

Polarisationseffekte in semileptonischen Zerfällen schwerer Quarks

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades

„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik der
Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

MARCUS MAUSER
geboren in Heidelberg

MAINZ 2001

UNIVER
SITÄT 
MAINZ

Datum der mündlichen Prüfung: **07.05.2001**

“Had a dog and her name was Quark (three times),
she ran faster than light, had a four-part bark!
Hey, Quark...lemme hear you bark!”

“Spacewarp travel on an average day (three times),
meet ol’ Quark goin’ back the other way!
Hey, Quark...lemme hear you bark!”

“Quark knew e equals mc squared (three times),
mighta made a difference if Quark had cared!
Hey, Quark...lemme hear you bark!”

“Quark chased every relativity spike (three times),
never met a constant she didn’t like!
Hey, Quark...lemme hear you bark!”

“When Quark died it was somethin’ to see (three times),
she went nova in four-part harmony...
Hey, Quark...lemme hear you bark!”

folksong, set to traditional tune,
“Had a Dog and His Name Was Blue”
Suzette Haden Elgin, *The Judas Rose*,
1987

Zusammenfassung

Die QCD-Strahlungskorrekturen in $O(\alpha_s)$ und die elektroschwachen Strahlungskorrekturen in $O(\alpha)$ werden für drei spinunabhängige und fünf spinabhängige Helizitäts-Strukturfunktionen berechnet, die die Winkelverteilung im Zerfall des polarisierten Topquarks in ein Bottomquark und ein intermediäres W-Boson beschreiben, welches entweder leptonisch ($W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$) oder hadronisch ($W^+ \rightarrow q_I + \bar{q}_i$) weiter zerfällt. Sowohl die Polarwinkelverteilung der Spin-Impuls-Korrelation zwischen dem Polarisationsvektor des Topquarks und dem Impulsvektor des W-Bosons, als auch die Winkelverteilung der Impuls-Impuls-Korrelation zwischen dem Impuls des W-Bosons und dem Impuls des Lepton- bzw. Quarkpaars werden durch diese acht Helizitäts-Strukturfunktionen bestimmt. Die Winkelverteilungen ergeben sich aus einem Produktansatz, d.h. der hadronische Zerfall $t(\uparrow) \rightarrow W^+ + X_b$ wird im Ruhesystem des Topquarks analysiert, während der nachfolgende Zerfall $W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ bzw. $W^+ \rightarrow q_I + \bar{q}_i$ im Ruhesystem des intermediären W-Bosons diskutiert wird. Unter Berücksichtigung der endlichen Masse des Bottomquarks werden die Strahlungskorrekturen in $O(\alpha_s)$ und $O(\alpha)$ in analytischer Form angegeben. Im Grenzfall verschwindender Bottommasse reduzieren sich die Ausdrücke für die QCD-Strukturfunktionen auf kompakte Formen. Der Vollständigkeit halber werden in Hinsicht auf andere Anwendungen, z.B. für den inklusiven Zerfall $B \rightarrow D_s + X$ oder den polarisierten Zerfall $t(\uparrow) \rightarrow H^+(\uparrow) + b$, zusätzlich eine spinunabhängige und eine spinabhängige skalare Strukturfunktion berechnet.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
Abbildungsverzeichnis	vii
Tabellenverzeichnis	ix
1 Einführung	1
1.1 Das Topquark und der Zerfall $t(\uparrow) \rightarrow b + W^+(\uparrow)$	1
1.2 Die Methoden und der Aufbau der Arbeit	6
1.3 Die Helizitätsprojektoren	7
1.3.1 Die Darstellungen des Lepton- und Hadrontensors	7
1.3.2 Die kovariante Darstellung der Projektoren	16
1.4 Die differentielle Zerfallsrate	18
2 Bornsche Näherung	23
2.1 Der Hadrontensor der Bornschen Näherung	23
2.2 Der Phasenraum für einen Zwei-Körper-Zerfall	26
2.3 Die Kontraktion mit den Helizitätsprojektoren	28
2.4 Numerische Ergebnisse	32
3 Die elektroschwachen Strahlungsrekturen	35
3.1 Der Hadrontensor der Bremsstrahlung	35
3.2 Der Phasenraum für einen Drei-Körper-Zerfall	41
3.3 Die Parametrisierung	47
3.4 Die Integration über die Energie des Photons	49
3.5 Die IR-konvergenten Integraltypen	52
3.5.1 Die Grundintegrale und die Koeffizientenfunktionen	52
3.5.2 Der Integraltyp \mathcal{L}_0	55
3.5.3 Der Integraltyp \mathcal{L}_1	56
3.5.4 Der Integraltyp \mathcal{L}_2	57
3.6 Die Integration des Soft-Photon-Faktors	58
3.6.1 Die Berechnungsmethode des Soft-Photon-Faktors	58
3.6.2 Die Bestandteile des Soft-Photon-Faktors	64
3.7 Die Vertexkorrekturen	65
3.7.1 Die Zerlegung in Strukturfunktionen	65
3.7.2 Die Strukturfunktionen der Vertexkorrektur	69

3.7.3	Die Strukturbestandteile	73
3.7.4	Die UV-Divergenzen der Strukturfunktionen	75
3.8	Die Einschleifen-Integrale	76
3.8.1	Die Methode von Passarino-Veltman	76
3.8.2	Spezialfälle im Grenzfall kleiner Massen	80
3.8.3	Die Berechnung von $A_0(M_1)$	81
3.8.4	Die Berechnung von $B_0(m_1, M_0, M_1)$	81
3.8.5	Die Berechnung von $B_\mu(m_1, M_0, M_1)$	82
3.8.6	Die Berechnung von $B_{\mu\nu}(m_1, M_0, M_1)$	83
3.8.7	Die Berechnung von $C_\mu(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2)$	84
3.8.8	Die Berechnung von $C_{\mu\nu}(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2)$	86
3.9	Die Selbstenergie der Fermionen	89
3.10	Die Selbstenergie der Bosonen	93
3.11	Die Renormierung	94
3.11.1	Der Renormierungsfaktor δ_f	94
3.11.2	Der Renormierungsfaktor δ_W	95
3.11.3	Der Counterterm δ_{CT}	97
3.11.4	Das α -Renormierungsschema	98
3.11.5	Das G_F -Renormierungsschema	99
3.12	Numerische Ergebnisse	99
4	Die QCD-Strahlungskorrekturen	103
4.1	Der Hadrontensor der Bremsstrahlung	103
4.2	Die Phasenraumintegration	105
4.3	Der Soft-Gluon-Faktor	107
4.4	Die QCD-Selbstenergie der Quarks	108
4.5	Die Renormierung	109
4.6	Die Vertexkorrektur	112
4.6.1	Die renormierte Vertexkorrektur	112
4.6.2	Vergleich mit Gounaris & Paschalis	117
4.7	Numerische Ergebnisse	118
5	Die kompletten Strahlungskorrekturen	121
5.1	Die QCD-Raten für masselose Bottomquarks	121
5.2	Numerische Ergebnisse	125
5.3	Zusammenfassung und Ausblick	126
	Literaturverzeichnis	134
A	Die Feynman-Regeln	135
A.1	Allgemeines	135
A.2	Externe Linien	135
A.3	Die Propagatoren	136
A.4	Die Quark-Boson-Vertices	136
A.5	Die Drei-Bosonen-Vertices	138
B	Das Standardintegral	139

C Die Feynman-Parametrisierung	141
D Die Grundintegrale	142
D.1 Definitionen	142
D.2 Die Integrale vom Typ $\mathcal{R}_{(m,n)}$	144
D.3 Die Integrale vom Typ $\mathcal{R}_{(n)}$	145
D.4 Die Integrale vom Typ $\mathcal{S}_{(m,n)}$	145
D.5 Die Integrale vom Typ $\mathcal{S}_{(n)}$	146
D.6 Die Integrale vom Typ $\mathcal{T}_{(m,n)}$	146
D.7 Die Integrale vom Typ $\mathcal{T}_{(n)}$	147
E Die Koeffizientenfunktionen	148
E.1 Die totale Rate $i = U + L$	148
E.2 Die polarisierte totale Rate $i = U^P + L^P$	148
E.3 Die transversal unpolarisierte Rate $i = U$	150
E.4 Die polarisierte transversal unpolarisierte Rate $i = U^P$	151
E.5 Die longitudinale Rate $i = L$	152
E.6 Die polarisierte longitudinale Rate $i = L^P$	153
E.7 Die vorwärts-rückwärts-asymmetrische Rate $i = F$	155
E.8 Die polarisierte asymmetrische Rate $i = F^P$	156
E.9 Die skalare Rate $i = S$	157
E.10 Die polarisierte skalare Rate $i = S^P$	157
E.11 Die polarisierte Interferenz-Rate $i = I^P$	158
E.12 Die polarisierte paritäts-asymmetrische Rate $i = A^P$	160
F Zur Geschichte der Polarisation	161
F.1 Die Polarisation des elektromagnetischen Feldes	161
F.2 Die Polarisation in der Quantenmechanik	164
F.2.1 Die Polarisation eines masselosen Spin-Eins Teilchens	165
F.2.2 Die Dichtematrix	166
G Formelsammlung	169
G.1 Die „Goldene Regel“ für Zerfälle	169
G.2 Die Dirac-Gleichung	170
G.2.1 Die Pauli-Matrizen und ihre Eigenschaften	170
G.2.2 Die Dirac-Matrizen	170
G.2.3 Die Gell-Mann-Matrizen	171
G.2.4 Die CKM-Matrix	172
G.2.5 Die Dirac-Gleichung	172
G.3 Die Rechenregeln	173
G.3.1 Spuren über Gamma-Matrizen	173
G.3.2 Die Kontraktionen über Tensoren	173
G.3.3 Die Clifford-Algebra in D Dimensionen	174
G.3.4 Die Adjunktion von Gamma-Matrizen	174
G.4 Vollständige kovariante Entwicklung	175
G.5 Spezielle Funktionen	175
G.5.1 Allgemeines	175
G.5.2 Die Gamma-Funktion	175

G.5.3 Die Dilogarithmus-Funktion	176
H Physikalische Konstanten	179

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Entdeckung des Topquarks	5
1.2	Feynman-Diagramme für den Zerfall des Topquarks	8
1.3	Der Zerfall des Topquarks und die Definition der Winkel	20
1.4	Winkelverteilung der differentiellen Zerfallsrate	21
2.1	Feynman-Diagramm der Bornschen Näherung	23
2.2	Die Spinkonfigurationen	30
2.3	Die Breit-Wigner-Verteilung für die W -Bosonbreite	32
3.1	Feynman-Diagramme der elektroschwachen Bremsstrahlung	37
3.2	Darstellung des Phasenraums	43
3.3	Der Hadrontensor nach der Integration über die Photonenergie	51
3.4	Die Berechnungsmethode der IR-Divergenz	60
3.5	Die elektroschwachen Vertexdiagramme	70
3.6	Der Impulsfluß bei der Vertexkorrektur	76
3.7	Die Selbstenergie der Quarks	89
4.1	Feynman-Diagramme der QCD-Bremsstrahlungskorrektur	103
4.2	Die QCD-Selbstenergie der Quarks	108
4.3	Die Vertexkorrektur durch virtuelle Gluonen	113
4.4	Die Symmetrie der QCD-Strukturfunktionen der 1-Loopkorrektur	114
5.1	Longitudinale Polarisierung des Topquarks	127
5.2	Transversale Polarisierung des Topquarks	127
G.1	Die Dilogarithmus-Funktion	177

Tabellenverzeichnis

1.1	Das Standardmodell der Elementarteilchen	2
1.2	Die geplanten $t\bar{t}$ -Fabriken	3
1.3	Die Helizitätsprojektoren	11
1.4	Die kartesischen Komponenten des Hadrontensors $H^{\mu\nu}$	15
2.1	Gegenüberstellung der Raten in Bornscher Näherung	31
2.2	Numerische Auswertung der Raten in Bornscher Näherung	32
3.1	Die Integraltypen	53
3.2	Die Intergraltypen der Helizitäts-Strukturfunktionen	56
3.3	Die Koeffizienten $G_{i,j}$ der Einschleifenkorrekturen	68
3.4	Die Strahlungskorrekturen im α - und G_F -Schema	100
4.1	Die Indizes der QCD-Koeffizientenfunktionen	106
4.2	Die Koeffizienten der QCD-Vertexkorrektur	115
4.3	Die Koeffizienten der QCD-Vertexkorrektur im Grenzfall verschwindender Bottommasse	117
4.4	Numerische Beiträge der QCD-Einschleifenkorrektur	119
4.5	Numerische Beiträge der QCD-Korrekturen zur Zerfallsrate	120
H.1	Ladungen und Massen der Quarks	179

Kapitel **1**

Einführung

1.1 Das Topquark und der Zerfall $t(\uparrow) \rightarrow b + W^+(\uparrow)$

Die Entdeckung des Topquarks (1995) durch die CDF- und DØ-Kollaborationen am Tevatron des Fermilab [1,2] mit einer Masse $m_t = 174.3 \pm 5.1 \text{ GeV}/c^2$ [3] stellt den vorläufigen Höhepunkt in der Konsolidierung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik dar.

Der seit 1930 entdeckte „Teilchenzoo“ von Baryonen und Mesonen konnte nach Einführung des sogenannten „Achtfachen Weges“ durch GELL-MANN und NE’EMAN 1961 nach Ladung und Strangeness in Multipletts geordnet werden [4]. Zum Verständnis dieses „Periodensystems“ der Elementarteilchen postulierten GELL-MANN und ZWEIG 1964 das Quarkmodell, nach dem sich jedes Baryon aus drei Quarks und jedes Meson aus einem Quark und einem Antiquark zusammensetzt [5]. Um das PAULI-Prinzip nicht zu verletzen, schlug GREENBERG im selben Jahr vor, daß die Quarks nicht nur in drei verschiedenen *Flavor*-Zuständen, sondern auch in drei verschiedenen *Farb*-Zuständen existieren und forderte, daß alle beobachtbaren Hadronen farblos sind [6]. Da freie Quarks experimentell nicht nachgewiesen werden konnten, wurde die Idee des „quark confinement“ eingeführt, nach dem die Quarks in den Baryonen und Mesonen völlig eingeschlossen sind. Da weder die Farbhypothese experimentell bestätigt, noch eine Erklärung für das Confinement gefunden werden konnte, befand sich das Quarkmodell anfang der siebziger Jahre in einer Krise. Die unerwartete Entdeckung des J/Ψ -Teilchens 1974 durch die unabhängig von einander arbeitenden Gruppen unter der Leitung von TING in Brookhaven und von RICHTER am SLAC [7,8], dessen Interpretation als $c\bar{c}$ -Meson und der erfolgreichen Vorhersage weiterer Charm-Mesonen und Charm-Baryonen, verhalfen dem Quarkmodell zum Durchbruch. 1975 wurde am SLAC mit dem τ -Lepton der erste Vertreter einer dritten Fermionengeneration entdeckt [9], gefolgt von der diesmal erwarteten Entdeckung des schweren $\Upsilon = b\bar{b}$ -Mesons, welche der Gruppe von LEDERMAN am Fermilab 1977 zuerst gelang [10]. 1981 wurde das erste b-Baryon $\Lambda_b = udb$ beobachtet, 1983 die ersten b-Mesonen $B^0 = b\bar{d}$ und $B^- = b\bar{u}$. An der Existenz des letzten fehlenden Leptons, des τ -Neutrinos, gab es keinen Zweifel, aber erst am 20. Juli 2000 konnte von der DONUT-Kollaboration (*Direct Observation of the Nu Tau*) am Fermilab der direkte Nachweis bekannt gegeben werden.

Fermionen	1. Generation	2. Generation	3. Generation	Bosonen
Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ e_R	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$ μ_R	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$ τ_R	γ
	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ u_R d_R	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$ c_R s_R	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$ t_R b_R	g
Quarks				W^\pm
				Z^0

Tabelle 1.1: Das Standardmodell der Elementarteilchen. Die Materie besteht aus Fermionen, die Wechselwirkungen zwischen ihnen werden durch die Eichbosonen übertragen. Die linkshändigen Fermionen bilden Isospin-Dubletts, die rechtshändigen Isospin-Singulets; in der Natur existieren keine rechtshändigen Neutrinos (Paritätsverletzung).

Die von FERMI 1933 formulierte Theorie des β -Zerfalls versagt bei hohen Energien und wurde 1967 nach dem Vorbild der Quantenelektrodynamik (QED) durch die elektroschwache Theorie von GLASHOW, WEINBERG und SALAM (GWS) ersetzt [11, 12], nach der die schwache Wechselwirkung zwischen den Leptonen durch drei massive, intermediäre Vektorbosonen W^\pm und Z übertragen wird. Diese Theorie wurde 1970 auf Quarks erweitert [13] und stellt eine Vereinheitlichung der elektromagnetischen und der schwachen Kraft zu einer, der elektroschwachen, Kraft dar. Die beiden postulierten Vektorbosonen wurden 1983 am CERN durch die UA1-Kollaboration unter der Leitung von RUBBIA und VAN DER MEER mit den Massen $m_W = 81 \pm 5 \text{ GeV}/c^2$ und $m_Z = 95 \pm 3 \text{ GeV}/c^2$ entdeckt [14, 15]. Mit der 1972 erfolgten Formulierung der Quantenchromodynamik (QCD) der stark wechselwirkenden, farbgeladenen Quarks und Gluonen, zusammen mit dem Konzept der laufenden Kopplungskonstanten und der asymptotischen Freiheit [16] konnten die in tiefinelastischen Streuexperimenten gemessenen Strukturfunktionen der Nukleonen theoretisch vorhergesagt, sowie die charakteristische Jetstruktur der Proton-Streuung bei hohen Energien über den Zerfall von Quarks und Gluonen erklärt werden.

Diese verschiedenen, hier kurz vorgestellten Quantenfeldtheorien werden unter dem Begriff des Standardmodells (SM) zusammengefaßt. Das Standardmodell ist eine nicht-abelsche, lokale Eichtheorie, deren zugrunde liegende Lagrangedichte invariant unter der Gruppe $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ ist, wobei die Gruppe $SU_C(3)$ die Eichgruppe der Farbladung, die Gruppe $SU_L(2)$ die Eichgruppe des schwachen Isospins und die Gruppe $U_Y(1)$ die Eichgruppe der schwachen Hyperladung darstellt. Es enthält mindestens 61 elementare Teilchen (12 Leptonen, 36 Quarks, 12 Eichbosonen (s. Tab.(1.1)) sowie 1 Higgs-Teilchen) und mindestens 19 freie Parameter (drei Leptonenmassen, sechs Quarkmassen, zwei Eichboson-Massen, eine Higgsmasse, sowie neben zwei Kopplungskonstanten α und α_s , den QCD-Parameter λ_{QCD} und vier unabhängige Parameter der CABIBBO-KOBAYASHI-MASKAWA-Matrix (CKM-Matrix)). Seit der Bekanntgabe der Forschungsergebnisse der Super-Kamiokande-Kollaboration 1999 gibt es starke Hinweise für massive Neutrinos [17, 18], womit sich die Anzahl der freien Parameter um sieben erhöht (drei Neutrinomassen und vier leptonische CKM-Matrixelemente). Um die lokale Eichinvarianz in der elektroschwachen Theorie zu retten, die durch die Einführung massiver Eichbosonen zerstört wird, nutzte 'T HOOFT das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung

und den HIGGS-Mechanismus aus [19], nach dem die, zunächst als masselos angenommenen Eichfelder die sogenannten GOLDSTONE-Bosonen „verschlucken“, womit sie formal eine Masse und einen zusätzlichen, longitudinalen Polarisations-Freiheitsgrad erhalten. Zusammen mit VELTMAN bewies 'T HOOFT die Renormierbarkeit nichtabelscher Eichtheorien [20, 21], wofür beide 1999 mit dem NOBEL-Preis geehrt wurden.

Die am Tevatron durch $p\bar{p}$ -Kollisionen bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 1.8$ TeV erzeugten Topquarks entstehen vorzugsweise paarweise, und zwar zu ca. 90 % aus der Annihilation $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ und zu ca. 10 % aus der Gluon-Wechselwirkung $gg \rightarrow t\bar{t}$. Die Erzeugung einzelner Topquarks via elektroschwacher Produktionsmechanismen $q\bar{q}' \rightarrow W^* \rightarrow t\bar{b}$ oder $qg \rightarrow q'W^* \rightarrow q't\bar{b}$ ist dagegen um den Faktor 3 unterdrückt [22]. Bei der angegebenen Schwerpunktsenergie beträgt der Produktions-Wirkungsquerschnitt ca. 5 pb. Aus den integrierten Luminositäten von 109 pb^{-1} für die CDF-Kollaboration und 125 pb^{-1} für die DØ-Kollaboration (Run I von 1994-1999) ergeben sich damit bis heute nur ca. 1200 detektierte $t\bar{t}$ -Paare. Der Run II am Tevatron, sowie der geplante *Large Hadron Collider* (LHC) am CERN und der in der Planungs- und Genehmigungsphase befindliche Linearbeschleuniger TESLA (*Tera Elektronenvolt Superconducting Linear Accelerator*) am DESY sind im Vergleich dazu Topquark-Fabriken mit Erzeugungsraten zwischen $10^5 - 10^8$ $t\bar{t}$ -Paaren pro Jahr (s. Tab. 1.2 für Details). Wegen seiner großen Masse hat das Topquark eine Lebensdauer von ca. 4.4×10^{-25} s und zerfällt, bevor es gebundene Zustände bilden kann, elektroschwach in $t \rightarrow W^+ + b$. Dieser Zerfallskanal dominiert, denn die Zerfälle in W^+s und W^+d im Endzustand sind wegen der Quadrate der korrespondierenden CKM-Matrixelemente V_{ts} und V_{td} unterdrückt (unter der Annahme der Unitarität der CKM-Matrix gilt $V_{ts} < 0.043$ und $V_{td} < 0.014$, womit $V_{tb} > 0.9992$ folgt). Aufgrund des GOLDSTONE-Boson Äquivalenztheorems [23, 24], nach dem bei hohen Energien die Übergangsamplitude für die Emission oder Absorption für longitudinal polarisierte, massive Eichbosonen gleich der Übergangsamplitude für die Emission oder Absorption der durch die Eichbosonen „verschluckten“ GOLDSTONE-Bosonen ist, dominiert der Zerfall in longitudinal polarisierte W -Bosonen ($t \rightarrow W_L^+ + b$).

Die Polarisation des Topquarks bleibt erhalten und kann aus der Winkelverteilung der Zerfallsrate experimentell bestimmt werden. Das Topquark verhält sich aufgrund seiner kurzen Lebensdauer wie ein freies Teilchen und schließt damit eine „langreichweitige“ Dynamik aus, die sich erst auf der Skala $\Lambda_{QCD}^{-1} \approx 10^{-23}$ s ausbildet. Seine Untersuchung ist somit ein Test des Standardmodells für extrem kurze Abstände.

Maschine	Zeitraum	$t\bar{t}$ -Paare/a	Schwerpunktsenergie	Art
TEVATRON (Run II)	ab 2001	$5 - 6 \times 10^3$	$\sqrt{s} = 1.8$ TeV	$p\bar{p}$
TEVATRON (Run III)	ab 2005	$2 - 3 \times 10^4$	$\sqrt{s} = 2.0$ TeV	$p\bar{p}$
LHC	ab 2005	$10^7 - 10^8$	$\sqrt{s} = 14.0$ TeV	pp
TESLA	ab 2005	$1 - 4 \times 10^5$	$\sqrt{s} = 0.5 - 2.0$ TeV	e^+e^-

Tabelle 1.2: Die geplanten $t\bar{t}$ -Fabriken und ihre projektierten Produktionsraten pro Jahr und pro Detektor. Die Messungen der Strukturfunktionen sollen bis auf Fehler im Bereich von 1–2 % genau sein.

Mit den wenigen aus RUN I gewonnenen Daten, in Abb.(1.1) ist die aus der Massenverteilung resultierende „likelihood“-Verteilung für die Masse des Topquarks bei seiner ersten Beobachtung 1994 gezeigt, sind bisher einige Eigenschaften des Topquarks analysiert worden: Die Kinematik [25] und die Wirkungsquerschnitte [26,27] der Topquark-Produktion, seine Masse [28–34], die Wirkungsquerschnitte der Topquark-Produktion für „all jet“ Endzustände [35–37], die Zerfälle in τ -Leptonen [38] und W -Bosonen [39], die Suche nach Zerfällen mit „flavor changing neutral currents“ [40], die Helizität des W -Bosons in den Topquark-Zerfällen (der Fehler der Messung für die longitudinale Komponente ist mit ca. 45% sehr groß) [41] sowie die Spin-Korrelation der $t\bar{t}$ -Paare [42]. Die in Tab. 1.2 skizzierten, zukünftigen Experimente ermöglichen Präzisionsmessungen der Strukturfunktionen des Topquark-Zerfalls, deren Fehler bei 1–2% liegen sollen [43]. Bei einer solchen Genauigkeit und der Kenntnis, daß allein die $O(\alpha_s)$ -Korrekturen der Zerfallsrate des Topquarks bereits bis zu 8.5% betragen [44–49] ist klar, daß die einfachen, auf der BORNschen Näherung beruhenden, theoretischen Vorhersagen für die Strukturfunktionen durch die „next-to-leading order“ Strahlungskorrekturen verbessert werden müssen.

Das Ziel der vorliegenden Dissertation ist die Bereitstellung der analytischen Resultate für sowohl die elektroschwachen als auch die QCD-Strahlungskorrekturen für die Strukturfunktionen der Zerfallsrate des Topquarks. Bei dem Zerfall des Topquarks in ein W -Boson und ein Bottomquark ist das W^+ stark polarisiert, d.h. es besitzt eine nicht triviale Dichtematrix, die von der Polarisation des Topquarks zusätzlich modifiziert wird. Die Polarisation des W -Bosons zeigt sich in der Winkelabhängigkeit der Zerfallsverteilung des nachfolgenden, leptonischen Zerfallsprozesses $W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$, oder alternativ des hadronischen Zerfallsprozesses $W^+ \rightarrow q_I + \bar{q}_i$, die für beide Zerfallskanäle gleich ist. Die Zerfallsrate des unpolarisierten Topquarks wird durch drei Strukturfunktionen bestimmt, die als W_U („unpolarized-transverse“), W_L („longitudinal“) und W_F („forward-backward-asymmetric“) bezeichnet werden. In einem späteren Stadium, wenn die Datenaufnahme für die experimentelle Analyse des Zerfalls polarisierter Topquarks hinreichend groß ist, werden zur Beschreibung der Zerfallsrate fünf weitere, polarisierte Strukturfunktionen benötigt, die durch eine Messung der Spin-Impuls-Korrelation zwischen dem Polarisationsvektor des Topquarks und den Impulsvektoren seiner Zerfallsprodukte bestimmt werden können. Die meisten der in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse sind neu, bzw. sind bereits teilweise von uns veröffentlicht [50–53].

Der Polarisationsgrad der $t\bar{t}$ -Paare kann durch den Polarisationsgrad der Teilchenstrahlen eingestellt werden und der Grad der Spin-Spin-Korrelation zwischen der Polarisation des Top- und der des Antitopquarks ist sowohl für e^+e^- -Beschleuniger [54–57] als auch für Hadron-Beschleuniger [22, 58] seinerseits sehr hoch. Die komplette Winkelverteilung der Zerfallsrate wird durch acht Strukturfunktionen bestimmt. Eine weitere Motivation, warum die Berechnung der $O(\alpha_s)$ Strahlungskorrekturen sinnvoll ist, beruht auf der Tatsache, daß die QCD-Korrekturen Helizitätskonfigurationen annehmen, die für masselose und damit linkshändige Bottomquarks in der BORNschen Näherung nicht existieren. So kann z.B. das unpolarisierte Topquark aufgrund der Drehimpulserhaltung in BORNscher Näherung nicht in ein rechtshändiges W -Boson (positive Helizität) und ein masseloses Bottomquark zerfallen. Dies impliziert das Verschwinden des rein vorwärts gerichteten Anteils der W_F -Strukturfunktion. Die QCD-Strahlungskorrekturen liefern jedoch auch im Grenzfall einer verschwindenden Bottommasse einen solchen, wenn auch sehr kleinen Anteil und damit die Möglichkeit für das Auftreten linkshändiger W -Bosonen.

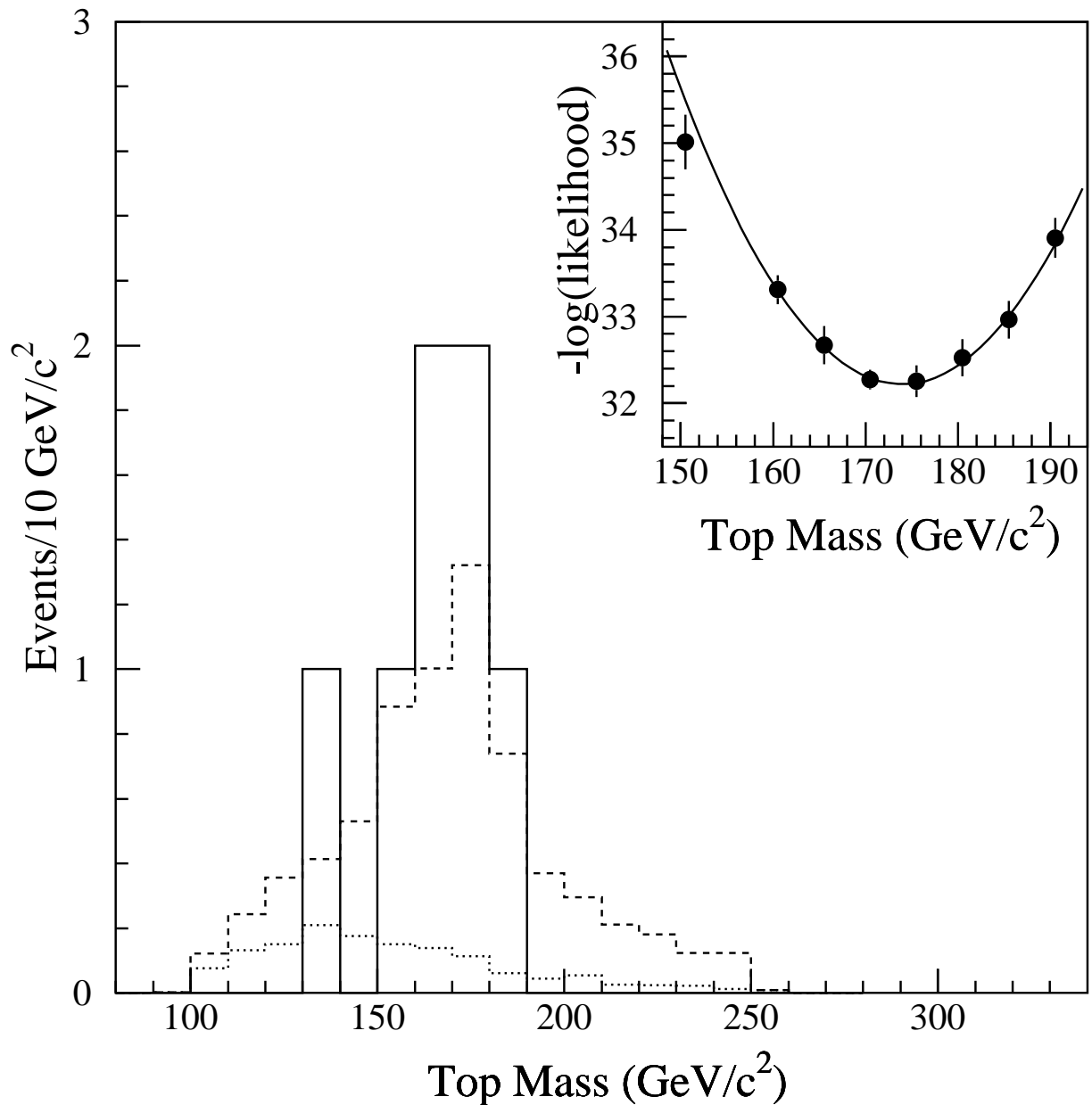


Abbildung 1.1: Die Entdeckung des Topquarks. Die Massenverteilung des Topquarks für die Meßdaten (durchgezogene Linien), für den Untergrund (gepunktete Linien) und für die Summe von Untergrund + Monte Carlo Simulation für $t\bar{t}$ mit $m_t = 175$ GeV/c² (gestrichelte Linien). Die Untergrundverteilung ist normiert auf 1.4 Untergrundereignisse, die im Massenfit erwartet werden. In der Einfügung oben rechts ist der Likelihood-Plot gezeigt, aus dem die Masse des Topquarks auf $m_t = 175$ GeV/c² bestimmt wird. Quelle: CDF-Collaboration, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 225.

1.2 Die Methoden und der Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit werden die Impuls-Impuls- und die Spin-Impuls-Korrelationen im kaskadenartigen Zerfallsprozeß $t \rightarrow W^+ + b$, gefolgt von $W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ untersucht. Der erste, hadronische Zerfallsschritt $t \rightarrow W^+ + b$ wird im Ruhesystem des Topquarks betrachtet, in dem die Spin-Impuls-Korrelation zwischen dem Polarisationsvektor des Topquarks und dem Impuls des W -Bosons untersucht wird. Der leptonische Zerfallsschritt $W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ wird dagegen im Ruhesystem des W -Bosons betrachtet, in dem die Impuls-Impuls-Korrelation zwischen der Impulsrichtung des Leptonpaares und der ursprünglichen Impulsrichtung des W -Bosons analysiert wird. Obwohl experimentell die „center-of-mass“-Analyse des polarisierten Topquark-Zerfalls leichter durchführbar ist, weil alle Korrelationen im Ruhesystem des Topquarks gemessen werden, erweist sich für die Theorie die oben beschriebene Prozedur von Vorteil, da der longitudinale Zerfallsmodus des W -Bosons besser isoliert werden kann, der für das Verständnis der Symmetriebrechung im elektroschwachen Sektor des Standardmodells relevant ist. Um die volle Kontrolle über die Abhängigkeit von der Masse des Bottomquarks zu behalten, wird die Masse in allen Berechnungen beibehalten. Dies geschieht auch in Hinblick auf andere Anwendungen, wie z.B. den semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c$, bei dem die Masse des Charmquarks nicht vernachlässigt werden kann! Dagegen wird die endliche Breite der BREIT-WIGNER-Verteilung des W -Bosons durch die „Zero-Width“-Approximation ersetzt. Um auch Zerfälle, wie z.B. den eines polarisierten Topquarks in ein Bottomquark und ein geladenes HIGGS-Boson, beschreiben zu können, werden zusätzlich die unpolarisierte und die polarisierte skalare Strukturfunktion bestimmt. Das Ergebnis für die totale Zerfallsrate in $O(\alpha_s)$ der Strahlungskorrektur stimmt mit dem Resultat von DENNER und SACK überein [44], die ebenfalls mit einer endlichen Masse für das Bottomquark arbeiten.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 1 werden aus den drei Polarisationsvektoren des W -Bosons zunächst neun linear unabhängige Helizitätsprojektoren konstruiert. Mit ihnen kann im Ruhesystem des W -Bosons die Winkelverteilung des Leptontensors bestimmt werden, der den W -Zerfall $W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ in Leptonen auf BORN-Niveau beschreibt. Für die kovariante Entwicklung des Hadrontensors werden acht (drei unpolarisierte und fünf polarisierte) invariante Strukturfunktionen definiert. Durch die Anwendung der Helizitätsprojektoren auf den kovarianten Hadrontensor können acht korrespondierende Helizitäts-Strukturfunktionen berechnet werden. Von den neun Projektoren kommt nur fünf eine physikalische Bedeutung zu, für die eine kovariante Darstellung angegeben wird. Abschließend wird die winkelabhängige, differentielle Zerfallsrate durch die acht Helizitäts-Strukturfunktionen explizit bestimmt.

In Kapitel 2 werden die Helizitäts-Strukturfunktionen in BORNscher Näherung berechnet und ihre Korrekturen sowohl für die Berücksichtigung der endlichen W -Bosonbreite gegenüber der „Zero-Width“-Approximation als auch für die Vernachlässigung der Masse des Bottomquarks bestimmt. Es wird gezeigt, daß die Kombination $\frac{1}{2}(W_U + W_F)$ für den „transversal-plus“-Anteil der Helizitäts-Strukturfunktionen im Grenzfall eines masselosen Bottomquarks für die BORNsche Näherung verschwindet.

Im ersten Teil von Kapitel 3 wird die elektroschwache Bremsstrahlungskorrektur in $O(\alpha)$ bestimmt, der Phasenraum des Drei-Körper-Zerfalls diskutiert sowie die technischen Details zur Behandlung der Phasenraum-Integrationen behandelt. Im Anhang D sind die konvergenten Integrale, im Anhang E die für die Helizitäts-Strukturfunktionen zugehörigen Koeffizientenfunktionen zusammengestellt. Der infrarot-divergente Anteil der Brems-

strahlungskorrektur wird durch eine infinitesimal kleine Photonmasse regularisiert und in dem universellen Soft-Photon-Faktor abgespalten. Die IR-Divergenz hebt sich nach dem LEE-NAUENBERG-Theorem [59] in der Summe der Bremsstrahlungs- und der Schleifenkorrekturen in allen Ordnungen der Störungstheorie heraus. Im zweiten Teil des Kapitels werden die elektroschwachen Einschleifenkorrekturen (Vertexkorrekturen und Selbstenergien der Quarks und des W -Bosons) behandelt. Die zugehörigen Einschleifenintegrale sowie die Renormierung der dimensional regularisierten Ultraviolet-Divergenzen werden diskutiert. Die analytisch bestimmten Beiträge der elektroschwachen Strahlungskorrektur in $O(\alpha)$ werden für die einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen im Fall eines masselosen Bottomquarks numerisch im α - als auch im G_F -Renormierungsschema ausgewertet.

In Kapitel 4 wird die Bremsstrahlungskorrektur aus Kapitel 3 für die Quantenchromodynamik modifiziert; die IR-Divergenz wird hier durch eine infinitesimal kleine Gluonmasse regularisiert und im universellen Soft-Gluon-Faktor abgespalten. Die Selbstenergie der Quarks wird durch die Emission und Reabsorption eines Gluons berechnet und die Renormierung der UV-Divergenz der Vertexkorrektur im „On-Shell“-Schema durchgeführt. Das Ergebnis für die renormierte Vertexkorrektur stimmt mit der Literatur [60, 61] überein. Die analytisch bestimmten Beiträge der Strahlungskorrektur in $O(\alpha_s)$ werden für die einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen numerisch ausgewertet.

In Kapitel 5 werden für den Fall eines masselosen Bottomquarks die aus der Bremsstrahlungs- und Vertexkorrektur in $O(\alpha_s)$ kombinierten QCD-Ergebnisse für sämtliche Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P, A^P$ in analytischer Darstellung angegeben. Die Qualität dieser Näherung mag anhand der BORNschen Näherung in Kapitel 2 beurteilt werden, bei der sich die totale Rate beim Übergang von $m_b = 4.8 \text{ GeV}/c^2$ nach $m_b = 0$ um 0.27% erhöht. Die analytisch bestimmten Strahlungskorrekturen in $O(\alpha)$ und $O(\alpha_s)$ und der numerisch bestimmte Beitrag der BREIT-WIGNER-Verteilung für die endliche Breite des W -Bosons werden abschließend numerisch diskutiert. Mit einem Ausblick über den gegenwärtigen Forschungsstand endet diese Arbeit.

Im Anhang A werden alle verwendeten FEYNMAN-Regeln aufgeführt, die der Arbeit von AOKI *et al.* [62] entnommen sind. Im Anhang B wird das Standardintegral für die UV-divergenten, dimensional regularisierten Einschleifenkorrekturen berechnet und im Anhang C die FEYNMAN-Parametrisierung diskutiert. Der Anhänge D und E sind bereits oben beschrieben. Aus einer historischen Perspektive heraus wird im Anhang F die Polarisation in der Theorie der Elektrodynamik und der Quantenmechanik behandelt. Der Anhang G enthält eine Formelsammlung von Identitäten, Theoremen und Definitionen, die im Laufe der Erstellung der vorliegenden Arbeit benötigt wurden. Zum Schluß sind im Anhang H die Massen der Fermionen und Bosonen tabelliert. Alle Rechnungen in dieser Arbeit werden im HEAVISIDE-LORENTZ-Einheitensystem mit $c = \hbar = 1$ durchgeführt.

1.3 Die Helizitätsprojektoren

1.3.1 Die Darstellungen des Lepton- und Hadrontensors

Um die Einführung der Helizitäts-Strukturfunktionen zu motivieren, wird zunächst der benötigte Begriffsapparat der Helizitätsprojektoren entwickelt. Mit Hilfe der Helizitäts-

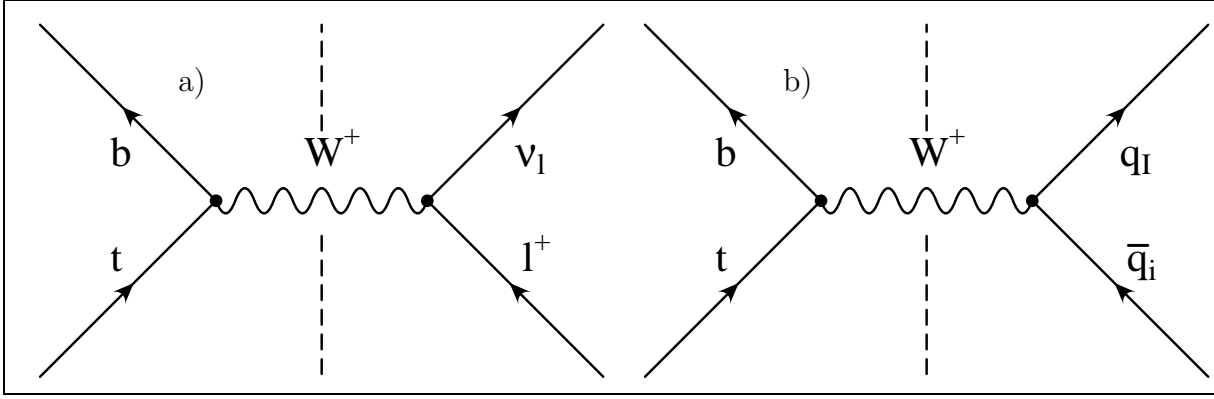


Abbildung 1.2: Feynman-Diagramme für den Zerfall des Topquarks. Das intermediäre W -Boson kann a) über $W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ leptonic oder b) über $W^+ \rightarrow q_i + \bar{q}_i$ hadronisch zerfallen. In diesem Diagramm zeigt ausnahmsweise der Zeitpfeil von unten nach oben, um mit der gestrichelten Linie die Faktorisierung in den Lepton- und Hadronstrom symbolisieren zu können.

Strukturfunktion wird die Winkelverteilung der differentiellen Zerfallsrate beschrieben.

Für das in Abb.(1.2a) gezeigte FEYNMAN-Diagramm für den Zerfall des Topquarks $t \rightarrow W^+ (\rightarrow l^+ + \nu_l) + b$ lautet die Übergangsamplitude \mathcal{M} in der 'T HOOFT-FEYNMAN-Eichung $\xi_W = 1$:¹

$$\mathcal{M} = \left\{ \bar{u}_b \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u_t \right\} \left\{ \frac{g_{\mu\alpha}}{q^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \right\} \left\{ \bar{u}_{\nu_l} \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) v_{l^+} \right\}. \quad (1.1)$$

In die Berechnung für die Wirkungsquerschnitte und die Zerfallsraten geht das Quadrat $\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$ der Übergangsamplitude ein. Aufgrund der Spinoren faktorisiert das Quadrat in einen *Leptontensor* $L^{\alpha\beta}$ und einen *Hadrontensor* $H^{\mu\nu}$. Über die möglichen Polarisationszustände der Fermionen im Endzustand wird summiert, da sie nicht beobachtet werden. Um Polarisierungseffekte des Topquarks untersuchen zu können, darf über den Spin des Topquarks nicht gemittelt werden. Für die Tensoren gilt:

$$L^{\alpha\beta} := \sum_{\lambda_{l^+}} \left\{ \bar{u}_{\nu_l} \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) v_{l^+} \right\} \left\{ \bar{v}_{l^+} \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\beta \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u_{\nu_l} \right\}, \quad (1.2.1)$$

$$H^{\mu\nu} := \sum_{\lambda_b} \left\{ \bar{u}_b \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u_t \right\} \left\{ \bar{u}_t \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb}^* \gamma^\nu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u_b \right\}, \quad (1.2.2)$$

$$D_{\mu\alpha} := \frac{g_{\mu\alpha}}{q^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \longrightarrow \frac{g_{\mu\alpha}}{q^2 - m_W^2 + i m_W \Gamma_W}. \quad (1.2.3)$$

Ein instabiles Teilchen, wie das intermediäre W -Boson, erweist sich experimentell als *Resonanz* mit einer endlichen *Resonanzbreite* Γ . Der Propagator $D_{\mu\alpha}$ in Gl. (1.2.3) muß demnach durch die BREIT-WIGNER-Verteilung $f(q^2) = (q^2 - m_W^2 + i m_W \Gamma_W)^{-1}$ modifiziert

¹In Abb.(1.2b) ist das FEYNMAN-Diagramm für den alternativen Zerfall $t \rightarrow W^+ (\rightarrow q_i + \bar{q}_i) + b$ des W -Bosons in ein Paar leichter Quarks gezeigt. Dieser zweite Zerfallskanal unterscheidet sich neben den Massen und den Farben lediglich durch das CKM-Matrixelement der Quarks und wird deshalb im folgenden nicht betrachtet.

werden [63], wobei die totale Zerfallsbreite $\Gamma_W = 2.12 \pm 0.05$ GeV [3] die Resonanzbreite des W -Bosons bestimmt und der 4-Impuls des W -Bosons durch $q = p_t - p_b = p_{l^+} + p_{\nu_l}$ gegeben ist. Mit Hilfe der Darstellung $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon} = \delta(x)$ für die Delta-Distribution kann das Quadrat der BREIT-WIGNER-Verteilung durch die Delta-Distribution approximiert werden, wobei als Argument die „On-Shell“-Bedingung $q^2 = m_W^2$ entsteht. Diese Näherung wird als „Zero-Width“-Approximation bezeichnet. In Kapitel 2 wird gezeigt, daß sich die Helizitäts-Strukturfunktionen auf BORN-Terminiveau bei Berücksichtigung der endlichen W -Bosonbreite um maximal 2% verringern. Die „Zero-Width“-Approximation lautet:

$$\left| \frac{1}{q^2 - m_W^2 + im_W \Gamma_W} \right|^2 = \frac{\pi}{m_W \Gamma_W} \frac{1}{\pi} \frac{m_W \Gamma_W}{(q^2 - m_W^2)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} \approx \frac{\pi}{m_W \Gamma_W} \delta(q^2 - m_W^2). \quad (1.3)$$

Das Quadrat der Übergangsamplitude in Gl. (1.1) folgt nach diesen Vorbereitungen aus der Kontraktion von dem Lepton- mit dem Hadrontensor, multipliziert mit der Delta-Funktion als Näherung an die BREIT-WIGNER-Verteilung. Es gilt:

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger \rightarrow H^{\mu\nu} D_{\mu\alpha} L^{\alpha\beta} D_{\nu\beta}^* \approx \frac{1}{2m_W \Gamma_W} (2\pi) \delta(q^2 - m_W^2) H^{\mu\nu} L_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Nach der Spinsummation kann der Leptontensor durch die 4-Impulse p_{l^+} und p_{ν_l} des Leptons bzw. des Lepton-Neutrinos in kovarianter Form dargestellt werden. Im Ruhesystem des W -Bosons können aus der 4-Impulserhaltung $q = p_{l^+} + p_{\nu_l}$ und der beiden „On-Shell“-Bedingungen $p_{l^+}^2 = m_{l^+}^2$ sowie $p_{\nu_l}^2 = 0$ sofort die Energien und Impulsbeträge der beiden Leptonen berechnet werden; die kleine Leptonmasse m_{l^+} wird gegenüber der W -Bosonmasse m_W vernachlässigt. Es gilt:

$$L^{\alpha\beta} = g_w^2 \left\{ p_{l^+}^\alpha p_{\nu_l}^\beta + p_{l^+}^\beta p_{\nu_l}^\alpha - p_{l^+} \cdot p_{\nu_l} g^{\alpha\beta} - i \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_{l^+, \gamma} p_{\nu_l, \delta} \right\}, \quad (1.5)$$

$$E_{l^+} = \frac{m_W^2 + m_{l^+}^2}{2m_W} \approx \frac{m_W}{2}, \quad E_{\nu_{l^+}} = \frac{m_W^2 - m_{l^+}^2}{2m_W} = |\vec{p}_{l^+}| = |\vec{p}_{\nu_l}| \approx \frac{m_W}{2}. \quad (1.6)$$

Der Leptontensor wird im Ruhesystem des W -Bosons ausgewertet, d.h. das Lepton und das Lepton-Neutrino werden „back-to-back“ emittiert. Wird die Richtung des Leptonstrahls im Raum durch den Polarwinkel θ und den Azimuthwinkel ϕ festgelegt - beide Winkel sind in Abb. (1.3) definiert - können die beiden 4-Impulse in Kugelkoordinaten parametrisiert werden:

$$p_{l^+} = \frac{m_W}{2} (1; +\sin\theta \cos\phi, +\sin\theta \sin\phi, +\cos\theta), \quad (1.7.1)$$

$$p_{\nu_l} = \frac{m_W}{2} (1; -\sin\theta \cos\phi, -\sin\theta \sin\phi, -\cos\theta). \quad (1.7.2)$$

Für den kovarianten Leptontensors in Gl. (1.5) erhält man aus den dyadischen Produkten der beiden 4-Impulse die folgende Matrix-Darstellung, die in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden kann:

$$L^{\mu\nu} = \frac{g_w^2 m_W^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi & -\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi & -\cos \theta \sin \theta \cos \phi \\ 0 & -\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi & 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi & -\cos \theta \sin \theta \sin \phi \\ 0 & -\cos \theta \sin \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \theta \sin \phi & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.8.1)$$

$$+ \frac{g_w^2 m_W^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \cos \theta & -i \sin \theta \sin \phi \\ 0 & -i \cos \theta & 0 & i \sin \theta \cos \phi \\ 0 & i \sin \theta \sin \phi & -i \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8.2)$$

Die Zeitkomponenten der Matrix - $L^{\mu 0}$ bzw. $L^{0\nu}$ mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ - sind Null. Für die Raumkomponenten der Matrix - L^{ij} mit $i, j = 1, 2, 3$ - läßt sich aus den drei Polarisationsvektoren des massiven W -Bosons eine orthogonale Basis konstruieren. Dazu gehen wir in das Ruhesystem des Topquarks zurück, in dem sich das W -Boson entlang der positiven z -Achse bewegt (siehe Abb. (1.3)). Sein 4-Impuls kann durch $q^\mu = (q_0; 0, 0, |\vec{q}|)$ mit $|\vec{q}| = (q_0^2 - m_W^2)^{1/2}$ parametrisiert werden. Unter diesen Voraussetzungen können die Polarisationsvektoren für die drei möglichen Helizitätszustände $\lambda_W = -1, 0, +1$ des W -Bosons durch sphärische Koordinaten ausgedrückt werden:

$$\varepsilon^\mu(q, 0) = \frac{1}{m_W} (|\vec{q}|; 0, 0, q_0) \quad \textit{longitudinaler Polarisationsvektor}, \quad (1.9.1)$$

$$\varepsilon^\mu(q, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0; \mp 1, -i, 0) \quad \textit{transversale Polarisationsvektoren}. \quad (1.9.2)$$

Die drei Polarisationsvektoren stehen orthogonal auf dem 4-Impuls q , sind auf -1 normiert und stehen paarweise orthogonal aufeinander. Mit wachsender Energie q_0 wird der longitudinale Polarisationsvektor in Gl. (1.9.1) zunehmend parallel zum 4-Impuls des W -Bosons, denn für $q_0 \rightarrow \infty$ gilt für die TAYLOR-Entwicklung $\varepsilon^\mu(q, 0) = q^\mu/m_W + O(m_W/q_0)$. Die Orthogonalitäts-Relationen lauten:

$$\varepsilon^\mu(q, \lambda_W) q_\mu = 0, \quad \varepsilon^\mu(q, \lambda_W) \varepsilon_\mu^*(q, \lambda'_W) = \begin{cases} -1 & \text{für } \lambda_W = \lambda'_W \\ 0 & \text{für } \lambda_W \neq \lambda'_W \end{cases}. \quad (1.10)$$

Zur Vereinfachung der Notation wird die Schreibweise $\varepsilon_{\lambda_W}^\mu := \varepsilon^\mu(q, \lambda_W)$ für die drei Polarisationsvektoren eingeführt. Formal können folgende neun *Helizitätsprojektoren* nach KÖRNER und SCHILLER [64] definiert werden:

$$P_U^{\mu\nu} := \varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_+^\nu + \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_-^\nu, \quad (1.11.1)$$

$$P_L^{\mu\nu} := \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_0^\nu, \quad (1.11.2)$$

$$P_F^{\mu\nu} := \varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_+^\nu - \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_-^\nu, \quad (1.11.3)$$

$$P_T^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left(\varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_-^\nu + \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_+^\nu \right), \quad (1.11.4)$$

i	$\mathbb{P}^{\mu\nu} \neq 0$
U	$\mathbb{P}^{11} = +\mathbb{P}^{22} = +1$
L	$\mathbb{P}^{03} = +\mathbb{P}^{30} = -\frac{q_0 \vec{q} }{m_W^2} \rightarrow 0$, $\mathbb{P}^{00} = \frac{ \vec{q} ^2}{m_W^2} \rightarrow 0$, $\mathbb{P}^{33} = 1 + \frac{q_0^2}{m_W^2} \rightarrow 1$
F	$\mathbb{P}^{12} = -\mathbb{P}^{21} = +i$
T	$\mathbb{P}^{11} = -\mathbb{P}^{22} = -\frac{1}{2}$
5	$\mathbb{P}^{12} = +\mathbb{P}^{21} = +\frac{1}{2}$
I	$\mathbb{P}^{01} = +\mathbb{P}^{10} = +\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{ \vec{q} }{m_W} \rightarrow 0$, $\mathbb{P}^{13} = +\mathbb{P}^{31} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{q_0}{m_W} \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
7	$\mathbb{P}^{01} = -\mathbb{P}^{10} = +\frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{ \vec{q} }{m_W} \rightarrow 0$, $\mathbb{P}^{13} = -\mathbb{P}^{31} = +\frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{q_0}{m_W} \rightarrow +\frac{i}{2\sqrt{2}}$
A	$\mathbb{P}^{02} = -\mathbb{P}^{20} = +\frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{ \vec{q} }{m_W} \rightarrow 0$, $\mathbb{P}^{23} = -\mathbb{P}^{32} = +\frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{q_0}{m_W} \rightarrow +\frac{i}{2\sqrt{2}}$
9	$\mathbb{P}^{02} = +\mathbb{P}^{20} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{ \vec{q} }{m_W} \rightarrow 0$, $\mathbb{P}^{23} = +\mathbb{P}^{32} = +\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{q_0}{m_W} \rightarrow +\frac{1}{2\sqrt{2}}$
S	$\mathbb{P}^{03} = +\mathbb{P}^{30} = -\frac{q_0 \vec{q} }{m_W^2} \rightarrow 0$, $\mathbb{P}^{00} = 1 + \frac{q_0^2}{m_W^2} \rightarrow 1$, $\mathbb{P}^{33} = \frac{ \vec{q} ^2}{m_W^2} \rightarrow 0$

Tabelle 1.3: Die Helizitätsprojektoren im Ruhesystem des Topquarks. Beim Übergang in das Ruhesystem des W -Bosons verschwinden die Zeitkomponenten. Im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt sind die Komponenten des skalaren Projektors mit aufgeführt.

$$\mathbb{P}_5^{\mu\nu} := -\frac{i}{2} \left(\varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_-^\nu - \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_+^\nu \right), \quad (1.11.5)$$

$$\mathbb{P}_I^{\mu\nu} := \frac{1}{4} \left(\varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_0^\nu + \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_+^\nu - \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_-^\nu \right), \quad (1.11.6)$$

$$\mathbb{P}_7^{\mu\nu} := -\frac{i}{4} \left(\varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_+^\nu - \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_0^\nu + \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_-^\nu \right), \quad (1.11.7)$$

$$\mathbb{P}_A^{\mu\nu} := \frac{1}{4} \left(\varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_0^\nu + \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_+^\nu + \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_0^\nu + \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_-^\nu \right), \quad (1.11.8)$$

$$\mathbb{P}_9^{\mu\nu} := -\frac{i}{4} \left(\varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_+^\nu + \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_-^\nu \right). \quad (1.11.9)$$

Für die Summe der Projektoren \mathbb{P}_U und \mathbb{P}_L wird die Bezeichnung \mathbb{P}_{U+L} eingeführt. Dieser Projektor beschreibt den Fall eines unpolarisierten W -Bosons.

$$\mathbb{P}_{U+L}^{\mu\nu} := \varepsilon_+^{*\mu} \varepsilon_+^\nu + \varepsilon_0^{*\mu} \varepsilon_0^\nu + \varepsilon_-^{*\mu} \varepsilon_-^\nu \quad (1.11.10)$$

Setzt man die Darstellung der Polarisationsvektoren ein, so erhält man die in Tab. (1.3) angegebenen, nicht verschwindenden Komponenten für die verschiedenen Projektoren. Beim Übergang vom Ruhesystem des Topquarks zum Ruhesystem des W -Bosons verschwinden die Zeitkomponenten. Die Indizes der Projektoren deuten ihre physikalische Bedeutung an: \mathbb{P}_U „unpolarized-transverse“, \mathbb{P}_L „longitudinal“, \mathbb{P}_F „forward-backward-asymmetric“, \mathbb{P}_T „transversal“, \mathbb{P}_A „parity-asymmetric“, \mathbb{P}_I „longitudinal-transverse-interference“. Die Projektoren \mathbb{P}_5 , \mathbb{P}_7 und \mathbb{P}_9 dienen zwar als Basis des Leptontensors,

ihnen kommt aber im weiteren keine physikalische Bedeutung zu. Die Orthogonalitäts-Relationen (1.10) der Polarisationsvektoren überträgt sich auf die Helizitätsprojektoren:

$$IP_i^{\mu\nu} IP_{j,\mu\nu} = 0 \text{ für } i \neq j, \text{ mit } i, j = \{U, L, F, T, 5, I, 7, A, 9\}, \quad (1.12)$$

$$IP_i^{\mu\nu} IP_{i,\mu\nu} = \pi_i \text{ für } i = \{U, L, F, T, 5, I, 7, A, 9\} \quad (1.13)$$

mit den Gewichten $\pi_i = \{2, 1, -2, 2^{-1}, 2^{-1}, 4^{-1}, -4^{-1}, -4^{-1}, 4^{-1}\}$. Über die LORENTZ-Indizes μ und ν wird kontrahiert. Strenggenommen handelt es sich bei den IP_i um keine Projektoren, da die Projekteigenschaft $IP_i IP_i = IP_i$ nicht erfüllt ist, aber im folgenden wird nur Gebrauch von der Orthogonalitäts-Relation (1.12) und der Kontraktionseigenschaft (1.13) gemacht. Die Projektoren $IP_i^{\mu\nu}$ sind für $i = U, L, T, S, 5, I, 9$ symmetrisch bezüglich der Vertauschung der LORENTZ-Indizes, für $i = F, 7, A$ dagegen antisymmetrisch. Aus Tab. (1.3) können die räumlichen Komponenten der Matrix-Darstellung für die Helizitätsprojektoren im Ruhesystem des W -Bosons abgelesen werden:

$$\begin{aligned} IP_U^{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & IP_L^{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & IP_F^{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ IP_T^{ij} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & IP_5^{ij} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & IP_I^{ij} &= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (1.14) \\ IP_7^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & IP_A^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & IP_9^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese neun Matrizen bilden die gesuchte, orthogonale Basis des Leptontensors in Gl. (1.5). Mit ihrer Hilfe kann der Leptontensor folgendermaßen umgeschrieben werden, wobei die Winkelverteilungen der Projektoren IP_U und IP_L für eine später erfolgende $\cos\theta$ -Integration (es gilt $\int_0^\pi \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta) d\cos\theta = 1$ und $\int_0^\pi \frac{3}{4}\sin^2\theta d\cos\theta = 1$) auf Eins normiert werden. Im Ruhesystem des W -Bosons lautet der Leptontensor:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{2}{3} g_w^2 m_W^2 \left\{ \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta) IP_U^{\mu\nu} + \frac{3}{4}\sin^2\theta IP_L^{\mu\nu} + \frac{3}{4}\cos\theta IP_F^{\mu\nu} + \right. \\ &+ \frac{3}{4}\sin^2\theta \cos 2\phi IP_T^{\mu\nu} - \frac{3}{4}\sin^2\theta \sin 2\phi IP_5^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta \cos\theta \cos\phi IP_I^{\mu\nu} - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta \sin\phi IP_7^{\mu\nu} + \\ &\left. + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta \cos\phi IP_A^{\mu\nu} - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta \cos\theta \sin\phi IP_9^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Der Hadrontensor in Gl. (1.2.2), bei dem über den Spin des Topquarks nicht gemittelt wird, kann durch den folgenden Standardsatz *invarianter Strukturfunktionen* in kovarianter Form dargestellt werden [65, 66]:

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} = & \left\{ -g^{\mu\nu} \mathbf{W}_1 + p_t^\mu p_t^\nu \mathbf{W}_2 - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{t,\alpha} q_\beta \mathbf{W}_3 \right\} + \\
& - (q \cdot s_t) \left\{ -g^{\mu\nu} \mathbf{G}_1 + p_t^\mu p_t^\nu \mathbf{G}_2 - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{t,\alpha} q_\beta \mathbf{G}_3 \right\} + \\
& + \left\{ s_t^\mu p_t^\nu + s_t^\nu p_t^\mu \right\} \mathbf{G}_6 + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{t,\alpha} s_{t,\beta} \mathbf{G}_8 + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha s_{t,\beta} \mathbf{G}_9.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Im Gegensatz zum vollständigen Satz invarianter Strukturfunktionen in Gl. (G.55) werden die aus q^μ und/oder q^ν aufgebauten Kovarianten weggelassen, da sie nach der Kontraktion mit den Helizitätsprojektoren des Leptontensors in Gl. (1.15) aufgrund der Orthogonalitäts-Relation ohnehin keinen Beitrag liefern. Außerdem werden die sogenannten T-ungeraden Strukturfunktionen, die bei CP-verletzenden Prozessen außerhalb des Standardmodells eine Rolle spielen, nicht beachtet. Aufgrund der SCHOUTEN-Identität

$$g^{\alpha\beta} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} + g^{\alpha\kappa} \epsilon^{\lambda\mu\nu\beta} + g^{\alpha\lambda} \epsilon^{\mu\nu\beta\kappa} + g^{\alpha\mu} \epsilon^{\nu\beta\kappa\lambda} + g^{\alpha\nu} \epsilon^{\beta\kappa\lambda\mu} = 0 \tag{1.17}$$

sind die drei Kovarianten für die spinabhängigen und paritätserhaltenden, invarianten Strukturfunktionen \mathbf{G}_3 , \mathbf{G}_8 und \mathbf{G}_9 linear voneinander abhängig. Nach der Kontraktion der Identität mit den 4-Impulsvektoren q_α , $p_{t,\beta}$, q_κ sowie dem 4-Spinvektor $s_{t,\lambda}$ und der Vernachlässigung von Termen proportional zu q^μ und q^ν (s.o.) ergibt sich:

$$(p_t \cdot q) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha s_{t,\beta} - q^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{t,\alpha} s_{t,\beta} + (q \cdot s_t) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{t,\alpha} q_\beta = 0. \tag{1.18}$$

Die kovariante Entwicklung des Hadrontensors kann demnach effektiv durch acht invariante Strukturfunktionen ausgedrückt werden, aus rechnerischen Gründen werden jedoch alle neun invarianten Strukturfunktionen vorerst beibehalten.

Wendet man die Helizitätsprojektoren aus dem Gleichungssystem (1.11) auf die kovariante Entwicklung des Hadrontensors in Gl. (1.16) an und parametrisiert den Spinvektor des Topquarks durch $s_t = (0; s_x, 0, s_z)$ (da nur der Betrag und eine Komponente des Spins meßbar ist, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_y = 0$ gesetzt werden), so können drei unpolarisierte (H_U , H_L , H_F) und fünf polarisierte (H_U^P , H_L^P , H_F^P , H_I^P , H_A^P) *Helizitäts-Strukturfunktionen* definiert werden. Die vier Projektionen $i = T, 5, 7$ und 9 verschwinden. Es gilt:

$$H_U = 2 \mathbf{W}_1, \quad H_U^P = 2|\vec{q}| \mathbf{G}_1 s_z, \tag{1.19.1}$$

$$H_L = \mathbf{W}_1 + \frac{m_t^2}{m_W^2} |\vec{q}|^2 \mathbf{W}_2, \quad H_L^P = |\vec{q}| \left\{ \mathbf{G}_1 + \frac{m_t^2}{m_W^2} |\vec{q}|^2 \mathbf{G}_2 - 2 \frac{m_t}{m_W} q^0 \mathbf{G}_7 \right\} s_z, \tag{1.19.2}$$

$$H_F = 2m_t |\vec{q}| \mathbf{W}_3, \quad H_F^P = \left\{ 2m_t |\vec{q}|^2 \mathbf{G}_3 - 2m_t \mathbf{G}_8 - 2q^0 \mathbf{G}_9 \right\} s_z, \tag{1.19.3}$$

$$H_I^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_t}{m_W} |\vec{q}| \mathbf{G}_7 s_x, \tag{1.19.4}$$

$$H_A^P = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{m_t}{m_W} q^0 \mathbf{G}_8 + m_W \mathbf{G}_9 \right\} s_x. \tag{1.19.5}$$

Es werden zwei Polarisationsarten unterschieden: Während die zur Spin-Komponenten s_z proportionalen *Helizitäts-Strukturfunktionen* H_U^P , H_L^P und H_F^P die Topspin-Polarisation parallel („longitudinale Polarisation“) zur Flugrichtung des W -Bosons beschreiben, drücken die zur Spin-Komponenten s_x proportionalen *Helizitäts-Strukturfunktionen* H_I^P und H_A^P die Topspin-Polarisation senkrecht („transversale Polarisation“) zur Flugrichtung aus. Da der Polarisationsgrad P und der Polarwinkel θ_P zwischen dem Polarisationsvektor und dem Impulsvektor des W -Bosons meßbar sind, kann der Polarisationszustand des Topquarks alternativ durch die, aus dem Vektor $s_t = (0; s_x, 0, s_z) = P(0; \sin \theta_P, 0, \cos \theta_P)$ entwickelte, Dichtematrix

$$\rho^{\lambda_t \lambda'_t} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P \cos \theta_P & P \sin \theta_P \\ P \sin \theta_P & 1 - P \cos \theta_P \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

dargestellt werden, wobei für den Polarisationsgrad $0 \leq P \leq 1$ gilt. Hierzu wird ein kurzer historischer Abriß der Physik der Polarisation in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik im Anhang F gegeben.

Mit Hilfe der Gl. (1.18) kann die invariante Strukturfunktion \mathbf{G}_3 durch die Kombinationen $\mathbf{G}_8 + m_W^2 \mathbf{G}_3$ und $\mathbf{G}_9 - m_t q_0 \mathbf{G}_3$ ersetzt werden, womit das lineare Gleichungssystem invertierbar wird. Da sämtliche Resultate in Form der Helizitäts-Strukturfunktionen dargestellt werden, wird auf die Auflösung nach den invarianten Strukturfunktionen hier verzichtet. Der Hadrontensors kann durch die Helizitätsprojektoren durch die polarisierten und unpolarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(H_U + P \cos \theta_P H_U^P) \mathbb{P}_U^{\mu\nu} + (H_L + P \cos \theta_P H_L^P) \mathbb{P}_L^{\mu\nu} + \\ &- \frac{1}{2}(H_F + P \cos \theta_P H_F^P) \mathbb{P}_F^{\mu\nu} + 4 P \sin \theta_P H_I^P \mathbb{P}_I^{\mu\nu} - 4 P \sin \theta_P H_A^P \mathbb{P}_A^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

In Gl. (1.22) wird ein anderer Satz von Helizitäts-Strukturfunktionen definiert, der durch Linearkombinationen mit dem oben angegebenen Satz von Helizitäts-Strukturfunktionen verknüpft ist und bei dem die Helizitäten des Topquarks und des W -Bosons als Parameter auftreten. Von allen möglichen Zerfällen $t \rightarrow W^+ + X_b$ werden in dieser Arbeit lediglich zwei Endzustände X_b untersucht, und zwar erstens $X_b = b$ (BORNsche Näherung und Einschleifenkorrekturen in $O(\alpha)$ bzw. $O(\alpha_s)$) und zweitens $X_b = b + \gamma$ bzw. $X_b = b + g$ (zugehörige Bremsstrahlungskorrekturen), wo nicht nur über die Polarisation eines zusätzlichen Eichbosons summiert, sondern auch über den entsprechenden Phasenraum des Drei-Körper-Zerfalls integriert werden muß. Die Indizes λ_t und λ_W bezeichnen die Helizitäten des Topquarks und des W -Bosons im Anfangszustand, die Indizes λ'_t und λ'_W die Helizitäten im Endzustand. Die Definition lautet:

$$\begin{aligned} H_{\lambda'_W \lambda_W}^{\lambda'_t \lambda_t} &:= \sum_{X_b} d\text{PS}_{X_b} \left\{ \bar{u}(p_b, \lambda_b) \Gamma^\mu(X_b) u(p_t, \lambda_t) \varepsilon_\mu^*(q, \lambda_W) \right\} \times \\ &\times \left\{ \bar{u}(p_b, \lambda_b) \Gamma^\nu(X_b) u_t(p_t, \lambda'_t) \varepsilon_\nu^*(q, \lambda'_W) \right\}^\dagger. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Die Helizitäts-Strukturfunktionen in Gl. (1.22) werden als *doppelte Dichtematrix* bezeichnet. Sie sind hermitesch und, da die einzelnen Matrixelemente für den Zerfall des

$H^{\mu\nu}$	Wert
$H^{00} = H^{11} = H^{22}$	$\mathbf{W}_1 + \vec{q} s_z\mathbf{G}_1$
H^{33}	$-\mathbf{W}_1 + m_t^2\mathbf{W}_2 - \vec{q} s_z(\mathbf{G}_1 - m_t^2\mathbf{G}_2)$
$H^{01} = (H^{10})^*$	$i(m_t \vec{q} \mathbf{W}_3 + s_z(m_t \vec{q} ^2\mathbf{G}_3 - m_t\mathbf{G}_8 - q_0\mathbf{G}_9))$
$H^{02} = (H^{20})^*$	0
$H^{03} = (H^{30})^*$	$-m_t s_x \mathbf{G}_6$
$H^{12} = (H^{21})^*$	$+i s_x (m_t \mathbf{G}_8 + q_0 \mathbf{G}_9)$
$H^{13} = (H^{31})^*$	$-i \vec{q} s_x \mathbf{G}_9$
$H^{23} = (H^{32})^*$	$-i m_t s_z \mathbf{G}_6$

Tabelle 1.4: Die kartesischen Komponenten des hermiteschen Hadrontensors $H^{\mu\nu}$ im Ruhesystem des Topquarks mit dem Polarisationsvektor $s_t = (0; s_x, 0, s_z)$. Die invarianten Strukturfunktionen \mathbf{G}_i sind polarisationsabhängig, die invarianten Strukturfunktionen \mathbf{W}_i dagegen polarisationsunabhängig.

Topquarks reell sind, symmetrisch gegenüber einer Vertauschung von Anfangs- und Endzustand, d.h. es gilt

$$\left(H_{\lambda_W \lambda'_W}^{\lambda_t \lambda'_t} \right)^* = H_{\lambda_W \lambda'_W}^{\lambda_t \lambda'_t} = H_{\lambda'_W \lambda_W}^{\lambda'_t \lambda_t}. \quad (1.23)$$

Die Hermitizität der Helizitäts-Strukturfunktionen überträgt sich auf den Hadrontensor in Gl. (1.16). In Tab. (1.4) sind die kartesischen Komponenten des kovarianten Hadrontensors im Ruhesystem des Topquarks durch die 4-Vektoren $q = (q_0; 0, 0, |\vec{q}|)$ und $p_t = (m_t; 0, 0, 0)$ berechnet. Der Spin des Topquarks wird wie oben durch $s_t = (0, s_x, 0, s_z)$ parametrisiert.

Der Spin des X_b -Systems wird in einer semi-inklusiven Messung nicht beobachtet, d.h. es gilt $\sum \lambda_{X_b} = \sum \lambda'_{X_b}$ und aufgrund der Drehimpulserhaltung folgt $\lambda_t - \lambda_W = \lambda'_t - \lambda'_W$. Für die BORNsche Näherung $X_b = b$ kann diese Differenz weiter eingeschränkt werden, da das Bottomquark nur die beiden Helizitätszustände $\lambda_b = \pm \frac{1}{2}$ annehmen kann. Ein masseloses Bottomquark schließlich ist nur linkshändig, d.h. es gilt $\lambda_b = -\frac{1}{2}$. Für die Differenzen der Helizitäten des Anfangs- und Endzustands gelten folgende *Auswahl-Regeln*:

$$X_b : \lambda_t - \lambda_W = \lambda'_t - \lambda'_W, \quad X_b = b : \lambda_t - \lambda_W = \lambda'_t - \lambda'_W = \pm \frac{1}{2} \quad (1.24)$$

Aus ihnen kann abgeleitet werden, daß die polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen H_U^P , H_L^P und H_F^P mit der longitudinalen Polarisation und H_I^P und H_A^P mit der transversalen Polarisation assoziiert sind.

Die Komponenten der doppelten Dichtematrix (1.22) sind durch die folgenden Linearkombinationen mit den in den Gln. (1.19.1-5) definierten Helizitäts-Strukturfunktionen verknüpft, wobei $H_{\mu\nu}^P$ den von der Polarisation des Topquarks abhängigen Anteil des kovarianten Hadrontensors bezeichnet:

$$H_U = H_{\mu\nu} \mathbb{P}_U^{\mu\nu} = H_{++}^{++} + H_{++}^{--} + H_{--}^{++} + H_{--}^{--}, \quad (1.25)$$

$$H_U^P = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_U^{\mu\nu} = H_{++}^{++} - H_{++}^{--} + H_{--}^{++} - H_{--}^{--}, \quad (1.26)$$

$$H_L = H_{\mu\nu} \mathbb{P}_L^{\mu\nu} = H_{OO}^{++} + H_{OO}^{--}, \quad (1.27)$$

$$H_L^P = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_L^{\mu\nu} = H_{OO}^{++} - H_{OO}^{--}, \quad (1.28)$$

$$H_F = H_{\mu\nu} \mathbb{P}_F^{\mu\nu} = H_{++}^{++} + H_{++}^{--} - H_{--}^{++} - H_{--}^{--}, \quad (1.29)$$

$$H_F^P = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_F^{\mu\nu} = H_{++}^{++} - H_{++}^{--} - H_{--}^{++} + H_{--}^{--}, \quad (1.30)$$

$$H_T = H_{\mu\nu} \mathbb{P}_T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.31)$$

$$H_5 = H_{\mu\nu} \mathbb{P}_5^{\mu\nu} = 0, \quad (1.32)$$

$$H_I^P = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_I^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(H_{+O}^{+-} + H_{O+}^{-+} - H_{-O}^{+-} - H_{O-}^{-+}) = \frac{1}{2}(H_{+O}^{+-} - H_{-O}^{-+}), \quad (1.33)$$

$$H_7 = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_7^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}(H_{+O}^{+-} - H_{O+}^{-+} - H_{-O}^{+-} + H_{O-}^{-+}) = 0, \quad (1.34)$$

$$H_A^P = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_A^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(H_{+O}^{+-} + H_{O+}^{-+} + H_{-O}^{+-} + H_{O-}^{-+}) = \frac{1}{2}(H_{+O}^{+-} + H_{-O}^{-+}), \quad (1.35)$$

$$H_9 = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_9^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}(H_{+O}^{+-} - H_{O+}^{-+} + H_{-O}^{+-} - H_{O-}^{-+}) = 0. \quad (1.36)$$

Die Dichtematrixelemente werden als *diagonal* bezeichnet, wenn die Helizitäten im Anfangs- und Endzustand gleich sind und als *nicht-diagonal*, wenn sie verschieden sind. Die Strukturfunktionen H_7 und H_9 verschwinden aufgrund der Symmetrie (1.23) des Hadrontensors und die Strukturfunktionen H_T und H_5 sind aufgrund der Auswahlregeln (1.24) bzw. der Drehimpulserhaltung verboten. Die nicht-diagonalen Strukturfunktionen H_I^P und H_A^P vereinfachen sich wegen der Symmetrie (1.23).

1.3.2 Die kovariante Darstellung der Projektoren

In diesem Abschnitt werden kovariante Darstellungen der Helizitätprojektoren entwickelt, um von der Wahl eines bestimmten Bezugssystems unabhängig zu sein.

Der unpolarisierte Helizitätsprojektor \mathbb{P}_{U+L} stellt die Polarisationssumme des W -Bosons dar und besitzt die kovariante Darstellung [63]:

$$\mathbb{P}_{U+L}^{\mu\nu} = \sum_{\lambda_W} \varepsilon_{\lambda_W}^{*\mu} \varepsilon_{\lambda_W}^{\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2} \xrightarrow{\Sigma_W} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

die im Ruhesystem Σ_W des W -Bosons in die angegebene Matrixdarstellung übergeht. Im nächsten Schritt wird für den longitudinalen Polarisationsvektor ε_0^μ ein kovarianter Ansatz gemacht, der durch die Substitution der 4-Impulsvektoren $p_t = (m_t; 0, 0, 0)$ und $q = (q_0; 0, 0; |\vec{q}|)$ im Ruhesystem des Topquarks auf die Gl. (1.9.1) zurückgeführt werden kann:

$$\varepsilon_0^\mu = -\frac{m_W}{m_t} \frac{1}{|\vec{q}|} \left(p_t^\mu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\mu \right) \stackrel{\text{sub.}}{=} \frac{1}{m_W} (|\vec{q}|, 0, 0, q_0)^\mu. \quad (1.38)$$

Mit Hilfe des kovarianten Polarisationsvektors können sowohl der Helizitätsprojektor $\mathbb{P}_L^{\mu\nu}$ als auch der Helizitätsprojektor $\mathbb{P}_U^{\mu\nu} = \mathbb{P}_{U+L}^{\mu\nu} - \mathbb{P}_L^{\mu\nu}$ in kovarianter Form dargestellt werden. Für den antisymmetrischen Helizitätsprojektor \mathbb{P}_F ist der Ansatz in dem total antisymmetrischen LEVI-CIVITA-Tensor zielführend:

$$\mathbb{P}_F^{\mu\nu} = \frac{1}{m_t} \frac{i}{|\vec{q}|} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{t,\alpha} q_\beta. \quad (1.39)$$

Im Ruhesystem des Topquarks mit $\alpha = 0$ und $\beta = 3$ (s.o.) existieren nur die zwei Möglichkeiten $\mu = 1, \nu = 2$ bzw. $\mu = 2, \nu = 1$. Beide Möglichkeiten stimmen mit der Matrixdarstellung in Gl. (1.14) überein:

$$\mathbb{P}_F^{12} = \frac{1}{m_t} \frac{i}{|\vec{q}|} \epsilon^{1203} m_t (-|\vec{q}|) = -i \epsilon^{1203} = -i \epsilon^{0123} = +i, \quad (1.40)$$

$$\mathbb{P}_F^{21} = \frac{1}{m_t} \frac{i}{|\vec{q}|} \epsilon^{2103} m_t (-|\vec{q}|) = -i \epsilon^{2103} = +i \epsilon^{0123} = -i. \quad (1.41)$$

Für die nicht-diagonalen Projektoren \mathbb{P}_I und \mathbb{P}_A werden zunächst durch Ausklammern der longitudinalen Polarisationsvektoren folgende Umschreibungen vorgenommen:

$$\mathbb{P}_I^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\varepsilon_+^{*\mu} - \varepsilon_-^{*\mu}) \varepsilon_0^\nu + \frac{1}{4} (\varepsilon_+^\nu - \varepsilon_-^\nu) \varepsilon_0^{*\mu} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} (\varepsilon_x^{*\mu} \varepsilon_0^\nu + \varepsilon_x^\nu \varepsilon_0^{*\mu}) \quad \text{mit} \quad (1.42)$$

$$(\varepsilon_+^{*\mu} - \varepsilon_-^{*\mu}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} (0; 1, 0, 0), \quad (\varepsilon_+^\nu - \varepsilon_-^\nu) = -\frac{2}{\sqrt{2}} (0; 1, 0, 0) \Rightarrow \varepsilon_x := (0; 1, 0, 0), \quad (1.43)$$

$$\mathbb{P}_A^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\varepsilon_+^{*\mu} + \varepsilon_-^{*\mu}) \varepsilon_0^\nu + \frac{1}{4} (\varepsilon_+^\nu + \varepsilon_-^\nu) \varepsilon_0^{*\mu} = +\frac{i}{2\sqrt{2}} (\varepsilon_y^{*\mu} \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_y^\nu \varepsilon_0^{*\mu}) \quad \text{mit} \quad (1.44)$$

$$(\varepsilon_+^{*\mu} + \varepsilon_-^{*\mu}) = +\frac{2i}{\sqrt{2}} (0; 0, 1, 0), \quad (\varepsilon_+^\nu + \varepsilon_-^\nu) = -\frac{2i}{\sqrt{2}} (0; 0, 1, 0) \Rightarrow \varepsilon_y := (0; 0, 1, 0). \quad (1.45)$$

Der 4-Vektor ε_y^μ kann mit Hilfe des total antisymmetrischen LEVI-CIVITA-Tensors auf den 4-Vektor ε_x^μ zurückgeführt werden, dessen Index im folgenden daher entfällt:

$$\varepsilon_y^\mu = \frac{1}{m_t} \frac{1}{|\vec{q}|} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\alpha p_{t,\beta} q_\gamma \quad \text{denn es gilt} \quad \frac{1}{m_t} \frac{1}{|\vec{q}|} \epsilon^{2103} (-1)(m_t)(|\vec{q}|) = 1. \quad (1.46)$$

Für spätere Anwendungen, die über die vorliegende Dissertation hinausreichen, wird der skalare Projektor \mathbb{P}_S eingeführt, der bei der Analyse des polarisierten Zerfalls des Topquarks in ein geladenes HIGGS-Boson, $t(\uparrow) \rightarrow H^+ + X_b$, von Bedeutung ist. Der skalare Projektor ergibt sich aus dem zeitartigen Anteil des Helizitätsprojektors \mathbb{P}_{U+L} ,

wie der Übergang seiner kovarianten Darstellung in die Matrixdarstellung im Ruhesystem des W-Bosons zeigt.

$$\mathbb{P}_S^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2} =: \varepsilon_S^{\mu*} \varepsilon_S^\nu \xrightarrow{\Sigma_W} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Mit Hilfe des auf Eins normierten, skalaren Vektors $\varepsilon_s^\mu = \frac{1}{m_W} q^\mu$ kann analog zu den Helizitäts-Strukturfunktionen eine polarisierte und unpolarisierte Strukturfunktion definiert werden:

$$H_S = H_{\mu\nu} \mathbb{P}_S^{\mu\nu} = H_{SS}^{++} + H_{SS}^{--} \quad (1.48)$$

$$H_S^P = H_{\mu\nu}^P \mathbb{P}_S^{\mu\nu} = H_{SS}^{++} - H_{SS}^{--}. \quad (1.49)$$

Somit ergibt sich abschließend folgender Satz kovarianter Projektoren, wobei die diagonalen Helizitätsprojektoren \mathbb{P}_U , \mathbb{P}_L und \mathbb{P}_F auf den longitudinal polarisierten Anteil des Hadrontensors und die nicht-diagonalen Helizitätsprojektoren \mathbb{P}_A und \mathbb{P}_I auf den transversal polarisierten Anteil wirken. Die inversen Potenzen des Impuls-Vektorbetrags $|\vec{q}| = (q_0^2 - m_W^2)^{1/2}$, die hier aus Gründen der Normierung eingeführt werden müssen, werden später die Integration der Bremsstrahlungskorrekturen über den Phasenraum erheblich erschweren gegenüber der Integration der Bremsstrahlungskorrekturen für die totale Rate. Es erweist sich als sinnvoll, die Integrale nach den Potenzen von $|\vec{q}|$ zu klassifizieren. Die kovarianten Projektoren lauten:

$$\mathbb{P}_U^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2} - \frac{m_W^2}{m_t^2} \frac{1}{|\vec{q}|^2} \left(p_t^\mu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\mu \right) \left(p_t^\nu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\nu \right), \quad (1.50)$$

$$\mathbb{P}_L^{\mu\nu} = \frac{m_W^2}{m_t^2} \frac{1}{|\vec{q}|^2} \left(p_t^\mu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\mu \right) \left(p_t^\nu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\nu \right), \quad (1.51)$$

$$\mathbb{P}_S^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}, \quad \mathbb{P}_{U+L}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}, \quad \mathbb{P}_F^{\mu\nu} = \frac{1}{m_t} \frac{i}{|\vec{q}|} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{t,\alpha} q_\beta, \quad (1.52)$$

$$\mathbb{P}_I^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m_W}{m_t} \frac{1}{|\vec{q}|} \left\{ \varepsilon^\mu \left(p_t^\nu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\nu \right) + \varepsilon^\nu \left(p_t^\mu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\mu \right) \right\}, \quad (1.53)$$

$$\mathbb{P}_A^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m_W}{m_t^2} \frac{i}{|\vec{q}|^2} \left\{ \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \left(p_t^\nu - \frac{p_t \cdot q}{m_W^2} q^\nu \right) \varepsilon_\alpha p_{t,\beta} q_\gamma - (\mu \leftrightarrow \nu) \right\}. \quad (1.54)$$

1.4 Die differentielle Zerfallsrate

In diesem Abschnitt wird die differentielle Zerfallsrate $d\Gamma$ für den Zerfall des polarisierten Topquarks $t(\uparrow) \rightarrow W^+(\rightarrow l^+ + \nu_l) + b$ bestimmt. Zunächst muß das Quadrat der Übergangsamplitude für den untersuchten physikalischen Prozeß berechnet werden. Es ergibt sich durch die Kontraktion des Leptontensors $L^{\mu\nu}$ mit dem Hadrontensor $H_{\mu\nu}$, multipliziert mit der Delta-Funktion für die „Zero-Width“-Approximation (s.o.):

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = & \frac{2}{3} \frac{g_w^2 m_W}{2 \Gamma_W} (2\pi) \delta(q^2 - m_W^2) \times \left\{ \right. \\
& \left(H_U + P \cos \theta_P H_U^P \right) \times \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) + \\
& + \left(H_L + P \cos \theta_P H_L^P \right) \times \frac{3}{4} \sin^2 \theta + \\
& + \left(H_F + P \cos \theta_P H_F^P \right) \times \frac{3}{4} \cos \theta + \\
& + \left(P \sin \theta_P H_I^P \right) \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta \cos \phi + \\
& \left. + \left(P \sin \theta_P H_A^P \right) \times \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \phi \right\}. \tag{1.55}
\end{aligned}$$

Der Leptontensor beschreibt durch die Winkelverteilung in θ und ϕ die Impuls-Impuls-Korrelation zwischen dem W -Boson und dem Lepton. Der Hadrontensor beschreibt durch die Helizitäts-Strukturfunktionen und dem Polarwinkel θ_P die Spin-Impuls-Korrelation zwischen dem Polarisationsvektor des Topquarks und dem Impulsvektor des W -Bosons.

Die totale Zerfallsrate $\Gamma_3(t \rightarrow b + l^+ + \nu_l)$ für den in Abb. (1.2a) dargestellten Zerfall des Topquarks ergibt sich nach FERMIS „Goldener Regel“ (siehe Anhang G.1) durch das Integral für einen Drei-Körper-Zerfall:

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2 m_t} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_b}{2 E_b} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_{l^+}}{2 E_{l^+}} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_{\nu_l}}{2 E_{\nu_l}} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_t - p_b - p_{l^+} - p_{\nu_l}). \tag{1.56}$$

Durch Einschreiben der Identität in Gl. (1.57) - zu ihrem Beweis sei an die weitere Identität $\int \frac{d^3 \vec{q}}{2 q^0} = \int d^4 q \delta(q^2 - m_W^2) \Theta(q^0)$ für das LORENTZ-invariante Phasenraumvolumen erinnert - kann der Zerfall des intermediären W -Boson explizit implementiert werden. Die Zerfallsrate für den Drei-Körper-Zerfall kann in ein Produkt von zwei Zerfallsraten für Zwei-Körper-Zerfälle $\Gamma(t \rightarrow b + W^+)$ und $\Gamma(W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l)$ umgeschrieben werden, welches noch über die invariante Masse q^2 integriert werden muß [67]. Es folgt:

$$\begin{aligned}
1 &= \int dq^2 \int \frac{d^3 \vec{q}}{2 E_W} \delta^4(q - p_{l^+} - p_{\nu_l}), \tag{1.57} \\
&:= \Gamma_2(t \rightarrow b + W^+) \\
\Gamma_3 &= 2 m_W \int \frac{dq^2}{(2\pi)} \overbrace{\left\{ \frac{1}{2 m_t} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_b}{2 E_b} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{q}}{2 E_W} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_t - p_b - q) \right\}} \times \tag{1.58} \\
&\quad \times \underbrace{\left\{ \frac{1}{2 m_W} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_{l^+}}{2 E_{l^+}} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_{\nu_l}}{2 E_{\nu_l}} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_{l^+} - p_{\nu_l}) \right\}} \\
&:= \Gamma_2(W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l)
\end{aligned}$$

Zur weiteren Abkürzung wird das Verzweigungsverhältnis BR („Branching Rate“) für das W -Boson als Verhältnis der leptonischen zur Gesamtzerfallsrate definiert:

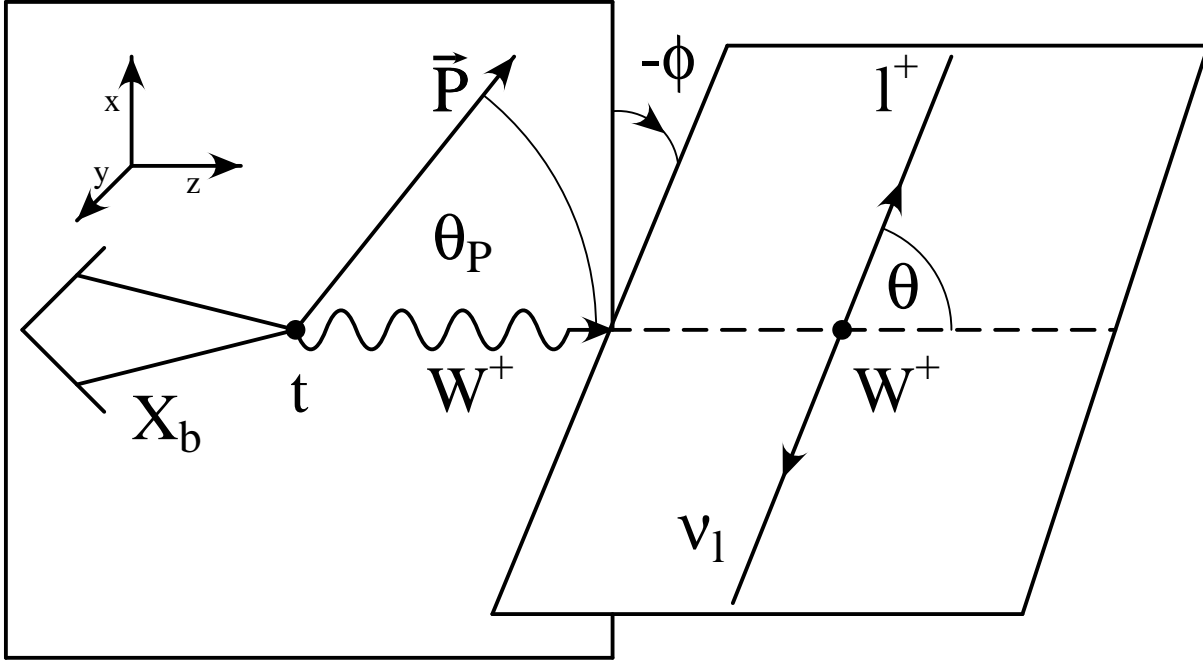


Abbildung 1.3: Der Zerfall des Topquarks und die Definition der Winkel. Der Zerfall des Topquarks t wird in seinem Ruhesystem betrachtet, wobei für die Flugrichtung des W-Bosons die positive z-Richtung gewählt wird. Der Polarisationsvektor \vec{P} schließt den Polarwinkel θ_P mit der z-Achse ein. Die Leptonebene, die von der z-Achse und dem Leptonenstrahl aufgespannt wird, ist um den Azimutalwinkel ϕ gegen die Hadronebene drehbar. Der Leptonenstrahl schließt den Polarwinkel θ mit der z-Achse ein.

$$\text{BR}(W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l) := \frac{\Gamma(W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l)}{\Gamma(W^+ \rightarrow \text{alle Prozesse})}. \quad (1.59)$$

Die vollständige Winkelabhängigkeit der differentiellen Zerfallsrate für den Zerfall des polarisierten Topquarks in ein W-Boson und ein Bottomquark, gefolgt von dem Zerfall des W-Bosons in ein Leptonenpaar, lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d \cos \theta d\phi d \cos \theta_P} &= \frac{1}{4\pi} \text{BR}(W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l) \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2}\pi} \frac{m_W^2}{m_t^2} |\vec{q}| \times \left\{ \right. \\ &\quad \left(H_U + P \cos \theta_P H_U^P \right) \times \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) + \\ &\quad + \left(H_L + P \cos \theta_P H_L^P \right) \times \frac{3}{4} \sin^2 \theta + \\ &\quad + \left(H_F + P \cos \theta_P H_F^P \right) \times \frac{3}{4} \cos \theta + \\ &\quad + \left(P \sin \theta_P H_I^P \right) \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta \cos \phi + \\ &\quad \left. + \left(P \sin \theta_P H_A^P \right) \times \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \phi \right\}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Die Polarisierungseffekte des Topquarks werden vollständig determiniert durch die Angabe der drei unpolarisierten und der fünf polarisierten Strukturfunktionen. Die Polarisierungswinkel θ_P und θ sowie der Azimutalwinkel ϕ , die in der kaskadenartigen Beschreibung des zweistufigen Zerfallsprozesses $t(\uparrow) \rightarrow W^+(\rightarrow l^+ + \nu_l) + X_b$ auftreten, sind in Abb. (1.3) definiert. Die Flugrichtung des W -Bosons legt die z -Achse fest. Die Leptonebene wird durch sie und dem im Ruhesystem des W -Bosons definierten Impulsvektor des l^+ -Leptons aufgespannt. Notwendig zur Festlegung der Hadronebene (hier als x - z -Ebene) ist die x -Komponente des Polarisationsvektors. Zur besseren Übersicht ist die Leptonebene um einen negativen Azimutalwinkel gegen die Hadronebene gedreht. Für einen hadronischen Zerfall des W -Bosons in ein Paar leichter Quarks hat man lediglich in Abb. (1.3) $(l^+ \nu_l)$ durch $(q_i \bar{q}_i)$ zu ersetzen.

Wie aus Gl. (1.60) ersichtlich, sind die nicht diagonalen Helizitäts-Strukturfunktionen H_I^P und H_A^P mit der Messung des Azimutwinkels ϕ assoziiert. Der physikalische Grund liegt in der einzig möglichen Definition des Hadrontensors durch die transversale Komponente des Polarisationsvektors der Topquarks.

Um auch die entsprechende differentielle Zerfallsrate für den Zerfall des polarisierten Antitopquarks $\bar{t}(\uparrow) \rightarrow W^-(\rightarrow l^- + \bar{\nu}_l) + X_{\bar{b}}$ zu beschreiben, muß Gl. (1.60) leicht modifiziert werden. Da die magnetische Quantenzahl des Leptonpaares in Richtung des l^- -Leptons jetzt $m = -1$ (im Fall des l^+ -Leptons ist $m = +1$) beträgt, ändern sich die Vorzeichen der Winkelverteilungen der Helizitäts-Strukturfunktionen H_F , H_F^P und H_A^P , während alle übrigen Winkelverteilungen ihre Vorzeichen behalten. Die Strukturfunktionen für den Zerfall des Antitopquarks selbst stehen über die CP-Invarianz mit denen des Topquarks in folgendem Zusammenhang: Die paritätsverletzenden Strukturfunktionen H_F , H_U^P , H_L^P und H_I^P unterliegen einem Vorzeichenwechsel, während die paritätserhaltenden Strukturfunktionen H_U , H_L , H_F^P und H_A^P ihre Vorzeichen behalten. Zusammengefaßt ergibt sich, daß beim Übergang der Betrachtung vom Zerfall des Topquarks zum Zerfall des Antitopquarks die unpolarisierten Beiträge ihre Vorzeichen behalten und die polarisierten Beiträge ihre Vorzeichen wechseln.

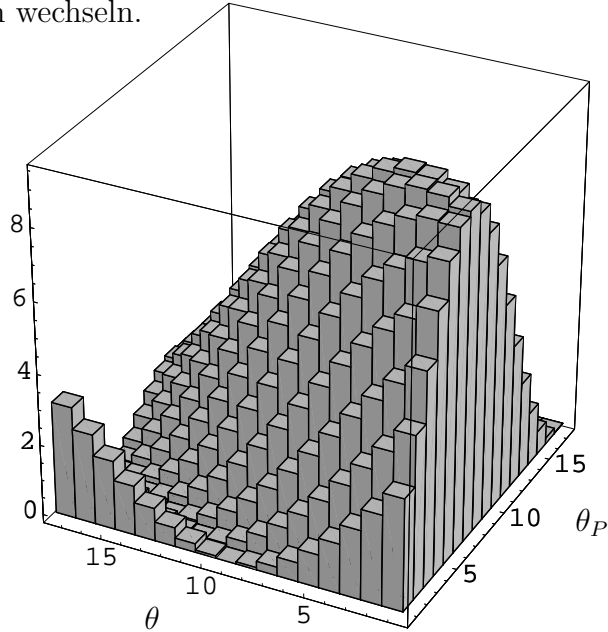


Abbildung 1.4: Histogramm der Winkelverteilung der differentiellen Zerfallsrate in Bornscher Näherung. Für $\phi = 0$ ist die differentielle Zerfallsrate als Funktion von $\theta_P = \frac{i\pi}{16}$ und $\theta = \frac{j\pi}{16}$ mit $i, j = 0, \dots, 16$ dargestellt.

Abschließend wird, in Vorgriff auf das Kapitel 2, in Abb. (1.4) die (nicht normierte) Polarwinkel-Korrelation zwischen θ_P und θ gezeigt, die sich aus der differentiellen Zerfallsrate in Gl. (1.60) in BORNscher Näherung ergibt. Die Abhängigkeit von dem Azimutalwinkel wird durch die Wahl $\cos \phi = 0$ unterdrückt. Die Korrelation besitzt ein ausgeprägtes Maximum bei $\theta_P \approx 9/16\pi$ und $\theta \approx 3/16\pi$.

Kapitel 2

Die Zerfallsraten in Bornscher Näherung

2.1 Der Hadrontensor der Bornschen Näherung

In diesem Kapitel werden die Helizitäts-Strukturfunktionen für den Zerfall des Topquarks $t \rightarrow W^+ + b$ in Bornscher Näherung, einschließlich der beiden skalaren Strukturfunktionen, berechnet und numerisch ausgewertet. Insbesondere wird die Lebensdauer $\tau = 1/\Gamma_{U+L}$ des Topquarks und die Güte der „Zero-Width“-Approximation auf diesem Level bestimmt. Um Novizen der phänomenologischen Elementarteilchenphysik das Verständnis zu erleichtern, werden die einzelnen Schritte ausführlich diskutiert.

Die Übergangsamplitude \mathcal{M}_0 für das FEYNMAN-Diagramm der Bornschen Näherung in Abb. (2.1) ergibt sich mit Hilfe der FEYNMAN-Regeln aus dem Anhang A als Produkt,

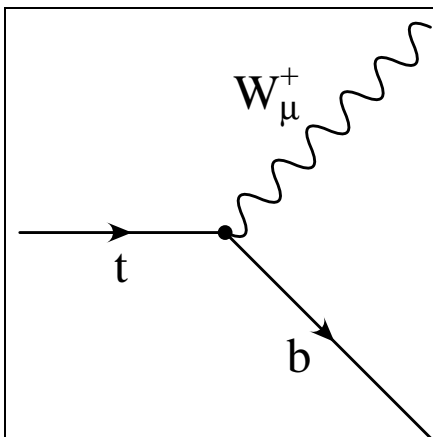


Abbildung 2.1: Feynman-Diagramm für die Bornsche Näherung.

Strukturfunktionen liefert:

bestehend aus dem adjungierten Spinor $\bar{u}(p_b, s_b)$ für das auslaufende Bottomquark, dem Vertexfaktor für das W -Boson und dem Spinor $u(p_t, s_t)$ für das einlaufende Topquark, multipliziert mit dem adjungierten Polarisationsvektor $\varepsilon^*_{\mu}(q, \lambda_W)$ für das auslaufende W -Boson. Verzichtet man auf die Kontraktion des Vertexfaktors mit dem Polarisationsvektor in Gl. (2.1.1), so wird die Übergangsamplitude zu dem LORENTZ-invarianten $(V - A)$ -Vektor in Gl. (2.1.2). Das Quadrat der Übergangsamplitude \mathcal{M}_0^{μ} mit ihrer Adjungierten $\mathcal{M}_0^{\dagger\nu}$ bildet den Hadrontensor in Bornscher Näherung (Anhang G enthält eine Formelsammlung mit den wichtigsten Regeln für die Adjunktion von Gamma-Matrizen und Spinoren), dessen Kontraktion mit den kovarianten Helizitäts-Projektoren in den Gln. (1.50-e) schließlich die gesuchten Helizitäts-

$$\mathcal{M}_0 = \bar{u}(p_b, s_b) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u(p_t, s_t) \varepsilon_\mu^*(q), \quad (2.1.1)$$

$$\mathcal{M}_0^\mu = \bar{u}(p_b, s_b) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u(p_t, s_t). \quad (2.1.2)$$

Zunächst soll allgemein in dem Gleichungssystem (2.2) das Amplitudenquadrat für den Übergang einer Spinkonfiguration i im Anfangszustand in eine Spinkonfiguration f im Endzustand berechnet werden. Wenn die Spinpolarisationen der Konfigurationen nicht gemessen werden, muß wie in Gl. (2.2.1) über die Spinzustände im Anfangszustand *gemittelt* und über die Spinzustände im Endzustand *summiert* werden. Unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation für die Spinoren in Gl. (G.28) des Anhangs, kann die Summation über die inneren Spinoren des Anfangszustands in Gl. (2.2.2) ausgeführt werden. Die Verwendung der Vollständigkeitsrelation wird durch das Symbol V über dem Gleichheitszeichen gekennzeichnet. In Gl. (2.2.4) wird die Matrizenmultiplikation explizit als Summe über die Indizes α und β geschrieben. Da die Matrixelemente reine Zahlen sind, können sie umsortiert und die Vollständigkeitsrelation diesmal in Gl. (2.2.5) auf die äußeren Spinoren angewandt werden. Die verbleibende Summation über α und β in Gl. (2.2.6) entspricht der Definition einer Spur. Statt eine Summe über Spinoren auszurechnen, vereinfacht sich die Berechnung des Amplitudenquadrats durch die Vollständigkeitsrelation auf die Auswertung einer Spur über Gamma-Matrizen. Mit Hilfe der im Anhang G angegebenen Spurtheoreme, den Regeln für die CLIFFORD-Algebra und den Vertauschungsregeln für die Gamma-Matrizen können sämtliche Spuren berechnet werden.

$$|\mathcal{M}_{(i \rightarrow f)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} \left\{ \bar{u}(p_f, s_f) \Gamma^\mu u(p_i, s_i) \right\} \left\{ \bar{u}(p_i, s_i) \bar{\Gamma}^\nu u(p_f, s_f) \right\} \quad (2.2.1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_f} \left\{ \bar{u}(p_f, s_f) \Gamma^\mu \right\} \left\{ \sum_{s_i} u(p_i, s_i) \bar{u}(p_i, s_i) \right\} \left\{ \bar{\Gamma}^\nu u(p_f, s_f) \right\} \quad (2.2.2)$$

$$\stackrel{V}{=} \frac{1}{2} \sum_{s_f} \left\{ \bar{u}(p_f, s_f) \Gamma^\mu (\not{p}_i + m_i) \bar{\Gamma}^\nu u(p_f, s_f) \right\} \quad (2.2.3)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_f} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \left(\Gamma^\mu (\not{p}_i + m_i) \bar{\Gamma}^\nu \right)_{\alpha\beta} u_\beta(p_f, s_f) \right\} \quad (2.2.4)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\Gamma^\mu (\not{p}_i + m_i) \bar{\Gamma}^\nu \right)_{\alpha\beta} \left\{ \sum_{s_f} u_\beta(p_f, s_f) \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \right\} \quad (2.2.5)$$

$$\stackrel{V}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\Gamma^\mu (\not{p}_i + m_i) \bar{\Gamma}^\nu \right)_{\alpha\beta} \left(\not{p}_f + m_f \right)_{\beta\alpha} \quad (2.2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Gamma^\mu (\not{p}_i + m_i) \bar{\Gamma}^\nu (\not{p}_f + m_f) \right\}. \quad (2.2.7)$$

Bei der Untersuchung des Zerfalls eines polarisierten Topquarks im Anfangszustand in ein unpolarisiertes Bottomquark im Endzustand muß der Ausdruck $(\not{p}_t + m_t)$ in der Spur durch die DIRAC-Matrix $\frac{1}{2}(\not{p}_t + m_t)(\mathbb{1} + \gamma_5 \not{s}_t)$ ersetzt werden. Summiert man über die

$$= \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \text{Tr} \left\{ (\not{p}_b + m_b) \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} (\not{p}_t + m_t) \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5 \not{s}_t) \gamma^\nu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right\} \quad (2.7)$$

$$= \frac{g_w^2}{8} |V_{tb}|^2 \text{Tr} \left\{ \not{p}_b \gamma^\mu (\not{p} - m_t \not{s}_t) \gamma^\nu (\mathbb{1} - \gamma_5) \right\} = \frac{g_w^2}{8} |V_{tb}|^2 \text{Tr} \left\{ \not{p}_b \gamma^\mu \not{p}_t \gamma^\nu (\mathbb{1} - \gamma_5) \right\} \quad (2.8)$$

$$= \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \left\{ p_b^\nu \bar{p}_t^\mu + p_b^\mu \bar{p}_t^\nu - (p_b \cdot \bar{p}_t) g^{\mu\nu} + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{b,\alpha} \bar{p}_{t\beta} \right\}. \quad (2.9)$$

Die Parametrisierung erfolgt im Ruhesystem des Topquarks. Aus den Bedingungen $\vec{p}_t = 0$ und $p_t \cdot s_t = 0$ folgt $p_t = (m_t; 0, 0, 0)$ für den 4-Impuls und $s_t = (0; s_x, s_y, s_z)$ für den 4-Spinvektor des Topquarks. Aufgrund der Impuls-Erhaltung gehen das Bottomquark und das W-Boson „back-to-back“ aus dem Zerfall des Topquarks hervor. Die Flugrichtung des W-Bosons definiert die positive z-Achse:

$$p_t = (m_t; 0, 0, 0), \quad s_t = (0; s_x, s_y, s_z), \quad (2.10)$$

$$p_b = (E_b; 0, 0, -|\vec{q}|), \quad q = (E_W; 0, 0, +|\vec{q}|). \quad (2.11)$$

Aus der Energie-Impuls-Erhaltung folgen aus $(p_t - p_b)^2 = q^2$ bzw. $(p_t - q)^2 = p_b^2$ mit Hilfe der „on shell“-Bedingungen $p_t^2 = m_t^2$, $p_b^2 = m_b^2$ und $q^2 = m_W^2$ die Energien und Impulse der beiden Zerfallsprodukte. Bei der Darstellung der Impulse wird Gebrauch von der KÄLLÉN-Funktion $\lambda(a, b, c) := a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca)$ gemacht, die eine im weiteren häufig gebrauchte Verallgemeinerung der Binomialen darstellt:

$$E_W = \frac{m_t^2 + m_W^2 - m_b^2}{2 m_t}, \quad |\vec{q}| = +\sqrt{E_W^2 - m_W^2} = +\frac{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}}{2 m_t}, \quad (2.12)$$

$$E_b = \frac{m_t^2 - m_W^2 + m_b^2}{2 m_t}, \quad |\vec{p}_b| = -\sqrt{E_b^2 - m_b^2} = -\frac{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}}{2 m_t}. \quad (2.13)$$

2.2 Der Phasenraum für einen Zwei-Körper-Zerfall

Gemäß FERMIS „Goldener Regel“ für die Zerfallsrate muß das Quadrat der Übergangsamplitude über den zugehörigen Phasenraum integriert werden. Allgemein lautet für einen n -Körperzerfall das differentielle Phasenraumvolumen

$$d\text{PS}_n = (2\pi)^{4-3n} \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n p_i - q \right) \prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) d^4 p_i, \quad (2.14)$$

wobei $p_i = (p_i^0; \vec{p}_i)$ den 4-Impuls des i -ten Teilchens mit der Masse m_i und q den 4-Impuls des zerfallenden Teilchens bezeichnet. Jedes differentielle Phasenraumvolumen $d^3 \vec{p}_i$ wird auf das Phasenraumvolumen $(2\pi\hbar)^3$ normiert ($\hbar = 1$). Die globale Energie-Impuls-Erhaltung wird durch die mit $(2\pi)^4$ multiplizierte 4-Deltafunktion repräsentiert, während für jedes Teilchen i die Deltafunktion die „On Shell“-Bedingung und die HEAVISIDE-Funktion die positiv definite Teilchenenergie garantiert. Da die individuellen Impulse der Zerfallsprodukte nicht interessieren, müssen sie über den Phasenraum integriert werden.

Das LORENTZ-invariante Integrationsmaß d^4p_i in der MINKOWSKI-Metrik wird durch den folgenden Standardtrick auf das gleichermaßen LORENTZ-invariante Integrationsmaß $(d^3\vec{p})/(2p^0)$ in der euklidischen Metrik umgeformt:

$$\int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) = \sum_{\kappa=\pm 1} \int dp^0 \int d^3\vec{p} \frac{\delta(p^0 + \kappa\sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{|2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}|} \theta(p^0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0}. \quad (2.15)$$

Das differentielle Phasenraumvolumen für das Bottomquark und das W -Boson im Endzustand kann folglich in der Form

$$d\text{PS}_2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_t - p_b - q) \times \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_b}{2E_b} \times \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{2E_W} \quad (2.16)$$

geschrieben werden. Die verschiedenen Zerfallsraten Γ_i ergeben sich in BORNscher Näherung durch die Kontraktionen des Hadrontensors $\mathcal{B}_0^{\mu\nu}$ mit den Projektoren IP_i mit $i = U, L, F, S, I$ und A zu den skalaren Amplitudenquadraten $|\mathcal{M}_{0,i}|^2$ und anschließender Integration über den Phasenraum des Endzustands, geteilt durch den Faktor $(2m_t)$ (siehe FERMIS „Goldene Regel“ in Gl. (G.4) des Anhangs). Da die Amplitudenquadrate $|\mathcal{M}_{0,i}|^2$ in BORNscher Näherung von den Impulsen \vec{q} und \vec{p}_b unabhängig sind, können sie in Gl. (2.17.1) vor die Integrale gezogen werden. Die 4-Deltafunktion wird in Gl. (2.17.2) in einen Energie- und einen Impulsanteil faktorisiert und die Integration über den Impuls \vec{q} des W -Bosons mit Hilfe der Deltafunktion $\delta^3(\vec{p}_b - \vec{q})$ in Gl. (2.17.3) ausgeführt. Die Energien des W -Bosons und des Bottomquarks sind durch die Energie-Impuls-Relation $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ in Abhängigkeit des verbleibenden Impulses \vec{p}_b ausgedrückt. Der Impuls wird in Gl. (2.17.4) schließlich in Kugelkoordinaten entwickelt und die Integration über den gesamten Raumwinkel 4π ausgeführt. Die Berechnung der Zerfallsraten Γ_i lautet im einzelnen:

$$\Gamma_i = \frac{1}{2m_t} \frac{1}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_{0,i}|^2 \int \frac{d^3\vec{p}_b}{2E_b} \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_W} \delta^4(p_t - p_b - q) \quad (2.17.1)$$

$$= \frac{1}{2m_t} \frac{1}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_{0,i}|^2 \int \frac{d^3\vec{p}_b}{2E_b} \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_W} \delta(m_t - E_b - E_W) \delta^3(\vec{p}_b + \vec{q}) \quad (2.17.2)$$

$$= \frac{1}{2m_t} \frac{1}{(4\pi)^2} |\mathcal{M}_{0,i}|^2 \int \frac{\delta(m_t - \sqrt{m_b^2 + \vec{p}_b^2} - \sqrt{m_W^2 + \vec{p}_b^2})}{\sqrt{m_b^2 + \vec{p}_b^2} \sqrt{m_W^2 + \vec{p}_b^2}} d^3\vec{p}_b \quad (2.17.3)$$

$$= \frac{1}{2m_t} \frac{1}{4\pi} |\mathcal{M}_{0,i}|^2 \int_0^\infty \frac{\delta(m_t - \sqrt{m_b^2 + |\vec{p}_b|^2} - \sqrt{m_W^2 + |\vec{p}_b|^2})}{\sqrt{m_b^2 + |\vec{p}_b|^2} \sqrt{m_W^2 + |\vec{p}_b|^2}} |\vec{p}_b|^2 d|\vec{p}_b|. \quad (2.17.4)$$

Um die verbleibende Integration über $|\vec{p}_b|$ auszuführen, wird der Impulsbetrag $|\vec{p}_b|$ durch die Gesamtenergie $E_{ges.} = m_t$ im Argument der Deltafunktion gemäß Gl.(2.18.1) substituiert. Aus der Ruheenergie des Topquarks kann einerseits der schon bekannte Impulsbetrag des Bottomquarks berechnet werden (rechtes Gleichheitszeichen), andererseits durch Differentiation der Substitutionsvorschrift das Integrationsmaß $dE_{ges.}$ bestimmt werden (linkes Gleichheitszeichen):

$$E_{ges.} = (m_b^2 + |\vec{p}_b|^2)^{\frac{1}{2}} + (m_W^2 + |\vec{p}_b|^2)^{\frac{1}{2}} = m_t \quad \Rightarrow \quad (2.18.1)$$

$$|\vec{p}_b| = \frac{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}}{2 m_t}, \quad dE_{ges.} = \frac{\sqrt{m_b^2 + |\vec{p}_b|^2} + \sqrt{m_W^2 + |\vec{p}_b|^2}}{\sqrt{m_b^2 + |\vec{p}_b|^2} \sqrt{m_W^2 + |\vec{p}_b|^2}} |\vec{p}_b| d|\vec{p}_b|. \quad (2.18.2)$$

Nach der Auswertung der Deltafunktion lautet das Ergebnis für die Zerfallsraten:

$$\Gamma_i = \frac{1}{2 m_t} \frac{1}{4\pi} |\mathcal{M}_{0,i}|^2 \int_{E_{ges.}=m_t} \delta(m_t - E_{ges.}) |\vec{p}_b| \frac{dE_{ges.}}{E_{ges.}} = \frac{1}{2 m_t^2} \frac{1}{4\pi} |\mathcal{M}_{0,i}|^2 |\vec{p}_b| \Big|_{E_{ges.}=m_t} \quad (2.19.1)$$

$$= \frac{1}{2 m_t^2} \frac{1}{4\pi} |\mathcal{M}_{0,i}|^2 \frac{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}}{2 m_t} = \frac{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}}{16 \pi m_t^3} |\mathcal{M}_{0,i}|^2. \quad (2.19.2)$$

Der Vorfaktor von $|\mathcal{M}_{0,i}|^2$ wird als *Phasenraumfaktor* bezeichnet. Um die gesuchten Helizitäts-Strukturfunktionen Γ_i in der BORNSchen Näherung zu erhalten, muß lediglich der Hadrontensor aus Gl. (2.9) mit dem zugehörigen Projektor P_i mit $i = U, L, F, S, I$ oder A kontrahiert und mit dem *Phasenraumfaktor* multipliziert werden.

Im allgemeinen ist das Quadrat der Übergangsamplitude $|\mathcal{M}|^2$ eine Funktion der Impulse \vec{p}_i der Teilchen $i = 1, \dots, n$ des n-Körper-Endzustands. Nur für den oben diskutierten Zweikörperzerfall kann die Integration explizit durchgeführt werden, ohne die funktionelle Form des Amplitudenquadrats zu kennen. Bei den Strahlungskorrekturen in niedrigster Ordnung durch ein Photon bzw. ein Gluon handelt es sich um Dreikörperzerfälle, deren Phasenraumintegrationen erheblich komplizierter zu berechnen sind (siehe Kapitel 3).

Die schwache Ladung g_w und die W -Bosonmasse m_W treten bei Berechnungen von Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitten nie getrennt, sondern stets als Verhältnis voneinander auf. Traditionell werden daher alle Resultate durch die FERMI-Konstante¹ G_F anstatt der schwachen Ladung² g_w ausgedrückt [63, 68]:

$$\boxed{\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8} \left(\frac{g_w}{m_W c^2} \right)^2 (\hbar c)^3 \xrightarrow{\hbar=c=1} \frac{g_w^2}{8 m_W^2}}.$$

2.3 Die Kontraktion mit den Helizitätsprojektoren

Die unpolarisierten Amplitudenquadrate $|\mathcal{M}_{0,i}|^2$ bzw. polarisierten Amplitudenquadrate $|\mathcal{M}_{0,i}^P|^2$ ergeben sich in BORNScher Näherung aus der Kontraktion des Hadrontensors (2.9)

¹Bei Fermis Theorie des β -Zerfalls (1933) wird die Wechselwirkung der Fermionen durch eine direkte Vierteilchenkopplung beschrieben. Aufgrund der großen Masse des W -Bosons stellt dies für niedrige Energien eine gute Näherung an den Propagator des W -Bosons ($\propto (q^2 - m_W^2)^{-1} \approx m_W^{-2}$) dar; bei hohen Energien ist Fermis Theorie nicht gültig und bereits 1938 schlug Klein die Idee eines schwachen Austauschteilchens vor. Zu Ehren Fermis wird die schwache Ladung g_w konventionsgemäß durch die Fermi-Konstante G_F ausgedrückt.

²Aus der beobachteten Lebensdauer und Masse des Muons wird die Fermi-Konstante zu $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ bestimmt; der entsprechende Wert für die schwache Ladung beträgt $g_w \approx 0.66$, was einer „schwachen Kopplungskonstante“ $\alpha_w = g_w^2/(4\pi) \approx \frac{1}{29}$ entsprechen würde.

mit den kovarianten Projektoren IP_i mit $i = U+L, U, L, F, I$ und A und der Separation von spinunabhängigen und spinabhängigen Anteilen nach der Parametrisierung der 4-Skalarprodukte im Ruhesystem des Topquarks. Die kovarianten Projektoren IP_i und die Separation nach den Spinanteilen des Topquarks sind Abschnitt 1.3 beschrieben, die Parametrisierung im Abschnitt 2.1. Die gesuchten Helizitäts-Strukturfunktionen Γ_i bzw. Γ_i^P , für die im folgenden auch die Schreibweise $U+L, U^P+L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, I^P$ und A^P verwandt wird, ergeben sich durch Multiplikation mit dem Phasenraumfaktor aus Gl. (2.19.1) und werden durch die auf die Masse des Topquarks skalierten Größen x und y sowie durch die KÄLLÉN-Funktion $\lambda(1, x^2, y^2)$ ausgedrückt:

$$x := \frac{m_W}{m_t}, \quad y := \frac{m_b}{m_t}, \quad \lambda(1, x^2, y^2) = 1 + x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2 + x^2y^2). \quad (2.20)$$

Die Helizitäts-Strukturfunktionen lauten:

$$\Gamma_{U+L} = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{8 \sqrt{2} \pi} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \left((1 - y^2)^2 + x^2(1 + y^2) - 2x^4 \right), \quad (2.21.1)$$

$$\Gamma_{U+L}^P = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{8 \sqrt{2} \pi} \lambda(1, x^2, y^2) \left(1 - 2x^2 - y^2 \right), \quad (2.21.2)$$

$$\Gamma_U = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{4 \sqrt{2} \pi} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} x^2 \left(1 - x^2 + y^2 \right), \quad (2.21.3)$$

$$\Gamma_U^P = -\frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{4 \sqrt{2} \pi} \lambda(1, x^2, y^2) x^2, \quad (2.21.4)$$

$$\Gamma_L = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{8 \sqrt{2} \pi} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \left((1 - y^2)^2 - x^2(1 + y^2) \right), \quad (2.21.5)$$

$$\Gamma_L^P = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{8 \sqrt{2} \pi} \lambda(1, x^2, y^2) \left(1 - y^2 \right), \quad (2.21.6)$$

$$\Gamma_F = -\frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{4 \sqrt{2} \pi} \lambda(1, x^2, y^2) x^2, \quad (2.21.7)$$

$$\Gamma_F^P = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{4 \sqrt{2} \pi} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} x^2 \left(1 - x^2 + y^2 \right) \quad (2.21.8)$$

$$\Gamma_S = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{8 \sqrt{2} \pi} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \left((1 - y^2)^2 - x^2(1 + y^2) \right), \quad (2.21.9)$$

$$\Gamma_S^P = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{8 \sqrt{2} \pi} \lambda(1, x^2, y^2) \left(1 - y^2 \right), \quad (2.21.10)$$

$$\Gamma_I^P = -\frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{16 \pi} \lambda(1, x^2, y^2) x, \quad (2.21.11)$$

$$\Gamma_A^P = \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{16 \pi} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} x \left(1 - x^2 - y^2 \right). \quad (2.21.12)$$

Der Vollständigkeit halber sind die beiden skalaren Strukturfunktionen Γ_S und Γ_S^P , die bei der Diskussion des polarisierten Zerfalls $t(\uparrow) \rightarrow H^+(\uparrow) + b$ benötigt werden, mit aufgeführt. In BORNscher Näherung stimmen sie zufällig mit den longitudinalen Raten Γ_L und Γ_L^P überein; bei den Strahlungskorrekturen in $O(\alpha)$ und $O(\alpha_s)$ wird dies aber nicht der Fall sein.

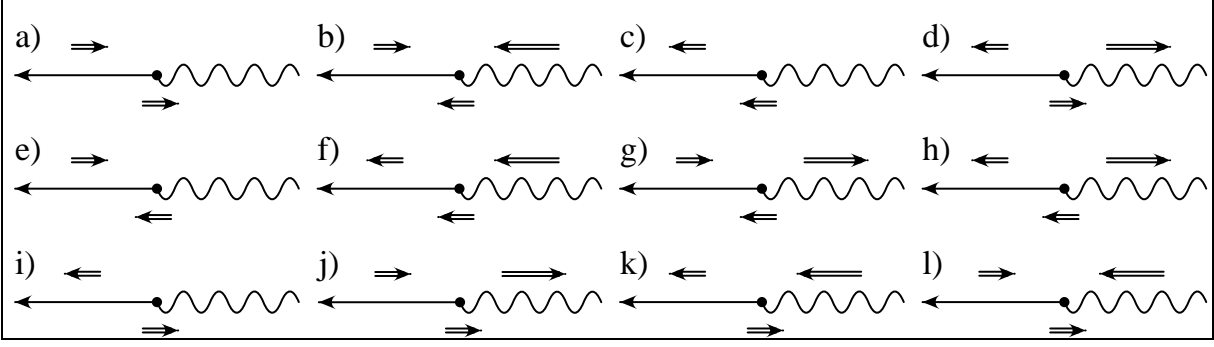


Abbildung 2.2: Die Spinkonfigurationen im Ruhesystem des Topquarks. Das Topquark zerfällt „back-to-back“ in ein Bottomquark und ein W -Boson. Die z -Komponente des Topspins ($s_z = \pm 1/2$) ist unterhalb des Topquarks dargestellt, die z -Komponente des Bottomspins ($s_z = \pm 1/2$) bzw. des W -Bosons ($s_z = -1, 0, 1$) oberhalb des Bottomquarks (links) bzw. des W -Bosons (rechts).

Im Fall eines masselosen Bottomquarks, in Tab. (2.1) sind die Raten für $m_b \neq 0$ und $m_b = 0$ gegenüber gestellt, gelten für die Helizitäts-Strukturfunktionen die Gleichheits-Relationen $\Gamma_U = -\Gamma_U^P = -\Gamma_F = \Gamma_F^P$, $\Gamma_L = \Gamma_L^P$ und $\Gamma_I^P = -\Gamma_A^P$. Sie resultieren aus der Tatsache, daß ein masseloses Bottomquark aufgrund der $(V-A)$ -Kopplung mit dem W -Boson rein linkshändig ist. Dies impliziert zusammen mit der Drehimpulserhaltung $\lambda_t = \lambda_W - \lambda_b$ und $\lambda_b = -1/2$ die Auswahlregel $\lambda_t - \lambda_W = 1/2$ für erlaubte Helizitätskonfigurationen. Nur die beiden Konfigurationen ($\lambda_t = -1/2$; $\lambda_W = -1$) oder ($\lambda_t = +1/2$, $\lambda_W = 0$) im Anfangs- oder Endzustand können damit zu den Strukturfunktionen beitragen. In Abb. (2.2) sind alle kombinatorisch möglichen Spinkonfigurationen dargestellt. Die Konfigurationen a) und b) sind stets erlaubt. Im Fall $m_b \rightarrow 0$ ist das Bottomquark vollständig linkshändig polarisiert und die Konfigurationen c) und d) müssen verschwinden. Die Konfigurationen e) bis l) sind stets aufgrund der Drehimpuls-Erhaltung streng verboten.

Zur Illustration werden die Helizitäts-Strukturfunktionen \mathcal{B}_{++}^{++} , \mathcal{B}_{++}^{--} und \mathcal{B}_{+-}^{+-} exemplarisch in BORNscher Näherung berechnet, wie sie in Gl. (1.22) für $X_b = b$ definiert worden sind, bzw. wie sie sich auch aus den Linearkombinationen der oben angeführten Helizitäts-Strukturfunktionen Γ_U , Γ_U^P , Γ_F und Γ_F^P ergeben. Entwickelt man die Helizitäts-Strukturfunktionen bis einschließlich $O(y^2)$, so folgt: \mathcal{B}_{++}^{++} verschwindet entsprechend der Spinkonfiguration d) in Abb. (2.2) quadratisch mit der Bottommasse für $y \rightarrow 0$, aber \mathcal{B}_{++}^{--} und \mathcal{B}_{+-}^{+-} verschwinden entsprechend der Spinkonfigurationen g,h) und k,l) bereits allein aufgrund der Helizität λ_t des Topquarks. Im Fall der Strahlungskorrekturen in $O(\alpha)$ bzw. $O(\alpha_s)$ werden diese und andere Helizitäts-Strukturfunktionen, wie z.B. \mathcal{B}_{00}^{--} oder \mathcal{B}_{+0}^{+-} , jedoch Beiträge liefern, wenn auch sehr kleine! Die Strukturfunktionen lauten:

$$\mathcal{B}_{++}^{++} = \frac{1}{4} \left(\Gamma_U + \Gamma_U^P + \Gamma_F + \Gamma_F^P \right) \quad (2.22)$$

$$\propto \left(1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \right) \left(\frac{1}{2} + \lambda_t \right) \Big|_{\lambda_t = +\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

$$= \frac{y^2}{1 - x^2} + O(y^4) \rightarrow 0$$

$$\mathcal{B}_{++}^{--} = \frac{1}{4}, \left(\Gamma_U - \Gamma_U^P + \Gamma_F - \Gamma_F^P \right) \quad (2.24)$$

$$\propto \left(1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \right) \left(\frac{1}{2} + \lambda_t \right) \Big|_{\lambda_t = -\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

$$= \left(\frac{y^2}{1 - x^2} + O(y^4) \right) \left(\frac{1}{2} + \lambda_t \right) \Big|_{\lambda_t = -\frac{1}{2}} = 0$$

$$\mathcal{B}_{--}^{++} = \frac{1}{4}, \left(\Gamma_U + \Gamma_U^P - \Gamma_F - \Gamma_F^P \right) \quad (2.26)$$

$$\propto \left(1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda_t \right) \Big|_{\lambda_t = +\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

$$= \left(1 - x^2 + O(y^4) \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda_t \right) \Big|_{\lambda_t = +\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Raten $i = U, L$ und F setzen sich aus den Diagonalelementen der Dichtematrix mit $\lambda_t = \lambda'_t$ und $\lambda_W = \lambda'_W$ zusammen. Die transversalen Raten U und F setzen sich aus Linearkombinationen von \mathcal{B}_{--}^{--} (erlaubt), \mathcal{B}_{++}^{++} (für $m_b = 0$ verboten) und \mathcal{B}_{++}^{--} und \mathcal{B}_{--}^{++} (verboten) zusammen; die longitudinale Rate L besteht aus \mathcal{B}_{OO}^{++} (erlaubt) und \mathcal{B}_{OO}^{--} (für $m_b = 0$ verboten). Die Raten $i = I$ und A sind nichtdiagonale Dichtematrizen mit $\lambda_t \neq \lambda'_t$ und $\lambda_W \neq \lambda'_W$, die sich aus Linearkombinationen von \mathcal{B}_{-O}^{+} (erlaubt) und \mathcal{B}_{+O}^{+} (für $m_b = 0$ verboten) zusammensetzen.

Rate i	Γ	Γ^0
$U + L$	$\sqrt{\lambda}((1 - y^2)^2 + x^2(1 + y^2) - 2x^4)$	$(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)$
$U^P + L^P$	$\lambda(1 - 2x^2 - y^2)$	$(1 - x^2)^2(1 - 2x^2)$
U	$2\sqrt{\lambda}x^2(1 - x^2 + y^2)$	$2x^2(1 - x^2)^2$
U^P	$-2\lambda x^2$	$-2x^2(1 - x^2)^2$
L	$\sqrt{\lambda}((1 - y^2)^2 - x^2(1 + y^2))$	$(1 - x^2)^2$
L^P	$\lambda(1 - y^2)$	$(1 - x^2)^2$
F	$-2\lambda x^2$	$-2x^2(1 - x^2)^2$
F^P	$2\sqrt{\lambda}x^2(1 - x^2 + y^2)$	$2x^2(1 - x^2)^2$
S	$\sqrt{\lambda}((1 - y^2)^2 - x^2(1 + y^2))$	$(1 - x^2)^2$
S^P	$\lambda(1 - y^2)$	$(1 - x^2)^2$
I^P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda x$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}x(1 - x^2)^2$
A^P	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda}x(1 - x^2 - y^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}x(1 - x^2)^2$

Tabelle 2.1: Gegenüberstellung der Raten $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P für $y \neq 0$ und $y = 0$ in Bornscher Näherung, ohne den gemeinsamen Vorfaktor $(m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F)/(8\sqrt{2}\pi)$ und mit der Abkürzung $\lambda = \lambda(1, x^2, y^2)$. In der Bornschen Näherung stimmen die Raten L und S zufällig überein, für die Strahlungskorrekturen ist dies nicht der Fall. Im masselosen Fall $y = 0$ gilt $\lambda = 1 - x^2$.

Rate i	Γ_i [GeV]	Γ_i^0 [GeV]	$\tilde{\Gamma}_i$ [GeV]	$\Delta(i)$ [%]	$\tilde{\Delta}(i)$ [%]
$U + L$	1.552 44	1.556 58	1.528 28	+0.266	-1.555
$U^P + L^P$	0.629 49	0.632 16	0.623 60	+0.423	-0.936
U	0.461 97	0.462 21	0.452 85	+0.051	-1.975
U^P	-0.460 85	-0.462 21	-0.451 73	+0.293	-1.980
L	1.090 47	1.094 37	1.075 46	+0.357	-1.376
L^P	1.090 35	1.094 37	1.075 33	+0.368	-1.377
F	-0.460 85	-0.462 21	-0.451 73	+0.293	-1.980
F^P	0.461 97	0.462 21	0.452 85	+0.051	-1.975
S	1.090 47	1.094 37	1.075 46	+0.357	-1.376
S^P	1.090 35	1.094 37	1.075 33	+0.368	-1.377
I^P	-0.354 57	-0.355 61	-0.349 68	+0.293	-1.377
A^P	0.354 75	0.355 61	0.349 87	+0.242	-1.376

Tabelle 2.2: Numerische Auswertung der Raten in Bornscher Näherung für die Massen $m_t = 175 \text{ GeV}/c^2$, $m_b = 4.8 \text{ GeV}/c^2$ und $m_W = 80.419 \text{ GeV}/c^2$. $\Gamma(m_b \neq 0)$ und $\Gamma^0(m_b = 0)$ bezeichnen die „Zero-Width“-Approximation für massive bzw. masselose Bottomquarks. Über die Breit-Wigner-Verteilung der W-Bosonbreite wird bei den Raten $\tilde{\Gamma}(m_b \neq 0)$ integriert. Während die Vernachlässigung der Bottommasse die Rate um maximal $\Delta(U^P + L^P) = +0.42\%$ erhöht, vermindert die endliche W-Bosonbreite die Rate zwischen $\tilde{\Delta}(U^P + L^P) = -0.94\%$ und $\tilde{\Delta}(U^P) = -1.98\%$.

2.4 Numerische Ergebnisse

In Tab. (2.2) sind die Zerfallsraten Γ_i der BORNSchen Näherung numerisch ausgewertet. Aus dem Inversen der totalen Rate Γ_{U+L} ergibt sich die Lebensdauer des Topquarks zu

$$\tau = (1.55244 \text{ GeV})^{-1} = 4.4 \times 10^{-24} \text{ s}.$$

Die Zerfallsraten Γ_i^0 für $m_b = 0$ sind um Δ_i Prozent gegenüber den Raten Γ_i für $m_b \neq 0$ erhöht. Allein der Phasenraumfaktor aus Gl. (2.19.1) erhöht sich um 0.15%. Zusätzlich wird die Qualität der „Zero - Width“-Approximation numerisch untersucht. Während die Integration der Delta-Funktion über die invariante Masse Eins ergibt, erniedrigen sich die Raten Γ_i bei der Integration über das Betragsquadrat der BREIT-WIGNER-Verteilung (es ist in Abb. (2.3) als Funktion von q^2 dargestellt) um $\tilde{\Delta}_i$ Prozent auf $\tilde{\Gamma}_i$. Dazu wird die Gl. (2.28)

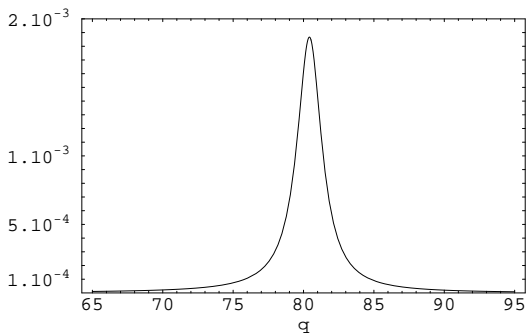


Abbildung 2.3: Betragsquadrat der Breit-Wigner-Verteilung für die Breite des W-Bosons.

numerisch über das Intervall $[0, q_{max.}^2]$ ausgewertet, wobei der maximale Wert für q^2 aus dem „Zero-Recoil-Point“ zu $q_{max.}^2 = (m_t - m_b)^2$ bestimmt wird, d.h. sowohl das Topquark als auch das Bottomquark befinden sich in Ruhe, womit $q^2 = (p_t - p_b)^2 = (m_t - m_b)^2$ folgt. Für die totale Zerfallsbreite wird der Wert $\Gamma_W = 2.12$ GeV verwendet. Die Formel für die numerische Evaluierung der Helizitäts-Strukturfunktionen unter Berücksichtigung der BREIT-WIGNER-Verteilung für die endliche W -Bosonbreite lautet:

$$1 = \int_0^{(m_t - m_b)^2} dq^2 \delta(q^2 - m_W^2) \longrightarrow \tilde{\Gamma}_i = \int_0^{(m_t - m_b)^2} dq^2 \frac{m_W \Gamma_W}{\pi} \frac{1}{(q^2 - m_W^2)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} \Gamma_i. \quad (2.28)$$

Kapitel 3

Die elektroschwachen Strahlungskorrekturen

3.1 Der Hadrontensor der Bremsstrahlung

Da beschleunigte Ladungen Photonen emittieren, stellt die Beschreibung der Zerfallsrate auf dem Bornterm-Niveau eine Näherung dar. Jedes geladene Elementarteilchen kann Photonen emittieren und/oder absorbieren und stellt eine Quelle bzw. Senke für virtuelle oder reelle Photonen dar. Die Beiträge der virtuellen Photonen werden durch die *Schleifenkorrekturen* berechnet, die der reellen Photonen durch die *Bremsstrahlungskorrekturen*. Die Summe beider Beiträge werden als *Strahlungskorrekturen* bezeichnet. Die Schwierigkeit bei der Behandlung der Strahlungskorrekturen besteht darin, daß sie nicht wohldefiniert sind: Jede Schleifenkorrektur wird durch eine uneigentliche Integration über den Schleifenimpuls k ausgewertet. In jedem Fall divergieren die Integrale für $k \rightarrow \infty$; diese bezeichnet man als Ultraviolett-Divergenzen (*UV-Divergenzen*). Zusätzlich treten für $k \rightarrow 0$ sogenannte Infrarot-Divergenzen (*IR-Divergenzen*) auf, die sich aber in der Summe mit der Bremsstrahlungskorrektur herausheben. Dies gilt nicht nur für die hier untersuchte Strahlungskorrektur der $O(\alpha)$, sondern für alle Ordnungen der Störungstheorie und ist Aussage des berühmten LEE-NAUENBERG-Theorems [59]. Die UV-Divergenzen werden durch die *Renormierung* in den unphysikalischen Parametern (z.B. „nackte“ Massen oder „nackte“ Ladungen) der Theorie absorbiert und durch ihre physikalischen Größen ersetzt. Zunächst müssen jedoch die Divergenzen *regularisiert* werden, d.h. ihr Divergenzverhalten mathematisch faßbar gemacht werden. Die IR-Singularitäten werden in diesem Kapitel durch eine infinitesimal kleine Photonmasse m_A regularisiert (*Massenregularisierung*), die UV-Singularitäten der Einschleifenkorrekturen dagegen werden durch eine Raum-Zeit-Dimension $D < 4$ regularisiert (*dimensionale Regularisierung*).

Im ersten Teil des Kapitels wird die Bremsstrahlungskorrektur durch die reelle Abstrahlung eines Photons ($t \rightarrow Wb\gamma$) untersucht. Da das Photon an die elektrische Ladung der Teilchen koppelt, kann die Abstrahlung entweder von dem Topquark, dem Bottomquark oder dem W -Boson erfolgen. Der IR-divergente Anteil des Hadrontensors der Brems-

strahlungskorrektur kann als Faktor (*Soft-Photon-Faktor*) abgespalten werden. Nach der Diskussion des Phasenraums für den Drei-Körper-Zerfall ($t \rightarrow Wb\gamma$) und der Bestimmung der Phasenraumgrenzen werden die IR-konvergenten Anteile der Bremsstrahlungskorrektur auf Grundintegrale zurückgeführt, die im Anhang D zusammengestellt sind. Die zugehörigen Koeffizientenfunktionen für die Helizitäts-Strukturfunktionen befinden sich im Anhang E. Der erste Teil dieses Kapitels endet mit der Integration des Soft-Photon-Faktors über den Phasenraum.

In Abb. (3.1) sind die vier FEYNMAN-Diagramme gezeigt, die zur elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur beitragen. Die Abstrahlung des Photons kann im Standardmodell entweder von dem Topquark, dem Bottomquark, dem W^+ -Boson oder dem GOLDSTONE-Boson χ^+ erfolgen. Das GOLDSTONE-Boson geht durch die Photonabstrahlung in ein W -Boson über. Die Photonen koppeln an die elektrischen Ladungen $e Q_t$ bzw. $e Q_b$ der Quarks oder an die Ladungen $e Q_W$ des W - bzw. χ -Bosons, wobei $Q_t = +\frac{2}{3}$ und $Q_b = -\frac{1}{3}$ die drittelzahligen Bruchteile der positiven Elementarladung e sind und $Q_W = Q_t - Q_b = 1$ aus der Ladungserhaltung folgt. Die Einführung von Q_t , Q_b und Q_W erweist sich als sinnvoll, denn es stellt sich heraus, daß man durch die Ersetzungen $Q_t = Q_b \rightarrow 1$, $Q_W \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow \alpha_s C_F$ die QCD-Bremsstrahlungskorrekturen erhält (siehe Kapitel 4). Die Übergangsamplituden für die in Abb. (3.1) dargestellten FEYNMAN-Diagramme werden in dem folgenden Gleichungssystem in der 'T HOOFT-FEYNMAN-Eichung ($\xi_W = 1$) angegeben. Der Einfachheit halber werden die Amplituden nicht mit den Polarisationsvektoren $\varepsilon^*_{\mu}(q, \lambda_W)$ für das auslaufende W -Boson kontrahiert, um später für den Hadrontensor mit den in Kapitel 1 entwickelten Helizitätsprojektoren P_i ($i = U, L, F, I, A$) arbeiten zu können. Man erhält:

$$\mathcal{M}_a^{\mu} = \bar{u}(p_b, s_b) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^{\mu} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \left(\frac{\not{p}_t - \not{k} + m_t}{m_t^2 - (p_t - k)^2} \right) (e Q_t \gamma^{\sigma}) u(p_t, s_t) \varepsilon_{\sigma}^*(k, \lambda_A), \quad (3.1.1)$$

$$\mathcal{M}_b^{\mu} = \bar{u}(p_b, s_b) (e Q_b \gamma^{\sigma}) \left(\frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{m_b^2 - (p_b - k)^2} \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^{\mu} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u(p_t, s_t) \varepsilon_{\sigma}^*(k, \lambda_A), \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c^{\mu} &= \bar{u}(p_b, s_b) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^{\kappa} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u(p_t, s_t) \left(\frac{g_{\kappa\lambda}}{(k+q)^2 - m_W^2} \right) \times \\ &\times \left(e Q_W \left\{ g^{\mu\lambda} (2q^{\sigma} - k^{\sigma}) + g^{\lambda\sigma} (2k^{\mu} + q^{\mu}) + g^{\sigma\mu} (q^{\lambda} - k^{\lambda}) \right\} \right) \varepsilon_{\sigma}^*(k, \lambda_A), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d^{\mu} &= \bar{u}(p_b, s_b) \left(-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \frac{1}{m_W} V_{tb} \left\{ \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} m_b + \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} m_t \right\} \right) u(p_t, s_t) \times \\ &\times \left(\frac{1}{m_W^2 - (k+q)^2} \right) (i Q_W e m_W g^{\mu\sigma}) \varepsilon_{\sigma}^*(k, \lambda_A). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Mit Hilfe der DIRAC-Gleichung $(\not{p}_t - m_t)u(p_t) = 0$ und der Antikommutator-Relationen $\{\gamma^{\mu}, \gamma_5\} = 0$ und $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$ für die Gamma-Matrizen können die vier Amplituden vereinfacht werden. Der Beitrag der Amplitude \mathcal{M}_d für die Photonabstrahlung vom GOLDSTONE-Boson ist in der Amplitude \mathcal{M}_c für die Photonabstrahlung vom W -Boson mit umgekehrten Vorzeichen enthalten und hebt sich in der Summe für die Gesamtamplitude heraus. Zur Abkürzung werden die Bezeichnungen $N_t := 2k \cdot p_t$, $N_b := 2k \cdot p_b$ und $N_W := 2k \cdot q$ für die 4-Produkte des 4-Impulsvektors k des Photons eingeführt. Die vereinfachten Amplituden lauten:

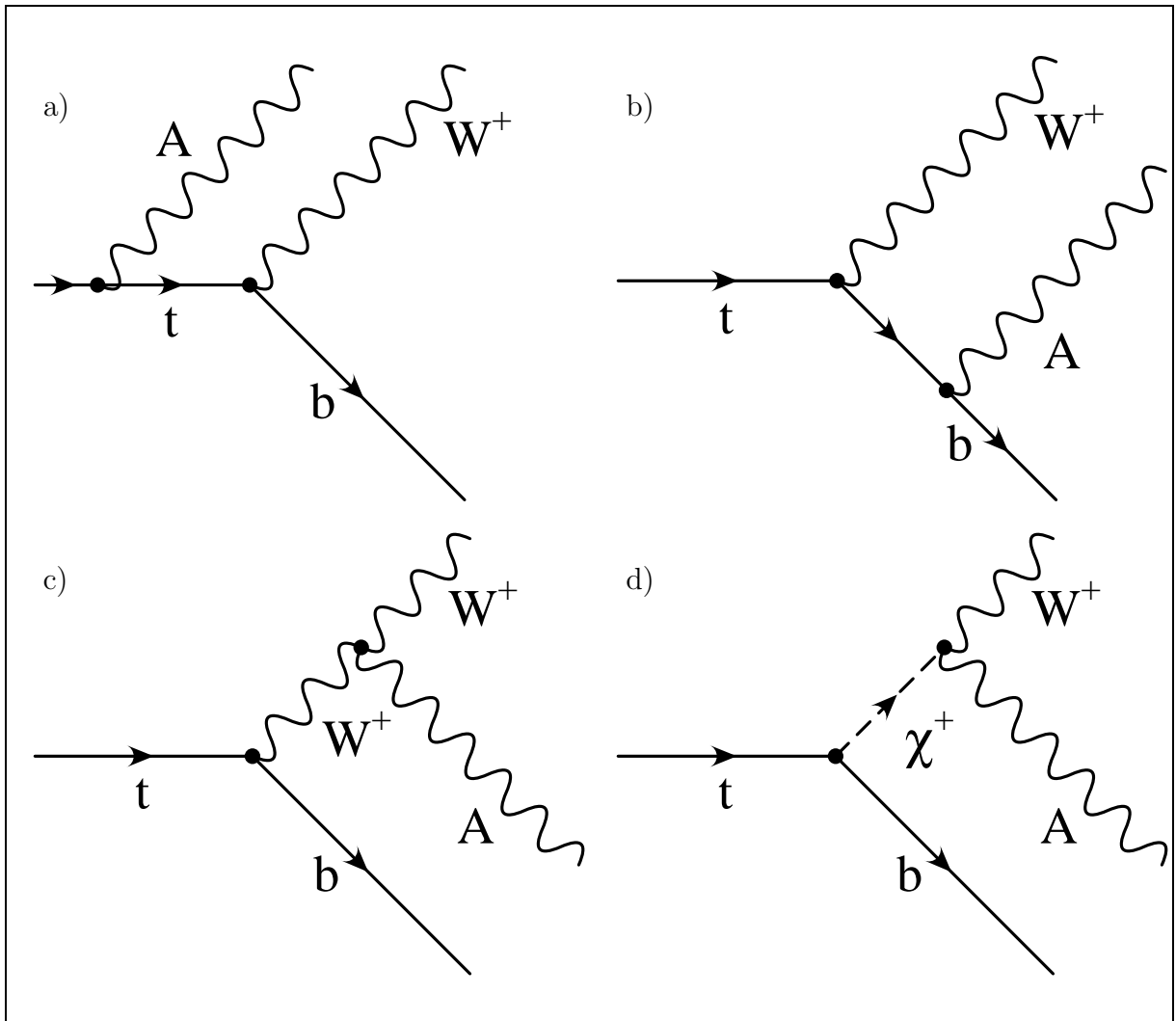


Abbildung 3.1: Feynman-Diagramme der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur. Das Photon kann an das a) Topquark b) Bottomquark c) W -Boson oder d) Goldstone-Boson χ^+ koppeln. In der Gesamtamplitude fällt der Beitrag aus d) gegen Teile des Beitrags aus c) heraus.

$$\mathcal{M}_a^\mu = -\frac{g_w}{\sqrt{2}} e V_{tb} \frac{Q_t}{N_t} \left(\bar{u}(p_b, s_b) \left\{ \gamma^\mu \not{k} \gamma^\sigma - 2p_t^\sigma \gamma^\mu \right\} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} u(p_t, s_t) \varepsilon_\sigma^*(k, \lambda_A) \right), \quad (3.2.1)$$

$$\mathcal{M}_b^\mu = -\frac{g_w}{\sqrt{2}} e V_{tb} \frac{Q_b}{N_b} \left(\bar{u}(p_b, s_b) \left\{ \gamma^\sigma \not{k} \gamma^\mu + 2p_b^\sigma \gamma^\mu \right\} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} u(p_t, s_t) \varepsilon_\sigma^*(k, \lambda_A) \right), \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c^\mu = & -\frac{g_w}{\sqrt{2}} e V_{tb} \frac{Q_W}{N_W} \bar{u}(p_b, s_b) \left(\left\{ (m_b - 2\not{k}) g^{\mu\sigma} - 2q^\sigma \gamma^\mu + 2k^\mu \gamma^\sigma \right\} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} + \right. \\ & \left. + \left\{ m_t g^{\mu\sigma} \right\} \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \right) u(p_t, s_t) \varepsilon_\sigma^*(k, \lambda_A), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\mathcal{M}_d^\mu = -\frac{g_w}{\sqrt{2}} e V_{tb} \frac{Q_W}{N_W} \bar{u}(p_b, s_b) \left(m_t g^{\mu\sigma} \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} + m_b g^{\mu\sigma} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u(p_t, s_t) \varepsilon_\sigma^*(k, \lambda_A). \quad (3.2.4)$$

Die Summe für die Gesamtamplitude der Bremsstrahlungskorrektur lautet:¹

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{GWS}}^\mu = & -e \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \bar{u}(p_b, s_b) \left(\frac{Q_t}{N_t} \left\{ \gamma^\mu \not{k} \gamma^\sigma - 2p_t^\sigma \gamma^\mu \right\} + \frac{Q_b}{N_b} \left\{ \gamma^\sigma \not{k} \gamma^\mu + 2p_b^\sigma \gamma^\mu \right\} + \right. \\ & \left. - 2 \frac{Q_W}{N_W} \left\{ \not{k} g^{\mu\sigma} + q^\sigma \gamma^\mu - k^\mu \gamma^\sigma \right\} \right) \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} u(p_t, s_t) \varepsilon_\sigma^*(k, \lambda_A). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Strebt der 4-Impulsvektor k des Photons gegen Null, so divergiert die Gesamtamplitude, da die 4-Produkte N_t , N_b und N_W in den Nennern gegen Null gehen. Bei der Phasenraumintegration - die 4-Impulse des Photons und des W -Bosons werden nicht beobachtet, daher muß über sie integriert werden - führt dies auf die eingangs erwähnte IR-Singularität. Indem man den 4-Impulsvektor k in den Zählern der Gesamtamplitude gleich Null setzt, verbleibt ein zur Kovarianten γ^μ proportionaler Rest, der als Vorfaktor abgespalten werden kann. Es gilt:

$$\mathcal{M}_{\text{SPF}}^\mu = \left\{ 2e \left(\frac{Q_t}{N_t} p_t^\sigma - \frac{Q_b}{N_b} p_b^\sigma - \frac{Q_W}{N_W} q^\sigma \right) \right\} \left\{ \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \left(\bar{u}_b \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} u_t \right) \right\} \varepsilon_\sigma^*. \quad (3.4)$$

Der spinor-abhängige Faktor ist durch die aus Kapitel 2 bekannte Übergangsamplitude ($\mathcal{M}_{\text{Born}}^\mu$) für die BORNSche Näherung gegeben. Der spinor-unabhängige Faktor ist neu und enthält den IR-divergenten Anteil der Bremsstrahlungskorrektur in Form der 4-Produkte N_t , N_b und N_W in den Nennern. Da er aus der Bedingung $k = 0$ hervorgeht, wird er als Soft-Photon-Faktor ($\Delta_{\text{GWS}}^\sigma$) bezeichnet.

Die bei der Phasenraumintegration des Soft-Photon-Faktors auftretende IR-Singularität wird durch eine infinitesimal kleine Photonmasse m_A in den Phasenraumgrenzen regularisiert, d.h. nur bei der Berechnung der Phasenraumgrenzen gilt $k^2 = m_A^2$, ansonsten gilt weiterhin $k^2 = 0$ für ein reelles Photon. Da die Polarisation des Photons nicht gemessen wird, muß über die zwei transversalen Polarisationzustände des Photons summiert werden.² In der T' HOOFT-FEYNMAN-Eichung lautet die Vollständigkeits-Relation:

¹Der Index GWS steht für die von Glashow, Weinberg und Salam entwickelte elektroschwache Theorie.

²Es ist eine interessante Frage, ob wegen der Massenregularisierung in der Umgebung des Soft-Photon-Punkts ein longitudinaler Polarisationszustand berücksichtigt werden muß oder nicht. Ersetzt man in der Gesamtamplitude den 4-Polarisationsvektor durch den 4-Impulsvektor des Photons erhält man $k_\sigma \mathcal{M}_{\text{GWS}}^{\mu\sigma} \propto k^2 \{ Q_t/N_t + Q_b/N_b \} \gamma^\mu$. Die Eichinvarianz $k_\sigma \mathcal{M}_{\text{GWS}}^{\mu\sigma} = 0$ erfordert $k^2 = 0$, eine Bedingung, die für die Massenregularisierung des Soft-Photon-Punkts nicht erfüllt ist.

$$\sum_{\lambda_A=\pm 1} \varepsilon_\sigma^*(k, \lambda_A) \varepsilon_\tau(k, \lambda_A) = -g_{\sigma\tau}. \quad (3.5)$$

Der Beitrag des Soft-Photon-Faktors zum Hadrontensor der Bremsstrahlungskorrektur kann aufgrund der Faktorisierung $\mathcal{M}_{SPF}^\mu = \mathcal{M}_{Born}^\mu \Delta_{GWS}^\sigma \varepsilon_\sigma^*$ auf den Hadrontensor für die BORNsche Näherung des polarisierten Topquarkzerfalls in Kapitel 2 zurückgeführt werden. Zusammen mit der Vollständigkeits-Relation in Gl. (3.5) folgt:

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} = \sum_{s_b, \lambda_A} \mathcal{M}_{SPF}^\mu \mathcal{M}_{SPF}^{\nu\dagger} = \Delta_{GWS}^\sigma \Delta_{GWS}^\tau \sum_{\lambda_A} \varepsilon_\sigma^* \varepsilon_\tau \sum_{s_b} \mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Born}^{\nu\dagger} \quad (3.6.1)$$

$$= -g_{\sigma\tau} \Delta_{GWS}^\sigma \Delta_{GWS}^\tau \times \mathcal{B}^{\mu\nu} =: \Delta_{GWS} \times \mathcal{B}^{\mu\nu}. \quad (3.6.2)$$

Der Einfachheit halber wird das mit $-g_{\sigma\tau}$ kontrahierte Produkt $\Delta_{GWS}^\sigma \Delta_{GWS}^\tau$ mit Δ_{GWS} abgekürzt und im weiteren stets als Soft-Photon-Faktor bezeichnet. Der Tensor $\mathcal{B}^{\mu\nu}$ besitzt zwar dieselbe kovariante Darstellung in den 4-Vektoren p_b^μ und $\bar{p}_t^\mu = p_t^\mu - m_t s_t^\mu$ wie der Hadrontensor $\mathcal{B}_0^{\mu\nu}$ für die BORNsche Näherung, unterscheidet sich aber in der Bedeutung für den 4-Impuls p_b^μ : Für den Drei-Körper-Zerfall (Bremsstrahlung) gilt $p_b^\mu = p_t^\mu - q^\mu - k^\mu$, für den Zwei-Körper-Zerfall (Bornterm) dagegen gilt $p_b^\mu = p_t^\mu - q^\mu$. Die beiden Tensoren und ihre Differenz lauten:

$$\mathcal{B}^{\mu\nu} = \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \left(p_b^\nu \bar{p}_t^\mu + p_b^\mu \bar{p}_t^\nu - p_b \cdot \bar{p}_t g^{\mu\nu} + i p_{b\beta} \bar{p}_{t\tau} \epsilon^{\beta\tau\mu\nu} \right) \Big|_{p_b=p_t-q-k} \quad (3.7.1)$$

$$\mathcal{B}_0^{\mu\nu} = \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \left(p_b^\nu \bar{p}_t^\mu + p_b^\mu \bar{p}_t^\nu - p_b \cdot \bar{p}_t g^{\mu\nu} + i p_{b\beta} \bar{p}_{t\tau} \epsilon^{\beta\tau\mu\nu} \right) \Big|_{p_b=p_t-q} \quad (3.7.2)$$

$$\mathcal{B}_0^{\mu\nu} - \mathcal{B}^{\mu\nu} = \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \left(k^\nu \bar{p}_t^\mu + k^\mu \bar{p}_t^\nu - k \cdot \bar{p}_t g^{\mu\nu} + i k_{\beta} \bar{p}_{t\tau} \epsilon^{\beta\tau\mu\nu} \right). \quad (3.7.3)$$

$\mathcal{B}_0^{\mu\nu}$ kann als Spezialfall von $\mathcal{B}^{\mu\nu}$ am sogenannten *Soft-Photon-Punkt* aufgefaßt werden, für den $k = 0$ gilt. Beide Tensoren enthalten die Abhängigkeit von der Polarisation des Topquarks und werden mit den Helizitätsprojektoren \mathcal{P}_i ($i = U, L, F, I, A$) kontrahiert. Der IR-divergente Soft-Photon-Faktor dagegen ist ein für alle Helizitäts-Strukturfunktionen universeller Skalar. Er lautet:

$$\begin{aligned} \Delta_{GWS} := & (-4 e^2) \left(\frac{Q_b^2}{N_b^2} m_b^2 + \frac{Q_t^2}{N_t^2} m_t^2 + \frac{Q_W^2}{N_W^2} m_W^2 + \right. \\ & \left. - 2 \frac{Q_b Q_t}{N_b N_t} p_b \cdot p_t + 2 \frac{Q_b Q_W}{N_b N_W} p_b \cdot q - 2 \frac{Q_t Q_W}{N_t N_W} p_t \cdot q \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Das Minuszeichen stammt aus der Vollständigkeits-Relation, der Faktor $4e^2$ aus der Kopplung des Photons an die Quarks und die Bosonen. Der IR-konvergente Rest des Hadrontensors für die Bremsstrahlungskorrektur wird aus der Differenz von dem Quadrat $\mathcal{M}_{GWS}^\mu \mathcal{M}_{GWS}^{\nu\dagger}$ der Gesamtamplitude \mathcal{M}_{GWS}^μ - summiert über die nicht beobachteten Polarisationszustände des Bottomquarks und des Photons - mit dem IR-divergenten Tensor $\mathcal{A}^{\mu\nu}$ berechnet:

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} = \left\{ \sum_{s_b, \lambda_A} \mathcal{M}_{GWS}^\mu \mathcal{M}_{GWS}^{\nu\dagger} \right\} - \left\{ \mathcal{A}^{\mu\nu} \right\}_{div.} \quad (3.9)$$

Die kovariante Darstellung des Tensors lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\mu\nu} = & 4 e^2 \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \frac{N_t N_b}{(N_t - N_b)^2} \left(\frac{Q_t}{N_t} - \frac{Q_b}{N_b} \right)^2 \left\{ \right. \\ & - \frac{N_t}{N_b} \left[m_b^2 \left(k^\mu \bar{p}_t^\nu + k^\nu \bar{p}_t^\mu - k \cdot \bar{p}_t g^{\mu\nu} \right) + \right. \\ & + i \left(\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (p_b - k) \cdot \bar{p}_t - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} (p_b - k)^\mu \bar{p}_{t,\gamma} + \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} (p_b - k)^\nu \bar{p}_{t,\gamma} \right) k_\alpha p_{b,\beta} \left. \right] + \\ & + \frac{N_b}{N_t} \left[m_t^2 \left(k^\mu p_b^\nu + k^\nu p_b^\mu - k \cdot p_b g^{\mu\nu} - i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k_\alpha p_{b,\beta} \right) + \right. \\ & - (\bar{p}_t \cdot k) \left((p_t - k)^\mu p_b^\nu + (p_t - k)^\nu p_b^\mu - (p_t - k) \cdot p_b g^{\mu\nu} - i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (p_t - k)_\alpha p_{b,\beta} \right) \left. \right] + \\ & - (\bar{p}_t \cdot p_b) \left(k^\mu p_b^\nu + k^\nu p_b^\mu - k \cdot p_b g^{\mu\nu} - i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k_\alpha p_{b,\beta} \right) + \\ & + (p_t \cdot p_b) \left(k^\mu \bar{p}_t^\nu + k^\nu \bar{p}_t^\mu - k \cdot \bar{p}_t g^{\mu\nu} \right) + \\ & - (k \cdot p_b) \left(p_t^\mu \bar{p}_t^\nu + p_t^\nu \bar{p}_t^\mu - p_t \cdot \bar{p}_t g^{\mu\nu} \right) + \\ & + (k \cdot p_t) \left((p_b + k)^\mu \bar{p}_t^\nu + (p_b + k)^\nu \bar{p}_t^\mu + (p_b + k) \cdot \bar{p}_t g^{\mu\nu} \right) + \\ & + (k \cdot \bar{p}_t) \left(2 p_b^\mu p_b^\nu - p_b \cdot p_b g^{\mu\nu} \right) + \\ & - i \left(\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (k \cdot \bar{p}_t) + \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} k^\nu \bar{p}_{t,\gamma} - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} k^\mu \bar{p}_{t,\gamma} \right) p_{b,\alpha} p_{t,\beta} + \\ & \left. + i \left(\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (p_t \cdot \bar{p}_t) + \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} p_t^\nu \bar{p}_{t,\gamma} - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p_t^\mu \bar{p}_{t,\gamma} \right) k_\alpha p_{b,\beta} \right\}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Die in der BORNschen Näherung erlaubte Ersetzung $p_t \rightarrow \bar{p}_t$ - um aus den unpolarisierten den polarisierten Hadrontensor zu erhalten - ist hier nicht mehr zulässig, da sie auch auf das 4-Produkt N_t wirkt. Der vollständige Hadrontensor für die Bremsstrahlungskorrektur kann in einen IR-konvergenten und einen IR-divergenten Anteil zerlegt werden. Um den Soft-Photon-Faktor isoliert über den Phasenraum integrieren zu können, wird er mit dem Bornterm am Soft-Photon-Punkt $k = 0$ multipliziert. Der Tensor $\mathcal{B}_0^{\mu\nu}$ ist von den Phasenraumvariablen unabhängig und wird als Konstante vor die Integration gezogen. Der entstehende Fehler wird durch die Addition von $(\mathcal{B}^{\mu\nu} - \mathcal{B}_0^{\mu\nu}) \Delta_{GWS}$ kompensiert. Da die Differenz proportional zum 4-Impuls k des Photons ist, liefert das Produkt mit dem Soft-Photon-Faktor einen IR-konvergenten Beitrag. Es gilt:

$$\boxed{H_{GWS}^{\mu\nu} = \left\{ \mathcal{H}^{\mu\nu} + \left(\mathcal{B}^{\mu\nu} - \mathcal{B}_0^{\mu\nu} \right) \cdot \Delta_{GWS} \right\}_{kon.} + \left\{ \mathcal{B}_0^{\mu\nu} \cdot \Delta_{GWS} \right\}_{div.}} \quad (3.11)$$

Die Phasenraumintegration des konvergenten Anteils der Bremsstrahlungskorrektur wird in Abschnitt 3.4 auf Grundintegrale zurückgeführt, die im Anhang D zusammengestellt sind. Die zugehörigen Phasenraumgrenzen brauchen nicht durch eine infinitesimal kleine Photonmasse modifiziert werden. Bei der in Abschnitt 3.5 behandelten Phasenraumintegration des Soft-Photon-Faktors dagegen muß zur Regularisierung der IR-Singularität eine infinitesimal kleine Photonmasse in die Phasenraumgrenzen eingeführt werden.

3.2 Der Phasenraum für einen Drei-Körper-Zerfall

Um die Phasenraumgrenzen für den Drei-Körper-Zerfall $t \rightarrow Wb\gamma$ zu bestimmen, werden die 4-Impulse p_t (Topquark), p_b (Bottomquark), q (W -Boson) und k (Photon) im Ruhesystem des Topquarks parametrisiert, d.h. es gilt $p_t = (m_t; 0, 0, 0)$. Nach Abb. (1.3) in Kapitel 1 definiert die Flugrichtung des W -Bosons die positive z -Achse. Das Photon kann in eine beliebige Raumrichtung emittiert werden. Sein Impulsvektor \vec{k} wird in Kugelkoordinaten parametrisiert. Um die IR-Singularität der Bremsstrahlungskorrektur zu regularisieren, wird für die Phasenraumgrenzen eine infinitesimal kleine Photonmasse m_A eingeführt, d.h. für die Phasenraumgrenzen gilt die Bedingung $k^2 = m_A^2$. Aufgrund dieser Bedingung - für ein reelles Photon gilt sonst $k^2 = 0$ - liegt der IR-singuläre Soft-Photon-Punkt außerhalb des von den Phasenraumgrenzen umschlossenen Gebiets. Der 4-Impuls des Bottomquarks folgt schließlich aus der Energie-Impuls-Erhaltung. Zusammenfassend gilt:

$$p_t = (m_t; 0, 0, 0),$$

$$k = (E_A; k_x, k_y, k_z) = (E_A; |\vec{k}| \sin \theta \cos \varphi, |\vec{k}| \sin \theta \sin \varphi, |\vec{k}| \cos \theta), \quad k^2 = m_A^2, \quad (3.12)$$

$$q = (E_W; 0, 0, |\vec{q}|), \quad q^2 = m_W^2, \quad p_b = p_t - q - k, \quad p_b^2 = m_b^2.$$

Quadriert man den Ausdruck $p_b = p_t - q - k$ für den 4-Impuls des Bottomquarks unter Berücksichtigung der „On-Shell“-Bedingungen $p_t^2 = m_t^2$, $p_b^2 = m_b^2$, $q^2 = m_W^2$ und $k^2 = m_A^2$ mit dieser Parametrisierung, so erhält man

$$m_b^2 = m_t^2 + m_W^2 + m_A^2 + 2E_W E_A - 2m_t(E_W + E_A) - 2|\vec{q}||\vec{k}| \cos \theta. \quad (3.13)$$

Diese Gleichung kann nach $\cos \theta$ als Funktion von der W -Bosonenergie E_W und der Photonenergie E_A aufgelöst werden, wenn die zugehörigen Impulse durch $|\vec{q}| = \sqrt{E_W^2 - m_W^2}$ und $|\vec{k}| = \sqrt{E_A^2 - m_A^2}$ ausgedrückt werden:

$$\cos \theta(E_W, E_A) = \frac{m_t^2 + m_W^2 - m_b^2 + m_A^2 - 2m_t(E_W + E_A) + 2E_W E_A}{2\sqrt{E_W^2 - m_W^2}\sqrt{E_A^2 - m_A^2}}. \quad (3.14)$$

Durch die Gleichung für $\cos \theta(E_W, E_A)$ ist der Phasenraum bereits vollständig festgelegt, denn es sind nur solche Paare (E_W, E_A) zulässig, die in dem Wertebereich der Cosinus-Funktion $-1 \leq \cos \theta(E_W, E_A) \leq +1$ liegen. Vertauscht man die Rollen des Bottomquarks und des Photons und parametrisiert den 4-Impuls \vec{p}_b in Kugelkoordinaten und legt den 4-Impuls k durch die Energie-Impuls-Erhaltung fest, d.h.

$$p_b = (E_b; |\vec{p}_b| \sin \theta' \cos \varphi', |\vec{p}_b| \sin \theta' \sin \varphi', |\vec{p}_b| \cos \theta'), \quad p_b^2 = m_b^2, \quad (3.15)$$

$$k = p_t - p_b - q, \quad k^2 = m_A^2,$$

so erhält man analog die $\cos \theta'$ -Funktion in Abhängigkeit der Energien E_W und E_b bzw. der Photonenergie E_A , die im Ruhesystem des Topquarks durch die Gleichung $m_t = E_W + E_A + E_b$ in Beziehung miteinander stehen. Für die $\cos \theta'$ -Funktion ergibt sich:

$$\cos \theta'(E_W, E_b) = -\frac{m_t^2 - m_W^2 - m_b^2 + m_A^2 - 2(m_t - E_W)(m_t - E_b)}{2 \sqrt{E_W^2 - m_W^2} \sqrt{E_b^2 - m_b^2}}. \quad (3.16)$$

Der Winkel θ beschreibt den Polarwinkel $\sphericalangle(\vec{q}, \vec{k})$ zwischen dem Impuls des W -Bosons und des Photons, der Winkel θ' dagegen beschreibt den Polarwinkel $\sphericalangle(\vec{q}, \vec{p}_b)$ zwischen den Impuls des W -Bosons und des Bottomquarks. Für die Untersuchung des Phasenraums werden die Energien E_W und E_A als Phasenraumvariablen gewählt.

Um die Phasenraumgrenzen zu bestimmen, soll die Photonenergie E_A als Funktion der W -Bosonenergie E_W und des Polarwinkels θ ausgedrückt werden. Sie ergibt sich als Lösung der quadratischen Gleichung (3.14), wobei zur Abkürzung die Bezeichnung $M_{\pm}^2 := m_t^2 + m_W^2 - (m_b \pm m_A)^2 - 2E_W m_t$ verwendet wird. Für die konvergenten Anteile der Bremsstrahlungskorrektur darf die Photonmasse Null gesetzt ($m_A \rightarrow 0$) werden. In diesem Fall verschwindet die Abhängigkeit von $\sin \theta$ und die Phasenraumgrenzen vereinfachen sich:

$$E_{A,\pm} = \frac{(m_t - E_W)(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2 + m_A^2 - 2E_W m_t)}{2((m_t - E_W)^2 - (E_W^2 - m_W^2) \cos^2 \theta)} + \quad (3.17.1)$$

$$\pm \frac{\sqrt{E_W^2 - m_W^2} \sqrt{M_+^2 M_-^2 - 4m_A^2 (E_W^2 - m_W^2) \sin^2 \theta \cos \theta}}{2((m_t - E_W)^2 - (E_W^2 - m_W^2) \cos^2 \theta)}$$

$$\rightarrow \frac{(m_t - E_W \pm \sqrt{E_W^2 - m_W^2} \cos \theta)(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2 - 2E_W m_t)}{2((m_t - E_W)^2 - (E_W^2 - m_W^2) \cos^2 \theta)}. \quad (3.17.2)$$

In Abb. (3.2) werden die Phasenraumgrenzen für die Photonenergie E_A gegen die W -Bosonenergie für verschiedene Polarwinkel $\theta = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ$ aufgetragen. Für $\theta = 0^\circ$ oder 180° ist das Phasenraumvolumen maximal, für $\theta = 90^\circ$ schrumpft der Phasenraum auf die gestrichelt dargestellte Linie zusammen. Für jede feste, kinematisch erlaubte W -Energie variiert die Photonenergie in dem Intervall $E_A \in [E_{A,min.}, E_{A,max.}]$, wobei die Phasenraumgrenzen sich für $m_A \neq 0$ und $\theta = 0$ wie folgt schreiben lassen:

$$E_{A,max.} = \frac{(m_t - E_W)(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2 + m_A^2 - 2E_W m_t) + \sqrt{E_W^2 - m_W^2} \sqrt{M_+^2 M_-^2}}{2(m_t^2 + m_W^2 - 2E_W m_t)} \quad (3.18.1)$$

$$= \frac{(E' + m_t^2 - m_W^2)(E' - m_b^2 + m_A^2) + \sqrt{\lambda(m_b^2, m_A^2, E')} \sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, E')}}{4m_t E'} \quad (3.18.2)$$

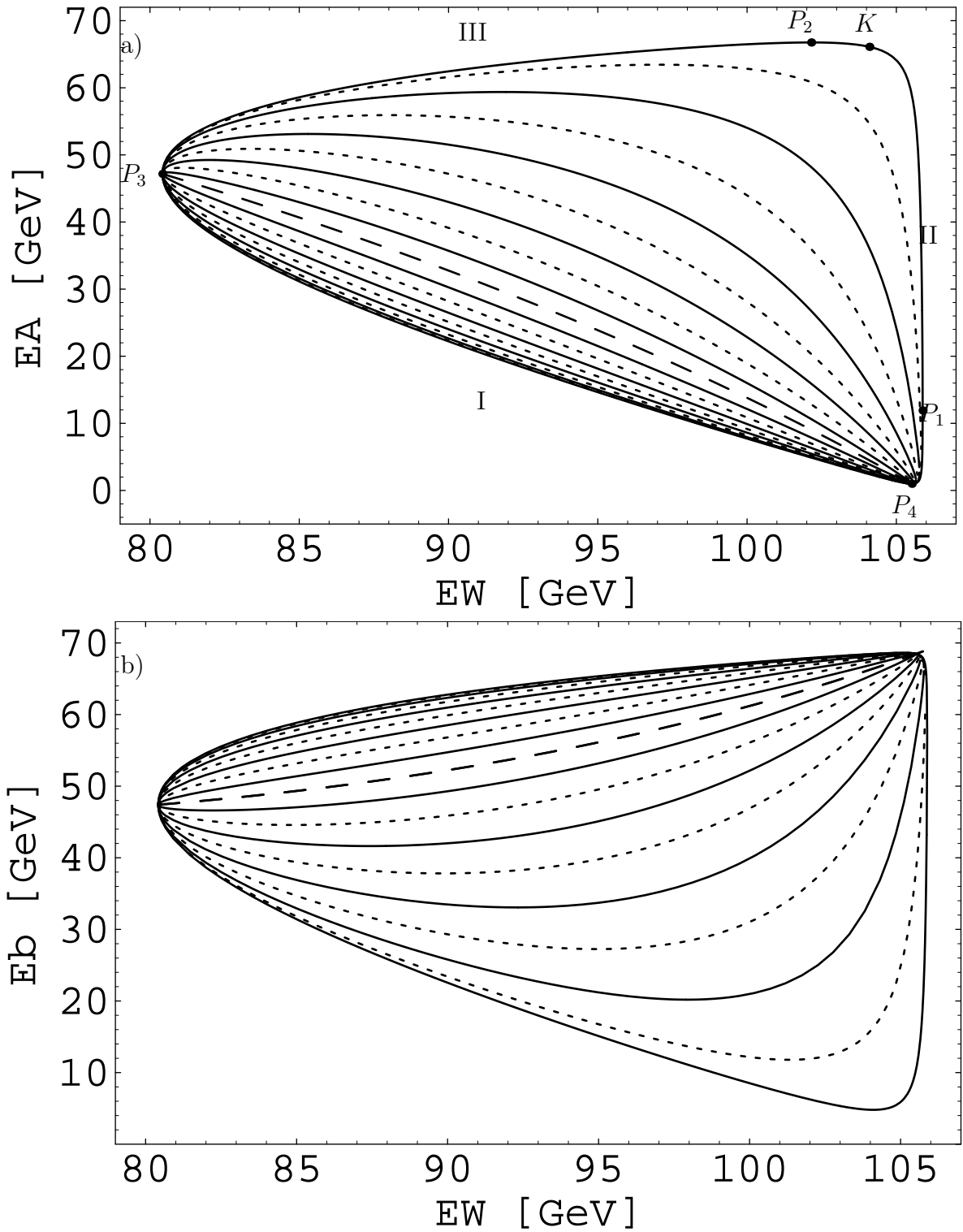


Abbildung 3.2: a) Gluon- bzw. Photonenergie E_A gegen die W-Bosonenenergie E_W , b) b-Quarkenergie E_b gegen die W-Bosonenenergie E_W . Für $\theta = 0$ ist das Phasenraumvolumen maximal, für $\theta = 90^\circ$ schrumpft es dagegen auf die breit gestrichelte Linie zusammen. Die Phasenraumgrenzen für $\theta = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ und 80° sind mit durchgezogenen Linien dargestellt, für $\theta = 10^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ und 70° mit gestrichelten Linien. In A) sind die Extrempunkte des Phasenraums markiert. P_1 und P_2 ergeben sich aus $E_{W,max.}$ und $E_{W,min.}$, P_2 und P_4 aus der Bedingung $\frac{dE_A}{dE_W} = 0$ und K schließlich aus der Nullstelle von $\theta'(E_W, E_A)$.

$$E_{A,min.} = \frac{(m_t - E_W)(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2 + m_A^2 - 2 E_W m_t) - \sqrt{E_W^2 - m_W^2} \sqrt{M_+^2 M_-^2}}{2(m_t^2 + m_W^2 - 2 E_W m_t)} \quad (3.18.3)$$

$$= \frac{(E' + m_t^2 - m_W^2)(E' - m_b^2 + m_A^2) - \sqrt{\lambda(m_b^2, m_A^2, E')} \sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, E')}}{4 m_t E'} \quad (3.18.4)$$

wobei durch die Ersetzung $E_W \rightarrow E' = m_t^2 + m_W^2 - 2E_W m_t$, eine symmetrische Darstellung der Wurzelargumente durch die zwei KÄLLÉN-Funktionen $\lambda(m_b^2, m_A^2, E')$ und $\lambda(m_t^2, m_W^2, E')$ erreicht wird. Bemerkenswert ist, daß die eine Wurzel die „kleinen“ Massen m_b und m_A und die andere die „großen“ Massen m_t und m_W als Argument enthält. Die Variable E' besitzt die Dimension $[E'] = M^2$.

Durch die Faktorisierung der KÄLLÉN-Funktionen und die Analyse der Definitionsbereiche der Wurzeln, können die kinematisch erlaubten Werte für die Hilfsvariable E' bestimmt werden:

$$\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, E')} = \sqrt{(m_t - m_W)^2 - E'} \sqrt{(m_t + m_W)^2 - E'} \in \mathbb{R} \text{ für } E' \in [0, (m_t - m_W)^2],$$

$$\sqrt{\lambda(m_b^2, m_A^2, E')} = \sqrt{E' - (m_b - m_A)^2} \sqrt{E' - (m_b + m_A)^2} \in \mathbb{R} \text{ für } E' \in [(m_b + m_A)^2, \infty[.$$

Der Definitionsbereich der Variablen E' ist durch die Schnittmenge der beiden Intervalle gegeben. Durch die Rücksubstitution kann der Definitionsbereich der W -Bosonenergie E_W berechnet werden; als untere Grenze ergibt sich die Ruhemasse m_W , wie nicht anders zu erwarten. Die minimale und maximale Energie des Photons ergibt sich dagegen aus der Kurvendiskussion der Phasenraumgrenzen. Die minimale Photonenergie ist in Analogie durch den Massenregulator m_A gegeben und verschwindet für $m_A \rightarrow 0$. Da die W -Bosonenergie und die Photonenergie beide nach oben beschränkt sind, können UV-Divergenzen wie bei den Schleifenkorrekturen nicht auftreten.

$$E'_{min.} = (m_b + m_A)^2 \leq E' \leq (m_t - m_W)^2 = E'_{max.}$$

$$E_{W,min.} = m_W \leq E_W \leq \frac{m_t^2 + m_W^2 - (m_b + m_A)^2}{2 m_t} = E_{W,max.} \quad (3.19)$$

$$E_{A,min.} = m_A \leq E_A \leq \frac{m_t^2 - (m_W + m_b)^2 + m_A^2}{2 m_t} = E_{A,max.}$$

Aus der Kurvenraumdiskussion ergeben sich folgende Extrempunkte des Phasenraums: Bei P_1 besitzt das W -Boson seine maximale Energie, für $m_A \rightarrow 0$ verschwindet die zugehörige Photonenergie. Bei P_2 ist die Photonenergie maximal, bei P_3 die W -Bosonenergie minimal. Schließlich nimmt bei P_4 das Photon seine minimal mögliche Energie ein. Im Grenzfall $m_A \rightarrow 0$ fallen die Punkte P_1 und P_2 zusammen und definieren den Soft-Photon-Punkt. Die Einführung des Regularisierungs-Parameters m_A deformiert den Phasenraum derart, daß die im Soft-Photon-Punkt lokalisierte IR-Singularität außerhalb der Phasenraumgrenzen liegt. Im Fall eines masselosen Bottomquarks kommen die Punkte P_1 , P_2 und P_4 auf der Linie maximaler W -Bosonenergie zum liegen und definieren die kollineare Singularität von Photon und Bottomquark. Die Extrempunkte lauten:

$$P_1 = P_1 \left(\frac{m_t^2 + m_W^2 - (m_b + m_A)^2}{2m_t}, \frac{m_A(m_t^2 - m_W^2 + (m_b + m_A)^2)}{2(m_b + m_A)m_t} \right), \quad (3.20.1)$$

$$P_2 = P_2 \left(\frac{m_W(m_t^2 + (m_W + m_b)^2 - m_A^2)}{2(m_W + m_b)m_t}, \frac{m_t^2 - (m_W + m_b)^2 + m_A^2}{2m_t} \right), \quad (3.20.2)$$

$$P_3 = P_3 \left(m_W, \frac{(m_t - m_W)^2 - m_b^2 + m_A^2}{2(m_t - m_W)} \right), \quad (3.20.3)$$

$$P_4 = P_4 \left(\frac{(m_t - m_A)^2 + m_W^2 - m_b^2}{2(m_t - m_A)}, m_A \right), \quad (3.20.4)$$

$$K = K \left(\frac{(m_t - m_b)^2 + m_W^2}{2(m_t - m_b)}, \frac{(m_t - m_b)^2 - m_W^2}{2(m_t - m_b)} \right). \quad (3.20.5)$$

Dem Punkt K auf dem Phasenraumrand in Abb. (3.2) kommt die folgende Bedeutung zu: Der Rand des Phasenraums ist durch die Bedingungen $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ definiert, zugleich nimmt aber der Polarwinkel θ' aus Gl. (3.16) ebenfalls die Extremalwerte 0 und π an. Es können folgende drei Konfigurationen unterschieden werden:

$$\text{I. } \theta_g = 0, \theta_b = \pi, \quad \text{II. } \theta_g = \pi, \theta_b = \pi, \quad \text{III. } \theta_g = \pi, \theta_b = 0. \quad (3.21)$$

Trägt man $\cos \theta$ bzw. $\cos \theta'$ nach den Gln. (3.14) und (3.16) gegen die W -Bosonenenergie E_W auf (hier nicht gezeigt), wobei die Photonenergie E_A durch die Gleichungen für die minimale und maximale Photonenergie ersetzt wird, so kann man aus den entstehenden Stufenfunktionen für die Konfigurationen I, II und III die folgenden Energieintervalle zuordnen:

$$\begin{aligned} \text{I. } E_g = E_{g,min.}, \quad m_W &< E_W < \frac{(m_t - m_A)^2 + m_W^2 - m_b^2}{2(m_t - m_A)}, \\ \text{IIa. } E_g = E_{g,min.}, \quad \frac{(m_t - m_A)^2 + m_W^2 - m_b^2}{2(m_t - m_A)} &< E_W < \frac{m_t^2 + m_W^2 - (m_b + m_A)^2}{2m_t}, \\ \text{IIb. } E_g = E_{g,max.}, \quad \frac{(m_t - m_b)^2 + m_W^2 + m_A^2}{2(m_t - m_b)} &< E_W < \frac{m_t^2 + m_W^2 - (m_b + m_A)^2}{2m_t}, \\ \text{III. } E_g = E_{g,max.}, \quad m_W &< E_W < \frac{(m_t - m_b)^2 + m_W^2 + m_A^2}{2(m_t - m_b)}. \end{aligned}$$

Die Bereiche I und III befinden sich zwischen den Punkten P_3 und P_4 bzw. den Punkten P_3 und K . Der Bereich IIa liegt zwischen den Punkten K und P_1 und der Bereich IIb zwischen den Punkten P_1 und P_4 . Der Punkt K ist von der Photonmasse unabhängig und stimmt im Fall der kollinearen Singularität mit dem Punkt P_2 überein.

Nach diesen Vorbereitungen kann das für die Phasenraumintegration der Bremsstrahlungskorrektur benötigte differentielle Phasenraumelement $d\text{PS}_3$ für den Drei-Körper-Zerfall diskutiert werden. Aus dem allgemeinen Ansatz folgt zunächst:

$$d\text{PS}_n = (2\pi)^{4-3n} \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n p_i - q \right) \prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) d^4 p_i \quad (3.22.1)$$

$$\begin{aligned} d\text{PS}_3 = (2\pi)^4 \delta^4(p_t - p_b - k - q) \times \delta(p_b^2 - m_b^2) \Theta(E_b) \frac{d^4 p_b}{(2\pi)^3} \times \\ \times \delta(k^2 - m_A^2) \Theta(E_A) \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \times \delta(q^2 - m_W^2) \Theta(E_W) \frac{d^4 q}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3.22.2)$$

Die Integration über das vierdimensionale, LORENTZ-invariante differentielle Phasenraumelement d^4p kann mit Hilfe der Formel $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(x - x_i) |f'(x_i)|^{-1}$ für die δ -Distribution, wobei x_i eine einfache Nullstelle von $f(x)$ ist, auf das ebenfalls LORENTZ-invariante dreidimensionale Phasenraumelement $(d^3\vec{p})/(2p^0)$ umgeschrieben werden. Bezeichnet p^0 die Energiekomponente des 4-Impulsvektors p , so gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) &= \int dp^0 \int d^3\vec{p} \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2) \Theta(p^0) = \\ &= \sum_{i=\pm 1} \int dp^0 \int d^3\vec{p} \frac{\delta(p^0 + i \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{|2 \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}|} \Theta(p^0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Auf diese Weise werden d^4k und d^4q umgeschrieben. Setzt man in δ -Distribution $\delta(p_b^2 - m_b^2)$ die Gl. (3.14) für p_b^2 ein, erhält man nach Herausziehen des Faktors $2|\vec{q}||\vec{k}|$ statt dessen die Funktion $\cos \theta(E_W, E_A)$ im Argument, d.h. bei der Phasenraumintegration wird der Polarwinkel θ durch die Phasenraumvariablen E_A und E_W festgelegt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \delta(p_b^2 - m_b^2) &= \delta(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2 + m_A^2 - 2m_t(E_W + E_A) + \\ &+ 2E_W E_A - 2|\vec{q}||\vec{k}| \cos \theta) = \delta(\cos \theta(E_W, E_A) - \cos \theta) \left(2|\vec{q}||\vec{k}|\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Stellt man die differentielle Volumenelemente $d^3\vec{k}$ und $d^3\vec{q}$ in Kugelkoordinaten dar - $d\Omega_{\vec{k}} = d\varphi d\cos\theta$ und $d\Omega_{\vec{q}}$ bezeichnen die differentielle Oberflächenelemente der Einheitskugel - und nutzt die Identität $|\vec{p}| d|\vec{p}| = p^0 dp^0$ für den 4-Impuls $p = (p^0; \vec{p})$ aus, d.h.

$$d^3\vec{k} = |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| d\Omega_{\vec{k}} = |\vec{k}| E_A dE_A d\varphi d\cos\theta \quad \text{und} \quad d^3\vec{q} = |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| d\Omega_{\vec{q}} = |\vec{q}| E_W dE_W d\Omega_{\vec{q}},$$

so ist das differentielle Phasenraumvolumen dPS_3 schließlich durch den folgenden Ausdruck gegeben, wobei bereits über die Kugeloberfläche $d\Omega_{\vec{q}}$ integriert worden ist:

$$dPS_3 = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \times \delta^4(p_t - p_b - q - k) d^4p_b \Theta(E_b) \times dE_A dE_W d\varphi \Big|_{\theta=\theta(E_W, E_A)}. \quad (3.25)$$

Mit der δ -Distribution für die Erhaltung des 4-Gesamtimpuls kann die Integration über d^4p_b sofort ausgeführt werden. Der Beitrag der Bremsstrahlungskorrektur zu den einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P ist - mit der Abkürzung $|\mathcal{M}|_i^2 := H^{\mu\nu} IP_{i,\mu\nu}$ für die Übergangsamplitude - nach FERMIS „Goldener Regel“ schließlich durch die folgende Formel gegeben. Für den konvergenten Anteil der Bremsstrahlungskorrektur kann die Photonmasse m_A in den Integrationsgrenzen gleich Null gesetzt werden, für den divergenten Anteil ist sie zwingend notwendig, um das Integral überhaupt berechnen zu können. Für die von dem Azimutwinkel φ abhängigen Übergangsamplituden $|\mathcal{M}|_I^2$ und $|\mathcal{M}|_A^2$ kann die Integration über den Winkel nicht ausgeführt werden. Es gilt:

$$\Gamma_{Brems.,i} = \frac{1}{16 m_t^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{(m_b+m_A)^2}^{(m_t-m_W)^2} dE' \int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} dE_A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi |\mathcal{M}_i^2|_{\theta=\theta(E',E_A)}. \quad (3.26)$$

3.3 Die Parametrisierung

Die Amplituden $|\mathcal{M}_i^2|$ der Bremsstrahlungskorrektur enthalten die 4-Skalarprodukte:

$$\bullet (k \cdot k) = m_A^2, (q \cdot q) = m_W^2, (p_t \cdot p_t) = m_t^2, (p_b \cdot p_b) = m_b^2, (p_t \cdot s_t) = 0, \quad (3.27)$$

$$\bullet (p_b \cdot p_t), (p_t \cdot q), (p_b \cdot q), \quad (3.28)$$

$$\bullet (p_b \cdot s_t), (q \cdot s_t), (k \cdot s_t) \text{ f\"ur } IP_i \text{ und } i = U + L, U, L, F, S, \quad (3.29)$$

$$\bullet (s_t \cdot \varepsilon), (p_t \cdot \varepsilon), (q \cdot \varepsilon), (p_b \cdot \varepsilon), (k \cdot \varepsilon) \text{ f\"ur } IP_i \text{ und } i = I, A, \quad (3.30)$$

$$\bullet (k \cdot p_t), (k \cdot p_b), (k \cdot q). \quad (3.31)$$

Die 4-Skalarprodukte in (3.27) sind durch die Massenregularisierung, die „On-Shell“-Bedingungen und die Orthogonalität von Spin- und Impulsvektor festgelegt. Die 4-Skalarprodukte in (3.28) und (3.29) können auf die k -abhängigen 4-Skalarprodukte in (3.31) zurückgeführt werden: Multipliziert man $p_b = p_t - q - k$ jeweils mit den 4-Impulsvektoren p_b, p_t, q und k , so können vier 4-Skalarprodukte durch das lineare Gleichungssystem auf die zwei 4-Skalarprodukte $(k \cdot p_b)$ und $(k \cdot p_t)$ zurückgeführt werden:

$$\left. \begin{array}{l} m_b^2 = p_b \cdot p_t - p_b \cdot q - p_b \cdot k \\ p_t \cdot p_b = m_t^2 - p_t \cdot q - p_t \cdot k \\ q \cdot p_b = q \cdot p_t - m_W^2 - q \cdot k \\ k \cdot p_b = k \cdot p_t - k \cdot q - m_A^2 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} p_t \cdot p_b = -k \cdot q + \frac{1}{2}(m_t^2 - m_W^2 + m_b^2) \\ p_t \cdot q = -k \cdot p_b + \frac{1}{2}(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2) \\ p_b \cdot q = -k \cdot p_t + \frac{1}{2}(m_t^2 - m_W^2 - m_b^2) \\ k \cdot q = k \cdot p_t - k \cdot p_b - m_A^2 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Für die Berechnung der konvergenten Integrale wird die Photonmasse $m_A = 0$ gesetzt. Für $k = 0$ und m_A ergeben sich die aus der BORNschen Näherung bekannten 4-Skalarprodukte:

$$p_t \cdot p_b = \frac{m_t^2 - m_W^2 + m_b^2}{2}, \quad p_t \cdot q = \frac{m_t^2 + m_W^2 - m_b^2}{2}, \quad p_b \cdot q = \frac{m_t^2 - m_W^2 - m_b^2}{2}. \quad (3.33)$$

Wie in Kapitel 1 ausgeführt, kann der longitudinale Polarisationsvektor $s_{t,long}^\mu$ kovariant durch die 4-Impulsvektoren q^μ und p_t^μ dargestellt werden. Somit sind auch die spinabhängigen 4-Skalarprodukte in (3.29), ohne auf ein spezielles Bezugssystem zurückgreifen zu müssen, auf $(k \cdot p_b)$ und $(k \cdot p_t)$ reduzierbar. Die verbleibenden 4-Skalarprodukte in (3.30) und (3.31) werden im Ruhesystem des Topquark parametrisiert. Die Parametrisierungen für den Zwei-Körper-Zerfall (Bornterm, Einschleifenkorrektur) und für den Drei-Körper-Zerfall (Bremsstrahlungskorrektur) werden im folgenden gegenübergestellt:

- Parametrisierung des Zwei-Körper-Zerfalls:

$$p_t = (m_t; 0, 0, 0), \quad s_t = (0; s_x, s_y, s_z) \quad (3.34.1)$$

$$q = (E_W; 0, 0, |\vec{q}|), \quad p_b = (E_b; 0, 0, -|\vec{q}|) = p_t - q \quad (3.34.2)$$

$$E_W = \frac{m_t^2 + m_W^2 - m_b^2}{2 m_t}, \quad E_b = \frac{m_t^2 - m_W^2 + m_b^2}{2 m_t} \quad (3.34.3)$$

$$|\vec{q}| = \frac{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}}{2 m_t}. \quad (3.34.4)$$

- Parametrisierung des Zwei-Körper-Zerfalls:

$$p_t = (m_t; 0, 0, 0), \quad s_t = (0; s_x, s_y, s_z) \quad (3.34.5)$$

$$q = (E_W; 0, 0, |\vec{q}|), \quad k = (E_A; k_x, k_y, k_z), \quad p_b = p_t - q - k \quad (3.34.6)$$

$$E_W, E_A \text{ Phasenraumvariablen, } m_t = E_b + E_W + E_A \quad (3.34.7)$$

$$|\vec{q}| = \frac{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, 2k \cdot p_b + m_b^2 + m_A^2)}}{2 m_t}. \quad (3.34.8)$$

Der Impulsbetrag $|\vec{q}|$, der als Normierungsfaktor bei den Helizitätsprojektoren und dem longitudinalen Polarisationsvektor des Topquarks auftritt, wird die Phasenraumintegration der Bremsstrahlungskorrektur für die Helizitäts-Strukturfunktionen gegenüber der für die totale Rate erschweren. Die Parametrisierung der 4-Skalarprodukte in (3.30) und (3.31) und des LEVI-CIVITA-Tensors lauten:

$$(p_b \cdot \varepsilon) = +k_x, \quad (k \cdot \varepsilon) = -k_x, \\ (k \cdot p_b) = \frac{1}{2}(E' - m_b^2 - m_A^2), \quad (k \cdot p_t) = m_t E_A, \quad (k \cdot q) = m_t E_A - \frac{1}{2}(E' - m_b^2 - m_A^2) \quad (3.35)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_{b,\alpha} p_{t,\beta} q_\gamma \varepsilon_\delta = -k_y m_t |\vec{q}|, \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} k_\alpha p_{t,\beta} q_\gamma \varepsilon_\delta = +k_y m_t |\vec{q}|.$$

Nur die zwei Amplitudenquadrate $|\mathcal{M}|_I^2$ und $|\mathcal{M}|_A^2$ für die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix der Topspinpolarisation enthalten die Komponenten k_x oder k_y . Treten sie linear auf, verschwinden sie bei der Phasenraumintegration aufgrund der φ -Integration über das Intervall $[0, 2\pi]$; treten sie aber quadratisch auf, ergeben sie wegen $\sin^2 \varphi, \cos^2 \varphi \geq 0$ bei der φ -Integration einen nicht verschwindenden Beitrag, der mit der trigonometrischen Identität $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ durch die Gl. (3.14) berechnet werden kann. Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \{k_x, k_y\} = |\vec{k}| \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \{\cos \varphi, \sin \varphi\} = 0, \quad (3.36.1)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \{k_x^2, k_y^2\} = |\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \{\cos^2 \varphi, \sin^2 \varphi\} = \pi |\vec{k}|^2 \sin^2 \theta, \quad (3.36.2)$$

$$k_x^2 = k_y^2 = -\frac{m_t^2 (E' - m_b^2)^2 - 2 m_t (E' - m_b^2) (E' + m_t^2 - m_W^2) E_A + 4 m_t^2 E_A^2 E'}{2 \lambda(m_t^2, m_W^2, E')}. \quad (3.36.3)$$

3.4 Die Integration über die Energie des Photons

Für die Berechnung der IR-konvergenten Anteile des Hadrontensors in Gl. (3.11) wird die Photonmasse $m_A = 0$ gesetzt. Die Phasenraumgrenzen für die minimale und maximale Photonenergie in Abhängigkeit der Hilfsvariablen E' vereinfachen sich zu:

$$E_{A,min.} = \frac{(E' - m_b^2)(E' + m_t^2 - m_W^2 - \sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, E')})}{4 m_t E'}, \quad (3.37.1)$$

$$E_{A,max.} = \frac{(E' - m_b^2)(E' + m_t^2 - m_W^2 + \sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, E')})}{4 m_t E'}. \quad (3.37.2)$$

Für sämtliche Helizitäts-Strukturfunktionen kann die Integration der Photonenergie durch Partialbruchzerlegung der Amplitudenquadrate nach E_A auf die folgenden sieben Integralen reduziert werden:

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \left\{ \frac{1}{E_A^2}, \frac{1}{E_A}, 1, E_A, E_A^2, \frac{1}{(2 m_t E_A - E' + m_b^2)^2}, \frac{1}{(2 m_t E_A - E' + m_b^2)^1} \right\} dE_A. \quad (3.38)$$

Die zugehörigen, bestimmten Integrale für die IR-konvergenten Anteile des Hadrontensors sind im folgenden mit der Abkürzung $\lambda_{E'}$ für die KÄLLÉN-Funktion $\lambda(m_t^2, m_W^2, E')$ angegeben. Im Fall der QCD-Bremsstrahlungskorrektur durch die Gluonen treten die beiden letzten Integraltypen wegen der einfacheren Struktur der Baumgraphen nicht auf. Bis auf Vorfaktoren und Vorzeichen ähneln sie aber den ersten beiden Integraltypen. Für die Integrale gilt:

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{E_A^2} = \frac{2 \sqrt{\lambda_{E'}}}{m_t (E' - m_b^2)}, \quad \int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{E_A} = \ln \left(\frac{E' + m_t^2 - m_W^2 + \sqrt{\lambda_{E'}}}{E' + m_t^2 - m_W^2 - \sqrt{\lambda_{E'}}} \right) \quad (3.39.1)$$

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} dE_A = \frac{(E' - m_b^2) \sqrt{\lambda_{E'}}}{2 m_t E'}, \quad \int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} E_A dE_A = \frac{(E' - m_b^2)^2 (E' + m_t^2 - m_W^2) \sqrt{\lambda_{E'}}}{8 E'^2 m_t^2}, \quad (3.39.2)$$

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} E_A^2 dE_A = \frac{(E' - m_b^2)^3 (\lambda_{E'} + 3 E' m_t^2) \sqrt{\lambda_{E'}}}{24 E'^3 m_t^3}, \quad (3.39.3)$$

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{(2 E_A m_t + m_b^2 - E')^2} = \frac{1}{2 m_t m_W^2} \frac{\sqrt{\lambda_{E'}}}{(E' - m_b^2)}, \quad (3.39.4)$$

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{(2 E_A m_t + m_b^2 - E')} = -\frac{1}{2 m_t} \ln \left(\frac{E' - m_t^2 + m_W^2 + \sqrt{\lambda_{E'}}}{E' - m_t^2 + m_W^2 - \sqrt{\lambda_{E'}}} \right). \quad (3.39.5)$$

Zur Berechnung des IR-divergenten Soft-Photon-Faktors werden die Abkürzungen λ_1 und λ_2 für die KÄLLÉN-Funktionen $\lambda(m_b^2, m_A^2, E')$ und $\lambda(m_t^2, m_W^2, E')$ eingeführt. Mit ihnen können die von der Photonmasse m_A abhängigen Phasenraumgrenzen

$$E_{A,min.} = \frac{(E' + m_A^2 - m_b^2)(E' + m_t^2 - m_W^2 - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2})}{4 m_t E'}, \quad (3.40.1)$$

$$E_{A,max.} = \frac{(E' + m_A^2 - m_b^2)(E' + m_t^2 - m_W^2 + \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2})}{4 m_t E'} \quad (3.40.2)$$

kompakt dargestellt werden. Zusätzlich werden die Abkürzungen λ_3 und λ_4 definiert, um anschließend die weiteren vier komplexwertigen Hilfsvariablen E'_1 , E'_2 , E'_3 und E'_4 einzuführen:

$$\lambda_3 := (m_t^2 - (m_W + m_b)^2 + m_A^2)(m_t^2 - (m_W - m_b)^2 + m_A^2), \quad (3.41.1)$$

$$\lambda_4 := ((m_t - m_b)^2 - m_W^2 + m_A^2)((m_t + m_b)^2 - m_W^2 + m_A^2), \quad (3.41.2)$$

$$E'_1 := \frac{m_b^2 m_t^2 + m_A^2 m_W^2 - i m_A m_t \sqrt{\lambda_3}}{m_t^2 + m_A^2}, \quad E'_2 := \frac{m_b^2 m_t^2 + m_A^2 m_W^2 + i m_A m_t \sqrt{\lambda_3}}{m_t^2 + m_A^2}, \quad (3.41.3)$$

$$E'_3 := \frac{m_b^2 m_W^2 + m_A^2 m_t^2 - i m_A m_W \sqrt{\lambda_4}}{m_W^2 + m_A^2}, \quad E'_4 := \frac{m_b^2 m_W^2 + m_A^2 m_t^2 + i m_A m_W \sqrt{\lambda_4}}{m_W^2 + m_A^2}. \quad (3.41.4)$$

Bei der Integration des Soft-Photon-Faktors über die Photonenergie E_A müssen nur fünf verschiedene Integranden behandelt werden. Bei der Integration des Soft-Gluon-Faktors in Kapitel 4 für die QCD reduziert sich die Betrachtung auf die ersten drei Integranden. Die Integranden und die zugehörigen Integrale lauten:

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \left\{ \frac{1}{E_A^2}, \frac{1}{E_A}, 1, \frac{1}{(2 m_t E_A - E' + m_b^2 - m_A^2)^2}, \frac{1}{(2 m_t E_A - E' + m_b^2 - m_A^2)^1} \right\} dE_A, \quad (3.42)$$

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{E_A^2} = \frac{2 m_t \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(m_t^2 + m_A^2) (E' - E'_1) (E' - E'_2)}, \quad (3.43.1)$$

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{E_A} = \ln \left(\frac{(E' + m_A^2 - m_b^2)(E' + m_t^2 - m_W^2) + \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(E' + m_A^2 - m_b^2)(E' + m_t^2 - m_W^2) - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}} \right), \quad (3.43.2)$$

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} dE_A = \frac{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{2 E' m_t}, \quad \int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{(2 E_A m_t + m_b^2 - m_A^2 - E')} = \quad (3.43.3)$$

$$\frac{1}{2 m_t} \ln \left(\frac{(E' + m_A^2 - m_b^2)(E' - m_t^2 + m_W^2) - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(E' + m_A^2 - m_b^2)(E' - m_t^2 + m_W^2) + \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}} \right), \quad (3.43.4)$$

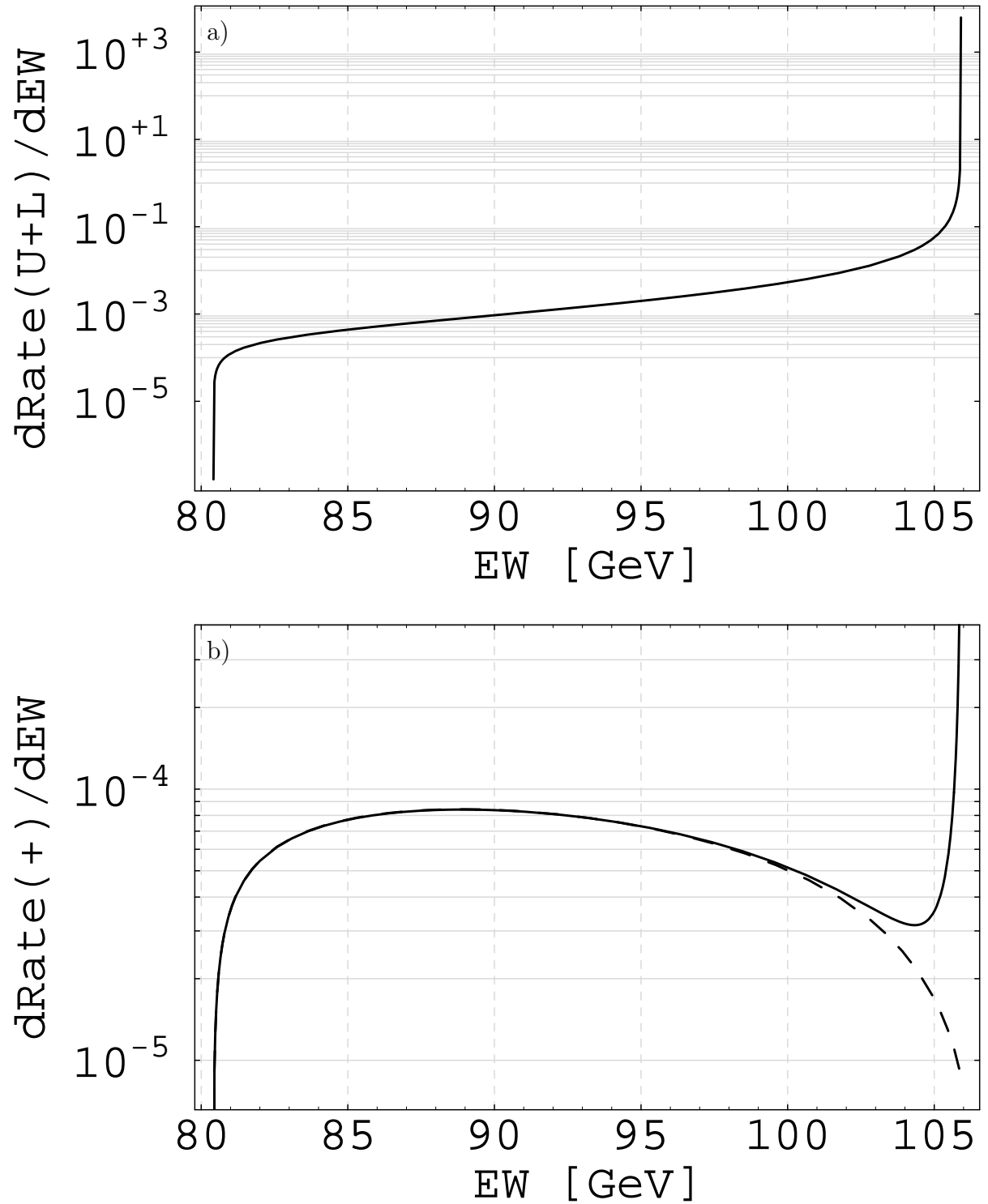


Abbildung 3.3: Der Hadrontensor nach der Integration über die Photonenergie E_A , aufgetragen gegen die verbleibende W-Bosonenergie E_W im kinematisch zulässigen Bereich $[E_{W,min.}, E_{W,max.}]$. In a) ist der Beitrag zur totalen Rate in b) der Beitrag zum Vorwärts-Anteil gezeigt, wobei die durchgezogene Linie für $m_b \neq 0$ und die gestrichelte Linie für $m_b = 0$ gilt.

$$\int_{E_{A,min.}}^{E_{A,max.}} \frac{dE_A}{(2 E_A m_t + m_b^2 - m_A^2 - E')^2} = \frac{1}{2 m_t} \frac{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(m_W^2 + m_A^2) (E' - E'_3) (E' - E'_4)}. \quad (3.43.5)$$

Mit den angegebenen Integralen in den Gln. (3.39.1-5) und (3.43.1-4) kann die erste Integration für den IR-konvergenten und IR-divergenten Anteil der Bremsstrahlungskorrektur durchgeführt werden. In Abb. (3.3a) ist die totale Rate der Bremsstrahlungskorrektur nach der Integration über die Photonenergie als Funktion der W -Bosonenergie E_W im Intervall $[E_{W,min.}, E_{W,max.}]$ logarithmisch aufgetragen. Die IR-Divergenz des Photons bei $k = 0$, die nach der 4-Impulserhaltung und der Abb. (3.2) bei der maximalen W -Bosonenergie auftritt, ist deutlich zu erkennen. In Abb. (3.3b) ist zum Vergleich die „transversal-plus“-Rate, die sich aus der Kontraktion des Hadrontensors $H^{\mu\nu}$ der Bremsstrahlungskorrektur mit der Projektorkombination $\frac{1}{2}(\mathcal{P}_U + \mathcal{P}_F)$ ergibt, nach der Integration über die Photonenergie als Funktion der Bosonenergie gezeigt. Die durchgezogene Kurve zeigt für den Fall des massiven Bottomquarks bei maximaler W -Bosonenergie ebenfalls die IR-Divergenz des Photons. Im Fall des masselosen und damit linkshändigen Bottomquarks zeigt die gestrichelte Kurve aber, daß die IR-Divergenz verschwindet. Da die „transversal-plus“-Rate, die die Beiträge rechtshändiger Bottomquarks beschreibt, sowohl in der BORNsche Näherung als auch in der Einschleifenkorrekturen für $m_b \rightarrow 0$ verschwindet, könnte eine auftretende IR-Singularität der Bremsstrahlungskorrektur in diesem Fall auch gar nicht kompensiert werden. Nach Abb. (3.3b) tritt für $m_b = 0$ für die „transversal-plus“-Rate eine IR-Singularität am Rand des Phasenraums nicht auf.

3.5 Die IR-konvergenten Integraltypen

3.5.1 Die Grundintegrale und die Koeffizientenfunktionen

In diesem Abschnitt werden die Techniken zur Berechnung der IR-konvergenten Grundintegrale für die zweite Integration über die verbleibende Phasenraumvariable E_W der Bremsstrahlungskorrektur behandelt. Die Grundintegrale sind im Anhang D, die Koeffizientenfunktionen für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen im Anhang E zusammengestellt.

Für die Massen des W -Bosons und des Bottomquarks sowie der Hilfsvariablen E' , die durch die Gleichung $E' = m_t^2 + m_W^2 - 2m_t E_W$ mit der W -Bosonenergie verknüpft ist, werden die folgenden, auf die Masse des Topquarks skalierten, dimensionslosen Variablen

$$x := \frac{m_W}{m_t}, \quad y := \frac{m_b}{m_t}, \quad z := \frac{E'}{m_t^2}, \quad (3.44)$$

eingeführt. Nach der Integration der IR-konvergenten Anteile sämtlicher Amplitudenquadrate³ $|\mathcal{M}|_{kon.,i}^2$ für $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P über die Photonenergie E_A und einer anschließenden Partialbruchzerlegung nach z können für die verbleibende Integration sechs Integraltypen definiert werden:

³Die IR-konvergenten Amplitudenquadrate folgen aus der Kontraktion des IR-konvergenten Anteils des Hadrontensors $\mathcal{H}^{\mu\nu} + (\mathcal{B}^{\mu\nu} - \mathcal{B}_0^{\mu\nu})\Delta_{GWS}$ der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur mit den Projektoren $\mathcal{P}_{\mu\nu,i}$. Für den IR-konvergenten Anteil der Bremsstrahlungskorrektur erfolgt die Integration mit $m_A = 0$.

n	$\mathcal{R}_{(n)}$	$\mathcal{R}_{(m,n)}$	$\mathcal{S}_{(n)}$	$\mathcal{S}_{(m,n)}$	$\mathcal{T}_{(n)}$	$\mathcal{T}_{(m,n)}$
-1	×	-2, ..., 1	-	-	-	-
0	×	-2, ..., 2	×	0, ..., 1	×	0, ..., 1
1	-	-2, ..., 3	×	0, ..., 2	×	0, ..., 2
2	-	-2, ..., 4	-	0, ..., 3	-	0, ..., 3
3	-	-	-	0, ..., 4	-	0, ..., 4

Tabelle 3.1: Die maximale Wertebereich der Indizes (m, n) für die verschiedenen Integraltypen der Bremsstrahlungskorrektur. n beschreibt die Potenz der Wurzel über die Källén-Funktion $\lambda(1, x^2, z)$ im Nenner, m die Potenz von z im Zähler. Für $\mathcal{R}_{(n)}$, $\mathcal{S}_{(n)}$ und $\mathcal{T}_{(n)}$ besagt \times oder $-$, ob der Integraltyp vom Grad n vorkommt oder nicht.

$$\mathcal{R}_{(m,n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{z^m dz}{\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}}, \quad \mathcal{R}_{(n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{dz}{(z-y^2)\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}}, \quad (3.45.1)$$

$$\mathcal{S}_{(m,n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{z^m dz}{\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right), \quad (3.45.2)$$

$$\mathcal{S}_{(n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{dz}{(z-y^2)\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right), \quad (3.45.3)$$

$$\mathcal{T}_{(m,n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{z^m dz}{\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2-z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2-z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right), \quad (3.45.4)$$

$$\mathcal{T}_{(n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{dz}{(z-y^2)\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2-z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2-z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right). \quad (3.45.5)$$

Der Index m bezeichnet die Potenz der Integrationsvariablen z im Zähler, der Index n die Potenz der Wurzel über die z -abhängige KÄLLÉN-Funktion $\lambda(1, x^2, z)$ im Nenner der jeweiligen Integraltypen. Der Wertebereich der Indizes kann der Tab. (3.1) entnommen werden. Die Integraltypen $\mathcal{R}_{(n)}$, $\mathcal{S}_{(n)}$ und $\mathcal{S}_{(m,n)}$ unterscheiden sich durch den zusätzlichen Faktor $(z-y^2)$ im Nenner von den anderen Integraltypen. Die Integraltypen \mathcal{S} und \mathcal{T} unterscheiden sich in den Vorzeichen der Argumente ihrer Logarithmus-Funktionen. Die aus der Phasenraumdiskussion bekannten Grenzen (3.19) für die Integrationsvariable z werden durch die „Cut-Off“-Parameter ϵ'_1 und ϵ'_2 ergänzt, um die Scheinsingularitäten zu regularisieren, die aufgrund der Partialbruchzerlegung entstehen. Beide Scheinsingularitäten heben sich in der Summe (s.u.) für die Bremsstrahlungsbeiträge der einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen heraus.

Um die Wurzel über die z -abhängige KÄLLÉN-Funktion $\lambda(1, x^2, z)$ zu eliminieren, wird die Integrationsvariable z substituiert. Die folgende Substitution $z \rightarrow \eta$ erweist sich für $\eta \geq 1$ als zielführend:

$$z \longrightarrow 1 + x^2 - x \frac{\eta^2 + 1}{\eta}, \quad dz \longrightarrow -x \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2} d\eta, \quad \sqrt{\lambda(1, x^2, z)} \longrightarrow x \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right). \quad (3.46)$$

Zur Bestimmung der Integranden werden zur Abkürzung die beiden Konstanten

$$\eta_{\pm} := \frac{1 + x^2 - y^2 \pm \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)}}{2x^2}. \quad (3.47)$$

definiert. Unter Vernachlässigung der „Cut-Off“-Parameter ϵ'_1 und ϵ'_2 für die Scheinsingularitäten geht die untere Integrationsgrenze $z_{min.} = y^2$ durch die Substitution in die obere Grenze $\eta_{max.} = \eta_+$ der η -Integration über und umgekehrt, d.h. $z_{max.} = (1 - x)^2$ geht in $\eta_{min.} = 1$ über. Nach der Substitution werden für die Scheinsingularitäten neue „Cut-Off“-Parameter ϵ_1 und ϵ_1 eingeführt. Die sechs definierten Integraltypen können jetzt wurzelfrei dargestellt werden:

$$\mathcal{R}_{(n)} = \frac{1}{x^n} \int_{1+\epsilon_2}^{\eta_+ - \epsilon_1} \frac{\eta^{n-1}}{(\eta - \eta_+) (\eta - \eta_-) (\eta^2 - 1)^{n-1}} d\eta, \quad (3.48.1)$$

$$\mathcal{R}_{(m,n)} = -\frac{1}{x^{n-1}} \int_{1+\epsilon_2}^{\eta_+ - \epsilon_1} \frac{\eta^{n-m-2} (\eta - x)^m (1 - \eta x)^m}{(\eta^2 - 1)^{n-1}} d\eta, \quad (3.48.2)$$

$$\mathcal{S}_{(n)} = \frac{1}{x^n} \int_{1+\epsilon_2}^{\eta_+ - \epsilon_1} \frac{\eta^{n-1}}{(\eta - \eta_+) (\eta - \eta_-) (\eta^2 - 1)^{n-1}} \left\{ \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) - \ln \eta \right\} d\eta, \quad (3.48.3)$$

$$\mathcal{S}_{(m,n)} = -\frac{1}{x^{n-1}} \int_{1+\epsilon_2}^{\eta_+ - \epsilon_1} \frac{\eta^{n-m-2} (\eta - x)^m (1 - \eta x)^m}{(\eta^2 - 1)^{n-1}} \left\{ \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) - \ln(\eta) \right\} d\eta, \quad (3.48.4)$$

$$\mathcal{T}_{(n)} = -\frac{1}{x^n} \int_{1+\epsilon_2}^{\eta_+ - \epsilon_1} \frac{\eta^{n-1}}{(\eta - \eta_+) (\eta - \eta_-) (\eta^2 - 1)^{n-1}} \left\{ \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) + \ln(\eta) \right\} d\eta, \quad (3.48.5)$$

$$\mathcal{T}_{(m,n)} = \frac{1}{x^{n-1}} \int_{1+\epsilon_2}^{\eta_+ - \epsilon_1} \frac{\eta^{n-m-2} (\eta - x)^m (1 - \eta x)^m}{(\eta^2 - 1)^{n-1}} \left\{ \ln \left(\frac{\eta - x}{1 - \eta x} \right) + \ln(\eta) \right\} d\eta. \quad (3.48.6)$$

Nach der Substitution tritt die Verwandtschaft der sechs verschiedenen Integraltypen deutlich hervor: Die Integrale $\mathcal{S}(n)$ und $\mathcal{T}(n)$, bzw. $\mathcal{S}(m,n)$ und $\mathcal{T}(m,n)$ sind aus Linearkombinationen elementarer Integrale zusammengesetzt. Die zwei logarithmenfreien Integraltypen $\mathcal{R}_{(n)}$ und $\mathcal{R}_{(m,n)}$ können mit der Funktion $g_0(\eta) = 1$ und die vier logarithmenabhängigen Integraltypen $\mathcal{S}(n)$, $\mathcal{S}(m,n)$, $\mathcal{T}(n)$ und $\mathcal{T}(m,n)$ mit den Funktionen $g_1(\eta) = \ln(\eta)$ und $g_2(\eta) = \ln(\eta - x)/(1 - \eta x)$ auf die elementaren Integrale

$$\mathcal{L}_{\{0,1,2\}}(m, f(\eta)) := \int_{1+\epsilon_2}^{\eta_+ - \epsilon_1} f(\eta)^m \{g_0(\eta), g_1(\eta), g_2(\eta)\} d\eta, \quad (3.49)$$

reduziert werden. Die Indizes 0, 1 und 2 bezeichnen die Funktionen $g_0(\eta)$, $g_1(\eta)$ und $g_2(\eta)$. Die Partialbruch-Zerlegung der Integranden in den Gln. (3.48.1) nach η führt auf Potenzen von $f(\eta) = \eta$, $1 \pm \eta$ oder $\eta - \eta_{\pm}$. Für $f(\eta) = \eta - 1$ kann der „Cut-Off“-Parameter ϵ_2 an der unteren Integrationsgrenze auftreten, aber nicht notwendigerweise, wie z.B. anhand der Gln. (3.51.4) und (3.52.5) illustriert werden kann (s.u.). Ähnliches gilt für $f(\eta) = \eta - \eta_+$ und den „Cut-Off“-Parameter ϵ_1 . Mit Hilfe der Dilogarithmus-Identitäten (siehe Anhang G) kann die Anzahl der verschiedenen Dilogarithmen in den elementaren Integralen auf zwölf beschränkt werden. In den nächsten Unterabschnitten werden die elementaren Integrale \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 angegeben, die bei der Berechnung der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur auftreten. Damit ist die Aufgabe der Bestimmung der konvergenten Bremstrahlungsbeiträge auf bekannte Integrale zurückgeführt.

In Tab. (3.1) sind die Wertebereiche der Indizes m und n für die zu berechnenden Integraltypen $\mathcal{R}_{(n)}$, $\mathcal{R}_{(m,n)}$, $\mathcal{S}(n)$, $\mathcal{S}(m,n)$, $\mathcal{T}(n)$ und $\mathcal{T}(m,n)$ der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur zusammengestellt. In Tab. (3.2) sind die Wertebereiche der Indizes m und n für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen angegeben. Die zugehörigen Koeffizientenfunktionen $\rho(n)$, $\rho(m,n)$, $\sigma(n)$, $\sigma(m,n)$, $\tau(n)$ und $\tau(m,n)$, die bei der Partialbruch-Zerlegung der Amplitudenquadrate $|\mathcal{M}|_i^2$ nach z für die einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen als Vorfaktoren der Integraltypen entstehen, sind im Anhang E angegeben. Der Beitrag der konvergenten Grundintegrale zur Bremsstrahlungskorrektur für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen i ist durch die folgende Summe (für alle Helizitäts-Strukturfunktionen fallen die beiden Scheinsingularitäten in den „Cut-Off“-Parametern ϵ_1 und ϵ_2 heraus) gegeben, wobei der Index i unterdrückt wird:

$$\left\{ \Gamma_{Brems} \right\}_{kon.} := \frac{\alpha}{2\pi} \frac{m_i^3 G_F x^2}{8\sqrt{2}\pi} \times \left\{ \sum_{n=-1,0} \rho(n) \mathcal{R}_{(n)} + \sum_{m,n} \rho(m,n) \mathcal{R}_{(m,n)} + \right. \quad (3.50)$$

$$\left. + \sum_{n=0,1} \sigma(n) \mathcal{S}(n) + \sum_{m,n} \sigma(m,n) \mathcal{S}(m,n) + \sum_{n=0,1} \tau(n) \mathcal{T}(n) + \sum_{m,n} \tau(m,n) \mathcal{T}(m,n) \right\}.$$

3.5.2 Der Integraltyp \mathcal{L}_0

$$\mathcal{L}_0(2, \eta) = \frac{1 - \eta^3}{3}, \quad \mathcal{L}_0(1, \eta) = \frac{1 - \eta^2}{2}, \quad \mathcal{L}_0(0, \eta) = 1 - \eta \quad (3.51.1)$$

$$\mathcal{L}_0(-1, \eta) = -\ln(\eta), \quad \mathcal{L}_0(-2, \eta) = \frac{1 - \eta}{\eta}, \quad \mathcal{L}_0(-3, \eta) = \frac{1 - \eta^2}{2\eta^2} \quad (3.51.2)$$

$$\mathcal{L}_0(-4, \eta) = \frac{1 - \eta^3}{3\eta^3} \quad (3.51.3)$$

$$\mathcal{L}_0(-1, \eta+1) = -\ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right), \quad \mathcal{L}_0(-1, \eta-1) = -\ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon_2}\right) \quad (3.51.4)$$

$$\mathcal{L}_0(-1, \eta-\eta_+) = -\ln(\eta+1), \quad \mathcal{L}_0(-1, \eta-\eta_-) = \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon_1}\right) \quad (3.51.5)$$

R	$\mathcal{R}_{(n)}$	$\mathcal{R}_{(m,n)}$	$\mathcal{S}_{(n)}$	$\mathcal{S}_{(m,n)}$	$\mathcal{T}_{(n)}$	$\mathcal{T}_{(m,n)}$
$U+L$	–	$(-2, -1)\dots(1, -1)$	–	$(0, 0)\dots(1, 0)$	–	$(0, 0)\dots(1, 0)$
U^P+L^P	$-1, 0$	$(-2, 0)\dots(2, 0)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1)\dots(2, 1)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1)\dots(2, 1)$
U	–	$(-2, 1)\dots(3, 1)$	–	$(0, 2)\dots(3, 2)$	–	$(0, 2)\dots(3, 2)$
U^P	$-1, 0$	$(-2, 2)\dots(4, 2)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3)\dots(4, 3)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3)\dots(4, 3)$
L	–	$(-2, 1)\dots(2, 1)$	–	$(0, 2)\dots(3, 2)$	–	$(0, 2)\dots(2, 2)$
L^P	$-1, 0$	$(-2, 2)\dots(3, 2)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3)\dots(4, 3)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3)\dots(3, 3)$
F	$-1, 0$	$(-2, 0)\dots(1, 0)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1)\dots(2, 1)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1)\dots(2, 1)$
F^P	–	$(-2, 1)\dots(2, 1)$	–	$(0, 2)\dots(3, 2)$	–	$(0, 2)\dots(3, 2)$
S	–	$(-2, -1)\dots(0, -1)$	–	$(0, 0)\dots(1, 0)$	–	–
S^P	$-1, 0$	$(-2, 0)\dots(1, 0)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1)\dots(2, 1)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1)\dots(1, 1)$
I^P	$-1, 0$	$(-2, 2)\dots(3, 2)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3)\dots(3, 3)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3)\dots(3, 3)$
A^P	–	$(-2, 1)\dots(2, 1)$	–	$(0, 2)\dots(2, 2)$	–	$(0, 2)\dots(2, 2)$

Tabelle 3.2: Der Wertebereich der Indizes m, n für die Integraltypen der verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen. Für die Integraltypen $\mathcal{R}_{(n)}$ bzw. $\mathcal{S}_{(n)}$, $\mathcal{T}_{(n)}$ nimmt n maximal die Werte $-1, 0$ bzw. $0, 1$ an. Für die Integraltypen $\mathcal{R}_{(m,n)}$ läuft von $m = -2$ bis maximal $n + 2$, für die Integraltypen $\mathcal{S}_{(m,n)}$, $\mathcal{T}_{(m,n)}$ von $m = 0$ bis $n + 1$.

3.5.3 Der Integraltyp \mathcal{L}_1

$$\mathcal{L}_1(1, \eta) = -\frac{1}{4} + \frac{\eta^2}{4} \left(1 - 2 \ln(\eta)\right) \quad (3.52.1)$$

$$\mathcal{L}_1(0, \eta) = -1 + \eta \left(1 - \ln(\eta)\right), \quad \mathcal{L}_1(-1, \eta) = -\frac{1}{2} \ln^2(\eta) \quad (3.52.2)$$

$$\mathcal{L}_1(-2, \eta) = -1 + \frac{1}{\eta} \left(1 + \ln(\eta)\right), \quad \mathcal{L}_1(-3, \eta) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4\eta^2} \left(1 + 2 \ln(\eta)\right) \quad (3.52.3)$$

$$\mathcal{L}_1(-1, \eta-1) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln(\eta) \ln\left(\frac{(\eta-1)^2}{\eta}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad (3.52.4)$$

$$\mathcal{L}_1(-2, \eta-1) = -1 + \frac{\eta}{\eta-1} \ln(\eta) - \ln\left(\frac{\eta-1}{\epsilon_2}\right) \quad (3.52.5)$$

$$\mathcal{L}_1(-1, \eta+1) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln(\eta) \ln\left(\frac{(\eta+1)^2}{\eta}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta}\right) + \frac{1}{2} \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \quad (3.52.6)$$

$$\mathcal{L}_1(-2, \eta+1) = -\frac{\eta}{\eta+1} \ln(\eta) + \ln\left(\frac{\eta+1}{2}\right) \quad (3.52.7)$$

$$\mathcal{L}_1(-1, \eta - \eta_1) = -\frac{1}{2} \ln(\eta) \ln \left(\frac{(\eta^2 - 1)^2}{\eta^3} \right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \quad (3.52.8)$$

$$\mathcal{L}_1(-1, \eta - \eta_2) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln(\eta) \ln \left(\frac{\eta}{\epsilon_1} \right) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad (3.52.9)$$

3.5.4 Der Integraltyp \mathcal{L}_2

$$\mathcal{L}_2(1, \eta) = -\frac{1-x^2}{x} \frac{\eta-1}{2} + \frac{1}{2x^2} \ln \left(\frac{1-x}{1-\eta x} \right) + \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-x} \right) - \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \quad (3.53.1)$$

$$\mathcal{L}_2(0, \eta) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1-x}{1-\eta x} \right) + x \ln \left(\frac{\eta-x}{1-x} \right) - \eta \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \quad (3.53.2)$$

$$\mathcal{L}_2(-1, \eta) = -\frac{1}{2} \ln^2 \eta + \text{Li}_2(\eta) - \text{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right) - \text{Li}_2(\eta x) \quad (3.53.3)$$

$$\mathcal{L}_2(-2, \eta) = \frac{1-x^2}{x} \ln \eta - x \ln \left(\frac{1-x}{1-\eta x} \right) - \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-x} \right) + \frac{1}{\eta} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \quad (3.53.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(-3, \eta) &= \frac{1-x^2}{x} \left(\frac{\eta-1}{2\eta} - \frac{1+x^2}{2x} \ln \eta \right) - \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1-\eta x} \right) + \\ &\quad - \frac{1}{2x^2} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-x} \right) + \frac{1}{2\eta^2} \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \end{aligned} \quad (3.53.5)$$

$$\mathcal{L}_2(-1, \eta-1) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{\eta-1}{1-x} \right) - \text{Li}_2\left(-\frac{1-x}{\eta-1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{(\eta-1)x}{1-x}\right) \quad (3.53.6)$$

$$\mathcal{L}_2(-2, \eta-1) = -\frac{1+x}{1-x} - \frac{1+x}{1-x} \ln \left(\frac{1-x}{1-\eta x} \frac{\eta-1}{\epsilon_2} \right) + \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\eta-1} \right) \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \quad (3.53.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(-1, \eta+1) &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+\eta}{1+x} \right) - \text{Li}_2(-x) + \text{Li}_2(x) + \\ &\quad - \text{Li}_2\left(\frac{(1+\eta)x}{1+x}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1+x}{1+\eta}\right) \end{aligned} \quad (3.53.8)$$

$$\mathcal{L}_2(-2, \eta+1) = \frac{1-x}{1+x} \ln \left(\frac{1-x}{1-\eta x} \frac{1+\eta}{2} \right) + \left(\frac{1}{\eta+1} - \frac{1}{1+x} \right) \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) \quad (3.53.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(-1, \eta - \eta_1) &= \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{\eta-1}{\eta^2(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\eta-x}{\eta^2(1-\eta x)} \right) \ln \left(\frac{(1-x)(\eta+1)}{\eta-x} \right) + \\ &\quad - \ln^2(\eta) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta^2}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{1-x}{\eta-1}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{(\eta-1)x}{1-x}\right) + \\ &\quad + 2 \text{Li}_2(\eta) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{(\eta^2-1)x}{\eta-x}\right) \end{aligned} \quad (3.53.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(-1, \eta - \eta_2) &= -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{\eta-1}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\eta-1)^2(\eta-x)(1-\eta x)}{(1-x)^2 \epsilon_1} \right) \times \\ &\quad \times \ln \left(\frac{\eta-x}{1-\eta x} \right) - \text{Li}_2\left(-\frac{1-x}{\eta-1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{(\eta-1)x}{1-x}\right) \end{aligned} \quad (3.53.11)$$

3.6 Die Integration des Soft-Photon-Faktors

3.6.1 Die Berechnungsmethode des Soft-Photon-Faktors

Der Soft-Photon-Faktor wird als IR-divergenter Anteil des Hadrontensors für die elektroschwache Bremsstrahlungskorrektur abgespalten und lautet mit den drei Bezeichnungen $N_t = 2(k \cdot p_t)$, $N_b = 2(k \cdot p_b)$ und $N_W = 2(k \cdot q)$ nach Gl. (3.6.1):

$$\Delta_{GWS} = (-4e^2) \left(\frac{Q_b^2}{N_b^2} m_b^2 + \frac{Q_t^2}{N_t^2} m_t^2 + \frac{Q_W^2}{N_W^2} m_W^2 + \right. \\ \left. - 2 \frac{Q_b Q_t}{N_b N_t} p_b \cdot p_t + 2 \frac{Q_b Q_W}{N_b N_W} p_b \cdot q - 2 \frac{Q_t Q_W}{N_t N_W} p_t \cdot q \right).$$

Parametrisiert man N_t , N_b und N_W nach Gl. (3.35) mit $m_A \neq 0$ - obwohl der Regularisierungsparameter eigentlich nur bei den Phasenraumgrenzen notwendig ist, vereinfachen sich dadurch die Berechnungen des Soft-Photon-Faktors - und führt die drei anderen 4-Skalarprodukte durch das Gleichungssystem (3.32) auf sie zurück, ergibt sich die folgende Darstellung für den Soft-Photon-Faktor in Abhängigkeit der Photonenergie E_A und der Variablen $E' = m_t^2 + m_W^2 - 2m_t E_W$:

$$\Delta_{GWS} = (-4e^2) \left\{ \frac{Q_b^2 (E' - m_A^2)}{(E' - m_b^2 - m_A^2)^2} + \frac{Q_t^2}{4E_A^2} + \frac{m_W^2 Q_W^2}{(2E_A m_t + m_b^2 - m_A^2 - E')^2} + \right. \\ \left. + \frac{Q_t}{2} \left(Q_t \frac{m_t^2 + m_W^2 + m_A^2 - E'}{E' - m_b^2 + m_A^2} - Q_b \left(\frac{m_t^2 - m_W^2 + m_b^2 + 2m_A^2}{E' - m_b^2 - m_A^2} + \frac{m_t^2 + m_W^2 - m_b^2 + 2m_A^2}{E' - m_b^2 + m_A^2} \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{m_t E_A} - \left(Q_t \frac{m_t^2 + m_W^2 + m_A^2 - E'}{E' - m_b^2 + m_A^2} - Q_b \frac{m_t^2 - m_W^2 - m_A^2 - E'}{E' - m_b^2 - m_A^2} \right) \frac{Q_W}{2E_A m_t + m_b^2 - m_A^2 - E'} \right\}.$$

Der Soft-Photon-Faktor muß über den Phasenraum integriert werden, wobei die Photonenergie E_A und die W -Bosonenergie die Phasenraumvariablen sind. Durch den Regularisierungs-Parameter $m_A \neq 0$ werden die Phasenraumgrenzen derart verändert, daß der Soft-Photon-Punkt bei $k = 0$ außerhalb des umschlossenen Phasenraumgebiets liegt (s.o.). Die folgenden, dimensionslosen Größen werden eingeführt:

$$x := \frac{m_W}{m_t}, \quad y := \frac{m_b}{m_t}, \quad \Lambda := \frac{m_A}{m_t}, \quad z := \frac{E'}{m_t^2}, \quad (3.54.1)$$

$$\sqrt{\lambda_1} := \sqrt{\lambda(y^2, \Lambda^2, z)}, \quad \sqrt{\lambda_2} := \sqrt{\lambda(1, x^2, z)}. \quad (3.54.2)$$

Mit Hilfe der Integrale in den Gln. (3.43.1-5) kann die Integration über die Photonenergie E_A sofort ausgeführt werden:

$$\int \Delta_{GWS} dE_A = e^2 \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} Q_t^2}{(z - y^2)^2 + (\lambda_2 + 2(z - y^2)) \Lambda^2 + \Lambda^4} - \frac{\Lambda^2 \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} Q_b^2}{(y^2 + \Lambda^2)^2 z} + \right. \\ \left. + \frac{y^2 \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} Q_b^2}{(y^2 + \Lambda^2)(z - y^2 - \Lambda^2)^2} + \frac{x^2 \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} Q_W^2}{x^2(z - y^2)^2 + (\lambda_2 + 2x^2(z - y^2)) \Lambda^2 + x^2 \Lambda^4} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Lambda^2 \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} Q_b^2}{(y^2 + \Lambda^2)^2 (z - y^2 - \Lambda^2)} - Q_W \left[Q_t \frac{1 + x^2 + \Lambda^2 - z}{z - y^2 + \Lambda^2} - Q_b \frac{1 - x^2 - \Lambda^2 - z}{z - y^2 - \Lambda^2} \right] \quad (3.55) \\
& \times \ln \frac{(1 - x^2 - z)(z - y^2 + \Lambda^2) + \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(1 - x^2 - z)(z - y^2 + \Lambda^2) - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}} + Q_t \left[Q_t \frac{1 + x^2 + \Lambda^2 - z}{z - y^2 + \Lambda^2} - Q_b \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{1 - x^2 + y^2 + 2\Lambda^2}{z - y^2 - \Lambda^2} + \frac{1 + x^2 - y^2 + 2\Lambda^2}{z - y^2 + \Lambda^2} \right) \right] \ln \frac{(1 - x^2 + z)(z - y^2 + \Lambda^2) + \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(1 - x^2 + z)(z - y^2 + \Lambda^2) - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}} \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu der Berechnung der konvergenten Integrale darf die Photonmasse m_A in den Phasenraumgrenzen nicht vernachlässigt werden. Die Schwierigkeit für die weitere Berechnung des Soft-Photon-Faktors liegt in dem Produkt der zwei Wurzeln $\sqrt{\lambda_1}$ und $\sqrt{\lambda_2}$, die beide über die KÄLLÉN-Funktionen von der Integrationsvariablen z abhängen. Ohne eine Vereinfachung ist die weitere Integration praktisch unmöglich.⁴ Da am Ende der Rechnung der Grenzübergang $m_A \rightarrow 0$ durchgeführt und nur die führende, logarithmische Divergenz beibehalten wird, ist die im folgenden vorgestellte Methode zur Berechnung des Soft-Photon-Faktors zielführend.

Es sei $f(z, \Lambda^2)$ eine Funktion von z mit dem Parameter $\Lambda^2 \ll 1$, deren Integral für $\Lambda^2 \rightarrow 0$ an der unteren Integrationsgrenze $z = z_0$ divergiert. Mit Hilfe einer geeigneten Substitution $z \rightarrow z'$, der Vernachlässigung additiver Terme in dem Parameter Λ^2 gegenüber Terme der $O(1)$ und der Rücksubstitution $z' \rightarrow z$, kann eine Funktion $f_0(z, \Lambda^2)$ konstruiert werden, die dasselbe Divergenzverhalten wie die ursprüngliche Funktion aufweist, aber analytisch einfacher zu integrieren ist. Näherungsweise kann das Integral $I(\Lambda^2)$ über die Funktion $f(z, \Lambda^2)$ durch Addition der Null und anschließender Separation in einen konvergenten und einen divergenten Anteil durch die Gleichung

$$I(\Lambda^2) = \int_{z_0} f(z, \Lambda^2) dz \approx \int_{z_0} \{f(z, 0) - f_0(z, 0)\} dz + \int_{z_0} \{f_0(z, \Lambda^2)\} dz \quad (3.56)$$

berechnet werden, wobei sich die gesuchte Funktion $f_0(z, \Lambda^2)$ aus der Gleichung

$$f_0(z, \Lambda^2) = \left\{ \lim_{\Lambda^2 \ll 1} \left\{ f(z, \Lambda^2) \Big|_{z \rightarrow z'} \right\} \right\} \Big|_{z' \rightarrow z} \quad (3.57)$$

ergibt. Für den Fall des über die Photonenergie integrierten Soft-Photon-Faktors, der das Produkt der beiden Wurzeln $\sqrt{\lambda_1}$ und $\sqrt{\lambda_2}$ enthält, ist die folgende Substitution geeignet. Die Substitution und ihre Rücksubstitution lautet:

$$z \rightarrow z' y \Lambda + (y + \Lambda)^2, \quad z' \rightarrow \frac{z - (y + \Lambda)^2}{y \Lambda}. \quad (3.58)$$

In Abb. (3.4) ist die Methode noch einmal schematisch dargestellt. Anhand zweier repräsentativer Bestandteile des Soft-Photon-Faktors in Gl. (3.55) soll das Auffinden der Funktion $f_0(z, \Lambda^2)$ durch Anwendung der Substitution auf $f(z, \Lambda^2)$ illustriert werden.

⁴Die Stammfunktion von $\int \sqrt{\lambda(a, b, z)} \sqrt{\lambda(c, d, z)} dz$ führt bereits auf elliptische Integrale der 1. und 3. Art mit inversen, trigonometrischen Funktionen als Argument!

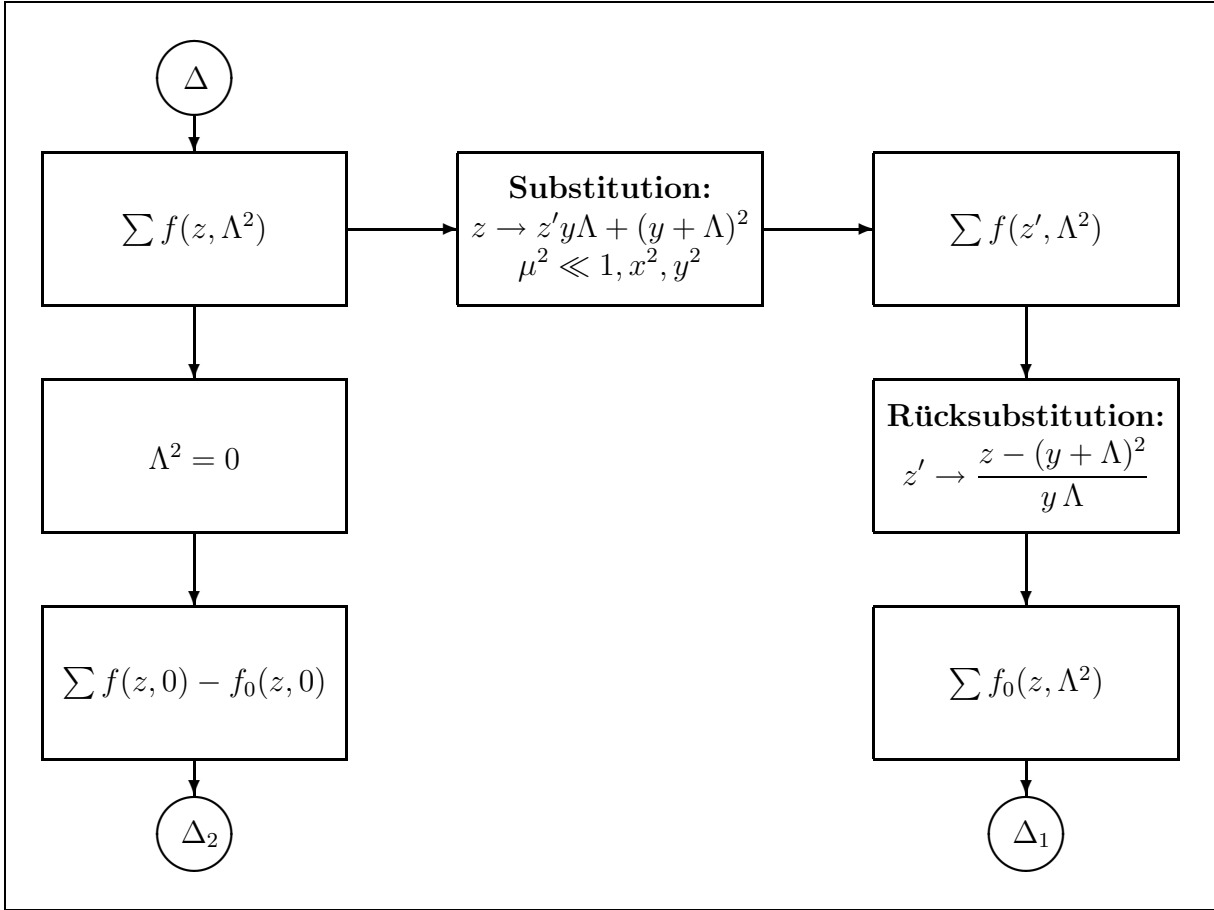


Abbildung 3.4: Die Berechnungsmethode der IR-Divergenz des Soft-Photon-Faktors in schematischer Darstellung. Die Substitution erzeugt eine Funktion $f(z', \Lambda^2)$ mit demselben Divergenzverhalten wie $f(z, \Lambda^2)$. Nach der Rücksubstitution entsteht eine einfacher als $f(z, \Lambda^2)$ zu integrierende Funktion $f_0(z, \Lambda^2)$. Dieses Schema spaltet das ursprüngliche Integral über Δ in einen IR-konvergenten Rest Δ_1 mit $\Lambda^2 = 0$ und eine IR-divergenten Anteil Δ_2 auf.

Integrand ohne Logarithmus-Funktion (Teil 1)

Die folgende Funktion $f(z, \Lambda^2)$ wird nach z über das Intervall $[z_0, (1-x)^2]$ mit $z_0 = (y + \Lambda)^2$ integriert, wobei die Abkürzungen $\lambda_1 = \lambda(y^2, \Lambda^2, z)$ und $\lambda_2 = \lambda(1, x^2, z)$ für die KÄLLÉN-Funktionen verwendet werden und $\lambda \ll 1$ gilt. Der erste Term in Gl. (3.55) lautet:

$$f(z, \Lambda^2) = \frac{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(y^2 - z)^2 + (\lambda_2 - 2(y^2 - z)) \Lambda^2 + \Lambda^4}. \quad (3.59.1)$$

Das Auftreten der Integrationsvariablen z in beiden Wurzelfunktionen erschwert die Integration. Die Anwendung der Substitution $z \rightarrow z'$ nach Gl. (3.58) und die anschließende, systematische Vernachlässigung additiver Glieder in Λ gegenüber x, y und 1 führt auf:

$$f(z', \Lambda^2) = \frac{\sqrt{y^2 \Lambda^2 z'(4+z')} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)}}{(\lambda(1, x^2, y^2) + y^2 (z' + 2)^2) \Lambda^2}.$$

Die z -Abhängigkeit in $\lambda_2 = \lambda(1, x^2, z)$ verschwindet und wird durch y^2 ersetzt. Die Rücksubstitution $z' \rightarrow z$ liefert die Funktion $f_0(z, \Lambda^2)$, die für $z \rightarrow (y + \Lambda)^2$ dasselbe Divergenz-

verhalten wie die ursprüngliche Funktion $f(z, \Lambda^2)$ besitzt, aber einfacher integriert werden kann, da die Integrationsvariable jetzt nur noch in der Wurzelfunktion $\sqrt{\lambda_1}$ vorkommt. Die Funktion $f_0(z, \Lambda^2)$ lautet mit der Konstanten $\lambda = \lambda(1, x^2, y^2)$:

$$f_0(z, \Lambda^2) = \frac{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda}}{(y^2 - z)^2 + (\lambda - 2(y^2 - z)) \Lambda^2 + \Lambda^4}. \quad (3.59.2)$$

Abschließend wird nach dem Berechnungsschema in Abb. (3.4) für $\Lambda \rightarrow 0$ die Differenz der ursprünglichen und der neuen Funktion bestimmt, wobei sich $\sqrt{\lambda_1}$ gegen $(z - y^2)$ kürzt und die IR-Divergenz sich bei $z \rightarrow y^2$ heraushebt:

$$f(z, 0) - f_0(z, 0) = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{z - y^2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{z - y^2}. \quad (3.59.3)$$

Die Integrale beider Funktionen sind bereits bekannt: Es handelt sich um $\mathcal{R}(-1)$ und $-\sqrt{\lambda} \mathcal{R}(0)$, wie ein Blick auf die Definitionen der konvergenten Integraltypen im letzten Abschnitt zeigt. Die Integration über die IR-divergente Funktion $f_0(z, \Lambda^2)$ nach z wird weiter unten ausgeführt. Zunächst soll ein zweiter Term des Soft-Photon-Faktors mit einer Logarithmus-Funktion diskutiert werden.

Integrand mit Logarithmus-Funktion (Teil 1)

Analog soll die folgende Funktion $f(z, \Lambda^2)$ nach z über das Intervall $[z_0, (1 - x)^2]$ mit $z_0 = (y + \Lambda)^2$ integriert werden. Der letzte Term in Gl. (3.55) lautet:

$$f(z, \Lambda) = \frac{1}{z - y^2 + \Lambda^2} \ln \left(\frac{(1 - x^2 + z)(z - y^2 + \Lambda^2) + \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{(1 - x^2 + z)(z - y^2 + \Lambda^2) - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}} \right). \quad (3.60.1)$$

Die Substitution $z \rightarrow z'$ und die anschließende, systematische Vernachlässigung additiver Glieder in Λ gegenüber x, y und 1 führen diesmal auf:

$$f(z', \Lambda^2) = \frac{-1}{y(2 + z')\Lambda} \ln \left(\frac{-y\Lambda(2 + z')(1 - x^2 + y^2) + \sqrt{y^2 \Lambda^2 z'(4 + z')} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)}}{-y\Lambda(2 + z')(1 - x^2 + y^2) - \sqrt{y^2 \Lambda^2 z'(4 + z')} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)}} \right),$$

wobei die z -Abhängigkeit in der KÄLLÉN-Funktion λ_2 wieder verschwindet und durch y^2 ersetzt wird. Die Rücksubstitution $z' \rightarrow 0$ ergibt:

$$f_0(z, \Lambda^2) = \frac{1}{y^2 + \Lambda^2 - z} \ln \left(\frac{(1 - x^2 + y^2)(y^2 + \Lambda^2 - z) + \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda}}{(1 - x^2 + y^2)(y^2 + \Lambda^2 - z) - \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda}} \right), \quad (3.60.2)$$

und für den Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ kann die IR-konvergente Differenz

$$f(z, 0) - f_0(z, 0) = \frac{1}{y^2 - z} \left\{ \ln \left(\frac{1 - x^2 + z - \sqrt{\lambda_2}}{1 - x^2 + z + \sqrt{\lambda_2}} \right) - \ln \left(\frac{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right\} \quad (3.60.3)$$

auf die bekannten IR-konvergenten Integraltypen $\mathcal{S}(0)$ und $\mathcal{R}(0)$ zurückgeführt werden. Die Wurzel $\sqrt{\lambda_1}$ kürzt sich im Argument der Logarithmus-Funktion von $f_0(z, 0)$ gegen den Faktor $z - y^2$ heraus.

In der Quintessenz wird durch dieses Verfahren die z -abhängige Wurzel $\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}$ durch die z -unabhängige Konstante $\sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)}$ ersetzt. Wie im Fall der konvergenten Integrale im Abschnitt 3.5 muß eine geeignete Substitution gefunden werden, die die verbleibende Wurzel $\sqrt{\lambda_1}$ über die Integrationsvariablen z beseitigt. Für die logarithmenfreien Anteile der Gl. (3.55) ist die folgende Substitution S_1 geeignet:

$$z \xrightarrow{S_1} y^2 + \Lambda^2 + y \Lambda \left(v + \frac{1}{v} \right), \quad dz \xrightarrow{S_1} y \Lambda \left(1 - \frac{1}{v^2} \right) dv. \quad (3.61.1)$$

Die Wurzel geht durch die Substitution S_1 in ein gebrochen-rationales Polynom in v über:

$$\sqrt{\lambda(y^2, \Lambda^2, z)} \xrightarrow{S_1} y \Lambda \frac{v^2 - 1}{v} = y \Lambda \left(v - \frac{1}{v} \right) \quad (3.61.2)$$

und für die zugehörigen Integrationsgrenzen $v_{min.}$ und $v_{max.}$ gilt:

$$z_{min.} = (y + \Lambda)^2 \xrightarrow{S_1} v_{max.} = 1, \quad (3.61.3)$$

$$z_{max.} = (1 - x)^2 \xrightarrow{S_1} v_{min.} = \frac{(1 - x)^2 - y^2 - \Lambda^2 - \sqrt{\lambda((1 - x)^2, y^2, \Lambda^2)}}{2 y \Lambda} \quad (3.61.4)$$

$$\approx \frac{y \Lambda}{(1 - x)^2 - y^2} + O(\Lambda^3). \quad (3.61.5)$$

Für die Logarithmus-Funktionen in Gl. (3.55) führt diese Substitution auf Argumente, die quadratisch in der Integrationsvariablen v sind. Vor der Integration müßten die Argumente der Logarithmus-Funktion zuerst in Linearfaktoren zerlegt werden. Statt dessen führt die Substitution S_2 direkt auf in w lineare Argumente der Logarithmus-Funktion. Die Substitution S_2 lautet:

$$z \xrightarrow{S_2} y^2 + \Lambda^2 + y \Lambda \left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right), \quad dz \xrightarrow{S_2} \frac{1}{2} y \Lambda \frac{w - 1}{w \sqrt{w}} dw, \quad (3.62.1)$$

und die Wurzel geht in ein gebrochen-rationales Polynom in \sqrt{w} über

$$\sqrt{\lambda(y^2, \Lambda^2, z)} \xrightarrow{S_2} y \Lambda \frac{1 - w}{\sqrt{w}} = y \Lambda \left(\frac{1}{\sqrt{w}} - \sqrt{w} \right). \quad (3.62.2)$$

Die zugehörigen Integrationsgrenzen $w_{min.}$ und $w_{max.}$ lauten:

$$z_{min.} = (y + \Lambda)^2 \xrightarrow{S_2} w_{max.} = 1, \quad (3.62.3)$$

$$z_{max.} = (1 - x)^2 \xrightarrow{S_2} w_{min.} \approx \left(\frac{y \Lambda}{(1 - x)^2 - y^2} \right)^2 + O(\Lambda^4), \quad (3.62.4)$$

wobei für die untere Grenze diesmal nur die TAYLOR-Entwicklung in der Photonmasse Λ angegeben ist. Beide untere Integrationsgrenzen $v_{min.}$ und $w_{min.}$ verschwinden mit $\Lambda \rightarrow 0$. Bei konvergenten Anteilen der Integration von $f_0(z, \Lambda^2)$ kann über das Intervall $[0, 1]$ integriert werden, nur bei den IR-divergenten Anteile muß über das kleinere Intervall $[v_{min.}, 1]$ bzw. $[w_{min.}, 0]$ integriert werden. Die beiden Integrationen in können nun zu Ende geführt werden.

Integrand ohne Logarithmus-Funktion (Teil 2)

Nach der Substitution S_1 wird für den Integrand eine Partialbruchzerlegung nach v durchgeführt. Dies ergibt einen Term $1/v$. Nach der Integration und dem Einsetzen der Integrationsgrenzen führt dieser Term auf eine logarithmische Divergenz in dem skalierten Regularisierungs-Parameter Λ . Die unbestimmte Integration lautet:

$$\int f_0(z, \Lambda^2) dz \stackrel{S_1}{=} \sqrt{\lambda(1, x^2, y^2)} \int \left\{ \frac{1}{v} - \frac{(4y^2 + \lambda(1, x^2, y^2))v}{(1+v^2)^2 y^2 + v^2 \lambda(1, x^2, y^2)} \right\} dv \quad (3.63.1)$$

$$= \sqrt{\lambda} \ln v + \frac{1}{2}(1-x^2+y^2) \ln \left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2-\sqrt{\lambda}) - 2y^2(1+v^2)}{\sqrt{\lambda}(1-x^2+y^2+\sqrt{\lambda}) + 2y^2(1+v^2)} \right), \quad (3.63.2)$$

wobei der Einfachheit halber auf das Einsetzen der Integrationsgrenzen verzichtet wird. Das Ziel ist aber erreicht: Die IR-Singularität der Bremsstrahlungskorrektur kann über die Abspaltung des IR-divergenten Soft-Photon-Faktors schließlich auf eine logarithmische Singularität in dem Regularisierungs-Parameter Λ zurückgeführt werden. Der IR-konvergente Differenzanteil kann mit Hilfe der Integrale aus dem Anhang D berechnet werden:

$$\int_{y^2}^{(1-x)^2} (f(z, 0) - f_0(z, 0)) dz = \int_{y^2}^{(1-x)^2} \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}}{z-y^2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{z-y^2} \right) dz = \mathcal{R}_{(-1)} - \sqrt{\lambda} \mathcal{R}_{(0)}. \quad (3.63.3)$$

Integrand mit Logarithmus-Funktion (Teil 2)

Analog ergibt sich für den von der Logarithmus-Funktion abhängigen Anteil mit der Substitution S_2 und der nachfolgenden Partialbruchzerlegung des Vorfaktors nach w der folgende Ausdruck für das unbestimmte Integral:

$$\int f_0(z, \Lambda^2) dz \stackrel{S_2}{=} \int \left\{ \frac{1}{2w} + \frac{1}{1+w} \right\} \ln \left(\frac{1-x^2+y^2-\sqrt{\lambda}+w(1-x^2+y^2+\sqrt{\lambda})}{1-x^2+y^2+\sqrt{\lambda}+w(1-x^2+y^2-\sqrt{\lambda})} \right) dw$$

$$= \int \frac{1}{2w} \ln \left(\frac{\alpha + \beta w}{\beta + \alpha w} \right) dw - \int \frac{1}{1+w} \ln \left(\frac{\alpha + \beta w}{\beta + \alpha w} \right) dw \quad (3.64.1)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \ln w \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{\alpha}{\beta} w \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{\beta}{\alpha} w \right) \right\} + \quad (3.64.2)$$

$$- \left\{ \ln(1+w) \ln \left(\frac{\alpha + \beta w}{\beta + \alpha w} \right) + \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \right) \ln \left(\frac{\alpha}{\beta + \alpha w} \right) - \ln \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha} \right) \ln \left(\frac{\alpha}{\beta + \alpha w} \right) + \right.$$

$$\left. - \text{Li}_2 \left(\frac{\beta + \alpha w}{\beta - \alpha} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{\alpha + \beta w}{\alpha - \beta} \right) \right\},$$

wobei das Argument der Logarithmus-Funktion tatsächlich linear in der Integrationsvariablen w ist. Auf das Einsetzen der Integrationsgrenzen wird wie oben verzichtet. Zur

besseren Übersicht werden in den Integralen die Abkürzungen $\alpha := 1 - x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}$ und $\beta := 1 - x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}$ eingeführt. Die IR-konvergenten Integrale der Differenz lauten:

$$\int_{y^2}^{(1-x)^2} \left(f(z, 0) - f_0(z, 0) \right) dz = \quad (3.64.3)$$

$$= \int_{y^2}^{(1-x)^2} \frac{dz}{y^2 - z} \left\{ \ln \left(\frac{1 - x^2 + z - \sqrt{\lambda_2}}{1 - x^2 + z + \sqrt{\lambda_2}} \right) - \ln \left(\frac{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right\} \quad (3.64.4)$$

$$= - \left\{ \mathcal{S}_{(0)} + \mathcal{R}_{(0)} \ln \left(\frac{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right\}. \quad (3.64.5)$$

Nach diesen Ausführungen folgt der übrige Teil des Soft-Photon-Faktors aus Gl. (3.55) mit derselben Berechnungsmethode. Der Soft-Photon-Faktor wird in einen IR-divergenten Anteil $\Delta_{1,div.}$ und einen IR-konvergenten Anteil $\Delta_{2,kon.}$ zerlegt. Die IR-Singularität in $\Delta_{1,div.}$ findet ihren Ausdruck in der logarithmischen Divergenz λ des Regularisierungs-Parameters. Der IR-konvergente Rest des Soft-Photon-Faktors kann auf die konvergenten Integrale $\mathcal{R}_{(-1)}$, $\mathcal{R}_{(0)}$, $\mathcal{S}_{(0)}$, $\mathcal{S}_{(0,0)}$, $\mathcal{T}_{(0)}$ und $\mathcal{T}_{(0,0)}$ im Anhang D zurückgeführt werden. $\Delta_{1,div.}$ und $\Delta_{2,kon.}$ sind in dem nächsten Abschnitt angegeben. Der Beitrag des Soft-Photon-Faktors zur Bremsstrahlungskorrektur ist für alle Helizitäts-Strukturfunktionen gleich und ist durch die folgende Gleichung gegeben, wobei der Vorfaktor der BORNschen Raten $\Gamma_{Born,i}$ sich aus dem Verhältnis der Phasenraumfaktoren für den Zwei- und Drei-Körper-Zerfall ergibt. Der Soft-Photon-Faktor und sein Beitrag zur Bremsstrahlungskorrektur lauten:

$$\text{SPF} := \left(\Delta_{1,div.} + \Delta_{2,kon.} \right), \quad (3.65)$$

$$\left\{ \Gamma_{Brems,i} \right\}_{div.} = \frac{4 m_t^2}{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)} \Gamma_{Born,i} \left(\Delta_{1,div.} + \Delta_{2,kon.} \right). \quad (3.66)$$

3.6.2 Die Bestandteile des Soft-Photon-Faktors

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{1,div.}}{e^2} = & -Q_t \left(Q_W(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 + y^2) \right) \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \ln \left(\frac{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{y \Lambda}{(1-x)^2 - y^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right) + \\ & - Q_W \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 + y^2) \right) \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 - x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}} \right)^2 + \right. \\ & \left. - \ln \left(\frac{1 - x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \ln \left(\frac{y \Lambda}{(1-x)^2 - y^2} \right) + \text{Li}_2 \left(- \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right) + \\ & - \frac{1}{2} Q_t^2 (1 - x^2 + y^2) \ln \left(\frac{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}} \right) + \frac{1}{2} Q_W^2 (1 - x^2 - y^2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \left(\frac{1 - x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}} \right) - \sqrt{\lambda} \left(Q_b^2 + 2(Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2) \ln \left(\frac{y \Lambda}{(1-x)^2 - y^2} \right) \right) \\
\frac{\Delta_{2, \text{kon.}}}{e^2} &= 2(Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2) \left(\mathcal{R}_{(-1)}^1 - \sqrt{\lambda} \mathcal{R}_{(0)}^1 \right) - Q_t^2 \mathcal{S}_{(0,0)}^0 + Q_W^2 \mathcal{T}_{(0,0)}^0 + \\
& + Q_W (Q_t (1 + x^2 - y^2) - Q_b (1 - x^2 - y^2)) \left(\mathcal{T}_{(0)}^1 - \mathcal{R}_{(0)}^1 \ln \left(\frac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right) + \\
& + Q_t (Q_W (1 + x^2 - y^2) - Q_b (1 - x^2 + y^2)) \left(\mathcal{S}_{(0)}^1 + \mathcal{R}_{(0)}^1 \ln \left(\frac{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 - x^2 + y^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right).
\end{aligned}$$

3.7 Die Vertexkorrekturen

3.7.1 Die Zerlegung in Strukturfunktionen

Die Diskussion der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur ist mit der Integration des Soft-Photon-Faktors im letzten Abschnitt abgeschlossen. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die elektroschwachen Einschleifenkorrekturen behandelt. Zunächst wird die Vertexkorrektur auf die skalaren Einschleifen-Integrale reduziert, die im nächsten Abschnitt - mit Ausnahme der skalaren Drei-Punkt-Funktion - berechnet werden. Anschließend wird die Selbstenergie der Quarks berechnet, die Selbstenergie des W -Bosons wird aus der Literatur entnommen. Die IR-Singularitäten der Einschleifenkorrektur werden mit der infinitesimal kleinen Photonmasse m_A regularisiert, mit der auch die Bremsstrahlungskorrektur regularisiert wird. Die UV-Divergenzen der Einschleifenkorrektur werden dimensional durch die Raum-Zeit-Dimension $D = 4 - 2\varepsilon$ mit $\varepsilon \ll 1$ regularisiert und durch Countertermen renormiert. Für die Theorie der Renormierung im elektroschwachen Sektor des Standardmodells wird auf die Literatur verwiesen. Die Renormierungskonstanten werden für den Fall des masselosen Bottomquarks analytisch bestimmt und die Beiträge der renormierten Einschleifenkorrektur für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen numerisch angegeben.

Zur Vertexkorrektur im elektroschwachen Sektor des Standardmodells tragen die achtzehn FEYNMAN-Diagramme in Abb. (3.5) bei. Ohne auf einzelne Strukturfunktionen der Übergangsamplituden \mathcal{A}_j mit $j = 1, \dots, 18$ einzugehen, wird in diesem Abschnitt gezeigt, wie die Einschleifenkorrekturen zu den Helizitäts-Strukturfunktionen beitragen. Jede Übergangsamplitude \mathcal{A}_j für $t \rightarrow b + W^+$ läßt sich in ihre sechs Kovarianten \mathcal{M}_i^μ mit $i = 0, \dots, 5$ zerlegen:

$$\mathcal{M}_0^\mu := \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}, \quad \mathcal{M}_1^\mu := \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2}, \quad (3.67.1)$$

$$\mathcal{M}_2^\mu := p_b^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}, \quad \mathcal{M}_3^\mu := p_b^\mu \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2}, \quad (3.67.2)$$

$$\mathcal{M}_4^\mu := p_t^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}, \quad \mathcal{M}_5^\mu := p_t^\mu \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2}, \quad (3.67.3)$$

wobei die Kovarianten \mathcal{M}_i^μ für $i = 1, 3, 5$ als *rechtshändig* und für $i = 0, 2, 4$ als *linkshändig* bezeichnet werden. Die zugehörigen Strukturfunktionen, mit denen die Kovarianten multipliziert werden müssen, um die Übergangsamplitude \mathcal{A}_j zu erhalten, werden mit μ_{ij} bezeichnet, wobei für den Index $i = 0, \dots, 5$ und für den Index $j = 1, \dots, 18$ gilt. Die Summe sämtlicher Übergangsamplituden für die in Abb. (3.5) gezeigten FEYNMAN-Diagramme der Vertexkorrektur lassen sich durch die sechs Strukturfunktionen $\mu_i = \sum_j \mu_{ij}$ in Analogie zur Übergangsamplitude für den Quark-Boson-Vertex tbW schreiben:

$$\mathcal{M}_{Loop}^\mu = \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \bar{u}(p_b) \left(\sum_{i=0}^5 \sum_{j=1}^{16} \mu_{ij} \mathcal{M}_i^\mu \right) u(p_t) = \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \bar{u}(p_b) \left(\sum_{i=0}^5 \mu_i \mathcal{M}_i^\mu \right) u(p_t). \quad (3.68)$$

Für die Wahl $\mu_0 = 1$ und $\mu_i = 0$ für $i = 1, \dots, 5$ für die Strukturfunktionen erhält man die BORNsche Näherung für die Übergangsamplitude zurück.

Da die Differenzen der Kovarianten $\mathcal{M}_4^\mu - \mathcal{M}_2^\mu$ und $\mathcal{M}_5^\mu - \mathcal{M}_3^\mu$ proportional zum 4-Impulsvektor $q^\mu = p_t^\mu - p_b^\mu$ des W -Bosons sind und nach der Kontraktion mit den Helizitätsprojektoren \mathcal{P}_i für $i = U, L, F, I$ und A verschwinden, werden von Anfang an nur vier unabhängige Komponenten \mathcal{M}_i^μ mit $i = 0, \dots, 3$ berücksichtigt, d.h. jede einzelne Übergangsamplitude der Einschleifenkorrektur kann in der Form $\mathcal{A}^\mu = \sum_{i=0}^3 \mu_i \mathcal{M}_i^\mu$ geschrieben werden. Der Projektor \mathcal{P}_S , der einen Beitrag für die Differenzen der Kovarianten ergibt, wird bei der elektroschwachen Einschleifenkorrektur nicht weiter behandelt.

Um nicht mühselig mit den Antivertauschungsregeln für die Gamma-Matrizen arbeiten zu müssen, wird die Orthogonalität der Kovarianten \mathcal{M}_i^μ und \mathcal{M}_j^μ für $i \neq j$ unter der Spur ausgenutzt, die im folgenden definiert wird. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß die Spur für jede Übergangsamplitude \mathcal{A}_j für jede Kovariante \mathcal{M}_i^μ lediglich einen Skalar κ_{ij} als Resultat ergibt:

$$\kappa_{ij} = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_b + m_b) \mathcal{A}_j^\mu (\not{p}_t + m_t) \mathcal{M}_i^{*\nu} \mathcal{P}_{U+L, \mu\nu} \right\}. \quad (3.69)$$

Um die UV-Divergenz der Einschleifenkorrekturen später dimensional regularisieren zu können, muß die Kontraktion der Gamma-Matrizen unter der Spur in der Raum-Zeit-Dimension D berechnet werden. Die Einschleifen-Integrale in Abschnitt 3.8 werden durch $D = 4 - 2\varepsilon$ in dem infinitesimal kleinen Parameter ε regularisiert. Mit der Abkürzung ϱ und der KÄLLÉN-Funktion $\lambda = \lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)$

$$\varrho := \frac{2 m_W^2}{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)} (D - 1) = \frac{2 m_W^2}{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)} (3 - 2\varepsilon) \quad (3.70)$$

ergibt sich mit dem Ansatz $\mathcal{A}_j^\mu = \sum_{i=0}^3 \mu_{ij} \mathcal{M}_i^\mu$ in den vier verbleibenden Kovarianten \mathcal{M}_i^μ ($i = 1, \dots, 4$) ein lineares Gleichungssystem für die vier Skalare κ_{ij} in Abhängigkeit der vier gesuchten Strukturfunktionen μ_{ij} . Das Gleichungssystem in Matrix-Darstellung lautet:

$$\begin{pmatrix} \kappa_{1j} \\ \kappa_{2j} \\ \kappa_{3j} \\ \kappa_{4j} \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2m_W^2} \begin{pmatrix} 2(1+m_t E_b \varrho) & -2m_t m_b \varrho & m_b & m_t \\ -2m_t m_b \varrho & 2(1+m_t E_b \varrho) & m_t & m_b \\ m_b & m_t & m_t E_b & m_b m_t \\ m_t & m_b & m_b m_t & m_t E_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \mu_{3j} \\ \mu_{4j} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

E_b bezeichnet die in Gl. (2.13) angegebene Energie des Bottomquarks. Die Inversion der Matrixgleichung ergibt die gesuchten Strukturfunktionen μ_{ij} in Abhängigkeit der aus der Gl. (3.69) berechneten Skalare κ_{ij} . Es gilt:

$$\begin{pmatrix} \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \mu_{3j} \\ \mu_{4j} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)} \begin{pmatrix} m_t E_b & m_b m_t & -m_b & -m_t \\ m_b m_t & m_t m_b & -m_t & -m_b \\ -m_b & -m_t & 2(1+m_t E_b \varrho) & -2m_t m_b \varrho \\ -m_t & -m_b & -2m_t m_b \varrho & 2(1+m_t E_b \varrho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{1j} \\ \kappa_{2j} \\ \kappa_{3j} \\ \kappa_{4j} \end{pmatrix}. \quad (3.72.1)$$

Für jede einzelne Übergangsamplitude \mathcal{A}_j mit $j = 1, \dots, 18$ können mit dieser Gleichung die zugehörigen Strukturfunktionen μ_{ij} bestimmt werden. Die Ergebnisse für die summierten Strukturfunktionen μ_i werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

Die BORNSche Näherung und die Einschleifenkorrekturen sind beides Prozesse mit einem Zwei-Körper-Endzustand. Ihre Übergangsamplituden müssen zur Gesamtübergangsamplitude addiert werden. Um die Einschleifen-Beiträge für die verschiedenen unpolarisierten und polarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen beschreiben zu können, werden die folgenden Koeffizienten eingeführt:

$$G_{i,j} := \text{Tr} \left\{ (\not{p}_b + m_b) \mathcal{M}_0^\mu (\not{p}_t + m_t) ((1-P) + P \gamma_5 \not{\epsilon}_t) \mathcal{M}_i^\nu IP_{j,\mu\nu} \right\}. \quad (3.73)$$

Für $P = 0$ erhält man die unpolarisierten Koeffizienten $G_{i,j}$ und für $P = 1$ die polarisierten Koeffizienten $G_{i,j}^P$, wobei der Index $i = 0, \dots, 4$ die Kovariante \mathcal{M}_i^ν und der Index $j = U, L, F, I$ und A den Helizitätsprojektor IP_j bezeichnet. In Tab. (3.3) werden die Koeffizienten $G_{i,j}$ für sämtliche Kovarianten und Helizitäts-Strukturfunktionen zusammengestellt. Durch die Wahl $i = 0$ können bis auf einen Faktor (1/2) die Amplitudenquadrate für die BORNSche Näherung reproduziert werden.

Für die Beiträge der Vertexkorrektur zu den Helizitäts-Strukturfunktionen werden alternativ die auf $G_{0,j}$ skalierten Koeffizienten $\widehat{G}_{i,j}$ definiert:

$$\widehat{G}_{0,j} := 1, \quad \widehat{G}_{1,j} := \frac{G_{1,j}}{G_{0,j}}, \quad \widehat{G}_{2,j} := \frac{G_{2,j}}{G_{0,j}}, \quad \widehat{G}_{3,j} := \frac{G_{3,j}}{G_{0,j}}. \quad (3.74)$$

Das mit den Helizitätsprojektoren IP_j kontrahierte Quadrat der Gesamtamplitude wird in dem folgenden Gleichungssystem auf die skalierten Koeffizienten $\widehat{G}_{i,j}$ zurückgeführt. Die Gesamtamplitude ist durch die Summe von \mathcal{M}_{Born}^μ (Amplitude der BORNSchen Näherung) und \mathcal{M}_{Loop}^μ (Amplitude der Vertexkorrektur) gegeben. Das Quadrat $\mathcal{M}_{Loop}^\mu \mathcal{M}_{Loop}^{*\nu}$ ist von $O(\alpha^2)$ und kann vernachlässigt werden. Ersetzt man gemäß Gl. (3.68) den Bornterm mit $\mu_0 = 1$ und $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ und die Vertexkorrektur durch die Summe

	G_0	G_1	G_2	G_3
$U + L$	$\frac{(m_t^2 - m_b^2) + m_W^2(m_t^2 + m_b^2 - 2m_W^2)}{m_W^2}$	$-6m_b m_t$	$\frac{m_b \lambda}{2m_W^2}$	$\frac{m_t \lambda}{2m_W^2}$
$U^P + L^P$	$\frac{(m_t^2 - 2m_W^2 - m_b^2) \sqrt{\lambda}}{m_W^2}$	0	$\frac{m_b(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2) \sqrt{\lambda}}{2m_W^2}$	$\frac{m_b(m_t^2 - m_W^2 - m_b^2) \sqrt{\lambda}}{2m_W^2}$
U	$2(m_t^2 - m_W^2 + m_b^2)$	$-4m_b m_t$	0	0
U^P	$-2\sqrt{\lambda}$	0	0	0
L	$\frac{(m_t^2 - m_b^2)^2 - m_W^2(m_t^2 + m_b^2)}{m_W^2}$	$-2m_b m_t$	$\frac{m_b \lambda}{2m_W^2}$	$\frac{m_t \lambda}{2m_W^2}$
L^P	$\frac{(m_t^2 - m_b^2) \sqrt{\lambda}}{m_W^2}$	0	$\frac{m_b(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2) \sqrt{\lambda}}{2m_W^2}$	$\frac{m_b(m_t^2 - m_W^2 - m_b^2) \sqrt{\lambda}}{2m_W^2}$
F	$-2\sqrt{\lambda}$	0	0	0
F^P	$2(m_t^2 - m_W^2 + m_b^2)$	$-4m_b m_t$	0	0
I^P	$-\frac{m_t \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}m_W}$	0	$-\frac{m_b m_t \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}m_W}$	$-\frac{(m_t^2 - m_W^2 + m_b^2) \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}m_W}$
A^P	$\frac{m_t(m_t^2 - m_W^2 - m_b^2)}{\sqrt{2}m_W}$	$-\frac{m_b(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2)}{\sqrt{2}m_W}$	0	$\frac{\lambda}{4\sqrt{\lambda}m_W}$

Tabelle 3.3: Die Koeffizienten $G_{i,j}$ für $i = 0, \dots, 3$ für die Beiträge $g_w^2 |V_{tb}|^2 \sum \mu_j G_{i,j}$ der Einschleifenkorrektur zu den Helizitäts-Strukturfunktionen $j = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, I^P$ und A^P .

$\sum_i \mu_i \mathcal{M}_i^\mu$, so erhält man unter Verwendung der Definitionsgleichung für die Koeffizienten $G_{i,j}$ die gesuchte Darstellung. Das Gleichungssystem lautet, wobei Terme der Ordnung $O(\alpha^2)$ vernachlässigt werden:

$$\sum_{s_b} |\mathcal{M}_j|^2 = \sum_{s_b} \left(\mathcal{M}_{Born}^\mu + \mathcal{M}_{Loop}^\mu \right) \left(\mathcal{M}_{Born}^{\nu\dagger} + \mathcal{M}_{Loop}^{\nu\dagger} \right) IP_{j,\mu\nu} \quad (3.75.1)$$

$$= \sum_{s_b} \left\{ \mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Born}^{\nu\dagger} + \left(\mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Loop}^{\nu\dagger} + \mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Loop}^{\nu\dagger} \right) \right\} IP_{j,\mu\nu} \quad (3.75.2)$$

$$= \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \text{Tr} \left\{ (\not{p}_b + m_b) \mathcal{M}_0^\mu (\not{p}_t + m_t) ((1 - P) + P \gamma_5 \not{p}_t) \mathcal{M}_0^{\nu\dagger} + \right. \quad (3.75.3)$$

$$\left. + 2 \sum_{i=0}^3 \mu_i (\not{p}_b + m_b) \mathcal{M}_0^\mu (\not{p}_t + m_t) ((1 - P) + P \gamma_5 \not{p}_t) \mathcal{M}_i^{\nu\dagger} \right\} IP_{j,\mu\nu} +$$

$$= \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \left\{ G_{0,j} + 2 \sum_{i=0}^3 \mu_i G_{i,j} \right\} = \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 G_{0,j} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=0}^3 \mu_i \widehat{G}_{i,j} \right\}. \quad (3.75.4)$$

3.7.2 Die Strukturfunktionen der Vertexkorrektur

In diesem Abschnitt werden die vier Strukturfunktionen der elektroschwachen Vertexkorrektur zunächst auf die Strukturbestandteile \mathcal{V} , \mathcal{W} , \mathcal{X} und \mathcal{Y} zurückgeführt, die im nächsten Abschnitt wiederum durch die skalaren, vektoriellen und tensoriellen Drei-Punkt-Funktionen der Einschleifen-Integrale ausgedrückt werden. Die Einschleifen-Integrale werden in Abschnitt 3.8 unter Berücksichtigung sämtlicher Massen berechnet.

In Abb. (3.5) sind die FEYNMAN-Diagramme dargestellt, die zur Vertexkorrektur beitragen: In den Diagrammen a_1 , a_2 und c_1 , c_2 tauscht das Topquark mit dem Bottomquark entweder ein Photon A , ein Z -Boson, ein HIGGS-Boson H oder ein GOLDSTONE-Boson χ aus; jedes dieser Austauscheteilchen ist elektrisch neutral. In den Diagrammen b_1 und b_2 bzw. b_3 und b_4 emittiert das W -Boson ein Photon bzw. ein Z -Boson, das von dem Topquark bzw. dem Bottomquark absorbiert wird. In den Diagrammen d_1 und d_2 wird von einem der beiden Quarks ein HIGGS-Boson emittiert; die positive elektrische Ladung des W -Bosons im Endzustand wird von einem intermediären W -Boson transportiert; durch den sukzessiven Austausch $W^+ \rightarrow \chi^+$ und $H \rightarrow \chi$ entstehen die Beiträge in den Diagrammen e_1 bis e_4 . In f_1 bis f_2 werden die elektrisch neutralen Teilchen H und χ durch das Photon und Z -Boson ersetzt. Im Anhang A sind die FEYNMAN-Regeln für die sieben Propagatoren und die dreizehn Vertices angegeben.

Die drei folgenden Übergangsamplituden $\mathcal{A}_{a_1}^\mu$, $\mathcal{A}_{a_2}^\mu$ und $\mathcal{A}_{b_1}^\mu$ sollen einen Eindruck von der Gamma-Struktur der Vertexkorrekturen geben. Sämtliche Übergangsamplituden werden in der 'T HOOFT-FEYNMAN-Eichung ($\xi_W = 1$) berechnet. Mit Hilfe der aus der Spur in Gl. (3.69) berechneten skalaren Koeffizienten κ_{ij} und der Gl. (3.72.1) können für jede Amplitude \mathcal{A}_j die vier Strukturfunktionen μ_{ij} ($i = 1, \dots, 4$) berechnet werden, ohne mit Hilfe der Antivertauschungsrelationen für die Gamma-Matrizen die Übergangsamplituden auf die vier Kovarianten \mathcal{M}_i umformen zu müssen. Die ersten drei Amplituden lauten:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{a_1}^\mu &= \left(e Q_b \gamma^\rho \right) \left(\frac{\not{k} + \not{p}_b + m_b}{(k + p_b)^2 - m_b^2} \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\not{k} + \not{p}_t + m_t}{(k + p_t)^2 - m_t^2} \right) \left(e Q_t \gamma^\sigma \right) \left(\frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - m_A^2} \right) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{a_2}^\mu &= \left(g_z \gamma^\rho \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} - Q_b s_w^2 \right\} \right) \left(\frac{\not{k} + \not{p}_b + m_b}{(k + p_b)^2 - m_b^2} \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\not{k} + \not{p}_t + m_t}{(k + p_t)^2 - m_t^2} \right) \left(g_z \gamma^\sigma \left\{ +\frac{1}{2} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} - Q_t s_w^2 \right\} \right) \left(\frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - m_Z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{b_1}^\mu &= \left(e Q_b \gamma^\rho \right) \left(\frac{m_b - \not{k}}{k^2 - m_b^2} \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\kappa \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \left(\frac{g_{\kappa\lambda}}{(k + p_t)^2 - m_W^2} \right) \left(\frac{g_{\sigma\rho}}{(k + p_b)^2 - m_A^2} \right) \\ &\times \left(e Q_W \left\{ (-k^\lambda - 2p_b^\lambda + p_t^\lambda) g^{\sigma\mu} + (-k^\sigma + p_b^\sigma - 2p_t^\sigma) g^{\mu\lambda} + (2k^\mu + p_b^\mu + p_t^\mu) g^{\lambda\sigma} \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Die Parametrisierung erfolgt wie im Fall der BORNschen Näherung in den Abschnitten 2.1 und 3.4. Die schwachen Ladungen g_w und g_z sind durch die Gleichungen $e = g_w s_w$ und $e = g_z s_w c_w$ mit der elektrischen Ladung verknüpft, wobei zur Abkürzung

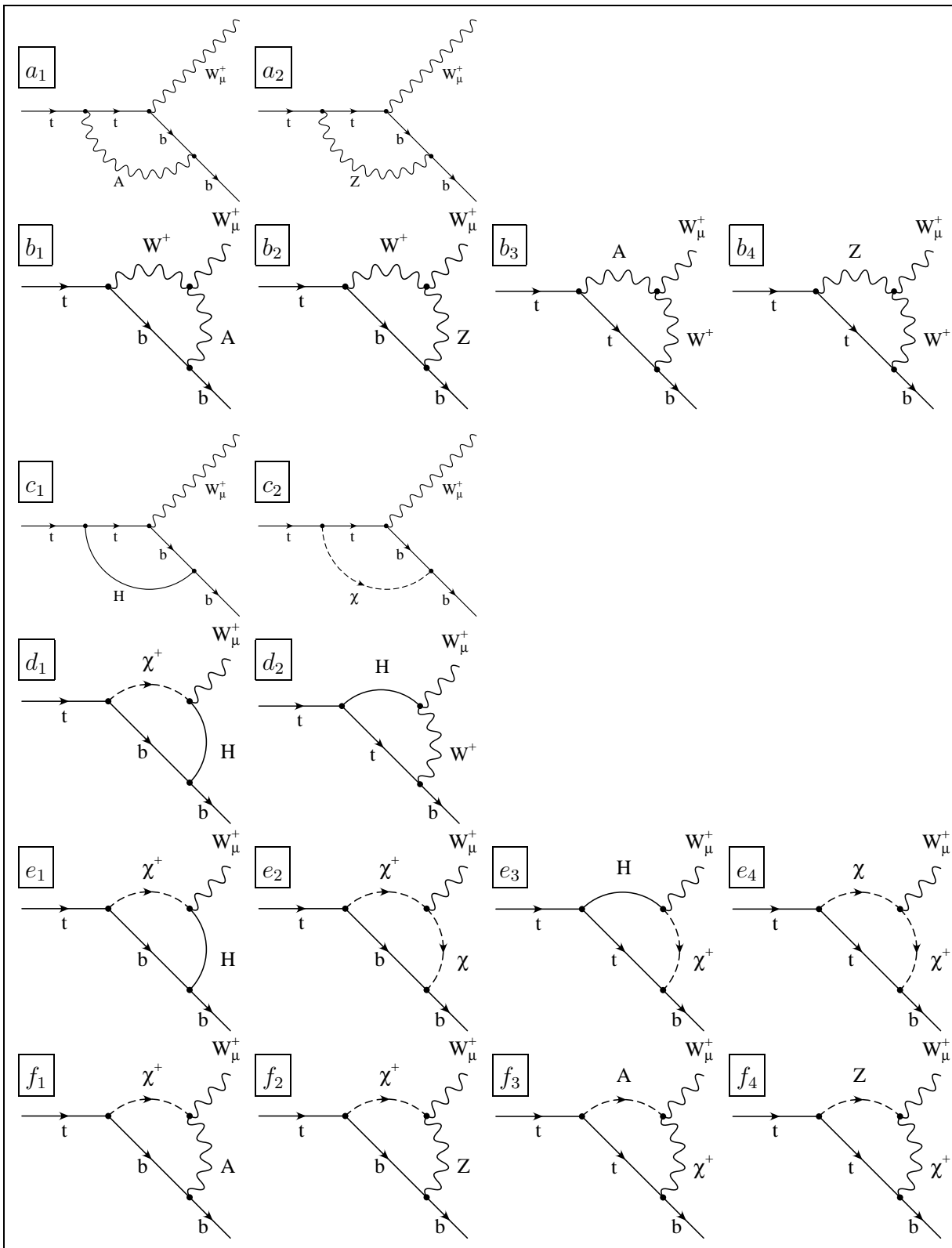


Abbildung 3.5: Die elektroschwachen Vertexkorrekturen.

$$s_w := \sin \theta_w, \quad c_w := \cos \theta_w. \quad (3.79)$$

für den Sinus bzw. Cosinus des elektroschwachen Mischungswinkels θ_w eingeführt wird. Die Kopplungen des Z -Bosons an die rechtshändigen (+) Fermionen-Singulets und an die linkshändigen (−) Komponenten des Fermionen-Dubletts werden durch

$$g_t^+ := -Q_t \frac{s_w}{c_w} \quad g_t^- := \frac{+\frac{1}{2} - Q_t s_w^2}{s_w c_w} \quad (3.80)$$

$$g_b^+ := -Q_b \frac{s_w}{c_w} \quad g_b^- := \frac{-\frac{1}{2} - Q_b s_w^2}{s_w c_w}. \quad (3.81)$$

bezeichnet. Die folgenden Identitäten sind für die Behandlung der Übergangsamplituden sehr hilfreich. Mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b s_w c_w g_b^- = c_w s_w (+2 a g_b^+ + (b - 2 a) g_b^-), \quad (3.82.1)$$

$$a + b s_w c_w g_t^- = c_w s_w (-2 a g_t^+ + (b - 2 a) g_t^-), \quad (3.82.2)$$

$$(c_w s_w)^{-2} = -4 (g_b^+ - g_b^-)(g_t^+ - g_t^-), \quad (3.82.3)$$

$$(c_w s_w)^{-1} = 2 (g_b^+ - g_b^-) = -2 (g_t^+ - g_t^-) \quad (3.82.4)$$

Aus der Summe der achtzehn FEYNMAN-Diagramme ergeben sich die folgenden vier Strukturfunktionen μ_i ($i = 0, \dots, 3$), die jeweils proportional zur Kopplungskonstanten α sind. Spaltet man die Ladungs- und Winkelabhängigkeiten ab, so können die Strukturfunktionen μ_{ij} für die FEYNMAN-Diagramme eines Typs, die in Abb. (3.5) jeweils in den Zeilen a bis f angeordnet sind, auf einen Satz gleicher Strukturbestandteile zurückgeführt werden. Die vier Strukturfunktionen lauten:

$$\begin{aligned} \mu_1 = & \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ Q_b Q_t \mathcal{V}_a(p_t, p_b; m_A, m_t, m_b) + g_b^- g_t^- \mathcal{V}_a(p_t, p_b; m_Z, m_t, m_b) + \right. & (3.83) \\ & + \sum_{\sigma=\pm} \left(-Q_b \mathcal{V}_b^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) - \frac{c_w}{s_w} g_b^\sigma \mathcal{V}_b^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\ & + Q_t \mathcal{V}_b^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) + \left. \frac{c_w}{s_w} g_t^\sigma \mathcal{V}_b^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) + \\ & - \frac{1}{2 s_w^2} \left(\mathcal{V}_c(p_t, p_b; m_H, m_t, m_b) + \mathcal{V}_d(p_b, p_t; m_b, m_H, m_W) + \mathcal{V}_d(p_t, p_b; m_t, m_H, m_W) \right) + \\ & + \frac{1}{2 s_w^2} \left(\mathcal{V}_e(p_b, p_t; m_b, m_H, m_W) + \mathcal{V}_e(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\ & + \mathcal{V}_e(p_t, p_b; m_t, m_H, m_W) + \left. \mathcal{V}_e(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) + \\ & + \sum_{\sigma=\pm} \left(-Q_b \mathcal{V}_f^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) + \frac{s_w}{c_w} g_b^\sigma \mathcal{V}_f^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\ & \left. + Q_t \mathcal{V}_f^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) - \frac{s_w}{c_w} g_t^\sigma \mathcal{V}_f^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 = & \frac{\alpha}{4\pi} m_b m_t \left\{ \sum_{\sigma=\pm} \left(Q_b Q_t \mathcal{W}_a^\sigma(p_t, p_b; m_A, m_t, m_b) + g_b^\sigma g_t^\sigma \mathcal{W}_a^\sigma(p_t, p_b; m_Z, m_t, m_b) + \right. \right. \quad (3.84) \\
& - Q_b \mathcal{W}_b^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) - \frac{c_w}{s_w} g_b^\sigma \mathcal{W}_b^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \\
& + Q_t \mathcal{W}_b^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) + \left. \frac{c_w}{s_w} g_t^\sigma \mathcal{W}_b^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) + \\
& + \frac{1}{2 s_w^2} \left(\sum_{\sigma=\pm} \mathcal{W}_c^\sigma(p_t, p_b; m_H, m_t, m_b) - \mathcal{W}_c^-(p_t, p_b; m_Z, m_t, m_b) \right) + \\
& - \frac{1}{2 s_w^2} \left(\mathcal{W}_d(p_b, p_t; m_b, m_W, m_H) + \mathcal{W}_d(p_t, p_b; m_t, m_H, m_W) \right) + \\
& + \frac{1}{2 s_w^2} \left(- \mathcal{W}_e(p_b, p_t; m_b, m_H, m_W) + \mathcal{W}_e(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) - \right. \\
& + \left. \mathcal{W}_e(p_t, p_b; m_t, m_H, m_W) + \mathcal{W}_e(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) + \\
& + \sum_{\sigma=\pm} \left(Q_b \mathcal{W}_f^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) - \frac{s_w}{c_w} g_b^\sigma \mathcal{W}_f^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\
& \left. - Q_t \mathcal{W}_f^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) + \frac{s_w}{c_w} g_t^\sigma \mathcal{W}_f^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3 = & \frac{\alpha}{4\pi} m_b \left\{ \sum_{\sigma=\pm} \left(Q_b Q_t \mathcal{X}_a^\sigma(p_t, p_b; m_A, m_t, m_b) + g_t^- g_b^\sigma \mathcal{X}_a^\sigma(p_t, p_b; m_Z, m_t, m_b) + \right. \quad (3.85) \\
& - Q_b \mathcal{X}_b^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) - \frac{c_w}{s_w} g_b^\sigma \mathcal{X}_b^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) \right) + \\
& + Q_t \mathcal{X}_b^0(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) + \frac{c_w}{s_w} g_t^- \mathcal{X}_b^0(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) + \\
& - \frac{1}{2 s_w^2} \sum_{\sigma=\pm} \mathcal{X}_c^\sigma(p_t, p_b; m_H, m_t, m_b) - \mathcal{X}_c^-(p_t, p_b; m_Z, m_t, m_b) + \\
& - \frac{1}{2 s_w^2} \mathcal{X}_d(p_b, p_t; m_b, m_W, m_H) + \\
& + \frac{1}{2 s_w^2} \sum_{\sigma=\pm} \left(- \sigma \mathcal{X}_e^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_H, m_W) + \mathcal{X}_e^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\
& + \left. \sigma \mathcal{X}_e^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_H, m_W) + \mathcal{X}_e^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) + \\
& + \frac{1}{2 s_w^2} \left(- \mathcal{X}_e^0(p_b, p_t; m_b, m_H, m_W) + \mathcal{X}_e^0(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\
& + \left. \mathcal{X}_e^0(p_b, p_t; m_t, m_W, m_H) + \mathcal{X}_e^0(p_b, p_t; m_t, m_W, m_Z) \right) + \\
& + Q_b \mathcal{X}_f(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) - \frac{s_w}{c_w} g_b^+ \mathcal{X}_f(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \\
& + \left. Q_t \mathcal{X}_f(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) - \frac{s_w}{c_w} g_t^- \mathcal{X}_f(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4 = & \frac{\alpha}{4\pi} m_t \left\{ \sum_{\sigma=\pm} \left(Q_b Q_t \mathcal{Y}_a^\sigma(p_t, p_b; m_A, m_t, m_b) + g_t^- g_b^\sigma \mathcal{Y}_a^\sigma(p_t, p_b; m_Z, m_t, m_b) \right) + \right. & (3.86) \\
& - Q_b \mathcal{Y}_b^o(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) - \frac{c_w}{s_w} g_b^\sigma \mathcal{Y}_b^o(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \\
& + \sum_{\sigma=\pm} \left(Q_t \mathcal{Y}_b^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) + \frac{c_w}{s_w} g_t^- \mathcal{Y}_b^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) + \\
& - \frac{1}{2 s_w^2} \sum_{\sigma=\pm} \mathcal{Y}_c^\sigma(p_t, p_b; m_H, m_t, m_b) - \mathcal{Y}_c^-(p_t, p_b; m_Z, m_t, m_b) + \\
& - \frac{1}{2 s_w^2} \mathcal{Y}_d(p_t, p_b; m_t, m_H, m_W) + \\
& + \frac{1}{2 s_w^2} \sum_{\sigma=\pm} \left(\sigma \mathcal{Y}_e^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_H, m_W) + \mathcal{Y}_e^\sigma(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\
& - \sigma \mathcal{Y}_e^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_H, m_W) + \left. \mathcal{Y}_e^\sigma(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right) + \\
& + \frac{1}{2 s_w^2} \left(\mathcal{Y}_e^0(p_t, p_b; m_b, m_W, m_H) + \mathcal{Y}_e^0(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \right. \\
& - \left. \mathcal{Y}_e^0(p_b, p_t; m_t, m_W, m_H) + \mathcal{Y}_e^0(p_b, p_t; m_t, m_W, m_Z) \right) + \\
& - Q_b \mathcal{Y}_f(p_b, p_t; m_b, m_A, m_W) + \frac{s_w}{c_w} g_b^- \mathcal{Y}_f(p_b, p_t; m_b, m_Z, m_W) + \\
& \left. - Q_t \mathcal{Y}_f(p_t, p_b; m_t, m_A, m_W) - \frac{s_w}{c_w} g_t^+ \mathcal{Y}_f(p_t, p_b; m_t, m_Z, m_W) \right\}.
\end{aligned}$$

3.7.3 Die Strukturbestandteile

Die verschiedenen Strukturbestandteile \mathcal{V} , \mathcal{W} , \mathcal{X} und \mathcal{Y} können durch die skalaren Integrale B_0 und C_0 , sowie die skalaren Komponenten C_1 , C_2 des Vektorintegrals und die skalaren Komponenten C_{00} , C_{11} , C_{22} und C_{12} des Tensorintegrals ausgedrückt werden. Die Einschleifen-Integrale werden im nächsten Abschnitt 3.8 behandelt. Die Drei-Punkt-Funktionen besitzen dieselben Argumente wie die Strukturbestandteile und werden daher nicht ausgeschrieben.

Zur Beschreibung der acht verschiedenen Strukturbestandteile \mathcal{V} und der zehn verschiedenen Strukturbestandteile \mathcal{W} reicht die skalare Komponente C_{00} des Tensorintegrals aus, die Komponenten C_{11} , C_{22} und C_{12} treten nicht auf. Die angegebenen Strukturbestandteile stimmen mit denen von DENNER und SACK [69] überein.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_a(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = & -2 + B_0(m_0; M_1, M_2) + & (3.87.1) \\
& -2(m_0^2 - m_1^2 - m_2^2)(C_0 + C_1 + C_2) + \\
& -(M_0^2 - 2m_1^2)C_1 - (M_0^2 - 2m_2^2)C_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_b^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = & 4M_0^2 C_0 + 3B_0(m_0; M_1, M_2) + & (3.87.2) \\
& + (4m_1^2 + 2m_2^2 - 2m_0^2 + M_0^2 - M_1^2)C_1 +
\end{aligned}$$

$$+ (2m_1^2 + 4m_2^2 - 2m_0^2 + M_0^2 - M_2^2) C_2$$

$$\mathcal{V}_b^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 3m_1^2 C_0 \quad (3.87.3)$$

$$\mathcal{V}_c(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2 m_2^2}{m_0^2} (2C_0 + C_1 + C_2) \quad (3.87.4)$$

$$\mathcal{V}_d(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = m_1^2 (C_0 - C_1) \quad (3.87.5)$$

$$\mathcal{V}_e(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_0^2} C_{00} \quad (3.87.6)$$

$$\mathcal{V}_f^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = m_1^2 C_0 + m_2^2 C_2 \quad (3.87.7)$$

$$\mathcal{V}_f^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = m_1^2 C_1 \quad (3.87.8)$$

$$\mathcal{W}_a^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2(C_0 + C_1 + C_2) \quad (3.88.1)$$

$$\mathcal{W}_a^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = -2C_0 \quad (3.88.2)$$

$$\mathcal{W}_b^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 3(C_1 + C_2) \quad (3.88.3)$$

$$\mathcal{W}_b^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 3C_0 \quad (3.88.4)$$

$$\mathcal{W}_c^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \quad (3.88.5)$$

$$\frac{1}{4m_W^2} B_0(m_0; M_1, M_2) - \frac{1}{4m_W^2} - \frac{M_0^2}{4m_W^2} (C_1 + C_2)$$

$$\mathcal{W}_c^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_W^2} C_1 + \frac{m_2^2}{m_W^2} C_2 \quad (3.88.6)$$

$$\mathcal{W}_d(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = C_2 \quad (3.88.7)$$

$$\mathcal{W}_e(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{1}{m_W^2} C_{00} \quad (3.88.8)$$

$$\mathcal{W}_f^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = C_1 \quad (3.88.9)$$

$$\mathcal{W}_f^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = C_0 + C_2 \quad (3.88.10)$$

$$\mathcal{X}_a^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = -4(C_{22} + C_{12} + C_0 + C_1 + 2C_2) \quad (3.89.1)$$

$$\mathcal{X}_a^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 4(C_0 + C_1 + C_2) \quad (3.89.2)$$

$$\mathcal{X}_b^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2(2C_{11} + 2C_{12} - C_2) \quad (3.89.3)$$

$$\mathcal{X}_b^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 6(C_1 + C_2) \quad (3.89.4)$$

$$\mathcal{X}_b^0(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2(2C_{22} + 2C_{12} - C_1) \quad (3.89.5)$$

$$\mathcal{X}_c^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_0^2} (C_{11} + C_{12}) \quad (3.89.6)$$

$$\mathcal{X}_c^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_0^2} (2C_1) \quad (3.89.7)$$

$$\mathcal{X}_d(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2C_2 \quad (3.89.8)$$

$$\mathcal{X}_e^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_0^2} (C_{11} + C_{12} + C_1) \quad (3.89.9)$$

$$\mathcal{X}_e^0(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_2^2}{m_0^2} (C_{22} + C_{12} + C_2) \quad (3.89.10)$$

$$\mathcal{X}_e^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_2^2}{m_0^2} (C_0 + C_1 + C_2) \quad (3.89.11)$$

$$\mathcal{X}_f(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2 C_1 \quad (3.89.12)$$

$$\mathcal{Y}_a^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = -4 (C_{11} + C_{12} + C_0 + 2 C_1 + C_2) \quad (3.90.1)$$

$$\mathcal{Y}_a^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 4 (C_0 + C_1 + C_2) \quad (3.90.2)$$

$$\mathcal{Y}_b^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2 (2 C_{11} + 2 C_{12} - C_2) \quad (3.90.3)$$

$$\mathcal{Y}_b^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 6 (C_1 + C_2) \quad (3.90.4)$$

$$\mathcal{Y}_b^0(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2 (2 C_{22} + 2 C_{12} - C_1) \quad (3.90.5)$$

$$\mathcal{Y}_c^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_0^2} (C_{22} + C_{12}) \quad (3.90.6)$$

$$\mathcal{Y}_c^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_2^2}{m_0^2} (2 C_2) \quad (3.90.7)$$

$$\mathcal{Y}_d(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2 C_2 \quad (3.90.8)$$

$$\mathcal{Y}_e^-(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_0^2} (C_{11} + C_{12} + C_1) \quad (3.90.9)$$

$$\mathcal{Y}_e^0(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_2^2}{m_0^2} (C_{22} + C_{12} + C_2) \quad (3.90.10)$$

$$\mathcal{Y}_e^+(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = \frac{m_1^2}{m_0^2} (C_0 + C_1 + C_2) \quad (3.90.11)$$

$$\mathcal{Y}_f(m_1, m_2; M_0, M_1, M_2) = 2 C_1 \quad (3.90.12)$$

3.7.4 Die UV-Divergenzen der Strukturfunktionen

Im Vorgriff auf Abschnitt 3.8 werden die UV-divergenten Anteile der einzelnen Übergangsamplituden \mathcal{A}_j bestimmt, die sich aus den oben eingeführten Einschleifen-Integralen ergeben. Von den sieben Drei-Punkt-Funktionen besitzen nur die vier Tensorintegrale UV-divergente Anteile, die beiden Vektorintegrale und das skalare Integral sind dagegen regulär. Die dimensional in ε regularisierten UV-divergenten Anteile lauten:

$$\frac{(k \cdot k)}{N_1 N_2 N_3} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{(k \cdot p_t)^2}{N_1 N_2 N_3} \rightarrow \frac{m_t^2}{4\varepsilon}, \quad \frac{(k \cdot p_b)^2}{N_1 N_2 N_3} \rightarrow \frac{m_b^2}{4\varepsilon}, \quad \frac{(k \cdot p_t)(k \cdot p_b)}{N_1 N_2 N_3} \rightarrow \frac{m_t^2 - m_W^2 + m_b^2}{8\varepsilon},$$

unabhängig von der Struktur der Propagatorbeiträge im Nenner. Ist man nur an den UV-Singularitäten interessiert, können die beiden Vektorintegrale und das skalare Integral gleich Null gesetzt werden. Für die einzelnen Übergangsamplituden folgt:

$$\mathcal{A}_{a_1, UV}^L = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{Q_b Q_t}{\varepsilon}, \quad \mathcal{A}_{a_2, UV}^L = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{g_b^- g_t^-}{\varepsilon}, \quad (3.91)$$

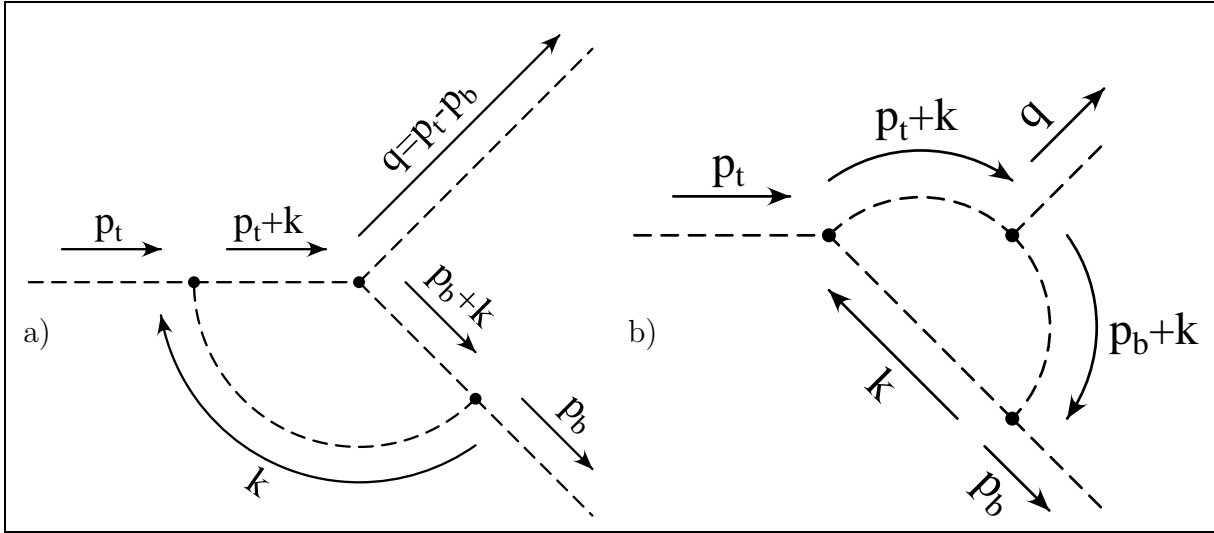


Abbildung 3.6: Der Impulsfluß bei der Vertexkorrektur.

$$\mathcal{A}_{b_1,UV}^L = -\frac{1}{4\pi} \frac{3Q_b}{\varepsilon}, \quad \mathcal{A}_{b_2,UV}^L = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{c_w}{s_w} \frac{3g_b^-}{\varepsilon}, \quad \mathcal{A}_{b_3,UV}^L = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{3Q_t}{\varepsilon}, \quad \mathcal{A}_{b_4,UV}^L = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{c_w}{s_w} \frac{3g_t^-}{\varepsilon}, \quad (3.92)$$

$$\mathcal{A}_{e_1,UV}^R = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_b m_t}{4m_W^2 \varepsilon} = -\mathcal{A}_{e_2,UV}^R, \quad (3.93)$$

$$\mathcal{A}_{e_1,UV}^L = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_b^2}{4m_W^2 \varepsilon} = \mathcal{A}_{e_2,UV}^L, \quad \mathcal{A}_{e_1,UV}^R = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_b m_t}{4m_W^2 \varepsilon} = -\mathcal{A}_{e_2,UV}^R, \quad (3.94)$$

$$\mathcal{A}_{e_3,UV}^L = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_t^2}{4m_W^2 \varepsilon} = \mathcal{A}_{e_4,UV}^L, \quad \mathcal{A}_{e_3,UV}^R = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_b m_t}{4m_W^2 \varepsilon} = -\mathcal{A}_{e_4,UV}^R. \quad (3.95)$$

Die Amplituden für den Typ \mathcal{A}_d und \mathcal{A}_f sind UV-konvergent. Die Summe der rechtshändigen Anteile der UV-Singularitäten verschwindet. Die Summe der linkshändigen Anteile führt zu dem UV-divergenten Anteil der Vertexkorrektur, der durch die Renormierung beseitigt werden muß:

$$\sum_i \mathcal{A}_{i,UV}^L = \frac{1}{4\pi} \frac{9(m_t^2 + 11m_W^2 + m_b^2)c_w^2 + m_W^2 s_w^2}{36 s_w^2 c_w^2 m_W^2} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.96)$$

3.8 Die Einschleifen-Integrale

3.8.1 Die Methode von Passarino-Veltman

In diesem Abschnitt werden die technischen Details für die Berechnung von Einschleifenintegralen erörtert. Die Methoden gehen auf die Arbeiten von 'T HOOFT & VELTMAN [70] und PASSARINO & VELTMAN [71] zurück.

Die FEYNMAN-Diagramme mit den geschlossenen Schleifen in Abb. (3.5) führen auf Integrale über den Schleifenimpuls k . In Abb. (3.6) ist der Impulsfluß für die beiden auftretenden Diagrammtypen der Vertexkorrektur dargestellt. Die Einschleifenintegrale di-

vergieren für unendlich große 4-Schleifenimpulse k (UV-Divergenz) und müssen zunächst regularisiert werden, um mathematisch wohldefiniert zu sein. Die dimensionale Regularisierung, bei der die Raum-Zeit-Dimension $D = 4$ der Integration über den Schleifenimpuls durch eine geringere Dimension $D = 4 - 2\varepsilon$ mit $\varepsilon \ll 1$ ersetzt wird, erhält sowohl die LORENTZ- als auch die Eichinvarianz der zugrundeliegenden Eichtheorie und wird daher bevorzugt verwendet. Für die Übergangsamplituden der Vertexkorrektur des Quark-Boson-Vertices $q_1 q_2 W$ treten sieben Einschleifen-Integrale auf:

$$\frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \left\{ \frac{1}{N_0 N_1 N_2}, \frac{k \cdot p_1}{N_0 N_1 N_2}, \frac{k \cdot p_2}{N_0 N_1 N_2}, \right. \\ \left. \frac{k \cdot k}{N_0 N_1 N_2}, \frac{(k \cdot p_1)^2}{N_0 N_1 N_2}, \frac{(k \cdot p_2)^2}{N_0 N_1 N_2}, \frac{(k \cdot p_2)(k \cdot p_1)}{N_0 N_1 N_2} \right\}.$$

Die Nenner der Propagatoren werden durch $N_0 = k^2 - M_0^2$, $N_1 = (k - p_1)^2 - M_1^2$ und $N_2 = (k - p_2)^2 - M_2^2$ bezeichnet, wobei die Quarks $q_{1,2}$ die 4-Impulse $p_{1,2}$ und die Massen $m_{1,2}^2 = p_{1,2}^2$ besitzen. Die sieben Einschleifen-Integrale können auf die Ein-Punkt-Funktionen (A), die Zwei-Punkt-Funktionen (B) und die Drei-Punkt-Funktionen (C) zurückgeführt werden:

$$\{A_0, A_\mu\} := \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{\{1, k_\mu\}}{[k^2 - M_0^2]}, \quad (3.97)$$

$$\{B_0, B_\mu, B_{\mu\nu}\} := \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{\{1, k_\mu, k_{\mu\nu}\}}{[k^2 - M_0^2][(k + p_1)^2 - M_1^2]}, \quad (3.98)$$

$$\{C_0, C_\mu, C_{\mu\nu}\} := \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{\{1, k_\mu, k_{\mu\nu}\}}{[k^2 - M_0^2][(k + p_1)^2 - M_1^2][(k + p_2)^2 - M_2^2]}. \quad (3.99)$$

Die Einführung des willkürlichen Massenparameters μ ist notwendig, um die Dimension der Kopplungskonstanten unabhängig von der Raum-Zeit-Dimension D der Integrationen zu halten. Der Beitrag der Einschleifenkorrekturen zu den Strahlungskorrekturen ist aber unabhängig von diesem Massenparameter. Die CLIFFORD-Algebra der Gamma-Matrizen in den Übergangsamplituden muß bei Verwendung der dimensionalen Regularisierung ebenfalls in der Raum-Zeit-Dimension $D = 4 - 2\varepsilon$ dargestellt werden: Die Kontraktion des metrischen Tensors mit sich selbst ergibt D statt 4 und die Kontraktionen der Gamma-Matrizen sind ebenfalls von der Dimension D abhängig; die Antivertauschungsregeln $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ für die Gamma-Matrizen gelten aber weiterhin (siehe Anhang G). Eine konsistente Behandlung der γ_5 -Matrix ist subtiler [72–74]. In anomaliefreien Eichtheorien wie dem Standardmodell, kann die Antivertauschungsrelation $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ für die γ_5 -Matrix weiter benutzt werden, wenn man auf die Zyklizität unter der Spur verzichtet und statt dessen einen Lesepunkt einführt [75].

Mit der Methode von PASSARINO-VELTMAN können die Integrale B_μ , $B_{\mu\nu}$, C_μ und $C_{\mu\nu}$ durch den folgenden Ansatz auf die skalaren Integrale A_0 , B_0 und C_0 zurückgeführt werden:

$$B_\mu = B_1 p_{1\mu}, \quad B_{\mu\nu} = B_{00} g_{\mu\nu} + B_{11} p_{1\mu} p_{1\nu}, \quad C_\mu = C_1 p_{1\mu} + C_2 p_{2\nu}, \quad (3.100)$$

$$C_{\mu\nu} = C_{00} g_{\mu\nu} + C_{11} p_{1\mu} p_{1\nu} + C_{22} p_{2\mu} p_{2\nu} + C_{12} (p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}).$$

Die Berechnung der skalaren Koeffizienten B_1 und B_{00} , B_{11} , C_1 , C_2 und C_{00} , C_{11} , C_{22} , C_{12} werden in den nächsten Abschnitten durchgeführt. Die skalaren Integrale können mit der im Anhang C diskutierten FEYNMAN-Parametrisierung wiederum auf das folgende Standardintegral zurückgeführt werden:

$$\boxed{I(D, \alpha) := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[-k^2 + M_0^2 + i\varepsilon]^\alpha} = \frac{i \mu^{D-2\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{M_0^2 + i\varepsilon}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-\alpha}.} \quad (3.101)$$

Im Anhang B wird das D -dimensionale Standardintegral in der MINKOWSKI-Metrik durch die WICK-Rotation auf ein D -dimensionales Integral in der EUKLIDISCHEN Metrik zurückgeführt. Die Integration kann anschließend in D -dimensionalen Kugelkoordinaten durch die Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ ausgewertet werden. Die Singularitäten des ursprünglichen 4-dimensionalen Integrals sind jetzt in den Polen der Γ -Funktion für $D = 4$ und $\alpha \leq 2$ enthalten. Der Massenparameter μ , der im ursprünglichen Standardintegral nicht enthalten ist, wird eingeführt, um die Dimension der Masse M_0 zu kompensieren. Das skalare Ein-Punkt-Integral A_0 folgt als Spezialfall des Standardintegrals für $\alpha = 1$:

$$A_0(M_0) = M_0^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi \mu^2}{M_0^2} \right) \right). \quad (3.102)$$

Die EULERSche Konstante γ_E folgt aus der TAYLOR-Entwicklung der Gamma-Funktionen nach dem Regularisierungsparameter ε . Die skalare Zwei-Punkt-Funktion B_0 wird im Abschnitt 3.8.3 berechnet:

$$B_0(m_1, M_0, M_1) = \frac{1}{\varepsilon} + 2 - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi \mu^2}{M_0 M_1} \right) + \frac{M_0^2 - M_1^2}{m_1^2} \ln \left(\frac{M_1}{M_0} \right) + \quad (3.103)$$

$$- \frac{\sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}{2 m_1^2} \ln \left(\frac{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 - \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 + \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}} \right).$$

M_0 und M_1 sind die Massen in den Propagatorennennern N_0 und N_1 . m_1 ist die Masse, die über die „On-Shell“-Bedingung $p_1^2 = m_1^2$ mit dem 4-Impuls p_1 verknüpft ist. Die skalare Drei-Punkt-Funktion ist der Arbeit [70] entnommen und kann in der symmetrischen Form

$$C_0(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}} \sum_{i=0}^2 \left\{ \sum_{\sigma=\pm} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{y_{0i} - 1}{y_{i\sigma}} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{y_{0i}}{y_{i\sigma}} \right) + \right. \right. \quad (3.104.1)$$

$$\left. \left. + \eta \left(1 - x_{i\sigma}, \frac{1}{y_{i\sigma}} \right) \ln \left(\frac{y_{0i} - 1}{y_{i\sigma}} \right) - \eta \left(-x_{i\sigma}, \frac{1}{y_{i\sigma}} \right) \ln \left(\frac{y_{0i}}{y_{i\sigma}} \right) \right] + \right. \quad (3.104.1)$$

$$\left. - \left[\eta(-x_{i+}, -x_{i-}) - \eta(y_{i+}, y_{i-}) - 2\pi i \theta(-m_{jk}^2) \theta(-\text{Im}(y_{i+}, y_{i-})) \right] \ln \left(\frac{y_{i0} - 1}{y_{i0}} \right) \right\},$$

geschrieben werden, wobei M_0 , M_1 und M_2 wieder die Massen in den Propagatornennern N_0 , N_1 und N_2 sind, und m_0 , m_1 und m_2 über die „On-Shell“-Bedingungen $(p_1 - p_2)^2 = m_0^2$, $p_1^2 = m_1^2$ und $p_2^2 = m_2^2$ mit den 4-Impulsen $p_1 - p_2$, p_1 und p_2 verknüpft sind. Mit den Setzungen $m_{01} := m_1$, $m_{12} := m_0$ und $m_{20} = m_2$ und der zyklischen Vertauschung von $i, j, k = 0, 1, 2$ sind die Abkürzungen

$$y_{0i} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}m_{jk}^2} \left(m_{jk}^2(m_{jk} - m_{ki}^2 - m_{ij}^2 + 2M_i^2 - M_j^2 - M_k^2) \right. \\ \left. - (m_{ki}^2 - m_{ij}^2)(M_j^2 - M_k^2) + \sqrt{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}(m_{jk}^2 - M_j^2 + M_k^2) \right), \quad (3.104.2)$$

$$x_{i\pm} = \frac{1}{2m_{jk}^2} (m_{jk}^2 - M_j^2 + M_k^2 \pm \sqrt{\lambda(m_{jk}^2, M_j^2, M_k^2)}(1 + i\varepsilon m_{jk}^2)), \quad (3.104.3)$$

$$y_{i\pm} = y_{0i} - x_{i\pm}, \quad (3.104.4)$$

definiert. Die η -Funktion berücksichtigt die Schnitte der komplexen Logarithmus- und Dilogarithmusfunktion in der RIEMANNschen Fläche und ist wie folgt definiert:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b + \eta(a, b) \text{ für } a, b \in \mathbb{C} \quad (3.104.5)$$

$$\eta(a, b) := 2\pi i \left\{ \theta(-\operatorname{Im} a)\theta(-\operatorname{Im} b)\theta(\operatorname{Im} ab) + \theta(\operatorname{Im} a)\theta(\operatorname{Im} b)\theta(-\operatorname{Im} ab) \right\}. \quad (3.104.6)$$

Für den Fall der in Abb. (3.5) dargestellten FEYNMAN-Diagramme, die in der elektroschwachen Vertexkorrektur beitragen, verschwinden sämtliche η -Funktionen. Die skalare Drei-Punkt-Funktion vereinfacht sich in diesem Fall auf die Summe über die Dilogarithmus-Funktionen:

$$C_0(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}} \sum_{i=0}^2 \sum_{\sigma=\pm} \left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{y_{0i}-1}{y_{i\sigma}}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{y_{0i}}{y_{i\sigma}}\right) \right]. \quad (3.105)$$

Bei der Berechnung der Einschleifen-Integrale werden die drei möglichen Skalarprodukte $(k \cdot k)$, $(k \cdot p_1)$ und $(k \cdot p_2)$ im Zähler der Integranden so erweitert, daß ein oder zwei Terme gegen die Propagatornennern gekürzt werden können. Durch diese Zerlegung kann eine n-Punkt-Funktion auf eine oder zwei skalare (n-1)-Punkt-Funktionen und eine skalare n-Punkt-Funktion reduziert werden. Es gilt:

$$k^2 = [k^2 - M_0^2] + M_0^2, \quad (3.106.1)$$

$$k \cdot p_1 = \frac{1}{2}[(k + p_1)^2 - M_1^2] - \frac{1}{2}[k^2 - M_0^2] - \frac{1}{2}[M_0^2 - M_1^2 + m_1^2], \quad (3.106.2)$$

$$k \cdot p_2 = \frac{1}{2}[(k + p_2)^2 - M_2^2] - \frac{1}{2}[k^2 - M_0^2] - \frac{1}{2}[M_0^2 - M_2^2 + m_2^2]. \quad (3.106.3)$$

3.8.2 Spezialfälle im Grenzfall kleiner Massen

Bei der analytischen Berechnung der Einschleifenkorrekturen wird die endliche Masse des Bottomquarks berücksichtigt. Die numerische Auswertung der Vertexkorrektur (δ_V), der Selbstwechselwirkung (δ_f) der Fermionen, der Selbstwechselwirkung (δ_W) des W -Bosons und des Counterterm-Beitrags (δ_{CT}) erfolgt jedoch für den Fall eines masselosen Bottomquarks. Die IR-Divergenz, die durch die Photonmasse m_A regularisiert wird, äußert sich im Logarithmus $\ln(m_A/m_t)$. Die kollineare Singularität in der Masse des Bottomquarks führt auf zusätzliche Logarithmen $\ln(m_b/m_t)$ und $\ln^2(m_b/m_t)$. Mit Ausnahme des Anteils $\delta_{W,leicht}$ (siehe Abschnitt 3.8.10) heben sich sämtliche IR-Divergenzen gegen entsprechende IR-Divergenzen der Bremsstrahlungskorrektur heraus. Für das skalare Drei-Punkt-Integral C_0 ergeben sich für den gleichzeitigen Grenzwertübergang $m_b \rightarrow 0$ und $m_A \rightarrow 0$ folgende Spezialfälle:

$$C_0(m_t, m_b, m_t, m_H, m_W) = \frac{1}{m_t^2 - m_W^2} \left\{ \right. \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} & \text{Li}_2\left(\frac{2m_t^2}{m_H^2 + M_H \sqrt{m_H^2 - 4m_t^2}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2m_t^2}{m_H^2 - M_H \sqrt{m_H^2 - 4m_t^2}}\right) + \\ & -\text{Li}_2\left(\frac{2m_W^2}{m_H^2 + M_H \sqrt{m_H^2 - 4m_W^2}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2m_W^2}{m_H^2 - M_H \sqrt{m_H^2 - 4m_W^2}}\right) \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$C_0(m_t, m_b, m_A, m_t, m_b) = \frac{1}{m_t^2 - m_W^2} \left\{ \right. \quad (3.108)$$

$$\left. \frac{1}{4} \ln\left(\frac{m_b^2}{m_A^2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{m_t^2}{m_A^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_t^2 - m_W^2}{m_A^2}\right)^2 + \text{Li}_2\left(-\frac{m_W^2}{m_t^2 - m_W^2}\right) \right\},$$

$$C_0(m_t, m_b, m_A, m_t, m_W) = \frac{1}{m_t^2 - m_W^2} \ln\left(\frac{m_W}{m_t}\right) \ln\left(\frac{m_t m_W}{m_A^2}\right). \quad (3.109)$$

Tritt die Masse des Bottomquarks als zweites Argument der skalaren Funktion C_0 auf, kann sie Null gesetzt werden, ohne daß Singularitäten auftreten. Als drittes, viertes oder fünftes Argument führt der Grenzwertübergang auf logarithmische IR-Singularitäten. Die Photonmasse m_A tritt stets als drittes, viertes oder fünftes Argument auf und liefert logarithmische IR-Singularitäten.

Für die skalaren Zwei-Punkt-Funktionen B_0 und B_1 ergeben sich mit $m_1, m_2 \neq 0$ und $m \rightarrow 0$ folgende Spezialfälle:

$$B_0(m_1, m, m_1) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_1^2}\right) + 2, \quad (3.110.1)$$

$$B_0(m_1, m, m_2) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_2^2}\right) + 2 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1^2} \ln\left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{m_2^2}\right), \quad (3.110.2)$$

$$B_0(m, m_1, m_2) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_1 m_2}\right) + 1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right), \quad (3.110.3)$$

$$B_1(m_1, m, m_1) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_1^2}\right) + 1 \right\}, \quad (3.110.4)$$

$$B_1(m_1, m_1, m) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_1^2}\right) + 3 \right\}. \quad (3.110.5)$$

Es treten keine logarithmischen Singularitäten in der Masse $m \ll 1$ auf. Während bei B_0 die Reihenfolge des zweiten und dritten Arguments vertauscht werden kann, hängt bei B_1 das Ergebnis von der Reihenfolge der Argumente ab.

3.8.3 Die Berechnung von $A_0(M_1)$

Das Integral für A_0 ist invariant unter der Translation $k \rightarrow k - p_1$ und kann sofort mit dem Standardintegral aus Gl. (3.101) für $\alpha = 1$ gelöst werden. Nach der Substitution $D = 4 - 2\varepsilon$ und der TAYLOR-Entwicklung der einzelnen Faktoren (siehe Anhang G) folgt nach dem Ausmultiplizieren Gl. (3.102). Die Rechnung lautet im einzelnen:

$$A_0 = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[(k+p_1)^2 - M_1^2]} = -\frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[-k^2 + M_1^2]} \quad (3.111.1)$$

$$= -\frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \frac{i\mu^{D-2}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(1)} \left(\frac{M_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-1} = -M_1^2 \left(\frac{M_1^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \Gamma(-1 + \varepsilon) \quad (3.111.2)$$

$$= -M_1^2 \left\{ 1 - \varepsilon \ln\left(\frac{M_1^2}{4\pi\mu^2}\right) + O(\varepsilon^2) \right\} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + O(\varepsilon) \right\} \quad (3.111.3)$$

$$= M_1^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M_1^2}\right) \right) + O(\varepsilon). \quad (3.111.4)$$

Ein vektorielles Ein-Punkt-Integral A_μ muß als Produkt eines antisymmetrischen und eines symmetrischen Faktors bei der Integration über den gesamten Phasenraum verschwinden.

3.8.4 Die Berechnung von $B_0(m_1, M_0, M_1)$

Zur Berechnung von B_0 wird durch die FEYNMAN-Parametrisierung ein weiterer Parameter x eingeführt, nach dem zusätzlich über das Intervall $[0, 1]$ integriert werden muß. Vertauscht man die Integrationsreihenfolge, kann das Standardintegral für $\alpha = 2$ ausgewertet und in eine TAYLOR-Reihe um ε entwickelt werden. Die Rechnung lautet:

$$B_0 = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2]} \quad (3.112.1)$$

$$= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \int_0^1 \frac{1}{[(k+p_1 x)^2 - M_0^2 - (M_1^2 - M_0^2 - m_1^2)x - m_1^2 x^2]^2} dx \quad (3.112.2)$$

$$= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[-k^2 + M_0^2 + (M_1^2 - M_0^2 - m_1^2)x + m_1^2 x^2]^2} dx \quad (3.112.3)$$

$$= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 \frac{i\mu^{D-4}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{M_0^2 + (M_1^2 - M_0^2 - m_1^2)x + m_1^2 x^2}{\mu^2} \right)^{\frac{D}{2}-2} dx \quad (3.112.4)$$

$$= \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \left(\frac{M_0^2 + (M_1^2 - M_0^2 - m_1^2)x + m_1^2 x^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} dx \quad (3.112.5)$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln \left(\frac{M_0^2 + (M_1^2 - M_0^2 - m_1^2)x + m_1^2 x^2}{4\pi \mu^2} \right) + O(\varepsilon) \right\} dx. \quad (3.112.6)$$

Das Integral in Gl. (3.112.5) kann analytisch mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen dargestellt und am Ende der Berechnung der Grenzwertübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchgeführt werden. An dieser Stelle ist jedoch die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung einfacher. Zerlegt man den quadratischen Term im Argument der Logarithmusfunktion in Gl. (3.112.6) in seine Linearfaktoren

$$M_0^2 + (M_1^2 - M_0^2 - m_1^2)x + m_1^2 x^2 = m_1^2(x - x_+)(x - x_-), \quad (3.113)$$

wobei die Wurzeln durch

$$x_{\pm} = \frac{M_0^2 - M_1^2 + m_1^2 \pm \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}{2m_1^2} \quad (3.114)$$

gegeben sind, kann die letzte Integration für die einzelnen Logarithmen ausgeführt werden und führt nach Einsetzen der Integrationsgrenzen auf Gl. (3.103). Im Grenzfall eines masselosen Fermions ($m_1 = 0$) gilt der folgende Zusammenhang zwischen A_0 und B_0 :

$$(M_1^2 - M_0^2)B_0(0, M_0, M_1) = A_0(M_1) - A_0(M_0). \quad (3.115)$$

3.8.5 Die Berechnung von $B_\mu(\mathbf{m}_1, \mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1)$

Aus dem Ansatz für die vektorielle Zwei-Punkt-Funktion B_μ kann nach der Kontraktion mit dem 4-Impulsvektor p_1^μ

$$B_\mu = B_1 p_{1\mu} \quad \rightarrow \quad R_1 = p_1^\mu B_\mu = B_1 m_1^2 \quad (3.116)$$

der skalare Koeffizient R_1 nach der Methode von PASSARINO-VELTMAN

$$R_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{[(k+p_1)^2 - M_1^2] - [k^2 - M_0^2] - [M_0^2 - M_1^2 + m_1^2]}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2]} \quad (3.117.1)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_0^2]} - \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[(k+p_1)^2 - M_1^2]} +$$

$$- \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2]} \quad (3.117.2)$$

$$= \frac{1}{2} A_0(M_0) - \frac{1}{2} A_0(M_1) - \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) B_0(m_1, M_0, M_1), \quad (3.117.3)$$

auf die bereits bekannten skalaren Integrale A_0 und B_0 zurückgeführt werden. Der skalare Koeffizient B_1 der vektoriellen Zwei-Punkt-Funktion lautet:

$$B_1 = \frac{1}{2m_1^2} A_0(M_0) - \frac{1}{2m_1^2} A_0(M_1) - \frac{1}{2} \frac{M_0^2 - M_1^2 + m_1^2}{m_1^2} B_0(m_1, M_0, M_1). \quad (3.118)$$

Definiert man für die folgende Linearkombination der skalaren Integrale A_0 und B_0 die Funktion $F(m_1, M_0, M_1)$, die sofort in Abhängigkeit von m_1 , M_0 und M_1 bestimmt werden kann, so erhält man:

$$F(m_1, M_0, M_1) := \frac{1}{M_1^2 - M_0^2} \left(A_0(M_0) - A_0(M_1) \right) - B_0(m_1, M_0, M_1) \quad (3.119.1)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{M_1^2 - M_0^2}{2m_1^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_1^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{M_1^2 + M_0^2}{M_1^2 - M_0^2} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_1^2} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}{2m_1^2} \ln \left(\frac{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 + \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 - \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}} \right). \end{aligned} \quad (3.119.2)$$

Für die Berechnung der Selbstenergie der Quarks werden, neben $F(0, M_0, M_1) = 0$ für $m_1 = 0$, der folgende Spezialfall für $m_1 \neq 0$, $M_0 = M_1$ und die Ableitung $F'(m_1, M_0, M_1)$ von $F(m_1, M_0, M_1)$ nach m_1^2 benötigt:

$$F(m_1, M_1, M_1) = 2 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{M_1^2 - 4m_1^2}}{M_1} \ln \left(\frac{M_1^2 - 2m_1^2 - M_1 \sqrt{M_1^2 - 4m_1^2}}{M_1^2 - 2m_1^2 + M_1 \sqrt{M_1^2 - 4m_1^2}} \right), \quad (3.119.3)$$

$$\begin{aligned} F'(m_1, M_0, M_1) &= -\frac{1}{m_1^2} - \frac{M_1^2 - M_0^2}{2m_1^4} \ln \left(\frac{M_0^2}{M_1^2} \right) - \frac{(M_0^2 - M_1^2)^2 - (M_0^2 + M_1^2)m_1^2}{2m_1^4 \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}} \\ &\times \ln \left(\frac{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 + \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 - \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}} \right) \end{aligned} \quad (3.119.4)$$

lautet, so kann die skalare Zwei-Punkt-Funktion kompakt dargestellt werden:

$$B_1(m_1, M_0, M_1) = \frac{M_1^2 - M_0^2}{2m_1^2} F(m_1, M_0, M_1) - \frac{1}{2} B_0(m_1, M_0, M_1). \quad (3.120)$$

3.8.6 Die Berechnung von $B_{\mu\nu}(m_1, M_0, M_1)$

Die tensorielle Zwei-Punkt-Funktion $B_{\mu\nu}$ wird bei der Berechnung der Selbstenergie der Fermionen benötigt. Aus dem Ansatz in den beiden skalaren Koeffizienten B_{00} und B_{11} können durch Kontraktion mit dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ und dem 4-Impulsvektor p_1^μ die neuen Komponenten S_0 und S_1 auf bereits bekannte Funktionen zurückgeführt werden. Es gilt:

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} B_{00} + p_{1\mu} p_{1\nu} B_{11} \quad \Rightarrow \quad S_0 = g^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad S_{1\nu} = p_1^\mu B_{\mu\nu}. \quad (3.121)$$

Die Komponente S_0

$$S_0 = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{[k^2 - M_0^2] + M_0^2}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2]} \quad (3.122.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_1^2]} + M_0^2 \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2]} \\ &= A_0(M_1) + M_0^2 B_0(m_1, M_0, M_1) \end{aligned} \quad (3.122.2)$$

wird auf die skalare Ein-Punkt-Funktion $A_0(M_1)$ und die skalare Zwei-Punkt-Funktion $B_0(m_1, M_0, M_1)$ zurückgeführt. Die Komponente S_1

$$S_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{([(k+p_1)^2 - M_1^2] - [k^2 - M_0^2] - [M_0^2 - M_1^2 + m_1^2]) k_\nu}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2]} \quad (3.123.1)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{k_\nu}{[k^2 - M_0^2]} - \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{k_\nu - p_{1\nu}}{[k^2 - M_1^2]} + \quad (3.123.2)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{k_\nu}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2]} \\ &= \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} p_{1\nu} A_0(M_1^2) - \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) B_1(m_1, M_0, M_1) p_{1\nu} \end{aligned} \quad (3.123.3)$$

dagegen wird auf die vektorielle Ein-Punkt-Funktion $A_0^\mu(M_0)$, das skalare Ein-Punkt-Integral $A_0(M_1)$ und den Koeffizienten $B_1(m_1, M_0, M_1)$ der vektoriellen Zwei-Punkt-Funktion zurückgeführt. Die Beiträge proportional zu k_ν verschwinden. Aus dem linearen Gleichungssystem

$$S_0 = m_1^2 B_{11} + 4 B_{00} = A_0(M_1) + M_0^2 B_0(m_1, M_0, M_1) \quad (3.124)$$

$$p_1^\nu S_{1\nu} = m_1^4 B_{11} + m_1^2 B_{00} = \frac{m_1^2}{2} A_0(M_1) - \frac{m_1^2}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) B_1(m_1, M_0, M_1)$$

können die gesuchten Koeffizienten B_{00} und B_{11} bestimmt werden:

$$\begin{aligned} B_{00} &= \frac{1}{6} A_0(M_1) + \frac{1}{3} M_0^2 B_0(m_1, M_0, M_1) + \frac{1}{6} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) B_1(m_1, M_0, M_1) \\ B_{11} &= \frac{1}{3} A_0(M_1) - \frac{1}{3} M_0^2 B_0(m_1, M_0, M_1) - \frac{2}{3} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) B_1(m_1, M_0, M_1). \end{aligned} \quad (3.125)$$

3.8.7 Die Berechnung von $C_\mu(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$

Für die Berechnung der skalaren Drei-Punkt-Funktion wird auf die Arbeit von 'T HOOFT und VELTMAN [70] verwiesen. Analog zur Berechnung der vektoriellen Zwei-Punkt-Funktion wird die vektorielle Drei-Punkt-Funktion C_μ durch die skalaren Koeffizienten C_1 und C_2 angesetzt und mit dem 4-Impulsvektor p_1^μ bzw. p_2^μ kontrahiert:

$$C_\mu = C_1 p_{1\mu} + C_2 p_{2\mu} \quad \Rightarrow \quad R_1 := p_1^\mu C_\mu, \quad R_2 := p_2^\mu C_\mu. \quad (3.126)$$

Die skalaren Hilfsfunktionen R_1 und R_2 sind durch die folgende Matrixgleichung mit den Koeffizienten C_1 und C_2 verknüpft:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2m_1^2 & m_1^2 + m_2^2 - m_0^2 \\ m_1^2 + m_2^2 - m_0^2 & 2m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (3.127)$$

wobei wie üblich $p_1^2 = m_1^2$, $p_2^2 = m_2^2$ und $(p_1 - p_2)^2 = m_0^2$ gilt. Die invertierte Matrixgleichung liefert die gesuchten Koeffizienten in Abhängigkeit der Hilfsfunktionen R_1 und R_2 , die mit der Methode von PASSARINO-VELTMAN auf die skalaren Zwei- und Drei-Punkt-Integrale B_0 und C_0 reduziert werden können:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)} \begin{pmatrix} -2m_2^2 & m_1^2 + m_2^2 - m_0^2 \\ m_1^2 + m_2^2 - m_0^2 & -2m_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}. \quad (3.128)$$

Für R_1 z.B. gilt:

$$R_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{[(k+p_1)^2 - M_1^2] - [k^2 - M_0^2] - [M_0^2 - M_1^2 + m_1^2]}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2][(k+p_2)^2 - M_2^2]} \quad (3.129.1)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_0^2][(k+p_2)^2 - M_2^2]} + \quad (3.129.2)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[(k+p_1-p_2)^2 - M_1^2][k^2 - M_2^2]} +$$

$$- \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_0^2][(k+p_1)^2 - M_1^2][(k+p_2)^2 - M_2^2]}$$

$$= \frac{1}{2} B_0(m_2, M_0, M_2) - \frac{1}{2} B_0(m_0, M_2, M_1) - \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) C_0. \quad (3.129.3)$$

Die Berechnung von R_2 ergibt sich analog. Zusammenfassend lauten R_1 und R_2

$$R_1(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = \frac{1}{2} B_0(m_2, M_0, M_2) - \frac{1}{2} B_0(m_0, M_1, M_2) - \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) C_0(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) \quad (3.130.1)$$

$$R_2(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = \frac{1}{2} B_0(m_1, M_0, M_1) - \frac{1}{2} B_0(m_0, M_1, M_2) - \frac{1}{2} (M_0^2 - M_2^2 + m_2^2) C_0(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2), \quad (3.130.2)$$

woraus sich schließlich die skalaren Koeffizienten C_1 und C_2 ergeben:

$$C_1 = -\frac{2}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)} \left(2 m_2^2 R_1 + (m_0^2 - m_1^2 - m_2^2) R_2 \right) \quad (3.131.1)$$

$$C_2 = -\frac{2}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)} \left((m_0^2 - m_1^2 - m_2^2) R_1 + 2 m_1^2 R_2 \right). \quad (3.131.2)$$

3.8.8 Die Berechnung von $C_{\mu\nu}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$

Zum Abschluß wird die tensorielle Drei-Punkt-Funktion $C_{\mu\nu}$ behandelt. Der Ansatz in den skalaren Koeffizienten C_{00} , C_{11} , C_{22} und C_{12}

$$C_{\mu\nu} = C_{00} g_{\mu\nu} + C_{11} p_{1\mu} p_{1\nu} + C_{22} p_{2\mu} p_{2\nu} + C_{12} (p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}) \quad (3.132)$$

wird mit den 4-Impulsvektoren p_1^μ und p_2^μ kontrahiert, was auf vektorielle Hilfsfunktionen $S_{1\nu}$ und $S_{2\nu}$ führt, die wiederum durch die vier skalare Koeffizienten R_{11} , R_{12} und R_{21} , R_{22} dargestellt werden können.

$$S_{1\nu} = p_1^\mu C_{\mu\nu} = R_{11} p_{1\nu} + R_{12} p_{2\nu} \quad (3.133.1)$$

$$S_{2\nu} = p_2^\mu C_{\mu\nu} = R_{21} p_{1\nu} + R_{22} p_{2\nu} \quad (3.133.2)$$

Die Kontraktion des tensoriellen Drei-Punkt-Funktion mit dem metrischen Tensor liefert einen weiteren skalaren Koeffizienten R_{00} , wobei die Raum-Zeit-Dimension D vor dem Koeffizienten C_{00} aus der Kontraktion des metrischen Tensors stammt ($g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = D$):

$$R_{00} = C_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D C_{00} + m_1^2 C_{11} + m_2^2 C_{22} + (m_1^2 + m_2^2 - m_0^2) C_{12}. \quad (3.134.1)$$

Nach der Kontraktion des Ansatzes für $C_{\mu\nu}$ mit den 4-Impulsvektoren p_1^μ und p_2^μ können die folgenden skalaren Koeffizienten als Vorfaktoren von den verbleibenden 4-Impulsvektoren $p_{1\nu}$ und $p_{2\nu}$ abgelesen werden:

$$R_{11} = C_{00} + m_1^2 C_{11} + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - m_0^2) C_{12}, \quad (3.134.2)$$

$$R_{12} = m_1^2 C_{12} + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - m_0^2) C_{22}, \quad (3.134.3)$$

$$R_{21} = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - m_0^2) C_{11} + m_2^2 C_{12}, \quad (3.134.4)$$

$$R_{22} = C_{00} + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - m_0^2) C_{12} + m_2^2 C_{22}. \quad (3.134.5)$$

Aufgrund der Symmetrie muß $R_{21} = R_{12}$ gelten, so daß zu den vier linear unabhängigen Koeffizienten C_{ij} auch nur vier linear unabhängige Hilfsfunktionen R_{ij} gehören. Mit den bisher besprochenen Techniken ergibt sich für R_{00}

$$R_{00} = \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2 \pi)^{D-4}} \frac{[k^2 - M_0^2] + M_0^2}{[k^2 - M_0^2][(k + p_1)^2 - M_1^2][(k + p_2)^2 - M_2^2]} \quad (3.135.1)$$

$$= \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2 \pi)^{D-4}} \frac{1}{[(k + p_1 - p_2)^2 - M_1^2][k^2 - M_2^2]} + \quad (3.135.2)$$

$$+ M_0^2 \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2 \pi)^{D-4}} \frac{1}{[k^2 - M_0^2][(k + p_1)^2 - M_1^2][(k + p_2)^2 - M_2^2]}, \quad (3.135.3)$$

und für die vektorielle Hilfsfunktion $S_{1\nu}$

$$S_{1\nu} = \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2 \pi)^{D-4}} \frac{[(k + p_1)^2 - M_1^2] - [k^2 - M_0^2] - [M_0^2 - M_1^2 + m_1^2]}{[k^2 - M_0^2][(k + p_1)^2 - M_1^2][(k + p_2)^2 - M_2^2]} k_\nu \quad (3.136.1)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2 \pi)^{D-4}} \frac{k_\nu}{[k^2 - M_0^2][(k + p_2)^2 - M_2^2]} + \quad (3.136.2)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2 \pi)^{D-4}} \frac{k_\nu - p_{2\nu}}{[(k + p_1 - p_2)^2 - M_1^2][k^2 - M_2^2]} +$$

$$- \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) \frac{\mu^{4-D}}{i \pi^2} \int \frac{d^D k}{(2 \pi)^{D-4}} \frac{k_\nu}{[k^2 - M_0^2][(k + p_1)^2 - M_1^2][(k + p_2)^2 - M_2^2]}$$

$$= \frac{1}{2} B_1(m_2, M_0, M_2) p_{2\nu} - \frac{1}{2} B_1(m_0, M_2, M_1) (p_{1\nu} - p_{2\nu}) + \quad (3.136.3)$$

$$+ \frac{1}{2} B_0(m_0, M_2, M_1) p_{2\nu} - \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) (C_1 p_{1\nu} + C_2 p_{2\nu}),$$

von der, nach den 4-Impulsvektoren $p_{1\nu}$ und $p_{2\nu}$ sortiert,

$$S_{1\nu} = \frac{1}{2} \left(B_1(m_0, M_2, M_1) - (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) C_1 \right) p_{1\nu} + \quad (3.136.4)$$

$$- \frac{1}{2} \left(B_1(m_2, M_0, M_2) + B_1(m_0, M_2, M_1) + B_0(m_0, M_2, M_1) - (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) C_2 \right) p_{2\nu}$$

unmittelbar die gesuchten Koeffizienten R_{11} und R_{12} abgelesen werden können. Entsprechend können die Koeffizienten R_{21} und R_{22} aus $S_{2\nu}$ ermittelt werden. Zusammenfassend lauten die fünf skalaren Hilfsfunktionen:

$$R_{00}(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = +B_0(m_0, M_1, M_2) + M_0^2 C_0(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2), \quad (3.137.1)$$

$$R_{11}(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) =$$

$$- \frac{1}{2} B_1(m_0, M_2, M_1) - \frac{1}{2} (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) C_1(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2), \quad (3.137.2)$$

$$R_{12}(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = +\frac{1}{2}B_1(m_2, M_0, M_2) + \frac{1}{2}B_1(m_0, M_2, M_1) + \quad (3.137.3)$$

$$+ \frac{1}{2}B_0(m_0, M_2, M_1) + \frac{1}{2}(M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) C_2(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2),$$

$$R_{21}(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = +\frac{1}{2}B_1(m_1, M_0, M_1) - \frac{1}{2}B_1(m_0, M_2, M_1) + \quad (3.137.4)$$

$$- \frac{1}{2}(M_0^2 - M_2^2 + m_2^2) C_1(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2),$$

$$R_{22}(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2) = +\frac{1}{2}B_1(m_1, M_2, M_1) + \frac{1}{2}B_0(m_0, M_1, M_2) + \quad (3.137.5)$$

$$- \frac{1}{2}(M_0^2 - M_2^2 + m_2^2) C_2(m_1, m_2, M_0, M_1, M_2).$$

Aus den skalaren Hilfsfunktionen können schließlich umgekehrt die gesuchten Koeffizienten C_{00} , C_{11} , C_{22} und C_{12} durch die Invertierung des zugehörigen linearen Gleichungssystems gefunden werden. Die skalaren Koeffizienten für den Ansatz der tensoriellen Drei-Punkt-Funktion lauten:

$$C_{00} = \frac{R_{00} - R_{11} - R_{22}}{D - 2}, \quad (3.138.1)$$

$$C_{11} = -\frac{4(m_2^2(R_{11} - C_{00}) + \frac{1}{2}(m_0^2 - m_1^2 - m_2^2)R_{21})}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}, \quad (3.138.2)$$

$$C_{12} = -\frac{4(m_2^2 R_{12} + \frac{1}{2}(m_0^2 - m_1^2 - m_2^2)(R_{22} - C_{00}))}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}, \quad (3.138.3)$$

$$C_{21} = -\frac{4(m_1^2 R_{21} + \frac{1}{2}(m_0^2 - m_1^2 - m_2^2)(R_{11} - C_{00}))}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}, \quad (3.138.4)$$

$$C_{22} = -\frac{4(m_1^2(R_{22} - C_{00}) + \frac{1}{2}(m_0^2 - m_1^2 - m_2^2)R_{12})}{\lambda(m_1^2, m_2^2, m_0^2)}, \quad (3.138.5)$$

wobei $C_{12} = C_{21}$ gilt. Mit der Dimension $D = 4 - 2\varepsilon$, der Gleichung $\varepsilon B_0(m_0, M_2, M_1) = 1$ und der TAYLOR-Entwicklung

$$\frac{1}{D - 2} = \frac{1}{2(1 - \varepsilon)} = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.139)$$

für den Nenner in Gl. (3.138.1) folgt, daß der Koeffizient C_{00} in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$C_{00} = \frac{1}{4} \left(1 + B_0(m_0, M_2, M_1) + 2M_0^2 C_0 + (M_0^2 - M_1^2 + m_1^2) C_1 + (M_0^2 - M_2^2 + m_2^2) C_2 \right). \quad (3.140)$$

Setzt man sämtliche Teilergebnisse ineinander ein, so stellt man für die Drei-Punkt-Funktionen C_0 (skalare Integral), C_1 , C_2 (Koeffizienten des Vektorintegrals), C_{00} , C_{11} , $C_{12} = C_{21}$, C_{22} (Koeffizienten des Tensorintegrals) fest, daß nur die Tensorkoeffizienten UV-divergent sind und zwar durch die skalare Zwei-Punkt-Funktion B_0 in C_{00} .

3.9 Die Selbstenergie der Fermionen

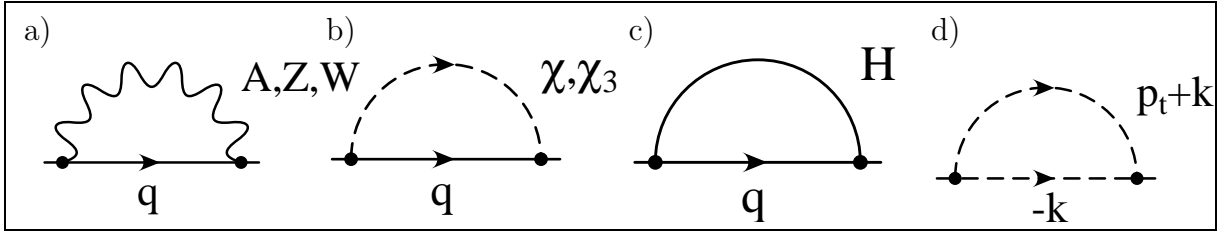


Abbildung 3.7: Die Selbstenergie der Quarks. Im elektroschwachen Sektor des Standardmodells kann ein Quark entweder ein a) Photon A , W^{\pm} - oder Z -Boson, ein b) χ^{\pm} - oder χ_3 -Goldstone-Boson oder ein c) Higgs-Boson H emittieren und reabsorbieren. In d) wird der Impulsfluß definiert.

In Abb. (3.7a-c) sind die FEYNMAN-Diagramme dargestellt, die zur Selbstenergie der Quarks im elektroschwachen Sektor des Standardmodells beitragen. Ein Quark kann entweder ein Photon, ein W^{\pm} - oder Z^0 -Boson, ein χ^{\pm} - oder χ_3 GOLDSTONE-Boson oder ein HIGGS-Boson spontan emittieren und wieder absorbieren. Im Fall der beiden geladenen Bosonen W^{\pm} und χ^{\pm} ändert sich der Flavour der Quarks, d.h. es gilt $q_I \leftrightarrow q_i$, bzw. mit den Bezeichnungen dieses Abschnitts $q_1 \leftrightarrow q_2$. In Abb. (3.7d) ist der 4-Impulsfluß für den 4-Schleifenimpuls k der Selbstenergie dargestellt. Die zugehörigen sechs Übergangsamplituden \mathcal{A}_i , $i = 1, \dots, 6$ für die FEYNMAN-Diagramme lauten:

$$\mathcal{A}_1 = \left(e Q_1 \gamma_\mu \right) \left(\frac{m_1 - \not{k}}{m_1^2 - k^2} \right) \left(e Q_1 \gamma_\nu \right) \times \left(\frac{g^{\mu\nu}}{(k + p_1)^2 - m_A^2} \right), \quad (3.141.1)$$

$$\mathcal{A}_2 = \left(\frac{g_z}{2} \gamma_\mu \left\{ \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} - 2Q_1 \sin^2 \theta_w \right\} \right) \left(\frac{m_1 - \not{k}}{m_1^2 - k^2} \right) \quad (3.141.2)$$

$$\left(\frac{g_z}{2} \gamma_\nu \left\{ \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} - 2Q_1 \sin^2 \theta_w \right\} \right) \times \left(\frac{g^{\mu\nu}}{(k + p_1)^2 - m_Z^2} \right),$$

$$\mathcal{A}_3 = \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{12} \gamma_\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \left(\frac{m_2 - \not{k}}{m_2^2 - k^2} \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{12} \gamma_\nu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \times \left(\frac{g^{\mu\nu}}{(k + p_1)^2 - m_W^2} \right), \quad (3.141.3)$$

$$\mathcal{A}_4 = \left(-i \frac{g_w}{2} m_1 \gamma_5 \right) \left(\frac{m_1 - \not{k}}{m_1^2 - k^2} \right) \left(-i \frac{g_w}{2} m_1 \gamma_5 \right) \times \left(\frac{1}{m_Z^2 - (k + p_1)^2} \right), \quad (3.141.4)$$

$$\mathcal{A}_5 = \left(-i \frac{g_w}{2} V_{12} \left\{ \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \frac{m_2}{m_W} - \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \frac{m_1}{m_W} \right\} \right) \left(\frac{m_2 - \not{k}}{m_2^2 - k^2} \right) \quad (3.141.5)$$

$$\left(-i \frac{g_w}{2} V_{12} \left\{ \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \frac{m_1}{m_W} - \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \frac{m_2}{m_W} \right\} \right) \times \left(\frac{1}{m_W^2 - (k + p_1)^2} \right),$$

$$\mathcal{A}_6 = \left(-\frac{g_w}{2} \frac{m_1}{m_W} \right) \left(\frac{m_1 - \not{k}}{m_1^2 - k^2} \right) \left(-\frac{g_w}{2} \frac{m_1}{m_W} \right) \times \left(\frac{1}{m_H^2 - (k + p_1)^2} \right). \quad (3.141.6)$$

Aufgrund der LORENTZ-Kovarianz können die Beiträge der Selbstenergie Σ_f der Fermionen in drei Komponenten zerlegt werden: Den linkshändigen Anteil Σ_L proportional

zur Kovarianten $\not{p}_1 \omega_-$ ($\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)$ ist ein Projektor, d.h. es gilt $\omega_{\pm} \omega_{\pm} = \omega_{\pm}$ und $\omega_{\pm} \omega_{\mp} = 0$), den rechtshändigen Anteil Σ_R proportional zur Kovarianten $\not{p}_1 \omega_+$ und den skalaren Anteil Σ_S proportional zur kovarianten Masse m_1 des ein- bzw. auslaufenden Fermions. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma_f(p_1^2) &= \not{p}_1 \omega_- \Sigma_L(p_1^2) + \not{p}_1 \omega_+ \Sigma_R(p_1^2) + m_1 \Sigma_S(p_1^2) \\ &= \not{p}_1 \Sigma_V(p_1^2) + \not{p}_1 \gamma_5 \Sigma_A(p_1^2) + m_1 \Sigma_S(p_1^2). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Anstatt in rechts- und linkshändige Anteile kann die Selbstenergie alternativ in einen Vektor- und einen Axialvektoranteile zerlegt werden, wobei die Zusammenhänge $\Sigma_R = \Sigma_V + \Sigma_A$ und $\Sigma_L = \Sigma_V - \Sigma_A$ gelten. Mit Hilfe der drei linear unabhängigen DIRAC-Matrizen

$$P_L := \frac{1}{2m_1^2} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \not{p}_1, \quad P_R := \frac{1}{2m_1^2} \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \not{p}_1, \quad P_S := \frac{1}{2m_1}, \quad (3.143)$$

kann über die Spur ihres Produkts mit der Selbstenergie Σ_f auf die einzelnen Komponenten Σ_L , Σ_R und Σ_S projiziert werden. Es gilt:

$$\text{Tr}\{P_L \Sigma_f\} = \Sigma_L, \quad \text{Tr}\{P_R \Sigma_f\} = \Sigma_R, \quad \text{Tr}\{P_S \Sigma_f\} = \Sigma_S. \quad (3.144)$$

Aus den Übergangsamplituden $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$ erhält man für ein Fermion mit $I_3 = +\frac{1}{2}$ (3-Komponente des Isospins) die folgenden, unrenormierten Komponenten der Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Sigma_L &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -Q_1^2 \left(1 + 2B_1(m_1, m_1, m_A)\right) + (g_1^-)^2 \left(1 + 2B_1(m_1, m_1, m_Z)\right) + \right. \\ &\quad - \frac{1}{2s_w^2} |V_{12}|^2 \left(1 + 2B_1(m_1, m_2, m_W)\right) - \frac{1}{4s_w^2} \frac{m_1^2}{m_W^2} B_1(m_1, m_1, m_Z) + \\ &\quad \left. - \frac{1}{2s_w^2} |V_{12}|^2 \frac{m_2^2}{m_W^2} B_1(m_1, m_2, m_W) - \frac{1}{4s_w^2} \frac{m_1^2}{m_W^2} B_1(m_1, m_1, m_H) \right\} \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_R &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -Q_1^2 \left(1 + 2B_1(m_1, m_1, m_A)\right) - (g_1^+)^2 \left(1 + 2B_1(m_1, m_1, m_Z)\right) + \right. \\ &\quad - \frac{1}{4s_w^2} \frac{m_1^2}{m_W^2} B_1(m_1, m_1, m_Z) - \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_1^2}{m_W^2} |V_{12}|^2 B_1(m_1, m_2, m_W) + \\ &\quad \left. - \frac{1}{4s_w^2} \frac{m_1^2}{m_W^2} B_1(m_1, m_1, m_H) \right\} \end{aligned} \quad (3.146)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_S &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ +2Q_1^2 \left(1 - 2B_0(m_1, m_1, m_A)\right) + 2g_1^+ g_1^- \left(1 - 2B_1(m_1, m_1, m_Z)\right) + \right. \\ &\quad - \frac{1}{4s_w^2} \frac{m_1^2}{m_W^2} B_0(m_1, m_1, m_Z) - \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_2^2}{m_W^2} |V_{12}|^2 B_0(m_1, m_2, m_W) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{4s_w^2} \frac{m_1^2}{m_W^2} B_0(m_1, m_1, m_H) \right\}. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Sämtliche Übergangsamplituden können durch die Zwei-Punkt-Funktionen B_0 und B_1 ausgedrückt werden, die in Gl. (3.103) und in Gl. (3.118) definiert sind. Der Beitrag des Photons zur Selbstenergie wird mit einer infinitesimal kleinen Photonmasse m_A berechnet, um die IR-Divergenz zu regularisieren. Die Ergebnisse für Σ_L , Σ_R und Σ_S stimmen mit den Gln. (16-18) von DENNER und SACK überein [69]. Durch die Vertauschungen $m_1 \leftrightarrow m_2$, $Q_1 \leftrightarrow Q_2$ und $g_1 \leftrightarrow g_2$ kann die Selbstenergie für ein Fermion mit $I_3 = -\frac{1}{2}$ für die 3-Komponente des Isospins beschrieben werden.

Die Selbstenergie $\Sigma_f(p_1^2)$ führt zu einer von dem 4-Impuls p_1 abhängigen Verschiebung der Quarkmasse m_1 . Schreibt man die Propagatorkorrektur in Form einer unendlichen Kette, indem 1, 2, ... durch Propagatoren verbundene Selbstenergien addiert werden, entsteht eine geometrische Reihe, die formal summiert werden kann:

$$\begin{aligned} S_f(p_1^2) &= \frac{1}{\not{p}_1 - m_1} + \frac{1}{\not{p}_1 - m_1} \Sigma_f(p_1^2) \frac{1}{\not{p}_1 - m_1} + \frac{1}{\not{p}_1 - m_1} \Sigma_f(p_1^2) \frac{1}{\not{p}_1 - m_1} \Sigma_f(p_1^2) \frac{1}{\not{p}_1 - m_1} + \dots \\ &= \frac{1}{\not{p}_1 - m_1} \frac{1}{1 - (\Sigma_f(p_1^2))/(\not{p}_1 - m_1)} = \frac{1}{\not{p}_1 - m_1 - \Sigma_f(p_1^2)}. \end{aligned}$$

Im Nenner kommt es zu der (unendlichen) Verschiebung der (nackten) Polmasse durch die unrenormierte (UV-divergente) Selbstenergie.

Durch die Addition des Counterterms in Gl. (A.11) für den Quarkpropagator erhält man die renormierte Selbstenergie in den noch unbestimmten Renormierungskonstanten $\delta Z_L^{\sigma f}$ für die linkshändigen Komponenten des Fermionendubletts, δZ_R^f für die rechtshändigen Fermionensingulets und δm_1 für die Fermionmasse. Mit Hilfe der beiden Beziehungen $\delta Z_V^f = \delta Z_R^f + \delta Z_L^{\sigma f}$ und $\delta Z_A^f = \delta Z_R^f - \delta Z_L^{\sigma f}$ kann die renormierte Selbstenergie auch durch einen Vektor- und einen Axialvektoranteil dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_f(p_1^2) &= \not{p}_1 \frac{1 - \gamma_5}{2} \left(\Sigma_L(p_1^2) + \delta Z_L^{\sigma f} \right) + \not{p}_1 \frac{1 + \gamma_5}{2} \left(\Sigma_R(p_1^2) + \delta Z_R^f \right) + \\ &\quad m_1 \left(\Sigma_S(p_1^2) - \frac{1}{2} \delta Z_L^{\sigma f} - \frac{1}{2} \delta Z_R^f - \frac{\delta m_1}{m_1} \right) \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$\widehat{\Sigma}_f(p_1^2) = \not{p}_1 \left(\Sigma_V(p_1^2) + \delta Z_V^f \right) + \not{p}_1 \gamma_5 \left(\Sigma_A(p_1^2) - \delta Z_A^f \right) + m_1 \left(\Sigma_S^f(p_1^2) - \delta Z_V^f - \frac{\delta m_1}{m_1} \right). \quad (3.149)$$

Im „On-Shell“-Renormierungsschema müssen die zwei folgenden Renormierungsbedingungen für die renormierte Selbstenergie erfüllt sein. Die Ableitung nach \not{p}_1 kann auf eine Ableitung nach p_1^2 umgeschrieben werden. Es gilt:

$$\widehat{\Sigma}_f(p_1^2) \Big|_{\not{p}_1 = m_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \not{p}_1} \widehat{\Sigma}_f(p_1^2) \Big|_{\not{p}_1 = m_1} = 0 \quad (3.150)$$

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}_1} \Big|_{\not{p}_1 = m_1} = \frac{\partial \not{p}_1^2}{\partial \not{p}_1} \frac{\partial}{\partial p_1^2} \Big|_{\not{p}_1 = m_1} = 2m_1 \frac{\partial}{\partial p_1^2} \Big|_{\not{p}_1 = m_1}. \quad (3.151)$$

Für die renormierte Selbstenergie Gl. (3.149) bedeutet dies, daß die Klammerausdrücke für den Vektoranteil, den Axialvektoranteil und den skalaren Anteil jeweils verschwinden müssen. Aus der Ableitung nach \not{p}_1 folgen drei weitere Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}_1} \widehat{\Sigma}_f(p_1^2) \Big|_{\not{p}=m_1} = \left(\Sigma_V(m_1^2) + \delta Z_V^f \right) + \gamma_5 \left(\Sigma_A(m_1^2) - \delta Z_A^f \right) + \quad (3.152)$$

$$m_1 \frac{\partial}{\partial \not{p}_1} \left(\Sigma_V(p_1^2) + \gamma_5 \Sigma_A(p_1^2) + \Sigma_S(p_1^2) \right) \Big|_{\not{p}=m_1} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.153)$$

Sortiert man diese Gleichung nach γ_5 -abhängigen und γ_5 -unabhängigen Komponenten, so erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\delta Z_V^f = -\Sigma_V^f(m_1)^2 - m_1 \frac{\partial}{\partial \not{p}_1} \left(\Sigma_V^f(p_1^2) + \Sigma_S^f(p_1^2) \right) \Big|_{\not{p}=m_1} \quad (3.154.1)$$

$$\delta Z_A^f = +\Sigma_A^f(m_1)^2 + m_1 \frac{\partial}{\partial \not{p}_1} \left(\Sigma_A^f(p_1^2) \right) \Big|_{\not{p}=m_1}, \quad (3.154.2)$$

$$\frac{\delta m_1}{m_1} = +\Sigma_S^f(m_1)^2 + \Sigma_V^f(m_1)^2 + m_1 \frac{\partial}{\partial \not{p}_1} \left(\Sigma_V^f(p_1^2) + \Sigma_S^f(p_1^2) \right) \Big|_{\not{p}=m_1}. \quad (3.154.3)$$

Die Ableitung von $\Sigma_A^f(p_1^2)$ nach \not{p}_1 verschwindet aufgrund der „On-Shell“-Bedingung in Gl. (3.149), nach der $\Sigma_A(m_1^2) = \delta Z_A^f$ gelten muß. Die links- und rechtshändigen Renormierungskonstanten lauten, wenn man die Ableitung nach \not{p}_1 durch die Ableitung nach p_1^2 ersetzt:

$$\delta Z_L^{\sigma f}(m_1^2) = -\Sigma_L(m_1^2) - m_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1^2} \left(\Sigma_L^f(p_1^2) + \Sigma_R^f(p_1^2) + 2\Sigma_S^f(p_1^2) \right) \Big|_{\not{p}=m_1}, \quad (3.155.1)$$

$$\delta Z_R^f(m_1^2) = -\Sigma_R(m_1^2) - m_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1^2} \left(\Sigma_L^f(p_1^2) + \Sigma_R^f(p_1^2) + 2\Sigma_S^f(p_1^2) \right) \Big|_{\not{p}=m_1}. \quad (3.155.2)$$

Die beiden Renormierungskonstanten $\delta Z_L^{\sigma f}$ und δZ_R^f sind damit auf die Komponenten der Selbstenergie zurückgeführt. Wie DENNER und SACK [69] ausführen, ist der Beitrag der Wellenfunktionsrenormierung δ_f für das Topquark und das Bottomquark zu der Einschleifenkorrektur durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\boxed{\delta_f = \frac{1}{2} \left(\delta Z_L^{\sigma t}(m_t^2) + \delta Z_L^{\sigma b}(m_b^2) \right) - \delta Z_L}, \quad (3.156)$$

wobei sich die Renormierungskonstante δZ_L gegen die entsprechende Renormierungskonstante in dem Counterterm für den Quark-Boson-Vertex tbW heraushebt. Der Beitrag δ_f wird in Abschnitt 3.11 für den Fall des masselosen Bottomquarks ($y = 0$) in analytischer Form angegeben. Die Massenabhängigkeit der beiden Renormierungskonstanten $\delta Z_L^{\sigma t}(m_t^2)$ und $\delta Z_L^{\sigma b}(m_b^2)$ bezeichnen die folgenden Parametrisierungen der Funktionen B_0 und B_1 sowie ihrer Koeffizienten:

$$\delta Z_L^{\sigma t}(m_t^2) : \quad m_1 \rightarrow m_t, \quad m_2 \rightarrow m_b, \quad g_1^\pm \rightarrow g_t^\pm, \quad Q_1 \rightarrow Q_t \quad (3.157.1)$$

$$\delta Z_L^{\sigma b}(m_b^2) : \quad m_1 \rightarrow m_b, \quad m_2 \rightarrow m_t, \quad g_1^\pm \rightarrow g_b^\pm, \quad Q_1 \rightarrow Q_b. \quad (3.157.2)$$

3.10 Die Selbstenergie der Bosonen

Für die Berechnung der Selbstenergie für das W^\pm - und Z -Boson wird auf die Arbeit von BÖHM *et al.* [76] verwiesen. Der Beitrag der Wellenfunktionsrenormierung δ_W des W -Bosons für die Einschleifenkorrekturen ist durch den transversalen Anteil der renormierten Selbstenergie des W -Bosons gegeben. Nach Gl. (24) aus [69] gilt

$$\delta_W = - \frac{\widehat{\Sigma}_T^W(q^2)}{q^2 - m_W^2} \Big|_{\not{=} m_W} = - \frac{\partial}{\partial q^2} \widehat{\Sigma}_T^W(q^2) \Big|_{\not{=} m_W}, \quad (3.158)$$

wobei der renormierte, transversale Anteil $\widehat{\Sigma}_T^W(q^2)$ der Selbstenergie des W -Bosons wiederum durch Gl. (6.1) aus [76] mit den unrenormierten, transversalen Anteilen der Selbstenergie des W - und des Z -Bosons verknüpft ist:

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_T^W(q^2) &= \Sigma_T^W(q^2) - \text{Re} \left[\Sigma_T^W(q^2) \right] + (q^2 - m_W^2) \left(\frac{\alpha}{6\pi} + \frac{c_w^2}{s_w^2} \times \right. \\ &\times \left. \text{Re} \left[\frac{\Sigma_T^Z(m_Z^2)}{m_Z^2} - \frac{\Sigma_T^W(m_W^2)}{m_W^2} + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{m_t^2 - m_b^2}{4s_w^2 m_W^2} \ln \left(\frac{m_t^2}{m_b^2} \right) \right] + \frac{1}{3s_w^2} \delta_q \right) \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\text{mit } \delta_q = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{m_u}{m_d} \right) + \ln \left(\frac{m_c}{m_s} \right) + \ln \left(\frac{m_t}{m_b} \right) \right\}.$$

Die unrenormierten, transversalen Anteile der Selbstenergie des W - und des Z -Bosons lauten schließlich nach Gl. (5.10) und Gl. (5.11) aus [76], wobei die Summen bei Σ_Z über die zwölf Fermionen f (sechs Quarks, sechs Leptonen) und bei Σ_W über die sechs Leptonen f mit ihren Massen m_f ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \Sigma_Z &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{4}{3} \sum_f \left(N_c(v_f^2 + a_f^2) \left((k^2 + 2m_f^2) F(k^2, \tilde{m}_f, \tilde{m}_f) - \frac{1}{3} k^2 \right) + \right. \quad (3.160) \\ &- \frac{3}{8} \frac{N_c m_f^2}{s_w^2 c_w^2} F(k^2, m_f, m_f) \right) + \frac{1}{3} \frac{c_w^2}{s_w^2} \left(\frac{2}{3} k^2 + (10k^2 + 20m_W^2) F(k^2, m_W, m_W) \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{1}{s_w^2 c_w^2} \left(3m_W^2 F(k^2, m_W, m_W) + \frac{k^2}{6} + \frac{10m_Z^2 - 2m_H^2 + k^2}{4} \times \right. \\ &\times \left(1 - \frac{m_H^2 + m_Z^2}{m_H^2 - m_Z^2} \ln \left(\frac{m_H}{m_Z} \right) - \ln \left(\frac{m_H m_Z}{m_W^2} \right) + F(k^2, m_H, m_Z) \right) \\ &- \frac{m_H^2}{2} \ln \left(\frac{m_H^2}{m_W^2} \right) - \frac{m_Z^2}{2} \ln \left(\frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) + \frac{(m_H^2 - m_Z^2)^2}{4k^2} F(k^2, m_Z, m_H) \right) + \\ &\left. + \frac{(c_w^2 - s_w^2)^2}{3 s_w^2 c_w^2} \left(\frac{k^2}{6} + \left(2m_W^2 + \frac{k^2}{4} \right) F(k^2, m_W, m_W) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_W &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{1}{3s_w^2} \left(\sum_f c_{1,f} \left(\left(k^2 - \frac{m_{+,f}^2 + m_{-,f}^2}{2} \right) \times \right. \quad (3.161) \right. \\ &\times \left. \left(1 - c_{2,f} \frac{m_{+,f}^2 + m_{-,f}^2}{m_{+,f}^2 - m_{-,f}^2} \ln \left(\frac{m_{+,f}}{m_{-,f}} \right) + F(k^2, m_{+,f}, m_{-,f}) \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k^2}{3} - \frac{(m_{+,f}^2 - m_{-,f}^2)^2}{2k^2} F(k^2, m_{+,f}, m_{-,f}) \Big) + \\
& - \frac{1}{3} \frac{c_w^2}{s_w^2} \left((7m_Z^2 + 7m_W^2 + 10k^2) \left(1 - \frac{m_Z^2}{m_Z^2 - m_W^2} \ln \left(\frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) + F(k^2, m_Z, m_W) \right) + \right. \\
& + 4m_Z^2 \ln \left(\frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) + \frac{2}{3} k^2 - \frac{2}{k^2} (m_Z^2 - m_W^2)^2 F(k^2, m_Z, m_W) \Big) + \\
& - \frac{4}{3} m_W^2 - \frac{32}{9} k^2 - \frac{1}{3} (4m_W^2 + 10k^2) F(k^2, m_A, m_W) + \frac{2}{3} \frac{m_W^4}{k^2} F(k^2, m_A, m_W) + \\
& + \frac{s_w^2}{c_w^2} m_W^2 \left(1 - \frac{m_Z^2}{m_Z^2 - m_W^2} \ln \left(\frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) + F(k^2, m_Z, m_W) \right) + \\
& + \frac{1}{s_w^2} m_W^2 \left(1 - \frac{m_H^2}{m_H^2 - m_W^2} \ln \left(\frac{m_H^2}{m_W^2} \right) + F(k^2, m_H, m_W) \right) + \\
& + \frac{1}{s_w^2} \left(\frac{5}{18} k^2 - \frac{1}{3} m_W^2 - \frac{1}{6} (m_Z^2 + m_H^2) + \frac{1}{6} (2m_W^2 - \frac{1}{2} k^2) \frac{m_Z^2}{m_Z^2 - m_W^2} \ln \left(\frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{6} \left(m_W^2 + m_Z^2 - \frac{k^2}{2} \right) F(k^2, m_Z, m_W) + \\
& + \frac{m_Z^2 - m_W^2)^2}{12k^2} F(k^2, m_Z, m_W) + \frac{1}{6} \left(2m_W^2 - \frac{k^2}{2} \right) \frac{m_H^2}{m_H^2 - m_W^2} \ln \left(\frac{m_H^2}{m_W^2} \right) + \\
& \left. - \frac{1}{6} \left(m_W^2 + m_H^2 - \frac{k^2}{2} \right) F(k^2, m_H, m_W) + \frac{(m_H^2 - m_W^2)^2}{12k^2} F(k^2, m_H, m_W) \right).
\end{aligned}$$

Die Funktion $F(m_1, M_0, M_1)$ wird im Zusammenhang mit dem Koeffizienten der vektoriellen Zwei-Punkt-Funktion in Abschnitt 3.8.4 definiert. Die Konstanten a_f und v_f stehen abkürzend für $a_f := I_{3,f} (1 - 4Q_f s_w^2) / (4s_w c_w)$ und $v_f = I_{3,f} / (4s_w c_w)$, wobei $I_{3,f}$ die 3-Komponente des Isospins und Q_f die Ladungen der Fermionen bezeichnen. N_c bezeichnet den Farbfaktor der zwölf Fermionen ($N_c = 3$ für Quarks und $N_c = 1$ für Leptonen). Bei \tilde{m}_f werden für die drei Neutrinos ν_e , ν_μ und ν_τ statt der Masse Null die Massen m_e , m_μ und m_τ der zugehörigen Leptonen verwendet. Die Massen $m_{+,f}$ sind die Fermionmassen mit der 3-Komponente $I_{3,f} = \pm 1/2$, wobei $f = 1, 2, 3$ die Quarks mit $c_{1,f} = 3$ und $c_{2,f} = 1$ und $f = 4, 5, 6$ die Leptonen mit $c_{1,f} = 1$ und $c_{2,f} = 0$ der ersten, zweiten und dritten Fermiongeneration beschreiben.

3.11 Die Renormierung

3.11.1 Der Renormierungsfaktor δ_f

Die Beiträge δ_f und δ_W für die Wellenfunktionsrenormierung werden in diesem und dem nächsten Abschnitt für den Fall eines masselosen Bottomquarks analytisch bestimmt. Anschließend wird die Einschleifenkorrektur und die Bremsstrahlungskorrektur für zwei verschiedene Renormierungsschemata numerisch ausgewertet. Gegenüber einer direkten numerischen Bestimmung der Beiträge der Einschleifenkorrekturen zu den einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen weist dieses Vorgehen zwei Vorteile auf: Das Verschwinden der IR-Singularität in $\ln(m_A/m_t)$, der kollinearen Singularität in $\ln(m_b/m_t)$ und $\ln^2(m_b/m_t)$ sowie der durch die Dimension $D = 4 - 2\varepsilon$ regularisierten UV-Divergenzen durch die Counterterme kann kontrolliert werden.

Der Beitrag δ_f der Wellenfunktionsrenormierung für das Top- und Bottomquark wird aus Gl. (3.156) berechnet und durch die Funktion $F(m_1, M_0, M_1)$ und ihre Ableitung nach dem Quadrat ihres ersten Arguments $\frac{\partial}{\partial m_1^2} F(m_1, M_0, M_1) = F'(m_1, M_0, M_1)$ analytisch dargestellt:

$$\begin{aligned}
\delta_f = \frac{\alpha}{4\pi} & \left\{ \frac{1}{s_w^2} \frac{m_t^2(m_H^2 - 4m_t^2)}{8m_W^2} F'(m_t, m_t, m_H) - \frac{1}{s_w^2} \frac{m_H^2}{16m_W^2} F(m_t, m_t, m_H) + \right. & (3.162) \\
& - (Q_t^2 + Q_b^2) \ln\left(\frac{m_A^2}{m_t^2}\right) + 3Q_b^2 \ln\left(\frac{m_b}{m_t}\right) + \frac{1}{s_w^2} \frac{m_H^2 m_t^2}{8(m_H^2 - m_t^2)m_W^2} \ln\left(\frac{m_H}{m_t}\right) + \\
& - \frac{1}{s_w^2} \frac{m_t^6(4m_t^2 - 3m_W^2) + 2m_W^4(m_t^4 + m_t^2 m_W^2 - m_W^4)}{4m_t^4(m_t^2 - m_W^2)^2} \ln\left(\frac{m_W}{m_t}\right) + \\
& + \frac{1}{s_w^2} \frac{(m_t^2 - m_W^2)(2m_t^2 + m_W^2)}{4m_t^4} \ln\left(\frac{m_t^2 - m_W^2}{m_t^2}\right) + \\
& - \left(\frac{1}{s_w^2} \frac{m_t^2 m_Z^2}{8m_W^2(m_t^2 - m_Z^2)} - \left((g_b^-)^2 - \frac{m_Z^2}{m_t^2 - m_Z^2} (g_t^-)^2 \right) \right) \ln\left(\frac{m_Z}{m_t}\right) + \\
& - \frac{1}{s_w^2} \frac{m_t^4(3m_t^2 + 5m_W^2) + 2m_W^4(m_t^2 - 2m_W^2)}{16m_t^2 m_W^2(m_t^2 - m_W^2)} - 2(Q_t^2 + Q_b^2) + \frac{1}{4} \left((g_b^-)^2 + (g_b^+)^2 \right) + \\
& - \left(\frac{1}{16s_w^2} \frac{m_Z^2}{m_W^2} + \frac{1}{2} \left((g_t^-)^2 - (g_t^+)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{m_Z^2}{m_t^2} (g_t^+)^2 \right) F(m_t, m_t, m_Z) + \\
& + \left(\frac{1}{s_w^2} \frac{m_t^2 m_Z^2}{8m_W^2} - \frac{1}{2} \left((2m_t^2 - m_Z^2) \left((g_t^-)^2 + (g_t^+)^2 \right) - 8m_t^2 g_t^- g_t^+ \right) \right) F'(m_t, m_t, m_Z) + \\
& \left. - \left(\frac{1}{2s_w^2} + \frac{1}{4s_w^2} \frac{m_t^2}{m_W^2} + \frac{1}{2} (Q_t^2 + Q_b^2 + (g_b^-)^2 + (g_t^-)^2) \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_t^2}\right) \right) \right\} - \delta_{Z_L}.
\end{aligned}$$

Die Ableitung von $F(m_1, M_0, M_1)$ nach m_1^2 ergibt:

$$\begin{aligned}
F'(m_1, M_0, M_1) = & -\frac{1}{m_1^2} - \frac{M_1^2 - M_0^2}{m_1^2} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right) - \frac{(M_1^2 - M_0^2)^2 - (M_1^2 + M_0^2)m_1^2}{2m_1^2 \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}} \times & (3.163) \\
& \times \ln\left(\frac{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 + \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}{M_0^2 + M_1^2 - m_1^2 - \sqrt{\lambda(m_1^2, M_0^2, M_1^2)}}\right).
\end{aligned}$$

Die IR- und UV-divergenten Anteile von δ_f lauten:

$$\delta_{f_{IR}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -2(Q_t^2 + Q_b^2) \ln\left(\frac{m_A}{m_t}\right) + 3Q_b^2 \ln\left(\frac{m_b}{m_t}\right) \right\} \quad (3.164)$$

$$\delta_{f_{UV}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{2}(Q_t^2 + Q_b^2) - \frac{1}{2} \left((g_t^-)^2 + (g_b^-)^2 \right) - \frac{1}{s_w^2} \frac{m_t^2 - 2m_W^2}{4m_W^2} \right\} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.165)$$

3.11.2 Der Renormierungsfaktor δ_W

Das Ergebnis für den aus Gl. (3.158) berechneten Beitrag δ_W der Wellenfunktionsrenormierung für das W -Boson wird wie oben durch die Funktion $F(m_1, M_0, M_1)$ und ihre

Ableitung $F'(m_1, M_0, M_1)$ analytisch dargestellt, wobei neben den Bosonmassen m_W, m_Z, m_A und m_H sowie den Quarkmassen m_t und m_b weitere zusätzliche Massen leichterer Fermionen auftreten. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\delta_W = & \frac{\alpha}{8\pi} \frac{1}{s_w^2} \left\{ -\frac{1}{s_w^2} \frac{(m_t^2 + m_W^2)^2}{2m_W^4} - \frac{m_t^2(m_t^2 - m_W^2)}{2m_W^4} - \frac{41 + 64s_w^2 + 40c_w^4}{12s_w^2} + \right. & (3.166) \\
& + 2Q_d(1 + 2Q_d s_w^2) - 2Q_u(1 - 2Q_u s_w^2) - \frac{m_H^4 - 4m_H^2 m_W^2 + 12m_W^4}{12m_W^2} \times \\
& \times F'(m_W, m_H, m_W) - \frac{(1 - 4c_w^2)(1 + 20c_w^2 + 12c_w^4)}{12c_w^4} m_W^2 F'(m_W, m_Z, m_W) + \\
& + \left(\frac{1}{2s_w^2} \frac{m_H^2(m_H^2 - 2m_W^2)}{6m_W^4} - \frac{c_w^2}{s_w^2} \frac{m_H^2 - 6m_W^2}{6m_W^2} \right) F(m_W, m_H, m_W) + \\
& + \left(\frac{1}{2s_w^2} \frac{1 + 6c_w^2 s_w^2}{6c_w^4} - \frac{c_w^2}{s_w^2} \frac{1 + 24c_w^2}{3} \right) F(m_W, m_Z, m_W) + F(m_Z, m_W, m_W) \times \\
& \times \frac{1 + 16c_w^2 - 68c_w^4 - 48c_w^6}{12s_w^2} - \frac{1}{2s_w^2} \frac{m_H^4 - 4m_H^2 m_Z^2 + 12m_Z^4}{6m_Z^4} F(m_Z, m_H, m_Z) + \\
& + \left(\frac{1}{s_w^2} \frac{m_t^2 - m_Z^2}{2m_Z^2} + 2Q_u(1 - 2Q_u s_w^2) \frac{2m_t^2 + m_Z^2}{m_Z^2} \right) F(m_Z, m_t, m_t) - 8s_w^2 \times \\
& \times \left(Q_u^2 \ln\left(\frac{m_u}{m_t}\right) - Q_d^2 \ln\left(\frac{m_d}{m_t}\right) + Q_c^2 \ln\left(\frac{m_c}{m_t}\right) + Q_s^2 \ln\left(\frac{m_s}{m_t}\right) + Q_b^2 \ln\left(\frac{m_b}{m_t}\right) + \right. \\
& + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{m_e}{m_t}\right) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{m_\mu}{m_t}\right) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{m_\tau}{m_t}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_A}{m_W}\right) \left. \right) - \ln\left(\frac{m_t^2 - m_W^2}{m_t^2}\right) \times \\
& \times \left(\frac{m_t^6 - m_W^6}{m_W^6} + \frac{c_w^2}{s_w^2} \frac{m_t^6 - 3m_t^2 m_w^4 + 2m_W^6}{2m_w^6} \right) + \frac{m_H^2(10m_H^2 - m_Z^2)}{6(m_H^2 - m_W^2)(m_H^2 - m_Z^2)} \times \\
& \times \ln\left(\frac{m_H}{m_t}\right) + \frac{(33 - 82c_w^2 - 50c_w^4)m_H^2 - (34 - 93c_w^2 - 40c_w^4)m_W^2}{6s_w^4(m_H^2 - m_W^2)} \ln\left(\frac{m_W}{m_t}\right) + \\
& \left. + \left(2\frac{c_w^2}{s_w^2} \frac{m_H^2 - m_W^2}{m_H^2 - m_Z^2} - \frac{1}{2s_w^2} \frac{3m_H^2 + 4m_W^2}{m_H^2 - m_Z^2} + \frac{68 - 165c_w^2 - 244c_w^4 + 48c_w^6}{6s_w^4} \ln\left(\frac{m_Z}{m_t}\right) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Der Beitrag der leichten Fermionen, bestehend aus den fünf Quarks b, c, s, u, d und aus den drei Leptonen e^-, μ^-, τ^- , lautet:

$$\begin{aligned}
\delta_{W,leicht} = & -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ 3Q_d^2 \left(\ln\left(\frac{m_b}{m_t}\right) + \ln\left(\frac{m_d}{m_t}\right) + \ln\left(\frac{m_s}{m_t}\right) \right) + \right. & (3.167) \\
& \left. + 3Q_u^2 \left(\ln\left(\frac{m_c}{m_t}\right) + \ln\left(\frac{m_u}{m_t}\right) \right) + \left(\ln\left(\frac{m_e}{m_t}\right) + \ln\left(\frac{m_\mu}{m_t}\right) + \ln\left(\frac{m_\tau}{m_t}\right) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Mit Ausnahme von $\delta_{W,leicht}$ hebt sich in der Summe der Einschleifenkorrektur und der Bremsstrahlungskorrektur die kollineare Singularität in $\ln(m_b/m_t)$ und $\ln^2(m_b/m_t)$ heraus. Bei den in Abschnitt 3.11.4 und 3.11.5 behandelten Renormierungsschemata werden jedoch jeweils die Anteile $\delta_{W,leicht}$ subtrahiert. Der Beitrag δ_W ist UV-konvergent, aber enthält neben $\delta_{W,leicht}$ die IR-Divergenz:

$$\delta_{W_{IR}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left\{ 2 \ln \left(\frac{m_A}{m_t} \right) + 4 Q_b^2 \ln \left(\frac{m_b}{m_t} \right) \right\}. \quad (3.168)$$

3.11.3 Der Counterterm δ_{CT}

Der Beitrag des Counterterms für den Quark-Boson-Vertex Wtb zur Einschleifenkorrektur ist nach Gl. (A.20) durch die folgenden drei Renormierungskonstanten gegeben:

$$\delta_{CT} = \delta Z_1^W - \delta Z_2^W + \delta Z_L. \quad (3.169)$$

δZ_L hebt sich in der Summe mit den Beiträgen für die Wellenfunktionsrenormierung der beiden Quarks und des W -Bosons heraus. Die beiden unbekanntenen Renormierungskonstanten δZ_1^W und δZ_2^W für das W -Boson können über das lineare Gleichungssystem (3.170) aus den bekannten Renormierungskonstanten δZ_i^Z und δZ_i^A für das Z -Boson und das Photon mit $i = 1, 2$ bestimmt werden [76]. Das Gleichungssystem und seine Umkehrung lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \delta Z_i^A = s_w^2 \delta Z_i^W + c_w^2 \delta Z_i^B \\ \delta Z_i^Z = c_w^2 \delta Z_i^W + s_w^2 \delta Z_i^B \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \delta Z_i^W = \frac{c_w^2}{c_w^2 - s_w^2} \delta Z_i^Z - \frac{s_w^2}{c_w^2 - s_w^2} \delta Z_i^A, \\ \delta Z_i^B = -\frac{s_w^2}{c_w^2 - s_w^2} \delta Z_i^Z + \frac{c_w^2}{c_w^2 - s_w^2} \delta Z_i^A. \end{array} \right. \quad (3.170)$$

Die Linearkombination für die Renormierungskonstante δZ_i^B für das Isosingulett des intermediären Vektorbosons B aus der elektroschwachen Theorie von GLASHOW, WEINBERG und SALAM spielt im folgenden keine Rolle. Mit Hilfe der aus Gl. (5.42) bekannten Renormierungskonstanten [76]

$$\delta Z_1^Z = \frac{\alpha}{4\pi} \left(-\frac{4}{3} \Sigma + \left(7 - 6 \frac{c_w^2}{s_w^2} \right) \Delta_W + \frac{2}{3} \right) + \frac{c_w^2 - s_w^2}{s_w^2} \left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z} - \frac{\delta m_W^2}{m_W} \right), \quad (3.171)$$

$$\delta Z_2^Z = \frac{\alpha}{4\pi} \left(-\frac{4}{3} \Sigma + \left(7 - 4 \frac{c_w^2}{s_w^2} \right) \Delta_W + \frac{2}{3} \right) + \frac{c_w^2 - s_w^2}{s_w^2} \left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z} - \frac{\delta m_W^2}{m_W} \right), \quad (3.172)$$

$$\delta Z_1^A = \frac{\alpha}{4\pi} \left(-\frac{4}{3} \Sigma + \Delta_W + \frac{2}{3} \right), \quad (3.173)$$

$$\delta Z_2^A = \frac{\alpha}{4\pi} \left(-\frac{4}{3} \Sigma + 3 \Delta_W + \frac{2}{3} \right) \quad (3.174)$$

und der Abkürzung für den mit $D = 4 - 2\varepsilon$ regularisierten UV-divergenten Anteil

$$\Delta_W := \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi \mu^2}{m_W^2} \right) \quad (3.175)$$

kann der gesuchte Beitrag des Counterterms berechnet werden. Dabei fallen die Massenrenormierungskonstanten δm_Z^2 und δm_W^2 sowie die Selbstenergie Σ vollständig heraus und es verbleibt der folgende Beitrag:

$$\boxed{\delta_{CT} = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{s_w^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi \mu^2}{m_W^2} \right) \right) + \delta Z_L.} \quad (3.176)$$

Die Summe $\delta = \delta_V + \delta_f + \delta_W + \delta_{CT}$ aus den Beiträgen der Vertexkorrektur δ_V , den Beiträgen für die Wellenfunktionsrenormierungen δ_f der Quarks und δ_W des W -Bosons sowie des Beitrags des Counterterms für den W -Bosonvertex ergeben die komplette Einschleifenkorrektur im elektroschwachen Sektor des Standardmodells. Für den Fall eines masselosen Bottomquarks können für die beiden Beiträge δ_f und δ_W die in Gl. (3.162) und (3.166) angegebenen analytischen Darstellungen gefunden werden, die im folgenden für das sogenannte α - und G_F -Schema numerisch ausgewertet werden.

3.11.4 Das α -Renormierungsschema

In diesem und dem nächsten Unterabschnitt werden die notwendigsten Gleichungen für das sogenannte α - und das G_F -Renormierungsschema angegeben, um die Beiträge der elektroschwachen Strahlungskorrekturen zu den Helizitäts-Strukturfunktionen darzustellen. Für eine Diskussion der beiden Renormierungsschemata wird auf die Abschnitte 7, 8 und 9 der Arbeit [77] von DENNER verwiesen. Sämtliche Referenzen auf Gleichungen beziehen sich im folgenden auf diese Arbeit.

Die effektive Kopplungskonstante α hängt von der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} der beteiligten Teilchen ab. Für ein masseloses Teilchen mit $\sqrt{s} = 0$ ist die Kopplungskonstante durch die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante gegeben:

$$\alpha(0) = \alpha = \frac{1}{137.035\,989\,5}, \quad (3.177.1)$$

aber für höhere Schwerpunktsenergien \sqrt{s} wächst störungstheoretisch die effektive Kopplungskonstante mit

$$\alpha(s) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Delta\alpha(s)} \quad \text{und} \quad \Delta\alpha(s) := \frac{\alpha(0)}{3\pi} \sum_f N_{c,f} Q_f \ln\left(\frac{s}{m_f^2}\right), \quad (3.177.2)$$

wobei die Summe über sämtliche Fermionenmassen (sechs Quarkmassen m_d, m_u, m_s, m_c, m_b und m_t und drei Leptonmassen m_e, m_μ und m_τ) auszuführen ist und der Farbfaktor für die Quarks $N_c = 3$ und die Leptonen $N_c = 1$ beträgt. Q_f bezeichnet den Bruchteil der Ladungen der Fermionen von der positiven Elementarladung ($Q_d = Q_s = Q_b = -\frac{1}{3}$, $Q_u = Q_c = Q_t = +\frac{2}{3}$ und $Q_e = Q_\mu = Q_\tau = -1$). Im Ruhesystem des Topquarks beträgt die effektive Kopplungskonstante $\alpha(m_t^2) = 0.007\,891$, d.h. sie ist 8.1 % größer als $\alpha(0) = 0.007\,297$.

Die strahlungskorrigierten Helizitäts-Strukturfunktionen Γ_i für $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P ergeben sich im α -Renormierungsschema nach Gl. (9.20) aus [77], wobei $\Gamma_{0,i}$ die BORNsche Näherung bezeichnet:

$$\Gamma_i = \Gamma_{0,i} \left(1 + \delta - \Delta\alpha(m_t^2) + \frac{c_w^2}{s_w^2} \Delta\rho \right) \frac{1}{1 - \Delta\alpha(m_t^2)} \frac{1}{1 + \frac{c_w^2}{s_w^2} \Delta\bar{\rho}} =: \hat{\Gamma}_{0,i} (1 + \delta_{total}). \quad (3.178)$$

Die Zusatzterme in $\Delta\rho$ und $\Delta\bar{\rho}$ stellen die führenden Beiträge der Strahlungskorrekturen höherer Ordnungen dar. Ihre Definitionen lauten nach Gl. (8.20) und Gl. (8.22) aus [77]:

$$\Delta\rho = \frac{\alpha(0)}{4\pi} \frac{3}{4} \frac{m_t^2}{s_w^2 m_w^2}, \quad \Delta\bar{\rho} := \frac{3 G_F m_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(1 + \frac{G_F m_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2} (19 - 2\pi^2) \right). \quad (3.179)$$

Ihre Beiträge sind sehr klein, wie man der Tab. (3.4) entnimmt. Der Beitrag der Einschleifenkorrektur δ_{Loop} und der Bremsstrahlungskorrektur δ_{Brems} werden zur Gesamtkorrektur $\delta = \delta_{Loop} + \delta_{Brems}$ zusammengefaßt. Schließlich kann der Beitrag der elektroschwachen Korrektur im α -Schema in der Form $1 + \delta_{total}$ (siehe Tab. (3.4)) dargestellt werden.

3.11.5 Das G_F -Renormierungsschema

Das G_F -Schema lautet nach Gl. (9.22) aus [77]:

$$\bar{\Gamma}_{0,i} = \Gamma_{0,i} \left(1 + \Delta r - \Delta\alpha(m_t^2) + \frac{c_w^2}{s_w^2} \Delta\rho \right) \frac{1}{1 - \Delta\alpha(m_t^2)} \frac{1}{1 + \frac{c_w^2}{s_w^2} \Delta\rho}, \quad (3.180.1)$$

$$\bar{\Gamma}_i = \bar{\Gamma}_{0,i} (1 + \delta - \delta r) =: \bar{\Gamma}_{0,i} (1 + \bar{\delta}_{total}) \quad (3.180.2)$$

wobei Δr in Gl. (8.13) aus [77] definiert wird:

$$\Delta r := \frac{\sqrt{2} G_F}{\pi \alpha(0)} m_W^2 \left(1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) - 1. \quad (3.181)$$

Das G_F -Schema ist zweistufig: Zunächst wird für jede Helizitäts-Strukturfunktion $\Gamma_{0,i}$ in BORNscher Näherung eine modifizierte Helizitäts-Strukturfunktion $\bar{\Gamma}_{0,i}$ berechnet. Anschließend ergibt sich die Gesamtkorrektur $\bar{\delta}_{total}$ für die modifizierten Helizitäts-Strukturfunktionen aus der Differenz $\delta - \Delta r$. Der Beitrag der elektroschwachen Korrekturen im G_F -Schema wird in der Form $1 + \bar{\delta}_{total}$ (siehe Tab. (3.4)) dargestellt. Entwickelt man $\bar{\Gamma}_i$ (unter Berücksichtigung von $\bar{\Gamma}_{0,i}$) und Γ_i in $O(\alpha)$, so erhält man das gleiche Resultat.

3.12 Numerische Ergebnisse

In Tab. (3.4) werden die Beiträge der Strahlungskorrekturen δ_{total} für das α - und $\bar{\delta}_{total}$ für das G_F -Renormierungsschema numerisch ausgewertet. Die Massen für die Fermionen sind dem Anhang H zu entnehmen. Die für die Einschleifenkorrekturen benötigten numerischen Werte für die Koeffizienten der Vertexkorrektur (δ_0 und δ_3), der Selbstenergie der Fermionen (δ_f), der Selbstenergie des W-Bosons (δ_W) und des Counterterms (δ_{CT}) betragen:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -11.079\,475\,\alpha(0), \\ \delta_3 &= -0.006\,463\,\alpha(0), \\ \delta_f &= 6.659\,775\,\alpha(0), \\ \delta_W &= 1.873\,265\,\alpha(0), \\ \delta_{CT} &= 6.283\,586\,\alpha(0). \end{aligned} \quad (3.182)$$

Dabei werden für die Einschleifenkorrektur sowie für die Bremsstrahlungskorrektur Terme proportional zu der IR-Singularität in $\ln(m_A/m_t)$, der kollinearen Singularität in $\ln(m_b/m_t)$ und der UV-Singularität in $(1/\varepsilon)$ jeweils Null gesetzt, da die UV-Divergenzen aufgrund der Renormierung verschwinden und in der Summe der Strahlungskorrekturen die IR-Divergenzen aufgrund des LEE-NAUENBERG-Theorems sich herausheben. Die Abhängigkeit der Einschleifenkorrektur von den Helizitäts-Strukturfunktionen drückt sich im Fall des masselosen Bottomquarks einzig in den skalierten Koeffizienten $\hat{G}_{3,i}$ aus. Für $m_b = 0$ gilt:

Rate	δ	δ_{Loop}	δ_{Brems}	δ_{total}	$\bar{\delta}_{total}$
$U + L$	0.049 608 7	0.054 031 5	-0.004 422 76	0.049 561 1	0.015 447 0
$U^P + L^P$	0.042 139 7	0.046 793 0	-0.004 653 35	0.042 334 3	0.007 978 0
U	0.054 968 7	0.058 981 6	-0.004 012 87	0.054 747 4	0.020 807 0
U^P	0.054 329 7	0.058 981 6	-0.004 651 88	0.054 129 1	0.020 168 0
L	0.047 344 9	0.051 940 8	-0.004 595 87	0.047 370 7	0.013 183 2
L^P	0.047 288 1	0.051 940 8	-0.004 652 73	0.047 315 8	0.013 126 4
F	0.054 466 9	0.058 981 6	-0.004 514 69	0.054 261 8	0.020 305 2
F^P	0.054 786 1	0.058 981 6	-0.004 195 42	0.054 570 7	0.020 624 4
I^P	0.050 903 6	0.055 461 2	-0.004 557 61	0.050 814 0	0.016 741 9
A^P	0.050 964 3	0.055 461 2	-0.004 496 88	0.050 872 8	0.016 802 6

Tabelle 3.4: Die Strahlungskorrekturen im α - und G_F -Schema für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, I^P$ und A^P . δ bezeichnet die Summe der Einschleifenkorrekturen δ_{Loop} und der Bremsstrahlungskorrektur δ_{Brems} . δ_{total} ist die Korrektur im α -Schema, $\bar{\delta}_{total}$ die Korrektur im G_F -Schema.

$$\hat{G}_{3,U} = \hat{G}_{3,U^P} = \hat{G}_{3,F} = \hat{G}_{3,F^P} = 0 \text{ und} \quad (3.183)$$

$$\hat{G}_{3,L} = \hat{G}_{3,L^P} = 2 \hat{G}_{3,I^P} = 2 \hat{G}_{3,A^P} = \frac{m_t^2 - m_W^2}{2 m_t}.$$

Die Strahlungskorrektur δ_i ist durch die Summe der Einschleifenkorrektur $\delta_{Loop,i}$ und der Bremsstrahlungskorrektur $\delta_{Brems,i}$ für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, I^P$ und A^P gegeben:

$$\delta_i := \delta_{Loop,i} + \delta_{Brems,i}. \quad (3.184.1)$$

Die Einschleifenkorrektur und die Bremsstrahlungskorrektur sind durch die Gleichungen

$$\delta_{Loop,i} := \frac{1}{1 - \Delta\alpha(m_t^2)} \left(\delta_0 + \delta_3 \hat{G}_{3,i} + \delta_f + \delta_W + \delta_{CT} \right), \quad (3.184.2)$$

$$\delta_{Brems,i} := \frac{-1}{1 - \Delta\alpha(m_t^2)} \left(\frac{4 m_t^2}{m_t^2 - m_W^2} (\sigma_{1,div.} + \sigma_{2,kon.}) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{m_t^3 G_F x^2}{8 \sqrt{2} \pi} \frac{1}{\Gamma_{Born,i}} \times \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=-1,0} \rho_{(n)} \mathcal{R}_{(n)} + \sum_{m,n} \rho_{(m,n)} \mathcal{R}_{(m,n)} + \sum_{n=0,1} \sigma_{(n)} \mathcal{S}_{(n)} + \\ &\sum_{m,n} \sigma_{(m,n)} \mathcal{S}_{(m,n)} + \sum_{n=0,1} \tau_{(n)} \mathcal{T}_{(n)} + \sum_{m,n} \tau_{(m,n)} \mathcal{T}_{(m,n)} \end{aligned} \right\} \right), \quad (3.184.3)$$

gegeben, wobei $\Gamma_{Born,i}$ im IR-konvergenten Anteil der Bremsstrahlungskorrektur die Helizitäts-Strukturfunktionen in BORNScher Näherung beschreiben und $\sigma_{1,div.}$ und $\sigma_{2,kon.}$ die beiden Anteile des Soft-Photon-Faktors aus Abschnitt 3.6.2 für den Fall $m_b = 0$ bzw. $y = 0$ sind. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_{1,div.}}{e^2} = & -Q_t \left((Q_t - Q_b)(1 + x^2) - Q_b(1 - x^2) \right) \left(\frac{\pi^2}{6} - \ln \left(\frac{1 - x^2}{y} \right) \ln \left(\frac{(1 - x)^4}{(1 - x^2)y\Lambda^2} \right) \right) + \\
& + (Q_t - Q_b) \left(Q_t(1 + x^2) - Q_b(1 - x^2) \right) \left(\frac{\pi^2}{6} - \ln \left(\frac{1 - x^2}{xy} \right) \ln \left(\frac{(1 - x)^4 x}{(1 - x^2)y\Lambda^2} \right) \right) + \\
& - (1 - x^2) \left(Q_b^2 + Q_t^2 \ln \left(\frac{1 - x^2}{y} \right) + (Q_t - Q_b)^2 \ln \left(\frac{1 - x^2}{xy} \right) \right) + \\
& - 2(1 - x^2) \left(Q_t^2 - Q_b Q_t + Q_b^2 \right) \times \ln \left(\frac{y\Lambda}{(1 - x)^2} \right), \tag{3.185}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_{2,kon.}}{e^2} = & -(Q_t - Q_b)^2 \times \left(1 - x^2 + 2 \ln(x) \right) - Q_t^2 \times \left(1 - x^2 + 2x^2 \ln(x) \right) + \\
& - 2(Q_t^2 - Q_b Q_t + Q_b^2) \times \left(1 - x^2 - 2x^2 \ln(x) - 2(1 - x^2) \ln(1 + x) \right) + \\
& + (Q_t - Q_b) \times \left(Q_t(1 + x^2) - Q_b(1 - x^2) \right) \times \\
& \times \left(\frac{\pi^2}{2} - \text{Li}_2(x^2) + 2 \ln \left(\frac{1 - x^2}{y} \right) \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \frac{1}{y} \right) + 2 \ln(x) \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \right) + \\
& - Q_t \times \left((Q_t - Q_b)(1 + x^2) - Q_b(1 - x^2) \right) \times \\
& \times \left(\frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2(x^2) + 2 \ln \left(\frac{1 - x^2}{y} \right) \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \frac{1}{y} \right) + 2 \ln(x) \ln(1 - x^2) \right). \tag{3.186}
\end{aligned}$$

Die Beiträge der Strahlungskorrektur δ_i und ihrer beiden Anteile, der Einschleifenkorrektur $\delta_{Loop,i}$ und der Bremsstrahlungskorrektur $\delta_{Brems.,i}$ (siehe Erläuterungen oben), werden in der Tab. (3.4) numerisch ausgewertet. Aus der Strahlungskorrektur δ_i werden nach Gl. (3.178) und Gl. (3.180.1) die Korrekturen δ_{total} und $\bar{\delta}_{total}$ für das α - und das G_F -Renormierungsschema berechnet. Den numerischen Werten der Einschleifenkorrektur und der Bremsstrahlungskorrektur kommt getrennt keine physikalische Bedeutung zu, da sie implizit noch die unphysikalischen Regularisierungsparameter enthalten. Die Wahl, $\ln(m_A/m_t)$ und $\ln(m_b/m_t)$ Null zu setzen, ist willkürlich. Mit dieser Wahl führt die Einschleifenkorrektur zu einer Erhöhung der Helizitäts-Strukturfunktion zwischen 4.7% für $i = U^P + L^P$ und 5.9% für $i = U, U^P, F$ und F^P , während die Bremsstrahlungskorrektur lediglich zu einer Erniedrigung zwischen -0.47% und -0.40% führt. Der Beitrag der Bremsstrahlungskorrektur ist verglichen mit dem Beitrag der Einschleifenkorrektur klein. Für die totale Rate $U + L$ beträgt die Bremsstrahlungskorrektur betragsmäßig 8.1% der Einschleifenkorrektur.

Die Summe der Strahlungskorrekturen δ_i variiert für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen zwischen 4.2% für $i = U^P + L^P$ und 5.5% für $i = U$. Die numerischen Werte für die Korrekturen $\delta_{total,i}$ im α -Schema unterscheiden sich kaum von der Summe δ_i . Für die totale Rate $U + L$ ist die effektive Korrektur $\delta_{total,U+L}$ um 0.096% kleiner als

δ_{U+L} . Bei der Korrektur $\delta_{total,i}$ werden gegenüber δ_i zusätzlich die dominierenden Beiträge höherer Ordnungen der Störungsreihe berücksichtigt. Ihre Beiträge sind erwartungsgemäß klein. Die numerischen Werte der effektiven Korrekturen $\bar{\delta}_{total,i}$ im G_F -Schema variieren für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen zwischen 0.8% für $i = U^P + L^P$ und 2.1% für $i = U$. Die Korrekturbeiträge der elektroschwachen Strahlungskorrektur werden durch das G_F -Renormierungsschema für die Energieskalen des hier untersuchten Zerfalls des polarisierten Topquarks $t(\uparrow) \rightarrow b + W^+$ besser beschrieben als durch das α -Renormierungsschema, dessen Parameter bei anderen Energieskalen bestimmt werden. Im weiteren werden die Beiträge $\bar{\delta}_{total,i}$ des G_F -Renormierungsschemas als elektroschwache Strahlungskorrekturen bezeichnet.

Zum Schluß werden die Beiträge der Helizitäts-Strukturfunktionen aus Kapitel 2 angegeben, die in der BORNSchen Näherung aufgrund der Drehimpulserhaltung für den Zwei-Körper-Zerfall $t \rightarrow b + W^+$ verboten sind: Im Fall $m_b \rightarrow 0$ müssen die Helizitäts-Strukturfunktionen $\hat{\Gamma}_{++}^{++}$, $\hat{\Gamma}_{00}^{--}$ und $\hat{\Gamma}_{+0}^{+-}$ für linkshändige Bottomquarks verschwinden (für rechtshändige Bottomquarks mit $m_b \neq 0$ sind sie erlaubt), die beiden Helizitäts-Strukturfunktionen $\hat{\Gamma}_{++}^{--}$ und $\hat{\Gamma}_{--}^{++}$ sind generell verboten und müssen auf dem Bornterm-Niveau verschwinden. Für den Drei-Körper-Zerfall $t \rightarrow b + \gamma + W^+$ kann der fehlende Drehimpuls aber durch den Photonspin kompensiert werden. Dieser Zerfallsprozeß in linkshändige Bottomquarks ist aber stark unterdrückt, wie die numerischen Werte unten zeigen. Im folgenden werden die fünf Helizitäts-Strukturfunktionen $\hat{\Gamma}_{++}^{++}$, $\hat{\Gamma}_{++}^{--}$, $\hat{\Gamma}_{--}^{++}$, $\hat{\Gamma}_{00}^{--}$ und $\hat{\Gamma}_{+0}^{+-}$ sowohl für das α - als auch für das G_F -Schema angegeben. Bei den Größen $\hat{\Gamma}_i$ handelt es sich um die auf die totale Rate in BORNScher Näherung skalierten Helizitäts-Strukturfunktionen, d.h. es gilt $\hat{\Gamma}_i := \Gamma_i/\Gamma_{Born,U+L}$ für $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, I^P$ und A^P . Die numerischen Werte lauten:

α -Schema:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{++}^{++} &= \frac{1}{4}(\hat{\Gamma}_U + \hat{\Gamma}_F + \hat{\Gamma}_{U^P} + \hat{\Gamma}_{F^P}) = 0.000\,068\,830, \\
\hat{\Gamma}_{++}^{--} &= \frac{1}{4}(\hat{\Gamma}_U + \hat{\Gamma}_F - \hat{\Gamma}_{U^P} - \hat{\Gamma}_{F^P}) = 0.000\,003\,266, \\
\hat{\Gamma}_{--}^{++} &= \frac{1}{4}(\hat{\Gamma}_U - \hat{\Gamma}_F + \hat{\Gamma}_{U^P} - \hat{\Gamma}_{F^P}) = 0.000\,022\,968, \\
\hat{\Gamma}_{00}^{--} &= \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}_L - \hat{\Gamma}_{L^P}) = 0.000\,019\,299, \\
\hat{\Gamma}_{+0}^{+-} &= (\hat{\Gamma}_{I^P} + \hat{\Gamma}_{A^P}) = -0.000\,013\,433.
\end{aligned} \tag{3.187.1}$$

G_F -Schema:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{++}^{++} &= \frac{1}{4}(\hat{\Gamma}_U + \hat{\Gamma}_F + \hat{\Gamma}_{U^P} + \hat{\Gamma}_{F^P}) = 0.000\,071\,131, \\
\hat{\Gamma}_{++}^{--} &= \frac{1}{4}(\hat{\Gamma}_U + \hat{\Gamma}_F - \hat{\Gamma}_{U^P} - \hat{\Gamma}_{F^P}) = 0.000\,003\,370, \\
\hat{\Gamma}_{--}^{++} &= \frac{1}{4}(\hat{\Gamma}_U - \hat{\Gamma}_F + \hat{\Gamma}_{U^P} - \hat{\Gamma}_{F^P}) = 0.000\,023\,740, \\
\hat{\Gamma}_{00}^{--} &= \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}_L - \hat{\Gamma}_{L^P}) = 0.000\,019\,967, \\
\hat{\Gamma}_{+0}^{+-} &= (\hat{\Gamma}_{I^P} + \hat{\Gamma}_{A^P}) = -0.000\,013\,867.
\end{aligned} \tag{3.187.2}$$

Kapitel 4

Die QCD-Strahlungskorrekturen

4.1 Der Hadrontensor der Bremsstrahlung

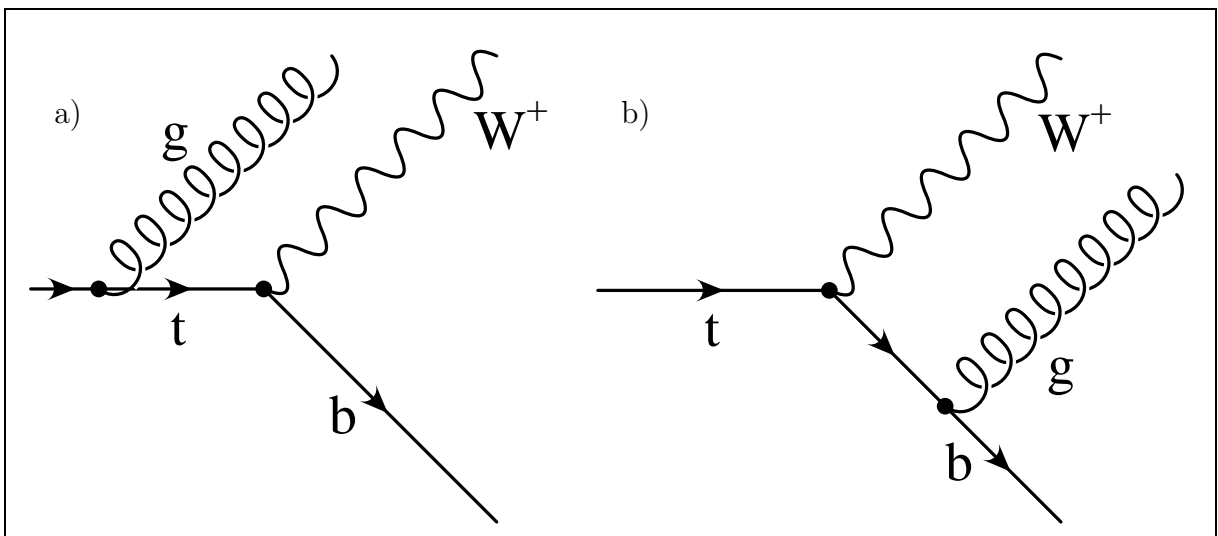


Abbildung 4.1: Feynman-Diagramme der QCD-Bremsstrahlungskorrektur. Die Gluonabstrahlung kann entweder a) vom Topquark oder b) vom Bottomquark erfolgen. Das Gluon koppelt an die Farbladung der Quarks.

In diesem Kapitel werden die QCD-Strahlungskorrekturen in der $O(\alpha_s)$ behandelt. Die QCD-Bremsstrahlungskorrektur kann als Spezialfall aus der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur in Kapitel 3 abgeleitet werden. Die UV-Divergenz der QCD-Vertexkorrektur wird durch das „On-Shell“-Schema regularisiert, wobei die Renormierungskonstanten durch die Selbstenergie der Quarks berechnet werden. Die erzielten Ergebnisse für die renormierte Vertexkorrektur werden mit der Literatur [60] verglichen und ihre Beiträge zu den verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen bestimmt. Abschließend werden die QCD-Strahlungskorrekturen der $O(\alpha_s)$ numerisch ausgewertet und diskutiert.

Zur QCD-Bremsstrahlungskorrektur tragen nur die zwei FEYNMAN-Diagramme in Abb. (4.1) bei. Die Gluonen koppeln als Träger der chromodynamischen Wechselwirkung an die Farbladung der Quarks oder, da sie selbst eine Farbladung tragen, an sich selbst. In der $O(\alpha_s)$ der Störungstheorie kann für den semi-leptonischen Zerfall $t \rightarrow b$ das Gluon daher nur an das Topquark oder an das Bottomquark koppeln. Da das W -Boson keine Farbladung trägt, ist eine Kopplung des Gluons an das W -Boson im Standardmodell nicht möglich. Die Übergangsamplituden für die FEYNMAN-Diagramme in Abb. (4.1) lauten:

$$\mathcal{M}_a^\mu = \bar{u}(p_b, s_b) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \left(\frac{\not{p}_t - \not{k} + m_t}{m_t^2 - (p_t - k)^2} \right) \left(g_s \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\sigma \right) u(p_t, s_t) \varepsilon_{\sigma,a}^*(k), \quad (4.1)$$

$$\mathcal{M}_b^\mu = \bar{u}(p_b, s_b) \left(g_s \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\sigma \right) \left(\frac{\not{p}_b - \not{k} + m_b}{m_b^2 - (p_b - k)^2} \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u(p_t, s_t) \varepsilon_{\sigma,a}^*(k). \quad (4.2)$$

Ersetzt man in Kapitel 3.1 für die vier Übergangsamplituden der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur $Q_t = Q_b \rightarrow 1$ und $Q_W \rightarrow 0$ sowie $e \rightarrow g_s(\lambda_a/2)$, erhält man die beiden Übergangsamplituden für die Gluonabstrahlung, wenn man zusätzlich den Farbindex an den Polarisationsvektor für das auslaufende Gluon hängt. Wie in Kapitel 3 kann die Gesamtamplitude vereinfacht werden:

$$\mathcal{M}_{QCD}^\mu = -g_s \frac{\lambda^a}{2} \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \bar{u}_b \left(\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\sigma - 2 p_t^\sigma \gamma^\mu}{2 k \cdot p_t} + \frac{\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\mu + 2 p_b^\sigma \gamma^\mu}{2 k \cdot p_b} \right) \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} u_t \varepsilon_{\sigma,a}^*. \quad (4.3)$$

Da die Polarisationszustände der Gluonen nicht beobachtet werden, wird beim Quadrieren der Gesamtamplitude über die Polarisationsvektoren summiert. Bei der Vollständigkeits-Relation für die Polarisationsvektoren kommt die KRONECKER-Deltafunktion δ_{ab} mit $a, b \in \{1, \dots, 8\}$ für die Farbindizes hinzu. Es gilt:

$$\sum \varepsilon_{\sigma,a}^*(k) \varepsilon_{\tau,b}(k) = -g_{\sigma\tau} \delta_{ab}. \quad (4.4)$$

Die GELL-MANN-Matrix λ_a beschreibt die acht verschiedenen Farbzustände des Gluons in der Farb- $SU(3)$ -Symmetrie. Im Quadrat für die Gesamtamplitude führt die Kontraktion über den Farbindex auf den CASIMIR-Operator $C_F = 4/3$. Die Beiträge der QCD-Bremsstrahlungskorrektur zu den Helizitäts-Strukturfunktionen können durch die Ersetzung $Q_t = Q_b \rightarrow 1$ in den Koeffizientenfunktionen im Anhang E und durch die Ersetzung $\alpha \rightarrow \alpha_s C_F$ in Gl. (3.184.1) aus der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur übernommen werden. Es gilt:

$$\Gamma_{Brems.,i}^{GWS} \rightarrow \Gamma_{Brems.,i}^{QCD} \text{ für } Q_t = Q_b \rightarrow 1 \text{ und } \alpha \rightarrow \alpha_s C_F \text{ bzw. } e^2 \rightarrow g_s^2 C_F. \quad (4.5)$$

Die zur Differenz $Q_t - Q_b$ proportionalen Koeffizientenfunktionen $\tau_{(n)}$ und $\tau_{(m,n)}$ entfallen. Der IR-divergente Soft-Photon-Faktor Δ_{GWS} geht in den Soft-Gluon-Faktor Δ_{QCD} über (s.u.), wo auch Terme proportional zur Differenz $Q_t - Q_b$ verschwinden. Der Vorfaktor des Hadrontensors in Gl. (3.10) für den IR-konvergenten Anteil der Bremsstrahlungskorrektur kann durch die Ersetzung $Q_t = Q_b \rightarrow 1$ vereinfacht und der Rest des Hadrontensors für die QCD-Bremsstrahlungskorrektur kann unverändert übernommen werden. Mit den

Bezeichnungen $N_t = 2k \cdot p_t$ und $N_b = 2k \cdot p_b$ ergeben die Ersetzungsvorschriften für den Soft-Gluon-Faktor

$$\Delta_{GWS} \longrightarrow \Delta_{QCD} := -4g_s^2 C_F \left(\frac{m_t^2}{N_t^2} - 2 \frac{p_t \cdot p_b}{N_t N_b} + \frac{m_b^2}{N_b^2} \right) \quad (4.6)$$

und für den Vorfaktor

$$-4e^2 \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \frac{N_t N_b}{(N_t - N_b)^2} \left(\frac{Q_t}{N_t} - \frac{Q_b}{N_b} \right) \longrightarrow -4g_s^2 C_F \frac{g_w^2}{2} |V_{tb}|^2 \frac{1}{N_t N_b}. \quad (4.7)$$

Wie in Kapitel 3 wird der Hadrontensor der Bremsstrahlungskorrektur in einen IR-konvergenten und einen IR-divergenten Anteil zerlegt. Um bei der Berechnung des divergenten Anteils den universellen Soft-Gluon-Faktor abspalten zu können, wird der Born-term im Soft-Gluon-Punkt ($k = 0$) ausgewertet. Der Preis hierfür ist ein konvergenter Zusatzterm. Es gilt in Analogie zu Gl. (3.10):

$$\boxed{H_{QCD}^{\mu\nu} = \left\{ \mathcal{H}_{QCD}^{\mu\nu} + (\mathcal{B}^{\mu\nu} - \mathcal{B}_o^{\mu\nu}) \cdot \Delta_{QCD} \right\}_{kon.} + \left\{ \mathcal{B}_o^{\mu\nu} \Delta_{QCD} \right\}_{div.}} \quad (4.8)$$

Im folgenden wird kurz die Phasenraumintegration diskutiert und die Gleichung für den Beitrag der Bremsstrahlungskorrekturen zu den Helizitäts-Strukturfunktionen sowie das Ergebnis für den über den Phasenraum integrierten Soft-Gluon-Faktor angegeben.

4.2 Die Phasenraumintegration

Die Diskussion der Phasenraumgrenzen für die QCD-Bremsstrahlungskorrektur kann aus Kapitel 3 übernommen werden, wenn dort überall das Photon mit der Energie E_A und der Masse m_A durch ein Gluon mit der Energie E_g und der Masse m_g als Regularisierungsparameter für die IR-Singularität ersetzt wird. Der Beitrag für den konvergenten Anteil der QCD-Bremsstrahlungskorrektur zu den verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen ist durch das Doppel-Integral über das Amplitudenquadrat $|\mathcal{M}_{kon.}|_i^2$ nach dE_g und dE' gegeben, wobei die Variable E' durch die Gleichung $E' = m_t^2 + m_W^2 - 2m_t E_W$ mit der Energie E_W des W -Bosons verknüpft ist. Mit der Definition für die Amplitudenquadrate

$$|\mathcal{M}_{kon.}|_i^2 := \left\{ \mathcal{H}_{QCD}^{\mu\nu} + (\mathcal{B}^{\mu\nu} - \mathcal{B}_o^{\mu\nu}) \cdot \Delta_{QCD} \right\}_{kon.} IP_{\mu\nu,i} \quad (4.9)$$

lautet das Doppel-Integral für den konvergenten Anteil:

$$\Gamma_{kon.,i} = \frac{1}{16 m_t^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{(m_b+m_g)^2}^{(m_t-m_W)^2} dE_g \int_{E_{g,min.}}^{E_{g,max.}} dE' |\mathcal{M}_{kon.}|_i^2 \Big|_{\theta=\theta(E',E_g)}. \quad (4.10)$$

Führt man eine Partialbruch-Zerlegung der parametrisierten Amplitudenquadrate (zur Parametrisierung siehe Abschnitt 3.3) nach der Gluonenergie durch, findet man für die entsprechende Integration nur Potenzen der Gluonenergie als Integranden; gebrochenrationale Polynome wie in Abschnitt 3.4 treten nicht auf. Die Integrale lauten:

Rate	$\rho_{(n)}$	$\rho_{(m,n)}$	$\sigma_{(n)}$	$\sigma_{(m,n)}$
$U + L$	–	$(-2, -1), \dots, (0, -1)$	–	$(0, 0), \dots, (1, 0)$
$U^P + L^P$	$-1, 0$	$(-2, 0), \dots, (1, 0)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1), \dots, (2, 1)$
U	–	$(-2, 1), \dots, (2, 1)$	–	$(0, 2), \dots, (3, 2)$
U^P	$-1, 0$	$(-2, 2), \dots, (3, 2)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3), \dots, (4, 3)$
L	–	$(-2, 1), \dots, (2, 1)$	–	$(0, 2), \dots, (3, 2)$
L^P	$-1, 0$	$(-2, 2), \dots, (3, 2)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3), \dots, (4, 3)$
F	$-1, 0$	$(-2, 0), \dots, (1, 0)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1), \dots, (2, 1)$
F^P	–	$(-2, 1), \dots, (2, 1)$	–	$(0, 2), \dots, (3, 2)$
S	–	$(-2, -1), \dots, (0, -1)$	–	$(0, 0), \dots, (1, 0)$
S^P	$-1, 0$	$(-2, 0), \dots, (1, 0)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 1), \dots, (2, 1)$
I^P	$-1, 0$	$(-2, 2), \dots, (2, 2)$	$0, 1$	$(0, 0), (0, 3), \dots, (3, 3)$
A^P	–	$(-2, 1), \dots, (2, 1)$	–	$(0, 2), \dots, (2, 2)$

Tabelle 4.1: Die Indizes m und n der beitragenden QCD-Koeffizientenfunktionen. Der Index n beschreibt den Grad der Wurzel über die Källén-Funktion $\lambda(1, x^2, z)$ im Nenner und der Index m den Grad der Integrationsvariablen z im Zähler der Grundintegrale \mathcal{R} und \mathcal{S} . Im QCD-Fall verschwinden die Integrale vom Typ \mathcal{T} und der Grad m der Koeffizientenfunktionen $\rho_{(m,n)}$ ist i.a. um Eins kleiner als im Fall der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrekturen.

$$\int_{E_{g,min.}}^{E_{g,max.}} \left\{ \frac{1}{E_g^2}, \frac{1}{E_g}, 1, E_g, E_g^2 \right\} dE_g = \left\{ -\frac{1}{E_g}, \ln E_g, E_g, \frac{1}{2}E_g, \frac{1}{3}E_g^2 \right\} \Big|_{E_{g,min.}}^{E_{g,max.}}. \quad (4.11)$$

Nach Einsetzen der Integrationsgrenzen, führt eine weitere Partialbruchzerlegung nach der zweiten Integrationsvariablen E' auf die in Kapitel 3 diskutierten Integraltypen $\mathcal{R}_{(n)}$, $\mathcal{R}_{(m,n)}$, $\mathcal{S}_{(n)}$ und $\mathcal{S}_{(m,n)}$.

Die Integration des Soft-Gluon-Faktors Δ_{QCD} erfolgt nach Gl. (4.12). Die Tilde über den Integrationsgrenzen kennzeichnet ihre Abhängigkeit von der Gluonmasse m_g . Wie oben führt die Partialbruch-Zerlegung des parametrisierten Soft-Gluon-Faktors nur auf Potenzen der Gluonenergie als Integranden. Das Ergebnis für den integrierten Soft-Gluon-Faktor wird im Abschnitt 4.3 als Spezialfall des Soft-Photon-Faktors angegeben. Die Integrale lauten:

$$\text{SGF} = -\frac{1}{2m_t} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(m_b+m_g)^2}^{(m_t-m_W)^2} dE' \int_{\tilde{E}_{g,min.}}^{\tilde{E}_{g,max.}} dE_g \Delta_{QCD}, \quad (4.12)$$

$$\int_{\tilde{E}_{g,min.}}^{\tilde{E}_{g,max.}} \left\{ \frac{1}{E_g^2}, \frac{1}{E_g}, 1 \right\} dE_g = \left\{ -\frac{1}{E_g}, \ln E_g, E_g \right\} \Big|_{\tilde{E}_{g,min.}}^{\tilde{E}_{g,max.}}. \quad (4.13)$$

Der Beitrag der QCD-Bremsstrahlungskorrektur zu den verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P wird implizit in Gl. (4.14) angegeben. Die Integrale $\mathcal{R}_{(n)}$, $\mathcal{R}_{(m,n)}$, $\mathcal{S}_{(n)}$ und $\mathcal{S}_{(m,n)}$ sind im Anhang D zusammengestellt. Die Koeffizientenfunktionen $\rho_{(n)}$, $\rho_{(m,n)}$, $\sigma_{(n)}$ und $\sigma_{(m,n)}$ können aus dem Anhang E entnommen werden, wenn dort $Q_t = Q_b \rightarrow 1$ gesetzt wird. Die Tab. (4.1) gibt Auskunft über den Wertebereich der Indizes m und n der beitragenden Grundintegrale für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen. Der QCD-Bremsstrahlungsbeitrag zu den Helizitäts-Strukturfunktionen lautet:

$$\Gamma_{Brems.,i}^{QCD} = \frac{4m_t^2}{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}} \Gamma_{0,i} \times \text{SGF} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{m_t^3 |V_{tb}|^2 G_F}{8\sqrt{2}\pi} \times \quad (4.14)$$

$$\times \left\{ \sum_{n=-1,0} \rho_{(n),i} \mathcal{R}_{(n)} + \sum_{m,n} \rho_{(m,n),i} \mathcal{R}_{(m,n)} + \sum_{n=0,1} \sigma_{(n),i} \mathcal{S}_{(n)} + \sum_{m,n} \sigma_{(m,n),i} \mathcal{S}_{(m,n)} \right\}.$$

Die Grundintegrale vom Typ \mathcal{T} , die bei der elektroschwachen Bremsstrahlungskorrektur in Verbindung mit der Kopplung des Photons an das W -Boson auftreten, entfallen bei der QCD-Bremsstrahlungskorrektur. Sie gehen auf die Integranden $(2m_t E_A - E' + m_b^2 + m_g^2)^n$ mit $n = -2, -1$ bei der Integration über die Photonenergie E_A zurück. Auch ohne sie fallen sämtliche Scheinsingularitäten, die durch die „Cut-Off“-Parameter ε_1 und ε_2 in den Grundintegralen regularisiert werden, in der Summe mit den Koeffizientenfunktionen in Gl. (4.14) heraus. Die explizite Darstellung der Bremsstrahlungsbeiträge für die einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen sind zu umfangreich, um hier wiedergegeben zu werden - sie liegen in Form eines MATHEMATICA-Notebooks vor - aber für den Fall des masselosen Bottomquarks in Kapitel 5 vereinfachen sich die QCD-Strahlungskorrekturen derart, daß eine überschaubare Darstellung möglich ist.

4.3 Der Soft-Gluon-Faktor

Der Soft-Gluon-Faktor folgt mit der Ersetzung $Q_t = Q_b \rightarrow 1$ als Spezialfall aus dem Soft-Photon-Faktor in Gl. (3.66). Mit $x = m_W/m_t$, $y = m_b/m_t$, $\Lambda = m_g/m_t$ und der Abkürzung λ für die KÄLLÉN-Funktion $\lambda(1, x^2, y^2)$ erhält man:

$$\text{SGF} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ (1-x^2+y^2) \left[\text{Li}_2\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{1-x^2+y^2+\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1-x^2+y^2+\sqrt{\lambda}}{1-x^2+y^2-\sqrt{\lambda}}\right)^2 \right] + \right. \quad (4.15)$$

$$\left. + \ln\left(\frac{1-x^2+y^2+\sqrt{\lambda}}{1-x^2+y^2-\sqrt{\lambda}}\right) \left\{ \ln\left(\frac{y\Lambda}{(1-x)^2-y^2}\right) - \frac{1}{2} \right\} \right] - 2\sqrt{\lambda} \left\{ \ln\left(\frac{y\Lambda}{(1-x)^2-y^2}\right) + \frac{1}{2} \right\} +$$

$$\left. + 2 \left\{ \mathcal{R}_{(-1)} - \sqrt{\lambda} \mathcal{R}_{(0)} \right\} - \mathcal{S}_{(0,0)} + (1-x^2+y^2) \left\{ \mathcal{S}_{(0)} + \mathcal{R}_{(0)} \ln\left(\frac{1-x^2+y^2-\sqrt{\lambda}}{1-x^2+y^2+\sqrt{\lambda}}\right) \right\} \right\}.$$

Die ersten beiden Zeilen in Gl. (4.15) stammen aus dem IR-divergenten Anteil Δ_1 des Soft-Photon-Faktors, der jetzt durch die skalierte Gluonmasse $\Lambda = (m_g/m_t)$ regularisiert wird, die letzte Zeile stammt aus dem konvergenten Rest Δ_2 . Die Integrale $\mathcal{R}_{(-1)}$, $\mathcal{R}_{(0)}$,

$\mathcal{S}_{(0)}$ und $\mathcal{S}_{(0,0)}$ können dem Anhang D entnommen werden. Mit Hilfe der von DENNER und SACK [69] eingeführten Abkürzungen¹

$$w_1 = \frac{x}{y} \cdot \frac{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 + x^2 - y^2 + \sqrt{\lambda}}, \quad \text{und} \quad w_\mu = \frac{x}{y} \cdot \frac{1 - x^2 + y^2 - \sqrt{\lambda}}{1 + x^2 - y^2 - \sqrt{\lambda}} \quad (4.16)$$

kann der Soft-Gluon-Faktor umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \text{SGF} = & -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ (1-x^2+y^2) \left[2\text{Li}_2(1-w_1w_\mu) + \text{Li}_2(1-w_1^2) - \text{Li}_2\left(1-\frac{w_1}{w_\mu}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} \ln(w_1w_\mu)^2 + \ln(w_1w_\mu) \left\{ \ln\left(\frac{\lambda w_1}{x y \Lambda}\right) + \frac{1}{2} \right\} \right] + 2\sqrt{\lambda} \left\{ \ln\left(\frac{\lambda}{x y \Lambda}\right) - 2 \right\} + \right. \\ & \left. + \ln\left(\frac{w_1}{w_\mu}\right) - 2y^2 \ln(w_1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Gl. (4.17) stimmt analytisch mit dem aus den Funktionen J_{00} , J_{10} und J_{11} zusammengesetzten Soft-Gluon-Faktor von DENNER und SACK (siehe Appendix von [69]) überein. Der Soft-Gluon-Faktor für den Fall eines masselosen Bottomquarks wird in [53] angegeben. Er enthält eine kollineare Singularität in der Masse des Bottomquarks in Form der Logarithmen $\ln(y)$ und $\ln^2(y)$. Diese Logarithmen heben sich erst gegen die entsprechenden logarithmischen Singularitäten in dem konvergenten Anteil des Hadrontensors heraus. Rechnungen, die diesen IR-konvergenten Anteil des Hadrontensors gegenüber den IR-divergenten Soft-Gluon-Faktor vernachlässigen, liefern aufgrund der kollinearen Singularität falsche Resultate.

4.4 Die QCD-Selbstenergie der Quarks

Die Selbstenergie der Quarks wird für die Berechnung der Renormierungskonstanten

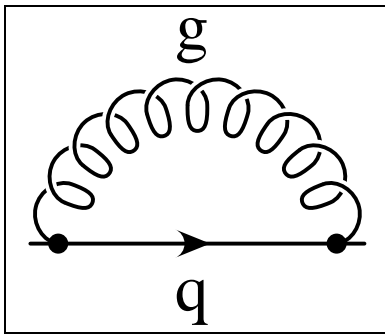


Abbildung 4.2: Selbstenergie d. Quarks durch virtuelle Gluonen.

benötigt. Im Gegensatz zur elektroschwachen Selbstenergie der Quarks trägt in der QCD nur das in Abb. (4.2) gezeigte FEYNMAN-Diagramm zur Selbstenergie bei. Ein Quark mit dem Impuls p und der Masse m kann spontan ein Gluon emittieren und wieder absorbieren. Dieser Effekt, der auch als Selbstwechselwirkung oder als Propagatorkorrektur bezeichnet wird, führt zu einer Änderung der Quarkmasse (s.u.). Die Übergangsamplitude wird mit dem in Abb. (3.7d) skizzierten Impulsfluß berechnet, wobei - um die UV-Divergenz des Schleifenintegrals über den Impuls k durch $D = 4 - 2\varepsilon$ dimensional regularisieren zu können - die Kontraktion der Gamma-Matrizen in der D -dimensionalen Raum-Zeit erfolgt:

¹Sie definieren: $m_\pm := m_W \pm m_b$, $\mu := \frac{m_-}{m_+}$, $u := \left(\frac{m_i^2 - m^2}{m_i^2 - m_+^2}\right)^{1/2}$, $w_1 := \frac{u-1}{u+1}$ und $w_\mu := \frac{u-\mu}{u+\mu}$. Setzt man diese Definitionen ineinander ein, so erhält man nach Einführung der skalierten Massen x und y die in Gl. (4.16) angegebenen Ausdrücke.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left(\frac{g_s}{2} \lambda_a \gamma_\mu \right) \left(\frac{m - \not{k}}{m^2 - k^2} \right) \left(\frac{g_s}{2} \lambda_b \gamma_\nu \right) \left(\frac{\delta^{ab} g^{\mu\nu}}{(k+p)^2 - m_g^2} \right) = \\ &- g_s^2 C_F \left(\frac{D m - (2-D)\not{k}}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m_g^2]} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Kontraktion der GELL-MANN-Matrizen λ , die die acht verschiedenen Farbzustände des Gluons beschreiben, führt auf den CASIMIR-Operator C_F . Eine mögliche IR-Divergenz des Schleifenintegrals wird durch die Gluonmasse m_g regularisiert.

Das Integral kann in einen skalaren Anteil Σ_S proportional zur Masse m und einen vektoriellen Anteil Σ_V proportional zum Impuls p des Quarks zerlegt werden. Ersetzt man die starke Ladung g_s durch die starke Kopplungskonstante α_s , so erhält man für die fermionische Selbstenergie Σ_f :

$$\Sigma_f = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{D m - (2-D)\not{k}}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m_g^2]} =: \not{p} \Sigma_V + m \Sigma_S. \quad (4.19)$$

Mit Hilfe der für die elektroschwachen Einschleifenkorrekturen entwickelten Berechnungstechniken, kann das Integral auf die Zweipunktintegrale B_0 und B_1 zurückgeführt werden. Beide Zweipunktintegrale sind IR-konvergent, d.h. die Grenzwerte für $m_g \rightarrow 0$ existieren. Es gilt:

$$B_0(m, m, m_g) \rightarrow \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + 3 + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\}, \quad (4.20)$$

$$B_1(m, m, m_g) \rightarrow -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + 2 + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (4.21)$$

Die Abhängigkeit von der infinitesimal kleinen Gluonmasse ist verschwunden. Damit ist auch die QCD-Selbstenergie der Quarks IR-konvergent. Der skalare und der vektorielle Anteil der Selbstenergie lautet mit $D = 4 - 2\varepsilon$:

$$\Sigma_S = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ - (4-2\varepsilon) B_0(m, m, m_g) \right\} = -\frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \frac{3}{2} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\}, \quad (4.22)$$

$$\Sigma_V = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ - (2-2\varepsilon) B_1(m, m, m_g) \right\} = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + 2 + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (4.23)$$

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie die Selbstenergie zu einer Verschiebung der Polmasse führt.

4.5 Die Renormierung

Die unrenormierte Propagatorkorrektur $\Sigma_0(p^2)$ des Quarks in Gl. (4.25) ist in der $O(\alpha_s)$ durch den Quarkpropagator in der nackten (unendlich großen) Masse m_0 und der UV-divergenten Selbstenergie des Quarks gegeben. Fügt man $2, \dots, n$ weitere Quark-Selbstenergien Σ_f , die durch Propagatoren miteinander verbunden sind, zu einer Schleifenkette zusammen, so erhält man eine Propagatorkorrektur der Ordnung $O(\alpha_s^n)$. Für den

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ kann sie formal als geometrische Reihe $(\not{p} - m_0 - \Sigma_f)^{-1}$ geschrieben werden, die zu der erwähnten Verschiebung der Polmasse durch die UV-divergente Selbstenergie führt. Die effektive Polmasse ist durch die renormierte (physikalische) Masse m der Quarks gegeben. In $O(\alpha_s)$ gilt:

$$\Sigma_0(p^2) = \text{---} \bullet \text{---} \xrightarrow{\mathbf{q}} \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \xrightarrow{\mathbf{q}} \text{---} \bullet \text{---} + O(\alpha_s^2) \quad (4.24)$$

$$= (\not{p} - m_0)^{-1} + \Sigma_f(p^2) + O(\alpha_s^2) \quad (4.25)$$

Um die UV-Divergenzen aus der Theorie zu beseitigen, müssen sowohl die Wellenfunktion, die Quarkmasse und die elektrische Ladung renormiert werden. Für die Renormierungskonstanten, die ebenfalls formal in eine Potenzreihe der Kopplungskonstanten α_s geschrieben werden können, gilt der Renormierungsansatz:

$$e_0 = Z_1 e_r, \quad Z_1 = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} Z_1^{(1)} + O(\alpha_s^2) \quad (\text{Ladungs-Renormierung}), \quad (4.26)$$

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2} \psi_r, \quad Z_2 = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} Z_2^{(1)} + O(\alpha_s^2) \quad (\text{Wellenfunktions-Renormierung}), \quad (4.27)$$

$$m_0 = Z_m m_r, \quad Z_m = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} Z_m^{(1)} + O(\alpha_s^2) \quad (\text{Massen-Renormierung}). \quad (4.28)$$

Mit e_0 , ψ_0 und m_0 werden die unrenormierten Größen, mit e , ψ und m die renormierten Größen bezeichnet.

Das „On-Shell“-Renormierungsschema ist durch die beiden Renormierungsbedingungen $\Sigma(p^2) = 0|_{\not{p}=m}$ und $\frac{d}{d\not{p}}\Sigma(p^2)|_{\not{p}=m} = 0$ festgelegt, nach dem das nullte und erste Glied der TAYLOR-Entwicklung der renormierten Propagatorkorrektur Σ verschwinden soll. Wendet man den Renormierungsansatz auf die Gl. (4.25) an, so erhält man einen für die $O(\alpha_s)$ gültigen Ausdruck für die renormierte Propagatorkorrektur

$$\Sigma_r(p^2) = \Sigma_f(p^2) - (Z_2 - 1)\not{p} + (Z_2 Z_m - 1)m, \quad (4.29)$$

der mit Hilfe der Renormierungsbedingungen auf eine Berechnungsmöglichkeit für die Renormierungskonstanten Z_m und Z_2 aus der Quark-Selbstenergie führt. Für das „On-Shell“-Schema ist die Berechnung der Selbstenergie daher notwendig. Mit den beiden Renormierungsbedingungen folgt aus Gl. (4.29)

$$Z_m = 1 - \frac{1}{m} \Sigma_f(p^2) \Big|_{\not{p}=m} \quad \text{und} \quad Z_2 = 1 + \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_f(p^2) \Big|_{\not{p}=m}. \quad (4.30)$$

Die Ableitung nach \not{p} kann auf eine Ableitung nach p^2 umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} = \frac{d\not{p}^2}{d\not{p}} \frac{\partial}{\partial \not{p}^2} \Big|_{\not{p}=m} = 2\not{p} \frac{\partial}{\partial p^2} \Big|_{\not{p}=m} = 2m \frac{\partial}{\partial p^2} \Big|_{\not{p}=m}. \quad (4.31)$$

Die Renormierung der nackten Ladung e_0 führt auf den Renormierungsansatz für die Vertexkorrektur in Gl. (4.39). Da die unrenormierten Strukturfunktionen V , V_b , V_t , A , A_b und A_t alle bereits von der $O(\alpha_s)$ sind, muß lediglich die Kovariante γ^μ des Quark-Boson-Vertex mit dem Faktor $(Z_1 - 1)$ multipliziert werden, um für den Vektor- und den Axialvektoranteil für die erste Ordnung $O(\alpha_s)$ der Störungstheorie gültige, homogene Gleichungen in α_s zu erhalten.

$$\Lambda^\mu(p_t, p_b) = Z_1 \cdot \Lambda_0^\mu(p_t, p_b), \quad (4.39)$$

$$V^\mu = (Z_1 - 1)\gamma^\mu + V_0 \gamma^\mu + V_{t,0} p_t^\mu + V_{b,0} p_b^\mu \Rightarrow V = V_0 + Z_1 - 1, \quad (4.40)$$

$$A_R^\mu = (Z_1 - 1)\gamma^\mu + A_0 \gamma^\mu + A_{t,0} p_t^\mu + A_{b,0} p_b^\mu \Rightarrow A = A_0 + Z_1 - 1. \quad (4.41)$$

Die UV-konvergenten Strukturfunktionen V_t , V_b sowie A_t und A_b bleiben durch den Renormierungsansatz unverändert, lediglich die zur Kovarianten γ^μ proportionalen, UV-divergenten Strukturfunktionen werden renormiert.

Aufgrund der WARD-Identität $\Lambda^\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma$ folgt für die Renormierungsfaktoren die Identität $Z_1 = Z_2$ (siehe z.B. [63, 78]). Die WARD-Identität ist eine Konsequenz der aus der lokalen Eichtheorie folgenden Stromerhaltung und garantiert die Gleichheit der elektrischen Ladung, unabhängig von der Masse des sie tragenden Teilchens. Für nichtabelsche Eichtheorien kann sie durch Einführung der BECCHI-ROUET-STORA Transformation zu der SLAVNOV-TAYLOR-Identität verallgemeinert werden. Hier erspart sie Rechenarbeit. Für die Renormierungskonstante Z_1 gilt:

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_t m_b} \right) + 4 + 2 \ln \left(\frac{m_g^2}{m_t m_b} \right) \right\}. \quad (4.42)$$

4.6 Die Vertexkorrektur

4.6.1 Die renormierte Vertexkorrektur

Die Übergangsamplitude für die Einschleifenkorrektur des Quark-Boson-Vertexes tbW für das in Abb. (4.3) gezeigte FEYNMAN-Diagramm lautet, verglichen mit der BORNschen Näherung:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Loop}^\mu &= \bar{u}(p_b) \left(g_s \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\sigma \right) \left(\frac{\not{p}_b + \not{k} + m_b}{m_b^2 - (p_b + k)^2} \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\not{p}_t + \not{k} + m_t}{m_t^2 - (p_t + k)^2} \right) \left(g_s \frac{\lambda^b}{2} \gamma^\tau \right) u(p_t) \times \left(\frac{g_{\sigma\tau} \delta_{ab}}{k^2 - m_g^2} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\mathcal{M}_{Loop}^\mu = \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \bar{u}(p_b) \frac{V^\mu - A^\mu \gamma_5}{2} u(p_t), \quad \mathcal{M}_{Born}^\mu = \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{tb} \bar{u}(p_b) \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} u(p_t). \quad (4.44)$$

Die Korrektur kann durch sechs universelle Strukturfunktionen V , V_b , V_t , A , A_b und A_t als Koeffizienten für die sechs linear unabhängigen Kovarianten γ^μ , p_b^μ , p_t^μ , $\gamma^\mu \gamma_5$, $p_b^\mu \gamma_5$ und $p_t^\mu \gamma_5$ dargestellt werden. In Gl. (4.44) wird der Vektoranteil durch $V^\mu = V\gamma^\mu + V_b p_b^\mu + V_t p_t^\mu$ und der Axialvektoranteil durch $A^\mu = A\gamma^\mu + A_b p_b^\mu + A_t p_t^\mu$ abgekürzt. Mit $V = A = 1$ und $V_b = V_t = A_b = A_t = 0$ erhält man die BORNsche Näherung für den Quark-Boson-Vertex zurück. Bevor die universellen Strukturfunktionen behandelt werden, wird zunächst diskutiert, wie die Vertexkorrektur zu den Raten beiträgt.

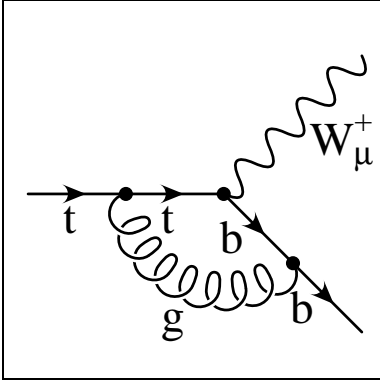


Abbildung 4.3: Die Vertexkorrektur durch virt. Gluonen.

Die Strukturfunktionen V , V_b , V_t und A , A_b , A_t stehen durch Linearkombinationen mit denen bei den elektroschwachen Einschleifenkorrekturen benutzten Strukturfunktionen μ_i mit $i = 0, \dots, 5$ im Zusammenhang.

$$\mu_0 + \mu_1 = V \quad \mu_2 + \mu_3 = V_b \quad \mu_4 + \mu_5 = V_t \quad (4.45)$$

$$\mu_0 - \mu_1 = A \quad \mu_2 - \mu_3 = A_b \quad \mu_4 - \mu_5 = A_t \quad (4.46)$$

Die zu den Strukturfunktionen μ_4 und μ_5 zugehörigen Kovarianten sind proportional zum 4-Impuls q^μ des W -Bosons und verschwinden nach Kontraktion mit den Helizitätsprojektoren P_i für $i = U, L, F, I$ und A , weswegen sie in Kapitel 3 vernachlässigt werden. Um hier auch mit den skalaren Projektor P_S arbeiten zu können, werden

keine Anteile vernachlässigt.

Die Einschleifenkorrektur beschreibt ebenso wie die BORNsche Näherung den Zerfall eines Einteilchen-Anfangszustands in einen Zweiteilchen-Endzustand. Die Übergangsamplituden \mathcal{M}_{Born}^μ und \mathcal{M}_{Loop}^μ müssen deshalb erst zur Gesamtamplitude $\mathcal{M}_{Born}^\mu + \mathcal{M}_{Loop}^\mu$ addiert und anschließend quadriert werden. Das Quadrat $\mathcal{M}_{Loop}^\mu \mathcal{M}_{Loop}^{\dagger\nu}$ kann als Beitrag der $O(\alpha_s^2)$ vernachlässigt werden. Das Quadrat $\mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Born}^{\dagger\nu}$ führt auf die bekannte BORNsche Näherung in Kapitel 2. Es gilt:

$$(\mathcal{M}_{Born}^\mu + \mathcal{M}_{Loop}^\mu)(\mathcal{M}_{Born}^{\dagger\nu} + \mathcal{M}_{Loop}^{\dagger\nu}) = \underbrace{\mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Born}^{\dagger\nu}}_{Born} + \underbrace{\mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Loop}^{\dagger\nu} + \mathcal{M}_{Loop}^\mu \mathcal{M}_{Born}^{\dagger\nu}}_{Loop\text{-Beitrag}} + O(\alpha_s^2).$$

Die Einschleifenkorrektur manifestiert sich in dem Mischterm. Dieser Mischterm muß sich aus den universellen Strukturfunktionen V , V_t , V_b und A , A_t , A_b und den zugehörigen, polarisationsabhängigen Tensorkoeffizienten $\kappa^{\mu\nu}$ darstellen lassen, die später mit den Helizitätsprojektoren kontrahiert werden:

$$\mathcal{M}_{Born}^\mu \mathcal{M}_{Born}^{\dagger\nu} + \mathcal{M}_{Loop}^\mu \mathcal{M}_{Loop}^{\dagger\nu} = \kappa_V^{\mu\nu} V + \kappa_{V_t}^{\mu\nu} V_t + \kappa_{V_b}^{\mu\nu} V_b + \kappa_A^{\mu\nu} A + \kappa_{A_t}^{\mu\nu} A_t + \kappa_{A_b}^{\mu\nu} A_b. \quad (4.47)$$

Die Tensorkoeffizienten $\kappa^{\mu\nu}$ können aus der Spur² als Koeffizienten der Strukturfunktionen V , V_t , V_b , A , A_t und A_b abgelesen werden, wenn man für den Vektoranteil $V^\mu =$

²Für den Beitrag der Vertexkorrektur muß folgende Spur berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\left\{(\not{p}_b + m_b)\left(\frac{g_w}{\sqrt{2}}V_{tb}\gamma^\mu\frac{\mathbb{1}-\gamma_5}{2}\right)(\not{p}_t + m_t)\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5\not{p}_t)\left(\frac{g_w}{\sqrt{2}}V_{tb}\frac{V^\nu - A^\nu\gamma_5}{2}\right)^\dagger\right\} + \\ & \text{Tr}\left\{(\not{p}_b + m_b)\left(\frac{g_w}{\sqrt{2}}V_{tb}\frac{V^\mu - A^\mu\gamma_5}{2}\right)(\not{p}_t + m_t)\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5\not{p}_t)\left(\frac{g_w}{\sqrt{2}}V_{tb}\gamma^\nu\frac{\mathbb{1}-\gamma_5}{2}\right)^\dagger\right\} \end{aligned}$$

$V\gamma^\mu + V_t p_t^\mu + V_b p_b^\mu$ und für den Axialvektoranteil $A^\mu = A\gamma^\mu + A_t p_t^\mu + A_b p_b^\mu$ setzt, sowie für das Spinorprodukt des Topquarks die Identität $u(p_t)\bar{u}(p_t) = (\not{p}_t + m_t)\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5 \not{s}_t)$ beachtet. Die Tensorkoeffizienten lauten, wobei $\mathcal{B}_0^{\mu\nu}$ den Hadrontensor der BORNschen Näherung aus Gl.(2.9) bezeichnet:

$$\kappa_V^{\mu\nu} = \mathcal{B}_0^{\mu\nu} + \frac{g_w^2}{2}(m_t m_b g^{\mu\nu} + m_b i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_{t,\alpha} s_{t,\beta}), \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{V_t}^{\mu\nu} = & + \frac{g_w^2}{4} \left\{ -i(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} p_t^\nu - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p_t^\mu) p_{t,\alpha} q_\beta s_{t,\gamma} + (m_t + m_b - q \cdot s_t)(2p_{t,\mu} p_{t,\nu}) + \right. \\ & \left. - m_t(p_t^\mu q^\nu + p_t^\nu q^\mu) - \frac{1}{2}((m_t + m_b)^2 - m_W^2)(p_t^\mu s_t^\nu + p_t^\nu s_t^\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{V_b}^{\mu\nu} = & + \frac{g_w^2}{4} \left\{ -i(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} p_b^\nu - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p_b^\mu) p_{b,\alpha} q_\beta s_{t,\gamma} + (m_t + m_b - q \cdot s_t)(p_{b,\mu} p_{t,\nu} + p_{b,\nu} p_{t,\mu}) + \right. \\ & \left. - m_t(p_b^\mu q^\nu + p_b^\nu q^\mu) - \frac{1}{2}((m_t + m_b)^2 - m_W^2)(p_b^\mu s_t^\nu + p_b^\nu s_t^\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\kappa_A^{\mu\nu} = \mathcal{B}_0^{\mu\nu} - \frac{g_w^2}{2}(m_t m_b g^{\mu\nu} + m_b i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_{t,\alpha} s_{t,\beta}), \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{A_t}^{\mu\nu} = & - \frac{g_w^2}{4} \left\{ -i(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} p_t^\nu - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p_t^\mu) p_{t,\alpha} q_\beta s_{t,\gamma} + (m_t - m_b - q \cdot s_t)(2p_{t,\mu} p_{t,\nu}) + \right. \\ & \left. - m_t(p_t^\mu q^\nu + p_t^\nu q^\mu) - \frac{1}{2}((m_t - m_b)^2 - m_W^2)(p_t^\mu s_t^\nu + p_t^\nu s_t^\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{A_b}^{\mu\nu} = & - \frac{g_w^2}{4} \left\{ -i(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} p_b^\nu - \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p_b^\mu) p_{b,\alpha} q_\beta s_{t,\gamma} + (m_t - m_b - q \cdot s_t)(p_{b,\mu} p_{t,\nu} + p_{b,\nu} p_{t,\mu}) + \right. \\ & \left. - m_t(p_b^\mu q^\nu + p_b^\nu q^\mu) - \frac{1}{2}((m_t - m_b)^2 - m_W^2)(p_b^\mu s_t^\nu + p_b^\nu s_t^\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Die Koeffizienten des Axialvektoranteils gehen durch die Substitution $m_b \rightarrow -m_b$ und einer Multiplikation mit -1 aus den Koeffizienten des Vektoranteils der Vertexkorrektur hervor (siehe auch Tab. (4.4)). In Tab. (4.2) sind für die verschiedenen Helizitätsstrukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P die entsprechenden Koeffizienten zusammengestellt, die sich aus der Kontraktion der Tensorkoeffizienten mit den zugehörigen Helizitätsprojektoren ergeben.

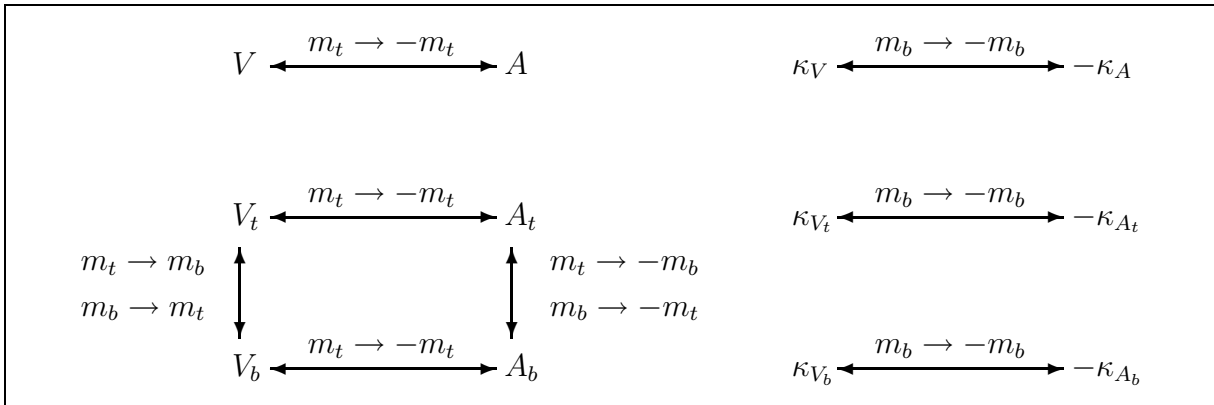


Abbildung 4.4: Die Symmetrie der QCD-Strukturfunktionen der 1-Loopkorrektur.

Rate	κ_V	κ_{V_t}	κ_{V_b}
$U + L$	$\sqrt{\lambda}((1-y^2)^2-x^2)((1+y)^2+2x^2)$	$\frac{1}{2} m_t \sqrt{\lambda^3} (1+y)$	$\frac{1}{2} m_t \sqrt{\lambda^3} (1+y)$
U^P+L^P	$\lambda(1-2x^2-y^2)$	$\frac{1}{2} m_t \lambda((1+y)^2-x^2)(1-y)$	$\frac{1}{2} m_t \lambda((1+y)^2-x^2)(1-y)$
U	$2\sqrt{\lambda}((1-y)^2-x^2)x^2$	0	0
U^P	$-2x^2\lambda$	0	0
L	$\sqrt{\lambda}((1-y^2)^2-x^2)(1+y)^2$	$\frac{1}{2} m_t \sqrt{\lambda^3} (1+y)$	$\frac{1}{2} m_t \sqrt{\lambda^3} (1+y)$
L^P	$\lambda(1-y^2)$	$\frac{1}{2} m_t \lambda((1+y)^2-x^2)^2(1-y)$	$\frac{1}{2} m_t \lambda((1+y)^2-x^2)^2(1-y)$
F	$-2\lambda x^2$	0	0
F^P	$2\sqrt{\lambda}((1-y)^2-x^2)x^2$	0	0
S	$\sqrt{\lambda}((1+y)^2-x^2)(1-y)^2$	$\frac{1}{2} m_t \sqrt{\lambda}((1+y)^2-x^2) \times$ $(1+x^2-y^2)(1-y)$	$\frac{1}{2} m_t \sqrt{\lambda}((1+y)^2-x^2) \times$ $(1-x^2-y^2)(1-y)$
S^P	$\lambda(1-y^2)$	$\frac{1}{2} m_t \lambda(1+x^2-y^2)(1+y)$	$\frac{1}{2} m_t \lambda(1-x^2-y^2)(1+y)$
I^P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda x$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t \lambda((1+y)^2-x^2)x$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t \lambda((1+y)^2-x^2)x$
A^P	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda}((1-y)^2-x^2)(1+y)x$	$\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t \sqrt{\lambda^3} x$	$\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t \sqrt{\lambda^3} x$

Tabelle 4.2: Koeffizienten κ_V , κ_{V_t} und κ_{V_b} der QCD-Vertexkorrektur für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen. Die Koeffizienten besitzen den gemeinsamen, globalen Vorfaktor $(m_t^3|V_{tb}|^2G_F)/(8\sqrt{2}\pi)$ und λ steht als Abkürzung für die Källén-Funktion $\lambda(1, x^2, y^2)$.

Mit Ausnahme der beiden skalaren Strukturfunktionen S und S^P gilt für die Koeffizienten der Vertexkorrektur $\kappa_{V_t} = \kappa_{V_b}$ und $\kappa_{A_t} = \kappa_{A_b}$.

Wie in Abschnitt 3.8 gezeigt, können durch die Methode von PASSARINO-VELTMAN die tensoriellen, vektoriellen und skalaren Dreipunktintegrale auf skalare Dreipunkt-, Zweipunkt- und Einpunktintegrale zurückgeführt und somit die sechs gesuchten Strukturfunktionen berechnet werden. Die Ergebnisse für die renormierte Strukturfunktion V , die sich durch Addition von $Z_2 - 1$ aus der unrenormierten Strukturfunktion V_0 ergibt ($V = V_0 + Z_2 - 1$), und für die bereits UV-konvergente Strukturfunktion V_t lauten:

$$\begin{aligned}
V = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ \frac{m_t^2 - m_W^2 + m_b^2}{m_t^2 \sqrt{\lambda}} \left[2 \text{Li}_2(1 - w_1^2) - 2 \text{Li}_2\left(1 - \frac{w_1}{w_\mu}\right) + \frac{1}{2} \ln(w_1 w_\mu) \times \right. \right. & (4.54) \\
\times \ln\left(\frac{m_g^2}{m_t^2 m_b^2}\right) + \ln\left(\frac{w_1^3}{w_\mu}\right) \ln\left(\frac{w_\mu(1 - w_1^2)}{w_\mu - w_1}\right) \left. \right] + \frac{m_t^2 - m_b^2}{2 m_W^2} \ln\left(\frac{m_b^2}{m_t^2}\right) + \ln\left(\frac{m^4}{m_t^2 m_b^2}\right) + \\
+ 4 - \ln(w_1 w_\mu) \left[\frac{m_t^2 \sqrt{\lambda}}{2 m_W^2} - \frac{(m_t - m_b)^2 - m_W^2}{m_t^2 \sqrt{\lambda}} \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_t = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left\{ 2 \frac{m_t - m_b}{m_W^2} - \left(\frac{m_t + m_b}{m_W^2} \left(1 - \frac{(m_t - m_b)^2}{m_W^2} \right) + \frac{m_b}{m_W^2} \right) \ln\left(\frac{m_b^2}{m_t^2}\right) + \right. & (4.55) \\
+ \left. \left(\frac{m_b(m_t^2 + m_W^2 - m_b^2)}{m_W^2 m_t^2 \sqrt{\lambda}} + \frac{m_t - m_b}{m_W^2} \left(\frac{2 m_b}{m_t \sqrt{\lambda}} - \frac{m_t^2 \sqrt{\lambda}}{m_W^2} \right) \right) \ln(w_1 w_\mu) \right\}.
\end{aligned}$$

Die vier weiteren Strukturfunktionen V_b , A , A_t und A_b ergeben sich aus den in Abb. (4.4) skizzierten Symmetrie-Relationen für die Quarkmassen. Für die Berechnung der Beiträge der Vertexkorrektur zu den verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen sind die folgenden Linearkombinationen nützlich:

$$V - A = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{4y}{\sqrt{\lambda}} \ln(w_1 w_\mu), \quad (4.56)$$

$$V_t + V_b = +\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{m_t} \left\{ \frac{1-y}{x^2} \ln(y^2) - \frac{1+y}{x^2} \frac{(1-y)^2 - x^2}{\sqrt{\lambda}} \ln(w_1 w_\mu) \right\}, \quad (4.57)$$

$$A_t + A_b = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{m_t} \left\{ \frac{1+y}{x^2} \ln(y^2) - \frac{1-y}{x^2} \frac{(1+y)^2 - x^2}{\sqrt{\lambda}} \ln(w_1 w_\mu) \right\}, \quad (4.58)$$

sowie

$$V_t - V_b = +\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{m_t} \left\{ 4 \frac{1-y}{x^2} + \frac{1+y}{x^2} \frac{2(1-y)^2 - 3x^2}{x^2} \ln(y^2) + \right. \quad (4.59)$$

$$\left. - \frac{1-y}{x^2} \frac{2(1-y^2)^2 - x^2(5+6y+5y^2-3x^2)}{x^2 \sqrt{\lambda}} \ln(w_1 w_\mu) \right\},$$

$$A_t - A_b = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{m_t} \left\{ 4 \frac{1+y}{x^2} + \frac{1-y}{x^2} \frac{2(1+y)^2 - 3x^2}{x^2} \ln(y^2) + \right. \quad (4.60)$$

$$\left. - \frac{1+y}{x^2} \frac{2(1-y^2)^2 - x^2(5-6y+5y^2-3x^2)}{x^2 \sqrt{\lambda}} \ln(w_1 w_\mu) \right\},$$

und schließlich

$$V_t + V_b + A_t + A_b = +\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F m_t \left\{ \frac{1-x^2-y^2}{x^2 \sqrt{\lambda}} \ln(w_1 w_\mu) - \frac{1}{x^2} \ln(y^2) \right\}, \quad (4.61)$$

$$V_t + V_b - A_t - A_b = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F m_t \left\{ \frac{1+x^2-y^2}{x^2 \sqrt{\lambda}} \ln(w_1 w_\mu) - \frac{1}{x^2} \ln(y^2) \right\}. \quad (4.62)$$

Die Abkürzungen w_1 und w_μ sind in Gl. (4.16) definiert und $x = m_W/m_t$ und $y = m_b/m_t$ bezeichnen die skalierten Massen des W-Bosons und des Bottomquarks. λ steht wie üblich für die KÄLLÉN-Funktion $\lambda(1, x^2, y^2)$.

Zusammen mit der in Tab. (4.2) angegebenen Normierung der κ -Koeffizienten gilt für alle Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P für die Koeffizienten $\kappa_{V,i}$ und $\kappa_{A,i}$ der folgende Zusammenhang mit der BORNschen Rate:

$$\kappa_{V,i} + \kappa_{A,i} = 2\Gamma_{Born,i}. \quad (4.63)$$

Darüber hinaus hebt sich in der Summe der Strukturfunktionen V und A der Vertexkorrektur und dem Soft-Gluon-Faktor der Bremsstrahlungskorrektur die IR-Singularität, die durch den Logarithmus $\ln(m_g)$ regularisiert wird, heraus, so wie es das LEE-NAUENBERG Theorem verlangt:

Rate	κ_V	κ_{V_t}	κ_{V_b}
$U + L$	$(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$
$U^P + L^P$	$(1 - x^2)^2(1 - 2x^2)$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$
U	$2(1 - x^2)^2 x^2$	0	0
U^P	$-2(1 - x^2)^2 x^2$	0	0
L	$(1 - x^2)^2$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$
L^P	$(1 - x^2)^2$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$
F	$-2(1 - x^2)^2 x^2$	0	0
F^P	$2(1 - x^2)^2 x^2$	0	0
S	$(1 - x^2)^2$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^2 (1 + x^2)$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$
S^P	$(1 - x^2)^2$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^2 (1 + x^2)$	$\frac{1}{2} m_t (1 - x^2)^3$
I^P	$-\frac{1}{\sqrt{2}} (1 - x^2)^2 x$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t (1 - x^2)^3 x$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t (1 - x^2)^3 x$
A^P	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1 - x^2)^2 x$	$\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t (1 - x^2)^3 x$	$\frac{1}{4\sqrt{2}} m_t (1 - x^2)^3 x$

Tabelle 4.3: Koeffizienten κ_V , κ_{V_t} und κ_{V_b} der QCD-Vertexkorrektur für den Fall eines masselosen Bottomquarks ($y = 0$) für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen.

$$V + A + \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \text{SGF} = 2 \Sigma_{(\text{IR-konvergent})} \quad (4.64)$$

Der Beitrag der QCD-Einschleifenkorrektur zur Strahlungskorrektur wird durch die folgende Gleichung angegeben, wobei die Normierung der κ -Koeffizienten durch den gemeinsamen Vorfaktor aus Tab. (4.2) erfolgt. In Tab. (4.3) sind die κ -Koeffizienten für den masselosen Fall ($y = 0$) des Bottomquarks angegeben:

$$\Gamma_{L,i}^{QCD} = \left\{ \sum_{\varrho} \kappa_{\varrho,i} \varrho \right\} \text{ mit } \varrho = V, V_t, V_b, A, A_t \text{ und } A_b \quad (4.65)$$

4.6.2 Vergleich mit Gounaris & Paschalis

GOUNARIS und PASCHALIS [60] geben den Vektoranteil der Vertexkorrektur durch die drei Strukturfunktionen F_1 , F_2 und F_3 in der Form

$$\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{m_1 + m_2} F_2(q^2) + q_\mu F_3(q^2) \quad (4.66)$$

an, wobei $q^\nu = p_2^\nu - p_1^\nu$ und $p_1^2 = m_1^2$, $p_2^2 = m_2^2$ mit $m_2 > m_1$ gilt. Mit Hilfe des antisymmetrischen Tensors $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ und der GORDON-Identität

$$\bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(p_2) = \bar{u}(p_1)\left\{\frac{p_1^\mu + p_2^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right\}u(p_2) \quad (4.67)$$

kann ihr Ergebnis in die Form $V\gamma^\mu + V_1p_1^\mu + V_2p_2^\mu$ umgeschrieben werden. Man erhält:

$$V = F_1(q^2) + F_2(q^2), \quad V_1 = \frac{-1}{m_1+m_2}F_2(q^2) + F_3(q^2), \quad V_2 = \frac{-1}{m_1+m_2}F_2(q^2) - F_3(q^2).$$

Abgesehen von einem Druckfehler in Gl. (A.8) im Anhang von [60], wo bei der Strukturfunktion $F_3(q^2)$ vor dem letzten Term $(m_2 - m_1)(5m_1^2 + 5m_2^2 + 6m_1m_2)/(q^2)$ ein Faktor $1/2$ fehlt, stimmen die Vertexkorrekturen mit $V_2 = V_t$, $V_1 = V_b$, $m_2 = m_t$ und $m_1 = m_b$ analytisch überein.

4.7 Numerische Ergebnisse

Das Gesamtergebn für die Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L$, $U^P + L^P$, U , U^P , L , L^P , F , F^P , S , S^P , I^P und A^P setzt sich additiv aus den Beiträgen für die BORNsche Näherung $\Gamma_{Born,i}$, der QCD-Einschleifenkorrektur $\Gamma_{Loop,i} = \sum \kappa_{\varrho,i} \varrho$ und der QCD-Bremsstrahlungskorrektur $\Gamma_{Brems.,i}$ zusammen. Ihre implizite Darstellung lautet:

$$\Gamma_i^{QCD} = \Gamma_{Born,i} + \sum_{\substack{\varrho = V, V_t, V_b, \\ A, A_t, A_b}} \kappa_{\varrho,i} \varrho + \frac{4m_t^2}{\sqrt{\lambda(m_t^2, m_W^2, m_b^2)}} \Gamma_{Born,i} \text{SGF} + \frac{\alpha_s m_t^3 G_F x^2}{4\pi \cdot 8\sqrt{2}\pi} \times \\ \times \left\{ \sum_{n=-1,0} \rho_{(n),i} \mathcal{R}_{(n)} + \sum_{m,n} \rho_{(m,n),i}^0 \mathcal{R}_{(m,n)} + \sum_{n=0,1} \sigma_{(n),i} \mathcal{S}_{(n)} + \sum_{m,n} \sigma_{(m,n),i} \mathcal{S}_{(m,n)} \right\} \quad (4.68)$$

Die Beiträge für die BORNsche Näherung können den Gln. (2.21.1-12) in Kapitel 2 entnommen werden. Die Koeffizientenfunktionen $\kappa_{\varrho,i}$ für den Vektoranteil ($\varrho = V, V_t, V_b$) der Einschleifenkorrektur sind in der Tab. (4.2) zusammengestellt. Für den Axialvektoranteil ($\varrho = A, A_t, A_b$) ergeben sich die Koeffizientenfunktionen $\kappa_{\varrho,i}$ durch die Ersetzung $y \rightarrow -y$ und die Multiplikation mit -1 aus dem Vektoranteil. Die sechs renormierten Strukturfunktionen V , V_t , V_b , A , A_t und A_b sind im vorigen Abschnitt 4.6 diskutiert. Die Bremsstrahlungskorrektur setzt sich aus dem Produkt des IR-divergenten Soft-Gluon-Faktors aus Gl. (4.17) mit der BORNschen Rate und der Summe der mit den IR-konvergenten, helizitätsabhängigen Koeffizientenfunktionen $\rho(n)$, $\rho(m, n)$, $\sigma(n)$, $\sigma(m, n)$ (Anhang E mit $Q_t = Q_b \rightarrow 1$) multiplizierten Grundintegralen $\mathcal{R}(n)$, $\mathcal{R}(m, n)$, $\mathcal{S}(n)$ und $\mathcal{S}(m, n)$ (Anhang D) zusammen.

In einem MATHEMATICA-Notebook werden die Helizitäts-Strukturfunktionen aus den einzelnen Anteilen zusammengesetzt und numerisch für die Werte $m_t = 175 \text{ GeV}/c^2$, $m_b = 4.8 \text{ GeV}/c^2$ [79, 80] und $m_W = 80.419 \text{ GeV}/c^2$ ausgewertet. Der Wert der starken Kopplungskonstanten α_s nimmt aufgrund der asymptotischen Freiheit mit wachsender Schwerpunktsenergie ab. Unter Berücksichtigung von Zweischleifen-Korrekturen kann die laufende Kopplungskonstante, ausgehend von $\alpha_s(m_Z) = 0.1175$, für die Ruheenergie des Topquarks zu $\alpha_s(m_t) = 0.1070$ berechnet werden [81].

Rate	$\kappa_V V$ α_s [GeV]	$\kappa_{V_t} V_t$ α_s [GeV]	$\kappa_{V_b} V_b$ α_s [GeV]	$\kappa_A A$ α_s [GeV]	$\kappa_{A_t} A_t$ α_s [GeV]	$\kappa_{A_b} A_b$ α_s [GeV]
$U + L$	4.128 70	0.013 89	-0.137 53	4.234 07	0.082 46	-0.163 44
$U^P + L^P$	1.727 72	0.014 09	-0.139 57	1.665 22	0.081 25	-0.161 05
U	1.179 84	0	0	1.306 97	0	0
U^P	-1.264 86	0	0	-1.219 11	0	0
L	2.948 86	0.013 89	-0.137 53	2.927 10	0.082 46	-0.163 44
L^P	2.992 58	0.014 09	-0.139 57	2.884 33	0.081 25	-0.161 05
F	-1.264 86	0	0	-1.219 11	0	0
F^P	1.179 84	0	0	1.306 97	0	0
S	3.036 95	0.021 65	-0.139 64	2.842 19	0.124 86	-0.161 13
S^P	2.992 58	0.021 34	-0.137 60	2.884 33	0.126 71	-0.163 52
I^P	-0.973 15	-0.002 35	0.023 32	-0.937 95	-0.012 85	0.025 47
A^P	0.932 63	0.002 20	-0.021 75	0.977 96	0.013 77	-0.027 30

Tabelle 4.4: Numerische Beiträge der QCD-Einschleifenkorrektur für die Raten $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P . Die Komponenten $\kappa_{V,i}V$ und $\kappa_{A,i}A$, die mit der Kovarianten γ^μ verknüpft sind, dominieren gegenüber den Komponenten $\kappa_{V_t,i}V_t$ und $\kappa_{A_t,i}A_t$ bzw. $\kappa_{V_b,i}V_b$ und $\kappa_{A_b,i}A_b$, die mit den Kovarianten p_t^μ bzw. p_b^μ verknüpft sind.

In Tab. (4.4) sind die einzelnen Beiträge $\kappa_{\varrho,i}\varrho$ mit $\varrho = V, V_t, V_b, A, A_t$ und A_b der QCD-Einschleifenkorrektur für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen i (s.o.) numerisch angegeben. Die starke Kopplungskonstante wird α_s nicht spezifiziert, um auch Zerfallsprozesse bei anderen Skalen beschreiben zu können. Die durch $\ln(m_g/m_t)$ regularisierte IR-Singularität, die in der Summe mit dem Soft-Gluon-Faktor in Gl. (4.68) herausfällt, wird hier wie in Kapitel 3 auf Null gesetzt. Die größten Beiträge stammen von dem Vektoranteil $\kappa_{V,i}V$ und dem Axialvektoranteil $\kappa_{A,i}A$, die sich nur um ca. 2% unterscheiden. Die Beiträge von $\kappa_{V_t,i}V_t, \kappa_{V_b,i}V_b, \kappa_{A_t,i}A_t$ und $\kappa_{A_b,i}A_b$ sind um einen Faktor 10–30 kleiner. Es ist auffällig, daß die Beträge von V_b und A_b stets das gleiche Vorzeichen und verglichen mit den Beiträgen von V, V_t und A, A_t das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Bei Vernachlässigung dieser kleinen Anteile beträgt der Fehler für den Beitrag zur totalen Rate $U + L$ 2.6%.

In Tab. (4.5) sind die numerischen Ergebnisse für die BORNsche Näherung $\Gamma_{Born,i}$, den Einschleifenbeitrag $\Gamma_{Loop,i}$ und den Bremsstrahlungsbeitrag $\Gamma_{Brems.,i}$ zu den Helizitäts-Strukturfunktionen i zusammengestellt. Wie bereits oben erwähnt, wird die IR-Singularität durch die Ersetzung $\ln(m_g/m_t) = 0$ willkürlich beseitigt, um überhaupt endliche Werte für die beiden Beiträge zur Strahlungskorrektur angeben zu können. Die numerischen Werte für die Einschleifenkorrektur und die Bremsstrahlungskorrektur sind unphysikalisch, nur ihre von IR-Divergenz freien Summe $\Gamma_{Loop,i} + \Gamma_{Brems.,i}$ hat eine physikalische Bedeutung.

In der letzten Spalte der Tab. (4.5) sind die prozentualen Korrekturen der Strahlungsbeiträge gegen die BORNsche Näherung angegeben. Die totale Rate $U + L$ wird

durch die Strahlungskorrektur um -8.4% verringert, die Korrektur für die einzelnen Helizitäts-Strukturfunktionen schwankt zwischen -6.2% und -9.5% (für die polarisierte Rate $U^P + L^P$ beträgt sie sogar -11.5%). Die Strahlungskorrekturen sind für die longitudinalen und skalaren Strukturfunktionen am größten. Die Strahlungskorrekturen gehen alle in dieselbe Richtung. Dies ist ein Indiz dafür, daß der Hauptanteil der Strahlungskorrekturen aus der Phasenraumregion in der Nähe der IR-Divergenz stammt, wo sie universell sind.

Rate	Γ_{Born} [GeV]	Γ_{Loop} [GeV]	$\Gamma_{Brems.}$ [GeV]	$\Gamma_{Korr.}$ [GeV]	$\Delta_{Korr.}$ [%]
$U + L$	1.552 44	0.873 08	-1.004 15	-0.131 07	-8.443
$U^P + L^P$	0.629 49	0.341 14	-0.413 35	-0.072 19	-11.468
U	0.461 97	0.266 14	-0.294 92	-0.028 78	-6.230
U^P	-0.460 85	-0.265 84	0.297 04	0.031 21	-6.771
L	1.090 47	0.606 95	-0.709 23	-0.102 29	-9.380
L^P	1.090 35	0.606 98	-0.710 38	-0.103 40	-9.483
F	-0.460 85	-0.265 84	0.296 96	-0.031 13	-6.753
F^P	0.461 97	0.266 14	-0.295 58	-0.029 44	-6.373
S	1.090 47	0.612 68	-0.708 74	-0.096 06	-8.809
S^P	1.090 35	0.612 57	-0.711 56	-0.098 99	-9.079
I^P	-0.354 56	-0.200 93	0.229 24	0.028 31	-7.984
A^P	0.354 75	0.200 93	-0.229 71	-0.028 78	-8.111

Tabelle 4.5: Numerische Beiträge der QCD-Korrekturen zur Zerfallsrate. Γ_{Born} bezeichnet die Bornsche Näherung, Γ_{Loop} die QCD-Einschleifenkorrektur und $\Gamma_{Brems.}$ die QCD-Bremsstrahlungskorrektur. Bei den Strahlungskorrekturen sind die Terme proportional zur IR-Divergenz in $\ln \Lambda$ gleich Null gesetzt, die sich in der Summe $\Gamma_{Korr.} = \Gamma_{Loop} + \Gamma_{Brems.}$ herausheben. In der letzten Spalte ist die prozentuale Korrektur $\Delta_{Korr.} = \Gamma_{Korr.}/\Gamma_{Born}$ der Strahlungsbeiträge gegenüber der Bornschen Näherung angegeben.

Kapitel 5

Die kompletten Strahlungskorrekturen

5.1 Die QCD-Raten für masselose Bottomquarks

Für den Fall des masselosen Bottomquarks ($y = 0$) vereinfachen sich die Helizitäts-Strukturfunktionen für die QCD-Strahlungskorrekturen der $O(\alpha_s)$ derart, daß sie für $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P , einschließlich der beiden „transversal-plus“- und „transversal-minus“-Anteile, in diesem Abschnitt angegeben werden sollen.¹ Die durch Λ regularisierte IR-Divergenz fällt in der Summe der Einschleifen- und der Bremsstrahlungskorrektur entsprechend des LEE-NAUENBERG Theorems heraus. Für den Grenzfall $y \rightarrow 0$ enthält sowohl die Einschleifen- als auch die Bremsstrahlungskorrektur eine weitere, kollineare Singularität in Form von $\ln(y)$ und $\ln^2(y)$. Bei der Bremsstrahlungskorrektur tritt die kollineare Singularität nicht nur in dem Soft-Gluon-Faktor, sondern auch in den IR-konvergenten Anteilen auf. Die Grundintegrale $\mathcal{R}_{(-2,n)}$ enthalten sogar eine Singularität von der Form $1/y^2$; sie fällt aber bereits in der Summe der IR-konvergenten Bremsstrahlungsbeiträge heraus. Die kollineare Singularität hebt sich wie die IR-Singularität in der Summe der Strahlungskorrekturen heraus und man erhält endliche Ausdrücke, die nur von der skalierten Masse x des W -Bosons abhängig sind.

Für die Darstellung der polarisierten bzw. unpolarisierten Helizitäts-Strukturfunktionen werden skalierte Ratenfunktionen $\hat{\Gamma}_i := \Gamma_i/\Gamma_0$ bzw. polarisierte Ratenfunktionen $\hat{\Gamma}_i^P := \Gamma_i^P/\Gamma_0$ definiert, wobei die totale BORNsche Rate $\Gamma_0 = \Gamma_{U+L}(\text{Born})$ durch

$$\Gamma_0 = \Gamma_{U+L}(\text{Born}) = \frac{G_F m_t^3}{8\sqrt{2}\pi} |V_{tb}|^2 (1-x^2)^2 (1+2x) \quad (5.1)$$

aus Kapitel 2 gegeben ist. Die aus den skalierten Helizitäts-Strukturfunktionen $\hat{\Gamma}_i$ zusammengesetzte, differentielle Zerfallsrate $d\hat{\Gamma}$ lautet:

¹Die Helizitäts-Strukturfunktionen für $m_b \neq 0$ liegen analytisch in Form eines MATHEMATICA-NOTEBOOKS vor, sind aber genau wie die elektroschwachen Beiträge zu den Helizitäts-Strukturfunktionen zu umfangreich, um an dieser Stelle explizit angegeben zu werden.

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\Gamma}}{d\cos\theta d\phi d\cos\theta_P} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\hat{\Gamma}_U + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_U^P \right) \times \frac{3}{8} (1 + \cos\theta) + \right. \\
&+ \left(\hat{\Gamma}_L + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_L^P \right) \times \frac{3}{4} \sin^2\theta + \\
&+ \left(\hat{\Gamma}_F + P \cos\theta_P \hat{\Gamma}_F^P \right) \times \frac{3}{4} \cos\theta + \\
&+ \left(P \sin\theta_P \hat{\Gamma}_I^P \right) \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta \cos\phi + \\
&\left. + \left(P \sin\theta_P \hat{\Gamma}_A^P \right) \times \frac{3}{\sqrt{2}} \sin\theta \cos\phi \right\}, \tag{5.2}
\end{aligned}$$

wobei der Parameter P vor den Winkelfunktionen $\sin\theta_P$ bzw. $\cos\theta_P$ den Polarisationsgrad ($0 \leq P \leq 1$) des Topquarks bezeichnet. Bei der Integration über den Azimutwinkel ϕ verschwinden die Beiträge $\hat{\Gamma}_I^P$ und $\hat{\Gamma}_A^P$. Bei der Integration über $\cos\theta_P$ verschwinden sämtliche polarisierten Beiträge. Nach der totalen Integration über alle drei Winkelvariablen erhält man die total Rate $\hat{\Gamma}_{U+L}$ zurück. Die reduzierten Raten lauten:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{U+L} &= 1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \left\{ \frac{1}{2} (1-x^2)(5+9x^2-6x^4) - \frac{2}{3} \pi^2 (1-x^2)^2 \times \right. \\
&\times (1+2x^2) - (1-x^2)^2 (5+4x^2) \ln(1-x^2) - 4x^2(1+x^2)(1-2x^2) \ln(x) + \\
&\left. - 4(1-x^2)^2(1+2x^2) \ln(x) \ln(1-x^2) - 4(1-x^2)^2(1+2x^2) \text{Li}_2(x^2) \right\}, \tag{5.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{U+L}^P &= \frac{1-2x^2}{1+2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \left\{ \frac{1}{2} (1-x)^2 (15+2x-5x^2-12x^3+2x^4) + \right. \\
&+ \frac{1}{3} \pi^2 (1+4x^2) - (1-x^2)^2 (1-4x^2) \ln(1-x) - (1-x^2)(3-x^2)(1+4x^2) \ln(1+x) + \\
&\left. - 4(1-x^2)^2(1-2x^2) \text{Li}_2(x) + 4(2+5x^4-2x^6) \text{Li}_2(-x) \right\}, \tag{5.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_U &= \frac{2x^2}{1+2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \left\{ -x^2(1-x^2)(19+x^2) + \frac{2}{3} \pi^2 x^2 (5+5x^2-2x^4) + \right. \\
&- 2(1-x^2)^2(1+2x^2) \ln(1-x^2) - 4x^2(5+7x^2-2x^4) \ln(x) - 2x(1-x)^2 \times \\
&\times (5+7x^2+4x^3) \ln(x) \ln(1-x) + 2x(1+x)^2(5+7x^2-4x^3) \ln(x) \ln(1+x) + \\
&\left. - 2x(1-x)^2(5+4x+15x^2+8x^3) \text{Li}_2(x) + 2x(1+x)^2(5-4x+15x^2-8x^3) \text{Li}_2(-x) \right\}, \tag{5.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_L &= \frac{1}{1+2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \left\{ \frac{1}{2} (1-x^2)(5+47x^2-4x^4) - \frac{2}{3} \pi^2 \times \right. \\
&\times (1+5x^2+2x^4) - 3(1-x^2)^2 \ln(1-x^2) + 16x^2(1+2x^2) \ln(x) - 2(1-x)^2 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (2 - x + 6x^2 + x^3) \ln(1 - x) \ln(x) - 2(1 + x)^2(2 + x + 6x^2 - x^3) \ln(x) \ln(1 + x) + \\ & - 2(1 - x)^2(4 + 3x + 8x^2 + x^3) \text{Li}_2(x) - 2(1 + x)^2(4 - 3x + 8x^2 - x^3) \text{Li}_2(-x) \Big\}, \quad (5.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_F &= \frac{-2x^2}{1 + 2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)} \left\{ -2x^2(1 - x)^2(3 - 4x) + \frac{2}{3}\pi^2 x^2(2 + x^2) + \right. \\ & + 2(1 - x^2)^2(1 + 2x^2) \ln(1 - x) + 2(1 - x^2)(1 - 9x^2 + 2x^4) \ln(1 + x) + \\ & \left. + 8x^2(1 - x^2)^2 \text{Li}_2(x) + 8x^2(1 + 3x^2 - x^4) \text{Li}_2(-x) \right\}, \quad (5.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_S &= \frac{1}{1 + 2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)} \left\{ \frac{9}{2}(1 - x^2)^2 - \frac{2}{3}\pi^2(1 - x^2)^2 + \frac{(1 - x^2)^2}{x^2} \times \right. \\ & \times (2 - 5x^2) \ln(1 - x^2) - 4x^2(1 - x^2) \ln(x) - 4(1 - x^2)^2 \ln(x) \ln(1 - x^2) + \\ & \left. - 4(1 - x^2)^2 \text{Li}_2(x^2) \right\}, \quad (5.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_U^P &= \frac{-2x^2}{1 + 2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)} \left\{ -x(1 - x)^2(12 - 55x + 6x^2 - x^3) - \frac{10}{3}\pi^2 \times \right. \\ & \times x^2(2 + x^2) + 2(1 - x^2)^2(1 + 2x^2) \ln(1 - x) + 2(1 - x^2)(7 + 21x^2 + 2x^4) \ln(1 + x) + \\ & \left. + 8x^2(1 - x^2)^2 \text{Li}_2(x) - 8x^2(11 + 3x^2 + x^4) \text{Li}_2(-x) \right\}, \quad (5.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_L^P &= \frac{1}{1 + 2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)} \left\{ -\frac{1}{2}(15 - 22x + 105x^2 - 24x^3 + 4x^4)(1 - x)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{3}\pi^2(1 + 24x^2 + 10x^4) - 3(1 - x^2)^2 \ln(1 - x) - (1 - x^2)(17 + 53x^2) \ln(1 + x) + \\ & \left. - 4(1 - x^2)^2 \text{Li}_2(x) + 4(2 + 22x^2 + 11x^4) \text{Li}_2(-x) \right\}, \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_F^P &= \frac{2x^2}{1 + 2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)} \left\{ 2x^2(1 - x^2)(4 + x^2) - \frac{2}{3}\pi^2(1 + x^2 + 2x^4) + \right. \\ & - 2(1 - x^2)^2(1 + 2x^2) \ln(1 - x^2) - 4x^2(2 - 5x^2 - 2x^4) \ln(x) - \ln(x) \ln(1 - x) \times \\ & \times 4x(1 - x)^2(1 + 3x + 2x^2 + 2x^3) + 4x(1 + x)^2(1 - 3x + 2x^2 - 2x^3) \ln(x) \ln(1 + x) + \\ & \left. - 4x(1 - x)^2(1 + 5x + 6x^2 + 4x^3) \text{Li}_2(x) + 4x(1 + x)^2(1 - 5x + 6x^2 - 4x^3) \text{Li}_2(-x) \right\}, \quad (5.11) \end{aligned}$$

$$\hat{\Gamma}_S^P = \frac{1}{1 + 2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)} \left\{ \frac{1}{2}(1 - x)^2(11 - 6x - 7x^2) + \frac{1}{3}\pi^2(1 + 2x^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-x^2)^2(2-5x^2)}{x^2} \ln(1-x) + \frac{(1-x^2)(2-9x^2+x^4)}{x^2} \ln(1+x) + \\
& - 4(1-x^2)^2 \text{Li}_2(x) + 4(2+x^4) \text{Li}_2(-x) \Big\}, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_I^P &= \frac{-x}{\sqrt{2}(1+2x^2)} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ x(1-x)^2(12-7x+12x^2) + \right. \\
& + \frac{1}{6} \pi^2 x(5+19x^2+2x^4) - \frac{(1-x^2)^2(1+5x^2)}{2x} \ln(1-x) + \frac{(1-x^2)(1+30x^2+21x^4)}{2x} \times \\
& \times \ln(1+x) + 4x(1-x^2)^2 \text{Li}_2(x) - 2x(7+15x^2+4x^4) \text{Li}_2(-x) \Big\}, \tag{5.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_A^P &= \frac{x}{\sqrt{2}(1+2x^2)} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ x(1-x^2)(1+2x^2) - \frac{1}{6} \pi^2 \times \right. \\
& \times x(3-5x^2+6x^4) - \frac{(1-x^2)^2(1+5x^2)}{2x} \ln(1-x^2) - x^2(5-11x^2) \ln(x) + \\
& - x(1-x)^2(3+7x+6x^2) \ln(x) \ln(1-x) - x(1+x)^2(3-7x+6x^2) \ln(x) \ln(1+x) + \\
& \left. - x(1-x)^2(7+15x+10x^2) \text{Li}_2(x) - x(1+x)^2(7-15x+10x^2) \text{Li}_2(-x) \right\}, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_+ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \left\{ -\frac{1}{2} x^2(1-x)(25+5x+9x^2+x^3) + \frac{1}{3} \pi^2 \times \right. \\
& \times x^2(7+6x^2-2x^4) - 2x^2(5+7x^2-2x^4) \ln(x) - 2x^2(1-x^2)(5-2x^2) \ln(1+x) + \\
& - x(1-x)^2(5+7x^2+4x^3) \ln(x) \ln(1-x) + x(1+x)^2(5+7x^2-4x^3) \ln(x) \ln(1+x) \\
& \left. - x(1-x)^2(5+7x^2+4x^3) \text{Li}_2(x) + x(5+10x+12x^2+30x^3-x^4-12x^5) \text{Li}_2(-x) \right\}, \tag{5.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_- &= \frac{2x^2}{1+2x^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1}{(1-x^2)^2(1+2x^2)} \left\{ -\frac{1}{2} x^2(1-x)(13+33x-7x^2+x^3) + \right. \\
& + \frac{1}{3} \pi^2(3+4x^2-2x^4) - 2x^2(5+7x^2-2x^4) \ln(x) - 2(1-x^2)^2(1+2x^2) \ln(1-x) + \\
& - 2(1-x^2)(1-4x^2) \ln(1+x) - x(1-x)^2(5+7x^2+4x^3) \ln(x) \ln(1-x) + \\
& + x(1+x)^2(5+7x^2-4x^3) \ln(x) \ln(1+x) - x(1-x)^2(5+3x)(1+x+4x^2) \text{Li}_2(x) \\
& \left. + x(5+2x+12x^2+6x^3-x^4-4x^5) \text{Li}_2(-x) \right\}. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Die totale Rate $\hat{\Gamma}_{U+L}$ stimmt mit den analytischen Ergebnissen in [45–48] und die sechs diagonalen Helizitäts-Strukturfunktionen $\hat{\Gamma}_U$, $\hat{\Gamma}_L$, $\hat{\Gamma}_F$ und $\hat{\Gamma}_U^P$, $\hat{\Gamma}_L^P$, $\hat{\Gamma}_F^P$ stimmen numerisch mit den Ergebnissen in [82–84] überein. Die nicht-diagonalen Strukturfunktionen

$\hat{\Gamma}_I^P$ und $\hat{\Gamma}_A^P$ sind neu. Die unpolarisierte skalare Strukturfunktion $\hat{\Gamma}_S$, die für den Zerfall $t \rightarrow b + H^+$ im HIGGS-Dublett-Modell relevant ist, wurden mit den Ergebnissen aus [85] verglichen. Das Ergebnis für die polarisierte skalare Strukturfunktion $\hat{\Gamma}_S^P$ ist neu. Für die unpolarisierten, transversalen Strukturfunktionen sind die Formeln für die beiden linearen Kombinationen $\hat{\Gamma}_+ = \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}_U + \hat{\Gamma}_F)$ und $\hat{\Gamma}_- = \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}_U - \hat{\Gamma}_F)$ explizit angegeben, die im CDF-Experiment [41] von Bedeutung sind.

Zum Schluß soll für die verschiedenen Helizitäts-Strukturfunktionen der Limes einer unendlich großen Topmasse $m_t \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow 0$ untersucht werden. Nach dem Äquivalenztheorem der GOLDSTONE-Bosonen ist zu erwarten, daß die longitudinalen und skalaren, reduzierten Raten $\hat{\Gamma}_L$, $\hat{\Gamma}_L^P$ und $\hat{\Gamma}_S$, $\hat{\Gamma}_S^P$ in diesem Fall dominieren. Tatsächlich erhält man nach dem Grenzwertübergang $x \rightarrow 0$ für die skalierten Raten:

$$\hat{\Gamma}_L = \hat{\Gamma}_S = 1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(+ \frac{5}{2} - \frac{2}{3}\pi^2 \right), \quad (5.17.1)$$

$$\hat{\Gamma}_U = \hat{\Gamma}_F = 0, \quad (5.17.2)$$

$$\hat{\Gamma}_L^P = \hat{\Gamma}_S^P = 1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(+ \frac{5}{2} - \frac{2}{3}\pi^2 \right), \quad (5.17.3)$$

$$\hat{\Gamma}_U^P = \hat{\Gamma}_F^P = \hat{\Gamma}_I^P = \hat{\Gamma}_A^P = 0. \quad (5.17.4)$$

Alle Raten außer $i = L = L^P$ und $S = S^P$ verschwinden. Die Gleichheit der reduzierten Raten $\hat{\Gamma}_L = \hat{\Gamma}_S$ und $\hat{\Gamma}_L^P = \hat{\Gamma}_S^P$ für $m_t \rightarrow 0$ kann vor dem Hintergrund verstanden werden, daß die longitudinalen und skalaren Polarisationsvektoren $\varepsilon^\mu(q, o)$ und $\varepsilon^\mu(q, s)$ in diesem Limes gleich sind: $\varepsilon^\mu(o) = \varepsilon^\mu(s) = (q^\mu/m_W) + O(m_W/m_t)$. Für die Baumgraphen-Beiträge der Strahlungskorrektur kann diese Feststellung jedoch nicht für den gesamten 3-Körper-Phasenraum gültig sein, insbesondere in dem Bereich, wo das W -Boson in Ruhe ist. Der Beitrag dieser Phasenraumregion wird aber im Grenzfall $m_t \rightarrow \infty$ vernachlässigbar klein.

5.2 Numerische Ergebnisse

Die numerischen Werte für die Strahlungskorrekturen des polarisierten Topquarkzerfalls werden in der Form $\Gamma_i = \Gamma_{0,i}(1 + \delta_{QCD} + \delta_{G_F} + \delta_{BWV})$ angegeben, für alle Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, I^P$ und A^P , einschließlich der beiden skalaren Strukturfunktionen S und S^P . $\Gamma_{0,i}$ bezeichnet die BORNsche Näherung aus Kapitel 2, δ_{G_F} die elektroschwachen Strahlungskorrekturen aus Kapitel 3 und δ_{QCD} die QCD-Strahlungskorrekturen aus Kapitel 4. δ_{BWV} gibt den Fehler an, der bei der Vernachlässigung der BREIT-WIGNER-Verteilung für die endliche Breite der W -Bosonresonanz auf dem BORN-Terminiveau entsteht. Die Raten lauten:

$$\Gamma_{U+L} = \Gamma_{0,U+L} \left(1 - 8.443 \% + 1.545 \% - 1.555 \% \right), \quad (5.18)$$

$$\Gamma_{U+L}^P = \Gamma_{0,U+L}^P \left(1 - 11.468 \% + 0.798 \% - 0.936 \% \right), \quad (5.19)$$

$$\Gamma_U = \Gamma_{0,U} \left(1 - 6.230 \% + 2.081 \% - 1.975 \% \right), \quad (5.20)$$

$$\Gamma_U^P = \Gamma_{0,U}^P \left(1 - 6.771 \% + 2.017 \% - 1.980 \% \right), \quad (5.21)$$

$$\Gamma_L = \Gamma_{0,L} \left(1 - 9.380 \% + 1.318 \% - 1.376 \% \right), \quad (5.22)$$

$$\Gamma_L^P = \Gamma_{0,L}^P \left(1 - 9.483 \% + 1.313 \% - 1.377 \% \right), \quad (5.23)$$

$$\Gamma_F = \Gamma_{0,F}^P \left(1 - 6.753 \% + 2.031 \% - 1.980 \% \right), \quad (5.24)$$

$$\Gamma_F^P = \Gamma_{0,F}^P \left(1 - 6.373 \% + 2.062 \% - 1.975 \% \right), \quad (5.25)$$

$$\Gamma_S = \Gamma_{0,S} \left(1 - 8.809 \% + 1.318 \% - 1.376 \% \right), \quad (5.26)$$

$$\Gamma_S^P = \Gamma_{0,S}^P \left(1 - 9.079 \% + 1.308 \% - 1.377 \% \right), \quad (5.27)$$

$$\Gamma_I^P = \Gamma_{0,I}^P \left(1 - 7.984 \% + 1.674 \% - 1.377 \% \right), \quad (5.28)$$

$$\Gamma_A^P = \Gamma_{0,A}^P \left(1 - 8.111 \% + 1.680 \% - 1.376 \% \right). \quad (5.29)$$

Die elektroschwachen Korrekturen heben sich gegen die Beiträge der endlichen W -Bosonbreite beinahe auf. Die QCD-Strahlungskorrekturen dominieren. Sie variieren zwischen -6.2% und -11.5% . Abgesehen von den kombinierten Raten $U + L$ und $U^P + L^P$ sind die QCD-Korrekturen für die longitudinalen und skalaren Beiträge am größten und die elektroschwachen Korrekturen am kleinsten. Umgekehrt sind für die transversalen Raten U , U^P , und F , F^P die elektroschwachen Korrekturen am größten und die QCD-Korrekturen am kleinsten. Die QCD-Korrekturen führen sämtlich zu einer Erniedrigung der Raten, während die elektroschwachen Korrekturen zu einer Erhöhung führen.

5.3 Zusammenfassung und Ausblick

Für die totale Rate Γ_{U+L} des Zerfallprozesses $q_I \rightarrow q_i + W^+$ sind die QCD-Strahlungskorrekturen der $O(\alpha_s)$ seit langem bekannt - aber die hier analytisch angegebenen Helizitäts-Strukturfunktionen $i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P in der $O(\alpha_s)$ der Störungstheorie sind neu. Dabei sind die Polarisierungseffekte nicht unerheblich. Bei dem Produktionsprozeß $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ nimmt die longitudinale Polarisierung des Topquarks in Abb. (5.1) mit der Schwerpunktsenergie von der Schwelle bei 350 GeV bis zu 1000 GeV von Null auf ca. 25% zu, während die transversale Polarisierung in Abb. (5.2) in diesem Energieintervall von 30% auf 10% abnimmt [81]. In der vorliegenden Arbeit sind die vollständigen Strahlungskorrekturen für den polarisierten Zerfall des Topquarks in der ersten Ordnung der Störungstheorie, inklusive der elektroschwachen Einschleifen- und Bremsstrahlungskorrekturen, zusammengestellt.

Die beiden zusätzlich berechneten skalaren Strukturfunktionen $I = S$ und S^P können zur Analyse des polarisierten Zerfall eines Topquarks in ein geladenes HIGGS-Boson ($t(\uparrow) \rightarrow b + H^+$) verwendet werden. Für den unpolarisierten Zerfall ist die Rate bereits von CZARNECKI und DAVIDSON [85] berechnet worden. Des weiteren kann mit den vorliegenden Ergebnissen die Spin-Impuls-Korrelation für den polarisierten Zerfall $t(\uparrow) \rightarrow b + l^+ + \nu_l$

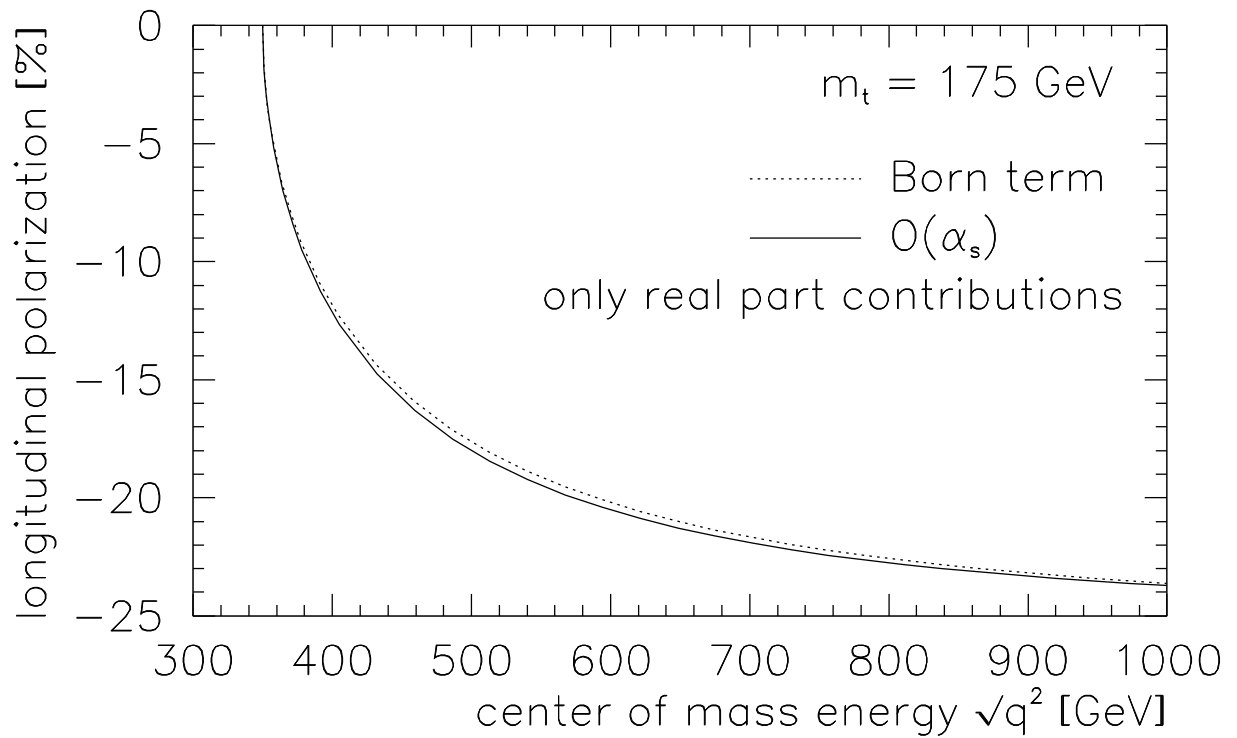


Abbildung 5.1: Longitudinale Polarisation des Topquarks für den Produktionsprozeß $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie. Quelle: [81]

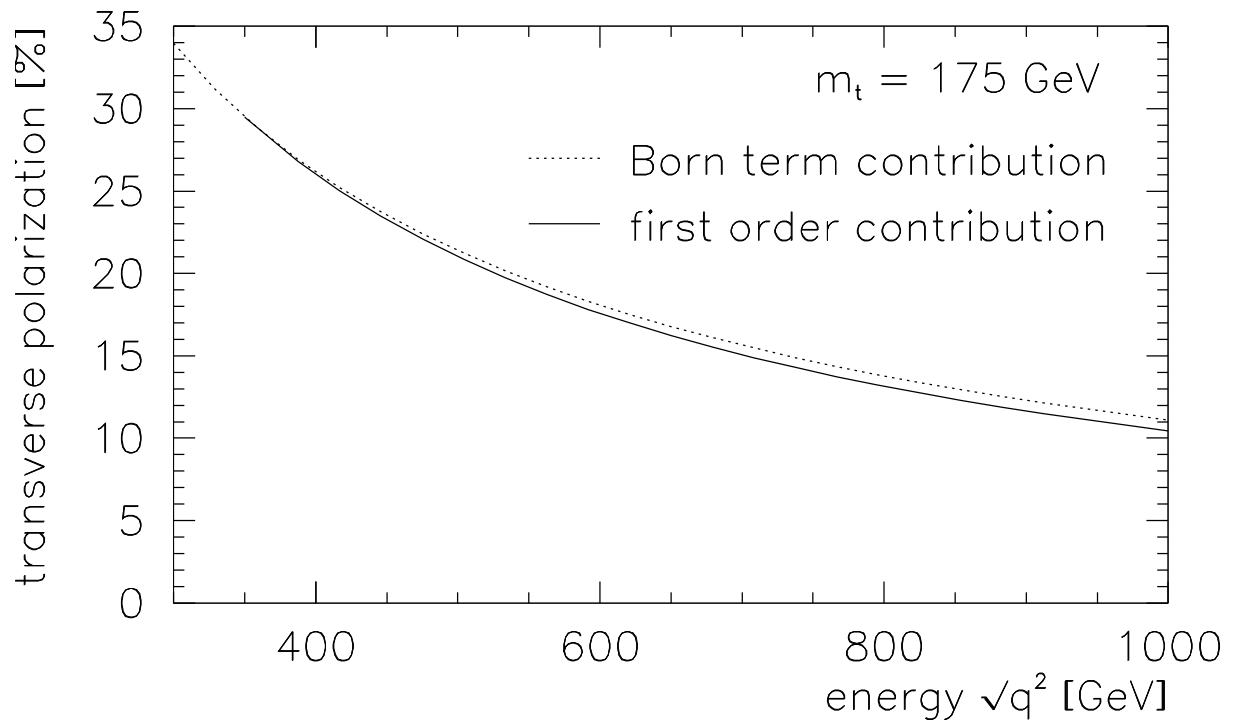


Abbildung 5.2: Transversale Polarisation des Topquarks für den Produktionsprozeß $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie. Quelle: [81]

im Ruhesystem des Topquarks untersucht werden. Da bei den Berechnungen der Helizitäts-Strukturfunktionen keine Massen vernachlässigt werden, kann auch der polarisierte Zerfall des Muons in ein polarisiertes Elektron ($\mu^-(\uparrow) \rightarrow e^-(\uparrow) + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) am Endpunkt des Elektronenspektrums berechnet werden, wo die Masseneffekte des Elektrons von Bedeutung sind. Für den Grenzfall eines masselosen Elektrons ist dieser polarisierte Zerfall bereits von SCHECK *et al.* untersucht worden [86]. Aus demselben Grund können auch für den Übergang der Lambda-Mesonen $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ die Beschränkungen für die Formfaktoren verbessert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] CDF Collaboration. Observation of Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab. *Phys. Rev. Lett.*, **74**:2626–2631, 1995.
- [2] DØ Collaboration. Observation of the Top Quark. *Phys. Rev. Lett.*, **74**:2632–2637, 1995.
- [3] Particle Data Group. Review of Particle Physics. *Eur. Phys. J.*, **C15**:1, 2000.
- [4] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman. *The Eightfold Way*. Benjamin, New York, 1964.
- [5] M. Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, **8**:214–215, 1964.
- [6] O.W. Greenberg. Spin and Unitarity Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, **13**:598–602, 1964.
- [7] J.J. Aubert et al. Experimental Observation of a Heavy Particle *J. Phys. Rev. Lett.*, **33**:1404–1406, 1974.
- [8] F.-E. Augustin et al. Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- -Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, **33**:1406–1408, 1974.
- [9] M. Perl et al. Evidence for Anomalous Lepton Production in e^+e^- -Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, **35**:1489–1492, 1975.
- [10] S.W. Herb et al. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400 GeV Proton-Nucleus Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, **39**:252–255, 1977.
- [11] S. Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, **19**:1264–1266, 1967.
- [12] A. Salam in: N. Svartholm (Hrsg.). *Elementary Particle Theory*. Almqvist & Wiksell, 1968.
- [13] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani. Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry. *Phys. Rev.*, **D2**:1285–1292, 1970.
- [14] UA1 Collaboration. Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at $\sqrt{s} = 540$ GeV. *Phys. Lett.*, **122B**:103–116, 1983.

- [15] UA1 Collaboration. Experimental Observation of Lepton Pairs of Invariant Mass around $95 \text{ GeV}/c^2$ at the CERN SPS Collider. *Phys. Lett.*, **126B**:398–410, 1983.
- [16] M. Gell-Mann. Quarks. *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, **9**:733–761, 1972.
- [17] Superkamiokande Collaboration. Neutrino Induced Upward Stopping Muons in Superkamiokande. *Phys. Lett.*, **B467**:185–193, 1999.
- [18] E. Kearns, T. Kajita, and Y. Totsuka. Detecting Massive Neutrinos. *Sci. Am.*, **281**:48–55, 1999.
- [19] G. 't Hooft. Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields. *Nucl. Phys.*, **B35**:167–188, 1971.
- [20] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys.*, **B44**:189–213, 1972.
- [21] G. 't Hooft and M. Veltman. Combinatorics of Gauge Fields. *Nucl. Phys.*, **B50**:318–353, 1972.
- [22] G. Mahlon and S. Parke. Improved Spin Basis for Angular Correlation Studies in Single Top Quark Production at the Tevatron. *Phys. Rev.*, **D55**:7249–7254, 1997.
- [23] J.M. Cornwall, D.N. Levin, and G. Tiktopoulos. Derivation of Gauge Invariance from High-Energy Unitarity Bounds on the S -Matrix. *Phys. Rev.*, **D10**:1145–1216, 1974.
- [24] C.E. Vayonakis. Born Helicity Amplitudes and Cross-Sections in Nonabelian Gauge Theories. *Lett.Nuov.Cim.*, **17**:383–391, 1976.
- [25] CDF Collaboration. Kinematics of $t\bar{t}$ -Events at CDF. *Phys. Rev.*, **D59**:092001, 1999.
- [26] $D\bar{O}$ Collaboration. Measurement of the Top Quark Pair Production Cross-Section in $p\bar{p}$ -Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, **79**:1203–1208, 1997.
- [27] CDF Collaboration. Measurement of the $t\bar{t}$ -Production Cross-Section in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.8 \text{ TeV}$. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2773–2778, 1998.
- [28] $D\bar{O}$ Collaboration. Direct Measurement of the Top Quark Mass. *Phys. Rev. Lett.*, **79**:1197–1202, 1997.
- [29] $D\bar{O}$ Collaboration. Measurement of the Top Quark Mass Using Dilepton Events. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2063–2068, 1998.
- [30] $D\bar{O}$ Collaboration. Direct Measurement of the Top Quark Mass at . *Phys. Rev.*, **D58**:052001, 1998.
- [31] D0 Collaboration. Measurement of the Top Quark Mass in the Dilepton Channel. *Phys. Rev.*, **D60**:052001, 1999.
- [32] CDF Collaboration. Measurement of the Top Quark Mass. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2767–2772, 1998.

- [33] CDF Collaboration. Measurement of the Top Quark Mass and $t\bar{t}$ -Production Cross-Section from Dilepton Events at the Collider Detector at Fermilab. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2779–2784, 1998.
- [34] CDF Collaboration. Measurement of the Top Quark Mass with the Collider Detector at Fermilab. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:271–276, 1999.
- [35] CDF Collaboration. First Observation of all Hadronic Decay of $t\bar{t}$ -Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **79**:1992–1997, 1997.
- [36] DØ Collaboration. Measurement of the Top Quark Pair Production Cross-Section in $p\bar{p}$ -Collisions Using Multijet Final States. *Phys. Rev.*, **D60**:012001, 1999.
- [37] DØ Collaboration. Measurement of the Top Quark Pair Production Cross-Section in the All Jets Decay Channel. *Phys. Rev. Lett.*, **83**:1908–1913, 1999.
- [38] CDF Collaboration. The $\mu\tau$ and $e\tau$ Decays of the Top Quarks Produced in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, **79**:3585–3590, 1997.
- [39] CDF Collaboration. Observation of Hadronic W Decays in $t\bar{t}$ Events with the Collider Detector at Fermilab. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:5720–5725, 1998.
- [40] CDF Collaboration. Search for Flavor Changing Neutral Current Decays of the Top Quark in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2525–2530, 1998.
- [41] CDF Collaboration. Measurement of the Helicity of W-Bosons in Top Quark Decays. *Phys. Rev. Lett.*, **84**:216–221, 2000.
- [42] DØ Collaboration. Spin Correlation in $t\bar{t}$ Production from $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, **85**:256–261, 2000.
- [43] S. Willenbrock. Studying the Top Quark. *Rev. Mod. Phys.*, **72**:1141–1148, 2000.
- [44] A. Denner and T. Sack. The Top Width. *Nucl. Phys.*, **B358**:46–58, 1991.
- [45] J. Liu and Y.P. Yao. One-Loop Radiative Corrections to a Heavy Top Decay in the Standard Model. *Int. J. Mod. Phys.*, **A6**:4925–4948, 1990.
- [46] A. Czarnecki. QCD Corrections to the Decay $t \rightarrow Wb$ in Dimensional Regularization. *Phys. Lett.*, **B252**:467–470, 1990.
- [47] C.S. Li, R.J. Oakes, and T.C. Yuan. QCD Corrections to $t \rightarrow W^+b$. *Phys. Rev.*, **D43**:3759–3762, 1991.
- [48] M. Jezabek and J.H. Kühn. QCD Corrections to Semileptonic Decays of Heavy Quarks. *Nucl. Phys.*, **B314**:1–9, 1989.
- [49] A. Ghinculov and Y.P. Yao. Exact Nonfactorizable $O(\alpha_s g^2)$ Two Loop Contribution to $Z \rightarrow b\bar{b}$. *Mod. Phys. Lett.*, **A15**:1967–1976, 2000.
- [50] M. Fischer, S. Groote, J.G. Körner, M.C. Mauser, and B. Lampe. Polarized Top Decay into Polarized W : $t(\uparrow) \rightarrow W(\uparrow) + b$ at $O(\alpha_s)$. *Phys. Lett.*, **B451**:406–413, 1999.

- [51] M. Fischer, S. Groote, J.G. Körner, and M.C. Mauser. Inclusive Decays of B Mesons into D_s and D_s^* at $O(\alpha_s)$ Including D_s^* Polarization Effects. *Phys. Lett.*, **B480**:265–272, 2000.
- [52] M. Fischer, S. Groote, J.G. Körner, and M.C. Mauser. Longitudinal, Transverse-Plus and Transverse-Minus W -Bosons in Unpolarized Top Quark Decays at $O(\alpha_s)$. *Phys. Rev.*, **D63**:031501, 2001.
- [53] M. Fischer, S. Groote, J.G. Körner, and M.C. Mauser. Complete Angular Analysis of Polarized Top Decay at $O(\alpha_s)$. **hep-ph/0101322**, to be published in *Phys. Rev. D*, 2001.
- [54] S. Parke and Y. Shadmi. Spin Correlations in Top Quark Pair Production at e^+e^- Colliders. *Phys. Lett.*, **B387**:199–206, 1996.
- [55] J. Bernabeu, M.M. Tung, and J. Penarrocha. $O(\alpha_s)$ Spin-Spin Correlations for Top and Bottom Quark Production in e^+e^- Annihilation. *Phys. Lett.*, **B418**:181–191, 1998.
- [56] S. Groote, J.G. Körner, and A.J. Leyva. $O(\alpha_s)$ Corrections to Longitudinal Spin-Spin Correlations in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. *Phys. Lett.*, **B418**:192–198, 1998.
- [57] A. Brandenburg, M. Flesch, and P. Uwer. The Spin Density Matrix of Top Quark Pairs Produced in Electron-Positron Annihilation Including QCD Radiative Corrections. *Phys. Rev.*, **D59**:014001, 1996.
- [58] G. Mahlon and S. Parke. Angular Correlations in Top Quark Pair Production and Decay at Hadron Colliders. *Phys. Rev.*, **D53**:4886–4896, 1996.
- [59] T.D. Lee and M. Nauenberg. Degenerate Systems and Mass Singularities. *Phys. Rev.*, **133**:B1549–B1562, 1964.
- [60] J.E. Paschalis and G.J. Gounaris. Meson Decays in the Non-Relativistic Quark-Model. *Nucl. Phys.*, **B222**:473–492, 1983.
- [61] K. Schilcher, Minh D. Tran, and N.F. Nasrallah. Spectral Functions in QCD. *Nucl. Phys.*, **B181**:91–111, 1981. **Erratum-ibid.** **B187**:187 (1981).
- [62] K.I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma, and T. Muta. Electroweak Theory - Framework of On-Shell Renormalization and Study of Higher-Order-Effects. *Progress of Theoretical Physics Supplements*, **73**:1–225, 1982.
- [63] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, Bonn, 1996.
- [64] J.G. Körner and D.H. Schiller. Helicity Description of $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ and $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}(1^{--}) \rightarrow ggg$ on and off the Z^0 : Quark, Gluon and Beam Polarization Effects. *preprint DESY*, **81**-043, 1981.
- [65] S. Balk, J.G. Körner, and D. Pirjol. Inclusive Semileptonic Decays of Polarized λ_B Baryons into Polarized τ -Leptons. *Eur. Phys. J.*, **C1**:221–233, 1998.

- [66] A.V. Manohar and M.B. Wise. Inclusive Semileptonic B and Polarized λ_B Decays from QCD. *Phys. Rev.*, **D49**:1310–1329, 1994.
- [67] E. Byckling and K. Kajantie. *Particle Kinematics*. Wiley, London, 1973.
- [68] D. Griffiths. *Einführung in die Elementarteilchenphysik*. Akademie, Berlin, 1991.
- [69] A. Denner and T. Sack. The W-Boson Width. *Z. Phys.*, **C43**:653–663, 1990.
- [70] G. 't Hooft and M. Veltman. Scalar One-Loop Integrals. *Nucl. Phys.*, **B153**:365–401, 1979.
- [71] G. Passarino and M. Veltman. One-Loop Corrections for e^+e^- Annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg Model. *Nucl. Phys.*, **B160**:151–207, 1979.
- [72] J.G. Körner, G. Kramer, G. Schuler, and B. Lampe. Calculation of the $O(\alpha_s^2)$ Parity Violating Structure Functions in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$. *Z. Phys.*, **C32**:181–228, 1986.
- [73] J.G. Körner, D. Kreimer, and K. Schilcher. A Practical γ_5 Scheme in Dimensional Regularization. *Z. Phys.*, **C54**:503–512, 1992.
- [74] P. Breitenlohner and D. Maison. Dimensional Renormalization and the Action Principle, Dimensionally Renormalized Green's Functions for the Theories with Massless Particles 1,2. *Commun. Math. Phys.*, **52**:11–38,39–54,55–92, 1977.
- [75] D. Kreimer. The γ_5 Problem and Anomalies: A Clifford Algebra Approach. *Phys. Lett.*, **B237**:59–67, 1990.
- [76] M. Böhm, H. Spiesberger, and W. Hollik. On the 1-Loop Renormalization of the Electroweak Standard Model and its Application to Leptonic Processes. *Fortschr. Phys.*, **34**:687–751, 1986.
- [77] A. Denner. Techniques for the Calculation of Electroweak Radiative Corrections at the One-Loop Level and Results for W -physics at LEP 200. *Fortschr. Phys.*, **41**:307–420, 1993.
- [78] L.H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge UP, Cambridge, 1992.
- [79] A.A. Penin and A.A. Pivovarov. Next-to-Next-to-Leading Order Relation between $R(e^+e^- \rightarrow b\bar{b})$ and $\Gamma_{sl}(b \rightarrow cl\nu_l)$ and Precise Determination of $|V_{cb}|$. *Phys. Lett.*, **B443**:264–268, 1998.
- [80] A.A. Penin and A.A. Pivovarov. Comment on 'Next-to-Next-to-Leading Order Vacuum Polarization Function of Heavy Quark Near Threshold and Sum Rules for $b\bar{b}$ System' and 'Next-to-Next-to-Leading Order Relation between $R(e^+e^- \rightarrow b\bar{b})$ and $\Gamma_{sl}(b \rightarrow cl\nu_l)$ and Precise Determination of $|V_{cb}'|$. *Nucl. Phys.*, **B549**:217–220, 1999.
- [81] S. Groote. *QCD-Strahlungskorrekturen in der Physik schwerer Quarks und Baryonen*. PhD thesis, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, 1996.
- [82] B. Lampe. Forward-Backward Asymmetry in Top Quark Semileptonic Decay. *Nucl. Phys.*, **B454**:506–526, 1995.

- [83] B. Lampe. Longitudinal W s in Top Quark Hadronic Decays. *Nucl. Phys.*, **B458**:23–34, 1996.
- [84] B. Lampe. Complete Description of Polarization Effects in Top Quark Decays Including Higher Order QCD-Corrections. **hep-ph/9801346**, 1998.
- [85] A. Czarnecki and S. Davidson. On the QCD Corrections to the Charged Higgs Decay of a Heavy Quark. *Phys. Rev.*, **D47**:3063–3064, 1993. **Erratum-ibid.** **D48**:4183–4187 (1993).
- [86] M.T. Mehr and F. Scheck. Radiative Corrections to Electron Polarization in Muon Decay. *Nucl. Phys.*, **B149**:123–148, 1979.
- [87] G.C. Wick. The Evolution of the Collision Matrix. *Phys. Rev.*, **80**:268–272, 1950.
- [88] R.P. Feynman. Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, **76**:769–789, 1949.
- [89] D. Bailin and A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory*. Hilger, Bristol, 1986.
- [90] B.A. Robson. *The Theory of Polarization Phenomena*. Oxford UP, Oxford, 1974.
- [91] L. Lewin. *Polylogarithms and Associated Functions*. North-Holland, Oxford, 1981.
- [92] H. Kopka. *L^AT_EX, Eine Einführung*. Addison-Wesley, Bonn, 1991.
- [93] J. Franzkowski. *T_EX Collection*. Mainz, 1995. unveröffentlicht.
- [94] S. Wolfram. *Das Mathematica-Buch*. Addison-Wesley, Bonn, 1997.

Anhang **A**

Die Feynman-Regeln

A.1 Allgemeines

In der n -ten Ordnung der Störungstheorie werden für den zu untersuchenden Zerfalls- oder Streuprozess zuerst alle möglichen, topologisch verschiedenen FEYNMAN-Diagramme mit n Vertices und der vorgegebenen Anzahl von Teilchen bzw. Antiteilchen im Anfangs- und Endzustand (externe Linien) bestimmt. Die internen Linien, die die Vertices miteinander verbinden, werden als Propagatoren bezeichnet.

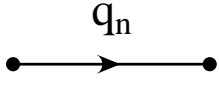
Mit Hilfe der FEYNMAN-Regeln werden die FEYNMAN-Diagramme in LORENTZ-invariante Amplituden übersetzt und zur Gesamtamplitude summiert, mit der sich Wirkungsquerschnitte und Zerfallsraten berechnen lassen. Die Zeitachse in den FEYNMAN-Diagrammen verläuft von links nach rechts. Teilchen bewegen sich vorwärts, Antiteilchen rückwärts in der Zeit, was durch Pfeile an den Linien gekennzeichnet wird. Entsprechend des S-Matrixelements $\langle f | \mathcal{M} | i \rangle$ werden die FEYNMAN-Diagramme entlang der Fermionlinien vom Endzustand $\langle f |$ in Richtung des Anfangszustands $| i \rangle$ gelesen. An jedem Vertex gilt die Energie-Impuls-Erhaltung für die ein- und auslaufenden 4-Impulse. Über innere oder sonst nicht gemessene 4-Impulse muß über den zugehörigen Phasenraum integriert werden; über nicht gemessene Polarisierungen muß im Anfangszustand gemittelt und im Endzustand summiert werden. Die Amplituden aller Graphen werden kohärent addiert, d.h. Amplituden mit einlaufenden Antiteilchen, geschlossenen Fermionen-Schleifen oder solche, die sich allein durch Austausch zweier identischer, externer Fermionen unterscheiden, müssen mit einem zusätzlichen Faktor -1 multipliziert werden.

A.2 Externe Linien

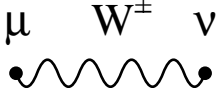
$$\text{Fermionen} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{einlaufendes Teilchen:} & u(p, s) \longrightarrow \bullet \\ \text{auslaufendes Teilchen:} & \bar{u}(p, s) \bullet \longrightarrow \\ \text{einlaufendes Antiteilchen:} & v(p, s) \longleftarrow \bullet \\ \text{auslaufendes Antiteilchen:} & \bar{v}(p, s) \bullet \longleftarrow \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Bosonen} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{einlaufendes Teilchen:} & \varepsilon(k, s) \text{~~~~~} \bullet \\ \text{auslaufendes Teilchen:} & \bullet \text{~~~~~} \varepsilon^*(k, s) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

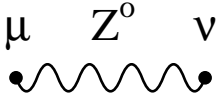
A.3 Die Propagatoren



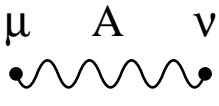
$$\frac{1}{m_n - \not{k} - i\varepsilon} = \frac{m_n + \not{k}}{m_n^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (\text{A.3})$$



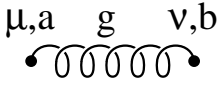
$$\frac{1}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \left\{ g^{\mu\nu} - (1 - \xi_W) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi_W m_W^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (\text{A.4})$$



$$\frac{1}{k^2 - m_Z^2 + i\varepsilon} \left\{ g^{\mu\nu} - (1 - \xi_Z) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi_Z m_Z^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (\text{A.5})$$



$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ g^{\mu\nu} - (1 - \xi_A) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (\text{A.6})$$



$$\frac{\delta^{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ g^{\mu\nu} - (1 - \xi_g) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (\text{A.7})$$



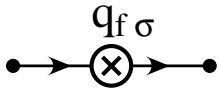
$$\frac{1}{\xi_W m_W^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (\text{A.8})$$



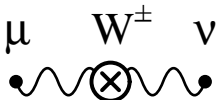
$$\frac{1}{\xi_Z m_Z^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (\text{A.9})$$



$$\frac{1}{m_H^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (\text{A.10})$$

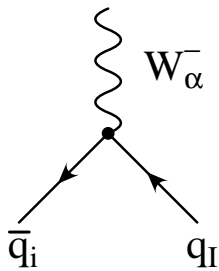


$$\not{k} \left(\delta Z_L^f \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} + \delta Z_R^{f\sigma} \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \right) - \frac{m_{f\sigma}}{2} \left(\delta Z_L^f + \delta Z_R^{f\sigma} \right) - \delta m_{f\sigma} \quad (\text{A.11})$$

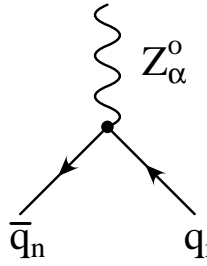


$$-g^{\mu\nu} \left((k^2 - m_W^2) \delta Z_2^W - \delta m_W^2 \right) - q^\mu q^\nu \delta \chi_1^W \quad (\text{A.12})$$

A.4 Die Quark-Boson-Vertices



$$\frac{e m_Z}{2\sqrt{2}(m_Z^2 - m_W^2)} V_{iI} \gamma_\alpha (\mathbb{1} - \gamma_5) = \frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{iI} \gamma_\alpha \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \quad (\text{A.13})$$



$$\frac{e m_Z^2}{2 m_W \sqrt{m_Z^2 - m_W^2}} \gamma_\alpha \left\{ 2I_{3n} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} - 2Q_n \frac{m_Z^2 - m_W^2}{m_Z^2} \right\} =$$

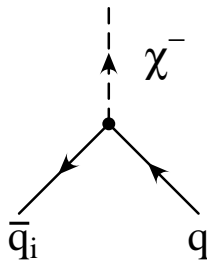
$$\frac{g_z}{2} \gamma_\alpha \left\{ 2I_{3n} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} - 2Q_n \sin^2 \theta_w \right\}$$
(A.14)



$$e Q_n \gamma_\alpha$$
(A.15)

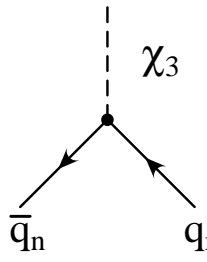


$$g_s \frac{\lambda_a}{2} \gamma_\alpha$$
(A.16)

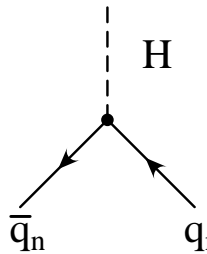


$$\frac{-i e m_Z}{2 m_W \sqrt{2(m_Z^2 - m_W^2)}} V_{iI} \left\{ (m_I - m_i) + (m_I + m_i) \gamma_5 \right\} =$$

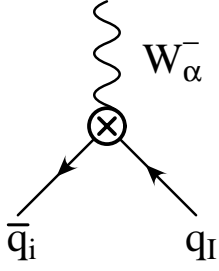
$$\frac{-i g_w}{\sqrt{2}} \frac{1}{m_W} V_{iI} \left\{ m_I \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} - m_i \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right\}$$
(A.17)



$$\frac{-i e m_n m_Z}{m_W \sqrt{m_Z^2 - m_W^2}} I_{3n} \gamma_5 = -i g_w \frac{m_n}{m_W} I_{3n} \gamma_5$$
(A.18)

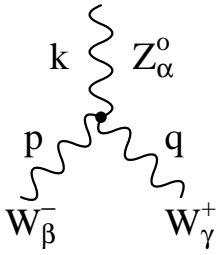


$$\frac{-e m_n m_Z}{2 m_W \sqrt{m_Z^2 - m_W^2}} = -\frac{g_w m_n}{2 m_W}$$
(A.19)



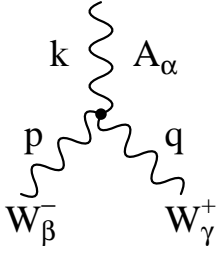
$$\frac{g_w}{\sqrt{2}} V_{iI} \gamma_\alpha \frac{1 - \gamma_5}{2} (\delta Z_1^W - \delta Z_2^W + \delta Z_L^f) \quad (\text{A.20})$$

A.5 Die Drei-Bosonen-Vertices

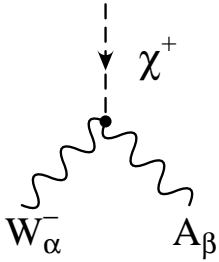


$$\frac{e m_W}{\sqrt{m_Z^2 - m_W^2}} \left\{ (k - p)_\gamma g_{\alpha\beta} + (p - q)_\alpha g_{\beta\gamma} + (q - k)_\beta g_{\gamma\alpha} \right\} = \quad (\text{A.21})$$

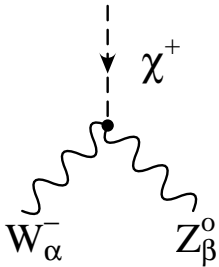
$$g_w \cos \theta_W \left\{ (k - p)_\gamma g_{\alpha\beta} + (p - q)_\alpha g_{\beta\gamma} + (q - k)_\beta g_{\gamma\alpha} \right\}$$



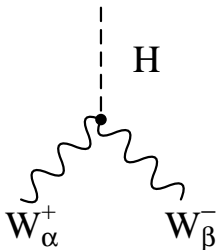
$$e \left\{ (k - p)_\gamma g_{\alpha\beta} + (p - q)_\alpha g_{\beta\gamma} + (q - k)_\beta g_{\gamma\alpha} \right\} \quad (\text{A.22})$$



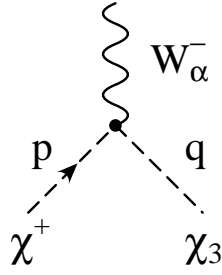
$$i e m_W g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.23})$$



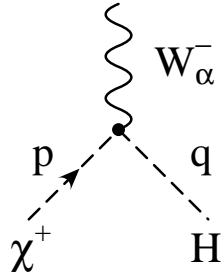
$$-i e \sqrt{m_Z^2 - m_W^2} g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.24})$$



$$\frac{e m_W m_Z}{\sqrt{m_Z^2 - m_W^2}} g_{\alpha\beta} = g_w m_W g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.25})$$



$$\frac{-e m_Z}{2 \sqrt{m_Z^2 - m_W^2}} (p - q)_\alpha = \frac{-g_w}{2} (p - q)_\alpha \quad (\text{A.26})$$



$$\frac{i e m_Z}{2 \sqrt{m_Z^2 - m_W^2}} (p - q)_\alpha = \frac{i g_w}{2} (p - q)_\alpha \quad (\text{A.27})$$

Bei sämtlichen Vertices laufen die Teilchen in den Vertexpunkt hinein. Für die Quarks $q_I = u, s, t$ beträgt die Ladung $Q_n = +2/3$ und die dritte Komponente des Isospins $I_{3n} = +1/2$, für die Quarks $q_i = d, c, b$ dagegen $Q_n = -1/3$ und $I_{3n} = -1/2$. Die GOLDSTONE-Bosonen werden mit χ^\pm und χ_3 bezeichnet und das CKM-Matrixelement mit V_{iI} . g_w und g_z sind die schwachen Kopplungskonstanten, die über den WEINBERG-Winkel θ_w mit der elektrischen Kopplungskonstanten e verknüpft sind:

$$e = g_w \sin \theta_w = g_z \sin \theta_w \cos \theta_w, \quad m_W = m_Z \cos \theta_w. \quad (\text{A.28})$$

Die in dieser Arbeit verwendeten FEYNMAN-Regeln sind mit Ausnahme von (A.7) und (A.16) der Arbeit von AOKI *et al.* entnommen [62]. In Gln.(A.11), (A.12) und (A.20) sind die zur Renormierung in Kapitel 3 benötigten Counterterme angegeben, die der Arbeit von BÖHM *et al.* entnommen sind [76].

Anhang **B**

Das Standardintegral

Mit Hilfe der *dimensionalen Regularisierung* wird in diesem Anhang das fundamentale Integral zur Berechnung von Einschleifen-Korrekturen ausgeführt. Das wesentliche Prinzip der dimensionalen Regularisierung von IR- und UV-Divergenzen besteht in der Ersetzung des S -Matrixelements in $n = 4$ Dimensionen durch ein *generalisiertes* S -Matrixelement in $n \in \mathbb{C}$ Dimensionen. Der divergente Beitrag bei $n = 4$ ergibt sich durch die analytische Fortsetzung des Konvergenzbereichs von dem Integral. Das Standard-Integral lautet:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^\alpha} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta)^\alpha} \frac{1}{(k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta)^\alpha}.$$

Zuerst wäre die k^0 -Integration entlang der reellen Achse mit den beiden Polen auszuführen. Statt das Integral funktionentheoretisch zu behandeln, wird nach WICK [87] der Integrationsweg mit Hilfe der Substitution $k^0 =: ik_E^0$ und $\vec{k} =: \vec{k}_E$ im rechten Winkel gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Diese WICK-Rotation besitzt folgende Vorteile:

- Der Integrationsweg führt nun entlang der imaginären Achse. Die Pole liegen nicht mehr auf dem Integrationsweg.
- Statt der MINKOWSKI-Metrik mit $k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2$ liegt - bis auf das Minus-Zeichen - die euklidische Metrik mit $-k_E^2 = (k_E^0)^2 + \vec{k}_E^2$ vor.

Für $n = 4$ kann die Integration jetzt in sphärischen Koordinaten ausgeführt werden, wobei das Oberflächenelement $d\Omega_4$ der Einheitskugel in vier Dimensionen durch $d\phi \sin\theta_1 d\theta_1 \sin^2\theta_2 d\theta_2$ gegeben ist und die Integration über die gesamte Oberfläche $2\pi^2$ ergibt. Die Berechnung lautet:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^\alpha} &\rightarrow \frac{i}{(-1)^\alpha} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^\alpha} = \frac{i}{(-1)^\alpha} \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int \frac{k_E^3 dk_e}{(k_E^2 + m^2)^\alpha} \\ &= \frac{i}{(-1)^\alpha} \frac{2}{(4\pi)^2} \int \frac{k_E^3 dk_e}{(k_E^2 + m^2)^\alpha} = \frac{i}{(-1)^\alpha} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)} \frac{1}{m^{2\alpha-4}} \quad \text{für } \alpha > 2. \end{aligned}$$

Für $n \neq 4$ muß zur Aufrechterhaltung der Dimensionsfreiheit des Integrals die Massenskala μ als Referenzmasse eingeführt werden. Mit Hilfe der n-dimensionalen Kugelkoordinaten, es gilt $\int d^n k_E = \int_0^\infty dk_E k_E^{n-1} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin\theta_2 \dots \int_0^\pi d\theta_{n-1} \sin^{n-2}\theta_{n-1}$, der EULERSchen Beta-Funktion und der Gamma-Funktion kann die oben durchgeführte Rechnung auf $n \in \mathbb{C}$ Dimensionen verallgemeinert werden. Die rechte Seite von Gl. (B.1) ist auch außerhalb des Konvergenzgebiets von $I(n, \alpha)$ endlich, solange die Bedingung $\alpha - (n/2) \notin \mathbb{Z}_-$ erfüllt ist. Als Komposition einer geraden und einer ungeraden Funktion müß das Vektorintegral in Gl. (B.2) über den gesamten Phasenraum verschwinden. Das Tensorintegral in Gl. (B.3) kann auf das Standardintegral reduziert werden. Für das skalare, vektorielle und tensorielle Standardintegral gilt:

$$I(n, \alpha) := \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(-k^2 + m^2 + i\epsilon)^\alpha} = \frac{i\mu^{n-2\alpha}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{m^2 + i\epsilon}{\mu^2} \right)^{\frac{n}{2} - \alpha}, \quad (\text{B.1})$$

$$I^\mu(n, \alpha) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu}{(-k^2 + m^2 + i\epsilon)^\alpha} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$I^{\mu\nu}(n, \alpha) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{(-k^2 + m^2 + i\epsilon)^\alpha} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{1}{\alpha - 1} I(n, \alpha - 1). \quad (\text{B.3})$$

Anhang **C**

Die Feynman-Parametrisierung

Der folgende Trick geht auf FEYNMAN [88] zurück, obwohl eine ähnliche Methode schon früher von SCHWINGER eingeführt wurde [63]. Durch die $n - 1$ FEYNMAN-Parameter x_1, \dots, x_{n-1} können n einzelne Faktoren $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{C}$ zu einem einzigen Faktor in der n -ten Potenz zusammengefaßt werden. Der Preis hierfür sind die eingeführten $n - 1$ FEYNMAN-Parameter, über die zusätzlich integriert werden muß. Es gilt:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(ax + b(1-x))^2}, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(ax + b(1-x))^{\alpha+\beta}}, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{(a(1-x) + b(x-y) + cy)^3}, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{\Gamma(n)}{(a_1(1-x_1) + a_2(x_1-x_2) + \dots + a_n x_{n-1})^n}, \quad (\text{C.4})$$

Die Gl. (C.2) gilt auch für komplexe α und β , wenn nur $\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) > 0$ erfüllt ist und zusätzlich nicht $\text{Im}(\frac{b}{a-b}) = 0$ und $-1 < \frac{b}{a-b} < 0$ gilt. Der Beweis für die Gl. (C.2) folgt mit Hilfe der Substitutionen $x = 1/(1+t)$ und $t = (a/b)u$ unmittelbar aus der Definition der Beta-Funktion $B(\alpha, \beta) := \int_0^\infty \frac{u^{\beta-1} du}{(1+u)^{\alpha+\beta}}$ sowie der Identität $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Der Beweis für die Gl. (C.4) folgt durch vollständige Induktion nach n und kann in Lehrbüchern nachgelesen werden, z.B. [89].

Durch α_1 - bzw. $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ -fache Differentiation nach A_1 bzw. A_2, \dots, A_n erhält man die folgende Gleichung, die auch für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ihre Gültigkeit behält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n}} &= \frac{\Gamma(\beta_1 + \dots + \beta_n)}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \times \\ &\times \frac{(1-x_1)^{\beta_1-1} (x_1-x_2)^{\beta_2-1} \dots (x_{n-1})^{\beta_n-1}}{(a_1(1-x_1) + a_2(x_1-x_2) + \dots + a_n x_{n-1})^{\beta_1+\dots+\beta_n}}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Anhang **D**

Die Grundintegrale

D.1 Definitionen

In diesem Anhang werden die Grundintegrale der Bremsstrahlungs-Korrektur aufgelistet, die zur Darstellung der analytischen Ergebnisse für den Fall $m_b \neq 0$ nötig sind. Die erste Integration über die Photonenergie E_A ist in Kapitel 3.4 ausgeführt. Für die zweite Integration über die W -Bosonenergie ist es zweckdienlich, die Substitution $E' = m_t^2 + m_W^2 - 2E_W m_t$ bzw. in ihrer dimensionslosen Form $z = (E'/m_t^2)$ einzuführen. Folgender Satz von Integralen verbleibt zu berechnen:

$$\mathcal{R}_{(m,n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{z^m dz}{\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}}, \quad \mathcal{R}_{(n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{dz}{(z-y^2) \sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}}, \quad (\text{D.1.1})$$

$$\mathcal{S}_{(m,n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{z^m dz}{\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right), \quad (\text{D.1.2})$$

$$\mathcal{S}_{(n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{dz}{(z-y^2) \sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2+z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2+z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right), \quad (\text{D.1.3})$$

$$\mathcal{T}_{(m,n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{z^m dz}{\sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2-z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2-z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right), \quad (\text{D.1.4})$$

$$\mathcal{T}_{(n)} := \int_{y^2+\epsilon'_2}^{(1-x)^2-\epsilon'_1} \frac{dz}{(z-y^2) \sqrt{\lambda^n(1, x^2, z)}} \ln \left(\frac{1-x^2-z-\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}}{1-x^2-z+\sqrt{\lambda(1, x^2, z)}} \right), \quad (\text{D.1.5})$$

wobei $\lambda(1, x^2, z) = 1 + x^4 + z^2 - 2(x^2 + z + x^2 z)$ ist. Die Werte für die Parameter m und n sind den Tabellen (3.1) und (4.1) zu entnehmen. Die „Cut-Off“-Parameter ϵ'_1 und ϵ'_2 dienen zur Regularisierung der künstlichen Singularitäten, die sich aus der Partialbruchzerlegung ergeben. Diese künstlichen Singularitäten verschwinden, wenn gemäß Gl. (3.184.1) oder (4.68) eine bestimmte Helizitäts-Strukturfunktion aus den Grundintegralen zusammengesetzt wird. Um die Quadratwurzeln zu eliminieren, wird die Substitution $z := 1 + x^2 - (u^2 + 1)(x/u)$ eingeführt. Die Variable u wird über das Intervall

$]1 + \varepsilon_1, \eta - \varepsilon_2[$ integriert, wobei $\eta = (1 + x^2 - y^2 + \lambda^{1/2})/(2x)$ mit $\lambda = \lambda(1, x^2, y^2)$ bedeutet. Die „cut-off“-Parameter ε'_1 und ε'_2 werden durch den Satz ε_1 und ε_2 ersetzt. Um die Darstellung der analytischen Resultate möglichst kurz zu halten, werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\mathcal{L}_1 := \ln\left(\frac{\eta - x}{\eta(1 - \eta x)}\right), \quad \mathcal{L}_2 := \ln\left(\frac{\eta(\eta - x)}{1 - \eta x}\right), \quad (\text{D.2.1})$$

$$\mathcal{L}_3 := \ln\left(\frac{(1-x)^2 - y^2(1-x)^2}{x \varepsilon_1^2 y^2}\right), \quad \mathcal{L}_4 := \ln\left(\frac{(1+x)^2 - y^2(1-x)^2}{x 4y^2}\right), \quad (\text{D.2.2})$$

$$\mathcal{L}_5 := \ln\left(\frac{1-x}{y}\right), \quad \mathcal{L}_6 := \ln\left(\frac{\eta(1-x)}{\eta-x}\right), \quad \mathcal{L}_7 := \ln\left(\frac{\eta(1-x)}{1-\eta x}\right), \quad (\text{D.2.3})$$

$$\beta(n) := \frac{(x-1)^n}{\eta-1} - \frac{(x+1)^n}{\eta+1}, \quad \beta_{\pm}(n) := (x-1)^n \pm (x+1)^n. \quad (\text{D.2.4})$$

Für die Grundintegrale vom Typ $\mathcal{T}_{(m,n)}$ werden die zusätzlichen Abkürzungen eingeführt:

$$\mathcal{M}_0 := \ln^2(\eta) - 2\text{Li}_2(x) + \text{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right) + \text{Li}_2(\eta x), \quad \mathcal{M}_1 := \text{Li}_2(\eta x) - \text{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad (\text{D.3.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 := & \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\ln^2(\eta) - \ln(\eta)\ln(1+x) - \ln\left(\frac{\eta-x}{(\eta-1)(1+x)}\right)\ln\left(\frac{\eta(\eta-x)}{1-\eta x}\right) + \\ & - \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\eta^2-1}{\eta(\eta-x)}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1-\eta x}{\eta-x}\right), \end{aligned} \quad (\text{D.3.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 := & \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\ln^2(\eta) + \ln(\eta)\ln(1-x) + \ln\left(\frac{\eta-x}{(\eta+1)(1-x)}\right)\ln\left(\frac{\eta(\eta-x)}{1-\eta x}\right) + \\ & + \text{Li}_2\left(-\frac{1}{\eta}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{\eta^2-1}{\eta(\eta-x)}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{1-\eta x}{\eta-x}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.3.3})$$

Für die Grundintegrale vom Typ $\mathcal{S}_{(m,n)}$ werden die analogen Abkürzungen eingeführt:

$$\mathcal{N}_0 := -2\text{Li}_2(x) + \text{Li}_2(\eta x) + \text{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad \mathcal{N}_1 := \text{Li}_2(\eta x) - \text{Li}_2\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad (\text{D.4.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 := & -\ln(\eta)\ln(1+x) + \ln\left(\frac{\eta-x}{(\eta-1)(1+x)}\right)\ln\left(\frac{\eta-x}{\eta(1-\eta x)}\right) + \\ & - \text{Li}_2\left(\frac{1}{\eta}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{x(\eta^2-1)}{\eta-x}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1-\eta x}{\eta-x}\right), \end{aligned} \quad (\text{D.4.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3 := & -\ln(\eta)\ln(1-x) + \ln\left(\frac{\eta-x}{(\eta+1)(1-x)}\right)\ln\left(\frac{\eta-x}{\eta(1-\eta x)}\right) + \\ & - \text{Li}_2\left(-\frac{1}{\eta}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{(\eta^2-1)x}{\eta-x}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{1-\eta x}{\eta-x}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.4.3})$$

D.2 Die Integrale vom Typ $\mathcal{R}_{(m,n)}$

$$\mathcal{R}_{(-2,-1)} = \frac{\lambda^{1/2}}{y^2} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) - \frac{1}{2} \frac{1+x^2}{1-x^2}(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.5.1})$$

$$\mathcal{R}_{(-1,-1)} = -\lambda^{1/2} - \frac{1}{2}(1+x^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) + \frac{1}{2}(1-x^2)(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.5.2})$$

$$\mathcal{R}_{(0,-1)} = \frac{1}{2}(1+x^2-y^2)\lambda^{1/2} - x^2(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.5.3})$$

$$\mathcal{R}_{(1,-1)} = -\frac{1}{3}\lambda^{3/2} + \frac{1}{2}(1+x^2)(1+x^2-y^2)\lambda^{1/2} - x^2(1+x^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.5.4})$$

$$\mathcal{R}_{(-2,0)} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \quad (\text{D.6.1})$$

$$\mathcal{R}_{(-1,0)} = 2\mathcal{L}_5 \quad (\text{D.6.2})$$

$$\mathcal{R}_{(0,0)} = (1-x)^2 - y^2 \quad (\text{D.6.3})$$

$$\mathcal{R}_{(1,0)} = \frac{1}{2}(1-x)^4 - \frac{1}{2}y^4 \quad (\text{D.6.4})$$

$$\mathcal{R}_{(2,0)} = \frac{1}{3}(1-x)^6 - \frac{1}{3}y^6 \quad (\text{D.6.5})$$

$$\mathcal{R}_{(-2,1)} = \frac{1}{(1-x^2)^2} \frac{\lambda^{1/2}}{y^2} + \frac{1}{2} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^3}(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.7.1})$$

$$\mathcal{R}_{(-1,1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2}(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.7.2})$$

$$\mathcal{R}_{(0,1)} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.7.3})$$

$$\mathcal{R}_{(1,1)} = -\lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(1+x^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.7.4})$$

$$\mathcal{R}_{(2,1)} = -\frac{1}{2}y^2\lambda^{1/2} - \frac{3}{2}(1+x^2)\lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(1+4x^2+x^4)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \quad (\text{D.7.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(3,1)} &= -\frac{1}{3}\lambda^{3/2} + \frac{3}{2}(1+x^2)(1+x^2-y^2)\lambda^{1/2} - (3+x^2)(1+3x^2)\lambda^{1/2} + \\ &+ \frac{1}{2}(1+x^2)(1+8x^2+x^4)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \end{aligned} \quad (\text{D.7.6})$$

$$\mathcal{R}_{(-2,2)} = \frac{1}{4x} \frac{\mathcal{L}_3}{(1-x)^4} - \frac{1}{4x} \frac{\mathcal{L}_4}{(1+x)^4} + \frac{1}{(1-x^2)^2} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \right) \quad (\text{D.8.1})$$

$$\mathcal{R}_{(-1,2)} = \frac{1}{4x} \frac{\mathcal{L}_3}{(1-x)^2} - \frac{1}{4x} \frac{\mathcal{L}_4}{(1+x)^2} \quad (\text{D.8.2})$$

$$\mathcal{R}_{(0,2)} = \frac{1}{4x}(\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_4) \quad (\text{D.8.3})$$

$$\mathcal{R}_{(1,2)} = \frac{(1-x)^2}{4x}\mathcal{L}_3 - \frac{(1+x)^2}{4x}\mathcal{L}_4 - \frac{\beta_-(2)}{2x}\mathcal{L}_5 \quad (\text{D.8.4})$$

$$\mathcal{R}_{(2,2)} = \frac{(1-x)^4}{4x}\mathcal{L}_3 - \frac{(1+x)^4}{4x}\mathcal{L}_4 - \frac{\beta_-(4)}{2x}\mathcal{L}_5 + ((1-x)^2 - y^2) \quad (\text{D.8.5})$$

$$\mathcal{R}_{(3,2)} = \frac{(1-x)^6}{4x}\mathcal{L}_3 - \frac{(1+x)^6}{4x}\mathcal{L}_4 - \frac{\beta_-(6)}{2x}\mathcal{L}_5 + 3((1-x)^2 - y^2)(1+x^2) - \frac{1}{2}\lambda \quad (\text{D.8.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(4,2)} &= \frac{(1-x)^8}{4x} \mathcal{L}_3 - \frac{(1+x)^8}{4x} \mathcal{L}_4 - \frac{\beta_-(8)}{2x} \mathcal{L}_5 + ((1-x)^2 - y^2) \times \\ &\times \left(\frac{1}{3}(1+x+x^2-y^2)^2 + (6+17x^2+6x^4) \right) - 2(1+x^2)\lambda \end{aligned} \quad (\text{D.8.7})$$

D.3 Die Integrale vom Typ $\mathcal{R}_{(n)}$

$$\mathcal{R}_{(-1)} = -\lambda^{1/2} - \frac{1}{2}(1+x^2-y^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) + \lambda^{1/2} \ln \left(\frac{\lambda^{1/2} \eta}{x \epsilon_2} \right) \quad (\text{D.9.1})$$

$$\mathcal{R}_{(0)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1-x)^2 - y^2}{(1+x)^2 - y^2} \right) + \ln \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right) \quad (\text{D.9.2})$$

D.4 Die Integrale vom Typ $\mathcal{S}_{(m,n)}$

$$\mathcal{S}_{(0,0)} = \lambda^{1/2} - x^2(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) - y^2 \mathcal{L}_1 \quad (\text{D.10.1})$$

$$\mathcal{S}_{(1,0)} = \frac{1}{4}(1+5x^2+y^2)\lambda^{1/2} - \frac{1}{2}x^2(2+x^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) - \frac{1}{2}y^4 \mathcal{L}_1 \quad (\text{D.10.2})$$

$$\mathcal{S}_{(0,1)} = \mathcal{N}_0 \quad (\text{D.11.1})$$

$$\mathcal{S}_{(1,1)} = (1+x^2)\mathcal{N}_0 - \lambda^{1/2} \mathcal{L}_1 + 2(1-x^2)\mathcal{L}_5 - ((1-x)^2 - y^2) \quad (\text{D.11.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(2,1)} &= (1+4x^2+x^4)\mathcal{N}_0 + \frac{1}{2}(3(1+x^2)+y^2)\lambda^{1/2} \mathcal{L}_1 + 3(1-x^4)\mathcal{L}_5 + \\ &- \frac{1}{4}((1-x)^2 - y^2)((5-2x+9x^2)+y^2) \end{aligned} \quad (\text{D.11.3})$$

$$\mathcal{S}_{(0,2)} = -\frac{1}{2x}(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_3) \quad (\text{D.12.1})$$

$$\mathcal{S}_{(1,2)} = \frac{(1-x)^2}{2x} \mathcal{N}_3 - \frac{(1+x)^2}{2x} \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_1 \quad (\text{D.12.2})$$

$$\mathcal{S}_{(2,2)} = \frac{(1-x)^4}{2x} \mathcal{N}_3 - \frac{(1+x)^4}{2x} \mathcal{N}_2 + 2(1+x^2)\mathcal{N}_1 + \lambda^{1/2} - x^2(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) - y^2 \mathcal{L}_1 \quad (\text{D.12.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(3,2)} &= \frac{(1-x)^6}{2x} \mathcal{N}_3 - \frac{(1+x)^6}{2x} \mathcal{N}_2 + (3+x^2)(1+3x^2)\mathcal{N}_1 + \\ &+ \frac{1}{4}((9+13x^2)+y^2)\lambda^{1/2} - \frac{1}{2}x^2(6+5x^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) - \frac{1}{2}y^2(4(1+x^2)+y^2)\mathcal{L}_1 \end{aligned} \quad (\text{D.12.4})$$

$$\mathcal{S}_{(0,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ (1-x)^{-1}(\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^{-1}\mathcal{L}_4 - \frac{\beta(0)}{x} \mathcal{L}_1 + \frac{\beta_+(0)}{x} \mathcal{L}_6 \right\} \quad (\text{D.13.1})$$

$$\mathcal{S}_{(1,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ (1-x)(\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)\mathcal{L}_4 - \frac{\beta(2)}{x} \mathcal{L}_1 + \frac{\beta_+(2)}{x} \mathcal{L}_6 \right\} \quad (\text{D.13.2})$$

$$\mathcal{S}_{(2,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ (1-x)^3(\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^3\mathcal{L}_4 - \frac{\beta(4)}{x} \mathcal{L}_1 + \frac{\beta_+(4)}{x} \mathcal{L}_6 + 4x\mathcal{N}_0 \right\} \quad (\text{D.13.3})$$

$$\mathcal{S}_{(3,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ (1-x)^5 (\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^5 \mathcal{L}_4 - \frac{\beta(6)}{x} \mathcal{L}_1 + \frac{\beta_+(6)}{x} \mathcal{L}_6 + \right. \\ \left. + 12x(1+x^2)\mathcal{N}_0 + 8x(1-x^2)\mathcal{L}_5 - 4x\lambda^{1/2}\mathcal{L}_1 - 4x((1-x)^2 - y^2) \right\} \quad (\text{D.13.4})$$

$$\mathcal{S}_{(4,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ (1-x)^7 (\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^7 \mathcal{L}_4 - \frac{\beta(8)}{x} \mathcal{L}_1 + \frac{\beta_+(8)}{x} \mathcal{L}_6 + \right. \\ \left. + 24x(1+3x^2+x^4)\mathcal{N}_0 + 28x(1-x^4)\mathcal{L}_5 - 2x(7(1+x^2)+y^2)\lambda^{1/2}\mathcal{L}_1 + \right. \\ \left. - 2x((1-x)^2 - y^2)(7+9x^2) + x\lambda \right\} \quad (\text{D.13.5})$$

D.5 Die Integrale vom Typ $\mathcal{S}_{(n)}$

$$\mathcal{S}_{(0)} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_1 \ln \left(\frac{\lambda^{1/2} \eta}{x \epsilon_2} \right) + (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \ln(y) + \quad (\text{D.14.1}) \\ + \text{Li}_2(\eta x) - \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{x(\eta^2 - 1)}{\eta - x} \right)$$

$$\mathcal{S}_{(1)} = \lambda^{-1/2} \left\{ -\frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_1 \ln \left(\frac{\lambda^{1/2}}{x \epsilon_2} \right) + 2\text{Li}_2 \left(-\frac{1}{\eta} \right) - 2\text{Li}_2 \left(-\frac{1 - \eta x}{\eta - x} \right) \right\} \quad (\text{D.14.2})$$

D.6 Die Integrale vom Typ $\mathcal{T}_{(m,n)}$

$$\mathcal{T}_{(0,0)} = \lambda^{1/2} - (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) + y^2 \mathcal{L}_2 \quad (\text{D.15.1})$$

$$\mathcal{T}_{(1,0)} = \frac{1}{4}(5 + x^2 + y^2)\lambda^{1/2} - \frac{1}{2}(1 + 2x^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) + \frac{1}{2}y^4 \mathcal{L}_2 \quad (\text{D.15.2})$$

$$\mathcal{T}_{(0,1)} = -\mathcal{M}_0 \quad (\text{D.16.1})$$

$$\mathcal{T}_{(1,1)} = -(1+x^2)\mathcal{M}_0 + \lambda^{1/2}\mathcal{L}_2 - 2(1-x^2)\mathcal{L}_5 - ((1-x)^2 - y^2) \quad (\text{D.16.2})$$

$$\mathcal{T}_{(2,1)} = -(1+4x^2+x^4)\mathcal{M}_0 + \frac{1}{2}(3(1+x^2)+y^2)\lambda^{1/2}\mathcal{L}_2 - 3(1-x^4)\mathcal{L}_5 + \quad (\text{D.16.3}) \\ - \frac{1}{4}((1-x)^2 - y^2)((9-2x+5x^2)+y^2)$$

$$\mathcal{T}_{(0,2)} = -\frac{1}{2x}(\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3) \quad (\text{D.17.1})$$

$$\mathcal{T}_{(1,2)} = -\frac{(1+x)^2}{2x}\mathcal{M}_2 - \frac{(1-x)^2}{2x}\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_1 \quad (\text{D.17.2})$$

$$\mathcal{T}_{(2,2)} = -\frac{(1+x)^4}{2x}\mathcal{M}_2 - \frac{(1-x)^4}{2x}\mathcal{M}_3 + 2(1+x^2)\mathcal{M}_1 + \lambda^{1/2} - (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) + y^2 \mathcal{L}_2 \quad (\text{D.17.3})$$

$$\mathcal{T}_{(3,2)} = -\frac{(1+x)^6}{2x}\mathcal{M}_2 - \frac{(1-x)^6}{2x}\mathcal{M}_3 + (3+x^2)(1+3x^2)\mathcal{M}_1 + \quad (\text{D.17.4}) \\ + \frac{1}{4}(13+9x^2+y^2)\lambda^{1/2} - \frac{1}{2}(5+6x^2)(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) + \frac{1}{2}y^2(4(1+x^2)+y^2)\mathcal{L}_2$$

$$\mathcal{T}_{(0,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ - (1-x)^{-1} (\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^{-1} \mathcal{L}_4 + \beta(0) \mathcal{L}_2 + \beta_+(0) \mathcal{L}_7 \right\} \quad (\text{D.18.1})$$

$$\mathcal{T}_{(1,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ - (1-x) (\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x) \mathcal{L}_4 + \beta(2) \mathcal{L}_2 + \beta_+(2) \mathcal{L}_7 \right\} \quad (\text{D.18.2})$$

$$\mathcal{T}_{(2,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ - (1-x)^3 (\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^3 \mathcal{L}_4 + \beta(4) \mathcal{L}_2 + \beta_+(4) \mathcal{L}_7 - 4x^2 \mathcal{M}_0 \right\} \quad (\text{D.18.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(3,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ - (1-x)^5 (\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^5 \mathcal{L}_4 + \beta(6) \mathcal{L}_2 + \beta_+(6) \mathcal{L}_7 + \right. \\ \left. - 12x^2(1+x^2) \mathcal{M}_0 - 8x^2(1-x^2) \mathcal{L}_5 + 4x^2 \lambda^{1/2} \mathcal{L}_2 - 4x^2 ((1-x)^2 - y^2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.18.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(4,3)} = \frac{1}{4x} \left\{ - (1-x)^7 (\mathcal{L}_3 + 2) - (1+x)^7 \mathcal{L}_4 + \beta(8) \mathcal{L}_2 + \beta_+(8) \mathcal{L}_7 + \right. \\ \left. - 24x^2(1+3x^2+x^4) \mathcal{M}_0 - 28x^2(1-x^4) \mathcal{L}_5 - 2x^2 (7(1+x^2) + y^2) \lambda^{1/2} \mathcal{L}_2 + \right. \\ \left. - 2x^2 ((1-x)^2 - y^2) (9 + 7x^2) + x^2 \lambda \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.18.5})$$

D.7 Die Integrale vom Typ $\mathcal{T}_{(n)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(0)} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_2 \ln \left(\frac{\lambda^{1/2} \eta}{x \epsilon_2} \right) + (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \ln(y) + \\ + \text{Li}_2(\eta x) - \text{Li}_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{(\eta^2 - 1)}{\eta(\eta - x)} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.19.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(1)} = \lambda^{-1/2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4} (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2) - \mathcal{L}_2 \ln \left(\frac{\lambda^{1/2} \eta}{x \epsilon_2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \text{Li}_2 \left(-\frac{1}{\eta} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(-\frac{1 - \eta x}{\eta - x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.19.2})$$

Von all den aufgelisteten Integralen werden nur $\mathcal{R}_{(-2,-1)}$, $\mathcal{R}_{(-1,-1)}$, $\mathcal{R}_{(0,-1)}$, $\mathcal{S}_{(0,0)}$ und $\mathcal{S}_{(1,0)}$ benötigt, um die totale Rate im QCD-Fall zu erhalten.

Anhang **E**

Die Koeffizientenfunktionen

In diesem Anhang werden die verschiedenen Koeffizientenfunktionen $\rho_{(n),i}$, $\rho_{(m,n),i}$, $\sigma_{(n),i}$, $\sigma_{(m,n),i}$ und $\tau_{(n),i}$, $\tau_{(m,n),i}$ ($i = U + L, U^P + L^P, U, U^P, L, L^P, F, F^P, S, S^P, I^P$ und A^P) zusammengestellt, die mit den Grundintegralen aus dem Anhang D, wie in den Gln. (3.184.1) und (4.68) beschrieben, multipliziert werden. Der Index i wird im folgenden unterdrückt. Die Koeffizientenfunktionen für die QCD-Bremsstrahlungskorrekturen sind in [53] aufgeführt.

E.1 Die totale Rate $i = U + L$

$$\sigma_{(0,0)} = \frac{Q_t^2 y^2}{4x^2} \left((1 + 2x^2) + y^2 \right) \quad (\text{E.1.1})$$

$$\sigma_{(1,0)} = -\frac{Q_t^2}{4x^2} \left((1 + 2x^2) + y^2 \right) \quad (\text{E.1.2})$$

$$\tau_{(0,0)} = 2Q_b(Q_t - Q_b)y^2 \quad (\text{E.1.3})$$

$$\tau_{(1,0)} = -2Q_b(Q_t - Q_b) \quad (\text{E.1.4})$$

$$\rho_{(-2,-1)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1 - x^2)}{8x^2} \left((1 + 2x^2) + y^2 \right) \quad (\text{E.1.5})$$

$$\rho_{(-1,-1)} = -\frac{Q_t Q_b y^2}{2x^2} \left((1 + 2x^2) + y^2 \right) - \frac{Q_b^2}{8x^2} \left((1 - x^2)(1 + 2x^2) - 11x^2 y^2 - y^4 \right) \quad (\text{E.1.6})$$

$$\rho_{(0,-1)} = \frac{Q_t^2 y^2}{x^2} + \frac{Q_b Q_t}{2x^2} \left((1 + 2x^2) - 3y^2 \right) - \frac{Q_b^2}{8x^2} \left((1 + 10x^2) - 7y^2 \right) \quad (\text{E.1.7})$$

$$\rho_{(1,-1)} = -\frac{(Q_t - Q_b)^2}{x^2} \quad (\text{E.1.8})$$

E.2 Die polarisierte totale Rate $i = U^P + L^P$

$$\sigma_{(0)} = -\frac{\sqrt{\lambda} Q_t}{2x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.2.1})$$

$$\sigma_{(1)} = \frac{\lambda Q_t}{2x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.2.2})$$

$$\sigma_{(0,0)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.2.3})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(0,1)} &= -\frac{Q_t^2}{4x^2} \left(4(1 - 2x^2)(1 + x^4) - (11 - x^2 - 6x^4)y^2 + (9 + x^2)y^4 - 2y^6 \right) + \\ &+ \frac{Q_t Q_b (1 + x^2)}{x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.2.4})$$

$$\sigma_{(1,1)} = \frac{Q_t^2}{4x^2} \left((1 - 7x^2 - 6x^4) - (2 + x^2)y^2 + y^4 \right) - \frac{Q_t Q_b}{x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.2.5})$$

$$\sigma_{(2,1)} = -\frac{Q_t^2}{4x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.2.6})$$

$$\tau_{(0)} = -\frac{\sqrt{\lambda} (Q_t - Q_b)}{2x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \left(Q_t (1 + x^2 - y^2) - Q_b (1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.2.7})$$

$$\tau_{(1)} = \frac{\lambda (Q_t - Q_b)}{2x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \left(Q_t (1 + x^2 - y^2) - Q_b (1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.2.8})$$

$$\tau_{(0,0)} = \frac{\sqrt{\lambda} (Q_t - Q_b)^2}{2x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.2.9})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(0,1)} &= -\frac{(Q_t - Q_b) Q_t}{2x^2} \left(2(1 - 2x^2)(1 + x^4) - (5 + x^2 - 4x^4)y^2 + (4 + x^2)y^4 - y^6 \right) + \\ &+ \frac{(Q_t - Q_b) Q_b}{2x^2} \left(2(1 - x^2)(1 - 2x^2) - (5 + 3x^2)(1 - 2x^4)y^2 + (4 - x^2)y^4 - y^6 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.2.10})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(1,1)} &= \frac{(Q_t - Q_b) Q_t}{2x^2} \left((1 - 5x^2 - 2x^4) - (2 - x^2)y^2 + y^4 \right) + \\ &- \frac{(Q_t - Q_b) Q_b}{2x^2} \left((1 - x^2 + 2x^4) - (2 - 5x^2)y^2 + y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.2.11})$$

$$\tau_{(2,1)} = 2Q_b(Q_t - Q_b) \quad (\text{E.2.12})$$

$$\rho_{(-1)} = -\frac{\sqrt{\lambda} (Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2)}{x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.2.13})$$

$$\rho_{(0)} = \frac{\lambda (Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2)}{x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.2.14})$$

$$\rho_{(-2,0)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1 - x^2)^2}{8x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.2.15})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(-1,0)} &= -\frac{Q_t Q_b y^2 (1 - x^2)}{2x^2} \left((1 - 2x^2) - y^2 \right) + \\ &- \frac{Q_b^2}{8x^2} \left((1 - x^2)^2 (1 - 2x^2) + (1 + 8x^2 - 13x^4)y^2 - 2(1 + x^2)y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.2.16})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(0,0)} &= -\frac{Q_t^2}{2x^2} \left(2(1 + x^2)(1 - 2x^2) - (5 + 2x^2)y^2 + y^4 \right) + \\ &+ \frac{Q_t Q_b}{2x^2} \left((3 + x^2)(1 - 2x^2) - (10 - x^2)y^2 + 3y^4 \right) + \\ &- \frac{Q_b^2}{8x^2} \left(2(3 - 7x^2 - 2x^4) - (23 - 12x^2)y^2 + 9y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.2.17})$$

$$\rho_{(1,0)} = -\frac{Q_t^2}{2x^2} \left((1 + 4x^2) + 3y^2 \right) + \frac{Q_t Q_b}{2x^2} \left((5 + 2x^2) + 3y^2 \right) - \frac{Q_b^2}{8x^2} \left((9 - 2x^2) + 7y^2 \right) \quad (\text{E.2.18})$$

$$\rho_{(2,0)} = \frac{(Q_t - Q_b)^2}{x^2} \quad (\text{E.2.19})$$

E.3 Die transversal unpolarisierte Rate $i = U$

$$\sigma_{(0,2)} = Q_t^2 y^2 \left(\frac{1}{2} (1+x^2)(3+x^2) - y^2 \right) - 4Q_t Q_b y^2 \quad (\text{E.3.1})$$

$$\sigma_{(1,2)} = -Q_t^2 \left(\frac{1}{2} (1+x^2)(3+x^2) + (2+x^2)y^2 \right) + 4Q_t Q_b \quad (\text{E.3.2})$$

$$\sigma_{(2,2)} = Q_t^2 \left((3+x^2) + \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (\text{E.3.3})$$

$$\sigma_{(3,2)} = -\frac{Q_t^2}{2} \quad (\text{E.3.4})$$

$$\tau_{(0,2)} = (Q_t - Q_b) Q_t y^2 \left((1+3x^2) - y^2 \right) + \quad (\text{E.3.5})$$

$$+ (Q_t - Q_b) Q_b y^2 \left((1-x^2)(1-4x^2) + (1-2x^2)y^2 \right)$$

$$\tau_{(1,2)} = -(Q_t - Q_b) Q_t \left((1+3x^2) + x^2 y^2 - y^4 \right) + \quad (\text{E.3.6})$$

$$- (Q_t - Q_b) Q_b \left((1-x^2)(1-4x^2) + (4+x^2)y^2 + y^4 \right)$$

$$\tau_{(2,2)} = (Q_t - Q_b) \left(Q_t (1+x^2 - y^2) + 3Q_b (1+x^2 + y^2) \right) \quad (\text{E.3.7})$$

$$\tau_{(3,2)} = -2Q_b (Q_t - Q_b) \quad (\text{E.3.8})$$

$$\rho_{(-2,1)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1-x^2)^3}{4} \quad (\text{E.3.9})$$

$$\rho_{(-1,1)} = -Q_t Q_b (1-x^2)^2 y^2 - \frac{Q_b^2 (1-x^2)}{4} \left((1-x^2)^2 - (5-9x^2)y^2 - 2y^4 \right) \quad (\text{E.3.10})$$

$$\rho_{(0,1)} = \frac{Q_t^2 y^2}{x^2} \left((1+x^2+2x^4) - x^2 y^2 \right) + \quad (\text{E.3.11})$$

$$+ \frac{Q_b Q_t}{x^2} \left(x^2 (1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(1-2x^2)y^2 + 4x^2 y^4 \right) +$$

$$- \frac{Q_b^2}{4x^2} \left(x^2 (1-x^2)(5-9x^2) - (4-13x^2+5x^4)y^2 + 10x^2 y^4 \right)$$

$$\rho_{(1,1)} = -\frac{Q_t^2}{x^2} \left((1+x^2+2x^4) + (2+x^2)y^2 \right) + \quad (\text{E.3.12})$$

$$+ \frac{Q_b Q_t}{x^2} \left(2(1-x^2)(1-2x^2) + (4-x^2)y^2 \right) +$$

$$- \frac{Q_b^2}{4x^2} \left((4-11x^2+3x^4) + (8-7x^2)y^2 \right)$$

$$\rho_{(2,1)} = \frac{Q_t^2}{x^2} \left(2(1+x^2) + y^2 \right) - \frac{Q_t Q_b}{x^2} \left((4+3x^2) + 2y^2 \right) + \frac{Q_b^2}{4x^2} \left((8+3x^2) + 4y^2 \right) \quad (\text{E.3.13})$$

$$\rho_{(3,1)} = -\frac{(Q_t - Q_b)^2}{x^2} \quad (\text{E.3.14})$$

E.4 Die polarisierte transversal unpolarisierte Rate $i = U^P$

$$\sigma_{(0)} = \sqrt{\lambda} Q_t \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.4.1})$$

$$\sigma_{(1)} = -\lambda Q_t \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.4.2})$$

$$\sigma_{(0,0)} = -\sqrt{\lambda} Q_t^2 \quad (\text{E.4.3})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(0,3)} &= Q_t^2 \left(2(1 - x^2)^2(1 + x^4) - \frac{1}{2}(1 - x^2)^2(1 + 5x^2)y^2 - x^2(5 - x^2)y^4 \right) + \\ &\quad - 2Q_t Q_b \left((1 - x^2)^2(1 + x^2) - 2y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.4})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(1,3)} &= -\frac{Q_t^2}{2} \left((15 - 3x^2 + 9x^4 + 11x^6) - (7 + 22x^2 + 11x^4)y^2 - 2(1 - 2x^2)y^4 \right) + \\ &\quad + Q_t Q_b \left(2(3 + 2x^2 + 3x^4) - 8y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.5})$$

$$\sigma_{(2,3)} = \frac{Q_t^2}{2} \left((17 + 12x^2 + 11x^4) - (15 + 7x^2)y^2 + 2y^4 \right) - 2Q_t Q_b \left(1 + 3x^2 \right) \quad (\text{E.4.6})$$

$$\sigma_{(3,3)} = -\frac{Q_t^2}{2} \left((3 + 5x^2) - y^2 \right) + 2Q_t Q_b \quad (\text{E.4.7})$$

$$\sigma_{(4,3)} = \frac{Q_t^2}{2} \quad (\text{E.4.8})$$

$$\tau_{(0)} = \sqrt{\lambda} (Q_t - Q_b) \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.4.9})$$

$$\tau_{(1)} = -\lambda (Q_t - Q_b) \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.4.10})$$

$$\tau_{(0,0)} = -\sqrt{\lambda} (Q_t - Q_b)^2 \quad (\text{E.4.11})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(0,3)} &= (Q_t - Q_b) Q_t \left(2(1 - x^2)^2(1 + x^4) - 3x^2(1 - x^2)^2 y^2 - x^2(5 - x^2)y^4 \right) + \\ &\quad - (Q_t - Q_b) Q_b (1 - x^2) \left(2(1 - x^2)^2 - (1 - x^2)(2 + 5x^2)y^2 - 3x^2 y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.12})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(1,3)} &= -(Q_t - Q_b) Q_t \left((8 - 3x^2 + 6x^4 + 5x^6) - 2(1 + 6x^2 + 3x^4)y^2 + x^2 y^4 \right) + \\ &\quad + (Q_t - Q_b) Q_b \left((1 - x^2)(6 - x^2 + 3x^4) - 4(2 + 3x^2 + 2x^4)y^2 + 3x^2 y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.13})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(2,3)} &= (Q_t - Q_b) Q_t \left(5(2 + x^2 + x^4) - (4 + 5x^2)y^2 \right) + \\ &\quad - (Q_t - Q_b) Q_b \left((4 - 3x^2 - 5x^4) - (10 + 7x^2)y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.14})$$

$$\tau_{(3,3)} = -2(Q_t - Q_b) \left(Q_t(2 + x^2 - y^2) + Q_b(1 + 2x^2 + 2y^2) \right) \quad (\text{E.4.15})$$

$$\tau_{(4,3)} = 2Q_b(Q_t - Q_b) \quad (\text{E.4.16})$$

$$\rho_{(-1)} = 2\sqrt{\lambda}(Q_t^2 - Q_tQ_b + Q_b^2) \quad (\text{E.4.17})$$

$$\rho_{(0)} = -2\lambda(Q_t^2 - Q_tQ_b + Q_b^2) \quad (\text{E.4.18})$$

$$\rho_{(-2,2)} = -\frac{Q_b^2y^2(1-x^2)^4}{4} \quad (\text{E.4.19})$$

$$\rho_{(-1,2)} = Q_tQ_by^2(1-x^2)^3 + \frac{Q_b^2(1-x^2)}{2} \left(\frac{1}{2}(1-x^2)^2 - y^2(1-5x^2) - y^4 \right) \quad (\text{E.4.20})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(0,2)} = & \frac{Q_t^2}{x^2} \left(2x^2(1-x^2)^2(1+x^2) + (1-x^2)^2(1+x^2)y^2 - x^2(3+x^2)y^4 \right) + \\ & - \frac{Q_tQ_b}{x^2} \left(x^2(1-x^2)^2(3+x^2) + (1-x^2)(2+3x^2-x^4)y^2 - 4x^4y^4 \right) + \\ & + \frac{Q_b^2}{x^2} \left(\frac{1}{2}x^2(5-x^2)(1-x^2)^2 + (1+x^2)(1-3x^4)y^2 - 2x^2(1+x^2)y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.21})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(1,2)} = & -\frac{Q_t^2}{x^2} \left((1+5x^2+3x^4+7x^6) + (3-4x^2+x^4)y^2 - x^2y^4 \right) + \\ & + \frac{Q_tQ_b}{x^2} \left((2+7x^2+7x^6) + (6+7x^2-x^4)y^2 - 4x^2y^4 \right) + \\ & - \frac{Q_b^2}{2x^2} \left((2+13x^2+4x^4+5x^6) + (6-5x^2-9x^4)y^2 - 5x^2y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.22})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(2,2)} = & \frac{Q_t^2}{x^2} \left((3+5x^2+8x^4) + (3+x^2)y^2 \right) - \frac{Q_bQ_t}{x^2} \left((6+13x^2+9x^4) + (6-x^2)y^2 \right) + \\ & + \frac{Q_b^2}{2x^2} \left((6+11x^2+7x^4) + (6-\frac{11}{2}x^2)y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.23})$$

$$\rho_{(3,2)} = -\frac{Q_t^2}{x^2} \left((3+4x^2) + y^2 \right) + \frac{Q_tQ_b}{x^2} \left((6+5x^2) + 2y^2 \right) - \frac{Q_b^2}{x^2} \left((3+\frac{7}{4}x^2) + y^2 \right) \quad (\text{E.4.24})$$

$$\rho_{(4,2)} = \frac{(Q_t - Q_b)^2}{x^2} \quad (\text{E.4.25})$$

E.5 Die longitudinale Rate $i = L$

$$\sigma_{(0,2)} = \frac{Q_t^2y^2}{4x^2} \left((1-6x^2-11x^4) + (1+x^2)^2y^2 \right) + 4Q_tQ_by^2 \quad (\text{E.5.1})$$

$$\sigma_{(1,2)} = -\frac{Q_t^2}{4x^2} \left((1-6x^2-11x^4) + (3-4x^2+x^4)y^2 + 2(1+x^2)y^4 \right) - 4Q_tQ_b \quad (\text{E.5.2})$$

$$\sigma_{(2,2)} = \frac{Q_t^2}{4x^2} \left(2(1-3x^2) + (3+2x^2)y^2 + y^4 \right) \quad (\text{E.5.3})$$

$$\sigma_{(3,2)} = -\frac{Q_t^2(1+y^2)}{4x^2} \quad (\text{E.5.4})$$

$$\tau_{(0,2)} = -(Q_t - Q_b)Q_ty^2 \left((1+3x^2) - y^2 \right) + \quad (\text{E.5.5})$$

$$\begin{aligned} & + (Q_t - Q_b)Q_b y^2 \left((1 - x^2)(1 + 2x^2) - (1 - 2x^2)y^2 \right) \\ \tau_{(1,2)} = & (Q_t - Q_b)Q_t \left((1 + 3x^2) + x^2 y^2 - y^4 \right) + \end{aligned} \quad (\text{E.5.6})$$

$$- (Q_t - Q_b)Q_b \left((1 - x^2)(1 + 2x^2) + 3x^2 y^2 - y^4 \right)$$

$$\tau_{(2,2)} = -(Q_t - Q_b)^2 (1 + x^2 - y^2) \quad (\text{E.5.7})$$

$$\rho_{(-2,1)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1 + y^2) (1 - x^2)^3}{8x^2} \quad (\text{E.5.8})$$

$$\rho_{(-1,1)} = -\frac{Q_t Q_b y^2 (1 + y^2) (1 - x^2)^2}{2x^2} + \quad (\text{E.5.9})$$

$$- \frac{Q_b^2 (1 - x^2)}{8x^2} \left((1 - x^2)^2 + (2 - x^2)(1 + 3x^2)y^2 + (1 + 7x^2)y^4 \right)$$

$$\rho_{(0,1)} = -Q_t^2 y^2 (3 + x^2 - y^2) - \frac{Q_t Q_b}{2x^2} \left((1 - x^2)^2 + 3(1 + 3x^4)y^2 + 2(1 - 3x^2)y^4 \right) + \quad (\text{E.5.10})$$

$$+ \frac{Q_b^2}{8x^2} \left((1 - x^2)(1 + 7x^2 - 4x^4) - 9x^2(1 + 3x^2)y^2 - (1 - 17x^2)y^4 \right)$$

$$\rho_{(1,1)} = Q_t^2 (3 + x^2 - y^2) - \frac{Q_b Q_t}{2x^2} \left(2(1 + x^2 + 4x^4) + 3(1 - 2x^2)y^2 + y^4 \right) + \quad (\text{E.5.11})$$

$$+ \frac{Q_b^2}{8x^2} \left((1 + 15x^2 + 20x^4) + (2 - 17x^2)y^2 + y^4 \right)$$

$$\rho_{(2,1)} = \frac{(4Q_t Q_b - Q_b^2)(1 + y^2)}{8x^2} \quad (\text{E.5.12})$$

E.6 Die polarisierte longitudinale Rate $i = L^P$

$$\sigma_{(0)} = -\frac{\sqrt{\lambda} Q_t (1 - y^2)}{2x^2} \left(Q_t (1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.6.1})$$

$$\sigma_{(1)} = \frac{\lambda Q_t (1 - y^2)}{2x^2} \left(Q_t (1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.6.2})$$

$$\sigma_{(0,0)} = \frac{\sqrt{\lambda} Q_t^2 (1 - y^2)}{2x^2} \quad (\text{E.6.3})$$

$$\sigma_{(0,3)} = -\frac{Q_t^2}{4x^2} \left(4(1 - x^2)^2 (1 + x^4) - (1 - x^2)^2 (11 + x^2 + 4x^4)y^2 + \quad (\text{E.6.4}) \right.$$

$$\left. + (9 - 17x^2 - 13x^4 + 5x^6)y^4 - 2(1 - x^2)^2 y^6 \right) +$$

$$+ \frac{Q_t Q_b}{x^2} \left((1 - x^2)^2 (1 + x^2) (1 - y^2) - 4x^2 y^4 \right)$$

$$\sigma_{(1,3)} = \frac{Q_t^2}{4x^2} \left((9 + 13x^2 - 5x^4 + 15x^6) - (24 + 31x^2 + 30x^4 + 11x^6)y^2 + \quad (\text{E.6.5}) \right.$$

$$\left. + (19 + 14x^2 + 11x^4)y^4 - 4(1 + x^2)y^6 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{Q_t Q_b}{x^2} \left((3 + 2x^2 + 3x^4) - (3 + x^2)(1 + 3x^2)y^2 \right) \\
\sigma_{(2,3)} &= - \frac{Q_t^2}{4x^2} \left((7 + 10x^2 + 7x^4) - (16 + 33x^2 + 11x^4)y^2 + (11 + 7x^2)y^4 - 2y^6 \right) + \text{(E.6.6)} \\
& + \frac{Q_t Q_b}{x^2} \left((3 - x^2) - 3(1 + x^2)y^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{(3,3)} = \frac{Q_t^2}{4x^2} \left(3(1 - x^2) - (4 + 5x^2)y^2 + y^4 \right) - \frac{Q_t Q_b (1 - y^2)}{x^2} \quad \text{(E.6.7)}$$

$$\sigma_{(4,3)} = - \frac{Q_t^2 (1 - y^2)}{4x^2} \quad \text{(E.6.8)}$$

$$\tau_{(0)} = - \frac{\sqrt{\lambda} (Q_t - Q_b) (1 - y^2)}{2x^2} \left(Q_t (1 + x^2 - y^2) - Q_b (1 - x^2 - y^2) \right) \quad \text{(E.6.9)}$$

$$\tau_{(1)} = \frac{\lambda (Q_t - Q_b) (1 - y^2)}{2x^2} \left(Q_t (1 + x^2 - y^2) - Q_b (1 - x^2 - y^2) \right) \quad \text{(E.6.10)}$$

$$\tau_{(0,0)} = \frac{\sqrt{\lambda} (Q_t - Q_b)^2 (1 - y^2)}{2x^2} \quad \text{(E.6.11)}$$

$$\tau_{(0,3)} = - \frac{(Q_t - Q_b) Q_t}{2x^2} \left(2(1 - x^2)^2 (1 + x^4) - (1 - x^2)^2 (5 + x^2 + 2x^4) y^2 + \right. \quad \text{(E.6.12)}$$

$$\left. + (4 - 7x^2 - 8x^4 + 3x^6) y^4 - (1 - x^2)^2 y^6 \right) +$$

$$+ \frac{(Q_t - Q_b) Q_b}{2x^2} \left(2(1 - x^2)^3 - (1 - x^2)^2 (5 - 3x^2 + 4x^4) y^2 + \right.$$

$$\left. + (4 - 9x^2 + 5x^6) y^4 - (1 - x^2)^2 y^6 \right)$$

$$\tau_{(1,3)} = \frac{(Q_t - Q_b) Q_t}{2x^2} \left((5 + 5x^2 - x^4 + 7x^6) - (12 + 11x^2 + 22x^4 + 3x^6) y^2 + \right. \quad \text{(E.6.13)}$$

$$\left. + (9 + 8x^2 + 5x^4) y^4 - 2(1 + x^2) y^6 \right) +$$

$$- \frac{(Q_t - Q_b) Q_b}{2x^2} \left((1 - x^2) (5 + 6x^2 - 7x^4 + 4x^6) - (12 + 3x^2 + 10x^4 - x^6) y^2 + \right.$$

$$\left. + (9 + 4x^2 + 5x^4) y^4 - 2(1 + x^2) y^6 \right)$$

$$\tau_{(2,3)} = - \frac{(Q_t - Q_b) Q_t}{2x^2} \left(2(2 + 4x^2 - x^4 + x^6) - (9 + 11x^2 + 4x^4) y^2 + \right. \quad \text{(E.6.14)}$$

$$\left. + 3(2 + x^2) y^4 - y^6 \right) +$$

$$+ \frac{(Q_t - Q_b) Q_b}{2x^2} \left(2(1 - x^2) (2 + 5x^2 + x^4) - (1 + x^2) (9 - 2x^2) y^2 + \right.$$

$$\left. + (6 + x^2) y^4 - y^6 \right)$$

$$\tau_{(3,3)} = \frac{(Q_t - Q_b)^2 (1 + x^2 - y^2)}{2x^2} \left((1 + 2x^2) - y^2 \right) \quad \text{(E.6.15)}$$

$$\rho_{(-1)} = - \frac{\sqrt{\lambda} (Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2) (1 - y^2)}{x^2} \quad \text{(E.6.16)}$$

$$\rho_{(0)} = \frac{\lambda (Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2) (1 - y^2)}{x^2} \quad \text{(E.6.17)}$$

$$\rho_{(-2,2)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1-y^2)(1-x^2)^4}{8x^2} \quad (\text{E.6.18})$$

$$\rho_{(-1,2)} = -\frac{Q_t Q_b y^2 (1-y^2)(1-x^2)^3}{2x^2} + \frac{Q_b^2 (1-x^2)^2}{8x^2} \left((1-x^2)^2 + (3+2x^2+3x^4)y^2 - 4(1+2x^2)y^4 \right) \quad (\text{E.6.19})$$

$$\rho_{(0,2)} = -\frac{Q_t^2}{2x^2} \left(2(1+x^2)(1-x^2)^2 - 3(1-x^2)^2 y^2 + (1-8x^2-x^4)y^4 \right) + \frac{Q_t Q_b}{2x^2} \left((1-x^2)^2 (3+x^2) - (1-x^2)(4-15x^2+7x^4)y^2 + (1-6x^2-3x^4)y^4 \right) + \frac{Q_b^2}{4x^2} \left(2(1-x^2)^2 (1+2x^2-x^4) - (9-26x^2+33x^4-8x^6)y^2 + (7-14x^2-x^4)y^4 \right) \quad (\text{E.6.20})$$

$$\rho_{(1,2)} = \frac{Q_t^2}{2x^2} \left((5+8x^2+x^4+2x^6) - (7+16x^2+5x^4)y^2 + 2y^4 \right) + \frac{Q_t Q_b}{2x^2} \left((5+18x^2-15x^4+8x^6) - (10+x^2+x^4)y^2 + (5-x^2)y^4 \right) + \frac{Q_b^2}{4x^2} \left((5+30x^2-19x^4+8x^6) - 3(5+6x^2+x^4)y^2 + 10y^4 \right) \quad (\text{E.6.21})$$

$$\rho_{(2,2)} = -\frac{Q_t^2}{2x^2} \left(2(2+x^2+x^4) - (5+6x^2)y^2 + y^4 \right) + \frac{Q_t Q_b}{2x^2} \left((1+15x^2+8x^4) - (4+7x^2)y^2 + 3y^4 \right) + \frac{Q_b^2}{8x^2} \left(4(1+8x^2+5x^4) - (13+24x^2)y^2 + 9y^4 \right) \quad (\text{E.6.22})$$

$$\rho_{(3,2)} = \frac{(4Q_t^2 + 4Q_t Q_b - Q_b^2)(1-y^2)}{8x^2} \quad (\text{E.6.23})$$

E.7 Die vorwärts-rückwärts-asymmetrische Rate $i = F$

$$\sigma_{(0)} = \sqrt{\lambda} Q_t \left(Q_t (1+x^2-y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.7.1})$$

$$\sigma_{(1)} = -\lambda Q_t \left(Q_t (1+x^2-y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.7.2})$$

$$\sigma_{(0,0)} = -\sqrt{\lambda} Q_t^2 \quad (\text{E.7.3})$$

$$\sigma_{(0,1)} = Q_t^2 \left(2(1+x^4) - \frac{5}{2}(1+x^2)y^2 + y^4 \right) - 2Q_t Q_b \left(1+x^2-y^2 \right) \quad (\text{E.7.4})$$

$$\sigma_{(1,1)} = -\frac{Q_t^2}{2} \left(3(1+x^2) - y^2 \right) \quad (\text{E.7.5})$$

$$\sigma_{(2,1)} = \frac{1}{2} Q_t^2 \quad (\text{E.7.6})$$

$$\tau_{(0)} = \sqrt{\lambda} (Q_t - Q_b) \left(Q_t (1+x^2-y^2) - Q_b (1-x^2-y^2) \right) \quad (\text{E.7.7})$$

$$\tau_{(1)} = -\lambda(Q_t - Q_b)\left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 - y^2)\right) \quad (\text{E.7.8})$$

$$\tau_{(0,0)} = -\sqrt{\lambda}(Q_t - Q_b)^2 \quad (\text{E.7.9})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(0,1)} = & (Q_t - Q_b)Q_t\left(2(1 + x^4) - (2 + 3x^2)y^2 + y^4\right) + \\ & - (Q_t - Q_b)Q_b\left(2(1 - x^2) - (2 + 5x^2)y^2 + y^4\right) \end{aligned} \quad (\text{E.7.10})$$

$$\tau_{(1,1)} = -(Q_t - Q_b)\left(Q_t(2 + x^2) - Q_b(2 - 3x^2)\right) \quad (\text{E.7.11})$$

$$\tau_{(2,1)} = (Q_t - Q_b)^2 \quad (\text{E.7.12})$$

$$\rho_{(-1)} = 2\sqrt{\lambda}(Q_t^2 - Q_tQ_b + Q_b^2) \quad (\text{E.7.13})$$

$$\rho_{(0)} = -2\lambda(Q_t^2 - Q_tQ_b + Q_b^2) \quad (\text{E.7.14})$$

$$\rho_{(-2,0)} = -\frac{Q_b^2y^2(1 - x^2)^2}{4} \quad (\text{E.7.15})$$

$$\rho_{(-1,0)} = Q_tQ_b y^2(1 - x^2) + Q_b^2\left(\frac{1}{4}(1 - x^2)^2 - (1 - 2x^2)y^2\right) \quad (\text{E.7.16})$$

$$\rho_{(0,0)} = 2Q_t^2(1 + x^2) - Q_tQ_b(3 + x^2 + 3y^2) + Q_b^2\left(3 + \frac{5}{4}y^2\right) \quad (\text{E.7.17})$$

$$\rho_{(1,0)} = -2Q_t^2 + 5Q_bQ_t - \frac{13}{4}Q_b^2 \quad (\text{E.7.18})$$

E.8 Die polarisierte vorwärts-rückwärts- asymmetrische Rate $i = F^P$

$$\sigma_{(0,2)} = -\frac{Q_t^2y^2}{2}(1 - 8x^2 - x^4) - 2Q_tQ_b y^2(1 + x^2) \quad (\text{E.8.1})$$

$$\sigma_{(1,2)} = \frac{Q_t^2}{2}\left((1 - 8x^2 - x^4) - 2(2 + x^2)y^2\right) + 2Q_tQ_b(1 + x^2 + y^2) \quad (\text{E.8.2})$$

$$\sigma_{(2,2)} = \frac{Q_t^2}{2}\left(2(2 + x^2) + y^2\right) - 2Q_tQ_b \quad (\text{E.8.3})$$

$$\sigma_{(3,2)} = -\frac{Q_t^2}{2} \quad (\text{E.8.4})$$

$$\tau_{(0,2)} = -(Q_t - Q_b)y^2\left(Q_t(1 - 5x^2) - Q_b(1 - x^2)(1 - 4x^2)\right) \quad (\text{E.8.5})$$

$$\tau_{(1,2)} = (Q_t - Q_b)\left(Q_t\left((1 - 5x^2) - x^2y^2\right) - Q_b\left((1 - x^2)(1 - 4x^2) + 3x^2y^2\right)\right) \quad (\text{E.8.6})$$

$$\tau_{(2,2)} = (Q_t - Q_b)\left(Q_t(x^2 + y^2) + Q_b(3x^2 - y^2)\right) \quad (\text{E.8.7})$$

$$\tau_{(3,2)} = -(Q_t - Q_b)^2 \quad (\text{E.8.8})$$

$$\rho_{(-2,1)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1-x^2)^3}{4} \quad (\text{E.8.9})$$

$$\rho_{(-1,1)} = -Q_t Q_b (1-x^2)^2 y^2 - \frac{Q_b^2 (1-x^2)}{4} \left((1-x^2)^2 - (5-9x^2)y^2 \right) \quad (\text{E.8.10})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(0,1)} &= Q_t^2 y^2 (1+3x^2) + Q_t Q_b (1-x^2) (1-x^2+4y^2) + \\ &\quad - \frac{Q_b^2}{4} \left((1-x^2)(5-9x^2) + (9-5x^2)y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.8.11})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(1,1)} &= -Q_t^2 \left((1+3x^2) + 3y^2 \right) - Q_t Q_b \left(4(1-x^2) - 5y^2 \right) + \\ &\quad + \frac{Q_b^2}{4} \left((9-5x^2) - 13y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.8.12})$$

$$\rho_{(2,1)} = 3Q_t^2 - 5Q_t Q_b + \frac{13}{4} Q_b^2 \quad (\text{E.8.13})$$

E.9 Die skalare Rate $i = S$

$$\sigma_{(0,0)} = \frac{Q_t^2 y^2 (1+y^2)}{4x^2} \quad (\text{E.9.1})$$

$$\sigma_{(1,0)} = -\frac{Q_t^2 (1+y^2)}{4x^2} \quad (\text{E.9.2})$$

$$\rho_{(-2,-1)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1+y^2)(1-x^2)}{8x^2} \quad (\text{E.9.3})$$

$$\rho_{(-1,-1)} = -\frac{Q_b (1+y^2) (4Q_t y^2 + Q_b (1-x^2-y^2))}{8x^2} \quad (\text{E.9.4})$$

$$\rho_{(0,-1)} = \frac{Q_b (1+y^2) (4Q_t - Q_b)}{8x^2} \quad (\text{E.9.5})$$

E.10 Die polarisierte skalare Rate $i = S^P$

$$\sigma_{(0)} = -\frac{\sqrt{\lambda} Q_t (1-y^2)}{2x^2} \left(Q_t (1+x^2-y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.10.1})$$

$$\sigma_{(1)} = \frac{\lambda Q_t (1-y^2)}{2x^2} \left(Q_t (1+x^2-y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.10.2})$$

$$\sigma_{(0,0)} = \frac{\sqrt{\lambda} Q_t^2 (1-y^2)}{2x^2} \quad (\text{E.10.3})$$

$$\sigma_{(0,1)} = -\frac{Q_t (1-y^2)}{4x^2} \left(Q_t \left(4(1+x^2) - (7+5x^2)y^2 + 2y^4 \right) - 4Q_b (1+x^2) \right) \quad (\text{E.10.4})$$

$$\sigma_{(1,1)} = \frac{Q_t (1-y^2)}{4x^2} \left(Q_t \left((1+3x^2) - y^2 \right) - 4Q_b \right) \quad (\text{E.10.5})$$

$$\sigma_{(2,1)} = -\frac{Q_t^2 (1-y^2)}{4x^2} \quad (\text{E.10.6})$$

$$\tau_{(0)} = -\frac{\sqrt{\lambda}(Q_t - Q_b)(1 - y^2)}{2x^2} \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.10.7})$$

$$\tau_{(1)} = \frac{\lambda(Q_t - Q_b)(1 - y^2)}{2x^2} \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.10.8})$$

$$\tau_{(0,0)} = \frac{\sqrt{\lambda}(Q_t - Q_b)^2(1 - y^2)}{2x^2} \quad (\text{E.10.9})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(0,1)} &= -\frac{(Q_t - Q_b)Q_t(1 - y^2)}{2x^2} \left(2(1 + x^4) - 3(1 + x^2)y^2 + y^4 \right) + \\ &+ \frac{(Q_t - Q_b)Q_b(1 - y^2)}{2x^2} \left(2(1 - x^2) - (3 + x^2)y^2 + y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.10.10})$$

$$\tau_{(1,1)} = \frac{(Q_t - Q_b)^2(1 - y^2)(1 + x^2 - y^2)}{2x^2} \quad (\text{E.10.11})$$

$$\rho_{(-1)} = -\frac{\sqrt{\lambda}(Q_t^2 - Q_tQ_b + Q_b^2)(1 - y^2)}{x^2} \quad (\text{E.10.12})$$

$$\rho_{(0)} = \frac{\lambda(Q_t^2 - Q_tQ_b + Q_b^2)(1 - y^2)}{x^2} \quad (\text{E.10.13})$$

$$\rho_{(-2,0)} = \frac{Q_b^2(1 - y^2)y^2(1 - x^2)^2}{8x^2} \quad (\text{E.10.14})$$

$$\rho_{(-1,0)} = -\frac{Q_tQ_b y^2(1 - y^2)(1 - x^2)}{2x^2} - \frac{Q_b^2(1 - y^2)}{8x^2} \left((1 - x^2)^2 + 2(1 + x^2)y^2 \right) \quad (\text{E.10.15})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(0,0)} &= -\frac{Q_t^2(1 - y^2)}{2x^2} \left(2(1 + x^2) - y^2 \right) + \frac{Q_tQ_b(1 - y^2)}{2x^2} \left((3 + x^2) - 3y^2 \right) + \\ &- \frac{3Q_b^2(1 - y^2)}{8x^2} \left(2(1 + x^2) - 3y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.10.16})$$

$$\rho_{(1,0)} = \frac{(4Q_t^2 + 4Q_tQ_b - Q_b^2)(1 - y^2)}{8x^2} \quad (\text{E.10.17})$$

E.11 Die polarisierte longitudinal-transversale Interferenz-Rate $i = I^P$

$$\sigma_{(0)} = \frac{\sqrt{\lambda}Q_t}{2\sqrt{2}x} \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.11.1})$$

$$\sigma_{(1)} = -\frac{\lambda Q_t}{2\sqrt{2}x} \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - 2Q_b \right) \quad (\text{E.11.2})$$

$$\sigma_{(0,0)} = -\frac{\lambda Q_t^2}{2\sqrt{2}x} \quad (\text{E.11.3})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(0,3)} &= \frac{Q_t^2}{4\sqrt{2}x} \left(4(1 - x^2)^2(1 + x^4) - (1 - x^2)^2(7 + 8x^2)y^2 + 2(1 + x^2 + 2x^4)y^4 \right) + \\ &- \frac{Q_tQ_b}{\sqrt{2}x} \left((1 - x^2)^2(1 + x^2) - 2(1 - x^2)^2y^2 + (1 + x^2)y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.11.4})$$

$$\sigma_{(1,3)} = -\frac{Q_t^2}{4\sqrt{2}x} \left((9 + 6x^2 + 9x^4 + 8x^6) - 2(9 + 5x^2 + 8x^4)y^2 + 2(3 + 4x^2)y^4 \right) +$$

$$+ \frac{Q_t Q_b}{\sqrt{2}x} \left((1 + 6x^2 + x^4) - 2(1 + x^2)y^2 + y^4 \right) \quad (\text{E.11.5})$$

$$\sigma_{(2,3)} = \frac{Q_t^2}{\sqrt{2}x} \left((1 + 3x^2 + x^4) - \left(\frac{11}{4} + 2x^2 \right) y^2 + y^4 \right) \quad (\text{E.11.6})$$

$$\sigma_{(3,3)} = \frac{Q_t^2}{4\sqrt{2}x} \quad (\text{E.11.7})$$

$$\tau_{(0)} = \frac{\sqrt{\lambda}(Q_t - Q_b)}{2\sqrt{2}x} \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.11.8})$$

$$\tau_{(1)} = -\frac{\lambda(Q_t - Q_b)}{2\sqrt{2}x} \left(Q_t(1 + x^2 - y^2) - Q_b(1 - x^2 - y^2) \right) \quad (\text{E.11.9})$$

$$\tau_{(0,0)} = -\frac{\sqrt{\lambda}(Q_t - Q_b)^2}{2\sqrt{2}x} \quad (\text{E.11.10})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(0,3)} &= \frac{(Q_t - Q_b)Q_t}{4\sqrt{2}x} \left(4(1 - x^2)^2(1 + x^4) - 3(1 - x^2)^2(2 + 3x^2)y^2 + 2(1 + x^2 + 2x^4)y^4 \right) + \\ &- \frac{(Q_t - Q_b)Q_b}{4\sqrt{2}x} \left(4(1 - x^2)^3 - (1 - x^2)^2(6 + 7x^2)y^2 + 2(1 - x^2)(1 + 2x^2)y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.11.11})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(1,3)} &= -\frac{(Q_t - Q_b)Q_t}{4\sqrt{2}x} \left((10 + 3x^2 + 12x^4 + 7x^6) - 2(7 + 7x^2 + 8x^4)y^2 + 2(2 + 5x^2)y^4 \right) + \\ &+ \frac{(Q_t - Q_b)Q_b}{4\sqrt{2}x} \left((10 - 7x^2 - 3x^6) - 2(7 + 5x^2 + 14x^4)y^2 + 2(2 + 5x^2)y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.11.12})$$

$$\begin{aligned} \tau_{(2,3)} &= \frac{(Q_t - Q_b)Q_t}{4\sqrt{2}x} \left(4(2 + 2x^2 + x^4) - (10 + x^2)y^2 + 2y^4 \right) + \\ &- \frac{(Q_t - Q_b)Q_b}{4\sqrt{2}x} \left(4(2 - 3x^4) - (10 - x^2)y^2 + 2y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.11.13})$$

$$\tau_{(3,3)} = -\frac{(Q_t - Q_b)Q_t}{2\sqrt{2}x} \left(\left(1 + \frac{5}{2}x^2 \right) - y^2 \right) + \frac{(Q_t - Q_b)Q_b}{4\sqrt{2}x} \left(\left(1 + \frac{3}{2}x^2 \right) - y^2 \right) \quad (\text{E.11.14})$$

$$\rho_{(-1)} = \frac{\sqrt{\lambda}(Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2)}{\sqrt{2}x} \quad (\text{E.11.15})$$

$$\rho_{(0)} = -\frac{\lambda(Q_t^2 - Q_t Q_b + Q_b^2)}{\sqrt{2}x} \quad (\text{E.11.16})$$

$$\rho_{(-2,2)} = -\frac{Q_b^2(1 - x^2)^4 y^2}{8\sqrt{2}x} \quad (\text{E.11.17})$$

$$\rho_{(-1,2)} = \frac{Q_t Q_b y^2 (1 - x^2)^3}{2\sqrt{2}x} + \frac{Q_b^2}{8\sqrt{2}x} \left((1 - x^2)^3 - (1 - 10x^2 + 9x^4)y^2 + 2(1 - x^2)y^4 \right) \quad (\text{E.11.18})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(0,2)} &= \frac{Q_t^2}{2\sqrt{2}x} \left(2(1 - x^2)^2(1 + x^2) - \frac{5}{2}(1 - x^2)y^2 + (1 + 3x^2)y^4 \right) + \\ &- \frac{Q_t Q_b}{2\sqrt{2}x} \left((1 - x^2)^2(3 + x^2) + (1 - x^2)(3 + x^2)y^2 - 2(1 - 3x^2)y^4 \right) + \\ &+ \frac{Q_b^2}{8\sqrt{2}x} \left((9 - x^2)(1 - x^2)^2 - (3 - 10x^2 + 23x^4)y^2 - 4(1 - 5x^2)y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.11.19})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(1,2)} &= -\frac{Q_t^2}{2\sqrt{2}x} \left(\left(\frac{7}{2} + 9x^2 + \frac{7}{2}x^4 \right) - (3 - x^2)y^2 + y^4 \right) + \\ &+ \frac{Q_t Q_b}{2\sqrt{2}x} \left((9 + 2x^2 + 5x^4) - (1 - 13x^2)y^2 - 2y^4 \right) + \\ &- \frac{Q_b^2}{8\sqrt{2}x} \left((23 + 22x^2 + 3x^4) - (13 - 25x^2)y^2 - 2y^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.11.20})$$

$$\begin{aligned} \rho_{(2,2)} &= \frac{Q_t^2}{4\sqrt{2}x} \left(4(1 + 2x^2) - y^2 \right) - \frac{Q_t Q_b}{2\sqrt{2}x} \left((7 + 13x^2) - 3y^2 \right) + \\ &+ \frac{Q_b^2}{8\sqrt{2}x} \left((15 + 29x^2) - 8y^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.11.21})$$

$$\rho_{(3,2)} = -\frac{(Q_t - Q_b)^2}{4\sqrt{2}x} \quad (\text{E.11.22})$$

E.12 Die polarisierte paritäts-asymmetrische Rate $i = A^P$

$$\sigma_{(0,2)} = \frac{Q_t^2 y^2}{4\sqrt{2}x} (1 - 3x^2 - 2x^4) + \frac{Q_t Q_b x y^2}{\sqrt{2}} \quad (\text{E.12.1})$$

$$\sigma_{(1,2)} = -\frac{Q_t^2}{4\sqrt{2}x} \left((1 - 3x^2 - 2x^4) + (1 - 2x^2)y^2 \right) - \frac{Q_t Q_b x}{\sqrt{2}} \quad (\text{E.12.2})$$

$$\sigma_{(2,2)} = \frac{Q_t^2 (1 - 2x^2)}{4\sqrt{2}x} \quad (\text{E.12.3})$$

$$\tau_{(0,2)} = -\frac{(Q_t - Q_b) x y^2}{4\sqrt{2}} \left(Q_t (1 + 3x^2) - 3Q_b (1 - x^2) \right) \quad (\text{E.12.4})$$

$$\tau_{(1,2)} = \frac{(Q_t - Q_b) x}{4\sqrt{2}} \left(Q_t \left((1 + 3x^2) + 5y^2 \right) - Q_b \left(3(1 - x^2) + 7y^2 \right) \right) \quad (\text{E.12.5})$$

$$\tau_{(2,2)} = -\frac{(Q_t - Q_b)(5Q_t - 7Q_b)x}{4\sqrt{2}} \quad (\text{E.12.6})$$

$$\rho_{(-2,1)} = \frac{Q_b^2 y^2 (1 - x^2)^3}{8\sqrt{2}x} \quad (\text{E.12.7})$$

$$\rho_{(-1,1)} = -\frac{Q_b(1 - x^2)}{8\sqrt{2}x} \left(4Q_t y^2 (1 - x^2) + Q_b \left((1 - x^2)^2 + 4x^2 y^2 \right) \right) \quad (\text{E.12.8})$$

$$\rho_{(0,1)} = \frac{Q_t^2 y^2 (1 - 5x^2)}{4\sqrt{2}x} + \frac{Q_t Q_b}{2\sqrt{2}x} \left((1 - x^2)^2 + 6x^2 y^2 \right) + \quad (\text{E.12.9})$$

$$+ \frac{Q_b^2}{8\sqrt{2}x} \left(4x^2 (1 - x^2) + (1 - 21x^2) y^2 \right)$$

$$\rho_{(1,1)} = -\frac{Q_t^2}{4\sqrt{2}x} \left((1 - 5x^2) + y^2 \right) + \frac{Q_t Q_b}{2\sqrt{2}x} \left(6x^2 - y^2 \right) + \quad (\text{E.12.10})$$

$$+ \frac{Q_b^2}{8\sqrt{2}x} \left((1 - 21x^2) + 2y^2 \right)$$

$$\rho_{(2,1)} = \frac{(Q_t - Q_b)^2}{4\sqrt{2}x} \quad (\text{E.12.11})$$

Anhang **F**

Zur Geschichte der Polarisation

F.1 Die Polarisation des elektromagnetischen Feldes

Die Polarisation eines in z -Richtung propagierenden Lichtstrahls kann in der MAXWELLSCHEN Theorie durch den elektrischen Feldstärke-Vektor \vec{E} in Gl.(F.1) beschrieben werden.¹ Die beiden zur Ausbreitungsrichtung und zueinander orthogonalen Komponenten E_x und E_y besitzen dieselbe Kreisfrequenz ω und dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \omega/k$, sie unterscheiden sich aber im allgemeinen in ihren Amplituden E_{xo} und E_{yo} sowie in einer permanenten Phasendifferenz δ . Die Spitze des \vec{E} -Vektors beschreibt im allgemeinen eine Ellipse (die *Polarisations-Ellipse*, siehe Gl. (F.2)),

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = E_{xo} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + E_{yo} \cos(kz - \omega t + \delta) \vec{e}_y, \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{E_x^2}{E_{xo}^2} + \frac{E_y^2}{E_{yo}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{xo} E_{yo}} \cos \delta = \sin^2 \delta \xrightarrow{\text{HA}} \frac{E_x'^2}{A^2} + \frac{E_y'^2}{B^2} = 1, \quad (\text{F.2})$$

die durch eine Drehung des Koordinatensystem um den Winkel ψ auf ihre Hauptachsen mit den Längen A und B ($A \geq B$) gebracht werden kann. Das Verhältnis von der kleinen zu der großen Hauptachse definiert den Tangens des Winkels χ . Durch die Winkel² ψ und χ und die beiden Hauptachsen A und B ist die Form und die Lage der Polarisations-Ellipse bezüglich des Koordinatensystems (\vec{e}_x, \vec{e}_y) eindeutig festgelegt.

$$\tan 2\psi = -\frac{2E_{xo}E_{yo}}{E_{xo}^2 - E_{yo}^2} \cos \delta, \quad \tan \chi := \pm \frac{B}{A} = \pm \frac{I + \sqrt{I^2 - 4E_{xo}^2 E_{yo}^2 \sin^2 \delta}}{2E_{xo}E_{yo} \sin \delta}, \quad (\text{F.3})$$

¹Im Jones-Calculus werden die ebenen, monochromatischen Wellen durch einen zweikomponentigen sogenannten Jones-Vektor $J_c = (E_{xo}, E_{yo} e^{-i\delta})^T$ dargestellt. Durch Realteilbildung gelangt man zur Gl. (F.1) zurück. Der Index c charakterisiert das Koordinatensystem $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Optische Elemente werden durch 2×2 -Matrizen $T_{c'c}$ ausgedrückt.

²Im folgenden werden die Cosinus- und Sinusbeziehungen für die doppelten Winkel benötigt und seien hier notiert: $\cos 2\psi = \frac{E_{xo}^2 - E_{yo}^2}{\sqrt{I^2 - 2E_{xo}^2 E_{yo}^2 \sin^2 \delta}}$, $\sin 2\psi = \frac{-2E_{xo}E_{yo} \cos \delta}{\sqrt{I^2 - 2E_{xo}^2 E_{yo}^2 \sin^2 \delta}}$, $\cos 2\chi = \frac{\sqrt{I^2 - 2E_{xo}^2 E_{yo}^2 \sin^2 \delta}}{E_{xo}^2 + E_{yo}^2}$ und $\sin 2\chi = \frac{2E_{xo}E_{yo} \sin \delta}{E_{xo}^2 + E_{yo}^2}$.

$$A^2 = \frac{2E_{x_0}^2 E_{y_0}^2 \sin^2 \delta}{I - \sqrt{I^2 - 4E_{x_0}^2 E_{y_0}^2 \sin^2 \delta}}, \quad B^2 = \frac{2E_{x_0}^2 E_{y_0}^2 \sin^2 \delta}{I + \sqrt{I^2 - 4E_{x_0}^2 E_{y_0}^2 \sin^2 \delta}}. \quad (\text{F.4})$$

Man unterscheidet je nach Spezifikation der Parametern E_{x_0} , E_{y_0} und δ folgende *Polarisationsformen*:

- für $E_{x_0} \neq E_{y_0}$ und $\delta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ spricht man von *elliptischer Polarisation*,
- für $\sin \delta > 0$ wird die Polarisations-Ellipse im Uhrzeigersinn durchlaufen, man spricht von *rechtshändiger Polarisation* (für $\sin \delta < 0$ dagegen von *linkshändiger Polarisation*),
- für $E_{x_0} = E_{y_0}$ und $\delta = \frac{1}{2}m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) liegt der Spezialfall *zirkularer Polarisation* vor und
- für $\delta = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) spricht man von *linearer Polarisation* (die Polarisations-Ebene ist um den Winkel $\psi = \tan^{-1}(\pm B/A) = \tan^{-1}(\pm E_{y_0}/E_{x_0})$ gegen die x -Achse geneigt).

Mit den in Gl. (F.5) definierten STOKES-Parametern kann der Polarisationszustand einer elektromagnetischen Welle eindeutig beschrieben werden.³ Wie man der Gl. (F.6) entnimmt, sind nur drei dieser Größen voneinander unabhängig. Mit Hilfe der Cosinus- und Sinusbeziehungen für die doppelten Winkel von χ und ψ lassen sich die Parameter P_i mit $i = 1, 2, 3$ in Kugelkoordinaten ausdrücken. Das *optische Äquivalenz-Prinzip* von STOKES (1852) besagt, daß Lichtstrahlen mit gleichen STOKES-Parametern ununterscheidbar sind bezüglich ihrer *Intensität*, ihrem *Polarisationsgrad* (s.u.) und ihrer *Polarisationsform*:

$$I := E_{x_0}^2 + E_{y_0}^2, \quad P_1 := E_{x_0}^2 - E_{y_0}^2, \quad P_2 := 2E_{x_0}E_{y_0} \cos \delta, \quad P_3 := 2E_{x_0}E_{y_0} \sin \delta, \quad (\text{F.5})$$

$$I^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \quad -I \leq P_i \leq I \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \quad (\text{F.6})$$

$$P_1 = I \cos 2\chi \cos 2\psi, \quad P_2 = I \cos 2\chi \sin 2\psi, \quad P_3 = I \sin 2\chi. \quad (\text{F.7})$$

Die Gl. (F.7) ermöglicht die sog. POINCARÉ-Darstellung (1892) der STOKES-Parameter. Jedem Punkt P auf der Oberfläche der POINCARÉ-Kugel Σ vom Radius I mit den sphärischen Winkelkoordinaten $(\frac{1}{2}\pi - 2\chi, 2\psi)$ entspricht eindeutig umkehrbar ein Polarisationszustand einer ebenen, monochromatischen, elektromagnetischen Welle:

- alle Punkte der Nord(Süd)-Hemisphäre repräsentieren *rechts(links)-händige Polarisationszustände*,
- der Nord(Süd)-Pol repräsentiert *rechts(links)-händige, zirkulare Polarisation* und
- der Äquator ($P_3 = 0$) repräsentiert alle Zustände *linearer Polarisation*.

³Im Müller-Calculus werden die ebenen, monochromatischen Lichtstrahlen durch den vierkomponentigen sogenannten Stokes-Vektor $S_c = (I, P_1, P_2, P_3)^T$ dargestellt. Optische Elemente sind durch 4×4 -Matrizen $Z_{c'c}$ ausdrückbar. Für jede Matrix T des Jones-Calculus existiert eine Matrix Z im Müller-Calculus, aber die Umkehrung gilt nicht.

Eine genaue Analyse zeigt [90], daß im MÜLLER-Calculus der *unpolarisierte Zustand* einer ebenen, monochromatischen Welle durch den STOKES-Vektor $S_c = (I, 0, 0, 0)$ ausgedrückt werden muß, d.h. es gilt $P_1 = P_2 = P_3 = 0$. Dies folgt aber auch aus der MAXWELL-Theorie, wenn man die STOKES-Parameter in Gl. (F.5) als zeitgemittelte Größen der Feldparameter E_{xo} , E_{yo} und δ interpretiert.

Licht von verschiedenen Lichtquellen ist *inkohärent*, d.h. es existiert keine permanente Phasendifferenz δ zwischen den verschiedenen Lichtstrahlen. Im MÜLLER-Calculus heißen Lichtstrahlen *inkohärent*, wenn die STOKES-Parameter des Gesamtstrahls sich aus der Summe der STOKES-Vektoren der Einzelstrahlen ergeben. Unpolarisiertes Licht kann daher als inkohärente Mischung zweier entgegengesetzt polarisierter Strahlen mit gleicher Intensität aufgefaßt werden. Im JONES-Calculus heißen Lichtstrahlen *kohärent*, wenn der JONES-Vektor des Gesamtstrahls sich aus der Summe der JONES-Vektoren der Einzelstrahlen ergibt, aber im allgemeinen ist die resultierende Gesamtintensität ungleich der Summe der einzelnen Intensitäten.

Der Polarisationszustand eines Lichtstrahls mit den STOKES-Parametern I , P_1 , P_2 und P_3 kann durch einen *Polarisationsvektor* $\vec{D} \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten P_1/I , P_2/I und P_3/I beschrieben werden. Für *vollständig* polarisiertes Licht ist \vec{D} ein Einheitsvektor. Für *partiell* polarisiertes Licht ist der Betrag $|\vec{D}|$ des Polarisationsvektors kleiner als Eins und für *unpolarisiertes* Licht gilt $|\vec{D}| = 0$. In der POINCARÉ-Darstellung liegen entgegengesetzte Polarisationszustände punksymmetrisch ($\pm\vec{D}$) zueinander. Der *Polarisationsgrad* D ist als Betrag des Polarisationsvektors \vec{D} definiert:

$$D := \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}/I. \quad (\text{F.8})$$

Die JONES-Vektoren beschreiben nur vollständig polarisierte Zustände. Um unpolarisierte bzw. partiell polarisierte Zustände im JONES-Calculus beschreiben zu können, wird die *Dichte-Matrix* ρ eingeführt:

$$\rho_c := \vec{J}_c \vec{J}_c^\dagger = \begin{pmatrix} E_{xo}^2 & E_{xo} E_{yo} e^{-i\delta} \\ E_{xo} E_{yo} e^{+i\delta} & E_{yo}^2 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}_c. \quad (\text{F.9})$$

Die Diagonalelemente enthalten die Intensitäten der orthogonal zueinander, linear polarisierten Teilstrahlen. Die Intensität des Gesamtstrahls ergibt sich aus der Spur $\text{Sp}\rho = I$. Die nichtdiagonalen Elemente enthalten die Information über die relative Phase δ der Teilstrahlen. Der vierkomponentige STOKES-Vektor ist der vierkomponentigen Dichte-Matrix äquivalent:

$$\left. \begin{array}{l} I = \rho_{11} + \rho_{22} \\ P_1 = \rho_{11} - \rho_{22} \\ P_2 = \rho_{12} + \rho_{21} \\ P_3 = i(\rho_{12} - \rho_{21}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_{11} = \frac{1}{2}(I + P_1) \\ \rho_{22} = \frac{1}{2}(I - P_1) \\ \rho_{12} = \frac{1}{2}(P_2 - iP_3) \\ \rho_{21} = \frac{1}{2}(P_2 + iP_3) \end{array} \right. . \quad (\text{F.10})$$

Polarisiertes und unpolarisiertes Licht können nun auch im JONES-Calculus wie gehabt durch die STOKES-Parameter beschrieben werden:

$$\rho_c^{\text{pol.}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_1 & P_2 - iP_3 \\ P_2 + iP_3 & I - P_1 \end{pmatrix}_c, \quad \rho_c^{\text{unpol.}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (\text{F.11})$$

Die STOKES-Parameter für einen beliebigen Lichtstrahl mit der ursprünglichen Intensität $I^{(0)}$ können nach der Zwischenschaltung optischer Elemente in den Strahlengang, wie z.B. eines „Stoppers“ oder eines „ $\lambda/4$ -Kristalls“, durch einfache Intensitätsmessungen experimentell bestimmt werden. Der *Polarisationswinkel* α ist derjenige Winkel, um den sich die Polarisationssebene durch Zwischenschalten eines optischen Elementes dreht.

1. Exp.: Stopper mit $\alpha=0$ liefert die Intensität $I^{(1)} = \frac{1}{2}(I^{(0)} + P_1)$.
2. Exp.: Stopper mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ liefert die Intensität $I^{(2)} = \frac{1}{2}(I^{(0)} - P_1)$.
3. Exp.: Stopper mit $\alpha = +\frac{\pi}{4}$ liefert die Intensität $I^{(+)} = \frac{1}{2}(I^{(0)} + P_2)$.
4. Exp.: Stopper mit $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ liefert die Intensität $I^{(-)} = \frac{1}{2}(I^{(0)} - P_2)$.
5. Exp.: $\lambda/4$ -Kristall mit bel. β und $\alpha = +\frac{\pi}{4}$ liefert die Intensität $I'^{(+)} = \frac{1}{2}(I^{(0)} - P_3)$.
6. Exp.: $\lambda/4$ -Kristall mit bel. β und $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ liefert die Intensität $I'^{(-)} = \frac{1}{2}(I^{(0)} + P_3)$.

Daraus ergeben sich durch Summen- bzw. Differenzenbildung die STOKES-Parameter:

$$I^{(0)} = I^{(1)} + I^{(2)}, \quad P_1 = I^{(1)} - I^{(2)}, \quad P_2 = I^{(+)} - I^{(-)}, \quad P_3 = I'^{(-)} - I'^{(+)}.$$

F.2 Die Polarisation in der Quantenmechanik

Betrachtet man Licht nicht als ebene, monochromatische, elektromagnetische Welle sondern als Strahl ununterscheidbarer, monoenergetischer Photonen, kann der Polarisations-Formalismus des letzten Abschnitts beibehalten werden; nur müssen nach dem *Korrespondenz-Prinzip* die Intensitätsamplituden in Wahrscheinlichkeitsamplituden uminterpretiert werden. Während in der elektromagnetischen Theorie der Polarisationszustand vollständig polarisierten Lichts durch die Superposition zweier orthogonaler und phasenverschobener, monochromatischer *Wellen* beschrieben wird (siehe Gl. (F.1)), charakterisiert man in der Quantenmechanik den Polarisationszustand durch die Superposition zweier entgegengesetzt polarisierter und orthogonaler *Zustände* Φ_1 und Φ_2 ,

$$\chi = a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_c, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_c, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_c, \quad (\text{F.12})$$

wobei a_1 und a_2 komplexe Zahlen sind. Die Intensität des Photonstrahls ist jetzt durch $|a_1|^2 + |a_2|^2$ gegeben und der Zustandsvektor χ entspricht dem früher eingeführten JONES-Vektor. Mit dem Zustandsvektor χ kann die zugehörige Dichtematrix ρ definiert werden:

$$\rho_c := \chi_c \chi_c^\dagger = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_c (a_1^* \ a_2^*)_c = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* \\ a_1^* a_2 & |a_2|^2 \end{pmatrix}_c =: \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}_c. \quad (\text{F.13})$$

Die Diagonal-Elemente geben die relative Wahrscheinlichkeit an, das Photon in dem Zustand Φ_1 oder Φ_2 vorzufinden. Die Spur der Matrix mißt die Gesamtintensität des Photonstrahls und die Nichtdiagonal-Elemente enthalten Informationen über die relativen Phasen der beiden Zustände Φ_1 und Φ_2 . Die oben angegebene Definition der Dichtematrix gilt zunächst für vollständig polarisierte Photonen, kann aber auf partiell polarisierte

und unpolarisierte Photonzustände erweitert (s.u.) werden. Mit der Dichtematrix ρ_c kann abschließend der STOKES-Vektor definiert werden:

$$S_c = \begin{pmatrix} I \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} \\ \rho_{11} - \rho_{22} \\ \rho_{12} + \rho_{21} \\ i(\rho_{12} - \rho_{21}) \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 a_1^* + a_2^* a_2 \\ a_1 a_1^* - a_2^* a_2 \\ a_1 a_2^* + a_1^* a_2 \\ i(a_1 a_2^* - a_1^* a_2) \end{pmatrix}_c. \quad (\text{F.14})$$

Die STOKES-Parameter I , P_1 , P_2 und P_3 stellen meßbare Größen dar, deren Meßwerte sich aus der quantenmechanischen Mittelung über ein Ensemble von Photonen ergeben. Als Observablen müssen den STOKES-Parametern lineare, hermitesche Operatoren zugeordnet sein (s.u.). Der JONES- und MÜLLER-Calculus können im wesentlichen unverändert in die quantenmechanische Beschreibungsweise übernommen werden.

F.2.1 Die Polarisation eines masselosen Spin-Eins Teilchens

Im folgenden soll motiviert werden: 1). wie die Drehimpulsoperatoren in die Theorie der Polarisation eingeführt werden, 2). daß dem Photon der Spin 1 zugeordnet ist und 3). daß zur Beschreibung der Polarisation des Photons ein zweikomponentiger Zustandsvektor ausreicht.

Die Beschreibung der Polarisation muß von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein, so daß mit gleicher Berechtigung gedrehte Koordinatensysteme betrachtet werden können. Für eine skalare Meßgröße $\Psi = \Psi(x, y, z)$ ist die *Erzeugende* einer *infinitesimalen Rotation* um den Winkel $\delta\theta_i$ um die i -Achse ($i = x, y, z$) durch den *Drehimpuls-Operator* \hat{L}_i gegeben, z.B. folgt aus einer infinitesimalen Koordinatendrehung $\delta\theta_z$ um die z -Achse für die TAYLOR-Entwicklung des skalaren Feldes Ψ in 1. Ordnung:

$$x' = x + y \delta\theta_z, \quad y' = y - x \delta\theta_z, \quad z' = z, \quad (\text{F.15})$$

$$\Psi(x', y', z') = \Psi(x, y, z) - \delta\theta_z \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, y, z) = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta\theta_z \hat{L}_z \right) \Psi(x, y, z). \quad (\text{F.16})$$

Für eine vektorielle Meßgröße $\vec{A}(x, y, z) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$, wie z.B. das elektrische Feld \vec{E} , sind die *Erzeugenden* einer infinitesimalen Rotation $\delta\theta_i$ um die i -Achse ($i = x, y, z$) durch den *Drehimpuls-Operator* \hat{L}_i und einen zusätzlichen Operator \hat{S}_i gegeben. Für eine infinitesimale Rotation $\delta\theta_z$ um die z -Achse z.B. werden zunächst wie oben jeweils die TAYLOR-Entwicklungen der drei Komponenten in 1. Ordnung bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems (x, y, z) bestimmt (Erzeugende \hat{L}_z) und anschließend die Transformation der Komponenten in das gedrehte Koordinatensystem (x', y', z') durchgeführt (Erzeugende \hat{S}_z):

$$\left. \begin{array}{l} A'_x = A_x - \delta\theta_z \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) A_x \\ A'_y = A_y - \delta\theta_z \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y \\ A'_z = A_z - \delta\theta_z \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) A_z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'_{x'} = A'_x - \delta\theta_z A'_y = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta\theta_z \hat{L}_z \right) A_x - \delta\theta_z A_y \\ A'_{y'} = A'_y + \delta\theta_z A'_x = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta\theta_z \hat{L}_z \right) A_y + \delta\theta_z A_x \\ A'_{z'} = A'_z = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta\theta_z \hat{L}_z \right) A_z \end{array} \right.$$

Dieses Gleichungssystem kann in Matrixform geschrieben und auf Drehungen um alle Koordinatenachsen verallgemeinert werden

$$\vec{A}'(x', y', z') = \left\{ \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta\theta_i \hat{L}_i \right) \mathbb{1}_{3 \times 3} - \frac{i}{\hbar} \delta\theta_i \hat{S}_i \right\} \vec{A}(x, y, z) \quad (i=x, y, z), \quad (\text{F.17})$$

wobei Gl. (F.17) folgende Matrix-Darstellung der unbekanntenen Operatoren \hat{S}_i induziert:

$$\hat{S}_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.18})$$

Die Komponenten der Erzeugenden \hat{S} erfüllen die typischen Kommutator-Relationen und das Eigenwertverhalten der Drehimpuls-komponenten. Dementsprechend muß der Operator \hat{S} als *innerer Drehimpuls (Spin)* interpretiert werden!

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_k, \quad [\hat{S}_i, \hat{S}^2] = 0, \quad \hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2, \quad (\text{F.19})$$

$$\hat{S}^2 Y_{sm} = s(s+1) \hbar^2 Y_{sm}, \quad \hat{S}_z Y_{sm} = m \hbar Y_{sm} \quad \text{mit } s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad m = -s, \dots, 0, \dots, s$$

Insbesondere gilt $\hat{S}^2 = 2\hbar^2 \mathbb{1}_{3 \times 3}$, d.h. die Drehung eines dreidimensionalen Vektorfeldes ist mit einem Spin \hat{S} vom Betrag $\sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$ verbunden. Dem klassischen elektrischen Feldvektor wird ein *Feldquant (Photon, Gluon)* mit dem Spin $s=1$ zugeordnet!

Betrachtet man Drehungen um die z -Achse, so besitzt die zugehörige Spin-Matrix die Eigenwerte $-\hbar, 0, +\hbar$, und die zugehörigen Eigenvektoren (d.h. die möglichen Zustände des Feldquants) lauten:

$$\chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.20})$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich ein masseloses Feldquant im Zustand χ_0 befindet, ist aber Null. Ein Photonstrahl in z -Richtung kann daher, wie bereits oben geschehen, durch nur zwei Basisvektoren $\chi_{\pm 1}$ beschrieben werden. Streicht man die verschwindenden dritten Komponenten, erhält man die JONES-Vektoren für rechts- bzw. linkspolarisiertes Licht.

F.2.2 Die Dichtematrix

Die Spin-Operatoren besitzen ein diskretes und nicht entartetes Spektrum mit endlich vielen Eigenwerten. Die Spinzustände werden durch Reihenvektoren beschrieben, mit so vielen Elementen, wie es Eigenwerte gibt. Man unterscheidet zwei Typen von Spinzuständen: *Reine* Zustände (sie entsprechen der vollständigen Polarisation) und *gemischte* Zustände (sie entsprechen der partiellen Polarisation).

Bei *vollständiger* Kenntnis der maximal möglichen Information über einen quantenmechanischen Zustand wird dieser durch eine Wellenfunktion χ beschrieben und *reiner*

Zustand genannt. Der Zustand χ kann in die simultanen Eigenvektoren Φ_λ des vollständigen Satzes kommutierender Operatoren $\hat{\Omega}^{(n)}$ entwickelt werden (die Eigenvektoren bilden eine Basis des Zustandsraums):

$$\chi = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \Phi_{\lambda} \quad \text{mit} \quad \sum_{\lambda} |a_{\lambda}|^2 = 1 \quad \text{und} \quad a_{\lambda} \in \mathbb{C}. \quad (\text{F.21})$$

Der Zustand χ ist auf Eins normiert. Als Meßergebnis einer Spin-Observablen $\Omega \in \{\Omega^{(n)} \mid n = 1, \dots, n_{max}\}$ erhält man mit der (quantenmechanisch berechenbaren) Wahrscheinlichkeit $|a_{\lambda}|^2$ den Eigenwert λ . Für den Erwartungswert einer Meßreihe ergibt sich:

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \chi^\dagger \hat{\Omega} \chi = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda}^* a_{\mu} \Phi_{\lambda}^\dagger \hat{\Omega} \Phi_{\mu} =: \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \rho_{\mu\lambda} \hat{\Omega}_{\lambda\mu} = \text{Tr}(\rho \hat{\Omega}) \quad (\text{F.22})$$

$$\text{mit} \quad \Omega_{\lambda\mu} := \Phi_{\lambda}^\dagger \hat{\Omega} \Phi_{\mu} \quad \text{und} \quad \rho_{\mu\lambda} := a_{\mu} a_{\lambda}^*. \quad (\text{F.23})$$

Die Matrix $\rho_{\mu\lambda}$ in Gln. (F.23) stellt für reine Zustände die quantenmechanische Verallgemeinerung der *Dichtematrix* in Gln. (F.11) dar. Nur im Fall, daß die Φ_λ Eigenzustände eines diagonalisierten Operators sind, lauten die beiden Matrizen Ω und $\hat{\Omega}$ gleich und es gilt $\rho = \chi \chi^\dagger$, wie bei der ursprünglichen Definition in Gl. (F.9).

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \text{Sp}(\rho \Omega) = \text{Sp}(\rho \hat{\Omega}) = \text{Sp}(\chi \chi^\dagger \hat{\Omega}) \quad (\text{F.24})$$

Bei *teilweiser* Kenntnis der maximal möglichen Information über einen quantenmechanischen Zustand kann dieser nicht mehr durch eine Wellenfunktion beschrieben werden und wird *gemischter* Zustand genannt. Es ist nur noch möglich, ein System mit einer Wahrscheinlichkeit p_n in einem reinen Zustand χ_n vorzufinden, wobei die Wahrscheinlichkeit p_n rein statischer Natur ist und quantenmechanisch nicht berechnet werden kann. Wenn die Φ_λ simultane Eigenvektoren aller Operatoren $\hat{\Omega}^{(n)}$ (zu deren Observablen die vollständigen Informationen vorliegen) und aller Operatoren \hat{O} (zu deren Observablen die vollständigen Informationen fehlen) sind, kann der Dichtematrix-Formalismus auf gemischte Zustände verallgemeinert werden:

$$\rho := \sum_n p_n \rho^{(n)} \quad \text{mit} \quad \sum_n p_n = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq p_n \leq 1. \quad (\text{F.25})$$

Der Erwartungswert für einen Operator für einen gemischten Zustand ist gegeben durch:

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \text{Sp}(\rho \hat{\Omega}) = \sum_n p_n \rho^{(n)} \hat{\Omega} =: \sum_n p_n \langle \hat{\Omega} \rangle_n, \quad (\text{F.26})$$

d.h. der Erwartungswert ist durch die mit den Wahrscheinlichkeiten p_n gewichtete Summe der Erwartungswerte des Operators für die reinen Zustände gegeben. Zusammenfassend seien die Eigenschaften der Dichtematrix notiert:

- $\langle \hat{A} \rangle = \text{Sp}(\rho \hat{A})$ Erwartungswert-Bildung,
- $\rho = \rho^\dagger$ Hermitizität,
- $\langle \chi | \rho | \chi \rangle \geq 0$ Positivität,
- $\text{Sp}(\rho) = I$ Normierung,

- $p_1 = 1, p_m = 0 \text{ f. } \forall_{m \neq 1} \Rightarrow \rho_\chi = \chi\chi^\dagger$ reiner Zustand,
- $\rho^2 = \sum_n p_n^2 |\psi_n\rangle\langle\psi_n|,$
 $\text{Sp}(\rho^2) = \sum_n p_n^2 = 1$ für einen reinen Zustand,
 $\text{Sp}(\rho^2) = \sum_n p_n^2 < 1$ für einen gemischten Zustand.

Mit Hilfe des Dichtmatrix-Formalismus können die den STOKES-Parametern I, J_1, J_2 und J_3 zugeordneten Operatoren $\hat{J}, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ und $\hat{\sigma}_3$ identifiziert werden. Aus der Dichtmatrixform der STOKES-Parameter und der Spur-Bildung über den zugehörigen Operator folgt

$$\begin{aligned}
 I = \rho_{11} + \rho_{22} = \langle \hat{J} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{J}) &\Rightarrow \hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{2 \times 2}, \\
 P_1 = \rho_{11} - \rho_{22} = \langle \hat{\sigma}_1 \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{\sigma}_1) &\Rightarrow \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 P_2 = \rho_{21} + \rho_{12} = \langle \hat{\sigma}_2 \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{\sigma}_2) &\Rightarrow \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 P_3 = i(\rho_{21} - \rho_{12}) = \langle \hat{\sigma}_3 \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{\sigma}_3) &\Rightarrow \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{F.27}$$

d.h. es ergeben sich die PAULISchen Spin-Matrizen und die Einheitsmatrix. Damit kann der Dichte-Operator prägnant geschrieben werden:

$$\rho_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + P_1 & P_2 - iP_3 \\ P_2 + iP_3 & I - P_1 \end{pmatrix}_c = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} I + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right)_c. \tag{F.28}$$

Anhang G

Formelsammlung

G.1 Die „Goldene Regel“ für Zerfälle

Für den Übergang eines Anfangszustands $|i\rangle = |a_1 \dots a_m\rangle$ mit dem 4-Gesamtimpuls $P_i = p_1 + \dots + p_m$ in einen Endzustand $\langle f| = \langle b_{m+1} \dots a_n|$ mit dem 4-Gesamtimpuls $P_f = p_{m+1} + \dots + p_n$ ist das zugehörige S -Matrixelement durch folgende Gleichung über die Übergangsamplitude $\mathcal{M} = \langle f|T|i\rangle$ definiert:

$$a_1(p_1) + \dots + a_m(p_m) \longrightarrow b_{m+1}(p_{m+1}) + \dots + b_n(p_n),$$

$$S_{fi} := \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \langle f|T|i\rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}. \quad (\text{G.1})$$

Die Übergangsrate für einen bestimmten Prozeß wird durch die Übergangsamplitude \mathcal{M} und den Phasenraum gemäß FERMIS „Goldener Regel“ bestimmt:

$$\text{Übergangsrate} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times \text{Phasenraum},$$

(G.2)

wobei die Formel für die differentielle Phasenraumgröße eines n -Teilchenzustandes durch die 4-Gesamtimpulserhaltung $P_i = P_f$, den „on shell“-Bedingungen $p_i^2 = m_i^2$ und den positiv semi-definiten Energien $E_i \geq 0$ für jedes Teilchen i durch Multiplikation mit den einzelnen, infinitesimalen Phasenraumvolumina d^4p_i gegeben ist. Es gilt:

$$d\text{PS}_n = (2\pi)^{4-3n} \delta^4(P_f - P_i) \prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) d^4p_i.$$

(G.3)

Wenn ein Teilchen a_1 mit dem 4-Impuls p_1 in die Teilchen b_2, \dots, b_n mit den 4-Impulsen p_2, \dots, p_n gemäß $a_1(p_1) \rightarrow b_2(p_2) + b_3(p_3) + \dots + b_n(p_n)$ zerfällt, so lautet die zugehörige Übergangsamplitude:

$$\mathcal{M} = \langle b_2(p_2) b_3(p_3) \dots b_n(p_n) | T | a_1(p_1) \rangle.$$

Der explizite Ausdruck für die differentielle Zerfallsrate ist dann durch folgende Formel gegeben, wobei über die Energie E_i eines jeden Teilchens i bereits integriert wurde und ausnahmsweise die Konstanten c und \hbar zur Dimensionskontrolle mit notiert werden,

$$d\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \times |\mathcal{M}|^2 \times \prod_{i=2}^n \frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 (2E_i)}, \quad (\text{G.4})$$

und $p_i = (E_i/c; \vec{p}_i)$ den 4-Impuls des i -ten Teilchens mit der Energie-Impuls-Relation $E_i^2 - \vec{p}_i^2 c^2 = m_i^2 c^4$ bezeichnet. Das zerfallende Teilchen wird mit $p_1 = (m_1 c; 0)$ als ruhend angenommen. S ist das Produkt statistischer Faktoren $(j!)^{-1}$ für jede Gruppe von j identischen Teilchen im Endzustand.

Obwohl in dieser Arbeit keine Wirkungsquerschnitte berechnet werden, sei zur Vollständigkeit für die Streuung zweier Teilchen a_1 und a_2 mit den Impulsen p_1 und p_2 in den Endzustand $\langle b_3(p_3) \dots b_n(p_n) |$ mit den Impulsen $p_3 \dots p_n$, d.h.

$$a_1(p_1) + a_2(p_2) \longrightarrow b_3(p_3) + b_4(p_4) + \dots + b_n(p_n)$$

die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt angeben:

$$d\sigma = \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^n p_i) \times |\mathcal{M}|^2 \times \prod_{i=3}^n \frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (\text{G.5})$$

G.2 Die Dirac-Gleichung

G.2.1 Die Pauli-Matrizen und ihre Eigenschaften

Kanonische Darstellung der PAULI-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.6})$$

Vertauschungsrelationen der PAULI-Matrizen

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (\text{G.7})$$

Vektor-Identität mit $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ für beliebige $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})(\vec{q} \cdot \vec{\sigma}) = \mathbb{1}_{2 \times 2} \vec{p} \cdot \vec{q} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \quad (\text{G.8})$$

Identität für die Exponentialfunktion für beliebige $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$

$$\exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}) = \mathbb{1}_{2 \times 2} \cos |\vec{\theta}| + i \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|} \cdot \vec{\sigma} \sin |\vec{\theta}| \quad (\text{G.9})$$

G.2.2 Die Dirac-Matrizen

Hochenergie- bzw. Standarddarstellung der DIRAC-Matrizen

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_i := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.10})$$

Helizitätsdarstellung der DIRAC-Matrizen

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i := \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{G.11})$$

Antivertauschungsrelationen der DIRAC-Matrizen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4} \quad \text{mit } g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)_{\mu\nu} \quad (\text{G.12})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \text{mit } \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (\text{G.13})$$

Spezielle Notation für den antisymmetrische Kommutator der DIRAC-Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{i}{2} (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu} \quad (\text{G.14})$$

Definition des total antisymmetrischen LEVI-CIVITA Tensors

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = \begin{cases} -1 & \text{, wenn } \mu, \nu, \sigma, \rho \text{ eine gerade Permutation von } 0,1,2,3 \text{ ist} \\ +1 & \text{, wenn } \mu, \nu, \sigma, \rho \text{ eine ungerade Permutation von } 0,1,2,3 \text{ ist} \\ 0 & \text{, wenn zwei Indizes gleich sind} \end{cases} \quad (\text{G.15})$$

$$\epsilon_{0123} = +1, \quad \epsilon^{0123} = -1 \quad (\text{G.16})$$

SCHOUTEN-Identität

$$g^{\alpha\beta} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} + g^{\alpha\kappa} \epsilon^{\lambda\mu\nu\beta} + g^{\alpha\lambda} \epsilon^{\mu\nu\beta\kappa} + g^{\alpha\mu} \epsilon^{\nu\beta\kappa\lambda} + g^{\alpha\nu} \epsilon^{\beta\kappa\lambda\mu} = 0 \quad (\text{G.17})$$

γ_0 ist hermitesch, γ_i mit $i = 1, 2, 3$ antihermitesch

$$(\gamma_0)^\dagger = \gamma_0, \quad (\gamma_i)^\dagger = -\gamma_i, \quad \gamma_0\gamma_0 = \mathbb{1}, \quad \gamma_i\gamma_i = -\mathbb{1} \quad (\text{G.18})$$

Definition der adjungierten Spinoren und der adjungierten DIRAC-Matrizen

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0, \quad \bar{\Gamma} := \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \quad (\text{G.19})$$

G.2.3 Die Gell-Mann-Matrizen

Matrixdarstellung der GELL-MANN-Matrizen λ

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vertauschungsrelation der GELL-MANN-Matrizen, die zusammen mit den total antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc} die Farbgruppe der $SU(3)$ definieren

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f^{abc} \lambda_c, \quad a, b, c \in \{1, \dots, 8\} \quad (\text{G.20})$$

Spuren und Summen der GELL-MANN-Matrizen. C_F wird als CASIMIR-Operator bezeichnet

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2 \delta_{ab}, \quad \text{Tr}(\lambda_a \lambda_a) = 16, \quad \frac{\lambda_a \lambda_a}{2} = \frac{4}{3} \mathbb{1}_{3 \times 3} =: C_F \mathbb{1}_{3 \times 3} \quad (\text{G.21})$$

G.2.4 Die CKM-Matrix

KOBAYASHI und MASKAWA verallgemeinern den GIM-Mechanismus durch die unitäre CKM-Matrix auf drei Quarkgenerationen. Das W -Boson koppelt statt an die physikalischen Quarks d , s oder b (Massen-Eigenzustände) an die „gedrehten“ Zustände d' , s' oder b' .

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{G.22})$$

Kanonische Darstellung der CKM-Matrix durch die verallgemeinerten CABIBBO-Winkel θ_1 , θ_2 , θ_3 und den Phasenfaktor δ , der zur Erklärung der CP -Verletzung benötigt wird; c_i steht für $\cos \theta_i$ und s_i für $\sin \theta_i$.

$$V = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{G.23})$$

G.2.5 Die Dirac-Gleichung

Ortsraum-Darstellung der DIRAC-Gleichung

$$\boxed{i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m c \psi = 0} \quad (\text{G.24})$$

Impulsraum-Darstellungen der DIRAC-Gleichung für die Spinoren u und die Antispinoren v . p ist der 4-Impuls, s der Spin der Teilchen.

$$(\not{p} - m) u(p, s) = 0, \quad \bar{u}(p, s) (\not{p} - m) = 0 \quad (\text{G.25})$$

$$(\not{p} + m) v(p, s) = 0, \quad \bar{v}(p, s) (\not{p} + m) = 0 \quad (\text{G.26})$$

Orthogonalität der Spinoren unterschiedlicher Spineinstellungen

$$\bar{u}(p, s_1) u(p, s_2) = 0, \quad \bar{v}(p, s_1) v(p, s_2) = 0 \quad (\text{G.27})$$

Vollständigkeitsrelationen für die Spinoren und Antispinoren

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \sum_s (\not{p} + m) \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5 \not{s}) = (\not{p} + m) \quad (\text{G.28})$$

$$\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \sum_s (\not{p} - m) \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5 \not{s}) = (\not{p} - m) \quad (\text{G.29})$$

G.3 Die Rechenregeln

G.3.1 Spuren über Gamma-Matrizen

Linearität der Spurbildung (allgemein)

$$\text{Tr}(c_1 A + c_2 B) = c_1 \text{Tr}(A) + c_2 \text{Tr}(B) \quad (\text{G.30})$$

$$\text{Tr}(A B) = \text{Tr}(B A) \quad (\text{G.31})$$

Spurtheoreme für Gamma-Matrizen

$$\text{Tr}(\mathbb{1}_{4 \times 4}) = 4, \quad \text{Tr}(\gamma_5) = 0 \quad (\text{G.32})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_5) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5) = 0 \quad (\text{G.33})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 g_{\mu\nu} \quad (\text{G.34})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \dots \gamma_\rho) = 0 \text{ für eine ungerade Anzahl von } \gamma\text{-Matrizen} \quad (\text{G.35})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \quad (\text{G.36})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5) = 4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{G.37})$$

G.3.2 Die Kontraktionen über Tensoren

Kontraktionen über die Gamma-Matrizen in $D = 4$ Dimensionen

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \cdot \mathbb{1}_{4 \times 4}, \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4, \quad g_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (\text{G.38})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu = -2 \gamma^\rho \quad (\text{G.39})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = 4 g^{\rho\sigma} \quad (\text{G.40})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\mu = -2 \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho \quad (\text{G.41})$$

Kontraktionen über den LEVI-CIVITA Tensor

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} = -2 (\delta_\kappa^\lambda \delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda \delta_\kappa^\sigma) \quad (\text{G.42})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = -6 \delta_\tau^\sigma \quad (\text{G.43})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = -24 \quad (\text{G.44})$$

G.3.3 Die Clifford-Algebra in D Dimensionen

Vertauschungsrelationen in D Dimensionen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}_{D \times D}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0 \quad (\text{G.45})$$

Kontraktionen über die Gamma-Matrizen in D Dimensionen

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = D \cdot \mathbb{1}_{D \times D}, \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D, \quad \gamma_5 \gamma_5 = \mathbb{1}_{D \times D} \quad (\text{G.46})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu = (2-D) \gamma^\rho \quad (\text{G.47})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = 4 g^{\rho\sigma} + (D-4) \gamma^{\rho\sigma} \quad (\text{G.48})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\mu = -2 \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho - (D-4) \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \quad (\text{G.49})$$

Kontraktionen über den LEVI-CIVITA Tensor in D Dimensionen

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\tau} = -\frac{(D-3)!}{(D-4)!} (D-2) (\delta_\kappa^\lambda \delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda \delta_\kappa^\sigma) \quad (\text{G.50})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = -\frac{(D-3)!}{(D-4)!} (D-2)(D-1) \delta_\tau^\sigma \quad (\text{G.51})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(D-3)!}{(D-4)!} (D-2)(D-1)D \quad (\text{G.52})$$

In D Dimensionen kann die γ_5 -Matrix nicht wohldefiniert werden (γ_5 -Problem); formal kann weiterhin mit der γ_5 -Matrix gerechnet werden, wenn man z.B. auf die Eigenschaft der zyklischen Vertauschbarkeit unter der Spur verzichtet.

G.3.4 Die Adjunktion von Gamma-Matrizen

Adjunktion von Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned} \overline{\gamma^\mu} &= +\gamma^\mu & \text{Beweis: } \overline{\gamma^0} &= \gamma^0 \gamma^{0\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 \text{ und} \\ & & \overline{\gamma^i} &= \gamma^0 \gamma^{i\dagger} \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^i = \gamma^i \\ \overline{\gamma^5} &= -\gamma^5 & \text{Beweis: } \overline{\gamma^5} &= \gamma^0 \gamma^{5\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 = -\gamma^5 \\ \overline{\gamma^\mu \gamma^5} &= \gamma^\mu \gamma^5 & \text{Beweis: } \overline{\gamma^\mu \gamma^5} &= \gamma^0 \gamma^{5\dagger} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = -\gamma^5 \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma^5 \end{aligned}$$

Analog gilt durch Einschieben einer $\mathbb{1} = \gamma^0 \gamma^0$ für das Produkt von Gamma-Matrizen

$$\overline{\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\rho} = \gamma^\rho \dots \gamma^\nu \gamma^\mu \quad (\text{G.53})$$

Adjunktion von Übergangsamplituden

$$\begin{aligned} |\bar{u}(p_f) \Gamma u(p_i)|^2 &= [\bar{u}(p_f) \Gamma u(p_i)] [\bar{u}(p_f) \Gamma u(p_i)]^\dagger = \\ &= [\bar{u}(p_f) \Gamma u(p_i)] [u^\dagger(p_i) \gamma^0 \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 u^\dagger(p_f)] = [\bar{u}(p_f) \Gamma u(p_i)] [\bar{u}(p_i) \bar{\Gamma} u(p_f)] \quad (\text{G.54}) \end{aligned}$$

G.4 Vollständige kovariante Entwicklung

Entwicklung des Hadrontensors für den Zerfall eines polarisierten Teilchens mit dem 4-Impuls p_1 und den 4-Spin s_1 in einen Standardsatz von Kovarianten [65, 66]

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} = & -g^{\mu\nu} \mathbf{W}_1 + p_1^\mu p_1^\nu \mathbf{W}_2 - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1,\alpha} q_\beta \mathbf{W}_3 + \\
& + q^\mu q^\nu \mathbf{W}_4 + \left\{ p_1^\mu q^\nu + p_1^\nu q^\mu \right\} \mathbf{W}_5 + \\
& - (q \cdot s_1) \left[-g^{\mu\nu} \mathbf{G}_1 + p_1^\mu p_1^\nu \mathbf{G}_2 - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1,\alpha} q_\beta \mathbf{G}_3 + \right. \\
& + q^\mu q^\nu \mathbf{G}_4 + \left. \left\{ p_1^\mu q^\nu + p_1^\nu q^\mu \right\} \mathbf{G}_5 \right] + \\
& + \left\{ s_1^\mu p_1^\nu + s_1^\nu p_1^\mu \right\} \mathbf{G}_6 + \left\{ s_1^\mu q^\nu + s_1^\nu q^\mu \right\} \mathbf{G}_7 + \\
& + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1,\alpha} s_{1,\beta} \mathbf{G}_8 + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha s_{1,\beta} \mathbf{G}_9 + \\
& + \left\{ s_1^\mu p_1^\nu - s_1^\nu p_1^\mu \right\} \mathbf{G}_{10} + \left\{ s_1^\mu q^\nu - s_1^\nu q^\mu \right\} \mathbf{G}_{11} + \\
& + \left\{ p_1^\mu \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} q_\alpha p_{1,\beta} s_{1,\gamma} + p_1^\nu \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} q_\alpha p_{1,\beta} s_{1,\gamma} \right\} \mathbf{G}_{12} + \\
& + \left\{ q^\mu \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} q_\alpha p_{1,\beta} s_{1,\gamma} + q^\nu \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} q_\alpha p_{1,\beta} s_{1,\gamma} \right\} \mathbf{G}_{13}
\end{aligned} \tag{G.55}$$

G_{10} , G_{11} , G_{12} und G_{13} sind sogenannte T -ungerade Invarianten, die CP -ungerade oder imaginäre Beiträge beschreiben und die im Standardmodell verschwinden, wenn man von Schleifeneffekten absieht. Für die Berechnung des polarisierten Zerfalls des Topquarks spielen sie keine Rolle. Die Strukturfunktionen W_1, \dots, W_5 sind spinunabhängig, die Strukturfunktionen G_1, \dots, G_{13} dagegen spinabhängig.

G.5 Spezielle Funktionen

G.5.1 Allgemeines

TAYLOR-Entwicklung der Potenz für $A \in \mathbb{R}_+$ und $\varepsilon \ll 1$

$$A^\varepsilon = \exp(\ln A \cdot \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon \cdot \ln A + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \ln^2 A + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 \ln^3 A + \dots \tag{G.56}$$

Definition der KÄLLÉN-Funktion

$$\lambda(a, b, c) := a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc) \tag{G.57}$$

G.5.2 Die Gamma-Funktion

Definition der Gamma-Funktion über ihre EULERSche Integral-Darstellung, alternativ ihre Definition als Lösung der BESSELSchen Differentialgleichung.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p! p^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+p-1)} \tag{G.58}$$

Produktidentitäten der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x) 2^{1-2x} \quad (\text{G.59})$$

TAYLOR-Entwicklungen der Gamma-Funktionen für $\varepsilon \ll 1$

$$\Gamma(-1+\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + O(\varepsilon) \quad (\text{G.60})$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \frac{1}{2!}\varepsilon\left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{G.61})$$

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} = \varepsilon + \gamma_E \varepsilon^2 + \frac{1}{2!}\left(\gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad (\text{G.62})$$

$$\Gamma(1+\varepsilon) = 1 - \gamma_E \varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\left(-\gamma_E^3 - \frac{1}{2}\gamma_E \pi^2 + \Psi^{(2)}(1)\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad (\text{G.63})$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} = 1 + \gamma_E \varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\left(+\gamma_E^3 - \frac{1}{2}\gamma_E \pi^2 - \Psi^{(2)}(1)\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad (\text{G.64})$$

Definition der EULERSchen Konstante

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right) \quad (\text{G.65})$$

Definition der Poly-Gamma-Funktion

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad \Psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} \Psi(z) \quad (\text{G.66})$$

G.5.3 Die Dilogarithmus-Funktion

Definition der Dilogarithmus-Funktion über ihre Integral-Darstellung, für Argumente kleiner gleich Eins liefert die Dilogarithmus-Funktion reelle Werte, für Argumente größer Eins komplexe Werte, siehe Abb. (G.1).

$$\text{Li}_2(z) := - \int_0^z \frac{dz'}{z'} \ln(1-z') = - \int_0^z \frac{dz'}{z'} \int_0^{z'} \frac{dz''}{(1-z'')} \quad (= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad \text{für } |z| \leq 1) \quad (\text{G.67})$$

Definition der χ_2 -Funktion und ihr Zusammenhang mit der Dilogarithmus-Funktion

$$\chi_2(x) := \frac{1}{2} \int_0^x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \text{Li}_2(x) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(-x) \quad (\text{G.68})$$

Spezielle Werte der Dilogarithmus-Funktion

$$\text{Li}_2(1) = \frac{1}{6}\pi^2, \quad \text{Li}_2(-1) = -\frac{1}{12}\pi^2, \quad \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(2), \quad \chi_2(1) = \frac{1}{8}\pi^2 \quad (\text{G.69})$$

Die Dilogarithmus-Identitäten nach LEWIN [91]

$$\operatorname{Li}_2(-x) + \operatorname{Li}_2\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(x) \quad (\text{G.70})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(x) - i\pi \ln(x), \quad x > 1 \quad (\text{G.71})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(1-x) = \frac{1}{6}\pi^2 - \ln(x) \ln(1-x) \quad (\text{G.72})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(-x) = \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2(x^2) \quad (\text{G.73})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(-\frac{x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(x-1), \quad x < 1 \quad (\text{G.74})$$

$$\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(x-1) + i\pi \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right), \quad x > 1 \quad (\text{G.75})$$

$$\operatorname{Li}_2(-x) - \operatorname{Li}_2(1-x) + \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln(x) \ln\left(\frac{x-1}{x}\right), \quad x > 1 \quad (\text{G.76})$$

$$\operatorname{Li}_2(1-x) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{2}\ln(x) \ln\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right), \quad x > 1 \quad (\text{G.77})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_2(-x) = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) \ln\left(\frac{1+x}{x^2}\right), \quad x > 0 \quad (\text{G.78})$$

$$\chi_2(x) + \chi_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{8}\pi^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ln(x) \quad (\text{G.79})$$

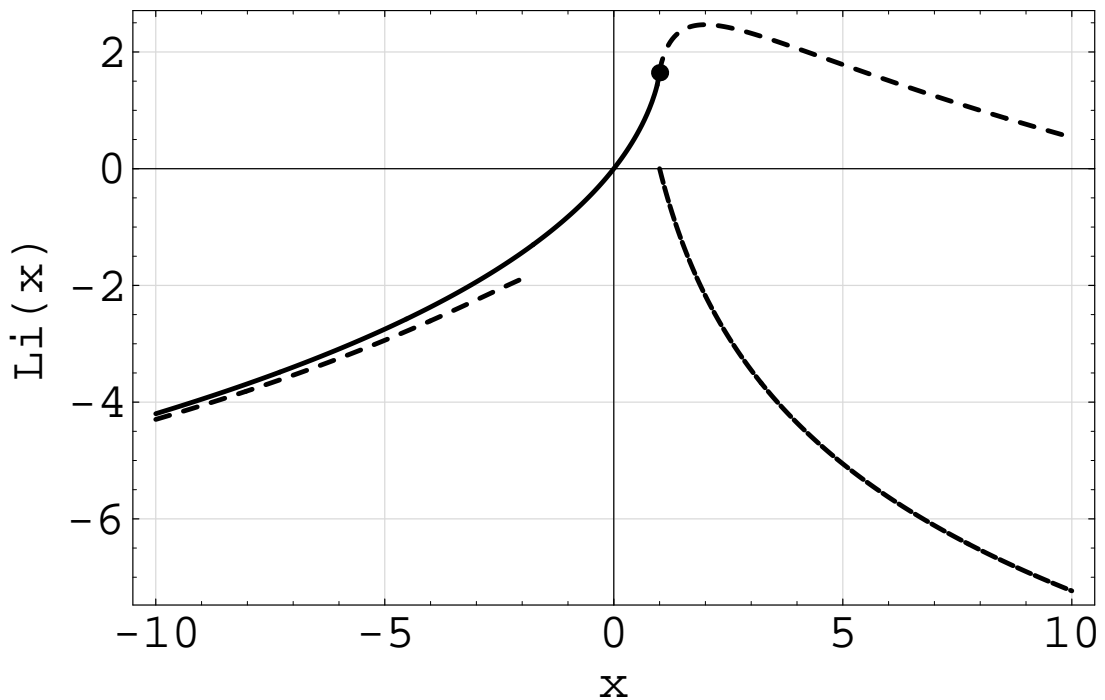


Abbildung G.1: Die Dilogarithmus-Funktion. Für Argumente $x > 1$ wird $\operatorname{Li}_2(x)$ komplexwertig. Ihr Realteil (gestrichelt) und Imaginärteil (unterbrochen) divergieren beide gegen $-\infty$. Für negative Argumente $x < 0$ nähert sich die Dilogarithmusfunktion asymptotisch gegen $-\frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(x)$ (gestrichelte Linie).

ABELSche Identität

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1-y}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{1-x}\right) - \operatorname{Li}_2(x) - \operatorname{Li}_2(y) - \ln(1-x) \ln(1-y) \quad (\text{G.80})$$

HILLSche Identität

$$\operatorname{Li}_2(x \cdot y) = \operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(y) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{x \cdot (1-y)}{1-x \cdot y}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{y \cdot (1-x)}{1-x \cdot y}\right) - \ln\left(\frac{1-x}{1-x \cdot y}\right) \ln\left(\frac{1-y}{1-x \cdot y}\right) \quad (\text{G.81})$$

SCHÄFFERSche Identität

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right) = \operatorname{Li}_2(x) - \operatorname{Li}_2(y) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{x}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) \quad (\text{G.82})$$

KUMMERSche Identität

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) = \operatorname{Li}_2\left(-\frac{x(1-y)}{1-x}\right) + \operatorname{Li}_2\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) + \frac{1}{2} \ln^2(y) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{1-y}{1-x}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) \quad (\text{G.83})$$

Limes der Dilogarithmus-Funktion für negative Argumente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Li}_2(-x) = -\frac{1}{6} \pi^2 - \frac{1}{2} \ln^2(x) \quad (\text{G.84})$$

Anhang **H**

Physikalische Konstanten

Lichtgeschwindigkeit	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	$\hbar = 1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34} \text{ J s}$ $= 6.582\,118\,89(26) \times 10^{-22} \text{ MeV s}$
elektrische Elementarladung	$e = 1.602\,176\,462(53) \times 10^{-19} \text{ C}$
Feinstrukturkonstante	$\alpha = 7.297\,352\,533(27) \times 10^{-3}$ $= 1/137.035\,999\,76(50)$
Fermi Kopplungskonstante	$G_F = 1.166\,39(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$
starke Kopplungskonstante	$\alpha_s(m_Z) = 0.118\,5(20)$
schwache Mischungswinkel	$\sin^2 \theta_W = 0.231\,17(16)$
Elektronenmasse	$m_e = 510.998 \text{ keV c}^{-2}$
W^\pm -Bosonmasse	$m_W = 80.419 \pm 0.056 \text{ GeV c}^{-2}$
Z^0 -Bosonmasse	$m_Z = 91.188\,2 \pm 0.002\,2 \text{ GeV c}^{-2}$
Higgs-Bosonmasse	$m_H > 95.3 \text{ GeV c}^{-2}$

Für die numerische Auswertung der Helizitäts-Strukturfunktionen werden zusätzlich folgende Massenwerte in GeV c^{-2} verwendet: $m_e = 0.000\,5$, $m_\mu = 0.105$, $m_\tau = 1.784$ und $m_H = 115$.

Quark	Ladung	Masse (PDG)	Masse (Numerik)
t	$q = +\frac{2}{3}e$	$m_t = 174.3 \pm 5.1 \text{ GeV c}^{-2}$	$m_t = 175.0 \text{ GeV c}^{-2}$
b	$q = -\frac{1}{3}e$	$m_b = 4.0 - 4.4 \text{ GeV c}^{-2}$	$m_b = 4.8 \text{ GeV c}^{-2}$
c	$q = +\frac{2}{3}e$	$m_c = 1.15 - 1.35 \text{ GeV c}^{-2}$	$m_c = 1.5 \text{ GeV c}^{-2}$
s	$q = -\frac{1}{3}e$	$m_s = 75 - 170 \text{ MeV c}^{-2}$	$m_s = 150 \text{ MeV c}^{-2}$
u	$q = +\frac{2}{3}e$	$m_u = 1 - 5 \text{ MeV c}^{-2}$	$m_u = 4.1 \text{ MeV c}^{-2}$
d	$q = -\frac{1}{3}e$	$m_d = 3 - 9 \text{ MeV c}^{-2}$	$m_d = 4.1 \text{ MeV c}^{-2}$

Tabelle H.1: Ladungen und Massen der Quarks. Quelle: [3]