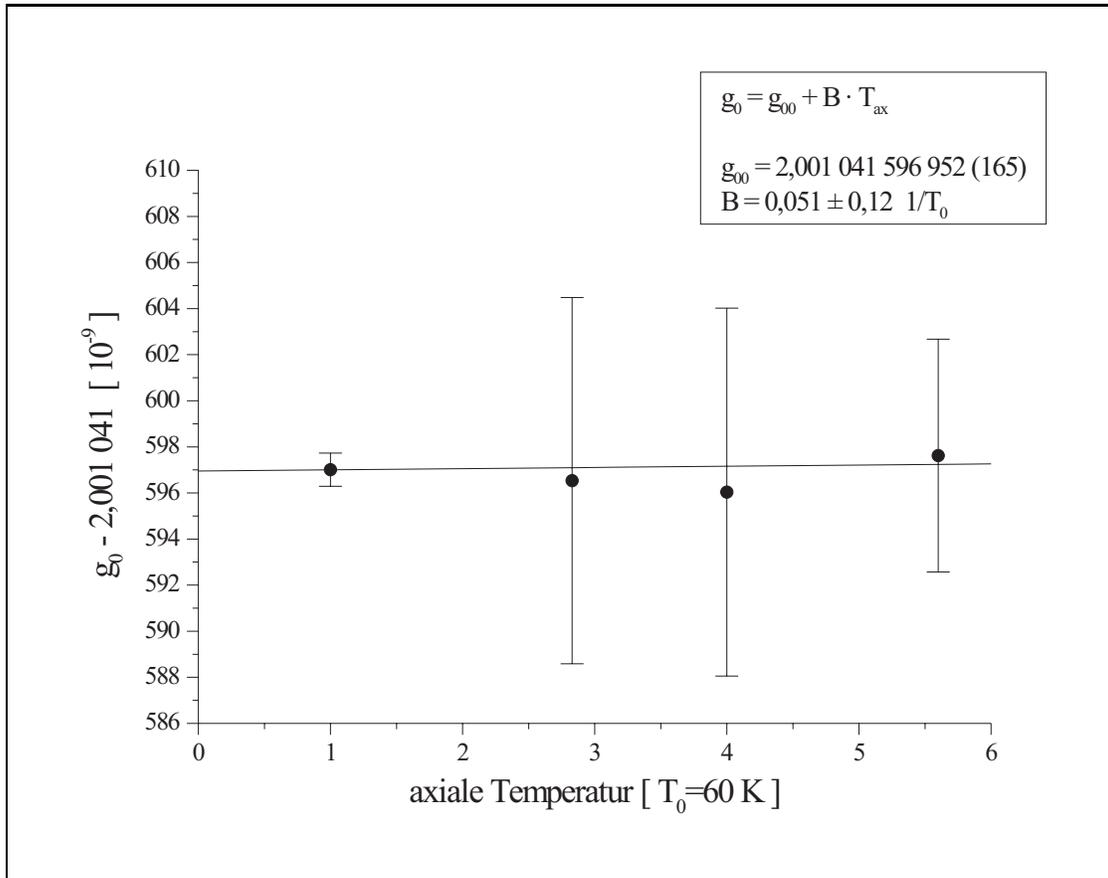


Abbildung 6.22: **Extrapolation der g-Faktor-Resonanz auf verschwindende Axialenergie**

Wegen der geringen Statistik und der Schwierigkeit die systematische Verschiebung der Zyklotronresonanz bei hohen axialen Energien abzuschätzen, wurden nur die Ergebnisse der symmetrischen Fits (Gleichung 6.29) zur Auswertung herangezogen. Ferner wurde vorher der g-Faktor um die Abhängigkeit des gemessenen g-Faktors von der Energie der Zyklotronbewegung korrigiert. Die Steigung der Geraden ist mit 0 verträglich.

Wird dagegen der g-Faktor, wie für Abbildung 6.22 geschehen, durch Anpassen einer symmetrischen Funktion (Gleichung 6.29) bestimmt, so ist fast keine Abhängigkeit des g-Faktors von der axialen Temperatur festzustellen. Dies zeigt, dass die zur Herleitung von Gleichung 6.29 verwandte Annahme, dass die Mittelungsprozesse der Larmor- und Zyklotron-Resonanz ähnlich sind, gerechtfertigt ist. Der auf verschwindende axiale Energie extrapolierte Wert des g-Faktors ist $g = 2,001\,041\,596\,952$ (165).

6.4 Endergebnis der Messungen

Der g -Faktor wird aus den Extrapolationen auf verschwindende Zyklotron- und Axialenergie gewonnen (dritte Zeile in Tabelle 6.2 und Abbildung 6.22). Dieser Wert lautet:

$$g = 2,001\,041\,597\,0\,(8) . \quad (6.32)$$

In den letzten Abschnitten wurden umfangreiche Untersuchungen zu systematischen Fehlerquellen dargestellt. Tabelle 6.3 zeigt eine Übersicht über die Ergebnisse der Fehlerbetrachtungen. Den größten Beitrag zum Fehler im g -Faktor liefert die Unsicherheit in der Masse des Elektrons. Für die Masse des Elektrons sind aber in naher Zukunft neue, genauere Werte zu erwarten. Wegen der in Abschnitt 6.2.9 beschriebenen Verschiebung der berechneten freien Zyklotronfrequenz ν_c durch die Wechselwirkung des Ions mit seiner eigenen Spiegelladung muss vom g -Faktor noch $5 \cdot 10^{-10}$ subtrahiert werden. Die in Abschnitt 6.2.4 beschriebene systematische Verschiebung durch die Speicherspannungsdrift beträgt $1,5\,(8) \cdot 10^{-10}$ und muss auch noch vom gemessenen g -Faktor abgezogen werden. Analog muss, wie in Abschnitt 6.2.5 erklärt, durch einen Offset bei der Messung der Zyklotronenergie $1,5\,(4) \cdot 10^{-10}$ zum g -Faktor hinzu addiert werden. Werden die in Tabelle 6.3 zusammengefassten systematischen Fehler zusammen mit den Korrekturen berücksichtigt, so erhält man für den Wert des g -Faktors des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff:

$$g = 2,001\,041\,596\,4\,(8)\,(6)\,(44) . \quad (6.33)$$

Dabei bezeichnet der erste Fehler die statistischen Unsicherheiten. Der zweite Fehler kommt durch die quadratisch aufsummierten Beiträge der systematischen Unsicherheiten zustande. Der letzte Fehler beschreibt die Unsicherheit durch das Verhältnis der Masse des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions und der des Elektrons.

6.5 Einordnung des Messergebnisses

6.5.1 Test der Bound-State-QED

In den Abschnitten 6.1 bis 6.4 wurde gezeigt, wie das Verhältnis der Larmor- und der Zyklotron-Frequenz mit einer relativen Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-10}$ gemessen werden konnte. Daraus ergibt sich für den g -Faktor des in $^{12}\text{C}^{5+}$ gebundenen Elektrons:

$$g = 2,001\,041\,596\,4\,(8)\,(6)\,(44) . \quad (6.34)$$

Der erste Fehler bezeichnet die statistische Unsicherheit. Der zweite Fehler kommt durch die quadratisch aufsummierten Beiträge der systematischen Unsicherheiten zustande. Der letzte Fehler schließlich resultiert aus der Unsicherheit des Verhältnisses der Masse des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions und der des Elektrons. Die hier vorgestellte Messung stellt die bisher genaueste Bestimmung eines atomaren g -Faktors dar⁵ und bestätigt den theoretischen Wert der Göteborger Theorie-Gruppe [Per97, Bei00b] (siehe Tabelle 1.1):

$$g = 2,001\,041\,590\,9\,(21)\,(50) . \quad (6.35)$$

⁵Zu den bisher genauesten Messungen gehören die Messungen des g_j -Faktors in $^{138}\text{Ba}^+$ [Mar98] mit $\Delta g_j = 3 \cdot 10^{-8}$ und die des g_j -Faktors in ^1H [Tie77] mit ebenfalls einer Genauigkeit von $\Delta g_j = 3 \cdot 10^{-8}$.

Grundsätzliche Limitationen

Masse des Elektrons	6.2.14	$4 \cdot 10^{-9}$	(Messung auf einige 10^{-10} geplant)
Retardierungseffekte	6.2.9	$< 10^{-13}$	

Fehler durch die endliche Energie ($E_+ = 5$ eV, $E_z = 0,07$ eV)

		ohne Extrapolationen	mit Extrapolationen
Asymmetrie der g-Faktor-Resonanz	6.3.3	$7 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-10}$
Endliche Zyklotronenergie	6.2.1	$5 \cdot 10^{-9}$	–
Bestimmung der Zyklotronenergie	6.2.5	–	$4 \cdot 10^{-11}$
elektrische Feldfehler	6.2.3	$2 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-10}$
relativistische Korrekturen	6.2.8	$1 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-12}$
Stehende Welle des Mikrowellenfeldes	6.2.10	$1 \cdot 10^{-14}$	$< 10^{-14}$
Summe (quadratisch)		$9 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-10}$

Andere apparative Fehlerquellen

Ungenauigkeit des FFT-Quarzes	6.2.13	$2 \cdot 10^{-10}$
Speicherspannungsdrift	6.2.4	$8 \cdot 10^{-11}$
Wechselwirkung mit den Spiegelladungen	6.2.9	$5 \cdot 10^{-11}$
Sättigung des Larmor-Übergangs	6.3.3	$1 \cdot 10^{-11}$
spektrale Reinheit der Mikrowellen	6.2.11	$1 \cdot 10^{-12}$
Dämpfung der Ionenbewegung	6.2.12	$\approx 10^{-20}$
Drift des Magnetfeldes	6.2.2	0
Summe (quadratisch)		$3 \cdot 10^{-10}$

Am g-Faktor angebrachte Korrekturen

$g =$	2,001 041 596 952	
	–0,000 000 000 583	Wechselwirkung mit den Spiegelladungen 6.2.9
	–0,000 000 000 150	Speicherspannungsdrift 6.2.4
	+0,000 000 000 150	Bestimmung der Zyklotronenergie 6.2.5
	2,001 041 596 369	Summe

Tabelle 6.3: **Übersicht über die Beiträge der systematischen Fehler**
Die Fehler sind absolut angegeben.

Der erste Fehler kommt hier durch Ungenauigkeiten bei den Berechnungen der Bound-State-QED-Korrekturen 1. Ordnung in α und der Mitbewegung des Kerns zustande. Der zweite Fehler spiegelt vor allem die Unsicherheit durch die noch nicht berechneten Bound-State-Korrekturen 2. Ordnung in α wider. Diese Rechnung berücksichtigt alle Ordnungen in $Z\alpha$ (siehe Abschnitt 1.2.2). Berechnungen von Grotch und Hegstrom [Gro71] dagegen, die auf einer Entwicklung nach $Z\alpha$ basieren, weichen um 10^{-7} vom experimentellen Wert ab. Damit zeigt die hier vorgestellte Messung, dass in die Rechnungen bereits für kleine Z alle Ordnungen in $Z\alpha$ einbezogen werden sollten.

Abbildung 6.23 gibt einen Überblick über die jeweils genauesten bisher an wasserstoffähnlichen Systemen durchgeführten g-Faktor-Messungen. Man erkennt, dass die hier vorgestellte Messung als erste auf die Beiträge der Bound-State-QED zum g-Faktor empfindlich ist. Zusammen mit den Berechnungen der Göteborger Theorie-

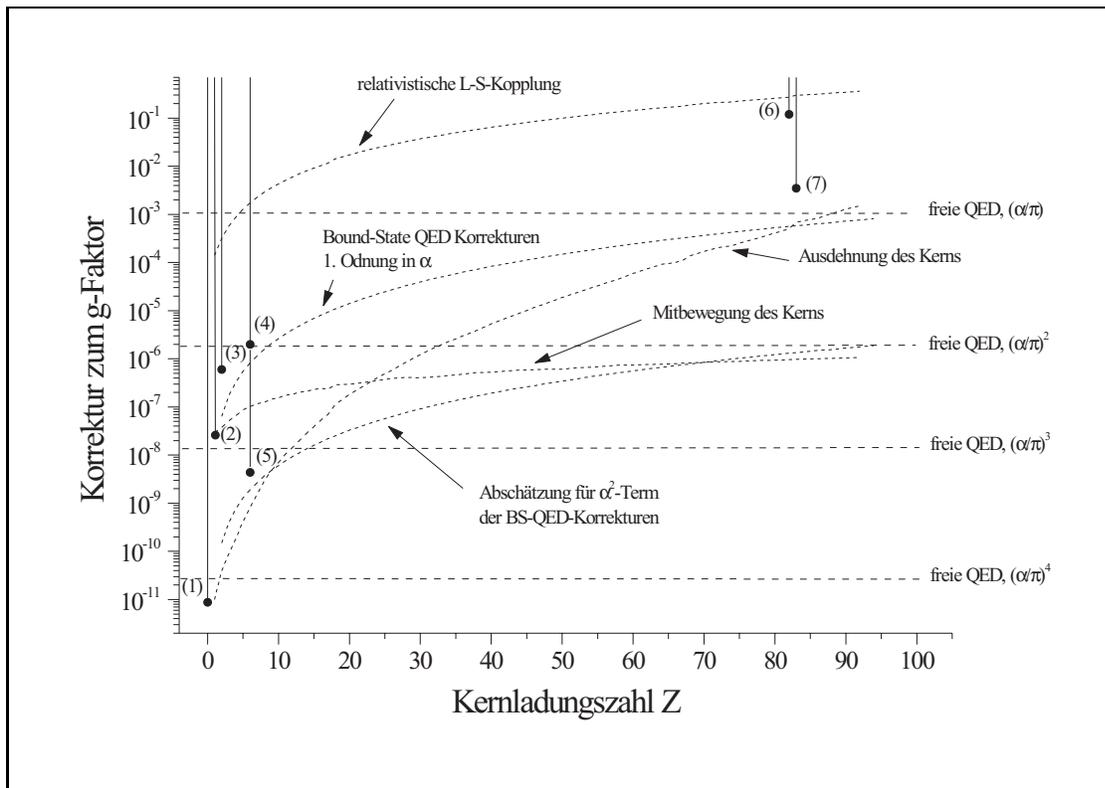


Abbildung 6.23: Überblick über die bisher an wasserstoffähnlichen Systemen durchgeführten g-Faktor-Messungen

Aufgetragen sind die theoretischen Korrekturen zum g-Faktor des gebundenen und des freien Elektrons und die Genauigkeit der jeweils genauesten verfügbaren experimentellen Werte (aus [Bei00b]). Jede Linie eines experimentellen Wertes, die eine Kurve eines theoretischen Beitrags schneidet, zeigt an, dass dieser Beitrag durch das Experiment getestet wird.

Quellen: (1): freies e^- [Dyc86b], (2): ^1H [Tie77], (3): $^4\text{He}^+$ [Joh80],
 (4): $^{12}\text{C}^{5+}$ [Her00], (5): $^{12}\text{C}^{5+}$ [diese Arbeit], (6): $^{207}\text{Pb}^{81+}$ [See98],
 (7): $^{209}\text{Bi}^{82+}$ [Win99]

Gruppe verifiziert sie die Bound-State-QED-Korrekturen zum g-Faktor schon bei $Z = 6$ mit einer relativen Genauigkeit von $9 \cdot 10^{-3}$.

Die bisher genauesten Überprüfungen der BS-QED-Korrekturen in schweren hochgeladenen Ionen wurden an der Lambshift in wasserstoff- und lithiumähnlichen Systemen durchgeführt. In wasserstoffähnlichem Uran ($^{238}\text{U}^{91+}$) konnten die BS-QED-Korrekturen mit einer Genauigkeit von ca. 3% verifiziert werden [Bey95]. In Mehrelektronensystemen konnten die QED-Beiträge mit etwas höherer Präzision getestet werden. Allerdings sind wegen der Wechselwirkung der Elektronen untereinander die hier auftretenden Korrekturen schwerer zu interpretieren. Die an lithiumähnlichem Wismut ($^{209}\text{Bi}^{80+}$) durchgeführten Messungen der Lambshift sind zwar auf $2 \cdot 10^{-3}$ genau [Bei98], allerdings differieren die Berechnungen der Lambshift wegen ihrer unterschiedlichen Behandlung der relativistischen Mehrteilchen-Wechselwirkungen untereinander um bis zu 2%. Zusätzlich sind die BS-QED-Korrekturen 2. Ordnung in α noch nicht vollständig berechnet worden [Sha99, Sap99]. Daher wurde die BS-QED auch hier nur mit einer Genauigkeit von etwa 2% verifiziert⁶.

Messungen zur Hyperfeinstruktur in hochgeladenen Ionen lassen zur Zeit keine Schlüsse auf die Richtigkeit der BS-QED zu. Dies liegt daran, dass die Einflüsse der unbekannt Kernstruktur – insbesondere des magnetischen Moments – auf die Hyperfeinstruktur nicht genau genug bekannt sind [See98, Tom98] (siehe auch Abschnitt 1.2). Damit ist die hier vorgestellte Messung neben denen der Lambshift hochgeladener Ionen der genaueste Test der Bound-State-QED-Korrekturen. Für einen Test der QED besitzt der g-Faktor des gebundenen Elektrons gegenüber der Lambshift den Vorteil, weit weniger empfindlich auf Kerneffekte zu sein [Per97] (siehe Abschnitt 1.2). Weiterhin treten im Gegensatz zu lithiumähnlichen Systemen keine zusätzlichen Wechselwirkungen mit anderen Elektronen auf. Damit lassen sich aus Experiment und Theorie des g-Faktors des gebundenen Elektrons im Hinblick auf einen Test der BS-QED zuverlässigere Aussagen treffen, als dies bei den Lambshift-Messungen möglich ist.

Durch Verbesserungen der Theorie des g-Faktors des gebundenen Elektrons⁷ und durch eine genauere Messung der Masse des Elektrons ist in naher Zukunft mit einer noch genaueren Überprüfung der Bound-State-QED durch den g-Faktor des in $^{12}\text{C}^{5+}$ gebundenen Elektrons zu rechnen.

Allerdings ist anzumerken, dass die elektrischen Feldstärken, die das Elektron in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff erfährt, gegenüber denen, die es in wasserstoffähnlichem Uran erfährt, noch vergleichsweise gering sind und sich so mögliche Nichtlinearitäten der QED im Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ hier nicht so stark wie bei den schweren hochgeladenen Ionen bemerkbar machen (siehe Abschnitt 1.2 und Abbildung 1.1). Deshalb werden durch die hier vorgestellte Messung vor allem die Rechenmethoden der Bound-State-QED verifiziert. Sie ist daher komplementär zu denen der Lambshift und der Hyperfeinstrukturaufspaltung zu sehen (siehe Abschnitt 1.2). Daher

⁶Wegen den hohen experimentell erreichbaren Genauigkeiten für die Lambshift in lithiumähnlichen Systeme eignen sie sich hervorragend dazu, Zwei-Photon-Austausch-Prozesse zwischen den verschiedenen Elektronen zu testen [Sha99, Sap99]. Diese sind aber von den BS-Korrekturen 2. Ordnung in α zu unterscheiden

⁷Dazu gehört insbesondere ein Abschätzung der Größe der BS-QED-Korrekturen 2. Ordnung in α . Für eine grobe Abschätzung kann diese für kleine Kernladungszahlen Z noch auf einer Entwicklung nach $Z\alpha$ basieren.

ist es wünschenswert, ähnliche Messungen des g-Faktors des gebundenen Elektrons z.B. in wasserstoffähnlichem Blei oder Uran an der GSI in Darmstadt im Rahmen des geplanten HITRAP-Projekts durchzuführen und so das volle Potential der hier vorgestellten Messmethode auszunutzen. Nach den Aussagen von Persson et al. in [Per97] können die Effekte des Kerns auf den g-Faktor des gebundenen Elektrons für schwere wasserstoffähnliche Ionen genauer als 10^{-7} berechnet werden. Da die BS-QED-Korrekturen dort ca. 10^{-3} betragen (siehe Abbildung 6.23), können sie so mit einer Genauigkeit von 10^{-4} studiert werden. Daher erlauben Messungen des g-Faktors in schweren wasserstoffähnlichen Ionen einen präzisen Test der BS-QED-Korrekturen 2. Ordnung in α .

6.5.2 Atomare Masse des Elektrons

Wird auf die Richtigkeit der Berechnung des g-Faktors des gebundenen Elektrons und der dabei verwandten Methoden vertraut, so kann aus der vorgestellten Messung auf das Verhältnis der Masse des Elektrons und der des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion geschlossen werden. Nach Berücksichtigung der Ionisationsenergie kann die Masse des Elektrons direkt in den atomaren Einheiten des ^{12}C -Atoms angegeben werden:

$$m_e = 0,000\,548\,579\,912\,8\,(3)\,(15)\text{ u} . \quad (6.36)$$

Der erste Fehler resultiert aus der Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-10}$, mit der das Verhältnis der Larmor- und der Zyklotron-Frequenz bestimmt wurde. Der zweite Fehler beschreibt die theoretischen Unsicherheiten des g-Faktors von relativ gesehen $2,7 \cdot 10^{-9}$. Dieser Wert stimmt innerhalb seiner Fehlergrenzen mit dem genauesten bisher veröffentlichten Wert von Van Dyck et al. überein [Far95, Dyc95] (vergleiche Abschnitt 6.2.14):

$$m_e = 0,000\,548\,579\,911\,1\,(12)\text{ u} . \quad (6.37)$$

Verbesserungsmöglichkeiten in der Theorie des g-Faktors des gebundenen Elektrons lassen eine noch genauere Bestimmung der Elektronen-Masse erwarten. Auch wird die Messung des g-Faktors des Elektrons in anderen hochgeladenen Ionen helfen, die theoretischen Unsicherheiten zu verstehen, und es so ermöglichen, eine noch genauere Bestimmung der Masse des Elektrons vorzunehmen.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird eine Messung des magnetischen Moments des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff vorgestellt. Nach umfangreichen systematischen Untersuchungen ergibt sich der an einem einzelnen gespeicherten $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ion gemessene g-Faktor des gebundenen Elektrons zu:

$$g = 2,001\,041\,596\,4(8)(6)(44) . \quad (7.1)$$

Der erste Fehler bezeichnet die statistische Unsicherheit. Der zweite Fehler kommt durch die quadratisch aufsummierten Beiträge der systematischen Unsicherheiten zustande. Der letzte Fehler schließlich resultiert aus der Unsicherheit des Verhältnisses der Masse des $^{12}\text{C}^{5+}$ -Ions und der des Elektrons. Die hohe Genauigkeit der Messung wurde durch die Anwendung einer neuen Methode ermöglicht, bei der der Nachweis der Ausrichtung des Spins vom Induzieren der spin-flips räumlich getrennt durchgeführt wird. Dies erlaubt es, die Beschränkungen der zum Nachweis der Ausrichtung des Spins notwendigen magnetischen Inhomogenität zu umgehen.

Die hier vorgestellte Messung stellt die bisher genaueste Bestimmung eines atomaren g-Faktors dar und bestätigt den theoretischen Wert der Göttinger Theorie-Gruppe [Per97, Bei00b] mit einer Genauigkeit von $7 \cdot 10^{-9}$. Zusammen mit diesen Rechnungen verifiziert sie die Bound-State-QED-Korrekturen genauer als 1%. Damit ist der g-Faktor des in $^{12}\text{C}^{5+}$ gebundenen Elektrons neben Messungen der Lambshift in schweren hochgeladenen Ionen der genaueste Test der Bound-State-QED.

Wird auf die Richtigkeit der Berechnung des g-Faktors des gebundenen Elektrons vertraut kann folgender Wert für die atomare Masse des Elektrons gewonnen werden (siehe Abschnitt 6.5.2):

$$m_e = 0,000\,548\,579\,912\,8(15) \text{ u} . \quad (7.2)$$

Dieser Wert stimmt mit dem zur Zeit genauesten von Van Dyck et al. [Far95] veröffentlichten Wert überein. Der Fehler der hier vorgestellten Messung der atomaren Masse des Elektrons ist dabei nur geringfügig größer als der der Messung von Van Dyck et al..

7.1 Verbesserungsmöglichkeiten der Messung des g-Faktors

Alle folgenden Verbesserungsvorschläge zielen auf ein vom Ion erfahrenes konstanteres Magnetfeld ab:

7.1.1 Optimieren der Homogenität des Magnetfeldes

Eine naheliegende Möglichkeit, das Messergebnis zu verbessern, liegt darin, das Magnetfeld homogener zu gestalten. Insbesondere der symmetrische Teil der Magnetfeld-Inhomogenität (vor allem der B_2 -Term) trägt zur Breite und Verschiebung der g-Faktor-Resonanz bei (siehe Abschnitt 3.4.1). Da die Inhomogenität des Magnetfeldes auch in der Präzisions-Falle im Wesentlichen durch den Nickel-Ring in der Analyse-Falle hervorgerufen wird (siehe Abschnitt 5.12.1), wird durch eine Vergrößerung des Abstandes der Präzisions- von der Analyse-Falle das Magnetfeld homogener. Desweiteren kann der Durchmesser der Analyse-Falle verringert werden, wodurch mit wesentlich weniger magnetischem Material die gleiche Inhomogenität in der Analyse-Falle erreicht wird. Dies führt zu einer kleineren Inhomogenität des Magnetfeldes in der Präzisions-Falle. Das Potential dieser beiden Maßnahmen ist aber wegen technischer Rahmenbedingungen beschränkt.

Daher ist es sinnvoller, die Inhomogenitäten des Magnetfeldes mittels der im Magnet eingebauten Korrekturspulen zu kompensieren. Als Maß für die erreichten Güte des Magnetfeldes können Messungen, analog zu denen, die in den Abschnitten 5.12 (insbesondere Abschnitt 5.12.3) beschrieben werden, herangezogen werden.

7.1.2 Stabilisieren des Magnetfeldes

Die in Abschnitt 6.2.2 diskutierten Messungen zeigen, dass das Magnetfeld verhältnismäßig instabil ist. Diese Magnetfeldfluktuationen können sich in einer Verbreiterung der g-Faktor-Resonanz bemerkbar machen. Da diese Fluktuationen vermutlich durch Änderungen der Temperatur der Apparatur zustande kommen, können sie durch Stabilisieren des Druckes über den Helium-Gefäßen reduziert werden [Gab88]. Um die Mitte der dann schmalen Resonanz mit vergleichbarer Genauigkeit zu bestimmen, wird weniger Statistik benötigt.

7.1.3 Entkoppeln der axialen Bewegung vom Wärmereservoir

Eine einfache Möglichkeit, die Verbreiterung der g-Faktor-Resonanz durch die thermische Energieverteilung des axialen Freiheitsgrades zu umgehen, ist es, die axiale Bewegung während der eigentlichen Messung vom Wärmereservoir zu entkoppeln. Dies wurde von Vasant Natarajan¹ vorgeschlagen. Die axiale Bewegungsamplitude ist dann zwar nicht bekannt, aber konstant. Somit ändert sich das über eine axiale Schwingungsperiode gemittelte Magnetfeld nicht mehr. Die Zeitkonstante des Energieaustausches des axialen Freiheitsgrades mit dem Wärmereservoir erhöht sich durch Verfahren der Speicherspannung um 5% von 0,2 s auf über 300 s. Damit ist

¹Indian Institute of Science, Bangalore, India

die axiale Energie und auch das mittlere Magnetfeld für die eigentliche Messung quasi konstant. Da für eine Messung der axialen Frequenz das Ion in Resonanz mit dem axialen Schwingkreis sein muss, müsste die axiale Frequenz durch Inter- oder Extrapolation gewonnen werden. Dazu würde die axiale Frequenz von verschiedenen Ionensorten bei verschiedenen Spannungen gemessen werden und damit eine Eichgerade erstellt. Eine rein rechnerische Bestimmung der axialen Frequenz ist auf dem zu fordernden Präzisionsniveau wegen der immer auftretenden Zusatzspannungen nicht möglich.

7.1.4 Seitenbandkühlen der axialen Bewegung

Die Entkopplung des axialen Freiheitsgrades vom Wärmereservoir eröffnet zusätzlich die Möglichkeit, die axiale Energie durch Seitenbandkühlen auf ca. 200 mK zu kühlen (siehe Abschnitt 5.9.2). Durch diese Reduktion der axialen Energie um mehr als zwei Größenordnungen werden mögliche systematische Fehler unterdrückt. Zu den davon betroffenen systematischen Fehlern zählt vor allem die asymmetrische Linienform (siehe Abschnitt 6.3.3).

Mit den oben dargestellten Methoden sollte es möglich sein, g-Faktor-Resonanzen zu erhalten, die um etwa eine Größenordnung schmaler sind. In dem dann angestrebten Genauigkeitsbereich von 10^{-10} im g-Faktor müssen dann viele der in Tabelle 6.3 aufgelisteten systematischen Fehler vermieden werden. Der damit verbundene nicht unerhebliche Aufwand ist nur gerechtfertigt, wenn eine neue physikalische Information aus den Messungen gewonnen werden kann. Für einen genaueren Vergleich des g-Faktors mit den theoretischen Vorhersagen ist es zum einen notwendig, dass die Theorie des g-Faktors des gebundenen Elektrons weiter verbessert wird, und zum anderen, dass die Masse des Elektrons um eine Größenordnung genauer vermessen wird. Letzteres ist sowohl von der Gruppe um Van Dyck als auch von der um Gabrielse geplant. Die Theorie des g-Faktors des gebundenen Elektrons kann nur verbessert werden, indem die 50 Feynman-Diagramme der 2. Ordnung im g-Faktor des gebundenen Elektrons besser berechnet oder abgeschätzt werden (siehe Abbildung 7.1). Die aufwendigen Berechnungen wurden jedoch noch nicht begonnen (Stand: Ende 1999) [Bei99].

7.2 Test der Bound-State-QED

Aus Abbildung 1.4 ist ersichtlich, dass alle Korrekturen des g-Faktors des gebundenen Elektrons zum freien g-Faktor mit der Ordnungszahl Z des Kerns stark anwachsen. So skalieren die BS-QED-Effekte z.B. mit Z^2 . Daher ist es für einen Test der BS-QED sinnvoll, Messungen an Kernen mit hoher Kernladungszahl durchzuführen. Da die Korrekturen durch die Struktur des Kerns schneller anwachsen als die BS-QED-Korrekturen, sind für einen Test der BS-QED solche Ordnungszahlen zu bevorzugen, bei denen die Unsicherheiten, die durch die Struktur des Kerns gegeben sind, ähnlich groß sind wie die Messgenauigkeit (zur Zeit etwa $Z = 20 - 40$). Daher ist die Messung des g-Faktors des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kalzium ($^{40}\text{Ca}^{19+}$) geplant. Dieses wasserstoffähnliche Ion wurde auch ausgewählt, da es sich mit Hilfe einer FEP-Spitzen-Spannung von 8 kV noch relativ einfach innerhalb einer geschlossenen Apparatur erzeugen lässt. Kalzium bietet zusätzlich den Vorteil einen

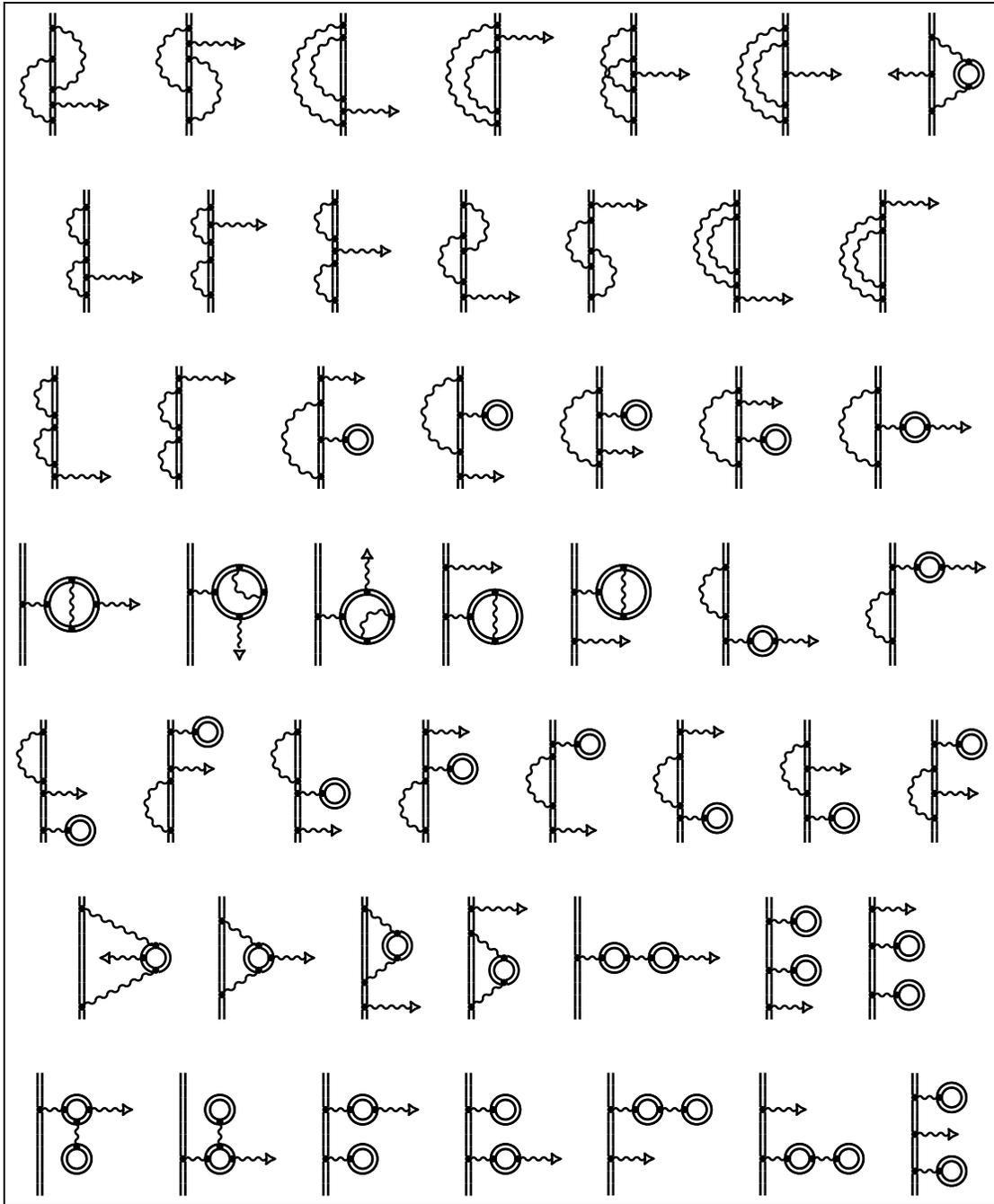


Abbildung 7.1: **2-Photonen-Korrekturen zum g-Faktor des gebundenen Elektrons**

Alle 50 Feynman-Graphen, die für die Berechnung der 2. Ordnung in α des g-Faktors des gebundenen Elektrons ausgewertet werden müssten. Für die Berechnung der Lambshift 2. Ordnung in α in hochgeladenen Ionen mussten dagegen nur 10 Diagramme ausgewertet werden [Per96].

Abbildung mit freundlicher Genehmigung von Thomas Beier.

so genannten doppelt magischen Kern zu besitzen, sodass die Einflüsse des Kerns besser als für die meisten anderen Kerne berechnet werden können.

Für höhere Kernladungszahlen müssen, um spin-flips nachweisen zu können, stärkere Inhomogenitäten des Magnetfeldes genutzt werden. Diese können zum einen durch andere ferromagnetische Materialien, zum anderen durch eine Verkleinerung der Analyse-Falle erreicht werden. Diese stärkeren Inhomogenitäten führen allerdings zu einer Verschlechterung der Homogenität in der Präzisions-Falle und damit der Voraussetzungen für die Bestimmung des g -Faktors. Dieser Effekt wird aber dadurch kompensiert, dass die Bewegungsamplituden der höher geladenen Ionen durch ihre stärkere Bindung an die Falle kleiner sind. Durch diesen Effekt und die Tatsache, dass sich höher geladene Ionen wesentlich einfacher elektronisch nachweisen lassen, ist eher zu erwarten, dass die erreichbare Messgenauigkeit mit der Ordnungszahl des wasserstoffähnlichen Ions steigt. Allerdings ist wegen der Wechselwirkung des Ions mit seiner von ihm induzierten Spiegelladung zu empfehlen, den Radius der Präzisions-Falle etwas zu vergrößern (siehe Abschnitt 6.2.9).

Die Messungen an schweren hochgeladenen Ionen (z.B. $^{238}\text{U}^{91+}$) sollen im Rahmen des HITRAP-Projekts an der GSI in Darmstadt durchgeführt werden. Da sich bei diesen hohen elektrischen Feldstärken mögliche Nichtlinearitäten der QED am ehesten bemerkbar machen, kann dort der physikalische Inhalt der BS-QED am besten überprüft werden.

7.3 Bestimmung von magnetischen Kernmomenten

Die hier vorgestellte Messmethode ermöglicht auch die Bestimmung von magnetischen Momenten von Kernen (siehe dazu die folgenden Abschnitte 7.3.1 und 7.3.2). Da die Methode auf alle stabilen Kerne mit Eigendrehimpuls angewandt werden kann, ist sie eine gute Alternative zu NMR-Messungen. Im Zusammenhang mit ihrer hohen Präzision ermöglicht sie sogar die Beobachtung von Effekten, die bisher sowohl in theoretischer als auch in experimenteller Hinsicht noch wenig untersucht wurden und die Interpretierbarkeit der NMR-Messungen teilweise stark beeinträchtigen [Gus98]: Gemessene magnetische Momente von Kernen werden nämlich durch die Anwesenheit von Elektronen vor allem auf zwei verschiedenen Weisen beeinflusst:

Diamagnetische Abschirmung: Bei diesem Effekt handelt es sich nicht wirklich um eine Änderung des magnetischen Moments des Kerns, sondern nur um eine Abschirmung des externen, zur Messung des magnetischen Moments angelegten, magnetischen Feldes durch Selbstinduktion in der Elektronenhülle des Atoms und seiner Nachbar-Atome. Dieser Effekt bewegt sich in der Größenordnung von $10^{-2} - 10^{-5}$. Mit hinreichender Kenntnis der beteiligten Wellenfunktionen lässt sich dieser Effekt berechnen. Für chemische Verbindungen, wie sie in NMR-Messungen verwendet werden, sind diese Rechnungen jedoch schwer durchzuführen. Für ^{207}Pb beträgt der relative Unterschied zwischen dem am freien Atom gemessenen magnetischen Kernmoment zu dem in chemischen Lösungen gemessenen $-1,78\%$ [Lut71].

Kernpolarisation durch die Elektronenhülle: Hierbei wird die Struktur des Kerns und damit verbunden sein magnetisches Moment durch die Coulomb-Kraft der Elektronen geändert. Für ^{129}Xe haben die $1s$ -Elektronen eine mitt-

lere Energie von ca. 10 keV und können so höhere Anregungszustände des Kerns beimischen². Das niedrigste angeregte Kernniveau liegt für ^{129}Xe (ein $3/2^+$ -Zustand) nur 40 keV über dem Grundzustand ($1/2^+$). Der Effekt der Kernpolarisation durch ein 1s-Elektron auf die Energie der Elektronenhülle wird mit Hilfe von Störungsrechnung 2. Ordnung in [Hof84] für Xenon zu 1,6 meV abgeschätzt. Dies entspricht einer Beimischung des ersten angeregten Kernniveaus zum Grundzustand des Kerns von $2 \cdot 10^{-4}$. Diese Beimischung des $3/2^+$ -Zustandes, dessen magnetischen Moment das entgegengesetzte Vorzeichen des Grundzustandes hat, verändert das magnetische Kernmoment des Grundzustandes um mindestens $2 \cdot 10^{-4}$. Da dieser Effekt im Wesentlichen von der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in Kernnähe abhängt, fällt die Korrektur des magnetischen Moments für schwerere Kerne um bis zu einer Größenordnung höher aus.

Mit unserem Aufbau kann analog zu den Messungen des g_j -Faktors der g_F -Faktor von hochgeladenen Ionen mit einer Genauigkeit von ca. 10^{-9} bestimmt werden. Da das Moment des Kerns um drei Größenordnungen kleiner ist als das der Elektronenhülle, kann das Moment des Kerns bei bekanntem g_j -Faktor³ mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-6} aus dem g_F -Faktor extrahiert werden. Da dies für Ionen mit gleichem Kern, aber unterschiedlicher Elektronenanzahl, bei denen ein Elektron ungepaart ist, geschehen kann, sind die oben genannten Effekte der Elektronenhülle auf das gemessene magnetische Moment eines Kerns direkt beobachtbar. Insbesondere ist es bei einer Meßgenauigkeit der Kernmomente von 10^{-6} möglich, die Polarisierbarkeit der Kerne mit einer Genauigkeit von besser als 10^{-2} zu bestimmen und so diese wenig untersuchte Kerneigenschaft experimentell zu untersuchen.

7.3.1 Realisierung der Messmethode für kleine Ordnungszahlen

Grundprinzip einer Messung der magnetischen Kernmomente kleiner Ordnungszahl ist ein Doppelresonanzexperiment. Dabei werden in der Präzisions-Falle Übergänge zwischen den nahe beieinander liegenden Niveaus der $m_F = +1$ und $m_F = 0$ Zustände induziert (siehe Abbildung 7.2). Ein Übergang kann in der Analyse-Falle dadurch festgestellt werden, ob mit einer Mikrowellenfrequenz bei 75 GHz (für $^{13}\text{C}^{5+}$) Übergänge zwischen $m_F = 0$ und $m_F = -1$ getrieben werden können. Konnten z.B. in der Analyse-Falle vor dem Transport in die Präzisions-Falle Übergänge getrieben werden und nach dem Transport nicht mehr, so wurde inzwischen in der Präzisions-Falle der Übergang $m_F = 0$ nach $m_F = +1$ induziert. Aus den so gemessenen Übergangsenergien lassen sich sowohl der g-Faktor der Elektronenhülle als auch der des Kerns mittels der Breit-Rabi-Formel extrahieren. Voraussetzung für eine Messung ist aber, dass die Lebensdauer der beteiligten Hyperfeinstruktur-niveaus lang genug ist ($\tau > 10$ min) und für die Übergänge Mikrowellenquellen zur Verfügung stehen. Da für Kerne höherer Ordnungszahl ($Z > 10 / \nu > 300$ GHz) zur Zeit praktisch keine bezahlbaren Mikrowellenquellen verfügbar sind, ist in diesen Fällen die zweite Bedingung nicht erfüllt. Für $Z > 30$ wird dann zusätzlich auch die Lebensdauer des oberen Hyperfein-Niveaus zu kurz.

²In unmittelbarer Kernnähe ist die kinetische Energie der Elektronen noch viel größer.

³Dieser kann z.B. an einem Isotop ohne Kernspin gemessen werden.

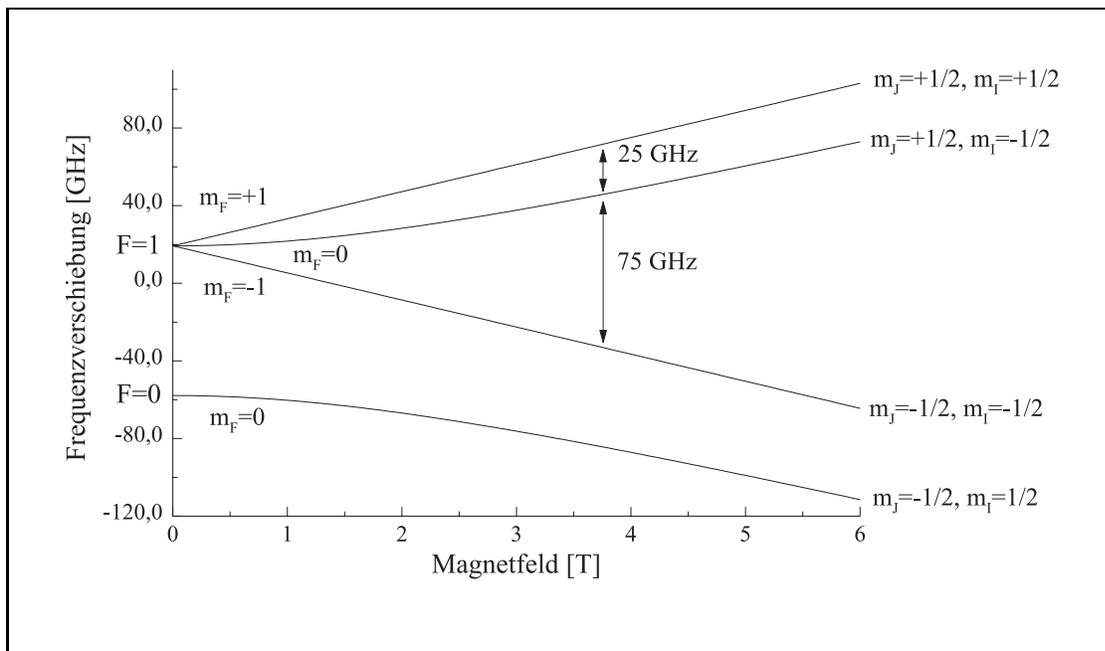


Abbildung 7.2: **Hyperfeinstrukturaufspaltung im Magnetfeld für wasserstoffähnlichen Kohlenstoff-13 ($^{13}\text{C}^{5+}$)**

Der Drehimpuls des Kerns und der Elektronenhülle beträgt jeweils $1/2$. Die Hyperfeinstrukturaufspaltung zwischen $F=0$ und $F=1$ beträgt $77,1$ GHz.

7.3.2 Realisierung der Messmethode für größere Ordnungszahlen

Bei hohen Kernladungszahlen sind die oberen Hyperfeinzustände für die in dieser Arbeit vorgestellte Messmethode zu kurzlebig. Damit Zeeman-Übergänge im unteren Hyperfeinniveau induziert werden können, muss vorausgesetzt werden, dass das untere Hyperfeinniveau einen Drehimpuls hat und so im Magnetfeld aufspaltet. Dies ist gewährleistet, wenn der zu vermessende Kern einen Spin von mindestens $1 \hbar$ oder sein magnetisches Moment das zum Proton entgegengesetzte Vorzeichen hat und zusätzlich die Elektronenhülle einen Drehimpuls von $1/2 \hbar$ besitzt⁴ (siehe Abbildung 7.3). Wird diese Aufspaltung gemessen, so kann bei bekanntem g-Faktor der Elektronenhülle, der z.B. aus einer Messung an einem Isotop mit Kernspin 0 oder der Theorie gewonnen werden kann, der g-Faktor des Kerns bestimmt werden.

Besonders interessant erscheinen die möglichen Messungen auch im Hinblick auf die Hyperfeinstrukturmessungen an wasserstoffähnlichem Blei und Wismut [See98, Kla94]. Die unbefriedigende Kenntnis der magnetischen Momente der Kerne der hochgeladenen Ionen schränkt nämlich die Interpretierbarkeit der Ergebnisse der Hyperfeinstrukturmessungen ein [See98].

⁴Es wäre auch denkbar mit einem Ion, dessen Hülle einen Drehimpuls von mindestens $1 \hbar$ hat, zu arbeiten. Dann muss der Kern nur einen Drehimpuls von $1/2 \hbar$ besitzen.

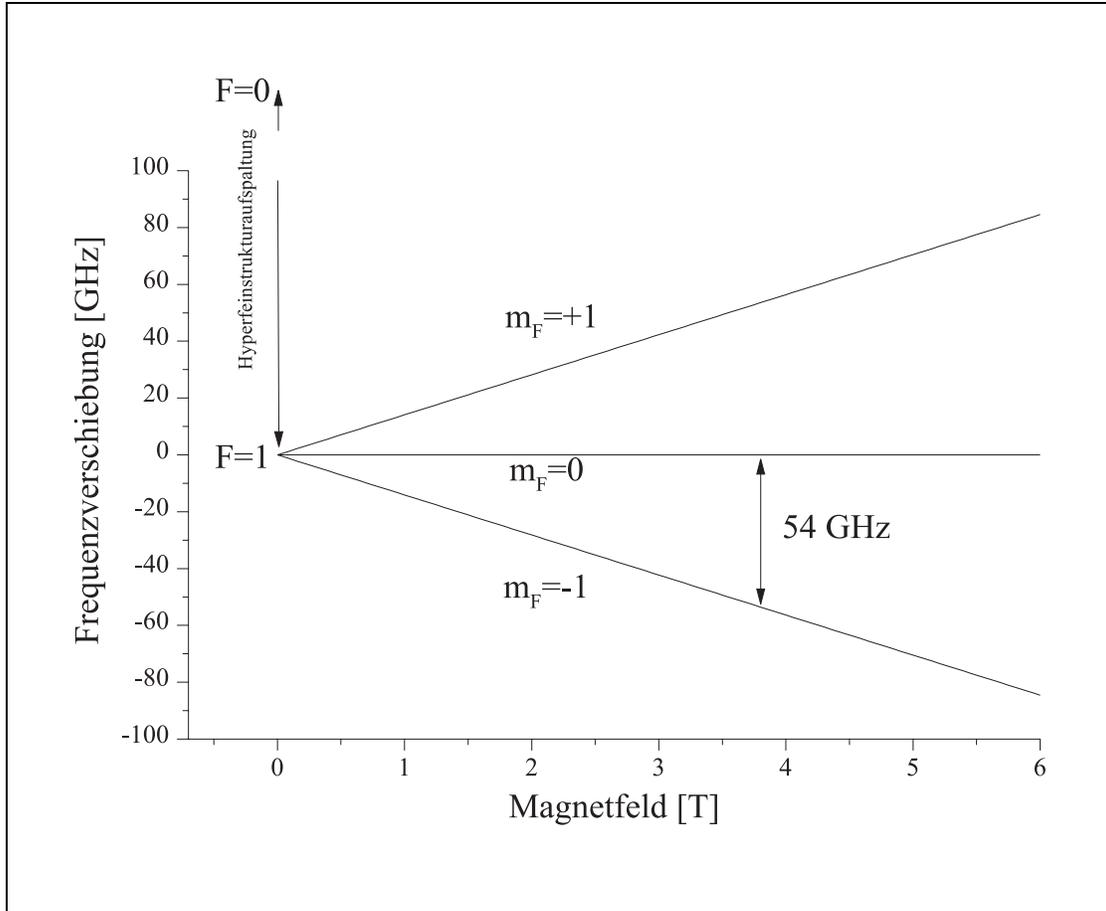


Abbildung 7.3: **Hyperfeinstrukturaufspaltung im Magnetfeld für wasserstoffähnliches Xenon ($^{129}\text{Xe}^{53+}$)**

Der Drehimpuls des Kerns und der Elektronenhülle beträgt jeweils $1/2$. Da das magnetische Moment des Kerns mit $-0,78\mu_k$, verglichen zu dem des Protons, negativ ist, liegt das $F=1$ -Niveau niedriger als das $F=0$ -Niveau. Daher kommt es im unteren der beiden Hyperfeinstrukturniveaus zu einer Aufspaltung im Magnetfeld. Für $F=1$ ist der g_F -Faktor mit 1 relativ groß. Die Hyperfeinstrukturaufspaltung zwischen $F=1$ und $F=0$ liegt im THz-Bereich.

7.4 Messung von Bindungsenergien in hochgeladenen Ionen

Penning-Fallen sind zur Zeit die mit am Abstand genauesten Massenspektrometer. Dabei werden freie Zyklotronfrequenzen ($\omega_c = q/m B$) von Ionen im Verhältnis zu Referenz-Ionen (z.B. $^{12}\text{C}^{6+}$) mit Genauigkeiten von bis zu $5 \cdot 10^{-11}$ bestimmt [DiF94, Dyc95].

Wegen der Möglichkeit einzelne Ionen zu kühlen und ihre Bewegungsfrequenzen extrem präzise zu detektieren, eignet sich unsere Penning-Falle hervorragend dazu, Massen von Ionen zu bestimmen. Weiterhin kann durch den Einsatz der drei Fallen das in der Präzisions-Falle befindliche Ion schnell gegen ein anderes Ion ausgetauscht werden. Dies reduziert zum einen die verbreiternden Effekte einer zeitlichen Magnetfelddrift, und ermöglicht es zum anderen, eine hohe Statistik zu erreichen. Da zusätzlich die Messung einer Zyklotronresonanz bei uns innerhalb des Fourier-Limits (80 s für eine Frequenzauflösung von 12 mHz / $\Delta\nu_c/\nu_c = 5 \cdot 10^{-10}$) durchgeführt werden kann, ist innerhalb kürzester Zeit eine sehr hohe Statistik erreichbar.

Bereits in unserem relativ inhomogenen Magnetfeld haben wir eine Auflösung in der Zyklotronfrequenz von 10^{-9} erreicht (siehe Abbildung 6.3). Ohne die von dem Nickel-Ring verursachten Magnetfeld-Inhomogenitäten dürfte ohne weiteres eine Auflösung von 10^{-10} möglich sein [Häf00]. Mit dieser Genauigkeit ist es bei schweren hochgeladenen Ionen möglich, Bindungsenergien auf 10 eV genau zu „wiegen“. Somit könnten Messungen der SMILETRAP-Kollaboration in Stockholm [Car95] ergänzt und verbessert werden. Dort werden Vielkörper-Rechnungen der Elektronenhülle mit Hilfe von Massenmessungen an hochgeladenen Ionen überprüft.

7.5 Seitenbandkühlen

Die vielfältigen Manipulationsmöglichkeiten von einzelnen Ionen und Ionenwolken ermöglichen eine Vielzahl von grundlegenden Untersuchungen in Penning-Fallen. Sowohl die Möglichkeit, Ionen in drei verschiedenen Fallen speichern zu können (sehr interessant für Massenmessungen), als auch einzelne Ionen im thermischen Gleichgewicht nachweisen zu können (wichtig für Präzisionsmessungen), sind einzigartig auf der Welt. Im Folgenden möchte ich nur stellvertretend auf Untersuchungen zum Seitenbandkühlen eingehen: Hier kann festgestellt werden, ob sich die thermische Energieverteilung der Zyklotronbewegung beim Seitenbandkühlen durch eine Verstimmung des Kopplungsfeldes gegenüber dem Seitenband verändert. Da sich die axiale Frequenz für einen positiven B_2 -Term mit einer Erhöhung der Zyklotronenergie auch erhöht, erniedrigt sich das Seitenband $\nu_+ - \nu_-$. Wird nun die Frequenz des koppelnden Wechselfeldes leicht erniedrigt gegenüber der Lage des Seitenbandes für verschwindende Zyklotronenergie gewählt, wird erreicht, dass, sobald die Zyklotronenergie zufällig verschwindet, keine Kopplung mehr stattfindet und das Ion kalt bleibt. Für größere Zyklotronenergien, also auch solche, die dem Erwartungswert nach Gleichung 5.3 entsprechen, ist die Kopplung stärker. Daher ist zu erwarten, dass das Ion bei niedrigeren Zyklotronenergien länger verweilt und so der Erwartungswert der Zyklotronenergie abgesenkt wird. Diese Methode ist ganz analog zum *coherent population trapping* mit der in Paris für Cäsium-Atome Temperaturen weit unterhalb des Photonen-Rückstoß-Limits von weniger als 3 nK erreicht werden

[Rei95]. Da die Seitenbandkühlung für die zur Zeit genauesten Massenmessungen eingesetzt wird [DiF94] und dort die Hauptlimitation die endliche Energie der Zyklotronbewegung ist, könnten diese Untersuchungen helfen, den systematischen Fehler bei diesen Messungen zu reduzieren.

Anhang A

A.1 Selbstwechselwirkung eines Ions in einem leitenden Zylinder

Hier wird gezeigt, dass die in Abschnitt 6.2.9 beschriebene Näherungslösung für die „Spiegelladungs-Korrekturen“ der radialen Bewegungsfrequenzen des Ions in ihrem Ergebnis schon exakt sind. Dazu wird das Potential der auf der Oberfläche des Zylinders induzierten Spiegelladungsdichte bestimmt.

Da das Potential auf dem Rand eines unendlich langen Zylinders aus leitendem Material konstant ist, induziert ein sich im Inneren befindliches Ion auf dem Rand des Zylinders eine Spiegelladungsdichte, die das Potential des Ions auf dem Rand ausgleicht. Für spezielle Anordnungen können die Randbedingungen wie in Abschnitt 6.2.9 durch Einführen einer Spiegelladung gewährleistet werden. Mit der dort vorgeschlagenen Konfiguration der Spiegelladung werden die Randbedingungen nur für $(r = r_0, z = 0)$ (Zylinderkoordinaten) erfüllt. Um sie jedoch auch für beliebige z einzuhalten, müssen unendlich viele, nicht trivial verteilte, Spiegelladungen eingeführt werden.

Daher ist es hier nötig, die Randbedingungen nach den Eigenfunktionen des Laplace-Operators zu entwickeln, um so die Reihendarstellung des Potentials der Spiegelladungen zu erhalten. Aus diesem induzierten Potential kann dann die Kraft berechnet werden, die vom Ion induziert auf es selbst wirkt. Die in der Standardliteratur angegebenen Reihendarstellungen des induzierten Potentials für unendlich lange Zylinder konvergieren nur sehr schlecht und sind damit unbrauchbar. Daher wird im Folgenden eine andere Reihendarstellung hergeleitet:

Befindet sich das Ion mit Ladung $q = 1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit am Ort $(a, 0, 0)$, erfüllt das Potential $\Phi(r, \phi, z)$ im Innern des Zylinders die folgende Poisson-Gleichung:

$$\Delta\Phi(r, \phi, z) = \delta^3(\vec{r} - (a, 0, 0)) . \quad (\text{A.1})$$

Dabei wurden wegen der Zylindersymmetrie Zylinderkoordinaten eingeführt und der Einfachheit halber $q4\pi\epsilon_0 = 1$ gewählt. Mit der speziellen Randbedingung $\Phi = 0$ für $|r| \rightarrow \infty$ ist die Lösung von Gleichung A.1 durch die einfache Greensche Funktion

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi + z^2}} \quad (\text{A.2})$$

gegeben. Zu dieser Lösung von A.1 können nun beliebige Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ hinzuaddiert werden. Die so erhaltenen Funktionen erfüllen dann weiterhin Gleichung A.1. Zu finden ist also die Funktion, die $\Delta\Phi = 0$ genügt und die

das durch Gleichung A.2 auf dem Rand des Zylinders induzierte Potential ausgleicht. In Zylinderkoordinaten lautet die Produktdarstellung der für $r = 0$ beschränkten Eigenfunktionen des Laplace-Operators:

$$u_{K,m}(r, \phi, z) = e^{\pm Kz} J_m(Kr)(a_{K,m} \cos(m\phi) + b_{K,m} \sin(m\phi)) . \quad (\text{A.3})$$

Hierbei sind $J_m(r)$ die Besselfunktionen m -ten Grades. Da dieses Funktionensystem $u_{K,m}(r, \phi, z)$ im Raum der 2-dimensionalen quadratintegrablen Funktionen ($L_2(2)$) vollständig ist, können nach diesen Funktionen alle $L_2(2)$ -Funktionen entwickelt werden. Wegen der Spiegelsymmetrie der Randbedingungen in ϕ können für die Entwicklung die in ϕ asymmetrischen Terme $b_{K,m} \sin(m\phi)$ weggelassen werden. Genauso ist es wegen der Spiegelsymmetrie in z sinnvoll $K \rightarrow i\kappa$ zu setzen¹, um den so entstandenen in z antisymmetrischen Anteil weglassen zu können. Dann vereinfacht sich Gleichung A.3 zu:

$$u_{\kappa,m}(r, \phi, z) = c_\kappa d_m \cos(\kappa z) J_m(i\kappa r) \cos(m\phi) . \quad (\text{A.4})$$

Die Indizes κ und m sind dabei ganzzahlig. Die Koeffizienten c_κ und d_m müssen nun so gewählt werden, dass durch das von den Spiegelladungen induzierte Potential Φ_s die Randbedingungen $\Phi(r_0, \phi, z) = \Phi_s(r_0, \phi, z) + G(r_0, \phi, z) = 0$ erfüllt:

$$\Phi_s(r_0, \phi, z) = \sum_{\kappa,m} c_\kappa d_m \cos(\kappa z) \cos(m\phi) = -G(r_0, \phi, z) . \quad (\text{A.5})$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass $J_m(i\kappa r_0)$, da es konstant ist, in die Konstanten absorbiert werden kann. Um wenigstens einen Teil der dazu notwendigen Integrationen analytisch durchführen zu können, können die sich durch Gleichung A.2 ergebenden Randbedingungen für $a \ll r_0$ etwas vereinfacht werden²:

$$G(r_0, \phi, z, a, 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi + z^2}} \approx -\frac{1 + a/r_0 \cos \phi}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} . \quad (\text{A.6})$$

Man erkennt, dass die ϕ -Abhängigkeit von der z -Abhängigkeit absepariert und schon die für Gleichung A.4 geeignete Form hat. Somit können die nach Gleichung A.5 zu fordernden Bedingungen an die d_m -Koeffizienten direkt abgelesen werden:

$$d_m = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ a/r_0 & m = 1 \\ 0 & m \geq 2 \end{cases} . \quad (\text{A.7})$$

Die Bedingungen an die z -Abhängigkeit und damit die Randbedingungen insgesamt können nun durch eine Entwicklung der z -Abhängigkeit in eine Fourier-Reihe erfüllt werden:

$$c_\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\kappa z)}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} dz . \quad (\text{A.8})$$

¹Durch diese Komplexifizierung erhält man ein für die Entwicklung der Randwerte sehr viel günstigeres Basissystem.

²Für typische Bewegungsamplituden von $100 \mu\text{m}$ gilt bei unserer Falle $a/r_0 \approx 0,03$. Damit ist die Näherung gerechtfertigt.

Dieses Integral ist nicht geschlossen lösbar und die Koeffizienten müssen mit Hilfe einer numerischen Integration bestimmt werden. Da die Entwicklung in eine Fourierreihe eine Periodizität erfordert, wird Gleichung A.5 nur für $-\pi < z < \pi$ erfüllt. Um die Randbedingungen in einem Intervall der Länge l zu erfüllen, muss in Gleichung A.5 einfach κ durch κ/l ersetzt werden. Innerhalb des Zylinders lautet somit das durch die Spiegelladungsdichte induzierte Potential:

$$\Phi_s(r, \phi, z) = \sum_{\kappa, m} c_\kappa d_m \cos(\kappa/l z) \cos(m\phi) \frac{J_m(i\kappa/l r)}{J_m(i\kappa/l r_0)}. \quad (\text{A.9})$$

Für genaue Berechnungen sollte $l \gtrsim 5r_0$ gewählt werden. Aus der Spiegelsymmetrie des Potentials in ϕ und z erkennt man, dass in diese Richtungen keine Kraft wirkt. In r -Richtung erfährt das Ion dagegen die Kraft:

$$\vec{F}(a) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V(a) = -\left. \frac{\partial \Phi_s(r, \phi, z)}{\partial r} \hat{e}_r \right|_{r=a}. \quad (\text{A.10})$$

Diese radiale Kraft wurde mit Mathematica Version 2.2.1 numerisch zu

$$\vec{F}(a) = 0,998 (10) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} a \hat{e}_r \quad (\text{A.11})$$

bestimmt. Hierbei wurden die Ladung und die korrekten SI-Einheiten wieder eingeführt. Der Fehler rührt von der in Gleichung A.6 gemachten Näherung her. Dies ist innerhalb der Fehlergrenzen das gleiche Ergebnis, wie es in Abschnitt 6.2.9 erhalten wurde (siehe Gleichung 6.14) und rechtfertigt daher die dort durchgeführte Abschätzung.

Literaturverzeichnis

- [Bar58] V. Bargmann, L. Michel and V.L. Telegdi
Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field
Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1958)
- [Bei93] P. Beiersdorfer, D. Knapp, R.E. Marrs, S.R. Elliott, and M.H. Chen
Structure and Lambshift of $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ levels in lithiumlike U^{89+} through neonlike U^{82+}
Phys. Rev. Lett. **71**, 3939 (1993)
- [Bei98] P. Beiersdorfer, A.L. Osterheld, J.H. Scofield, J.R. Crespo López-Urrutia, and K. Widmann
Measurement of QED an Hyperfine Splitting in the $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ X-Ray Transition in Li-like $^{209}Bi^{80+}$
Phys. Rev. Lett. **80**, 3022 (1998)
- [Bei99] Thomas Beier
Private Mitteilung
- [Bei00a] T. Beier, I. Lindgren, H. Persson, S. Salomonson, P. Sunnergren
Adapting high-Z methods for a g_j factor prediction for C^{5+}
preprint, zur Veröffentlichung in Hyperfine Interactions angenommen
- [Bei00b] T. Beier, I. Lindgren, H. Persson, S. Salomonson, P. Sunnergren, H. Häffner, N. Hermanspahn
The g_j -factor of an electron bound in a hydrogen-like ion
preprint, noch nicht veröffentlicht
- [Bey95] H. Beyer et al.
Measurement of the Ground State Lambshift of Hydrogenlike Uranium at the Electron Cooler of the ESR
Z. Phys. D **35**, 169 (1995)
- [Blo48] N. Bloembergen, E.M. Purcell and R.V. Pound
Relaxation Effects in Nuclear Magnetic Resonance Absorption
Phys. Rev. **73**, 679 (1948)
- [Blu97] S.A. Blundell, K.T. Cheng, J. Sapirstein
Radiative corrections in atomic physics in the presence of perturbing potentials
Phys. Rev. A **55**, 1857 (1997)

- [Bou85] David G. Boulware, Lowell S. Brown, and Taejin Lee
Apparatus-dependent contributions to $g-2$?
Phys. Rev. D **32**, 729 (1985)
- [Bre28] G. Breit
Nature **122**, 649 (1928)
- [Bre69] D. Brenner
Frequency Shifts in a Motional Field-Averaging System
Phys. Rev. **185**, 26 (1969)
- [Bro82] Lowell S. Brown, Gerald Gabrielse
Precision spectroscopy of a charged particle in an imperfect Penning trap
Phys. Rev. A **25**, 2423 (1982)
- [Bro84a] Lowell S. Brown
Line Shape for a Precise Measurement of the Electron's Magnetic Moment
Phys. Rev. Lett. **52**, 2013 (1984)
- [Bro84b] Lowell S. Brown
Geonium lineshape
Ann. of Phys. **159**, 62 (1985)
- [Bro85] Lowell S. Brown, Gerald Gabrielse, Kristian Helmeron, Joseph Tan
Cyclotron motion in a microwave cavity: Lifetime and frequency shifts
Phys. Rev. A **32**, 3204 (1985)
- [Bro86a] L.S. Brown and G. Gabrielse
Geonium Theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap
Rev. Mod. Phys. **58**, 233 (1986)
- [Bro86b] Lowell S. Brown, Kristian Helmeron, and Joseph Tan
Cyclotron motion in a spherical microwave cavity
Phys. Rev. A **34**, 2638 (1986)
- [Bru99] S. Brunner, T. Engel, A. Schmitt and G. Werth
Helium and Deuterium mass ratios in a room temperature Penning trap
AIP Conference Proceedings **457**, 125 (1999)
- [Car95] C. Carlberg et al.
The SMILETRAP Facility
Phys. Scr. **T59**, 196 (1995)
- [Che95] M.H. Chen, K.T. Cheng, W.R. Johnson, J. Sapirstein
Relativistic configuration-interaction calculations for the $n=2$ states of lithiumlike ions
Phys. Rev. A **52**, 266 (1995)
- [Coh77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe
Quantum Mechanics
Wiley, New York, 1977

- [Com79] F. Combley, F.J.M. Farley, J.H. Field and E. Picasso
g-2 Experiments as a Test of Special Relativity
Phys. Rev. Lett. **42**, 1383 (1979)
- [Cor90] Eric A. Cornell, Robert M. Weisskoff, Kevin R. Boyce, and David E. Pritchard
Mode coupling in a Penning trap: π pulses and a classical avoided crossing
Phys. Rev. A **41**, 312 (1990)
- [Deh68] H.G. Dehmelt and F.L Walls
"Bolometric" Technique for the rf Spectroscopy of Stored Ions
Phys. Rev. Lett. **21**, 127 (1968)
- [Deh86] H. Dehmelt
Continuous Stern-Gerlach effect: Principle and idealized apparatus
Proc. Natl. Acad. Sci. USA **53**, 2291 (1986)
- [Deh90] H. Dehmelt
Experiments with an isolated subatomic particle at rest
Rev. Mod. Phys. **62**, 525 (1990)
- [Deh95] Hans Dehmelt
Experiments on the Structure of an Individual Elementary Particle
Science Vol. **247**, (1990)
- [Die97] Michael Diederich
Optimierung einer Penning-Ionenfalle zur Messung des elektronischen g-Faktors hochgeladener wasserstoffähnlicher Ionen
Diplomarbeit, Mainz 1997
- [Die99] M. Diederich, H. Häffner, N. Hermanspahn, M. Immel, H.-J. Kluge, R. Ley, R. Mann, S. Stahl, W. Quint, J. Verdú, and G. Werth
The g-factor of hydrogen-like ions
AIP Conference Proceedings **457**, 43 (1999)
- [DiF94] F. DiFilippo, V. Natarajan, K.R. Boyce, D.E. Pritchard
Accurate atomic masses for fundamental metrology
Phys. Rev. Lett. **73**, 1481 (1994)
- [DiF95] F. DiFilippo, V. Natarajan, M. Bradley, F. Palmer, D.E. Pritchard
Accurate Atomic Mass Measurements from Penning Trap Comparisons of Individual Ions
Physica Scripta **T59**, 144 (1995)
- [Dyc77] R.S. Van Dyck, Jr., P.B. Schwinberg and H.G. Dehmelt
Precise Measurements of the Axial, Magnetron, Cyclotron, and Spin-Cyclotron-Beat Frequencies on an Isolated 1-meV Electron
Phys. Rev. Lett. **38**, 310 (1977)

- [Dyc86a] R.S. Van Dyck, Jr., F.L. Moore, D.L. Farnham and P.B. Schwinberg
Variable magnetic bottle for precision geonium experiments
Rev. Sci. Instr. **57**, 593 (1986)
- [Dyc86b] R.S. Van Dyck, Jr., P.B. Schwinberg and H.G. Dehmelt
Electron magnetic moment from geonium spectra: Early experiments and background concepts
Phys. Rev. D **34**, 722 (1986)
- [Dyc87a] R.S. Van Dyck, Jr., P.B. Schwinberg and H.G. Dehmelt
New high-precision comparison of electron and positron g factors
Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987)
- [Dyc87b] R.S. Van Dyck, Jr., F.L. Moore, D.L. Farnham, P.B. Schwinberg, and H.G. Dehmelt
Microwave-cavity modes directly observed in a Penning trap
Phys. Rev. A **36**, 3455 (1987)
- [Dyc89] R.S. Van Dyck, Jr., F.L. Moore, D.L. Farnham, and P.B. Schwinberg
Number dependency in a compensated Penning trap
Phys. Rev. A **40**, 6308 (1989)
- [Dyc90] R.S. VanDyck
Anomalous Magnetic Moment of Single Electrons and Positrons: Experiment
in "Quantum Electrodynamics", T. Kinoshita (Ed.), World Scientific, Singapore (1990)
- [Dyc95] R.S. Van Dyck Jr., D.L. Farnham, P.B. Schwinberg
Precision Mass Measurements in the UW-PTMS and the Electron's "Atomic Mass"
Physica Scripta **T59**, 134 (1995)
- [Dyc99a] R.S. Van Dyck Jr., D.L. Farnham, S.L. Zafonte, P.B. Schwinberg
High Precision Penning Trap Mass Spectroscopy and a New Measurement of the Proton's "Atomic Mass"
AIP Conference Proceedings **457**, 101 (1999)
- [Dyc99b] R.S. Van Dyck Jr., D.L. Farnham, S.L. Zafonte, and P.B. Schwinberg
Ultrastable superconducting magnet system for a Penning trap mass spectrometer
Rev. of Sci. Instr. **70**, 1665 (1999)
- [Far95] D. L. Farnham, R. S. Van Dyck Jr., and P.B. Schwinberg
Determination of the electron's atomic mass and the proton/electron mass ratio via Penning trap mass spectroscopy
Phys. Rev. Lett. **75**, 3598 (1995)
- [Fen96] X. Feng, M. Charlton, M. Holtzscheiter, R.A. Lewis, Y. Yamazaki
Tank circuit model applied to particles in a Penning trap
J. Appl. Phys. **79**, 8 (1996)

- [Fis84] E. Fischbach and N. Nakagawa
Apparatus-dependent contributions to $g-2$ and other phenomena
Phys. Rev. D **30**, 2356 (1984)
- [Gab88] G. Gabrielse and J. Tan
Self-shielding superconducting solenoid systems
J. Appl. Phys. **63**, 5143 (1988)
- [Gab89] G. Gabrielse, L. Haarsma, S.L. Rolston
Open-endcap Penning traps for high precision experiments
International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes **88**, (1989)
319
- [Gab95] G. Gabrielse, D. Phillips, W. Quint, H. Kalinowsky, G. Rouleau, and W. Jhe
Special relativity and the single antiproton: Fortyfold improved comparison of \bar{p} and p charge-to-mass ratios
Phys. Rev. Lett. **74**, 3544 (1995)
- [Gab98] Gerald Gabrielse
Private Mitteilung
- [Ger22a] W. Gerlach und O. Stern
Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld
Zeitschrift für Physik **9**, 349 (1922)
- [Ger22b] W. Gerlach und O. Stern
Das magnetische Moment des Silberatoms
Zeitschrift für Physik **9**, 353 (1922)
- [Gro71] H. Grotch and R.A. Hegstrom
Hydrogenic Atoms in a Magnetic Field
Phys. Rev. **4**, 59 (1971)
- [Gus98] Martin G.H. Gustavsson and Ann-Marie Mårtensson-Pendrill
Need for remeasurements of nuclear magnetic dipole moments
Phys. Rev. A **58**, 3611 (1998)
- [Häf98] Hartmut Häffner
Präparation einzelner hochgeladener Ionen in einer Penning-Falle
Diplomarbeit, Mainz 1998
- [Häf00] H. Häffner, N. Hermanspahn, P. Indelicato, H.-J. Kluge, E. Lindroth, V. Natarajan, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú and G. Werth
Testing Atomic Structure Theories with High-Accuracy Mass Measurements on Highly Charged Ions
preprint, zur Veröffentlichung in Hyperfine Interactions angenommen
- [Her96] Nikolaus Hermanspahn
Aufbau eines Tieftemperaturkryostaten zum Betrieb einer Penningfalle
Diplomarbeit, Mainz 1996

- [Her99] Nikolaus Hermanspahn
Das magnetische Moment des Elektrons gebunden in wasserstoffartigem Kohlenstoff (C^{5+})
 Dissertation, Mainz 1999
- [Her00] N. Hermanspahn, H. Häffner, H.-J. Kluge, S. Stahl, W. Quint, J. Verdú, and G. Werth
Observation of the Continuous Stern-Gerlach Effect on an Electron Bound in an Atomic Ion
 Phys. Rev. Lett. **84**, 427 (2000)
- [Hof84] B. Hoffmann, G. Baur, J. Speth
Effects of Nuclear Polarizability on Isotope Shifts in Electronic Atoms
 Z. Phys. A **315**, 57 (1984)
- [Hug99] V.W. Hughes and T. Kinoshita
Anomalous g values of the electron and muon
 Rev. Mod. Phys. **71**, 133 (1999)
- [Imm98] Marcel Immel
Aufbau einer Mikrowellenapparatur zur Spektroskopie an einzelnen gespeicherten Ionen
 Diplomarbeit, Mainz 1998
- [Ion88] D.C. Ionescu, J. Reinhardt, B. Müller, W. Greiner, G. Soff
Nonlinear Extensions of the Dirac Equation and their Implications in QED
 Phys. Rev. A **38**, 616 (1988)
- [Joh80] C.E. Johnson and H.G. Robinson
 g_j Factor of an Ion: Determination of $g_j(^4H^+, 1^2S_{1/2})/g_j(^4H^+, 2^3S_1)$
 Phys. Rev. Lett. **45**, 250 (1980)
- [Lin98] I. Lindgren, H. Persson, S. Salomonson, and P. Sunnergren
Analysis of the electron self-energy for tightly bound electrons
 Phys. Rev. A **58**, 1001 (1998)
- [Lut71] O. Lutz and G. Stricker
The magnetic moment of ^{207}Pb and the shielding of lead ions by water
 Physics Letters **35A**, 397 1971
- [Kin90] T. Kinoshita
Theory of the anomalous magnetic moment of the electron - numerical approach
 Quantum Electrodynamics, T. Kinoshita (Ed.), World Scientific, Singapore (1990)
- [Kla94] I. Klaft et al.
Precision laser spectroscopy of the ground state hyperfine splitting of hydrogenlike $^{209}\text{Bi}^{82+}$
 Phys. Rev. Lett. **73**, 2425 (1994)

- [Kre99] M. Kretschmar
A quantum mechanical model of Rabi oscillations between two interacting harmonic oscillator modes and the interconversion of modes in a Penning trap
AIP Conference Proceedings **457**, 242 (1999)
- [Mar95] R.E. Marrs, S.R. Elliott, and Th. Stöhlker
two-electron contributions to the ground-state energy of heliumlike ions
Phys. Rev. A **52**, 3577 (1995)
- [Mar98] G. Marx, G. Tommaseo, and G. Werth
Precise g_j and g_I -factor measurements of Ba^+ isotopes
Eur. Phys. J. **D 4**, 279 (1998)
- [Men55] H. Mendlowitz and K.M. Case
Double Scattering of Electrons with Magnetic Interaction
Phys. Rev. **97**, 33 (1955)
- [Mit95] R. Mittleman, H. Dehmelt, and S. Kim
Cold Kilo-Electron Ball as Probe for Charge-Proportional Cyclotron Frequency Shift in a Penning Trap Cavity
Phys. Rev. Lett. **75**, 2839 (1995)
- [Mit99] R.K. Mittleman, I.I. Ioannou, and H.G. Dehmelt
Reducing the systematics in the electron $g-2$ measurement
AIP Conference Proceedings **457**, 13 (1999)
- [Nat93] V. Natarajan, K.R. Boyce, F. DiFilippo, and D.E. Pritchard
Precision Penning trap comparison of nondoublets: Atomic masses of H, D, and the neutron
Phys. Rev. Lett. **71**, 1998 (1993)
- [New54] R. G. Newton
Radiative Effects in a Constant Field
Phys. Rev. **96**, 523 (1954)
- [New78] D. Newman, G.W. Ford, A. Rich, and E. Sweetman
Precision Experimental Verification of Special Relativity
Phys. Rev. Lett. **40**, 1355 (1978)
- [Nis99] NIST Web-site
CODATA - Latest values of the constants
[http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html? /](http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html?/) (1999)
- [Per96] H. Persson, I. Lindgren, L.N. Labzowsky, G. Plunien, T. Beier, G. Soff
Second-order self-energy-vacuum-polarisation contributions to the Lamb shift in highly charged few-electron ions
Phys. Rev. A **54**, 2805 (1996)
- [Per97] H. Persson, S. Salomonson, P. Sunnergren, I. Lindgren
Radiative corrections to the electron g -factor in H-like ions
Phys. Rev. A **56**, R2499 (1997)

- [Pur46] E.M. Purcell
Spontaneous Emmission Probabilities at Radio Frequencies
Phys. Rev. **69**, 681 (1946)
- [Qui95] W. Quint
The g_j -factor of hydrogenic ions
Physica Scripta **T59**, 203 (1995)
- [Qui98] W. Quint et al.
HITRAP: A Facility for High-Accuracy Experiments with Trapped Highly Charged Ions at GSI
GSI Proposal 1998
- [Rei95] J. Reichel, F. Bardou, M. Ben Dahan, E. Peik, S. Rand, C. Salomon, and C. Cohen-Tannoudji
Raman cooling of cesium below 3 nK: New approach inspired by Lévy flight statistics
Phys. Rev. Lett. **75**, 4575 (1995)
- [Sap99] J. Sapirstein
Relativistic and QED effects in few-electron high-Z systems
AIP Conference Proceedings **457**, 22 (1999)
- [See98] P. Seelig et al.
Ground State Hyperfine Splitting of Hydrogenlike $^{207}\text{Pb}^{81+}$ by Laser Excitation of a Bunched Ion Beam in the GSI Experimental Storage Ring
Phys. Rev. Lett. **81**, 4824 (1998)
- [Sha98] V.M. Shabaev et al.
Transition energy and lifetime for the ground-state hyperfine splitting of high-Z lithiumlike ions
Phys. Rev. A **57**, 149 (1998)
- [Sha99] V.M. Shabaev, A.N. Artemyev, and V.A. Yerokhin
QED and Nuclear Effects in Hyighly Charged Ions
AIP Conference Proceedings **457**, 22 (1999)
- [Sho38] W. Shockley
J. Appl. Phys. **9**, 635 (1938)
- [Sta98] Stefan Karl-Heinz Stahl
Aufbau eines Experimentes zur Bestimmung elektronischer g -Faktoren einzelner wasserstoffähnlicher Ionen
Dissertation, Mainz 1998
- [Ste96] T. Steimle and G. Alber
Continuous Stern-Gerlach effect and the quantum-state diffusion model of state reduction
Phys. Rev. A **53**, 1982 (1996)

- [Stö93] Th. Stöhlker et al.
Ground-state Lamb shift for hydrogenlike uranium measured at the ESR storage ring
Phys. Rev. Lett. **71**, 2184 (1993)
- [Tie77] J.S. Tiedemann and H.G. Robson
Determination of $g_j(^1\text{H}, 1^2\text{S}_{1/2})/g_s(e)$: Test of Mass-Independent Corrections
Phys. Rev. Lett. **39**, 602 (1977)
- [Tom98] M. Tomaselli, T. Kühl, P. Seelig, C. Holbrow, E. Kankeleit
Hyperfine splittings of hydrogenlike ions and the dynamic-correlation model for one-hole nuclei
Phys. Rev. C **58**, 1524 (1998)
- [Tön96] Manfred Tönges
Aufbau einer Mikrowellen-Anlage zur Spektroskopie an wasserstoffähnlichen Ionen in einem Penningkäfig
Diplomarbeit, Mainz 1996
- [Wat76] S.F. Watanabe and H.G. Robinson
Motional narrowing of Zeeman resonance lineshapes
I. Theoretical development J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. **10**, 931 (1977)
- [Win75] D.J. Wineland, H.G. Dehmelt
Principles of the Stored Ion Calorimeter
Journal of Applied Physics **46**, 919 (1975)
- [Win99] H. Winter et al.
Bound Electron g -Factor in Hydrogen-Like Bismuth
GSI Scientific Report 1998, 87 (1999)

Danksagungen

Nun möchte ich mich an der meistgelesenen Stelle einer Arbeit für die vielen Hilfestellungen bedanken:

Durch viele fruchtbare Diskussionen über die kleinen und großen "Problemchen" innerhalb der Physik konnte ich vor allem von Nikolaus Hermanspahn, Wolfgang Quint, Vasant Natarajan, Wolfgang Alt, Thomas Beier und Günther Werth profitieren. Der Aufbau des Experimentes wurde im Wesentlichen von Stefan Stahl, Wolfgang Quint, Manfred Tönges, Michael Diederich und Nikolaus Hermanspahn geleistet. Ohne sie wäre diese Arbeit undenkbar gewesen. Zusammen mit Marcel Immel und José Verdú möchte ich mich für ihre Arbeit am Experiment bedanken.

Besonders möchte ich mich auch bei Mr. Spuddy Gun und seinen Freunden Wolfgang Alt, Michael Block, Gerrit Marx und Peter Seibert für ihre Beiträge zum Umweltschutz bedanken. Erwähnenswert ist sicherlich auch das De- und Eskalations-Team um Mike, Pete und Armin, dass unermüdlich dafür sorgte, dass ich nicht zu tief in unwichtigen Details herumwühlte und stattdessen mein Gedächtnis trainierte.

Nicht zuletzt möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Günther Werth und Herrn Prof. Hans-Jürgen Kluge für die Organisation der Geldmittel bedanken. Günther Werth sorgte außerdem mit seiner außergewöhnlichen Persönlichkeit für ein äußerst angenehmes Arbeitsklima innerhalb der Arbeitsgruppe.

Zum Schluss möchte ich mich auch bei meiner Mutter, meinem Bruder, Lothar, Kristina, Bohli und Patrick für die Unterstützung „daheim“ bedanken.

Und das alles ist meiner Freundin Julianna gewidmet.